

Einführung in die Computertomographie

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Thorsten M. Buzug

Einführung in die Computertomographie

Mathematisch-physikalische Grundlagen
der Bildrekonstruktion

Mit 268 Abbildungen



Springer

Professor Dr. Thorsten M. Buzug
Fachbereich Mathematik und Technik
RheinAhrCampus Remagen
Südallee 2
53424 Remagen

ISBN 978-3-642-62184-0 ISBN 978-3-642-18593-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-18593-9

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über "<http://dnb.ddb.de>" abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2004
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 2004

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.
Produkthaftung: Für Angaben über Dosierungsanweisungen und Applikationsformen kann vom Verlag keine Gewähr übernommen werden. Derartige Angaben müssen vom jeweiligen Anwender im Einzelfall anhand anderer Literaturstellen auf ihre Richtigkeit überprüft werden.

Umschlaggestaltung: deblik, Berlin
Satz: Camera ready Vorlage des Autors

Gedruckt auf säurefreiem Papier 21/3150/ag - 5 4 3 2 1 0

Vorwort und Dank

Das vorliegende Buch ist zwischen Wintersemester 2001/2002 und Wintersemester 2003/2004 entstanden. Im Rahmen meiner Vorlesungen über radiologische Technik und Medizintechnik deckt es neben den Themen der Entstehung, Eigenschaften sowie Detektion von Röntgenstrahlen, die Entwicklungshistorie der Computertomographie, die elementaren Methoden der Signalverarbeitung und insbesondere die Signalverarbeitungsverfahren der Computertomographie ab. Hierbei wird Wert auf die ausführliche Darstellung der Mathematik der zwei- und dreidimensionalen Rekonstruktionsverfahren gelegt. Neben der ausführlichen Erklärung der theoretischen Konzepte wird auf die praktischen Randbedingungen der technischen Realisierung sowie auf die auftretenden Bildartefakte besonders eingegangen.

Ein didaktischer Ansatzpunkt ist die durchgehend einheitliche Notation. So wurde im Kapitel über die elementaren Methoden der Signalverarbeitung die Notation der Computertomographie verwendet. Im Gegensatz zu vielen allgemeinen Darstellungen der Signalverarbeitung, in denen zeitabhängige Signale verwendet werden, wird hier durchgängig von räumlichen Signalen ausgegangen, die ein- und zweidimensional vorliegen. Das erlaubt in den späteren Kapiteln einen leichteren Transfer auf die Verarbeitungsmethoden des Detektorarraysignals bzw. des tomographischen Bildes. Darüber hinaus wurde konsequent darauf geachtet, mathematisch komprimierte Darstellungen zu Gunsten detaillierter und vor allem sorgfältig kommentierter Herleitungen zu vermeiden. Das sollte auch Studierenden niedriger Semester erlauben, die mathematischen Methoden nachzuvollziehen. Erleichtert wird dies auch durch eine Vielzahl von Skizzen, die die Verhältnisse der verschiedenen Projektionsgeometrien speziell im Dreidimensionalen darstellen.

Das Buch versucht eine Lücke zu schließen. Es gibt inzwischen einige hervorragende Darstellungen der Technologie medizinischer Bildgebung, die einen umfassenden Überblick über die modernen Methoden der Röntgentechnik, Computertomographie, Magnetresonanztomographie und des Ultraschalls sowie der nuklearmedizinischen Methoden wie PET und SPECT geben. In diesen Werken kann aber nicht im Detail auf die Herleitungen der signaltheoretischen Methoden der einzelnen Konzepte eingegangen werden. Andererseits gibt es exzellente mathematische Darstellungen über Computertomographie, die in ihrer Tiefe aber die praktischen Gesichtspunkte nicht behandeln können. Dieses Buch geht von den physikalischen und signaltheoretischen Grundlagen aus, die im ersten Teil kurz wiederholt werden, und fokussiert dann auf die mathematischen Grundlagen und Verfahren der heute im Einsatz befindlichen Konzepte. Dabei wird ein besonderer Schwerpunkt auf die dreidimensionalen Rekonstruktionsverfahren gelegt, die in der technischen Realisierung immer größere Bedeutung gewinnen.

Mein Dank gilt den Firmen Siemens, General Electric und Philips, die meine Labore der radiologischen Technik, besonders den Bereich der Computertomographie, großzügig unterstützen. Mein besonderer Dank geht dabei an meinen Freund, Dr. Michael Kuhn, Direktor der Philips Forschungslaboratorien Hamburg. Durch seine Initiative ist 1999 der erste Computertomograph in meinem Labor installiert worden.

Darüber hinaus gilt Jürgen Greim und Robby Rökkitta von Siemens Medical Solutions sowie Dieter Keidel und Jan Liedtke von General Electric Medical Systems mein persönlicher Dank für die Überlassung einer Vielzahl von Bildern und Graphiken. Für die Überlassung der Tomosyntheseaufnahmen danke ich Wolfgang Härer, AXI CC, Siemens Medical Solutions. Für die Überlassung der Abbildungen zur Flachdetektortechnologie möchte ich Dr. Gerhard

Brunst, General Electric Medical Systems danken. Für die Überlassung einiger Abbildungen zur Kegelstrahltomographie danke ich Dr. Armin H. Pfoh, Direktor der General Electric Forschungslaboratorien München. In diesem Zusammenhang danke ich auch Dr. Wolfgang Niederlag und Prof. Dr. Heinz U. Lemke für die Genehmigung der Verwendung einiger Abbildungen aus *Health Academy* 02/2002.

Einige der verwendeten Abbildungen sind mir aus Bildarchiven für dieses Buch überlassen worden. Hierfür danke ich den Archivaren der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Portraitsammlung), der Tufts University (Digital, Collections and Archives) und des Röntgen-Kuratoriums Würzburg e.V.

Für die Bereitstellung einiger Zeichnungen zum Spiral-Kegelstrahlverfahren danke ich Dr. Henrik Turbell, Institute of Technology, Linköpings Universität.

Der größte Teil der klinischen Daten ist mir vom Medical Center Bonn zur Verfügung gestellt worden. Hierfür möchte ich Prof. Dr. Dr. med. Jürgen Ruhlmann sehr danken.

Ich möchte dem Oberkonservator des Amtes für Archäologische Denkmalpflege in Koblenz, Dr. Axel von Berg, für die Zurverfügungstellung der Zahnmaterialies eines Neandertalers danken.

Danken möchte ich auch meinen Kollegen und Freunden, die das Manuskript kritisch zur Korrektur gelesen haben. In alphabetischer Reihenfolge danke ich Prof. Dr.-Ing. Bernhard Bundschuh (FH Merseburg, FB Elektrotechnik), Dr. Michael Grass (Philips Forschungslaboratorien Hamburg), Dr. Franko Greiner (Institut für Angewandte und Experimentelle Physik der Universität Kiel), Prof. Dr. Dietrich Holz (RheinAhrCampus Remagen), Prof. Dr. Ulrich Hartmann (RheinAhrCampus Remagen), Prof. Dr. Dr. med. Jürgen Ruhlmann (Medical Center Bonn), Prof. Dr.-Ing. Georg Schmitz (RheinAhrCampus Remagen), Dr. Nils Schramm (Forschungszentrum Jülich), Prof. Dr. Thomas Wilhein (RheinAhrCampus Remagen) und Dr. Andy Ziegler (Philips Forschungslaboratorien Hamburg).

Danken möchte ich auch Dipl.-Geophys. Dirk Thomsen, der eine Vielzahl der Messungen durchgeführt hat und die Hardware der CT-Labore betreut sowie Ing. BM Marie-Sophie Lafontaine, die mit ihren schnellen Matlab™-Programmierungen zur Klärung vieler Fragen beigetragen hat.

Dieses Buch konnte nur entstehen, weil mich meine Frau Kerstin kontinuierlich unterstützt und ermutigt hat. Dafür möchte ich ihr besonders danken.

Thorsten M. Buzug
Remagen im Februar 2004

Inhalt

1	Einleitung	1
2	Röntgenstrahlung	11
2.1	Erzeugung von Röntgenstrahlung	11
2.2	Absorption und Streuung von Röntgenstrahlung	16
2.3	Detektion von Röntgenstrahlung	25
2.3.1	Gasdetektoren	25
2.3.2	Szintillationsdetektoren	26
2.3.3	Festkörper-Flächendetektoren	27
2.4	Statistik der Röntgenquanten	33
2.4.1	Statistische Eigenschaften der Röntgenquelle	33
2.4.2	Statistische Eigenschaften des Röntgendetektors	35
2.4.3	Schwächungsgesetz	36
2.4.4	Momente der Poissonverteilung	39
3	Historie der Computertomographie	41
3.1	Tomosynthese	42
3.2	Rotation-Translation des Nadelstrahls (1. Generation)	44
3.3	Rotation-Translation des Fächerstrahls (2. Generation)	48
3.4	Rotation-Rotation in Einzelschichten (3. Generation)	49
3.5	Rotation-Fix mit geschlossenem Detektorring (4. Generation)	51
3.6	Fix-Fix mit geschlossenem Detektorring (EBCT)	52
3.7	Rotation-Rotation in der Spiralbahn	53
3.8	Rotation-Rotation in Kegelstrahlgeometrie	54
3.9	Micro-CT	56
3.10	PET-CT Kombinationsgeräte	59
3.11	Optisch-fotografische Rekonstruktionstechnik	61
4	Elementare Methoden der Signalverarbeitung	62
4.1	Signale	62
4.2	Räumliche Elementarsignale	62
4.3	Systeme	63
4.3.1	Linearität	64
4.3.2	Orts- bzw. Verschiebungsinvarianz	65
4.3.3	Isotropie bzw. Rotationsinvarianz	65
4.3.4	Kausalität	65
4.3.5	Stabilität	66
4.4	Signalübertragung	66
4.5	Diracstoß	69
4.6	Dirackamm	72
4.7	Stoßantwort	75
4.8	Übertragungsfunktion	76
4.9	Fouriertransformation	78
4.10	Faltungssatz	84
4.11	Parseval-Theorem	85
4.12	Filtern im Frequenzraum	85
4.13	Hankel-Transformation	87
4.14	Abel-Transformation	89
4.15	Hilbert-Transformation	91

4.16	Abtasttheorem und Nyquist-Kriterium	92
4.17	Wiener-Khintchine-Theorem	98
4.18	Fouriertransformation diskreter Signale (DFT)	100
4.19	Finite diskrete Fouriertransformation	101
4.20	z-Transformation	104
4.21	Chirp-z-Transformation	105
5	Zweidimensionale Rekonstruktionsverfahren	107
5.1	Radontransformation	109
5.2	Inverse Radontransformation und Fourier-Slice-Theorem	120
5.3	Implementation der direkten inversen Radontransformation	125
5.4	Linogramm-Methode	127
5.5	Rückprojektion	131
5.6	Gefilterte Rückprojektion	134
5.7	Vergleich von Rückprojektion und gefilterter Rückprojektion	138
5.8	Filtered Layergram: Filterung nach der Rückprojektion	141
5.9	Gefilterte Rückprojektion und Radonsche Lösung	144
5.10	Cormack-Transformation	147
5.11	Algebraische Rekonstruktionsverfahren	153
5.12	Lösung durch Singulärwertzerlegung	159
5.13	Iterative Rekonstruktion mit ART	162
5.14	Maximum-Likelihood-Verfahren	171
5.14.1	Maximum-Likelihood-Verfahren für die Emissionstomographie	171
5.14.2	Maximum-Likelihood-Verfahren für die Computertomographie	178
5.14.3	Regularisierung des inversen Problems	182
5.14.4	Approximation durch gewichtete kleinste Quadrate	185
5.15	Zusammenfassung der zweidimensionalen Verfahren	187
6	Technische Realisierung	189
6.1	Rekonstruktion mit realen Signalen	189
6.1.1	Fensterung im Frequenzraum	191
6.1.2	Faltung im Ortsraum	194
6.1.3	Diskretisierung der Filterkerne	200
6.2	Praktische Implementation der gefilterten Rückprojektion	202
6.3	Minimale Anzahl der Detektorelemente	206
6.4	Minimale Anzahl der Projektionen	206
6.5	Geometrie des Fächerstrahlensystems	208
6.6	Bildrekonstruktion für die Fächerstrahlgeometrie	209
6.6.1	Umsortieren der Fächerstrahlen	212
6.6.2	Komplementäres <i>Rebinning</i>	218
6.6.3	Gefilterte Rückprojektion für das gebogene Detektorarray	220
6.6.4	Gefilterte Rückprojektion für das lineare Detektorarray	227
6.6.5	Diskretisierung der Rückprojektion für die Fächergeometrie	234
6.7	Detektorviertelversatz und Abtasttheorem	241
7	Dreidimensionale Rekonstruktionsverfahren	249
7.1	Sekundärrekonstruktion aus 2D Schichtenfolgen	250
7.2	Spiral-CT	255
7.3	Rekonstruktion in Parallelstrahlgeometrie	266
7.3.1	3D Radontransformation und Fourier-Slice-Theorem	266
7.3.2	Dreidimensionale gefilterte Rückprojektion	270
7.3.3	Gefilterte Rückprojektion und Radonsche Lösung	271

7.3.4	Central-Section-Theorem	273
7.3.5	Orlovs Vollständigkeitsbedingung	278
7.4	Exakte Rekonstruktionsverfahren in Kegelstrahlgeometrie	280
7.4.1	Schlüsselproblematik der Kegelstrahlgeometrie	282
7.4.2	Methode von Grangeat	284
7.4.3	Berechnung der ersten Ableitungen auf dem Detektor	290
7.4.4	Rekonstruktion mit der differenzierten Radontransformation	292
7.4.5	Direkte 3D Fourierrekonstruktion in Kegelstrahlgeometrie	299
7.4.6	Exakte Rekonstruktion durch gefilterte Rückprojektion	300
7.5	Approximative Rekonstruktionen in Kegelstrahlgeometrie	309
7.5.1	Fehlende Daten im 3D-Radonraum	309
7.5.2	FDK-Kegelstrahlrekonstruktion für planare Detektoren	314
7.5.3	FDK-Kegelstrahlrekonstruktion für zylindrische Detektoren	331
7.5.4	Variationen der FDK-Kegelstrahlrekonstruktion	334
7.6	Helix-Kegelstrahlrekonstruktionsverfahren	338
8	Beurteilung der Bildqualität	345
8.1	Die Modulationstransferfunktion in der Bildgebung	346
8.2	Modulationstransferfunktion und <i>Point-Spread-Function</i>	351
8.3	Die Modulationstransferfunktion bei der Computertomographie	353
8.4	SNR, DQE und ROC	363
8.5	2D-Artefakte	365
8.5.1	Teil- oder Partialvolumenartefakte	365
8.5.2	Aufhärungsartefakte	367
8.5.3	Bewegungsartefakte	370
8.5.4	Abtastartefakte	372
8.5.5	Elektronische Artefakte	372
8.5.6	Metallartefakte	374
8.5.7	Streustrahlungsartefakte	376
8.6	3D-Artefakte	378
8.6.1	Teil- oder Partialvolumenartefakte	378
8.6.2	Treppenbildung bei Schichtenstapeln	379
8.6.3	Bewegungsartefakte	381
8.6.4	Scherung bei Schichtenstapeln durch Gantryneigung	382
8.6.5	Abtastartefakte bei der sekundären Rekonstruktion	385
8.6.6	Metallartefakte in Schichtenstapeln	385
8.6.7	Spezifische Artefakte beim Spiral-CT-Verfahren	387
8.6.8	Kegelstrahlartefakte	389
8.6.9	Segmentierungs- und Triangulierungsproblematik	390
8.7	Rauschen in rekonstruierten Bildern	392
8.7.1	Varianz der Radontransformierten	393
8.7.2	Varianz der Rekonstruktion	394
8.7.3	Dosis, Kontrast und Varianz	398
9	Praktische Aspekte der Computertomographie	401
9.1	Aufnahmeplanung	401
9.2	Datendarstellung	403
10	Literatur	410
11	Index	416

1 Einleitung

Die Computertomographie ist heute aus der klinischen Routine nicht mehr wegzudenken. Sie stellt das Verfahren dar, das als erstes axiale überlagerungsfreie Schnittbilder aus dem menschlichen Körper erzeugen konnte, ohne ihn dafür aufschneiden zu müssen. Diese neue Technik war in den siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts ein enormer Schritt innerhalb der diagnostischen Möglichkeiten der Medizin. Heute gibt es einige konkurrierende Verfahren zur Computertomographie, allen voran die Magnetresonanztomographie (MRT). Aufgrund der einfachen Handhabung und der klaren physikalisch-diagnostischen Aussage sowie der Fortschritte in der Detektortechnologie, Rekonstruktionsmathematik und der Reduktion der Strahlenbelastung wird aber die Computertomographie ihren festen Platz im radiologischen Umfeld behalten.

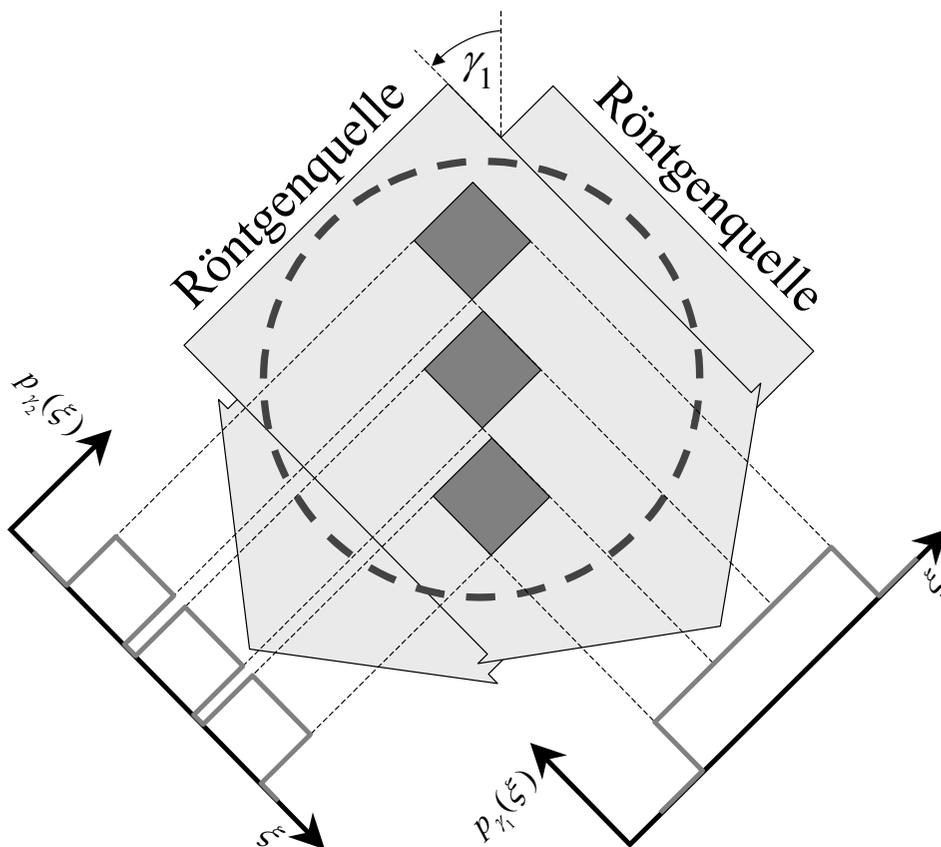


Abb. 1.1: Schematische Darstellung der Computertomographie. Drei homogene, quadratische Objekte werden mit Röntgenstrahlung aus zwei unterschiedlichen Projektionswinkeln γ_1 und γ_2 durchleuchtet und erzeugen je nach Projektionswinkel unterschiedliche Projektionen $p_{\gamma}(\xi)$, die die Schwächungsprofile der Röntgenstrahlung darstellen. Die Schattengrenzen der Projektionen sind gestrichelt eingezeichnet. Unter dem ersten Winkel ist nicht zu erkennen, dass es sich um drei Objekte handelt.

Gerade im Bereich der schnellen 3D-Diagnostik von Traumapatienten, bei denen vor der Messung nicht geklärt werden kann, ob eine Magnetresonanztomographie überhaupt durchgeführt werden darf, ist die Computertomographie der Standard. Neuerdings kommen interessante technische, anthroposophische und forensische sowie archäologische [Tho03] und paläontologische [Pol02] Anwendungen der Computertomographie hinzu, die die Stellung des

Verfahrens über die Verwendung in der Medizin hinaus als allgemein-diagnostisches Werkzeug zur zerstörungsfreien Materialprüfung und dreidimensionalen Visualisierung weiter stärken. Darüber hinaus ist die dazugehörige Mathematik der Bildrekonstruktion in der Technik weit verbreitet. So wird zum Beispiel die Rückprojektion auch in der Geophysik und in der Radartechnik verwendet [Nil97]. Das zentrale Problem der Computertomographie ist leicht formuliert: Man rekonstruiere ein Objekt aus den Projektionen dieses Objektes.

Abbildung 1.1 stellt die Methodik bei der Datenerfassung für die Computertomographie schematisch dar. Schaut man sich eine geometrische Situation aus nur einer Richtung an, so kann man auf Grundlage der einzelnen Projektion unter Umständen nicht entscheiden ob es sich um nur ein Objekt oder um mehrere Objekte handelt. Möchte man dreidimensionale Informationen über die Lage von Objekten innerhalb des Messfeldes erhalten, so muss man sich das Messfeld von allen Seiten ansehen. Genau diese Idee realisiert man beim Computertomographen. Aus unterschiedlichen Projektionsrichtungen bzw. Projektionswinkeln γ_i wird das Objekt durchleuchtet und erzeugt je nach Projektionswinkel unterschiedliche Projektionen oder besser Projektionsprofile $p_{\gamma_i}(\xi)$. Dabei stellt der Ausdruck $p_{\gamma_i}(\xi)$ das jeweilige Schwächungsprofil der Röntgenstrahlung entlang der Detektorlinie ξ unter dem Winkel γ_i dar.

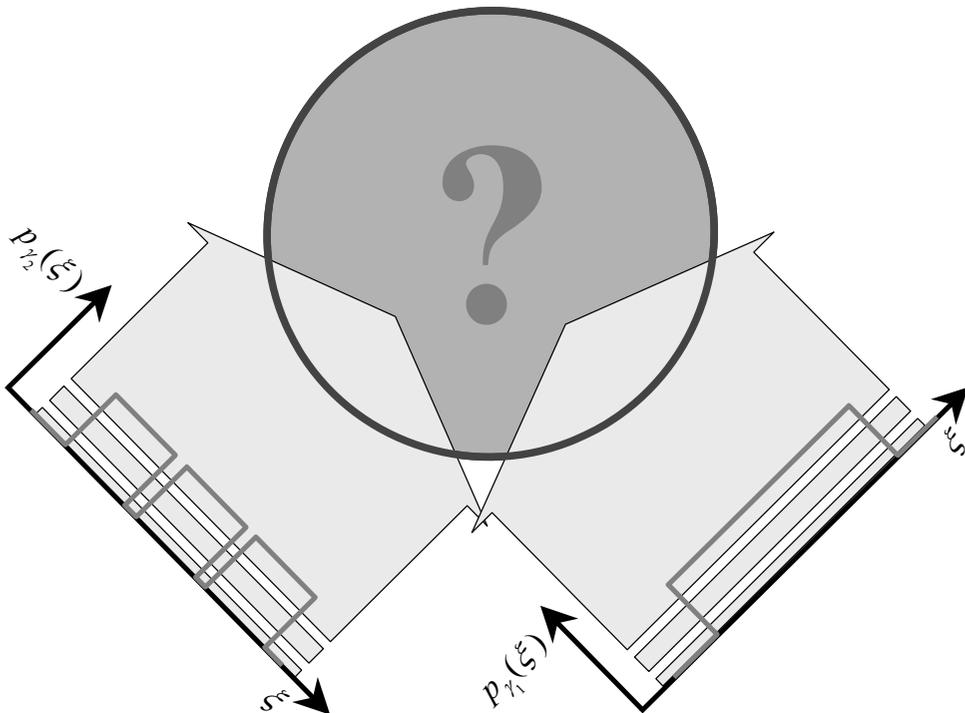


Abb. 1.2: Schematische Darstellung des inversen Problems bei der Computertomographie. Gemessen wurden bei unterschiedlichen Projektionswinkeln γ_1 und γ_2 die jeweiligen Absorptionsprofile $p_{\gamma}(\xi)$. Die unbekannte Objektverteilung muss aus der Vielzahl von Schwächungsprofilen $\{p_{\gamma_1}(\xi), p_{\gamma_2}(\xi), p_{\gamma_3}(\xi), \dots\}$ errechnet werden.

Mathematisch handelt es sich bei der Computertomographie um ein so genanntes inverses Problem. Solche Probleme wurden in den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts populär,

als der Astrophysiker *R. N. Bracewell* die Auflösung seines Teleskops erhöhen konnten, indem er räumlich verteilte Teleskope synchronisierte. Aber schon 1936 wurden Fragen erörtert, die das gleiche mathematische Problem betreffen (siehe *A. M. Cormack* [Cor82] und die Referenzen darin sowie die Beispiele bei *S. R. Deans* [Dea83]). Eines der Beispiele kommt aus der Statistik: Gegeben seien alle marginalen Verteilungen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Kann man dann auf die Verteilung selbst schließen? Die marginalen Verteilungen sind dabei das, was in der Computertomographie die Projektionen sind. Ein anderes Beispiel kommt aus der Astrophysik: Wenn man in eine bestimmte Richtung ins All schaut, dann sieht man von den weit entfernten Sternen nur die jeweils radiale Komponente ihrer Geschwindigkeit, die man über die Dopplerverschiebung ihrer Spektren berechnet. Die Frage, ob man aus den Verteilungen der radialen Geschwindigkeiten, die man in verschiedenen Richtungen misst, auf die tatsächliche Verteilung der Geschwindigkeiten im dreidimensionalen Raum schließen kann, entspricht wieder dem gleichen inversen Problem.

Für die Computertomographie erschließt sich die Bedeutung des mathematischen Begriffes des inversen Problems sofort, denn anders als in Abbildung 1.1 suggeriert, hat man eben keinen direkten Einblick in die räumliche Verteilung der Objekte. Man hat nur die Projektionen entlang der sich drehenden Detektorcoordinate ξ und zwar gemessen über einen Winkel von mindestens 180° . Abbildung 1.2 zeigt diese Situation. Es handelt sich hierbei um die Inversion von Integraltransformationen. Aus einer Sequenz von gemessenen Projektionen $\{p_{\gamma_1}(\xi), p_{\gamma_2}(\xi), p_{\gamma_3}(\xi), \dots\}$ muss dann die räumliche Verteilung der Objekte – genauer, die räumliche Verteilung der Schwächungskoeffizienten innerhalb einer gewählten Schicht durch den Körper – errechnet werden.

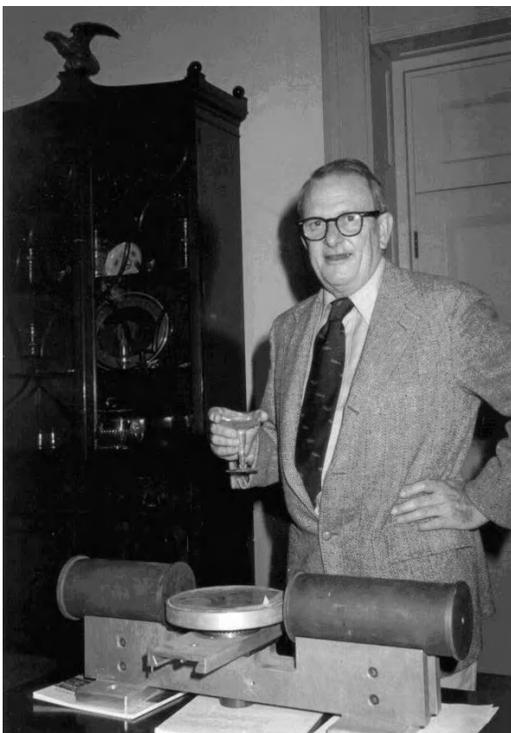


Abb. 1.3: Links: *Allan MacLeod Cormack* (1924-1998) nach der Bekanntgabe der Nobelpreise für Medizin im Jahr 1979 (mit freundlicher Genehmigung: Tufts University, Digital, Collections and Archives). Rechts: *Sir Geoffrey Hounsfield* (geb. 1919) vor einem seiner ersten EMI-CT-Scanner (mit freundlicher Genehmigung: General Electric Medical Systems).

1961 wurde die Lösung des inversen Problems zum ersten mal auf eine Sequenz von Röntgenprojektionen angewandt, die aus unterschiedlichen Richtungen von einem anatomischen Objekt gemessen wurden. Pioniere der medizinischen Computertomographie sind *Allan MacLeod Cormack* (1924-1998) und *Sir Geoffrey Hounsfield* (geb. 1919), die für ihre bahnbrechenden Arbeiten in den sechziger und siebziger Jahren 1979 den Nobelpreis für Medizin erhielten. Abbildung 1.3 zeigt die beiden Wissenschaftler.

Cormack berichtet aber, dass schon der niederländische Physiker *H. A. Lorentz* eine Lösung des dreidimensionalen Problems angegeben hatte, bei der die gesuchte Funktion über Flächenintegrale berechnet wird [Cor82]. *Lorentz* selbst hatte dieses Ergebnis nicht veröffentlicht und es ist auch nicht bekannt, warum er sich mit diesem Problem beschäftigte. Das Ergebnis wurde *H. A. Lorentz* lediglich von *H. Bockwinkel* zugeordnet, der es 1906 in einer Veröffentlichung über Lichtausbreitung in optisch zweiachsigen Kristallen verwendete.

Die ausführliche mathematische Grundlage zur Lösung des inversen Problems wurde dann 1917 vom böhmischen Mathematiker *Johann Radon* angegeben (Abbildung 1.4 links). Dass die Veröffentlichung von *Radon* erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts zur Kenntnis genommen wurde, lag auch an dem mathematischen Aufwand, der mit dem Verfahren verbunden ist. Mit der Entwicklung der ersten Computer war der Rechenaufwand dann zum ersten mal zu bewältigen. Darüber hinaus ist der Artikel von *Radon* aber in deutscher Sprache erschienen und in einer mathematischen Weise formuliert, die Nichtmathematikern beim ersten Lesen durchaus Widerstand bietet. In Kapitel 5 wird ein Auszug aus seiner Arbeit wiedergegeben.



Abb. 1.4: Links: *Johann Radon* (1887-1956) (mit freundlicher Genehmigung: Archiv der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Portraitsammlung). Rechts: *Conrad Wilhelm Röntgen* (1845-1923) (mit freundlicher Genehmigung: Röntgen-Kuratorium Würzburg e.V.).

Tabelle 1.1 fasst einige historische Stationen der Entwicklung zum heutigen Computertomographen zusammen und beginnt dabei natürlich mit *Wilhelm Conrad Röntgen* (1845-1923), der 1901 den ersten Nobelpreis für Physik erhielt (Abbildung 1.4 rechts). Die meisten Ergebnisse der mathematischen Entwicklungen zur Lösung des inversen Problems vor 1960 sind jedoch unabhängig voneinander geschehen und nur in der historischen Rückschau zusammengeführt.

Tab. 1.1: Übersicht historischer Daten zu Rekonstruktionsverfahren in Zusammenhang mit CT.

1895	<i>Röntgen</i> entdeckt eine neue Art von Strahlung, die er selbst X-Strahlung nennt
1901	<i>Röntgen</i> erhält den Nobelpreis für Physik
1906	<i>Bockwinkel</i> nutzt die von <i>Lorentz</i> angegebene Lösung der Rekonstruktion dreidimensionaler Funktionen aus Flächenintegralen
1917	<i>Radon</i> veröffentlicht die grundlegende Arbeit zur Lösung des inversen Problems der Rekonstruktion
1925	<i>Ehrenfest</i> erweitert die Lösung von <i>Lorentz</i> mit Hilfe von Fouriertransformationen ins n -dimensionale
1936	<i>Cramer</i> und <i>Wold</i> lösen das Rekonstruktionsproblem in der Statistik für die Wahrscheinlichkeitsverteilung aus den marginalen Verteilungen
1936	<i>Eddington</i> löst das Rekonstruktionsproblem in der Astrophysik für die Verteilung der Geschwindigkeiten von Sternen aus den Verteilungen der gemessenen radialen Komponenten ihrer Geschwindigkeiten
1956	Anwendung von Fouriertechniken in der Radioastronomie zur Lösung des inversen Problems durch <i>Bracewell</i>
1958	Der ukrainische Forscher <i>Krenblyum</i> entwirft einen Röntgenscanner und versucht, mit analogen Rekonstruktionsverfahren dünne Körperschnitte zu ermitteln
1963	In Südafrika lieferte <i>Cormack</i> erste mathematische Beiträge zur Rekonstruktion von Tomographiebildern
1969	<i>Hounsfield</i> baute den ersten Scanner mit einer radioaktiven Quelle bei den britischen EMI Forschungslaboratorien
1972	Erste klinische Untersuchungen mit einem EMI Schädelscanner durch <i>Hounsfield</i> und <i>Ambrose</i>
1975	Erster Ganzkörper tomograph mit Fächerstrahlensystem
1979	Nobelpreis für Medizin für <i>Hounsfield</i> und <i>Cormack</i>
1983	Elektronenstrahl CT wird demonstriert
1989	Erste klinische Untersuchungen mit einem Spiral-CT durch <i>Kalender</i>
1991	Multiarray CT wird demonstriert

Die Abbildungen 1.5 bis 1.8 zeigen einige computertomographische Aufnahmen verschiedener anatomischer Regionen aus der radiologischen Praxis. In Abbildung 1.5 sind die Schnittbilder zusätzlich mit ihren Aufnahmeparametern versehen. Hierbei sind die Beschleunigungsspannung (sie bestimmt die Energie der Röntgenstrahlung), der Röhrenstrom (er steuert die Intensität der Strahlung), die Schichtdicke (das ist die axiale Breite des Röntgenfächers) sowie der Verkippungswinkel der *Gantry* (also die Neigung des CT-Rahmens gegenüber der axialen Achse) die wichtigsten Parameter der Aufnahmeplanung. Es ist gut zu sehen, dass moderne Geräte eine ausgezeichnete Weichteildifferenzierung zeigen.

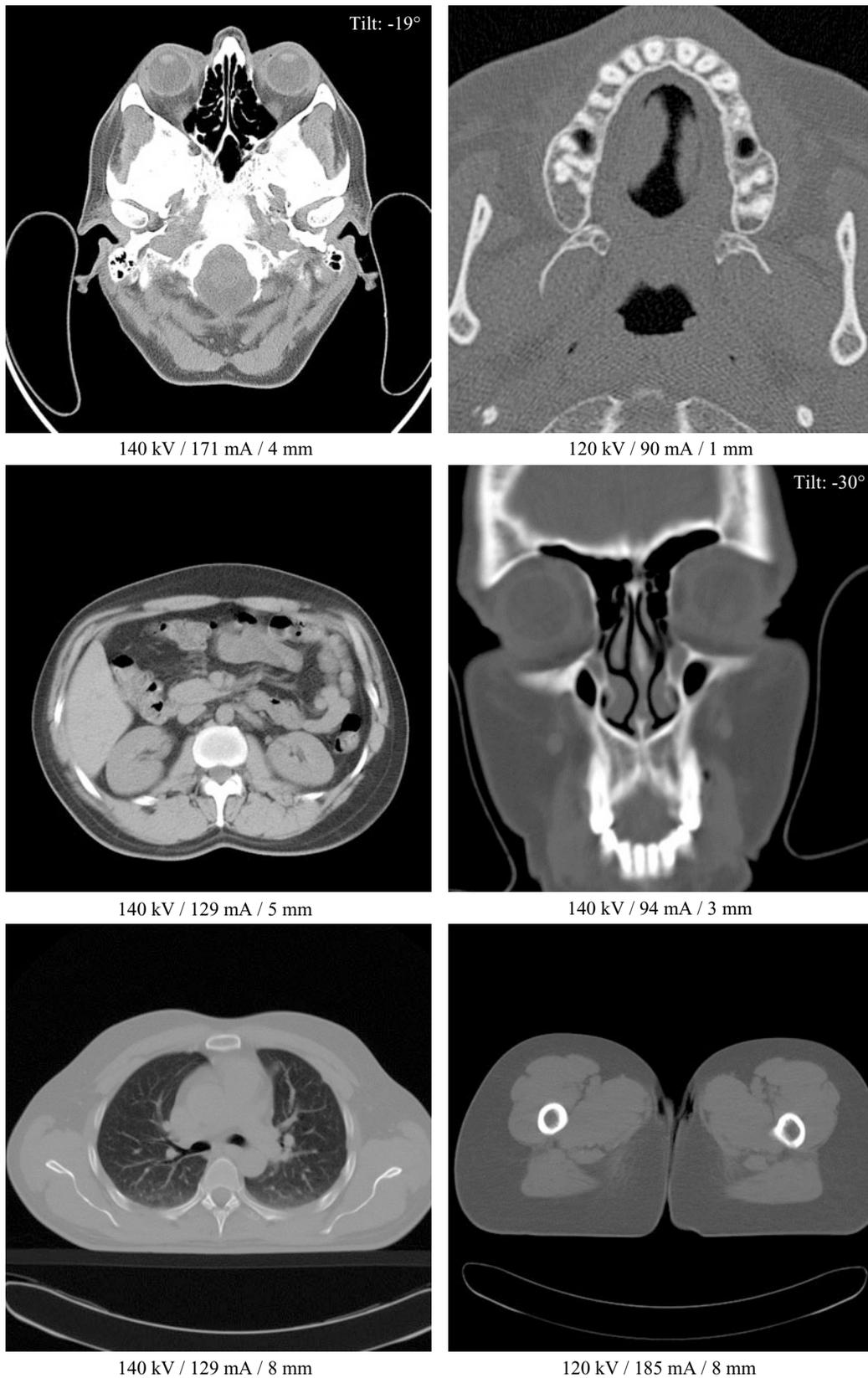
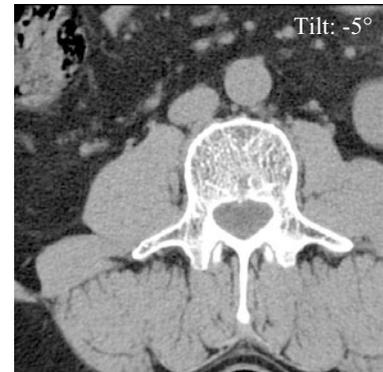


Abb. 1.5: Beispiele einiger computertomographisch rekonstruierter Bilder. Anders als die ersten Tomographen zeigen moderne Computertomographen heute eine ausgezeichnete Weichteildifferenzierung (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

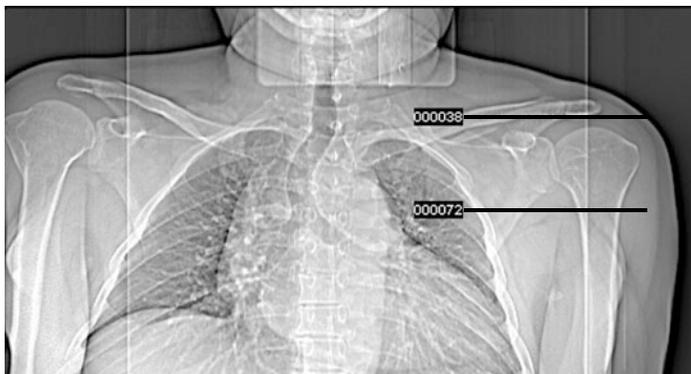
Zur Planung einer CT-Aufnahme ist in der klinischen Praxis neben der Wahl der technischen Aufnahmeparameter (jeweils gekennzeichnet in den Abbildungen 1.5 und 1.6) die Wahl der Schichtenfolge besonders wichtig. Man möchte hier einerseits die Lage der Schichten der anatomischen Situation anpassen und andererseits nur den Bereich mit Dosis belasten, der diagnostisch relevant ist. Dazu erstellt man zunächst Übersichtsaufnahmen, die einer einfachen Radiographie sehr ähnlich sind (in Kapitel 9 wird das Aufnahmeprinzip im Detail erläutert). In dieser Lage kann man das Intervall und die Schichtenneigung interaktiv festlegen.



Topogram: 140 kV / 111 mA



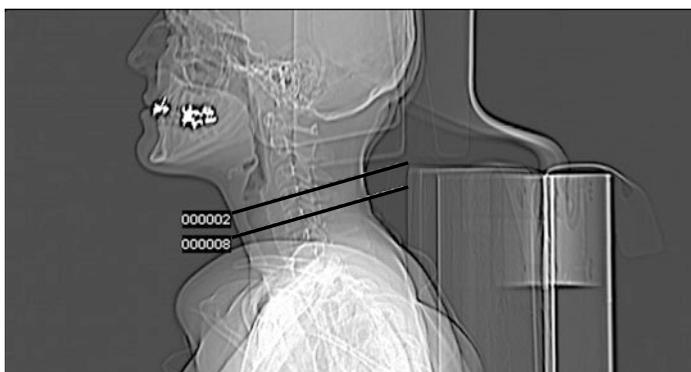
140 kV / 171 mA / 3 mm



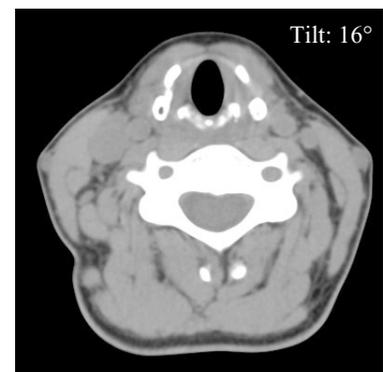
Topogram: 120 kV / 130 mA



140 kV / 206 mA / Schicht: 2 mm



Topogram: 140 kV / 111 mA



140 kV / 171 mA / Schicht: 3 mm

Abb. 1.6: Zur Planung werden Übersichtsaufnahmen (die je nach Hersteller Topogram, Scout View oder Scanogram genannt werden) erstellt, in denen das Messintervall und die Schichtenneigung gewählt wird (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

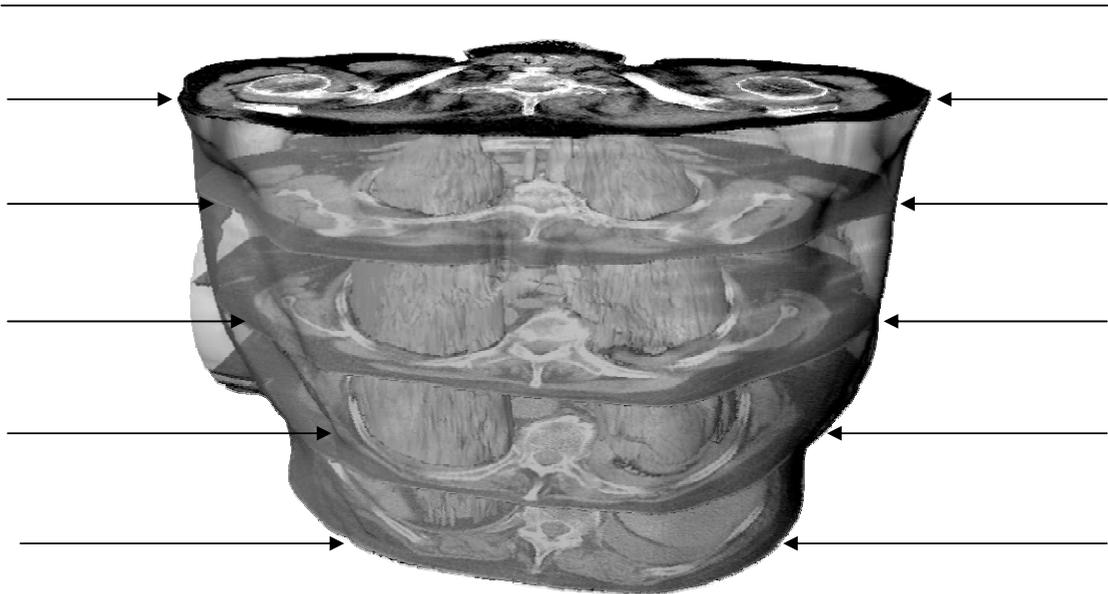


Abb. 1.7: Auch die konventionelle Computertomographie wird zu einem dreidimensionalen Abbildungsverfahren, wenn die axialen Schichtenstapel – exemplarisch sind hier fünf Schichten mit Pfeilen markiert – übereinander gelegt werden, so dass dreidimensionale Volumina entstehen (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

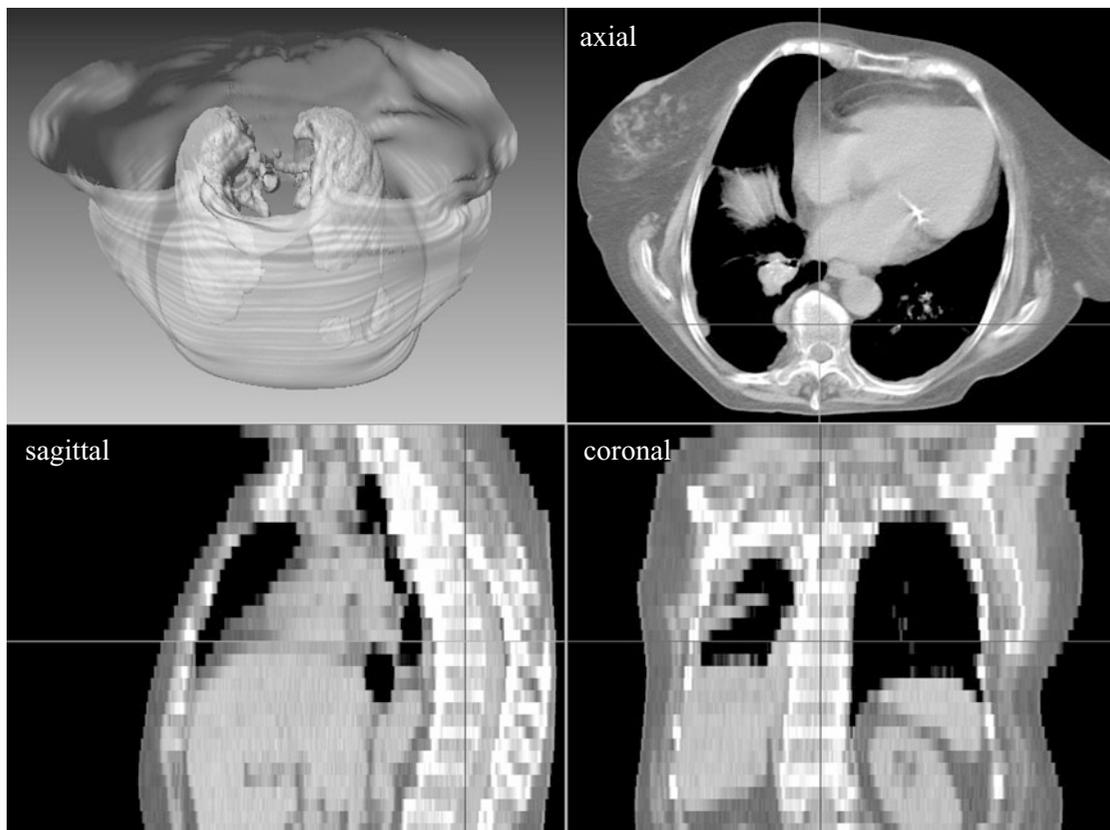


Abb. 1.8: Das Zusammensetzen der einzelnen CT-Schichtaufnahmen zu 3D-Volumina eröffnet weitergehende diagnostische Möglichkeiten. Typischerweise wählt man die Ansicht von tatsächlich dreidimensional dargestellten Oberflächen von zuvor segmentierten Objekten (oben links) oder die einfachere orthogonale Reformatierung. Das ist die Berechnung der sagittalen und coronalen Schicht aus dem axialen Schichtenstapel (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

In den Abbildungen 1.7 und 1.8 ist demonstriert, warum die Computertomographie ein dreidimensionales Verfahren ist. Die geometrisch sehr präzise Schichtenfolge kann im Computer als virtueller Bilderstapel und damit als dreidimensionales Volumen zusammengesetzt werden. Abbildung 1.7 zeigt exemplarisch 5 einzelne Schichten, die transparent dargestellte Haut und die Lunge sind mit einem Schwellwertverfahren segmentiert worden und mit einem so genannten *Surface-Rendering* zusätzlich visualisiert. In Abbildung 1.8 ist für denselben Datensatz die alternative Darstellung mit dem so genannten MPR (*Multi-Planar Reformatting*) gewählt. Aus den axialen Schichten werden bei dieser Technik die sagittale und coronale Schicht interpoliert. Abbildung 1.9 illustriert die geometrische Lage der drei orthogonalen Hauptschichten im Raum.

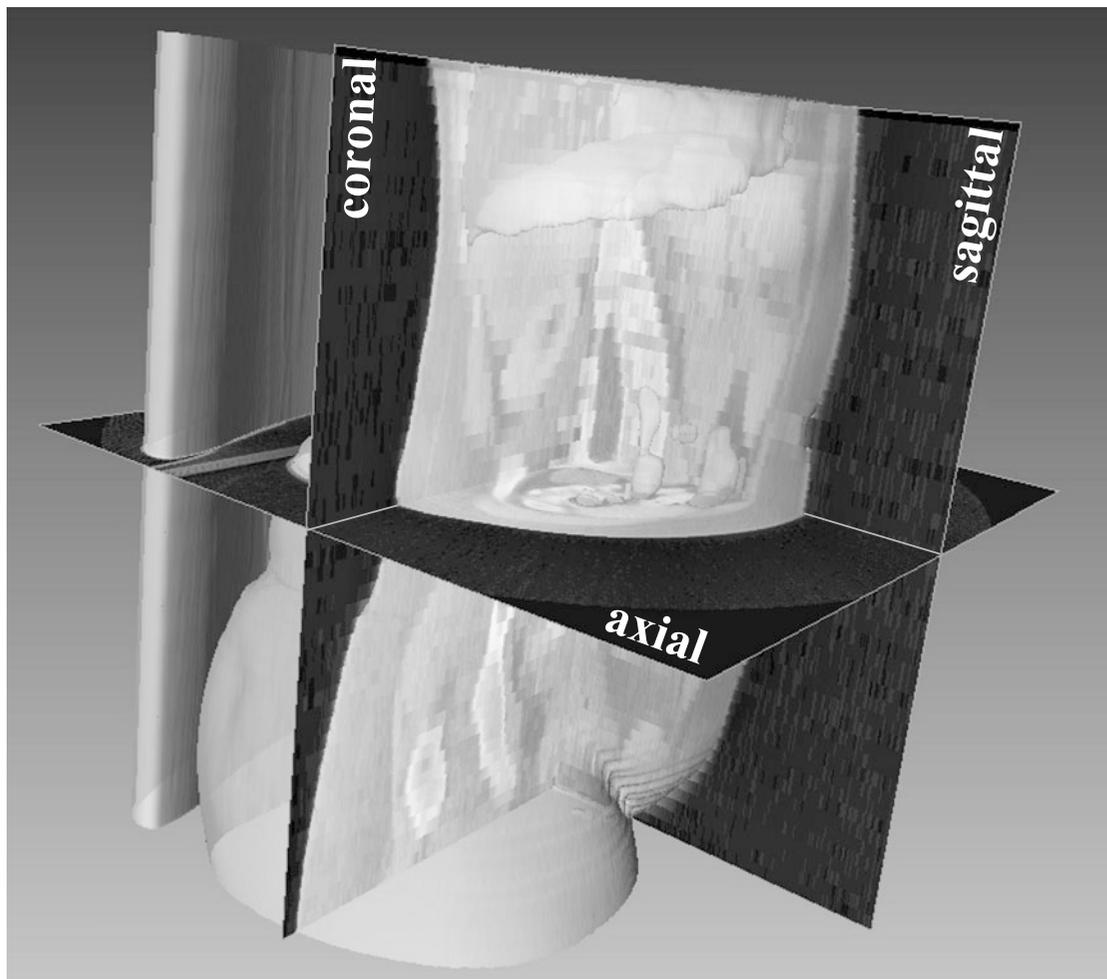


Abb. 1.9: Mit der Computertomographie wird primär die axiale Schicht gemessen bzw. rekonstruiert. Die coronale und sagittale Schicht erhält man aus dem Bilderstapel der axialen Schichten durch Interpolation. Dieses Verfahren wird multiplanares Reformatieren (MPR) genannt.

Die folgenden Kapitel geben einen Überblick über die heute verfügbaren Rekonstruktionsmethoden. Die Basis der Computertomographie sind die mathematischen Verfahren, jedoch ist ohne die Kenntnis der Röntgenphysik und der Abtast- bzw. Messwerterfassungstechnologie die ganze Schönheit des Verfahrens nicht zu erfassen, daher wird auf diese Aspekte im Verlauf der Kapitel immer wieder Bezug genommen.

Das Buch so aufgebaut, dass zunächst in Kapitel 2 die Erzeugung von Röntgenstrahlung, deren Wechselwirkung mit Materie und deren Detektion besprochen wird. Nur vor dem Hintergrund der elementaren Zusammenhänge in der Röntgenphysik, sind viele Effekte und vor allem Bildfehler erst verständlich. Daneben werden hier einige Grundlagen zur Quantenstatistik gelegt. Kapitel 3 gibt dann einen Überblick über die Entwicklungshistorie. Angefangen bei der Tomosynthese, werden die einzelnen Typen bzw. Generationen von Tomographen in diesem Kapitel unterschieden und die Entwicklungsschritte hin zu den modernen Scannern wie Elektronenstrahl-CTs, Micro-CTs und Geräten mit Kegelstrahl-Helix-Geometrie motiviert.

Kapitel 4 fasst die Grundlagen der Signalverarbeitung so zusammen, dass das erforderliche Werkzeug zur speziellen Signalverarbeitung für die Computertomographie zur Verfügung steht. Kapitel 5 widmet sich dann ausschließlich der Theorie der zweidimensionalen Rekonstruktionsverfahren. Hier werden die Herleitungen der wichtigsten Rekonstruktionsverfahren im Detail vorgestellt. Kapitel 6 zeigt die praktischen Rahmenbedingungen für die Implementierungen der Verfahren aus Kapitel 5 auf. Insbesondere wird hier der Unterschied zwischen Parallelstrahl- und Fächerstrahlgeometrie beleuchtet.

Kapitel 7 stellt die dreidimensionalen Rekonstruktionsverfahren ausführlich dar. Einige Ideen sind Erweiterungen aus den Kapiteln 5 und 6, aber speziell bei der Kegelstrahlgeometrie sind die gemessenen Rohdaten nicht direkt zu verwenden. Da die dreidimensionalen Verfahren Gegenstand aktueller Forschung ist, kann dieses Kapitel nicht vollständig sein und stellt eine Momentaufnahme dar, der die Vielfalt der Variationen im Bereich der Kegelstrahl-Helix-Verfahren nicht berücksichtigt. Es werden vielmehr die allgemeinen Prinzipien beschrieben, die die aktuelle Forschungsbasis darstellen.

Kapitel 8 zeigt Verfahren der Bildbeurteilung auf und fokussiert auf die typischen Artefakte der Computertomographie, wobei zwischen 2D- und 3D-Artefakten unterschieden werden kann. Weiterhin wird in diesem Kapitel auch das wichtige 4te-Potenz-Gesetz beim Zusammenhang zwischen Signal-Rausch-Verhältnis, Dosis und Detektorgröße hergeleitet. Kapitel 9 schließt dieses Buch mit einigen praktischen Gesichtspunkten wie zum Beispiel der Hounsfieldskala und der Messvorbereitung ab.

2 Röntgenstrahlung

Für die Entdeckung einer neuen, sehr durchdringenden Art von Strahlung wurde *Wilhelm Conrad Röntgen* 1901 mit dem ersten Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. 1895 hatte er die Strahlung, die er selbst X-Strahlung nannte, in Experimenten mit beschleunigten Elektronen entdeckt. An dieser Stelle sollen nur die für die Computertomographie wesentlichen physikalischen Zusammenhänge bei der Erzeugung von Röntgenstrahlung, ihrer Wechselwirkung mit Materie und ihrer Detektion dargestellt werden. Eine ausführlichere Darstellung findet man in vielen Physikbüchern z.B. *W. Demtröder* [Dem00] und weitere Details in Übersichts-darstellungen der radiologischen Technik z.B. *T. S. Curry et al.* [Cur90].

2.1 Erzeugung von Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlung ist elektromagnetischer Natur. Sie besteht aus Wellen des Wellenlängenbereichs¹ 10^{-8} m bis 10^{-13} m und wird beim Eintritt schneller Elektronen² in ein Metall erzeugt. Dabei ist die Energie der Röntgenstrahlung abhängig von der Geschwindigkeit v der Elektronen. Diese wiederum ist abhängig von der Beschleunigungsspannung U_B zwischen Kathode und Anode, so dass mit der einfachen Energieerhaltung

$$eU_B = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (2.1)$$

die Geschwindigkeit der Elektronen berechnet werden kann.

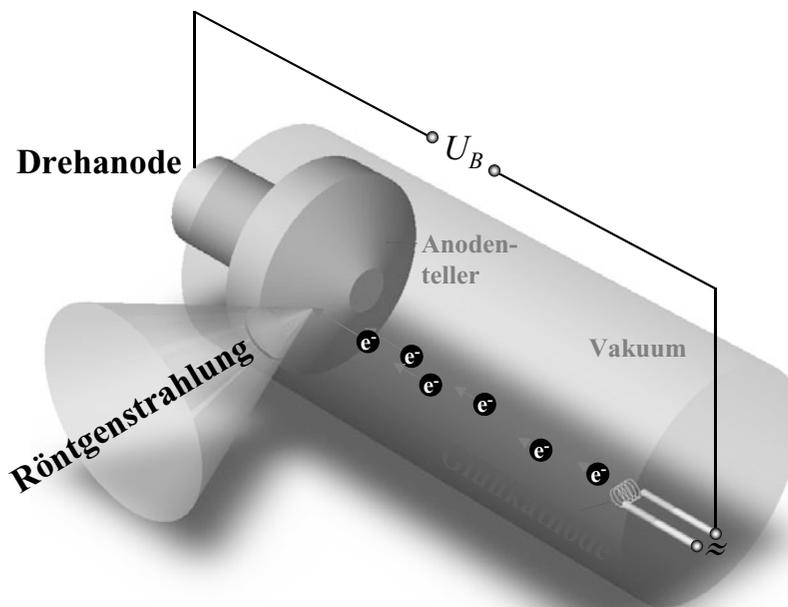


Abb. 2.1: Schematischer Aufbau einer Röntgenröhre. Aus einer direkt auf etwa 2400 K geheizten Glühkathode treten thermische Elektronen aus, die im elektrischen Feld zwischen Kathode und Anode beschleunigt werden. Beim Eintritt der schnellen Elektronen in das Anodenmaterial entsteht Röntgenstrahlung. Die Elektronen werden durch einen Kathodentopf, einen so genannten Wehneltzylinder (hier nicht eingezeichnet), auf einen kleinen Brennfleck fokussiert.

¹ Dieses Intervall reicht an seinen Grenzen in die Intervalle der UV- bzw. γ -Strahlung hinein.

² Ladung der Elektronen: $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As; Masse der Elektronen: $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg

In der medizinischen Diagnostik liegen die Beschleunigungsspannungen zwischen 25 kV und 150 kV, für die Strahlentherapie zwischen 10 kV und 300 kV und für die Materialprüfung bei bis zu 500 kV. Abbildung 2.1 zeigt den schematischen Aufbau einer Röntgenröhre.

Beim Eintritt der so beschleunigten Elektronen in die Anode, die auch Antikathode genannt wird, laufen dicht an der Anodenoberfläche mehrere Prozesse ab. Grundsätzlich werden die Elektronen durch die elektrischen Felder der Atome im Anodenmaterial abgelenkt und abgebremst. Die Abbremsung geschieht dabei in Wechselwirkungen mit den orbitalen Elektronen und dem Atomkern. Da beim Bremsen von Ladung Energie in Form einer elektromagnetischen Welle frei wird, entstehen Photonen. Meistens entstehen bei diesem Prozess mehrere Photonen. Es kann aber auch vorkommen, dass die gesamte Energie eU_B eines Elektrons in ein einzelnes Photon umgewandelt wird. Diese Grenze liefert die maximale Energie der Röntgenstrahlung, die mit

$$eU_B = h\nu_{\max} \quad (2.2)$$

berechnet werden kann. Dieser maximalen Energie entspricht die minimale Wellenlänge

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_B} = \frac{1.24 \text{ nm}}{U_B / \text{kV}}, \quad (2.3)$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet³. Während die Beschleunigungsspannung also die Energie des Röntgenspektrums bestimmt, steuert der Anodenstrom lediglich die Intensität des erzeugten Röntgenspektrums.

Aufgrund der Vielfältigkeit der Abbremsungsprozesse im Anodenmaterial ist das so genannte Bremsspektrum kontinuierlich. Die beschleunigten Elektronen sind ungebunden und ihre Energie ist daher nicht gequantelt. Die Energiebilanz kann man mit folgender Gleichung darstellen.

$$E_{\text{kin}}(e^-) (+ \text{Atomgitter}) \rightarrow (\text{Atomgitter} +) E_{\text{kin}-h\nu}(e^-) + h\nu. \quad (2.4)$$

Zu dem kontinuierlichen Bremsspektrum überlagert sich ein Linienspektrum, das durch direkte Wechselwirkung der schnellen Elektronen mit inneren Hüllenelektronen des Anodenmaterials entsteht. Wird ein Elektron auf der K-Schale durch den Zusammenstoß mit dem schnellen Elektron aus dem Atom herausgeschlagen, das Atom also durch den Verlust eines inneren Elektrons ionisiert, dann fallen Elektronen der höheren Schalen auf den frei gewordenen Platz auf der K-Schale. Ein Beispiel für die Energiebilanz des Übergangs eines L-Elektrons in die K-Schale ist durch

$$E_K(\text{Atom}^+) \rightarrow E_L(\text{Atom}^+) + h\nu_{KL} \quad (2.5)$$

gegeben. Da die inneren Schalen eine kleinere potentielle Energie besitzen als die äußeren Schalen, wird dieser Prozess durch die Aussendung eines Photons begleitet. Aufgrund der hohen Energiedifferenz der inneren Schalen sind diese Photonen mit der Wellenlänge

³ Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js; Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_i - E_j} \quad (2.6)$$

Röntgenquanten. Die entstehenden scharfen Linien sind für jedes Anodenmaterial charakteristisch.

Die Bezeichnung dieser Linien ist folgendermaßen vereinbart. K_α , K_β , K_γ , ... bezeichnen die Übergänge eines Elektrons von der L-, M-, N-, ... zur K-Schale und L_α , L_β , L_γ , ... analog dazu die Übergänge eines Elektrons von der M-, N-, O-, ... zur L-Schale usw.

Die Lage des charakteristischen K-Linienspektrums ist durch das Moseleysche Gesetz

$$\lambda = \frac{hc}{E_n - E_1} = \frac{hc}{13.6 \text{ eV} (Z-1)^2 (1-1/n^2)} \quad (2.7)$$

gegeben, wobei Z die Kernladungszahl des Anodenmaterials und n die Hauptquantenzahl des auf die K-Schale fallenden Elektrons ist. Insgesamt trägt die charakteristische Röntgenstrahlung viel weniger als die Bremsstrahlung zur Gesamtintensität bei. Abbildung 2.2 zeigt ein typisches Spektrum einer Molybdänanode bei einer Beschleunigungsspannung U_B von 30 kV.

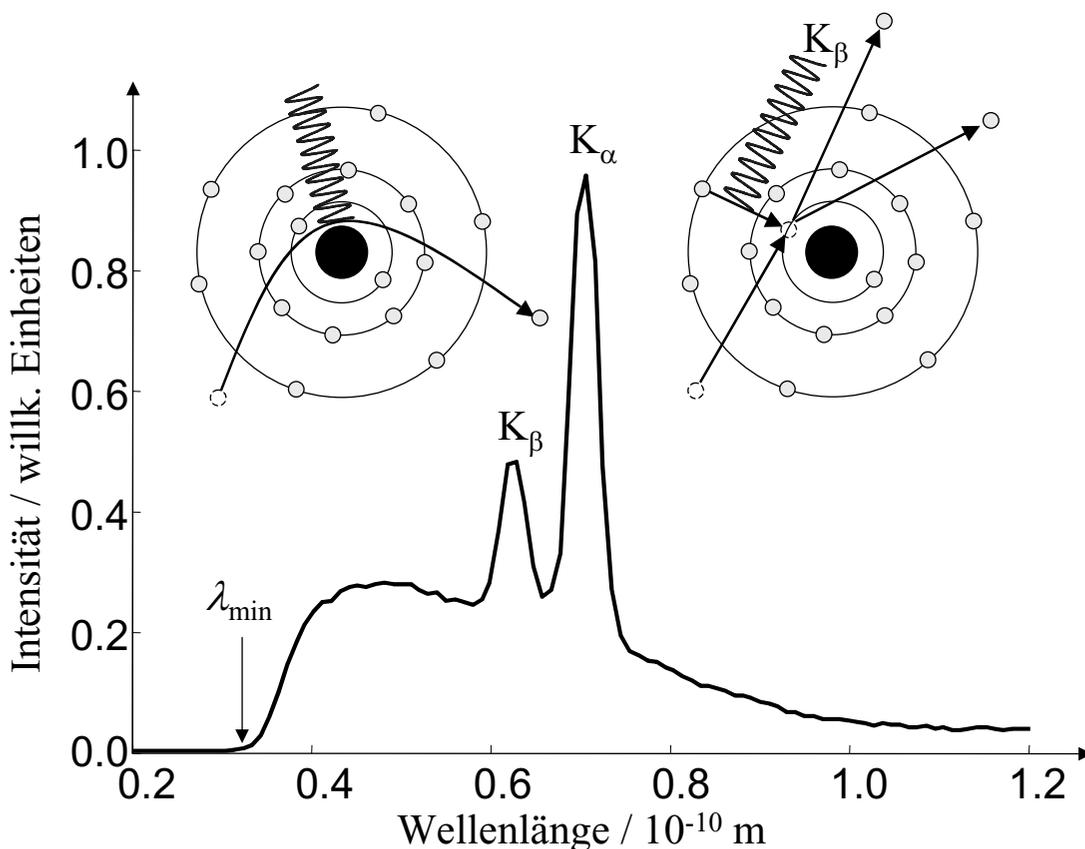


Abb. 2.2: Röntgenspektren einer Molybdänanode bei einer Beschleunigungsspannung von $U_B=30$ kV. Der Verlauf der Intensität mit der Wellenlänge zeigt das charakteristische Linienspektrum sowie die Bremsstrahlung.

Der Wirkungsgrad der Energieumwandlung in Röntgenstrahlung liegt bei Wolframanoden ($Z = 74$) mit einer Beschleunigungsspannung von $U_B = 100 \text{ kV}$ in der Größenordnung von 1 %. Damit hat man ein massives Wärmeproblem, denn die Anode wird an der Oberfläche bis zum Glühen erhitzt, darf aber nicht schmelzen. Um die thermische Belastung auf der Anode zu verteilen, werden seit einigen Jahrzehnten Drehanoden eingesetzt. Die Energie des Elektronenstrahls verteilt sich auf einer abgeschrägten Bahn, der so genannten Brennfleckbahn. Abbildung 2.3 zeigt schematisch den Aufbau einer Röntgenröhre mit Drehanode.

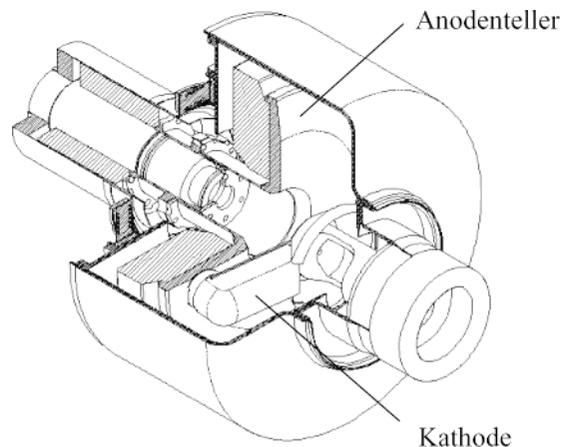


Abb. 2.3: Schematische Darstellung einer Röntgenröhre mit Drehanode (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems).

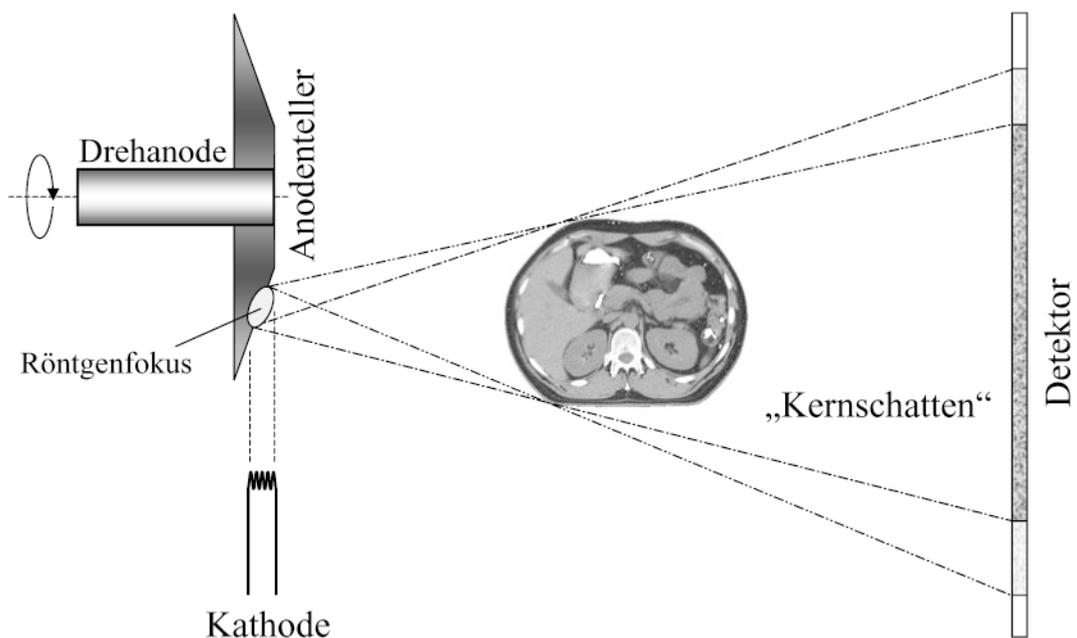


Abb. 2.4: Durch die Ansträgung der Anode kann man die Größe des optischen Brennflecks beeinflussen. Je größer der optische Brennfleck ist, desto unschärfer wird die Abbildung, da alle Objekte von einem Halbschattensaum umgeben sind.

Die Größe und Form des Brennflecks beeinflusst die medizinischen Abbildungseigenschaften. Aufgrund der Schrägung des Anodentellers ist die Projektion der Brennfleckgeometrie in Richtung der austretenden Strahlung entscheidend für die Qualität der Abbildung. Man spricht daher von dem optischen Brennfleck, der möglichst klein gehalten werden muss.

Üblich sind bei diagnostischen Röntgenröhren Brennfleckabmessungen⁴ zwischen 0.3 mm und 2 mm, wobei durch Fokussierung auf unterschiedliche Schrägungen häufig zwischen zwei Brennfleckgrößen umgeschaltet werden kann. Abbildung 2.4 zeigt, dass die Halbschattenunschärfe bei einem großen optischen Brennfleck die Schärfe des Bildes beeinträchtigt. Der mathematische Zusammenhang der Brennfleckgröße mit der Abbildungsqualität wird durch die so genannte Modulationstransferfunktion beschrieben. In Kapitel 8.3 wird darauf im Detail eingegangen.

Ein weiterer Faktor, der in Bezug auf die Abbildungsqualität Beachtung finden muss, ist die Richtungscharakteristik der Röntgenstrahlung, denn die Basis aller Rekonstruktionsverfahren ist die Annahme, dass das zu untersuchende Objekt homogen ausgeleuchtet wird. Leichte Inhomogenitäten können durch spezielle Filter sowie durch eine Detektorkalibrierung kompensiert werden. Hier soll kurz die Ursache der Inhomogenitäten des Strahlungsfeldes besprochen werden.

Die Richtungscharakteristik wird prinzipiell durch zwei Effekte beeinflusst. Zunächst handelt es sich bei der Erzeugung der Bremsstrahlung um Dipolstrahlung, die die bekannte Hertzsche Strahlungscharakteristik aufweist. Da die Elektronen beim Eintritt in die Anode nahezu Lichtgeschwindigkeit besitzen, ist diese Charakteristik in Richtung der Elektronengeschwindigkeit gebogen. Dieser relativistische Effekt ist umso stärker, je höher die kinetische Energie der Elektronen ist. Abbildung 2.5a zeigt den Intensitätsverlauf in Abhängigkeit vom Winkel schematisch. Dieser Effekt ist aber in Bezug auf die Gesamtrichtungscharakteristik der Röntgenstrahlung von untergeordneter Bedeutung, da die Bremsung in der Regel ein vielfältiger Prozess ist, bei dem sich die Bewegungsrichtung der Elektronen ständig ändert.

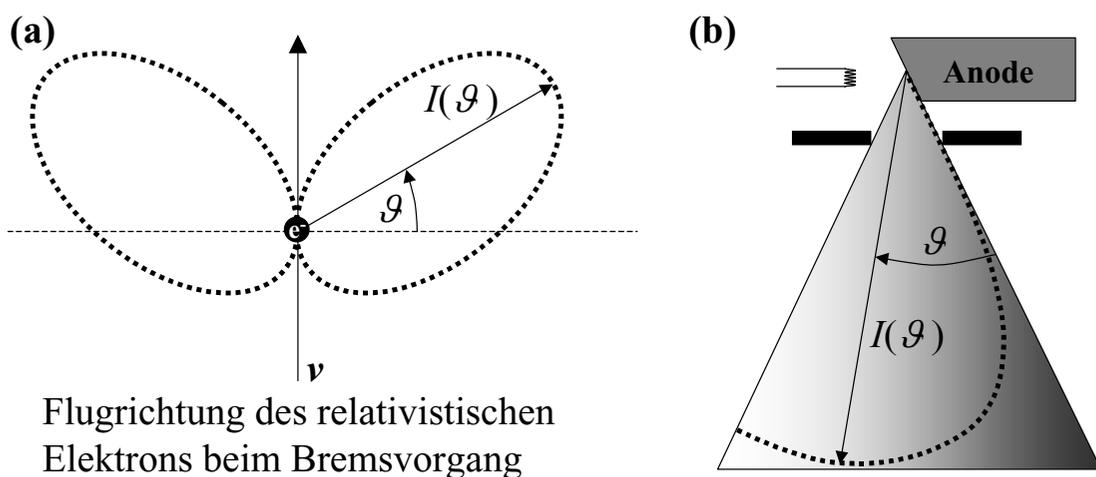


Abb. 2.5: (a) Verbiegung der Strahlencharakteristik eines Hertzischen Dipols bei Bremsung eines relativistischen Elektrons. (b) *Heel*-Effekt: Abnahme der Intensität der Röntgenstrahlung durch Selbstabsorption.

⁴ Die Größe des Brennflecks hängt von der diagnostischen Fragestellung ab (siehe z.B. [Hud95]).

Darüber hinaus sinkt die Intensität der Röntgenstrahlung für Strahlen, die die Anode streifend verlassen. Dieser Effekt beruht auf der Selbstabsorption der Anode im Bereich der Oberflächenrauigkeit. Abbildung 2.5b zeigt den Verlauf der Intensität in Abhängigkeit vom Winkel wieder schematisch. Je kleiner der Winkel zwischen austretender Röntgenstrahlung und der Anodenoberfläche ist, desto stärker wirkt sich die Absorption aufgrund der Rauigkeit entlang der Brennfleckbahn aus. Dieser so genannte *Heel*-Effekt verstärkt sich mit der Alterung der Röhre, da allmählich Material durch Elektronenbeschuss abgetragen wird, wodurch die Rauigkeit der Brennfleckbahn zunimmt [Hei98]. In den modernen Computertomographen möchte man möglichst viel Röntgenstrahlung des an der Anode entstehenden Strahlkegels nutzen. Daher ist es wichtig, die Strahlcharakteristik der Röntgenröhre genau zu kennen.

2.2 Absorption und Streuung von Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlung besitzt ein sehr großes, stoffabhängiges Durchdringungsvermögen von Materie. Dennoch wird auch Röntgenstrahlung abgeschwächt. Dafür sind im wesentlichen Absorption und Streuung verantwortlich. In diesem Kapitel sollen kurz die wichtigsten, physikalischen Mechanismen der Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie (Rayleighstreuung, Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarerzeugung) sowie deren mathematische Modellierung besprochen werden.

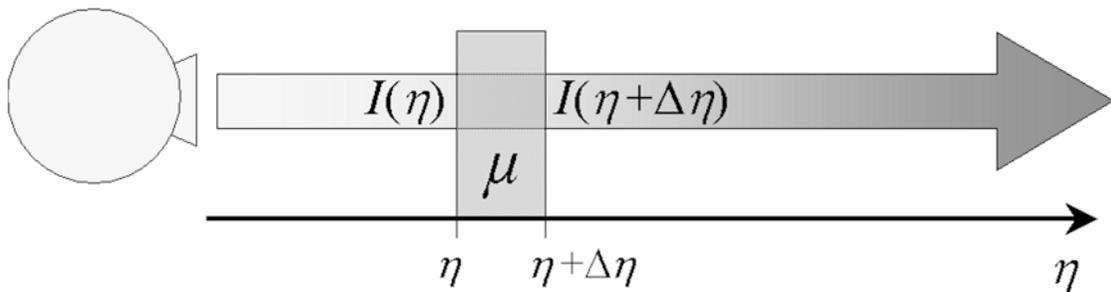


Abb. 2.6: Abschwächung eines Röntgenstrahls beim Durchlaufen homogener Materie der Dicke $\Delta\eta$ mit dem Schwächungskoeffizienten μ .

Alle Effekte, die zu einer Abschwächung der Röntgenintensität am Detektor führen, kann man – so wie in Abbildung 2.6 gezeigt – zusammenfassen. Dabei wird die Abschwächung der Intensität beim Durchlaufen von Materie folgendermaßen berechnet. Die Intensität hinter dem durchlaufenen Stoff der Dicke $\Delta\eta$ setzt sich aus

$$I(\eta + \Delta\eta) = I(\eta) - \mu(\eta)I(\eta)\Delta\eta \quad (2.8)$$

zusammen. Durch einfaches Umstellen erhält man aus Gleichung (2.8) den Differenzenquotienten

$$\frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = -\mu(\eta)I(\eta) \quad (2.9)$$

und durch Grenzwertbildung schließlich den Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = \frac{dI}{d\eta} = -\mu(\eta)I(\eta). \quad (2.10)$$

Zunächst soll in Gleichung (2.10) angenommen werden, dass es sich um ein homogenes Objekt handelt, also der Schwächungskoeffizient $\mu(\eta) \equiv \mu$ über den gesamten Weg konstant ist. Man erhält dann eine gewöhnliche lineare und homogene Differentialgleichung ersten Grades mit konstanten Koeffizienten, die mit dem Verfahren der Trennung der Variablen leicht zu lösen ist. Dabei betrachtet man die rechte Seite von Gleichung (2.10) und separiert zu

$$\frac{dI}{I(\eta)} = -\mu d\eta \quad (2.11)$$

Integrieren beider Seiten von Gleichung (2.11), also

$$\int \frac{dI}{I(\eta)} = -\mu \int d\eta \quad (2.12)$$

liefert dann

$$\ln|I| = -\mu\eta + C. \quad (2.13)$$

Da Intensitäten immer positiv definiert sind, kann auf die Betragszeichen verzichtet werden, so dass das Exponenzieren

$$I(\eta) = e^{-\mu\eta + C} \quad (2.14)$$

liefert. Mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$, erhält man die spezielle Lösung

$$I(\eta) = I_0 e^{-\mu\eta}, \quad (2.15)$$

die das Lambert-Beersche Absorptionsgesetz darstellt. Der Schwächungskoeffizient μ in Gleichung (2.15) setzt sich aus dem Streukoeffizienten μ_s und dem Absorptionskoeffizienten α additiv zusammen, also gilt

$$\mu = \mu_s + \alpha. \quad (2.16)$$

In den folgenden Abschnitten werden die physikalischen Prozesse, die durch Gleichung (2.16) zusammengefasst sind, kurz beschrieben.

Rayleighstreuung: Die elastische Rayleighstreuung tritt auf, so lange der Durchmesser der Streuteilchen klein ist gegenüber der Wellenlänge der Strahlung. Die Rayleighstreuung ist nicht zu vernachlässigen, da die Streuwahrscheinlichkeit mit der vierten Potenz der Frequenz der Strahlung anwächst.

Darüber hinaus sind drei Wechselwirkungsprozesse zwischen Röntgenstrahlung und Materie für die Absorption verantwortlich, die in Abbildung 2.7 schematisch zusammengefasst sind.

Photoeffekt⁵: Die gesamte Energie der Röntgenstrahlung $h\nu$ wird vom Atom absorbiert und ein Elektron der unteren Schale herausgeschlagen, das Atom wird damit also ionisiert. Die Bilanz des Photoeffektes lautet

$$h\nu (+ Atom) \rightarrow E_{ion}(Atom^+) + E_{kin}(e^-). \quad (2.17)$$

Reicht die Strahlungsenergie des Rekombinationsprozesses für das in Gleichung (2.17) entstehende Loch aus, um wiederum ein Elektron aus dem Atomverband herauszuschlagen, dann wird das neue freie Elektron Auger-Elektron genannt. Auger-Elektronen sind monoenergetisch.

Comptoneffekt: Ein Röntgenquant der Energie $h\nu$ stößt mit einem quasifreien⁶ Elektron zusammen. Die Bilanz für diesen Zusammenstoß lautet

$$h\nu + e^- \rightarrow E_{kin}(e^-) + h\nu'. \quad (2.18)$$

Im Gegensatz zum Photoeffekt, verliert das Röntgenquant beim Comptoneffekt nur einen Teil seiner Energie. Das gestreute Photon hat auf seinem weiteren Weg eine geringere Energie (inelastische Streuung) und kann in der Folge durch den Photoeffekt absorbiert werden. Die geringere Energie des gestreuten Photons lässt sich unter dem Streuwinkel \mathcal{G} anhand der Wellenlängenänderung

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\mathcal{G})) \quad (2.19)$$

messen.

Paarbildung: Bei Energien von $h\nu > 1,022$ MeV kann ein Röntgenquant Materie in Form eines Elektron-Positron-Paares erzeugen. Die Bilanz der Paarbildung lautet

$$h\nu \rightarrow e^- + e^+ + 2E_{kin}, \quad (2.20)$$

wobei die Einsteinsche Masse-Energie-Äquivalenz

$$h\nu = 2m_e c^2 + 2E_{kin} \quad (2.21)$$

erfüllt ist.

In Abbildung 2.7 ist dargestellt, dass das Positron im Verlauf seines weiteren Weges durch die Materie nach kurzer Zeit mit einem Elektron zusammenstößt und dort unter Aussendung zweier Gammaquanten vollständig in Energie nach Gleichung

$$e^- + e^+ \rightarrow 2h\nu \quad (2.22)$$

zerstrahlt wird. Dieser Prozess der Paarvernichtung spielt bei der Positronen-Emissions-Tomographie (PET) die zentrale Rolle.

⁵ Für die Aufklärung des Photoeffektes erhielt *Albert Einstein* den Nobelpreis für Physik.

⁶ z.B. ein schwach gebundenes Valenzelektron.

Welcher der drei Prozesse tatsächlich abläuft, hängt neben der Energie stark vom absorbierenden Material ab. Die relativen Anteile an der Gesamtabsorption sind in Abbildung 2.8 für das Element Blei in Abhängigkeit von der Quantenenergie $h\nu$ dargestellt.

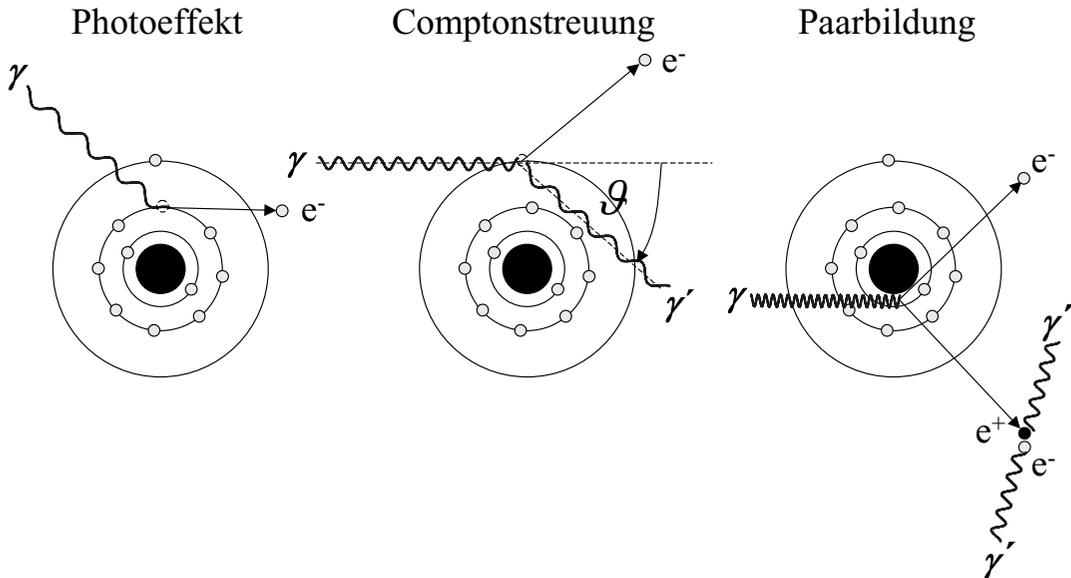


Abb. 2.7: Wechselwirkungsprozesse zwischen Röntgenstrahlung und Materie. Bei der Paarbildung ist zu beachten, dass das auftretende Positron e^+ im Verlauf seines weiteren Weges durch die Materie sehr schnell auf ein Elektron trifft und dort unter Aussendung zweier Gammaquanten zerstrahlt.

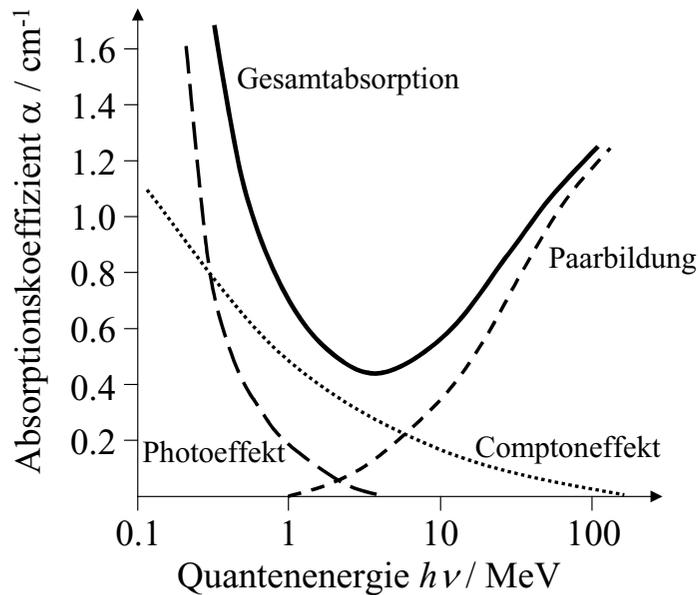


Abb. 2.8: Absorptionskoeffizient von Blei in Abhängigkeit von der Quantenenergie. Unterhalb von Quantenenergien der Größenordnung 0.5 MeV überwiegt der Photoeffekt. Paarbildung kann wegen Gleichung (2.21) nur bei Quantenenergien $h\nu > 1 \text{ MeV}$ auftreten (nach *W. Demtröder* [Dem00]).

Anders als in Blei ist in Wasser die Comptonstreuung bei typischen Beschleunigungsspannungen von $U_B = 100$ kV der beherrschende Effekt [Dös01]. Da der Mensch überwiegend aus Wasser besteht, hat dies Konsequenzen für den Strahlenschutz, denn der gesamte bestrahlte Körper wird durch das in Gleichung (2.18) auftretende, sekundäre Röntgenquant der Energie $h\nu'$ selbst zu einer Röntgenquelle.

Diese Streustrahlung belastet andere Organe des Patienten aber auch das Klinikpersonal, das entsprechend geschützt werden muss. Abbildung 2.9 zeigt die Streustrahlung (a) des Patienten schematisch. Daneben sieht man ein so genanntes Scatterdiagramm in Aufsicht- (b) und Seitendarstellung (c). Das Scatterdiagramm stellt die Isolinien der auftretenden Streustrahlungsintensität bei einem Computertomographen dar.

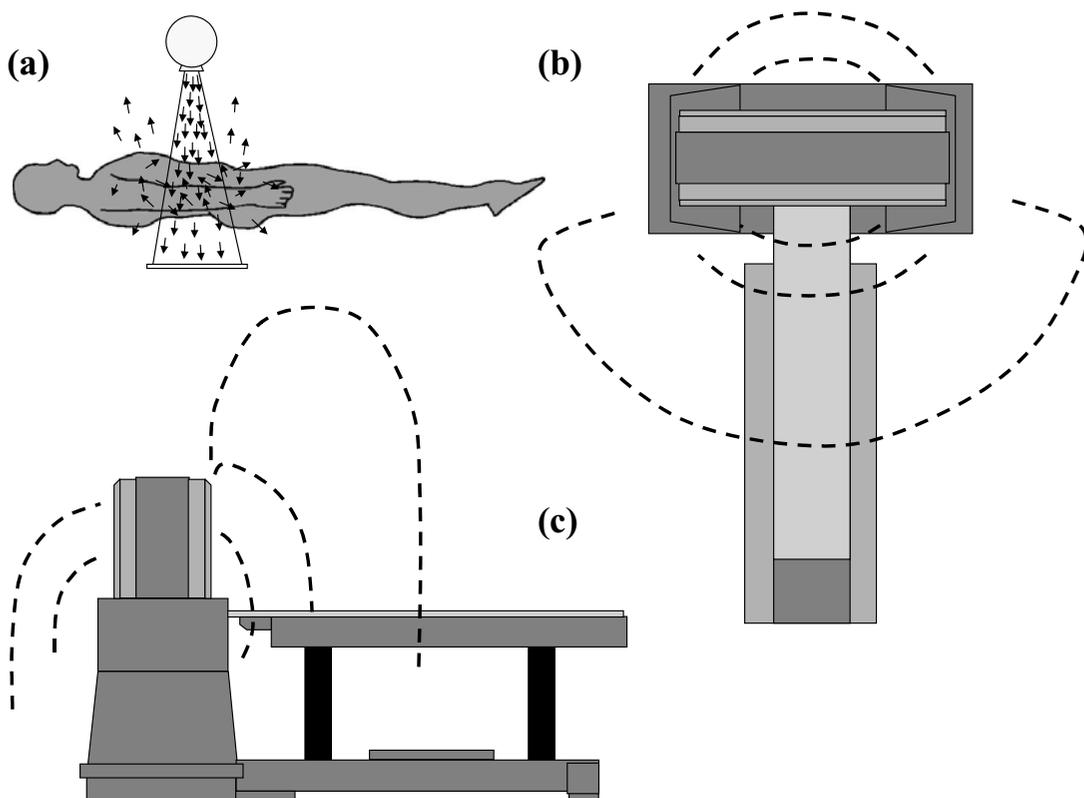


Abb. 2.9: Durch Streustrahlung wird der Patient (a) selbst zum Röntgenstrahler, so dass auch nicht direkt bestrahlte Organe belastet werden. Auf der Basis so genannter Scatterdiagramme (b) und (c) muss für Computertomographen der Strahlenschutz geplant werden.

Tatsächlich ist das mathematische Problem bei der computertomographischen Bildgebung nicht so einfach, wie die Gleichung (2.15) es nahe legt, denn bei anatomischen Objekten ist der Schwächungskoeffizient μ aufgrund der oben besprochenen Unterschiedlichkeit der physikalischen Abschwächungsprozesse in der Regel räumlich nicht konstant. Die räumliche Verteilung des Schwächungskoeffizienten, das heißt, die Zuordnung verschiedener Koeffizienten zu den unterschiedlichen anatomischen Objekten, macht daher die Computertomographie erst diagnostisch interessant.

Physikalisch wird die räumliche Variation des Schwächungskoeffizienten durch die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten vom durchdrungenen Material verursacht. Experimentell findet man, dass sich die Änderung des Absorptionskoeffizienten mit der Proportionalität

$$\alpha \propto Z^4 \lambda^3 \quad (2.23)$$

beschreiben lässt, wobei die Z^4 -Abhängigkeit und die dazugehörige Proportionalitätskonstante, in der sich auch die Dichte des Stoffes linear niederschlägt, die Stoffabhängigkeit beinhaltet. Diese starke Abhängigkeit der Absorption von der Ordnungszahl macht man sich auch bei Röntgenkontrastmitteln zunutze, die auf Jod ($Z = 53$) oder Barium ($Z = 56$) basieren [Lau99].

Blei ($Z = 82$) schirmt also nach Gleichung (2.23) etwa 1580mal besser Röntgenstrahlung ab als Aluminium ($Z = 13$). Zu beachten ist dabei, dass der mit der Dichte ρ des Stoffes normierte Absorptionskoeffizient, der so genannte Massenabsorptionskoeffizient

$$\kappa = \alpha / \rho \quad (2.24)$$

nur mit Z^3 wächst, weil die Atommassen proportional zur Ordnungszahl Z sind [Dem00].

Wenn man den Absorptionskoeffizienten über einen größeren Wellenlängenbereich misst, so findet man den durch Gleichung (2.23) beschriebenen Verlauf. Bei bestimmten Wellenlängen treten aber Sprünge auf, die Absorptionskanten genannt werden. Abbildung 2.10 zeigt diese Kanten mit ihrer Feinstruktur für das Röntgenabsorptionsspektrum von Blei.

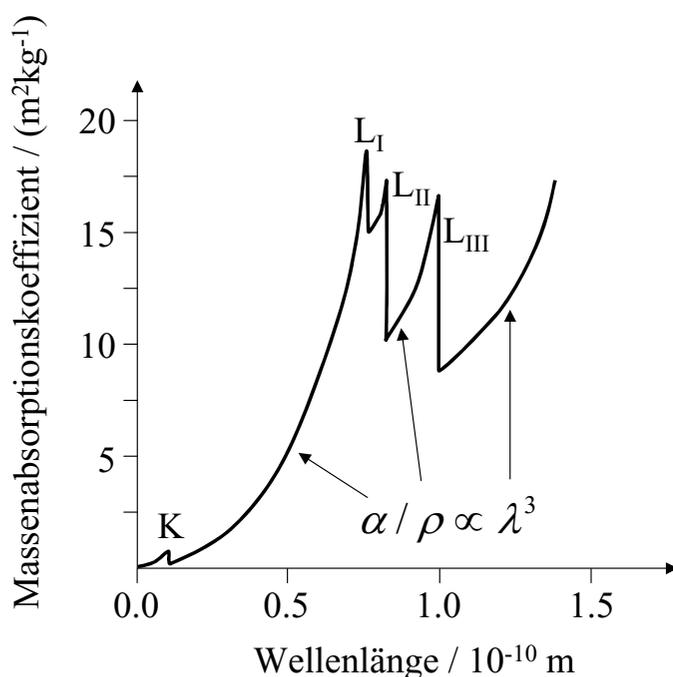


Abb. 2.10: Der Massenabsorptionskoeffizient für Blei (α/ρ gemessen in m^2/kg) ist hier in Abhängigkeit von der Röntgenwellenlänge dargestellt. Für die Absorptionsübergänge oberhalb der K-Schale gibt es eine Feinstruktur (nach *W. Demtröder* [Dem00]).

Um diese Kanten bei λ_k zu verstehen ($k = 1, 2, \dots$ zähle dabei die Kanten), muss man sich klar machen, dass für Wellenlängen $\lambda \leq \lambda_k$ die Energie der Röntgenstrahlung ausreicht, um Elektronen aus unteren Schalen anzuregen, bzw. das Atom zu ionisieren. Für $\lambda > \lambda_k$ reicht die Quantenenergie gerade nicht mehr aus, um ein Elektron in einen quantenmechanisch erlaubten, angeregten Zustand zu heben, daher wird das durchdrungene Material an dieser Kante schlagartig transparenter. Dies wiederholt sich bei steigender Wellenlänge für die Elektronen der L-, M-, ... Schale. Für alle Schalen oberhalb der K-Schale gibt es zusätzlich eine Feinstruktur⁷.

Mathematisch bedeutet diese komplexe Abhängigkeit der Absorption von der Art des durchdrungenen Stoffes, dass man die Differentialgleichung (2.10) nicht vollständig integrieren kann. Vielmehr erhält man als Lösung für die Intensität nach dem Durchlaufen der Strecke s den Ausdruck

$$I(s) = I(0)e^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta}, \quad (2.25)$$

der die unbekanntenen Schwächungskoeffizienten μ entlang eines Röntgenstrahls im Exponenten aufsummiert.

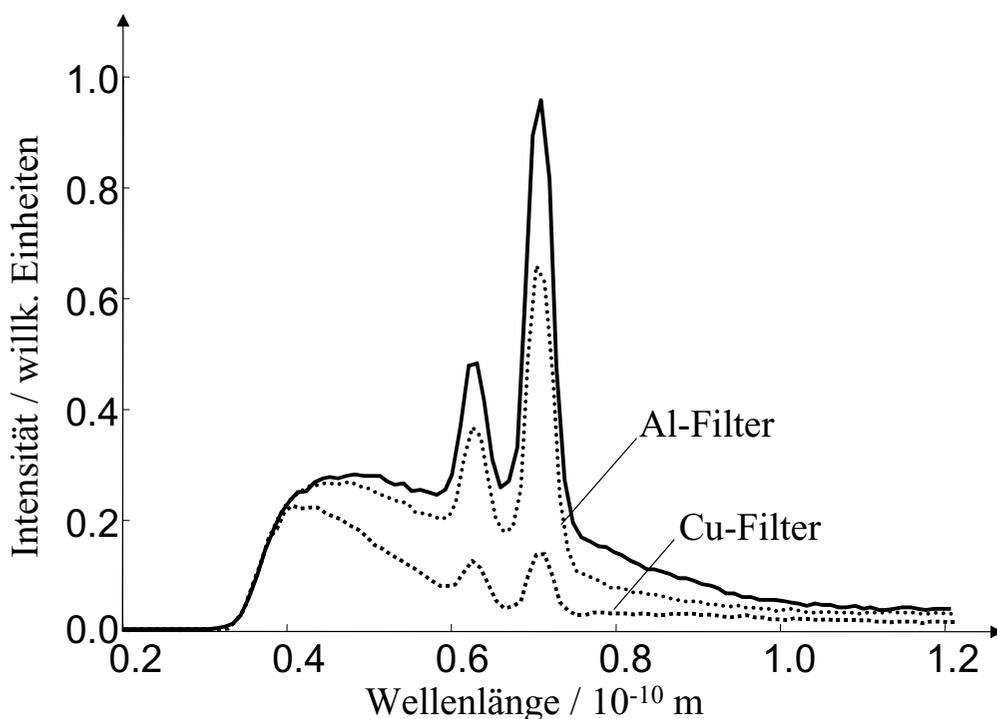


Abb. 2.11: Aufhärtung des Röntgenspektrums einer Molybdänanode durch Filterung der Strahlung mit einem Aluminium- und einem Kupferfilter. Die Wellenlängenabhängigkeit der Filterung ist gut zu erkennen. Bei dem Kupferfilter ist die hochenergetische Bremsstrahlung in ihrer Intensität sogar größer als die K_α - und die K_β -Linie.

⁷ Die Feinstruktur kommt durch die so genannte Spin-Bahn-Kopplung zustande.

Bei diesem Bild soll in diesem und den weiteren Kapiteln geblieben werden. Insbesondere wird man sich bei der Bildrekonstruktion für die Eigenschaften des negativen logarithmischen Quotienten von Ausgangs- zu Eingangsintensität

$$p(s) = -\ln\left(\frac{I(s)}{I(0)}\right) = \int_0^s \mu(\eta) d\eta \quad (2.26)$$

interessieren.

Es sei schon an dieser Stelle angemerkt, dass die Bildgüte bei der Computertomographie ganz spezifisch unter dem komplexen Verlauf der Schwächung in Abhängigkeit von der Wellenlänge leidet. Dadurch, dass Strahlung mit kleinerer Energie, also größerer Wellenlänge, stärker absorbiert wird als Strahlung mit höheren Energien, ändert sich das Spektrum der polychromatischen Röntgenstrahlung beim Durchlauf durch den Stoff. Es kommt zur so genannten Strahlaufhärtung, die bei der Rekonstruktion sehr spezifische Artefakte hinterlässt. Die Artefakte der Strahlaufhärtung werden in Kapitel 8.5.2 im Detail besprochen. Abbildung 2.11 zeigt den Intensitätsverlauf des Röntgenspektrums einer Molybdänanode, das durch Filterung mit jeweils einem Aluminium- bzw. Kupferfilter aufgehärtet wurde. Bei der Computertomographie muss man sich mit einer Diskretisierung der rekonstruierten Bilder abfinden. Von dieser Diskretisierung ist physikalisch beim Durchgang des Röntgenstrahls durch die Materie natürlich nichts messbar. Dennoch kann man sich überlegen, wie die Gleichung für die Gesamtschwächung in diesem Fall aussieht. Wenn sich der Schwächungskoeffizient, so wie in Abbildung 2.12 schematisch dargestellt, nur in diskreten Schritten ändert, dann kann nämlich die Abschwächung der Intensität beim Durchlaufen des Gewebes auch ohne die Lösung einer Differentialgleichung eingesehen werden.

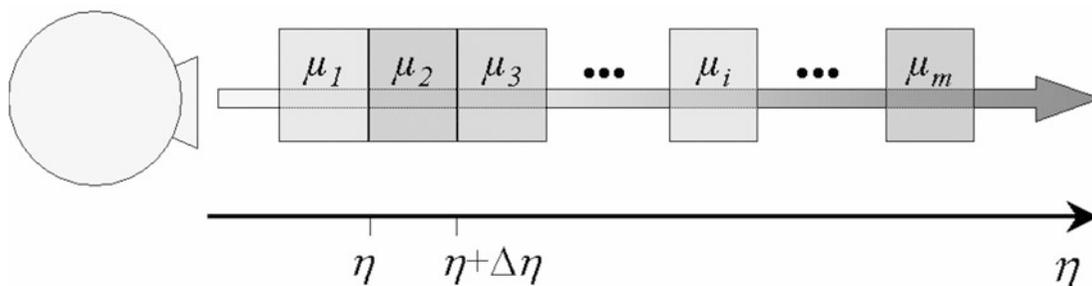


Abb. 2.12: Abschwächung eines Röntgenstrahls beim Durchlaufen diskret aufgebauter Materie.

Dabei ist folgende Abschwächung der Intensität der Röntgenstrahlung beim Durchlaufen von diskret aufgebauter Materie zu beobachten

$$I_{i+1} = I_i - \mu_i I_i \Delta\eta = I_i (1 - \mu_i \Delta\eta). \quad (2.27)$$

Das heißt, man sieht die Gesamtschwächung

$$I_m = I_0 (1 - \mu_1 \Delta\eta) (1 - \mu_2 \Delta\eta) (1 - \mu_3 \Delta\eta) \cdots (1 - \mu_i \Delta\eta) \cdots (1 - \mu_m \Delta\eta). \quad (2.28)$$

Wenn die einzelnen Segmente des Gewebes sehr schmal sind, bzw. $\Delta\eta$ sehr klein ist, denn dann kann man die Klammerausdrücke als Taylorentwicklung der Exponentialfunktion interpretieren, mit

$$e^{-\delta} \approx 1 - \delta \quad (2.29)$$

für kleine δ . Damit erhält man

$$I_m \approx I_0 e^{-\mu_1 \Delta\eta} e^{-\mu_2 \Delta\eta} e^{-\mu_3 \Delta\eta} \dots e^{-\mu_l \Delta\eta} \dots e^{-\mu_m \Delta\eta} \quad (2.30)$$

und letztlich für sehr kleine δ auch die Gleichheit

$$I_m = I_0 e^{-\sum_{i=1}^m \mu_i \Delta\eta} \quad (2.31)$$

Diese Sichtweise hängt eng mit der statistischen Betrachtung der Absorptionsprozesse zusammen, die am Ende dieses Kapitel gezeigt wird. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Schwächungswerte gut zu interpretieren sind, was auch den Erfolg der Computertomographie begründet. Hohe Werte von μ sind auf eine erhöhte Dichte oder auf eine erhöhte Ordnungszahl der zu analysierenden Objekte zurückzuführen. Abbildung 2.13 fasst die Schwächungsursachen schematisch zusammen.

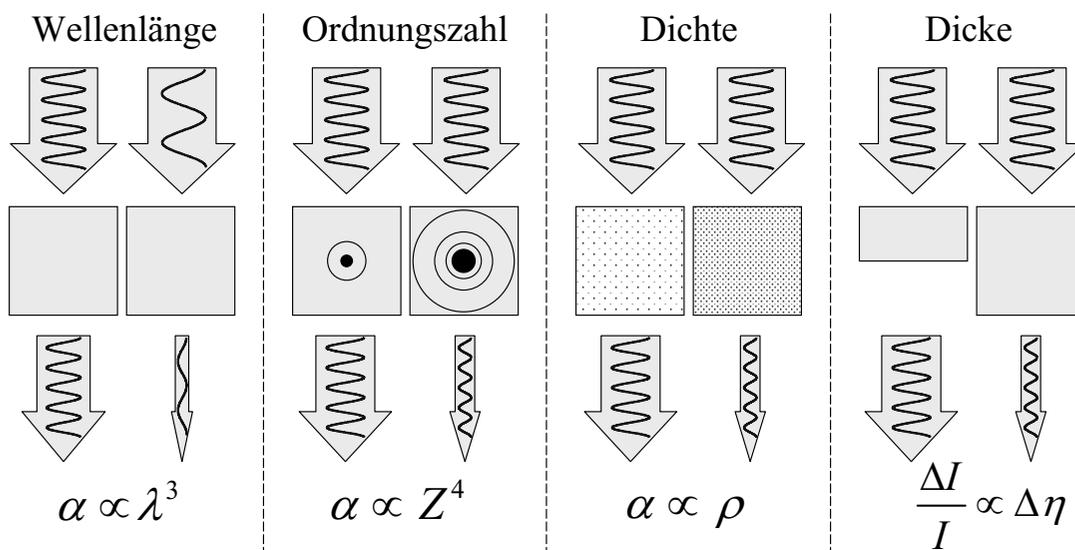


Abb. 2.13: Schematische Zusammenfassung der Schwächungsursachen für Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie (nach *T. Laubenberger und J. Laubenberger* [Lau99]).

Die Kapitel 5, 6 und 7 werden sich mit der Frage beschäftigen, wie man überlagerungsfreie Schnittbilder $\mu(x,y)$ erhält. Dazu muss der Projektionsvorgang der Gleichungen (2.25) bzw. (2.31) rückgängig gemacht werden.

2.3 Detektion von Röntgenstrahlung

Auch die Detektion von Röntgenstrahlung beruht auf den oben beschriebenen Effekten der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie. Das heißt, die Röntgenquanten werden nicht direkt gemessen, sondern nur die Wechselwirkungsprodukte mit Materie wie zum Beispiel Photoelektronen.

2.3.1 Gasdetektoren

Da Röntgenstrahlung die Fähigkeit besitzt, Gase zu ionisieren, liegt es nahe, Detektoren zu verwenden, die auf diesem physikalischen Sachverhalt basieren. Das Geiger-Müller-Zählrohr ist einer der bekanntesten Detektoren für ionisierende Strahlung. Tatsächlich wurden die ersten Versuche zur Computertomographie auch mit Geiger-Müller-Zählrohrdetektoren realisiert. Auf dem gleichen physikalischen Prinzip basieren auch die Gasdetektoren, die in Tomographen der dritten Generation zum Einsatz kommen. Die Gleichung



beschreibt dabei den ersten Teil des Detektionsprozesses. Die ionisierten Xenonatome und die Elektronen werden durch eine Hochspannung zur Kathode bzw. Anode beschleunigt und der Strom dort als Maß für die Intensität der eintretenden ionisierenden Strahlung gemessen. Abbildung 2.14 zeigt den schematischen Aufbau eines Xenondetektors.

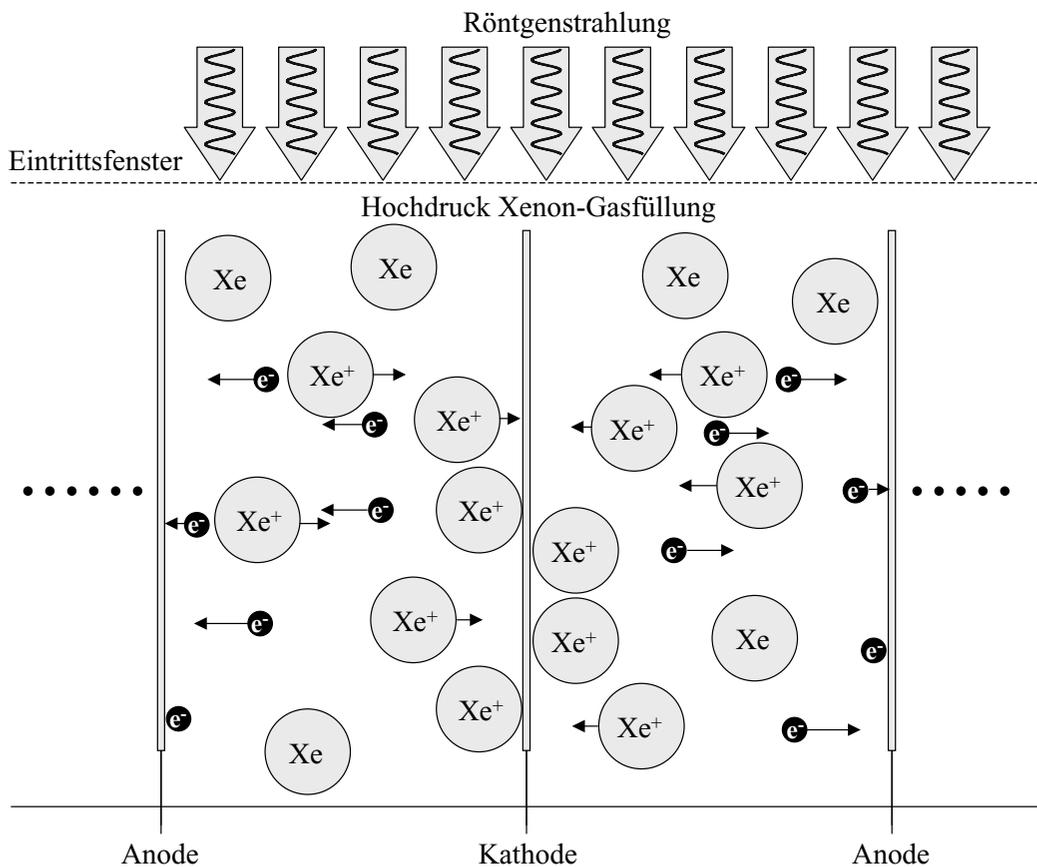


Abb. 2.14: Schematische Darstellung eines Ausschnittes eines Xenondetektorarrays. Das Xenongas steht unter hohem Druck und ist gleichmäßig in den einzelnen Ionisationskammern verteilt.

Die schwache Quanteneffizienz des Ionisationsprozesses kann durch große Kammern ausgeglichen werden. Diese Höhe der Kammern bietet den Vorteil der Richtungsselektivität, denn je länger der Weg der Quanten durch das Gas ist, desto größer ist die Ionisierungswahrscheinlichkeit. Quanten mit schrägem Einfall legen nur einen kurzen Weg in der Kammer zurück.

2.3.2 Szintillationsdetektoren

Die meisten Computertomographen sind heute mit Szintillationsdetektoren ausgestattet. Ein solcher Detektor besteht im Wesentlichen aus einem Kristall und einer Photodiode. Die einfallende (kurzwellige) Röntgenstrahlung wird in dem Szintillationskristall zunächst in (langwelliges) Licht umgewandelt. Diese Kristalle bestehen zum Beispiel aus Cäsiumjodid, Wismutgermanat oder auch Cadmium-Wolframat. Für die Wahl der Kristalle spielen Anforderungen wie die Effizienz der Umwandlung von Röntgenstrahlung in Licht aber auch die Abklingzeit bzw. das Nachleuchten⁸ der Kristalle eine große Rolle. Für sehr schnelle Abklingzeiten, die heute bei den Subsekundenscannern benötigt werden, kommen auch Keramiken wie Gadoliniumoxysulfid (Gd_2O_2S) zum Einsatz [Kal00]. Abbildung 2.15 zeigt den schematischen Aufbau eines Szintillationsdetektorblocks. Innerhalb eines Blockes sind beim Philips Tomoscan EG 16 Einzeldetektorelemente untergebracht. Damit möglichst nur Strahlung von der direkten Verbindungslinie zwischen Röntgenfokus und Detektor in den Kristall einfällt, verwendet man lamellenförmige Abgrenzungen zwischen den einzelnen Kanälen. Die ohne dieses so genannte Streustrahlenraster, das einen detektorseitigen Kollimator darstellt, würde einfallende Störstrahlung die Bildqualität erheblich beeinträchtigen.

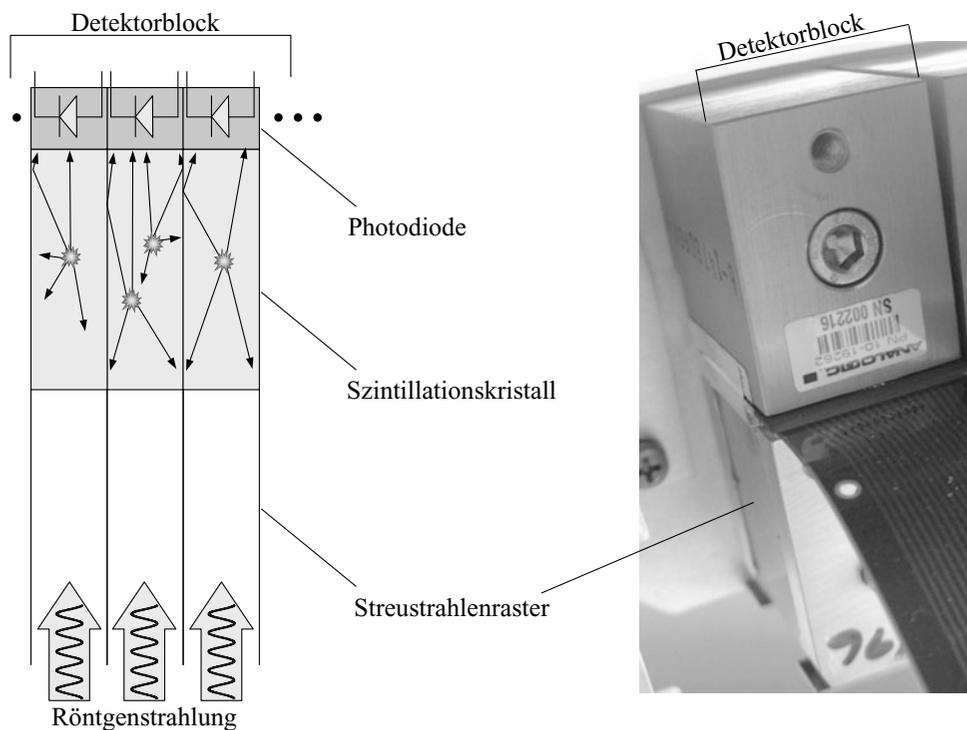


Abb. 2.15: Darstellung eines Detektorblocks mit 16 Kanälen. Die einzelnen Kanäle sind mit einem lamellenförmigen Streustrahlenraster voneinander getrennt. In einem Szintillationskristall wird durch Röntgenstrahlung Licht erzeugt, das durch die Photodiode detektiert wird.

⁸ Das Nachleuchten wird häufig auch im deutschen Sprachraum *Afterglow* genannt.

Ein Nachteil des Streustrahlenkollimators liegt auf der Hand. Durch die zur Abschirmung gestreuter Röntgenstrahlung notwendige Lamellendicke von etwa 0.1 mm hat der Detektor nur eine geometrische Gesamteffizienz von 50-80 % [Kal03]. Die Toträume reduzieren das Auflösungsvermögen. Die einzelnen Detektorblöcke sind auf einem Kreisabschnitt an der sich drehenden Abtasteinheit angebracht. Dies ist in Abbildung 2.16 am Scanner der so genannten „dritten Generation“ exemplarisch gezeigt.

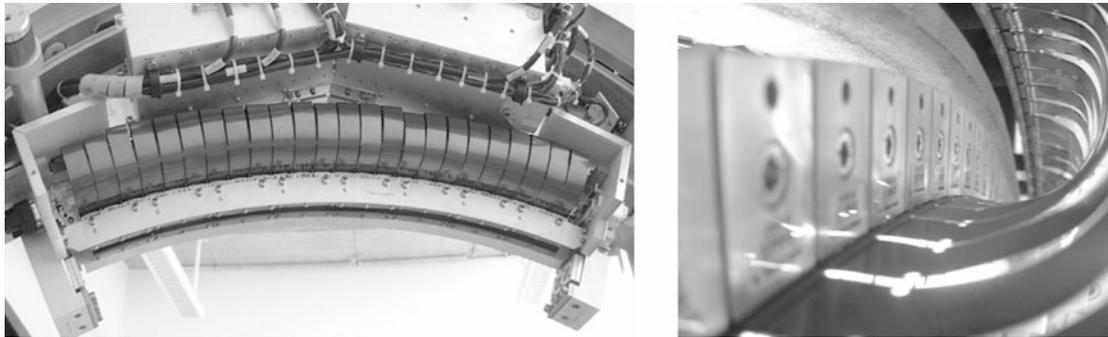


Abb. 2.16: Detektorarray beim kompakten Philips Tomoscan EG. Links: Flachbanddatenkabelverbindungen der 24 Detektorblöcke mit jeweils 16 Einzelkanälen oberhalb des Streustrahlenrasters. Rechts: Anordnung der einzelnen Detektorblöcke auf der Abtasteinheit entlang eines Kreisbogens.

2.3.3 Festkörper-Flächendetektoren

Die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Kristall- bzw. Keramikedektoren können durch Aneinanderreihung leicht zu mehrzeiligen Detektorarrays aufgerüstet werden. Die zentrale Forderung hierbei ist, dass die Toträume der Arrays möglichst klein bleiben. Quantitativ wird dies durch den so genannten Füllfaktor gemessen, der weiter unten in diesem Abschnitt definiert wird. Für die Xenonedektoren ist dies in kompakter Bauweise nicht möglich. Daher bestehen fast alle Mehrzeilensysteme aus Szintillationsdetektoren.

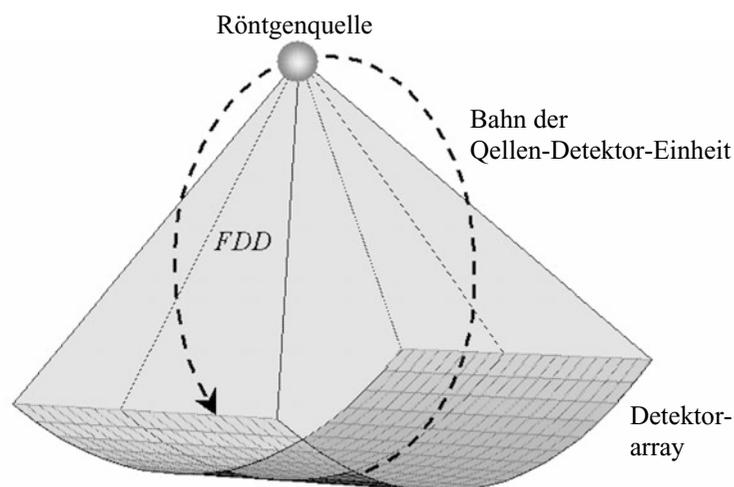


Abb. 2.17: Kegelstrahlbeleuchtung eines zylindrischen Detektors. Das Multiarraysystem bildet einen Abschnitt eines Zylindermantels, dessen Zentrum in der Röntgenquelle liegt. Das Quelle-Detektor-System mit dem Durchmesser FDD (Fokus-Detektor-Distanz) dreht sich auf einem Kreis (gestrichelte Linie) um das Isozentrum in der Mitte des Messfeldes.

Abbildung 2.17 zeigt ein Kegelstrahl-Detektorsystem schematisch. Im Gegensatz zu den im technischen Einsatz häufig vorkommenden planaren Detektoren, sind in medizinischen Anwendungen zurzeit die zylindrischen Anordnungen in der Überzahl. So wie in Abbildung 2.17 gezeigt, bildet das Multiarraysystem ein Segment eines Zylindermantels, dessen Zentrum in der Röntgenquelle liegt. Wenn die Anzahl der Zeilen dieser Detektoren so groß wird, dass die Neigung der zu rekonstruierenden Schicht nicht mehr zu vernachlässigen ist, sind größere Anstrengungen in der Rekonstruktionsmathematik erforderlich. Darauf wird in Kapitel 7 im Detail eingegangen. Diese Anstrengungen werden aber mit einer verbesserten Bildqualität belohnt.

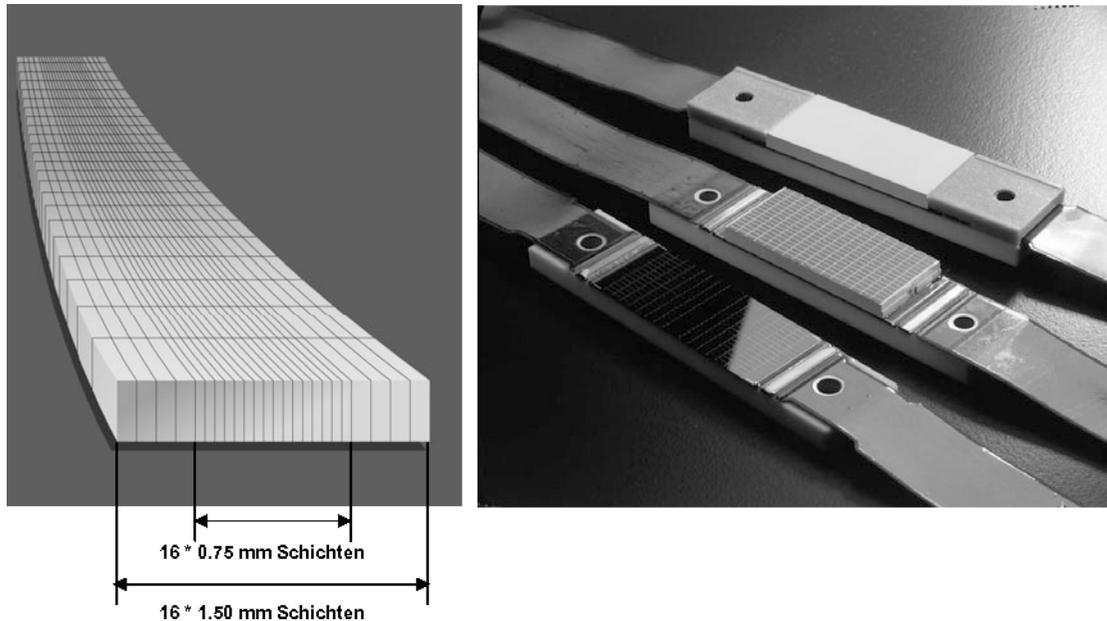


Abb. 2.18: Detektortypen für die Multi-Schicht-Technologie (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions links und General Electric Medical Systems rechts).

Abbildung 2.18 zeigt die verschiedenen Bauformen der Multizeilendetektoren von Siemens (links) und General Electric (rechts). Der Siemensdetektor ist ein so genannter UFCTM adaptiver Arraydetektor. Er ist so aufgeteilt, dass entweder 16 Schichten mit 0.75 mm Schichtdicke oder 16 Schichten mit 1.5 mm Schichtdicke genutzt werden können. Erreicht wird das durch die paarweise Zusammenschaltung der mittleren 16 Segmente. Die Detektortypen von General Electric besitzen eine gleichmäßige räumliche Aufteilung und können ebenfalls elektronisch so zusammengefasst werden, dass sich die gewünschten Schichtdicken ergeben.

Wird bei 16-Zeilen-Detektoren die Neigung der Schichten im Röntgenkegel innerhalb des Rekonstruktionsalgorithmus nicht berücksichtigt, dann ergeben sich Bildfehler, die in der diagnostischen Anwendung inakzeptabel sind. Da nun andererseits die Rekonstruktionsmathematik für eine echte Kegelstrahlrekonstruktion, die diese Artefakte vermeiden kann, ohnehin ein Umdenken in der praktischen Implementierung erfordert, ist es nahe liegend, das Mehrschichtenprinzip bei den Detektoren zu verlassen und direkt zu Flächendetektoren überzugehen.

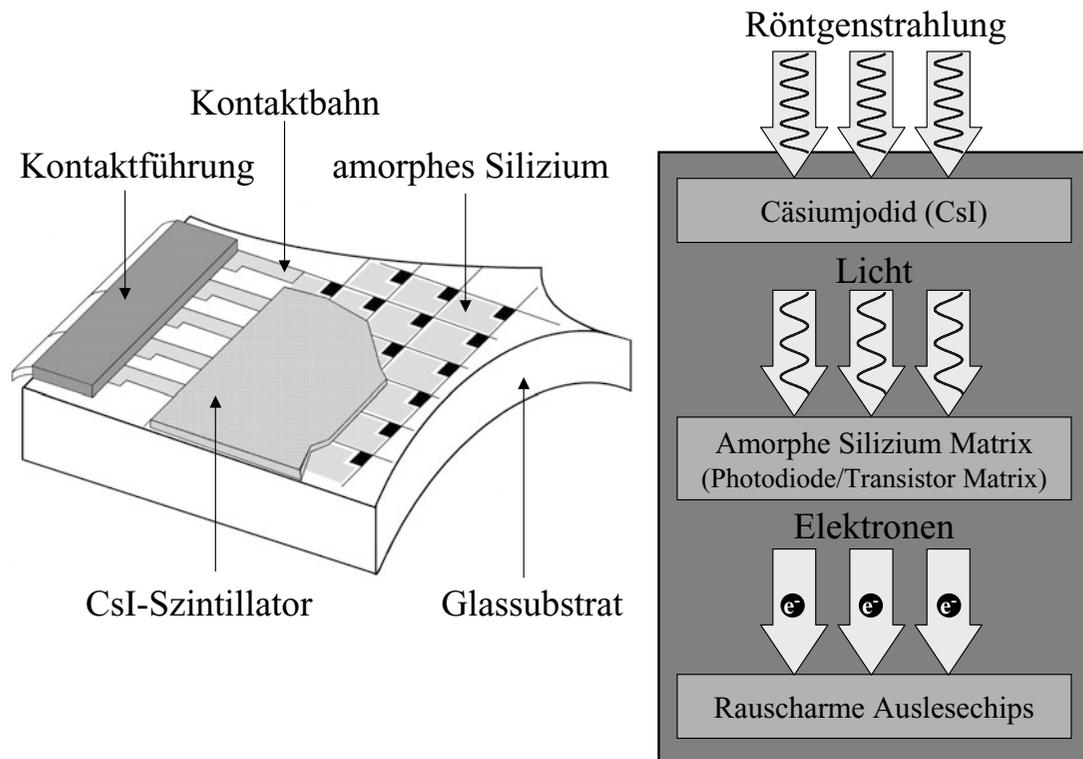


Abb. 2.19: Links: Aufbau eines digitalen Flachbilddetektors. Rechts: Schematische Darstellung der Funktionsweise des Detektors (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems; G. Brunst [Bru02]).

In Abbildung 2.19 ist der Aufbau eines solchen digitalen Flächendetektors am Beispiel des Cäsiumjodiddetektors von General Electric Medical Systems gezeigt. Sein Kernstück besteht aus einem Glassubstrat, auf dem eine Matrix aus 2048 x 2048 Sensoren mit einer Größe von je 200 μm aufgebracht ist. Dies geschieht in Dünnschichtbeschichtungstechnik monolithisch, so dass kein Aneinanderstückeln mehrerer kleinerer Panels erforderlich ist.

In Kombination mit der Photolithographie sowie weiterer Ätzschritte ist diese Technik der übliche physikalisch-chemische Weg, der in der Mikroelektronik besprochen wird, um sehr feine Strukturen herzustellen. Mit dieser Verfahrensweise wird ein Detektorfeld mit sehr großem Füllfaktor

$$f = \frac{\text{sensitive Fläche des Sensors}}{\text{Fläche des Sensors}} \quad (2.33)$$

erzeugt, wie dies mit den Detektortypen aus Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 nicht möglich wäre. Abbildung 2.20 zeigt den schematischen Aufbau des Detektorpanels. Jedes einzelne Sensorelement besteht aus einer Photodiode aus amorphem Silizium und einem Dünnschichttransistor (TFT)⁹. Auf die entstehende Pixelmatrix¹⁰ ist eine röntgenempfindliche Szintillationsschicht aus Cäsiumjodid (CsI) aufgebracht. Am Rand des Detektorfeldes sind Multi-Chip-Module als Ausleseelektronik angebracht.

⁹ TFT: Thin-Film Transistor

¹⁰ *Pixel* ist ein Kunstwort, das sich aus *Picture x Element* zusammensetzt.

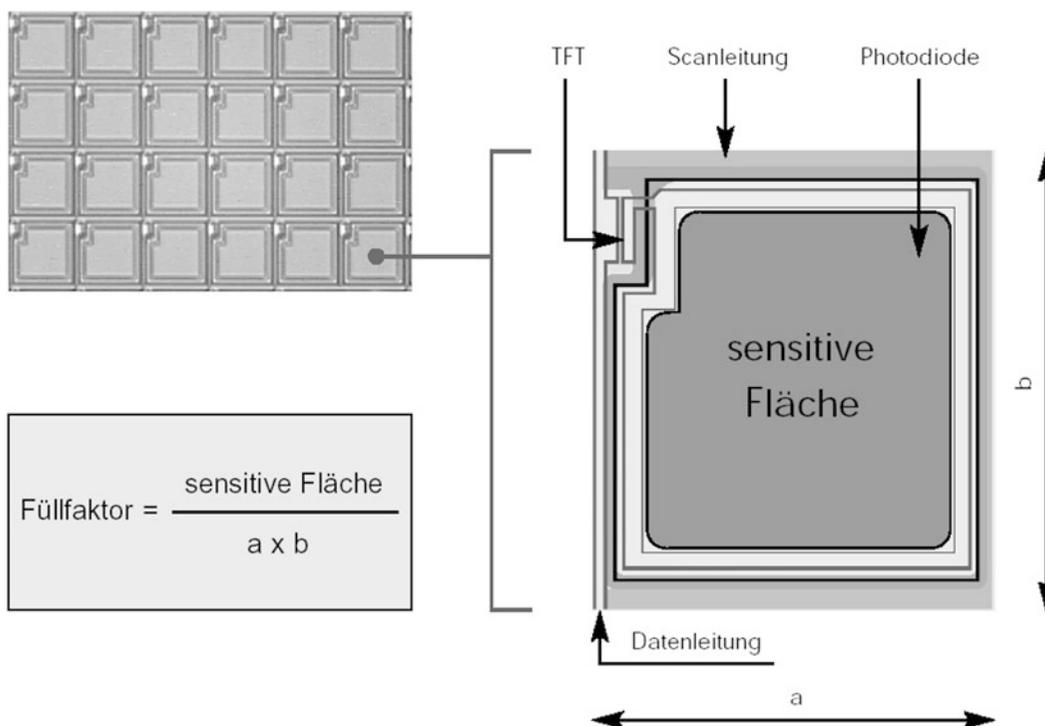


Abb. 2.20: Schematischer Aufbau eines Detektorfeldes und eines Bildelementes aus diesem Feld. Von großer Bedeutung für die Qualität eines Detektors ist die Minimierung des toten Raumes zwischen den eigentlich röntgensensitiven Flächen. Das Maß für diese Qualität ist der so genannte Füllfaktor, der die röntgenempfindliche Fläche ins Verhältnis zur Gesamtfläche des Sensors setzt (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: G. Brunst [Bru02]).

In Abbildung 2.19 rechts ist die schematische Funktionsweise des Sensors dargestellt. Das einfallende Röntgenlicht wird zunächst vom CsI-Szintillator in Licht umgewandelt, das zu den darunter liegenden Photodioden weitergeleitet wird. Die Photonen werden in den Photodioden absorbiert und erzeugen dort eine elektrische Ladung, die der Intensität der Röntgenstrahlung proportional ist. Während der Belichtung wird die Ladung in der Photodiode integriert und gespeichert. Der eigentliche Auslesevorgang wird durch den Dünnschichttransistor gestartet, der die Ladung über die Datenleitung zur Ausleseelektronik schaltet. Dort finden eine Verstärkung und die Analog-Digital-Wandlung statt. Abbildung 2.21 zeigt einen unkonfektionierten und einen für die Applikation bereits konfektionierten Flächendetektor. Seine 4.194.304 Pixel sind auf einer quadratischen Fläche von 41 cm x 41 cm untergebracht.

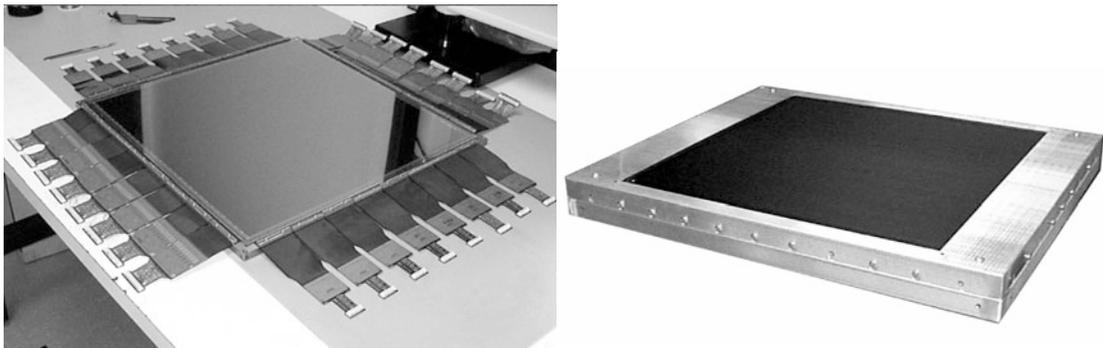


Abb. 2.21: Realisierung eines 41 cm x 41 cm großen Flächendetektors mit 2048 x 2048 Pixeln. Links: Unkonfektioniert mit den Datenleitungen zur Auswertelektronik. Rechts: Ein für die Applikation bereits konfektioniertes Panel (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: G. Brunst [Bru02]).

Der Flächendetektor besitzt eine über sehr weite Belichtungsbereiche lineare Dynamikkennlinie und einen sehr hohen Dynamikumfang. Hoch- und niedrigbelichtete Bereiche haben so die volle Kontrastinformation, was zu einer ausgezeichneten Hochkontrastauflösung führt. Abbildung 2.22 zeigt einen schematischen Vergleich der beiden Dynamikkennlinien¹¹. Im Bereich der Niedrigkontrastauflösung erreichen heutige Systeme allerdings noch nicht die Leistungsfähigkeit der dedizierten CT-Detektoren aus den vorangegangenen Kapiteln [Kal03].

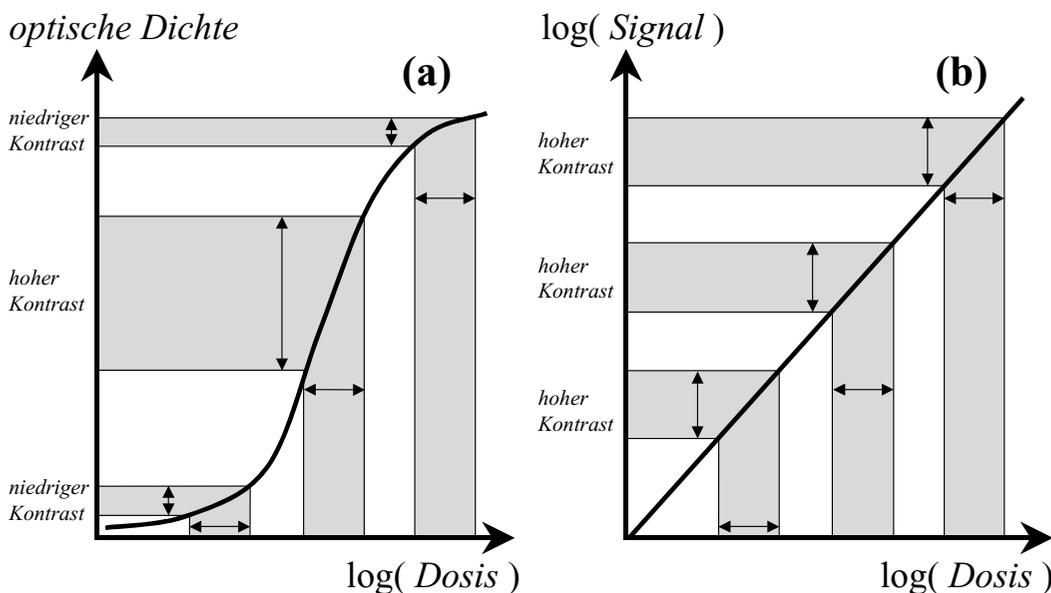


Abb. 2.22: Vergleich der Dynamikkennlinien eines Film-Folien-Systems (a) und eines digitalen Detektors (b). Neben der gewünschten Linearität liefert der digitale Detektor auch einen großen Dynamikgesamtumfang von 300 – 10.000 : 1 gegenüber dem Film-Folien-System mit 25 – 100 : 1 (nach G. Brunst [Bru02]).

¹¹ Die Flächendetektoren wurden für einfache Radiographiesysteme entwickelt und sollen die Film-Folien-Systeme ablösen.

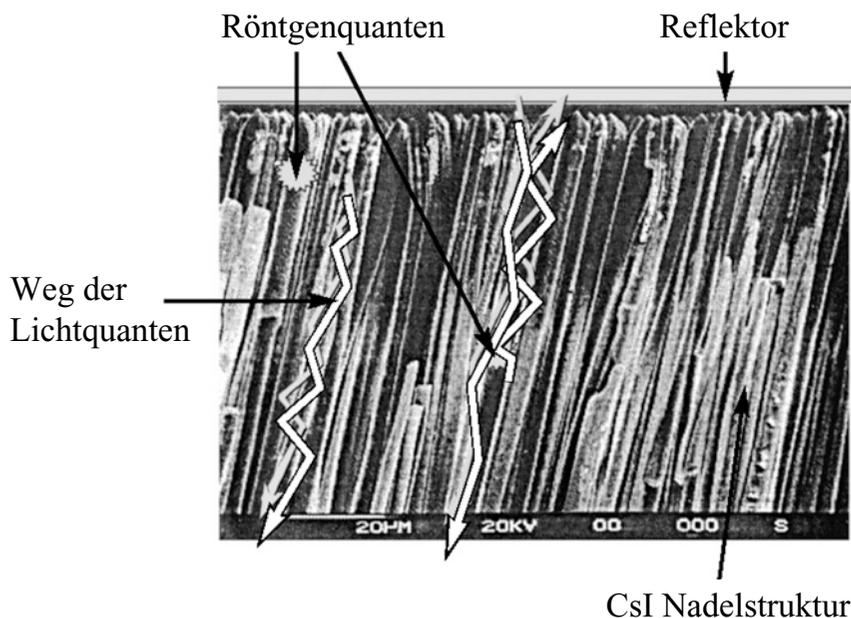


Abb. 2.23: Elektronenmikroskopische Aufnahme der Cäsiumjodid-Szintillationsschicht eines Bildelementes des digitalen Detektors (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: G. Brunst [Bru02]).

Die zweite für die spätere Bildqualität bedeutende Eigenschaft ist die exzellente Ortsauflösung. Um die Ortsauflösung zu optimieren wird das Cäsiumjodid in einem speziellen Aufdampfprozess so auf die Matrix aufgebracht, dass es in direktem Kontakt mit der darunter liegenden Photodiodenmatrix kommt. Dabei gelingt es, das Cäsiumjodid in Form feiner Nadeln zu strukturieren. Abbildung 2.23 zeigt die Nadelstruktur des CsI in einer elektronenmikroskopischen Aufnahme. Werden innerhalb dieser Struktur durch einfallende Röntgenquanten Photonen freigesetzt, dann wirken die Nadeln wie kleine Lichtfasern, so dass die Photonen sich überwiegend entlang dieser Strukturen bewegen. Damit bewegen sie sich also entweder auf direktem Wege zur Photodiode oder zunächst in entgegengesetzter Richtung von der Photodiode weg, um an der Oberkante der CsI-Schicht reflektiert zu werden und dann zur Photodiode zu gelangen. Dieser Lichtleiteneffekt ist das Geheimnis der hohen Quanteneffizienz der digitalen Detektoren. Man kann nämlich so die röntgensensitive Schicht des Detektors sehr dick aufdampfen, ohne dass durch breitere Streuung die Ortsauflösung beeinträchtigt wird. Das Szintillationslicht bleibt durch die CsI-Fasern auf einen sehr kleinen Fleck auf der Photodiodenmatrix gebündelt.

Abbildung 2.24 zeigt einen digitalen Detektor auf einem experimentellen C-Bogensystem, mit dem Vorexperimente zur kegelstrahltomographischen Rekonstruktion durchgeführt werden. Solche Systeme sind klein im Vergleich zu kompletten Computertomographen, besitzen aber eine größere mechanische Instabilität. Dennoch sind sie als intra-operative Bildgebungsmodalität sehr gefragt, denn gerade im OP ist wenig Platz und man möchte die immer häufiger eingesetzten minimal-invasiven und endoskopischen Verfahren durch eine dreidimensionale Modalität unterstützen [Här99]. Gegenüber den normalen klinischen CTs ist zu berücksichtigen, dass das Messfeld bei Flachendetektoren typischerweise nur einen Durchmesser von etwa 30 cm oder weniger besitzt [Kal03].

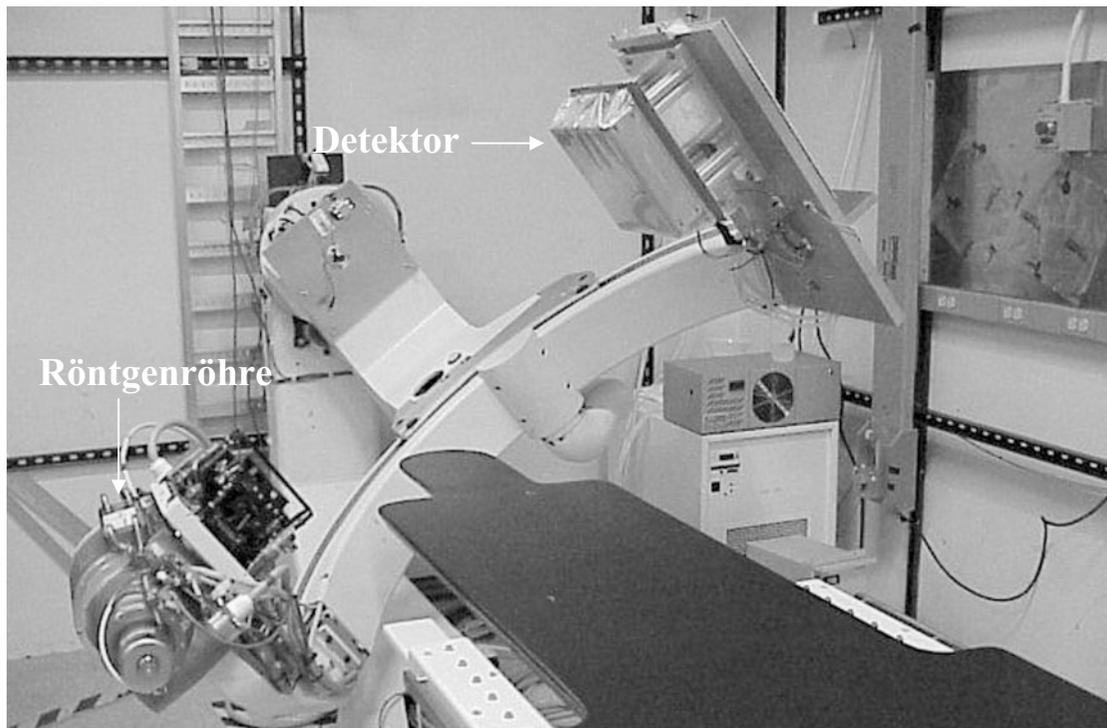


Abb. 2.24: Digitaler Flächendetektor auf einem experimentellen rotierenden C-Bogensystem zur Untersuchung von Kegelstrahl-Rekonstruktionsverfahren in den GE-Forschungslaboratorien (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems).

2.4 Statistik der Röntgenquanten

Röntgenstrahlung besteht aus Röntgenquanten, deren statistische Eigenschaften in vielen Bereichen der Signalverarbeitung von Bedeutung sind. Hier sind es zum Beispiel spezielle Rekonstruktionsverfahren, die die statistische Natur der Quanten zur Grundlage haben. Aber auch die Beurteilung der Bildqualität kommt nicht ohne die physikalisch korrekte Beschreibung der statistischen Rauscheigenschaften aus.

In den folgenden Abschnitten werden die statistischen Eigenschaften der Röntgenquelle und des Röntgendetektors betrachtet sowie das Lambert-Beersche Gesetz noch einmal unter statistischen Gesichtspunkten beleuchtet. Im letzten Abschnitt werden die beiden wichtigsten Momente einer poissonverteilten Zufallsvariablen erläutert.

2.4.1 Statistische Eigenschaften der Röntgenquelle

Rekonstruktionstechniken wie das Maximum-Likelihood-Verfahren, das in Kapitel 5.14 besprochen wird, basieren auf der genauen Kenntnis der Anzahl der Quanten. Die Verteilungsfunktion geht dabei explizit in das Verfahren mit ein. Daher ist es erforderlich, die Quantennatur der Röntgenstrahlen mathematisch zu modellieren.

Dazu betrachtet man das in Abbildung 2.4 eingezeichnete Fokusgebiet auf dem Anodenteller genauer. Innerhalb des Fokusvolumens befinden sich N Atome des Anodenmaterials, die mit Elektronen beschossen werden. Jedes dieser N Atome habe die Wahrscheinlichkeit p (wobei

$0 \leq p \leq 1$) im Zeitintervall $[0, T]$ von einem Elektron so getroffen zu werden, dass ein Röntgenquant entsteht.

Nimmt man weiter an, dass jeder Stoßprozess statistisch unabhängig von jedem anderen Stoßprozess im Fokusvolumen ist, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit P , dass die Anzahl der Röntgenquanten \mathcal{N} gerade die Zahl n ist

$$P(\mathcal{N} = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}. \quad (2.34)$$

Das heißt, die Anzahl der Röntgenquanten ist eine binominalverteilte Zufallsvariable \mathcal{N} , wobei \mathcal{N} die Zahlen $\{0, \dots, N\}$ annehmen kann. Die Binominalverteilung ist aus Zählexperimenten bekannt. Sie beschreibt zum Beispiel wie viele Köpfe bei N statistisch unabhängigen Münzwürfen oben liegen. Insofern handelt es sich bei der Erzeugung von Röntgenquanten ebenfalls um ein solches Zählexperiment. Gleichung (2.34) stellt eine normierte Verteilungsfunktion mit der Eigenschaft

$$\sum_{n=0}^N P(\mathcal{N} = n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = (p + (1-p))^N = 1 \quad (2.35)$$

dar.

Eine realistische Größenordnung für die Anzahl der Targetatome im Fokusvolumen ist $N \approx 10^{23}$. Auf der anderen Seite ist die Trefferwahrscheinlichkeit p zwischen den Elektronen und den Targetatomen sehr klein. Oben wurde schon von dem massiven Wärmeproblem gesprochen, das mit dem geringen Wirkungsgrad von Röntgenröhren verbunden ist.

Betrachtet man den Grenzwert $N \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ und zwar dergestalt, dass $Np \rightarrow n^*$ geht, mit dem Erwartungswert der Anzahl der Röntgenquanten $E[\mathcal{N}] = n^* > 0$, dann kann man für die Binominalverteilung ebenfalls einen entsprechenden Grenzwert angeben. Nimmt man an, dass

$$Np = n^*, \quad (2.36)$$

dann erhält man für Gleichung (2.34)

$$\begin{aligned} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} &= \binom{N}{n} \left(\frac{n^*}{N}\right)^n \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)^{N-n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-(n-1))}{n!} \frac{1}{\left(\frac{n^*}{N}\right)^n} \frac{\left(1 - \frac{n^*}{N}\right)^N}{\left(1 - \frac{n^*}{N}\right)^n} \\ &= \frac{N(N-1)\cdots(N-(n-1))}{n! \left(\frac{N}{n^*} - 1\right)^n} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)^N \\ &= \frac{1}{n!} \frac{N^n (1-1/N)\cdots(1-(n-1)/N)}{N^n (1/n^* - 1/N)^n} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)^N \end{aligned} \quad (2.37)$$

Für den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ gilt nun, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^*}{N}\right)^N = e^{-n^*}, \quad (2.38)$$

so dass insgesamt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{1}{n!} (n^*)^n e^{-n^*} \quad (2.39)$$

folgt. Für eine große Anzahl von Targetatomen ist die Wahrscheinlichkeit P , dass die Anzahl der Röntgenquanten gerade die Zahl n ist, eine poissonverteilte Zufallsgröße \mathcal{N} , so dass

$$P(\mathcal{N} = n) = \frac{(n^*)^n}{n!} e^{-n^*} \quad (2.40)$$

gilt. Der Parameter n^* der Poissonverteilung – der Erwartungswert $E[\mathcal{N}]$ der Anzahl der Röntgenquanten – ist ein Maß für die Intensität der Röntgenstrahlung.

2.4.2 Statistische Eigenschaften des Röntgendetektors

Betrachtet man die Detektoren des Kapitels 2.3 noch einmal, so ist klar, dass auch im Detektor die einzelnen Detektionsprozesse statistisch unabhängig voneinander verlaufen. Solche Detektoren nennt die Statistik Bernoullidetektoren. Die Wahrscheinlichkeit, dass Röntgenquanten zum Beispiel ein Xenonatom ionisieren, sei wieder p (wobei $0 \leq p \leq 1$). Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass die in den Detektor einfallenden Röntgenquanten eine Poissonstatistik (2.40) aufweisen. Der Detektionsprozess muss insgesamt also das Ergebnis eines Bernoullidetektors bei einfallenden Quanten mit Poissonstatistik beschreiben.

Die Wahrscheinlichkeit, dass n Quanten detektiert werden, wenn N Quanten den Detektor erreichen, ist durch die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_D(n | N) = \begin{cases} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} & \text{für } n = 0, 1, \dots, N \\ 0 & \text{für } n > N \end{cases} \quad (2.41)$$

auszudrücken. Da die Quelle durch Gleichung (2.40) beschrieben wird, gilt insgesamt, dass die Wahrscheinlichkeit der Bernoullidetektion von n Quanten einer Poissonquelle durch

$$\begin{aligned}
P_{QD}(\mathcal{N} = n) &= \sum_{N=n}^{\infty} P_Q(N) P_D(n | N) = \sum_{N=n}^{\infty} \frac{\binom{n^*}{N}}{N!} e^{-n^*} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \\
&= e^{-n^*} \sum_{N=n}^{\infty} \frac{\binom{n^*}{N}}{N!} \frac{N(N-1)\cdots(N-(n-1))}{n!} p^n (1-p)^{N-n} \quad (2.42) \\
&= e^{-n^*} \sum_{N=n}^{\infty} \frac{\binom{n^*}{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}}{(N-n)! n!} = e^{-n^*} \sum_{N=n}^{\infty} \frac{(pn^*)^n \left((1-p)n^*\right)^{N-n}}{(N-n)! n!}
\end{aligned}$$

beschreiben wird. Der letzte Term ist etwas unübersichtlich. Daher zieht man die Faktoren aus der Summe heraus, die nicht mitsummiert werden, also

$$P_{QD}(\mathcal{N} = n) = e^{-n^*} \frac{(pn^*)^n}{n!} \sum_{N=n}^{\infty} \frac{\left((1-p)n^*\right)^{N-n}}{(N-n)!}. \quad (2.43)$$

Eine Verschiebung des Summationsindex liefert

$$P_{QD}(\mathcal{N} = n) = e^{-n^*} \frac{(pn^*)^n}{n!} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\left((1-p)n^*\right)^N}{N!}, \quad (2.44)$$

so dass die Summe die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion klarer darstellt. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
P_{QD}(\mathcal{N} = n) &= e^{-n^*} \frac{(pn^*)^n}{n!} e^{(1-p)n^*} \\
&= \frac{(pn^*)^n}{n!} e^{-n^*} e^{+n^*} e^{-pn^*} \quad (2.45) \\
&= \frac{(pn^*)^n}{n!} e^{-pn^*}
\end{aligned}$$

als Endergebnis, das besagt, dass die Anzahl der detektierten Quanten einer Poissonquelle wieder eine poissonverteilte Zufallsvariable ist. Das Ergebnis ist lediglich skaliert und zwar mit der Detektionswahrscheinlichkeit also der Effizienz des Detektors.

Das Ergebnis (2.45) ist von weitreichender Bedeutung, denn es erklärt, warum die Röntgenstrahlung nach dem Durchlaufen des zu untersuchenden Objektes immer noch eine Poissonstatistik aufweist. Die Schwächung der Röntgenintensität im Objekt ist ebenfalls als Binominalprozess aufzufassen, denn die Mechanismen sind aus statistischer Sicht dieselben wie im Detektor, so dass man insgesamt von kaskadierten Poissonprozessen spricht.

2.4.3 Schwächungsgesetz

Ähnlich wie im Kapitel 2.2 unterteilt man bei der statistischen Betrachtung des Schwächungsprozesses die durchstrahlte Strecke der Länge s in m Intervalle, die sich nicht überlappen und statistisch unabhängig sind. Abbildung 2.25 zeigt die geometrische Situation.

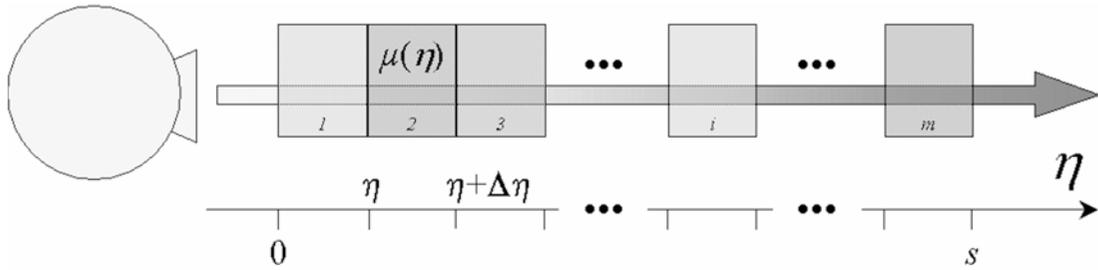


Abb. 2.25: Unterteilung der durchstrahlten Strecke in m disjunkte, statistisch unabhängige Intervalle.

Ein Röntgenquant, das an die Stelle η gelangt, besitzt die Wahrscheinlichkeit

$$p_t = 1 - \mu(\eta)\Delta\eta, \quad (2.46)$$

das Objektintervall 2 zu durchstrahlen und die Wahrscheinlichkeit

$$p_a = \mu(\eta)\Delta\eta, \quad (2.47)$$

darin absorbiert zu werden. Allgemein lautet die Transmissionswahrscheinlichkeit für das Röntgenquant im Intervall i

$$p_{t,i} \approx 1 - \mu(i\Delta\eta)\Delta\eta, \quad (2.48)$$

wobei

$$\Delta\eta = \frac{s}{m} \quad \text{und} \quad \eta = i \frac{s}{m} \quad (2.49)$$

und Gleichung (2.48) für den Grenzwert $m \rightarrow \infty$ exakt wird. Da die Intervalle sich nicht überlappen und als statistisch unabhängig voneinander betrachtet werden können, gilt für die Transmissionswahrscheinlichkeit durch die Gesamtstrecke

$$p_{t,s} \approx \prod_{i=1}^m p_{t,i}. \quad (2.50)$$

Betrachtet man den Logarithmus von Gleichung (2.50) so erhält man

$$\ln(p_{t,s}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \ln \left(1 - \mu \left(i \frac{s}{m} \right) \frac{s}{m} \right). \quad (2.51)$$

Die Reihenentwicklung des Logarithmus

$$\ln(1 \pm x) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^i x^i}{i} \quad \text{für } -1 < x < +1 \quad (2.52)$$

kann für den Grenzwert in Gleichung (2.51) nach dem linearen Glied abgebrochen werden, so dass

$$\ln(p_{t,s}) = - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \mu \left(i \frac{s}{m} \right) \frac{s}{m} \quad (2.53)$$

gilt, wobei die rechte Seite bei Anwendung des Grenzüberganges zum Integral

$$\ln(p_{t,s}) = - \int_0^s \mu(\eta) d\eta \quad (2.54)$$

konvergiert. Damit folgt unmittelbar, dass

$$p_{t,s} = e^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta} \quad \text{bzw.} \quad p_{a,s} = 1 - e^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta} . \quad (2.55)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass $n < N$ Quanten transmittiert bzw. absorbiert werden, wenn N Quanten durch das Objekt laufen, ist die schon bekannte Wahrscheinlichkeit

$$P(\mathcal{N} = n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}, \quad (2.56)$$

aus der man den Erwartungswert $E(\mathcal{N}) = n^*$ mit

$$E[\mathcal{N}] = n^* = \sum_{n=0}^N n P(n) = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = Np \quad (2.57)$$

[Bro79] berechnet. Gleichung (2.57) ist mit vollständiger Induktion zu zeigen. Physikalisch bedeutet Gleichung (2.57) dass man einen perfekten Detektor vorliegen hat, wenn $p = 1$ und dass der Detektor ausgeschaltet ist, wenn $p = 0$ [Eps03]. Insgesamt erhält man also als Erwartungswert der transmittierten Röntgenquanten

$$n^* = Np_{t,s} = Ne^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta} . \quad (2.58)$$

Da der Erwartungswert der Teilchenanzahl n^* als Intensität $I(s)$ interpretiert wird und damit N die Bedeutung der Eingangsintensität $I(0)$ erhält, erhält man schließlich

$$I(s) = I(0) e^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta}, \quad (2.25)$$

also auch mit der statistischen Betrachtung das Lambert-Beersche Gesetz. Dieses Ergebnis erhält man auch dann, wenn statt der Binominalverteilung (2.56) die Poissonverteilung (2.40) angesetzt wird, da die Poissonverteilung die Grenzverteilung der Binominalverteilung ist und damit denselben Erwartungswert für die Teilchenzahl besitzt. Dies wird im nächsten Abschnitt kurz erläutert.

2.4.4 Momente der Poissonverteilung

Wenn man die Qualität von computertomographischen Abbildungen quantifizieren möchte, dann muss man sich über die Momente der Poissonverteilung Gedanken machen. Dabei ist durch die Zahl

$$\mu = E[\mathcal{N}] = \sum_n \mathcal{N} P(\mathcal{N} = n) \quad (2.59)$$

das erste Moment bzw. der Erwartungswert der Zufallsgröße \mathcal{N} gegeben. Weiterhin ist das zweite zentrale Moment

$$\sigma^2 = E[(\mathcal{N} - \mu)^2] = \sum_n (\mathcal{N} - \mu)^2 P(\mathcal{N} = n), \quad (2.60)$$

die Varianz σ^2 von Bedeutung. Die Wurzel der Varianz ist die Standardabweichung σ .

Ein ganz wesentlicher Begriff der Bildbeurteilung ist das so genannte Signal-Rausch-Verhältnis (im Englischen *signal to noise ratio*), das über

$$SNR(\mathcal{N}) = \frac{\mu}{\sigma} \quad (2.61)$$

definiert ist.

Der Erwartungswert der Binominalverteilung wurde im vorhergehenden Abschnitt schon verwendet. Das Ergebnis aus Gleichung (2.57) war $E(\mathcal{N}) = Np$. Um den Erwartungswert einer poissonverteilten Zufallsgröße zu berechnen, geht man analog vor, so dass

$$\begin{aligned} E[\mathcal{N}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N} P(\mathcal{N} = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\binom{n^*}{n}}{n!} e^{-n^*} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\binom{n^*}{n}}{n!} e^{-n^*} \\ &= e^{-n^*} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\binom{n^*}{n}}{n!} = e^{-n^*} \sum_{n=1}^{\infty} n^* \frac{\binom{n^*}{n-1}}{(n-1)!} \\ &= n^* e^{-n^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n^*}{n}}{(n)!} = n^* e^{-n^*} e^{+n^*} = n^* \end{aligned} \quad (2.62)$$

gilt. Der Parameter n^* ist also unmittelbar der Erwartungswert. Das stimmt mit dem Ergebnis aus Gleichung (2.57) überein, denn es gilt ja ebenfalls Gleichung (2.36) für sehr große N und gerade für diesen Fall war die Poissonverteilung die Grenzverteilung der Binominalverteilung.

Auch die Varianz einer poissonverteilten Zufallsgröße ist explizit zu ermitteln. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
E[(\mathcal{N} - \mu)^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{N} - \mu)^2 P(\mathcal{N} = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - n^*)^2 \frac{(n^*)^n}{n!} e^{-n^*} \\
&= e^{-n^*} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(n^*)^n}{n!} - 2n^* \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n^*)^n}{n!} + (n^*)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^*)^n}{n!} \right\} \\
&= e^{-n^*} \left\{ n^* \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n^*)^{n-1}}{(n-1)!} - 2(n^*)^2 e^{+n^*} + (n^*)^2 e^{+n^*} \right\} \\
&= e^{-n^*} \left\{ n^* \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(n^*)^n}{(n)!} - 2(n^*)^2 e^{+n^*} + (n^*)^2 e^{+n^*} \right\} \\
&= e^{-n^*} \left\{ n^* \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(n^*)^n}{(n)!} + n^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^*)^n}{(n)!} - 2(n^*)^2 e^{+n^*} + (n^*)^2 e^{+n^*} \right\} \\
&= e^{-n^*} \left\{ (n^*)^2 e^{+n^*} + n^* e^{+n^*} - 2(n^*)^2 e^{+n^*} + (n^*)^2 e^{+n^*} \right\} \\
&= e^{-n^*} e^{+n^*} \left\{ (n^*)^2 + n^* - 2(n^*)^2 + (n^*)^2 \right\} = n^*
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Dieses Ergebnis charakterisiert die Poissonverteilung. Es gilt offenbar

$$\mu = \sigma^2, \tag{2.64}$$

das heißt, der Erwartungswert entspricht der Varianz der Zufallsgröße

$$E[\mathcal{N}] = E[(\mathcal{N} - \mu)^2]. \tag{2.65}$$

Damit gilt für das Signal-Rausch-Verhältnis poissonverteilter Signale

$$SNR(\mathcal{N}) = \frac{n^*}{\sqrt{n^*}} = \sqrt{n^*}. \tag{2.66}$$

Das Signal-Rausch-Verhältnis nimmt also mit der Wurzel der Quantenzahl zu.

3 Historie der Computertomographie

Konventionelle Röntgenverfahren haben den schwer wiegenden Nachteil, dass sie lediglich Projektionsbilder liefern. Dies führt natürlich zu einem Verlust an räumlicher Information (das kann eine geübte Radiologin oder ein geübter Radiologe aber verschmerzen und durch Erfahrung ergänzen). Darüber hinaus stellt die Projektion aber eine Mittelung dar. Man kann sich dies so vorstellen, dass der Körper in einzelne Schichtbilder zerlegt wird, die zur Betrachtung alle übereinander gelegt werden. Dies ist auch für Experten weniger gut zu verschmerzen, da mit der Mittelung ein erheblicher Kontrastverlust gegenüber dem Kontrast einer einzelnen Schicht verbunden ist.

In Abbildung 3.1 ist jeweils eine konventionelle Schädelaufnahme (links) und eine Knieaufnahme (rechts) zu sehen, die zwar die hohe Schwächung der Röntgenstrahlung im Bereich z.B. des Schädelknochens und ganz extrem die Schwächung im Bereich der Zahnfüllungen zeigt, die kleinen Röntgenschwächungsunterschiede, die die Weichteile charakterisieren, sind aber nicht zu erkennen. Insbesondere ist die Morphologie des Gehirns im Mittelungsprozess vollständig verloren gegangen. Beim Knie bilden sich durch die Überlagerung selbst die Knochenstrukturen nur mit geringem Kontrast ab.

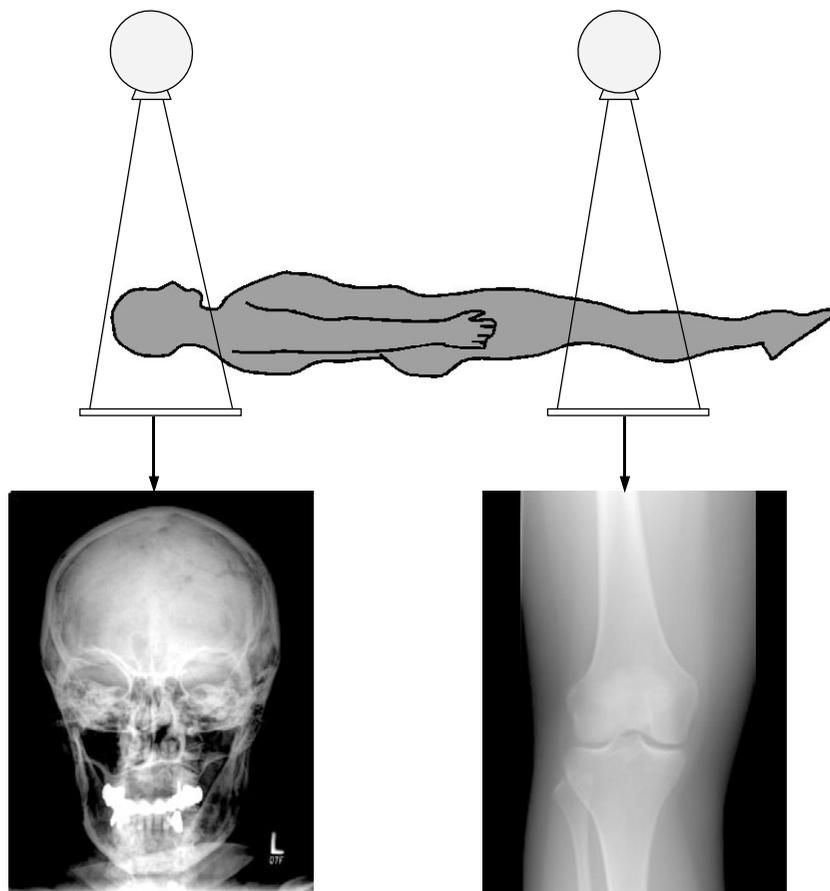


Abb. 3.1: Konventionelles Projektionsröntgen führt zu kontrastschwachen Bildern, die keine Weichteildiagnostik zulassen. Zu sehen ist eine Schädelaufnahme (links), bei der die Feinheiten der räumlichen Strukturen des Gehirns nicht mehr zu erkennen sind. In der Knieaufnahme (rechts) sind selbst die knöchernen Strukturen sehr kontrastarm dargestellt. Dieser schwache Kontrast wird durch die Mittelung beim Durchlauf des Röntgenstrahls durch den Körper verursacht.

3.1 Tomosynthese

Der Wunsch, den Mittelungsprozess, der die konventionellen Röntgenaufnahmen charakterisiert, rückgängig zu machen, führte in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts zu den ersten tomographischen Konzepten. Das Wort *Tomographie* setzt sich dabei aus den beiden griechischen Worten *tomos* (Schnitt) und *graphein* (zeichnen) zusammen. Das Wort Tomographie wurde ganz wesentlich durch den Berliner Arzt *G. Grossmann* geprägt, dessen *Grossmann-Tomograph* in der Lage war, eine einzelne Schicht im Körper abzubilden [Gro34]. Abbildung 3.2 links zeigt eine historische Aufnahme des *Grossmann-Tomographen* [Los95] sowie eine moderne Tomosyntheseeinheit (rechts) [Här03].

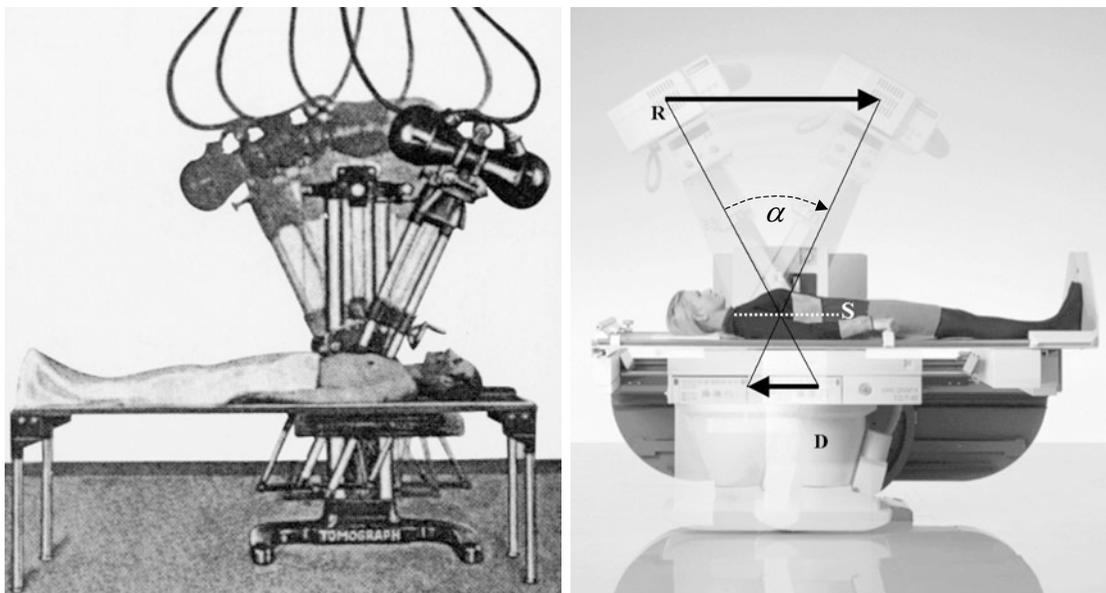


Abb. 3.2: Die digitale Verwischungstomographie oder Tomosynthese ist der analogen Verwischungstomographie überlegen. Links: Der historische *Grossmann-Tomograph* [Los95][Gro34]. Rechts: Der Siemens Sirograph T.O.P. ist mit einem Bildverstärkerdetektorsystem (D) ausgerüstet, das simultan mit dem Röntgenquelle (R) verschoben wird und damit die Schicht (S) definiert (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions aus [Här99], [Här03]).

Das Tomographieprinzip dieses Verfahrens ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Während der Röntgenaufnahme wird die Röntgenröhre linear in die eine Richtung und der Röntgenfilm simultan in die andere Richtung verschoben. Dadurch bilden sich nur Punkte in der Drehpunktebene scharf ab. Alle Punkte über- und unterhalb dieser Ebene werden auf dem Bild verwischt und zwar umso stärker, je weiter sie von der Ebene entfernt sind. Daher nennt man dieses Verfahren auch Verwischungstomographie (es wird auch Tomosynthese genannt, wenn die Projektionsbilder digital weiterverarbeitet werden).

Natürlich sind die verwischten Informationen nicht verschwunden, sondern sie legen sich als Grauschleier über die scharfe Abbildungsebene, so dass auch hier ein erheblicher Kontrastverlust zu verzeichnen ist. Der Qualitätsgewinn gegenüber einer einfachen Durchleuchtung ist aber am Beispiel der tomosynthetisch aufgenommenen Schichtsequenz des Knies gut zu erkennen [Här99,Här03].

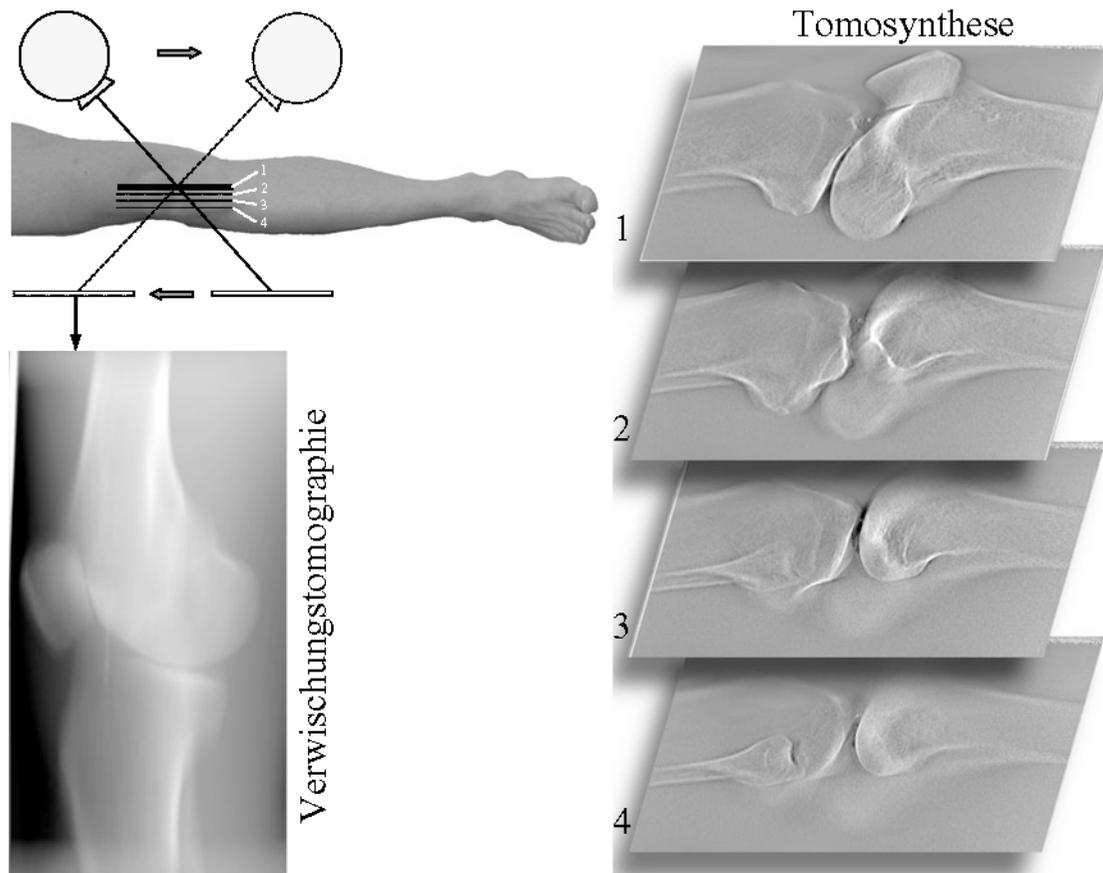


Abb. 3.3: Die ersten Versuche, Schnittbilder aus dem Körper zu erzeugen, begannen mit der so genannten Verwischungstomographie. Bei diesem Verfahren, das auch Tomosynthese genannt wird, sofern die Röntgenbilder digital verarbeitet werden, werden Röntgenquelle und Detektor synchron in entgegengesetzte Richtungen verschoben. Dadurch verwischen Strukturen die ober- und unterhalb der eingezeichneten Ebene durch den Drehpunkt liegen (Tomosynthesebilder des Kniephantoms: Mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions aus [Här99], [Här03]).

Mit der Verbreitung von elektronischen Röntgendetektoren bekommen die Tomosynthesysteme gegenwärtig wieder wissenschaftliche Aufmerksamkeit [Ste00]. Abbildung 3.2 rechts zeigt ein modernes Tomosynthesegerät, den Siregraphen T.O.P. von Siemens Medical Solutions, bei dem die Projektionsbilder während der Bewegung mit einem Bildverstärkersystem gemessen und digital gespeichert werden. Das ermöglicht eine nachträgliche Bildrekonstruktion, die der analogen Verwischungstechnik überlegen ist. In Abbildung 3.3 kann man die analoge Verwischung des Knies (unten links) direkt mit Einzelschichten der Tomosynthese vergleichen, die in 8 mm Abstand voneinander aufgenommen sind. Der Verwischungswinkel α bestimmt, wie gut die Beiträge aus den ober- und unterhalb der Schicht (S) liegenden Strukturen durch Verschmierung unterdrückt werden. Zusammen mit der Art der Trajektorie des Abtastsystems aus Röntgenröhre (R) und Detektor (D) bestimmt der Verwischungswinkel α die Qualität der Schicht (S). Je größer α ist, desto kleiner werden so genannte Fremdschichtartefakte, also die Amplituden der Fremdstrukturen außerhalb der zu rekonstruierenden Schicht [Här03].

Ein verwandtes Verfahren, die so genannte Orthopantomographie, ist heute in der Dentalradiographie weit verbreitet. Mit diesem Verfahren wird eine Panoramadarstellung der Zahnreihen auf gekrümmten Schichten entlang des Kieferbogens dargestellt.

Wenn man heute von Tomographie spricht, so ist dies trotz der diagnostischen Konkurrenzverfahren wie MRT (Magnetresonanztomographie) oder PET (Positronen-Emissions-Tomographie) immer noch ganz stark mit CT, also der Röntgen-Computertomographie, verbunden. Im englischsprachigen Raum wird die Computertomographie auch CAT (Computerized Axial Tomography) genannt¹².

Die Computertomographie vermeidet die Überlagerung von verwischten Ebenen und erzeugt einen so großen Kontrast, dass auch Weichteile gut abgebildet werden. Der diagnostische Qualitätssprung, der damit einherging, begründet den enormen Erfolg der Computertomographie. Etabliert ist eine Unterscheidung in vier Generationen von Computertomographen. Diese Unterscheidung ist historisch gewachsen und bezieht sich sowohl auf die Art, wie Röntgenquelle und Detektor konstruiert sind als auch auf die Art, wie beide sich um den Patienten bewegen. Die Abbildungen 3.2, 3.6, 3.7 und 3.9 zeigen die verschiedenen Generationen schematisch.

3.2 Rotation-Translation des Nadelstrahls (1. Generation)

Die erste Generation von Computertomographen besitzt eine Röntgenquelle, die einen einzelnen Nadelstrahl aussendet, der mit Hilfe von entsprechenden Kollimatoren aus dem Röntgenkegel selektiert wird. Diese Geometrie wird „Pencil“-Strahlform oder Nadelstrahlform genannt. Auf der der Röntgenquelle gegenüberliegenden Seite des Messfeldes befindet sich ein einzelner Detektor, der synchron mit der Röntgenquelle unter verschiedenen Projektionswinkeln γ linear verschoben wird (siehe Abbildung 3.4). Abhängig von den spezifischen Schwächungseigenschaften des Gewebes wird die Intensität des Strahls beim Durchgang durch den Körper geschwächt.

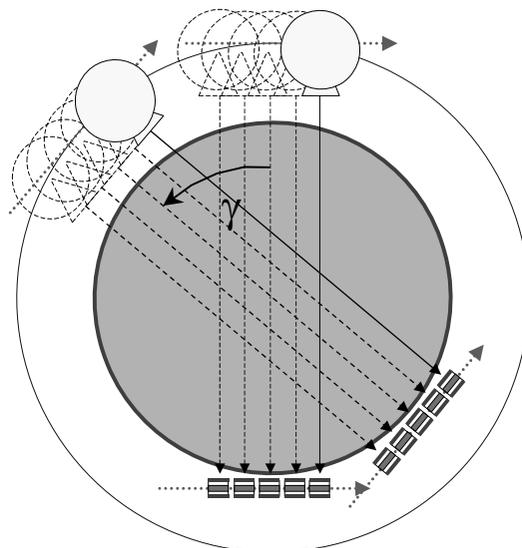


Abb. 3.4: Die erste Generation von Computertomographen mit „Pencil“- bzw. Nadelstrahlform und einem einzelnen Detektor, der unter verschiedenen Projektionswinkeln γ linear verschoben wird. Über 180° hinweg muss so jeder zu rekonstruierende Punkt des Messfeldes von allen physikalisch relevanten Seiten durchleuchtet werden. Der Röntgennadelstrahl wird aus dem typischen Röntgenkegel der Quelle mit entsprechenden Kollimatoren erzeugt.

¹² In der Anfangsphase wurden auch Begriffe wie *Computerized Transaxial Tomography* (CTAT) oder *Digital Axial Tomography* (DAT) verwendet [Bus00].

Die Größe dieser integralen Schwächung wird mit dem Detektor gemessen und digital gespeichert. Zunächst entsteht so unter jedem Winkel γ ein einfaches – allerdings sehr kompliziert gewonnenes – Röntgenbild, aus dem sich noch nicht auf die räumliche Verteilung der Schwächungskoeffizienten des Gewebes zurückschließen lässt. Um zu entscheiden, welcher von zwei auf einer Projektionslinie hintereinander liegender Punkte vorne liegt und welcher hinten, muss man sich die Situation von der Seite ansehen. Exakt diese Strategie verfolgen Computertomographen. Genau genommen sehen Computertomographen sich die räumlich-geometrische Situation von allen Seiten an, das heißt, der Projektionswinkel γ läuft hier von 0° bis 180° .

Der erste CT-Scanner, den die Firma EMI gebaut hatte, beruhte auf diesem Prinzip. 1972 realisierte *Godfrey N. Hounsfield*, diesen ersten Computertomographen in den EMI Forschungslaboratorien [Hou73]. Dafür erhielt er 1979 zusammen mit *Allen M. Cormack* den Nobelpreis für Medizin. Abbildung 3.5 zeigt ein Foto des EMI-Kopf-Scanners. Die ersten Experimente machte *Hounsfield* schon 1969 mit einer radioaktiven Americium-Quelle (^{241}Am 95), die er zusammen mit dem Detektor linear verschob. Über 180° sammelte er in 1° -Schritten die Daten, die er zur Rekonstruktion benötigte. Diese erste Rekonstruktion einer zweidimensionalen Schicht dauerte 9 Tage. Diese Akquisitionszeit war klinisch nicht akzeptabel, aber zum ersten Mal konnte so eine zweidimensionale Schnittabbildung erzielt werden, die nicht aus der Mittelung oder Verschmierung eines eigentlich räumlichen also dreidimensionalen Objektes entstand. Abbildung 3.6 zeigt den historischen Aufbau des Experiments (oben) sowie das erste Abbildungsergebnis (unten).



Abb. 3.5: Der erste Kopfscanner wurde in den EMI-Forschungslaboratorien in London gebaut (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems).

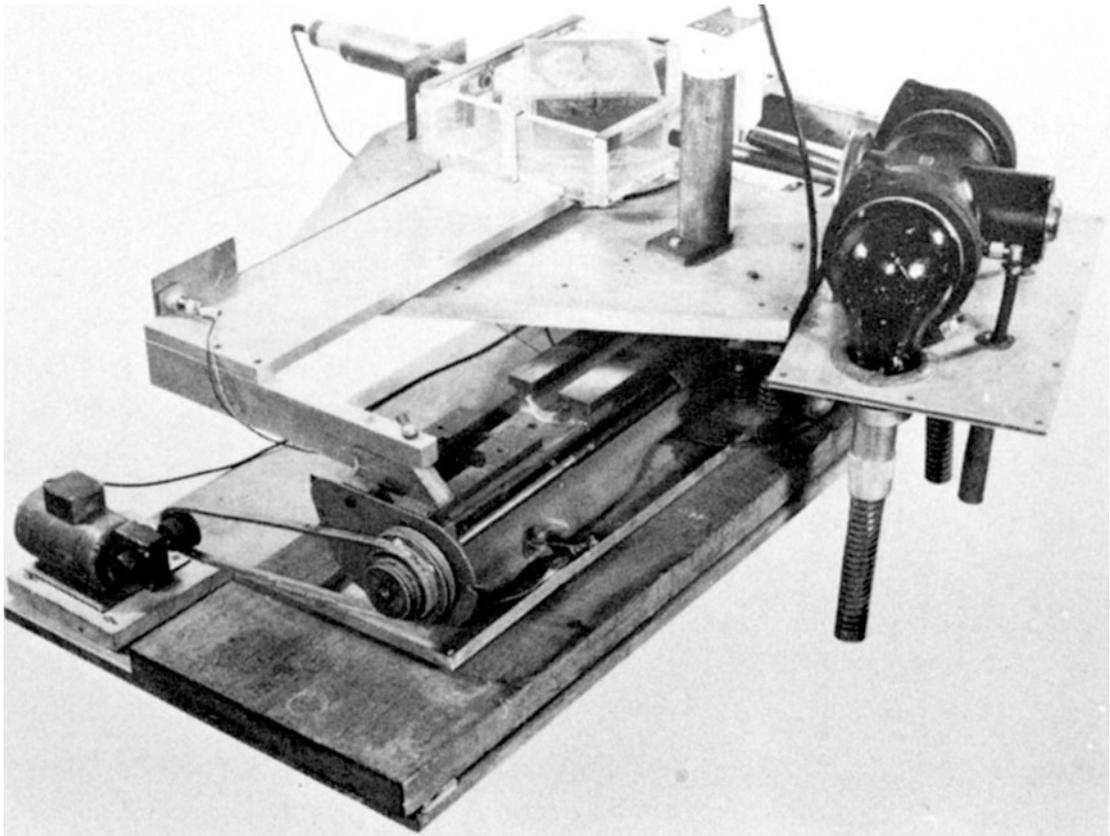


Abb. 3.6: Das historische Experiment von *Hounsfield*, das er in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts in den EMI-Forschungslaboratorien in London aufgebaut hatte (oben) sowie das erste Abbildungsergebnis (unten). Mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems.

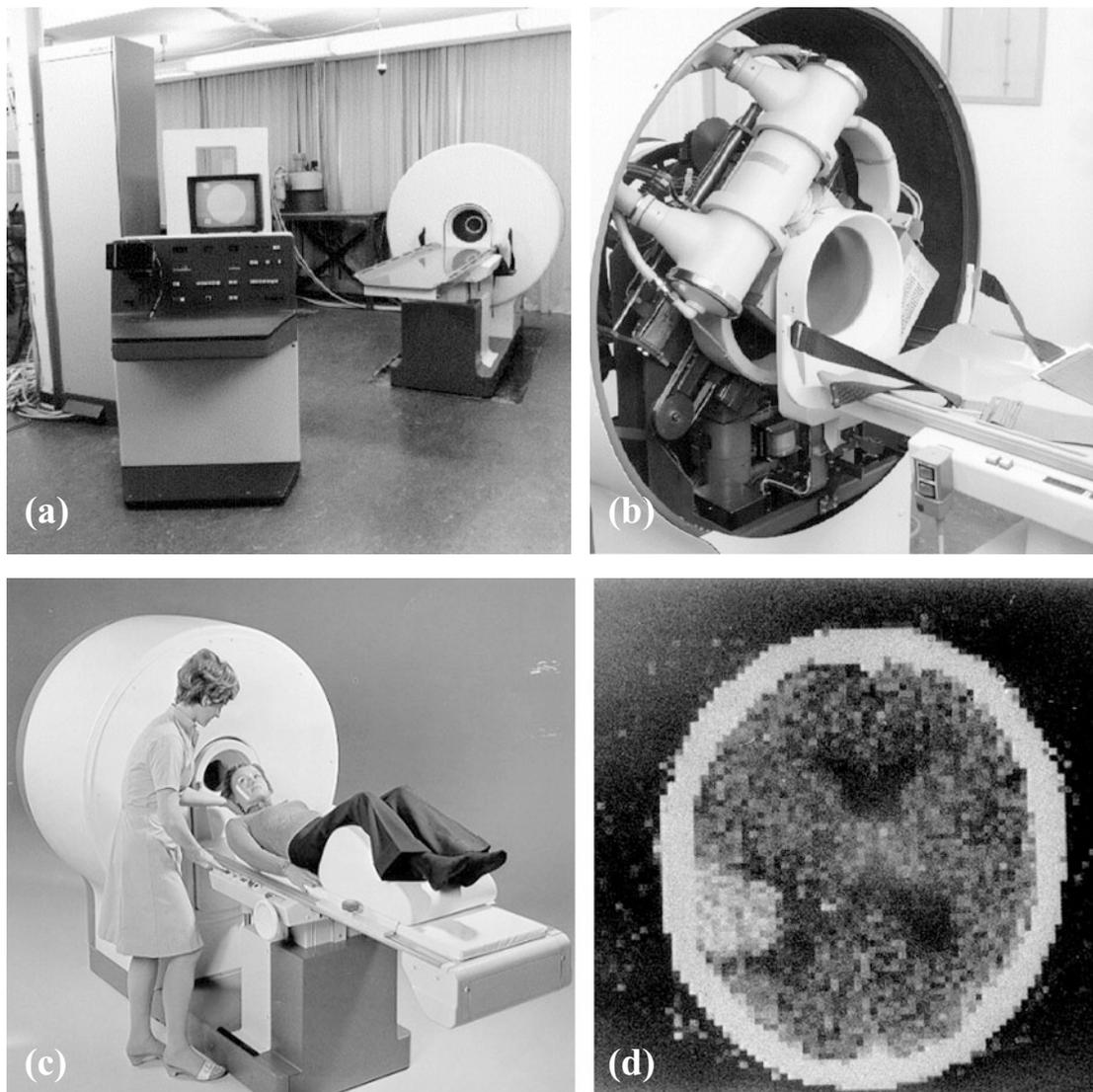


Abb. 3.7: Einer der ersten kommerziellen Computertomographen der ersten Generation war 1974 der Siretom von Siemens: (a) geschlossen und (b) geöffnet. Mit diesem Scanner konnten axiale Kopfaufnahmen (c) mit einer Bildmatrix (d) von 80×80 hergestellt werden (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions).

Die eigentliche Rekonstruktion des zweidimensionalen Schnittes ist nur durch die Digitalisierung der Projektionswerte möglich. Durch aufwendige mathematische Verfahren, die in den Kapiteln 5 und 6 noch besprochen werden, errechnet man ein räumlich aufgelöstes Bild der Schwächungskoeffizienten in der Körperebene, die durch das Messverfahren festgelegt wird. Die Komplexität der mathematischen Verfahren ließen *Johann Radons* Rekonstruktionsmathematik von 1917 ein halbes Jahrhundert nur Theorie bleiben.

Erst durch die Entwicklung der Computertechnologie wurde eine praktisch einsetzbare Lösung des Rekonstruktionsproblems möglich¹³. Nicht zuletzt deswegen trägt die Computer-

¹³ In Abschnitt 3.11 wird dargestellt, dass das historisch nicht ganz korrekt ist. 1977 schlug *P. R. Edholm* [Edh77] ein analoges, optisches Verfahren zur tomographischen Bildrekonstruktion vor.

tomographie ihren Namen zu Recht. Die ersten kommerziellen Scanner der Firma EMI besaßen einen eng fokussierten Röntgenstrahl und einen einzelnen NaI-Szintillationsdetektor. Dieses technisch heute nicht mehr realisierte Prinzip ist von grundsätzlicher Bedeutung, da die mathematischen Verfahren zur Rekonstruktion hier besonders einfach zu verstehen sind. Insbesondere kann man die mathematischen Verfahren für die moderneren Geometrien durch geeignete Koordinatentransformationen aus der Nadelstrahlgeometrie gewinnen. Abbildung 3.7 zeigt einen der ersten Tomographen der ersten Generation, die 1974 von Siemens produziert wurden. Die weitere rasante Entwicklung der Computertomographie wurde und wird von drei wesentlichen Forderungen vorangetrieben: Reduktion der Aufnahmezeit, Reduktion der Strahlenbelastung und nicht zuletzt Reduktion der Kosten. Auf dem Weg, diese Faktoren zu optimieren, gibt es mehrere historische Stationen, die in den folgenden Abschnitten kurz besprochen werden sollen.

3.3 Rotation-Translation des Fächerstrahls (2. Generation)

Der Computertomograph der zweiten Generation besitzt schon eine Röntgenquelle mit Fächerstrahlgeometrie und ein kurzes Detektorarray mit etwa 30 Elementen (siehe Abbildung 3.8). Allerdings ist die Fächerstrahlöffnung immer noch sehr klein, so dass auch hier Röhre und Detektor linear verschoben werden müssen, bevor ein neuer Projektionswinkel eingestellt werden kann. Bei den ersten Geräten betrug der Öffnungswinkel des Röntgenfächerstrahls etwa 10° .

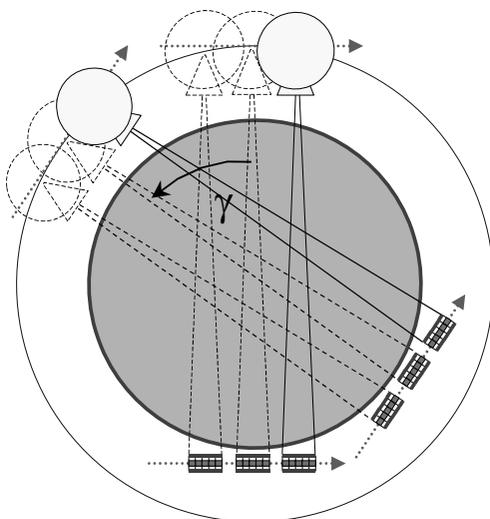


Abb. 3.8: Die zweite Generation von Computertomographen besitzt eine Röntgenquelle mit Fächerstrahlgeometrie sowie kurze Detektorarrays. Genau genommen wird mit Hilfe von schlitzartigen Kollimatoren aus dem kegelförmigen Ursprungsstrahl der gewünschte dünne Röntgenfächer erzeugt. Die Fächeröffnung beträgt etwa 10° und die Fächerbasis ist mit etwa 30 Detektorelementen belegt. Auch hier müssen die Röhre und der Detektor linear verschoben werden, bevor ein neuer Projektionswinkel eingestellt wird, da nicht das gesamte Messfeld vom Fächer beleuchtet wird.

Immerhin konnte aber die Akquisitionszeit schon auf einige Minuten pro Schicht gesenkt werden, da man mit dem Array gleichzeitig mehrere Intensitäten messen kann. Das Messfeld war dennoch nur für Schädelaufnahmen geeignet. Dass bei dem Tomographen der ersten und zweiten Generation der Schädel als klinischer Applikationsschwerpunkt gewählt wurde, liegt

im Wesentlichen an der langen Akquisitionszeit. Abbildung 3.7c zeigt die Dimensionen des Messfeldes sehr gut. Der Schädel ist gut zu fixieren und zeigt keine großen Bewegungen innerhalb der Aufnahmezeit (und innerhalb der damals erzielbaren Ortsauflösung). Das ist bei Aufnahmen in dem Bereich des Thorax oder des Abdomens natürlich anders, da die Bewegung des Herzens und der Lunge sowie über das Zwerchfell auch die Bewegung der weichen Organe des Abdomens zu Artefakten in den rekonstruierten Bildern führt. Die Rekonstruktionsmathematik erfordert es, dass alle zu rekonstruierenden Punkte einer Schicht über 180° durchleuchtet werden. Wenn aufgrund der Patientenbewegung ein Punkt während eines Umlaufs des Scanners aus der Schicht herauswandert, führt dies unweigerlich zu Fehlern in der Bildwiedergabe. Solche Bildfehler, die Bewegungsartefakte genannt werden, werden im Kapitel 8.5.3 eingehend behandelt.

3.4 Rotation-Rotation in Einzelschichten (3. Generation)

Das Hauptziel neuer Entwicklungen in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts war die Reduktion der Akquisitionszeit auf unter 20 s. Dies sollte ausreichen, um in einem Atemstopp des Patienten auch Bilder des Abdomens einigermaßen fehlerfrei zu rekonstruieren. Ein großer Entwicklungsschritt in diese Richtung war die konsequente Weiterführung des Fächerstrahlkonzeptes der zweiten Generation, nämlich die Einführung eines wesentlich größeren Öffnungswinkels des Röntgenfächers und ein dazugehöriges längeres Detektorarray. Abbildung 3.9 zeigt das Prinzip dieser dritten Generation wieder schematisch.

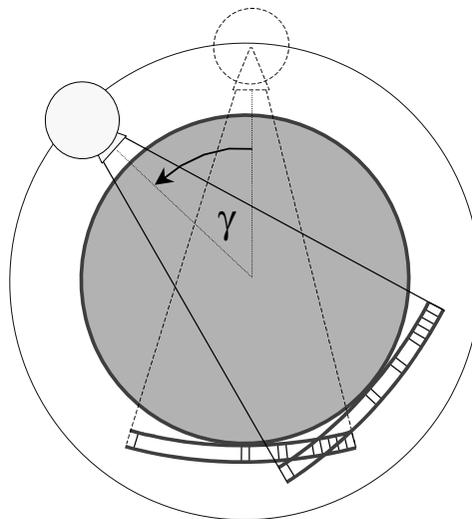


Abb. 3.9: Die dritte Generation von Computertomographen besitzt einen wesentlich größeren Öffnungswinkel des Röntgenfächers und ein längeres Detektorarray, so dass das gewünschte Messfeld schon unter einem einzigen Einstellwinkel simultan in seiner Gesamtheit durchleuchtet werden kann. Bei dieser Kombination kann daher ganz auf die lineare Verschiebung von Quelle und Detektor verzichtet werden. Der fächerförmige Röntgenstrahl wird wie bei der zweiten Generation mit Hilfe von schlitzartigen Kollimatoren aus dem kegelförmigen Ursprungsstrahl erzeugt. Insofern stellt die dritte Generation nur eine konsequente Weiterführung der zweiten Generation dar. Die Fächeröffnung beträgt typischerweise etwa 40° bis 60° und die Fächerbasis ist mit bis zu 1000 Detektorelementen belegt. Durch die größere Blendenöffnung wird der Röntgenstrahl sehr viel besser ausgenutzt. Darüber hinaus kann der Scanner über 180° kontinuierlich gedreht werden, ohne dass Zwischenstopps für die lineare Verschiebung eingelegt werden müssen. Das führt zu einer erheblichen Verkürzung der Akquisitionszeit.

Der Öffnungswinkel des Röntgenfächers ist typischerweise zwischen 40° und 60° groß und das Detektorarray ist in der Regel als Detektorbogen mit heute zwischen 400 und 1000 Elementen ausgelegt. Auf diese Weise kann nun unter jedem eingestellten Projektionswinkel γ das gesamte Messfeld, in dem jetzt auch der Körperstamm liegen kann, simultan durchleuchtet werden. Somit kann man bei der dritten Generation ganz auf die lineare Verschiebung verzichten. Mit dieser Idee verkürzt sich die Akquisitionszeit erheblich, da eine kontinuierliche Drehung um 180° erfolgen kann, ohne dass Pausen für die lineare Verschiebung eingelegt werden müssen. Die überwiegende Zahl der heute installierten Geräte sind die Fächerstrahlensysteme der dritten Generation. Abbildung 3.10 zeigt einen typischen CT-Scanner aus dem Jahre 1981.



Abb. 3.10: Typischer Ganzkörperscanner aus dem Jahre 1981. Die Siemens Somatom-Familie DR. Diese dritte Generation von Computertomographen besaß ein Messfeld von etwa 53 cm Durchmesser. Bei bis zu 512 Festkörperdetektoren waren Aufnahmezeiten für eine 360° -Drehung von 3 Sekunden möglich (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions).

Typische Bildfehler bei Scannern der dritten Generation sind so genannte Ringartefakte. Ein defekter oder auch nur schlecht kalibrierter einzelner Detektor des Arrays führt zu charakteristischen ringförmigen Fehlern in dem rekonstruierten Tomogramm. Auch dieser Bildfehler wird später noch behandelt (siehe Kapitel 8.5.5). Ringartefakte können bei Tomographen der vierten Generation nicht auftreten.

3.5 Rotation-Fix mit geschlossenem Detektorring (4. Generation)

Die vierte Generation der Computertomographen unterscheidet sich hinsichtlich der Röntgenquelle nicht von den Tomographen der dritten Generation. Auch hier dreht sich die Fächerstrahlquelle kontinuierlich ohne lineare Verschiebung um das Messfeld. Der Unterschied zur dritten Generation liegt im geschlossenen, ortsfesten Detektorring mit bis zu 5000 Einzelelementen. Hierbei kann die Röntgenröhre außerhalb (Abbildung 3.11 links) oder innerhalb des Detektorrings (Abbildung 3.11 rechts) rotieren.

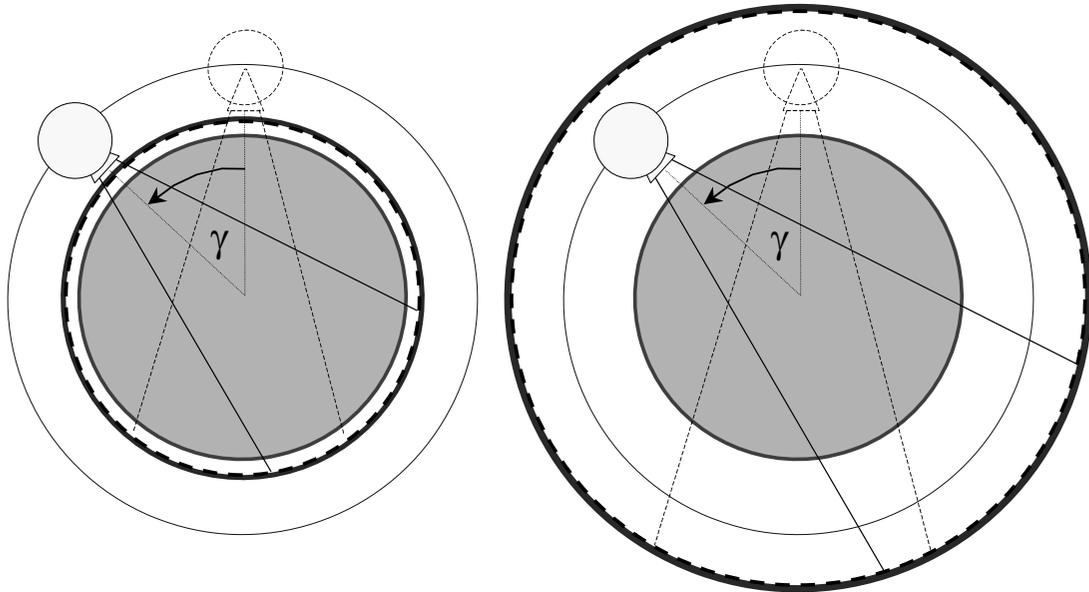


Abb. 3.11: Die vierte Generation von Computertomographen unterscheidet sich hinsichtlich der Röntgenquelle nicht von der dritten Generation. Auch hier dreht sich die Quelle kontinuierlich ohne lineare Verschiebung. Die vierte Generation unterscheidet sich aber von der dritten Generation durch einen feststehenden Detektorring. Hierbei wird zwischen der Bauform mit außerhalb (links) und innerhalb (rechts) des Detektorrings kreisender Röntgenröhre unterschieden. Die Anzahl der Detektoren liegt bei bis zu 5000. Die Fächerstrahlöffnung ist durch das benötigte Messfeld gegeben und unterscheidet sich daher nicht von dem Winkel der Tomographen der dritten Generation.

Für die Anordnung der Röhre außerhalb des Detektorrings ist klar, dass der Röntgenstrahl nicht die der Quelle jeweils nahe liegenden Detektoren von hinten durchstrahlen soll. Daher wird der Detektorring gegenüber der Bahn der Röhre dynamisch geneigt, so dass die Sichtlinie zwischen der Röhre und dem Arbeitsbereich des Detektorrings nur durch den Patienten (und den Patiententisch) und nicht durch die Detektorelektronik geht.

Tomographen der vierten Generation bilden so genannte inverse Fächerstrahlen aus, deren jeweilige Zentren die einzelnen Detektoren sind. Abbildung 3.12 zeigt der inverse Fächer schematisch. Man nennt den inversen Fächer auch Detektorfächer im Unterschied zum Röntgenfächer der Tomographen dritter Generation.

Lediglich beschränkt durch die Abtastrate, mit der die einzelnen Detektoren ausgelesen werden können, kann ein sehr dichter inverser Fächer gemessen werden. Auf diese Weise ist man im Gegensatz zu den Tomographen der dritten Generation in der räumlichen Auflösung des einzelnen Fächers im Prinzip nicht beschränkt.

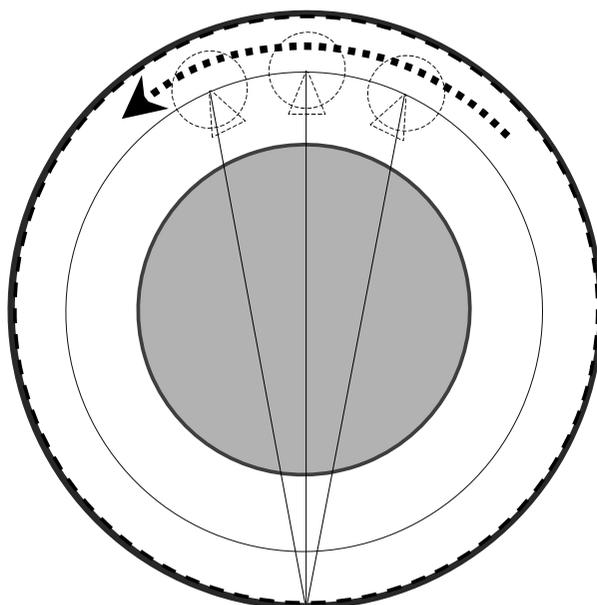


Abb. 3.12: Die vierte Generation von Computertomographen besitzt einen so genannten inversen Fächer, dessen Zentrum in einem einzelnen Detektor liegt. Im Gegensatz zur festgelegten Winkelauflösung des Fächers der dritten Generation kann hier im Prinzip ein beliebig feiner inverser Fächer gemessen werden, wenn das einzelne Detektorelement während des Laufs der Röntgenröhre nur häufig genug ausgelesen wird.

3.6 Fix-Fix mit geschlossenem Detektorring (EBCT)

Wenn man zu noch kürzeren Datenakquisitionszeiten kommen möchte, dann muss man das Konzept der sich bewegenden Systeme vollständig verlassen. Einen Ansatz dazu bietet die so genannte Elektronenstrahl-Computertomographie (EBCT¹⁴). Diese Form der Computertomographie wurde speziell für Aufnahmen des Herzens entwickelt.

Eine lokalisierte Röntgenröhre, die sich um den Patienten dreht, gibt es hier nicht mehr. Vielmehr befindet sich der Patient gewissermaßen innerhalb der Röntgenröhre. Ein Elektronenstrahl wird auf kreisförmig um den Patienten angeordnete Wolframtargetringe fokussiert und erzeugt beim Aufprall auf das Wolfram das gewünschte Röntgenstrahlbündel. Die Röntgenstrahlung wird dann mit einem fest stehenden Detektorring gemessen.

Solche Systeme wurden von der Firma Imatron überwiegend an Kardiologen verkauft. Das Elektronenstrahlverfahren ist in der Lage, Schichten in 50 msec zu akquirieren. Abbildung 3.13 zeigt die Skizze eines EBCT-Systems sowie die Abbildung eines modernen Imatronsystems. Weitere technische Details findet man zum Beispiel bei G. Weisser [Wei00].

¹⁴ EBCT = *electron beam computerized tomography*

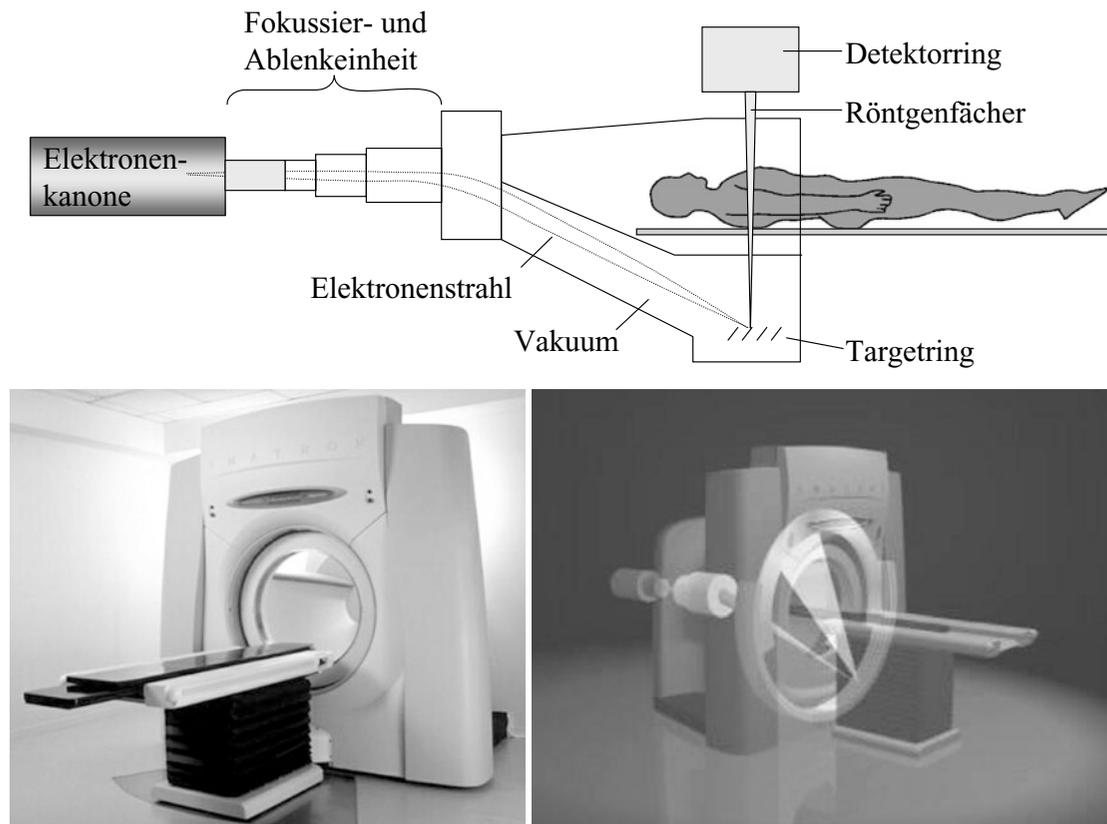


Abb. 3.13: Realisierung eines Elektronenstrahl-Computertomographen (EBCT) der Firma Imatron für die schnelle Bildgebung in der Kardiologie (mit freundlicher Genehmigung: General Electric Medical Systems).

3.7 Rotation-Rotation in der Spiralbahn

Ein Entwicklungsschritt, der einen enormen Sprung in der Leistungsfähigkeit von Computertomographen der dritten Generation zur Folge hatte, wird in *J. T. Bushberg et al.* [Bus02] mit der sechsten Generation von Scannern identifiziert. Gemeint ist die Einführung der Schleifringtechnologie mit der Möglichkeit, den Patienten spiralförmig abzutasten.

Da der Röntgenröhre kontinuierlich Energie zugeführt werden muss, war bei den ersten Scannern durch die Kabelzuführung der Winkelverfahrweg beschränkt. Dieses Problem war eine hohe Barriere bei der Reduktion der Akquisitionszeiten. Ständig musste die Abtasteinheit anfahren und nach 180° wieder stoppen. Zwar hat man sowohl bei Links- wie auch der nachfolgenden Rechtsdrehung jeweils Daten akquiriert, aber man kann sich klar machen, dass durch die entstehenden Drehmomente einer hohen Geschwindigkeit Grenzen gesetzt waren. Die Kabelverbindung wurde bei diesem Prozess in der einen Richtung abgewickelt und in der anderen Richtung vorsichtig wieder aufgewickelt. Gelöst wurde dieses Problem durch die Schleifringtechnologie. Die Energie wird hierbei durch Schleifkontakte von dem äußeren Rahmen, der so genannten *Gantry*, auf die sich drehende Abtasteinheit übertragen. Jetzt konnte die Abtasteinheit, die die Röntgenquelle und in der dritten Generation auch das Detektorarray trägt, kontinuierlich rotieren. Dabei sind heute Rotationsfrequenzen von 2 Umdrehungen pro Sekunde in so genannten Subsekunden-Scannern keine Seltenheit.

Die Bilder in Abbildung 3.14 zeigen verschiedene Technologien für den Energietransfer. Links ist die besprochene Schleifringtechnologie an einem Siemens AR.T Computertomographen zu sehen. Allerdings gibt es auch kleinere Kompaktgeräte, die ihre Unabhängigkeit von einer äußeren Energiezufuhr während der Rotation der Abtasteinheit durch Akkumulatoren herstellen. Ein Beispiel zeigt die Abbildung 3.14 rechts, in der der geöffnete mobile Tomoscan M Computertomograph von Philips dargestellt ist.



Abb. 3.14: Realisierungen der Energieübertragung auf die sich kontinuierlich drehende Abtasteinheit. Beim Siemens Somatom AR.T (links) findet die Schleifringtechnologie Anwendung. Beim kompakten mobilen Tomographen Philips Tomoscan M (rechts) findet eine Akkumulatoranordnung Anwendung.

Diese Innovation ermöglichte ein neues Messverfahren. Bei kontinuierlichem Patiententischvorschub ist es nämlich nun möglich, Daten in Form einer Spirale¹⁵ zu messen. Dieses Spiral-CT-Verfahren wurde 1989 von *Willi Kalender* an einem Prototypen erfolgreich demonstriert [Kal89]. Abbildung 3.15 zeigt *Willi Kalender* in der Mitte der 80er Jahre in den Laboratorien von Siemens Medical Solutions.

3.8 Rotation-Rotation in Kegelstrahlgeometrie

Wie oben erwähnt, hat eine einheitliche Begriffsbildung bei den Entwicklungsstufen bisher nicht statt gefunden. In *J. T. Bushberg et al.* [Bus02] werden Geräte mit kegelförmigem Röntgenstrahl und flächigem Detektor mit der siebten Generation bezeichnet. Aber selbst innerhalb der Kegelstrahltypen muss eigentlich noch unterschieden werden, ob nur eine kleine Kegelöffnung verwendet wird, so dass man nur von einem Multischicht- bzw. Multizeilensystem spricht oder ob tatsächlich ein symmetrischer Röntgenkegel genutzt wird. Die zu verwendenden Rekonstruktionsverfahren unterscheiden sich nämlich erheblich, wie in Kapitel 7 dargestellt wird.

Zur Motivation dieses Entwicklungsschrittes sei daran erinnert, dass der Schritt vom Nadelstrahl- zum Fächerkonzept neben der Verkürzung der Messzeiten den weiteren Vorteil besitzt, dass die erzeugte Röntgenstrahlung sehr viel effektiver ausgenutzt wird. In Kapitel 2.1 wurde erwähnt, dass die Effizienz der Energieumwandlung bei der Erzeugung von Röntgenstrahlung bei nur etwa 1 % liegt.

¹⁵ Genau genommen handelt es sich hierbei um eine Helix.



Abb. 3.15: *Willi Kalender* in der Mitte der 80er Jahre in den Laboren von Siemens (mit freundlicher Genehmigung durch *Willi Kalender*).

Da die produzierte Wärme in den Röntgenröhren ganz wesentlich die physikalische Belastbarkeit definiert und damit die Messzeit beschränkt, beinhaltet der nächste Schritt in der Entwicklung von Computertomographen die Nutzung des ohnehin vorhandenen kegelförmigen Röntgenstrahls. Die Nadelstrahl- und die Fächerstrahlgeometrie wurde ja nur durch geeignete Kollimatoren erzeugt, die den vorhandenen natürlichen Röntgenkegel einengen. Technologisch gibt es drei wichtige Probleme, die für eine erfolgreiche Verwendung der Kegelstrahlgeometrie gelöst werden mussten.

Erstens musste auf der Detektorseite des Tomographen ein Flächendetektor eingesetzt werden, den es bis dahin nicht gab. Zweitens musste die enorme Rohdatenmenge, die insbesondere bei Subsekundenscannern in sehr kurzer Zeit entsteht, von dem sich drehenden Abtastsystem nach außen zum Bildrekonstruktionsrechner gebracht werden. Die benötigte Bandbreite für diese Datenübertragung ist auch heute noch eine Herausforderung. Und drittens steht man vor dem eigentlichen Rekonstruktionsproblem, dessen Mathematik gegenüber den zweidimensionalen Verfahren etwas verwickelter ist. Insbesondere darauf wird in den Kapiteln 7.4 und 7.5 im Detail eingegangen. Abbildung 3.16 zeigt einen Prototypen eines Kegelstrahltomographen in den Siemens Laboratorien.

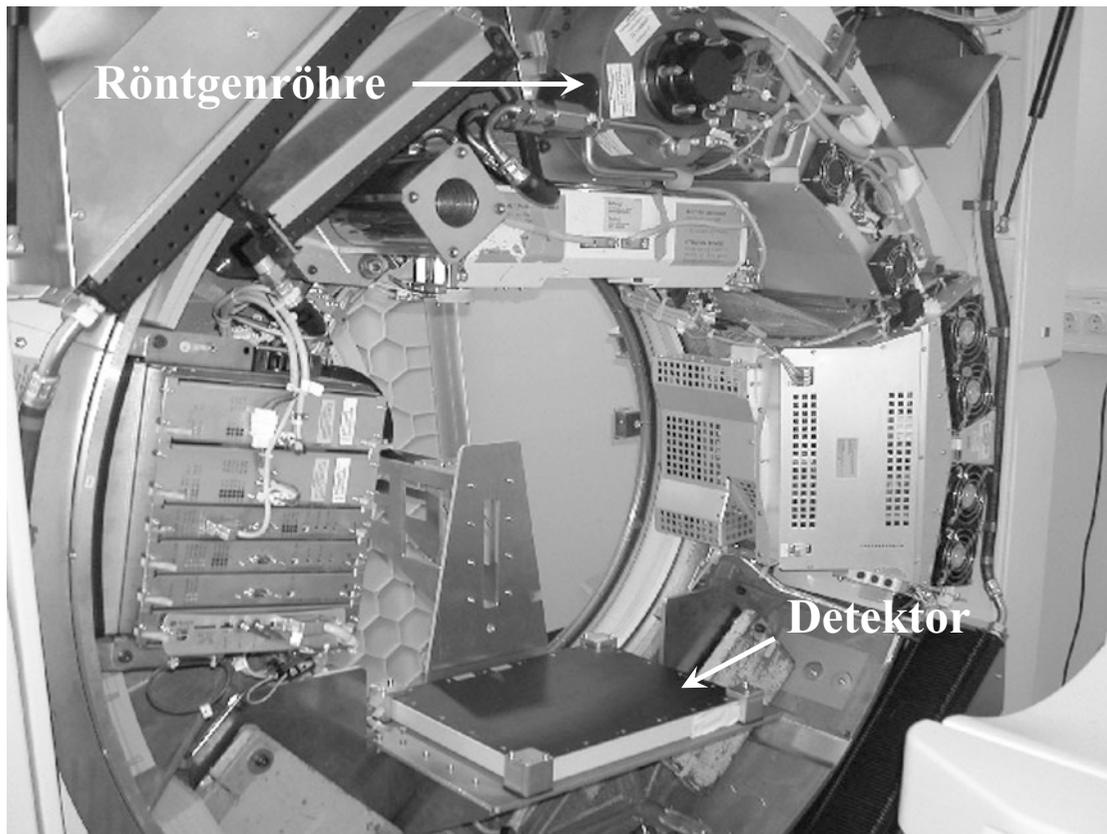


Abb. 3.16: Prototyp eines echten Kegelstrahltomographen mit einem Flächendetektor (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions).

3.9 Micro-CT

Seit einiger Zeit sind so genannte Micro-CTs kommerziell erhältlich, die im Wesentlichen einer miniaturisierten Form des Kegelstrahl-CTs des vorhergehenden Abschnitts entsprechen und zur zerstörungsfreien, dreidimensionalen Mikroskopie genutzt werden. Das durchstrahlte Messfeld ist mit typischerweise 2 cm^3 so klein, dass medizinische Anwendungen auszuscheiden scheinen. Tatsächlich werden diese Geräte eher in der Materialprüfung und -analyse verwendet, aber auch medizinische Anwendungen rücken zunehmend in das Zentrum des Interesses. Humanmedizinische Fragestellungen sind zum Beispiel Untersuchungen der Trabekularstruktur von Knochen. Micro-CTs sind darüber hinaus ideale Geräte, um radiologische Diagnostik an Kleintieren zu betreiben [Cle03].

Abbildung 3.17 zeigt ein kommerzielles Micro-CT-System der belgischen Firma SkyScan. Es ist als Tischgerät ausgelegt und besitzt eine Messkammer, die mit Bleiwänden gegen nach außen dringende Röntgenstrahlung vollständig abgeschirmt ist, so dass keine weiteren Schutzmassnahmen ergriffen werden müssen. Das zu untersuchende Objekt wird auf einem Drehteller platziert, der von einem Schrittmotor gesteuert wird.

In Abbildung 3.17a ist die Vorbereitung einer Untersuchung eines Neandertalerzahnes zu sehen. Dieser Zahn ist etwa 200000 Jahre alt, so dass sich der leitende Konservator des Amtes für Archäologische Denkmalpflege in Koblenz heute für die Veränderungen des Zahninneren

interessiert. Abbildung 3.17b zeigt eine Kegelstrahldurchleuchtung des Zahnes. Neben dem Wurzelkanal bilden sich in der Projektion auch Risslinien sehr gut ab.

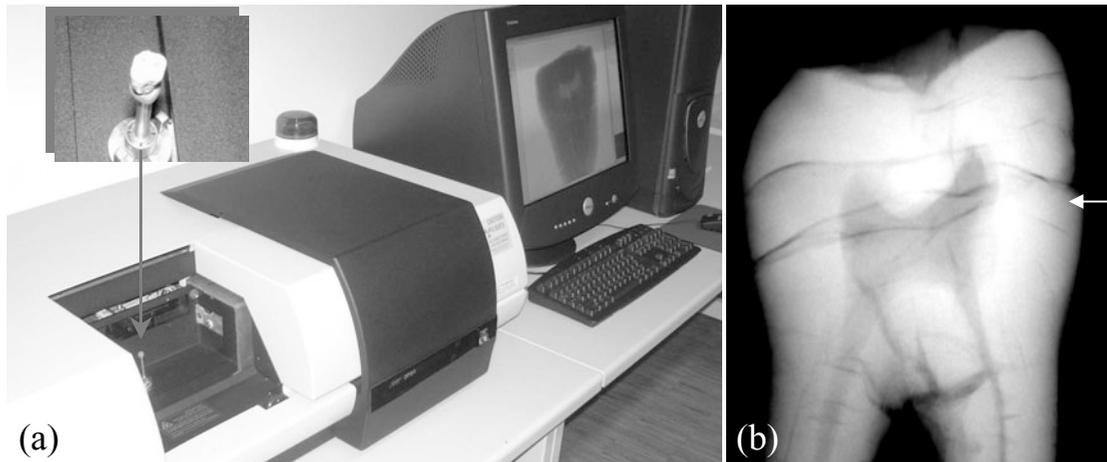


Abb. 3.17: Micro-CT-Tischgerät der Firma SkyScan (a) am RheinAhrCampus Remagen. Auf einem Drehteller in der Messkammer wird das zu untersuchende Objekt platziert. Das Messvolumen ist etwa 2 cm^3 groß. Schon das einfache Durchleuchtungsergebnis eines archaischen Zahnfundes zeigt eine beeindruckende Vielfalt an Strukturen. Neben dem Wurzelkanal sind auch feine Risse zu erkennen, die sich im Laufe von Jahrtausenden bei diesem Zahn eines Neandertalers gebildet haben. Der kleine Pfeil markiert die Höhe, in der eine rekonstruierte Schicht näher betrachtet werden soll. Die planare, 1024×1024 Pixel große CCD-Matrix ist gekühlt und besitzt eine Detektorgröße $b_D < 10 \text{ }\mu\text{m}$.

Die beiden entscheidenden Komponenten von Micro-CTs sind die Röntgenröhre und das Detektorarray. Hierbei sind es speziell die Fokusgröße und die Größe der Detektorelemente, die neben der mechanischen Genauigkeit der Drehbewegung das Auflösungsvermögen bestimmen. Ein Blick zurück auf Abbildung 2.4 zeigt noch einmal warum die Fokusgröße die Detaildarstellung beeinflusst. Offenbar benötigt man eine so genannte Microfokusröhre. In Kapitel 8.3 wird gezeigt, dass es die so genannte Modulationstransferfunktion

$$MTF_{\text{physik. Bilderz.}}(q) = MTF_{\text{Quelle}}(q) MTF_{\text{Detektor}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi b_F q)}{\pi b_F q} \right| \left| \frac{\sin(\pi b_D q)}{\pi b_D q} \right| \quad (3.1)$$

ist, die das Auflösungsvermögen bei Ortsfrequenzen q in Linienpaaren pro Millimeter quantifiziert. Dabei sind Röntgenfokusgrößen von $b_F < 10 \text{ }\mu\text{m}$ wünschenswert. Natürlich kann bei einer so kleinen Elektronentargetfläche der Anodenstrom nicht sehr groß gewählt werden. Hier sind Ströme von $I < 100 \text{ }\mu\text{A}$ typisch. Da der Strom die Intensität des Röntgenspektrums steuert, unterliegt man in Bezug auf die zu untersuchenden Materialien natürlich gewissen Einschränkungen. Als Detektor wird ein gekühlter 12 Bit Röntgen-CCD-Chip mit einer Pixelmatrix von 1024×1024 genutzt, der über eine Faseroptik an einen Szintillationskristall angekoppelt ist. Die Größe der Bildelemente liegt in der Größenordnung von etwa $b_D < 10 \text{ }\mu\text{m}$. Die Firma ScyScan gibt ein Auflösungsvermögen von etwa $10 \text{ }\mu\text{m}$ an [Sas99,Sas02a,Sas02b]. Da es sich bei Micro-CTs um Kegelstrahlröntgensysteme handelt, sind dreidimensionale Rekonstruktionsverfahren erforderlich, um die Bilder zu berechnen [Wan98].

Abbildung 3.18 zeigt die Unterschiede im Auflösungsvermögen zwischen dem Micro-CT und einem klinischen CT am Beispiel des Neandertalerzahnes. In einer rekonstruierten Schicht sind im Ergebnis des Micro-CTs sehr feine Risse zu erkennen (a). Die Rekonstruktion mit

einem klinischen CT (b) vermag diese Details nicht aufzulösen. Die Lage der ausgewählten Schicht ist in Abbildung 3.17b mit einem Pfeil gekennzeichnet. Im Vergleich der dreidimensionalen Rekonstruktionen und Visualisierungen ist der Unterschied ebenfalls sehr deutlich. Nur in der Micro-CT-Aufnahme sind Rissflächen sichtbar, die durch den gesamten Zahn verlaufen.

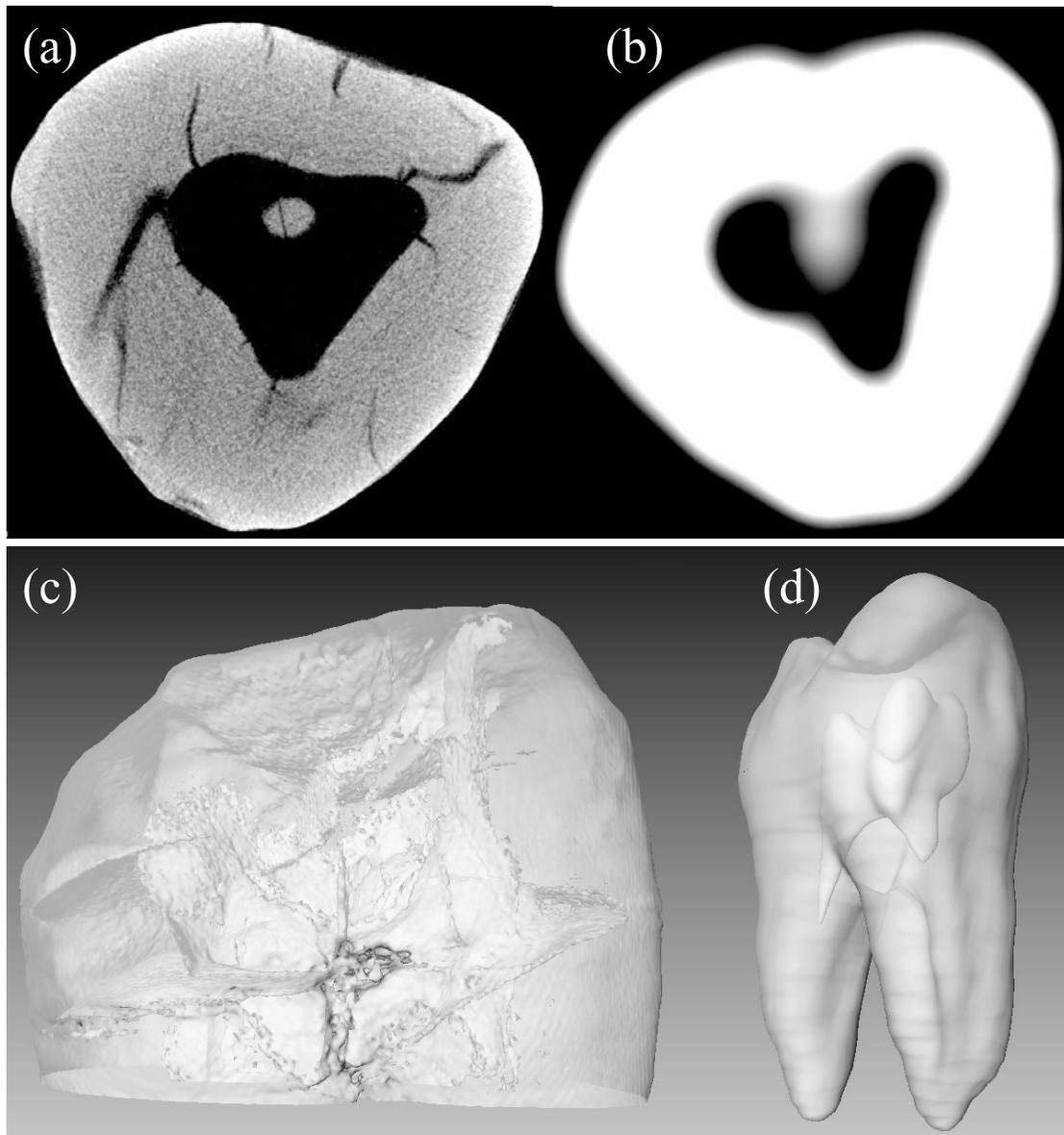


Abb. 3.18: Vergleichende Untersuchung des Auflösungsvermögens am Beispiel eines archäologischen Zahnfundes. Ein etwa 200000 Jahre alter Neandertalerzahn wurde mit einem Micro-CT (a/c) und einem normalen klinischen CT (b/d) untersucht. Die Lage der rekonstruierten Schicht ist in Abbildung 3.15b gekennzeichnet. Die Unterschiede sind sofort zu erkennen. Die feinen Risse, die sich im Laufe der Jahrtausende im Zahn gebildet haben, sind mit dem klinischen CT nicht abzubilden. In der dreidimensionalen Rekonstruktion der Micro-CT-Aufnahme (c) können die Risse als Rissflächen identifiziert werden. Im Vergleich dazu ist in (d) der gesamte Zahn dreidimensional rekonstruiert. Angesichts der Abmessungen eines Zahnes ist auch diese Rekonstruktion schon beeindruckend, zeigt aber nicht die Mikrostrukturen der Micro-CT-Aufnahme.

3.10 PET-CT Kombinationsgeräte

Wenn man von der Angiographie mit Kontrastmitteln absieht, dann vermag die Computertomographie allein nur morphologische Informationen, also Informationen über die Form der Objekte zu liefern. Andererseits liefert die Positronen-Emissions-Tomographie (PET) Informationen über den Metabolismus, also die Funktion bzw. den Stoffwechsel. Wie in Kapitel 2 dargestellt wurde, beruht die Computertomographie auf der Absorption von Röntgenstrahlung. Unterschiedliche Organe mit unterschiedlichen Absorptionseigenschaften können sich daher nur der Form nach abbilden. Der Patient bleibt in diesem Verfahren passiv.

Bei der Positronen-Emissions-Tomographie wird dem Patienten ein radioaktiv markierter so genannter *Tracer* gespritzt, der im Körper verstoffwechselt wird. Ein sehr wichtiger *Tracer* ist ^{18}F -FDG (*2-(Fluorine-18)-Fluoro-2-Deoxy-D-Glucose*), mit dem der Glukosestoffwechsel verfolgt werden kann. Dies ist in der Onkologie besonders interessant, da aufgrund des schnelleren Stoffwechsels von Tumoren das ^{18}F -FDG vom Tumor verstärkt aufgenommen wird. Da das ^{18}F -FDG gegenüber der normalen Glukose durch das Traceratom leicht verändert ist, verhält es sich nur am Anfang der Stoffwechselkette wie Glukose, wird dann aber erkannt und nicht weiter abgebaut, so dass es zu einer Anreicherung im Tumor kommt.

Das ^{18}F -FDG ist ein Positronenstrahler¹⁶, so dass es am Ort der Anreicherung verstärkt zu Prozessen der so genannten Positronenannihilation kommt. Ein solcher Einzelprozess ist in Abbildung 2.7 rechts als Tochterprozess schon eingezeichnet und durch Gleichung (2.22) beschrieben. Als Mutterprozess zerfällt beim ^{18}F -FDG allerdings ein Proton p in ein Neutron n , ein Neutrino ν und eben in ein Positron,



das beim Zusammenstoß mit einem Elektron in der näheren Umgebung dieses Zerfallsortes vollständig in zwei Gammaquanten zerstrahlt, die in entgegengesetzten Richtungen davonfliegen. Die Gammaquanten werden dann in einer so genannten Koinzidenzmessung an zwei gegenüberliegenden Detektoren gemessen. Mit Hilfe der gefilterten Rückprojektion kann der Ort der Zerstrahlung rekonstruiert werden, so dass sich Tumore als *hot spots* im Bild darstellen. Insofern ist auch die mathematische Basis der Bildrekonstruktion beim PET-Verfahren in den späteren Kapiteln dieses Buches dargestellt. Über Details der Technik und Anwendungen der Positronen-Emissions-Tomographie lese man bei *J. Ruhlmann et al.* [Ruh98] nach.

Ein interessanter Ansatz in der bildgebenden Diagnostik ist die Kombination beider Verfahren. Die Idee, neben der Form auch die Funktion in einem Bild darzustellen, wird schon länger mit Methoden der so genannten Registrierung¹⁷ verfolgt. Dabei wird der Patient nacheinander mit verschiedenen Geräten gescannt. Aufgrund der unterschiedlichen Lagerung des Patienten, ist aber immer die Registrierung als Bildverarbeitungsschritt erforderlich. Außerdem vergeht eine gewisse Zeit zwischen den beiden Aufnahmen. In PET-CT-Kombinationsgeräten wie dem *biograph* von Siemens (Abbildung 3.19 oben) werden PET- und CT-Bilder praktisch simultan in gleicher Patientenlage gemessen, so dass die Lage eines Tumors im Verhältnis zur übrigen Anatomie unmittelbar dargestellt werden kann. Abbildung 3.19 unten zeigt einen Darmtumor, der sich als *hot spot* darstellt.

¹⁶ Positronen e^+ sind die Antiteilchen der Elektronen e^- .

¹⁷ Registrierung ist ein Bildverarbeitungsschritt, in dem die Koordinatensysteme der zwei Modalitäten angeglichen werden. Eine detaillierte Darstellung dieser Technik kann man bei *J. V. Hajnal et al.* finden [Haj01].

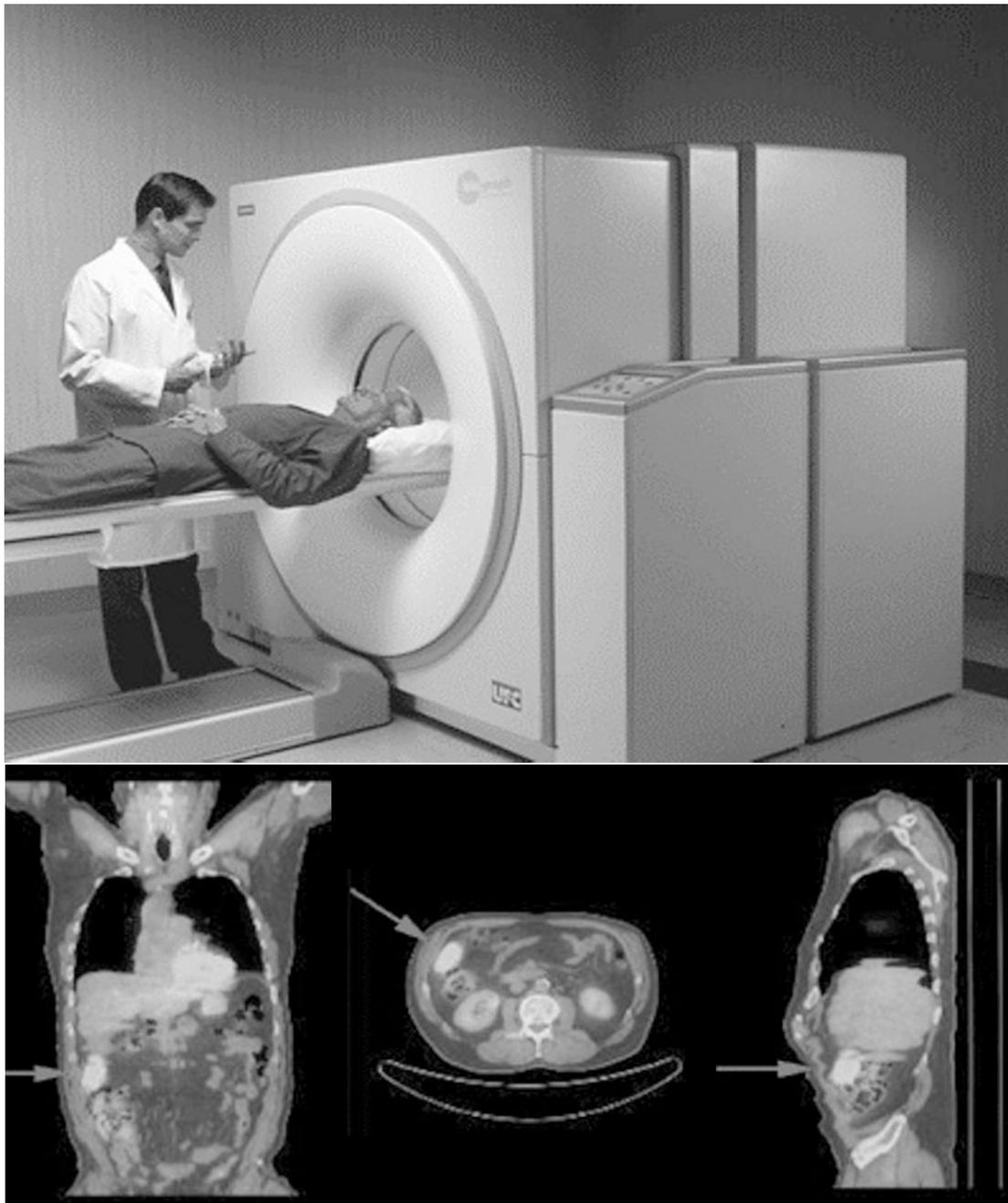


Abb. 3.19: Der *biograph*-Scanner von Siemens ist ein PET-CT-Kombinationsgerät, das die morphologische mit der metabolischen Information zusammen darstellen kann (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions).

3.11 Optisch-fotografische Rekonstruktionstechnik

Der Begriff Computertomographie hängt historisch mit der Entwicklung der Computer zusammen, die seit den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts erfolgreich zur Bildrekonstruktion eingesetzt werden. In Kapitel 3.2 wurde schon erwähnt, dass erst durch die Entwicklung der Computertechnologie eine praktisch einsetzbare Lösung des Rekonstruktionsproblems möglich wurde. Tatsächlich gibt es aber auch die Möglichkeit, die Bildrekonstruktion auf optisch-fotografischem Wege zu erzielen. 1977 schlug *P. R. Edholm* [Edh77] einen trickreichen optischen Aufbau vor, der in Abbildung 3.20 mit einigen Ergänzungen dargestellt ist.

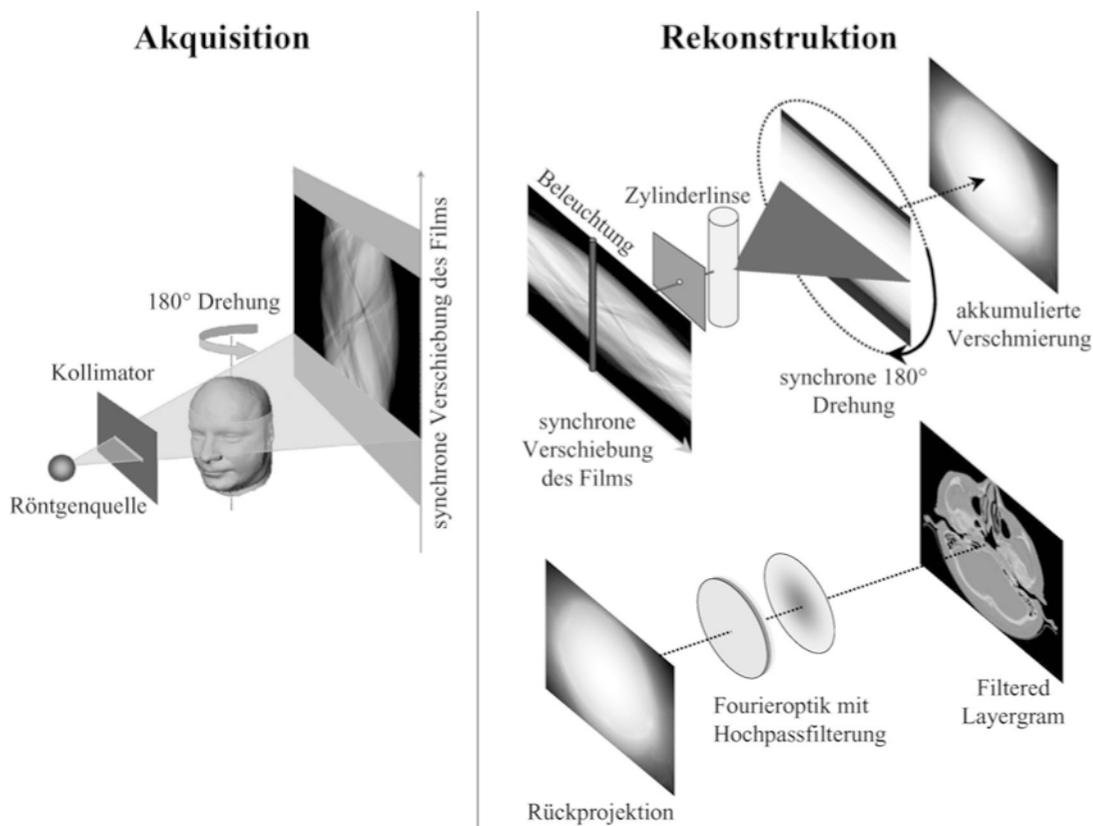


Abb. 3.20: Prinzip der optisch-fotografischen Rekonstruktionsmethode nach einer Idee von *P. R. Edholm* [Edh77] für die analoge Computertomographie.

Für die Bildakquisition wird durch Schlitzkollimation ein Röntgenfächer erzeugt, der das Objekt durchstrahlt und dessen Projektionsprofil entlang einer Linie auf einem Film gespeichert wird. Dieser Film wird nun synchron zur Drehung des Untersuchungsobjekts linear verschoben. Das sich ergebende Muster wird Sinogramm genannt und kann zur Rekonstruktion verwendet werden, indem in einem ersten Schritt mit einer Schlitzeleuchtung das jeweilige Projektionsprofil eines bestimmten Winkels über eine Zylinderlinse räumlich verschmiert, wiederum einen Film belichtet. Durch Verschiebung des Sinogramm-Films und der dazu synchronen Drehung der Zylinderlinse erhält man durch Übereinanderbelichtung aller Projektionsprofile eine einfache Rückprojektion. Diese kann mit einer Fourieroptik hochpassgefiltert werden, so dass das Bild damit rekonstruiert ist (vergleiche Kapitel 5.8). Heute ist die Computertechnologie so weit entwickelt, dass sie der optischen Rekonstruktion überlegen ist. Daher wird sie nicht weiter verfolgt.

4 Elementare Methoden der Signalverarbeitung

Eine vollständige Theorie des sich ständig weiterentwickelnden Gebietes der Signalverarbeitung kann in diesem Kapitel nicht untergebracht werden. Es werden nur die elementaren Methoden beschrieben, die für die Signalverarbeitung bei Computertomographen wichtig sind. Im Unterschied zu den meisten Abhandlungen über Signalverarbeitung wird hier die Darstellung der Signale im Ortsbereich verwendet – so wie sie bei Röntgengeräten und Computertomographen eben vorliegen.

4.1 Signale

Die Signale, die hier betrachtet werden, sind eindimensionale Ortssignale: $s(x)$ – z.B. von einem Detektorarray eines Computertomographen oder zweidimensionale Bilder: $f(x,y)$ – z.B. eine CT-Schichtaufnahme. Die Signale sind dabei kontinuierliche oder nach dem Abtastvorgang diskrete Funktionen einer oder mehrerer Variablen.

4.2 Räumliche Elementarsignale

In der Signalverarbeitung spielen einige elementare Signale eine herausragende Rolle, weil die Signalverformung bei deren Übertragung Rückschlüsse auf das System selbst zulässt. Diese Elementarsignale sind durch die Gleichungen (4.1) bis (4.7) gegeben sowie in den Abbildungen 4.1 dargestellt.

$$\text{Heaviside-Funktion} \quad \text{step}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{Rechteck-Funktion} \quad \text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\text{Dreiecks-Funktion} \quad \text{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{Sinc-Funktion} \quad \text{si}(x) \equiv \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (4.4)$$

$$\text{Gauß-Funktion} \quad \text{gauss}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (4.5)$$

$$\text{Delta-„Funktion“} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (4.6)$$

oder formal

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (4.7)$$

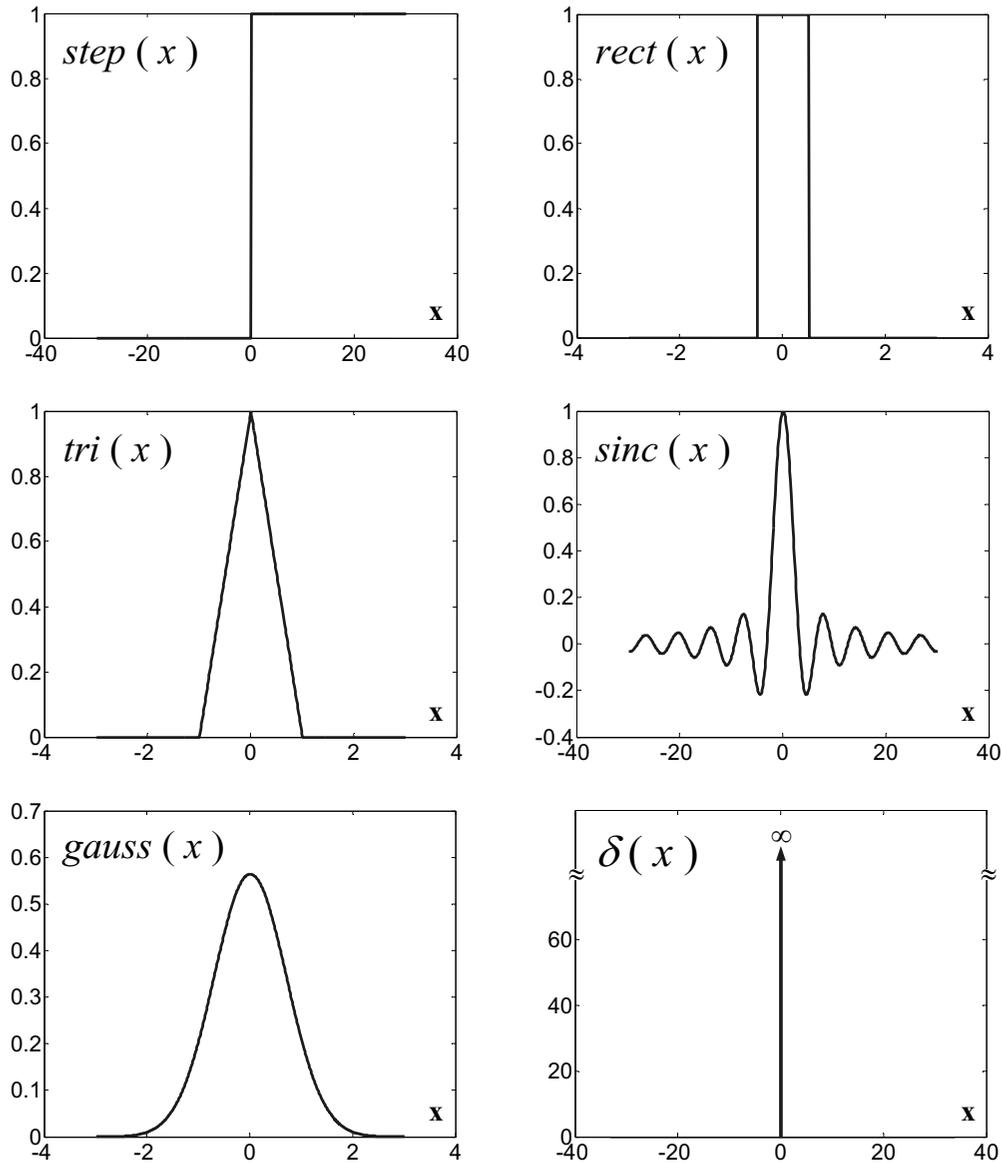


Abb. 4.1: Darstellung einiger elementarer Funktionen der Signalverarbeitung. Durch Auswertung der Veränderungen, die diese Signale bei der Übertragung durch lineare oder auch komplexe Systeme erfahren, lassen sich Rückschlüsse auf das System ziehen. Eine herausgehobene Rolle spielt dabei die Diracsche *Delta*-,Funktion“. Sie ist mit der so genannten Impulsantwort des Systems verknüpft, die in den späteren Kapiteln häufig benötigt wird. Aufgrund der Bedeutung der *Delta*-,Funktion“, die eigentlich eine Distribution ist, wird in den Kapiteln 4.5 bis 4.7 besonders auf sie eingegangen.

4.3 Systeme

Systeme verarbeiten Signale. Man spricht speziell von einem Übertragungssystem und beschreibt dieses durch das Ausgangssignal $g(x)$ bei einem bestimmten Eingangssignal $s(x)$. Die Transformationsgleichungen schreibt man ganz formal als

$$g(x) = \mathcal{L} \{ s(x) \} \quad (4.8)$$

bzw. für den zweidimensionalen Fall

$$g(x,y) = \mathcal{L} \{ f(x,y) \}. \quad (4.9)$$

Gelegentlich kennzeichnet man den Transformationsvorgang auch durch ein schematisches Blockschaltbild wie in Abbildung 4.2.

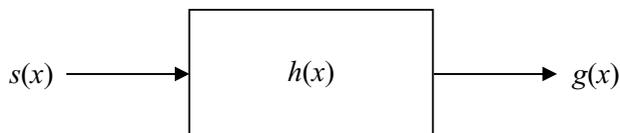


Abb. 4.2: Schematisches Blockschaltbild zur Signalübertragung. $h(x)$ ist die Impulsantwort.

Allgemein betrachtet man bei Übertragungssystemen, die Eigenschaften *Linearität*, *Orts-* bzw. *Verschiebungsinvarianz*, *Isotropie*, *Kausalität* und *Stabilität*. Diese Eigenschaften werden in den nun folgenden Abschnitten kurz eingeführt.

4.3.1 Linearität

Ein System wird als linear bezeichnet, wenn für alle $a_i \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathcal{L} \{ \sum_i a_i s_i(x) \} = \sum_i a_i g_i(x) \quad (4.10)$$

bzw.

$$\mathcal{L} \{ \sum_i a_i f_i(x,y) \} = \sum_i a_i g_i(x,y). \quad (4.11)$$

Ein Beispiel für ein lineares Übertragungssystem in der Bildverarbeitung ist ein Kantenfilter, der vereinfacht durch

$$\mathcal{L} \{ f_i(x,y) \} \equiv f_i(x,y) - f_i(x,y+1) = g_i(x,y) \quad (4.12)$$

dargestellt werden kann. Dieser detektiert in Bildern Grauwertsprünge wie sie z.B. in Abbildung 4.3 gegeben sind. Die zwei Bilder links und Mitte in Abbildung 4.3 zeigen horizontale Grauwerttreppen mit einer Stufenhöhe von jeweils 40. Das mittlere Grauwerteniveau ist aber im mittleren Bild um 100 höher als im linken Bild. Entscheidend für den Kantenfilter ist, dass der Filter auf den Grauwertsprung

$$f_1(x,y) = 40 \rightarrow f_1(x,y+1) = 80 \quad (4.13)$$

im linken Bild genauso antwortet wie auf den Sprung

$$f_2(x,y) = 140 \rightarrow f_2(x,y+1) = 180 \quad (4.14)$$

im mittleren Bild. Die Antwort des Kantenfilters ist als Profil in Abbildung 4.3 (rechts) zu sehen. Die horizontal verlaufenden Kanten der Treppen liefern in beiden Bildern die gleiche Antwort.

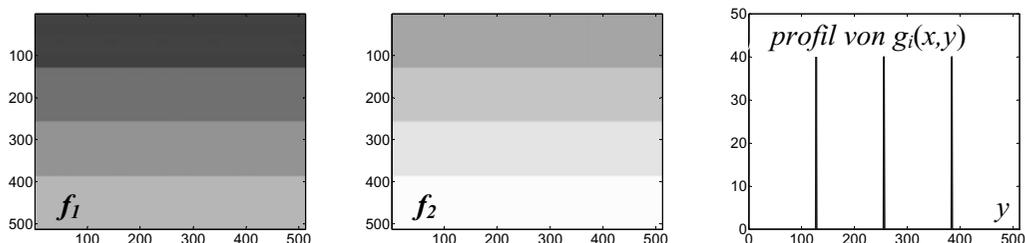


Abb. 4.3: Aufgrund der Linearität des Kantenfilters liefern zwei in ihren absoluten Grauwerten unterschiedliche Bilder mit horizontalen Stufen der gleichen Stufenhöhe dieselbe Antwort. Die Antwort $g_i(x,y)$ ist hier rechts als vertikales Profil wiedergegeben.

4.3.2 Orts- bzw. Verschiebungsinvarianz

Man spricht von Ortsinvarianz bzw. Verschiebungsinvarianz eines Übertragungssystems, wenn für beliebige x_o, y_o gilt

$$\mathcal{L} \{ s(x-x_o) \} = g(x-x_o) \quad (4.15)$$

bzw. für den zweidimensionalen Fall

$$\mathcal{L} \{ f(x-x_o, y-y_o) \} = g(x-x_o, y-y_o). \quad (4.16)$$

Obwohl die Gleichungen (4.15) und (4.16) wie selbstverständliche Eigenschaften aussehen, kann man in der Regel nicht davon ausgehen, dass reale Systeme Orts- bzw. Verschiebungsinvariant sind. Ein Beispiel hierfür sind Bildverzerrungen. Lineare verschiebungsinvariante Systeme werden auch LSI-Systeme genannt (LSI-system: *linear shift-invariant system*).

4.3.3 Isotropie bzw. Rotationsinvarianz

Bei der Übertragung verallgemeinerter Bilder der Dimension größer als Eins ändert sich bei Isotropie bzw. Rotationsinvarianz die Form eines Objektes nicht. Das in Abbildung 4.3 gezeigte Beispiel der Anwendung eines Kantenfilters ist nur dann ein isotropes System, wenn das Ergebnis des Filters unabhängig von der Orientierung der Kanten immer derselbe Wert ist.

4.3.4 Kausalität

Bei kausalen Übertragungssystemen ist das Ausgangssignal nicht vor dem Eingangssignal bekannt. Dies gilt für reale Online-Systeme immer. In der Systemtheorie wird aus Gründen einfacher mathematischer Behandlung gerne mit nicht-kausalen Systemen gerechnet [Lük99]. Insbesondere macht der Begriff der Kausalität nur bei zeitlich veränderlichen Signalen Sinn. Bei der Bildverarbeitung liegt das Bild in der Regel vollständig vor und die Signalverarbeitung geschieht dann in Bezug auf die Ortskoordinaten [Wer00].

4.3.5 Stabilität

Ein System wird als amplitudenstabil bezeichnet, wenn es auf ein amplitudenbegrenztes Eingangssignal mit einem amplitudenbegrenzten Ausgangssignal antwortet. Diese Systeme werden auch BIBO-Systeme genannt (*bounded input – bounded output*). In der Technik können instabile Systeme sehr problematisch sein, da z.B. aufgrund von Zahlenformatsüberschreitungen in Softwaremodulen Regelprozesse mit unsinnigen Ergebnissen gesteuert werden könnten.

4.4 Signalübertragung

Wenn man Übertragungssysteme analysieren möchte, verwendet man die Elementarsignale (4.1) bis (4.7), deren Veränderung leichter Rückschlüsse auf das System erlauben. Das Konzept der Verwendung von Elementarsignalen soll in den folgenden Abschnitten erläutert werden. Eines dieser Signale ist das normierte Rechteck

$$s_0(x) = \frac{1}{X_0} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{X_0}\right) \quad (4.17)$$

der Länge X_0 und der Höhe $1/X_0$, das auf dem elementaren Signal (4.2) beruht.

Abbildung 4.4 zeigt wie ein Signal aus zwei aufeinanderfolgenden normierten Rechtecksignalen durch ein Übertragungssystem verformt wird. Die Verformung ist durch die spezielle Eigenschaft des Systems gegeben, die durch die so genannte Impulsantwort $h(x)$ beschrieben wird. Die Impuls- oder Stoßantwort eines Systems wird in Kapitel 4.7 genauer beschrieben.

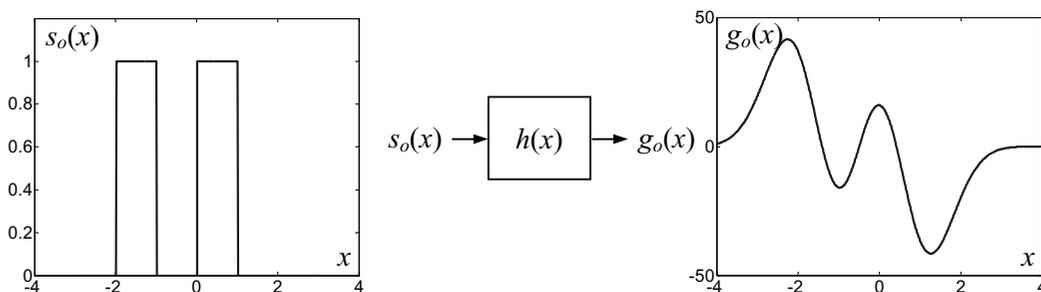


Abb. 4.4: Transformation des Eingangssignals $s_0(x)$ bestehend aus zwei aufeinanderfolgenden Rechtecksignalen durch Übertragung. Das Übertragungssystem wird durch die Funktion $h(x)$ beschrieben, die die so genannte Impulsantwort des Systems ist.

Auf dem Weg die Abtastung und damit die Digitalisierung eines analogen Signals zu verstehen, verwendet man zunächst die Rechteckfunktion zur Annäherung eines beliebigen Signals $s(x)$. Dabei nutzt man die so genannte Ausblendeigenschaft des Rechtecks. Abbildung 4.5 zeigt dieses Verhalten. Das analoge Signal $s(x)$ wird an der Stelle $n X_0$ durch das Rechteck

$$re(n X_0) = s(n X_0) \operatorname{rect}\left(\frac{x - n X_0}{X_0}\right) \quad (4.18)$$

angenähert, wobei $s(n X_0)$ die Höhe des Signals $s(x)$ an der Stelle $n X_0$ darstellt und die *rect*-Funktion die Ausblendung vornimmt.

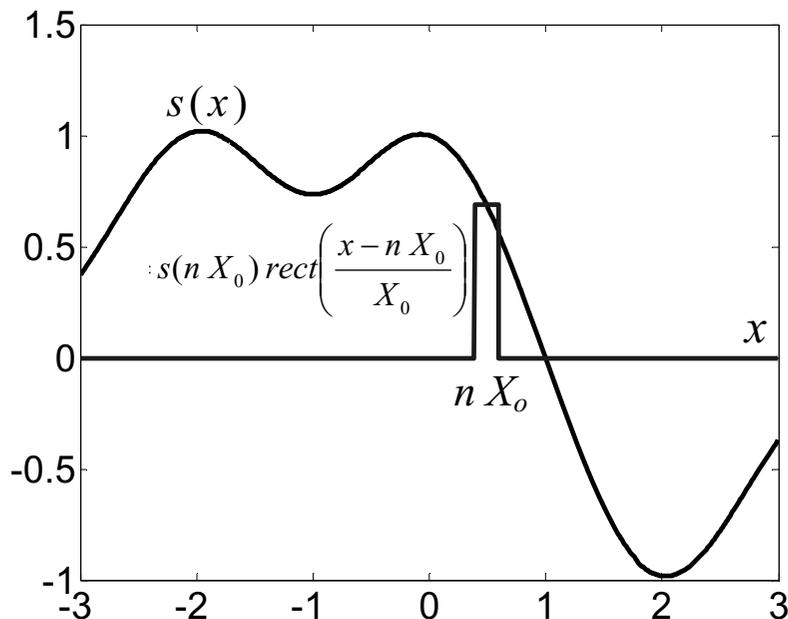


Abb. 4.5: Ausblendeigenschaft der Rechteckfunktion. Das analoge Signal $s(x)$ wird durch die Rechteckfunktion der Breite X_0 und Höhe $s(nX_0)$ an der Stelle nX_0 angenähert.

Zur Approximation des gesamten Signals $s(x)$ setzt man die Rechteckfunktion wie folgt zur so genannten Treppenfunktion zusammen

$$s(x) \approx s_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n X_0) \operatorname{rect}\left(\frac{x - n X_0}{X_0}\right). \quad (4.19)$$

Abbildung 4.6 zeigt wie ein analoges Signal stückweise durch die Aufeinanderfolge von entsprechend normierten Rechtecken approximiert wird.

Die Treppenfunktion approximiert das analoge Signal umso genauer, je kleiner die Breite der einzelnen Rechtecke ist. Verwendet man die Definition des normierten Rechtecks (4.17), dann erhält man

$$s_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n X_0) s_0(x - n X_0) X_0. \quad (4.20)$$

Ist das betrachtete Übertragungssystem linear und orts- bzw. verschiebungsinvariant, dann gilt für das übertragene Signal

$$g(x) \approx g_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n X_0) g_0(x - n X_0) X_0. \quad (4.21)$$

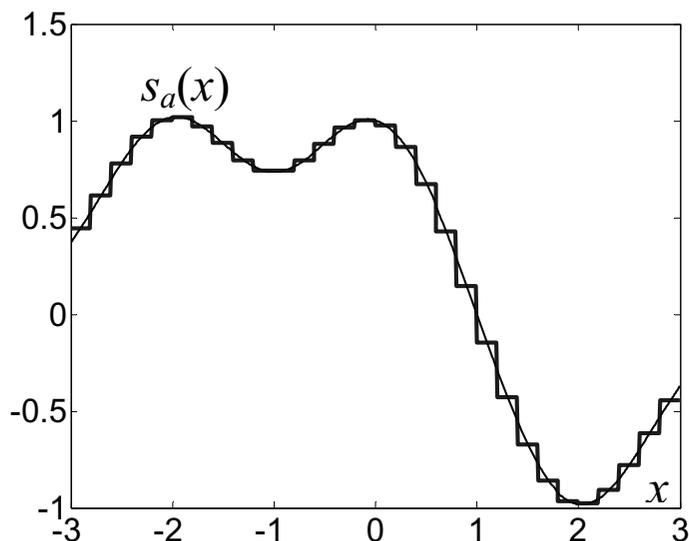


Abb. 4.6: Approximation eines Signals durch die Treppenfunktion. Je kleiner die aufeinanderfolgenden Rechtecke sind, desto genauer approximiert die Treppenfunktion das analoge Originalsignal.

Das heißt, das approximierte Ausgangssignal entsteht durch Überlagerung der Systemantworten auf die unterschiedlich gewichteten Rechteckimpulse. Abbildung 4.7 zeigt die einzelnen Systemantworten auf die Rechteckimpulse und das Ergebnis der Summenbildung. In Abbildung 4.7 links sind die Einzelergebnisse der jeweiligen übertragenen Rechtecke der Treppenfunktion aus Abbildung 4.6 dargestellt.

Dass die Summe der einzelnen Übertragungen in Gleichung (4.21) die korrekte Gesamtübertragung darstellt, ist eine typische Charakteristik linearer Systeme, wie man es auch aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen kennt. Die Summe der gewichteten Einzelergebnisse stellt das Gesamtergebnis dar. Die Abbildung 4.7 rechts zeigt die Konvergenz der Summe der einzelnen übertragenen Elementarsignale zum Gesamtergebnis $g_a(x)$. Vergleiche hierzu auch Abbildung 4.11.

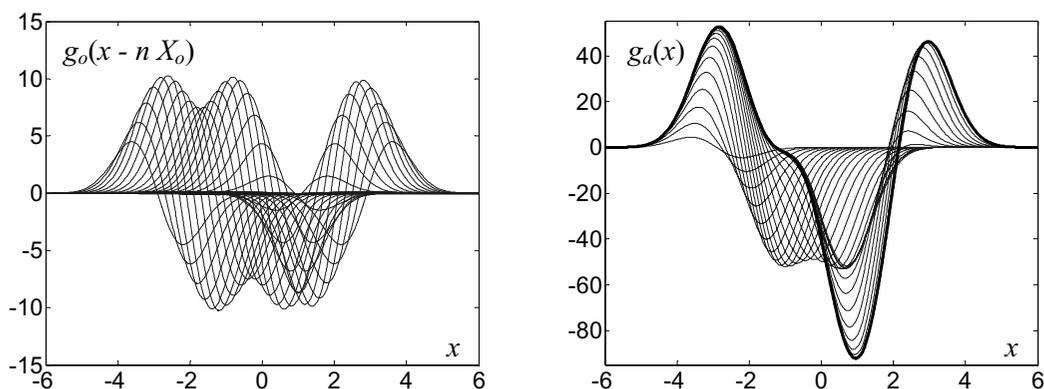


Abb. 4.7: Approximation des Ausgangssignals durch Überlagerung der einzelnen Systemantworten. Das rechte Bild zeigt das Ergebnis der Summenbildung sowie die Konvergenz der Summe der jeweiligen Systemantworten der einzelnen elementaren Rechtecksignale – die man im linken Bild sieht – gegen die Gesamtsystemantwort (vergleiche hierzu auch Abbildung 4.11).

4.5 Diracstoß

Das im vorhergehenden Abschnitt exemplarisch eingeführte Signal $s(x)$ wird umso genauer approximiert, je kleiner beim normierten Rechteckimpuls (4.17) die Breite X_0 ist. Dabei soll die Fläche des Impulses aber auf Eins normiert bleiben. Je schmaler also der Impuls ist, desto größer muss die Amplitude $1/X_0$ sein.

Führt man den Grenzübergang

$$\delta(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{X_0} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{X_0}\right) \quad (4.22)$$

durch, so erhält man den Diracstoß oder genauer die δ -Distribution, die als Elementarsignal schon durch die Gleichungen (4.6) und (4.7) oben eingeführt wurde. Abbildung 4.8 zeigt den Grenzübergang in Gleichung (4.22) schematisch. Man erhält einen Nadelimpuls unendlicher Höhe mit verschwindender Breite.

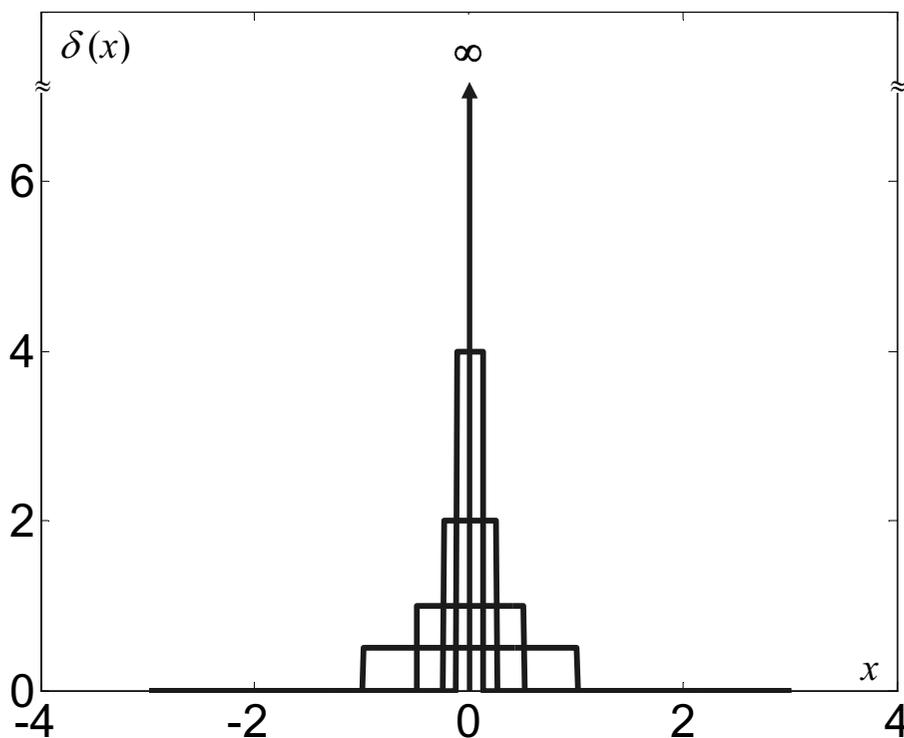


Abb. 4.8: Grenzübergang vom normierten Rechteckimpuls zum Nadelimpuls unendlicher Höhe, dem so genannten Diracstoß. Die so gewonnene δ -Distribution spielt eine entscheidende Rolle in der Theorie der Abtastung analoger Signale.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass es noch andere Grenzwertrepräsentationen der δ -Distribution gibt, so zum Beispiel

$$\delta(x) = \lim_{X_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2X_0} e^{\left(\frac{-|x|}{X_0}\right)} \quad (4.23)$$

oder

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi \varepsilon x)}{\pi \varepsilon x}, \quad (4.24)$$

denn diese werden später noch benötigt. Weitere Repräsentationen findet man in *H. H. Barrett und W. Swindell* [Bar81].

Die Durchführung des Grenzüberganges in Gleichung (4.18) heißt praktisch, dass man den Ort der Ausblendung durch

$$n X_0 \rightarrow \xi \quad (4.25)$$

und die Breite der Ausblendung durch

$$X_0 \rightarrow d\xi \quad (4.26)$$

ersetzen muss.

Auf diese Weise erhält man die wichtige Eigenschaft

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) \delta(x - \xi) d\xi \\ &= s(x) * \delta(x) \end{aligned} \quad (4.27)$$

bzw. für den zweidimensionalen Fall eines Bildsignals

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ &= f(x, y) * \delta(x, y) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Gleichung (4.27) ist symmetrisch bezüglich Vertauschung der Integrationsvariablen, so dass auch

$$s(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \delta(x - \xi) dx \quad (4.29)$$

gilt. Gleichung (4.29) wird Siebeigenschaft der δ -Distribution genannt.

Zwei weitere Eigenschaften sollen an dieser Stelle explizit erwähnt werden, da sie in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Zunächst sei die Argumentskalierung $\delta(ax)$ genannt, wobei $a \neq 0$. Die vertraute Interpretation als Dehnung der Funktion kann bei einem Impuls der Breite Null nicht funktionieren. Betrachtet man aber die aus der Definition (4.22) sofort einleuchtende Normierung der Integration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (4.30)$$

so stößt man auf die neue Frage, welche Bedeutung $\delta(ax)$ als Integrand hat. Dies wird mit der einfachen Substitution $y = ax$ beantwortet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx. \quad (4.31)$$

Da die δ -Distribution symmetrisch ist, gilt $\delta(-x) = \delta(x)$ und damit allgemein

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (4.32)$$

Gelegentlich ist das Argument der δ -Distribution selbst eine kompliziertere Funktion $g(x)$ der Ortsvariablen x . Diese weitere Eigenschaft, die in Kapitel 5.5 benötigt wird, soll hier ebenfalls kurz gezeigt werden.

$g(x)$ habe eine einfache Nullstelle bei $x = x_0$. Damit ist klar, dass $\delta(g(x))$ überall verschwindet – bis auf die infinitesimale Nachbarschaft von $x = x_0$. Entwickelt man nun $g(x)$ nach Taylor um die Nullstelle x_0 , so erhält man

$$\delta(g(x)) = \delta\left(g(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0}\right). \quad (4.33)$$

Höhere Terme der Taylorentwicklung werden hier nicht benötigt, da die Umgebung um x_0 beliebig klein ist. Da nun $g(x_0) = 0$ gilt, folgt unmittelbar

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0}}. \quad (4.34)$$

Dabei nutzt man die Skalierungseigenschaft (4.32) der δ -Distribution. Hat die Funktion $g(x)$ mehr als eine einfache Nullstelle, soll lässt sich Gleichung (4.34) durch

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_i}} \quad (4.35)$$

verallgemeinern. Die grundlegenden Eigenschaften der δ -Distribution findet man in Tabelle 4.1. Weitergehende Eigenschaften findet man z.B. in *A. Messiah* [Mes81], *B. Klingen* [Kli01] oder *R. N. Bracewell* [Bra65].

Tab. 4.1: Grundlegende Eigenschaften der δ -Distribution nach [Mes81],[Kli01] und [Bra65].

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (4.36)$$

$$a \delta(x) + b \delta(x) = (a + b) \delta(x) \quad (4.37)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i |g'(x_i)|^{-1} \delta(x - x_i) \quad (4.38)$$

mit x_i als den einfachen Nullstellen von $g(x)$. Speziell gilt für $g(x) = ax$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad \text{wenn } a \neq 0 \quad (4.39)$$

$$x \delta(x) = 0 \quad (4.40)$$

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a) \quad (4.41)$$

$$\int \delta(x - y) \delta(y - a) dy = \delta(x - a) \quad (4.42)$$

$$\delta(x - a) * \delta(x - b) = \delta(x - a - b) \quad (4.43)$$

$$\frac{d}{dx} \text{step}(x) = \delta(x) \quad (4.44)$$

$$\delta(x - a) \delta(x - b) = 0 \quad \text{wenn } a \neq b^{18} \quad (4.45)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \quad (4.46)$$

Die Gleichungen (4.36) bis (4.46) bedeuten, dass man die linke Seite jeweils durch den Ausdruck auf der rechten Seite ersetzen kann, wenn er als Faktor unter einem Integral über x auftritt.

4.6 Dirackamm

Die Siebeigenschaft (4.29) der δ -Distribution wird zur Abtastung eines analogen Signals verwendet. Hierzu konstruiert man den so genannten Dirackamm

$$s_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nX_0) \delta(x - nX_0) = s(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX_0) \quad (4.47)$$

¹⁸ Der Ausdruck $\delta(x)\delta(x)$ bei gleicher Position ist nicht definiert.

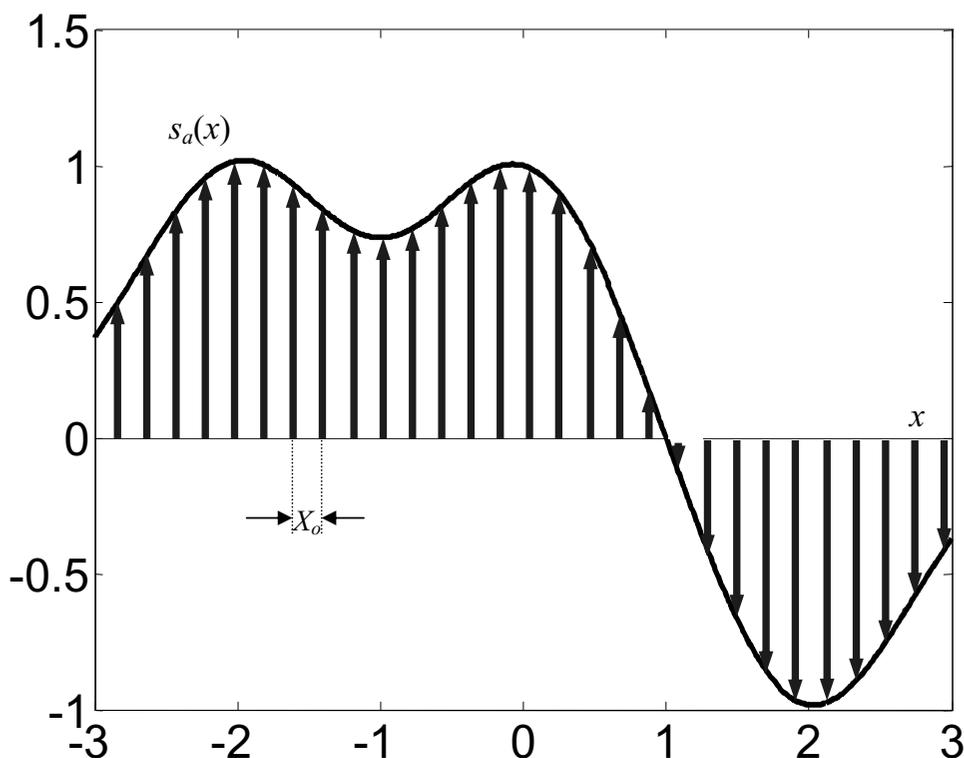


Abb. 4.9: Abtastvorgang eines analogen Signals durch den Dirackamm. Das Signal $s(x)$ wird im Gegensatz zur Treppenfunktion hierbei nur noch punktuell im Abstand X_0 gemessen, eben abgetastet. Die gewählte Darstellung des Kamms mit den Pfeilen ist nur symbolisch zu verstehen. Mathematisch ist nicht die Höhe der Diracstöße unterschiedlich, sondern die Abtastwerte sind die Gewichte der Diracstöße.

Abbildung 4.9 zeigt, wie mit dem Dirackamm eine Funktion $s(x)$ abgetastet wird. Die periodische, nadelförmige δ -Distribution misst das analoge Signal im Gegensatz zur Treppenfunktion (4.19) nun nur noch punktuell. Aufgrund des Erscheinungsbildes der Kammfunktion hat *R. N. Bracewell* [Bra65] den Dirackamm mit dem kyrillischen Buchstaben \mathbb{W} (ausgesprochen „scha“) bezeichnet, damit gilt dann

$$s_a(x) = s(x)\mathbb{W}(x) \quad (4.48)$$

mit

$$\mathbb{W}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX_0) \quad (4.49)$$

Die Siebeigenschaft wird in der Computertomographie zweidimensional benötigt. Im Zweidimensionalen kann man neben Nadelimpulsen $\delta(x,y)$ auch δ -Linien konstruieren, die als kontinuierliche Aneinanderreihung von δ -Nadelimpulsen aufgefasst werden können. Abbildung 4.10 zeigt, wie ein anatomisches Objekt (hier ein Schnitt durch den Abdomen) entlang paralleler Linien abgetastet wird.

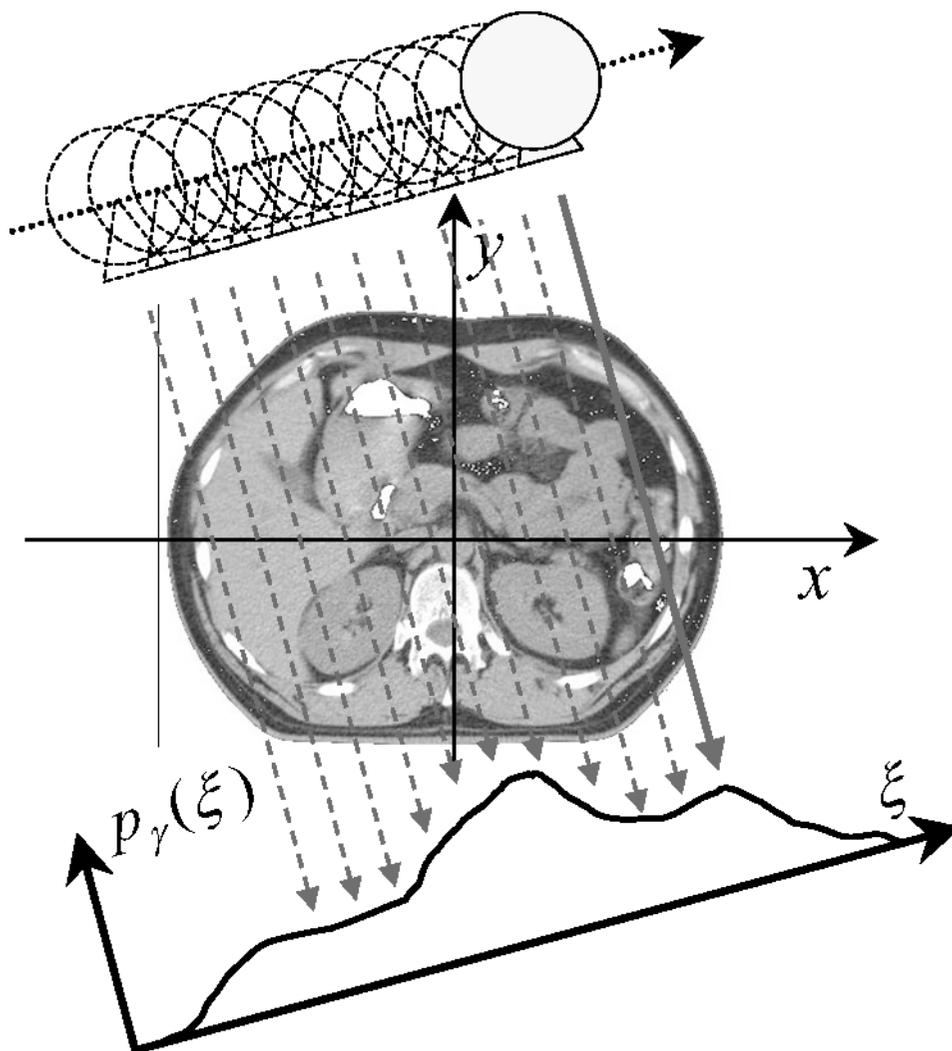


Abb. 4.10: Zweidimensionale räumliche Abtastung eines Objektes entlang paralleler Linien in der Computertomographie. Gemessen wird die Summe aller Schwächungswerte $p_\gamma(\xi)$ entlang der Linien unter dem Winkel γ . Das Ausgangssignal ist die räumliche Verteilung der Schwächungswerte $f(x,y)$.

Das Integrieren der Schwächungswerte, die als räumliche Verteilung $f(x,y)$ vorliegen, kann man als eindimensionales Integral in einem um den Winkel γ gegenüber dem (x,y) -System gedrehten, rechtwinkligen Koordinatensystem (ξ, η) als

$$p_\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi \cos(\gamma) - \eta \sin(\gamma), \xi \cos(\gamma) + \eta \sin(\gamma)) d\eta \quad (4.50)$$

schreiben. Die η -Achse zeigt dabei in Richtung der Integrationswege. Im konkreten Fall der Computertomographie ist das die Richtung der Röntgenstrahlung.

Gleichung (4.50) kann man auch als Faltung mit einer δ -Linie beschreiben, wobei die Siebeigenschaft der δ -Distribution Verwendung findet, also

$$p_\gamma(\xi) = f(x, y) * \delta(\mathbf{L}) = \iint f(x, y) \delta((x, y) - \mathbf{L}) dx dy \quad (4.51)$$

bzw.

$$f * \delta(\mathbf{L}) = \int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{L})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r} \in \mathbf{L}} f(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (4.52)$$

Man erhält so die Projektion aller Werte auf dem Weg der Röntgenstrahlung – also entlang der η -Achse – durch das Objekt auf die ξ -Achse.

4.7 Stoßantwort

Die Art und Weise wie physikalische Objekte und Systeme untersucht werden läuft immer auf dasselbe Prinzip hinaus. Man versucht, das Objekt anzuregen und wartet auf die Antwort des Systems. Bei genauer Kenntnis der Anregung lassen sich so viele Eigenschaften sehr gut bestimmen. Eine besonders einfache Anregung eines Systems gelingt durch den Diracstoß.

Die Antwort eines Übertragungssystems auf einen Diracstoß bzw. δ -Impuls ist wieder durch

$$s(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)\delta(x - \xi)dx \quad (4.53)$$

also im Wesentlichen durch die Siebeigenschaften gegeben. Betrachtet man nun die lineare Übertragung

$$g(x) = \mathcal{L} \{ s(x) \}, \quad (4.54)$$

so erhält man als Antwort des Systems

$$g(x) = s(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) h(x - \xi) d\xi, \quad (4.55)$$

wobei $h(x)$ die so genannte Stoßantwort bzw. Impulsantwort des Systems ist.

Abbildung 4.11 zeigt exemplarisch die Übertragung des Signals $s(x)$ durch die Stoßantwort

$$h(x) = -\frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (4.56)$$

Die hier willkürlich gewählte Stoßantwort (4.56) fand auch schon in den Beispielen aus dem Kapitel 4.4 Verwendung.

Die Antwort aus Gleichung (4.55) kann man auch für zweidimensionale Systeme analog durch

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (4.57)$$

beschreiben.

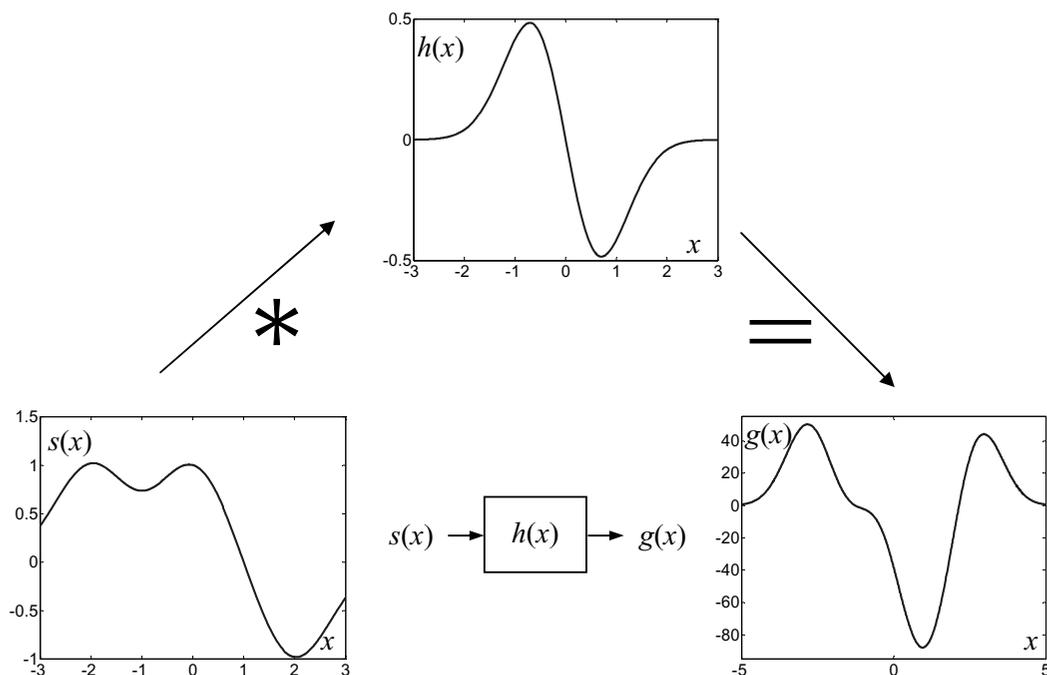


Abb. 4.11: Übertragung eines Signals. Das übertragene Signal erhält man durch Faltung des Signals $s(x)$ mit der Stoßantwort $h(x)$ des Systems.

Gleichung (4.57) beschreibt den so genannten Hauptsatz der Systemtheorie abbildender Systeme. Die so definierte Punktantwort des Systems wird im Englischen *Point-Spread-Function* PSF genannt. Ein Übertragungssystem mit einer *Point-Spread-Function* $h(x,y)$ antwortet also auf ein Eingangsbild $f(x,y)$ mit dem Ausgangsbild

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) \quad (4.58)$$

Dabei ist Gleichung (4.58) lediglich die etablierte Kurzschreibweise des Zusammenhangs von Gleichung (4.57).

4.8 Übertragungsfunktion

Es stellt sich noch die Frage, wie man die Stoßantwort eines Systems ermittelt. Auch hierzu verwendet man spezielle Funktionen, mit der man das System beaufschlagt. Man betrachtet dazu das Eigenwertproblem

$$\mathcal{L} \sigma = H \sigma, \quad (4.59)$$

wobei \mathcal{L} ein linearer Operator, σ eine Eigenfunktion des Systems und H die Eigenwerte des Systems darstellen. Die lineare Operation \mathcal{L} sei nun gerade durch

$$\mathcal{L} \sigma \equiv \sigma * h(x) \quad (4.60)$$

gegeben.

Die Eigenfunktionen lassen sich durch

$$\sigma(x) = e^{i2\pi ux} = \cos(2\pi ux) + i \sin(2\pi ux) \quad (4.61)$$

darstellen. Die Anwendung des linearen Operators auf die Eigenfunktionen liefert

$$\begin{aligned} g(x) &= \sigma(x) * h(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{i2\pi u(x-\xi)} d\xi \\ &= e^{i2\pi ux} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-i2\pi u\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Das heißt, die Eigenwerte sind durch

$$H(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi ux} dx \quad (4.63)$$

gegeben und u ist dabei die Raumfrequenz des Systems. Offenbar sind die Eigenwerte $H(u)$ gerade die Amplituden und Phasen des Systems in Abhängigkeit von der Raumfrequenz u .

Bei der Übertragung eines Bildes geht man analog vor, so dass im Zweidimensionalen

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4.64)$$

gilt, wobei u die Raumfrequenz in x -Richtung und v die Raumfrequenz in y -Richtung darstellt. Mit den Definitionen

$$u = \frac{1}{\lambda_x}, \quad v = \frac{1}{\lambda_y} \quad \text{und} \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} \quad (4.65)$$

kann man auch

$$H(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (4.66)$$

schreiben. Diese Gleichung stellt eine Fouriertransformation dar, deren formale Schreibweise in einer Dimension häufig durch

$$H = \mathcal{F} \{ h \} \quad \text{oder} \quad h \circ \text{---} \bullet H$$

gegeben ist. Da man an h interessiert ist, muss die Fouriertransformation invertiert werden

$$h = \mathcal{F}^{-1} \{ H \} \quad (4.67)$$

oder

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(u) e^{i2\pi ux} du \quad (4.68)$$

bzw. für die *Point-Spread-Function* also den zweidimensionalen Fall

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} dudv. \quad (4.69)$$

Das heißt, die Übertragungsfunktion eines Systems ist die Fouriertransformation seiner Stoßantwort [Lük99].

4.9 Fouriertransformation

Wegen der Bedeutung der Fouriertransformation in der Signalverarbeitung der Computertomographie soll sie an dieser Stelle kurz betrachtet werden. In den kommenden Kapiteln, in denen die Rekonstruktionsmathematik der Computertomographie behandelt wird, findet folgende Definition der Fouriertransformierten einer Funktion Anwendung.

Ist $f(x)$ eine reelle oder komplexwertige Funktion der Variablen x , so ist ihre Fouriertransformierte, falls sie existiert, die Funktion

$$F(u) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha ux} dx \equiv \mathcal{F} \{ f(x) \}, \quad (4.70)$$

wobei α eine Konstante ist, die je nach Anwendungsgebiet der Signalverarbeitung unterschiedlich gewählt wird. In der Quantenmechanik wählt man z.B. häufig den Kehrwert des auf 2π normierten Planckschen Wirkungsquantums $\alpha = 1 / \hbar$. In den späteren Kapiteln wird $\alpha = 2\pi$ gesetzt. $f(x)$ ergibt sich aus $F(u)$ durch Umkehrung der Fouriertransformation

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i\alpha ux} du \equiv \mathcal{F}^{-1} \{ F(u) \}. \quad (4.71)$$

Durch diese symmetrische Definition lässt sich Verwirrung darüber vermeiden, welche Normierung vor dem Integral der Hin- bzw. Rücktransformation stehen muss. Ist allgemeiner $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ eine Funktion der n Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, so ist die Fouriertransformierte durch

$$F(u_1, \dots, u_n) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i\alpha(u_1x_1 + \dots + u_nx_n)} dx_1 \dots dx_n \quad (4.72)$$

und deren Umkehrung durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F(u_1, \dots, u_n) e^{i\alpha(u_1x_1 + \dots + u_nx_n)} du_1 \dots du_n \quad (4.73)$$

definiert. Wichtige Fouriertransformierte sind in der Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Unter der Voraussetzung, dass die Ausgangsfunktion f an Unstetigkeitsstellen die Mittelwertbedingung

$$\mathcal{F} \{ f(x) \} = (F(u^-) + F(u^+)) / 2 \quad (4.74)$$

erfüllt, wobei u^- und u^+ den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert darstellen, gelten die Gleichungen

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f(x) \} \} = f(x) \quad (4.75)$$

bzw.

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ F(u) \} \} = F(u) \quad (4.76)$$

als Gleichungen identischer Funktionen. Dies kann man sehen, indem man die Transformationen explizit hinschreibt. Es gilt nämlich

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f(x) \} \} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi u x} dx \right\} \quad (4.77)$$

Die Ausführung der inversen Transformation erfordert das Umtaufen der Ortsvariablen, da die gemischten Glieder im folgenden Doppelintegral sonst nicht berücksichtigt würden. Also schreibt man

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i2\pi u \xi} d\xi \right\} e^{i2\pi u x} du. \quad (4.78)$$

Da die Integrationsreihenfolge in dem Doppelintegral vertauscht werden kann, gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i2\pi u(\xi-x)} d\xi du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi u(\xi-x)} du \right\} d\xi \end{aligned} \quad (4.79)$$

und mit der Definition der δ -Distribution (4.46) folgt schließlich

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi \quad (4.80)$$

also die oben eingeführte Siebeigenschaft.

An dieser Stelle soll für zwei spezielle Funktionen, die in späteren Kapiteln noch Bedeutung erhalten, die Fouriertransformation zur Übung explizit ausgerechnet werden.

Tab. 4.2: Wichtige Funktionen und deren Fouriertransformierte nach [Mes81],[Kli01] und [Bra65].

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i\alpha u x} du \quad F(u) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha u x} dx$$

Linearität

$$a f(x) + b g(x) \quad a F(u) + b G(u) \quad (4.81)$$

Argumentskalierung

$$f\left(\frac{x}{c}\right) \quad |c| F(cu) \quad (4.82)$$

$$|c| f(cx) \quad F\left(\frac{u}{c}\right) \quad (4.83)$$

$$f(-x) \quad F(-u) \quad (4.84)$$

Transformation der konjugiert komplexen Funktionen

$$f^*(x) \quad F^*(-u) \quad (4.85)$$

$$F^*(x) \quad f^*(u) \quad (4.86)$$

Transformation der Transformierten

$$F(x) \quad f(-u) \quad (4.87)$$

Ableitung der Transformierten

$$x f(x) \quad \frac{i}{\alpha} F'(u) \quad (4.88)$$

Ableitung der Originalfunktion

$$f'(x) \quad i \alpha u F(u) \quad (4.89)$$

Argumentverschiebung

$$f(x - x_0) \quad e^{-i\alpha u x_0} F(u) \quad (4.90)$$

$$e^{i\alpha u_0 x} f(x) \quad F(u - u_0) \quad (4.91)$$

Transformation spezieller Funktionen

$$\delta(x) \quad \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.92)$$

$$\delta(x - x_0) \quad \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha u x_0} \quad (4.93)$$

$$\text{step}(x) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(\pi\delta(u) - \frac{i}{u} \right) \quad (4.94)$$

$$\left(\frac{\chi}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2 x^2} \quad \left(\frac{\alpha}{\chi\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 u^2}{\chi^2}} \quad (4.95)$$

Zunächst wird die Fouriertransformation der zweidimensionalen Rechteckfunktion

$$\text{rect}_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \varepsilon \text{ und } |y| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.96)$$

bestimmt, wobei 2ε die Breite des Rechteckfensters ist. Die Fouriertransformierte ist dann

$$F(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \text{rect}_\varepsilon(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \equiv \mathcal{F} \{ f(x, y) \}. \quad (4.97)$$

Durch das Einsetzen der relevanten Integrationsgrenzen in Gleichung (4.97) vereinfacht sich das Integral zu

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\varepsilon-\varepsilon}^{+\varepsilon+\varepsilon} \int e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-i2\pi ux} dx \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-i2\pi vy} dy \\ &= \left[-\frac{1}{i2\pi u} e^{-i2\pi ux} \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left[-\frac{1}{i2\pi v} e^{-i2\pi vy} \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Das Integral (4.97) lässt sich also einfach ausführen und nach dem Einsetzen der Grenzen erkennt man die komplexe Schreibweise der *Sinus*-Funktion bzw. der *sinc*-Funktion

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{e^{+i2\pi\varepsilon u} - e^{-i2\pi\varepsilon u}}{i2\pi u} \frac{e^{+i2\pi\varepsilon v} - e^{-i2\pi\varepsilon v}}{i2\pi v} \\ &= \frac{\sin(2\pi\varepsilon u)}{\pi u} \frac{\sin(2\pi\varepsilon v)}{\pi v} \end{aligned} \quad (4.99)$$

bzw. der *sinc*-Funktion

$$F(u, v) = 4\varepsilon^2 \text{sinc}(2\varepsilon u) \text{sinc}(2\varepsilon v). \quad (4.100)$$

Abbildung 4.12 zeigt die zweidimensionale *sinc*-Funktion, als Ergebnis der Fouriertransformation eines quadratischen räumlichen Rechteckfensters.

Für spezielle Funktionen kann es gelegentlich schwieriger als bei der Rechteckfunktion sein, die Integration für die Fouriertransformation direkt durchzuführen. Für die Vorzeichenfunktion, die so genannte Signumsfunktion,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad (4.101)$$

die in Kapitel 5 eine Rolle spielen wird, ist die Konvergenz des Fourierintegrals nicht unmittelbar ersichtlich.

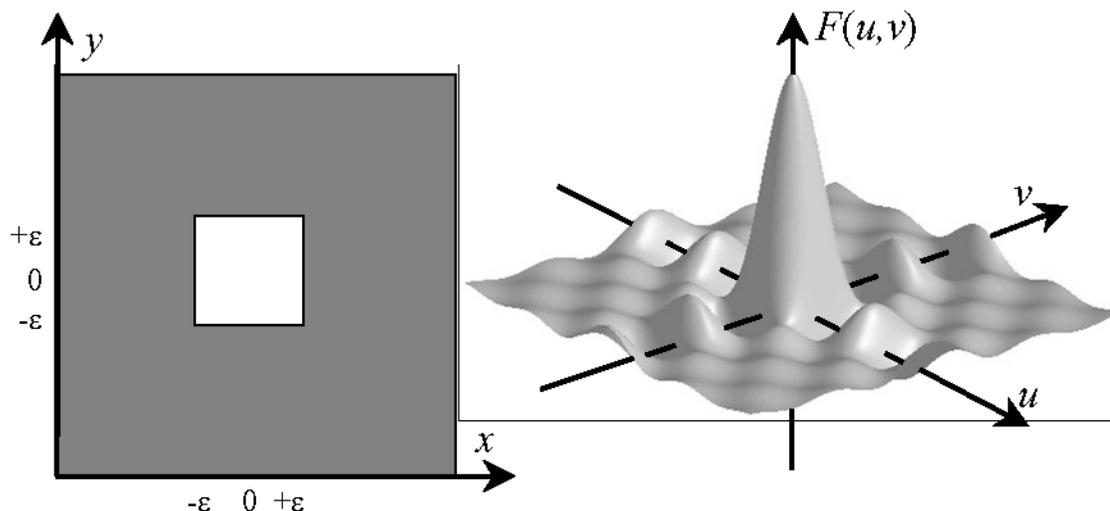


Abb. 4.12: Zweidimensionales $[-\varepsilon, \varepsilon]$ -Rechteckfenster (links) und die dazugehörige Fouriertransformierte (rechts), die zweidimensionale *sinc*-Funktion (4.100). Wenn die Ortsfunktion achsensymmetrisch ist, dann ist die Fouriertransformierte reell.

Daher verwendet man so genannte konvergenzerzeugende Funktionen. Über die Voraussetzungen der Anwendung konvergenzerzeugender Faktoren und verallgemeinerte Werte von divergenten Integralen lese man bei *G. M. Fichtenholz* [Fic82] nach. Hier soll nur das folgende Rezept Verwendung finden.

Einer Funktion $f(x)$, für die das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (4.102)$$

nicht existiert, wird die Funktion $e^{-\beta x} f(x)$ zugeordnet, so dass das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} f(x) dx \quad (4.103)$$

für $\beta > 0$ konvergiert. Das Integral (4.103) besitzt einen endlichen Grenzwert

$$I = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} f(x) dx, \quad (4.104)$$

den so genannten verallgemeinerten Wert des divergenten Integrals (4.102).

Für den Fall der Signumsfunktion schreibt man nach diesem Rezept

$$\text{sign}(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \begin{cases} e^{-\beta x} & \text{für } x \geq 0 \\ -e^{+\beta x} & \text{für } x < 0 \end{cases}. \quad (4.105)$$

Abbildung 4.13 zeigt das Konvergenzverhalten der mit dem konvergenzerzeugenden Faktor beaufschlagten Signumsfunktion. Für den kleiner werdenden Parameter β nähert sich die Ersatzfunktion (4.105) sehr schnell der Ursprungsfunktion (4.101) an.

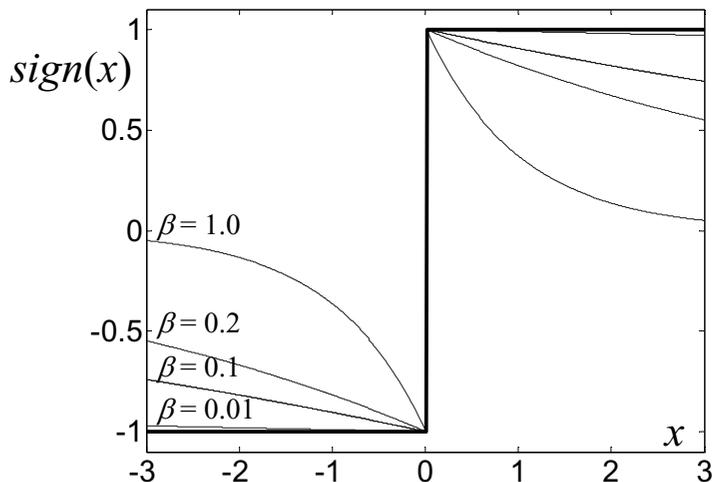


Abb. 4.13: Die Signumsfunktion angenähert durch eine Folge von Exponentialfunktionen. Diese Approximation ist erforderlich, um bei der expliziten Durchführung der Fouriertransformation die Konvergenz der Integrale zu sichern.

Bei der Berechnung der Fouriertransformierten der Signumsfunktion führt man nun zunächst die Fouriertransformation für die Ersatzfunktion durch, bevor man den Limes der konvergenzerzeugenden Funktion ausführt.

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(x) e^{-i\alpha u x} dx \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ - \int_{-\infty}^0 e^{\beta x} e^{-i\alpha u x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\beta x} e^{-i\alpha u x} dx \right\}
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Die beiden Teilintegrale in Gleichung (4.106) lassen sich leicht lösen.

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ - \int_{-\infty}^0 e^{\beta x - i\alpha u x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\beta + i\alpha u)x} dx \right\} \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ - \int_{-\infty}^0 e^{(\beta - i\alpha u)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(\beta + i\alpha u)x} dx \right\} \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[- \frac{e^{(\beta - i\alpha u)x}}{\beta - i\alpha u} \right]_{-\infty}^0 + \left[- \frac{e^{-(\beta + i\alpha u)x}}{\beta + i\alpha u} \right]_0^{\infty} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Das Einsetzen der Grenzen und die Bildung des Limes führen dann schließlich zu

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{1}{\beta - i\alpha u} + \frac{1}{\beta + i\alpha u} \right\} \\
 &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{i\alpha u}
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Da in den späteren Kapiteln $\alpha = 2\pi$ gesetzt wird, ist das Ergebnis der Transformation

$$\text{sign}(x) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{i\pi u} . \tag{4.109}$$

4.10 Faltungssatz

Eine wichtige Eigenschaft der Fouriertransformation ist der Faltungssatz. Hierzu betrachtet man die Faltung

$$g(x) = s(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) h(x - \xi) d\xi \tag{4.110}$$

im Ortsfrequenzraum, das heißt, man führt eine Fouriertransformation

$$G(u) = \mathcal{F} \{ s(x) * h(x) \} \tag{4.111}$$

durch, also erhält man durch Anwendung der Fouriertransformation und Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned}
 G(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) h(x - \xi) d\xi e^{-i2\pi u x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) h(x - \xi) e^{-i2\pi u x} d\xi dx .
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

Substituiert man in Gleichung (4.112) $y = x - \xi$ und $z = \xi$, so erhält man

$$\begin{aligned}
 G(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(z) h(y) e^{-i2\pi u (y+z)} dz dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(z) h(y) e^{-i2\pi u y} e^{-i2\pi u z} dz dy
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

Die beiden Integrale in (4.113) sind also in zwei Faktoren separierbar, so dass

$$\begin{aligned}
 G(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) e^{-i2\pi u y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} s(z) e^{-i2\pi u z} dz \\
 &= H(u) S(u)
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

folgt. Das heißt,

$$h(x) * s(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad H(u) S(u) \quad (4.115)$$

und umgekehrt gilt

$$H(u) * S(u) \quad \bullet \text{---} \circ \quad h(x) s(x). \quad (4.116)$$

Den Beweis für Gleichung (4.116) findet man z.B. bei *B. Klingen* [Kli01].

4.11 Parseval-Theorem

Das Theorem von Parseval besagt, dass folgender Zusammenhang zwischen dem Ortssignal und dem Spektrum existiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, y) f_2^*(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(u, v) F_2^*(u, v) du dv \quad (4.117)$$

wobei die Sternchen jeweils die komplex-konjugierten Signale kennzeichnen. Sind die Ortssignale identisch, das heißt $f_1(x, y) = f_2(x, y) = f(x, y)$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u, v)|^2 du dv \quad (4.118)$$

Dieser Ausdruck ist als Energie des Signals interpretierbar.

4.12 Filtern im Frequenzraum

Der Faltungssatz liefert eine elegante Methode, Filterungen im Frequenzraum durchzuführen. Als Beispiel soll hier eine Tiefpassfilterung einer Computertomographieschicht dienen. Ein sehr einfacher Tiefpass ist die Rechteck-Fensterung des Spektrums. Abbildung 4.14 zeigt zunächst die Frequenzdarstellung einer kreisförmigen Filterblende. Das Ergebnis der Tiefpass- und Hochpassfilterung eines tomographischen Bildes ist in Abbildung 4.15 wiedergegeben.

Auch bei diesem Prozess gibt es ein gutes Ergebnis nicht umsonst. Wie in Kapitel 4.9 gezeigt wurde, ist die Fouriertransformierte einer Rechteckfunktion die *sinc*-Funktion. Das spiegelt sich im Filterergebnis wider. Genau genommen ist bei kreisförmiger Filterung im Ergebnis der Sinus der *sinc*-Funktion durch eine Besselfunktion zu ersetzen, also

$$F(r) \propto \frac{2J_1(2\pi\epsilon u_r)}{2\pi\epsilon u_r}, \quad (4.119)$$

wobei J_1 die Besselfunktion erster Ordnung ist, die häufig dann auftaucht, wenn es um die Lösung von Problemen mit Zylindersymmetrie geht. Die Besselfunktion erster Art, n -ter Ordnung ist über folgendes Integral definiert.

$$J_n(q) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{-iq \cos(\theta)} e^{in\theta} d\theta \quad (4.120)$$

In Abbildung 4.14 sieht man analog zur Abbildung 4.12 die Fouriertransformierte des kreisförmigen Objektes.

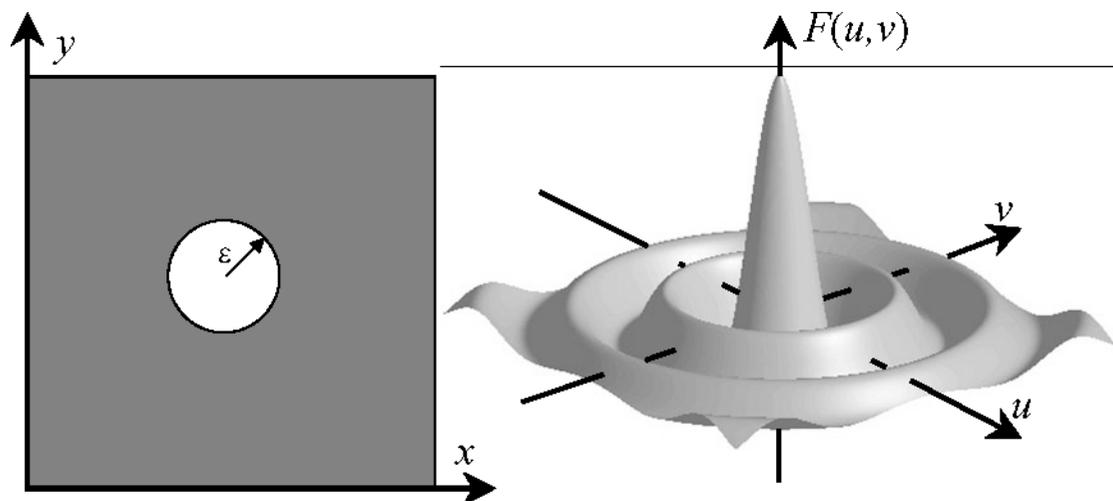


Abb. 4.14: Kreisförmiges Objekt und die dazugehörige Fouriertransformierte (rechts), die durch die zweidimensionale Besselfunktion erster Ordnung in Gleichung (4.119) bestimmt wird.

Darauf soll aber hier nicht weiter eingegangen werden. In vielen Büchern über Optik findet man hierzu Herleitungen und Beispiele, wenn es um Beugung an einer kreisförmigen Blende geht.

Als Konsequenz der Filterung sieht man in Bereichen homogener Grauwerte die Nebenwellen – die so genannten *Sidelobes* – der *sinc*-Funktion. Aus diesem Grund verwendet man Fensterfunktionen, die den *Sidelobes* entgegenwirken. In der Literatur wurden diese speziellen Fensterfunktionen eingehend untersucht [Har78,Par61].

Es existieren zahlreiche Vorschläge für Fensterfunktionen (z.B. Hamming, Hanning, Blackman oder Kaiser [Azi87]), die im Ergebnis geringere Welligkeit aufweisen als das Rechteckfenster. In Kapitel 6.1 wird im Rahmen der technischen Realisierung der Bildrekonstruktion für Computertomographen die optimale Fensterung bei der gefilterten Rückprojektion im Detail betrachtet.

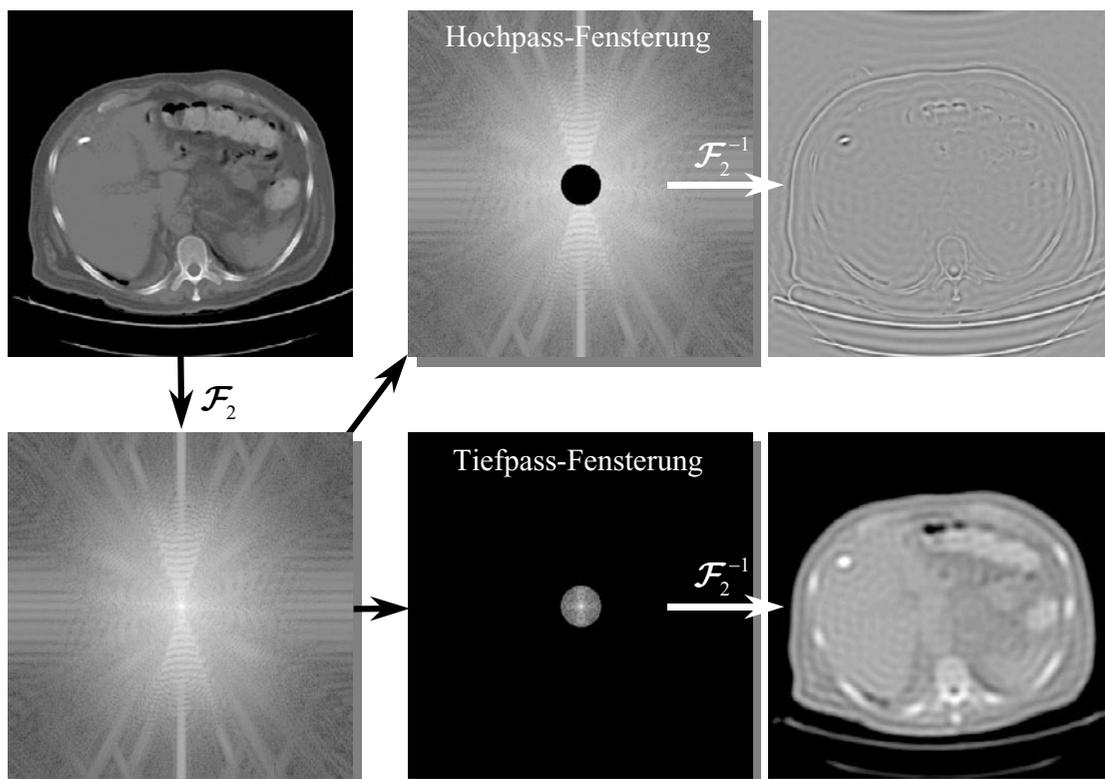


Abb. 4.15: Hochpassfilterung (oben rechts) und Tiefpassfilterung (unten rechts) durch Rechteckfilterung im Frequenzbereich. Vom komplexen Spektrum ist hier jeweils nur der Betrag abgebildet. Mit einer kreisrunden Blende werden nur die hohen bzw. tiefen Frequenzen im Spektrum belassen. Alle jeweils komplementären Raumfrequenzen sind damit auf Null gezwungen. Die Rücktransformation in den Ortsbereich zeigt die Objektkanten (beim Hochpass) und ein etwas verwaschenes Bild (beim Tiefpass). Darüber hinaus sieht man in beiden Fällen die typischen Wellen, die von den Kanten auszugehen scheinen. Sie sind Konsequenz der so genannten *Sidelobes* bei scharfkantigen Filtern im Frequenzraum.

4.13 Hankel-Transformation

Die Hankel-Transformation ist eine spezielle Form der zweidimensionalen Fouriertransformation mit radialsymmetrischem Transformationskern. Diese Klasse von Transformationen werden daher auch Fourier-Bessel-Transformationen genannt. Geht man zunächst von der Definition (4.72) mit $\alpha = 2\pi$ aus, so ist

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy \equiv \mathcal{F} \{ f(r) \}. \quad (4.121)$$

Bei radialer Symmetrie des Problems wird die mathematische Darstellung wesentlich erleichtert, wenn man Polarkoordinaten einführt. Setzt man hier also

$$x + iy = r e^{i\theta} \quad (4.122)$$

und

$$u + iv = q e^{i\phi}, \quad (4.123)$$

so dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\y &= r \sin(\theta) \\r &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}\tag{4.124}$$

und

$$\begin{aligned}u &= q \cos(\phi) \\v &= q \sin(\phi) \\q &= \sqrt{u^2 + v^2}\end{aligned}\tag{4.125}$$

den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten beschreiben, dann kann man für Gleichung (4.121)

$$F(q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r) e^{-2\pi i r q (\cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta))} r dr d\theta \equiv \mathcal{F} \{ f(r) \}\tag{4.126}$$

schreiben. Dabei ist das Flächenelement $dx dy$ durch $J dr d\theta$ gegeben, wobei J die Jacobi-Funktional-Determinante ist, also

$$J \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r.\tag{4.127}$$

In Abbildung 4.16 ist die Berechnung des neuen infinitesimalen Flächenelementes graphisch sofort nachzuvollziehen.

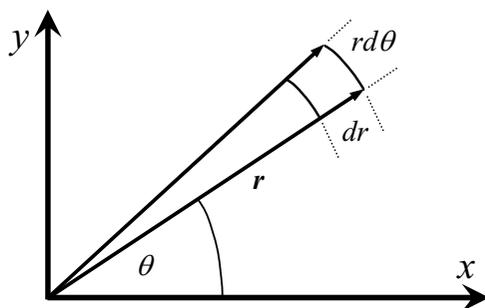


Abb. 4.16: Form des Flächenelementes beim Übergang zu Polarkoordinaten.

Nutzt man weiter das Additionstheorem

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)\tag{4.128}$$

so sieht man, dass

$$F(q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(r) e^{-2\pi i r q (\cos(\theta - \phi))} r dr d\theta. \quad (4.129)$$

Die konstante Phasenverschiebung um den Winkel ϕ im Argument des Cosinus kann durch eine Verschiebung der Integrationsgrenzen ersetzt werden, so dass

$$F(q) = \int_0^{+\infty} \int_{-\phi}^{2\pi - \phi} f(r) e^{-2\pi i r q (\cos(\theta))} r dr d\theta \quad (4.130)$$

gilt. Da der Integrand von Gleichung (4.130) radialsymmetrisch ist, kann die Phasenverschiebung aber auch vernachlässigt werden, so dass man nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$F(q) = \int_0^{+\infty} f(r) \left(\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r q (\cos(\theta))} d\theta \right) r dr \quad (4.131)$$

erhält. Der Klammerausdruck in Gleichung (4.131) ist nun gerade die in Gleichung (4.120) definierte Besselfunktion nullter Ordnung, erster Art, so dass man kurz

$$F(q) = 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) J_0(2\pi q r) r dr \quad (4.132)$$

schreibt. Um das Transformationspaar der Hankel-Transformation nullter Ordnung zu vervollständigen fehlt noch die Rücktransformation

$$f(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} F(q) J_0(2\pi q r) q dq. \quad (4.133)$$

Man schreibt für das Transformationspaar kurz

$$F(q) = \mathcal{H}_0\{f(r)\} \quad (4.134)$$

und

$$f(r) = \mathcal{H}_0\{F(q)\}. \quad (4.135)$$

4.14 Abel-Transformation

Die Computertomographie rotationssymmetrischer Objekte führt zu einer mathematisch interessanten Transformation, die mit der Hankel-Transformation und der Fouriertransformation eng zusammenhängt. Betrachtet man die Projektion eines radialsymmetrischen Objektes, so kann man Gleichung (4.50) stark vereinfachen, denn die Projektion auf die x-Achse ist durch

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) dy \quad (4.136)$$

gegeben, wobei der Radius r durch Gleichung (4.124) gegeben ist. Ersetzt man nun

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad (4.137)$$

so erhält man

$$p(x) = 2 \int_x^{+\infty} \frac{f(r)r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr. \quad (4.138)$$

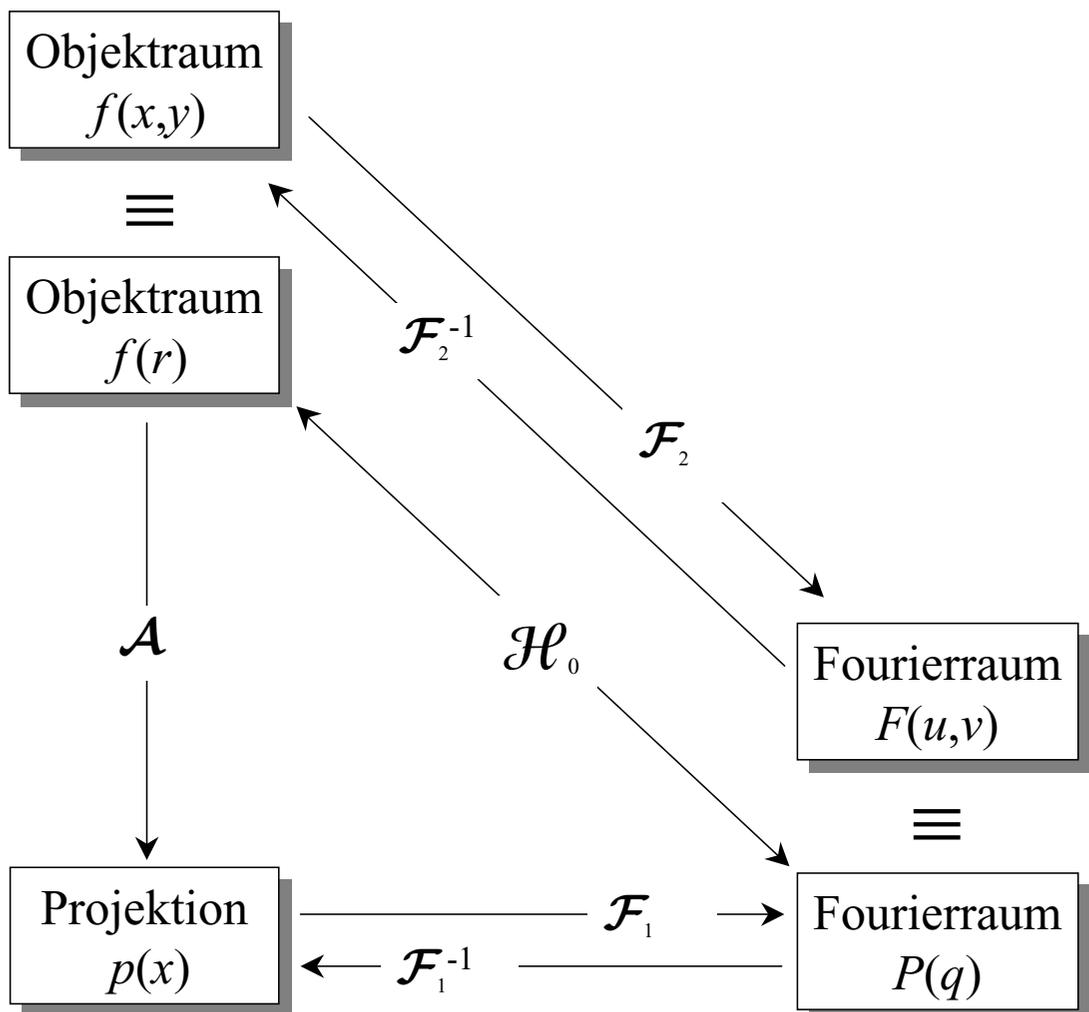


Abb. 4.17: Zusammenhang zwischen der Fouriertransformation, der Hankel-Transformation und der Abel-Transformation. Die Hankel-Transformation kann ersetzt werden durch eine Abel-Transformation und eine anschließende eindimensionale Fouriertransformation.

Gleichung (4.138) wird Abel-Transformation des Objektes $f(r)$ genannt. Man schreibt kurz

$$p(x) = \mathcal{A}\{f(r)\}. \quad (4.139)$$

Für eine radialsymmetrische Objektfunktion $f(x,y)=f(r)$ gilt der Zusammenhang aus Abbildung 4.17. Offenbar gilt insgesamt

$$f(r) = \mathcal{H}_0 \mathcal{F}_1 \mathcal{A}\{f(r)\}. \quad (4.140)$$

4.15 Hilbert-Transformation

Die Hilbert-Transformation einer Funktion $f(x)$ ist durch

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x')}{x'-x} dx' \quad (4.141)$$

definiert¹⁹. Offenbar beschreibt die Definition (4.141) eine Faltung der Funktion $f(x)$ mit der Funktion $(-\pi x)^{-1}$, das heißt

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = \frac{-1}{\pi x} * f(x). \quad (4.142)$$

Diese Faltung kann man im Frequenzraum durchführen. Dazu muss man auf die Herleitung der Transformation (4.109) zurückgreifen und sie analog für die Signumsfunktion im Frequenzraum durchführen. Es gilt dann

$$\frac{-1}{\pi x} \circ \text{---} \bullet \quad i \operatorname{sign}(u) = \begin{cases} +i & \text{für positive } u \\ -i & \text{für negative } u \end{cases} \quad (4.143)$$

Damit hat die Hilbert-Transformation die Eigenschaft, die Amplituden nicht zu verändern, die Phasen aber um $+\pi/2$ bzw. $-\pi/2$ (je nach Vorzeichen von u) zu drehen. Führt man die Hilbert-Transformation zweimal hintereinander aus, so drehen sich die Phasen also um. Damit erhält man die Rücktransformation

$$f(x) = -\left(\frac{-1}{\pi x}\right) * \mathcal{H}\{f(x)\} \quad (4.144)$$

bzw.

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}\{f(x')\}}{x'-x} dx'. \quad (4.145)$$

¹⁹ Das Integral (4.141) ist im Sinne des *Cauchyschen* Hauptsatzes zu interpretieren [Bro79].

4.16 Abtasttheorem und Nyquist-Kriterium

Durch Abtastung wird das kontinuierliche Signal in ein digitales transformiert. Das dann räumlich diskrete Signal stimmt nämlich nur noch an den Abtastpunkten mit den kontinuierlichen Werten, z.B. den kontinuierlich verteilten Schwächungskoeffizienten, überein. Die zwischen den Abtastpunkten liegenden Signalwerte werden nicht erfasst. An dieser Stelle soll kurz betrachtet werden, wie fein das kontinuierliche räumliche Signal $s(\xi)$ abgetastet werden muss, damit das gemessene diskrete Punktmuster s_i das Original tatsächlich repräsentiert.

Abbildung 4.18 zeigt, dass es immer möglich ist, verschiedene kontinuierliche Funktionen zu konstruieren, die durch alle Abtastpunkte gehen, sofern das Abtastintervall größer als Null ist. Damit können auch sehr unterschiedlich verlaufende Funktionen durch die Abtastung gleich aussehen. Die Abtastung ist dann nicht eindeutig [Ste99].

Die Frage, welche Veränderungen der Informationsgehalt des kontinuierlichen Signals durch die Abtastung erfährt, kann mit Hilfe des Shannonschen Abtasttheorems beantwortet werden.

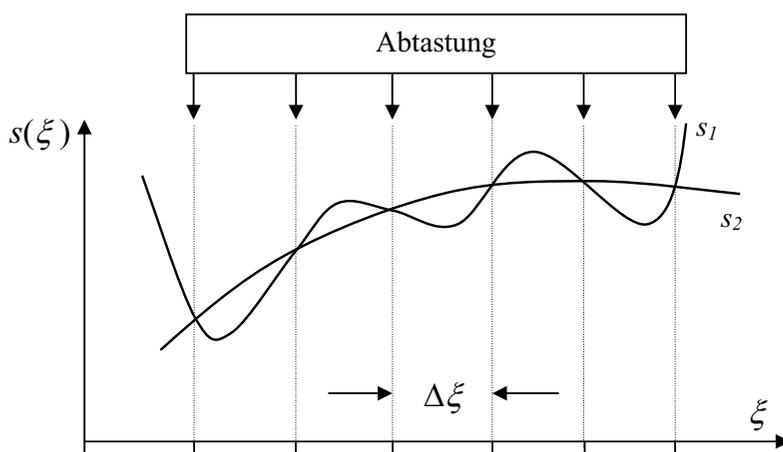


Abb. 4.18: Unterschiedliche Funktionen mit identischen Abtastpunkten. Beide Funktionen besitzen die gleichen Abtastwerte, obwohl der tatsächliche Verlauf der Funktionen sehr unterschiedlich ist.

Nach dem Shannonschen Abtasttheorem trägt das abgetastete Signal dieselbe Informationsmenge wie das kontinuierliche Signal, wenn die Abtastfrequenz größer ist als das Zweifache der größten Frequenz (bzw. der Bandbreite bei bandbegrenzten Signalen), die das Spektrum des kontinuierlichen Signals enthält. Das heißt, dass das Signal $s(\xi)$ wenigstens zweimal während des Zyklus mit der höchsten Frequenz abgetastet werden muss.

Wenn also für das Signal $s(\xi)$ gilt, dass

$$S(u) = 0 \quad \text{für} \quad u \geq \frac{u_N}{2}, \quad (4.146)$$

dann muss die Abtastrate größer als u_N sein. u_N wird als Nyquist-Frequenz bezeichnet. Dieses Kriterium schützt vor Bandüberlappungsfehlern, dem so genannten Aliasing, bei dem ein hochfrequentes Signal, das bei einer zu kleinen Abtastrate digitalisiert wird, ununterscheidbar von einer niedrigeren Frequenz wird. Im Zweidimensionalen wird diese Erscheinung Moireeffekt genannt. Bei vorgegebener Abtastperiode muss das Signal also mit einem

entsprechenden Tiefpass gefiltert werden [Azi87]. Für praktische Anwendungen ist zu beachten, dass das Abtasttheorem eine theoretische Aussage ist, die Abweichungen von den Voraussetzungen, z.B. den Quantisierungsfehler, Fehler durch den endlichen Beobachtungsausschnitt oder räumliche Unregelmäßigkeiten der Anordnung der Abtastpunkte (*Jitter*) unberücksichtigt lässt [Kie98].

Das Abtasttheorem lässt sich begründen, wenn man das mit der Kammfunktion abgetastete Signal

$$s_a(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n\Delta\xi)\delta(\xi - n\Delta\xi) = s(\xi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta\xi) \quad (4.147)$$

im Frequenzbereich betrachtet.

Dazu berechnet man zunächst die Fouriertransformation der Kammfunktion [Lük99],[Kli01], die wieder zu einer Kammfunktion führt. Das lässt sich einsehen, wenn man die bisher eingeführten Zusammenhänge nutzt. Zunächst gilt für die Fouriertransformation der Kammfunktion nach Gleichung (4.93)

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta\xi) \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i u n \Delta\xi} \quad (4.148)$$

Schreibt man die rechte Seite von Gleichung (4.148) als Grenzwert, also

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i u n \Delta\xi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i u n \Delta\xi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \psi^n \quad (4.149)$$

mit $\psi = \exp(-2\pi i u \Delta\xi)$ und verwendet den Grenzwert der geometrischen Reihe aus *L. Papula* [Pap00], nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \psi^n &= \psi^{-N} \frac{1 - \psi^{2N+1}}{1 - \psi} \\ &= e^{2\pi i u \Delta\xi N} \frac{1 - e^{-2\pi i u \Delta\xi (2N+1)}}{1 - e^{-2\pi i u \Delta\xi}} \\ &= e^{2\pi i u \Delta\xi N} \frac{e^{-\pi i u \Delta\xi (2N+1)} (e^{+\pi i u \Delta\xi (2N+1)} - e^{-\pi i u \Delta\xi (2N+1)})}{e^{-\pi i u \Delta\xi} (e^{+\pi i u \Delta\xi} - e^{-\pi i u \Delta\xi})} \end{aligned} \quad (4.150)$$

so erhält man mit $K = 2N + 1$ den Ausdruck

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta\xi) \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(K\pi u \Delta\xi)}{\sin(\pi u \Delta\xi)} \right) \quad (4.151)$$

Da K eine ganze Zahl ist, ändert sich nichts am Ergebnis der rechten Seite von Gleichung (4.151), wenn man die Größe $(u\Delta\xi)$ durch $(u\Delta\xi - n)$ ersetzt, wobei n ebenfalls eine ganze Zahl sei, denn der Sinus ist periodisch und die Nullstellen des Zählers und des Nenners treten nach wie vor bei ganzzahligem $(u\Delta\xi)$ auf. Also gilt

$$\lim_{K \rightarrow \infty} f_K(u) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(K\pi u \Delta \xi)}{\sin(\pi u \Delta \xi)} \right) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(K\pi(u\Delta \xi - n))}{\sin(\pi(u\Delta \xi - n))} \right). \quad (4.152)$$

Die Gleichung (4.152) sagt gleichzeitig, dass es aufgrund der Verschiebungsinvarianz offenbar ein Grundintervall $(-1/2\Delta \xi, +1/2\Delta \xi]$ gibt, das sich periodisch wiederholt. Das heißt, die Funktion (4.152) ist jeweils identisch in den Intervallen $(\{n-1/2\}/\Delta \xi, \{n+1/2\}/\Delta \xi]$ und zwar für sämtliche $n \in \mathbb{Z}$. Abbildung 4.19 zeigt den Zusammenhang für $f_K(u)$ in Gleichung (4.152) graphisch für einen ansteigenden Parameter $K=\{3,11,51,999\}$.

In der jeweiligen Nachbarschaft von $(u\Delta \xi - n) \approx 0$ kann man für den Nenner in Gleichung (4.152) schreiben

$$\sin(\pi(u\Delta \xi - n)) \approx \pi(u\Delta \xi - n), \quad (4.153)$$

so dass mit Hilfe der Definition (4.24) der δ -Distribution folgt, dass

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(K\pi(u\Delta \xi - n))}{\pi(u\Delta \xi - n)} \right) = \delta(u\Delta \xi - n), \quad (4.154)$$

und zwar zunächst wieder für das Grundintervall $(-1/2\Delta \xi, +1/2\Delta \xi]$. Da Gleichung (4.154) wie oben besprochen für beliebige ganzzahlige n gilt und periodisch ist (siehe Abbildung 4.19), ist der Ausdruck auf der rechten Seite als Sequenz von δ -Impulsen zu interpretieren, so dass man ebenso schreiben kann

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta \xi) \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u\Delta \xi - n). \quad (4.155)$$

Zusammen mit der Skalierungseigenschaft (4.39) sieht man dann

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta \xi) \right) = \frac{1}{|\Delta \xi|} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{n}{\Delta \xi}). \quad (4.156)$$

Unter Ausnutzung des Faltungssatzes (4.116) erhält mit Hilfe des Zusammenhangs (4.156) für die Abtastung (4.147) im Frequenzraum den Ausdruck

$$S_a(u) = S(u) * \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{n}{\Delta \xi}). \quad (4.157)$$

Die Faltung schreibt man explizit

$$S_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{n}{\Delta \xi} - v) dv, \quad (4.158)$$

so dass man Summation und Integration in Gleichung (4.158) vertauschen kann

$$S_a(u) = \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \delta(u - \frac{n}{\Delta\xi} - v) dv. \quad (4.159)$$

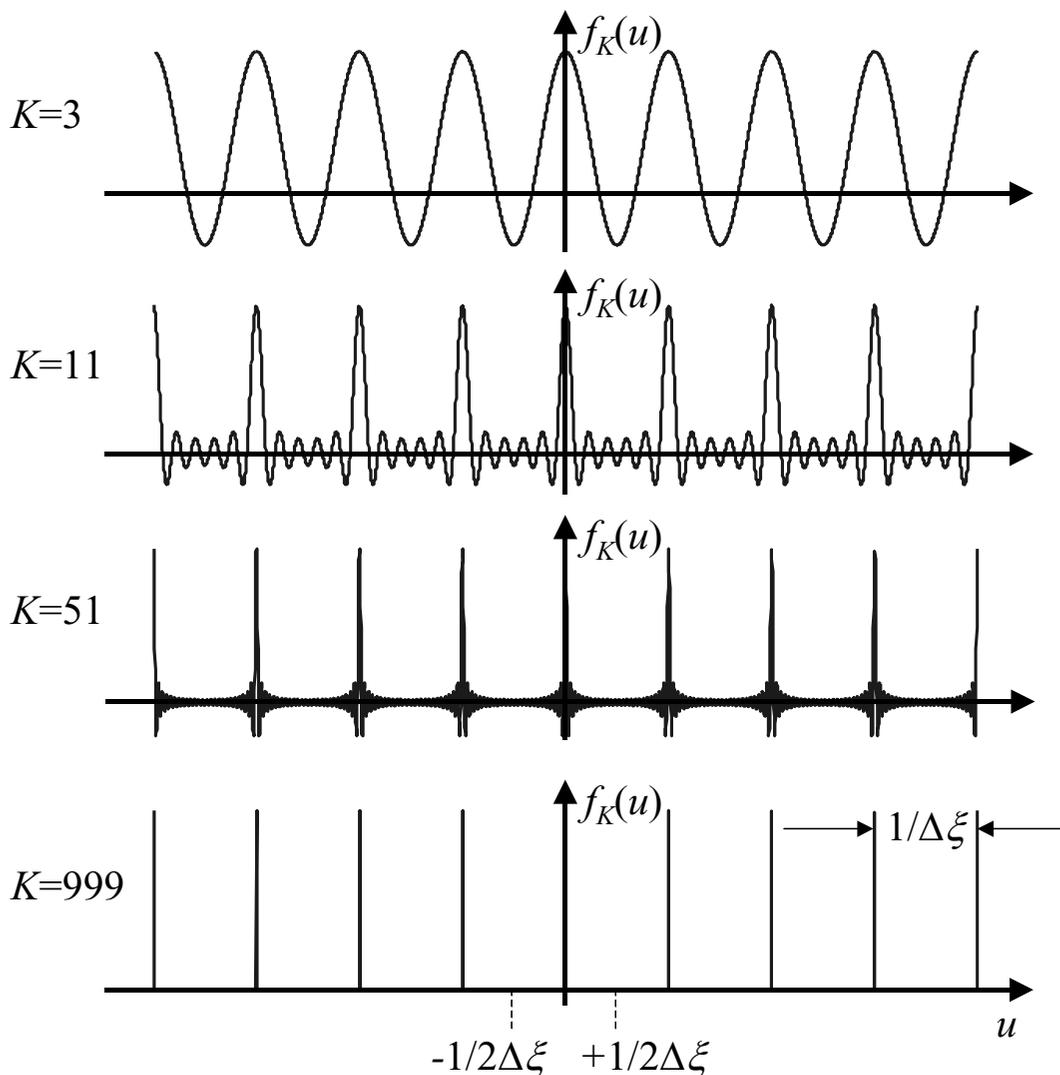


Abb. 4.19: Die Funktion $f_K(u)$ geht für ansteigenden Parameter K gegen die Kammfunktion. Damit ist gezeigt, dass die Fouriertransformierte der Kammfunktion wieder eine Kammfunktion ist.

Das Endergebnis erhält man dann wieder durch die Siebeigenschaft der δ -Distribution, also

$$S_a(u) = \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(u - \frac{n}{\Delta\xi}) \quad (4.160)$$

Die Fouriertransformierte des abgetasteten Signals ergibt sich offenbar aus dem Faltungsprodukt des Signalspektrums mit der Kammfunktion im Frequenzbereich. Das Signalspektrum des kontinuierlichen Signals wird also periodisch mit der Periode $1/\Delta\xi$ wiederholt. Abbildung 4.20 zeigt dieses Verhalten schematisch.

Liegt Unterabtastung vor, liegt also die maximale Frequenz des abzutastenden Signals nicht unterhalb der halben Abtastfrequenz, dann überlappen sich die periodisch wiederholten Spektren des abgetasteten Signals. Dies führt zu den Aliasingfehlern, die physikalisch auf dem Effekt der Schwebung beruhen.

Die Gleichungen (4.147) bis (4.157) können wie folgt sehr allgemein interpretiert werden. Es gilt nämlich

$$s(x) \cdot \mathbb{W}(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(u) * \mathbb{W}(u) \quad (4.161)$$

und

$$s(x) * \mathbb{W}(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(u) \cdot \mathbb{W}(u), \quad (4.162)$$

wobei $\mathbb{W}(x)$ bzw. $\mathbb{W}(u)$ jeweils die Kammfunktion im Orts- bzw. Frequenzraum bezeichnen sollen. Die Kernaussagen der Gleichungen (4.161) und (4.162) sind

- a) ein abgetastetes Signal besitzt ein periodisches Spektrum und
- b) ein periodisches Signal besitzt ein Linienspektrum²⁰.

Wenn die durch die Faltung mit der Kammfunktion entstandenen Frequenz- oder Zeitfunktionen überlappungsfrei sind, dann lässt sich die durch Fouriertransformation zugeordnete abgetastete Funktion fehlerfrei rekonstruieren.

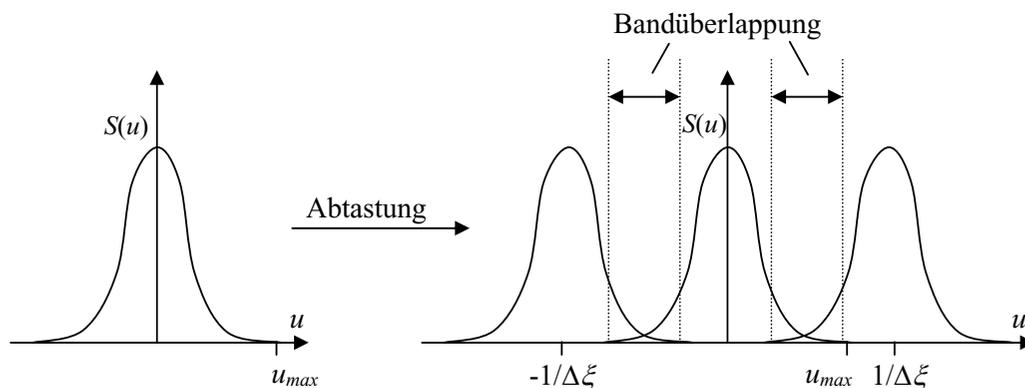


Abb. 4.20: Durch die Abtastung ergibt sich im Frequenzraum eine periodische Wiederholung des Spektrums des kontinuierlichen Signals. Bei Unterabtastung liegen die Spektren so dicht zusammen, dass sie sich überlappen. Diese Überlappung im Frequenzraum macht sich im Ortsraum als Schwebung bemerkbar. Dieser Effekt wird Aliasing genannt.

An dieser Stelle muss nur noch beantwortet werden, wie man aus einem abgetasteten Signal ein analoges Signal zurück erhält. Zur Rekonstruktion des in Abbildung 4.9 dargestellten Signals ist eine Tiefpassfilterung erforderlich. Ein idealer Tiefpass

$$H_{TP}(u) = \Delta\xi \operatorname{rect}\left(\frac{u}{1/\Delta\xi}\right) \quad (4.163)$$

²⁰ Die Linien stellen die Koeffizienten der Fourierreihe dar.

ist eine Rechteckfunktion der Höhe $\Delta\xi$ im Intervall $[-1/(2\Delta\xi), +1/(2\Delta\xi)]$, also ein multiplikatives Rechteckfilter

$$S(u) = S_a(u) \Delta\xi \operatorname{rect}\left(\frac{u}{1/\Delta\xi}\right) \quad (4.164)$$

im Frequenzbereich. Mit dem Faltungssatz (4.115) ist dieser Ausdruck im Raumbereich durch die Faltung

$$s(\xi) = s_a(\xi) * \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{\Delta\xi}\right) \quad (4.165)$$

darstellbar. Das heißt, die Signalerückgewinnung ist eine Faltung der Abtastpunkte mit der *sinc*-Funktion. Abbildung 4.21 zeigt dieses Prinzip, das *Shannon-Whittaker-Interpolation* genannt wird.

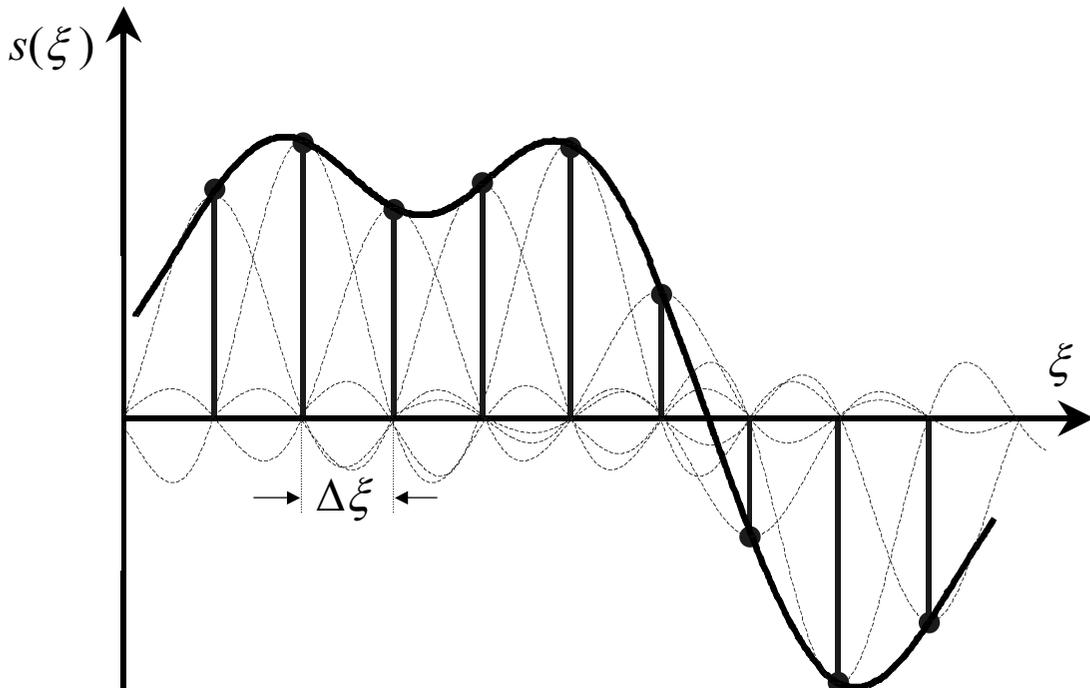


Abb. 4.21: Die abgetasteten Werte einer räumlich variierenden Funktion werden rekonstruiert, indem das Signal tiefpassgefiltert wird. Bei der Verwendung eines idealen Tiefpasses – also eines Rechteckfilters im Frequenzraum – entspricht dies der Faltung der Abtastpunkte mit der *sinc*-Funktion.

Zur weiteren Vertiefung des Abtasttheorems sowie dessen grundlegender Bedeutung in der Signalübertragung lese man *H. D. Lüke* [Lük99]. Zur weiteren Vertiefung der Fouriertransformation von Kammfunktionen und der verallgemeinerten Grenzwerte zur Lösung von Gleichung (4.156) lese man *B. Klingen* [Kli01] oder *H. H. Barrett und W. Swindell* [Bar81].

4.17 Wiener-Khintchine-Theorem

Das Wiener-Khintchine-Theorem stellt den Zusammenhang zwischen der örtlichen Variation des Signals, dem Amplitudendichtespektrum, der Autokorrelationsfunktion und dem Energiedichtespektrum her. Zunächst soll aber das Wiener-Khintchine-Theorem im Zweidimensionalen mathematisch gezeigt werden. Es stellt eine gute Übung zum Umgang mit Fouriertransformationen und der δ -Distribution dar. Ausgehend von der Definition der Autokorrelationsfunktion eines allgemeinen Bildes $f(x,y)$

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\xi, \eta) f(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta \quad (4.166)$$

kann man mit Hilfe der inversen Fouriertransformationen des komplex-konjugierten Bildes $f^*(x,y)$ bzw. des verschobenen Bildes zeigen, dass die Autokorrelationsfunktion durch die inverse Fouriertransformation des Energiedichtespektrums gegeben ist. In Abbildung 4.22 wird anhand eines Abdomentomogramms exemplarisch gezeigt, welche Zwischenschritte bei der Berechnung der Autokorrelationsfunktion über die Fouriertransformation erforderlich sind. Man beginnt mit dem Einsetzen der Definition der Fouriertransformierten, also

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(u, v) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} dudv \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u', v') e^{i2\pi(u'(\xi+x) + v'(\eta+y))} du' dv' \right\} d\xi d\eta. \quad (4.167)$$

Das Vertauschen der Integrationsreihenfolge liefert dann

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(u, v) F(u', v') e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} e^{i2\pi(u'(\xi+x) + v'(\eta+y))} du' dv' dudv \right\} d\xi d\eta \quad (4.168)$$

Durch das Umsortieren der Exponenten

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(u, v) F(u', v') e^{i2\pi(u'x + v'y)} e^{i2\pi(\xi(u'-u) + \eta(v'-v))} du' dv' dudv \right\} d\xi d\eta \quad (4.169)$$

und noch einmal ein Umsortieren der Integrationsreihenfolge

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(u, v) F(u', v') e^{i2\pi(u'x + v'y)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(\xi(u'-u) + \eta(v'-v))} d\xi d\eta \right\} du' dv' du dv \quad (4.170)$$

liefert das innere Integral gerade die δ -Distribution, so dass

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(u, v) F(u', v') e^{i2\pi(u'x + v'y)} \delta(u'-u, v'-v) du' dv' du dv. \quad (4.171)$$

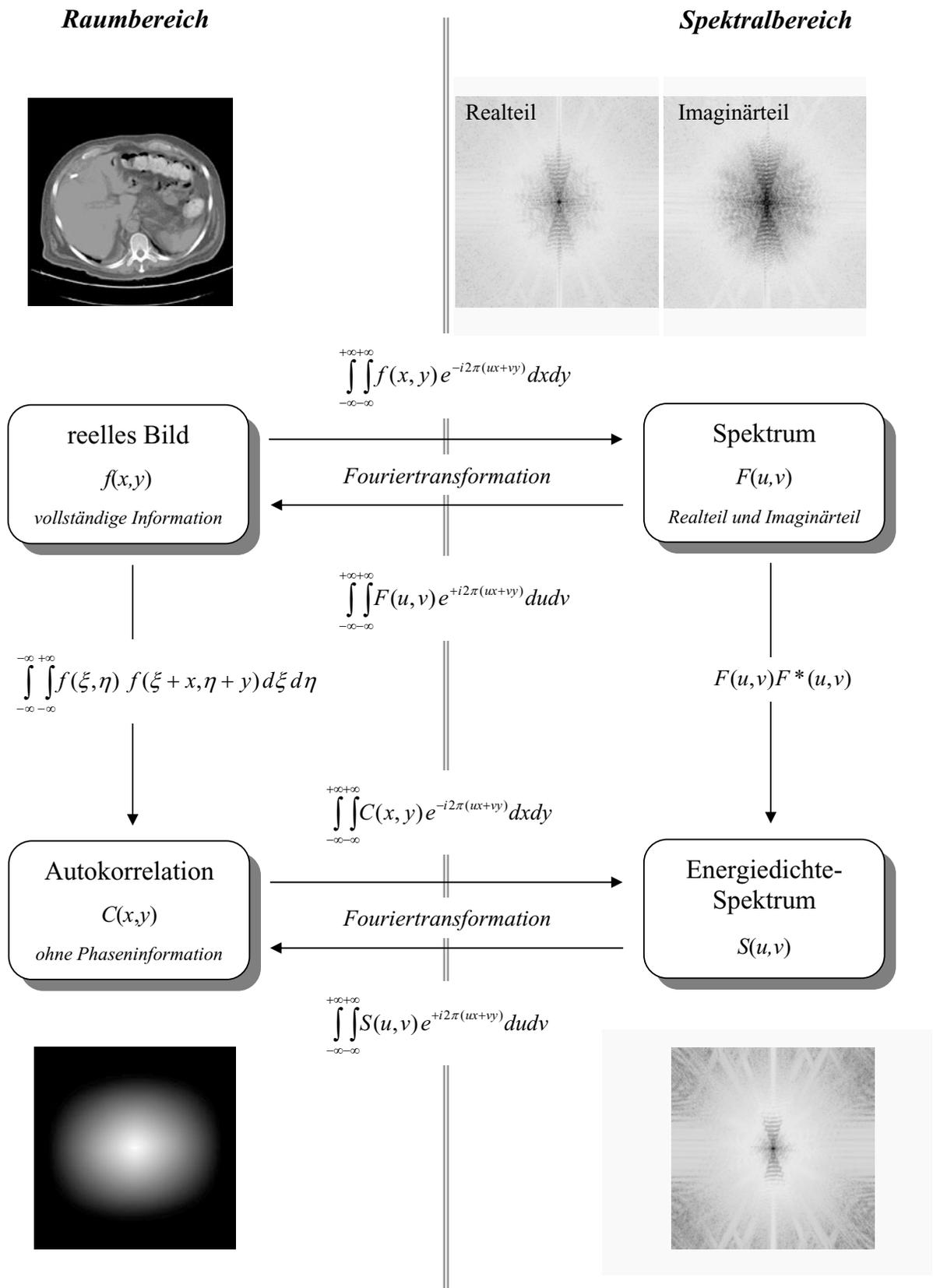


Abb. 4.22: Das Wiener-Khintchine-Theorem für Bildinformationen. Für ein axiales Abdomentomogramm sind die entsprechenden Transformationen gegeben.

Mit der Siebeigenschaft der δ -Distribution folgt aus Gleichung (4.171)

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} F^*(u, v) F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \quad (4.172)$$

also

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} |F(u, v)|^2 e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \quad (4.173)$$

oder kurz

$$C(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ |F(u, v)|^2 \} = \mathcal{F}^{-1} \{ S(u, v) \}, \quad (4.174)$$

wobei $S(u, v)$ das Energiedichtespektrum des Bildes $f(x, y)$ ist.

Das Wiener-Khintchine-Theorem ist ein Spezialfall der allgemeineren Kreuzkorrelationsfunktion zweier unterschiedlicher Bilder $f(x, y)$ und $g(x, y)$, für die gilt

$$C_{fg}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F^*(u, v) G(u, v) \} \quad (4.175)$$

Das Ergebnis (4.175) gilt analog zum Faltungssatz (4.115).

4.18 Fouriertransformation diskreter Signale (DFT)

In Kapitel 4.16 wurde die Fouriertransformation abgetasteter Signale bereits behandelt. Im Ergebnis war im eindimensionalen Fall

$$s_a(\xi) = s(\xi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta\xi) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S_a(u) = \frac{1}{|\Delta\xi|} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(u - \frac{n}{\Delta\xi}). \quad (4.176)$$

Hier soll jetzt das Spektrum direkt durch eine Fouriertransformation des abgetasteten Signals berechnet werden. Das Anwenden der Definition der Fouriertransformation auf den linken Teil der Gleichung (4.176) liefert

$$S_a(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - n\Delta\xi) e^{-i2\pi\xi u} d\xi. \quad (4.177)$$

In Gleichung (4.177) kann die abzutastende Funktion in die Summe gezogen werden. Danach wird die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht, also

$$\begin{aligned} S_a(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(\xi) \delta(\xi - n\Delta\xi) e^{-i2\pi\xi u} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi) \delta(\xi - n\Delta\xi) e^{-i2\pi\xi u} d\xi. \end{aligned} \quad (4.178)$$

Die Siebeigenschaft der δ -Distribution liefert dann

$$S_a(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n\Delta\xi) e^{-i2\pi n\Delta\xi u} \quad (4.179)$$

Das periodische Spektrum ist also nur noch von den Abtastwerten $s(n\Delta\xi)$ abhängig. Diese Transformation wird diskrete Fouriertransformation genannt (DFT). In der Literatur wird gelegentlich die Abtaststrecke auf $\Delta\xi = 1$ gesetzt – formal ist dadurch die Einheit der Abtaststrecke „1 Detektor“ oder „1 Pixel“. In diesem Fall ist dann das Spektrum des diskreten Signals $s(n)$

$$S_a(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) e^{-i2\pi nu} \quad (4.180)$$

Gleichung (4.179) ist die komplexe Schreibweise der Fourierreihe, so dass man besser

$$S_a(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i2\pi n\Delta\xi u} \quad (4.181)$$

schreibt, wobei die s_n die Fourierkoeffizienten sind, die mit

$$s_n = \Delta\xi \int_0^{\frac{1}{\Delta\xi}} S_a(u) e^{i2\pi n\Delta\xi u} du \quad (4.182)$$

berechnet werden können.

4.19 Finite diskrete Fouriertransformation

Bei numerischer Berechnung der Fouriertransformation diskreter Signale können praktisch auch nur endlich viele diskrete Frequenzen berechnet werden. Die diskrete Fouriertransformation ordnet einem diskreten Signal ein frequenzdiskretes Spektrum zu.

Ist – wie im konkreten Fall des Detektorarrays bei Computertomographen – die Anzahl der Werte des diskreten Signals $\{s(0), s(1), \dots, s(D-1)\}$ auf D Werte beschränkt, dann genügt nach dem Abtasttheorem im Frequenzbereich die Berechnung spektraler Abtastwerte im Abstand der reziproken Detektorarraylänge $1/D$ (die Breite eines Detektorelements ist wieder auf $\Delta\xi = 1$ gesetzt). Diesem abgetasteten Spektrum $S_a(k)$ ist das mit der Periode D periodische, diskrete Messsignal des Detektorarrays $s_a(n)$ zugeordnet. Wie oben gezeigt wurde, ist das Spektrum ebenfalls periodisch. Daher reicht eine Berechnung von D Spektralwerten einer Periode aus. Diese Transformation wird finite diskrete Fouriertransformation genannt (finite DFT). Die diskreten Frequenzpunkte sind

$$u_k = \frac{k}{D} \quad \text{für } k = \{0, \dots, D-1\} \quad (4.183)$$

und die frequenzdiskrete, periodische Fouriertransformierte des ortsdiskreten, periodischen Signals lautet innerhalb einer Periode

$$S_a(k) = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{D-1} s_a(n) e^{-i2\pi n \frac{k}{D}} . \quad (4.184)$$

Die inverse Transformation lautet dann

$$s_a(n) = \sum_{k=0}^{D-1} S_a(k) e^{i2\pi n \frac{k}{D}} . \quad (4.185)$$

Abbildung 4.23 stellt diesen Zusammenhang schematisch dar. Zusammenfassend kann man die Transformationen wie in Tabelle 4.3 einteilen.

Tab. 4.3: Einteilung der Fouriertransformationen. Mit dem jeweiligen Typ ist angegeben, wie der Definitionsbereich sich durch die Transformation umwandelt (die Abtastlänge $\Delta\xi$ ist auf Eins gesetzt).

	kontinuierlicher Raum	diskreter Raum
kontinuierliche Frequenz	Fouriertransformation Typ: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $S(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) e^{-i2\pi ux} dx$ Typ: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) e^{i2\pi ux} du$	diskrete Fouriertransformation Typ: $\mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ $S_a(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) e^{-i2\pi nu}$ Typ: $[0,1] \rightarrow \mathbb{Z}$ $s(n) = \int_0^1 S_a(u) e^{i2\pi nu} du$
diskrete Frequenz	Fourierreihe Typ: $[0,D] \rightarrow \mathbb{Z}$ $S(k) = \frac{1}{D} \int_0^D s(x) e^{-ik \frac{2\pi}{D} x} dx$ Typ: $\mathbb{Z} \rightarrow [0,D]$ $s(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(k) e^{ik \frac{2\pi}{D} x}$	diskrete Fouriertransformation Typ: $\mathbb{Z}_D \rightarrow \mathbb{Z}_D$ $S_a(k) = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{D-1} s_a(n) e^{-i2\pi n \frac{k}{D}}$ Typ: $\mathbb{Z}_D \rightarrow \mathbb{Z}_D$ $s_a(n) = \sum_{k=0}^{D-1} S_a(k) e^{i2\pi n \frac{k}{D}}$

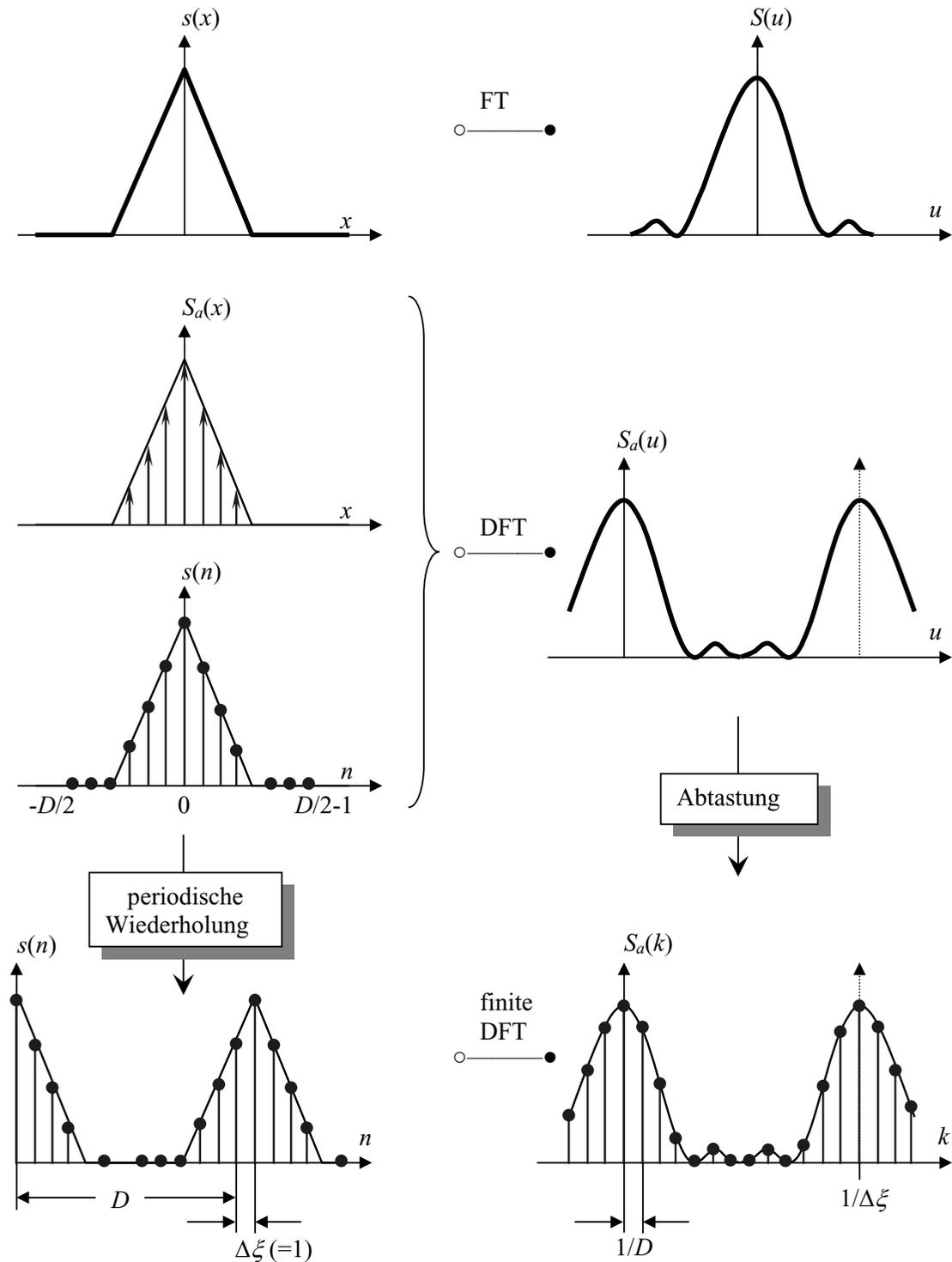


Abb. 4.23: Zusammenhang zwischen dem kontinuierlichen Signal, dem abgetasteten Signal und dem ortsbegrenzten und ortsdiskreten Signal sowie den jeweiligen Spektren (nach H. D. Lüke [Lük99]).

4.20 z-Transformation

Die so genannte z-Transformation stellt eine Verallgemeinerung der Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale dar. Für eine kurze Darstellung der z-Transformation und der nachfolgenden Chirp-z-Transformation soll hier im wesentlichen der Darstellung von *H. D. Lüke* und *S. D. Stearns und D. R. Hush* [Lük99,Ste99] gefolgt werden.

Man benötigt die z-Transformation, wenn die diskrete Fouriertransformation (4.180) nicht für alle Folgen konvergiert. Das ist dann der Fall, wenn die Folge der Signalwerte $s(n)$ nicht absolut summierbar ist, also

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)| \quad (4.186)$$

nicht endlich ist²¹. Die Konvergenz kann man in diesen Fällen aber erzwingen, in dem man mit einem ähnlichen Trick arbeitet, der schon in Gleichung (4.103) zum Erfolg führte. Man erzwingt die Konvergenz durch eine exponentielle Gewichtung, so dass

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)e^{-\sigma n}| < \infty . \quad (4.187)$$

Damit existiert die diskrete Fouriertransformation nach Gleichung (4.180), also

$$s(n)e^{-\sigma n} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)e^{-\sigma n} e^{-i2\pi nu} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)e^{-(\sigma+i2\pi u)n} . \quad (4.188)$$

Substituiert man $z = e^{(\sigma+i2\pi u)}$ so erhält man für die rechte Seite von Gleichung (4.188)

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} . \quad (4.189)$$

Der Ausdruck (4.189) wird z-Transformation genannt. Zerlegt man die komplexe Frequenzvariable in Betrag und Phase, so lässt sich

$$z = |z|e^{i\varphi} = e^{\sigma} e^{i2\pi u} \quad (4.190)$$

in der komplexen z-Ebene interpretieren. Dabei ist über jedem Kreis mit dem Radius

$$|z| = e^{\sigma} \quad (4.191)$$

eine Periode des Fourierspektrums $S_a(u)$ des jeweiligen gewichteten, zeitdiskreten Signals $s(n)e^{-\sigma n}$ aufgetragen. Diese Verallgemeinerung der Fouriertransformation umfasst nun eine größere Klasse von Signalen. Der kreisförmige Bereich, in dem die Fourierspektren konvergieren, in dem also Gleichung (4.187) erfüllt ist, bildet den Konvergenzbereich der z-Transformation. Für zeitbegrenzte Signale umfasst der Konvergenzbereich die gesamte z-Ebene. Wenn der Konvergenzbereich $|z| = 1$ enthält, so sind Fourier- und z-Transformation durch die Substitution $z = e^{i2\pi u}$ (wobei $\sigma = 0$) miteinander verbunden. Das heißt, die entlang

²¹ Im Allgemeinen treten dann Diracstöße im Spektrum $S_a(u)$ auf.

des Einheitskreises berechnete z -Transformation ist identisch mit der diskreten Fouriertransformation (DFT). Wenn der Konvergenzbereich den Einheitskreis nicht enthält, ist die DFT für diese Folge nicht definiert [Ste99].

4.21 Chirp- z -Transformation

Die Chirp- z -Transformation ist ein Algorithmus zur Berechnung der z -Transformierten einer Folge endlicher Länge mit Abtastwerten im Frequenzraum, die in gleichmäßigen Abständen entlang eines verallgemeinerten Weges in der z -Ebene gesetzt werden [Ste99]. Da hier der Bezug zur Fouriertransformierten erhalten bleiben soll, werden nur Wege betrachtet, die Bogenstücke des Einheitskreises darstellen (siehe Abbildung 4.24). Die Chirp- z -Transformation wird bei der so genannten Linogramm-Abtastung des Radonraumes in Kapitel 5.4 eine wichtige Rolle spielen.

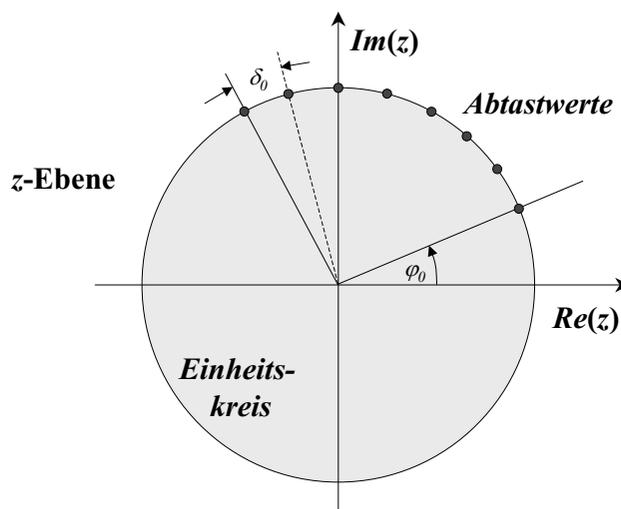


Abb. 4.24: Die Chirp- z -Transformation kann genutzt werden, um M Abtastwerte der z -Transformation auf dem Einheitskreis zu berechnen.

$\{s(n)\}_{n=0,\dots,N-1}$ sei eine Folge von N Abtastwerten im Ortsraum, an deren Spektrum man interessiert ist. Nach Gleichung (4.189) ist die z -Transformierte dann

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)z^{-n} . \quad (4.192)$$

Da hier durch die Substitution $z = e^{i2\pi u}$ die z -Transformation auf dem Einheitskreis berechnet wird, ist sie identisch mit der diskreten Fouriertransformation.

Weiterhin sei man an der Fouriertransformierten von M Abtastwerten auf dem Einheitskreis interessiert und zwar vom Winkel φ_0 an in Abtastschritten von δ_0 . Die Abtastung entlang des Bogens lässt sich beschreiben durch

$$z_k = AB^{-k} \quad \text{mit } k = 0, \dots, M-1 \quad (4.193)$$

Dabei sind

$$A = e^{i\varphi_0} \quad \text{und} \quad B = e^{-i\delta_0}. \quad (4.194)$$

Gleichung (4.192) wird mit dieser Substitution

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) (AB^{-k})^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) A^{-n} B^{nk} \quad \text{wobei } k = 0, \dots, M-1. \quad (4.195)$$

Weil $(k-n)^2 = k^2 - 2kn + n^2$ folgt unmittelbar die so genannte *Bluestein*-Identität [Blu70]

$$kn = \frac{1}{2} [k^2 + n^2 - (k-n)^2], \quad (4.196)$$

die in Gleichung (4.195) eingesetzt den Ausdruck

$$S(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) A^{-n} B^{\frac{n^2}{2}} B^{\frac{k^2}{2}} B^{-\frac{(k-n)^2}{2}} = B^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(s(n) A^{-n} B^{\frac{n^2}{2}} \right) B^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \quad (4.197)$$

liefert. Ersetzt man weiter

$$g_n = s(n) A^{-n} B^{\frac{n^2}{2}} \quad \text{und} \quad h_n = B^{-\frac{n^2}{2}}, \quad (4.198)$$

dann hat man die Summe von Produkten in Gleichung (4.195) in eine lineare Faltung

$$S(z_k) = B^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} g_n h_{k-n} \quad (4.199)$$

umgewandelt. Der Name „Chirp“ bezieht sich auf den Verlauf von

$$h_n = e^{i\delta_0 \frac{n^2}{2}} = e^{in \left(\delta_0 \frac{n}{2} \right)}, \quad (4.200)$$

dessen Imaginärteil in Abbildung 4.25 dargestellt ist. h_n ist eine komplexe Schwingung mit linear ansteigender Frequenz.

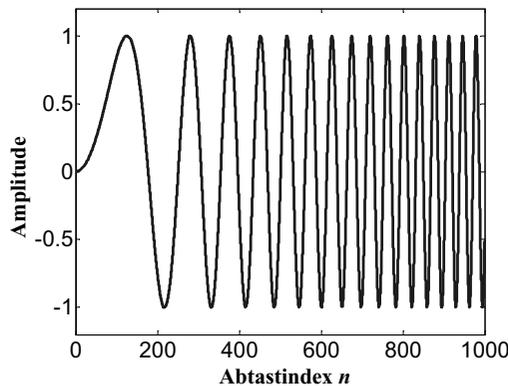


Abb. 4.25: Beispiel für ein Chirp-Signal: Sinusförmiger Verlauf des Imaginärteils des Signals (4.200) mit linear ansteigender Frequenz.

5 Zweidimensionale Rekonstruktionsverfahren

In der Sitzung der physikalisch-mathematischen königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 30. April 1917 reicht der böhmische Mathematiker *Johann Radon* seine Arbeit *über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten* [Rad17] ein. Die wichtigste Aussage seiner Arbeit soll hier kurz mit den Größenbezeichnungen, die in späteren Kapiteln Verwendung finden, in der Sprache von *Radon* wiedergegeben werden:

Integriert man eine geeigneten Regularitätsbedingungen unterworfenen Funktion zweier Veränderlichen (x,y) – eine Punktfunktion $f(x,y)$ in der Ebene – längs einer Geraden L , so erhält man in den Integralwerten $p(L)$ eine Geradenfunktion. Das in vorliegender Abhandlung gelöste Problem ist die Umkehrung dieser linearen Funktionaltransformation, das heißt, es werden folgende Fragen beantwortet: kann jede, geeigneten Regularitätsbedingungen genügende Geradenfunktion auf diese Weise entstanden gedacht werden? Wenn ja, ist dann f durch p eindeutig bestimmt und wie kann es ermittelt werden?

Es sei $f(x,y)$ eine für alle reellen Punkte $\mathbf{r} = [x,y]$ erklärte reelle Funktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfülle:

- a) $f(x,y)$ sei stetig.
b) Es konvergiere das über die gesamte Ebene zu erstreckende Doppelintegral

$$\iint \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy. \quad (5.1)$$

- c) Wird für einen beliebigen Punkt $\mathbf{r} = [x,y]$ und $R \geq 0$

$$\bar{f}_{\mathbf{r}}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + R \cos(\gamma), y + R \sin(\gamma)) d\gamma, \quad (5.2)$$

gesetzt, so gelte für jeden Punkt \mathbf{r} :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \bar{f}_{\mathbf{r}}(R) = 0. \quad (5.3)$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz I: Der geradlinige Integralwert von f für die Gerade L mit der Gleichung

$$x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) = \xi, \quad (5.4)$$

der durch

$$p(\xi, \gamma) = p(-\xi, \gamma + \pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi \cos(\gamma) - \eta \sin(\gamma), \xi \cos(\gamma) + \eta \sin(\gamma)) d\eta \quad (5.5)$$

gegeben ist, ist „im allgemeinen“ vorhanden; das soll heißen: auf jedem Kreise bilden die Berührungspunkte jener Tangenten (siehe Abbildung 5.1 – im Original nicht vorhanden), für welche p nicht existiert, eine Menge vom linearen Maße Null.

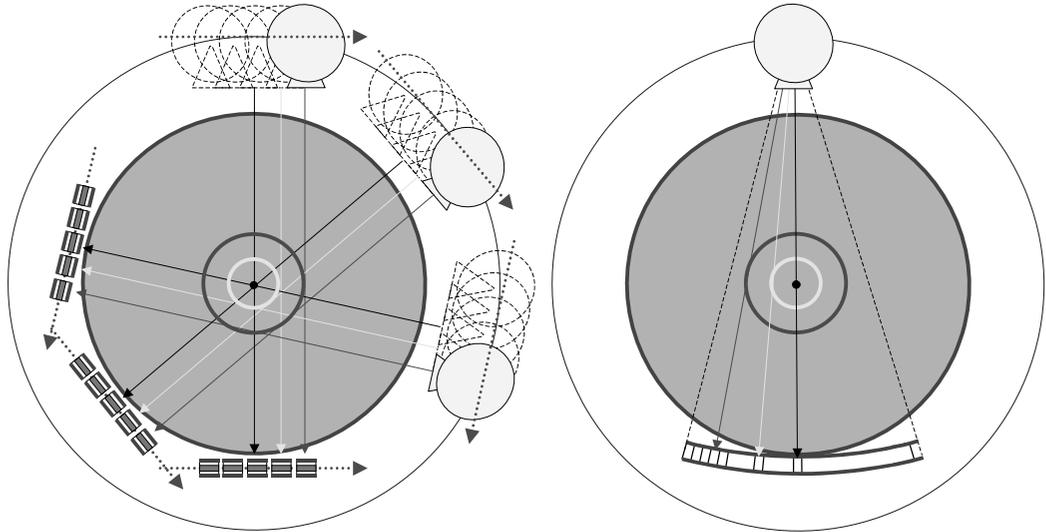


Abb. 5.1: Die Projektionswege, das heißt die Geraden, entlang derer die Röntgenstrahlen durch das Gewebe laufen, bilden Tangenten von Kreisen (hier gezeigt mit dem Zentrum $\mathbf{r} = (0,0)$) im Messfeld. Man kann im rechten Bild schon erahnen, dass das Prinzip auch auf Fächerstrahlgeometrien übertragbar ist. In Kapitel 6.6 wird ausführlich behandelt, welche Art von Koordinatentransformation hierzu erforderlich ist.

Satz II: Bildet man den Mittelwert von $p(\xi, \gamma)$ für die Tangenten des Kreises mit dem Zentrum $\mathbf{r} = (x, y)$ und dem Radius R :

$$\bar{p}_{\mathbf{r}}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) + R, \gamma) d\gamma, \quad (5.6)$$

so konvergiert dieses Integral für alle $\mathbf{r} = (x, y)$ und R absolut.

Satz III: Der Wert von $f(x, y)$ ist durch p eindeutig bestimmt und lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\bar{p}_{\mathbf{r}}(R)}{R}. \quad (5.7)$$

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels wird erläutert, wie diese Sätze zu verstehen sind. Insbesondere wird gezeigt, wie die Umkehrung der Projektion mathematisch und vor allem technisch realisiert wird. Die technische Realisierung wird speziell im Kapitel 6 detailliert behandelt.

5.1 Radontransformation

Moderne Computertomographen verwenden heute die so genannte Fächerstrahlgeometrie. Zur Erläuterung des Rekonstruktionsverfahrens ist es aber einfacher, zunächst bei der sogenannten „Pencil“- oder Nadelstrahlgeometrie zu bleiben, bei der für eine Projektionsrichtung die Röntgenquelle synchron mit dem Röntgendetektor linear verschoben wird. Wie in Kapitel 3 für die Computertomographen der 1. Generation beschrieben, wird danach die Röntgenanordnung um einen Winkel γ gedreht, und wiederum linear verschoben. Dieser Prozess wiederholt sich, bis das Objekt über mindestens 180° durchleuchtet ist. Abbildung 5.2 zeigt diesen Vorgang schematisch.

Für einen eingestellten Projektionswinkel und eine bestimmte Verschiebungssituation ist man jeweils an dem Projektionsintegral

$$p(s) = \int_0^s \mu(\eta) d\eta \quad (5.8)$$

interessiert.

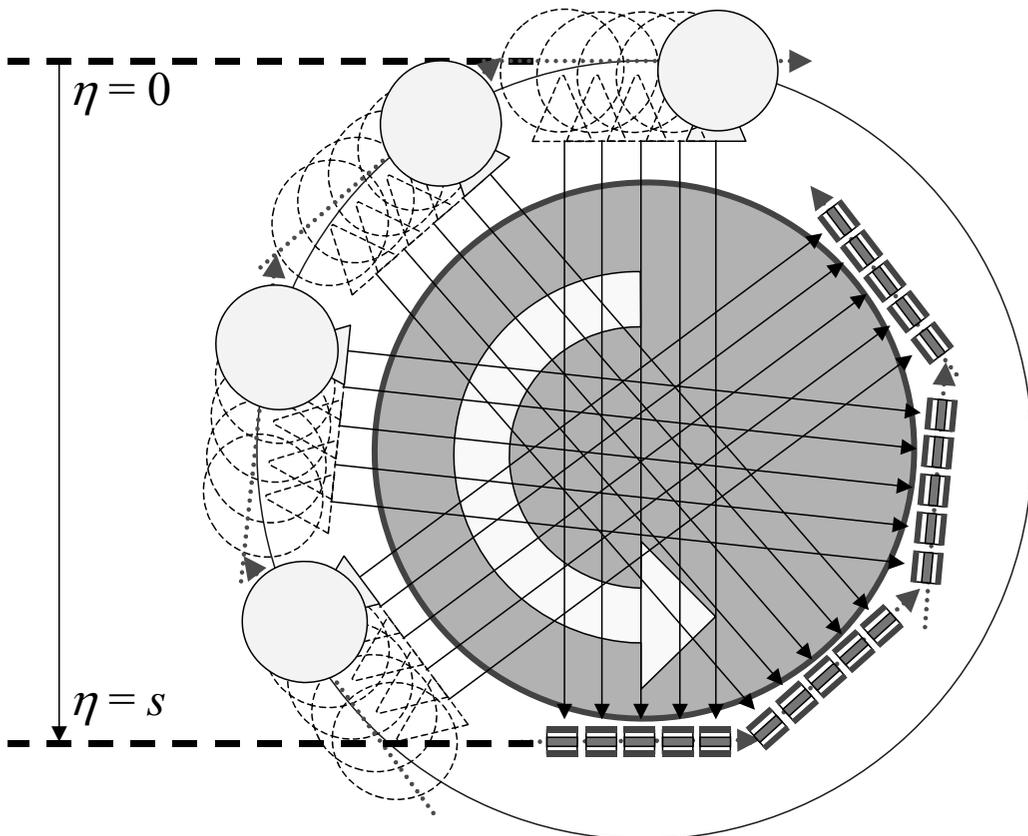


Abb. 5.2: Schematische Darstellung der „Pencil“- oder Nadelstrahlgeometrie bei Computertomographen der ersten Generation. Die mit Kollimatoren nadelförmig eingegengten Röntgenstrahlen bilden für jeden eingestellten Projektionswinkel durch Parallelverschiebung eine Parallelprojektion. Die Schnittebene, die durch die Projektionsgeometrie definiert wird, ist die zu rekonstruierende tomographische Schicht in dem untersuchten Gewebe.

Wenn sich der Schwächungskoeffizient nur in diskreten Schritten ändert, so wie die Abbildung 5.3 es nahe legt, dann erhält man statt des Projektionsintegrals in Gleichung (5.8) eine Projektionssumme

$$p(s) = \sum_{k=1}^s \mu_k \Delta \eta. \quad (5.9)$$

Da die Röntgenquelle in dem oben beschriebenen Verfahren synchron parallel zum Röntgendetektor verschoben wird, ist der durchlaufene Weg entlang der Achse η von 0 bis s natürlich konstant.

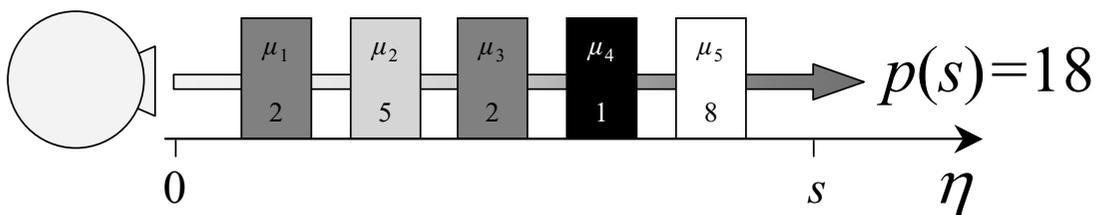


Abb. 5.3: Abschwächung der Strahlungsintensität beim Durchlaufen inhomogenen Gewebes. Die räumliche Inhomogenität der Schwächungskoeffizienten macht die Rekonstruktion mathematisch anspruchsvoll. Diese Anstrengung ist aber lohnend, denn genau an der räumlichen Verteilung der Schwächungskoeffizienten ist man klinisch interessiert.

Man erhält eine Reihe von zueinander parallelen Wegen durch das Objekt, die eine Schnittebene definieren. Das Projektionsintegral soll hier deswegen nicht mehr als Funktion des durchlaufenen konstanten Gesamtweges geschrieben werden, sondern als Funktion der Verschiebung der Quelle ξ und des Projektionswinkels γ . Hierzu definiert man neben dem ruhenden Koordinatensystem (x,y) ein auf der Abtasteinheit zusammen mit der Röntgenquelle und dem Detektor mitrotierendes Koordinatensystem (ξ,η) . Abbildung 5.4 zeigt die geometrische Situation.

Durch wiederholte Drehung und Verschiebung des fest miteinander verbundenen Quelle-Detektor-Systems erhält man eine Sequenz von gemessenen Parallelprojektionen $\{p_{\gamma_1}(\xi), p_{\gamma_2}(\xi), p_{\gamma_3}(\xi), \dots\}$ aus der dann die räumliche Verteilung der Objekte – genauer, die räumliche Verteilung der Schwächungskoeffizienten innerhalb einer gewählten Schicht durch den Körper – errechnet werden muss. In Abbildung 5.4 ist die tomographische Schicht mit den rekonstruierten Schwächungswerten symbolisch durch ein axiales Abdomentomogramm wiedergegeben.

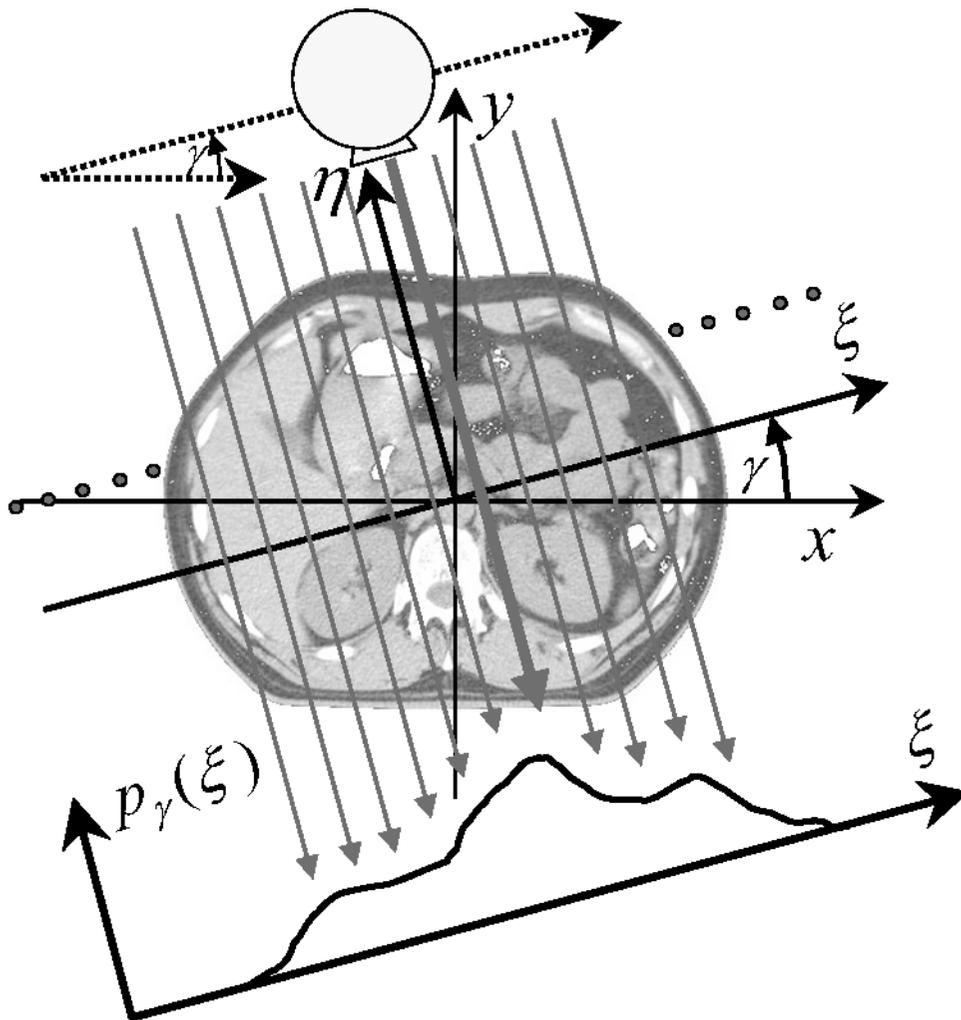


Abb. 5.4: Die auf der *Gantry* rotierende Abtasteinheit des Computertomographen trägt die Röntgenquelle und den Detektor. Wenn unter jedem Winkel γ beide synchron und parallel zueinander verschoben werden, dann definieren die im rotierenden Koordinatensystem (ξ, η) zueinander parallelen Röntgenstrahlen die zu rekonstruierende Schicht bei der Computertomographie. Diese Schicht ist hier durch ein axiales Abdomentomogramm symbolisch wiedergegeben.

Für die konstante Weglänge s lautet das Projektionsintegral für das (ξ, η) -System unter dem Winkel γ

$$p_\gamma(\xi) = \int_0^s \mu(\xi, \eta) d\eta. \quad (5.10)$$

Abbildung 5.5 zeigt dieses Projektionsintegral noch einmal beim Durchgang durch Gewebe. Die zu rekonstruierende räumliche Verteilung der Schwächungskoeffizienten kann aufgrund der beschränkten Auflösung des realen Messsystems natürlich nur diskret sein. Die konkrete Verfahrensweise bei der Rekonstruktion mit diskreten Signalen wird eingehend in Kapitel 6 behandelt. In diesem Kapitel soll bei der Theorie der Bildrekonstruktion zunächst von kontinuierlichen Signalen ausgegangen werden.

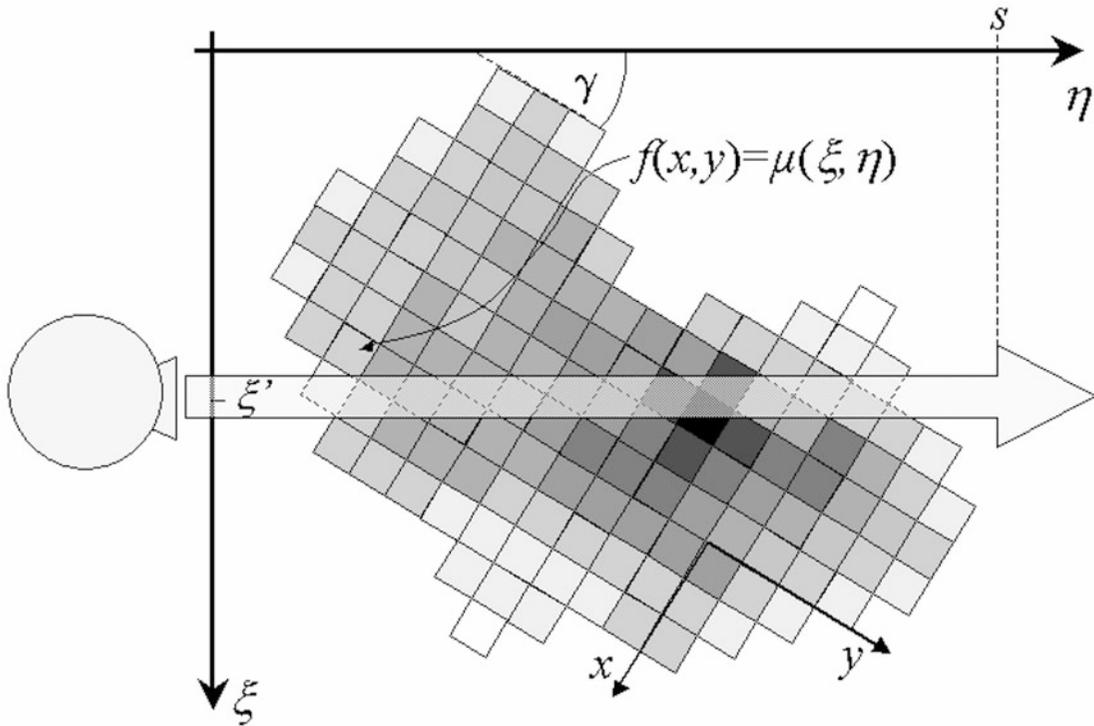


Abb. 5.5: Das Objekt dreht sich im Koordinatensystem der Röntgenröhre (ξ, η). Schematisch ist hier angedeutet, dass die zu rekonstruierende räumliche Verteilung der Schwächungskoeffizienten in der realen Messsituation natürlich nur diskret sein kann.

Der Ausdruck in Gleichung (5.10) stellt eine Integration entlang des Weges dar, der durch die Position ξ der Röntgenquelle bzw. des Röntgendetektors und des jeweils eingestellten Projektionswinkels γ vorgegeben ist.

Die Vektoren

$$\mathbf{n}_\xi = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

und

$$\mathbf{n}_\eta = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

stellen Einheitsvektoren dar, die die rotierende ξ - η -Ebene aufspannen. Abbildung 5.6 zeigt den Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren (5.11) bzw. (5.12), die auf der rotierenden Abtasteinheit verankert sind und dem ruhenden Patienten im (x, y) -System.

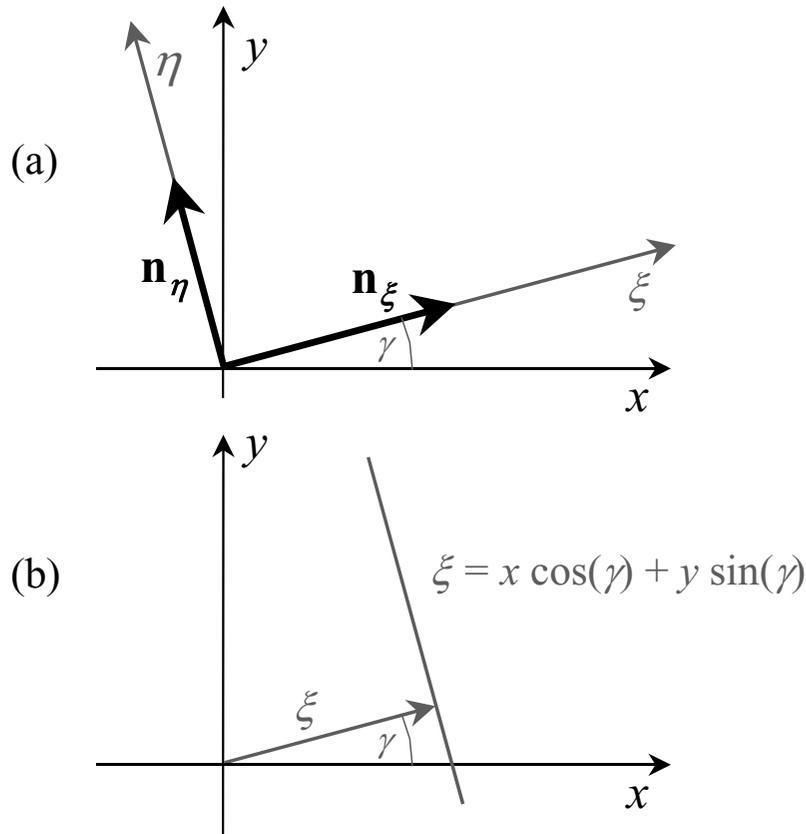


Abb. 5.6: Definition des rotierenden Koordinatensystems (ξ, η) durch Einheitsvektoren (a). Das (x, y) -System definiert das ruhende Koordinatensystem des Patienten. Projektionsweg in Hessescher Normalform (b).

Um das Projektionsintegral (5.10) im (x, y) -System zu formulieren, nutzt man die folgenden einfachen, geometrischen Zusammenhänge zwischen den Koordinatensystemen für einen Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ aus

$$\xi = (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) \quad (5.13)$$

und

$$\eta = (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\eta) = -x \sin(\gamma) + y \cos(\gamma). \quad (5.14)$$

Eine entsprechende Substitution

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mu(\xi(x, y), \eta(x, y)) \\ &= \mu((\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi), (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\eta)) \end{aligned} \quad (5.15)$$

für den Schwächungskoeffizienten $\mu(\xi, \eta)$ ergibt die Schwächungswerte im ruhenden (x, y) -System. Physikalisch sind f und μ dabei die identischen Schwächungskoeffizienten des Gewebes am Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ im (x, y) -System bzw. am Punkt $\mathbf{p} = (\xi, \eta)^T$ im (ξ, η) -System. Abbildung 5.7 stellt diesen Zusammenhang graphisch dar.

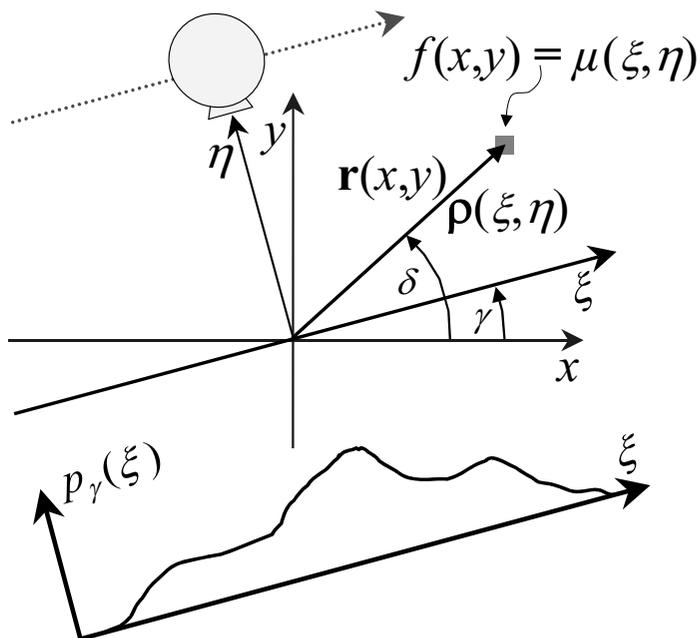


Abb. 5.7: Die Schwächungskoeffizienten f am Punkt \mathbf{r} im ruhenden (x,y) -Koordinatensystem und μ am Punkt \mathbf{p} im rotierenden (ξ, η) -Koordinatensystem.

Insgesamt kann man diese Korrespondenz auch durch das schematisch-funktionale Diagramm in Abbildung 5.8 darstellen.

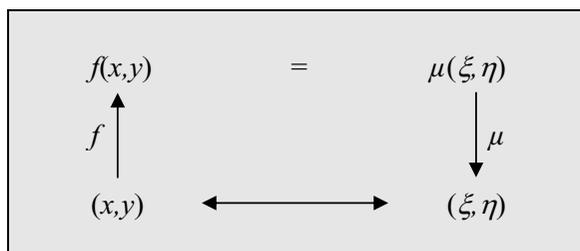


Abb. 5.8: Korrespondenz der Schwächungskoeffizienten definiert im ruhenden bzw. rotierenden Koordinatensystem (x,y) bzw. (ξ, η) .

Wie aus der Signalverarbeitung bekannt ist, stellt die schrittweise Verschiebung der Röntgenquelle eine Abtastung des kontinuierlichen Projektionssignals dar. Sei \mathbf{L} eine Linie in der Schnittebene, dann kann die Abtastung wie folgt beschrieben werden

$$f * \delta(\mathbf{L}) = \int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{L}) d\mathbf{r} \tag{5.16}$$

bzw.

$$f * \delta(\mathbf{L}) = \int_{\mathbf{r} \in \mathbf{L}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \tag{5.17}$$

Abbildung 5.9 stellt die Abtastung in der Ebene wieder graphisch dar. Die Linie \mathbf{L} ist die Menge aller Punkte in dem zu untersuchenden Gewebe, durch die der Röntgenstrahl für eine bestimmte Einstellung des Projektionswinkels γ und der Verschiebung ξ läuft. Die Gleichungen (5.16) bzw. (5.17) bedeuten, dass alle Schwächungswerte entlang der Linie \mathbf{L} aufintegriert werden. Das spiegelt den physikalischen Vorgang der Schwächung von Röntgenstrahlung im Gewebe wider.

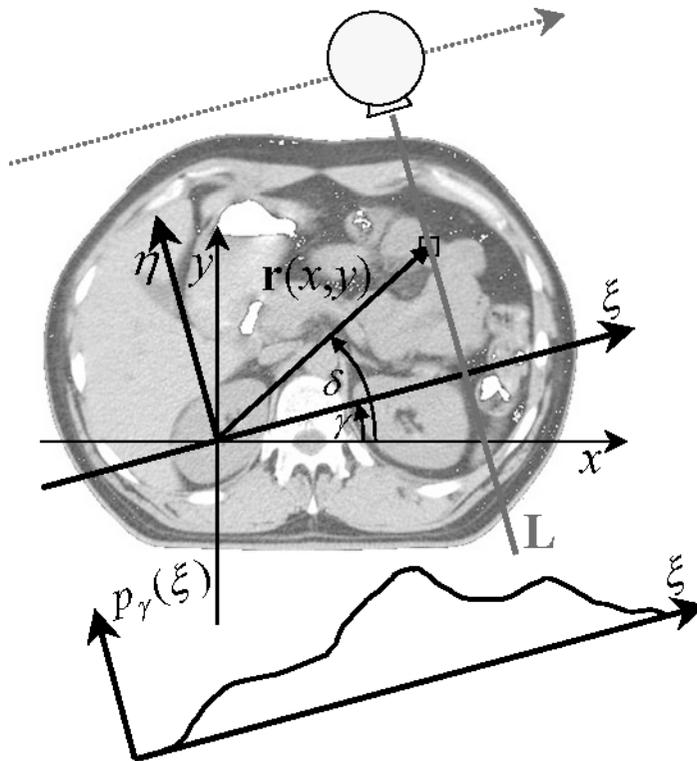


Abb. 5.9: Linienabtastung des Objektes. Alle Punkte des Gewebes, die auf der Linie \mathbf{L} liegen, werden vom Röntgenstrahl durchlaufen. Die exponentielle Abnahme der Intensität des Röntgenlichts spiegelt sich mathematisch in der Integration aller Schwächungswerte auf der Linie \mathbf{L} wider.

Die δ -Distribution in Gleichung (5.16) liefert durch ihre Siebeigenschaft alle Punkte \mathbf{r} der Schnittebene, die auf der Linie \mathbf{L} liegen. \mathbf{L} ist dabei der Weg des Röntgenstrahls durch das Gewebe, daher ist die Linie \mathbf{L} durch $(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = \xi$ gegeben. Das Projektionsintegral kann dadurch wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} f * \delta(\mathbf{L}) &= \int f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) - \xi) d\mathbf{r} \\ &= p(\xi). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Wie schon oben angedeutet, ändern sich die Projektionen natürlich mit dem Projektionswinkel γ , so dass der Parameter γ zur vollständigen Beschreibung gehört und man daher

$$p = p(\xi, \gamma) = p_\gamma(\xi) \quad (5.19)$$

schreibt.

$p_\gamma(\xi)$ wird zweidimensionale Radontransformierte des Objektes genannt.

Man schreibt

$$f(x,y) \xrightarrow{\mathcal{R}_2} f * \delta(\mathbf{L}) = p_\gamma(\xi). \quad (5.20)$$

bzw.

$$p_\gamma(\xi) = \mathcal{R}_2\{f(x,y)\}. \quad (5.21)$$

Zur Vertiefung der Mathematik der Radontransformation lese man bei *S. Helgason* [Hel99] nach. Abbildung 5.10 zeigt, wie die Daten der Radontransformierten typischerweise dargestellt werden. In einem kartesischen (ξ, γ) -Diagramm werden die Projektionswerte $p_\gamma(\xi)$ im Radonraum zusammengefasst. Die Positionen der Projektionswerte von Objekten, die außerhalb des Drehzentrums des Tomographen liegen, liefern in diesem (ξ, γ) -Diagramm einen sinusförmigen Verlauf. Daher wird diese Darstellung auch häufig Sinogramm genannt. Abbildung 5.10 zeigt das Zustandekommen der Sinuskurve schematisch.

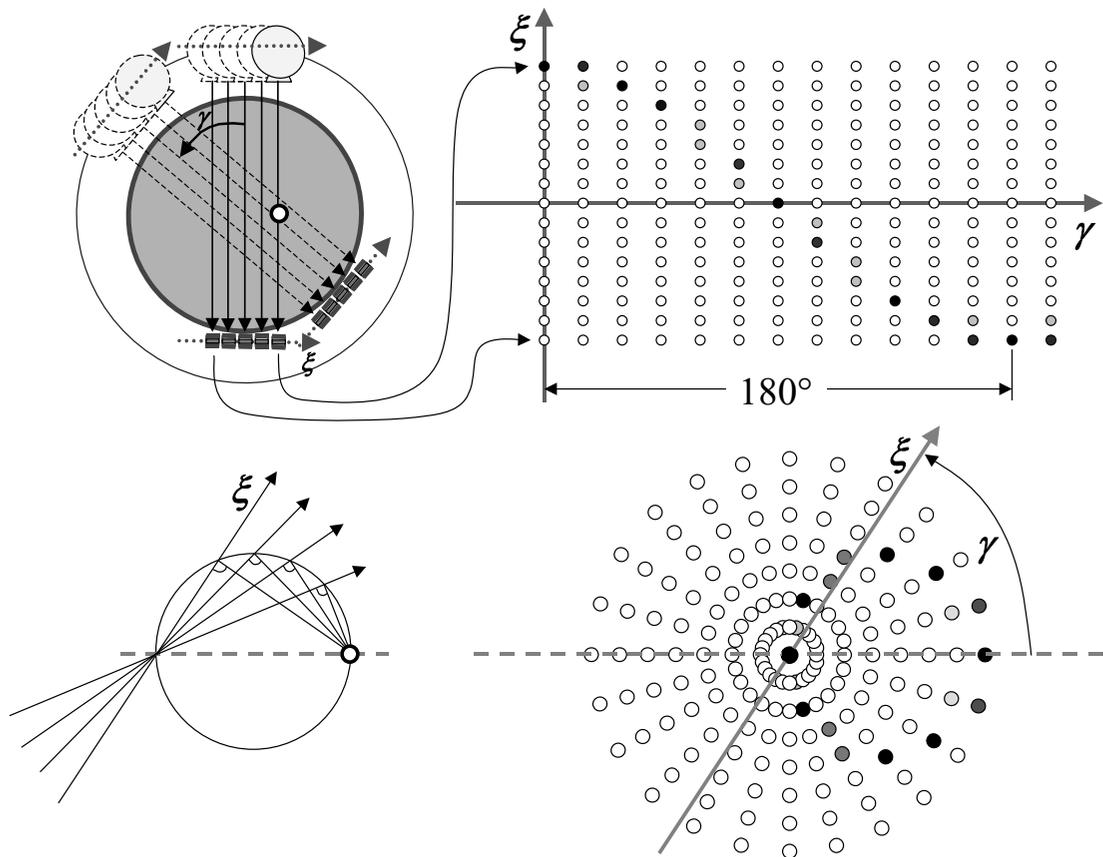


Abb. 5.10: Zusammenfassung der gemessenen Projektionswerte $p_\gamma(\xi)$. Die Daten werden üblicherweise in einem kartesischen (ξ, γ) -Diagramm dargestellt (oben rechts). Dieses Diagramm wird *Sinogramm* oder *Radonraum* genannt. Die Darstellung ist analog zum Datendiagramm einer *Hough-Transformation* (siehe [Leh97]). Gelegentlich nutzt man auch die polare Darstellung des Radonraums, die unten rechts zu sehen ist. Unten links ist gezeigt, wie die Kreise sich nach dem Satz von Thales ergeben.

Die Daten werden nur von 0 bis 180° akquiriert, da aufgrund der physikalischen Symmetrie der Rückweg der Röntgenstrahlung durch das zu untersuchende Objekt keine neuen Informationen zusätzlich zum Hinweg liefert. Die Abbildung 5.11 zeigt ein synthetisches Tomogramm mit einem homogenen Quadrat außerhalb des Drehzentrums und einem homogenen Rechteck im Drehzentrum. Die Abbildungen 5.12a/b stellen den zu Abbildung 5.11 dazugehörigen Radonraum dar. Im Radonraum sind die Projektionswerte $p_\gamma(\xi)$ in Grauwerten codiert dargestellt. Abbildung 5.12a zeigt diese Werte in der kartesischen ξ - γ -Ebene. Der sinusförmige Verlauf der Projektionseinträge für das Quadrat im Radonraum ist sehr gut zu erkennen. Je weiter ein Objekt vom Drehzentrum entfernt ist, desto größer ist die Amplitude der Sinuskurve im Radonraum. Das Rechteck zeigt diesen globalen sinusförmigen Verlauf daher nicht. Dennoch ist die rechteckige Form im Verlauf der dazugehörigen Einträge im Radonraum zu erkennen. Bei $\gamma = 45^\circ$ liegen das Rechteck und das Quadrat bezüglich der Projektionsgeometrie auf einer Linie. Das spiegelt sich im besonders hellen Eintrag im Radonraum bei $p_{45^\circ}(181)$ wider.

Die Abbildung 5.12b zeigt den Radonraum in Polarkoordinaten. Auch hier sind beide Objekte gut voneinander getrennt. Je weiter ein Objekt von Drehzentrum entfernt ist, desto größer ist der korrespondierende Kreis in dieser Darstellung. Für das Rechteck im Zentrum von Abbildung 5.11 ist die spiegelsymmetrische Signatur im Radonraum zu erkennen. Die Muster in diesem Diagramm ergeben sich nach dem Satz von Thales [Pap00].

Die Abbildung 5.13 zeigt eine tomographische Schicht des Abdomen und die Abbildungen 5.14a/b wieder den dazugehörigen Radonraum. Die Verhältnisse sind hier natürlich nicht so einfach zu durchschauen wie im Beispiel des synthetischen Tomogramms. Dennoch sind diese Daten die Grundlage für die nun folgenden Rekonstruktionsverfahren.

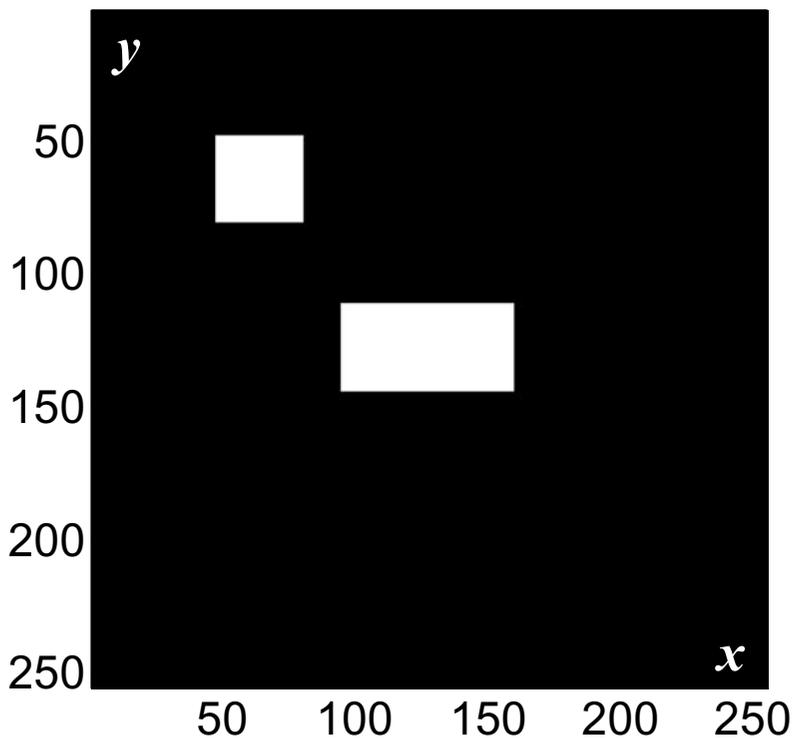


Abb. 5.11: Synthetisches 256 x 256-Pixel-Bild. Die Schwächungswerte zweier Objekte werden durch den homogen verteilten Grauwert 1 simuliert.

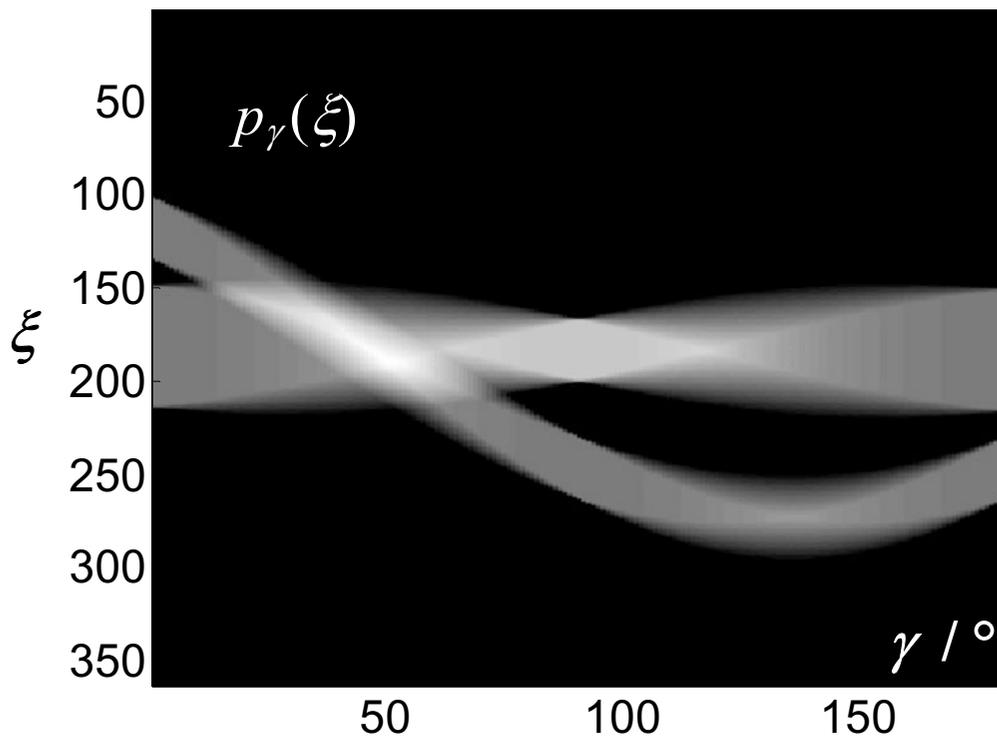


Abb. 5.12a: Kartesischer Radonraum des synthetischen Bildes in Abbildung 5.11.

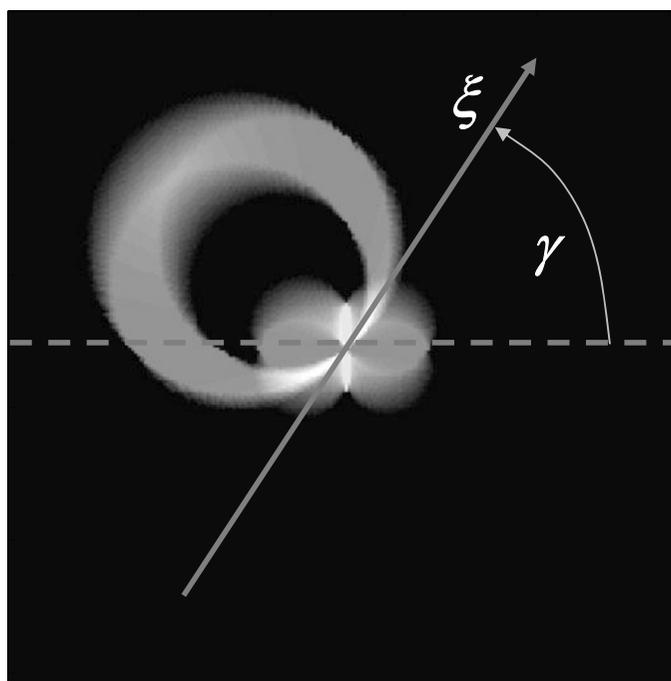


Abb. 5.12b: Radonraum des synthetischen Bildes in Abbildung 5.11 in Polarkoordinaten.

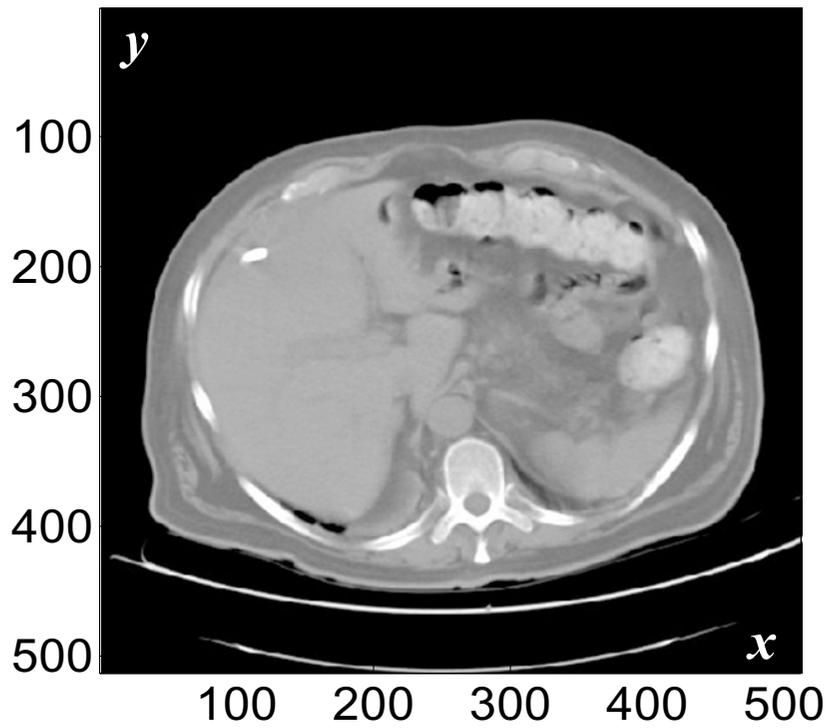


Abb. 5.13: Computertomographisches Schichtbild des Abdomen.

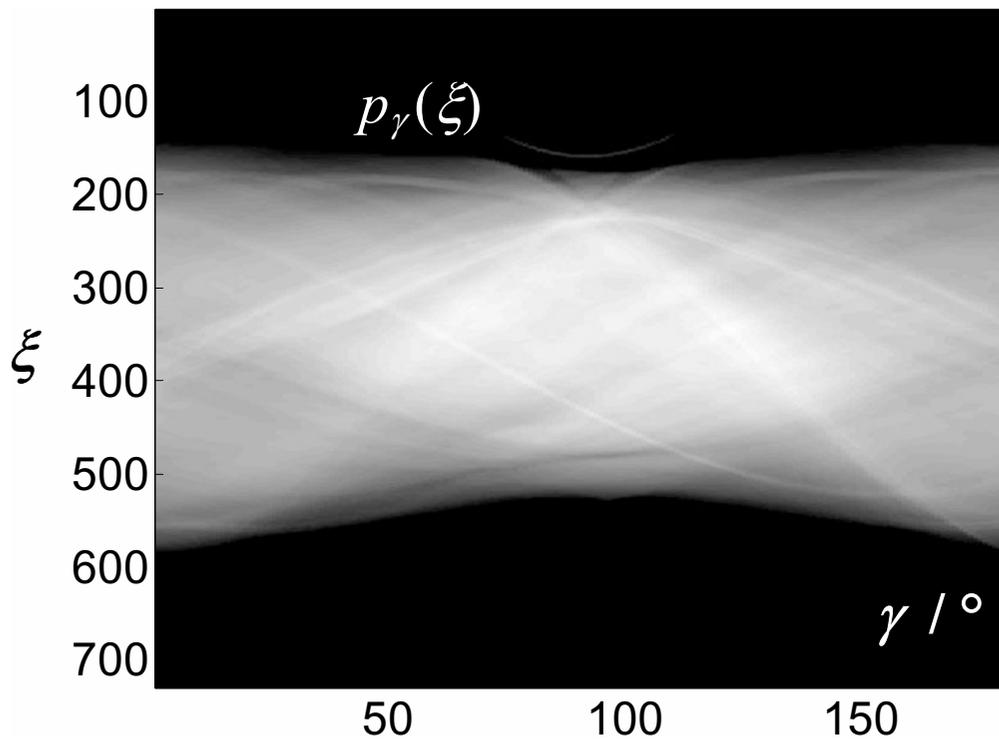


Abb. 5.14a: Kartesischer Radonraum des Abdomen in Abbildung 5.13.

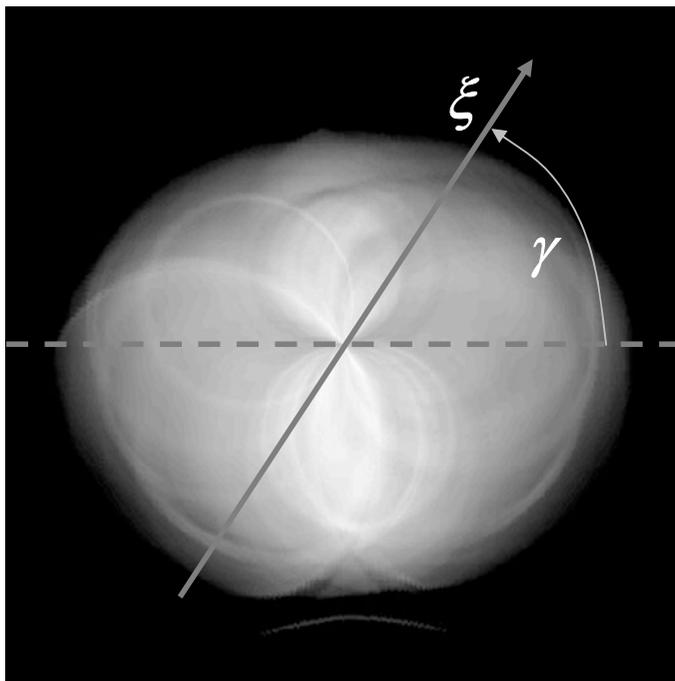


Abb. 5.14b: Radonraum des Abdomen in Abbildung 5.13 in Polarkoordinaten.

5.2 Inverse Radontransformation und Fourier-Slice-Theorem

Gleichung (5.21) stellt ein erstes wichtiges Ergebnis dar, allerdings steht man in der Praxis vor dem inversen Problem, das *Johann Radon* schon 1917 formuliert hatte. Man hat die Projektionsdaten $p_\gamma(\xi)$ gemessen und ist an $f(x,y)=\mu(\xi,\eta)$ interessiert. An dieser Stelle hilft das Fourier-Slice-Theorem weiter, das folgend in drei Schritten motiviert werden soll, die in Schema 1 zusammengefasst sind.

Schema 1: *Fourier-Slice-Theorem*

1. Berechnung der Fouriertransformierten von $p_\gamma(\xi)$

$$p \circ \text{---} \bullet P$$

2. Konstruktion der Fouriertransformierten von f aus P

$$P \bullet \text{---} \bullet F$$

3. Berechnung der inversen Fouriertransformierten von F liefert den gewünschten Ausdruck

$$F \bullet \text{---} \circ f$$

Während die Schritte 1 und 3 mit Hilfe der Fouriertransformation zu erledigen sind, erfordert der Schritt 2 die Kenntnis des Fourier-Slice-Theorems.

Zur Erläuterung des Theorems betrachtet man die Daten des Radonraumes $p(\xi, \gamma) = p_\gamma(\xi)$ als eine eindimensionale Funktion der Detektorkoordinate ξ , die durch den Projektionswinkel γ parametrisiert wird. Das heißt, für jeden Winkel γ erhält man ein eindimensionales Spektrum

$$P(q, \gamma) = P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\gamma(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi. \tag{5.22}$$

Damit ist der Schritt 1 erledigt. Für den Schritt 3 ruft man sich ins Gedächtnis, dass F eine Funktion der kartesischen Spektralkoordinaten u und v ist, denn der Schwächungskoeffizient $f(x, y)$ ist in kartesischen Koordinaten definiert. Der Übergang in die Spektraldarstellung ändert an der Natur des Koordinatensystems nichts, das heißt

$$F(u, v) \bullet \text{---} \circ f(x, y). \tag{5.23}$$

Mittels einer zweidimensionalen Fouriertransformation kann dieser Schritt also auch leicht vollzogen werden.

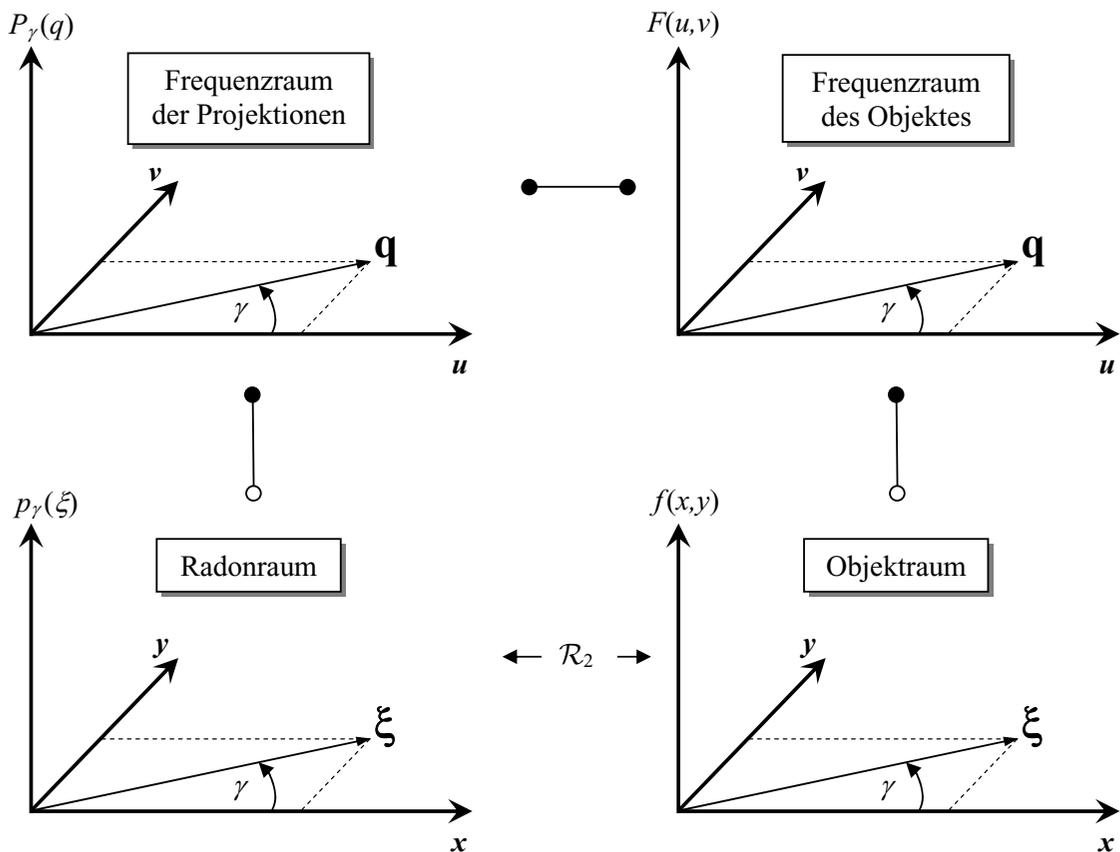


Abb. 5.15: Graphische Darstellung des Fourier-Slice-Theorems. Da die Fouriertransformation nichts an der Natur der Koordinatensysteme ändert, muss sowohl beim Übergang der beiden oberen Diagramme als auch beim Übergang der beiden unteren Diagramme von links nach rechts ein Wechsel von polaren zu kartesischen Koordinaten vollzogen werden.

Wenn aber durch die Fouriertransformation nichts an der Natur der Koordinatendarstellung geändert wird, dann ist offensichtlich, dass man in Schritt 2 einen Koordinatenwechsel benötigt, denn die Radontransformierte $p_\gamma(\xi)$ und damit auch die Fouriertransformierte der Radontransformierten $P_\gamma(q)$ sind in Polarkoordinaten (ξ, γ) bzw. (q, γ) gegeben. Abbildung 5.15 zeigt diesen Zusammenhang schematisch. Die Transformationen in der senkrechten Richtung sind jeweils durch die Fouriertransformation gegeben. Von links nach rechts muss aber ein Koordinatenwechsel von polaren zu kartesischen Koordinaten vollzogen werden.

Durch Abbildung 5.15 wird auch klar, dass der Vektor $\xi = \xi(\xi, \gamma)$ in die gleiche Richtung wie $\mathbf{q} = \mathbf{q}(q, \gamma)$ zeigt. Dies liegt an der Rotationsinvarianz der Fouriertransformation.

Für die Wechsel der Koordinatensysteme sei hier noch einmal kurz wiederholt, dass ein Punkt mit den Polarkoordinaten (q, γ) die kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} u &= q \cos(\gamma) \\ v &= q \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (5.24)$$

besitzt. Ersetzt man in der Transformation (5.23) in $F(u, v)$ die kartesischen Koordinaten durch Polarkoordinaten, so erhält man

$$\begin{aligned} F(u(q, \gamma), v(q, \gamma)) &= F(q \cos(\gamma), q \sin(\gamma)) \\ &= F_{\text{polar}}(q, \gamma) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Das Fourier-Slice-Theorem sichert nun, dass $F_{\text{polar}}(q, \gamma)$ identisch mit $P_\gamma(q)$ ist, also dass

$$F(q \cos(\gamma), q \sin(\gamma)) = P_\gamma(q) = P_\gamma(q). \quad (5.26)$$

Das heißt, ein Schnitt im Winkel γ durch das zweidimensionale Fourierspektrum $F(u, v)$ der Schwächungswerte $f(x, y)$ ist gleich der eindimensionalen Fouriertransformierten $P_\gamma(q)$ der Funktion $p_\gamma(\xi)$, die sich durch Projektion von f unter dem Winkel γ ergibt. Abbildung 5.16 zeigt diesen Zusammenhang in einem funktionalen Diagramm wieder schematisch.

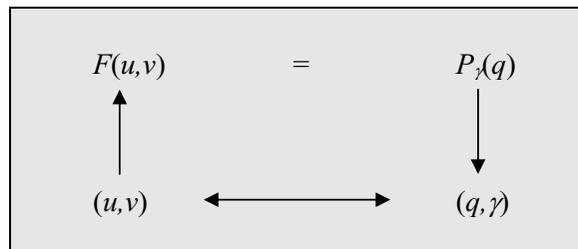


Abb. 5.16: Schematisch-funktionale Darstellung der Kernaussage des Fourier-Slice-Theorems. In der spektralen Darstellung sind $F(u, v)$ und $P_\gamma(q)$ miteinander zu identifizieren, wenn man einen Koordinatenwechsel von kartesischen zu polaren Koordinaten vornimmt (nach *T. Lehmann et al.* [Leh97]).

Den funktionalen Zusammenhang in Abbildung 5.16 kann man nun unmittelbar aus den Transformationsvorschriften herleiten, denn es gilt

$$P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\gamma(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi, \quad (5.27)$$

wobei sich die Projektionswerte $p_\gamma(\xi)$ in Gleichung (5.27) aus dem Projektionsintegral (5.10) ergeben, so dass gilt

$$P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^s \mu(\xi, \eta) d\eta \right\} e^{-2\pi i q \xi} d\xi. \quad (5.28)$$

Nimmt man an, dass außerhalb des zu untersuchenden Objektes keine Schwächung statt findet, so kann die Integration im inneren Integral auch ins Unendliche ausgedehnt werden, so dass

$$P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\xi, \eta) e^{-2\pi i q \xi} d\xi d\eta. \quad (5.29)$$

In dem um den Winkel γ gedrehten, aber immer noch kartesischen, jetzt aber ruhenden (x,y) -Patientenkoordinatensystem kann man

$$P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\xi(x, y), \eta(x, y)) e^{-2\pi i q (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi)} dx dy \quad (5.30)$$

schreiben. Das Skalarprodukt $(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = \xi$ im Exponenten von Gleichung (5.30) enthält nach Gleichung (5.13) ebenfalls den Übergang zum ruhenden (x,y) -System. Mit der Korrespondenz von Gleichung (5.15) kann geschrieben werden, dass

$$P_\gamma(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i q (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi)} dx dy. \quad (5.31)$$

Beginnt man andererseits mit der kartesischen Formulierung der Fouriertransformation des tomographischen Schnittes im ruhenden (x,y) -Patientenkoordinatensystem

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (xu + yv)} dx dy \quad (5.32)$$

und verwendet man im Exponenten von Gleichung (5.32) den Zusammenhang aus den Gleichungen (5.24), dann erhält man

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (xq \cos(\gamma) + yq \sin(\gamma))} dx dy. \quad (5.33)$$

Nach dem Ausklammern der Frequenz q im Exponenten vereinfacht sich Gleichung (5.33) durch Gleichung (5.13) zu

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi})} dx dy. \quad (5.34)$$

Der Integrand in Gleichung (5.34) ist nun aber identisch mit dem in Gleichung (5.31), womit gezeigt ist, dass

$$F(u, v) \Big|_{\substack{u=q \cos(\gamma) \\ v=q \sin(\gamma)}} = P_{\gamma}(q). \quad (5.35)$$

Der Zusammenhang (5.35) kann natürlich auch umgekehrt genutzt werden, um die Radontransformierte zu berechnen, wenn das Bild $f(x, y)$ bekannt ist. Zusammenfassend zeigt Abbildung 5.17 den Zusammenhang zwischen dem Objektraum, dem Radonraum und dem dazugehörigen Fourierraum.

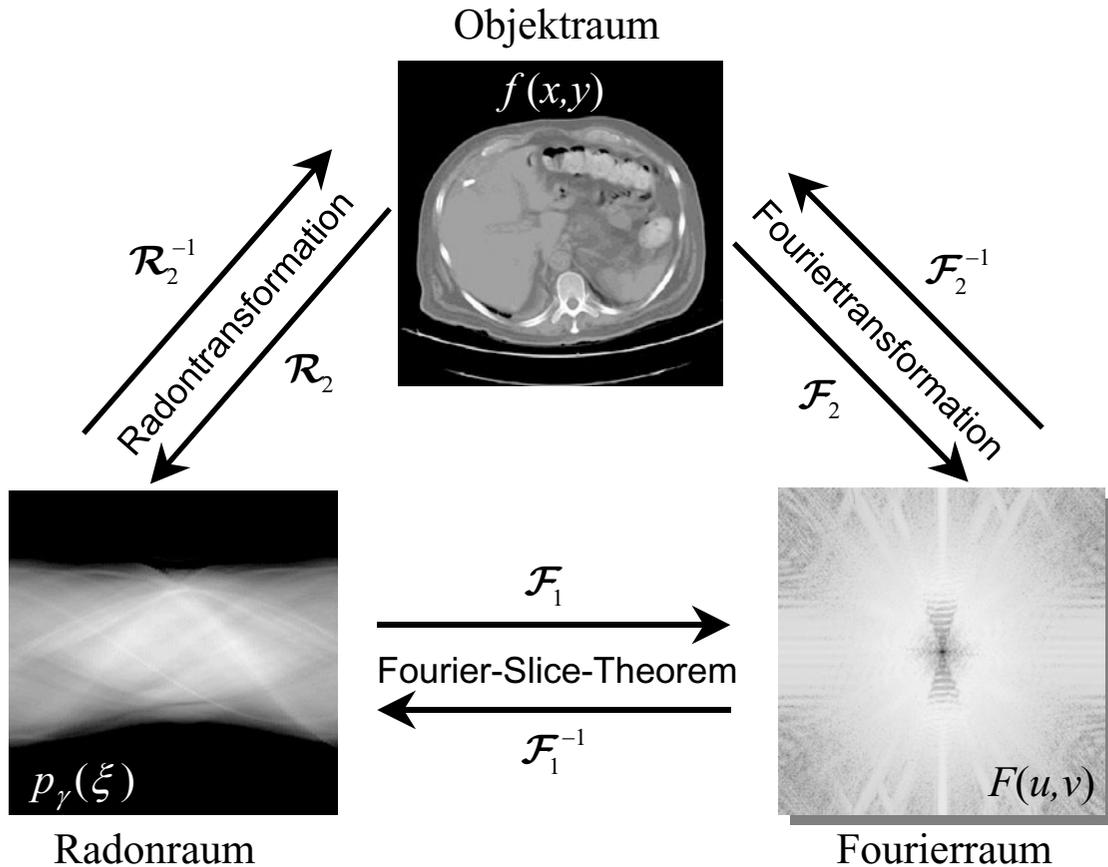


Abb. 5.17: Schematische Zusammenfassung der Zusammenhänge zwischen dem Objektraum (der hier als axiales Schädeltomogramm dargestellt ist), dem Radonraum (hier über 180° aus dem Objekt berechnet) und dem Fourierraum (hier ist nur der Betrag dargestellt), der sich aus dem Objektraum über eine zweidimensionale Fouriertransformation direkt ergibt, aber auch über das Fourier-Slice-Theorem mittels eindimensionaler Fouriertransformationen aus dem Radonraum zu berechnen ist.

5.3 Implementation der direkten inversen Radontransformation

Nach dem Studium der Gleichungen (5.27) bis (5.35) kann nun unmittelbar eine Rekonstruktionsvorschrift für tomographische Schnitte $f(x,y)$ aus den Projektionsdaten $p_\gamma(\xi)$ angegeben werden. Dazu müssen offenbar die polaren Spektraldaten $P_\gamma(q)$ der Projektionen in ein kartesisches Koordinatensystem $F(u,v)$ eingetragen werden. Danach transformiert man $F(u,v)$ mit einer inversen Fouriertransformation in den Ortsraum zurück und erhält direkt das gewünschte Tomogramm $f(x,y)$.

Hierbei gibt es allerdings eine praktische Schwierigkeit, die man für den Alltagseinsatz überwinden muss. In der realen Computertomographie wird nämlich nur eine beschränkte Anzahl von Projektionen $\{p_{\gamma_1}(\xi), p_{\gamma_2}(\xi), \dots, p_{\gamma_N}(\xi)\}$ gemessen. Demnach ist auch die Fouriertransformierte der Schwächungskoeffizienten $F(u,v)$ nur auf dieser beschränkten Anzahl gemessener radialer Linien bekannt.

Die Diskretisierung selbst ist aber noch nicht das Problem, sondern die Lage oder besser die Verteilung der polaren spektralen Daten im kartesischen Koordinatensystem der spektralen Darstellung des tomographischen Ortsraumes. Abbildung 5.18a zeigt die radiale Anordnung der Fouriertransformierten $P_\gamma(q)$ der unter dem Winkel γ gemessenen Projektionsdaten $p_\gamma(\xi)$ im kartesischen (u,v) -Raum. Offenbar liegen die spektralen Projektionsdaten auf Kreisen im (u,v) -Raum. Will man eine inverse Fouriertransformation durchführen, so muss aus den auf Kreisen angeordneten $P_\gamma(q)$ -Daten ein kartesisches Gitter erzeugt werden.

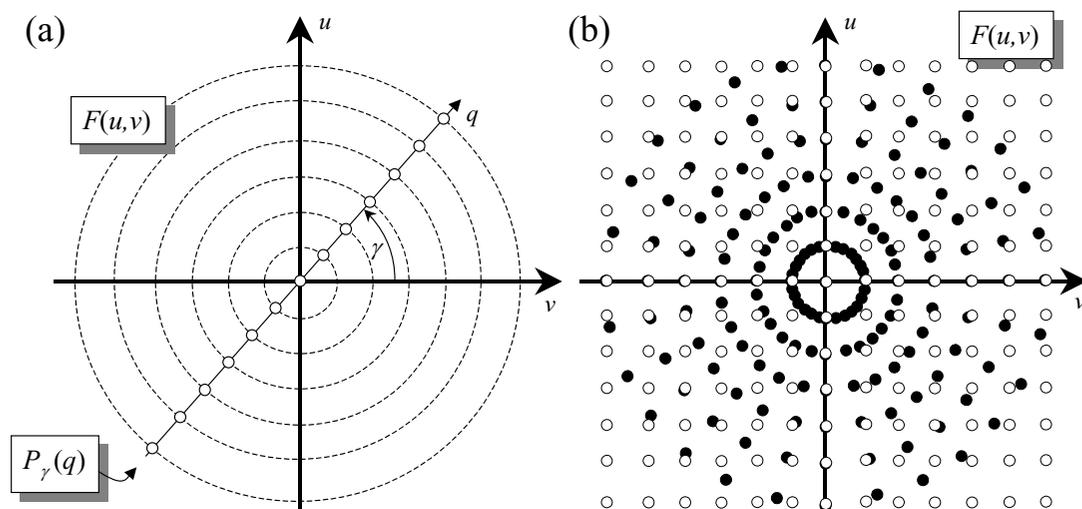


Abb. 5.18: a) Radial angeordnete aus Projektionsmessungen gewonnene Werte von $P_\gamma(q)$. b) Regriding der polar angeordneten Projektionsdaten auf ein kartesisches Raster. Nur auf der u - bzw. v -Achse liegen die radialen und kartesischen Abtastpunkte im Radonraum direkt übereinander.

Dieser Vorgang wird auch *regridding* genannt. Um die inverse Radontransformation mit Hilfe einer FFT (Fast-Fourier-Transformation) durchführen zu können, muss daher zunächst mit einer Interpolation (z.B. nearest-neighbour, bilinear etc.) aus der polaren Anordnung von Messwerten ein kartesisches Raster erzeugt werden. Wie man sich leicht überlegt und in Abbildung 5.18b auch gut zu erkennen ist, wird der Fehler einer solchen Interpolation zu größeren Raumfrequenzen (u,v) hin immer größer, da die Dichte der unterliegenden Daten-

punkte immer geringer wird. Das führt unmittelbar zu einer Verschlechterung der Bildqualität in Bezug auf die hohen Ortsfrequenzen also zu Störungen in Bildbereichen mit großem Detailreichtum.

Es soll nun dargestellt werden, wie eine Abtastung von Projektionswerten im Radonraum aussieht, die im Fourierraum zu Punkten führt, die auf einem kartesischen Raster liegen. Da der Radonraum und der Fourierraum über die Fouriertransformation verbunden sind, verhalten sich die entsprechenden Datenpunkte reziprok zueinander. Sind die Abtastpunkte im Radonraum auf konzentrischen Kreisen angeordnet (Abbildung 19a), so befinden sich die Abtastpunkte im Fourierraum (Abbildung 19b) ebenfalls auf Kreisen und umgekehrt. Das liegt daran, dass der Abstand der Abtastpunkte im Radonraum radial in alle Richtungen derselbe ist.

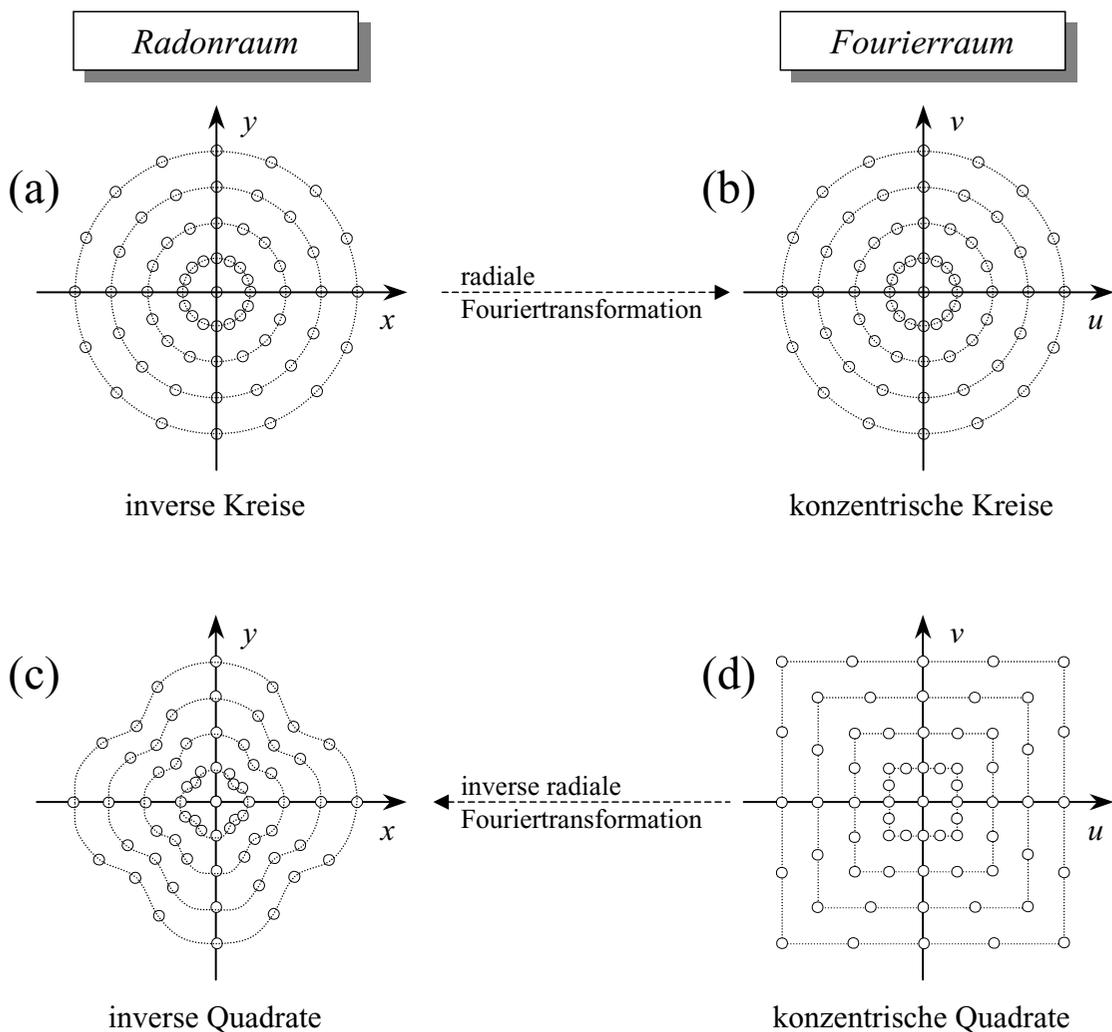


Abb. 5.19: a) Radial angeordnete aus Projektionsmessungen gewonnene Werte von $P_r(q)$ auf konzentrischen Kreisen. b) Nach der radialen Fouriertransformation liegen die Raumfrequenzen ebenfalls auf konzentrischen Kreisen. c) Anordnung der Abtastwerte im Radonraum auf inversen konzentrischen Quadraten (bestehend aus jeweils vier Halbkreisen). d) regelmäßige Anordnung von Punkten auf konzentrischen Quadraten im Fourierraum.

Verlangt man nun umgekehrt, dass die Punkte im Fourierraum auf einem kartesischen Raster liegen, so hat dies Konsequenzen für die Lage der erforderlichen Abtastpunkte im Radonraum. Sieht man sich Abbildung 19d an, so befinden sich hier die Fourierpunkte auf den Rändern konzentrischer Quadrate. Da die Abtastpunkte auf den Diagonalen dieser Quadrate im Frequenzraum einen größeren Abstand haben als die entsprechenden Abtastpunkte auf der u - und v -Achse, bleibt die quadratische Form bei der inversen radialen Fouriertransformation zurück in den Radonraum nicht erhalten. Wegen der reziproken Beziehung zwischen Fourier- und Radonraum liegen die Abtastpunkte auf den Diagonalen des Radonraumes jetzt enger zusammen als die entsprechenden Punkte auf der x - und y -Achse. Man erhält so genannte inverse Quadrate (Abbildung 19c), deren Zustandekommen während des Messprozesses im folgenden Abschnitt besprochen wird.

5.4 Linogramm-Methode

Ein Ausweg aus dem Problem der zweidimensionalen Interpolation bei der direkten inversen Radontransformation mit Hilfe der zweidimensionalen Fouriertransformation ist die so genannte Linogramm-Methode [Jac96, Mag93]. Bei dieser Methode werden durch eine spezielle, nichtäquidistante Abtastung anstatt der konzentrischen Kreise konzentrische Quadrate im Fourierraum erzeugt. Mit Hilfe der inversen Chirp-z-Transformation [Ste99] (siehe auch Kapitel 4.21) kann auf diese Punkte direkt zugegriffen werden, so dass keine Interpolation erforderlich ist.

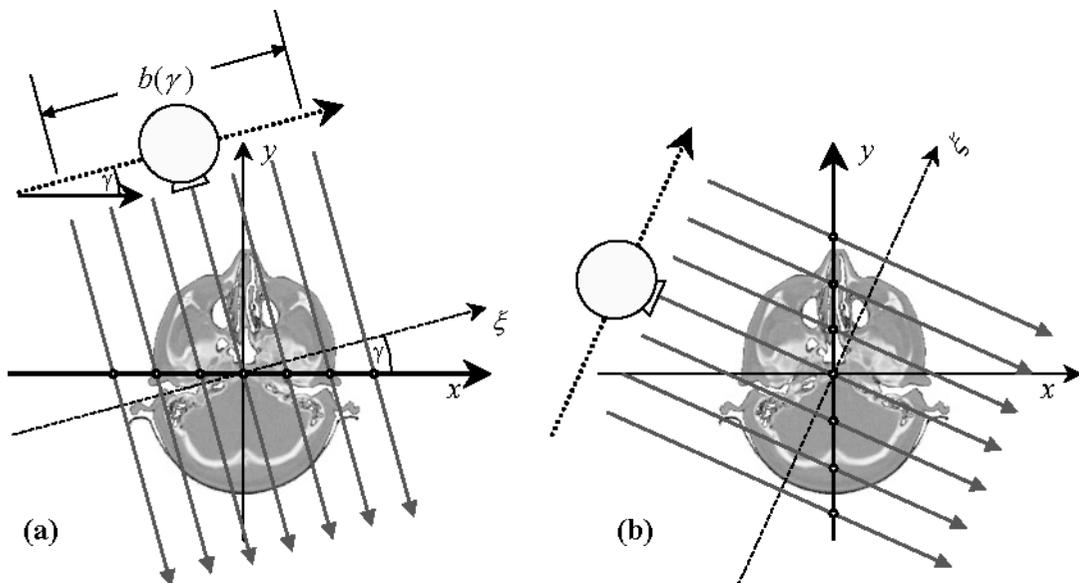


Abb. 5.20: Linogramm-Abtastung (a) im Winkelbereich $-45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$ und (b) im Winkelbereich $45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ$. Die Abtastpunkte sind auf den jeweils fest stehenden Detektorlinien (in (a) die fett eingezeichnete x -Achse und in (b) die fett eingezeichnete y -Achse) markiert. Offenbar ist die abgetastete Gesamtlänge $b(\gamma)$ unter 45° am kleinsten.

Die Linogramm-Methode kann als direkte Fouriemethode betrachtet werden. Anstatt des oben eingeführten Sinogramms muss hierfür zunächst ein etwas anderer Rohdatensatz erzeugt bzw. gemessen werden, der Linogramm genannt wird. Für diese Linogramm-Abtastung ändert sich die abgetastete Gesamtlänge b mit dem Projektionswinkel γ , wobei gilt dass

$$b(\gamma) = \begin{cases} b(0^\circ) \cos(\gamma) & \text{für } -45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ \\ b(0^\circ) \sin(\gamma) & \text{für } 45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ. \end{cases} \quad (5.36)$$

$b(0^\circ)$ stellt die abgetastete Gesamtlänge für den Projektionswinkel $\gamma=0^\circ$ dar²². Abbildung 5.20 zeigt jeweils für einen Projektionswinkel aus den in Gleichung (5.36) angegebenen Bereichen die entsprechenden Abtastpunkte. Die bei dieser Form der Abtastung fest stehenden Detektorarrays (in Abbildung 5.20 jeweils fett eingezeichnet) fallen mit der x - bzw. y -Achse des ruhenden Patientenkoordinatensystems zusammen. Zum Vergleich ist das sich drehende Detektorarray der Sinogramm-Abtastung ebenfalls eingezeichnet.

Bei einem festem Abstand der Abtastpunkte auf dem linearen Array ist damit klar, dass die tatsächlich abgetastete Gesamtlänge $b(\gamma)$ unter dem Projektionswinkel $\gamma=45^\circ$ sowie $\gamma=135^\circ$ am kleinsten und unter $\gamma=0^\circ$ sowie $\gamma=90^\circ$ am größten ist. Die Länge $b(\gamma)$ bildet bei Variation des Winkels γ wieder nach dem Satz von Thales einen Kreis, so dass sich jeweils für die beiden Winkelbereiche zwei Kreise ergeben, die in Abbildung 5.21 dargestellt sind.

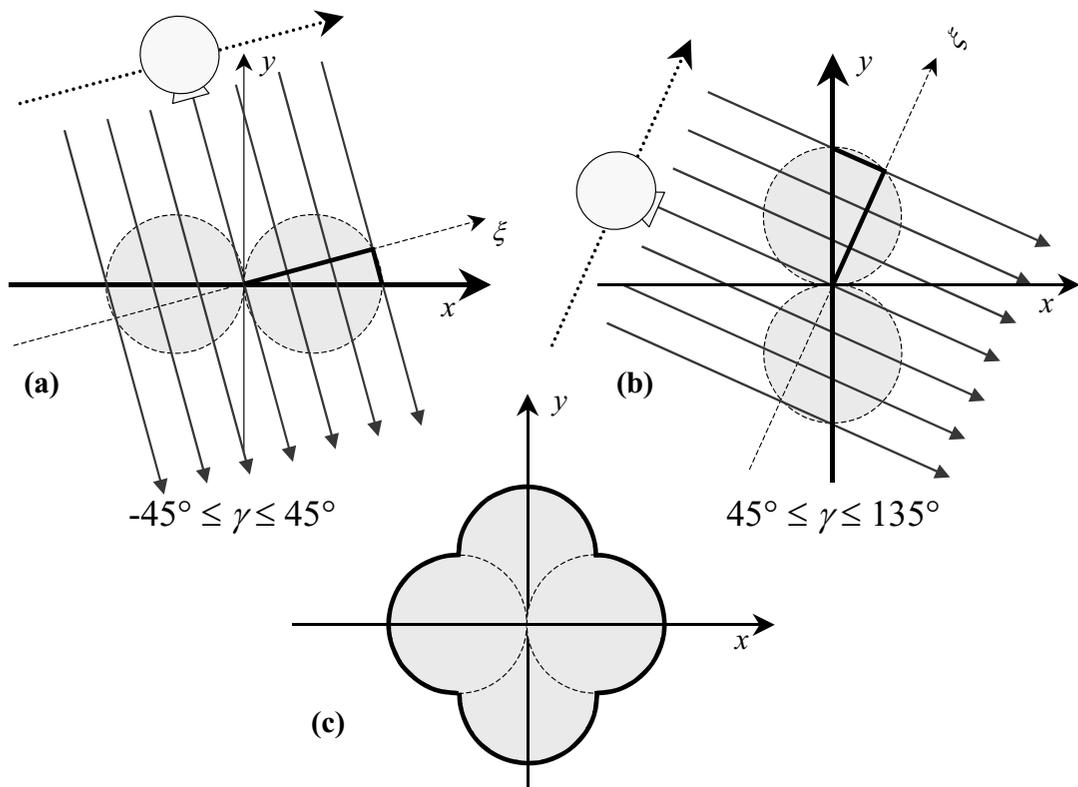


Abb. 5.21: Für die Linogramm-Abtastung ergeben sich nach dem Satz von Thales jeweils im Winkelbereich $-45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$ (a) und $45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ$ (b) zwei Kreise, die die abgetastete Strecke radial begrenzen. Insgesamt ergibt sich dadurch eine Radonraumbegrenzung (c), die vier Halbkreisen entspricht.

²² Das heißt, $b(0^\circ) = D\Delta\xi$ wie bei der Sinogramm-Abtastung, wobei D die Anzahl der Abtastpunkte darstellt.

Insgesamt ergibt sich im Radonraum durch Kombination der Winkelbereiche ein abgetasteter Bereich, der durch vier Halbkreise beschränkt ist. In Abbildung 4.23 wurde schon auf den reziproken Zusammenhang zwischen dem abgetasteten Raum und dem Fourierraum hingewiesen. Hat man im Radonraum eine Gesamtlänge b abgetastet, dann ergibt sich im Fourierraum ein Abtastabstand von b^{-1} . Da sich die Anzahl D der Abtastpunkte durch die Fouriertransformation nicht ändert, ist durch die Verkleinerung von b beim Zulaufen auf die Winkelhalbierenden die korrespondierende Länge B der radialen Fouriertransformierten entsprechend vergrößert.

Die Begrenzung der Abtastung im Fourierraum entspricht durch die Abtastvorschrift aus Gleichung (5.36) damit

$$B(\gamma) = \begin{cases} \frac{D}{b(0^\circ)\cos(\gamma)} & \text{für } -45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ \\ \frac{D}{b(0^\circ)\sin(\gamma)} & \text{für } 45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ. \end{cases} \quad (5.37)$$

Durch Gleichung (5.37) entsteht im Fourierraum eine begrenzende Abtastfläche mit quadratischer Form. Damit ist schon viel erreicht, aber die Verteilung der Abtastpunkte auf den Quadraten im Fourierraum löst das Interpolationsproblem noch nicht komplett. Entlang der horizontalen bzw. vertikalen Verteilung der Abtastpunkte auf den Fourierquadraten kann man zusätzlich einen äquidistanten Abstand der Frequenzpunkte erreichen, wenn man kein konstantes Winkelinkrement $\Delta\gamma$ wählt, sondern jeweils äquidistante

$$\Delta \tan(\gamma) \quad \text{für } -45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ \quad (5.38)$$

bzw.

$$\Delta \cot(\gamma) \quad \text{für } 45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ. \quad (5.39)$$

Das ergibt sich unmittelbar aus der Geometrie der Quadrate im Fourierraum. Die Abbildungen 5.22a/b beschreiben das Linogramm-Verfahren insgesamt. Entsprechend der Aufteilung in die Winkelsegmente $-45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$ und $45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ$ bei der Datenakquisition im Radonraum, werden bei der linogramm-basierten Rekonstruktionsmethode diese Bereiche separat behandelt und später wieder zusammengefügt. Nach der Aufspaltung werden jeweils radiale Fouriertransformationen durchgeführt, die zur gewünschten äquidistanten vertikalen Punktanzahl für den Bereich $-45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$ und horizontalen Punktanzahl im Bereich $45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ$ führen. Da die Abtastdichte im Fourierraum nicht homogen ist, sondern für kleine Raumfrequenzen zunimmt, korrigiert man diese Überrepräsentation mit einer linearen Gewichtung im Frequenzraum. Die inverse Chirp-z-Transformation behandelt danach alle Punkte mit dem gleichen Gewicht. Eine ungewichtete Rücktransformation hätte den Effekt einer Tiefpassfilterung zur Folge.

Die inverse Chirp-z-Transformation wird im Winkelbereich $-45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ$ in vertikaler Richtung und im Winkelbereich $45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ$ in horizontaler Richtung angewendet. Sie liefert in diesen Richtungen die entsprechende inverse Fouriertransformation, so dass ein gemischter Raum aus jeweils einer Orts- und einer Fourierkoordinate entsteht.

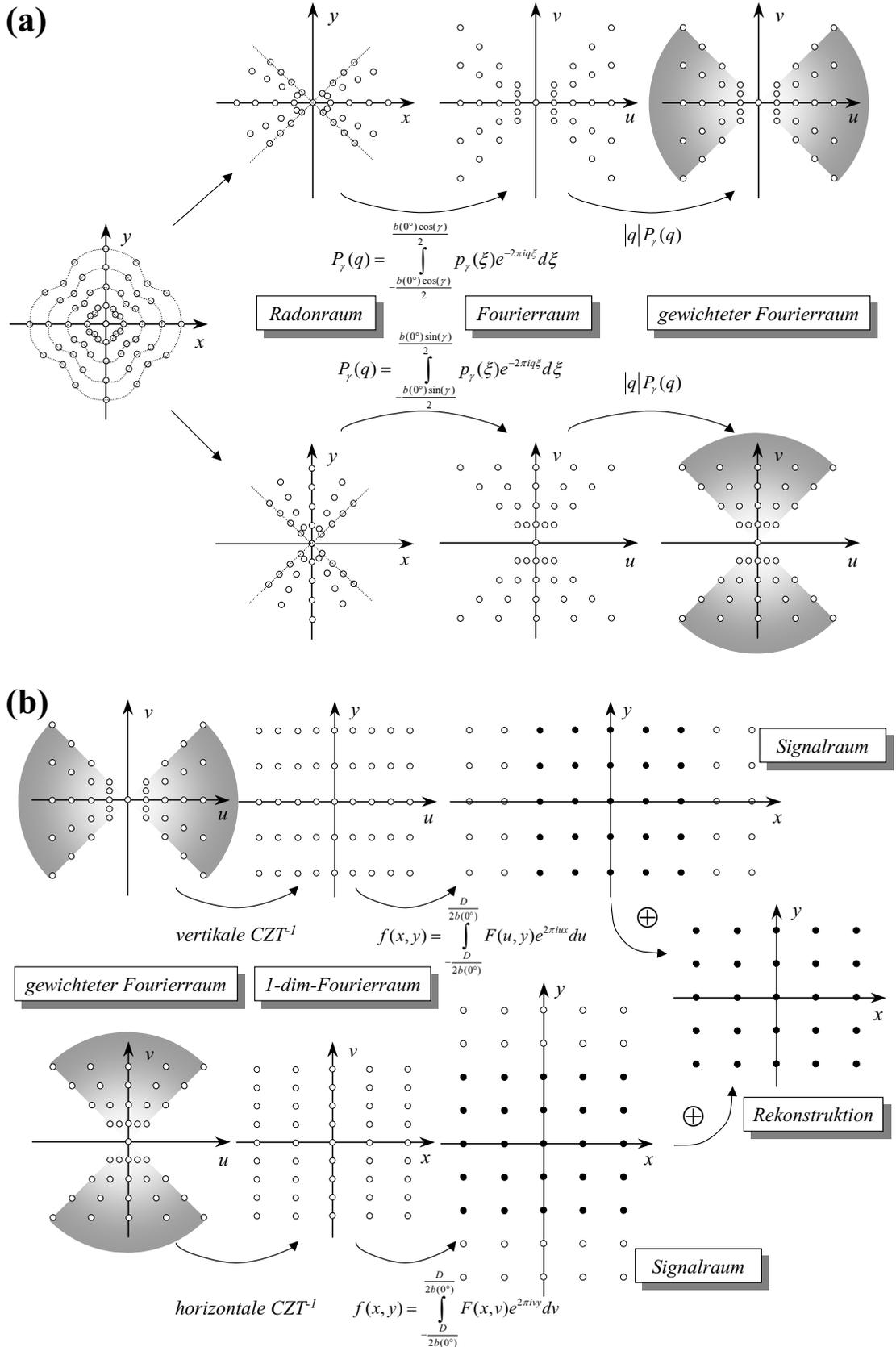


Abb. 5.22: Schematische Darstellung der linogramm-basierten Rekonstruktionsmethode.

In den Frequenzrichtungen wendet man nun eine weitere eindimensionale inverse Fouriertransformation an

$$f_1(x, y) = \int_{-\frac{D}{2b(0^\circ)}}^{\frac{D}{2b(0^\circ)}} F(u, y) e^{2\pi i u x} du \quad \text{für } -45^\circ \leq \gamma \leq 45^\circ \quad (5.40)$$

bzw.

$$f_2(x, y) = \int_{-\frac{D}{2b(0^\circ)}}^{\frac{D}{2b(0^\circ)}} F(x, v) e^{2\pi i v y} dv \quad \text{für } 45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ. \quad (5.41)$$

Jeder der beiden Winkelbereiche liefert ein separates Bild im Signalraum, das aus nur einer Hälfte der Projektionen besteht. Die komplette Rekonstruktion erhält man in einem letzten Schritt durch die Addition

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad (5.42)$$

der Teilrekonstruktionen f_1 und f_2 , wobei nur der gegenseitig überlappende Bereich zu dem gewünschten Bild führt. Für tiefere Einblicke in diese Fouriermethoden sei auf *C. Jacobson* und *M. Magnusson-Seger* [Jac96, Mag93] verwiesen.

5.5 Rückprojektion

Das Fourier-Slice-Theorem gibt den sinogramm-basierten Rekonstruktionsweg sehr deutlich vor. Hat man Projektionen aus genügend vielen Winkeln gemessen, so dass der Raum der Ortsfrequenzen (u, v) dicht mit Datenpunkten besetzt werden kann, so reicht eine inverse Fouriertransformation, um die Schwächungswerte $f(x, y)$ des Objektes zu rekonstruieren. Wegen der oben beschriebenen Probleme mit dem *regridding* bei der heute üblichen Sinogramm-Abtastung bedarf es aber in der Praxis einer anderen Rekonstruktionsstrategie. Bei allen modernen Computertomographen hat sich heute das Verfahren der so genannten gefilterten Rückprojektion durchgesetzt.

Um darzustellen, was in diesem Zusammenhang „gefiltert“ bedeutet, soll ein Schritt zurück getreten werden. Zunächst könnte man nämlich glauben, dass das zu rekonstruierende Bild entstünde, wenn man die gemessenen Projektionsprofile $p_\gamma(\xi)$ zurückverschmierte, gerade so, wie es in Abbildung 1.2 suggeriert wird.

Mathematisch entspricht ein solcher Vorgang der Gleichung

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^\pi p_\gamma(\xi) d\gamma \\ &= \int_0^\pi p_\gamma(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma)) d\gamma. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Obwohl diese Art der Rückverschmierung (naiv-)intuitiv den Projektionsvorgang rückgängig machen sollte, gelangt man nicht zum gewünschten Ergebnis. Die ungefilterte Rückprojektion der Gleichung (5.43) kann die ursprünglichen Objekte im Bild $f(x,y)$ nicht rekonstruieren, denn durch die Rückverschmierung von $p_\gamma(\xi)$ erhält das Bild $g(x,y)$ auch Beiträge außerhalb der zu rekonstruierenden Objekte, die sich nicht wegmitteln können, da die Funktion $p_\gamma(\xi)$ nur nicht-negative Werte besitzt. Schaut man sich den ungefilterten Rückprojektionsprozess im Detail an, indem Gleichung (5.16) bzw. Gleichung (5.18) in Gleichung (5.43) eingesetzt wird, so erhält man

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_0^\pi \int_{\text{alle } \mathbf{r} \in \mathbf{L}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\gamma \\ &= \int_0^\pi \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{L}) d\mathbf{r} d\gamma \\ &= \int_0^\pi \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) - \xi) d\mathbf{r} d\gamma. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Linie \mathbf{L} , auf der zurückprojiziert werden soll, ist in der Hesseschen Normalform wieder durch $(\mathbf{r}'^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = \xi$ gekennzeichnet, so dass unter Ausnutzung der Symmetrie der δ -Distribution

$$g(x,y) = \int_0^\pi \int_{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}') \delta((\mathbf{r}'^T \cdot \mathbf{n}_\xi) - (\mathbf{r}'^T \cdot \mathbf{n}_\xi)) d\mathbf{r}' d\gamma \quad (5.45)$$

gilt. Das Vertauschen der Integrationsreihenfolge in Gleichung (5.45) liefert dann

$$g(x,y) = \iint_{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}') \left(\int_0^\pi \delta((\mathbf{r} - \mathbf{r}')^T \cdot \mathbf{n}_\xi) d\gamma \right) d\mathbf{r}'. \quad (5.46)$$

Wenn φ der Winkel zwischen $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ und der x -Achse ist, lässt sich das Skalarprodukt zwischen $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ und \mathbf{n}_ξ in Gleichung (5.46) durch

$$g(x,y) = \iint_{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}') \left(\int_0^\pi \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\varphi - \gamma)) d\gamma \right) d\mathbf{r}' \quad (5.47)$$

ersetzen. Unter Anwendung der Regel (4.38) für das Rechnen mit der δ -Distribution erhält man für das innere Integral

$$g(x,y) = \iint_{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}') \left(\int_0^\pi \frac{\delta(\gamma - \gamma_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \left| \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \right|} d\gamma \right) d\mathbf{r}', \quad (5.48)$$

denn das Argument der δ -Distribution ist die Funktion $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos(\varphi - \gamma)$, deren einzige Nullstelle γ_0 im Intervall $0 \leq \gamma < \pi$ bei $\gamma_0 = (\varphi - \gamma) = \pi/2$ liegt (bzw. $-\pi/2$, denn das Vorzeichen hängt von φ ab). Damit ist der Nenner des inneren Integrals von Gleichung (5.48) konstant

bezüglich der Integration über den Projektionswinkel γ . Die Integration über die δ -Distribution liefert nach Gleichung (4.30) den Wert Eins, so dass

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \iint_{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') \frac{1}{|(x - x', y - y')|} dx' dy' \end{aligned} \quad (5.49)$$

folgt. Der Ausdruck (5.49) stellt eine Faltung des Ursprungsbildes $f(x, y)$ mit der Funktion

$$h(x, y) = \frac{1}{|(x, y)|} \quad (5.50)$$

dar, also

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y). \quad (5.51)$$

$h(x, y)$ ist die *Point-Spread-Function* des Abbildungssystems (siehe Abbildung 5.23, rechts). Anschaulich ist klar, warum die *Point-Spread-Function* gerade $|\mathbf{r}|^{-1}$ ist. Besteht das Bild $f(x, y)$ nämlich aus einem Punkt, also $f(x, y) = \delta(x, y)$, so taucht dieser Punkt als δ -Distribution in den Projektionen auf. Verschmiert man diese Projektionen nun zurück, so fällt die Dichte der Linien um den zu rekonstruierenden Punkt in $f(x, y)$ mit $|\mathbf{r}|^{-1}$ ab (siehe Abbildung 5.23 links).

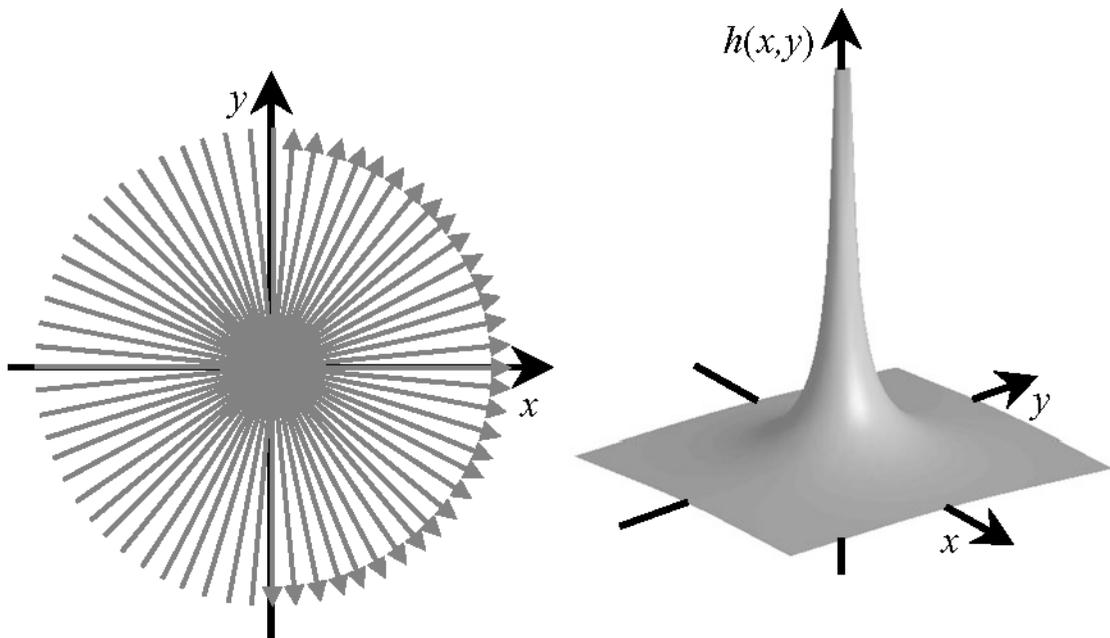


Abb. 5.23: Einfache Rückprojektion eines Punktobjektes. Links: Die Liniendichte um das zu rekonstruierende Objekt nimmt nach außen hin ab. Rechts: Die *Point-Spread-Function* eines Punktobjektes spiegelt die Liniendichte wider.

Das sieht man auch, wenn man in Gleichung (5.49) für die Funktion $f(x,y)$ die δ -Distribution einsetzt, das heißt

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') \frac{1}{|(x-x', y-y')|} dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x', y') \frac{1}{|(x-x', y-y')|} dx' dy' . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Mit der Siebeigenschaft der δ -Distribution folgt aus (5.52) sofort

$$g(x, y) = \frac{1}{|(x, y)|} . \quad (5.53)$$

Weil die Gleichungen (5.50) und (5.53) übereinstimmen, heißt die Funktion $h(x,y)$ eben auch Impulsantwort. Dieses Ergebnis ist aus der Elektrodynamik bekannt, wo die elektrische Feldstärke um einen sehr dünnen, unendlich langen, graden Leiter mit $1/r$ abfällt. Im dreidimensionalen Raum fällt die Dichte der elektrischen Feldlinien um eine Punktladung mit $1/r^2$ ab. Dieses Abstandsgesetz ist in der Physik vom Coulombschen Gesetz her bekannt.

5.6 Gefilterte Rückprojektion

Was ist bei der ungefilterten Rückprojektion in Kapitel 5.5 falsch gelaufen? Dazu muss man sich noch einmal dem Fourier-Slice-Theorem zuwenden. Nachdem in Kapitel 5.2 der Zusammenhang zwischen $F(u,v)$ und $P_\gamma(q)$ aufgeklärt wurde, muss jetzt, bevor eine praktisch anwendbare Rekonstruktionsvorschrift angegeben werden kann, zunächst der Wechsel zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten genauer betrachtet werden.

Das Ziel der gefilterten Rückprojektion ist es nämlich, $f(x,y)$ direkt aus den Projektionen zu gewinnen. Hierzu muss man sich ansehen, wie die inverse Fouriertransformation von $F(u,v)$ in Polarkoordinaten aussieht. Ausgehend von

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(xu+yv)} du dv \quad (5.54)$$

substituiert man zunächst

$$\begin{aligned} u &= q \cos(\gamma) \\ v &= q \sin(\gamma) . \end{aligned} \quad (5.55)$$

Wie üblich ist das Flächenelement $du dv$ beim Koordinatenwechsel durch $J dq d\gamma$ gegeben, wobei J wieder die Jacobi-Funktional-Determinante ist, also

$$J \equiv \frac{\partial(u, v)}{\partial(q, \gamma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} & \frac{\partial v}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -q \sin(\gamma) & q \cos(\gamma) \end{vmatrix} = q(\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma)) = q . \quad (5.56)$$

In Abbildung 5.24 ist die Berechnung des neuen infinitesimalen Flächenelementes graphisch sofort nachzuvollziehen.

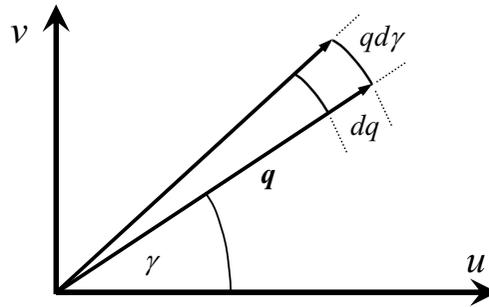


Abb. 5.24: Form des Flächenelementes beim Übergang zu Polarkoordinaten.

Bei korrekter Verwendung des neuen Flächenelementes in Polarkoordinaten ergibt sich für die inverse Fouriertransformation

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} F(q \cos(\gamma), q \sin(\gamma)) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma))} q dq d\gamma. \quad (5.57)$$

Das äußere Integral in Gleichung (5.57) lässt sich in zwei Teile aufspalten, wenn man die Projektionen unter den Winkeln $\gamma = [0, \pi]$ und $\gamma = [\pi, 2\pi]$ separat behandelt. Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} F(q, \gamma) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma))} q dq d\gamma \\ &+ \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{+\infty} F(q, \gamma) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma))} q dq d\gamma. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Die Verschiebung des Winkelbereichs im zweiten Integralterm gegenüber dem ersten von Gleichung (5.58) kann man ins Argument von F ziehen, so dass

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} F(q, \gamma) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma))} q dq d\gamma \\ &+ \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} F(q, \gamma + \pi) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma + \pi) + y \sin(\gamma + \pi))} q dq d\gamma. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften [Bra65,Kli01]

$$\mathbf{Re}\{ F(q, \gamma) \} \equiv \mathbf{Re}\{ F(-q, \gamma + \pi) \} = \mathbf{Re}\{ F(-q, \gamma) \} \equiv \mathbf{Re}\{ F(q, \gamma + \pi) \} \quad (5.60)$$

und

$$\mathbf{Im}\{ F(q, \gamma) \} \equiv \mathbf{Im}\{ F(-q, \gamma + \pi) \} = -\mathbf{Im}\{ F(-q, \gamma) \} \equiv -\mathbf{Im}\{ F(q, \gamma + \pi) \} \quad (5.61)$$

der Fouriertransformation bei reellen Ortsdaten kann man für Gleichung (5.59) insgesamt

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(q, \gamma) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma))} |q| dq d\gamma \quad (5.62)$$

schreiben. Mit dem Fourier-Slice-Theorem gilt nun weiter, dass

$$F(q \cos(\gamma), q \sin(\gamma)) = P_\gamma(q). \quad (5.63)$$

Demnach kann man den Zusammenhang

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_\gamma(q) e^{2\pi i q \xi} |q| dq d\gamma \quad (5.64)$$

berechnen, in dem man wieder die Hessesche Normalform der Geradengleichung (5.13) in den Exponenten der Gleichung (5.62) einsetzt. Für das Integral über q in Gleichung (5.64) schreibt man kurz

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} P_\gamma(q) |q| e^{2\pi i q \xi} dq \right\} d\gamma \\ &= \int_0^{\pi} h_\gamma(\xi) d\gamma \end{aligned} \quad (5.65)$$

Für einen festen Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und einen festen Projektionswinkel γ ist ξ die Projektionskoordinate des Punktes \mathbf{r} . Eine wichtige neue Größe ist nun

$$h_\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\gamma(q) |q| e^{2\pi i q \xi} dq. \quad (5.66)$$

$h_\gamma(\xi)$ ist offenbar die gefilterte Projektion $p_\gamma(\xi)$, die durch eine Multiplikation im Frequenzraum zustande kommt. Ohne die Multiplikation mit $|q|$ würde Gleichung (5.66) nur die inverse Fouriertransformation von $P_\gamma(q)$ ergeben. Durch die Multiplikation mit $|q|$ handelt es sich aber um eine Hochpassfilterung, da durch die linear ansteigende Gewichtung das Spektrum $P_\gamma(q)$ bei höheren Ortsfrequenzen stärker gewichtet wird als bei niedrigen Ortsfrequenzen. Insgesamt liegt nun die Rekonstruktionsanweisung vor, die sich wiederum in drei Schritte gliedern lässt, die in Schema 2 zusammengefasst sind.

Die notwendige Filterung kann natürlich auch im Ortsraum ξ formuliert werden, wobei das Produkt im Ortsfrequenzraum $|q| P_\gamma(q)$ nach Kapitel 4.10 zu einer Faltung wird, also

$$h_\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(z) g(\xi - z) dz, \quad (5.67)$$

und die Funktion $g(\xi - z)$ im Ortsraum die inverse Fouriertransformierte der Gewichtungsfunktion $|q|$ im Frequenzraum ist.

Schema 2: Gefilterte Rückprojektion

1. Berechnung der Fouriertransformaten von
- $p_\gamma(\xi)$

$$p_\gamma(\xi) \quad \circ \text{---} \bullet \quad P_\gamma(q)$$

2. Rücktransformation des hochpassgefilterten
- $P_\gamma(q)$

$$|q| P_\gamma(q) \quad \bullet \text{---} \circ \quad h_\gamma(\xi)$$

3. Rückprojektion mit
- $\xi = x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma)$

$$f(x, y) = \int_0^\pi h_\gamma(\xi) d\gamma \quad (5.68)$$

In der Sprechweise der Signalverarbeitung ist der Faltungskern $g(\xi)$ die Impulsantwort des Filters. Da aber $|q|$ keine quadratintegrale Funktion ist, muss man zur Darstellung von $g(\xi)$ einen Umweg über konvergenzerzeugende Funktionen gehen. Dieses Rezept wurde schon in Gleichung (4.103) eingeführt. Hier findet es nun wieder Verwendung. Dazu wird folgende Funktion definiert

$$G_\beta(q) = |q| e^{-\beta|q|}. \quad (5.69)$$

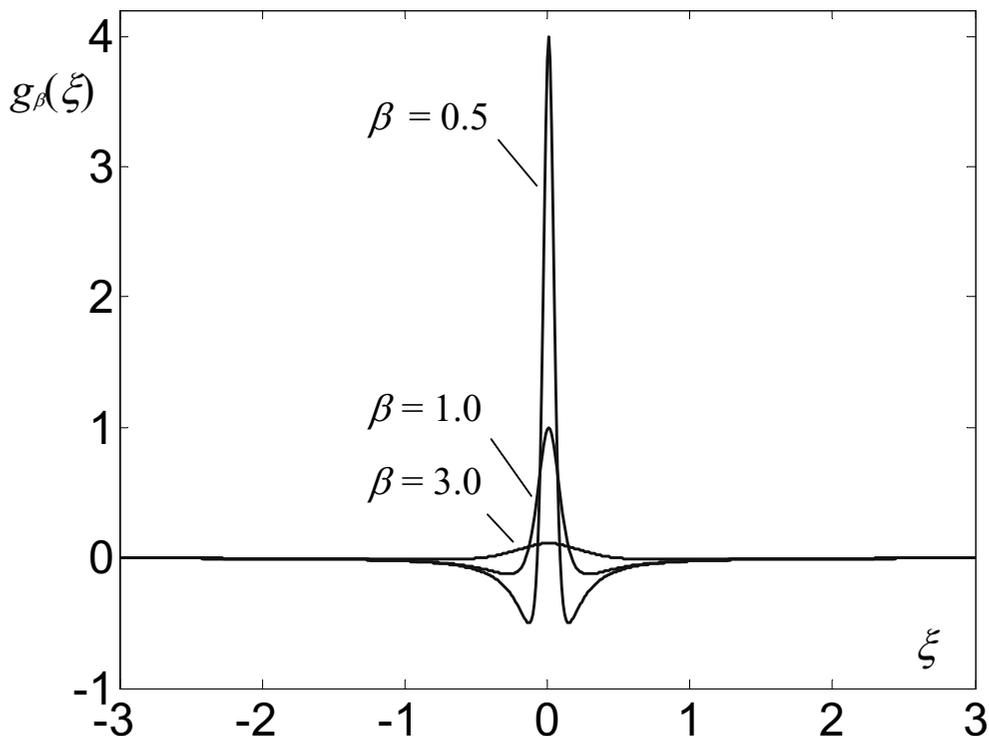


Abb. 5.25: Grenzwertbildung zur Darstellung der approximierten Impulsantwort des idealen Rückprojektionsfilters im Ortsbereich.

Die Exponentialfunktion in Gleichung (5.69) erzeugt die erforderliche Konvergenz, so dass die inverse Fouriertransformierte jetzt existiert. Sie lautet

$$g_{\beta}(\xi) = \frac{\beta^2 - (2\pi\xi)^2}{(\beta^2 + (2\pi\xi)^2)^2} \quad (5.70)$$

Für den Parameter β führt man – wie in Abbildung 5.25 schematisch angedeutet – dann den Grenzübergang $\beta \rightarrow 0$ durch, das heißt für große ξ erhält man den Grenzwert

$$g(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} g_{\beta}(\xi) = -\frac{1}{(2\pi\xi)^2}. \quad (5.71)$$

5.7 Vergleich von Rückprojektion und gefilterter Rückprojektion

An dieser Stelle sollen die Ergebnisse der gefilterten Rückprojektion der einfachen Rückprojektion gegenübergestellt werden. Dazu wird ein sehr einfaches Phantombild verwendet. Es besteht aus einem zentral angeordneten Quadrat homogener Schwächung. Abbildung 5.26 zeigt das Phantom in einem 256 x 256-Pixel großen Intensitätsbild. In der gleichen Abbildung sind die Daten im dazugehörigen kartesischen Radonraum dargestellt. Auch der Radonraum ist leicht nachzuvollziehen. Das Profil der Projektionswerte $p_{\gamma}(\xi)$ bei 0° und 90° (entsprechend fortgesetzt bei 180° und 270°) besteht jeweils aus einem Rechteck der Breite des Quadrates. Bei den Winkeln 45° und 135° (entsprechend fortgesetzt bei 225° und 315°) entspricht das Profil von $p_{\gamma}(\xi)$ einem Dreieck. Symbolisch sind die $p_{\gamma}(\xi)$ -Profile in den Radonraum mit eingezeichnet. Insgesamt vollziehen die Daten im Radonraum keine globale Sinuskurve, da das Quadrat zentral platziert ist.

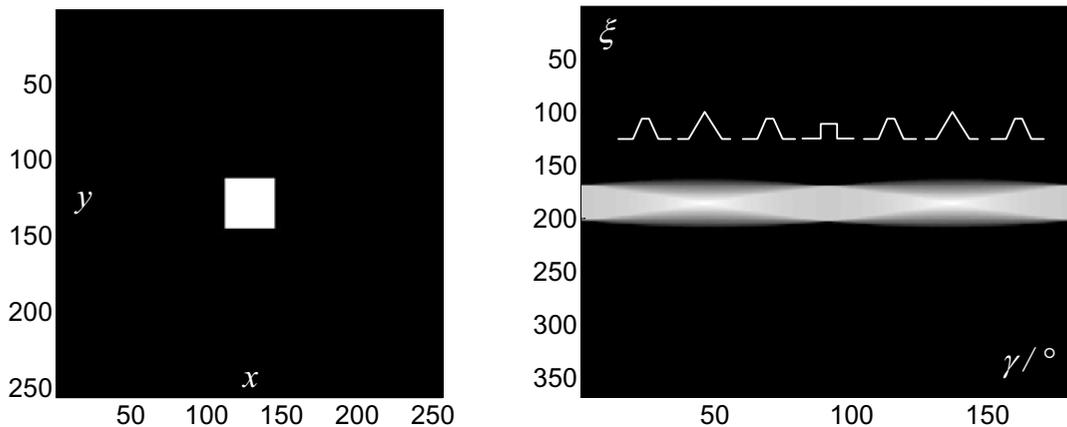


Abb. 5.26: Einfaches Phantombild bestehend aus einem zentralen Quadrat homogener Schwächungswerte $f(x,y) = \mu$. Daneben ist der korrespondierende Radonraum zu sehen. Die Projektionswerte $p_{\gamma}(\xi)$ verlaufen hier ebenfalls zentral und bilden über den Projektionswinkel γ eine Oszillation zwischen einem Rechteck und einem Dreiecksprofil.

Die in den Kapiteln 5.5 und 5.6 eingeführten Konzepte zur Rekonstruktion der tomographischen Bilddaten aus den Projektionswerten sollen hier an einer sukzessiven Rückprojektion demonstriert werden. In Abbildung 5.27 sind die Zwischenergebnisse bei Erhöhung der Anzahl der Rückprojektion $N_p = \{1, 3, 10, 180\}$ zeilenweise dargestellt.

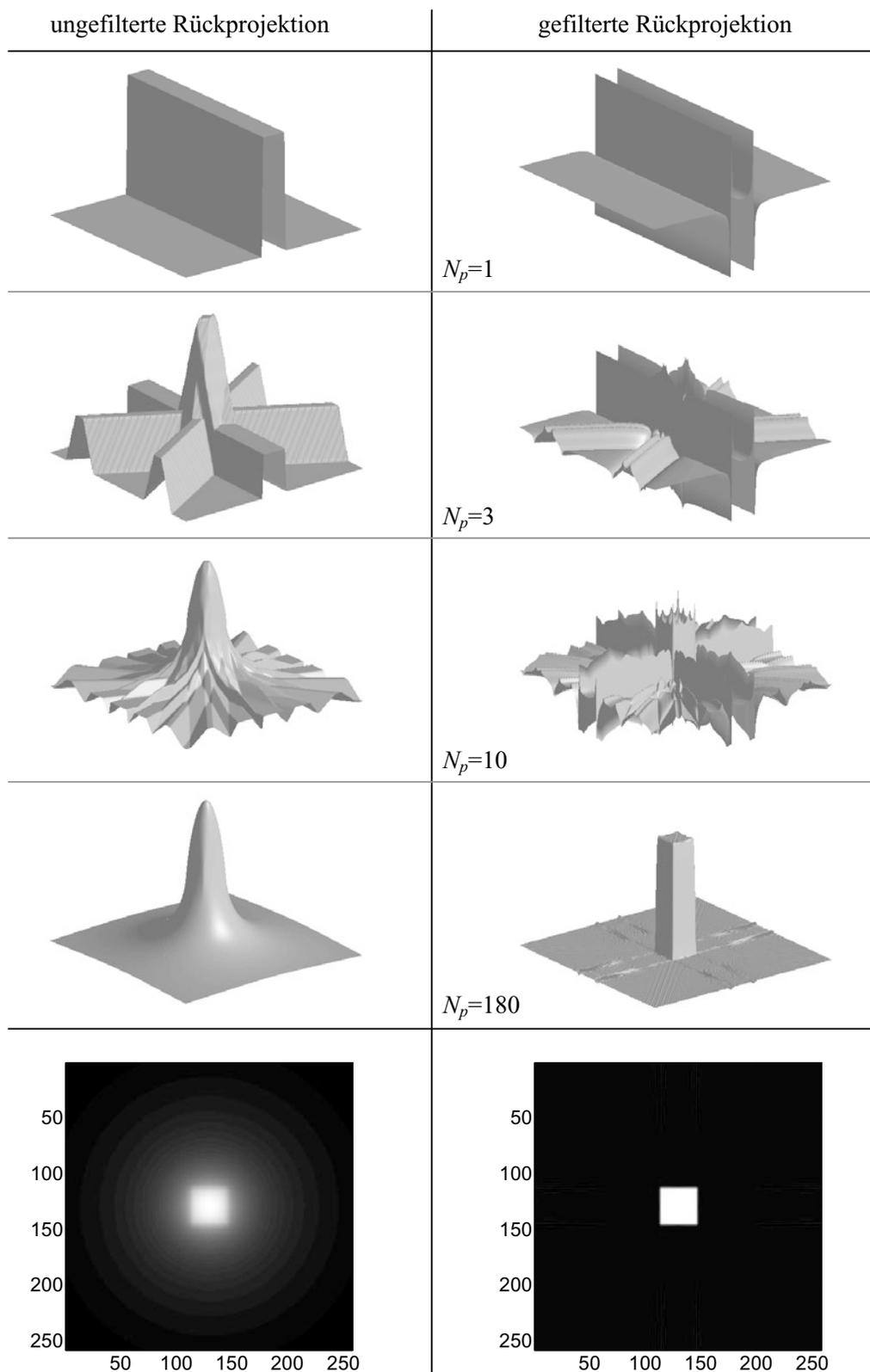


Abb. 5.27: Sukzessive Rekonstruktion des tomographischen Phantombildes aus den Projektionsdaten. Jeweils gegenübergestellt sind die einzelnen Ergebnisse der einfachen Rückprojektion (linke Spalte) mit der gefilterten Rückprojektion (rechte Spalte). Zeilenweise wird die Anzahl der Projektionen erhöht von oben nach unten sind folgende Berechnungen dargestellt: $N_p=\{1,3,10,180\}$.

Die linke Spalte zeigt die ungefilterte, die rechte Spalte die dazugehörige gefilterte Rückprojektion. Man erkennt schon bei der ersten Rückprojektion das Rezept der Filterung. Die Bildanteile, die aufgrund der *Point-Spread-Function* (5.50) das Bild verschmieren, werden von vornherein berücksichtigt und durch negative Bildanteile kompensiert. Schon bei der dritten Rückprojektion, also bei $N_p=3$, zeigt sich, dass die einfache, ungefilterte Rückprojektion Bildanteile produziert, die außerhalb des ursprünglichen Objektes liegen und die durch weitere Rückprojektionen auch nicht zu kompensieren sind, da sie ausschließlich positiv sind.

Im Zentrum des Bildes baut sich ein Objekt auf, das in späteren Rückprojektionen weicher wird, jedoch insgesamt eine Verschmierung aufweist, die bei anatomischen Objekten eine diagnostische Aussage unmöglich macht. Bei der gefilterten Rückprojektion sind die Zwischenergebnisse schwerer zu interpretieren, aber schon bei 10 gefilterten Rückprojektionen macht sich das Ursprungsobjekt mit scharfen Kanten deutlich bemerkbar. Die letzte Zeile von Abbildung 5.27 zeigt das rekonstruierte Intensitätsbild nach $N_p=180$ Rückprojektionen. Der Qualitätsunterschied der ungefilterten und gefilterten Rückprojektion ist klar zu erkennen. Die Streifen, die sich tangential zum Objekt für $N_p=180$ ergeben, sind auf das *Gibbs-Phänomen* zurückzuführen [Eps03].

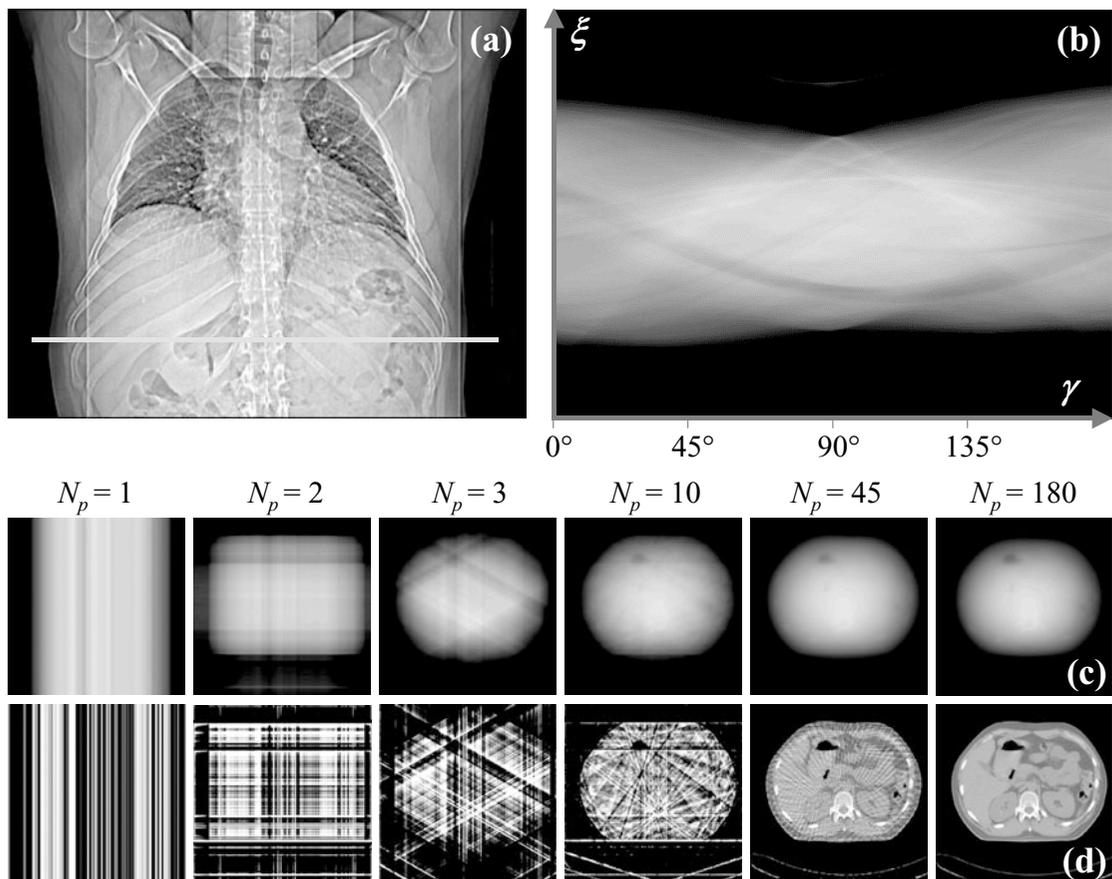


Abb. 5.28: Sukzessive Rekonstruktion eines tomographischen Abdomenbildes aus den Projektionsdaten. Bild (a) zeigt in der Übersichtsaufnahme die Lage des axialen Abdomenschnittes. In Bild (b) ist das dazugehörige Sinogramm, also der vollständige Radonraum der Schnittebene zu sehen. Zeilenweise sind darunter die Rückprojektionen (Reihe c) bzw. die gefilterten Rückprojektionen (Reihe d) für die folgende Anzahl von Projektionen dargestellt: $N_p=\{1, 2, 3, 10, 45, 180\}$.

Abbildung 5.28 stellt die ungefilterte und die gefilterte Rückprojektion für ein reales Abdomentomogramm dar. Die Lage der zu rekonstruierenden Schicht ist im Topogram (Abbildung 5.28a) eingezeichnet. Abbildung 5.28b zeigt den dazugehörigen Radonraum, also die Projektionswerte $p_\gamma(\xi)$ in einem (ξ, γ) -Diagramm über 180° . Die Reihe (c) und (d) der Abbildung stellt die sukzessive Überlagerung der Rückprojektionen bzw. gefilterten Rückprojektionen dar. Wie erwartet bildet sich das Objekt mit der einfachen Rückprojektion nur verschwommen ab. Dies ist eine Konsequenz der im Abbildungsprozess enthaltenen Faltung des Originalbildes mit der *Point-Spread-Function* aus Gleichung (5.50).

5.8 Filtered Layergram: Filterung nach der Rückprojektion

Tatsächlich kann man auch die einfache Rückprojektion aus Kapitel 5.5 weiter verarbeiten und durch eine nachträgliche Filterung die ungewünschte Verschmierung des Bildes korrigieren. Allerdings benötigt man dazu einen anderen Filter als bei der gefilterten Rückprojektion. Oben wurde gezeigt, dass das verschmierte Bild $g(x, y)$ ein Resultat der Faltung

$$g(x, y) = f(x, y) ** h(x, y) \quad (5.72)$$

ist, wobei $f(x, y)$ das ideale Bild und $g(x, y)$ die *Point-Spread-Function*

$$h(x, y) = \frac{1}{|(x, y)|} \quad (5.73)$$

ist. Es gilt also

$$g(x, y) = f(x, y) * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5.74)$$

Nutzt man hier die zweidimensionale Erweiterung des Faltungssatzes (4.115), also

$$f(x, y) * h(x, y) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(u, v) H(u, v) \quad , \quad (5.75)$$

so kann man den Ausdruck (5.74) im Frequenzraum als Multiplikation formulieren, das heißt

$$\mathcal{F}_2 \{ g(x, y) \} = \mathcal{F}_2 \{ f(x, y) \} \mathcal{F}_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \quad (5.76)$$

also

$$G(u, v) = F(u, v) \mathcal{F}_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \quad (5.77)$$

\mathcal{F}_2 stellt dabei die zweidimensionale Fouriertransformation dar. In dem speziellen Fall der *Point-Spread-Function* des Ausdrucks (5.73) ist die Fouriertransformation wie folgt durchzuführen. Es gilt

$$H(u, v) = \mathcal{F}_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy \quad (5.78)$$

Aufgrund der Radialsymmetrie der *Point-Spread-Function* führt man hier Polarkoordinaten ein, so dass analog zu den Gleichungen (5.55) und (5.56)

$$H(u, v) = \mathcal{F}_2 \left\{ \frac{1}{r} \right\} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} e^{-i2\pi(ur \cos(\gamma) + vr \sin(\gamma))} r dr d\gamma \quad (5.79)$$

gilt. Führt man gleichzeitig für den Frequenzraum Polarkoordinaten ein, so folgt weiter

$$H(q, \gamma) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i2\pi(q \cos(\phi)r \cos(\gamma) + q \sin(\phi)r \sin(\gamma))} dr d\gamma. \quad (5.80)$$

Dies ist der gleiche Ausdruck wie der in Gleichung (4.126), der zur Hankel-Transformation führt, so dass

$$H(q) = \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{r} \right\} = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi q r \cos(\gamma)} d\gamma dr = 2\pi \int_0^{+\infty} J_0(2\pi q r) dr \quad (5.81)$$

folgt. Mit der Substitution $z = 2\pi q r$ folgt

$$H(q) = \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{r} \right\} = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} J_0(z) dz. \quad (5.82)$$

Da nach *M. Abramowitz und I. A. Stegun* [Abr70] das Integral über die Besselfunktion nullter Ordnung in Gleichung (5.82)

$$\int_0^{+\infty} J_0(z) dz = 1 \quad (5.83)$$

gilt, ist insgesamt

$$H(q) = \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{r} \right\} = \frac{1}{|q|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (5.84)$$

Setzt man dies in Gleichung (5.77) ein, so folgt

$$G(u, v) = F(u, v) \frac{1}{|q|}. \quad (5.85)$$

Damit ergibt sich die Rekonstruktionsvorschrift

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1} \{ |q| G(u, v) \} = \mathcal{F}_2^{-1} \{ |q| \mathcal{F}_2 \{ g(x, y) \} \} \quad (5.86)$$

Da der Ausdruck $g(x, y)$ nach Gleichung (5.43) gerade das ungefiltert rückprojizierte und über 180° aufintegrierte Bild ist, folgt die Rekonstruktion dem Schema 3, das *Filtered Layergram* genannt wird. Abbildung 5.29 zeigt das Verfahren exemplarisch anhand eines Abdomentomogramms.

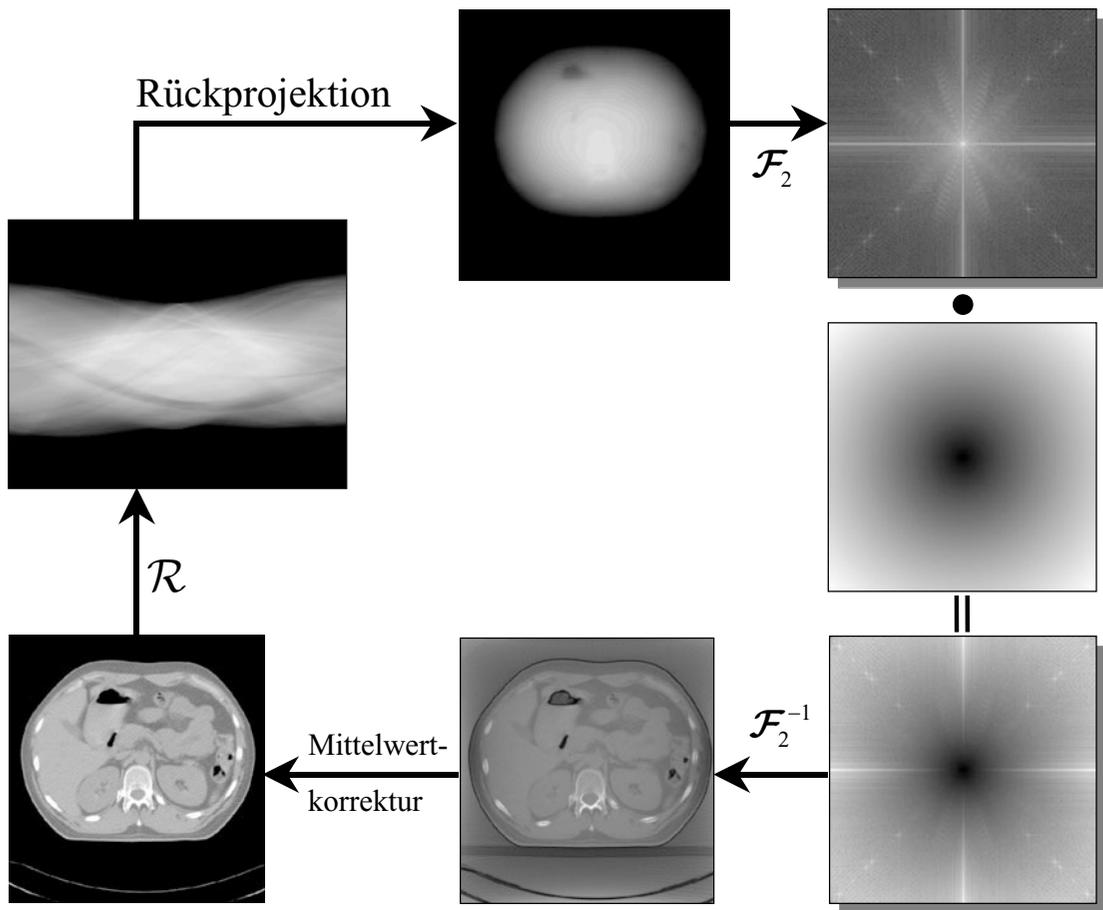


Abb. 5.29: Exemplarische Darstellung des Layergram-Verfahrens. Geht man vom Radonraum aus und erzeugt zunächst eine ungefilterte Rückprojektion, dann erhält man das Originalbild, indem man die Rückprojektion im Frequenzraum mit der Abstandsfunktion gewichtet, zurücktransformiert und den Mittelwert des Bildes korrigiert. Der letzte Schritt ist erforderlich, da durch die Abstandsgewichtung der Gleichanteil des Bildes verschwindet, so dass negative Bildwerte für den Hintergrund auftreten.

Schema 3: Filtered Layergram

1. Berechnung der Rückprojektion (einfache Rückverschmierung) und Integration über 180°

$$g(x, y) = \int_0^\pi p_\gamma(\xi) d\gamma$$

2. Zweidimensionale Fouriertransformation der einfachen Rückprojektion

$$g(x, y) \circ \text{---} \bullet G(u, v)$$

3. Multiplikation der Fouriertransformierten mit dem Abstand vom Ursprung und zweidimensionale Rücktransformation in den Ortsraum

$$\sqrt{u^2 + v^2} G(u, v) \bullet \text{---} \circ f(x, y) \tag{5.87}$$

5.9 Gefilterte Rückprojektion und Radonsche Lösung

Es lässt sich nun zeigen, dass die gefilterte Rückprojektion mit $h_\gamma(\xi)$ äquivalent zur Originallösung von Radon ist. Hierzu schreibt man die Filterung mit $|q|$ als

$$|q| = q \operatorname{sign}(q) \quad (5.88)$$

wobei

$$\operatorname{sign}(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q \geq 0 \\ -1 & \text{für } q < 0 \end{cases} \quad (5.89)$$

Setzt man dies in Gleichung (5.66) ein und multipliziert man den Integranden von Gleichung (5.66) geschickt mit einer Eins, so erhält man

$$h_\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} i 2\pi q P_\gamma(q) \left(\frac{\pi}{i} \operatorname{sign}(q) \right) e^{2\pi i q \xi} dq. \quad (5.90)$$

Diesen Ausdruck kann man mit Hilfe der Faltungsregeln auch durch

$$h_\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left\{ i 2\pi q P_\gamma(q) \right\} * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{i} \operatorname{sign}(q) \right\} \right\} \quad (5.91)$$

ausdrücken. Die inversen Fouriertransformationen liefern im Einzelnen

$$2\pi i q P_\gamma(q) \quad \bullet \text{---} \circ \quad dp_\gamma(\xi)/d\xi \quad (5.92)$$

und nach *A. Fettweiss* [Fet86] analog zur Herleitung von Gleichung (4.109)

$$\frac{\pi}{i} \operatorname{sign}(q) \quad \bullet \text{---} \circ \quad 1/\xi. \quad (5.93)$$

Also kann man schreiben

$$h_\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ 1/\xi * \frac{dp_\gamma(\xi)}{d\xi} \right\}. \quad (5.94)$$

Formuliert man Gleichung (5.94) explizit als Faltung, so erhält man

$$h_\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi - \xi'} \frac{dp_\gamma(\xi')}{d\xi'} d\xi'. \quad (5.95)$$

Wie oben schon angegeben, erhält man das Bild – also die Schwächungswerte $f(x,y)$ – indem man die gefilterte Projektion über alle Winkel aufintegriert²³, also durch

²³ Unter jedem Winkel wird die gefilterte Projektion dabei rückverschmiert (vergleiche Abbildung 6.7b).

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} h_{\gamma}(\xi) d\gamma. \quad (5.96)$$

Setzt man Gleichung (5.95) in Gleichung (5.96) ein, so erhält man

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi - \xi'} \frac{dp_{\gamma}(\xi')}{d\xi'} d\xi' d\gamma. \quad (5.97)$$

An dieser Stelle „kürzt“ man die differentiellen Ausdrücke $d\xi'$ und substituiert weiter

$$\xi' = \xi + R. \quad (5.98)$$

Damit gelangt man zu

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R} dp_{\gamma}(\xi + R) d\gamma. \quad (5.99)$$

Das Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt dann

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R} d\left(\int_0^{\pi} p_{\gamma}(\xi + R) d\gamma \right). \quad (5.100)$$

Da die Variablen ein polares Koordinatensystem definieren, in dem über die gesamte Ebene integriert wird, können die Integrationsgrenzen wie folgt verändert werden

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{R} d\left(\int_0^{2\pi} p_{\gamma}(\xi + R) d\gamma \right). \quad (5.101)$$

Setzt man in den Klammerausdruck von Gleichung (5.101) wieder die Geradengleichung

$$x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) = \xi \quad (5.102)$$

in Hessescher Normalform ein, so erhält man

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{R} d\left(\int_0^{2\pi} p_{\gamma}(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) + R) d\gamma \right). \quad (5.103)$$

Die Integration des Klammerausdrucks liefert nun den von Radon definierten Mittelwert

$$\bar{p}_{\mathbf{r}}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) + R, \gamma) d\gamma \quad (5.104)$$

über die Projektionswerte $p(\xi, \gamma)$ für die Tangenten des Kreises mit dem Zentrum $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und dem Radius R , so dass man endlich

$$f(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{R} d\bar{p}_r(R) \quad (5.105)$$

erhält, also exakt den von *Johann Radon* 1917 angegebenen Ausdruck für die Umkehrung des Projektionsproblems. Die Abbildung 5.28 zeigt noch einmal graphisch, welche Werte in der Originalveröffentlichung von *Radon* gemittelt werden.

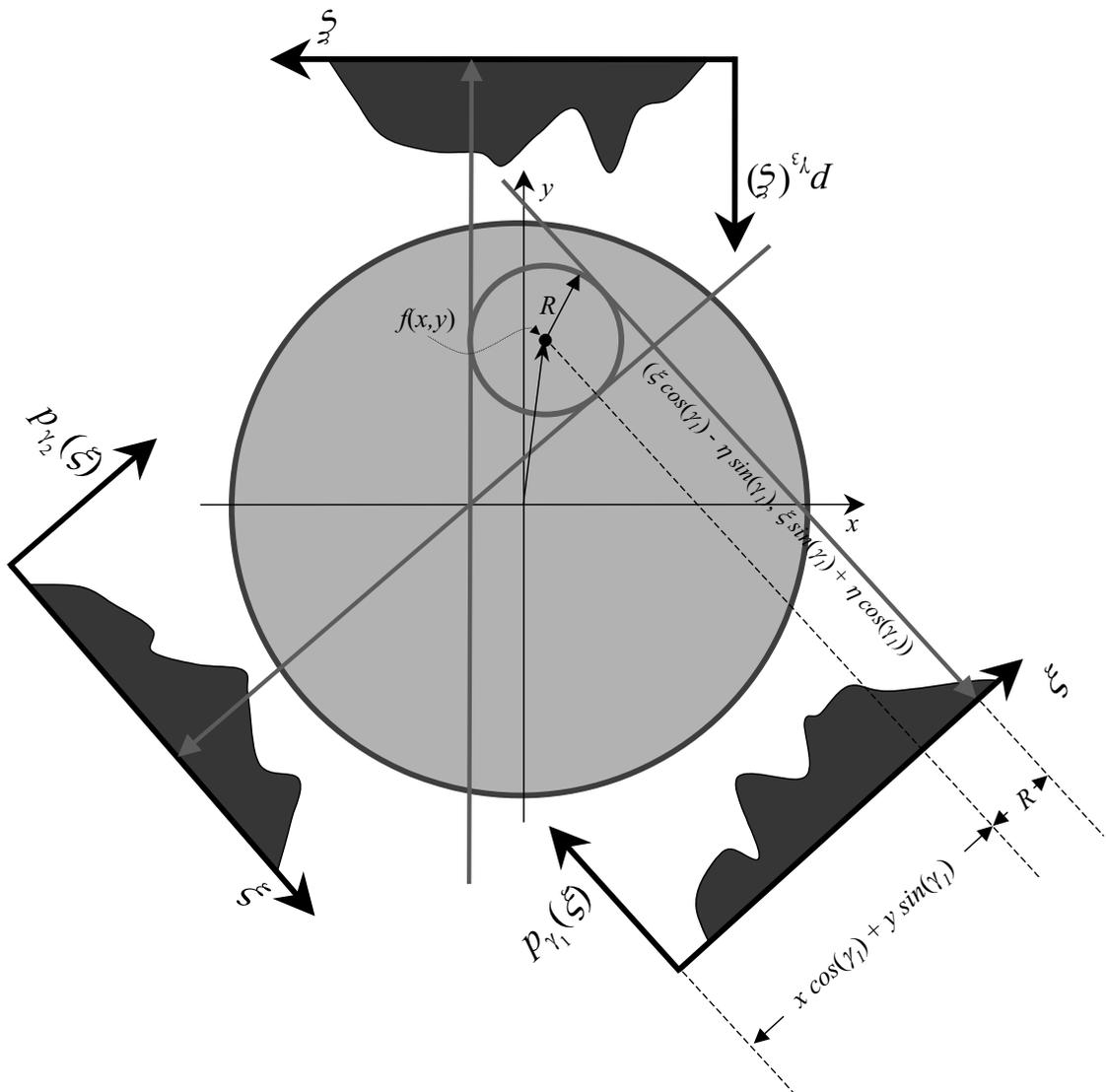


Abb. 5.30: Um den Bildwert f am Punkt $(x,y)^T$ zu rekonstruieren, hat *Johann Radon* 1917 zunächst eine mittlere Projektion definiert, die er aus den Tangenten der Kreise mit dem Radius R um $(x,y)^T$ erhält.

Das Aufintegrieren aller Punkte

$$(\xi \cos(\gamma) - \eta \sin(\gamma), \xi \sin(\gamma) + \eta \cos(\gamma)), \quad (5.106)$$

also entlang einer Geraden, um die Projektion zu bestimmen, schreibt man heute kürzer mit der oben verwendeten δ -Distribution

$$f * \delta(\mathbf{L}) = \int f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) - \xi) d\mathbf{r}. \quad (5.107)$$

Gemittelt werden dann im Radonraum die Projektionswerte an den Punkten

$$(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma) + R, \gamma). \quad (5.108)$$

Um den Bildwert f am Punkt $(x, y)^T$ zu rekonstruieren, werden die gemittelten Werte dann mit dem Kehrwert des Abstandes vom Punkt $(x, y)^T$ gewichtet aufintegriert. Wie oben gezeigt, ist diese Sichtweise äquivalent mit der gefilterten Rückprojektion.

Die gefilterte Rückprojektion kann man sehr kompakt schreiben, wenn man die Definition der Hilbert-Transformation aus Kapitel 4.15 nutzt. Mit

$$\mathcal{H} \left\{ \frac{dp_\gamma(\xi)}{d\xi} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi' - \xi} \frac{dp_\gamma(\xi)}{d\xi} d\xi' \quad (5.109)$$

kann Gleichung (5.95) geschrieben werden als

$$h_\gamma(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{H} \left\{ \frac{dp_\gamma(\xi)}{d\xi} \right\}. \quad (5.110)$$

Damit erhält man mit Gleichung (5.96) für die gefilterte Rückprojektion den Ausdruck²⁴

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{H} \left\{ \frac{dp_\gamma(\xi)}{d\xi} \right\} d\gamma. \quad (5.111)$$

5.10 Cormack-Transformation

Bisher wurde im kartesischen Radonraum Bezug auf die senkrechten Linien genommen, die vom Messprozess her die Bedeutung eines kompletten Arraysignals haben, das unter einem bestimmten konstanten Winkel gemessen wurde. Der vorangegangene Abschnitt, der den Zusammenhang zur Originalarbeit von *Radon* aufzeigt, die am Anfang von Kapitel 5 auszugswise wiedergegeben ist, legt aber auch eine andere Sicht auf die Daten im Radonraum nahe.

²⁴ Genau genommen handelt es sich bei der Ableitung von p nach ξ um eine partielle Ableitung, so dass

Gleichung (5.111) korrekterweise $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{H} \left\{ \frac{\partial p_\gamma(\xi)}{\partial \xi} \right\} \Big|_{\xi=x \cos(\gamma)+y \sin(\gamma)} d\gamma$ lauten muss.

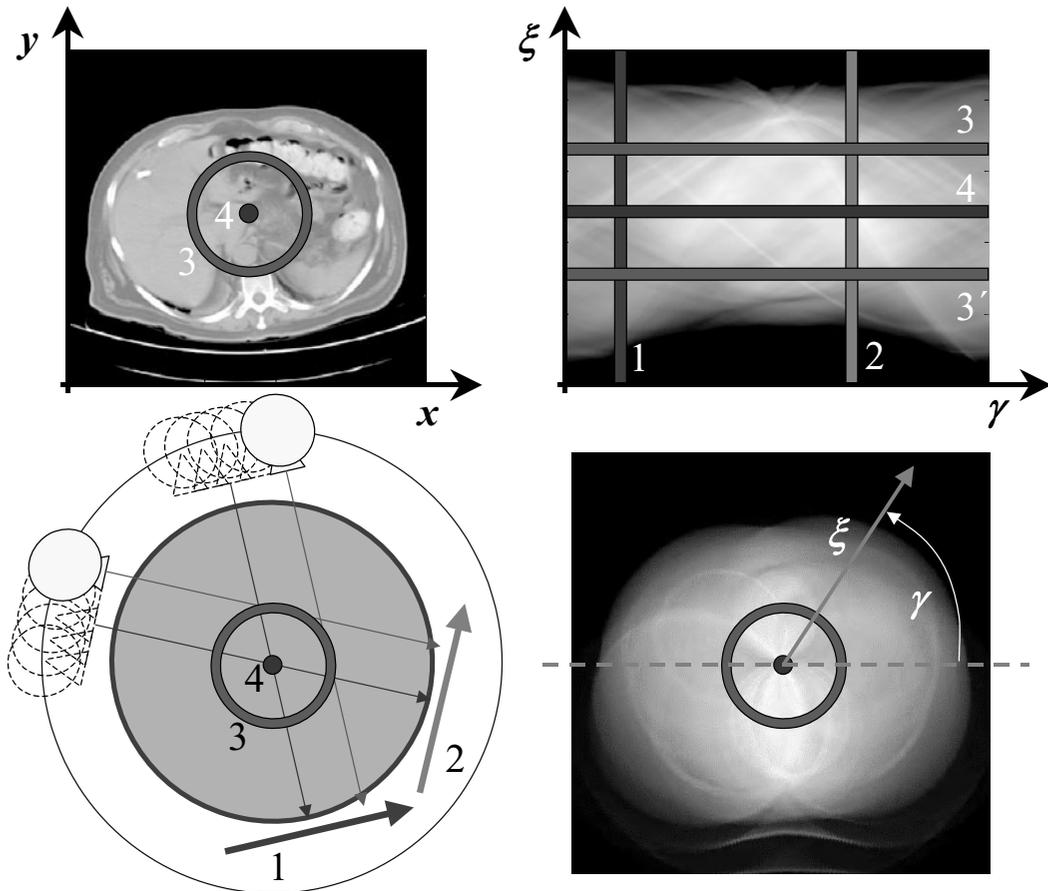


Abb. 5.31: Eine Zerlegung in so genannte zirkuläre Harmonische stellt eine alternative Sichtweise auf die Daten im Radonraum dar. Statt der senkrechten Linien 1 und 2 betrachtet man hierbei die horizontalen Linien 3 bzw. 3' und 4 im Sinogramm.

In diesem Kapitel sollen jetzt horizontale Linien im Radonraum Beachtung finden, so wie sie in Abbildung 5.31 (oben rechts) zu sehen sind. Diese Sichtweise führt zu einer Zerlegung in so genannte zirkuläre Harmonische. Da diese Methode von Cormack eingeführt wurde, soll hier in Anlehnung an *H. H. Barrett and W. Swindell* [Bar81] von der Cormack-Transformation gesprochen werden.

In Abbildung 5.31 ist wieder ein abdominales Tomogramm zu sehen. Rechts daneben ist der kartesische Radonraum wiedergegeben, der die Projektionsdaten von $\gamma = 0^\circ$ bis $\gamma = 180^\circ$ zeigt. Die horizontalen Linien in diesem Diagramm gehören zu Kreisen im Ortsraum, deren Tangenten die entsprechenden Projektionslinien sind. Das sieht man noch einmal in der Graphik unten links. Unten rechts ist der Radonraum in Polarkoordinaten wiedergegeben. Man kann sich leicht überlegen, dass die horizontalen Linien im kartesischen Radonraum im polaren Diagramm zu entsprechenden Kreisen gehören. Die obere Hälfte ($0-\pi$) des eingezeichneten Kreises korrespondiert hierbei mit der Linie 3, die untere Hälfte des Kreises ($\pi-2\pi$) mit 3'.

Offenbar ist jeder der Datenringe $p_\gamma(\xi) = p(\xi, \gamma)$ periodisch in der Variablen γ und zwar mit der Periode 2π . Daher kann jeder Ring als Fourierreihe

$$p(\xi, \gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\xi) e^{in\gamma} \quad (5.112)$$

dargestellt werden, wobei

$$p_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\xi, \gamma) e^{-in\gamma} d\gamma. \quad (5.113)$$

Die Fourierkoeffizienten $p_n(\xi)$ aus Gleichung (5.113) werden zirkulare Harmonische genannt.

Das Objekt selbst – Abbildung 5.31 oben links – kann ebenso betrachtet werden, denn jeder Datenring $f(r, \delta)$ der Schwächungskoeffizienten ist 2π -periodisch in der Winkelvariablen δ . (Um den Zusammenhang zwischen (r, δ) und (ξ, γ) wieder ins Gedächtnis zu rufen, betrachte man noch einmal Abbildung 5.7.) Daher kann auch im Tomogramm jeder Ring als Fourierreihe

$$f(r, \delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\delta} \quad (5.114)$$

dargestellt werden, wobei

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \delta) e^{-in\delta} d\delta \quad (5.115)$$

analog zu Gleichung (5.113) wieder die Fourierkoeffizienten darstellen. Um den Zusammenhang zwischen den zirkularen Harmonischen $p_n(\xi)$ und $f_n(r)$ herzustellen, sollen zunächst die geometrischen Verhältnisse in Abbildung 5.32 skizziert werden.

Man betrachtet wieder das Projektionsintegral (5.10), wobei der Integrationsweg ins Unendliche verlängert wird und die beiden Wege oberhalb und unterhalb der Projektionsachse getrennt berechnet werden, das heißt

$$p(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} f(r, \delta) d\eta + \int_{-\infty}^0 f(r, \delta) d\eta. \quad (5.116)$$

Nutzt man die Symmetrie in Abbildung 5.30 aus, so kann man die Integrale als

$$p(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} \{f(r, \delta) + f(r, 2\gamma - \delta)\} d\eta \quad (5.117)$$

zusammenfassen.

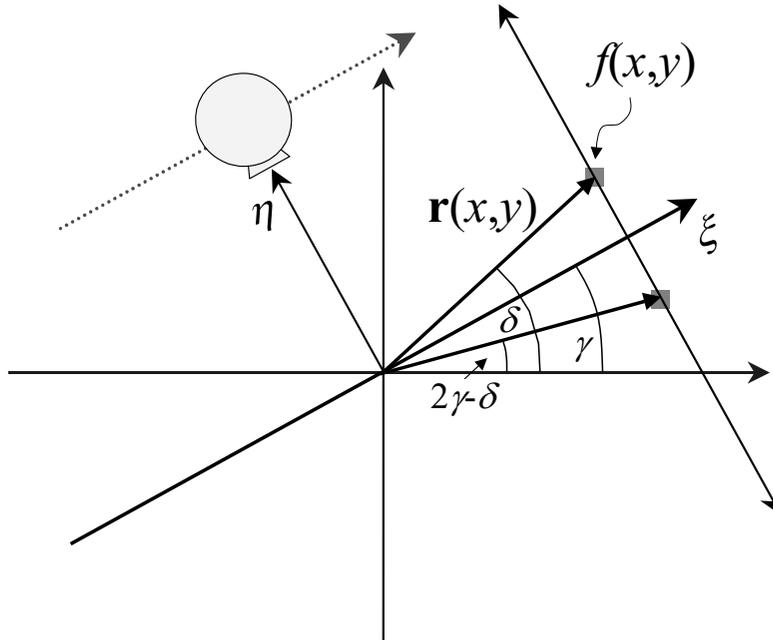


Abb. 5.32: Geometrie des Integrationsweges: Zu jedem Punkt oberhalb der Projektionsachse ξ gibt es spiegelbildlich zur Projektionsachse einen weiteren Punkt unter dem Winkel $2\gamma-\delta$.

Setzt man nun die Fourierreentwicklung (5.112) auf der linken Seite und die Entwicklung (5.114) auf der rechten Seite von Gleichung (5.117) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\xi) e^{iny} &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\delta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in(2\gamma-\delta)} \right\} d\eta \\
 &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) (e^{in\delta} + e^{in(2\gamma-\delta)}) \right\} d\eta \\
 &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{iny} (e^{in(\delta-\gamma)} + e^{-in(\delta-\gamma)}) \right\} d\eta .
 \end{aligned} \tag{5.118}$$

In der komplexen Schreibweise ist der Cosinus

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \tag{5.119}$$

so dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\xi) e^{iny} = 2 \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{iny} \cos(n(\delta-\gamma)) \right\} d\eta . \tag{5.120}$$

Wechselt man die Koordinaten (ξ, η) zugunsten der polaren Darstellung $(r, \delta - \gamma)$, wobei

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{5.121}$$

und

$$\xi = r \cos(\delta - \gamma), \quad (5.122)$$

so kann man nach dem Vertauschen der Summation mit der Integration schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\xi) e^{in\gamma} &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\gamma} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{f_n(r) \cos(n \cos^{-1}(\xi/r))}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 2 \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{f_n(r) \cos(n \cos^{-1}(\xi/r))}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr \right\} e^{in\gamma}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Man beachte, dass die Integration entlang der Variablen r jetzt natürlich bei $|\xi|$ beginnen muss. Durch Koeffizientenvergleich beider Seiten von Gleichung (5.123) sieht man, dass

$$p_n(\xi) = 2 \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{f_n(r) \cos(n \cos^{-1}(\xi/r))}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr. \quad (5.124)$$

Verwendet man hier weiter die Definition der Tschebycheff-Polynome²⁵ der ersten Art

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)), \quad (5.125)$$

so vereinfacht sich Gleichung (5.124) weiter zu

$$p_n(\xi) = 2 \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{f_n(r) T_n(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr. \quad (5.126)$$

Gleichung (5.126) wird in Anlehnung an *H. H. Barrett and W. Swindell* [Bar81] Cormack-Transformation genannt. Mit Hilfe der Definition der Abel-Transformation aus Kapitel 4.14 kann man sehen, dass

$$p_n(\xi) = \mathcal{A} \left\{ f_n(r) T_n(\xi/r) \right\}. \quad (5.127)$$

Wichtig ist wieder die Umkehrung von Gleichung (5.126), denn man ist an $f_n(r)$ interessiert. Aus der Fourierreihenentwicklung mit den zirkularen Harmonischen $f_n(r)$ aus Gleichung (5.114) erhält man schließlich die Verteilung der Schwächungskoeffizienten $f(r, \delta)$. *A. M. Cormack* [Cor63] gibt hierfür folgenden Ausdruck an²⁶

²⁵ Dass es sich hierbei tatsächlich um Polynome in (ξ/r) handelt, ergibt sich z.B. nach [Heu92] aus der Gleichung

$$\cos(n\varphi) = (\cos(\varphi))^n - \binom{n}{2} (\cos(\varphi))^{n-2} (\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{4} (\cos(\varphi))^{n-4} (\sin(\varphi))^4 - \dots$$

²⁶ Die Formulierung mit Tschebycheff-Polynomen der ersten Art zeigt sich in der Praxis problematisch, da T_n für n außerhalb von $[-1, +1]$ exponentiell anwächst. Eine stabile Version der Gleichung (5.128) kann aber mit Tschebycheff-Polynomen der zweiten Art gefunden werden [Cor64, Nat99].

$$f_n(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{p_n(\xi) T_n(\xi/r)}{\xi \sqrt{\xi^2 - r^2}} r d\xi. \quad (5.128)$$

Gleichung (5.128) wird in Anlehnung an *H. H. Barrett and W. Swindell* [Bar81] inverse Cormack-Transformation genannt. Das Bild erhält man hieraus schließlich mit

$$f(r, \delta) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_r^\infty \frac{p_n(\xi) T_n(\xi/r)}{\xi \sqrt{\xi^2 - r^2}} e^{in\delta} r d\xi. \quad (5.129)$$

Es ist auch möglich, die Fouriertransformierte des Objektes $F(u, v)$ in seine zyklischen Harmonischen zu zerlegen. In Polardarstellung ergeben sich nach dem Fourier-Slice-Theorem gerade die Fouriertransformierten der Projektionen unter dem Winkel γ . Daher kann man

$$P(q, \gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{P}_n(q) e^{in\gamma} \quad (5.130)$$

schreiben, wobei

$$\mathfrak{P}_n(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(q, \gamma) e^{-in\gamma} d\gamma. \quad (5.131)$$

Die Gleichungen (5.115) und (5.130) sind radiale Ausdrücke, so dass die Hankel-Transformation aus Kapitel 4.13 verwendet werden kann, um sie in Zusammenhang zu bringen. Es gilt dabei

$$\mathfrak{P}_n(q) = i^n 2\pi \int_0^\infty f_n(r) J_n(2\pi qr) r dr. \quad (5.132)$$

und

$$f_n(r) = i^n 2\pi \int_0^\infty \mathfrak{P}_n(q) J_n(2\pi qr) q dq. \quad (5.133)$$

Man schreibt kurz

$$\mathfrak{P}_n(q) = i^n \mathcal{H}_n \{ f_n(r) \} \quad (5.134)$$

und

$$f_n(r) = i^n \mathcal{H}_n \{ \mathfrak{P}_n(q) \}. \quad (5.135)$$

Dies sind in Verallgemeinerung der Definition in Kapitel 4.13 die so genannten Hankel-Transformationen n -ter Ordnung. Abbildung 5.33 stellt die Zusammenhänge noch einmal graphisch dar. Für rotationssymmetrische Objekte kann die Cormack-Transformation also mit der Abel-Transformation aus Kapitel 4.14 identifiziert werden.

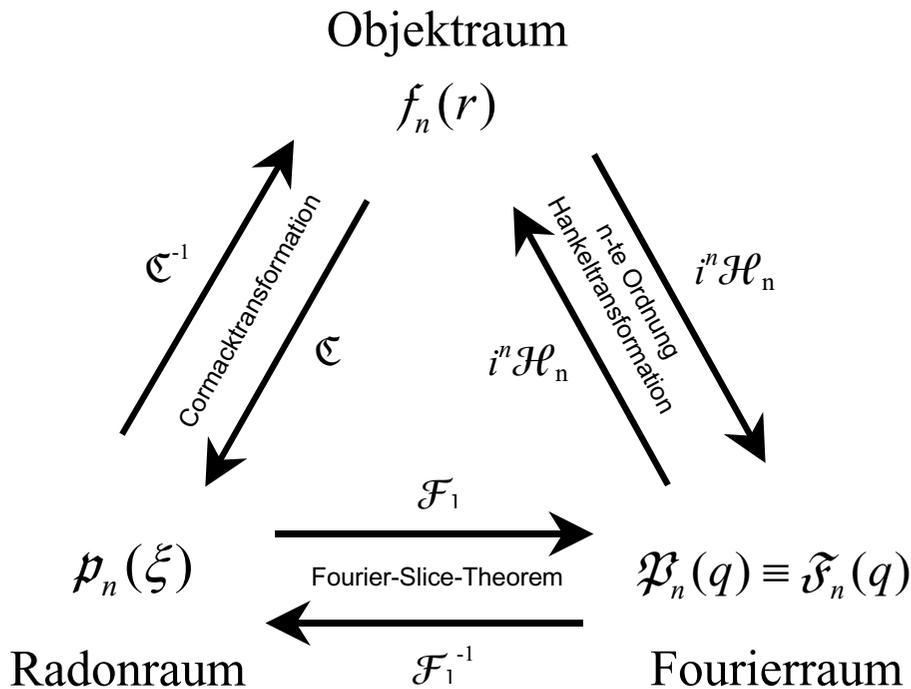


Abb. 5.33: Schematische Übersicht der Zusammenhänge zwischen dem Objektraum, dem Radonraum und dem Fourierraum im Rahmen der Cormack-Transformation (nach *H. H. Barrett and W. Swindell* [Bar81]).

5.11 Algebraische Rekonstruktionsverfahren

Als Ergänzung zu den oben eingeführten Rekonstruktionsverfahren soll hier kurz auf die algebraischen Methoden eingegangen werden. Sie fanden nur in den Anfängen der Computertomographie Einsatz, zeigen aber die Problematik der Bildrekonstruktion sehr gut auf²⁷. Vom Prinzip her sind diese Methoden einfacher zu verstehen als die bisher besprochenen Verfahren. Man geht dabei von Beginn an von einer diskreten Vorstellung des Tomogramms aus. Dabei ist die Diskretisierung der Projektion $p_\gamma(\xi)$ technisch durch das Detektorarray vorgegeben. Bei der Festlegung der Diskretisierung des zu rekonstruierenden Tomogramms hat man im Gegensatz zur Projektion gewisse Freiheiten, das so genannte *Field-of-View* (FOV) und damit die räumliche Größe der Rasterpunkte festzulegen.

Abbildung 5.3 spiegelt die Situation räumlich diskreter Schwächungswerte schematisch wider. Der zu rekonstruierende Schnitt besteht also aus einem diskreten Array von unbekannten Variablen f_i – den gesuchten Schwächungskoeffizienten. Diese bilden ein lineares Gleichungssystem, das es zu lösen gilt. In Abbildung 5.34 ist das Zustandekommen des linearen Gleichungssystems motiviert. Beim Durchlaufen des Gewebes wird die Intensität des Röntgenstrahls entsprechend der Schwächungskoeffizienten $f_i = \mu_i$ geschwächt. Ist das Bild klein, so ist der Lösungsweg, also die Invertierung des niederdimensionalen Gleichungssystems z.B. durch Gauß-Elimination vorgegeben.

²⁷ Heute finden insbesondere die iterativen algebraischen Lösungen Einsatz in der nukleardiagnostischen Bildgebung.

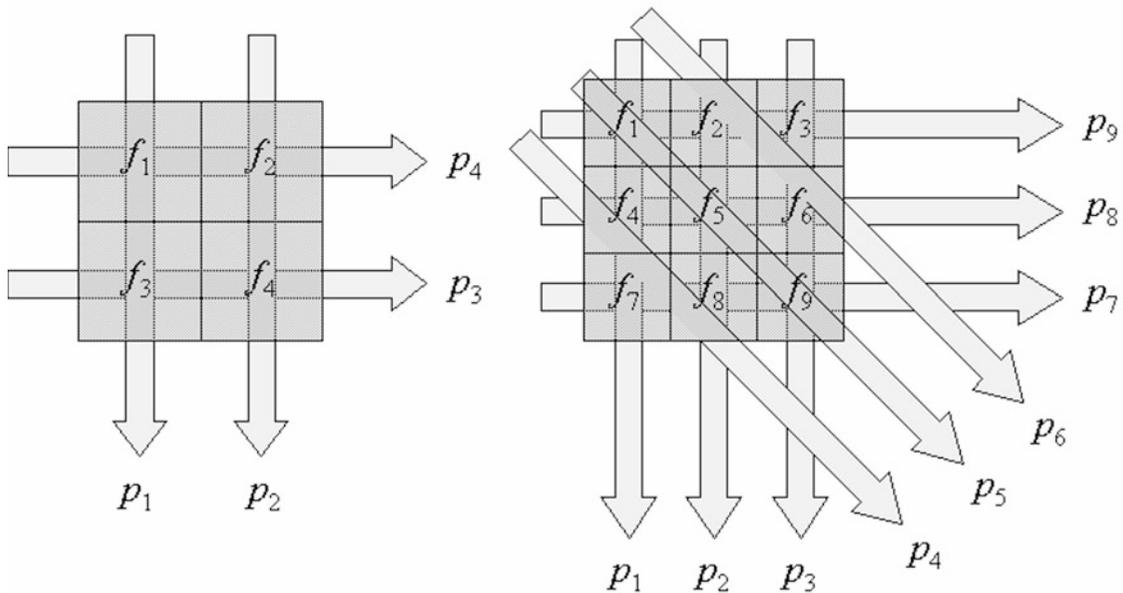


Abb. 5.34: Das Prinzip der algebraischen Rekonstruktionstechnik ist sehr einfach zu verstehen. Die Projektionssummen liefern ein lineares Gleichungssystem. Im linken Bild sind mit zwei Projektionswinkeln alle vier gesuchten Schwächungswerte theoretisch exakt zu berechnen. Ist das zu rekonstruierende Raster feiner, so müssen entsprechend mehr Projektionen gemessen werden.

Man erhält jeweils die schon bekannte Projektionssumme (5.9), so dass man für die Situation des 2x2-Pixel-Bildes in Abbildung 5.34 folgendes Gleichungssystem erhält.

$$f_1 + f_2 = p_4, \quad (5.136)$$

$$f_3 + f_4 = p_3, \quad (5.137)$$

$$f_1 + f_3 = p_1, \quad (5.138)$$

$$f_2 + f_4 = p_2. \quad (5.139)$$

Man erhält also 4 Gleichungen mit vier Unbekannten, die sich exakt bestimmen lassen, sofern der physikalische Messprozess nicht mit Rauschen beaufschlagt ist und sich keine linearen Abhängigkeiten ergeben – also der Rang = 4 ist. Nun soll das Bild aber räumlich verfeinert werden, also z.B. wie in Abbildung 5.32 rechts aus 3x3 Pixel bestehen. Sofort ist klar, dass die Durchleuchtung aus nur zwei Richtungen wie im Fall des 2x2 Pixel großen Bildes hier nicht mehr ausreicht. Nimmt man eine dritte Richtung hinzu, so erhält man aber wieder ein lösbares Problem bestehend aus einem linearen Gleichungssystem mit 9 Gleichungen und neun Unbekannten. Sieht man sich die Durchleuchtung der 45°-Richtung genauer an, so erkennt man, dass gegenüber der horizontalen und der vertikalen Durchleuchtungsrichtung ein kleiner Unterschied besteht. Die Weglänge des Strahls durch die einzelnen betroffenen Pixel ist unterschiedlich lang.

Im Unterschied zu den in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Methoden, in denen das Objekt mit einer δ -Linie abgetastet wird, geht man bei den algebraischen Methoden von einer gewissen Breite des Strahls aus. Beim Durchlaufen des Gewebes muss nun

berücksichtigt werden, wie viel des zu rekonstruierenden Bildelements vom Strahl durchleuchtet wird. Hierzu führt man Gewichte ein, die im Wesentlichen das Verhältnis der vom Strahl überstrichenen Fläche zur Gesamtfläche des Bildelementes widerspiegeln. Abbildung 5.35 zeigt das Prinzip. Ein Strahl der Breite $\Delta\xi$ durchläuft das Gewebe, das hier durch das schon bekannte Schädeltomogramm gegeben ist. Die Pixelgröße ist durch b^2 gegeben. Das Gewicht a_{ij} ist also durch das Verhältnisses

$$a_{ij} = \frac{\text{vom Strahl } i \text{ durchleuchtete Fläche des Pixels } j}{\text{Gesamtfläche des Pixels } j}. \quad (5.140)$$

bestimmt, liegt also im Intervall $0 \leq a_{ij} \leq 1$.

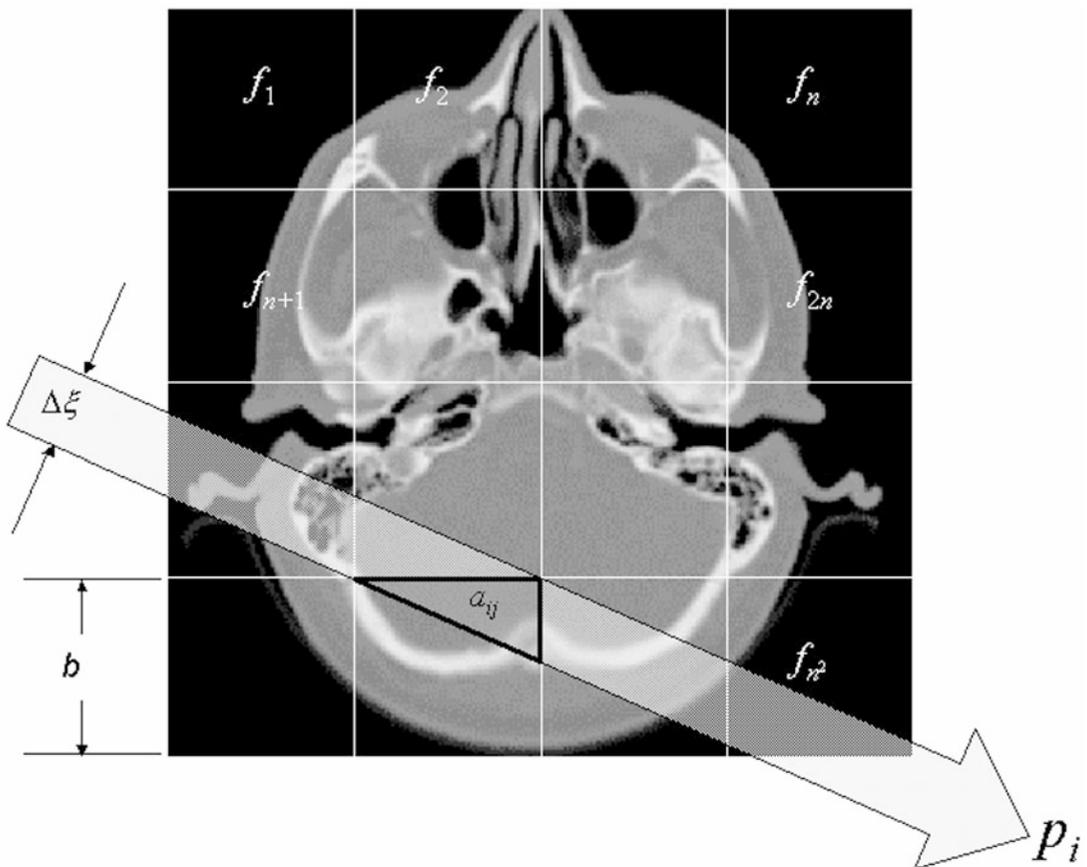


Abb. 5.35: Der Röntgenstrahl mit der Breite $\Delta\xi$ trifft beim schrägen Durchlauf durch das Gewebe nicht alle Rasterpunkte der Größe b^2 gleichermaßen. Die Teilfläche des zu rekonstruierenden Pixels, die vom Röntgenstrahl tatsächlich durchleuchtet wird, geht als Gewichtung in die Berechnung mit ein.

In der Verallgemeinerung der Gleichungen (5.136) bis (5.139) erhält man also das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j = p_i, \quad (5.141)$$

in dem die Gewichte a_{ij} berücksichtigt sind. Dabei ist $N = n^2$, also die Anzahl der zu rekonstruierenden Pixel und $i = \{1, \dots, M\}$ die jeweilige Projektion mit $M = N_p D$ als Gesamtzahl der Projektionen aller Detektoren D des Arrays in allen Richtungen N_p . In expandierter Form schreibt man Gleichung (5.141) als

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1N}f_N &= p_1 \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2N}f_N &= p_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{M1}f_1 + a_{M2}f_2 + \dots + a_{MN}f_N &= p_M \end{aligned} \quad (5.142)$$

Innerhalb der nuklearmedizinischen Bildgebung, also bei PET²⁸ und SPECT²⁹, bei der die algebraischen Verfahren heute überwiegend Verwendung finden, sind die Gewichte als Wahrscheinlichkeiten dafür zu interpretieren, dass Gammaquanten aus dem Flächenelement³⁰ j in der Projektion i nachgewiesen werden. Hieran zeigt sich eine Stärke der algebraischen Verfahren, denn über die Gewichte können lineare physikalische Prozesse problemlos in die Projektionsgleichung integriert werden. Auf diese Weise kann das der Rekonstruktion zugrunde liegende mathematische Modell der realen physikalischen Abbildung angepasst werden, was sich in der Güte der zu rekonstruierenden Bilder niederschlägt.

Schreibt man alle Projektionen als Spaltenvektor

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)^T, \quad (5.143)$$

und auch die zu rekonstruierenden Schwächungswerte, die ja in der bisherigen Vorstellung immer eine Bildmatrix darstellten, ebenfalls als Spaltenvektor

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad (5.144)$$

so stellt sich mit der $N \times M$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \cdot & & a_{2N} \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ a_{M1} & & & a_{MN} \end{pmatrix}, \quad (5.145)$$

das Gleichungssystem als

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (5.146)$$

dar, wobei \mathbf{A} als so genannte Designmatrix aufgefasst werden kann [Pre90], die in der Computertomographie auch Systemmatrix genannt wird [Tof96]. Durch direkten Vergleich mit Gleichung (5.21) erkennt man folgende Dualität zwischen der Matrixdarstellung und der Radontransformation.

²⁸ PET = Positronen-Emissions-Tomographie

²⁹ SPECT = Single Photon Emission Computer Tomography

³⁰ Physikalisch kommen die Quanten natürlich aus einem Volumenelement.

$$\begin{array}{rcl}
 \mathbf{p} & = & \mathbf{A} \mathbf{f} \\
 \downarrow & & \downarrow \downarrow \\
 p_\gamma(\xi) & = & \mathcal{R}\{f(x,y)\}
 \end{array} \tag{5.147}$$

Der Vektor \mathbf{p} beinhaltet also alle Werte des Radonraums, das heißt alle Werte des Sinogramms und \mathbf{f} ist der Vektor, der alle Pixel des Bildes enthält. Die mathematischen Probleme dieser Sichtweise kann man mit den folgenden Punkten zusammenfassen.

- Exakt ist das Gleichungssystem (5.146) nur unter idealisierten physikalischen Bedingungen lösbar. Im vorliegenden Fall hat man es aber erstens mit realen, also mit Rauschen beaufschlagten Daten zu tun, so dass auch im Fall von $N = M$ nur eine Näherungslösung für \mathbf{f} gefunden werden kann. Zweitens gilt für hochwertige Tomographen $M > N$, das heißt, die Anzahl der Projektionen ist größer als die Anzahl der zu rekonstruierenden Bildpunkte. Mathematisch hat man es hierbei mit einem überbestimmten Gleichungssystem zu tun.
- Die Systemmatrix \mathbf{A} ist in der Regel (fast) singular, das heißt, sie besitzt sehr kleine Singulärwerte, so dass das Rekonstruktionsproblem ein so genanntes schlecht konditioniertes Problem darstellt.
- \mathbf{A} hat keine einfache Struktur, so dass keine schnelle Inversion gefunden werden kann. Allerdings ist \mathbf{A} schwach besetzt, denn nur etwa $N^{1/2}$ Pixel tragen zu einem Eintrag im Radonraum bei.
- \mathbf{A} ist in der Regel sehr groß, so dass direkte Inversionen extrem zeit- und speicherintensiv sind.

Die Vorteile dieser Sichtweise liegen vor allem in den folgenden Punkten.

- Irreguläre Scannergeometrien oder fehlende Daten im Sinogramm führen bei den direkten Rekonstruktionsmethoden zu großen Problemen. In den Matrixformalismus können diese geometrischen Bedingungen aber einfließen und entsprechend berücksichtigt werden.
- Endliche Detektorbreiten und unterschiedliche Detektorempfindlichkeiten können in das Modell mit einfließen. Damit erhält man eine bessere Modellierung des physikalischen Messprozesses.

Die Aufgabe, die hier zu lösen ist, lautet: Gesucht ist ein Bild \mathbf{f} , für das die Funktion

$$\chi^2 = |\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{p}|^2, \tag{5.148}$$

minimal wird. Für diese Aufgabe existiert immer eine Lösung. Diese Lösung wird *Least-Squares-Minimum-Norm-* oder *Pseudolösung* genannt.

Man sucht dabei eine so genannte Pseudoinverse \mathbf{A}^+ von \mathbf{A} , die auch *Moore-Penrose-Inverse* genannt wird [Nat_b01] und folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T &= \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^+\mathbf{A}\end{aligned}\tag{5.149}$$

\mathbf{A}^+ stellt in gewisser Hinsicht die inverse Matrix zur rechteckigen Matrix \mathbf{A} da, so dass gilt

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{A}^+\mathbf{p}.\tag{5.150}$$

Da die Pseudolösung (5.150) im Sinne der kleinsten Quadrate eine Kompromisslösung ist, bezeichnet man dieses Bild mit $\tilde{\mathbf{f}}$.

Beleuchtet man die Dualität zwischen der Matrixdarstellung und der Radontransformation, so stellt die Gleichung

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}^T\mathbf{p}\tag{5.151}$$

die so genannte adjungierte Radontransformation der Sinogramm-Werte in den Bildraum dar. Hierbei handelt es sich um die ungefilterte Rückprojektion in Analogie zu Gleichung (5.43).

Gleichung (5.146) kann man in Normalform bringen, indem von links mit \mathbf{A}^T multipliziert wird, also

$$\mathbf{A}^T\mathbf{p} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{f}.\tag{5.152}$$

Das heißt, die Lösung erhält man durch

$$\mathbf{f} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{p}.\tag{5.153}$$

Gleichung (5.153) kann nun in der Sprache der direkten Rekonstruktionsmethoden interpretiert werden. Die Matrix \mathbf{A}^T stellt dabei, im Sinne der oben angesprochenen adjungierten Radontransformation (5.151), den Operator der Rückprojektion und der Operator $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$ die notwendige Filterung dar. Wie in Kapitel 5.8 gezeigt wurde ist es möglich, dass erst zurückprojiziert und dann gefiltert wird. Dies führt auf das Layergram-Verfahren, so dass Gleichung (5.153) in Dualität zu Gleichung (5.86) zu sehen ist. Man kann aber auch die gefilterte Rückprojektion aus Kapitel 5.6 darstellen. Das sieht man ausgehend von Gleichung (5.153) mit folgender Umstellung ein.

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{p} \\ &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{p} \\ &= (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{p} \\ &= \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{p}\end{aligned}\tag{5.154}$$

Dabei spielt $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ nun die Rolle des Hochpassfilters $|q|$ aus Gleichung (5.64). Die Pseudoinverse \mathbf{A}^+ ist also durch

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \quad (5.155)$$

darstellbar und wird praktisch durch eine Singulärwertzerlegung berechnet.

5.12 Lösung durch Singulärwertzerlegung

Beim Verfahren der Lösung durch Singulärwertzerlegung (SVD) betrachtet man von dem System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (5.156)$$

zunächst die Designmatrix \mathbf{A} und zerlegt sie dergestalt, dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}(\mathbf{diag}(\sigma_j))\mathbf{V}^T, \quad (5.157)$$

wobei \mathbf{U} und \mathbf{V} orthogonale Matrizen sind in dem Sinne, dass die Spalten orthonormal sind. $\mathbf{\Sigma}$ ist eine Diagonalmatrix, deren Einträge gerade die Singulärwerte σ_j sind. Die Pseudoinverse von \mathbf{A} erhält man dann durch

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \left(\mathbf{diag} \left(\frac{1}{\sigma_j} \right) \right) \mathbf{U}^T, \quad (5.158)$$

Das heißt, die Lösung von Gleichung (5.156) findet man durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1/\sigma_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (5.159)$$

Das Problem der Lösung von Gleichung (5.156) ist in der Praxis häufig schlecht konditioniert, das heißt, es können sehr kleine Singulärwerte σ_j auftreten. Als Konsequenz daraus können schon kleine Messfehler in den Projektionen zu großen Schwankungen im

rekonstruierten Bild führen. In solchen Fällen ist die Lösung durch Regularisierung zu stabilisieren. In *W. H. Press et al.* [Pre90] wird vorgeschlagen, das Spektrum der Singulärwerte zu gewichten. Im einfachsten Fall wird dabei $1/\sigma_j$ durch Null ersetzt, wenn σ_j eine vorgegebene Schwelle unterschreitet.

Um das Prinzip zu veranschaulichen, sei in Abbildung 5.34 schematisch die Durchstrahlung eines Objektes aus vier Richtungen gegeben. Das Bild soll als 2×2 -Pixel-Bild rekonstruiert werden.

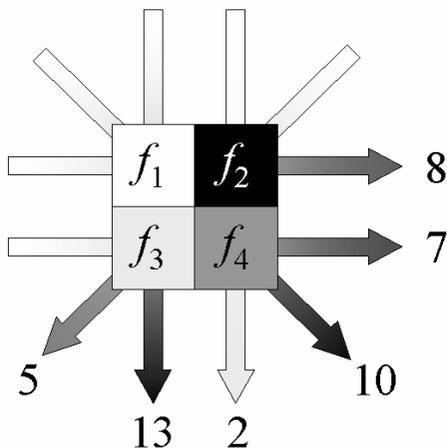


Abb. 5.36: Beispiel eines Objektes, das aus 4 Richtungen durchstrahlt wird. Insgesamt liegen 6 Projektionsmesswerte vor. Das Objekt soll als 2×2 -Pixel-Bild rekonstruiert werden. Die Schwächung ist umso größer, je heller das Objektpixel ist.

Das zur Abbildung 5.36 gehörende Gleichungssystem ist nun die Konkretisierung von Gleichung (5.156) also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 2 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (5.160)$$

Dabei wurde zur Ermittlung der Gewichte a_{ij} das Verfahren der nächsten Nachbarn verwendet. Dieses Verfahren wird im nächsten Kapitel besprochen. Das Gleichungssystem (5.160) ist überbestimmt, das heißt, es sind mehr Gleichungen (Projektionen) als Unbekannte (Pixelwerte) vorhanden. Offenbar sind einige der Zeilen des Systems linear abhängig. Die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen kann über die Anzahl der Singulärwerte, die ungleich Null sind, ermittelt werden. Diese Anzahl liefert den so genannten Rang der Matrix \mathbf{A} .

Mit der oben beschriebenen Singulärwertzerlegung erhält man die Pseudoinverse, die das Gleichungssystem löst. Die Matrix \mathbf{A} enthält danach vier endliche Singulärwerte ist also vom Rang 4. Die Singulärwerte lauten $\sigma_1 = 2.4495$ und $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1.4142$. Mit der in Gleichung (5.158) dargestellten Komposition erhält man dann die Pseudoinverse

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} -0.1667 & 0.3333 & -0.1667 & 0.3333 & -0.1667 & 0.3333 \\ 0.3333 & -0.1667 & 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 & 0.3333 & -0.1667 \\ -0.1667 & -0.1667 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & -0.1667 \end{pmatrix} \quad (5.161)$$

so dass nach Gleichung (5.150)

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^+ \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 2 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (5.162)$$

die Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate ist. Man kann sich durch einen Blick auf Abbildung 5.36 leicht davon überzeugen, dass Gleichung (5.162) die richtige Lösung liefert.

Zuletzt soll das Beispiel (5.160) noch einmal aus der Perspektive des adjungierten Rekonstruktionsproblems (5.151) betrachtet werden. Dazu transponiert man die Systemmatrix \mathbf{A} und schreibt

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 2 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 15 \\ 25 \\ 19 \end{pmatrix}. \quad (5.163)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass Gleichung (5.163) die ungefilterte Rückprojektion darstellt. Abbildung 5.37 stellt das Verfahren am Beispieldatensatz aus Abbildung 5.36 schematisch dar.

Das Verfahren der direkten algebraischen Bildrekonstruktion ist prinzipiell mit Hilfe der Singulärwertzerlegung durchführbar. Sind M und N klein, so kann man das Gleichungssystem (5.146) tatsächlich direkt lösen. In dem Beispiel (5.160) ist $M = 6$ und $N = 4$. Allerdings kann man sich leicht klar machen, dass bei modernen Computertomographen sehr große Gleichungssysteme entstehen, so dass mit diesem „brute force“ Verfahren auch neuere Rechner schnell überfordert sind.

Läge das lineare Gleichungssystem (5.146) unmittelbar in diagonalen Form vor, so könnte man die Lösung sofort angeben bzw. das Bild rekonstruieren. Tatsächlich kann man die fourierbasierten Verfahren so interpretieren, dass die FFT das Rekonstruktionsproblem auf ein diagonalisiertes Gleichungssystem reduziert. Daher sind die Fourierverfahren sehr effizient [Eps03].

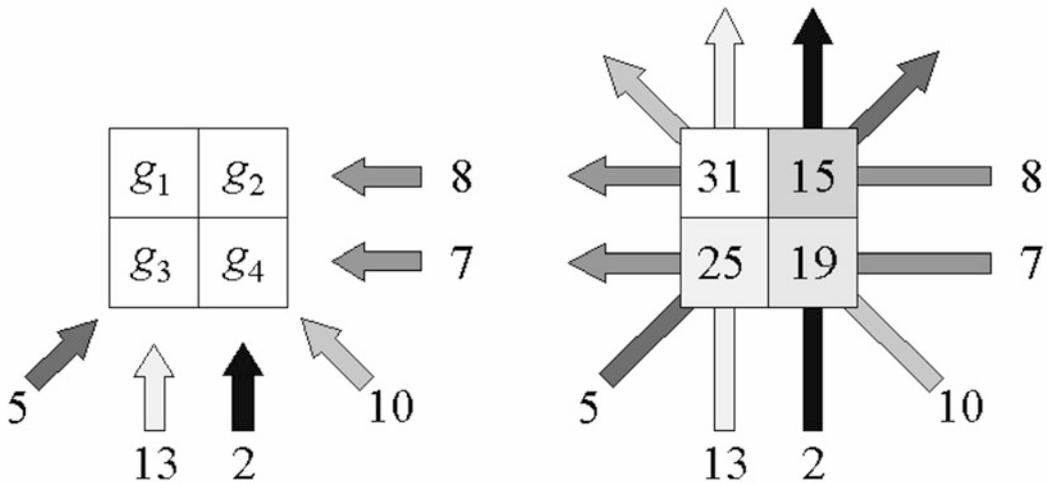


Abb. 5.37: Graphische Darstellung des zur Gleichung $\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f}$ adjungierten Problems $\mathbf{g} = \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Das adjungierte Rekonstruktionsproblem stellt die ungefilterte Rückprojektion dar.

Ein System wie der Secura-Scanner von Philips beispielsweise besitzt etwa 1000 Detektoren und akquiriert in einer 360°-Umdrehung ebenso viele Projektionen, so dass M in der Größenordnung von 10^6 liegt. Bei einer zu rekonstruierenden Bildmatrix von 512x512 Pixel ist N in der Größenordnung von 10^5 . Das heißt, das zu lösende System (5.146) besteht aus 10^5 Unbekannten bei 10^6 Gleichungen. Daher arbeiten alle praktikablen Algorithmen zur Lösung des linearen Gleichungssystems mit iterativen Konzepten, die ohne die direkte Invertierung der Matrix \mathbf{A} auskommen.

5.13 Iterative Rekonstruktion mit ART

ART steht für *Algebraic Reconstruction Technique*. Hounsfield hat dieses Verfahren für die ersten Bildrekonstruktionen genutzt. Dabei war ihm – wie schon früher erwähnt – die Arbeit von Radon aus dem Jahre 1917 nicht bekannt. Allerdings wurde später klar, dass auch die ART eine Wiedererfindung des Verfahrens von S. Kaczmarz von 1937 [Kac37] darstellt.

Die Verfahren mit iterativen Lösungsstrategien gehen von der Vorstellung aus, dass die Realisierung eines Bildes $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ einen Punkt in einem N -dimensionalen Lösungsraum darstellt. Ausgehend von einem Initialbild $\mathbf{f}^{(0)}$ wird dann eine Folge von Bildern $\{\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}, \dots\}$ konstruiert, die zur gesuchten tomographischen Rekonstruktion konvergiert. Dabei geht man in einem ersten Schritt so vor, dass mit der Abbildung \mathbf{A} eine so genannte Vorwärtsprojektion

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{(n)}, \quad (5.164)$$

der n -ten Bildnäherung $\mathbf{f}^{(n)}$ berechnet wird. Die in der n -ten Vorwärtsprojektion berechneten Projektionswerte $\mathbf{p}^{(n)}$ sind nun mit der tatsächlich gemessenen Projektion \mathbf{p} zu vergleichen. Aus dem Vergleich der berechneten und der gemessenen Projektion werden dann Korrekturterme bestimmt, die auf die n -te Bildnäherung $\mathbf{f}^{(n)}$ angewendet werden und so die Bildnäherung $(n+1)$ ergeben. Dieser Prozess wird zyklisch fortgesetzt, so dass in einer weiteren Vorwärtsprojektion die Projektion $\mathbf{p}^{(n+1)}$ berechnet wird.

In *N. Schramm* [Sch01] sind die iterativen Verfahren in drei Kategorien eingeteilt:

- *Verfahren mit gleichzeitiger Korrektur aller Objektpixel*
Hierbei werden sämtliche Korrekturen in einem Schritt unter Verwendung aller im Projektionsdatensatz enthaltenen Informationen berechnet. Dabei werden alle Objektpixel gleichzeitig korrigiert. Iterative *Least-Squares*-Verfahren gehören zu dieser Kategorie ebenso wie so genannten *Maximum-Likelihood*-Verfahren, die unten noch besprochen werden.
- *Verfahren mit pixelweiser Korrektur*
In dieser Kategorie werden sämtliche Pixel der n -ten Iteration nacheinander korrigiert. Zur Berechnung des Korrekturterms werden nur die Projektionselemente herangezogen, zu denen das betreffende Pixel einen Beitrag in der Vorwärtsprojektion geleistet hat.
- *Verfahren mit strahlweiser Korrektur*
Diese Verfahren arbeiten so, dass in jedem Iterationsschritt die Information nur einer Strahlsumme verwendet wird. Korrigiert werden dann die Objektpixel, die zum entsprechenden Projektionspixel beigetragen haben. Anschließend erfolgt die Berechnung der nächsten Strahlsumme.

Das Beispiel aus *A. C. Kak und M. Slaney* bzw. *A. Rosenfeld und A. C. Kak* [Kak88,Ros82] soll hier zunächst das Prinzip der Korrekturen für die Kategorie der strahlweisen Verfahren verdeutlichen. Der N -dimensionale Lösungsraum, in dem die Realisierung eines Bildes $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ gesucht wird, wird durch M Hyperflächen zerteilt, die durch das Gleichungssystem (5.142) gegeben sind. Gibt es eine eindeutige Lösung von (5.142) bzw. (5.146), so ergibt der Schnitt aller Hyperflächen einen einzigen Punkt, nämlich $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ der die Lösung darstellt.

Zur Illustration soll die Dimension des Problems auf $N = M = 2$ reduziert werden, das heißt, man sucht ein Bild aus zwei Pixeln und hat dafür Projektionen gemessen. Das dazugehörige Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 &= p_1 \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 &= p_2 \end{aligned} \tag{5.165}$$

In Abbildung 5.38 ist das iterative Lösungsschema graphisch nachzuvollziehen.

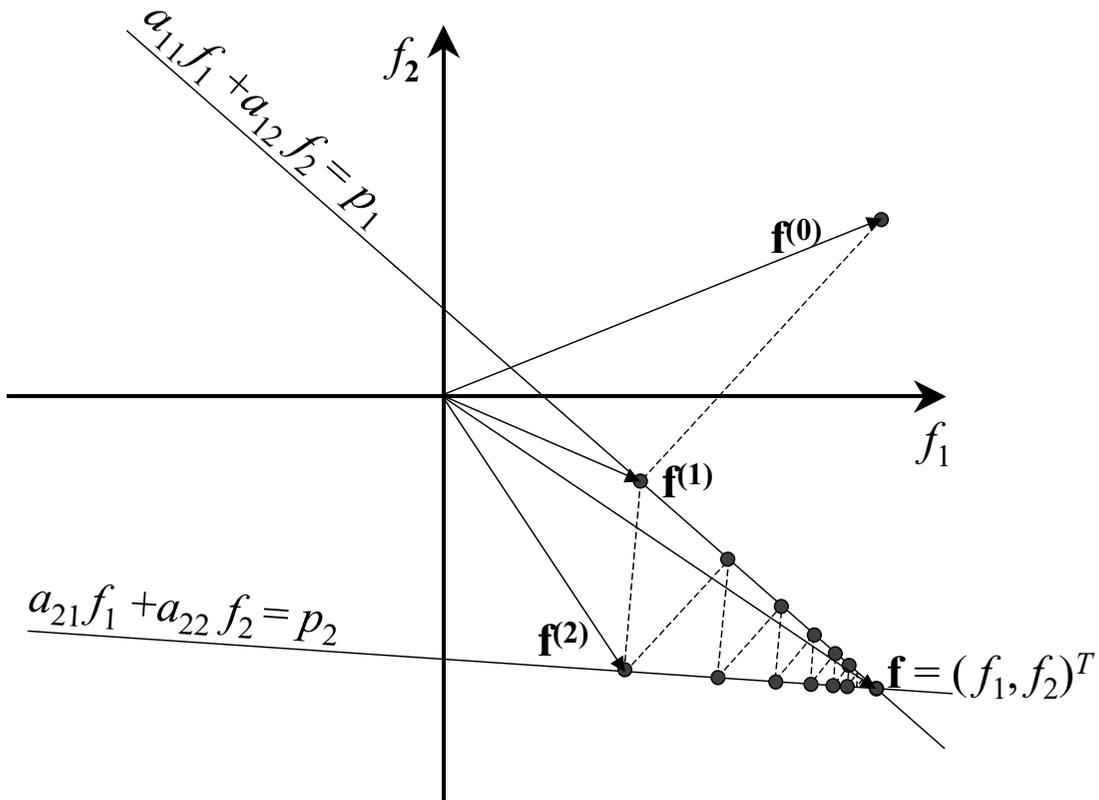


Abb. 5.38: Iterative Lösung des Gleichungssystems (5.165) nach [Kak88,Ros82]. Im 2-dimensionalen Lösungsraum bilden die einzelnen Gleichungen vom Gleichungssystem (5.165) Geraden, deren Schnittpunkt den Lösungsvektor $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, also die gesuchten Pixel des Bildes liefert.

Zunächst benötigt man ein initiales Bild $\mathbf{f}^{(0)}$, mit dem die Iteration gestartet werden soll. Dieses Bild könnte zum Beispiel aus einer rudimentären Rückprojektion kommen. Ein Bild, das dem Nullvektor $\mathbf{f}^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$ entspricht, erfüllt den Zweck aber ebenso. Diesen Vektor projiziert man senkrecht auf die erste Gerade, die den ersten Röntgenstrahl mit dem Projektionsergebnis p_1 darstellt, so dass man ein neues, verbessertes Bild $\mathbf{f}^{(1)}$ erhält. Dieses Bild projiziert man dann senkrecht auf die zweite Gerade. Damit erhält man ein wiederum verbessertes Bild, weil $\mathbf{f}^{(2)}$ wieder etwas näher am Schnittpunkt der Geraden liegt als seine beiden Vorgänger. Stehen die beiden Geraden (5.165) senkrecht aufeinander, so ist man mit nur zwei Schritten am Ziel. Dieses Verfahren konvergiert praktisch immer. Die einzige Ausnahme ist der Fall paralleler Geraden ohne Schnittpunkt. Physikalisch bedeutet dieser Fall aber, dass man zweimal in derselben Richtung gemessen hat und damit natürlich keine räumliche Information gewonnen werden kann. Mathematisch bedeutet dieser Fall, dass das Gleichungssystem singular weil linear abhängig ist.

Um zu einer Iterationsgleichung zu kommen, kann die Dualität (5.147) zwischen dem Matrixformalismus und der Rückprojektion helfen. Die Basisoperation ist dabei das Skalarprodukt zwischen einer bestimmten Zeile i der Systemmatrix \mathbf{A} also

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}). \quad (5.166)$$

und dem Lösungsvektor also dem Bild

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad (5.167)$$

nämlich

$$p_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j, \quad (5.168)$$

denn das ist gerade die Radontransformation für einen Projektionswert im Radonraum. Die Iterationsgleichung lautet dann [Kak88]

$$\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n-1)} - \frac{(\mathbf{a}_i \mathbf{f}^{(n-1)} - p_i)}{\mathbf{a}_i (\mathbf{a}_i)^T} (\mathbf{a}_i)^T, \quad (5.169)$$

wobei das Ergebnis (5.169) durch einfache lineare Algebra einzusehen ist. Für den Iterationsschritt $\mathbf{f}^{(n-1)} \rightarrow \mathbf{f}^{(n)}$ hat man nämlich nach dem Schnittpunkt $\mathbf{f}^{(n)}$ der beiden Geraden

$$a_{i1} f_1 + a_{i2} f_2 = p_i \quad (5.170)$$

und

$$\frac{f_2 - f_2^{(n-1)}}{f_1 - f_1^{(n-1)}} = \frac{a_{i2}}{a_{i1}} \quad (5.171)$$

zu suchen. Gleichung (5.171) stellt die jeweils in Abbildung 5.36 gestrichelt eingezeichnete Linie als Gerade in Punkt-Steigungs-Form dar, die senkrecht auf der in Hessescher Normalform gegebenen Projektionsgeraden (5.170) steht. Bringt man beide Gleichungen in dieselbe Form, so hat man das folgende Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} a_{i1} f_1 + a_{i2} f_2 &= p_i \\ -a_{i2} f_1 + a_{i1} f_2 &= -a_{i2} f_1^{(n-1)} + a_{i1} f_2^{(n-1)} \end{aligned} \quad (5.172)$$

Für die beiden neuen Bildelemente $(f_1, f_2)^T$, die ja die Komponenten des Vektors $\mathbf{f}^{(n)}$ sind, folgt somit

$$\begin{aligned} f_1 (a_{i1}^2 + a_{i2}^2) &= a_{i1} p_i - a_{i1} a_{i2} f_2^{(n-1)} + a_{i2}^2 f_1^{(n-1)} \\ f_2 (a_{i1}^2 + a_{i2}^2) &= a_{i2} p_i - a_{i1} a_{i2} f_1^{(n-1)} + a_{i1}^2 f_2^{(n-1)} \end{aligned} \quad (5.173)$$

oder weiter in Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{i1}^2 + a_{i2}^2} \begin{pmatrix} a_{i1} p_i - a_{i1} a_{i2} f_2^{(n-1)} + a_{i2}^2 f_1^{(n-1)} \\ a_{i2} p_i - a_{i1} a_{i2} f_1^{(n-1)} + a_{i1}^2 f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (5.174)$$

Addiert man zu beiden Komponenten geschickt eine Null, so sieht man

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{i1}^2 + a_{i2}^2} \begin{pmatrix} a_{i1}p_i - a_{i1}a_{i2}f_2^{(n-1)} + a_{i2}^2f_1^{(n-1)} + a_{i1}^2f_1^{(n-1)} - a_{i1}^2f_1^{(n-1)} \\ a_{i2}p_i - a_{i1}a_{i2}f_1^{(n-1)} + a_{i1}^2f_2^{(n-1)} + a_{i2}^2f_2^{(n-1)} - a_{i2}^2f_2^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (5.175)$$

und damit

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{(n-1)} + \frac{1}{a_{i1}^2 + a_{i2}^2} \begin{pmatrix} a_{i1}p_i - a_{i1}a_{i2}f_2^{(n-1)} - a_{i1}^2f_1^{(n-1)} \\ a_{i2}p_i - a_{i1}a_{i2}f_1^{(n-1)} - a_{i2}^2f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (5.176)$$

Verwendet man hier die Schreibweise der Skalarprodukte, so erhält man

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{(n-1)} + \frac{1}{\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T} (p_i - \mathbf{a}_i\mathbf{f}^{(n-1)}) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix} \quad (5.177)$$

und schließlich

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{(n-1)} - \frac{\mathbf{a}_i\mathbf{f}^{(n-1)} - p_i}{\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix}, \quad (5.178)$$

was exakt der Gleichung (5.169) entspricht, da $\mathbf{f}^{(n)} = (f_1, f_2)^T$. Die zentrale Idee der ART lässt sich auch folgendermaßen ausdrücken [Tof96]: Die Gleichung für die Projektion i ist in der n -ten Iteration erfüllt, das heißt

$$\mathbf{a}_i\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{a}_i\mathbf{f}^{(n-1)} - \frac{\mathbf{a}_i\mathbf{f}^{(n-1)} - p_i}{\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T} \mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T = p_i. \quad (5.179)$$

Gerne führt man einen heuristischen Relaxationsparameter λ in die Iterationsgleichung (5.169) ein, um die Konvergenz zu beschleunigen, so dass die Iterationsgleichung

$$\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n-1)} - \lambda_n \frac{(\mathbf{f}^{(n-1)}\mathbf{a}_i - p_i)}{\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i)^T} (\mathbf{a}_i)^T \quad (5.180)$$

lautet. Der optimale Wert von λ ist dabei abhängig vom Iterationsschritt n , den Sinogramm-Werten und den Abtastparametern. Allerdings kann experimentell nachgewiesen werden, dass eine einfache Abweichung vom Wert $\lambda_n = 1$ die Konvergenzgeschwindigkeit steigern kann [Her80].

Sieht man sich Abbildung 5.38 an, so ergibt sich die Frage, warum $\mathbf{f}^{(0)}$ gerade auf den Strahl $i = 1$ und nicht auf $i = 2$ projiziert wird. In der Tat ist das ein Zufall. Eine weit verbreitete Strategie ist, den Index i als gleichverteilte Zufallsvariable zu implementieren.

Übrigens ist hier leicht zu verstehen, dass das Gleichungssystem (5.165) genau eine Lösung besitzt, nämlich den Schnittpunkt der beiden Geraden. Kommt nur eine Projektion aus einer weiteren Richtung hinzu, so ergibt sich bei realen Daten, die mit Rauschen und Artefakten kontaminiert sind, typischerweise kein eindeutiger Schnittpunkt mehr. Abbildung 5.39 zeigt eine solche Situation. In diesem überbestimmten Gleichungssystem muss dann im Sinne der Gleichungen (5.148) bis (5.150) nach der Pseudolösung $\hat{\mathbf{f}}$ gesucht werden.

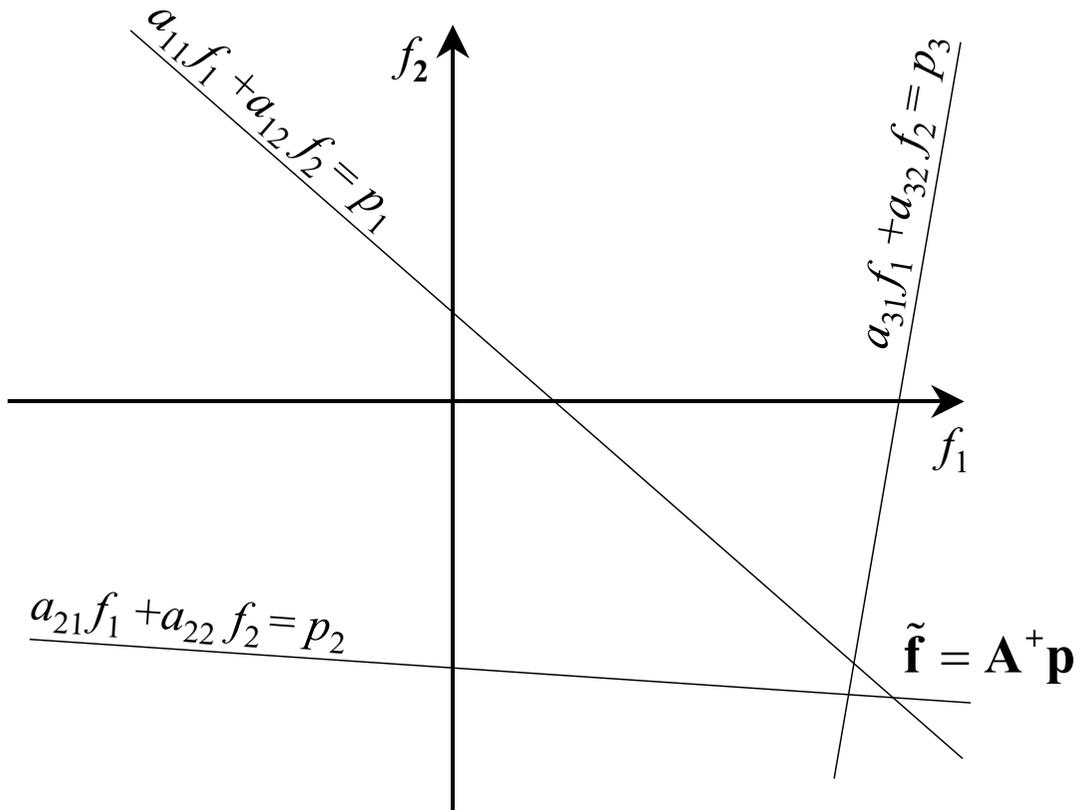


Abb. 5.39: In einem überbestimmten Gleichungssystem wird nach der Pseudolösung $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{p}$ gesucht, die eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate darstellt.

Nachdem das Prinzip der ART klar geworden ist, muss jetzt noch die Frage beantwortet werden, woher man die Systemmatrix \mathbf{A} erhält. Die Einträge in \mathbf{A} sind ja die Gewichte, definiert durch Gleichung (5.140), die den Beitrag jeden Pixels zur Schwächung widerspiegeln. In Abbildung 5.40 ist das Verfahren der nächsten Nachbarn zur Ermittlung der Gewichte a_{ij} schematisch dargestellt. Das Zentrum jedes Bildelements

$$f_j = f_{kN+l} \quad (5.181)$$

des $(N = n^2)$ -Pixel-Bildes habe eine quadratische Umgebung der Größe b^2 . Der Index der einzelnen Projektion läuft von $i = \{1, \dots, M\}$, wobei $M = N_p D$ die Gesamtzahl der Projektion aller Detektoren $d = \{1, \dots, D\}$ des Arrays und allen Richtungen $r = \{1, \dots, N_p\}$ bedeutet, das heißt es gilt

$$p_i = p_{rD+d}. \quad (5.182)$$

Den Abstand des Strahls ξ zum Pixelzentrum kann man durch

$$\xi' = \xi_d - (x_k \cos(\gamma_r) + y_l \sin(\gamma_r)) \quad (5.183)$$

berechnen. Für das Element a_{ij} ergibt sich nun folgende Vorschrift.

Wenn

$$|\xi' \cos(\gamma_r)| < \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad |\xi' \sin(\gamma_r)| < \frac{b}{2} \quad (5.184)$$

dann ist

$$a_{ij} = a_{rD+d, kN+l} = b. \quad (5.185)$$

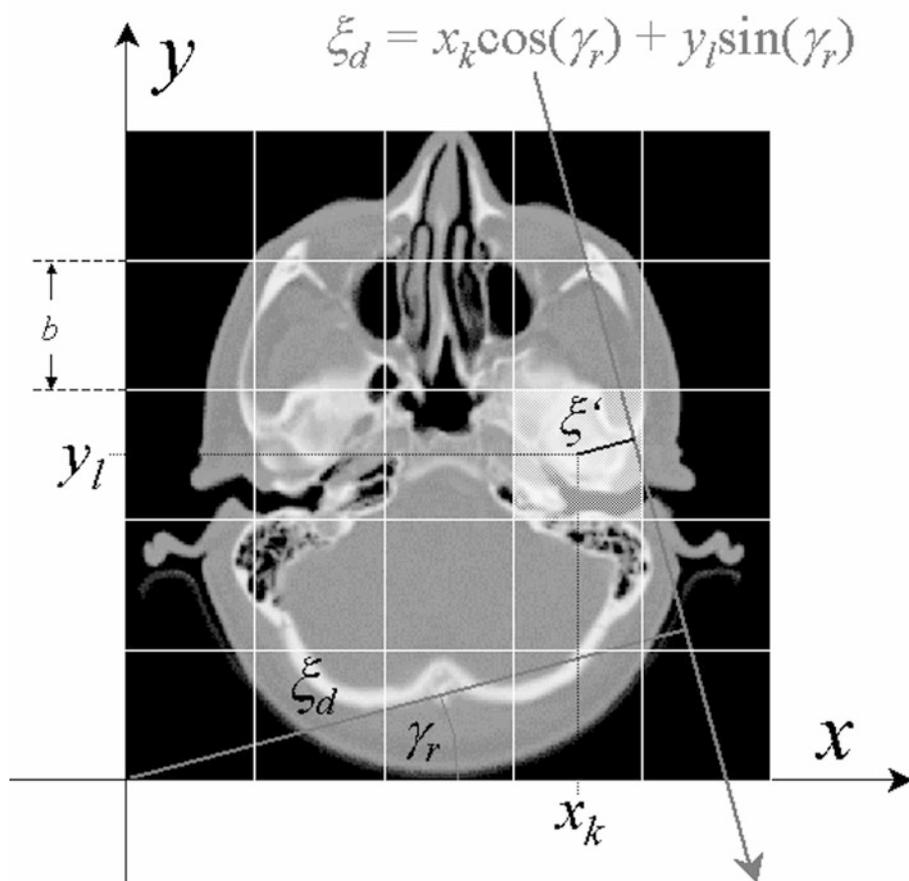


Abb. 5.40: Ermittlung der Gewichte a_{ij} mit dem Verfahren der nächsten Nachbarn. Die Projektionslinie wird in diesem Beispiel wieder als δ -Linie angenommen. Das Prinzip lässt sich aber leicht auf Linien endlicher Dicke $\Delta\xi$ übertragen. Gegenüber Abbildung 5.34 ist hier ein etwas feineres Bildraster vorgegeben.

Natürlich kommen auch Strategien höherer Ordnung in Frage. So kann man beispielsweise die Länge des Strahls durch das Pixel (x_k, y_l) betrachten [Tof96].

Genauso wie im vorherigen Kapitel soll auch hier mit einem konkreten Beispiel die Arbeitsweise der ART verdeutlicht werden. Dazu wird das Beispiel aus Abbildung 5.38 noch einmal herangezogen. Insgesamt liegt folgende Rekonstruktionsanweisung vor, die sich, wie in Schema 4 dargestellt, in vier Schritte aufteilen lässt.

Schema 4: Algebraische Rekonstruktion

1. Bestimmung eines Startbildes, einer initialen Schätzung:

$$\text{z.B. } \mathbf{f} = (0,0,0,0).$$

2. Berechnung von (Vorwärts-)Projektionen basierend auf der n-ten Schätzung

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{(n)}$$

3. Korrektur der Schätzung (i sei zufällig verteilt)

$$\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n-1)} - \frac{(\mathbf{a}_i \mathbf{f}^{(n-1)} - p_i)}{\mathbf{a}_i (\mathbf{a}_i)^T} (\mathbf{a}_i)^T$$

4. Weiter mit 2. solange bis das Verfahren für die einzelnen Pixel bei weiterer Iteration Änderungen größer einer festzulegenden Toleranzschwelle zeigt. Sonst: Ende der Iteration.

Für den ersten Durchlauf soll das Ergebnis hier explizit hingeschrieben werden. Im einzelnen bedeutet dies für das Beispiel aus Abbildung 5.38, dass man zunächst das Startbild bestimmen $\mathbf{f} = (0,0,0,0)$ und dann die Vorwärtsprojektionen berechnen muss (hierbei sei $i = 2$). Aus dem Vergleich mit der gemessenen Projektion erhält man dann den Korrekturterm und die erste Schätzung.

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \left(13 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.186)$$

In Matlab™ lässt sich der zentrale Inhalt der Iteration tatsächlich in einer Zeile programmieren:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} - ((\mathbf{a}(i,:) * \mathbf{f} - p(i)) / (\mathbf{a}(i,:) * \mathbf{a}(i,:)') * \mathbf{a}(i,:)); \quad (5.187)$$

Abbildung 5.41 links zeigt den ersten Korrekturschritt für das Ergebnis aus Gleichung (5.186). Die daraus berechnete erste Vorwärtsprojektion $\mathbf{p}^{(1)} = (6.5, 13, 0, 6.5, 6.5, 6.5)$ ist dann mit den tatsächlich gemessenen Projektionen zu vergleichen um erneut einen Korrekturterm zu bestimmen, der das Bild weiter verfeinert, so dass die Abweichungen zwischen den Vorwärtsprojektionen und den gemessenen Projektionen immer kleiner werden. In Abbildung 5.41 rechts ist das Ergebnis nach acht Iterationen zu sehen. Es ist nahezu identisch mit dem Ergebnis aus Gleichung (5.162).

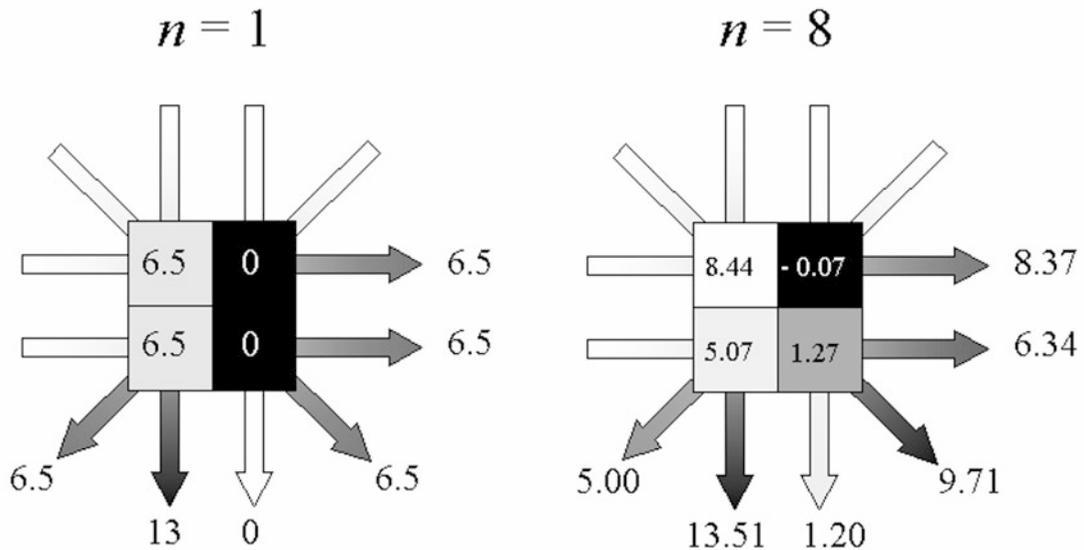


Abb. 5.41: Links: Erste Verfeinerung $\mathbf{f}^{(1)}$ des Bildes nach der Initialisierung mit $\mathbf{f}^{(0)} = (0,0,0,0)$. Daraus sind Projektionswerte in Vorwärtsprojektion zu berechnen und mit den tatsächlich gemessenen Projektionen zu vergleichen. Rechts: Nach schon 8 Iterationen erhält man ein Bild, das dem Original schon nahe kommt, dessen Vorwärtsprojektionen aber noch stark von der Vorgängeriteration abweichen.

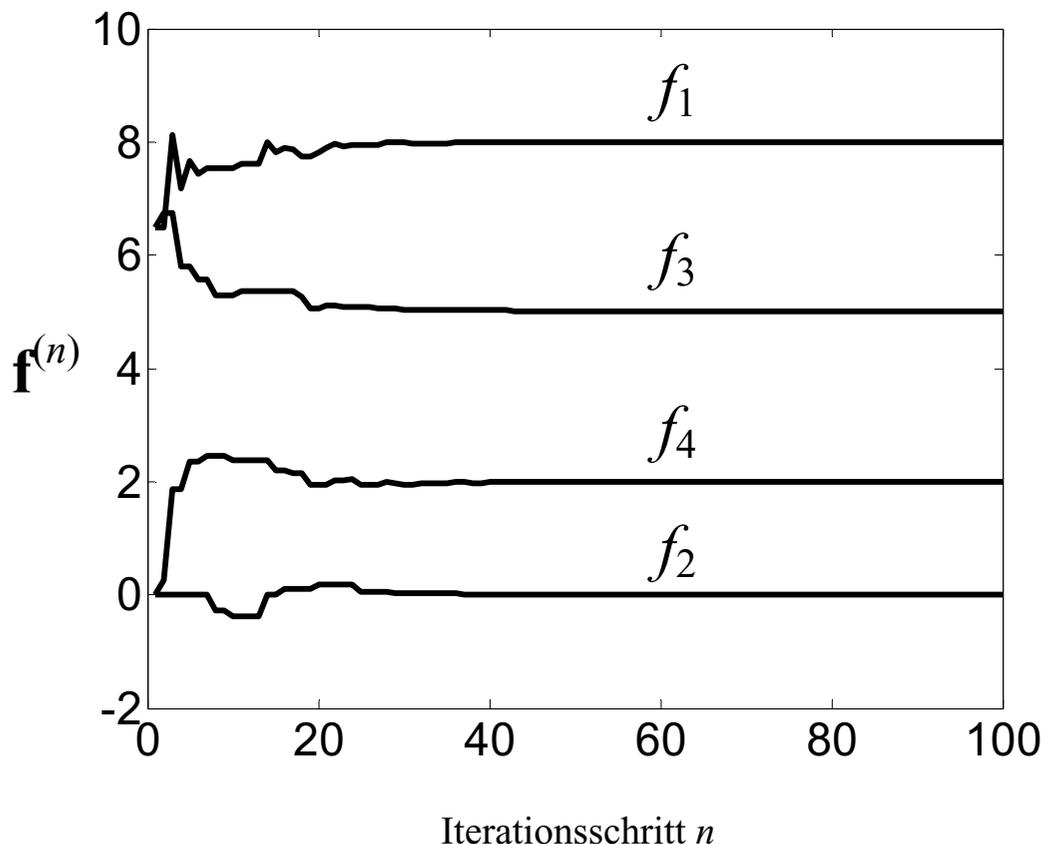


Abb. 5.42: Konvergenz der ART für das Beispiel aus Abbildung 5.36. Gezeigt sind die einzelnen Pixelwerte in den Iterationsschritten $n = 1$ bis $n = 100$.

Abbildung 5.42 zeigt das Konvergenzverhalten der Iteration auf dem Bild sehr gut. Aufgetragen sind die einzelnen Bildwerte $\mathbf{f}^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}, f_4^{(n)})$ über dem jeweiligen Iterationsschritt n . Man erkennt, dass alle Bildwerte gleichermaßen konvergieren. Bleibt zu sagen, dass die Methode durchaus rauschempfindlich ist. Je mehr Rauschen auf den Daten ist, desto schlechter ist das Konvergenzverhalten [Dov01].

5.14 Maximum-Likelihood-Verfahren

Bisher ist immer von Projektionen ausgegangen worden, die man als Linienintegrale modellieren konnte. Beim so genannten Maximum-Likelihood-Verfahren geht es nun um ein statistisches Schätzverfahren, bei dem das Bild gesucht wird, das unter Berücksichtigung der statistischen Schwankungen der realen Messwerte am besten zu den gemessenen Projektionswerten passt. Präziser formuliert fasst man dabei den Messvorgang als stochastischen Prozess auf, dessen Parameter \mathbf{f}^* aus einer gegebenen Stichprobe \mathbf{p} (das sind die Projektionswerte) geschätzt werden müssen. Es soll in den folgenden Abschnitten unterschieden werden, ob die Bildrekonstruktion für die Nuklearmedizin (\mathbf{f}^* ist dabei der Erwartungswert der Aktivität des radioaktiven Tracers) oder für die Computertomographie (\mathbf{f}^* ist dabei der Erwartungswert der Schwächung der Röntgenquanten) geschieht.

Dies ist ein vollkommen anderer Ansatz zur Bildrekonstruktion als die oben beschriebenen direkten Verfahren, der immer dann zum Einsatz kommt, wenn die Anzahl der Quanten auf den Detektoren sehr klein und damit das Sinogramm stark verrauscht ist. Werden in diesen Fällen die direkten Methoden zur Bildrekonstruktion verwendet, dann kann Rauschen das rekonstruierte Bild dominieren. Darüber hinaus ist der statistische Lösungsansatz gutmütiger gegenüber fehlenden Projektionen als die gefilterte Rückprojektion [Dem77,Bou96].

Die statistischen Verfahren werden, wie oben schon erwähnt, heute in der nuklearmedizinischen Bildgebung eingesetzt, denn PET und SPECT leiden tatsächlich unter einer sehr viel schlechteren Statistik als die Computertomographie. Da die gefilterte Rückprojektion der Computertomographie aber sehr viel schneller als die iterativen statistischen Verfahren und die Anzahl der Quanten sehr groß ist, besteht eigentlich kein kommerzieller Druck, iterative Verfahren auf die Computertomographie zu übertragen. Dennoch soll das Verfahren vorgestellt werden, denn mit der ständig steigenden Leistungsfähigkeit der Computer werden in naher Zukunft auch die iterativen Verfahren Rechenzeiten benötigen, die für den praktischen Einsatz attraktiv sind. Mit ihnen ergeben sich dann möglicherweise praktische Ansätze, die Dosis bei der Computertomographie weiter zu senken – was zu einer schlechteren Quantenstatistik führt und damit den Einsatz der algebraischen Verfahren sinnvoll werden lässt.

5.14.1 Maximum-Likelihood-Verfahren für die Emissionstomographie

Die von *L. A. Shepp und Y. Vardi* [She82] vorgestellte Methode³¹ geht davon aus, dass die Gammaquanten, die in die einzelnen Detektorelemente gelangen, einer Poissonstatistik gehorchen. Dies ist eine direkte Konsequenz der statistischen Eigenschaften des radioaktiven Zerfalls und kann ganz ähnlich wie die Prozesse in Abschnitt 2.4.1 motiviert werden [Eps03]. Die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit im Objektpixel f_j stellt eine poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert f_j^* dar.

³¹ Dieser Abschnitt 5.14.1 lehnt sich an den roten Faden der Arbeit von *N. Schramm* [Sch01], in der das Verfahren für die SPECT-Rekonstruktion formuliert ist.

Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl f_j von Zerfällen bei einem Aktivitätswert von f_j^* zu messen, kann also mit

$$P(f_j) = \frac{(f_j^*)^{f_j}}{f_j!} e^{-f_j^*}. \quad (5.188)$$

modelliert werden. Jede Linearkombination

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j = p_i \quad (5.189)$$

der N Bildpunkte, mit dem Erwartungswert

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* = p_i^*, \quad (5.190)$$

wobei die Bildpunkte die statistisch unabhängigen Aktivitäten f_j sind, ist wiederum poisson-verteilt und statistisch unabhängig, so dass für die M Projektionswerte p_i der Gleichung (5.189) ebenso die Poissonverteilung

$$P(p_i) = \frac{(p_i^*)^{p_i}}{p_i!} e^{-p_i^*} \quad (5.191)$$

gilt. Die Verbundwahrscheinlichkeit aller Projektionswerte, das ist die Wahrscheinlichkeit, die Projektion \mathbf{p} bei gegebenem Erwartungswert \mathbf{p}^* zu beobachten, erhält man durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten, so dass gilt

$$P(\mathbf{p} | \mathbf{p}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{(p_i^*)^{p_i}}{p_i!} e^{-p_i^*}. \quad (5.192)$$

Setzt man hier Gleichung (5.190) ein, so erhält man

$$P(\mathbf{p} | \mathbf{p}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right)^{p_i}}{p_i!} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} = P(\mathbf{p} | \mathbf{f}^*). \quad (5.193)$$

Nun fasst man Gleichung (5.193) nicht mehr als Funktion der Projektionsmessung \mathbf{p} auf, die man ja nicht ändern kann, sondern als Funktion der variablen Verteilung der Erwartungswerte der Aktivitäten

$$L(\mathbf{f}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right)^{p_i}}{p_i!} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*}. \quad (5.194)$$

Die Gleichung (5.194) ist die so genannte Likelihood-Funktion. Die zentrale Idee des Maximum-Likelihood-Verfahrens ist es nun, den Erwartungswert der Aktivitäten dergestalt zu variieren, dass die Likelihood-Funktion L maximal wird. Die Verteilung \mathbf{f}^* , für die L ihr Maximum annimmt, wird als Maximum-Likelihood-Lösung des algebraischen Rekonstruktionsproblems bezeichnet und spiegelt die wahrscheinlichste Lösung wider.

Durch Logarithmierung von L vereinfacht sich Gleichung (5.194) zu

$$l(\mathbf{f}^*) = \ln(L(\mathbf{f}^*)) = \sum_{i=1}^M \left(p_i \ln \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right) - \ln(p_i!) - \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right). \quad (5.195)$$

$l(\mathbf{f}^*)$ bezeichnet man als Log-Likelihood-Funktion. Die Logarithmierung ist möglich, da der Logarithmus eine streng monotone Funktion ist und daher die Lage des Maximums nicht verändert wird. Gesucht ist nun also

$$\mathbf{f}_{\max}^* = \max_{\mathbf{f}^* \in \Omega} \{l(\mathbf{f}^*)\}, \quad (5.196)$$

wobei Ω die Menge der möglichen Lösungen bezeichnet. Notwendige Bedingung für das Maximum von $l(\mathbf{f}^*)$ ist das Verschwinden der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} &= \sum_{i=1}^M \left(p_i \frac{\partial \left(\ln \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right) \right)}{\partial f_r^*} - a_{ir} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - a_{ir} \right) = \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - \sum_{i=1}^M a_{ir}. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Das heißt, insgesamt muss der Ausdruck

$$\frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} = \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - \sum_{i=1}^M a_{ir} = 0 \quad (5.198)$$

Null werden. Hinreichende Bedingung für ein globales Maximum ist die Konkavität der zu maximierenden Funktion. Diese Bedingung kann man mit der Hessematrix überprüfen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^* \partial f_s^*} &= \sum_{i=1}^M \left(p_i a_{ir} \frac{\partial \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right)^{-1} \right)}{\partial f_s^*} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{-p_i a_{ir}}{\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right)^{-2}} a_{is} \right) = - \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir} a_{is}}{\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right)^{-2}} . \end{aligned} \quad (5.199)$$

Die symmetrische Hessematrix ist negativ semidefinit. Damit ist $l(\mathbf{f}^*)$ konkav und der gefundene Extremwert tatsächlich ein globales Maximum. Damit sind auch die so genannten *Kuhn-Tucker*-Bedingungen für jedes j gegeben [She82], das heißt es gilt

$$f_j^* \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_j^*} \Big|_{\mathbf{f}_{\max}^*} = 0 \quad \text{für alle } j \text{ für die } f_j^* > 0 \quad (5.200)$$

und

$$\frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_j^*} \Big|_{\mathbf{f}_{\max}^*} \leq 0 \quad \text{für alle } j \text{ für die } f_j^* = 0 . \quad (5.201)$$

Die erste *Kuhn-Tucker*-Bedingung sichert, dass die Aktivitätswerte nicht negativ werden und führt gleichzeitig auf ein Iterationsschema. Wendet man Gleichung (5.200) nämlich auf Gleichung (5.198) an, so erhält man

$$f_r^* \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} = f_r^* \left(\sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - \sum_{i=1}^M a_{ir} \right) = 0 \quad (5.202)$$

also

$$f_r^* \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - f_r^* \sum_{i=1}^M a_{ir} = 0 \quad (5.203)$$

und somit

$$f_r^* = \frac{f_r^*}{\sum_{i=1}^M a_{ir}} \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} . \quad (5.204)$$

Es wird also der Schnittpunkt zwischen einer Geraden mit der Steigung Eins und dem Funktional auf der rechten Seite von Gleichung (5.204) gesucht. Diesen Schnittpunkt erhält man mit einer Fixpunktiteration

$$f_r^{*(n+1)} = \frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir}} \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}}, \quad (5.205)$$

die gleichzeitig die Iterationsvorschrift für die Bildrekonstruktion darstellt. Gleichung (5.205) wird *Expectation Maximation* (EM-Algorithmus) genannt. Die Idee dabei ist, dass in jedem Schritt $n \rightarrow n + 1$ angenommen wird, $f_r^{*(n)}$ sei der gesuchte Wert für die Aktivität am Bildpunkt r . In einer Vorwärtsprojektion

$$p_i' = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}, \quad (5.206)$$

werden dann im Nenner von Gleichung (5.205) die daraus resultierenden – also *erwarteten* – Projektionswerte in den Detektoren berechnet. Diese werden mit den tatsächlich gemessenen Projektionswerten p_i verglichen. Die sich daraus ergebende, multiplikative Korrektur der gesuchten Aktivitätswerte an allen Bildpunkten führt zu einem neuen, verbesserten Bild. Die Log-Likelihood-Funktion (5.195) wird bei jedem Schritt $n \rightarrow n + 1$ vergrößert, durch die Iteration (5.205) also insgesamt *maximiert*.

Als Initialisierung der Iteration hat sich die Gleichverteilung der mittleren Projektionssumme

$$f_j^{*(0)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p_i, \text{ für alle } j = \{1, \dots, N\} \quad (5.207)$$

als brauchbar herausgestellt. Abbildung 5.43 zeigt die Konvergenz des Verfahrens für das Beispiel aus Abbildung 5.36. Gleichung (5.205) stellt ein einfaches Gradientenverfahren dar [Lan87]. Dies erkennt man, wenn geschickt eine Null auf der rechten Seite von Gleichung (5.205) addiert wird, also

$$f_r^{*(n+1)} = f_r^{*(n)} + \frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir}} \left\{ \sum_{i=1}^M \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}} - \sum_{i=1}^M a_{ir} \right\}, \quad (5.208)$$

wobei der Klammerausdruck gerade Gleichung (5.198) entspricht, das heißt

$$f_r^{*(n+1)} = f_r^{*(n)} + \frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir}} \left\{ \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} \right\}, \quad (5.209)$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{f}^{*(n+1)} = \mathbf{f}^{*(n)} + \mathbf{D}(\mathbf{f}^{*(n)}) \text{grad}(l(\mathbf{f}^*)). \quad (5.210)$$

Dabei ist

$$\mathbf{D}(\mathbf{f}^{*(n)}) = \text{diag} \left(\frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir}} \right) \quad (5.211)$$

eine Diagonalmatrix.

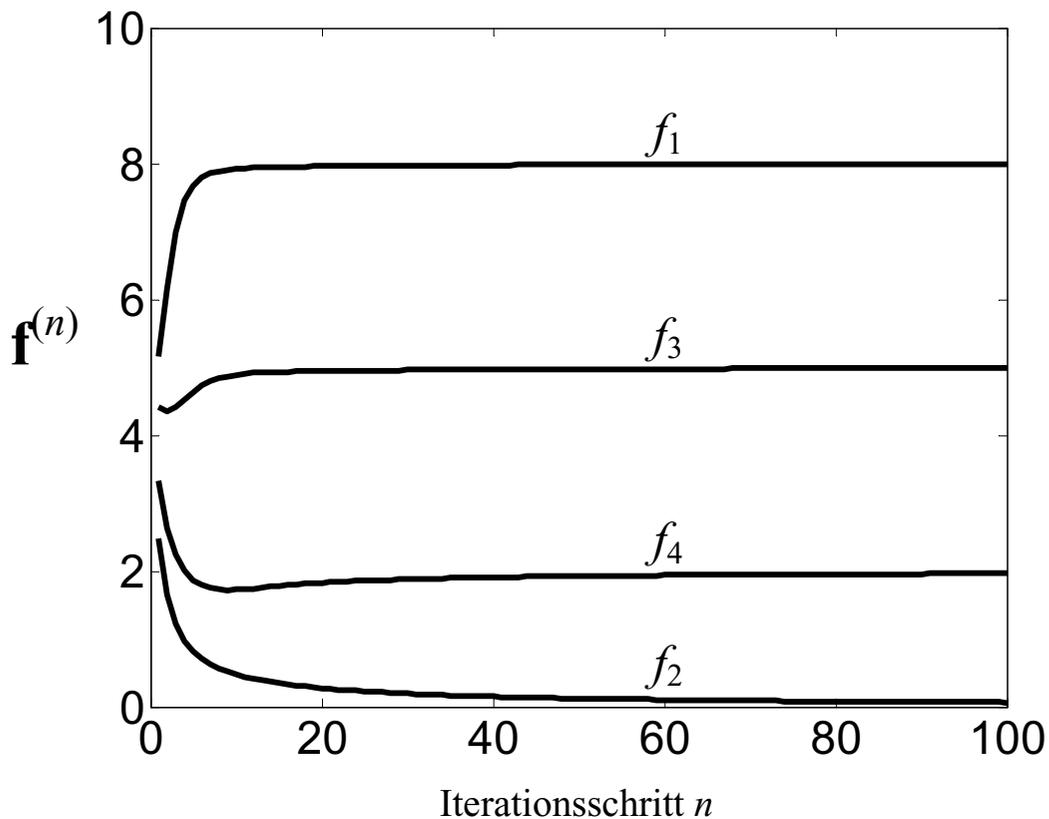


Abb. 5.43: Konvergenz des Maximum-Likelihood-Verfahrens für das Beispiel aus Abbildung 5.36. Gezeigt sind die einzelnen Pixelwerte in den Iterationsschritten $n = 1$ bis $n = 100$.

Im Gegensatz zur Iteration (5.169) tauchen keine negativen Bildwerte im Verlauf der Iteration mehr auf. Das Schema 5 fasst noch einmal die einzelnen Schritte zusammen, die bei der Realisierung zu implementieren sind. In dieser Übersicht wird klar, dass der Rechenaufwand verglichen mit der gefilterten Rückprojektion sehr viel größer ist.

Schema 5: Maximum-Likelihood-Verfahren in der Nuklearmedizin

1. Bestimmung eines Startbildes, d.h. einer initialen Schätzung:

$$f_j^{*(0)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p_i, \text{ für alle } j = \{1, \dots, N\}.$$

2. Berechnung einer Normalisierung

$$s_r = \sum_{i=1}^M a_{ir}$$

3. Berechnung von (Vorwärts-)Projektionen basierend auf der (n-1)ten Schätzung

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A} \mathbf{f}^{(n-1)}$$

4. Berechnung der relativen Abweichung zwischen der gemessenen Projektion p_i und der Vorwärtsprojektion basierend auf der (n-1)ten Schätzung

$$p_i^{rel} = \frac{p_i}{p_i'}$$

5. Rückprojektion der relativen Abweichung der Projektionen in den Bildbereich

$$\mathbf{f}^{back} = \mathbf{A}^T \mathbf{p}^{rel}$$

6. Für jedes Pixel wird die aktuelle Schätzung (n-1) mit der Rückprojektion der relativen Abweichung multipliziert und mit der Normalisierung aus Schritt 2. gewichtet

$$f_r^{(n)} = \frac{f_r^{(n-1)} f_r^{back}}{s_r}$$

7. Weiter mit 3. solange wie das Verfahren für die einzelnen Pixel bei weiterer Iteration Änderungen größer einer festzulegenden Toleranzschwelle liefert. Sonst: Ende der Iteration.

Die wichtigsten Eigenschaften des Maximum-Likelihood-Verfahrens, die sich aus der Iterationsformel (5.205) ergeben, sind [Sch01]:

- Positivität: Es gilt

$$f_j^{*(n)} \geq 0 \quad (5.212)$$

für alle Bildpunkte j und alle Iterationsschritte n , falls $f_j^{*(0)} \geq 0$.

- Der Algorithmus ist normierend, das heißt es gilt

$$\sum_{i=1}^M a_{ij} f_j^{*(n)} = \sum_{j=1}^N \left(f_j^{*(n)} \sum_{i=1}^M a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^M p_i \quad (5.213)$$

für alle Iterationsschritte $n > 1$.

- Monotone Maximierung von $L(\mathbf{f}^*)$:

$$L(\mathbf{f}^{*(n+1)}) \geq L(\mathbf{f}^{*(n)}) \quad (5.214)$$

wobei die Gleichheit nur für $L(\mathbf{f}^{*(n)}) = \max_{\mathbf{f}^* \in \Omega} \{L(\mathbf{f}^*)\}$ gilt.

5.14.2 Maximum-Likelihood-Verfahren für die Computertomographie

Bei der Computertomographie wird die Projektionssumme (5.189) nicht direkt gemessen, denn man hat es nicht mit Gammaquanten zu tun, die im Inneren des Körpers entstehen. Die Rohdaten sind vielmehr die Röntgenquanten, die in der Röntgenröhre außerhalb des Körpers erzeugt werden, beim Durchgang durch den Körper exponentiell geschwächt werden und nach dieser Abschwächung den Detektor erreichen. Wie in Abschnitt 2.4.1 gezeigt wurde, ist die Anzahl der in der Röntgenröhre erzeugten Quanten eine poissonverteilte Zufallsvariable. Betrachtet man die Absorption bzw. Streuung von Röntgenquanten in einem Pixel j als Zufallsprozess, so gehorcht die Anzahl der Quanten, die nach dem Durchqueren des Pixels pro Zeiteinheit in den Detektor gelangen, ebenfalls einer Poissonstatistik³². Die Wahrscheinlichkeit für den Absorptions- bzw. Streuvorgang ist nach Gleichung (2.11) dabei proportional zum Schwächungskoeffizienten f_j , das heißt, die relative Abschwächung der Intensität durch das Pixel j ist bei konstant angenommener Wegstrecke durch das Pixel

$$\frac{\Delta I}{I} \propto -f_j. \quad (5.215)$$

Wie im vorhergehenden Kapitel ist es wieder die absolute Anzahl der Quanten im Detektor i , die eine Poissonverteilung aufweisen. Da die Anzahl der Röntgenquanten proportional zur Intensität der Strahlung ist, kann ausgehend von Gleichung (2.15) geschrieben werden

$$I_i \propto n_i^* = n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*}. \quad (5.216)$$

Die Quantenanzahl n_0 , die von der Röntgenröhre erzeugt wird, kann zunächst als durch Kalibrierung bekannt angenommen werden. f_j^* sind dabei die Erwartungswerte der Schwächungskoeffizienten. Man muss die zu lösende Aufgabe für die Computertomographie nun also für die Anzahl der Röntgenquanten im Detektor i formulieren. Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl n_i bei einem Erwartungswert für die Quantenanzahl n_i^* zu messen, kann als Poissonverteilung

³² In Abschnitt 2.4.2 ist dargelegt, dass kaskadierte Poissonprozesse am Ende wieder eine Poissonverteilung besitzen.

$$P(n_i) = \frac{(n_i^*)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_i^*} \quad (5.217)$$

modelliert werden, wobei die n_i wieder statistisch unabhängig sind.

Die Verbundwahrscheinlichkeit aller Messwerte für die Röntgenquanten, das ist die Wahrscheinlichkeit, die Anzahl \mathbf{n} bei gegebenem Erwartungswert \mathbf{n}^* zu beobachten, erhält man durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten, so dass gilt

$$P(\mathbf{n} | \mathbf{n}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{(n_i^*)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_i^*}. \quad (5.218)$$

Setzt man hier Gleichung (5.216) ein, so erhält man

$$P(\mathbf{n} | \mathbf{n}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{\left(n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*}} = P(\mathbf{n} | \mathbf{f}^*). \quad (5.219)$$

Nun fasst man Gleichung (5.219) nicht mehr als Funktion der Anzahl der Röntgenquanten \mathbf{n} auf, die man ohnehin nicht ändern kann, sondern als Funktion der variablen Verteilung der Erwartungswerte der Schwächungskoeffizienten

$$L(\mathbf{f}^*) = \prod_{i=1}^M \frac{\left(n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right)^{n_i}}{n_i!} e^{-n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*}}. \quad (5.220)$$

Die Gleichung (5.220) ist die Likelihood-Funktion für die Computertomographie [And00]. Nun verwendet man analog zum vorhergehenden Abschnitt die zentrale Idee des Maximum-Likelihood-Verfahrens, nämlich den Erwartungswert der Schwächungskoeffizienten dergestalt zu variieren, dass die Likelihood-Funktion L maximal wird. Die Verteilung \mathbf{f}^* , für die L ihr Maximum annimmt, ist dann wieder die Maximum-Likelihood-Lösung des algebraischen Rekonstruktionsproblems und spiegelt die wahrscheinlichste Lösung wider.

Durch Logarithmierung von L vereinfacht sich Gleichung (5.220) zu

$$\begin{aligned} l(\mathbf{f}^*) &= \ln(L(\mathbf{f}^*)) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(\ln \left(n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right)^{n_i} - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right) \end{aligned} \quad (5.221)$$

$l(\mathbf{f}^*)$ bezeichnet man wieder als Log-Likelihood-Funktion, wobei man nach

$$\mathbf{f}_{\max}^* = \max_{\mathbf{f}^* \in \Omega} \{l(\mathbf{f}^*)\}. \quad (5.222)$$

sucht und Ω die Menge der möglichen Lösungen bezeichnet. Notwendige Bedingung für das Maximum von $l(\mathbf{f}^*)$ ist das Verschwinden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial \left(n_i \ln(n_0) - n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right)}{\partial f_r^*} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(-\frac{\partial \left(n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right)}{\partial f_r^*} - \frac{\partial \left(n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right)}{\partial f_r^*} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(-n_i a_{ir} + n_0 a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right) = n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir}. \end{aligned} \quad (5.223)$$

Das heißt insgesamt muss der Ausdruck

$$\frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} = n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} = 0 \quad (5.224)$$

wieder Null werden. Hinreichende Bedingung für ein Maximum von $l(\mathbf{f}^*)$ ist die Konkavität der zu maximierenden Funktion. Diese Bedingung kann man mit der Hessematrix überprüfen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^* \partial f_s^*} &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial \left(n_0 a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - n_i a_{ir} \right)}{\partial f_s^*} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(n_0 a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} (-a_{is}) \right) = -n_0 \sum_{i=1}^M \left(a_{is} a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right). \end{aligned} \quad (5.225)$$

Die symmetrische Hessematrix ist auch hier negativ semidefinit. Damit ist $l(\mathbf{f}^*)$ konkav und der gefundene Extremwert hinreichend als ein globales Maximum identifiziert, so dass auch die *Kuhn-Tucker*-Bedingungen gegeben sind. Die erste *Kuhn-Tucker*-Bedingung sichert, dass die Schwächungswerte nicht negativ werden und führt gleichzeitig wieder auf ein Iterationschema. Wendet man Gleichung (5.200) nämlich auf Gleichung (5.224) an, so erhält man

$$f_r^* \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} = f_r^* \left(n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} \right) = 0 \quad (5.226)$$

also

$$f_r^* n_0 \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} - f_r^* \sum_{i=1}^M n_i a_{ir} = 0 \quad (5.227)$$

und somit

$$f_r^* = \frac{f_r^* n_0}{\sum_{i=1}^M n_i a_{ir}} \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} . \quad (5.228)$$

Es wird also der Schnittpunkt zwischen einer Geraden mit der Steigung Eins und dem Funktional auf der rechten Seite von Gleichung (5.204) gesucht. Diesen Schnittpunkt erhält man mit einer Fixpunktiteration

$$f_r^{*(n+1)} = \frac{f_r^{*(n)} n_0}{\sum_{i=1}^M n_i a_{ir}} \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}} , \quad (5.229)$$

die gleichzeitig die Iterationsvorschrift für die Bildrekonstruktion darstellt. Ruft man sich ins Gedächtnis, dass die Anzahl n_i der Röntgenquanten im Detektor i proportional zur Intensität der Röntgenstrahlung ist, also

$$n_i = n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j} \quad (5.230)$$

gilt, dann kann man Gleichung (5.229) schreiben als

$$f_r^{*(n+1)} = f_r^{*(n)} \frac{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}}}{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i}} , \quad (5.231)$$

wobei die gemessenen Projektionswerte

$$p_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j \quad (5.232)$$

hier nun exponentiell einfließen. Gleichung (5.231) ist wieder so zu verstehen, dass in jedem Schritt $n \rightarrow n + 1$ angenommen wird, $f_r^{*(n)}$ sei der gesuchte Wert für die Röntgenabschwächung am Bildpunkt r . Daraus lassen sich die Anzahlen der erwarteten Röntgenquanten

$$n_i^{(n)} \propto e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}} \quad (5.233)$$

in den Detektoren berechnen. Diese werden mit den tatsächlich gemessenen Röntgenquanten

$$n_i \propto e^{-p_i} \quad (5.234)$$

als gewichteter Quotient miteinander verglichen. Der Quotient in Gleichung (5.231) verbessert als multiplikative Korrektur das Bild in jeder Iteration, da die Log-Likelihood-Funktion (5.221) bei jedem Schritt vergrößert wird.

Um Gleichung (5.229) wie im vorhergehenden Abschnitt in die Form

$$\mathbf{f}^{*(n+1)} = \mathbf{f}^{*(n)} + \mathbf{D}(\mathbf{f}^{*(n)}) \text{grad}(l(\mathbf{f}^*)) \quad (5.210)$$

zu bringen, muss die Diagonalmatrix (5.211) der Emissionstomographie hier durch den entsprechenden Ausdruck für die Computertomographie

$$\mathbf{D}(\mathbf{f}^{*(n)}) = \text{diag} \left(\frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i}} \right) \quad (5.235)$$

ersetzt werden. Damit kann Gleichung (5.231) analog als

$$\begin{aligned} f_r^{*(n+1)} &= f_r^{*(n)} + \frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i}} \left\{ \frac{\partial l(\mathbf{f}^*)}{\partial f_r^*} \right\} \\ &= f_r^{*(n)} + \frac{f_r^{*(n)}}{\sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i}} \left\{ \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^{*(n)}} - \sum_{i=1}^M a_{ir} e^{-p_i} \right\} \end{aligned} \quad (5.236)$$

geschrieben werden [Lan95].

Leider ist die einfache Fixpunktiteration (5.231) numerisch sehr instabil, so dass Methoden zur Regularisierung des inversen Problems verwendet werden müssen. Diese Methoden sollen im nächsten Abschnitt kurz dargestellt werden.

5.14.3 Regularisierung des inversen Problems

Der Maximum-Likelihood-Ansatz (5.222) zeigt sich oft als sehr instabil und kann Oszillationen produzieren, die die Suche nach den optimalen Parametern \mathbf{f}^* erschweren. Ein Ansatz, diesem Problem zu begegnen, ist das Einführen eines Regularisierungsterms in die Log-Likelihood-Funktion. Ein so genannter Strafterm steuert dann den Kompromiss zwischen der Auflösung und dem Rauschen des Bildes. Im Kapitel der technischen Realisierungen wird besprochen, dass dieser Kompromiss auch bei der Methode der gefilterten Rückprojektion zu suchen ist. Dabei wird von der linearen Gewichtung des Spektrums des Projektionsintegrals (5.66) abgewichen und die hohen Frequenzen gedämpft. Durch diese Regularisierung reduziert sich das Rauschen im Bild – jedoch ebenso die Ortsauflösung.

Der Regularisierungsterm verbessert die Konditionierung des inversen Problems, so dass iterative Optimierungsverfahren schneller zum Ziel führen. Darüber hinaus ist es möglich, bestimmte gewünschte Eigenschaften des Bildes durch die Regularisierung zu modellieren.

Die Schätzung des Bildes für das regularisierte Problem ist formal in additiver Erweiterung des Ausdrucks (5.222) als

$$\mathbf{f}_{\max}^* = \max_{\mathbf{f}^* \in \Omega} \{ \ln(L(\mathbf{f}^*)) + \ln(R(\mathbf{f}^*)) \} \quad (5.237)$$

gegeben, wobei R das Regularisierungsfunktional darstellt und Ω die Menge der möglichen Lösungen bezeichnet, die jetzt gegenüber Gleichung (5.222) durch den Strafterm eingeschränkt ist. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, dass ein geeigneter Regularisierungsparameter gefunden werden muss, der den Einfluss des Strafterms R sinnvoll steuert.

Hier soll kurz die Bayessche Sichtweise dargestellt werden, bei der die Regularisierung als *a priori* Modell aufgefasst wird. Ein typisches Bayes-Schätzverfahren ist das so genannte *maximum-a-posteriori*- oder kurz MAP-Verfahren. Für dieses Verfahren werden zwei statistische Modelle benötigt. Das eine Modell beschreibt den physikalischen Prozess der Emission von Gammaquanten (bei der Emissionstomographie), das heißt

$$p_i \text{ gehorcht Poisson} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* \right), \quad (5.238)$$

bzw. der Transmission von Röntgenquanten (bei der Computertomographie), das heißt

$$n_i \text{ gehorcht Poisson} \left(n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right). \quad (5.239)$$

Das andere Modell – eben das *a-priori*-Modell – ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Originalbildes. Das erste Modell ist der ursprüngliche Maximum-Likelihood-Term. Die Qualität des MAP-Verfahrens hängt nun von der Wahl des zweiten Modells ab. Die Wahl des *a-priori*-Modells erscheint zunächst als große Herausforderung, da Wissen über das zu rekonstruierende Bild vorausgesetzt wird und mathematisch als $R(\mathbf{f}^*)$ – den so genannten *Prior* – in Gleichung (5.237) formuliert werden muss. Glücklicherweise hat sich aber gezeigt, dass weder großskaliges noch komplexes Wissen über das Bild nötig ist, um die gewünschte Regularisierung zu erzielen [Gre90]. Um zum Beispiel Rauschen im rekonstruierten Bild zu unterdrücken, ist es plausibel zu fordern, dass die Grauwerte benachbarter Pixel im Mittel nicht stark voneinander abweichen. Das *a-priori*-Wissen beschränkt sich dabei auf die unmittelbare Nachbarschaft und ist in einfacher Form mathematisch zu formulieren.

In der Praxis wird das Bild sehr häufig als Markoffsches Zufallsfeld (MRF)³³ modelliert. Bei solchen stochastischen Prozessen hängt die bedingte Verteilung $P(f_n | f_1, \dots, f_{n-1})$ nur von den Grauwerten der unmittelbaren Nachbapixel ab³⁴. Ein wichtiger Ausdruck ist dabei die so genannte Gibbs-Verteilung

³³ MRF: Markoff Random Field

³⁴ Insofern ist der Markoff-Prozess das stochastische Äquivalent zur Differentialgleichung [Leh97].

$$R(\mathbf{f}^*) = \frac{1}{Z} e^{-\lambda^q \sum_{c \in C} V_c(\mathbf{f}^*)}, \quad (5.240)$$

denn ein Zufallsfeld ist genau dann ein Markoffsches Zufallsfeld, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Funktion (5.240) gehorcht. Z ist dabei eine Normierungskonstante³⁵, $V_c(\mathbf{f}^*)$ eine Potentialfunktion einer lokalen Gruppe von Pixeln c (so genannter Cliques) und C bezeichnet die Menge aller Cliques [Leh97]. Die Cliques einer 4er und einer 8er Nachbarschaft im zweidimensionalen Bild sind in Abbildung 5.44 exemplarisch dargestellt.

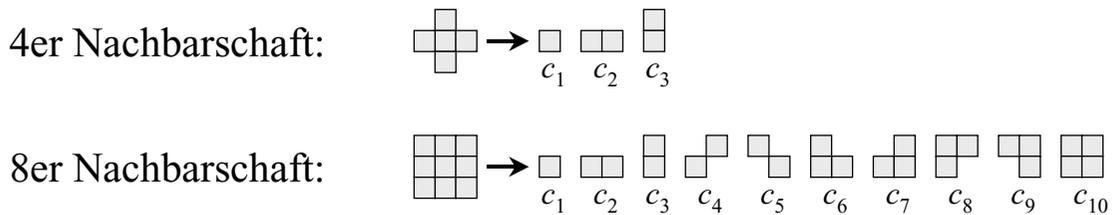


Abb. 5.44: Die Cliques einer 4er und einer 8er Nachbarschaft zur Definition eines Gibbs-Potentials (nach [Leh97]).

Der Parameter λ^q stellt den Regularisierungsparameter³⁶, also die Steuergröße für den Einfluss der Regularisierung dar, wobei $1 \leq q \leq 2$. In [And00] sind einige Potentialfunktionen angegeben. Eine sehr einfache Funktion für $q = 2$ ist das Potential, das die Quadrate der Differenz benachbarter Pixel $d = (f_i - f_j)$ bestraft, also

$$V_{c_k}(d) = d^2. \quad (5.241)$$

Dieses Potential, das so genannte Gauß-MRF, unterdrückt das Rauschen, bestraft allerdings auch scharfe Kanten im Bild. Um den Einfluss der Regularisierung besser steuern zu können, definiert man

$$R(\mathbf{f}^*) = \frac{1}{Z} e^{-\lambda^q \sum_{\{j,k\} \in C} w_{j,k} |f_j - f_k|^q} \quad (5.242)$$

als Gibbs-Verteilung des generalisierten Gauß-MRF (GGMRF) [Bou96]. Dabei ist $w_{j,k}$ eine Gewichtung, die die jeweilige Nachbarschaftsbeziehung der Clique bewertet (zum Beispiel $w_{j,k} = 1$ für orthogonale Nachbarn und $w_{j,k} = 2^{-1/2}$ für diagonale Nachbarn [Gre90]). Kleine Werte für q erlauben hierbei schärfere Kanten in der Bildrekonstruktion.

Natürlich kann man bei geschickter Wahl der Potentialfunktion auch kantenerhaltende Regularisierungen finden. Die sich aus Gleichung (5.242) ergebende Log-Likelihood-Funktion für die Computertomographie lautet

³⁵ In der Physik wird Z als Zustandssumme bezeichnet.

³⁶ In der Physik stellt λ^{-q} die Temperatur dar.

$$l(\mathbf{f}^*) = \sum_{i=1}^M \left(-n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right) - \lambda^q \sum_{\{j,k\} \in C} w_{j,k} |f_j - f_k|^q, \quad (5.243)$$

wobei die Normierungskonstante Z , die vom Regularisierungsparameter λ^q abhängt, bei der Maximierung nicht betrachtet werden muss [Heb89]. Im Gegensatz zu den Log-Maximum-Likelihood-Ausdrücken (5.195) der Emissionstomographie und (5.221) der Computertomographie ist für Gleichung (5.243) keine geschlossene Form einer iterativen Maximierung darstellbar [Bou96]. Daher soll im nächsten Abschnitt eine approximative Optimierung gezeigt werden.

5.14.4 Approximation durch gewichtete kleinste Quadrate

Eine Methode, die Optimierung zu stabilisieren, ist die Berücksichtigung der Vertrauenswürdigkeit der Messwerte. Das gelingt mit der Methode der gewichteten kleinsten Quadrate, bei der das Funktional

$$\mathbf{f}_{\min}^* = \min_{\mathbf{f} \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{f}^* - \mathbf{p})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{f}^* - \mathbf{p}) \right\} \quad (5.244)$$

zu minimieren [And00] ist, wobei Ω die Menge der möglichen Lösungen bezeichnet. Dabei ist im Gegensatz zu Gleichung (5.148) hier nun die inverse Kovarianzmatrix \mathbf{C}^{-1} eingefügt, die die Messwerte, deren Vertrauenswürdigkeit klein ist, entsprechend gewichtet.

Das zu minimierende Funktional (5.244) ergibt sich aus einer Taylorentwicklung des Maximum-Likelihood-Ansatzes (5.221)

$$\begin{aligned} l(\mathbf{f}^*) &= \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - n_i \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* - \ln(n_i!) - n_0 e^{-\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - n_i p_i^* - \ln(n_i!) - n_0 e^{-p_i^*} \right) \end{aligned} \quad (5.221)$$

indem die Ausdrücke für die erwarteten Projektionssummen

$$p_i^* = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^*, \quad (5.245)$$

verwendet werden und die Abhängigkeiten von p_i^* an der Stelle

$$p_i = \ln \left(\frac{n_0}{n_i} \right), \quad (5.246)$$

bis zur 2. Ordnung entwickelt werden [Sau93], also

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{f}^*) &\approx \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - n_i p_i - n_i (p_i^* - p_i) - \ln(n_i!) - n_0 \left(e^{-p_i} - e^{-p_i} (p_i^* - p_i) + \frac{e^{-p_i}}{2} (p_i^* - p_i)^2 \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - n_i p_i^* - \ln(n_i!) - n_i + n_i (p_i^* - p_i) - \frac{n_i}{2} (p_i^* - p_i)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - \ln(n_i!) - n_i - n_i p_i - \frac{n_i}{2} (p_i^* - p_i)^2 \right) \tag{5.247} \\
&= \sum_{i=1}^M \left(n_i \ln(n_0) - \ln(n_i!) - n_i (1 + p_i) - \frac{n_i}{2} (p_i^* - p_i)^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (n_i (p_i^* - p_i)^2) + \sum_{i=1}^M (n_i \ln(n_0) - \ln(n_i!) - n_i (1 + p_i))
\end{aligned}$$

Insgesamt lässt sich dieser Ausdruck als

$$l(\mathbf{f}^*) \approx -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left(n_i \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j^* - p_i \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^M c(n_i) \tag{5.248}$$

bzw. in Vektor- und Matrixschreibweise als

$$l(\mathbf{f}^*) \approx -\frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{f}^* - \mathbf{p})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{f}^* - \mathbf{p}) + c(\mathbf{n}) \tag{5.249}$$

zusammenfassen, so dass die Maximierung der Log-Likelihood-Funktion (5.221) durch die Minimierung der gewichteten kleinsten Quadrate in Gleichung (5.244) approximiert werden kann. Dabei ist $c(\mathbf{n})$ unabhängig von \mathbf{f}^* und kann bei der Optimierung ignoriert werden. Dieses Ergebnis gilt analog auch für den Maximum-Likelihood-Ansatz der Emissionstomographie.

Nun muss noch die physikalische Bedeutung der Covarianzmatrix geklärt werden. Im Fall der Emissionstomographie ist

$$p_i = n_i \tag{5.250}$$

die Anzahl der Quanten, die im Detektor gemessen werden und

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & n_M \end{pmatrix} \tag{5.251}$$

die Covarianzmatrix. Gleichung (5.251) ist die zentrale Aussage für die Poissonverteilung der detektierten Quanten, nämlich $\sigma_i^2 = \langle n_i \rangle$. Im Fall der Computertomographie ist

$$p_i = \ln \left(\frac{n_0}{n_i} \right) \quad (5.246)$$

und

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{1}{n_M} \end{pmatrix}. \quad (5.252)$$

Gleichung (5.252) besagt, dass $\sigma_i^2 = 1/\langle n_i \rangle$. Das heisst, je mehr Quanten gemessen werden, desto kleiner ist die Varianz des Signals und desto stärker fließen die Daten in die Minimierung ein (in Kapitel 8.7 wird dieser Sachverhalt noch im Detail gezeigt). Für die Emissionstomographie ist das Gegenteil der Fall. Der quadratisch approximierten, regularisierten Maximum-Likelihood-Ansatz lautet dann

$$\mathbf{f}_{\min}^* = \min_{\mathbf{f} \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{f}^* - \mathbf{p})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{f}^* - \mathbf{p}) + \lambda^q \sum_{\{j,k\} \in C} w_{j,k} |f_j - f_k|^q \right\} \quad (5.253)$$

und kann mit dem Newton-Raphson-Verfahren optimiert werden [Fes96,Bou96].

5.15 Zusammenfassung der zweidimensionalen Verfahren

In Abbildung 5.45 sind die Rekonstruktionsverfahren des Kapitels 5 noch einmal in einer Übersicht zusammengestellt. Von links nach rechts ist (a) die direkte Inversion durch das Fourier-Slice-Theorem aus Kapitel 5.2, (b) das Layergram-Verfahren aus Kapitel 5.8, (c) die gefilterte Rückprojektion aus Kapitel 5.6, (d) die inverse Cormack-Transformation aus Kapitel 5.10, (e) die inverse Radontransformation aus dem Beginn von Kapitel 5 und (f) die algebraischen Verfahren ab Kapitel 5.11 mit der theoretischen Möglichkeit der direkten Lösung des Gleichungssystems durch Singulärwertzerlegung aus Kapitel 5.12 und den iterativen Verfahren der ART aus Kapitel 5.13 und der Maximierung der Maximum-Likelihood-Funktion aus Kapitel 5.14. Die Nummern in den einzelnen Kästen weisen auf die korrespondierenden Gleichungen hin.

Welche der Verfahren für ein spezielles Problem in der Praxis implementiert werden, hängt natürlich von der Art des Problems ab. Bei der Computertomographie ist heute die gefilterte Rückprojektion implementiert. Bei Verfahren der bildgebenden Nuklearmedizin wie PET und SPECT sind es überwiegend die iterativen Verfahren.

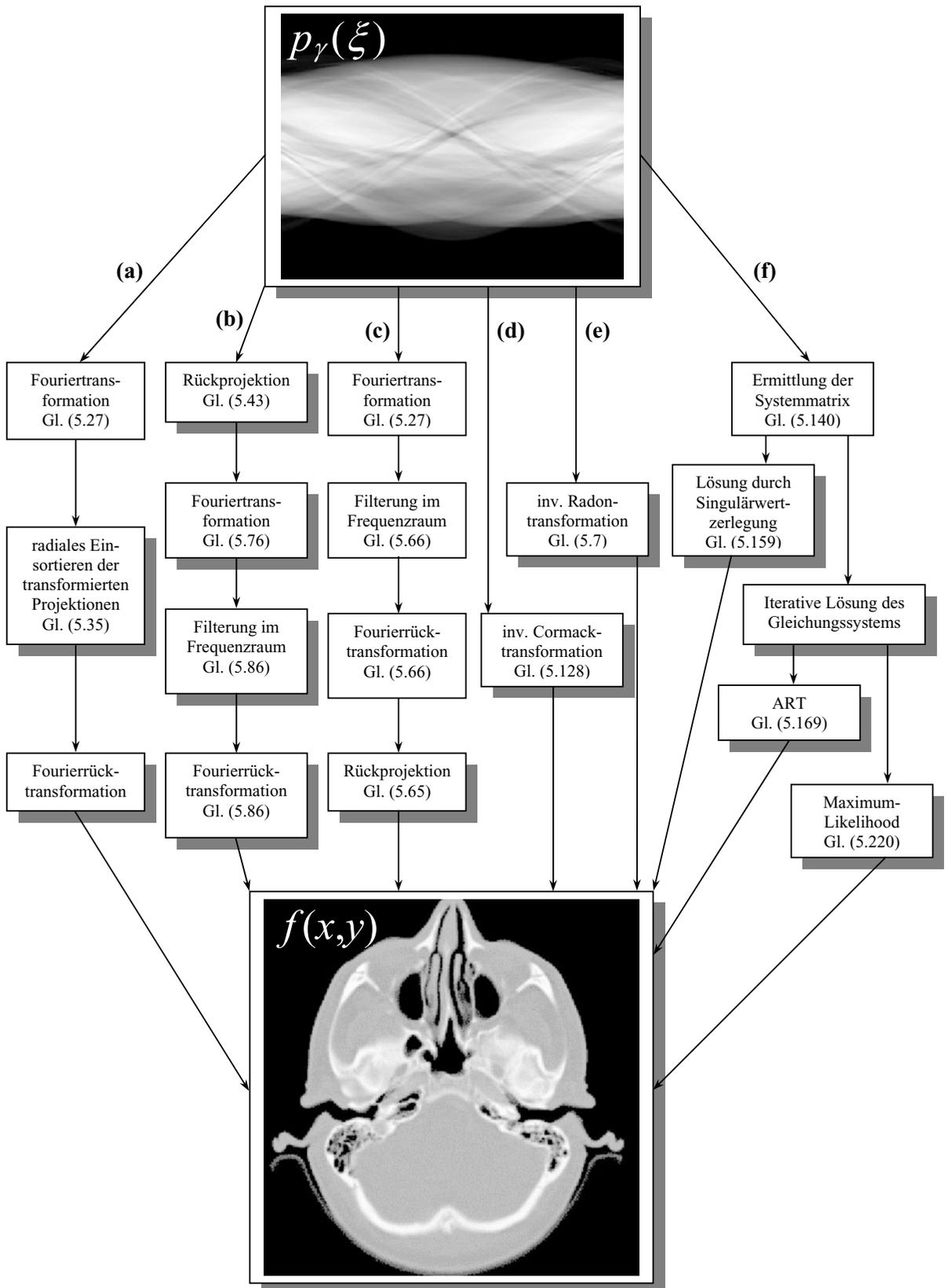


Abb. 5.45: Übersicht über die Verfahren der Bildrekonstruktion im zweidimensionalen Bildraum. Die Gleichungsnummern weisen auf die entsprechenden Gleichungen in diesem Kapitel hin. Die Schattierung zeigt jeweils an, ob ein Teilschritt im Ein- oder Zweidimensionalen implementiert werden muss.

6 Technische Realisierung

Geometrisch sind Computertomographen verhältnismäßig einfach aufgebaut. Wie in den Vorbemerkungen zur Computertomographie in Kapitel 3 beschrieben wurde, lassen sich die Entwicklungsstadien in 4 Generationen einteilen. Davon sind 2 Generationen – die erste und die dritte – besonders interessant. Die erste Generation, das so genannte „Pencil-Beam“- bzw. Nadelstrahl-Konzept spiegelt exakt den Radonschen Rekonstruktionsprozess wider, da parallel verlaufende Strahlen die Schichtebene definieren (siehe Abbildung 6.1 Mitte und rechts). Die zweite Generation ist nur ein in der Entwicklung temporärer Zwischenschritt zur dritten Generation, dem sogenannten „Fan-Beam“- bzw. Fächerstrahl-Konzept. Die dritte Generation (Abbildung 6.1 links) ist heute am häufigsten realisiert. Daher soll die Mathematik der Rekonstruktion in Fächerstrahlgeometrie hier besondere Beachtung finden.

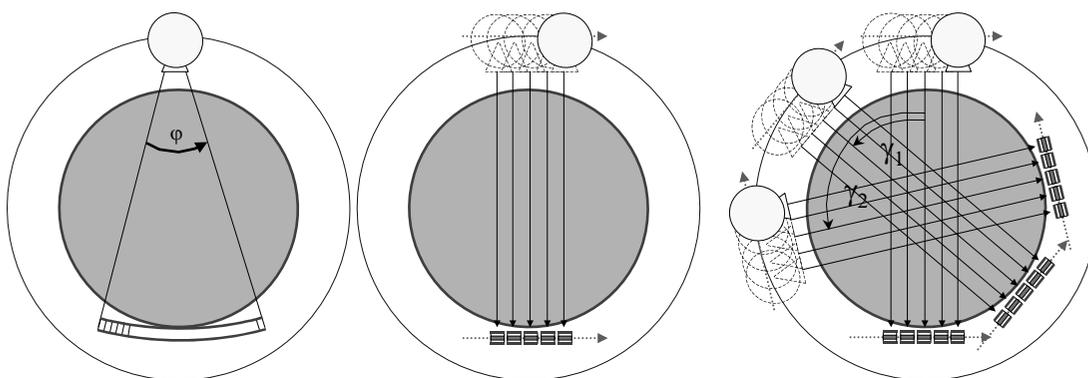


Abb. 6.1: Die heute am häufigsten installierte dritte Tomographengeneration (links) gegenüber der ersten Generation (Mitte und rechts).

Die vierte Generation ist wieder ein evolutionärer Schritt, der nicht sehr häufig realisiert ist. Darüber hinaus unterscheidet sich die Mathematik dieser Generation nicht von der der dritten Generation. Daher soll diese Generation hier nicht separat betrachtet werden. Keine Betrachtung finden auch die Verfahren der schnellen Rückprojektion. Eine gute Zusammenfassung der modernen Methoden hierzu findet man in [Ing99].

6.1 Rekonstruktion mit realen Signalen

Die spektrale Gewichtungsfunktion $|q|$ hat die Einheit einer Raumfrequenz und ist über sämtliche Frequenzen definiert, so dass die Integration (5.66) über den ganzen Frequenzraum erforderlich wäre. Da das reale Signal räumlich diskret und wegen der begrenzten Anzahl der Detektoren auch räumlich beschränkt ist, wiederholt sich das Spektrum der Projektion durch den Abtastprozess periodisch. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass das Shannonsche Abtasttheorem nur dann eine fehlerfreie Abtastung eines Signals mit der räumlichen Abtastrate $\Delta\xi = (2Q)^{-1}$ sichert, wenn die größte auftretende Raumfrequenz kleiner als Q ist. Damit ist die Beaufschlagung des periodischen Spektrums mit der Gewichtungsfunktion $|q|$ nur im Intervall $[-Q, Q]$ sinnvoll. Das abgetastete Projektionssignal habe die Form

$$p_\gamma(j \Delta\xi), \text{ mit } j = 0, 1, \dots, D-1 \quad (6.1)$$

Die Abtastparameter $\Delta\xi$ (Einzeldetektorbreite) und D (Länge des Detektorarrays) sind in den Computertomographie-Systemen der ersten Generation durch Röhren- und Detektorvorschub leicht zu variieren. In heutigen Systemen der dritten Generation ist $\Delta\xi$ durch die Detektorbreite und D durch die Detektoranzahl bestimmt. In diesem Kapitel über technische Realisierungen wird später gezeigt (Kapitel 6.7), dass durch bauliche Maßnahmen – Detektorviertelverschiebung oder *Flying-Focus* – eine synthetische Halbierung des Abtastintervalls erreicht werden kann.

Grundsätzlich muss aber nun die Fouriertransformation der Projektion

$$P_\gamma(q) = \int_0^{D\Delta\xi} p_\gamma(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi \quad (6.2)$$

natürlich nur über die Detektorgesamtbreite im Intervall $[0, D\Delta\xi]$ durchgeführt werden. Außerhalb des Detektors wird die Projektion als Null angenommen. $P_\gamma(q)$ kann nun durch

$$P_\gamma\left(k \frac{2Q}{D}\right) = \frac{1}{2Q} \sum_{j=0}^{D-1} p_\gamma\left(\frac{j}{2Q}\right) e^{-2\pi i (jk/D)}, \quad (6.3)$$

wobei

$$P_\gamma(k \Delta q), \text{ mit } k = 0, 1, \dots, D-1 \quad (6.4)$$

und

$$\Delta q = \frac{2Q}{D} \quad (6.5)$$

diskretisiert werden. Für die hochpassgefilterte Projektion

$$h_\gamma(\xi) \approx \int_{-Q}^{+Q} P_\gamma(q) |q| e^{2\pi i q \xi} dq \quad (6.6)$$

muss die Fouriertransformation angenähert werden. Hier kann nur eine Näherung berechnet werden, denn da das Projektionssignal wie oben beschrieben im Raumbereich durch die endliche Länge des Detektors in jedem Fall begrenzt ist, kann die Fouriertransformierte nicht auf $[-Q, Q]$ begrenzt sein (vergleiche Kapitel 4).

Allerdings ist bei einem hinreichend großen D , also einem hinreichend langen Detektorarray, die Energie, die physikalisch in den hohen Bändern steckt, vernachlässigbar. Die zur fehlerfreien Abtastung erforderliche Bandbegrenzung vernichtet damit nur wenig Information, so dass für die Diskretisierung der Ausdruck

$$h_\gamma\left(j \frac{1}{2Q}\right) = h_\gamma(j \Delta\xi) \approx \frac{2Q}{D} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} P_\gamma\left(k \frac{2Q}{D}\right) \left|k \frac{2Q}{D}\right| e^{2\pi i (jk/D)} \quad (6.7)$$

gefunden werden kann. Diese Gleichung liefert die gefilterte Projektion $h_\gamma(j\Delta\xi)$ an den Abtastpunkten $j\Delta\xi$ der Projektion $p_\gamma(\xi)$ durch die inverse finite und diskrete Fouriertrans-

formation (finite DFT) des Produktes von $|k \ 2Q/D|$ und $P_\gamma(k \ 2Q/D)$ im Ortsfrequenzraum. Das zu rekonstruierende Bild erhält man aus der diskreten Approximation des Integrals

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi h_\gamma(\xi) d\gamma \\ &\approx \frac{\pi}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} h_{\gamma_n}(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n)), \end{aligned} \quad (6.8)$$

wobei γ_n für $n = 1, 2, \dots, N_p$ die Winkel der gemessenen Projektionen sind, denn natürlich liegen auch die Projektionswinkel nur diskret vor. Die Normierung vor der Summe in Gleichung (6.8) kommt durch die Diskretisierung des Winkелеlementes

$$d\gamma \rightarrow \Delta\gamma = \frac{\pi}{N_p} \quad (6.9)$$

zustande.

In der Praxis möchte man den Frequenzraum für reale Daten nicht mit einer linear steigenden Funktion wie in Gleichung (6.7) multiplizieren, da die lineare spektrale Gewichtung das Rauschen im hohen Frequenzband anhebt, so dass im Ergebnis das rekonstruierte Tomogramm inakzeptabel verrauscht sein kann. Abhilfe schafft hier eine geeignete Fensterung der Daten.

6.1.1 Fensterung im Frequenzraum

Aus der Theorie der Fouriertransformation kennt man eine Vielzahl von Frequenz- oder Spektralfenstern, die einer scharfen Rechteckbandbegrenzung des linearen Anstiegs des gesamten Frequenzintervalls $[-Q, Q]$ überlegen sind.

Die Berücksichtigung des Frequenzfensters führt zu folgender Abschätzung

$$h_\gamma\left(j \frac{1}{2Q}\right) = h_\gamma(j \Delta\xi) \approx \frac{2Q}{D} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} P_\gamma\left(k \frac{2Q}{D}\right) \left|k \frac{2Q}{D}\right| W\left(k \frac{2Q}{D}\right) e^{2\pi(jk/D)}, \quad (6.10)$$

wobei W das entsprechende Fenster ist. Es ist übrigens egal ob die Summe in Gleichung (6.10) von $-D/2$ bis $D/2-1$ oder von 0 bis D läuft, da bei abgetasteten Signalen ein periodisches Spektrum vorliegt (vergleiche Kapitel 4.16).

Zur Form der Fenster gibt es folgende Vorschläge, die im Einzelnen kurz besprochen werden sollen.

Ausgehend von der linearen Gewichtung des gesamten Ortsfrequenzraums,

$$G(q) = |q| \quad \text{für alle } q, \quad (6.11)$$

das bedeutet (theoretisch) keine Fensterung, also $W(q) \equiv 1$ für alle q , haben *G. N. Ramachandran und A. V. Lakshminarayanan* [Ram71] vorgeschlagen, das Frequenzband durch ein Rechteck zu begrenzen.

Das Rechteck

$$W(q) = \text{rect}(q) \quad (6.12)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q) \quad (6.13)$$

ist hier beispielhaft durch das normierte Intervall $q = [-\varepsilon, \varepsilon]$ mit $\varepsilon = 0.5$ definiert. Damit wird in erster Linie verhindert, dass durch die Gewichtung mit $|q|$ Rauschen in den hohen Bändern zu stark angehoben wird. Grundsätzlich muss das Rechteckfenster das periodische Frequenzband auf einen eindeutigen Bereich festlegen.

Wegen der scharfen Ränder ergeben sich allerdings die unerwünschten *Sidelobes*, so dass eine Abflachung der Kante sinnvoll ist. Hierbei ergibt sich eine gewisse Freiheit, die in Computertomographen genutzt wird, um unterschiedliche Fenster zu implementieren, die eine Spannweite von kantenbetonenden Filterkernen bis hin zu eher glättenden Filterkernen darstellen.

Um eine zu scharfe Kante zu verhindern, kann man zunächst das Rechteck mit einer Cosinusfunktion (*cosinus I* in Abbildung 6.2) beaufschlagen, deren Argument von $-\pi/4$ bis $\pi/4$ läuft

$$W(q) = \text{rect}(q) \cos(\pi q / 2) \quad (6.14)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q) \cos(\pi q / 2). \quad (6.15)$$

L. A. Shepp und B. F. Logan [She74] haben einen ähnlichen Vorschlag unterbreitet, der heute die weiteste Verbreitung findet

$$W(q) = \text{rect}(q) \text{sinc}(q). \quad (6.16)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q) \text{sinc}(q) \quad (6.17)$$

Die Beaufschlagung des Rechtecks mit der *sinc*-Funktion von Shepp und Logen führt zu einem etwas weicheren Faltungskern als dem von *cosinus I* in Gleichung (6.15). In der Literatur sind jedoch eine große Anzahl von Fensterungen bekannt [Opp99], die im Wesentlichen darauf abzielen, die Fensterkante noch weicher zu gestalten und damit die Entstehung vieler *Sidelobes* im Faltungskern zu vermeiden. Dies kann man z.B. wieder durch ein Cosinusfenster erreichen, dessen Argument von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ läuft

$$W(q) = \text{rect}(q) \cos(\pi q) \quad (6.18)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q) \cos(\pi q). \quad (6.19)$$

Hierbei verläuft die Dämpfung im Frequenzraum ohne Sprung, so dass im Vergleich zu den oben angegebenen Funktionen die Welligkeit des Filterkerns stark unterdrückt werden kann. Bei vielen Anwendungen, in denen scharfe Kanten im Ortsbereich nicht so entscheidend sind, verwendet man noch weichere Filterkerne. Bekannt sind hier folgende Fensterfunktionen von Hamming, Hann und Blackman, die durch Hinzunahme eines geeignet gewählten Terms, bestehend aus einem Ausschnitt aus einer Cosinusfunktion mit passender Frequenz und Gewichtungsfaktor, zu der Rechteckfunktion entstehen. Das Spektrum der Cosinusfunktion kompensiert nämlich teilweise die Welligkeit des Spektrums der Rechteckfunktion.

Symmetrisch um die Null im Intervall $q = [-\varepsilon, \varepsilon]$ mit $\varepsilon = 0.5$ entsteht das so genannte Hamming-Fenster durch

$$W(q) = \text{rect}(q)(0.54 - 0.46 \cos(2\pi q)) \quad (6.20)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q)(0.54 - 0.46 \cos(2\pi q)). \quad (6.21)$$

Entsprechend entsteht das so genannte Hanning-Fenster durch

$$W(q) = \text{rect}(q)(0.5 - 0.5 \cos(2\pi q)) \quad (6.22)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q)(0.5 - 0.5 \cos(2\pi q)) \quad (6.23)$$

und das so genannte Blackman-Fenster durch

$$W(q) = \text{rect}(q)(0.42 - 0.5 \cos(2\pi q) + 0.08 \cos(4\pi q)) \quad (6.24)$$

bzw.

$$G(q) = |q| \text{rect}(q)(0.42 - 0.5 \cos(2\pi q) + 0.08 \cos(4\pi q)). \quad (6.25)$$

In *R. H. Huesman et al.* [Hue77] findet man weitere Fenster mit sehr starker Dämpfung der höheren Frequenzen wie z.B. das Parzen-Fenster, das hier als letztes Beispiel angegeben wird.

$$W(q) = \begin{cases} \text{rect}(q) \left(1 - 6|q|^2 (1 - |q|) \right) & \text{für } |q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{rect}(q) \left(2(1 - |q|)^3 \right) & \text{für } \frac{\varepsilon}{2} < |q| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (6.26)$$

bzw.

$$G(q) = \begin{cases} \text{rect}(q) \left(|q| - |q| 6|q|^2 (1 - |q|) \right) & \text{für } |q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{rect}(q) \left(2|q| (1 - |q|)^3 \right) & \text{für } \frac{\varepsilon}{2} < |q| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (6.27)$$

In Abbildung 6.2 sind die verschiedenen Frequenzfenster in einer Graphik zusammengestellt.

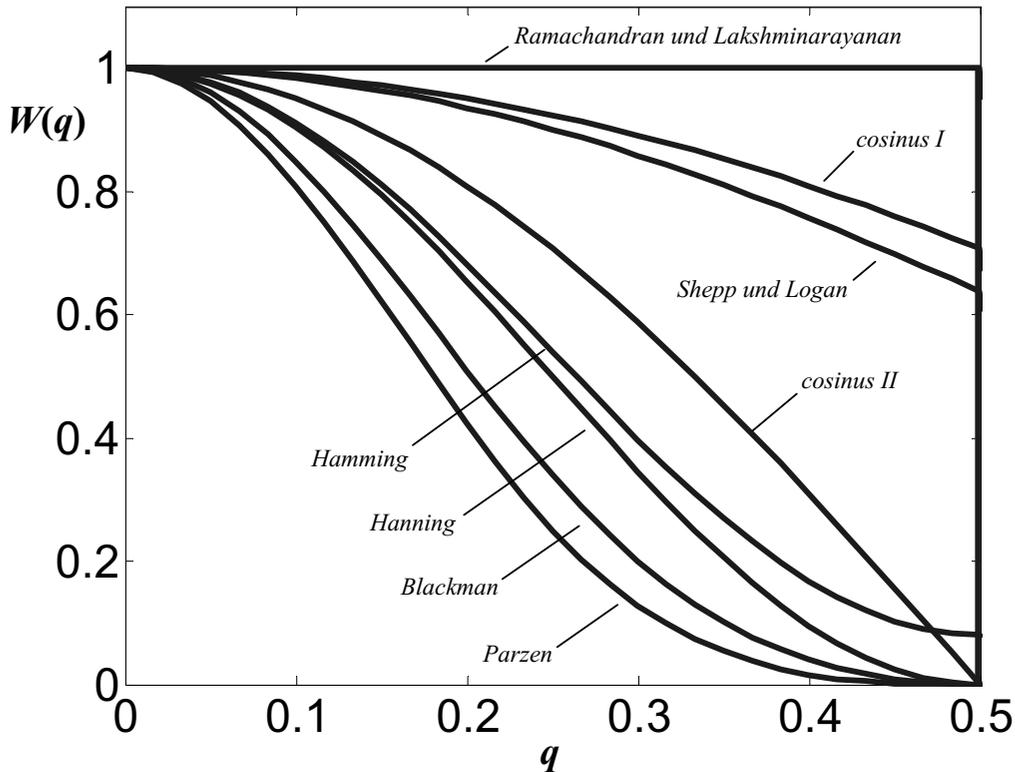


Abb. 6.2: Fensterfunktionen zur Bandbegrenzung der linearen Gewichtung des Spektrums.

6.1.2 Faltung im Ortsraum

Für viele Fensterfunktionen kann man die Filterkerne im Ortsraum explizit angeben. Wie aus Kapitel 4.12 bekannt ist, wird der Filtervorgang im Ortsraum durch eine Faltung beschrieben. In der Schreibweise des kontinuierlichen Signals sieht man

$$h_\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(z)g(\xi-z)dz. \quad (6.28)$$

In Kapitel 5.6 wurde schon auf die Schwierigkeit bei der Integration des Fourierintegrals bei nicht quadratintegrablen Funktionen hingewiesen. Die Funktion

$$g(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} g_\delta(\xi) = -\frac{1}{(2\pi\xi)^2} \quad (6.29)$$

muss als Distribution mit einem positiven δ -Peak bei $\xi=0$ aufgefasst werden. Diese Grenzwertbetrachtung ist aber praktisch wenig hilfreich.

Hier verhält es sich aber anders, denn man betrachtet bei realen Systemen immer bandbegrenzte Signale, so dass es die praktisch relevante Funktion

$$G(q) = |q| \text{rect}(q) \quad (6.30)$$

ist, die oben beispielhaft auf dem normierten Intervall $q = [-\varepsilon, \varepsilon]$ mit $\varepsilon = 0.5$ definiert wurde. Die Bandbegrenzung stellt schon in Abschnitt 5.14.3 vorgestellte Regularisierung des Rekonstruktionsproblems dar, durch die die hohen Frequenzen abgeschnitten werden. Durch die Regularisierung ergibt sich ein hinreichend glatter Filter im Ortsraum, zu dem es einen geschlossenen Ausdruck gibt, der explizit ausgerechnet werden kann.

Die Berechnung des regularisierten, also bandbegrenzten Filterkerns im Ortsraum soll hier exemplarisch nur für die Fensterung von *Ramachandran* und *Lakshminarayanan* ausführlich durchgeführt werden. Dazu berechnet man die inverse Fouriertransformierte

$$g(\xi) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |q| e^{i2\pi\xi q} dq = - \int_{-\varepsilon}^0 q e^{i2\pi\xi q} dq + \int_0^{+\varepsilon} q e^{i2\pi\xi q} dq \quad (6.31)$$

der durch ein symmetrisches Rechteck der Länge 2ε gefensterter Rampe. Der Fehler, der durch das Abschneiden hoher Frequenzen entsteht, ist dann vernachlässigbar, wenn das Frequenzband von $P_\gamma(q)$ tatsächlich auf das Intervall $q = [-\varepsilon, \varepsilon]$ beschränkt ist. Dies ist bei realen Signalen oft gegeben, da die Projektion eine Mittelung und damit einen Tiefpass darstellt. Bei einfachen Radiographien erzeugt diese Mittelung den schlechten Bildkontrast.

Beim Lösen des Integrals (6.31) hilft eine Integraltafel (z.B. *L. Papula* [Pap00]), mit der man sieht, dass

$$\int q e^{aq} dq = \left(\frac{aq-1}{a^2} \right) e^{aq}, \quad (6.32)$$

so dass

$$g(\xi) = - \left[\left(\frac{2\pi i \xi q - 1}{(2\pi i \xi)^2} \right) e^{2\pi i \xi q} \right]_{-\varepsilon}^0 + \left[\left(\frac{2\pi i \xi q - 1}{(2\pi i \xi)^2} \right) e^{2\pi i \xi q} \right]_0^{\varepsilon}. \quad (6.33)$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert dann

$$g(\xi) = - \left(\frac{-1}{(2\pi i \xi)^2} \right) + \left(\frac{-2\pi i \xi \varepsilon - 1}{(2\pi i \xi)^2} \right) e^{-2\pi i \xi \varepsilon} + \left(\frac{2\pi i \xi \varepsilon - 1}{(2\pi i \xi)^2} \right) e^{2\pi i \xi \varepsilon} - \left(\frac{-1}{(2\pi i \xi)^2} \right). \quad (6.34)$$

Wertet man die Klammerausdrücke aus, so führt das zu

$$g(\xi) = \frac{1}{(2\pi i \xi)^2} - \frac{\varepsilon}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi \varepsilon} - \frac{1}{(2\pi i \xi)^2} e^{-2\pi i \xi \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi \varepsilon} - \frac{1}{(2\pi i \xi)^2} e^{2\pi i \xi \varepsilon} + \frac{1}{(2\pi i \xi)^2}. \quad (6.35)$$

Sortiert man diese Ausdrücke etwas, dann sieht man in

$$g(\xi) = \frac{\varepsilon}{2\pi i \xi} e^{2\pi i \xi \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi \varepsilon} - \left(\frac{1}{(2\pi i \xi)^2} e^{2\pi i \xi \varepsilon} - \frac{2}{(2\pi i \xi)^2} + \frac{1}{(2\pi i \xi)^2} e^{-2\pi i \xi \varepsilon} \right) \quad (6.36)$$

folgende *Sinus*- bzw. *sinc*-Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 g(\xi) &= \frac{\varepsilon}{\pi\xi} \left(\frac{e^{2\pi i\xi\varepsilon} - e^{-2\pi i\xi\varepsilon}}{2i} \right) - \left(\frac{1}{\pi\xi} \right)^2 \left(\frac{e^{\pi i\xi\varepsilon} - e^{-\pi i\xi\varepsilon}}{2i} \right)^2 \\
 &= \frac{2\varepsilon^2 \sin(2\pi\xi\varepsilon)}{2\pi\xi\varepsilon} - \varepsilon^2 \left(\frac{\sin(\pi\xi\varepsilon)}{\pi\xi\varepsilon} \right)^2 \\
 &= 2\varepsilon^2 \operatorname{sinc}(2\xi\varepsilon) - \varepsilon^2 \operatorname{sinc}^2(\xi\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Mit $\varepsilon = 1/(2\Delta\xi)$ erhält man

$$g(\xi) = \frac{2 \left(\frac{1}{2\Delta\xi} \right)^2 \sin\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right)}{\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}} - \left(\frac{1}{2\Delta\xi} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\pi \frac{\xi}{2\Delta\xi}\right)}{\pi \frac{\xi}{2\Delta\xi}} \right)^2 \tag{6.38}$$

und mit Hilfe der Potenzformel für den *Sinus*

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \tag{6.39}$$

findet man schließlich

$$g(\xi) = \frac{1}{2(\Delta\xi)^2} \left(\frac{\sin\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right)}{\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}} + \frac{\cos\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right) - 1}{\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right)^2} \right). \tag{6.40}$$

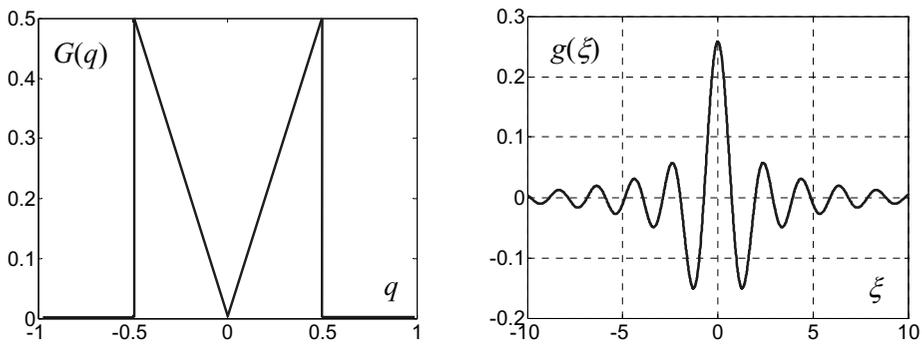
Analog kann der Filterkern von *L. A. Shepp* und *B. F. Logan* durch

$$g(\xi) = -\frac{2}{\pi^2 \Delta\xi^2} \frac{1 - 2 \frac{\xi}{\Delta\xi} \sin\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right)}{4 \left(\frac{\xi}{\Delta\xi}\right)^2 - 1} \tag{6.41}$$

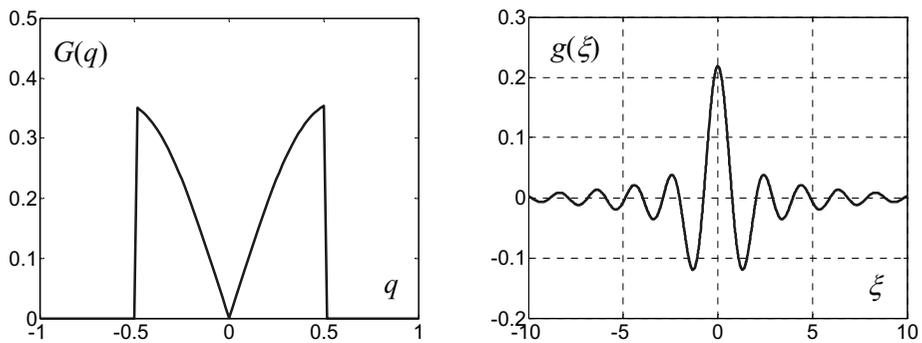
berechnet werden (hier ist das Ergebnis *H. Morneburg* [Mor95] entnommen). Ausdrücke für das *Hann*- und *Hamming*-Fenster findet man bei *R. H. Huesman et al.* [Hue77]. Hier soll nur noch der Filterkern des *Parzen*-Fensters angegeben werden:

$$g(\xi) = \frac{24\pi \frac{\xi}{\Delta\xi} \cos\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right) - 96 \sin\left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right) - 48\pi \frac{\xi}{\Delta\xi} \cos\left(\pi \frac{\xi}{2\Delta\xi}\right) + 384 \sin\left(\pi \frac{\xi}{2\Delta\xi}\right) - 2 \left(\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}\right)^3 - 72\pi \frac{\xi}{\Delta\xi}}{4\pi^5 \frac{\xi^5}{(\Delta\xi)^3}} \tag{6.42}$$

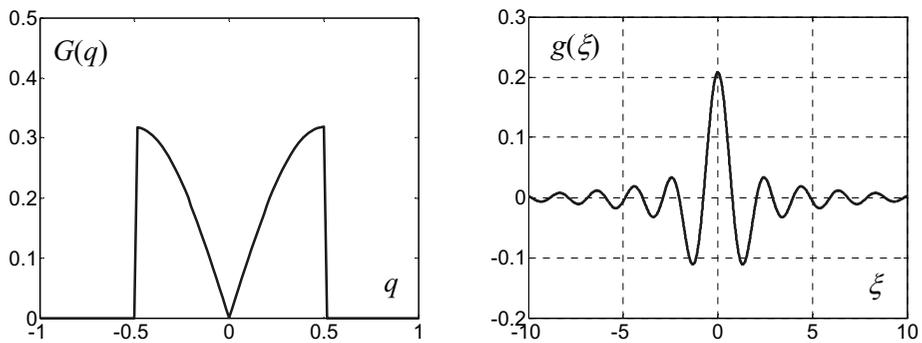
Ramachandran und Lakshminarayanan



Cosinus I



Shepp und Logan



Cosinus II

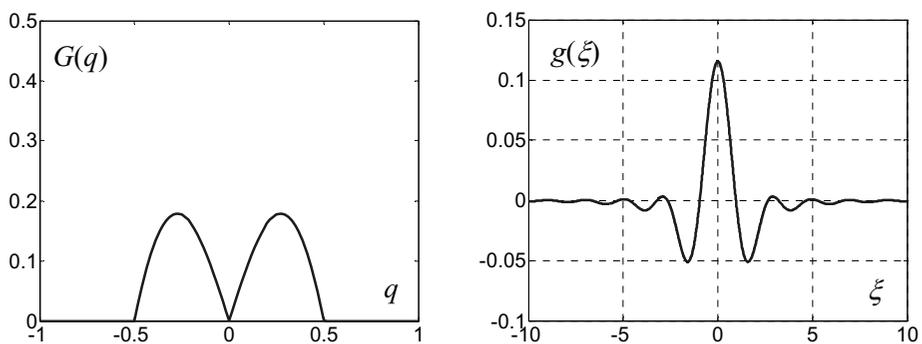


Abb. 6.3a: Bandbegrenzende Fensterfunktionen der gefilterten Rückprojektion im Raumfrequenzbereich (jeweils links) mit den entsprechenden Fouriertransformationen in den Raumbereich, d.h. den jeweiligen Faltungskernen (jeweils rechts). Das Abtastintervall ist auf $\Delta\xi = 1$ gesetzt.

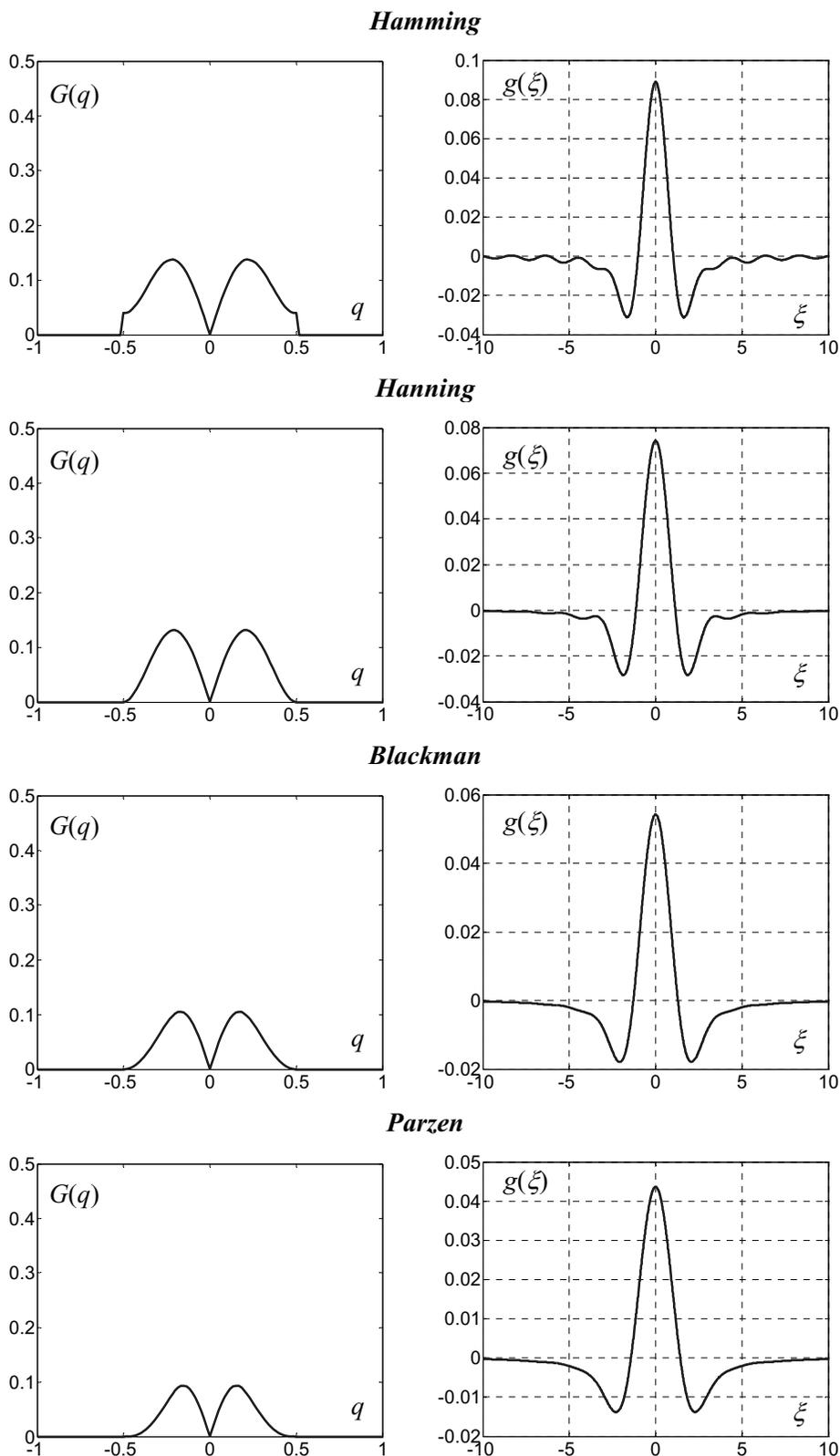


Abb. 6.3b: (Fortsetzung) Bandbegrenzende Fensterfunktionen der gefilterten Rückprojektion im Raumfrequenzbereich (jeweils links) mit den entsprechenden Fouriertransformationen in den Raumbereich, d.h. den jeweiligen Faltungskernen (jeweils rechts). Das Abtastintervall ist auf $\Delta\xi = 1$ gesetzt.

Die Abbildungen 6.3 zeigen jeweils den bandbegrenzten Filter im Frequenz- und im Ortsraum für die besprochenen prominenten Fensterungen.

Den unterschiedlichen Fensterfunktionen ist gemeinsam, dass auch schon Raumfrequenzen unterhalb einer maximal interessierenden Frequenz gedämpft werden. Damit wird natürlich die räumliche Auflösung des rekonstruierten Bildes etwas schlechter. Diese weichen Faltungskerne werden häufig in der Nuklearmedizin eingesetzt [Mor95].

Der Filter von *Ramachandran* und *Lakshminarayanan* liefert die beste räumliche Auflösung in den rekonstruierten Bildern. Wie aber oben schon angedeutet, wird bei realen Daten, also mit Rauschen beaufschlagten Signalen, das Rauschen stark angehoben. Darüber hinaus liefert die scharfe Begrenzung im Frequenzraum oszillierende Intensitätswerte in Regionen mit starken Kontrastunterschieden, die als Artefakte wahrgenommen werden. Dieses so genannte *Gibbs*-Phänomen kontaminiert mit seinen Überschwingern die zu rekonstruierende Stelle mit benachbarten Punkten der Rekonstruktion.

Wendet man die weicheren Fenster im Frequenzraum an, so erhält man immer weniger Oszillationen im Ortsraum, allerdings wird das zentrale Maximum immer breiter und kleiner, je weicher das Fenster gewählt wird. Ein Vergleich zwischen dem Filter von *Ramachandran* und *Lakshminarayanan* mit einem maximalen Wert von

$$g(0) = \frac{1}{(2\Delta\xi)^2} \quad (6.43)$$

und dem Filter von Parzen mit einem maximalen Wert von

$$g(0) = \frac{0.175}{(2\Delta\xi)^2} \quad (6.44)$$

(siehe R. H. *Huesman et al.* [Hue77]) zeigt die Verhältnisse.

Artefakte in Regionen mit scharfem Kontrast werden durch die beschriebenen Filterkerne vermieden und das Rauschen wird stark unterdrückt. Jedoch geht das zu Lasten der räumlichen Auflösung. Die Wahl des Filters ist immer ein Kompromiss zwischen Auflösung und Rauschen im rekonstruierten Bild. Je nach klinischem Anwendungsfall muss entschieden werden, welcher Filter Verwendung finden soll. In modernen Computertomographen sind eine Vielzahl von Filtern implementiert, die, in anatomische Gruppen unterteilt, vom Bediener ausgewählt werden müssen.

Der Filterkern von *Shepp* und *Logan* hat sich als Standard durchsetzen können. Er unterscheidet sich bezüglich des Hauptmaximums nur wenig vom idealen Filter von *Ramachandran* und *Lakshminarayanan*. Die *sinc*-Funktion, mit der das Rechteck aber zusätzlich beaufschlagt ist, wirkt den *Sidelobes* entgegen, so dass bei nur leicht reduzierter Auflösung die Artefakte signifikant verringert werden.

6.1.3 Diskretisierung der Filterkerne

Die kontinuierlich definierte Faltung

$$h_\gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(z)g(\xi-z)dz, \quad (6.45)$$

lautet in diskretisierter Form

$$h_\gamma\left(j\frac{1}{2\varepsilon}\right) = h_\gamma(j\Delta\xi) = \Delta\xi \sum_{n=-D/2}^{D/2-1} p_\gamma(n\Delta\xi)g((j-n)\Delta\xi). \quad (6.46)$$

Die diskretisierten Versionen der Filterkerne $g(n)$ erhält man, indem man die Rücktransformation der gefensterten Rampe an den durch die Fensterbreite vorgegebenen Abtastpunkten auswertet.

Wendet man die Definition

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (4.4)$$

beim Filterkern von *Ramachandran* und *Lakshminarayanan* (6.37) an, so erhält man

$$g(\xi) = 2\varepsilon^2 \text{sinc}(2\varepsilon\xi) - \varepsilon^2 \text{sinc}^2(\varepsilon\xi). \quad (6.47)$$

Eine Abtastung an den Stellen $\xi = n\Delta\xi$ liefert zusammen mit der Ersetzung der Abtastrate durch $\varepsilon = 1/(2\Delta\xi)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} g(n\Delta\xi) &= \frac{2}{(2\Delta\xi)^2} \text{sinc}(n) - \frac{1}{(2\Delta\xi)^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4\Delta\xi^2} \left(2\text{sinc}(n) - \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Damit erhält man die diskrete Form des Faltungskerns

$$g(n\Delta\xi) = \begin{cases} \frac{1}{(2\Delta\xi)^2} & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade, } (n \neq 0) \\ -\frac{1}{(n\pi\Delta\xi)^2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (6.49)$$

denn für gerade n verschwinden beide *sinc*-Terme. Für ungerade n ist nur der erste *sinc*-Term immer Null.

Analog kann der diskretisierte Filterkern von *Shepp* und *Logan* durch

$$g(n\Delta\xi) = -\frac{2}{\pi^2\Delta\xi^2} \frac{1-2n\sin(\pi n)}{4(n)^2-1} \tag{6.50}$$

berechnet werden. Für ganzzahlige n erhält man

$$g(n\Delta\xi) = -\frac{2}{(\pi\Delta\xi)^2} \frac{1}{4n^2-1} \tag{6.51}$$

Die Abbildungen 6.4 zeigen die diskretisierten Filterkerne für *Ramachandran* und *Lakshminarayanan*-, *Shepp* und *Logan*-, *Hamming*- sowie *Blackman*-Filterungen. Bei allen Filtern ist nur der Wert für $n = 0$ positiv. Weitere explizite Darstellungen für Filterkerne findet man in *R. H. Huesman et al.* [Hue77].

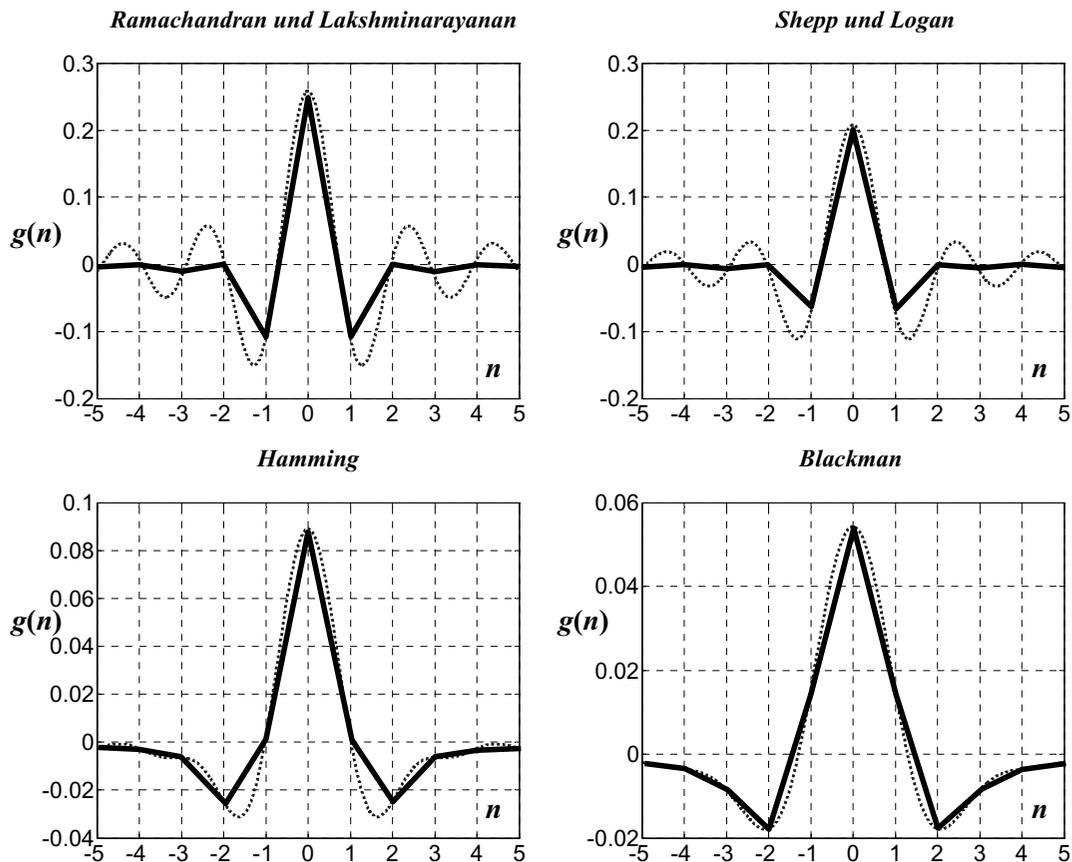


Abb. 6.4: Diskretisierte bandbegrenzende Filterkerne. Im Hintergrund sind die jeweils interpolierten Werte der Filterkerne zu sehen.

Für die anderen ganzzahligen Werte von n sind die Filterkerndaten negativ oder Null. Die negativen Werte bewirken, dass die Verschmierung der Werte eines Objektes in die Nachbarregionen gerade kompensiert wird. Die Abbildungen 6.5 zeigen die Wirkung der diskretisierten Filterkerne auf ein Rechteckprofil. In dieser Abbildung sind die Filterkerne

sowie die Faltungsergebnisse einheitlich normiert und damit unmittelbar vergleichbar. Von oben nach unten werden die Filter offenbar immer weicher.

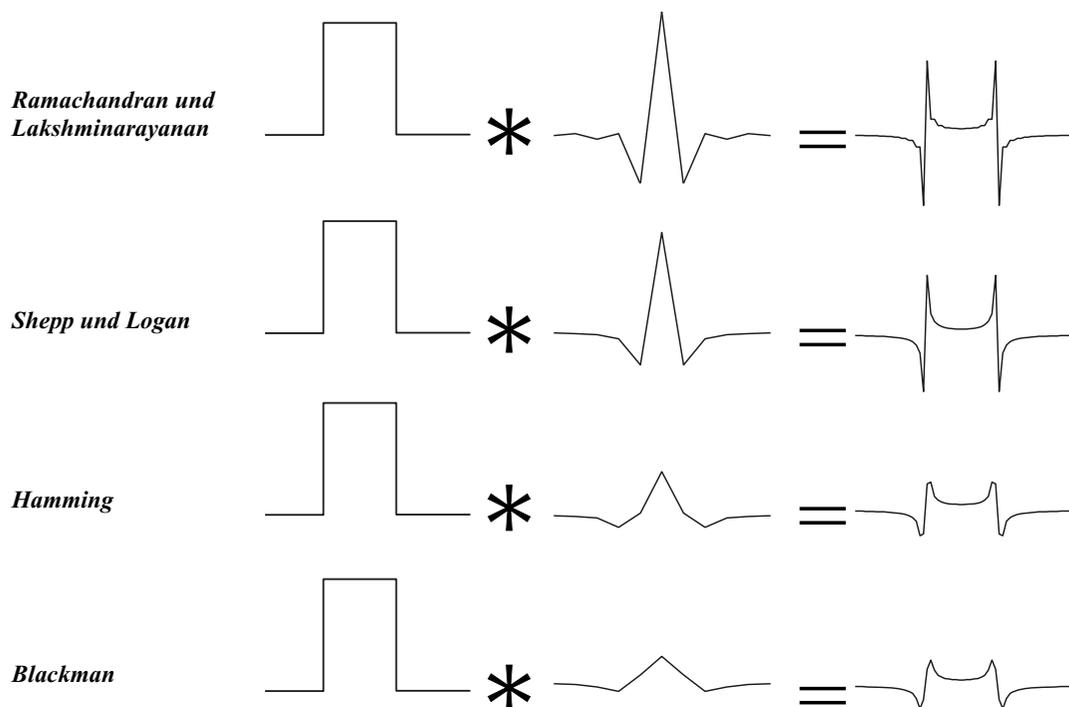


Abb. 6.5: Wirkung der unterschiedlichen Faltungskerne auf ein Rechtecksignal. Von oben nach unten werden die Kerne immer weicher.

6.2 Praktische Implementation der gefilterten Rückprojektion

An dieser Stelle soll das Konzept der diskreten gefilterten Rückprojektion noch einmal in Worte gefasst werden. Dazu sei das für einen Projektionswinkel γ_n abgetastete Projektions-signal

$$p_{\gamma_n}(j \Delta\xi) \text{ mit } j = -D/2, \dots, 0, \dots, D/2-1 \text{ und } n = 1, \dots, N_p \quad (6.52)$$

wobei D die Anzahl der Detektorelemente ist, die sich dicht gepackt in einem Abstand von $\Delta\xi$ zueinander befinden. N_p ist dabei die Anzahl der Projektionen.

Zunächst zur Filterung: Man nehme die unter den Projektionswinkeln γ_n gemessenen Projektionen $p_{\gamma_n}(j \Delta\xi)$ und wende für jedes γ_n einen Hochpassfilter an, der im Frequenzraum einer Multiplikation von $P_{\gamma_n}(k \Delta q)$ mit $|k \Delta q|$ entspricht. Dabei achte man auf die Periodizität des Signals $P_{\gamma_n}(k \Delta q)$. Vergleiche hierzu Abbildung 6.6. Die D Frequenzwerte sind z.B. bei Matlab™ so verteilt, dass der erste Wert dem Gleichanteil (also der Frequenz $q = 0$) entspricht. Danach laufen die positiven Werte bis $k = D/2-1$. Dann erhält man den negativen Anteil der Spektralwerte. Der Wert $k = D/2$ entspricht also der Frequenz $q = -Q$. Bei der zu

implementierenden Multiplikation von $P_{\gamma_n}(k \Delta q)$ mit $|k \Delta q|$ im Frequenzraum, hat man also bei Matlab™ eine entsprechende Fallunterscheidung zu treffen. Abbildung 6.7 illustriert anhand realer CT-Daten einer Abdomenaufnahme (vergleiche auch Abbildung 6.8) noch einmal den gesamten Signalverarbeitungsweg von der gemessenen Intensität bis zur gefilterten Projektion.

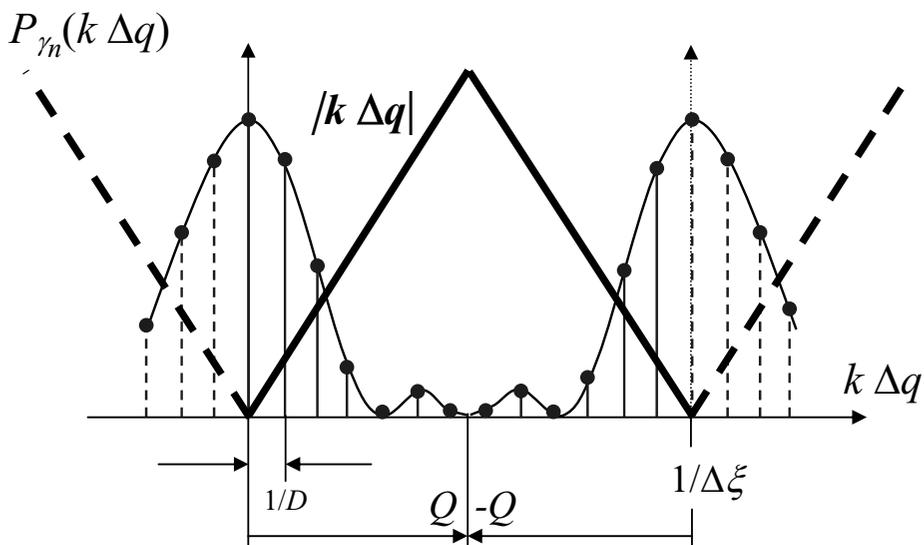


Abb. 6.6: Aufgrund der Abtastung ist das Spektrum des Projektionssignals periodisch. Dies ist bei der praktischen Filterung des Signals im Frequenzraum zu beachten.

Danach führt man die Rückprojektion durch: Für einen Winkel γ_n korrespondiert jeder Bildpunkt in der x - y -Ebene über den Zusammenhang

$$\xi' = (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n) \tag{6.53}$$

mit der Projektionsachse ξ . Über der Projektionsachse ist nun für jeden Winkel γ_n das hochpassgefilterte Projektionssignal $h_{\gamma_n}(\xi)$ aufgetragen. Entlang der Linie \mathbf{L} , die ja gerade in der Hesseschen Normalform durch alle Punkte $\mathbf{r} = (x,y)^T$, für die $(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = \xi'$ gilt, gegeben ist, trage man dann im Ortsraum der Punkte $(x,y)^T$ jeweils für alle ξ den dazugehörigen Wert $h_{\gamma_n}(\xi)$ ein. Man kann sich leicht überlegen, dass der Ausdruck $\xi' = x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n)$ nicht zwangsläufig zu einem Wert ξ führt, für den $h_{\gamma_n}(j\Delta\xi)$ tatsächlich berechnet ist. Abbildung 6.8a zeigt diese Situation. Das entsprechende $h_{\gamma_n}(\xi')$ kann dann durch eine lineare Interpolation gewonnen werden.

Man verschmiert also die gefilterte Projektion über den Ortsraum unter dem Projektionswinkel γ_n also entlang der ursprünglichen Röntgenstrahlen zurück. In Abbildung 6.8b sieht man die ursprüngliche Projektion für das Abdomentomogramm unter dem Projektionswinkel $\gamma = 40^\circ$. Abbildung 6.8c zeigt eine einzelne dazugehörige Rückverschmierung des gefilterten Projektionssignals. Dies muss für alle Winkel γ_n durchgeführt und die einzelnen Rückprojektionen dabei aufaddiert werden.

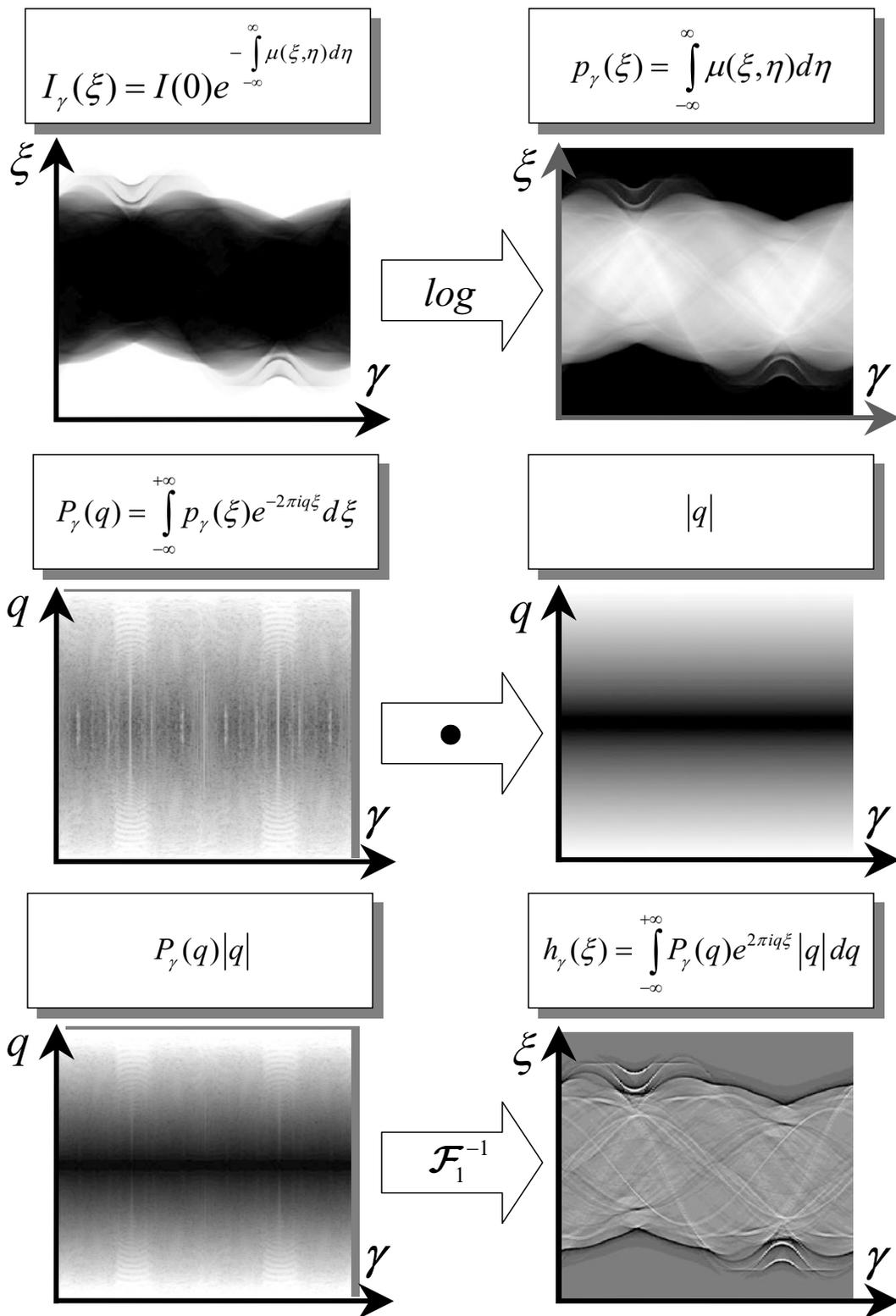


Abb. 6.7: Verarbeitungskette der Rohdaten. Angefangen bei der gemessenen Intensität wird diese durch Logarithmierung in den Radonraum, das Sinogramm überführt. Entlang der Detektorvariablen ξ wird die eindimensionale Fouriertransformation für jeden Projektionswinkel γ durchgeführt und mit der linearen Rampe $|q|$ im Frequenzraum multiplikativ gewichtet. Die eindimensionale inverse Fouriertransformation entlang der q -Koordinate führt dann auf die benötigte gefilterte Projektion.

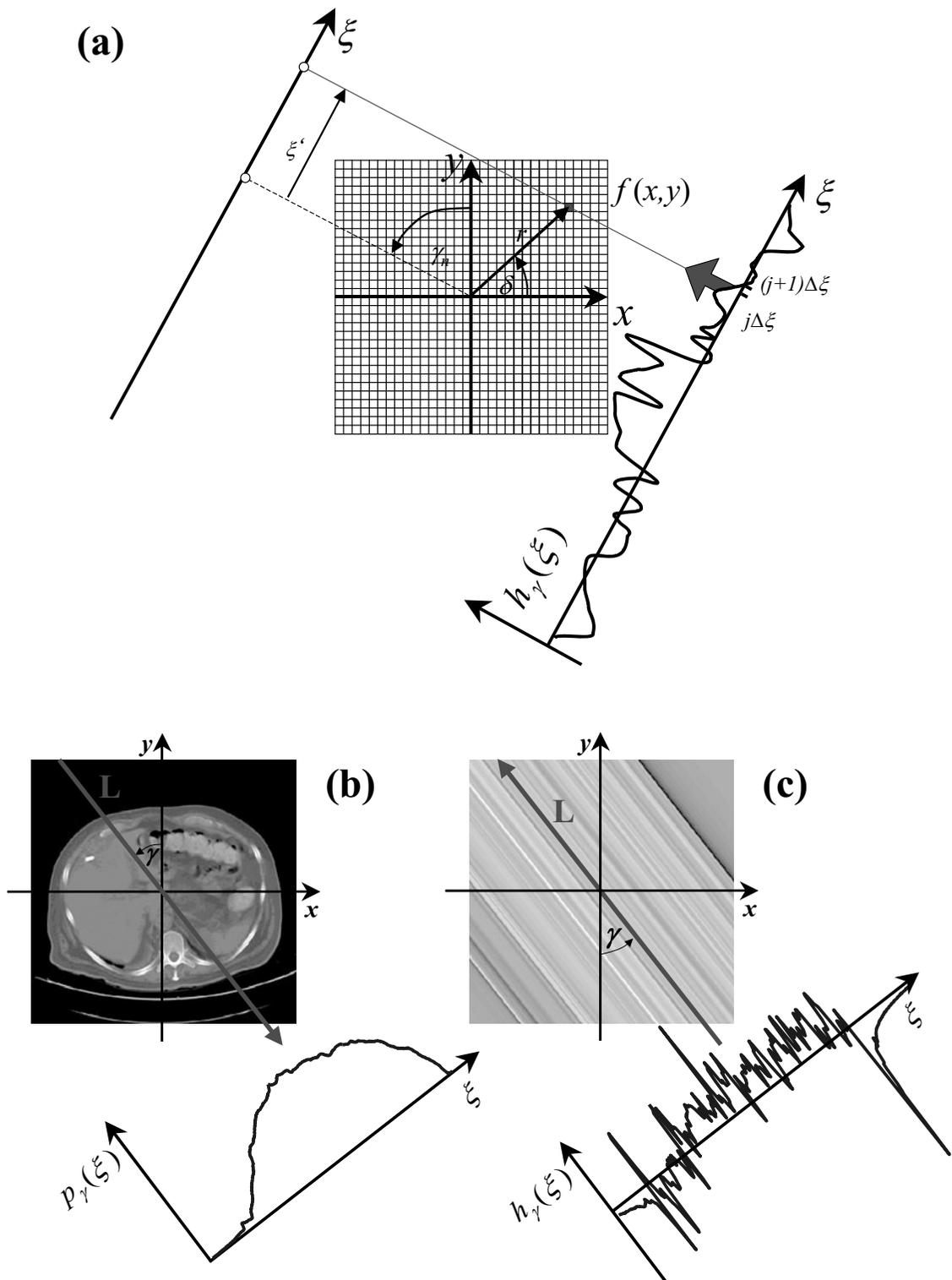


Abb. 6.8: Bild a: In der Regel muss der rückzuprojizierende Wert der gefilterten Projektion durch Interpolation gewonnen werden, da der Vektor \mathbf{r} auf die ganzzahlige Gitterposition $(x,y)^T$ zeigt, die in der Projektion auf die ξ -Achse einen Wert ξ' liefert, der zwischen den Werten $j\Delta\xi$ und $(j+1)\Delta\xi$ liegt. In Bild b und c sind die Projektion und die dazugehörige „Verschmierte“ gefilterte Rückprojektion unter einem einzigen Projektionswinkel $\gamma = 40^\circ$ dargestellt. Die vollständigen Radonraumdaten sind der vorherigen Abbildung 6.7 zu entnehmen.

6.3 Minimale Anzahl der Detektorelemente

In Kapitel 4.16 wurde dargelegt, dass die größte auftretende Frequenz q_{max} im Datenspektrum kleiner sein muss als die halbe Abtastrate Δq , also dass

$$q_{max} < \frac{\Delta q}{2}. \quad (6.54)$$

Das ist gerade das *Nyquist*-Kriterium (vergleiche Kapitel 4.16). Für das räumliche Abtastintervall gilt damit

$$\Delta \xi = \frac{1}{\Delta q} < \frac{1}{2q_{max}}. \quad (6.55)$$

Abbildung 6.9 zeigt die geometrische Situation bei der Abtastung der besseren Übersicht wegen in der Parallelstrahlgeometrie. Der Objektraum wird entlang der jeweils parallelen Schar von Röntgenlinien im konstanten Winkelabstand $\Delta \gamma$ durchstrahlt. Der Abstand der D Abtastelemente des Detektorarrays sei gerade $\Delta \xi$. Der dazugehörige polare Radonraum repräsentiert die Linienintegrale der Abtastung in der geometrischen Lage der Abtastpunkte im Ortsraum. Daher entspricht der Durchmesser des Radonraums dem Messfelddurchmesser MFD des Ortsraums. Wenn $\Delta \xi$ aufgrund von q_{max} vorgegeben ist, ergibt sich bei einem gewünschten Messfelddurchmesser MFD

$$D_{min} = \frac{MFD}{\Delta \xi} = MFD \Delta q > 2MFD q_{max}. \quad (6.56)$$

Nimmt man an, dass das zu rekonstruierende Objekt ein Körper ist, der ein rechteckiges Projektionsprofil hat, so ist das Spektrum wieder durch die *sinc*-Funktion bestimmt, deren erste Nullstelle die maximal auftretende relevante Frequenz darstellen soll. Wenn das Objekt den maximalen Durchmesser d_{max} hat, dann gilt die Abschätzung für die maximal auftretende Frequenz $q_{max} = (d_{max})^{-1}$. Auf diese Faustformel wird im Kapitel 6.7 näher eingegangen – hier soll das Ergebnis reichen. Damit folgt für den Abtastabstand $\Delta \xi = (\Delta q)^{-1} < 0.5 d_{max}$. Hierfür ergibt sich dann die Abschätzung

$$D_{min} > \frac{2MFD}{d_{max}} \quad (6.57)$$

für die minimale Anzahl von Detektoren in einer Projektion.

6.4 Minimale Anzahl der Projektionen

Das Fourier-Slice-Theorem sichert, dass man mit den Fouriertransformationen der Projektionen aus den unterschiedlichen Richtungen γ den gesamten Frequenzraum auffüllen kann. Abbildung 6.9 zeigt, dass der Abstand benachbarter radialer Datengeraden im Frequenzraum (u, v) gerade $q\Delta \gamma$ beträgt. Der maximale Abstand bandbegrenzter Projektionen ist daher $q_{max}\Delta \gamma$. Für ein Objekt mit dem maximalen Durchmesser d_{max} ist der maximale Abstand im Frequenzraum natürlich beschränkt.

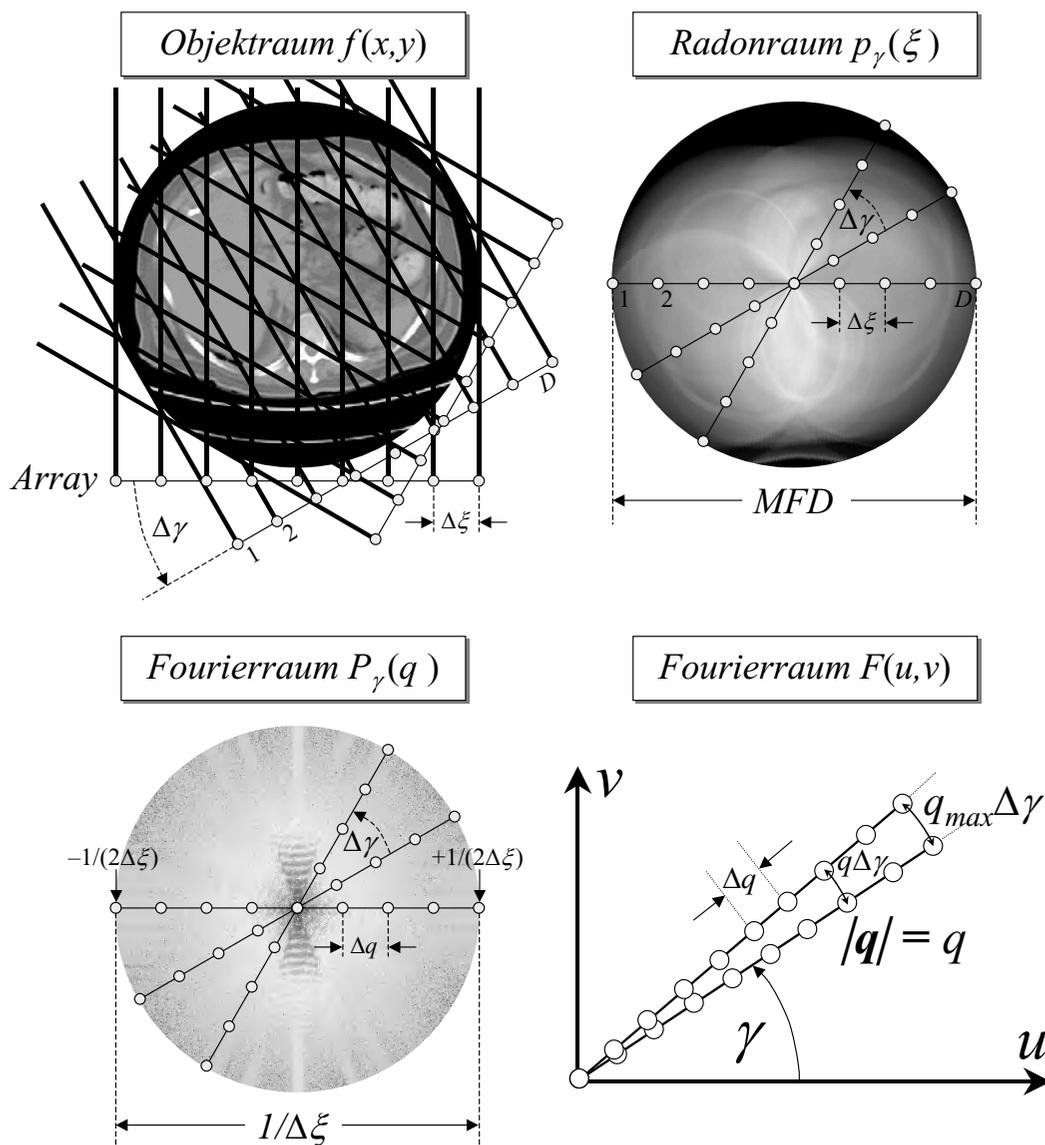


Abb. 6.9: Geometrische Lage der Abtastpunkte im Objekt-, Radon- und Frequenzraum. Die Anzahl der erforderlichen Abtastpunkte (und damit die Anzahl der Detektorelemente D und die Anzahl der Projektionsrichtungen N_p) ist durch das Shannonsche Abtasttheorem bestimmt.

In Gleichung (6.57) wurde gezeigt, dass

$$\frac{D_{min}}{2MFD} > q_{max} \cdot \tag{6.58}$$

Die Anzahl der Projektionen ist allgemein durch

$$N_p = \frac{\pi}{\Delta\gamma} \tag{6.59}$$

bestimmt. Betrachtet man zusätzlich den Abstand der Datenpunkte im Frequenzraum der einzelnen Projektionen, der durch die Gesamtlänge des Detektorarrays

$$\Delta q = \frac{1}{D_{\min} \Delta \xi} = \frac{1}{MFD} \quad (6.60)$$

bestimmt wird und nimmt man darüber hinaus an, dass der maximale Abstand

$$\Delta q \approx q_{\max} \Delta \gamma \quad (6.61)$$

senkrecht zu den q -Datengeraden im (u, v) -Raum in etwa dem Abstand der Datenpunkte im Frequenzraum einer einzelnen Projektion entsprechen soll (siehe Abbildung 6.9 unten rechts), dann erhält man die Abschätzung

$$N_p = \frac{\pi}{\Delta \gamma} \approx \pi \frac{q_{\max}}{\Delta q} \quad (6.62)$$

für die minimale Anzahl der Projektionen. Mit Gleichung (6.60) folgt für die rechte Seite der Abschätzung (6.62)

$$\pi \frac{q_{\max}}{\Delta q} = \pi q_{\max} MFD = \pi q_{\max} D_{\min} \Delta \xi, \quad (6.63)$$

so dass insgesamt der Zusammenhang

$$N_p = \frac{\pi}{\Delta \gamma} \approx \pi \frac{q_{\max}}{\Delta q} = \pi q_{\max} MFD < \pi \frac{D_{\min}}{2} \quad (6.64)$$

hergestellt werden kann. Als praktikable Faustregel kann man sagen, dass das Abtasttheorem erfüllt ist, wenn

$$N_p \approx D_{\min} \quad (6.65)$$

realisiert wird. Aufgrund des typischerweise rechteckigen Empfindlichkeitsprofils der Detektorelemente ist in Bezug auf den Detektorabstand noch eine so genannte Viertelverschiebung mit Verdopplung der Anzahl der Projektionen zu beachten, die in Kapitel 6.7 im Detail besprochen wird.

6.5 Geometrie des Fächerstrahlsystems

Hier soll zunächst die Geometrie eines Computertomographen der dritten Generation beschrieben werden. Aufgrund der jüngsten Entwicklungen bei den flächigen Detektoren, ist davon auszugehen, dass sich die Geometrie der dritten Generation, also die fest miteinander verbundene Abtasteinheit aus Röntgenquelle und Detektorarray durchsetzen wird. Bei den eindimensionalen Detektorarrays, die auf einem Kreisbogen mit dem Zentrum in der Röntgenquelle liegen, spielen die in Abbildung 6.10 skizzierten geometrischen Größen eine wichtige Rolle.

Genau genommen muss man bei Tomographen der dritten Generation noch zwischen gebogenen Detektorarrays (mit äquidistanten Winkeln zwischen den Detektorelementen) und planen Detektorarrays (mit äquidistanten Detektorabständen) unterscheiden. Für beide Detektorarten findet man die entsprechenden Herleitungen zur Bildrekonstruktion in den

folgenden Abschnitten. Bei diesen Systemen bewegt sich die Röntgenquelle auf einem Kreis, der durch die Koordinaten $(-FCD \sin(\theta), FCD \cos(\theta))$ gegeben ist – sofern sich die CT-Abtasteinheit links herum, also in mathematisch positiver Richtung dreht. FCD bezeichnet dabei die Fokus-Center-Distanz. Der Winkel θ ist der Projektionswinkel, definiert durch den Zentralstrahl. Bei den gebogenen Detektorarrays haben alle Detektorelemente denselben Abstand FDD von der Quelle.

6.6 Bildrekonstruktion für die Fächerstrahlgeometrie

In den vorhergehenden Kapiteln wurde schon auf den konstruktiven Unterschied der verschiedenen CT-Generationen hingewiesen. Hier soll nun speziell der Unterschied zwischen der ersten und der dritten Generation im Hinblick auf die Rekonstruktion behandelt werden. In Kapitel 5 wurden die Rekonstruktionsverfahren für die Geometrie eines Nadelstrahlensystems, also für parallel zueinander verlaufende Röntgenstrahlen innerhalb eines Projektionswinkels, dargestellt. In dieser Geometrie sind die Rekonstruktionsverfahren einfacher zu verstehen als für die Fächerstrahlgeometrie.

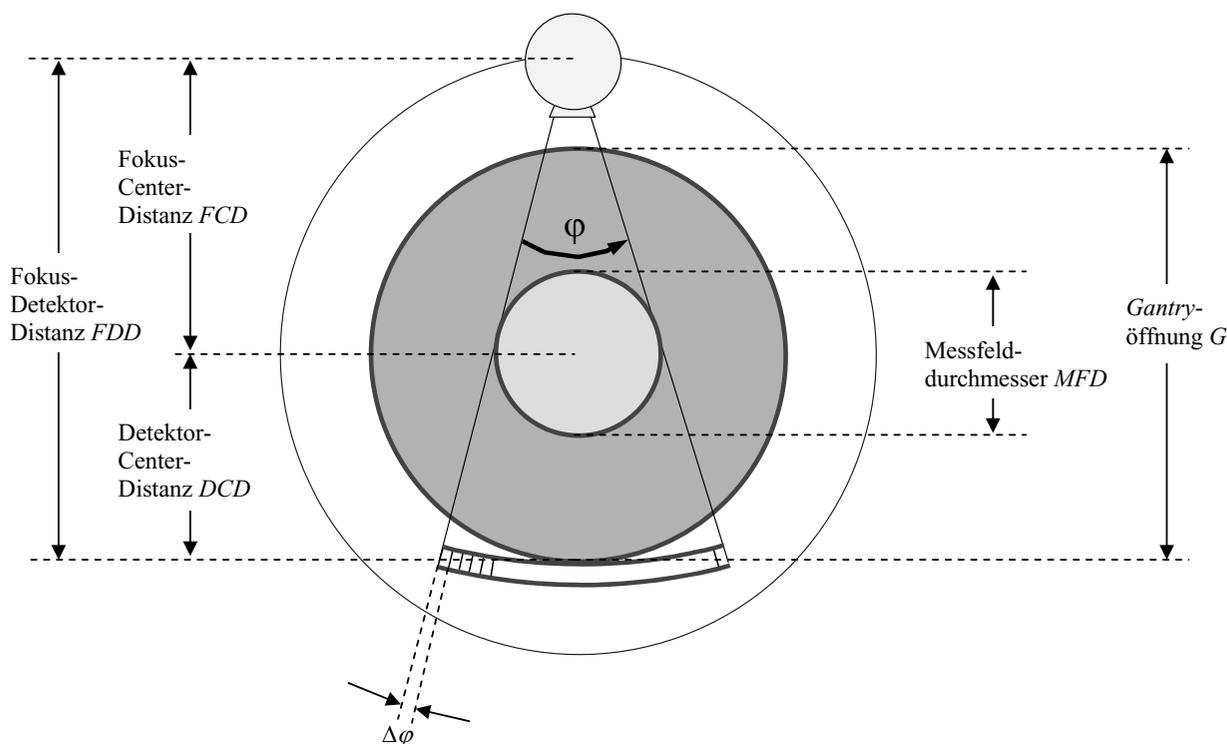


Abb. 6.10: Geometrie der Fächerstrahlanordnung bei Computertomographen der dritten Generation. In der klinischen Praxis haben gebogene Detektorarrays mit konstantem $\Delta\varphi$ große Bedeutung.

Der praktisch schwer wiegende Nachteil der Nadelstrahlgeometrie ist aber der mechanisch aufwendige Prozess der Datenakquisition in separaten Dreh- und Verschiebeschritten, der in der klinischen Praxis zu inakzeptabel hohen Messzeiten führen würde. In den Computertomographen der dritten Generation gibt es nur noch die synchrone Drehbewegung der Röntgenröhre und des Detektorarrays, die auf einer sich drehenden inneren Anordnung eine

fest miteinander verbundene Abtasteinheit bilden. Diese Konstruktion erlaubt eine wesentlich kürzere Akquisitionszeit, da mit der modernen Schleifringtechnologie eine kontinuierliche Drehbewegung der inneren CT-Abtasteinheit ohne die vorher benötigten Stopps für die lineare Verschiebung möglich ist.

In diesem Kapitel wird nun die Frage behandelt, wie sich die Mathematik der Rekonstruktionsverfahren beim Übergang von der Nadelstrahl- zur Fächerstrahlgeometrie ändert. In den Abbildungen 6.11 und 6.12 ist der Unterschied zwischen den Radonräumen eines Parallelstrahlensystems und eines Fächerstrahlensystems leicht zu erklären. Um bei überschaubaren Projektionsergebnissen zu bleiben, ist hier ein Phantom entworfen, das aus zwei unterschiedlich großen Quadraten und einem Kreis besteht. Alle Objekte haben dieselben Schwächungseigenschaften, simulieren also identisches Material. Oben rechts sieht man eine Polardarstellung des Radonraumes in Parallelstrahlgeometrie. Zum direkten Vergleich der beiden Projektionsgeometrien soll wieder auf die oben schon eingeführten, kartesischen Radonräume zurückgegriffen werden. Unten links ist zunächst die zur Polardarstellung äquivalente kartesische Darstellung der Projektionswerte in Parallelstrahlgeometrie von 0 bis 360° gezeigt.

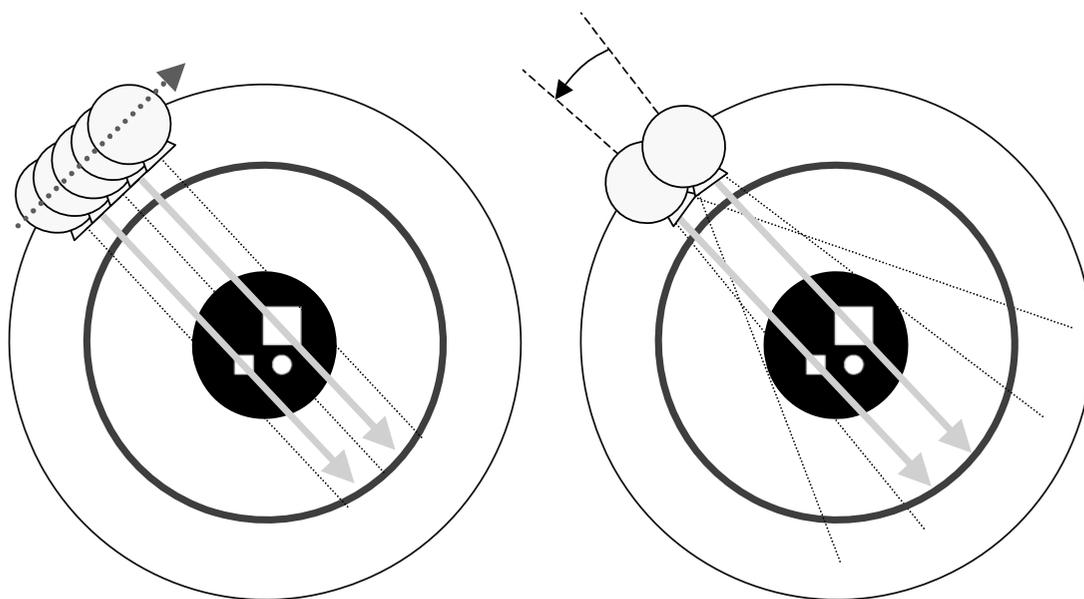


Abb. 6.11: Vergleich zwischen der Parallelstrahl- und der Fächerstrahlgeometrie für das einfache Phantom aus drei Objekten. Die jeweils längsten Wege der Röntgenstrahlen durch die Diagonalen der quadratischen Objekte sind durch dickere graue Linien symbolisiert. Während unter Parallelstrahlgeometrie diese Wege unter einem einzigen Projektionswinkel zu finden sind, liegen die jeweils längsten Winkel der Fächerstrahlgeometrie in den Fächern unterschiedlicher Projektionswinkel.

Die Interpretation der Daten im kartesischen Radonraum ist verhältnismäßig einfach. Man startet mit den Projektionen bei 0° (in der 12-Uhr-Position) und läuft dann mit der Röntgenröhre gegen den Uhrzeigersinn, also in der mathematisch positiven Richtung um das Phantom. Zunächst erkennt man, dass bei 0° die Projektion des Kreises additiv auf der Projektion des großen Quadrates liegt. Die Projektionswerte des kleinen Quadrates liegen in der Projektion unter 0° separiert von den Werten der anderen Objekte. Da die Umlaufrichtung hier mathematisch positiv definiert ist, erreicht man bei 135° (und fortgesetzt dann in der Gegenrichtung, also bei 315°) den Radonwert mit dem größten Eintrag. Der Detektorarray-

mittenwert $p_{135^\circ}(0) = p_{315^\circ}(0)$ ist maximal, weil auf der korrespondierenden Linie des Röntgenstrahls der längste Weg durch die hintereinander liegenden Diagonalen der beiden quadratischen Objekte zurückzulegen ist. Auf den ersten Blick unterscheiden sich die Radonrepräsentationen der Daten in Parallelstrahl- und Fächerstrahlgeometrie nicht. Insbesondere fällt auf, dass in beiden Darstellungen der Wert $p_{135^\circ}(0) = p_{315^\circ}(0)$ maximal ist. Die zentrale Projektion ist tatsächlich in beiden Radonräumen identisch. Mit zunehmender Entfernung von der zentralen Projektion zeigen sich aber doch Unterschiede.

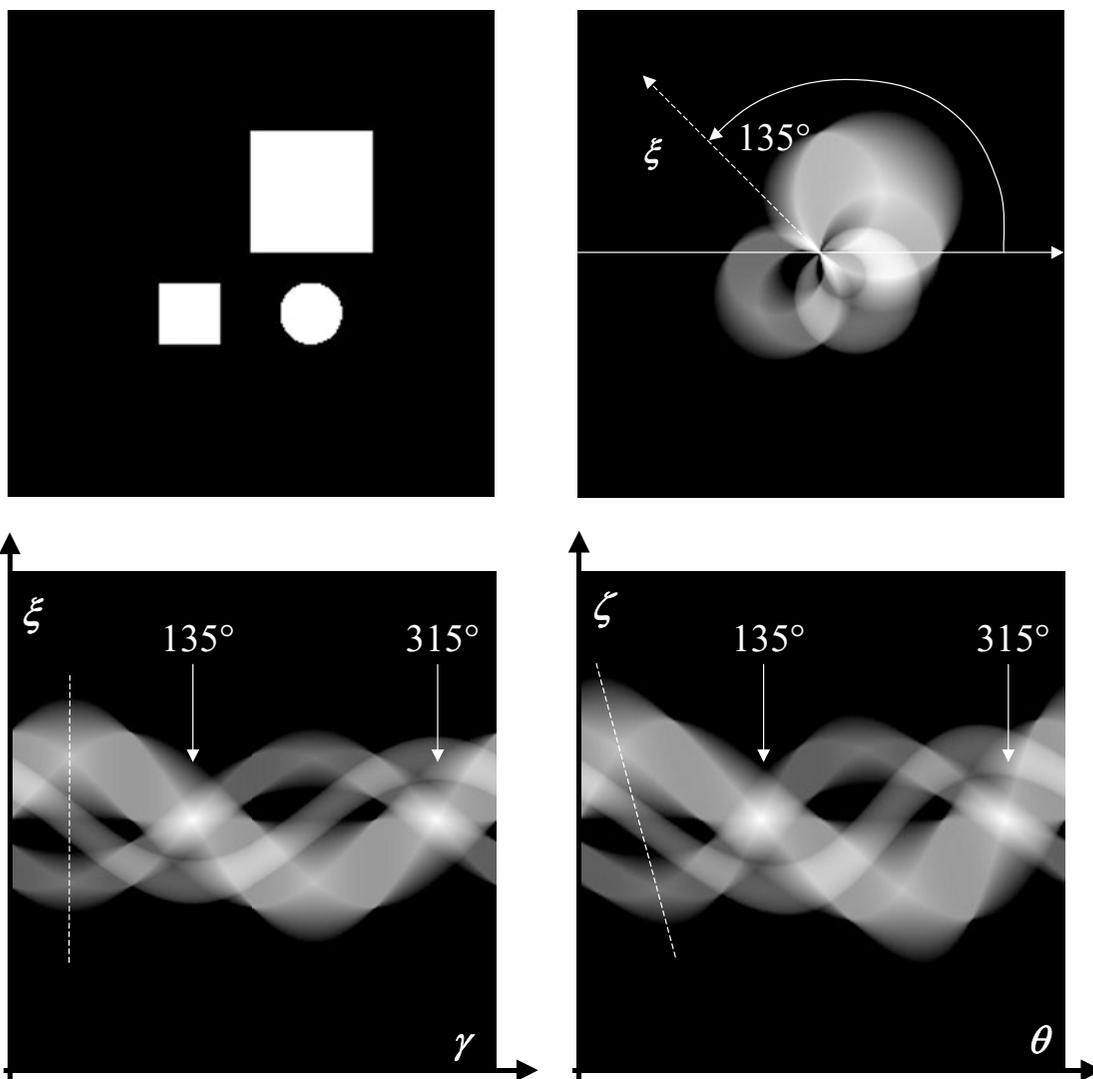


Abb. 6.12: Vergleich zwischen den Radonräumen der Parallelstrahl- und der Fächerstrahlgeometrie. Oben links ist ein einfaches Phantom zu sehen. Es besteht aus zwei unterschiedlich großen Quadraten und einem Kreis. Alle Objekte haben identische Schwächungskoeffizienten, die jeweils homogen verteilt sind. Oben rechts und unten links sind die Radonräume der Parallelstrahlgeometrie zu sehen und zwar in Polar- bzw. kartesischer Darstellung. Unten rechts sind die Projektionswerte im Radonraum des Phantoms in Fächerstrahlgeometrie zu sehen. Die beiden unteren Bilder unterscheiden sich nur auf den ersten Blick nicht voneinander, weil insbesondere die hohen Schwächungen bei 135° und bei 315° an der gleichen Stelle liegen. Mit zunehmender Entfernung von der zentralen Projektion gibt es aber sehr wohl Unterschiede. Zur Führung der Augen ist in beide Grafiken eine gestrichelte Linie eingezeichnet, die markante Positionen der Diagonaldurchläufe durch die Objekte in den beiden Radonräumen verbindet.

Zur Führung der Augen ist jeweils eine gestrichelte Linie eingezeichnet, die markante Punkte miteinander verbindet. Diese Punkte sind in der Parallelstrahlgeometrie unter 45° einfach zu interpretieren. In Kapitel 5.7 wurde schon der Verlauf der Projektionsdatenprofile für ein quadratisches Objekt besprochen. Unter 0° erkennt man eine gleichförmige Intensität durch das Rechteckprofil und unter 45° das entsprechende Dreiecksprofil.

Im Radonraum der Parallelstrahlgeometrie ist das Dreiecksprofil beider quadratischer Objekte unter 45° zu sehen. In der Fächerstrahlgeometrie erscheint dieser Punkt für das große Quadrat früher und für das kleine Quadrat später. Abbildung 6.11 erklärt diese Erscheinung. Die Strahlen mit den jeweils längsten Wegen durch die Diagonalen der quadratischen Objekte liegen für die Parallelstrahlgeometrie innerhalb eines Projektionswinkels. Für die Fächerstrahlgeometrie findet man die Strahlen mit den jeweils längsten Wegen niemals innerhalb eines Fächers sondern in unterschiedlichen Positionen unter leicht verschobenen Projektionswinkeln.

6.6.1 Umsortieren der Fächerstrahlen

In Abbildung 6.13 ist der Übergang von der Fächerstrahl- zur Nadelstrahlgeometrie schematisch dargestellt. Man betrachtet hierzu die Drehung des Mittelstrahls des Fächers um den Winkel $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Bei der Drehung der Abtasteinheit bilden Röntgenfokus und Detektor konzentrische Kreise, die in der Regel unterschiedliche Radien besitzen. Offenbar ist es möglich, in der Projektion $\phi_{\theta_2}(\zeta)$ Röntgenstrahlen zu finden, die paarweise zu Strahlen in $\phi_{\theta_1}(\zeta)$ parallel verlaufen. Eine synthetische Nadelstrahlgeometrie lässt sich also rekonstruieren, indem man geeignete Strahlen der Fächer unter unterschiedlichen Projektionswinkeln umsorrtiert und neu zusammenfasst.

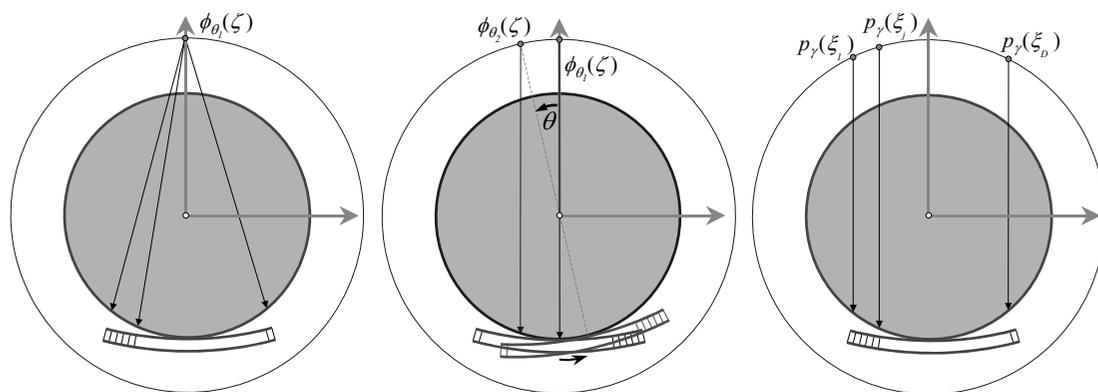


Abb. 6.13: Links: Computertomograph in der Fächerstrahlgeometrie: Röntgenfokus und Detektorarray umlaufen synchron ein gemeinsames Zentrum, das Isozentrum im Messfeld. Mitte: Nach einer Drehung der Abtasteinheit um den Winkel θ findet man in dem neuen Fächer Strahlen, die parallel zu Strahlen des alten Fächers verlaufen. Rechts: Die Nadelstrahlgeometrie kann durch Umsortierung der Projektionswerte aus verschiedenen Projektionswinkeln synthetisiert werden.

Natürlich erfordert das Umsortieren der Strahlen in den Fächern eine sorgfältige Betrachtung der geometrischen Randbedingungen. Ein Beispiel ist der Öffnungswinkel bzw. die Länge des Detektorarrays. In Abbildung 6.14 ist gezeigt, dass die Randstrahlen der Nadelstrahlgeometrie bei beschränktem Öffnungswinkel des Fächers nicht durch das Umsortieren erzeugt werden können, weil es sie unter anderen Winkeln einfach nicht gibt.

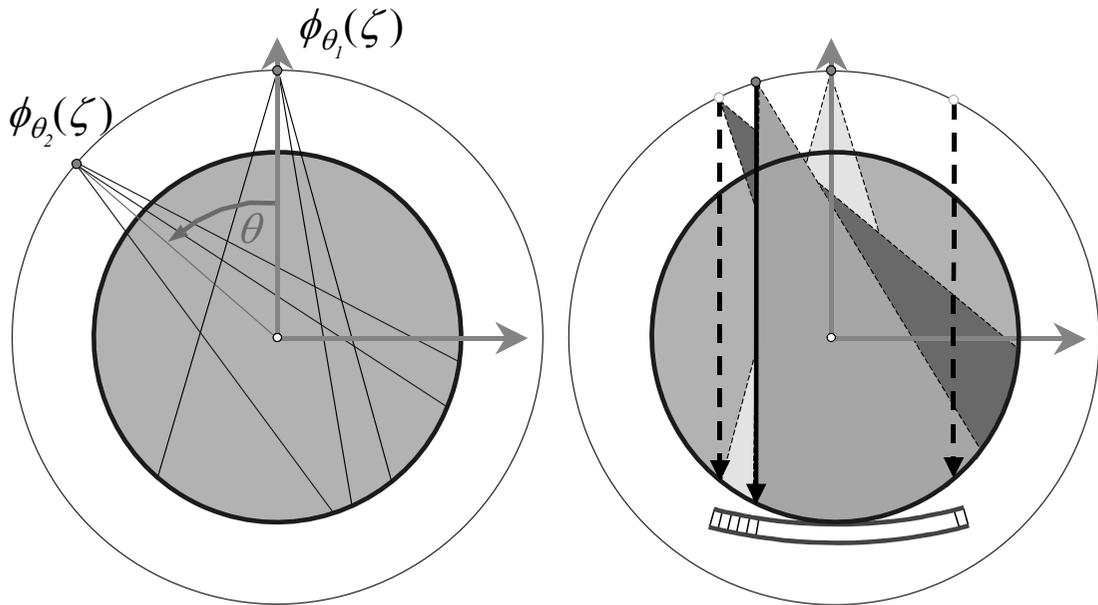


Abb. 6.14: Im Bild links sieht man, dass die maximale Änderung des Projektionswinkels θ für das Umsortieren nicht unabhängig vom Öffnungswinkel des Fächers ist. Im Bild rechts sind die beiden äußeren Parallelstrahlen (gestrichelt eingezeichnet) durch Umsortierung bei dem beschränktem Öffnungswinkel nicht zu erreichen.

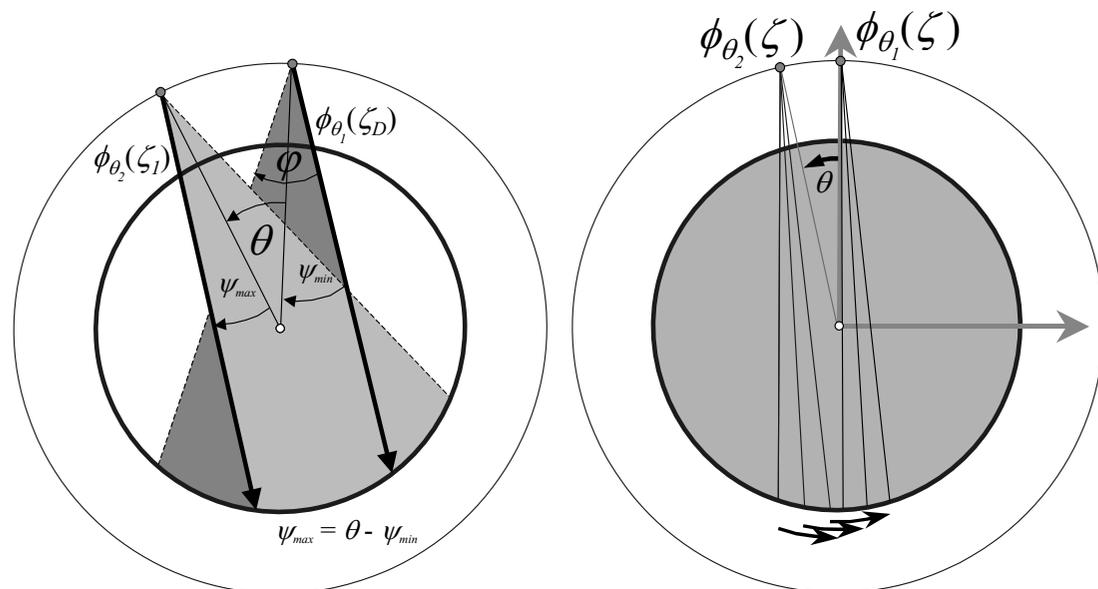


Abb. 6.15: Der maximal erreichbare Abstand zwischen den äußeren Randstrahlen der synthetisierten Nadelstrahlgeometrie ist durch den Öffnungswinkel des Fächers ϕ beschränkt. Die dazugehörige maximale Änderung des Projektionswinkels $\theta = \psi_{max} + \psi_{min}$ entspricht gerade dem Öffnungswinkel. Im Bild rechts ist gezeigt, dass man die paarweise parallelen Strahlen aus zwei Fächerprojektionen in der vorliegenden Geometrie nur im zentralen Bereich der Projektion, dann aber jeweils unter der gleichen Winkelverschiebung erhält.

Die praktische Ausgangslage ist, dass nur die Fächerstrahlprojektion $\phi_\theta(\zeta)$ gemessen wird und damit bekannt ist. Der Projektionswinkel für die Parallelprojektion ist, so wie in dem vorhergehenden Kapitel eingeführt, der Winkel γ zwischen der virtuellen linearen Detektorachse ξ und der x -Achse. Wegen der Krümmung des Detektorarrays verwendet man bei der Fächerstrahlgeometrie als Projektionswinkel den Winkel θ zwischen dem zentralen Strahl des Fächers und der y -Achse.

Betrachtet man die Abbildung 6.16, so stellt sich nun die Frage, in welcher Beziehung der Durchstoßpunkt ξ des gedachten linearen Detektorarrays unter dem Projektionswinkel γ mit dem Projektionspunkt ψ (ψ ist eine Winkelkoordinate) des realen gekrümmten Detektorarrays unter dem Projektionswinkel θ steht. Offenbar gilt

$$\xi = FCD \sin(\psi) \quad (6.66)$$

und analog

$$\zeta = FDD \psi. \quad (6.67)$$

Aufgrund der Krümmung des Detektors gilt die Winkelbeziehung

$$\gamma = \theta + \psi \quad (6.68)$$

oder, äquivalent

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\xi}{FCD}\right) \quad (6.69)$$

und

$$\theta = \gamma - \psi. \quad (6.70)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\phi_\theta(\zeta) = \phi_\theta(FDD\psi) = p_{\theta+\psi}(FCD \sin(\psi)) \quad (6.71)$$

bzw. umgekehrt

$$\begin{aligned} P_\gamma(\xi) &= \phi_{\gamma-\psi}(\zeta) \\ &= \phi_{\gamma-\arcsin\left(\frac{\xi}{FCD}\right)}\left(FDD \arcsin\left(\frac{\xi}{FCD}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Die Abbildungen 6.17 und 6.18 zeigen schematisch, wie die Daten im Radonraum liegen. Es ist also möglich, durch ein Umsortieren (*rebinning*) aus der Fächerstrahlprojektion eine Parallelstrahlprojektion zu berechnen. Allerdings ist sofort klar, dass hierbei eine Interpolation der gemessenen Fächerprojektion nötig ist. Insbesondere sind hierbei zwei Fakten zu beachten. Erstens liegen die berechneten Datenpunkte der Parallelprojektion nicht äquidistant und zweitens reicht das für eine tatsächliche Parallelprojektion erforderliche Messintervall

$$\gamma \in [0, \pi] \quad (6.73)$$

nun nicht mehr aus, um einen vollständigen Radonraum aus der Fächerstrahlprojektion zu interpolieren. Vielmehr müssen Daten im Winkelintervall

$$\theta \in [\psi_{\min}, \pi + \psi_{\max}] \quad (6.74)$$

gemessen werden. Damit ist das erforderliche Messintervall der Fächerstrahlgeometrie um den Öffnungswinkel des Fächers, also um $\varphi = \psi_{\max} + \psi_{\min}$ größer als bei der Parallelstrahlgeometrie. In Abbildung 6.17 sind die erforderlichen Daten für die Rekonstruktion grau unterlegt.

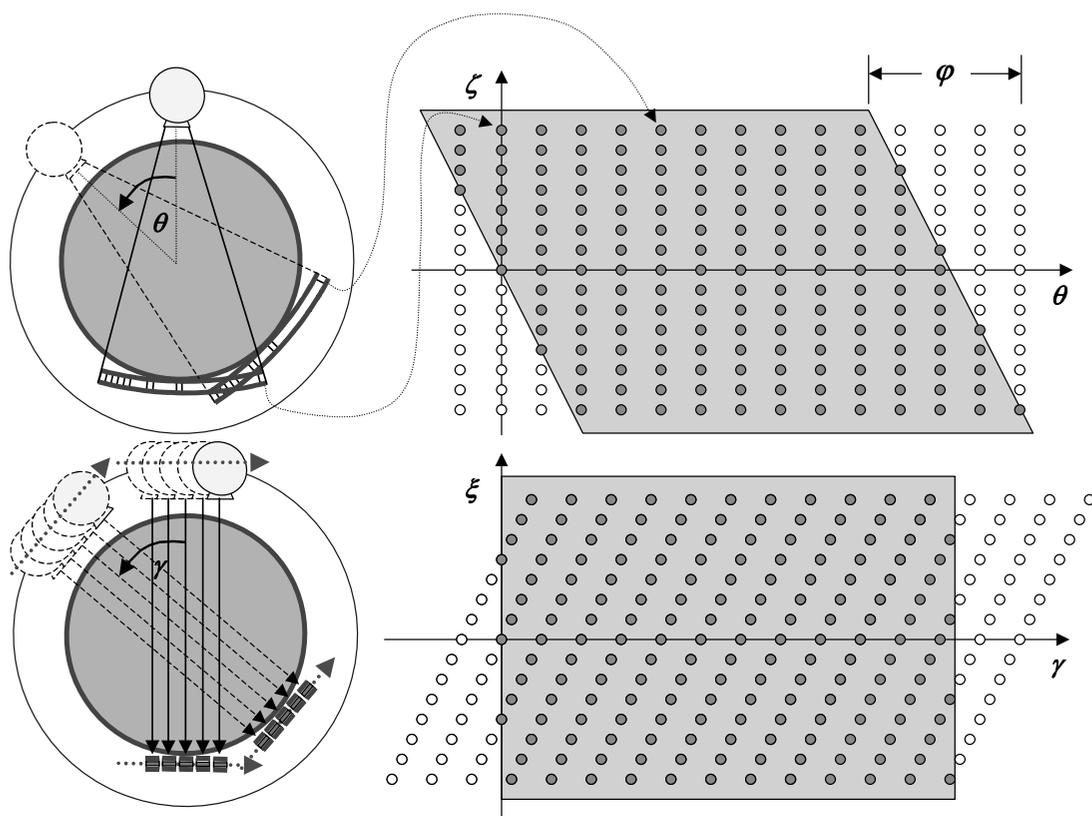


Abb. 6.17: Lage der Daten in den Radonräumen der jeweiligen Geometrien für kleine Öffnungswinkel des Fächers, so dass sich der *Sinus* bzw. *Arcussinus* noch nicht bemerkbar machen. Die Kreise spiegeln die Abtastpunkte der Projektionswerte auf dem gekrümmten Detektorarray $\phi_\theta(\zeta)$ (obere Graphik) bzw. einer gedachten Parallelprojektion $p_\gamma(\xi)$ (untere Graphik) wider. Ausgehend von den Gleichungen (6.66) bis (6.72) ist klar, dass das Winkelintervall, in dem Projektionen in der Fächerstrahlgeometrie aufgenommen werden, um den Öffnungswinkel φ des Fächers größer als π sein muss, damit ein vollständiger Satz von Werten im Radonraum der Parallelprojektion interpoliert werden kann.

Damit das Sortieren der Abtastwerte schnell geschehen kann, sind einige Randbedingungen zu beachten. $\Delta\theta$ und $\Delta\gamma$ seien jeweils die Winkelintervalle in denen ein Fächerstrahl- bzw. ein Parallelstrahlprofil gemessen wird. Für diese Intervalle gelte die Bedingung

$$\Delta\theta = \Delta\gamma = \Delta\varphi. \tag{6.75}$$

Dann kann für ganze Zahlen n, m geschrieben werden

$$\phi_{m\Delta\varphi}(FDD n\Delta\varphi) = p_{(m+n)\Delta\varphi}(FCD \sin(n\Delta\varphi)). \tag{6.76}$$

Gleichung (6.76) besagt, dass der n -te Strahl in der m -ten Fächerprojektion gleich dem n -ten Strahl in der $(m+n)$ -ten Parallelprojektion ist. Die so erzeugten parallelen Strahlen sind natürlich nicht äquidistant, so dass eine Interpolation auf der ξ -Achse erforderlich ist. Abbildung 6.19 zeigt noch einmal die Korrespondenz zwischen Parallel- und Fächerstrahlgeometrie der Daten im Radonraum des Softwarephantoms aus Abbildung 6.11.

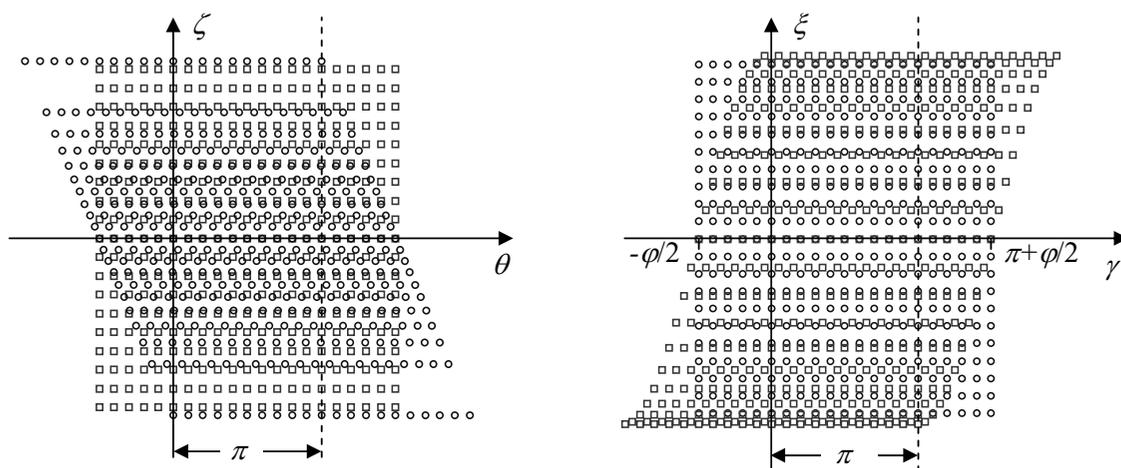


Abb. 6.18: Exakte Lage der Daten in den Radonräumen der jeweiligen Geometrien auch für sehr große (praktisch nicht zu realisierende) Öffnungswinkel des Fächers. Im linken Bild ist das reguläre Raster des (ζ, θ) -Radonraumes durch Quadrate gegeben. Schräg dazu sieht man die für die Berechnung des Radonraumes des synthetischen Parallelstrahlensystems erforderlichen Punkte mit Kreisen überlegt. Im rechten Bild sieht man das zu berechnende reguläre Raster des (ξ, γ) -Radonraumes durch Kreise gegeben. Schräg dazu sieht man die tatsächlich durch das Fächerstrahlensystem gemessenen Daten mit Quadraten überlegt. Die *Sinus*-Funktion sticht deutlich hervor.

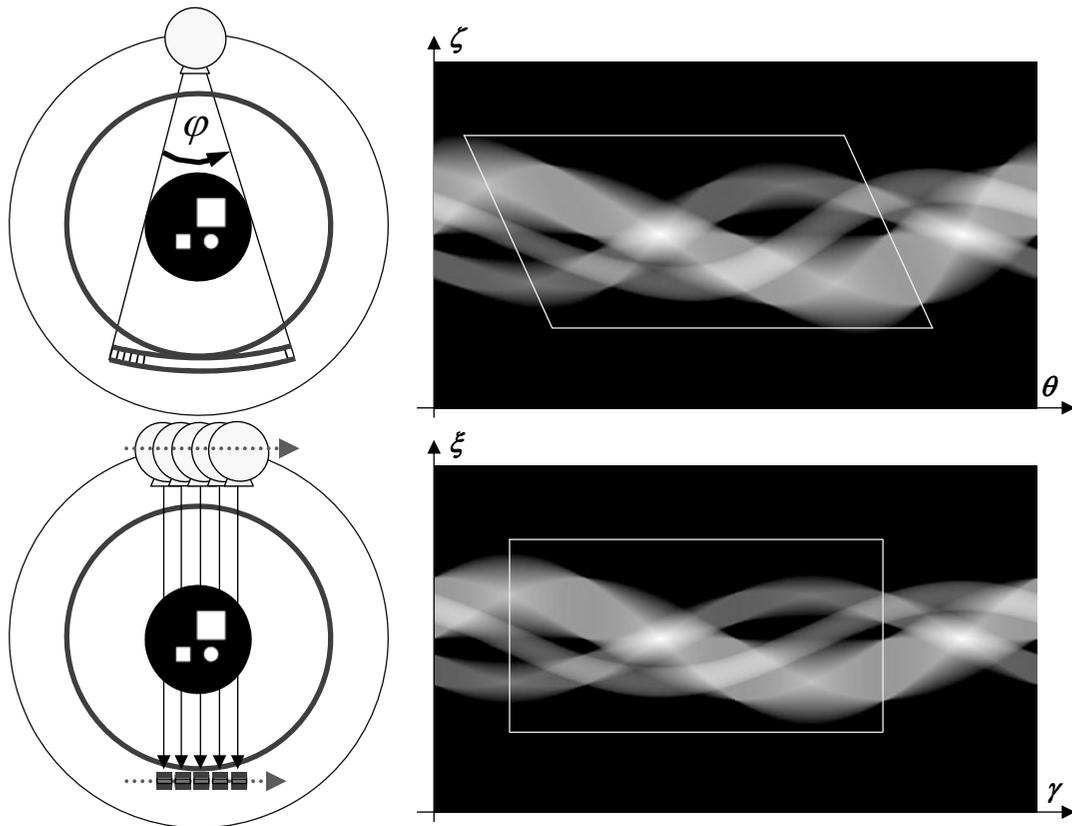


Abb. 6.19: Über 360° ist hier der Radonraum für die Fächerstrahlgeometrie (oben) und die Parallelstrahlgeometrie (unten) anhand eines einfachen Phantoms zu sehen.

6.6.2 Komplementäres Rebinning

Physikalisch sind der Hin- und Rückweg des Röntgenstrahls bezüglich der Schwächung im Gewebe nicht zu unterscheiden, das heißt es gilt

$$p_\gamma(\xi) = p_{\gamma \pm \pi}(-\xi). \quad (6.77)$$

Aufgrund dieser Tatsache ist bei der Parallelstrahlgeometrie der Raum nach einer halben Umdrehung vollständig abgetastet. Für die Fächerstrahlgeometrie kann man eine analoge Beziehung herstellen, denn zwei Strahlen sind hier identisch, wenn bezüglich ihrer Winkel folgendes gilt

$$\theta_2 = \theta_1 + 2\psi_1 \pm \pi. \quad (6.78)$$

Hierbei ist

$$\psi_2 = -\psi_1. \quad (6.79)$$

In Abbildung 6.20 kann man die Winkelverhältnisse nachvollziehen.

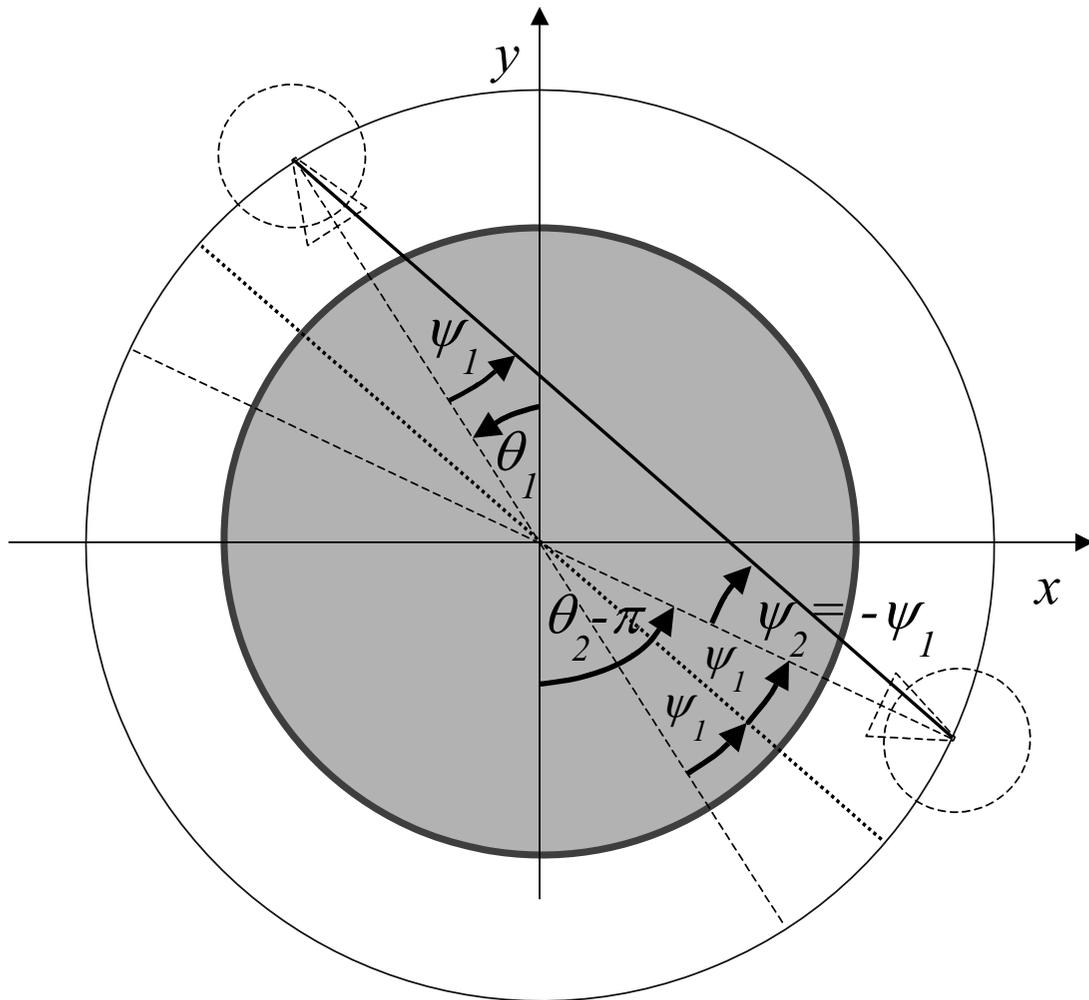


Abb. 6.20: Auch bei der Fächerstrahlgeometrie gibt es Strahlen in den Fächern der zweiten Hälfte der vollen Umdrehung, bei denen die Wege in Hin- und Rückrichtung identisch sind.

Wenn dieser Sachverhalt bei den Gleichungen (6.66) bis (6.72) beachtet wird, kann man mit Hilfe von Abbildung 6.20 sehen, dass

$$\begin{aligned}
 \phi_{\theta}(\zeta) &= p_{\theta+\psi}(FCD \sin(\psi)) \\
 &= p_{\theta+\psi\pm\pi}(-FCD \sin(\psi)) \\
 &= \phi_{\theta+2\psi\pm\pi}(-\zeta)
 \end{aligned}
 \tag{6.80}$$

Auf diese Weise kann man sich eine so genannte komplementäre Röntgenquelle konstruieren. Abbildung 6.21 stellt das Zustandekommen der komplementären Röntgenquelle schematisch dar.

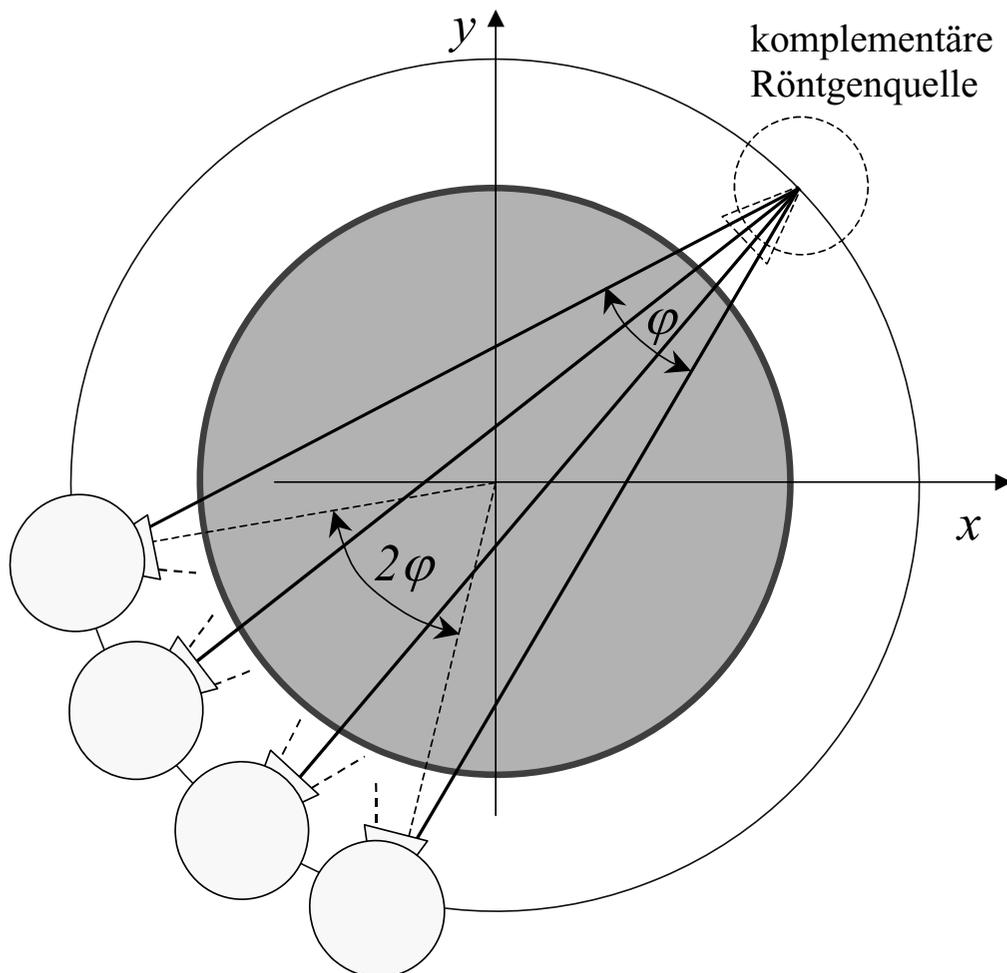


Abb. 6.21: Darstellung einer komplementären Röntgenquelle, die durch die physikalische Symmetrie des Schwächungsweges der Röntgenstrahlung zustande kommt.

Die Kenntnis dieser Geometrie kann nun genutzt werden, um den Radonraum weiter zu füllen. Das komplementäre Projektionswinkelintervall ist ausgehend vom Intervall (6.74) offenbar

$$2\pi - \psi_{\max} \leq \theta \leq 2\pi - \psi_{\min} \quad (6.81)$$

6.6.3 Gefilterte Rückprojektion für das gebogene Detektorarray

Ein praktischer Nachteil des *Rebinning* ergibt sich daraus, dass die Rekonstruktion erst stattfinden kann, wenn genügend Fächerstrahlprojektionen gemessen sind, um eine Parallelstrahlprojektion zu synthetisieren. Dadurch kann die Rekonstruktion nicht synchron zum Messprozess verlaufen, sondern muss auf eine Reihe von Messdaten warten. Darüber hinaus muss man beim *Rebinning* des Radonraumes in der Regel eine zeitlich aufwendige Interpolation durchführen, so dass man sich alternativ auch überlegen kann, wie die direkte gefilterte Rückprojektion für die Fächerstrahlgeometrie aussieht. Dazu geht man von der gefilterten Rückprojektion der Nadelstrahlgeometrie aus ([Hor79],[Kak88],[Sch02]), das heißt

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\gamma}(q) e^{2\pi i q(x \cos(\gamma) + y \sin(\gamma))} |q| dq d\gamma \\
&= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\gamma}(q) e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi})} |q| dq d\gamma .
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Hier ersetzt man die Frequenzdarstellung der Projektion durch die explizite Fouriertransformation des räumlichen Projektionssignals, also

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) e^{-2\pi i q \xi} e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi})} |q| d\xi dq d\gamma \\
&= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} - \xi)} |q| d\xi dq d\gamma .
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Das Vertauschen der Integrationsreihenfolge in Gleichung (6.83) liefert dann

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) e^{-2\pi i q \xi} e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi})} |q| d\xi dq d\gamma \\
&= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} - \xi)} |q| dq \right) d\xi d\gamma .
\end{aligned} \tag{6.84}$$

Der Klammerausdruck

$$g(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} - \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} - \xi)} |q| dq \tag{6.85}$$

ist die Filterfunktion im Ortsbereich, die als Distribution aufzufassen ist [Sch02], denn die direkte Auswertung des Integrals (6.85) gelingt wegen der Schwierigkeiten mit der Konvergenz nicht. Als Distribution innerhalb eines weiteren Integrals kann aber der Ausdruck (6.85) zu sinnvollen Ergebnissen führen. Damit erhält man folgende Faltung

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) e^{-2\pi i q \xi} e^{2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi})} |q| d\xi dq d\gamma \\
&= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) g(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} - \xi) d\xi d\gamma \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\gamma}(\xi) g(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} - \xi) d\xi \right) d\gamma ,
\end{aligned} \tag{6.86}$$

die hier für eine Rückprojektion über 360° definiert ist.

An dieser Stelle soll der Koordinatenübergang zur Fächergeometrie erfolgen, das heißt, man vollzieht den Übergang

$$(\xi, \gamma) \rightarrow (\zeta, \theta) . \tag{6.87}$$

Bei der Integration interessiert man sich zunächst wieder besonders für die Transformation des Flächenelements $d\xi d\gamma$ beim Koordinatenübergang. Wie schon in Gleichung (5.56) gezeigt, muss das neue Flächenelement mit der Jacobi-Funktional-Determinante multipliziert werden. Das heißt, das Flächenelement $d\xi d\gamma$ ist in den neuen Koordinaten durch $J d\zeta d\theta$ gegeben, wobei J durch

$$J \equiv \frac{\partial(\xi, \gamma)}{\partial(\zeta, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial\zeta} & \frac{\partial\gamma}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial\xi}{\partial\theta} & \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} \end{vmatrix} \quad (6.88)$$

gegeben ist. Das direkte Einsetzen der Transformationsgleichungen (6.66) bis (6.68) ergibt

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\left(FCD \sin\left(\frac{\zeta}{FDD}\right)\right)}{\partial\zeta} & \frac{\partial\left(\theta + \frac{\zeta}{FDD}\right)}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial\left(FCD \sin\left(\frac{\zeta}{FDD}\right)\right)}{\partial\theta} & \frac{\partial(\theta + \psi)}{\partial\theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{FCD}{FDD} \cos\left(\frac{\zeta}{FDD}\right) & \frac{1}{FDD} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{FCD}{FDD} \cos\left(\frac{\zeta}{FDD}\right) = \frac{FCD}{FDD} \cos(\psi) \end{aligned} \quad (6.89)$$

Das heißt, bei der Koordinatentransformation (6.87) ändert sich mit

$$d\xi d\gamma \rightarrow \frac{FCD}{FDD} \cos\left(\frac{\zeta}{FDD}\right) d\zeta d\theta \quad (6.90)$$

das infinitesimale Flächenelement. Verwendet man statt des Bogenabschnitts ζ den Bogenwinkel ψ , so gilt analog

$$d\xi d\gamma \rightarrow FCD \cos(\psi) d\psi d\theta. \quad (6.91)$$

Um zu verstehen, wie das Skalarprodukt $\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi$ in den neuen Koordinaten aussieht, müssen die Punkte auf den Rückprojektionslinien in Polarkoordinaten definiert werden. Abbildung 6.22 skizziert die geometrische Situation. Der Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\delta) \\ y &= r \sin(\delta) \end{aligned} \quad (6.92)$$

Mit

$$\mathbf{n}_{\xi} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} \tag{6.93}$$

hat das Skalarprodukt mit Hilfe des Additionstheorems für den *Cosinus*

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \tag{6.94}$$

die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} &= (r \cos(\delta), r \sin(\delta)) \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} \\ &= r \cos(\delta) \cos(\gamma) + r \sin(\delta) \sin(\gamma) \\ &= r \cos(\gamma - \delta) \end{aligned} \tag{6.95}$$

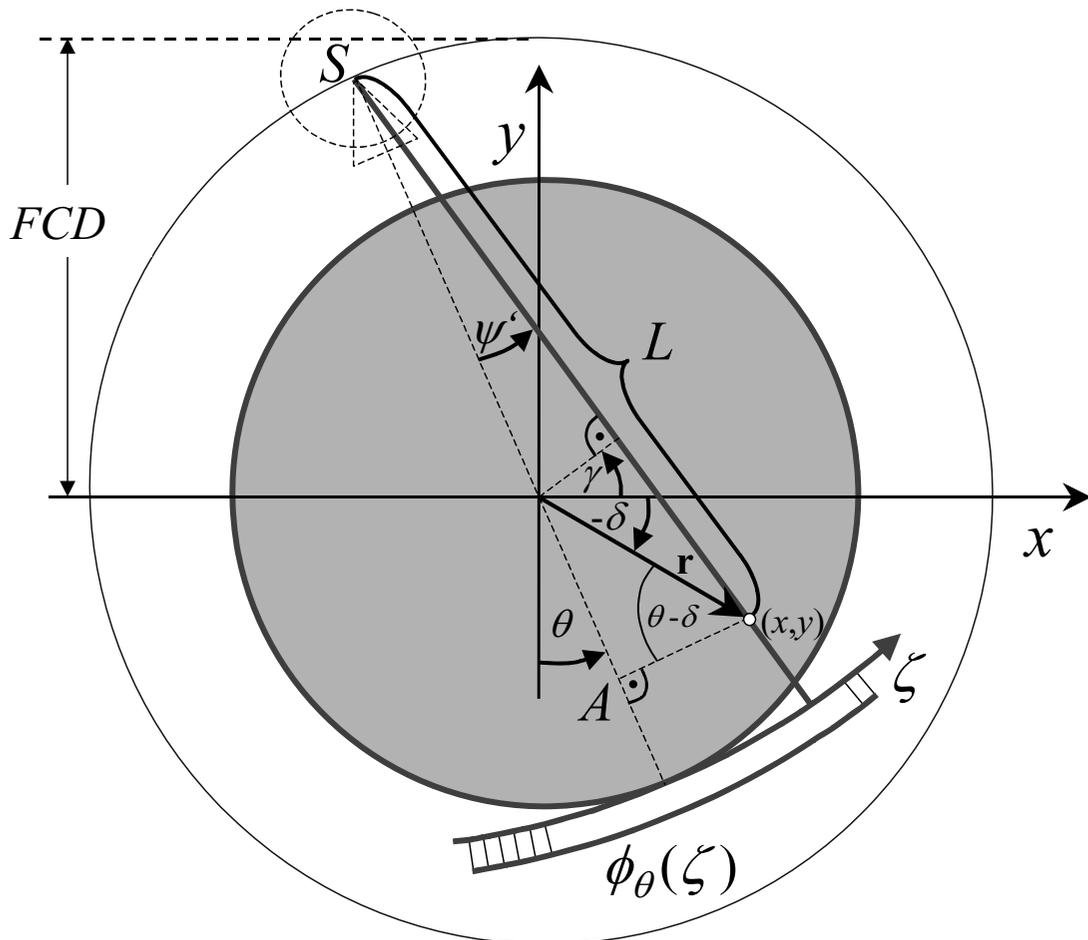


Abb. 6.22: Für die Filterung im Koordinatensystem des Fächerstrahls werden neue Größen eingeführt. L ist der Abstand zwischen einem Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und der Röntgenquelle. Der Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ist durch seinen Abstand vom Drehzentrum r und durch den Winkel δ gekennzeichnet.

Damit hat der Ausdruck (6.86) in den neuen Koordinaten die Form

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \phi_{\theta}(FDD\psi) g(r \cos(\gamma - \delta) - FCD \sin(\psi)) FCD \cos(\psi) d\psi \right) d\theta \quad (6.96)$$

und wird mit dem Winkelzusammenhang (6.68) zu

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \phi_{\theta}(FDD\psi) g(r \cos(\theta + \psi - \delta) - FCD \sin(\psi)) FCD \cos(\psi) d\psi \right) d\theta. \quad (6.97)$$

An dieser Stelle soll zunächst das Argument des Filterkerns

$$g = g(r \cos(\theta + \psi - \delta) - FCD \sin(\psi)) \quad (6.98)$$

genauer betrachtet werden. Mit dem Additionstheorem (6.94) kann man schreiben, dass

$$\begin{aligned} r \cos(\theta + \psi - \delta) - FCD \sin(\psi) &= r \cos(\theta - \delta) \cos(\psi) - r \sin(\theta - \delta) \sin(\psi) - FCD \sin(\psi) \\ &= r \cos(\theta - \delta) \cos(\psi) - (r \sin(\theta - \delta) + FCD) \sin(\psi). \end{aligned} \quad (6.99)$$

Wie in Abbildung 6.22 gekennzeichnet, bezeichnet L den Abstand zwischen der Röntgenquelle und dem Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$. Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck – gebildet durch die Punkte \mathcal{S} , \mathcal{A} und \mathbf{r} – so ergibt elementare Trigonometrie

$$L \cos(\psi') = FCD + r \sin(\theta - \delta) \quad (6.100)$$

und

$$L \sin(\psi') = r \cos(\theta - \delta). \quad (6.101)$$

In Abbildung 6.22 kann man dann sehen, dass

$$L = \sqrt{(FCD + r \sin(\theta - \delta))^2 + (r \cos(\theta - \delta))^2} \quad (6.102)$$

bzw.

$$L = \sqrt{(FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta))^2 + (x \cos(\theta) + y \sin(\theta))^2}. \quad (6.103)$$

ψ' ist dabei ein durch den Punkt (r, δ) und den Projektionswinkel θ festgelegter Winkel der Fächerbogenwinkelkoordinate ψ . Dieser spezielle Winkel ist gerade gegeben durch

$$\psi' = \arctan\left(\frac{r \cos(\theta - \delta)}{FCD + r \sin(\theta - \delta)}\right) \quad (6.104)$$

bzw.

$$\psi' = \arctan\left(\frac{x \cos(\theta) + y \sin(\theta)}{FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta)}\right). \quad (6.105)$$

Man kann also die Gleichungen (6.100) und (6.101) in (6.99) bzw. (6.98) einsetzen und erhält

$$g = g(L \sin(\psi') \cos(\psi) - L \cos(\psi') \sin(\psi)). \quad (6.106)$$

Mit dem Additionstheorem

$$\sin(a-b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \quad (6.107)$$

folgt daraus

$$g = g(L \sin(\psi' - \psi)). \quad (6.108)$$

Diesen Ausdruck setzt man in Gleichung (6.97) ein, so dass

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} p_{\theta+\psi} (FCD \sin(\psi)) g(L \sin(\psi' - \psi)) FCD \cos(\psi) d\psi \right) d\theta \quad (6.109)$$

bzw.

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \phi_{\theta} (FDD \psi) g(L \sin(\psi' - \psi)) FCD \cos(\psi) d\psi \right) d\theta \quad (6.110)$$

folgt. Das innere Integral stellt wieder eine Faltung dar. Da die Funktion g im Ausdruck (6.108) der räumliche Faltungskern der linearen Frequenzrampe ist, also

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q \xi} dq, \quad (6.111)$$

setzt man hier die für die Fächerstrahlgeometrie gewonnenen Argumente ein, so dass

$$g(L \sin(\psi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q (L \sin(\psi))} dq. \quad (6.112)$$

folgt. Die Substitution

$$q' = \frac{qL \sin(\psi)}{\psi} \quad (6.113)$$

liefert dann

$$g(L \sin(\psi)) = \left(\frac{\psi}{L \sin(\psi)} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |q'| e^{2\pi i \psi q'} dq'. \quad (6.114)$$

Der Integralterm in Gleichung (6.114) ist gerade die gesuchte Fouriertransformation der linearen Frequenzrampe. Statt des linearen räumlichen Arguments ξ spielt hier aber die Winkelkoordinate ψ die räumliche Hauptrolle. Es gilt also der Zusammenhang

$$g(L \sin(\psi)) = \left(\frac{\psi}{L \sin(\psi)} \right)^2 g(\psi). \quad (6.115)$$

und damit erhält man für Gleichung (6.110) insgesamt

$$f(r, \delta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \left(\int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \phi_{\theta}(FDD\psi) \tilde{g}(\psi' - \psi) FCD \cos(\psi) d\psi \right) d\theta, \quad (6.116)$$

wobei

$$\tilde{g}(\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{\sin(\psi)} \right)^2 g(\psi). \quad (6.117)$$

In Analogie zu Gleichung (5.65) kann nun kurz geschrieben werden

$$f(r, \delta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} h_{\theta}(\psi) d\theta. \quad (6.118)$$

Gleichung (6.118) kann so interpretiert werden, dass es sich bei der Rekonstruktion in Fächerstrahlgeometrie um eine gewichtete gefilterte Rückprojektion handelt, wobei

$$h_{\theta}(\psi) = \tilde{\phi}_{\theta}(\psi) * \tilde{g}(\psi) \quad (6.119)$$

mit

$$\tilde{\phi}_{\theta}(\psi) = \phi_{\theta}(FDD\psi) FCD \cos(\psi). \quad (6.120)$$

In Analogie zu Kapitel 5.6 kann man nun wieder eine Rekonstruktionsanweisung angeben, die sich in drei Schritte gliedern lässt, die in Schema 6 dargestellt sind.

Schema 6: Gefilterte Rückprojektion in Fächergeometrie für das gebogene Detektorarray

1. Vorgewichtung der Fächerprojektion

$$\tilde{\phi}_\theta(\psi) = \phi_\theta(FDD\psi)FCD \cos(\psi)$$

2. Filterung des Projektionssignals. Der Rampenfilter

$$\tilde{g}(\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{\sin(\psi)} \right)^2 g(\psi)$$

ist eine modifizierte Version des Filters für die Parallelprojektion $g(\psi)$. Zusammen mit der Vorgewichtung aus dem 1. Schritt ergibt sich das Signal zur Rückprojektion hier aus der Faltung im Winkelbereich

$$h_\theta(\psi) = \tilde{\phi}_\theta(\psi) * \tilde{g}(\psi)$$

3. Die Rückprojektion über den Winkel von 2π ergibt sich dann durch

$$f(r, \delta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} h_\theta(\psi) d\theta$$

also der mit dem reziproken Abstandsquadrat zwischen der Quelle und dem aktuellen Punkt gewichteten, auf die Quelle konvergierenden gefilterten Rückprojektion.

6.6.4 Gefilterte Rückprojektion für das lineare Detektorarray

Die Rekonstruktion über die gefilterte Rückprojektion mit den Daten eines linearen statt eines gebogenen Detektorarrays kann analog zu den Ausführungen des vorhergehenden Kapitels hergeleitet werden. In der radiologischen Praxis ist das lineare Array von untergeordneter Bedeutung. Darüber hinaus sind die geometrischen Verhältnisse bei den Kreisbogenarrays einfacher und angepasster an die Rekonstruktionsgeometrie. Allerdings ist das Verständnis der geometrischen Verhältnisse bei der Rückprojektion auf der Basis von linearen Detektorarrays hilfreich, um in Kapitel 7 die Kegelstrahlverfahren zu verstehen.

Bei einem gebogenen Detektorarray, bei dem der Bogen einem Kreisabschnitt mit dem Zentrum in der Röntgenquelle entspricht, sind die einzelnen Detektorelemente unter äquidistanten Winkelabschnitten zu finden. Im Gegensatz dazu kann man bei einem linearen Detektorarray aber nur noch von äquidistanten Detektoren sprechen, denn die dazugehörige Winkeländerung ist nichtlinear. Zunächst schaue man sich dazu die geometrischen Verhältnisse in der Abbildung 6.23 an.

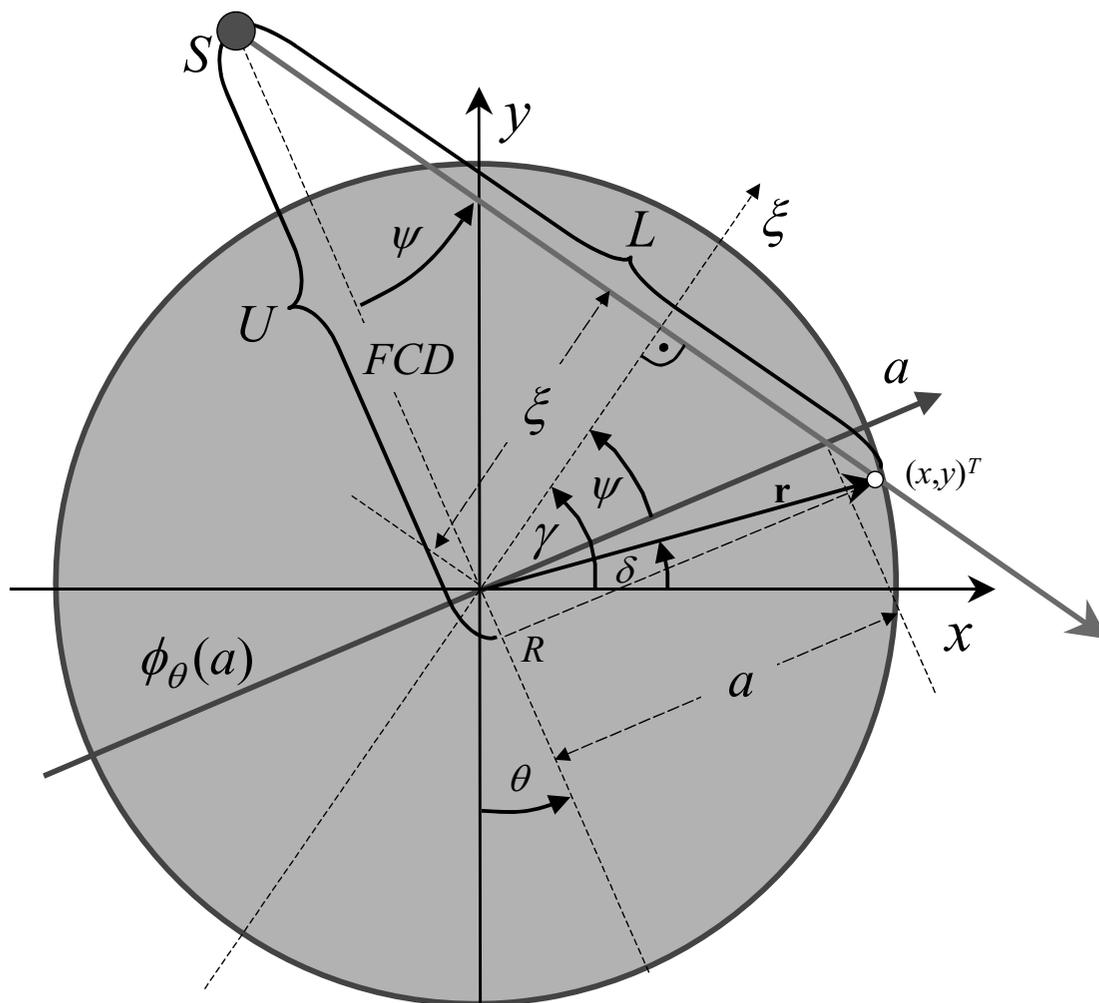


Abb. 6.23: Auch für die Filterung im Koordinatensystem des Fächerstrahls mit linearem Detektorarray werden neue Größen eingeführt. L ist der Abstand zwischen einem Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und der Röntgenquelle. Der Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ist durch seinen Abstand r vom Drehzentrum und durch den Winkel δ gekennzeichnet. Die Variable a kennzeichnet die Lage eines so genannten virtuellen linearen Detektors im Zentrum des Messfeldes. $\phi_\theta(a)$ ist die gemessene Projektion. θ bezeichnet den Projektionswinkel des Zentralstrahls der Fächerprojektion.

Die gemessene Projektion wird mit $\phi_\theta(a)$ bezeichnet, wobei die Variable a die Position auf dem linearen Detektor und θ den Projektionswinkel des Zentralstrahls bezeichnet. Häufig wird statt des tatsächlichen Detektors Bezug auf einen so genannten virtuellen Detektor genommen, den man in den Ursprung verlegt. Dies Konzept wird auch hier verfolgt. Wie bei der Geometrie des gebogenen Arrays ist L der Abstand zwischen einem Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und der Röntgenquelle. Der Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ist durch seinen Abstand r vom Drehzentrum und durch den Winkel δ gekennzeichnet.

Würde man eine Parallelstrahlgeometrie für den Punkt \mathbf{r} zugrunde legen, so erhielte man die Parallelprojektion $p_\gamma(\xi)$ unter dem Projektionswinkel γ an der Detektorposition ξ . Die ξ -Koordinate ist in Abbildung 6.23 gestrichelt eingezeichnet und bildet zum betrachteten

Röntgenstrahl definitionsgemäß einen rechten Winkel. Der Zusammenhang mit den Fächerstrahlkoordinaten ergibt sich analog zu den Gleichungen (6.66) und (6.68) hier nun durch

$$\xi = a \cos(\psi) = a \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \quad (6.121)$$

und

$$\gamma = \theta + \psi = \theta + \arctan\left(\frac{a}{FCD}\right). \quad (6.122)$$

An dieser Stelle soll für die Gleichung der gefilterten Rückprojektion

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(\xi) g(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi - \xi) d\xi \right) d\gamma \quad (6.86)$$

wieder der Übergang zur Fächerstrahlgeometrie erfolgen, das heißt, man vollzieht die Koordinatentransformation

$$(\xi, \gamma) \rightarrow (a, \theta). \quad (6.123)$$

Wie schon häufiger gezeigt, muss das neue Flächenelement bei der Integration mit der Jacobi-Funktional-Determinante multipliziert werden. Das heißt, das Flächenelement $d\xi d\gamma$ ist in den neuen Koordinaten durch $J da d\theta$ gegeben, wobei J durch

$$J \equiv \frac{\partial(\xi, \gamma)}{\partial(a, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \gamma}{\partial a} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} & \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (6.124)$$

gegeben ist. Das direkte Einsetzen der Transformationsgleichungen (6.121) und (6.122) ergibt

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \left(a \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)}{\partial a} & \frac{\partial \left(\theta + \arctan\left(\frac{a}{FCD} \right) \right)}{\partial a} \\ \frac{\partial \left(a \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)}{\partial \theta} & \frac{\partial (\theta + \psi)}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (6.125)$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 & \frac{FCD}{a^2 + FCD^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 = \cos^3(\psi)$$

Das heißt, bei der Koordinatentransformation (6.123) ändert sich durch

$$d\xi d\gamma \rightarrow \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 da d\theta \quad (6.126)$$

das infinitesimale Flächenelement. Verwendet man außerdem wieder den Zusammenhang

$$\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi = r \cos(\gamma - \delta), \quad (6.95)$$

so erhält man den Ausdruck

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_{-\arctan\left(\frac{a}{FCD}\right)}^{2\pi - \arctan\left(\frac{a}{FCD}\right)} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} p_{\theta+\psi} \left(a \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) \cdot \dots \right. \\ \left. \dots \cdot g \left[r \cos \left(\theta + \arctan \left(\frac{a}{FCD} \right) - \delta \right) - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right] \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 da \right\} d\theta \quad (6.127)$$

für die gefilterte Rückprojektion in den neuen Koordinaten. In diesem Ausdruck lassen sich folgende Vereinfachungen sofort umsetzen. Die Integrationsgrenzen der neuen Winkelkoordinate θ mussten bei der Substitution entsprechend geändert werden. Da aber die Integration über den vollen Winkel 2π invariant gegenüber einer konstanten Phasenverschiebung ist, kann auch in der neuen Variablen von 0 bis 2π integriert werden. Weiterhin ist der Projektionswert $p_\gamma(\xi)$ in den neuen Detektorvariablen sehr viel einfacher auszudrücken, denn es gilt durch die Koordinatentransformation

$$p_\gamma(\xi) \rightarrow p_{\theta+\psi} \left(a \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) = \phi_\theta(a). \quad (6.128)$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck (6.127) zu

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_\theta(a) g \left[r \cos \left(\theta + \arctan \left(\frac{a}{FCD} \right) - \delta \right) - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right] \cdot \dots \right. \\ \left. \dots \cdot \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 da \right\} d\theta \quad (6.129)$$

Nutzt man für die folgende Umformung des Argumentes des Faltungskernes g die aus der Abbildung 6.23 ablesbare Tatsache, dass

$$\psi = \arctan \left(\frac{a}{FCD} \right), \quad (6.130)$$

dann kann mit dem Additionstheorem (6.94) das Argument von g über

$$\begin{aligned}
 r \cos(\theta + \psi - \delta) - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \\
 = r \cos(\theta - \delta) \cos(\psi) - r \sin(\theta - \delta) \sin(\psi) - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}}
 \end{aligned} \quad (6.131)$$

dargestellt werden. Mit der ebenfalls aus Abbildung 6.23 ablesbaren Ausdrücken

$$\cos(\psi) = \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \quad (6.132)$$

und

$$\sin(\psi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + FCD^2}}, \quad (6.133)$$

kann Gleichung (6.131) weiter zu

$$\begin{aligned}
 r \cos(\theta + \psi - \delta) - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \\
 = r \cos(\theta - \delta) \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} - r \sin(\theta - \delta) \frac{a}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \\
 = r \cos(\theta - \delta) \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} - (r \sin(\theta - \delta) + FCD) \frac{a}{\sqrt{a^2 + FCD^2}}
 \end{aligned} \quad (6.134)$$

umgeformt werden. In der Literatur (z.B. [Tur01]) wird analog zu Gleichung (6.102) an dieser Stelle der Abstand

$$U = FCD + r \sin(\theta - \delta) \quad (6.135)$$

bzw. analog zu Gleichung (6.103)

$$U = FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \quad (6.136)$$

eingeführt³⁷ (vergleiche dazu Abbildung 6.23). So wie in Gleichung (6.104) betrachtet man nun auf dem virtuellen Detektor mit der Koordinate a die spezielle Position, die durch den Punkt (r, δ) und den Projektionswinkel θ festgelegt ist. Diese Detektorposition bezeichnet man mit a' , so dass

$$\tan(\psi') = \frac{a'}{FCD} = \frac{r \cos(\theta - \delta)}{FCD + r \sin(\theta - \delta)} \quad (6.137)$$

und damit

³⁷ Gelegentlich wird der Abstand auch als Verhältnis $U_{KS} = \frac{FCD + r \sin(\theta - \delta)}{FCD}$ definiert [Kak88].

$$a' = FCD \frac{r \cos(\theta - \delta)}{FCD + r \sin(\theta - \delta)} = FCD \frac{r \cos(\theta - \delta)}{U} \quad (6.138)$$

bzw.

$$a' = FCD \frac{x \cos(\theta) + y \sin(\theta)}{FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta)} = FCD \frac{x \cos(\theta) + y \sin(\theta)}{U} \quad (6.139)$$

folgt. Damit formt man das Argument von g in Gleichung (6.129) weiter zu

$$r \cos(\theta + \psi - \delta) - \frac{a FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} = U \frac{a'}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} - U \frac{a}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \quad (6.140)$$

um, so dass Gleichung (6.129) etwas übersichtlicher als

$$f(r, \delta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_{\theta}(a) g \left[(a' - a) \frac{U}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right] \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 da \right\} d\theta \quad (6.141)$$

geschrieben werden kann. Das innere Integral stellt wieder eine Faltung dar. Es sei daran erinnert, dass die Funktion

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q \xi} dq, \quad (6.142)$$

der räumliche Faltungskern der linearen Frequenzrampe ist. Hier setzt man die für die Fächerstrahlgeometrie mit linearem Detektor gewonnenen Argumente ein, also

$$g \left((a' - a) \frac{U}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q \left((a' - a) \frac{U}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)} dq. \quad (6.143)$$

Die Substitution

$$q' = q \frac{U}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \quad (6.144)$$

liefert dann

$$\begin{aligned} g \left((a' - a) \frac{U}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) &= \frac{a^2 + FCD^2}{U^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |q'| e^{2\pi i q' (a' - a)} dq' \\ &= \frac{a^2 + FCD^2}{U^2} g(a' - a) \end{aligned} \quad (6.145)$$

und damit erhält man für Gleichung (6.141) insgesamt

$$\begin{aligned}
f(r, \delta) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_\theta(a) \frac{a^2 + FCD^2}{U^2} g(a'-a) \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right)^3 da \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_\theta(a) g(a'-a) \left(\frac{FCD^3}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) da \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U^2} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_\theta(a) \left(\frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) g(a'-a) da \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U^2} \left\{ \left(\phi_\theta(a) \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) * g(a) \right\} d\theta
\end{aligned} \tag{6.146}$$

In Analogie zu Gleichung (5.64) kann nun kurz geschrieben werden

$$f(r, \delta) = \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U^2} h_\theta(a) d\theta, \tag{6.147}$$

wobei

$$h_\theta(a) = \frac{1}{2} \left(\phi_\theta(a) \frac{FCD}{\sqrt{a^2 + FCD^2}} \right) * g(a). \tag{6.148}$$

Die Rekonstruktionsanweisung lässt sich wieder in drei Schritte gliedern, die in Schema 7 dargestellt sind.

Schema 7: Gefilterte Rückprojektion in Fächergeometrie für das lineare Detektorarray

1. Koordinatentransformation für das Rampenfilter: Der erforderliche Rampenfilter

$$g\left((a'-a)\frac{U}{\sqrt{a^2+FCD^2}}\right)=\frac{a^2+FCD^2}{U^2}g(a'-a)$$

ist durch Koordinatentransformation auf exakt die Form des Filters für die Parallelprojektion zu bringen.

2. Filterung des Projektionssignals: Das Signal zur Rückprojektion ergibt sich aus der Faltung

$$h_\theta(a)=\frac{1}{2}\left(\phi_\theta(a)\frac{FCD}{\sqrt{a^2+FCD^2}}\right)*g(a)$$

im Ortsbereich des Detektors.

3. Die Rückprojektion über den Winkel von 2π ergibt sich durch

$$f(r,\delta)=\int_0^{2\pi}\frac{FCD^2}{U^2}h_\theta(a)d\theta$$

also der mit dem reziproken Abstandsquadrat gewichteten, auf die Quelle konvergierenden gefilterten Rückverschmierung. Dabei ist der Abstand U die Projektion des Abstands zwischen der Quelle und dem aktuellen Punkt auf den Zentralstrahl.

6.6.5 Diskretisierung der Rückprojektion für die Fächergeometrie

Bei der technischen Realisierung der Bildrekonstruktion in der Fächergeometrie stellt sich die gleiche Frage wie in Abschnitt 6.1.3 nach der Diskretisierung der Filterkerne, denn auch hier hat man eine Abtastung in endlichen Schritten vorliegen, entweder in Winkelschritten $\Delta\varphi$ für das gebogene Detektorarray (vergleiche Abbildung 6.10) oder in äquidistanten Abständen Δa für das lineare Detektorarray.

Da bei den Einzeilenarrays die linearen Detektoranordnungen von untergeordneter Bedeutung sind, soll die Diskretisierung nur für das gebogene Detektorarray ausführlich behandelt werden. Für das gebogene Detektorarray habe das für einen Projektionswinkel θ_n abgetastete Projektionssignal die Form

$$\phi_{\theta_n}(j\Delta\varphi)\text{ mit }j=-D/2,\dots,0,\dots,D/2-1\text{ und }n=1,\dots,N_p\quad (6.149)$$

wobei D wieder die Anzahl der Detektorelemente ist, die sich dicht gepackt mit einem Winkelabstand von $\Delta\varphi$ auf einem Kreisabschnitt befinden, dessen Kreismittelpunkt die Röntgenquelle ist.

Da im vorhergehenden Kapitel der zentrale Strahl der Bezugsstrahl ist und entsprechend die Projektionswinkel im Fächer von ψ_{min} über 0 bis ψ_{max} laufen, ist der Index in Gleichung (6.149) so gewählt, dass $\phi_{\theta_n}(0)$ mit $j=0$ der zentrale, durch das Drehzentrum laufende Strahl ist. N_p ist dabei die Anzahl der Projektionen.

Während die Rückprojektion bei der Parallelstrahlgeometrie entlang paralleler Strahlen verlief, muss die Rückverschmierung hier entlang des zur Quelle konvergierenden Fächers geschehen. Ein Vergleich der Abbildungen 6.8 und 6.24 zeigt, dass beide Konzepte insofern analog sind. Und genau wie bei der Parallelstrahlgeometrie ist auch hier nicht zu erwarten, dass bei der Berechnung der Beitrages von $h_{\theta_n}(\psi)$ zu einem bestimmten Bildpunkt $f(r, \delta)$ in Gleichung (6.157) der benötigte Wert für den Winkel ψ gerade einer der tatsächlich gemessenen Winkel $j\Delta\phi$ ist. Hier muss man dann zwischen den Messwerten interpolieren.

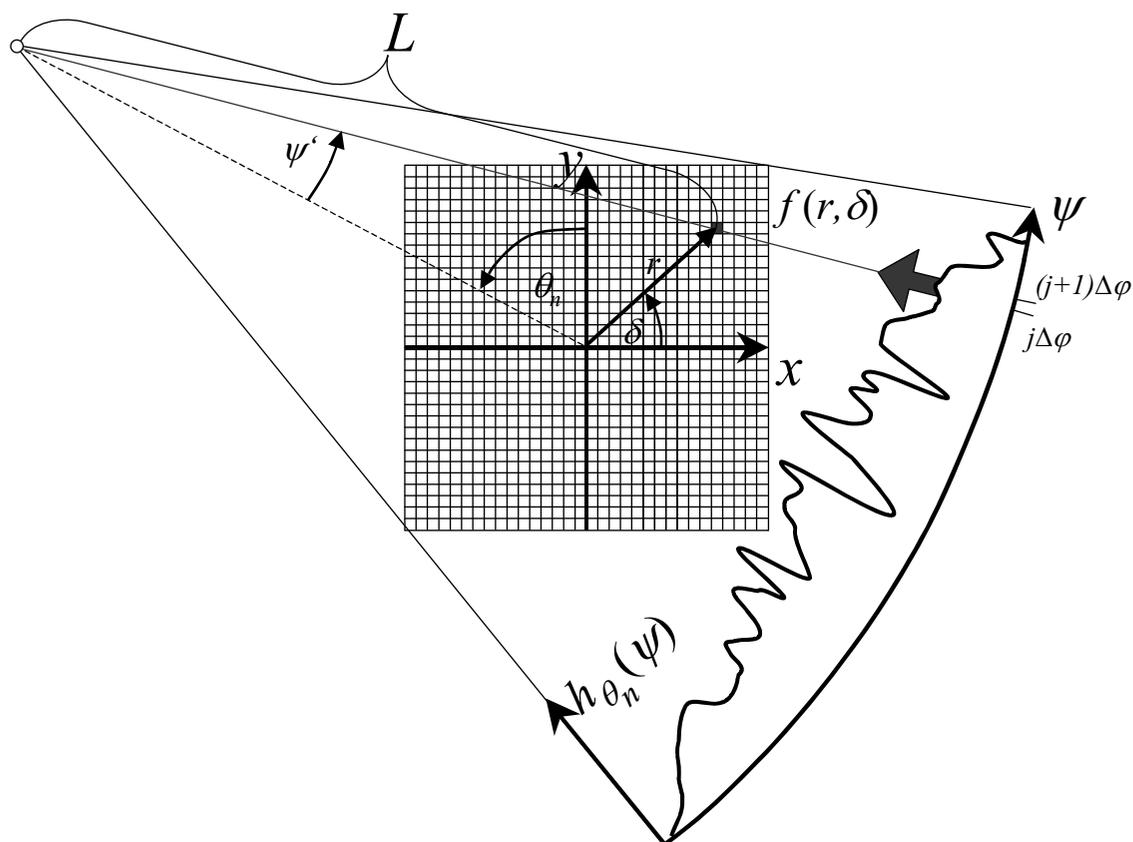


Abb. 6.24: Wie bei der Parallelstrahlgeometrie (vergleiche hierzu Abbildung 6.8) muss der rückzuprojizierende Wert der gefilterten Projektion durch Interpolation gewonnen werden, da der Vektor \mathbf{r} auf die ganzzahlige Gitterposition $(x, y)^T$ zeigt, die in der Projektion auf die ψ -Achse (bzw. ζ -Achse) in der Regel einen Wert zwischen $j\Delta\phi$ und $(j+1)\Delta\phi$ ergibt.

So wie in Abschnitt 6.1.3 für die Parallelstrahlgeometrie gezeigt, müssen auch hier die Filterkerne diskretisiert werden. In Gleichung (6.117) ist gezeigt, dass die Filterung mit einem gegenüber der Parallelstrahlgeometrie leicht modifiziertem Kern durchgeführt wird. Daher kann man auf die Diskretisierungsergebnisse aus dem Abschnitt 6.1.3 zurückgreifen. Offenbar ist die diskrete Wertefolge des Filterkerns durch

$$\tilde{g}(j\Delta\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{j\Delta\varphi}{\sin(j\Delta\varphi)} \right)^2 g(j\Delta\varphi) \quad (6.150)$$

gegeben.

Da $g(j\Delta\varphi)$ die diskretisierte Form des Filterkerns für die Parallelstrahlgeometrie ist, kann durch einen Vergleich mit Gleichung (6.49) folgende Wertefolge gewonnen werden

$$\tilde{g}(j\Delta\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{8(\Delta\varphi)^2} & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{für } j \text{ gerade, } (j \neq 0) \\ -\frac{1}{2\pi^2 \sin^2(j\Delta\varphi)} & \text{für } j \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (6.151)$$

So wie beim Konzept für die Parallelstrahlgeometrie erhält man auch hier bessere Ergebnisse, wenn man die Fenstertechnik anwendet, so dass das endgültige Ergebnis

$$h_{\theta_n}(j\Delta\varphi) = \tilde{\phi}_{\theta_n}(j\Delta\varphi) * \tilde{g}(j\Delta\varphi) * w(j\Delta\varphi) \quad (6.152)$$

lauten muss, wobei w eine der bekannten Fensterfunktionen ist. Für das *Shepp-Logan*-Fenster ergibt sich

$$\tilde{g}_{sl}(j\Delta\varphi) = \frac{1}{2\pi^2 \Delta\varphi} \left(\text{ctg} \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta\varphi \right) - \text{ctg} \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta\varphi \right) \right). \quad (6.153)$$

Der Ausdruck (6.153) wird wegen der Terme in der Klammer auch Cotangens-Kern genannt [Mor95].

Wie im vorhergehenden Kapitel kann man die Rekonstruktionsanweisung in drei Schritte gliedern, die in Schema 8 dargestellt sind. Für die diskretisierte Fassung müssen die Argumente der Ausdrücke entsprechend durch die Diskretisierung (6.149) ersetzt werden [Kak88].

Schema 8: Diskretisierte gefilterte Rückprojektion in Fächergeometrie

1. Vorgewichtung jeder einzelnen Fächerprojektion unter dem Winkel θ_n

$$\tilde{\phi}_{\theta_n}(j\Delta\varphi) = \phi_{\theta_n}(FDD j\Delta\varphi)FCD \cos(j\Delta\varphi) \quad (6.154)$$

2. Filterung des Projektionssignals: Der modifizierte Rampenfilter

$$\tilde{g}(j\Delta\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{j\Delta\varphi}{\sin(j\Delta\varphi)} \right)^2 g(j\Delta\varphi) \quad (6.155)$$

wird ebenfalls in gleichen Winkelabständen abgetastet. Damit lautet die diskretisierte Faltung

$$h_{\theta_n}(j\Delta\varphi) = \tilde{\phi}_{\theta_n}(j\Delta\varphi) * \tilde{g}(j\Delta\varphi) \quad (6.156)$$

3. Die Rückprojektion über den Winkel von 2π in Winkelabständen von $2\pi/N_p$ ergibt sich dann analog zu Gleichung (6.8) durch

$$\begin{aligned} f(r, \delta) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} h_{\theta}(\psi) d\theta \\ &\approx \frac{2\pi}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} \frac{1}{L^2} h_{\theta_n}(\psi) \end{aligned} \quad (6.157)$$

also auch in der diskreten Form durch die mit dem reziproken Abstandsquadrat zwischen der Quelle und dem aktuellen Punkt gewichteten, auf die Quelle konvergierenden gefilterten Rückverschmierung.

An einem Beispiel, das wieder leicht zu durchschauen ist, sollen die Zwischenergebnisse der gefilterten Rückprojektion in Fächerstrahlgeometrie dargestellt und mit der Parallelstrahlgeometrie verglichen werden. Das Beispiel besteht aus einem Phantom mit einem zentralen Quadrat homogener Schwächung. Zunächst sind in Abbildung 6.25 wieder die Radonräume des Objektes dargestellt. Neben der bekannten kartesischen Darstellung der Projektionswerte $p_{\gamma}(\xi)$ ist zu dessen Ergänzung oben rechts der Radonraum in Polarkoordinaten angegeben. Unten rechts ist der kartesische Radonraum des Quadrates in Fächerstrahlgeometrie gezeigt. Die Intensitätswerte sind die Projektionen $\phi_{\theta}(\zeta)$.

Wie erwartet zeigt sich bei dem direkten Vergleich der kartesischen Radonraumdarstellungen die Verkipfung der Daten $\phi_{\theta}(\zeta)$ in der Fächerstrahlgeometrie gegenüber den Daten $p_{\gamma}(\xi)$ der Parallelstrahlgeometrie. Hier ist das Konzept des Umsortierens der Daten wieder gut zu verstehen. Aus den Projektionsdaten $\phi_{\theta}(\zeta)$ sollen jetzt aber eine direkte Rekonstruktion nach den Gleichungen (6.154) bis (6.157) berechnet werden.

In den Bildern der Abbildung 6.26 sind die direkten Rekonstruktionen bei sukzessiv erhöhter Anzahl N_p – siehe Gleichung (6.157) zweite Zeile – der Projektionen $\phi_{\theta}(\zeta)$ zu sehen. N_p läuft

dabei über die Werte $\{1, 3, 10, 25, 100, 180\}$. Wie auch schon bei der Parallelstrahlgeometrie zeigt sich die wahre Struktur des Objektes noch nicht bei kleinem N_p . Besonders auffällig ist, dass sich die Fächerstrahlgeometrie direkt in den Rückprojektionen widerspiegelt. Insofern ist auch dieses Verfahren sehr intuitiv. Die einzelnen Rückprojektionen sehen dabei wie die Lichtkegel einer Taschenlampe aus.

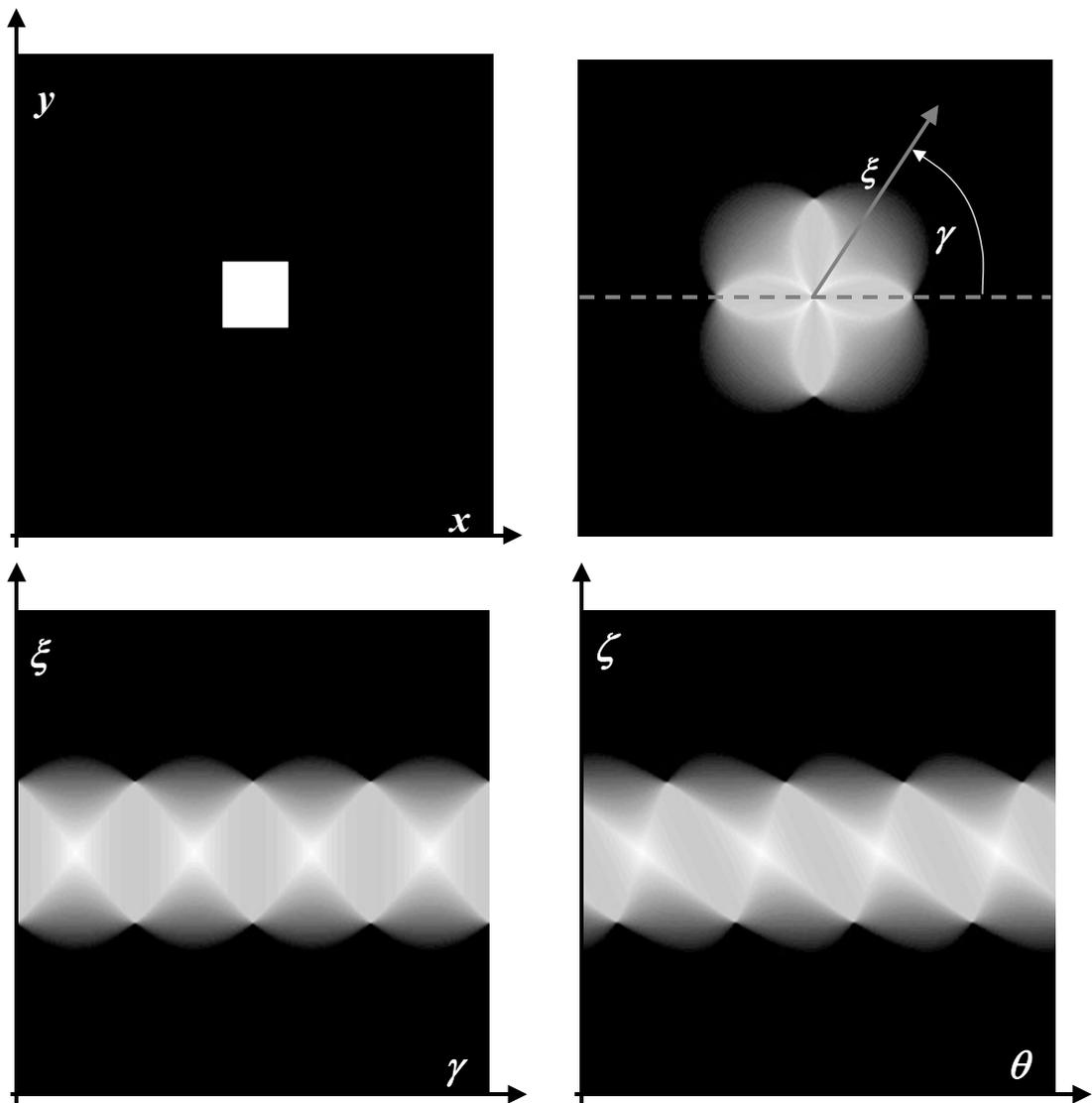


Abb. 6.25: Zur Verdeutlichung der Unterschiede in den Radonräumen der Parallelstrahl- und der Fächerstrahlgeometrie für das gleiche Objekt ist hier noch einmal das sehr einfache Phantom oben links zu sehen. Das quadratische Objekt besitzt homogen verteilte Schwächungskoeffizienten. Oben rechts und unten links sind die Radonräume der Parallelstrahlgeometrie zu sehen und zwar in Polar- bzw. kartesischer Darstellung. Beide Darstellungen sind äquivalent. Unten rechts sind die Projektionswerte im Radonraum des Phantoms in Fächerstrahlgeometrie zu sehen. Die beiden unteren Bilder unterscheiden sich wieder durch die Verkippung der Daten im Radonraum der Fächerstrahlgeometrie.

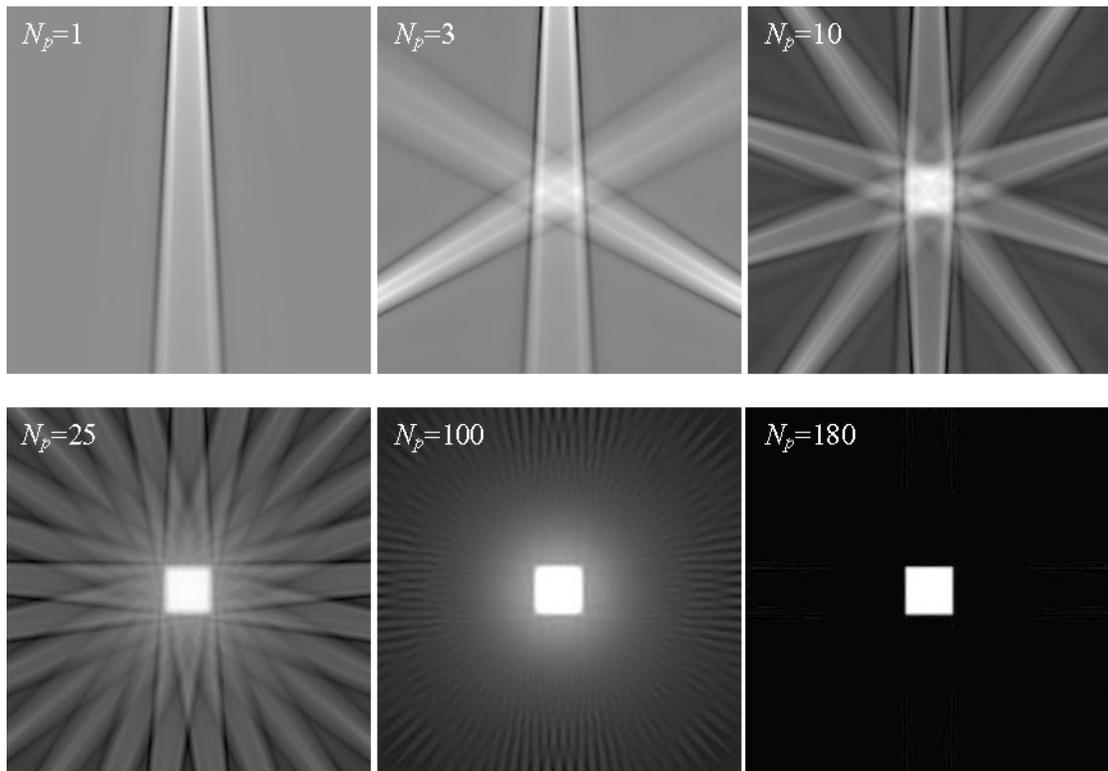


Abb. 6.26: Rückprojektion in Fächerstrahlgeometrie. Sukzessive Rekonstruktion des tomographischen Phantombildes aus den Projektionsdaten. Bildweise wird die Anzahl der Projektionen erhöht: $N_p = \{1, 3, 10, 25, 100, 180\}$. Das Rekonstruktionsprinzip ist intuitiv wieder gut zu erfassen. Die zurückprojizierten Daten sehen wie die Lichtkegel einer Taschenlampe aus.

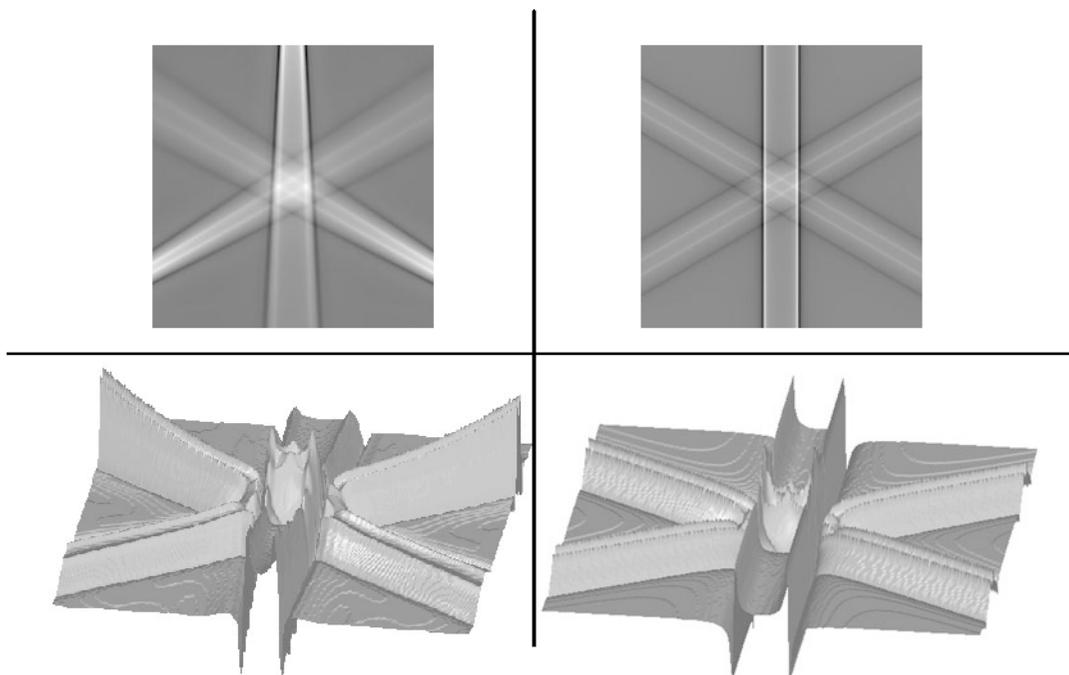


Abb. 6.27: Vergleich zwischen der gefilterten Rückprojektion in Fächerstrahlgeometrie (linke Spalte) und der gefilterten Rückprojektion in Parallelstrahlgeometrie (rechte Spalte). Deutlich ist bei der Fächerstrahlgeometrie die längenabhängige Skalierung aus Gleichung (6.157) zu erkennen. Die charakteristische Filterantwort auf das Reckeck ist aber in beiden Darstellungen gut sichtbar.

In Abbildung 6.27 ist die gefilterte Rückprojektion in den beiden Geometrien – Fächerstrahl und Parallelstrahl – an dem Beispiel $N_p = 3$ noch einmal im direkten Vergleich zu sehen. In der dreidimensionalen Darstellung ist bei beiden Geometrien die spezifische Filterantwort auf das Rechteck gut zu erkennen. Dies ist durch die Gleichungen (6.111) bis (6.114) beschrieben worden. Gleichzeitig sieht man auch den quadratischen Abfall der einzelnen Rückverschmierungen mit dem Abstand von der Quelle. Dieses Verhalten ist Konsequenz der $1/L^2$ -Normierung in Gleichung (6.157).

Für die Diskretisierung des linearen Detektorarrays geht man genauso vor wie bei dem gebogenen Detektorarray. Da $g(j\Delta a)$ in Gleichung (6.146) exakt die diskretisierte Form des Filterkerns für die Parallelstrahlgeometrie ist, kann durch direkte Übernahme der Gleichung (6.49) die Wertefolge

$$g(j\Delta a) = \begin{cases} \frac{1}{4(\Delta a)^2} & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{für } j \text{ gerade, } (j \neq 0) \\ -\frac{1}{\pi^2 j^2 (\Delta a)^2} & \text{für } j \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (6.158)$$

für die technische Realisierung gewonnen werden. Abbildung 6.28 zeigt das Prinzip der Rückprojektion mit der erforderlichen Interpolation zwischen einzelnen Detektorpositionen.

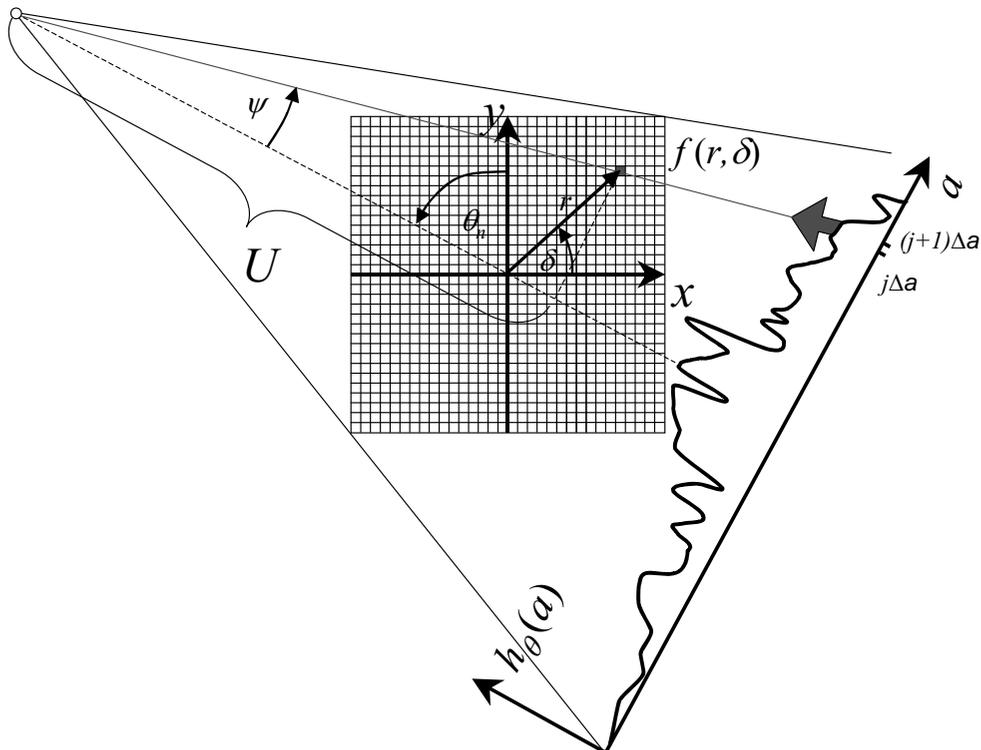


Abb. 6.28: Wie bei der Parallelstrahlgeometrie (vergleiche hierzu Abbildung 6.8) muss der rückzuprojizierende Wert der gefilterten Projektion durch Interpolation gewonnen werden, da der Vektor \mathbf{r} auf die ganzzahlige Gitterposition $(x, y)^T$ zeigt, die in der Projektion auf die a -Achse in der Regel einen Wert zwischen $j\Delta a$ und $(j+1)\Delta a$ ergibt.

6.7 Detektorviertelversatz und Abtasttheorem

Wie in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben, ist die Rekonstruktion eines Objektes dann gesichert, wenn jeder Punkt des Objektes von allen Seiten durchstrahlt wurde. Dabei reicht für die Parallelstrahlgeometrie prinzipiell natürlich eine Durchstrahlung über den Winkelbereich von 180° aus, denn aufgrund der physikalischen Eigenschaften der Röntgenstrahlung ist die Schwächung unabhängig davon, ob der Strahl sich auf dem Hinweg (L_1) oder Rückweg (L_2) durch das Objekt befindet.

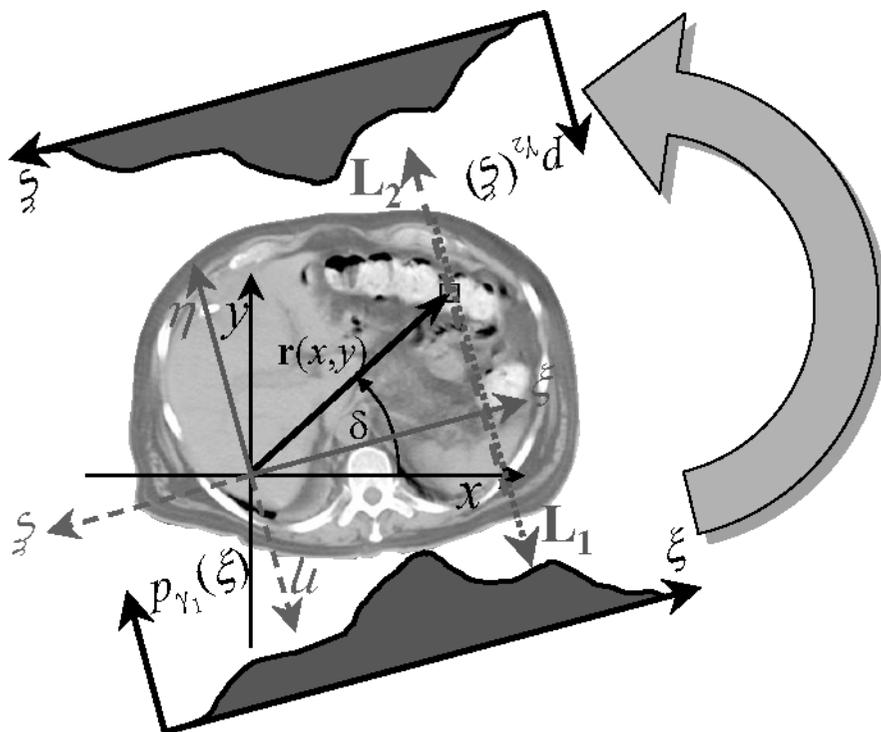


Abb. 6.29: Durchstrahlt man ein Objekt unter den Winkeln γ und $\gamma + \pi$, so erhält man mit einem symmetrischen Detektorarray eine gespiegelte Projektion also $p_\gamma(\xi) = p_{\gamma+\pi}(-\xi)$ und damit redundante Informationen. Wenn das Detektorarray leicht asymmetrisch justiert ist, kann man jedoch erreichen, dass die gegenüberliegende Projektion den Raum gerade so abtastet, dass die Gesamtabtastrate verdoppelt wird. Man kann sich leicht überlegen, dass dies bei einer Verschiebung des Detektorarrays um eine viertel Detektorbreite auftritt.

Insofern liefert

$$\begin{aligned}
 f * \delta(L_1) &= \int f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) - \xi_1) \, d\mathbf{r} \\
 &= p_{\gamma_1}(\xi_1) = p_{\gamma_2}(\xi_2) \\
 &= \int f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r}^T \cdot (-\mathbf{n}_\xi)) - \xi_2) \, d\mathbf{r} \\
 &= f * \delta(L_2)
 \end{aligned}
 \tag{6.159}$$

tatsächlich nur eine gespiegelte Projektion, das heißt

$$p_{\gamma}(\xi) = p_{\gamma+\pi}(-\xi). \quad (6.160)$$

Abbildung 6.29 macht diesen Sachverhalt noch einmal sichtbar. Damit ist die Information, die man bei weiterer Durchleuchtung über 180° hinaus erhält, redundant.

Dennoch liefern alle modernen Computertomographen Projektionen über 360° . Das erscheint zunächst absurd, denn mathematisch ist diese doppelt vorliegende Information nicht erforderlich, die Strahlenbelastung verdoppelt sich aber. Bezüglich der Strahlenbelastung kann man aber so vorgehen, dass man bei einem 360° -Scan mit reduzierter Intensität – also reduzierter Strahlenbelastung – misst und die statistisch unabhängigen Rauschanteile der jeweils zentral gegenüberliegenden Projektionen durch Mittelung verkleinert. Technologisch geht man aber einen anderen Weg, denn das Abtasttheorem hat Konsequenzen für die Abtastung bei der Computertomographie. Die Messung der Schwächungswerte mit einem Detektorarray eines Tomographen der dritten Generation stellt natürlich eine Abtastung dar. Abbildung 6.30 zeigt die Abtastsituation mit einem Array bestehend aus D Detektoren (die hier von 1 bis D durchnummeriert werden) mit der konstanten Detektorbreite $\Delta\xi$. Die Detektoren sind möglichst dicht im Array angeordnet. Die Separation der einzelnen Elemente durch das Streustrahlenraster wird im folgenden Text vernachlässigt.

Auch wenn die Integration entlang der Röntgenstrahlen eine Mittelung darstellt, die das Projektionssignal wie ein Tiefpass filtert, so muss dennoch sichergestellt werden, dass die Projektion kein Aliasing zeigt. Physikalisch wird das Objekt im Röntgenfächerstrahl räumlich kontinuierlich durchstrahlt, wobei kontrastreiche Kanten wie Knochen-Weichteil-Übergänge eine große Bandbreite erzeugen. Man erhält damit eine räumlich schnell variierende, kontinuierliche Projektion, die mit dem Detektorarray abgetastet wird. Da jedes Detektorelement eine endliche Breite $\Delta\xi$ besitzt, wird über diese Breite bei der Messung gemittelt, das heißt, der Messprozess enthält schon einen natürlichen Tiefpass. Insgesamt stellt sich das Projektionssignal also als Treppenfunktion dar. Eine ähnliche Problematik wird auch im nächsten Kapitel besprochen werden müssen, wenn es um die sekundäre Rekonstruktion eines dreidimensionalen Bildes aus einem Schichtenstapel geht.

Das Profil eines einzelnen Detektorelements ist damit eine Rechteckfunktion der Breite $\Delta\xi$. Wie in Kapitel 4.9 gezeigt wurde, ist die Frequenzdarstellung eines Rechtecks im Ortsraum die *sinc*-Funktion, das heißt

$$R(u) \propto \frac{\sin(\pi\Delta\xi u)}{\pi\Delta\xi u}. \quad (6.161)$$

Das gemessene Signal ist also prinzipiell nicht bandbegrenzt, so dass mit Bandüberlappungsproblemen gerechnet werden muss. Die wesentlichen Energiebeiträge sind bei der *sinc*-Funktion bis zur ersten Nullstelle enthalten. Daher kann man praktisch annehmen, dass durch die erste Nullstelle, gegeben durch

$$\pi\Delta\xi u = \pi \quad (6.162)$$

die höchste vorkommende (praktisch relevante) Frequenz gegeben ist. Das heißt, die maximale (praktisch relevante) Frequenz liegt bei

$$u = \frac{1}{\Delta\xi}, \quad (6.163)$$

wobei aber dann durch das Shannonsche Abtasttheorem gefordert ist, dass die Abtastpunkte im Abstand von $\Delta\xi/2$, also doppelt so dicht zusammen liegen müssten, wie das baulich möglich ist.

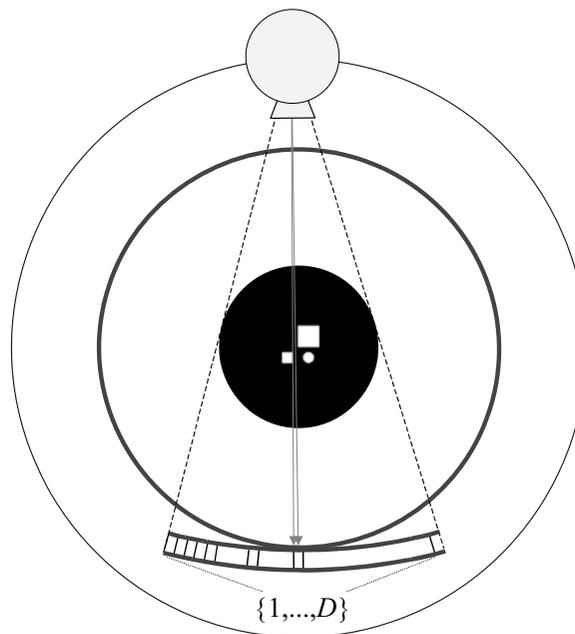


Abb. 6.30: Ein Detektorarray mit D Detektoren tastet die integralen Schwächungswerte ab. Das Strukturphantom in der Mitte des Messfeldes hat Strukturen mit scharfen Kanten und produziert damit höhere räumliche Frequenzen als die räumliche Frequenz des Detektorarrays. Damit ist das Shannonsche Abtasttheorem verletzt.

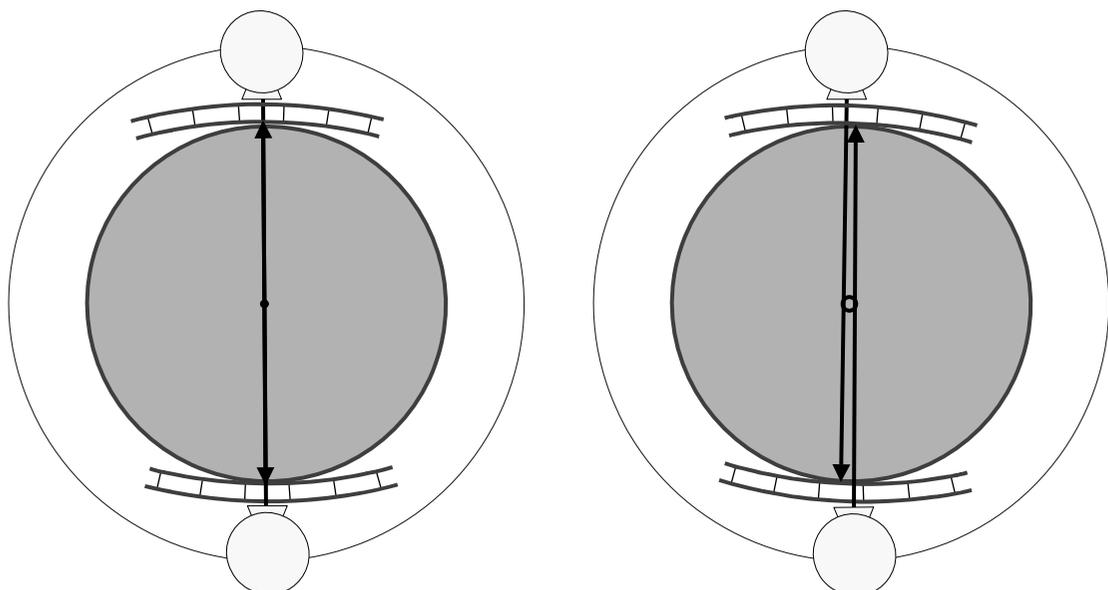


Abb. 6.31: Detektorviertelverschiebung beim Computertomographen der dritten Generation. Bild links: Ohne Verschiebung liefert der Hin- und Rückweg aufgrund der symmetrischen Schwächung denselben Projektionswert und damit keine neue Information. Bild rechts: Bei asymmetrischer Detektoranordnung liegen der Hin- und Rückweg des Röntgenstrahls durch das Gewebe so, dass die doppelte Abtastrate erzeugt wird.

Nach den Ausführungen von Shannon könnte auch über zwei Detektorbreiten tiefpassgefiltert werden, damit keine Bandüberlappungsprobleme auftreten. Die damit verbundene Verschlechterung der so genannten Modulationstransferfunktion (*MTF*) des Systems – siehe Kapitel 8.1 – möchte man aber nicht hinnehmen.

Tatsächlich realisiert man daher keine Filterung über zwei Detektorelemente sondern erhöht die räumliche Abtastfrequenz durch eine elegante technische Maßnahme am Detektor.

Durch Verschiebung des Detektorarrays um eine viertel Detektorbreite wird die räumliche Abtastrate verdoppelt. Dies kann man sich mit Abbildung 6.31 schnell klar machen, wenn man sich vorstellt, dass nach einer Drehung von 180° die zentralen Strahlen mit einem Abstand einer halben Detektorbreite nebeneinander liegen.

Für die nicht zentralen Strahlen stellt man sich vor, dass die Abtastung des Raumes im Messfeld auf konzentrischen Kreisen um das Drehzentrum geschieht. Bei symmetrischer Detektoranordnung benötigt man nur eine 180° -Drehung um das Objekt, um jeden Punkt des Objektes von allen Seiten gesehen zu haben. Verschiebt man nun das Detektorarray um eine viertel Detektorbreite, so muss man eine 360° -Drehung der Röntgenröhre um das Objekt realisieren, um jeden Punkt des Objektes unter jedem Winkel zu durchstrahlen. Für diese technische Zusatzanstrengung erhält man aber nun zusätzliche Abtastkreise, deren lokale Radiendifferenz halb so groß ist wie bei symmetrischer Detektoranordnung. Die räumliche Abtastrate ist also, wie von Shannon gefordert, verdoppelt worden.

In Abbildung 6.32 ist auch zu erkennen, dass das Konzept der Auflösungsverdopplung bei Fächerstrahl- und Parallelstrahlgeometrie gleichermaßen gelingt. Bei der Fächerstrahlgeometrie werden allerdings gegenüber der gleichmäßigen Auflösung beim Parallelstrahl-system die Radienunterschiede für größere Winkel immer kleiner.

Grundsätzlich kann man zur Voraussetzung für dieses Verfahren sagen, dass die Anzahl der Projektionen pro 360° -Drehung hoch genug sein muss (bei typischen Auflösungsgrenzen von 6 bis 13 Linienpaaren pro cm werden etwa 1000 Projektionen pro Umlauf benötigt [Mor95]) und dass die Patientenbewegung vernachlässigbar klein sein muss, da eine gewisse Zeit vergeht, bis eine 180° -Drehung realisiert ist und die komplementären Strahlen von der jeweils gegenüberliegenden Seite die räumliche Abtastung verdoppeln.

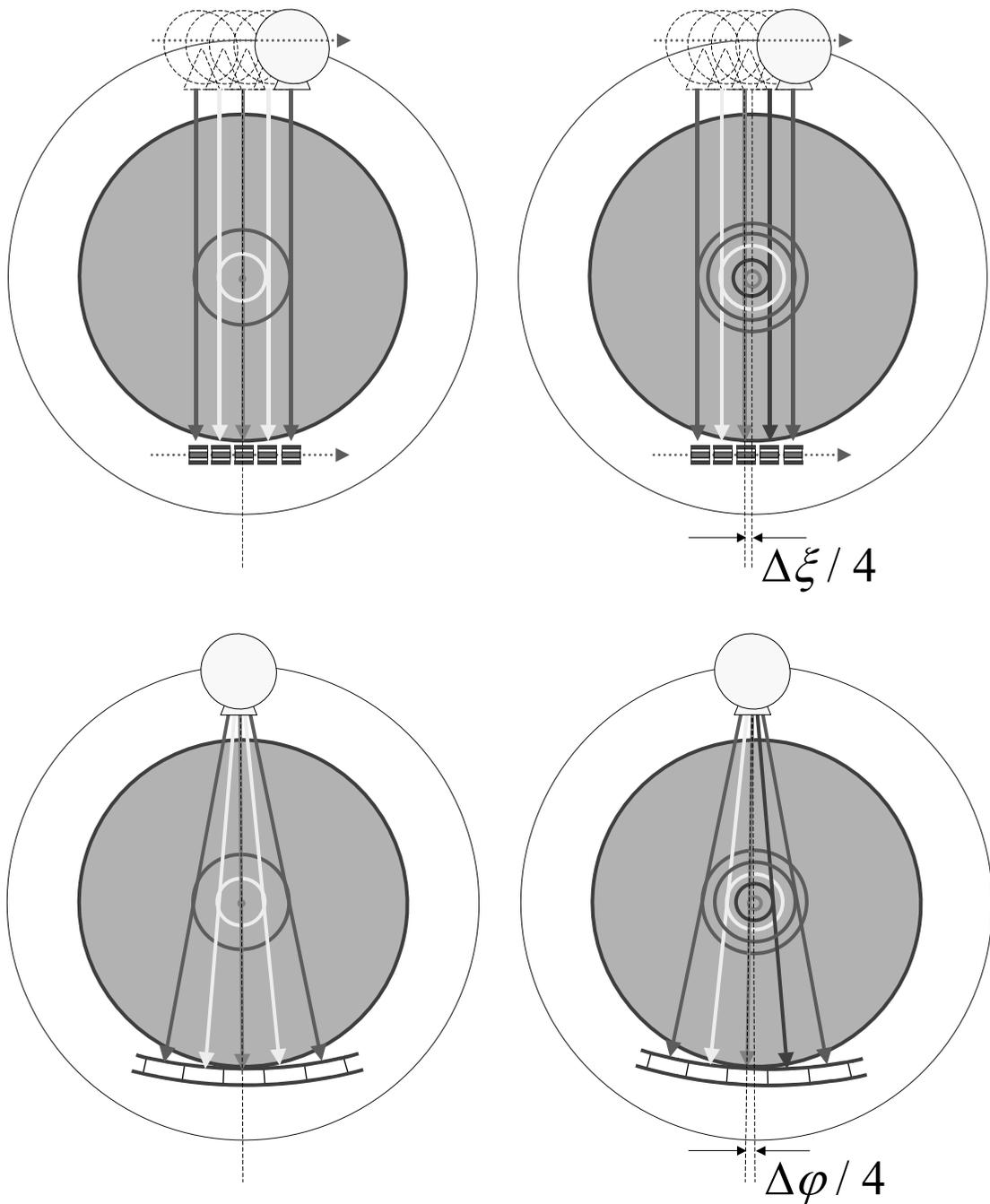


Abb. 6.32: Verdopplung der Abtastung durch Detektorviertelverschiebung, um das Shannonsche Abtasttheorem zu erfüllen. Die lokalen Radiendifferenzen der konzentrischen Abtastkreise sind bei der Detektorviertelverschiebung (jeweils Bild rechts) halb so groß wie bei symmetrischer Detektoranordnung (jeweils Bild links). Das Prinzip ist bei der Parallelstrahlgeometrie (die oberen beiden Bilder) dasselbe wie bei der Fächerstrahlgeometrie (beide Bilder unten). Im Unterschied zur Parallelstrahlgeometrie werden die Abstände der Abtastkreise bei der Fächerstrahlgeometrie aber mit zunehmendem Winkelabstand von dem Zentralstrahl immer kleiner.

In Abbildung 6.33 ist das Umsortieren der Abtastpunkte im Radonraum gezeigt. Bei Detektorviertelverschiebung liegen die Abtastpunkte des hinteren Winkelintervalls $[\pi, 2\pi]$ gerade zwischen den Abtastpunkten des vorderen Winkelintervalls $[0, \pi]$. Dadurch wird die räumliche Abtastrate verdoppelt.

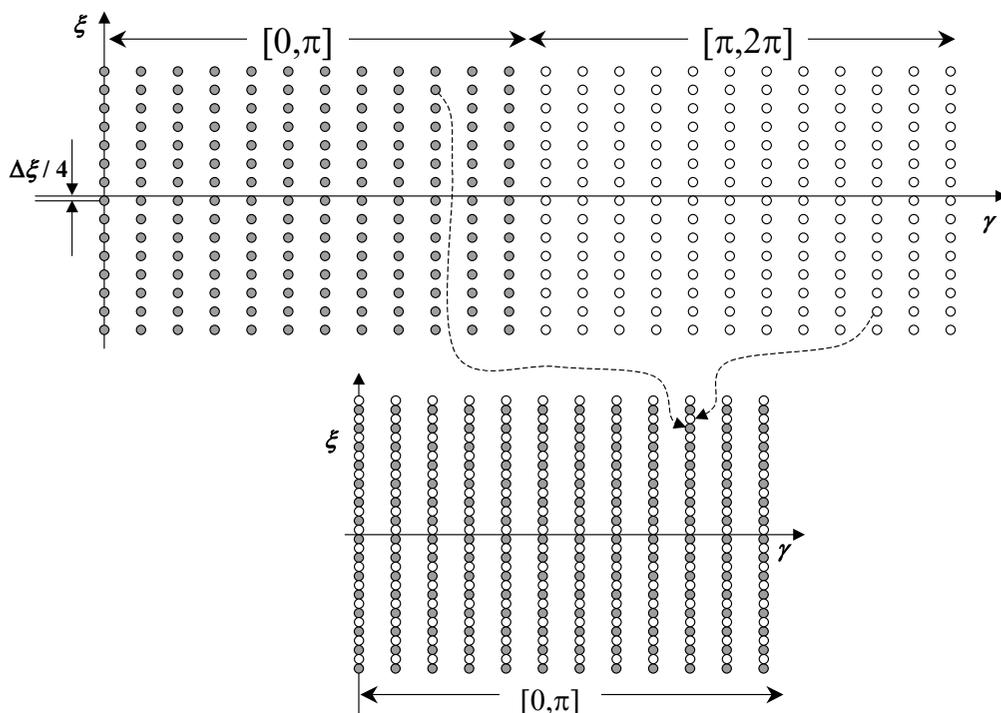


Abb. 6.33: Abtastpunkte im Radonraum (der Nadelstrahlgeometrie) bei Detektorviertelverschiebung. Durch das richtige Einsortieren der Abtastpunkte aus dem Winkelintervall $[\pi, 2\pi]$ ins vordere Intervall $[0, \pi]$ erkennt man, dass die räumliche Abtastrate verdoppelt wird.

In Kompaktanordnungen, in denen man die Anzahl der Detektorelemente reduzieren möchte, wählt man noch größere Verschiebungen des Detektorarrays, so dass insgesamt zwei unterschiedliche Rekonstruktionsbereiche erzielt werden. Ein innerer Bereich, der aufgrund der Detektorviertelverschiebung die doppelte räumliche Auflösung besitzt wie der äußere Bereich. Da im äußeren Bereich des Messfeldes normalerweise die Extremitäten liegen, spielt der Verlust an Auflösung diagnostisch keine große Rolle. In Abbildung 6.34 ist gezeigt, wie die Abtastpunkte im Radonraum liegen. Die asymmetrische Anordnung des Detektorarrays führt zu einer Parallelverschiebung der gesamten Punkte entlang der Detektorarray-Achse. Die Punkte im Winkelintervall $[\pi, 2\pi]$ sortieren sich im Winkelintervall $[0, \pi]$ so ein, dass ein mittlerer Bereich mit doppelter Abtastrate entsteht (in Abbildung 6.34 unten grau hinterlegt). Insgesamt hat man also das Detektorarray auf diese Weise künstlich verlängert. In der Verlängerung erhält man allerdings nur eine einfache räumliche Auflösung, so dass die Gefahr von Aliasing gegeben ist. Da aber, wie schon oben erwähnt, der Bereich des diagnostischen Interesses in der Regel zentral positioniert wird, spielt dieser Effekt eine untergeordnete Rolle. In den Abbildungen 6.35 und 6.36 sind die beiden Auflösungsbereiche schematisch und an einem kompakten Philips Tomoscan M Scanner dargestellt. Ein weiteres Modell eines kompakten Scanners mit asymmetrischem Detektorarray ist der Siemens Tomograph Somatom AR.T/C mit einem so genannten 4/5-Detektor.

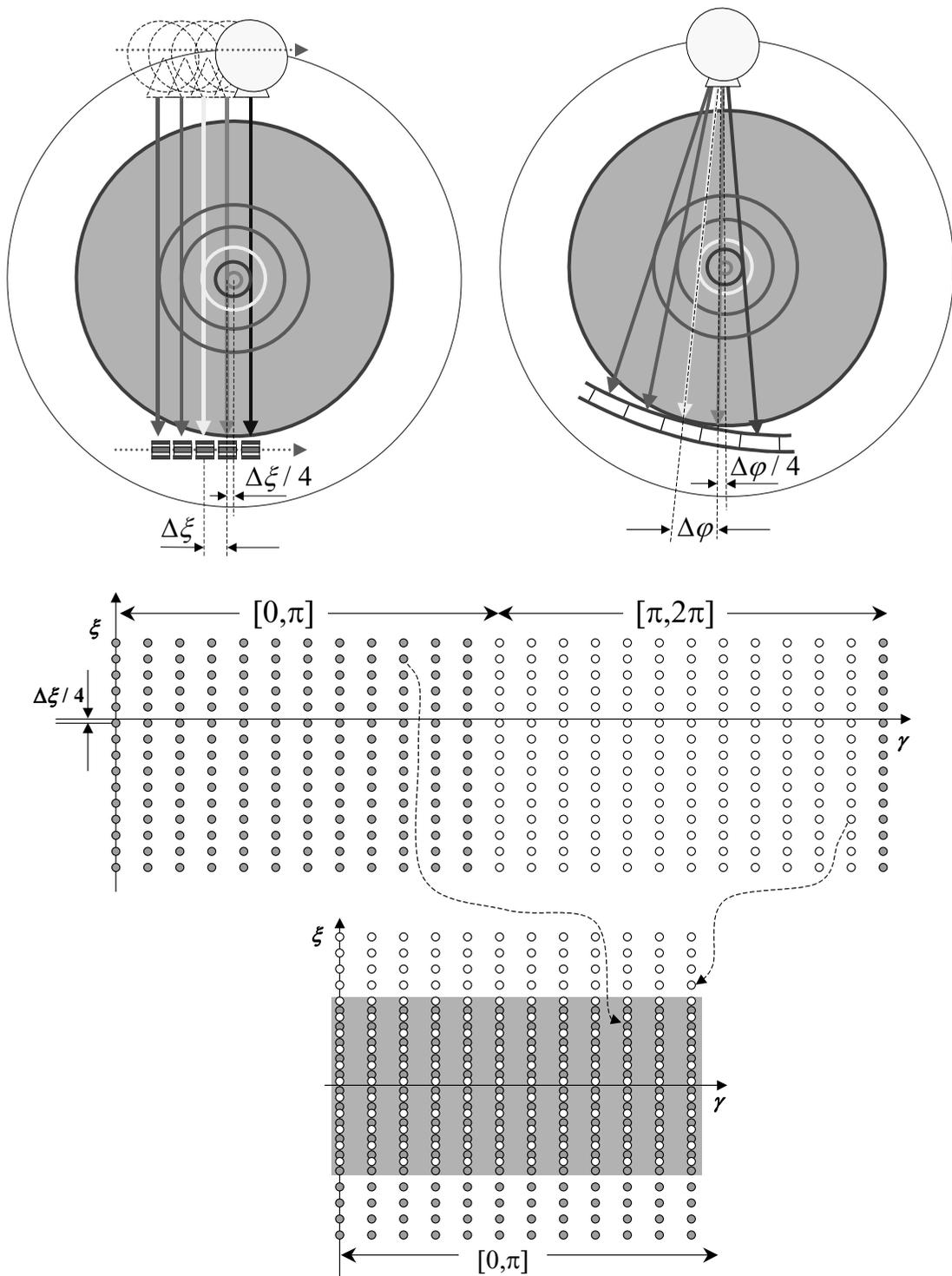


Abb. 6.34: Abtastpunkte im Radonraum (der Nadelstrahlgeometrie) bei Detektorviertelverschiebung mit zusätzlicher ganzzahliger Detektorelementverschiebung. Durch das richtige Einsortieren der Abtastpunkte aus dem Winkelintervall $[\pi, 2\pi]$ ins vordere Intervall $[0, \pi]$ erkennt man, dass die räumliche Abtastrate nur im zentralen Bereich, der hier grau unterlegt ist, verdoppelt wird. Gleichzeitig erhält man eine synthetische Verlängerung der Detektorarrays allerdings bei einfacher räumlicher Auflösung mit der Gefahr des Aliasing.

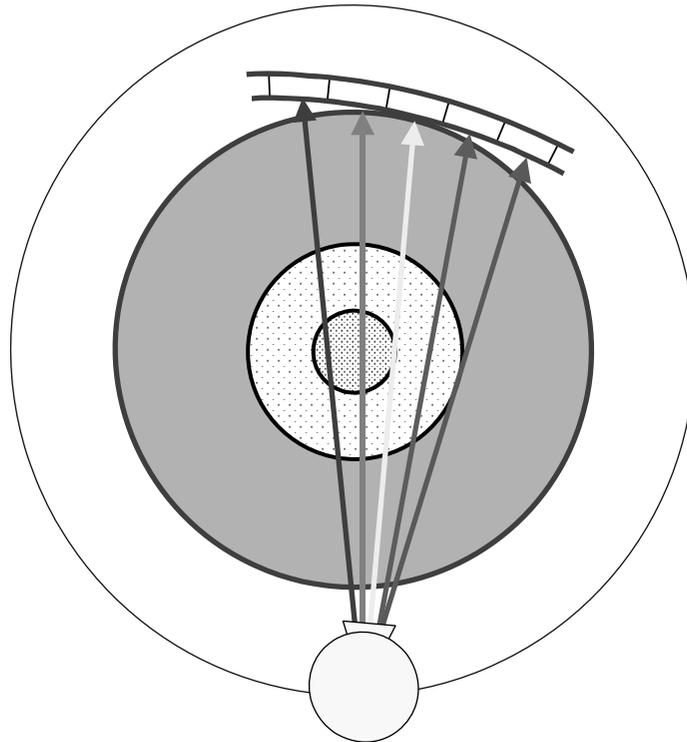


Abb. 6.35: Durch die asymmetrische Detektorpositionierung erhält man Messfelder mit unterschiedlichen räumlichen Auflösungen. Im inneren Messfeld ist die Auflösung durch den Detektorviertelversatz doppelt so groß wie im äußeren Messfeld.

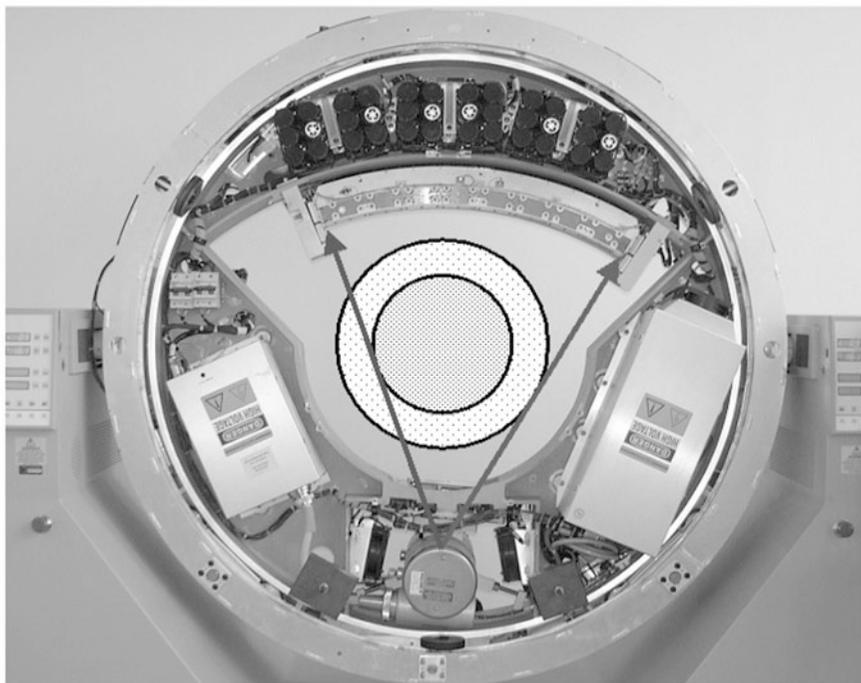


Abb. 6.36: Kompakter Tomograph Philips Tomoscan M am RheinAhrCampus Remagen. Für das äußere Messfeld ist sofort klar, warum über 360° hinweg Projektionen gemessen werden müssen. Im Inneren wird genau dadurch die doppelte Auflösung erzeugt.

7 Dreidimensionale Rekonstruktionsverfahren

In diesem Kapitel werden dreidimensionale Rekonstruktionsverfahren besprochen, wobei in den beiden Kapiteln 7.1 und 7.2 zunächst nur dreidimensionale Stapel von zweidimensionalen Bildern verwendet werden. Auch das Spiral-CT-Verfahren, das in Kapitel 7.2 beschrieben wird, arbeitet so, obwohl die Datenakquisition einem echten dreidimensionalen Rekonstruktionsverfahren schon näher kommt. Mit dem Ausdruck „echt“ ist dabei gemeint, dass die Bilder ihre dritte Dimension nicht aus einer Sekundärrekonstruktion erhalten, bei der die eigentliche, primäre Rekonstruktion nur auf zweidimensionale Radontransformierte Bezug nimmt.

Die Verfahren, die sich auf die dreidimensionale Radontransformierte stützen, werden in Kapitel 7.3 und 7.4 besprochen. Speziell die exakten Rekonstruktionsverfahren in einer Kegelstrahlgeometrie sind mathematisch anspruchsvoller als die zweidimensionalen Verfahren, die in den Kapiteln 5 und 6 besprochen wurden. Obwohl es Untersuchungen zur Anwendung der algebraischen Rekonstruktionsmethoden auf die Kegelstrahlgeometrie gibt [Mül98], ist das wissenschaftliche Interesse heute auf die Fouriermethoden gerichtet, denen sich auch diese Darstellung ausschließlich widmet.

Abbildung 7.1 fasst am Beispiel einer Abdomenaufnahme noch einmal zusammen, welchen Weg die Entwicklung in der röntgenbasierten Bildgebung bisher genommen hat. In Abbildung 7.1a ist ein Projektionsbild zu sehen, bei dem bereits eine Vielzahl von Details aus dem Körperinneren dargestellt ist, aber die typischen projektiven Überlagerungen die Diagnostik erschweren. Abbildung 7.1b zeigt eine tomographische Schnittaufnahme, die eine revolutionäre Verbesserung der Kontraste und damit der diagnostischen Möglichkeiten mit sich brachte. Der Schritt zur Volumen- bzw. Kegelstrahl-CT ist ebenso revolutionär. Mit prototypischen Computertomographen, die mit speziellen Flächendetektoren ausgerüstet sind, konnte bereits gezeigt werden, dass Auflösungen von Details der Größenordnung $100\ \mu\text{m}$ möglich sind. Abbildung 7.1c zeigt das Ergebnis einer solchen Volumenaufnahme. Diese hochauflösende, isotrope Volumendarstellung wird mit einer Detektorelementdichte von ca. 5000 Elementen pro cm^2 erreicht [Pfo02].

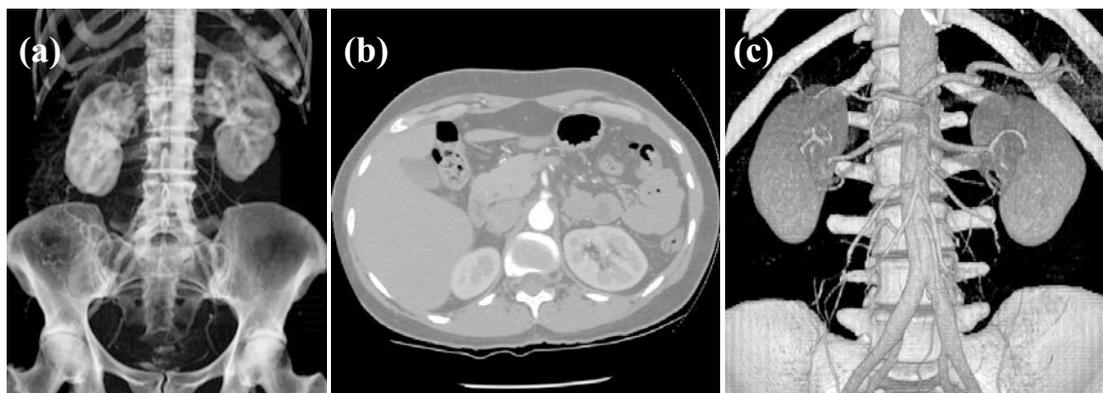


Abb. 7.1: Beispiel einer abdominalen Diagnostik, an der die Verbesserung der Darstellung – angefangen bei der einfachen Röntgenaufnahme (a) über die tomographische Rekonstruktion (b) hin zur Volumen- bzw. Kegelstrahl-CT-Rekonstruktion – zu sehen ist (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: A. H. Pfoh [Pfo02]).

7.1 Sekundärrekonstruktion aus 2D Schichtenfolgen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde nur von zweidimensionalen Bildern gesprochen. Mit der Computertomographie verbindet man aber in der Medizin vor allem die dreidimensionale Bildgebung. Hier kann man zunächst so vorgehen, dass der Patient auf dem Patiententisch nach jeweils einer kompletten 2D Aufnahme einer Schicht ein Stück in Richtung der z -Achse verschoben wird. Abbildung 7.2 zeigt ein Ergebnis dieses Prozesses. Aus dem Bilderstapel wird dann die dreidimensionale Darstellung der Anatomie errechnet. Man spricht hierbei von sekundärer Rekonstruktion.

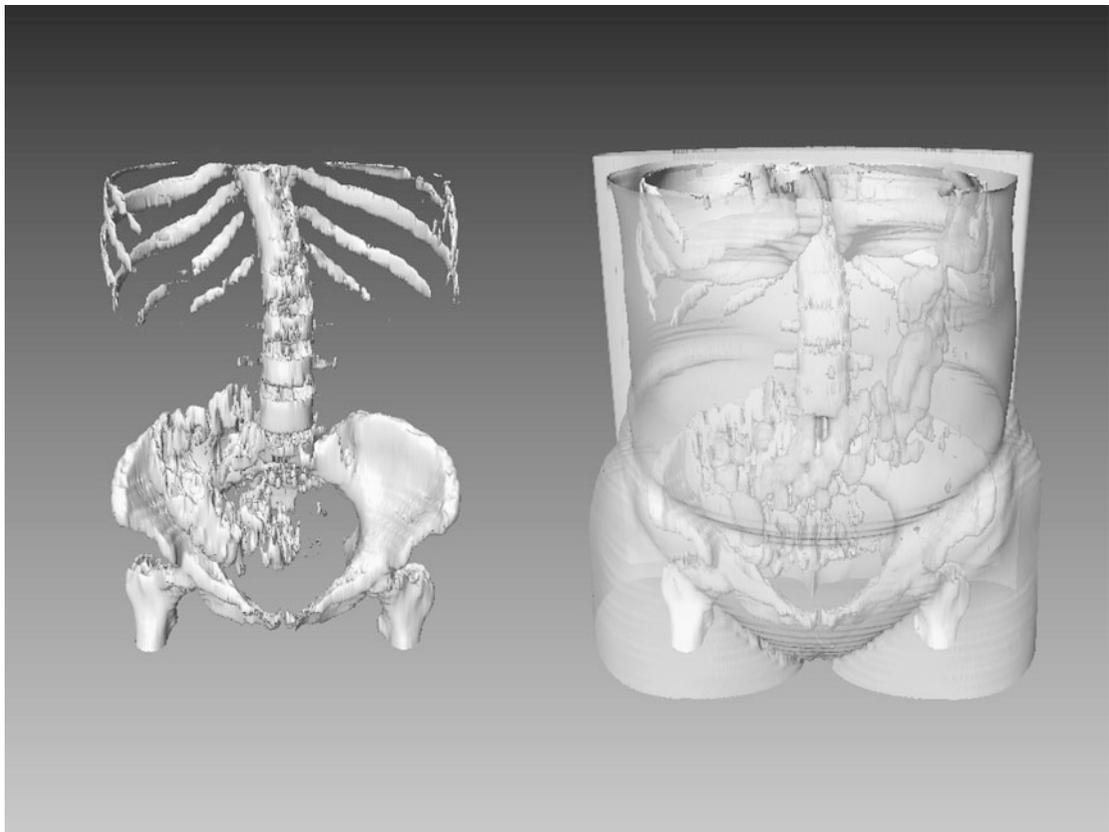


Abb. 7.2: Dreidimensionale Visualisierung des Schichtenstapels. Hier ist ein so genanntes *Surface-Rendering* verwendet worden, bei dem eine Grauwert-Isofläche dargestellt wird. Wählt man den Grauwert der Isofläche so groß, dass praktisch nur Knochenstrukturen segmentiert werden, verschwinden in dieser Ansicht die weichen Teile (Bild links). Wählt man einen weiteren Schwellwert, der Weichteile und die Haut repräsentiert, so kann man diese Objekte ebenfalls einblenden (Bild rechts).

Für dieses Verfahren der Visualisierung einer Oberfläche ist es erforderlich, dass man sich für einen Grauwert entscheidet, der die Oberfläche repräsentieren soll. Hier hat man natürlich gewisse Freiheiten, so dass man verschiedene Objekte – die sich allerdings bezüglich ihrer Hounsfieldwerte klar voneinander unterscheiden müssen – darstellen kann. Mit einer virtuellen Lichtquelle wird dann die so genannte Grauwert-Isofläche beleuchtet, die entsprechenden Lichtreflexionen berechnet und das Ergebnis dargestellt. Dieses primitive Verfahren der Segmentierung einer Oberfläche misslingt immer dann, wenn verschiedene Objekte sehr ähnliche Grauwerte besitzen, so dass sie sich nicht voneinander separieren lassen oder bestimmte Organe räumliche Grauwertvariationen besitzen, so dass sie durch einen einzigen Schwellwert nicht in ihrer Gesamtheit dargestellt werden können. In diesen,

leider überwiegenden Fällen sind dann intelligentere oder interaktive Segmentierungsverfahren erforderlich, die hier aber nicht dargestellt werden können. Für eine Einführung hierzu lese man z.B. *T. Lehmann et al.* [Leh97]. In Abschnitt 8.6.9 wird auf diese Problematik noch einmal eingegangen.

An dieser Stelle soll zunächst erläutert werden, wie der Schichtenstapel gemessen wird und welche Randbedingungen es dabei gibt. Abbildung 7.3 zeigt den Verlauf der Messposition über der Messzeit. Dadurch erhält man den angesprochenen Stapel von Schichtbildern, die aneinander gelegt das gewünschte Volumen ergeben.

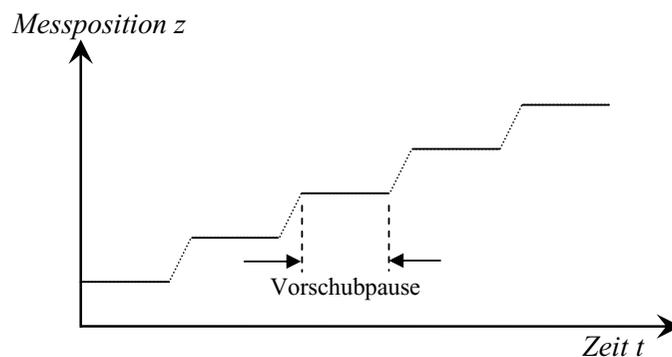


Abb. 7.3: Die Messposition in Abhängigkeit von der Messzeit. In den Vorschubpausen des Patiententisches wird jeweils gemessen (durchgezogene horizontale Linien).

Natürlich ist diese sequentielle Schichtaufnahme signaltheoretisch wieder als Abtastung zu interpretieren. Diesmal wird entlang der z -Achse abgetastet. Auch dabei muss das Nyquist-Kriterium, das in Kapitel 4.16 eingeführt wurde, beachtet werden.

Das Intensitätsprofil der Röntgenstrahlung innerhalb einer einzelnen zu rekonstruierenden Schicht wird in Scannern der dritten Generation durch einen schlitzförmigen Kollimator eingengt und ist idealerweise rechteckig. Die axiale Breite dieses Rechtecks sei Δz . Wie in Kapitel 4.9 gezeigt wurde, ist die Frequenzdarstellung eines Rechtecks im Ortsraum die *sinc*-Funktion, das heißt

$$Z(w) \propto \frac{\sin(\pi\Delta zw)}{\pi\Delta zw}. \quad (7.1)$$

Geht man davon aus, dass die wesentlichen Energiebeiträge der *sinc*-Funktion bis zur ersten Nullstelle von Gleichung (7.1) bei

$$\pi\Delta zw = \pi \quad (7.2)$$

enthalten sind, dann liegt die maximale (praktisch relevante) Frequenz des Signals bei

$$w = \frac{1}{\Delta z}. \quad (7.3)$$

Das Shannonsche Abtasttheorem fordert hier, dass die Abtastpunkte im Abstand von $\Delta z/2$ liegen. Das bedeutet, der Tischvorschub darf bei einer Schichtdicke von Δz eben nur $\Delta z/2$ groß sein. Man muss also wenigstens zwei Schichten pro Schichtdicke messen. Abbildung 7.4 zeigt die Dicke der Schicht in jeder Messposition über der Messzeit. Typische Schichtdicken liegen zwischen 1 mm und 10 mm.

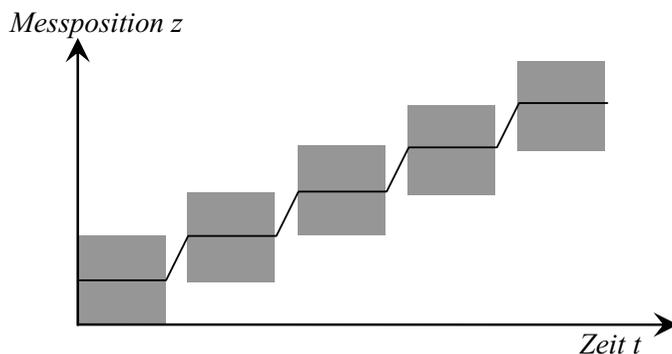


Abb. 7.4: Die Schichtdicken in jeder Messposition in Abhängigkeit von der Messzeit. In den Vorschubpausen des Patiententisches wird jeweils gemessen.

In der Praxis findet diese signaltheoretische Randbedingung kaum Beachtung. Tatsächlich ist es so, dass viele Radiologen derzeit für eine schnelle Befundung ohnehin nur die Einzelbilder einer Sequenz am Lichtkasten nebeneinander gelegt betrachten, so dass Aliasing eine untergeordnete Rolle spielt. Abbildung 7.5 zeigt eine entsprechende Sequenz von axialen Schichtbildern der Abdominalregion.

Wie oben besprochen, müssen die einzelnen Schichten des Stapels aus Abbildung 7.5 aufeinander gelegt werden, um eine dreidimensionale Darstellung zu erhalten. Abbildung 7.6 zeigt diesen Vorgang schematisch, indem fünf einzelne Schichten in den dreidimensionalen Datensatz eingeblendet sind. Die einzelnen Tomogramme werden pixelgenau übereinander gelegt. Dabei ist die Schichtdicke in der Regel sehr viel größer, als die Pixelgröße innerhalb einer Schicht. Das heißt, die entstehenden Voxel³⁸ sind anisotrop, was bei Algorithmen der dreidimensionalen Bildverarbeitung berücksichtigt werden muss, indem man zum Beispiel den Datensatz mit Hilfe einer Interpolation isotropisiert. Es können aber dennoch Fehler in der Visualisierung und Datenbeurteilung auftreten, wenn bei der Datenakquisition das besprochene Abtasttheorem nicht erfüllt wird. Dazu wird in Abschnitt 8.6.5 ein Beispiel gegeben.

Abbildung 7.6a zeigt fünf einzelne Schichten zusammen mit einer Oberflächendarstellung des Skelettes. Dazu wurde ein Schwellwert gewählt, der hoch genug liegt, um alle Weichteile in der Darstellung zu unterdrücken. In Abbildung 7.6b ist mit einem weiteren, kleineren Schwellwert die Haut und einige Organe segmentiert worden und transparent dargestellt.

³⁸ *Voxel* ist ein Kunstwort, das sich aus *Volume x Element* zusammensetzt.

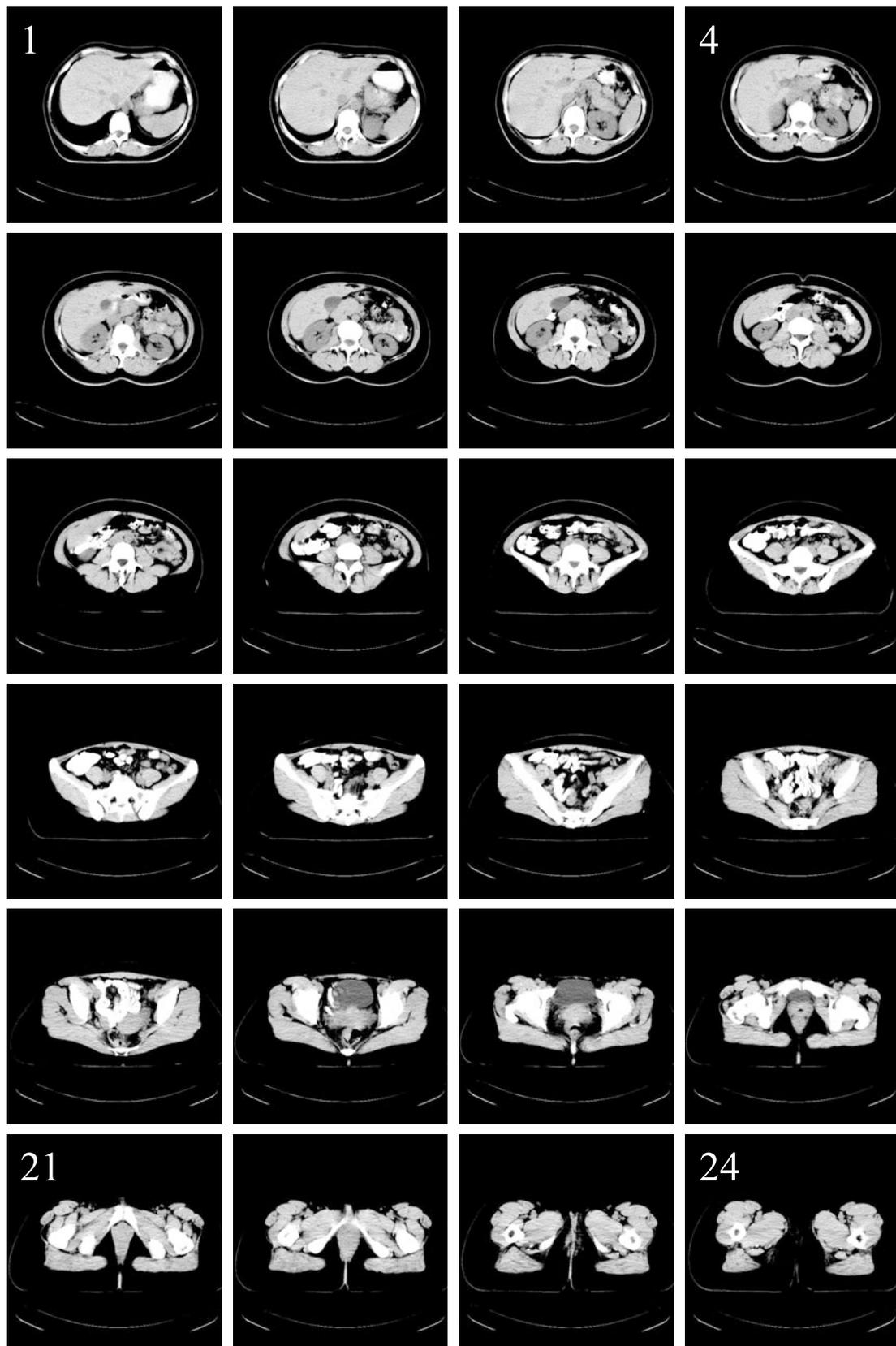


Abb. 7.5: Schichtenstapel aus einer Abdomentomographie. Eine Sequenz aus 24 hintereinander liegenden Schichten ist zeilenweise dargestellt.

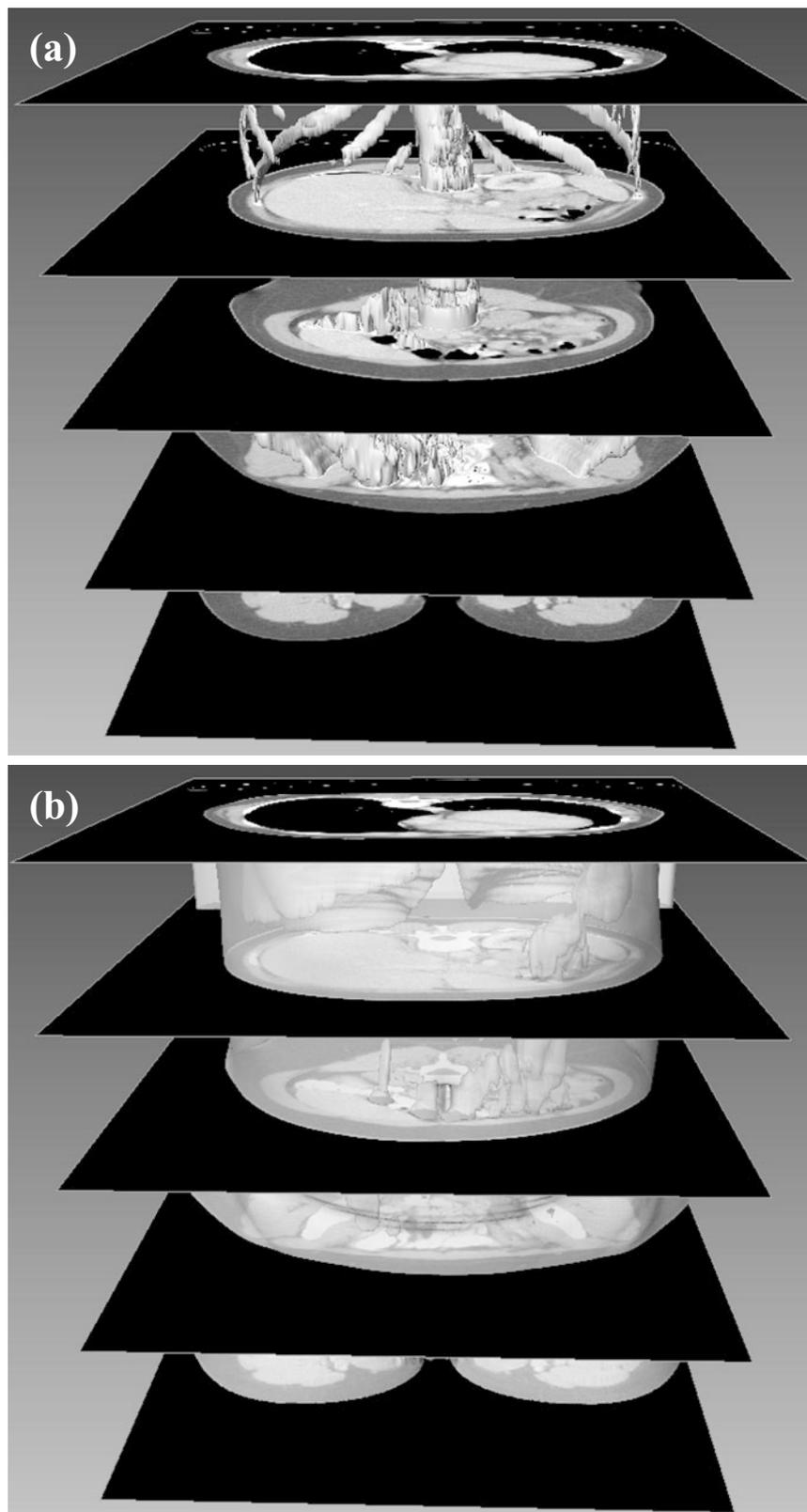


Abb. 7.6: Die einzelnen Bilder eines Schichtenstapels werden hintereinander angeordnet. Dadurch entsteht das eigentliche Datenvolumen, das die Computertomographie zu einem dreidimensionalen Verfahren macht. Hier ist ein so genanntes *Surface-Rendering* verwendet worden.

7.2 Spiral-CT

Ein erster Schritt zu einer echten Volumenaufnahme stellt das so genannte Spiralverfahren dar, das Kalender 1989 auf der jährlich statt findenden Konferenz der RSNA³⁹ zum ersten mal präsentierte [Kal89]. Die Unzulänglichkeiten des einfachen Schichtenstapels sind leicht einzusehen. Jede Schicht hat aufgrund der vorgegebenen Kollimation eine gewisse Breite, man spricht von der Schichtdicke. Innerhalb dieser Schichtdicke wird die Intensität gewichtet mit dem Empfindlichkeitsprofil gemittelt.

Diese Mittelung ist immer dann ein Problem, wenn sich das Objekt durch schräg zur axialen Schicht verlaufende Kanten auszeichnet, also die abzubildende Struktur sich in der Vorschubrichtung schnell ändert. Dann führt die Mittelung zu einer Stufigkeit des Schichtenstapels, die der abzubildenden Struktur ein treppenförmiges Erscheinungsbild gibt. In Abschnitt 8.6.2 wird auf diese Form der Artefaktbildung noch einmal eingegangen. Abbildung 7.7 zeigt diesen Effekt beispielhaft anhand der Volumen⁴⁰- und MPR-Darstellung⁴¹ eines Wirbelphantoms.

Mit der Entwicklung der Schleifringtechnologie, die in Kapitel 3.7 schon kurz beschrieben ist, wurde es möglich, das Abtastsystem, also die Röhren-Detektorarray-Anordnung, kontinuierlich drehen zu lassen. Wird der Patiententisch während dieser Drehung ebenfalls auf kontinuierlichen Vorschub gesetzt, dann umläuft die Röntgenquelle den Patienten auf einer besonderen Spiralbahn⁴², nämlich einer Helix. In dieser Überlegung geht man von einem Koordinatensystem aus, das sich mit dem Patiententisch bewegt, denn natürlich läuft die Röntgenquelle weiterhin auf einer Kreisbahn. Nur aus Sicht des Patienten ergibt sich die Spiralbahn. Damit ist eine lückenlose Erfassung des zu untersuchenden Objektes möglich, wobei im Vergleich zur konventionellen Tomographie die Aufnahmezeit für ein Volumen entscheidend verkürzt werden konnte.

Eigentlich ist es merkwürdig, dass die Spiral-CT überhaupt funktioniert. Voraussetzung für die Rekonstruktionsverfahren, die im Kapitel 5 beschrieben wurden, ist die Vollständigkeit der Daten. Das bedeutet, ein Objekt im Messfeld kann nur dann rekonstruiert werden, wenn alle Punkte des Objektes von allen Seiten – also über 180° – durchstrahlt wurden (Abbildung 7.8 links). Diese Forderung ist der Grund dafür, warum konventionelle CT-Aufnahmen am Herzen praktisch unmöglich sind, denn innerhalb der Drehung der Abtasteinheit um das Herz, bewegt sich dieses aus der zu rekonstruierenden Schicht heraus. Damit passen die der Rekonstruktion zugrundeliegenden Projektionsdaten nicht mehr zusammen. Das rekonstruierte Tomogramm leidet dann unter so genannten Bewegungsartefakten, die in Abschnitt 8.5.3 noch genauer beschrieben werden.

Bei der Spiral-CT ist die Bewegung der zu rekonstruierenden Objekte aufgrund des kontinuierlichen Patiententischvorschubs gerade die entscheidende Innovation gegenüber der konventionellen Computertomographie. Damit ist aber die Bahn keine geschlossene Kreisbahn mehr. Die Daten liegen zur Rekonstruktion nicht vollständig vor, sind also im Sinne von Kapitel 5 inkonsistent. In Abbildung 7.8 rechts ist zu erkennen, dass das zu untersuchende Objekt nicht mehr in einer Ebene abgetastet wird.

³⁹ RSNA: Radiological Society of North America

⁴⁰ *Volume-Rendering*: Jedem Voxel wird eine physikalische Lichtreflexion und -streuung zugeordnet. Im Computer wird dieser „Datennebel“ mit einer virtuellen Lichtquelle beleuchtet und der optische Eindruck berechnet, den eine reale Reflexion und Streuung des Lichts erzeugen würde.

⁴¹ MPR: Multi-Planar Reformatting

⁴² Eigentlich müsste es „Schraubenbahn“ heißen, denn eine Spirale ist ein reines 2D-Gebilde, bei dem sich der Radius des umlaufenden Trajektorienpunktes linear verändert.

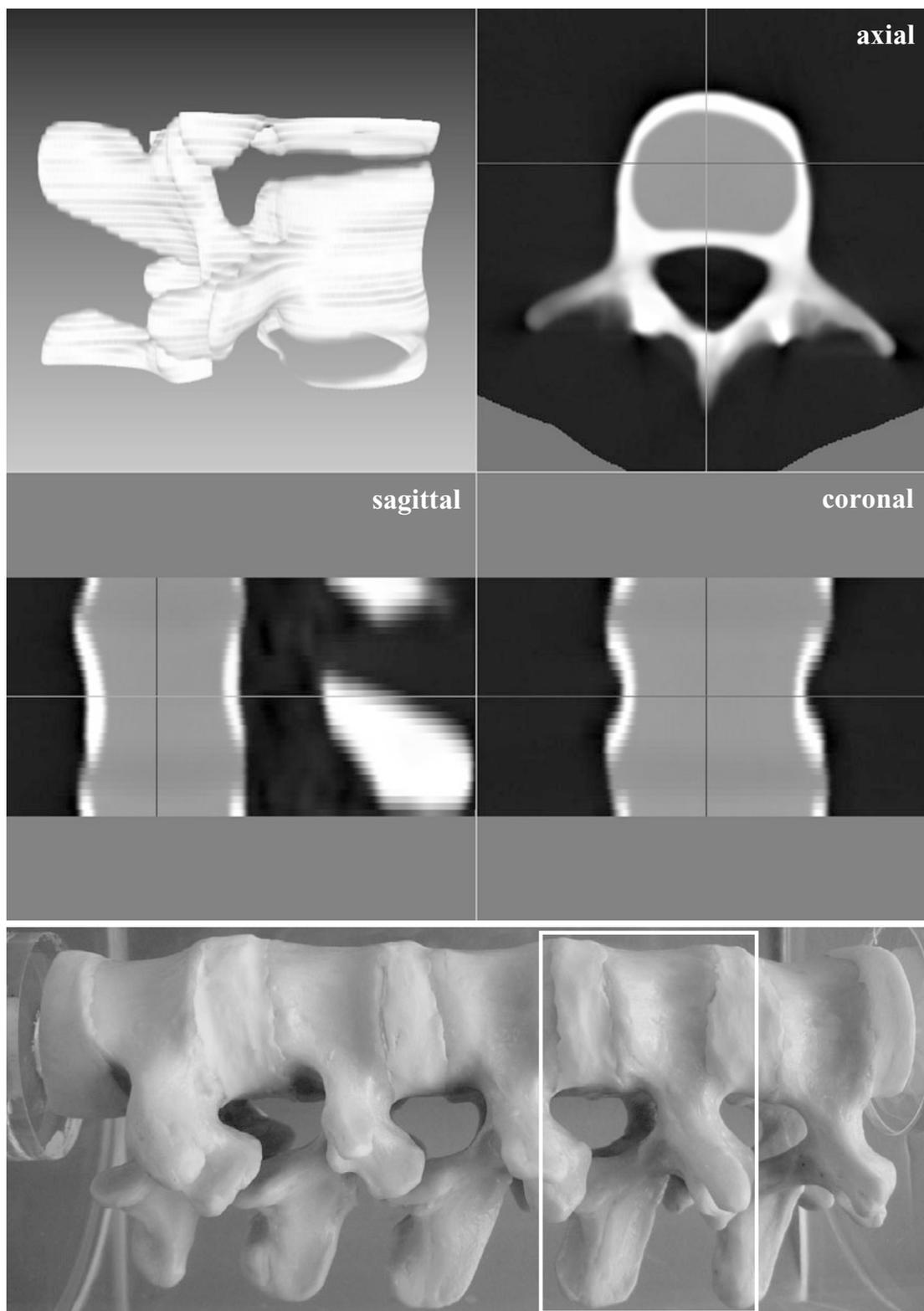


Abb. 7.7: Der Ausschnitt eines Wirbelphantoms ist dreidimensional dargestellt. Man sieht die typischen orthogonalen Reformatierungen sowie ein Volumen-Rendering. Die bei der Messung gewählte Schichtdicke ist 1,5 mm. Deutlich ist die Stufigkeit des dreidimensionalen Renderings und der berechneten coronalen und sagittalen Schicht zu sehen. Die Lage der coronalen und sagittalen Schicht im Raum ist in Abbildung 1.9 beispielhaft illustriert.

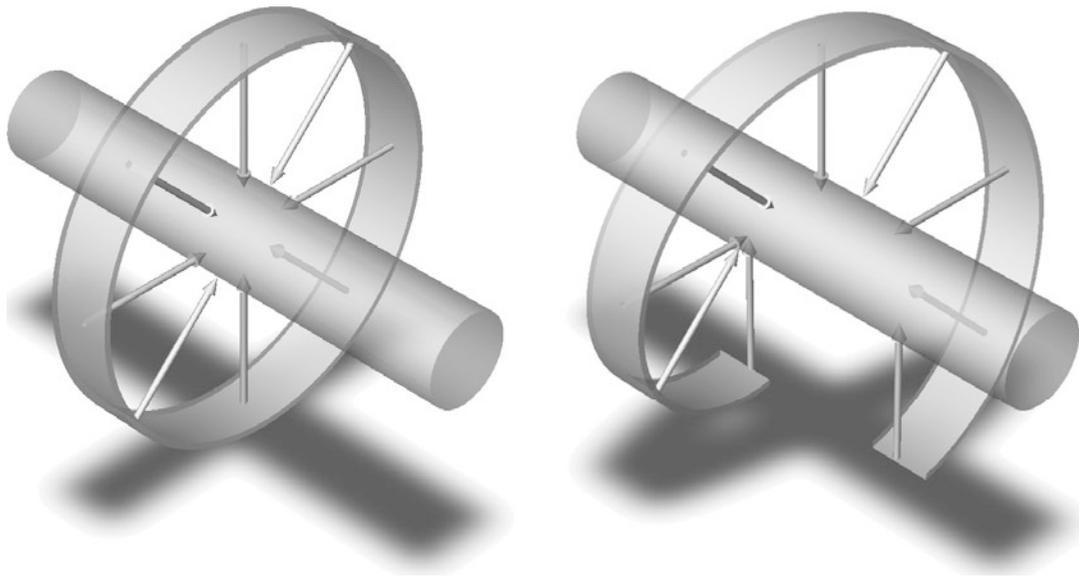


Abb. 7.8: Vollständigkeit der Daten bei der konventionellen Computertomographie (links). Aufgrund des kontinuierlichen Tischvorschubes liegen die Daten bei der Spiral-CT nicht mehr vollständig vor. Die Bahn der Röntgenquelle ist keine Kreisbahn mehr.

Abbildung 7.9 zeigt den prinzipiellen Unterschied der Quellentrajektorien für das konventionelle und das Spiral-CT-Verfahren für längeres Volumen. Links ist das konventionelle Aufnahmeschema zu sehen. Die Röhre bewegt sich auf Kreisbahnen, die vollständig abgefahren werden und die mit diskreten Haltepunkten sukzessive über den Patienten geschoben werden. Aufgrund der endlichen Kollimation nimmt man dabei Scheiben auf, deren Dicke hier durch die Breite der Kreisbahn gegeben ist. Rechts sieht man, wie die Kreisbahn der Röhre bei der Spiral-CT mit dem kontinuierlichen Tischvorschub kombiniert wird und so Daten auf einer Helix erzeugt.

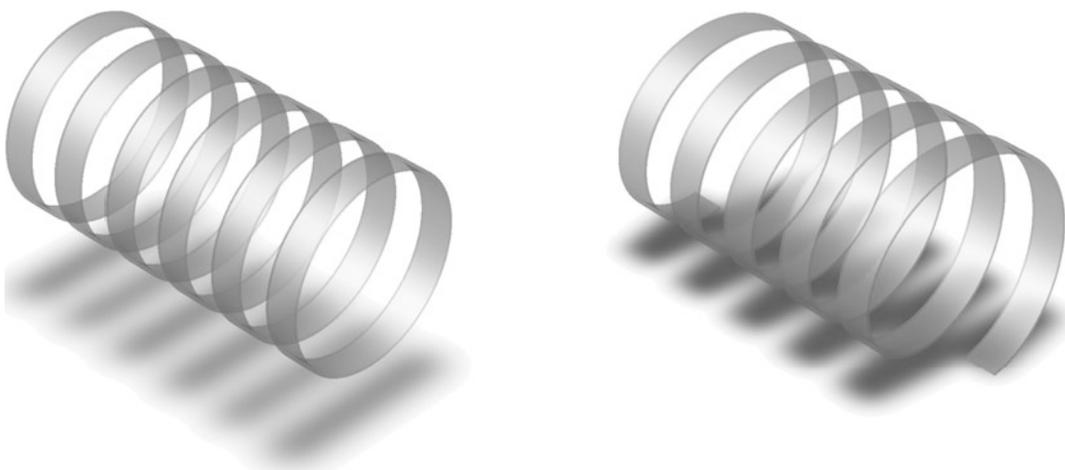


Abb. 7.9: Vergleich der Datenakquisition zwischen konventioneller CT und Spiral-CT. Links: Aufgrund der Haltepunkte des Tischvorschubs werden bei der konventionellen Computertomographie Daten auf voneinander getrennten Kreisen gemessen. Rechts: Die Kombination von kontinuierlicher Drehung der Abtasteinheit und kontinuierlichem Tischvorschub erzeugt eine helixförmige Anordnung der Daten bei der Spiral-CT.

Ein entscheidender Unterschied der Verfahren ist in der Abbildung 7.9 sofort zu erkennen. Bei der konventionellen Tomographie gibt es bei dem dargestellten Quotienten von Tischvorschub und Schichtbreite Bereiche, die gar nicht durchstrahlt werden. Aus diesen Bereichen gibt es zur Rekonstruktion also keine Information. Die Fehler in der dreidimensionalen Visualisierung sind oben besprochen worden.

Dies ist bei der Spiral-CT anders, denn wie schon beschrieben, haben wir eine lückenlose Datenakquisition vorliegen, das heißt, alle Punkte entlang der z -Achse sind zumindest einmal durchstrahlt worden. Es liegt zur Rekonstruktion also zumindest eine Teilinformation aus jeder, nachträglich beliebig wählbaren Schicht vor. Tatsächlich ist es sogar so, dass aufgrund des Schichtempfindlichkeitsprofils bei einer eingestellten Kollimation über die gesamte Schichtbreite hinweg Informationen auch kleinerer Objekte aus unterschiedlichen Richtungen vorliegen.

Die zentrale Idee der Rekonstruktion beim Spiralverfahren ist nun, dass die fehlenden Daten einer Schicht durch Interpolation ergänzt werden. Hat man dies erledigt, dann stehen die in Kapitel 5 beschriebenen zweidimensionalen Rekonstruktionsverfahren wieder uneingeschränkt zur Verfügung. Abbildung 7.10 zeigt das einfachste Prinzip einer Schichtinterpolation. Die Steighöhe der Helix, also der Weg, den der Patiententisch während einer 360° -Umdrehung der Abtasteinheit zurücklegt, sei hier mit s bezeichnet.

Man kann nun eine beliebige Schichtlage z_r wählen, denn wegen des gleichmäßigen Tischvorschubes ist aus Sicht der Datenlage keine axiale Position bevorzugt. Für die gewählte Schicht gibt es zunächst nur einen einzigen Winkel γ_r , für den der Projektionsdatensatz $p_{\gamma_r}(\xi)$ vorliegt. Die Projektionsdaten $p_{\gamma}(\xi)$ aller anderen Winkel müssen entsprechend interpoliert werden. Dabei geht man so vor, dass man die Daten, die unter den anderen benötigten Projektionswinkeln innerhalb der gewählten Schichtposition z_r nicht gemessen wurden, aus den jeweils nächstliegend benachbarten, tatsächlich gemessenen Winkeln der Helixbahn interpoliert.

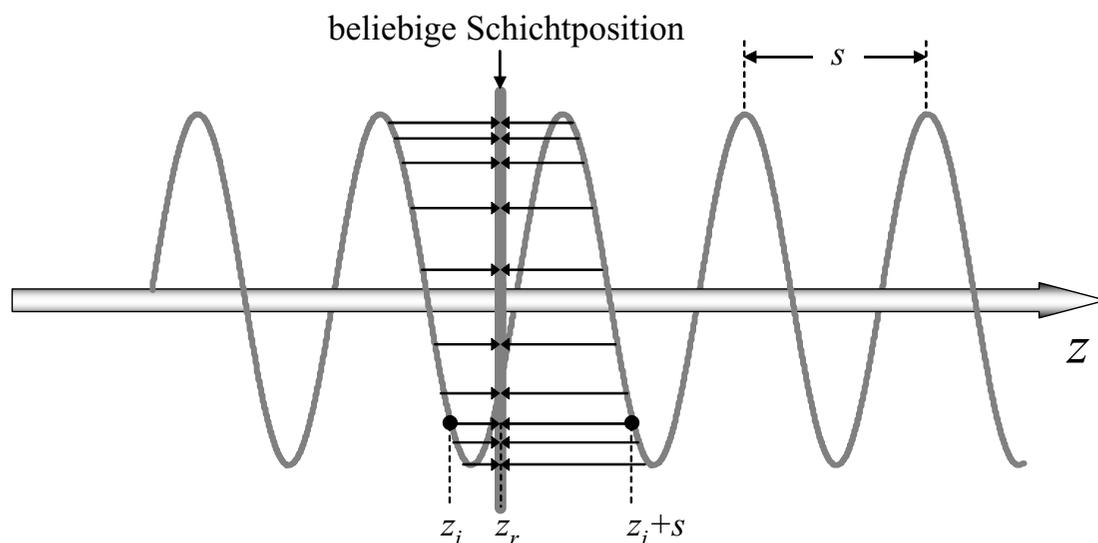


Abb. 7.10: Prinzip der Schichtinterpolation bei der Spiral-CT. Die jeweils benachbarten, tatsächlich gemessenen Projektionsdaten tragen über eine Interpolation zu den Projektionsdaten der gewählten Schicht bei.

Der einfachste Fall einer solchen Interpolation ist eine lineare Interpolation. Dazu identifiziert man zunächst jede Position z mit einem Projektionswinkel, so dass gilt

$$\gamma_i = \frac{z_i}{s} 360^\circ \quad (7.4)$$

und damit

$$\gamma_i + 360^\circ = \frac{z_i + s}{s} 360^\circ. \quad (7.5)$$

Die eigentliche Interpolation ist nun eine mit dem Abstand zur gewählten Schicht gewichtete Summe der linken und rechten Nachbarprojektion

$$p_{\gamma_r}(\xi) = (1 - \alpha)p_{\gamma_l}(\xi) + \alpha p_{\gamma_l + 360^\circ}(\xi), \quad (7.6)$$

wobei das Gewicht α durch

$$\alpha = \frac{z_r - z_i}{s} \quad (7.7)$$

gegeben ist. Die lineare Interpolation über einen Winkel von 360° zeigte schon bei ihrer Einführung durch *Willi Kalender* bemerkenswerte Erfolge. Diese Interpolation wird mit der Abkürzung 360°LI versehen. Dennoch kann man sich überlegen, ob die Interpolation nicht noch bessere Rekonstruktionsergebnisse zeigt, wenn die gemessenen Basisdaten dichter liegen. Man kann aus Abbildung 7.11 ablesen, dass man für eine einzige Schicht die Rohdaten aus einem Messintervall von 720° benötigt.

Man möchte allerdings andererseits eine höhere Dichte der Basisdaten erreichen, ohne die Strahlendosis zu erhöhen. Hierzu nutzt man die physikalische Eigenschaft der Röntgenstrahlen aus, dass die Schwächung entlang des Strahlenweges invariant gegenüber Richtungsumkehr ist. Daher ist bei der Parallelstrahlgeometrie ja auch eine Datenakquisition über 180° prinzipiell ausreichend. Das heißt, mit jedem gemessenen Projektionsdatensatz $p_\gamma(\xi)$ ist auch $p_{\gamma+180^\circ}(\xi)$ bekannt. Damit erhält man eine zweite Helix, die um 180° gegenüber der Basishelix verschoben ist. In Abschnitt 6.6.2 ist für das komplementäre *Rebinning* schon einmal auf diesen Sachverhalt eingegangen worden. In Abbildung 7.11 ist diese Zusatzhelix gestrichelt dargestellt.

Die Zusatzhelix erhält man unabhängig davon, ob mit Parallelstrahl- oder der heute überwiegend realisierten Fächerstrahlgeometrie der Tomographen dritten Generation gearbeitet wird. In Abschnitt 6.6.2 wurde erläutert, dass mit dem komplementären *Rebinning* ein inverser Fächer synthetisiert werden kann, das ebenfalls eine Zusatzhelix beschreibt.

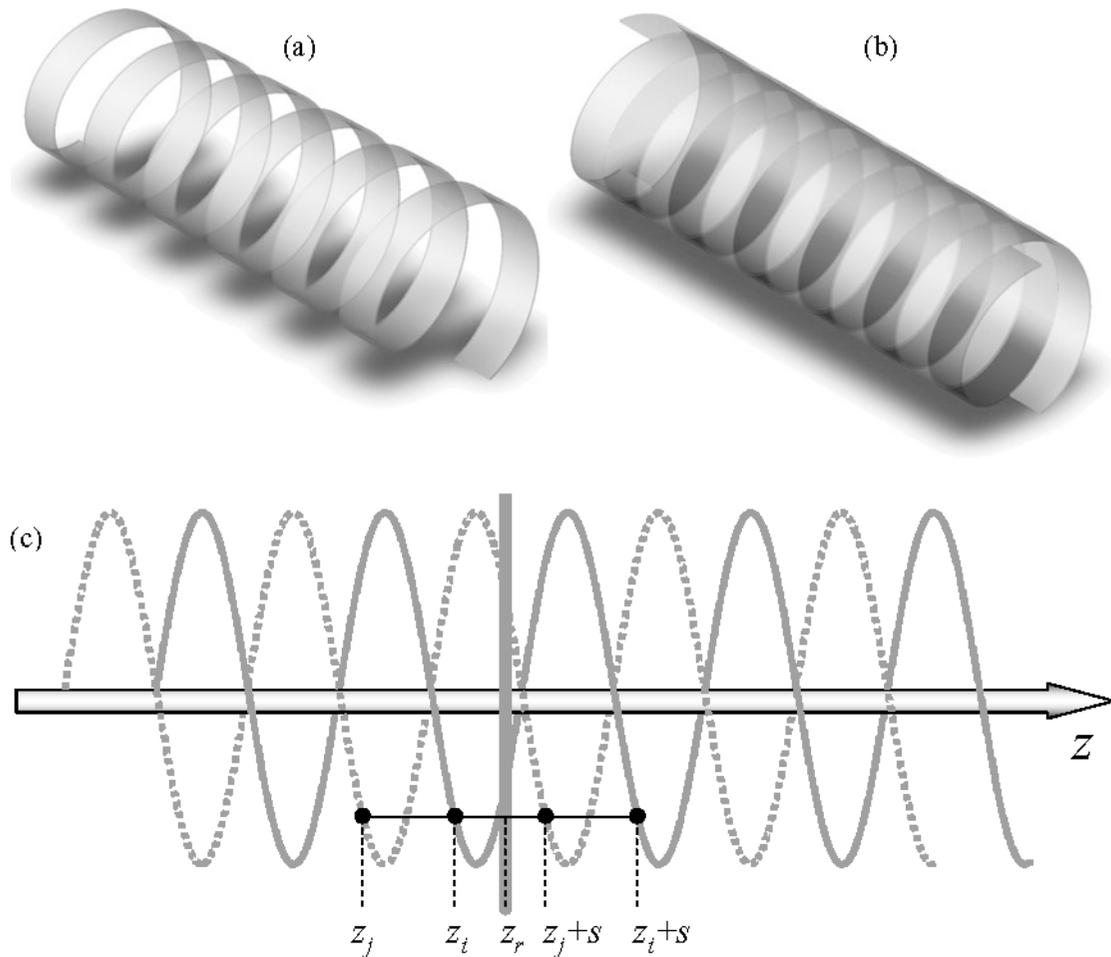


Abb. 7.11: Prinzip der Schichtinterpolation bei der Spiral-CT. Durch die Invarianz der Schwächung gegenüber Umkehrung des Strahlenweges erhält man eine zusätzliche Helix, die eine 180° -Verschiebung zur Basishelix aufweist. (a) einfache Spirale mit *Pitch* 2, (b) zusätzliche Helix, die den Zwischenraum füllt und (c) Interpolation mit zusätzlicher Helix. Die komplementäre Trajektorie ist gestrichelt dargestellt.

Der Nutzen der komplementären Helix liegt auf der Hand. Die Datenpunkte für die Interpolation liegen ohne Erhöhung der Strahlendosis viel enger zusammen. In Abbildung 7.11 ist zu erkennen, dass nun die Punkte z_i und z_j+s die nächstgelegenen Punkte für die Interpolation der Punktes z_r sind. Bei dem weit verbreiteten 180° LI-Verfahren, wird die Zusatzhelix in einer linearen Interpolation genutzt. Insgesamt werden zur Interpolation in einem Fächerstrahlensystem beim 180° LI-Verfahren Rohdaten aus einem Messintervall von $2 \cdot (180^\circ + \varphi)$ benötigt. In Kapitel 6.6 wurde erläutert, dass man bei der Fächerstrahlgeometrie gegenüber der Parallelstrahlgeometrie um den Öffnungswinkel φ des Fächerstahls weiter als 180° messen muss, um einen vollständigen Rohdatensatz zu erhalten.

Darüber hinaus ergibt sich die Möglichkeit, eine Interpolation höherer Ordnung unter zusätzlicher Verwendung der Punkte z_j und z_i+s durchzuführen. Das soll hier aber nicht weiter vertieft werden. Bei *W. A. Kalender* [Kal00] sind die heute verwendeten Interpolationsalgorithmen in einer Übersicht dargestellt, und es werden die Vor- und Nachteile der jeweiligen Interpolationen im Detail besprochen. Das gilt insbesondere auch für die Geräte mit mehrzeiligen Detektoren und für Verfahren mit EKG-Triggerung.

An dieser Stelle sollen die spezifischen Scanparameter des Verfahrens noch kurz besprochen werden. Gegenüber der konventionellen Computertomographie kommt hier die Tischvorschubgeschwindigkeit v_t hinzu, die in Bezug zur Rotationsfrequenz $1/T_{rot}$ des Abtastsystems gesetzt wird. Hieraus ergibt sich der Tischvorschub pro Umdrehung bzw. die Steighöhe der Helix

$$s = v_t T_{rot}. \quad (7.8)$$

Nimmt man die durch den Kollimator vorgegebene Breite des Röntgenfächers d hinzu, so erhält man aus der Kombination dieser Größen die neue Scanparametergröße *Pitch*

$$p = \frac{s}{d}, \quad (7.9)$$

die auf diese Weise für ein System mit einem einzelnen Detektorarray definiert ist. In der Abbildung 7.12 erkennt man die Bedeutung des dimensionslosen *Pitch*-Faktors, der den Tischvorschub pro Umdrehung ins Verhältnis zur Schichtkollimierung setzt. Zu sehen sind (v.l.n.r) Scansequenzen mit den *Pitch*-Faktoren $p = 1$, $p = 1.5$ und $p = 2$. Offenbar ist es möglich, den Tischvorschub pro Umdrehung größer zu wählen als die Schichtdicke. Es muss daher besprochen werden, ob dadurch das Abtasttheorem verletzt wird.

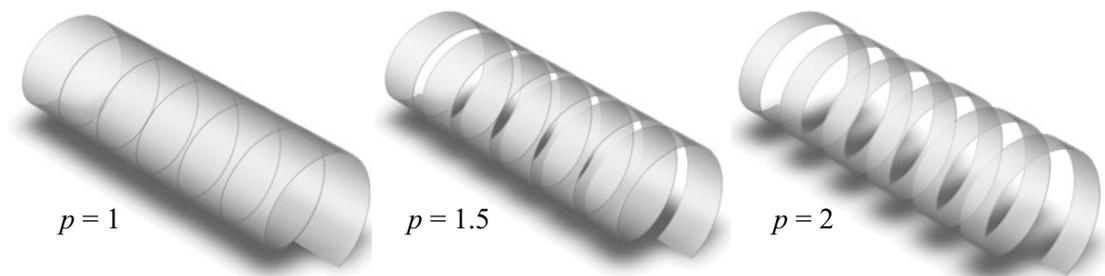


Abb. 7.12: Bedeutung des dimensionslosen *Pitch*-Faktors (Tischvorschub pro Umdrehung in Einheiten der Schichtdicke) bei der Spiral-CT. Von links nach rechts sind $p = 1$, $p = 1.5$ und $p = 2$ zu sehen. Ein *Pitch*-Faktor $p > 1$ sorgt für eine kürzere Messzeit, da in Einheiten der Schichtdicke ein größeres Volumen gemessen werden kann. Man sieht sofort, dass die Dosis für $p = 2$ kleiner ist als für $p = 1$.

Will man das Shannonsche Abtasttheorem nicht verletzen, so ergibt sich für die konventionelle Computertomographie die im vorherigen Kapitel beschriebene Notwendigkeit, überlappende Schichten für die dreidimensionale Rekonstruktion zu akquirieren. Diese Forderung gibt es bei der Spiral-CT nicht unmittelbar, da im Prinzip beliebig fein aufeinander folgende Schichten aus der Spirale rekonstruiert werden können. Damit können eben auch entsprechend überlappende Schichten retrospektiv rekonstruiert werden. Abbildung 7.13 zeigt das Aufkommen der Schichten bei der Spiral-CT gegenüber der konventionellen Computertomographie schematisch. Zu beachten ist dabei, dass die Schichten zwar enger zusammenrücken, die Messdicke der einzelnen Schicht aber immer noch durch die mit dem Kollimator gewählte Schichtdicke bestimmt ist.

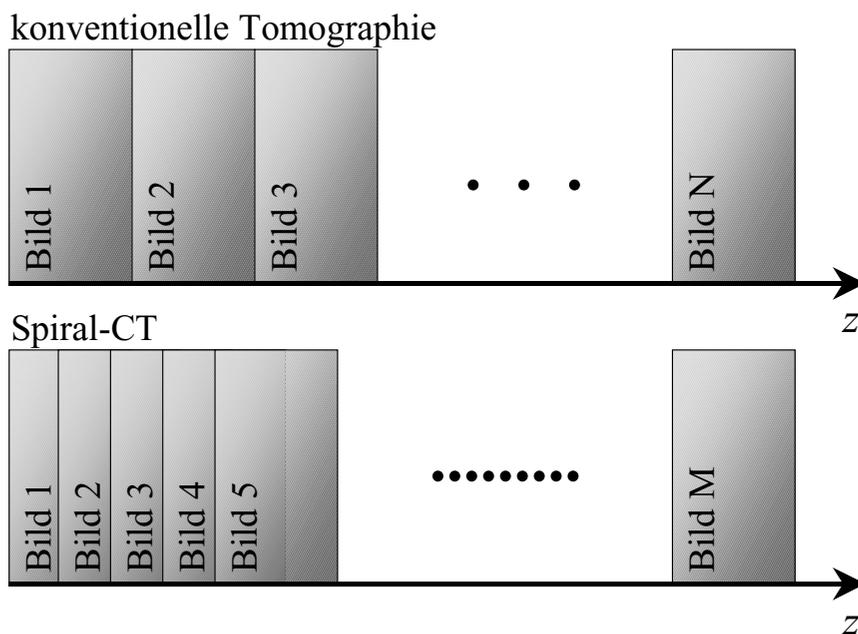


Abb. 7.13: Durch die retrospektive Berechnung der Einzelschichten ist bei der Spiral-CT eine engere Abfolge der Bilder im Schichtenstapel möglich ($M \gg N$), so dass Artefakte bei der dreidimensionalen Darstellung reduziert werden können (nach *W. A. Kalender* [Kal00]).

Dennoch ist man bei der Wahl des *Pitch*-Faktors nicht völlig frei. Der *Pitch*-Faktor p liegt typischerweise zwischen 1 und 2. Zunächst soll motiviert werden, warum das Verfahren für $p = 1$ überhaupt funktioniert. Wie oben besprochen, interpoliert man die Projektionsdaten aus benachbarten realen Projektionen auf der Helix nach Gleichung (7.6). Nimmt man an, es solle ein sehr kleines, δ -förmiges Objekt gemessen werden und nimmt man weiter an, bei dem Abtastsystem ließe sich eine theoretische Schichtdicke einstellen, die ein δ -förmiges Empfindlichkeitsprofil aufweist, dann müsste das Spiral-CT-Verfahren kapitulieren, denn tatsächlich wäre das Objekt als Projektion nur unter einem einzigen Winkel zu sehen. Auch in der Ergänzung des Radonraumes für dieses Objekt durch die Spiral-CT-Interpolation würden weiterhin inkonsistente Daten produziert werden, da keine Projektion außerhalb von z_r Informationen des Objektes enthält.

In realen Systemen misst man aber weder so kleine Objekte, noch ist das Abtastsystem mit einem δ -förmigen Empfindlichkeitsprofil ausgestattet. Solange ein reales Objekt innerhalb des Profils einer Schichtdicke liegt, während sich der Patiententisch vorwärts bewegt, solange enthalten die entsprechend benachbarten Projektionen auch Informationen über das Objekt, so dass eine Interpolation sinnvoll ist. Warum aber funktioniert ein *Pitch*-Faktor $p > 1$? Zur Beantwortung dieser Frage werfe man noch einmal einen Blick auf Abbildung 7.11. Aufgrund der um 180° verschobenen, virtuellen Helix, ist es bis zu einem *Pitch*-Faktor $p = 2$ theoretisch möglich, alle Punkte hinreichend lange in den Projektionen zu verfolgen. Erst bei einem *Pitch*-Faktor $p > 2$ können bei entsprechend kleinen Strukturen Datenverluste auftreten, die zu Artefakten führen. In der Praxis werden *Pitch*-Faktoren im Bereich $1 < p < 1.8$ gewählt.

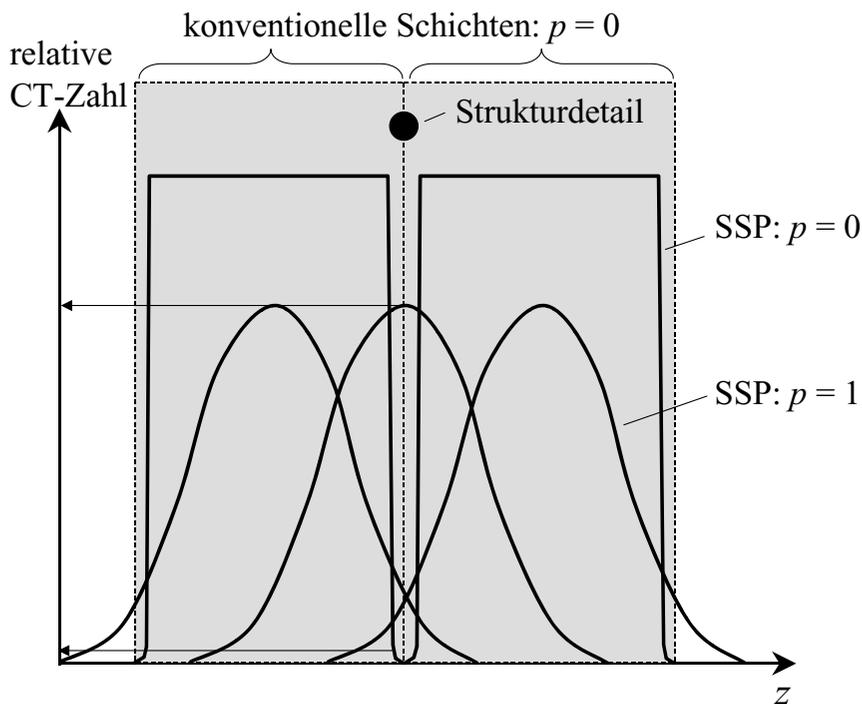


Abb. 7.14: Vorteil der Spiral-CT bei der Abbildung kleiner Strukturen. Die Empfindlichkeitsprofile (*Slice-Sensitivity-Profile* SSP) für die konventionelle und die Spiral-CT sind über der axialen Achse dargestellt. Wenn sehr kleine Details genau auf die Grenze der konventionellen Schichten fallen, so kann die abgebildete Intensität aufgrund des steil abfallenden Empfindlichkeitsprofils sehr klein sein. Bei der Spiral-CT ist das Schichtempfindlichkeitsprofil im Maximum grundsätzlich kleiner andererseits aber auch weicher und breiter. Da beliebige Schichtpositionen retrospektiv rekonstruiert werden können, kann das Strukturdetail jedoch nachträglich genau ins Maximum des Spiral-Empfindlichkeitsprofils gelegt werden (nach J. T. Bushberg *et al.* [Bus02]).

Abbildung 7.14 zeichnet schematisch nach, warum die Abbildung kleiner Details in der konventionellen Computertomographie unter Umständen schlechter sein kann als bei der Spiral-CT. Wenn bei einer konventionellen Schichtaufnahme mit dicht liegenden Schichten ein kleines Strukturdetail gerade auf die Kante benachbarter Schichten liegt, dann teilt sich selbst bei perfekt rechteckigem Schichtempfindlichkeitsprofil (SSP⁴³) die Intensität zwischen den beiden Schichten auf. Praktisch ist das Schichtempfindlichkeitsprofil leider nur annähernd ein Rechteck, so dass abhängig von der Steilheit des Profils am Schichtrand die gemessene Antwort des Systems noch schwächer wird.

Bei der Spiral-CT hingegen ist das einzelne Schichtempfindlichkeitsprofil jeder rekonstruierten Schicht breiter und flacher als bei der konventionellen Computertomographie. Dies ist Konsequenz der Faltung des konventionellen Profils mit der Tischvorschubfunktion. Je größer der *Pitch*-Faktor ist, desto breiter und flacher wird das Empfindlichkeitsprofil. Anders als bei der konventionellen Tomographie, bei der die Lage des Strukturdetails zwischen den Schichten zufällig ist und nur durch eine erneute Messung mit erneuter Strahlenbelastung korrigiert werden kann, ist man bei der Spiral-CT in der Lage, durch retrospektive Berechnung der Schichten in jeder beliebigen Schichtposition, das Strukturdetail genau ins Zentrum des Empfindlichkeitsprofils zu legen.

⁴³ SSP: *Slice-Sensitivity Profile*

Es soll betont werden, dass die Möglichkeit des Spiral-CT-Verfahrens, axial beliebig dicht überlappend liegende Schichten zu berechnen, nicht mit einer beliebig steigerbaren räumlichen Auflösung in axialer Richtung verwechselt werden darf. Letztlich bestimmt immer noch die Schichtdicke, die durch den Kollimator eingestellt wird, das axiale Auflösungsvermögen (siehe Abbildung 7.13). Natürlich kann man für eine Helix, die mit einer Fächerstrahldicke von 10 mm aufgenommen wurde, Bilder in 1 mm Abstand rekonstruieren. Aber deswegen hat man noch keine Auflösung von 1 mm. In Anlehnung an J. T. Bushberg *et al.* [Bus02] soll deswegen unterschieden werden in 1 mm *Sampling Pitch* und 10 mm *Sampling Aperture*.

Die Nachfrage nach immer schnelleren Computertomographen hat eine Entwicklung zu mehrzeiligen Detektorarrays gefördert, die man ebenfalls auf einer Helix laufen lässt. Abbildung 7.15 zeigt schematisch die entsprechenden Bahnen der tatsächlichen Quellen sowie die korrespondierenden, jeweils um 180° verschobenen, zusätzlichen Bahnen für ein 4-Zeilen-Detektorarray. Beachtenswert ist hierbei, dass mit nur einem Röntgenfokus gearbeitet wird, so dass ein Röntgenkegel entsteht, dessen mathematische Behandlung sehr aufwendig sein kann, wenn der Kegelöffnungswinkel groß ist. Bei kleinen Öffnungen (unterhalb 2°) können aber mit approximativen Rekonstruktionsverfahren gute Ergebnisse erzeugt werden. Die Diskussion der Kegelstrahlrekonstruktionsverfahren ist Gegenstand der späteren Abschnitte in diesem Kapitel.

In Abbildung 7.15 ist zu sehen, dass die Nachbarpunkte für die Interpolation der Projektionsdaten für die Schicht am Ort z_r hier noch weiter zusammen rücken als in der geometrischen Situation der Abbildung 7.11. Will man dies in Bezug auf die Bildqualität und Dosis bewerten, so muss die Zeilenanzahl M des Detektorarrays beim *Pitch*-Faktor berücksichtigt werden, so dass

$$p = \frac{s}{Md} \quad (7.10)$$

gilt. Von herausgehobener Bedeutung ist neben der erhöhten Messgeschwindigkeit auch die Dosisreduktion für *Pitch*-Faktoren größer Eins.

Die wesentlichen Vorteile des Spiral-CT-Verfahrens lassen sich wie folgt zusammenfassen [Gay98, See01]:

- Durch die kontinuierliche Datenerfassung, die mit dem Patiententischvorschub durch die *Gantry* synchronisiert ist, ist es möglich, vollständige Organe und größere Volumina in kurzen Zeiten zu messen. Neben einem *Pitch*-Faktor $p > 1$ sind kürzere Messzeiten auch schon durch Elimination der Tischvorschubpausen gegeben.
- Durch die höhere Akquisitionsgeschwindigkeit sind weniger Artefakte durch Patientenbewegung zu erwarten.
- Im Gegensatz zur konventionellen Computertomographie kann ein lückenloser Datensatz akquiriert werden. Dadurch lassen sich Artefakte bei der dreidimensionalen Rekonstruktion eliminieren.
- Schichten können retrospektiv in jeder beliebigen axialen Lage rekonstruiert werden. Dadurch können auch sehr kleine Strukturen erfasst werden.

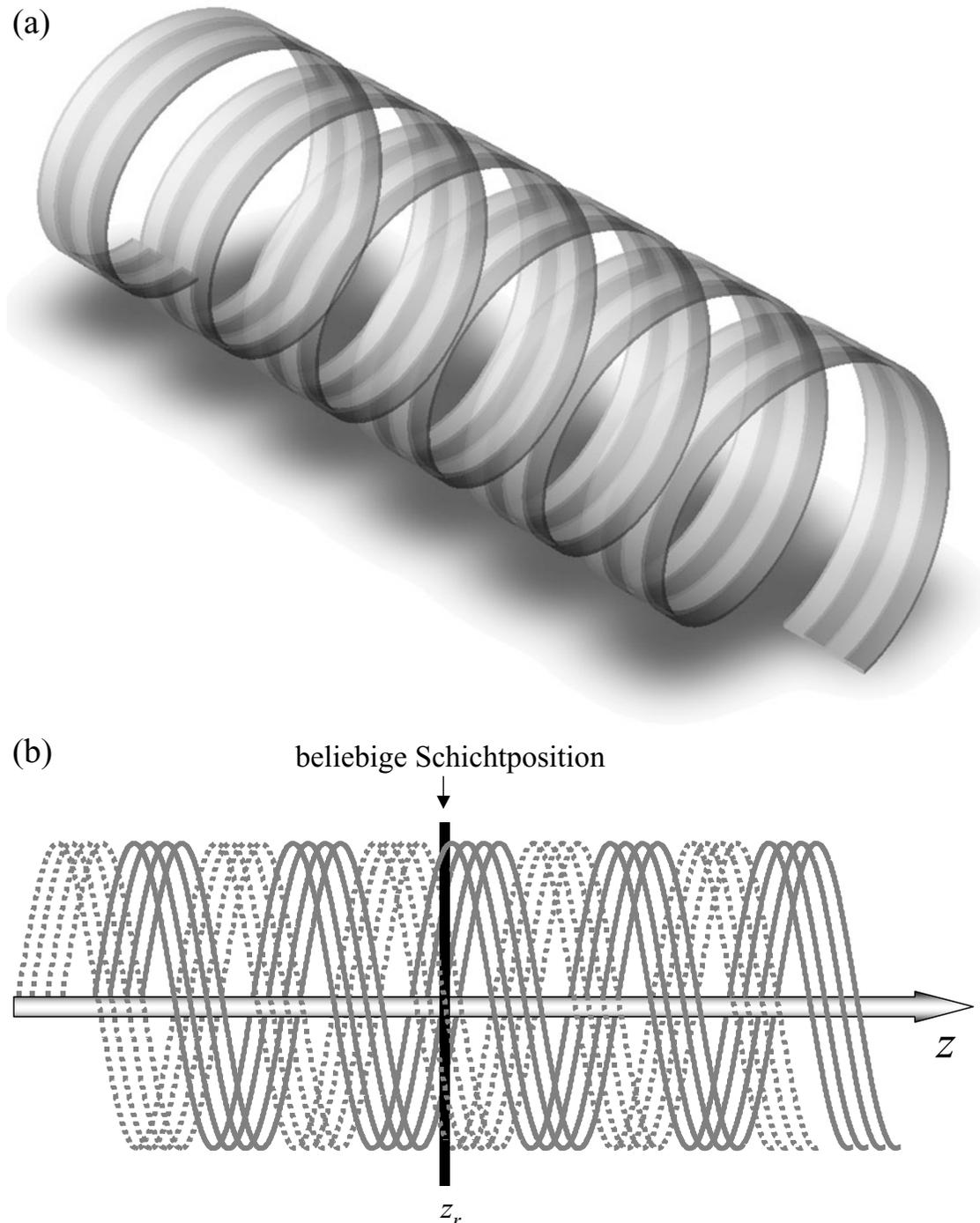


Abb. 7.15: (a) Helixförmige Bahnverläufe der Quellen für einen 4-Zeilen-Detektor. (b) Auch hier ergibt sich durch das Konzept des inversen Fächers zu jeder realen Bahn eine korrespondierende, um 180° verschobene Zusatzhelix, die jeweils gestrichelt dargestellt ist.

Allerdings ist zu beachten, dass die Röntgenröhre durch das kontinuierliche Messen höchsten Belastungen ausgesetzt ist. Die gilt besonders in Bezug auf die thermische Belastung. Eine abschließende Beurteilung der Abbildungsqualität des Spiralverfahrens sei dem Leser durch den visuellen Vergleich der Rekonstruktionen in Abbildung 7.7 und 7.16 überlassen. In Abbildung 7.16 sind die Voxel isotrop mit einer Kantenlänge von 0.5 mm.

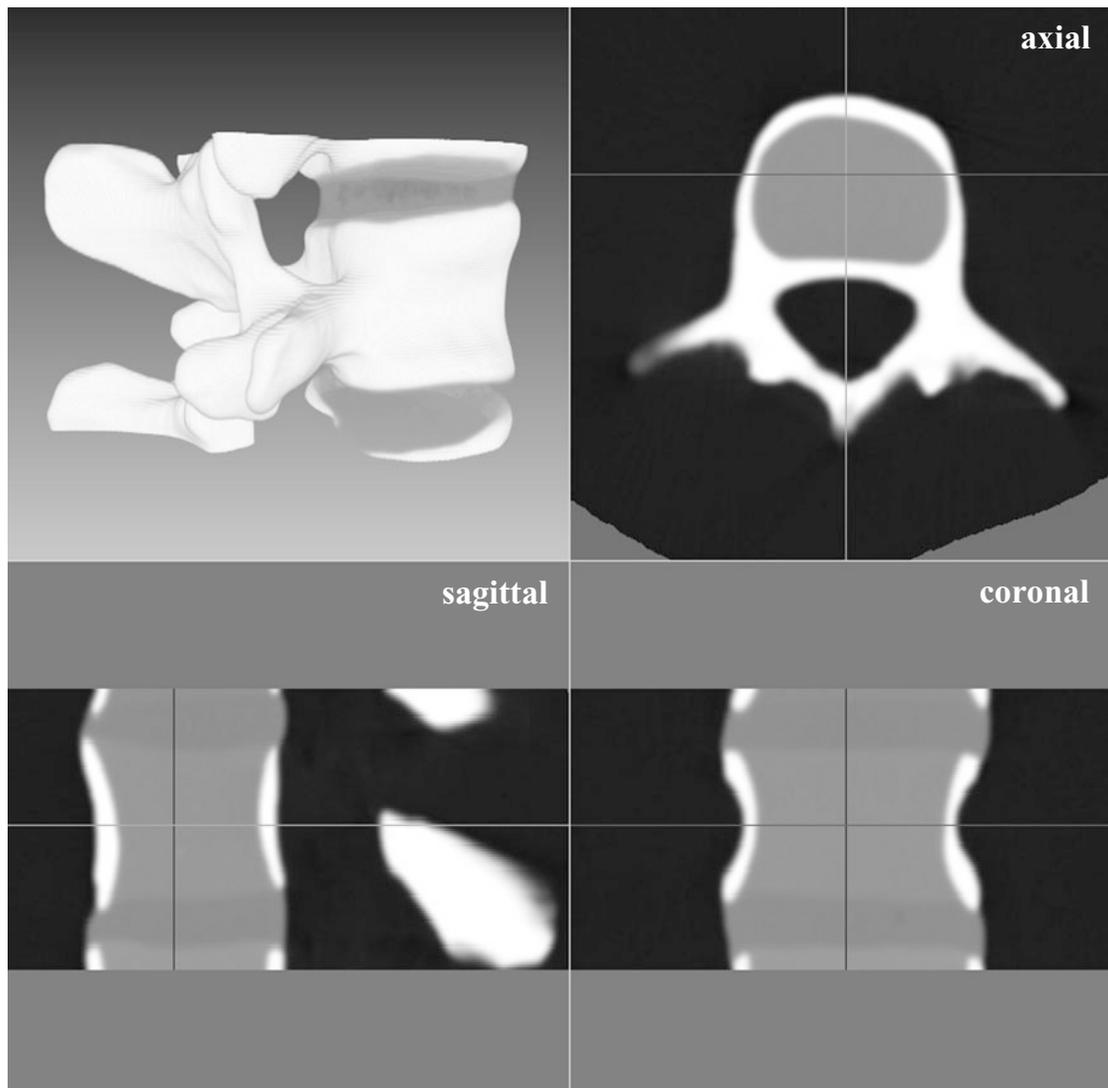


Abb. 7.16: Der Erfolg des Spiralverfahrens ist anhand des Wirbelphantoms aus Abbildung 7.7 gut nachzuvollziehen. Retrospektiv wurde eine gleichmäßige also isotrope Auflösung von 0.5 mm berechnet. Die Lage der coronalen und sagittalen Schicht im Raum ist in Abbildung 1.9 beispielhaft illustriert. Treppenartefakte wie in Abbildung 7.7 sind hier stark verringert.

7.3 Rekonstruktion in Parallelstrahlgeometrie

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels soll es nun nicht mehr um Sekundärrekonstruktionen aus Schichtenstapeln gehen, sondern um „echte“ dreidimensionale Rekonstruktionsverfahren.

7.3.1 3D Radontransformation und Fourier-Slice-Theorem

Um die Radontransformation im dreidimensionalen Raum zu definieren, die der Gleichung (5.18) entspricht, muss man sich klar machen, dass die Integrationslinie, die entlang des Röntgenstrahls definiert war, nun zu einer Fläche wird und dass damit Linienintegrale zu Flächenintegralen werden. Das heißt, ein dreidimensionaler Radonwert ist ein Flächenintegral im dreidimensionalen Objektraum.

Analog zur Definition des Einheitsvektors

$$\mathbf{n}_\xi = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

der den jeweils eingestellten Projektionswinkel γ für die zweidimensionalen Rekonstruktionsverfahren definiert (siehe Abbildung 7.17a), stellt im dreidimensionalen Raum der Vektor

$$\mathbf{n}_\xi = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \sin(\vartheta) \\ \sin(\gamma) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

eine geeignete Beschreibung der analogen Projektionsfläche dar. Jede Fläche \mathbf{A} kann nämlich durch einen Punkt im Radonraum eindeutig festgelegt werden, wenn man diesen Punkt als Aufpunkt der Flächennormale von \mathbf{A} interpretiert, die in der Verlängerung durch den Ursprung des Radonraumes läuft. Abbildung 7.17b zeigt die Fläche \mathbf{A} , die in der dreidimensionalen Beschreibung den Kern der Radontransformation darstellt. Zusätzlich soll noch der Vektor

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \xi \cdot \mathbf{n}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \cos(\gamma) \sin(\vartheta) \\ \xi \sin(\gamma) \sin(\vartheta) \\ \xi \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

definiert werden, der den Radonwert eindeutig festlegt.

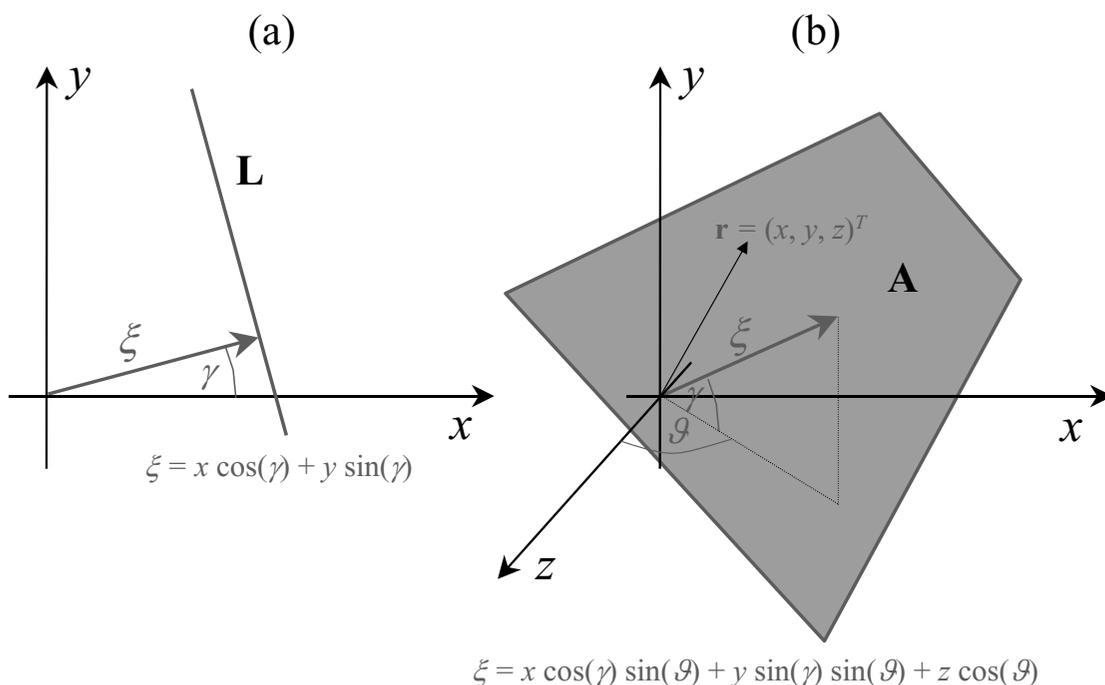


Abb. 7.17: a) Beschreibung des Integrationsweges entlang einer Linie L für das zweidimensionale Rekonstruktionsproblem. b) Beschreibung einer Fläche A , über deren Punkte im dreidimensionalen Rekonstruktionsproblem integriert werden muss.

Ein Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ liegt in der Ebene \mathbf{A} , wenn das Skalarprodukt

$$\xi = (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = x \cos(\gamma) \sin(\vartheta) + y \sin(\gamma) \sin(\vartheta) + z \cos(\vartheta) \quad (7.13)$$

konstant ist. Sei \mathbf{A} eine Fläche im Objektraum, dann kann die Abtastung durch

$$f(x, y, z) * \delta(\mathbf{A}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{A}) d\mathbf{r} \quad (7.14)$$

beschrieben werden, also vollkommen analog zu Gleichung (5.16) bzw.

$$f * \delta(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{r} \in \mathbf{A}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (7.15)$$

Die δ -Distribution liefert durch ihre Siebeigenschaft alle Punkte \mathbf{r} des Objektraumes, die auf der Fläche \mathbf{A} liegen. Da die Fläche \mathbf{A} durch $(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) = \xi$ gegeben ist, kann das Projektionsintegral wieder durch

$$\begin{aligned} f * \delta(\mathbf{A}) &= \int f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) - \xi) d\mathbf{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \delta(x \cos(\gamma) \sin(\vartheta) + y \sin(\gamma) \sin(\vartheta) + z \cos(\vartheta) - \xi) dx dy dz \quad (7.16) \\ &= p(\xi) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. In konsequenter Erweiterung des zweidimensionalen Falls, ändern sich die Projektionen nun mit den beiden Projektionswinkeln γ und ϑ , so dass man

$$p = p(\xi, \gamma, \vartheta) = p_{\gamma, \vartheta}(\xi) \quad (7.17)$$

schreibt. $p_{\gamma, \vartheta}(\xi)$ wird Radontransformierte des Objektes genannt. Man schreibt kurz

$$f(x, y, z) \circ \xrightarrow{\mathcal{R}_3} \bullet f * \delta(\mathbf{A}) = p_{\gamma, \vartheta}(\xi). \quad (7.18)$$

bzw.

$$p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \mathcal{R}_3 \{ f(x, y, z) \}. \quad (7.19)$$

Der dreidimensionale Radonraum besteht aus den Flächenintegralwerten an den in sphärischen Koordinaten gegebenen Punkten (ξ, γ, ϑ) . Das Fourier-Slice-Theorem, das schon in Kapitel 5 eine zentrale Rolle bei der Inversion der Radontransformation gespielt hatte, lässt sich auch in drei Dimensionen formulieren. Dazu bildet man zunächst wieder die Fouriertransformierte des Radonraumes für alle ξ der jeweiligen Projektionswinkel γ und ϑ

$$P_{\gamma, \vartheta}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi, \quad (7.20)$$

wobei sich die Projektionswerte $p_{\gamma,\vartheta}(\xi)$ in Gleichung (7.20) aus dem in den zweidimensionalen Raum erweiterten Projektionsintegral (5.10) ergeben, also

$$\begin{aligned}
 P_{\gamma,\vartheta}(q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta,\sigma,\xi) d\sigma d\eta \right\} e^{-2\pi i q \xi} d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta,\sigma,\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi d\sigma d\eta \quad .
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

Abbildung 7.18 zeigt den Zusammenhang zwischen dem ruhenden Patientenkoordinatensystem und dem rotierenden System der Integrationsfläche **A** bei der Beschreibung der Schwächungskoeffizienten im dreidimensionalen Objektraum.

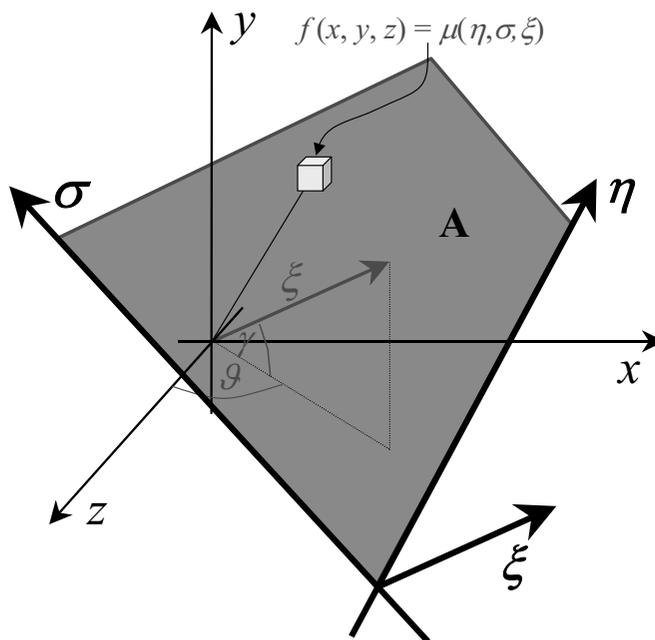


Abb. 7.18: Zusammenhang zwischen dem ruhenden (x,y,z) -Patientenkoordinatensystem und dem Koordinatensystem (ξ,η,σ) der rotierenden Integrationsfläche **A**.

In dem um die Winkel γ und ϑ gedrehten sowie um die Strecke ξ verschobenen, immer noch kartesischen, aber ruhenden (x,y,z) -Patientenkoordinatensystem kann man

$$\begin{aligned}
 P_{\gamma,\vartheta}(q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta(x,y,z), \sigma(x,y,z), \xi(x,y,z)) e^{-2\pi i q (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_q)} dx dy dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z) e^{-2\pi i q (\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_q)} dx dy dz
 \end{aligned}
 \tag{7.22}$$

schreiben. Die kartesische Formulierung der Fouriertransformation des dreidimensionalen Objektes im ruhenden (x,y,z) -Patientenkoordinatensystem ist andererseits durch

$$F(u, v, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi i(xu + yv + zw)} dx dy dz \quad (7.23)$$

gegeben. Für die Wechsel der Koordinatensysteme sei hier kurz dargestellt, dass ein Punkt im Frequenzraum mit den sphärischen Koordinaten (q, γ, ϑ) die kartesischen Frequenzkoordinaten

$$\begin{aligned} u &= q \cos(\gamma) \sin(\vartheta) \\ v &= q \sin(\gamma) \sin(\vartheta) \\ w &= q \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (7.24)$$

besitzt, so dass man im Exponenten schreiben kann

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi i(xq \cos(\gamma) \sin(\vartheta) + yq \sin(\gamma) \sin(\vartheta) + zq \cos(\vartheta))} dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi iq(x \cos(\gamma) \sin(\vartheta) + y \sin(\gamma) \sin(\vartheta) + z \cos(\vartheta))} dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi i q(\mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_{\xi})} dx dy dz \end{aligned} \quad (7.25)$$

Der Integrand der letzten Zeile in Gleichung (7.25) stimmt mit dem Integranden aus Gleichung (7.22) überein, so dass auch hier das Fourier-Slice-Theorem

$$\begin{aligned} F(u(q, \gamma, \vartheta), v(q, \gamma, \vartheta), w(q, \gamma, \vartheta)) &= F(q \cos(\gamma) \sin(\vartheta), q \sin(\gamma) \sin(\vartheta), q \cos(\vartheta)) \\ &= F_{\text{sphärisch}}(q, \gamma, \vartheta) \\ &= P_{\gamma, \vartheta}(q) \end{aligned} \quad (7.26)$$

formuliert werden kann.

7.3.2 Dreidimensionale gefilterte Rückprojektion

Ausgehend von der inversen 3D-Fouriertransformierten

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v, w) e^{2\pi i(xu + yv + zw)} du dv dz \quad (7.27)$$

geht man wieder zu Kugelkoordinaten des Systems (7.24) über. Wie schon in den vorhergehenden Kapiteln gezeigt, muss das infinitesimale Volumenelement $du dv dw$ durch $J dq d\gamma d\vartheta$ ersetzt werden. Die Jacobi-Funktional-Determinante J ist hierbei durch

$$J \equiv \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(q, \gamma, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} & \frac{\partial v}{\partial \gamma} & \frac{\partial w}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial u}{\partial \vartheta} & \frac{\partial v}{\partial \vartheta} & \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\gamma) \sin(\vartheta) & \sin(\gamma) \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \\ -q \sin(\gamma) \sin(\vartheta) & q \cos(\gamma) \sin(\vartheta) & 0 \\ q \cos(\gamma) \cos(\vartheta) & q \sin(\gamma) \cos(\vartheta) & -q \sin(\vartheta) \end{vmatrix} = q^2 \sin(\vartheta) \quad (7.28)$$

gegeben. Bei korrekter Verwendung des neuen infinitesimalen Volumenelementes in Kugelkoordinaten ergibt sich für die inverse Fouriertransformation

$$f(x, y, z) = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{q=0}^{\infty} F(q \cos(\gamma) \sin(\vartheta), q \sin(\gamma) \sin(\vartheta), q \cos(\vartheta)) \cdot \dots \quad (7.29)$$

$$\dots \cdot e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) \sin(\vartheta) + y \sin(\gamma) \sin(\vartheta) + z \cos(\vartheta))} q^2 \sin(\vartheta) dq d\gamma d\vartheta$$

Mit dem Fourier-Slice-Theorem (7.26) gilt nun weiter, dass

$$F(q \cos(\gamma) \sin(\vartheta), q \sin(\gamma) \sin(\vartheta), q \cos(\vartheta)) = P_{\gamma, \vartheta}(q), \quad (7.30)$$

so dass

$$f(x, y, z) = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{q=0}^{\infty} q^2 \sin(\vartheta) P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i q (x \cos(\gamma) \sin(\vartheta) + y \sin(\gamma) \sin(\vartheta) + z \cos(\vartheta))} dq d\gamma d\vartheta. \quad (7.31)$$

Für das Integral über q schreibt man kurz

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \int_{q=0}^{\infty} q^2 P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i q \xi} dq \right\} \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \int_{q=-\infty}^{\infty} q^2 P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i q \xi} dq \right\} \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma. \quad (7.32)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} h_{\gamma, \vartheta}(\xi) \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma$$

Für einen festen Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und feste Projektionswinkel γ, ϑ legt ξ die Projektionsfläche fest. Dabei ist

$$h_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i q \xi} dq \quad (7.33)$$

die gefilterte Projektion, die durch eine Multiplikation der Fouriertransformierten von $p_{\gamma, \vartheta}(\xi)$ mit q^2 im Frequenzraum zustande kommt. Die Rückverschmierung ist in der letzten Zeile von Gleichung (7.32) zu sehen.

7.3.3 Gefilterte Rückprojektion und Radonsche Lösung

So wie in Kapitel 5.9 kann man auch hier zeigen, dass die gefilterte Rückprojektion mit $h_{\gamma, \vartheta}(\xi)$ im Sinne der Originallösung von Radon zu schreiben ist. Die Lösung erhält man sogar einfacher als im Kapitel 5.9, da hier nicht die Betragsfunktion zu transformieren ist. Geht man von Gleichung (7.33) aus und beachtet die Verallgemeinerung der Regel (4.89) für die inverse Fouriertransformation der n -ten Ableitung der Ortsfunktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (i2\pi u)^n F(u) e^{i2\pi u x} du = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad (7.34)$$

so kann man für Gleichung (7.33)

$$\begin{aligned} h_{\gamma, \vartheta}(\xi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (i2\pi q)^2 P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i q \xi} dq \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (7.35)$$

schreiben, wobei natürlich die partielle Ableitung angewendet werden muss. Zur Herleitung der Rekonstruktionsformel geht man dann von Gleichung (7.32) aus, in die der Ausdruck (7.35) eingesetzt wird, so dass

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \int_{q=-\infty}^{\infty} q^2 P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i q \xi} dq \right\} \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \frac{1}{-4\pi^2} \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \right\} \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma \end{aligned} \quad (7.36)$$

folgt.

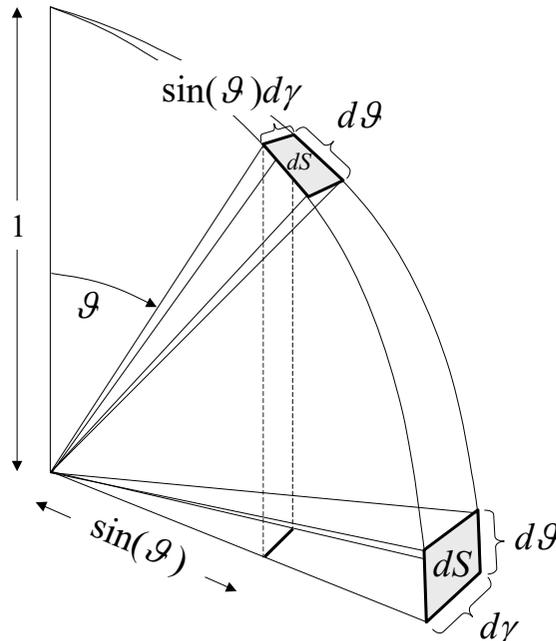


Abb. 7.19: Das infinitesimale Flächenelement dS der Einheitssphäre S ist abhängig vom Polarwinkel ϑ und zwar in der Form $dS = \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma$. Formal kann die Fläche durch die infinitesimale Flächennormale \mathbf{n}_ξ beschrieben werden, so dass dann über alle infinitesimalen Richtungen $d\mathbf{n}_\xi$ integriert werden muss.

Die Integration wird hier über die Einheitssphäre S ausgeführt, denn das infinitesimale Flächenelement der Einheitssphäre ist, so wie in Abbildung 7.19 skizziert,

$$dS = \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma, \quad (7.37)$$

so dass man als Radonsche Inversionsformel in kompakter Schreibweise

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} dS \quad (7.38)$$

bzw. etwas formaler, weil man über alle Richtungen \mathbf{n}_ξ integriert,

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\mathbf{n}_\xi \quad (7.39)$$

erhält [Dea83, Nat01]. *F. Natterer und F. Wübbeling* bezeichnen die Verwendung der dreidimensionalen Inversionsformel (7.38) als lokale Tomographie [Nat01], weil die Berechnung von f am Punkt $(x, y, z)^T$ lediglich die Flächenintegration in einer kleinen Nachbarschaft des Punktes $(x, y, z)^T$ benötigt. Zur Vertiefung der Mathematik der lokalen Tomographie lese man bei *A. G. Ramm und A. I. Katsevich* [Ram96] nach.

7.3.4 Central-Section-Theorem

Eine Variante des Fourier-Slice-Theorems wird Central-Section-Theorem genannt. Bei dieser Variante wird davon ausgegangen, dass zweidimensionale Parallelprojektionen $p_{\alpha, \theta}(a, b)$ des dreidimensionalen Objektes $f(x, y, z)$ vorliegen. Abbildung 7.20 skizziert die Projektionsgeometrie.

Damit die Projektion des Punktes \mathbf{r} mit dem Schwächungswert $f(\mathbf{r})$ entlang der durch den Weg der Röntgenstrahlen definierten Geraden im dreidimensionalen Raum beschrieben werden kann, wird hier auf die vektorielle Punkt-Richtungs-Form

$$\mathbf{r} = \xi + \eta \mathbf{n}_\eta \quad (7.40)$$

einer Geraden zurückgegriffen [Pap98]. Der Vektor ξ ist ein Abstandsvektor zur Projektionslinie, der senkrecht auf der Detektornormalen \mathbf{n}_η steht und dabei in der Detektorebene liegt, das heißt

$$\xi = a \mathbf{n}_a + b \mathbf{n}_b, \quad (7.41)$$

so dass der Gesamtvektor

$$\mathbf{r} = a \mathbf{n}_a + b \mathbf{n}_b + \eta \mathbf{n}_\eta \quad (7.42)$$

in parametrisierter Form die Punkte auf der Projektionslinie beschreibt, die senkrecht auf der Detektorfläche steht. Die Detektorflächennormale

$$\mathbf{n}_\eta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\theta) \\ \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

ist durch die sphärischen Winkel α und θ eindeutig festgelegt. Abbildung 7.20a zeigt die Lage der Flächennormale \mathbf{n}_η im ruhenden (x,y,z) -Koordinatensystem.

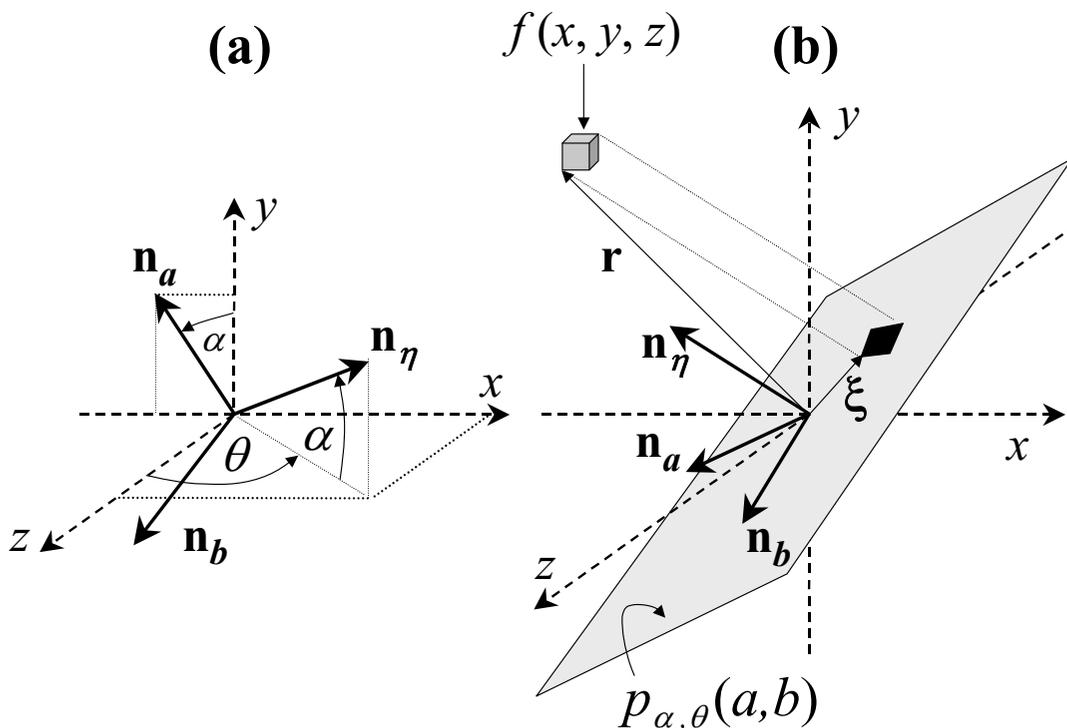


Abb. 7.20: (a): Orientierung der Detektorfläche im dreidimensionalen Raum mit Hilfe der Detektorflächennormalen \mathbf{n}_η , die parallel zur Richtung der Röntgenstrahlen verläuft. Der Rotationsfreiheitsgrad um die Detektornormale herum wird durch die Einheitsvektoren \mathbf{n}_a und \mathbf{n}_b entlang der orthogonalen Hauptachsen des Detektors beschränkt. \mathbf{n}_a liegt dabei immer so, dass $z = 0$ ist. (b): Projektion eines Punktes $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ im dreidimensionalen Raum entlang einer Linie parallel zur Detektorflächennormalen \mathbf{n}_η (also parallel zur Richtung der Röntgenstrahlen) auf die Detektorfläche, deren Orientierung im Raum durch die Einheitsvektoren \mathbf{n}_a und \mathbf{n}_b gegeben ist. $p_{\alpha, \theta}(a, b)$ bezeichnet die Projektionswerte, also die Linienintegrale entlang der Projektionslinien, die am Schnittpunkt (a, b) auf der Detektorfläche gemessen werden.

Mit der bisherigen Festlegung besitzt der Detektor noch einen Rotationsfreiheitsgrad um die Detektornormale. Eindeutigkeit wird hier erzielt, indem der Detektorvektor \mathbf{n}_a in die von x und y aufgespannte Ebene gelegt wird, das heißt seine z -Komponente Null ist, so dass

$$\mathbf{n}_a = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

Damit ist dann

$$\mathbf{n}_b = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha)\cos(\theta) \\ -\sin(\alpha)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

ebenfalls festgelegt.

Mit Hilfe der Parameterdarstellung (7.42) kann nun die Projektion als Linienintegral

$$p_{\alpha,\theta}(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a\mathbf{n}_a + b\mathbf{n}_b + \eta\mathbf{n}_\eta) d\eta \quad (7.46)$$

formuliert werden. So wie in Abbildung 7.20b ist dabei $p_{\alpha,\theta}(a,b)$ der Projektionswert auf dem Detektor. Bei *P. Toft* [Tof96] wird Gleichung (7.46) als hybride oder generalisierte Radontransformation für Linien im dreidimensionalen Raum bezeichnet, obwohl $p_{\alpha,\theta}(a,b)$ streng genommen keinen Radonwert darstellt (vergleiche Abschnitt 7.3.1). So wie im zweidimensionalen Raum, kann diese hybride Radontransformation als Faltung mit δ -Distributionen dargestellt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\theta}(a,b) &= \int_{\eta'=-\infty}^{\infty} \int_{b'=-\infty}^{\infty} \int_{a'=-\infty}^{\infty} f(a'\mathbf{n}_a + b'\mathbf{n}_b + \eta'\mathbf{n}_\eta) \delta(a-a') \delta(b-b') da' db' d\eta' \\ &= \int_{\eta'=-\infty}^{\infty} f(a\mathbf{n}_a + b\mathbf{n}_b + \eta'\mathbf{n}_\eta) d\eta' \end{aligned} \quad (7.47)$$

Das Central-Section-Theorem bringt nun, so wie auch das Fourier-Slice-Theorem, die Fouriertransformierte der Projektion mit der Fouriertransformierten von Teilmengen des dreidimensionalen Raumes in Zusammenhang. Die Fouriertransformation von $p_{\alpha,\theta}(a,b)$ ist in der üblichen Weise als

$$P_{\alpha,\theta}(q,p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\beta,\theta}(a,b) e^{-2\pi i(aq+bp)} dadb \quad (7.48)$$

darstellbar. Mit der Definition der hybriden Radontransformation aus Gleichung (7.46) schreibt man insgesamt

$$P_{\alpha,\theta}(q,p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a\mathbf{n}_a + b\mathbf{n}_b + \eta\mathbf{n}_\eta) e^{-2\pi i(aq+bp)} dadbd\eta. \quad (7.49)$$

An dieser Stelle wechselt man die Koordinaten

$$(a,b,\eta)^T \rightarrow (x,y,z)^T. \quad (7.50)$$

Dies ist leicht mit einer Drehung möglich, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{n}_a \ \mathbf{n}_b \ \mathbf{n}_\eta) \begin{pmatrix} a \\ b \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\cos(\theta) & \cos(\alpha)\sin(\theta) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\theta) & \sin(\alpha)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

wobei \mathbf{Q} eine orthogonale Matrix ist, so dass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{Q}^T\mathbf{r} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha)\cos(\theta) & -\sin(\alpha)\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\alpha)\sin(\theta) & \sin(\alpha)\sin(\theta) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Damit ist die Jacobi-Funktional-Determinante $J = 1$ und es gilt für das infinitesimale Volumenelement der Übergang

$$da \, db \, d\eta \rightarrow dx \, dy \, dz. \quad (7.53)$$

Für die drei Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\eta}$ gilt mit Gleichung (7.52), dass

$$a = -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha), \quad (7.54)$$

$$b = -x \cos(\alpha) \cos(\theta) - y \sin(\alpha) \cos(\theta) + z \sin(\theta) \quad (7.55)$$

und

$$\eta = x \cos(\alpha) \sin(\theta) + y \sin(\alpha) \sin(\theta) + z \cos(\theta). \quad (7.56)$$

Mit Hilfe der Einheitsvektoren (7.43) bis (7.45) kann man kurz schreiben

$$a = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_a, \quad b = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_b \quad \text{und} \quad \eta = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\eta \quad (7.57)$$

Damit lautet Gleichung (7.49) in der neuen Darstellung

$$P_{\alpha,\theta}(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi i \mathbf{r}^T \cdot (\mathbf{n}_a q + \mathbf{n}_b p)} dx dy dz. \quad (7.58)$$

Der Frequenzvektor

$$\mathbf{q} = q \mathbf{n}_a + p \mathbf{n}_b \quad (7.59)$$

hat im dreidimensionalen Frequenzraum mit den Punkten $\mathbf{v}=(u,v,w)^T$ offenbar dieselbe Orientierung wie

$$\xi = a\mathbf{n}_a + b\mathbf{n}_b, \tag{7.41}$$

im dreidimensionalen Ortsraum der Punkte $\mathbf{r} = (x,y,z)^T$.

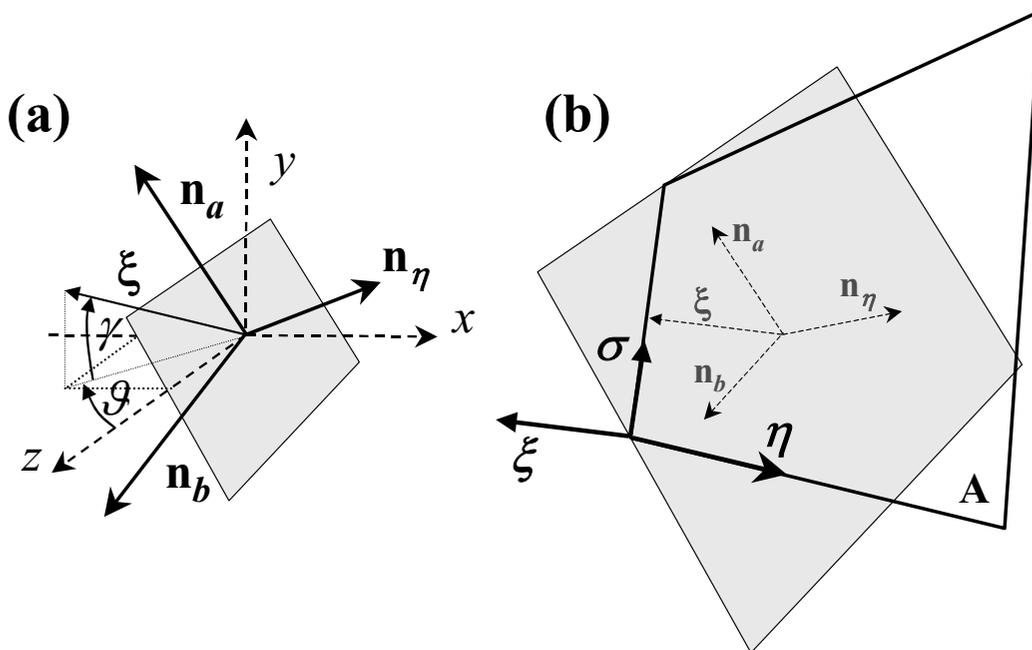


Abb. 7.21: (a) Der Abstandsvektor von Gleichung (7.41) kann mit der Radonkoordinaten ξ identifiziert werden, die in sphärischen Koordinaten durch den Abstand ξ und die Winkel γ und ϑ gegeben ist. In Abbildung (b) ist die dazugehörige Integrationsfläche **A** eingezeichnet. Die Fläche **A** steht senkrecht auf dem Detektor.

Abbildung 7.21a zeigt, wie der Abstandvektor ξ , definiert durch Gleichung (7.41), mit der Radonvariablen zu identifizieren ist. Dabei wird der Vektor ξ in sphärischen Koordinaten durch den Abstand ξ und die Winkel γ und ϑ gegenüber dem ruhenden (x,y,z) -Koordinatensystem genauso wie in Abschnitt 7.3.1 ausgedrückt. Abbildung 7.21b stellt die dazugehörige Integrationsfläche **A** des Fourier-Slice-Theorems dar. Diese Fläche steht senkrecht auf der Detektorfläche, weil der Abstandsvektor ξ in der Detektorebene liegt.

Die Gleichung (7.58) bedeutet nun, dass eine q - p -Ebene im dreidimensionalen Frequenzraum mit den Koordinaten u, v und w des zu rekonstruierenden Objektes $f(x,y,z)$ identisch mit der zweidimensionalen Fouriertransformierten $P_{\alpha,\theta}(q,p)$ der dazugehörigen (a,b) -Detektorebene ist. Die Orientierung der Detektorebene stimmt mit der Orientierung der Ebene im Frequenzraum überein, da die Fouriertransformation rotationsvariant ist. Es gilt also kurz

$$\mathcal{F}_2 \{ p_{\alpha,\theta}(a,b) \} = P_{\alpha,\theta}(q,p) = F(q\mathbf{n}_a + p\mathbf{n}_b) = \mathcal{F}_3 \{ f(\mathbf{r}) \} \Big|_{\mathbf{r}=\xi=a\mathbf{n}_a+b\mathbf{n}_b}. \tag{7.60}$$

Abbildung 7.22 zeigt das Central-Section-Theorem schematisch. Unten links ist zunächst die senkrechte Projektion eines Punktes auf eine in Bezug auf ein ruhendes (x,y,z) -Koordinatensystem beliebig angulierte Detektorebene dargestellt. Die Ebene aller Linienintegrale senkrecht zur Detektorebene ist die hybride Radontransformierte $p_{\alpha,\theta}(a,b)$. Eine zwei-

dimensionale Fouriertransformation liefert daraus $P_{\alpha,\theta}(q,p)$. Aufgrund der Rotationsvarianz der Fouriertransformation, ist diese Ebene in einem ruhenden (u,v,w) -Frequenzraum unter der Angulation der Messung einzusortieren. Hat man unter allen Angulationen die Projektionen gemessen, so ist in einem letzten Schritt das Objekt mit Hilfe der inversen dreidimensionalen Fouriertransformation

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v, w) e^{2\pi i(xu+yv+zw)} dudvdw \quad (7.61)$$

zu rekonstruieren.

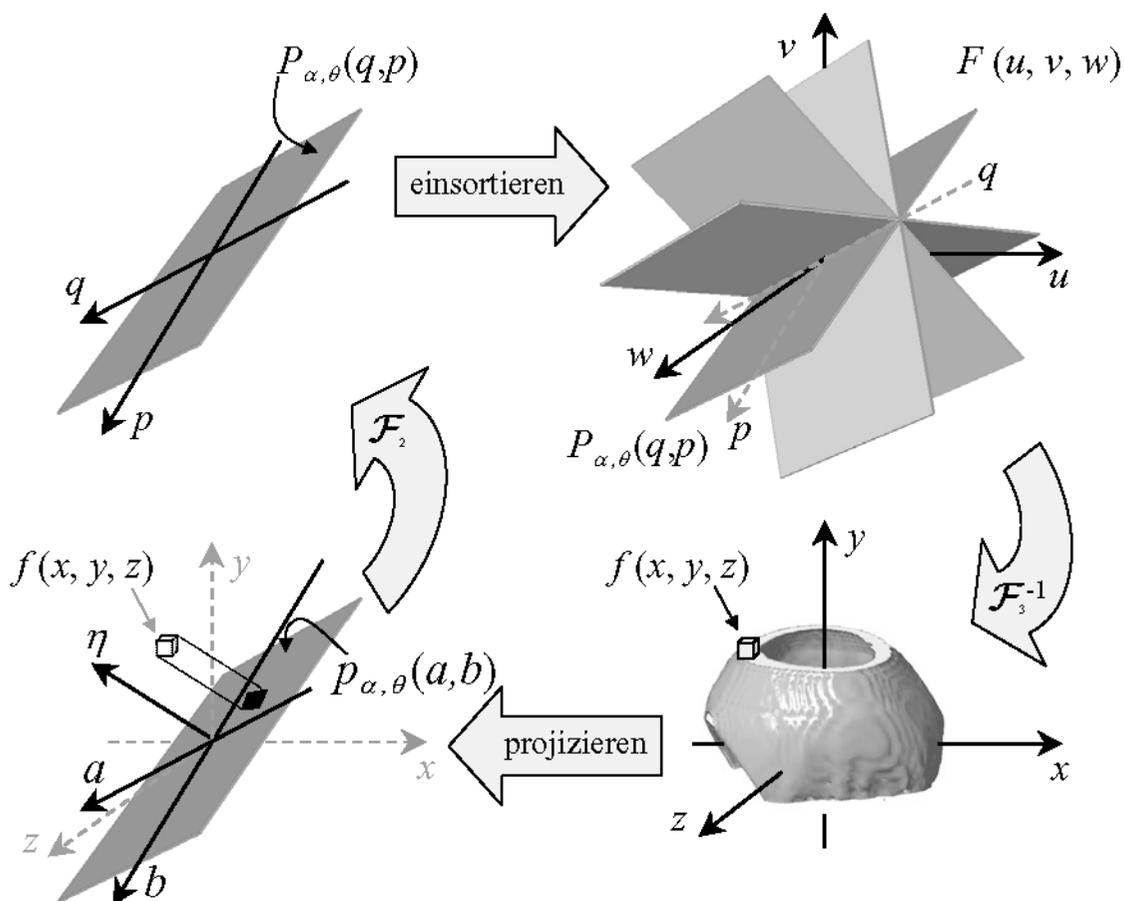


Abb. 7.22: Central-Section-Theorem: Sortiert man alle zweidimensionalen Fouriertransformierten (oben links) von dreidimensionalen Parallelprojektionen (unten links) richtig in den dreidimensionalen Fourierraum (oben rechts) ein, dann liefert eine dreidimensionale inverse Fouriertransformation das ursprüngliche Objekt (unten rechts).

7.3.5 Orlovs Vollständigkeitsbedingung

Die Frage, wie viele Parallelprojektionen gemessen werden müssen, damit genügend Informationen vorhanden sind, um das Objekt stabil zu rekonstruieren, ist von *S. S. Orlov* 1975 für

den Bereich der Kristallographie beantwortet worden [Orl75]. Nach Gleichung (7.46) ist eine Menge von Parallelprojektionen durch die hybride Radontransformierte

$$p_{\alpha,\theta}(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + \eta \mathbf{n}_\eta) d\eta \quad (7.62)$$

zu beschreiben, wobei $\mathbf{n}_\eta \in \Omega \subset S$ und Ω dabei die Menge der Richtungen darstellt, für die die Parallelprojektionen gemessen wurden. S ist wieder die Einheitssphäre aller Richtungen und ξ liegt in der durch \mathbf{n}_η beschriebenen Projektionsfläche, es gilt dabei $(\xi^T \cdot \mathbf{n}_\eta) = 0$. Orlovs Vollständigkeitsbedingung besagt nun, dass $F(\mathbf{v})$ mit $\mathbf{v} = (u,v,w)^T \in \mathbb{R}^3$ berechnet werden kann, wenn es wenigstens eine Projektion für $\mathbf{n}_\eta \in \Omega$ nach Gleichung (7.62) gibt, für die gilt, dass $(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{n}_\eta) = 0$ ist. Abbildung 7.23 zeigt eine Messsituation, in der der Vektor nicht rekonstruiert werden kann.

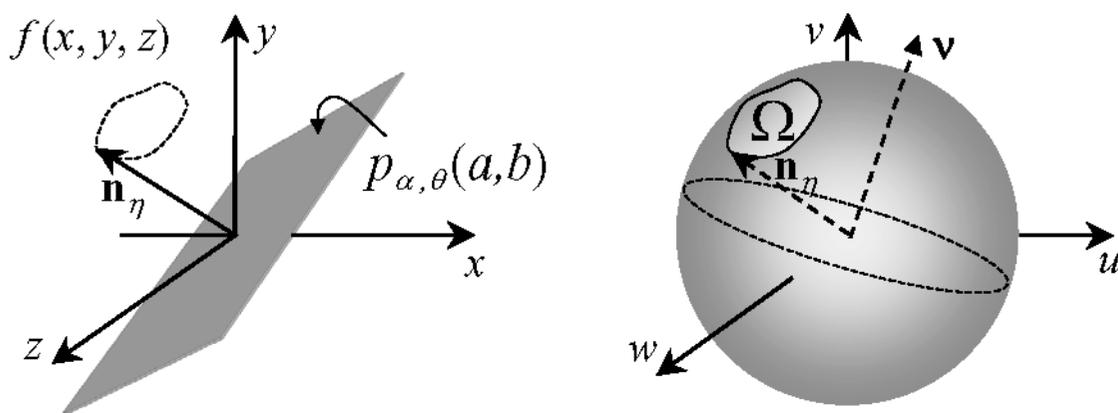


Abb. 7.23: Orlovs Vollständigkeitsbedingung: Für die gemessenen Parallelprojektionen aus der Menge der Richtungen Ω (links) muss gelten, dass wenigstens eine Richtung senkrecht zum Frequenzvektor \mathbf{v} liegen muss. Der gesamte Frequenzraum ist genau dann zu rekonstruieren, wenn kein Großkreis auf der Richtungseinheitssphäre gefunden werden kann, der das Gebiet der gemessenen Projektionen Ω nicht schneidet. Im Bild rechts ist ein Großkreis ohne Berührung mit Ω eingezeichnet. Der einzelne Frequenzpunkt \mathbf{v} kann aus dieser Messung nicht rekonstruiert werden.

Insgesamt bedeutet diese Bedingung, dass das Objekt $f(\mathbf{r})$ genau dann stabil rekonstruiert werden kann, wenn die Menge Ω der gemessenen Richtungen der Parallelprojektionen von jedem Großkreis auf der Einheitssphäre S geschnitten wird. Für die Abbildung 7.24, in der das Central-Section-Theorem dargestellt wird, kann nun beantwortet werden, ob die kontinuierliche Drehung der Projektionsrichtung \mathbf{n}_η um den Vektor \mathbf{n}_a eine vollständige Messung im Orlovschen Sinne darstellt.

Offenbar ist das der Fall, denn der Vektor der Projektionsrichtung \mathbf{n}_η beschreibt bei dieser Drehung selbst einen Großkreis auf der Richtungseinheitssphäre. Es kann damit kein anderer Großkreis auf S gefunden werden, der Ω nicht schneidet.

Aufgrund dieser Bedingung ist klar, warum das Verfahren der Tomosynthese keine stabile Rekonstruktion des gesamten Objektes liefern kann.

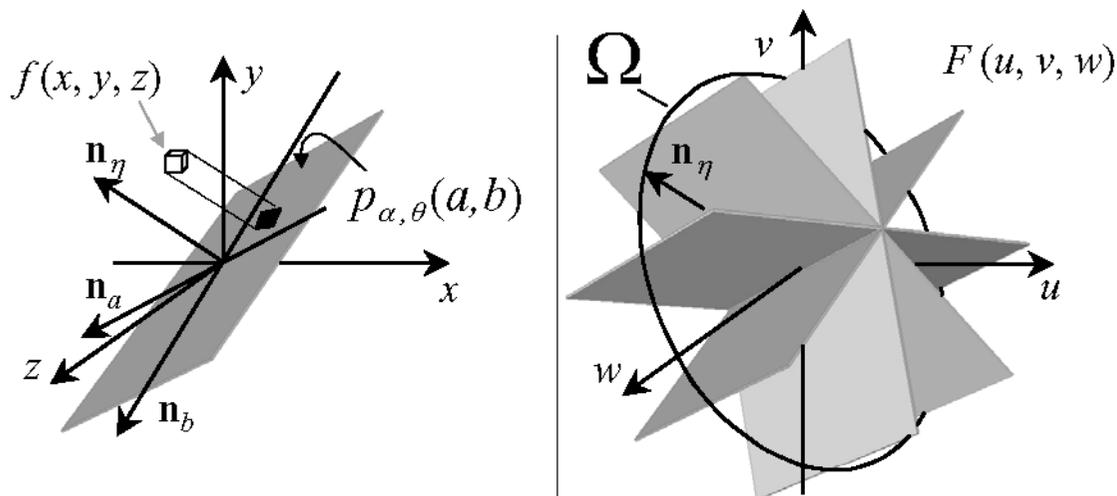


Abb. 7.24: Orlovs Vollständigkeitsbedingung ist im Fall der kontinuierlichen 2π -Drehung der Detektorfläche erfüllt, denn die Menge aller Richtungen Ω , aus denen Parallelprojektionen gemessen wurden, bildet einen Großkreis auf der Richtungseinheitssphäre S , so dass sich jeder andere Großkreis auf S mit Ω schneidet.

7.4 Exakte Rekonstruktionsverfahren in Kegelstrahlgeometrie

Der Entwicklungsschritt vom Parallelstrahl- zum Fächerstrahltomographen, der in Kapitel 6 dargestellt wurde, brachte zwei wesentliche Vorteile mit sich. Der eine Vorteil liegt in der höheren Akquisitionsgeschwindigkeit, denn während der Umdrehung des Abtastsystems um den Patienten, brauchte nun nicht mehr für die Parallelverschiebung des Detektorsystems gestoppt werden. Der andere Vorteil war die bessere Ausnutzung der Röhrenleistung. Die Ausblendung eines dünnen Nadelstrahls ist eine enorme Verschwendung der erzeugten Röntgenstrahlung. Da die beschränkte Wärmekapazität der Röntgenröhren auch heute noch ein bedeutendes technisches Problem ist, konnte mit der Nutzung des Fächerstrahls sehr viel effektiver gemessen werden.

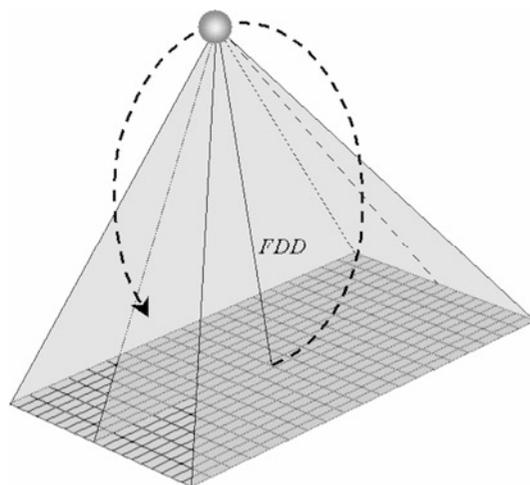


Abb. 7.25: Kegelstrahlbeleuchtung eines planaren Flächendetektors. Solche Anordnungen findet man häufig in technischen Anwendungen wie der Materialuntersuchung in Micro-CTs. In der medizinischen Anwendung kommen häufiger die Flächendetektoren in zylindrischer Anordnung zum Einsatz. Allerdings gibt es auch erste klinische Prototypen, die mit flächendetektoren ausgestattet sind.

Denkt man den letzten Gedanken konsequent weiter, so liegt es nahe, nicht nur einen kollimierten Fächer, sondern den ganzen Kegelstrahl der Röntgenquelle zu nutzen. Hierzu war man lange Zeit wegen des auf der Gegenseite fehlenden Detektorsystems nicht in der Lage⁴⁴. In letzter Zeit sind aber flächige Detektorsysteme für Computertomographen entwickelt worden, so dass heute alle Hersteller von Computertomographen so genannte Multiarraysysteme anbieten.

Abbildung 7.25 zeigt schematisch die Kegelstrahlgeometrie eines Abbildungssystems mit einem planaren Flächendetektor. Die planare Detektorgeometrie war zunächst den technischen Anwendungen in Micro-CTs vorbehalten, da die erforderlichen CCD-Chips eben in dieser Geometrie verfügbar waren. Abbildung 7.26 zeigt einen Prototypen eines so genannten Volumen-CT, der bei General Electric Medical Systems entwickelt wird.

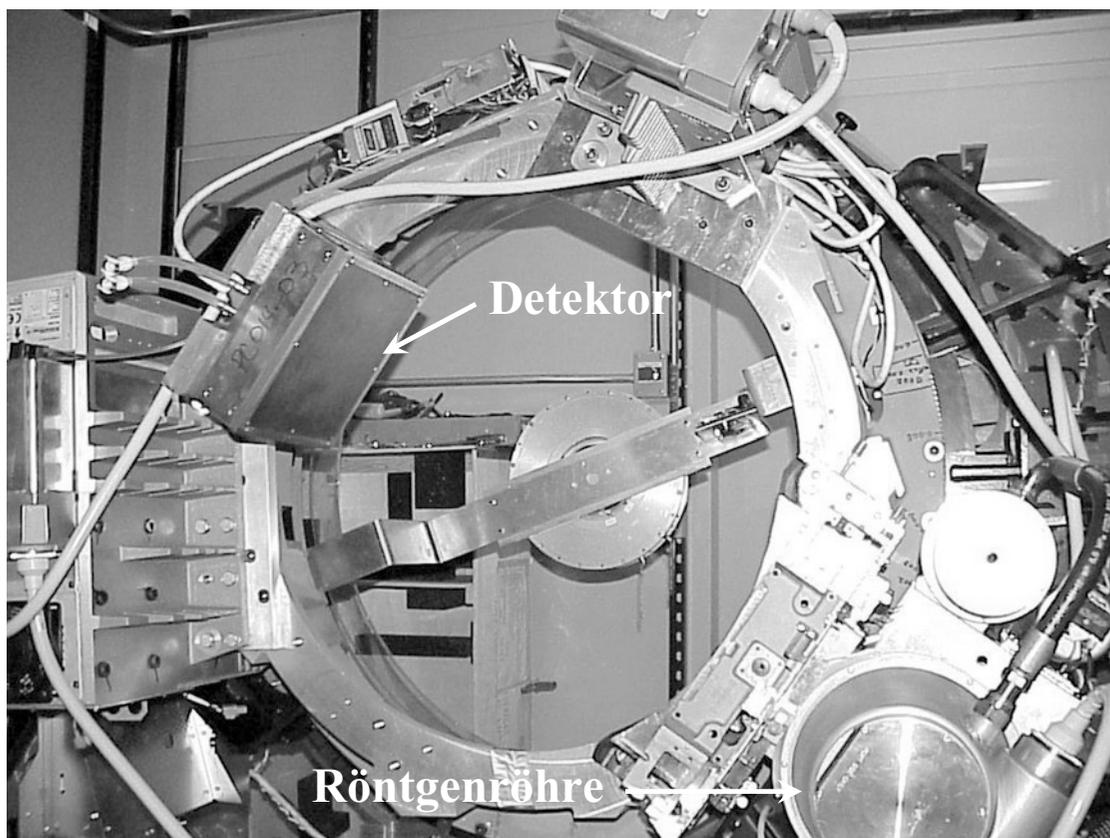


Abb. 7.26: Prototyp eines so genannten Volumen-CTs in den GE-Forschungslaboratorien. Ein Flächendetektor von etwa 41 cm x 41 cm Fläche mit 2048 x 2048 Pixeln ist gegenüber der Röntgenröhre auf der Abtasteinheit angebracht. Zur Detektortechnologie lese man in Abschnitt 2.3.3 nach.

Mit diesem Tomographentypen erreicht man räumliche Auflösungen, die bisher unerreicht sind und eher an Micro-CTs erinnern. Allerdings erkaufte man sich diese Steigerung in der Bildqualität mit einer aufwendigen Rekonstruktionsmathematik, die in dem folgenden Kapitel

⁴⁴ Ein bedeutendes technisches Problem hierbei ist, dass die riesigen Datenmengen sehr schnell von dem sich drehenden Abtastsystem nach außen zur weiteren Verarbeitung übertragen werden müssen. Hier ist eine Schnittstelle mit einer großen Bandbreite erforderlich.

beschrieben wird. Abbildung 7.27 zeigt Kegelstrahlprojektionen über ein Winkelintervall von 210° hinweg. Die Graphik stellt gewissermaßen die dreidimensionale Realisierung eines Sinogramms dar. Die gezeigten Daten stammen von einer Wespe, die in einem Micro-CT vermessen wurde. Anders als bei der zweidimensionalen Computertomographie, stellt das dreidimensionale Sinogramm keinen Radonraum dar. Diese Problematik wird im nächsten Abschnitt näher beleuchtet.

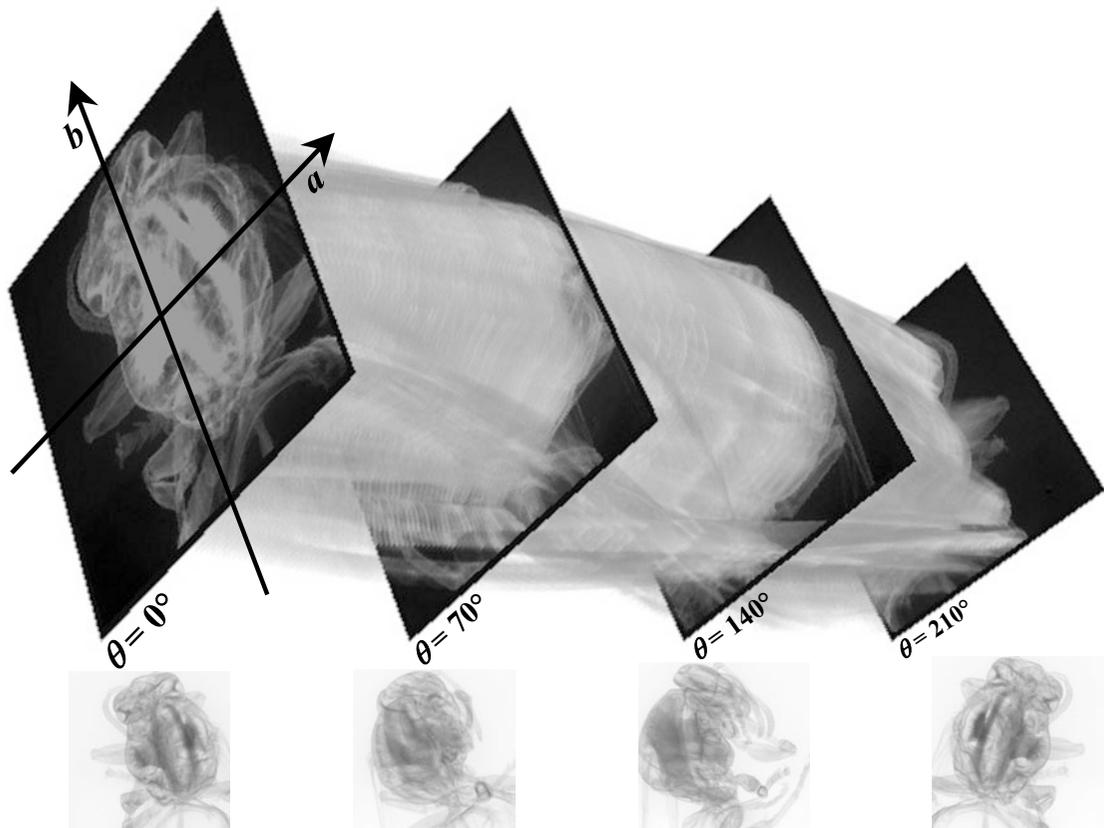


Abb. 7.27: Dreidimensionales Sinogramm eines Kegelstrahl-Micro-Computertomographen. Über ein Winkelintervall von $\theta = [0^\circ, 210^\circ]$ hinweg sind hier die rohen Projektionsdaten einer Wespe dargestellt. Die Detektorkoordinaten sind mit (a, b) bezeichnet. Unterhalb des Sinogramms sieht man in 70° -Schritten einzelne Projektionen.

7.4.1 Schlüsselproblematik der Kegelstrahlgeometrie

Bei der dreidimensionalen Rekonstruktion muss, so wie in Abbildung 7.18 gezeigt, über Flächen integriert werden, um die notwendigen Daten $p_{\gamma, \vartheta}(\xi)$ im Radonraum (ξ, γ, ϑ) zu erhalten. Hat man es mit Parallelstrahlgeometrie zu tun, dann lässt sich die Flächenintegration in zwei Linienintegrale aufteilen, nämlich zunächst in die Integration entlang der Röntgenstrahlen

$$\mathbf{X}^p \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta, \sigma, \xi) d\eta, \quad (7.63)$$

diese Gleichung wird Röntgentransformation⁴⁵ genannt, und dann die Integration entlang des Detektors σ

$$p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta, \sigma, \xi) d\eta d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^p \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi) \} d\sigma. \quad (7.64)$$

Gleichung (7.64) kann man in Abbildung 7.28a sofort nachvollziehen.

Leider ist es nicht möglich, durch diese einfache Aufteilung des Flächenintegrals in zwei Linienintegrale, die erforderlichen Radonwerte für die in der Praxis nahezu immer auftretenden divergenten Röntgenstrahlenbündel zu erhalten.

Integriert man für den in Abbildung 7.28b dargestellten Fall zunächst in Richtung der Röntgenstrahlen, das heißt, führt man auch hier zunächst die Röntgentransformation $\mathbf{X}\{.\}$ durch, so müssen Polarkoordinaten (r, φ) eingeführt werden. Damit erhält man auf dem Detektor die Projektionswerte

$$\mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\varphi, \xi) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \varphi, \xi) dr. \quad (7.65)$$

Wenn diese Projektionswerte entlang des Detektors integriert werden, führt man die zweite Integration

$$\tilde{p}_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\varphi, \xi) \} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \varphi, \xi) dr d\varphi. \quad (7.66)$$

aus. Um das Ergebnis der Parallelstrahlgeometrie dem Ergebnis der Kegelstrahlgeometrie gegenüberzustellen, wird Gleichung (7.64) ebenfalls in Polarkoordinaten überführt. Hierbei erhält man

$$p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\eta, \sigma, \xi) d\eta d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \varphi, \xi) r dr d\varphi, \quad (7.67)$$

wobei die Jacobi-Funktional-Determinante die Variable r im neuen Flächenelement $r dr d\varphi$ liefert.

⁴⁵ Die Kennzeichnung von $\mathbf{X}\{.\}$ mit \mathbf{p} bzw. \mathbf{c} bezeichnet die Röntgenparallel- bzw. Kegelstrahl-(Cone-Beam)-transformation.

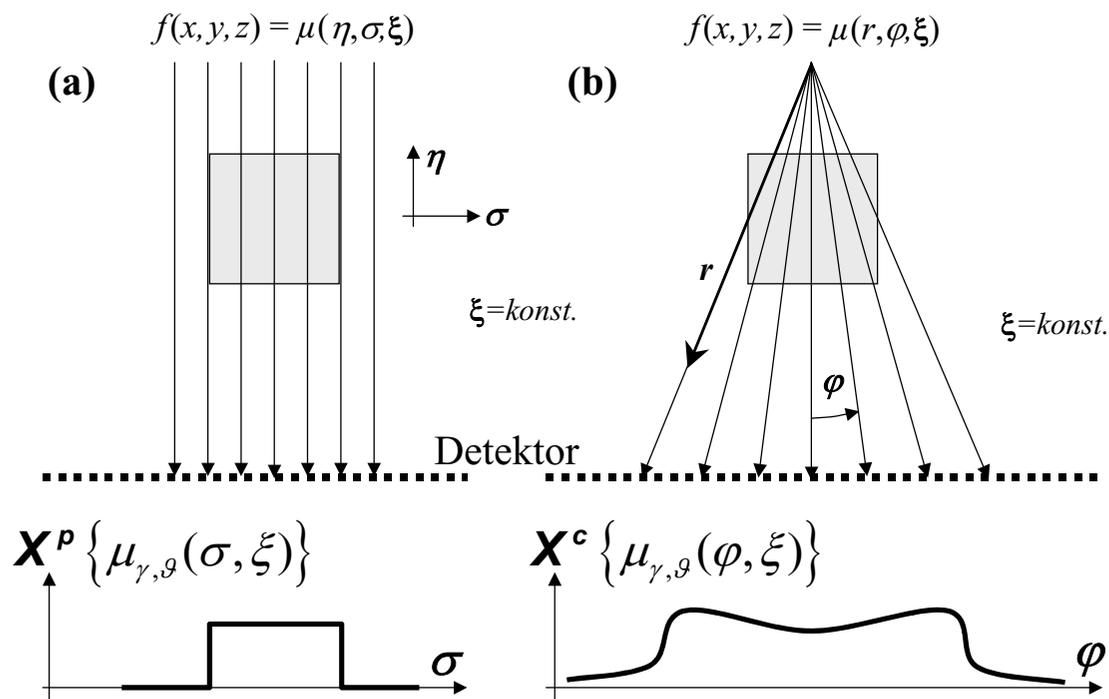


Abb. 7.28: Unterschied zwischen der parallelen und der Kegelstrahlgeometrie. Die parallelen Linienintegrale (a) können einfach in ein Flächenintegral umgewandelt werden. Bei der Kegelstrahlgeometrie (b) ist dies nicht so einfach möglich.

Offenbar gilt damit, dass die Röntgentransformationen

$$\mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \varphi}(\varphi, \xi) \} \neq \mathbf{X}^p \{ \mu_{\gamma, \sigma}(\sigma, \xi) \} \quad (7.68)$$

der beiden Geometrien nicht übereinstimmen, so dass in der Kegelstrahlgeometrie die Daten $\tilde{p}_{\gamma, \varphi}(\xi)$ nicht die zur Rekonstruktion benötigten Radonwerte darstellen, also

$$\tilde{p}_{\gamma, \varphi}(\xi) \neq p_{\gamma, \sigma}(\xi). \quad (7.69)$$

7.4.2 Methode von Grangeat

Pierre Grangeat [Gra90] hat eine Möglichkeit gefunden, eine Ableitung der Radontransformation aus der Röntgentransformation zu berechnen⁴⁶. Eine Variation des Ergebnisses soll hier vorgestellt werden. Dabei wird in wesentlichen Punkten der Darstellung aus *C. Jacobson* [Jac96] gefolgt. Dazu beginnt man mit der Ableitung der Radontransformation in Richtung von ξ , also dem Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \sigma}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \varphi, \xi) r dr d\varphi, \quad (7.70)$$

⁴⁶ Eine Literaturstudie zur dreidimensionalen Kegelstrahlrekonstruktion findet man in [Gra97].

bei dem die Reihenfolge der Differenziation und der Integration vertauscht werden darf, da nicht über die radiale Radonkomponente ξ integriert wird, so dass man

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu(r, \varphi, \xi) r dr d\varphi \quad (7.71)$$

schreiben kann. Um die Bedeutung der Ableitung zu verstehen, muss man sich die geometrischen Verhältnisse in der Kegelstrahlprojektion vor Augen führen. Abbildung 7.29 zeigt die dazugehörige dreidimensionale Geometrie. Dabei wird nicht auf eine bestimmte Quellentrajektorie Bezug genommen. Es geht zunächst nur darum, für eine beliebige Quellen-Detektor-Situation aus den Detektordaten, also der Kegelstrahlröntgentransformation, Radondaten zu berechnen.

Mit \mathbf{O} ist der Detektorursprung und mit \mathbf{S} ist die Röntgenquellenposition bezeichnet. Dabei betrachtet man der geometrischen Einfachheit halber einen virtuellen Detektor im Isozentrum des Messfeldes. Die Ergebnisse für andere Detektorpositionen an realen Orten können unter Verwendung des Strahlensatzes hergeleitet werden.

Die Radonkugel des Punktes \mathbf{S} hat damit den Durchmesser $FCD = \|\mathbf{S}-\mathbf{O}\|$ und die Detektorfläche ist die Tangentialfläche der Radonkugel am Punkt \mathbf{O} , das heißt, der Vektor $\mathbf{S}-\mathbf{O}$ zeigt in Richtung der Detektornormalen.

Wie in Abschnitt 7.3.1 beschrieben, ist durch

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \xi \cdot \mathbf{n}_\xi = \begin{pmatrix} \xi \cos(\gamma) \sin(\vartheta) \\ \xi \sin(\gamma) \sin(\vartheta) \\ \xi \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

der zur Rekonstruktion benötigte Radonwert $p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \mathcal{R}_3\{f(x, y, z)\}$ eindeutig festgelegt, denn der Röntgenfächer, also die in Abschnitt 7.3.1 geforderte Integrationsfläche durch den zu rekonstruierenden Punkt⁴⁷ \mathbf{r} , ist durch den Vektor ξ eindeutig festgelegt. ξ steht senkrecht auf diesem Röntgenfächer, das in Abbildung 7.29 grau dargestellt ist und hat seinen Ursprung in \mathbf{O} .

Der Aufpunkt von ξ auf dem Röntgenfächer und die Punkte \mathbf{O} und \mathbf{S} bilden nach dem Satz von Thales ein rechtwinkliges Dreieck auf einem Großkreis der Radonkugel von \mathbf{S} . Der Fächerzentralstrahl ist um den Winkel κ aus der Detektorsenkrechten herausgekippt. Der Vektor \mathbf{r} und die Detektornormale schließen den Winkel β ein.

⁴⁷ In dieser Betrachtung hat der Vektor \mathbf{r} seinen Aufpunkt in der Röntgenquelle.

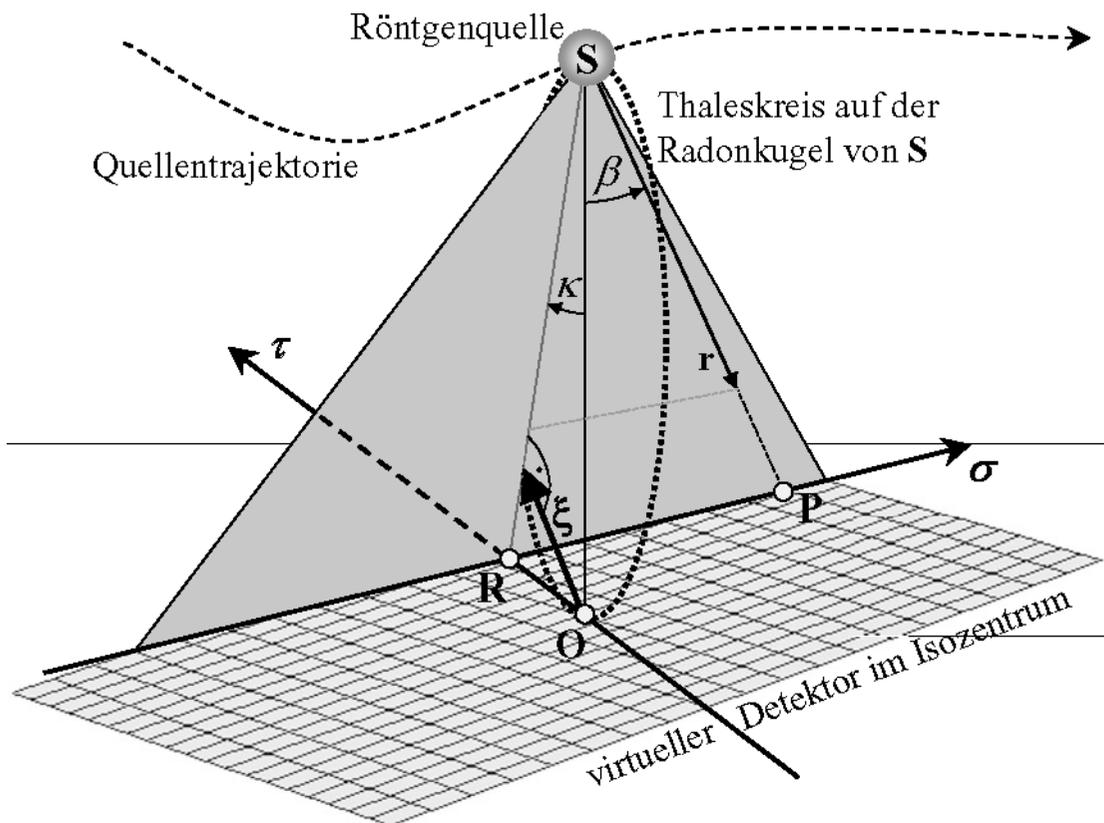


Abb. 7.29: Für eine beliebige Trajektorie der Röntgenquelle S soll die Ableitung der Röntgentransformation auf dem Detektor berechnet werden. Dazu legt man einen virtuellen Detektor in das Isozentrum O des Messfeldes. Ein beliebiger Fächer des Röntgenkegelstrahls ist grau eingezeichnet.

Der Fächerzentralstrahl, der senkrecht zu ξ verläuft, trifft den Detektor im Punkt R . Der gesamte Fächerstrahl schneidet die Detektorfläche entlang der σ -Achse. Daher liegt der Schnittpunkt P des Strahls durch den zu rekonstruierenden Punkt r auf der σ -Achse. Die Verbindungslinie zwischen dem Detektorursprung O und dem Punkt R definiert eine radiale Detektor- τ -Achse durch O , zu der die Schnittachse σ immer senkrecht verläuft. In Abbildung 7.30 ist dies noch einmal in einer etwas anderen Perspektive als in Abbildung 7.29 skizziert.

Die in Gleichung (7.70) vorgeschlagene Ableitung $\partial\partial\xi$ der Radontransformation findet sich in der Projektion auf den Detektor als radiale Ableitung wieder. Da die Detektordaten die einzige physikalisch gemessene Grundlage der Rekonstruktion sind, muss man sich also zunächst um die Konsequenzen der Variation von ξ in Bezug auf die radiale Komponente ξ aus Gleichung (7.70) auf dem Detektor kümmern. Die infinitesimale Änderung des Vektors ξ um $d\xi$ hat auf dem Detektor eine Parallelverschiebung der σ -Achse um die Strecke $d\tau$ zur Folge, deren genaue Größe hier berechnet werden muss⁴⁸. Die Abbildungen 7.31a/b illustrieren die geometrischen Verhältnisse in der Röntgenfächerebene (a) bzw. senkrecht dazu, in der von τ und $S-O$ aufgespannten Ebene (b).

⁴⁸ Da der Vektor von ξ definitionsgemäß immer auf der Radonkugel endet, führt eine Veränderung der Länge bei konstanten Winkeln γ und ϑ dazu, dass der Vektor auf Radondaten anderer Detektorpositionen im Raum zeigt. Dies muss beim Entwurf einer algorithmischen Umsetzung beachtet werden.

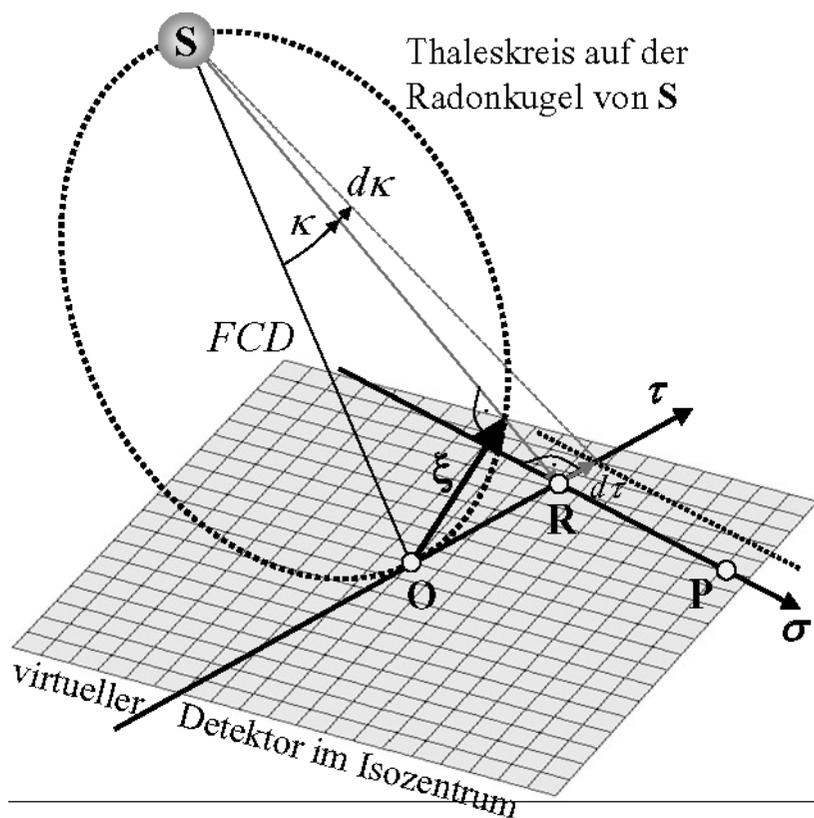


Abb. 7.30: Auf dem virtuellen Detektor im Isozentrum O des Messfeldes bildet sich ein planarer Röntgenfächer aus dem Kegelstrahl als lineare Schnittlinie entlang der σ -Achse ab. Die Projektion des Radonvektors ξ auf den Detektor definiert eine radiale τ -Achse durch O , die senkrecht auf der σ -Achse steht.

Der zu rekonstruierende Punkt \mathbf{r} besitzt für einen vorgegebenen, festen Radonvektor ξ im dazugehörigen Röntgenfächer die Polarkoordinaten (r, φ) . So wie in Abbildung 7.31a abzulesen, ist die Projektion des Radius \mathbf{r} auf den Fächerzentralstrahl damit $r \cos(\varphi)$. Diese Projektion findet man in der dazu senkrechten Abbildung 7.31b wieder. Die Variation $d\xi$ von ξ in Richtung der radialen Radonkoordinate ξ , mit der oben gestartet wurde, liefert einen infinitesimalen Vektor, den man parallel verschieben kann und der in dem rechtwinkligen Dreieck der Katheten $d\xi$ und $r \cos(\varphi)$ die infinitesimale Änderung des Fächerkippwinkels κ um $d\kappa$ definiert, das bedeutet, je kürzer der Vektor \mathbf{r} ist, desto größer ist die mit $d\xi$ verbundene Winkeländerung $d\kappa$. Damit ist die infinitesimale Parallelverschiebung der σ -Achse um $d\tau$ bestimmt.

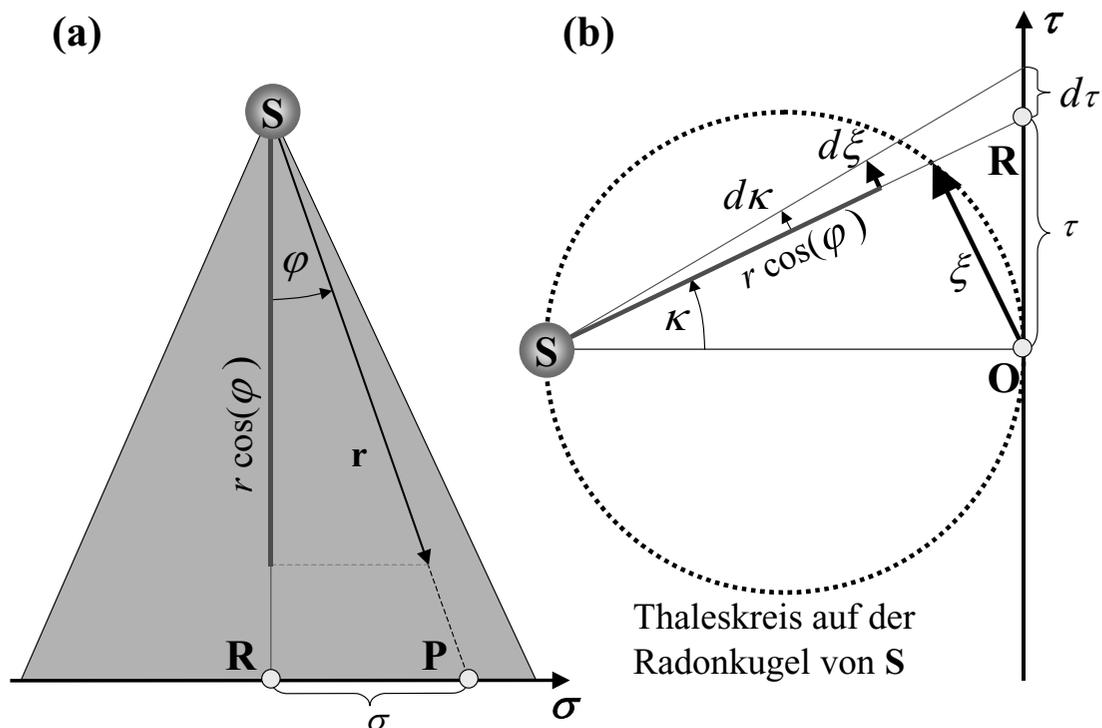


Abb. 7.31: Zur Berechnung der Ableitung der Radontransformation aus den Detektordaten, also aus der Röntgentransformation, ist die Geometrie innerhalb eines beliebigen Fächers (a) des Röntgenkegelstrahls sowie die Geometrie in der zu diesem Fächer senkrechten Fläche (b) dargestellt.

Aus Abbildung 7.31b ist dann weiter abzulesen, dass

$$\sin(d\kappa) = \tan(d\kappa) = \frac{d\xi}{r \cos(\varphi)} \quad (7.72)$$

bzw. weil $d\kappa$ infinitesimal klein ist, dass

$$d\kappa = \frac{d\xi}{r \cos(\varphi)}. \quad (7.73)$$

In Abbildung 7.31b kann man sehen, dass κ abhängig von ξ ist. Daher hat man bei Ableitungen von Funktionen $v(\kappa(\xi))$ nach ξ die Kettenregel

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \quad (7.74)$$

zu beachten. Die Ableitung von κ nach ξ kann man dabei durch Gleichung (7.73) ersetzen, so dass

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \kappa} \frac{1}{r \cos(\varphi)}. \quad (7.75)$$

Ist die Funktion v definiert durch die mit dem Abstand von der Röntgenquelle gewichteten Schwächungswerte

$$v = \mu(r, \varphi, \xi) \cdot r, \quad (7.76)$$

dann erhält man durch das Einsetzen der Gleichungen (7.75) und (7.76) in Gleichung (7.71) den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \kappa} \frac{1}{\cos(\varphi)} \mu(r, \varphi, \xi) dr d\varphi, \quad (7.77)$$

in dem die Reihenfolge von Integration und Differentiation wieder vertauscht werden darf, so dass

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \kappa} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(\varphi)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \varphi, \xi) dr \right] d\varphi \quad (7.78)$$

folgt. Die Integration entlang der Röntgenstrahlen liefert in der eckigen Klammer von Gleichung (7.78) die Röntgentransformation aus Gleichung (7.65), das heißt insgesamt kann man den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \kappa} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(\varphi)} \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\varphi, \xi) \} d\varphi \quad (7.79)$$

finden, der das Hauptergebnis von *Pierre Grangeat* [Gra90] darstellt. Gleichung (7.79) liefert nämlich eine fundamentale Beziehung zwischen der ersten Ableitung der Radontransformation und der Röntgentransformation in Kegelstrahlgeometrie. Der Schlüsselschritt dabei ist die Substitution (7.74), denn dadurch wird die rechte Seite von Gleichung (7.77) von der expliziten r -Abhängigkeit befreit. Nur dadurch lässt sich die Integration über r als Röntgentransformation darstellen, die ja tatsächlich auch gemessen wurde.

Nun ist die Ableitung nach dem Verkippungswinkel κ etwas unhandlich, da man es in der Praxis eher mit den in Abbildung 7.32 eingezeichneten Hauptachsen \mathbf{a} und \mathbf{b} des Detektors zu tun hat. Aus Abbildung 7.31b ist abzulesen, dass

$$\tau = \|\mathbf{S} - \mathbf{O}\| \tan(\kappa) = FCD \tan(\kappa). \quad (7.80)$$

Die Ableitung nach dem Verkippungswinkel liefert

$$\frac{d\tau}{d\kappa} = \frac{FCD}{\cos^2(\kappa)}. \quad (7.81)$$

Das Einsetzen dieses Zusammenhangs in Gleichung (7.79) liefert

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \frac{FCD}{\cos^2(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(\varphi)} \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\varphi, \tau(\xi)) \} d\varphi \quad (7.82)$$

Für die zweite Detektorkoordinate liest man in Abbildung 7.31a ab, dass

$$\sigma = \|\mathbf{S} - \mathbf{R}\| \tan(\varphi). \quad (7.83)$$

Die Ableitung nach dem Fächerwinkel liefert

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\|\mathbf{S} - \mathbf{R}\|}{\cos^2(\varphi)}. \quad (7.84)$$

Außerdem ist in Abbildung 7.31a ablesbar, dass

$$\cos(\varphi) = \frac{\|\mathbf{S} - \mathbf{R}\|}{\|\mathbf{S} - \mathbf{P}\|} \quad (7.85)$$

und damit

$$d\varphi = \frac{\cos(\varphi)}{\|\mathbf{S} - \mathbf{P}\|} d\sigma \quad (7.86)$$

in Gleichung (7.79) eingesetzt werden kann, so dass insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{FCD}{\|\mathbf{S} - \mathbf{P}\|} \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \tau(\xi)) \} d\sigma \quad (7.87)$$

In Abbildung 7.29 ist die Bedeutung der Gewichtung erkennbar. Während der Integration auf der σ -Achse des Detektors muss jeder Detektorpunkt mit seinem inversen Abstand von der Röntgenquelle vorgewichtet werden. Diese Vorgewichtung kann man über den Winkel zur Detektornormalen ausdrücken, so dass

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta) \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \tau(\xi)) \} d\sigma \quad (7.88)$$

gilt. Die Gewichtung der Detektordaten kann tatsächlich für alle Detektorwerte vor der Integration durchgeführt werden. Diese Gleichung macht natürlich nur dann Sinn, wenn die Flächen für die Radonkoordinaten ξ die Röntgenquelle enthalten, andernfalls sind die Abstände $\|\mathbf{S} - \mathbf{P}\|$ nicht definiert. Das ist die so genannte *Tuy-Smith*-Bedingung, auf die in Abschnitt 7.5.1 noch im Detail eingegangen wird.

7.4.3 Berechnung der ersten Ableitungen auf dem Detektor

Gleichung (7.88) besagt, dass entlang Linien in Richtung der σ -Koordinate integriert werden soll und zwar die in Richtung der τ -Koordinate differenzierten Detektorwerte. Dazu soll dem Vorschlag von *Grangeat* gefolgt werden, der damit beginnt, dass die Reihenfolge von Integration und Differentiation in Gleichung (7.88) getauscht werden darf, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, g}(\xi) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} d\sigma, \quad (7.89)$$

wobei

$$\mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} = \cos(\beta) \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} \quad (7.90)$$

die gewichtete Röntgenprojektion bezeichnet. Abbildung 7.32 zeigt, dass das (σ, τ) -Koordinatensystem um den Winkel δ gegenüber dem (a, b) -Hauptachsensystem des Detektors gedreht ist.

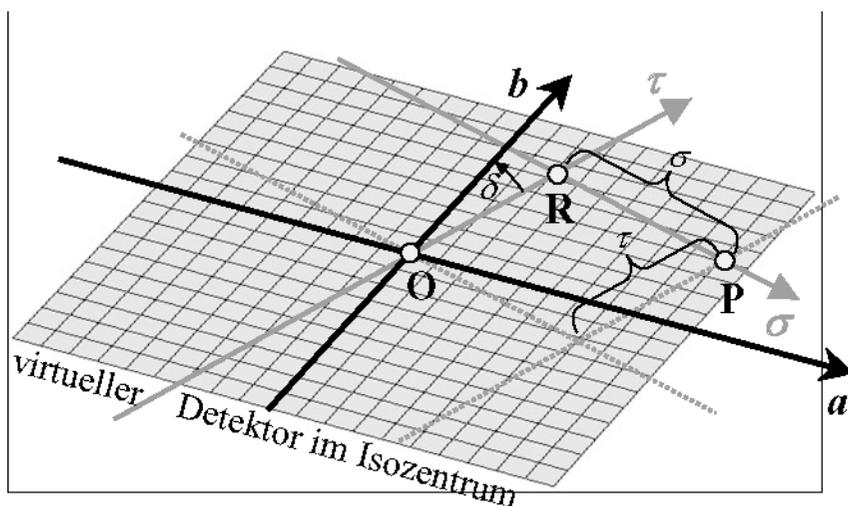


Abb. 7.32: Das (σ, τ) -System ist um den Winkel δ gegenüber dem Koordinatensystem der Detektorhauptachsen a und b gedreht.

Die radiale Ableitung, also die partielle Ableitung der gewichteten Detektorwerte in Richtung der τ -Koordinate kann in Komponentenschreibweise in zwei Terme zerlegt werden, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} = G_a(\sigma, \tau) \sin(\delta) + G_b(\sigma, \tau) \cos(\delta), \quad (7.91)$$

wobei die partiellen Ableitungen in die Richtung der Detektorhauptachsen

$$G_a(\sigma, \tau) = \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} \quad \text{und} \quad G_b(\sigma, \tau) = \frac{\partial}{\partial b} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} \quad (7.92)$$

lauten.

7.4.4 Rekonstruktion mit der differenzierten Radontransformation

Gleichung (7.88) stellt für sich genommen einen interessanten Zusammenhang zwischen der Integration entlang radialer Ableitungen auf dem Detektor und der ersten Ableitung der Radontransformation nach der radialen Radonkoordinate her. Jetzt muss aber noch erklärt werden, welchen Nutzen man daraus für die Objektrekonstruktion ziehen kann. Dazu ist die geometrische Situation in Abbildung 7.33 noch einmal aufbereitet.

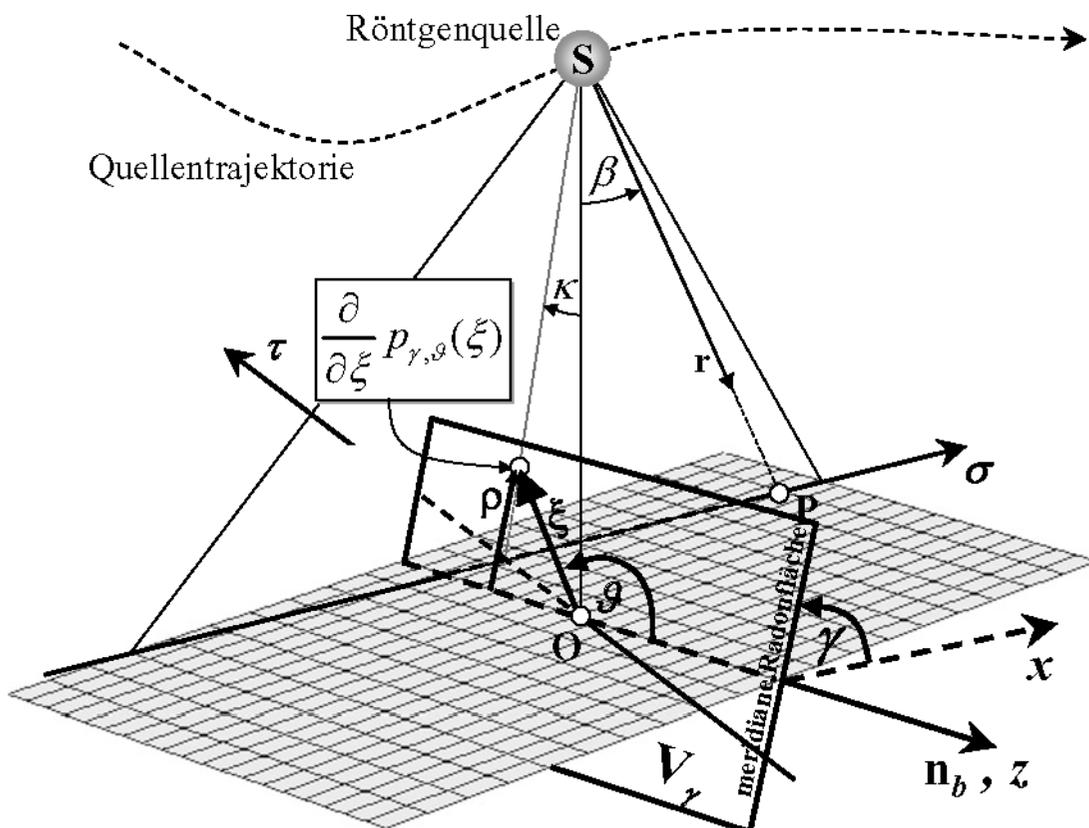


Abb. 7.33: Mit der Kegelstrahlprojektion hat man keinen direkten Zugriff auf die Radontransformierte, die zur Rekonstruktion benötigt wird. Mit Gleichung (7.89) besitzt man aber einen radial abgeleiteten Wert der Radontransformierten auf dem dazugehörigen Punkt auf der Radonkugel. Diese Werte trägt man auf einer meridianen Fläche V_γ ein, die den Radialvektor den Radonpunktes enthält.

Der zentrale Gedanke von *Grangeat* ist, dass man mit Gleichung (7.89) einen Wert auf der Radonkugel der Parallelprojektion und zwar an der Stelle $\xi = (\xi, \gamma, \theta)$ besitzt. Allerdings hat man keinen direkten Zugang zu den Radonwerten selbst, sondern nur zu deren ersten radialen Ableitung. Diese Werte sammelt man auf einer meridianen Fläche V_γ , deren Koordinaten in polarer Schreibweise gerade den beiden Radonkoordinaten (ξ, θ) entsprechen.

Alle Werte $\partial p_{\gamma, \theta}(\xi) / \partial \xi$ werden also auf unterschiedlichen, jeweils um den Winkel γ geneigten, vertikalen, meridianen Flächen V_γ gesammelt. Diese Werte muss man offenbar ein weiteres mal radial ableiten und dann azimuthal und polar zurückprojizieren, so wie es durch Gleichung (7.38) vorgeschrieben ist.

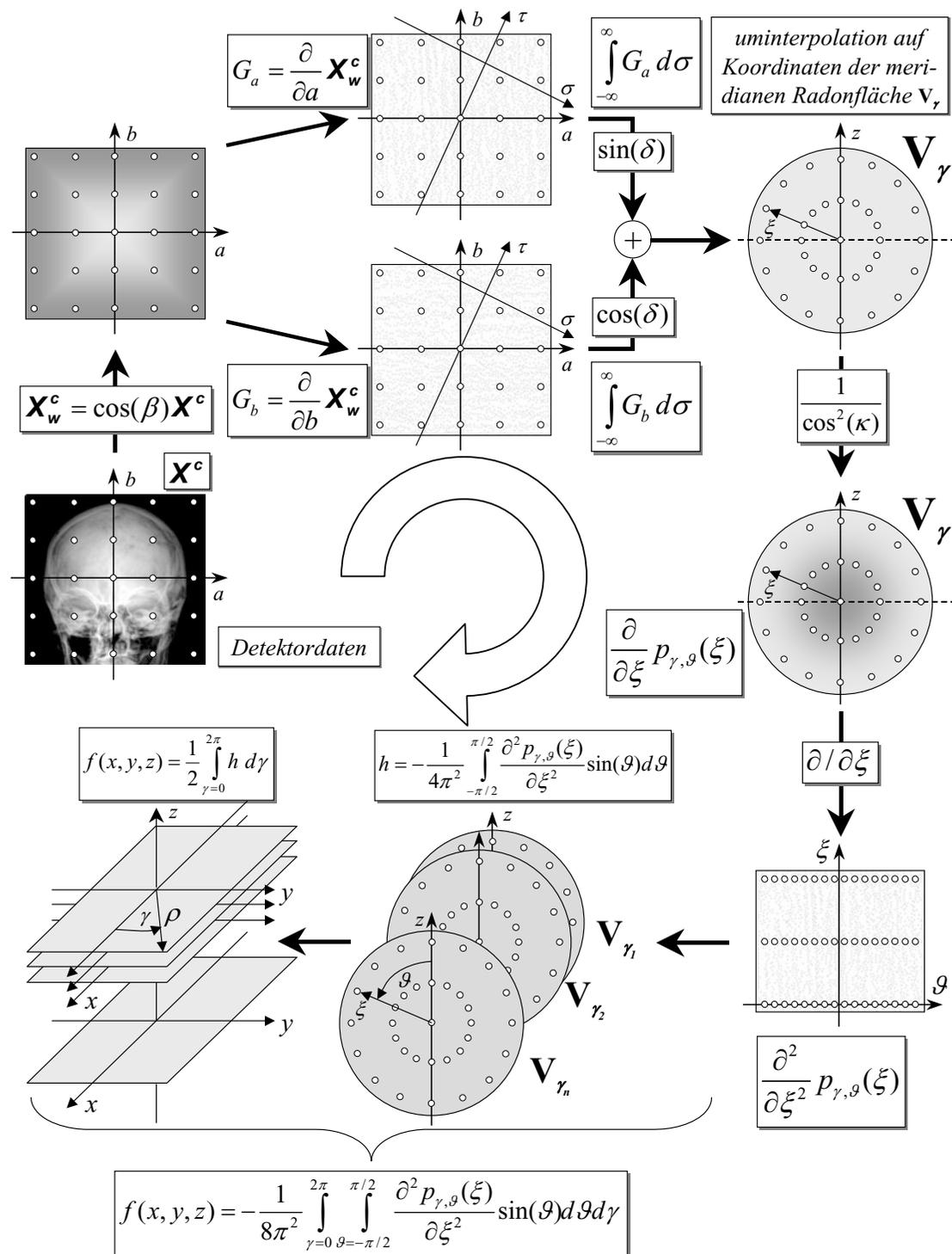


Abb. 7.34: Zusammenfassung der dreidimensionalen Rekonstruktionsmethode von Pierre Grangeat.

Abbildung 7.34 führt schematisch durch die einzelnen Rekonstruktionschritte. Angefangen bei den Kegelstrahlprojektionsdaten auf dem ebenen Detektor (Mitte links), werden die Daten zunächst vorgewichtet. Man kann nun die horizontale und vertikale Ableitung separat behandeln. In den Ableitungsbildern dürfen aufgrund der Linearität der Integration schon jetzt

separat für jedes Ableitungsbild die Linienintegrale gebildet werden. Nach der Sinus- bzw. Cosinusgewichtung werden beide Ergebnisse addiert. Diesen Wert kann man in eine virtuelle Detektorfläche im Radonraum durch Interpolation einsortieren, denn es gibt einen Bezug zu den Koordinaten $\xi = (\xi, \gamma, \vartheta)$. Eine weitere Gewichtung liefert dann die radiale Ableitung der Radontransformierten.

Leitet man ein weiteres Mal in radialer Richtung ab, so erhält man den in der Radonschen Inversionsformel (7.37) auftretenden Integranden. Unten rechts sind diese Werte symbolisch in Form eines kartesischen Sinogrammes aufgetragen. Die Integration über das Einheitsflächenelement in Gleichung (7.37) entspricht der Hintereinanderausführung zweier Rückprojektionen und zwar in polarer Richtung, also innerhalb der interpolierten, vertikalen meridianen Radonflächen, und in azimuthalen Richtung, also in zueinander parallelen, horizontalen Ebenen um die räumliche z -Achse herum. Die für die Rekonstruktion erforderliche Filterung der Daten vor der Rückverschmierung ist in diesem Verfahren etwas versteckt. Im vorletzten Schritt kommt die Filterung aber zum Tragen, denn hier werden in polarer Richtung die mit $\sin(\vartheta)$ gewichteten und zweimal radial abgeleiteten Radonwerte verschmiert. Das entspricht exakt der geforderten Filterung.

Am Ende dieses Abschnittes soll die zweite Phase der Rekonstruktion nach *Grangeat* in Zusammenhang mit dem Central-Section-Theorem gebracht werden, damit die Rückprojektionsvorschrift klarer wird. Dazu wird zunächst eine Parallelprojektion $\mathbf{X}^P\{.\}$ des zu rekonstruierenden Objektes eingeführt. In Abbildung 7.35 ist skizziert, dass diese Parallelprojektion mit virtuellen, senkrecht stehenden Detektorflächen gemessen wird. $\boldsymbol{\eta}$ ist der Detektorflächenvektor und \mathbf{a} und \mathbf{b} bezeichnen die Detektorhauptachsen. Der Detektorflächenvektor legt die Orientierung der Fläche fest, die über den Winkel γ eindeutig beschrieben wird. Die Detektorfläche bezeichnet gleichzeitig die Koordinaten der Ebenen im hybriden Radonraum.

Die Normalenvektoren des Detektors lauten in dieser vertikalen Festlegung

$$\mathbf{n}_\eta = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_a = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

Diese eingeschränkte Detektororientierung ist offenbar der Spezialfall $\theta = 90^\circ$ der Definition der Einheitsvektoren (7.43) bis (7.45). Damit gilt für die Parallelprojektion $\mathbf{X}^P\{.\}$ ebenfalls die Parameterdarstellung der Gleichung (7.42) also

$$p_\alpha(a, b) = p_{\alpha, \theta=90^\circ}(a, b) = \mathbf{X}_p \left\{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{a}\mathbf{n}_a + \mathbf{b}\mathbf{n}_b + \eta\mathbf{n}_\eta) d\eta. \quad (7.94)$$

Das Central-Section-Theorem aus Abschnitt 7.3.4 hatte gezeigt, dass die zweidimensionale Fouriertransformierte der Parallelprojektion auf einer Ebene im dreidimensionalen Fourierraum des Objektes wiederzufinden ist. Die Orientierung der Detektorebene stimmt dabei mit der Orientierung der Ebene im Frequenzraum überein, da die Fouriertransformation rotationsvariant ist. Es gilt also

$$\mathcal{F}_2 \{ p_\alpha(a, b) \} = P_\gamma(q, p) = F(\mathbf{q}\mathbf{n}_a + p\mathbf{n}_b) = \mathcal{F}_3 \{ f(\mathbf{r}) \} \Big|_{\mathbf{r}=\xi=\mathbf{a}\mathbf{n}_a+\mathbf{b}\mathbf{n}_b}. \quad (7.95)$$

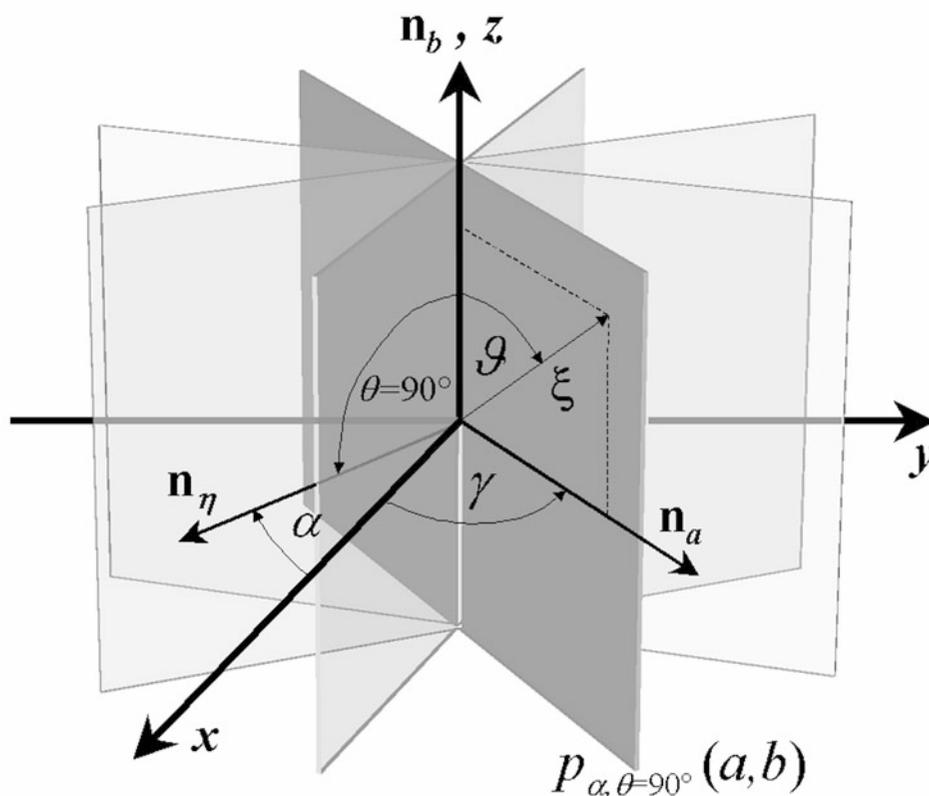


Abb. 7.35: Senkrecht angeordnete planare Detektorflächen mit den Einheitsvektoren in Richtung der Detektorhauptachsen \mathbf{n}_a und \mathbf{n}_b . Die Detektorflächennormale ist um den Winkel $\alpha = 90^\circ - \gamma$ gegenüber der x -Achse des ruhenden Patientenkoordinatensystems gedreht. Die Röntgenstrahlen gehen senkrecht durch die entsprechenden Detektorflächen. Die Punkte auf der Fläche stellen Werte der hybriden Radontransformierten dar.

Die inverse Fouriertransformation von $P_\alpha(q,p)$ liefert also gerade die Parallelprojektion $\mathbf{X}^P\{.\}$ des zu rekonstruierenden Objektes, das heißt

$$\mathbf{X}^P\{\mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi)\} = p_\alpha(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(q\mathbf{n}_a + p\mathbf{n}_b) e^{2\pi i \mathbf{r}_1^T \cdot (q\mathbf{n}_a + p\mathbf{n}_b)} dq dp \quad (7.96)$$

In Polarkoordinaten lautet die inverse zweidimensionale Fouriertransformation (7.96)

$$\mathbf{X}_p\{\mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi)\} = p_\alpha(a, b) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{v}) e^{2\pi i (\mathbf{r}_1^T \cdot \mathbf{v})} |\mathbf{v}| dv d\vartheta \quad (7.97)$$

wobei

$$\mathbf{q} = q\mathbf{n}_a, \quad \mathbf{p} = p\mathbf{n}_b \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \mathbf{q} + \mathbf{p} \quad (7.98)$$

Wenn man andererseits das Fourier-Slice-Theorem aus Abschnitt 7.3.1 noch einmal heranzieht, dann war ja

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_3 \{f(x, y, z)\} &= F(u, v, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} dx dy dz \\
 &= F_{\text{sphärisch}}(q, \gamma, \vartheta) \\
 &= P_{\gamma, \vartheta}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) e^{-2\pi i q \xi} d\xi = \mathcal{F}_1 \{ \mathcal{R}_3 \{f(x, y, z)\} \}.
 \end{aligned} \tag{7.99}$$

Die Gleichungen (7.99) bedeuten, dass die eindimensionale, radiale Fouriertransformierte der dreidimensionalen Radontransformation als radiale Linie in der dreidimensionalen Fouriertransformierten des Objektes wiederzufinden ist.

Durch Gleichung (7.95) ist sichergestellt, dass die radialen Linien in der dreidimensionalen Fouriertransformierten des Objektes, die in der (Fourier-)Ebene des vertikalen Detektors liegen, mit der zweidimensionalen, hybriden Radontransformation übereinstimmen. Daher findet man insgesamt

$$\mathcal{F}_3 \{f(x, y, z)\} = \mathcal{F}_2 \{p_\alpha(a, b)\} = \mathcal{F}_1 \{ \mathcal{R}_3 \{f(x, y, z)\} \} \tag{7.100}$$

also gilt für das zu rekonstruierende Objekt

$$f(x, y, z) = \mathcal{F}_3^{-1} \{ \mathcal{F}_1 \{ \mathcal{R}_3 \{f(x, y, z)\} \} \}. \tag{7.101}$$

Abbildung 7.36 fasst die Gleichung (7.100) graphisch zusammen.

Mit dieser Identität kann man Gleichung (7.97) auch schreiben als

$$\mathbf{X}^P \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi) \} = p_{\alpha=90^\circ-\gamma}(a, b) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\gamma, \vartheta}(q) e^{2\pi i (\xi^T \cdot \mathbf{q})} |\mathbf{q}| dq d\vartheta. \tag{7.102}$$

Da Gleichung (7.102) mit Gleichung (5.64) übereinstimmt, liegt hier offenbar die einfache zweidimensionale gefilterte Rückprojektion vor. Das bedeutet, dass eine Parallelprojektion $\mathbf{X}^P\{.\}$, bzw. die entsprechende hybride Radontransformierte des zu rekonstruierenden Objektes durch eine zweidimensionale gefilterte Rückprojektion der radialen dreidimensionalen Radonwerte in vertikalen Ebenen berechnet werden kann.

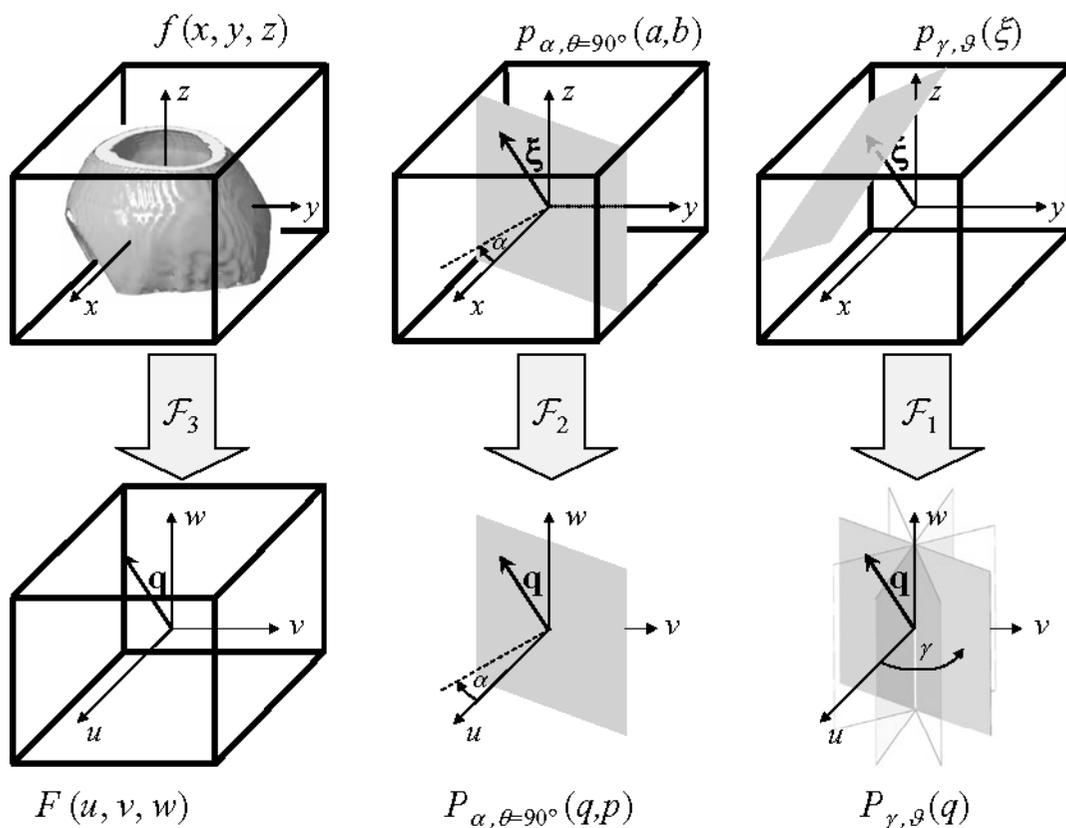


Abb. 7.36: Graphische Aufarbeitung des Zusammenhangs in Gleichung (7.100). Die eindimensionale, radiale Fouriertransformierte von Flächenintegralen ist identisch mit der radialen Linie gleicher Orientierung der zweidimensionalen Fouriertransformierten der Fläche der Linienintegrale. Beide Frequenzpunkte finden sich in der dreidimensionalen Fouriertransformierten des Objektes wieder.

Um zu verstehen, wozu der Zusammenhang (7.102) von Nutzen ist, sieht man sich noch einmal die dreidimensionale Radonsche Inversionsformel

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} dS \tag{7.38}$$

an, wobei das infinitesimale Flächenelement dS auf der Einheitskugel S durch Gleichung (7.37) bestimmt ist, so dass nach dem Einsetzen des Flächenelementes

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta d\gamma \tag{7.103}$$

folgt. Die Rekonstruktion des dreidimensionalen Bildpunktes erfolgt durch Rückprojektion der gefilterten Parallelprojektion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} h[\mathbf{X}^P \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \xi) \}] d\gamma, \tag{7.104}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} h\left[\mathbf{X}^p\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\xi)\right\}\right] &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\gamma,\vartheta}(q) e^{2\pi i \xi q} q^2 dq \sin(\vartheta) d\vartheta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 P_{\gamma,\vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (7.105)$$

Die Methode von *Grangeat* ist in Schema 9 noch einmal zusammengefasst. Artefakte, die im Zusammenhang mit einer praktischen Implementierung stehen sind in *S. W. Lee et al.* [Lee02] dargestellt.

Schema 9: Rekonstruktion in Kegelstrahlgeometrie nach Grangeat

1. Vorgewichtung der Detektordaten

$$\mathbf{X}_w^c\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\tau(\xi))\right\} = \cos(\beta) \mathbf{X}^c\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\tau(\xi))\right\} \quad (7.90)$$

2. Berechnung der partiellen Ableitungen in Richtung der Detektorhauptachsen

$$G_a(\sigma,\tau) = \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{X}_w^c\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\tau(\xi))\right\} \quad \text{und} \quad G_b(\sigma,\tau) = \frac{\partial}{\partial b} \mathbf{X}_w^c\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\tau(\xi))\right\} \quad (7.92)$$

3. Berechnung von Linienintegralen auf dem Detektor und Gewichtung des Ergebnisses mit dem Faktor $1/\cos^2(\kappa)$ liefert die radiale Ableitung der Radontransformation

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,\vartheta}(\xi) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \int_{-\infty}^{\infty} \{G_a(\sigma,\tau) \sin(\delta) + G_b(\sigma,\tau) \cos(\delta)\} d\sigma \quad (7.106)$$

4. Uminterpolation der auf der Radonkugel liegenden Daten aus Gleichung (7.106) auf vertikale, meridiane Radonflächen.

5. Gefilterte Rückprojektion in den vertikalen, meridianen Radonflächen

$$h\left[\mathbf{X}^p\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\xi)\right\}\right] = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 P_{\gamma,\vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta \quad (7.105)$$

6. Rückprojektion in horizontalen Ebenen durch Integration über den Ebenendrehwinkel γ

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} h\left[\mathbf{X}^p\left\{\mu_{\gamma,\vartheta}(\sigma,\xi)\right\}\right] d\gamma \quad (7.104)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (7.102) zeigt, dass die gefilterte Parallelprojektion im Vergleich zur einfachen Parallelprojektion eine zusätzliche Gewichtung mit dem $\sin(\vartheta)$ sowie im

Frequenzraum eine weitere Filterung mit der linearen Frequenzrampe q besitzt. Die Gleichungen (7.104) und (7.105) entsprechen exakt den beiden letzten Schritten in Abbildung 7.34, nur das in Gleichung (7.104) über das Central-Section-Theorem der Bezug zur Parallelprojektion bzw. hybriden Radontransformierten $p_\alpha(a,b)$ hergestellt werden kann.

7.4.5 Direkte 3D Fourierrekonstruktion in Kegelstrahlgeometrie

In Kapitel 5.3 wurden für den zweidimensionalen Fall die Verfahren der direkten inversen Radontransformation auf der Basis der inversen Fouriertransformierten besprochen. Im Prinzip ist ein solches Vorgehen in Ordnung. Bei der praktischen Implementation zeigten sich aber Probleme, die mit der radial abnehmenden Dichte der Abtastpunkte im Fourierraum der Radontransformierten zusammenhängen. Zur Lösung dieser Problematik wurde die so genannte Linogramm-Methode vorgeschlagen [Jac96], die in Kapitel 5.4 beschrieben ist. Es soll hier nun kurz dargestellt werden, dass im Falle der dreidimensionalen Kegelstrahlgeometrie ebenfalls die Möglichkeit besteht, mit einer entsprechend angepassten Linogramm-Methode erfolgreich zu rekonstruieren.

In Abschnitt 7.3.1 wurde durch Gleichung

$$\begin{aligned} F(u(q, \gamma, \mathcal{G}), v(q, \gamma, \mathcal{G}), w(q, \gamma, \mathcal{G})) &= F(q \cos(\gamma) \sin(\mathcal{G}), q \sin(\gamma) \sin(\mathcal{G}), q \cos(\mathcal{G})) \\ &= F_{\text{sphärisch}}(q, \gamma, \mathcal{G}) \\ &= P_{\gamma, \mathcal{G}}(q) \end{aligned} \quad (7.26)$$

die Anwendbarkeit des Fourier-Slice-Theorems in dreidimensionalen Rekonstruktionsproblemen zusammengefasst. Hierbei ist zunächst zu bemerken, dass die Fouriertransformierte der Radontransformierten selbst mit der Fouriertransformierten des Objektes auf radialen Linien durch den Ursprung des Frequenzraumes übereinstimmen. Die vorhergehenden Kapitel haben aber gezeigt, dass man in der Kegelstrahlgeometrie keinen unmittelbaren Zugriff auf die Radontransformierte $p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi)$ hat.

Die Idee von *Grangeat* liefert nur die radiale Ableitung der Radontransformierten also $\partial p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi)/\partial \xi$. *Grangeat* hat aber auch gezeigt, dass die Ableitung immerhin der halbe Weg zur gefilterten Rückprojektion ist. Jedoch benötigt man bei der direkten, fourier-basierten Rekonstruktion keine gefilterten Radondaten, sondern die einfache Radontransformierte $p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi)$. Mit den folgenden Überlegungen wird dargestellt, wie man den Ausdruck $\partial p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi)/\partial \xi$ integrieren kann.

Zunächst benötigt man wieder den Zusammenhang (7.34), so dass für die Fouriertransformierte der radialen Ableitung der Radontransformierten

$$\mathcal{F}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi) \right\} = i2\pi q P_{\gamma, \mathcal{G}}(q) \quad (7.107)$$

geschrieben werden kann. Damit gilt für die Fouriertransformierte der Radontransformation

$$\mathcal{F}_1 \{ p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi) \} = \frac{1}{i2\pi q} \mathcal{F}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \mathcal{G}}(\xi) \right\}. \quad (7.108)$$

Die inverse Fouriertransformation liefert dann

$$p_{\gamma,\vartheta}(\xi) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \frac{1}{i2\pi q} \mathcal{F}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,\vartheta}(\xi) \right\} \right\}. \quad (7.109)$$

Übernimmt man das Fourierergebnis der Signumsfunktion aus Kapitel 4.9, also

$$\text{sign}(\xi) \circ \text{---} \bullet \frac{1}{i\pi q}, \quad (4.109)$$

so kann mit Hilfe des Faltungssatzes

$$p_{\gamma,\vartheta}(\xi) = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \frac{1}{i2\pi q} \mathcal{F}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,\vartheta}(\xi) \right\} \right\} = \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \frac{1}{i2\pi q} \right\} * \mathcal{F}_1^{-1} \left\{ \mathcal{F}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,\vartheta}(\xi) \right\} \right\} \quad (7.110)$$

die normale Radontransformation durch eine Faltung zwischen der Signumsfunktion und der radialen Ableitung der Radontransformierten

$$p_{\gamma,\vartheta}(\xi) = \frac{1}{2} \text{sign}(\xi) * \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,\vartheta}(\xi) \quad (7.111)$$

dargestellt werden. Mit Gleichung (7.101) gilt hier also

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \mathcal{F}_3^{-1} \left\{ \mathcal{F}_1 \left\{ \mathcal{R}_3 \left\{ f(x, y, z) \right\} \right\} \right\} \\ &= \mathcal{F}_3^{-1} \left\{ \mathcal{F}_1 \left\{ p_{\gamma,\vartheta}(\xi) \right\} \right\} \\ &= \mathcal{F}_3^{-1} \left\{ \mathcal{F}_1 \left\{ \frac{1}{2} \text{sign}(\xi) * \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,\vartheta}(\xi) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Es bleibt aber, genau wie im zweidimensionalen Fall, das Problem der mit dem Abstand zum Frequenzraum sprung sinkenden Abtastdichte. In *C. Jacobson* [Jac96] ist gezeigt, dass die Methode der Linogramm-Abtastung auch hier hilft.

7.4.6 Exakte Rekonstruktion durch gefilterte Rückprojektion

H. Kudo und T. Saito [Kud94] sowie *M. Defrise und R. Clack* [Def94, Cla94] zeigten die ersten Formulierungen einer gefilterten Rückprojektion, die auf dem oben beschriebenen Verfahren von *Grangeat* basieren. Zur Darstellung der zentralen Idee hierfür wird im folgenden Abschnitt, wie bei *X. Yang und B. K. P. Horn* [Yan02], von der allgemeinen dreidimensionalen inversen Radontransformation

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \frac{\partial^2 p_{\gamma,\vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\mathbf{n}_\xi \quad (7.38)$$

ausgegangen.

Da ein Rückprojektionsverfahren erreicht werden soll, geht man jetzt nicht mehr von einer bestimmten, festen Quellenposition, sondern von einer durch den kontinuierlichen Parameter λ beschriebenen Quellentrajektorie $\mathbf{S}(\lambda)$ aus. Dies ist erforderlich, denn wie bei allen Rückprojektionsverfahren wird die einzelne Rückprojektion sofort nach der Messung der Projektion durchgeführt, so dass nicht auf die komplette Füllung des Radonraumes gewartet werden muss. Durch dieses Prinzip ist ganz grundsätzlich die Effizienz der Rückprojektionsverfahren begründet. Es gilt dabei

$$\xi = \mathbf{S}(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi, \quad (7.113)$$

denn dadurch wird der Großkreis auf der Radonkugel für die Quellenposition beschrieben. Abbildung 7.37 zeigt die geometrische Situation. Der Punkt \mathbf{r} soll rekonstruiert werden. Gesucht ist der Beitrag, der in der Rückprojektion vom Punkt \mathbf{P} ausgeht.

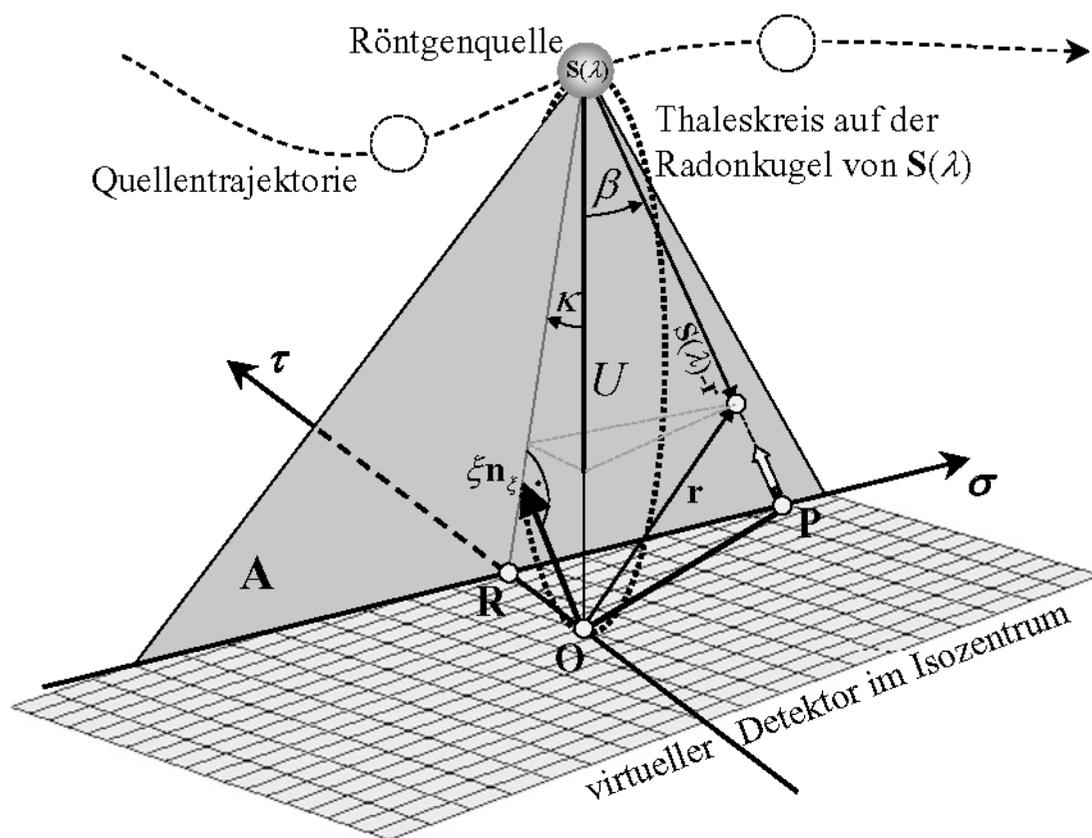


Abb. 7.37: Geometrie der Kegelstrahlrückprojektion. Der Vektor $\mathbf{S}(\lambda)$ hat die Richtung der Detektorflächennormalen und die Länge des Detektor-Quellen-Abstandes. Gesucht ist nach dem Beitrag des Detektorwertes am Punkt \mathbf{P} zur Rekonstruktion des Punktes \mathbf{r} . \mathbf{A} ist die Integrationsebene der Radontransformation. Diese Ebene ist durch $\xi \mathbf{n}_\xi$ eindeutig festgelegt.

Mit der Siebeigenschaft der δ -Distribution aus Kapitel 4.5 kann man Gleichung (7.38) als Faltung

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi)}{\partial \xi^2} \delta(\xi - \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) d\xi \right] d\mathbf{n}_\xi \quad (7.114)$$

darstellen, in der noch besser zum Ausdruck kommt, dass die Ableitung an den Punkten \mathbf{r} gebildet wird, für die gilt, dass

$$\xi = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi. \quad (7.115)$$

Gleichung (7.115) beschreibt die in Abbildung 7.37 dargestellte Integrationsebene \mathbf{A} der Radontransformation. Da die Röntgenquelle ebenfalls in dieser Ebene liegen muss, gilt Gleichung (7.113) als Spezialfall von Gleichung (7.115).

Weil man sich nun von einer Bewegung im Radonraum trennen und für die Rückprojektion zu einer Bewegung im Ortsraum übergehen möchte, muss man sich ansehen, wie sich der radiale Abstand im Radonraum ändert, wenn der Bewegungsparameter λ der Quelle verändert wird. Die Größe der Änderung ist durch die Ableitung von Gleichung (7.113) gegeben, also durch

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi, \quad (7.116)$$

wobei $\mathbf{S}'(\lambda)$ geometrisch ein Tangentialvektor der Quellentrajektorie am Ort $\mathbf{S}(\lambda)$ darstellt. Schreibt man Gleichung (7.116) als

$$d\xi = |\mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi| d\lambda, \quad (7.117)$$

so zeigt sich, dass die radiale Abtastdichte entlang ξ von der Trajektorienrichtung abhängt. Man kann den Faktor als Kompensation für die im Allgemeinen auftretende irreguläre Trajektorienabtastung auffassen.

Substituiert man in Gleichung (7.114) ξ und $d\xi$ durch die Gleichungen (7.113) und (7.117), also die radiale Radonvariable durch den Trajektorienparameter der Röntgenquelle, so erhält man

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \left[\int_{\lambda} \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\mathbf{S}(\lambda) \cdot \mathbf{n}_\xi} \delta(\mathbf{S}(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi - \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}_\xi) M(\lambda, \mathbf{n}_\xi) |\mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi| d\lambda \right] d\mathbf{n}_\xi. \quad (7.118)$$

Dabei ist zusätzlich die Korrekturfunktion

$$M(\lambda, \mathbf{n}_\xi) = \frac{1}{n(\lambda, \mathbf{n}_\xi)} \quad (7.119)$$

eingeführt worden, die redundante Messungen eines Punktes im Radonraum kompensiert. Dies ist erforderlich, weil Gleichung (7.115) für beliebige Quellentrajektorien mehrere Lösungen besitzen kann. Die Funktion $n(\lambda, \mathbf{n}_\xi)$ ist dabei die Anzahl der Schnittpunkte der Quellentrajektorie $\mathbf{S}(\lambda)$ mit der Integrationsfläche der Radontransformation, das heißt, ein bestimmter Radonpunkt $p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda)$ wird für eine beliebige Quellentrajektorie an $n(\lambda, \mathbf{n}_\xi)$

Quellenpositionen gemessen, oder anders formuliert, die Integrationsfläche wird an $n(\lambda, \mathbf{n}_\xi)$ Positionen beleuchtet. Da die Kompensationsfunktion $n(\lambda, \mathbf{n}_\xi)$ für verschiedene Punkte im Radonraum in der Regel unterschiedlich ist, wird sie als Skalierungsfunktion verwendet um zu verhindern, dass einige Radonpunkte Übergewichtet zur Objektrekonstruktion beitragen. Solange die Vollständigkeitsbedingung bei der Datenakquisition berücksichtigt wird (siehe Abschnitte 7.3.5 und 7.5.1), ist $n(\lambda, \mathbf{n}_\xi)$ größer als Null.

Wichtig an dem jetzt erreichten Ausdruck (7.118) ist die Integration über Λ , die Menge der Punkte auf der Quellentrajektorie, das heißt, das Integral über die radiale Radonkomponente ist in einer für das Rückprojektionsverfahren erforderlichen Integrationsrichtung dargestellt, so dass nach dem Vertauschen der Integrationsreihenfolge,

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \left[\iint_S \frac{\partial^2 p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\mathbf{S}(\lambda) \cdot \mathbf{n}_\xi} \delta((\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_\xi) M(\lambda, \mathbf{n}_\xi) |\mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi| d\mathbf{n}_\xi \right] d\lambda, \quad (7.120)$$

für jede Projektionsmessung sofort die Rückprojektion berechnet werden kann.

Nach *Grangeat* kann man sich die erste Ableitung der Radontransformierten durch Ableitung der Detektordaten berechnen. Hier benötigt man aber die zweite Ableitung. Daher soll versucht werden, eine der Ableitungen durch eine Faltung zu ersetzen. Der Faltungskern ist dabei die schon häufiger verwendete Fourierdarstellung der ersten Ableitung (7.34). Die inverse Formulierung von Gleichung (7.107) lautet nämlich

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda) = \mathcal{F}_1^{-1} \{ i2\pi q P_{\gamma, \vartheta}(q, \lambda) \}, \quad (7.121)$$

so dass mit dem Faltungssatz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda) &= \mathcal{F}_1^{-1} \{ i2\pi q \} * \mathcal{F}_1^{-1} \{ P_{\gamma, \vartheta}(q, \lambda) \} \\ &= g(\xi) * p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda) \end{aligned} \quad (7.122)$$

gilt, wobei der Faltungskern

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi q e^{i2\pi q \xi} dq \quad (7.123)$$

lautet. Setzt man Gleichung (7.123) in (7.120) ein, so erhält man

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \left[\iint_S \int_{\xi'=-\infty}^{+\infty} g(\xi' - \xi) \frac{\partial p_{\gamma, \vartheta}(\xi', \lambda)}{\partial \xi'} \delta((\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_\xi) \cdot \dots \right. \\ \left. \dots \cdot M(\lambda, \mathbf{n}_\xi) |\mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi| d\xi' d\mathbf{n}_\xi \right] d\lambda. \quad (7.124)$$

Da ξ die radiale Radonkoordinate ist, bedeutet die Faltung in Gleichung (7.124), dass man viele parallele Radonintegrationsflächen (ξ', γ, ϑ) von unterschiedlichen Quellenorten benötigt. Das gefährdet aber die Idee der Rückprojektion, deren Vorteil gegenüber den Fourierver-

fahren gerade die einmalige, vollständige Behandlung jeder Quellenposition ist. Für ein bestimmtes λ können die Integrationsflächen, beschrieben durch ξ und ξ' , nicht beide die Quelle enthalten.

Andererseits gilt Gleichung (7.113) für ein bestimmtes λ auf der Radonkugel von $S(\lambda)$ wegen des Satzes von Thales auch für alle anderen Integrationsflächenvektoren, die einen Großkreis auf eben dieser Radonkugel beschreiben, so dass man zum Beispiel auch schreiben kann

$$\xi_1' = S(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1} . \tag{7.125}$$

Gleichung (7.124) lautet damit

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \left[\iint_S \int_{\xi_1'=-\infty}^{+\infty} g(\xi_1' - \xi_1) \frac{\partial p_{\gamma, \theta}(\xi_1'; \lambda)}{\partial \xi_1'} \delta((S(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1}') \cdot \dots \right. \tag{7.126}$$

$$\left. \dots \cdot M(\lambda, \mathbf{n}_{\xi_1}') |S(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1}'| d\xi_1' d\mathbf{n}_{\xi_1}' \right] d\lambda .$$

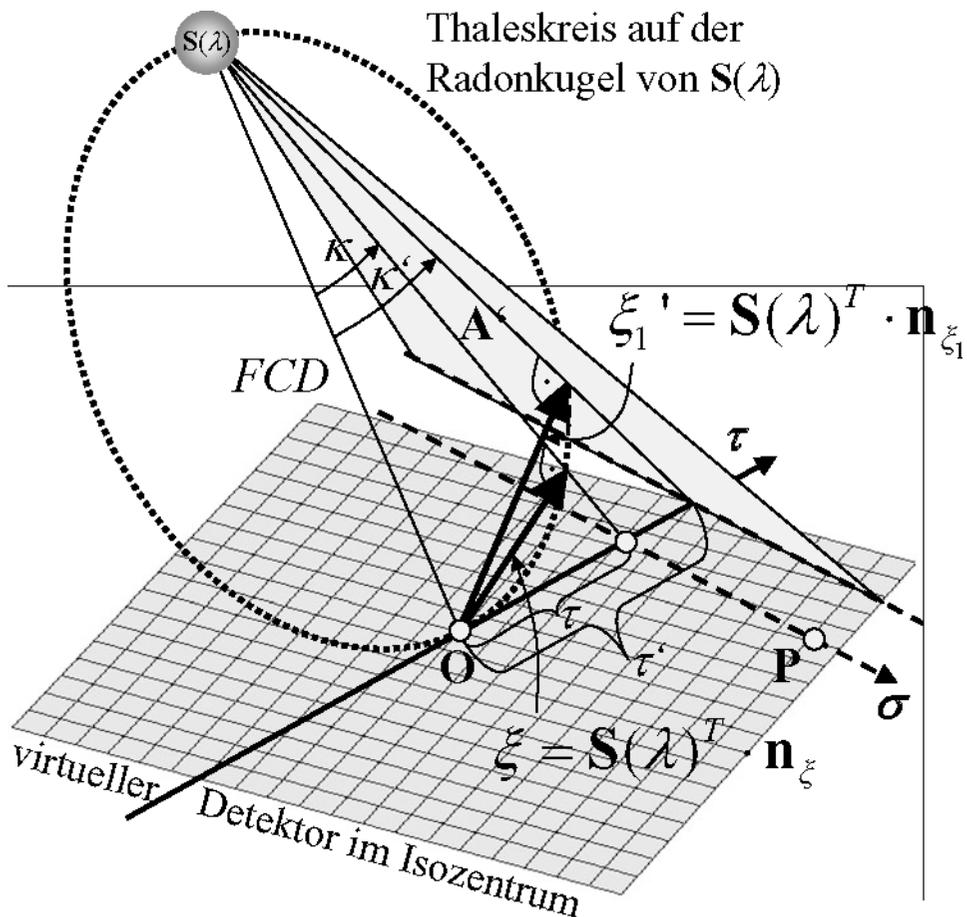


Abb. 7.38: Geometrie der Kegelstrahlrückprojektion. Verändert man die Integrationsfläche durch Verschiebung der Vektorpfeilspitze des Integrationsflächenvektors auf dem Großkreis der Radonkugel für den Quellenursprung $\xi \rightarrow \xi_1'$, dann beinhaltet die neue Integrationsfläche A' zwar immer noch die Quelle aber leider nicht mehr den zu rekonstruierenden Punkt.

Abbildung 7.38 zeigt die geometrische Situation der neuen Integrationsfläche A' . Nun läuft die Integrationsfläche wie gewünscht zwar durch die Quelle – aber leider ist der zu rekonstruierende Punkt \mathbf{r} nicht mehr in der Fläche A' enthalten. Die Faltung in Gleichung (7.126) stellt aber eine Parallelverschiebung der Fläche A' dar. Es kann nun gezeigt werden, dass die ungewünschte Verschiebung in der Radonvariablen ξ_1 in eine Verschiebung der radialen Detektorvariablen τ umgewandelt werden kann.

Für diese Umwandlung der Radonvariablen in eine Detektorvariable sieht man sich die Abbildung 7.39 an. Aus Abbildung 7.39a ist abzulesen, dass

$$\xi_1' - \xi_1 = (\tau' - \tau) \cos(\kappa') \frac{U}{FCD}. \tag{7.127}$$

Auch die infinitesimale Änderung der Radonvariablen muss in eine Änderung der Detektorvariablen überführt werden. Hierzu muss Gleichung (7.127) abgeleitet werden, also

$$\frac{d\xi_1'}{d\tau'} = \cos(\kappa') \frac{U}{FCD}. \tag{7.128}$$

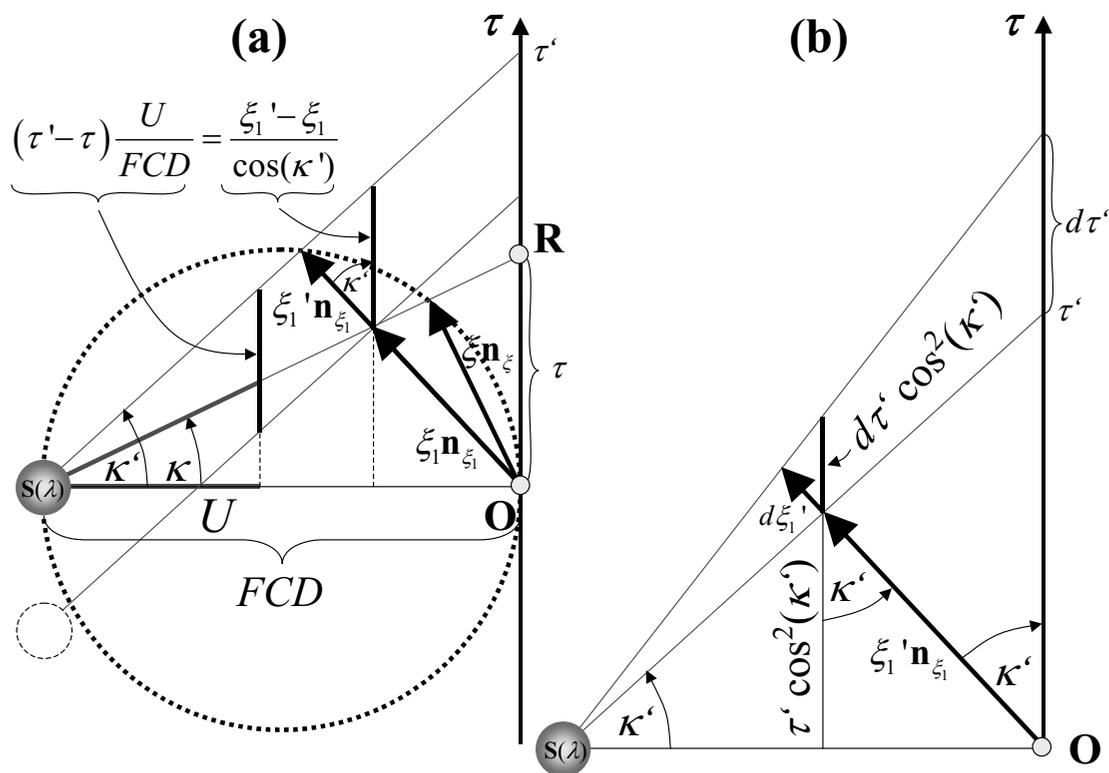


Abb. 7.39: Strahlensätze in der Geometrie der Kegelstrahlrückprojektion für die beiden Fälle (a) $\xi_1' = \mathbf{S}(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1}$ und $\xi = \mathbf{S}(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi}$ sowie (b) infinitesimale Änderung der radialen Radonkomponente ξ_1' .

Mit Hilfe der Abbildung 7.39b und der Anwendung des Strahlensatzes kann man das Verhältnis

$$\frac{U}{FCD} = \frac{\tau' \cos^2(\kappa')}{\tau'} \quad (7.129)$$

berechnen, so dass die Substitution

$$d\xi_1' = \cos^3(\kappa') d\tau' \quad (7.130)$$

lautet. Die Gleichungen (7.127) und (7.130) werden in Gleichung (7.126) eingesetzt, so dass

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \left[\iint_S \int_{\tau'=-\infty}^{+\infty} g\left(\left(\tau'-\tau\right)\cos(\kappa')\frac{U}{FCD}\right) \frac{\partial p_{\gamma,g}(\xi_1',\lambda)}{\partial \xi_1'} \delta\left(\left(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{r}\right)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1'}\right) \dots \right. \\ \left. \dots \cdot M(\lambda, \mathbf{n}_{\xi_1'}) \left| \mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1'} \right| \cos^3(\kappa') d\tau' d\mathbf{n}_{\xi_1'} \right] d\lambda \quad (7.131)$$

folgt. Die Skalierungseigenschaft des Faltungskernes (7.123) mit dem Argument aus Gleichung (7.127)

$$g\left(\tau \cos(\kappa') \frac{U}{FCD}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi q e^{i2\pi q \left(\tau \cos(\kappa') \frac{U}{FCD}\right)} dq \quad (7.132)$$

kann durch die Substitution

$$q' = q \cos(\kappa') \frac{U}{FCD} \quad (7.133)$$

gezeigt werden. Es gilt

$$g\left(\tau \cos(\kappa') \frac{U}{FCD}\right) = \frac{1}{\left(\cos(\kappa') \frac{U}{FCD}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi q' e^{i2\pi q' \tau} dq' \\ = \frac{FCD^2}{U^2 \cos^2(\kappa')} g(\tau) \quad (7.134)$$

und damit für Gleichung (7.131) insgesamt

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \left[\iint_S \int_{\tau'=-\infty}^{+\infty} \frac{FCD^2}{U^2} g(\tau'-\tau) \frac{\partial p_{\gamma,g}(\xi_1',\lambda)}{\partial \xi_1'} \delta\left(\left(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{r}\right)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1'}\right) \dots \right. \\ \left. \dots \cdot M(\lambda, \mathbf{n}_{\xi_1'}) \left| \mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1'} \right| \cos(\kappa') d\tau' d\mathbf{n}_{\xi_1'} \right] d\lambda. \quad (7.135)$$

Für eine spezifische Quellenposition gilt diese Gleichung nicht nur für den Punkt (7.125) sondern für alle Punkte auf dem Großkreis der Radonkugel von $\mathbf{S}(\lambda)$, so dass zurücksubstituiert werden darf.

Mit dem Übergang

$$\xi_1' = \mathbf{S}(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi_1} \rightarrow \xi = \mathbf{S}(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} \quad (7.136)$$

ergibt sich

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \frac{FCD^2}{U^2} \left[\iint_S \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial p_{\gamma, \theta}(\xi, \lambda)}{\partial \xi} \delta((\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_{\xi}) \cdot \dots \right. \\ \left. \dots \cdot M(\lambda, \mathbf{n}_{\xi}) |\mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi}| \cos(\kappa) d\mathbf{n}_{\xi} \right] d\lambda, \quad (7.137)$$

wobei die Faltung über die radiale Detektorvariable τ analog zu den Regeln (7.121) bis (7.123) den Ableitungsoperator liefert. Die Siebeigenschaft der δ -Distribution kann man durch Veränderung des Integrationsbereichs ersetzen, so dass Gleichung (7.137) auch als

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \frac{FCD^2}{U^2} \left[\iint_{(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial p_{\gamma, \theta}(\xi, \lambda)}{\partial \xi} M(\lambda, \mathbf{n}_{\xi}) |\mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_{\xi}| \cos(\kappa) d\mathbf{n}_{\xi} \right] d\lambda \quad (7.138)$$

geschrieben werden kann. Um zu verstehen, über welche Richtungen im inneren Integral auf der Oberfläche der Radonkugel integriert wird, ist in Abbildung 7.40a ebenfalls dargestellt, dass die Punkte, für die $(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} = 0$ gilt, auf einem Kreis auf eben dieser Oberfläche liegen.

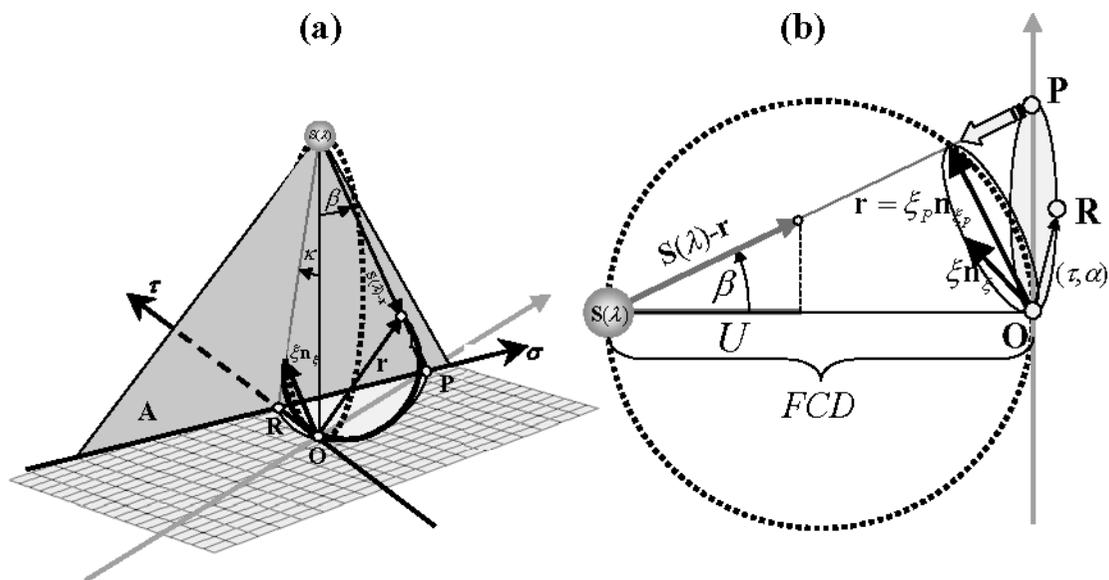


Abb. 7.40: Die Beiträge zum Detektor-Rückprojektionspunkt \mathbf{P} werden auf einem Kreis innerhalb der Radonkugel von $\mathbf{S}(\lambda)$ eingesammelt. In Gleichung (7.137) ist durch die δ -Distribution gefordert, dass nur über die Richtungsbeiträge auf der Radonkugel integriert wird, für die $(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{n}_{\xi} = 0$ gilt. In (a) ist dargestellt, dass das alle Punkte $(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r}) \perp \mathbf{n}_{\xi}$ sind, die auf einem Kreis auf der Radonkugel liegen. In (b) ist gezeigt, dass die Integration über die Richtungen \mathbf{n}_{ξ} durch Projektion auf den Detektor übertragen werden kann. Über alle Winkel α werden dann auf dem Detektor die Werte an der Stelle τ aufintegriert.

Alle Punkte des Kreises liefern bei den Rückprojektionen einen Beitrag zur Rekonstruktion des Objektpunktes \mathbf{r} , denn das sind alle Fächerflächen im Kegelstrahl, die den Strahl $(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})$ enthalten. Alle Richtungen \mathbf{n}_ξ , die senkrecht auf diesem Strahl stehen, definieren eine Ebene, die durch den Ursprung \mathbf{O} geht und $(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{r})$ als Normale besitzt. Der Schnitt dieser Ebene mit der Radonkugel von $\mathbf{S}(\lambda)$ bildet einen Kreis mit dem Radius

$$r = |\mathbf{r}| = \left| \xi_p \mathbf{n}_{\xi_p} \right|. \quad (7.139)$$

Also liefern nur Radonwerte auf diesem Kreis Beiträge zur Rekonstruktion. Dies gilt für die Rekonstruktion aller Objektpunkte, die auf dem Strahl durch \mathbf{r} liegen. Genau das ist aber das Wesen der Rückprojektion. Entlang der ursprünglichen Projektion werden die gefilterten Projektionswerte zurückverschmiert.

Jetzt muss noch die endgültige Form der Filterung gefunden werden. Dazu findet man in Abbildung 7.40b, dass die Projektion des Kreises auf der Radonkugel auf den Detektor eine Ellipse liefert, deren größter Durchmesser $\|\mathbf{P} - \mathbf{O}\|$ ist. Ein beliebiger Punkt $\xi \mathbf{n}_\xi$ auf der Radonkugel trifft auf dem Detektor den Punkt τ unter dem Winkel α im Koordinatensystem des Detektors. In Gleichung (7.138) kann nun die Integration über den Kreis auf der Radonkugel durch eine Integration über die dazugehörige Ellipse auf dem Detektor ersetzt werden.

Man erhält so den Ausdruck

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \frac{FCD^2}{U^2} \left[\int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial p_{\gamma,g}(\xi, \lambda)}{\partial \xi} M(\lambda, \mathbf{n}_\xi) \left| \mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi \right| \cos(\kappa) d\alpha \right] d\lambda, \quad (7.140)$$

wobei die erste Ableitung der Radontransformierten durch die von *Grangeat* gefundene Behandlung der Detektorwerte

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma,g}(\xi, \lambda) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta) \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma,g}(\sigma, \tau(\xi)), \lambda \} d\sigma \quad (7.141)$$

ersetzt werden muss.

Das innere Integral in Gleichung (7.140) stellt eine zweidimensionale gefilterte Rückprojektion in der Detektorebene dar. Das äußere Integral ist eine mit dem quadratischen Abstand zwischen Quelle und zu rekonstruierendem Punkt gewichtete, dreidimensionale Rückprojektion der Werte aus dem inneren Integral. Das Schema 10 fasst die exakte Rückprojektion nach *Defrise* und *Clack* [Def94] noch einmal zusammen.

Schema 10: Exakte Rekonstruktion durch Rückprojektion in Kegelstrahlgeometrie

1. Berechnung der radialen Ableitung der Radontransformierten nach Schema 9

$$\mathcal{R}'(f(\tau, \alpha, \lambda)) = \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, g}(\xi, \lambda) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta) \mathbf{X}^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)), \lambda \} d\sigma \quad (7.141)$$

2. Gewichtung der Ableitung der Radontransformierten

$$\mathcal{R}'_w(f(\tau, \alpha, \lambda)) = \frac{\partial p_{\gamma, g}(\xi, \lambda)}{\partial \xi} M(\lambda, \mathbf{n}_\xi) \left| \mathbf{S}'(\lambda)^T \cdot \mathbf{n}_\xi \right| \cos(\kappa) \quad (7.142)$$

3. Ableitung in Richtung der radialen Detektorvariablen τ

$$\mathcal{R}''_w(f(\tau, \alpha, \lambda)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{R}'_w(f(\tau, \alpha, \lambda)) \quad (7.143)$$

4. Zweidimensionale gefilterte Rückprojektion in der Detektorebene

$$h_\lambda(a, b) = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \mathcal{R}''_w(f(\tau, \alpha, \lambda)) d\alpha \quad (7.144)$$

5. Dreidimensionale gewichtete Rückprojektion

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda} \frac{FCD^2}{U^2} h_\lambda(a, b) d\lambda \quad (7.145)$$

7.5 Approximative Rekonstruktionen in Kegelstrahlgeometrie

Die exakten Verfahren des vorangegangenen Abschnitts gehen von einem vollständigen Satz von Radondaten aus. Die Aufnahme vollständiger Radontransformierter stellt, wie in Abschnitt 7.3.5 dargestellt wurde, aber gewisse Bedingungen an die Quellentrajektorie. Insbesondere gibt es in der häufig realisierten, kreisförmigen Trajektorie so genannte Schattenbereiche, in denen keine Radondaten vorliegen.

7.5.1 Fehlende Daten im 3D-Radonraum

Im Prinzip ist eine Rekonstruktion des Objektes im dreidimensionalen Raum möglich. Dazu sind lediglich die Verfahren der zweidimensionalen Rekonstruktion entsprechend zu erweitern. In Kapitel 6.6 wurde gezeigt, dass die Fächerstrahlgeometrie auch kein Hindernis ist, eine exakte Rekonstruktion zu erhalten, sofern man eine entsprechende Koordinatentransformation vornimmt. In Abschnitt 7.4.2 wurde das Verfahren von *Grangeat* vorgestellt, das einen wesentlichen Beitrag zur Lösung des Inversionsproblems in Kegelstrahlgeometrie darstellt. In der Praxis ergeben sich aber Probleme der Messbarkeit eines vollständigen Satzes von Punkten im Radonraum, die in diesem Abschnitt dargelegt werden.

In Abbildung 7.41 ist die Kegelstrahlgeometrie im Schnitt der x - y -Ebene schematisch dargestellt. Für eine kreisförmige Trajektorie der Röntgenquelle, die in der x - y -Ebene liegt, lassen sich alle Objektpunkte der Ebene im Ortsraum exakt rekonstruieren. Der zu einem Punkt im Ortsraum gehörende vollständige Satz von Punkten im Radonraum liegt in der polaren Darstellung auf Kreisen, deren Durchmesser den entsprechenden Punkt im Ortsraum und den Ursprung der x - y -Ebene verbindet. Für ein kompaktes Objekt im Raum ist der Radonraum mit den Kreisen daher lückenlos gefüllt.

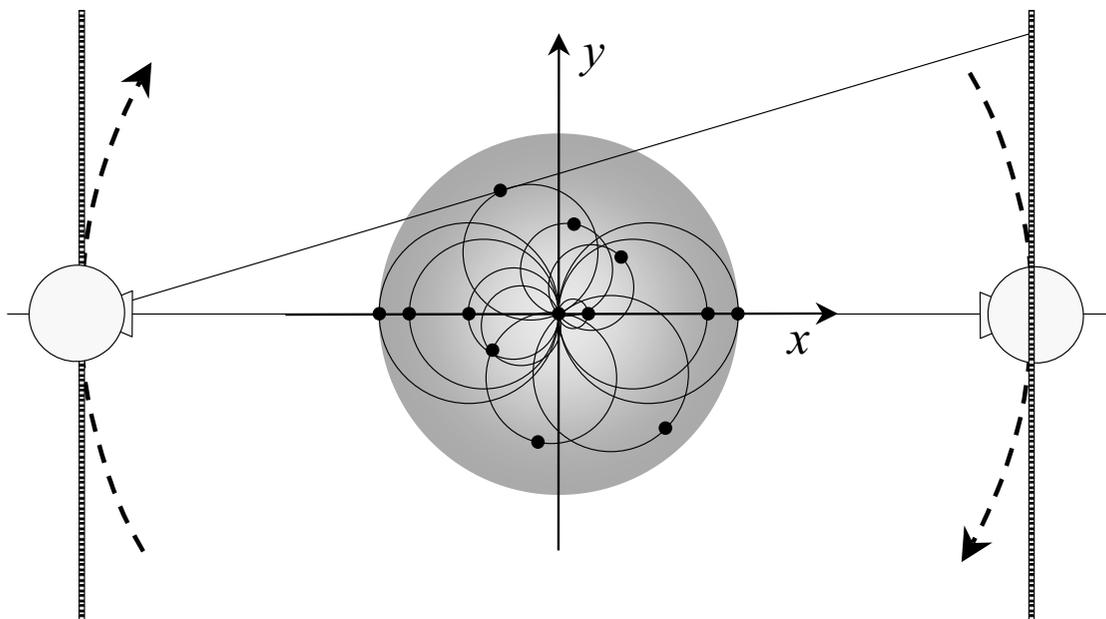


Abb. 7.41: Die kreisförmige Trajektorie der Röntgenquelle (gestrichelt angedeutete Linie) liege in der x - y -Ebene. Dann liefern die Schnitte der Integrationsflächen im Raum gerade die Integrationslinien, die man aus dem zweidimensionalen Rekonstruktionsproblem kennt.

Abbildung 7.42 links zeigt, dass die Kreise im polar dargestellten Radonraum geometrisch auf den Satz von Thales zurückzuführen sind. In Abbildung 7.42 rechts ist der polare Radonraum für das in den vorhergehenden Kapiteln verwendete Abdomenschnittbild gegeben. Deutlich sind die entsprechenden Kreise zu erkennen.

Diese Kugeln ergeben sich ebenfalls nach dem Satz von Thales und zwar als Rotationskörper der Kreise um deren Durchmesserlinie zwischen Ursprung und Rekonstruktionspunkt im Ortsraum. Abbildung 7.43 links zeigt die Lage der messbaren, dreidimensionalen Radonwerte von Punkten auf der x -Achse. Die Messbarkeit bezieht sich wieder auf eine einzelne, zyklische Bahn der Röntgenquelle in der x - y -Ebene.

Liegen Punkte außerhalb der x - y -Ebene, dann sind nicht mehr alle Punkte im dreidimensionalen Radonraum durch diese einfache Quellentrajektorie messbar. Für eine exakte Rekonstruktion eines Punktes gilt aber folgende Bedingung. Die Radonwerte aller Punkte, deren korrespondierende Integrationsflächen \mathbf{A} das Objekt schneiden, müssen für eine exakte Rekonstruktion bekannt sein. Die so genannte *Tuy-Smith-Vollständigkeitsbedingung* [Tuy83] besagt, dass eine exakte Rekonstruktion dann möglich ist, wenn alle Flächen, die das Objekt schneiden, die Bahn der Röntgenquelle wenigstens einmal schneiden.

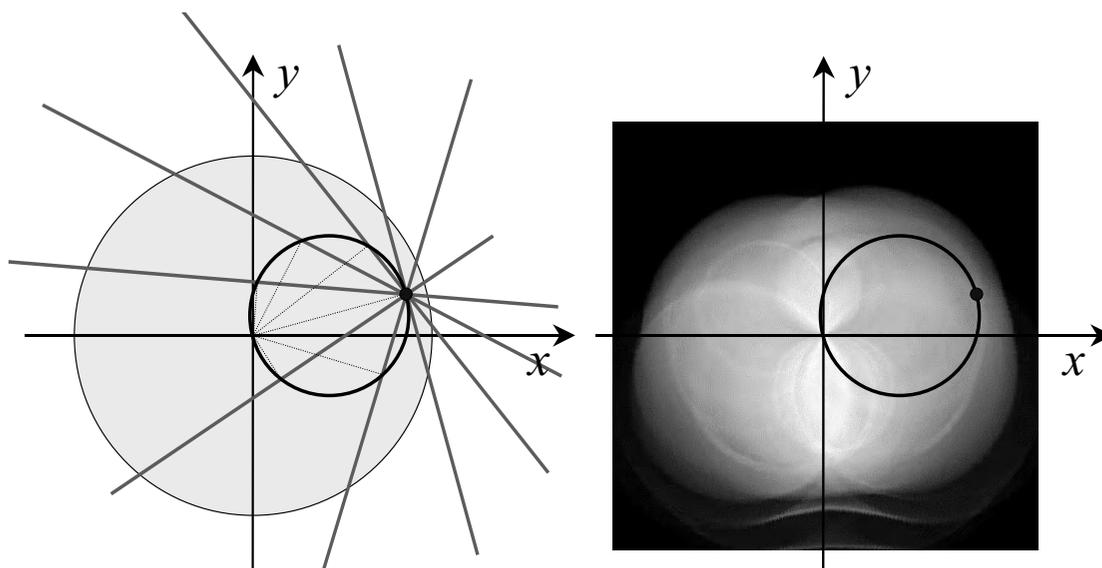


Abb. 7.42: Links: Da man jeden Punkt aus allen Richtungen (von 0° bis 180°) in der Rekonstruktionsebene durchleuchten haben muss, ergeben sich nach dem Satz von Thales im Radonraum Kreise. Rechts: Für das CT-Schnittbild des Abdomen ist der Radonraum in Polarkoordinaten gegeben.

Die Kreise sind aber schon Ergebnis des zweidimensionalen Radonraumes gewesen. Hier soll nun das dreidimensionale Rekonstruktionsproblem behandelt werden. Legt man den Überlegungen statt der Integrationslinien daher wieder die Integrationsflächen zugrunde, so ergeben sich die Kreise in der x - y -Ebene als Schnitte entsprechender Kugeloberflächen im dreidimensionalen Radonraum.

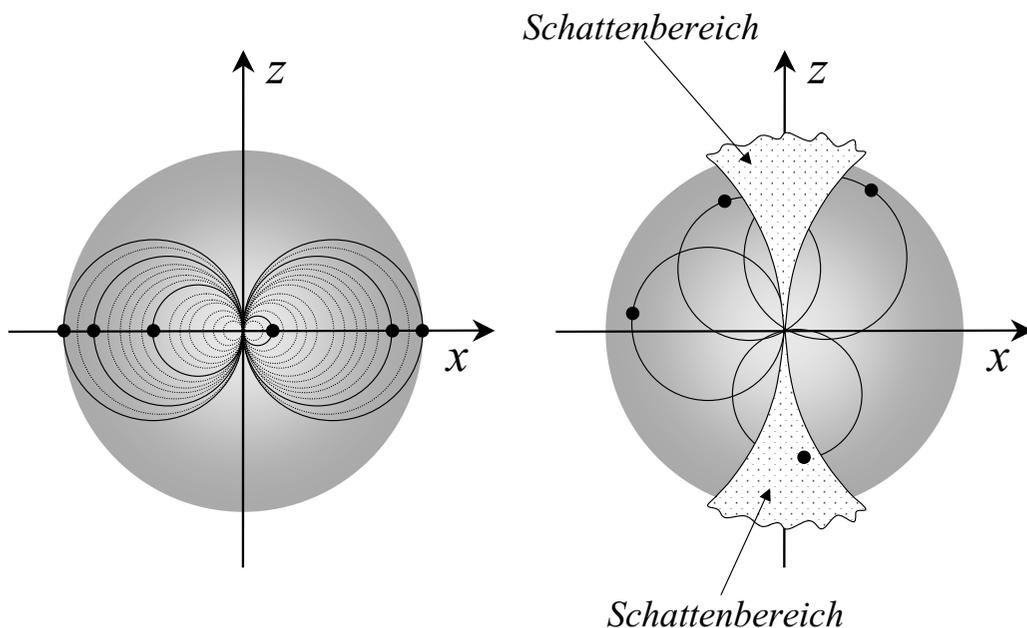


Abb. 7.43: Lage der messbaren Radonwerte im Schnitt der x - z -Ebene. Links: Da für Punkte in der x - y -Ebene der Radonraum vollständig ist und sich für jeden einzelnen Punkt die entsprechenden Radonwerte auf einer Kugeloberfläche befinden, ergeben sich im Schnitt wieder Kreise. Rechts: Für Punkte ober- und unterhalb der x - y -Ebene fehlen Daten im dreidimensionalen Radonraum. Der Bereich fehlender Daten wird Schattenbereich genannt.

Da die Röntgenquelle in der Fläche \mathbf{A} liegen muss, um deren Integral zu messen, macht dies auch intuitiv Sinn. Punkte im Radonraum, die durch die ebene zyklische Quellentrajektorie nicht gemessen werden können liegen im so genannten Schattenbereich, der in Abbildung 7.43 rechts dargestellt ist.

Abbildung 7.44 zeigt noch einmal Punkte, für die die *Tuy-Smith*-Bedingung erfüllt ist. Natürlich liegen solche Punkte in der x - y -Ebene. Der kegelförmige Röntgenstrahl durchleuchtet ein Kugelobjekt. Wenn nur Punkte innerhalb der x - y -Ebene einen vollständigen Satz von Radonwerten besitzen – in Abbildung 7.44 sind die äußersten Punkte mit einem vollständigen Satz von Radonwerten auf der vorderen Hemisphäre des Kugelobjektes dargestellt – dann ist die Kugel durch diese Messung nicht exakt rekonstruierbar.

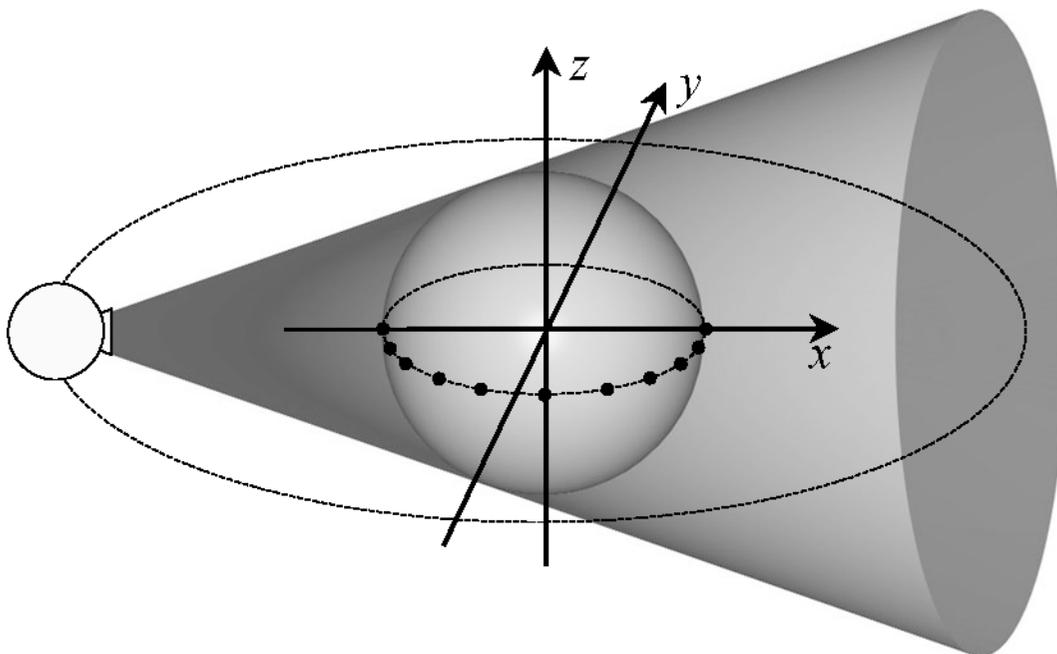


Abb. 7.44: In der Kegelstrahlgeometrie liegen die Objektpunkte, für die der Radonraum vollständig ist, innerhalb der Ebene, die durch die Quellentrajektorie definiert ist. Für ein kugelförmiges Objekt sind das alle Punkte innerhalb des Kreises, der sich als Schnitt der Trajektorienebene durch die Kugel ergibt. Die äußersten Punkte mit einem vollständigen Satz von Radonwerten sind auf der vorderen Hemisphäre des Kugelobjektes dargestellt.

Abbildung 7.45 zeigt schematisch das Zustandekommen des Schattenbereiches. Liegen Punkte $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ außerhalb der x - y -Ebene, dann ist es geometrisch nicht mehr möglich, für alle Projektionswinkel γ, ϑ und Ursprungsabstände ξ die Projektion $p_{\gamma, \vartheta}(\xi)$ zu messen. Innerhalb des Schattenbereiches liegt die Röntgenquelle nämlich immer unterhalb des Horizontes der Integrationsfläche \mathbf{A} . Das ist gerade die *Tuy-Smith*-Vollständigkeitsbedingung. Die geometrisch im Prinzip messbaren Punkte ergeben sich innerhalb eines Torus. Abbildung 7.46 zeigt die Füllung des Radonraumes für den zyklischen Quellenorbit in der Ebene. Der entstehende Torus enthält alle theoretisch messbaren Punkte im Radonraum. Praktisch sind mit einem Detektor endlicher Ausdehnung auch innerhalb des Torus nicht alle Punkte des Radonraumes messtechnisch zugänglich.

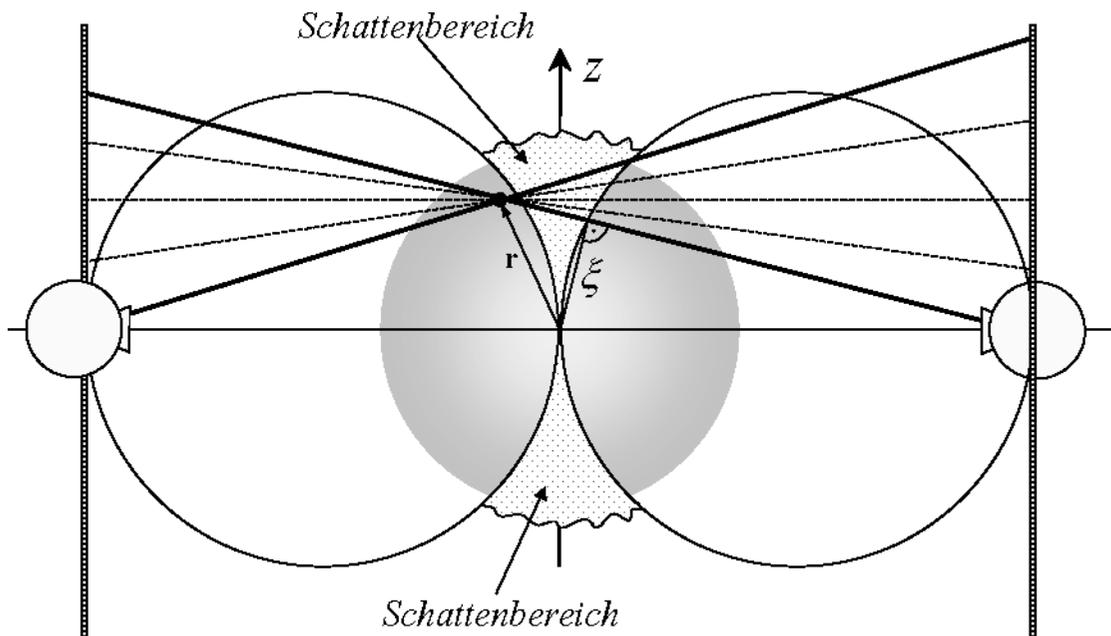


Abb. 7.45: Im Radonraum des zyklischen Quellenorbits in einer Ebene gibt es Punkte, für die die erforderliche Integration über die Fläche nicht möglich ist. Für die zugeordneten Punkte im Ortsraum ist eine fehlerfreie Rekonstruktion dann nicht möglich. Es fehlen die Radonwerte, für die die Integrationsfläche den Quellenorbit nicht schneidet. Der fehlende Bereich im Radonraum wird Schattenbereich genannt.

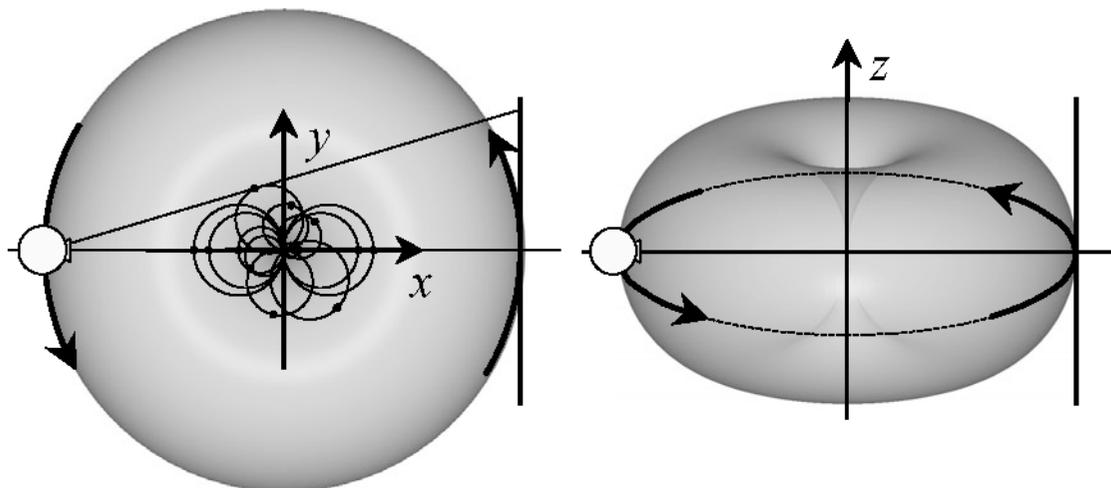


Abb. 7.46: Im Radonraum des zyklischen Quellenorbits liegen die theoretisch messbaren Punkte innerhalb eines Torus. Praktisch sind dennoch nicht alle Punkte des Radonraumes mit einem Detektor endlicher Ausdehnung messbar.

Quellenorbits, die die Forderung von *Tuy-Smith* erfüllen, sind in Abbildung 7.47 dargestellt. In Abbildung 7.47a ist noch einmal zum Vergleich die zyklische, ebene Trajektorie der

Röntgenquelle gezeigt, die den oben besprochenen Schattenbereich im Radonraum nach sich zieht. In Abbildung 7.47b ist eine der Möglichkeiten gezeigt, den Schattenbereich mit Radondaten aufzufüllen. Hierzu verwendet man zwei zyklisch-kreisförmige Quellentrajektorien, die in zueinander parallelen Ebenen liegen und mit einer linearen Trajektorie verbunden sind. Abbildung 7.47c zeigt zwei senkrecht zueinander liegende, ebenfalls zyklisch-kreisförmige Quellentrajektorien. Auch hier wird die Bedingung von *Tuy-Smith* erfüllt, jedoch kann man sich leicht überlegen, dass im Falle des medizinischen Einsatzes der Computertomographie diese Möglichkeit ausscheidet, da der Patient im Quellenweg liegt. Realisiert werden heute typischerweise die Kegelstrahl-Helixbahnen, die den Radonraum in einer kontinuierlichen Bewegung abtasten. Diese Bahn ist in Abbildung 7.47d skizziert. Die gezeigten Trajektorien sind nicht die einzigen, die derzeit getestet werden. Ein weiterer Ansatz mit einem zentralen Kreisorbit und einer einzelnen Zusatzlinie findet sich bei *W.-T. Lin* [Lin99]. Bei allen Ideen geht es immer darum, möglichst effektiv den Schattenbereich den Radonraumes zu füllen.

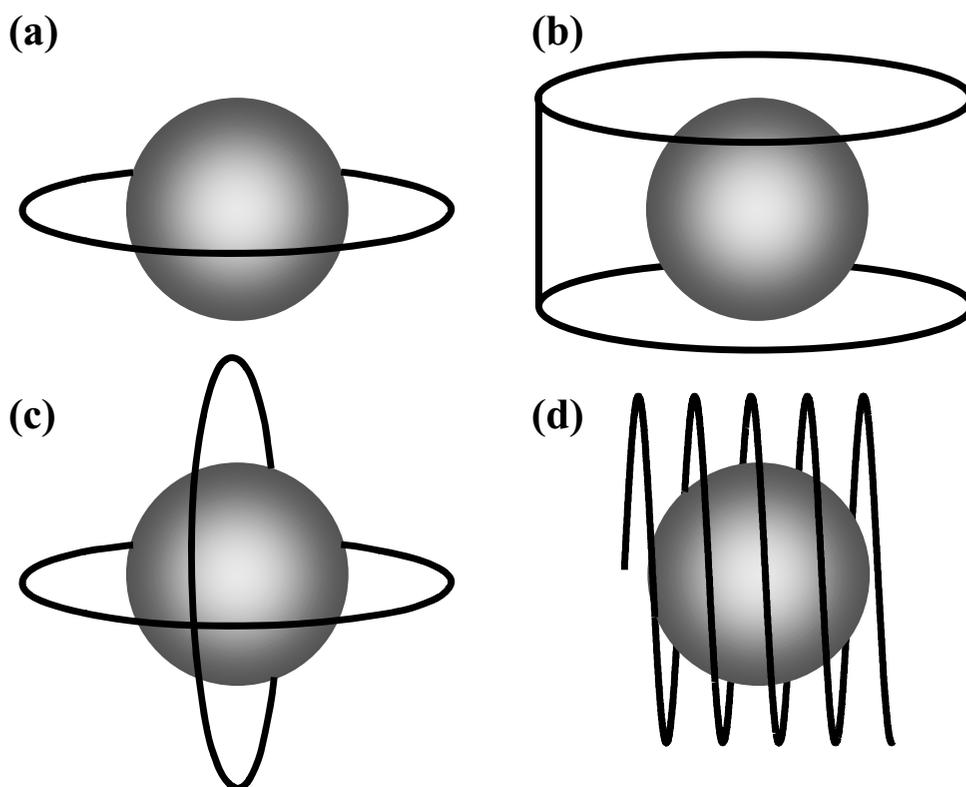


Abb. 7.47: Orbits der Kegelstrahlröntgenquelle, die den Radonraum abtasten. Außer der oben besprochenen, einfachen zyklischen Bahn in (a) erfüllen alle anderen Trajektorien die Vollständigkeitsbedingung von *Tuy-Smith*. Die Kegelstrahl-Helixbahn ist heute in modernen medizinischen Computertomographen realisiert.

7.5.2 FDK-Kegelstrahlrekonstruktion für planare Detektoren

Die in Kapitel 7.4 dargestellten Verfahren der dreidimensionalen Rekonstruktion arbeiten mit der Annahme, dass ein vollständiger Satz von Radondaten vorliegt. Es wurde aber im vorangegangenen Abschnitt dargestellt, dass die *Tuy-Smith*-Vollständigkeitsbedingung nicht für alle Quellentrajektorien erfüllt ist. Insbesondere liefert die in der technischen Realisation

beliebte kreisförmige Trajektorie in der Kegelstrahlgeometrie keinen vollständigen Satz von Radondaten. Glücklicherweise gibt es aber approximative Verfahren, die auch mit unvollständigen Daten dieser Art umgehen können.

Am weitesten verbreitet ist die Rekonstruktionsidee von *L. A. Feldkamp, L. C. Davis und J. W. Kress* (FDK) aus dem Jahr 1984 [Fel84], die eine ableitungsfreie Methode darstellt. Die so genannte FDK-Kegelstrahlrekonstruktion ist eine Approximation des exakten Rekonstruktionsproblems, die für den Bereich technischer Untersuchungen entwickelt wurde⁴⁹. Da in diesem Anwendungsbereich planare Detektoren verwendet wurden, haben *Feldkamp, Davis und Kress* die Näherung zunächst nur für diese Geometrie vorgestellt. Abbildung 7.48 zeigt schematisch die Geometrie der Abtasteinheit.

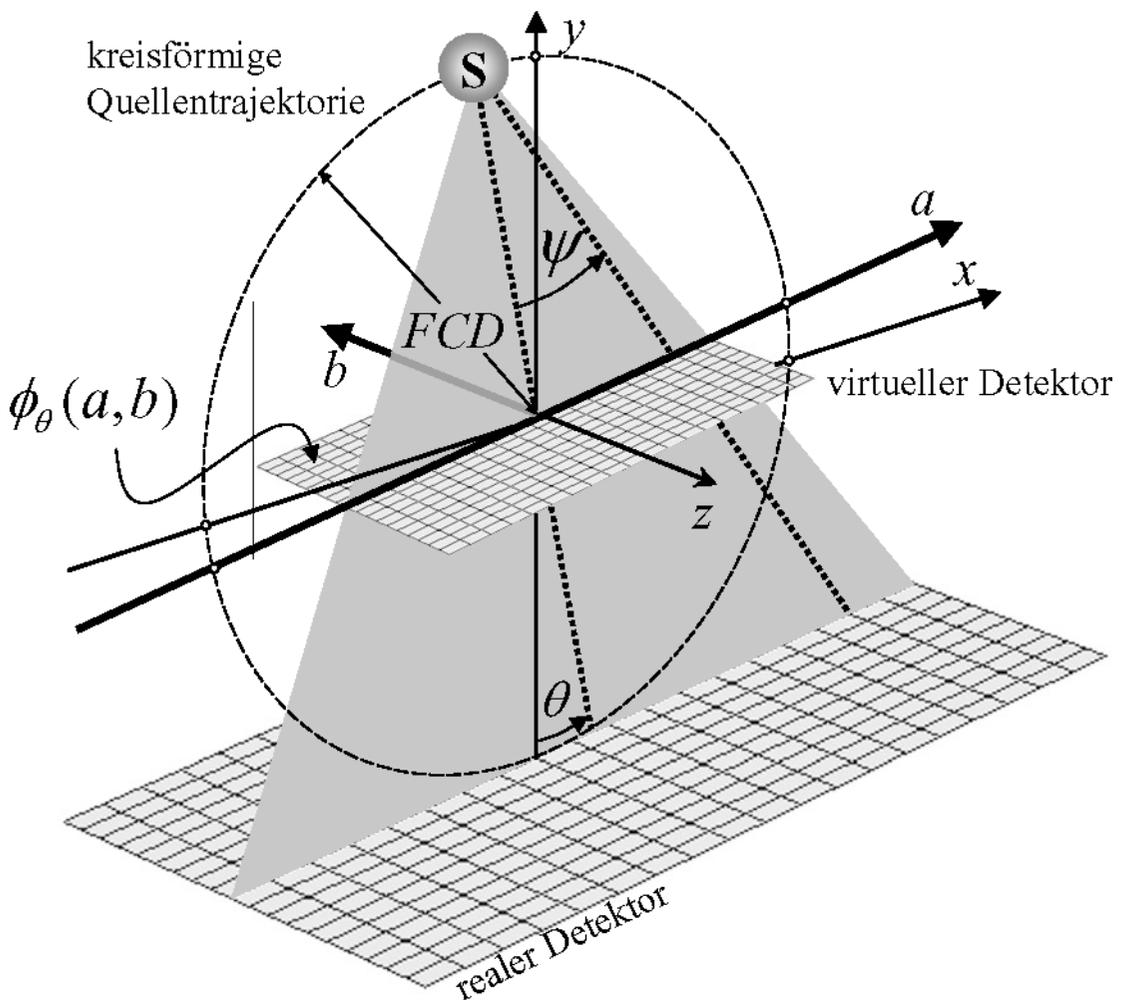


Abb. 7.48: Kegelstrahlbeleuchtung eines planaren Detektors. Die Röntgenquelle dreht sich auf einem Radius FCD (Focus-Center-Distanz). Im Isozentrum der Rotation des Abtastsystems ist ein virtueller Detektor positioniert. $\phi_\theta(a,b)$ sind die gemessenen (virtuellen) Projektionswerte. Der Winkel θ zwischen der y -Achse und dem Zentralstrahl des Kegels bzw. der x -Achse und der a -Achse definiert den Projektionswinkel des Systems.

⁴⁹ *Feldkamp, Davis und Kress* haben das Verfahren in den Forschungslaboratorien von Ford-Motors für Materialuntersuchungen entwickelt.

Ausgangspunkt der FDK-Rekonstruktion ist die Idee, jede fächerförmige Fläche im Kegelstrahl, die durch eine Detektorzeile b und die Röntgenquelle definiert ist, unabhängig voneinander so zu behandeln als hätte man hier eine zweidimensionale Fächerprojektion wie in Abschnitt 6.6.4 vorliegen. In Abbildung 7.49 ist eine solche Fläche eingezeichnet. Gerade weil bei der planaren Detektorgeometrie eine gerade Linie auf dem Detektor einer Integrationsfläche (grau schattiert) zuzuordnen ist, darf bei der FDK-Rekonstruktion zeilenweise auf den Detektor zugegriffen werden.

Betrachtet man das Kegelstrahlprojektionssystem unter einem festen Projektionswinkel θ , so ist der einzelne Projektionsfächer innerhalb des Kegels mathematisch nicht anders zu behandeln als der Fächer in Abschnitt 6.6.4. Aufgrund der Angulation κ_a des Fächers aus der x - y -Ebene heraus ändern sich lediglich die Abstandsverhältnisse. Insofern liegt es nahe, dass Gleichung (6.147) nur kleinere Erweiterungen erfahren muss, die sich auf diese neuen Abstandverhältnisse beziehen. Die gefilterte Rückprojektion ist dann in Bezug auf einen einzelnen, festen Winkel, unter dem man die Projektion zunächst statisch betrachtet, exakt durchführbar. Wie in Abschnitt 6.6.4 legt man auch hier einen virtuellen Detektor in das Isozentrum des Systems. Dadurch lassen sich die geometrischen Projektionsverhältnisse mathematisch leichter darstellen.

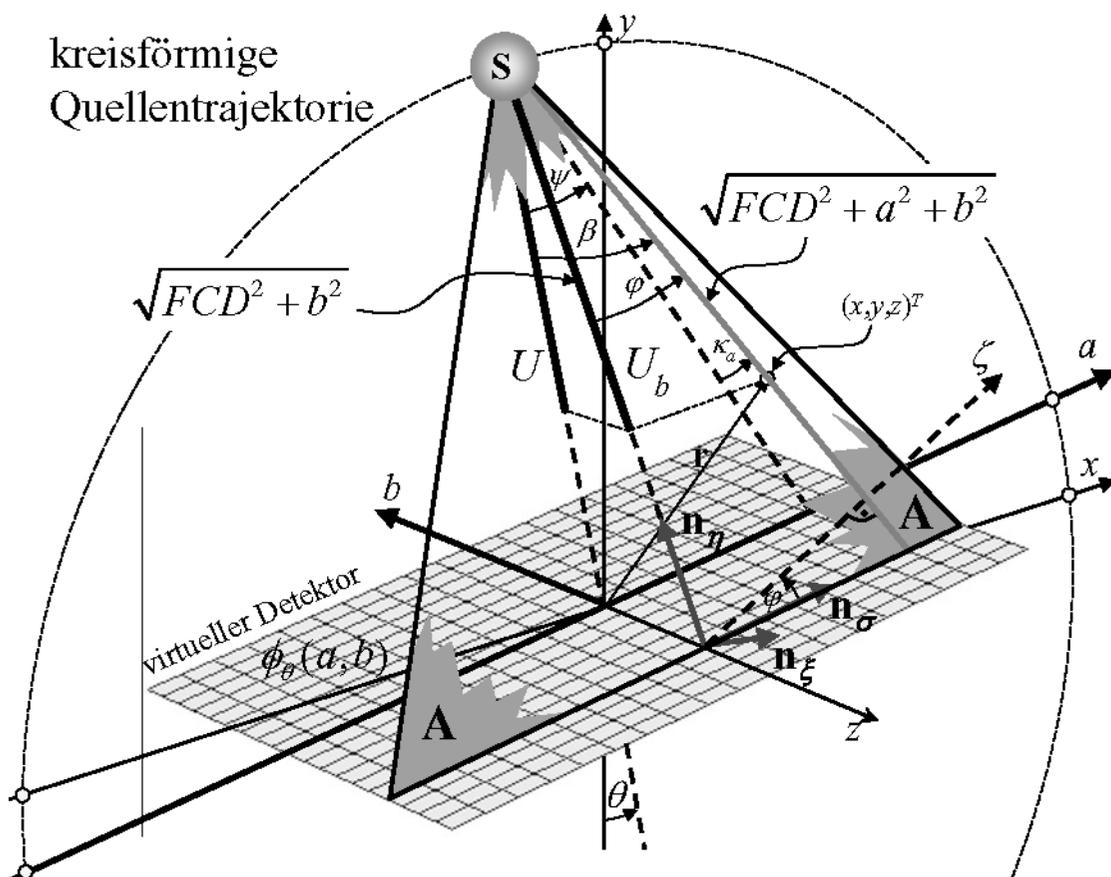


Abb. 7.50: Abstandverhältnisse in Bezug auf den virtuellen Detektor im Isozentrum des Abtastsystems. Weil bei der planaren Detektorgeometrie eine gerade Linie einer Integrationsfläche (transparente Ebene) zuzuordnen ist, darf bei der FDK-Rekonstruktion zeilenweise auf den Detektor zugegriffen werden. Die Einheitsvektoren \mathbf{n}_σ , \mathbf{n}_η und \mathbf{n}_ξ definieren die betrachtete Fächerfläche, dabei ist $\mathbf{n}_\xi = \mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{n}_\eta$ die Flächennormale von \mathbf{A} .

Eine Übertragung auf die reale Detektorfläche, ist mit Hilfe des Strahlensatzes zu bewerkstelligen. Aus Abbildung 7.50 kann man ablesen, dass die Projektion eines Punktes $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ im Röntgenkegel auf die Detektorposition (a, b) von dem Fächerwinkel ψ über

$$a = FCD \tan(\psi) \quad (7.147)$$

und dem Kegelwinkel κ_a über

$$b = \sqrt{FCD^2 + a^2} \tan(\kappa_a) \quad (7.148)$$

abhängt. In diesem System, rotiert die a - b -Detektorfläche um die z -Achse, die die axiale Richtung des ruhenden Patientenkoordinatensystems beschreibt.

Die kleine Hauptachse des Detektors b ist in die negative z -Richtung gelegt, damit das Detektorsystem ein Rechtssystem bleibt. Der Winkel θ zwischen der y -Achse und dem Zentralstrahl des Kegels bzw. der x -Achse und der a -Achse definiert den Projektionswinkel des Systems. FCD bezeichnet wieder die Focus-Center-Distanz. Man kann ein neues Koordinatensystem definieren, dessen Basisvektoren \mathbf{n}_σ , \mathbf{n}_η und \mathbf{n}_ξ in Abbildung 7.50 eingezeichnet sind. Dabei zeigt \mathbf{n}_σ in die Richtung der langen a -Achse des Detektors. \mathbf{n}_σ ist also um den Winkel θ gegenüber der x -Achse gedreht. Dies wird mit der orthogonalen Matrix Σ bewerkstelligt. \mathbf{n}_η zeigt in Richtung der Quelle entlang des zentralen Strahls des angulierten Fächers und $\mathbf{n}_\xi = \mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{n}_\eta$ in Richtung der Fächerflächennormalen von \mathbf{A} . \mathbf{n}_ξ ist also um den Winkel

$$\kappa_0 = \arctan\left(\frac{b}{FCD}\right) \quad (7.149)$$

gegenüber der z -Achse, also um die \mathbf{n}_σ -Achse gedreht. Dies entspricht einer Multiplikation mit der orthogonalen Matrix Ξ . Das heißt, insgesamt ergibt sich die Transformation

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{p} = \Xi(\Sigma \mathbf{r} - \mathbf{b}) = \Xi \left(\Sigma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right). \quad (7.150)$$

Damit kann der zu rekonstruierende Punkt in den neuen Koordinaten mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\kappa_0) & \sin(\kappa_0) \\ 0 & -\sin(\kappa_0) & \cos(\kappa_0) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \cos(\theta) & y \sin(\theta) & 0 \\ -x \sin(\theta) & y \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\kappa_0) & \sin(\kappa_0) \\ 0 & -\sin(\kappa_0) & \cos(\kappa_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ z + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ -x \sin(\theta) \cos(\kappa_0) + y \cos(\theta) \cos(\kappa_0) + (z + b) \sin(\kappa_0) \\ x \sin(\theta) \sin(\kappa_0) - y \cos(\theta) \sin(\kappa_0) + (z + b) \cos(\kappa_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.151)$$

ausgedrückt werden. Umgekehrt findet man Punkte \mathbf{p} in dem ursprünglichen Koordinatensystem durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{\Sigma}^T (\mathbf{\Xi}^T \mathbf{p} - \mathbf{b}), \quad (7.152)$$

das heißt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\kappa_0) & -\sin(\kappa_0) \\ 0 & \sin(\kappa_0) & \cos(\kappa_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \cos(\kappa_0) - t \sin(\kappa_0) \\ s \sin(\kappa_0) + t \cos(\kappa_0) - b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos(\theta) - \sin(\theta)(s \cos(\kappa_0) - t \sin(\kappa_0)) \\ r \sin(\theta) + \cos(\theta)(s \cos(\kappa_0) - t \sin(\kappa_0)) \\ s \sin(\kappa_0) + t \cos(\kappa_0) - b \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.153)$$

Da man sich nur für die Punkte innerhalb der Integrationsfläche \mathbf{A} interessiert, die durch \mathbf{n}_σ und \mathbf{n}_γ aufgespannt wird, darf hier $t = 0$ gesetzt werden. Damit bewegt man sich nur noch in der Fächerstrahlfläche, in der durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) - s \sin(\theta) \cos(\kappa_0) \\ r \sin(\theta) + s \cos(\theta) \cos(\kappa_0) \\ s \sin(\kappa_0) - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) - s \sin(\theta) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} \\ r \sin(\theta) + s \cos(\theta) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} \\ s \frac{b}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} - b \end{pmatrix} \quad (7.154)$$

jedem Punkt $(r,s)^T$ der korrespondierende Punkt $(x,y,z)^T$ im Patientenkoordinatensystem zugeordnet wird.

Völlig analog zu der Vorgehensweise in Abschnitt 6.6.4 legt man für das hier nun um den Winkel κ_0 angulierte Fächer wieder die Parallelstrahlgeometrie für den zu rekonstruierenden Punkt \mathbf{p} zugrunde. Man erhält innerhalb dieses Fächers des Kegels so die virtuelle Parallelprojektion $p_\gamma(\zeta)$ unter dem Projektionswinkel γ an der Detektorposition ζ . Die virtuelle ζ -Koordinate ist in den Abbildungen 7.50 und 7.51 gestrichelt eingezeichnet. Sie läuft durch den in Bezug auf das Detektorkoordinatensystem um b verschobenen Ursprung innerhalb des betrachteten Fächers und bildet zum Röntgenstrahl durch den Punkt \mathbf{p} einen rechten Winkel.

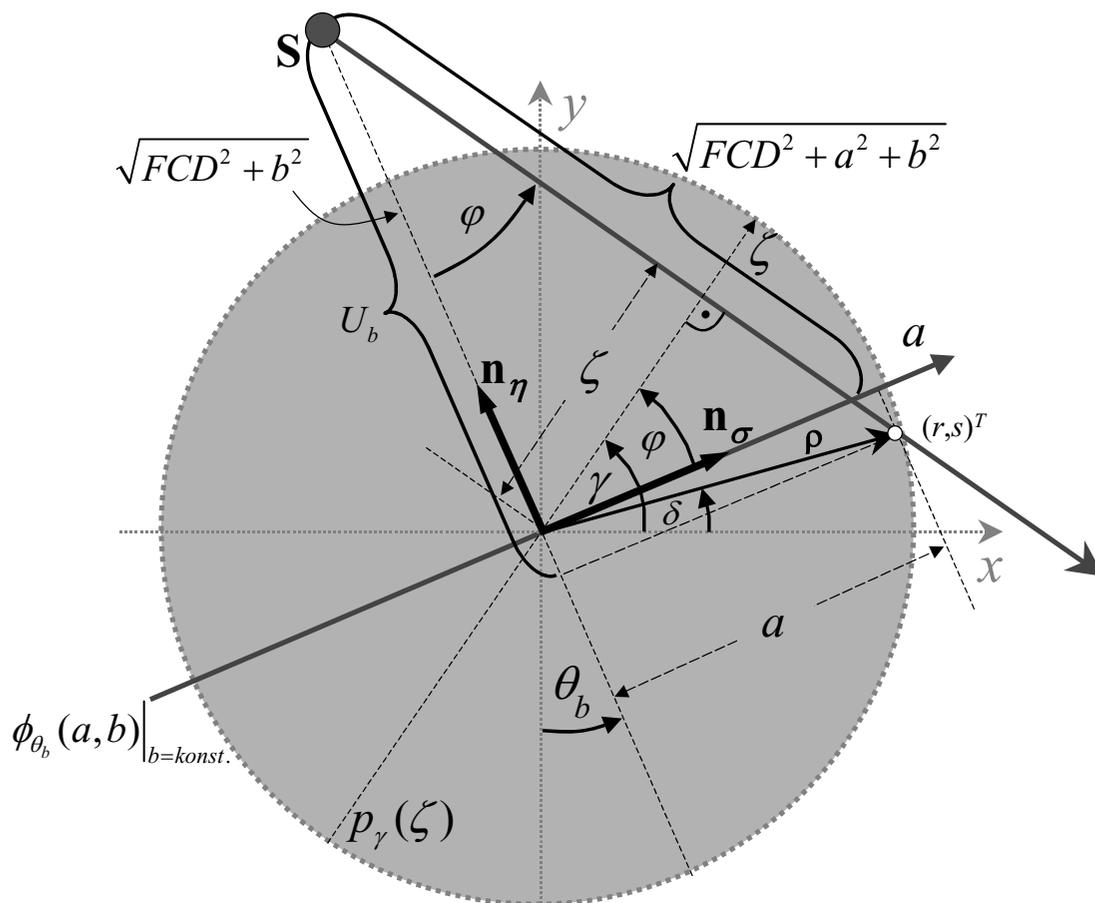


Abb. 7.51: Geometrie innerhalb der angulierten Fächerstrahlebene. Als Bezugssystem wird die Projektion des ruhenden Patientenkoordinatensystems verwendet. Das ist aufgrund der projektiven Geometrie nicht ganz richtig. Man kann es aber dennoch verwenden, da nur ein ruhendes Bezugssystem benötigt wird, in dem um den \mathbf{n}_ξ -Einheitsvektor gedreht werden kann. Da die Rückprojektion ohnehin über den vollen Winkel $\theta_b = [0, 2\pi]$ läuft, ist das Ergebnis unabhängig vom genauen Startwinkel. Die Winkel φ , δ und γ werden nur relativ zum Winkel θ_b benötigt und beziehen sich nicht auf das tatsächliche (x, y, z) -Koordinatensystem. Der Zusammenhang zwischen θ_b und θ wird später erläutert.

Der Zusammenhang mit den Fächerstrahlkoordinaten ergibt sich analog zu den Gleichungen (6.66) und (6.68) hier nun durch

$$\zeta = a \cos(\varphi) = a \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.155)$$

und

$$\gamma = \theta_b + \varphi = \theta_b + \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2 + b^2}}\right). \quad (7.156)$$

In Abbildung 7.51 sind die neuen Koordinaten eingezeichnet. An dieser Stelle hat man das Rekonstruktionsproblem auf die zweidimensionale Fächerstrahlgeometrie zurückgeführt (vergleiche Abbildung 6.23). Daher kann die Gleichung der gefilterten Rückprojektion (6.86) in der Fächerstrahlenebene verwendet werden, die in den Abschnitten 6.6.3 und 6.6.4 bereits eingesetzt wurde. Mit den neuen Koordinatenbezeichnungen lautet Gleichung (6.86) hier

$$f(r, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(\zeta) g(\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{n}_\zeta - \zeta) d\zeta \right) d\gamma, \quad (7.157)$$

wobei der Zusammenhang mit der x -, y -, und z -Komponente von \mathbf{r} später durch (7.154) herzustellen ist. Wieder muss der Übergang zur Fächergeometrie erfolgen, das heißt, man vollzieht die Koordinatentransformation

$$(\zeta, \gamma) \rightarrow (a, \theta_b). \quad (7.158)$$

Wie schon häufiger gezeigt, muss das neue Flächenelement bei der Integration mit der Jacobi-Funktional-Determinante multipliziert werden. Das heißt, das Flächenelement $d\zeta d\gamma$ ist in den neuen Koordinaten durch $J da d\theta_b$ gegeben, wobei J durch

$$J \equiv \frac{\partial(\zeta, \gamma)}{\partial(a, \theta_b)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\zeta}{\partial a} & \frac{\partial\gamma}{\partial a} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial\theta_b} & \frac{\partial\gamma}{\partial\theta_b} \end{vmatrix} \quad (7.159)$$

berechnet wird. Das direkte Einsetzen der Transformationsgleichungen (7.155) und (7.156) ergibt

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \left(a \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)}{\partial a} & \frac{\partial \left(\theta_b + \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} \right) \right)}{\partial a} \\ \frac{\partial \left(a \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)}{\partial\theta_b} & \frac{\partial(\theta_b + \varphi)}{\partial\theta_b} \end{vmatrix} \quad (7.160)$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)^3 & \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{FCD^2 + a^2 + b^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)^3 = \cos(\varphi)^3$$

Das heißt, bei der Koordinatentransformation (7.158) muss das infinitesimale Flächenelement durch

$$d\zeta d\gamma \rightarrow \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)^3 da d\theta_b \quad (7.161)$$

ersetzt werden. Verwendet man außerdem analog zu Gleichung (6.95) den Zusammenhang

$$\boldsymbol{\rho}^T \cdot \mathbf{n}_\zeta = \rho \cos(\gamma - \delta) \quad (7.162)$$

für das Skalarprodukt zwischen dem zu rekonstruierenden Punkt in der Fächerfläche und dem Einheitsvektor in Richtung der virtuellen Achse eines gedachten Parallelstrahldetektors, so erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} f(r, s) = & \frac{1}{2} \int_{-\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2+b^2}}\right)}^{2\pi - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2+b^2}}\right)} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} p_{\theta_b+\psi} \left(a \frac{\sqrt{FCD^2+b^2}}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right) \cdot \dots \right. \\ & \dots \cdot g \left[\rho \cos \left(\theta_b + \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2+b^2}} \right) - \delta \right) - \frac{a\sqrt{FCD^2+b^2}}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right] \dots \quad (7.163) \\ & \left. \dots \cdot \left(\frac{\sqrt{FCD^2+b^2}}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right)^3 da \right\} d\theta_b \end{aligned}$$

für die gefilterte Rückprojektion in den neuen Koordinaten. In diesem Ausdruck lassen sich folgende Vereinfachungen sofort umsetzen. Die Integrationsgrenzen der neuen Winkelkoordinate θ_b mussten bei der Substitution entsprechend geändert werden. Da aber die Integration über den vollen Winkel 2π invariant gegenüber einer konstanten Phasenverschiebung ist, kann auch in der neuen Variablen von 0 bis 2π integriert werden. Weiterhin ist der Projektionswert $p_\gamma(\zeta)$ in den neuen Detektorvariablen sehr viel einfacher auszudrücken, denn es gilt durch die Koordinatentransformation

$$p_\gamma(\zeta) \rightarrow p_{\theta_b+\varphi} \left(a \frac{\sqrt{FCD^2+b^2}}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right) = \phi_{\theta_b}(a, b) \Big|_{b=\text{konst.}} \quad (7.164)$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck (7.163) zu

$$\begin{aligned} f(r, s) = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_{\theta_b}(a, b) g \left[\rho \cos \left(\theta_b + \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2+b^2}} \right) - \delta \right) - \frac{a\sqrt{FCD^2+b^2}}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right] \cdot \dots \right. \\ & \left. \dots \cdot \left(\frac{\sqrt{FCD^2+b^2}}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right)^3 da \right\} d\theta_b \quad (7.165) \end{aligned}$$

Nutzt man für die folgende Umformung des Argumentes der Funktion $g[\cdot]$ in Gleichung (7.165) die aus Abbildung 7.51 ablesbare Tatsache, dass

$$\varphi = \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{FCD^2+b^2}} \right), \quad (7.166)$$

dann kann mit dem Additionstheorem (6.94) das Argument von $g[\cdot]$ durch

$$\rho \cos(\theta_b + \varphi - \delta) - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} = \rho \cos(\theta_b - \delta) \cos(\varphi) - \rho \sin(\theta_b - \delta) \sin(\varphi) - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.167)$$

dargestellt werden. Mit

$$\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.168)$$

und

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.169)$$

lautet Gleichung (7.167)

$$\rho \cos(\theta_b + \varphi - \delta) - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} = \rho \cos(\theta_b - \delta) \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} + \dots \dots - \rho \sin(\theta_b - \delta) \frac{a}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}}. \quad (7.170)$$

So wie in Gleichung (6.104) betrachtet man nun aus der Detektorvariablen a die spezielle Position, die durch den Punkt (ρ, δ) und den Projektionswinkel θ_b festgelegt ist. Diese Detektorposition bezeichnet man mit a' , so dass

$$\tan(\varphi') = \left(\frac{a'}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} \right) = \frac{\rho \cos(\theta_b - \delta)}{\left(\sqrt{FCD^2 + b^2} + \rho \sin(\theta_b - \delta) \right)} \quad (7.171)$$

und weiter

$$a' = \sqrt{FCD^2 + b^2} \frac{\rho \cos(\theta_b - \delta)}{\left(\sqrt{FCD^2 + b^2} + \rho \sin(\theta_b - \delta) \right)}. \quad (7.172)$$

Damit formt man das Argument von $g[.]$, das in Gleichung (7.170) dargestellt ist, zu

$$\begin{aligned}
\rho \cos(\theta_b + \varphi - \delta) - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} &= \\
&= \left(\sqrt{FCD^2 + b^2} + \rho \sin(\theta_b - \delta) \right) \frac{a'}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} + \dots \\
&\dots - \rho \sin(\theta_b - \delta) \frac{a}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.173) \\
&= \left(\sqrt{FCD^2 + b^2} + \rho \sin(\theta_b - \delta) \right) \frac{a'}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} + \dots \\
&\dots - \left(\sqrt{FCD^2 + b^2} + \rho \sin(\theta_b - \delta) \right) \frac{a}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

um. Setzt man hier den Wert

$$U_b = \sqrt{FCD^2 + b^2} + \rho \sin(\theta_b - \delta) \quad (7.174)$$

ein, wobei U_b die Projektion von \mathbf{p} auf den Zentralstrahl in der angulierten $\mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{n}_\eta$ -Ebene ist, so erhält man

$$\begin{aligned}
\rho \cos(\theta_b + \varphi - \delta) - \frac{a\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} &= U_b \frac{a'}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} - U_b \frac{a}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.175) \\
&= (a' - a) \frac{U_b}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

so dass Gleichung (7.165) etwas übersichtlicher als

$$f(r, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_{\theta_b}(a, b) g \left[(a' - a) \frac{U_b}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right] \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)^3 da \right\} d\theta_b \quad (7.176)$$

geschrieben werden kann. Das innere Integral stellt wieder eine Faltung dar. Es sei daran erinnert, dass die Funktion g nach wie vor der räumliche Faltungskern der linearen Frequenzrampe ist, also

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q \xi} dq. \quad (7.177)$$

Wenn man hier die für die Fächerstrahlgeometrie mit linearem Detektor gewonnenen Argumente, also

$$g \left((a' - a) \frac{U_b}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q \left((a' - a) \frac{U_b}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)} dq \quad (7.178)$$

einsetzt und die Substitution

$$q' = q \frac{U_b}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \quad (7.179)$$

nutzt, dann erkennt man das Skalierungsverhalten

$$\begin{aligned} g\left((a'-a) \frac{U_b}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}}\right) &= \frac{FCD^2 + a^2 + b^2}{U_b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{2\pi i q (a'-a)} dq' \\ &= \frac{FCD^2 + a^2 + b^2}{U_b^2} g(a'-a) \end{aligned} \quad (7.180)$$

und erhält für Gleichung (7.165) insgesamt

$$\begin{aligned} f(r, s) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_{\theta_b}(a, b) \frac{FCD^2 + a^2 + b^2}{U_b^2} g(a'-a) \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right)^3 da \right\} d\theta_b \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U_b^2} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_{\theta_b}(a, b) g(a'-a) \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}^3}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) da \right\} d\theta_b \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2 + b^2}{U_b^2} \left\{ \int_{-a_{\min}}^{+a_{\max}} \phi_{\theta_b}(a, b) \left(\frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) g(a'-a) da \right\} d\theta_b \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2 + b^2}{U_b^2} \left\{ \left(\phi_{\theta_b}(a, b) \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) * g(a) \right\} d\theta_b \end{aligned} \quad (7.181)$$

Als letzter Schritt muss nun der Bezug zwischen dem Drehwinkel θ_b um den Einheitsvektor \mathbf{n}_ξ in Richtung der Normalen des Fächerflächenvektors und dem tatsächlichen Drehwinkel θ der Abtasteinheit in der x - y -Ebene hergestellt werden. Dazu ist in Abbildung 7.52 dargestellt, was mit einer Winkeländerung $\Delta\theta$ geschieht, wenn der Fächer aus der x - y -Ebene herausanguliert wird.

In der zentralen Fächerstrahlebene findet man die Längen

$$\overline{SO} = \overline{YO} = FCD \quad (7.182)$$

und in der angulierten Ebene analog die Längen

$$\overline{SB} = \overline{YB} = \sqrt{FCD^2 + b^2} \quad (7.183)$$

Außerdem gilt

$$\overline{OB} = b \quad (7.184)$$

Damit erhält man für kleine Winkeländerungen einen Ausdruck

$$\overline{SY} = \Delta\theta \text{ FCD} \approx \Delta\theta_b \sqrt{\text{FCD}^2 + b^2} \quad (7.185)$$

für die Bogenlänge, so dass man für die Winkeländerung durch Angulation des Fächers den Zusammenhang

$$\Delta\theta_b \approx \frac{\text{FCD}}{\sqrt{\text{FCD}^2 + b^2}} \Delta\theta \quad (7.186)$$

erhält.

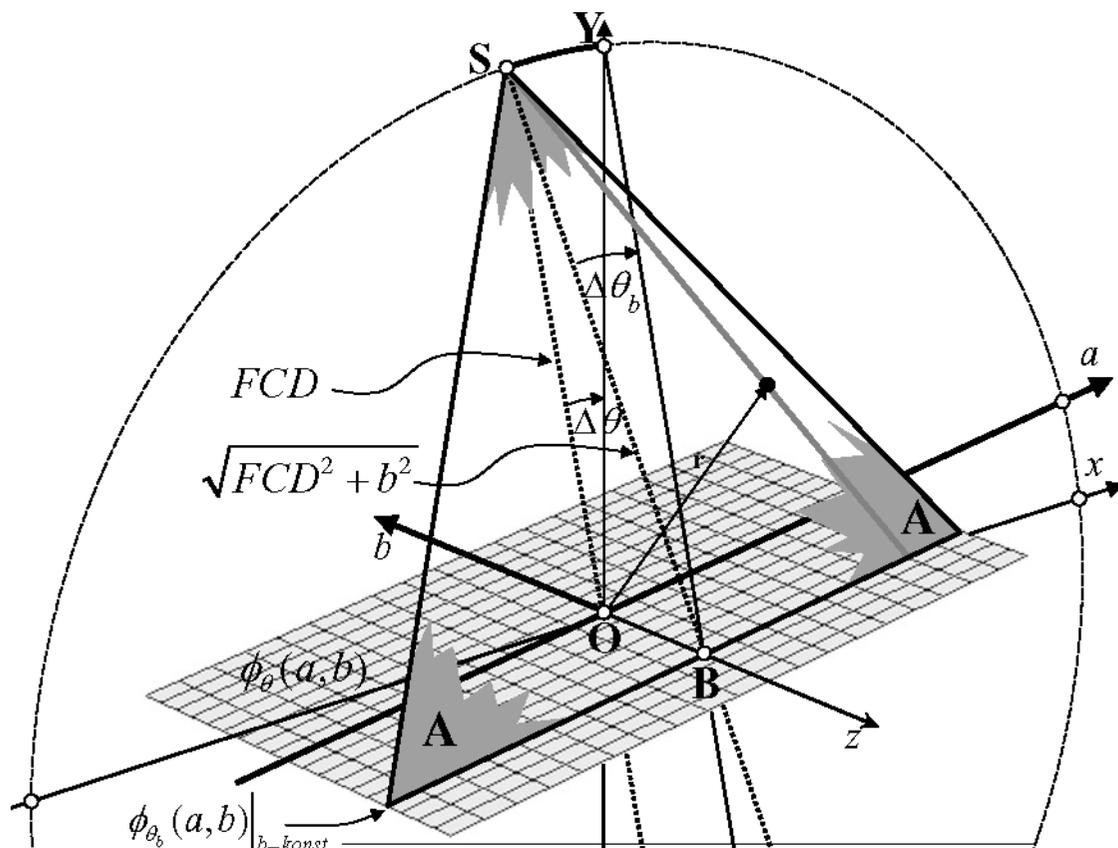


Abb. 7.52: Veränderung des Drehwinkels $\Delta\theta$ der Abtasteinheit bei der Angulation des Röntgenfächers aus der x - y -Ebene heraus.

Die Ausdrücke (7.185) und (7.186) haben einen kleinen Schönheitsfehler. Nur für kleine Winkeländerungen $\Delta\theta$ liegt $\Delta\theta_b$ hinreichend gut innerhalb der angulierten Fächerstrahlebene. Man kann aus Abbildung 7.52 ablesen, dass die Strecke

$$\overline{YB} = \sqrt{\text{FCD}^2 + b^2} \quad (7.187)$$

für große $\Delta\theta$ nicht mehr in der angulierten Röntgenfächerstrahlebene liegt. Glücklicherweise ist man in den Gleichungen (7.181) nur an infinitesimalen Winkeländerungen $d\theta_b$ der Abtasteinheit interessiert, so dass exakt

$$d\theta_b = \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} d\theta \quad (7.188)$$

gilt. Setzt man Gleichung (7.188) in die Gleichungen (7.181) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} f(r,s) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2 + b^2}{U_b^2} \left\{ \left(\phi_\theta(a,b) \frac{\sqrt{FCD^2 + b^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) * g(a) \right\} \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2 + b^2}{U_b^2} \left\{ \left(\phi_\theta(a,b) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) * g(a) \right\} d\theta \end{aligned} \quad (7.189)$$

Weiterhin ist mit Hilfe des Strahlensatzes aus Abbildung 7.34 abzulesen, dass

$$\frac{FCD^2 + b^2}{U_b^2} = \frac{FCD^2}{U^2}, \quad (7.190)$$

wobei die schon bekannte Abkürzung für die Projektion des zu rekonstruierenden Punktes auf dem Zentralstrahl in der x - y -Ebene

$$U = FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \quad (6.136)$$

Verwendung findet. Dies ist beim Übergang von der Drehvariablen $\theta_b \rightarrow \theta$ ebenfalls zu ersetzen. Damit ist der zu rekonstruierende Punkt dann wieder bezüglich der x - und y -Koordinate ausgedrückt. Insgesamt erhält man für Gleichung (7.181)

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U^2} \left\{ \left(\phi_\theta(a,b) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) * g(a) \right\} d\theta \quad (7.191)$$

In Analogie zu Gleichung (5.64) kann nun kurz

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U^2} h_\theta(a,b) d\theta \quad (7.192)$$

geschrieben werden, wobei

$$h_\theta(a,b) = \frac{1}{2} \left(\phi_\theta(a,b) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) * g(a). \quad (7.193)$$

Interessant ist dabei, dass die Gewichtung in Gleichung (7.193) die geometrische Interpretation

$$\begin{aligned}\cos(\beta) &= \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \\ &= \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + a^2}} \frac{\sqrt{FCD^2 + a^2}}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} = \cos(\psi) \cos(\kappa_a)\end{aligned}\quad (7.194)$$

zulässt.

Mit der angegebenen Rekonstruktionsanweisung (7.191) hat man an dieser Stelle aber erst die x - und y -Komponente des zu rekonstruierenden Punktes erhalten. Man muss die Rückverschmierung jetzt noch in das ruhende, dreidimensionale (x,y,z) -Koordinatensystem einsortieren. Dazu fehlt offenbar die z -Komponente. Nach den Gleichungen (7.154) gilt für diese Komponente

$$z = s \frac{b}{\sqrt{FCD^2 + b^2}} - b. \quad (7.195)$$

Dass die z -Komponente, anders als die x - und y -Komponente in den Gleichungen (7.154), nicht von r abhängt, ist übrigens zu erwarten, da ja die Fächerstrahlfläche um die \mathbf{n}_σ -Achse, also um die lange Detektorachse a anguliert wurde.

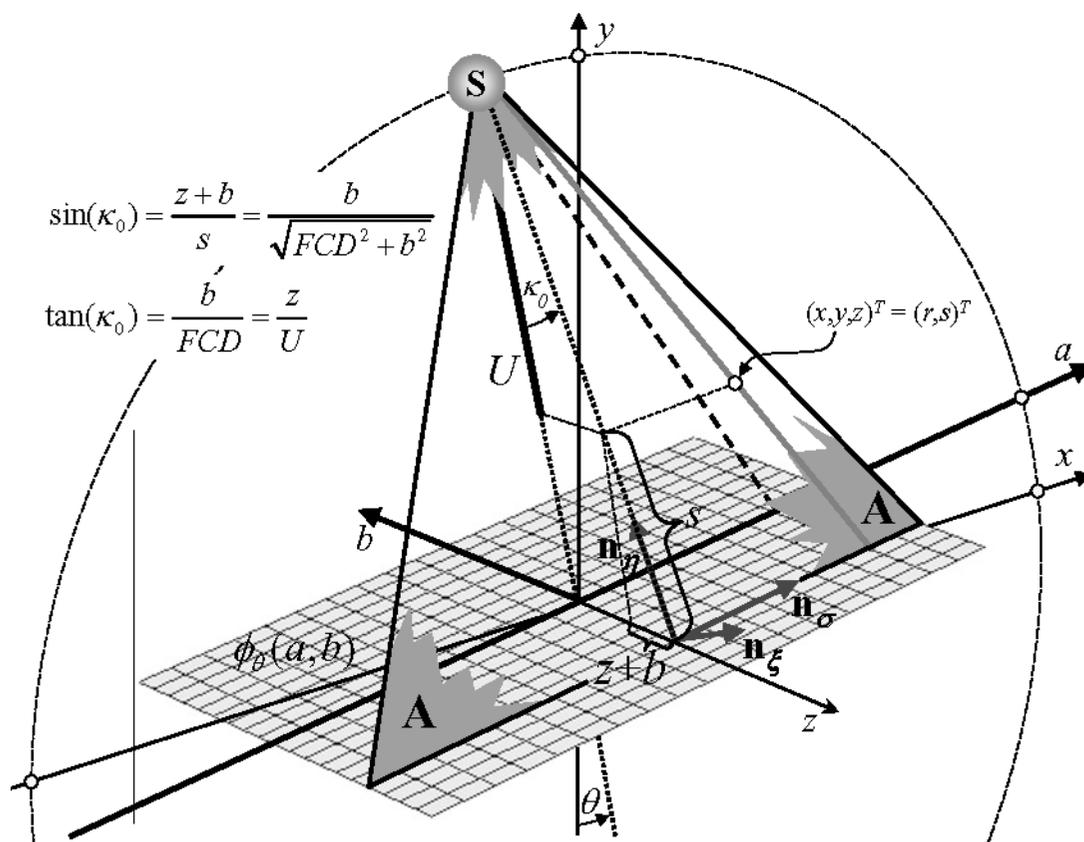


Abb. 7.53: Geometrie bei der Rückprojektion innerhalb der angulierten Fächerstrahlfläche. Die z -Komponente hängt nicht von r ab, da die Fächerstrahlfläche um die \mathbf{n}_σ -Achse, also um die lange Detektorachse a gedreht wurde.

Man kann sich in Abbildung 7.53, die die Verhältnisse der Rückprojektionsgeometrie für die z -Koordinate zeigt, davon überzeugen, dass Gleichung (7.195) den richtigen Wert für z liefert. In Gleichung (7.191) benötigt man aber b in Abhängigkeit der Koordinaten $(x, y, z)^T$. Gleichung (7.195) ist dabei etwas unangenehm zu invertieren, aber glücklicherweise findet man in Abbildung 7.53 auch den Zusammenhang

$$\tan(\kappa_0) = \frac{b}{FCD} = \frac{z}{U} \quad (7.196)$$

bzw.

$$b(x, y, z, \theta) = z \frac{FCD}{FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta)}. \quad (7.197)$$

Erst durch die Berücksichtigung von Gleichung (7.197) erhält man die vollständige, dreidimensionale Rekonstruktionsvorschrift

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U^2} \left\{ \left(\phi_\theta(a, b) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + a^2 + b^2}} \right) * g(a) \right\} d\theta. \quad (7.198)$$

Die komplette Rekonstruktionsanweisung lässt sich insgesamt wieder in drei wichtige Schritte gliedern, die im Schema 11 zusammengefasst sind.

Für die Messwerte, die man mit einer ebenen Quellentrajektorie erhält, liefert die FDK-Rekonstruktion eine exakte Rückprojektionsvorschrift. Das Verfahren bleibt natürlich insgesamt approximativ, da der Radonraum nicht vollständig ist. Es wurde schon im vorhergehenden Abschnitt darauf hingewiesen, dass die *Tuy-Smith*-Vollständigkeitsbedingung für diese Trajektorienform nicht erfüllt ist.

Für einen zu rekonstruierenden Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, der außerhalb der x - y -Ebene liegt, fehlen in Bezug auf ein beliebigen Projektionsfächer alle übrigen Projektionen dieser angulierten Ebene für eine exakte Rekonstruktion der in der Ebene liegenden Objekte. Für jeden beliebigen Punkt außerhalb der x - y -Ebene sind immer einige Radondaten durch den Schattenbereich aus Abbildung 7.45 verdeckt.

Umfangreiche Untersuchungen haben aber gezeigt, dass der Fehler der FDK-Methode durch unvollständige Radondaten der planaren Quellenbahn dann klein ist, wenn der Öffnungswinkel des Kegelstrahls klein ist. Abbildung 7.54 zeigt das Verfahren noch einmal schematisch.

Schema 11: FDK-Rekonstruktion für das planare Detektorarray

1. Koordinatentransformation für das Rampenfilter: Der erforderliche Rampenfilter

$$g\left((a'-a)\frac{U_b}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}}\right) = \frac{FCD^2+a^2+b^2}{U_b^2} g(a'-a)$$

ist durch Koordinatentransformation auf exakt die Form des Filters für die Parallelprojektion zu bringen.

2. Filterung des Projektionssignals: Das Signal zur Rückprojektion ergibt sich aus der Faltung

$$h_\theta(a,b) = \frac{1}{2} \left(\phi_\theta(a,b) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} \right) * g(a) \quad (7.199)$$

des mit

$$\cos(\beta) = \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2+a^2+b^2}} = \cos(\psi)\cos(\kappa)$$

gewichteten Projektionssignals im Ortsbereich des Detektors.

3. Die Rückprojektion über den Winkel von 2π ergibt sich mit

$$b(x,y,z,\theta) = z \frac{FCD}{FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta)}$$

durch

$$f(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \frac{FCD^2}{U(x,y,\theta)^2} h_\theta(a(x,y,z,\theta), b(x,y,z,\theta)) d\theta \quad (7.200)$$

also der mit dem reziproken Abstandsquadrat gewichteten, auf die Quelle konvergierenden gefilterten Rückverschmierung. Dabei ist der Abstand U die Projektion des Abstandes zwischen der Quelle und dem aktuellen Punkt auf den Zentralstrahl des nicht angulierten Fächers.

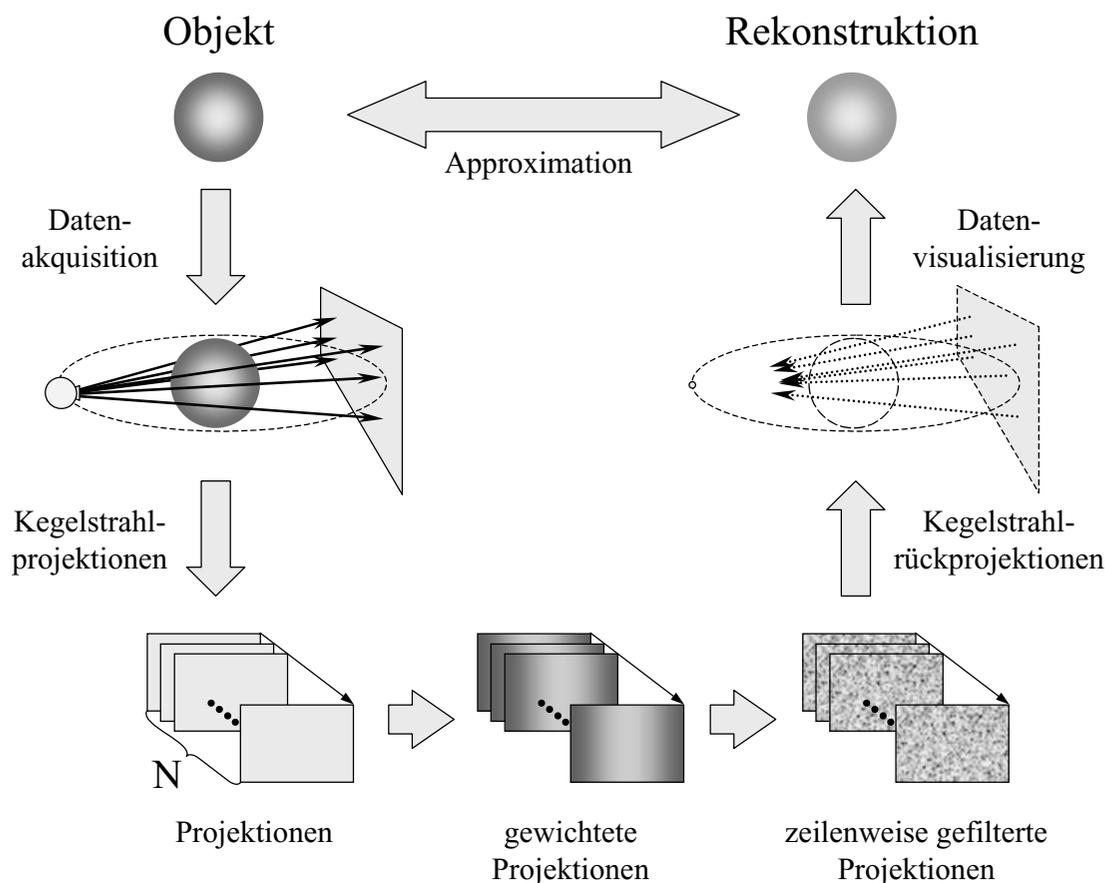


Abb. 7.54: Schematische Darstellung der Kegelstrahlrekonstruktion nach *Feldkamp, Davis und Kress*.

Das exakte 3D-Kegelstrahlrückprojektionsverfahren nach *Defrise und Clack*, das in Abschnitt 7.4.6 beschrieben wurde, ist für keine spezielle Quellentrajektorie formuliert. Ein Vergleich der Gleichungen (7.145) und (7.200) offenbart aber eine gewisse Verwandtschaft der Verfahren. In beiden Fällen ist die Rückprojektion als Integral über den Trajektorienparameter definiert, wobei ein gefilterter Projektionsterm mit dem reziproken, normierten, quadratischen Abstand zwischen zu rekonstruierendem Punkt und Röntgenquelle $(FCD/U)^2$ den Integranden bildet. Es kann tatsächlich gezeigt werden, dass das exakte Verfahren von *Defrise und Clack* zum approximativen FDK-Verfahren kollabiert, wenn man als Quellentrajektorie $S(\lambda)$ einen einzelnen Kreis annimmt [Jac96].

7.5.3 FDK-Kegelstrahlrekonstruktion für zylindrische Detektoren

In medizinischen Anwendungen werden derzeit überwiegend zylindrische Detektoren verwendet, daher soll hier die FDK-Näherung für diese Geometrie erweitert werden. Abbildung 7.55 zeigt die Kegelstrahlgeometrie in der zylinderförmigen Detektoranordnung mit dem Fächerwinkel ψ und dem Kegelwinkel κ , der mit der Gleichung

$$\kappa = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{FCD}\right) \quad (7.201)$$

definiert ist. Mit dieser Definition ist klar, dass der Kegelwinkel entlang der einzelnen Reihen ($\varepsilon = \text{konst.}$) des zylindrischen Detektors konstant ist. Aus der Abbildung 7.55 kann man ablesen, dass $\varepsilon = b$ nur für den Fächerwinkel $\psi = 0$ gilt. Allgemein erhält man den Zusammenhang

$$b = \frac{\varepsilon}{\cos(\psi)} \quad (7.202)$$

zwischen der planaren und der zylindrischen Detektoranordnung.

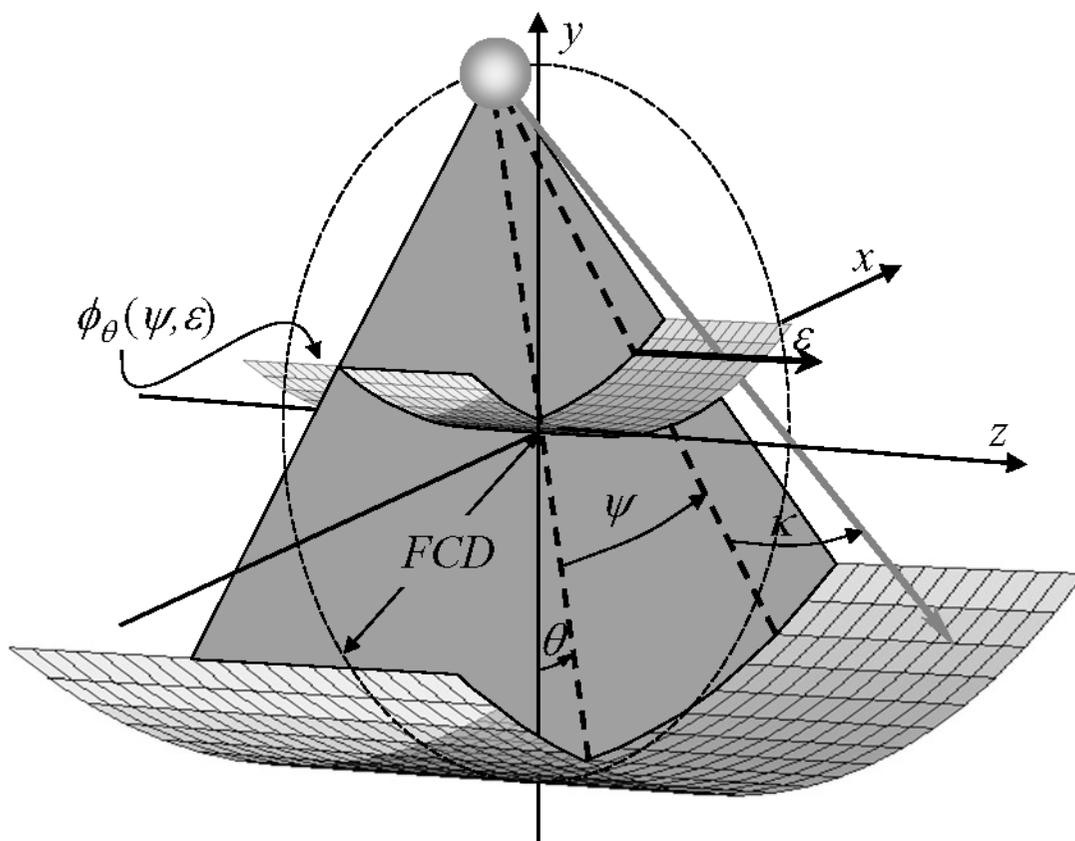


Abb. 7.55: Kegelstrahlbeleuchtung eines zylindrischen Detektors. Die Röntgenquelle dreht sich auf einem Radius FCD . Im Isozentrum der Rotation des Abtastsystems ist ein virtueller Detektor platziert.

Die einzelnen Zeilen des Detektors liegen nun natürlich nicht mehr in einer planaren Fläche, die die Quelle enthält. Diese Flächen, innerhalb derer im vorhergehenden Abschnitt eindimensional gefiltert und zurückprojiziert werden konnte, kann man auf dem zylindrischen Detektor als leicht gebogene Schnittlinien wiederfinden. Insofern ist es möglich, die Projektionsdaten so umzuinterpolieren, dass sie auf einem planaren, kartesischen Raster liegen.

Für die Rekonstruktion in der Zylindergeometrie ist das Verfahren in Schema 12 in drei Schritte gegliedert.

Schema 12: FDK-Rekonstruktion in Zylindergeometrie

1. Vorgewichtung der Zylinderflächenprojektion

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\theta(\psi, \varepsilon) &= \phi_\theta(\psi, \varepsilon) \frac{FCD}{\sqrt{FCD^2 + \varepsilon^2}} \cos(\psi) \\ &= \phi_\theta(\psi, \varepsilon) \cos(\kappa) \cos(\psi)\end{aligned}\quad (7.203)$$

2. Filterung der Projektionssignals. Der Rampenfilter

$$\tilde{g}(\psi, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{\sin(\psi)} \right)^2 g(\psi, \varepsilon) \quad (7.204)$$

ist eine modifizierte Version des Filters für die Parallelprojektion $g(\psi, \varepsilon)$. Zusammen mit der Vorgewichtung aus dem 1. Schritt ergibt sich das Signal zur Rückprojektion hier aus der Faltung im Winkelbereich

$$h_\theta(\psi, \varepsilon) = \tilde{\phi}_\theta(\psi, \varepsilon) * \tilde{g}(\psi, \varepsilon) \quad (7.205)$$

3. Die Rückprojektion über den Winkel von 2π ergibt sich dann durch

$$f_{FDK}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} h_\theta(\psi, \varepsilon) d\theta \quad (7.206)$$

also der mit dem reziproken Abstandsquadrat zwischen der Quelle und der Projektion des aktuellen Punktes auf die x - y -Ebene

$$L = \sqrt{(FCD - x \sin(\theta) + y \cos(\theta))^2 + (x \cos(\theta) + y \sin(\theta))^2} \quad (7.207)$$

gewichteten, auf die Quelle konvergierenden, gefilterten Rückverschmierung.

Zuletzt sollen hier einige Eigenschaften der FDK-Rekonstruktionsmethode zusammengefasst werden.

- Die FDK-Methode liefert in der zentralen Strahlungsebene eine exakte Rekonstruktion. Dies ist natürlich die Minimalanforderung an das Verfahren. Die Gleichungen (7.200) bzw. (7.206) gehen für den Kegelwinkel $\kappa = 0$ (das heißt $b = 0$ für den planaren Detektor bzw. $\varepsilon = 0$ für den zylindrischen Detektor) in die Gleichungen (6.147) bzw. (6.118) für die entsprechenden Fächerstrahlrekonstruktion über.
- Die Qualität der Rekonstruktion wird umso schlechter, je größer der Kegelwinkel κ ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass immer mehr Radondaten im Schattenbereich (vergleiche Abschnitt 7.5.1) liegen.

- Die FDK-Methode ist für in z -Richtung homogene Objekte, das heißt für Objekte, für die $f(x,y,z) = f(x,y)$ gilt, ebenfalls exakt. Dieses Ergebnis wird durch die Vorgewichtung mit $\cos(\kappa)$ in der Gleichung (7.199) für den planaren Detektor bzw. Gleichung (7.203) für den zylindrischen Detektor erreicht. Der längere Weg, auf dem der Röntgenstrahl bei größerem Kegelwinkel κ abgeschwächt wird, wird durch den Faktor $\cos(\kappa)$ so gewichtet, dass die Abschwächung unabhängig vom Kegelwinkel wird und der Abschwächung in der zentralen Ebene entspricht. Die vorgewichteten Zeilen des Detektors sind für solche Objekte identisch, d.h. das Verfahren reduziert sich auf das Fächerstrahlverfahren in der Ebene.

Für den planaren Detektor gilt zusätzlich, dass

- das Integral

$$p_z = \int f(x, y, z) dz \quad (7.208)$$

trotz des approximativen Charakters der FDK-Methode exakt erhalten bleibt. Das liegt daran, dass alle Flächenintegrale senkrecht zur zentralen Ebene durch eine einzelne ebene, zirkuläre Quellentrajektorie messbar sind, das heißt innerhalb des messbaren Torus im Radonraum liegen.

7.5.4 Variationen der FDK-Kegelstrahlrekonstruktion

Die Gewichtung mit dem U^{-2} -Faktor in der Gleichung (7.200) stellt die Hauptschwierigkeit bei der Implementation schneller dreidimensionaler Rekonstruktionen dar. Da grundsätzlich schnelle Verfahren für die Parallelstrahlgeometrie existieren, liegt es nahe, durch ein Umsortieren der Strahlen analog zu Abschnitt 6.6.1 auch die Kegelstrahlgeometrie in eine Parallelstrahlgeometrie umzuwandeln. Aufgrund der fehlenden Daten im Radonraum der zyklischen, ebenen Quellentrajektorie gelingt dies in der Fächerrichtung ψ , jedoch nicht in der Kegelrichtung κ .

Rebinning beim planaren Detektor

Für den planaren Detektor ergibt sich das umsorierte Projektionssignal (hier ohne Herleitung nach *H. Turbell* [Tur99]) durch

$$p_\gamma(\xi, b) = \phi_{\gamma-\psi}(\psi, b) = \phi_{\gamma-\arcsin\left(\frac{\xi}{FCD}\right)}\left(\frac{\xi FCD}{\sqrt{FCD^2 - \xi^2}}, b\right) \quad (7.209)$$

Dabei bleibt die Koordinate der Detektorzeile b ungeändert. Sieht man sich die Situation aus Richtung der z -Koordinate an, so liegt nach dieser Umsortierung Parallelstrahlgeometrie vor. Die Strahlen einer bestimmten Zeile b treffen dabei einen virtuellen planaren Detektor (ξ, s) im Isozentrum der Rotation entlang der Kurven

$$s(b, \xi) = b \left(1 - \frac{\xi^2}{FCD^2} \right). \quad (7.210)$$

In Abbildung 7.56a ist auch umgekehrt zu sehen, wie ein (ebenfalls virtueller) Detektor aussähe, bei dem alle Strahlen einer bestimmten Detektorzeile b denselben z -Wert hätten.

Rebinning beim zylindrischen Detektor

Für den zylindrischen Detektor ergibt sich das umsorierte Projektionssignal analog zu Gleichung (6.72) durch

$$p_\gamma(\xi, \varepsilon) = \phi_{\gamma-\psi}(\psi, \varepsilon) = \phi_{\gamma - \arcsin\left(\frac{\xi}{FCD}\right)}\left(\arcsin\left(\frac{\xi}{FCD}\right), \varepsilon\right) \quad (7.211)$$

Dabei bleibt die Koordinate der Detektorzeile ε ungeändert. Sieht man sich die Situation wieder aus Richtung der z -Koordinate an, so liegt nach dieser Umsortierung Parallelstrahlgeometrie vor. Die Strahlen einer bestimmten Zeile ε treffen dabei einen virtuellen planaren Detektor (ξ, s) im Isozentrum der Rotation entlang der Kurven

$$s(\varepsilon, \xi) = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{FCD^2}}. \quad (7.212)$$

Offenbar sind die Schnittlinien auf dem virtuellen Detektor im zylindrischen Fall weniger gebogen als im planaren Fall, beschrieben durch Gleichung (7.210). In Abbildung 7.56b ist wieder auch umgekehrt zu sehen, wie ein virtueller Detektor aussähe, bei dem alle Strahlen einer bestimmten Detektorzeile ε denselben z -Wert hätten.

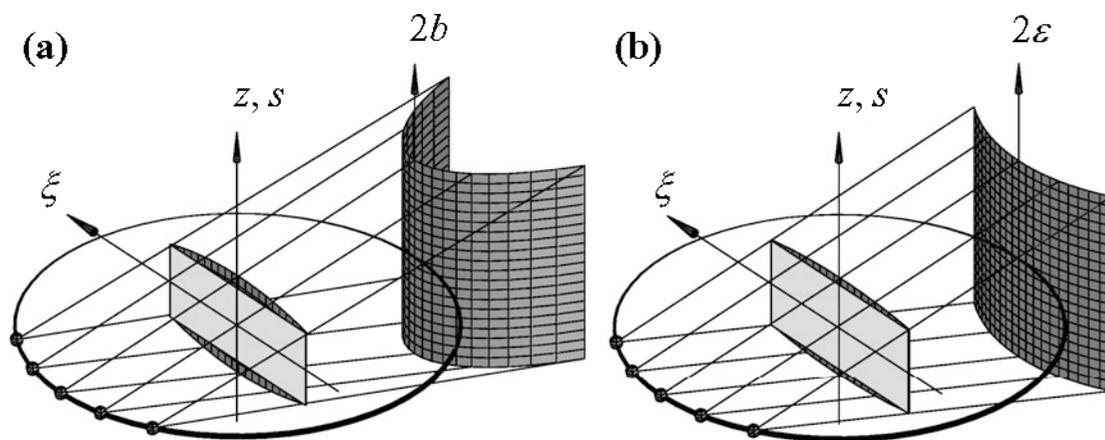


Abb. 7.56: Geometrie der Projektionen nach Umsortierung der Kegelstrahlen für den planaren (a) und den zylindrischen (b) Detektor. Im Isozentrum der Drehung sieht man jeweils einen virtuellen planaren Detektor (mit freundlicher Genehmigung von H. Turbell [Tur01]).

Tent-FDK-Methode

Während man auf die oben beschriebene Weise die Rückprojektion durch Umsortierung der Daten beschleunigen kann, zeigt sich, dass die Artefakte dieselben bleiben [Tur01]. Dies ändert sich aber durch eine Idee von M. Grass *et al.* [Gra00], die vorgeschlagen haben, die Daten $p_\gamma(\xi, b)$ aus Gleichung (7.209) bzw. die Daten $p_\gamma(\xi, \varepsilon)$ aus Gleichung (7.211) auf dem virtuellen (ξ, s) -Detektor im Isozentrum der Rotation so umzuinterpolieren, dass sie auf horizontalen Linien liegen.

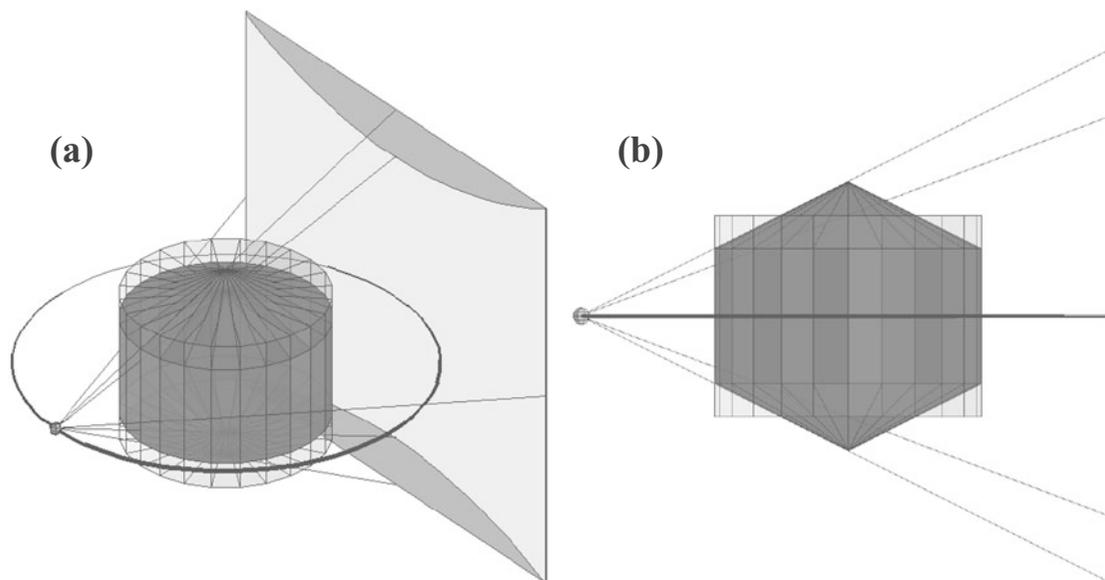


Abb. 7.57: Die Geometrie des durchstrahlten Volumens nach dem Umsortieren der Daten gleicht im Schnitt einem Zelt mit rechteckiger Basis (mit freundlicher Genehmigung von *H. Turbell* [Tur01]).

Damit dieses Verfahren funktioniert, das heißt, damit ein Rampenfilter entlang horizontaler Linien angewendet werden kann, müssen die Daten entlang dieser Linien auf dem Detektor vollständig sein. Abbildung 7.57a zeigt, dass die Daten in dem schattierten Bereich deswegen nicht für das so genannte T-FDK-Verfahren⁵⁰ zu verwenden sind. In Abbildung 7.57b ist zu sehen, dass das durchstrahlte Volumen für das T-FDK-Verfahren im dreidimensionalen Raum im Schnitt ein Zelt mit rechteckiger Basis bildet. In der praktischen Realisierung ergibt sich so die Möglichkeit, durch entsprechende Kollimation auf die benötigten Daten eine Dosisreduktion zu erzielen. Das T-FDK-Verfahren ist in der Lage, die Bildqualität der Rekonstruktion zu erhöhen.

Sequentielle FDK-Methode (S-FDK)

T. Köhler et al. [Koe00] haben vorgeschlagen, den Patienten nicht auf einer Helix sondern in diskreten Abständen ΔZ auf Kreisen zu messen. Wenn der reale Detektor hoch genug ist, so dass ein virtueller Detektor im Isozentrum der Drehung gerade die Höhe ΔZ besitzt, dann erhalten alle Voxel genau einen Rückprojektionsbeitrag aus jedem Projektionswinkel. Abbildung 7.58 zeigt diese Anordnung.

Die Voxel innerhalb des Doppelkonus, der in Abbildung 7.57b dargestellt ist, erhalten ihre Rückprojektionsbeiträge von der Quelltrajektorie mit dem kleinsten Abstand zu diesem Voxel. Alle anderen zu rekonstruierenden Punkte erhalten Beiträge entweder von eben dieser oder der darauffolgenden Kreistrajektorie. Dann und nur dann wenn ein Punkt unter einem Projektionswinkel θ nicht von der am nächsten liegenden Kreistrajektorie beleuchtet wird, wird er von der benachbarten Kreistrajektorie unter dem Projektionswinkel $\theta + \pi$ beleuchtet. Nach diesem S-FDK-Prinzip erhält man für alle Punkte einen vollständigen 360° -Satz von Messwerten.

⁵⁰ T-FDK ist die abgekürzte Form von Tent-FDK, weil die Daten nach dem Umsortieren ein Zelt bilden.

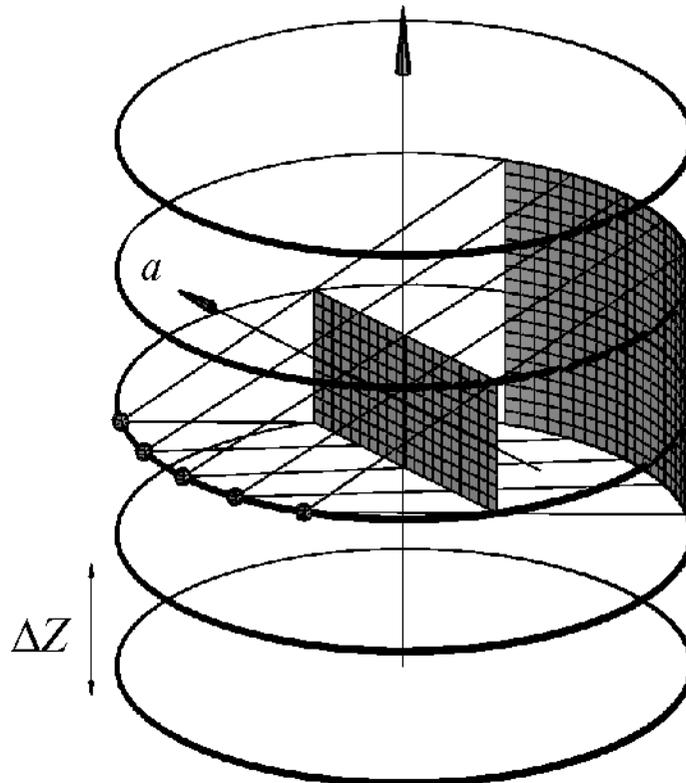


Abb. 7.58: Strahlgeometrie der sequentiellen FDK-Methode (S-FDK) ist eine naheliegende Erweiterung der FDK-Methode in axialer Richtung (mit freundlicher Genehmigung von *H. Turbell* [Tur01]).

FDK-SLANT-Methode

Beim ursprünglichen FDK-Verfahren betrachtet man für einen zu rekonstruierenden Punkt unter einem bestimmten Projektionswinkel θ eine horizontale Linie auf dem (planaren) Detektor. Zu dieser Linie gehört eine Projektionsebene, in der sich die Röntgenquelle und der Punkt selbst befinden. Die Projektionswerte auf der Detektorlinie können unabhängig von allen anderen Projektionswinkeln und anderen Angulationswinkeln κ vorgewichtet, gefiltert und dann in Richtung der Röntgenquelle in der Ebene zurückprojiziert werden. Geht man zu einem anderen Projektionswinkel θ' über, dann lässt man die Ebene fallen und sucht eine neue Ebene, die in der Regel unter einem anderen Angulationswinkel κ' von der Quelle aus durch den zu rekonstruierenden Punkt geht.

H. Turbell [Tur01] schlägt vor, das FDK-Verfahren dahingehend zu variieren, dass die Ebene bei Veränderung des Projektionswinkels beibehalten wird. Abbildung 7.59a zeigt ein Fächer von festgehaltenen Ebenen, die auf dem (planaren) Detektor horizontale Schnittlinien besitzen und die Quellentrajektorie unter dem Projektionswinkel θ_i am Punkt

$$\mathbf{S}_i = (-FCD \sin(\theta_i), FCD \cos(\theta_i), 0) \quad (7.213)$$

berühren. Diese geometrische Situation ähnelt einem halb geöffneten Buch, dessen Seiten am Punkt (7.213) zusammen geheftet sind. *Turbell* nutzt dann N solche Bücher, deren Heftpunkte \mathbf{S}_i mit $i = 1, \dots, N$, gleichmäßig auf der zyklischen Quellentrajektorie verteilt sind. Die ersten 5 Heftpunkte sind in Abbildung 7.59b eingezeichnet.

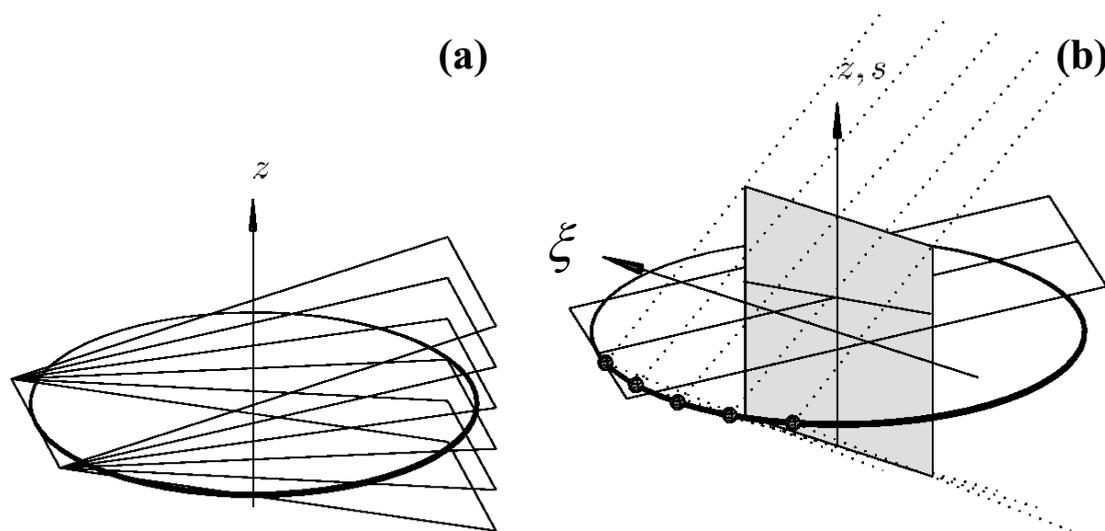


Abb. 7.59: Die Strahlen des FDK-SLANT-Verfahrens bilden eine Geometrie, die an Buchseiten erinnert (a). Die Schnittlinie zwischen einer Buchseite und der Detektorebene verläuft nicht-horizontal. Diese Linie auf dem (ξ, s) -Detektor entspricht der Filterrichtung (mit freundlicher Genehmigung von *H. Turbell* [Tur01]).

Die Filterrichtung einer gefilterten Rückprojektion unter dem Rückprojektionswinkel θ ergibt sich aus der Schnittlinie zwischen der Rückprojektionsebene und der Buchseite mit dem Heftpunkt S_i . In Abbildung 7.59b wird plausibel, dass die Schnittlinien auf dem virtuellen Detektor schräg verlaufende Geraden sind. Die zentrale Idee des Verfahrens ist, dass die Rückprojektion so weit wie möglich eine Wechselwirkung von den Punkten in nur einer Ebene ist.

7.6 Helix-Kegelstrahlrekonstruktionsverfahren

In den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels wurde die Objektrekonstruktion in der Kegelstrahlgeometrie auf der Basis von zunächst beliebigen Quellentrajektorien (exakte Verfahren von *Grangeat* und *Defrise/Clack* – Kapitel 7.4) und dann speziell kreisförmiger, zyklischer Quellentrajektorien (approximatives Verfahren von *L. A. Feldkamp*, *L. C. Davis* und *J. W. Kress* und deren Erweiterungen – Kapitel 7.5) besprochen. Das ableitungsfreie Rekonstruktionsverfahren von *L. A. Feldkamp et al.* [Fel84] hat in der technischen Realisierung eine sehr weite Verbreitung gefunden, allerdings stellt es ein approximatives Verfahren dar, dessen Anwendung in der Medizin aufgrund der geforderten Bildqualität nicht unproblematisch ist. Solange die Kegelöffnung des Röntgenstrahls klein ist, liefert das Verfahren annehmbare Ergebnisse, jedoch geht die Entwicklung auf der Detektorseite zu immer breiteren Flächendetektoren, die eine Anpassung der mathematischen Verfahren erforderlich machen, so dass heute tatsächlich dreidimensionale Verfahren implementiert werden müssen, weil die adaptierten zweidimensionalen Rezepte an ihre Grenzen stoßen.

In Abschnitt 7.5.1 wurde erläutert, dass eine einzelne kreisförmige, zyklische Quellentrajektorie den Radonraum nicht vollständig füllen kann. Da *W. Kalender* [Kal89] das Spiralverfahren für die linearen Detektorarrays erfolgreich demonstriert hatte (vergleiche Kapitel 7.2), kann man nun hoffen, mit der Anpassung der Verfahren für die Kegelstrahlgeometrie auf die Spiral- bzw. Helixtrajektorie der Quelle

$$\mathbf{S}(\lambda) = (-FCD \sin(\lambda), FCD \cos(\lambda), h\lambda) \quad (7.214)$$

einen Schritt weiterzukommen. In Abbildung 7.47 ist schon dargelegt worden, dass die Helix einen Orbit darstellt, der den Radonraum prinzipiell komplett füllen kann. Dabei ist $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ wieder die Parametrisierung der Bahnkurve. Der Parameter h stellt die Steigung der Helix dar. Der Parameter *Pitch*, der beim einfachen Spiral-CT-Verfahren eingeführt wurde, macht bei einem Röntgenkegel unmittelbar keinen Sinn. Man kann den Parameter aber an die neuen Gegebenheiten anpassen, zum Beispiel durch die Definition $P = 2\pi h$ in der Bedeutung des Tischvorschubes in z -Richtung pro vollständiger Umdrehung der Abtasteinheit [Pro00]. Der Patientenvorschub in der axialen Richtung kann dann durch

$$z(\lambda) = \lambda \frac{P}{2\pi} + z_0 \quad (7.215)$$

beschrieben werden.

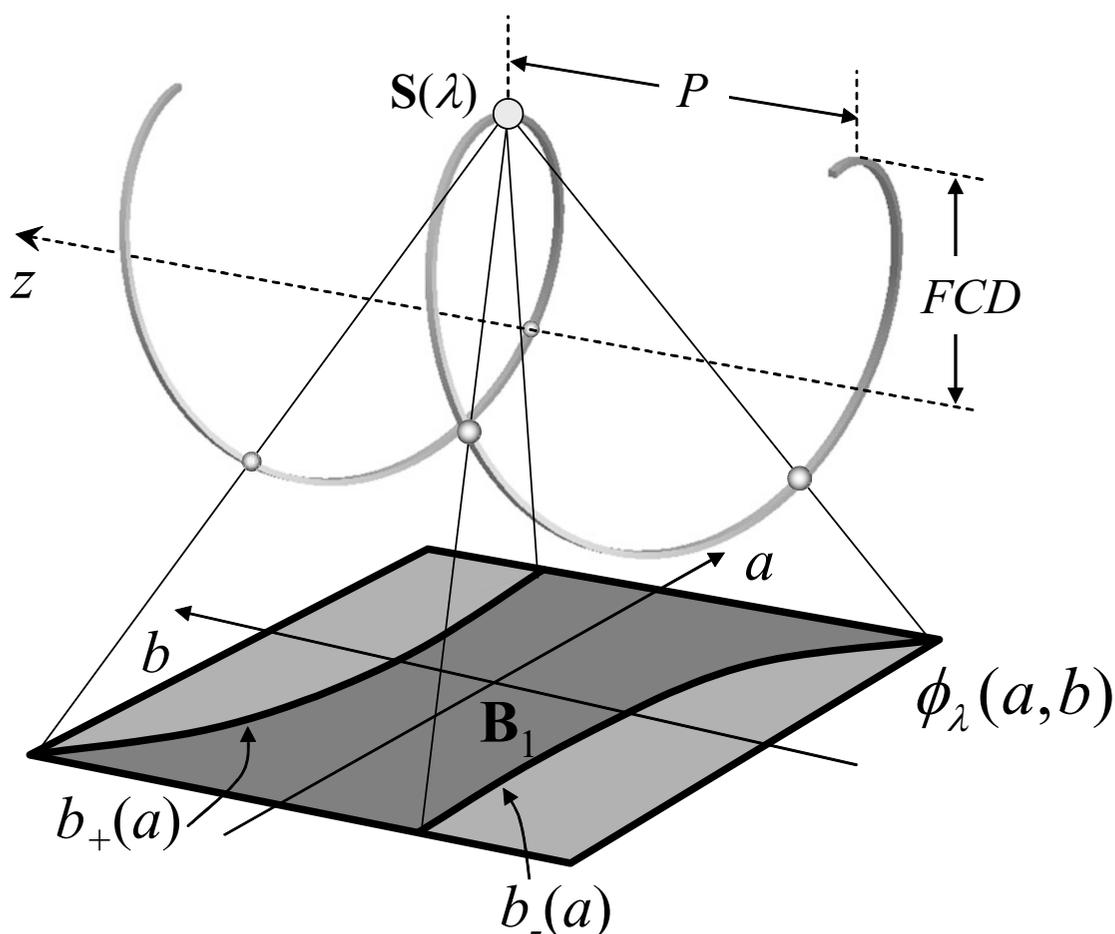


Abb. 7.60: Tam-Danielsson-Fenster \mathbf{B}_1 auf dem Detektorarray $\phi_\lambda(a,b)$, das hier ausnahmsweise einmal außerhalb des Quelltrajektoriengebietes liegt. Das zur Rekonstruktion zu verwendende Datenfenster \mathbf{B}_1 ist durch zwei aufeinanderfolgende Bögen der Spirale definiert. Es wird PI-Fenster genannt.

Abbildung 7.60 zeigt die geometrischen Verhältnisse. Ausnahmsweise ist der Detektor nicht im Isozentrum der Helixrotation platziert obwohl die Mathematik der Objektrekonstruktion auch hier übersichtlicher wird, wenn ein virtueller Detektor im Isozentrum betrachtet wird.

Die Daten, die von einem planaren, rechteckigen Detektor gemessen werden, müssen gefenstert werden, damit keine Überrepräsentationen von Projektionswerten für die Rekonstruktion auftauchen. Das geschieht, indem das Detektorfeld nur im Bereich \mathbf{B} betrachtet wird. Das so genannte *Tam-Danielsson-Fenster* [Tam95, Tur01] wird durch die Beschränkung der Röntgenstrahlen auf den Bereich zwischen zwei aufeinanderfolgenden, der Quellenposition $\mathbf{S}(\lambda)$ gegenüberliegende Spiralbögen definiert. Auf dem planaren (a, b) -Detektor mit den Projektionswerten $\phi_\lambda(a, b)$ ergibt sich durch Projektion die Einschränkung der zu verwendenden Daten zwischen den Kurven

$$b_+(a) = P \left(1 + \frac{a^2}{FCD^2} \right) \left(\frac{\arctan(a/FCD)}{2\pi} + \frac{1}{4} \right) = h \left(1 + \frac{a^2}{FCD^2} \right) \left(\arctan(a/FCD) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.216)$$

und

$$b_-(a) = P \left(1 + \frac{a^2}{FCD^2} \right) \left(\frac{\arctan(a/FCD)}{2\pi} - \frac{1}{4} \right) = h \left(1 + \frac{a^2}{FCD^2} \right) \left(\arctan(a/FCD) - \frac{\pi}{2} \right). \quad (7.217)$$

Wegen dieser Einschränkung wird das Verfahren in die Klasse der so genannten PI-Methoden eingeordnet.

Mit dem Ansatz von *Pierre Grangeat*, der in Abschnitt 7.4.2 beschrieben wurde, kann nun das Objekt rekonstruiert werden. Dazu muss die Ableitung der 3D-Radontransformierten also die Ableitung der Integration über die Radonflächen durch das Objekt berechnet werden. In Abbildung 7.61 ist die Lage einer beliebigen Radonfläche durch das Objekt dargestellt. Da die Öffnung des Röntgenkegels beschränkt ist, muss die Radonfläche aus einzelnen Segmenten zusammengestellt werden.

Die Schnittpunkte der Helix mit der betrachteten Radonfläche (Abbildung 7.61 links) stellen dabei die Knotenpunkte einer Triangulation der Radonfläche dar. In Abbildung 7.61 schaut man entlang der Flächennormalen der Radonfläche auf die entstehende Triangulation. Das *Tam-Danielsson-Fenster* beschränkt nun die Messwerte dergestalt, dass jedes Dreieck exakt einmal beleuchtet wird. Das heißt, wenn die Quelle an der Position $\mathbf{S}(\lambda_4)$ ist, dann ist die durch Gleichungen (7.216) und (7.217) gegebene Datenbegrenzung durch die Punkte $\mathbf{S}(\lambda_3)$ und $\mathbf{S}(\lambda_5)$ gegeben, so dass das dazugehörige Dreieck ausschließlich durch die Röntgenquelle am Ort $\mathbf{S}(\lambda_4)$ beleuchtet wird. Zusammen ergeben alle Segmente eine angulierte Ellipse innerhalb der Helix.

Die zentrale Idee der exakten Rekonstruktion für unvollständige Projektionen ist nun die Kombination der Einzelbeiträge der in Abbildung 7.61 gezeigten Segmente. Das Zwischenergebnis von *Grangeat* war

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, g}(\xi) = \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)) \} d\sigma, \quad (7.89)$$

also die gewichtete radiale Detektorableitung und Linienintegration, die die Ableitung in die radiale Richtung der Radontransformierten ersetzt.

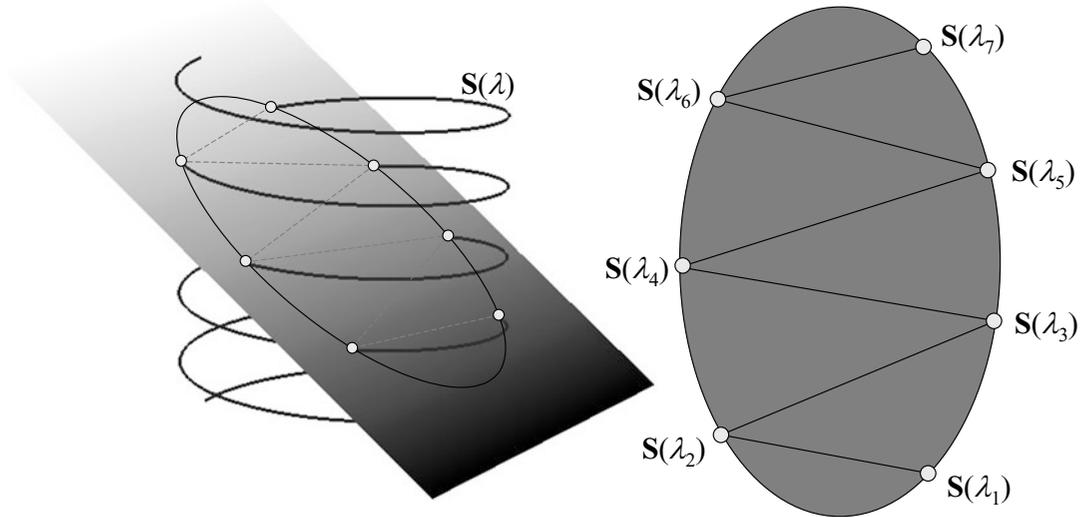


Abb. 7.61: Die Schnittpunkte der Helix stellen Basispunkte dar, mit denen jede beliebige Radonfläche trianguliert werden kann. Schaut man senkrecht auf die Radonfläche, so sieht man die Segmente der Radonfläche, die damit vollständig, aber nicht-überlappend beleuchtet wird.

Hier kann nun eine Zerlegung in Dreieckssegmente

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda_i) \approx \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \tau(\xi), \lambda_i) \} d\sigma, \quad (7.218)$$

erfolgen, die in der Summation über alle N_{Δ} Dreieckselemente

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_{\Delta}} \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda_i) \quad (7.219)$$

gerade die gewünschte Ableitung der Radontransformierten ergibt.

H. Kudo et al. [Kud98] haben gezeigt, dass die einfache Addition der Gleichung (7.219) leider kein exaktes Rekonstruktionsergebnis liefert. Sie schlugen einen Korrekturterm

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, \vartheta}(\xi, \lambda_i) = & \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma, \tau(\xi)), \lambda_i \} d\sigma + \dots \\ & \dots - \frac{\tan(\kappa)}{FCD} \left(\sigma_1 \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma_1, \tau(\xi)) \} - \sigma_2 \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, \vartheta}(\sigma_2, \tau(\xi)), \lambda_i \} \right) \end{aligned} \quad (7.220)$$

vor, der die Ränder der Integrationsintervalle betrachtet. *H. Turbell* [Tur01] interpretiert diese Korrektur als Kompensation für die leichte Flächenänderung der Dreiecke, wenn die Radonfläche während des Ableitungsprozesses entlang der Flächennormalen bewegt wird.

Mit dem Rezept von *M. Defrise und R. Clack* [Def94] kann nun zum Beispiel eine gefilterte Rückprojektion implementiert werden.

R. Proksa et al. [Pro00] haben gezeigt, dass diese PI-Methode natürlich in eine n -PI-Methode zu erweitern ist, wenn eine größere Detektorfläche genutzt wird. Definiert man das Detektorfenster allgemeiner als

$$b_n(a) = P \left(1 + \frac{a^2}{FCD^2} \right) \left(\frac{n}{4} - \frac{\arctan(a/FCD)}{2\pi} \right) = h \left(1 + \frac{a^2}{FCD^2} \right) \left(\frac{n\pi}{2} - \arctan(a/FCD) \right) \quad (7.221)$$

wobei

$$\mathbf{B}_n = \{(a, b) \mid -b_n(-a) \leq b \leq b_n(a)\}, \quad (7.222)$$

so überdecken die verwendeten Daten ein Vielfaches des Helix-Pitches. Diese Erweiterung wird n -PI-Fenster genannt⁵¹. Die Ellipse, die sich als Schnitt der betrachteten Radonfläche mit der Helix ergibt, besitzt eine ungerade Anzahl n_o von Durchstoßpunkten $\mathbf{S}(\lambda_i)$ der Quellentrajektorie mit der Radonfläche. Für den n -PI-Detektor haben *R. Proksa et al.* [Pro00] gefunden, dass alle Radonflächen mit n_o Durchstoßpunkten und $n_o < n$ eine n_o -fache Beleuchtung bzw. Überrepräsentation besitzen. Für den Fall $n_o \geq n$ besitzen die Radonflächen eine n -fache Überrepräsentation. Die jeweilige Überrepräsentation wird mit einer Kompensationsfunktion M , die schon in Abschnitt 7.4.6 erwähnt wurde, berücksichtigt.

Im vorliegenden Fall ist diese M -Funktion

$$M_n(\lambda, \mathbf{n}_\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n_o(\lambda, \mathbf{n}_\xi)} & \text{für } n_o(\lambda, \mathbf{n}_\xi) < n \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}, \quad (7.223)$$

so dass nach *R. Proksa* [Pro00] insgesamt das Rekonstruktionsschema 13 angegeben werden kann.

Für den Bereich der dreidimensionalen helix-basierten Kegelstrahlgeometrien gibt es inzwischen eine große Anzahl von Algorithmen bzw. Implementierungsstrategien. Als letztes soll hier kurz die Strategie des *Rebinning*s angesprochen werden [Kac00], die bereits für den Fall einer verkippten *Gantry* formuliert ist [Kac01]. Der entscheidende Unterschied zu den n -PI-Methoden liegt in der Möglichkeit, den rechenintensiven, dreidimensionalen Rückprojektionsschritt durch einen zweidimensionalen Rückprojektionsschritt auf geeignet zu definierenden Schichten zu ersetzen. Diese jeweilige Schicht ist dadurch definiert, dass ihre Neigung lokal zur helikalen Quellentrajektorie passt.

Wie in Abbildung 7.62 dargestellt ist, nutiert damit die zweidimensionale Rekonstruktionsebene mit dem Neigungswinkel α wie ein Kreisel um die axiale Achse. Die Natur der unterschiedlichen Rekonstruktionsartefakte kann bei *T. Köhler et al.* [Koe02] nachgelesen werden.

⁵¹ Erlaubt sind dabei im Prinzip alle ganzen ungeraden positiven Zahlen. In der Praxis werden aber nur $n = 1, 3, 5$ und 7 verwendet.

Schema 13: Exakte Kegelstrahl-Helix-Rekonstruktion für die n -PI-Detektorgeometrie

1. Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte n_o mit der Helix für alle Radonflächen.
2. Berechnung der Positionen $\mathbf{S}(\lambda_i)$ für alle Schnittpunkte aus Schritt 1
3. Bestimmung der zu den einzelnen Positionen gehörigen Integrationsintervalle $[\sigma_1, \sigma_2]$.
4. Berechnung Ableitung der einzelnen Radonteilflächen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, g}(\xi, \lambda_i) &= \frac{1}{\cos^2(\kappa)} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma, \tau(\xi)), \lambda_i \} d\sigma + \dots \\ &\dots - \frac{\tan(\kappa)}{FCD} \left(\sigma_1 \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma_1, \tau(\xi)), \lambda_i \} - \sigma_2 \mathbf{X}_w^c \{ \mu_{\gamma, g}(\sigma_2, \tau(\xi)), \lambda_i \} \right) \end{aligned} \quad (7.224)$$

5. Berechnung der Kompensationsfunktion

$$M_n(\lambda, \mathbf{n}_\xi) = \frac{1}{\min \{ n_o(\lambda, \mathbf{n}_\xi), n \}} \quad (7.225)$$

6. Summation der einzelnen Radonsegmente

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, g}(\xi) = M \sum_{i=1}^{N_A} \frac{\partial}{\partial \xi} p_{\gamma, g}(\xi, \lambda_i) \quad (7.226)$$

7. Berechnung des Objektes mit der Radonschen Inversionsformel

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_S \frac{\partial^2 p_{\gamma, g}(\xi)}{\partial \xi^2} dS. \quad (7.38)$$

Als allerletzte Bemerkung zu den helix-basierten Kegelstrahlgeometrien sei hier noch erwähnt, das *A. Katsevich* [Kat01] inzwischen eine exakte Methode zur Rückprojektion angegeben hat, die auch für lange Objekte so funktioniert, dass keine Daten in das Verfahren einfließen müssen, die in großer Entfernung voneinander aufgenommen werden.

Abbildung 7.63 zeigt die Leistungsfähigkeit von einem GE-Prototypen eines Kegelstrahl-Computertomographen. Verwendet wurde ein 41 cm x 41 cm großer Flächendetektor mit 2048 x 2048 Detektorelementen (vergleiche Abschnitt 2.3.3). In Abbildung 7.63a ist die Volumendarstellung eines menschlichen Kiefers zu sehen. Abbildung 7.63b zeigt einen dazugehörigen Schnitt durch eine Zahnreihe, die bei einer Auflösung von 140 μm kleinste Details offenbart. Selbst die kleinsten Knochen im menschlichen Körper, Hammer, Amboss und Steigbügel im Mittelohr, sind bei einer isotropen Ortsauflösung von 140 μm sehr gut abzubilden. Abbildung 7.63c zeigt eine Volumendarstellung der drei Knochen [Pfo02].

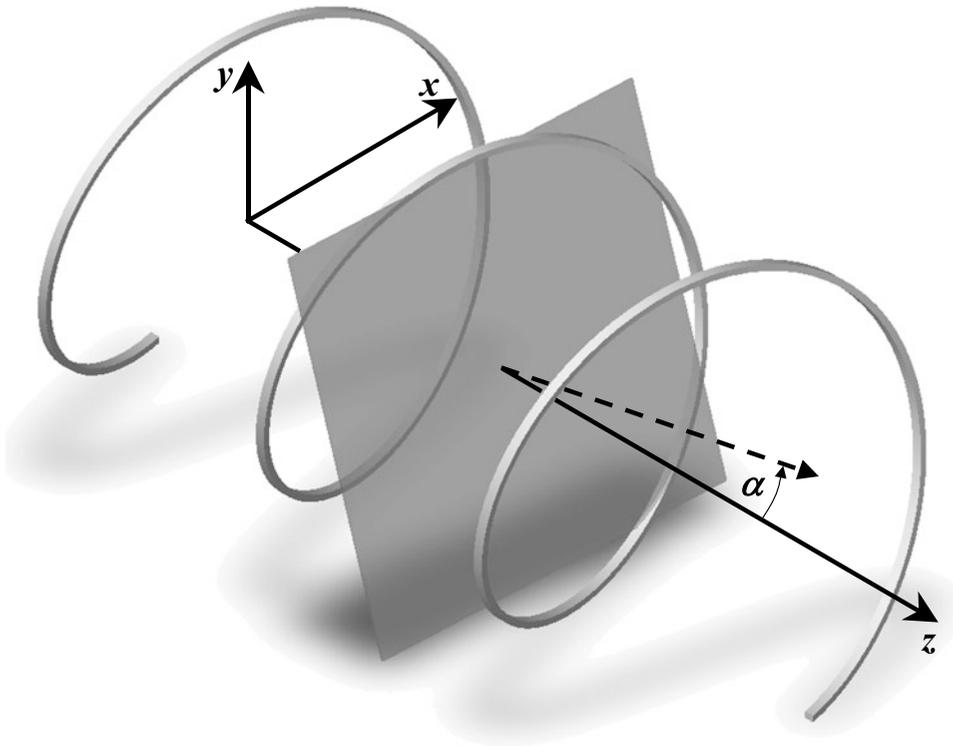


Abb. 7.62: Nutation der zweidimensionalen Rekonstruktionsebene um die axiale Achse. Die Flächennormale ist um den Winkel α gegenüber der axialen Richtung verkippt.

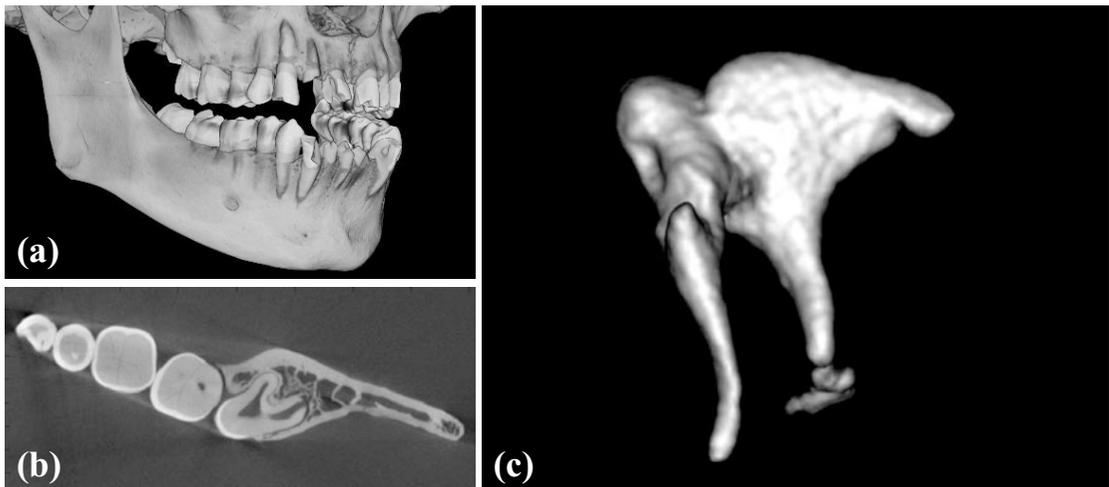


Abb. 7.63: Leistungsfähigkeit der modernen Kegelstrahl-Computertomographen mit Flächen-detektoren. Bild (a) und (b) zeigen die 3D-Visualisierung eines menschlichen Kiefers und einen dazugehörigen Schnitt durch eine Zahnreihe. Bild (c) zeigt die kleinsten menschlichen Knochen, Hammer, Amboss und Steigbügel im Mittelohr. Die Aufnahmen besitzen eine isotrope Ortsauflösung von $140 \mu\text{m}$ (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: A. H. Pfoh [Pfo02]).

8 Beurteilung der Bildqualität

Die physikalischen Schwächungswerte $f(x,y)$ des menschlichen Gewebes innerhalb einer axialen Körperschicht sind sowohl werte- als ortskontinuierlich verteilt. In den vorangegangenen Kapiteln wurde gezeigt, dass es bei den praktisch realisierten Verfahren zur Computertomographie unerlässlich ist, die Schwächung der Röntgenintensitäten für die Objektrekonstruktion digital im Computer vorzuhalten. Das heißt, für die Computertomographie ist es erforderlich, dass man die Schwächung der Röntgenintensität misst, digitalisiert und abspeichert. Dabei wird das kontinuierliche physikalische Signal sowohl im Orts- als auch im Wertebereich diskretisiert. Abbildung 8.1 zeigt, dass dieser Vorgang als Signalübertragung modelliert werden kann. Dadurch lässt sich herausfinden, welche Veränderungen – in der Regel Verschlechterungen – das Signal $f(x,y)$ bei der Erfassung und Diskretisierung zur Zahlenfolge $g(n,m)$ und weiter bis zur Darstellung des Tomogrammes $c(n,m)$ erfährt.

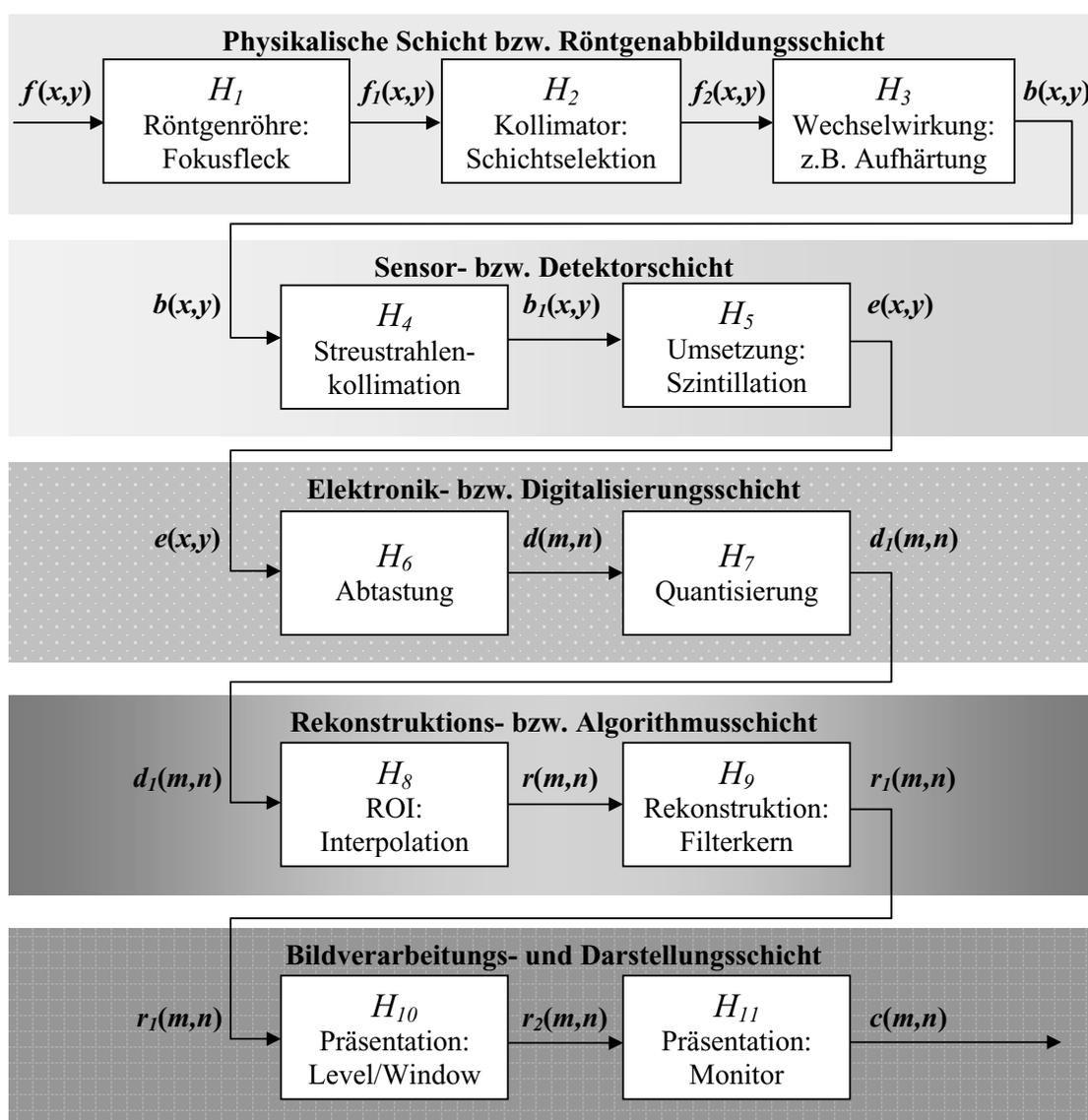


Abb. 8.1: Die Bildgewinnung bei der Computertomographie lässt sich in mehreren Schichten als Signalübertragung von der Röntgenquelle bis zur Bildbetrachtung modellieren.

Der Weg des Signals soll hier durch fünf Schichten modelliert werden. In der ersten Schicht, die hier physikalische Schicht bzw. Röntgenabbildungsschicht genannt ist, wird die Strahlcharakteristik beschrieben⁵². Diese Schicht ist in Analogie zum Objektiv einer Kamera zu sehen, da hier die physikalische Qualität der Röntgenoptik durch die Brennfleckgröße in der Röntgenröhre und durch die Schichtkollimation des Röntgenfächers beschrieben ist. Die Übertragungsfunktionen (H_1 und H_2) beschreiben dabei die Veränderung des orts- und wertekontinuierlichen Eingangssignals $f(x,y)$. Die physikalische Natur des Signals bleibt zunächst unverändert. Die Wechselwirkung zwischen der abbildenden Röntgenstrahlung und dem Objekt verändert in der Regel aber auch die physikalische Natur der Strahlung und zwar im Hinblick auf die Aufhärtung des Spektrums der polychromatischen Röntgenstrahlung. Dies stellt eine Analogie zum Farbfehler eines Kameraobjektivs her. Das Bild, das durch Aufhärtung (H_3) eine Degeneration erfahren hat, sei mit $b(x,y)$ bezeichnet.

In der zweiten Schicht, der Sensor- bzw. Detektorschicht (in Analogie zur Filmebene einer analogen Kamera), wird das Signal zunächst durch Streustrahlenkollimation unterteilt (H_4) und danach physikalisch umgesetzt, das heißt, die Röntgenstrahlung wird zum Beispiel in einem Szintillatorkristall detektiert, und in einem nachfolgenden Photomultiplier in elektrische Signale $e(x,y)$ umgesetzt. Hierbei sind unter anderem Kristalleigenschaften wie das Nachleuchten (H_5) zu modellieren.

Im Allgemeinen wird in der Sensor- bzw. Detektorschicht auch schon eine Ortsdiskretisierung auftreten. Formal soll dies aber in der dritten Schicht, der Elektronik- bzw. Digitalisierungsschicht, modelliert werden, in der das elektrische Signal des Photomultipliers bzw. der Photodiode (vergleiche Abbildung 2.19) durch Abtastung mit einem Analog-Digital-Wandler räumlich diskretisiert (H_6) und die Werte quantisiert (H_7) werden.

In der vierten Schicht, der Rekonstruktions- bzw. Algorithmusschicht, werden zum Beispiel die Größe der zu rekonstruierenden Bildmatrix mit der dazugehörigen Detektorinterpolation (H_8) sowie die speziellen Eigenschaften der Filterkerne bei der gefilterten Rückprojektion (H_9) modelliert.

In der fünften Schicht, der Bildverarbeitungs- und Darstellungsschicht, wird die Art der Abbildung auf das vom menschlichen Wahrnehmungssystem unterscheidbare Grauwerteintervall (H_{10}) aber auch die Qualität des Präsentationsmediums also zum Beispiel des Monitors (H_{11}) modelliert.

In den nächsten Abschnitten dieses Kapitels wird dargestellt, wie die Einzeleinflüsse der Bildgebungskette quantifiziert werden können. Eine wichtige Rolle spielt dabei die so genannte Modulationstransferfunktion.

8.1 Die Modulationstransferfunktion in der Bildgebung

Durch die Übertragungsfunktionen H_1 bis H_{11} in Abbildung 8.1, die in der Regel als Amplituden- und Phasenverläufe in Abhängigkeit von den Ortsfrequenzen, also als $H(u,v)$ angegeben werden, kann die Abbildung eines Objektes $f(x,y)$ mathematisch beschrieben werden (vergleiche dazu auch Kapitel 4.8). Technisch interessant ist bei diesem Abbildungsprozess, wie sich die Ortsauflösung durch die Einzelkomponenten des Abbildungssystems ändert. Die gebräuchlichste Dimension der Ortsauflösung ist lp/mm, also Linienpaare pro

⁵² Die physikalischen Einflussgrößen auf die Bildqualität lassen sich natürlich nur retrospektiv, also nach Rekonstruktion des Bildes beurteilen, denn am Brennfleck der Röntgenröhre ist noch kein Bild $f(x,y)$ vorhanden.

Millimeter. Die Ortsauflösung gibt damit an, bis zu welchem Abstand zwei benachbarte Linien einander angenähert werden können, bevor sie aufgrund der verschwindenden Modulation der Bildwerte, das heißt der Variation der Grauwerte zwischen den Linien, ununterscheidbar werden. Eine wichtige Größe bei der Beurteilung der Ortsauflösung ist der Kontrast⁵³

$$K = \frac{\max\{f(x, y)\} - \min\{f(x, y)\}}{\max\{f(x, y)\} + \min\{f(x, y)\}} \quad (8.1)$$

des Bildes, also der Schwankungsbereich der Bildwerte um den Mittelwert normiert auf den Mittelwert.

In diesem Abschnitt soll erläutert werden, warum die Modulationstransferfunktion (*MTF*) ein geeignetes Maß der Ortsauflösung darstellt. Zur Motivation sei in Abbildung 8.2 zunächst eine eindimensionale sinusförmige Grauverteilung

$$f(x) = 1 + K_0 \sin(2\pi ux) \quad (8.2)$$

eines Bildes gegeben. Die Größe u sei wieder die Ortsfrequenz. Mit der Stoßantwort

$$h(x) = ae^{-x^2}, \quad (8.3)$$

die eine gaußförmige Verbreiterung eines Punktes verursacht, ergibt sich für einen schmalen Bildstreifen $\Delta\xi$ an der Stelle ξ die Abbildung

$$b'(x) = f(\xi) h(x-\xi) \Delta\xi = a f(\xi) e^{-(x-\xi)^2} \Delta\xi, \quad (8.4)$$

womit die durch das Abbildungs- bzw. Übertragungssystem verursachte Verunschärfung repräsentiert ist. Das Gesamtbild ergibt sich dann aus der Faltung des Originalsignals mit der Stoßantwort $b(x) = f(x) * h(x)$, also aus

$$b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) h(x-\xi) d\xi = a \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2} d\xi. \quad (8.5)$$

Da die Faltung symmetrisch ist, gilt ebenso

$$b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) h(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (8.6)$$

Wenn hier die Grauwertverteilung (8.2) eingesetzt wird, erhält man

$$b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + K_0 \sin(2\pi u(x-\xi))) h(\xi) d\xi. \quad (8.7)$$

⁵³ Der Kontrast wird auch *Modulation* genannt.

Unter Beachtung des Additionstheorems

$$\sin(a-b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \quad (8.8)$$

kann Gleichung (8.7) zu

$$\begin{aligned} b(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \sin(2\pi u x) \cos(2\pi u \xi) h(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \cos(2\pi u x) \sin(2\pi u \xi) h(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi + K_0 \sin(2\pi u x) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi u \xi) h(\xi) d\xi - K_0 \cos(2\pi u x) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi u \xi) h(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (8.9)$$

umgeformt werden. Da für $b(x)$ die beiden hinteren Integralterme in Gleichung (8.9) wie Komponenten eines Vektors aussehen, versucht man hier den Ansatz

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi u x) h(x) dx \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi u x) h(x) dx \right)^2}, \quad (8.10)$$

wobei ε als Länge eines Vektors interpretiert werden kann. Damit erhält man als Phase

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi u x) h(x) dx \quad (8.11)$$

bzw.

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi u x) h(x) dx. \quad (8.12)$$

Ist die Stoßantwort auf Eins normiert, das heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1, \quad (8.13)$$

dann folgt für das Bild

$$b(x) = 1 + \varepsilon K_0 \sin(2\pi u x) \cos(\varphi) - \varepsilon K_0 \cos(2\pi u x) \sin(\varphi) \quad (8.14)$$

bzw. unter Ausnutzung des Additionstheorems (8.8)

$$b(x) = 1 + \varepsilon K_0 \sin(2\pi u x - \varphi). \quad (8.15)$$

Gleichung (8.15) ist also die Abbildung vom Objekt, das durch Gleichung (8.2) repräsentiert ist.

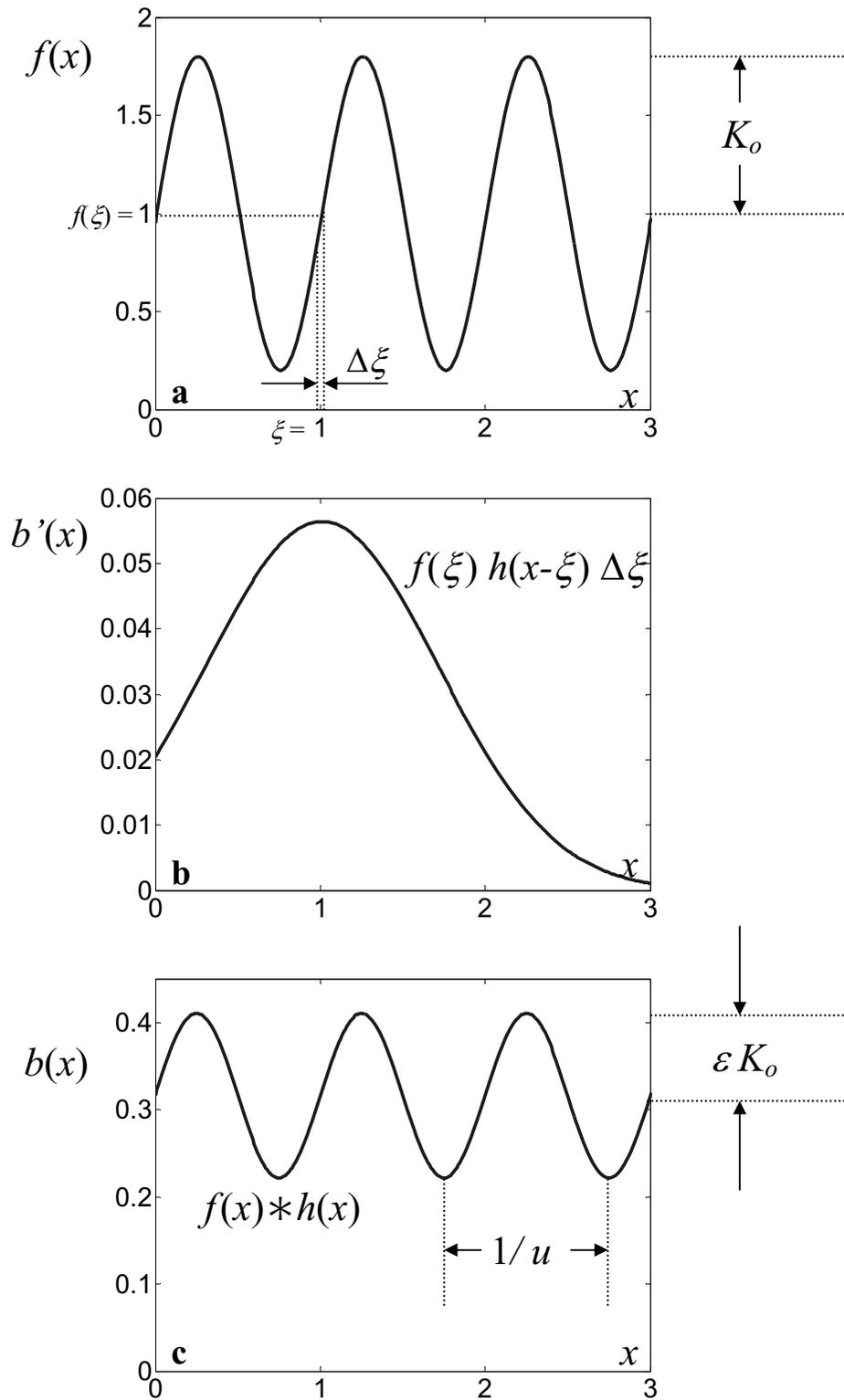


Abb. 8.2: Motivation der Modulationstransferfunktion. Ein sinusförmiges Signal (a) wird über eine gaußförmige Stoßantwort abgebildet. Bild (b) zeigt mit $f(\xi) h(x-\xi) \Delta \xi$ die Übertragung eines schmalen Streifens der Breite $\Delta \xi$. Das Gesamtbild ergibt sich aus der Faltung des Originalsignals mit der Stoßantwort $f(x) * h(x)$.

Um den Wert ε interpretieren zu können, muss noch gezeigt werden, dass ε stets zwischen 0 und 1 liegt. Dies folgt unmittelbar aus der Normierung (8.13) der Stoßantwort, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx \right)^2 \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i2\pi ux} dx \right|^2 \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos(2\pi ux) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin(2\pi ux) dx \right|^2 \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos(2\pi ux) dx \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin(2\pi ux) dx \right)^2 = \varepsilon^2.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

ε kann damit als Modulationstransferfunktion interpretiert werden, denn diese Größe steuert offenbar die Durchmodulation des Bildes bei Übertragung durch ein System mit der Stoßantwort $h(x)$.

Ein Blick auf Gleichung (8.10) zeigt, dass ε von der Ortsfrequenz abhängt, so dass man

$$\varepsilon = MTF(u) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i2\pi ux} dx \right| \tag{8.17}$$

schreibt, wobei die Normierung $MTF(0) = 1$ gelten soll.

Der Zusammenhang mit der Kontrastfunktion (8.1) ist nun folgendermaßen zu verstehen. Der Objektkontrast ist – der Übersichtlichkeit halber eindimensional beschrieben – als

$$K_0 = \frac{\max\{f(x)\} - \min\{f(x)\}}{\max\{f(x)\} + \min\{f(x)\}} \tag{8.18}$$

definiert. Analog dazu ist der Kontrast des Bildmusters als

$$K_b = \varepsilon K_0 = \frac{\max\{b(x)\} - \min\{b(x)\}}{\max\{b(x)\} + \min\{b(x)\}} \tag{8.19}$$

definiert.

Das heißt, die Modulationstransferfunktion $MTF(u)$ ist

$$\varepsilon = MTF(u) = \frac{K_b}{K_0} = \frac{\left(\frac{\max\{b(x)\} - \min\{b(x)\}}{\max\{b(x)\} + \min\{b(x)\}} \right)}{\left(\frac{\max\{f(x)\} - \min\{f(x)\}}{\max\{f(x)\} + \min\{f(x)\}} \right)} \tag{8.20}$$

also der frequenzabhängige Quotient aus dem Bildkontrast und dem Objektkontrast. Abbildung 8.3 zeigt den typischen Verlauf der Modulationstransferfunktion. Der Verlauf ist so zu interpretieren, dass der Gleichanteil des Bildes, also $MTF(0)$ immer sehr gut übertragen

wird. Erhöht sich die Ortsfrequenz der Strukturen im abzubildenden Objekt, dann sinkt der Kontrast im Bild. Je schneller die MTF abfällt, desto schlechter ist die Qualität der Bildübertragung.

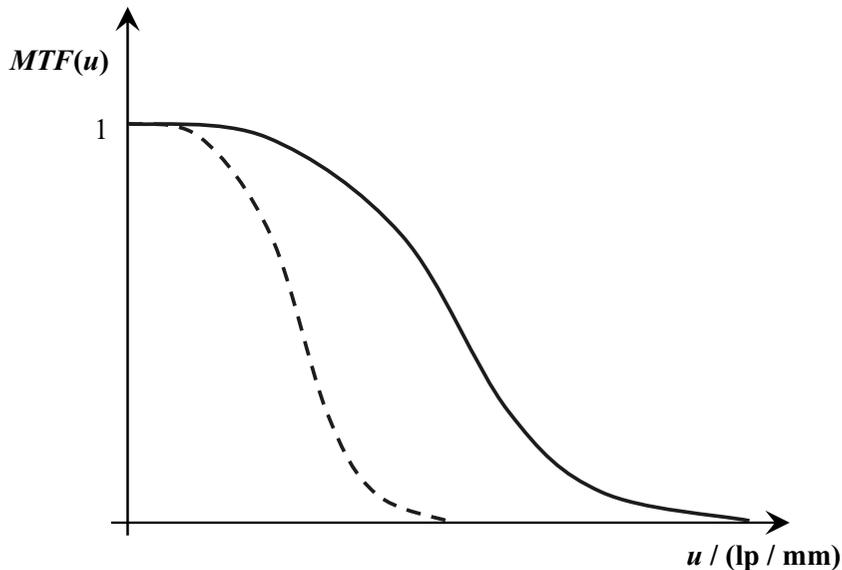


Abb. 8.3: Verlauf der frequenzabhängigen Modulationstransferfunktion $MTF(u)$. Schnell abfallende Kurven kennzeichnen eine schlechte Bildübertragungsqualität (gestrichelte Kurve).

Die gesamte MTF eines Systems aus mehreren Komponenten ergibt sich aus dem Produkt der jeweiligen MTF s der einzelnen Komponenten. In Bezug auf Abbildung 8.1 heißt das zum Beispiel

$$MTF_{\text{System}}(u) = MTF_{\text{Röntgensicht}}(u) \cdot MTF_{\text{Detektorschicht}}(u) \cdot \dots \\ \dots \cdot MTF_{\text{Elektronikschicht}}(u) \cdot MTF_{\text{Algorithmschicht}}(u) \cdot MTF_{\text{Darstellungsschicht}}(u) \quad (8.21)$$

mit

$$MTF_{\text{Röntgensicht}}(u) = MTF_{\text{Röntgenröhre}}(u) \cdot MTF_{\text{Kollimator}}(u) \cdot MTF_{\text{Wechselwirkung}}(u) \quad (8.22)$$

und die weiteren Schichten analog. Gleichung (8.21) besagt, dass das schwächste Übertragungsglied in der Kette die Modulationstransferfunktion des Gesamtsystems dominiert und damit die Qualität der Übertragung bestimmt.

8.2 Modulationstransferfunktion und *Point-Spread-Function*

Man kann die Modulationstransferfunktion (MTF) leicht in Zusammenhang mit der Fouriertransformation der *Point-Spread-Function* (PSF) bringen. Dazu nimmt man an, dass in der kartesischen x - y -Bildebene ein δ -Punkt liegt. So wie im Kapitel 5.5 gezeigt, erzeugt das Bildgebungssystem eine spezielle Abbildung des Punktes $g(x,y)$, das so genannte Punktbild. Die Abbildung ist bei einem δ -Punkt als Eingangssignal identisch mit der *Point-Spread-Function* des Systems.

Unter den üblichen Bedingungen der Linearität und Verschiebungsinvarianz des Bildgebungssystems kann man mit Hilfe der Fouriertransformation den Ausdruck

$$OTF(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy \quad (8.23)$$

gewinnen, der optische Transferfunktion genannt wird [Leh97]. Der Betrag der optischen Transferfunktion ist dann die Modulationstransferfunktion

$$MTF(u, v) = |OTF(u, v)|. \quad (8.24)$$

Die *OTF* ist im Allgemeinen komplex, so dass man sie in Betrag und Phase aufteilen kann

$$OTF(u, v) = MTF(u, v) e^{iPTF(u, v)}. \quad (8.25)$$

Die *PTF* ist die so genannte Phasentransferfunktion. Zusammenfassend kann also Gleichung (8.23) durch

$$\text{Point-Spread-Funktion} \circ \text{---} \bullet \quad OTF(u, v) = MTF(u, v) e^{iPTF(u, v)} \quad (8.26)$$

beschrieben werden. Definiert man als radiale Frequenz

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (8.27)$$

und setzt man zunächst $v = 0$, um bei dem Beispiel des vorangegangenen Abschnitts zu bleiben, so erhält man für die Gleichung (8.23)

$$\begin{aligned} OTF(q, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi i x q} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right) e^{-2\pi i x q} dx \end{aligned} \quad (8.28)$$

Der Klammerausdruck ist die so genannte Linienbildfunktion $L(x)$. Man schreibt daher

$$MTF(q) = |OTF(q, 0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} L(x) e^{-2\pi i x q} dx \right| \quad (8.29)$$

Nach *E. Krestel* [Kre90] ist die Modulationstransferfunktion also der Betrag der eindimensionalen Fouriertransformierten der Linienbildfunktion. Man kann die Linienbildfunktion in dem eindimensionalen Beispiel des vorangegangenen Kapitels mit der *Point-Spread-Funktion* identifizieren. Dazu vergleiche man den Ausdruck (8.29) mit Gleichung (8.17).

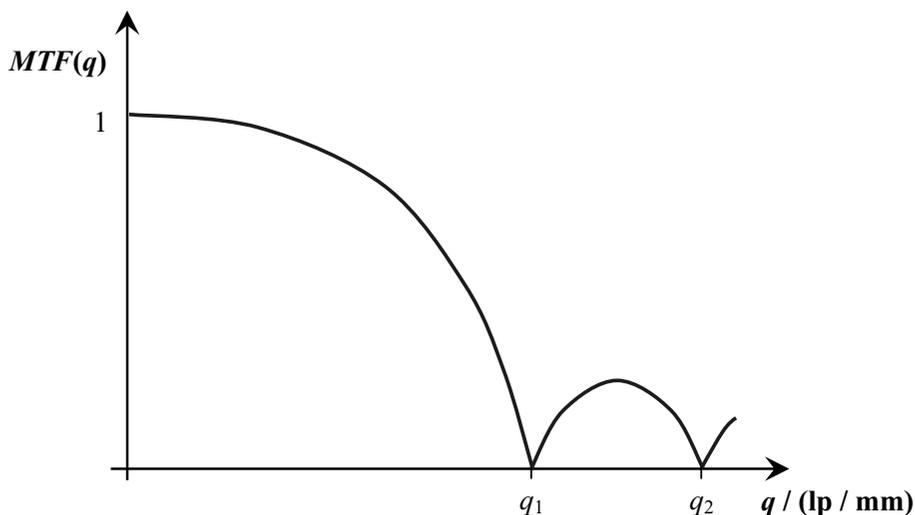


Abb. 8.4: Verlauf der frequenzabhängigen Modulationstransferfunktion $MTF(q)$ mit Pseudoschärfe.

In der Praxis kommt es vor, dass sich die Phase bei der Übertragung durch das System ändert. Tritt zum Beispiel der Fall auf, dass das Bildgitter $b(x)$ um π gegen über dem Gegenstandsgitter $g(x)$ verschoben ist, dann fällt ein Wellental von $b(x)$ gerade auf einen Wellenberg von $g(x)$. Dunkle Strukturen werden dabei hell und helle Strukturen dunkel abgebildet. Diesen Effekt nennt man Pseudoschärfe. Abbildung 8.4 zeigt, wie sich dieser Effekt im Verlauf der MTF darstellt. Im Frequenzbereich $q_1 < q < q_2$ wird das Bild phasenverkehrt abgebildet [Mor95].

8.3 Die Modulationstransferfunktion bei der Computertomographie

Bei der quantitativen und damit objektiven Beurteilung der Abbildungsqualität der Computertomographie hilft das Konzept der Modulationstransferfunktion. Man geht dabei den Weg, der mit Gleichung (8.21) beschrieben ist. Dafür zerlegt man das System in seine Bestandteile. Der erste Schritt ist dabei die Trennung von physikalisch-technischer Bilderzeugung und Algorithmus zur Bildrekonstruktion, also

$$MTF_{CT}(q) = MTF_{\text{physikalisch-technische Bilderzeugung}}(q) \cdot MTF_{\text{Algorithmus}}(q), \quad (8.30)$$

dabei stellt im Sinne der Abbildung 8.1 der erste Term die Schichten 1 bis 3 und der zweite Term die Schicht 4 dar. Die Schicht 5 soll in dieser Darstellung vernachlässigt werden.

Betrachtet man zunächst die physikalisch-technischen Prozesse bei der Bilderzeugung, so sind zwei Komponenten – die Röntgenquelle und der Detektor – besonders wichtig. Hier soll nur auf die Fokusfleckgröße in der Röntgenröhre und die räumliche Quantisierung des Detektorarrays im Detail eingegangen werden. Diese sind in Abbildung 8.1 durch H_1 in Schicht 1 und H_6 in Schicht 3 repräsentiert. Wie durch Gleichung (8.22) nahegelegt, kann man so vorgehen, dass auch diese beiden Komponenten getrennt voneinander betrachtet und dann die einzelnen $MTFs$ der Komponenten multipliziert werden, also

$$MTF_{\text{physikalisch-technische Bilderzeugung}}(q) = MTF_{\text{Röhre}}(q) \cdot MTF_{\text{Abtastung}}(q). \quad (8.31)$$

Behandelt man zunächst die Röntgenquelle, dann muss man hier die Größe des Targetpunktes der Elektronen auf der Anode als räumliche Ausdehnung der Röntgenquelle sehen. Im Einzelnen hängt die Größe des Brennflecks auf der Drehanode von einigen Details ab, u.a. von dem Winkel, unter dem der Detektor den Fleck sieht. Darüber hinaus spielt auch die Leistung, mit der die Röhre betrieben wird eine wichtige Rolle. Typisch sind Brennfleckdurchmesser in der Größenordnung von etwa 1 mm (vergleiche Kapitel 2.1).

Abbildung 8.5 zeigt die Situation für eine ausgedehnte Röntgenquelle mit dem Fokusspotdurchmesser F . Der Detektor, der einen Abstand FDD von der Quelle haben soll, wird zunächst als ideal punktförmig angenommen, denn man darf ja die Komponenten isoliert betrachten, so dass in diesem ersten Schritt der Detektor ohne eigenen Beitrag zur Bildverschlechterung angesehen wird.

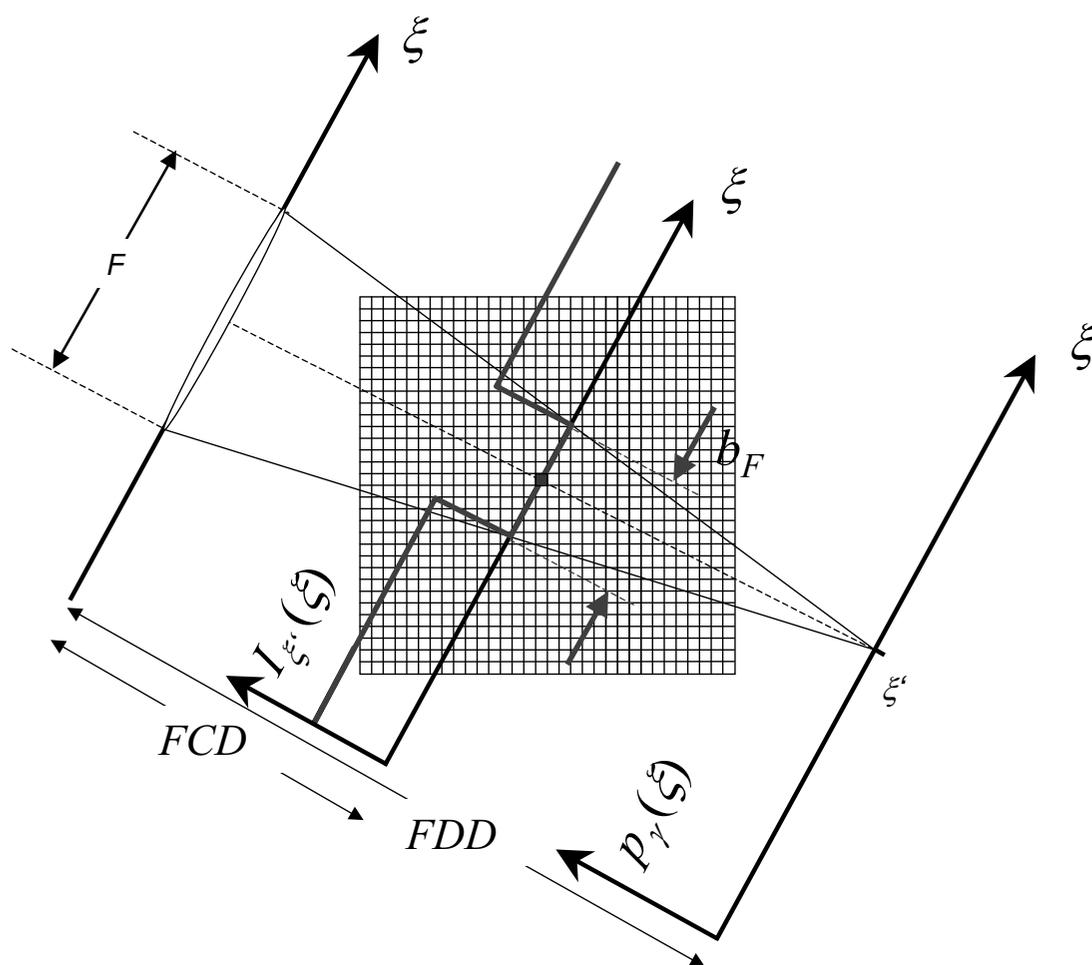


Abb. 8.5: Zerlegung des Abbildungssystems in seine Komponenten zur Ermittlung der einzelnen Modulationstransferfunktionen. Skizze für eine ausgedehnte Röntgenquelle mit dem Fokusspotdurchmesser F und einem punktförmigen Detektor

Ein Punkt, der in der Messfeldmitte liegt (der Abstand zwischen Fokus und Messfeldmitte sei mit FCD bezeichnet und die Fokus-Detektor-Distanz FDD sei gerade $FCD/2$), erzeugt am punktförmigen Detektor nach dem Strahlensatz ein inverses Rechtecksignal der Länge

$$b_F = F \frac{FDD - FCD}{FDD} = \frac{F}{2}. \quad (8.32)$$

Dieses Rechtecksignal ist gerade die im ersten Schritt gesuchte *Point-Spread-Function* also die Impulsantwort des Abbildungssystems, denn es ist tatsächlich das Bild eines δ -Impulses in der Messfeldmitte. Wenn aber

$$I_{\xi'}(\xi) = I_0 \left(1 - \frac{1}{\tilde{b}_F} \text{rect} \left(\frac{\xi}{b_F} \right) \right) \quad (8.33)$$

das inverse Rechteck der Länge b_F ist⁵⁴, dann ist die Modulationstransferfunktion einfach aus der Fouriertransformation der Impulsantwort zu bestimmen, nämlich durch

$$MTF_{\text{Röhre}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi b_F q)}{\pi b_F q} \right| \quad (8.34)$$

(vergleiche Kapitel 4.9). Betrachtet man als zweite Komponente der Bilderzeugung jetzt den Detektor, dann ist klar, dass bei realen Systemen immer mit einer endlichen Apertur gerechnet werden muss. Analog zum ersten Schritt werden auch hier zunächst alle anderen Komponenten idealisiert. Der Fokus der Röntgenquelle wird also bei diesem zweiten Schritt mit dem Durchmesser Null angenommen.

Die Abtastung geschieht hier nun mit einem rechteckigen Empfindlichkeitsprofil, das heißt der Detektor integriert über seine Länge $\Delta\xi$ auf. Für einen δ -Impuls in der Messfeldmitte bedeutet dies, dass man ein Messsignal erhält, das – wie in Gleichung (8.32) ebenfalls nach dem Strahlensatz – die Länge

$$b_D = \Delta\xi \frac{FCD}{FDD} = \frac{\Delta\xi}{2} \quad (8.35)$$

besitzt.

Aus der Abbildung 8.6 ist dieser Sachverhalt leicht abzulesen. Dieses Empfindlichkeitsprofil stellt die gesuchte Impulsantwort

$$I_j(\xi) = I_0 \left(1 - \frac{1}{\tilde{b}_D} \text{rect} \left(\frac{\xi}{b_D} \right) \right) \quad (8.36)$$

dar⁵⁵. Aus diesem inversen Rechteck der Länge b_D ist die Modulationstransferfunktion wieder mittels der Fouriertransformation zu bestimmen.

⁵⁴ \tilde{b}_F ist die dimensionslose Normierungslänge $b_F / (1m)$.

⁵⁵ \tilde{b}_D ist die dimensionslose Normierungslänge $b_D / (1m)$.

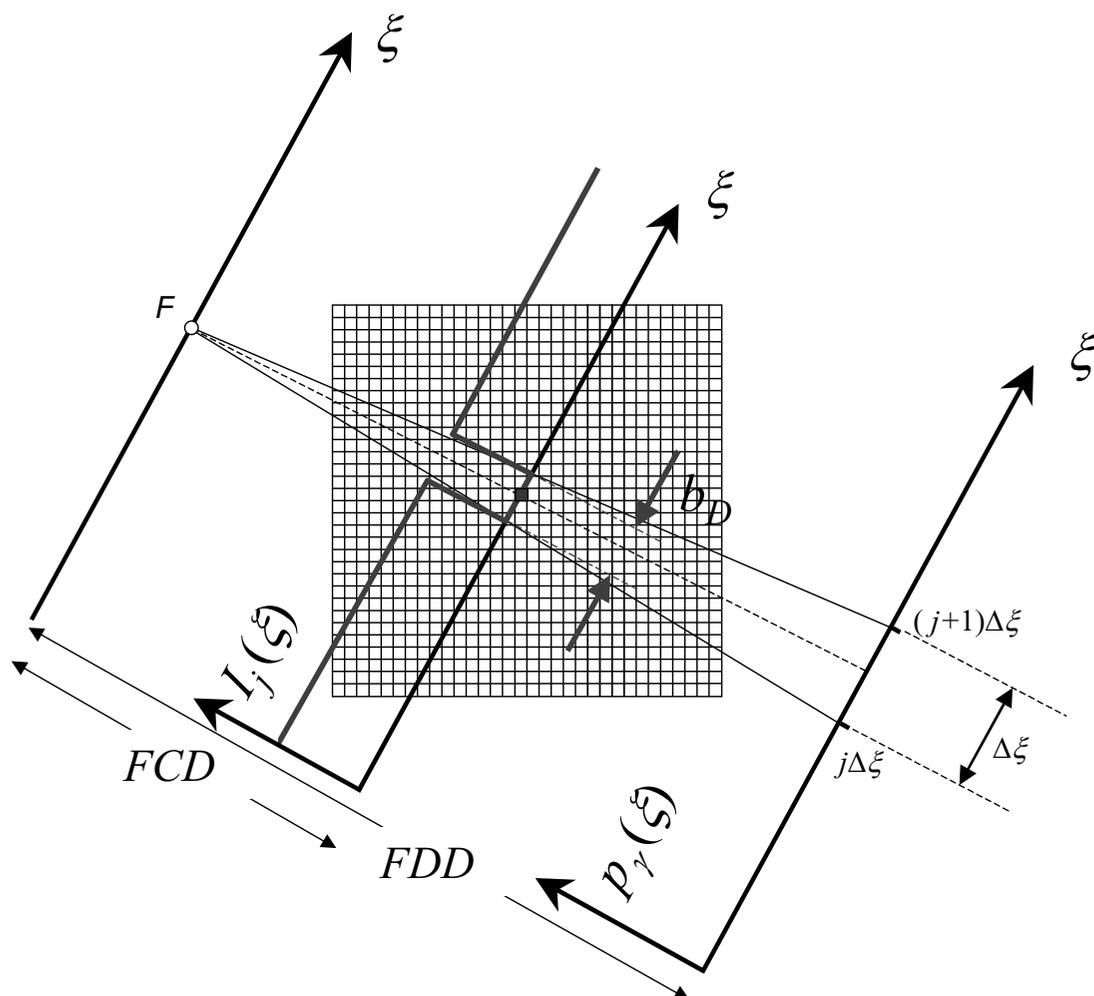


Abb. 8.6: Zerlegung des Abbildungssystems in seine Komponenten zur Ermittlung der einzelnen Modulationstransferfunktionen. Skizze für eine punktförmige Röntgenquelle und einen ausgedehnten Detektor der Größe $\Delta\xi$.

Das Ergebnis lautet

$$MTF_{\text{Abtastung}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi b_D q)}{\pi b_D q} \right|. \quad (8.37)$$

Für das Gesamtsystem der physikalisch-technischen Bilderzeugung lässt sich die Modulationstransferfunktion nun als

$$MTF_{\text{phys.-techn. Bilderzeugung}}(q) = MTF_{\text{Röhre}}(q) \cdot MTF_{\text{Abtastung}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi b_F q)}{\pi b_F q} \right| \left| \frac{\sin(\pi b_D q)}{\pi b_D q} \right| \quad (8.38)$$

angeben. In Abbildung 8.7 ist das Verhalten der Gesamtmodulationstransferfunktion gezeigt. Es ist ganz offensichtlich, dass die schlechteste Komponente des Abbildungssystems das Gesamtergebn verdirbt. Die erste Nullstelle der MTF wird *cut-off* Frequenz genannt. Das ist die maximale Frequenz räumlicher Strukturen, die mit dem System aufzulösen sind.

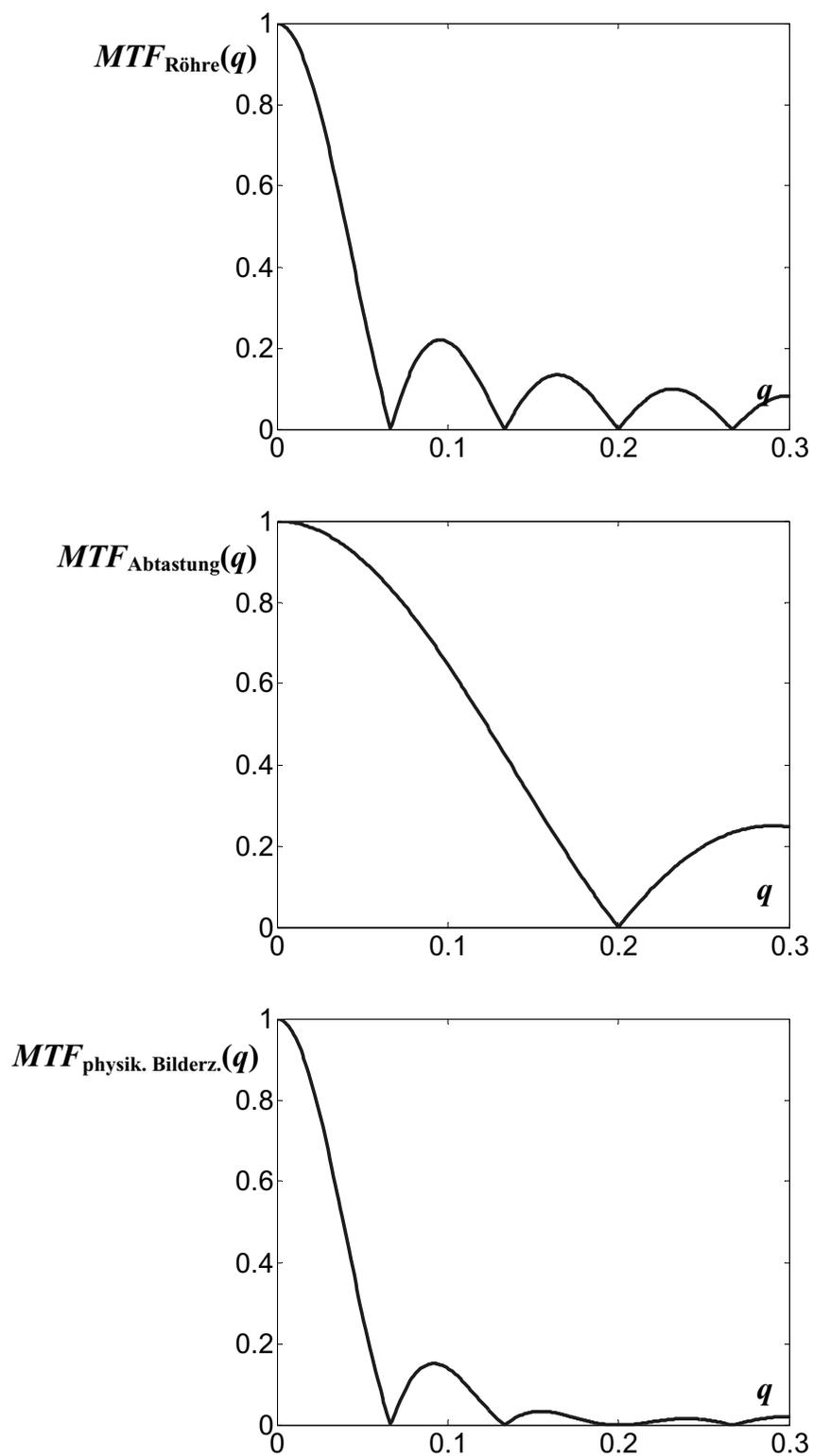


Abb. 8.7: Modulationstransferfunktionen für die Röntgenquelle, die Abtastung mit endlicher Detektorapertur und für das Gesamtsystem der physikalisch-technischen Messwerterfassung (von oben nach unten).

Die in Abbildung 8.7 ablesbaren Größenordnungen für die *cut-off* Frequenzen sind nur als Abschätzung zu sehen, die auf die jeweils reale Situation angepasst werden müssen. Abhängig von der Bauart der Röhre, die häufig als Springfokussystem realisiert ist, müssen die Terme in Gleichung (8.38) entsprechend berechnet werden.

Als weiteres Beispiel zur Abschätzung der Bildqualität, soll ausgehend von Gleichung (8.30) nun die Modulationstransferfunktion des Rekonstruktionsalgorithmus berechnet werden. Für die gefilterte Rückprojektion setzt sich die *MTF* der Schicht 3 in Abbildung 8.1 aus

$$MTF_{\text{Algorithmus}}(q) = MTF_{\text{Interpolation}}(q) \cdot MTF_{\text{Filterkern}}(q) \quad (8.39)$$

zusammen.

Der erste Term in Gleichung (8.39) beschreibt das Bildübertragungsverhalten bei Interpolation. Interpolation der Projektionswerte ist erforderlich, weil das Projektionsprofil mit Detektorelementen der Breite $\Delta\xi$ abgetastet wird. Wie schon im Kapitel 6.2 beschrieben wurde, liegt der gesuchte Punkt der Bildmaske in der Regel nicht auf einem exakten Abtastpunkt der Projektion bzw. der gefilterten Projektion. Abbildung 8.8 zeigt dieses Problem mit einem sehr groben Abtastraster $\Delta\xi$ in der gefilterten Projektion.

Um zu verstehen, wie die Modulationstransferfunktion für die Interpolation aussieht, muss man sich der Interpolation kurz zuwenden. Liegt ein gesuchter Wert nicht auf dem Raster der gegebenen Werte, dann muss dieser Wert aus den Nachbarnpunkten interpoliert werden.

Formal ist das die Faltung

$$h_{\gamma}(\xi') = \sum_j h_{\gamma}(j\Delta\xi) l(\xi' - j\Delta\xi). \quad (8.40)$$

Dabei ergibt sich der ideale Faltungskern $l(\xi)$ aus dem Abtasttheorem (vergleiche Kapitel 4.16). Da abgetastete Signale ein periodisches Spektrum besitzen, muss bei der Rekonstruktion des Signals aus dem Spektrum mittels der inversen Fouriertransformation entsprechend gefenstert werden. Dazu verwendet man im idealen Fall die Multiplikation des Spektrums mit einem Rechtecksignal. Im Ortsbereich stellt sich das Rechteck als *sinc*-Funktion dar, das heißt, der ideale Faltungskern zur Interpolation ist gerade die Funktion

$$l_{\text{ideal}}(\xi) = \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{\Delta\xi} \xi\right)}{\pi \frac{1}{\Delta\xi} \xi}. \quad (8.41)$$

Da das örtliche Signal in seiner Ausdehnung auf die Detektorbreite beschränkt ist, kann die idealisierte Gleichung (8.41) keine Anwendung finden. Vielmehr verwendet man Näherungen des Faltungskerns $l_{\text{ideal}}(\xi)$.

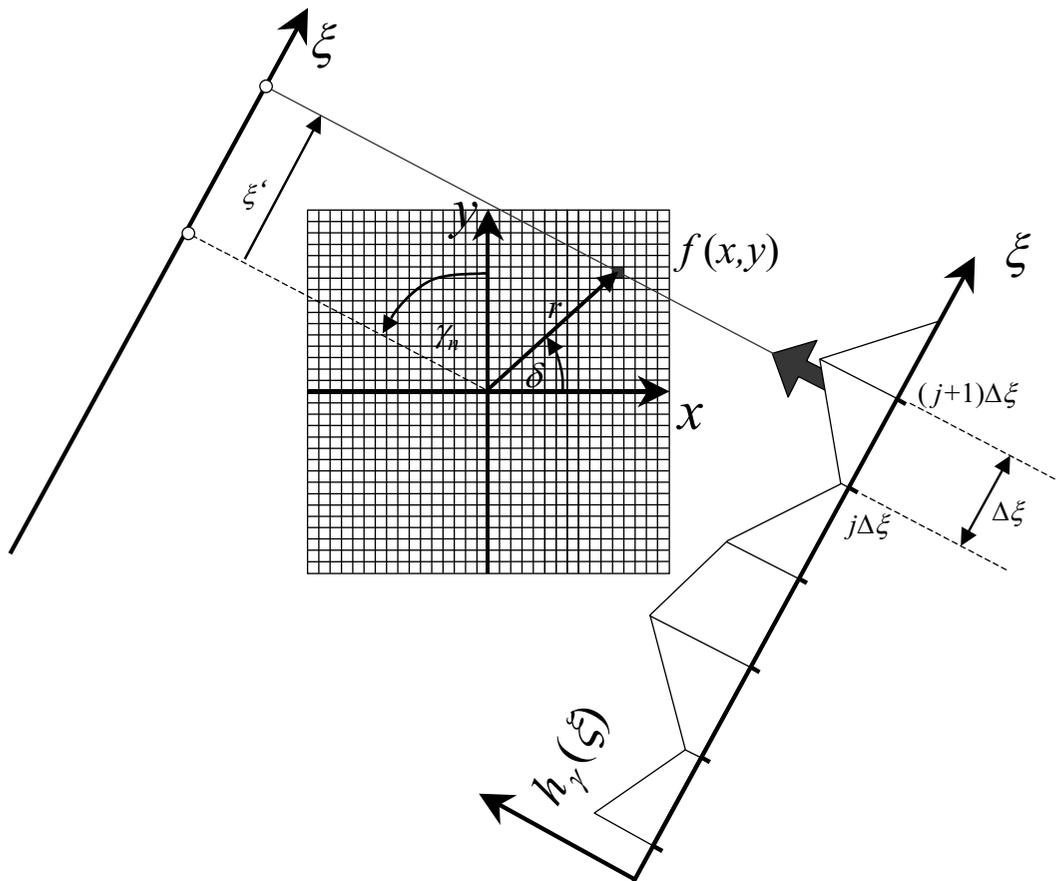


Abb. 8.8: Interpolation der Abtastwerte für das gefilterte Projektionssignal. Der Rasterwert $(x,y)^T$ führt in der Regel nicht zu einem ganzzahligen Abtastwert von $h_\gamma(j\Delta\xi)$,

Eine dieser Näherungen ist die so genannte lineare Interpolation. Wie in Abbildung 8.9 skizziert, führt die lineare Interpolation auf die Dreiecksfunktion⁵⁶, also

$$l_{\text{lin. Interpol.}}(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{|\xi|}{\Delta\xi} & |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.42)$$

Die Funktion (8.42) ist gerade die Impulsantwort der linearen Interpolation, denn ein einzelner Abtast- δ -Punkt stellt sich hierbei gerade als Dreieck dar. Deswegen ist die Modulationstransferfunktion der linearen Interpolation der Betrag der Fouriertransformation der Dreiecksfunktion.

⁵⁶ In dieser Definition auf ein Detektorelement beschränkt.

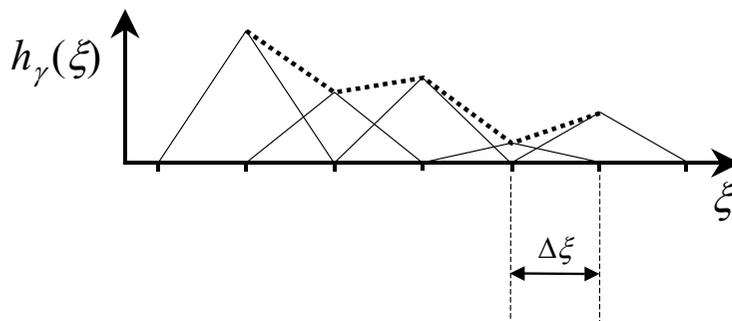


Abb. 8.9: Mit der linearen Interpolation, die auf der Überlagerung von Dreiecksfunktionen beruht, lässt sich die ideale *sinc*-Funktion für viele praktische Fälle hinreichend gut annähern. Die Dreiecksfunktion ist die gesuchte Impulsantwort.

Für die Frequenzdarstellung des Dreiecksfaltungskerns kann man auf die Herleitung (6.33) zurückgreifen und folgende Änderung vornehmen

$$L_{\text{lin. Interp.}}(q) = \int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi} \left(1 - \frac{|\xi|}{\Delta\xi}\right) e^{-i2\pi\xi q} d\xi = \int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi} e^{-i2\pi\xi q} d\xi + \frac{1}{\Delta\xi} \left(\int_{-\Delta\xi}^0 \xi e^{-i2\pi\xi q} d\xi - \int_0^{\Delta\xi} \xi e^{-i2\pi\xi q} d\xi \right). \quad (8.43)$$

Mit Gleichung (6.32) findet man

$$L_{\text{lin. Interpol.}}(q) = \left[-\frac{1}{2\pi i q} e^{-2\pi i q \xi} \right]_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi} + \frac{1}{\Delta\xi} \left[\left(\frac{-2\pi i q \xi - 1}{(2\pi i q)^2} \right) e^{-2\pi i q \xi} \right]_{-\Delta\xi}^0 - \frac{1}{\Delta\xi} \left[\left(\frac{-2\pi i q \xi - 1}{(2\pi i q)^2} \right) e^{-2\pi i q \xi} \right]_0^{\Delta\xi}. \quad (8.44)$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert dann

$$\begin{aligned} L_{\text{lin. Interpol.}}(q) &= -\frac{1}{2\pi i q} e^{-2\pi i q \Delta\xi} + \frac{1}{2\pi i q} e^{2\pi i q \Delta\xi} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta\xi} \left[+\frac{1}{(2\pi i q)^2} + \left(\frac{2\pi i q \Delta\xi - 1}{(2\pi i q)^2} \right) e^{2\pi i q \Delta\xi} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta\xi} \left[\left(\frac{2\pi i q \Delta\xi + 1}{(2\pi i q)^2} \right) e^{-2\pi i q \Delta\xi} - \frac{1}{(2\pi i q)^2} \right] \end{aligned} \quad (8.45)$$

und das Auswerten der Klammerausdrücke in Gleichung (8.45) führt zu

$$\begin{aligned} L_{\text{lin. Interpol.}}(q) &= -\frac{1}{2\pi i q} e^{-2\pi i q \Delta\xi} + \frac{1}{2\pi i q} e^{2\pi i q \Delta\xi} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta\xi} \left[-\frac{1}{(2\pi i q)^2} - \frac{2\pi i q \Delta\xi}{(2\pi i q)^2} e^{2\pi i q \Delta\xi} + \frac{1}{(2\pi i q)^2} e^{2\pi i q \Delta\xi} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta\xi} \left[\frac{2\pi i q \Delta\xi}{(2\pi i q)^2} e^{-2\pi i q \Delta\xi} + \frac{1}{(2\pi i q)^2} e^{-2\pi i q \Delta\xi} - \frac{1}{(2\pi i q)^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Durch das Umsortieren der Terme der zweiten und dritten Zeile von Gleichung (8.46) erkennt man die komplexe Schreibweise des *Sinus*

$$\begin{aligned}
 L_{\text{lin. Interpol.}}(q) &= \frac{1}{2\pi i q} e^{2\pi i q \Delta \xi} - \frac{1}{2\pi i q} e^{-2\pi i q \Delta \xi} \\
 &+ \frac{1}{\Delta \xi} \left[\frac{1}{(2\pi i q)^2} e^{2\pi i q \Delta \xi} - \frac{2}{(2\pi i q)^2} + \frac{1}{(2\pi i q)^2} e^{-2\pi i q \Delta \xi} \right] \\
 &+ \frac{1}{\Delta \xi} \left[\frac{\Delta \xi}{2\pi i q} e^{-2\pi i q \Delta \xi} - \frac{\Delta \xi}{2\pi i q} e^{2\pi i q \Delta \xi} \right]
 \end{aligned} \tag{8.47}$$

also ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
 L_{\text{lin. Interpol.}}(q) &= \frac{1}{\pi q} \left(\frac{e^{2\pi i q \Delta \xi} - e^{-2\pi i q \Delta \xi}}{2i} \right) + \frac{1}{\Delta \xi} \left(\frac{1}{\pi q} \right)^2 \left(\frac{e^{\pi i q \Delta \xi} - e^{-\pi i q \Delta \xi}}{2i} \right)^2 - \frac{1}{\pi q} \left(\frac{e^{2\pi i q \Delta \xi} - e^{-2\pi i q \Delta \xi}}{2i} \right) \\
 &= 2\Delta \xi \frac{\sin(2\pi q \Delta \xi)}{2\pi q \Delta \xi} + \Delta \xi \left(\frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right)^2 - 2\Delta \xi \frac{\sin(2\pi q \Delta \xi)}{2\pi q \Delta \xi} \\
 &= \Delta \xi \left(\frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right)^2
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

als Modulationstransferfunktion der linearen Interpolation

$$MTF_{\text{lin. Interpol.}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi \Delta \xi q)}{\pi \Delta \xi q} \right|^2. \tag{8.49}$$

Der zweite Term in Gleichung (8.39) besteht aus

$$MTF_{\text{Filterkern}}(q) = \frac{|G(q)|}{|q|}, \tag{8.50}$$

wobei $G(q)$ die Fouriertransformierte des Kerns $g(\xi)$ ist. Beispiele dazu waren in Kapitel 6.1 angegeben.

Abweichend vom idealen Filter $|q|$ wurden dort spezielle Bandbegrenzungen eingeführt, die einerseits notwendig sind, weil das Spektrum des abgetasteten Projektionssignals periodisch ist. Andererseits sind spezielle Fensterfunktionen zur Bandbegrenzung gewählt, um das Rauschen im höheren Band zu dämpfen. Gerade wenn es um diese Fensterung geht, ist klar, dass die spezielle Form des Fensters die Auflösung des zu rekonstruierenden Bildes beeinflusst, denn in den höheren Bändern liegen ja gerade die hochfrequenten räumlichen Strukturen, die dann nicht mehr auflösbar sind. Das heißt, die Fensterung verschiebt die *cut-off* Frequenz nach unten.

In Gleichung (8.50) muss offenbar mit dem Rampenfilter $|q|$ normalisiert werden. Dies kann man sich dadurch erklären, dass $G(q)$ die idealisierte Rampe schon enthält. Die idealisierte (unendlich ausgedehnte, kontinuierliche) Rampe erzeugt aber gerade eine exakte Rekonstruk-

tion des Objektes mit einer theoretischen Modulationstransferfunktion, für die $MTF(q) \equiv 1$ gilt. Abweichungen davon erhält man nur aufgrund der Fensterung, denn es gilt

$$G(q) = |q| W(q), \quad (8.51)$$

wobei $W(q)$ die bandbegrenzende Fensterfunktion darstellt. Genau genommen muss Gleichung (8.50) etwas übersichtlicher heißen

$$MTF_{\text{Filterkern}}(q) = \frac{|G(q)|}{|q|} = \frac{||q|W(q)|}{|q|} = \frac{|q||W(q)|}{|q|} = |W(q)|. \quad (8.52)$$

Geht man von dem weit verbreiteten Fenster von *Shepp* und *Logan* – siehe Gleichung (6.16) – aus, so erhält man

$$MTF_{\text{Filterkern}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi \Delta \xi q)}{\pi \Delta \xi q} \right|. \quad (8.53)$$

Insgesamt sieht man also für den Rekonstruktionsalgorithmus mit *Shepp*-und-*Logan*-Fensterung und linearer Interpolation den speziellen Fall der *MTF*

$$\begin{aligned} MTF_{\text{Algorithmus}}(q) &= MTF_{\text{Interpolation}}(q) \cdot MTF_{\text{Filterkern}}(q) \\ &= \left| \frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right| \cdot \left| \frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right|^2 = \left| \frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right|^3. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Damit kann man nun wesentliche Terme der gesamten Modulationstransferfunktion der Abbildung durch einen Computertomographen angeben. Ausgehend von Gleichung (8.30) folgt

$$MTF_{\text{CT}}(q) = MTF_{\text{Röhre}}(q) \cdot MTF_{\text{Abtastung}}(q) \cdot MTF_{\text{Interpolation}}(q) \cdot MTF_{\text{Filterkern}}(q) \quad (8.55)$$

also

$$MTF_{\text{CT}}(q) = \left| \frac{\sin(\pi b_f q)}{\pi b_f q} \right| \left| \frac{\sin(\pi b_D q)}{\pi b_D q} \right| \left| \frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right| \left| \frac{\sin(\pi q \Delta \xi)}{\pi q \Delta \xi} \right|^2. \quad (8.56)$$

So wie in Abbildung 8.7 demonstriert, bestimmt nun die kleinste Nullstelle von $MTF_{\text{CT}}(q)$ das Gesamtübertragungsverhalten des Systems. Zusammenfassend kann man sagen, dass Fokusgröße, Detektorapertur, Rekonstruktionskern und die Interpolation jeweils allein das Auflösungsvermögen verschlechtern können. Umgekehrt müssen für ein gutes Abbildungssystem sämtliche Komponenten positiv dazu beitragen. Neben den hier gezeigten Größen kommen in der Praxis noch weitere, auch außerhalb der so genannten *Front-End*-Einheit liegende Einflüsse wie z.B. die Qualität der Bildbetrachtungseinheit, der so genannten *Back-End*-Einheit, hinzu.

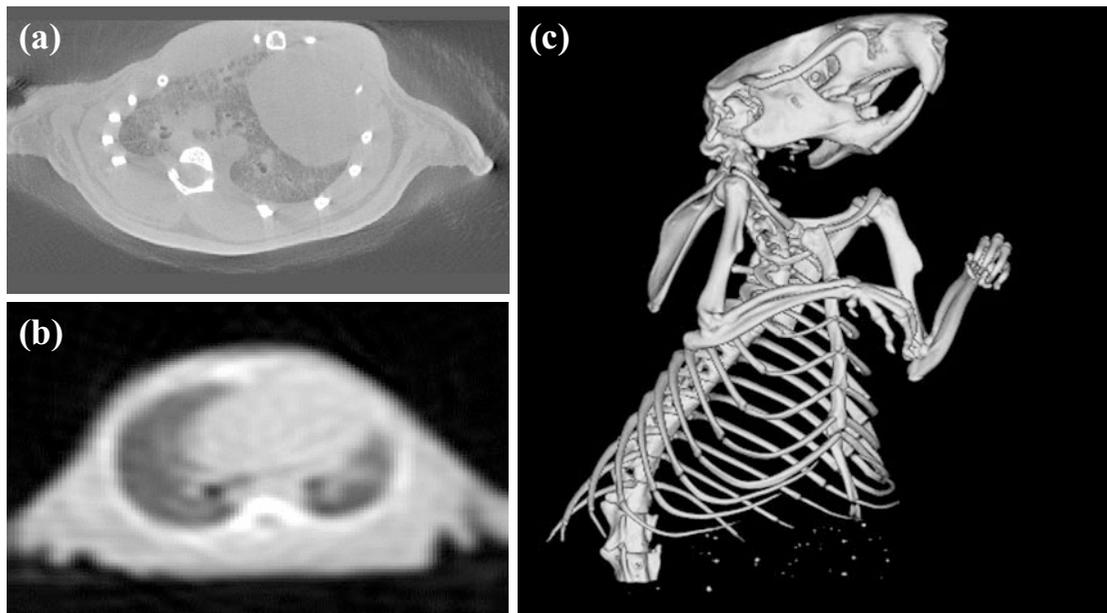


Abb. 8.10: Leistungsfähigkeit der modernen Kegelstrahl-Computertomographen mit Flächendetektoren. Bild (a) und (b) zeigen einen Vergleich von axialen Schichtbildern des Brustbereichs einer Labormaus. Bild (a) zeigt das Ergebnis eines Kegelstrahlensystems mit einer Auflösung von 0,05 mm und Bild (b) das Ergebnis eines klinischen CT-Systems mit einer Schichtdicke von 1,25 mm. Bild (c) zeigt den Detailreichtum einer dreidimensionalen Rekonstruktion der Labormaus mit einer isotropen Auflösung von 0,14 mm (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: A. H. Pfoh [Pfo02]).

Die Fortschritte in der Detektortechnologie hin zu den Flächendetektoren mit Sensorgrößen von unter 200 μm , die bereits in Prototypen getestet werden, verschieben zusammen mit einer kontinuierlichen Verbesserung der Röhrentechnologie die Auflösungsgrenze klinischer Tomographen immer weiter nach unten. Abbildung 8.10 zeigt die Leistungsfähigkeit dieser Prototypen. Die Bilder von einer Labormaus erinnern eher an die Aufnahmequalität eines Micro-CTs. Tatsächlich stoßen die klinischen Prototypen der Computertomographen mit Flächendetektoren langsam in deren Auflösungsregime vor [Pfo02].

8.4 SNR, DQE und ROC

Rauschen verschlechtert die Erkennbarkeit von Signalen. Insofern ist es naheliegend, das Verhältnis von Signalthöhe zu Schwankungsbreite als Qualitätsmaß zu definieren. In Abschnitt 2.4.4 wurde schon erwähnt, dass das so genannte Signal-Rausch-Verhältnis (im Englischen *signal to noise ratio: SNR*)

$$SNR = \frac{\text{Signal}}{\text{Rauschen}} = \frac{\mu}{\sigma} \quad (2.61)$$

eine wichtige Größe bei der Bildbeurteilung darstellt. Dabei bezeichnen μ und σ den Mittelwert bzw. die Standardabweichung des Signals. Für poissonverteilte Röntgenstrahlung gilt

$$SNR = \frac{\langle n \rangle}{\sqrt{\langle n \rangle}} = \sqrt{\langle n \rangle} \quad (8.57)$$

das heißt, das Signal-Rausch-Verhältnis wächst mit der Wurzel aus dem Mittelwert⁵⁷ der Quantenanzahl. Damit könnte man im Prinzip die Bildqualität beliebig steigern. Allerdings ist die Anzahl der Röntgenquanten proportional zur Dosis und daher nicht beliebig zu steigern.

Es gilt

$$SNR \propto \sqrt{Dosis} . \quad (8.58)$$

Bei kleinen Dosiswerten überwiegt also der Einfluss des Quantenrauschens im Bild [Kam98]. Man weiß, dass ein SNR von mindestens 5 erforderlich ist, um ein Detail in einem homogenen Rauschhintergrund sicher zu erkennen [Nei98].

Neben der inhärenten Fluktuation der Röntgenquanten spielt die Effizienz der Detektoren, also der Grad, mit dem die Röntgenstrahlung in optische und elektrische Signale umgewandelt wird, ebenfalls eine große Rolle bei der Bildbeurteilung. Das quantitative Maß hierfür ist die effektive Quantenausbeute (im Englischen *detective quantum efficiency: DQE*), die mit dem Signal-Rausch-Verhältnis über

$$DQE = \frac{\left(SNR_{\text{Detektorausgang}} \right)^2}{\left(SNR_{\text{Detektoreingang}} \right)^2} \quad (8.59)$$

verbunden ist. Mit der effektiven Quantenausbeute wird beurteilt, in welchem Maße der Detektor die ohnehin durch Quantenrauschen belasteten Signale weiter verschlechtert. Berücksichtigt man Gleichung (8.57), so gilt offenbar

$$DQE = \frac{\langle n \rangle_{\text{Detektorausgang}}}{\langle n \rangle_{\text{Detektoreingang}}} , \quad (8.60)$$

so dass die effektive Quantenausbeute nur bei einem idealen Detektor den maximalen Wert 1 annimmt. Möchte man die tatsächlich nachgewiesenen Quanten angeben, so hat sich der Begriff der rauschäquivalenten Quantenausbeute (im Englischen *noise equivalent quanta NEQ*)

$$NEQ = DQE \langle n \rangle_{\text{Detektoreingang}} = \langle n \rangle_{\text{Detektorausgang}} \quad (8.61)$$

geprägt. Die in den vorhergehenden Kapiteln definierte Modulationstransferfunktion MTF und die effektive Quantenausbeute DQE sind Größen, die nicht gleichzeitig, unabhängig voneinander maximiert werden können [Dös01].

Neben diesen technischen Größen ist in der Praxis genau genommen nur interessant, ob ein Arzt eine diagnostisch relevante Struktur erkennen kann oder nicht. Diese Fragestellung ist natürlich sehr subjektiv, weil sie die physiologischen Prozesse der Wahrnehmung mit einbezieht, die naturgemäß einer gewissen Variabilität unterworfen sind. Insofern ist eine genaue

⁵⁷ Der Mittelwert $\langle n \rangle$ ist die Schätzung des Erwartungswertes n^* .

Versuchsplanung erforderlich, um die so genannte Detektionskennlinie oder *ROC*-Kurve (im Englischen *receiver operating characteristic*) zu messen. Dabei werden Teststrukturen einer Gruppe fachkundiger Beobachter zur Entscheidung vorgelegt. Die Beurteilung der Abbildungsqualität erfolgt dann über eine statistische Auswertung der richtig bzw. falsch erkannten Testobjekte [Mor95]. Dabei spielen die Begriffe „Sensitivität“ (Anzahl der richtigen positiven Entscheidungen bezogen auf die Gesamtzahl der positiven Fälle) und „Spezifität“ (Anzahl der richtigen negativen Entscheidungen bezogen auf die Gesamtzahl der negativen Fälle) eine zentrale Rolle. Die Sensitivität ist proportional zur Trefferwahrscheinlichkeit p und die Spezifität ist proportional zu $1 - q$, wobei q die so genannte Falschalarmwahrscheinlichkeit angibt. Bei der *ROC*-Kurve trägt man p gegen q auf, um die Detektionsleistung zu beurteilen.

8.5 2D-Artefakte

Artefakte sind Bildfehler die durch die Art der Rekonstruktion – das ist heute in der Praxis die gefilterte Rückprojektion – oder durch den Einsatz spezieller Technologien oder Anordnungen bei der Messwerterfassung entstehen. Die Kenntnis der Ursachen von Artefakten ist die Voraussetzung für Gegenmaßnahmen. Diese Gegenmaßnahmen sind um so wichtiger, da es in der Natur der gefilterten Rückprojektion liegt, Artefakte über das gesamte Bild zu verschmieren und so den diagnostischen Wert des gesamten Bildes zu reduzieren oder ganz zu vernichten.

8.5.1 Teil- oder Partialvolumenartefakte

Besteht ein Detail eines Objektes aus einer scharfen Kontrastkante, so macht sich die beschränkte Auflösung des Detektorsystems naturgemäß besonders bemerkbar. In der Regel wird die Kante nicht direkt am Übergang von einem Detektorelement zum anderen liegen, so dass die Intensität der Röntgenstrahlung auf dem entsprechenden Element, das die Kante abbilden muss, linear über die Detektorbreite $\Delta\xi$ gemittelt wird⁵⁸. Durch die Mittelung kommt es zu einer Verschmierung des Objektes.

Die eigentliche Problematik der partiellen Überdeckung von Detektoren soll am Beispiel einer axialen Abdomenschnitt mit stärker absorbierendem Wirbelkörper dargestellt werden. Dazu ist in Abbildung 8.11a schematisch abgebildet, dass die Verschmierung der Details des Übergangs vom Wirbelkörper zum umgebenden Gewebe umso kleiner wird, je kleiner die Detektorbreite $\Delta\xi$ ist.

Eine Änderung der Objektstruktur, die innerhalb einer Detektorbreite $\Delta\xi$ statt findet, ist für die Rekonstruktion hinsichtlich der Verletzung des Abtasttheorems natürlich problematisch. Das zentrale Rekonstruktionsproblem der Computertomographie, das mit dem Begriff des Teilvolumen- bzw. Partialvolumenartefakts verbunden wird, hat seine Ursache aber in der Logarithmierung der Intensitätswerte, das heißt

$$I(\xi) = I_0(\xi)e^{-\int \mu(\xi, \eta) d\eta} \Leftrightarrow p(\xi) = \int \mu(\xi, \eta) d\eta, \quad (8.62)$$

Abbildung 8.11b stellt die Gleichung (8.62) grafisch dar. Die Projektionswerte $p(\xi)$, die die Grundlage sämtlicher Rekonstruktionsverfahren der vorhergehenden Kapitel sind, ergeben

⁵⁸ Angenommen wird hierbei, dass das Detektorelement ein rechteckiges Empfindlichkeitsprofil hat.

sich aus dem negativen Logarithmus des Quotienten von Ausgangs- zu Eingangsintensität. Da die Basis für die Rekonstruktionsverfahren die Linearität des Projektionsintegrals ist, ergibt sich an scharfen Objektkanten die Schwierigkeit, dass

$$\ln(\alpha I(\xi_1) + (1-\alpha)I(\xi_2)) \neq \ln(\alpha I(\xi_1)) + \ln((1-\alpha)I(\xi_2)). \quad (8.63)$$

In Worten bedeutet Gleichung (8.63), dass der Logarithmus einer linearen Intensitätsmittelung der Signale $I(\xi_1)$ und $I(\xi_2)$ in der Praxis nicht mit der Summe der Logarithmen der einzelnen Teilintensitäten übereinstimmt. Der Faktor $\alpha \in (0,1)$ beschreibt dabei, wie weit die kontrastreiche Kante das betreffende Detektorelement im Verhältnis zur Detektorbreite $\Delta\xi$ effektiv überdeckt. Dadurch erhält man nicht nur eine Abrundung der Kante, so wie in den Abbildungen 8.11a dargestellt, sondern auch einen mittleren Schwächungskoeffizienten, der nicht zu den mittleren Intensitäten passt. Der effektive Schwächungskoeffizient wird als zu klein abgeschätzt [Mor95]. Diese Inkonsistenz führt bei der Überlagerung der Projektionen aus allen Richtungen im Rahmen der gefilterten Rückprojektion dann zu Artefakten, die sich entlang der Ursache der Inkonsistenz im Bild bemerkbar machen. Daher sind die Partialvolumenartefakte an ausgedehnten Kanten und insbesondere an deren Verlängerungen als Streifen zu beobachten, denn ist erst einmal ein falscher gefilterter Projektionswert über das gesamte Bild zurückverschmiert, dann vermögen die Rückprojektionen aus den anderen Richtungen dies nicht mehr zu korrigieren.

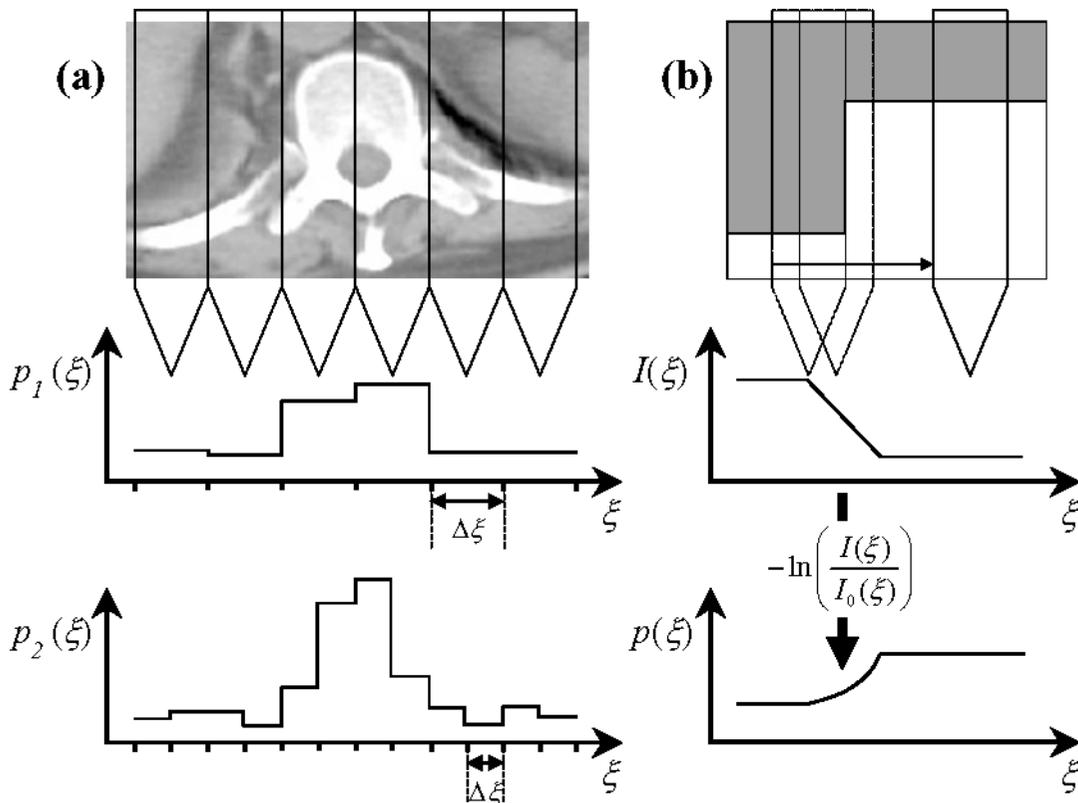


Abb. 8.11: (a) Die Detektoren des Arrays haben eine endliche Breite $\Delta\xi$. Scharfe anatomische Kontrastkanten, die innerhalb eines Strahlenbündels der Breite $\Delta\xi$ liegen, werden daher nicht fehlerfrei abgebildet. Je kleiner die Detektorbreite ist, desto mehr Details lassen sich abbilden und desto weniger Kantenverschmierung tritt auf. In (b) ist an einem künstlichen Kantenbild schematisch dargestellt, dass der Teilvolumenfehler ein nichtlinearer Effekt ist.

8.5.2 Aufhartungsartefakte

Röntgenstrahlung, die durch den Beschuss eines geeigneten Anodenmaterials mit Elektronen entsteht, ist niemals monoenergetisch bzw. monochromatisch. In Kapitel 2 wurde schon auf die verschiedenen spektralen Anteile wie dem kontinuierlichen Bremspektrum und die für das Anodenmaterial charakteristischen Emissionslinien hingewiesen.

Umgangssprachlich spricht man von einem hohen Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlung. Beleuchtet man das Phänomen der Durchdringungsfähigkeit aber physikalisch im Detail, dann sieht man, dass das Schwachungsverhalten nicht nur von der Weglänge abhängt, sondern auch eine Funktion der spezifischen, wellenlängenabhängigen Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit der betreffenden Materie ist. Die einzelnen physikalischen Vorgänge dieser Wechselwirkung wurden schon in Kapitel 2.2 besprochen.

Für die Beschreibung der grundlegenden mathematischen Verfahren der Rekonstruktion wurde in Kapitel 2.1 die Gleichung

$$I(s) = I(0)e^{-\int_0^s \mu(\eta) d\eta} \quad (2.25)$$

für die Intensität der Röntgenstrahlung nach dem Durchlaufen der Strecke s angegeben. Entscheidend ist hier offenbar, dass die Schwächungskoeffizienten μ , die in Gleichung (2.25) allein abhängig vom Ort sind, entlang des Röntgenstrahls aufsummiert werden. Diese Sichtweise ist eine Vereinfachung. Berücksichtigt man zusätzlich die Energieabhängigkeit des Schwächungskoeffizienten $\mu = \mu(\xi, \eta, E)$, so erhält man

$$I(s) = \int_0^{E_{\max}} I_0(E) e^{-\int_0^s \mu(\xi, \eta, E) d\eta} dE. \quad (8.64)$$

Das Problem für die Rekonstruktion ergibt sich hier – wie auch schon beim Teilvolumenartefakt im vorhergehenden Abschnitt – durch die auftretenden Nichtlinearitäten, das heißt, der einfache negative logarithmische Quotient der Eingangs- zur Ausgangsintensität in Gleichung (2.26) berücksichtigt die Energieabhängigkeit der Schwächung nicht hinreichend. Beschreibt man die Eingangsintensität mit

$$I_0 = \int_0^{E_{\max}} I_0(E) dE, \quad (8.65)$$

so erhält man hier das Projektionsintegral

$$p(\xi) = -\ln \left(\frac{1}{I_0} \int_0^{E_{\max}} I_0(E) e^{-\int_0^s \mu(\xi, \eta, E) d\eta} dE \right). \quad (8.66)$$

Dieser nichtlineare Zusammenhang zwischen den Schwächungswerten μ und dem Messwert der Projektion p ist die Ursache des so genannten Aufhartungsartefakts. Läuft nämlich ein energetisch breitbandiger Röntgenstrahl durch ein Objekt, so verändert sich entlang der betrachteten Laufstrecke das Spektrum dadurch, dass abhängig vom spezifischen Schwächungskoeffizienten $\mu = \mu(\xi, \eta, E)$ der durchlaufenen Materie, unterschiedliche Bereiche des

Frequenzspektrums unterschiedlich stark geschwächt werden. In der Regel werden die niederenergetischen, also die weichen Röntgenstrahlen, stärker absorbiert als die höherenergetischen, harten Strahlen. Daher spricht man von der Aufhärtung des Röntgenspektrums und beim entsprechenden Bildfehler vom Aufhärtungsartefakt.

Die Erklärung liegt wie beim Teilvolumenartefakt in der Inkonsistenz der einzelnen Projektionswerte aus unterschiedlichen Richtungen, die sich bei der gefilterten Rückprojektion nicht korrekt ergänzen können. Die einzelnen Detektoren messen in der Praxis nur die integrale Intensität über alle Wellenlängen, können also verschiedene Energien nicht diskriminieren. Abbildung 8.12 zeigt diese Situation schematisch. Ein Ausschnitt eines axialen Abdomenbildes mit einem Wirbelkörper soll rekonstruiert werden. Sieht man sich das Bildelement oberhalb des Wirbelkörpers an, so erkennt man für den horizontal verlaufenden, polychromatischen Röntgenstrahl, dass die weiche, niederenergetische Röntgenstrahlung durch das Gewebe geschwächt wird, während die harte, hochenergetische Röntgenstrahlung fast ungeschwächt durch das Gewebe hindurch geht. Das Eingang- und Ausgangsspektrum ist jeweils schematisch dargestellt.

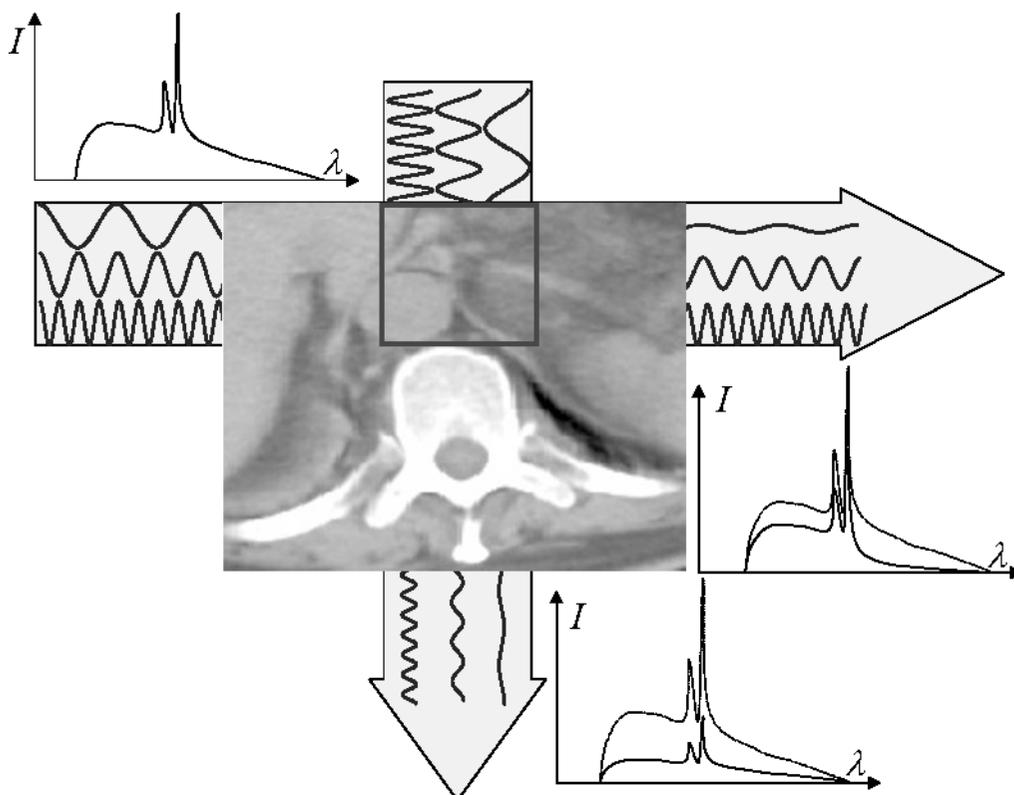


Abb. 8.12: Die Abschwächung der Röntgenstrahlung beim Durchlaufen des Gewebes ist abhängig von der Länge des Weges und vom wellenlängenspezifischen Schwächungskoeffizienten $\mu = \mu(\xi, \eta, E)$. Die Abhängigkeit des Schwächungskoeffizienten von der Strahlungsenergie führt bei der Rekonstruktion zu Inkonsistenzen. Die einzelnen Energien sind hier durch die unterschiedlichen Wellenlängen innerhalb des Strahlungsfeldes dargestellt. Rekonstruiert werden soll das gekennzeichnete Bildelement oberhalb des Wirbelkörpers. Das logarithmische Verhältnis der Intensitäten ist für die einzelnen Energien innerhalb einer Projektionsrichtung nicht gleich. Da der Detektor aber alle eintreffenden Röntgenquanten gleichermaßen integriert, führt die Veränderung der spektralen Form zu effektiven Projektionswerten, die nicht zueinander passen und dadurch die Ursache für die Bildfehler darstellen, die man Aufhärtungsartefakte nennt.

In der Vertikalen durchläuft der für die Rekonstruktion des eingezeichneten Bildfeldes erforderliche Röntgenstrahl den Wirbelkörper, der im Gegensatz zum Weichteilgewebe auch die hochenergetische Strahlung signifikant zu schwächen vermag. Man erkennt am schematisch dargestellten Ausgangsspektrum, dass hier im Gegensatz zum horizontal verlaufenden Röntgenstrahl die Intensitätskurve für alle Wellenlängen stark abgesenkt ist.

Insgesamt verschiebt sich durch die Aufhärtung die mittlere Energie der Röntgenstrahlung. Die Gesamtintensitäten, die man auf diese Weise für die einzelnen Projektionen misst, sind nicht konsistent. Daher ergeben sich in der gefilterten Rückprojektion Streifen, die sich entlang der Rückverschmierungsrichtungen über das gesamte Bild ausbreiten können. Bestimmte anatomische Regionen sind in Bezug auf die Aufhärtung besonders sensibel. Speziell im Bereich des Kleinhirns, in dem die Aufhärtung von dem Teilvolumenartefakt begleitet wird, machen sich diese Bildfehler besonders störend bemerkbar. An zwei Aufnahmen an der Schädelbasis sind in Abbildung 8.13 die auffälligsten Bildfehler mit Pfeilen markiert.

Eine Gegenmaßnahme, die in praktisch allen Computertomographen realisiert ist, ist die Filterung der weichen Röntgenstrahlung in der Nähe der Quelle, also bevor die Strahlung in das Gewebe eintritt. Dies geschieht zum Beispiel mit einer dünnen Aluminiumfolie. In Abbildung 2.11 kann man den Einfluss eines Aluminium- und eines Kupferfilters auf das Röntgenspektrum studieren.

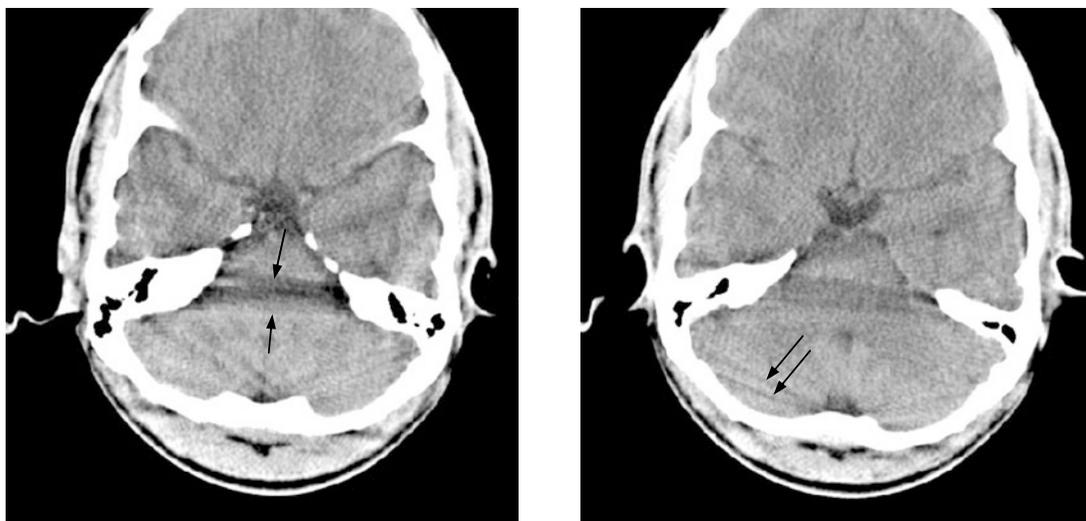


Abb. 8.13: Streifenförmige Artefakte in der Schädelbasis, die durch Strahlauvhärtung verursacht werden. Die Pfeile markieren die auffälligsten Bildfehler, die durch die Veränderung des Röntgenspektrums beim Durchlaufen dickerer Knochenstrukturen hervorgerufen werden. Aufgrund des verwendeten Rekonstruktionsalgorithmus, der gefilterten Rückprojektion, breiten sich die Bildfehler von der verursachenden Struktur über das gesamte Bild aus.

Darüber hinaus kann man für einen Stoff mit bekannten Eigenschaften die Strahlauvhärtung natürlich rechnerisch korrigieren. Man führt diese Korrektur in der Regel für Wasser durch, da die Weichteil Anatomie nur schwach von Wasser abweichende Eigenschaften besitzt. Bei Objekten mit wesentlich von Wasser unterschiedlichen Schwächungsspektren wie zum Beispiel Knochen nützt diese *a-priori*-Korrektur jedoch nichts. Daher gehen von dickeren

Knochenstrukturen typischerweise Strahlaufhärtungsartefakte aus. In Abbildung 8.13 ist dies demonstriert.

Übrigens wäre man mit jeder einzelnen Wellenlänge bzw. Energie der Röntgenstrahlung in der Lage, ein in Bezug auf die Aufhärtung artefaktfreies Bild zu rekonstruieren. Dabei würde jede einzelne Energie wegen der spezifischen Schwächungsfähigkeit der unterschiedlichen Gewebe ein etwas anderes Bild erzeugen. Die einzelnen Bilder, die man so erhielte, könnten durch die unterschiedliche Information in ihrer Kombination diagnostisch sehr wertvoll sein. Computertomographen erzeugen aber keine monochromatische Röntgenstrahlung. Dennoch macht man sich die energieabhängige Schwächungsfähigkeit des Gewebes praktisch zunutze, indem man Aufnahmen mit unterschiedlichen Beschleunigungsspannungen durchführt⁵⁹. Mit diesen Bildern ist es möglich, Knochenmineralgehaltsbestimmungen durchzuführen und Bilder zu berechnen, wie sie sich mit monochromatischer Röntgenstrahlung ergäben. Damit ist eine perfekte Aufhärtungskorrektur möglich [Kal00].

8.5.3 Bewegungsartefakte

Bisher ist immer davon ausgegangen worden, dass sich die Morphologie innerhalb der zu rekonstruierenden Schicht während der Datenakquisition nicht ändert. Muss man aber die zeitliche Veränderung des Schwächungskoeffizienten $\mu = \mu(\xi, \eta, E, t)$ ebenfalls berücksichtigen, so ergibt sich wieder das schon bekannte Problem der Rekonstruktion bei sich ändernder Datengrundlage. Die gemessenen Daten beim Umlauf des Abtastsystems um den Patienten sind inkonsistent.

Ein Beispiel für das Auftreten von systeminhärenten, bzw. bewusst in Kauf genommenen Inkonsistenzen ist das Spiral-CT-Verfahren, das in Kapitel 7.2 dargestellt wurde. Durch den kontinuierlichen Tischvorschub passt hierbei keines der gemessenen Projektionsprofile zu den anderen. Durch die Kenntnis der Veränderungsgeschwindigkeit kann man aber in gewissen Grenzen die Spiral-CT-Daten durch Interpolation ergänzen. Die Grenzen beziehen sich auf den *Pitch*-Faktor. Die Konsequenzen eines zu groß gewählten *Pitch*-Faktors auf die Bildrekonstruktion werden in Abschnitt 8.6.7 dargestellt.

Ein weiteres Beispiel für bewusst herbeigeführte Veränderungen, ist die Kontrastmittelgabe. Wenn die Aufnahme von Kontrastmitteln dynamisch beobachtet werden soll, dann verändert sich auch hierbei die räumliche Verteilung der Schwächungskoeffizienten mit der Zeit – das ist ja gerade die interessante physiologische Information. Aber es gibt auch in Bezug auf die Abbildungsqualität unerwünschte Bewegungen, wie Darmperistaltik, Atmung und das schlagende Herz, die zu inkonsistenten Projektionsdaten führen.

In Abbildung 8.14 ist die Kontrastmittelgabe simuliert. In ein zylindrisches Lochphantom aus Plexiglas mit 5 Bohrungen wird während einer 360°-Drehung in das mittlere Loch ein Plexiglasstab eingeführt. Damit diese Veränderung in dem Projektionswinkelintervall von 180° bis 225° geschieht, führt ein Roboter den Stab durch die Rekonstruktionsschicht. Die Schichtdicke ist mit Kollimatoren auf 3 mm gesetzt. In Abbildung 8.14b ist das Sinogramm zu sehen, in dem die Detektordaten gegenüber dem Projektionswinkel aufgetragen sind. Die einzelnen Löcher des Phantoms sind sehr gut anhand der jeweiligen Sinuskurven im Diagramm zu unterscheiden und entsprechend nummeriert. Die Zuordnung findet man in Abbildung 8.14c, in der die bewegungsartefaktfreie Bildrekonstruktion mit 5 Löchern zu sehen ist. In Abbildung

⁵⁹ Auch in der konventionellen Durchleuchtungs-Röntgentechnik ist dieses Verfahren als *Dual-Energy*- oder *Zwei-Spektren-Verfahren* bekannt.

8.14e ist zum Vergleich die Rekonstruktion mit vollständig eingeschobenem Mittelstab zu sehen. Auch dieses Bild zeigt keine Bewegungsartefakte. Die zum Sinogramm 8.14b gehörende Rekonstruktion ist in Abbildung 8.14d zu sehen. Die Artefakte, die sich in der für das Rückprojektionsverfahren typischen Weise über weite Bildbereiche erstrecken, sind deutlich sichtbar.

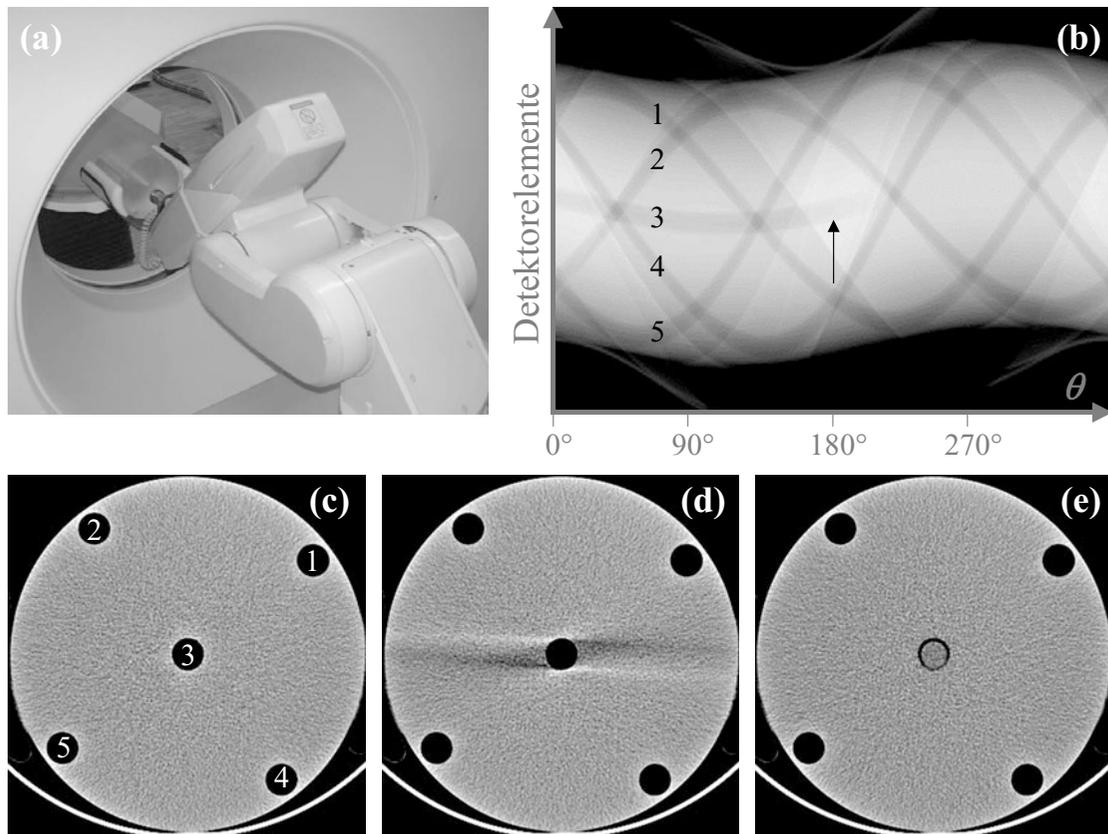


Abb. 8.14: Simulation einer Kontrastmittelgabe. Während eines 360°-Umlaufes der Abtasteinheit wird in ein zylinderförmiges Plexiglasphantom mit 5 Bohrungen ein passender Plexiglasstab in das mittlere Loch eingeschoben. Dieser Vorgang wird mit Hilfe eines Roboters (a) durchgeführt, der ab dem Projektionswinkel $\theta = 180^\circ$ über 45° hinweg den Stab in die Bohrung schiebt. Das Sinogramm (b) zeigt die Rohdaten dieser Messung über einen vollen Umlauf von 360° . In der ersten Hälfte des Sinogramms sind die 5 Bohrungen gut zu unterscheiden und entsprechend nummeriert. Ab $\theta = 180^\circ$ wird die mittlere Bohrung über 45° hinweg immer schwächer sichtbar (dies entspricht dem Partialvolumeneffekt über eine Schichtdicke von 3 mm) und verschwindet dann. Das zu diesem Sinogramm gehörende Tomogramm ist in Bild (d) zu sehen. Aufgrund der Inkonsistenzen bei der Rückprojektion beschränkt sich dieses Artefakt nicht auf den Ort des Geschehens (Bohrung 3) sondern erstreckt sich in weite Bildbereiche hinein. Zum Vergleich sind die Tomogramme ohne Artefakt – ohne Stab (c) und mit vollständig eingeschobenem Stab (e) – zu sehen. In Bild (c) ist auch die Zuordnung der 5 Bohrungen zu den entsprechenden Sinuskurven in Bild (b) vorgenommen.

Ziel der heutigen Entwicklung von Computertomographen, gerade in Bezug auf die Zeitkonstanten bei anatomischen bzw. physiologischen Bewegungen, ist die Beschleunigung der Datenakquisition. Die aktuellen Geräte sind Multiarray-Subsekundenscanner, die allerdings ohne eine EKG-Triggerung noch nicht in der Lage sind, fehlerfreie Aufnahmen vom schla-

genden Herzen zu liefern. Hier sind derzeit technische Grenzen einer weiteren Erhöhung der Akquisitionsgeschwindigkeit gesetzt. Einerseits sind es die mechanischen Momente, die bei hohen Winkelgeschwindigkeiten einer 1000-kg-Abtasteinheit die Belastungsgrenze erreichen. Andererseits bildet die Datenübertragung von der sich drehenden Abtasteinheit auf die stillstehende *Gantry* ein Nadelöhr, das ebenfalls der Erhöhung der Datenrate derzeit eine Grenze setzt. Insofern bietet die in Kapitel 3.6 vorgestellte Elektronenstrahl-Computertomographie (EBCT) immer noch die kürzesten Akquisitionszeiten, die mit mechanischer Drehung derzeit nicht erreicht werden können.

8.5.4 Abtastartefakte

Im Kapitel 6.7 wurde schon darauf hingewiesen, dass das Shannonsche Abtasttheorem auch bei der Computertomographie nicht verletzt werden darf. Das gilt sowohl für die Rekonstruktion einer axialen Schicht als auch für die sogenannte sekundäre Rekonstruktion von 3D-Datenansichten durch Schichtenstapelung. Auch hier führt die Unterabtastung eines Signals zu den typischen Aliasing-Artefakten. Speziell für die verwendeten Detektorarrays mit rechteckigem Empfindlichkeitsprofil gibt es das in Kapitel 6.7 besprochene inhärente Abtastproblem, dass die einzelnen Elemente nämlich im halben Abstand ihrer eigenen Breite angeordnet sein müssten. Da diese Forderung aus naheliegenden Gründen technisch nicht umsetzbar ist, behilft man sich mit einem eleganten mechanischen Trick. Die heute realisierte Gegenmaßnahme gegen das Aliasing ist entweder die Detektorviertelverschiebung (vergleiche Kapitel 6.7) oder der so genannte *Flying-Focus* der Röntgenröhre.

8.5.5 Elektronische Artefakte

Es gibt eine Reihe von elektronischen Defekten, die zur Verschlechterung des Bildes, überwiegend sogar zur Unbrauchbarkeit des Bildes beitragen. Der berühmteste oder besser berüchtigtste elektronische Defekt ist ein Ausfall eines Detektorkanals. Diese Fehler sind bei Computertomographen der dritten Generation anzutreffen und werden Ringartefakte genannt.

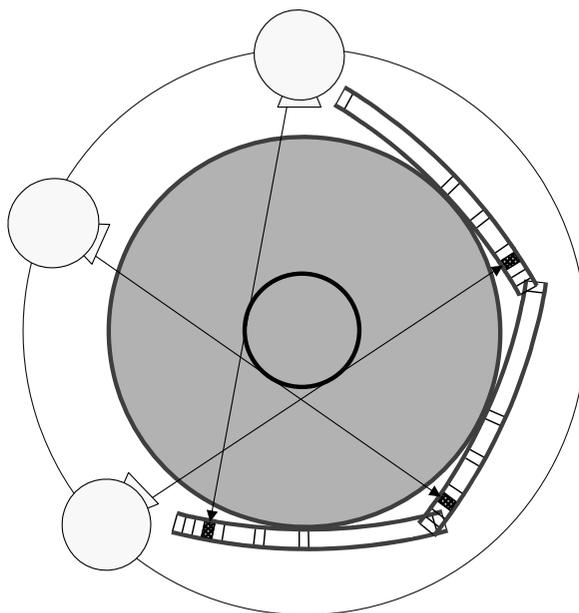


Abb. 8.15: Bei Computertomographen der dritten Generation ist jedes Detektorelement für die Daten auf einem Kreis im Objektraum verantwortlich. Fällt ein Element aus, so können die Daten nur innerhalb des entsprechenden Kreises fehlerfrei rekonstruiert werden.

Abbildung 8.15 skizziert das Zustandekommen der Ringartefakte. Durch die feste Verbindung zwischen Röntgenquelle und Detektorarray macht sich der Ausfall eines einzelnen Detektorelementes bzw. des dazugehörigen Verarbeitungskanals spezifisch bemerkbar. Im Verlauf der gefilterten Rückprojektion bilden die Verbindungslinien zwischen dem betreffenden Detektorelement und der Röntgenquelle, die auch Defektstrahlen genannt werden sollen, die Tangenten eines Kreises. Das heißt, alle Werte außerhalb des Kreises sind von diesem Artefakt betroffen. Es entstehen nämlich für jeden Punkt jeder Linie Inkonsistenzen mit den Messwerten der jeweils anderen Projektionsrichtungen und deren korrespondierenden Detektoren. Aufgrund der Rückprojektion sind mit Ausnahme des Kreisinneren wieder alle Bildbereiche von dem Artefakt betroffen. Nur im Inneren des durch die Defektstrahl tangente gebildeten Kreises kann nahezu artefaktfrei rekonstruiert werden.

Abbildung 8.16 zeigt beispielhaft den Ausfall eines Detektorkanals bei der Aufnahme eines Torsophantoms. Zunächst ist in Abbildung 8.16a die Übersichtsaufnahme des Phantoms zu sehen. Entlang der grau gestrichelten Linie durch das Herz soll die axiale Schicht rekonstruiert werden. Man erkennt schon hier, dass einer der Messkanäle ausgefallen ist. Durch die feste a.p.-Stellung der Röntgenröhre-Detektorarray-Einheit manifestiert sich der defekte Kanal beim Tischvorschub durch eine gerade Linie entlang der Tischvorschubrichtung.

In Abbildung 8.16b ist der Radonraum in Form eines Sinogramms zu sehen. Obwohl die Abtasteinheit in etwa $N = 1000$ Winkelschritten über 360° gedreht wird, verrät sich auch hier der defekte Kanal durch eine gerade Linie. Dies ist ebenfalls leicht verständlich, da die Horizontalen $\xi_n = \text{konst.}$ jeweils einer festen Verbindungslinie zwischen Strahlenquelle und Arrayelement entsprechen. Abbildung 8.16c zeigt zunächst das artefaktfreie axiale Tomogramm der in Abbildung 8.16a gestrichelt gekennzeichneten axialen Lage. In Abbildung 8.16d sind die Konsequenzen des Detektorausfalls in der Rekonstruktion dargestellt. Der Kreis entsteht durch die Aneinanderreihung der Kreistangenten, die durch die Defektstrahlerrückprojektion über 360° fächerartig über das gesamte Bild verschmiert werden. Das Entstehungsprinzip dieses Ringartefaktes war schon in Abbildung 8.15 schematisch dargelegt worden. Außerhalb des Kreises wird das Bild durch die globale Rückverschmierung unbrauchbar. Abhängig von der Anzahl der gemessenen Projektionswinkel N ergeben sich in der Rekonstruktion unterschiedliche Moirémuster.

Wie schon oben erwähnt, ist das Rekonstruktionsergebnis innerhalb des Kreises nahezu artefaktfrei. Allerdings sind in der Nähe des Ringartefaktes innerhalb des Ringes auch kleinere Wellen zu sehen, die ebenfalls Rekonstruktionsartefakte darstellen. Verursacht werden diese Wellen durch die Faltung des Projektionssignals vor der Rückverschmierung. Dadurch wird der Fehler in der gefilterten Projektion insgesamt breiter (vergleiche dazu Abbildung 6.4) als in der Rohprojektion, nimmt aber in seiner Stärke mit zunehmender Entfernung vom Kreis zum Mittelpunkt hin ab.

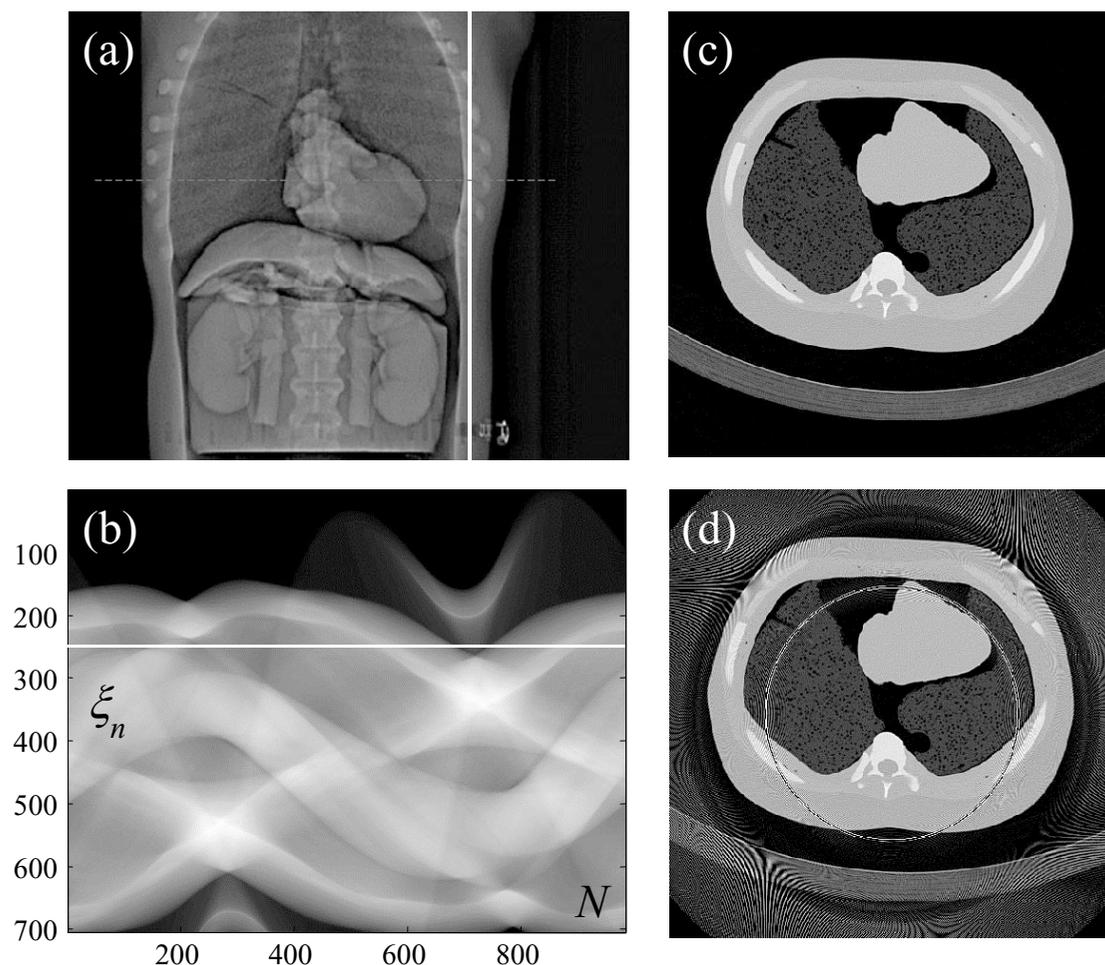


Abb. 8.16: Beispiel eines Detektorkanalausfalls. In der Übersichtsaufnahme (a) erscheint ein defekter Detektor als gerade senkrechte Linie, die sich durch die feste Position der Röntgenröhre während des Tischvorschubes entlang der Vorschubrichtung ergibt. Die gestrichelte horizontale Linie markiert die Lage des zu messenden axialen Tomogramms. Das Sinogramm (b) zeigt ebenfalls eine gerade Linie, denn die entsprechende Detektorposition ξ_n ist über dem Projektionswinkel aufgetragen. Die horizontale Detektorposition zeigt den defekten Kanal an. Diese Position ändert sich bei der Drehung der Abtasteinheit nicht. Die Abbildungen rechts zeigen jeweils die Bildrekonstruktion in Höhe des Herzens mit normalem Detektorarray (c) und defektem Detektorarray (d). Es ist sehr gut zu sehen, dass nur die Bilddaten innerhalb des entsprechenden Kreises, der Ringartefakt genannt wird und sich durch die Tangenten des rückverschmierten fehlerhaften Signals ergibt, einigermaßen fehlerfrei rekonstruiert werden.

8.5.6 Metallartefakte

Wenn Materialien mit hohen Schwächungskoeffizienten im zu untersuchenden Objekt vorhanden sind, dann ergeben sich starke streifenförmige Artefakte, die sich über das gesamte Bild ausbreiten. Dies ist typischerweise bei metallischen Implantaten wie z.B. künstlichen Hüftgelenken aber auch schon bei Zahnfüllungen aus Amalgam der Fall. Insbesondere dann, wenn es aufgrund der Dicke der Materialien praktisch zu einer Totalabsorption⁶⁰ der

⁶⁰ Physikalisch ist aufgrund von Gleichung (2.25) natürlich niemals mit Totalabsorption zu rechnen. Praktisch kann aber die Intensität unterhalb der Empfindlichkeit des Detektors liegen oder der Rauschpegel größer sein als der Signalpegel.

Röntgenstrahlung kommt, gehen sehr helle Streifen strahlenförmig von diesem Objekt aus, so dass das Bild diagnostisch unbrauchbar wird.

Wie in den Abschnitten 8.5.1 und 8.5.2 dargestellt, ist die mathematische Ursache auch hier die Inkonsistenz der Projektionswerte aus unterschiedlichen Richtungen. Dies kann man sich im Fall der Totalabsorption leicht klar machen. Hier wird dem System ein unendlich hoher Schwächungskoeffizient des Objektes vermittelt. In der gefilterten Rückprojektion erhält man auf den Projektionslinien durch den Rand des Objektes über das gesamte Bild hinweg extrem hohe Zahlenwerte, die nicht durch die anderen Projektionsrichtungen kompensiert werden können.

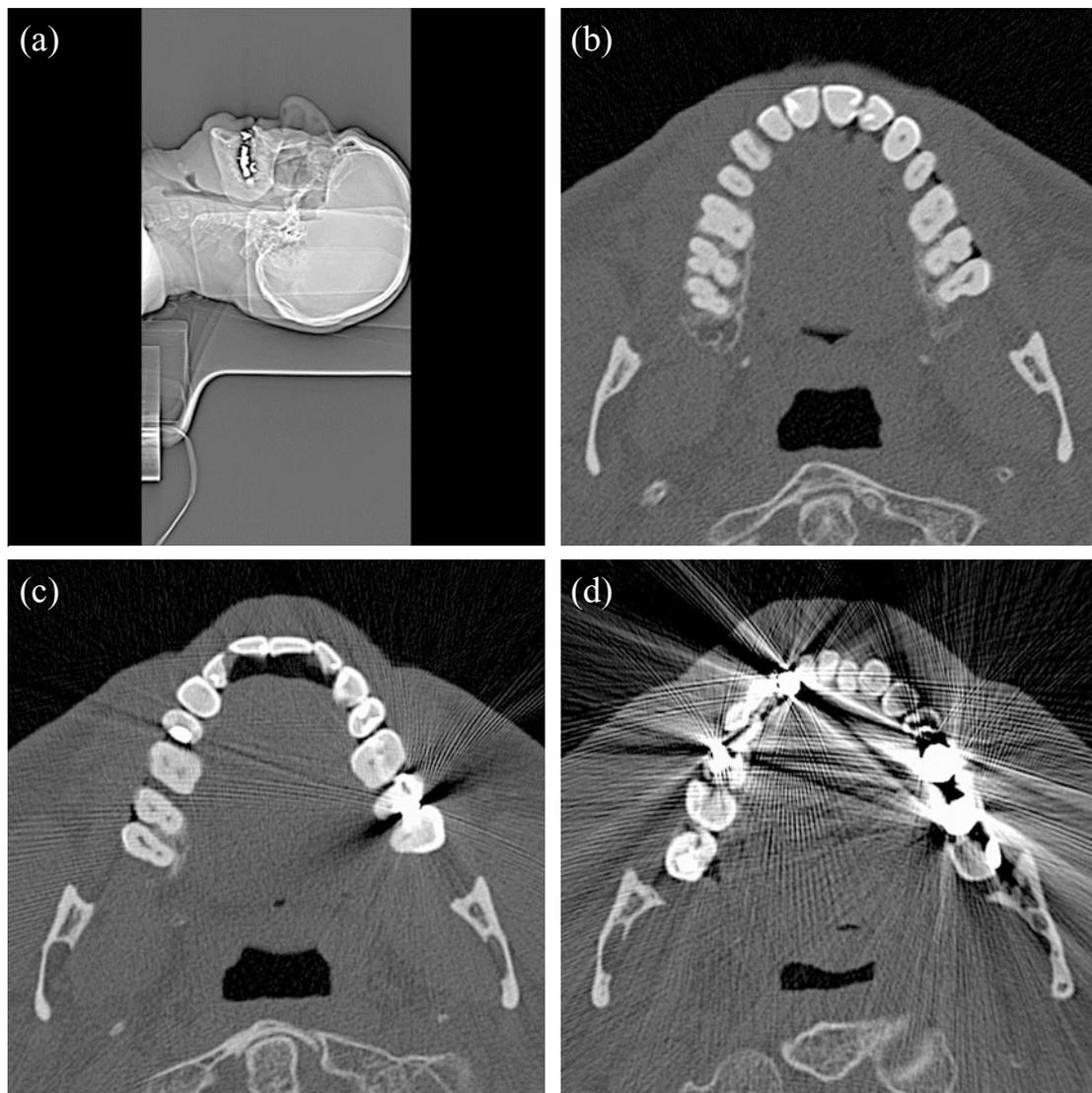


Abb. 8.17: Metallartefakte bei der tomographischen Aufnahme eines Kiefers. In (a) ist zunächst wieder die Übersichtsaufnahme zu sehen, die zur Planung der axialen Schnitte dient. In den Bildern (b) bis (d) sind dann die axialen Rekonstruktionen in verschiedenen Höhen durch den Zahnbereich zu sehen. Deutlich ist zu erkennen, dass die streifenförmigen Metallartefakte bei massiven Zahnfüllungen stark zunehmen (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

Aber auch wenn keine Totalabsorption eintritt, so sind die auftretenden Aufhärtingsartefakte und aufgrund der zumeist ausgedehnten scharfkantigen Objekte auch die Teilvolumenartefakte so stark, dass der diagnostische Wert reduziert wird.

Abbildung 8.17 zeigt das Auftreten von Metallartefakten in den tomographischen Rekonstruktionen des dentalen Bereichs. Abbildung 8.17a zeigt zunächst wieder die Planungsübersicht, in der die Lage der zu messenden Schichten ausgewählt wird. Die Abbildungen 8.17b bis 8.17d zeigen drei axiale Rekonstruktionen. In Abbildung 8.17b sind keine schwerwiegende Artefakte zu sehen. In Abbildung 8.17c und 8.17d erkennt man, wie mit zunehmender Menge stark absorbierender Substanz (im Zahnbereich ist dies häufig Amalgam), die innerhalb der zu rekonstruierenden Schicht von der Röntgenstrahlung durchdrungen werden muss, helle Streifenartefakte auftreten. Entlang der Verbindungslinien zwischen den Füllungen sind die Artefakte besonders ausgeprägt, da die Röntgenstrahlung dann durch zwei Metallvolumina hindurchlaufen muss. Dass die Artefakte strahlenartig vom Metallgegenstand ausgehen, hat seine geometrische Ursache in der gefilterten Rückprojektion, die die fehlerhaften Werte über das gesamte Bild verschmiert. Da die physikalische Ursache immer im jeweiligen Strahlenweg der Rückprojektion unter den unterschiedlichen Winkeln liegt, erscheinen die Streifen strahlenförmig um diesen Ursprung.

8.5.7 Streustrahlungsartefakte

Die Ursachen für die Schwächung von Röntgenstrahlen wurden bereits in Kapitel 2.2 erörtert. Während es für das Detektorelement, das im direkten Strahlengang liegt, im Prinzip egal sein kann, welcher physikalische Mechanismus der Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie im Detail die Intensität verringert, zumindest solange Gleichung (2.25) gilt, so können andere Detektorelemente, die außerhalb der direkten Verbindungslinie liegen, sehr wohl unter bestimmten Wechselwirkungen leiden. Besonders im Bereich stärker schwächender anatomischer Objekte wie z.B. Schulter, Bauch und Becken [Mor95] kann es zu Messwertverfälschungen durch Streustrahlung mit einem beträchtlichen Anteil am Gesamtsignal kommen.

Während die Streustrahlung für alle Projektionswinkel in etwa gleich groß ist, gilt dies für das Nutzsignal nicht. In Projektionsrichtungen, in denen stark absorbierende Objekte hintereinander liegen, kann das Nutzsignal so schwach werden, dass die Streustrahlung das Signal dominiert. Bei der gefilterten Rückprojektion kommt es dann aus dieser Projektionsrichtung zu Inkonsistenzen, die zu streifenartigen Artefakten führen.

In Bezug auf die durch Streuung verursachte Störstrahlung auf dem Detektor sind die Computertomographen der dritten Generation im Vorteil gegenüber denen der vierten Generation. In Abbildung 8.18 sind die Geräte beider Generationen skizziert. Im rechten Bild ist das Gerät der dritten Generation dargestellt. Das Detektorarray ist hier so konstruiert, dass die einzelnen benachbarten Detektorelemente auf einem Kreisbogenabschnitt angeordnet sind, in dessen Kreismittelpunkt die Röntgenquelle liegt. Daher ist es möglich, die Röntgenstrahlung durch Lamellen so zu kollimieren, dass Streustrahlung, deren Eintrittswinkel in ein „falsches“ Detektorelement oberhalb eines Grenzwinkels liegt, wirksam abgeschirmt wird. Der Grenzwinkel wird durch die Länge und den Abstand der Lamellen bestimmt. Bei Geräten der vierten Generation liegen die Detektoren auf einem Kreis, dessen Zentrum das Isozentrum des Messfeldes ist, so dass naturgemäß hier nicht die Quelle liegen kann, auf die eine Lamellenkollimation erfolgreich fokussiert werden könnte. Abbildung 8.19 zeigt das lamellenartige Streustrahlenraster am Detektorarray des mobilen Computertomographen Philips Tomoscan M, ein Scanner der dritten Generation.

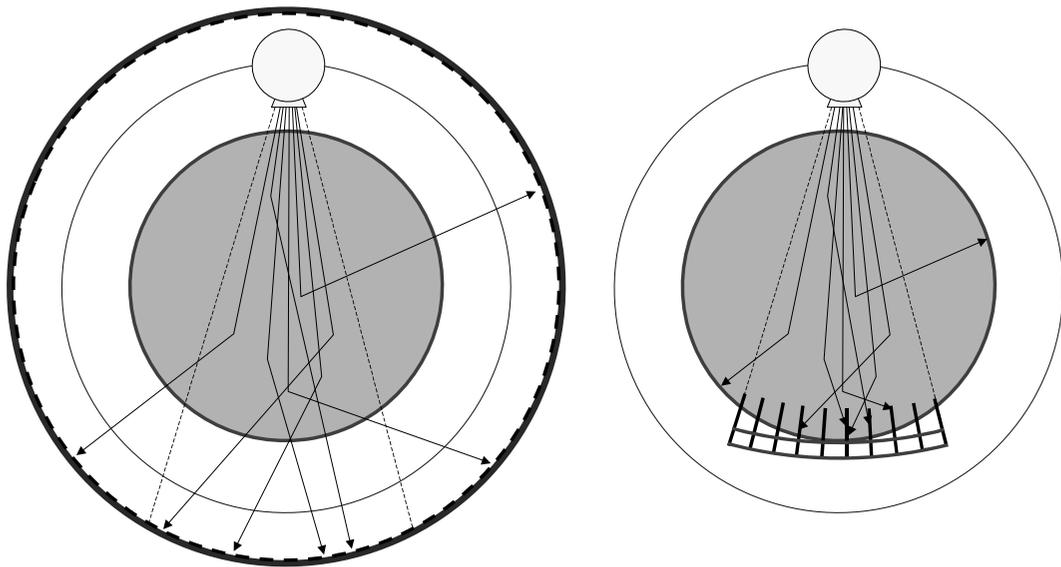


Abb. 8.18: Vergleich der dritten und vierten Generation von Computertomographen in Bezug auf radiale Geometrie. Da das Detektorarray der dritten Generation (rechts) einen Kreisabschnitt darstellt, dessen Kreismittelpunkt in der Röntgenröhre liegt, lässt sich ein Streustrahlengitter konstruieren, dessen Lamellen in Richtung des Röntgenfokus zeigen.

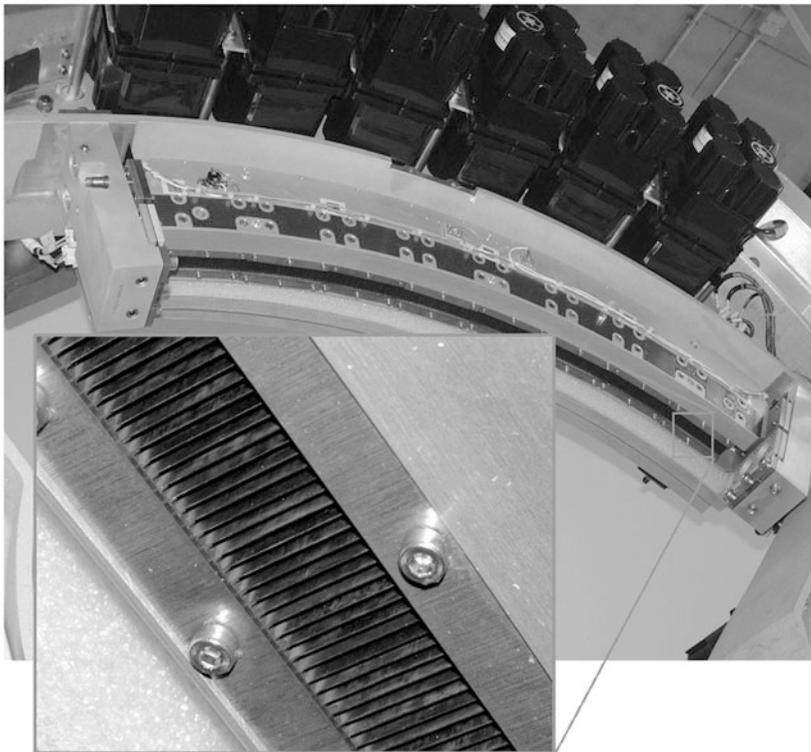


Abb. 8.19: Das Streustrahlengitter am Detektorarray des mobilen Tomographen Philips Tomoscan M, ein Scanner der dritten Generation. In der Ausschnittsvergrößerung ist die lamellenartige Struktur des Rasters gut zu erkennen.

8.6 3D-Artefakte

Im Zusammenhang mit der so genannten sekundären Rekonstruktion dreidimensionaler Bilder aus computertomographischen Schichtenstapeln⁶¹ aber auch mit der Implementation der neueren Akquisitionstechniken wie Spiral-CT, Kegelstrahlrekonstruktion und deren Verbindung, die Spiral- bzw. helikale Kegelstrahlrekonstruktion, kann eine Vielzahl von neuen Artefakten auftreten, die hier nur kurz angesprochen werden sollen.

8.6.1 Teil- oder Partialvolumenartefakte

Teilvolumenartefakte, die ihre Ursache in der endlichen Detektorbreite haben, treten innerhalb einer axialen Schicht auf. Man spricht hier von transversalen Teilvolumenartefakten. Zusätzlich sind Artefakte aufgrund der endlichen Schichtdicke auch in z-Richtung, also der Tischvorschubrichtung zu erwarten. Hierbei spricht man von longitudinalen Teilvolumenartefakten [Mor95]. In Abbildung 8.20 ist dargestellt, dass die Mittelung nicht nur innerhalb einer Schicht, sondern auch in axialer Richtung wegen der beschränkten Schichtdicke Δz eine wichtige Rolle spielt.

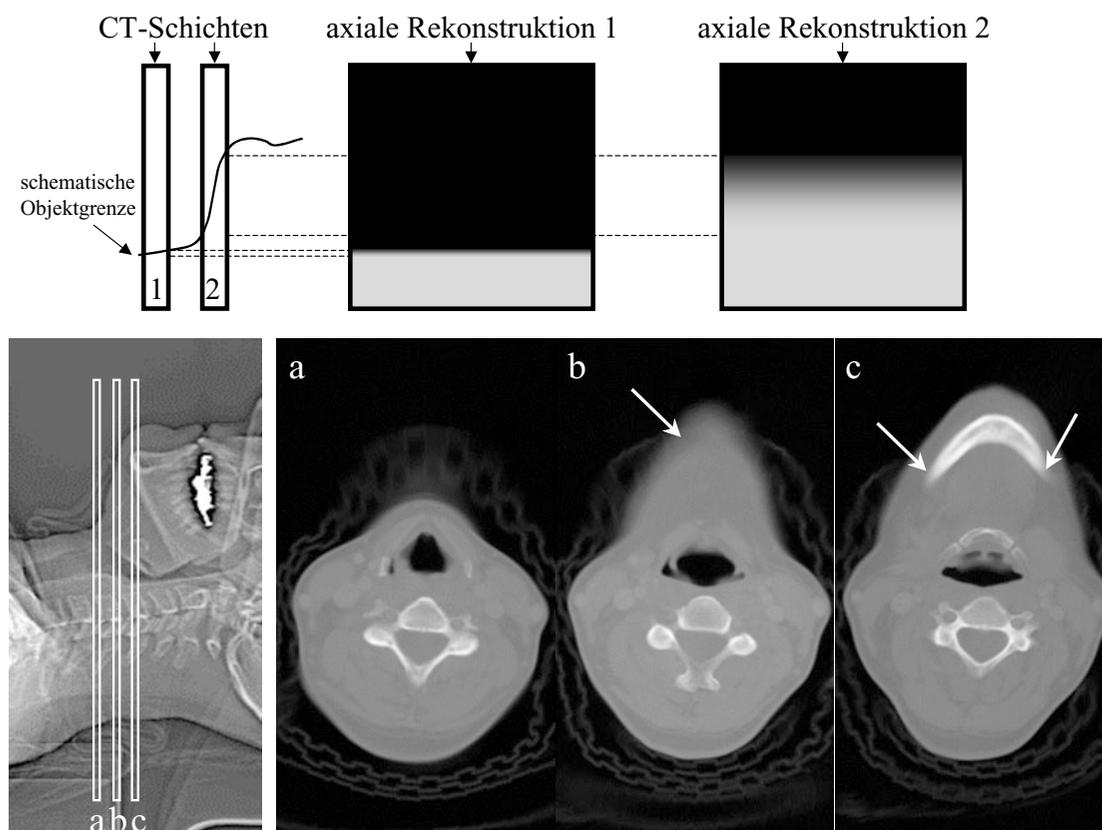


Abb. 8.20: Objektkanten, die sehr schräge durch eine axiale Schicht laufen, werden unscharf abgebildet (oben schematisch). Unten: Dieser Effekt ist sehr gut im Bereich des Unterkiefers zu erkennen. Die Pfeile in den Schichten (b) und (c) markieren die verwischten Bildbereiche.

In Regionen mit großem, kontraststarkem Detailreichtum können sich die Teilvolumenartefakte sehr störend in der Rekonstruktion auswirken. Daher muss in diesen anatomischen Bereichen eine möglichst kleine Schichtdicke gewählt werden.

⁶¹ In Form von multiplanaren Reformatierungen (MPR) oder *Surface-Renderings*.

8.6.2 Treppenbildung bei Schichtenstapeln

Gibt es bei dem abzubildenden Objekt schnelle Änderungen von kontrastreichen Objektgrenzen entlang der Vorschubrichtung des Patiententisches, so können sich in der dreidimensionalen Rekonstruktion Bänder aneinander reihen, die dem Objekt eine treppenartige Erscheinung geben. Die Stufen sind Artefakte, die durch die Mittelung der Objektkante innerhalb des Empfindlichkeitsprofils der axialen Schicht entstehen. Abbildung 8.21 zeigt diesen Effekt schematisch. Anhand einer Schädeloberflächendarstellung – der Schichtenstapel ist ebenfalls abgebildet – erkennt man, dass die Stufen im Bereich der starken Änderung der Oberflächenlage in Bezug auf die axiale (hier vertikale) z -Richtung besonders ausgeprägt sind.

Dieser Bildfehler kann reduziert werden, indem sehr schmal kollimierte Schichten dicht aneinander gereiht werden. Eleganter ist aber das Spiral-CT-Verfahren, mit dem diese Artefaktform effektiv geschwächt werden kann. Im Prinzip lassen sich durch das im Kapitel 7.2 beschriebene Verfahren beliebig dicht aufeinander folgende Schichten retrospektiv berechnen. Bei schnellen Änderungen von kontrastreichen Strukturen entlang der axialen Achse wird dabei ein *Pitch*-Faktor p – siehe Gleichung (7.9) bzw. (7.10) – kleiner empfohlen [Bla98].

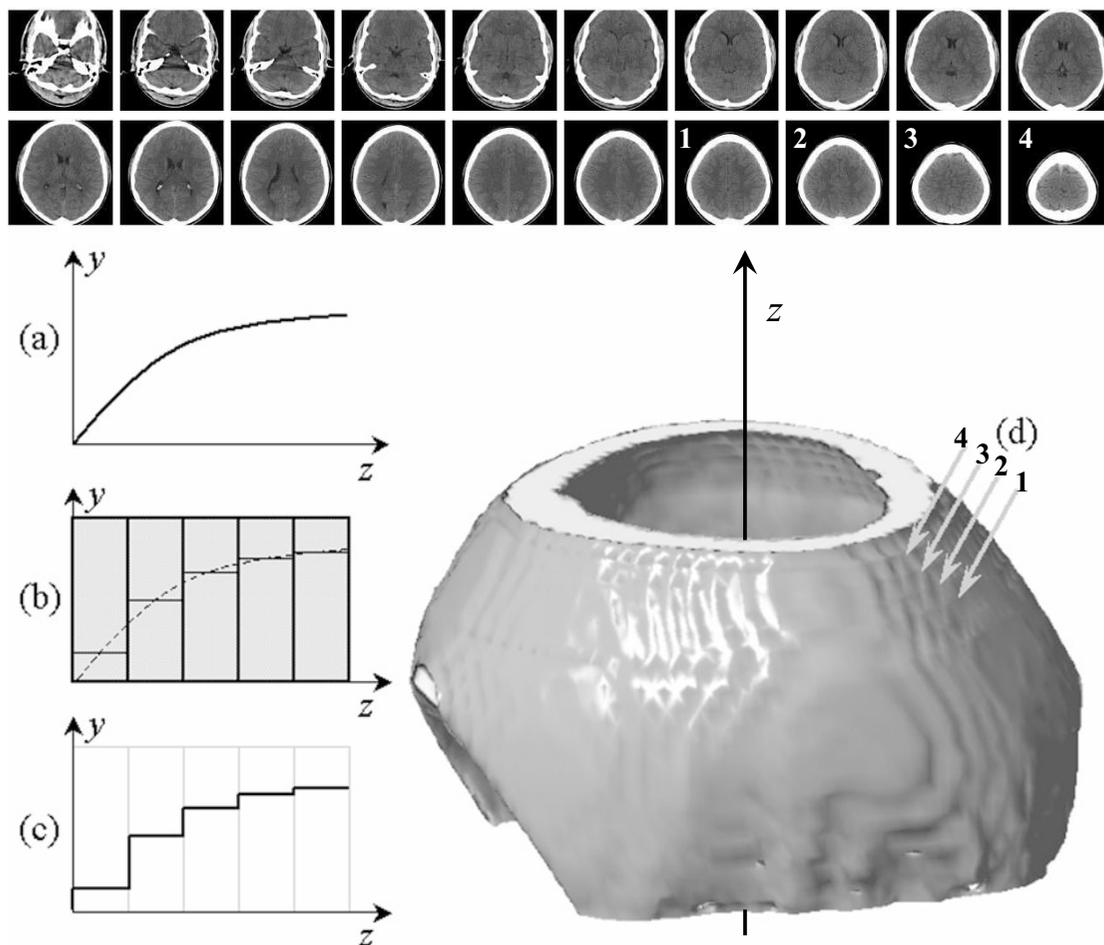


Abb. 8.21: Wenn das Objekt im Computertomographen durch Kanten definiert ist, die steil durch die einzelnen Schichten laufen (a), dann führt die Mittelung innerhalb einer Schicht (b) zu einer Stufigkeit der dreidimensionalen Rekonstruktion des Schichtenstapels (c) und (d). Obere Reihen: Schichtenstapel des Schädels. Die 4 letzten Schichtaufnahmen sind mit Ziffern der dreidimensionalen Rekonstruktion zugeordnet.

Abbildung 8.22 zeigt das Stufenartefakt noch einmal anhand der Bilder eines Wirbelsäulenphantoms. Die einzelnen, in konventioneller Scantechnik aufgenommenen Schichten sind hier 6 mm dick. Hierzu vergleiche man auch die Abbildungen 7.7 und 7.16. Diese Treppenburg, die Ausdruck der Anisotropie des Datensatzes ist, ist insbesondere dann problematisch, wenn kleinste Details analysiert werden müssen.

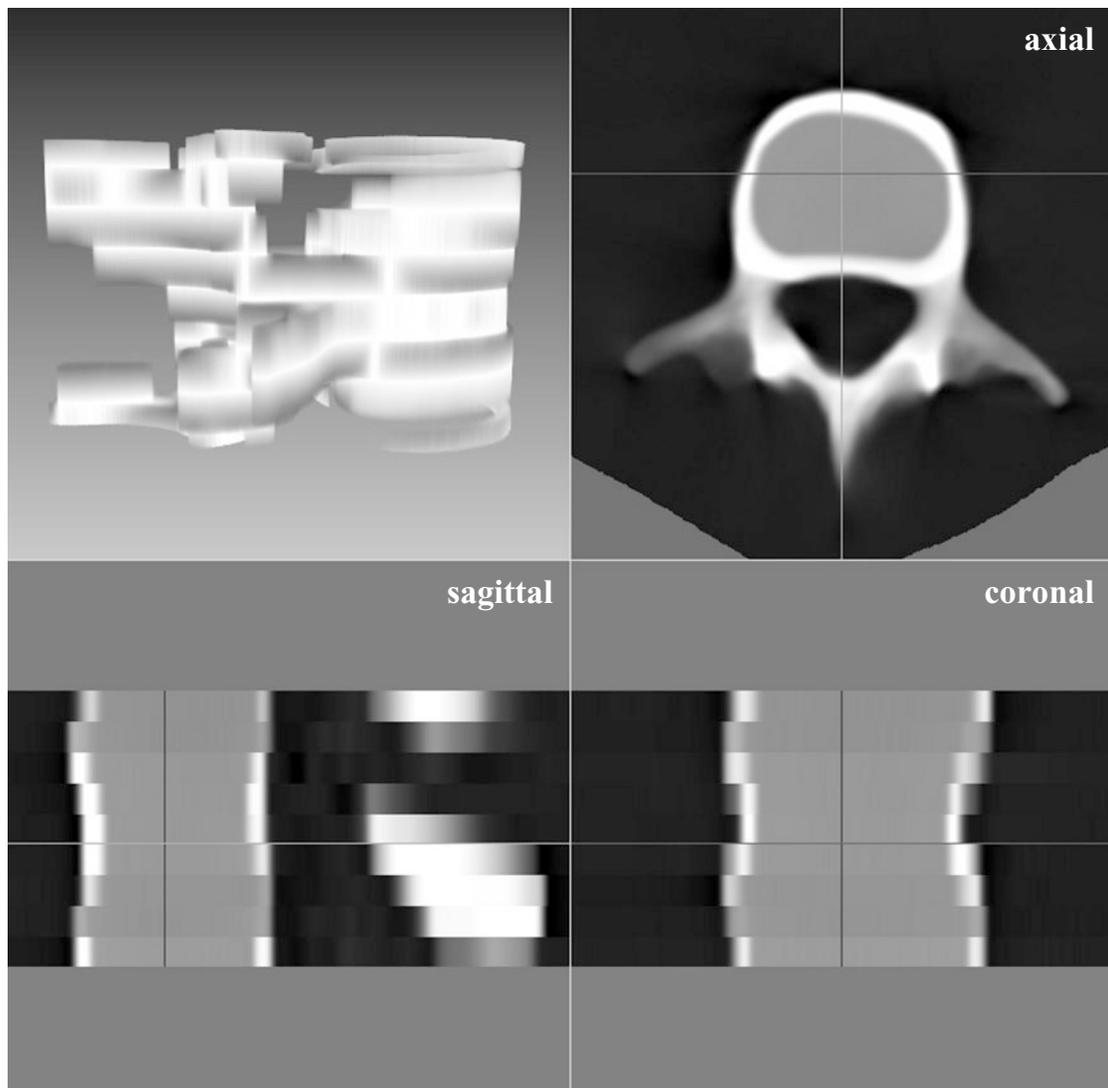


Abb. 8.22: Die Aufnahmen eines Wirbelphantoms sind hier dreidimensional dargestellt. Man sieht die typischen orthogonalen Reformatierungen sowie ein Volumen-*Rendering*. Die bei der Messung gewählte Schichtdicke ist 6 mm. Deutlich ist die Stufigkeit des dreidimensionalen *Renderings* und der berechneten coronalen und sagittalen Schicht zu sehen. Die Lage der coronalen und sagittalen Schicht im Raum ist in Abbildung 1.9 beispielhaft illustriert.

Abbildung 8.23 zeigt die Darstellung eines sphärischen Tumorphantoms mit einem Radius von 2 mm. In Abbildung 8.23a ist die typische Verlängerung des Objektes durch die Mittelung innerhalb der Schichtdicke von 1.25 mm demonstriert. Innerhalb der Schicht ist die Auflösung natürlich besser und beträgt in diesem Beispiel etwa 0.5 mm. In der isotropen Darstellung mit einem Volumen-CT, die in Abbildung 8.23b eine Ortsauflösung von 140 μm

besitzt, ist die sphärische Form des Phantoms sehr gut zu erkennen, so dass Fehler in der Größenabschätzung reduziert werden. Die wesentlich höhere Ortsauflösung mit dem Kegelstrahlensystem ermöglicht also nicht nur die potenzielle Früherkennung von kleinen Tumoren in der Onkologie, sondern ermöglicht zusätzlich eine präzisere quantitative Volumenerfassung [Pfo02].

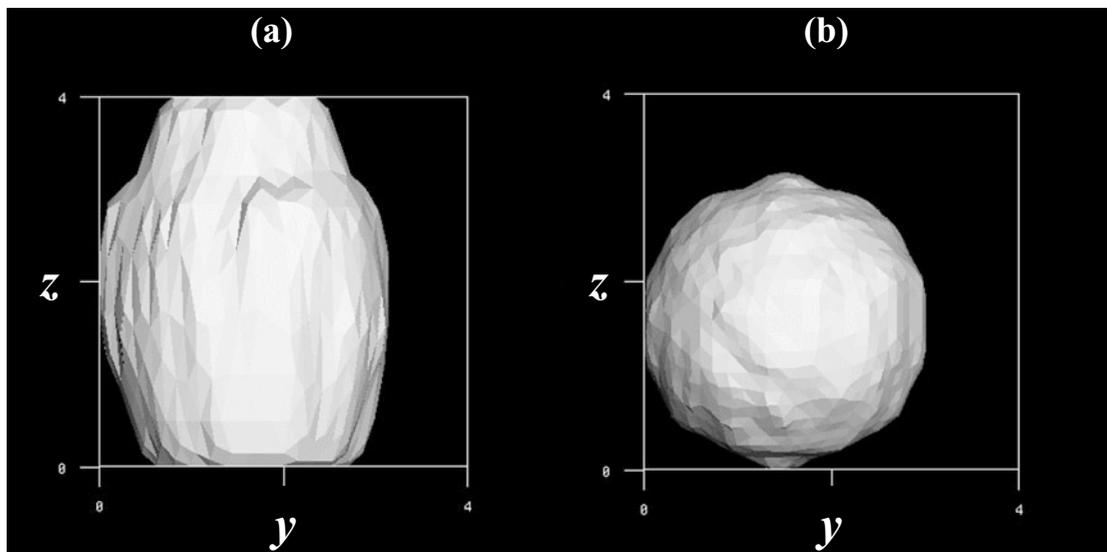


Abb. 8.23: Vergleich der Rekonstruktionsqualität für ein sphärisches Tumorphantom mit dem Radius 2 mm. Bild (a) zeigt das typische Resultat eines herkömmlichen klinischen CT-Systems. Die Verlängerung der Kugel in z -Richtung kommt durch die Mittelung innerhalb der Schichtdicke zustande. Bild (b) zeigt das Rekonstruktionsergebnis eines prototypischen Volumen-CT bzw. Kegelstrahl-CT von GE mit 0.14 mm isotroper Ortsauflösung (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems: A. H. Pfoh [Pfo02]).

8.6.3 Bewegungsartefakte

Es wurde oben schon auf die Bewegungsartefakte im Zweidimensionalen, also bei der Rekonstruktion einer einzelnen axialen Schicht hingewiesen. Dort waren es insbesondere die Inkonsistenzen der Rohdaten, also des Radondatensatzes, die in der Rückprojektion zu Bildfehlern in Form von Streifen, Verwischungen und Doppelbildern führen können.

In der dreidimensionalen, sekundären Rekonstruktion kommt nun hinzu, dass Objekte, die durch mehrere axiale Schichten abgebildet werden müssen, in aufeinanderfolgenden Schichten in ihrer Größe und Lage nicht mehr objektgetreu zusammenpassen. Abbildung 8.24 zeigt ein Beispiel, bei dem der Datensatz veratmet ist. Oben links sieht man in der dreidimensionalen Visualisierung der Hautoberfläche, dass die Patientendaten im unteren Viertel des Schichtenstapels (siehe Pfeil) nicht zueinander passende Körperrumfänge besitzen.

Der Patient war in diesem Beispiel nicht in der Lage, während der gesamten Messzeit die Atmung anzuhalten. Wählt man eine veratmete Schicht zur axialen Ansicht, dann sind die Verwischungen und Doppelstrukturen (durch Pfeile gekennzeichnet) gut zu erkennen. In der dazugehörigen Reformatierung, das heißt in der berechneten sagittalen und coronalen Schicht, setzen sich die Störungen natürlich fort. Die gegenseitige Zuordnung der axialen, sagittalen und coronalen Schicht ist jeweils durch senkrechte und horizontale Linien gegeben.

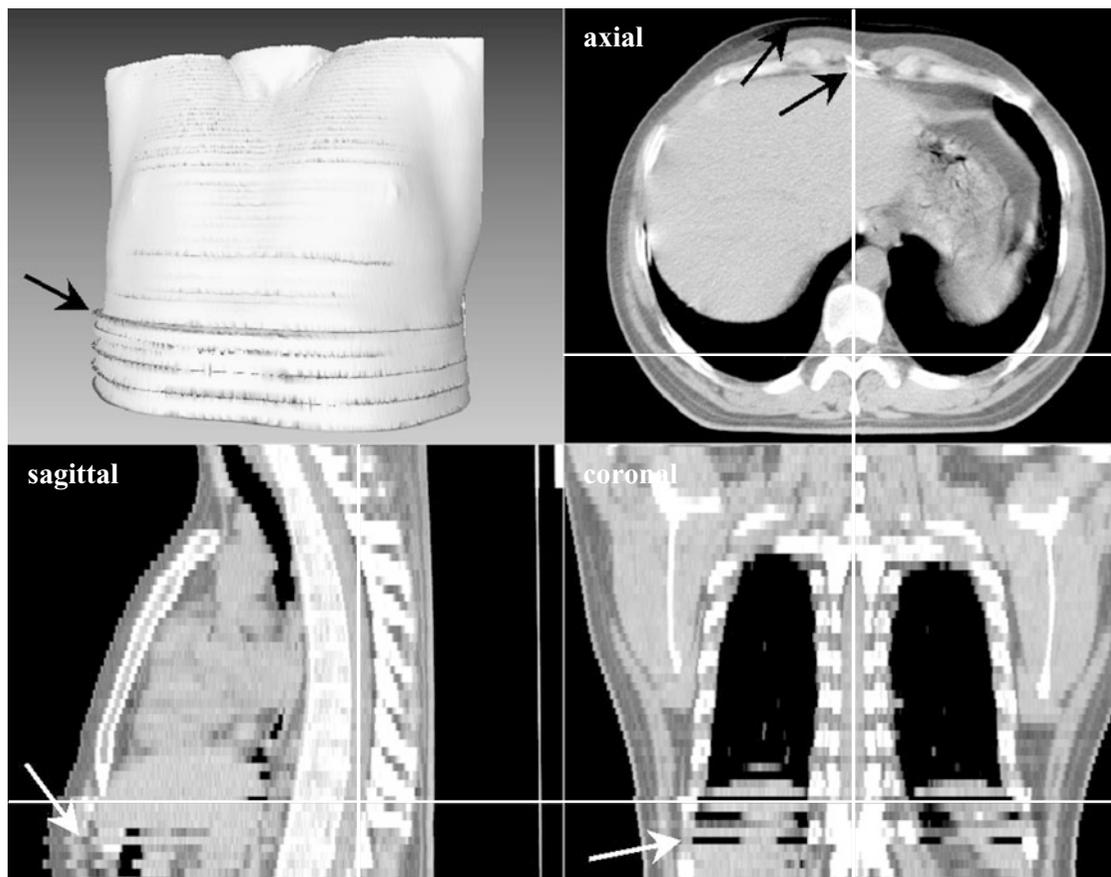


Abb. 8.24: Bewegungsartefakte in der dreidimensionalen Rekonstruktion. Nachdem etwa $\frac{3}{4}$ aller geplanten axialen Schichten von der Schulter bis zum Abdomen gemessen wurden, konnte der Patient seine Atmung nicht mehr anhalten. Das führt im letzten Viertel des Datensatzes zu Verschiebungen und Verwischungen, die in den einzelnen Darstellungen durch Pfeile markiert sind. Die Lage der coronalen und sagittalen Schicht im Raum ist in Abbildung 1.9 beispielhaft illustriert (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

8.6.4 Scherung bei Schichtenstapeln durch Gantryneigung

Die Flächenvektoren der einzelnen Schichten müssen nicht notwendigerweise mit der z-Achse, also der Vorschubachse, übereinstimmen. Bestimmte anatomische Gegebenheiten erfordern eine Verkippung der *Gantry*, also des Trägerrahmens der sich drehenden Abtasteinheit mit Röntgenröhre und Detektorarray, so dass die relevanten Strukturen innerhalb einer Schicht liegen und nicht aus dem Schichtenstapel zusammengesetzt werden müssen. Abbildung 8.25 zeigt in einer Übersichtsdarstellung für die Planung eines Schädeltomogramms zwei mögliche Schichtfolgen. Links sieht man den normalen Schichtenstapel. Rechts ist die angulierte Lage der Schichten zu sehen. Aufgrund der Lage des Cortex im Schädel ist hier eine angulierte Folge von Bildern häufig gewünscht, um die empfindlichen Augen nicht unnötig mit direkter Röntgenstrahlung zu belasten.

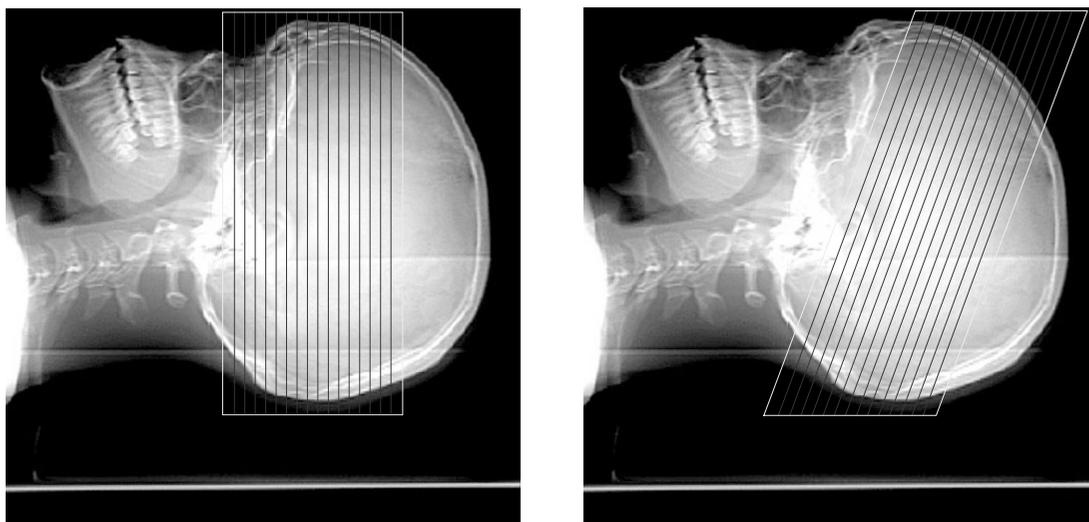


Abb. 8.25: Übersichtsdarstellung zur Planung der tomographischen Schichtenlage. Links: normale Schichtenfolge; Rechts: angulierte Schichtenfolge. Aufgrund der Lage des Gehirns im Schädel sind angulierte Schichtenfolgen oft günstiger. Darüber hinaus werden die Augen so beispielsweise nicht mit direkter Strahlung belastet. Der gemessenen Schichtenstapel ist in Abbildung 8.21 wiedergegeben.

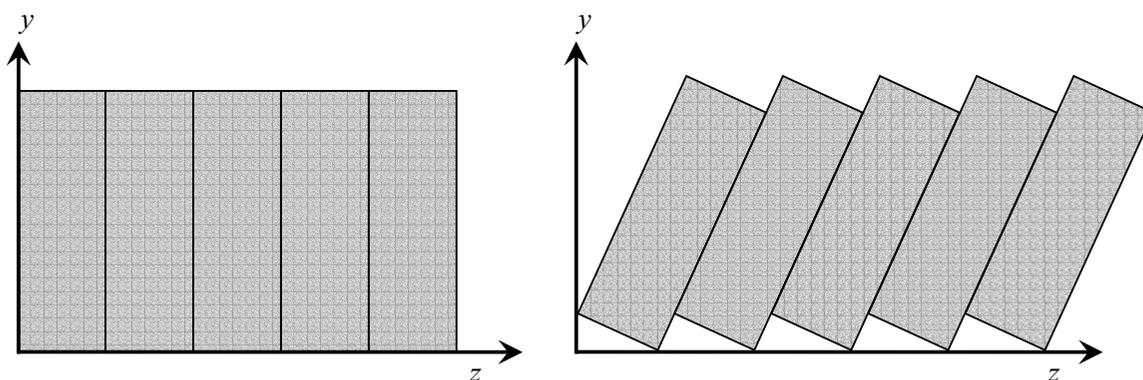


Abb. 8.26: Schematische Darstellung der Schichtenabfolge einer konventionellen Computertomographie ohne Berücksichtigung des Abtasttheorems. Links: Schichtakquisition senkrecht zur z-Achse. Rechts: Angulierte Schichtakquisition.

Abbildung 8.26 zeigt die Lage der einzelnen Schichten in normaler und angulierter Form noch einmal schematisch. Wenn man einen in angulierter Stellung gemessenen Datensatz zu einer dreidimensionalen Darstellung zusammensetzen möchte, dann muss der Datensatz schichtweise in der Lage korrigiert werden. Die Abbildung 8.27 gibt den Korrekturvorgang schematisch wieder und Abbildung 8.28 zeigt das Ergebnis anhand der Schädeltomogramme, die in Abbildung 8.21 als Sequenz vorgestellt wurden. Die Scherung tritt nicht allein bei geneigter *Gantry* auf. Wenn der Patiententisch in das Messfeld hineinfährt, dann wirkt aufgrund der Schwerkraft ein immer größeres Moment auf den Tisch, je weiter der Tisch durch die *Gantry* fährt. Diese vorschubabhängige Tischverbiegung führt ebenfalls zu einer Scherung der einzelnen Schichten. Der Effekt ist nicht sehr groß und diagnostisch meistens ohne Bedeutung. Wenn die CT-Daten aber Grundlage einer bildgeführten Operation darstellen, dann muss auch diese Tischverbiegung korrigiert werden [Zyl96].

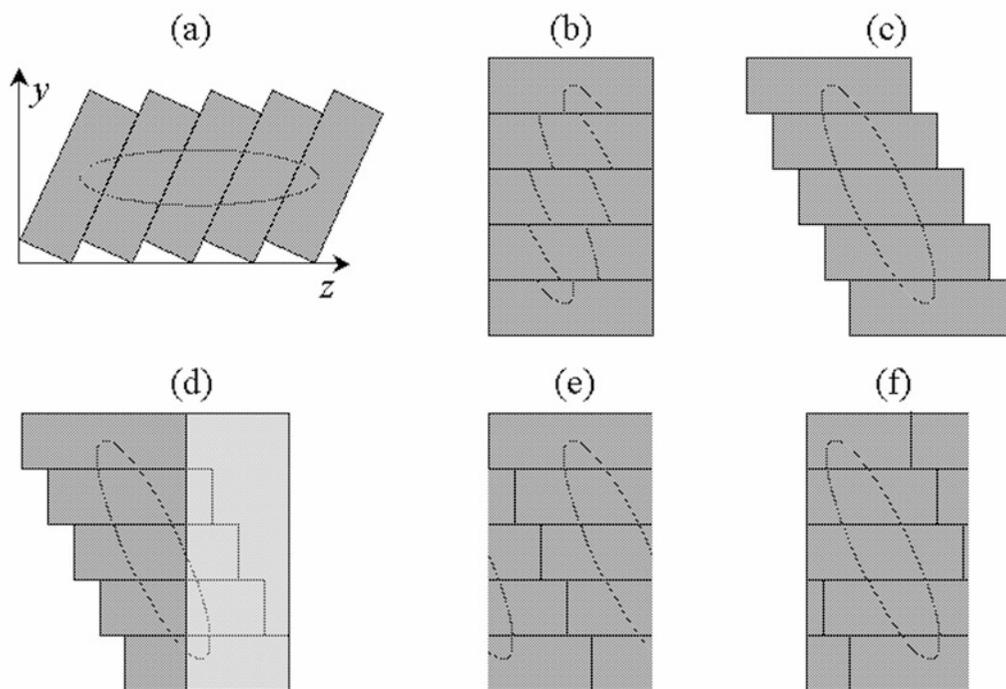


Abb. 8.27: Setzt man die aus einer angulierten Schichtenfolge gemessenen Daten (a) ohne weitere Bearbeitung zu einem Schichtenstapel zusammen, erfahren die einzelnen Schichten eine Scherung gegeneinander (b). Macht man diese Scherung rückgängig (c), liegen die Daten wie bei der ursprünglichen Messung (a) vor. Allerdings ist das Bildformat nicht rechteckig. Korrigiert man dies durch ein anwachsendes zyklisches Umsetzen der Schichten (d), so erscheint das Objekt zyklisch verschoben (e). Durch synchrone zyklische Verschiebung aller Schichten lässt sich dies in einem letzten Schritt korrigieren (f).

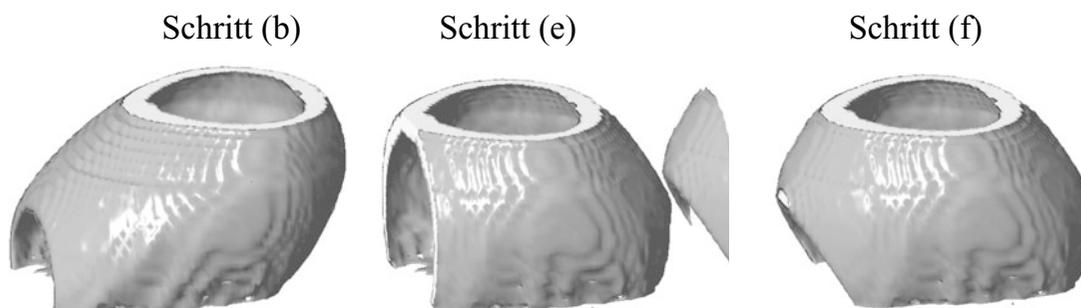


Abb. 8.28: Wird der in einer angulierten Schichtfolge gemessene Schädel ohne weitere Bearbeitung Schicht für Schicht übereinander gesetzt, so erscheinen die einzelnen Schichten gegeneinander geschert. Im linken Bild kann man dies sehr gut sehen. Die Stufigkeit zeigt die Dicke der Schichten an. Im mittleren Bild ist die Scherung korrigiert, allerdings erscheint das Objekt zyklisch verschoben. Im rechten Bild ist auch die zyklische Verschiebung korrigiert.

8.6.5 Abtastartefakte bei der sekundären Rekonstruktion

In Kapitel 7.1 wurde schon darauf hingewiesen, dass das Shannonsche Abtasttheorem in axialer Richtung genauso erfüllt sein muss, wie innerhalb einer axialen Schicht. Daher muss wegen Gleichung (7.1) gefordert werden, dass die axialen Abtastpunkte im Abstand von $\Delta z/2$ liegen. Das bedeutet, der Tischvorschub darf bei einer Schichtdicke von Δz eben nur $\Delta z/2$ groß sein. Man muss also wenigstens zwei Schichten pro Schichtdicke messen. Andernfalls ist bei der sekundären Rekonstruktion mit Aliasingartefakten zu rechnen. Abbildung 8.29 zeigt diesen Schwebungseffekt anhand einer sekundären Rekonstruktion eines Bohrloch-rasterphantoms.

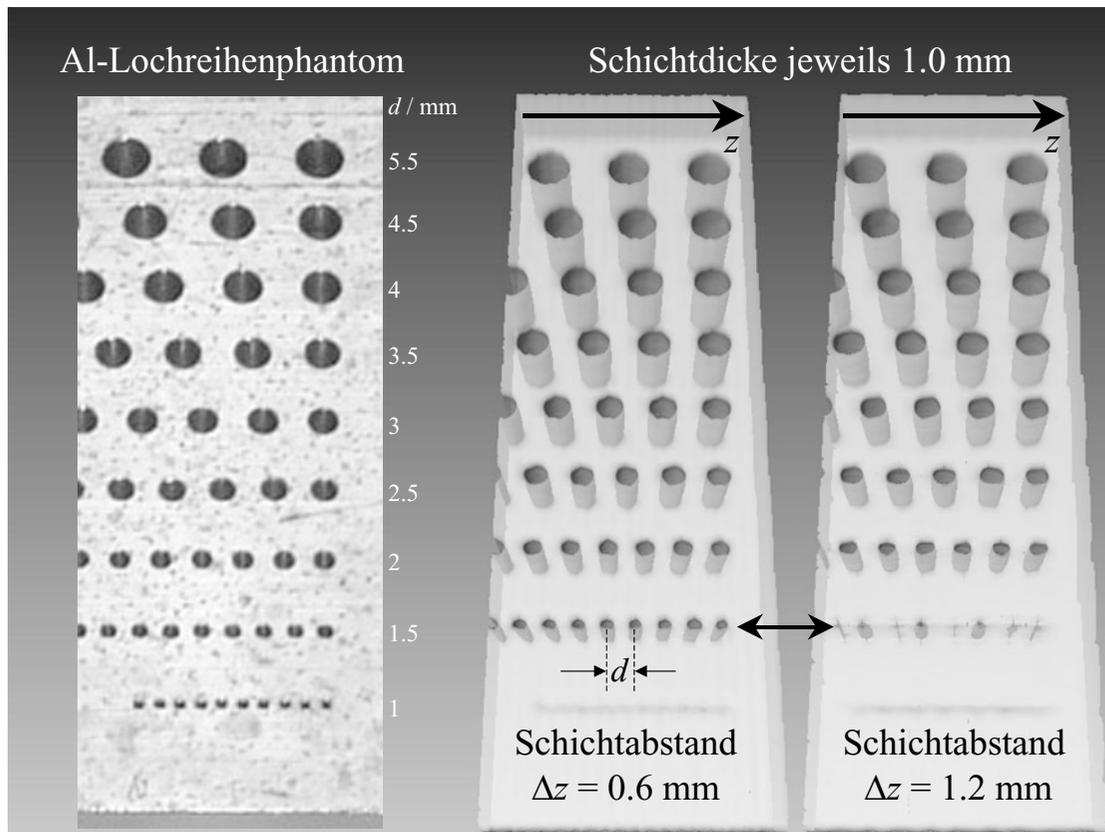


Abb. 8.29: Vermessung eines Bohrlochrasters (Al-Phantom links) mit einer Schichtdicke von jeweils 1 mm. Akquiriert man alle 0,6 mm (Mitte) bzw. alle 1,2 mm (rechts) eine Schicht und führt eine sekundäre dreidimensionale Rekonstruktion durch, so erkennt man bei dem horizontalen Lochraster von $d = 1,5$ mm (Durchmesser = Abstand) Schwebungsartefakte.

8.6.6 Metallartefakte in Schichtenstapeln

Hat man es mit starken Artefakten innerhalb einer Schicht zu tun, dann stört diese Schicht die sekundäre dreidimensionale Rekonstruktion des Volumens in dieser Schicht. Abbildung 8.30 zeigt die Auswirkungen von Metallartefakten in der dreidimensionalen Ansicht. Ausgehend von der Kieferaufnahme, die in Abschnitt 8.5.6 bereits vorgestellt wurde, sind in der Sequenz der Abbildungen 8.30a bis 8.30d von unten nach oben noch einmal einige axiale Schichtrekonstruktionen zu sehen. In Abbildung 8.30a sind zunächst keine nennenswerten Artefakte zu beobachten.

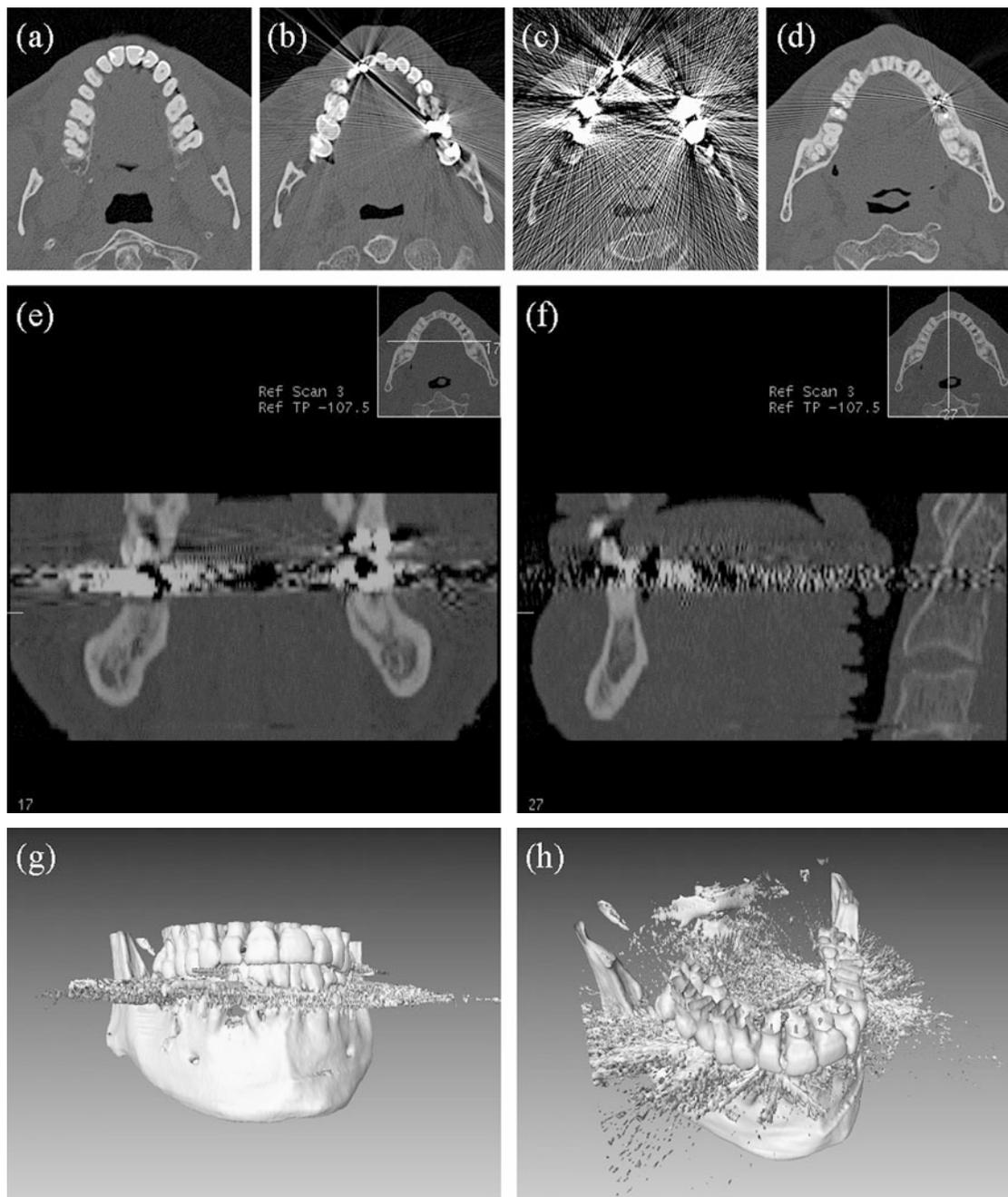


Abb. 8.30: Metallartefakte in der dreidimensionalen Rekonstruktion. Die Bilder (a) bis (d) zeigen axiale Schichten mit – je nach Anzahl der Zahnfüllungen in der Schicht – unterschiedlich starken Artefakten. Die Bilder (e) und (f) zeigen eine coronale bzw. sagittale Schichtrekonstruktion aus einem axialen Stapel von 55 Schichten. Die räumliche Lage dieser Reformatierungen ist jeweils oben rechts in den Bildern (e) und (f) angegeben. Die Bilder (g) und (h) zeigen schwellwertbasierte Oberflächenrekonstruktionen, in denen die Metallartefakte in den betreffenden axialen Schichten gut zu erkennen sind (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

In Abbildung 8.30b ist deutlich zu erkennen, dass zwei im Strahlengang liegende Metallkörper im Bereich ihrer Verbindungslinie besonders starke Artefakte erzeugen. In Abbildung 8.30c liegen so viel Zahnfüllungen innerhalb der zu rekonstruierenden Schicht,

dass das gesamte Bild aufgrund der Inkonsistenzen der Projektionen aus unterschiedlichen Richtungen durch Streifen unbrauchbar wird. In Abbildung 8.30d ist an einer einzelnen Zahnfüllung noch einmal die sternförmige Ausbreitung der Streifen demonstriert.

Legt man die einzelnen Schichten zu einem Stapel übereinander, so kann man in orthogonalen Reformatierungen die Ansicht einer coronalen Schicht (Abbildung 8.30e) sowie einer sagittalen Schicht (Abbildung 8.30f) berechnen. Die Lage der entsprechenden Schichten ist in einer artefaktfreien axialen Schicht jeweils oben rechts eingeblendet. Deutlich ist zu sehen, dass die kompletten Schichten im Bereich der Zahnfüllungen mit Artefakten durchsetzt sind.

In den Abbildungen 8.30g und 8.30h ist eine dreidimensionale Visualisierung des Kiefers wiedergegeben. Es handelt sich hierbei um ein schwellwertbasiertes Oberflächen-*Rendering*. Beide Bilder zeigen dasselbe Objekt unter jeweils einem andern Betrachtungswinkel. Das Computertomogramm ist außerhalb der durch die Zahnfüllungen beeinträchtigten Schichten von sehr guter Qualität.

8.6.7 Spezifische Artefakte beim Spiral-CT-Verfahren

Beim Spiral-CT-Verfahren gibt es im Prinzip ähnliche Bildfehler wie bei der direkten Rekonstruktion einzelner axialer Schichten. In der Regel tauchen die Artefakte aber nicht in der gleichen Ausprägung wie bei der schichtweisen Computertomographie auf, denn das Spiral-CT-Verfahren reduziert z.B. Bewegungsartefakte oder die Treppenbildung in der sekundären Rekonstruktion erheblich. Hinzu kommen aber Rekonstruktionsartefakte, die im wesentlichen im Zusammenhang mit Fehlern bei der Interpolation in Kombination mit der Wahl des *Pitch*-Faktors stehen. Im Prinzip gibt es hier also so viele Bildfehlerarten wie Interpolationsverfahren. Darauf kann an dieser Stelle nicht im Einzelnen eingegangen werden. Genannt werden soll hier aber das so genannte *Scalloping* [Bla98], das daher rührt, dass das Schichtempfindlichkeitsprofil beim Spiralverfahren vergrößert wird und damit die Partialvolumenartefakte zunehmen [Wil99].

Das *Scalloping* ist eine Erscheinung, die zum Beispiel bei Schädelaufnahmen auftritt und zwar in Schichtpositionen, an denen sich der Schäeldurchmesser in axialer Richtung schnell ändert. Abbildung 8.31 zeigt ein Beispiel für dieses spezifische Spiralartefakt. An einem Schädelphantom sind zwei Schichten ausgewählt, die in axiale Richtung unterschiedlich starke Krümmungen aufweisen. Zunächst wurden für beide Positionen konventionell, das heißt ohne kontinuierlichen Tischvorschub, einzelne Schichten mit einer Dicke von 1 mm gemessen. Das Resultat ist in den Abbildungen 8.31a/b zu sehen. Die Ursache für die scheinbar unterschiedliche Dicke des Schädels in den zwei Schichtpositionen liegt in dem unterschiedlichen Winkel zwischen der jeweiligen Rekonstruktionsschicht und der entsprechenden lokalen Schädelnormalen. Ebenfalls gut sichtbar sind die Teilvolumenartefakte, die sich in einem leichten Saum um die Schädelstruktur manifestieren.

Wählt man in dieser geometrischen Situation das Spiralverfahren, so können bei zu großem *Pitch*-Faktor Fehler auftreten, die in den Abbildungen 8.31c/d dargestellt sind. Der Saum um die eigentliche Knochenstruktur wird sehr groß und verlagert sich je nach Winkelposition des Abtastsystems aus Röhre und Detektor. Die Ursache dieses Saumes liegt in der Tatsache, dass Daten zur Interpolation herangezogen werden, die aufgrund der zu schnellen axialen Änderung der Schädelstruktur zu weit auseinander liegen. Dieser Effekt ist typischerweise sehr klein. Um ihn dennoch sichtbar zu machen, wurde bei dem vorliegenden Ergebnis der stark überhöhte *Pitch*-Faktor 10 verwendet. Bei sorgfältig gewählten *Pitch*-Faktoren tritt dieser Bildfehler in der radiologischen Praxis nicht in relevantem Maße in Erscheinung. Diese

Darstellung hat allerdings einen didaktischen Wert, denn man kann sich nun bildlich davon überzeugen, dass die Datenstruktur des Spiralverfahrens einem zur Spirale aufgeschnittenen Rettich ähnelt (siehe Abbildung 8.31 oben).

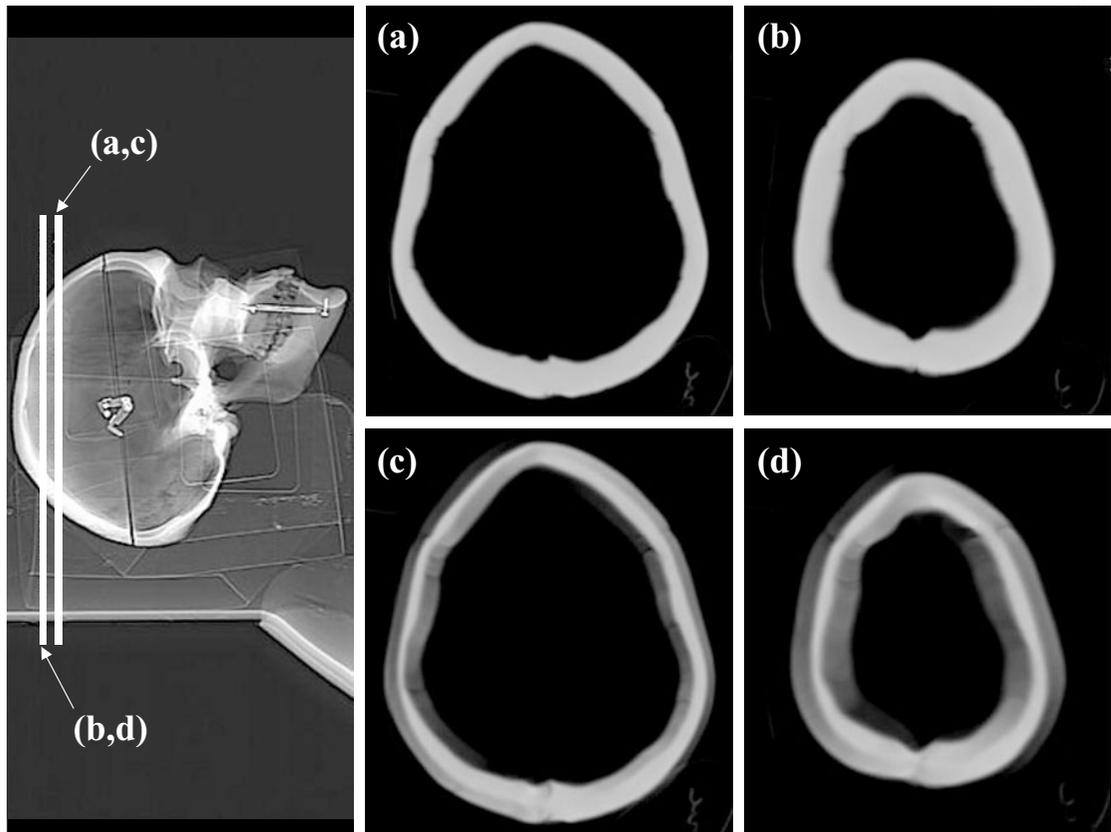
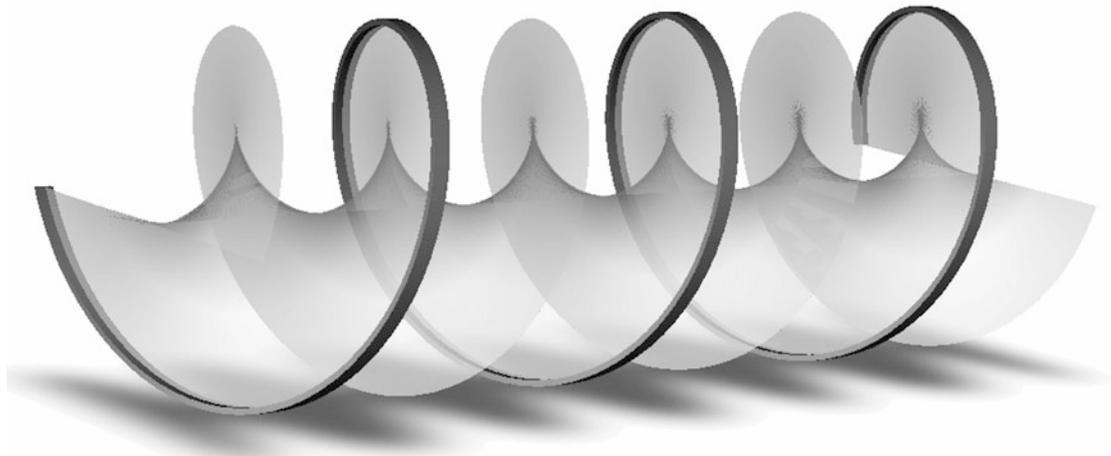


Abb. 8.31: Interpolationsartefakt beim Spiralverfahren. Oben: Die Datenstruktur erinnert an einen aufgeschnittenen Rettich. Links unten ist in der Übersichtsaufnahme ein Schädelphantom zu erkennen, bei dem zwei Schichten selektiert sind, die hier tomographisch rekonstruiert wurden. Die Bilder (a) und (b) zeigen die dazugehörigen, konventionell gemessenen, rekonstruierten Schichten, die die in den Abschnitten 8.5.1 und 8.6.1 beschriebenen Teilvolumenartefakte aufweisen. Bei einem stark überhöhten *Pitch*-Faktor gesellt sich ein Interpolationsartefakt hinzu. Je stärker die Krümmung des Objektes in axialer Richtung ist, desto stärker macht sich dieser Fehler in den dazugehörigen Bildern (c) und (d) bemerkbar.

8.6.8 Kegelstrahlartefakte

Ähnlich wie bei dem Spiral-CT-Verfahren sind auch bei der Kegelstrahlrekonstruktion die Artefakte sehr vielfältig und können hier nicht im Einzelnen dargestellt werden. Zunächst gilt natürlich weiter, dass alle oben besprochenen Artefakte auch in der Kegelstrahlgeometrie auftreten können auch wenn aufgrund der erhöhten Akquisitionsgeschwindigkeit einige Bildfehler z.B. Bewegungsartefakte reduziert werden können. Aber es tauchen auch neue Bildfehler auf, die z.B. mit dem Schattenbereich des Radonraumes bei unvollständigen Datensätzen zu tun haben [Wan95, Lee02].

Besonders wichtig ist in der Praxis die Verwendung der optimalen Lage der Rekonstruktionsebene innerhalb der helikalen Kegelstrahlgeometrie. Abbildung 8.32 zeigt eine Simulation für ein anthropomorphes Thoraxphantom (a) bis (c).

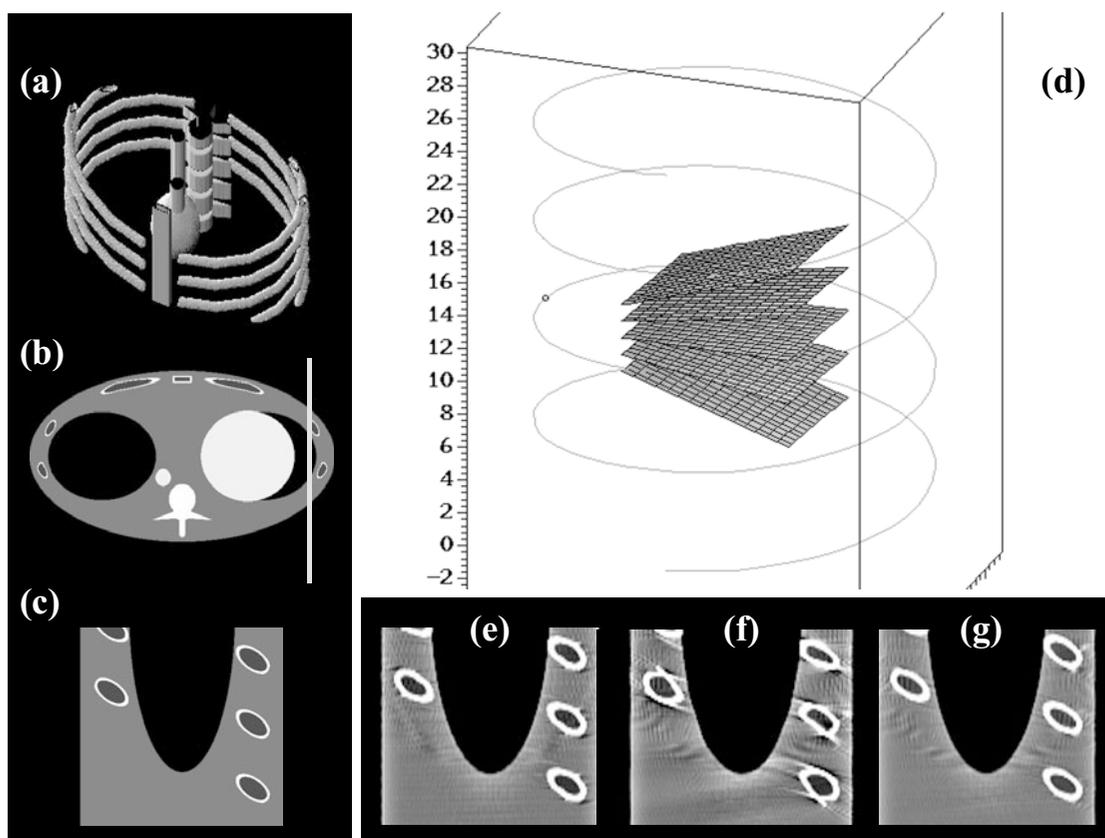


Abb. 8.32: Ergebnis der Kegelstrahlkorrektur bei größeren Öffnungswinkeln. Die Bilder (a) bis (c) zeigen ein anthropomorphes Thoraxphantom. (c) ist dabei die reformatierte Ebene, die in Abbildung (b) durch die senkrechte Linie ausgewählt ist. Ein wichtiger Faktor für die Qualität der Kegelstrahlrekonstruktion ist die Anpassung der Rekonstruktionsebene an die Spiralgeometrie. Das Bild (d) zeigt die entsprechenden Rekonstruktionsebenen. Die unterschiedlichen Rekonstruktionsergebnisse sieht man in den Bildern (e) bis (g). Dabei zeigt (e) die Standardrekonstruktion für eine 4x1 mm Schichtenaufnahme mit einem Vorschub von 12 mm/s, (f) die Standardrekonstruktion für eine 16x1 mm Schichtenaufnahme mit einem Vorschub von 48 mm/s und (g) die Rekonstruktion mit der Ebenenkorrektur für eine 16x1 mm Schichtenaufnahme mit einem Vorschub von 48 mm/s (mit freundlicher Genehmigung von Siemens Medical Solutions).

In Abbildung 8.32d ist die Anpassung der Neigung der Rekonstruktionsebene an die Kegelstrahlgeometrie dargestellt und in den Abbildungen 8.32e bis g sind die dazugehörigen Rekonstruktionsergebnisse demonstriert [Sti01]. Das Rekonstruktionsergebnis mit den Daten eines 4-Zeilen-Detektors mit jeweils 1 mm Schichtdicke und einem Vorschub von 12 mm/s ist klinisch noch mit der Standardrekonstruktion akzeptabel obwohl diese den Kegelwinkel unberücksichtigt lässt (Abbildung 8.32e).

Bei größeren Kegelwinkeln gelten aber die mathematischen Näherungen der Standardrekonstruktion in Bezug auf die tatsächliche Neigung der Rekonstruktionsebene im dreidimensionalen Raum nicht mehr. Die Konsequenz ist, dass bei einem 16-Zeilen-Detektor mit jeweils 1 mm Schichtdicke und einem Vorschub von 48 mm/s die Standardrekonstruktion erhebliche Artefakte produziert (Abbildung 8.32f). In Abbildung 8.32g ist demonstriert, dass die Anpassung der Rekonstruktionsebene die Bildqualität erheblich verbessert.

8.6.9 Segmentierungs- und Triangulierungsproblematik

Häufig stellt die Bildverarbeitung bzw. die Visualisierung dem Betrachter sehr glatte Oberflächen dar, die optisch keinen Rückschluss mehr erlauben, mit welcher Schichtdicke und mit welchem Rekonstruktionsindex gemessen wurde. Abbildung 8.33 zeigt die Visualisierungsergebnisse für das Wirbelphantom, das in Abbildung 7.7 vorgestellt wurde. Links ist ein Volumen-Rendering dargestellt, in dem die Schichtdicke klar zu erkennen ist. Rechts ist ein Oberflächen-Rendering dargestellt, das keinen Hinweis mehr auf eine Schichtdicke zulässt. Beide Darstellungen haben dieselbe Datenbasis (vergleiche Abbildung 7.7).

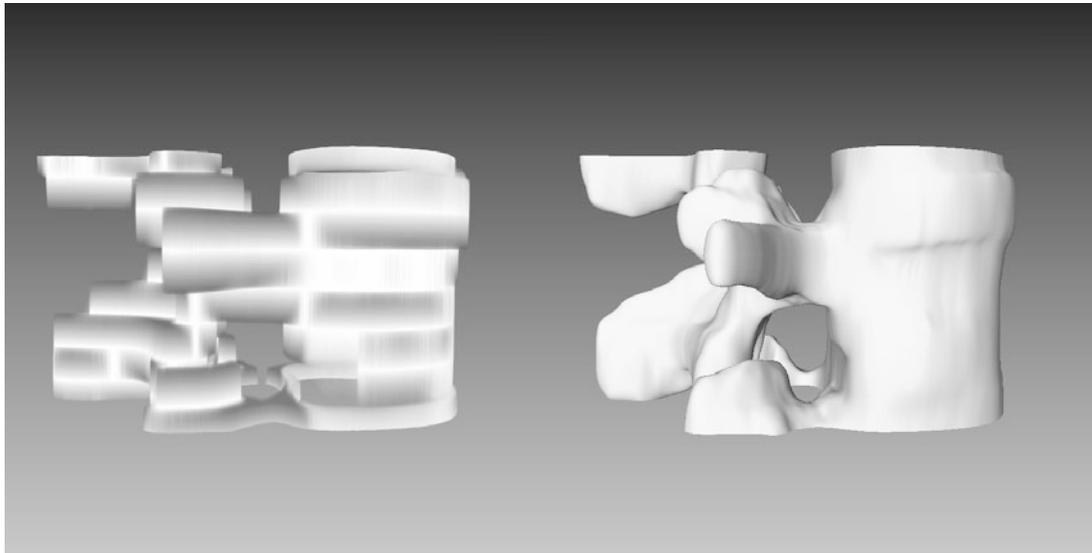


Abb. 8.33: Ergebnis der Volumen- und der Oberflächendarstellung für das Wirbelphantom aus Abbildung 7.7. In der Volumendarstellung (links) ist die Schichtdicke von 6 mm sehr gut zu erkennen. Das Oberflächen-Rendering (rechts) gibt kein Indiz für eine Schichtdicke.

Um zu verstehen, warum in der Oberflächendarstellung die Schichtdicke nicht mehr wahrnehmbar ist, muss man sich den Visualisierungsprozess ansehen. Bei der Oberflächenvisualisierung kann man entscheiden, ganz bestimmte Wertebereiche darzustellen und andere gezielt auszublenden. Entscheidet sich der Betrachter für einen konstanten Grauwert, so werden alle Raumpunkte mit diesem Wert als so genannte Isofläche im Raum dargestellt. In

Abbildung 8.34 links ist eine einzelne Isolinie innerhalb der gewählten Schicht eingezeichnet. An dieser Stelle wird deutlich, dass bereits die Art der Segmentierung zu Fehlern führt. Die durch den Partialvolumeneffekt schwächer abgebildeten Wirbelfortsätze werden durch die Isolinie nicht umschlossen. In Abbildung 8.34 Mitte ist die Lage der Schicht, zur besseren Orientierung im dreidimensionalen Datenvolumen zu sehen. Rechts ist in Abbildung 8.34 der Stapel der 9 gemessenen Schichten mit den einzelnen Isolinien dargestellt.

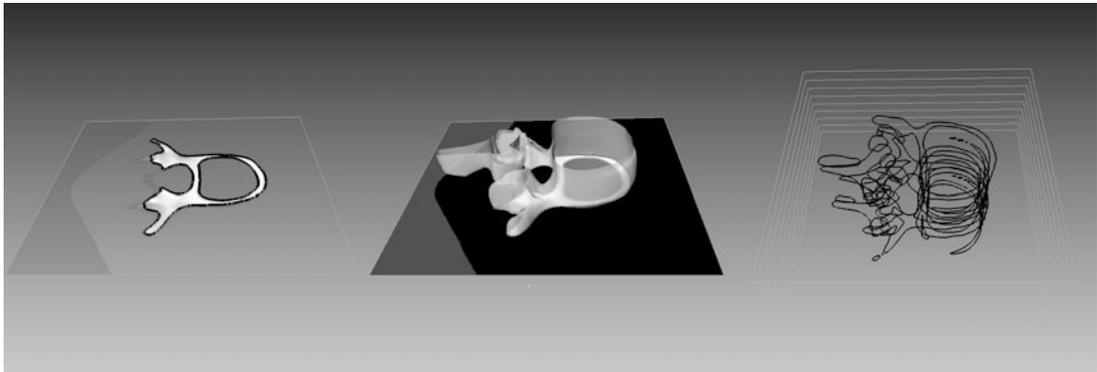


Abb. 8.34: Links: Durch einen individuell gewählten Grauwert wird eine so genannte Isolinie in der gemessenen Schicht ausgewählt. Mitte: Lage der gemessenen Schicht im Datenvolumen. Rechts: Der Stapel der Isolinien der 9 gemessenen Schichten bildet die Basis der Triangulierung.

Der Stapel die Isolinien bildet die Grundlage für die Visualisierung, denn auf der Basis dieser Linien wird die Isogruwertfläche mit Dreiecken graphisch nachgebildet. Abbildung 8.35 zeigt das Ergebnis dieser so genannten Triangulierung. Man stellt die Isofläche als Oberfläche dar, indem man jedes der Dreiecke mit einer reflektierenden Fläche versehen und das Mosaik aus Dreiecken mit einer virtuellen Lichtquelle beleuchtet (Abbildung 8.35 rechts).

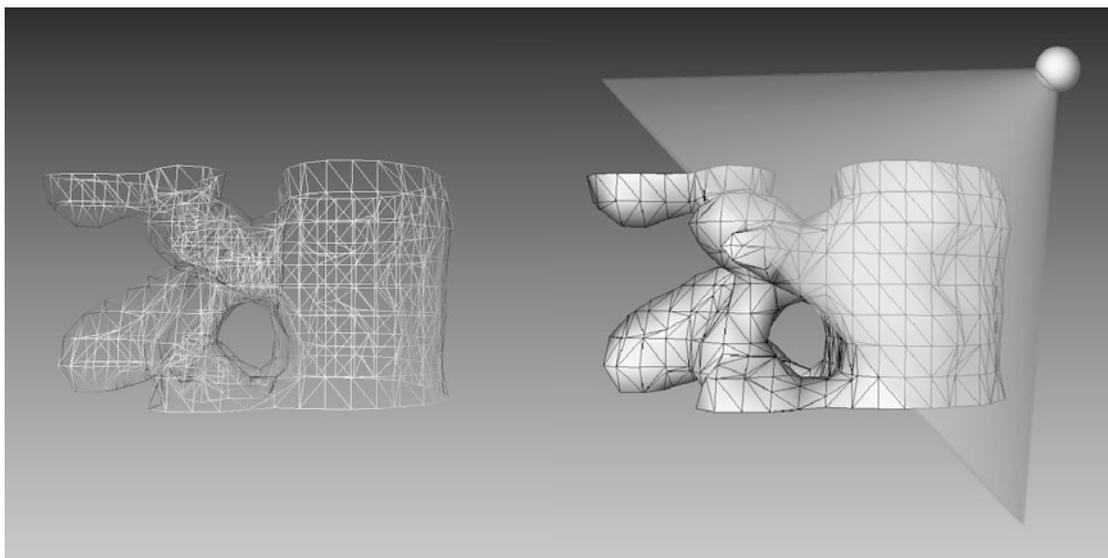


Abb. 8.35: Links: Gittermodell der Triangulierung auf Basis der Isolinien. Rechts: Jedes der Dreiecke wird mit einer reflektierenden Fläche versehen und mit einer virtuellen Lichtquelle beleuchtet.

Je größer die Anzahl der Mosaiksteine für die Nachbildung der Fläche gewählt ist, desto naturgetreuer ist das Ergebnis. In Abbildung 8.35 rechts sind etwa 1.600 Dreiecke berechnet worden. In Abbildung 8.36 links wird dieses Ergebnis mit einer feinen Spiral-CT-Messung verglichen. Zwischen den Isolinien aus 100 Schichten, die mit einem Abstand von 0.5 mm retrospektiv berechnet wurden, spannen 500.000 Dreiecke die Oberfläche auf (dunkle Fläche). Der Genauigkeitsunterschied wird sichtbar, wenn die Oberfläche der konventionellen 9-Schicht-Messung in demselben Volumen visualisiert wird (helle Fläche).

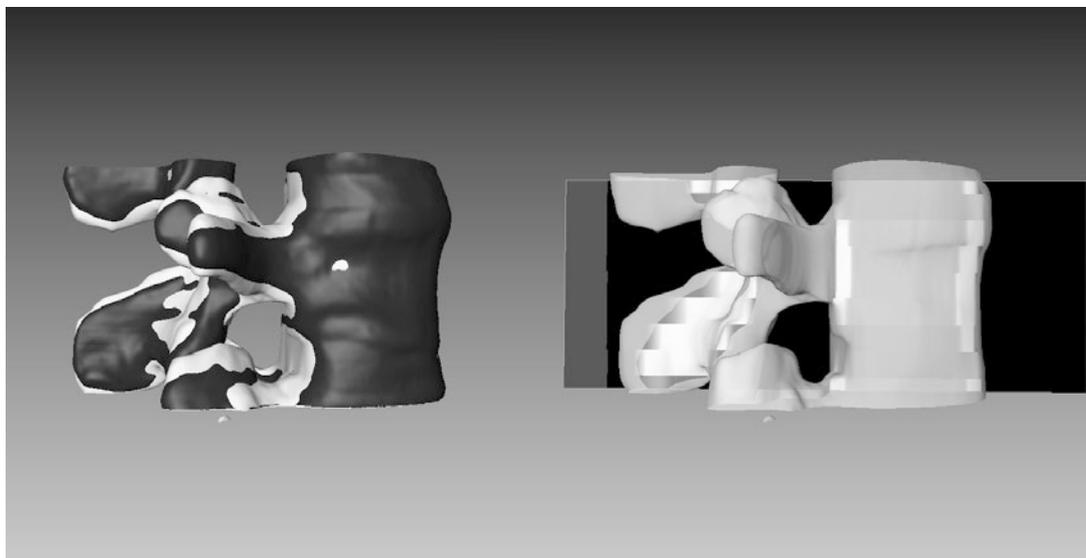


Abb. 8.36: Links: Die Oberflächendarstellungen der feinen Spiral-CT-Messung mit 100 retrospektiv berechneten Schichten mit einem Rekonstruktionsabstand von 0.5 mm (dunkel) und einer konventionellen Messung von neun Schichten mit einem Schichtabstand von 6 mm (hell) sind gleichzeitig dargestellt. Rechts: Die sagittale Schicht in der Visualisierung der transparenten Oberflächen zeigt den Unterschied zwischen der groben Datenbasis und der glättenden Triangulierung.

Die Abbildung 8.36 rechts zeigt noch einmal, warum das Ergebnis der groben Messung ungenauer sein muss. Die Datenbasis ist anhand einer sagittalen Schicht zu einer transparenten Darstellung der Oberfläche eingblendet. Die Lage der Oberfläche im Raum wird offenbar interpoliert. Hinzu kommt, dass die Wahl des Grauwertes für die Isofläche ebenfalls einer gewissen Willkür unterliegt und darüber hinaus die Lage der Fläche durch die Partialvolumenartefakte beeinflusst wird. Daran muss bei der Planung einer Intervention – zum Beispiel dem Setzen von so genannten Pedikelschrauben durch die Wirbelfortsätze – immer gedacht werden, um Fehlplatzierungen zu vermeiden.

8.7 Rauschen in rekonstruierten Bildern

Möchte man das Rauschen in den rekonstruierten Bildern beurteilen und quantitativ erfassen, dann muss man sich den Datenakquisitionsweg noch einmal anschauen. Die Bilder ergeben sich schließlich ganz zuletzt als Überlagerung gefilterter Daten. Die physikalische Quelle des Rauschens ist aber der Messprozess von Röntgenquanten, der am Anfang der Signalverarbeitungskette steht.

Grundsätzlich unterteilt man das Rauschen in das so genannte Quantenrauschen und in das Detektorrauschen. Das Quantenrauschen wird durch die stochastischen Schwankungen bei der Streuung und Absorption von Röntgenstrahlung beim Durchlaufen des Objektes erzeugt. Trotz identischer Aufnahmesituationen trifft dabei grundsätzlich immer eine unterschiedliche Anzahl von Quanten auf den Detektor.

Dieser Zufallsprozess wird durch additives Rauschen modelliert. Die Quantenrauschleistung steigt linear mit der Intensität an. Das Quantenrauschen zeigt, dass die Energie in kleinen Portionen, den Röntgenquanten, an den Detektor abgegeben wird. Demgegenüber ist das Detektorrauschen ein thermisches Rauschen der Elektronen im Detektor, das unabhängig von der Belichtung und vor allem auch ohne Belichtung messbar ist.

8.7.1 Varianz der Radontransformierten

Man fängt bei dieser Analyse typischerweise damit an, dass die Anzahl der Quanten auf einem Detektorelement betrachtet wird. Da die Intensität der Strahlung proportional zur Anzahl der im Detektor gemessenen Quanten ist, geht man von Gleichung (2.25) aus, die völlig analog

$$n_\gamma(\xi) = n_{\gamma,0}(\xi) e^{-\int \mu(\eta) d\eta} \quad (8.67)$$

lautet, dabei ist $n_\gamma(\xi)$ die Anzahl der gemessenen Quanten unter dem Projektionswinkel γ am Detektorort ξ , und $n_{\gamma,0}(\xi)$ ist die Referenzquantenzahl ohne absorbierendes Objekt im Messfeld. Analog zu Gleichung (5.10) gilt damit auch hier

$$p_\gamma(\xi) = -\int \mu(\xi, \eta) d\eta = \ln \left(\frac{n_{\gamma,0}(\xi)}{n_\gamma(\xi)} \right) = \ln(n_{\gamma,0}(\xi)) - \ln(n_\gamma(\xi)). \quad (8.68)$$

Da die Anzahl der gemessenen Quanten in Zählprozessen der Poissonverteilung (2.40) unterliegt, gilt für den Mittelwert $\langle n_\gamma(\xi) \rangle$ und die Standardabweichung $\sigma_{n,\gamma}(\xi)$ der Zusammenhang

$$\langle n_\gamma(\xi) \rangle = (\sigma_{n,\gamma}(\xi))^2 \quad (8.69)$$

(vergleiche Abschnitt 2.4.4), so dass für die Messung der Quantenzahl des einzelnen Detektors insgesamt

$$n_\gamma(\xi) = \langle n_\gamma(\xi) \rangle \pm \sigma_{n,\gamma}(\xi) = \langle n_\gamma(\xi) \rangle \pm \sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle} \quad (8.70)$$

geschrieben werden kann. Da der nächste Schritt in der Signalverarbeitungskette die Logarithmierung der Detektormesswerte ist, interessiert man sich für die Standardabweichung des Projektionsintegrals $p_\gamma(\xi)$.

Setzt man den Zusammenhang (8.70) in Gleichung (8.68) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
p_\gamma(\xi) &= \ln(n_{\gamma,0}(\xi)) - \ln(\langle n_\gamma(\xi) \rangle \pm \sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}) \\
&= \ln(n_{\gamma,0}(\xi)) - \ln\left(\langle n_\gamma(\xi) \rangle \left[1 \pm \frac{\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}}{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}\right]\right) \\
&= \ln(n_{\gamma,0}(\xi)) - \ln\left(\langle n_\gamma(\xi) \rangle \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}}\right]\right) \\
&= \ln(n_{\gamma,0}(\xi)) - \ln(\langle n_\gamma(\xi) \rangle) + \ln\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}}\right).
\end{aligned} \tag{8.71}$$

Mit der Reihenentwicklung

$$\ln(1 \pm x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^i x^i}{i} \quad \text{für } -1 < x < +1 \tag{8.72}$$

folgt für $\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle} \gg 1$ und dem Abbruch der Entwicklung (8.72) nach dem linearen Term

$$p_\gamma(\xi) = \ln(n_{\gamma,0}(\xi)) - \ln(\langle n_\gamma(\xi) \rangle) \pm \frac{1}{\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}}. \tag{8.73}$$

Die beiden ersten Terme in Gleichung (8.73) lassen sich nach Gleichung (8.68) als Mittelwert des Projektionsintegrals auffassen, so dass

$$p_\gamma(\xi) = \langle p_\gamma(\xi) \rangle \pm \frac{1}{\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}}. \tag{8.74}$$

Damit gilt für die Standardabweichung des Projektionsintegrals

$$\sigma_{p,\gamma}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}} \tag{8.75}$$

bzw. für die Varianz des Projektionsintegrals, das in der Parallelstrahlgeometrie die Radon-transformierte darstellt

$$\left(\sigma_{p,\gamma}(\xi)\right)^2 = \frac{1}{\langle n_\gamma(\xi) \rangle}. \tag{8.76}$$

8.7.2 Varianz der Rekonstruktion

Der nächste Schritt in der Rekonstruktionskette ist die gefilterte Rückprojektion, die in diskreter Form als

$$f(x, y) = \frac{\pi}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} h_{\gamma_n}(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n)) \tag{6.8}$$

formuliert werden kann. Führt man die Filterung des Projektionssignals als Faltung im Ortsbereich des Detektorarrays durch, so schreibt man analog zur Gleichung (6.46)

$$f(x, y) = \frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} p_{\gamma_n}(k\Delta\xi) g_{\gamma_n}(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n) - k\Delta\xi). \quad (8.77)$$

Mit dem Zusammenhang (8.74) folgt

$$f(x, y) = \frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} \left(\langle p_{\gamma_n}(k\Delta\xi) \rangle \pm \frac{1}{\sqrt{\langle n_{\gamma_n}(k\Delta\xi) \rangle}} \right) g_{\gamma_n}(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n) - k\Delta\xi), \quad (8.78)$$

so dass für den einzelnen Pixelwert

$$f(x, y) = \langle f(x, y) \rangle \pm \sigma_f(x, y) \quad (8.79)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\langle f(x, y) \rangle = \frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} \langle p_{\gamma_n}(k\Delta\xi) \rangle g_{\gamma_n}(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n) - k\Delta\xi) \quad (8.80)$$

und

$$\sigma_f(x, y) = \frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} \frac{1}{\sqrt{\langle n_{\gamma_n}(k\Delta\xi) \rangle}} g_{\gamma_n}(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n) - k\Delta\xi). \quad (8.81)$$

Da die einzelnen Projektionen statistisch unabhängige Fluktuationen aufweisen, kann man für die Varianz

$$\sigma_f^2(x, y) = \left(\frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \right)^2 \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} \frac{g_{\gamma_n}^2(x \cos(\gamma_n) + y \sin(\gamma_n) - k\Delta\xi)}{\langle n_{\gamma_n}(k\Delta\xi) \rangle} \quad (8.82)$$

schreiben, denn die gemischten Terme in der Summe sind alle Null. Die Varianz im Ursprung ist damit

$$\sigma_f^2(0, 0) = \left(\frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \right)^2 \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=-D/2}^{D/2-1} \frac{g_{\gamma_n}^2(k\Delta\xi)}{\langle n_{\gamma_n}(k\Delta\xi) \rangle}, \quad (8.83)$$

denn ein Vergleich mit Kapitel 6.1.3 zeigt, dass g eine gerade Funktion ist, so dass $g(-k\Delta\xi) = g(k\Delta\xi)$. Für ein zylinderförmiges, homogenes Objekt ist die Fluktuation des zentralen Strahls unter jedem Projektionswinkel immer dieselbe, so dass gilt

$$\sigma_f^2(0, 0) = \left(\frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \right)^2 \left(\sum_{n=1}^{N_p} \frac{1}{\langle n_{\gamma_n}(0) \rangle} \right) \left(\sum_{k=-D/2}^{D/2-1} g_{\gamma_n}^2(k\Delta\xi) \right) = \left(\frac{\pi}{N_p} \Delta \xi \right)^2 \frac{N_p}{\langle n(0) \rangle} \left(\sum_{k=-D/2}^{D/2-1} g_{\gamma_n}^2(k\Delta\xi) \right). \quad (8.84)$$

Nutzt man den allgemeinen Zusammenhang für die Diskretisierung eines Integrals

$$\Delta\xi \sum g_\gamma^2(k\Delta\xi) \approx \int g_\gamma^2(\xi) d\xi \quad (8.85)$$

und weiterhin das Parseval-Theorem (4.118), so gilt für das reelle Signal $g_\gamma(\xi)$

$$\int g_\gamma^2(\xi) d\xi = \iint |G_\gamma(q)|^2 dq \quad (8.86)$$

und damit für die Varianz des Pixels im Ursprung

$$\sigma_f^2(0,0) = \left(\frac{\pi}{N_p} \Delta\xi \right)^2 \frac{N_p}{\langle n(0) \rangle} \frac{1}{\Delta\xi} \int_{-\frac{1}{2\Delta\xi}}^{+\frac{1}{2\Delta\xi}} |G_\gamma(q)|^2 dq = \frac{\pi^2 \Delta\xi}{N_p \langle n(0) \rangle} \int_{-\frac{1}{2\Delta\xi}}^{+\frac{1}{2\Delta\xi}} |G_\gamma(q)|^2 dq. \quad (8.87)$$

Offenbar hängt das Pixelrauschen des rekonstruierten Bildes von der gewählten Filterfunktion der gefilterten Rückprojektion ab. Die Varianz des Ursprungspixels ist proportional zur Fläche unter dem Betragsquadrat der Filterfunktion im Frequenzraum. In Kapitel 6.1.1 wurden verschiedene Filterfunktionen untersucht. Wendet man die Funktionen (6.13) bis (6.27) in Gleichung (8.87) an, so ist klar, dass man das Bildrauschen durch das Minimieren der Fläche

$$\sigma_f^2(0,0) \propto \int_{-\frac{1}{2\Delta\xi}}^{+\frac{1}{2\Delta\xi}} |G_\gamma(q)|^2 dq. \quad (8.88)$$

reduzieren kann. Andererseits muss beachtet werden, dass jede Abweichung von der idealen Filterung

$$G(q) = |q| \quad \text{für alle } q, \quad (8.11)$$

zur Reduktion der räumlichen Auflösung führt, denn die Modulationstransferfunktion des rekonstruierten Bildes ist von der Art der Bandbegrenzung und Fensterung der Filterfunktion abhängig. In Kapitel 8.3 wurde erklärt, dass die Ortsauflösung durch

$$MTF_{\text{Bandbegrenzung}}(q) = \frac{|G(q)|}{|q|} \quad (8.50)$$

bestimmt wird. Das heißt, die räumliche Auflösung kann nicht maximiert werden, ohne dass das Bildrauschen ebenfalls wächst. Die Wahl der Filterfunktion ist ein Optimierungsprozess, bei dem je nach anatomischer Fragestellung ein Kompromiss zwischen akzeptablem Bildrauschen und erforderlicher räumlicher Auflösung gefunden werden muss. Setzt man Gleichung (8.50) in Gleichung (8.87) ein, so erhält man insgesamt den Ausdruck

$$\sigma_f^2(0,0) = \frac{\pi^2 \Delta \xi}{N_p \langle n(0) \rangle} \int_{-\frac{1}{2\Delta \xi}}^{+\frac{1}{2\Delta \xi}} (q MTF_{\text{Bandbegrenzung}}(q))^2 dq . \quad (8.89)$$

Die Fläche unter dem Integral zu minimieren würde also gleichzeitig bedeuten, die MTF zu minimieren. Betrachtet man bei fester Filterfunktion $G(q)$ den Normierungsterm

$$\sigma_f^2(0,0) \propto \frac{\pi^2 \Delta \xi}{N_p \langle n(0) \rangle} \quad (8.90)$$

in Gleichung (8.87), so kann abgelesen werden, dass mit Erhöhung der Anzahl der Projektionen N_p das Rauschen sinkt.

Weiterhin entsteht der Eindruck, dass man die Breite der Detektorelemente $\Delta \xi$ so klein wie möglich halten muss, damit die Varianz der rekonstruierten Bildpunkte klein wird. Dieser Eindruck ist falsch, denn einerseits hängt die mittlere Anzahl von Quanten $\langle n(0) \rangle$, die in einem Detektorelement gemessen werden, linear von der Detektorbreite ab. Und andererseits, muss man das Integral in Gleichung (8.89) auswerten, um eine brauchbare Aussage der Abhängigkeit der Varianz von der Detektorbreite zu erhalten. Dazu nimmt man an, dass die ideale Filterung (6.11) Einsatz findet, so dass im Rahmen der Bandbegrenzung

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(0,0) &= \frac{\pi^2 \Delta \xi}{N_p \langle n(0) \rangle} \int_{-\frac{1}{2\Delta \xi}}^{+\frac{1}{2\Delta \xi}} (q)^2 dq = \frac{\pi^2 \Delta \xi}{N_p \langle n(0) \rangle} \frac{1}{3} \left[q^3 \right]_{-\frac{1}{2\Delta \xi}}^{+\frac{1}{2\Delta \xi}} \\ &= \frac{\pi^2 \Delta \xi}{N_p \langle n(0) \rangle} \frac{1}{12 (\Delta \xi)^3} = \frac{\pi^2}{12 N_p \langle n(0) \rangle (\Delta \xi)^2} \end{aligned} \quad (8.91)$$

gilt. Tatsächlich wächst die Varianz umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Detektorbreite.

$\langle n(0) \rangle$ ist die mittlere Anzahl von transmittierten Röntgenquanten des Zentralstrahls. Für die homogene, kreisrunde Scheibe ist diese durch

$$\langle n(0) \rangle = \langle n_0(0) \rangle e^{-\int_0^{2R} \mu_0 d\eta} = \langle n_0(0) \rangle e^{-2R\mu_0} \quad (8.92)$$

abzuschätzen. Unter jedem Winkel ist der Mittelwert der Quantenanzahl, die in den Detektor gelangt, gleich der Anzahl der in der Quelle erzeugten Quanten, multipliziert mit einer konstanten Schwächung. Da die mittlere Anzahl von Quanten $\langle n(0) \rangle$ umgekehrt proportional zur Varianz des Bildrauschens ist, kann durch Steigerung von $\langle n_0(0) \rangle$ das Rauschen offenbar reduziert werden. Die Anzahl der Quanten $\langle n_0(0) \rangle$ hängt von dem eingestellten Strom I der Röntgenröhre ab. Je höher der Strom ist, desto höher ist die Intensität der Strahlung und desto geringer fällt das Bildrauschen aus. Abbildung 8.37 zeigt diesen Effekt an einem Phantom, das mit unterschiedlichen Anzahlen von Projektionen N_p und unterschiedlichen Röhrenströmen I vermessen wurde.

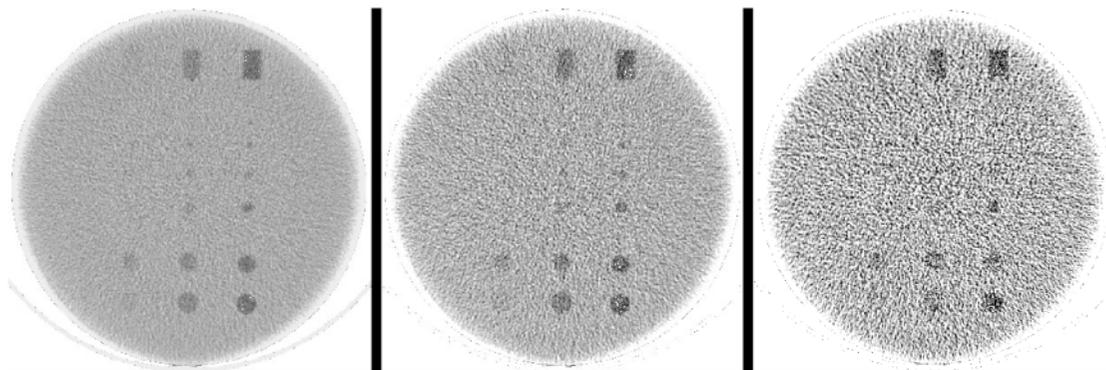


Abb. 8.37: Einfluss der Strahlungsintensität und der Anzahl der Projektionen auf das Rauschen. Das Phantom wurde jeweils mit unterschiedlichen Anzahlen von Projektionen N_p und Röhrenströmen I gemessenen (a: $N_p = 1640$ und $I = 100$ mA, b: $N_p = 656$ und $I = 100$ mA, c: $N_p = 656$ und $I = 50$ mA)

8.7.3 Dosis, Kontrast und Varianz

Mit dem Röhrenstrom I wächst proportional auch die Röntgendosis des Patienten. Den Zusammenhang zwischen der Dosis mit dem gerade noch wahrnehmbaren Kontrast einer Lochreihe eines Messphantoms stellt die so genannte Niedrigkontrastauflösung her [Mor95]. Danach besteht zwischen der Dosis D und dem gerade noch erkannten Kontrast K_d die Proportionalität

$$K_d \propto \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad (8.93)$$

wobei d den Durchmesser der einzelnen Löcher der Lochreihe kennzeichnet.

Genau genommen ist nicht der Strom, sondern das Produkt aus Strom und Messzeit, das so genannte *mAs*-Produkt für die Anzahl der Photonen und damit für die Bildqualität entscheidend. Eine Verdopplung des *mAs*-Produkts führt zu einer Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses um den Faktor $\sqrt{2}$. Damit verbessert sich natürlich der Kontrast. Da die Dosis linear mit dem *mAs*-Produkt anwächst, muss man in der Praxis kompromissbereit sein. Zu beachten ist in der Praxis auch, dass dickere Patienten stärker Quanten absorbieren als dünnere Patienten. Damit sinkt bei dickeren Patienten das Signal-Rausch-Verhältnis.

Der Einfluss der Schichtdicke auf die Bildqualität wurde in den Abschnitten 8.5.1, 8.6.1 und 8.6.2 im Zusammenhang mit Teilvolumenartefakten und Treppenbildung besprochen. Diese Probleme der Mittelung führen zu einer Verschlechterung des Bildes. Allerdings ist im Zusammenhang mit dem Rauschen der Bilder zu beachten, dass die Anzahl der Quanten mit der Schichtdicke wächst. Eine Verdopplung der Schichtdicke führt zu einer Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses um den Faktor $\sqrt{2}$. Diese beiden gegenläufigen Effekte können nicht in Allgemeinheit gegenüber gestellt werden. Es ist immer einer Frage der anatomischen Situation, wie breit die Schicht sein darf.

Intelligente Scanner bedienen des Zusammenhangs (8.93) so, dass der Anodenstrom dem jeweiligen anatomischen Bereich dynamisch angepasst wird. Abbildung 8.38 zeigt dieses Konzept schematisch. Im Bereich der Lunge kann der Röhrenstrom und damit die Dosis herab gesetzt werden, ohne dass es zu einer Verschlechterung der Bildqualität kommt.

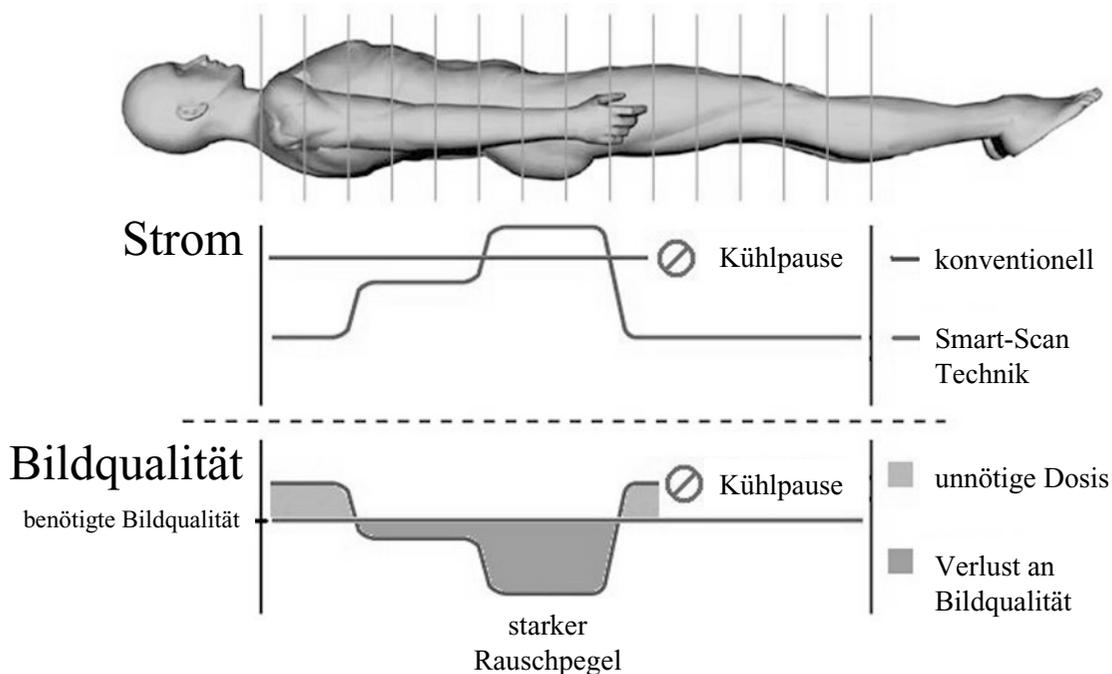


Abb. 8.38: Dynamische Anpassung des Röhrenstroms, bzw. der Dosis an die anatomische Situation. In anatomischen Bereichen, in denen bekanntermaßen eine kleine Schwächung der Röntgenintensität zu erwarten ist wie zum Beispiel im Bereich der Lunge, kann der Röhrenstrom ohne Bildqualitätsverlust verringert werden. Fährt man alle Bereiche mit demselben Röhrenstrom, so ergeben sich entweder zu hohe Dosen oder zu starke Rauschpegel (mit freundlicher Genehmigung von General Electric Medical Systems).

Weiterhin ist interessant, wie das Signal-Rausch-Verhältnis mit der Dosis und der Detektorgröße zusammenhängt. Die Kombination der Gleichungen (8.91) und (8.92) liefert hierzu unmittelbar

$$\sigma_f^2(0,0) = \frac{\pi^2}{12N_p (\Delta\xi)^2 \langle n_0(0) \rangle e^{-2R\mu_0}} \tag{8.94}$$

Da der Mittelwert für den zu rekonstruierenden Schwächungswert bei einer homogenen Scheibe überall μ_0 ist, gilt speziell für den Mittelwert des Ursprungspixels

$$\langle f(0,0) \rangle = \mu_0 \tag{8.95}$$

Mit der Definition des Signal-Rausch-Verhältnisses (2.61) gilt somit

$$SNR(0,0) = \frac{\langle f(0,0) \rangle}{\sigma_f(0,0)} = \frac{\mu_0}{\pi} \sqrt{12N_p (\Delta\xi)^2 \langle n_0(0) \rangle e^{-2R\mu_0}} \tag{8.96}$$

für den Ursprungspixel. Die Dosis, die im Ursprungspixel $f(0,0)$ mit der Pixelkantenlänge b einer sehr dünnen Scheibe mit dem Radius R durch die Messung mit Röntgenstrahlen eingebracht wird, ist

$$D \propto \frac{N_p \langle n_0(0) \rangle e^{-R\mu_0}}{b^2}, \quad (8.97)$$

also proportional zur Quantenzahl pro Pixelfläche⁶². Geht man von dem Fall aus, dass die Pixelkantenlänge b ungefähr der Größe eines Detektorelementes entspricht, also $b \approx \Delta\xi$, dann folgt für Gleichung (8.96)

$$SNR(0,0) \propto \frac{\mu_0}{\pi} \sqrt{12(\Delta\xi)^4 D e^{-R\mu_0}} \quad (8.98)$$

bzw. der wichtige Zusammenhang

$$D \propto \frac{(SNR)^2}{(\Delta\xi)^4} \quad (8.99)$$

zwischen der Detektorauflösung, der Dosis und dem Signal-Rausch-Verhältnis. Gleichung (8.99) bedeutet, dass bei gleichbleibendem Signal-Rausch-Verhältnis die Dosis mit der vierten Potenz steigt, sobald die Detektorgröße verringert wird. Das setzt dem Wunsch nach weiterer Verkleinerung der Detektorelemente natürlich eine Grenze, da die Dosis nicht beliebig gesteigert werden darf.

⁶² Die genaue Umrechnung von Quantenzahl/mm² in Dosis ist abhängig von der Anodenspannung, dem verwendeten Aufhärtungsfilter und dem Gewebetyp [Dös01].

9 Praktische Aspekte der Computertomographie

In den nächsten Abschnitten werden einige wichtige Gesichtspunkte aus der Praxis der Computertomographie besprochen werden. Dazu zählen sowohl die Aufnahmeplanung als auch die Datenaufbereitung und Datendarstellung, insbesondere die Grauwerteskalierung. Bei den klinischen Anwendungen der Computertomographie ist die Planung der Aufnahmen besonders wichtig, denn aufgrund der systembedingten Strahlendosis, die im Patienten platziert wird, können Aufnahmen nicht beliebig wiederholt werden.

Neben der Planung, also der Vorbereitung der Bildakquisition, ist auch die Kenntnis der Darstellungsformen, also der Nachverarbeitung sehr wichtig, denn aus den Bildern kann mit Hilfe moderner Visualisierungstechniken sehr viel an Information gewonnen werden. Beide Aspekte – Planung und Nachverarbeitung – werden in diesen letzten Abschnitten besprochen. Die verschiedenen Aufnahmeprotokolle für die jeweiligen radiologischen Fragestellungen werden hier nicht ausgeführt, können aber z.B. bei *L. E. Romans* [Rom95] nachgelesen werden.

9.1 Aufnahmeplanung

Das wichtigste Element der Planung einer computertomographischen Aufnahme ist die so genannte Übersichtsaufnahme, die je nach Hersteller Topogram (Siemens), Scanogram (Philips) oder Scout View (General Electric) genannt wird. Um diese Aufnahme zu akquirieren, wird die Drehung der Abtasteinheit gestoppt und die Abtasteinheit in eine feste Position gebracht. Möglich ist im Prinzip jede Position, typische Positionen sind aber *anterior-posterior* (a.p.), das ist die Durchleuchtung von der Patientenvorderseite zur Patientenrückseite und *lateral*, das ist die seitliche Durchleuchtung.

Während der Durchleuchtung wird der Patiententisch kontinuierlich durch das Messfeld geschoben. Beispielhafte Bilderergebnisse für eine a.p. und eine laterale Übersichtsaufnahme sind in Abbildung 9.1 dargestellt. Die so gewonnenen Aufnahmen sehen normalen Röntgendurchleuchtungen sehr ähnlich. Tatsächlich unterscheiden sich beide Aufnahmetechniken aber dadurch, dass in axialer Richtung des Patienten bei der CT-Übersichtsaufnahme keine Parallaxe vorhanden ist, denn das Strahlenbündel hat durch Schichtkollimation nur eine minimale Divergenz.

Mit Hilfe der a.p. Übersichtsaufnahme kann jetzt eine bestimmte Schichtebene, die Schichtdicke und die Anzahl der Schichten bzw. das Volumen geplant und programmiert werden. Bei der lateralen Übersichtsaufnahme ergibt sich zusätzlich die Möglichkeit, bestimmte Schichtorientierungen durch Verkippung der *Gantry* zu programmieren. Dies ist bei Schädel- und Wirbelsäulentomogrammen häufig gewünscht.

Abbildung 9.2a zeigt die a.p. Übersichtsaufnahme eines Thorax. Typischerweise werden hier axiale Schichten in 8 bis 10 mm Dicke und Abstand gemessen. Bei Untersuchungen der Lendenwirbel ist eine der Orientierung der einzelnen Wirbelkörper angepasste *Gantry*-verkippung zu planen. Abbildung 9.2b zeigt, dass es nur so gelingt, beispielsweise die Bandscheiben flächig abzubilden.

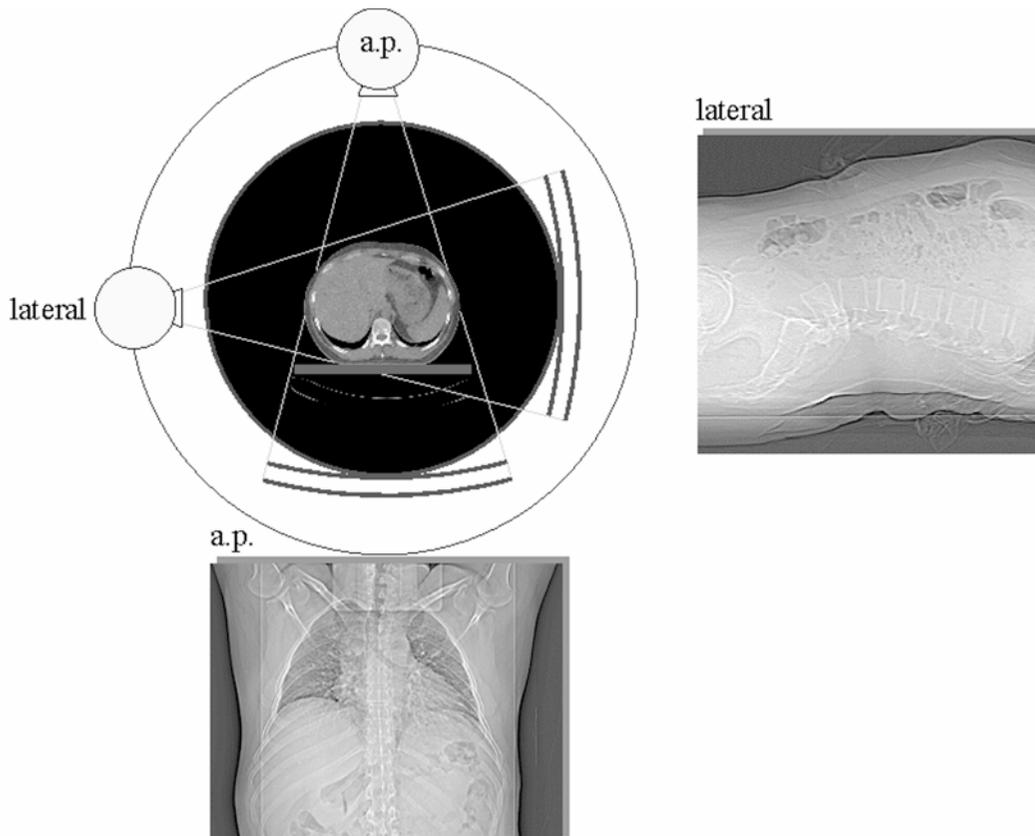


Abb. 9.1: Erstellung einer Übersichtsaufnahme zur Planung der Schichtebenenlage. Bei fester Röhren-Detektor-Position wird der Patiententisch kontinuierlich durch die Abtasteinheit geschoben. Man erhält so Projektionsbilder, wie sie vom Durchleuchtungsröntgen bekannt sind. Typisch sind zwei Geometrien. Lateral: Der Patient wird seitlich durchleuchtet. Anterior-Posterior (a.p.): Der Patient wird von vorne nach hinten durchleuchtet. Oft ist auch die entgegengesetzte Richtung, also die p.a.-Durchleuchtung einstellbar.

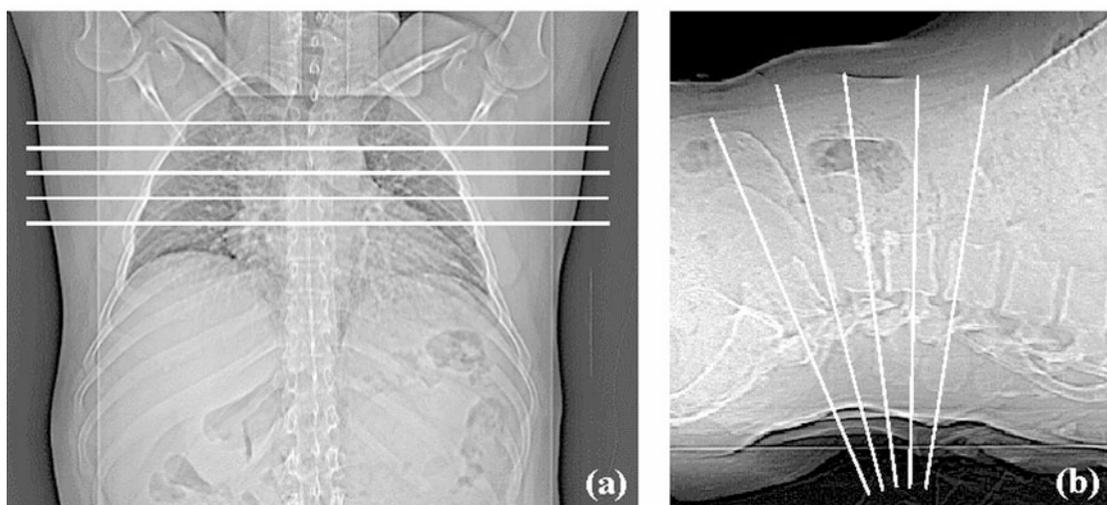


Abb. 9.2: A.p. Übersicht zur Planung der Schichtlage bei Thoraxaufnahmen (a). In dieser Übersichtsaufnahme ist nur die Planung axialer Aufnahmen ohne *Gantry*-Kippung möglich. (b) Für die Aufnahme verschiedener Lendenwirbel empfiehlt sich eine jeweilige Anpassung der Schichtorientierung an die Anatomie durch Programmierung entsprechender *Gantry*-Kippungen (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

Abbildung 9.3 zeigt zwei unterschiedliche Schädelorientierungen. Möchte man coronale Schädelaufnahmen akquirieren, so ist dies durch entsprechende Lagerung des Patienten möglich. In Abbildung 9.3a ist eine laterale Übersichtsaufnahme eines Patienten zu sehen. Der Patient ist auf dem Bauch gelagert und sein Kopf ist weit in den Nacken überstreckt. Diese Überstreckung ist erforderlich, da die Verkippungsmöglichkeit der *Gantry* beschränkt ist. Zwei tomographische Schichten sind jeweils rechts in 9.3a zu sehen. Fragestellungen solcher Aufnahmen sind neben der Ausdehnung einer chronischen Sinusitis häufig auch die Beurteilung von Frakturen. In der Schicht 1 sind Artefakte durch Zahnfüllungen deutlich erkennbar. Die Schicht 2 zeigt einen Anschnitt der vorderen Schädelkalotte mit Spongiosa. In beiden Aufnahmen sind freie Nasennebenhöhlen zu erkennen.

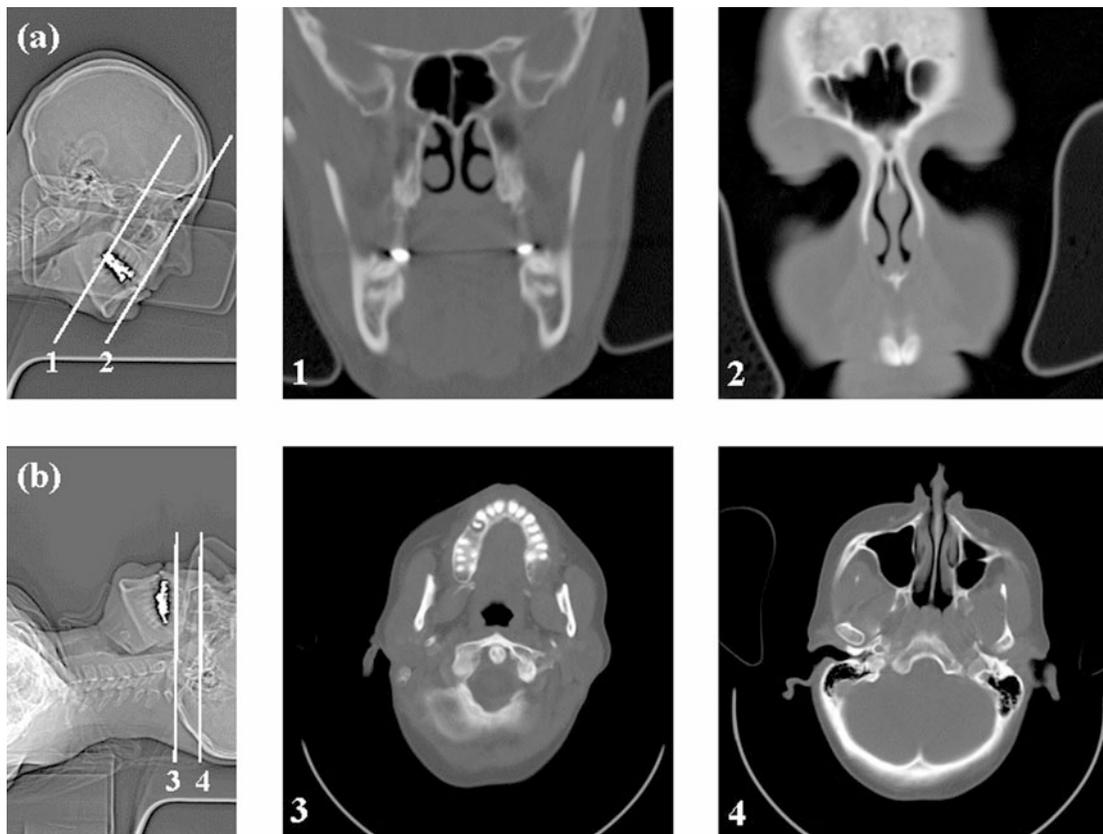


Abb. 9.3: Laterale Übersichtsaufnahmen zur Planung der Schichtlage bei Kopftomogrammen. (a) Aufgrund der begrenzten Kippfähigkeit der *Gantry* muss der Patient für eine coronale Darstellung des Gesichtsschädels in Bauchlage den Kopf in den Nacken überstrecken: Schicht (1) und (2). Im Vergleich dazu axiale Aufnahmen ohne Verkippung der *Gantry*: Schicht (3) und (4). Mit freundlicher Genehmigung der Praxismgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner.

9.2 Datendarstellung

Die Computertomographie muss die Schwächungswerte μ aus Gleichung

$$I(\eta) = I_0 e^{-\mu \eta} \quad (2.15)$$

als Graustufen darstellen. Dabei hat sich ein Vorschlag von Hounsfield durchgesetzt, die Schwächungswerte auf eine dimensionslose Skala zu transformieren und dabei auf Wasser zu beziehen. Die Definition dieser CT-Werte ist durch

$$\text{CT-Wert} = \frac{\mu - \mu_{\text{Wasser}}}{\mu_{\text{Wasser}}} 1000 \quad (9.1)$$

gegeben. Die Einheit dieser Werte wird zu Ehren *Hounsfields*

$$[\text{CT-Wert}] = \text{HU} \quad (9.2)$$

Hounsfieldeinheit genannt. In dieser Skala erhält Luft den CT-Wert -1000 HU und Wasser den CT-Wert 0 HU. Die Skala ist im Prinzip nach oben hin offen, praktisch endet sie aber bei etwa 3000 HU. Der Wertebereich von insgesamt 4000 HU ist durch Bilder mit einer Graustufentiefe von 12 Bit gut zu erfassen. Diese Skalierung ist willkürlich hat aber praktische Konsequenzen. Da sich die Schwächungswerte fast aller Organe – ausgenommen Knochen – nur wenig von Wasser unterscheiden, ist durch Gleichung (9.1) eine Abweichung in Promille von dem Schwächungswert von Wasser gegeben.

Radiologen sind es gewohnt, die CT-Werte als absolute Werte zu sehen, die Organen eindeutig zuzuordnen sind. Abweichungen dieser CT-Werte für bestimmte Organe stellen Pathologien dar. In Kapitel 2.2 wurde schon auf die Abhängigkeit der Röntgenschwächung von der Wellenlänge der Strahlung hingewiesen und in Kapitel 8.5.2 wurden die dadurch möglichen Artefakte besprochen. Dieses grundsätzliche Problem, das sich für alle, in der diagnostischen Bildgebung verwendeten Tomographen herausstellt, ist eine Konsequenz der Verwendung polychromatischer Röntgenstrahlung. Beim Durchlaufen des Körpers verändert sich die spektrale Verteilung der Strahlung, so dass eine eindeutige Zuordnung von Schwächungswerten eigentlich nicht möglich ist.

Dennoch ist die Sicht der Radiologen weitestgehend gerechtfertigt, da sich die meisten Organe strahlenphysikalisch wie Wasser verhalten, so dass durch eine Kalibrationsmessung, die mit Wasser durchgeführt wird, für diese Gruppe eine Aufhärtungskorrektur möglich ist. Für die CT-Werte von Weichteilen und Körperflüssigkeiten gilt dann der Zusammenhang

$$\text{CT-Wert} = \frac{\rho - \rho_{\text{Wasser}}}{\rho_{\text{Wasser}}} 1000 \quad (9.3)$$

mit der Dichte ρ . In Abbildung 9.4 ist daher der untere Teil (b) besonders interessant, da hier einzelne Organe und Organveränderungen über Gleichung (9.3) gut zu unterscheiden sind. Für Knochen, Kontrastmittel, Metallimplantate und ähnliche Stoffe gilt der Zusammenhang (9.3) nicht, sondern hängt von dem Spektrum und der Aufhärtungskorrektur ab [Mor95]. Dennoch kann man, so wie in Abbildung 9.4 geschehen, die gesamte Hounsfieldskala in diagnostisch relevante Bereiche unterteilen. In Abbildung 9.4a ist das Histogramm der relativen Häufigkeiten der CT-Werte für ein Abdomenschichtbild gegeben. Deutlich sichtbar sind die Häufungen bei Luft, der Schaumstoff-Patientenaufgabe sowie bei Fett und den Organen. Wendet man sich dem Ausschnitt für die so genannten parenchymatösen Organe in Abbildung 9.4b zu, dann sieht man, dass sich viele Organe in sich überlappenden CT-Wertebereichen abbilden. Das macht die Diagnostik nicht leicht, so dass in der klinischen Praxis auch Texturen von Organen wichtig sind.

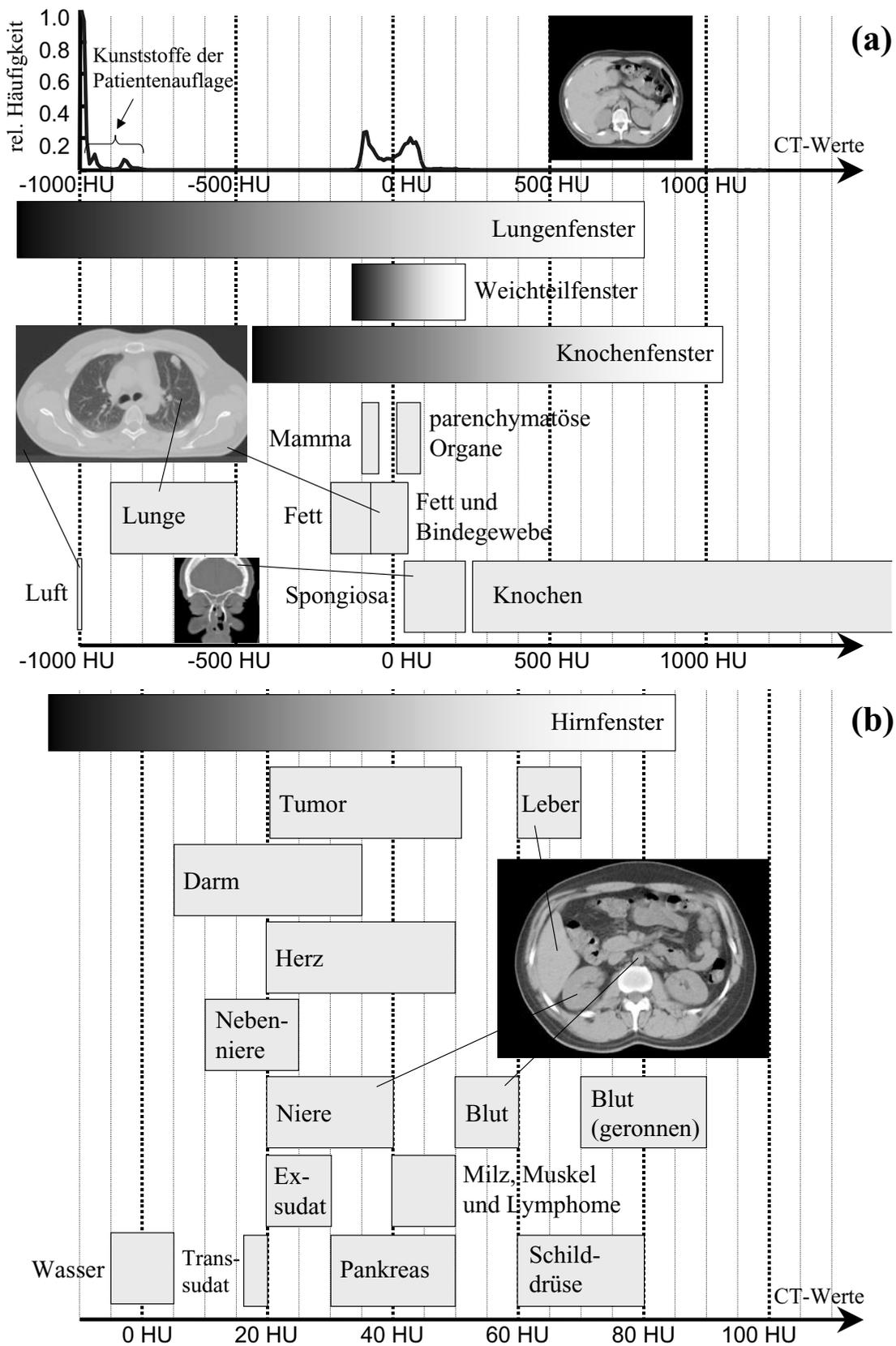


Abb. 9.4: Schwächungswerte (a) aller Gewebe und (b) der Weichteilgewebe in Hounsfieldeinheiten. Die Wertebereiche sind aus E. Krestel und M. Hofer [Kre90,Hof00] zusammengestellt.

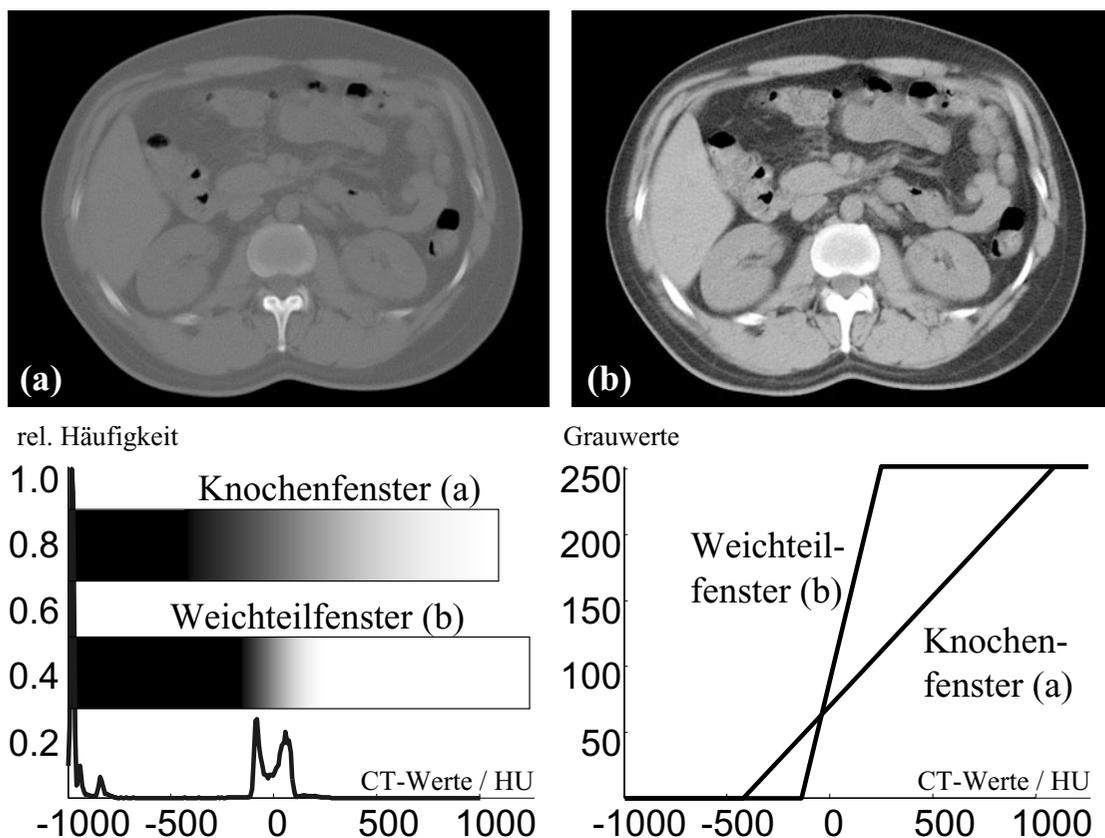


Abb. 9.5: Prinzip der Fensterung: Die Hounsfieldwerte (HU), die im Bereich von -1000 HU bis 3000 HU liegen (siehe relative Häufigkeit der Werte für die Abdomenschicht – unten links), sind in ihrer vollen Breite vom menschlichen Auge nicht unterscheidbar. Daher müssen die anatomisch jeweils interessanten Hounsfieldbereiche auf einen unterscheidbaren Grauwertebereich abgebildet werden. Unten rechts ist die Kennlinie für zwei anatomische Fenster gegeben. Oben sieht man das Ergebnis des Knochen- (a: $WL = +300$ HU, $WW = 1500$ HU) und Weichteilfensters (b: $WL = +50$ HU, $WW = 350$ HU). Mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner.

Für das menschliche Auge ist der gesamte Dynamikbereich von -1000 HU bis 3000 HU in 4000 Stufen nicht auflösbar. Deswegen werden auf den Sichtgeräten zum Beispiel nur Grauwertdiskretisierungen in 256 Stufen eingestellt. Tatsächlich kann der Mensch je nach Helligkeit im Auswerterraum zwischen 20 und 50 verschiedene Grauwerte unterscheiden. Will man Unterschiede zwischen Organen erkennen, die in Bezug auf ihre Abschwächung sehr ähnlichen sind, so muss die Hounsfieldskala auf den wahrnehmbaren Grauwertebereich geeignet abgebildet werden. Hierzu verwendet man die stückweise gerade Funktion

$$G = 255 \cdot \begin{cases} 0 & \text{für CT-Werte} \leq WL - \frac{WW}{2} \\ WW^{-1} \left(\text{CT-Wert} - WL + \frac{WW}{2} \right) & \\ 1 & \text{für CT-Werte} \geq WL + \frac{WW}{2} \end{cases} \quad (9.4)$$

Dabei sind durch WW die Fensterbreite (*window width*) und durch WL die Fenstermitte (*window level*) gegeben.

Abbildung 9.5 zeigt die jeweilige stückweise lineare Funktion für ein Knochenfenster ($WL = +300$ HU, $WW = 1500$ HU) und ein Weichteilfenster ($WL = +50$ HU, $WW = 350$ HU) sowie die Auswirkungen auf die Darstellung für ein abdominales Tomogramm. Nur im Knochenfenster sind Dichteunterschiede im Wirbelfortsatz zu erkennen, jedoch ist aufgrund der großen Breite des Fensters keine Differenzierung des Weichteilgewebes möglich. Beim Weichteilfenster sind Organe wie Leber und Nieren sehr gut zu unterscheiden, allerdings werden in diesem relativ schmalen Fenster alle CT-Werte oberhalb von $+225$ HU undifferenziert weiß dargestellt.

Abbildung 9.6 zeigt die Ergebnisse verschiedener Fensterungen am Beispiel einer Thoraxaufnahme. Wieder ist auch die relative Häufigkeit der CT-Werte dargestellt. Bei diesen Aufnahmen hat man die besondere Schwierigkeit, dass Lungengewebe, Weichteile und Knochen diagnostisch interessant sein können. Für diese Klassifikation der Bereiche haben sich drei Fenster als praktisch erwiesen. Zu den oben schon genannten Weichteil- und Knochenfenstern kommt hier das so genannte Lungen- bzw. Pleurafenster ($WL = -200$ HU, $WW = 2000$ HU) hinzu, in dem Lungengewebe geringerer Dichte ebenfalls differenzierbar wird.

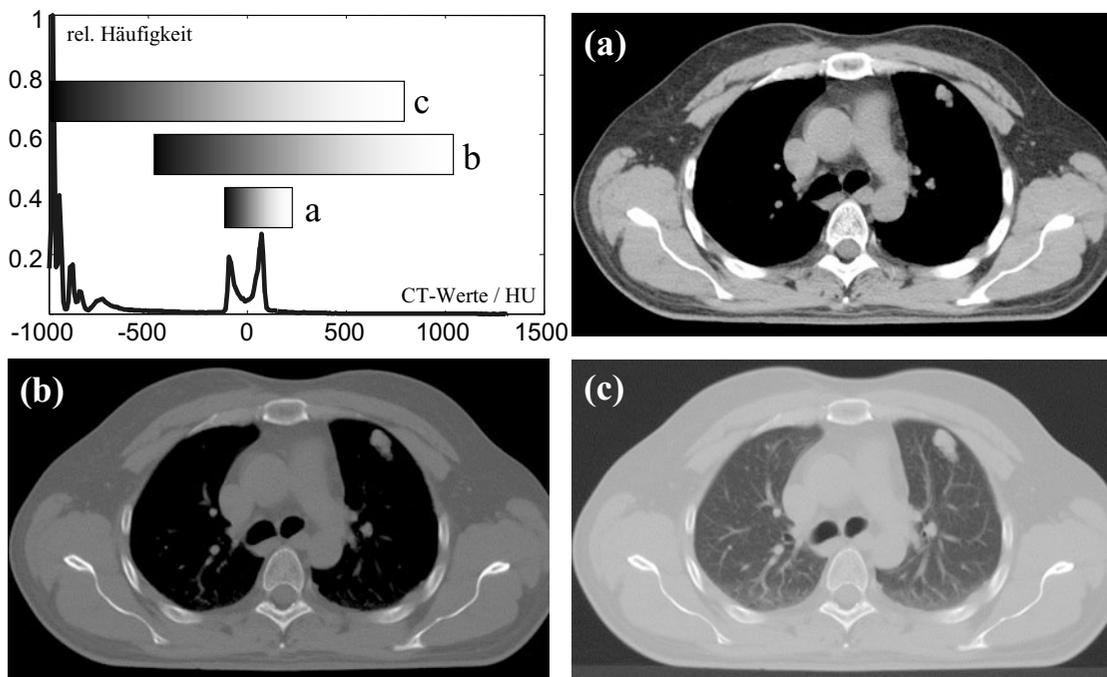


Abb. 9.6: Vergleich der Gewebedifferenzierbarkeit bei Darstellung im Weichteilfenster (a: $WL = +50$ HU, $WW = 350$ HU), Knochenfenster (b: $WL = +300$ HU, $WW = 1500$ HU) und Lungen- bzw. Pleurafenster (c: $WL = -200$ HU, $WW = 2000$ HU). Mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner.

Um die geringen Dichteunterschiede beim Nervengewebe des Gehirns darzustellen, muss ein sehr steiles Fenster angepasst werden. In Abbildung 9.7 a/c ist dies beispielhaft demonstriert.

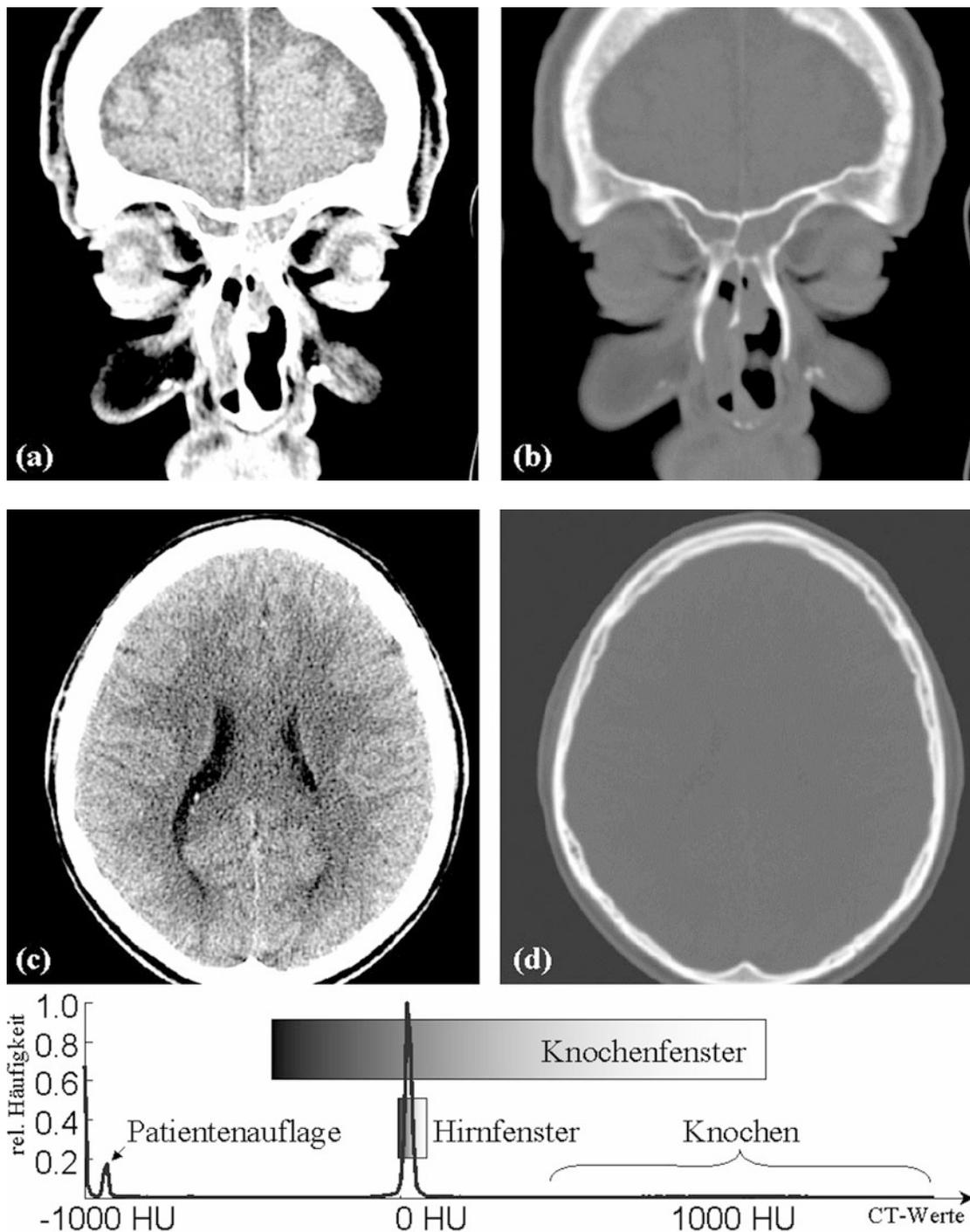


Abb. 9.7: Gewebedifferenzierbarkeit bei einer Darstellung im Hirnfenster (a: $WL = +35$ HU, $WW = 100$ HU) und im Knochenfenster (b: $WL = +300$ HU, $WW = 1500$ HU). Anhand der Häufigkeitsverteilung ist erkennbar, wie das Hirnfenster gewählt wurde (mit freundlicher Genehmigung der Praxisgemeinschaft Dr. Dr. J. Ruhlmann und Partner).

Bei einem mittleren CT-Wert von etwa $WL = +35$ HU wird typischerweise eine Gesamtfensterbreite von $WW = 80 - 100$ HU gewählt [Hof00]. Abbildung 9.7 zeigt wieder auch die relative Häufigkeitsverteilung der CT-Werte, in der die Häufung für das

Nervengewebe sehr gut zu sehen ist. Im daran angepassten Hirnfenster sind in der Regel sogar Dichteunterschiede von weißer und grauer Gehirnsubstanz darstellbar. Möchte man gleichzeitig die Schädelkalotte beurteilen, so ist dies nicht möglich, da alle CT-Werte größer als 75 – 85 HU wieder weiß abgebildet werden. Hierzu muss dann das Knochenfenster gewählt werden, damit die signifikant höheren CT-Werte differenzierbar werden. In Abbildung 9.7 b/d ist im Knochenfenster auch die Spongiosastruktur des Schädelknochens zu erkennen.

10 Literatur

- [Abr70] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, Washington, 1970.
- [And00] B. I. Andia, *Nonlinear Backprojection*, Dissertation, Dept. of Electrical Engineering, University of Notre Dame, Indiana, 2000.
- [Azi87] S. A. Azizi, *Entwurf und Realisierung digitaler Filter*, Oldenbourg-Verlag, München, 1987.
- [Bar81] H. H. Barrett and W. Swindell, *Radiological Imaging: The Theory of Image Formation, Detection, and Processing*, Academic Press, San Diego, 1981.
- [Bla98] C. Blanck, *Understanding Helical Scanning*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1998.
- [Blu70] L. I. Bluestein, *A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform*, IEEE Trans. Audio Electroacoust. **AU-18** (1970) 451.
- [Bou96] C. A. Bouman and K. Sauer, *A Unified Approach to Statistical Tomography Using Coordinate Descent Optimization*, IEEE Trans. Image Processing **5** (1996) 480.
- [Bra65] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [Bro79] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Teubner-Verlag, Leipzig, 1979.
- [Bru02] G. Brunst, *High Resolution Digital Flat Panel Detectors for X-Ray Applications – Basics*, in: *Medical Imaging*, W. Niederlag and H. U. Lemke (Eds.), Health Academy **02** (2002) 63.
- [Bus00] S. C. Bushong, *Computed Tomography*, Essentials Of Medical Imaging Series, McGraw-Hill, New York, 2000.
- [Bus02] J. T. Bushberg, J. A. Seibert, E. M. Leidholdt and J. M. Boone, *The Essential Physics of Medical Imaging*, Lippincott, Williams and Wilkins Philadelphia, 2002.
- [Cla94] R. Clack and M. Defrise, *Cone-Beam Reconstruction by the use of Radon Transform Intermediate Functions*, J. Opt. Soc. Am. A **11** (1994) 580.
- [Cle03] N. M. De Clerck, D. van Dyck and A. A. Postnov, *Non-Invasive High-Resolution μ CT of the Inner Structure of Living Animals*, Microscopy and Analysis **1** (2003) 13.
- [Cor63] A. M. Cormack, *Representation of a Function by its Line Integrals with some Radiological Applications I*, J. Appl. Phys. **34** (1963) 2722.
- [Cor64] A. M. Cormack, *Representation of a Function by its Line Integrals with some Radiological Applications II*, J. Appl. Phys. **35** (1964) 195.
- [Cor82] A. M. Cormack, *Computed Tomography: Some History and Recent Developments*, Proc. of Symposia in Applied Mathematics **27** (1982) 35.
- [Cur90] T. S. Curry III, J. E. Dowdey and R. C. Murry, *Christensen's Physics of Diagnostic Radiology*, Lippincott, Williams and Wilkins, Philadelphia, 1990.
- [Dea83] S. R. Deans, *The Radon Transform and some of its Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [Def94] M. Defrise and R. Clack, *A Cone-Beam Reconstruction Algorithm Using Shift-Variant Filtering and Cone-Beam Backprojektion*, IEEE Trans. Med. Imag. **13** (1994) 186.
- [Dem77] A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin, *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society **B39** (1977) 1.

- [Dem00] W. Demtröder, *Experimentalphysik 3, Atome, Moleküle und Festkörper*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Dös01] O. Dössel, *Bildgebende Verfahren in der Medizin*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Dov01] E. L. Dove, *Notes on Computerized Tomography*, Script **51**:060 Bioimaging Fundamentals, The University of Iowa, College of Engineering, 2001.
- [Edh77] P. R. Edholm, *Tomogram Reconstruction Using an Opticophotographic Method*, Acta Radiologica **18** (1977) 126.
- [Eps03] C. L. Epstein, *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*, Pearson Education, Upper Saddle River, 2003.
- [Fel84] L. A. Feldkamp, L. C. Davis and J. W. Kress, *Practical Cone-Beam Algorithm*, J. Opt. Soc. Am. **A6** (1984) 612.
- [Fes95] J. A. Fessler, *Hybride Poisson/Polynomial Objective Functions for Tomographic Image Reconstruction from Transmission Scans*, IEEE Trans. Image Processing **4** (1995) 1439.
- [Fes96] J. A. Fessler, *Mean and Variance of Implicitly Defined Biased Estimators (Such as Penalized Maximum Likelihood)*, IEEE Trans. Image Processing **5** (1996) 1346.
- [Fet86] A. Fettweiss, *Grundlagen der Theorie Nachrichtentechnischer Systeme*, Studienverlag Dr. N. Brockmeyer, Bochum, 1986.
- [Fic82] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- [Gay98] S. B. Gay and A. B. Matthews, *Ten Reasons why Spiral CT is Worth a Million Bucks*, Diag. Imag. (1998) 111.
- [Gra90] P. Grangeat, *Mathematical Framework of Cone-Beam 3D Reconstruction via the First Derivative of the Radon Transform*, in: G. T. Herman, A. K. Louis and F. Natterer (Eds.), *Mathematical Methods in Tomography*, (Springer-Verlag, Berlin, 1990) 66.
- [Gra97] P. Grangeat, *Indirect Cone-Beam Three-Dimensional Image Reconstruction*, in: C. Roux and J.-L. Coatrieux (Eds.), *Contemporary Perspectives in Three-Dimensional Biomedical Imaging*, IOS Press, 1997.
- [Gra00] M. Grass, Th. Köhler and R. Proksa, *3D Cone-Beam CT Reconstruction for Circular Trajectories*, Phys. Med. Biol. **45** (2000) 329.
- [Gre90] P. J. Green, *Bayesian Reconstruction from Emission Tomography Data Using a Modified EM Algorithm*, IEEE Trans. Medical Imaging **9** (1990) 84.
- [Gro34] G. Grossmann, *Procédé et dispositif pour la représentation radiographique des sections des corps*, Französisches Patent (1934) Pat. Nr. 771887.
- [Haj01] J. V. Hajnal, D. L. G. Hill and D. J. Hawkes, *Medical Image Registration*, CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [Har78] F. J. Harris, *On the use of Window Functions for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proc. IEEE **66** (1978) 51.
- [Här99] W. Härer, G. Lauritsch, T. Mertelmeier und K. Wiesent, *Rekonstruktive Röntgenbildgebung*, Physikalische Blätter **55** (1999) 37.
- [Här03] W. Härer, G. Lauritsch und T. Mertelmeier, *Tomographie – Prinzip und Potential der Schichtbildverfahren*, in: Th. Schmidt (Hrsg.) *Handbuch diagnostische Radiologie*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Heb89] T. Hebert and R. Leahy, *A Generalized EM Algorithm for 3D Bayesian Reconstruction from Poisson Data Using Gibbs Priors*, IEEE Trans. Medical Imaging **8** (1989) 194.
- [Hei98] J. Heinzerling, *Röntgenstrahler*, in: K. Ewen (Hrsg.), *Moderne Bildgebung*, Thieme Verlag, Stuttgart, 1998, 77.
- [Hel99] S. Helgason, *The Radon Transform*, Birkhäuser Verlag, 2nd Edition, Boston, 1999.

-
- [Her80] G. T. Herman, *Image reconstruction from projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, 1980.
- [Heu92] H. Heuser, *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1992.
- [Hof00] M. Hofer, *CT-Kursbuch*, Matthias Hofer Verlag, Düsseldorf, 2000.
- [Hor78] B. K. P. Horn, *Density Reconstruction Using Arbitrary Ray-Sampling Schemes*, Proc. of the IEEE **66** (1978) 551.
- [Hor79] B. K. P. Horn, *Fan-beam Reconstruction Methods*, Proc. of the IEEE **67** (1979) 1616.
- [Hou73] G. N. Hounsfield, *Computerized Transverse Axial Scanning (Tomography): Part I. Description of System*, Brit. J. Radiol. **46** (1973) 1016.
- [Hue77] R. H. Huesman, G. T. Gullberg, W. L. Greenberg and T. F. Budinger, *Users Manual: Donner Algorithms for Reconstruction Tomography*, Berkeley Laboratory, University of California (1977), http://cfi.lbl.gov/cfi_software.html.
- [Hud95] W. Huda and R. Slone, *Review of Radiologic Physics*, Lippincott, Williams and Wilkins, Philadelphia, 1995.
- [Ing99] M. Ingerhed, *Fast Backprojection for Computed Tomography; Implementation and Evaluation*, Linköping Studies in Science and Technology 759, Department of Electrical Engineering, Linköpings Universitet, 1999.
- [Jac96] C. Jacobson, *Fourier Methods in 3D Reconstruction from Cone-Beam Data*, Dissertation, Linköping Studies in Science and Technology 427, Institute of Technology, Linköpings Universitet, 1996.
- [Kac00] M. Kachelrieß, S. Schaller and W. A. Kalender, *Advanced Single-Slice Rebinning in Cone-Beam Spiral CT*, Med. Phys. **19** (2000) 864.
- [Kac01] M. Kachelrieß, T. Fuchs, S. Schaller and W. A. Kalender, *Advanced Single-Slice Rebinning for Tilted Spiral Cone-Beam CT*, Med. Phys. **28** (2001) 1033.
- [Kac37] S. Kaczmarz, *Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen*, Bull. Acad. Polon. Sci. Lett. **A35** (1937) 355.
- [Kak88] A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, Classics in Applied Mathematics 33, siam, 2001 and IEEE Press, New York, 1988.
- [Kal89] W. A. Kalender, W. Seissler and P. Vock, *Single-Breath-Hold Spiral Volumetric CT by Continuouspatient Translation and Scanner Rotation*, Radiology **173** (1989) 414.
- [Kal00] W. A. Kalender, *Computertomographie*, Publicis MCD Verlag, München 2000.
- [Kal03] W. A. Kalender, *Der Einsatz von Flachbilddetektoren für die CT-Bildgebung*, Der Radiologe **43** (2003) 379.
- [Kam98] K.-F. Kamm, *Grundlagen der Röntgenabbildung*, in: K. Ewen (Hrsg.), *Moderne Bildgebung*, Thieme Verlag, Stuttgart, 1998, 45.
- [Kat01] A. Katsevich, *Exact FBP-type Inversion Algorithm for Spiral CT*, 3D-2001, Proceedings of the the sixth int. meeting on fully three-dimensional image reconstruction in radiology and nuclear medicine, Asilomar, Pacific Grove, CA (2001) 3.
- [Kie98] U. Kiencke, *Signale und Systeme*, Oldenbourg Verlag, München, 1998.
- [Kli01] B. Klingen, *Fouriertransformation für Ingenieur- und Naturwissenschaften*, Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [Koe00] T. Köhler, R. Proksa and M. Grass, *A Fast and Efficient Method for Sequential Cone-Beam Tomography*, IEEE Medical Imaging (2000).
- [Koe02] T. Köhler, R. Proksa, C. Bontus, M. Grass and J. Timmer, *Artifact Analysis of Approximate Helical Cone-Beam CT Reconstruction Algorithms*, Med. Phys. **29** (2002) 51.

- [Kop00] A. F. Kopp, K. Klingenbeck-Regn, M. Heuschmid, A. Küttner, B. Ohnesorge, T. Flohr, S. Schaller and C. D. Claussen, *Multislice Computed Tomography: Basic Principles and Clinical Applications*, Electromedica **68** (2000) 94.
- [Kre90] E. Krestel (Hrsg.), *Imaging Systems for Medical Diagnostics*, Siemens Aktiengesellschaft, Berlin 1990.
- [Kud94] H. Kudo and T. Saito, *Derivation and Implementation of a Cone-Beam Reconstruction Algorithm for Nonplanar Orbits*, IEEE Trans. Med. Imag. **13** (1994) 196.
- [Kud98] H. Kudo, F. Noo and M. Defrise, *Cone-Beam Filtered-Backprojektions Algorithm for Truncated Helical Data*, Phys. Med. Biol. **43** (1998) 2885.
- [Lan87] K. Lange, M. Bahn and R. Little, *A Theoretical Study of some Maximum Likelihood Algorithms for Emission and Transmission Tomography*, IEEE Trans. Med. Imaging **MI-6** (1987) 106.
- [Lan95] K. Lange and J. A. Fessler, *Globally Convergent Algorithm for Maximum a Posteriori Transmission Tomography*, IEEE Trans. Image Processing **4** (1995) 1430.
- [Lau99] T. Laubenberger und J. Laubenberger, *Technik der medizinischen Radiologie. Diagnostik, Strahlentherapie, Strahlenschutz*, Deutscher Ärzte-Verlag, Köln, 1999.
- [Lee02] S. W. Lee, G. Cho and G. Wang, *Artifacts Associated with Implementation of the Grangeat Formula*, Med. Phys. **29** (2002) 2871.
- [Leh97] T. Lehmann, W. Oberschelp, E. Pelikan und R. Repges, *Bildverarbeitung für die Medizin*, Springer, Berlin, 1997.
- [Lin99] W.-T. Lin, *A Computational-Efficient Cone-Beam CT Reconstruction Algorithm Using Circle-and-Line Orbit*, SPIE **3659** (1999) 933.
- [Los95] N. Lossau, *Röntgen. Eine Entdeckung verändert unser Leben*, vgs Verlagsgesellschaft, Köln, 1995.
- [Lük99] H. D. Lüke, *Signalübertragung*, Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [Mag93] M. Magnusson (Seger), *Linogram and Other Direct Fourier Methods for Tomography Reconstruction*, Dissertation, Linköping Studies in Science and Technology 320, Institute of Technology, Linköpings Universitet, 1993.
- [Mes81] A. Messiah, *Quantenmechanik*, De Gruyter, Berlin, 1981.
- [Mor95] H. Morneburg (Hrsg.), *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik*, Publicis MCD Verlag, München, 1995.
- [Mül98] K. Müller, *Fast and Accurate Three-Dimensional Reconstruction from Cone-Beam Projection Data Using Algebraic Methods*, Dissertation, Dept. of Computer and Information Science, Ohio State University, 1998.
- [Nat99] F. Natterer, *Numerical Methods in Tomography*, Acta Numerica (1999).
- [Nat01] F. Natterer and F. Wübbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, SIAM Monographs on Mathematical Modelling and Computing, Philadelphia, 2001.
- [Nat_b01] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Classics in Applied Mathematics 32, siam, 2001 and IEEE Press, New York, 2001.
- [Nei98] U. Neitzel, *Grundlagen der digitalen Bildgebung*, in: K. Ewen (Hrsg.), *Moderne Bildgebung*, Thieme Verlag, Stuttgart, 1998, 63.
- [Nil97] S. Nilsson, *Application of Fast Backprojection Techniques for some Inverse Problems of Integral Geometry*, Dissertation, Linköping Studies in Science and Technology, Thesis No. 499, Department of Mathematics, Linköpings Universitet, 1999
- [Opp99] A. V. Oppenheim und R. W. Schafer, *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, Oldenbourg Verlag, München 1999.

-
- [Orl75] S. S. Orlov, *Theorie of Threedimensional Reconstruction. I. Conditions for a Complete set of Projections*, Sov. Phys. Crystallogr. **20** (1975) 312.
- [Pap00] L. Papula, *Mathematische Formelsammlung*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 2000.
- [Pap98] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 1, Vieweg-Verlag Braunschweig, 1998.
- [Par61] E. Parzen, *Mathematical Considerations in the Estimation of Spectra*, Technometrics **3** (1961) 167.
- [Pfo02] A. H. Pfoh, *Volume Computer Tomography (VCT) – A New Diagnostic Imaging Technique on the Basis of High-Resolution Flat-Panel Detectors*, in: *Medical Imaging*, W. Niederlag and H. U. Lemke (Eds.), Health Academy **02** (2002) 7.
- [Pol02] M. J. Pol, J. V. Rogers II, Y. Kobayashi and L. L. Jacobs, *Computed Tomography of an Anolis Lizard in Dominican Amber: Systematic, Taphonomic, Biogeographic, and Evolutionary Implications*, Palaeontologia Electronica **5** (2000) 13.
- [Pre90] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Pro00] R. Proksa, T. Köhler, M. Grass and J. Timmer, *The n-Pi-Method for Helical Cone-Beam CT*, IEEE Trans. Med. Imag. **19** (2000) 848.
- [Rad17] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte der mathematisch-physikalischen Kl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 59, Leipzig, 1917, 262.
- [Ram96] A. G. Ramm and A. I. Katsevich, *The Radon Transform and Local Tomography*, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [Ram71] G. N. Ramachandran and A. V. Lakshminarayanan, *Three-Dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs*, Proc. Acad. Sci. USA **68** (1971) 2236.
- [Rom95] L. E. Romans, *Introduction to Computed Tomography*, Lippincott, Williams and Wilkins, Philadelphia, 1995.
- [Ros82] A. Rosenfeld and A. C. Kak, *Digital Picture Processing*, Academic Press, New York, 1982.
- [Ruh98] J. Ruhlmann, P. Oehr und H. J. Biersack, *PET in der Onkologie - Grundlagen und klinische Anwendung*, (Springer Verlag, Heidelberg, 1998).
- [Sas99] A. Sassov, *Desktop X-ray Micro-CT*, in: Proc. of the DGZiP BB67-CD, Computerized Tomography for Industrial Applications and Image Processing in Radiology (Berlin, 1999) 165.
- [Sas02a] A. Sosov, *Desktop X-ray Micro-CT Instruments*, Proc. of SPIE **4503** (2002) 282.
- [Sas02b] A. Sosov, *Comparison of Fan-Beam, Cone-Beam and Spiral Scan Reconstruction in X-Ray Micro-CT*, Proc. of SPIE **4503** (2002) 124.
- [Sau93] K. Sauer and C. Bouman, *A Local Update Strategy for Iterative Reconstructions from Projections*, IEEE Trans. Signal Processing **41** (1993) 533.
- [Sch98] S. Schaller, *Practical Image Reconstruction for Cone-Beam Computed Tomography*, Dissertation an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1998.
- [Sch02] W. Schlegel und J. Bille (Hrsg.), *Medizinische Physik*, Band **2**, Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [Sch01] N. Schramm, *Entwicklung eines hochauflösenden Einzelphotonen-Tomographen für kleine Objekte*, Dissertation, Berichte des Forschungszentrums Jülich, 3841, 2001.

- [See01] E. Seeram, *Computed Tomography*, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 2001.
- [She74] L. A. Shepp and B. F. Logan, *The Fourier Reconstruction of a Head Section*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **NS-21** (1974) 21.
- [She82] L. A. Shepp and Y. Vardi, *Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography*, IEEE Trans. Medical Imaging **1** (1982) 113.
- [Ste99] S. D. Stearns und D. R. Hush, *Digitale Verarbeitung analoger Signale*, Oldenbourg-Verlag, München, 1999.
- [Ste00] G. M. Stevens, *Volumetric Tomographic Imaging*, Dissertation, Dept. of Applied Physics, University of Stanford, 2000.
- [Sti01] K. Stierstorfer, T. Flohr and H. Bruder, *Segmented Multiple Plane Reconstruction – A Novel Approximate Reconstruction Scheme for Multislice Spiral CT*, (2001) preprint.
- [Tam95] K. C. Tam, *Three-Dimensional Computerized Tomography Scanning Method and System for Large Objects with Small Area Detectors*, US Patent 5,390,112.
- [Tho03] D. Thomsen, K. Klein, M. Oehler, S. Pfinninger, F. Reich und Th. M. Buzug, *Computertomographie in der Archäologie*, in: Physikalische Methoden der Laser- und Medizintechnik, VDI Fortschritt-Bericht, Reihe 17: Biotechnik/Medizintechnik, Nr. 231, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003, 156.
- [Tof96] P. Toft, *The Radon Transform. Theory and Implementation*, Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematical Modelling, Section for Digital Signal Processing, Technical University of Denmark, 1996.
- [Tur99] H. Turbell, *Three-Dimensional Image Reconstruction in Circular and Helical Computed Tomography*, Linköping Studies in Science and Technology, Thesis No. 760, Institute of Technology, Linköpings Universitet, 1999.
- [Tur01] H. Turbell, *Cone-Beam Reconstruction using Filtered Backprojection*, Dissertation, Linköping Studies in Science and Technology 672, Institute of Technology, Linköpings Universitet, 2002.
- [Tuy83] H. Tuy, *An Inversion Formula for Cone-Beam Reconstruction*, SIAM Journal of Applied Mathematics **43** (1983) 546.
- [Wan95] G. Wang, T. H. Lin and P. C. Cheng, *Error Analysis on a Generalized Feldkamp's Cone-Beam Computed Tomography Algorithm*, Scanning **17** (1995) 361.
- [Wan98] G. Wang, S. Zhao and P.-C. Cheng, *Exact and Approximate Cone-Beam X-Ray Microscopy*, in: P. C. Cheng, P. P. Huang, J. L. Wu, G. Wang and H. G. Kim (Eds.) *Modern Microscopies (I) – Instrumentation and Image Processing*; World Scientific, Singapore, 1998.
- [Wei00] G. Weisser, *Technische Grundlagen der EBCT*, in: J. Gaa, K.-J. Lehmann und M. Georgi (Eds.), *MR-Angiographie und Elektronenstrahl-CT-Angiographie*, Thieme-Verlag, Stuttgart, 2000, 145.
- [Wer00] M. Werner, *Signale und Systeme*, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 2000.
- [Wil99] J. E. Wilting, *Technical Aspects of Spiral CT*, Medica Mundi **43** (1999) 34.
- [Yan02] X. Yang and B. K. P. Horn, *Cone-Beam Reconstruction – Present and Future*, preprint 2002 preprint.
- [Zyl96] W. Zylka and H. A. Wischmann, *On Geometric Distortions in CT Images*, Proc. 18th Int. Conference IEEE Eng. Med. & Biol. Society EMBS, Amsterdam, 1996.

11 Index

δ -Distribution	69	biograph	59
1. Generation	44	Blackman-Fenster	193
180°LI	260	Bluestein-Identität	106
2. Generation	48	Bracewell, R. N.	3, 73
3. Generation	49	Bremsspektrum	12
360°LI	259	Brennfleckbahn	14
4. Generation	51, 52	Brennfleckgeometrie	15
A		C	
a priori Modell	183	Cadmium-Wolframat	26
Abel-Transformation	91, 151	Cäsiumjodid	26, 32
Absorptionskanten	22	CAT	44
Absorptionskoeffizient	17	Central-Section-Theorem	273, 275, 277, 278, 279, 294, 299
Absorptionspektrum	21	charakteristisches Röntgenspektrum	13
Absorptionswahrscheinlichkeit	37	Chirp-z-Transformation	105, 127
Abtastartefakt	372	Clack, R.	300
Abtasttheorem	92, 93	Clique	184
Abtastung	72, 92, 114	Comptoneffekt	18
adaptiver Arraydetektor	28	Computerized Axial Tomography	44
adjungierte Radontransformation	158	Computerized Transaxial Tomography	44
Afterglow	26	Cormack, A. M.	4
algebraische Rekonstruktionsmethode	153, 162	Cormack-Transformation	148
Aliasing	92	Cotangens-Kern	236
Amplitudendichtespektrum	98	Coulombsches Gesetz	134
amplitudenstabil	66	Covarianzmatrix	185
anisotrope Voxel	252	CsI-Szintillator	30
Anodenstrom	12	cut-off Frequenz	356
Anodenteller	15	D	
anterior-posterior	401	Davis, L. C.	315
Antikathode	12	Defrise, M.	300
a-priori-Wissen	183	Delta-„Funktion“	62
Argumentskalierung	70	Designmatrix	156, 159
ART	162, 168	detective quantum efficiency	364
Artefakte	365	Detektion von Röntgenstrahlung	25
asymmetrischer Detektorarray	246	Detektionskennlinie	365
Aufhärtung	22	Detektionswahrscheinlichkeit	36
Aufhärtungsartefakt	368	Detektorfächer	51
Autokorrelationsfunktion	98	Detektorflächennormale	273
B		Detektorrauschen	393
Bandbegrenzung	190	Detektorring	51
Bandüberlappung	92	Detektorviertelversatz	241
Bayes-Schätzverfahren	183	DFT	101
Beam Hardening	23	Digital Axial Tomography	44
Bernoullidetektor	35	digitale Verwischungstomographie	42
Bernoulliverteilung	34	Dipolstrahlung	15
Beschleunigungsspannung	11	Dirackamm	72
Besselfunktion	85, 89	Diracsche Delta-„Funktion“	63
Bewegungsartefakt	370, 381	Diracstoß	69
BIBO-Systeme	66	diskrete Fouriertransformation	101
Bildkontrast	350	diskretisierte Filterkerne	200
Bildübertragung	351	Dosis	364, 398
Binominalverteilung	34		

DQE	364	Ganzkörperscanner	50
Dreiecks-Funktion	62	Gasdetektoren	25
Dual-Energy-Verfahren	370	Gauß-Elimination	153
Dünnschichtbeschichtungstechnik	29	Gauß-Funktion	62
Dynamikkennlinie	31	Gauß-MRF	184
E		gefilterte Rückprojektion	134
EBCT	52	Geiger-Müller-Zählrohr	25
Edholm, P. R.	47, 61	generalisierte Radontransformation	275
effektive Quantenausbeute	364	generalisiertes Gauß-MRF	184
Effizienz der Detektoren	364	gewichtete kleinste Quadrate	185
Einheitssphäre	273	GGMRF	184
Einstein, A.	18	Gibbs-Phänomen	140, 199
Einzelsamplebreite	190	Gibbs-Potential	184
EKG-Triggerung	260	Gibbs-Verteilung	183
electron beam computerized tomography	52	Glühkathode	11
Elektronenstrahl-Computertomographie	52	Gradientenverfahren	175
Elektron-Positron-Paar	18	Grangeat, P.	284
elementare Signale	62	Grass, M.	335
EM-Algorithmus	175	Grauwertsprünge	64
Energiedichtespektrum	98	Grossmann G.	42
Erwartungswert	35, 171	Grossmann-Tomograph	42
Expectation Maximation	175	H	
F		Hamming-Fenster	193
Fächerstrahl-Konzept	189	Hankel-Transformation	87, 142, 152
Falschalarmwahrscheinlichkeit	365	Hanning-Fenster	193
Faltungssatz	84	Heaviside-Funktion	62
Fan-Beam	189	Heel-Effekt	16
Fast-Fourier-Transformation	125	Helixverfahren	255
FDK-Kegelstrahl-Rekonstruktion	315	Hertzsche Strahlungscharakteristik	15
FDK-SLANT-Methode	337	Hessematrix	173, 180
Feinstruktur	21	Hessesche Normalform	113
Feldkamp, L. A.	315	Hilbert-Transformation	91
Fichtenholz, G. M.	82	Hochpassfilterung	136
Filtered Layergram	142	Hough-Transformation	116
Filterung im Frequenzraum	85	Hounsfield, Sir G. N.	4, 45
finite DFT	101	Hounsfieldeinheit	404
finite diskrete Fouriertransformation	101	hybride Radontransformation	275
Fixpunktiteration	175, 181	hybride Radontransformierte	296
Flächendetektor	31	Hyperflächen	163
Flächendetektoren	27, 28, 249, 280, 338, 344, 363	I	
Flying Focus	190	idealer Tiefpass	96
Fourier-Bessel-Transformation	87	Impulsantwort	66, 75
Fourieroptik	61	inverse Cormack-Transformation	152
Fourierreihe	96, 101, 148	inverse konzentrische Quadrate	126
Fourier-Slice-Theorem	120, 122, 124, 131, 134, 136, 152, 206, 266, 268, 270, 271, 275, 296	inverse Radontransformation	120
Fouriertransformation	78	inverses Fächer	51
Fremdschichtartefakte	43	inverses Problem	2, 120
Füllfaktor	27, 29, 30	ionisierende Strahlung	25
G		Isotropie	65
Gammaquanten	59	Iterationsschema	174, 180
Gantry	53	iteratives Lösungsschema	163

J

Jacobi-Funktional-Determinante 88, 134, 222,
229, 270, 276, 283, 321

K

Kaczmarz, S. 162
Kak, A. C. 163
Kalender, W. 54
Kantenfilter 64
kartesisches Gitter 125
kaskadierte Poissonprozesse 36, 178
Kathodentopf 11
Katsevich, A. 343
kausale Übertragungssysteme 65
Kegelstrahlartefakt 389
Kegelstrahl-CT 281
Kegelstrahl-Detektorsystem 28
Kegelstrahlrekonstruktion 284
Kegelstrahltomograph 55
Kernladungszahl 13
Koinzidenzmessung 59
komplementäre Röntgenquelle 219
komplementäres Rebinning 218
Konditionierung 183
Kontrastfunktion 350
Kontrastmittel 21
konvergenzerzeugender Faktor 83
konzentrische Kreise 126
konzentrische Quadrate 126
Korrekturfunktion 302
Kress, J. W. 315
Kudo, H. 300
Kuhn-Tucker-Bedingungen 174, 180

L

Lakshminarayanan, A. V. 191
Lambert-Beersches Gesetz 38
Layergram 158
Least-Squares-Minimum-Norm-Lösung 157
Level and Window 406
Lichtleiteffekt 32
Likelihood-Funktion 173, 179
lineares Übertragungssystem 64
Linienbildfunktion 352
Linienspektrum 12
Linogramabtastung 127
Linogram-Methode 127
Logan, B. F. 192
Log-Likelihood-Funktion 173, 179
lokale Tomographie 273
LSI-Systeme 65

M

Magnusson-Seger, M. 131
MAP-Verfahren 183
Markoffsches Zufallsfeld 183

mAs-Produkt 398
Masse-Energie-Äquivalenz 18
Massenabsorptionskoeffizient 21
maximum-a-posteriori-(MAP)-Verfahren 183
Maximum-Likelihood-Verfahren 171
Mehrzeilensysteme 27
meridiane Fläche 292
Metabolismus 59
Metallartefakt 376, 385
M-Funktion 302, 342
Micro-CT 56
Microfokusröhre 57
Modulationstransferfunktion 57, 347
Moireeffekt 92
Molybdänanode 13
Momente der Poissonverteilung 39
monotone Maximierung 178
Moore-Penrose-Inverse 158
morphologische Informationen 59
Moseleysches Gesetz 13
MRF: Markoff Random Field 183
MTF 351
Multiarraysystem 27, 28
Multi-Planar Reformating 255
multiplikative Korrektur 175

N

Nachleuchten 26
Nadelimpuls 69
Nadelstrahl 44
Nadelstrahl-Konzept 189
Natterer, F. 273
NEQ 364
Neutrino 59
Neutron 59
Newton-Raphson-Verfahren 187
Niedrigkontrastauflösung 398
Nobelpreis 4, 5, 11, 18, 45
noise equivalent quanta 364
normiertes Rechteck 66
n-PI-Methode 342
Nyquist-Frequenz 92
Nyquist-Kriterium 206

O

Objektcontrast 350
optimale Parameter 182
optische Transferfunktion 352
optischer Brennfleck 15
optisch-fotografische Rekonstruktion 61
Orlov, S. S. 278
Orlovs Vollständigkeitsbedingung 279
Orthopantomographie 43
Ortsinvarianz 65
OTF 352

P		Radonsche Lösung	144
Paarbildung	18	Radontransformation	116
Paarvernichtung	18	Ramachandran, G. N.	191
Panoramadarstellung	43	Ram-Lak-Fenster	191
Papula, L.	93	Rang	160
Parallelstrahl-Rebinning	212	rauschäquivalente Quantenausbeute	364
Parsevalsches Theorem	85	Rauschen	392
Partialvolumenartefakt	365, 378	Rauschpegel	399
Parzen-Fenster	193	Rayleighstreuung	17
Pencil-Beam	189	receiver operating characteristic	365
Pencilgeometrie	109	Rechteck-Funktion	62
PET	18	Reformatierung	8, 381
Phasentransferfunktion	352	Registrierung	59
Photoeffekt	18	regriding	125
PI-Methode	339	Regularisierung	160, 182, 195
Pitch	261	Regularisierungsparameter	184
Pixel	29	Regularitätsbedingungen	107
pixelweise Korrektur	163	relativistische Elektronen	15
Point-Spread-Function	76, 133, 141	Relaxationsparameter	166
Poissonstatistik	171	Ringartefakt	372, 373
Poissonverteilung	35, 393	Ringartefakte	50
Polarkoordinaten	87	ROC-Kurve	365
polychromatische Röntgenstrahlung	23	Röhrenstrom	399
Positivität	177	Röntgen, W. C.	5, 11
Positron	59	Röntgenabsorptionsspektrum	21
Positronenannihilation	59	Röntgenaufnahme	42, 249
Positronen-Emissions-Tomographie	18, 59	Röntgenkontrastmittel	21
Positronenstrahler	59	Röntgenquant	34
Potentialfunktion	184	Röntgenquanten	13
Prior	183	Röntgenröhre	12
Projektionsintegral	109	Röntgenstrahlung	11
Projektionssumme	110	Röntgentransformation	283, 284
Projektionswert	116	Rotationsinvarianz	65
Proksa, R.	342	Rückverschmierung	132
Pseudoinverse	158	Ruhlmann, J.	59
Pseudolösung	157, 166	S	
Pseudoschärfe	353	Saito, T.	300
PSF	76	Sampling Aperture	264
PTF	352	Sampling Pitch	264
Punktantwort	76	Satz von Thales	116, 117, 128, 285, 310, 311
Q		Scalloping	387
Quantenausbeute	364	Scanogram	7, 401
Quanteneffizienz	26, 32	Scatterdiagramm	20
Quantennatur der Röntgenstrahlung	33	Schattenbereich	312
Quantenrauschen	364, 393	Scherung der Schichten	384
Quantenstatistik	33	Schichtempfindlichkeitsprofil	263
Quellentrajektorie	301	Schichtenstapel	254
Quellentrajektorien	314	schlecht konditioniert	159
R		Schleifringtechnologie	53
radialsymmetrischer Transformationskern	87	Schnittebene	110
radioaktiver Tracer	59	Schramm, N.	163
Radon, J.	4, 107, 146	Schraubenbahn	255
Radonraum	116	Schwächungsgesetz	36
Radonsche Inversionsformel	273, 297	Schwächungskoeffizient	17
		Schwebung	96

Scout View	7, 401	Tomosynthese	42, 43, 279
Segmentierung	250	Topogram	7, 401
Sekundärrekonstruktion	249	Totalabsorption	375
Selbstabsorption	16	Toträume	27
Sensitivität	365	Transmissionswahrscheinlichkeit	37
Sequentielle FDK-Methode	336	Trefferwahrscheinlichkeit	34, 365
Shannonsches Abtasttheorem	92, 189	Treppenfunktion	67
Shepp, L. A.	192	Tschebycheff-Polynom	151
Shepp-Logan-Fenster	192	Turbell, H.	334
Sidelobes	86, 192	Tuy-Smith-Vollständigkeitsbedingung	310
Siebeigenschaft	70	Ü	
signal to noise ratio	39, 363	Übersichtsaufnahme	401
Signal-Rausch-Verhältnis	39, 363	Übertragungsfunktion	346
Signalrückgewinnung	97	Übertragungssystem	63
Signumsfunktion	81, 91	U	
Sinc-Funktion	62	Umsortierung der Fächerstrahlen	212
Singulärwertzerlegung	159	ungefilterte Rückprojektion	132
Sinogramm	116	V	
Sinogrammabtastung	128	Varianz	39
Slaney, M.	163	Verbundwahrscheinlichkeit	172, 179
Smart-Scan-Technik	399	Verschiebungsinvarianz	65
SNR	363	Vertrauenswürdigkeit	185
SPECT	156	Verwischungstechnik	43
Spektralkoordinaten	121	Verwischungstomographie	42, 43
Spezifität	365	Volume-CT	281
Spin-Bahn-Kopplung	22	Vorschubpausen	251
Spiralverfahren	255	Vorwärtsprojektion	162
Springfokussystem	358	Voxel	252
Standardabweichung	39	W	
statistisches Schätzverfahren	171	Wahrscheinlichkeit	33
stochastischer Prozess	171	Wehneltzylinder	11
Störstrahlung	26, 376	Wiener-Khintchine-Theorem	98
Stoßantwort	75, 347	Wismutgermanat	26
Strafterm	182	Wolframanode	14
Strahlenschutz	20	Wübbeling, F.	273
strahlweise Korrektur	163	X	
Streukoeffizient	17	Xenondetektor	25
Streustrahlenraster	26, 242, 376, 377	X-Strahlung	11
Streustrahlung	20	Z	
Streustrahlungsartefakt	376	Zahnfüllungen	41, 374, 375, 386, 387
Stufenartefakt	380	zirkulare Harmonische	148
Surface Rendering	250	z-Transformation	104
SVD	159	Zufallsvariable	34
System	63	Zustandssumme	184
Systemmatrix	156	Zwei-Spektren-Verfahren	370
Szintillationsdetektoren	26	zweites zentrales Moment	39
Szintillationskristall	26	zyklische Quellentrajektorie	312
T			
Tam-Danielsson-Fenster	339		
Taylorentwicklung	185		
Teilvolumenartefakt	365, 378		
Tent-FDK-Methode	335		
Theorem von Parseval	85		