

Herbert Bernstein

# Formelsammlung

Elektrotechnik, Elektronik, Messtechnik,  
analoge und digitale Elektronik

*2. Auflage*



Springer Vieweg

---

# Formelsammlung

# Lizenz zum Wissen.

Sichern Sie sich umfassendes Technikwissen mit Sofortzugriff auf tausende Fachbücher und Fachzeitschriften aus den Bereichen: Automobiltechnik, Maschinenbau, Energie + Umwelt, E-Technik, Informatik + IT und Bauwesen.

Exklusiv für Leser von Springer-Fachbüchern: Testen Sie Springer für Professionals 30 Tage unverbindlich. Nutzen Sie dazu im Bestellverlauf Ihren persönlichen Aktionscode **C0005406** auf [www.springerprofessional.de/buchaktion/](http://www.springerprofessional.de/buchaktion/)



**Jetzt  
30 Tage  
testen!**

**Springer für Professionals.**

**Digitale Fachbibliothek. Themen-Scout. Knowledge-Manager.**

-  Zugriff auf tausende von Fachbüchern und Fachzeitschriften
-  Selektion, Komprimierung und Verknüpfung relevanter Themen durch Fachredaktionen
-  Tools zur persönlichen Wissensorganisation und Vernetzung

[www.entschieden-intelligenter.de](http://www.entschieden-intelligenter.de)

**Springer für Professionals**

 **Springer**

---

Herbert Bernstein

# Formelsammlung

Elektrotechnik, Elektronik, Messtechnik,  
analoge und digitale Elektronik

2., aktualisierte Auflage

Herbert Bernstein  
München, Deutschland

ISBN 978-3-658-18178-9      ISBN 978-3-658-18179-6 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-18179-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

Die 1. Auflage 2004 erschien im Franzis Verlag unter dem Titel „Formelsammlung Elektrotechnik und Elektronik“.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

---

## Vorwort

Theorie und Praxis gehören für den Elektriker und Elektroniker zusammen. Allerdings sucht der Student und Schüler immer nach Möglichkeiten, sein Gedächtnis nicht allzu sehr mit Formeln zu belasten, die gelegentlich nur einmal gebraucht werden. Er will aber in dem Augenblick, in dem ihm seine praktische Erfahrung nicht mehr genügt, einen Hinweis finden, wie er rasch und sicher zum Ziel kommen kann. Besonders beim eigenen Schaltungsaufbau und beim Entwurf von Prüfgeräten treten oft Schwierigkeiten auf. An Stelle mühsamer Versuche klärt eine einfache Rechnung in vielen Fällen überraschend schnell die offenen Fragen. Weit verstreut in der Fachliteratur sind die benötigten Formeln alle irgendwo niedergelegt, wenn man nur wüsste, wo!

Die vorliegende Formelsammlung will versuchen, diesem Mangel abzuhelpfen. Sie kann nicht alles enthalten, was jemals in der Praxis der Elektronik vorkommt, sie will aber die wichtigen und wesentlichen Formeln, einschließlich der mathematischen Grundlagen, geordnet zur Verfügung stellen.

Es ist sicher sinnvoll, nach Jahren der Datenbank-Euphorie festzustellen, dass der Untergang des Buches nicht stattgefunden hat. Elektronische Datenspeicher haben zwar ihre Daseinsberechtigung und mittlerweile einen festen Platz im Komplex der Informationssysteme, sie ersetzen aber nicht das Buch, sondern ergänzen es. Ein Hauptgrund dafür ist ohne Zweifel, dass das Buch durch seine Mobilität benutzerfreundlicher ist, weil die Inhalte stets überall und ohne Hilfsmittel abrufbar sind.

Das gilt auch besonders für Tabellenbücher, die durch die Datenbänke nicht verdrängt wurden. So wie das Fachrechnen in der beruflichen Ausbildung weiter an Bedeutung gewinnt, so gehören die Zusammenstellung von Zahlen, Formeln, Daten, Schaltungen usw. in der klassischen, d. h. gedruckten Form uneingeschränkt in den Alltag – in Schule und Betrieb. Texte und Zahlen, die der Benutzer nachschlagen kann, prägen sich besser ein. Das ist bei der Fülle der Informationen ein nicht zu unterschätzender Vorteil!

Abschließend noch ein paar Anmerkungen zu den Normen. Ein Formelbuch für die Aus- und Weiterbildung kann und soll nicht die DIN-Blätter und DIN-Taschenbücher ersetzen. Mit den Hinweisen und Zitaten wird lediglich die Beschäftigung mit den Normen und deren ständige Anwendung angestrebt. Die Hinführung zur Norm und das Wecken

von Verständnis für die große Bedeutung der Normung ist Aufgabe aller Betroffenen, besonders aber im Studium.

Ein Fachbuch bleibt nur dann „lebendig“, wenn die Benutzer ihre Erfahrungen und Erkenntnisse weitergeben. Das gilt besonders für Tabellenbücher, die bei der Vielzahl von Informationen – trotz sorgfältigster Arbeit des Autors – Fehler enthalten können. Um diese auszumerzen, bedarf es der Mitwirkung aller Betroffenen, also auch der Benutzer. Für alle Mühe bin ich im Voraus verbunden, sowie an dieser Stelle, wie stets, allen denen danken, die das Werk durch Anregungen und Rat förderten. Meine Bitte, durch konstruktive Kritik weiter mitzuwirken, möge nicht überhört werden.

Das Buch entstand aus meinen Manuskripten (1. bis 4. Semester) an der Technikerschule in München und ist geeignet für Berufsschulen, Berufsakademien, Meisterschulen, Technikerschulen und Fachhochschulen.

Ich bedanke mich bei meinen Studenten für die vielen Fragen, die viel zu einer besonders eingehenden Darstellung wichtiger und schwieriger Fragen beigetragen haben.

Meiner Frau Brigitte danke ich für die Erstellung der Zeichnungen.

Wenn Fragen auftreten: [Bernstein-Herbert@t-online.de](mailto:Bernstein-Herbert@t-online.de)

München, im Sommer 2018

Herbert Bernstein

---

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                        |          |
|------------------------------------------------------------------------|----------|
| Vorwort .....                                                          | V        |
| <b>1 Allgemeine mathematischen Zeichen und Begriffe .....</b>          | <b>1</b> |
| 1.1 Mathematische Zeichen und Begriffe .....                           | 3        |
| 1.2 Zahlen und Zahlensysteme .....                                     | 3        |
| 1.3 Griechisches Alphabet .....                                        | 6        |
| 1.4 Logarithmieren .....                                               | 6        |
| 1.5 Funktionen .....                                                   | 7        |
| 1.6 Längen-, Flächen- und Körperberechnungen .....                     | 11       |
| 1.7 Vorsätze und Vorsatzzeichen für dezimale Teile und Vielfache ..... | 15       |
| 1.8 SI-Basiseinheiten .....                                            | 15       |
| 1.9 Schaltalgebra .....                                                | 18       |
| 1.10 Trigonometrie (Ebene) .....                                       | 19       |
| 1.11 Sphärische Trigonometrie .....                                    | 22       |
| 1.12 Gleichungen .....                                                 | 23       |
| 1.13 Analytische Geometrie .....                                       | 24       |
| 1.14 Vektoren .....                                                    | 27       |
| 1.14.1 Skalarprodukt .....                                             | 27       |
| 1.14.2 Vektorprodukt .....                                             | 28       |
| 1.15 Komplexe Zahlen .....                                             | 28       |
| 1.16 Grenzwerte .....                                                  | 30       |
| 1.17 Differentialrechnungen .....                                      | 31       |
| 1.18 Integralrechnungen .....                                          | 33       |
| 1.19 Potenzreihenentwicklung .....                                     | 34       |
| 1.20 Kombinatorik .....                                                | 36       |
| 1.21 Determinanten .....                                               | 37       |
| 1.21.1 Eigenschaften .....                                             | 38       |
| 1.21.2 Auflösung eines linearen Gleichungssystems .....                | 39       |
| 1.22 Matrizen .....                                                    | 40       |
| 1.22.1 Rechenregeln .....                                              | 41       |

|          |                                                                 |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.23     | Mengenlehre .....                                               | 41        |
| 1.23.1   | Grundbegriffe .....                                             | 41        |
| 1.23.2   | Mengenoperation .....                                           | 42        |
| 1.23.3   | Rechenregeln .....                                              | 42        |
| 1.24     | Wahrscheinlichkeitsrechnung .....                               | 42        |
| 1.25     | Normalverteilung .....                                          | 44        |
| <b>2</b> | <b>Allgemeine Elektrotechnik .....</b>                          | <b>45</b> |
| 2.1      | Einheiten der Elektrotechnik .....                              | 45        |
| 2.2      | Ladung .....                                                    | 46        |
| 2.3      | Spannung .....                                                  | 47        |
| 2.4      | Stromstärke .....                                               | 47        |
| 2.5      | Stromdichte .....                                               | 47        |
| 2.6      | Elektrizitätsmenge .....                                        | 47        |
| 2.7      | Spannungspotential .....                                        | 48        |
| 2.8      | Ohm'sches Gesetz .....                                          | 48        |
| 2.9      | Elektrische Leistung .....                                      | 48        |
| 2.10     | Elektrische Arbeit .....                                        | 48        |
| 2.11     | Messen der elektrischen Leistung .....                          | 49        |
| 2.12     | Wirkungsgrad .....                                              | 49        |
| 2.13     | Leitungswiderstand .....                                        | 50        |
| 2.14     | Widerstand und Temperatur .....                                 | 50        |
| 2.15     | Spannungsfall auf Leitungen .....                               | 51        |
| 2.16     | Leitwert und Widerstand .....                                   | 51        |
| 2.17     | Reihenschaltung von Widerständen .....                          | 51        |
| 2.18     | Parallelschaltung von Widerständen .....                        | 52        |
| 2.19     | Widerstände mit unterschiedlichen Temperaturkoeffizienten ..... | 52        |
| 2.20     | Ideale Spannungsquelle .....                                    | 52        |
| 2.21     | Ideale Stromquelle .....                                        | 53        |
| 2.22     | Reale Spannungsquelle .....                                     | 53        |
| 2.23     | Reale Stromquelle .....                                         | 53        |
| 2.24     | Belasteter Spannungserzeuger .....                              | 54        |
| 2.25     | Anpassung .....                                                 | 54        |
| 2.26     | Reihenschaltung von Spannungserzeugern .....                    | 55        |
| 2.27     | Parallelschaltung von Spannungserzeugern .....                  | 55        |
| 2.28     | Erstes Kirchhoff'sches Gesetz (Knotenregel) .....               | 55        |
| 2.29     | Zweites Kirchhoff'sches Gesetz (Maschenregel) .....             | 55        |
| 2.30     | Umrechnung einer Strom- in eine Spannungsquelle .....           | 56        |
| 2.31     | Umrechnung einer Spannungs- in eine Stromquelle .....           | 56        |
| 2.32     | Wärmewirkungsgrad .....                                         | 57        |
| 2.33     | Faraday'sches Gesetz .....                                      | 57        |
| 2.34     | Ersatzspannungsquelle .....                                     | 58        |
| 2.35     | Ersatzstromquelle .....                                         | 58        |

|          |                                                    |    |
|----------|----------------------------------------------------|----|
| <b>3</b> | <b>Gleichstromkreis</b>                            | 59 |
| 3.1      | Elektrische Größen                                 | 59 |
| 3.2      | Strom-Spannungs-Diagramm                           | 59 |
| 3.3      | Reihen- und Parallelschaltung                      | 60 |
| 3.4      | Unbelasteter Spannungsteiler                       | 60 |
| 3.5      | Spannungsteiler mit veränderbarem Abgriff          | 60 |
| 3.6      | Belasteter Spannungsteiler                         | 61 |
| 3.7      | Vorwiderstand                                      | 61 |
| 3.8      | Messbereichserweiterung für Spannungsmessung       | 62 |
| 3.9      | Messbereichserweiterung Strommessung               | 62 |
| 3.10     | Wheatstone Brücke                                  | 62 |
| 3.11     | Schleifdrahtbrücke                                 | 63 |
| 3.12     | Schleifdrahtbrücke nach Thomson                    | 63 |
| 3.13     | Dreieck-Stern-Umwandlung                           | 63 |
| 3.14     | Stern-Dreieck-Umwandlung                           | 64 |
| 3.15     | Internationale Reihe von Widerständen              | 64 |
| <b>4</b> | <b>Wechselspannung und Wechselstrom</b>            | 67 |
| 4.1      | Sinusförmige Wechselspannung                       | 67 |
| 4.2      | Spitzen- und Effektivwerte                         | 67 |
| 4.3      | Zeiger- und Liniendiagramm                         | 68 |
| 4.4      | Phasenverschiebung                                 | 69 |
| 4.5      | Leistung im Wechselstromkreis                      | 69 |
| 4.6      | Amplitudenform der Messgröße                       | 70 |
| 4.7      | Spannungsarten                                     | 71 |
| 4.8      | Rechtecksignale                                    | 73 |
| 4.9      | Signallaufzeit                                     | 74 |
| 4.10     | Addition phasenverschobener Spannungen und Ströme  | 75 |
| 4.11     | Fourier-Analyse                                    | 76 |
| <b>5</b> | <b>Elektrisches Feld und Kondensator</b>           | 85 |
| 5.1      | Kraft zwischen Ladungen (Coulomb'sches Gesetz)     | 85 |
| 5.2      | Elektrische Feldstärke                             | 85 |
| 5.3      | Kapazität eines Kondensators                       | 86 |
| 5.4      | Parallelschaltung für Kondensatoren                | 86 |
| 5.5      | Reihenschaltung für Kondensatoren                  | 87 |
| 5.6      | Temperaturverhalten von Kondensatoren              | 87 |
| 5.7      | Kapazität von Kondensatoren                        | 87 |
| 5.8      | Energie eines geladenen Kondensators               | 89 |
| 5.9      | Elektrische Ladungsverschiebung                    | 89 |
| 5.10     | Kapazitiver Blindwiderstand                        | 89 |
| 5.11     | Drehkondensator                                    | 90 |
| 5.12     | Zeitkonstante eines Kondensators                   | 92 |
| 5.13     | Austausch eines Kondensators (Kapazitätsvariation) | 93 |
| 5.14     | Verlustfaktor von Kondensatoren                    | 93 |
| 5.15     | Reststrom von Elektrolytkondensatoren              | 93 |

|          |                                                                      |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Magnetisches Feld und Induktionsspannung .....</b>                | <b>95</b>  |
| 6.1      | Magnetische Durchflutung .....                                       | 95         |
| 6.2      | Magnetische Feldstärke .....                                         | 95         |
| 6.3      | Magnetische Flussdichte (Induktion) .....                            | 96         |
| 6.4      | Magnetische Feldstärke und Flussdichte .....                         | 96         |
| 6.5      | Magnetischer Widerstand und magnetischer Leitwert .....              | 97         |
| 6.6      | Magnetischer Kreis mit Luftspalt (ohne Streuung) .....               | 97         |
| 6.7      | Kraft im Magnetfeld .....                                            | 97         |
| 6.8      | Stromdurchflossener Leiter mit Magnetfeld .....                      | 98         |
| 6.9      | Spule im Magnetfeld .....                                            | 98         |
| 6.10     | Kraft auf parallele Stromleiter .....                                | 98         |
| 6.11     | Induktion .....                                                      | 99         |
| 6.12     | Induktion der Bewegung .....                                         | 99         |
| 6.13     | Selbstinduktionsspannung .....                                       | 99         |
| 6.14     | Selbstinduktivität von Spulen .....                                  | 100        |
| 6.15     | Energie einer stromdurchflossenen Spule .....                        | 100        |
| 6.16     | Reihenschaltung von Induktivitäten .....                             | 100        |
| 6.17     | Parallelschaltung von Induktivitäten .....                           | 100        |
| 6.18     | Reihenschaltung von Induktivitäten mit magnetischer Kopplung .....   | 101        |
| 6.19     | Parallelschaltung von Induktivitäten mit magnetischer Kopplung ..... | 101        |
| 6.20     | Selbstinduktion (konzentrisches Kabel, Koaxialkabel) .....           | 102        |
| 6.21     | Selbstinduktion (Leitung gegen Masse) .....                          | 102        |
| 6.22     | Selbstinduktion (Doppelleitung) .....                                | 102        |
| 6.23     | Einlagige Spule .....                                                | 102        |
| 6.24     | Mehrlagige Spule .....                                               | 103        |
| 6.25     | Ringkreisförmige Luftspule .....                                     | 103        |
| 6.26     | Zeitkonstante einer Spule .....                                      | 103        |
| 6.27     | Induktiver Blindwiderstand .....                                     | 104        |
| 6.28     | Umwickeln von Spulen .....                                           | 104        |
| 6.29     | Spulengüte .....                                                     | 105        |
| 6.30     | Transformator (ohne Verluste) .....                                  | 105        |
| <b>7</b> | <b>Widerstände im Wechselstromkreis .....</b>                        | <b>107</b> |
| 7.1      | Ohm'scher Widerstand .....                                           | 107        |
| 7.2      | Induktiver Widerstand .....                                          | 107        |
| 7.3      | Kapazitiver Widerstand .....                                         | 108        |
| 7.4      | RL-Reihenschaltung .....                                             | 108        |
| 7.5      | RL-Parallelschaltung .....                                           | 109        |
| 7.6      | RC-Reihenschaltung .....                                             | 109        |
| 7.7      | RC-Parallelschaltung .....                                           | 110        |
| 7.8      | RLC-Reihenschaltung .....                                            | 111        |
| 7.9      | RLC-Parallelschaltung .....                                          | 111        |
| 7.10     | Reihenschaltung von RL-Gliedern .....                                | 112        |
| 7.11     | Reihenschaltung von RC-Gliedern .....                                | 113        |
| 7.12     | Parallelschaltung von RL-Gliedern .....                              | 114        |
| 7.13     | Parallelschaltung von RC-Gliedern .....                              | 114        |
| 7.14     | Reihenschaltung von RLC-Gliedern .....                               | 115        |

|          |                                                                                  |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.15     | Parallelschaltung von RLC-Gliedern .....                                         | 116        |
| 7.16     | Umrechnung von RC-Gliedern zwischen<br>Reihen- und Parallelschaltung .....       | 116        |
| 7.17     | Umrechnung von RL-Schaltung zwischen<br>Reihen- und Parallelschaltung .....      | 117        |
| 7.18     | Verlustbehafteter Kondensator .....                                              | 117        |
| 7.19     | Verlustbehaftete Spule .....                                                     | 118        |
| 7.20     | Leistung und Leistungsfaktor .....                                               | 118        |
| 7.21     | Bauelement, Zeiger- und Liniendiagramme<br>für Ohm'sche Widerstände .....        | 119        |
| 7.22     | Bauelement, Zeiger- und Liniendiagramme<br>für induktive Blindwiderstände .....  | 119        |
| 7.23     | Bauelement, Zeiger- und Liniendiagramme<br>für kapazitive Blindwiderstände ..... | 120        |
| 7.24     | Resonanz bei Schwingkreisen .....                                                | 120        |
| 7.25     | Reihenschwingkreis .....                                                         | 121        |
| 7.26     | Parallelschwingkreis .....                                                       | 121        |
| 7.27     | Scheinwiderstand und Phasenverschiebung .....                                    | 122        |
| 7.28     | Komplexe Darstellung von R, C und L .....                                        | 123        |
| 7.29     | Vierpolparameter von elektrischen Zweitoren .....                                | 124        |
| 7.30     | Umrechnung der Vierpolparameter .....                                            | 126        |
| 7.31     | Zusammenschalten von Vierpolen .....                                             | 127        |
| 7.32     | Frequenzweichen für Lautsprecher .....                                           | 128        |
| <b>8</b> | <b>Filterschaltungen .....</b>                                                   | <b>131</b> |
| 8.1      | RC- und LR-Tiefpass .....                                                        | 131        |
| 8.2      | CR- und RL-Hochpass .....                                                        | 133        |
| 8.3      | LC-Glied .....                                                                   | 134        |
| 8.4      | CL-Glied .....                                                                   | 135        |
| 8.5      | T- und $\pi$ -Tiefpass .....                                                     | 135        |
| 8.6      | T- und $\pi$ -Hochpass .....                                                     | 136        |
| 8.7      | LC-Verzögerungsleitung .....                                                     | 137        |
| 8.8      | Tiefpass-Doppelglied .....                                                       | 137        |
| 8.9      | Hochpass-Doppelglied .....                                                       | 138        |
| 8.10     | LC-Bandpass .....                                                                | 139        |
| 8.11     | LC-Bandsperre .....                                                              | 140        |
| 8.12     | RC-Bandpass (Wienbrücke) .....                                                   | 140        |
| 8.13     | Phasenschieber .....                                                             | 141        |
| 8.14     | Integrierglied .....                                                             | 141        |
| 8.15     | Differenzierglied .....                                                          | 141        |
| 8.16     | Wellenwiderstand für Leitungen .....                                             | 142        |
| 8.17     | Dämpfungskonstante für Kabel .....                                               | 142        |
| 8.18     | Ausbreitungsgeschwindigkeit für Freileitungen .....                              | 143        |
| 8.19     | Ausbreitungsgeschwindigkeit für hochfrequente<br>Leitungen und Kabel .....       | 143        |
| 8.20     | Reflexionsfaktor .....                                                           | 143        |
| 8.21     | Rückflussdämpfung .....                                                          | 144        |

|           |                                                                                      |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.22      | Wellenwiderstand im Aufbau .....                                                     | 144        |
| 8.23      | Klirrfaktor .....                                                                    | 145        |
| 8.24      | Klirrdämpfung .....                                                                  | 145        |
| 8.25      | Skinneffekt, Hauteffekt .....                                                        | 146        |
| 8.26      | Induktive Erwärmung .....                                                            | 146        |
| 8.27      | Rauschen .....                                                                       | 147        |
| <b>9</b>  | <b>Dämpfung, Verstärkung, Pegel .....</b>                                            | <b>149</b> |
| 9.1       | Dämpfungsfaktor .....                                                                | 149        |
| 9.2       | Übertragungsfaktor .....                                                             | 149        |
| 9.3       | Dämpfungsmaß in Bel .....                                                            | 150        |
| 9.4       | Dämpfungsmaß in dB .....                                                             | 150        |
| 9.5       | Übertragungsmaß in dB .....                                                          | 150        |
| 9.6       | Dämpfungsmaß in Np .....                                                             | 150        |
| 9.7       | Relativer Pegel .....                                                                | 151        |
| 9.8       | Absoluter Pegel in dB .....                                                          | 151        |
| 9.9       | Betriebsdämpfung .....                                                               | 151        |
| 9.10      | Rückfluss- oder Echodämpfung .....                                                   | 152        |
| 9.11      | Nebensprechdämpfung .....                                                            | 152        |
| 9.12      | Gesamtdämpfungsmaß einer Übertragungsstrecke .....                                   | 152        |
| 9.13      | Dämpfungsglieder .....                                                               | 153        |
| 9.14      | Störpegelabstand .....                                                               | 153        |
| 9.15      | Nebensprechdämpfung .....                                                            | 153        |
| 9.16      | Reflexionsfaktor, Anpassungsfaktor, Welligkeitsfaktor .....                          | 154        |
| 9.17      | Wellenwiderstand, Dämpfungskonstante,<br>Ausbreitungsgeschwindigkeit .....           | 154        |
| 9.18      | Wellenwiderstand, Dämpfungskonstante,<br>Ausbreitungsgeschwindigkeit für Kabel ..... | 155        |
| 9.19      | Wellenwiderstand im Aufbau .....                                                     | 156        |
| 9.20      | Datenübertragung .....                                                               | 157        |
| 9.21      | Dämpfungsverlauf .....                                                               | 158        |
| 9.22      | Elektromagnetische Wellen .....                                                      | 159        |
| 9.23      | Hochfrequenzleitung .....                                                            | 163        |
| 9.24      | Resonanzfrequenzänderung mit Drehkondensator .....                                   | 164        |
| 9.25      | Anpassung durch Resonanztransformator .....                                          | 164        |
| 9.26      | Gekoppelte Bandfilter .....                                                          | 166        |
| <b>10</b> | <b>Dioden .....</b>                                                                  | <b>169</b> |
| 10.1      | Verlustleistung einer Diode .....                                                    | 169        |
| 10.2      | Zulässige Verlustleistung einer Diode .....                                          | 169        |
| 10.3      | Statischer Diodenwiderstand (Gleichstromwiderstand) .....                            | 170        |
| 10.4      | Dynamischer Diodenwiderstand (Wechselstromwiderstand) .....                          | 171        |
| 10.5      | Temperaturverhalten von Dioden .....                                                 | 171        |
| 10.6      | Spannungsbegrenzung .....                                                            | 172        |
| 10.7      | Diodenschalter .....                                                                 | 172        |
| 10.8      | M1U, Einpuls-Mittelpunktschaltung .....                                              | 173        |
| 10.9      | M2U, Zweipuls-Mittelpunktschaltung .....                                             | 173        |

|           |                                                                 |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 10.10     | B2U, Zweipuls-Brückenschaltung .....                            | 174        |
| 10.11     | M3U, Dreipuls-Mittelpunktschaltung .....                        | 174        |
| 10.12     | B6U, Sechspuls-Brückenschaltung .....                           | 175        |
| 10.13     | Arithmetischer Mittelwert (Ohm'sche Last bei Gleichstrom) ..... | 175        |
| 10.14     | Strombelastbarkeit .....                                        | 175        |
| 10.15     | Sperrspannung .....                                             | 176        |
| 10.16     | M1U-Gleichrichter mit Ladekondensator .....                     | 176        |
| 10.17     | M2U-Gleichrichter mit Ladekondensator .....                     | 177        |
| 10.18     | B2U-Gleichrichter mit Ladekondensator .....                     | 177        |
| 10.19     | RC-Siebung .....                                                | 178        |
| 10.20     | LC-Siebung .....                                                | 178        |
| 10.21     | Spannungsverdopplung nach Delon (Greinacher) .....              | 178        |
| 10.22     | Spannungsverdopplung nach Villard (Kaskadenschaltung) .....     | 179        |
| 10.23     | Spannungsvervielfachung nach Villard .....                      | 179        |
| 10.24     | Reihen- und Parallelschaltung von Dioden .....                  | 179        |
| 10.25     | Unbelastete Spannungsstabilisierung .....                       | 180        |
| 10.26     | Belastete Spannungsstabilisierung .....                         | 181        |
| 10.27     | Differentieller Innenwiderstand der Z-Diode .....               | 181        |
| 10.28     | Glättungsfaktor .....                                           | 181        |
| 10.29     | Stabilisierungsfaktor .....                                     | 182        |
| 10.30     | Kapazitätsdioden .....                                          | 182        |
| 10.31     | Tunneldiode .....                                               | 183        |
| <b>11</b> | <b>Bipolare Transistoren .....</b>                              | <b>185</b> |
| 11.1      | h-Kenngrößen von Transistoren .....                             | 185        |
| 11.2      | y-Kenngrößen von Transistoren (Leitwerte) .....                 | 186        |
| 11.3      | Kennzeichnung von Transistorgrößen .....                        | 186        |
| 11.4      | Kennwerte und Kennlinien .....                                  | 186        |
| 11.5      | Vierpol-Parameter .....                                         | 188        |
| 11.6      | Beschalteter Vierpol (Emitterschaltung) .....                   | 189        |
| 11.7      | y-Parameter für die Emitterschaltung .....                      | 190        |
| 11.8      | h- und y-Parameter .....                                        | 191        |
| 11.9      | Umrechnung der y-Kennwerte aus den Grundsaltungen .....         | 192        |
| 11.10     | Verlustleistung .....                                           | 192        |
| 11.11     | Arbeitspunkteinstellung .....                                   | 193        |
| 11.12     | Arbeitsgerade für Gleich- und Wechselstrom .....                | 194        |
| 11.13     | Kleinsignalverstärkung (Emitterschaltung) .....                 | 194        |
| 11.14     | Kleinsignalverstärkung (Basisschaltung) .....                   | 195        |
| 11.15     | Kleinsignalverstärkung (Kollektorschaltung) .....               | 195        |
| 11.16     | Stromgegenkopplung .....                                        | 195        |
| 11.17     | Spannungsgegenkopplung .....                                    | 196        |
| 11.18     | Kopplungskondensatoren .....                                    | 196        |
| 11.19     | Transistor als Schalter .....                                   | 197        |
| 11.20     | Astable Kippschaltung (Rechteckgenerator) .....                 | 199        |
| 11.21     | Monostabile Kippschaltung .....                                 | 200        |
| 11.22     | Bistabile Kippschaltung (Flipflop) .....                        | 200        |
| 11.23     | Schmitt-Trigger (Schwellertschaltung) .....                     | 201        |

|           |                                                       |            |
|-----------|-------------------------------------------------------|------------|
| 11.24     | Gegen- und Mitkopplung .....                          | 201        |
| 11.25     | RC-Phasenschieber-Generator .....                     | 202        |
| 11.26     | RC-Wienbrücken-Generator .....                        | 203        |
| 11.27     | Meißner-Schaltung .....                               | 204        |
| 11.28     | Hartley-Schaltung .....                               | 204        |
| 11.29     | Gegentakt-Hartley-Schaltung .....                     | 205        |
| 11.30     | Colpits-Schaltung I .....                             | 205        |
| 11.31     | Colpits-Schaltung II .....                            | 206        |
| 11.32     | ECO-Schaltung .....                                   | 206        |
| 11.33     | Quarzschaltung für niedrige Frequenzen .....          | 207        |
| 11.34     | Quarzschaltung für hohe Frequenzen .....              | 207        |
| 11.35     | Quarzschaltung für sehr hohe Frequenzen .....         | 207        |
| 11.36     | Induktive Kopplung bei Kleinsignalverstärkern .....   | 208        |
| 11.37     | Kapazitive Kopplung bei Kleinsignalverstärkern .....  | 208        |
| 11.38     | Gleichstromkopplung bei Kleinsignalverstärkern .....  | 209        |
| 11.39     | Darlington-Schaltung .....                            | 209        |
| 11.40     | Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung .....         | 210        |
| 11.41     | Emitterschaltung mit Spannungsgegenkopplung .....     | 210        |
| 11.42     | Bootstrap-Schaltung .....                             | 210        |
| 11.43     | Leistungsverstärker .....                             | 211        |
| 11.44     | Kaskode-Schaltung .....                               | 212        |
| 11.45     | Konstantspannungsquelle .....                         | 213        |
| 11.46     | Konstantstromquelle .....                             | 213        |
| 11.47     | Differenzverstärker .....                             | 213        |
| <b>12</b> | <b>Feldeffekttransistor, MOSFET und Röhren .....</b>  | <b>215</b> |
| 12.1      | Feldeffekttransistor (FET) .....                      | 216        |
| 12.2      | Konstantstromquelle .....                             | 218        |
| 12.3      | Sägezahngenerator .....                               | 219        |
| 12.4      | Rechteckgenerator .....                               | 219        |
| 12.5      | Monostabile Kippstufe .....                           | 220        |
| 12.6      | Wechselspannungsverstärker .....                      | 220        |
| 12.7      | MOSFET .....                                          | 221        |
| 12.8      | Dual-Gate-MOSFET .....                                | 223        |
| 12.9      | Röhren .....                                          | 224        |
| 12.10     | Trioden-Schaltung .....                               | 226        |
| 12.11     | Pentoden-Schaltung .....                              | 227        |
| <b>13</b> | <b>Operationsverstärker .....</b>                     | <b>229</b> |
| 13.1      | Grundsaltungen des Operationsverstärkers .....        | 231        |
| 13.2      | Komparator und Schmitt-Trigger .....                  | 233        |
| 13.3      | Wandler mit Operationsverstärker .....                | 236        |
| 13.4      | Generatoren mit Operationsverstärker .....            | 239        |
| 13.5      | Aktive Tiefpass- und Hochpass-Filter .....            | 242        |
| 13.6      | Umwandlung von Tief- in Hochpassfilter .....          | 252        |
| 13.7      | Selektiver Bandpass 2. Ordnung mit Schwingkreis ..... | 253        |
| 13.8      | Selektive Bandsperre 2. Ordnung .....                 | 253        |

|           |                                                            |            |
|-----------|------------------------------------------------------------|------------|
| 13.9      | Sallen-Key-Bandpass 2. Ordnung .....                       | 255        |
| 13.10     | Notch-Filter .....                                         | 258        |
| 13.11     | Allpassfilter .....                                        | 259        |
| <b>14</b> | <b>Regelungstechnik .....</b>                              | <b>261</b> |
| 14.1      | Regelkreis .....                                           | 261        |
| 14.2      | Verhalten von Regelkreisen .....                           | 262        |
| 14.3      | Klassifizierung von Regelstrecken .....                    | 264        |
| 14.4      | Ortskurven in der Regelungstechnik .....                   | 266        |
| 14.5      | Bodediagramm in der Regelungstechnik .....                 | 268        |
| 14.6      | Regelstreckenglieder .....                                 | 271        |
| 14.7      | Realisierung von elektronischen Reglern .....              | 274        |
| 14.8      | Arbeitsweise von geschlossenen Regelkreisen .....          | 288        |
| 14.9      | Optimierung von Regelkreisen .....                         | 292        |
| 14.10     | Schaltende Regler .....                                    | 296        |
| <b>15</b> | <b>Digitaltechnik .....</b>                                | <b>299</b> |
| 15.1      | Bedeutung der binären Signalwerte .....                    | 299        |
| 15.2      | Zahlensysteme .....                                        | 299        |
| 15.3      | Umrechnen von Zahlensystemen .....                         | 300        |
| 15.4      | Bits und Bytes .....                                       | 301        |
| 15.5      | Codes .....                                                | 303        |
| 15.6      | Logische Grundfunktionen .....                             | 307        |
| 15.7      | Grundregeln der Schaltalgebra .....                        | 309        |
| 15.8      | Minimieren mit Karnaugh-Diagramm .....                     | 310        |
| 15.9      | Grundschaltungen mit Flipflops .....                       | 312        |
| 15.10     | Auslastfaktoren (fan-in, fan-out) bei TTL-Bausteinen ..... | 313        |
| 15.11     | CMOS-Bausteine .....                                       | 314        |
| 15.12     | Digitale Schalter .....                                    | 319        |
| 15.13     | Monostabile Schaltungen .....                              | 320        |
| 15.14     | Astable Kippschaltungen .....                              | 321        |
| 15.15     | Asynchrone Frequenzteiler und Zähler .....                 | 323        |
| <b>16</b> | <b>Sensorik .....</b>                                      | <b>327</b> |
| 16.1      | NTC-Widerstände (Heißeiter) .....                          | 327        |
| 16.2      | PTC-Widerstand (Kaltleiter) .....                          | 330        |
| 16.3      | Brückenschaltung .....                                     | 330        |
| 16.4      | Dehnungsmessstreifen .....                                 | 332        |
| 16.5      | Ohm'scher Weg- und Winkelaufnehmer .....                   | 334        |
| 16.6      | Induktiver Weg- und Winkelaufnehmer .....                  | 334        |
| 16.7      | Kapazitiver Weg- und Winkelaufnehmer .....                 | 335        |
| 16.8      | Hallgenerator .....                                        | 336        |
| 16.9      | Feldplatte .....                                           | 337        |
| 16.10     | VDR-Widerstand .....                                       | 338        |
| 16.11     | Peltier-Batterie .....                                     | 339        |
| 16.12     | Beleuchtungsgrößen und Einheiten .....                     | 339        |

|           |                                                                       |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 16.13     | Fotowiderstände .....                                                 | 341        |
| 16.14     | Fotodioden .....                                                      | 342        |
| 16.15     | Fototransistoren .....                                                | 343        |
| 16.16     | Fotoelemente .....                                                    | 344        |
| 16.17     | Leuchtdioden .....                                                    | 345        |
| 16.18     | Optokoppler .....                                                     | 346        |
| <b>17</b> | <b>Messtechnik .....</b>                                              | <b>347</b> |
| 17.1      | Klasseneinteilung und Bedingungen .....                               | 347        |
| 17.2      | Genauigkeiten von Messgeräten .....                                   | 350        |
| 17.3      | Genauigkeiten von Betriebsmessgeräten .....                           | 351        |
| 17.4      | Anzeige eines Digitalmessgerätes .....                                | 352        |
| 17.5      | Messbereichserweiterung (Spannung) .....                              | 352        |
| 17.6      | Messbereichserweiterung (Strom) .....                                 | 353        |
| 17.7      | Amplitudenform der Messgröße .....                                    | 353        |
| 17.8      | Spannungs- und Strommessung mit Messwandlern .....                    | 355        |
| 17.9      | Leistungsmessung: Schein- und Wirkleistung .....                      | 355        |
| 17.10     | Widerstandsmessung .....                                              | 356        |
| 17.11     | Direktanzeigende Ohmmeter .....                                       | 356        |
| 17.12     | Schleifdrahtbrücke .....                                              | 357        |
| 17.13     | Messung an Spannungsteilern .....                                     | 357        |
| 17.14     | Kapazitätsmessung .....                                               | 357        |
| 17.15     | Induktivitätsmessung .....                                            | 358        |
| 17.16     | Messung der elektrischen Leistung .....                               | 359        |
| 17.17     | Wechselspannungs-Messbrücken .....                                    | 360        |
| 17.18     | Messen mit dem Oszilloskop .....                                      | 363        |
| 17.19     | Statistische Berechnung der Messunsicherheit .....                    | 368        |
| <b>18</b> | <b>Drehstrom und Wechselstrom .....</b>                               | <b>375</b> |
| 18.1      | Augenblickswert, Scheitelwert, Spitze-Spitze-Wert, Effektivwert ..... | 376        |
| 18.2      | Sternschaltung .....                                                  | 377        |
| 18.3      | Dreieckschaltung .....                                                | 378        |
| 18.4      | Leitungssysteme .....                                                 | 379        |
| 18.5      | Drehstrommotor .....                                                  | 380        |
| 18.6      | Umwandlung von Stern-Dreieck und Dreieck-Stern .....                  | 381        |
| 18.7      | Drehstrom-Asynchronmotor .....                                        | 381        |
| 18.8      | Motormoment .....                                                     | 382        |
| 18.9      | Blindstromkompensation für Drehstrom .....                            | 384        |
| 18.10     | Drehstrommotor an Wechselspannung .....                               | 384        |
| 18.11     | Gleichstrom-Scheibenläufer .....                                      | 386        |
| 18.12     | Schrittmotor .....                                                    | 386        |
| 18.13     | Mechanische Übertragung der Motorleistung .....                       | 387        |
| 18.14     | Drehstromzähler und Netzformen .....                                  | 390        |
| 18.15     | Schutzeinrichtungen und Schutzmaßnahmen .....                         | 392        |
| 18.16     | Gefährliche Körperströme .....                                        | 395        |
|           | <b>Sachwortverzeichnis .....</b>                                      | <b>397</b> |

# Allgemeine mathematischen Zeichen und Begriffe

| Zeichen                                                           | Verwendung               | Sprechweise (Erläuterungen)                            |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------|
| <b>Pragmatische Zeichen (nicht mathematisch im engeren Sinne)</b> |                          |                                                        |
| $\approx$                                                         | $x \approx y$            | $x$ ist ungefähr gleich $y$                            |
| $<<$                                                              | $x << y$                 | $x$ ist klein gegen $y$                                |
| $>>$                                                              | $x >> y$                 | $x$ ist groß gegen $y$                                 |
| $\hat{=}$                                                         | $x \hat{=} y$            | $x$ entspricht $y$                                     |
| ...                                                               |                          | und so weiter bis, und so weiter (unbegrenzt)          |
| <b>Allgemeine arithmetische Relationen und Verknüpfungen</b>      |                          |                                                        |
| $=$                                                               | $x = y$                  | $x$ gleich $y$                                         |
| $\neq$                                                            | $x \neq y$               | $x$ ungleich $y$                                       |
| $<$                                                               | $x < y$                  | $x$ kleiner als $y$                                    |
| $\leq$                                                            | $x \leq y$               | $x$ kleiner oder gleich $y$ , $x$ höchstens gleich $y$ |
| $>$                                                               | $x > y$                  | $x$ größer als $y$                                     |
| $\geq$                                                            | $x \geq y$               | $x$ größer oder gleich $y$ , $x$ mindestens gleich $y$ |
| $+$                                                               | $x + y$                  | $x$ plus $y$ , Summe von $x$ und $y$                   |
| $-$                                                               | $x - y$                  | $x$ minus $y$ , Differenz von $x$ und $y$              |
| $\cdot$                                                           | $x \cdot y$ oder $xy$    | $x$ mal $y$ , Produkt von $x$ und $y$                  |
| $-$ oder $/$                                                      | $\frac{x}{y}$ oder $x/y$ | $x$ durch $y$ , Quotient von $x$ und $y$               |
| $\Sigma$                                                          | $\sum_{i=1}^n x_i$       | Summe über $x_i$ von $i$ gleich 1 bis $n$              |
| $\sim$                                                            | $f \sim g$               | $f$ ist proportional zu $g$                            |

| Zeichen                                   | Verwendung    | Sprechweise (Erläuterungen)           |
|-------------------------------------------|---------------|---------------------------------------|
| <b>Besondere Zahlen und Verknüpfungen</b> |               |                                       |
| $\pi$                                     | pi            | 3,1415926...                          |
| $e$                                       |               | 2,7182281...                          |
| $x^n$                                     | $x^n$         | $x$ hoch $n$ , $n$ -te Potenz von $x$ |
| $\sqrt{\quad}$                            | $\sqrt{x}$    | Wurzel (Quadratwurzel) aus $x$        |
| $\sqrt[n]{\quad}$                         | $\sqrt[n]{x}$ | $n$ -te Wurzel aus $x$                |
| $  $                                      | $ x $         | Betrag von $x$                        |
| $\infty$                                  |               | unendlich                             |
| $n!$                                      |               | Fakultät                              |

### Elementare Geometrie

|                      |                           |                                                       |
|----------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\perp$              | $g \perp h$               | $g$ und $h$ stehen senkrecht zueinander               |
| $\parallel$          | $g \parallel h$           | $g$ ist parallel zu $h$                               |
| $\uparrow\uparrow$   | $g \uparrow\uparrow h$    | $g$ und $h$ sind gleichsinnig parallel                |
| $\uparrow\downarrow$ | $g \uparrow\downarrow h$  | $g$ und $h$ sind gegensinnig parallel                 |
| $\sphericalangle$    | $\sphericalangle (g, h)$  | (nicht orientierter) Winkel zwischen $g$ und $h$      |
| $\curvearrowright$   | $\curvearrowright (g, h)$ | orientierter Winkel von $g$ und $h$                   |
| $\text{---}$         | $\overline{PQ}$           | (Zählrichtung festgelegt)<br>Strecke von $P$ nach $Q$ |
| $d$                  | $d(P, Q)$                 | Abstand (Distanz) von $P$ nach $Q$                    |
| $\Delta$             | $\Delta(ABC)$             | Dreieck $ABC$                                         |
| $\cong$              | $M \cong N$               | $M$ ist kongruent zu $N$                              |

### Exponentialfunktion und Logarithmus

|        |                     |                                               |
|--------|---------------------|-----------------------------------------------|
| $\exp$ | $\exp z$ oder $e^z$ | Exponentialfunktion von $z$ oder $e$ hoch $z$ |
| $\ln$  | $\ln x$             | Natürlicher Logarithmus von $x$ (Basis $e$ )  |
|        | $x^z$               | $x$ hoch $z$                                  |
| $\log$ | $\log_y x$          | Logarithmus von $x$ zur Basis $y$             |
| $\lg$  | $\lg x$             | Dekadischer Logarithmus von $x$ (Basis 10)    |

### Trigonometrische Funktionen sowie deren Umkehrungen

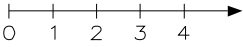
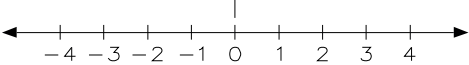
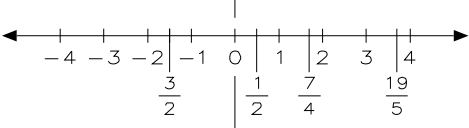
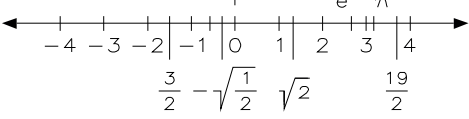
|           |             |                           |
|-----------|-------------|---------------------------|
| $\sin$    | $\sin x$    | Sinus von $x$             |
| $\cos$    | $\cos x$    | Cosinus von $x$           |
| $\tan$    | $\tan x$    | Tangens von $x$           |
| $\cot$    | $\cot x$    | Cotangens von $x$         |
| $\arcsin$ | $\arcsin x$ | Arcussinus von $x$        |
| $\arccos$ | $\arccos x$ | Arcuscosinus von $x$      |
| $\arctan$ | $\arctan x$ | Arcustangens von $x$      |
| $\sinh$   | $\sinh x$   | Hyperbelsinus von $x$     |
| $\cosh$   | $\cosh x$   | Hyperbelcosinus von $x$   |
| $\tanh$   | $\tanh x$   | Hyperbeltangens von $x$   |
| $\coth$   | $\coth x$   | Hyperbelcotangens von $x$ |

1.1 Mathematische Zeichen und Begriffe

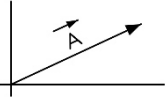
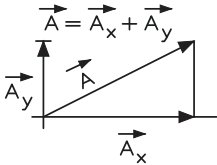
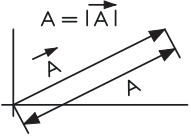
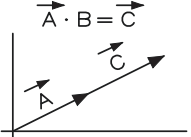
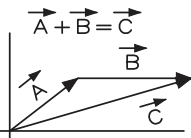
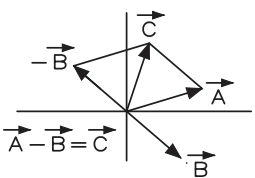
| Zeichen                 | Verwendung              | Sprechweise (Erläuterungen)                            |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------|
| <b>Mengen</b>           |                         |                                                        |
| $\in$                   | $x \in M$               | $x$ ist Element von $M$                                |
| $\notin$                | $x \notin M$            | $x$ ist nicht Element von $M$                          |
|                         | $x_1, \dots, x_n \in A$ | $x_1, \dots, x_n$ ist Element von $A$                  |
| $\{ \mid \}$            | $\{x \mid \varphi\}$    | die Menge (Klasse) aller $x$ mit $\varphi$             |
| $\{, \dots, \}$         | $\{x_1, \dots, x_n\}$   | die Menge mit den Elementen $x_1, \dots, x_n$          |
| $\subseteq$ oder        | $A \subseteq B$ oder    | $A$ ist Teilmenge von $B$                              |
| $\subset$               | $A \subset B$           | $A$ sub $B$                                            |
| $\subsetneq$            | $A \subsetneq B$        | $A$ ist echt enthalten in $B$                          |
| $\cap$                  | $A \cap B$              | $A$ geschnitten mit $B$ , Durchschnitt von $A$ und $B$ |
| $\cup$                  | $A \cup B$              | $A$ vereinigt mit $B$ , Vereinigung von $A$ und $B$    |
| $\setminus$ oder        | $A \setminus B$ oder    | $A$ ohne $B$                                           |
| $\complement_A$ oder    | $\complement_A B$ oder  | Differenzmenge von $A$ und $B$                         |
| $-$                     | $A - B$                 | relatives Komplement von $B$ mit $A$                   |
| $\emptyset$ oder $\{\}$ |                         | leere Menge                                            |

1.2 Zahlen und Zahlensysteme

Zahlenmengen

|              |                   |                                                                                      |
|--------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$ | Natürliche Zahlen |  |
| $\mathbb{Z}$ | Ganze Zahlen      |  |
| $\mathbb{Q}$ | Rationale Zahlen  |  |
| $\mathbb{R}$ | Reelle Zahlen     |  |

Vektoren

|                                 |                                                                                     |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Schreibweise                    | $A, B, \dots, a, b, \dots$<br>$\vec{A}, \vec{B}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \dots$    |
| Grafische Darstellung           |    |
| Komponenten eines Vektors       |    |
| Betrag eines Vektors            |    |
| Multiplikation mit einem Skalar |    |
| Addition von Vektoren           |   |
| Subtraktion von Vektoren        |  |

Schreibweise von Dezimalzahlen Beispiel: 275,64

|                    |                |                |                |                   |                   |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|
| Ziffer             | 2              | 7              | 5              | 6                 | 4                 |
| Stelle             | 3.             | 2.             | 1.             | 1 nach Komma      | 2 nach Komma      |
| Stellenbezeichnung | Hunderter      | Zehner         | Einer          | Zehntel           | Hundertstel       |
| Stellenwert $B^x$  | $10^2$         | $10^1$         | $10^0$         | $10^{-1}$         | $10^{-2}$         |
| Potenzwert         | $2 \cdot 10^2$ | $7 \cdot 10^1$ | $5 \cdot 10^0$ | $6 \cdot 10^{-1}$ | $4 \cdot 10^{-2}$ |

$275,64 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

Schreibweise von Dualzahlen      Beispiel: 1101,11

|                    |               |               |               |               |                  |                  |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| Ziffer             | 1             | 1             | 0             | 1             | 1                | 1                |
| Stelle             | 4.            | 3.            | 2.            | 1.            | 1 nach Komma     | 2 nach Komma     |
| Stellenbezeichnung | Achter        | Vierer        | Zweier        | Einer         | Halbe            | Viertel          |
| Stellenwert B*     | $2^3$         | $2^2$         | $2^1$         | $2^0$         | $2^{-1}$         | $2^{-2}$         |
| Potenzwert         | $1 \cdot 2^3$ | $1 \cdot 2^2$ | $1 \cdot 2^1$ | $1 \cdot 2^0$ | $1 \cdot 2^{-1}$ | $1 \cdot 2^{-2}$ |

$1101,11 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$

Rechenregeln für Dualzahlen

|              |              |                 |             |
|--------------|--------------|-----------------|-------------|
| Addition     | Subtraktion  | Multiplikation  | Division    |
| $0 + 0 = 0$  | $0 - 0 = 0$  | $0 \cdot 0 = 0$ | $0 : 1 = 0$ |
| $0 + 1 = 1$  | $1 - 0 = 1$  | $0 \cdot 1 = 0$ | $1 : 1 = 1$ |
| $1 + 0 = 1$  | $10 - 1 = 1$ | $1 \cdot 0 = 0$ |             |
| $1 + 1 = 10$ | $1 - 1 = 0$  | $1 \cdot 1 = 1$ |             |

Umwandlung

|                                                                                  |                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Dual in Dezimal                                                                  | Dezimal in Dual                      |
| Dualzahl:    1    1    0    0    1                                               | Dezimalzahl: 26                      |
| Potenzwert $1 \cdot 2^4$ $1 \cdot 2^3$ $0 \cdot 2^2$ $0 \cdot 2^1$ $1 \cdot 2^0$ | $26 : 2 = 13$ Rest 0                 |
| Dezimalzahl   16 + 8 + 0 + 0 + 1                                                 | $13 : 2 = 6$ Rest 1                  |
| 25                                                                               | $6 : 2 = 3$ Rest 0                   |
|                                                                                  | $3 : 2 = 1$ Rest 1                   |
|                                                                                  | $1 : 2 = 0$ Rest 1    ↑ Leserichtung |
|                                                                                  | 1 1 0 1 0                            |

Vergleich zwischen Zahlensystemen

|      |         |              |      |         |              |       |         |              |       |         |              |
|------|---------|--------------|------|---------|--------------|-------|---------|--------------|-------|---------|--------------|
| dual | dezimal | hexa-dezimal | dual | dezimal | hexa-dezimal | dual  | dezimal | hexa-dezimal | dual  | dezimal | hexa-dezimal |
| 0    | 0       | 0            | 1000 | 8       | 8            | 10000 | 16      | 10           | 11000 | 24      | 18           |
| 1    | 1       | 1            | 1001 | 9       | 9            | 10001 | 17      | 11           | 11001 | 25      | 19           |
| 10   | 2       | 2            | 1010 | 10      | A            | 10010 | 18      | 12           | 11010 | 26      | 1A           |
| 11   | 3       | 3            | 1011 | 11      | B            | 10011 | 19      | 13           | 11011 | 27      | 1B           |
| 100  | 4       | 4            | 1100 | 12      | C            | 10100 | 20      | 14           | 11100 | 28      | 1C           |
| 101  | 5       | 5            | 1101 | 13      | D            | 10101 | 21      | 15           | 11101 | 29      | 1D           |
| 110  | 6       | 6            | 1110 | 14      | E            | 10110 | 22      | 16           | 11110 | 30      | 1E           |
| 111  | 7       | 7            | 1111 | 15      | F            | 10111 | 23      | 17           | 11111 | 31      | 1F           |

Römische Zahlen

|         |          |          |           |           |            |
|---------|----------|----------|-----------|-----------|------------|
| I = 1   | VI = 6   | XI = 11  | LX = 60   | CX = 110  | DC = 600   |
| II = 2  | VII = 7  | XX = 20  | LXX = 70  | CC = 200  | DCC = 700  |
| III = 3 | VIII = 8 | XXX = 30 | LXXX = 80 | CCC = 300 | DCCC = 800 |
| IV = 4  | IX = 9   | XL = 40  | XC = 90   | CD = 400  | CM = 900   |
| V = 5   | X = 10   | L = 50   | C = 100   | D = 500   | M = 1000   |

### 1.3 Griechisches Alphabet

|          |               |         |           |            |         |          |           |         |
|----------|---------------|---------|-----------|------------|---------|----------|-----------|---------|
| A        | $\alpha$      | Alpha   | I         | $\iota$    | Iota    | P        | $\rho$    | Rho     |
| B        | $\beta$       | Beta    | K         | $\kappa$   | Kappa   | $\Sigma$ | $\sigma$  | Sigma   |
| $\Gamma$ | $\gamma$      | Gamma   | $\Lambda$ | $\lambda$  | Lambda  | T        | $\tau$    | Tau     |
| $\Delta$ | $\delta$      | Delta   | M         | $\mu$      | My      | Y        | $\nu$     | Ypsilon |
| E        | $\varepsilon$ | Epsilon | N         | $\nu$      | Ny      | $\Phi$   | $\varphi$ | Phi     |
| Z        | $\zeta$       | Zeta    | $\Xi$     | $\xi$      | Xi      | X        | $\chi$    | Chi     |
| H        | $\eta$        | Eta     | O         | $\omicron$ | Omikron | $\Psi$   | $\psi$    | Psi     |
| $\Theta$ | $\theta$      | Theta   | $\Pi$     | $\pi$      | Pi      | $\Omega$ | $\omega$  | Omega   |

### 1.4 Logarithmieren

| Basiszahlen von Logarithmen |                                                |                              | Logarithmengesetze                                                           |
|-----------------------------|------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 2                           | Zweierlogarithmus<br>(dualer Logarithmus)      | $\log_2 b = \text{ld } b$    | $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$<br>$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ |
| $e = 2,718\dots$            | Natürlicher Logarithmus                        | $\log_e b = \ln b$           | $\log a^n = n \cdot \log a$                                                  |
| 10                          | Zehnerlogarithmus<br>(dekadischer Logarithmus) | $\log_{10} b = \text{ld } b$ | $\log \sqrt[n]{b^n} = \log b^{\frac{n}{a}} = \frac{n}{a} \log b$             |

#### Logarithmensysteme

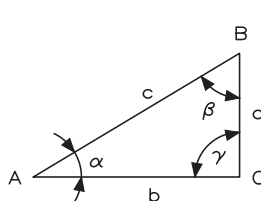
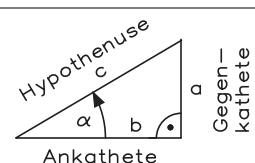
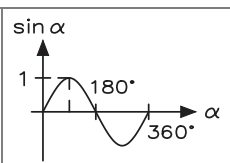
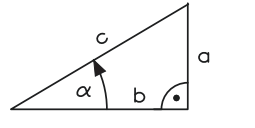
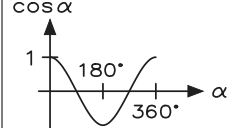
|          |                    |         |
|----------|--------------------|---------|
| lg 1000  | = 3, da $10^3$     | = 1000  |
| lg 100   | = 2, da $10^2$     | = 100   |
| lg 10    | = 1, da $10^1$     | = 10    |
| lg 1     | = 0, da $10^0$     | = 1     |
| lg 0,1   | = -1, da $10^{-1}$ | = 0,1   |
| lg 0,01  | = -2, da $10^{-2}$ | = 0,01  |
| lg 0,001 | = -3, da $10^{-3}$ | = 0,001 |

Regelregeln für Logarithmen

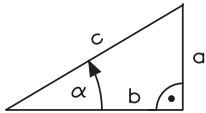
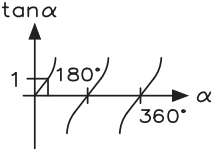
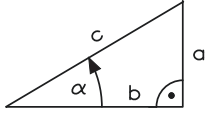
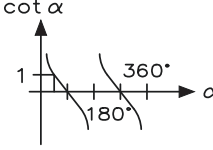
| Rechnungsart   | wird zurückgeführt auf | Regeln                                      |
|----------------|------------------------|---------------------------------------------|
| Multiplizieren | Addieren               | $\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$           |
| Dividieren     | Subtrahieren           | $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$           |
| Potenzieren    | Multiplizieren         | $\lg a^n = n \cdot \lg a$                   |
| Radizieren     | Dividieren             | $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a$ |

1.5 Funktionen

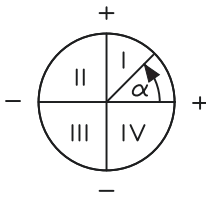
Winkelfunktionen (rechtwinklige Dreiecke)

|                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <p>Das Dreieck ABC heißt rechtwinkliges Dreieck (<math>\gamma = 90^\circ</math>). Die längste Seite <math>c</math> ist die Hypotenuse, die Seiten <math>a</math> und <math>b</math>, die Schenkel des rechten Winkels, sind die Katheten. Für den spitzen Winkel <math>\alpha</math> ist <math>b</math> die Ankathete und <math>a</math> die Gegenkathete. Für den spitzen Winkel <math>\beta</math> ist <math>a</math> die Ankathete und <math>b</math> die Gegenkathete. Rechtwinklige Dreiecke, welche gleiche Winkel aufweisen, sind ähnliche Dreiecke; ihre Seitenverhältnisse heißen Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen).</p> |                                                                |                                                                                      |
|  | $\sin \alpha = \frac{a}{c}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ |  |
|  | $\cos \alpha = \frac{b}{c}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $\text{Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$  |  |

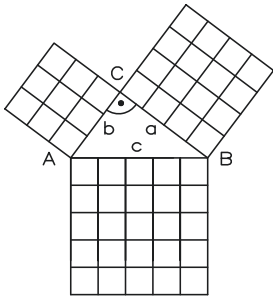
Winkelfunktionen (rechtwinklige Dreiecke) (Fortsetzung)

|                                                                                   |                             |                                                            |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ | Tangens = $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$   |  |
|  | $\cot \alpha = \frac{b}{a}$ | Cotangens = $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ |  |

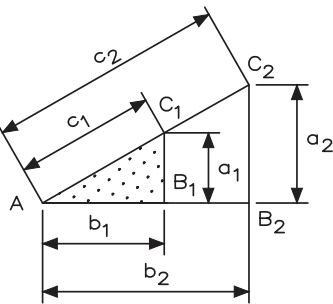
Vorzeichen der Winkelfunktionen in den vier Quadranten

|                                                                                   |          |             |     |     |     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|-------------|-----|-----|-----|-----|
|  | Quadrant | Winkel      | sin | cos | tan | cot |
|                                                                                   | I        | 0°... 90°   | +   | +   | +   | +   |
|                                                                                   | II       | 90°...180°  | +   | -   | -   | -   |
|                                                                                   | III      | 180°...270° | -   | -   | +   | +   |
|                                                                                   | IV       | 270°...360° | -   | +   | -   | -   |

Lehrsatz des Pythagoras

|                                                                                    |                                                                                      |                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
|  | Das Quadrat über der Hypothese $c$ ist gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate. | $c^2 = a^2 + b^2$<br>$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|

Strahlensatz (ähnliche Dreiecke)

|                                                                                     |                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Seiten des Dreiecks (A, B <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ,) wie die gleichliegenden Seiten des Dreiecks (A, B <sub>2</sub> , C <sub>2</sub> ). | $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$<br>$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$<br>$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

---

**Beziehung zwischen Winkelfunktion für gleiche Winkel**


---

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

|               | $\sin \alpha$                            | $\cos \alpha$                            | $\tan \alpha$                            | $\cot \alpha$                            |
|---------------|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\sin \alpha$ | –                                        | $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$               | $\tan \alpha / \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$ | $1 / \sqrt{1 - \cot^2 \alpha}$           |
| $\cos \alpha$ | $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$               | –                                        | $1 / \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$           | $\cot \alpha / \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$ |
| $\tan \alpha$ | $\sin \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ | $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} / \cos \alpha$ | –                                        | $1 / \cot \alpha$                        |
| $\cot \alpha$ | $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} / \sin \alpha$ | $\cos \alpha / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ | $1 / \tan \alpha$                        | –                                        |

---



---

**Berechnungen rechtwinkliger Dreiecke**


---

| Gegeben     | Ermittlung der anderen Größen                                                   | Gegeben | Ermittlung der anderen Größen                                                     |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $a, \alpha$ | $\beta = 90^\circ - \alpha, b = a \cdot \cot \alpha, c = \frac{a}{\sin \alpha}$ | $a, b$  | $\tan \alpha = \frac{a}{b}, c = \frac{a}{\sin \alpha}, \beta = 90^\circ - \alpha$ |
| $b, \alpha$ | $\beta = 90^\circ - \alpha, a = b \cdot \tan \alpha, c = \frac{b}{\cos \alpha}$ | $a, c$  | $\sin \alpha = \frac{a}{c}, b = c \cdot \cos \alpha, \beta = 90^\circ - \alpha$   |
| $c, \alpha$ | $\beta = 90^\circ - \alpha, a = c \cdot \sin \alpha, b = c \cdot \cos \alpha$   | $b, c$  | $\cos \alpha = \frac{b}{c}, a = c \cdot \sin \alpha, \beta = 90^\circ - \alpha$   |

---



---

**Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck**


---

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

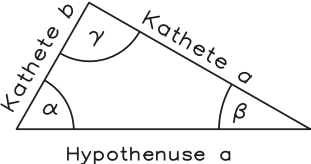
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}$$


---

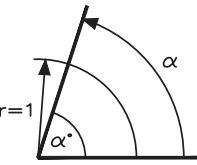
$\pm a$  plus oder minus  $a$

$\mp a$  minus oder plus  $a$

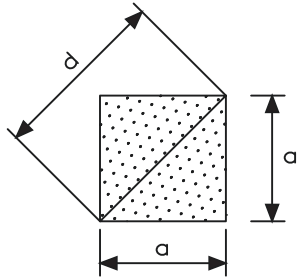
Winkelbeziehungen im schiefwinkligen Dreieck

|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                             | <p>Cosinussatz</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cdot \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cdot \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cdot \cos \gamma$       | <p>Sinussatz</p> $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$                                                                                                                   |
| <p>Seitenberechnung</p> $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$ $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$ $a = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \gamma}$ | <p>Flächenberechnung</p> $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$ $A = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}$ | <p>Winkelberechnung</p> $\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b} = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c}$ $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{b \cdot \sin \gamma}{c}$ $\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{c \cdot \sin \beta}{b}$ |

Winkel in Grad (°) und in Radiant (rad)

|                                                                                    |                                                                                                                                   |                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Ein ebener Winkel besitzt die Einheit Grad oder Radiant.<br/>Die Einheit Radiant entspricht dem Bogenmaß im Einheitskreis.</p> | <p><math>\alpha</math> Winkel in rad</p> <p><math>\alpha^\circ</math> Winkel in Grad</p> |
|                                                                                    | $90^\circ \triangleq \frac{\pi}{2}$ $180^\circ \triangleq \pi$ $360^\circ \triangleq 2\pi$                                        | $\alpha = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$                                      |

## 1.6 Längen-, Flächen- und Körperberechnungen

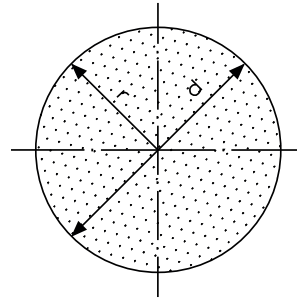


Quadrat

$$A = a^2$$

$$U = 4 \cdot a$$

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

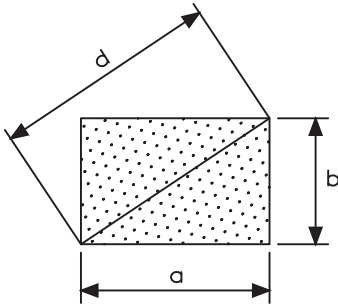


Kreis

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$U = \pi \cdot d$$

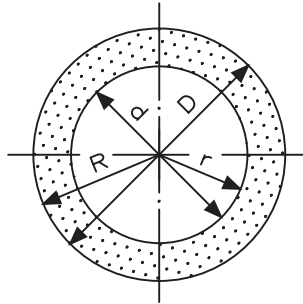


Rechteck

$$A = a \cdot b$$

$$U = 2 \cdot (a + b)$$

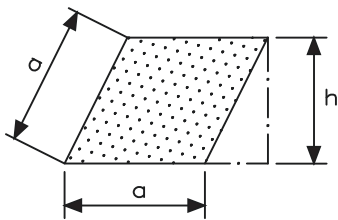
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Kreising

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

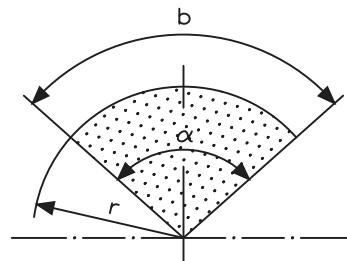
$$A = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$$



Raute (Rombus)

$$A = a \cdot h$$

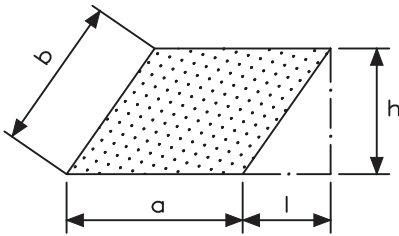
$$U = 4 \cdot a$$



Kreisausschnitt

$$A = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

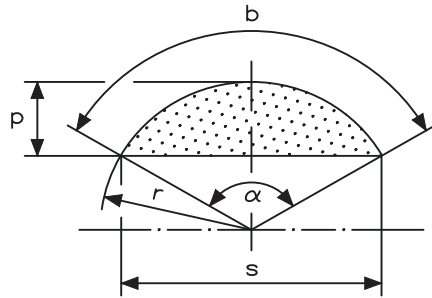


Parallelogramm

$$A = a \cdot h$$

$$U = 2 \cdot \left( a + \sqrt{l^2 + h^2} \right)$$

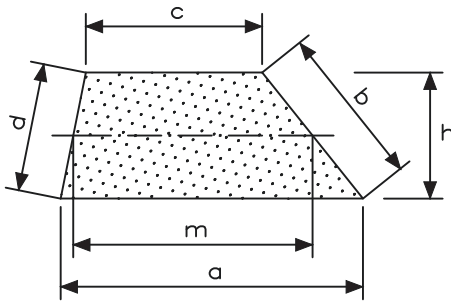
$$U = 2 \cdot (a + b)$$



Kreisabschnitt

$$A = \frac{b \cdot r - s(r - p)}{2}$$

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

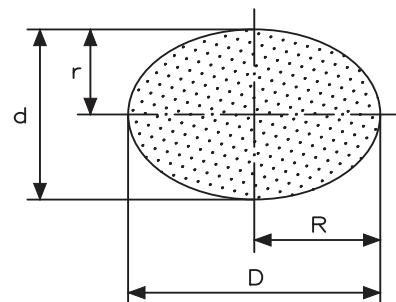


Trapez

$$A = m \cdot h$$

$$m = \frac{a + c}{2}$$

$$U = a + b + c + d$$

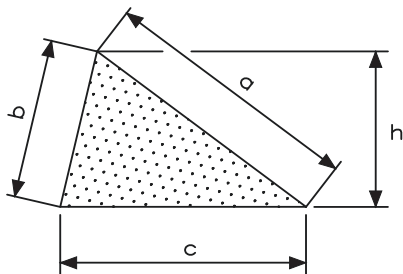


Ellipse

$$A = \frac{\pi \cdot D \cdot d}{2}$$

$$U = \pi \cdot \frac{D + d}{2}$$

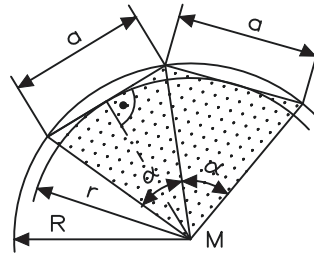
$$U = \pi \cdot \sqrt{2(R^2 + r^2)}$$



Dreieck

$$A = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$U = a + b + c$$



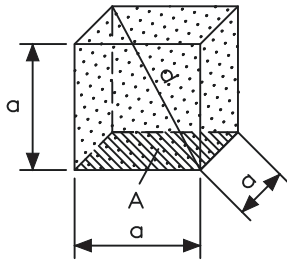
Regelmäßige n-Ecke

$$r = \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$U = n \cdot a$$

$$A = \frac{n \cdot \alpha^2}{4} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

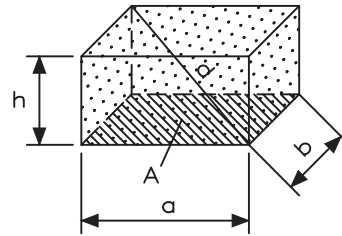


Würfel

$$V = a^3$$

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 6 \cdot a^2$$



Prisma

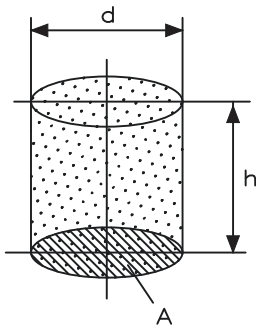
$$V = a \cdot b \cdot h$$

(allgemein:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

$$V = A \cdot h)$$

$$A = 2(a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$$

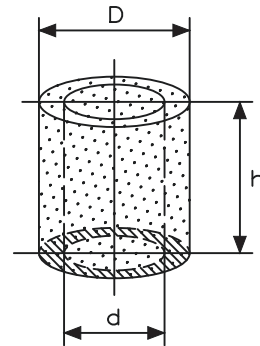


Zylinder

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$$

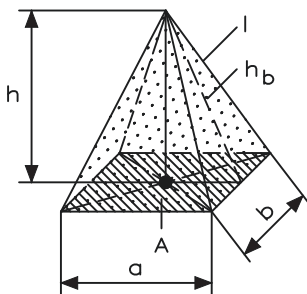
$$A_M = \pi \cdot d \cdot h$$

$$A_0 = \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi \cdot d^2}{2}$$



Hohlzylinder

$$V = \frac{\pi \cdot h}{4} \cdot (D^2 - d^2)$$

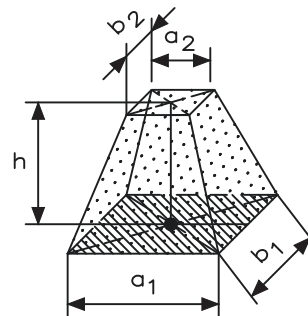


Pyramide

$$V = \frac{a \cdot b \cdot h}{3}$$

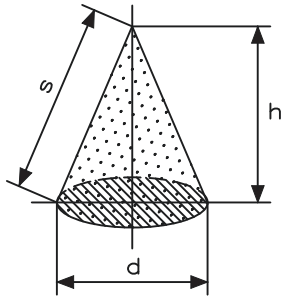
$$h_b = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$l = \sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}$$



Pyramidenstumpf

$$V = \frac{h}{3} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) + \sqrt{a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2}$$



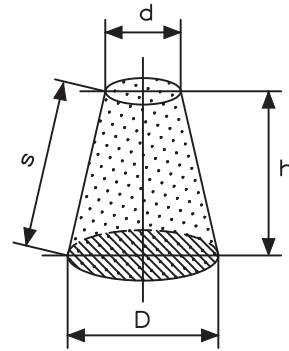
Kegel

$$V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{12}$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$A_M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$A_0 = \pi \cdot r \cdot s + \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$



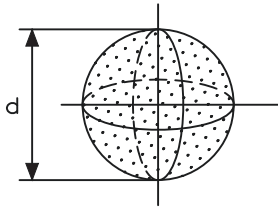
Kegelstumpf

$$V = \frac{\pi \cdot h}{12} (D^2 + d^2 + D \cdot d)$$

$$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$A_M = \frac{\pi \cdot s}{2} (D + d)$$

$$A_0 = \frac{\pi \cdot s}{2} (D + d) + \frac{\pi}{4} (D^2 + d^2)$$

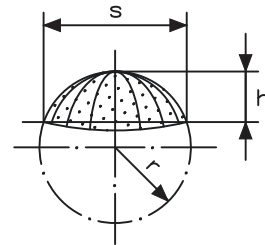


Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$$

$$A = \pi \cdot d^2$$



Kugelabschnitt

$$V = \pi \cdot h^2 \cdot \left( r - \frac{h}{3} \right)$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A = \frac{\pi}{4} (s^2 + 4h^2)$$

$A_M$ : Mantelfläche

$A_0$ : Gesamtoberfläche

1.7 Vorsätze und Vorsatzzeichen für dezimale Teile und Vielfache

| Faktor     | Vorsätze | Vorsatzzeichen | Faktor    | Vorsätze | Vorsatzzeichen |
|------------|----------|----------------|-----------|----------|----------------|
| $10^{-18}$ | Atto     | a              | $10^1$    | Deka     | da             |
| $10^{-15}$ | Femto    | f              | $10^2$    | Hekto    | h              |
| $10^{-12}$ | Piko     | p              | $10^3$    | Kilo     | k              |
| $10^{-9}$  | Nano     | n              | $10^6$    | Mega     | M              |
| $10^{-6}$  | Mikro    | $\mu$          | $10^9$    | Giga     | G              |
| $10^{-3}$  | Milli    | m              | $10^{12}$ | Tera     | T              |
| $10^{-2}$  | Zenti    | c              | $10^{15}$ | Peta     | P              |
| $10^{-1}$  | Dezi     | d              | $10^{18}$ | Exa      | E              |

1.8 SI-Basiseinheiten

Die SI-Einheiten (Système International d’Unités) wurden auf einer Generalkonferenz (1960) für Maß und Gewicht angenommen. Die Basiseinheiten sind definierte Einheiten der voneinander unabhängigen Basisgrößen als Grundlage des SI-Systems.

| Größe                       | Formelzeichen | Einheitenname | Einheitenzeichen |
|-----------------------------|---------------|---------------|------------------|
| Länge                       | $l$           | Meter         | m                |
| Masse                       | $m$           | Kilogramm     | kg               |
| Zeit                        | $t$           | Sekunde       | s                |
| elektrische Stromstärke     | $I$           | Ampere        | A                |
| thermodynamische Temperatur | $T$           | Kelvin        | K                |
| Lichtstärke                 | $I_v$         | Candela       | cd               |
| Stoffmenge                  | $n$           | Mol           | mol              |

---

**Definitionen der Basiseinheiten**


---

**Meter:** 1 m ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Intervalls von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft.

**Kilogramm:** 1 kg ist die Masse des in Paris aufbewahrten Internationalen Kilogrammprototyps (Platin-Iridium-Zylinder).

**Sekunde:** 1 s ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der Strahlung des Nuklids Caesium  $^{133}\text{Cs}$ .

**Ampere:** 1 A ist die Stärke eines Gleichstromes, der zwei lange, gerade und im Abstand von 1 m parallel verlaufende Leiter mit sehr kleinen kreisförmigem Querschnitt durchfließt und zwischen diesen die Kraft  $0,2 \cdot 10^{-6}$  N je Meter ihrer Länge erzeugt.

**Kelvin:** 1 K ist der 273,16te Teil der Temperaturdifferenz zwischen dem absoluten Nullpunkt und dem Tripelpunkt des Wassers. Beim Tripelpunkt sind Dampf, Flüssigkeit und fester Stoff im Gleichgewicht.

**Candela:** 1 cd ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle in bestimmter Richtung, die eine monochromatische Strahlung der Frequenz 540 Terahertz (THz) aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1/683 Watt je Steradian (W/sr) beträgt.

**Mol:** 1 mol ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in  $12 \cdot 10^{-3}$  kg des Nuklids Kohlenstoff  $^{12}\text{C}$  enthalten sind.

---



---

**Elektrische Einheiten – Umwandlung von Einheiten**


---

$$1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{Watt}}{\text{Ampere}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$$

$$1 \text{ Ampere} = 1 \frac{\text{Watt}}{\text{Volt}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{V} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}^3}$$

$$1 \text{ Ohm} = 1 \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}}$$

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ Volt} \cdot \text{Ampere} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

$$1 \text{ Farad} = 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = 1 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{s}}{\Omega} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{V}^2 \cdot \text{s}^2}$$

$$1 \text{ Henry} = 1 \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} = 1 \Omega \cdot \text{s} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$$

$$1 \text{ Weber} = 1 \text{ Voltsekunde} = 1 \frac{\text{J}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

$$1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ Amperesekunde} = 1 \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}^2}$$


---

**Einheiten nach DIN 1302**

| <b>Zeichen</b> | <b>Einheit</b> | <b>Bemerkung</b>                        |
|----------------|----------------|-----------------------------------------|
| rad            | Radian         | 1 rad = 1 m/m                           |
| sr             | Steradian      | 1 sr = 1 m <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> |
| m              | Meter          |                                         |
| m <sup>2</sup> | Quadratmeter   |                                         |
| m <sup>3</sup> | Kubikmeter     |                                         |
| s              | Sekunde        |                                         |
| Hz             | Hertz          | 1 Hz = 1 s <sup>-1</sup>                |
| kg             | Kilogramm      |                                         |
| N              | Newton         | 1 N = 1 kg · m/s <sup>2</sup>           |
| Pa             | Pascal         | 1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup>               |
| J              | Joule          | 1 J = 1 N · m = 1 W · s                 |
| W              | Watt           | 1 W = 1 J/s                             |
| C              | Coulomb        | 1 C = 1 A · s                           |
| V              | Volt           | 1 V = 1 J/C                             |
| F              | Farad          | 1 F = 1 C/V                             |
| A              | Ampere         |                                         |
| Wb             | Weber          | 1 Wb = 1 V · s                          |
| T              | Tesla          | 1 T = 1 Wb/m <sup>2</sup>               |
| H              | Henry          | 1 H = 1 Wb/A                            |
| Ω              | Ohm            | 1 Ω = 1 V/A                             |
| S              | Siemens        | 1 S = 1 Ω <sup>-1</sup>                 |
| K              | Kelvin         |                                         |
| °C             | Grad Celsius   | 1 °C = 1 K                              |
| mol            | Mol            |                                         |
| cd             | Candela        |                                         |
| lm             | Lumen          | 1 lm = 1 cd · sr                        |
| lx             | Lux            | 1 lx = 1 lm/m <sup>2</sup>              |
| Bq             | Becquerel      | 1 Bq = 1 s <sup>-1</sup>                |
| Gy             | Gray           | 1 Gy = 1 J/kg                           |

**Einheiten außerhalb des SI nach DIN 13011-1**

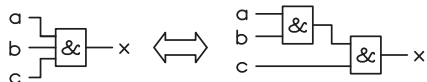
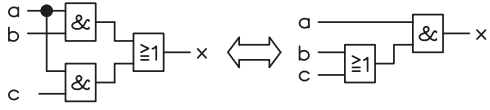
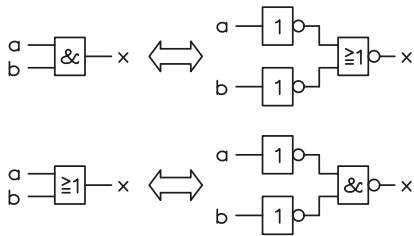
|     |            |                         |
|-----|------------|-------------------------|
| gon | Gon        | 1 gon = (π/200) rad     |
| l   | Liter      | 1 l = 1 dm <sup>3</sup> |
| min | Minute     | 1 min = 60 s            |
| h   | Stunde     | 1 h = 60 min            |
| d   | Tag        | 1 d = 24 h              |
| a   | Gemeinjahr | 1 a = 365 d = 8760 h    |

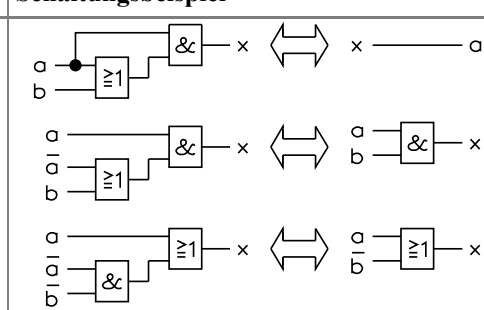
Einheiten außerhalb des SI nach DIN 13011-1 (Fortsetzung)

|     |                       |                                                   |
|-----|-----------------------|---------------------------------------------------|
| t   | Tonne                 | $1\text{ t} = 10^3\text{ kg} = 1\text{ Mg}$       |
| bar | Bar                   | $1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$                   |
| a   | Ar                    | $1\text{ a} = 10^2\text{ m}^2$                    |
| ha  | Hektar                | $1\text{ ha} = 10^4\text{ m}^2$                   |
| eV  | Elektronvolt          | $1\text{ eV} = 1,602189 \cdot 10^{-19}\text{ J}$  |
| u   | atomare Masseneinheit | $1\text{ u} = 1,6605655 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ |
| Kt  | metrisches Karat      | $1\text{ Kt} = 0,2\text{ g}$                      |

1.9 Schaltalgebra

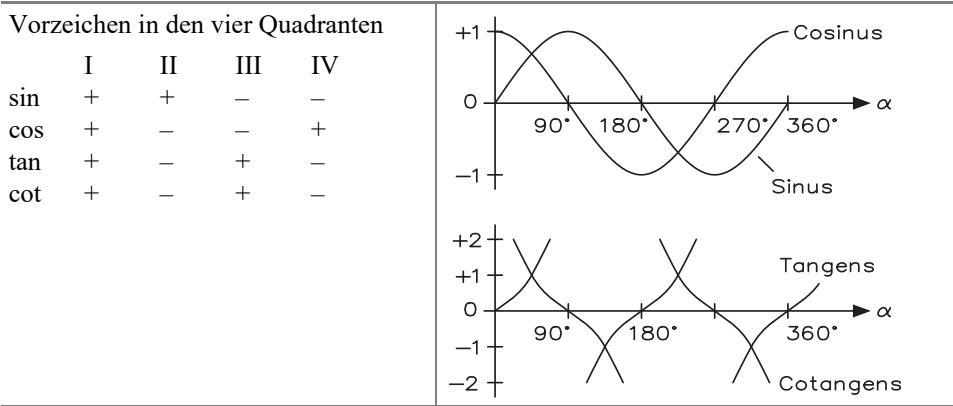
|                                                                                                                                            |                                                                                                                                     |                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Konjunktion</b><br>(UND-Funktion)<br>$x = a \wedge 0 = 0$<br>$x = a \wedge 1 = a$<br>$x = a \wedge a = a$<br>$x = a \wedge \bar{a} = 0$ | <b>Disjunktion</b><br>(ODER-Funktion)<br>$x = a \vee 0 = a$<br>$x = a \vee 1 = 1$<br>$x = a \vee a = a$<br>$x = a \vee \bar{a} = 1$ | <b>Negation</b><br>(NICHT-Funktion)<br>$x = \bar{a}$<br>$x = \bar{\bar{a}} = a$<br>$x = \bar{\bar{\bar{a}}} = \bar{a}$<br>$x = \bar{\bar{\bar{\bar{a}}}} = a$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

| Rechenregel                                                                                                                                                                                                                                           | Schaltungsbeispiel                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vertauschungsregel</b><br>(kommunikatives Gesetz)<br>$x = a \wedge b = b \wedge a$<br>$x = a \vee b = b \vee a$                                                                                                                                    |    |
| <b>Verbindungsregel</b> (assoziatives Gesetz)<br>$x = a \wedge b \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$<br>$= b \wedge (a \wedge c) = c \wedge (a \wedge b)$<br>$x = a \vee b \vee c = a \vee (b \vee c)$<br>$= b \vee (a \vee c) = c \vee (a \vee b)$     |  |
| <b>Verteilungsregel</b> (distributives Gesetz)<br>$x = a \wedge b \vee a \wedge c = a \wedge (b \vee c)^{1)}$<br>$x = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$<br><small>1) UND-Funktion immer vor ODER-Funktion</small>                   |  |
| <b>De Morgan'sches Gesetz</b><br>$x = a \wedge b = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$<br>$x = a \vee b = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$<br>$x = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$<br>$x = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ |  |

| Rechenregel                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Schaltungsbeispiel                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vereinfachung</b><br>$x = a \wedge (b \vee b) = a$<br>$x = a \vee a \wedge b = a$<br>$x = a \wedge (\bar{a} \vee b) = a \wedge b$<br>$x = a \vee (\bar{a} \wedge b) = a \vee b$<br>$x = a \vee \bar{a} \wedge \bar{b} = a \vee \bar{b}$<br>$x = a \vee a \wedge b = \bar{a} \vee b$<br>$x = a \vee a \wedge \bar{b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ |  |

1.10 Trigonometrie (Ebene)

Winkelfunktionen



Besondere Werte

|     | 0°   | 30°                   | 45°                   | 60°                   | 90°  | 180° | 270° | 360° |
|-----|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------|------|------|------|
| sin | 0    | $\frac{1}{2}$         | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1    | 0    | -1   | 0    |
| cos | 1    | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$         | 0    | -1   | 0    | 1    |
| tan | 0    | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1                     | $\sqrt{3}$            | (±∞) | 0    | (±∞) | 0    |
| cot | (±∞) | $\sqrt{3}$            | 1                     | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 0    | (±∞) | 0    | (±∞) |

**Zusammenhänge**

|     | $90^\circ \pm \alpha$ | $180^\circ \pm \alpha$ | $270^\circ \pm \alpha$ | $360^\circ \pm \alpha$ | $-\alpha$      |
|-----|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------|
| sin | $\cos \alpha$         | $\mp \sin \alpha$      | $-\cos \alpha$         | $\pm \sin \alpha$      | $-\sin \alpha$ |
| cos | $\mp \sin \alpha$     | $-\cos \alpha$         | $\pm \sin \alpha$      | $\cos \alpha$          | $\cos \alpha$  |
| tan | $\mp \cot \alpha$     | $\pm \tan \alpha$      | $\mp \cot \alpha$      | $\pm \tan \alpha$      | $-\tan \alpha$ |
| cot | $\mp \tan \alpha$     | $\pm \cot \alpha$      | $\mp \tan \alpha$      | $\pm \cot \alpha$      | $-\cot \alpha$ |

|                 | $\sin^2 \alpha$                                 | $\cos^2 \alpha$                                 | $\tan^2 \alpha$                           | $\cot^2 \alpha$                           |
|-----------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\sin^2 \alpha$ | –                                               | $1 - \cos^2 \alpha$                             | $\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ | $\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$             |
| $\cos^2 \alpha$ | $1 - \sin^2 \alpha$                             | –                                               | $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$             | $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$ |
| $\tan^2 \alpha$ | $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$       | $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$       | –                                         | $\frac{1}{\cot^2 \alpha}$                 |
| $\cot^2 \alpha$ | $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$       | $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$       | $\frac{1}{\tan^2 \alpha}$                 | –                                         |
|                 | $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ | $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$ | $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$       | $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$       |

**Additionstheoreme**

|                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Summe und<br>Differenzen: | $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$<br>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$<br>$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$<br>$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$<br>$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Additionstheoreme (Fortsetzung)**

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Doppelter Winkel:  | $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$ |
| Dreifacher Winkel: | $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \qquad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$                                                                                                                                                                                                                                               |
| Halber Winkel:     | $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$                                                                      |

**Sätze**

|                  |                                                                                                                                       |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sinussatz:       | $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \qquad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$ |
| Cosinussatz:     | $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \qquad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$                                                  |
| Tangenssatz:     | $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}$                                                   |
| Projektionssatz: | $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$                                                                                                    |

**Formeln und Funktionen**

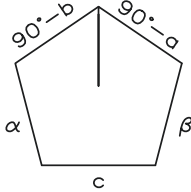
|                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dreiecksfläche:           | $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Euler'sche Funktionen:    | $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \qquad e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$                                                                                                                                                                                                |
| Winkelfunktionen:         | $\sin \varphi = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \qquad \cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$ $\tan \varphi = \frac{1}{j} \cdot \frac{e^{2j\varphi} - 1}{e^{2j\varphi} + 1} = \frac{1}{j} \cdot \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}$ |
| Hyperbolische Funktionen: | $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$                                                                                                                        |

## 1.11 Sphärische Trigonometrie

### Zweieck

Flächeninhalt:  $A = \frac{2x}{180^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$

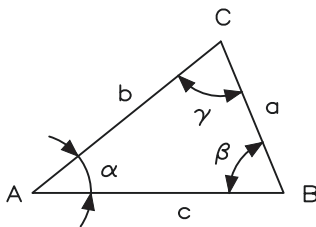
### Rechtwinkliges Dreieck ( $\gamma = 90^\circ$ )



Neper'sche Regel: Ersetzt man  $a$  und  $b$  durch ihre Komplemente und lässt man  $\gamma$  aus, so gilt:

- der Cosinus einer jeder Strecke als gleich
  - dem Produkt der Cotangenswerte der anliegenden Strecke und
  - dem Produkt der Sinuswerte der gegenüberliegenden Strecke
- $$\begin{aligned} \cos c &= \cot \alpha \cot \beta = \cos a \cos b \\ \cos \alpha &= \tan b \cot c = \sin \beta \cos a & \sin \alpha &= \tan b \cot \beta = \sin \alpha \sin c \\ \cos \beta &= \tan a \cot c = \sin \alpha \cos b & \sin b &= \tan a \cot \alpha = \sin \beta \sin c \end{aligned}$$

### Allgemeines Dreieck



Sinussatz:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Seitencosinussatz:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Winkelcosinussatz:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Winkelsumme:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon \quad (\varepsilon = \text{sphärischer Exzess})$$

## 1.12 Gleichungen

### Quadratische Gleichungen

|                 |                                                                                                                                                                      |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Normalform:     | $x^2 + px + q = 0$                                                                                                                                                   |
| Lösungen:       | $x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$                                                             |
| Diskriminante:  | $D = p^2 - 4q$ ; $D > 0$ : $x_1, x_2$ reell und voneinander verschieden<br>$D = 0$ : $x_1, x_2$ reell und einander gleich<br>$D < 0$ : $x_1, x_2$ konjugiert komplex |
| Satz von Vieta: | $x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q$                                                                                                                            |

### Kubische Gleichungen

|                 |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Normalform:     | $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ durch Substitution $x = y - \frac{a_1}{3}$<br>reduziert auf $y^3 - py + q = 0$                                                                                                                                |
| Lösungen:       | $p = \frac{a_1^2}{3} - a_2; \quad q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3$                                                                                                                                                              |
| Diskriminante:  | $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$                                                                                                                                                                                   |
| $D > 0$ :       | Cardanische Formel: $y_1$ reell, $y_2, y_3$ konjugiert komplex<br>$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$<br>$y_1 = u + v \quad y_{2,3} = -\frac{u+v}{2} \pm \frac{u-v}{2} j\sqrt{3}$              |
| $D = 0$ :       | $y_1$ reell, $y_2, y_3$ reell und einander gleich<br>$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}; \quad y_1 = 2u; \quad y_{2,3} = -u$                                                                                                                       |
| $D < 0$ :       | $y_1, y_2, y_3$ reell und voneinander verschieden<br>$\cos \varphi = \frac{-q/2}{\sqrt{(p/3)^3}}; \quad y_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3};$<br>$y_{2,3} = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(60^\circ \mp \frac{\varphi}{3}\right)$ |
| Satz von Vieta: | $x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = +a_2, \quad x_1 x_2 x_3 = -a_3$                                                                                                                                                    |

### Näherungslösung von $f(x) = 0$

Sekantennäherungsverfahren: Aus zwei bekannten Näherungswerten  $x_1$  und  $x_2$  findet man

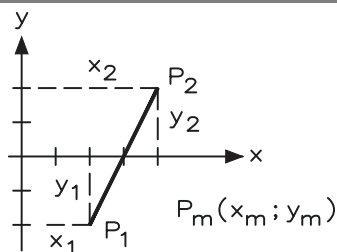
$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1) \quad \text{für} \quad f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

Tangentennäherungsverfahren: Aus einem bekannten Näherungswert  $x_1$  findet man

(Newton Näherungsverfahren)  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{für} \quad f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0.$

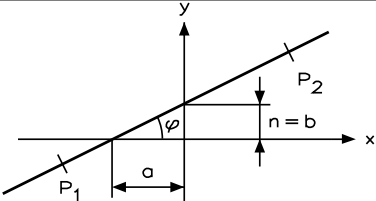
## 1.13 Analytische Geometrie

### Strecke



|                        |                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Länge:                 | $\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$                                                                                                                                               |
| Streckenmittelpunkt:   | $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$                                                                                                                                              |
| Streckenteilungspunkt: | $\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$<br>innere Teilung: $\lambda > 0$<br>äußere Teilung: $\lambda < 0$<br>Teilverhältnis: $\lambda = m : n$ |
| Dreiecksfläche:        | $A = -\frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$                                                                                                                                     |
| Schwerpunkt:           | $x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$<br>(Schnittpunkt der Seitenhalbierenden)                                                                                         |

**Gerade**

|                                 |                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                    |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Normalform:                     | $y = mx + n$                                                                                                                                                                                                                         | $m$ = Anstieg von $\tan \varphi$<br>$n$ = Abschnitt auf $y$ -Achse                 |
| Achsenabschnittsgleichung:      | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$                                                                                                                                                                                                      | $a$ = Abschnitt auf $x$ -Achse<br>$b$ = Abschnitt auf $y$ -Achse                   |
| Zweipunktgleichung:             | $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$                                                                                                                                                                              |  |
| Punkttrichtungs-gleichung:      | $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan \varphi$                                                                                                                                                                                             |                                                                                    |
| Allgemeine Geraden-gleichung:   | $Ax + By + C = 0$<br>( $A^2 + B^2 > 0$ )                                                                                                                                                                                             |                                                                                    |
| Hesse'sche Normal-form:         | $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ ( $p \geq 0$ )<br>$p$ Lot von Nullpunkt auf Gerade<br>$\alpha$ Winkel zwischen Lot und positiver $x$ -Achse                                                                                |                                                                                    |
| Abstand der Geraden von $P_1$ : | $d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$ $\cos \alpha = -\frac{ C }{C} \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$<br>$\sin \alpha = -\frac{ C }{C} \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$<br>$p = -\frac{ C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ( $C \neq 0$ ) |                                                                                    |

**Zwei Geraden**

|                                |                                                                                          |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Normalform:                    | $y = m_1x + n_1; y = m_2x + n_2$                                                         |
| Schnittwinkel:                 | $\psi$ aus $\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ (für $\psi \neq 90^\circ$ ) |
| Parallele Geraden:             | $m_1 = m_2$                                                                              |
| Zueinander senkrechte Geraden: | $m_1 m_2 = -1$                                                                           |

**Kegelschnitte**

|                                        |                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Allgemeine Gleichung (zweiten Grades): | $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$<br>$AC - B^2 > 0$ Ellipse, Punkt oder imaginäre Kurve<br>$AC - B^2 < 0$ Hyperbel oder Geradenpaar<br>$AC - B^2 = 0$ Parabel oder Parallelenpaar |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

| Größe                                     | Kreis                                                                                     | Ellipse <sup>1)</sup>                                                                                     | Hyperbel <sup>1)</sup> | Parabel                                                                                |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
|                                           | $r$ Radius                                                                                | $a$ große, $b$ kleine Halbachse                                                                           |                        | $2p$ Parameter                                                                         |
| Mittelpunkt O<br>(0; 0)                   | $x^2 + y^2 = r^2$                                                                         | $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$                                                                 |                        | Scheitel O (0; 0)<br>$y^2 = 2px$                                                       |
| Tangente in $P_1$<br>(Polare zu $P_1$ )   | $xx_1 + yy_1 = r^2$                                                                       | $\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1$                                                               |                        | $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$                                                             |
| Normale durch $P_1$                       | $y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$                                                             | $y - y_1 = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$                                                         |                        | $y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1)$                                                   |
| Tangente von $P_2$                        | $y - y_2 = (x - x_2) \cdot \frac{-x_2 y_2 \pm r \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - r^2}}{r^2 - x_2^2}$ | $y - y_2 = (x - x_2) \cdot \frac{-x_2 y_2 \pm \sqrt{\pm b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 \mp a^2 b^2}}{a^2 - x_2^2}$ |                        | $y - y_2 = (x - x_2) \cdot \frac{y_2 \pm \sqrt{y_2^2 - 2px_2}}{2x_2}$                  |
| Tangente mit<br>Anstieg $m$               | $y - mx = \pm r \sqrt{m^2 + 1}$                                                           | $y - mx = \pm \sqrt{m^2 a^2 \pm b^2}$                                                                     |                        | $y - mx = \frac{p}{2m}$                                                                |
| Mittelpunkt $M$<br>( $c$ ; $d$ )          | $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$                                                             | $\frac{(x - c)^2}{a^2} \pm \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1$                                                     |                        | Scheitel M ( $c$ ; $d$ )<br>$(y - d)^2 = 2p(x - c)$                                    |
| Tangente in $P_1$<br>(Polare zu $P_1$ )   | $(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2$                                               | $\frac{(x - c)(x_1 - c)}{a^2} \pm \frac{(y - d)(y_1 - d)}{b^2} = 1$                                       |                        | $(y - d)(y_1 - d) = p(x - c) + p(x_1 - c)$                                             |
| $2p$ ist Sehne senkrecht durch Brennpunkt | $p = r$                                                                                   | $p = \frac{b^2}{a}$                                                                                       |                        | $p$                                                                                    |
| Scheitelfgleichung                        | $y^2 = 2px - x^2$                                                                         | $y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} \cdot x^2$                                                                     |                        | siehe oben                                                                             |
| Exzentrizität                             |                                                                                           |                                                                                                           |                        |                                                                                        |
| – lineare                                 | –                                                                                         | $e^2 = a^2 \mp b^2$                                                                                       |                        | Länge des Brennstrahls $x_1 + p/2$ ,<br>der Subtangente $2x_1$ ,<br>der Subnormale $p$ |
| – numerische                              | –                                                                                         | $\varepsilon = \frac{e}{a} \leq 1$                                                                        |                        |                                                                                        |
| Polargleichung                            |                                                                                           |                                                                                                           |                        |                                                                                        |
| – Mittelpunkt ist Pol                     | –                                                                                         | $\rho^2 = \frac{\pm b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta}$                                             |                        |                                                                                        |
| – Brennpunkt ist Pol                      | –                                                                                         | $r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$                                                              |                        | $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$                                                       |

<sup>1)</sup> Bei den übereinandergesetzten Rechenzeichen gilt das obere Rechenzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel.

1.14 Vektoren

| Allgemeines       |                                                                                                                                                                              |  |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Darstellung:      | $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$<br>$a =  a  \cos \alpha_1 \cdot i +  a  \cos \alpha_2 \cdot j +  a  \cos \alpha_3 \cdot k$                                                       |  |
| Betrag:           | $ a  = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$<br>$ a  = \sqrt{a \cdot a}$                                                                                                         |  |
| Einheitsvektor:   | $a^0 = \frac{a}{ a }$<br>$ i  =  j  =  k  = 1$ (normierter Vektor)                                                                                                           |  |
| Nullvektor:       | $O = (0, 0, 0)$                                                                                                                                                              |  |
| Richtungscosinus: | $\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{ a }, \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_2}{ a }, \quad \cos \alpha_3 = \frac{a_3}{ a }$<br>$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ |  |
| Summe, Differenz: | $a \pm b = (a_1 \pm b_1) i + (a_2 \pm b_2) j + (a_3 \pm b_3) k$                                                                                                              |  |

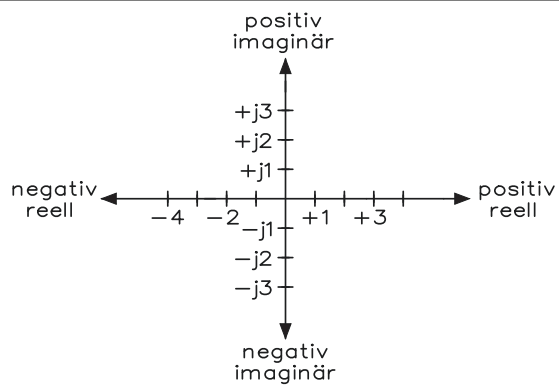
1.14.1 Skalarprodukt

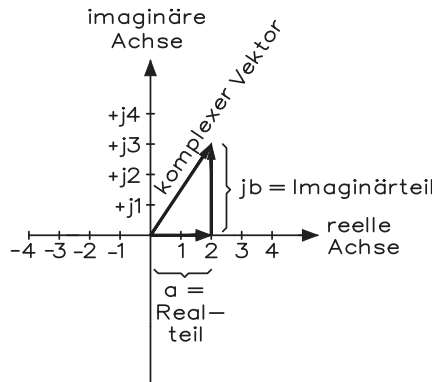
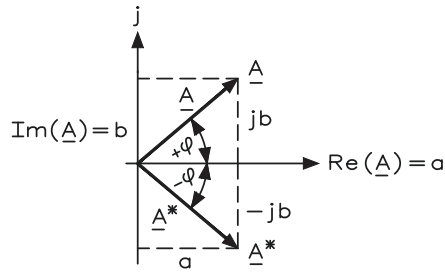
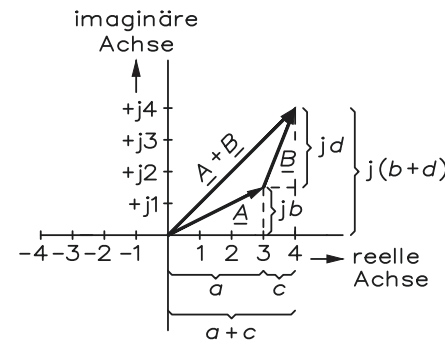
|                                                                |                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Schreibweise:                                                  | $a \cdot b =  a   b  \cos (a, b)$<br>$a \cdot b = 0$ für $a \perp b$ , für $a = 0$ oder für $b = 0$<br>$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$<br>$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$ |
| Kommutativgesetz:                                              | $a \cdot b = b \cdot a$                                                                                                                                                                     |
| Distributivgesetz:                                             | $c(a + b) = c \cdot a + c \cdot b$                                                                                                                                                          |
| Matrixschreibweise:                                            | $a \cdot b = (a_1 a_2 a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$                                                                                                           |
| Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl $\alpha$ : | $\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$                                                                                                                              |

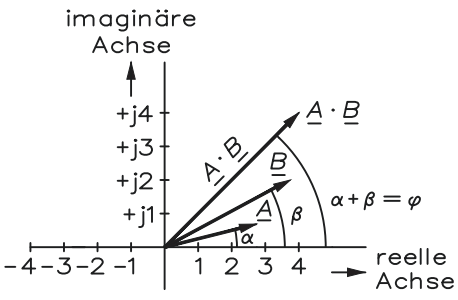
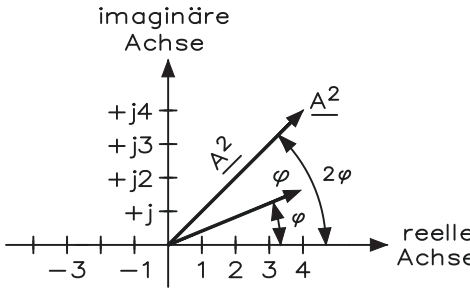
1.14.2 Vektorprodukt

|                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Schreibweise:                                                                      | $x \cdot b = c$<br>Betrag $ c  =  a   b  \sin(a, b)$ ; Richtung $c \perp a, b$<br>$a, b, c$ Rechtssystem                                                                                                                                                                                  |
| Determinanten-Schreibweise:                                                        | $a \cdot b = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} =$ $= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$ $a \cdot a = 0$ $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 0$ $i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j$ |
| Kommutativgesetz:                                                                  | nicht gültig, denn $a \cdot b = -b \cdot a$                                                                                                                                                                                                                                               |
| Distributivgesetz:                                                                 | $a(b \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Geradengleichung<br>– Punktrichtungs-<br>gleichung:<br>– Zweipunkte-<br>gleichung: | $r = r_1 + ta$<br>$r = r_1 + t(r_2 - r_1) \quad t = \text{Parameter}$                                                                                                                                                                                                                     |

1.15 Komplexe Zahlen

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Normalform: | <div><p>Diagram of the complex plane. The horizontal axis is labeled 'negativ reell' on the left and 'positiv reell' on the right. The vertical axis is labeled 'positiv imaginär' at the top and 'negativ imaginär' at the bottom. Tick marks are present at intervals of 1 unit. On the real axis, labels are -4, -2, -1, +1, +3. On the imaginary axis, labels are +j3, +j2, +j1, -j1, -j2, -j3.</p></div> <div><math>\underline{z} = a + jb</math><br/><math>a</math> Realteil, <math>b</math> Imaginärteil<br/><math>j</math> imaginäre Einheit; beachte: <math>j^2 = -1</math></div> |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Trigonometrische Form:     | <div></div> <div><math display="block">\underline{z} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)</math><math display="block">a = r \cos \varphi; b = r \sin \varphi</math><math display="block">r =  \underline{a}  + jb = +\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}</math><p><math>r</math> Betrag, <math>\varphi</math> Argument</p></div> |
| Exponentialform:           | $\underline{z} = r e^{j\varphi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Konjugiert komplexe Zahl:  | <div></div> <div><math display="block">\underline{z}^* = a - jb = r(\cos \varphi - j \sin \varphi) = r e^{-j\varphi}</math></div>                                                                                                                                                                                                            |
| Addieren und Subtrahieren: | <div><p>Addition</p></div> <div><math display="block">(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)</math></div>                                                                                                                                                                                                           |

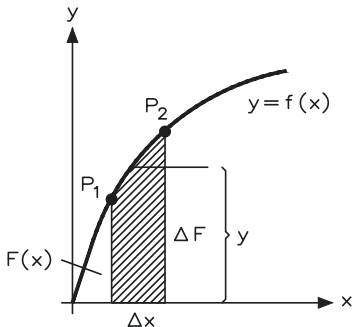
|                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Multiplizieren: | <div></div> <div><math display="block">r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]</math></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Dividieren:     | <div></div> <div><math display="block">r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) : r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]</math></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Potenzieren:    | <div><math display="block">[r (\cos \varphi - j \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n \varphi + j \sin n \varphi) \quad \text{Moivre'sche Formel}</math></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Radizieren:     | <div><p>Jede komplexe Zahl <math>\underline{z} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)</math> hat <math>n</math> verschiedene <math>n</math>-te Wurzeln <math>w_0, \dots, w_{n-1}</math>:</p><math display="block">\underline{w}_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \frac{\cos \varphi + k \cdot 2\pi}{n} + j \frac{\sin \varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, \dots, n - 1</math><p>Speziell für <math>\underline{z} = a</math> (positiv reell):</p><math display="block">\underline{w}_k = \sqrt[n]{a} \cdot \left( \frac{\cos k \cdot 2\pi}{n} + j \frac{\sin k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, \dots, n - 1</math><p>Einheitswurzeln (<math>n</math>-te Wurzel aus 1):</p><math display="block">\underline{w}_k = 1 \cdot \left( \frac{\cos k \cdot 2\pi}{n} + j \frac{\sin k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, \dots, n - 1</math></div> |

### 1.16 Grenzwerte

|                   |                                                                                                                                      |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Summe, Differenz: | <div><math display="block">\lim_{x \rightarrow a} (u \pm v) = \lim_{x \rightarrow a} u \pm \lim_{x \rightarrow a} v</math></div>     |
| Produkt:          | <div><math display="block">\lim_{x \rightarrow a} (u \cdot v) = \lim_{x \rightarrow a} u \cdot \lim_{x \rightarrow a} v</math></div> |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Quotient:  | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{v} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u}{\lim_{x \rightarrow a} v} \quad \text{für} \quad \lim_{x \rightarrow a} v \neq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| Beispiele: | $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } a < 1 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828128\dots$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{für } a > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ |  |

## 1.17 Differentialrechnungen

| Regel                | Funktion                   | Differentialquotient                                                                                                |
|----------------------|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Konstanter Faktor:   | $y = a \cdot f(x)$         |  $\frac{dy}{dx} = a \cdot f'(x)$ |
| Summe und Differenz: | $y = u \pm v$              | $\frac{dy}{dx} = u' \pm v'$                                                                                         |
| Produkt:             | $y = u \cdot v$            | $\frac{dy}{dx} = vu' + uv'$                                                                                         |
| Quotient:            | $y = \frac{u}{v}$          | $\frac{dy}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$                                                                             |
| Kettenregel:         | $y = f[\varphi(x)] = f(z)$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$                                                                 |

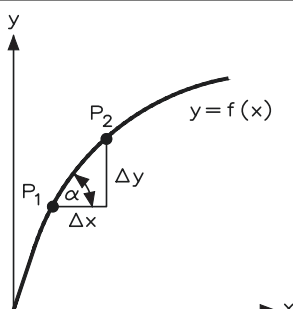
|                     |                      |                                                        |
|---------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|
| Reziproke Funktion: | $y = \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$              |
| Inverse Funktion:   | $y = \varphi(y)$     | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$ |

| Ableitungen einiger Funktionen |                                                      |                               |                                          |
|--------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------|
| Funktion                       | Differentialquotient                                 | Funktion                      | Differentialquotient                     |
| $y = c$                        | $\frac{dy}{dx} = 0$                                  | $y = \arccos x$               | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = x^n$                      | $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$                           | $y = \arctan x$               | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$        |
| $y = \sin x$                   | $\frac{dy}{dx} = \cos x$                             | $y = \operatorname{arccot} x$ | $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$       |
| $y = \cos x$                   | $\frac{dy}{dx} = -\sin x$                            | $y = a^x$                     | $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$              |
| $y = \tan x$                   | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$  | $y = e^x$                     | $\frac{dy}{dx} = e^x$                    |
| $y = \cot x$                   | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ | $y = \lg x$                   | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lg e$      |
| $y = \arcsin x$                | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$             | $y = \ln x$                   | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$            |

| Kurvendiskussion     | Hinreichende Bedingungen |          |           |
|----------------------|--------------------------|----------|-----------|
|                      | $f'(x)$                  | $f''(x)$ | $f'''(x)$ |
| Maximum              | 0                        | <0       |           |
| Minimum              | 0                        | >0       |           |
| Wendepunkt           |                          | 0        | ≠ 0       |
| Horizontalwendepunkt | 0                        | 0        | ≠ 0       |

## 1.18 Integralrechnungen

### Regeln

|                                                                                   |                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Konstanter Faktor                                                                 | $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$                   |
| Summe/Differenz                                                                   | $\int [u(x) \pm v(x)] dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$ |
| Partielle Integration                                                             | $\int u dv = uv - \int v du$                              |
| Substitutionsmethode                                                              | $\int f[t(x)] t'(x) dx = \int f(t) dt$                    |
|  |                                                           |

### Grundintegrale

|                                                                             |                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$                     | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$                           |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$                                              | $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$               |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$                                               | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ für $ x  > 1$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$                                     | $\int e^x dx = e^x + C$                                                  |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$                                    | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$                                    |
| $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$                                     | $\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$                                        |
| $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$ für $ x  < 1$ |                                                                          |

---

**Anwendungen in der Geometrie**


---

|                          |                                                                                                            |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bogenlänge:              | $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$                                                                     |
| Flächenstück:            | $A = \int_a^b f(x) dx$                                                                                     |
| Drehkörpervolumen:       | $V_x = \pi \int_a^b [f'(x)]^2 dx \quad \text{bei Rotation der Kurve } y = f(x) \text{ um } x\text{-Achse}$ |
| Drehkörper-Mantelfläche: | $M_x = 2\pi \int_a^b f[x] \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$                                                   |

---

**1.19 Potenzreihenentwicklung**


---

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Taylor'sche Reihe:    | <p>Entwicklung der Funktion <math>f</math></p> $f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$ $+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n$ <p>(<math>x</math>) an der Stelle <math>x_0</math> nach Potenzen von <math>h</math></p> |
| Restglied:            | $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 - \vartheta h) \quad 0 < \vartheta < 1$                                                                                                                                                                                           |
| MacLaurin'sche Reihe: | $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$ <p>Entwicklung der Funktion <math>f(x)</math> an der Stelle 0 nach Potenzen von <math>x</math> (Spezialfall der Taylor'schen Reihe)</p>                                 |

---

**Potenzreihen ausgewählter Funktionen**


---

| Funktion    | Reihe                                                                                                            |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(1+x)^n$ : | $1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + (-1)^k \binom{n}{k}x^k + \dots \quad  x  < 1, n \text{ beliebig}$ |

---

| Funktion                            | Reihe                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^x$ :                             | $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ ; hieraus ist $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$                                        |
| $\sin x$ :                          | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$                                                                                                                 |
| $\cos x$ :                          | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$                                                                                                                 |
| $\tan x$ :                          | $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$ $ x  < \frac{\pi}{2}$                                                                                       |
| $\arcsin x$ :                       | $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$ $ x  \leq 1$ |
| $\arctan x$ :                       | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ $ x  \leq 1$<br>(hieraus $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ )                   |
| $\ln(1+x)$ :                        | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ $-1 < x \leq +1$                                                                                                   |
| $\ln(1-x)$ :                        | $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$ $-1 \leq x < +1$                                                                                                  |
| $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ : | $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$ $ x  < 1$                                                                                                |

### Näherungsformeln

| Näherungswert                                  | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | Näherungswert                                     | $k=2$  | $k=3$  | $k=4$  |
|------------------------------------------------|-------|-------|-------|---------------------------------------------------|--------|--------|--------|
| $(1+x)^2 \approx 1+2x$                         | 0,07  | 0,022 | 0,007 | $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{3}$ | 0,15   | 0,045  | 0,014  |
| $(1+x)^3 \approx 1+3x$                         | 0,04  | 0,012 | 0,004 | $\sin x \approx x$                                | 17,75° | 8,25°  | 3,83°  |
| $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$                    | 0,07  | 0,022 | 0,007 | $\cos x \approx 1$                                | 5,66°  | 1,75°  | 0,56°  |
| $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$           | 0,19  | 0,062 | 0,020 | $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$                | 33,75° | 18,91° | 10,60° |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ | 0,11  | 0,036 | 0,011 | $\tan x \approx x$                                | 14,08° | 6,41°  | 3,03°  |
| $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$        | 0,20  | 0,065 | 0,021 |                                                   |        |        |        |

Soll der Näherungswert auf  $k$  Dezimalen genau sein (Fehler  $\Delta x < 5 \cdot 10^{-(k+1)}$ ), so darf  $x$  den in der betreffenden Spalte angegebenen Wert nicht überschreiten.

## 1.20 Kombinatorik

|                                                |                                                                                                                                                   |                                                                              |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $n$ -Fakultät:                                 | $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n \quad 0! = 1$                                                                                         |                                                                              |
| Binomialkoeffizient<br>$n$ über $k$ :          | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$                                 |                                                                              |
| Binomischer Satz:                              | $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$                                                    |                                                                              |
|                                                | $n > 0$ , ganzzahlig                                                                                                                              |                                                                              |
| Anzahl der<br>Permutationen:                   | die verschiedenen linearen Anordnungen von $n$ Elementen<br>alle Elemente verschieden    je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ Elemente gleich |                                                                              |
|                                                | $P_n = n!$                                                                                                                                        | $\bar{P}_n = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r!}$                 |
| Beispiel:                                      | $abc, acb, bac, bca, cab, cba$                                                                                                                    | $aac, aca, (aac), (aca), caa, (caa)$                                         |
|                                                | $P_3 = 3! = 6$                                                                                                                                    | $\bar{P}_3 = \frac{3!}{2!} = 3$                                              |
| Anzahl der Kombina-<br>tionen $k$ -ter Klasse: | die verschiedenen Zusammenstellungen von jeweils $k$ der $n$<br>verschiedenen Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge                      |                                                                              |
|                                                | ohne Wiederholung                                                                                                                                 | mit Wiederholung                                                             |
|                                                | $K_n^{(k)} = \binom{n}{k}$                                                                                                                        | $\bar{K}_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$                                         |
| Beispiel:                                      | $ab, ac, ad$<br>$bc, bd$<br>$cd$                                                                                                                  | $aa, ab, ac, ad$<br>$bb, bc, bd$<br>$cc, cd$<br>$dd$                         |
|                                                | $K_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$                                                                                                                    | $\bar{K}_4^{(2)} = \binom{5}{2} = 10$                                        |
| Anzahl der Variatio-<br>nen $k$ -ter Klasse:   | die verschiedenen Zusammenstellungen von $k$ der $n$ verschiede-<br>nen Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge                             |                                                                              |
|                                                | ohne Wiederholung                                                                                                                                 | mit Wiederholung                                                             |
|                                                | $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$                                                                                                 | $\bar{V}_n^{(k)} = n^k$                                                      |
| Beispiel:                                      | $ab, ac, ad$<br>$ba, bc, bd$<br>$ca, cb, cd$<br>$da, db, dc$                                                                                      | $aa, ab, ac, ad$<br>$ba, bb, bc, bd$<br>$ca, cd, cc, cd$<br>$da, db, dc, dd$ |
|                                                | $V_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$                                                                                                                  | $\bar{V}_4^{(2)} = 4^2 = 16$                                                 |

## 1.21 Determinanten

### Grundbegriffe

|                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Darstellung:                     | $n$ -reihige Determinante besteht aus $n$ Zeilen, $n$ Spalten, $n^2$ Elementen $a_{ik}$ $D =  a_{ik}  = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$                                                                                                                                                                                                            |
| Element $a_{ik}$ :               | steht in der $i$ -ten Zeile und der $k$ -ten Spalte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Adjunkte des Elements $a_{ik}$ : | das ist die mit Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ versehene $(n-1)$ -reihige Unterdeterminante $A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ |
| Unterdeterminante:               | entsteht durch Streichen der $i$ -ten Zeile und der $k$ -ten Spalte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Wert der Determinante:           | ist die Summe der mit der jeweiligen Adjunkte multiplizierten Glieder einer Zeile oder einer Spalte $D = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1k}A_{1k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Dreireihige Determinanten:       | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ $A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$                                                                         |
| Beispiel:                        | $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-5) - 3 \cdot (-15) + 2 \cdot (-12) = -5 + 45 - 24 = 16$                                                                                                                                                                         |

### 1.21.1 Eigenschaften

| Regel                                                                                                                                                                      | Beispiel                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man die Zeilen mit den Spalten vertauscht (Spiegelung an der Hauptdiagonalen).                                         | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$                                                                                                                                           |
| Der Wert einer Determinante ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen miteinander vertauscht.                                                                           | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$                                                                                                                                         |
| Tritt in allen Elementen einer Zeile der gleiche Faktor auf, so kann man diesen als Faktor vor die Determinante setzen.                                                    | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$                                                                                                           |
| Ist einer Zeile proportional einer anderen Zeile, so ist der Wert der Determinante Null.                                                                                   | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Insbesondere gilt dies für $k = 1$ (zwei Zeilen sind einander gleich) und für $k = 0$ (eine Zeile besteht nur aus Nullen).                                                 | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einem konstanten Faktor multiplizierten Elemente einer anderen Zeile addiert. | $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ |

### 1.21.2 Auflösung eines linearen Gleichungssystems

|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Inhomogenes Gleichungssystem: | (rechte Seite $b_1, b_2, \dots, b_n$ nicht alle Null), Anzahl $n$ der Unbekannten gleich Anzahl der Gleichungen<br>$n = 3$<br>$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$<br>$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$<br>$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$<br>Koeffizienten-<br>determinante $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Cramer'sche Regel:            | Lösung:<br>$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$<br>$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D}; \quad z = \frac{D_z}{D}, \text{ wenn } D \neq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Beispiel:                     | $3x - 2y + z = 8$<br>$x + y - 3z = -9$<br>$-2x + 3y + 4z = 7$<br>$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$<br>$= 11 + 14 + 15 = 40$<br>$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -9 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} =$<br>$= -34 + 114 - 40 = 40$<br>$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & -9 & -3 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} =$<br>$= -45 - 25 + 30 = -40$<br>$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -9 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - (-9) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$<br>$= 38 + 37 + 45 = 120$<br>Lösung:<br>$x = \frac{40}{40} = 1, \quad y = \frac{-40}{40} = -1, \quad z = \frac{120}{40} = 3$ |

1.22 Matrizen

| Grundbegriffe              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m, n$ -Matrix:            | $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Elemente der Matrix:       | <p><math>a_{ik}</math> ist das Element, das der <math>i</math>-ten Zeile und der <math>k</math>-ten Spalte angehört; <math>m</math> Zeilen, <math>n</math> Spalten; <math>m \cdot n</math> Elemente</p> <p>Zeilenvektor <math>a' = (a_{i1} \ a_{i1} \ \dots \ a_{in})</math>      Spaltenvektor <math>a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Schreibweise einer Matrix: | <p>mit Hilfe ihrer Zeilen- oder ihrer Spaltenvektoren</p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ <p>Nullmatrix <math>N = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; \dots &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; \dots &amp; 0 \\ \dots &amp; \dots &amp; \dots &amp; \dots \\ 0 &amp; 0 &amp; \dots &amp; 0 \end{pmatrix}</math>      Einheitsmatrix <math>E = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; \dots &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; \dots &amp; 0 \\ \dots &amp; \dots &amp; \dots &amp; \dots \\ 0 &amp; 0 &amp; \dots &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> |
| Unterdeterminante:         | <p><math>k</math>-ter Ordnung der Matrix <math>A</math> entsteht, wenn man so viele Zeilen und Spalten kürzt, dass quadratische Matrix mit <math>k</math> Spalten und <math>k</math> Zeilen verbleibt</p> <div><div><math display="block">A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 3 &amp; 4 \\ 2 &amp; 1 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 3 &amp; 4 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></div><div><div>Unterdeterminante 3. Ordnung</div><math display="block">D_3 = \begin{vmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 3 \\ 2 &amp; 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 3 &amp; 4 \end{vmatrix}</math><div>Unterdeterminante 2. Ordnung</div><math display="block">D_2 = \begin{vmatrix} 1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 4 \end{vmatrix}</math></div></div>                            |

### 1.22.1 Rechenregeln

|                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gleichheit zweier $m, n$ -Matrizen:   | $A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik}), \quad A = B,$<br>wenn für $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$ gilt: $a_{ik} = b_{ik}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Summe zweier $m, n$ -Matrizen:        | $(a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$<br>Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Multiplikation mit konstantem Faktor: | $k \cdot (a_{ik}) = (k \cdot a_{ik})$ Beispiel: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Produkt zweier Matrizen:              | $C = A \cdot B = (a^i \cdot b_k) = (c_{ik})$<br>Beispiel:<br>2, 3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$<br>3, 4-Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$<br>2, 4-Matrix $A \cdot B =$<br>$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} =$<br>$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ |

## 1.23 Mengenlehre

### 1.23.1 Grundbegriffe

|                           |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Elemente der Menge:       | $a \in A$       | $a$ ist Element der Menge $A$                                                                                                                                                                                                                                               |
| Nicht Elemente der Menge: | $a \notin A$    | $a$ ist nicht Element der Menge $A$                                                                                                                                                                                                                                         |
| Leere Menge:              | $\emptyset$     | enthält kein Element                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Teilmenge:                | $A \subseteq B$ | $A$ ist Teilmenge von $B$ , d. h. jedes Element von $A$ ist Element von $B$                                                                                                                                                                                                 |
| Echte Teilmenge:          | $A \subset B$   | $A$ ist echte Teilmenge von $B$ , d. h., $A \subseteq B$ , aber nicht $A = B$<br>Für jede Menge gilt: $A \subseteq A$ und $\emptyset \subseteq A$<br>Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$<br>Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$ |

1.23.2 Mengenoperation

|                           |                                                                                      |                                                                                                                       |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vereinigung $A \cup B$    | besteht aus allen Elementen, die wenigstens einer der beiden Mengen $A, B$ angehören | Beispiel:<br>$A = \{1, 2\}$<br>$B = \{2, 3\}$<br>$A \cup B = \{1, 2, 3\}$                                             |
| Durchschnitt $A \cap B$   | besteht aus allen Elementen, die sowohl zu $A$ auch zu $B$ gehören                   | Beispiel:<br>$A = \{3, 4\}$<br>$B = \{4, 5\}$<br>$A \cap B = \{4\}$                                                   |
| Differenz $A \setminus B$ | besteht aus allen Elementen, die zu $A$ gehören, aber nicht zu $B$                   | Beispiel:<br>$A = \{1, 2, 3\}$<br>$B = \{3, 4, 5\}$<br>$A \setminus B = \{1, 2\}$                                     |
| Produkt $A \times B$      | besteht aus allen geordneten Elementpaaren $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$      | Beispiel:<br>$A = \{a, b, c\}$<br>$B = \{d, e\}$<br>$A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$ |

1.23.3 Rechenregeln

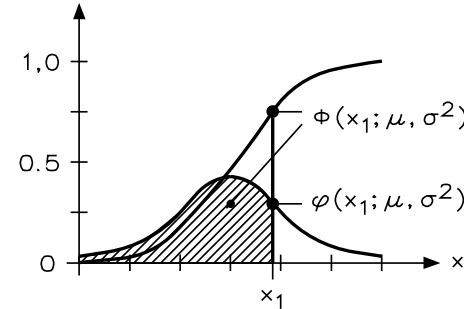
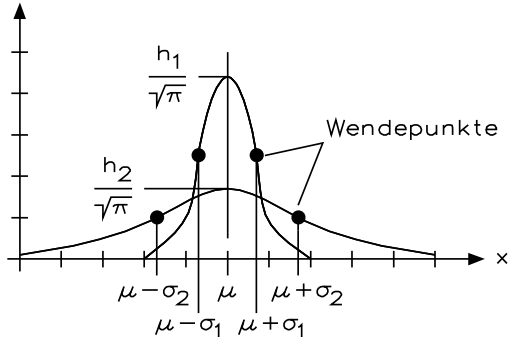
|                       |                                                                                                                        |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kommutatives Gesetz:  | $A \cup B = B \cup A;$ $A \cap B = B \cap A$                                                                           |
| Assoziatives Gesetz:  | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ |
| Verschmelzungsgesetz: | $A \cup (A \cap B) = A;$ $A \cap (A \cup B) = A$                                                                       |
| Distributives Gesetz: | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$                   |

1.24 Wahrscheinlichkeitsrechnung

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Zufällige Ergebnisse: | $A, B$ (als Mengen erkennbar)<br>$A \cup B$ , d. h. $A$ oder $B$ (Summe, Vereinigung)<br>$A \cap B$ , d. h. $A$ und $B$ (Produkt, Durchschnitt)<br>$E$ sicheres Ergebnis<br>$\emptyset$ kein Ergebnis<br>$A, \bar{A}$ zueinander komplementäre Ereignisse<br>$A \cup \bar{A} = E, A \cap \bar{A} = \emptyset$ ;<br>wenn $A, B$ einander ausschließen, dann $A \cap B = \emptyset$ |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wahrscheinlichkeit:    | für das Eintreten von $A$ ist $P(A)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|                        | Klassische Definition: $P(A) = \frac{m}{n}$<br>$m$ Anzahl günstiger Fälle,<br>$n$ Anzahl möglicher Fälle (endlich)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|                        | Statistische Definition: $P(A) \approx P_n(A) = \frac{m}{n}$<br>$n$ hinreichend groß;<br>$P_n(A)$ relative Häufigkeit;<br>bei $n$ Versuchen $m$ mal Ereignis $A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                        | Axiomatische Definition: $P(A) \geq 0$ $P(E) = 1$<br>$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$<br>für $A_1 \cap A_i = \emptyset$ ; $i \neq j$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Additionsgesetz:       | $A, B$ nicht notwendig einander ausschließend<br>$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$<br>$A, B$ einander ausschließend (disjunktiv)<br>$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Beispiele:             | 1. Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei einem Spiel ist eine Zahl zu werfen, die durch 2 ( $A$ ) oder durch 3 ( $B$ ) teilbar ist:<br>$P(A) = \frac{3}{6}$ , $P(B) = \frac{2}{6}$ , $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ;<br>$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \hat{=} 66,7\%$<br>2. Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei einem Spiel ist eine Zahl zu werfen, die entweder durch 2 ( $A$ ) oder durch eine 1 ( $B$ ) teilbar ist:<br>$P(A) = \frac{3}{6}$ , $P(B) = \frac{1}{6}$ ; $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \hat{=} 66,7\%$ |
| Multiplikationsgesetz: | $A, B$ nicht notwendig voneinander unabhängig<br>$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A)$<br>$P(A / B)$ ist Wahrscheinlichkeit für $A$ unter der Bedingung, dass $B$ bereits eingetreten ist:<br>$A, B$ voneinander unabhängig $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Beispiele:             | 1. Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei einem Spiel eine Zahl zu werfen, die durch 2 teilbar ( $A$ ) und außerdem größer als 3 ( $B$ ) ist:<br>$P(A) = \frac{3}{6}$ , $P(B / A) = \frac{2}{3}$ ; $P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \hat{=} 33,3\%$<br>2. Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei einem Spiel eine Zahl zu werfen, die sowohl durch 2 ( $A$ ) als auch durch 3 ( $B$ ) teilbar ist:<br>$P(A) = \frac{3}{6}$ , $P(B) = \frac{2}{6}$ ; $P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \hat{=} 16,7\%$                   |

1.25 Normalverteilung

|                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dichtefunktion:                                                                             | $\varphi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Standardisierte Funktion:                                                                   | $\mu = 0; \sigma^2 = 1; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad [= \varphi(x; 0, 1) ]$<br>$\varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$                                                                                                                                                                                                                            |
| Verteilungsfunktion:                                                                        | $\Phi(x; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^x \varphi(t; \mu, \sigma^2) dt$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Standardisierte Verteilungsfunktion:                                                        | $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad [= \Phi(x; 0, 1) ]$<br>$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$                                                                                                                                                                                                                |
| Zusammenhang:                                                                               | $\Phi(x; \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$                                                                                                                                                                                                                          |
| Dichtefunktion $\varphi(x; \mu, \sigma^2)$ und Verteilungsfunktion $\Phi(x; \mu, \sigma^2)$ | <p><math>\varphi(x; \mu, \sigma^2)</math><br/><math>\Phi(x; \mu, \sigma^2)</math></p>                                                                                                                                                                                                              |
| Präzisionsmaß:                                                                              | <p><math>\varphi(x; \mu, \sigma^2)</math></p>  <p><math>h = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2}}; \varphi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}; \varphi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-\mu)^2}</math></p> <p>Dichtefunktion mit verschiedenem Präzisionsmaß <math>h</math></p> |

## 2.1 Einheiten der Elektrotechnik

**Ampere A:** Einheit der elektrischen Stromstärke  $I$

Das Ampere ist die Stärke des zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter der relativen Permeabilität von  $\mu_r = 1$  und von vernachlässigbarem Querschnitt, die den Abstand von 1 m aufweisen und zwischen denen die durch den Strom elektrodynamisch hervorgerufene Kraft im leeren Raum je 1 m Länge der Doppelleitung  $2 \cdot 10^{-7}$  N beträgt.

**Volt V:** Einheit der elektrischen Spannung  $U$

$$V = \frac{W}{A} \qquad 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$$

**Ohm  $\Omega$ :** Einheit des elektrischen Widerstandes  $R$

$$\Omega = \frac{V}{A} \qquad 1 \Omega = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}^2}$$

**Siemens S:** Einheit des elektrischen Leitwertes  $G$

$$S = \frac{1}{\Omega} = \frac{A}{V} \qquad 1 \text{ S} = \frac{\text{s}^3 \cdot \text{A}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

**Watt W:** Einheit der Leistung  $P$

$$W = V \cdot A = \frac{J}{s} \qquad 1 \text{ W} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

**Joule J:** Einheit der Energie  $W$ , Arbeit  $A$  und Wärmemenge  $Q$

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ VAs} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

kcal (Kilokalorie)  $1 \text{ kcal} = 4186,8 \text{ J}$

**Coulomb C:** Einheit der elektrischen Ladung (Elektrizitätsmenge)  $Q$

$C = \text{Amperesekunde As}$   $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$

**Farad F:** Einheit der elektrischen Kapazität  $C$

$$F = \frac{C}{V} \quad 1F = 1 \frac{A \cdot s}{V} = 1 \frac{s^4 \cdot A^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

**Weber Wb:** Einheit des magnetischen Flusses  $\Phi$

$$\text{Wb} = \text{Voltsekunde Vs} \quad 1 \text{ Wb} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{A}}$$

**Tesla T:** Einheit der magnetischen Flussdichte  $B$  (magnetische Induktion)

$$T = \frac{Vs}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad 1T = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \frac{V \cdot s}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{A}}$$

**Ampere durch Meter  $\frac{A}{m}$ :** Einheit der magnetischen Feldstärke  $H$

$$\frac{A}{m} = \frac{N}{\text{Wb}}$$

**Henry H:** Einheit der elektromagnetischen Induktivität  $L$

$$H = \frac{Vs}{A} = \frac{\text{Wb}}{A} = \Omega s \quad 1H = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{A}^2}$$

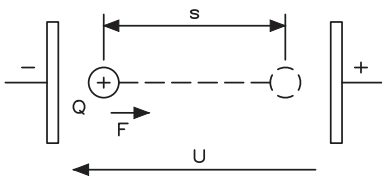
**Henry H durch Meter  $\frac{H}{m}$ :** Einheit der Induktionskonstante  $\mu_0$

$$\frac{H}{m} = \frac{Vs}{A \cdot m} = \frac{\text{Wb}}{A \cdot m} = 10^{-2} \frac{\text{Wb}}{A \cdot \text{cm}} = \frac{\Omega \cdot s}{m}$$

**Hertz Hz:** Einheit der Frequenz  $f$

$$\text{Hz} = \frac{1}{s}$$

## 2.2 Ladung



$$Q = I \cdot t$$

$$Q = I \cdot \Delta t$$

$$F = Q \cdot E$$

$$U = \frac{W}{Q}$$

$Q$  Ladung (Coulomb) in As

$n$  Anzahl der Ladungsträger

$F$  Kraft in N

$E$  elektrische Feldstärke in C

$W$  Arbeit in Ws, VAs

## 2.3 Spannung

Spannung  
hoch

Spannung  
niedrig

Spannung  
Null

$$U = \frac{W}{Q}$$

$U$  Spannung  
 $W$  Arbeit in Js, VAs  
 $Q$  Ladung

## 2.4 Stromstärke

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$I = \frac{C}{s} = \frac{As}{s} = A$$

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$\Delta Q$  Ladungsänderung  
 $I$  Stromstärke in A  
 $t$  in s  
 $i$  Augenblicksänderung  
 $\Delta t$  Zeitabschnitt

## 2.5 Stromdichte

$$S = \frac{I}{A}$$

$S$  Stromdichte in  $\frac{A}{mm^2}$   
 $A$  Leiterquerschnitt in  $mm^2$

## 2.6 Elektrizitätsmenge

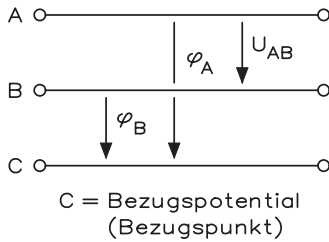
Elektronen

Zeit

$$Q = I \cdot t$$

$1\text{ C} = 1\text{ As} = 1\text{ A} \cdot 1\text{ s}$   
 $Q$  Elektrizitätsmenge in As  
 Elektronengeschwindigkeit  $v = 0,1\text{ mm/s}$   
 Signalgeschwindigkeit  $c \approx 300\,000\text{ m/s}$   
 (Lichtgeschwindigkeit)

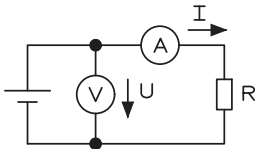
## 2.7 Spannungspotential



$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$U_{AB}$  Potentialdifferenz zwischen A und B  
 $\varphi_A$  Potential des Punktes A bezüglich Bezugspotential  
 $\varphi_B$  Potential des Punktes B bezüglich Bezugspotential

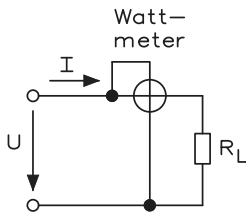
## 2.8 Ohm'sches Gesetz



$$I = \frac{U}{R}$$

$I$  Strom in A  
 $U$  Spannung in V  
 $R$  Widerstand in  $\Omega$   
 $1 \text{ A} = \frac{1 \text{ V}}{1 \Omega}$

## 2.9 Elektrische Leistung



$$P = U \cdot I$$

$$P = I^2 \cdot R$$

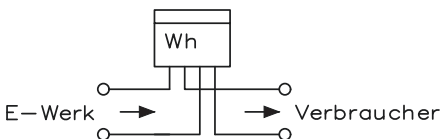
$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

$P$  elektrische Leistung in W

$$1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}^2}$$

## 2.10 Elektrische Arbeit



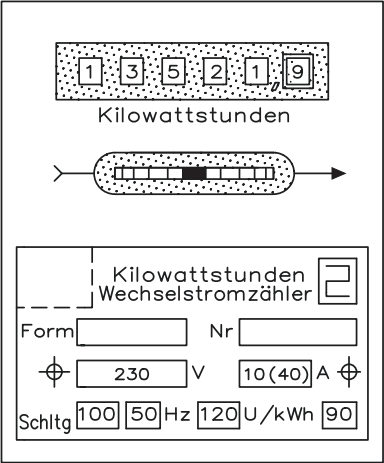
$$W = P \cdot t$$

$W$  elektrische Arbeit in Ws oder kWh

$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

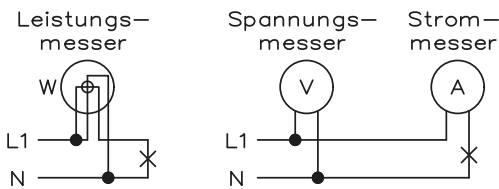
2.11 Messen der elektrischen Leistung

Leistungsschild eines Zählers



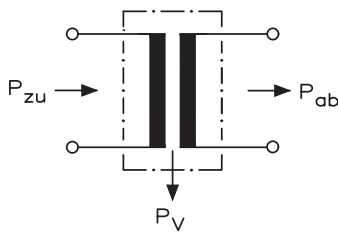
$$P = \frac{n}{c_Z}$$

- $P$  Leistung in kW  
 $n$  Zählerumdrehung je min  
 $c_Z$  Zählerkonstante in Umdrehungen/kWh



1. Direkte Messung      2. Indirekte Messung

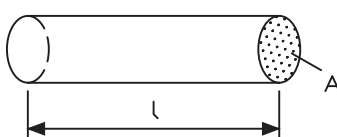
2.12 Wirkungsgrad



$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$
$$P_v = P_{zu} - P_{ab}$$

- $\eta$  Wirkungsgrad  
 $P_v$  Verluste  
 $P_{zu}$  zugeführte Leistung  
 $P_{ab}$  abgegebene Leistung

2.13 Leitungswiderstand



$$R = \frac{l}{\gamma \cdot A}$$
$$R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

$l$  Leiterlänge  
 $A$  Leiterquerschnitt  
 $\gamma$  Leitfähigkeit in  $\text{m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2)$   
 $\rho$  spezifischer Widerstand in  $(\Omega \cdot \text{mm}^2)/\text{m}$

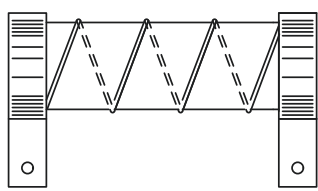
| Werkstoff  | Spezifischer Widerstand | Leitfähigkeit |
|------------|-------------------------|---------------|
| Silber     | 0,0164                  | 61            |
| Kupfer     | 0,01724                 | 58            |
| Aluminium  | 0,0278                  | 36            |
| Eisen      | 0,13                    | 7,7           |
| Konstantan | 0,50                    | 2,0           |

Zulässiger Strom bei frei in Luft ausgespannten Drähten:

$$I_g = \alpha \sqrt{d^3}$$
$$I_n = \frac{I_g}{1,6}$$

$I_g$  Grenzstrom in A  
 $I_n$  Nennstrom in A  
 $d$  Drahtdurchmesser in mm  
 $\alpha$  Materialkonstante (Kupfer  $\alpha = 60$ )

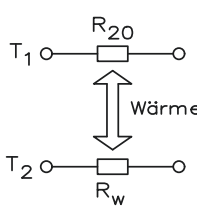
Belastbarkeit:



$$A = \frac{P}{p}$$
$$l = \frac{P}{p \cdot D \cdot \pi}$$
$$c = \frac{\alpha}{d}$$
$$d \approx \sqrt[3]{\frac{\rho \cdot P}{R \cdot c \cdot p}}$$

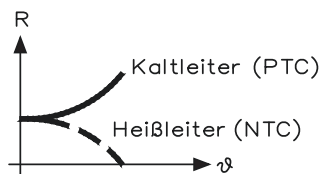
$P$  Belastbarkeit in W  
 $p$  Belastbarkeit in  $\text{W}/\text{cm}^2$   
 $l$  Länge in cm  
 $D$  Durchmesser des Trägers in cm  
 $A$  Querschnitt in  $\text{cm}^2$   
 $a$  Abstand von Windung zu Windung in mm  
 $c$  Konstante der Windungssteigung  
 $\rho$  spezifischer Widerstand

2.14 Widerstand und Temperatur



$$\Delta R = \alpha \cdot R_{20} \cdot \Delta T$$

$\Delta R$  Widerstandsänderung in  $\Omega$   
 $\alpha$  Temperaturbeiwert in  $1/\text{K}$   
 $R_{20}$  Widerstand bei  $20\text{ }^\circ\text{C}$   
 $R_W$  Widerstand bei Erwärmung



$$R_w = R_k \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$R_w = R_k + \Delta R$$

$$\Delta T = \frac{R_w - R_k}{R_k \cdot \alpha}$$

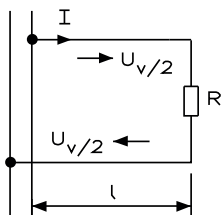
$R_k$  Kaltwiderstand in  $\Omega$

$R_{20}$  Widerstandswert bei  $20^\circ\text{C}$

$R_w$  Warmwiderstand in  $\Omega$

$\Delta T$  Temperaturänderung in K

## 2.15 Spannungsfall auf Leitungen



$$U_v = I \cdot R_l = \frac{2 \cdot l \cdot I}{\gamma \cdot A} = \frac{2 \cdot l \cdot I \cdot \rho}{A}$$

Querschnittsbestimmung:

$$A = \frac{2 \cdot l \cdot I}{\gamma \cdot u_v} = \frac{2 \cdot l \cdot I \cdot \rho}{u_v} = \frac{2 \cdot l \cdot P \cdot \rho}{u_v \cdot U_v}$$

Leistungsverlust:

$$P_v = \frac{2 \cdot l \cdot P^2}{\gamma \cdot A \cdot U^2} = \frac{2 \cdot l \cdot P^2 \cdot \rho}{A \cdot U^2} = I^2 \cdot R = \frac{2 \cdot l \cdot I^2}{\gamma \cdot A}$$

$$p_n = \frac{P_v}{P} \cdot 100 = \frac{2 \cdot l \cdot P \cdot 100}{\gamma \cdot A \cdot U^2} = \frac{2 \cdot l \cdot \rho \cdot P \cdot 100}{A \cdot U^2}$$

Erforderliche Spannung:

$$U_v = \sqrt{\frac{2 \cdot l \cdot \rho \cdot P \cdot 100}{A \cdot p_n}} = \frac{2 \cdot l \cdot I \cdot \rho \cdot 100}{A \cdot p_u}$$

$U_v$  Spannungsfall in V

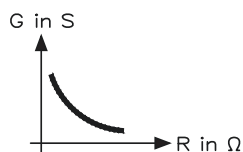
$A$  Leiterquerschnitt in  $\text{mm}^2$

$u_v$  Spannungsfall in %

$p_n$  Leistungsverlust in %

$p_u$  Spannungsverlust in %

## 2.16 Leitwert und Widerstand

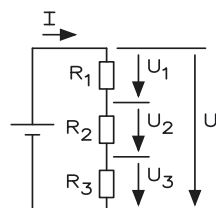


$$G = \frac{1}{R}$$

$G$  Leitwert in S oder mho  
(mho amerikanische Bezeichnung)

$$1 \text{ S} = \frac{1}{1 \Omega}$$

## 2.17 Reihenschaltung von Widerständen



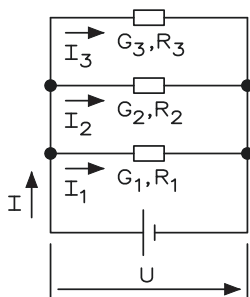
$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

## 2.18 Parallelschaltung von Widerständen



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

bei zwei Widerständen

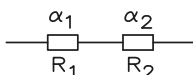
$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot R}{R_2 - R} \quad R_n = \frac{R_1}{n}$$

$n$  Zahl der gleichen Widerstände

## 2.19 Widerstände mit unterschiedlichen Temperaturkoeffizienten

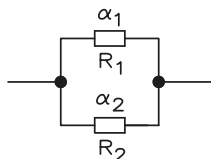
Reihenschaltung



$$\alpha = \frac{\alpha_1 \cdot R_1 + \alpha_2 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$\alpha$  Gesamttemperaturbeiwert in 1/K  
 $R$  Gesamtwiderstand in  $\Omega$

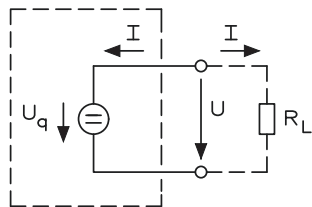
Parallelschaltung



$$\alpha = R \cdot \frac{\alpha_1 \cdot R_2 + \alpha_2 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

$\alpha_1, \alpha_2$  Temperaturbeiwert der Einzelwiderstände in 1/K  
 $R_1, R_2$  Einzelwiderstände in  $\Omega$

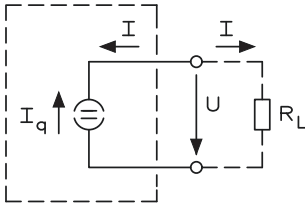
## 2.20 Ideale Spannungsquelle



$$U = U_0 = U_q$$

$U$  Ausgangsspannung in V  
 $U_0$  Leerlaufspannung in V  
 $U_q$  Quellenspannung in V

## 2.21 Ideale Stromquelle

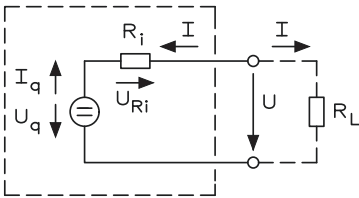


$$I = I_q = -I$$

$I$  Ausgangsstrom in A

$I_q$  Quellenstrom in A

## 2.22 Reale Spannungsquelle



Leerlauf:  $I = 0$  ( $R_L \rightarrow \infty \Omega$ )

$$U = U_0 = U_q$$

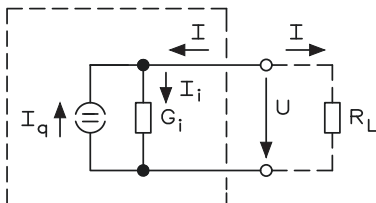
Kurzschluss:  $U = 0$  ( $R_L \rightarrow 0 \Omega$ )

$$I = -I_q = -I$$

$$U = U_q - U_{Ri} \Rightarrow U = U_q - (R_i \cdot I) \Rightarrow U = U_q - \left( \frac{U_0}{I_k} \cdot I \right)$$

$U$  immer  $< U_q$ !

## 2.23 Reale Stromquelle



Kurzschluss:  $U = 0$  ( $R_L \rightarrow 0 \Omega$ )

$$I = -I_q = -I$$

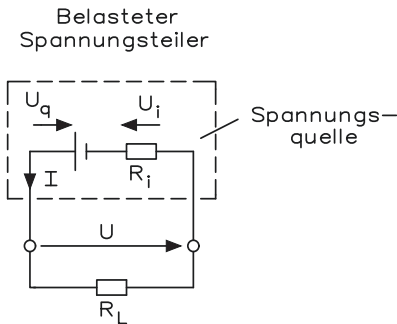
$I_k$  Klemmenstrom in A

Leerlauf:  $I = 0$  ( $R_L \rightarrow \infty \Omega$ )

$$U = U_0$$

$$I = I_1 - I_q \Rightarrow I = (G_i \cdot U) - I_q \Rightarrow I = \left( \frac{I_k}{U_0} \cdot U \right) - I_q$$

## 2.24 Belasteter Spannungsteiler



$$U = U_q - I \cdot R_i$$

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_L}$$

$$R_i = \frac{U_q}{I_K}$$

$$R_i = \left| \frac{\Delta U}{\Delta I} \right|$$

$U$  Klemmenspannung in V

$U_q$  Quellenspannung in V

$U_0$  Leerlaufspannung in V

$I_K$  Kurzschlussstrom in A

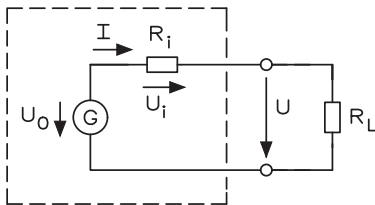
$R_i$  Innenwiderstand in  $\Omega$

$R_L$  Lastwiderstand in  $\Omega$

$\Delta U$  Spannungsänderung in V

$\Delta I$  Stromänderung in A

## 2.25 Anpassung



$$U_0 = U_i + U$$

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_L}$$

$$I_K = \frac{U_0}{R_i}$$

$U_0$  Leerlaufspannung in V

$U$  Klemmenspannung in V

$U_q$  Quellenspannung in V

$I_K$  Kurzschlussstrom in A

$\Delta U$  Spannungsänderung in V

$\Delta I$  Stromänderung in A

$P_L$  Ausgangsleistung in W

- Spannungsanpassung  $R_L \gg R_i$

$$I \approx \frac{U_0}{R_L} \quad U \approx U_0 \quad P_L \approx 0$$

- Leistungsanpassung  $R_L = R_i$

$$I = \frac{U_0}{2 \cdot R_i} \quad I = \frac{U_0}{2 \cdot R_L}$$

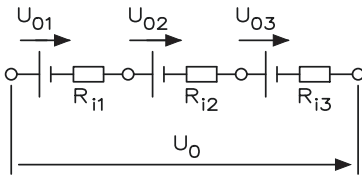
$$U = \frac{U_0}{2}$$

$$P_L = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i} \quad P_L = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_L}$$

- Stromanpassung  $R_L \ll R_i$

$$I \approx \frac{U_0}{R_i} \quad U \approx \frac{U_0 \cdot R_L}{R_i} \quad P_L \approx 0$$

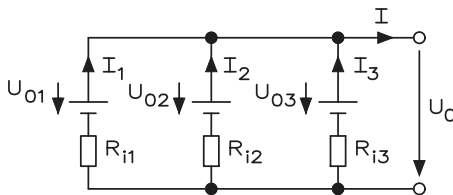
## 2.26 Reihenschaltung von Spannungserzeugern



$$U_0 = U_{01} + U_{02} + U_{03} + \dots$$

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + \dots$$

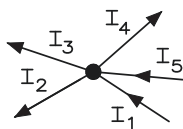
## 2.27 Parallelschaltung von Spannungserzeugern



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{i3}} + \dots$$

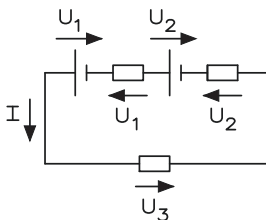
## 2.28 Erstes Kirchhoff'sches Gesetz (Knotenregel)



In jedem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme Null

$$\Sigma I = 0 \quad \Sigma I_{zu} = \Sigma I_{ab}$$

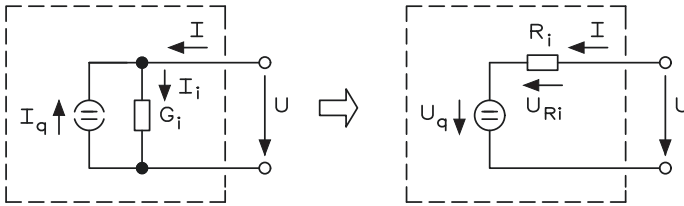
## 2.29 Zweites Kirchhoff'sches Gesetz (Maschenregel)



Die Summe aller Teilspannungen eines gewählten Stromlaufs ist Null

$$\Sigma U = 0$$

### 2.30 Umrechnung einer Strom- in eine Spannungsquelle



Bei Leerlauf  $\Rightarrow U_0 = \frac{I_q}{G_i} \Rightarrow U_0 = U_q \quad R_i = \frac{1}{G_i}$

$U_0$  Leerlaufspannung in V

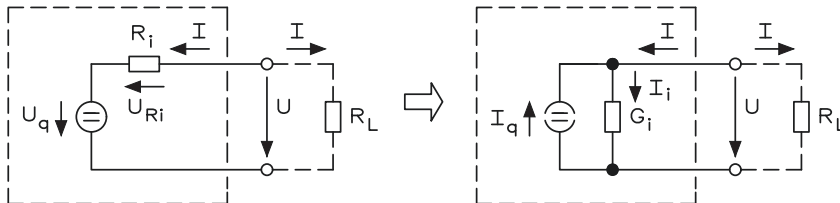
$U_q$  Quellenspannung in V

$R_i$  Innenwiderstand in  $\Omega$

$G_i$  Innenleitwert in S

! Pfeilrichtung von  $U_q$  und  $I_q$  sind entgegengesetzt !

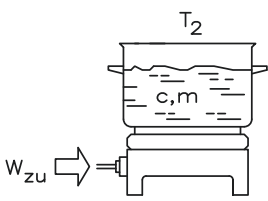
### 2.31 Umrechnung einer Spannungs- in eine Stromquelle



Bei Kurzschluss  $\Rightarrow I_K = \frac{U_q}{R_i} \Rightarrow I = -I_q = -I_k \quad G_i = \frac{1}{R_i}$

! Pfeilrichtung von  $U_q$  und  $I_q$  sind entgegengesetzt !

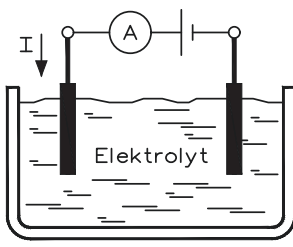
2.32 Wärmewirkungsgrad



$$W_{zu} = P \cdot t$$
$$W_{ab} = Q$$
$$Q_N = m \cdot c \cdot \Delta T$$
$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{Q_N}{Q_S}$$
$$P = \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{\eta \cdot t}$$
$$P = \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{\eta_N}$$

$W_{zu}$  zugeführte Arbeit in Js  
 $W_{ab}$  abgegebene Arbeit in Js  
 $\Delta T$  Temperaturänderung  
 $c$  spezifische Wärmekapazität  
in  $\frac{J}{kg \cdot K}$   
 $m$  Masse (z. B. Wasser)  
 $Q_N$  Nutzwärme in J  
 $Q_S$  Stromwärme in J

2.33 Faraday'sches Gesetz



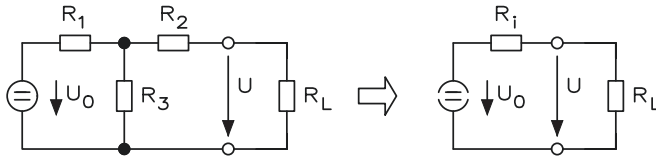
$$m = I \cdot c \cdot t$$
$$Q = I_E \cdot t_E$$
$$\eta_{Ah} = \frac{I_E \cdot t_E}{I_L \cdot t_L}$$
$$\eta_{Wh} = \frac{U_E \cdot I_E \cdot t_E}{U_L \cdot I_L \cdot t_L}$$

1 Ah = 1 A · 1 h

$m$  Stoffmenge  
 $c$  elektrochemisches Äquivalent  
 $I_E$  Entladestrom  
 $\eta_{Ah}$  Amperestunden-Wirkungsgrad  
 $\eta_{Wh}$  Wattstunden-Wirkungsgrad  
 $I_L$  Ladestrom  
 $t_L$  Ladedauer  
 $U_E$  Entladespannung  
 $U_L$  Ladespannung  
 $Q$  Entladekapazität

|                    | Bleiakku                                         | Stahlakku             |
|--------------------|--------------------------------------------------|-----------------------|
| Zellennennspannung | 2,0 V                                            | 1,2 V                 |
| Säureart           | H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>                   | KCl                   |
| Säuredichte        | 1,18 g/cm <sup>3</sup> ...1,28 g/cm <sup>3</sup> | 1,2 g/cm <sup>3</sup> |
| Ladespannung       | 2,1 V...2,75 V                                   | 1,35 V...1,8 V        |
| Entladespannung    | 1,83 V                                           | 1,0 V                 |
| $\eta_{Ah}$        | 83 %...90 %                                      | 72 %                  |
| $\eta_{Wh}$        | 70 %...75 %                                      | 55 %                  |

### 2.34 Ersatzspannungsquelle



$$R_i' = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

$$U_0' = U_0 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

$R_1, R_2, R_3$  Widerstände

$R_L$  Lastwiderstand

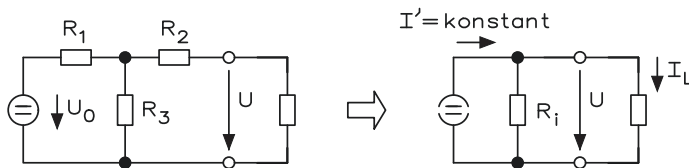
$U$  Spannung am Lastwiderstand

$R_i'$  Ersatzwiderstand

$U_0$  Quellenspannung

$U_0'$  Ersatzquellenspannung

### 2.35 Ersatzstromquelle



$$R_i' = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I' = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{I_L}{I'} = \frac{R_i'}{R_i' + R_L}$$

$I_L$  Laststrom

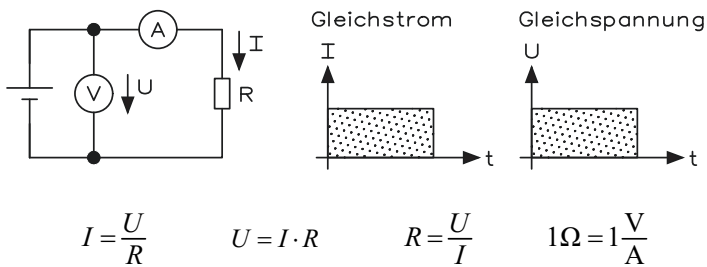
$I'$  Ersatzstrom

$R_i'$  Ersatzinnenwiderstand

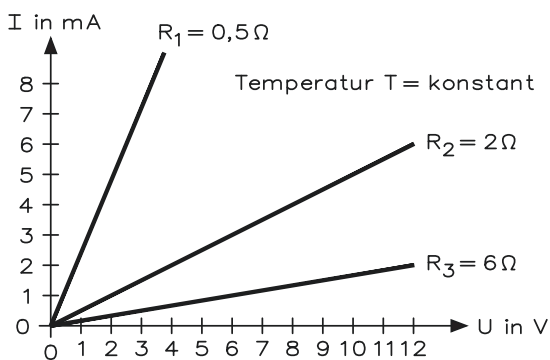
# Gleichstromkreis

# 3

## 3.1 Elektrische Größen

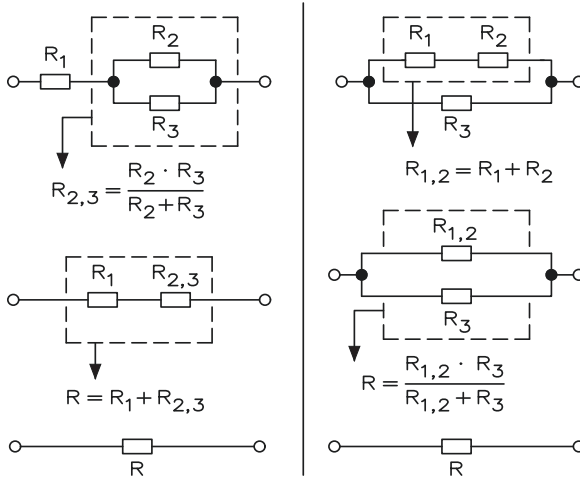


## 3.2 Strom-Spannungs-Diagramm



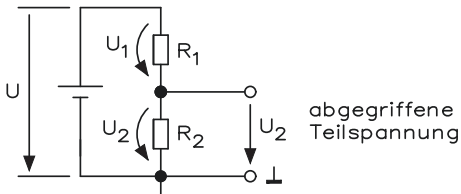
$I = \frac{U}{R}$  lineare Funktion  
mit der Steigung  $\frac{1}{R}$

### 3.3 Reihen- und Parallelschaltung



Umrechnen einer gemischten Schaltung zu einem Ersatzwiderstand

### 3.4 Unbelasteter Spannungsteiler



$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

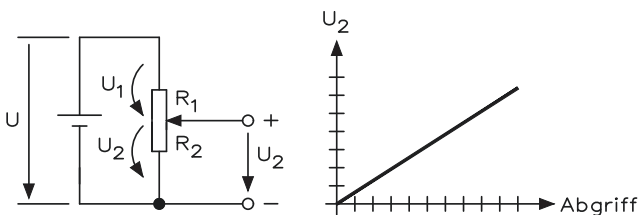
$$U_L = U \frac{(R_1 + R_2) \cdot U_2}{R_2}$$

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot U}{U_2} \quad R_2 = \frac{R_1 \cdot U_2}{(U - U_2)}$$

$U_1, U_2$  Teilspannungen

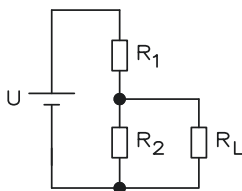
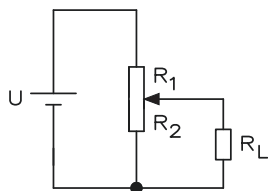
$R_1, R_2$  Teilwiderstände

### 3.5 Spannungsteiler mit veränderbarem Abgriff



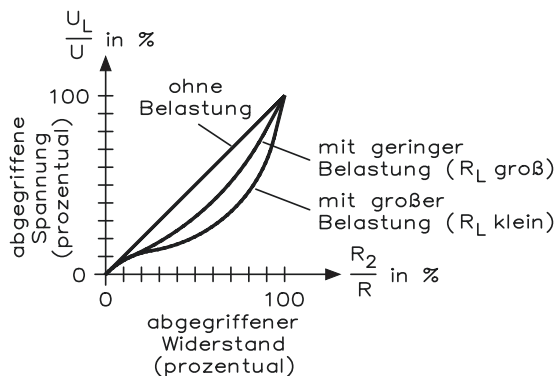
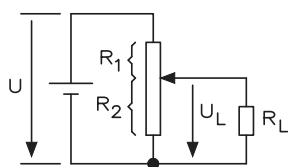
Der Abgriff kann auch als veränderbarer Punkt mit einem einzigen Widerstand vorhanden sein.

### 3.6 Belasteter Spannungsteiler



$$U_2 = U \frac{R_2 \parallel R_L}{R_1 + R_2 \parallel R_L} = U \frac{R_x}{R_1 + R_x}$$

$$R_2 \parallel R_L = R_x \quad \text{Parallelschaltung}$$



$$U_2 = \frac{U_x \cdot U}{R_1 - R_x}$$

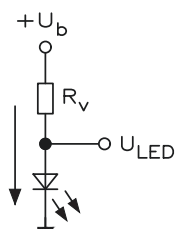
$$R_2 \parallel R_b = R_L = \frac{R_2 \cdot R_b}{R_2 + R_b}$$

$$U = \frac{(R_1 + R_2) \cdot U_2}{R_x}$$

$$R_1 = \frac{R_x \cdot U}{U_2} - R_x$$

$$R_x = \frac{R_1 \cdot U_2}{(U - U_2)}$$

### 3.7 Vorwiderstand



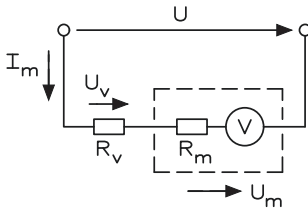
$$R_v = \frac{U_b - U_{LED}}{I}$$

$U_b$  Betriebsspannung

$U_{LED}$  Spannung an der LED

$R_v$  Vorwiderstand

### 3.8 Messbereichserweiterung für Spannungsmessung



$$R_v = \frac{U - U_m}{I_m}$$

$$n = \frac{U}{U_m}$$

$$R_v = R_m \cdot (n - 1)$$

$U_m$  Messbereichsendwert vor Erweiterung

$U$  Messbereichsendwert nach Erweiterung

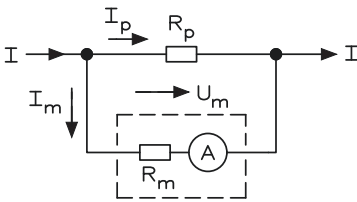
$I_m$  Strom bei Vollausschlag

$R_m$  Innenwiderstand des Messwerks

$R_v$  Vorwiderstand

$n$  Faktor der Messbereichserweiterung

### 3.9 Messbereichserweiterung Strommessung



$$R_p = \frac{U_m}{I - I_m}$$

$$R_p = \frac{R_m \cdot I_m}{I - I_m}$$

$$n = \frac{I}{I_m}$$

$$R_p = \frac{R_m}{n - 1}$$

$R_p$  Nebenwiderstand (Shunt)

$U_m$  Messbereichsspannung bei Vollausschlag

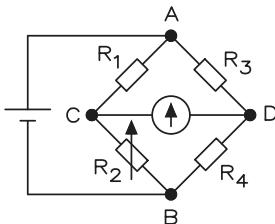
$I$  Messbereichsendwert nach Erweiterung

$I_m$  Messbereichsendwert vor Erweiterung

$R_m$  Widerstand des Messwerks

$n$  Faktor der Messbereichserweiterung

### 3.10 Wheatstone Brücke



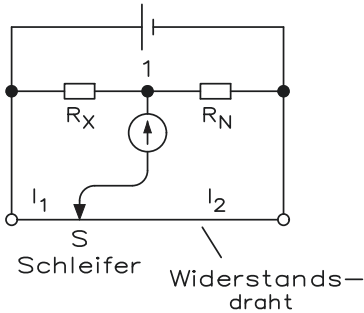
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_4}$$

$R_1, R_2, R_3, R_4$

Brückenwiderstand

### 3.11 Schleifdrahtbrücke



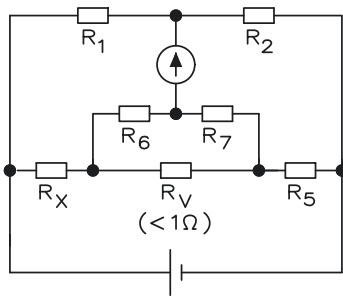
Für den Abgleich gilt  $R_X = \frac{R_N \cdot I_1}{I_2}$

$R_X$  Prüfling

$R_N$  Normalwiderstand ( $\approx R_X$ )

$R_l$  Widerstand der Zuleitungen (vernachlässigbar)

### 3.12 Schleifdrahtbrücke nach Thomson



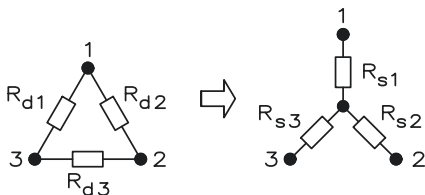
$R_X = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$ , wenn  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_6}{R_7}$

$R_V$  Prüfling

$R_5$  Normalwiderstand ( $\approx R_X$ )

$R_V$  Widerstand der Zuleitungen (vernachlässigbar)

### 3.13 Dreieck-Stern-Umwandlung



$$R_{s1} = \frac{R_{d1} \cdot R_{d2}}{R_{d1} + R_{d2} + R_{d3}}$$

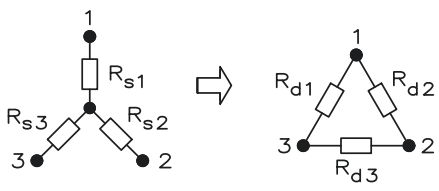
$$R_{s2} = \frac{R_{d2} \cdot R_{d3}}{R_{d1} + R_{d2} + R_{d3}}$$

$$R_{s3} = \frac{R_{d1} \cdot R_{d3}}{R_{d1} + R_{d2} + R_{d3}}$$

$R_{d1}, R_{d2}, R_{d3}$  Widerstände in Dreieck-schaltung

$R_{s1}, R_{s2}, R_{s3}$  Widerstände in umgerechneter Sternschaltung

3.14 Stern-Dreieck-Umwandlung



$$R_{d1} = \frac{R_{s1} \cdot R_{s3}}{R_{s2}} + R_{s1} + R_{s3}$$
$$R_{d2} = \frac{R_{s1} \cdot R_{s2}}{R_{s3}} + R_{s1} + R_{s2}$$
$$R_{d3} = \frac{R_{s2} \cdot R_{s3}}{R_{s1}} + R_{s2} + R_{s3}$$

$R_{s1}, R_{s2}, R_{s3}$     Widerstände in Sternschaltung  
 $R_{d1}, R_{d2}, R_{d3}$     Widerstände in umgerechneter Dreieckschaltung

3.15 Internationale Reihe von Widerständen

Bei den Widerständen bestimmt die Anzahl der Werte pro Dekade, Stufungsfunktion und Auslieferungstoleranz. Den Stufungsfaktor errechnet man aus  $q = \sqrt[n]{10}$  und man erhält die Werte. Für die Toleranz gilt:

$$p = \frac{a}{N} \cdot 100$$
$$a = \frac{p \cdot N}{100}$$
$$N = \frac{a \cdot 100}{p}$$

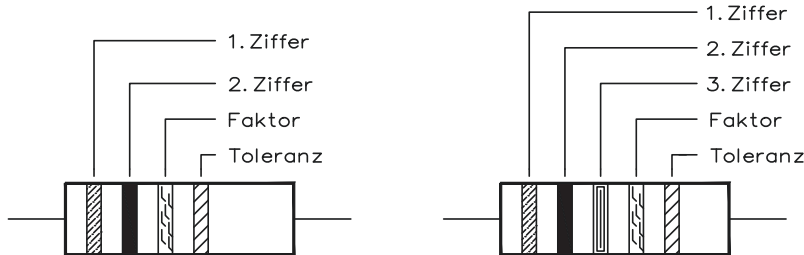
$$\frac{N}{100} = 1\%$$
$$p\% = \frac{a}{N/100}$$

$N$     Betrag des Nennwerts  
 $a$     Betrag der Abweichung  
 $p\%$     Prozentsatz der Abweichung

| Bezeichnung der IEC-Reihe | Anzahl der Werte/Dekade $n$ | Stufungsfaktor $q$ | Auslieferungstoleranz in % |
|---------------------------|-----------------------------|--------------------|----------------------------|
| E 6                       | 6                           | 1,47               | ±20                        |
| E 12                      | 12                          | 1,21               | ±10                        |
| E 24                      | 24                          | 1,10               | ±5                         |
| E 48                      | 48                          | 1,05               | ±5                         |
| E 96                      | 96                          | 1,02               | ±1                         |
| E 192                     | 192                         | 1,01               | ±0,5                       |

# Widerstandsfarbkennzeichnung

| Farbe   | 1. Ring<br>1. Ziffer | 2. Ring<br>2. Ziffer | 3. Ring<br>Multiplikator | 4. Ring<br>4. Ziffer |
|---------|----------------------|----------------------|--------------------------|----------------------|
| Schwarz | –                    | 0                    | $10^0 = 1$               | –                    |
| Braun   | 1                    | 1                    | $10^1$                   | $\pm 1 \%$           |
| Rot     | 2                    | 2                    | $10^2$                   | $\pm 2 \%$           |
| Orange  | 3                    | 3                    | $10^3$                   | –                    |
| Gelb    | 4                    | 4                    | $10^4$                   | –                    |
| Grün    | 5                    | 5                    | $10^5$                   | $\pm 0,5 \%$         |
| Blau    | 6                    | 6                    | $10^6$                   | $\pm 0,25 \%$        |
| Violett | 7                    | 7                    | $10^7$                   | $\pm 0,1 \%$         |
| Grau    | 8                    | 8                    | $10^8$                   | –                    |
| Weiß    | 9                    | 9                    | $10^9$                   | –                    |
| Gold    | –                    | –                    | $10^{-1}$                | $\pm 5 \%$           |
| Silber  | –                    | –                    | $10^{-2}$                | $\pm 10 \%$          |
| keine   | –                    | –                    | –                        | $\pm 20 \%$          |

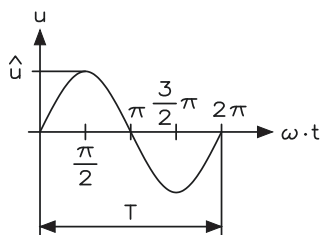
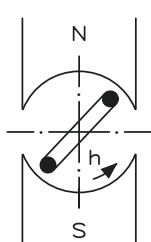


Der erste Ring liegt näher an dem einen Ende des Widerstandswerts als der letzte Ring am anderen Ende.

# Wechselspannung und Wechselstrom

## 4

### 4.1 Sinusförmige Wechselspannung



$$u = \hat{u} \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = p \cdot n$$

$u, i$  Momentanwerte

(Augenblickswerte)

$\hat{u}, \hat{i}$  Maximalwerte, Spitzenwerte

$f$  Frequenz

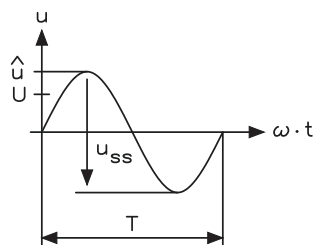
$T$  Periodendauer

$\omega$  Kreisfrequenz

$p$  Polpaarzahl (E-Motor)

$n$  Drehzahl (E-Motor)

### 4.2 Spitzen- und Effektivwerte



$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{u}_{SS} = 2 \cdot \hat{u}$$

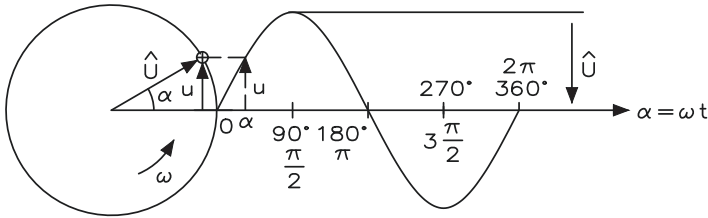
$$\hat{i}_{SS} = 2 \cdot \hat{i}$$

$\hat{u}, \hat{i}$  Maximalwerte, Spitzenwerte

$U, I$  Effektivwerte, auch  $U_{eff}$   
und  $I_{eff}$

$\hat{u}_{SS}, \hat{i}_{SS}$  Spitze-Spitze-Werte

### 4.3 Zeiger- und Liniendiagramm



$$u = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$u, i$  Momentanwerte (Augenblickswerte)

$\varphi$  Phasenverschiebungswinkel

Die sinusförmige Spannung kann dargestellt und berechnet werden:

– Abhängigkeit vom Phasenwinkel  $\alpha$  im Gradmaß (Taschenrechner im DEG-Modus)

$$u(\alpha^\circ) = \hat{u} \cdot \sin \alpha$$

$$\hat{u} = \frac{u(\alpha^\circ)}{\sin \alpha}$$

(zweite Lösung:  $\alpha^\circ, 180^\circ - \alpha^\circ$ )

$u(\alpha^\circ)$  Momentanspannung

$\hat{u}$  Scheitelspannung

$\alpha$  Winkel im Gradmaß

– Abhängigkeit vom Phasenwinkel  $b$  im Bogenmaß (Taschenrechner im RAD-Modus)

$$u(b^\circ) = \hat{u} \cdot \sin b$$

$$\hat{u} = \frac{u(b)}{\sin b}$$

(zweite Lösung:  $b, \pi - b$ )

$u(b)$  Momentanspannung

$\hat{u}$  Scheitelspannung

$b$  Winkel im Bogenmaß

– Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (Taschenrechner im RAD-Modus)

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\hat{u} = \frac{u(t)}{\sin(\omega \cdot t)}$$

(zweite Lösung:  $t, \frac{T}{2} - t$ )

$u(t)$  Momentanspannung

$\hat{u}$  Scheitelspannung

$\omega$  Kreisfrequenz (1/s)

$t$  Zeit

$T$  Periodendauer

Ohm'scher Widerstand an sinusförmiger Wechselspannung:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\hat{u} = \frac{u(t)}{\sin(\omega \cdot t)}$$

(zweite Lösung:  $t, \frac{T}{2} - t$ )

Taschenrechner im RAD-Modus

$u(t)$  Momentanspannung

$\hat{u}$  Scheitelspannung

$\hat{i}$  Scheitelstrom

$i(t)$  Momentanstrom

$R$  Widerstand in Ohm

$t$  Zeit in s

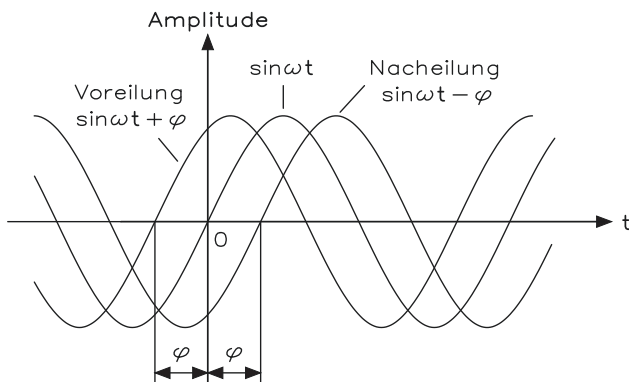
$T$  Periodendauer in s

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\hat{i} = \frac{i(t)}{\sin(\omega \cdot t)}$$

(zweite Lösung:  $t, \frac{T}{2} - t$ )

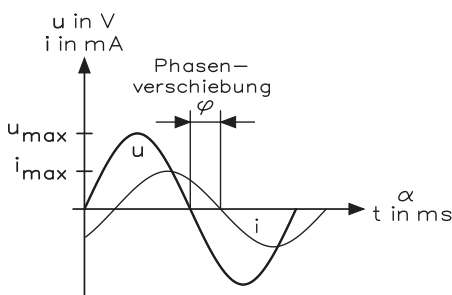
## 4.4 Phasenverschiebung



$\frac{\text{Positiver}}{\text{Negativer}}$  Phasenwinkel oder  $\frac{\text{Voreilung}}{\text{Nacheilung}}$  bedeutet Verschiebung der Sinuswelle in  
 $\frac{\text{negativer}}{\text{positiver}}$  Richtung der Zeitachse.

Im Zeigerdiagramm ist der  $\frac{\text{voreilende}}{\text{nacheilende}}$  Zeiger gegenüber dem Bezugszeiger im

$\frac{\text{linken}}{\text{rechten}}$  Sinn um den Winkel  $\pm\varphi$  gedreht.

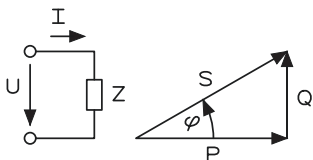


$$\varphi = 45^\circ \rightarrow \Delta t = \frac{1}{8} T$$

$$\varphi = 90^\circ \rightarrow \Delta t = \frac{1}{4} T$$

$$\varphi = 180^\circ \rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} T$$

## 4.5 Leistung im Wechselstromkreis



$$S = U \cdot I$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$S$  Scheinleistung in VA

$P$  Wirkleistung in W

$Q$  Blindleistung in var

$\cos \varphi$  Leistungsfaktor  
(Wirkleistungsfaktor)

$\sin \varphi$  Blindleistungsfaktor

## 4.6 Amplitudenform der Messgröße

Der Augenblickswert ist der Wert einer Wechselgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$u$  Augenblickswert der Spannung

$i$  Augenblickswert des Stromes

Der Scheitelwert ist der größte Betrag des Augenblickswertes einer Wechselgröße:

$\hat{u} = u_{\max}$  Scheitelwert der Spannung

$\hat{i} = i_{\max}$  Scheitelwert des Stromes

Der Effektivwert ist der zeitliche quadratische Mittelwert einer Wechselgröße:

$U = U_{\text{eff}}$  Effektivwert der Spannung

$I = I_{\text{eff}}$  Effektivwert des Stromes

Der Gleichrichtwert ist der arithmetische Mittelwert des Betrages einer Wechselgröße über eine Periode:

$\bar{u}$  Gleichrichtwert der Spannung

$\bar{i}$  Gleichrichtwert des Stromes

Der Scheitelfaktor einer Wechselgröße ist das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert:

$$S = \frac{\hat{u}}{U} = \frac{\hat{i}}{I}$$

Der Formfaktor einer Wechselgröße ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert:

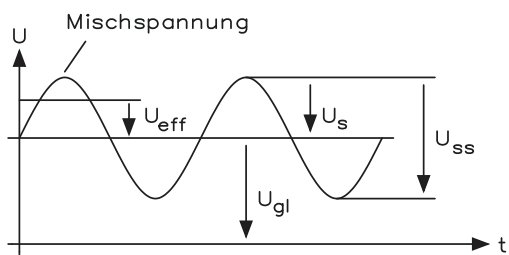
$$F = \frac{U}{|\bar{u}|} = \frac{I}{|\bar{i}|} \quad F \geq 1$$

### Umrechnung von Scheitel-, Gleichricht- und Effektivwert

| Schwingung                                                                                      | Scheitelwert $\hat{u}$                                                                                                                      | Gleichrichtwert $ \bar{u} $                                                                                                                                       | Effektivwert $U$                                                                                                                           | Scheitelfaktor $S$                                                                     | Formfaktor $F$                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| mit Scheitel- und Formfaktor                                                                    | $\hat{u} = S \cdot U$<br>$\hat{u} = S \cdot F \cdot  \bar{u} $                                                                              | $ \bar{u}  = U / F$<br>$ \bar{u}  = \frac{\hat{u}}{S \cdot F}$                                                                                                    | $U = \hat{u} / S$<br>$U =  \bar{u}  \cdot F$                                                                                               | $S = \frac{\text{Scheitelwert}}{\text{Effektivwert}}$<br>$S = \frac{\hat{u}}{U}$       | $F = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}}$<br>$F = \frac{U}{ \bar{u} }$ |
| Sinus<br>    | $\hat{u} = \frac{\pi}{2} \cdot  \bar{u} $<br>$\hat{u} = 1,571 \cdot  \bar{u} $<br>$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U$<br>$\hat{u} = 1,414 \cdot U$ | $ \bar{u}  = \frac{2 \cdot \hat{u}}{\pi}$<br>$ \bar{u}  = 0,637 \cdot \hat{u}$<br>$ \bar{u}  = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot U$<br>$ \bar{u}  = 0,9 \cdot U$ | $U = \hat{u} / \sqrt{2}$<br>$U = 0,707 \cdot \hat{u}$<br>$U = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot  \bar{u} $<br>$U = 1,111 \cdot  \bar{u} $ | $S = \sqrt{2} = 1,414$<br>$\frac{1}{S} = 0,707$<br>$S \cdot F = \frac{\pi}{2} = 1,571$ | $U = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot  \bar{u}  = 1,111$<br>$\frac{1}{F} = 0,900$   |
| Rechteck<br> | $\hat{u} =  \bar{u} $<br>$\hat{u} = U$                                                                                                      | $ \bar{u}  = \hat{u}$<br>$ \bar{u}  = U$                                                                                                                          | $U = \hat{u}$<br>$U =  \bar{u} $                                                                                                           | $S = 1,000$<br>$\frac{1}{S} = 1,000$<br>$S \cdot F = 1,000$                            | $F = 1,000$<br>$\frac{1}{F} = 1,000$                                                  |
| Dreieck<br>  | $\hat{u} = 2 \cdot  \bar{u} $<br>$\hat{u} = \sqrt{3} \cdot U$<br>$\hat{u} = 1,732 \cdot U$                                                  | $ \bar{u}  = 0,5 \cdot \hat{u}$<br>$ \bar{u}  = \frac{\sqrt{3} \cdot U}{2}$<br>$ \bar{u}  = 0,866 \cdot U$                                                        | $U = \hat{u} / \sqrt{3}$<br>$U = 0,577 \cdot \hat{u}$<br>$U = \frac{2 \cdot  \bar{u} }{\sqrt{3}}$<br>$U = 1,155 \cdot  \bar{u} $           | $S = \sqrt{3} = 1,732$<br>$\frac{1}{S} = 0,577$<br>$S \cdot F = 2,000$                 | $F = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$<br>$\frac{1}{F} = 0,866$                             |

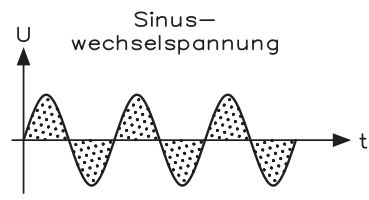
Abhängigkeit der Messgröße

| Kurvenform     | Korrekturfaktor | $F = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}}$ |
|----------------|-----------------|----------------------------------------------------------|
| Sinus          | 1               | 0,707                                                    |
| Rechteck       | 1,41            | 1,0                                                      |
| Dreieck        | 0,82            | 0,577                                                    |
| Parabelspitzen | 0,64            | 0,45                                                     |
| Halbellipsen   | 1,16            | 0,82                                                     |
| Halbkreise     | 1,16            | 0,82                                                     |



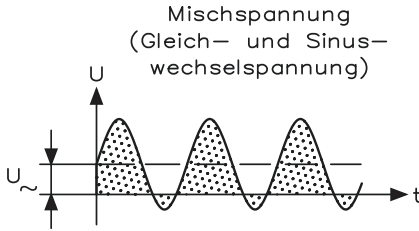
$$U_{eff} = \sqrt{U_{gl}^2 + \frac{U_s^2}{2}}$$

4.7 Spannungsarten



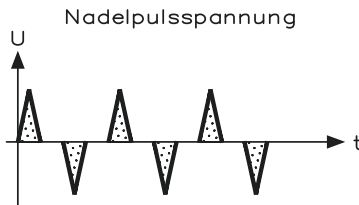
Wechselspannung und -strom

Periodisch, d. h. in regelmäßigen Zeitabständen, im gleichen Verlauf wiederkehrender Spannung (bzw. Strom) wechselnder Richtung, aber beliebiger Kurvenform. Der lineare Mittelwert ist Null, d. h., die Summe aller positiven und negativen Augenblickswerte einer Periode ergibt den Wert Null. Sonderfall: Sinuswechselspannung bzw. Sinuswechselstrom.



### Mischspannung und -strom

Entsteht durch die Überlagerung von Gleich- und Wechselstrom; deshalb ist der lineare Mittelwert nicht Null.



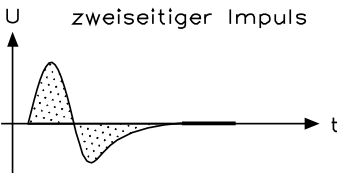
### Pulsspannung und -strom

Periodisch, d. h. in regelmäßigen Zeitabständen, wiederkehrender Spannungs- oder Stromstoß, wobei entweder immer die gleiche Richtung oder abwechselnd positive und negative Richtung auftritt. Bei dem durch Gleichrichtung aus Wechselstrom gewonnenen Pulsstrom spricht man in der Stromversorgungstechnik auch von „pulsierender Gleichspannung“ bzw. von „pulsierendem Gleichstrom“.



### Impuls

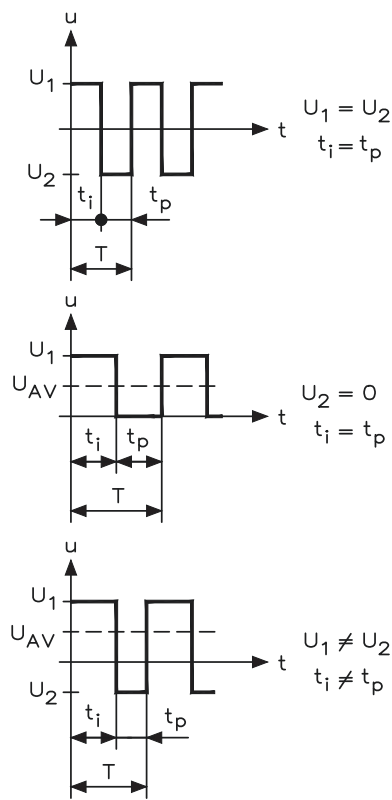
Kurzzeitig wirkender Strom- oder Spannungsstoß beliebiger Kurvenform. Man unterscheidet zwischen einseitigem Impuls (ohne Richtungswechsel) und zweiseitigem Impuls (ein Richtungswechsel).



### Formelzeichen:

|                   |                                                                                           |                                                                                      |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{u}, U_{AV}$ | Arithmetischer Mittelwert (zeitlich linearer Mittelwert, Gleichwert, Gleichspannungswert) | Fläche unter der Kurve dividiert durch Periodendauer (positiv bzw. negativ)          |
| $ \bar{u} $       | Gleichrichtwert                                                                           | Fläche unter der Kurve dividiert durch Periodendauer (nur positive Flächen, Beträge) |
| $U, U_{RMS}$      | Effektivwert<br>(Root Mean Square)                                                        | quadratischer Mittelwert                                                             |
| $\hat{u}/U$       | $F_{Crest} = \hat{u}/U$ Scheitelfaktor (Crest-Faktor)                                     | Maximalwert/Effektivwert                                                             |
| $U/ \bar{u} $     | $F = U/ \bar{u} $ Formfaktor                                                              | Effektivwert/Gleichrichtwert                                                         |

4.8 Rechtecksignale



$$T = t_i + t_p$$

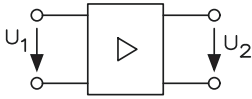
$$f = \frac{1}{T}$$

$$g = \frac{t_i}{T}$$

$$U_{AV} = \frac{U_1 \cdot t_i + U_2 \cdot t_p}{T}$$

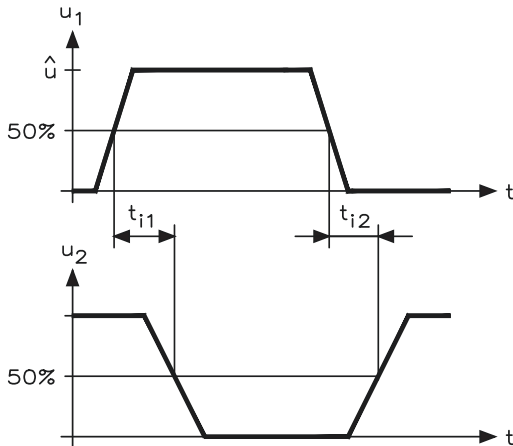
- $t_i$  Impulsdauer
- $t_p$  Impulspause
- $T$  Periodendauer
- $f$  Frequenz
- $g$  Tastgrad
- $\bar{u}, U_{AV}$  arithmetischer Mittelwert

## 4.9 Signallaufzeit

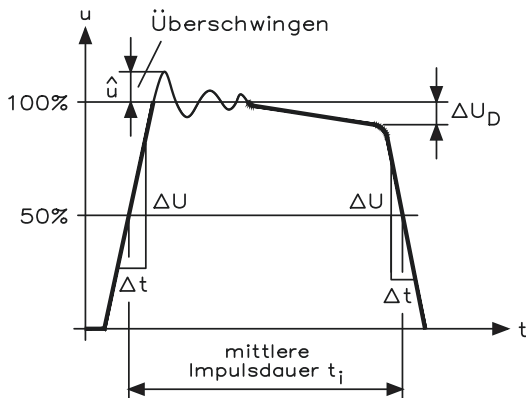


$t_1$  Signallaufzeit

Bezugspegel müssen nicht immer bei 50 % von  $\hat{u}$  liegen.



### ■ Impulsform:



$$D = \frac{\Delta U_D}{\hat{u}}$$

$D$  Dachschräge

$$S = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

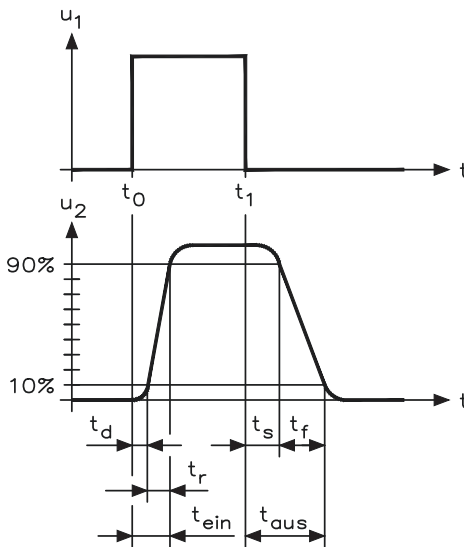
$S$  Flankensteilheit

$\Delta U$  Spannungsänderung

$\Delta t$  Zeitänderung

$t_i$  Impulsdauer

## ■ Impulsverformung:



$$t_{\text{ein}} = t_d + t_r$$

$$t_{\text{aus}} = t_s + t_f$$

$t_d$  Verzögerungszeit  
(delay time)

$t_r$  Anstiegszeit (rise time)

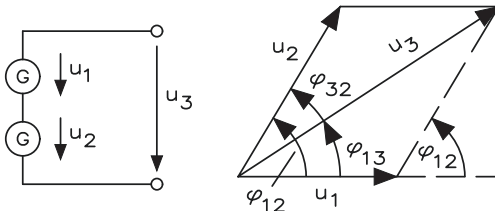
$t_s$  Speicherzeit  
(storage time)

$t_f$  Fallzeit (fall time)

$t_{\text{ein}}$  Einschaltzeit

$t_{\text{aus}}$  Ausschaltzeit

## 4.10 Addition phasenverschobener Spannungen und Ströme



$$\hat{u}_3^2 = \hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 - 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi_{12})$$

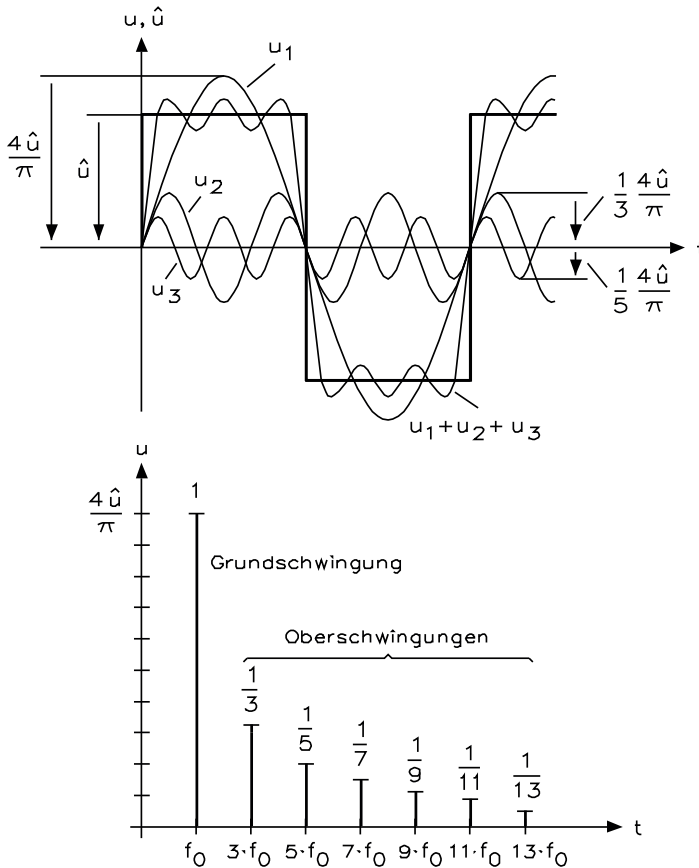
$$\tan \varphi_{13} = \frac{\hat{u}_1 \cdot \sin \varphi_{12}}{\hat{u}_2 + \hat{u}_1 \cdot \sin \varphi_{12}}$$

$\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{32}$  Phasenverschiebungswinkel

$\hat{u}_1, \hat{u}_2$  Spitzenwerte der Einzelspannungen

$\hat{u}_3$  Spitzenwerte der Gesamtspannung

### 4.11 Fourier-Analyse



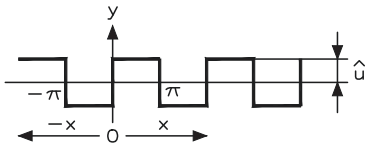
Linien- und Frequenzspektrum. Jede periodische Schwingung kann als Summe von sinusförmiger Teilschwingung dargestellt werden.

Funktionsgleichung:  $u = \frac{4 \cdot \hat{u}}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right); \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

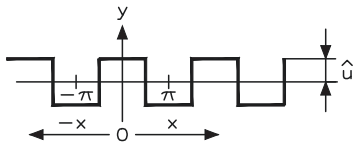
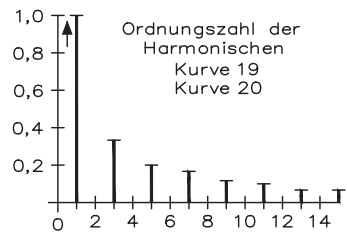
## Kurvenanalyse und deren Oberwellen

### Kurvenverlauf und Gleichung

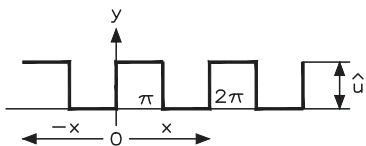
### Oberwellenaufbau



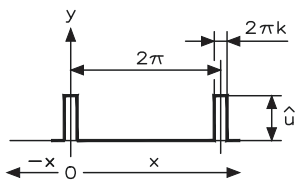
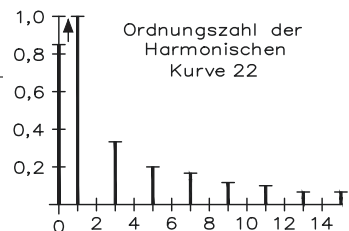
$$f(x) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} \dots \right)$$



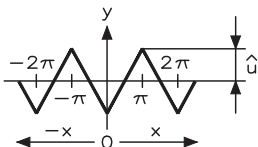
$$f(x) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \left( \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} \dots \right)$$



$$f(x) = \frac{\hat{u}}{2} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} \dots \right)$$



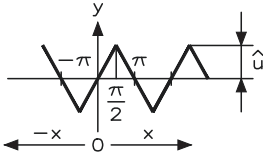
$$f(x) = \hat{u} \left\{ k + \frac{2}{\pi} \left( \sin \cdot k \cdot \pi \cdot \cos x + \frac{1}{2} \sin \cdot k \cdot \pi \cdot \cos \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{3} \sin \cdot 3 \cdot k \cdot \pi \cdot \cos \cdot 3 \cdot x \dots \right) \right\}$$



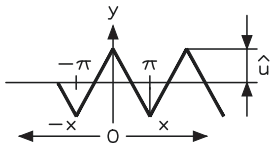
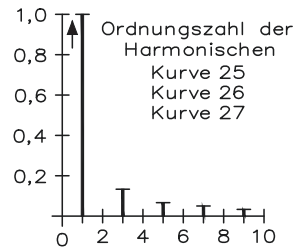
$$f(x) = -\frac{8\hat{u}}{\pi^2} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$$

## Kurvenverlauf und Gleichung

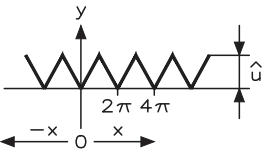
## Oberwellenaufbau



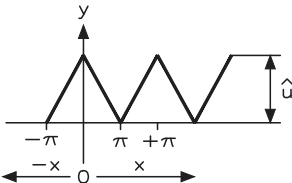
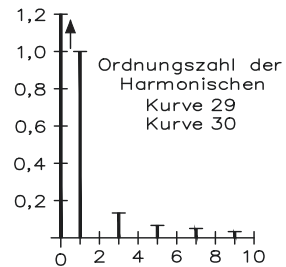
$$f(x) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \left( \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \dots \right)$$



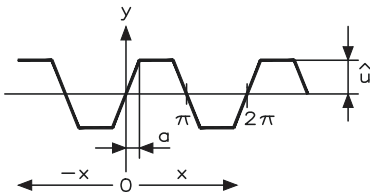
$$f(x) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$$



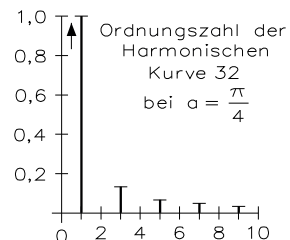
$$f(x) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$$

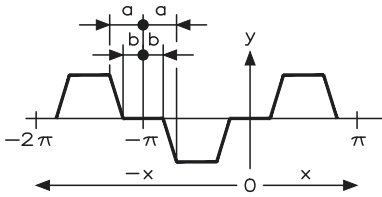


$$f(x) = \frac{\hat{u}}{2} + \frac{4\hat{u}}{\pi^2} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$$

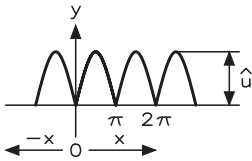


$$f(x) = \frac{4\hat{u}}{a \cdot \pi} \left( \frac{\sin a}{1^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 3a}{3^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 5a}{5^2} \cdot \sin 5x \dots \right)$$



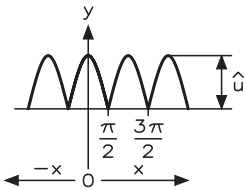
**Kurvenverlauf und Gleichung****Oberwellenaufbau**

$$f(x) = \frac{4\hat{u}}{\pi(a-b)} \left( \frac{\sin a - \sin b}{1^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 3a - \sin 3b}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5a - \sin 5b}{5^2} \cdot \sin 5x \dots \right)$$



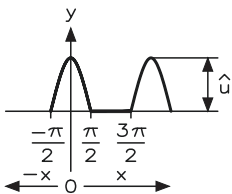
Halbwellen von sin- und -sin-Schwingungen

$$f(x) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} \dots \right)$$



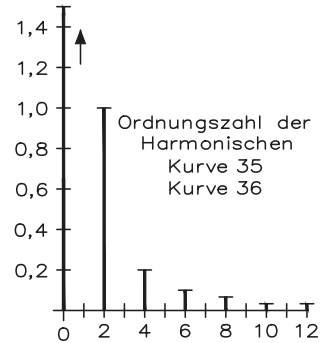
Halbwellen von cos- und -cos-Schwingungen

$$f(x) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \left( -\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$



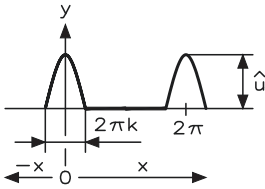
Halbwellen einer cos-Schwingung

$$f(x) = \frac{\hat{u}}{\pi} - \frac{\hat{u}}{2} \cos x + \frac{2 \cdot \hat{u}}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right)$$



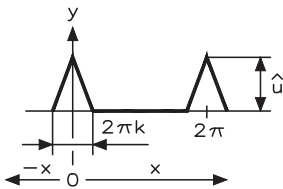
## Kurvenverlauf und Gleichung

## Oberwellenaufbau

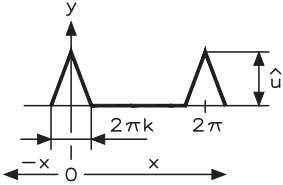


Halbwellen einer cos-Schwingung

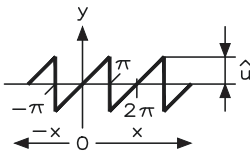
$$f(x) = \frac{2 \cdot k \cdot \hat{u}}{\pi} + \frac{4 \cdot k \cdot \hat{u}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \cdot n \cdot \pi \cdot k}{1 - 4 \cdot k^2 \cdot n^2} \cdot \cos \cdot n \cdot x$$



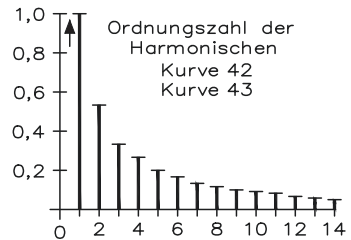
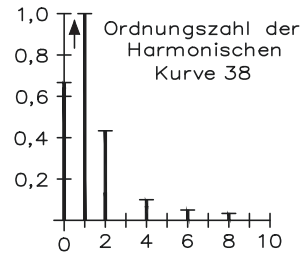
$$f(x) = \frac{k \cdot \hat{u}}{2} + \frac{2 \cdot \hat{u}}{\pi^2 \cdot k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \cdot n \cdot \pi \cdot k}{n^2} \cdot \cos \cdot n \cdot x$$

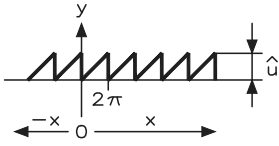


$$f(x) = \frac{2\hat{u}}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \right)$$

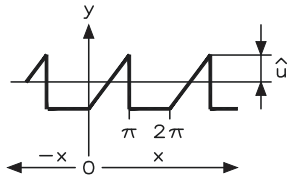


$$f(x) = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \dots \right)$$

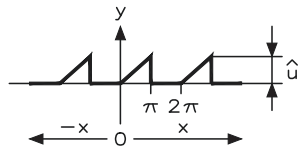


**Kurvenverlauf und Gleichung****Oberwellenaufbau**

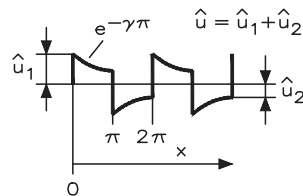
$$f(x) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$$



$$f(x) = -\frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right) + \frac{2\hat{u}}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$$



$$f(x) = \frac{\hat{u}}{4} - \frac{2\hat{u}}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{\hat{u}}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$



$$f(x) = \frac{2 \cdot \hat{u} \cdot \gamma}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2} + \frac{2 \cdot \hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot \sin(2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$$

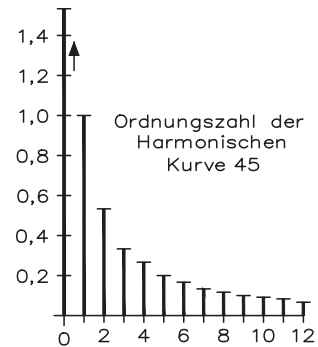
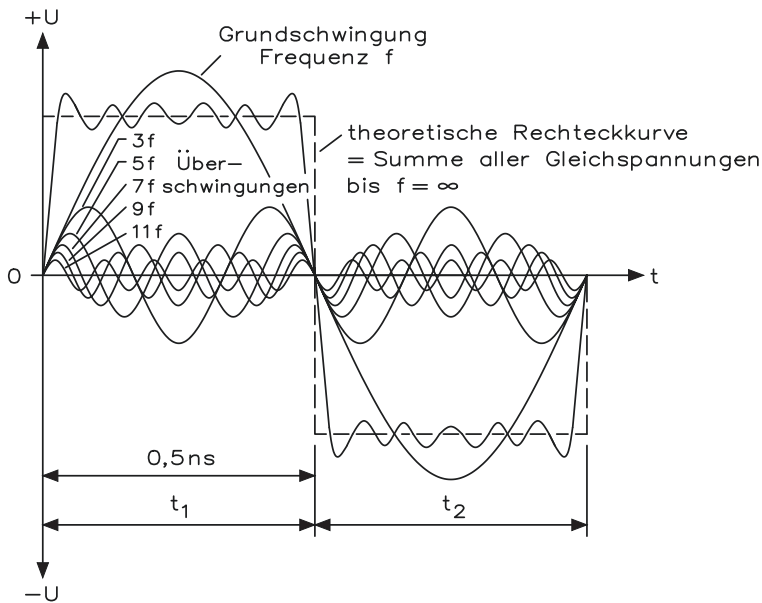


Tabelle der Amplitudenwerte (Kurven 5 bis 14)

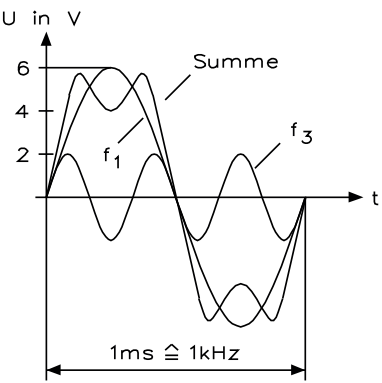
| Ordnungszahl<br>der Harmonischen | Kurve      |         |         |           |        |
|----------------------------------|------------|---------|---------|-----------|--------|
|                                  | 5, 6 und 7 | 8 und 9 | 10      | 12 und 13 | 14     |
| $f_0$                            | –          | 1,23    | –       | 1,5       | 0,626  |
| $f_1$                            | 1          | 1       | 1       | –         | 1      |
| $f_2$                            | –          | –       | –       | 1         | 0,425  |
| $f_3$                            | 0,111      | 0,111   | 0,111   | –         | –      |
| $f_4$                            | –          | –       | –       | 0,2       | 0,085  |
| $f_5$                            | 0,04       | 0,04    | 0,04    | –         | –      |
| $f_6$                            | –          | –       | –       | 0,0855    | 0,0364 |
| $f_7$                            | 0,0204     | 0,0204  | 0,0204  | –         | –      |
| $f_8$                            | –          | –       | –       | 0,0475    | 0,0202 |
| $f_9$                            | 0,0124     | 0,0124  | 0,0124  | –         | –      |
| $f_{10}$                         | –          | –       | –       | 0,0303    | 0,0129 |
| $f_{11}$                         | 0,00827    | 0,00827 | 0,00827 | –         | –      |
| $f_{12}$                         | –          | –       | –       | 0,021     | 0,0089 |

Bildung einer Spannungsform aus den Oberwellen

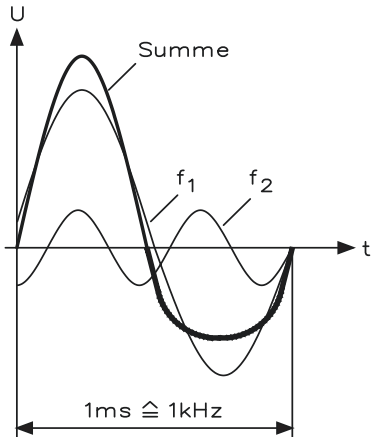
a) Rechteckspannung bis zur 11. Oberwelle



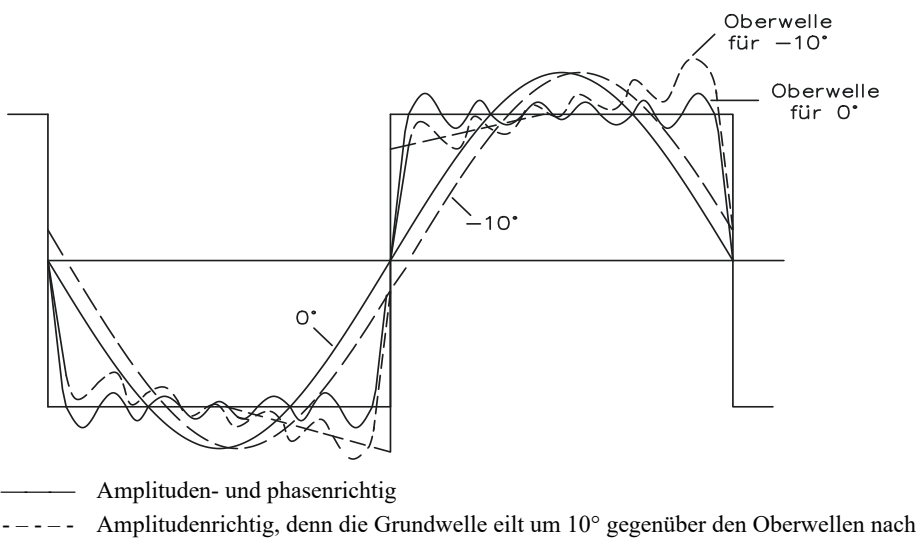
**b) Summenschwingung aus  $f_1$  und  $f_3$**



**c) Summenschwingung aus  $f_1$  und  $f_2$**



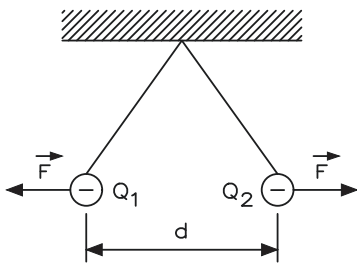
**d) Rechtecksprung durch Überlagerung mit Oberwellen bis zur 10. Harmonischen**



# Elektrisches Feld und Kondensator

# 5

## 5.1 Kraft zwischen Ladungen (Coulomb'sches Gesetz)



$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot d^2}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$

$$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$F$  Kraft zwischen den Ladungen in N

$Q_1, Q_2$  Ladungen in C

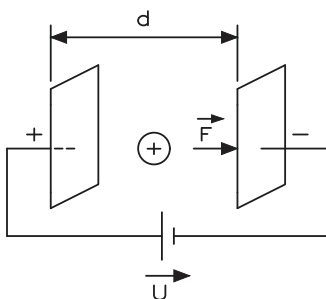
$\epsilon$  Permittivität

$\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante

$\epsilon_r$  Permittivitätszahl

$d$  Abstand der Ladungen in m

## 5.2 Elektrische Feldstärke



$$E = \frac{F}{Q} \quad 1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$E$  elektrische Feldstärke in V/m

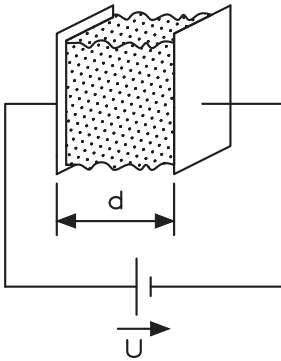
$F$  Kraft auf die Ladung im Feld in N

$Q$  Ladung im Feld in C

$U$  Spannung zwischen den Platten in V

$d$  Abstand der Platten in m

### 5.3 Kapazität eines Kondensators



$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2}$$

$$[C] = \frac{\text{As}}{\text{V}} \quad 1 \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ F (Farad)}$$

$C$  Kapazität des Kondensators in F

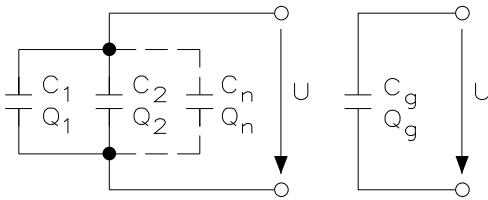
$Q$  Ladung des Kondensators in C

$\varepsilon_0$  elektrische Feldkonstante

$$8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$[W] = \text{VA s}$$

### 5.4 Parallelschaltung für Kondensatoren



$Q_1 \dots Q_n$  Ladung der einzelnen Kondensatoren

$C_1 \dots C_n$  Kapazität der einzelnen Kondensatoren

$Q$  Ladung der Gesamtkapazität

$C$  Gesamtkapazität

$$Q = C \cdot U$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \dots + \frac{Q_n}{C_n}$$

Für zwei Kondensatoren gilt:

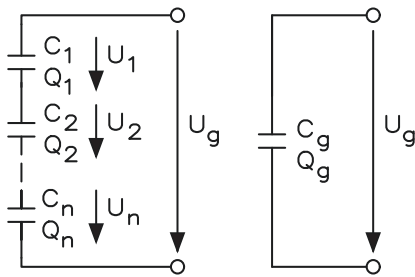
$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad C_1 = \frac{C_2 \cdot C}{C_2 - C} \quad C_2 = \frac{C_1 \cdot C}{C_1 - C}$$

Für drei Kondensatoren gilt:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3}{C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_3}$$

Bei  $n$  gleichen Kondensatoren in Reihe:  $C = \frac{C_1}{n}$

## 5.5 Reihenschaltung für Kondensatoren



|                 |                                       |
|-----------------|---------------------------------------|
| $Q_1 \dots Q_n$ | Ladung der einzelnen Kondensatoren    |
| $C_1 \dots C_n$ | Kapazität der einzelnen Kondensatoren |
| $Q$             | Ladung der Gesamtkapazität            |
| $C$             | Gesamtkapazität in F                  |
| $U_1 \dots U_n$ | Einzelspannungen in V                 |
| $U$             | Gesamtspannung in V                   |

$$Q = C \cdot U$$

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

$$\frac{U_1}{U_n} = \frac{C_n}{C_1}$$

## 5.6 Temperaturverhalten von Kondensatoren

$$\Delta C = \alpha \cdot C_k \cdot \Delta T$$

$$C_w = C_k (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

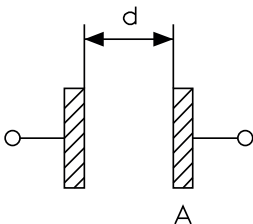
Parallelschaltung:  $\alpha = \frac{\alpha_1 \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

Reihenschaltung:  $\alpha = \frac{\alpha_2 \cdot C_1 + \alpha_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

|                      |                                                   |
|----------------------|---------------------------------------------------|
| $\Delta C$           | Kapazitätsänderung                                |
| $\alpha$             | Temperaturkoeffizient                             |
| $C_w$                | Kapazität im warmen Zustand                       |
| $\Delta T$           | Temperaturänderung in K                           |
| $\alpha$             | Gesamttemperaturkoeffizient in 1/K                |
| $\alpha_1, \alpha_2$ | Temperaturkoeffizient der einzelnen Kondensatoren |
| $C_1, C_2$           | Einzelkapazität in F                              |

## 5.7 Kapazität von Kondensatoren

### Plattenkondensator



$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

|              |                                  |
|--------------|----------------------------------|
| $C$          | Kapazität in F bzw. As/V         |
| $\epsilon_0$ | elektrische Feldkonstante in F/m |
| $\epsilon_r$ | Permittivitätszahl               |
| $d$          | Abstand der Platten in m         |
| $A$          | Fläche in m <sup>2</sup>         |

**Kapazität und Plattengröße (ohne Berücksichtigung des Streufeldes)**

Bei einem Plattenpaar:

$$C = \frac{A \cdot \varepsilon_r}{0,9 \cdot 4 \cdot \pi \cdot a} \text{ in pF}$$

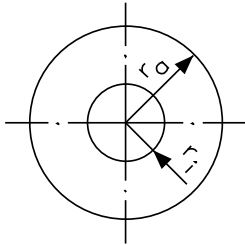
$$C = 0,0885 \cdot \frac{A \cdot \varepsilon_r}{a} \text{ in pF}$$

$$A = \frac{C \cdot 0,9 \cdot 4 \cdot \pi \cdot a}{\varepsilon_r} \text{ in cm}^2$$

$C$  Kapazität in pF  
 $A$  Wirksame Fläche einer Platte in cm<sup>2</sup>  
 $\varepsilon_r$  Dielektrizitätszahl  
 $a$  Plattenabstand in cm

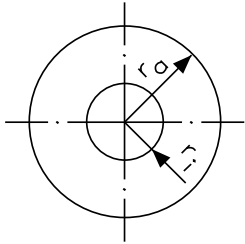
Bei  $n$  Platten:

$$C = 0,0885 \cdot \frac{A \cdot \varepsilon_r}{a} (n-1) \text{ in pF}$$

**Zylinderkondensator**

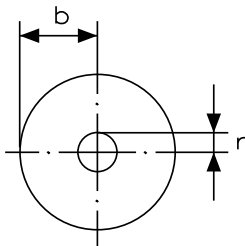
$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

$l$  Länge des Zylinders in m  
 $r_a$  Innenradius des äußeren Zylinders in mm  
 $r_i$  Außenradius des inneren Zylinders in mm  
 $\ln$  natürlicher Logarithmus  
 $\varepsilon_0$  elektrische Feldkonstante in F/m  
 $\varepsilon_r$  Permittivitätszahl

**Kuglkondensator**

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i}$$

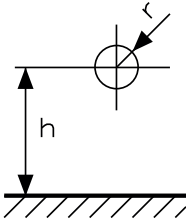
$r_a$  Innenradius der äußeren Kugel in mm  
 $r_i$  Außenradius der inneren Kugel in mm

**Koaxialkabel**

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \pi \cdot \frac{l}{\ln \frac{b-r}{r}}$$

gilt für  $b \gg r$ 

$l$  Länge des Zylinders in m  
 $b$  Abstand der Zylinder in m  
 $r$  Radius des Zylinders in m  
 $\varepsilon_0$  elektrische Feldkonstante in F/m  
 $\varepsilon_r$  Permittivitätszahl

**Leitung gegen Masse**

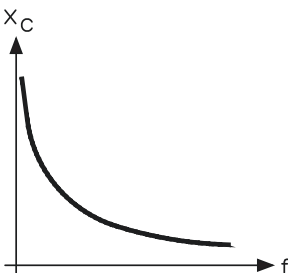
$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{l}{\ln \frac{2 \cdot h}{r}}$$

gilt für  $h \gg r$  $h$  Abstand der Leitung zur Masse in m $l$  Länge des Zylinders in m $r$  Zylinderradius in m $\varepsilon_0$  elektrische Feldkonstante in F/m $\varepsilon_r$  Permittivitätszahl**5.8 Energie eines geladenen Kondensators**

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

 $W_{\text{el}}$  gespeicherte Energie in Js $C$  Kapazität in F**5.9 Elektrische Ladungsverschiebung**

$$D = \frac{Q}{A} = \varepsilon \cdot E = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E$$

 $D$  elektrische Flussdichte in As/m<sup>2</sup> $Q$  Ladung des Körpers in As $E$  elektrische Feldstärke in V/m $A$  Fläche in m<sup>2</sup> $\varepsilon$  Permittivität in As/(Vm) bzw. F/m $\varepsilon_0$  elektrische Feldkonstante in F/m $\varepsilon_r$  Permittivitätszahl**5.10 Kapazitiver Blindwiderstand**

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$X_C = \frac{U_C}{I_C}$$

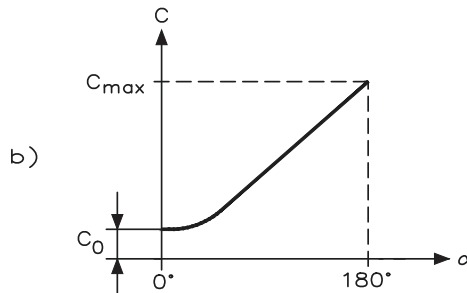
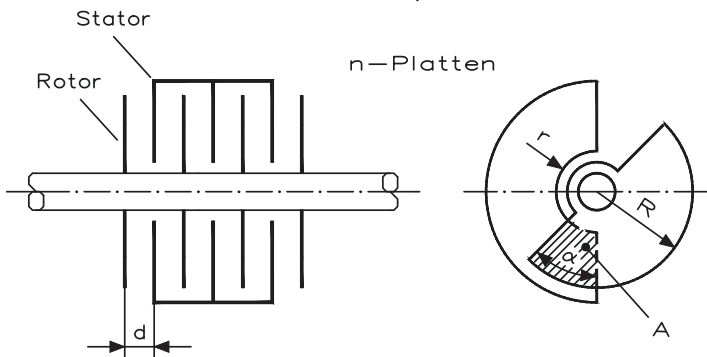
 $X_C$  kapazitiver Blindwiderstand in  $\Omega$  $\omega$  Kreisfrequenz $C$  Kapazität $U_C$  Spannung am Kondensator $I_C$  Strom durch den Kondensator

## 5.11 Drehkondensator

Beim Kreisplattenkondensator nimmt die Kapazität  $C$  proportional mit dem Drehwinkel  $\alpha$  zu und ist auch abhängig von der Form der Platten. Eine gewisse Anfangskapazität  $C_0$  ist immer vorhanden. Beträgt die Summe von Stator- und Rotorplatten  $n$ , errechnet sich die Kapazität zu

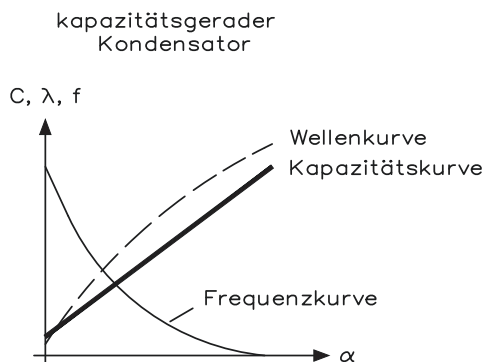
$$C = \varepsilon \cdot (n-1) \cdot \frac{A}{d} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

a)



### Kapazitätsgerader Drehkondensator

Die Kennlinie zeigt den Kapazitätsverlauf für einen kapazitätsgeraden Drehkondensator:



|                  |                                                               |
|------------------|---------------------------------------------------------------|
| $C$              | eingestellte Kapazität                                        |
| $C_a$            | Anfangskapazität                                              |
| $C_e$            | Endkapazität                                                  |
| $\alpha^\circ$   | Winkel des eingedrehten Sektors                               |
| $f_u, \lambda_o$ | mit $C_e$ erreichte Frequenz bzw. Wellenlänge                 |
| $f_o, \lambda_u$ | mit $C_a$ erreichte Frequenz bzw. Wellenlänge                 |
| $f, \lambda$     | Frequenz bzw. Wellenlänge mit der eingestellten Kapazität $C$ |

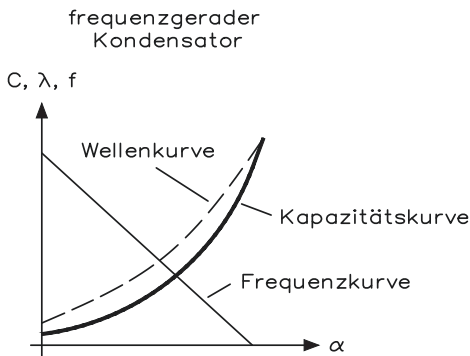
$$C = C_a + (C_e - C_a) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\frac{C}{C_e} = \frac{C_a}{C_e} + \left(1 - \frac{C_a}{C_e}\right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\frac{f}{f_u} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f_u}{f_o}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{f_u}{f_o}\right)^2\right] \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_o} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_u}{\lambda_o}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_o}\right)^2\right] \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}$$

### Frequenzgerader Kondensator



- $C$  eingestellte Kapazität
- $C_a$  Anfangskapazität
- $C_e$  Endkapazität
- $\alpha^\circ$  Winkel des eingedrehten Sektors
- $f_u, \lambda_o$  mit  $C_e$  erreichte Frequenz bzw. Wellenlänge
- $f_o, \lambda_u$  mit  $C_a$  erreichte Frequenz bzw. Wellenlänge
- $f, \lambda$  Frequenz bzw. Wellenlänge mit der eingestellten Kapazität  $C$

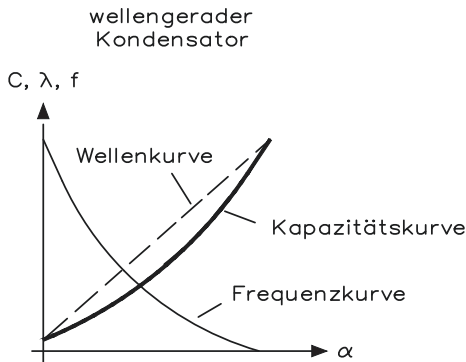
$$f = f_o - (f_o - f_u) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\frac{C}{C_e} = \frac{1}{\left[ \sqrt{\frac{C_e}{C_a}} - \left( \sqrt{\frac{C_e}{C_a}} - 1 \right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \right]^2}$$

$$\frac{f}{f_u} = \frac{f_o}{f_u} - \left( \frac{f_o}{f_u} - 1 \right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_o} = \frac{1}{\frac{\lambda_o}{\lambda_u} - \left( \frac{\lambda_o}{\lambda_u} - 1 \right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}$$

## Wellengerader Kondensator



- $C$  eingestellte Kapazität  
 $C_a$  Anfangskapazität  
 $C_e$  Endkapazität  
 $\alpha^\circ$  Winkel des eingedrehten Sektors mit  $C_e$  erreichte Frequenz bzw. Wellenlänge  
 $f_u, \lambda_u$  mit  $C_a$  erreichte Frequenz bzw. Wellenlänge  
 $f, \lambda$  Frequenz bzw. Wellenlänge mit der eingestellten Kapazität  $C$

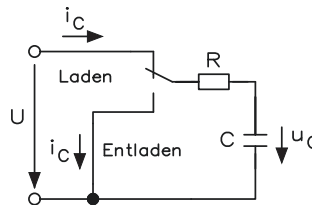
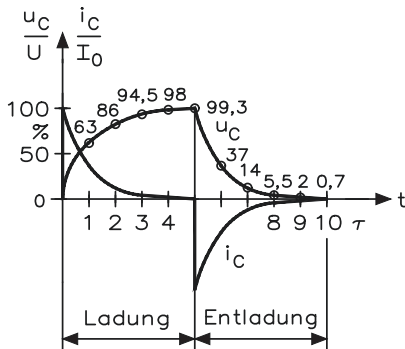
$$\lambda = \lambda_u + (\lambda_o - \lambda_u) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\frac{f}{f_u} = \frac{1}{\frac{f_u}{f_o} + \left(1 - \frac{f_u}{f_o}\right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}$$

$$\frac{C}{C_e} = \left[ \sqrt{\frac{C_a}{C_e}} + \left(1 - \sqrt{\frac{C_a}{C_e}}\right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \right]^2$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_o} = \frac{\lambda_u}{\lambda_o} + \left(1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_o}\right) \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

## 5.12 Zeitkonstante eines Kondensators



$$\tau = R \cdot C \quad I_0 = R \cdot C$$

Einschalten:  $u_C = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Entladung:  $i_C = -\frac{U}{R} \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$\tau$  Zeitkonstante in s

$U_C$  Augenblickswert der Kondensatorspannung

$i_C$  Strom im Einschaltaugenblick in A

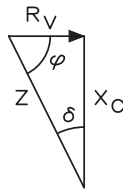
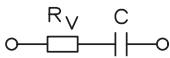
$t$  Zeit nach Beginn des Ein- bzw. Ausschaltens

### 5.13 Austausch eines Kondensators (Kapazitätsvariation)

$$C_2 = C_1 \cdot \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2$$

$C_1$  bisheriger Kondensator in F  
 $C_2$  neuer Kondensator in F  
 $f_1, f_2$  gewünschter Frequenzbereich (für Schwingkreis mit konstanter Induktivität)

### 5.14 Verlustfaktor von Kondensatoren



$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\tan \delta = \frac{R_V}{X_C} = R_V \cdot \omega \cdot C$$

$$R_V = \frac{\tan \delta}{\omega \cdot C}$$

$R_V$  Verlustwiderstand bei Wechselstrom  
 $X_C$  kapazitiver Blindwiderstand  
 $\varphi$  Phasenwinkel  
 $\delta$  Verlustwinkel  
 $\tan \delta$  Verlustfaktor

### 5.15 Reststrom von Elektrolytkondensatoren

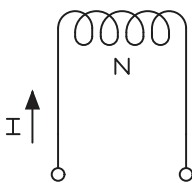
$$I_R = 0,5 \cdot C \cdot U$$

$I_R$  höchstzulässiger Reststrom in  $\mu A$   
 $C$  Nennkapazität in  $\mu F$   
 $U$  Nennspannung in V

# Magnetisches Feld und Induktionsspannung

## 6

### 6.1 Magnetische Durchflutung

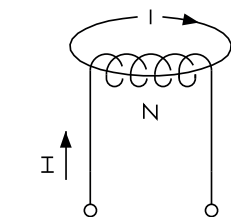


$$\Theta = N \cdot I$$

$$1 \text{ A} = 1 \text{ A} \cdot 1$$

$\Theta$  Durchflutung in A  
(magnetische Spannung)  
 $N$  Windungszahl  
 $I$  Strom in A

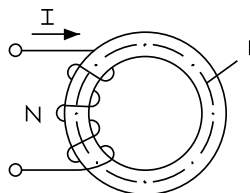
### 6.2 Magnetische Feldstärke



$$H = \frac{\Theta}{l}$$

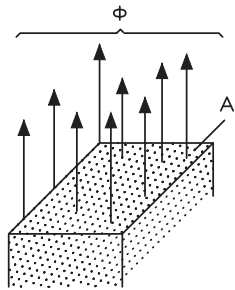
$$1 \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ m}} = \frac{10^{-2} \text{ A}}{\text{cm}}$$

$H$  magnetische Feldstärke  
in A/m  
 $l$  mittlere Feldlinienlänge  
in m  
 $N$  Windungszahl



$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

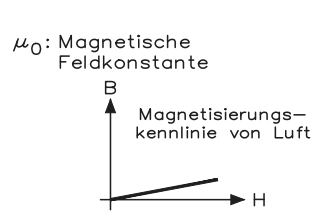
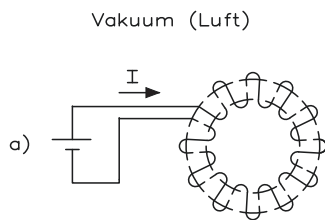
6.3 Magnetische Flussdichte (Induktion)



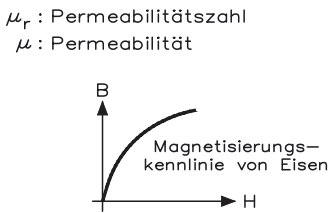
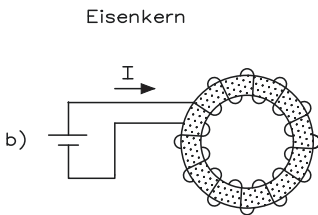
$$B = \frac{\Phi}{A}$$
$$1 \text{ T} = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ Vs/m}^2$$
$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Vs}$$

$B$  magnetische Flussdichte in Tesla (Vs/m<sup>2</sup>)  
 $\Phi$  magnetischer Fluss in Weber (Vs)  
 $A$  Fläche in m<sup>2</sup>

6.4 Magnetische Feldstärke und Flussdichte



$$B = \mu_0 \cdot H$$
$$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$



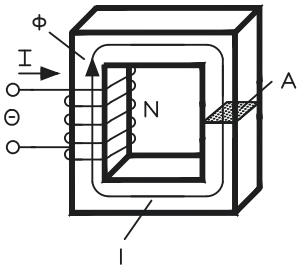
$$B = \mu \cdot H$$
$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

$B$  magnetische Flussdichte in Tesla (Vs/m<sup>2</sup>)  
 $\mu$  Permeabilität in Vs/Am  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  
 $\mu_r$  Permeabilitätszahl  
 $H$  Feldstärke in A/m

| Werkstoff | $\mu_r$ |
|-----------|---------|
| Luft      | 1       |
| Fe        | 6000    |
| Fe – Co   | 6000    |
| Fe – Si   | 20000   |
| Fe – Ni   | 30000   |

In Luft:  $B = \mu \cdot H$      $\mu_0$  konstant     $\mu_r = 1$   
In Eisen:  $B = \mu \cdot H$      $\mu$  nicht konstant

## 6.5 Magnetischer Widerstand und magnetischer Leitwert



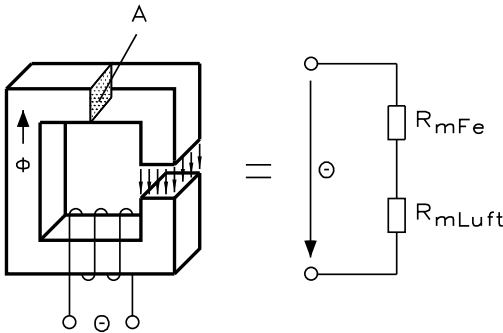
$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

$$\Lambda = \frac{l}{R_m} = \frac{\mu \cdot A}{l}$$

$$\Phi = \Theta \cdot \Lambda$$

$R_m$  magnetischer Widerstand in A/Wb  
 $\Theta$  Durchflutung in A  
 $\Phi$  magnetischer Fluss in Wb  
 bzw. Vs  
 $l$  mittlere Feldlinienlänge in m  
 $\mu$  Permeabilität in Vs/Am  
 $A$  Fläche in m<sup>2</sup>  
 $\Lambda$  magnetischer Leitwert in Wb/A

## 6.6 Magnetischer Kreis mit Luftspalt (ohne Streuung)



$$R_m = R_{mFe} + R_{mLuft}$$

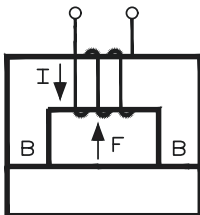
$$V_g = V_{Fe} + V_{Luft}$$

$$\Theta = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_{Luft} \cdot l_{Luft}$$

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}$$

$R_m$  gesamter magnetischer Widerstand in A/Wb  
 $R_{mFe}, R_{mLuft}$  magnetische Einzelwiderstände in A/Wb  
 $V_g$  magnetische Gesamtspannung in A  
 $V_{Luft}, V_{Fe}$  magnetische Teilspannung in A  
 $\Theta$  Durchflutung in A  
 $H_{Luft}, H_{Fe}$  magnetische Feldstärken in A/m  
 $l_{Luft}, l_{Fe}$  mittlere Feldlinienlänge in m

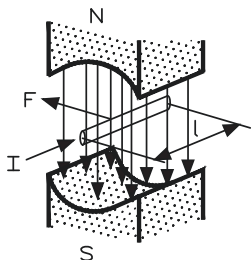
## 6.7 Kraft im Magnetfeld



$$F = \frac{B^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0}$$

$F$  Kraft in N  
 $B$  magnetische Flussdichte in T  
 $A$  Fläche in m<sup>2</sup>

## 6.8 Stromdurchflossener Leiter mit Magnetfeld

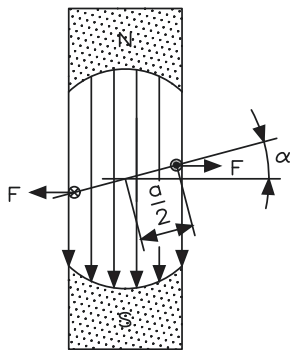


$$F = B \cdot I \cdot l \cdot z$$

$$[F] = \text{N}$$

$F$  Kraft auf den Leiter in N  
 $B$  magnetische Flussdichte in T  
 $l$  wirksame Leiterlänge in m  
 $z$  Leiterzahl  
 $I$  Stromstärke in A

## 6.9 Spule im Magnetfeld

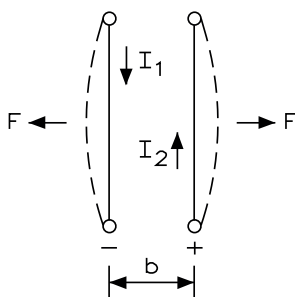
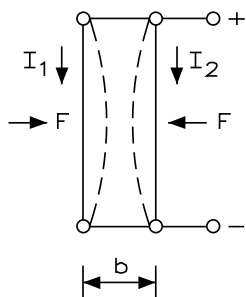


$$M = \frac{F \cdot a \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$F = 2 \cdot N \cdot B \cdot I \cdot l$$

$M$  Drehmoment in N  
 $a$  Spulenlänge in m  
 $N$  Windungszahl

## 6.10 Kraft auf parallele Stromleiter

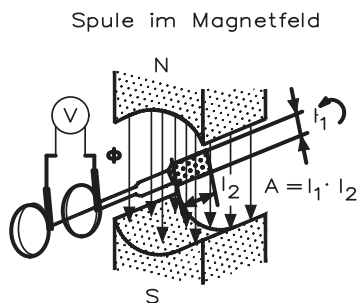


$F$  Kraft in N  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  
 $l$  Leiterlänge in m  
 $b$  Leiterabstand in m  
 $I_1, I_2$  Leiterstrom in A

$$F = \frac{\mu_0 \cdot l \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot b}$$

$$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

## 6.11 Induktion



$$U_{ind} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$$U_{ind} = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

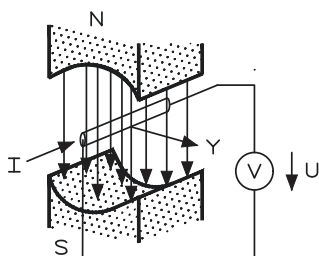
$U_{ind}$  induzierte Spannung in V  
 $N$  Windungszahl

$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$  zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses in Wb/s  
 (Das Vorzeichen hängt vom gewählten Richtungssinn ab.)

$\Delta \Phi$  Flussänderung

$\Delta t$  Zeitänderung

## 6.12 Induktion der Bewegung



$$|U_{ind}| = B \cdot l \cdot v \cdot z,$$

wenn  $v \perp B$

$\perp$  (senkrechte  
Einwirkung)

$|U_{ind}|$  induzierte Spannung in V

$l$  wirksame Leiterlänge in m

$v$  Geschwindigkeit in m/s

$z$  Leiterzahl

$B$  magnetische Flussdichte  
in T

## 6.13 Selbstinduktionsspannung

$$U_0 = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

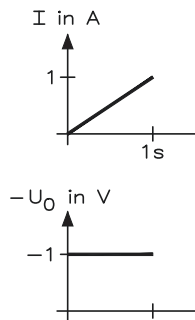
$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \Omega$$

$U_0$  Selbstinduktionsspannung in V

$L$  Induktivität in H

$\frac{\Delta I}{\Delta t}$  zeitliche Veränderung des Stromes in A/s

## 6.14 Selbstinduktivität von Spulen

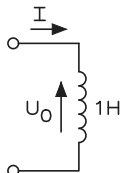


$$L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l}$$

$$1 \text{ H} = \text{Wb/A}$$

$$L = N^2 \cdot A$$

$L$  Selbstinduktivität in H  
 $N$  Windungszahl  
 $A$  Fläche in  $\text{m}^2$   
 $A$  magnetischer Leitwert in  $\text{Wb/A}$



## 6.15 Energie einer stromdurchflossenen Spule

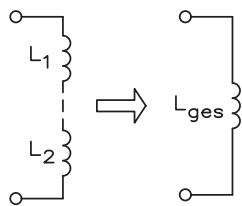
$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

$W_{\text{mag}}$  magnetisch gespeicherte Energie in Js

$L$  Selbstinduktivität in H

$I$  Strom in A

## 6.16 Reihenschaltung von Induktivitäten

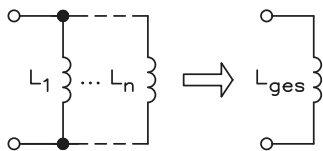


$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

$L$  Gesamtinduktivität in H

$L_1, L_n$  Einzelinduktivität in H

## 6.17 Parallelschaltung von Induktivitäten



$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

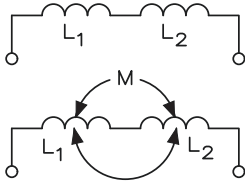
für zwei Spulen

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

$L$  Gesamtinduktivität in H

$L_1, L_n$  Einzelinduktivität in H

## 6.18 Reihenschaltung von Induktivitäten mit magnetischer Kopplung



$$L = L_1 + L_2 + \dots$$

(ohne gegenseitige magnetische Kopplung)

$$L = L_1 + L_2 + M$$

(Kopplung mit gleichem Wickelsinn der Spulen)

$$L = L_1 + L_2 - M$$

(Kopplung mit entgegengesetztem Wickelsinn der Spulen)

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

(Kopplung mit gleichem Wickelsinn)

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

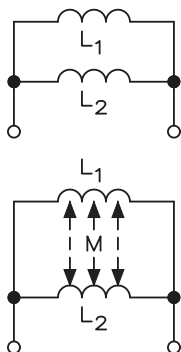
(Kopplung mit entgegengesetztem Wickelsinn)

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

$L$  Gesamtinduktivität  
 $L_1, L_2$  Einzelinduktivität  
 in H  
 $M$  Gegeninduktivität  
 in H

$k$  Kopplungsfaktor  
 $k = 0 \rightarrow$  keine Kopplung  
 $k = 1 \rightarrow$  ideale feste  
 Kopplung

## 6.19 Parallelschaltung von Induktivitäten mit magnetischer Kopplung



$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots$$

(ohne gegenseitige magnetische  
Kopplung)

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

(Kopplung mit gleichem Wickelsinn)

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

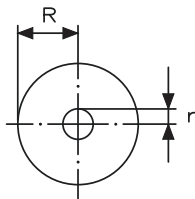
(Kopplung mit entgegengesetztem  
Wickelsinn)

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

$L_1, L_2$  Einzelinduktivität  
 in H  
 $M$  Gegeninduktivität  
 in H

$k$  Kopplungsfaktor  
 $k = 0 \rightarrow$  keine Kopplung  
 $k = 1 \rightarrow$  ideale feste  
 Kopplung

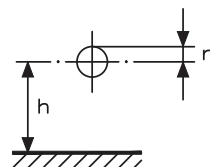
### 6.20 Selbstinduktion (konzentrisches Kabel, Koaxialkabel)



$$L = 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

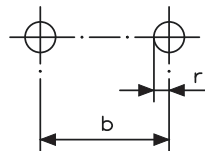
$L$  Induktivität in H  
 $l$  Länge in m

### 6.21 Selbstinduktion (Leitung gegen Masse)



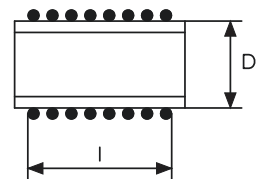
$$L = 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{2h}{r}\right)$$

### 6.22 Selbstinduktion (Doppelleitung)



$$L = 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

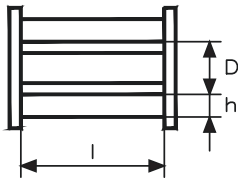
### 6.23 Einlagige Spule



$$L = 10^{-6} \cdot N^2 \cdot \frac{D^2}{l}$$

$L$  Induktivität in H  
 $N$  Windungszahl  
 $D$  Windungsdurchmesser  
 in m  
 $l$  Spulenlänge in m

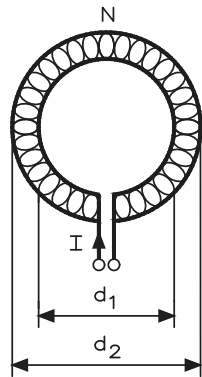
6.24 Mehrlagige Spule



$$L \approx 10^{-6} \cdot N^2 \cdot D \left[ \frac{D}{2(l+h)} \right]^n$$
$$n = 0,75 \quad \text{für} \quad 0 < \frac{D}{2(l+h)} < 1$$
$$n = 0,5 \quad \text{für} \quad 1 \leq \frac{D}{2(l+h)} < 3$$

$L$  Induktivität in H  
 $N$  Windungszahl  
 $h$  Wicklungshöhe in m  
 $D$  Windungsdurchmesser in m  
 $l$  Spulenlänge in m

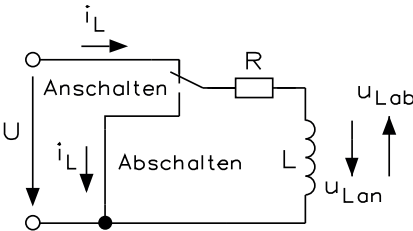
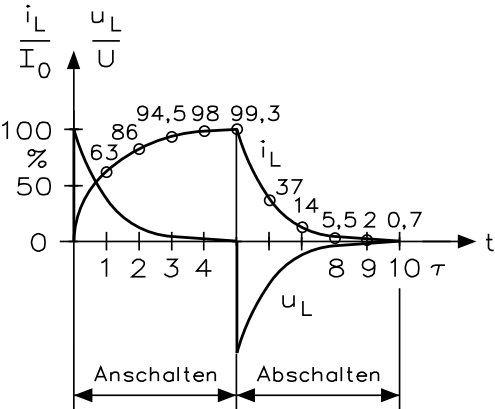
6.25 Ringkreisförmige Luftspule



$$H = \frac{\Theta}{l} = \frac{I \cdot N}{l} = \frac{I \cdot N}{\pi \cdot \frac{d_1 + d_2}{2}}$$

$H$  Feldstärke in A/m  
 $\Theta$  Durchflutung  
 $l$  mittlere Feldlinienlänge  
 $d_1$  innerer Spulendurchmesser  
 $d_2$  äußerer Spulendurchmesser

6.26 Zeitkonstante einer Spule



$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_0 = \frac{U}{R} \quad \begin{array}{ll} \tau & \text{Zeitkonstante in s} \\ I_L & \text{Augenblickswert des Spulenstromes} \\ I_0 & \text{Strom im Einschaltaugenblick in A} \\ t & \text{Zeit nach Beginn des Ein- bzw. Abschaltens} \end{array}$$

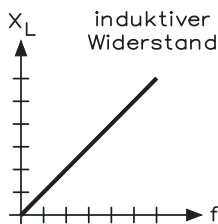
Einschalten:  $i_L = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$$u_L = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Abschalten:  $I_L = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$u_L = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

## 6.27 Induktiver Blindwiderstand



$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \quad \begin{array}{ll} X_L & \text{induktiver Blindwiderstand (Induktanz)} \\ f = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot L} & L \text{ Induktivität} \\ & f \text{ Frequenz} \end{array}$$

## 6.28 Umwickeln von Spulen

Gilt für Schwingkreis bei konstanter Kapazität!

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad \frac{N_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{N_2}{\sqrt{L_2}} = k$$

$$N_1 = N_2 \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad N_2 = N_1 \cdot \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$L_1 = L_2 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = L_2 \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$$

$$L_2 = L_1 \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = L_1 \cdot \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2$$

$L_1$  ursprüngliche Induktivität  
 $L_2$  gewünschte Induktivität  
 $N_1$  ursprüngliche Windungszahl  
 $N_2$  neue Windungszahl  
 $k$  Spulenkonstante  
 $f_1$  ursprüngliche Frequenz  
 $f_2$  gewünschte Frequenz

## 6.29 Spulengüte

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L}{R}$$

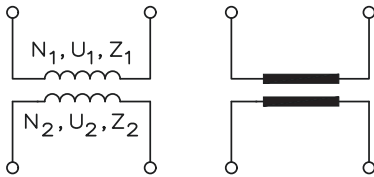
$$R = \frac{\omega \cdot L}{Q}; \quad X_L = Q \cdot R$$

$Q$  Spulengüte

$R$  Verlustwiderstand (Drahtwiderstand)

$X_L$  induktiver Blindwiderstand (Induktanz)

## 6.30 Transformator (ohne Verluste)



Voraussetzung:  $P_1 = P_2 = P$

$\ddot{u}$  Übersetzungsverhältnis

$N_1$  Primärwindungszahl

$N_2$  Sekundärwindungszahl

$Z_1$  Primärwiderstand (induktiver Widerstand)

$Z_2$  Sekundärwiderstand (induktiver Widerstand)

$P_1$  Primärleistung

$P_2$  Sekundärleistung

$U_1$  Primärspannung

$U_2$  Sekundärspannung

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

$$N_1 = \ddot{u} \cdot N_2 = N_2 \cdot \frac{U_1}{U_2} = N_2 \cdot \frac{I_2}{I_1} = N_2 \cdot \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

$$N_2 = \frac{N_1}{\ddot{u}} = N_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} = N_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} = N_1 \cdot \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}$$

$$U_1 = U_2 \cdot \ddot{u} = \frac{P}{I_1} = \sqrt{P \cdot Z_1}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\ddot{u}} = \frac{P}{I_2} = \sqrt{P \cdot Z_2}$$

$$I_1 = \frac{I_2}{\ddot{u}} = I_2 \cdot \frac{N_2}{N_1} = \frac{P}{U_1} = \sqrt{\frac{P}{Z_1}}$$

$$I_2 = I_1 \cdot \ddot{u} = I_1 \cdot \frac{N_1}{N_2} = \frac{P}{U_2} = \sqrt{\frac{P}{Z_2}}$$

$$Z_1 = Z_2 \cdot \ddot{u}^2 = \frac{U_1^2}{P}$$

$$Z_2 = \frac{Z_1}{\ddot{u}^2} = \frac{U_2^2}{P}$$

$$P = U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$$

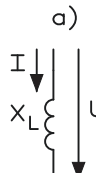
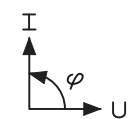
# Widerstände im Wechselstromkreis

# 7

## 7.1 Ohm'scher Widerstand

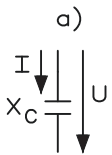
| Schaltung                                                                                                                                                                                                                                   | Stromstärke und Spannung | Widerstand und Leitwert                           | Leistung                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <p>a) </p> <p>b) </p> <p><math>\varphi = 0^\circ</math> (rein ohmsch)</p> | $I = \frac{U}{R}$        | $R = \frac{U}{I}$ $G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$ | $P = U \cdot I$ $P = \frac{U^2}{R}$ $P = I^2 \cdot R$ |

## 7.2 Induktiver Widerstand

| Schaltung                                                                                                                                                                                                                                     | Stromstärke und Spannung | Widerstand und Leitwert                                    | Leistung          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------|
| <p>a) </p> <p>b) </p> <p><math>\varphi = 90^\circ</math> (induktiv)</p> | $I = \frac{U}{X_L}$      | $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ $X_L = \omega \cdot L$ | $Q_L = U \cdot I$ |

### 7.3 Kapazitiver Widerstand

#### Schaltung



$\varphi = 90^\circ$  (kapazitiv)

#### Stromstärke und Spannung

$$I = \frac{U}{X_C}$$

#### Widerstand und Leitwert

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

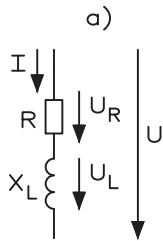
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

#### Leistung

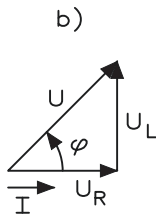
$$Q_C = U \cdot I$$

### 7.4 RL-Reihenschaltung

#### Schaltung



#### Stromstärke und Spannung



$$I = \frac{U_R}{R}$$

$$I = \frac{U_L}{X_L}$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

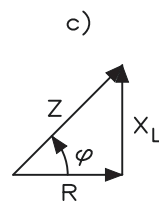
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{U_L}{U_R}$$

$$\sin \varphi = \frac{U_L}{U}$$

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U}$$

#### Widerstand und Leitwert



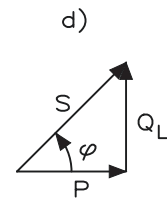
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R}$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L}{Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

#### Leistung



$$P = U_R \cdot I$$

$$Q_L = U_L \cdot I$$

$$S = U \cdot I$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$$

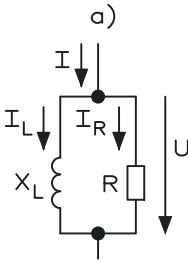
$$\tan \varphi = \frac{Q_L}{P}$$

$$\sin \varphi = \frac{Q_L}{S}$$

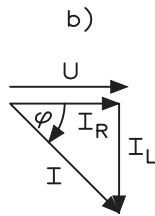
$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

## 7.5 RL-Parallelschaltung

### Schaltung



### Stromstärke und Spannung



$$U = I_R \cdot R$$

$$U = I_L \cdot X_L$$

$$U = I \cdot Z$$

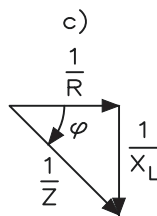
$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R}$$

$$\sin \varphi = \frac{I_L}{I}$$

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I}$$

### Widerstand und Leitwert



$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

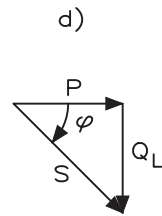
$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{X_L}$$

$$\sin \varphi = \frac{Z}{X_L}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R}$$

### Leistung



$$P = U \cdot I_R$$

$$Q_L = U \cdot I_L$$

$$S = U \cdot I$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$$

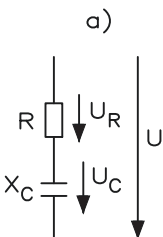
$$\tan \varphi = \frac{Q_L}{P}$$

$$\sin \varphi = \frac{Q_L}{S}$$

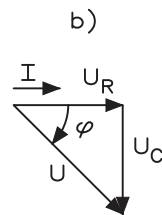
$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

## 7.6 RC-Reihenschaltung

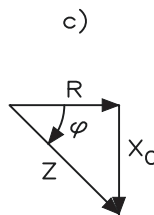
### Schaltung



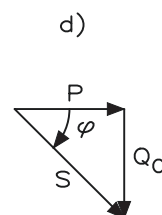
### Stromstärke und Spannung



### Widerstand und Leitwert



### Leistung



$$\begin{array}{lll}
 I = \frac{U_R}{R} & & P = U_R \cdot I \\
 I = \frac{U_C}{X_C} & I = \frac{U}{Z} & Q_C = U_C \cdot I \\
 & & S = U \cdot I \\
 U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} & Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} & S = \sqrt{P^2 + Q_C^2} \\
 \tan \varphi = \frac{U_C}{U_R} & \tan \varphi = \frac{X_C}{R} & \tan \varphi = \frac{Q_C}{P} \\
 \sin \varphi = \frac{U_C}{U} & \sin \varphi = \frac{X_C}{Z} & \sin \varphi = \frac{Q_C}{S} \\
 \cos \varphi = \frac{U_R}{U} & \cos \varphi = \frac{R}{Z} & \cos \varphi = \frac{P}{S}
 \end{array}$$

## 7.7 RC-Parallelschaltung

Schaltung

Stromstärke und Spannung

Widerstand und Leitwert

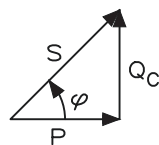
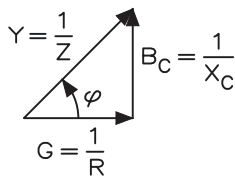
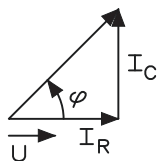
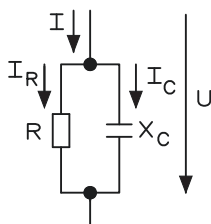
Leistung

a)

b)

c)

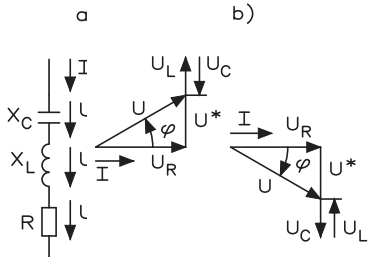
d)



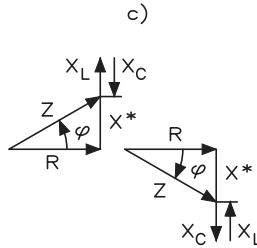
$$\begin{array}{lll}
 I_R = \frac{U}{R} & & P = U \cdot I_R \\
 I_C = \frac{U}{X_C} & & Q_C = U \cdot I_C \\
 I = \frac{U}{Z} & & S = U \cdot I \\
 I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} & Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} & S = \sqrt{P^2 + Q_C^2} \\
 \tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} & \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} & \tan \varphi = \frac{Q_C}{P} \\
 \sin \varphi = \frac{I_C}{I} & \tan \varphi = \frac{R}{X_C} & \sin \varphi = \frac{Q_C}{S} \\
 \cos \varphi = \frac{I_R}{I} & \sin \varphi = \frac{Z}{X_C} & \cos \varphi = \frac{P}{S} \\
 & \cos \varphi = \frac{Z}{R} &
 \end{array}$$

## 7.8 RLC-Reihenschaltung

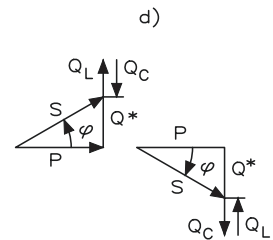
**Schaltung**    **Stromstärke und Spannung**



**Widerstand und Leitwert**



**Leistung**



$$\begin{array}{llllll}
 U_L > U_C & U_L < U_C & X_L > X_C & X_L < X_C & Q_L > Q_C & Q_L < Q_C \\
 U^* = U_L - U_C & U^* = U_C - U_L & X^* = X_L - X_C & X^* = X_C - X_L & Q^* = Q_L - Q_C & Q^* = Q_C - Q_L
 \end{array}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U^{*2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{U^*}{U_R}$$

$$\sin \varphi = \frac{U^*}{U}$$

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^{*2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{X^*}{R}$$

$$\sin \varphi = \frac{X^*}{Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^{*2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$$

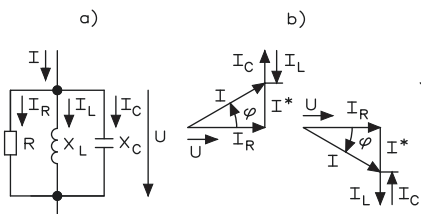
$$\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

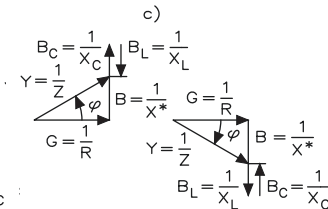
## 7.9 RLC-Parallelschaltung

**Schaltung**

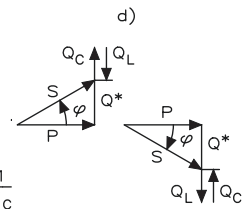
**Stromstärke und Spannung**



**Widerstand und Leitwert**



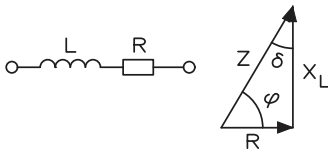
**Leistung**



$$\begin{array}{llll}
 I_C > I_L & I_C < I_L & X_C < X_L & X_C > X_L \\
 I^* = I_C - I_L & I^* = I_L - I_C & \frac{1}{X^*} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} & \frac{1}{X^*} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \\
 Q_C > Q_L & Q_C < Q_L & Q^* = Q_C - Q_L & Q^* = Q_L - Q_C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 Y = \sqrt{G^2 + B^{*2}} & & \\
 I = \sqrt{I_R^2 \cdot I^{*2}} & \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X^*}\right)^2} & S = \sqrt{P^2 \cdot Q^{*2}} \\
 \tan \varphi = \frac{I^*}{I_R} & \tan \varphi = \frac{R}{X^*} & \tan \varphi = \frac{Q^*}{P} \\
 \sin \varphi = \frac{I^*}{I} & \sin \varphi = \frac{Z}{X^*} & \sin \varphi = \frac{Q^*}{S} \\
 \cos \varphi = \frac{I_R}{I} & \cos \varphi = \frac{Z}{R} & \cos \varphi = \frac{P}{S}
 \end{array}$$

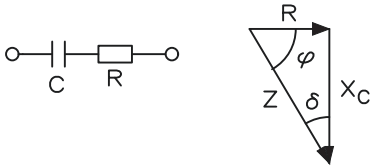
## 7.10 Reihenschaltung von RL-Gliedern



- $Z$  Scheinwiderstand
- $R$  Wirkwiderstand
- $X_L$  induktiver Blindwiderstand
- $U_R$  Spannung an  $R$
- $U_L$  Spannung an  $L$
- $P$  Wirkleistung
- $S$  Scheinleistung
- $Q_L$  induktive Blindleistung
- $\varphi$  Phasenwinkel

$$\begin{aligned}
 Z &= \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2} \\
 R &= \sqrt{Z^2 - X_L^2} \\
 U &= I \cdot Z \quad U_R = I \cdot R \quad U_L = I \cdot X_L \\
 I &= \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L)^2}} \\
 Z &= \frac{R}{\cos \varphi} \quad R = Z \cdot \cos \varphi \quad X_L = Z \cdot \sin \varphi \\
 S &= U \cdot I = \frac{P}{\cos \varphi} \quad \tan \delta = \frac{R}{\omega \cdot L} \\
 Q_L &= U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad \tan \varphi = \frac{\omega \cdot L}{R} \\
 P &= S \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U_R \cdot I = I^2 \cdot R \\
 I &= \frac{U \cdot \cos \varphi}{R} \quad U = \frac{I \cdot R}{\cos \varphi} \quad R = \frac{U \cdot \cos \varphi}{I} \\
 U &= \sqrt{U_R^2 + U_L^2}
 \end{aligned}$$

## 7.11 Reihenschaltung von RC-Gliedern



$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f \cdot C)^2}}$$

$$R = \sqrt{Z^2 - X_C^2} \quad X_C = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}\right)^2}}$$

$$U = I \cdot Z \quad U_R = I \cdot R \quad U_C = I \cdot X_C$$

$$Z = \frac{U}{I} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{U_R}{U} = \frac{P}{S}$$

$$S = U \cdot I = \frac{P}{\cos \varphi} \quad \tan \delta = \omega \cdot R \cdot C$$

$$Z = \frac{R}{\cos \varphi} \quad R = Z \cdot \cos \varphi \quad \tan \varphi = -\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}$$

$$Q_c = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

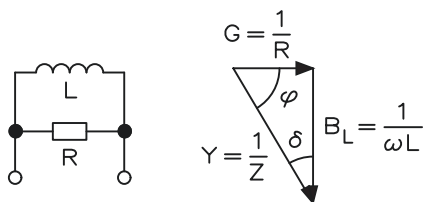
$$P = S \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U_R \cdot I = I^2 \cdot R$$

$$I = \frac{U \cdot \cos \varphi}{R} \quad U = \frac{I \cdot R}{\cos \varphi} \quad R = \frac{U \cdot \cos \varphi}{I}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 - U_C^2}$$

|                |                              |
|----------------|------------------------------|
| $Z$            | Scheinwiderstand             |
| $R$            | Wirkwiderstand               |
| $X_C$          | kapazitiver Blindwiderstand  |
| $U_R$          | Spannung an $R$              |
| $U_L$          | Spannung an $L$ (Konduktanz) |
| $P$            | Wirkleistung (Suszeptanz)    |
| $S$            | Scheinleistung (Admittanz)   |
| $Q_L$          | kapazitiver Blindwiderstand  |
| $\varphi$      | Phasenwinkel                 |
| $\cos \varphi$ | Leistungsfaktor              |
| $\delta$       | Verlustwinkel                |
| $\tan \delta$  | Verlustfaktor                |

## 7.12 Parallelschaltung von RL-Gliedern



$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot Y \quad Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2}$$

$$I = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2}$$

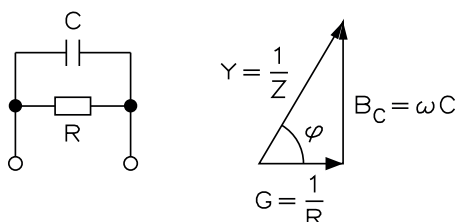
$$\tan \delta = \frac{\omega \cdot L}{R}$$

$$I_L = \frac{U}{\omega \cdot L} \quad I_R = \frac{U}{R} \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \omega^2 \cdot L^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \quad \tan \varphi = \frac{R}{\omega \cdot L}$$

|                |                            |
|----------------|----------------------------|
| $G$            | Wirkleitwert (Konduktanz)  |
| $B_L$          | Blindleitwert (Suszeptanz) |
| $Y$            | Scheinleitwert (Admittanz) |
| $I_L$          | Blindstrom durch $L$       |
| $I_R$          | Wirkstrom durch $R$        |
| $I$            | Scheinstrom                |
| $\cos \varphi$ | Leistungsfaktor            |
| $\tan \delta$  | Verlustfaktor              |

## 7.13 Parallelschaltung von RC-Gliedern



$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot Y \quad Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

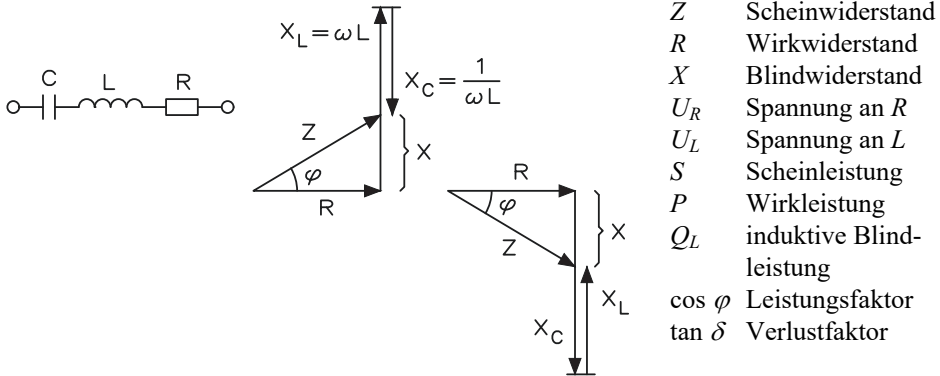
$$I = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad \tan \delta = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$

$$I_C = \omega \cdot C \cdot U \quad I_R = \frac{U}{R} \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{R^2}{1 + (\omega \cdot L \cdot R)^2}} \quad \tan \varphi = -\omega \cdot C \cdot R$$

|       |                            |
|-------|----------------------------|
| $G$   | Wirkleitwert (Konduktanz)  |
| $B_C$ | Blindleitwert (Suszeptanz) |
| $Y$   | Scheinleitwert (Admittanz) |
| $I_C$ | Blindstrom durch $C$       |
| $I_R$ | Wirkstrom durch $R$        |
| $I$   | Scheinstrom                |

## 7.14 Reihenschaltung von RLC-Gliedern



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}}$$

$$X = X_C - X_L \text{ (kapazitiv)} \quad X = X_L - X_C \text{ (induktiv)}$$

$$U = I \cdot Z \quad U_R = I \cdot R \quad U_C = I \cdot X_C \quad U_L = I \cdot X_L$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$Z = \frac{U}{I} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{U_R}{U} = \frac{P}{S} \quad \tan \varphi = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$$

$$Z = \frac{R}{\cos \varphi} \quad R = Z \cdot \cos \varphi \quad \tan \delta = \frac{R}{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}$$

$$S = U \cdot I = \frac{P}{\cos \varphi}$$

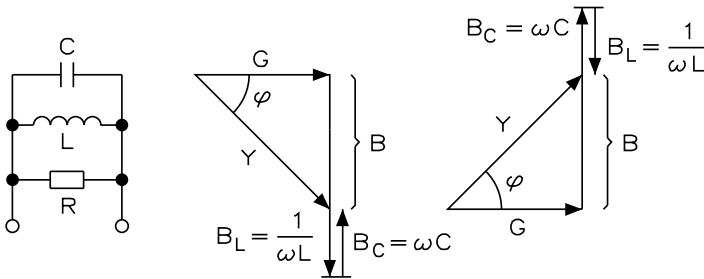
$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$P = S \cdot \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U_R \cdot I$$

$$I = U \cdot \frac{\cos \varphi}{R} \quad U = \frac{I \cdot R}{\cos \varphi}$$

$$R = \frac{U \cdot \cos \varphi}{I}$$

### 7.15 Parallelschaltung von RLC-Gliedern



$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot Y$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$Z$  Scheinwiderstand

$R$  Wirkwiderstand

$B$  Blindleitwert

$B_C$  Blindleitwert

$B_L$  Blindleitwert

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2} \quad \text{oder} \quad Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$

$$X = X_C - X_L \text{ (kapazitiv)} \quad X = X_L - X_C \text{ (induktiv)}$$

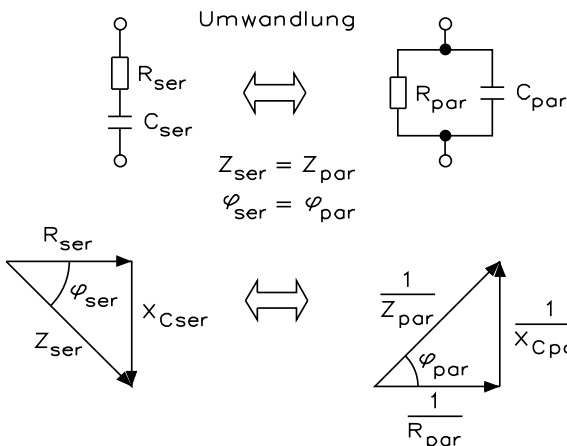
$$I = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2} = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2}$$

$$\tan \delta = \frac{1}{R \cdot \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)}$$

$$\tan \varphi = R \cdot \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)$$

### 7.16 Umrechnung von RC-Gliedern zwischen Reihen- und Parallelschaltung



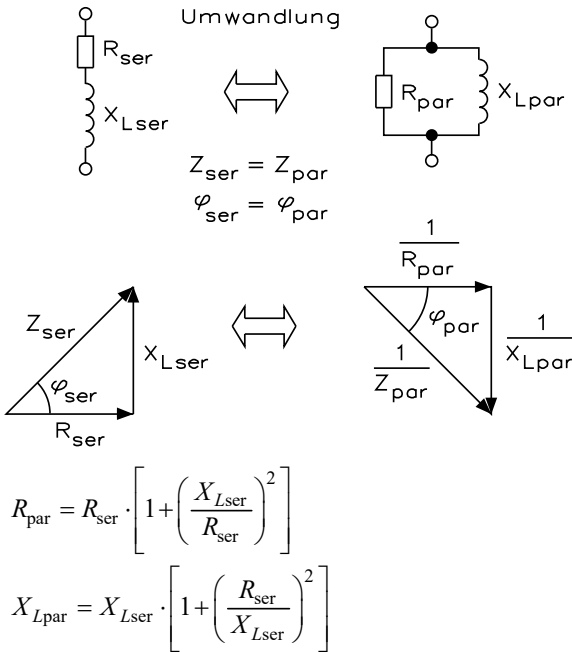
$$Z_{\text{ser}} = Z_{\text{par}}$$

$$\varphi_{\text{ser}} = \varphi_{\text{par}}$$

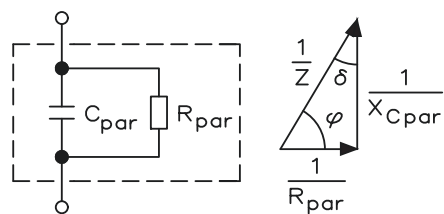
$$R_{\text{par}} = R_{\text{ser}} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{X_{C\text{ser}}}{R_{\text{ser}}} \right)^2 \right]$$

$$X_{C\text{par}} = X_{C\text{ser}} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{R_{\text{ser}}}{X_{C\text{ser}}} \right)^2 \right]$$

### 7.17 Umrechnung von RL-Schaltung zwischen Reihen- und Parallelschaltung



### 7.18 Verlustbehafteter Kondensator



$\tan \delta$  Verlustfaktor  
 $d$  Verlustfaktor  
 $Q$  Güte (Gütefaktor)  
 $R_{\text{par}}$  paralleler Verlustwiderstand

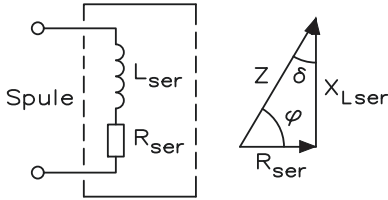
$$d = \tan \delta$$

$$\tan \delta = \frac{X_{C\text{par}}}{R_{\text{par}}}$$

$$Q = \frac{R_{\text{par}}}{X_{C\text{par}}}$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

### 7.19 Verlustbehaftete Spule



|                  |                             |
|------------------|-----------------------------|
| $\tan \delta$    | Verlustfaktor               |
| $d$              | Verlustfaktor               |
| $Q$              | Güte (Gütefaktor)           |
| $R_{\text{ser}}$ | serieller Verlustwiderstand |

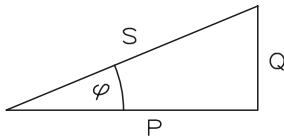
$$d = \tan \delta$$

$$\tan \delta = \frac{R_{\text{ser}}}{X_L}$$

$$Q = \frac{X_{L\text{ser}}}{R_{\text{ser}}}$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

### 7.20 Leistung und Leistungsfaktor



Bei sinusförmigem Verlauf:  $S = U \cdot I$   
 Bei Phasenverschiebung von Strom und Spannung um den Phasenwinkel  $\varphi$ :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$P = S \cdot \cos \varphi$$

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

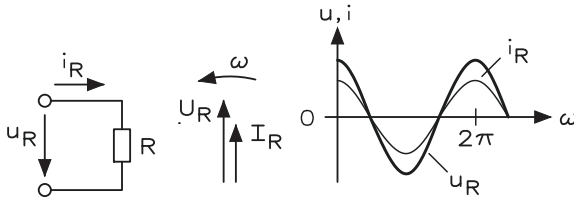
$$Q = S \cdot \sin \varphi \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}$$

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

|                |                         |
|----------------|-------------------------|
| $S$            | Scheinleistung in VA    |
| $P$            | Wirkleistung in W       |
| $Q$            | Blindleistung in var    |
| $U$            | Spannung (Effektivwert) |
| $I$            | Strom (Effektivwert)    |
| $\cos \varphi$ | Leistungsfaktor         |
| $\sin \varphi$ | Blindleistungsfaktor    |

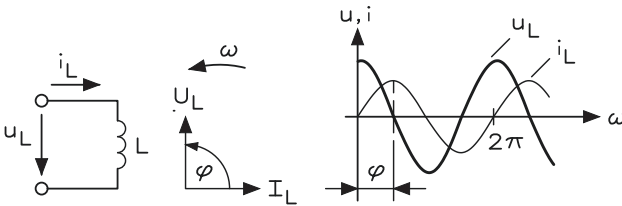
## 7.21 Bauelement, Zeiger- und Liniendiagramme für Ohm'sche Widerstände



$$R = \frac{u_R}{i_R} = \frac{\hat{u}_R \cdot (\cos \omega \cdot t_u + \omega_u)}{\hat{i}_R \cdot (\cos \omega \cdot t_i + \omega_i)}$$

$$R = \frac{u_R}{i_R} = \frac{\hat{u}_R}{\hat{i}_R} = \frac{u_R \cdot \sqrt{2}}{i_R \cdot \sqrt{2}} = \frac{U_R}{I_R} \quad \text{bei } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

## 7.22 Bauelement, Zeiger- und Liniendiagramme für induktive Blindwiderstände



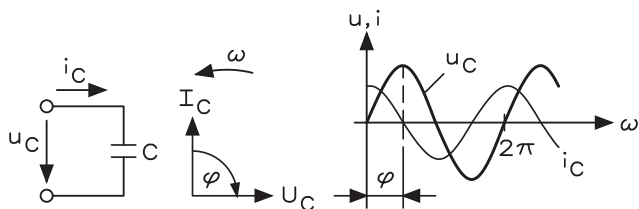
$$u_L = L \cdot \frac{\Delta i_L}{\Delta t}$$

$$u_L = \omega \cdot L \cdot \hat{i}_L \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$X_L = \omega \cdot L = \frac{U_L}{I_L}$$

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega \cdot L} = \frac{I_L}{U_L} \quad \text{bei } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

### 7.23 Bauelement, Zeiger- und Liniendiagramme für kapazitive Blindwiderstände



$$Q = I_C \cdot t = C \cdot U_C$$

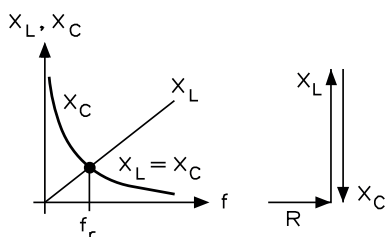
$$i_C = C \cdot \frac{\Delta u_C}{\Delta t}$$

$$i_C = \omega \cdot C \cdot \hat{u}_C \cdot \cos \omega t \quad \text{bei } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ - 0 = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U_C}{I_C}$$

$$B_C = \omega \cdot C = \frac{I_C}{U_C} \quad \text{bei } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$$

### 7.24 Resonanz bei Schwingkreisen



- $X_C$  kapazitiver Blindwiderstand in  $\Omega$
- $X_L$  induktiver Blindwiderstand in  $\Omega$
- $f_r$  Resonanzfrequenz in Hz
- $C$  Kapazität in F
- $L$  Induktivität in H

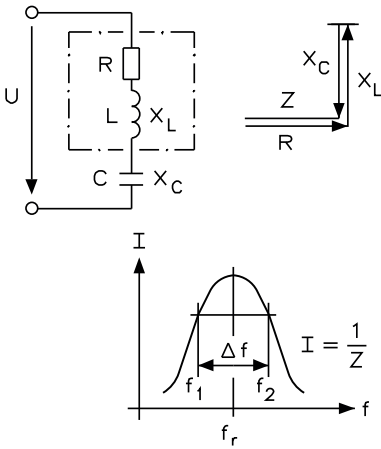
Resonanzbedingung:  $X_C = X_L$

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \omega^2 \cdot L \cdot C = 1$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 \cdot C} \quad C = \frac{1}{\omega^2 \cdot L}$$

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

## 7.25 Reihenschwingkreis



|            |                                         |
|------------|-----------------------------------------|
| $Z$        | Scheinwiderstand                        |
| $f_r$      | Resonanzfrequenz                        |
| $Q$        | Güte                                    |
| $d$        | $\tan \delta$ (Dämpfung, Verlustfaktor) |
| $\Delta f$ | Bandbreite                              |
| $f_1$      | untere Grenzfrequenz                    |
| $f_2$      | obere Grenzfrequenz                     |

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

bei Resonanz ist  $X_L = X_C$

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

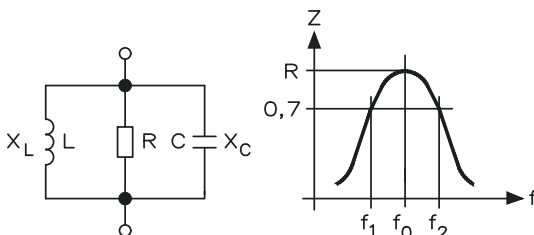
$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{1}{\tan \delta}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q} = f_r \cdot d$$

$$R_r = r = \frac{X_L}{Q} = \frac{X_C}{Q} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_r^2 \cdot C}$$

## 7.26 Parallelschwingkreis



$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

bei Resonanz ist  $B_L = B_C$

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 \cdot L} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

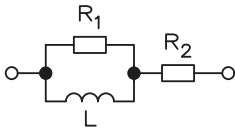
$$R = Q^2 \cdot r = \frac{L}{C \cdot r}$$

$$Q = \frac{1}{d} \approx \frac{\omega \cdot L}{R} \approx \frac{1}{\omega \cdot R} \approx \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$R_r = Q^2 \cdot r = Q \cdot X_L = Q \cdot X_C = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot C}$$

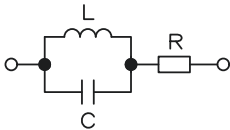
|       |                                         |
|-------|-----------------------------------------|
| $Y$   | Scheinleitwert                          |
| $f_r$ | Resonanzfrequenz                        |
| $Q$   | Güte                                    |
| $G$   | Leitwert                                |
| $B_L$ | induktiver Blindleitwert                |
| $B_C$ | kapazitiver Blindleitwert               |
| $f_1$ | untere Grenzfrequenz                    |
| $f_2$ | obere Grenzfrequenz                     |
| $d$   | $\tan \delta$ (Dämpfung, Verlustfaktor) |

## 7.27 Scheinwiderstand und Phasenverschiebung



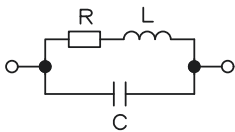
$$Z = \sqrt{\left[ R_2 + \frac{R_1 \cdot (\omega \cdot L)^2}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} \right]^2 + \left[ \frac{R_1^2 \cdot (\omega \cdot L)}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} \right]^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{R_1^2 \cdot \omega \cdot L}{R_2 \cdot [R_1^2 + (\omega \cdot L)^2] + R_1 \cdot (\omega \cdot L)^2}$$



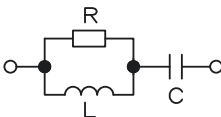
$$Z = \sqrt{R^2 + \left[ \frac{\omega \cdot L}{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C} \right]^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L}{R \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)}$$



$$Z = \sqrt{\left[ \frac{\frac{R}{(\omega \cdot C)^2}}{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2} \right]^2 + \left[ \frac{\frac{L}{C} \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) - \frac{R^2}{\omega \cdot C}}{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2} \right]^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{R} \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) - R \cdot \omega \cdot C$$



$$Z = \sqrt{\left[ \frac{R \cdot (\omega \cdot L)^2}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \right]^2 + \left[ \frac{R^2 \cdot (\omega \cdot L)}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} - \frac{1}{\omega \cdot C} \right]^2}$$

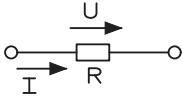
$$\tan \varphi = \frac{R^2 \cdot (\omega \cdot L) - \frac{R^2 + (\omega \cdot L)^2}{(\omega \cdot C)}}{R^2 \cdot (\omega \cdot L)^2}$$

## 7.28 Komplexe Darstellung von R, C und L

Impedanz  $\underline{Z}$   
Admittanz  $\underline{Y}$

Scheinwiderstand  $|\underline{Z}| = Z$   
Scheinleitwert  $|\underline{Y}| = Y$

Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$



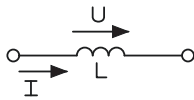
$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Y} = G = \frac{1}{R}$$

$$Z = R$$

$$Y = G = \frac{1}{R}$$

$$\varphi = 0^\circ$$



$$\underline{Z} = jX_L = j\omega \cdot L$$

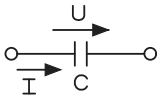
$$\underline{Y} = -jB_L = \frac{1}{j\omega \cdot L} = -j \frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$Z = \omega L$$

$$Y = \frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$\varphi_Z = +90^\circ$$

$$\varphi_Y = -90^\circ$$



$$\underline{Z} = -jX_C = \frac{1}{j\omega \cdot C} = -j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

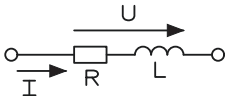
$$\underline{Y} = jB_C = j\omega \cdot C$$

$$Z = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$Y = \omega \cdot C$$

$$\varphi_Z = -90^\circ$$

$$\varphi_Y = +90^\circ$$



$$\underline{Z} = R + j\omega \cdot L$$

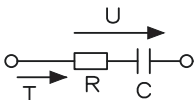
$$\underline{Y} = \frac{1}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} - j \frac{\omega \cdot L}{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$Y = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega \cdot L)^2}{[R^2 + (\omega \cdot L)^2]^2}}$$

$$\varphi_Z = +\arctan \frac{\omega \cdot L}{R}$$

$$\varphi_Y = -\arctan \frac{\omega \cdot L}{R}$$



$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

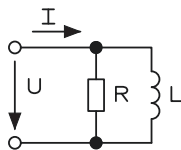
$$\underline{Y} = \frac{R(\omega \cdot C)^2}{(\omega \cdot C \cdot R)^2 + 1} + j \frac{\omega \cdot C}{(\omega \cdot C \cdot R)^2 + 1}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

$$Y = \sqrt{\frac{[R(\omega \cdot C)^2]^2 + (\omega \cdot C)^2}{[(\omega \cdot C \cdot R)^2 + 1]^2}}$$

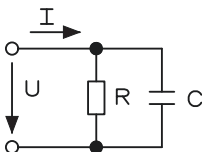
$$\varphi_Z = -\arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$

$$\varphi_Y = +\arctan \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$



$$\underline{Z} = \frac{R(\omega \cdot L)^2}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} + j \frac{R^2 \cdot \omega \cdot L}{[R^2 + (\omega \cdot L)^2]^2} \quad Z = \sqrt{\frac{[R(\omega \cdot L)^2]^2 + (R^2 \cdot \omega \cdot L)^2}{[R^2 + (\omega \cdot L)^2]^2}} \quad \varphi_Z = + \arctan \frac{R}{\omega \cdot L}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega \cdot L} \quad Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2} \quad \varphi_Y = + \arctan \frac{R}{\omega \cdot L}$$

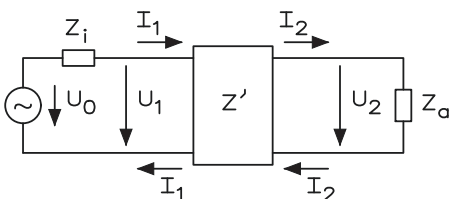


$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2} - j \frac{\omega \cdot C \cdot R^2}{(1 + \omega \cdot C \cdot R)^2} \quad Z = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega \cdot C \cdot R^2)^2}{[1 + (\omega \cdot C \cdot R)^2]^2}} \quad \varphi_Z = - \arctan \omega \cdot C \cdot R$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j \omega \cdot C \quad Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega \cdot C)^2} \quad \varphi_Y = + \arctan \omega \cdot C \cdot R$$

## 7.29 Vierpolparameter von elektrischen Zweitoren

Vierpole sind beliebig zusammengeschaltete Zweipole mit einem Eingang und einem Ausgang. Passive Vierpole bestehen nur aus passiven Zweipolen (Widerständen, Spulen und Kondensatoren usw.). Aktive Vierpole enthalten eine zusätzliche Energiequelle. Bei passiven Vierpolen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Strömen am Ein- und Ausgang.

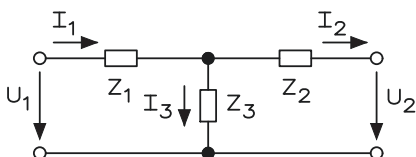


$$U_1 = I_1 \cdot Z_1 + (I_1 - I_2)$$

$$U_2 = I_2 \cdot Z_2 + (I_1 - I_2)$$

$$Z_1 = (Z_1 + Z_3) \cdot I_1 - Z_3 \cdot I_2$$

$$Z_2 = Z_3 \cdot I_1 - (Z_1 + Z_3) \cdot I_2$$



**Vierpolgleichungen (Widerstandsform)**

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ U_2 &= Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{aligned} \quad \text{Matrizenschreibweise} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \quad \text{bei } I_2 = 0: \text{ Leerlaufwiderstand primär}$$

$$-Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \quad \text{bei } I_1 = 0: \text{ Leerlaufwiderstand sekundär (Vierpol wird von rechts betrieben)}$$

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \quad \text{bei } I_2 = 0: \text{ Kernwiderstand vorwärts}$$

$$-Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \quad \text{bei } I_1 = 0: \text{ Kernwiderstand rückwärts (Vierpol wird von rechts betrieben)}$$

**Vierpolgleichungen (Leitwertform)**

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 \\ I_2 &= Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 \end{aligned} \quad \text{Matrizenschreibweise} \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \quad \text{bei } U_2 = 0: \text{ Kurzschlussleitwert primär}$$

$$-Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \quad \text{bei } U_1 = 0: \text{ Kurzschlussleitwert sekundär (Vierpol wird von rechts betrieben)}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \quad \text{bei } U_2 = 0: \text{ Kernleitwert vorwärts}$$

$$-Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \quad \text{bei } U_1 = 0: \text{ Kernleitwert rückwärts (Vierpol wird von rechts betrieben)}$$

**Vierpolgleichungen (Kettenform)**

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2 \\ I_1 &= A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2 \end{aligned} \quad \text{Matrizenschreibweise} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{bei } I_2 = 0: \text{ umgekehrte Spannungsübersetzung im Leerlauf}$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{I_2} \quad \text{bei } U_2 = 0: \text{ umgekehrte Stromübersetzung im Kurzschluss}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \quad \text{bei } I_2 = 0: \text{ umgekehrter primärer Kernwiderstand im Leerlauf}$$

$$A_{12} = \frac{U_1}{I_2} \quad \text{bei } U_2 = 0: \text{ umgekehrter primärer Kernleitwert im Kurzschluss}$$

**Vierpolgleichungen (Hybridform)**

$$\begin{aligned} U_1 &= H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2 \\ I_2 &= H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \end{aligned} \quad \text{Matrizenschreibweise} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$H_{11} = \frac{U_1}{I_1} \quad \text{bei } U_2 = 0: \text{ Eingangswiderstand bei Ausgangskurzschluss}$$

$$H_{22} = \frac{I_2}{U_2} \quad \text{bei } I_1 = 0: \text{ Ausgangsleitwert bei offenem Eingang}$$

$$H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \quad \text{bei } U_2 = 0: \text{ Stromverstärkung bei Ausgangskurzschluss}$$

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{bei } I_1 = 0: \text{ Spannungsrückwirkung bei offenem Eingang}$$

Vierpolgleichungen vereinfachen sich bei richtungssymmetrischen Vierpolen:

$$Y_{11} = -Y_{22}, Z_{11} = -Z_{22}, A_{11} \cdot A_{22}$$

$$\text{Multiplikation von Matrizen} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \quad c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \quad c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$

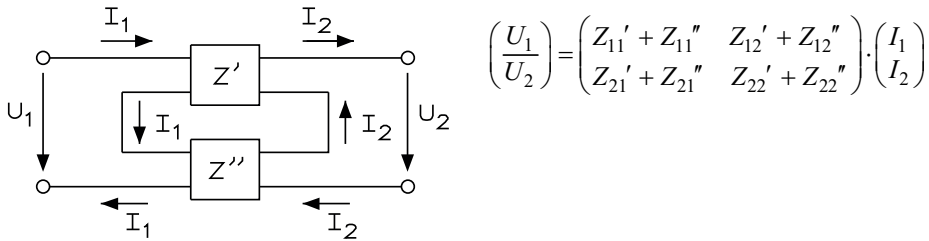
**7.30 Umrechnung der Vierpolparameter**

| <div>gegeben<br/>gesucht</div> | Y                                                        | Z                                                        | A                                                      | H                                                      |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Y                              | $Y_{11} \quad Y_{12}$                                    | $\frac{Z_{22}}{\Delta Z} \quad \frac{-Y_{12}}{\Delta Z}$ | $\frac{A_{22}}{A_{12}} \quad \frac{-\Delta A}{A_{12}}$ | $\frac{1}{H_{11}} \quad \frac{-H_{12}}{H_{11}}$        |
|                                | $Y_{21} \quad Y_{22}$                                    | $\frac{-Z_{21}}{\Delta Z} \quad \frac{Z_{11}}{\Delta Z}$ | $\frac{1}{A_{12}} \quad \frac{-A_{11}}{A_{12}}$        | $\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{\Delta H}{H_{11}}$  |
| Z                              | $\frac{Y_{22}}{\Delta Y} \quad \frac{-Y_{22}}{\Delta Y}$ | $Z_{11} \quad Z_{12}$                                    | $\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{-\Delta A}{A_{21}}$ | $\frac{\Delta H}{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$  |
|                                | $\frac{-Y_{21}}{\Delta Y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta Y}$ | $Z_{21} \quad Z_{22}$                                    | $\frac{1}{A_{21}} \quad \frac{-A_{22}}{A_{21}}$        | $\frac{-H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$        |
| A                              | $\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$         | $\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{-\Delta Z}{Z_{21}}$   | $A_{11} \quad A_{12}$                                  | $\frac{-\Delta H}{H_{21}} \quad \frac{H_{11}}{H_{21}}$ |
|                                | $\frac{-\Delta Y}{Y_{21}} \quad \frac{Y_{11}}{Y_{21}}$   | $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{-Z_{22}}{Z_{21}}$          | $A_{21} \quad A_{22}$                                  | $\frac{-H_{22}}{H_{21}} \quad \frac{1}{H_{21}}$        |
| H                              | $\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$          | $\frac{\Delta Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$    | $\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{\Delta A}{A_{22}}$  | $H_{11} \quad H_{12}$                                  |
|                                | $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta Y}{Y_{11}}$    | $\frac{-Z_{21}}{Z_{12}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$          | $\frac{1}{A_{22}} \quad \frac{-A_{21}}{A_{22}}$        | $H_{21} \quad H_{22}$                                  |

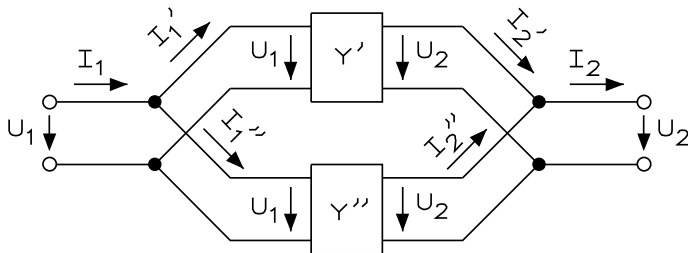
$\Delta$ : Determinante einer Matrix: z. B.  $\Delta Z = Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}$

## 7.31 Zusammenschalten von Vierpolen

### Reihenschaltung

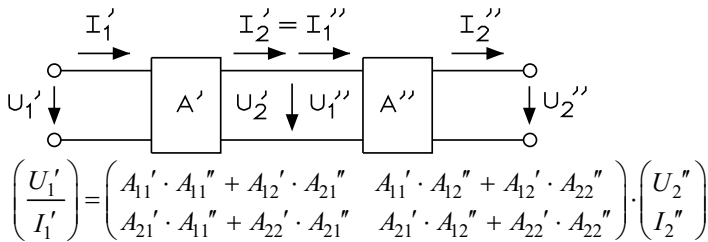


### Parallelschaltung

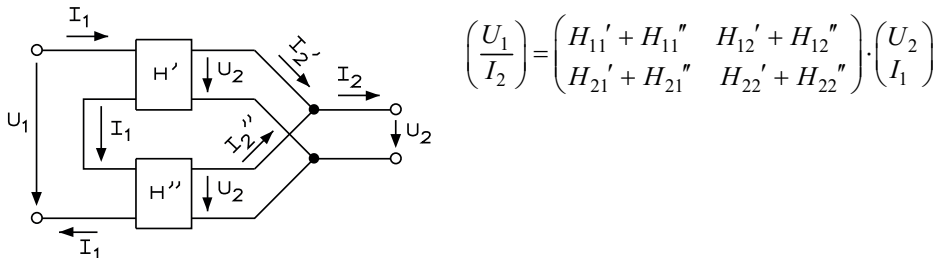


$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1' + I_1'' \\ I_2' + I_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}' + Y_{11}'' & Y_{12}' + Y_{12}'' \\ Y_{21}' + Y_{21}'' & Y_{22}' + Y_{22}'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

### Kettenschaltung

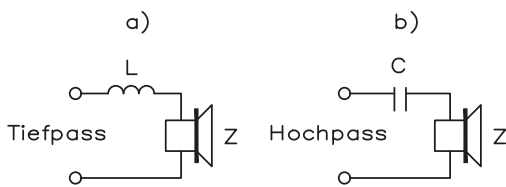


### Reihen-Parallelschaltung

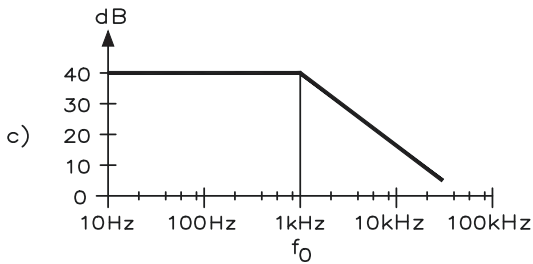


### 7.32 Frequenzweichen für Lautsprecher

#### Frequenzweichen 1. Ordnung (Flankensteilheit 6 dB pro Oktave)

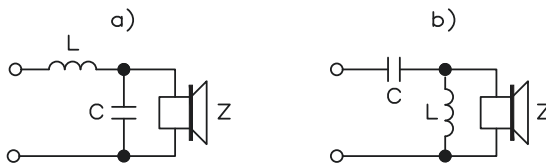


$Z$  Impedanz  
 $f_0$  Übertragungsfrequenz

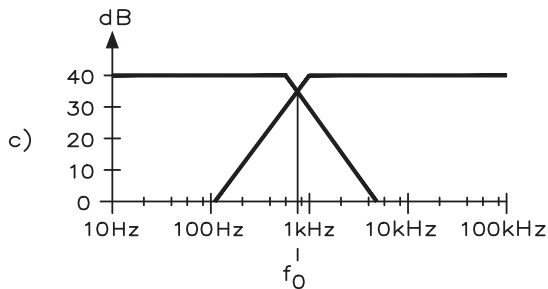


$$L = \frac{Z}{6,3 \cdot f_0} \quad C = \frac{1}{6,3 \cdot f_0 \cdot Z}$$

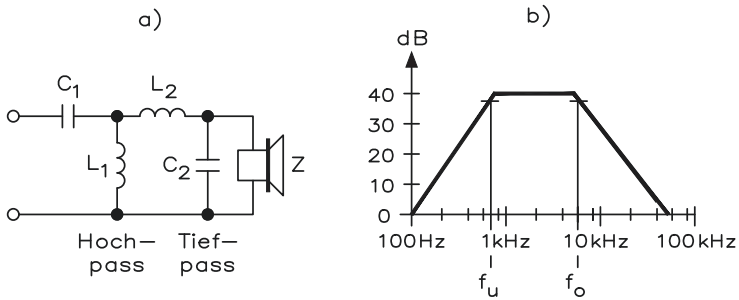
#### Frequenzweichen 2. Ordnung (Flankensteilheit 12 dB pro Oktave)



$Z$  Impedanz  
 $f_0$  Übertragungsfrequenz

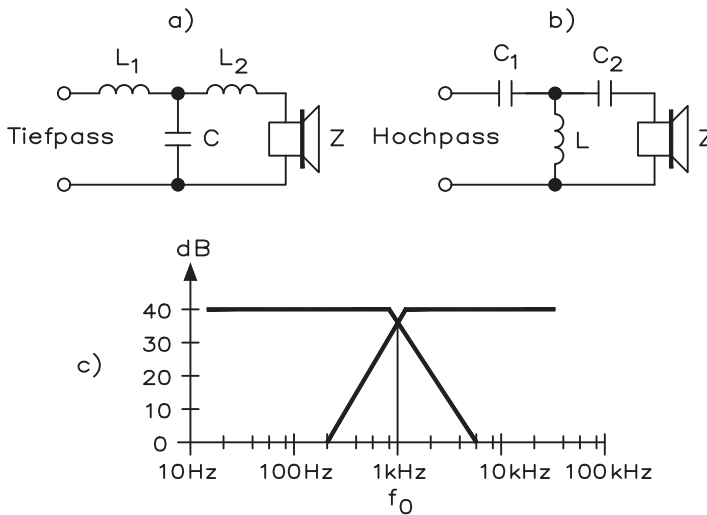


$$L = \frac{0,225 \cdot Z}{f_0} \quad C = \frac{0,112}{f_0 \cdot Z}$$

**Bandpass für Mittelton 2. Ordnung (Flankensteilheit 12 dB pro Oktave)**

Für Hochpass:  $L_1 \approx \frac{0,225 \cdot Z}{f_u}$   $C_1 \approx \frac{0,112}{f_u \cdot Z}$   $f_u$  untere Grenzfrequenz  
 $f_o$  obere Grenzfrequenz

Für Tiefpass:  $L_2 \approx \frac{0,225 \cdot Z}{f_o}$   $C_2 \approx \frac{0,112}{f_o \cdot Z}$

**Frequenzweichen 3. Ordnung (Flankensteilheit 18 dB pro Oktave)**

Für Hochpass:  $C_1 \approx \frac{0,21}{f_o \cdot Z}$   $C_2 \approx \frac{0,32}{f_o \cdot Z}$   $L \approx \frac{0,125 \cdot Z}{f_o}$

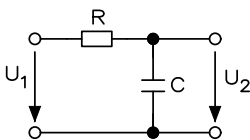
Für Tiefpass:  $L_1 \approx \frac{0,24 \cdot Z}{f_o}$   $L_2 \approx \frac{0,125 \cdot Z}{f_o}$   $C \approx \frac{0,32}{f_o \cdot Z}$

# Filterschaltungen

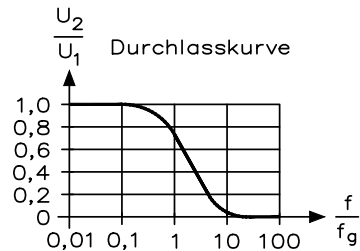
## 8

### 8.1 RC- und LR-Tiefpass

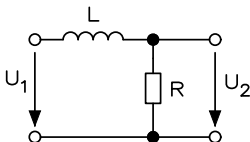
RC-Tiefpass



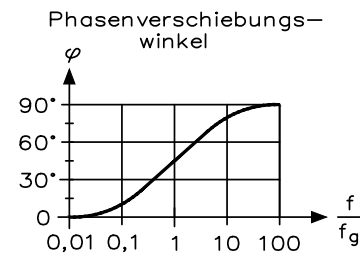
$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$



LR-Tiefpass



$$f_g = \frac{R}{2\pi \cdot L}$$



Für den **RC-Tiefpass** gilt: Durchlassbereich:  $f < f_g$

Sperrbereich:  $f > f_g$

Grenzfrequenz:  $f_g$  bei  $R = X_C$

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{X_C}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$f_g$  Grenzfrequenz in Hz  
 $R$  Widerstand in  $\Omega$   
 $Z$  Scheinwiderstand in  $\Omega$   
 $C$  Kondensator in F  
 $X_C$  kapazitiver Blindwiderstand

$$U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_1$$

$$U_1 = \sqrt{2} \cdot U_2 = 1,414 \cdot U_1$$

$$R \neq X_C \quad U_2 = \frac{X_C}{Z} = U_1 \cdot \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U_1}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}$$

$f$     Frequenz der Wechselspannung in Hz  
 $U_1$     Eingangsspannung  
 $U_2$     Ausgangsspannung  
 $s$     Siebfaktor

$$U_1 = U_2 \cdot \frac{Z}{X_C} = \frac{\sqrt{R^2 + X_C^2}}{X_C} = U_2 \cdot \omega \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad X_C = Z \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z}{s}$$

$$f = \frac{U_1}{U_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad Z = X_C \cdot \frac{U_1}{U_2} = s \cdot X_C$$

Für den **LR-Tiefpass** gilt:    Durchlassbereich:     $f > f_g$   
                                          Sperrbereich:             $f < f_g$   
                                          Grenzfrequenz:         $f_g$  bei  $R = X_L$

$$f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_1$$

$$U_1 = \sqrt{2} \cdot U_2 = 1,414 \cdot U_1$$

$$R \neq X_L \quad U_2 = U_1 \cdot \frac{R}{Z} = U_1 \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U_1 \cdot R}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$

$$U_1 = U_2 \cdot \frac{Z}{X_L} = U_2 \cdot \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_L} = U_2 \cdot \frac{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}{X_L}$$

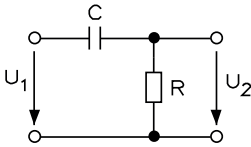
$$X_L = \omega \cdot L = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$Z = \sqrt{Z^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \quad Z = R \cdot \frac{U_1}{U_2}$$

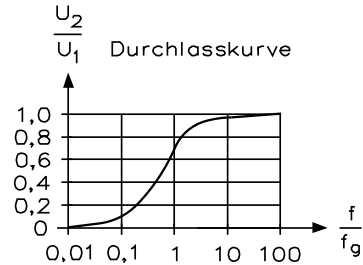
$$R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} = \sqrt{Z^2 - (\omega \cdot L)^2}$$

## 8.2 CR- und RL-Hochpass

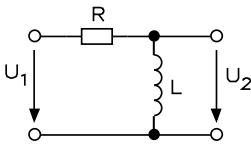
CR-Hochpass



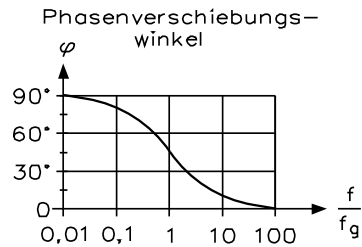
$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$



RL-Hochpass



$$f_g = \frac{R}{2\pi \cdot L}$$



Für den **CR-Hochpass**: Durchlassbereich:

$$f > f_g$$

Sperrbereich:

$$f < f_g$$

Grenzfrequenz:

$$f_g \text{ bei } R = X_C$$

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_1$$

$$U_1 = \sqrt{2} \cdot U_2 = 1,414 \cdot U_1$$

$$R \neq X_C \quad U_2 = U_1 \cdot \frac{R}{Z} = U_1 \cdot \frac{U_1 \cdot R}{\sqrt{(R + X_C)^2}} = \frac{U_1 \cdot R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}$$

$$U_1 = U_2 \cdot \frac{Z}{R} = U_2 \cdot \frac{\sqrt{R^2 + X_C^2}}{R} = \frac{U_2 \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}{R}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \quad Z = R \cdot \frac{U_1}{U_2} = s \cdot R$$

Für den **RL-Hochpass**: Durchlassbereich:  $f > f_g$   
 Sperrbereich:  $f < f_g$   
 Grenzfrequenz:  $f_g$  bei  $R = X_C$

$$f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{X_L}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_1$$

$$U_1 = \sqrt{2} \cdot U_2 = 1,414 \cdot U_2$$

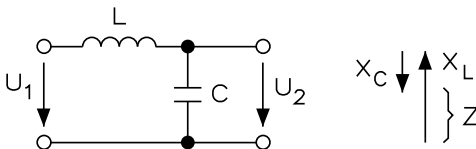
$$R \neq X_L \quad U_2 = U_1 \cdot \frac{X_L}{Z} = U_1 \cdot \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U_1 \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$

$$U_1 = U_2 \cdot \frac{Z}{X_L} = U_2 \cdot \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_L} = U_2 \cdot \frac{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}{\omega \cdot L}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{Z^2 + (\omega \cdot L)^2} \quad Z = X_L \cdot \frac{U_1}{U_2} = s \cdot X_L$$

$$R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} = \sqrt{R^2 - (\omega \cdot L)^2}$$

### 8.3 LC-Glied



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{X_C}{Z}$$

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{X_C}{Z} = U_1 \cdot \frac{X_C}{X_L - X_C} = U_1 \cdot \frac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{U_1}{\omega \cdot C \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} = \frac{U_1}{\omega^2 \cdot L \cdot C - 1}$$

$$U_1 = U_2 \cdot \frac{Z}{X_C} = U_2 \cdot \frac{X_L - X_C}{X_C} = U_2 \cdot (\omega^2 \cdot L \cdot C - 1)$$

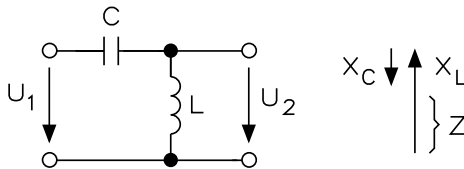
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad X_C = Z \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z}{s}$$

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

$$f = \frac{U_1}{U_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot C \cdot Z}$$

$$Z = X_L - X_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad Z = X_C \cdot \frac{U_1}{U_2} = s \cdot X_C$$

## 8.4 CL-Glied



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{X_L}{Z}$$

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{X_L}{Z} = U_1 \cdot \frac{X_L}{X_L - X_C} = U_1 \cdot \frac{\omega \cdot L}{\omega L - \frac{1}{\omega \cdot C}}$$

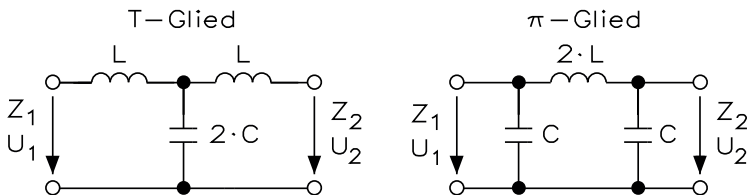
$$U_1 = U_2 \cdot \frac{Z}{X_L} = U_2 \cdot \frac{X_L - X_C}{X_L} = U_2 \cdot \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{\omega \cdot L}$$

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot L \quad X_L = Z \cdot \frac{U_2}{U_1}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \quad X_C = X_L - Z$$

$$Z = X_L - X_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad Z = X_L \cdot \frac{U_1}{U_2}$$

## 8.5 T- und $\pi$ -Tiefpass



Durchlassbereich:  $f < f_g$

Sperrbereich:  $f > f_g$

Für die Grenzfrequenz ist eine richtige Anpassung erforderlich:

$$Z_1 = Z_2 = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$Z_1$  Eingangsimpedanz in  $\Omega$

$Z_2$  Ausgangsimpedanz in  $\Omega$

$L$  Induktivität in H

$C$  Kapazität in F

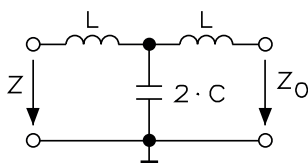
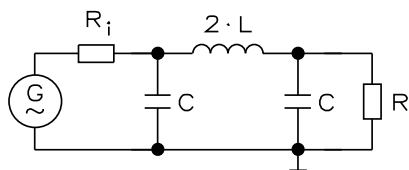
$f_g$  Grenzfrequenz in Hz

Die Grenzfrequenz ist die Resonanzfrequenz für  $L$  und  $C$ :

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$L = \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot f_g} \quad C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot Z}$$

## 8.6 T- und $\pi$ -Hochpass



Durchlassbereich:  $f > f_g$

Sperrbereich:  $f < f_g$

Für die Grenzfrequenz ist eine richtige Anpassung erforderlich:

$$Z_1 = Z_2 = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$Z_1$  Eingangsimpedanz in  $\Omega$

$Z_2$  Ausgangsimpedanz in  $\Omega$

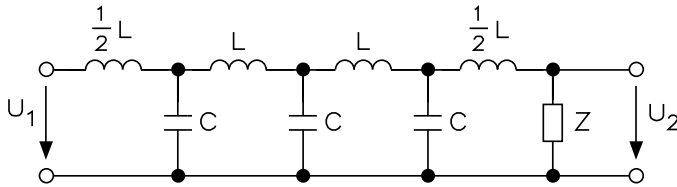
$Z$  Abschlusswiderstand in  $\Omega$

Die Grenzfrequenz ist die Resonanzfrequenz für  $L$  und  $C$ :

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

$$L = \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot f_g} \quad C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot Z}$$

## 8.7 LC-Verzögerungsleitung



$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Für verlustfreie  $C$  und  $L$  gilt:

$$U_2 = U_1$$

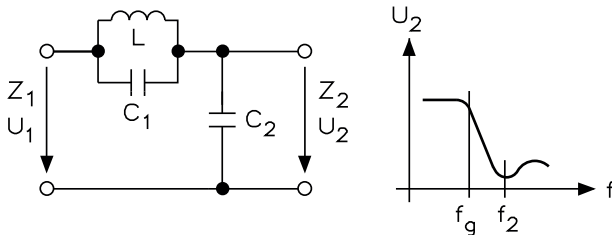
$$\tau = \sqrt{L \cdot C}$$

$$\tau = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g}$$

- $Z$  Abschlusswiderstand
- $L$  Induktivität in H
- $C$  Kapazität in F
- $\tau$  Laufzeit für ein Halbglied in s
- $f_g$  Grenzfrequenz in Hz

## 8.8 Tiefpass-Doppelglied

Tiefpass-Doppelsieb:



Die steile Flanke des Doppelgliedes erhält man durch einen Längssperkreis, der auf  $f_2$  abgestimmt ist. Kondensator und Induktivität müssen auf die Resonanz bei der Grenzfrequenz  $f_g$  abgestimmt sein. Zur Berechnung wird das Verhältnis  $f_g : f_2$  gewählt und dieses liegt zwischen 0,95 und 0,8. Ist  $R$  der bei  $Z_2$  angeschlossene Abschlusswiderstand, so wird mit dem Nennwiderstand der Schaltung von  $Z_2 = 1,25 \cdot R$  gerechnet.

$$Z_2 = 1,25 \cdot R$$

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_g}{f_2}\right)^2}$$

$$L = m \cdot \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot f_g}$$

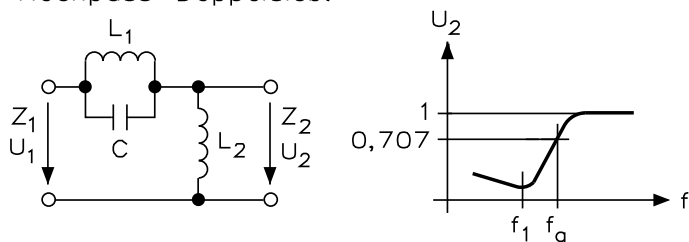
- $f_2$  Sperrkreisfrequenz in Hz
- $L$  Sperrkreisinduktivität in H
- $C_1$  Sperrkreis Kapazität in F
- $m$  Filter-Kennwert
- $C_2$  Querkapazität in F
- $Z$  Nennwiderstand der Schaltung in  $\Omega$

$$C_1 = \frac{1-m^2}{m} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot Z} \quad C_2 = m \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot Z}$$

$$f_g = \frac{m \cdot Z}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

## 8.9 Hochpass-Doppelglied

Hochpass–Doppelsieb:



Die steile Flanke des Doppelgliedes erhält man durch einen Längssperkreis, der auf  $f_2$  abgestimmt ist. Kondensator und Induktivität müssen auf die Resonanz bei der Grenzfrequenz  $f_g$  abgestimmt sein. Zur Berechnung wird das Verhältnis  $f_g : f_2$  gewählt und dieses liegt zwischen 0,95 und 0,8. Ist  $R$  der bei  $Z_2$  angeschlossene Abschlusswiderstand, so wird mit dem Nennwiderstand der Schaltung von  $Z_2 = 1,25 \cdot R$  gerechnet.

$$Z_2 = 1,25 \cdot R$$

$$m = \sqrt{1 - \left( \frac{f_1}{f_g} \right)^2}$$

$$C = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot Z}$$

$$L_1 = \frac{m}{1-m^2} \cdot \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot f_g}$$

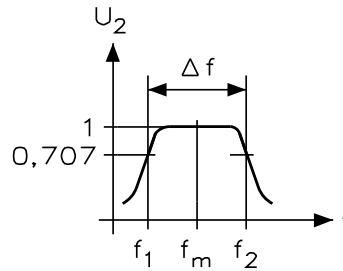
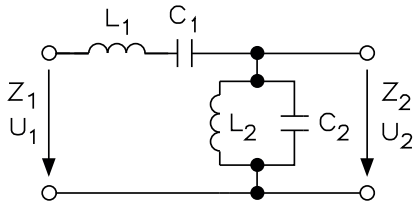
$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot Z}$$

$$L_2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot f_g}$$

|                    |                                          |
|--------------------|------------------------------------------|
| $f_1$              | Sperrkreisfrequenz in Hz                 |
| $L$                | Sperrkreisinduktivität in H              |
| $C_{\text{Sperr}}$ | Sperrkreiskapazität in F                 |
| $m$                | Filterkennwert                           |
| $Z_2$              | Nennwiderstand der Schaltung in $\Omega$ |
| $R$                | Abschlusswiderstand in $\Omega$          |

## 8.10 LC-Bandpass

Bandpass:



$$f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}}$$

$$f_m = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{4 \cdot C_2 \cdot L_1} + \frac{1}{C_1 \cdot L_1}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C_2 \cdot L_1}}}{2 \cdot \pi}$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{\frac{1}{4 \cdot C_2 \cdot L_1} + \frac{1}{C_1 \cdot L_1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C_2 \cdot L_1}}}{2 \cdot \pi}$$

$$L_1 = \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot \Delta f} \quad C_1 = \frac{\Delta f}{2 \cdot \pi \cdot Z \cdot f_1 \cdot f_2}$$

$$L_2 = \frac{Z \cdot \Delta f}{2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot f_2} \quad C_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot Z \cdot \Delta f}$$

Für  $Z_1 = Z_2 = Z$  gilt:

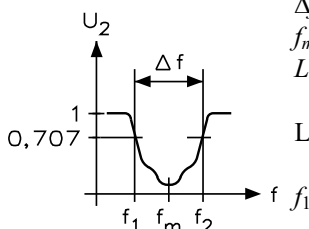
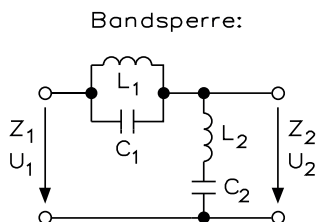
$$L_1 = \frac{b \cdot Z}{2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot f_2} \quad C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot Z \cdot \Delta f}$$

$$L_2 = \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot \Delta f} \quad C_2 = \frac{\Delta f}{2 \cdot \pi \cdot Z \cdot f_1 \cdot f_2}$$

Durchlassbereich für alle Frequenzen zwischen  $f_1$  und  $f_2$ . Gesperrt wird der Bereich unterhalb von  $f_1$  und oberhalb  $f_2$ .

- $\Delta f$  Bandbreite in Hz
- $f_m$  Mittenfrequenz in Hz
- $L_1, C_1$  Leitkreis als Längswiderstand
- $L_2, C_2$  Sperrkreis als Längswiderstand
- $f_1$  untere Grenzfrequenz in Hz
- $f_2$  obere Grenzfrequenz in Hz

## 8.11 LC-Bandsperre



$\Delta f$  Bandbreite in Hz  
 $f_m$  Mittenfrequenz in Hz  
 $L_1, C_1$  Leitkreis als Längswiderstand  
 $L_2, C_2$  Sperrkreis als Längswiderstand  
 $f_1$  untere Grenzfrequenz in Hz  
 $f_2$  obere Grenzfrequenz in Hz

$$f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}}$$

$$f_m = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

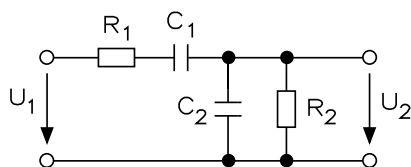
Für  $Z_1 = Z_2 = Z$  gilt:

$$L_1 = \frac{b \cdot Z}{2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot f_2} \quad C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot Z \cdot \Delta f}$$

$$L_2 = \frac{Z}{2 \cdot \pi \cdot \Delta f} \quad C_2 = \frac{\Delta f}{2 \cdot \pi \cdot Z \cdot f_1 \cdot f_2}$$

Durchlassbereich für alle Frequenzen zwischen  $f_1$  und  $f_2$ . Gesperrt wird der Bereich unterhalb von  $f_1$  und oberhalb  $f_2$ .

## 8.12 RC-Bandpass (Wienbrücke)



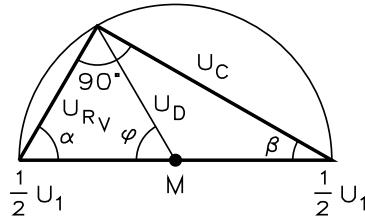
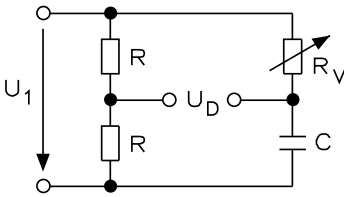
$U_1$  Eingangsspannung  
 $U_2$  Ausgangsspannung

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{R_1 \cdot C_1 \cdot R_2 \cdot C_2}}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}, \text{ wenn } R_1 = R_2 = R \text{ und } C_1 = C_2 = C \text{ ist, dann gilt } f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}.$$

Die Ausgangsspannung hat im Resonanzfall  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{3}$ .

### 8.13 Phasenschieber



$$R_v = \sqrt{R_{\min} \cdot R_{\max}} = X_C$$

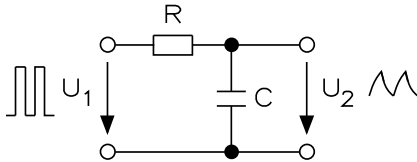
Der einstellbare Widerstand  $R_v$  ist so zu wählen, dass das  $R_v$  einstellbarer Widerstand geometrische Mittel von Anfangswiderstand  $R_{\min}$  und Endwiderstand  $R_{\max}$  gleich dem kapazitiven Widerstand von  $C$  ist.

$r$  Radius des Thaleskreises:

$$U_2 = 0,5 \cdot U_1$$

$U_D$  Spannungsdifferenz

### 8.14 Integrierglied



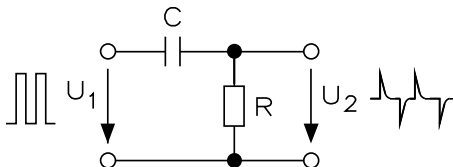
$$\tau \gg T$$

$$U_2 = \frac{1}{R \cdot C} \int U \cdot dt$$

$$\tau = R \cdot C$$

$$U_2 = \frac{1}{\tau} \int U \cdot dt$$

### 8.15 Differenzierglied

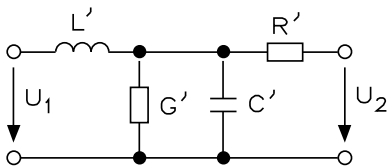


$$\tau \ll T$$

$$U_2 = R \cdot C \cdot \frac{dU}{dt} \quad \tau = R \cdot C$$

$\tau$  Zeitkonstante in s

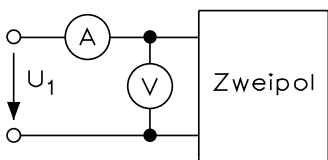
## 8.16 Wellenwiderstand für Leitungen



– Für verlustfreie Leitungen:  $Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

– Für verlustbehaftete Leitungen:  $Z = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega \cdot L'}{R' + j \cdot \omega \cdot C'}}$

$Z$  Wellenwiderstand  
 $L'$  Längsinduktivität pro km  
 $C'$  Querkapazität pro km  
 $R'$  Längswiderstand pro km  
 $G'$  Querleitwert pro km

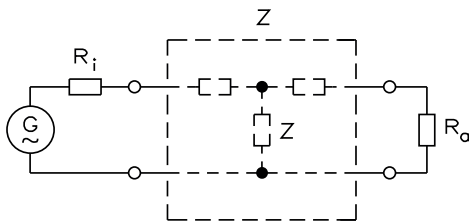


$$Z = \frac{U}{I}$$

$$Z = \sqrt{Z_L \cdot Z_k}$$

$Z_L$  Wellenwiderstand bei offenem Ausgang

$Z_k$  Wellenwiderstand bei kurzgeschlossenem Ausgang



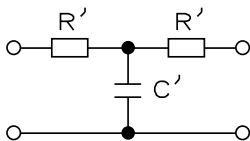
$R_i$  Innenwiderstand der Spannungsquelle

$R_a$  Belastungswiderstand der Leitung

Anpassung und maximale Leistung

$$R_i = Z = R_a$$

## 8.17 Dämpfungskonstante für Kabel



Für niedrige Frequenzen:

$$Z = \sqrt{\frac{R'}{\omega \cdot C'}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot R' \cdot C'}{2}}$$

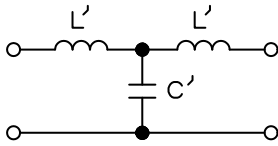
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{R' \cdot C'}}$$

$\omega$  zu übertragende Kreisfrequenz

$\alpha$  Dämpfungskonstante in dB/km

$v$  Ausbreitungsgeschwindigkeit

### 8.18 Ausbreitungsgeschwindigkeit für Freileitungen



$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \dots + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{L' \cdot C'}}$$

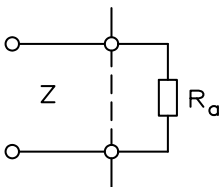
- $Z$  Impedanz  
 $\omega$  zu übertragende Kreisfrequenz  
 $\alpha$  Dämpfungskonstante in dB/km  
 $v$  Ausbreitungsgeschwindigkeit

### 8.19 Ausbreitungsgeschwindigkeit für hochfrequente Leitungen und Kabel

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- $L$  Leitungsinduktivität  
 $C$  Leitungsinduktivität

### 8.20 Reflexionsfaktor



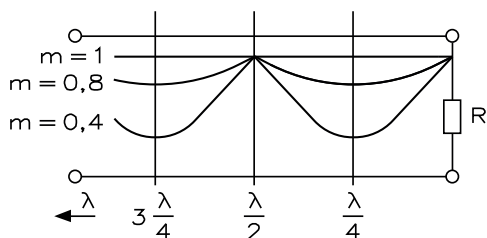
$$r = \frac{R_a - Z}{R_a + Z}$$

Der Reflexionsfaktor  $r$  gibt das Verhältnis von rücklaufender zu hinlaufender Welle an.

## 8.21 Rückflussdämpfung

$$a_r = 20 \cdot \lg \frac{1}{r} \text{ in dB}$$

- Anpassungsfaktor:



Die Rückflussdämpfung  $a_r$  ist ein Maß für die Stärke der Reflexionen an Leistungsschaltpunkten.

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}$$

$$m = \frac{1-r}{1+r}$$

Der Anpassungsfaktor  $m$  kennzeichnet das Verhältnis von Spannungs- oder Stromminimum zum Spannungs- oder Strommaximum.

$r$  Radius der Leitung

- Welligkeitsfaktor:

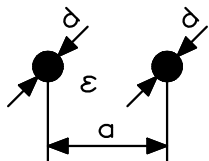
$$s = \frac{1}{m}$$

$$s = \frac{1+r}{1-r}$$

Verlauf von Spannung oder Strom bei verschiedenen Längen in m

## 8.22 Wellenwiderstand im Aufbau

- Symmetrische Doppelleitung (Flachbandkabel):



$$Z \approx \frac{120}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \ln \frac{2 \cdot a}{d}$$

$$Z \approx \frac{276}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \lg \frac{2 \cdot a}{d}$$

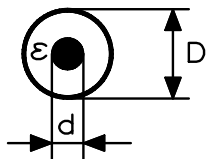
$$C = \frac{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot l}{\ln \frac{a}{d}}$$

$$L = 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot l \cdot \ln \frac{2 \cdot a}{d}$$

$Z$  Wellenwiderstand

$\epsilon$  Dielektrizitätskonstante

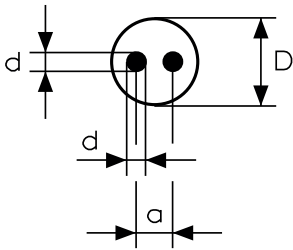
- Koaxialkabel:



$$Z \approx \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

$$Z \approx \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \lg \frac{D}{d}$$

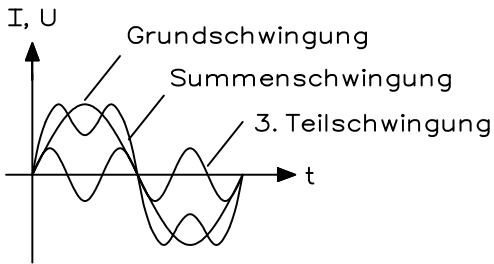
– Symmetrisches Kabel:



$$Z \approx \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \ln \left\{ \frac{2a[1 - (a/D)^2]}{d[1 + (a/D)^2]} \right\}$$

$$Z \approx \frac{276}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \lg \left\{ \frac{2a[1 - (a/D)^2]}{d[1 + (a/D)^2]} \right\}$$

### 8.23 Klirrfaktor



$$k = \sqrt{\frac{U_{2f}^2 + U_{3f}^2 + \dots}{U_{1f}^2 + U_{2f}^2 + U_{3f}^2 + \dots}}$$

$$k = \sqrt{\frac{I_{2f}^2 + I_{3f}^2 + \dots}{I_{1f}^2 + I_{2f}^2 + I_{3f}^2 + \dots}}$$

$k$  Klirrfaktor

$U_{1f}$  Spannung der Grundfrequenz

$U_{2f}$  Spannung der 1. Oberschwingung oder  
2. Harmonischen

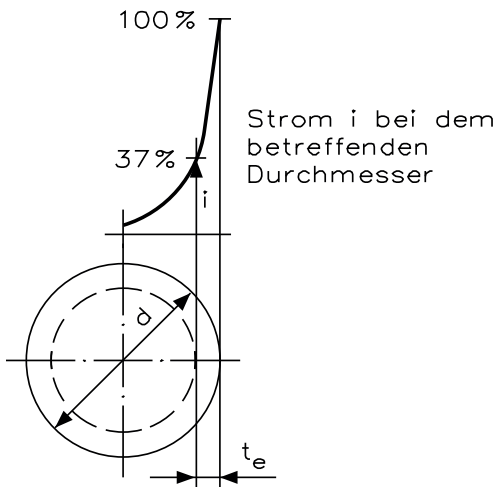
$U_{3f}$  Spannung der 3. Teilschwingung

### 8.24 Klirrdämpfung

$$a_k = 20 \lg \frac{1}{k} \text{ in dB}$$

$a_k$  Klirrdämpfung

## 8.25 Skineffekt, Hauteffekt



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu_r \cdot \gamma}}$$

$$R_{Hf} = n \cdot R$$

bei  $f > 10 \text{ MHz}$  gilt:  $n = k \cdot d \cdot \sqrt{f}$

$$k = \frac{\sqrt{\gamma \cdot \mu_r}}{2} = \sqrt{\frac{\mu_r}{4 \cdot \rho}}$$

$$t_e = \frac{503}{\sqrt{\mu_r \cdot \gamma \cdot f}}$$

$\delta$  Eindringtiefe in  $\mu\text{m}$  (Strom auf 37 % gefallen), wenn  $1/e$  des Werts an der Oberfläche abgesunken ist.

$\mu_r$  relative Permeabilität

$\gamma$  Leitfähigkeit in  $\text{m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2)$

$f$  Frequenz

$v$  Vervielfachungsfaktor

$\rho$  spezifischer Widerstand in  $(\Omega \cdot \text{mm}^2)/\text{m}$

$k$  Materialkonstante (Kupfer  $k \approx 3,75$ )

$d$  Drahtdurchmesser in  $\text{mm}$

$t_e$  Eindringtiefe in  $\mu\text{m}$

## 8.26 Induktive Erwärmung

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{10^7}{f \cdot \mu_r \cdot \gamma}} = \frac{50}{\sqrt{f \cdot \mu_r \cdot \gamma}}$$

$$f_{\min} = 16 \cdot 10^6 \frac{1}{d^2 \cdot \mu_r \cdot \gamma}$$

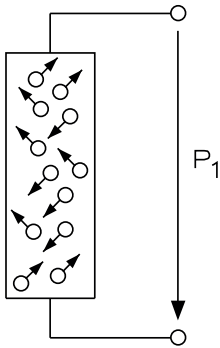
$\delta$  Eindringtiefe in  $\text{mm}$  (Strom auf 37 % verringert)

$d$  Durchmesser des Arbeitsstückes in  $\text{mm}$

$\mu_r$  relative Permeabilität

$\gamma$  Leitfähigkeit

## 8.27 Rauschen



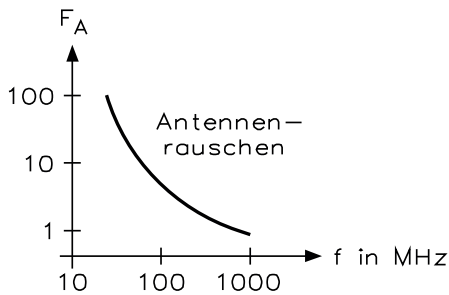
- $P_r$  Rauschleistung
- $k$  Boltzmann-Konstante
- $T$  Temperatur in K (Kelvin)
- $\Delta f$  Bandbreite
- $k \cdot T_0$  Bezugsrauschleistung
- $F$  Rauschzahl
- $F_z$  zusätzliches Empfängerrauschen

$$P_r = 4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}}$$

$$\text{bei } 20^\circ\text{C: } P_r = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ W} \cdot \Delta f$$

$$k \cdot T_0 = 4 \cdot 10^{-21} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$



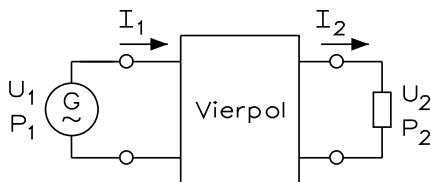
- $F_A$  effektive Empfängerrauschzahl
- $T_A$  Antennenrauschtemperatur
- $T_0$  300 Kelvin

$$F = 1 + F_z$$

$$U_R = \sqrt{F \cdot k \cdot T_0 \cdot R \cdot \Delta f} \quad F_A = F + \frac{T_A - T_0}{T_0}$$

## Dämpfung, Verstärkung, Pegel

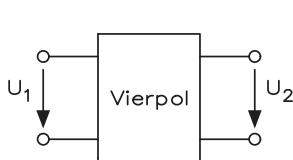
### 9.1 Dämpfungsfaktor



$D_P$  Leistungsdämpfungsfaktor  
 $D_U$  Spannungsdämpfungsfaktor  
 $D_I$  Stromdämpfungsfaktor

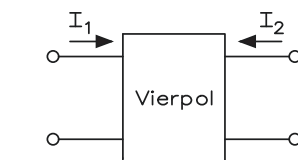
$$D_P = \frac{P_1}{P_2} \quad D_U = \frac{U_1}{U_2} \quad D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

### 9.2 Übertragungsfaktor



$$T_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$T_U = \frac{U_1}{U_2}$$



$$T_I = \frac{I_1}{I_2}$$

$T_P$  Leistungsübertragungs-  
faktor  
 $T_U$  Spannungsübertragungs-  
faktor  
 $T_I$  Stromübertragungsfaktor

### 9.3 Dämpfungsmaß in Bel

$$a_U = \lg \frac{U_1}{U_2}$$

$a_U$  Dämpfungsmaß in Bel (Bell)  
 $\lg$  Zehnerlogarithmus

### 9.4 Dämpfungsmaß in dB

$$a_P = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} \quad a_U = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \quad a_I = 20 \cdot \lg \frac{I_1}{I_2} \quad a \text{ Dämpfungsmaß in dB}$$

Spannungs- oder Stromverhältnisse

|        |                              |
|--------|------------------------------|
| 20 dB  | $\triangleq 1 : 10$          |
| 40 dB  | $\triangleq 1 : 100$         |
| 60 dB  | $\triangleq 1 : 1000$        |
| 80 dB  | $\triangleq 1 : 10\,000$     |
| 100 dB | $\triangleq 1 : 100\,000$    |
| 120 dB | $\triangleq 1 : 1\,000\,000$ |
| 10 dB  | $\triangleq 1 \text{ Bell}$  |

### 9.5 Übertragungsmaß in dB

$$-a_P = v_P = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \quad -a_U = v_U = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} \quad a_I = v_I = 20 \cdot \lg \frac{I_2}{I_1}$$

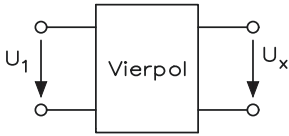
$a$  Verstärkungsmaß in dB

### 9.6 Dämpfungsmaß in Np

$$a_U = \ln \frac{U_1}{U_2}$$

$a_U$  Dämpfungsmaß in Np (Neper)  
 $\ln$  natürlicher Logarithmus

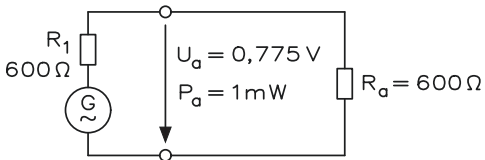
## 9.7 Relativer Pegel



$$L_{\text{rel}} = 20 \cdot \lg \frac{U_x}{\mu\text{V}}$$

$L_{\text{rel}}$  relativer Pegel in dB $\mu\text{V}$

## 9.8 Absoluter Pegel in dB



absoluter Leistungspegel  $L_{P_{\text{abs}}}$

in dBm

absoluter Spannungspegel  $L_{U_{\text{abs}}}$

in dBu

absoluter Strompegel  $L_{I_{\text{abs}}}$

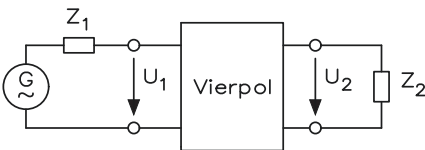
in dB

$$L_{P_{\text{abs}}} = 10 \cdot \lg \frac{P_x}{1 \text{ mW}}$$

$$L_{U_{\text{abs}}} = 20 \cdot \lg \frac{U_x}{775 \text{ mV}}$$

$$L_{I_{\text{abs}}} = 20 \cdot \lg \frac{I_x}{1,29 \text{ mA}}$$

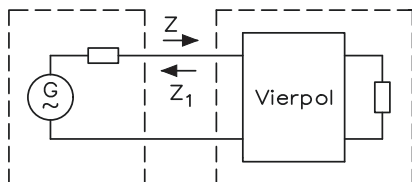
## 9.9 Betriebsdämpfung



Der Vierpol kann eine Leitung oder eine komplexe Schaltung sein.

$$a_B = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} + 10 \cdot \lg \frac{Z_2}{Z_1} \text{ in dB}$$

### 9.10 Rückfluss- oder Echodämpfung



Die Rückflussdämpfung  $a_R$  ist ein Maß für die Stärke der Reflexion an den Leitungsschaltunkten.

$$a_R = 20 \cdot \lg \frac{Z_1 + Z}{Z_1 - Z} = 20 \cdot \lg \frac{1}{r} \text{ in dB}$$

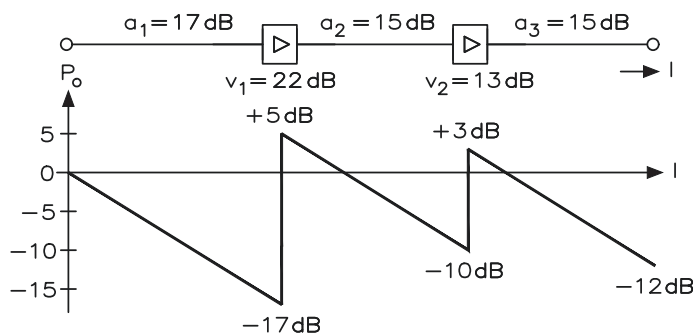
### 9.11 Nebensprechdämpfung

$$a_N = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2}$$

$$a_N = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} = 10 \cdot \lg \frac{Z_2}{Z_1} \text{ in dB}$$

Die Nebensprechdämpfung  $a_N$  ist das Verhältnis der Leistung  $P_1$  zur Leistung  $P_2$ , die von Leitung 1 auf Leitung 2 eingekoppelt wird.

### 9.12 Gesamtdämpfungsmaß einer Übertragungsstrecke



$$\alpha = \frac{a}{l}$$

$$\alpha = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

$$\alpha_g = L_1 - L_2$$

$a$  Dämpfungsmaß in dB

$l$  Leitungslänge in km

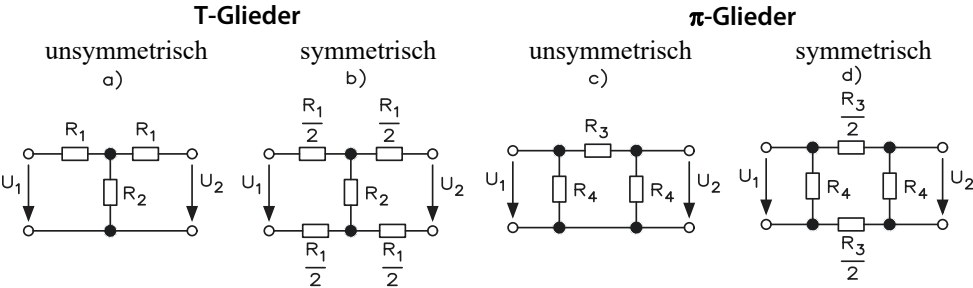
$\alpha$  Dämpfungskennwerte in dB/km

$v$  Verstärkung in dB

$L_1$  Pegel am Punkt 1

$L_2$  Pegel am Punkt 2

9.13 Dämpfungsglieder



$Z_1 = Z_2 = Z$

$d = \frac{U_1}{U_2}$

$R_1 = Z \cdot \frac{d-1}{d+1}$

$R_2 = Z \cdot \frac{2 \cdot d}{d^2-1}$

$R_3 = Z \cdot \frac{d^2-1}{2 \cdot d}$

$R_4 = Z \cdot \frac{d+1}{d-1}$

$Z_1$  Eingangswiderstand

$Z_2$  Ausgangswiderstand

$Z$  Wellenwiderstand

$d$  Dämpfungsfaktor

$U_1$  Eingangsspannung

$U_2$  Ausgangsspannung

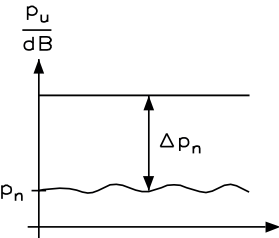
$R_1$  Längswiderstand T-Glieder

$R_2$  Querwiderstand T-Glieder

$R_3$  Längswiderstand  $\pi$ -Glieder

$R_4$  Querwiderstand  $\pi$ -Glieder

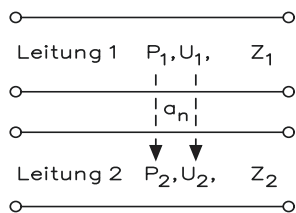
9.14 Störpegelabstand



$\Delta p_n = p_u - p_n$

$\Delta p_n$  Störpegelabstand  
 $p_u$  Übertragungspegel  
 $p_n$  Störpegel

9.15 Nebensprechdämpfung

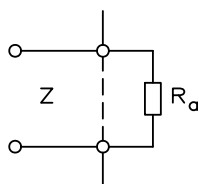


$a_N = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}$

$a_N = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} + 10 \lg \frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{in dB}$

## 9.16 Reflexionsfaktor, Anpassungsfaktor, Welligkeitsfaktor

### ■ Reflexionsfaktor:



$$r = \frac{R_a - Z}{R_a + Z}$$

Der Reflexionsfaktor  $r$  gibt das Verhältnis von rücklaufender zu hinlaufender Welle an.

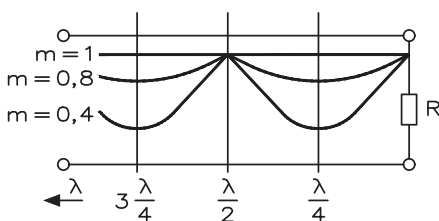
$r$  Radius der Leitung

### ■ Rückflussdämpfung:

$$a_r = 20 \cdot \lg \frac{1}{r} \text{ in dB}$$

Die Rückflussdämpfung ist ein Maß für die Stärke der Reflexionen an Leistungsschalt-  
punkten.

### ■ Anpassungsfaktor:



$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}$$

$$m = \frac{1-r}{1+r}$$

Der Anpassungsfaktor kennzeichnet das Verhältnis von Spannungs- oder Stromminimum zum Spannungs- oder Strommaximum.

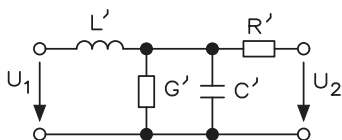
$r$  Radius der Leitung

### ■ Welligkeitsfaktor:

$$s = \frac{1}{m} \quad s = \frac{1+r}{1-r}$$

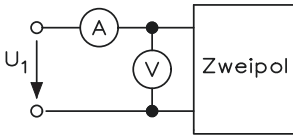
Verlauf von Spannung oder Strom bei verschiedenen Längen in m

## 9.17 Wellenwiderstand, Dämpfungskonstante, Ausbreitungsgeschwindigkeit



- $Z$  Wellenwiderstand
- $L'$  Längsinduktivität pro km
- $C'$  Querkapazität pro km
- $R'$  Längswiderstand pro km
- $G'$  Querleitwert pro km

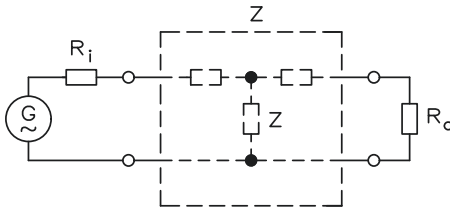
- Für verlustfreie Leitungen:  $Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$
- Für verlustbehaftete Leitungen:  $Z = \sqrt{\frac{R' + j \cdot \omega \cdot L'}{G' + j \cdot \omega \cdot C'}}$



$$Z = \frac{U}{I}$$

$$Z = \sqrt{Z_L \cdot Z_k}$$

- Anpassung und maximale Leistung



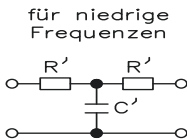
$$R_i = Z = R_a$$

$Z_L$  Wellenwiderstand bei offenem Ausgang  
 $Z_k$  Wellenwiderstand bei kurzgeschlossenem Ausgang

$R_i$  Innenwiderstand der Spannungsquelle  
 $R_a$  Belastungswiderstand der Leitung

## 9.18 Wellenwiderstand, Dämpfungskonstante, Ausbreitungsgeschwindigkeit für Kabel

- Für niedrige Frequenzen:



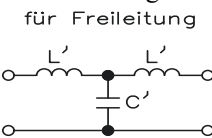
$$Z = \sqrt{\frac{R'}{\omega \cdot C'}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot R' \cdot C'}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{R' \cdot C'}}$$

$\omega$  zu übertragende Kreisfrequenz  
 $\alpha$  Dämpfungskonstante in dB/km  
 $v$  Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Für Freileitungen:



$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

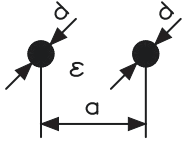
$$v = \sqrt{\frac{1}{L' \cdot C'}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$\omega$  zu übertragende Kreisfrequenz  
 $\alpha$  Dämpfungskonstante in dB/km  
 $v$  Ausbreitungsgeschwindigkeit

## 9.19 Wellenwiderstand im Aufbau

### ■ Symmetrische Doppelleitung (Flachbandkabel):



$$Z \approx \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{2 \cdot a}{d}$$

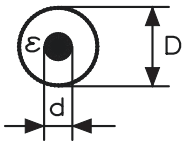
$Z$  Wellenwiderstand  
 $\epsilon_r$  Dielektrizitätskonstante

$$Z \approx \frac{276}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \lg \frac{2 \cdot a}{d}$$

$$C = \frac{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot l}{\ln \frac{a}{d}}$$

$$L = 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot l \cdot \ln \frac{2 \cdot a}{d}$$

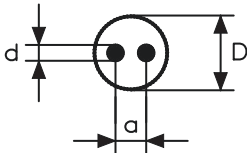
### ■ Koaxialkabel:



$$Z \approx \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

$$Z \approx \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \lg \frac{D}{d}$$

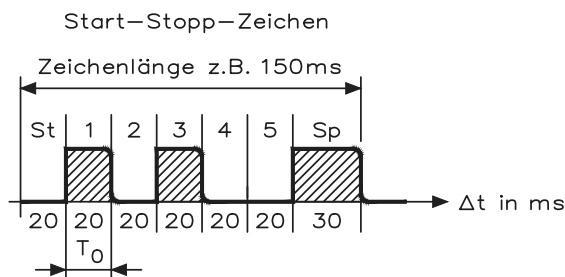
### ■ Symmetrisches Kabel:



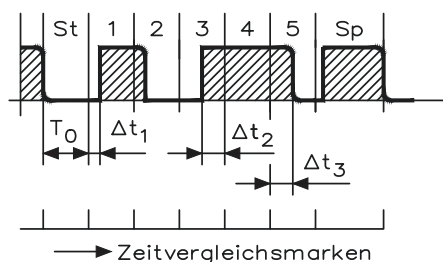
$$Z \approx \frac{120}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \ln \left\{ \frac{2a[1 - (a/D)^2]}{d[1 + (a/D)^2]} \right\}$$

$$Z \approx \frac{276}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \lg \left\{ \frac{2a[1 - (a/D)^2]}{d[1 + (a/D)^2]} \right\}$$

## 9.20 Datenübertragung



Start–Stopp–Verzerrungsgrad



- Schrittgeschwindigkeit:

$$v_s = \frac{1}{T_0}$$

$v_s$  Anzahl der Impulse je Sekunde;  
Maßeinheit: Baud

$T_0$  Dauer des kürzesten, unverzerrten Einheits-schrittes

- Datenübertragungs-  
geschwindigkeit (Bitrate):

$$v_D = v_s \cdot Z_t$$

$v_D$  Datenübertragungsgeschwindigkeit Bit/s

$Z_t$  Anzahl der je Schrittdauer übertragenden  
Binärpegeländerung

- Serielle Datenübertragung:

$$v_{DS} = v_s \cdot \lg n$$

$n$  Anzahl der Binärpegeländerung  
(Kennzustände)

- Parallele Datenübertragung:

$$v_{DP} = m \cdot v_s \cdot \lg n$$

$m$  Anzahl der parallelen Datenkanäle

$\lg$  Zweierlogarithmus

- Zeichengeschwindigkeit:

$$v_Z = \frac{1}{\text{Zeichenlänge}}$$

Einheit: Zeichen je Sekunde (bps)

$A$  Anzahl der Schritte je Zeichen

$St$  Zeit für Startschritt in s

$Sp$  Zeit für Stoppschritt in s

$$v_Z = \frac{1}{A \cdot T_0 + St + Sp}$$

Isochron-Zeichen

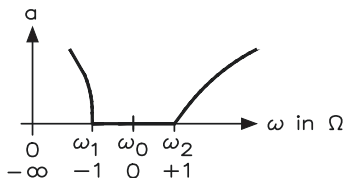
$$v_Z = \frac{1}{A \cdot T_0}$$

$\delta_{St}$  Start-Stopp-Verzerrungsgrad

$\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3$  Abweichung vom Sollwert

$$\delta_{St} = \frac{\Delta t_{\max}}{T_0} \cdot 100 \%$$

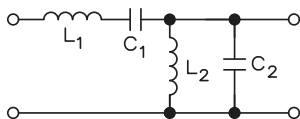
## 9.21 Dämpfungsverlauf



T-Glied:  $Z_0 = 1,25 \cdot R$

$$\Omega = \frac{1}{\Delta f} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Grundglied



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C_2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$\Delta f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

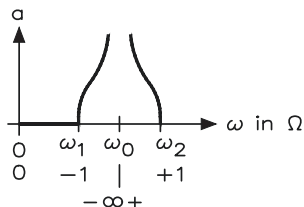
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$$

$$L_1 = \frac{Z_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$L_2 = Z_0 \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2}$$

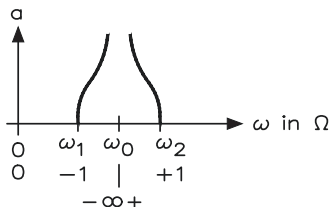
$$C_1 = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2}$$

$$C_2 = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}$$



π-Glied:  $Z_0 = 0,8 \cdot R$

$$\Omega = -\Delta f \cdot \frac{1}{\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$



$Z_0$  Nennwiderstand (Wellenwiderstand)

$\Omega$  normierte Frequenz

$\Delta f$  Bandbreite (Relativwert)

$\omega_0$  geometrische Bandmittenfrequenz

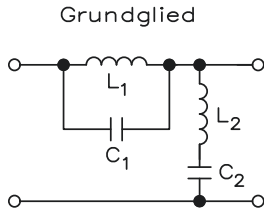
$\omega_1$  untere Grenzfrequenz

$\omega_2$  obere Grenzfrequenz

$Z_0$  Nennwiderstand (Wellenwiderstand)

$\Omega$  normierte Frequenz

$\Delta f$  Bandbreite (Relativwert)



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C_2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$\Delta f = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$$

$$L_1 = Z_0 \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2} \quad L_2 = Z_0 \cdot \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}$$

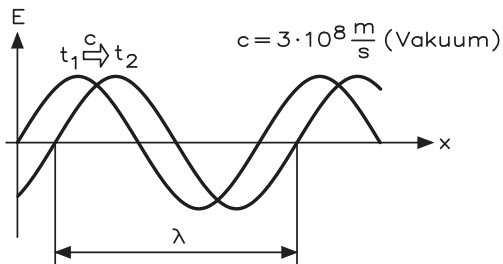
$$C_1 = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \quad C_2 = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2}$$

$\omega_0$  geometrische Bandmittenfrequenz

$\omega_1$  untere Grenzfrequenz

$\omega_2$  obere Grenzfrequenz

## 9.22 Elektromagnetische Wellen



$c$  Ausbreitungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit)

$\lambda$  Wellenlänge

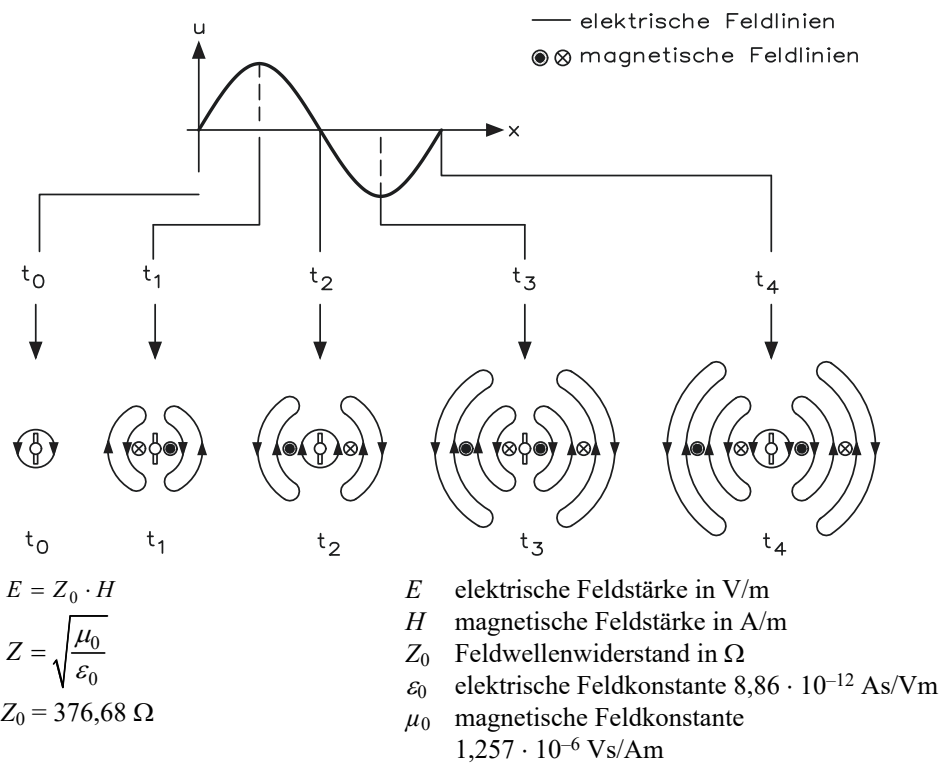
$f$  Frequenz

$T$  Periodendauer

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\lambda = c \cdot T$$

– Wellenabstrahlung (elektromagnetisches Feld):

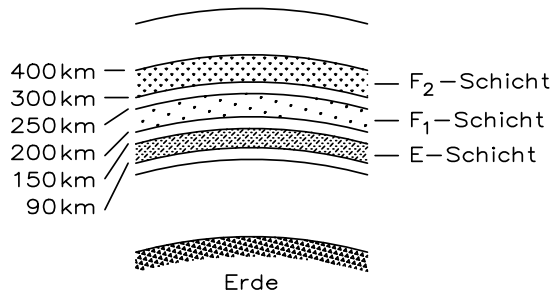


– Feldberechnung (Kugelstrahler):

$$S = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$
$$S = E \cdot H$$
$$S = \frac{E^2}{Z_0}$$

$P$  Strahlungsleistung der Antenne in W  
 $S$  Strahlungsdichte in  $\text{W/m}^2$   
 $E$  elektrische Feldstärke in V/m  
 $H$  magnetische Feldstärke in A/m

– Feldarten und Schichten der Ionosphäre:  
Ausbreitungseigenschaften      Schichten der Ionosphäre



- Nahfeld:

$$r < \lambda$$

$$E \approx \frac{1}{r^3}$$

- Fernfeld:

$$r > \lambda$$

$$E \approx \frac{1}{r} \quad (r \text{ ca. } 10\lambda)$$

Im Fernfeld sind die magnetische und die elektrische Komponente des elektromagnetischen Feldes in Phase und stehen senkrecht aufeinander.

Einteilung der Atmosphäre:

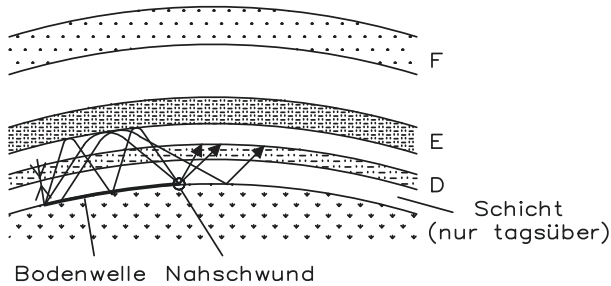
Troposphäre: bis ca. 12 km

Stratosphäre: von ca. 12 km bis ca. 80 km

Ionosphäre: von ca. 80 km bis ca. 1000 km

### ■ Langwellen:

Vorwiegend nur Bodenwellen

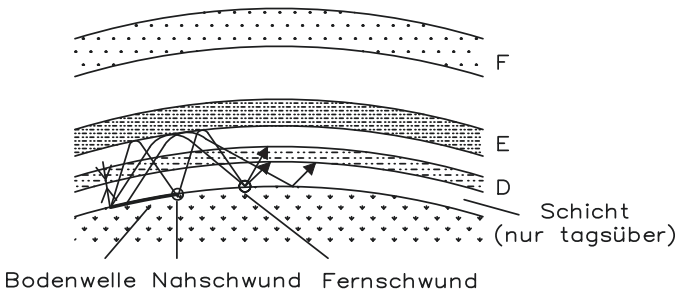


- Mittelwellen:

Tag: Vorwiegend Bodenwellen

Nacht: Boden- und Raumwellen

Ausbreitung ist abhängig von Tages- und Jahreszeit

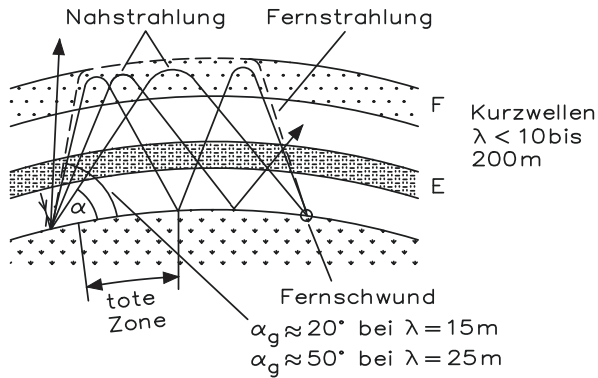


### ■ Kurzwellen:

Vorwiegend Raumwelle

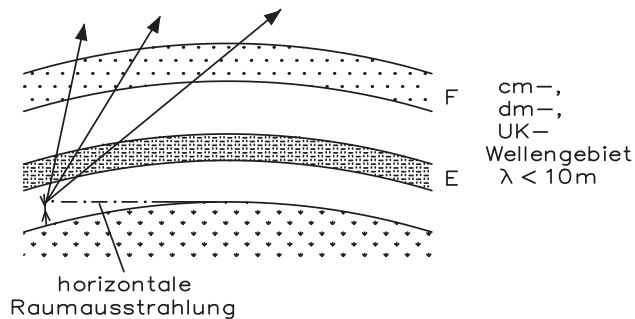
Ausbreitung ist abhängig von Tages- und Jahreszeit, von der Sonnenaktivität

Mehrfachreflexion möglich



### ■ Ultrakurzwellen:

Quasioptische Wellen

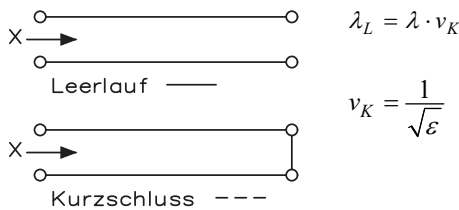
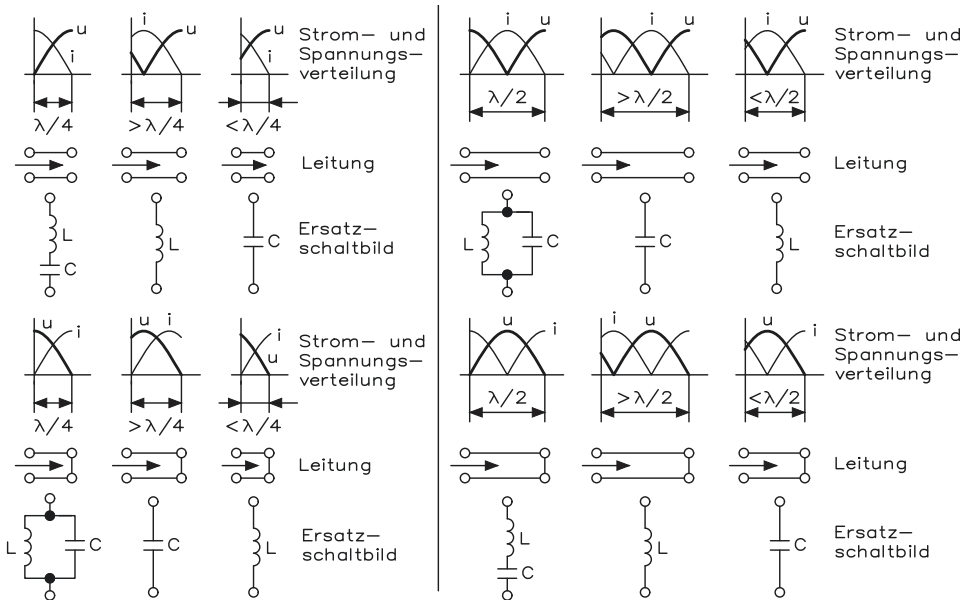


9.23 Hochfrequenzleitung

Elektrisches Verhalten einer am Ende offenen und einer am Ende kurzgeschlossenen  $\lambda/4$  Leitung

Elektrisches Verhalten einer am Ende offenen und einer am Ende kurzgeschlossenen  $\lambda/2$  Leitung

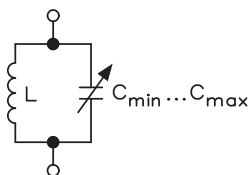
Elektromagnetische Wellensignale breiten sich in Leitungen langsamer aus als im freien Raum. Die geometrischen Leitungslängen sind daher um den Verkürzungsfaktor  $v_K$  kleiner als die elektrische Wellenlängenangabe.



$\lambda_L$  geometrische Leitungslänge  
 $\lambda$  elektrische Wellenlänge  
 $v_K$  Verkürzungsfaktor  
Der Verkürzungsfaktor ist von der Leitungsart abhängig.  
 $\epsilon$  Dielektrizitätskonstante für die Leitung

## 9.24 Resonanzfrequenzänderung mit Drehkondensator

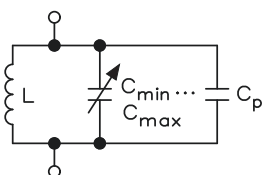
- Änderung mit Drehkondensator:



$$\frac{f_{0\max}}{f_{0\min}} = \sqrt{\frac{C_{\max}}{C_{\min}}}$$

$f_{0\max}$  größte einzustellende Frequenz  
 $f_{0\min}$  kleinste einzustellende Frequenz  
 $C_{\max}$  größte Kapazität  
 $C_{\min}$  kleinste Kapazität

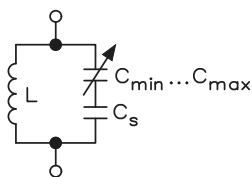
- Änderung mit Drehkondensator und Parallelkondensator:



$$\frac{f_{0\max}}{f_{0\min}} = \sqrt{\frac{C_{\max} + C_p}{C_{\min} + C_p}}$$

$C_p$  Parallelkapazität

- Änderung mit Drehkondensator und Reihenkondensator:

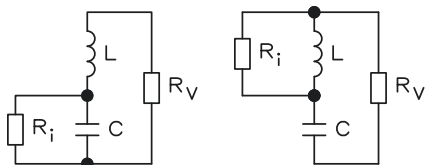


$$\frac{f_{0\max}}{f_{0\min}} = \sqrt{\frac{C_{\max} \cdot (C_{\min} + C_s)}{C_{\min} \cdot (C_{\max} + C_s)}}$$

$C_s$  Serienkapazität

## 9.25 Anpassung durch Resonanztransformator

Anpassung von niederohmigen Verbrauchern an hochohmige Spannungsquellen:



$R_v$  niederohmiger Verbraucher in  $\Omega$   
 $R_i$  hochohmiger Innenwiderstand in  $\Omega$   
 $C$  Kapazität in F

Bedingungen:

$$R_v < 0,1 \cdot \omega \cdot L$$

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

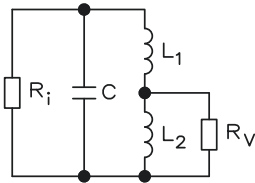
$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

Für beide Schaltungen:

$$L = \frac{\sqrt{R_v \cdot R_i}}{2 \cdot \pi \cdot f_r} \quad C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot \sqrt{R_v \cdot R_i}}$$

$L$  Induktivität in H  
 $\omega$  Kreisfrequenz  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$   
 $f_r$  Resonanzfrequenz

#### ■ Resonanztransformator mit unterteilter Induktivität



$\ddot{u}$  Übersetzungsverhältnis

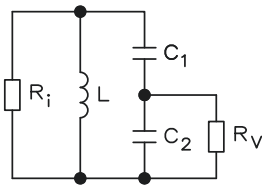
Bedingungen:

$$2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot L_2 < 0,1 \cdot R_v$$

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot (L_1 + L_2)}}$$

$$\ddot{u} = \frac{R_i}{R_v} = \left( \frac{L_1 + L_2}{L_2} \right)^2$$

#### ■ Resonanztransformator mit unterteilter Kapazität



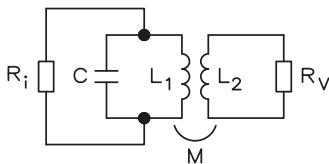
Bedingungen:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot C_2} < 0,1 \cdot R_v$$

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L \cdot C_1 \cdot C_2}}$$

$$\ddot{u} = \frac{R_i}{R_v} = \left( \frac{C_1 + C_2}{C_1} \right)^2$$

#### ■ Resonanztransformator mit getrennter Wicklung



$\ddot{u}$  Übersetzungsverhältnis  
 $M$  Gegeninduktivität

Bedingungen:

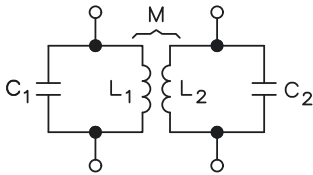
$$2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot L_2 < 0,1 \cdot R_v \text{ und } R_i > 10 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot C}$$

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C}}$$

$$\ddot{u} = \frac{R_i}{R_v} = \left( \frac{L_2}{M} \right)^2$$

## 9.26 Gekoppelte Bandfilter

### ■ Induktive Kopplung

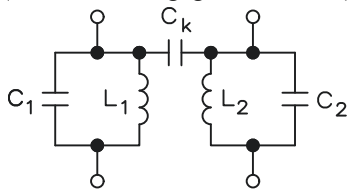


$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

$k$  Kopplungsfaktor  
 $M$  Gegeninduktivität  
 $L_1, L_2$  Spuleninduktivität

### ■ Kapazitive Kopplung

(wenn  $C_k$  klein gegen  $C_1$  und  $C_2$ )

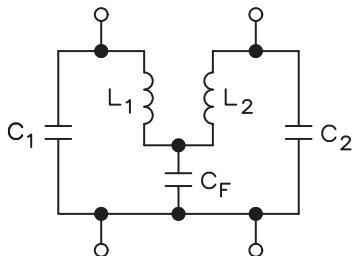


$$k \approx \frac{C_k}{\sqrt{C_1 \cdot C_2}}$$

$C_k$  Kopplungsfaktor  
 $C_1, C_2$  Kreiskapazitäten

### ■ Kapazitive Fußpunktkopplung

(wenn  $C_F$  groß gegen  $C_1$  und  $C_2$ )



$$k \approx \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_2}}{C_F}$$

$C_F$  Kopplungsfaktor

### ■ Kritische Kopplung

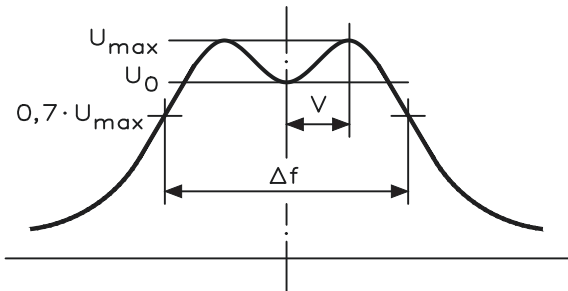
$$Q \cdot k = 1$$

$$\Delta f = \sqrt{2} \cdot \frac{f_r}{Q}$$

$$v_M = \frac{S}{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_2}}}$$

|            |                                                           |
|------------|-----------------------------------------------------------|
| $Q$        | Gütefaktor des Einzelkreises                              |
| $\Delta f$ | Bandbreite                                                |
| $v_M$      | Verstärkung für die Mittenfrequenz                        |
| $V$        | Verstimmung                                               |
| $S$        | Steilheit des aktiven Bauelements das im Bandfilter liegt |

### ■ Überkritische Kopplung



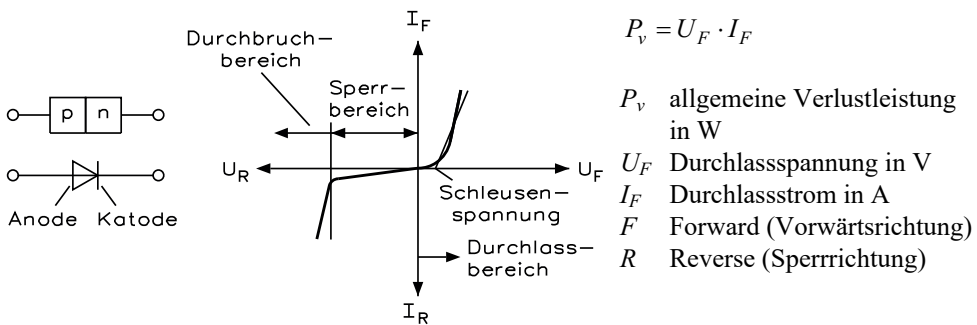
Je ein Höcker bei der Verstimmung von  $V = \pm \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}}$

Höhe des Höckers 
$$\frac{U_{\max}}{U_0} = \frac{Q \cdot k + \frac{1}{Q \cdot k}}{2}$$

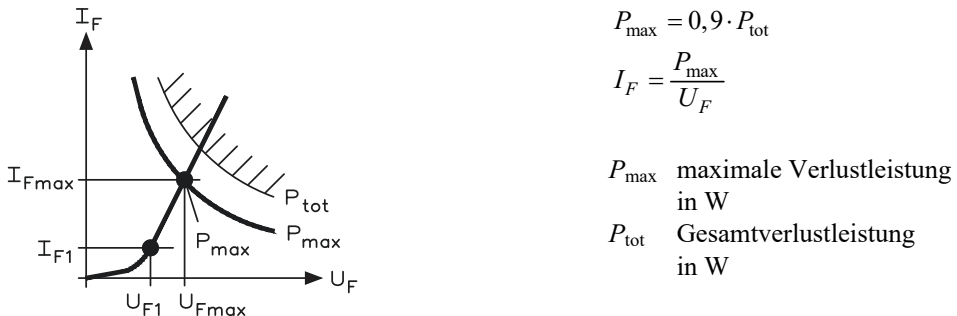
Damit die Einsattelung nicht tiefer als 70 % wird, muss  $Q \cdot k$  nicht kleiner als 2,41 sein.

Die Bandbreite ist dann 
$$\Delta f = 3,1 \cdot \frac{f_r}{Q}$$

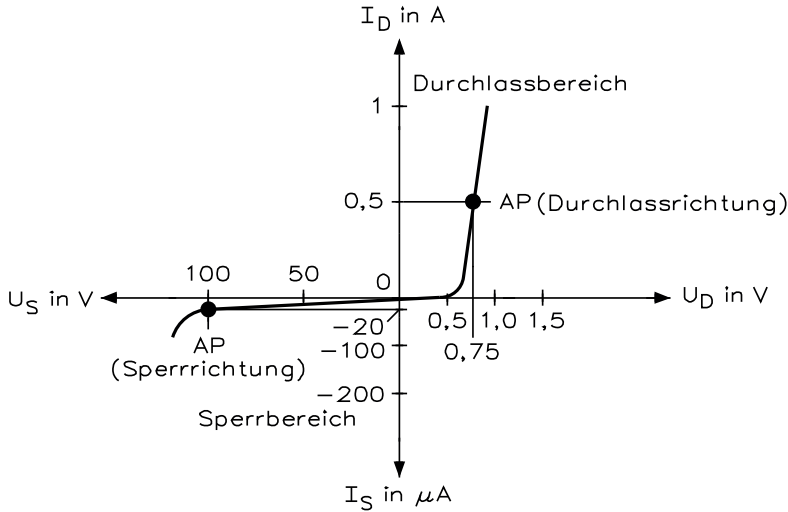
## 10.1 Verlustleistung einer Diode



## 10.2 Zulässige Verlustleistung einer Diode

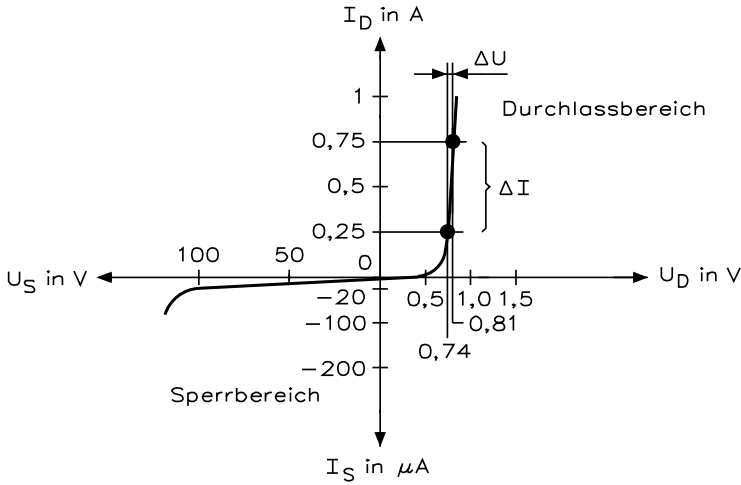


10.3 Statischer Diodenwiderstand (Gleichstromwiderstand)



$$R_F = \frac{U_F}{I_F} = \frac{U_D}{I_D}$$

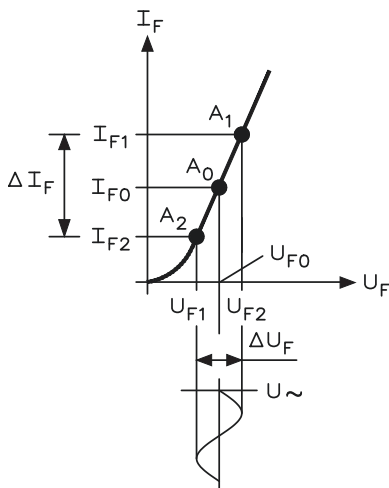
$R_F$  Durchlasswiderstand in  $\Omega$



$$R_R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_S}{I_S}$$

$R_R$  Sperrwiderstand in  $\Omega$

## 10.4 Dynamischer Diodenwiderstand (Wechselstromwiderstand)



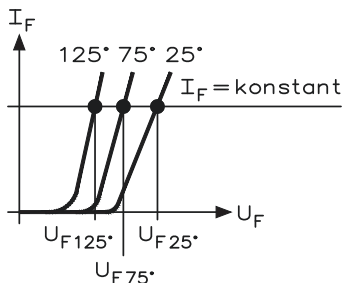
$$r_F = \frac{U_{F2} - U_{F1}}{I_{F2} - I_{F1}} = \frac{\Delta U_F}{\Delta I_F}$$

$$r_R = \frac{U_{R2} - U_{R1}}{I_{R2} - I_{R1}} = \frac{\Delta U_R}{\Delta I_R}$$

$r_F$  differentieller Durchlasswiderstand

$r_R$  differentieller Sperrwiderstand

## 10.5 Temperaturverhalten von Dioden



Die Durchlassspannung  $U_F$  hat bei  $I_F = \text{konst.}$  einen negativen Temperaturkoeffizienten  $\alpha_u$ .

$\alpha_u$  Temperaturkoeffizient (negativ)

$$\alpha_u = \frac{\Delta U_F}{\Delta I_F} < 0 \quad \alpha_u = \frac{2 \text{ mV}}{K}$$

$U_T \approx 26 \text{ mV}$  bei  $T = 300 \text{ K}$

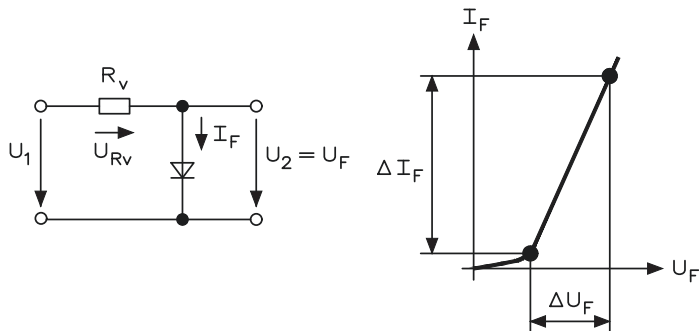
$k$  Richtkonstante

$$U_T = \frac{k \cdot T}{e}$$

Grenztemperaturen: Silizium  $\approx 200^\circ \text{C}$

Germanium  $\approx 90^\circ \text{C}$

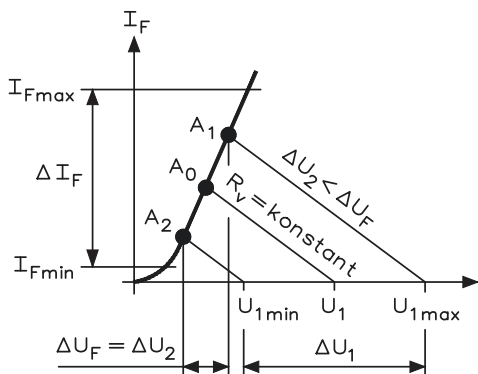
## 10.6 Spannungsbegrenzung



$$U_{Rv} = U_1 - U_F$$

$$R_v = \frac{U_{Rv}}{I_{Rv}} = \frac{U_1 - U_F}{I_F}$$

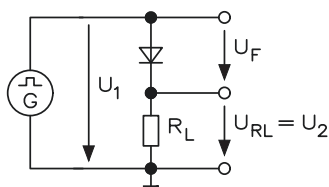
$U_{Rv}$  Spannungsfall am Vorwiderstand  
 $I_{Rv}$  Strom durch den Vorwiderstand



$$R_{v\max} \leq \frac{U_{1\min} - U_F}{I_{F\min}}$$

$$R_{v\min} \geq \frac{U_{1\max} - U_F}{I_{F\max}}$$

## 10.7 Diodenschalter



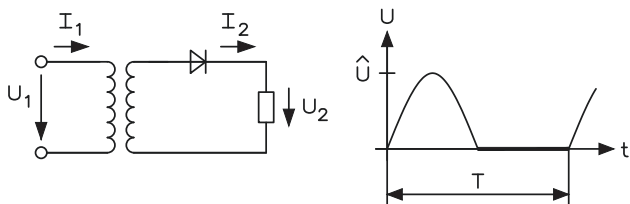
Schalter leitend, Diode sperrt:

$$U_{RL} = U_1 - U_F \approx U_1 \quad U_{RL} = I_F \cdot R_L$$

Schalter geschlossen, Diode leitend:

$$U_{RL} = U_1 - U_F \approx 0 \quad U_{RL} = I_F \cdot R_L$$

## 10.8 M1U, Einpuls-Mittelpunktschaltung



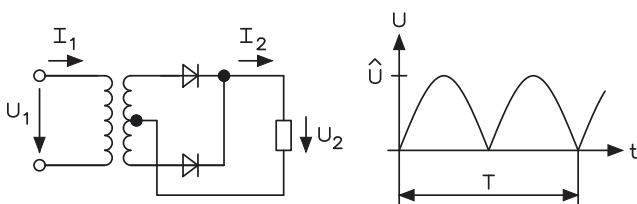
Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 2,22$

Effektivwert:  $\frac{U_w}{U_{gl}} \hat{=} 121\%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 1,57$

Sperrspannung der Diode:  $U_{Sperr} \geq \sqrt{2} \cdot U_{eff}$

## 10.9 M2U, Zweipuls-Mittelpunktschaltung



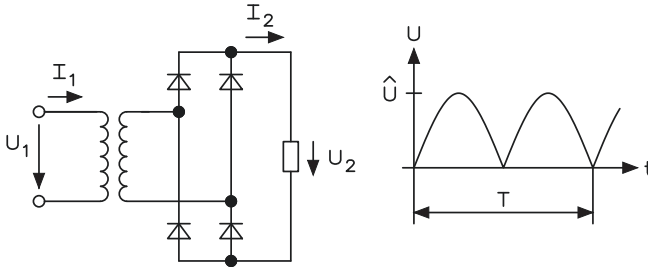
Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 1,11$

Effektivwert:  $\frac{U_w}{U_{gl}} \hat{=} 48,5\%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 0,71$

Sperrspannung der Diode:  $U_{Sperr} \geq 2\sqrt{2} \cdot U_{eff}$

### 10.10 B2U, Zweipuls-Brückenschaltung



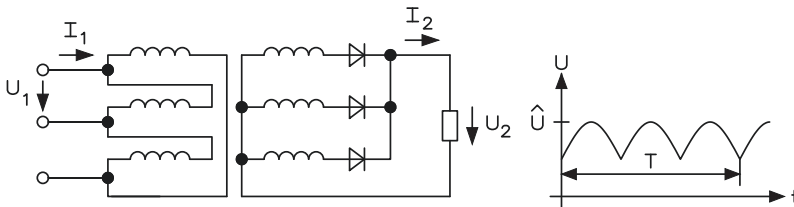
Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 1,11$

Effektivwert:  $\frac{U_w}{U_{gl}} \hat{=} 48,5\%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 1,0$

Sperrspannung der Diode:  $U_{Sperr} \geq \sqrt{2} \cdot U_{eff}$

### 10.11 M3U, Dreipuls-Mittelpunktschaltung



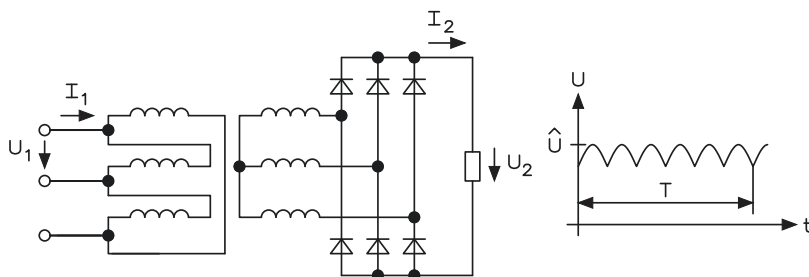
Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 1,48$

Effektivwert:  $\frac{U_w}{U_{gl}} \hat{=} 18,7\%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 0,58$

Sperrspannung der Diode:  $U_{Sperr} \geq \sqrt{2} \cdot U_{eff}$

## 10.12 B6U, Sechspuls-Brückenschaltung



Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 0,77$

Effektivwert:  $\frac{U_w}{U_{gl}} \hat{=} 4,2\%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 0,82$

Sperrspannung der Diode:  $U_{Sperr} \geq 2\sqrt{2} \cdot U_{eff}$

## 10.13 Arithmetischer Mittelwert (Ohm'sche Last bei Gleichstrom)

|                                                                           |                                   |           |                                           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------|-------------------------------------------|
| $I_{gl} = \frac{U_{gl}}{R_L}$                                             | $I_{deff} = \frac{U_{deff}}{R_L}$ | $I_{gl}$  | Effektivwert des Gleichstroms             |
|                                                                           |                                   | $U_{gl}$  | arithmetischer Mittelwert, Gleichspannung |
|                                                                           |                                   | $U_{eff}$ | Effektivwert, Gleichspannung              |
| $P = U_{eff} \cdot I_{eff} = I_{eff}^2 \cdot R_L = \frac{U_{eff}^2}{R_L}$ |                                   | $I_{eff}$ | Effektivwert, Gleichstrom                 |

## 10.14 Strombelastbarkeit

|                                      |           |                                                                                           |
|--------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $I_{FAVM} \geq I_{FAV} = I_{im}$     | $I_{FAV}$ | Durchlassstrom, Mittelwert und Richtstrom<br>(average forward current, rectified current) |
| $I_{FRMSM} \geq I_{FRMS} = I_{peff}$ | $I_{FRM}$ | periodischer Spitzendurchlassstrom<br>(repetitive peak forward current)                   |

## 10.15 Sperrspannung

$$U_{RRM} \geq k \cdot U_{im}$$

$$U_{v0} = \frac{U_L}{\ddot{u}}$$

$$U_{v0} = \frac{U_L}{\ddot{u}} V$$

$$U_{di} = 0,9 \cdot U_{v0}$$

$$U_{deff} = U_{v0}$$

$$R_L = \frac{U_{deff}^2}{P_2}$$

$$I_d = \frac{U_{di}}{R_L} \quad I_{pmi} = 0,5 \cdot I_d$$

$$I_{FAVM} \geq I_{FAV}$$

$$I_{peff} = 0,785 \cdot I_d$$

$$I_{FRMSM} \geq I_{peff}$$

$$U_{im} = 1,571 \cdot U_{di}$$

$U_{RRM}$  Periodische Sperrspannung  
(repetitive peak reverse voltage)

$U_{v0}$  Leerlaufspannung

$U_{di}$  Gleichspannung, arithmetischer Mittelwert

$U_{deff}$  Gleichspannung, Effektivwert

$I_d$  Gleichstrom, arithmetischer Mittelwert

$I_{pmi}$  Zweigstrom, arithmetischer Mittelwert

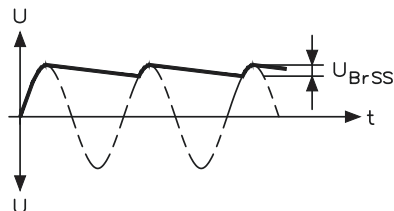
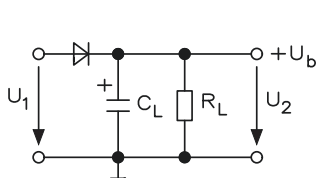
$I_{FAVM}$  Durchlassgrenzstrom, Effektivwert

$I_{peff}$  Zweigstrom, Effektivwert

$I_{FRMSM}$  Spitzendurchlassstrom

$U_{im}$  Scheitelspannung an der Diode

## 10.16 M1U-Gleichrichter mit Ladekondensator



$$C_L = k \cdot \frac{I_L}{U_{Br}}$$

$$C_L \approx \frac{I_L}{U_{BrSS} \cdot f}$$

$k$  Faktor:  $4,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$U_{Br}$  Brummspannung

$C_L$  Ladekondensator

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 0,85$

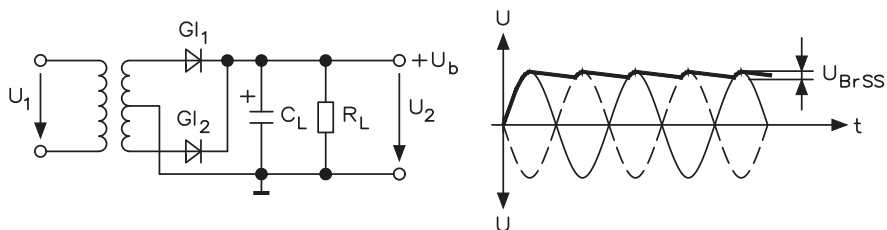
Welligkeit:  $w \approx 5 \%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 2,1$

Zeitkonstante:  $\tau = R_L \cdot C_L = 100 \text{ ms}$

Schaltungskonstante:  $k = 4,8 \text{ s}$

### 10.17 M2U-Gleichrichter mit Ladekondensator



$$C_L = k \cdot \frac{I_L}{U_{Br}}$$

$$C_L \approx \frac{I_L}{U_{BrSS} \cdot f}$$

$k$  Faktor:  $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$U_{Br}$  Brummspannung

$C_L$  Ladekondensator

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 0,79$

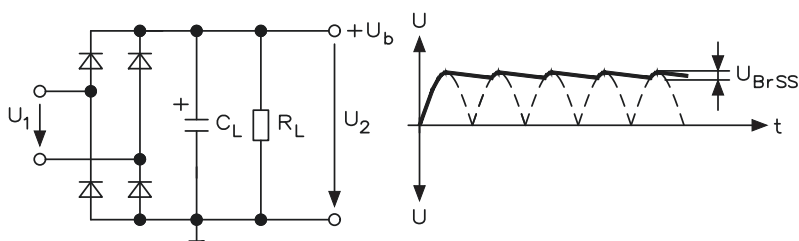
Welligkeit:  $w \approx 5 \%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 1,1$

Zeitkonstante:  $\tau = R_L \cdot C_L = 50 \text{ ms}$

Schaltungskonstante:  $k = 1,8 \text{ s}$

### 10.18 B2U-Gleichrichter mit Ladekondensator



$$C_L = k \cdot \frac{I_L}{U_{Br}}$$

$$C_L \approx \frac{I_L}{U_{BrSS} \cdot f}$$

$k$  Faktor:  $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$U_{Br}$  Brummspannung

$C_L$  Ladekondensator

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichspannung:  $\frac{U_{eff}}{U_{gl}} = 0,79$

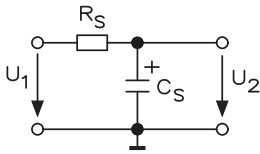
Welligkeit:  $w \approx 5 \%$

Verhältnis zwischen Wechsel- und Gleichstrom:  $\frac{I_{eff}}{I_{gl}} = 1,57$

Zeitkonstante:  $\tau = R_L \cdot C_L = 50 \text{ ms}$

Schaltungskonstante:  $k = 1,8 \text{ s}$

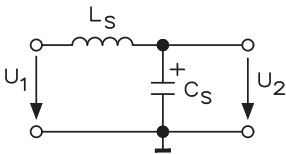
### 10.19 RC-Siebung



$$G = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} \approx \omega_{Br} \cdot R_S \cdot C_S \quad G \text{ Glättungsfaktor}$$

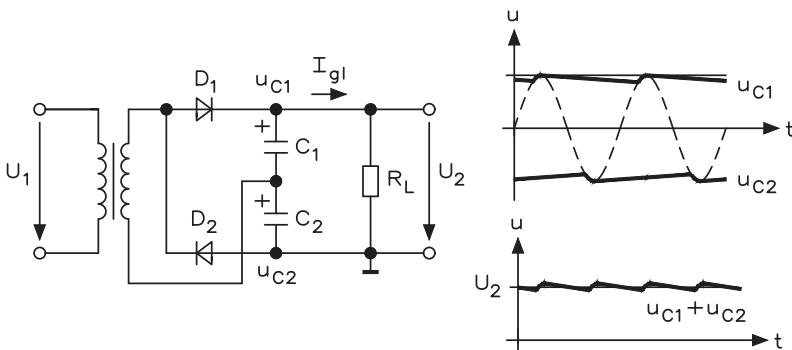
$$s = \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_S}{C_S}$$

### 10.20 LC-Siebung



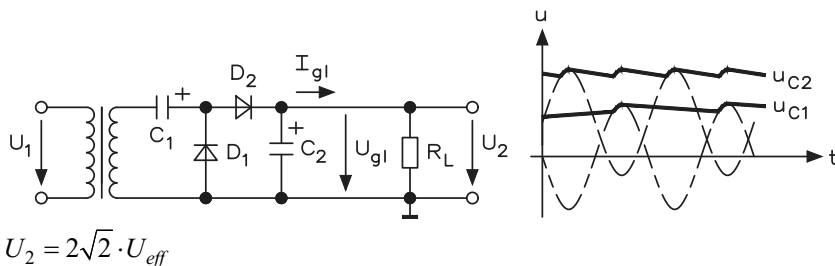
$$G = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} \approx \omega_{Br}^2 \cdot L_S \cdot C_S \quad G \text{ Glättungsfaktor}$$

### 10.21 Spannungsverdopplung nach Delon (Greinacher)

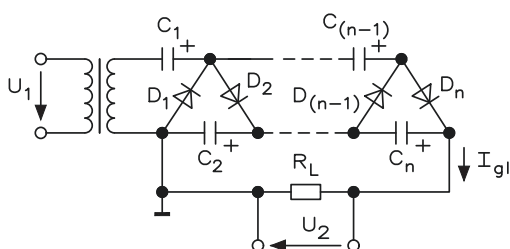


$$U_2 = 2\sqrt{2} \cdot U_{eff}$$

## 10.22 Spannungsverdopplung nach Villard (Kaskadenschaltung)



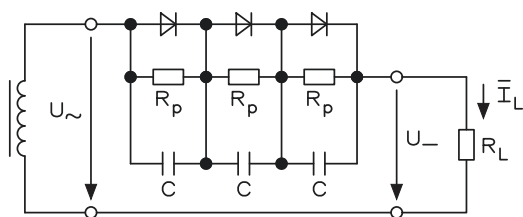
## 10.23 Spannungsvervielfachung nach Villard



$$U_2 = n \cdot \sqrt{2} \cdot U_{eff}$$

$n$  Anzahl der Stufen

## 10.24 Reihen- und Parallelschaltung von Dioden



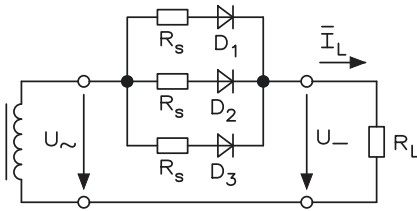
$$n \geq \frac{U_R}{U_{RWM}} \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$R_p \approx \frac{U_{RWM}}{I_{Smax}}$$

$$P_{Rp} \approx \frac{U_{RWM}^2}{7 \cdot I_{Smax}}$$

$$C_p \approx \frac{n \cdot t_{rr}}{R_L}$$

$n$  Anzahl der Dioden  
 $R_p$  Parallelwiderstände  
 $P_{Rp}$  Leistung  
 $C_p$  Parallelkapazität  
 $U_{RWM}$  Scheitelsperrspannung  
 (Crest working reserve voltage)



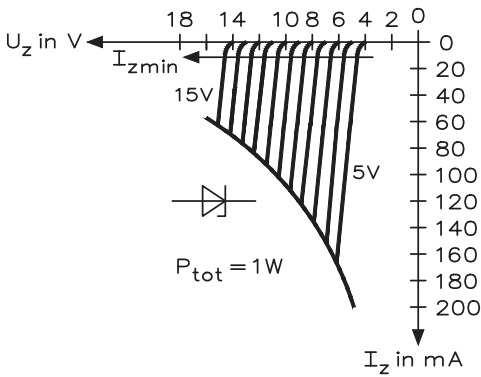
$\beta$  Toleranz der Widerstände  
 $I_{S\max}$  maximaler Sperrstrom  
 $R_s$  Reihenwiderstände  
 $P_{Rs}$  Leistung

$$n \geq \frac{I_L \cdot (1 + \beta)}{I_{FRMS} (1 - \beta)}$$

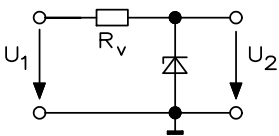
$$R_s \approx \frac{0,5 \cdot U_s}{I_{FAV}}$$

$$P_{Rs} \approx I_{FRMA}^2 \cdot R_p$$

## 10.25 Unbelastete Spannungsstabilisierung



Temperaturkoeffizient  
 der Z-Spannung:  
 TK > 0 bei  $U_Z > 6$  V  
 TK < 0 bei  $U_Z < 5$  V  
 TK  $\approx 0$  bei  $U_Z \approx 5,5$  V



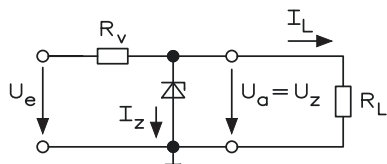
$$P_{\min} = 0,1 \cdot P_{\text{tot}}$$

$$P_{\max} = 0,9 \cdot P_{\text{tot}}$$

$$R_v = \frac{U_1 - U_Z}{I_Z}$$

$P_{\max}$  maximale Verlustleistung  
 $P_{\min}$  minimale Verlustleistung  
 $P_{\text{tot}}$  Gesamtverlustleistung

## 10.26 Belastete Spannungsstabilisierung



$$R_{v\min} = \frac{U_{1\max} - U_Z}{I_{Z\max} + I_{L\min}}$$

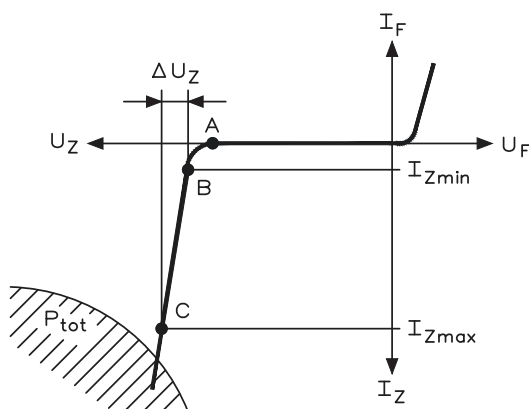
$$R_{v\max} = \frac{U_{1\min} - U_Z}{I_{Z\min} + I_{L\max}}$$

$$R_v = \frac{U_1 - U_Z}{I_Z + I_{L\max}}$$

Belastbarkeit des Vorwiderstandes

$$P_{R_v} = I_{ges}^2 \cdot R_v$$

## 10.27 Differentieller Innenwiderstand der Z-Diode



$$r_z = \frac{\Delta U_Z}{\Delta I_Z}$$

$r_z$  differentieller Innenwiderstand

$$I_{Z\max} = \frac{P_{U\max}}{U_Z}$$

$$I_{Z\min} = 0,1 \cdot I_{Z\max}$$

## 10.28 Glättungsfaktor

$$G = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = \frac{R_v}{r_z} + 1$$

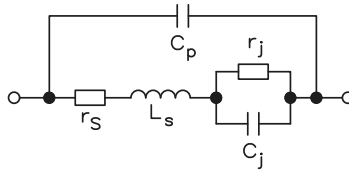
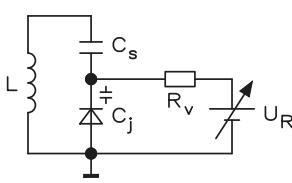
$G$  Glättungsfaktor

### 10.29 Stabilisierungsfaktor

$$S = G \cdot \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta U_2 \cdot U_2}{\Delta U_1 \cdot U_1} = \left( \frac{R_v}{r_{zj} + r_{zth}} + 1 \right) \frac{U_2}{U_1}$$

$S$  Stabilisierungsfaktor

### 10.30 Kapazitätsdioden

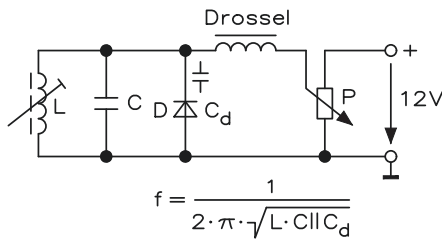


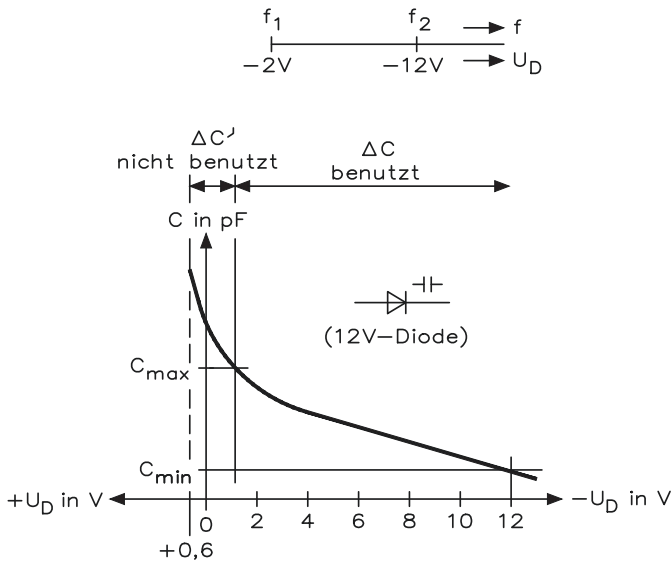
$$C_j = \frac{k}{(U_R + U_S)^n}$$

$$f = \frac{k}{2 \cdot \pi \cdot C_D \cdot \sqrt{r_S \cdot r_j}}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C_D \cdot L_Z}}$$

- $k$  Herstellerkonstante
- $n$  Exponent (Herstellerkonstante)
- $C_D$  Diodenkapazität
- $C_j$  Kapazität der Sperrschicht
- $U_R$  angelegte Sperrspannung
- $U_S$  Diffusionsspannung (0,7 V)
- $C_p$  Parallelkapazität (Gehäusekapazität)
- $r_S$  Widerstand der Anschlüsse (0,5  $\Omega$ ...5  $\Omega$ )
- $r_j$  Widerstand der Sperrschicht (10<sup>6</sup>  $\Omega$ ...10<sup>10</sup>  $\Omega$ )
- $L_Z$  Induktivität der Anschlüsse (1 nH...10 nH)





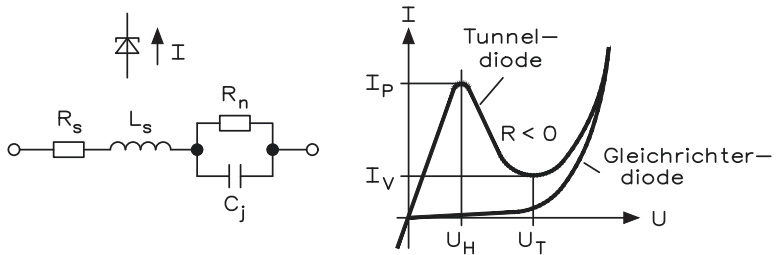
$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

$$C = \frac{K}{(U_R + U_D)^n}$$

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{U_R}{U_D}\right)^{-n}$$

diffundierte Dioden:  $n \approx 0,33$   
hyperabrupte Dioden:  $n \approx 0,75$   
K herstellerbedingte Konstante

### 10.31 Tunneldiode



$$f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{1}{L_s \cdot C_j} - \frac{1}{(|-R_n| \cdot C_j)^2}}$$

$C_j$  Kapazität der Sperrschicht  
 $|-R_n|$  Betrag des negativen Widerstandes  
 $L_s$  Induktivität der Anschlüsse (1 nH...10 nH)  
 $f_m$  Mittenfrequenz

# Bipolare Transistoren

# 11

## 11.1 h-Kenngrößen von Transistoren



$h_{11}$  Eingangswiderstand bei kurzgeschlossenem Ausgang:

$$h_{11} = \frac{U_1}{I_1} \text{ bei } U_2 = 0 \quad h_{11} = \frac{1}{y_{11}}$$

$h_{11}$ ,  $h_{12}$  usw. liest man h-eins-eins, h-eins-zwei usw. Die Bezeichnungen sind aus der Matrizenrechnung übernommen.

$h_{12}$  Spannungsrückwirkung bei offenem Eingang:

$$h_{12} = \frac{U_1}{U_2} \text{ bei } I_1 = 0 \quad h_{12} = -\frac{y_{12}}{y_{11}}$$

$h_{21}$  Stromverstärkung bei kurzgeschlossenem Ausgang:

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \text{ bei } U_2 = 0 \quad h_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}}$$

$h_{22}$  Ausgangsleitwert bei offenem Eingang:  $\det h$  Determinante von  $h$  (für  $\det h$ )

$$h_{22} = \frac{I_2}{U_2} \text{ bei } I_1 = 0 \quad h_{22} = \frac{\det y}{y_{11}} \quad \text{wird auch } \Delta h \text{ verwendet}$$

$$U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2$$

$$\det h = h_{11} \cdot h_{22} - h_{21} \cdot h_{12}$$

$U_1$  Eingangsspannung

$U_2$  Ausgangsspannung

$I_1$  Eingangsstrom

$I_2$  Ausgangsstrom

# 11.2 y-Kenngrößen von Transistoren (Leitwerte)

$y_{11}$  Eingangsleitwert bei kurzgeschlossenem Ausgang:

$$y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \text{ bei } U_2 = 0 \quad y_{11} = \frac{1}{h_{11}}$$

$y_{12}$  Rückwirkungsleitwert bei kurzgeschlossenem Eingang:

$$y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \text{ bei } U_1 = 0 \quad y_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{11}}$$

$y_{21}$  Vorwärtsübertragungsleitwert bei kurzgeschlossenem Ausgang:

$$y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \text{ bei } U_2 = 0 \quad y_{21} = \frac{h_{21}}{h_{11}}$$

$y_{22}$  Ausgangsleitwert bei kurzgeschlossenem Eingang:

$$y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \text{ bei } U_1 = 0 \quad y_{22} = \frac{\det h}{h_{11}} = \frac{h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}}{h_{11}}$$

$$I_1 = y_{11} \cdot U_1 + y_{12} \cdot U_2$$

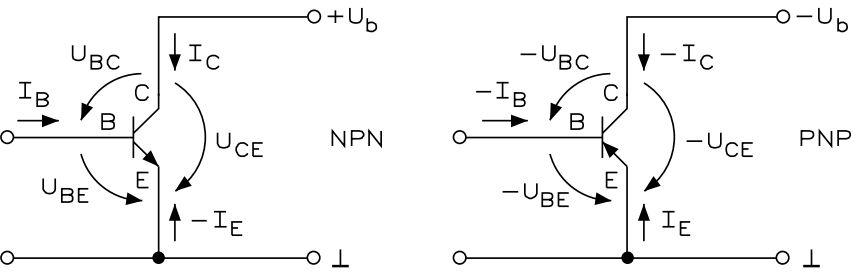
$$I_2 = y_{21} \cdot U_1 + y_{22} \cdot U_2$$

$$\det y = y_{11} \cdot y_{22} - y_{12} \cdot y_{21}$$

# 11.3 Kennzeichnung von Transistorgrößen

| für Index | wird auch gesetzt Index       | zweiter Indexbuchstabe      |
|-----------|-------------------------------|-----------------------------|
| 11        | <i>i</i> (input, Eingang)     | <i>e</i> Emitterschaltung   |
| 12        | <i>r</i> (reverse, rückwärts) | <i>b</i> Basisschaltung     |
| 21        | <i>f</i> (forward, vorwärts)  | <i>c</i> Kollektorschaltung |
| 22        | <i>o</i> (output, Ausgang)    |                             |

# 11.4 Kennwerte und Kennlinien



$$U_{CE} = U_{BC} + U_{BE}$$

$$\text{NPN: } -I_E = I_C + I_B$$

$$\text{PNP: } I_E = (-I_C) + (-I_B)$$

$U_{CE}$  Kollektor-Emitter-Spannung

$U_{BC}$  Basis-Kollektor-Spannung

$U_{BE}$  Basis-Emitter-Spannung

$I_E$  Emitterstrom

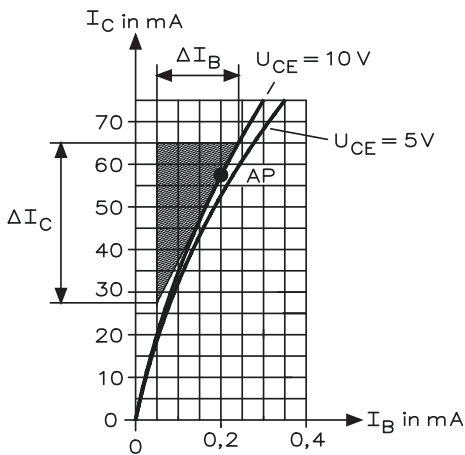
$I_C$  Kollektorstrom

$I_B$  Basisstrom

- Statischer Wert der Gleichstromverstärkung:

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

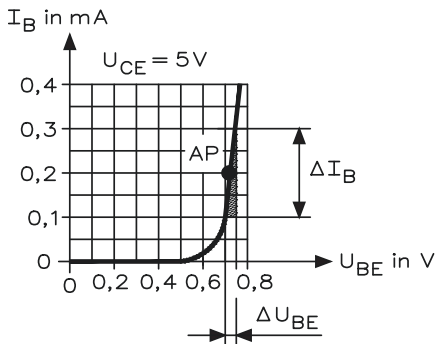
BC238B



- Dynamischer Wert der Wechselstromverstärkung:  $\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$

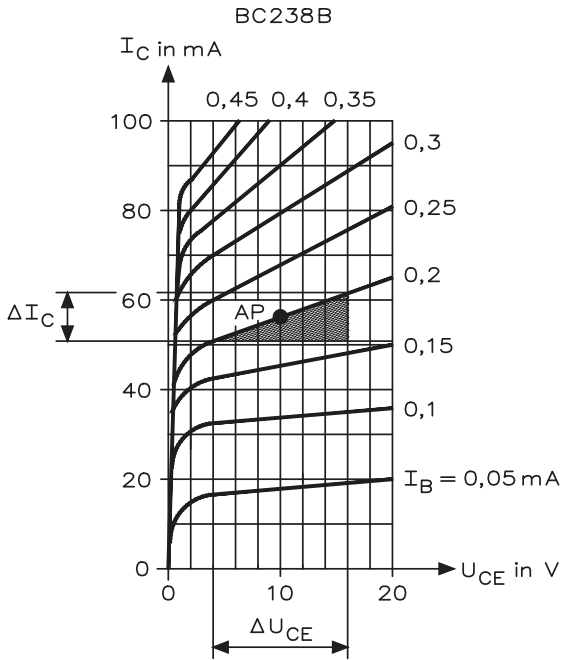
- Statischer Wert vom Gleichstrom-Eingangswiderstand:  $R_{BE} = \frac{U_{BE}}{I_B}$

BC238B



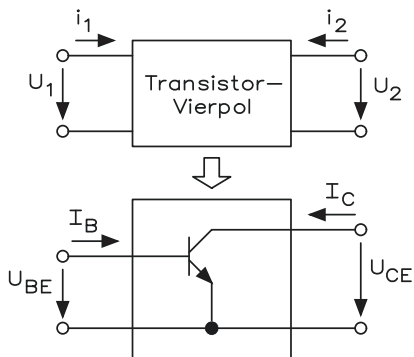
- Dynamischer Wert vom Wechselstrom-Eingangswiderstand:  $r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$

- **Statischer Wert vom Gleichstrom-Ausgangswiderstand:**  $R_{CE} = \frac{U_{CE}}{I_C}$



- **Dynamischer Wert vom Wechselstrom-Ausgangswiderstand:**  $r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C}$

## 11.5 Vierpol-Parameter



*h*-Parameter für die Emitterschaltung:

$$h_{11e} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} \quad \text{bei } U_{CE} = \text{konstant}$$

$$h_{12e} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_{CE}} \quad \text{bei } I_B = \text{konstant}$$

$$h_{21e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \quad \text{bei } U_{CE} = \text{konstant}$$

$$h_{22e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}} \quad \text{bei } I_B = \text{konstant}$$

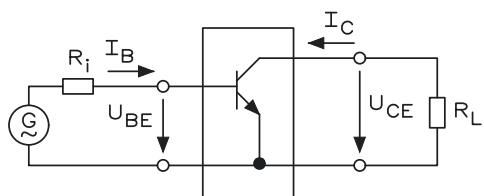
Für die Praxis:  $h_{11e} \approx r_{ee}$

$$h_{21e} \approx \beta$$

$$h_{22e} \approx \frac{1}{r_{ae}}$$

|           |                                |
|-----------|--------------------------------|
| $h_{11e}$ | Kurzschluss-Eingangswiderstand |
| $h_{12e}$ | Leerlauf-Spannungsrückwirkung  |
| $h_{21e}$ | Kurzschluss-Stromverstärkung   |
| $h_{22e}$ | Leerlauf-Ausgangsleitwert      |
| $r_{ee}$  | Wechselstromeingangswiderstand |
| $\beta$   | Wechselstromverstärkung        |
| $r_{ae}$  | Wechselstromausgangswiderstand |

## 11.6 Beschalteter Vierpol (Emitterschaltung)

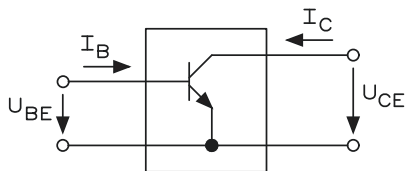


|                 |                         |
|-----------------|-------------------------|
| $\Delta I_1$    | Eingangswechselstrom    |
| $\Delta I_2$    | Ausgangswechselstrom    |
| $\Delta U_{BE}$ | Eingangswechselspannung |
| $\Delta U_{CE}$ | Ausgangswechselspannung |
| $R_i$           | Innenwiderstand         |
| $R_L$           | Lastwiderstand          |
| $Z_1$           | Eingangswiderstand      |
| $Z_2$           | Ausgangswiderstand      |

| Größe                                    | H-Parameter                                                        | Y-Parameter                                                      |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Formel                                   |                                                                    |                                                                  |
| Eingangswiderstand                       |                                                                    |                                                                  |
| $Z_1 = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$ | $Z_1 = \frac{h_{11e} + \det h_e \cdot R_L}{1 + h_{22e} \cdot R_L}$ | $Z_1 = \frac{1 + y_{22e} \cdot R_L}{y_{11e} + \det y \cdot R_L}$ |
| Ausgangswiderstand                       |                                                                    |                                                                  |
| $Z_2 = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C}$ | $Z_2 = \frac{h_{11e} + R_i}{\det h_e + h_{23e} \cdot R_L}$         | $Z_2 = \frac{1 + y_{11e} \cdot R_i}{y_{22e} + \det y \cdot R_i}$ |
| Stromverstärkung                         |                                                                    |                                                                  |
| $v_i = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$    | $v_i = \frac{h_{21e}}{1 + h_{22e} \cdot R_L}$                      | $v_i = \frac{y_{21e}}{y_{11e} + \det y_e \cdot R_L}$             |

| Größe                                       | H-Parameter                                                                                 | Y-Parameter                                                                                 |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Formel                                      |                                                                                             |                                                                                             |
| Spannungsverstärkung                        |                                                                                             |                                                                                             |
| $v_u = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta U_{BE}}$ | $v_u = \frac{-h_{21e} \cdot R_L}{h_{11e} + \det h_e \cdot R_L}$                             | $v_u = \frac{-y_{21e} \cdot R_L}{1 + y_{22e} \cdot R_L}$                                    |
| Leistungsverstärkung                        |                                                                                             |                                                                                             |
| $v_p = v_u \cdot v_i$                       | $v_p = -\frac{(h_{21})^2 \cdot R_L}{(1 + h_{22e} \cdot R_L)(h_{11e} + \det h_e \cdot R_L)}$ | $v_p = \frac{(y_{21e})^2 \cdot R_L}{(1 + y_{22e} \cdot R_L)(y_{11e} + \det y_e \cdot R_L)}$ |
| Eingangsanpassung                           |                                                                                             |                                                                                             |
| $Z_1 = R_i$                                 | $Z_1 = R_i = \sqrt{\frac{h_{11e} \cdot \det h_e}{h_{23e}}}$                                 | $Z_1 = R_i = \sqrt{\frac{y_{22e}}{y_{11e} \cdot \det y_e}}$                                 |
| Ausgangsanpassung                           |                                                                                             |                                                                                             |
| $Z_2 = R_L$                                 | $Z_2 = R_L = \sqrt{\frac{h_{11e}}{h_{22e} \cdot \det h_e}}$                                 | $Z_2 = R_L = \sqrt{\frac{y_{11e}}{y_{22e} \cdot \det y_e}}$                                 |
| Determinante                                |                                                                                             |                                                                                             |
|                                             | $\det h_e = h_{11e} \cdot h_{22e} - h_{12e} \cdot h_{21e}$                                  | $\det y_e = y_{11e} \cdot y_{22e} - y_{12e} \cdot y_{21e}$                                  |

## 11.7 y-Parameter für die Emitterschaltung



|                                              |                                |                                        |
|----------------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------|
| $y_{11e} = \frac{\Delta I_B}{\Delta U_{BE}}$ | bei $U_{CE} = \text{konstant}$ | $y_{11e}$ Kurzschluss-Eingangsleitwert |
| $y_{12e} = \frac{\Delta I_B}{\Delta U_{CE}}$ | bei $U_{BE} = \text{konstant}$ | $y_{12e}$ Rückwärtssteilheit           |
| $y_{21e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}}$ | bei $U_{CE} = \text{konstant}$ | $y_{21e}$ Vorwärtssteilheit            |
| $y_{22e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}}$ | bei $U_{BE} = \text{konstant}$ | $y_{22e}$ Kurzschluss-Ausgangsleitwert |

## 11.8 h- und y-Parameter

Index  $b \triangleq$  Basisschaltung, Index  $e \triangleq$  Emitterschaltung, Index  $c \triangleq$  Kollektorschaltung

### ■ Umrechnung der h-Kennwerte aus Grundsaltungen:

|                                                          |                                                          |                                                 |                                                           |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $h_{11e} \approx \frac{h_{11b}}{1 + h_{21b}}$            | $h_{11b} \approx \frac{h_{11e}}{1 + h_{21e}}$            | $h_{11c} \approx h_{11e}$                       | $h_{11c} \approx \frac{h_{11b}}{1 + h_{21b}}$             |
| $h_{12e} \approx \frac{\det h_b - h_{12b}}{1 + h_{21b}}$ | $h_{12b} \approx \frac{\det h_e - h_{12e}}{1 + h_{21e}}$ | $h_{12c} \approx 1$                             | $h_{12c} \approx 1$                                       |
| $h_{21e} \approx -\frac{h_{21b}}{1 + h_{21b}}$           | $h_{21b} \approx -\frac{h_{21e}}{1 + h_{21e}}$           | $h_{21c} \approx -(1 + h_{21e})$                | $h_{21c} \approx -\frac{1}{1 + h_{21b}}$                  |
| $h_{22e} \approx \frac{h_{22b}}{1 + h_{21b}}$            | $h_{22b} \approx \frac{h_{22e}}{1 + h_{21e}}$            | $h_{22c} \approx h_{22e}$                       | $h_{22c} \approx \frac{h_{22b}}{1 + h_{21b}}$             |
| $\det h_e \approx \frac{\det h_b}{1 + h_{21b}}$          | $\det h_e \approx \frac{\det h_e}{1 + h_{21e}}$          | $\det h_c \approx 1 + h_{21e} \approx -h_{21c}$ | $\det h_c \approx \frac{1}{1 + h_{21b}} \approx -h_{21c}$ |

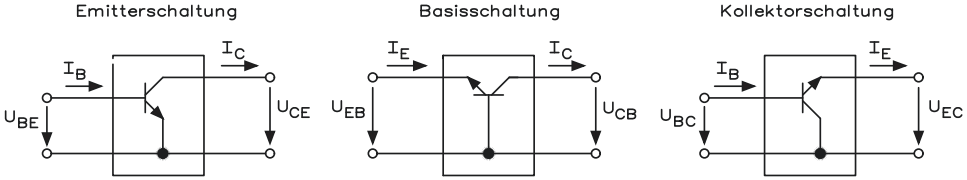
### ■ Basisschaltung:

$$\begin{aligned}
 h_{11b} &\approx \frac{h_{11e}}{1 + h_{21e}} \\
 h_{12b} &\approx \frac{\det h_e - h_{12e}}{1 + h_{21e}} \\
 h_{21b} &\approx -\frac{h_{21e}}{1 + h_{21e}} \\
 h_{22b} &\approx \frac{h_{22e}}{1 + h_{21e}}
 \end{aligned}$$

### ■ Kollektorschaltung

$$\begin{aligned}
 h_{11c} &= h_{11e} \\
 h_{12c} &= 1 \\
 h_{21c} &= -(1 + h_{21e}) \\
 h_{22c} &= h_{22e}
 \end{aligned}$$

# 11.9 Umrechnung der y-Kennwerte aus den Grundschaltungen



## ■ Emitterschaltung:

$$y_{11e} = y_{11b} + y_{12b} + y_{21b} + y_{22b}$$

$$y_{12e} = -(y_{12b} + y_{22b})$$

$$y_{21e} = y_{21b}$$

$$y_{22e} = y_{22b}$$

$$\det y_e = y_{11b} \cdot y_{22b} - y_{12b} \cdot y_{21b}$$

## ■ Basisschaltung:

$$y_{11b} = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e}$$

$$y_{12b} = -(y_{12e} + y_{22e})$$

$$y_{22b} = y_{21b}$$

$$y_{22b} = y_{22e}$$

$$\det y_b = y_{11e} \cdot y_{22e} - y_{12e} \cdot y_{21e}$$

## ■ Kollektorschaltung:

$$y_{11c} = y_{11e}$$

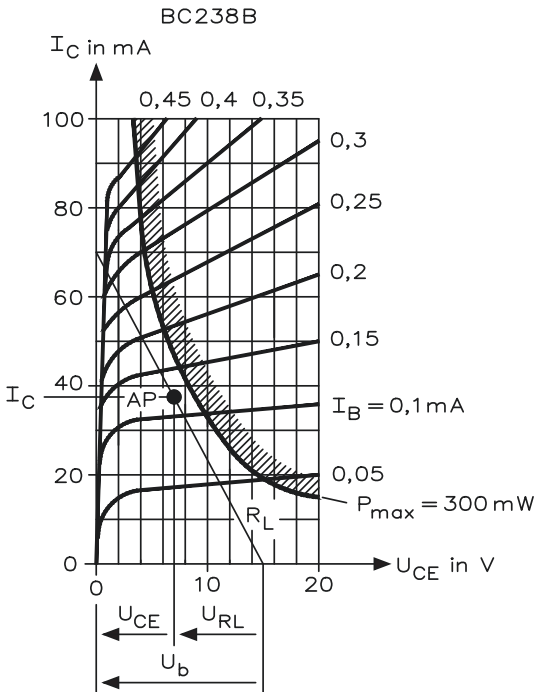
$$y_{12c} = -(y_{11e} + y_{12e})$$

$$y_{21c} = -(y_{11e} + y_{21e})$$

$$y_{22c} = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e}$$

$$\det y_c = y_{11e} \cdot y_{22e} - y_{12e} \cdot y_{21e}$$

# 11.10 Verlustleistung



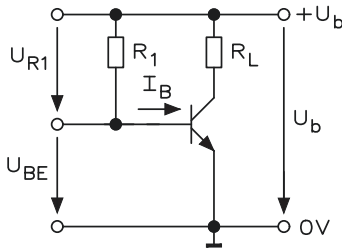
$$P_{\max} \approx P_{CE} = U_{CE} \cdot I_C$$

$$P_{\max} \approx 0,9 \cdot P_{\text{tot}}$$

$P_{\max}$  maximale Verlustleistung

$P_{\text{tot}}$  Gesamtverlustleistung

## 11.11 Arbeitspunkteinstellung

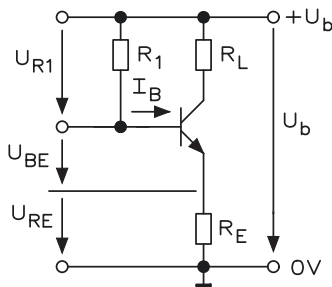


$$R_1 = \frac{U_{R1}}{I_B}$$

$$U_{R1} = U_b - U_{BE}$$

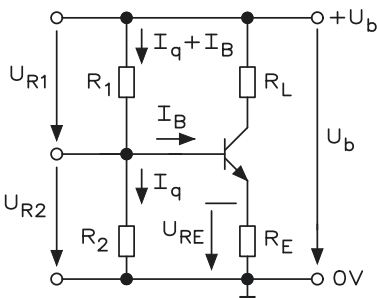
$U_{BE}$  Basis-Emitter-Spannung

$U_b$  Betriebsspannung



$$R_1 = \frac{U_{R1}}{I_B}$$

$$U_{R1} = U_b - U_{BE} - U_{RE}$$



$$I_q = (2 \dots 10) \cdot I_B$$

$$R_1 = \frac{U_{R1}}{I_q + I_B}$$

$$U_{R1} = U_b - U_{BE} - U_{RE}$$

$$R_2 = \frac{U_{R2}}{I_q}$$

$$U_{R2} = U_{BE} + U_{RE}$$

$I_B$  Basisstrom

$I_q$  Querstrom

Bestimmung von  $R_L$ :

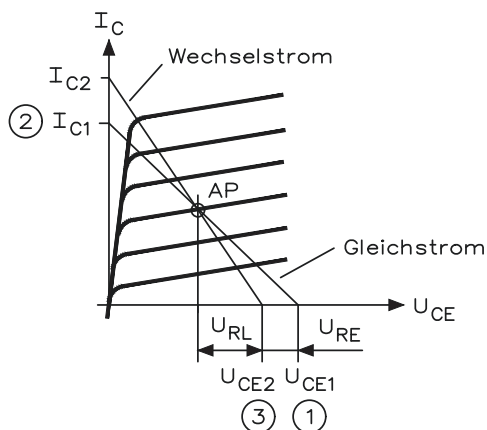
$$R_L = \frac{U_{RL}}{I_C}$$

$$U_{RL} = U_b - U_{CE} - U_{RE}$$

Bestimmung von  $R_E$ :

$$R_E \approx \frac{U_{RE}}{I_C} \quad \text{in der Praxis: } R_E \approx 0,1 \cdot R_L$$

## 11.12 Arbeitsgerade für Gleich- und Wechselstrom



Für Gleichstrom:

Punkt 1:  $U_{CE1} = U_b$ , da  $I_C = 0$

Punkt 2:  $I_{C1} = \frac{U_b}{R_L + R_E}$ , da  $U_{CE} = 0$

ohne  $R_E$ :  $I_{C1} = \frac{U_b}{R_L}$

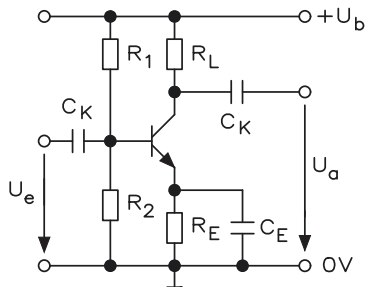
Für Wechselstrom bei Ohm'scher Belastung:

Punkt 3:  $U_b - U_{RE} = U_{CE2}$

Verbindung mit AP ergibt die Wechselstromarbeitsgerade

$$I_{C2} = \frac{U_{CE2}}{R_L} \quad \text{oder} \quad I_C = \frac{U_{RL}}{R_L}$$

## 11.13 Kleinsignalverstärkung (Emitterschaltung)



$$v_i = \beta \cdot \frac{R_C}{R_C + R_L}$$

$$v_u = v_i \cdot \frac{R_L}{r_{ee}}$$

$$v_u = \frac{\beta}{r_e} \cdot \frac{R_C \cdot R_L}{R_C + R_L}$$

$$v_p = v_u \cdot v_i$$

$v_i$  Stromverstärkung

$r_e$  Eingangswiderstand

$\beta = h_{21e}$  Kurzschluss-Stromverstärkung

$R_C = \frac{1}{h_{22}}$  Leerlauf-Ausgangswiderstand

$R_L$  Lastwiderstand

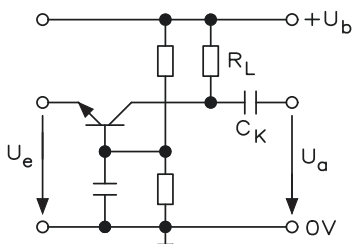
$r_{ee} = h_{11}$  Kurzschluss-Eingangswiderstand

$v_u$  Spannungsverstärkung

$v_i$  Stromverstärkung

$v_p$  Leistungsverstärkung

### 11.14 Kleinsignalverstärkung (Basisschaltung)



$$r_{eB} \approx \frac{r_{ee}}{\beta}$$

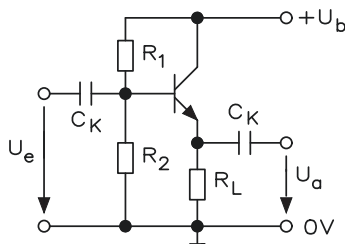
$$\alpha = \frac{\beta}{1 + \beta} \approx 1 \approx v_{iB}$$

$$v_{uB} \approx \frac{R_L}{r_{eB}}$$

$$v_{pB} \approx \frac{R_L}{r_{eB}}$$

$r_{eB}$  Eingangswiderstand in Basisschaltung  
 $r_{ee} = h_{11e}$  Kurzschluss-Eingangswiderstand  
 $\alpha$  Stromverstärkung  
 $v_{uB}$  Spannungsverstärkung (Basisschaltung)  
 $v_{pB}$  Leistungsverstärkung (Basisschaltung)

### 11.15 Kleinsignalverstärkung (Kollektorschaltung)



$$r_{ek} \approx \beta \cdot R_L$$

$$\frac{1}{r_{ein}} = \frac{1}{r_{ek}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$r_{ak} \approx \frac{R_i + r_{ee}}{\beta}$$

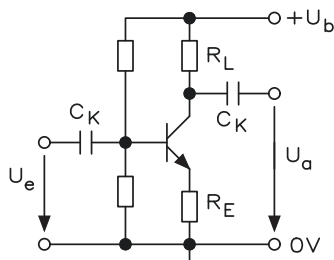
$$\gamma = \beta + 1 \approx v_{ik}$$

$$v_{uk} \approx 1$$

$$v_{pk} \approx \gamma$$

$r_{ek}$  Eingangswiderstand in Kollektorschaltung  
 $r_{ak}$  Ausgangswiderstand  
 $r_{ein}$  Gesamteingangswiderstand  
 $\gamma$  Stromverstärkungsfaktor  
 $v_{uk}$  Spannungsverstärkung  
 $v_{pk}$  Leistungsverstärkung  
 $v_{ik}$  Stromverstärkung  
 $R_i$  Innenwiderstand der Signalquelle

### 11.16 Stromgegenkopplung



$$\alpha = \frac{U_{gk}}{U_{a\sim}} = \frac{U_{RE\sim}}{U_{a\sim}}$$

$$v'_u = \frac{v_u}{1 + \alpha \cdot v_u}$$

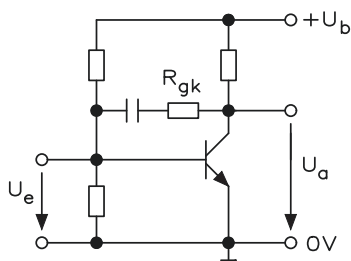
$$k' = \frac{k}{1 + \alpha \cdot v_u}$$

Für die Praxis:

$$v_u \approx \frac{R_L}{R_E}$$

$\alpha$  Teil der rückgekoppelten Spannung  
 $U_{gk}$  rückgekoppelte Spannung  
 $U_{a\sim}$  Ausgangswechselspannung  
 $U_{RE\sim}$  Emitterwechselspannung  
 $v_u$  Spannungsverstärkung  
 $v'_u$  Spannungsverstärkung bei Gegenkopplung  
 $k$  Klirrfaktor  
 $k'$  Klirrfaktor bei Gegenkopplung

### 11.17 Spannungsgegenkopplung



$$\alpha = \frac{U_{gk}}{U_{a\sim}}$$

$$v'_u = \frac{v_u}{1 + \alpha \cdot v_u}$$

$$k' = \frac{k}{1 + \alpha \cdot v_u}$$

$\alpha$  Teil der rückgekoppelten Spannung

$U_{gk}$  rückgekoppelte Spannung

$U_{a\sim}$  Ausgangswechselspannung

$v_u$  Spannungsverstärkung

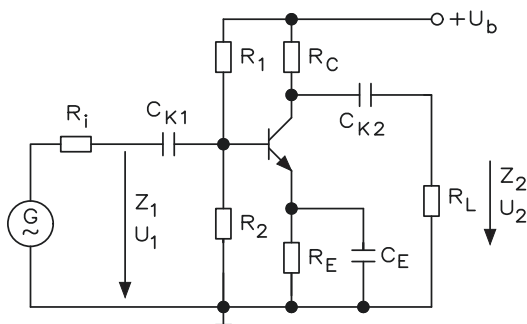
$v'_u$  Spannungsverstärkung bei Gegenkopplung

$k$  Klirrfaktor

$k'$  Klirrfaktor bei Gegenkopplung

$R_{gk}$  Widerstand für Gegenkopplung

### 11.18 Kopplungskondensatoren



$$f_u \approx \sqrt{n} \cdot f_g$$

$$X_{CK1} = R_i + Z_1$$

$$X_{CK2} = R_L + Z_2$$

$$X_{CE} \approx \frac{r_{BE} + R_i}{\beta}$$

$f_u$  untere Grenzfrequenz der Verstärkerschaltung

$n$  Anzahl der Hochpässe

$f_g$  Grenzfrequenz des einzelnen Hochpasses

$X_{CK1}$  Blindwiderstand des Eingangskondensators

$X_{CK2}$  Blindwiderstand des Ausgangskondensators

$R_i$  Innenwiderstand der Signalquelle

$Z_1$  Wechselstrom-Eingangswiderstand

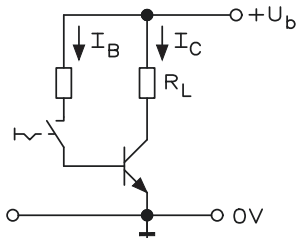
$Z_2$  Wechselstrom-Ausgangswiderstand

$r_{BE} \approx h_{11e}$  Eingangswiderstand (Emitterschaltung)

$X_{CE}$  Blindwiderstand des Emittorkondensators

$\beta$  Kurzschluss-Stromverstärkungsfaktor

## 11.19 Transistor als Schalter



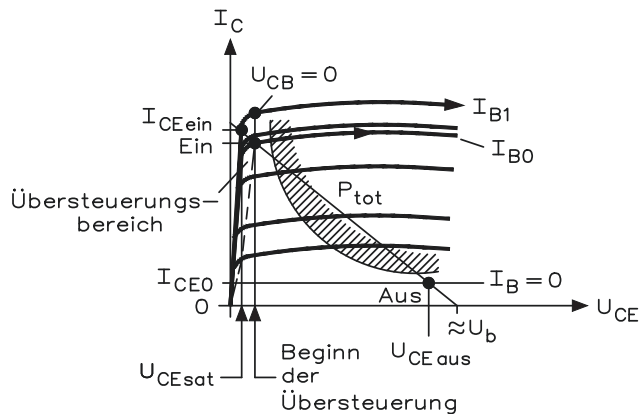
Schaltzustand „Ein“:

$$R_1 \approx \frac{B_{\min} \cdot R_L}{\ddot{u}}$$

$$I_{CEin} \approx \frac{U_b}{R_L}$$

$R_1$  Basiswiderstand

$\ddot{u}$  Übersteuerungsfaktor (2...10)



$$\ddot{u} = \frac{I_{B1}}{I_{B0}} = \frac{B_{\min} \cdot I_{B1}}{I_{CEin}}$$

$$P_V = U_{CEsat} \cdot I_{CEin}$$

$$P_S \approx U_b \cdot I_{CEin}$$

Schaltzustand „Aus“ ( $I_B = 0$ )

$$P_V = U_{CE0} \cdot I_{CE0}$$

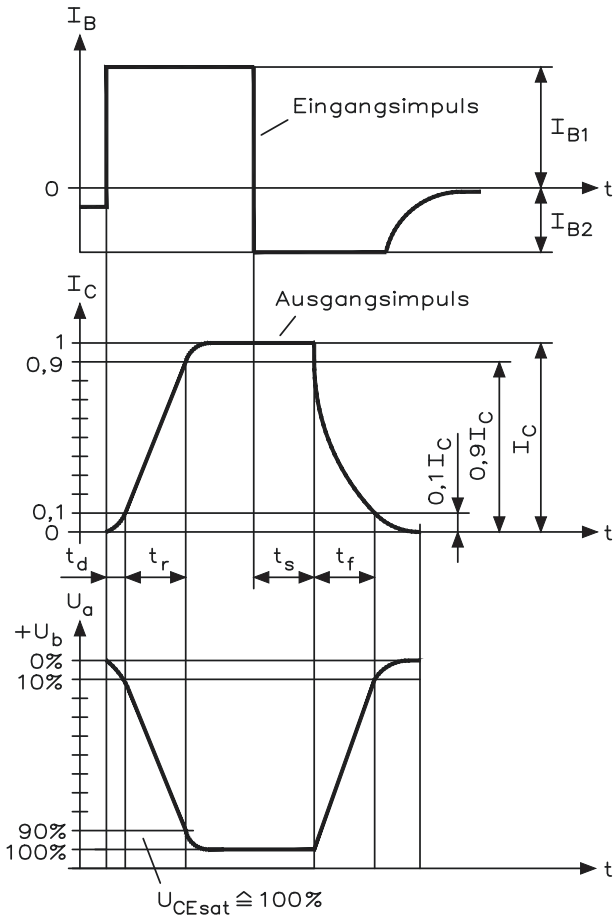
$$R_1 = \frac{U_{CE0}}{I_{CE0}}$$

$U_{CEsat}$  Sättigungsspannung

$B_{\min}$  minimale Gleichstromverstärkung

$P_S$  Schaltleistung des Transistors

$P_V$  Durchgangsleistung des Transistors



Einschaltzeit  $t_{ein} = t_d + t_r$

Ausschaltzeit  $t_{aus} = t_s + t_f$

$t_{ein}$  Einschaltzeit (turn-on-time;  $t_{on}$ )

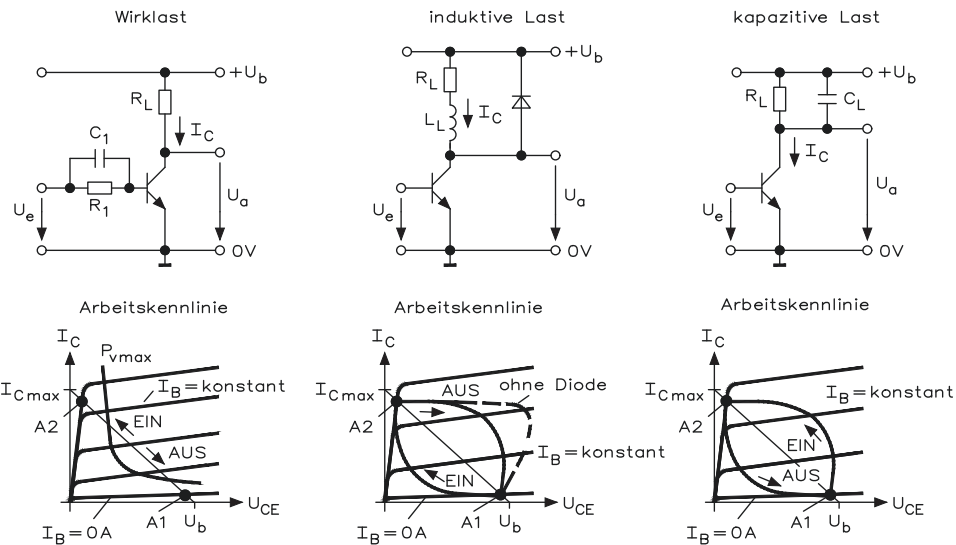
$t_{aus}$  Ausschaltzeit (turn-off-time;  $t_{off}$ )

$t_d$  Verzögerungszeit (delay-time)

$t_r$  Anstiegszeit (rise-time)

$t_s$  Abfallzeit (storage-time)

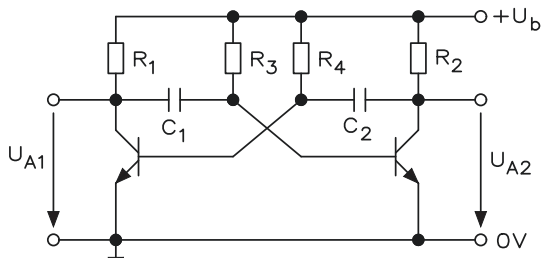
$t_f$  Abfallzeit (fall-time)



$$a = \frac{B' \cdot I_{B2}}{I_C}$$

$a$  Ausräumfaktor

## 11.20 Astabile Kippschaltung (Rechteckgenerator)



$$R_C \geq \frac{U_b - U_{CEsat}}{I_{Cmax}}$$

$$R_C \approx \frac{U_b}{I_C}$$

$$R_B \approx 0,8 \cdot B \cdot R_C$$

$$C_1 = \frac{t_1}{0,7 \cdot R_{B1}}$$

$$C_2 = \frac{t_2}{0,7 \cdot R_{B2}}$$

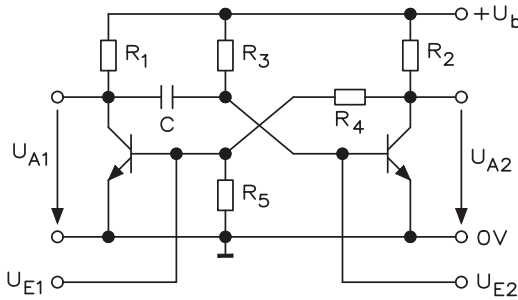
$$t_1 \approx 0,7 \cdot R_4 \cdot C_2$$

$$t_2 \approx 0,7 \cdot R_3 \cdot C_1$$

$$f = \frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{T}$$

|             |                             |
|-------------|-----------------------------|
| $R_C$       | Kollektorwiderstand         |
| $U_{CEsat}$ | Kollektorsättigungsspannung |
| $I_{Cmax}$  | maximaler Kollektorstrom    |
| $R_B$       | Basiswiderstand             |
| $B_{min}$   | minimale Stromverstärkung   |
| $B$         | Stromverstärkung            |
| $T$         | Periodendauer               |
| $f$         | Ausgangsfrequenz            |

### 11.21 Monostabile Kippschaltung



$$R_C \approx \frac{U_b}{I_C}$$

$$R_{B2} \leq B_{\min} \cdot R_{C2}$$

$$R_{B2} \approx 0,8 \cdot B \cdot R_{C2}$$

$$R_{B1} \approx 0,6 \cdot B \cdot R_{C1}$$

$$C = \frac{t_2}{0,7 \cdot r_{B2}}$$

$$t_m \approx 0,7 \cdot R_3 \cdot C$$

$R_C$  Kollektorwiderstand

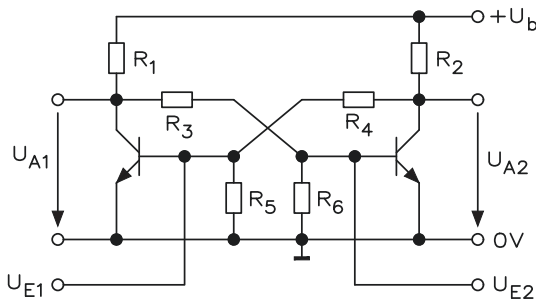
$R_B$  Basiswiderstand

$C$  Verzögerungskondensator

$t_m$  monostabile Zeit

$B$  Stromverstärkung

### 11.22 Bistabile Kippschaltung (Flipflop)



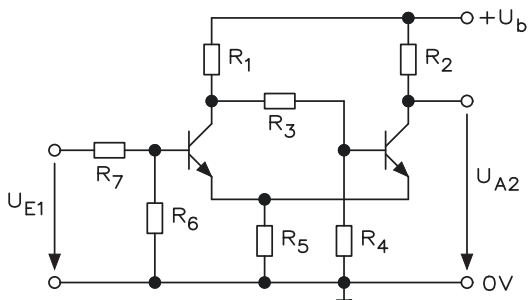
$$R_{C1} \geq R_{C2} = \frac{U_b}{I_{C\max}}$$

$$R_{B1} \leq 0,2 \dots 0,8 \cdot B \cdot R_2$$

$$R_{B2} \leq 0,2 \dots 0,8 \cdot B \cdot R_1$$

$$R_1 = R_2$$

### 11.23 Schmitt-Trigger (Schwellwertschaltung)



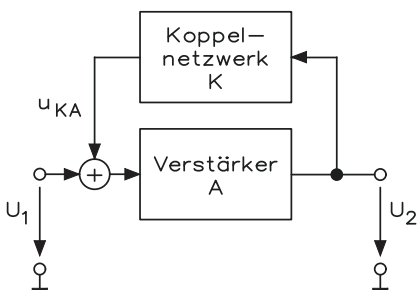
$$U_{\text{ein}} = \frac{R_5}{R_5 + R_2} \cdot U_b + 0,7 \text{ V}$$

$$U_{\text{aus}} = \frac{R_5}{R_5 + R_1} \cdot U_b + 0,7 \text{ V}$$

$$\Delta U = U_{\text{ein}} - U_{\text{aus}}$$

### 11.24 Gegen- und Mitkopplung

#### ■ Gegenkopplung (negative Rückkopplung):



$$u_{KA} = u_1 + K \cdot u_2$$

$$K = \frac{u_{KA}}{u_2} < 1$$

$$v'_u \approx \frac{v_u}{K \cdot u_u} = \frac{1}{K}$$

$K \cdot v_u > 1$ : Selbsterregung

$K \cdot v_u = 1$ : ideale Schwingungsbedingung

$K \cdot v_u < 1$ : Schwingung wird bedämpft

$K$  Koppelfaktor (Koppelfaktor des Netzwerkes)

$u_1$  Eingangssignal der Schaltung

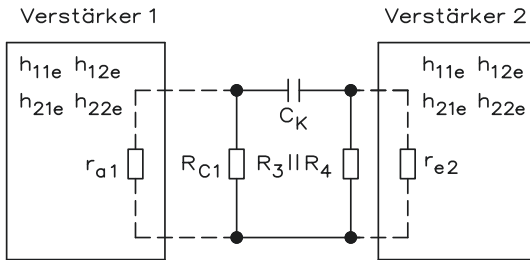
$u_{KA}$  Ausgangssignal des Koppelnetzwerkes

$u_2$  Eingangsspannung des Koppelnetzwerkes und Ausgangsspannung

$v_u$  Spannungsverstärkung ohne Gegenkopplung

$v'_u$  Spannungsverstärkungsfaktor mit Gegenkopplung

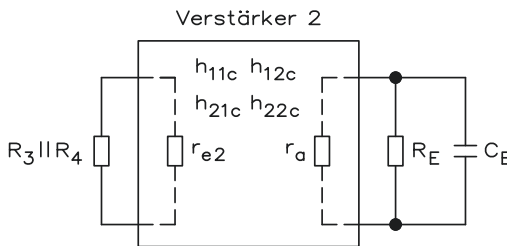
### ■ Dimensionierung des Koppelkondensators $C_K$ :



$f_u$  untere Grenzfrequenz

$$C_K = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_u (r_{a1} \parallel R_{C1} + R_3 \parallel R_4 \parallel r_{e2})}$$

### ■ Dimensionierung des Emitterkondensators $C_E$ :



$$C_E \geq \frac{10}{2 \cdot \pi \cdot f_u (r_a \parallel R_E)}$$

### ■ Mitkopplung (positive Rückkopplung):

$$v_u' = \frac{v_u}{1 + K \cdot v_u}$$

$K$  Koppelfaktor

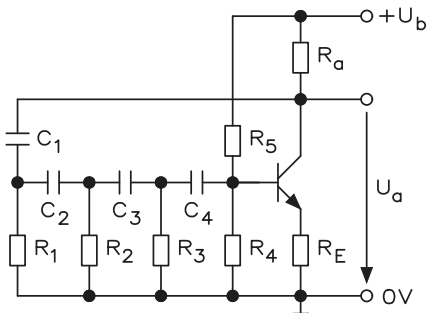
$k'$  Klirrfaktor mit Gegenkopplung

$k$  Klirrfaktor ohne Gegenkopplung

$$k' = \frac{k}{1 + K \cdot v_u}$$

## 11.25 RC-Phasenschieber-Generator

### ■ RC-Hochpass-Phasenschieber-Generator:



– bei vier RC-Gliedern:  $f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$ ,

wenn  $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$  und

$C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4$

– bei drei RC-Gliedern:  $f = \frac{1}{15,4 \cdot R \cdot C}$ ,

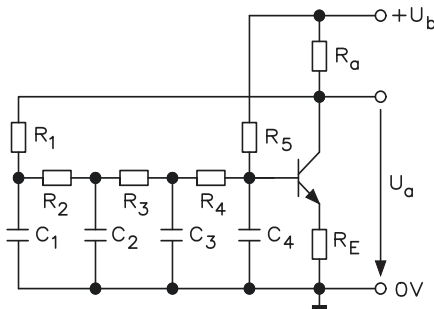
wenn  $R = R_1 = R_2 = R_3$  und  $C = C_1 = C_2 = C_3$

Erforderliche Verstärkung:

$v_U > 18,5$  (vier RC-Glieder)

$v_U > 29$  (drei RC-Glieder)

### ■ RC-Tiefpass-Phasenschieber-Generator:



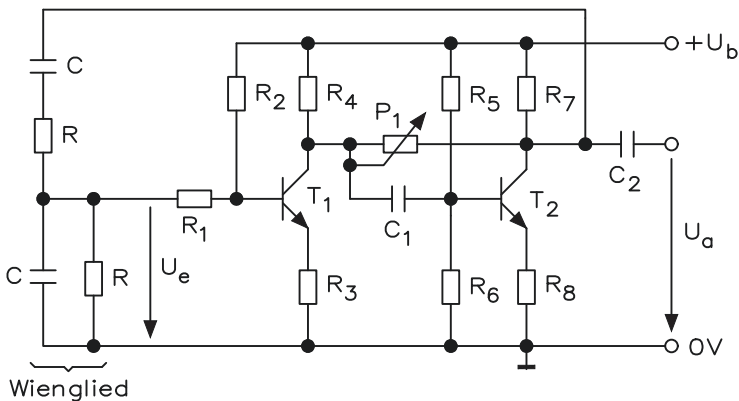
- bei vier RC-Gliedern:  $f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$ , wenn  $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$  und  $C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4$
- bei drei RC-Gliedern:  $f = \frac{1}{2,5 \cdot R \cdot C}$ , wenn  $R = R_1 = R_2 = R_3$  und  $C = C_1 = C_2 = C_3$

Erforderliche Verstärkung:

$v_U > 18,5$  (vier RC-Glieder)

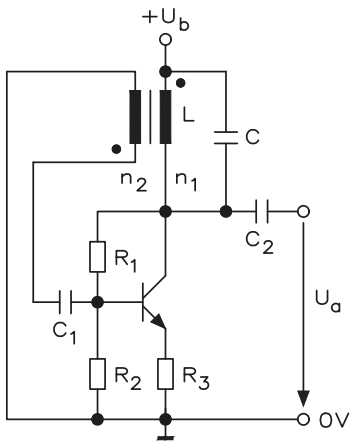
$v_U > 29$  (drei RC-Glieder)

## 11.26 RC-Wienbrücken-Generator



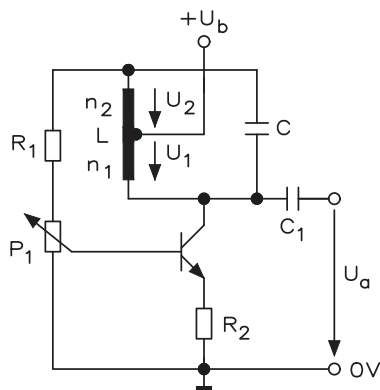
$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}, \text{ wenn } R = R_1 = R_2 \text{ und } C = C_1 = C_2$$

11.27 Meißner-Schaltung



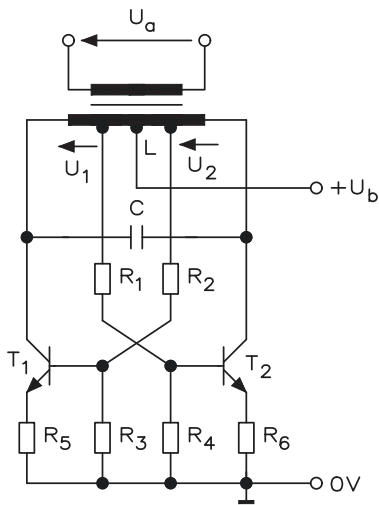
$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

11.28 Hartley-Schaltung



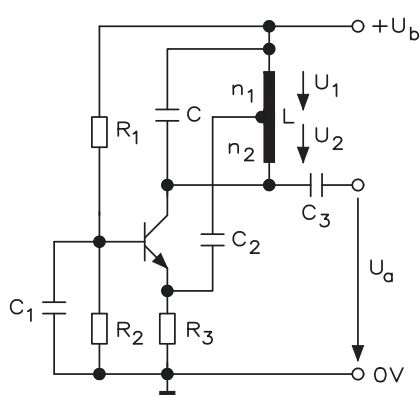
$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

11.29 Gegentakt-Hartley-Schaltung



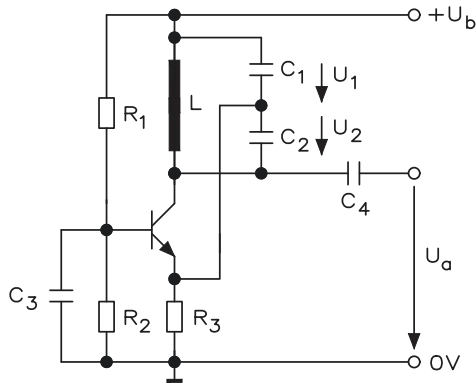
$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

11.30 Colpits-Schaltung I



$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

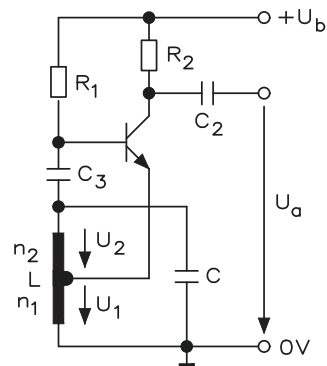
### 11.31 Colpits-Schaltung II



$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

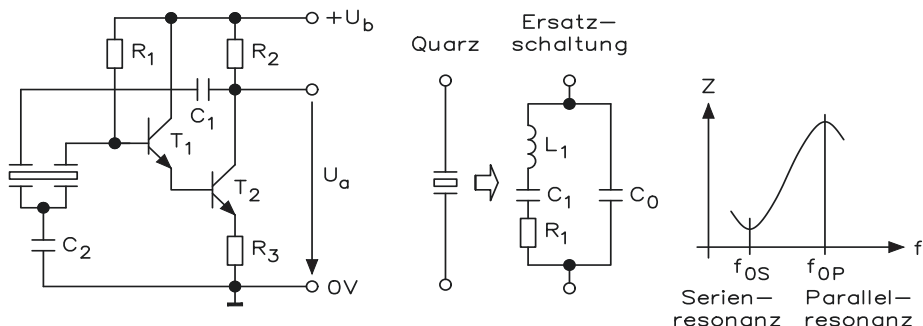
$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

### 11.32 ECO-Schaltung



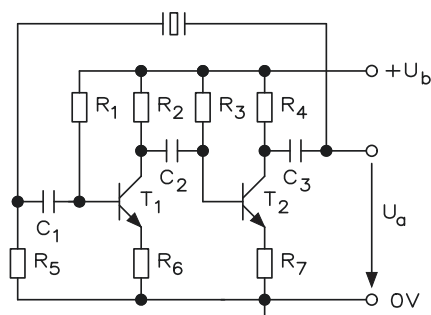
$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

### 11.33 Quarzschaltung für niedrige Frequenzen



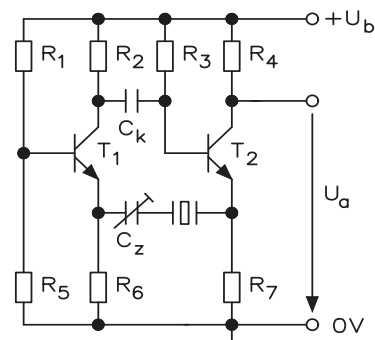
$$f_{0S} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C_1 \cdot L_1}} \quad f_{0P} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{C_1 + C_0}{C_0 \cdot C_1 \cdot L_1}}$$

### 11.34 Quarzschaltung für hohe Frequenzen



$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C^*}} \quad C^* = \frac{C_1 \cdot C_0}{C_1 + C_0}$$

### 11.35 Quarzschaltung für sehr hohe Frequenzen

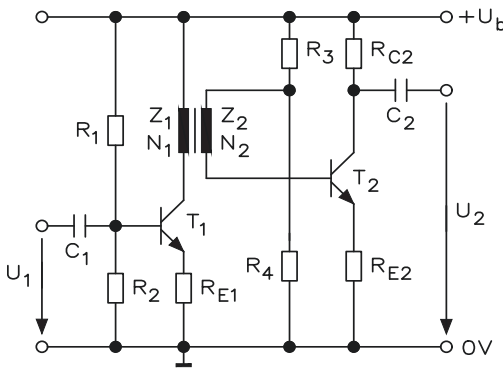


Durch eine Kapazität  $C_z$  in Reihe zum Quarz kann die Frequenz geringfügig korrigiert werden.

– Oberwellenerregung bei  $f > 10$  MHz

Soll der Oszillator auf einer Oberwelle der Quarzfrequenz schwingen, muss außer dem Quarz ein LC-Schwingkreis eingesetzt werden, der auf die gewünschte Oberwelle abzustimmen ist.

### 11.36 Induktive Kopplung bei Kleinsignalverstärkern



$$v_g = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

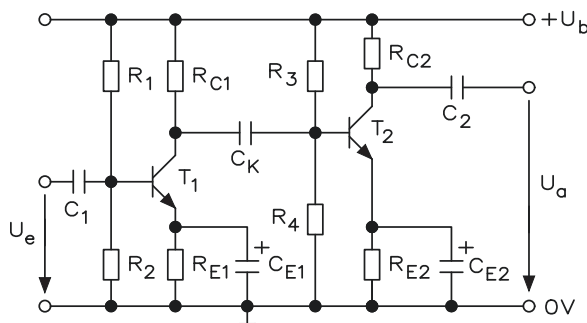
$$R_1 = \frac{(U_b - U_{BE} - U_E) \cdot B}{(n+1) \cdot I_C}$$

$$R_2 = \frac{(U_b - U_E) \cdot B}{(n \cdot I_C)}$$

$$R_E = R_{E1} = R_{E2} = \frac{U_E}{I_C + I_B}$$

|            |                                 |
|------------|---------------------------------|
| $\ddot{u}$ | Übersetzungsverhältnis          |
| $Z_1$      | Wechselstrom-Eingangswiderstand |
| $Z_2$      | Wechselstrom-Ausgangswiderstand |
| $R_1, R_2$ | Spannungsteilerwiderstand       |
| $B$        | Stromverstärkung                |
| $R_E$      | Emitterwiderstand               |
| $U_E$      | Spannung am Emitterwiderstand   |

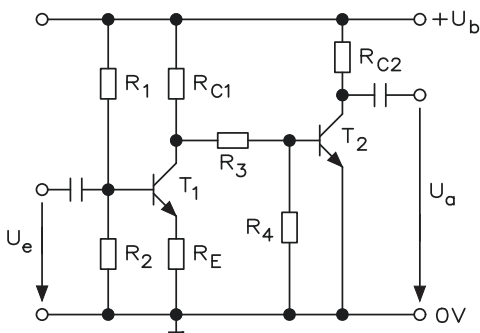
### 11.37 Kapazitive Kopplung bei Kleinsignalverstärkern



$$f'_g = f_g \cdot \sqrt{2^{(n-1)}}$$

$$\text{in der Praxis: } C_E = C_{E1} = C_{E2} = \frac{10}{2 \cdot \pi \cdot f_u \cdot R_E}$$

### 11.38 Gleichstromkopplung bei Kleinsignalverstärkern



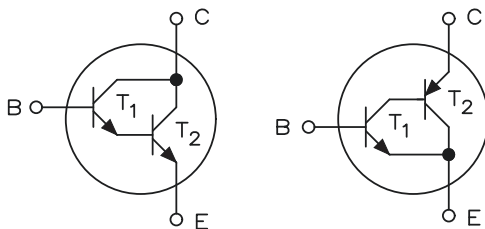
$$R_1 = \frac{(U_b - U_{BE} - U_e) \cdot B}{(n+1) \cdot I_C}$$

$$R_2 = \frac{(U_b - U_e) \cdot B}{(n \cdot I_C)}$$

$$R_C = R_{C1} = R_{C2} = \frac{U_b - U_{CE} - (I_C \cdot R_E)}{I_C}$$

$$R_E = \frac{U_E}{I_C + I_B} \text{ in der Praxis: } v_u \approx \frac{R_C}{R_E}$$

### 11.39 Darlington-Schaltung



#### ■ Gleichartige Transistoren

$$\beta \approx \beta_1 \cdot \beta_2$$

$$r_{BE} = r_{BE1} + \beta_1 \cdot r_{BE2}$$

$$r_{CE} = r_{CE2} + \left\| \frac{2 \cdot r_{CE1}}{\beta_2} \right\|$$

$r_{BE}$  dynamischer Basis-Emitter-Widerstand

$\beta$  dynamische Stromverstärkung

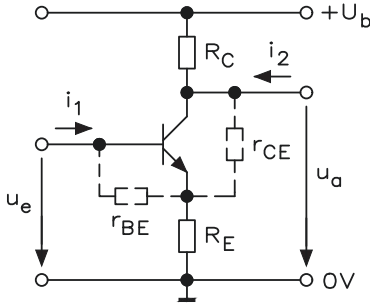
#### ■ Komplementäre Transistoren

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$$

$$r_{BE} = r_{BE1}$$

$$r_{CE} = r_{CE2} + \left\| \frac{r_{CE1}}{\beta_2} \right\|$$

### 11.40 Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung

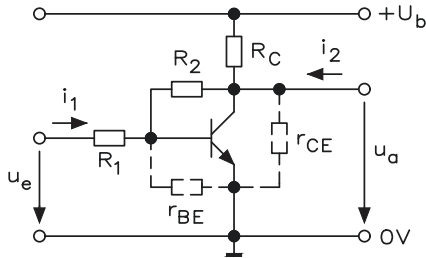


$$v_u = \frac{u_a}{u_e} \approx \frac{R_C}{R_E}$$

$$r_e = \frac{u_e}{i_e} = r_{BE} + \beta \cdot R_E \approx \beta \cdot R_E$$

$$r_a = \frac{u_a}{i_a} = R_C \parallel r_{CE} \left( 1 + \beta \frac{R_E}{r_{BE}} \right) \approx R_C$$

### 11.41 Emitterschaltung mit Spannungsgegenkopplung

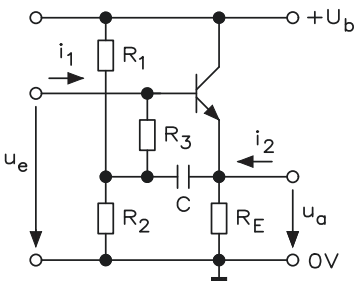


$$v_u = \frac{u_a}{u_e} \approx \frac{R_2}{R_1}$$

$$r_e = R_1 + \left( r_{BE} \parallel R_2 \cdot \frac{R_2}{v_u} \right) \approx R_1$$

$$r_a = R_C \parallel r_{CE}$$

### 11.42 Bootstrap-Schaltung



- $r_e$  dynamischer Eingangswiderstand
- $r_a$  dynamischer Ausgangswiderstand
- $f_u$  untere Grenzfrequenz
- $R_E$  Emitterwiderstand
- $r_{BE}$  dynamischer Basis-Emitter-Widerstand
- $r_{CE}$  dynamischer Kollektor-Emitter-Widerstand

$$v_u = 1$$

$$r_e = (r_{BE} + \beta \cdot R_E) \parallel R_3 \frac{\beta(R_E \parallel r_{CE})}{r_{BE}}$$

$$r_a \approx R_E \parallel \frac{r_{BE} + R_3}{\beta}$$

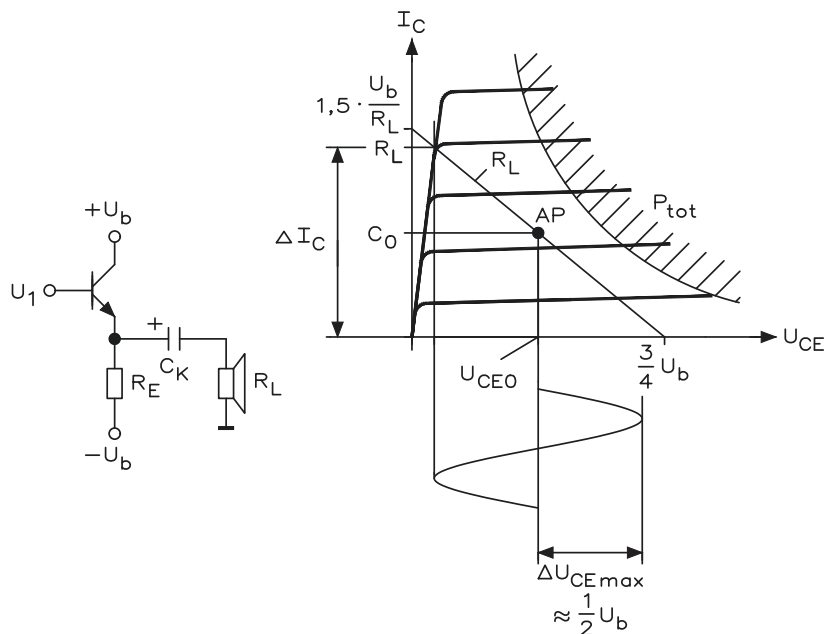
$$R_1 \parallel R_2 \geq 10 \cdot R_E$$

$$C \geq \frac{5}{2 \cdot \pi \cdot f_u (R_1 \parallel R_2)}$$

$$I_B \cdot R_3 \ll U_{BE}$$

## 11.43 Leistungsverstärker

### ■ Leistungsverstärker mit A-Betrieb (Emitterschaltung):

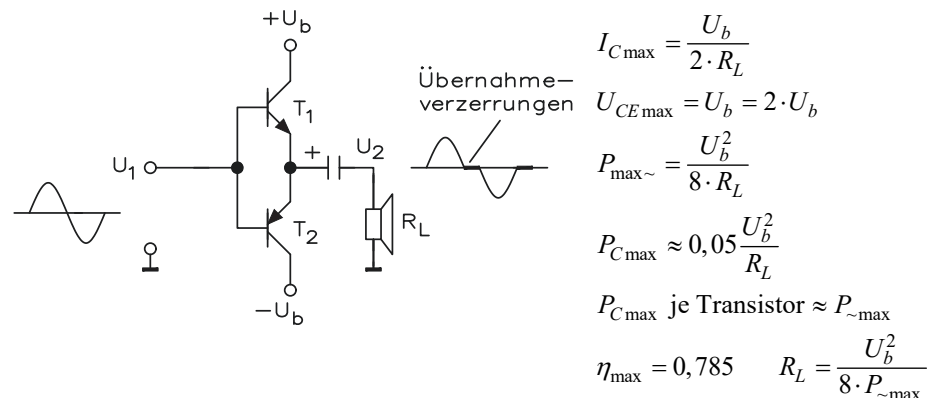


$$U_{CEmax} = U_b \quad I_{Cmax} = \frac{U_b}{2 \cdot R_L}$$

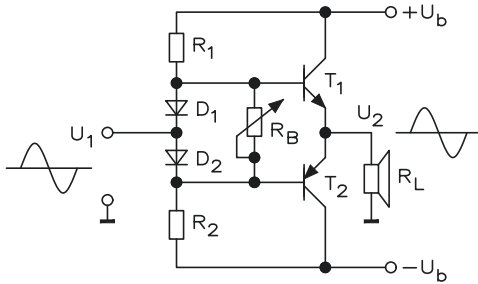
$$P_{\sim} = \frac{U_b^2}{8 \cdot R_L} \quad P_{-} = \frac{U_b^2}{4 \cdot R_L}$$

$$\eta = \frac{P_{\sim}}{P_{-}} \quad C_K = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_u \cdot R_L}$$

### ■ Leistungsverstärker mit B-Betrieb:



### ■ Leistungsverstärker mit AB-Betrieb:



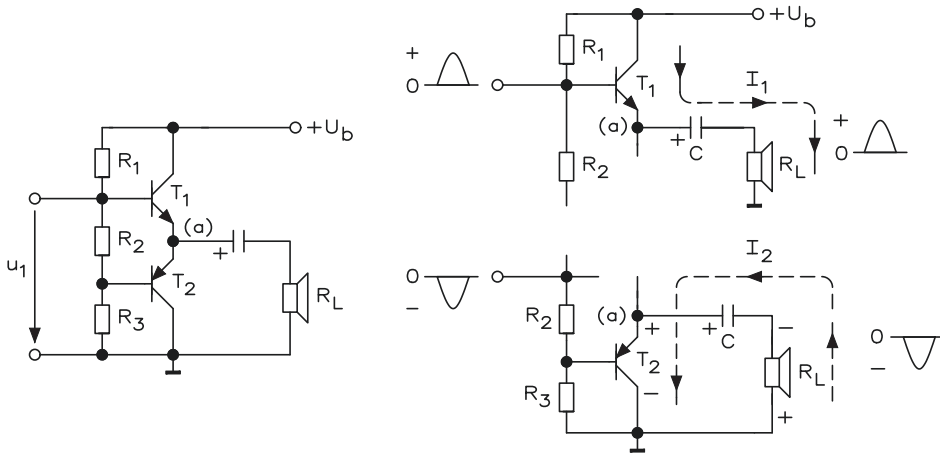
$$U_{CE\max} = 2 \cdot U_b$$

$$I_{C\max} = \frac{U_b}{2 \cdot R_L}$$

$$P_{\sim} = \frac{U_b^2}{8 \cdot R_L}$$

$$P_{-} = \frac{U_b^2}{4 \cdot R_L}$$

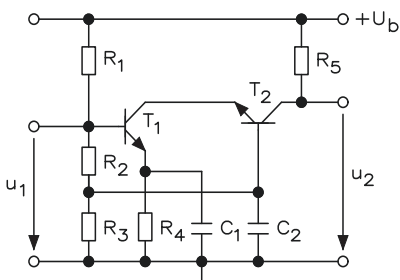
### ■ Leistungsverstärker mit komplementärem AB-Betrieb:



$$U_{CE\max} = 2 \cdot U_b \quad I_{C\max} = \frac{U_b}{2 \cdot R_L}$$

$$P_{\sim} = \frac{U_b^2}{8 \cdot R_L} \quad P_{-} = \frac{U_b^2}{4 \cdot R_L}$$

## 11.44 Kaskode-Schaltung



$$r_e = r_{BE1} \parallel R_2 \parallel R_3$$

$$r_a \approx R_5$$

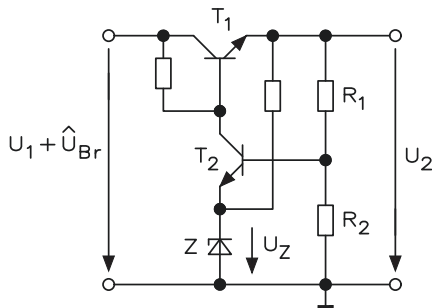
$r_e$  Eingangswiderstand

$r_a$  Ausgangswiderstand

$r_{BE}$  Basis-Emitter-Widerstand

$\beta$  Wechselstromverstärkung

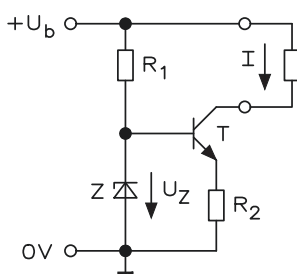
### 11.45 Konstantspannungsquelle



$$U_2 \approx (U_Z + U_{BE T2}) \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

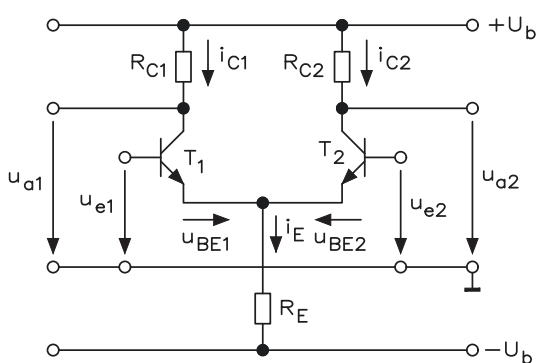
$$U_1 - \hat{U}_{Br} \geq U_2 + U_{CEsat T1}$$

### 11.46 Konstantstromquelle



$$I = \frac{U_Z - U_{BE}}{R_2}$$

### 11.47 Differenzverstärker



$$\frac{u_{a2} - u_{a1}}{u_{e2} - u_{e1}} = v_u = -\beta \frac{R_C \parallel r_{CE}}{r_{BE}}$$

$$u_{a1} = (u_{e1} - i_E \cdot R_E) \cdot v_u$$

$$u_{a2} = (u_{e2} - i_E \cdot R_E) \cdot v_u$$

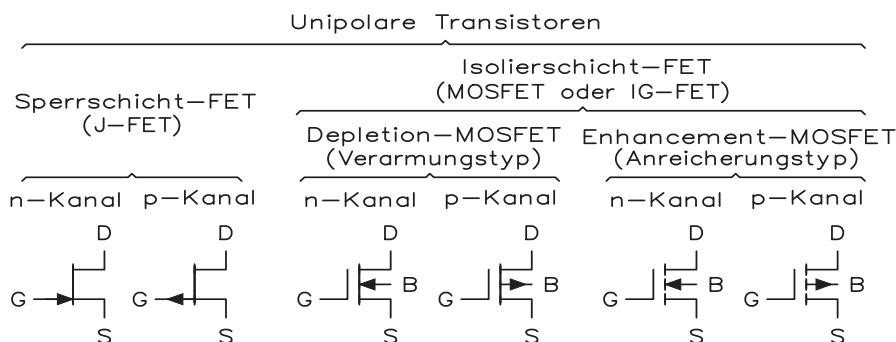
$v_u$  Spannungsverstärkung

# Feldeffekttransistor, MOSFET und Röhren

# 12

Während man bei den Transistoren nur zwei Möglichkeiten (npn oder pnp) kennt, hat man bei Feldeffekttransistor und MOSFET sechs verschiedene Grundtypen.

## Aufteilung von Feldeffekttransistoren und MOSFETs



Bei den Sperrschicht-Feldeffekttransistoren besteht der Kanal zwischen Source (Quelle) und Drain (Abfluss) aus n- oder p-Material. Zwischen dem Kanal und den Anschlüssen für Source und Drain tritt keine Sperrrichtung auf. Mittels eines Ohmmeters kann man den Kanalwiderstand direkt messen, ohne dass auf die Polarität des Messgeräts geachtet werden muss. In den Schaltzeichen gibt es zwar die Bezeichnungen Source und Drain, aber diese beiden Anschlüsse lassen sich vertauschen, da hier keine pn-Übergänge vorhanden sind. Die Bezeichnungen für Source und Drain stellen sich je nach der Polarität der angelegten Betriebsspannung ein. Der Stromfluss zwischen Source und Drain lässt sich über eine Raumladungszone eines gesperrten pn-Übergangs steuern, der den Kanal entsprechend abschnürt (verengt). Der pn-Übergang zwischen Gate und Kanal muss in Sperrrichtung betrieben werden und daher auch die Bezeichnungen J-FET (Junction) oder pn-FET. Da in Sperrrichtung zwischen Gate und Kanal nur ein sehr kleiner Strom (Größenordnung  $I_G < 1 \text{ nA}$ ) fließt, arbeitet der Feldeffekttransistor im Gegensatz zum bipolaren Transistor leistungslos.

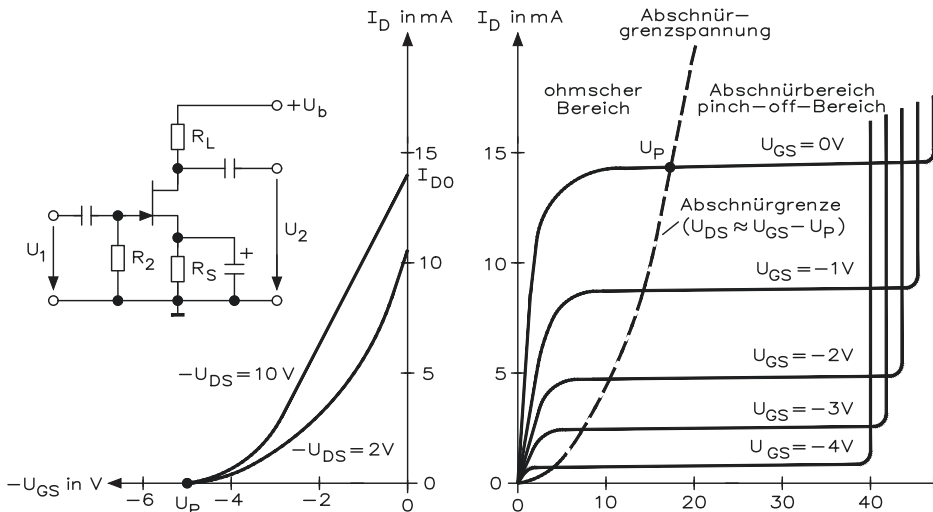
Bei einem Isolierschicht-FET befindet sich zwischen Gate und Kanal eine hochohmige Isolierschicht aus Siliziumdioxid  $\text{SiO}_2$  und daher auch die Bezeichnung „IG-FET“ (Insulated Gate Field Effect Transistor) oder MOSFET (Metal Oxide-Semiconductor-FET). Durch die sehr hochohmige Isolierschicht erreicht man sehr hohe Eingangswiderstände bis zu  $10^{25} \Omega$ , jedoch müssen entsprechende Vorsichtsmaßnahmen bei MOSFET-Bau-elementen getroffen werden. Wenn an das Gate eine hohe Spannung angelegt wird, kann es zu einem Durchbruch an dem Gatedioxid kommen. Da dieser Vorgang nicht reversibel ist, lässt sich nach einem Spannungsdurchbruch der MOSFET-Baustein nicht mehr einsetzen.

Bei den MOSFET-Transistoren muss man zwischen dem Verarmungs- und dem Anreicherungstyp unterscheiden. Bei einem Verarmungstyp ist zwischen Source und Drain ein bestimmter Kanalwiderstand vorhanden, der sich je nach Spannung am Gate „verarmen“ oder „anreichern“ lässt. Während beim Verarmungstyp beide Betriebsarten möglich sind, kann beim Anreicherungstyp der Kanal nur durch Ladungsträger aus dem Substrat bzw. Bulk (Grundkörper) „angereichert“ werden. In diesem Fall besteht zwischen Source und Drain ein hochohmiger Kanalwiderstand und es fließt kein Strom  $I_D$  (Drain-Strom). Hat das Gate die richtige Polarität, werden Ladungsträger aus dem Substrat oder Bulk angezogen, es bildet sich ein Kanal und der Drainstrom  $I_D$  fließt.

## 12.1 Feldeffekttransistor (FET)

Im Feldeffekttransistor (FET) fließt der zu steuernde Strom in einem Kanal aus n- oder p-leitendem Siliziumstab. Man unterscheidet zwischen N-Kanal-FET und P-Kanal-FET. Der Feldeffekttransistor wird auch als Sperrschicht-FET bezeichnet.

### Sourceschaltung



$$R_S = \frac{-U_{GS}}{I_D}$$

$$R_L = \frac{U_b - U_{DS} + U_{GS}}{I_D}$$

$$v_S \approx S \cdot \frac{r_{DS} \cdot R_L}{r_{DS} + R_L}$$

$$v_S \approx S \cdot R_L$$

$$R_{es} \approx R_2$$

$$R_{as} \approx R_L$$

$$S = -\frac{2}{U_p} \sqrt{I_D \cdot I_{DS}}$$

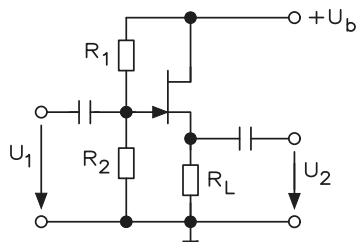
$$v_S = \frac{\Delta U_{DS}}{\Delta U_{GS}}$$

$$y_{21} = g_{DS} = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}} \text{ bei } U_{DS} = \text{konstant}$$

$$y_{22} = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{DS}} \text{ bei } U_{GS} = \text{konstant}$$

|          |                                         |
|----------|-----------------------------------------|
| $R_S$    | Sourcewiderstand                        |
| $U_{GS}$ | Gate-Source-Spannung                    |
| $I_D$    | Drainstrom                              |
| $R_L$    | Lastwiderstand                          |
| $U_{DS}$ | Drain-Source-Spannung                   |
| $v_S$    | Spannungsverstärkung (Sourceschaltung)  |
| $S$      | Vorwärtsteilheit mA/V                   |
| $r_{DS}$ | Drain-Source-Widerstand                 |
| $R_{es}$ | Eingangswiderstand (Sourceschaltung)    |
| $R_{as}$ | Ausgangswiderstand (Sourceschaltung)    |
| $R_2$    | Gitterableitwiderstand                  |
| $U_p$    | Pinch-off-Spannung ( $I_D \approx 0$ A) |
| $I_{DS}$ | Drainstrom bei $U_{GS} = 0$ V           |
| $y_{21}$ | Vorwärtsteilheit                        |
| $y_{22}$ | Ausgangsleitwert                        |

### Drainschaltung



$$R_1 = \frac{U_b - U_{RL} - U_{GS}}{I_q}$$

$$R_2 = \frac{U_{RL} + U_{GS}}{I_q}$$

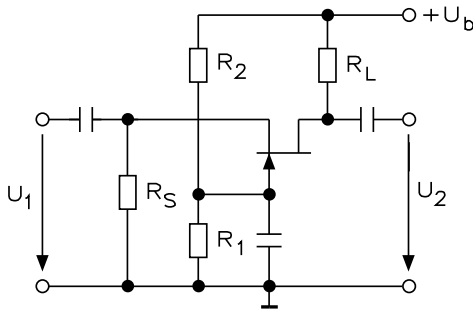
$$v_D \approx \frac{S \cdot R_L}{1 + S \cdot R_L}$$

$$R_{eD} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{aD} = \frac{R_L}{1 + S \cdot R_L}$$

$$S = -\frac{2}{U_p} \sqrt{I_D \cdot I_{DS}}$$

|            |                                         |
|------------|-----------------------------------------|
| $R_1, R_2$ | Widerstände (Spannungsteiler)           |
| $U_b$      | Betriebsspannung                        |
| $U_{RL}$   | Spannung am Lastwiderstand              |
| $I_q$      | Querstrom                               |
| $R_{eD}$   | Eingangswiderstand (Drainschaltung)     |
| $R_{aD}$   | Ausgangswiderstand (Drainschaltung)     |
| $U_p$      | Pinch-off-Spannung ( $I_D \approx 0$ A) |
| $I_{DS}$   | Drainstrom bei $U_{GS} = 0$ V           |
| $S$        | Vorwärtsteilheit mA/V                   |

**Gateschaltung**

$$v_G \approx \frac{S \cdot R_L}{1 + S \cdot R_S}$$

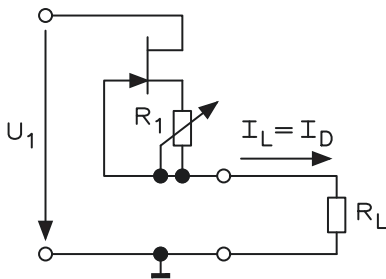
$$R_{eG} \approx R_S + \frac{1}{S}$$

$$R_{aG} \approx R_L$$

$$S = -\frac{2}{U_p} \sqrt{I_D \cdot I_{DS}}$$

$U_p$  Pinch-off-Spannung ( $I_D \approx 0$  A)

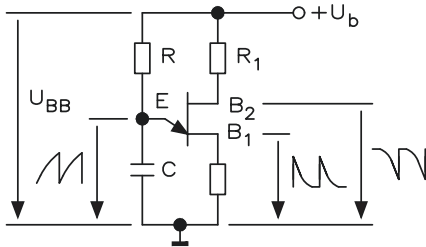
$I_{DS}$  Drain-Strom bei  $U_{GS} = 0$  V

**12.2 Konstantstromquelle**

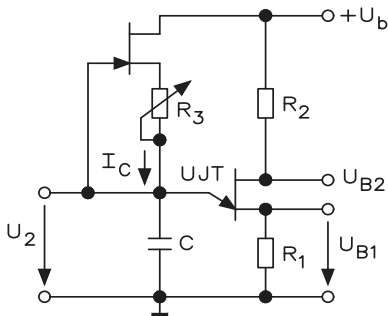
$$I_L = I_D$$

$$I_D = \frac{|U_{GS}|}{R_1}$$

### 12.3 Sägezahngenerator mit UJT

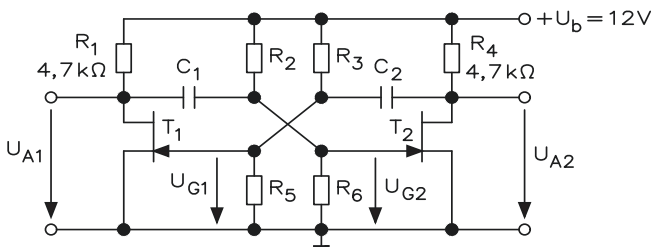


$$R_1 \approx \frac{5 \cdot U_p}{I_{EM}}$$



$$R_2 \approx \frac{0,7 \text{ V} \cdot R_{BB}}{(\eta \cdot U_b)}$$

### 12.4 Rechteckgenerator

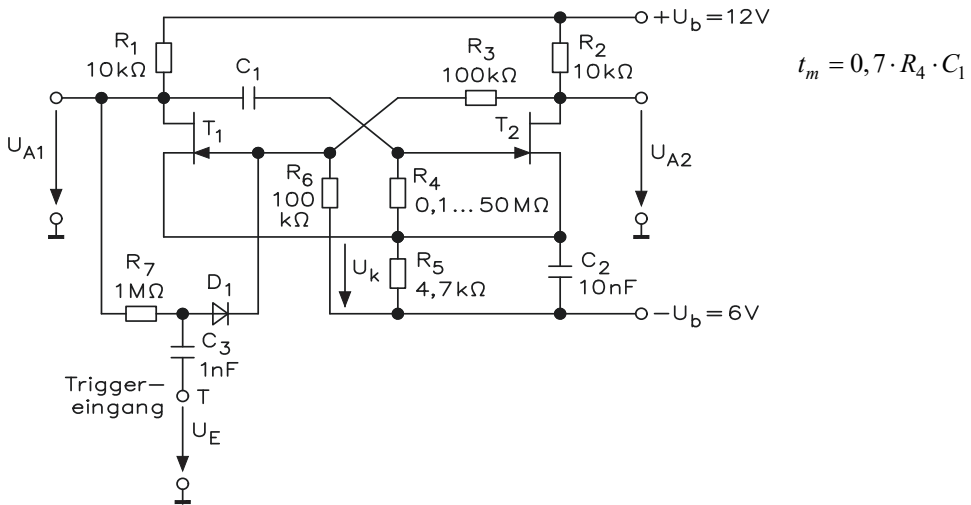


$$t_{G1} = 0,7 \cdot R_2 \cdot C_1$$

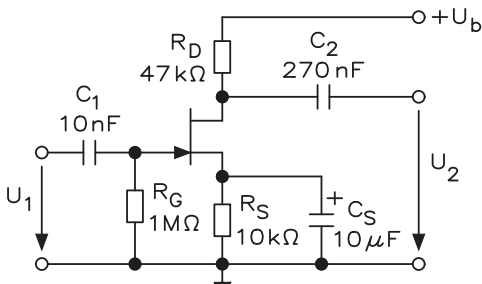
$$t_{G2} = 0,7 \cdot R_3 \cdot C_2$$

$$f = \frac{1}{t_{G1} + t_{G2}}$$

## 12.5 Monostabile Kippstufe



## 12.6 Wechselspannungsverstärker



$$f_u = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_1 \cdot r_e} \quad \text{bei } r_e = R_G \parallel R_{GS}$$

$$f_u = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_2 \cdot (r_a + R_L)} \quad \text{bei } r_a = R_D \parallel r_{DS}$$

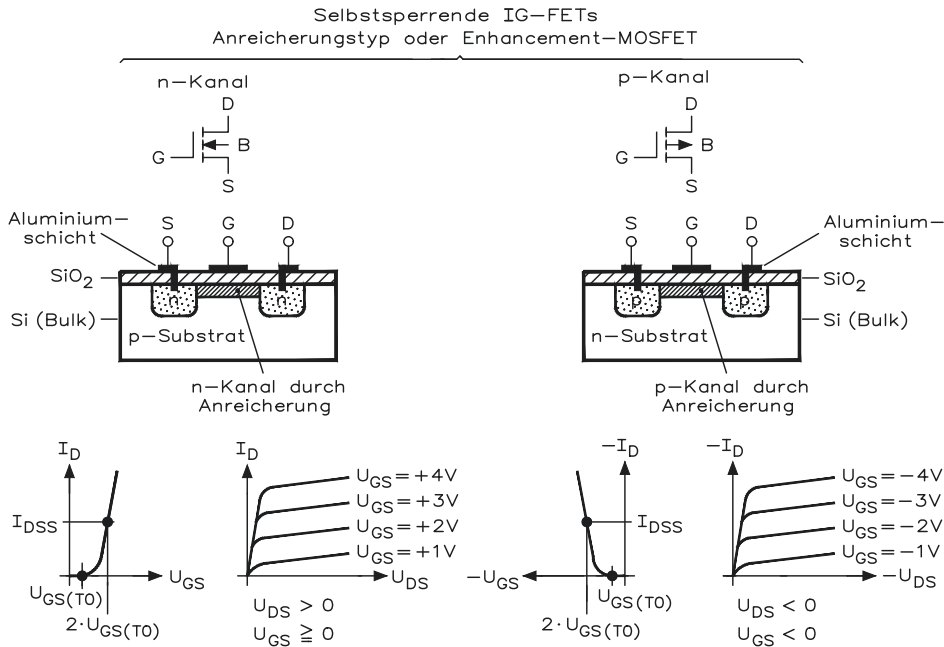
$$f_o = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (C_{22} + C_{sch}) \cdot r_a} \quad \text{bei } r_a = R_D \parallel r_{DS}$$

- $f_u$  untere Grenzfrequenz
- $f_o$  obere Grenzfrequenz
- $r_e$  Eingangswiderstand
- $r_a$  Ausgangswiderstand
- $C_{sch}$  Schaltkapazität
- $C_{22}$  Ausgangskapazität

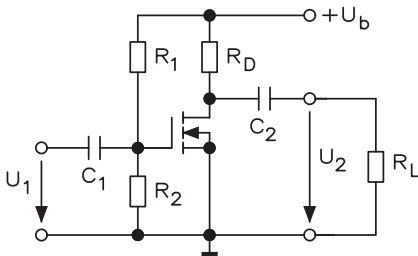
# 12.7 MOSFET

Die MOSFETs (Metal-Oxid Semiconductor Field-Effect Transistor) sind Isolier-FETs und je nach Kanal unterscheidet man zwischen n- und p-Kanal-Typen. Außerdem unterscheidet man je nach Ansteuerung zwischen dem Verarmungstyp (depletion) und dem Anreicherungstyp (enhancement).

## Schaltsymbol, Aufbau und Kennlinien der vier MOSFET-Familien



## Sourceschaltung



$$v_u = \frac{u_2}{u_1} = -S \cdot (r_{DS} \parallel R_D)$$

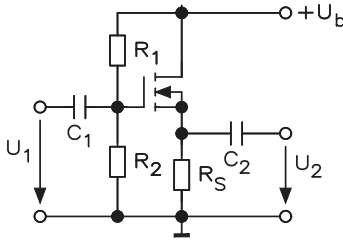
$$r_{DS} \gg R_D \Rightarrow v_u \approx S \cdot R_D$$

$$U_2 = -S \cdot U_{GS} \cdot (r_{DS} \parallel R_L)$$

$$Z_2 \approx R_D \quad Z_1 \approx R_1 \parallel R_2$$

- $r_{DS}$  Kanalwiderstand
- $S$  Vorwärtsteilheit mA/V
- $R_S$  Sourcewiderstand
- $R_D$  Drainwiderstand
- $Z_1$  Eingangsimpedanz

### Drainschaltung



$$v_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{S \cdot (r_{DS} \parallel R_S)}{1 + S \cdot (r_{DS} \parallel R_S)}$$

$$r_{DS} \gg R_D \Rightarrow v_u \approx \frac{S \cdot R_S}{1 + S \cdot R_S}$$

$$U_2 = -S \cdot U_{GS} \cdot (r_{DS} \parallel R_L)$$

$$U_1 = U_{GS} + S \cdot U_{GS} (r_{DS} \parallel R_S)$$

$$Z_2 \approx R_S \parallel \frac{1}{S}$$

$$Z_1 \approx R_1 \parallel R_2$$

$u_1$  Eingangsspannung

$u_2$  Ausgangsspannung

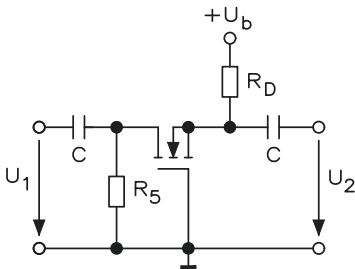
$R_S$  Sourcewiderstand

$R_L$  Lastwiderstand

$Z_1$  Eingangsimpedanz

$Z_2$  Ausgangsimpedanz

### Gateschaltung



$$v_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{S \cdot R_D}{1 + S \cdot R_S}$$

$$U_2 = -S \cdot U_{GS} \cdot R_L$$

$$U_1 = -S \cdot U_{GS} \cdot R_S - U_{GS}$$

$$Z_2 \approx R_D$$

$$Z_1 \approx R_S + \frac{1}{S}$$

$U_{GS}$  Gate-Source-Spannung

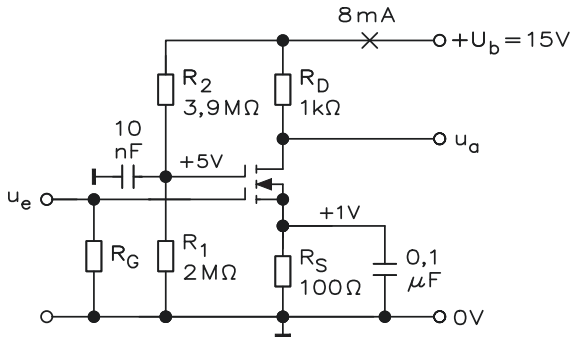
$U_1$  Eingangsspannung

$U_2$  Ausgangsspannung

$Z_1$  Eingangsimpedanz

$Z_2$  Ausgangsimpedanz

## 12.8 Dual-Gate-MOSFET



$$U_b - U_{DS} - (I_D \cdot R_D) = 0 \quad (\text{Arbeitspunkt})$$

$$I_D = \frac{U_b}{R_D} - \frac{U_{DS}}{R_D}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{U_b - U_{GS0}}{U_{GS0}}$$

$$R_D = \frac{U_b - U_{DS}}{I_D}$$

$$R_S = \frac{U_S}{I_D}$$

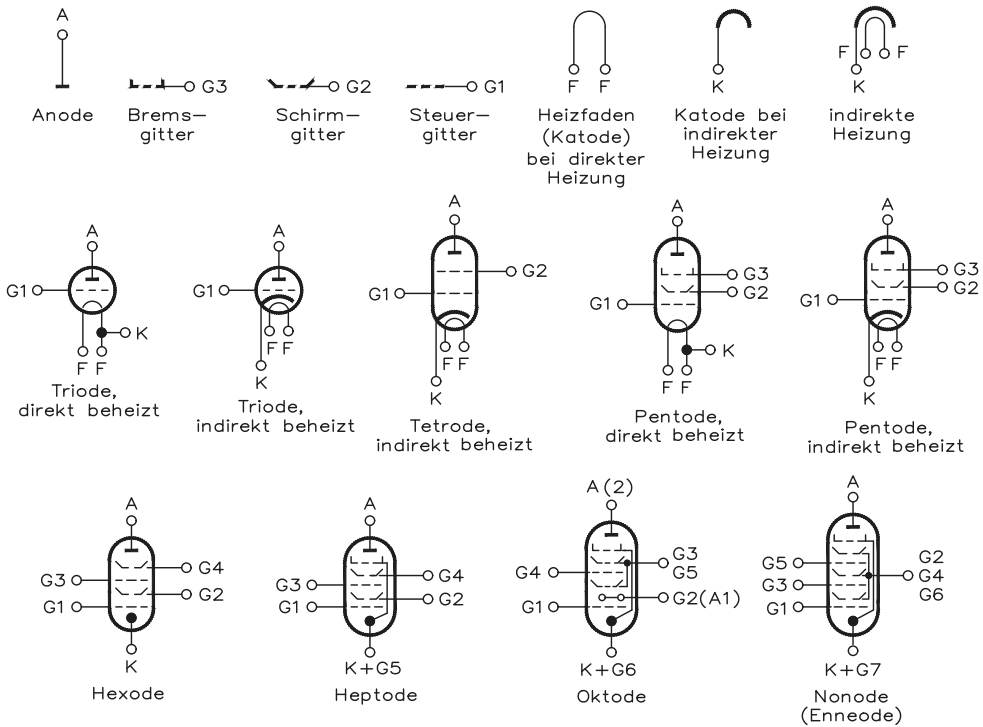
$$v_u = \frac{R_D}{\frac{1}{S} + R_S}$$

$$I_D = I_{Dss} \cdot \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p}\right)^2$$

|          |                                         |
|----------|-----------------------------------------|
| $U_b$    | Betriebsspannung                        |
| $U_{DS}$ | Drain-Source-Spannung                   |
| $U_{GS}$ | Gate-Source-Spannung                    |
| $I_D$    | Drainstrom                              |
| $R_D$    | Drainwiderstand                         |
| $R_S$    | Sourcewiderstand                        |
| $S$      | Vorwärtsteilheit mA/V                   |
| $U_p$    | Pinch-off-Spannung ( $I_D \approx 0$ A) |

## 12.9 Röhren

### Aufbau der Röhren mit den allgemeinen Anschlussbildern



Definition von Werten für die Barkhausen-Gleichung:

Innenwiderstand  $R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a}$  bei konstantem  $U_g$

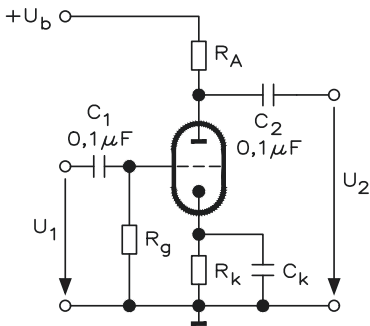
Steilheit  $S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g}$  bei konstantem  $U_a$

Durchgriff  $D = \frac{\Delta U_g}{\Delta U_a}$  Abgabe von  $D$  in % =  $\frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \cdot 100$

Verstärkungsfaktor  $\mu = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}$  bei konstantem  $I_a$

Barkhausen-Gleichung:  $R_i \cdot S \cdot D = 1$  und  $\mu = \frac{1}{D} = S \cdot R_i$

### Katodenbasis-Schaltung



$$v_u = \frac{u_{2\sim}}{u_{1\sim}} = S_d \cdot R_A$$

$$S_d = S \cdot \frac{R_i}{R_i + R_A}$$

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g} \quad \text{bei } U_a = \text{konst.}$$

$$R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \quad \text{bei } U_g = \text{konst.}$$

$$D = \frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \quad \text{bei } I_g = \text{konst.}$$

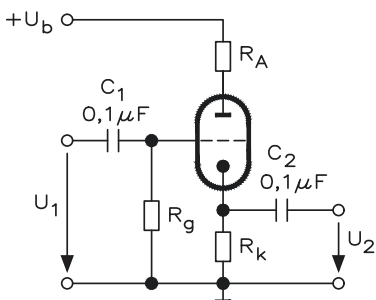
$$\mu = \frac{1}{D}$$

$$r_2 = \frac{R_i \cdot R_A}{R_i + R_A}$$

$$R_i \approx R_g$$

|              |                         |
|--------------|-------------------------|
| $S$          | Steilheit               |
| $S_d$        | dynamische Steilheit    |
| $R_A$        | Arbeitswiderstand       |
| $R_i$        | Innenwiderstand         |
| $\Delta I_a$ | Anodenstromänderung     |
| $\Delta U_g$ | Gitterspannungsänderung |
| $\Delta U_a$ | Anodenspannungsänderung |
| $D$          | Durchgriff              |
| $\mu$        | Verstärkungsfaktor      |

### Anodenbasis-Schaltung



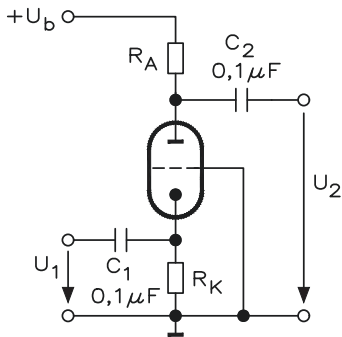
$$u_2 = u_1 - u_{R2}$$

$$r_1 \approx R_g$$

$$r_2 \approx \frac{1}{S}$$

$u_{R2}$  Gate-Katoden-Spannung

### Gitterbasis-Schaltung



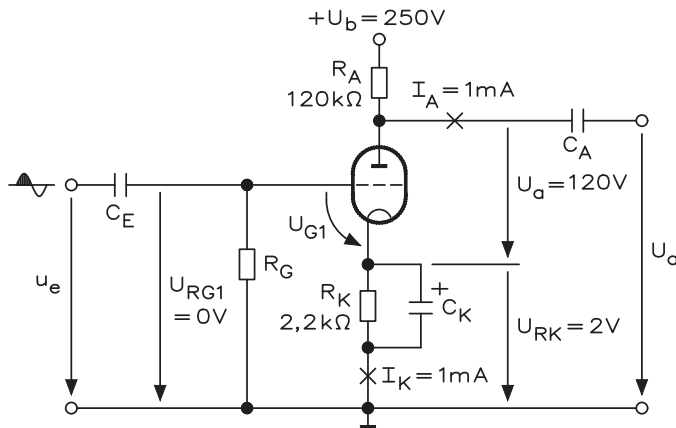
$$v_u = -S \cdot \frac{R_i \cdot R_A}{R_i + R_A}$$

$$r_1 \approx R_g$$

$$r_2 \approx S \cdot R_A$$

$D$  Durchgriff  
 $S$  Steilheit in mA/V  
 $R_A$  Arbeitswiderstand

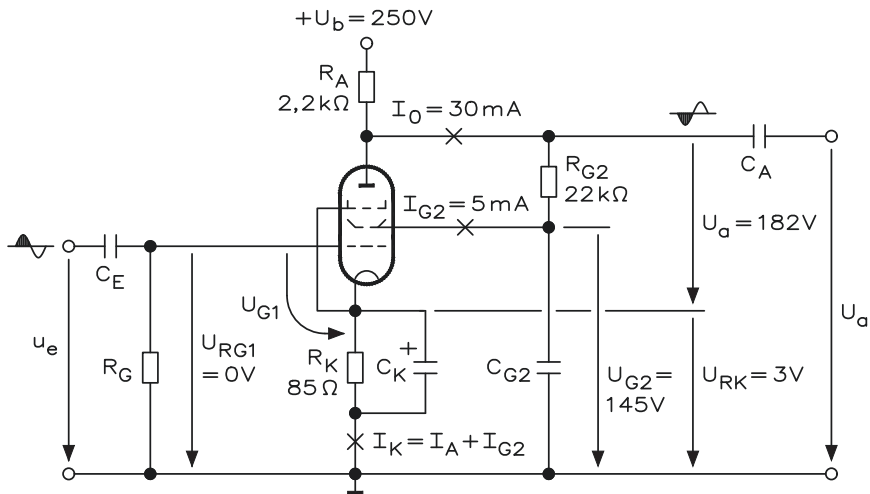
### 12.10 Trioden-Schaltung



$$U_b = U_{Ra} + U_a + U_K \approx U_{Ra} + U_a - U_{G1} = I_a + U_K = I_K + R_K$$

$$v_u = \frac{S \cdot R_i \cdot R_a}{R_i + R_a} = \frac{R_a}{D(R_i + R_a)}$$

## 12.11 Pentoden-Schaltung



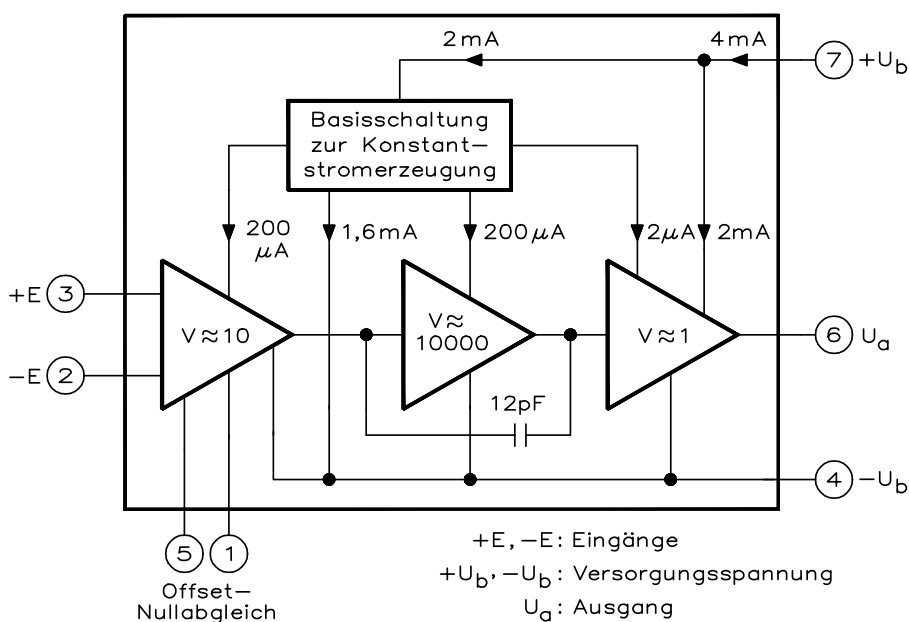
$$S_D = \frac{S \cdot R_i}{R_i + R_a}$$

$$v_u = \frac{u_{2\sim}}{u_{1\sim}} = S \cdot R_a$$

# Operationsverstärker

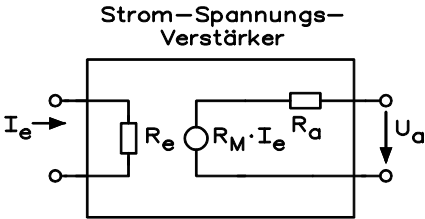
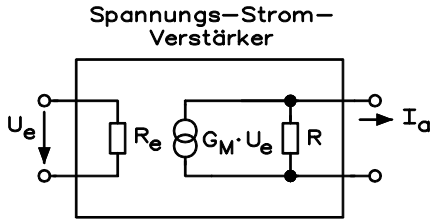
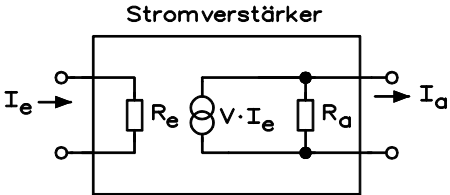
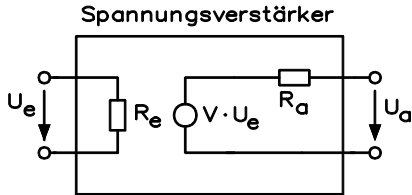
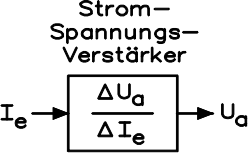
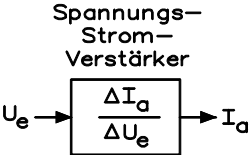
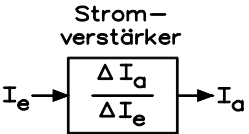
# 13

Ein Operationsverstärker besteht aus einer Eingangsstufe, einem Spannungsverstärker, einer Leistungsendstufe und aus Konstantstromquellen.



In der Praxis arbeitet man mit

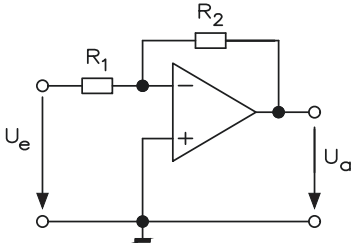
- Spannungsverstärker (voltage amplifier)
- Stromverstärker (current amplifier)
- Spannungs-Strom-Verstärker (transconductance amplifier)
- Strom-Spannungs-Verstärker (transimpedance amplifier)



## 13.1 Grundsaltungen des Operationsverstärkers

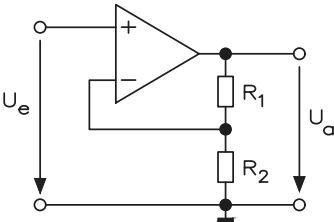
### ■ Invertierender Verstärkerbetrieb

$$v = \frac{R_2}{R_1}$$



### ■ Nicht invertierender Verstärkerbetrieb

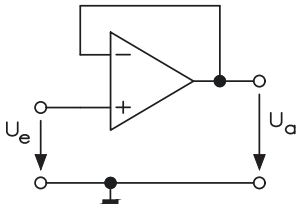
$$v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



### ■ Impedanzwandler

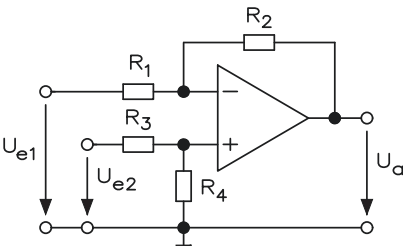
$$U_a = U_e \quad v = 1 \quad r_{\text{ein}} = 10^5 \Omega \dots 10^{24} \Omega$$

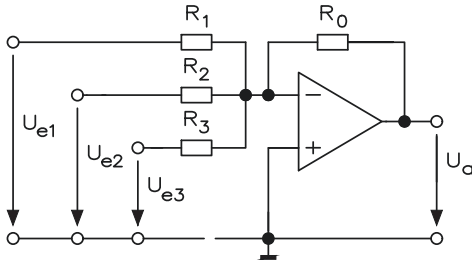
$$r_{\text{aus}} = 50 \Omega \dots 75 \Omega$$



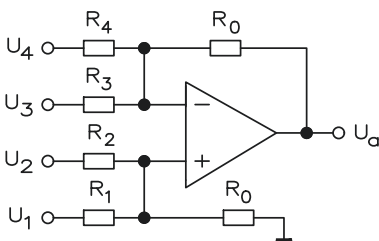
### ■ Differenzverstärker

$$U_a = (U_{e2} - U_{e1}) \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad R_1 = R_3 \quad R_2 = R_4$$

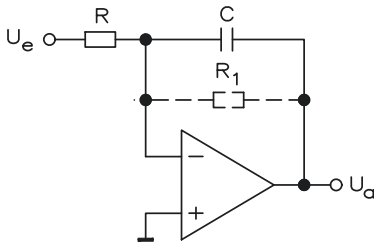


■ **Summierer (Addierer)**

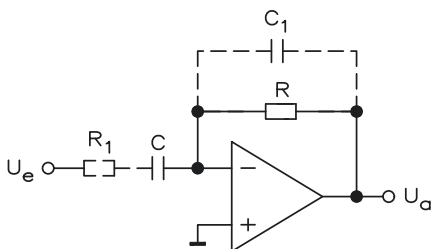
$$-U_a = U_{e1} \frac{R_0}{R_1} + U_{e2} \cdot \frac{R_0}{R_2} + U_{e3} \cdot \frac{R_0}{R_3}$$

■ **Subtrahierer**

$$-U_a = R_0 \cdot \left( \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} \right)$$

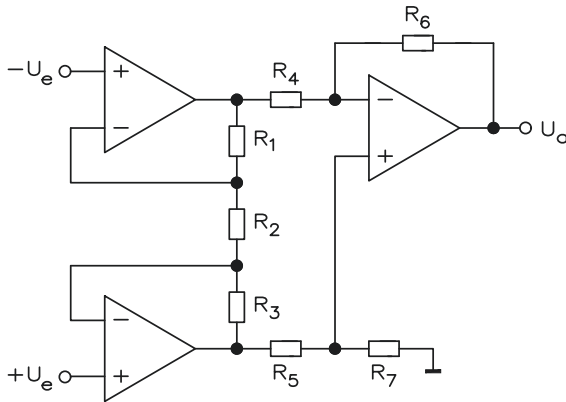
■ **Integrator**

$$U_a = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t U_e \cdot dt$$

■ **Differenzierer**

$$-U_a = R \cdot C \cdot \frac{dU_e}{dt} \text{ bei } R \cdot C_1 \leq R_1 \cdot C$$

### ■ Instrumentenverstärker

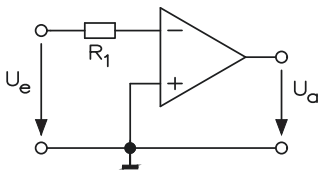


$$v_U = \frac{R_6}{R_4} \left( 1 + \frac{2 \cdot R_1}{R_2} \right)$$

bei  $R_1 = R_3$ ,  $R_4 = R_5$ ,  $R_6 = R_7$

## 13.2 Komparator und Schmitt-Trigger

### ■ Invertierender Nullspannungskomparator

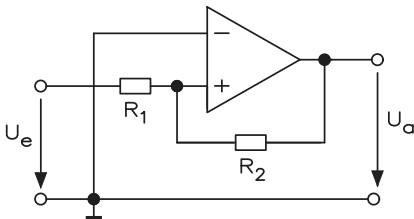


$$U_a = \begin{cases} +U_{asätt} & < 0 \text{ V} \\ -U_{asätt} & > 0 \text{ V} \end{cases}$$

$+U_{asätt}$  = positive Ausgangsspannung

$-U_{asätt}$  = negative Ausgangsspannung

### ■ Nicht invertierender Nullspannungskomparator

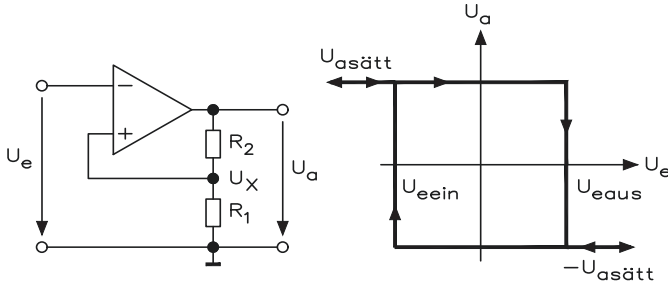


$$U_a = \begin{cases} +U_{asätt} & > 0 \text{ V} \\ -U_{asätt} & < 0 \text{ V} \end{cases}$$

$+U_{asätt}$  = positive Ausgangsspannung

$-U_{asätt}$  = negative Ausgangsspannung

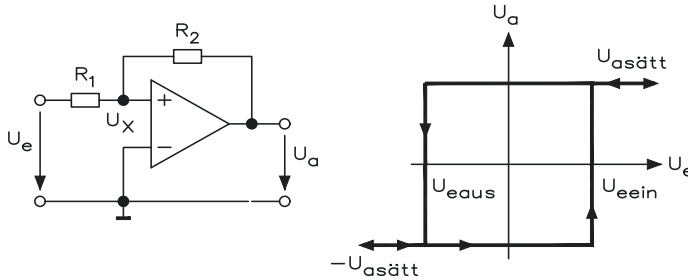
### ■ Analoger Komparator



$$U_a = \begin{cases} +U_{asätt} & \text{bei } U_e < U_x \\ -U_{asätt} & \text{bei } U_e > U_x \end{cases}$$

$+U_{asätt}$  = positive Ausgangsspannung  
 $-U_{asätt}$  = negative Ausgangsspannung

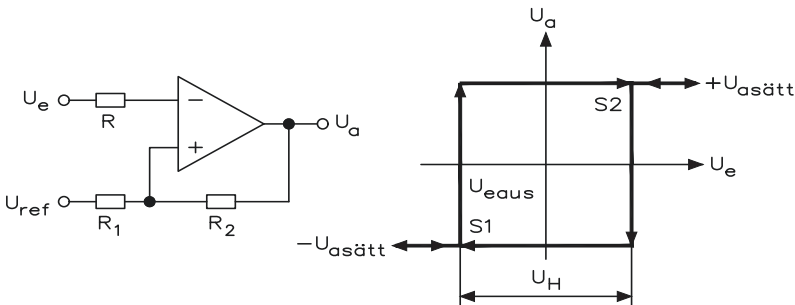
### ■ Nicht invertierender Schmitt-Trigger



$$U_x = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot +U_{asätt} \quad U_x = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot -U_{asätt}$$

$$U_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot [+U_{asätt} - (-U_{asätt})]$$

### ■ Invertierender Schmitt-Trigger

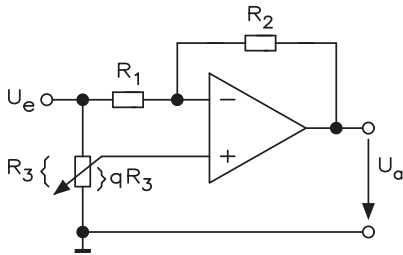


$$S_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (U_{ref} - U_{asätt}) \quad S_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (U_{ref} + U_{asätt})$$

$$U_H = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_{ref} + (U_{asätt} - U_{ref})$$

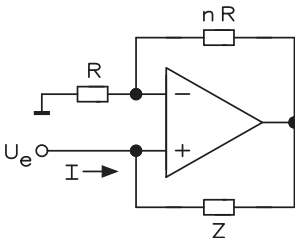
## ■ Bipolarer Koeffizient

$$U_a = (2q - 1) \cdot U_e \quad \text{bei } 0 \leq q \leq 1$$



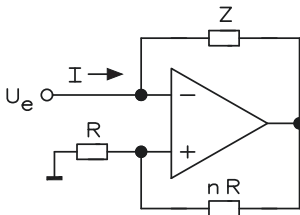
## ■ Negative Impedanz (kurzschlussstabil)

$$Z = \frac{U_e}{I} = -\frac{Z}{n}$$



## ■ Negative Impedanz (Leerlaufstabil)

$$Z = \frac{U_e}{I} = -\frac{Z}{1 + n \cdot R}$$

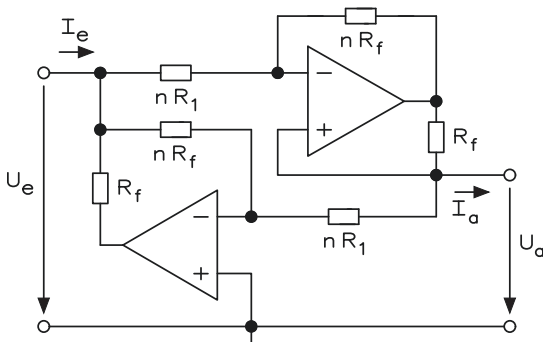


## ■ Gyration

$$n \gg 1$$

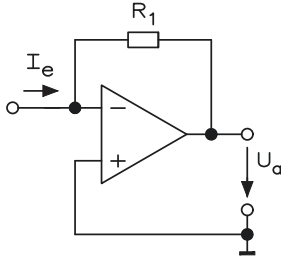
$$I_a = \frac{U_e}{R_1} \quad I_e = \frac{U_a}{R_1}$$

$$\frac{U_e}{I_e} = \frac{I_a}{U_a} \cdot R_1^2 \quad Z_1 = \frac{1}{Z_2} \cdot R_1^2$$



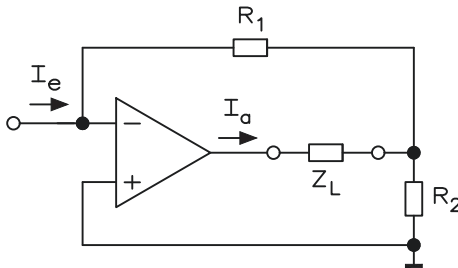
### 13.3 Wandler mit Operationsverstärker

#### ■ Invertierender Strom-Spannungs-Wandler



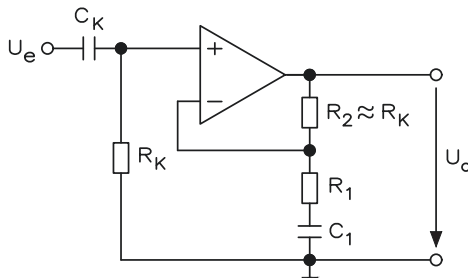
$$-U_a = R_1 \cdot I_e$$

#### ■ Invertierender Stromwandler



$$-I_a = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot I_e$$

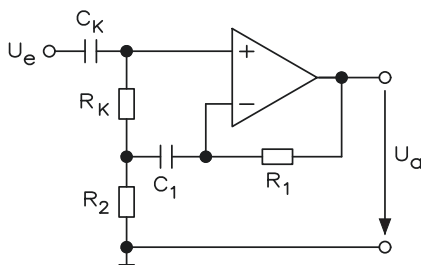
#### ■ Wechselspannungsverstärker mit Driftunterdrückung



$$v_{u\sim} \approx 1 + \frac{R_2}{R_1} \text{ für } \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_1} \ll 1$$

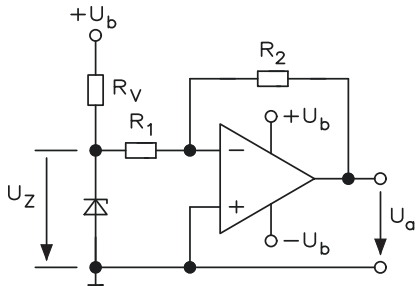
$$v_{u-} \approx 1$$

#### ■ Bootstrap-Wechselspannungsverstärker

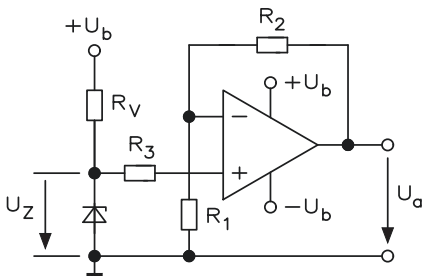


$$v_{u\sim} \approx 1 + \frac{R_1}{R_2} \text{ für } \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_1} \ll 1$$

### ■ Konstantspannungsquelle

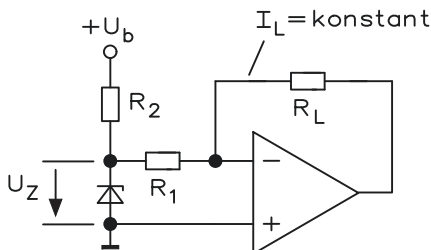


$$-U_a = U_Z \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

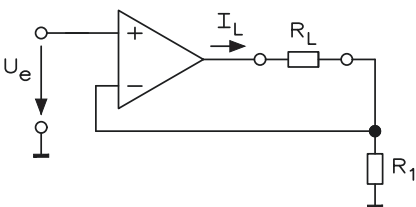


$$U_a = U_Z \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

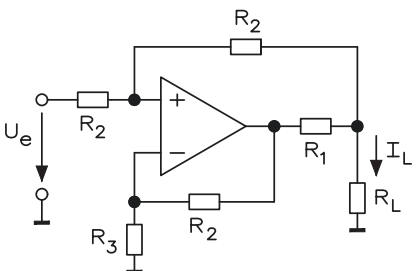
### ■ Konstantstromquelle



$$I_L = \frac{U_a}{R_L} = \frac{U_Z}{R_1}$$



$$I_L = \frac{U_e}{R_1}$$



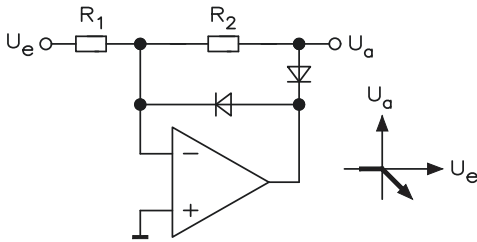
$$I_L = \frac{U_{ref}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \quad R_3 = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{Für } R_1 \ll R_2 \text{ ist } I_L \approx \frac{U_{ref}}{R_1}.$$

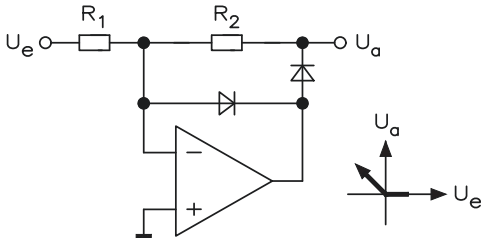
$$R_3 \approx R_2$$

$$U_{ref} = U_e$$

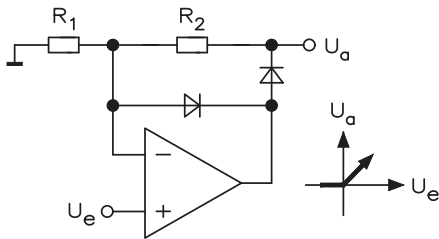
### ■ Linearer Einweggleichrichter



$$-U_a = U_e \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

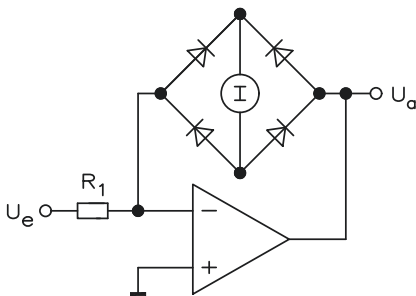


$$-U_a = U_e \cdot \frac{R_2}{R_1}$$



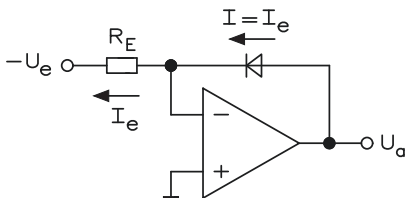
$$U_a = U_e \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

### ■ Präzisions-Zweiweggleichrichter



$$I = \frac{U_e}{R_1}$$

### ■ Logarithmischer Verstärker mit Diode



$$U_a = m \frac{kT}{q} \cdot \ln \left( \frac{I}{I_0} \right) + I \cdot R_E$$

$$\frac{kT}{q} = 26 \text{ mV (exakt bei } 28,58^\circ\text{C)}$$

$$\frac{kT}{q} = \ln(10) = 60 \text{ mV (exakt bei } 29,25^\circ\text{C)}$$

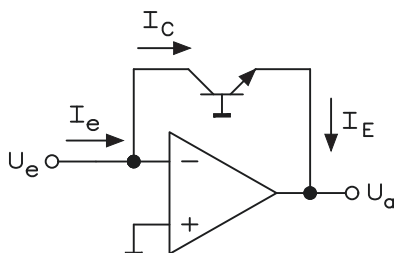
$m$  Skalenfaktorfehler

$k$  Boltzmann-Konstante  $1,36 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

$q$  Elektronenladung  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$I_0$  extrapolierter Strom bei  $U_0 = 0 \text{ V}$

#### ■ Logarithmischer Verstärker mit Transistor



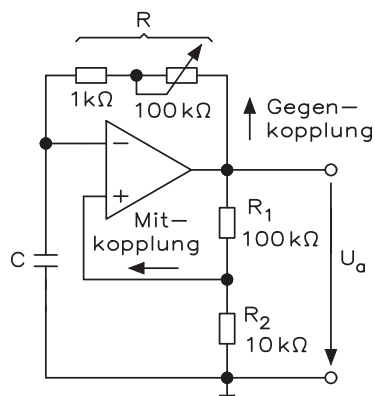
$I_{ES}$  Emitter-Sättigungsstrom

$\alpha_n$  Stromübersetzung

$$U_a = \frac{kT}{q} \cdot \ln \left( \frac{I_e}{I_{ES}} \right) - \frac{kT}{q} \ln(\alpha_n) \text{ gilt, wenn } I_e \gg I_{ES} \text{ ist}$$

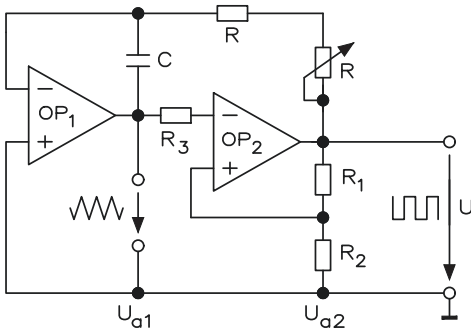
## 13.4 Generatoren mit Operationsverstärker

#### ■ Rechteckgenerator



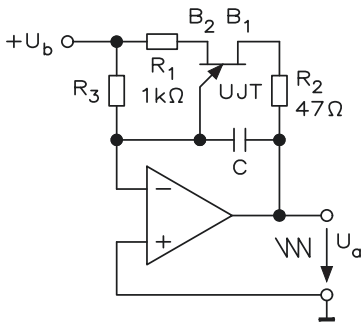
$$f = \frac{1}{2 \cdot R \cdot C \cdot \ln \left( 1 + \frac{2 \cdot R_2}{R_1} \right)}$$

### ■ Dreieck-Rechteck-Generator (Funktionsgenerator)



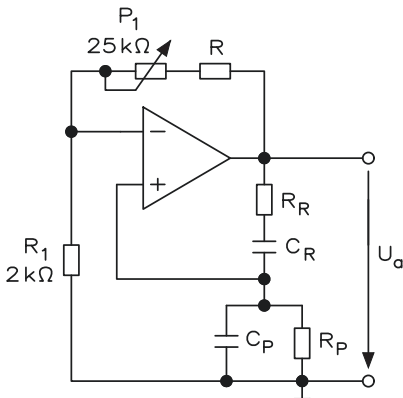
$$f = \frac{1}{4 \cdot R \cdot C} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

### ■ Sägezahngenerator



$$f = \frac{U_b}{(U_b \cdot \eta + 0,7 \text{ V}) \cdot R_1 \cdot C}$$

### ■ Sinusgenerator mit Wien-Robinson-Brücke

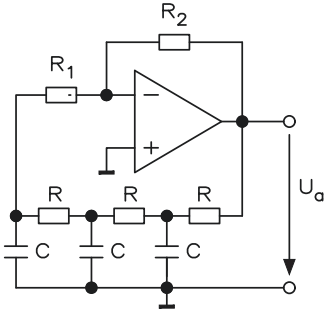


$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

$$R_1 = 2 \cdot n \cdot R$$

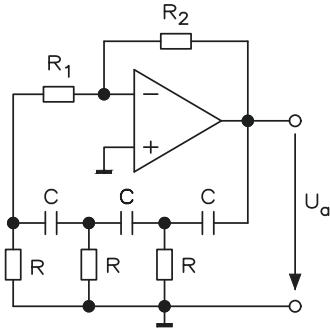
## ■ Sinusgenerator mit Tiefpass-Phasenschieber

$$f = \frac{1}{2,5 \cdot R \cdot C}$$



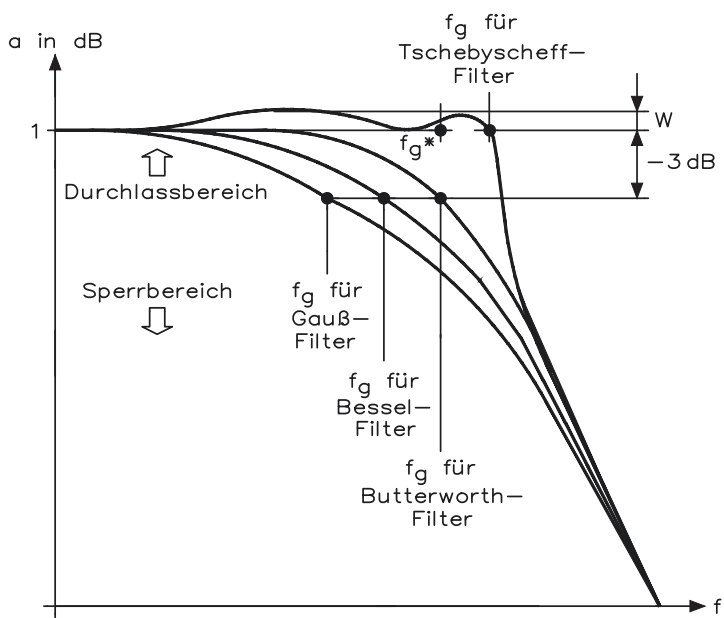
## ■ Sinusgenerator mit Hochpass-Phasenschieber

$$f = \frac{1}{15,4 \cdot R \cdot C}$$



13.5 Aktive Tiefpass- und Hochpass-Filter

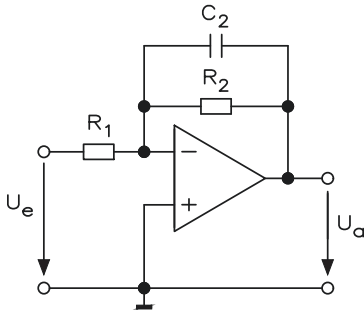
Verlauf der Anstiegsgeschwindigkeit, das Überspringen und die Einstellzeit bei verschiedenen Filterfunktionen der Ordnungszahl  $n$



| Ordnung    | Filterkoeffizienten |        | Filtertyp  |
|------------|---------------------|--------|------------|
|            | $a_1$               | $b_1$  |            |
| 1. Ordnung | 1,0000              | 0,0000 | alle Typen |
| 2. Ordnung | 1,2872              | 0,4142 | KR         |
|            | 1,3617              | 0,6180 | BE         |
|            | 1,4142              | 1,0000 | BU         |
|            | 1,3614              | 1,3827 | T½         |
|            | 1,3022              | 1,5515 | T1         |
|            | 1,1813              | 1,7775 | T2         |
|            | 1,0650              | 1,9305 | T3         |

Anmerkung: KR = Filter (Gauß) mit kritischer Dämpfung  
BE = Bessel-Filter  
BU = Butterworth-Filter  
T½ = Tschebyscheff-Filter mit 0,5-dB-Welligkeit  
T1 = Tschebyscheff-Filter mit 1-dB-Welligkeit  
T2 = Tschebyscheff-Filter mit 2-dB-Welligkeit  
T3 = Tschebyscheff-Filter mit 3-dB-Welligkeit

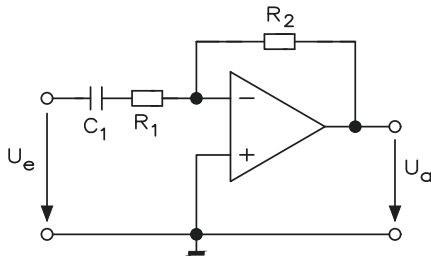
### ■ Aktiver Tiefpass 1. Ordnung



$$R_2 = \frac{a_1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C_2}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{|v_0|}$$

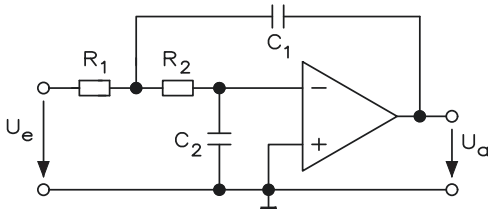
### ■ Aktiver Hochpass 1. Ordnung



$$R_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C_1 \cdot a_1}$$

$$R_2 = R_1 \cdot |v_\infty|$$

### ■ Aktiver Tiefpass 2. Ordnung



$$f_g = \frac{\sqrt{b_1}}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

$$C_1 = \frac{a_1}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

$$C_2 = \frac{3b_1}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot a_1 \cdot R}$$

$$\text{bei } C_1 = C_2 = C \text{ gilt } R = \frac{\sqrt{b_1}}{2 \cdot \pi \cdot C}$$

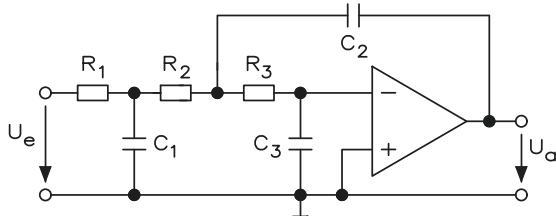
$$\frac{R_1}{R_2} = 2 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}}$$

**Filterkoeffizienten für optimierte Frequenzgänge bis zur 4. Ordnung**

| Ordnung    | Filterkoeffizienten |                |                |                | Filtertyp  |
|------------|---------------------|----------------|----------------|----------------|------------|
|            | a <sub>1</sub>      | b <sub>1</sub> | a <sub>2</sub> | b <sub>2</sub> |            |
| 1. Ordnung | 1,0000              | 0,0000         | 0,0000         | 0,0000         | alle Typen |
| 2. Ordnung | 1,2872              | 0,4142         | 0,0000         | 0,0000         | KR         |
|            | 1,3617              | 0,6180         | 0,0000         | 0,0000         | BE         |
|            | 1,4142              | 1,0000         | 0,0000         | 0,0000         | BU         |
|            | 1,3614              | 1,3827         | 0,0000         | 0,0000         | T½         |
|            | 1,3022              | 1,5515         | 0,0000         | 0,0000         | T1         |
|            | 1,1813              | 1,7775         | 0,0000         | 0,0000         | T2         |
|            | 1,0650              | 1,9305         | 0,0000         | 0,0000         | T3         |
| 3. Ordnung | 0,5098              | 0,0000         | 1,0197         | 0,2599         | KR         |
|            | 0,7560              | 0,0000         | 0,9996         | 0,4722         | BE         |
|            | 1,0000              | 0,0000         | 1,0000         | 1,0000         | BU         |
|            | 1,8636              | 0,0000         | 0,6402         | 1,1931         | T½         |
|            | 2,2156              | 0,0000         | 0,5442         | 1,2057         | T1         |
|            | 2,7994              | 0,0000         | 0,4300         | 1,2036         | T2         |
|            | 3,3496              | 0,0000         | 0,3559         | 1,1923         | T3         |
| 4. Ordnung | 0,8700              | 0,1892         | 0,8700         | 0,1982         | KR         |
|            | 1,3397              | 0,4889         | 0,7743         | 0,3890         | BE         |
|            | 1,8478              | 1,0000         | 0,7654         | 1,0000         | BU         |
|            | 2,6282              | 3,4341         | 0,3648         | 1,1509         | T½         |
|            | 2,5904              | 4,1301         | 0,3039         | 1,1697         | T1         |
|            | 2,4025              | 4,9862         | 0,2374         | 1,1896         | T2         |
|            | 2,1853              | 5,5339         | 0,1964         | 1,2009         | T3         |

Anmerkung: KR = Filter (Gauß) mit kritischer Dämpfung  
 BE = Bessel-Filter  
 BU = Butterworth-Filter  
 T½ = Tschebyscheff-Filter mit 0,5-dB-Welligkeit  
 T1 = Tschebyscheff-Filter mit 1-dB-Welligkeit  
 T2 = Tschebyscheff-Filter mit 2-dB-Welligkeit  
 T3 = Tschebyscheff-Filter mit 3-dB-Welligkeit

### ■ Aktiver Tiefpass 3. Ordnung

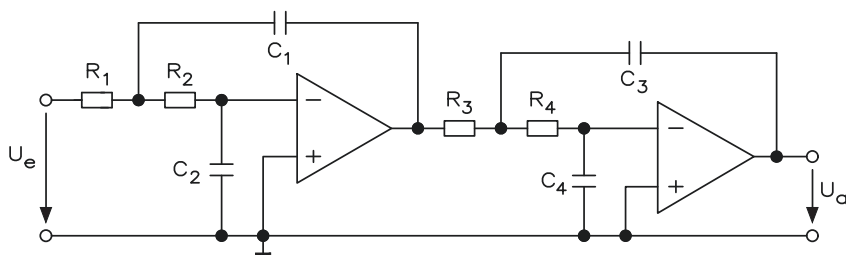


$$C_1 = \frac{a_1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

$$C_2 = \frac{a_2}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

$$C_3 = \frac{3b_2}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot a_2 \cdot R}$$

### ■ Aktiver Tiefpass 4. Ordnung



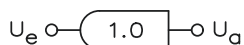
$$C_1 = \frac{a_1}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

$$C_2 = \frac{3b_1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot a_1 \cdot R}$$

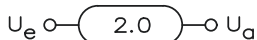
$$C_3 = \frac{a_2}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot R}$$

$$C_4 = \frac{3b_2}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot a_2 \cdot R}$$

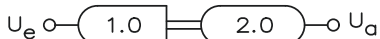
### ■ Filterkoeffizienten für optimierte Frequenzgänge bis zur 10. Ordnung Schaltung einzelner Filter für die Bildung höherer Ordnung



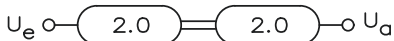
Filter 1.Ordnung  
6 dB/Oktave



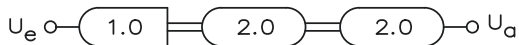
Filter 2.Ordnung  
12 dB/Oktave



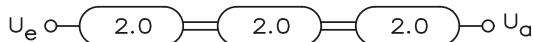
Filter 3.Ordnung  
18 dB/Oktave



Filter 4.Ordnung  
24 dB/Oktave



Filter 5.Ordnung  
30 dB/Oktave



Filter 6.Ordnung  
36 dB/Oktave

### Filterkoeffizienten für optimierte Frequenzgänge nach Gauß, Bessel und Butterworth

| Ordnung | Faktor | Gauß   |        | Bessel |        | Butterworth |        |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------|--------|
| $n$     | $i$    | $a_i$  | $b_i$  | $a_i$  | $b_i$  | $a_i$       | $b_i$  |
| 1       | 1      | 1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0000      | 0,0000 |
| 2       | 1      | 1,2872 | 0,4141 | 1,3617 | 0,6180 | 1,4142      | 1,0000 |
| 3       | 1      | 0,5098 | 0,0000 | 0,7560 | 0,0000 | 1,0000      | 0,0000 |
|         | 2      | 1,0197 | 0,2599 | 0,9996 | 0,4772 | 1,0000      | 1,0000 |
| 4       | 1      | 0,8700 | 0,1892 | 1,3397 | 0,4889 | 1,8478      | 1,0000 |
|         | 2      | 0,8700 | 0,1892 | 0,7743 | 0,3890 | 0,7654      | 1,0000 |
| 5       | 1      | 0,3856 | 0,0000 | 0,6656 | 0,0000 | 1,0000      | 0,0000 |
|         | 2      | 0,7712 | 0,1487 | 1,1402 | 0,4128 | 1,6180      | 1,0000 |
|         | 3      | 0,7712 | 0,1487 | 0,6216 | 0,3245 | 0,6180      | 1,0000 |
| 6       | 1      | 0,6999 | 0,1225 | 1,2217 | 0,3887 | 1,9319      | 1,0000 |
|         | 2      | 0,6999 | 0,1225 | 0,9686 | 0,3505 | 1,4142      | 1,0000 |
|         | 3      | 0,6999 | 0,1225 | 0,5131 | 0,2756 | 0,5176      | 1,0000 |
| 7       | 1      | 0,3226 | 0,0000 | 0,5937 | 0,0000 | 1,0000      | 0,0000 |
|         | 2      | 0,6453 | 0,1041 | 1,0944 | 0,3395 | 1,8019      | 1,0000 |
|         | 3      | 0,6453 | 0,1041 | 0,8304 | 0,3011 | 1,2470      | 1,0000 |
|         | 4      | 0,6453 | 0,1041 | 0,4332 | 0,2381 | 0,4450      | 1,0000 |
| 8       | 1      | 0,6017 | 0,0905 | 1,1121 | 0,3162 | 1,9616      | 1,0000 |
|         | 2      | 0,6017 | 0,0905 | 0,9754 | 0,2979 | 1,6629      | 1,0000 |
|         | 3      | 0,6017 | 0,0905 | 0,7202 | 0,2621 | 1,1111      | 1,0000 |
|         | 4      | 0,6017 | 0,0905 | 0,3728 | 0,2087 | 0,3902      | 1,0000 |
| 9       | 1      | 0,2829 | 0,0000 | 0,5386 | 0,0000 | 1,0000      | 0,0000 |
|         | 2      | 0,5659 | 0,0801 | 1,0244 | 0,2834 | 1,8794      | 1,0000 |
|         | 3      | 0,5659 | 0,0801 | 0,8710 | 0,2636 | 1,5321      | 1,0000 |
|         | 4      | 0,5659 | 0,0801 | 0,6320 | 0,2311 | 1,0000      | 1,0000 |
|         | 5      | 0,5659 | 0,0801 | 0,3257 | 0,1854 | 0,3473      | 1,0000 |
| 10      | 1      | 0,5358 | 0,0718 | 1,0215 | 0,2650 | 1,9616      | 1,0000 |
|         | 2      | 0,5358 | 0,0718 | 0,9393 | 0,2549 | 1,7820      | 1,0000 |
|         | 3      | 0,5358 | 0,0718 | 0,7815 | 0,2351 | 1,4142      | 1,0000 |
|         | 4      | 0,5358 | 0,0718 | 0,5604 | 0,2059 | 0,9080      | 1,0000 |
|         | 5      | 0,5358 | 0,0718 | 0,2883 | 0,1665 | 0,3129      | 1,0000 |

**Filterkoeffizienten für optimierte Frequenzgänge nach Tschebyscheff  
mit den entsprechenden Welligkeiten im Durchlassbereich**

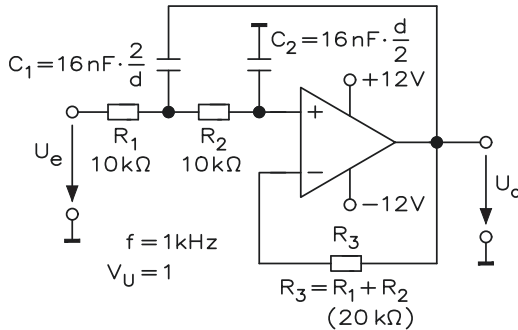
| Ordnung | Faktor | Tschebyscheff-Filter mit einer Welligkeit von |         |         |         |         |         |         |         |
|---------|--------|-----------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|         |        | $w = 0,5$                                     |         | $w = 1$ |         | $w = 2$ |         | $w = 3$ |         |
| $n$     | $i$    | $a_i$                                         | $b_i$   | $a_i$   | $b_i$   | $a_i$   | $b_i$   | $a_i$   | $b_i$   |
| 1       | 1      | 1,0000                                        | 0,0000  | 1,0000  | 0,0000  | 1,0000  | 0,0000  | 1,0000  | 0,0000  |
| 2       | 1      | 1,3614                                        | 1,3827  | 1,3022  | 1,5515  | 1,1813  | 1,7775  | 1,0650  | 1,9305  |
| 3       | 1      | 1,8636                                        | 0,0000  | 2,2156  | 0,0000  | 2,7994  | 0,0000  | 3,3496  | 0,0000  |
|         | 2      | 0,6402                                        | 1,1931  | 0,5442  | 1,2057  | 0,4300  | 1,2036  | 0,3559  | 1,1923  |
| 4       | 1      | 2,6282                                        | 3,4341  | 2,5904  | 4,1301  | 2,4025  | 4,9862  | 2,1853  | 5,5339  |
|         | 2      | 0,3648                                        | 1,1509  | 0,3039  | 1,1697  | 0,2374  | 1,1896  | 0,1964  | 1,2009  |
| 5       | 1      | 2,9235                                        | 0,0000  | 3,5711  | 0,0000  | 4,6345  | 0,0000  | 5,6334  | 0,0000  |
|         | 2      | 1,3025                                        | 2,3534  | 1,1280  | 2,4896  | 0,9090  | 2,6036  | 0,7620  | 2,6530  |
|         | 3      | 0,2290                                        | 1,0833  | 0,1872  | 1,0814  | 0,1434  | 1,0750  | 0,1172  | 1,0686  |
| 6       | 1      | 3,8645                                        | 6,9797  | 3,8437  | 8,5529  | 3,5880  | 10,4648 | 3,2721  | 11,6773 |
|         | 2      | 0,7528                                        | 1,8573  | 0,6292  | 1,9124  | 0,4925  | 1,9622  | 0,4077  | 1,9873  |
|         | 3      | 0,1589                                        | 1,0711  | 0,1296  | 1,0766  | 0,0995  | 1,0826  | 0,0815  | 1,0861  |
| 7       | 1      | 4,0211                                        | 0,0000  | 4,9520  | 0,0000  | 6,4760  | 0,0000  | 7,9064  | 0,0000  |
|         | 2      | 1,8729                                        | 4,1795  | 1,6338  | 4,4899  | 1,3258  | 4,7649  | 1,1159  | 4,8963  |
|         | 3      | 0,4861                                        | 1,5676  | 0,3987  | 1,5834  | 0,3067  | 1,5927  | 0,2515  | 1,5944  |
|         | 4      | 0,1156                                        | 1,0443  | 0,0937  | 1,0423  | 0,0714  | 1,0384  | 0,0582  | 1,0348  |
| 8       | 1      | 5,1117                                        | 11,9607 | 5,1019  | 14,7608 | 4,7743  | 18,1510 | 4,3583  | 20,2948 |
|         | 2      | 1,0639                                        | 2,9365  | 0,8916  | 3,0426  | 0,6991  | 3,1353  | 0,5791  | 3,1808  |
|         | 3      | 0,3439                                        | 1,4206  | 0,2806  | 1,4334  | 0,2153  | 1,4449  | 0,1765  | 1,4507  |
|         | 4      | 0,0885                                        | 1,0407  | 0,0717  | 1,0432  | 0,0547  | 1,0461  | 0,0448  | 1,0478  |
| 9       | 1      | 5,1318                                        | 0,0000  | 6,3415  | 0,0000  | 8,3198  | 0,0000  | 10,1759 | 0,0000  |
|         | 2      | 2,4283                                        | 6,6307  | 2,1252  | 7,1711  | 1,7299  | 7,6580  | 1,4585  | 7,8971  |
|         | 3      | 0,6839                                        | 2,2908  | 0,5624  | 2,3278  | 0,4337  | 2,3549  | 0,3561  | 2,3651  |
|         | 4      | 0,2559                                        | 1,3133  | 0,2074  | 1,3166  | 0,1583  | 1,3174  | 0,1294  | 1,3165  |
|         | 5      | 0,0695                                        | 1,0272  | 0,0562  | 1,0258  | 0,0427  | 1,0232  | 0,0348  | 1,0210  |
| 10      | 1      | 6,3648                                        | 18,3695 | 6,2634  | 22,7468 | 5,9618  | 28,0376 | 5,4449  | 31,3788 |
|         | 2      | 1,3582                                        | 4,3453  | 1,1399  | 4,5167  | 0,8947  | 4,6644  | 0,7414  | 4,7363  |
|         | 3      | 0,4822                                        | 1,9440  | 0,3939  | 1,9665  | 0,3023  | 1,9858  | 0,2479  | 1,9952  |
|         | 4      | 0,1994                                        | 1,2520  | 0,1616  | 1,2569  | 0,1233  | 1,2614  | 0,1008  | 1,2638  |
|         | 5      | 0,0563                                        | 1,0263  | 0,0455  | 1,0277  | 0,0347  | 1,0294  | 0,0283  | 1,0304  |

Für ein Tiefpassfilter 5. Ordnung gilt:

$$R_1 = \frac{a_1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C} \quad R_2 = \frac{a_2}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C} \quad R_3 = \frac{3 \cdot b_1}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C \cdot a_2}$$

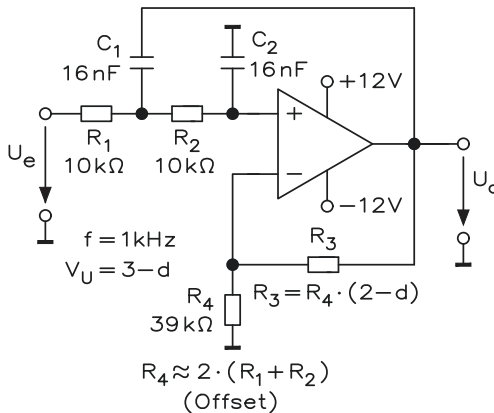
$$R_4 = \frac{a_3}{4 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C} \quad R_5 = \frac{3 \cdot b_3}{2 \cdot \pi \cdot f_g \cdot C \cdot a_3}$$

### Tiefpassfilter 2. Ordnung



#### ■ Tiefpassfilter 2. Ordnung mit ungleichen Bauteilen und $f_g = 1 \text{ kHz}$

Die Berechnungen für das Tiefpassfilter 2. Ordnung mit ungleichen Bauteilen wurde bereits gezeigt.



#### ■ Tiefpassfilter 2. Ordnung mit gleichen Bauteilen und $f_g = 1 \text{ kHz}$

$$V_u = 1 + \frac{R_3}{R_4} \quad \text{bei } C_1 = C_2 \text{ und } V_u + d \approx 3 \quad d \text{ Dämpfungswert}$$

$$V_u = 3 - d = 1 + \frac{R_3}{R_4} \quad \text{entsprechend } 2 - d = 1 + \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und } R_3 = R_4 \cdot (2 - d)$$

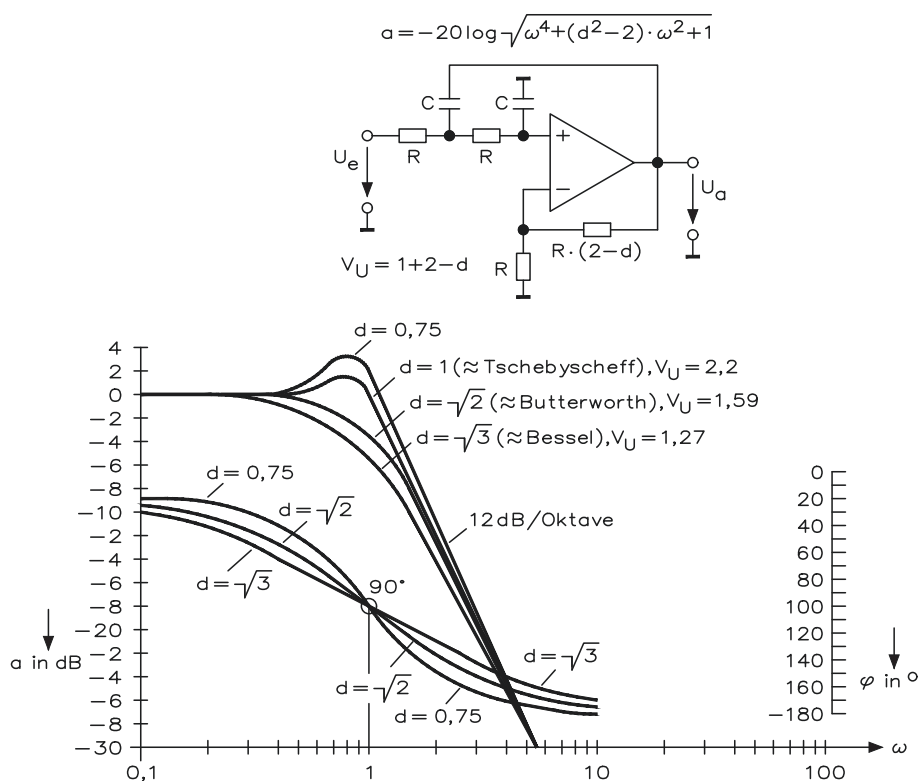
Der Phasenwinkel ist für  $\varphi < 90^\circ$ :  $\varphi = -\arctan \frac{d \cdot \omega}{1 - \omega^2}$  und

$$\varphi > 90^\circ: \varphi = \left( 180^\circ + \arctan \frac{d \cdot \omega}{1 - \omega^2} \right).$$

Der Amplitudenverlauf ist gegeben durch  $a = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + d^2 \cdot \omega^2}}$

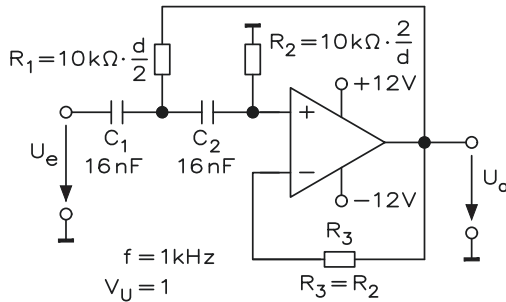
oder in dB  $a = 20 \cdot \lg \cdot \sqrt{\omega^4 + (d^2 - 2) \cdot \omega^2 + 1}$ .

■ **Amplituden- und Phasenverlauf beim Hochpass 2. Ordnung mit unterschiedlicher Dämpfung**



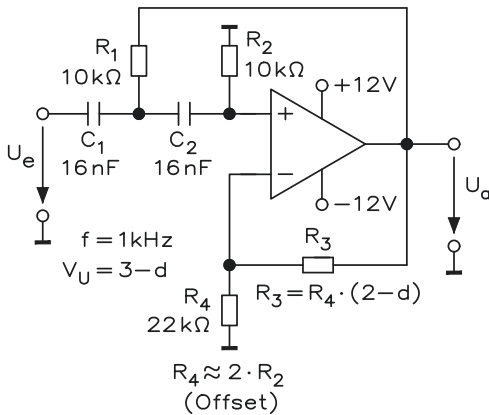
In der auf  $\omega = 1$  normierten Frequenzachse lässt sich bei einem gegebenen  $d$  die Amplitudenspitze errechnen mit  $a' = -20 \cdot \lg \frac{d \cdot \sqrt{4 - d^2}}{2}$  und der Frequenz  $\omega' = \sqrt{1 - \frac{d^2}{2}}$ .

### Hochpassfilter 2. Ordnung



Hochpassfilter 2. Ordnung mit ungleichen Bauteilen und  $f_g = 1 \text{ kHz}$

Die Berechnungen für das Hochpassfilter 2. Ordnung mit ungleichen Bauteilen wurde bereits gezeigt.



Hochpassfilter 2. Ordnung mit gleichen Bauteilen und  $f_g = 1 \text{ kHz}$

Der Amplitudenverlauf ist gegeben durch  $a = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega^4} + \frac{d^2 - 1}{\omega^2} + 1}}$

oder in dB  $a = 20 \cdot \lg \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega^4} + \frac{(d^2 - 2)}{\omega^2} + 1}$ .

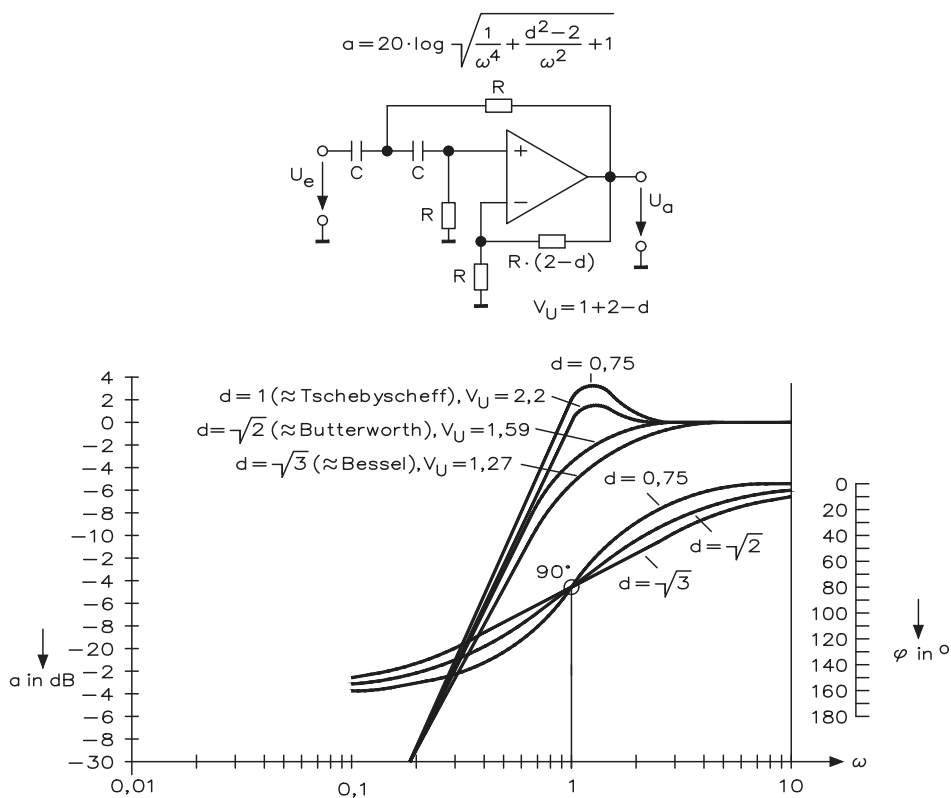
Der Phasenverlauf für  $\omega > 1$  ist  $\varphi = -\arctan \frac{d/\omega}{1-\omega^2}$  und für  $\omega < 1$  ist

$$\omega = 180^\circ + \arctan \frac{d/\omega}{1-\frac{1}{\omega^2}}.$$

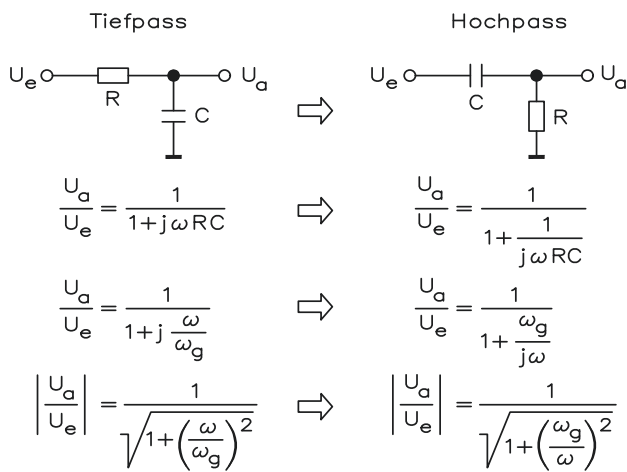
Der Spitzenwert der Welligkeit ist  $a' = -20 \cdot \lg \frac{d \cdot \sqrt{4-d^2}}{2}$  und die Frequenz

$$\omega' = \sqrt{1 - \frac{d^2}{2}}.$$

■ **Amplituden- und Phasenverlauf beim Hochpass 2. Ordnung mit unterschiedlicher Dämpfung**



13.6 Umwandlung von Tief- in Hochpassfilter

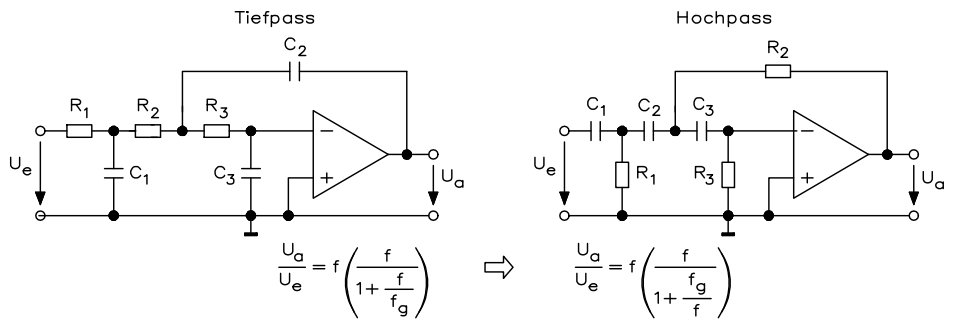


| Tiefpass      | Hochpass      |
|---------------|---------------|
| $j\omega$     | $1/j\omega$   |
| $V_0$         | $V_\infty$    |
| $R^* = 1/C^*$ | $C^* = 1/R^*$ |
| $C^* = 1/R^*$ | $R^* = 1/C^*$ |

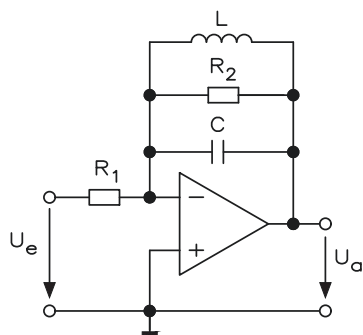
Normierter Widerstand:  $R^* = R/R_B$ ;  $R_B$  (Bezugswiderstand)

Normierte Kapazität:  $C^* = \omega_B \cdot R_B \cdot C_B$ ;  $\omega_B = 2 \cdot \pi \cdot f_B$  (Bezugsfrequenz)

Die Filterkoeffizienten  $a$  und  $b$  der Hochpassfilter sind identisch mit denen der Tiefpassfilter.



### 13.7 Selektiver Bandpass 2. Ordnung mit Schwingkreis



$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

$$Q = R_{res} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

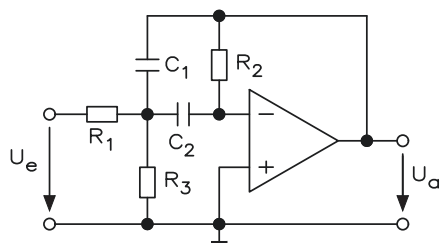
$$\Delta f = B = \frac{Q}{2 \cdot R_2 \cdot C}$$

$f_r$  Resonanzfrequenz

$Q$  Güte

$\Delta f$  Bandbreite

### 13.8 Selektive Bandsperre 2. Ordnung



$f_m$  Mittenfrequenz

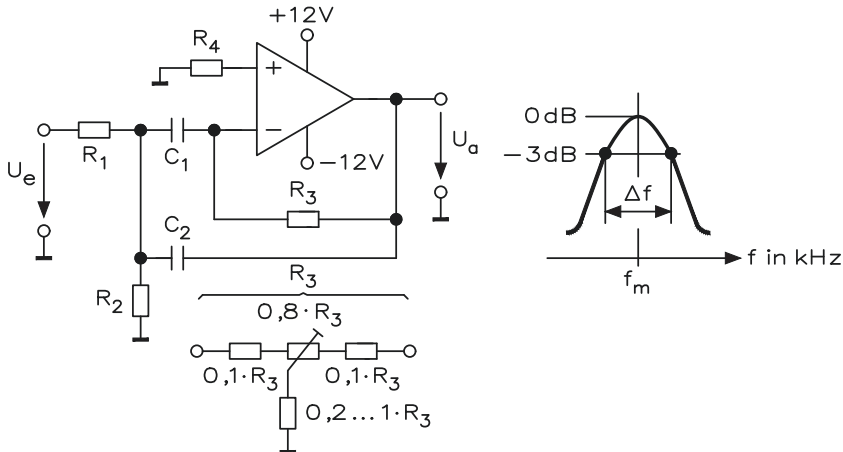
$$f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}}}$$

$$V_m = -\frac{R_1}{2 \cdot R_2} \quad Q = \pi \cdot f_m \cdot R_1 \cdot C \quad \Delta f = B = \frac{1}{\pi \cdot R_1 \cdot C}$$

### Aktives Bandpassfilter 2. Ordnung

$$V_U = 0,2 \cdot Q \text{ mit } R_1$$

$$V_U = 2 \cdot Q \text{ ohne } R_2$$



Bandpassfilter 2. Ordnung (normiert für 1 kHz) mit

$$V_U = 0,2 \cdot Q \text{ mit } R_1 \quad R_3 \approx R_4$$

$$V_U = 2 \cdot Q \text{ ohne } R_2 \quad C = C_1 = C_2 = 15,9 \text{ nF}$$

Normiert auf  $f_g = 1 \text{ kHz}$ :

$$\text{ohne } R_2; \quad R_1 = \frac{10 \text{ k}\Omega}{2 \cdot Q}; \quad R_3 = 2 \cdot 10 \text{ k}\Omega \cdot Q$$

$$\text{mit } R_2; \quad R_1 = \frac{100 \text{ k}\Omega}{2 \cdot Q}; \quad R_2 = \frac{11 \text{ k}\Omega}{2 \cdot Q}; \quad R_3 = 2 \cdot 10 \text{ k}\Omega \cdot Q$$

Amplitudenverlauf: 
$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega}\right)^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{U_a}{U_e} = -20 \cdot \lg \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega}\right)^2}$$

Phasenverlauf: 
$$\varphi = -\arctan \left[ Q^2 \cdot \left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega}\right)^2 \right]$$

Aktives Bandpassfilter mit beliebigen  $V_U$  und  $Q$ , wenn  $Q \approx 5$ , wählbar zwischen  $Q = 1 \dots 20$ . Ist  $Q$  bekannt, lassen sich die Widerstände berechnen:

$$R_1 = \frac{Q}{V_U \cdot \omega \cdot C} = \frac{R_3}{2 \cdot V_U} \text{ mit } V_U = \frac{R_3}{2 \cdot R_1} = \frac{U_a}{U_e} \text{ und } C = \frac{0,16 \cdot Q}{f_M \cdot R_1 \cdot V_U}$$

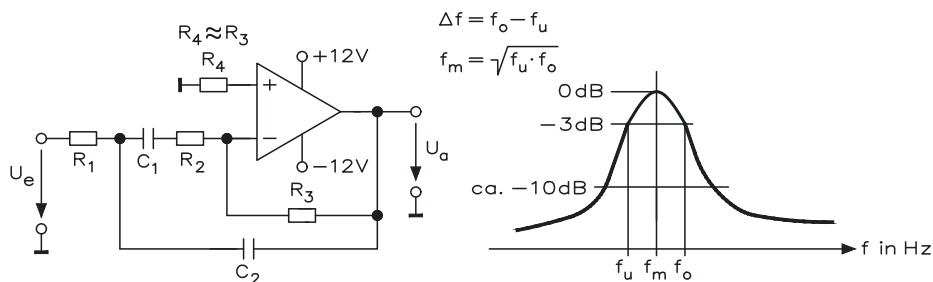
Bei  $f_m$  ist 
$$R_2 = \frac{Q}{\omega \cdot C \cdot (2 \cdot Q^2 - V_U)} = \frac{V_U \cdot R_1}{2 \cdot Q^2 - V_U} = \frac{R_3}{4 \cdot Q^2 - 2 \cdot V_U} = \frac{R_1 \cdot R_3}{4 \cdot Q^2 \cdot R_1 - R_3}$$

$$R_3 = \frac{2 \cdot Q}{\omega \cdot C} = \frac{Q}{\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\pi \cdot \Delta f \cdot C} = 2 \cdot V_U \cdot R_1$$

Hohe  $Q$ -Werte erfordern hohe Werte für die Verstärkung  $V_U$ . Die Werte für  $R_1$  und  $R_3$  liegen im Bereich von 1 k $\Omega$  bis 150 k $\Omega$ . Werden diese Werte überschritten, ist es sinnvoll,  $V_U$  oder  $Q$  zu verringern.

Mit  $Q = \frac{f_m}{\Delta f} = \frac{1}{d}$  wird auch  $Q = \pi \cdot f_m \cdot C \cdot R_3 = \omega \cdot C \cdot R_1 \cdot V_U = 0,5 \cdot \omega \cdot R_2 \cdot C$ .

### 13.9 Sallen-Key-Bandpass 2. Ordnung



Sallen-Key-Bandpass 2. Ordnung (normiert für  $f_m = 1$  kHz) mit

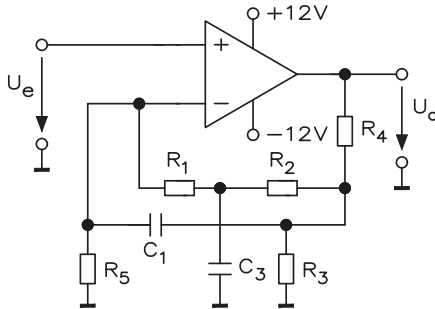
$$C_1 = C_2 = \frac{15,9 \text{ nF}}{3 \cdot Q}; \quad R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega; \quad R_3 = 10 \text{ k}\Omega \cdot (9 \cdot Q^2 - 1)$$

Es ergibt sich eine geänderte Bandpassschaltung durch eine erhöhte Gegenkopplung ( $R_2$ ) mit dem Nachteil, dass die Verstärkung bei  $f_m$  mindestens  $V_U > 90 \cdot Q^2$  erreichen muss.

$$Q = \frac{f_m}{\Delta f} = 10;$$

$$R_1 = \frac{Q}{V_U \cdot \omega \cdot C} \quad R_2 = \frac{V_U - R_1}{2 \cdot Q^2 - V_U} \quad R_3 = 2 \cdot V_U \cdot R_1$$

### Bandpass mit Doppel-T-Filter 3. Ordnung



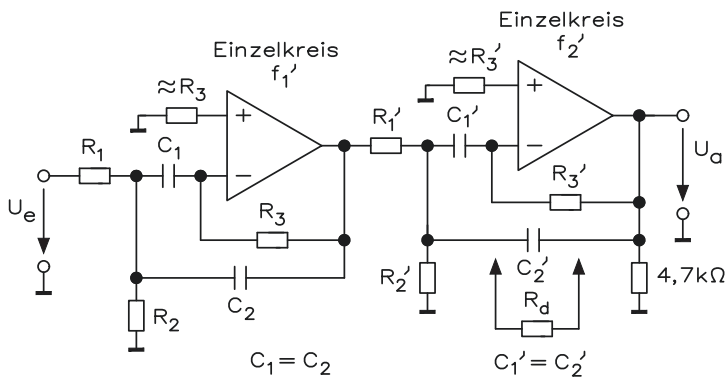
$$R_1 = R_2 = R; \quad 2 \cdot C = C_3; \quad R_4 = 390 \, \Omega \text{ bis } 12 \, \text{k}\Omega; \quad R_4 = 2,2 \, \text{k}\Omega \rightarrow Q = 75$$

$$C_1 = C_2 = C; \quad 0,5 \cdot R = R_3; \quad R_5 = 390 \, \Omega \text{ bis } 25 \, \text{k}\Omega; \quad R_5 = 1,5 \, \text{k}\Omega \rightarrow V_U = 2000$$

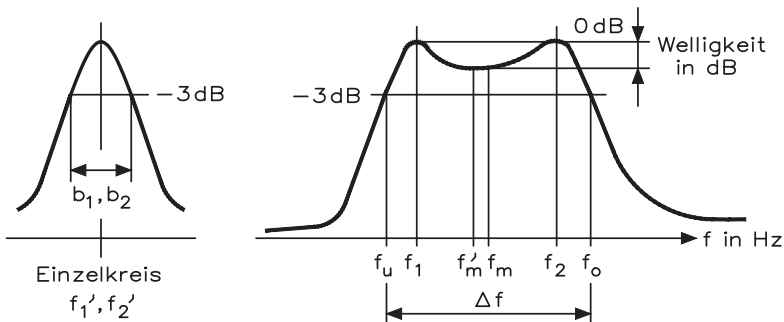
$$R_1 = R_2 = R > 1 \, \text{k}\Omega < 1 \, \text{M}\Omega \quad R_3 = 0,5 \cdot R$$

$$C_1 = C_2 = C > 100 \, \text{pF} < 1 \, \mu\text{F} \quad C_3 = 0,5 \cdot C \quad f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

### Bandpass mit Doppel-T-Filter 4. Ordnung



$R_d$  (Dämpfung),  $R_2$  und  $R_2'$  (Frequenz)



$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 & \Delta f &= f_o - f_u \\
 f'_m &= \sqrt{f_u \cdot f_o} & f_m &= \frac{f_1 + f_2}{2} \\
 f'_1 &= \frac{f_1}{1,015} & f'_2 &= f_2 \cdot 1,015
 \end{aligned}$$

Aus der Berechnung des Bandpassfilters 2. Ordnung wird  $\omega = f$  sowie  $f_1$  für die untere Kreisfrequenz und  $f_2$  für die obere Kreisfrequenz gesetzt, gilt für  $f_1 = f_2$  allgemein:

$$\frac{U_a}{U_e} = -20 \cdot \lg \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left( \frac{f_1^2 - 1}{f_1} \right)^2} \cdot \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left( \frac{f_2^2 - 1}{f_2} \right)^2}$$

und mit  $f_1 = f_2 = f$  sowie  $Q_1 = Q_2$

$$\frac{U_a}{U_e} = -20 \cdot \lg \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left( \frac{f^2 - 1}{f} \right)^2}.$$

Wird der Frequenzersatz mit  $a$  berücksichtigt, so ist

$$\frac{U_a}{U_e} = -20 \cdot \lg \underbrace{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left( \frac{f_1^2 \cdot a^2 - 1}{f_1 \cdot a} \right)^2}}_{\text{höhere Frequenz}} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left( \frac{f_2^2 / a^2 - 1}{f_2 / a} \right)^2}}_{\text{tiefere Frequenz}}$$

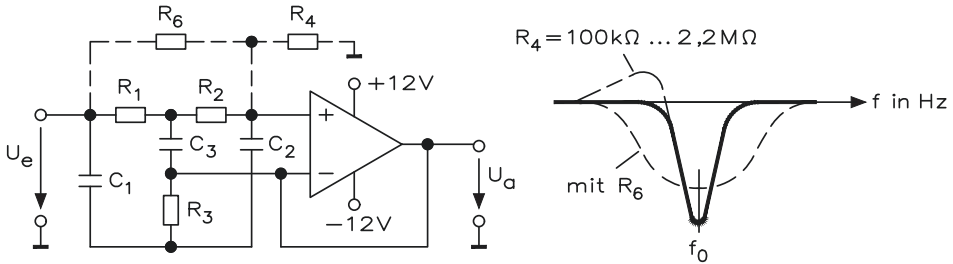
Der Zusammenhang zwischen der Bandbreite  $\Delta f_1$  und der  $\Delta f_2$  der Einzelkreise mit den zugehörigen Frequenzen  $f'_1$  und  $f'_2$  ist mit der Güte  $Q$  und der Bandbreite  $\Delta f$  der Summenkurve wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{Höckerfrequenzen: } f_1 &\approx f_m - 0,363 \cdot \Delta f = f_m \left( 1 - \frac{0,363}{Q} \right); & f_m &= \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{f'_1 + f'_2}{2} \\
 f_2 &\approx f_m + 0,363 \cdot \Delta f = f_m \left( 1 + \frac{0,363}{Q} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Summengüte: } Q = \frac{0,32 \cdot f_m}{\Delta f_m}; \quad \Delta f_m = \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{Q}$$

$$\text{Einzelkreise: } \Delta f_1 = \frac{0,312 \cdot f'_1}{Q}; \quad \Delta f_2 = \frac{0,312 \cdot f'_2}{Q}; \quad f'_1 < f'_2$$

### 13.10 Notch-Filter



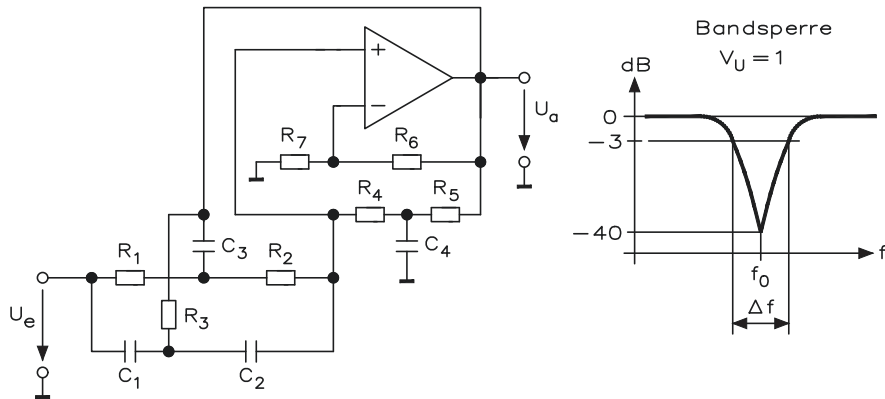
Ein Notch-Filter wird benötigt, um aus einem Frequenzgebiet einen Teilbereich zu dämpfen.

$$R_1 = R_2 = R; \quad C_1 = C_2 = C; \quad 2 \cdot C = C_3; \quad 0,5 \cdot R = R_3$$

Die Sperrfrequenz ist  $f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$ .

Durch das Bootstrapping ergibt sich ein Überspringen.

#### Notch-Filter mit einstellbarer Verstärkung



$$R_1 = R_2 > 1\text{ k}\Omega < 500\text{ k}\Omega, \quad C_1 = C_2 = C > 2 \cdot 100\text{ pF} < 0,5\text{ }\mu\text{F}$$

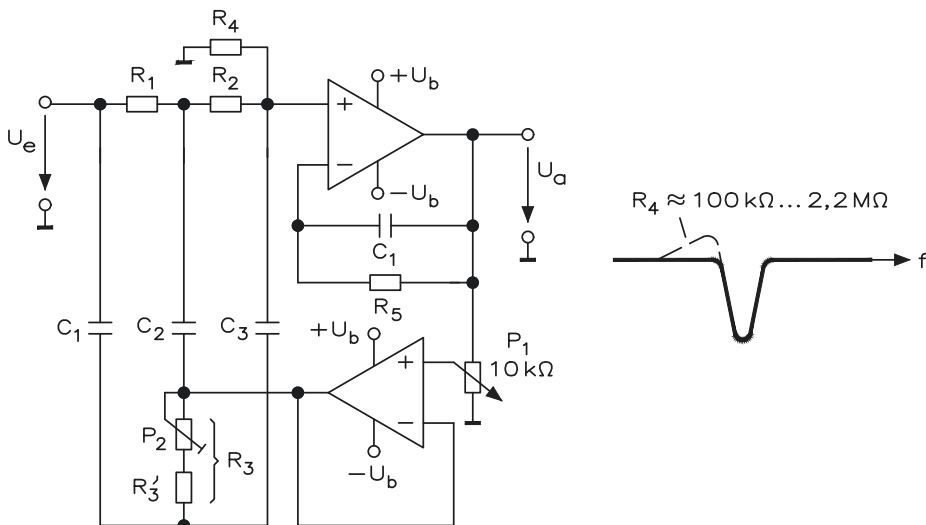
$$R_1 = R_2 \text{ wird } R_3 = 0,5 \cdot R_1 \text{ und } C_1 = C_2 \text{ wird } C_3 = 2 \cdot C$$

Die Güte wird als  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  ( $-3$  dB für  $\Delta f$ ).

$$\text{Es wird gewählt: } R_4 \approx R_5 = \frac{4 \cdot Q}{\omega \cdot C_3} \text{ und } C_4 = \frac{C_3}{2 \cdot Q}$$

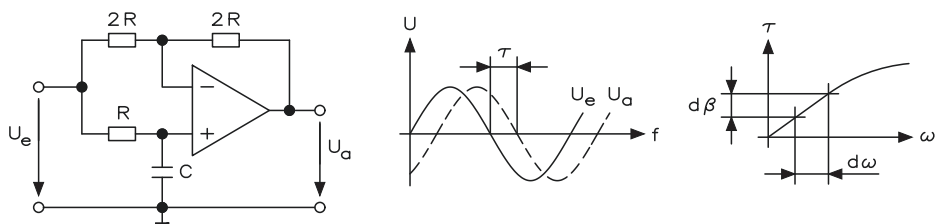
$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot R} \quad R_1 \approx R_5 = \frac{4 \cdot Q}{\omega_0 \cdot C_3} \quad C_4 = \frac{C_3}{2 \cdot Q}$$

### Notch-Filter (Sperrfilter) mit einstellbarer Dämpfung



Der Widerstand  $R_3 = 100\%$  wird aufgeteilt in  $\approx 0,8 \cdot R'_3$  und  $1,4 \cdot P$ . Die Güte lässt sich im Bereich von  $Q \approx 0,25 \dots 15$  ändern.

### 13.11 Allpassfilter



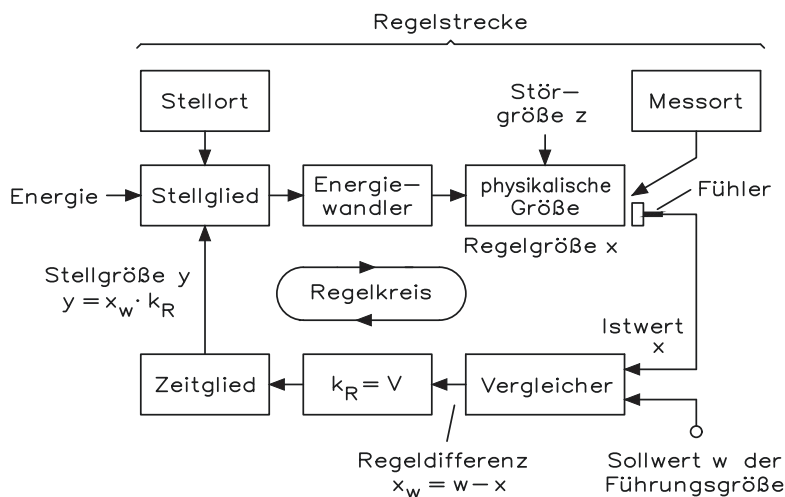
$$\beta = 2 \cdot \arctan \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} - 180^\circ$$

$$\tau = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{2 \cdot R \cdot C}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} = \frac{2 / \omega_g}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}, \text{ wobei } \omega_g = \frac{1}{R \cdot C}$$

$\tau$  Verzögerungszeit  
 $\beta$  Übertragungswinkel

- Die zu regelnde Größe wird laufend erfasst.
- Die zu regelnde Größe wird mit der Führungsgröße verglichen.
- Die zu regelnde Größe wird durch Eingriffe an die Führungsgröße angeglichen.

## 14.1 Regelkreis

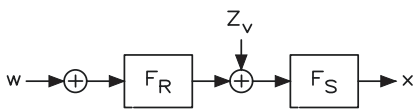


Ein Regelkreis befindet sich in einem geschlossenen System (Wirkungsablauf) und hat eine Regelgröße  $x$  bzw. eine Führungsgröße  $w$ . Die Regelgröße  $x$  ist der Sollwert, und soll von der Regelstrecke konstant gehalten oder nach einem vorgegebenen Programm beeinflusst werden. Die Führungsgröße  $w$  wird von außen zugeführt und die Regelung

beeinflusst diese Größe nicht, und die Regelgröße folgt in der vorgegebenen Abhängigkeit. Der Regler ist die elektronische Schaltung, die über das Stellglied aufgabengemäß auf die Strecke einwirkt. Der Istwert der Regelgröße ist der tatsächliche Wert im betrachteten Zeitpunkt. Die Regelabweichung findet zwischen der Regelgröße und der Führungsgröße statt. Der Stellbereich ist der Bereich, innerhalb dessen die Stellgröße einstellbar ist. Die Störgröße ist die von außen auf den Regelkreis einwirkende Störung, die die Regelgröße mehr oder weniger beeinträchtigt.

## 14.2 Verhalten von Regelkreisen

### Offener Regelkreis



$$F_0 = F_S \cdot F_R$$

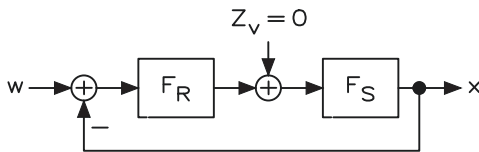
$F_0$  Open-Loop-Funktion

$F_S$  Funktion der Regelstrecke

$F_R$  Funktion des Reglers

Die „Open-Loop-Funktion“ wird bei offenem Regelkreis bestimmt.

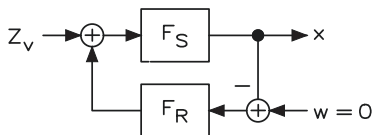
### Führungsverhalten



Betrachtet man das Verhalten eines geschlossenen Regelkreises aus Sicht der Führungsgröße  $w$ , wird dieses Verhalten als Führungsverhalten  $F_w$  bezeichnet. Dabei wird angenommen, dass die Versorgungsstörgröße  $Z_v = 0$  ist.

$$F_w = \frac{F_S \cdot F_R}{1 + (F_S \cdot F_R)} \quad F_w = \frac{F_0}{1 + F_0}$$

### Störgrößenverhalten



Betrachtet man das Verhalten eines geschlossenen Regelkreises aus Sicht der Störgröße  $Z_v$ , wird dieses Verhalten als Störgrößenverhalten  $F_{Z_v}$  bezeichnet. Dabei wird angenommen, dass die Führungsgröße  $w = 0$  ist.

$$F_{Z_v} = \frac{F_S}{1 + (F_S \cdot F_R)} \quad F_{Z_v} = \frac{F_S}{1 + F_0}$$

Ein Regelkreis schwingt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Das rückgekoppelte Signal hat eine Phasendrehung von  $180^\circ$  zur Führungsgröße  $w$  und es tritt eine Gegenkopplung auf.
- Die Amplitude des rückgekoppelten Signals gleich oder größer als die Amplitude der Führungsgröße  $w$  ist.

Die bleibende Regelabweichung stellt die Abweichung der Regelgröße (Ist-Wert)  $x$  von der Führungsgröße (Sollwert)  $w$  dar. Diese Regelgröße wird im eingeschwungenen Zustand des Regelkreises ermittelt, also bei  $t \rightarrow \infty$ , womit folgt, dass die Kreisfrequenz  $\omega = 0$  wird.

Die bleibende Regelabweichung bezogen auf die Führungsgröße  $w$  ist

$$e_{bw} = \frac{w}{1 + (F_S \cdot F_R)} \quad e_{bw} = \frac{w}{1 + F_0}$$

Setzt man  $j\omega = 0$  ein, erhält man für  $e_{bw}$  einen konkreten Wert.

Die bleibende Regelabweichung bezogen auf die Störgröße  $Z_v$  ist

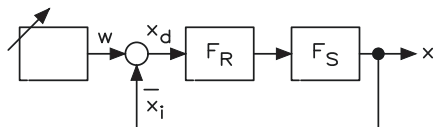
$$e_{bZv} = \frac{F_S \cdot Z_v}{1 + (F_S \cdot F_R)} \quad e_{bZv} = \frac{F_S \cdot Z_v}{1 + F_0}$$

Setzt man  $j\omega = 0$  ein, erhält man für  $e_{bZv}$  einen konkreten Wert.

Die gesamte Regelabweichung ist

$$\begin{aligned} e_b &= e_{bw} - e_{bZv} \quad \text{gesamte bleibende Regelabweichung} \\ e_{bw} &\quad \text{bleibende Regelabweichung bezogen auf die Führungsgröße } w \\ e_{bZv} &\quad \text{bleibende Regelabweichung bezogen auf die Störgröße } Z_v \end{aligned}$$

### Festwertregelung



Eine Festwertregelung versucht, die Regelgröße  $x$  (Istwert) möglichst auf einen fest vorgegebenen Führungsvalue  $w$  (Sollwert) zu halten.

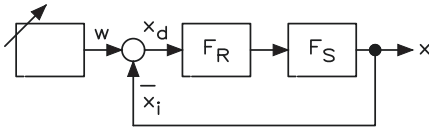
Eine Folgeregelung versucht, die Regelgröße  $x$  (Istwert) möglichst genau dem zeitlichen Verlauf der Führungsgröße  $w$  (Sollwert) nachzuführen. Man unterscheidet zwischen der Nachlauf- und der Verhältnisregelung.

Aufgabe der Nachlaufregelung ist es, den Verlauf der Regelgröße  $x$  (Istwert) dem vorgegebenen zeitlichen Verlauf der Führungsgröße  $w$  (Sollwert) anzupassen.

Aufgabe der Verhältnisregelung ist es, eine bestimmte Prozessgröße  $x_2$  in einem bestimmten Verhältnis  $S_v$  anzupassen

$$w = S_v \cdot x_2$$

## Einfachregelkreis



Wenn die Regelgröße  $x$  von der Führungsgröße  $w$  abweicht, wird eine Regeldifferenz  $x_d$  ermittelt, aus der der Regler eine Stellgröße  $y$  bildet, die die Regelstrecke so beeinflusst, dass die Regelgröße die Führungsgröße  $w$  wieder anpasst. Die Übertragungsfunktion  $F_R$  des Reglers muss so ausgelegt sein, dass der Regelkreis ein gutes Störverhalten (kleine Regeldifferenzen und kurze Ausregelzeiten) aufweist.

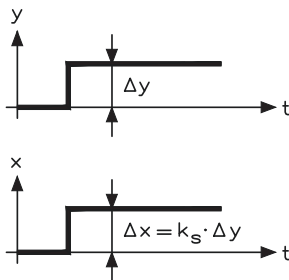
## 14.3 Klassifizierung von Regelstrecken

Eine Regelstrecke **mit** Ausgleich ist dann vorhanden, wenn ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Stellgröße  $y$  und der Regelgröße  $x$  besteht, und ein stationärer Endwert der Regelgröße  $x$  erreicht wird. Diese Regelstrecken weisen meist ein P- oder P- $T_x$ -Verhalten auf.

Eine Regelstrecke **ohne** Ausgleich ist vorhanden, wenn kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Stellgröße  $y$  und der Regelgröße  $x$  besteht, und ein stationärer Endwert der Regelgröße  $x$  erreicht wird. Diese Regelstrecken weisen meist ein I- oder I- $T_x$ -Verhalten auf.

Eine Regelstrecke **mit** Totzeit ist dann vorhanden, wenn die Regelgröße  $x$  erst nach einer bestimmten Zeit  $T_t$  eine Reaktion auf die Stellgröße  $y$  zeigt. Die Totzeit ist in allen Regelstrecken vorhanden, aber sie ist nicht erwünscht, da sie die Regelung nachhaltig beeinflusst.

### ■ Sprungantwort einer Regelstrecke mit Proportionalverhalten (P-Verhalten)

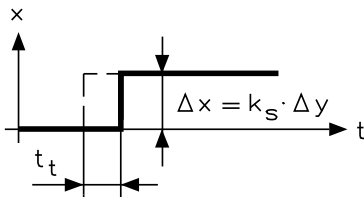


Die Regelgröße folgt der Stellgröße ohne zeitliche Verzögerung.

$$\Delta x = k_S \cdot \Delta y$$

Den Faktor  $k_S$  bezeichnet man als Streckenverstärkung (Übertragungsbeiwert).

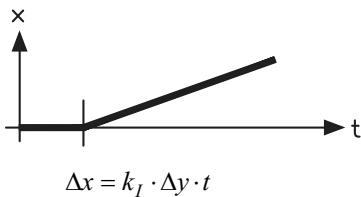
■ **Sprungantwort einer Regelstrecke mit Proportionalverhalten und Totzeit  $t_t$**



Die Regelgröße folgt der Stellgröße mit einer zeitlichen Verzögerung.

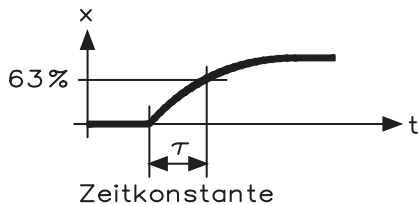
$$\Delta x = k_S \cdot \Delta y$$

■ **Sprungantwort einer Regelstrecke 1. Ordnung ohne Ausgleich**



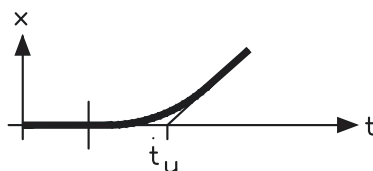
Den Faktor  $k_I$  bezeichnet man als Übertragungsbeiwert, wenn der Verlauf von  $\Delta y$  konstant ist.

■ **Sprungantwort einer Regelstrecke 1. Ordnung mit Ausgleich und Verzögerung**

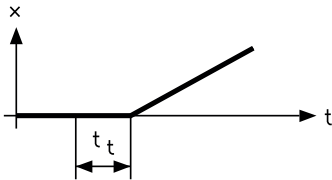


$$\Delta x = k_S \cdot \Delta y \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

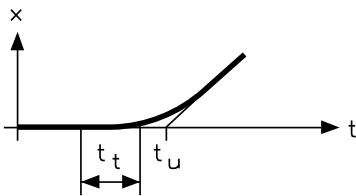
■ **Sprungantwort einer Regelstrecke 1. Ordnung ohne Ausgleich und Anlauf- oder Verzugszeit  $t_u$**



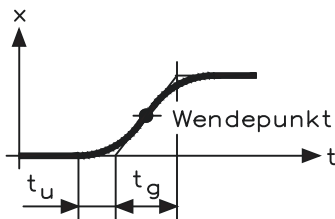
- Sprungantwort einer Regelstrecke 1. Ordnung ohne Ausgleich mit Totzeit  $t_t$ .



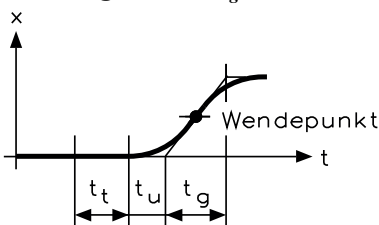
- Sprungantwort einer Regelstrecke 1. Ordnung ohne Ausgleich mit Totzeit  $t_t$  und Verzugszeit  $t_u$



- Sprungantwort einer Regelstrecke höherer Ordnung mit Verzugszeit  $t_u$  und Ausgleichszeit  $t_g$



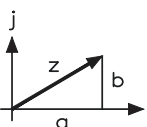
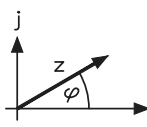
- Sprungantwort einer Regelstrecke höherer Ordnung mit Totzeit  $t_t$  Verzugszeit  $t_u$  und Ausgleichszeit  $t_g$



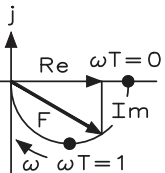
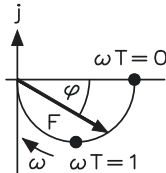
## 14.4 Ortskurven in der Regelungstechnik

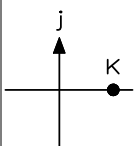
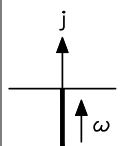
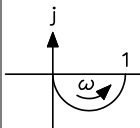
Darstellung des komplexen Frequenzgangs als Kurve in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz  $\omega$  oder der normierten Variablen  $\omega T$  als Parameter.

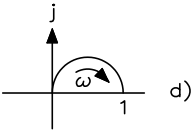
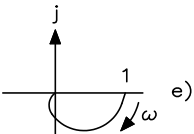
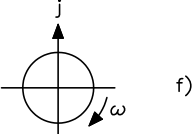
Je nachdem, ob die Ortskurve in einem kartesischen oder polaren Koordinatensystem abgebildet wird, teilt man den komplexen Frequenzgang entweder in Real- und Imaginärteil oder in Betrag und Phasenwinkel auf.

| Kartesische Koordinaten                                                                 | Polarkoordinaten                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| a)<br> | b)<br> |
| $Z = a + j \cdot b$                                                                     | $Z = Z \cdot \exp(j\varphi)$                                                            |

Beispiel für eine Ortskurve eines P-T<sub>1</sub>-Gliedes mit  $F(p) = \frac{1}{1 + p \cdot T}$

|                                                                                                                           |                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $F = \frac{1}{1 + \omega^2 \cdot T^2} + j \frac{-\omega \cdot T}{1 + \omega^2 \cdot T^2}$ <p>Realteil    Imaginärteil</p> | $F = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}} \quad \varphi = -\arctan(\omega \cdot T)$ <p>Betrag    Phasenwinkel</p> |
| a)<br>                                   | b)<br>                              |

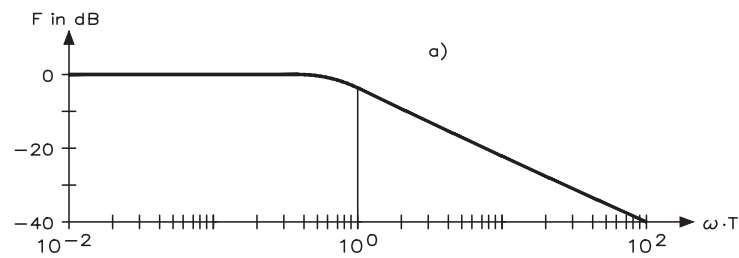
| Name             | Frequenzgang              | Betrag                                    | Winkel                     |                                                                                         |
|------------------|---------------------------|-------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| P                | K                         | K                                         | 0°                         |  a) |
| I                | $\frac{1}{p \cdot T}$     | $\frac{1}{\omega \cdot T}$                | -90°                       |  b) |
| P-T <sub>1</sub> | $\frac{1}{1 + p \cdot T}$ | $\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}$ | $-\arctan(\omega \cdot T)$ |  c) |

| Name             | Frequenzgang                                              | Betrag                                                       | Winkel                                                |                                                                                    |
|------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| DT <sub>1</sub>  | $\frac{p \cdot T}{1 + p \cdot T}$                         | $\frac{\omega \cdot T}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}$       | 90°<br>-arctan (ω · T)                                |  |
| P-T <sub>2</sub> | $\frac{1}{1 + p \cdot 2 \cdot D \cdot T + p^2 \cdot T^2}$ | $a = 1 + (\omega \cdot T)^2$<br>$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | $B = 2 \cdot D \cdot \omega \cdot T$<br>-arctan (b/a) |  |
| T <sub>t</sub>   | exp(-p · T <sub>t</sub> )                                 | 1                                                            | -ω · T <sub>t</sub>                                   |  |

### 14.5 Bodediagramm in der Regelungstechnik

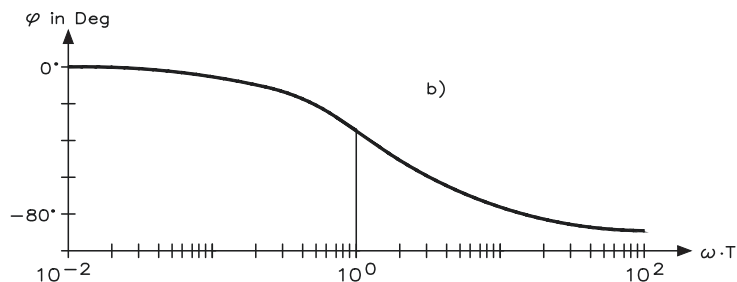
Im Bodediagramm werden der Amplitudenverlauf des Frquenzgangs  $F(\omega)$  in Dezibel und separat dazu der Phasenverlauf ( $\omega$ ) abgebildet: Unabhängige Variable ist die Kreisfrequenz  $\omega$  bzw. ihre normierte Form  $\omega T$ . Üblicherweise umfasst der Frequenzbereich vier Dekaden.

#### Amplitudengang



|                    |                                         |  |     |   |    |     |      |
|--------------------|-----------------------------------------|--|-----|---|----|-----|------|
| Betrag in Dezibel  | $F \text{ [dB]} = 20 \cdot \log(F)$     |  |     |   |    |     |      |
| Betrag aus Dezibel | $F = 10 \cdot \log F \text{ [dB]} / 20$ |  |     |   |    |     |      |
| Anhaltswerte       | $F \text{ [dB]}$                        |  | -20 | 0 | 20 | 40  | 60   |
|                    | $F$                                     |  | 0,1 | 1 | 10 | 100 | 1000 |

**Phasengang**



Zur Verbreitung von Bodediagrammen tragen die folgenden Eigenschaften bei:

- bestimmte Kennlinien lassen sich linearisieren
- bestimmte Kennlinien lassen sich symmetrieren
- Kennlinien von in Reihe geschalteten Systemen lassen sich addieren

Anhand des folgenden Beispiels erfolgt ein P-T<sub>1</sub>-Glieder mit Bodediagramm.

Komplexer Frequenzgang:  $\frac{1}{1 + p \cdot T}$

Betrag:  $F = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}}$

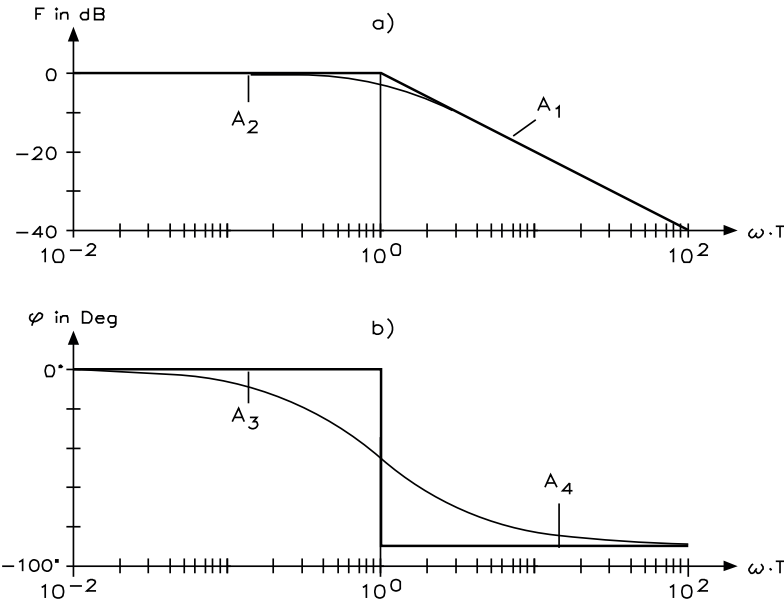
Phasenwinkel:  $\varphi = -\arctan (\omega \cdot T)$

|                  |       |       |        |       |       |
|------------------|-------|-------|--------|-------|-------|
| $\omega \cdot T$ | 0,01  | 0,10  | 1,00   | 10,0  | 100,0 |
| $F$ [dB]         | 0,00  | 0,00  | -3,01  | -20,0 | -40,0 |
| in DEG           | -0,57 | -5,71 | -45,00 | -84,3 | -89,4 |

Asymptoten:

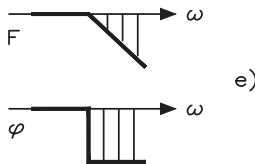
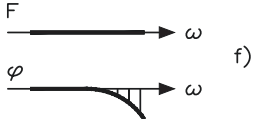
|         |              |                                                      |                                        |
|---------|--------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Betrag: | 1. Asymptote | $\omega T \ll 1; \quad F \approx 1$                  | $A_1 = 0 \text{ dB}$                   |
|         | 2. Asymptote | $\omega T \gg 1; \quad F \approx 1/(\omega \cdot T)$ | $A_2 = -20 \cdot \lg (\omega \cdot T)$ |
| Winkel: | 3. Asymptote | $\omega T \ll 1; \quad \approx 0^\circ$              | $A_3 = 0^\circ$                        |
|         | 4. Asymptote | $\omega T \gg 1; \quad \approx -90^\circ$            | $A_4 = -90^\circ$                      |

Es ergeben sich die realen Kennlinien und die Asymptoten des P-T<sub>1</sub>-Gliedes.

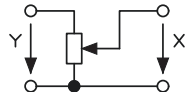
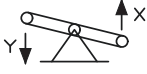
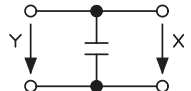
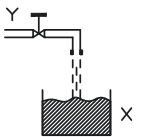
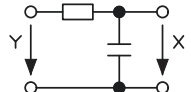
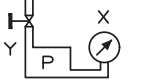
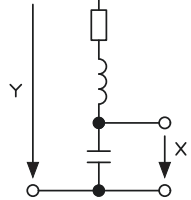
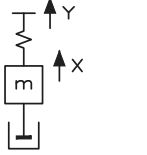


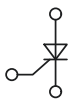
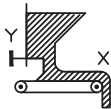
Beim Amplitudengang beträgt die größte Abweichung zwischen Kennlinie und Asymptote etwa 3 Dezibel, wie die Bodediagramme für elementare Übertragungsglieder zeigen.

| Name             | $F$                               | $F$                                                    |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P                | $K$                               | $K$                                                    | $0^\circ$                  | <div><div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div><div>a)</div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div></div></div> |
| I                | $\frac{1}{p \cdot T}$             | $\frac{1}{\omega \cdot T}$                             | $-90^\circ$                | <div><div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div><div>b)</div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div></div></div> |
| P-T <sub>1</sub> | $\frac{1}{1 + p \cdot T}$         | $\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}$              | $-\arctan(\omega \cdot T)$ | <div><div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div><div>c)</div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div></div></div> |
| D-T <sub>1</sub> | $\frac{p \cdot T}{1 + p \cdot T}$ | $\frac{\omega \cdot T}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}}$ | $90^\circ$                 | <div><div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div><div>d)</div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>\omega</math></div></div></div></div> |

| Name             | $F$                                               | $F$                                                          |                                                         |                                                                                    |
|------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| P-T <sub>2</sub> | $\frac{1}{1 + p \cdot D \cdot T + p^2 \cdot T^2}$ | $a = 1 - \omega^2 \cdot T^2$<br>$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | $b = 2 \cdot D \cdot \omega \cdot T$<br>$-\arctan(b/a)$ |  |
| T <sub>t</sub>   | $\exp(-p \cdot T_t)$                              | 1                                                            | $-\omega \cdot T_t$                                     |  |

## 14.6 Regelstreckenglieder

| Verhalten        | Elektrisches Beispiel                                                                     | Nicht elektrisches Beispiel                                                               | Frequenzgang                                          |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| P                | a)<br>   | b)<br>   | $F(p) = K$                                            |
| I                | c)<br> | d)<br>  | $F(p) = \frac{1}{p \cdot T}$                          |
| P-T <sub>1</sub> | e)<br> | f)<br> | $F(p) = \frac{K}{1 + p \cdot T}$                      |
| P-T <sub>2</sub> | g)<br> | h)<br> | $F = \frac{1}{1 + p \cdot D \cdot T + p^2 \cdot T^2}$ |

| Verhalten | Elektrisches Beispiel                                                                   | Nicht elektrisches Beispiel                                                             | Frequenzgang                     |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $T_t$     | i)<br> | j)<br> | $F = k \cdot \exp(-p \cdot T_t)$ |

Das Totzeit-Verhalten einer Regelstrecke ist

$$x = y \cdot K_S \cdot (t - T_t)$$

Die Übertragungsfunktion ist

$$\underline{F}(j\omega) = K_S \cdot e^{-j\omega T_t} \quad \underline{F}(p) = K_S \cdot e^{-p T_t}$$

Der Amplitudengang für das Bodediagramm ist

$$|\underline{F}(j\omega)| = K_S \quad L(\omega) = 20 \cdot \lg |\underline{F}(j\omega)|$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(K_S)$$

Der Phasengang für das Bodediagramm ist

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega \cdot T_t)$$

$$\omega_K = \frac{\pi}{T_t} \quad \text{RAD einstellen!!!}$$

- $x$  Ausgangssignal der Regelstrecke
- $y$  Eingangssignal der Regelstrecke
- $T_t$  Totzeit in s
- $K_S$  Übertragungsbeiwert der Regelstrecke
- $\underline{F}(j\omega)$  komplexe Übertragungsfunktion
- $F(p)$  allgemeine Übertragungsfunktion
- $|\underline{F}(j\omega)|$  Amplitudengang der Regelstrecke
- $\varphi(\omega)$  Phasengang der Regelstrecke
- $\omega_K$  kritische Kreisfrequenz bei der  $\varphi(\omega)$  den Wert  $-180^\circ$  überschreitet

Das dynamische Verhalten der Regelstrecke mit Ausgleich wird durch das P-Verhalten beschrieben:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{K_{PS}}{1 + [(j\omega) \cdot T_1] + [(j\omega)^2 \cdot T_2^2] + \dots + [(j\omega)^n \cdot T_n^n]}$$

$$\underline{F}(p) = \frac{K_{PS}}{1 + (p \cdot T) + (p^2 \cdot T_2^2) + \dots + (p^n \cdot T_n^n)}$$

Das dynamische Verhalten von Regelstrecke ohne Ausgleich wird durch das I-Verhalten beschrieben:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega} \cdot K_{IS}}{1 + [(j\omega) \cdot T_1] + [(j\omega)^2 \cdot T_2^2] + \dots + [(j\omega)^n \cdot T_n^n]}$$

$$\underline{F}(p) = \frac{\frac{1}{p} \cdot K_{IS}}{1 + (p \cdot T) + (p^2 \cdot T_2^2) + \dots + (p^n \cdot T_n^n)}$$

- $\underline{F}(j\omega)$  komplexe Übertragungsfunktion
- $F(p)$  allgemeine Übertragungsfunktion
- $K_{PS}$  Proportionalbeiwert
- $K_{IS}$  Proportionalbeiwert in 1/s
- $T_1$  1. Zeitkonstante in s
- $T_2^2$  2. Zeitkonstante in s<sup>2</sup>
- $T_n$  n. Zeitkonstante in s
- $n$  Grad der Zeitkonstante

Der Anlaufwert einer Regelstrecke ist der Kehrwert der maximalen Änderungsgeschwindigkeit:

$$A = \frac{1}{v_{\max}}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{K_{IS} \cdot A}$$

$$K_{IS} = \frac{1}{A \cdot y_{\max}}$$

Der Ausgleichswert der Regelstrecke ist das Verhältnis der Eingangsgröße (Stellgröße  $y$ ) zur Ausgangsgröße (Regelgröße der Regelstrecke bei  $t \rightarrow \infty$  (eingeschwungen))

$$Q = \left( \frac{y}{x} \right)_{t \rightarrow \infty} \quad Q = \frac{1}{K_S}$$

Die Berechnungen für Regelstrecken ohne Ausgleich (I-Verhalten) sind

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega} \cdot K_{IS}}{1 + [(j\omega) \cdot T_1] + [(j\omega)^2 \cdot T_2^2] + \dots + [(j\omega)^n \cdot T_n^n]}$$

$$\underline{F}(p) = \frac{\frac{1}{p} \cdot K_{IS}}{1 + (p \cdot T) + (p^2 \cdot T_2^2) + \dots + (p^n \cdot T_n^n)}$$

$$A = \frac{1}{K_S \cdot y_{\max}}$$

$$Q = \left( \frac{y}{x} \right)_{t \rightarrow \infty} \quad \text{und } t \rightarrow \infty \text{ gilt } x \rightarrow \infty \Rightarrow Q = 0$$

Der Anlaufwert der Regelstrecke ist  $\frac{s}{[y]}$

$$\text{z. B. } \frac{s}{m}, \frac{s}{l}, \frac{s}{m^3}$$

Nachfolgend werden die Kennwerte für Regelstrecken mit Ausgleich (P-Verhalten) gezeigt:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{K_{PS}}{1 + [(j\omega) \cdot T_1] + [(j\omega)^2 \cdot T_2^2] + \dots + [(j\omega)^n \cdot T_n^n]}$$

$$\underline{F}(p) = \frac{K_{PS}}{1 + (p \cdot T) + (p^2 \cdot T_2^2) + \dots + (p^n \cdot T_n^n)}$$

$$Q = \frac{1}{K_S} \quad \text{mit } K_S = K_P \Rightarrow Q = \frac{1}{K_P}$$

|            |                                                      |
|------------|------------------------------------------------------|
| $A$        | Anlaufwert der Regelstrecke                          |
| $v_{\max}$ | maximale Änderungsgeschwindigkeit der Regelgröße $x$ |
| $y_{\max}$ | maximales Eingangssignal (Stellgröße)                |
| $K_{IS}$   | Übertragungsbeiwert der Regelstrecke                 |
| $Q$        | Ausgleichswert der Regelstrecke                      |

|            |                                       |
|------------|---------------------------------------|
| $A$        | Anlaufwert der Regelstrecke           |
| $Q$        | Ausgleichswert der Regelstrecke       |
| $K_{IS}$   | Proportionalbeiwert in $1/s$          |
| $y_{\max}$ | maximales Eingangssignal (Stellgröße) |

Für eine Regelstrecke ohne Verzögerung gilt:

$$A = \frac{1}{v_{\max}} \quad \text{mit } v_{\max} \Rightarrow A = \infty$$

Für eine Regelstrecke mit Verzögerung  $T_1$  gilt:

$$A = \frac{T_1}{K_P \cdot y_{\max}} \quad \text{mit } K_P \cdot y_{\max} = x_{\max}$$

$$A = \frac{T_1}{x_{\max}}$$

Für eine Regelstrecke mit Verzögerung  $T_2$  und höher gilt:

$$A = \frac{T_g}{x_{\max}}$$

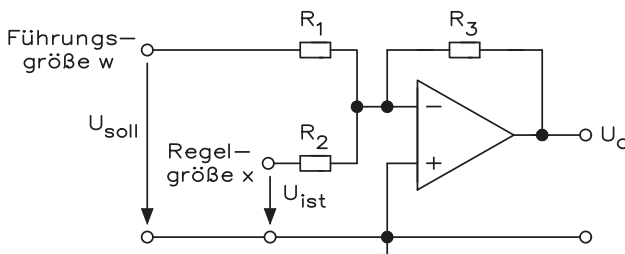
$$K_P = \frac{T_g}{A \cdot y_{\max}}$$

|            |                                            |
|------------|--------------------------------------------|
| $A$        | Anlaufwert der Regelstrecke                |
| $Q$        | Ausgleichswert der Regelstrecke            |
| $K_P$      | Proportionalbeiwert                        |
| $y_{\max}$ | maximales Eingangssignal (Stellgröße $y$ ) |
| $x_{\max}$ | maximale Regelgröße (Regelgröße $x$ )      |
| $T_1$      | 1. Zeitkonstante                           |
| $T_g$      | Zeitkonstante                              |
| $T_n$      | Ausgleichzeit                              |
| $T_u$      | Verzugszeit                                |

## 14.7 Realisierung von elektronischen Reglern

Für die Realisierung von elektronischen Reglern nach dem analogen Verfahren werden seit 1970 Operationsverstärker eingesetzt, da diese Bauteile neben einem hohen Verstärkungsfaktor eine große Bandbreite aufweisen. Der Verstärkungsfaktor und die Bandbreite lassen sich durch eine externe Beschaltung für den praktischen Einsatz in der Mess- und Regelungstechnik optimieren.

### P-Regler mit Sollwert- und Istwert-Eingang

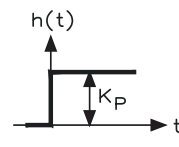
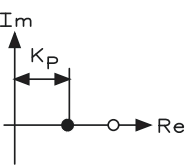
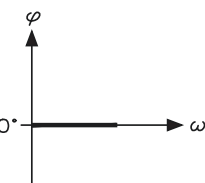
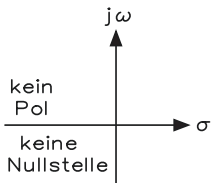


Der Operationsverstärker arbeitet als Summierer bzw. Addierer, der beide Eingangsspannungen addiert, wobei unbedingt auf die Vorzeichen der Eingangsspannungen zu achten ist. Die Ausgangsspannung  $U_a$  errechnet sich aus

$$-U_a = U_{\text{soll}} \frac{R_3}{R_1} + U_{\text{ist}} \frac{R_3}{R_2}$$

An den beiden Eingängen liegen die Spannungen des Sollwertes (Führungsgröße  $w$ ) und des Istwertes (Regelgröße  $x$ ). Die Sollwertvorgabe erfolgt manuell über einen Regler (Potentiometer). Auch der Istwert muss als elektrisches Signal vorliegen und wird ebenfalls direkt auf den P-Regler gegeben. Die beiden Spannungen addieren sich und sind dann als Ausgangsspannung für die Weiterverarbeitung vorhanden.

Übergangsfunktion:  $h(t) = \frac{u_a(t)}{u_e(t)}$

| Übergangs-<br>funktion                                                            | Ortskurve<br>$F(j\omega)$                                                         | Phasenverschiebung                                                                | p-Ebene<br>O Nullstelle X Pol                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

Der Frequenzgang stellt eine komplexe Funktion dar, deren Verlauf in der komplexen Ebene dargestellt werden kann. Die grafische Darstellung des Frequenzganges bezeichnet man als Ortskurve. Die Variable dieser Funktion ist die Frequenz  $\omega$ , die von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \infty$  läuft. Betrachtet man sich z. B. den allgemeinen Frequenzgang eines Reglers mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ , der durch den Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{u_0 + u_1\omega + u_2\omega^2}{y_0 + y_1\omega + y_2\omega^2 + y_3\omega^3}$$

bezeichnet wird. Dieser Ausdruck lässt sich in einen Real- und einen Imaginärteil aufspalten. Da für  $\omega$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega^3$  usw. gilt

$$\omega = j\omega, \quad \omega^2 = -\omega^2, \quad \omega^3 = -j\omega^3$$

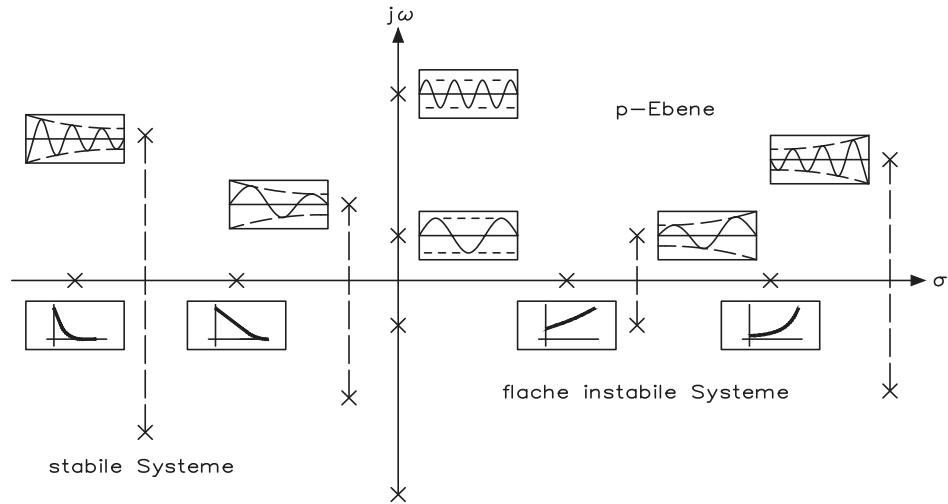
ergibt sich für den Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{u_0 + j\omega u_1 - \omega^2 u_2}{y_0 + j\omega y_1 - \omega^2 y_2 - j\omega^3 y_3} = \frac{(u_0 - \omega^2 u_2) + j\omega u_1}{(y_0 - \omega^2 y_2) + j(\omega y_1 - \omega^3 y_3)} = \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega) + jD(\omega)}$$

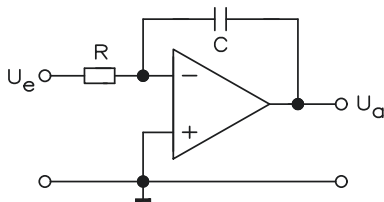
Der komplexe Ausdruck im Nenner wird durch Multiplikation mit dem konjugiertkomplexen Ausdruck in eine reelle Form gebracht.

$$G(j\omega) = \frac{A + jB}{C + jD} \cdot \frac{C - jD}{C - jD} = \underbrace{\frac{AC + BC}{C^2 + D^2}}_{\text{Realteil}} + j \underbrace{\frac{BC - DA}{C^2 - D^2}}_{\text{Imaginärteil}}$$

Da Regelglieder und Netzwerke aus passiven Bauelementen nicht zeitlich unbegrenzt zunehmende Spannungen oder Ströme erzeugen können, befinden sich deren Pole in der linken Halbebene der komplexen p-Ebene.



I-Regler

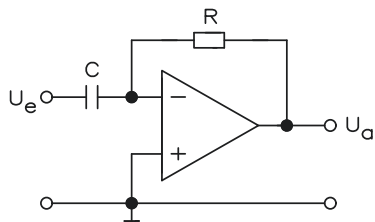


$$u_a = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t u_e dt$$

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>O Nullstelle X Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|-------------------------------|
|                        |                           |                    |                               |

Die Übergangsfunktion  $h(t)$ , der Integrierbeiwert  $K_I$ , der Frequenzgang  $F(j\omega)$  und die Eckkreisfrequenz  $\omega_0$  berechnen sich aus

$$h(t) = K_I \cdot t, \quad K_I = \frac{1}{R \cdot C}, \quad \underline{F}(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T_I} = K_I$$

**D-Regler**

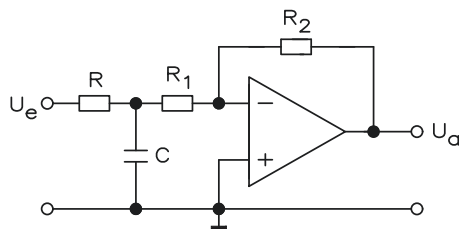
Die Ausgangsspannung errechnet sich aus  $U_a = -R \cdot C \frac{dU_e}{dt}$ .

Übergangsfunktion:  $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$

Der Differenzierbeiwert  $K_D$ , der Frequenzgang  $F$  und die Eckkreisfrequenz  $\omega_0$  errechnen sich aus

$$K_D = R \cdot C, \quad \underline{F}(j\omega) = K_D \cdot j\omega, \quad \omega_0 = \frac{1}{K_D}$$

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|----------------------------------|
|                        |                           |                    |                                  |

**PT<sub>1</sub>-Regler**

Ein PT<sub>1</sub>-Regler ist ein P-Regler mit einer Verzögerung (Totzeit  $T_I$ ) 1. Ordnung.

$$h(t) = \frac{U_a}{U_e} = K_P (1 - e^{-t/\tau})$$

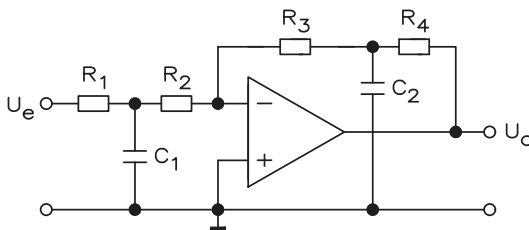
Der Proportionalbeiwert  $K_P$  und der Frequenzgang errechnen sich aus

$$K_P = U_e (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{und} \quad \underline{F}(j\omega) = K_P \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot \tau} \quad \text{mit } \tau = R \cdot C.$$

Die Eckkreisfrequenz erhält man aus  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ .

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|----------------------------------|
|                        |                           |                    |                                  |

### PT<sub>2</sub>-Regler



Bei der Schaltung befindet sich am Eingang ein Verzögerungsglied und in der Rückkopplung des Verstärkers ein weiteres Verzögerungsglied. Während man bei einem Verzögerungsglied 1. Ordnung einen festen Zusammenhang zwischen dem Amplituden- und dem Phasenverlauf hat, sind bei PT<sub>2</sub>-Systemen noch der Dämpfungsgrad  $D$  und die Schwingungsdauer  $T$  zu beachten.

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol |             |
|------------------------|---------------------------|--------------------|----------------------------------|-------------|
|                        |                           |                    | $0 < D < 1$<br>                  | $D > 1$<br> |

Bei einem Dämpfungsgrad von  $D = 1$  berechnet sich die Übergangsfunktion aus

$$h(t) = K_P [1 - e^{-\tau t} (1 + \tau \cdot t)]$$

Die Dämpfungskonstante  $\tau$  errechnet sich aus

$$D = \frac{T_1}{2 \cdot T_2}, \quad T_1 = \frac{2 \cdot D}{\omega_0}, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_0}, \quad \tau = \frac{T_1}{2 \cdot T_2^2}$$

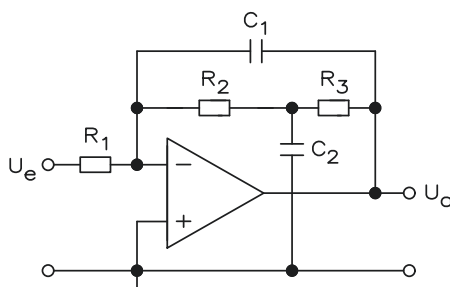
Die Ortskurve beginnt mit  $\omega_0$  auf der reellen Achse und durchläuft mit zunehmender Frequenz zuerst den 4. und danach den 3. Quadranten. Der Frequenzgang berechnet sich aus

$$\underline{F}(j\omega) = K_P \cdot \frac{1}{1 + (\omega T_2)^2 \cdot j\omega T_1}$$

und die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  der gedämpften Schwingung aus

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}$$

### IT<sub>1</sub>-Regler



Bei der klassischen Schaltung entfällt der Kondensator  $C_2$ , und die beiden Widerstände sind in einem Wert zusammengefasst. Da diese Schaltung nicht die gewünschten Verzögerungen liefert, wird in der Praxis eine modifizierte Variante eingesetzt.

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>O Nullstelle X Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|-------------------------------|
|                        |                           |                    |                               |

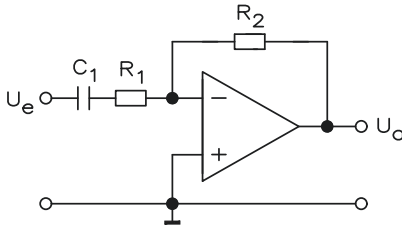
Die Übergangsfunktion errechnet sich aus

$$h(t) = K_I \cdot t - K_I \cdot T_1 \cdot (1 - e^{-t/T_1})$$

Der Integrierbeiwert  $K_I$ , die Zeitkonstante  $T_1$  und der Frequenzgang  $F$  berechnen sich

$$K_I \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C_1}, \quad T_1 = (R_2 + R_3) \cdot C, \quad \underline{F}(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T_1)}$$

## DT<sub>1</sub>-Regler



Bei einem D-Regler wirkt die Eingangsspannung direkt auf den Kondensator. Wird in Reihe mit dem Kondensator  $C$  ein Widerstand  $R_1$  geschaltet, ergibt sich ein D-Glied mit Verzögerung, wobei speziell in diesem Fall von einem nachgebenden System gesprochen wird.

Die Übergangsfunktion errechnet sich aus  $h(t) = \frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-t/T_1}$ .

Der Differenzwert ergibt sich aus  $K_D = R_2 \cdot C_1$  und die Zeitkonstante aus  $T_1 = R_1 \cdot C_1$ .

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>O Nullstelle X Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|-------------------------------|
|                        |                           |                    |                               |

Bei der Übergangsfunktion erkennt man, dass sich der Kondensator zum Zeitpunkt  $T_1$  auf 37 % seines Anfangswertes entladen hat. Der Frequenzgang errechnet sich aus

$$\underline{F}(j\omega) = K_P \cdot \frac{j\omega \cdot K_D}{1 + j\omega \cdot T_1}$$

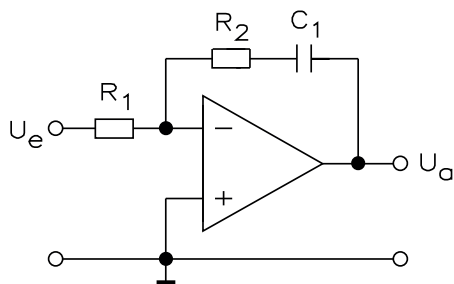
Für die Ortskurve und für die Phasenverschiebung gilt die Eckkreisfrequenz mit

$$\omega_0 = \frac{1}{T_1}$$

Während die Ortskurve einen Halbkreis beschreibt, bewegt sich die Phasenverschiebung zwischen  $90^\circ$  (niedrige Frequenz) bis  $0^\circ$  (hohe Frequenz).

## PI-Regler

Bei einem PI-Regler ist das Zeitverhalten des P- und des I-Reglers in einer Schaltung zusammengefasst. Die Änderung des nachgeschalteten Stellgliedes erfolgt also nach dem Betrag der Regelabweichung (P-Anteil) und nach dem zeitlichen Integral (I-Anteil).



Bei einem PI-Regler wird die Ausgangsspannung nach einer sprunghaftigen Änderung der Eingangsspannung ebenfalls sprunghaft um den Proportionalbeiwert  $K_P$  erhöht. Ab diesem Zeitpunkt beginnt das zeitliche Integral des Reglers. Die Zeitkonstante  $T_n$  wird als Nachstellzeit bezeichnet.

| Übergangsfunktion | Ortskurve $F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol |
|-------------------|------------------------|--------------------|----------------------------------|
|                   |                        |                    |                                  |

Die Übergangsfunktion für einen PI-Regler errechnet sich aus

$$h(t) = K_P + K_I \cdot t$$

mit der Nachstellzeit, die sich errechnet aus

$$T_n = \frac{K_P}{K_I} = R_2 \cdot C_1$$

und dem Proportionalbeiwert bzw. dem Integrierbeiwert mit

$$K_P = \frac{R_2}{R_1}, \quad K_I = \frac{1}{R_1 \cdot C_1}$$

Für den Frequenzgang gilt

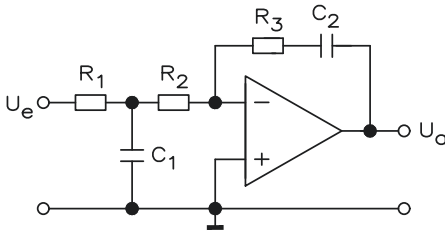
$$\underline{F}(j\omega) = K_P \cdot \left( 1 + \frac{1}{j\omega \cdot T_n} \right) = K_P + \frac{K_I}{j\omega}$$

und für die Eckkreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{T_n} = \frac{K_I}{K_P}$$

Die Phasenverschiebung beginnt bei  $-90^\circ$  (niedrige Frequenz) und geht auf  $0^\circ$  (hohe Frequenz) zurück.

### PIT<sub>1</sub>-Regler

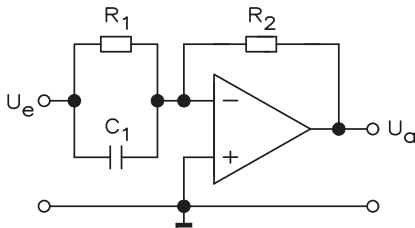


Bei einem PIT<sub>1</sub>-Regler handelt es sich um einen PI-Regler mit einer Verzögerung 1. Ordnung. Am Eingang der Schaltung befindet sich ein RC-Glied und damit eine Verzögerung 1. Ordnung, während sich die Schaltung für den PI-Regler nicht ändert. Es ergibt sich die Übergangsfunktion von

$$h(t) = K_P \cdot (1 - e^{-t/T_1}) + K_I \cdot t$$

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|----------------------------------|
|                        |                           |                    |                                  |

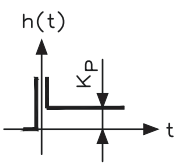
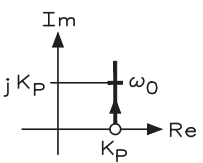
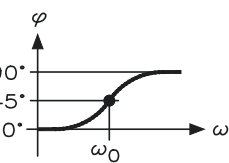
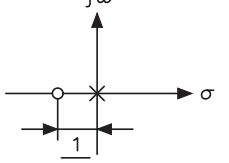
### PD-Regler



Ein PD-Regler ist ein Proportionalregler mit Differentialanteil. Die Ausgangsgröße eines P-Reglers wird zusätzlich durch die Änderungsgeschwindigkeit eines D-Reglers verbessert.

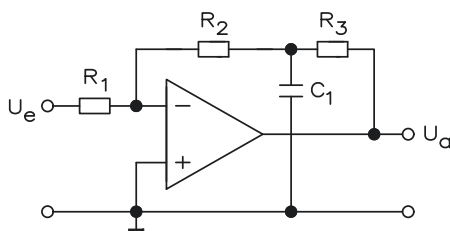
Als Grundschaltung dient ein P-Regler, wobei parallel zu dem Eingangswiderstand  $R_1$  der Kondensator  $C_1$  zur Differenzierung geschaltet wird. Die Übertragungsfunktion errechnet sich aus

$$h(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ K_P & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

| Übergangs-<br>funktion                                                            | Ortskurve<br>$F(j\omega)$                                                         | Phasenverschiebung                                                                | p-Ebene<br>O Nullstelle X Pol                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

Der Proportionalanteil  $K_P$ , der Differenzierbeiwert  $K_D$  und die Vorhaltezeit  $T_v$  errechnen sich aus

$$K_P = \frac{R_2}{R_1}, \quad K_D = R_2 \cdot C_1, \quad T_v = \frac{K_D}{K_P} = R_1 \cdot C_1$$



Der Frequenzgang berechnet sich aus

$$\underline{F}(j\omega) = K_P \cdot (1 + j\omega T_v) = K_P + j\omega K_D$$

und die Eckkreisfrequenz aus

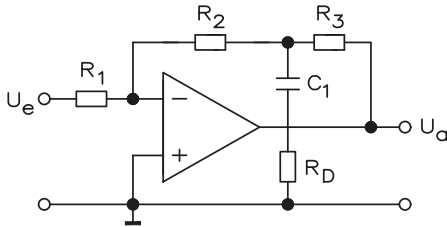
$$\omega_0 = \frac{1}{T_v} = \frac{K_P}{T_v}$$

Bei dieser Schaltung muss jedoch der Innenwiderstand der Spannungsquelle am Eingang berücksichtigt werden. Aus diesem Grunde setzt man in der Praxis die verbesserte Schaltung ein.

Bei der optimierten Schaltung befindet sich der Kondensator für die Differenzierung in der Rückkopplung. Der Proportionalbeiwert errechnet sich aus dem Verhältnis der beiden Rückkopplungswiderstände ( $R_2$  bzw.  $R_3$ ) und dem Eingangswiderstand  $R_1$ . Die Zeitkonstante  $T_v$  für die Vorhaltezeit ist das Produkt aus der Parallelschaltung der beiden in der Rückkopplung befindlichen Widerstände  $R_2 \parallel R_3$  zu beiden Seiten des mit Masse verbundenen Kondensators  $C_1$ .

$$T_v = (R_2 \parallel R_3) \cdot C_1$$

### PDT<sub>1</sub>-Regler

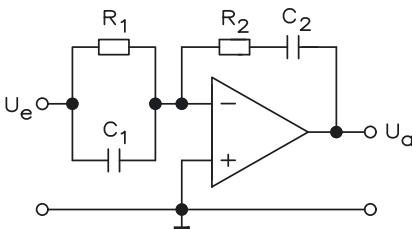


Zur Verzögerung der Übertragungsfunktion befindet sich in der Schaltung ein zusätzlicher Widerstand  $R_D$ . Durch die Verzögerung wird in der Übertragungsfunktion die Unendlichkeitsstelle bei  $t = 0$  unterdrückt, wodurch sich der Verlauf ändert.

| Übergangs-<br>funktion | Ortskurve<br>$F(j\omega)$ | Phasenverschiebung | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol |
|------------------------|---------------------------|--------------------|----------------------------------|
| $T_1 < T_v$<br>        | $T_1 < T_v$<br>           |                    | $T_1 < T_v$<br>                  |

Die Ausgangsgröße ändert sich sprunghaft zur Zeit  $t = 0$  um einen Betrag, der vom Betrag des Eingangssprungs, von den beiden Parameterwerten  $K_P$  bzw.  $T_v$  des Reglers und seiner Verzögerungszeit, abhängig ist. Bei der Bedingung  $t > 0$  ist die Ausgangsgröße mit der Zeitkonstanten  $T_1$  von dem Proportionalbeiwert  $K_P$  des Reglers abhängig.

### PID-Regler



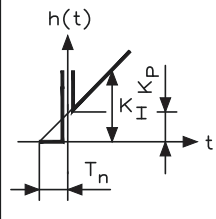
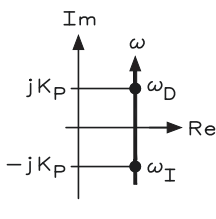
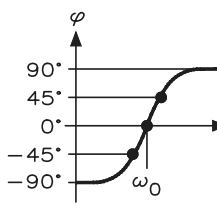
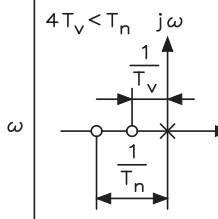
Aus den für PI- und PD-Regler gewonnenen Erkenntnissen lassen sich PID-Regler aufbauen. PID-Regler beinhalten die drei grundsätzlichen Übertragungseigenschaften der einzelnen Reglertypen, nämlich proportionales, integrales und differentielles Verhalten. Die Übergangsfunktion eines PID-Reglers errechnet sich aus

$$h(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ K_P + K_I t & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Die Vorhaltezeit  $T_v$ , die Nachstellzeit  $T_n$ , der Proportionalbeiwert  $K_P$ , der Integrierbeiwert  $K_I$  und der Differenzierbeiwert  $K_D$  ergeben sich aus

$$T_v = \frac{K_D}{K_P} = R_1 \cdot C_1, \quad T_n = \frac{K_P}{K_I} = R_2 \cdot C_2$$

$$K_P = \frac{R_2}{R_1}, \quad K_I = \frac{1}{R_1 \cdot C_2}, \quad K_D = R_2 \cdot C_1$$

| Übergangs-<br>funktion                                                            | Ortskurve<br>$F(j\omega)$                                                         | Phasenverschiebung                                                                | p-Ebene<br>○ Nullstelle    × Pol                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

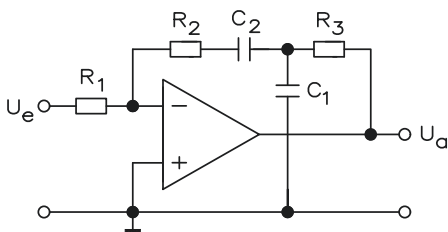
Der Frequenzgang errechnet sich aus

$$\underline{F}(j\omega) = K_P \cdot \left( 1 + j\omega T_v + \frac{1}{j\omega \cdot T_n} \right) = K_P + \frac{K_I}{j\omega} + j\omega \cdot K_D$$

Die Eckkreisfrequenz ist

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_n \cdot T_v}} \quad \omega_I = \frac{1}{T_n} = \frac{K_I}{K_P} \quad \omega_D = \frac{1}{T_v} = \frac{K_P}{K_D}$$

Die Phasenverschiebung beginnt bei  $-90^\circ$  (niedrige Frequenz) und endet bei  $+90^\circ$  (hohe Frequenz).



Bei der modifizierten Schaltung sollten vom Anwender unbedingt folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$R_2 \cdot C_2 + R_3 \cdot C_1 \gg R_3 \cdot C_2 \quad \text{und} \quad \frac{R_2}{R_3} + \frac{C_1}{C_2} \gg 1$$

Letztere Bedingung gilt auch, wenn mindestens die Forderung  $R_2 \gg R_3$  eingehalten wird. In der Praxis hat zudem der Kondensator  $C_1$  eine erheblich größere Kapazität als der Kondensator  $C_2$ .

Auch die Forderung

$$\frac{R_2}{R_2 + R_3} \approx 1$$

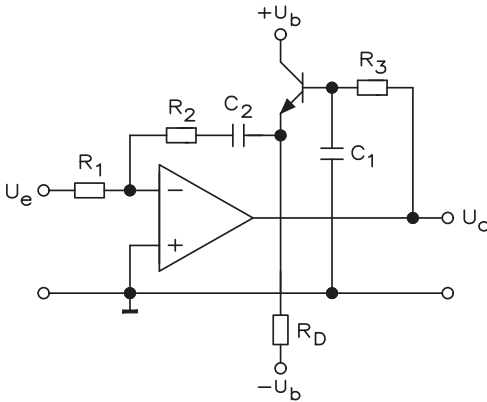
sollte ebenfalls erfüllt sein. Für die Berechnungen des Integrierbeiwerts, der Vorhaltezeit und der Nachstellzeit ergeben sich folgende Änderungen:

$$K_I = \frac{1}{R_1 \cdot C_2} \quad T_v = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \cdot C_1 \quad T_n = (R_2 + R_3) \cdot C_2$$

Der Proportionalbeiwert  $K_p$  ändert sich ebenfalls und errechnet sich aus

$$K_p = \frac{R_2 + R_3}{R_1}$$

### PIDT<sub>1</sub>-Regler



In dieser Schaltung befindet sich in der Rückkopplung ein Transistor, der in seiner Kollektor-Grundschaltung betrieben wird. Damit ergibt sich ein Reaktanzwandler, d. h., an der Basis des Transistors liegt ein hochohmiges Eingangsverhalten vor, während am Emittteranschluss ein niederohmiges Ausgangsverhalten auftritt. Der Widerstand  $R_D$  ist unbedingt erforderlich, wodurch die gewünschte Dämpfung auftritt.

Die Vorhaltezeit verändert sich durch die Reaktanzwandlung des Widerstandes  $R_2$  von der Emittterseite auf die Basisseite mit

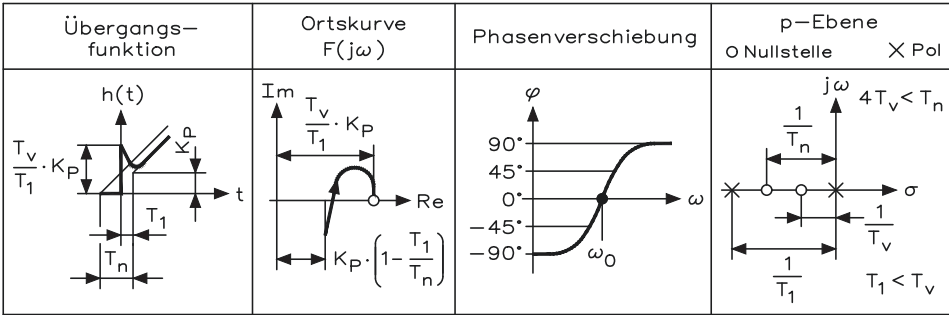
$$T_v = \frac{\infty \cdot R_3}{\infty + R_3} \cdot C_1 = R_3 \cdot C_1$$

Hier wird diese Spannung durch den Kondensator  $C_2$  differenziert und über den Widerstand  $R_2$  in den Rückkopplungsstrom umgewandelt. Durch die Reaktanzwandlung gilt jetzt für die Nachstellzeit

$$T_n \approx \left( R_2 + \frac{R_3}{\infty} \right) \cdot C_2 = R_2 \cdot C_2$$

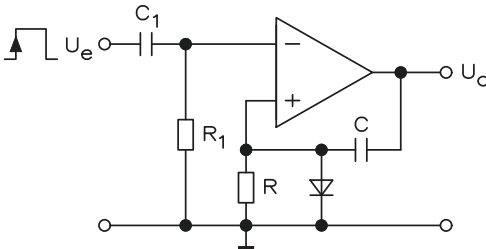
und der Proportionalbeiwert errechnet sich aus

$$K_P = \frac{R_2 + \frac{R_3}{\infty}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}$$



Bei der Übergangsfunktion ist deutlich die durch den Dämpfungswiderstand  $R_D$  verursachte Verzögerungszeit  $T_1$  erkennbar.

### $T_t$ -Regler



Eine besondere Art von Totzeit-Reglern bewirkt, dass zwischen Eingangs- und Ausgangsänderung eine entsprechende Zeitverzögerung auftritt. Ändert sich die Eingangsgröße sprunghaft, so wird die Ausgangsgröße erst nach einer bestimmten Zeitdauer, der Totzeit  $T_t$ , geändert.

Bei dieser Schaltung handelt es sich um ein Monoflop (Univibrator) in Verbindung mit einem Operationsverstärker. Die Ausgangsspannung befindet sich im Ruhezustand konstant auf  $+U_b$ , nach erfolgter Triggerung über den Eingang  $U_e$  geht der Ausgang für die Zeitdauer der monostabilen Funktion auf  $-U_b$ . Nach der Verweilzeit kippt der Ausgang wieder in seine stabile Lage zurück und hat die Ausgangsspannung  $+U_b$ .

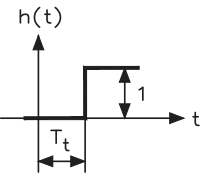
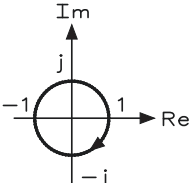
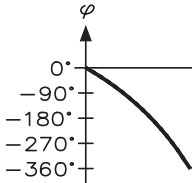
Für den Operationsverstärker wird eine symmetrische Betriebsspannung von  $\pm 12\text{ V}$  benötigt. Die monostabile Zeit berechnet sich aus

$$T_t = 0,7 \cdot R \cdot C,$$

wenn der Widerstand  $R_t$  des Differenziergliedes mit Masse verbunden ist. Liegt statt der Masseverbindung eine negative Referenzspannung vor, gilt

$$T_t = R \cdot C \cdot \ln \frac{\pm U_b}{-U_{ref}}$$

Die Diode verhindert, dass die Spannung am nicht invertierenden Eingang größer als +0,6 V wird.

| Übergangs-<br>funktion                                                            | Ortskurve<br>$F(j\omega)$                                                         | Phasenverschiebung                                                                | p-Ebene<br>O Nullstelle X Pol                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
|  |  |  | Keine Pole und<br>Nullstellen im<br>Endlichen |

In der Übergangsfunktion ist die zwischen der Eingangs- und der Ausgangsänderung auftretende Totzeit  $T_t$  erkennbar. Die Übergangsfunktion berechnet sich aus

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T_t \\ 1 & \text{für } t \geq T_t \end{cases}$$

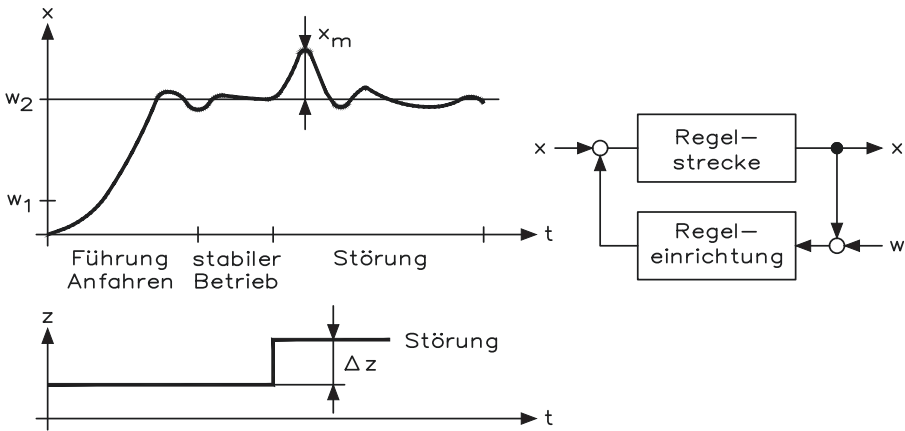
Der Frequenzgang ergibt sich aus

$$\underline{F}(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$$

Die Phasenverschiebung nimmt bei steigender Frequenz stetig ab. Bei den  $T_t$ -Reglern ist zu bemerken, dass man diese ohne nennenswerten Fehler rechnerisch so behandeln kann wie ein Verzögerungsglied 1. Ordnung. Voraussetzung hierfür ist, dass die Totzeit  $T_t$  sehr kurz ist.

## 14.8 Arbeitsweise von geschlossenen Regelkreisen

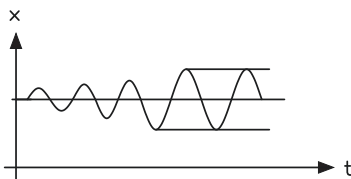
Es soll das stabile bzw. instabile Verhalten eines Regelkreises sowie das Führungsverhalten bzw. Störverhalten untersucht werden. Unter anderem spricht man bei Betrachtungen von Regelkreisen auch öfters von statischem und dynamischem Verhalten des Regelkreises. Das statische Verhalten eines Regelkreises kennzeichnet den Ruhezustand des Regelkreises nach Ablauf aller zeitabhängigen Ausgleichsvorgänge, also den Zustand lange nach vorangegangenen Stör- oder Führungsgrößenänderungen. Das dynamische Verhalten zeigt dagegen in erster Linie das Verhalten des Regelkreises bei Änderungen, d. h. den Verlauf von einem stabilen Ruhezustand in den anderen Ruhezustand. Schließt man einen Regler an eine Strecke an, so erwartet man den folgenden Verlauf.



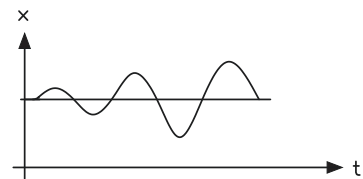
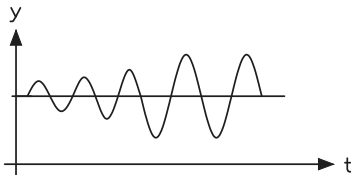
Nach dem Schließen des Regelkreises soll die Regelgröße ( $x$ ) in möglichst kurzer Zeit ohne großes Überschwingen die vorgegebene Führungsgröße ( $w$ ) erreichen und auch halten. Man spricht in diesem Zusammenhang beim Einlaufen auf einen neuen Wert der Führungsgröße auch vom Führungsverhalten.

Nach dem Anfahrvorgang soll die Regelgröße einen konstanten Wert ohne größere Schwankungen einhalten, d. h., der Regler soll an der Regelstrecke stabil arbeiten. Tritt nun eine Störung an der Regelstrecke auf, so soll der Regler ebenfalls in der Lage sein, diese mit möglichst kleinem Überschwingen in einer relativ kurzen Ausregelzeit auszu-regeln.

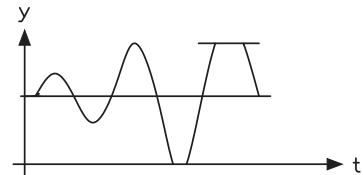
Nach Ablauf des Anfahrvorganges soll die Regelgröße den durch die Führungsgröße vorgegebenen konstanten Wert annehmen und in einen stabilen Betrieb übergehen. Es kann jedoch vorkommen, dass der Regelkreis instabil wird und die Regelgröße sowie Stellgröße periodische Schwingungen ausführen. Dies kann sogar dazu führen, dass die Amplitude dieser Schwingung u. U. nicht konstant bleibt, sondern vergrößert sich laufend, bis sie periodisch zwischen einem oberen und unteren Maximalwert hin und her schwingt.



a) Konstante Schwingungsamplitude



b) Anwachsene Schwingungsamplitude



Man spricht hier häufig auch von der Selbsterregung des Regelkreises. Die Ursache von einem solchen instabilen Verhalten sind meist im Regelkreis vorhandene kleine Störampplituden, die eine gewisse Unruhe in den Kreis bringen. Die Selbsterregung ist im Wesentlichen vom Aufbau des Regelkreises, ob mechanisch, hydraulisch oder elektrisch, unabhängig und tritt dann auf, wenn die zurückkommende Schwingung eine gleiche oder größere Amplitude hat und die gleiche Phasenlage hat, wie sie angelegt wurde.

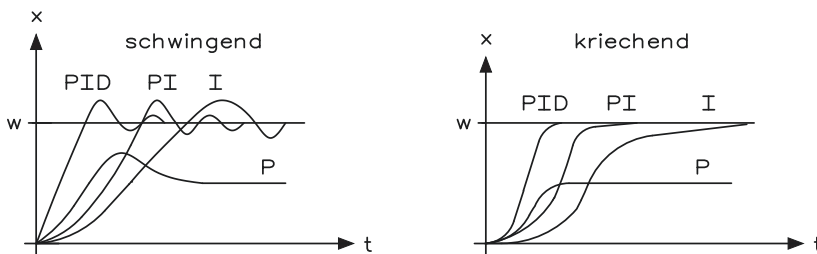
Werden in einem stetigen Regelkreis, der stabil arbeitet, gewisse Betriebsbedingungen verändert (z. B. neue Reglereinstellung), so muss immer damit gerechnet werden, dass der Regelkreis instabil wird. Für die praktische Regelungstechnik ist die Stabilität des Regelkreises jedoch selbstverständlich. Pauschal kann man sagen, dass in der Praxis ein stabiles Verhalten dadurch erreicht wird, indem man die Verstärkung im Regelkreis hinreichend klein und die Regler-Zeitkonstante hinreichend groß wählt.

Je nach Ursache spricht man bei der Beschreibung des Streckenverhaltens im Regelkreis von Stör- oder Führungsverhalten:

- Führungsverhalten: Die Führungsgröße wurde verstellt und der Prozess hat ein neues Gleichgewicht erreicht.
- Störverhalten: Auf den Prozess wirkt von außen eine Störung und verschiebt das bisherige Gleichgewicht, bis sich wieder ein stabiler Istwert ausgebildet hat.

Das Führungsverhalten entspricht somit dem Verhalten des Regelkreises auf eine Führungsgrößenänderung. Das Störverhalten bestimmt die Reaktion auf äußere Änderungen, z. B. das Einbringen von kaltem Gut in einen Ofen. Stör- und Führungsverhalten in einem Regelkreis sind im Allgemeinen nicht gleich. Dies liegt unter anderem daran, dass sie auf unterschiedliche Zeitglieder bzw. an verschiedenen Eingriffsorten im Regelkreis wirken.

Bei einem Regelkreis mit gutem Führungsverhalten kommt es darauf an, dass bei Änderung der Führungsgröße die Regelgröße den neuen Wert der Führungsgröße möglichst schnell und mit einem kleinen Überschwingen erreichen soll. Man kann zwar ein Überschwingen durch eine andere Reglereinstellung verhindern. Dieses Anfahren an die Führungsgröße kann dabei kriechend oder schwingend ausgeführt sein.



P-Regler besitzen eine bleibende Regelabweichung, die sich durch Einführung eines I-Anteils beseitigen lässt. Durch diesen I-Anteil erhöht sich aber die Neigung zum Überschwingen und die Regelung wird etwas träger. Verzögerungsbehaftete Strecken lassen sich mit einem P-Regler nur bei Vorhandensein eines I-Anteils stationär genau regeln. Bei einer Totzeit ist immer ein I-Anteil erforderlich, da ein P-Regler allein zu Schwingungen führt. Für Strecken ohne Ausgleich ist ein I-Regler ungeeignet.

Der D-Anteil lässt den Regler schnell reagieren. Bei stark pulsierenden Prozessgrößen, wie Druckregelung etc., führt dies jedoch zu Instabilitäten. Regler mit D-Anteil eignen sich dagegen gut für langsame Regelstrecken wie sie bei Temperaturregelungen auftreten. Ist die bleibende Regelabweichung unerwünscht, verwendet man dann einen sogenannten PI- oder PID-Regler.

Für den Zusammenhang zwischen Streckenordnung und Reglerstruktur gilt: Für Strecken ohne Ausgleich oder Totzeiten (0. Ordnung) ist ein P-Regler ausreichend. Aber auch bei scheinbar verzögerungsfreien Strecken kann die Verstärkung eines P-Reglers nicht beliebig hoch gewählt werden, da der Regelkreis ansonsten durch kleinste immer vorhandene Totzeiten instabil würde. Zum vollständigen Ausregeln ist daher immer ein I-Anteil erforderlich.

Für Strecken 1. Ordnung mit kleinen Totzeiten ist ein PI-Regler gut geeignet. Strecken 2. und höherer Ordnung (mit Verzugs- und Totzeiten) erfordern einen PID-Regler. Bei sehr hohen Ansprüchen sollte eine Kaskadenregelung, eingesetzt werden. Strecken 3. und 4. Ordnung sind mitunter mit PID-Reglern, meist aber nur noch mit Kaskadenregelung, zu realisieren.

Bei Regelstrecken ohne Ausgleich muss die Stellgröße nach dem Erreichen der Führungsgröße auf Null zurückgenommen werden. Sie können daher nicht durch Regler mit I-Anteil geregelt werden, da diese durch ein Überspringen der Regelgröße abgebaut werden müsste. Für Strecken ohne Ausgleich und höherer Ordnung (mit Verzugs- und Totzeiten) ist daher ein PD-Regler geeignet.

### Auswahl der Reglertypen zum Regeln der wichtigsten Regelgrößen

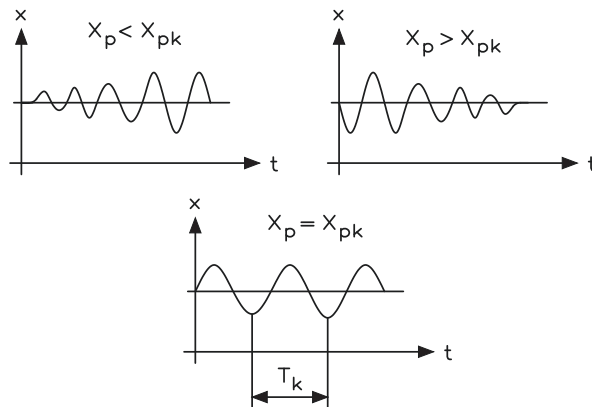
|            | Bleibende Regelabweichung                                      |          | Keine bleibende Regelabweichung            |                   |
|------------|----------------------------------------------------------------|----------|--------------------------------------------|-------------------|
|            | P                                                              | PD       | PI                                         | PID               |
| Temperatur | einfache Strecken für geringe Ansprüche                        |          | geeignet                                   | sehr gut geeignet |
| Druck, Gas |                                                                |          | geeignet                                   |                   |
| Wasser     |                                                                |          | reiner I-Anteil, meist besser              |                   |
| Durchfluss | wenig geeignet, da erforderlicher $X_p$ -Bereich meist zu groß | geeignet | brauchbar, aber I-Regler allein oft besser |                   |
| Niveau     | bei kleiner Totzeit                                            | geeignet |                                            |                   |
| Förderung  | ungeeignet wegen Totzeit                                       |          | brauchbar, aber I-Regler allein oft besser |                   |

### Geeignete Reglertypen für die unterschiedlichen Regelstrecken

| Strecke                        | Reglerstruktur |          |                                   |              |
|--------------------------------|----------------|----------|-----------------------------------|--------------|
|                                | P              | PD       | PI                                | PID          |
| Reine Totzeit                  |                |          | gut geeignet oder reiner I-Regler |              |
| 1. Ordnung mit kleiner Totzeit |                |          | gut geeignet                      | geeignet     |
| 2. Ordnung mit kleiner Totzeit |                |          | ungünstiger als PID               | gut geeignet |
| Höhere Ordnung                 |                |          | ungünstiger als PID               | gut geeignet |
| Ohne Ausgleich mit Verzugszeit | geeignet       | geeignet |                                   |              |

## 14.9 Optimierung von Regelkreisen

Regleroptimierung bedeutet die Anpassung des Reglers an den gegebenen Prozess bzw. Regelstrecke. Die Regelparameter ( $k_p$ ,  $X_p$ ,  $T_n$ ,  $T_v$  usw.) müssen so gewählt werden, dass bei den gegebenen Betriebsverhältnissen ein möglichst günstiges Verhalten des Regelkreises erzielt wird. Dieses günstige Verhalten kann jedoch unterschiedlich definiert sein, z. B. ob man ein schnelles Erreichen der Führungsgröße bei kleinerem Überschwingen als günstig bezeichnet oder ein überschwingungsfreies Anfahren bei etwas längerer Ausregelzeit.



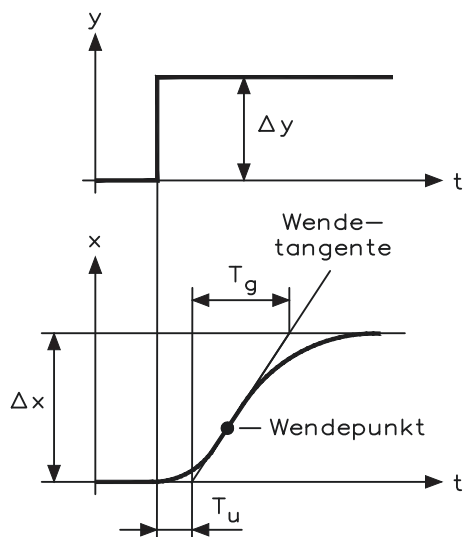
Die Regelgüte zeigt, dass für eine sprungweise Störung sich ebenfalls als Gütemaßstäbe die Überschwingweite  $X_m$  und die Ausregelzeit  $T_a$  anbieten. Um die Ausregelzeit genauer zu definieren ist es erforderlich festzuhalten, wann der Regelvorgang als beendet anzusehen ist. Zweckmäßig wird das Ausregeln einer Störung als beendet angesehen, wenn die Regelgrößenänderungen unterhalb  $\pm 1\%$  vom Sollwertebereich  $W_h$  blei-

ben, d. h. innerhalb der Messgenauigkeit zu liegen kommen, wobei zweckmäßig eine Störung von 10 % von  $Y_h$  gewählt wird.

Neben der Überschwingweite und der Ausregelzeit werden auch weiterhin für mathematische Untersuchungen als Gütemaßstäbe die Regelfehlerflächen herangezogen.

- Lineare Regelfläche:  $A = A_1 - A_2 + A_3$
- Quadratische Regelfläche:  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

Bei der Schwingungsmethode nach Ziegler und Nichols werden die Regelparameter so verstellt, dass die Stabilitätsgrenze erreicht ist und der aus Regler und Strecke gebildete Regelkreis zu schwingen beginnt, d. h. die Regelgröße periodische Schwingungen um die Führungsgröße durchführt. Aus den so gefundenen Parametern können die Werte zur Reglereinstellung ermittelt werden. Dieses Verfahren ist nur auf Regelstrecken anwendbar, bei denen ein Überspringen keine Gefahr birgt und die instabil arbeiten können. Um Schwingungen der Regelgröße zu erhalten, wird die Reglerverstärkung zunächst minimiert, d. h. der Proportionalbereich auf den maximalen Wert gestellt. Der Regler muss als reiner P-Regler arbeiten, dafür wird der I-Anteil ( $T_n$ ) sowie der D-Anteil ( $T_v$ ) ausgeschaltet. Nun wird der Proportionalbereich  $X_p$  so lange verkleinert, bis die Regelgröße ungedämpfte Schwingungen mit konstanter Amplitude ausführt.

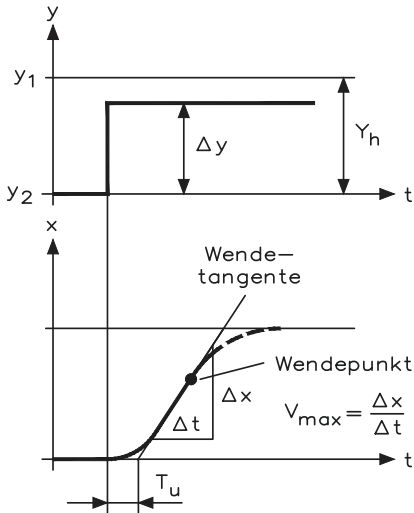


Für die Schwingungsmethode nach Ziegler-Nichols ergibt sich folgende Tabelle:

| Reglerstruktur |                                                                                         |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| P              | $X_P \approx X_{Pk}/0,5$                                                                |
| PI             | $X_P \approx X_{Pk}/0,45$<br>$T_n \approx 0,85 \cdot T_k$                               |
| PID            | $X_P \approx X_{Pk}/0,6$<br>$T_n \approx 0,5 \cdot T_k$<br>$T_v \approx 0,12 \cdot T_k$ |

Die Einstellregeln von Ziegler/Nichols gelten im Wesentlichen für Strecken mit kleinen Totzeiten und einem Verhältnis  $T_g/T_u > 3$ .

Eine weitere Möglichkeit der Parameterbestimmung beruht auf der Aufnahme der streckentypischen Parameter, durch Aufzeichnung der Streckensprungantwort. Dieses Verfahren eignet sich auch für Strecken, die nicht zum Schwingen gebracht werden können. Der Regelkreis muss allerdings geöffnet werden, z. B. indem man ein Regelgerät in den Handbetrieb umschaltet, um direkt auf die Stellgröße Einfluss zu nehmen. Der Stellgradsprung sollte nach Möglichkeit in der Nähe der Führungsgröße stattfinden.



Ein Verfahren, mit dessen Hilfe die Regelparameter berechnet werden können, wenn die Parameter der Strecke bekannt sind, haben Chien, Hrones und Reswick (CHR) entwickelt. Dieses Näherungsverfahren liefert günstige Regelparameter nicht nur für Änderung der Störgröße, sondern auch für Änderung der Führungsgröße und ist geeignet für Regelstrecken mit PTn-Verhalten  $n \geq 2$ . Aus der Sprungantwort werden die Verzugszeit  $T_u$ , die Ausgleichszeit  $T_g$ , sowie der Übertragungsbeiwert der Strecke  $k_s$  ermittelt.

$$k_s = \frac{\text{Regelgrößenänderung}}{\text{Stellgrößenänderung}} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

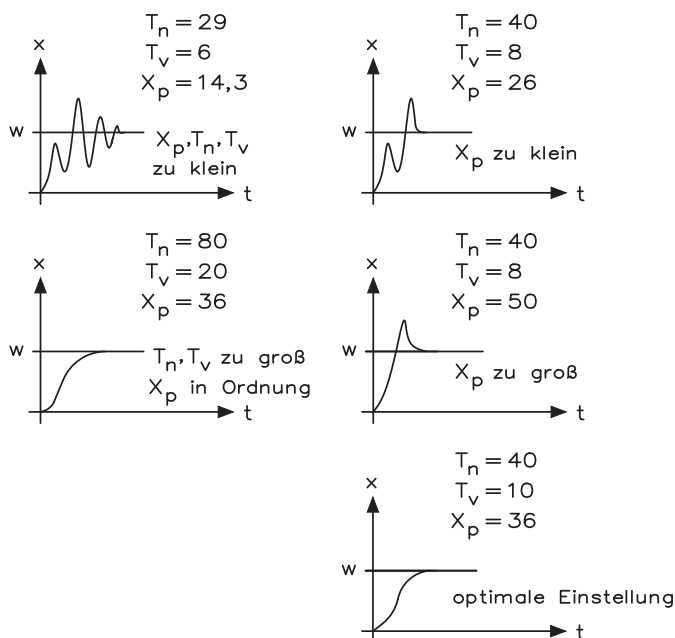
Aus den gefundenen Werten ergeben sich dann die Einstellregeln aus der Tabelle.

### Formeln zur Einstellung nach der Sprungantwort

| Regelstruktur | Führung                                                                                                               | Störung                                                                                                                  |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P             | $X_p \approx 3,3 \cdot k_s \cdot (T_u/T_g) \cdot 100 \%$                                                              | $X_p \approx 3,3 \cdot k_s \cdot (T_u/T_g) \cdot 100 \%$                                                                 |
| I             | $X_p \approx 2,86 \cdot k_s \cdot (T_u/T_g) \cdot 100 \%$<br>$T_n \approx 1,2 \cdot T_g$                              | $X_p \approx 1,66 \cdot k_s \cdot (T_u/T_g) \cdot 100 \%$<br>$T_n \approx 4 \cdot T_g$                                   |
| PID           | $X_p \approx 1,66 \cdot k_s \cdot (T_u/T_g) \cdot 100 \%$<br>$T_n \approx 1 \cdot T_g$<br>$T_v \approx 0,5 \cdot T_u$ | $X_p \approx 1,05 \cdot k_s \cdot (T_u/T_g) \cdot 100 \%$<br>$T_n \approx 2,4 \cdot T_g$<br>$T_v \approx 0,42 \cdot T_u$ |

Mitunter ergeben sich bei der geschilderten Methode allerdings Schwierigkeiten bei der Ermittlung der Ausgleichszeit  $T_g$ . In vielen Fällen kann nur zwischen 0 % oder 100 % gewählt werden. Wird der Prozess aber mit 100-%iger Stellgröße betrieben, droht evtl. die Zerstörung.

Man kann sich nun damit behelfen, dass man auf die Ermittlung von Ausgleichszeit  $T_g$  verzichtet und dafür die Anstiegsgeschwindigkeit  $v_{\max}$  bestimmt. Gibt man dem Regler eine hinreichend große Führungsgröße vor, greift dieser zunächst mit einer 100-%igen Stellgröße ein. Danach regelt er auf dem Sollwert. Mit dem Anstieg des Istwertes kann  $v_{\max}$  berechnet werden.



Der Stellgradsprung sollte nach Möglichkeit in Sollwertnähe stattfinden. Die Aufzeichnung der Streckensprungantwort kann beendet werden nach dem Erreichen des Wendepunktes, d. h. wenn die Steigung der Regelgröße wieder kleiner wird.

Durch Anlegen der Wendetangente lassen sich nun Verzugszeit  $T_u$  und Anstiegsgeschwindigkeit  $v_{\max}$  bestimmen. Die Regelparameter für den Proportionalwert  $X_p$ , der Nachstellzeit  $T_n$  bzw. der Vorhaltezeit  $T_v$  können nun auch ohne Kenntnis von der Ausgleichszeit  $T_g$  berechnet werden. Für die unterschiedlichen Reglerstrukturen ergibt sich der Zusammenhang und folgende Tabelle zeigt die Formeln für die Einstellung.

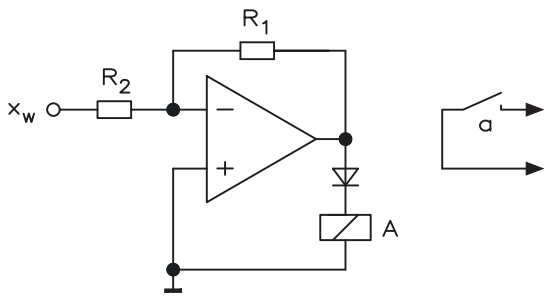
$X_h$  (%): max. Stellbereich ( $Y_1 - Y_2$ ), der ohne Stellgradbegrenzung zur Verfügung steht

$\Delta y$  (%): Stellgrößenänderung in % bezogen auf  $Y_h$

| Reglerstruktur |                                                                                                                            |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P              | $X_p \approx v_{\max} \cdot T_u \cdot Y_h/\Delta y$                                                                        |
| PI             | $X_p \approx 1,2 \cdot v_{\max} \cdot T_u \cdot Y_h/\Delta y$<br>$T_n \approx 3,3 \cdot T_u$                               |
| PID            | $X_p \approx 0,83 \cdot v_{\max} \cdot T_u \cdot Y_h/\Delta y$<br>$T_n \approx 2 \cdot T_g$<br>$T_v \approx 0,5 \cdot T_u$ |
| PD             | $X_p \approx 0,83 \cdot v_{\max} \cdot T_u \cdot Y_h/\Delta y$<br>$T_v \approx 0,25 \cdot T_u$                             |

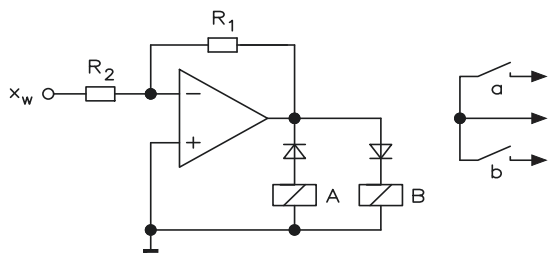
14.10 Schaltende Regler

Bei der Zweipunktregelung kann die Stellgröße zwei Zustände annehmen: Ein und Aus. Wegen des unstetigen Verhaltens ist sie nur für Strecken geeignet, bei denen die Veränderung der Regelgröße zeitbehaftet (verzögert) erfolgt.



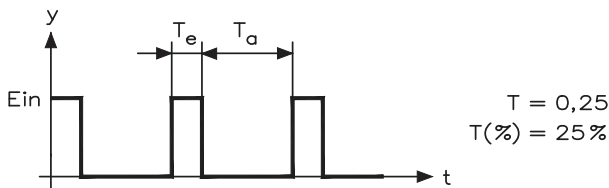
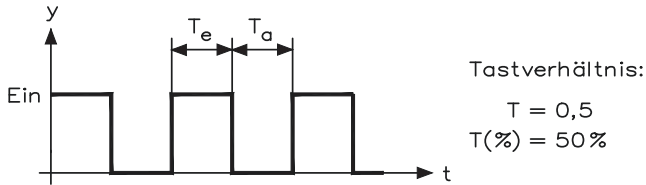
$$x_w = \frac{R_1}{R_2}$$

Bei der Dreipunktregelung kann die Stellgröße drei Zustände annehmen: Zustand I, Aus und Zustand II. Diese Regelung ist für Strecken mit verzögerter Veränderung geeignet.

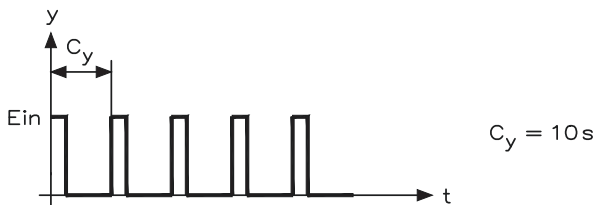
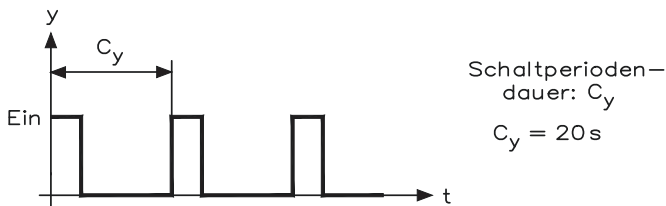


$$x_w = \frac{R_1}{R_2}$$

Auch mit einem schaltenden Ausgang lässt sich eine Energiezufuhr nahezu kontinuierlich, d. h. stufenlos, dosieren: Es bleibt letztlich gleich, ob ein Ofen mit 50 % des Heizstromes betrieben wird oder mit voller Leistung (100 %), diese aber nur die Hälfte der Zeit anliegt.



Tastverhältnis:  $T = \frac{T_e}{T_e + T_a}$



Gleiches Tastverhältnis ( $T=0,25$ )  
bei unterschiedlicher Schaltperiodendauer

Unstetige Regler ändern statt der Größe des Ausgangssignals das Einschaltverhältnis bzw. Tastverhältnis des Ausgangssignals. Ein Tastverhältnis von 1 entspricht 100 % der Stellgröße, 0,25 entsprechen 25 % der Stellgröße usw.

Das Tastverhältnis lässt sich wie folgt definieren:

$$T = \frac{T_e}{T_e + T_a}$$

$T_e$  Einschaltzeit  
 $T_a$  Ausschaltzeit

Durch Multiplikation mit 100 % erhält man die relative Einschaltdauer angegeben in  $T(\%) = T \cdot 100 \%$ .

Die Definition des Tastverhältnisses bzw. der relativen Einschaltdauer besagt, wie lange die Energiezufuhr bei einem Regler mit schaltendem Ausgang eingeschaltet ist, z. B. ein Tastverhältnis von 0,25 besagt, dass die Energiezufuhr 25 % einer Gesamtzeit eingeschaltet und 75 % ausgeschaltet ist. Es wird hierbei aber keine Aussage über die Dauer des Zeitraumes gegeben, d. h. ob der Vorgang innerhalb einer Minute, mehreren Minuten oder einer Stunde gilt.

In der Theorie ergibt sich dann für die Einschaltzeit des Reglers folgender Zusammenhang:

$$\text{Einschaltzeit } T_e = \frac{\text{Stellgröße } (y \text{ in } \%) \cdot \text{Schaltperiodendauer } (C_y \text{ in } \%) }{100 \%}$$

Das heißt, bei einer kleinen Periodendauer ( $C_y = T_e + T_y$ ) wird die zugeführte Energie feiner dosiert. Demgegenüber steht jedoch ein häufiges Schalten des Stellgliedes (Relais/Schütz). Aus der Periodendauer lässt sich die Schalthäufigkeit leicht ermitteln.

## 15.1 Bedeutung der binären Signalwerte

|                 | Schalterwert 0 | Schalterwert 1 |
|-----------------|----------------|----------------|
| Schalter        | offen          | geschlossen    |
| Signal          | 0              | 1              |
| Potential       | L (Low)        | H (High)       |
| Wahrheitsgehalt | falsch         | wahr           |

## 15.2 Zahlensysteme

| Dezimal | Dual/Binär | Oktal | Hexadezimal |
|---------|------------|-------|-------------|
| 0       | 0          | 0     | 0           |
| 1       | 1          | 1     | 1           |
| 2       | 10         | 2     | 2           |
| 3       | 11         | 3     | 3           |
| 4       | 100        | 4     | 4           |
| 5       | 101        | 5     | 5           |
| 6       | 110        | 6     | 6           |
| 7       | 111        | 7     | 7           |
| 8       | 1000       | 10    | 8           |
| 9       | 1001       | 11    | 9           |
| 10      | 1010       | 12    | A           |
| 11      | 1011       | 13    | B           |
| 12      | 1100       | 14    | C           |
| 13      | 1101       | 15    | D           |
| 14      | 1110       | 16    | E           |
| 15      | 1111       | 17    | F           |

### 15.3 Umrechnen von Zahlensystemen

#### ■ Dezimalsystem (Zehnersystem)

359D

1. Stelle  $\triangleq 9 \cdot 10^0 = 9 \cdot 1 = 9$
2. Stelle  $\triangleq 5 \cdot 10^1 = 5 \cdot 10 = 50$
3. Stelle  $\triangleq 3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 100 = \underline{300}$   
359D

#### ■ Dual/Binärsystem (Zweiersystem)

1011B

1. Stelle  $\triangleq 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$
2. Stelle  $\triangleq 1 \cdot 2^1 = 1 \cdot 2 = 2$
3. Stelle  $\triangleq 0 \cdot 2^2 = 0 \cdot 4 = 0$
4. Stelle  $\triangleq 1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 8 = \underline{8}$   
11D

#### ■ Oktalsystem (Achtersystem)

473O

1. Stelle  $\triangleq 3 \cdot 8^0 = 3 \cdot 1 = 3$
2. Stelle  $\triangleq 7 \cdot 8^1 = 7 \cdot 8 = 56$
3. Stelle  $\triangleq 4 \cdot 8^2 = 4 \cdot 64 = \underline{256}$   
315D

#### ■ Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem)

73H

1. Stelle  $\triangleq 3 \cdot 16^0 = 3 \cdot 1 = 3$
2. Stelle  $\triangleq 7 \cdot 16^1 = 7 \cdot 16 = \underline{112}$   
115D

#### ■ Umwandlung von Dezimal nach Dual/Binär

25D  $\Rightarrow$  ?B      25 : 2 = 12 Rest 1      Probe: 1    1    0    0    1  
                          12 : 2 = 6 Rest 0                                    2<sup>4</sup>   2<sup>3</sup>   2<sup>2</sup>   2<sup>1</sup>   2<sup>0</sup>  
                          6 : 2 = 3 Rest 0                                    16 + 8                    +    1 = 25  
                          3 : 2 = 1 Rest 1  
                          2 : 1 = 0 Rest 1     $\uparrow$  1 1 0 0 1

#### ■ Umwandlung von Dezimal nach Oktal

100D  $\Rightarrow$  ?O      100 : 8 = 12 Rest 4      Probe: 1            4            4  
                          12 : 8 = 1 Rest 4                                    8<sup>2</sup>            8<sup>1</sup>            8<sup>0</sup>  
                          1 : 8 = 0 Rest 1     $\uparrow$  1 4 4      1 · 64 + 4 · 8 + 4 · 1 = 100

#### ■ Umwandlung von Dezimal nach Hexadezimal

500D  $\Rightarrow$  ?H      500 : 16 = 31 Rest 4      Probe: 1            F            4  
                          31 : 16 = 1 Rest F                                    16<sup>2</sup>            16<sup>1</sup>            16<sup>0</sup>  
                          1 : 16 = 0 Rest 1     $\uparrow$  1 F 4      1 · 256 + 15 · 16 + 4 · 1 = 500

■ **Umwandlung von Dual/Binär in Oktal**

1 1 0 1 0 1      110101B  $\triangleq$  65O  
         6       5

■ **Umwandlung von Dual/Binär in Hexadezimal**

1 1    0 1 0 1      110101B  $\triangleq$  35H  
         3       5

## 15.4 Bits und Bytes

- Ein Bit (Binary Digit) kann zwei Zustände annehmen

|       |
|-------|
| $2^0$ |
|-------|

- Eine Tetrade (4-Bit-Format) oder Nibble kann 16 Zustände annehmen

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
|-------|-------|-------|-------|

- Ein Byte (8-Bit-Format) kann 256 Zustände annehmen

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

- Ein Word (16-Bit-Format) besteht aus 2 Bytes und kann 65.536 Zustände ( $\approx$ 64 Kbyte) annehmen

|        |        |
|--------|--------|
| H-Byte | L-Byte |
|--------|--------|

- Ein DWord (Double, 32-Bit-Format) besteht aus 4 Bytes und kann 4.294.967.296 Zustände ( $\approx$ 4 Gbyte) annehmen

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| HH-Byte | HL-Byte | LH-Byte | LL-Byte |
|---------|---------|---------|---------|

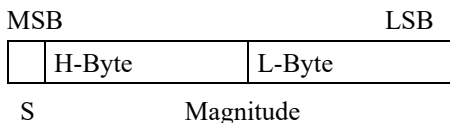
- Ein FWord (Far) besteht aus 6 Bytes (48-Bit-Format) und kann  $\approx$ 2,8 Tbyte (Tera) annehmen.
- Ein QWord (Quad) besteht aus 8 Bytes (64-Bit-Format).
- Ein TWord (Ten) besteht aus 10 Bytes (80-Bit-Format).

■ **Integer (vorzeichenbehaftete Binärzahl): 8-Bit-Integer**

|       |       |       |           |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| MSB   |       |       |           |       |       |       | LSB   |
| $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$     | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
| S     |       |       | Magnitude |       |       |       |       |

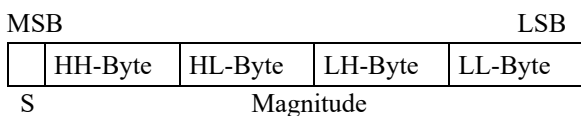
MSB Most Significant Bit  
 (höherwertiges Bit)  
 LSB Least Significant Bit  
 (niederwertiges Bit)  
 S vorzeichenbehaftet (Sign),  
 0 = positiv, 1 = negativ  
 Bereich: -128 bis +127

### ■ 16-Bit-Integer



Bereich:  $-32768$  bis  $+32767$

### ■ 32-Bit-Integer

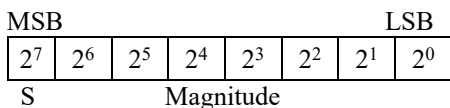


Bereich:  $-2 \cdot 10^9$  bis  $+2 \cdot 10^9$

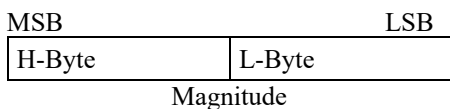
### ■ 64-Bit-Integer

Bereich:  $-9 \cdot 10^{18}$  bis  $+9 \cdot 10^{18}$

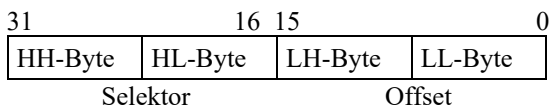
### ■ Ordinal (vorzeichenlose Binärzahl)



Bereich: 0 bis 255



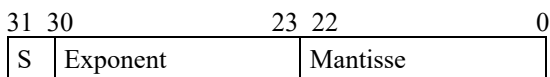
Bereich: 0 bis 65535



### ■ Gleitpunktzahlen (Floating Point)

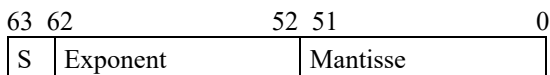
IEEE-Format (32-Bit-Format): IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers)

Short Real:



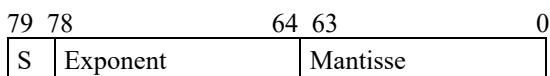
Bereich:  
 $8,43 \cdot 10^{-37}$  bis  $3,37 \cdot 10^{38}$

Long Real (64-Bit-Format):



Bereich:  
 $4,19 \cdot 10^{-307}$  bis  $1,67 \cdot 10^{308}$

Temporary Real (80-Bit-Format):



Bereich:  
 $3,4 \cdot 10^{-4932}$  bis  $1,2 \cdot 10^{4932}$

15.5 Codes

Der Minimalaufwand an Binärelementen zum Aufbau eines BCD-Codes beträgt 4 Bit, wobei eine Redundanz von 0,7 Bit unvermeidlich ist. Man spricht bei dieser Gruppe von Codes von den 4-Bit-Codes oder Tetraden-Codes. Zur Darstellung der zehn Ziffern des denären Alphabets muss man zehn Codeworte mit vier Stellen (4 Bit) aus den 16 möglichen Binärzeichenkombinationen auswählen. Es verbleiben also stets sechs nicht benötigte Codeworte, die man als Pseudodezimalen (Pseudotetraden) bezeichnet.

In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, wie viel 4-Bit-Codes sich überhaupt konstruieren lassen. Darüber gibt die Variationsrechnung Auskunft. Bezeichnet man mit  $V$  die Anzahl der möglichen Variationen, mit  $M_c$  die Menge der zu bildenden Codeworte und mit  $M_z$  die Menge der darzustellenden Zeichen, dann ergibt sich:

$$V = \binom{M_c}{M_z} \cdot M_z! = \frac{M_c!}{(M_c - M_z)!}$$

Die Tabelle zeigt die Entwicklung der gebräuchlichsten 4-Bit-Codes aus dem reinen Binärcode durch unterschiedlichen Einbau von Pseudodezimalen.

| Codebezeichnung |                   |              |            |               |                |                |              |              |              |              |            |   |
|-----------------|-------------------|--------------|------------|---------------|----------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|---|
| Stellennummer   | Reiner Binär-code | 8-4-2-1-Code | Aiken-Code | Exzess-3-Code | Jump-at-2-Code | Jump-at-8-Code | 4-2-2-1-Code | 5-4-2-1-Code | 5-2-2-1-Code | 5-3-1-1-Code | White-Code |   |
| 4 3 2 1         |                   |              |            |               |                |                |              |              |              |              |            |   |
|                 | 0                 | 1            | 0          |               | 0              | 0              | 0            | 0            | 0            | 0            | 0          | 0 |
|                 | 1                 | 1            | 1          |               | 1              | 1              | 1            | 1            | 1            | 1            | 1          | 1 |
|                 | 2                 | 2            | 2          |               |                | 2              | 2            | 2            | 2            | 2            |            |   |
|                 | 3                 | 3            | 3          | 0             |                | 3              | 3            | 3            | 3            | 3            | 3          | 2 |
|                 | 4                 | 4            | 4          | 1             |                | 4              |              | 4            | 4            | 4            |            |   |
|                 | 5                 | 5            |            | 2             |                | 5              |              |              |              |              |            | 3 |
|                 | 6                 | 6            |            | 3             |                | 6              | 4            |              |              |              |            |   |
|                 | 7                 | 7            |            | 4             |                | 7              | 5            |              |              |              |            | 4 |
|                 | 8                 | 8            |            | 5             | 2              |                |              | 5            |              | 5            | 5          | 5 |
|                 | 9                 | 9            |            | 6             | 3              |                |              | 6            | 5            | 6            | 6          | 6 |
|                 | 10                |              |            | 7             | 4              |                |              | 7            | 6            |              |            |   |
|                 | 11                |              | 5          | 8             | 5              |                |              | 8            | 6            | 7            | 7          | 7 |
|                 | 12                |              | 6          | 9             | 6              |                | 6            | 9            | 7            | 8            |            |   |
|                 | 13                |              | 7          |               | 7              |                | 7            |              | 8            | 9            | 8          | 8 |
|                 | 14                |              | 8          |               | 8              | 8              | 8            |              | 9            |              |            |   |
|                 | 15                |              | 9          |               | 9              | 9              | 9            |              |              |              |            | 9 |

Pseudotetrad

Je nach der Art und Weise, in der die Pseudodezimalen in den Code eingebaut werden, entstehen Codes mit den verschiedensten typischen Eigenschaften (Bewertbarkeit, Symmetrie, Bündelung, Markierbarkeit usw.), wie die Tabelle zeigt.

| Code-<br>bezeich-<br>nung | 8-4-2-1-<br>Code |   |   |   | Aiken-<br>Code |   |   |   | Exzess-<br>3-Code | Jump-<br>at-2-<br>Code |   |   |   | Jump-<br>at-8-<br>Code |   |   |   | 4-2-2-1-<br>Code |   |   |   | 5-4-2-1-<br>Code |   |   |   | 5-2-2-1-<br>Code |   |   |   | 5-3-1-1-<br>Code |   |   |   | White-<br>Code |   |   |   |
|---------------------------|------------------|---|---|---|----------------|---|---|---|-------------------|------------------------|---|---|---|------------------------|---|---|---|------------------|---|---|---|------------------|---|---|---|------------------|---|---|---|------------------|---|---|---|----------------|---|---|---|
| Wertig-<br>keit           | 8                | 4 | 2 | 1 | 2              | 4 | 2 | 1 | keine             | 2                      | 4 | 2 | 1 | 2                      | 4 | 2 | 1 | 4                | 2 | 2 | 1 | 5                | 4 | 2 | 1 | 5                | 2 | 1 | 1 | 5                | 3 | 1 | 1 | 5              | 2 | 1 | 1 |
| Zugeordnete Dezimalziffer | 0                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 1                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 2                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 3                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 4                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 5                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 6                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 7                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 8                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |
|                           | 9                |   |   |   |                |   |   |   |                   |                        |   |   |   |                        |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                  |   |   |   |                |   |   |   |

■ Pseudotetrade

Der 8-4-2-1-Code ist ein auf eine Dekade verkürzter reiner Binärcode. Er wird gerne zur Zählung und Addition verwendet. Seine Stellenwertigkeiten entsprechen denen der ersten vier Stellen des reinen Binärcodes (8, 4, 2, 1), woher auch seine Bezeichnung stammt. Nachteilig für diesen Code sind die Tatsachen, dass er als nicht markiertes Codewort das 0-Wort enthält und nicht symmetrisch ist, d. h. keine Komplementbildung erlaubt. Für die einfache Durchführung von Subtraktionen ist es wünschenswert, dass ein Code in unkomplizierter Weise (z. B. durch Invertieren aller Stellen) das sogenannte 9er-Komplement bildet. Man kann dann für die Addition und Subtraktion das gleiche Rechenregister benutzen. Da der 8-4-2-1-Code diese Eigenschaft nicht besitzt, wird dieser selten verwendet.

Legt man die Pseudodezimalen, die sich beim 8-4-2-1-Code, genau in der Mitte befinden, kommt man zum AIKEN-Code, der die Stellenwertigkeiten 2-4-2-1 besitzt. Wie man erkennt, ist er symmetrisch aufgebaut, d. h. die Invertierung aller Stellen irgendeines Codewortes ergibt das zugehörige 9er-Komplement. Als Nachteil dieses Codes ist zu nennen, dass er als nicht markierte Codeworte sowohl das 0-Wort als auch das 1-Wort enthält. Dieses vermeidet der Exzess-3-Code nach STIBITZ. Er ist ebenfalls symmetrisch, aber nicht bewertbar, d. h. ein reiner Anordnungscode. Man kann sich diesen Code aus dem 8-4-2-1-Code über das Bildungsgesetz berechnen:

$$Z_{dez} = \left( \sum_{j=1}^k W_j \cdot S_j \right) - 3; \quad (W_j = 8, 4, 2, 1)$$

Der 5-Bit-Code hat natürlicherweise eine höhere Redundanz als die Minimalform der 4-Bit-Codes. Es ergeben sich insgesamt 22 überflüssige Codeworte oder eine Redundanz von  $R \approx 1,7$  Bit. Da man aus der größeren Anzahl von  $2^5 = 32$  Codeworten nur zehn für einen BCD-Code auszuwählen hat, besteht die Möglichkeit, 5-Bit-Codes mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren, die mit 4 Bit nicht zu erzielen sind und die den höheren Aufwand an Binärstellen rechtfertigen.

Der LIBAW-CRAIG-Code eignet sich sehr gut zum Aufbau von elektronischen Ein- und Zweirichtungszählern. Diese Zähler bestehen im Wesentlichen aus einem 5-stelligen Schieberegister mit gekreuzter Rückführung, weshalb dieser Code auch „switched-tailring-counter-code“ bezeichnet wird. Er gestattet eine äußerst einfache Umcodierung auf den häufig verwendeten  $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Code durch nur zwei Dioden pro Dezimalziffer. Die

für die Ziffernerkennung geeigneten Binärstellen sind in der Tabelle mit einem Punkt gekennzeichnet. Als Nachteil ist festzustellen, dass der Code sowohl das 0-Wort als auch das 1-Wort enthält. Auch ist er nicht bewertbar. Es fällt ferner auf, dass die HAMMING-Distanz aller benachbarten Codeworte konstant gleich 1 ist, also ein stetiger Code vorliegt, der wegen  $D = 1$  einschrittig genannt wird. Das 10er-Komplement ist durch Lesen des Codewortes in umgekehrter Reihenfolge erhältlich. Schaltungstechnisch bedeutet dieses, dass man die 5. gegen die 1. und die 4. gegen die 2. Stelle im Wort vertauschen muss, um das Komplement auf 10 zu erhalten. Der LIBAW-CRAIG-Code ist auch als einspuriger Kettencode verwendbar.

| Codebezeichnung |   | LIBAW-CRAIG-Code |   |   |   |   | 1-2-1-Code |   |   |   |   |
|-----------------|---|------------------|---|---|---|---|------------|---|---|---|---|
| Wertigkeit      |   | keine            |   |   |   |   | keine      |   |   |   |   |
| Stellennummer   |   | 5                | 4 | 3 | 2 | 1 | 5          | 4 | 3 | 2 | 1 |
|                 | 0 | ○                |   |   |   | ○ | ⊗          |   |   |   | ⊗ |
|                 | 1 |                  |   |   | ○ | ⊗ |            |   |   | ○ | ⊗ |
|                 | 2 |                  |   | ○ | ⊗ | ⊗ |            |   |   | ⊗ | ⊗ |
|                 | 3 |                  | ○ | ⊗ | ⊗ | ⊗ |            |   | ○ | ⊗ |   |
|                 | 4 | ○                | ⊗ | ⊗ | ⊗ | ⊗ |            |   | ⊗ | ⊗ |   |
|                 | 5 | ⊗                | ⊗ | ⊗ | ⊗ | ⊗ |            | ○ | ⊗ |   | ○ |
|                 | 6 | ⊗                | ⊗ | ⊗ | ⊗ | ○ |            | ⊗ | ⊗ |   |   |
|                 | 7 | ⊗                | ⊗ | ⊗ | ○ |   | ○          | ⊗ |   |   |   |
|                 | 8 | ⊗                | ⊗ | ○ |   |   | ⊗          | ⊗ |   |   |   |
|                 | 9 | ⊗                | ○ |   |   |   | ⊗          |   |   |   | ○ |

Zwei spezielle 5-Bit-Codes mit Angabe der für die Umcodierung auf den  $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Code als Erkennungsstellen benötigten Binärstellen

Ein weiterer 5-Bit-Code, der ebenfalls einschrittig und einspurig, d. h. ein Kettencode ist, aber 0-Wort und 1-Wort vermeidet, wird nach dem ständig zwischen  $g=1$  und  $g=2$  abwechselnden Gewicht der Worte 1-2-1-Code genannt. Die Umcodierung auf den  $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Code ist fast genauso einfach wie beim LIBAW-CRAIG-Code die 10er-Kom-

plementbildung geschieht auf die gleiche Weise wie bereits geschildert. Zu den 5-Bit-Codes gehören ferner

- Walking-Code
- 7-4-2-1-0-Code
- 8-4-2-1-0-Code
- LORENZ-Code

Bei der Exzessdarstellung wird ein definierter Code – zumeist der reine Binärcode – mit einem Überschuss oder Exzess  $e$  versehen, so dass sich der zu einem Codewort  $w$  gehörende Ziffernwert  $z$  aus dem ursprünglichen Ziffernwert  $z'$  nach der Gleichung errechnet:

$$z = z' - e = \left[ \sum_{j=1}^k W_j \cdot S_j \right] - e$$

Die bekannteste Form dieser Codeart ist die Exzess-3-Darstellung des 8-4-2-1-Codes, die von STIBITZ angegeben wurde. Allgemein beruhen die wichtigsten Exzess-Darstellungen darauf, dass jede Denärziffer  $z_i$  durch ein Codewort  $w_i$  mit dem Zahlenwert  $q \cdot z_i + e$  im reinen Binärcode angegeben wird. Das vollständige Bildungsgesetz der Exzess-e-Codierung lautet somit

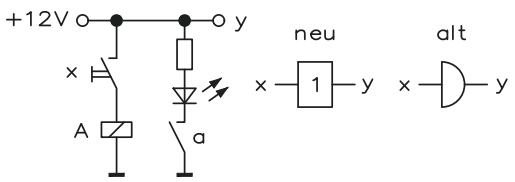
$$z = \frac{\left[ \sum_{j=1}^k W_j \cdot S_j \right] - e}{q}, \quad (W_j = 2^{k-1} \dots 16, 8, 4, 2, 1)$$

Die wichtigsten Exzess-e-Codes sind der STIBITZ-Code mit  $q = 1$  und  $e = 3$ , der NUDING-Code mit  $q = 3$  und  $e = 2$  sowie der DIAMOND-Code mit  $q = 27$  und  $e = 6$ . Der NUDING-Code hat bei  $k = 5$  eine Minimaldistanz von  $d = 2$ , ist also gegen Übertragungsfehler in gewissen Grenzen gesichert. Der DIAMOND-Code benötigt 8 Binärstellen und hat dabei eine Minimaldistanz von  $d = 3$ . Beide Codes bilden durch Invertierung aller Stellen das 9er-Komplement und sind symmetrisch.

| Codebezeichnungen         |   | STIBITZ-Code |   |   |   | NUDING-Code |   |   |   |   | Diamond-Code |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------------------|---|--------------|---|---|---|-------------|---|---|---|---|--------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Stellennummer             |   | 4            | 3 | 2 | 1 | 5           | 4 | 3 | 2 | 1 | 8            | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Wertigkeit                |   |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
| Zugeordnete Dezimalziffer | 0 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 1 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 2 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 3 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 4 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 5 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 6 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 7 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 8 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |
|                           | 9 |              |   |   |   |             |   |   |   |   |              |   |   |   |   |   |   |   |

15.6 Logische Grundfunktionen

■ Identität

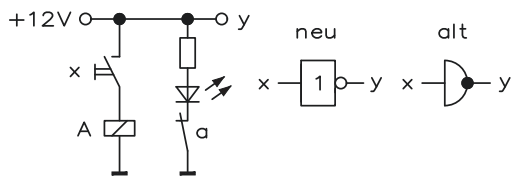


Funktionstabelle

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

Schaltfunktion:  $y = x$   
lies: y ist x

■ Negation (NICHT, NOT)

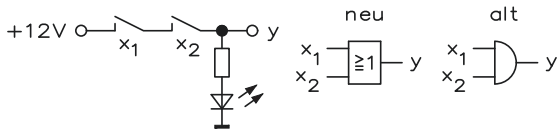


Funktionstabelle

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Schaltfunktion:  $y = \bar{x}$   
lies: y ist x nicht

■ Konjunktion (UND, AND)



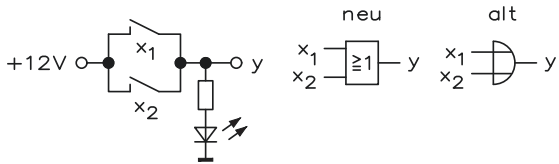
Funktionstabelle

| x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | y |
|----------------|----------------|---|
| 0              | 0              | 0 |
| 0              | 1              | 0 |
| 1              | 0              | 0 |
| 1              | 1              | 1 |

1 1 1 ⇐ Bedingung erfüllt

Schaltfunktion:  $y = x_1 \wedge x_2$  oder  $x_1 \cdot x_2$   
lies: y ist x<sub>1</sub> und x<sub>2</sub>

■ Disjunktion (ODER, OR)



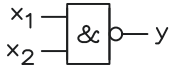
Funktionstabelle

| x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | y |
|----------------|----------------|---|
| 0              | 0              | 0 |
| 0              | 1              | 1 |
| 1              | 0              | 1 |
| 1              | 1              | 1 |

1 1 1 ⇐ Bedingung erfüllt

Schaltfunktion:  $y = x_1 \vee x_2$  oder  $x_1 + x_2$   
lies: y ist x<sub>1</sub> oder x<sub>2</sub>

### ■ NAND (NICHT-UND, NOT-AND)

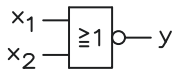


Schaltfunktion:  $y = \overline{x_1 \wedge x_2}$  oder  $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

Funktionstabelle

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |                     |
|-------|-------|-----|---------------------|
| 0     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 0     | 1     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 1     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 1     | 1     | 0   |                     |

### ■ NOR (NICHT-ODER, NOT-OR)

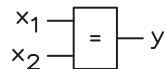


Schaltfunktion:  $y = \overline{x_1 \vee x_2}$  oder  $\overline{x_1} + \overline{x_2}$

Funktionstabelle

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |                     |
|-------|-------|-----|---------------------|
| 0     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 0     | 1     | 0   |                     |
| 1     | 0     | 0   |                     |
| 1     | 1     | 0   |                     |

### ■ Äquivalenz (Exklusiv-ODER, Ex-NOR)



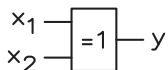
Schaltfunktion:

$$y = \overline{x_1 \wedge x_2} \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \text{ oder } \overline{x_1 \cdot x_2} + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

Funktionstabelle

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |                     |
|-------|-------|-----|---------------------|
| 0     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 0     | 1     | 0   |                     |
| 1     | 0     | 0   |                     |
| 1     | 1     | 1   | ← Bedingung erfüllt |

### ■ Antivalenz (Inklusiv-ODER, Ex-OR)



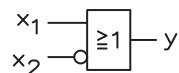
Schaltfunktion:

$$y = \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} \text{ oder } \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

Funktionstabelle

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |                     |
|-------|-------|-----|---------------------|
| 0     | 0     | 0   |                     |
| 0     | 1     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 1     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 1     | 1     | 0   |                     |

### ■ Implikation

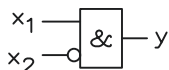


Schaltfunktion:  $y = x_1 \vee \overline{x_2}$  oder  $x_1 + \overline{x_2}$

Funktionstabelle

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |                     |
|-------|-------|-----|---------------------|
| 0     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 0     | 1     | 0   |                     |
| 1     | 0     | 1   | ← Bedingung erfüllt |
| 1     | 1     | 1   | ← Bedingung erfüllt |

## ■ Inhibition



Schaltfunktion:  $y = x_1 \wedge \bar{x}_2$  oder  $x_1 \cdot \bar{x}_2$

Funktionstabelle

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0   |
| 0     | 1     | 1   |
| 1     | 0     | 0   |
| 1     | 1     | 0   |

$\Leftarrow$  Bedingung erfüllt

## 15.7 Grundregeln der Schaltalgebra

|                                      |                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Konstante, logische Werte            | $\bar{0} = 1 \quad \bar{1} = 0$                                                                                                                                              |
| Konjunktive Verknüpfung              | $0 \wedge 0 = 0 \quad 1 \wedge 0 = 0$<br>$0 \wedge 1 = 0 \quad 1 \wedge 1 = 1$                                                                                               |
| Disjunktive Verknüpfung              | $0 \vee 0 = 0 \quad 1 \vee 0 = 1$<br>$0 \vee 1 = 1 \quad 1 \vee 1 = 1$                                                                                                       |
| Funktionen mit einer Variablen       | $\bar{\bar{x}} = x$                                                                                                                                                          |
| Konjunktive Verknüpfung              | $0 \wedge x = 0 \quad x \wedge x = x$<br>$1 \wedge x = x \quad x \wedge \bar{x} = 0$                                                                                         |
| Disjunktive Verknüpfung              | $0 \vee x = x \quad x \vee x = x$<br>$1 \vee x = 1 \quad x \vee \bar{x} = 1$                                                                                                 |
| Vertauschungsregeln<br>(Kommutation) | $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$<br>$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$                                                                                                           |
| Verbindungsregeln<br>(Assoziation)   | $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3$<br>$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$       |
| Verteilungsregeln<br>(Distribution)  | $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_3$<br>$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$                                       |
| Vereinfachungsregeln<br>(Absorption) | $x_1 \vee x_1 \wedge x_2 = x_1$<br>$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$<br>$x_1 \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 \wedge x_2$<br>$x_1 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 = x_1 \vee x_2$ |



**KD mit vier Variablen**

|   |            |           |             |
|---|------------|-----------|-------------|
| a |            |           |             |
| b | a b c' d'  | a b c d'  | a' b c d'   |
|   | a b c' d   | a b c d   | a' b c d    |
|   | a b' c' d  | a b' c d  | a' b' c d   |
|   | a b' c' d' | a b' c d' | a' b' c' d' |
| d |            |           |             |
| c |            |           |             |

| Wertigkeit | $d = 2^3$ | $c = 2^2$ | $b = 2^1$ | $a = 2^0$ |               |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| 0          | 0         | 0         | 0         | 0         | $a' b' c' d'$ |
| 1          | 0         | 0         | 0         | 1         | $a b' c' d'$  |
| 2          | 0         | 0         | 1         | 0         | $a' b c' d'$  |
| 3          | 0         | 0         | 1         | 1         | $a b c' d'$   |
| 4          | 0         | 1         | 0         | 0         | $a' b' c d'$  |
| 5          | 0         | 1         | 0         | 1         | $a b' c d'$   |
| 6          | 0         | 1         | 1         | 0         | $a' b c d'$   |
| 7          | 0         | 1         | 1         | 1         | $a b c d'$    |
| 8          | 1         | 0         | 0         | 0         | $a' b' c' d$  |
| 9          | 1         | 0         | 0         | 1         | $a b' c' d$   |
| 10         | 1         | 0         | 1         | 0         | $a' b c' d$   |
| 11         | 1         | 0         | 1         | 1         | $a b c' d$    |
| 12         | 1         | 1         | 0         | 0         | $a' b' c d$   |
| 13         | 1         | 1         | 0         | 1         | $a b' c d$    |
| 14         | 1         | 1         | 1         | 0         | $a' b c d$    |
| 15         | 1         | 1         | 1         | 1         | $a b c d$     |

|   |            |           |            |
|---|------------|-----------|------------|
| a |            |           |            |
| b |            | a' b c d' | a' b c' d' |
|   |            | a' b c d  | a' b c' d  |
|   | a b' c' d  | a b' c d  |            |
|   | a b' c' d' | a b' c d' |            |
| d |            |           |            |
| c |            |           |            |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   |   | X | X |
|   |   | X | X |
| X | X |   |   |
| X | X |   |   |

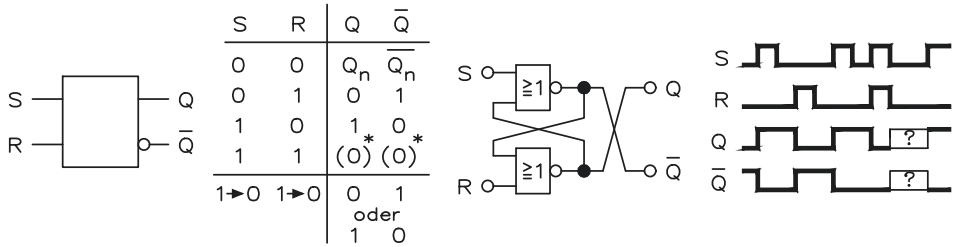
Beispiel:  $x = a' b c d' + a' b c' d' + a' b c d + a' b c' d + a b' c' d + a b' c d + a b' c' d' + a b' c d'$

Ergebnis:  $x = a' b + a b'$

# 15.9 Grundsaltungen mit Flipflops

## Statisches RS-Flipflop

(Nicht-taktgesteuertes Flipflop mit statischen Eingängen, die auf Spannungszustände reagieren)

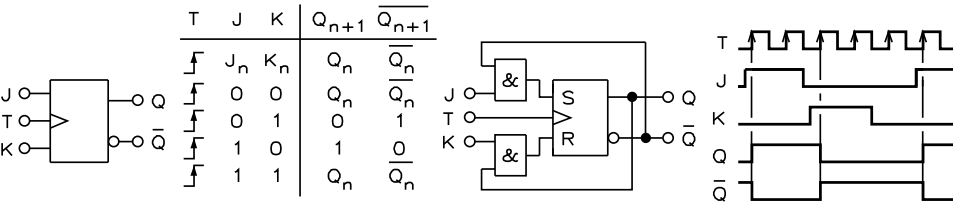


\* Bei NOR-Gliedern (0) (0)

Bei NAND-Gliedern (1) (1)

## Taktzustandsgesteuertes JK-Flipflop

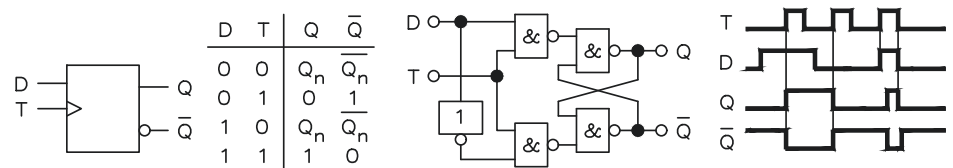
(Taktgesteuertes JK-Flipflop mit dynamischem Takteingang, der auf eine positive Flanke reagiert)



Durch den 0 → 1-Übergang des Takteinganges (Flankensteuerung) wird das Signal der Eingangsvariablen auf den Ausgang übertragen.

## Zustandsgesteuertes D-Flipflop

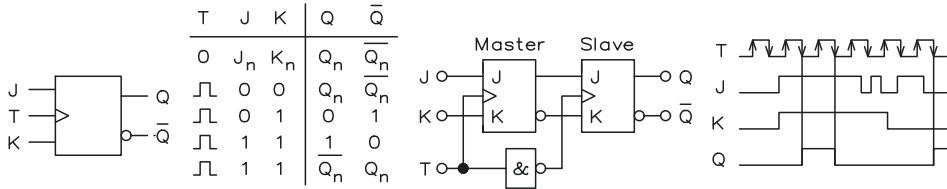
(Zustandsgesteuertes D-Flipflop mit statischem Takteingang, der auf eine positive Spannungsänderung reagiert)



Das an D wirkende Signal wird durch ein 1-Signal am Eingang T an den Ausgang Q übernommen.

### Taktzustandsgesteuertes JK-Master-Slave-Flipflop

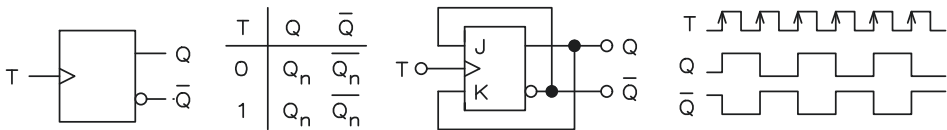
(Zwei taktgesteuerte JK-Flipflops mit dynamischem Takteingang. Das Master-Flipflop reagiert auf eine positive, das Slave-Flipflop auf eine negative Taktflanke.)



Die Eingangssignale werden durch die 0→1-Flanke des Taktsignals in den Master und durch eine 1→0-Flanke in den Slave übertragen (zweiflankengesteuert). Das Eingangssignal wirkt somit verzögert auf den Ausgang.

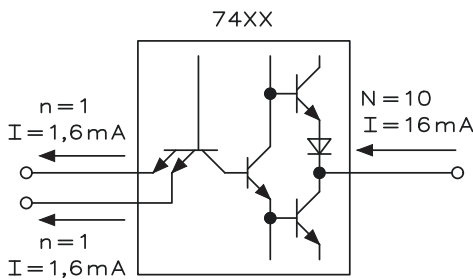
### Taktzustandsgesteuertes T-Flipflop

(Taktgesteuertes JK-Flipflop mit dynamischem Takteingang, das auf eine positive Flanke reagiert)



Die 0→1-Flanke führt zu einer Änderung des Ausgangssignals.

## 15.10 Auslastfaktoren (fan-in, fan-out) bei TTL-Bausteinen



Die Ausgangsbelastbarkeit gibt an, von wie viel Lasteinheiten (N) der TTL-Baustein bei L-Potential (0-Signal) einen Strom treiben kann bzw. an wie viel Lasteinheiten er bei H-Potential (1-Signal) einen Strom liefern kann. Bei Standard-TTL-Bausteinen der Serie 7400 ist  $N = 10$  (16 mA) und  $n = 1$  (–1,6 mA).

| TTL-Treiber | TTL-Last |     |    |    |    |    |  |
|-------------|----------|-----|----|----|----|----|--|
|             | Std      | ALS | AS | F  | LS | S  |  |
| Std         | 10       | 20  | 8  | 20 | 20 | 8  |  |
| ALS         | 10       | 20  | 10 | 20 | 20 | 10 |  |
| AS          | 10       | 50  | 10 | 50 | 50 | 10 |  |
| F           | 12       | 25  | 10 | 25 | 25 | 10 |  |
| LS          | 5        | 20  | 8  | 50 | 50 | 10 |  |
| S           | 12       | 50  | 10 | 50 | 50 | 10 |  |

|     |                                |         |
|-----|--------------------------------|---------|
| Std | Standard-TTL                   | 74XX    |
| ALS | Avanced-Low-Power-Schottky-TTL | 74ALSXX |
| AS  | Avanced-Schottky-TTL           | 74ASXX  |
| F   | Fast-Schottky-TTL              | 74FXX   |
| LS  | Low-Power-Schottky-TTL         | 74LSXX  |
| S   | Schottky-TTL                   | 74SXX   |

|                             |          |                   | Std  | ALS             | AS   | F    | LS              | S    |    |
|-----------------------------|----------|-------------------|------|-----------------|------|------|-----------------|------|----|
| min                         |          |                   | 4,75 | 4,75            | 4,75 | 4,75 | 4,75            | 4,75 | V  |
| Betriebsspannung            | $U_b$    | typ               | 5,0  | 5,0             | 5,0  | 5,0  | 5,0             | 5,0  | V  |
|                             |          | max               | 5,25 | 5,25            | 5,25 | 5,25 | 5,25            | 5,25 | V  |
| Eingangsspannung            | $U_{IL}$ | max               | 0,8  | 0,8             | 0,8  | 0,8  | 0,8             | 0,8  | V  |
|                             |          | $U_{IH}$ min      | 2,0  | 2,0             | 2,0  | 2,0  | 2,0             | 2,0  | V  |
| Eingangsstrom               | $I_{IL}$ | max               | −1,6 | −0,2            | −1,0 | −1,2 | −0,36           | −2,0 | mA |
|                             |          | $I_{IH}$ min      | 40   | 20              | 20   | 40   | 20              | 50   | μA |
| Ausgangsspannung            | $U_{OL}$ | max <sup>1)</sup> | 0,4  | 0,35            | 0,35 | 0,35 | 0,5             | 0,5  | V  |
|                             |          | $U_{OH}$ min      | 2,4  | 3,2             | 3,2  | 3,4  | 2,7             | 2,7  | V  |
| Ausgangsstrom <sup>2)</sup> | $I_{OL}$ | max               | 16   | 8 <sup>3)</sup> | 20   | 20   | 8 <sup>3)</sup> | 20   | mA |
| Leistungsaufnahme/Gatter    | $P$      | typ               | 10   | 1               | 22   | 4    | 2               | 20   | mW |
| Laufzeit/Gatter             | $t_p$    | typ               | 10   | 4               | 1,5  | 2    | 9               | 3    | ns |

1) bei  $I_{OL}$  max  
2) bei  $U_{OL}$  max  
3) bei gepufferten Ausgängen 40 mA

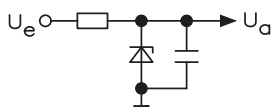
### 15.11 CMOS-Bausteine

Sollte die Betriebsspannung in der Nähe der maximalen Speisespannung liegen, so muss sichergestellt sein, dass die maximal zulässige Betriebsspannung von +15 V zu keiner Zeit überschritten wird. Mögliche Ursachen zum Überschreiten der Spannungsgrenze sind Spannungsspitzen aus dem Netzteil während des Ein- oder Ausschaltens, Restwelligkeit der Speisespannung, Überschwingen eines geregelten Netzteiles oder allgemeines Rauschen.

Der Ausgangsstrom eines Netzteiles sollte mit dem Strombedarf übereinstimmen. Um Vorsorge gegen Spannungsspitzen zu treffen, ist es vorteilhaft, als Schutz eine Z-Diode parallel zu den Ausgangsklemmen des Netzteiles zu schalten. Der Z-Wert sollte oberhalb

der Regelgrenze der Ausgangsspannung, jedoch nicht über 15 V liegen. Die Schaltung enthält zusätzlich einen Serienwiderstand, der die Stromaufnahme begrenzt und die Z-Diode vor Überlastung schützt. Die Parallelkapazität wurde gewählt, damit die erforderlichen Spitzenströme während des Schaltens verfügbar sind.

### Z-Diode als Eingangsschutz



Alle unbeschalteten Eingänge müssen entweder mit  $U_{SS}$  oder mit  $U_{DD}$  verbunden sein. Welches Potential gewählt wird, kann entsprechend der jeweiligen Schaltung entschieden werden. Ein nicht festgelegter Eingang eines Hochstrom-Typs (wie z. B. 4009, 4010, 4041, 4049 oder 4050) kann nicht nur zu einem fehlerhaften Betrieb führen, sondern auch zur Überschreitung der Verlustleistungsgrenze von 200 mW. Die Zerstörung des Bauelementes kann die Folge sein. Werden CMOS-Hochstrom-Typen auf steckbaren Karten montiert, kann durch das Ziehen der Karte die Eingangsschaltung abgetrennt werden. In diesem Falle müssen die Eingänge nach  $U_{DD}$  oder  $U_{SS}$  mit einem Pull-Up-Widerstand in der Größenordnung von 200 k $\Omega$  bis 1 M $\Omega$  beschaltet sein.

Während die Stromversorgung abgeschaltet ist, dürfen keine Eingangssignale angelegt sein. Es sei denn, die Ruhestromaufnahme ist auf 10 mA begrenzt. Interface-Eingangssignale dürfen 0,5 V oberhalb von  $U_{DD}$  oder unterhalb von  $U_{SS}$  liegen, bzw. es sollte eine Strombegrenzung von 10 mA max. vorgenommen werden. Für alle Fälle, in denen eine Überschreitung des 10 mA-Wertes besteht, wird ein Serienwiderstand empfohlen. Der Widerstandswert kann 10 k $\Omega$  betragen, ohne dass die statischen Kennwerte verändert werden, jedoch wird die Schaltgeschwindigkeit durch die RC-Verzögerung reduziert. Ferner sind lange Eingangssignalleitungen auf Grund ihres induktiven Anteils zu beachten. Hier können auf Grund der Umgebungsbedingungen größere Störspannungen entstehen. In diesem Fall wird für die Eingangsklemmen ein Serienwiderstand mit einem Parallelkondensator empfohlen. Der Parallelkondensator sollte unter dem Gesichtspunkt der gewünschten Schaltgeschwindigkeit so groß wie möglich gewählt werden.

Die Sechsfach-Buffer-Typen 4009, 4010, 4049 und 4050 können zwei Normal-TTL-Lasten ansteuern. Andere Typen, wie z. B. 4041, 4048 und 4031 können ebenfalls bis zu einer TTL-Last ansteuern. In allen Fällen empfiehlt es sich, das jeweilige Datenblatt einzusehen. Die meisten Gatter und Inverter können eine oder mehrere Low-Power-TTL-Lasten ansteuern. Um einen guten Störabstand im Zustand der 1 zu erhalten, wird empfohlen, zwischen Ausgang der TTL-Schaltung und Eingang der CMOS-Schaltung, einen Pull-Up-Widerstand einzusetzen.

Es folgen Regeln für einen einwandfreien Betrieb einer CMOS-TTL-Interface-Schaltung. Dabei können verschiedene Speisespannungsquellen bei gleichen Pegeln, aber möglicherweise zu verschiedenen Zeiten auftreten.

- a) CMOS-Ansteuerung durch TTL-Serienwiderstand für CMOS-Eingänge von 1 k $\Omega$
- b) TTL-Ansteuerung durch CMOS kann direkt verbunden werden.

CMOS-Bausteine können ohne Verminderung der Störsicherheit oder anderer Kennwerte an  $U_{DD} = 0$  V und  $U_{SS} = -3$  V bis  $-15$  V betrieben werden und sind damit angepasst.

Alle CMOS-Bausteine verwenden ein DC-Fan-Out von 50. Die Reduzierung der Schaltfrequenz von CMOS-Bausteinen, verursacht durch zusätzliche kapazitive Belastung, sollte im Entwurf für eine hohe Schaltfrequenz berücksichtigt werden. Die Eingangskapazität beträgt mit zwei Ausnahmen 5 pF; lediglich bei den Buffer-Typen 4009 und 4049 beträgt die Kapazität 15 pF.

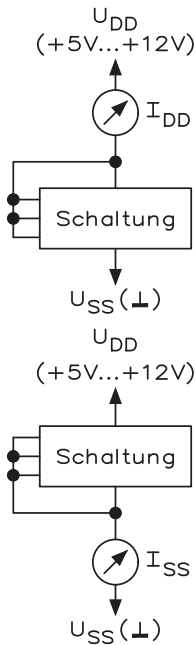
Bei Betrieb mehrerer CMOS-Typen an einem Taktimpuls müssen die Anstiegs- und Abfallzeiten zwischen 5 und 15  $\mu$ s liegen. Bei längeren Anstiegszeiten ist ein sicherer Betrieb nicht gewährleistet.

Wenn zwei oder mehrere CMOS-Bausteine an einem gemeinsamen Taktimpuls betrieben werden, wird es erforderlich, die Anstiegszeit des Taktimpulses niedriger als die Summe aus Propagations-Verzögerungszeit, Transitionszeit (Summen-Ausgänge) und Eingangsansprechzeit (Set-Up-Time) zu erhalten. Die meisten Flipflops und Schieberegister sind bereits auf diese Regel abgestimmt und so spezifiziert.

Normalerweise schalten CMOS-Typen bei 30 bzw. 70 % der Speisespannung. Bei einer Speisespannung von 10 V liegt z. B. ein 0-Signal zwischen 0 und 3 V und ein 1-Signal zwischen 7 und 10 V. Für eine 5-V-Speisespannung liegen die Bereiche eines 0-Signals zwischen 0 und 1,5 V bzw. eines 1-Signals zwischen 3,5 und 5 V. Die Störsicherheit beträgt also 30 % im Speisespannungsbereich von 3 bis 15 V.

Weil die CMOS-Übertragungseigenschaften von 30 bis 70 %, bezogen auf die Speisespannung variieren, muss der Schaltungsentwickler, der Multivibratoren, Pegeldetektoren und RC-Netzwerke einsetzt, diese Unterschiede beachten.

Kurzschlüsse zwischen Ausgang und  $U_{DD}$  bzw.  $U_{SS}$  können bei einigen Hochstromtypen, wie z. B. 4007A, 4009, 4010, 4041, 4049 und 4050 zur Überschreitung der zulässigen Verlustleistung von 200 mW führen. Generell besteht jedoch keine Überlastungsgefahr, wenn  $U_{DD} - U_{SS}$  kleiner als 5 V gewählt wird. In allen Fällen, in denen eine kurzschlussähnliche Last wie z. B. ein bipolarer NPN- oder PNP-Transistor angesteuert wird, sind unter Berücksichtigung der Ausgangskenndaten in den entsprechenden Datenblättern Vorkehrungen zu treffen, um die Verlustleistung unter 200 mW zu halten.



Der Ruhestrom ( $I_L$ ) kann gemessen werden, indem alle Eingänge mit  $U_{DD}$  ( $I_{DD}$ ) oder mit  $U_{SS}$  ( $I_{SS}$ ) verbunden werden.

Die Ruheverlustleistung  $P_D$  wird wie folgt errechnet:

$$P_D = (U_{DD} - U_{SS}) \cdot I_L$$

Dabei ist  $I_L = I_{DD}$  oder  $I_{SS}$ -Pegel der Ausgangsspannung:

$U_{OL}$  = Ausgang, niedriger Pegel („0“) = 10 mV bei 25 °C

$U_{OH}$  = Ausgang, hoher Pegel („1“) =  $U_{DD} - 10$  mV bei 25 °C

#### ■ Störsicherheit:

$U_{NL}$  = Maximale Störspannung, wenn am Eingang ein 0-Signal angelegt werden kann ( $U_{NL} + U_{SS}$ ), bevor der Ausgangspegel umschaltet.

$U_{NH}$  = Maximale Störspannung, wenn am Eingang ein 1-Signal angelegt werden kann ( $U_{NL} - U_{DD}$ ), bevor der Ausgangspegel umschaltet.

#### ■ Ausgangstreiberstrom:

- Sink-Strom ( $I_D, N$ ) = Ausgangs-Sink-Strom, hervorgerufen durch den N-Kanal-Transistor ohne Überschreitung einer vorgegebenen Ausgangsspannung ( $V_0$ ). Werte enthält jedes Datenblatt.
- Source-Strom ( $I_D, P$ ) = Ausgangs-Source-Strom, hervorgerufen durch den P-Kanal-Transistor ohne Unterschreitung einer vorgegebenen Ausgangsspannung ( $U_0$ ).

#### ■ Eingangsstrom ( $I_i$ ):

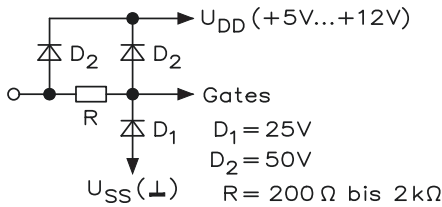
Der typische Wert des Eingangsstroms liegt bei 10 pA (3 bis 15 V) bei  $T_A = 25$  °C. Der maximale Eingangsstrom für CMOS-Bausteine liegt normalerweise unter 10 nA bei 15V und unter 50 nA bei  $T_A = 125$  °C.

Die Impulsformen beziehen sich auf  $T_A = 25$  °C, 15 pF-Last und eine Anstiegs- oder Abfallzeit des Eingangssignals von 20 ns. Tatsächliche Verzögerungs- oder Transitionszeiten können darüber liegen, wenn Anstiegs- und Abfallzeiten der Eingangsimpulse größer sind. In den einzelnen Datenblättern sind Diagramme enthalten, aus denen die typische Variation der Verzögerungs- und Transitionszeit in Abhängigkeit von kapaziti-

ver Belastung ersichtlich ist. Der Entwicklungsingenieur kann mit einem typischen Temperaturkoeffizienten von  $0,3 \text{ } ^\circ\text{C}$  für die veranschlagte Schaltfrequenz bei anderen Temperaturen als  $25 \text{ } ^\circ\text{C}$  rechnen. Propagation: Verzögerungs- und Transitionszeit steigen mit zunehmender Temperatur an. Maximal zulässige Takteingangsfrequenzen müssen mit steigender Temperatur vermindert werden.

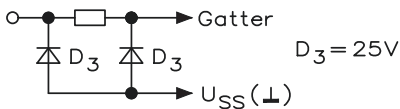
Die dynamische Verlustleistung wird für jeden Typ im Datenblatt in einem Diagramm in Abhängigkeit von der Taktfrequenz angegeben.

### ■ Standardschutzbeschaltung

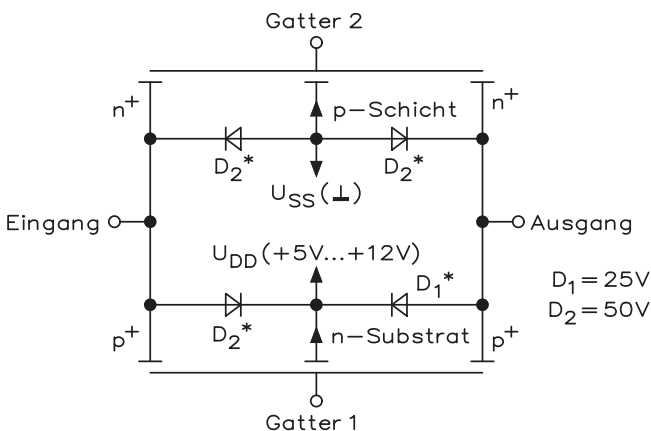


Die meisten CMOS-Eingangsgatter sind mit gezeigten Schutzbeschaltungen versehen. Eine Ausnahme bildet die bei 4049A und 4050A verwendete Schutzschaltung.

### ■ Standardschutzbeschaltung für 4049 und 4050

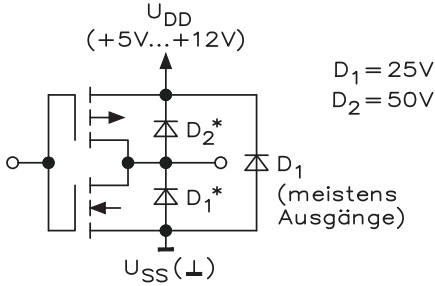


### ■ Standardschutzbeschaltung für Übertragungsbausteine



Das Bild zeigt die Schutzbeschaltung, welche gegenwärtig an allen Ein- bzw. Ausgängen von Übertragungsgattern und an Ausgängen von Invertern verwendet wird.

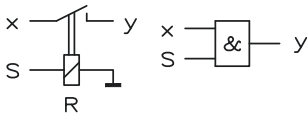
■ Standardschutzbeschaltung für Inverter



Die Eingangsschutzbeschaltung kann gegen eine Entladungsenergie von 1 bis 2 kV aus 250 pF Schutz bieten.

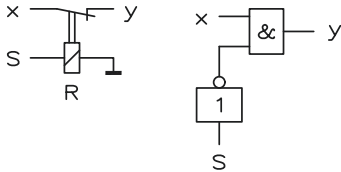
## 15.12 Digitale Schalter

■ Ein-Aus-Schalter (Arbeitskontakt)



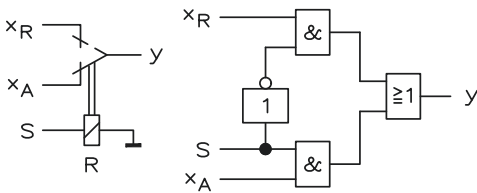
$$y = x \wedge s$$

■ Ein-Aus-Schalter (Ruhekontakt)



$$y = x \wedge \bar{s}$$

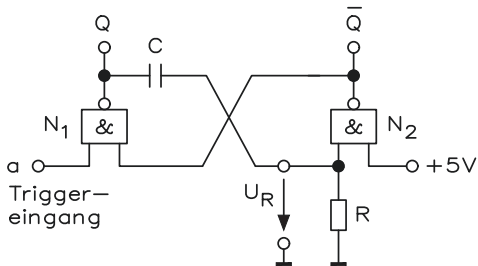
■ Umschalter (Wechselkontakt)



$$y = x_R \wedge \bar{s} \vee x_A \wedge s$$

### 15.13 Monostabile Schaltungen

#### ■ TTL-Monoflop mit NAND-Gatter



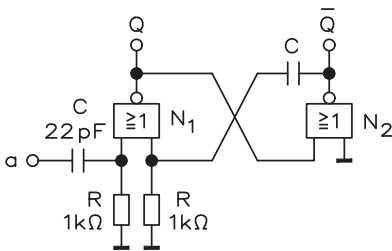
$$t_m = R \cdot C \cdot k$$

$k$  Korrekturfaktor 0,8...1,3; abhängig von  $R$

$R$  Widerstand von 220  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$

$C$  Kondensator von 1 nF bis 100  $\mu$ F

#### ■ TTL-Monoflop mit NOR-Gatter



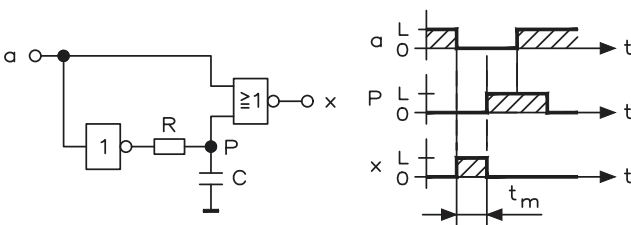
$$t_m = R \cdot C \cdot k$$

$k$  Korrekturfaktor 0,8...1,3; abhängig von  $R$

$R$  Widerstand von 220  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$

$C$  Kondensator von 1 nF bis 100  $\mu$ F

#### ■ TTL-Monoflop mit NOR- und NICHT-Gatter

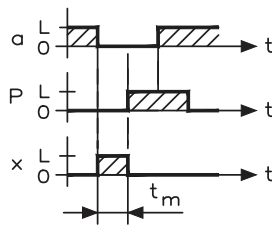


$$t_m = R \cdot C \cdot k$$

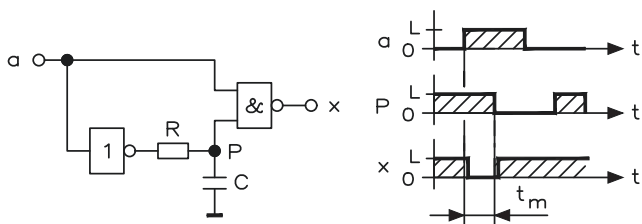
$k$  Korrekturfaktor 0,8...1,3; abhängig von  $R$

$R$  Widerstand von 220  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$

$C$  Kondensator von 1 nF bis 100  $\mu$ F



### ■ TTL-Monoflop mit NAND- und NICHT-Gatter



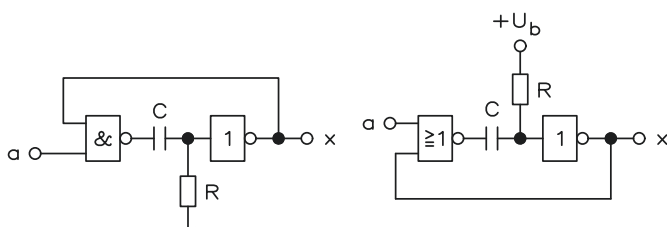
$$t_m = R \cdot C \cdot k$$

$k$  Korrekturfaktor 0,8...1,3; abhängig von  $R$

$R$  Widerstand von 220  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$

$C$  Kondensator von 1 nF bis 100  $\mu$ F

### ■ TTL-Monoflop mit Rückkopplung



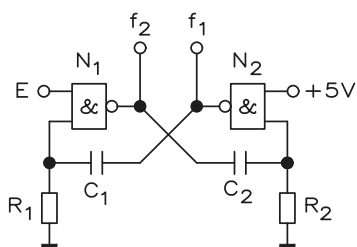
$$t_m = R \cdot C$$

$R$  Widerstand von 220  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$

$C$  Kondensator von 1 nF bis 100  $\mu$ F

## 15.14 Astabile Kippschaltungen

### ■ Rechteckgenerator mit NAND-Gattern

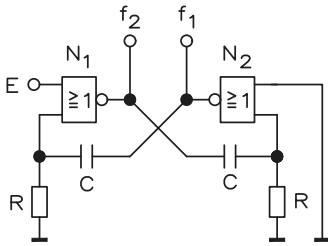


$R$  Widerstand von 220  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$

$C$  Kondensator von 1 nF bis 100  $\mu$ F

$$f = \frac{1}{R \cdot C}, \text{ wenn } R_1 = R_2 = R \text{ und } C_1 = C_2 = C \text{ ist}$$

### ■ Rechteckgenerator mit NOR-Gattern

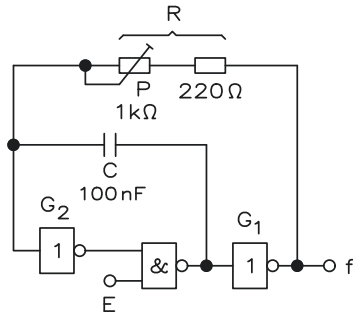


$R$  Widerstand von  $220\ \Omega$  bis  $1\ \text{k}\Omega$

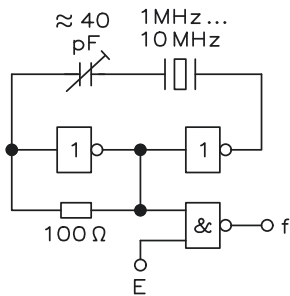
$C$  Kondensator von  $1\ \text{nF}$  bis  $100\ \mu\text{F}$

$$f = \frac{1}{R \cdot C}, \text{ wenn } R_1 = R_2 = R \text{ und } C_1 = C_2 = C \text{ ist}$$

### ■ Rückgekoppelter Rechteckgenerator

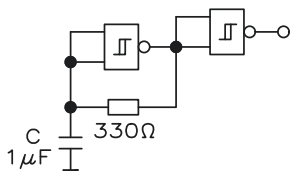


### ■ Rückgekoppelter Rechteckgenerator mit Quarz



Durch den Quarz wird die Rechteckfrequenz festgelegt.

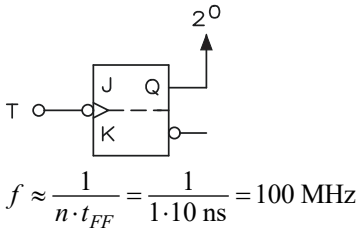
### ■ Rechteckgenerator mit TTL-Schmitt-Trigger



Einfacher Rechteckgenerator mit TTL-Schmitt-Trigger

## 15.15 Asynchrone Frequenzteiler und Zähler

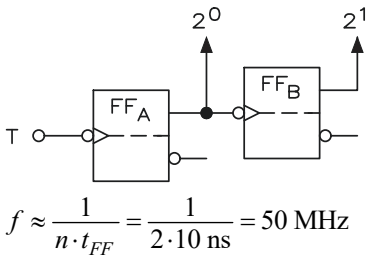
### ■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 2



(Standard-TTL-Bausteine)

|   | Zeit      | $Q$ | $Q'$ |
|---|-----------|-----|------|
| 0 | $t_n$     | 0   | 1    |
| 1 | $t_{n+1}$ | 1   | 0    |
| 0 | $t_{n+2}$ | 0   | 1    |
| 1 | $t_{n+3}$ | 1   | 0    |

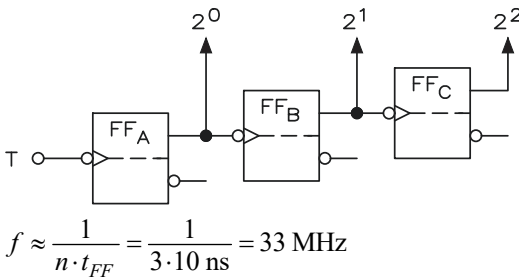
### ■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 4



(Standard-TTL-Bausteine)

|   | Zeit      | $2^0$ | $2^1$ |
|---|-----------|-------|-------|
| 0 | $t_n$     | 0     | 0     |
| 1 | $t_{n+1}$ | 1     | 0     |
| 2 | $t_{n+2}$ | 0     | 1     |
| 3 | $t_{n+3}$ | 1     | 1     |
| 0 | $t_{n+4}$ | 0     | 0     |

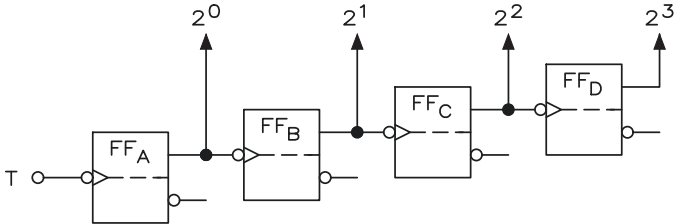
### ■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 8



(Standard-TTL-Bausteine)

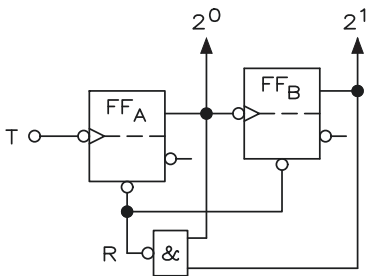
|     | Zeit      | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ |
|-----|-----------|-------|-------|-------|
| 0   | $t_n$     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+1}$ | 1     | 0     | 0     |
| ... | ...       | ...   | ...   | ...   |
| 7   | $t_{n+7}$ | 1     | 1     | 1     |
| 0   | $t_{n+8}$ | 0     | 0     | 0     |

■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 16



|     | Zeit       | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ |
|-----|------------|-------|-------|-------|-------|
| 0   | $t_n$      | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+1}$  | 1     | 0     | 0     | 0     |
| ... | ...        | ...   | ...   | ...   | ...   |
| 15  | $t_{n+15}$ | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 0   | $t_{n+16}$ | 0     | 0     | 0     | 0     |

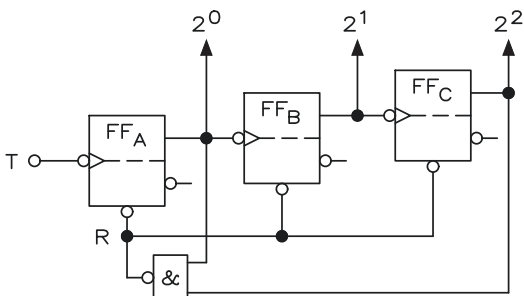
■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 3



|   | Zeit      | $2^0$ | $2^1$ |
|---|-----------|-------|-------|
| 0 | $t_n$     | 0     | 0     |
| 1 | $t_{n+1}$ | 1     | 0     |
| 2 | $t_{n+2}$ | 0     | 1     |
|   |           | 1     | 1     |
| 0 | $t_{n+3}$ | 0     | 0     |
| 1 | $t_{n+4}$ | 1     | 1     |

⇐ NAND-Bedingung erfüllt ( $\approx 5 \text{ ns}$ )

■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 5

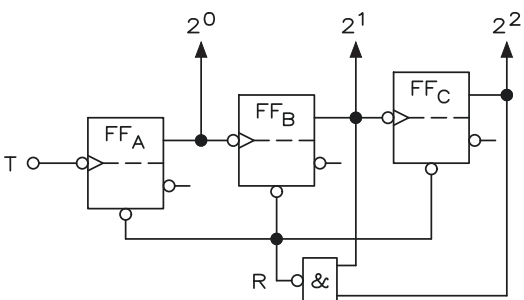


|     | Zeit      | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ |
|-----|-----------|-------|-------|-------|
| 0   | $t_n$     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+1}$ | 1     | 0     | 0     |
| ... | ...       | ...   | ...   | ...   |
| 4   | $t_{n+4}$ | 0     | 0     | 1     |
|     |           | 1     | 0     | 1     |
| 0   | $t_{n+5}$ | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+6}$ | 1     | 0     | 0     |

⇐ NAND-Bedingung erfüllt ( $\approx 5 \text{ ns}$ )

$$f \approx \frac{1}{n \cdot t_{FF} + T_I + t_G} = \frac{1}{3 \cdot 10 \text{ ns} + 5 \text{ ns} + 3 \text{ ns}} = 26 \text{ MHz} \quad (\text{Standard-TTL-Bausteine})$$

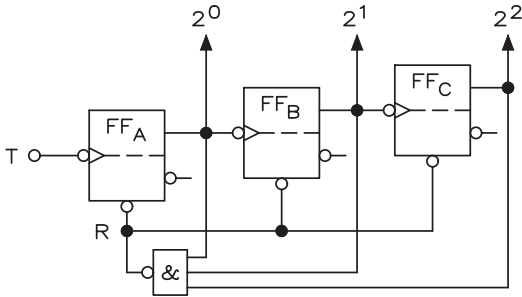
■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 6



|     | Zeit      | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ |
|-----|-----------|-------|-------|-------|
| 0   | $t_n$     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+1}$ | 1     | 0     | 0     |
| ... | ...       | ...   | ...   | ...   |
| 5   | $t_{n+5}$ | 1     | 0     | 1     |
|     |           | 0     | 1     | 1     |
| 0   | $t_{n+6}$ | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+7}$ | 1     | 0     | 0     |

⇐ NAND-Bedingung erfüllt ( $\approx 5 \text{ ns}$ )

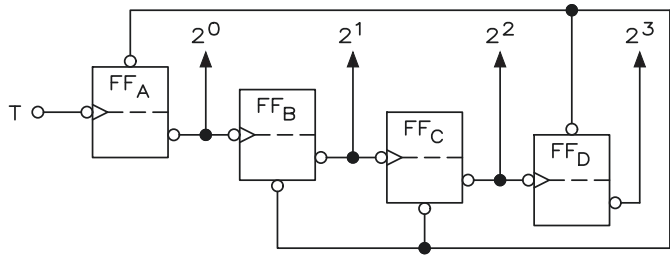
■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 7



|     | Zeit      | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ |
|-----|-----------|-------|-------|-------|
| 0   | $t_n$     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+1}$ | 1     | 0     | 0     |
| ... | ...       | ...   | ...   | ...   |
| 6   | $t_{n+6}$ | 0     | 1     | 1     |
|     |           | 1     | 1     | 1     |
| 0   | $t_{n+7}$ | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+8}$ | 1     | 0     | 0     |

⇐ NAND-Bedingung erfüllt ( $\approx 5$  ns)

■ Frequenzteiler und Zähler 1 : 10



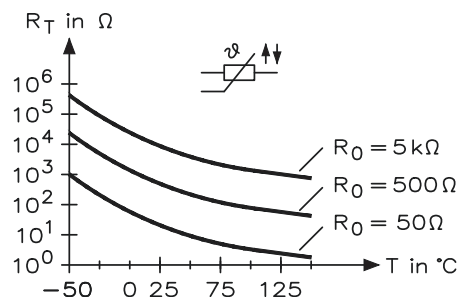
|     | Zeit       | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ |
|-----|------------|-------|-------|-------|-------|
| 0   | $t_n$      | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+1}$  | 1     | 0     | 0     | 0     |
| ... | ...        | ...   | ...   | ...   | ...   |
| 8   | $t_{n+8}$  | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 9   | $t_{n+9}$  | 1     | 0     | 0     | 1     |
|     |            | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 0   | $t_{n+10}$ | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 1   | $t_{n+11}$ | 1     | 0     | 0     | 0     |

⇐ NAND-Bedingung erfüllt ( $\approx 5$  ns)

In der Sensorik wird eine nicht elektrische Größe in ein elektrisches Signal umgewandelt und über ein Ausgabegerät angezeigt. Man unterscheidet zwischen passiven und aktiven Messwertaufnehmern. Passive Sensoren benötigen eine Hilfsenergie, um den Messwert in ein elektrisches Signal umzuformen. Bei aktiven Sensoren ist keine Hilfsenergie notwendig, da diese direkt den Messwert in ein elektrisches Signal umsetzen können.



## 16.1 NTC-Widerstände (Heißeleiter)



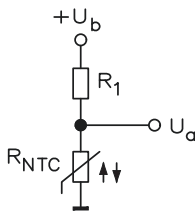
$$R_{NTC} = R_{20^\circ\text{C}} \cdot e^{-B \left( \frac{1}{\vartheta_w} - \frac{1}{\vartheta_k} \right)}$$

$$R_{NTC} = R_{20^\circ\text{C}} \cdot e^{\alpha_R \cdot \Delta\vartheta \cdot \frac{\vartheta_k}{\vartheta_w}}$$

$$\alpha_R = \frac{-B}{\vartheta_w^2}$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta_w - \vartheta_k$$

$$R_\tau = \sqrt{R_w - R_k}$$



$B$  Materialkonstante  $-2,5 \text{ %/K} \dots -5,5 \text{ %/K}$

$\alpha_R$  Temperaturkoeffizient

$\vartheta_w$  Warmwiderstand

$\vartheta_k$  Kaltwiderstand

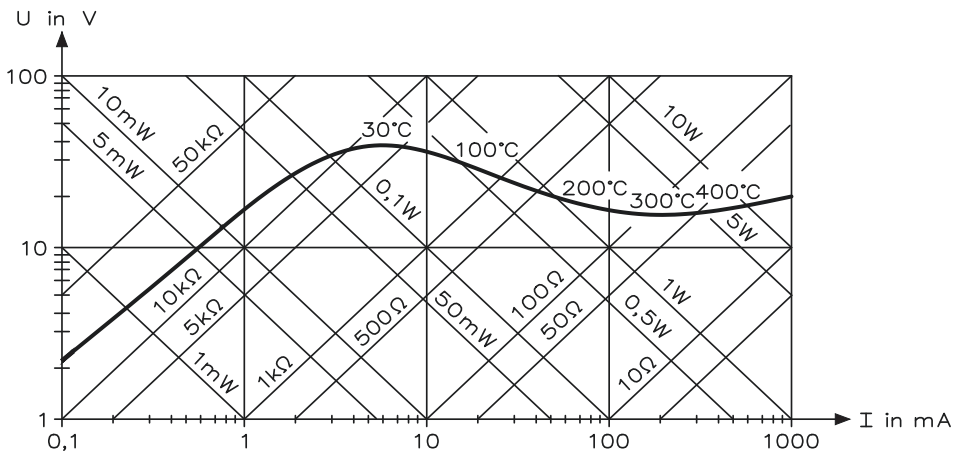
$\Delta\vartheta$  Differenztemperatur

$R_\tau$  Widerstand nach  $\tau$  Sekunden nach Abschalten

$$U_a = U_b \cdot \frac{R_{NTC}}{R_1 + R_{NTC}}$$

$R_{NTC}$  Widerstand in  $\Omega$

### Mess- und Kompensations-NTC



Trägt man die bei konstanter Temperatur gewonnenen Werte der Spannung als Funktion des Stromes auf, so erhält man die Spannungs-Strom-Kennlinie des Heißleiters. Es wird zwischen drei Bereichen unterschieden:

- Im Bereich des geradlinigen Anstiegs wird der Widerstand nur von der Umgebungstemperatur bestimmt, da die zugeführte elektrische Leistung für eine Eigenerwärmung nicht ausreicht (Temperaturmessungen).
- Ein Bereich verzögerten Anstiegs kurz vor dem Spannungsmaximum. Hier ist die Eigenerwärmung des NTC durch die aufgenommene elektrische Leistung und den Widerstandswert zu bestimmen.
- Bei steigender Leistung sinkt der Widerstandswert des Heißleiters. Hier ist die Temperatur des NTC höher als die der umgebenden Luft.

$$U_{\max} = \sqrt{G \cdot R_{20^\circ\text{C}} \cdot \Delta \vartheta_{\max}}$$

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{G \cdot \Delta \vartheta_{\max}}{R_T}}$$

$$P = G \cdot (\vartheta - \vartheta_U)$$

$G$  Wärmeableitungskonstante W/K

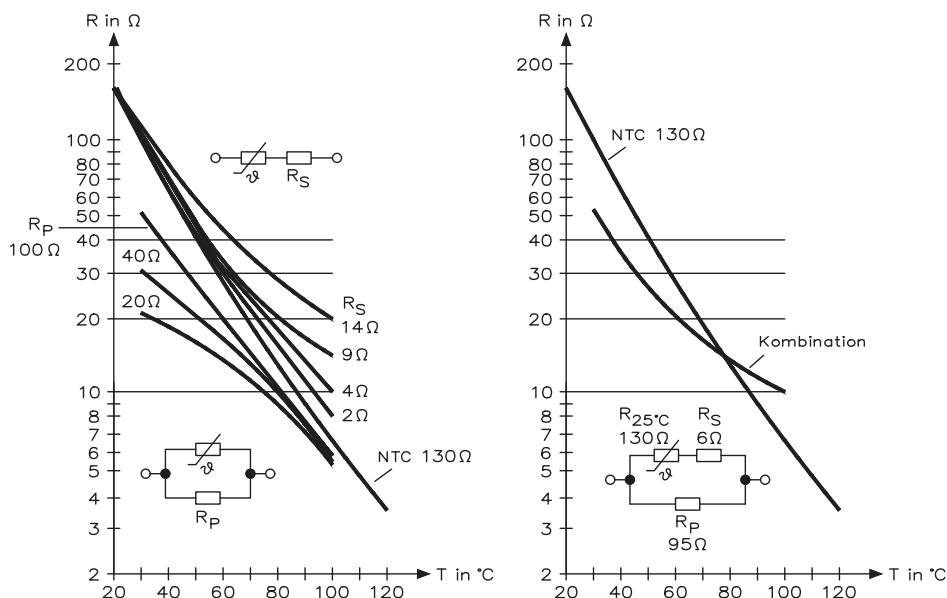
$U_{\max}$  zulässige Spannung für Mess- und Kompensations-NTC

$I_{\max}$  zulässiger Strom für Mess- und Kompensations-NTC

$\Delta \vartheta_{\max}$  zulässige Eigenerwärmung in K

$\vartheta_U$  Umgebungstemperatur in K

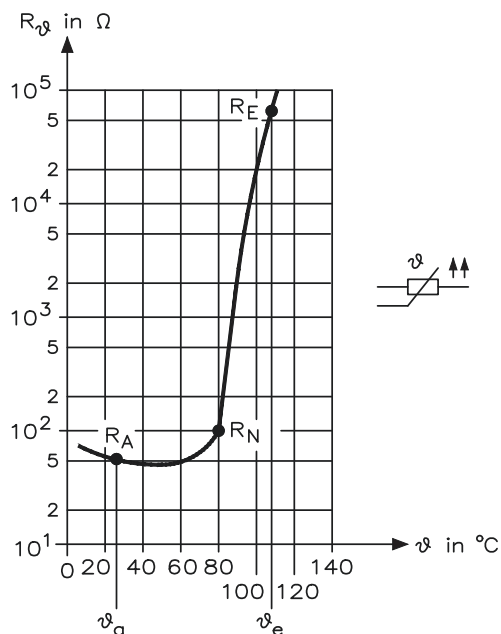
## Kennlinienbeeinflussung



Diese Maßnahme der Kennlinienbeeinflussung ist erforderlich, wenn spezielle Kennlinien gewünscht werden. Im Wesentlichen ist die Reihen- und Parallelschaltung eines linearen Widerstandes sowie die Kombination beider Möglichkeiten mit einem NTC gegeben. Für diese drei Möglichkeiten ist der Kennlinienverlauf gezeigt. Die linke Schaltung zeigt die Reihen- und Parallelschaltung und die Kombination beider Möglichkeiten mit einem NTC-Widerstand  $R_{25} = 130 \Omega$ . Der gewünschte Kennlinienverlauf ergibt sich aus dem am nächsten gelegenen Verlauf eines NTC-Typs. Der Reihenwiderstand beeinflusst im Besonderen den Kennlinienverlauf bei hohen Temperaturen, während die Parallelschaltung eine Beeinflussung bei niedrigen Temperaturen ergibt. Die Parallelschaltung und die Serienschaltung ergeben demgemäß eine Beeinflussung des oberen und unteren Kennlinienteiles. Die rechte Schaltung zeigt eine Reihen- und Parallelschaltung.

$$R_P = R_g \cdot \frac{B - 2 \cdot \vartheta}{B + 2 \cdot \vartheta}$$

## 16.2 PTC-Widerstand (Kaltleiter)



$$R_N = 2 \cdot R_A$$

$$\alpha_R = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\vartheta_e - \vartheta_a}$$

$$R_2 \approx R_1 \cdot e^{\alpha_R(\vartheta_N - \vartheta_e)}$$

$R_1, R_2$  Widerstandswerte bei  $\vartheta_a$  und  $\vartheta_e$ , oberhalb von  $\vartheta_N$

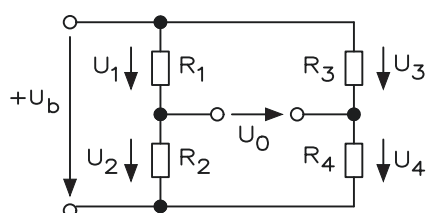
$R_A$  Anfangswiderstand bei  $\vartheta_{20}^\circ\text{C}$  oder  $\vartheta_{25}^\circ\text{C}$

$R_N$  Nennwiderstand bei  $\vartheta_N$

$\vartheta_N$  Umschlagtemperatur

$\alpha$  Temperaturbeiwert oberhalb  $\vartheta_N$

## 16.3 Brückenschaltung



$$U_0 = U \cdot \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Die Brücke ist abgeglichen, wenn  $U_0 = 0$  ist,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \text{ oder } \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

Die größtmögliche Änderung wird erreicht, wenn für das Widerstandsverhältnis gilt:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R \quad (R = \text{Grundwiderstand})$$

■ **Viertelbrücke:**

$R_2$  oder  $R_3$  positiv veränderlich:  $R_1$  oder  $R_4$  positiv veränderlich:

$$R_2 = R + \Delta R \text{ oder } R_3 = R + \Delta R \quad R_1 = R + \Delta R \text{ oder } R_4 = R + \Delta R$$

$$U_0 \approx U_b \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad U_0 \approx U_b \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

$R_2$  oder  $R_3$  negativ veränderlich:  $R_1$  oder  $R_4$  negativ veränderlich:

$$R_2 = R - \Delta R \text{ oder } R_3 = R - \Delta R \quad R_1 = R - \Delta R \text{ oder } R_4 = R - \Delta R$$

$$U_0 \approx U_b \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad U_0 \approx U_b \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

■ **Halbbrücke:**

$R_2$  und  $R_3$  positiv veränderlich:  $R_2$  positiv und  $R_4$  negativ veränderlich:

$$R_2 = R + \Delta R \text{ und } R_3 = R + \Delta R \quad R_2 = R + \Delta R \text{ und } R_4 = R - \Delta R$$

$$U_0 \approx U_b \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad U_0 \approx U_b \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

$R_2$  positiv und  $R_3$  negativ veränderlich:  $R_1$  negativ und  $R_2$  positiv veränderlich:

$$R_2 = R + \Delta R \text{ und } R_3 = R - \Delta R \quad R_1 = R - \Delta R \text{ und } R_2 = R + \Delta R$$

$$U_0 \approx U_b \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 \quad U_0 \approx U_b \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

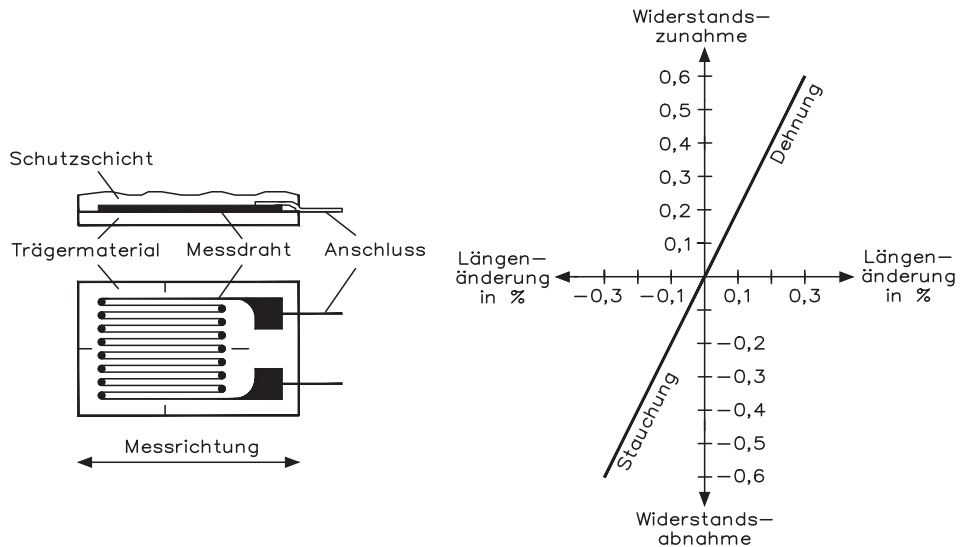
■ **Vollbrücke:**

$R_2$  und  $R_3$  positiv,  $R_1$  und  $R_4$  negativ veränderlich:

$$R_2 = R + \Delta R, R_3 = R + \Delta R, R_1 = R - \Delta R, R_4 = R - \Delta R$$

$$U_d \approx U_b \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

## 16.4 Dehnungsmessstreifen



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

$$K = \frac{\Delta R}{R}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta R = \frac{R \cdot K \cdot \Delta l}{l}$$

$\varepsilon$  Dehnung und Stauchung des DMS

$K$  K-Faktor des Messstreifens

$F$  Längskraft

$l$  Länge des DMS

$\sigma$  mechanische Spannung N/mm<sup>2</sup>

$\Delta R/R$  relative Widerstandsänderung

$\Delta l$  Längenänderung

### ■ Viertelbrücke:

$R_2$  oder  $R_3$  veränderlich:

$$U_0 \approx U_b \cdot \left( +\frac{1}{4} \right) \cdot K \cdot \varepsilon$$

$R_1$  oder  $R_4$  veränderlich:

$$U_0 \approx U_b \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \cdot K \cdot \varepsilon$$

### ■ Halbbrücke:

$R_1$  und  $R_4$  veränderlich:

$$U_0 \approx U_b \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \cdot K \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)$$

$R_2$  und  $R_3$  veränderlich:

$$U_0 \approx U_b \cdot \left( +\frac{1}{4} \right) \cdot K \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

Sind  $R_1$  und  $R_2$  oder  $R_3$  und  $R_4$  veränderlich, heben sich die Änderungen auf!

#### ■ Vollbrücke:

Alle Widerstände sind veränderlich:

$$U_0 \approx U_b \cdot \left( +\frac{1}{4} \right) \cdot K \cdot (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$

Werkstoffe für Dehnungsmessstreifen:

- Konstantan: Legierung aus 60 % Kupfer (Cu) und 40 % Nickel (Ni)

K-Faktor:  $K = 2,1$

zulässige Dehnung:  $\varepsilon_{\max} = 10 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$

Temperaturbereich:  $-75^\circ\text{C}$  bis  $240^\circ\text{C}$

- Karma: Legierung aus Nickel (Ni) und Chrom (Cr)

K-Faktor:  $K = 2,2$

Temperaturbereich: bis  $300^\circ\text{C}$

- Platin-Iridium bzw. Platin: Legierung aus Nickel (Ni) und Chrom (Cr)

K-Faktor:  $K = 26$

Temperaturbereich: bis  $1000^\circ\text{C}$

- Querrichtungsausdehnung (Poisson-Zahl):

Wird in Längsrichtung ein Werkstück gedehnt oder gestaucht, oder in Querrichtung zur anliegenden Kraft, spricht man von einer Dehnung oder Stauchung.

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon}$$

$\varepsilon_q$  Querrichtungsausdehnung (ohne Einheit)

$\Delta d$  Querlängenänderung in m

$d$  Querlänge in m

$\mu$  Poisson-Zahl (ohne Einheit)

$\varepsilon$  Dehnung (ohne Einheit)

- Mechanische Spannung: Greift an einem Werkstück eine Kraft an, entsteht im Werkstück eine mechanische Spannung.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

$$M = F \cdot l$$

$$W_Q = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^2}{32}$$

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

$\sigma$  mechanische Spannung in  $\text{N/mm}^2$

$F$  Kraft N

$\varepsilon$  Dehnung (ohne Einheit)

$E$  Elastizitätsmodul in  $\text{N/mm}^2$

$M$  Biegemoment in Nm

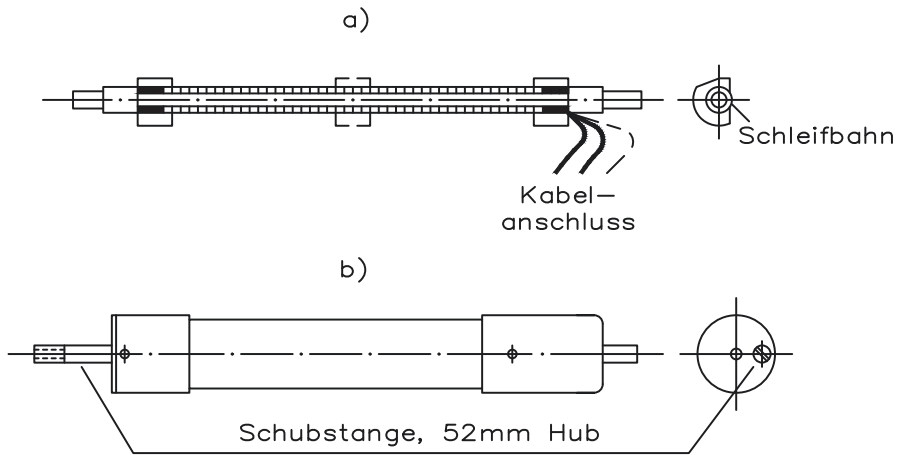
$l$  Länge des Hebels in m

$W_Q$  Flächenträgheitsmoment eines quadratischen Werkstückes in  $\text{mm}^2$

$W_Z$  Flächenträgheitsmoment eines zylindrischen Werkstückes in  $\text{mm}^2$

$d$  Durchmesser in mm

## 16.5 Ohm'scher Weg- und Winkelaufnehmer

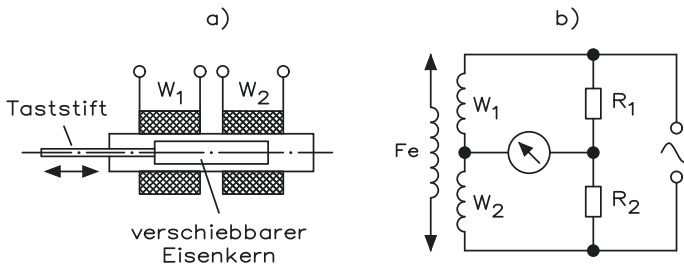


Idealer Fall ( $R_b \rightarrow \infty$ ):

$$U_a = \frac{U \cdot \Delta x}{x} = \frac{U \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U \cdot R_2}{R_g}$$

$\Delta x$  Längenänderung in m  
 $x$  Gesamtlänge des Schleifers  
 $R_1, R_2$  Teilwiderstände  
 $R_g$  Gesamtwiderstand  
 $R_b$  Belastungswiderstand

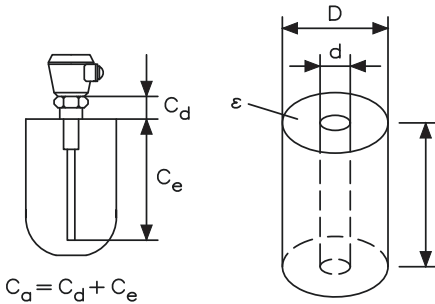
## 16.6 Induktiver Weg- und Winkelaufnehmer



$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_{\text{Kern}}}{l_i}$$

$W_1$  Vergleichsspule  
 $W_2$  Messwertaufnehmer  
 $N$  Anzahl der Windungen  
 $l_i$  Spulenlänge ohne Eisenkern in m  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  $1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

## 16.7 Kapazitiver Weg- und Winkelaufnehmer



Änderung des Plattenabstandes:

$$C = \frac{\epsilon_r \cdot l}{\log\left(\frac{D}{d}\right)} \quad E = \frac{C}{d}$$

Relative Kapazitätsänderung:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta d}{d}$$

Absolute Kapazitätsänderung:

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d + \Delta d}$$

$\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl

$E$  Empfindlichkeit

$\Delta C$  Kapazitätsänderung

$C$  Kapazität in F

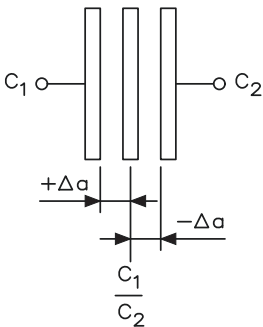
$\Delta d$  Plattenabstandsänderung

$\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante

$$8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{m}}$$

$A$  Plattenfläche in m

### Differentialkondensator

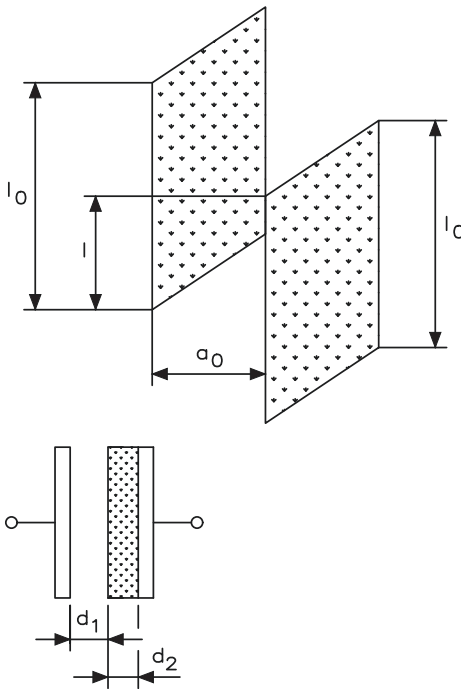


Der Differentialkondensator wird in einer Halbbrücke verwendet:

$$\underline{U}_d = -\underline{U} \cdot \frac{\Delta a}{2 \cdot a}$$

$\Delta a$  Plattenabstand zwischen mittlerer und äußerer Platte

$b$  Breite der Platte in m



$$l = l_0 - \Delta l$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot b \cdot l(l_0 - \Delta l)}{a_0}$$

$$C = C_0 \cdot \frac{l}{l_0}$$

$l_0$  Höhe der Platte in m

$l$  Plattenfläche in m

$\epsilon$  elektrische Feldkonstante

$$8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{m}}$$

$\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \cdot A} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot A} + \left( d_1 + \frac{d_2}{\epsilon_r} \right) \text{ mit } d_1 = d - d_2$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d - d_2 + \frac{\epsilon_r}{d_2}}$$

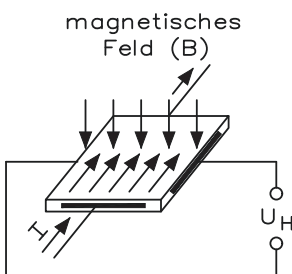
$A$  Plattenfläche in m

$d$  Gesamtabstand der Platten in m

$d_1$  Luftspalt zwischen Platte und Dielektrikum in m

$d_2$  Dicke des Dielektrikums in m

## 16.8 Hallgenerator



$$U_H = k \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

$U_H$  Hallspannung

$k$  Hallkonstante

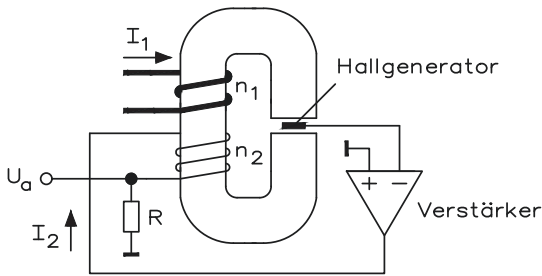
$I$  Längsstrom im Hallplättchen

$B$  Flussdichte senkrecht auf Hallplättchen

$d$  Dicke des Hallplättchens

$k$  Indiumantimonid (InSb)  $U_H \approx 240 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{As}$

$k$  Indiumarsenid (InAs)  $U_H \approx 120 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{As}$



$$B = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot n}{\delta + \frac{I_{Fe}}{\mu}}$$

$I$  zu messender Strom  
 $\delta$  Luftspalt  
 $I_{Fe}$  Länge des Eisenwegs

In der Praxis lässt sich die Gleichung des Eisens  $I_{Fe}/\mu$  gegenüber dem Luftspalt  $\delta$  vernachlässigen:

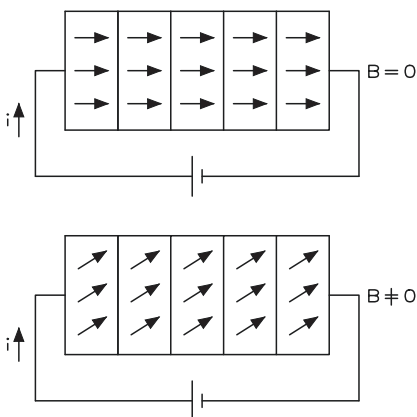
$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{\delta}$$

Die Hallspannung errechnet sich aus  $U_H = K_{B0} \cdot I_{In} \cdot B$

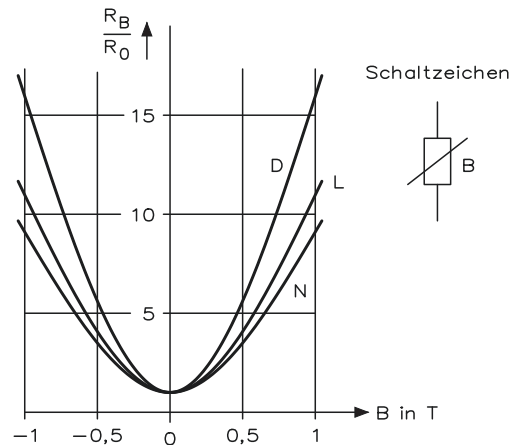
und die Ströme sind  $I_1 \cdot n_1 = I_2 \cdot n_2 \Rightarrow I_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot I_1$

$$U_a = R \cdot I_2 = P \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot I_1$$

## 16.9 Feldplatte



$$\Delta I = \frac{U}{R_B - R_0}$$



$R_0$  Widerstand ohne Magnetfeld  
 $R_B$  Widerstand bei Flussdichte

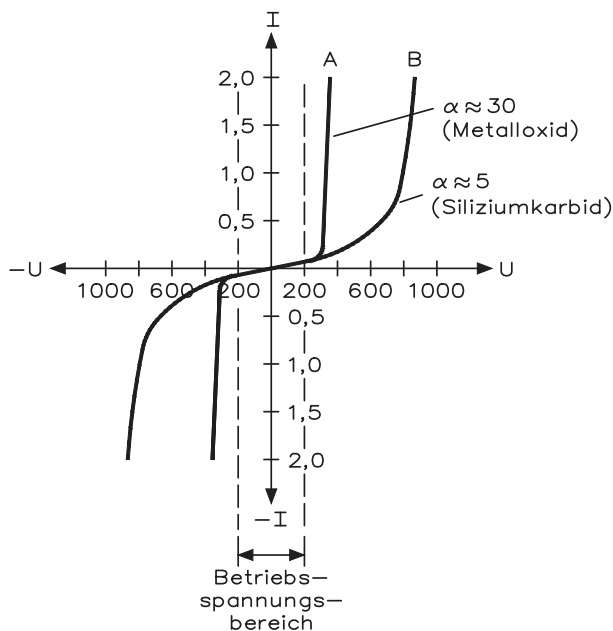
Der Grundwiderstand  $R_0$  der Feldplatte wird durch die Dotierungsgrade des InSb-NiSb-Materials bestimmt:

- D-Material:  $\sigma = 200 \text{ } (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$  (undotiert),  $R_0 \approx 100 \text{ } \Omega$  (25 °C)
- L-Material:  $\sigma = 550 \text{ } (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$   $R_0 \approx 80 \text{ } \Omega$
- N-Material:  $\sigma = 850 \text{ } (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$   $R_0 \approx 100 \text{ } \Omega$

|          | $\frac{R_{75}}{R_{25}}(\%)$ für $B = 0T$ |            |      | $\frac{R_{75}}{R_{25}}(\%)$ für $B = 1T$ |            |      |
|----------|------------------------------------------|------------|------|------------------------------------------|------------|------|
| Material | min.                                     | Mittelwert | max. | min.                                     | Mittelwert | max. |
| D        | 45                                       | 47         | 55   | 28                                       | 28         | 35   |
| L        | 74                                       | 84         | 94   | 53                                       | 63         | 75   |
| N        | 90                                       | 95         | 99   | 76                                       | 82         | 89   |

Die Mäanderstreifenlänge beträgt ca. 80  $\mu\text{m}$  und die Mäanderdicke ist etwa 25  $\mu\text{m}$ .

16.10 VDR-Widerstand



$$U = C \cdot I^\beta$$
$$I = k \cdot U^\varphi$$
$$\beta = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \tan \varphi$$
$$\beta = \frac{1}{\gamma} = \cot \varphi$$

- $C$  Formkonstante 15...1000
- $\beta$  Materialkonstante 0,14...0,5
- $\varphi$  Steigungswinkel der Kennlinie
- $k$  Kehrwert von  $C$
- $\alpha_C$  -0,0012...-0,0018

$$R = \frac{U}{I} = \frac{C \cdot I^\beta}{I} = \frac{C}{I^{(1-\beta)}}$$

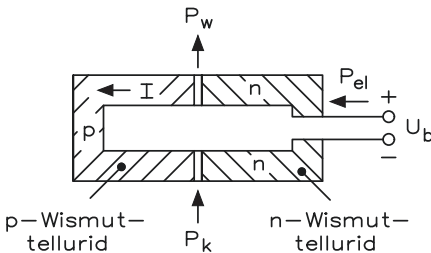
$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{k \cdot U^\gamma} = \frac{1}{k \cdot U^{(\gamma-1)}}$$

$$P_v = U \cdot I = C \cdot I^{(1+\beta)} \approx k \cdot U^{(1+\beta)}$$

$$C_w = C_k (1 + \alpha_C \cdot \vartheta)$$

$\gamma$  Kehrwert von  $\beta$   
 $P_v$  Verlustleistung  
 $C_w$  Konstante warm  
 $C_k$  Konstante kalt

## 16.11 Peltier-Batterie



$$P_w = \alpha \cdot I \cdot \vartheta_w$$

$$P_k = \alpha \cdot I \cdot \vartheta_k$$

$$P_v = I^2 \cdot R$$

$$\Delta \vartheta = \vartheta_w - \vartheta_k$$

$$P_{el} = P_w - P_k + P_v = \alpha \cdot I (\vartheta_w - \vartheta_k) + P_v$$

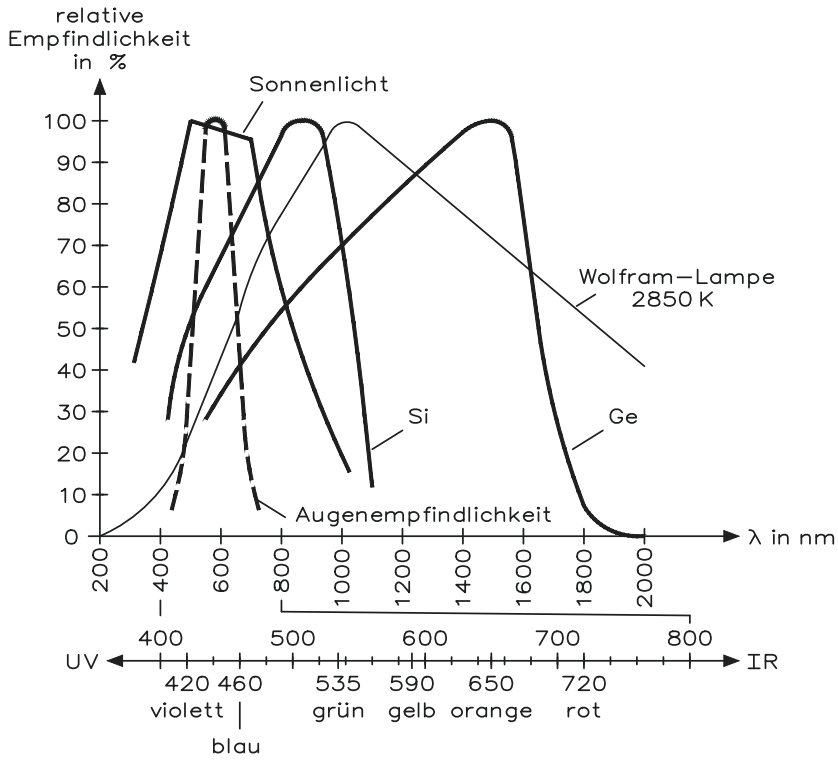
$$P_{el} = \alpha \cdot I \cdot \Delta \vartheta + I^2 \cdot R$$

$P_w$  abzuführende Wärmeleistung  
 $P_k$  Kälteleistung  
 $P_v$  Verlustwärme im Stromkreis  
 $\vartheta_w$  Warmtemperatur  
 $\vartheta_k$  Kalttemperatur  
 $\Delta \vartheta$  Temperaturdifferenz  
 $\alpha$  Thermokraft in V/K

## 16.12 Beleuchtungsgrößen und Einheiten

|                               |                       |                                                      |
|-------------------------------|-----------------------|------------------------------------------------------|
| Lichtstrom $\Phi$             | Lumen lm              |                                                      |
| Lichtmenge $Q$                | Lumenstunde lm h      | $Q = \Phi \cdot t$                                   |
| Lichtstärke $I$               | Candela cd            | $I = \Phi / \Omega$                                  |
| Beleuchtungsstärke            | Lux lm/m <sup>2</sup> | $E = \Phi / A$                                       |
| Leuchtdichte (Selbststrahler) | cd/cm <sup>2</sup>    | $L = \Phi / (\Omega \cdot A \cdot \cos \varepsilon)$ |
| (Flächen)                     | cd/m <sup>2</sup>     |                                                      |
| Belichtung $H$                | lx s                  | $H = E \cdot t$                                      |
| Lichtausbeute $\eta$          | lm/W                  | $\eta = \Phi / P$                                    |
| Reflexionsgrad                | l                     |                                                      |
| Absorptionsgrad $\alpha$      | l                     | $\rho + \tau + \alpha = 0$                           |
| Raumwinkel $\Omega$           | sr (Steradian)        | $\Omega = A / r^2$                                   |

## Spektraler Bereich von Sonnenlicht und Glühlampe

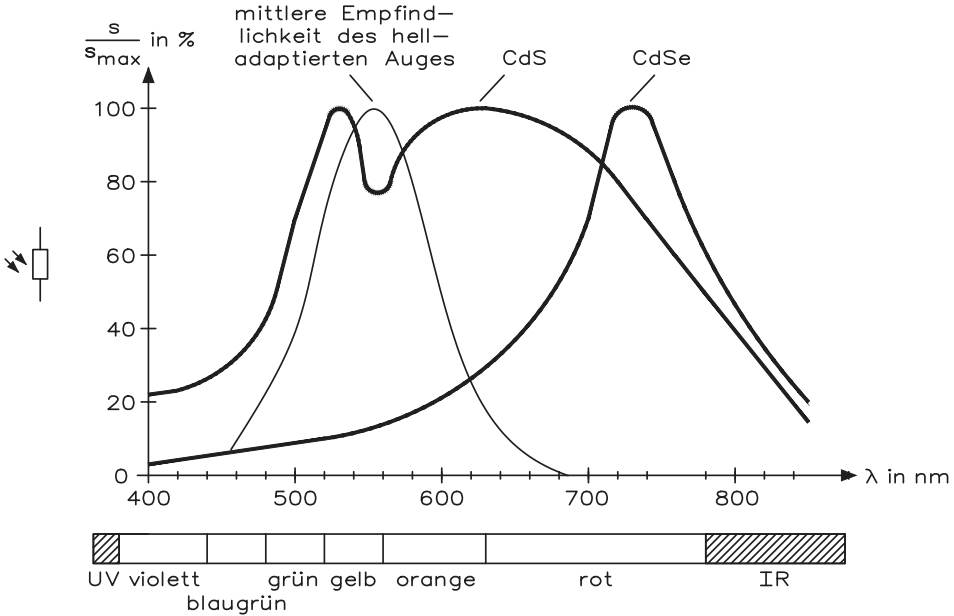


$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{f}$$

$\lambda$  Lichtwellenlänge  
 $c$  Lichtgeschwindigkeit 300 000 km/s  
 $f$  Frequenz

## 16.13 Fotowiderstände

LDR = Light Dependent Resistor



$$I_F = \frac{n \cdot e \cdot \tau}{T}$$

$$I_D = \frac{U_b}{R_D}$$

$$P_v = I_F^2 \cdot R_i = \frac{U_F^2}{R_i}$$

$$I_F = \sqrt{\frac{P_v}{R_i}}$$

$$U_F = I_F \cdot R_i$$

$$U_a = U_b - U_F$$

$I_F$  Fotostrom (beleuchtungsabhängig) in A

$I_D$  Dunkelstrom (Kurzschlussstrom) in A

$n$  Anzahl der Ladungsträger in s

$e$  Elementarladung in As

$T$  Lebensdauer der Ladungsträger in s

$R_i$  Innenwiderstand

$R_D$  Dunkelwiderstand

Chemische Materialien und Bereich:

CdS = Cadmiumsulfid

sichtbares Licht

CdSe = Cadmiumselenid

sichtbares Licht und Infrarot-Bereich

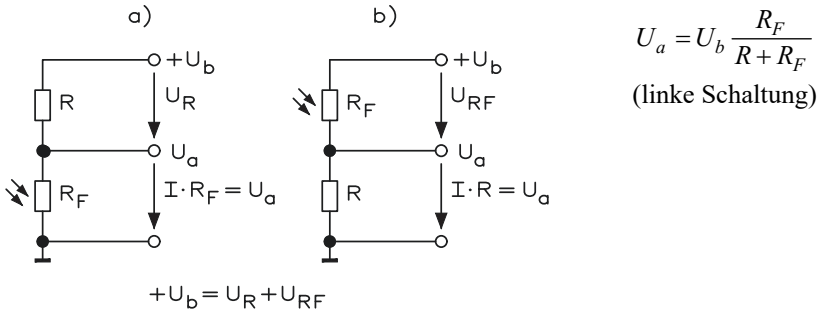
PbS = Bleisulfid

Infrarot-Bereich (ca. 3000 nm)

PbSe = Bleiselenid

Infrarot-Bereich (ca. 7000 nm)

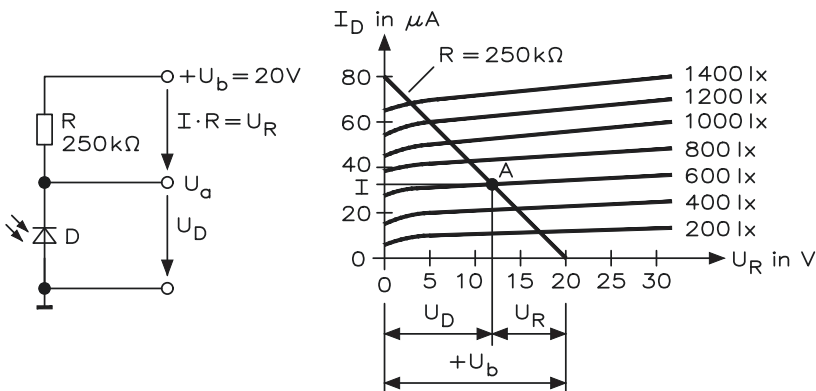
InSb = Indiumantimonid



Unter dem Dunkelwiderstand wird der hochohmige Widerstand verstanden, der sich bei völliger Dunkelheit und nach  $t > 30$  Minuten einstellt. Dieser erreicht Werte bis zu  $> 200 \text{ M}\Omega$ . Bei den handelsüblichen Widerständen treten Werte zwischen  $1 \text{ M}\Omega$  bis  $10 \text{ M}\Omega$  auf, typisch  $10 \text{ M}\Omega$  nach 30 Minuten Dunkelheit. Zu beachten ist, dass der Widerstand des Bauelementes nach Abschalten des Strahlers während der ersten 10...30 Sekunden sehr schnell und danach langsamer ansteigt. Die Änderungen des Dunkelwiderstandes werden in den Datenblättern angegeben und z. B. der LDR 05 mit  $\geq 200 \text{ k}\Omega$  pro Sekunde nach Abschalten einer  $1000 \text{ lx}$  Lichtquelle.

Der Hellwiderstand ist der Widerstand bei einer vorgegebenen Lichtquelle – Normlicht A (2854 K);  $300 \text{ lx}$ ;  $T_u = 20^\circ \text{C}$  – zu verstehen. Auch hier ist mit einer gewissen Trägheit bis zum Erreichen des minimalen Wertes zu rechnen. Hellwiderstände bei  $1000 \text{ Lux}$  erreichen Werte zwischen  $100 \Omega$  und  $3,5 \text{ k}\Omega$ . Typische Werte bei  $50 \text{ Lux}$  liegen zwischen  $500 \Omega$ ... $75 \text{ k}\Omega$  je nach Typ. Prüfspannungen für den Hellwiderstand liegen zwischen  $2$ ... $10 \text{ Volt}$ .

## 16.14 Fotodioden



$$U_F = I_F \cdot R_i$$

$$U_a = U_b - U_F$$

$$I_D = \frac{U_b}{R_D}$$

$$P_v = I_F^2 \cdot R_i = \frac{U_F^2}{R_i}$$

$$I_{F \max} = \sqrt{\frac{P_v}{R_i}}$$

$$U_{F \max} = \sqrt{P_v \cdot R_i}$$

$U_b$  Betriebsspannung

$U_F$  Spannung an der Fotodiode

$U_a$  Ausgangsspannung

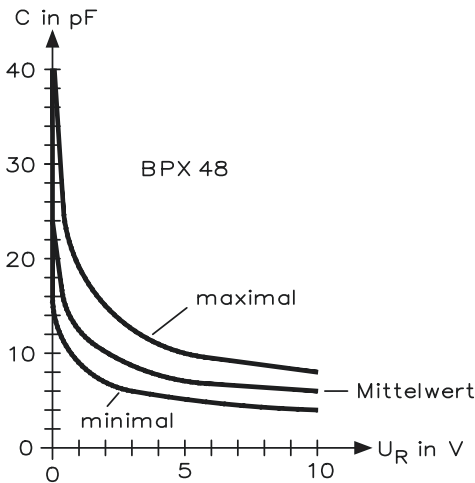
$I_F$  Fotostrom (beleuchtungsabhängig) in mA

$I_D$  Dunkelstrom (Kurzschlussstrom) in  $\mu A$

$R_i$  Innenwiderstand

$R_D$  Dunkelwiderstand

Die Kapazität ist abhängig von der Höhe der Sperrspannung  $C_D \approx \sqrt{\frac{1}{U_R}}$ .



## 16.15 Fototransistoren



$$I_C = (1 + B)I_{CB0}$$

$$s = \frac{I_C}{\Phi}$$

$$e = \frac{I_C}{E}$$

$$U_{CE} = U_b - U_a = U_b - I_C \cdot R_a$$

$$P_v = U_{CE} \cdot I_C$$

$I_C$  Kollektorstrom

$I_{CB0}$  Kollektor-Reststrom

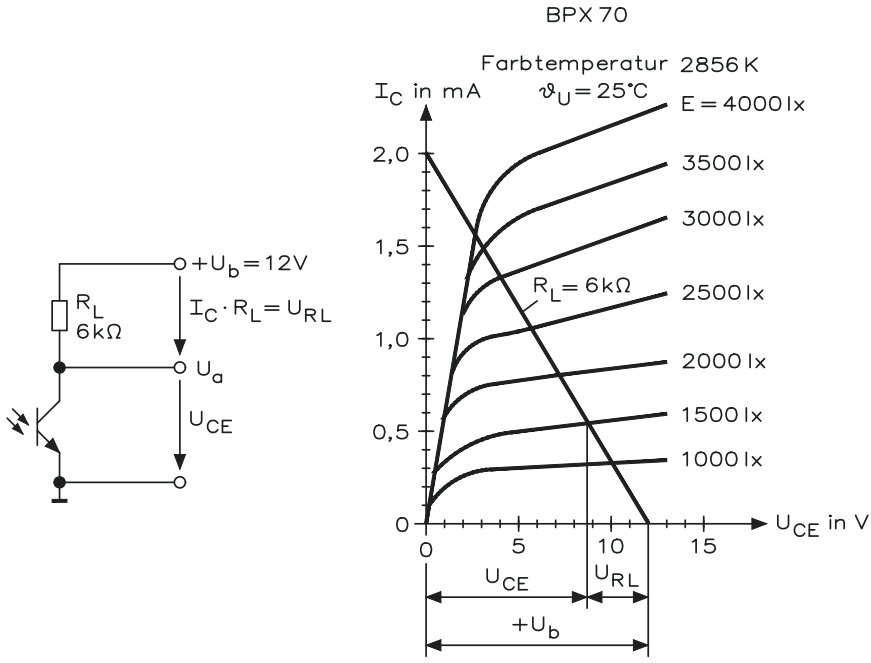
$B$  Gleichstromverstärkung (Emitterschaltung)

$s$  Lichtstrom-Empfindlichkeit in mA/lm

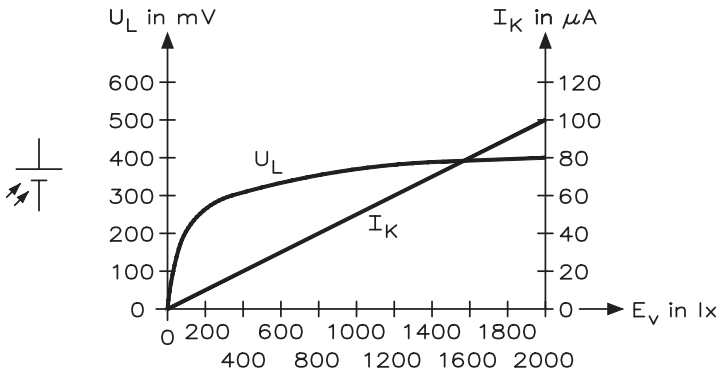
$e$  Beleuchtungsstärke-Empfindlichkeit in mA/lx

$\Phi$  Lichtstrom in lm

$E$  Beleuchtungsstärke in lx



## 16.16 Fotoelemente



$$R_i = \frac{U_L}{I_k} \quad (E = \text{konstant})$$

$$s = \frac{I_F}{\Phi} = \frac{e}{A}$$

- $I_F$  Fotostrom (beleuchtungsabhängig) in mA
- $U_L$  Leerlaufspannung
- $R_i$  Innenwiderstand (beleuchtungsabhängig)
- $I_k$  Kurzschlussstrom bei  $R_a = 0$
- $\Phi$  Lichtstrom in lm

$$e = \frac{I_F}{E} = s \cdot A$$

$$I_F = e \cdot E = s \cdot \Phi$$

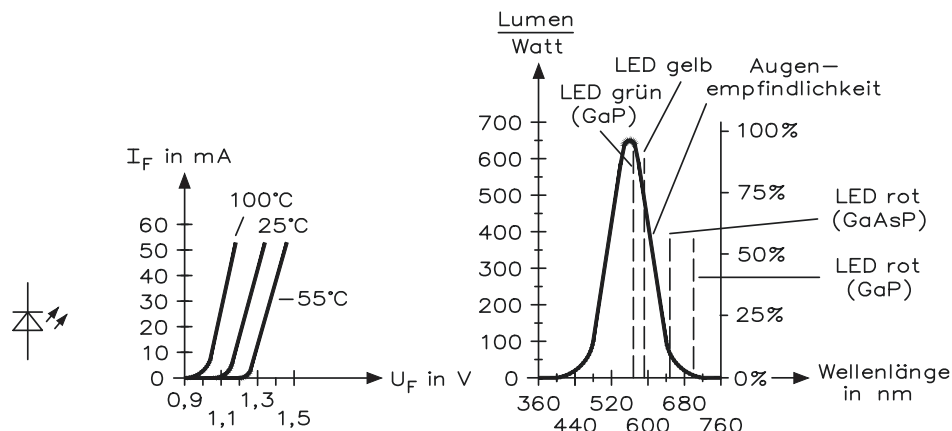
$$U_a = \frac{U_L \cdot R_a}{R_i + R_a}$$

$$U_a = \frac{U_L}{2} \text{ bei } R_i = R_a$$

$$I = \frac{U_a}{R_a} = \frac{U_L}{2 \cdot R_a}$$

- $A$  lichtempfindliche Fläche in  $\text{cm}^2$   
 $s$  Lichtstrom-Empfindlichkeit in  $\text{mA/lm}$   
 $e$  Beleuchtungsstärke-Empfindlichkeit in  $\text{mA/lx}$   
 $E$  Beleuchtungsstärke in  $\text{lx}$

## 16.17 Leuchtdioden



$$R_v = \frac{U_b - U_F}{I_F}$$

$$P_v = U_F \cdot I_F$$

$$\eta = \frac{P_v}{U_F \cdot I_F}$$

$I_F$  Durchlassstrom 5 mA...100 mA

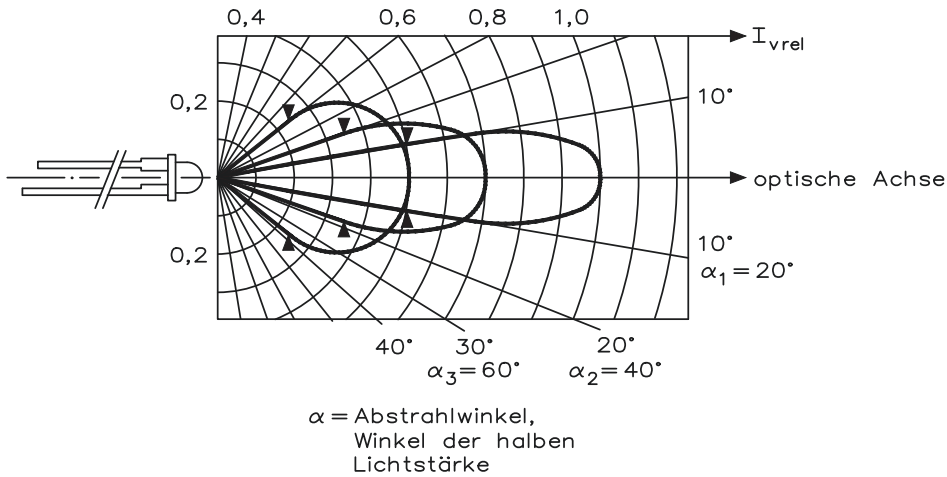
$P_v$  Verlustleistung 30 mW...100 mW

$U_F \approx 1,6 \text{ V}$  (rote LED)

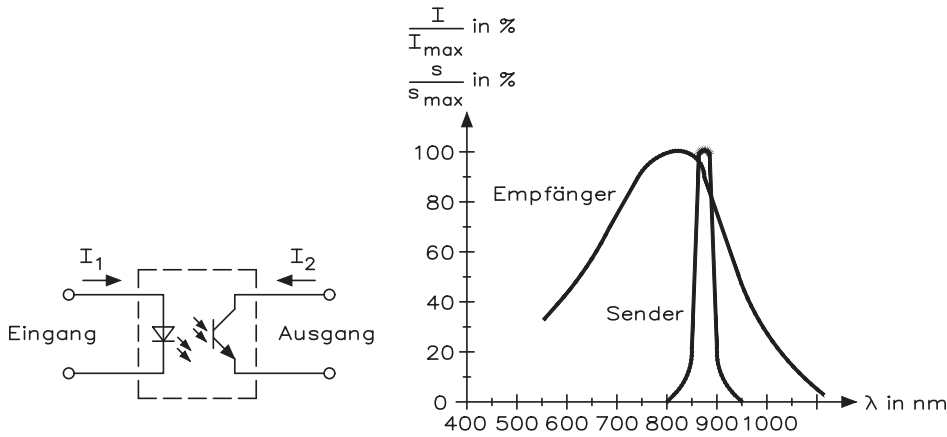
$U_F \approx 2,2 \text{ V}$  (orange LED)

$U_F \approx 2,4 \text{ V}$  (gelbe LED)

$U_F \approx 2,7 \text{ V}$  (grüne LED)



### 16.18 Optokoppler

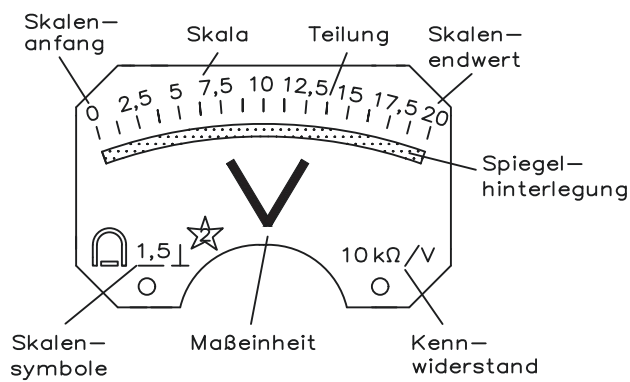


$$v_I = \frac{I_C}{I_F} = \frac{I_2}{I_1}$$
$$\ddot{u} = \frac{I_C}{I_F}$$

## 17.1 Klasseneinteilung und Bedingungen

| Art                               | Klasse | Bedingungen        |                 |                            |                        |                                                    |                          |                           |                        |
|-----------------------------------|--------|--------------------|-----------------|----------------------------|------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------|---------------------------|------------------------|
|                                   |        | Anzeige-<br>fehler | Lage-<br>fehler | Tempe-<br>ratur-<br>fehler | An-<br>wärm-<br>fehler | Fremdfeld-<br>fehler                               | Fre-<br>quenz-<br>fehler | Span-<br>nungs-<br>fehler | Ein-<br>bau-<br>fehler |
| Fein-<br>mess-<br>geräte          | 0,1    | $\pm 0,1 \%$       | $\pm 0,1 \%$    | $\pm 0,1 \%$               | –                      | $\pm 3 \%$<br>bei Drehspul-<br>instrumenten        | $\pm 0,1 \%$             | $\pm 0,1 \%$              | $\pm 0,05 \%$          |
|                                   | 0,2    | $\pm 0,2 \%$       | $\pm 0,2 \%$    | $\pm 0,2 \%$               | –                      | $\pm 1,5 \%$<br>bei abgeschirmten<br>Instrumenten  | $\pm 0,2 \%$             | $\pm 0,2 \%$              | $\pm 0,1 \%$           |
|                                   | 0,5    | $\pm 0,5 \%$       | $\pm 0,5 \%$    | $\pm 0,5 \%$               | –                      | $\pm 0,75 \%$                                      | $\pm 0,5 \%$             | $\pm 0,5 \%$              | $\pm 0,25 \%$          |
| Be-<br>triebs-<br>mess-<br>geräte | 1      | $\pm 1 \%$         | $\pm 1 \%$      | $\pm 1 \%$                 | $\pm 0,5 \%$           | $\pm 6 \%$                                         | $\pm 1 \%$               | $\pm 1 \%$                | $\pm 0,5 \%$           |
|                                   | 1,5    | $\pm 1,5 \%$       | $\pm 1,5 \%$    | $\pm 1,5 \%$               | $\pm 0,75 \%$          | $\pm 1,5 \%$<br>bei Drehspul-<br>instrumenten      | $\pm 1,5 \%$             | $\pm 1,5 \%$              | $\pm 0,75 \%$          |
|                                   | 2,5    | $\pm 2,5 \%$       | $\pm 2,5 \%$    | $\pm 2,5 \%$               | $\pm 1,25 \%$          | $\pm 0,75 \%$<br>bei abgeschirmten<br>Instrumenten | $\pm 2,5 \%$             | $\pm 2,5 \%$              | $\pm 1,25 \%$          |
|                                   | 5      | $\pm 5 \%$         | $\pm 5 \%$      | $\pm 5 \%$                 | $\pm 2,5 \%$           | $\pm 0,75 \%$                                      | $\pm 5 \%$               | $\pm 5 \%$                | $\pm 2,5 \%$           |

Skalenbeschriftung



Skalenbeschriftung enthält

|                 |                       |
|-----------------|-----------------------|
| Sinnbilder für: | und Angaben über:     |
| Stromart        | Messgerätekategorie   |
| Messwerk        | Innenwiderstand       |
| Gebrauchslage   | Einheit der Messgröße |
| Prüfspannung    | Ursprung              |

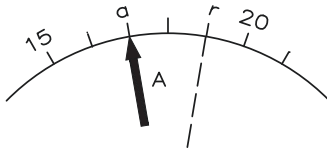
Messgeräteklassen

|                       | Feinmess-<br>geräte | Betriebs-<br>messgeräte |
|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| Klasse                | 0,1 0,2 0,5         | 1 1,5 2,5 5             |
| Anzeige-<br>fehler ±% | 0,1 0,2 0,5         | 1 1,5 2,5 5             |

Die Zahlenwerte geben den maximal zulässigen Fehler eines Zeigermessgerätes bezogen auf den Skalenendwert an.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Skalensinnbilder</p> <p>— Für Gleichstrom (DC)</p> <p>⋈ Für Gleich- und Wechselstrom</p> <p>~ Für Wechselstrom (AC)</p> <p>≈ Für Drehstrom mit einem Messwerk</p> <p>≈≈ Für Drehstrom mit zwei Messwerken</p> <p>≈≈≈ Für Drehstrom mit drei Messwerken</p> <p>1,5 Klassenzeichen, bezogen auf Messbereich-Endwert</p> <p>1,5 Klassenzeichen, bezogen auf Skalenlänge bzw. Schreibbreite</p> <p>①,5 Klassenzeichen, bezogen auf richtigen Wert</p> <p>⊥ Senkrechte Nennlage</p> <p>□ Waagerechte Nennlage</p> <p>∠60° Schräge Nennlage, (mit Neigungswinkelangabe)</p> <p>☆ Prüfspannung</p> <p>⏏ Hinweis auf getrennten Nebenwiderstand</p> <p>⏏ Hinweis auf getrennten Vorwiderstand</p> <p>○ Magnetischer Schirm (Eisenschirm)</p> <p>⊖ Elektrostatistischer Schirm</p> <p>ast Astatistisches Messwerk</p> <p>⚠ Achtung (Gebrauchsanleitung beachten)!</p> | <p> Drehspulmesswerk</p> <p> } als Gleichrichter</p> <p> } Zusatz zu Thermoumformer</p> <p> } isolierter Thermoumformer</p> <p> Drehspul-Quotientenmesswerk</p> <p> Drehmagnetmesswerk</p> <p> Drehmagnet-Quotientenmesswerk</p> <p> Dreheisenmesswerk</p> <p> Dreheisen-Quotientenmesswerk</p> <p> Elektrodynamisches Messwerk (eisenlos)</p> <p> Elektrodynamisches Quotientenmesswerk (eisenlos)</p> <p> Elektrodynamisches Messwerk (eisengeschlossen)</p> <p> Elektrodynamisches Quotientenmesswerk (eisengeschlossen)</p> <p> Induktionsmesswerk</p> <p> Induktions-Quotientenmesswerk</p> <p> Hitzdrahtmesswerk</p> <p> Bimetallmesswerk</p> <p> Elektrostatistisches Messwerk</p> <p> Vibrationsmesswerk</p> <p> Mit eingebautem Verstärker</p> |
| <p>Bei Messgeräten mit mehreren Messpfaden müssen die einzelnen Messpfade gegeneinander und gegen Erde geprüft werden. Die Größe der Prüfspannung ist abhängig von der Größe der Nennspannung des Messgerätes.</p> <p>Nennspannung bis 40 V, Prüfspannung 500 V: Stern, ohne Zahl</p> <p>Nennspannung 40 V bis 650 V, Prüfspannung 2 kV: Stern, Zahl=2</p> <p>Nennspannung 650 V bis 1000 V, Prüfspannung 3 kV: Stern, Zahl=3</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

## 17.2 Genauigkeiten von Messgeräten



$a$  = angezeigter Wert

$r$  = richtiger Wert

Der Fehler ist die Differenz zwischen angezeigtem und richtigem Wert. Die Korrektur ist die negative Fehlerangabe:

$$\begin{aligned} \text{Fehler: } F &= a - r \\ &= 17 - 19 \\ &= -2 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Korrektur: } K &= -2 \text{ A} \\ &= +2 \text{ A} \end{aligned}$$

Weitere Fehlerquellen:

- a) Zubehörfehler
- b) Schaltungsfehler
- c) persönliche Fehler z. B.
  - Bedienungsfehler
  - Behandlungsfehler
  - Ablesefehler
  - Parallaxenfehler

Positiver Korrekturwert bedeutet:

- Richtiger Wert ist größer als der angezeigte Wert.

Negativer Korrekturwert bedeutet:

- Richtiger Wert ist kleiner als der angezeigte Wert.

Anzeige und Korrektur ergeben den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} a + K &= r \\ 17 + 2 &= 19 \text{ A} \end{aligned}$$

Der absolute Fehler  $F$  des Messgerätes kann positive und negative Werte annehmen und es ergibt sich

$$F = a - r$$

Dabei ist  $a$  der angezeigte Wert und  $r$  der wahre Wert, der zunächst unbekannt ist. Der relative Fehler  $f$  beschreibt die Genauigkeit des Messgerätes:

$$f = \frac{F}{r} = \frac{a-r}{r} = \frac{a}{r} - 1$$

oder

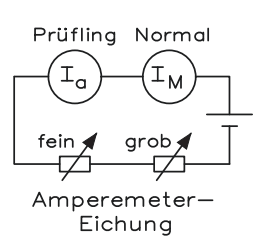
$$f = \frac{a-r}{B}$$

Für die Fehlerberechnung gilt noch  $F = \pm \frac{B \cdot G}{100}$ .

$$p = \pm \frac{F \cdot 100}{a} \text{ in \%} = \pm \frac{B \cdot G}{a} \text{ in \%}$$

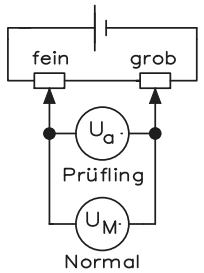
|     |                    |
|-----|--------------------|
| $B$ | Bereichsendwert    |
| $a$ | angezeigter Wert   |
| $F$ | Fehlerbetrag       |
| $G$ | Genauigkeitsklasse |
| $p$ | Fehler in % von A  |

### 17.3 Genauigkeiten von Betriebsmessgeräten



Fehlerkorrektur:  
 $K = -F$        $M = a + K$

$K$  Korrekturwert  
 $M$  korrigierter Messwert



Justierung (Eichung):  
 $F = a - M$        $K = M - a$

Justierung von Betriebsmessgeräten (Spannungsmessern); Normal (Präzisionsmessgerät) und Prüfling werden parallel geschaltet. Bei Justierungsmessung soll 1/10 des für den Prüfling zugelassenen Fehlers noch feststellbar sein. Das Vergleichsmessgerät muss mindestens einer höheren Güteklasse angehören als der Prüfling.

| Sollwert<br>(Normal-<br>instrument) | Istwert<br>(Prüfling) | Absoluter<br>Fehler<br>$F = I_x - I_n$ | Korrektur<br>$K = I_n - I_x$ | Relativer<br>Fehler<br>$f_r = \frac{F \cdot 100}{I_n}$ | Prozentualer<br>Fehler<br>$f = \frac{F \cdot 100}{I_{nmax}}$ |
|-------------------------------------|-----------------------|----------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $I_n$                               | $I_x$                 | $F$                                    | $K = -F$                     | $f_r$ in %                                             | $f$ in %                                                     |
| 0                                   | 0                     | 0                                      | 0                            | 0                                                      | 0                                                            |
| 5,00                                | 5,55                  | +0,55                                  | -0,55                        | +11                                                    | +1,1                                                         |
| 10,00                               | 10,70                 | +0,70                                  | -0,70                        | +7                                                     | +1,4                                                         |
| 15,00                               | 15,60                 | +0,60                                  | -0,60                        | +4                                                     | +1,2                                                         |
| 20,00                               | 20,00                 | ± 0,00                                 | ± 0,00                       | ± 0                                                    | ± 0                                                          |
| 25,00                               | 24,35                 | -0,65                                  | +0,65                        | -2,6                                                   | -1,3                                                         |
| 30,00                               | 29,70                 | -0,30                                  | +0,30                        | -1,0                                                   | -0,6                                                         |
| 35,00                               | 34,25                 | -0,75                                  | +0,75                        | -2,14                                                  | -1,5                                                         |
| 40,00                               | 39,50                 | -0,50                                  | +0,50                        | -1,25                                                  | -1,0                                                         |
| 45,00                               | 45,40                 | + 0,40                                 | -0,40                        | +0,88                                                  | +0,8                                                         |
| 50,00                               | 50,45                 | + 0,45                                 | -0,45                        | +0,9                                                   | +0,9                                                         |

- Absoluter Fehler:  $F = I_x - I_n$  oder  $U = U_x - U_n$
- Korrektur:  $K = I_n - I_x = -F$
- Relativer Fehler (bezogen auf Anzeige):  $f_r = \frac{F \cdot 100}{I_n}$   $f_r$  relativer Fehler
- Prozentualer Fehler (bezogen auf Endwert):  $f = \frac{F \cdot 100}{I_{n\max}}$   $F$  Fehlerbetrag  
 $f$  prozentualer Fehler

## 17.4 Anzeige eines Digitalmessgerätes

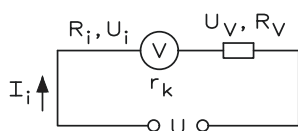


$$U_{\min} = a - a \cdot p$$

$$U_{\max} = a + a \cdot p + D$$

$a$  angezeigter Wert  
 $p$  Fehler in % von  $a$   
 $D$  Fehler der Digits

## 17.5 Messbereichserweiterung (Spannung)



$$R_i = \frac{U_i}{I_i} = r_k \cdot U_i$$

$$r_k = \frac{1}{I_i}$$

$$R_g = r_k \cdot U_i = \frac{U}{I_i} = R_i + R_v$$

$$U = U_i + U_v$$

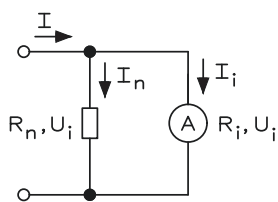
$$R_v = r_k \cdot U_v = \frac{U_v}{I_i}$$

$$R_v = R_g - R_i = R_i(n-1)$$

$$n = \frac{U}{U_i}$$

$R_i$  Messwerkwiderstand  
 $U_i$  Spannung bei Vollauschlag  
 $I_i$  Strom bei Vollauschlag  
 $r_k$  Kennwiderstand in  $\Omega/V$   
 $R_v$  Spannung am Vorwiderstand  
 $U$  Messbereichsspannung  
 $R_g$  Gesamtwiderstand  
 $n$  Vervielfachungsfaktor

## 17.6 Messbereichserweiterung (Strom)



$$R_i = \frac{U_i}{I_i} = r_k \cdot U_i$$

$$r_k = \frac{1}{I_i}$$

$$R_g = \frac{R_i \cdot R_v}{R_i + R_n} = \frac{U_i}{I}$$

$$I = I_i + I_n$$

$$R_n = \frac{U_i}{I_n} = \frac{U_i}{I - I_i} = \frac{R_i \cdot R_g}{R_i - R_g} = \frac{R_i}{n - 1}$$

$$n = \frac{U}{U_i}$$

$R_n$  Nebenwiderstand  
(Shunt)

$I_n$  Strom durch Neben-  
widerstand

$I$  Messbereichsstrom

$R_g$  Gesamtwiderstand

$n$  Vervielfachungs-  
faktor

## 17.7 Amplitudenform der Messgröße

Der Augenblickswert ist der Wert einer Wechselgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$u$  Augenblickswert der Spannung

$i$  Augenblickswert des Stromes

Der Scheitelwert ist der größte Betrag des Augenblickswertes einer Wechselgröße:

$\hat{u} = u_{\max}$  Scheitelwert der Spannung

$\hat{i} = i_{\max}$  Scheitelwert des Stromes

Der Effektivwert ist der zeitliche quadratische Mittelwert einer Wechselgröße:

$U = U_{\text{eff}}$  Augenblickswert der Spannung

$I = I_{\text{eff}}$  Augenblickswert des Stromes

Der Gleichrichtwert ist der arithmetische Mittelwert des Betrages einer Wechselgröße über eine Periode:

$\bar{u} = |u|$  Gleichrichtwert der Spannung

$\bar{i} = |i|$  Gleichrichtwert des Stromes

Der Scheitelfaktor einer Wechselgröße ist das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert:

$$S = \frac{\hat{u}}{U} = \frac{\hat{i}}{I}$$

Der Formfaktor einer Wechselgröße ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert:

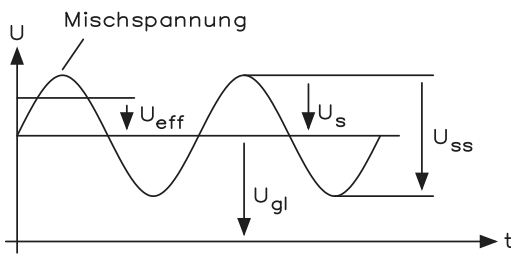
$$F = \frac{U}{\bar{u}} = \frac{I}{\bar{i}} \quad F \geq 1$$

Umrechnung von Scheitel, Gleichricht- und Effektivwert:

| Schwingung                                                                                    | Scheitelwert $\hat{u}$                                                                                                                      | Gleichrichtwert $ \bar{u} $                                                                                                                                       | Effektivwert $U$                                                                                                                           | Scheitelfaktor $S$                                                                     | Formfaktor $F$                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| mit Scheitel- und Formfaktor                                                                  | $\hat{u} = S \cdot U$<br>$\hat{u} = S \cdot F \cdot  \bar{u} $                                                                              | $ \bar{u}  = U / F$<br>$ \bar{u}  = \frac{\hat{u}}{S \cdot F}$                                                                                                    | $U = \hat{u} / S$<br>$U =  \bar{u}  \cdot F$                                                                                               | $S = \frac{\text{Scheitelwert}}{\text{Effektivwert}}$<br>$S = \frac{\hat{u}}{U}$       | $F = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}}$<br>$F = \frac{U}{ \bar{u} }$ |
| Sinus<br>    | $\hat{u} = \frac{\pi}{2} \cdot  \bar{u} $<br>$\hat{u} = 1,571 \cdot  \bar{u} $<br>$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U$<br>$\hat{u} = 1,414 \cdot U$ | $ \bar{u}  = \frac{2 \cdot \hat{u}}{\pi}$<br>$ \bar{u}  = 0,637 \cdot \hat{u}$<br>$ \bar{u}  = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot U$<br>$ \bar{u}  = 0,9 \cdot U$ | $U = \hat{u} / \sqrt{2}$<br>$U = 0,707 \cdot \hat{u}$<br>$U = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot  \bar{u} $<br>$U = 1,111 \cdot  \bar{u} $ | $S = \sqrt{2} = 1,414$<br>$\frac{1}{S} = 0,707$<br>$S \cdot F = \frac{\pi}{2} = 1,571$ | $U = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1,111$<br>$\frac{1}{F} = 0,900$                   |
| Rechteck<br> | $\hat{u} =  \bar{u} $<br>$\hat{u} = U$                                                                                                      | $ \bar{u}  = \hat{u}$<br>$ \bar{u}  = U$                                                                                                                          | $U = \hat{u}$<br>$U =  \bar{u} $                                                                                                           | $S = 1,000$<br>$\frac{1}{S} = 1,000$<br>$S \cdot F = 1,000$                            | $F = 1,000$<br>$\frac{1}{F} = 1,000$                                                  |
| Dreieck<br>  | $\hat{u} = 2 \cdot  \bar{u} $<br>$\hat{u} = \sqrt{3} \cdot U$<br>$\hat{u} = 1,732 \cdot U$                                                  | $ \bar{u}  = 0,5 \cdot \hat{u}$<br>$ \bar{u}  = \frac{\sqrt{3} \cdot U}{2}$<br>$ \bar{u}  = 0,866 \cdot U$                                                        | $U = \hat{u} / \sqrt{3}$<br>$U = 0,577 \cdot \hat{u}$<br>$U = \frac{2 \cdot  \bar{u} }{\sqrt{3}}$<br>$U = 1,155 \cdot  \bar{u} $           | $S = \sqrt{3} = 1,732$<br>$\frac{1}{S} = 0,577$<br>$S \cdot F = 2,000$                 | $F = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$<br>$\frac{1}{F} = 0,866$                             |

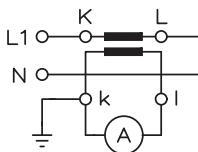
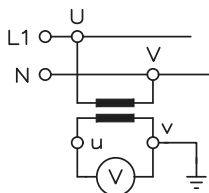
Abhängigkeit der Messgröße:

| Kurvenform     | Korrekturfaktor | Effektivwert<br>Spitzenwert |
|----------------|-----------------|-----------------------------|
| Sinus          | 1               | 0,707                       |
| Rechteck       | 1,41            | 1,0                         |
| Dreieck        | 0,82            | 0,577                       |
| Parabelspitzen | 0,64            | 0,45                        |
| Halbellipsen   | 1,16            | 0,82                        |
| Halbkreise     | 1,16            | 0,82                        |



$$U_{eff} = \sqrt{U_{gl}^2 + \frac{U_s^2}{2}}$$

## 17.8 Spannungs- und Strommessung mit Messwandlern



$$k_U = \frac{U_{1N}}{U_{2N}} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$F_U = \frac{U_2 \cdot k_U - U_1}{U_1} \cdot 100 \%$$

$$k_I = \frac{I_{1N}}{I_{2N}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$F_I = \frac{I_2 \cdot k_I - I_{1N}}{I_{1N}} \cdot 100 \%$$

$F_U$  Spannungswandlerfehler

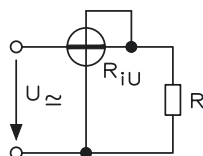
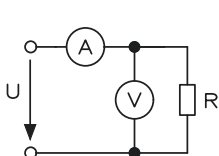
$F_I$  Stromwandlerfehler

$k_U$  Spannungsübersetzungsverhältnis

$k_I$  Stromübersetzungsverhältnis

## 17.9 Leistungsmessung: Schein- und Wirkleistung

- Stromfehlermethode:  $R_{iU} \gg R$



$$S = U \cdot I - \frac{U^2}{R_{iU}}$$

$$P = U \cdot I - \frac{U^2}{R_{iU}}$$

$$\text{Korrekturformel: } P = P_{\text{Mess}} - \frac{U^2}{R_{iU}}$$

$S$  Scheinleistung in VA

$R_{iU}$  Innenwiderstand vom Voltmeter

$P_{\text{Mess}}$  gemessene Leistung in W

$$S = U \cdot I - I^2 \cdot R_{iI}$$

$$P = U \cdot I - I^2 \cdot R_{iI}$$

$$\text{Korrekturformel: } P = P_{\text{Mess}} - I^2 \cdot R_{iI}$$

$S$  Scheinleistung in VA

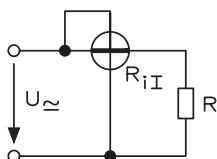
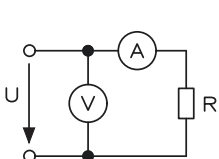
$R_{iU}$  Innenwiderstand vom Voltmeter

$P_{\text{Mess}}$  gemessene Leistung in W

$W$  Wirkleistung in W

$Q$  Blindleistung in var

- Spannungsfehlermethode:  $R_{iI} \ll R$

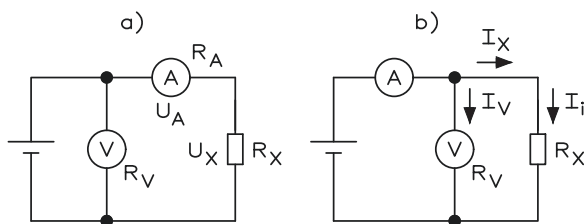


- Leistungsmessung: Blindleistung

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

## 17.10 Widerstandsmessung



Strom- und Spannungsfehlermethode

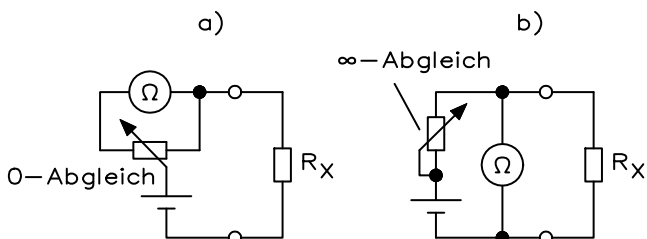
Linke Schaltung:  $R_x = \frac{U - U_x}{I} = \frac{U - I \cdot R_A}{I}$

Das Voltmeter zeigt um den Spannungsfall  $U_A$  zu viel an,  $U_A = I \cdot R_A$ .

Rechte Schaltung:  $R_x = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}$

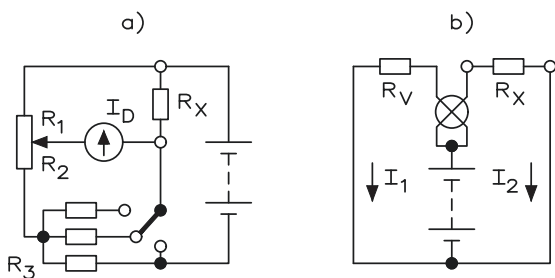
Das Amperemeter zeigt um den Strom  $I_V$  zu viel an,  $I_V = U / R_V$ .

## 17.11 Direktanzeigende Ohmmeter



Linke Schaltung:  
für hochohmige Widerstände

Rechte Schaltung:  
für niederohmige Widerstände

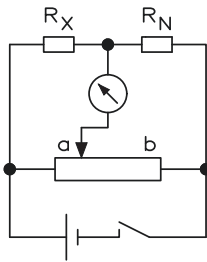


Linke Schaltung:  
Ohmmeter nach Wheatstone

Rechte Schaltung:  
Ohmmeter mit Quotientenmesswerk

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

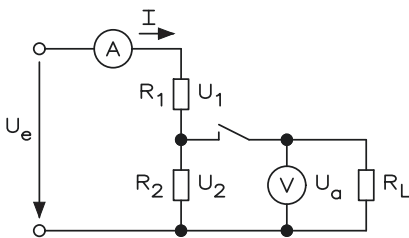
## 17.12 Schleifdrahtbrücke



$$R_X = R_N \cdot \frac{a}{b}$$

$R_X$  unbekannter Widerstand  
 $R_N$  Normalwiderstand  
 $a, b$  Teile des Brückenwiderstands

## 17.13 Messung an Spannungsteilern



Unbelasteter Spannungsteiler:

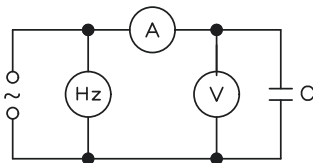
$$U_1 = I \cdot R_1 \quad U_2 = I \cdot R_2$$

Belasteter Spannungsteiler:

$$U_1 = \frac{U_g \cdot R_1}{R_1 + R_2} \quad U_2 = \frac{U_g \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

## 17.14 Kapazitätsmessung

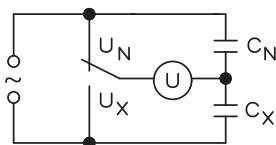
### ■ Strom- und Spannungsmessung an Wechselspannung



$$C = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U}$$

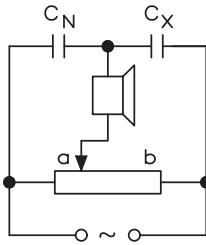
$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_C}$$

### ■ Messung durch Spannungsvergleich



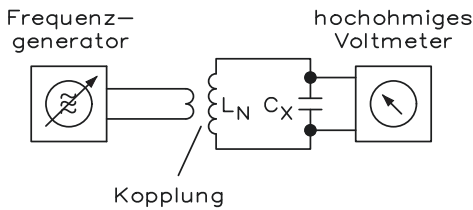
$$C_X = \frac{C_N \cdot U_N}{U_X}$$

### ■ Brückenmessung (Tonminimum)



$$C_X = \frac{C_N \cdot a}{b}$$

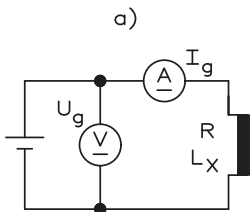
### ■ Resonanzverfahren



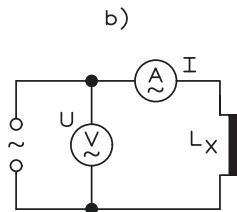
$$C_X = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot L_N}$$

## 17.15 Induktivitätsmessung

### ■ Strom- und Spannungsmessung an Wechselspannung



Messung 1  
mit Gleichstrom



Messung 2  
mit Wechselstrom

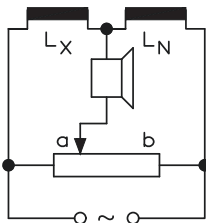
Wirkwiderstand:  $R = \frac{U_-}{I_-}$

Scheinwiderstand:  $Z = \frac{U_{\sim}}{I_{\sim}}$

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

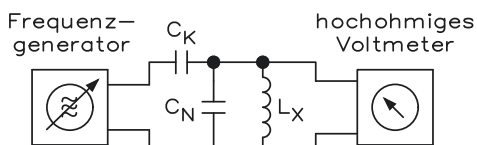
$$L_X = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot f}$$

### ■ Brückenmessung (Tonminimum)



$$L_X = \frac{L_N \cdot a}{b}$$

## ■ Resonanzverfahren



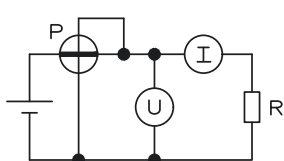
$$L_X = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot C_N}$$

**17.16 Messung der elektrischen Leistung**

Für die elektrische Leistung gelten folgende Grundformeln:

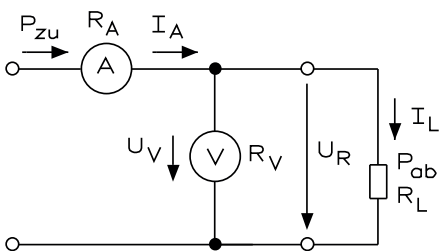
$$P = U \cdot I \quad P = I^2 \cdot R \quad P = \frac{U^2}{R}$$

Die Grundformeln lassen sich umstellen:



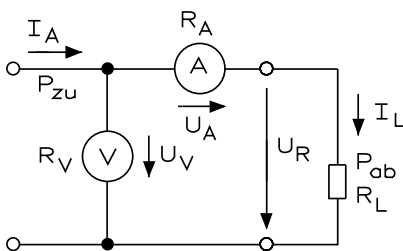
$$I = \frac{P}{U} = \sqrt{\frac{P}{R}} \quad U = \frac{P}{I} = \sqrt{P \cdot R} \quad R = \frac{P}{I^2} = \frac{U^2}{P}$$

Linke Schaltung:  
spannungsrichtige Messung  
a)

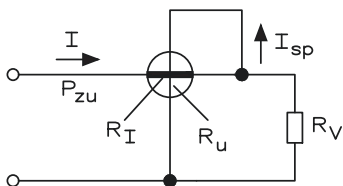


$$P_{ab} = P_{zu} = I^2 \cdot R_v \quad P_{ab} = P_{zu} = \frac{U^2}{R_v}$$

Rechte Schaltung:  
stromrichtige Messung  
b)



$$P_V = U_{RV} \cdot I_V$$

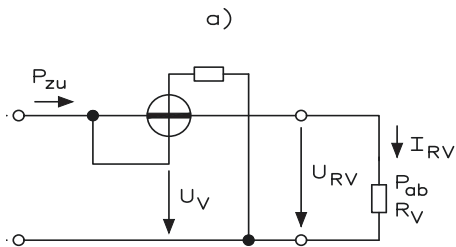


$$\alpha = k \cdot I_F \cdot I_{Sp} = k \cdot I_F \cdot \frac{U}{R_{Sp}} = \frac{k}{R_{Sp}} \cdot U \cdot I = K \cdot P$$

$$\alpha \approx P$$

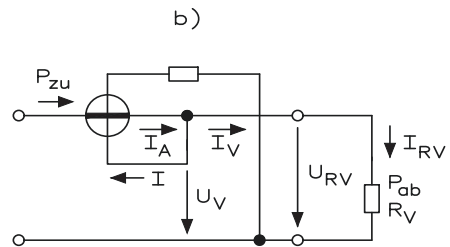
$k, K$  Konstante des elektrodynamischen Messgerätes  
 $\alpha$  Zeigerausschlag

Linke Schaltung:  
stromrichtige Messung



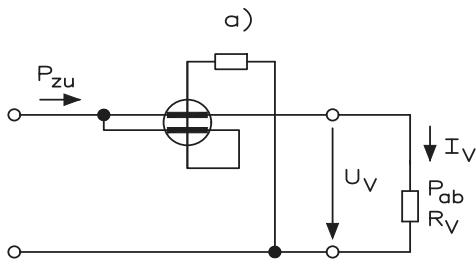
$$\alpha = k(P_{zu} - P_U) \quad \alpha = k(P_{zu} - P_I)$$

Rechte Schaltung:  
spannungsrichtige Messung



$P_U$  Eigenverbrauch  
 $P_I$  Eigenverbrauch

Linke Schaltung:  
quellenrichtige Messung

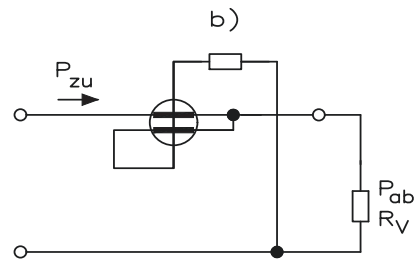


$$P_{zu} = P_{ab} + P_U + P_I$$

$$\alpha = k(P_{ab} + P_I) + k \cdot P_U$$

$$\alpha = k(P_{ab} + P_I + P_U)$$

Rechte Schaltung:  
verbraucherrichtige Messung



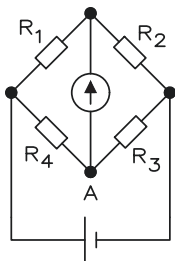
$$P_{zu} = P_{ab} + P_I - P_U$$

$$\alpha = k(P_{zu} - P_I) + k \cdot P_U$$

$$\alpha = k(P_{zu} - P_I - P_U)$$

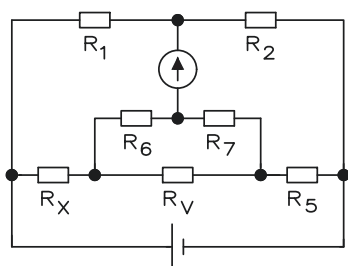
## 17.17 Wechselspannungs-Messbrücken

### ■ Wheatstone-Messbrücke



$$R_X = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_3} = R_2$$

### ■ Schleifdrahtbrücke nach Thomson



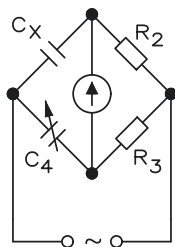
$R_X$  Prüfling

$R_5$  Normalwiderstand ( $\approx R_X$ )

$R_V$  Widerstand der Zuleitungen (vernachlässigbar)

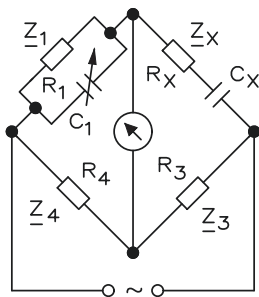
$$R_X = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}, \text{ wenn } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_6}{R_7}$$

### ■ Einfache Kapazitätsmessbrücke



$$C_X = \frac{R_3 \cdot C_4}{R_2}$$

### ■ Kapazitätsmessbrücke nach Wien



$$R_X = \frac{R_1}{1 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_1 \cdot C_1)^2}$$

$$C_X = C_1 + \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_1)^2 \cdot C_1}$$

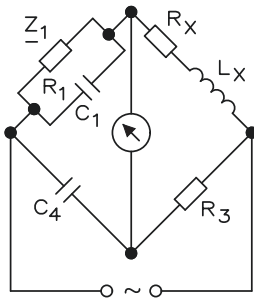
### ■ Maxwell-Robinson-Brücke

Die Maxwell-Robinson-Brücke ist identisch mit der Kapazitätsmessbrücke nach Wien und diese eignet sich für die Frequenzmessung

$$C_1 = C_X = C \quad R_1 = R_X = R \quad R_3 = 2 \cdot R_4$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

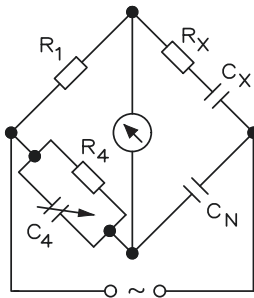
### ■ Induktionsmessbrücke nach Maxwell



$$R_X = \frac{R_3 \cdot C_4}{C_1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_1 \cdot C_1)^2} \right)$$

$$L_X = \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot C_4}{1 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_1 \cdot C_1)^2}$$

### ■ Kapazitätsmessbrücke nach Schering



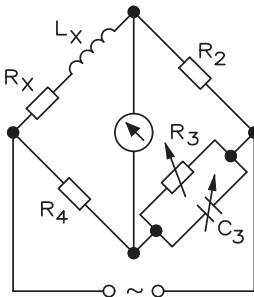
$$R_X = \frac{R_1 \cdot C_4}{C_N}$$

$\tan \delta$  Verlustwinkel

$$C_X = \frac{C_N \cdot R_4}{R_1}$$

$$\tan \delta_X = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_4 \cdot C_4$$

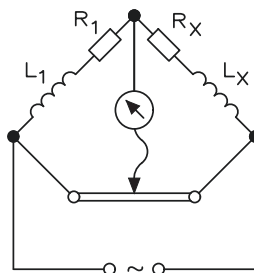
### ■ Induktionsmessbrücke nach Maxwell-Wien



$$R_X = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3}$$

$$L_X = R_2 \cdot R_4 \cdot C_3$$

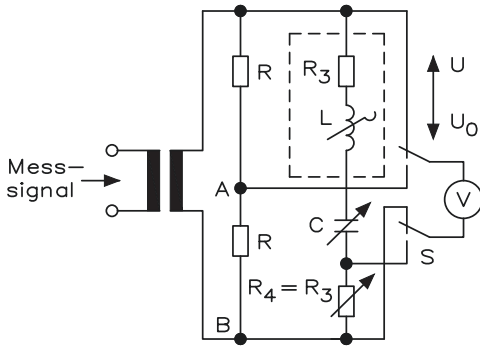
### ■ Induktionsmessbrücke nach Maxwell-Wien (frequenzunabhängig)



$$R_X = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3}$$

$$L_X = \frac{R_3 \cdot L_1}{R_4}$$

■ **Klirrfaktormessbrücke (Eintormessverfahren)**



$$k = \sqrt{\frac{U_{2f}^2 + U_{3f}^2 + \dots}{U_{1f}^2 + U_{2f}^2 + U_{3f}^2 + \dots}}$$

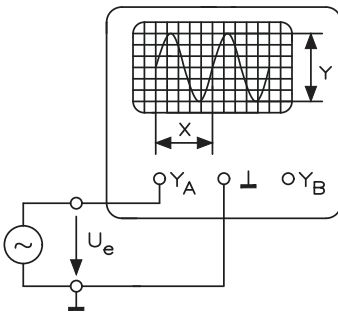
$$k = \sqrt{\frac{I_{2f}^2 + I_{3f}^2 + \dots}{I_{1f}^2 + I_{2f}^2 + I_{3f}^2 + \dots}}$$

1. Messung: Schalterstellung „U“ ergibt Effektivwert des Gesamtsignals
2. Messung: Schalterstellung „U<sub>0</sub>“ ergibt Effektivwert des Oberwellengemisches

Für den Klirrfaktor  $k$  gilt:  $k = \frac{2 \cdot U_0}{U}$ .

## 17.18 Messen mit dem Oszilloskop

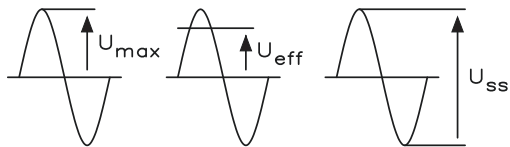
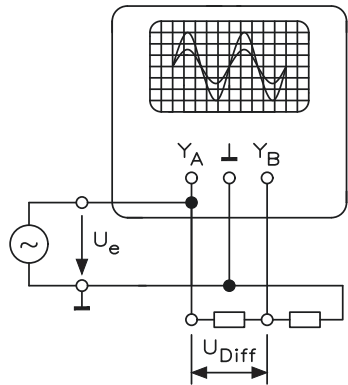
■ **Spannungsmessung**



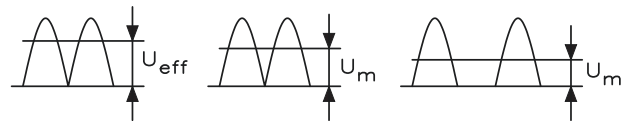
$$U_{SS} = Y \cdot a$$

$Y$  vertikale Ablenkung in Div. bzw. cm

$a$  Ablenkoeffizient in V/Div bzw. V/cm



$U_{\max} = U_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} ; U_{\text{ss}} = 2 \cdot U_{\max} ; U_{\text{m}} = 0$

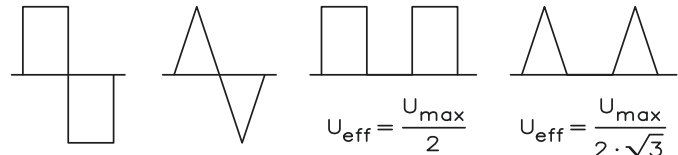


$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$

$U_{\text{m}} = \frac{2}{\pi} \cdot U_{\max}$

$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{2 \cdot \sqrt{2}}$

$U_{\text{m}} = \frac{U_{\max}}{\pi}$



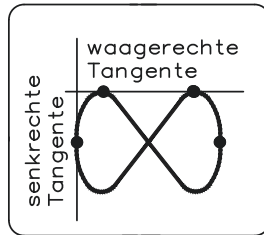
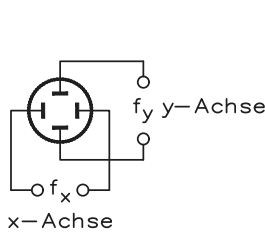
$U_{\text{eff}} = U_{\max}$

$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{3}}$

$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{2}$

$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{2 \cdot \sqrt{3}}$

### ■ Frequenzvergleichsmessung



$$f_X = f_Y \cdot \frac{s}{w}$$

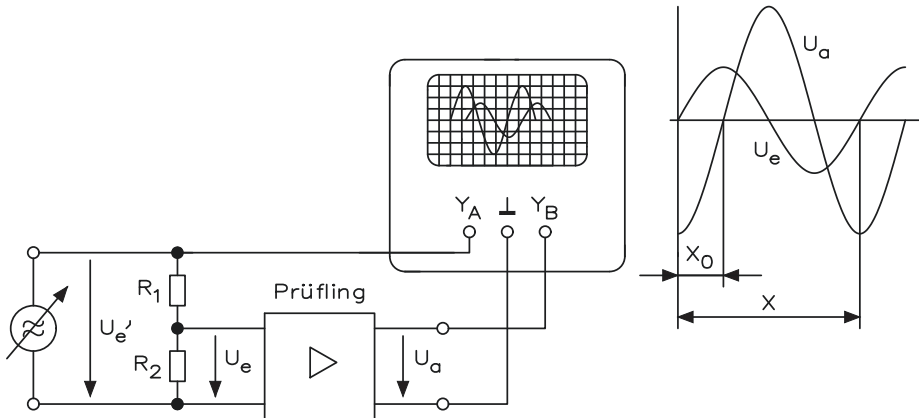
$f_X$  Frequenz an den  $x$ -Platten

$f_Y$  Frequenz an den  $y$ -Platten

$w$  Anzahl der Berührungspunkte der waagerechten Tangente

$s$  Anzahl der Berührungspunkte der senkrechten Tangente

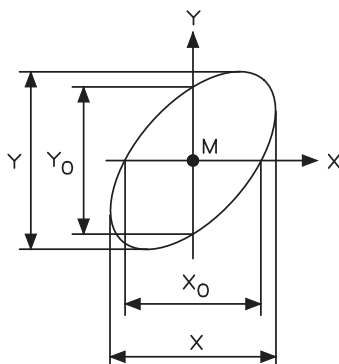
### ■ Messung der Phasenverschiebung (Verhältnis)



$$\varphi = \frac{X_0 \cdot 360^\circ}{X}$$

$\varphi$  Phasenwinkel zwischen  $U_e$  und  $U_a$

### ■ Messung der Phasenverschiebung (Lissajous-Figur)

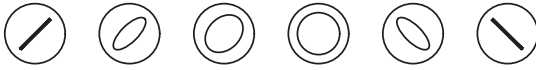


$$\sin \varphi = \frac{X_0}{X} = \frac{Y_0}{Y}$$

$\varphi$  Phasenwinkel zwischen  $f_1$  und  $f_2$

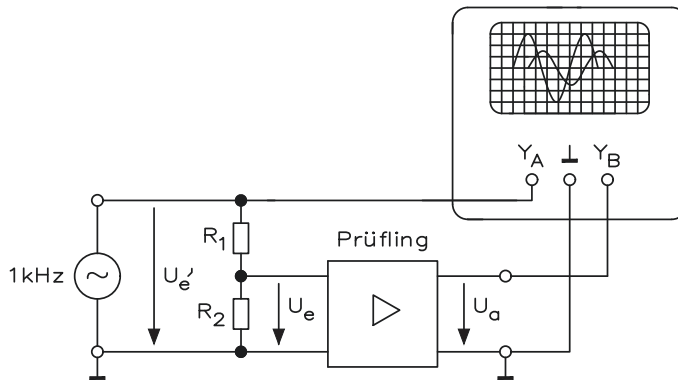
### ■ Messung von Verstärkungsfaktoren

$$\varphi = 0^\circ \quad \varphi = 30^\circ \quad \varphi = 60^\circ \quad \varphi = 90^\circ \quad \varphi = 150^\circ \quad \varphi = 180^\circ$$



$$V = \frac{U_a}{U_e}$$

### ■ Messung der Bandbreite

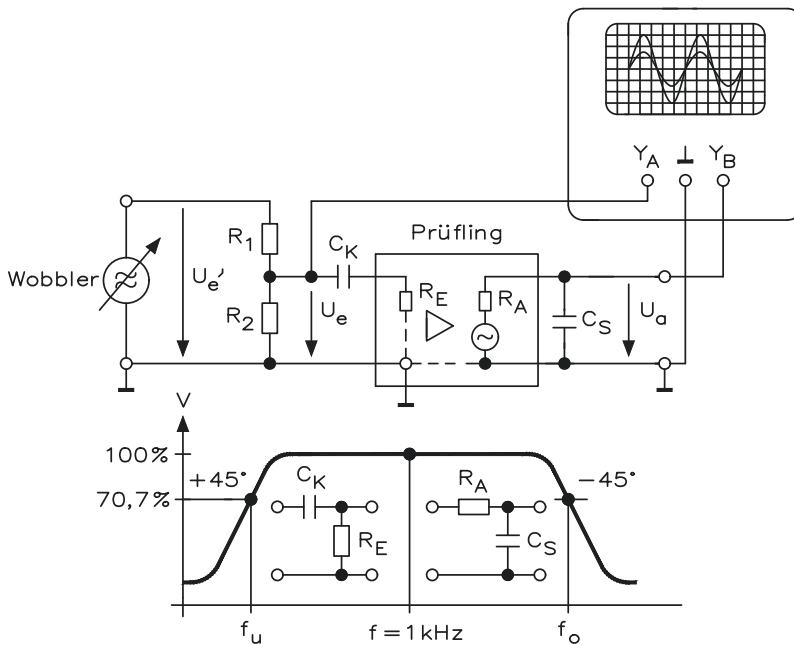


$$\Delta f = f_o - f_u$$

$$f_u = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_e \cdot C_K}$$

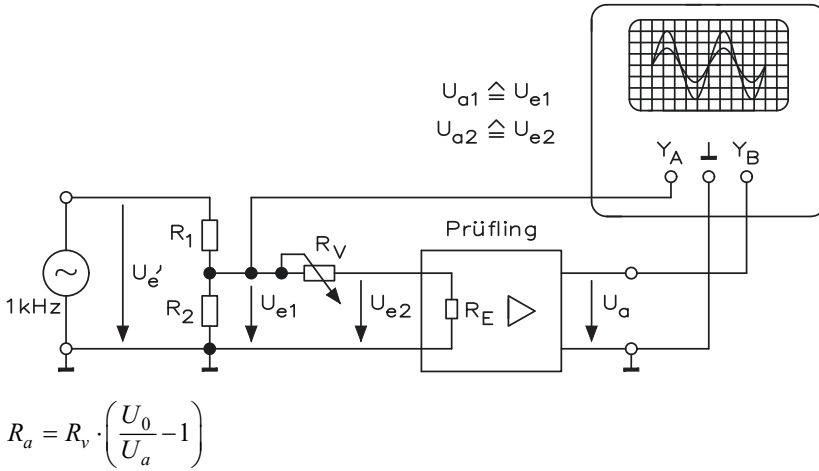
$$f_o = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_a \cdot C_S}$$

### ■ Messung des Eingangswiderstandes

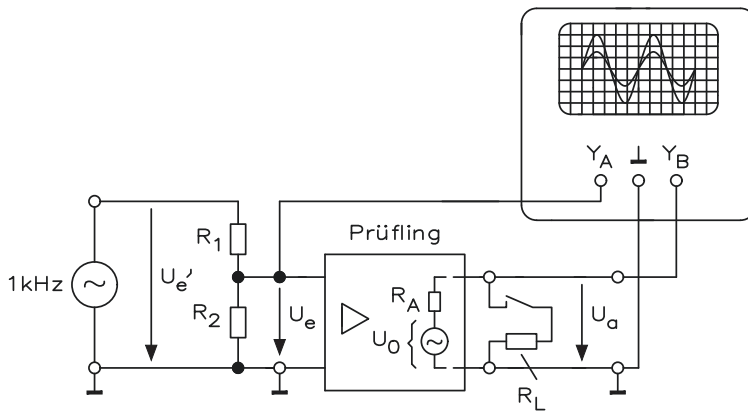


$$R_e = R_v \cdot \frac{U_{a2}}{U_{a1} - U_{a2}}$$

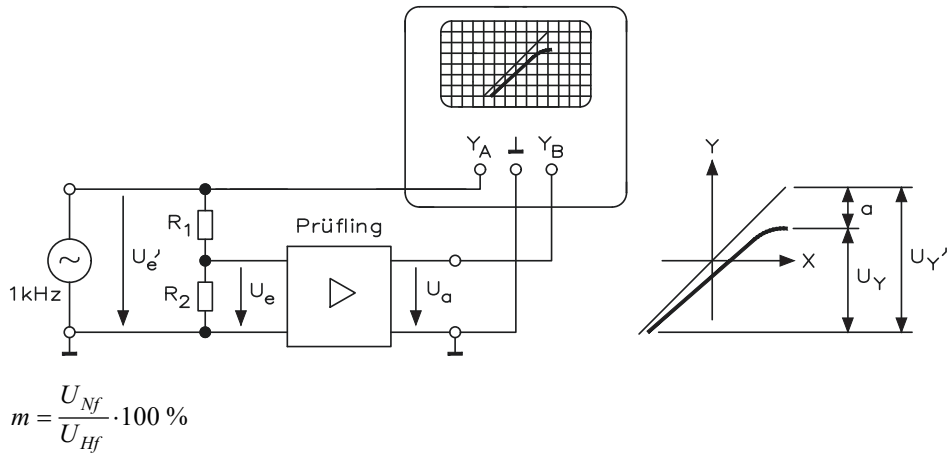
### ■ Messung des Ausgangswiderstandes



### ■ Messung eines Linearfehlers



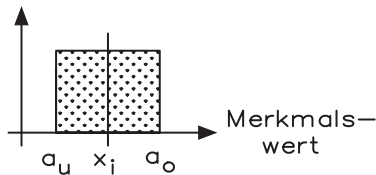
### ■ Messung eines Intermodulationsgrads



## 17.19 Statistische Berechnung der Messunsicherheit

Die Kenntnisse über die messbare Größe  $X$  bestehen darin, dass man erkennt: Der Wert  $Y$  liegt mit Sicherheit zwischen einer unteren Grenze  $a_u$  und einer oberen Grenze  $a_o$ . Die Werte sind im Intervall von  $a_u$  bis  $a_o$  rechteckförmig verteilt, d. h. sie sind wahrscheinlich gleich, und Werte außerhalb des Intervalls sind unwahrscheinlich.

Häufigkeit



### ■ Modell der Auswertung:

Die Größe  $X$  ist gleichförmig verteilt im Intervall  $a_u \dots a_o$ .

Halbweite des Intervalls:  $\Delta a = \frac{a_o - a_u}{2}$

Erwartung:  $x_i = \frac{a_o + a_u}{2}$

Varianz:  $u_{(x_i)}^2 = \frac{(\Delta a)^2}{3}$

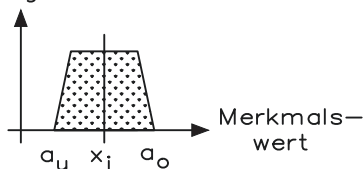
Standardabweichung:  $u_{(x_i)} = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$  oder  $u_{(x_i)} = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{12}}$

### Trapezförmige Verteilung

Die Kenntnisse über die messbare Größe  $X$  bestehen darin, dass man erkennt:

- Die Größe  $X$  ist die Summe/Differenz zweier messbarer Größen  $X_1$  und  $X_2$ , d. h.  $X = X_1 \pm X_2$ .
- Die Kenntnisse über die Werte der Größen entsprechen einer Kombination zweier rechteckförmiger Verteilungen gleicher Halbwerte mit den Grenzen  $a_{u1}$  und  $a_{o1}$  bzw.  $a_{u2}$  und  $a_{o2}$ .
- Die Kenntnisse über die einzelnen Größen  $X_1$  und  $X_2$  sind voneinander abhängig.

Häufigkeit



**Mathematische Formulierung:** Die Werte im Intervall von  $a_u = a_{u1} \pm a_{u2}$  bis  $a_o = a_{o1} \pm a_{o2}$  sind trapezförmig verteilt, und Werte außerhalb des Intervalls sind unwahrscheinlich.

Erwartung: 
$$x_i = \frac{a_o + a_u}{2} \quad x_1 = \frac{a_{o1} + a_{u1}}{2} \quad x_2 = \frac{a_{o2} + a_{u2}}{2}$$

Halbweiten: 
$$\Delta a_1 = \frac{a_{o1} - a_{u1}}{2} \quad \Delta a_2 = \frac{a_{o2} - a_{u2}}{2}$$

Halbweite des Intervalls: 
$$\Delta a = \frac{a_o - a_u}{2}$$

Knickpunkt-Parameter, bezogen auf die Halbweite: 
$$\beta = \frac{|\Delta a_1 - \Delta a_2|}{\Delta a_1 + \Delta a_2}$$

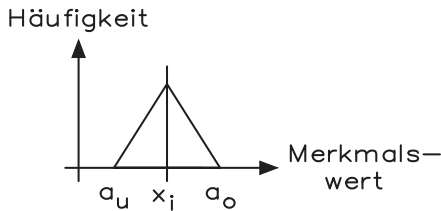
Varianz: 
$$u_{(x_i)} = \frac{(\Delta a)^2}{6} (1 + \beta^2)$$

Standardabweichung: 
$$u_{(x_i)} = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}} \sqrt{1 + \beta^2}$$

### Dreieckförmige Verteilung

Die Kenntnisse über die messbare Größe  $X$  bestehen darin, dass man erkennt:

- Die Größe  $X$  ist die Summe/Differenz zweier messbarer Größen  $X_1$  und  $X_2$ , d. h.  $X = X_1 \pm X_2$ .
- Die Kenntnisse über die Werte der Größen entsprechen einer Kombination zweier rechteckförmiger Verteilungen gleicher Halbwerte mit den Grenzen  $a_{u1}$  und  $a_{o1}$  bzw.  $a_{u2}$  und  $a_{o2}$ .
- Die Kenntnisse über die einzelnen Größen  $X_1$  und  $X_2$  sind voneinander unabhängig.



**Mathematische Formulierung:** Die Werte im Intervall von  $a_u = a_{u1} \pm a_{u2}$  bis  $a_o = a_{o1} \pm a_{o2}$  sind dreieckförmig verteilt (trapezförmige Verteilung mit Knickpunkt-Parameter  $\beta = 0$ ), und Werte außerhalb des Intervalls sind unwahrscheinlich.

Erwartung: 
$$x_i = \frac{a_o + a_u}{2} \quad x_1 = \frac{a_{o1} + a_{u1}}{2} \quad x_2 = \frac{a_{o2} + a_{u2}}{2}$$

Varianz: 
$$u_{(x_i)}^2 = \frac{(\Delta a)^2}{6}$$

Standardabweichung: 
$$u_{(x_i)} = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}}$$

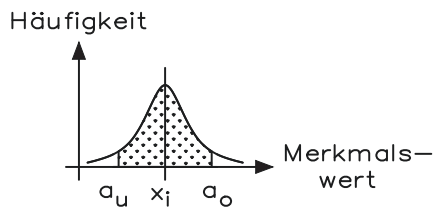
Halbweiten: 
$$\Delta a_0 = \Delta a_1 = \Delta a_2 = \frac{a_{o1} - a_{u1}}{2} = \frac{a_{o2} - a_{u2}}{2}$$

Halbweite des Intervalls: 
$$\Delta a = \frac{a_o - a_u}{2} = \Delta a_1 + \Delta a_2 = 2 \cdot \Delta a_0$$

### Glockenförmige Verteilung (Gauß'sche Glockenkurve)

Die Kenntnisse über die messbare Größe  $X$  bestehen darin, dass man erkennt:

- Die Größe  $X$  ist verteilt, mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Standardabweichung  $s$ .



**Mathematische Formulierung:** Die Verteilungsform ist eine glockenförmige Normalverteilung.

Erwartung: 
$$x_i = \mu$$

Varianz: 
$$u_{(x_i)}^2 = s^2$$

Standardabweichung: 
$$u_{(x_i)} = s$$

Die Kenntnisse für eine unmittelbare Beobachtung über die messbare Größe  $X$  bestehen darin, dass:

- eine Reihe von Beobachtungen durchgeführt werden, die nicht vollständig übereinstimmende Werte  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  liefern, obwohl die Beobachtungen unter (scheinbar) gleichen Bedingungen durchgeführt werden.

**Mathematische Formulierung:**

- Die Werte  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sind die Realisierungen eines Prozesses, dessen Parameter offensichtlich nicht so konstant sind, wie vorausgesetzt wird.
- Die Auswertung erfolgt mit Methoden der Statistik.
- Die einzelnen Werte werden als gleichgewichtig und voneinander unabhängig angesehen.

Die zugrunde liegende Verteilung wird am besten durch eine glockenförmige Normalverteilung beschrieben.

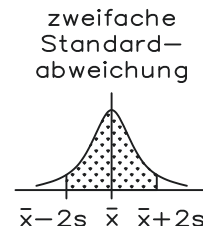
Einfache Standardabweichung

$$\bar{x} + 2 \cdot S \rightarrow 95,5 \%$$



Zweifache Standardabweichung

$$\bar{x} + 1 \cdot S \rightarrow 68,3 \%$$



Erwartung:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Standardabweichung Einzelbeobachtung:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Standardabweichung des Mittels:

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

**Arithmetischer Mittelwert:** Der arithmetische Mittelwert wird gebildet, indem man alle Einzelwerte addiert und diese Summe durch die Anzahl der Werte dividiert.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Der arithmetische Mittelwert:

- bezieht alle Beobachtungswerte mit ein
- kann ohne ordnen der Stichprobe ermittelt werden
- erstellt nur eine Aussage über die Lage einer Verteilung und nicht über ihre „Güte“

**Spannweite:** Die Spannweite wird gebildet, indem man die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Beobachtungswert verwendet.

$$\omega = x_{\max} - x_{\min}$$

Die Spannweite:

- ist unabhängig von der Angabe des Mittelwertes
- ist einfach zu berechnen
- ermöglicht schnellen Überblick
- ist allein von den Extremwerten einer Verteilung abhängig
  - Vorteil: wenn der Extremwert ein berechtigtes Risiko enthält
  - Nachteil: wenn der Extremwert eine Fehlmessung ist
- ist sehr von Zufallseinflüssen abhängig (Fehlmessungen)

**Standardabweichung der Einzelbeobachtung:** Die Standardabweichung der Einzelbeobachtung berechnet sich, indem man von jedem Einzelwert den Mittelwert subtrahiert, das Ergebnis quadriert und aufsummiert. Anschließend den Wert (Anzahl der Beobachtungen  $-1$ ) dividieren und aus diesem Ergebnis die Wurzel ziehen.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Die Standardabweichung der Einzelbeobachtung:

- gibt die mittlere Abweichung einer Einzelmessung an
- gibt Aussage über die „Güte“ einer Verteilung
- $s$  hängt nur von der Präzision der Einzelmessung ab, nicht von deren Anzahl
- $s$  ist auch ein Maß für die Streuung mehrerer Einzelmessungen derselben Größe
- die Unsicherheit lässt sich dann durch die Standardabweichung des Mittels angeben

**Standardabweichung des Mittels:** Die Standardabweichung des Mittels errechnet man, indem die Standardabweichung durch die Wurzel aus der Anzahl der Beobachtungen dividiert wird.

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Die Standardabweichung des Mittels:

- bei Fehlerangaben von Messreihen wird üblicherweise der Standardfehler des Mittelwertes angegeben
- $u$  ist von  $s$  (Präzision der Einzelmessungen) und deren Anzahl abhängig
- gibt Aussage über die „Güte“ einer Verteilung, bezogen auf die Anzahl der Einzelbeobachtungen

**Fehlerfortpflanzung:** In vielen Fällen ist die gesuchte Größe nicht direkt messbar, sondern muss mit Hilfe von zugänglichen Größen indirekt bestimmt werden. Der Wert von  $G$  ist eine im Experiment zu bestimmende Größe  $x, y, z$  usw. die unmittelbar gemessenen Größen, die alle mit einem Fehler behaftet sind ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  usw.)

$$G = f(x, y, z, \dots)$$

Es stellt sich die Frage, wie die Fehler der unmittelbar gemessenen Größen  $x, y, z, \dots$  den Fehler der Größe  $G$  beeinflussen. Die Messfehler der direkt gemessenen Größen  $x, y, z, \dots$  setzt sich im Ereignis  $G$  fort. Bei der Bestimmung von  $\Delta G$  muss man zwei Fälle unterscheiden.

**Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:** Sind die Messgrößen  $x, y, z$  usw. unabhängig voneinander mit zufälligen Messabweichungen  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  usw., ergibt sich die wahrscheinlichere Messunsicherheit  $\Delta G$  aus der so genannten quadratischen Addition (Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz).

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \dots}$$

Dabei ist  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  usw.  $\triangleq$  Vertrauensbereich des Mittelwertes der einzelnen Messgrößen.

$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$  usw.  $\triangleq$  partielle Ableitung der Funktion  $G = f(x, y, z \text{ usw.})$  nach den Messgrößen  $x, y, z$  usw.

In den meisten Fällen kann man auf die Bildung des partiellen Differentialquotienten verzichten, da sich die letzte Gleichung für bestimmte Arten von Funktionen vereinfachen lässt.

Erkenntnis:

- Die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung basiert auf rein statistischem Überlegen. Sie ist also zur Verarbeitung statistisch ermittelter Fehler geeignet.
- Sie ist zu empfehlen, wenn die einzelnen Messgrößen etwa gleichgroße Beiträge zur gesamten Messunsicherheit liefern.
- In der letzten Gleichung ist berücksichtigt, dass sich die Fehler der einzelnen Messgrößen teilweise kompensieren.

**Lineare Fehlerfortpflanzung (Größtfehler):** Unter der Voraussetzung  $\Delta x \ll x, \Delta y \ll y, \Delta z \ll z$  usw. kann man aufgrund des Taylor'schen Satzes den Gesamtfehler  $\Delta G$  wie folgt berechnen:

$$\Delta G = \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right| \Delta z + \dots,$$

wobei  $\Delta G \triangleq$  Maximalfehler (Größtfehler) ist

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  usw.  $\triangleq$  Vertrauensbereich des Mittelwertes oder geschätzter Fehler der Messgröße oder Fehlergrenze des Messgerätes.

Aus der obigen Gleichung entsteht aus  $G(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots)$  durch eine Entwicklung nach Taylor, die nach dem ersten Glied abgebrochen wurde.

Die  $\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|$  usw. sind die Beträge der partiellen Ableitung nach den gemessenen Größen  $x, y, z$  usw. Die Betragsstriche bewirken, dass alle Summanden positiv werden, wodurch eine mögliche gegenseitige Kompensation von Einzelfehlern vermieden wird. So erhält man immer den größtmöglichen Fehler der Größe  $G$ .

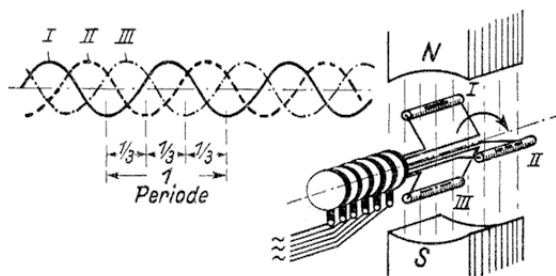
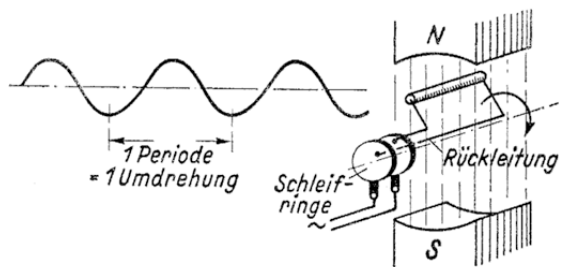
Man beachte:

- Der Größtfehler stellt den ungünstigsten Fall, eine obere Grenze für die Messunsicherheit dar. Er überschätzt auch die Messunsicherheit, da es sehr unwahrscheinlich ist, dass alle unabhängigen Größen gleichzeitig ihre maximalen bzw. minimalen Werte annehmen.
- Der Größtfehler ist zu empfehlen, wenn einige der Messunsicherheiten wesentlich größer sind als die anderen, denn dann ist die Gefahr der Überschätzung der Messunsicherheit  $\Delta G$  geringer. Außerdem ist er anzuwenden, wenn die einzelnen Messgrößen nicht unabhängig voneinander sind.

# Drehstrom und Wechselstrom

# 18

## Entstehung von Drehstrom und Wechselstrom



$$f = p \cdot n$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

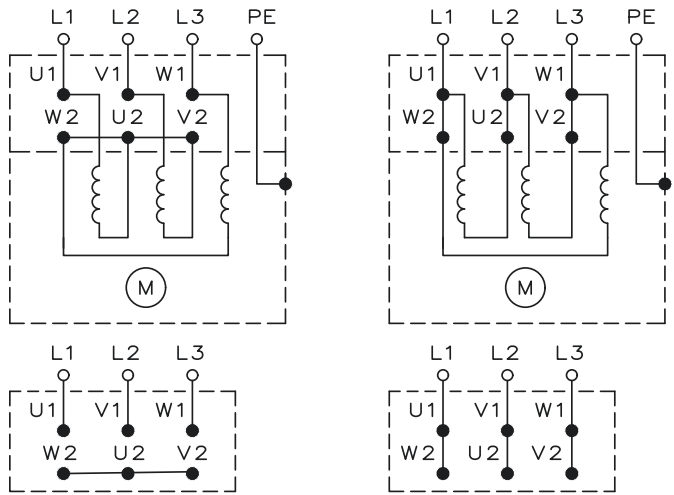
$$1 \text{ Hz} = \frac{1}{1 \text{ s}}$$

- $f$  Frequenz in Hz
- $p$  Polpaarzahl
- $n$  Umdrehung der Leiter-  
schleife im Magnetfeld
- $T$  Periodendauer
- $\omega$  Kreisfrequenz

## Statoranschlüsse und Klemmbrett für Stern- und Dreieckschaltung

Dem Drehstromnetz kann man entnehmen:

- dreiphasige Sternspannungen  $U_Y$  (Leiter gegen  $N$  um je  $120^\circ$  versetzt)
- dreiphasige Dreieckspannungen  $U_\Delta$  (Leiter gegen Leiter um je  $30^\circ$  vor  $U_Y$ )

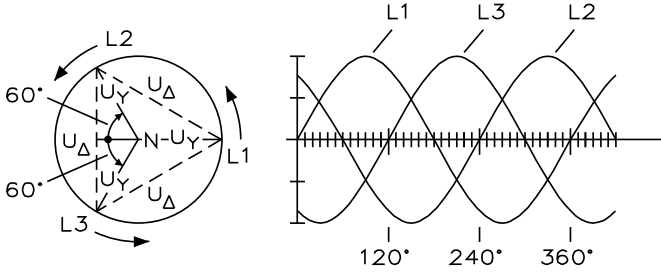


Bei Rechtslauf stimmen die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben und die zeitliche Phasenfolge der Spannungen überein (L1→U1 L2→V1 L3→W1)

Bei Linkslauf müssen, bezogen auf den Rechtslauf, zwei Netzleitungen vertauscht werden: z.B. L1 an V1, L2 an U1, L3 an W1

**Stern- und Dreiecksspannungen**

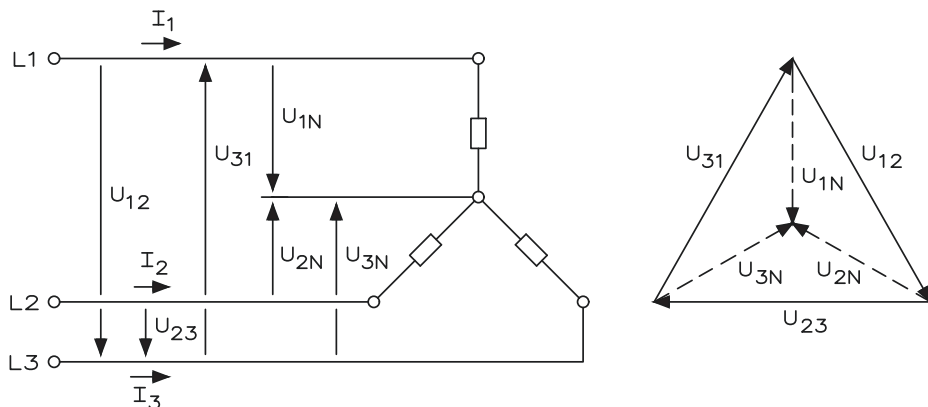
$$U_{\Delta} = 2 \cdot U_Y \cdot \sin 60^{\circ} = U_Y \cdot \sqrt{3}$$



**18.1 Augenblickswert, Scheitelwert, Spitze-Spitze-Wert, Effektivwert**

|                     |                                  |                                  |                                                              |
|---------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Augenblickswert:    | $u = \hat{u} \cdot \sin \varphi$ | $i = \hat{i} \cdot \sin \varphi$ | $u, i$ Augenblickswerte                                      |
| Spitze-Spitze-Wert: | $u_{SS} = 2 \cdot \hat{u}$       | $i_{SS} = 2 \cdot \hat{i}$       | $\hat{u}, \hat{i}$ Scheitelwerte, Spitzenwerte               |
| Effektivwert:       | $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$   | $I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$   | $u_{SS}, i_{SS}$ Spitze-Spitze-Werte<br>$U, I$ Effektivwerte |

## 18.2 Sternschaltung



Für den Strom  $I$  bzw. Strangstrom  $I_{St}$  bei ohmscher Belastung gilt:  $I = I_{St} = \frac{U_{St}}{R_{St}}$ .

Die Strangleistung  $P_{St}$  berechnet sich aus  $P_{St} = U_{St} \cdot I_{St}$ .

Die Gesamtleistung  $P$  ermittelt sich aus  $P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$ .

Die Außenleiterspannung  $U$  ist  $U = \sqrt{3} \cdot U_{St}$ .

Für die Gesamtleistung gilt  $P = 3 \cdot P_{St}$ .

Man benötigt nur drei oder vier Leitungen (Drei- oder Vierleitersystem) für drei Stromkreise. In dem Niederspannungs-Versorgungsnetz sind dies bekanntlich  $U = 400$  V zwischen zwei Strangspannungen oder  $U = 230$  V bzw. einer Strangspannung und dem Neutralleiter N. Auf der Verbraucherseite werden die Anschlüsse mit  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  und der Sternpunkt mit N bezeichnet. Auf der Erzeugerseite hat man dagegen die Anschlussbezeichnungen von U, V und W.

$$U = \sqrt{3} \cdot U_{St}$$

$$I = I_{St}$$

$$S = 3 \cdot U_{St} \cdot I = \sqrt{3} \cdot U_{St} \cdot I$$

$$P = 3 \cdot U_{St} \cdot I \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_{St} \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$Q = 3 \cdot U_{St} \cdot I \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_{St} \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$U$  Außenleiter  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31}$

$\sqrt{3}$  Verkettungsfaktor

$U_{St}$  Strangspannung  $U_{1N}$ ,  $U_{2N}$ ,  $U_{3N}$

$S$  Scheinleistung VA oder kVA

$I$  Außenleiterstrom  $I_{1N}$ ,  $I_{2N}$ ,  $I_{3N}$

$P$  Wirkleistung in W oder kW

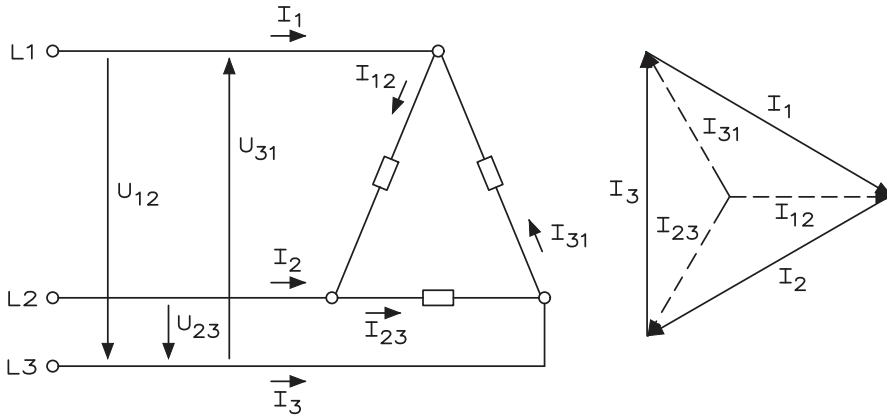
$Q$  Blindleistung in var oder kvar

Bei einer symmetrischen Belastung (ohmsche Widerstände, Induktivitäten bei einem Motor) tritt in der Sternschaltung im Neutralleiter N kein Stromfluss auf, da die Außenleiter und die Verbraucherwiderstände alle gleich groß sind. Bei einer unsymmetrischen Belastung muss bei einer Sternschaltung mit Neutralleiter jede Phase gesondert berechnet werden:

$$\text{Phase } N_1: \quad I_{1N} = \frac{U_{1N} \cdot \cos \varphi}{R_1} \quad U_{1N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad P_{1N} = U_{1N} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi$$

### 18.3 Dreieckschaltung

#### Symmetrische Belastung einer Dreieckschaltung



Für die Außenleiterspannung gilt:  $U = U_{St}$

Den Außenleiterstrom erhält man:  $I = \sqrt{3} \cdot I_{St}$

Die Strangleistung  $P_{St}$  berechnet sich aus  $P_{St} = U_{St} \cdot I_{St}$

Die Gesamtleistung  $P$  ermittelt sich aus  $P = 3 \cdot P_{St}$   $P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$

Für eine symmetrische Belastung einer Sternschaltung gilt

|                                                                                               |                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $I = \sqrt{3} \cdot I_{St}$                                                                   | $U$ Außenleiter $U_{12}$ , $U_{23}$ , $U_{31}$         |
| $U = U_{St}$                                                                                  | $\sqrt{3}$ Verkettungsfaktor                           |
| $S = 3 \cdot U \cdot I_{St} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$                                       | $U_{St}$ Strangspannung $U_{1N}$ , $U_{2N}$ , $U_{3N}$ |
| $P = 3 \cdot U \cdot I_{St} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$ | $S$ Scheinleistung VA oder kVA                         |
| $Q = 3 \cdot U \cdot I_{St} \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi$ | $I$ Außenleiterstrom $I_1$ , $I_2$ , $I_3$             |
|                                                                                               | $P$ Wirkleistung in W oder kW                          |
|                                                                                               | $Q$ Blindleistung in var oder kvar                     |

## 18.4 Leitungssysteme

### Gleichstrom und Wechselstrom mit $\cos \varphi = 1$

| Leistungsart                                          | Spannungsverlust                                          | Querschnitt                                            | Leistungsverlust                                                      | Querschnitt                                                           |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Unverzweigte Leitung                                  | $U_v = \frac{2 \cdot I \cdot l}{\gamma \cdot A}$          | $A = \frac{2 \cdot I \cdot l}{\gamma \cdot U_v}$       | $p_v \% = \frac{200 \cdot P \cdot l}{\gamma \cdot A \cdot U^2}$       | $S = \frac{200 \cdot P \cdot l}{\gamma \cdot U^2 \cdot p_v \%}$       |
| Verzweigte Leitungen mit gleichbleibendem Querschnitt | $U_v = \frac{2 \cdot \sum(I \cdot l)}{\gamma \cdot A}$    | $A = \frac{2 \cdot \sum(I \cdot l)}{\gamma \cdot U_v}$ | $p_v \% = \frac{200 \cdot \sum(P \cdot l)}{\gamma \cdot A \cdot U^2}$ | $S = \frac{200 \cdot \sum(P \cdot l)}{\gamma \cdot U^2 \cdot p_v \%}$ |
|                                                       | $\sum(I \cdot l) = I_1 \cdot l_1 + I_2 \cdot l_2 + \dots$ |                                                        | $\sum(P \cdot l) = P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 + \dots$             |                                                                       |

### Einphasenwechselstrom mit Blindlast

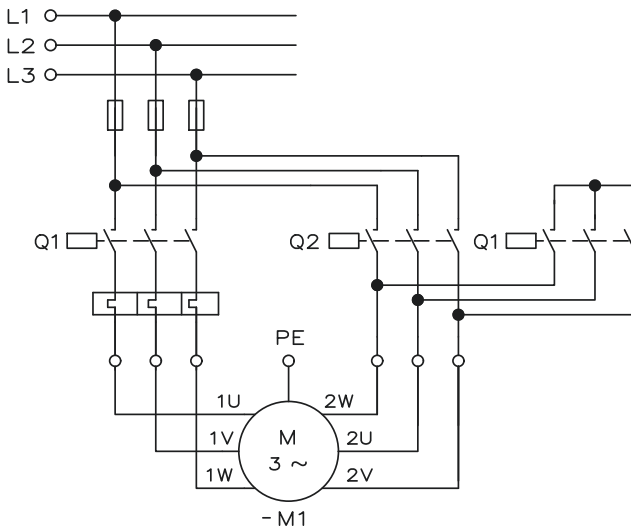
| Leistungsart                                          | Spannungsunterschied                                                                                               | Querschnitt                                                                    | Leistungsverlust<br>Querschnitt                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Unverzweigte Leitung                                  | $\Delta U = \frac{2 \cdot I \cdot l \cdot \cos \varphi}{\gamma \cdot A}$                                           | $A = \frac{2 \cdot I \cdot l \cdot \cos \varphi}{\gamma \cdot \Delta U}$       | $p_v \% = \frac{200 \cdot P \cdot l}{\gamma \cdot A \cdot U^2 \cdot \cos^2 \varphi}$<br>$S = \frac{200 \cdot P \cdot l}{\gamma \cdot U^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot p_v \%}$ |
| Verzweigte Leitungen mit gleichbleibendem Querschnitt | $\Delta U = \frac{2 \cdot \sum(I \cdot l \cdot \cos \varphi)}{\gamma \cdot A}$                                     | $A = \frac{2 \cdot \sum(I \cdot l \cdot \cos \varphi)}{\gamma \cdot \Delta U}$ |                                                                                                                                                                              |
|                                                       | $\sum(I \cdot l \cdot \cos \varphi) = I_1 \cdot l_1 \cdot \cos \varphi + I_2 \cdot l_2 \cdot \cos \varphi + \dots$ |                                                                                |                                                                                                                                                                              |

### Drehstrom mit Blindlast

| Leistungsart                                          | Spannungsverlust                                                                  | Querschnitt                                                                       | Leistungsverlust<br>Querschnitt                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Unverzweigte Leitung                                  | $\Delta U = \frac{1,73 \cdot I \cdot l \cdot \cos \varphi}{\gamma \cdot A}$       | $A = \frac{1,73 \cdot I \cdot l \cdot \cos \varphi}{\gamma \cdot \Delta U}$       | $p_v \% = \frac{100 \cdot P \cdot l}{\gamma \cdot A \cdot U^2 \cdot \cos^2 \varphi}$<br>$S = \frac{100 \cdot P \cdot l}{\gamma \cdot U^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot p_v \%}$ |
| Verzweigte Leitungen mit gleichbleibendem Querschnitt | $\Delta U = \frac{1,73 \cdot \sum(I \cdot l \cdot \cos \varphi)}{\gamma \cdot A}$ | $A = \frac{1,73 \cdot \sum(I \cdot l \cdot \cos \varphi)}{\gamma \cdot \Delta U}$ |                                                                                                                                                                              |

|                |                                                                    |
|----------------|--------------------------------------------------------------------|
| $U$            | Nennspannung in V (bei Drehstrom = Außenleiterspannung)            |
| $I$            | Stromstärke in der Leitung in A                                    |
| $P$            | Wirkleistung in W                                                  |
| $l$            | einfache Leiterlänge in m                                          |
| $\gamma$       | elektrische Leitfähigkeit in $\text{m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2)$ |
| $\Delta U$     | Spannungsunterschied zwischen Leitungsanfang und -ende in V        |
| $\cos \varphi$ | Wirkleistungsfaktor                                                |
| $A$            | Querschnitt der Leitung in $\text{mm}^2$                           |
| $U_v$          | Spannungsverlust auf der Leitung in V                              |
| $p_v\%$        | Leistungsverlust in % von P                                        |

## 18.5 Drehstrommotor



### Drehstrommotor in Stern- und Dreieckschaltung

Zum Anlaufen wird ein Drehstrommotor in Sternschaltung betrieben

$$U = \sqrt{3} \cdot U_{St} \quad I = I_{St}$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_{St}$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_{St} \cdot \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

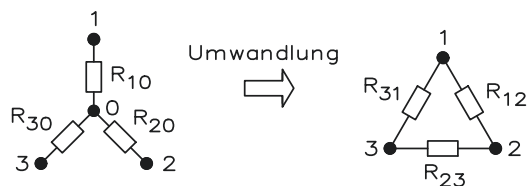
Für den Betriebszustand arbeitet der Drehstrommotor in Dreieckschaltung

$$U = U_{St} \quad I = \sqrt{3} \cdot I_{St}$$

Es gilt:  $P_\Delta = 3 \cdot P_Y$ .

## 18.6 Umwandlung von Stern-Dreieck und Dreieck-Stern

### ■ Umwandlung von Stern-Dreieck- in Dreieck-Stern-Schaltung

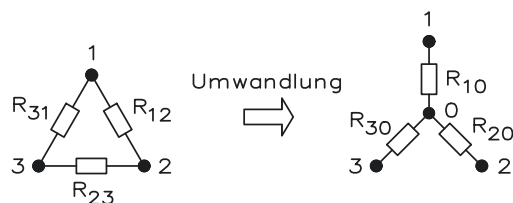


$$R_{12} = \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_{30}} + R_{10} + R_{20}$$

$$R_{23} = \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_{10}} + R_{20} + R_{30}$$

$$R_{31} = \frac{R_{10} \cdot R_{30}}{R_{20}} + R_{10} + R_{30}$$

### ■ Umwandlung von Dreieck-Stern- in Stern-Dreieck-Schaltung



$$R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}$$

$$R_{20} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}$$

$$R_{30} = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}$$

## 18.7 Drehstrom-Asynchronmotor

Die Drehzahl eines Rotors ist geringer als die Drehzahl des Drehfeldes:

$$n_s = n_d - n$$

$$s = \frac{n_s}{n_d}$$

$$f_l = \frac{n_s \cdot p}{60}$$

$$U_{Is} = \frac{s \cdot U_l}{100}$$

$n_s$  Schlupfdrehzahl in  $\text{min}^{-1}$

$n_d$  Drehzahl des Drehfeldes in  $\text{min}^{-1}$

$n$  Drehzahl des Rotors in  $\text{min}^{-1}$

$s$  Schlupf

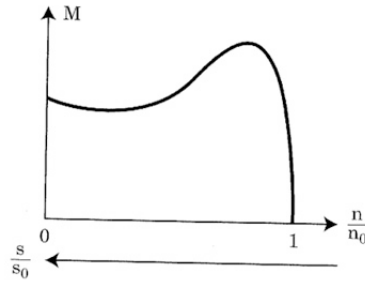
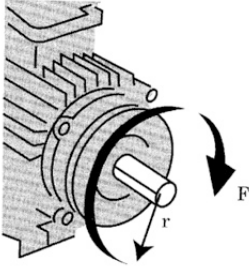
$p$  Polpaare

$f_l$  Läuferfrequenz in Hz

$U_{Is}$  Läuferstillstandsspannung in V

## 18.8 Motormoment

### ■ Motormoment



$$M = F \cdot r$$

$$W = F \cdot d$$

$$d = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$W = P \cdot t$$

$$P_W = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$M$  Drehmoment in Nm

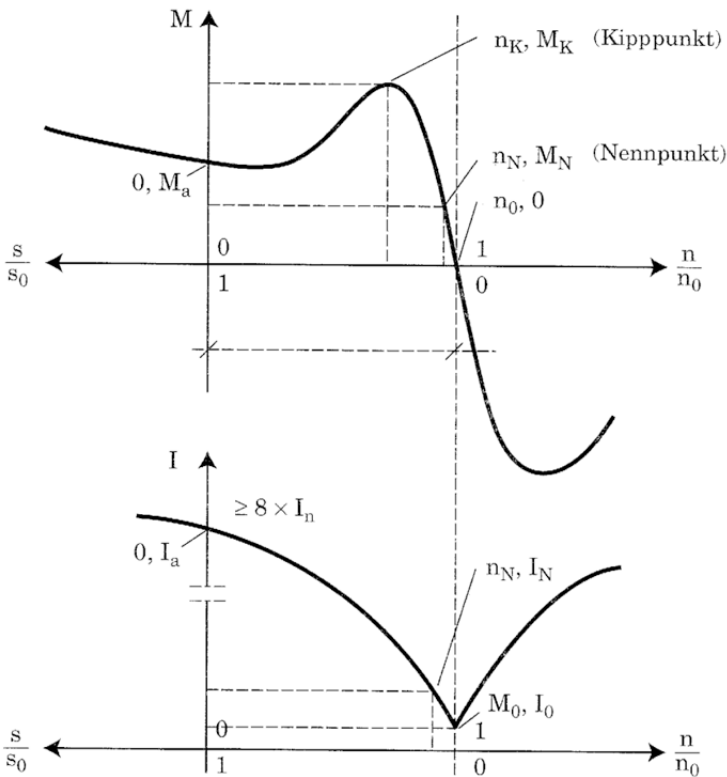
$W$  elektrische Arbeit in Nm

$d$  Durchmesser in m

$P_W$  Wellenleistung

$P$  mechanische Leistung in  $W = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{m}$

### ■ Strom und Momentencharakteristik



$$W = F \cdot s$$

$t$  Zeit in s

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$$

$s$  Strecke in m

$$P = M \cdot n \cdot 2 \cdot \pi$$

$n$  Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$

Da  $1 \text{ Nm/s} = 1 \text{ W}$  und  $1 \text{ min}^{-1} = 60 \text{ s}^{-1}$  sind, erhält man zur Berechnung der Motorleistung  $P$  in kW aus Drehmoment  $M$  und Drehzahl  $n$  mit  $\frac{2 \cdot \pi}{60 \cdot 1000} = \frac{1}{9550}$  die Formel

$$P = \frac{M \cdot n}{9550}.$$

Für das Moment gilt:  $M = F \cdot r = \frac{W}{d} \cdot r = \frac{P \cdot d \cdot r}{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}.$

$$M = \frac{P \cdot 9550}{n} \quad (t = 60 \text{ s})$$

$$M_r = \frac{P_r}{n_r}, \text{ wobei gilt } M_r = \frac{M}{M_N}, \quad P_r = \frac{P}{P_N} \text{ und } n_r = \frac{n}{n_N}$$

Beim Motor gibt es zwei Bremsbereiche:

Bei  $\frac{n}{n_0} > 1$  wird der Motor von der Belastung über die synchrone Drehzahl gezogen und

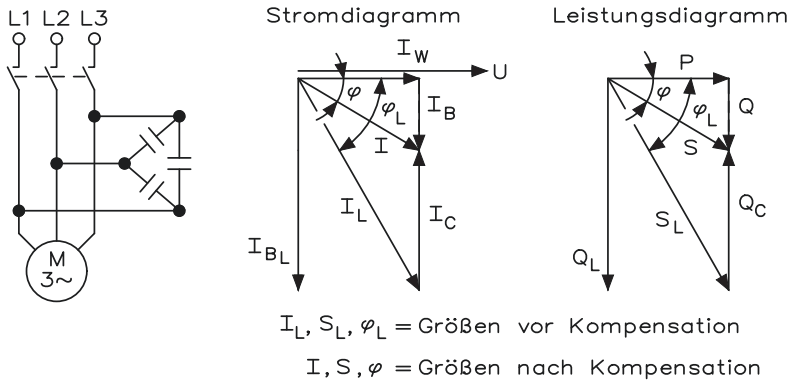
der Motor arbeitet als Generator, d. h. in diesem Bereich ist ein Gegenmoment vorhanden und es wird Leistung an das Versorgungsnetz zurückgegeben.

Im Bereich  $\frac{n}{n_0} < 1$  wird das Bremsen als Gegenstrombremsung bezeichnet.

Anlaufbetrieb  $0 < \frac{n}{n_0} < \frac{n_k}{n_0}$  und Betriebsbereich  $\frac{n_k}{n_0} < \frac{n}{n_0} < 1$

Das Anzugsmoment ist  $M_A = \frac{M_K \cdot M}{M_N}.$

## 18.9 Blindstromkompensation für Drehstrom



Blindstromkompensation eines Drehstrommotors

Die einphasige Blindstromkompensation ist:

$$Q_C = Q_1 - Q_2$$

$$Q_C = P (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

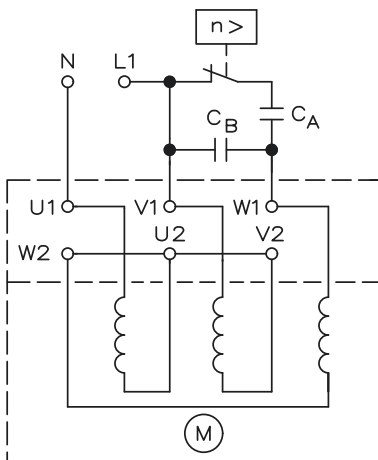
$$Q_C = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot U^2$$

Für die dreiphasige Blindstromkompensation gilt:  $3 \cdot Q_C$

## 18.10 Drehstrommotor an Wechselspannung

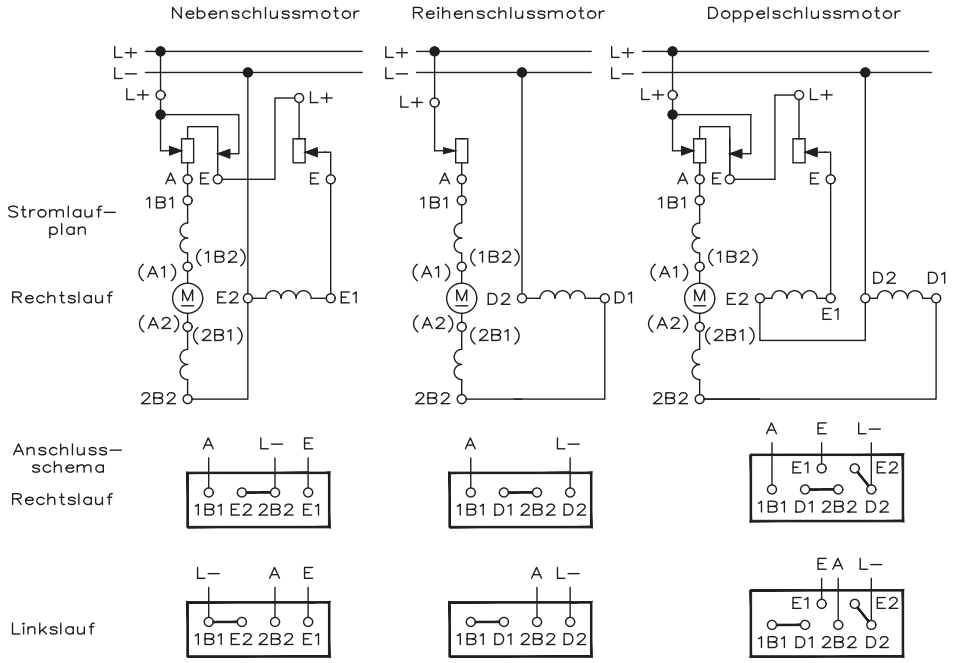
Bei Heizungspumpen verwendet man Drehstrommotoren und betreibt diese an einer Netzphase und Neutralleiter.

Asynchronmotor  
an Wechselspannung



| $C_A = 2 \cdot C_B$ | $U_{\text{Netz}}$ | $C_B$                               | $M \approx U^2$                                                             |
|---------------------|-------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
|                     | 115 V             | $200 \mu\text{F} \cdot \text{P/kW}$ | $\eta \approx 0,5 \dots 0,7$                                                |
|                     | 230 V             | $70 \mu\text{F} \cdot \text{P/kW}$  | $M_A \approx 12 \% \text{ von } M_A \text{ bei Drehstrom (gilt ohne } C_A)$ |
|                     | 400 V             | $20 \mu\text{F} \cdot \text{P/kW}$  | $M_N \approx 80 \% \text{ von } M_N \text{ bei Drehstrom}$                  |
|                     |                   |                                     | $M_A / M_N = 1 \dots 3$                                                     |

**Gleichstrommotoren**



- A1 – A2      Ankerwicklung
- B1 – B2      Wendepolwicklung
- C1 – C2      Kompensationswicklung
- D1 – D2      Reihenschlusswicklung
- E1 – E2      Nebenschlusswicklung
- F1 – F2      fremderregte Wicklung

$$U_G = U - I_A \cdot R_A$$

$$M_N = \frac{P_N \cdot 9550}{n_N}$$

$$M = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{P}{\omega}$$

$$M = B \cdot l \cdot I \cdot r \cdot z$$

$$n = \frac{U}{\Phi \cdot k}$$

$U_G$  Gegenspannung in V

$M_N$  Nennmoment in Nm

$n_N$  Nenndrehzahl in  $s^{-1}$

$\omega$  Winkelgeschwindigkeit in  $s^{-1}$

$B$  magnetische Flussdichte in T

$P$  Leistung in Nm/s

$z$  Leiterzahl

$l$  wirksame Leiter in m

$r$  Radius in m

$n$  Drehzahl in  $s^{-1}$

$\Phi$  magnetischer Fluss

$k$  Konstante

## 18.11 Gleichstrom-Scheibenläufer

$$n = \frac{U - I \cdot R_A}{k_E}$$

$$M_i = I \cdot k_T$$

$$M_D = k_D \cdot n$$

$$M_W = M_i - M_F - M_D$$

$$M_W = k_T \cdot I - (M_F + k_D \cdot n)$$

$$\tau_{el} = \frac{L_A}{R_A}$$

$$i = I \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{el}}} \right)$$

$R_A$  Ankerkreiswiderstand in  $\Omega$

$k_E$  EMK-Konstante in  $V/1000 \text{ min}^{-1}$

$k_T$  Drehmomentkonstante

$M_i$  internes Drehmoment

$M_D$  Drehmoment

$P_W$  Wellenleistung

$k_D$  Dämpfungskonstante

$M_W$  Wellendrehmoment

$\tau_{el}$  elektrische Zeitkonstante

$i$  Stromanstieg

## 18.12 Schrittmotor

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2 \cdot p \cdot m}$$

$$z = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$f_z = \frac{n \cdot z}{60} = \frac{n \cdot 360^\circ}{\alpha \cdot 60}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_z}{z} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_z \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$\alpha$  Schrittgeschwindigkeit

$p$  Polpaarzahl

$m$  Wicklungsphasen

$z$  Schrittzahl je Umdrehung

$n$  Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$

$\omega$  Winkelgeschwindigkeit

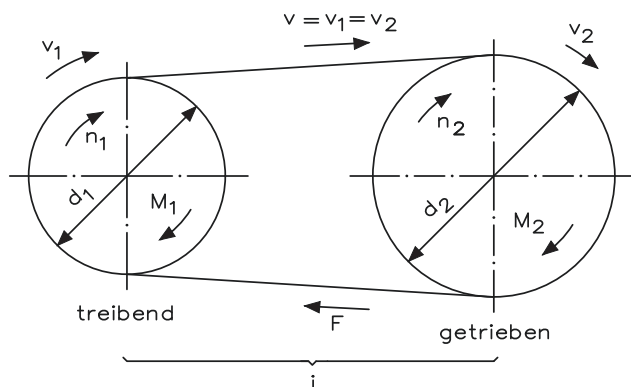
## 18.13 Mechanische Übertragung der Motorleistung

Umfangsgeschwindigkeit der Riemenscheibe:  $v$  Riemengeschwindigkeit in m/s  
 $v = d \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n$   $n$  Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$

Motorleistung:  $P$  Leistung in kW  
 $M$  Drehmoment in Nm

$$P = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \quad \text{oder} \quad P = \frac{M \cdot n}{9550}$$

In der Praxis ist der einfache Riementrieb die einfache Übersetzung. Riementriebe werden als kraftschlüssige Übertragung von Drehbewegungen von der treibenden Welle auf die angetriebene Welle verwendet.



Die Übersetzung  $i$  lässt sich einteilen in:

- $i > 1$  Übersetzung in das Langsamere
- $i = 1$  direkte Übersetzung
- $i < 1$  Übersetzung in das Schnellere

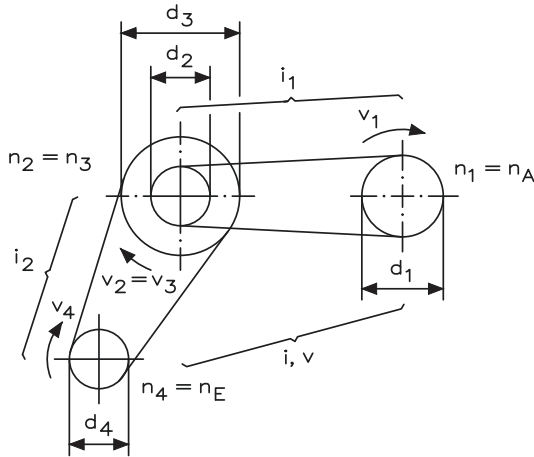
$$n_1 \cdot d_1 = n_2 \cdot d_2$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

$$M_1 = F \cdot r_1 \quad M_2 = F \cdot r_2$$

$F$  Riemenzugkraft in N  
 $n_1$  Drehzahl der treibenden Scheibe in  $\text{min}^{-1}$   
 $d_1$  Durchmesser der treibenden Scheibe in mm  
 $r_1$  Radius (Hebelarm) der treibenden Scheibe in m  
 $M_1$  Drehmoment der treibenden Scheibe in Nm  
 $n_2$  Drehzahl der getriebenen Scheibe in  $\text{min}^{-1}$   
 $d_2$  Durchmesser der getriebenen Scheibe in mm  
 $r_2$  Radius (Hebelarm) der getriebenen Scheibe in m  
 $M_2$  Drehmoment der getriebenen Scheibe in Nm

## Doppelte Übersetzung



$$i_{ges} = i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_4} = \frac{M_4}{M_1}$$

$$i_{ges} = \frac{n_1 \cdot n_3}{n_2 \cdot n_4} = \frac{d_2 \cdot d_4}{d_1 \cdot d_3} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \dots$$

$i_{ges}$  Gesamtübersetzung

$i_1, i_2, i_3$  Einzelübersetzung

$n_1, n_3$  Drehzahl der treibenden Scheibe in  $\text{min}^{-1}$

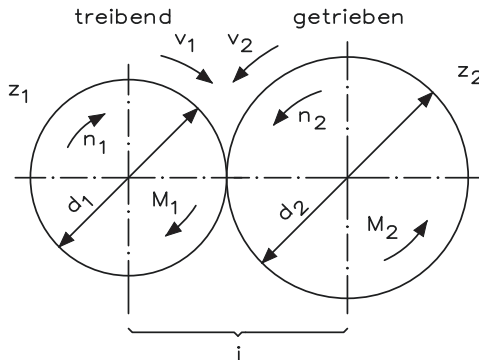
$n_2, n_4$  Drehzahl der getriebenen Scheibe in  $\text{min}^{-1}$

$d_1, d_3$  Durchmesser der treibenden Scheiben in mm

$d_2, d_4$  Durchmesser der getriebenen Scheiben in mm

1, 3, 5,... Indizes für treibend

2, 4, 6,... Indizes für getrieben



$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$i = \frac{M_2}{M_1}$$

$$M_1 = F \cdot r_1 \quad M_2 = F \cdot r_2$$

$n_1$  Drehzahl des treibenden Rades in  $\text{min}^{-1}$

$n_2$  Drehzahl des getriebenen Rades in  $\text{min}^{-1}$

$z_1$  Anzahl der Zähne des treibenden Rades

$z_2$  Anzahl der Zähne des getriebenen Rades

$i$  Übersetzungsverhältnis

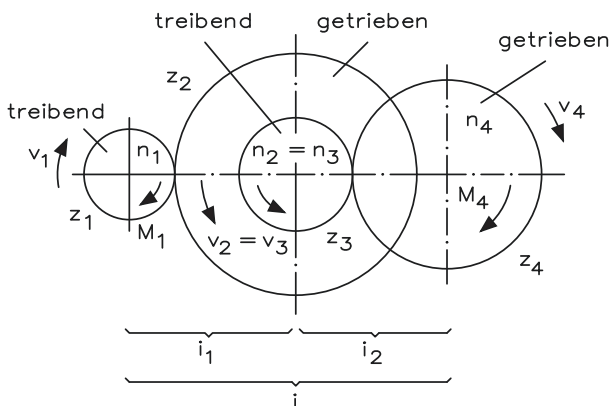
$M_1$  Drehmoment des treibenden Rades in Nm

$M_2$  Drehmoment des getriebenen Rades in Nm

$F$  Zahnkraft in N

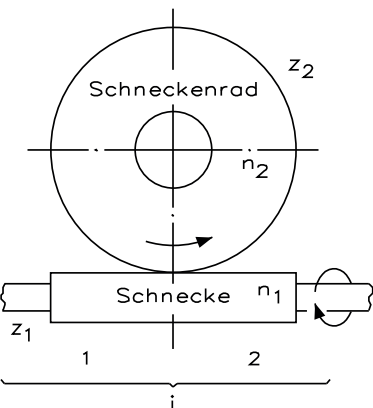
$r_1, r_2$  Radius (Hebelarm) in m

Bei doppeltem Zahnradtrieb sind zwei Einzelübersetzungen hintereinander geschaltet, wobei die Zahnräder  $z_2$  und  $z_3$  miteinander verblockt sind und damit die gleiche Drehzahl aufweisen.



|                                                        |                                           |                                                                   |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $i_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$              | $i_2 = \frac{n_3}{n_4} = \frac{z_4}{z_3}$ | $i_{\text{ges}}$ Gesamtübersetzung                                |
| $i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_4}$     | $i = \frac{M_4}{M_1}$                     | $i_1, i_2, i_3$ Einzelübersetzung                                 |
| $i_{\text{ges}} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$ |                                           | $i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \dots$                  |
|                                                        |                                           | $n_1$ Drehzahl des ersten treibenden Rades in $\text{min}^{-1}$   |
|                                                        |                                           | $n_4$ Drehzahl des letzten getriebenen Rades in $\text{min}^{-1}$ |
|                                                        |                                           | $M_1$ Drehmoment des ersten treibenden Rades in Nm                |
|                                                        |                                           | $M_4$ Drehmoment des letzten getriebenen Rades in Nm              |
|                                                        |                                           | $z_1, z_3$ Zähnezah der treibenden Räder                          |
|                                                        |                                           | $z_2, z_4$ Zähnezah der getriebenen Räder                         |

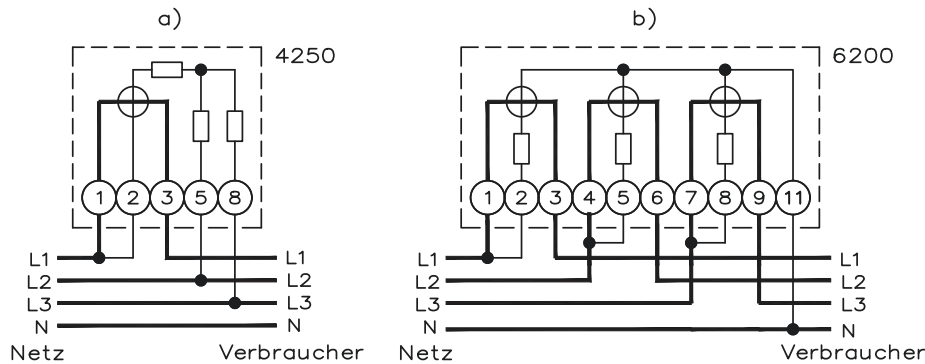
Der Schneckentrieb ist eine Sonderform des Zahnradtriebes mit einfacher Übersetzung. Er dient in erster Linie zum Herabsetzen hoher Drehzahlen. Es gibt ein- und mehrgängige Schnecken. Schneckentriebe werden wie Zahnradtriebe berechnet.



|                                 |                                                  |
|---------------------------------|--------------------------------------------------|
| $n_1 \cdot z_1 = n_2 \cdot z_2$ |                                                  |
| $n_1$                           | Drehzahl der Schnecke in $\text{min}^{-1}$       |
| $n_2$                           | Drehzahl des Schneckenrades in $\text{min}^{-1}$ |
| $z_1$                           | Anzahl der Zähne der Schnecke (Gängigkeit)       |
| $z_2$                           | Anzahl der Zähne des Schneckenrades              |
| $i$                             | Übersetzung                                      |

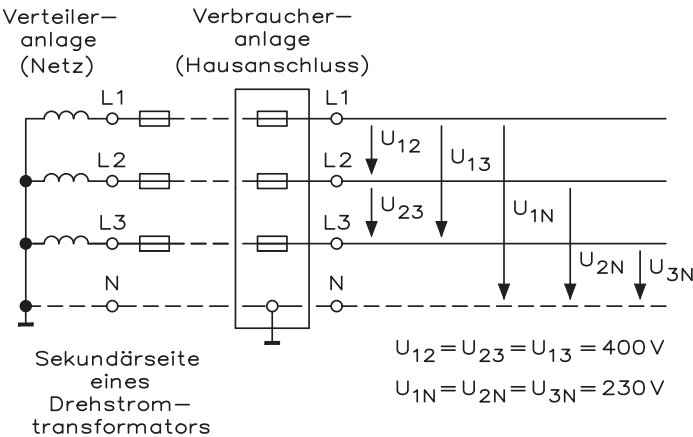
18.14 Drehstromzähler und Netzformen

Drehstromzähler mit symmetrischer (a) und unsymmetrischer (b) Belastung



Für die Anschlussklemmen gilt folgende Tabelle:

|                     | Nummer     | Klemmart                                                                                                                                                                                  |
|---------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Zähler              | 1 bis 12   | Strom- und Spannungspfade<br>Zweiterarifauslöser<br>Maximalauslöser<br>gemeinsamer Anschluss der Zusatzeinrichtungen<br>Überbrückung für die Kurzschließschaltung<br>Maximal-Rückstellung |
|                     | 13         |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 14         |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 15         |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 16         |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 17, 18, 19 |                                                                                                                                                                                           |
| Rundsteuerempfänger | 1, 2       | Netzanschluss<br>erster Umschalter<br>zweiter Umschalter<br>dritter Umschalter<br>vierter Umschalter                                                                                      |
|                     | 3, 4, 5    |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 6, 7, 8    |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 9, 10, 11  |                                                                                                                                                                                           |
|                     | 12, 13, 14 |                                                                                                                                                                                           |
|                     |            | Umschaltkontakt jeweils an 4, 7, 10 und 13                                                                                                                                                |



Beim Drehstromnetz haben die drei Spannungen zwischen den Außenleitern die gleiche Frequenz von 50 Hz, die gleichen Effektivwerte von 400 V bzw. 230 V und den gleichen sinusförmigen Verlauf.

Die Spannungen  $U_{1N}$ ,  $U_{2N}$  und  $U_{3N}$  werden als Strangspannungen oder Sternspannungen bezeichnet, die Spannungen  $U_{12}$ ,  $U_{23}$  und  $U_{13}$  dagegen als Außenleiterspannungen oder Leiterspannungen. Das Verhältnis von Außenleiterspannung zur Sternspannung ist der Verkettungsfaktor des Drehstromsystems.

Wohnhäuser, Wohnungen und Werkstätten werden in der Regel durch einen Vierleiter-Drehstromanschluss mit elektrischer Energie versorgt. Hierfür gibt es verschiedene Netzformen. Daraus ergeben sich drei grundlegend unterschiedliche Netzformen, TN-Netz, TT-Netz und IT-Netz. Die Buchstaben haben dabei nachfolgende Bedeutungen.

Der erste Buchstabe beschreibt das Erdungsverhältnis der Stromquelle (Kraftwerk) oder des Niederspannungsnetzes.

T (Terra) = Betriebserde (direkte Erdung eines Punktes: Sternpunkt, Außenleiter).

I (isoliert) = Isolierung der Spannungsquelle und aller dem Energietransport dienenden Teile gegenüber Erde oder Verbindung eines leitfähigen Teiles mit Erde.

Mit dem zweiten Buchstaben werden die Erdungsverhältnisse der Gehäuse der Verbraucher beschrieben.

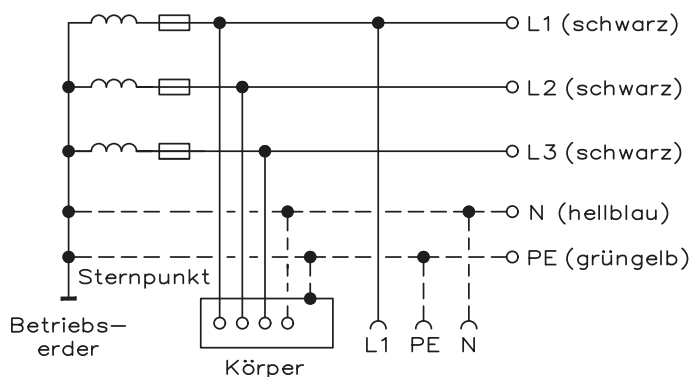
T = direkte Erdung der Gehäuse.

N = direkte Verbindung der Gehäuse der Verbraucher mit der Betriebserde der Spannungsquelle durch den Schutzleiter.

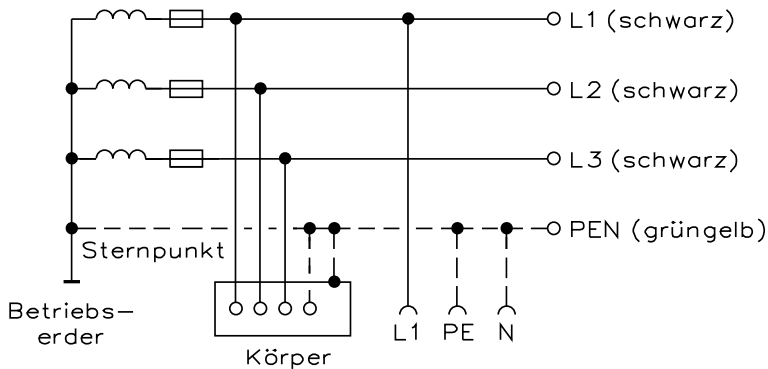
Bei den überwiegend verwendeten TN-Netzen sind zwei Ausführungsformen von Bedeutung. Sie werden durch weitere, mit einem Bindestrich angehängte Buchstaben gekennzeichnet. Diese liefern Hinweise auf die Anordnung des Schutzleiters.

S = Neutraleiter N und Schutzleiter PE (Protection Earth) werden als zwei separate Leiter geführt. Die Farben sind „grüngelb“ (PE) und „hellblau“ (N).

C = Neutraleiter N und Schutzleiter PE werden kombiniert als Leiter PEN geführt.



### TN-S-Netz mit Anschluss einer Steckdose



Am weitesten verbreitet in der Netzanschlusstechnik ist das TN-S-Netz. Diese Netzform zeigt den Anschluss einer Steckdose an das TN-S-Netz. Der Sternpunkt der Stromquelle ist hier direkt geerdet (Betriebserder). Von diesem Sternpunkt aus sind der Neutralleiter N und der Schutzleiter PE bis zum Verbraucher getrennt verlegt. Selbstverständlich kann hier zum Anschluss der Steckdose anstelle des Leiters L1 auch der Leiter L2 oder L3 benutzt werden.

### TN-C-Netz mit Anschluss einer Steckdose

Hier werden Neutralleiter N und Schutzleiter PE vom Sternpunkt aus als kombinierte Leitung PEN zum Verbraucher geführt. Als zusätzliches Beispiel ist wieder der Anschluss einer Steckdose bei dieser Netzform eingezeichnet.

Weitere Netzformen TT-Netz und IT-Netz haben in der Praxis eine geringere Bedeutung und werden meistens nur für ganz spezielle Aufgaben eingesetzt.

## 18.15 Schutzeinrichtungen und Schutzmaßnahmen

Die Überstrom-Schutzeinrichtungen haben die Aufgabe, sowohl Kabel und Leitungen als auch elektrische Betriebsmittel vor Kurzschluss und Überlast zu schützen. Eingesetzt werden Schmelzsicherungen und Überstrom-Schutzschalter.

Bei den Schmelzsicherungen erfolgt das Abschalten eines Überstromes durch Abschmelzen eines sehr dünnen Drahtes, dem Schmelzleiter in dem Sicherungselement. Je größer der Überstrom, desto schneller schmilzt der Draht und bewirkt damit die sichere Trennung des Stromkreises.

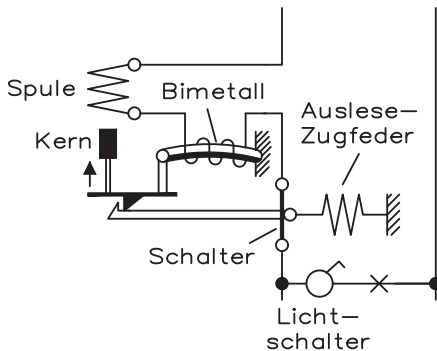
Um sich ein Urteil über die schnelle oder teilweise recht langsame Abschaltung durch Sicherungen bilden zu können, sind folgende Angaben von VDE 0635 (Vorschriften für Leitungsschutzsicherungen) zusammengestellt.

| Nennstrom | Flinksicherung  |               | Trägsicherung   |               |
|-----------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
|           | $2,5 \cdot I_n$ | $4 \cdot I_n$ | $2,5 \cdot I_n$ | $4 \cdot I_n$ |
| 10        | 0,3/0,85        | 0,04/0,55     | 16/120          | 0,9/3,6       |
| 16        | 0,35/9          | 0,05/0,55     | 17/120          | 1,1/4         |
| 20        | 0,35/10         | 0,07/0,8      | 19/130          | 1,3/4,5       |
| 25        | 0,6/12          | 0,1/1,1       | 22/140          | 1,8/6,1       |
| 35        | 1/16            | 0,13/1,4      | 25/150          | 2,0/6,1       |
| 50        | 1,2/20          | 0,18/1,8      | 25/150          | 3/9           |
| 63        | 1,5/24          | 0,2/2,0       | 25/150          | 3/9           |

$I_n$  ist hierbei der Nennstrom der Sicherungspatrone. Links vom schrägen Strich steht jeweils die Zeit in Sekunden, innerhalb der die Sicherung bei dem betreffenden Strom (z. B.  $2,5 \cdot I_n$ ) nicht durchschmelzen darf. Rechts vom schrägen Strich steht die Zeit, innerhalb der die Sicherung beim betreffenden Strom unbedingt abschalten muss. Man sieht, dass z. B. eine Trägsicherung 20 A beim Abschaltstrom von  $20 \cdot 2,5 = 50$  A nicht innerhalb 19 Sekunden abschmelzen muss, dass diese Abschaltzeit sogar bis 130 s, d. h. über zwei Minuten, betragen darf.

Leitungsschutzschalter sind Selbstschalter, die zum Schutz von Leitungen gegen unzulässige Erwärmung dienen. Die Leitungsschutzschalter haben also ebenso wie die Sicherungen die Stromkreise bei Kurzschlüssen und Überlastungen selbsttätig abzuschalten. Der Selbstschalter bleibt jedoch im Gegensatz zur Schmelzsicherung ohne weiteres verwendbar.

### Aufbau eines Leitungsschutzschalters



Die Leitungsschutzschalter enthalten eine thermische Überstromauslösung mittels Bimetall und eine elektromagnetische Kurzschlussauslösung. Wird der Strom in der Anlage durch Überlastung oder durch Isolationsfehler zu groß, so wird sich das erwärmte Bimetall biegen und die Auslösung des Schalters verursachen. Bei schnellen Stromerhöhungen infolge Kurzschluss spricht dagegen die elektromagnetische Auslösung an. Der Eisenkern oder Anker wird schnell angezogen und dadurch die Auslösung veranlasst, bevor die Anlage Schaden nimmt.

Für spezielle Aufgaben gibt es noch einige weitere Schutzeinrichtungen wie z. B.: Geräteschutzschalter, Motorschutzschalter, Leistungsschalter und FI-Schutzschalter (Fehlerstromschutzschalter).

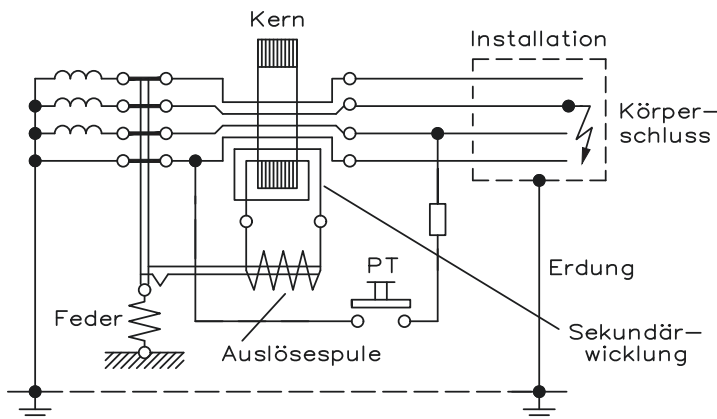
Geräteschutzschalter werden eingesetzt zum Schutz von Stromkreisen und Betriebsmitteln die erhöhte Einschaltströme haben. Diese können z. B. auftreten beim Einschalten von Schweißgeräten und kleineren Maschinen.

FI-Schutzschalter werden in immer größerer Zahl in elektrischen Anlagen eingesetzt. Sie überwachen Fehlerströme, die aufgrund von Isolationsfehlern, z. B. einem Körperschluss in einem elektrischen Gerät über den Schutzleiter zum Erder abfließen und schützen daher vor gefährlichen Körperströmen. FI-Schutzschalter lösen aus, wenn der jeweilige Nennfehlerstrom 20 mA überschritten wird.

Der Zweck des FI-Schutzschalters ist kein anderer als der aller anderen Schutzmaßnahmen. Wenn an einem nicht zum Betriebsstromkreis gehörenden leitfähigen Anlageteil eine Spannung von 65 V oder mehr auftritt, so soll die betreffende Anlage abgeschaltet werden.

Die Wirkungsweise dieses Schutzschalters beruht auf der ständigen Kontrolle, ob alle Ströme, die durch die Zuleitung zur Anlage fließen, auch wieder durch die gleiche Leitung zurückfließen. Ist das nämlich nicht der Fall, so kann nur angenommen werden, dass ein Teil des Stromes einen nicht vorgesehenen Weg nimmt, dass also ein Isolationsfehler vorliegt.

### Wirkungsweise eines FI-Schutzschalters

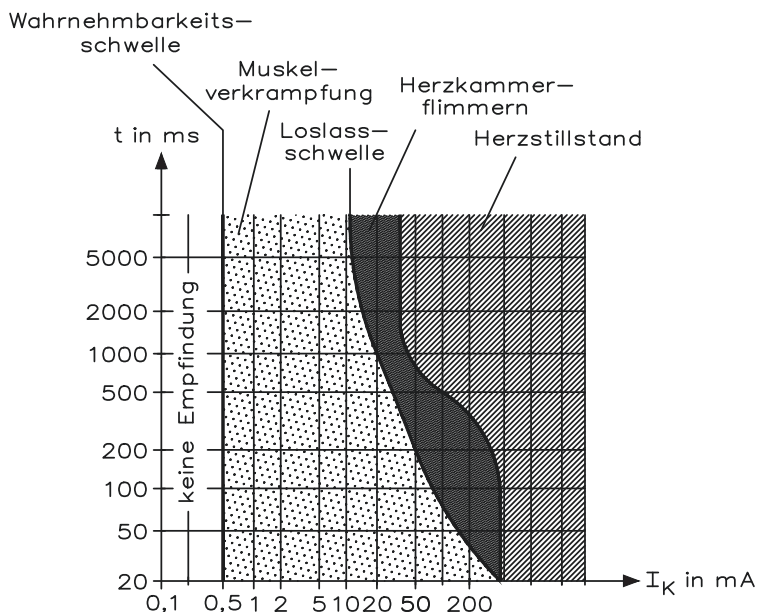


Das Schutzgerät enthält als wichtigsten Teil einen Transformatorkern, durch dessen Fenster alle Adern (einschließlich Sternpunktleiter) der Wechselstrom- bzw. Drehstromleitungen durchgeführt werden. Auf dem Kern ist außerdem eine kleine Sekundärwicklung aufgebracht, von der aus zwei Verbindungen zur Auslösespule des Hauptschalters führen.

Jedes zu schützende Gerät der Anlage wird mit einer Erdung des Gehäuses versehen.

## 18.16 Gefährliche Körperströme

Werden spannungsführende Teile einer Elektroanlage von einem Menschen berührt, so fließt ein Strom über den Körper zum Erdpotential. Die Höhe dieses Körperstromes  $I_K$  hängt von der Berührungsspannung  $U_b$  (Spannungshöhe), dem Körperwiderstand  $R_K$  und dem Übergangswiderstand  $R_U$  (z. B. Schuhsohlen, Fußbodenbelag) ab. Der Körperwiderstand besteht aus dem Hautwiderstand und dem Widerstand des übrigen Körpers. Die äußere Beschaffenheit der Haut oder Feuchtigkeit hat einen starken Einfluss auf den Hautwiderstand, (ca. 10 k $\Omega$  bei trockener und 100  $\Omega$  bei feuchter Haut). Der Widerstand des übrigen Körpers liegt etwa zwischen 500  $\Omega$  bis 1 k $\Omega$ . Er verändert sich aber stark in Abhängigkeit vom tatsächlich auftretenden Stromweg.



**Bereiche für die Stromstärke bei Wechselstrom ( $f = 50$  Hz) für die physiologischen Auswirkungen auf den menschlichen Körper**

- Bereich 1 (0 bis 25 mA): Bereits Stromstärken von etwa 2 mA werden von jedem Menschen durch leichtes Kribbeln wahrgenommen. Es kann dabei aber auch zu schreckhaften oder unkontrollierten Muskelbewegungen kommen. Stromstärken oberhalb der sogenannten Loslassgrenze von etwa 10 mA führen zu Muskelverkrampfungen mit möglicher Atemlähmung und Bewusstlosigkeit.
- Bereich 2 (25 mA bis 80 mA). Bei Strömen in der Größenordnung von 25 mA bis 80 mA treten sofort Magen- und Muskelverkrampfungen sowie das gefährliche Herzkammerflimmern auf. Dauert dieses länger als drei Minuten, sterben durch mangelnde Versorgung mit Sauerstoff lebenswichtige Gehirnzellen ab und es treten dadurch dauerhafte Schädigungen auf.

- Bereich 3 (80 mA bis 5 A): In diesem Bereich entsteht das Herzkammerflimmern bereits bei einer Durchgangszeit kleiner 0,3 Sekunden. Der Blutkreislauf kommt zum Erliegen und ohne eine sofortige Herzmassage mit zusätzlicher Beatmung tritt der Tod nach kurzer Zeit ein.
- Bereich 4 (500 A bis 5 A): Hier muss mit einem sofortigen Herzstillstand gerechnet werden oder die sehr starken Verbrennungen führen zum Tod nach Tagen oder Wochen.

---

# Sachwortverzeichnis

## A

AB-Betrieb 212  
A-Betrieb 211  
Abfallzeit 198  
Absorption 309  
Achtersystem 300  
8-4-2-1-Code 303  
Addierer 232, 274  
Additionstheorem 20  
Admittanz 114, 123  
Aiken-Code 303  
Allpassfilter 259  
Alphabet, griechisches 6  
Ampere 16, 45  
Amplitudenform 353  
Amplitudengang der Regelstrecke 272  
Amplitudenverlauf 254  
Anfahrvorgang 289  
Anfangswiderstand 330  
Ankathete 7  
Ankerwicklung 385  
Anlaufwert 273  
Anodenbasis 225  
Anpassungsfaktor 154  
Anstiegszeit 75, 198  
Antivalenz 308  
Anwärmfehler 347

Äquivalenz 308  
Arbeit, elektrische 48  
Arbeitsgerade 194  
Arbeitskontakt 319  
Arbeitspunkteinstellung 193  
Assoziation 309  
Asymptote 269  
Augenblickswert 71, 353  
Ausbreitungsgeschwindigkeit 155, 159  
Ausgangsleitwert 185  
Ausgangstreiberstrom 317  
Ausgangswiderstand 189  
Ausgleichswert 273  
Auslastfaktor 313  
Auslieferungstoleranz 64  
Ausräumfaktor 199  
Ausregelzeit 292  
Ausschaltzeit 198  
Außenleiterspannung 377

## B

B2U 174  
B6U 175  
Bandbreite 121, 147, 253  
Bandmittenfrequenz 158  
Bandpass, selektiver 253  
Bandsperre, selektive 253

Barkhausen-Gleichung 224  
Basiswiderstand 197  
Baud 157  
BCD-Code 303  
Bel 150  
Belastung, symmetrische 377  
Beleuchtungsgröße 339  
Beleuchtungsstärke 339  
Bessel 242  
Betriebsdämpfung 151  
Binär 299  
Binärcode 304  
binomischer Satz 36  
Bit 301  
Bit/s 157  
Bitrate 157  
Blindleistung 69, 118, 355  
Blindleistungsfaktor 69, 118  
Blindleitwert 114, 116  
Blindstromkompensation 384  
Blindwiderstand 104  
– kapazitiver 89  
Bodediagramm 268  
Bootstrap 210, 236  
Brückenmessung 358  
Brückenschaltung 330  
Brummspannung 176  
Butterworth 242  
Byte 301

## C

Candela 16, 339  
CL-Glied 135  
CMOS-Schaltung 315  
Colpits-Schaltung 205  
Cosinus 7  
Cosinussatz 10, 21  
Cotangens 8  
Coulomb 46  
Crest-Faktor 72  
CR-Hochpass 133

## D

Dachschräge 74  
Dämpfung 121, 249  
Dämpfungsfaktor 149  
Dämpfungsgrad 278  
Dämpfungskennwert 152  
Dämpfungskonstante 155  
Darlington 209  
Datenübertragung 157  
Dehnung 332  
Dehnungsmessstreifen 332  
Delon 178  
De Morgan 18  
Determinante 37  
Dezimalzahl 4  
D-Flipflop 312  
DIAMOND-Code 306  
Dichtefunktion 44  
Differentialkondensator 335  
Differentialquotient 31 f.  
Differenz 42  
Differenzierer 232  
Differenzierglied 141  
Differenzverstärker 213, 231  
Digitalmessgerät 352  
Diodenschalter 172  
Diodenwiderstand 170  
Disjunktion 18, 307  
Diskriminante 23  
Distribution 309  
Doppelleitung 156  
Doppel-T-Filter 256  
Drain 215  
Drainschaltung 217, 222  
D-Regler 277  
Drehkondensator 164  
– kapazitätsgerader 90  
Drehmoment 98, 383  
Drehstrom 375  
Drehstrommotor 380  
Drehstromnetz 391

Drehstromzähler 390  
Drehzahl 383  
Dreieck 12, 22  
Dreieck-Rechteck-Generator 240  
Dreieckschaltung 63, 378, 380  
Dreipunktregelung 296  
DT1-Regler 280  
Dual 299  
Dual-Gate-MOSFET 223  
Dualzahl 5  
Dunkelstrom 341  
Durchflutung 95  
Durchgriff 224  
Durchlassstrom 175  
Durchschnitt 42  
DWord 301

**E**

Echodämpfung 152  
Eckkreisfrequenz 276  
ECO-Schaltung 206  
Effektivwert 67, 353, 376  
Eigenerwärmung 328  
Eingangsstrom 317  
Eingangswiderstand 189  
Einheiten DIN 1302 17  
Einphasenwechselstrom 379  
Einschaltzeit 198  
Einweggleichrichter 238  
Elastizitätsmodul 333  
Elektrizitätsmenge 47  
Elektronengeschwindigkeit 47  
Ellipse 12  
Energie 89  
Ersatzwiderstand 60  
Erwärmung, induktive 146  
Erwartung 368  
Exklusiv-ODER 308  
Exponentialfunktion 2  
Exzentrizität 26  
Exzess-3-Code 303

**F**

fan-in 313  
fan-out 313  
Farad 46  
Fehler  
– absoluter 350  
– relativer 350  
Fehlerangabe 350  
Fehlerfortpflanzung 372  
– Gauß'sche 373  
– lineare 373  
Feldart 160  
Feldeffekttransistor 215  
Feldkonstante 96  
Feldlinienlänge 95  
Feldplatte 337  
Feldstärke 95  
Feldwellenwiderstand 160  
Fernfeld 161  
Festwertregelung 263  
FET 216  
Filter-Kennwert 137  
Filterkoeffizient 244  
FI-Schutzschalter 394  
Flankensteilheit 74, 128  
Flipflop 200  
Flussdichte 96, 337  
Formfaktor 70  
Fotodiode 343  
Fotoelement 344  
Fototransistor 343  
Fotowiderstand 341  
Fourier-Analyse 76  
Freileitung 143  
Fremdfeldfehler 347  
Frequenz, normierte 158  
Frequenzgang 266  
– komplexer 269  
Frequenzteiler 323  
Frequenzvergleichsmessung 365  
Frequenzweiche 128  
Führungsgröße 261, 289  
Führungsverhalten 288, 290  
Fußpunktkopplung 166

**G**

Gateschaltung 218, 222  
Gauß 242  
Gauß'sche Glockenkurve 370  
Gegeninduktivität 101, 165  
Gegenkathete 7  
Gegenkopplung 201  
Geometrie 2  
Geräteschutzschalter 394  
Gitterbasis 226  
Glättungsfaktor 181  
Gleichrichtwert 353  
Gleichstromkopplung 209  
Gleichstrommotor 385  
Gleichstrom-Scheibenläufer 386  
Gleichstromverstärkung 187  
Gleichungssystem 39  
Gleitpunktzahl 302  
Grad 10  
Greinacher 178  
Grundintegral 33  
Güte 117  
Gyrator 235

**H**

Halbbrücke 331 f.  
Halbweite 368  
Hallgenerator 336  
Hallkonstante 336  
Hartley-Schaltung 204  
Hauteffekt 146  
Heißeiter 327  
Henry 46  
Hexadezimal 299  
h-Kenngröße 185  
Hochpass, aktiver 243  
Hochpass-Doppelglied 138  
Hochpass-Phasenschieber 241  
Höckerfrequenz 257  
Hohlzylinder 13  
Hybridform 126  
Hypotenuse 7

**I**

Identität 307  
IEEE-Format 302  
Impedanz 123  
– negative 235  
Impedanzwandler 231  
Implikation 308  
Impuls 72  
Impulsdauer 74  
Induktivität 99  
Induktivitätsmessung 358  
Infrarot-Bereich 341  
Inhibition 309  
Inklusiv-ODER 308  
Innenwiderstand 224  
Instrumentenverstärker 233  
Integer 301  
Integrator 232  
Integrierbeiwert 276, 281  
Integrierglied 141  
Intermodulationsgrad 368  
Ionosphäre 160  
I-Regler 276  
Isochron-Zeichen 157  
Istwert 351  
IT1-Regler 279

**J**

J-FET 215  
JK-Flipflop 312  
JK-Master-Slave-Flipflop 313  
Joule 46

**K**

Kabel, symmetrisches 156  
Kaltleiter 330  
Kapazitätsänderung 87  
Kapazitätsdiode 182  
Kapazitätsmessbrücke 361  
Kapazitätsmessung 357  
Karnaugh-Diagramm 310  
Kaskadenschaltung 179  
Kaskode 212  
Katodenbasis 225

Kegel 14  
Kegelschnitt 25  
Kegelstumpf 14  
Kelvin 16  
Kettenform 125  
Kettenregel 31  
Kilogramm 16  
Kippschaltung  
– astabile 199  
– bistabile 200  
– monostabile 200  
Kippstufe, monostabile 220  
Klasseneinteilung 347  
Kleinsignalverstärkung 194  
Klemmenspannung 54  
Klirrdämpfung 145  
Klirrfaktor 145, 363  
Klirrfaktormessbrücke 363  
Knotenregel 55  
Koaxialkabel 88, 156  
Koeffizient, bipolarer 235  
Kommuation 309  
Komparator 234  
Kompensationswicklung 385  
Kondensator  
– frequenzgerader 91  
– wellengerader 92  
Konduktanz 114  
Konjunktion 18, 307  
Konstante 309  
Konstantspannungsquelle 213, 237  
Konstantstromquelle 213, 218, 237  
Koordinate, kartesische 267  
Kopplung  
– induktive 208  
– kapazitive 208  
Kopplungsfaktor 101, 166  
Kopplungskondensator 196  
Körperstrom 395  
Korrekturfaktor 354  
Kraft 97  
Kreis 11  
Kreisabschnitt 12  
Kreisausschnitt 11

Kreisfrequenz 67  
Kreisplattenkondensator 90  
Kreisring 11  
Kugel 14  
Kugelabschnitt 14  
Kugelkondensator 88  
Kurvendiskussion 32  
Kurzschluss 53

## L

Ladekondensator 176  
Ladungsverschiebung 89  
Lagefehler 347  
Längsinduktivität 154  
Längswiderstand 154  
LC-Bandpass 139  
LC-Bandsperre 140  
LC-Glied 134  
LC-Siebung 178  
LC-Verzögerungsleitung 137  
LDR 341  
LED 345  
Leerlauf 53  
Leistung 45  
Leistungsanpassung 54  
Leistungsfaktor 69, 114, 118  
Leistungsverlust 51, 379  
Leistungsverstärkung 190  
Leiterlänge, wirksame 98  
Leiterzahl 98  
Leitfähigkeit 50  
Leitung  
– verlustbehaftete 142  
– verlustfreie 142  
Leitungsschutzschalter 393  
Leitungsschutzsicherung 392  
Leitwert 45  
Leitwertform 125  
Leuchtdichte 339  
Leuchtdiode 345  
LIBAW-CRAIG 305  
Licht, sichtbares 341  
Lichtstärke 339  
Lissajous-Figur 365

Logarithmieren 6

Logarithmus 2

– natürlicher 6

Long Real 302

LORENZ-Code 306

LR-Tiefpass 132

LSB 301

Luftspule 103

Lumen 339

Lux 339

## M

M1U 173

M2U 173

M3U 174

Magnetfeld 337

Maschenregel 55

Matrix 40

Maximalwert 67

Maxwell 362

Maxwell-Robinson-Brücke 361

Maxwell-Wien 362

Meißner-Schaltung 204

Menge 3, 41

Messbereichsendwert 62

Messbereichserweiterung 352

Messgerät, elektrodynamisches 359

Messunsicherheit 368

Messwertaufnehmer 327

Meter 16

Mischspannung und -strom 72

Mitkopplung 202

Mittelwert 70 f., 353

– arithmetischer 371

Mittenfrequenz 253

Mol 16

Momentanwert 67

Momentencharakteristik 382

MOSFET 215, 221

Motormoment 382

MSB 301

## N

Nachstellzeit 281, 295

Näherungswert 35

Nahfeld 161

NAND 308

Nebenschlusswicklung 385

Nebensprechdämpfung 152 f.

Nebenwiderstand 62

n-Ecke 12

Negation 18, 307

Neper 150

Neutralleiter 377, 391

n-Fakultät 36

Nichols 293

NICHT 307

NICHT-Funktion 18

NOR 308

Normalform 23

Normalverteilung 44

Normlicht 342

Notch-Filter 258

NTC-Widerstand 327

NUDING-Code 306

Nullspannungskomparator 233

Nutzwärme 57

## O

ODER 307

ODER-Funktion 18

Ohmmeter 356

Oktal 299

Open-Loop 262

Operationsverstärker 274

Optokoppler 346

Ortskurve 266, 275

Oszilloskop 363

## P

Parallelogramm 12

PD-Regler 282

PDT1-Regler 284

Pegel, relativer 151

Peltier-Batterie 339

Pentode 227

Periodendauer 67  
Permeabilitätszahl 96  
Permutation 36  
Phasengang 269  
– der Regelstrecke 272  
Phasenschieber 141  
Phasenverlauf 254  
Phasenverschiebung 365  
Phasenwinkel 69, 93, 269  
PID-Regler 284  
PIDT1-Regler 286  
 $\pi$ -Glieder 153, 158  
 $\pi$ -Hochpass 136  
 $\pi$ -Tiefpass 135  
PI-Regler 280  
Plattenkondensator 87  
Polargleichung 26  
Polarkoordinate 267  
Polpaarzahl 375  
Primärwiderstand 105  
Prisma 13  
Produkt 42  
Projektionssatz 21  
Propagation 318  
Proportionalbeiwert 281  
Prozessgröße 263  
Pseudotetrad 303  
P-T1-Glieder 267  
PT1-Regler 277  
PTC-Widerstand 330  
Pulsspannung und -strom 72  
P-Verhalten 272  
Pyramide 13  
Pyramidenstumpf 13  
Pythagoras 8

**Q**

Quadrat 11  
Quarzschaltung 207  
Quellenspannung 54  
Querkapazität 154  
Querleitwert 154  
Querschnitt 379

**R**

Radiant 10  
Rauschleistung 147  
Raute 11  
RC-Glied 113 f.  
RC-Hochpass-Phasenschieber 202  
RC-Parallelschaltung 110  
RC-Reihenschaltung 109  
RC-Siebung 178  
RC-Tiefpass 131  
RC-Tiefpass-Phasenschieber 203  
RC-Wienbrücke 203  
Rechteck 11  
Rechteckgenerator 199, 219, 239, 321  
– mit Quarz 322  
Reflexionsfaktor 143, 154  
Regelgröße 261, 289  
Regelstreckenglied 271  
Regleroptimierung 292  
Reihenschlusswicklung 385  
Relation 1  
Resonanz 120  
Resonanztransformator 164  
Resonanzverfahren 358  
Reststrom 93  
Riementrieb 387  
RLC-Parallelschaltung 111  
RLC-Reihenschaltung 111  
RL-Glied 112  
RL-Hochpass 134  
RL-Parallelschaltung 109  
RL-Reihenschaltung 108  
Röhre 224  
Root Mean Square 72  
RS-Flipflop 312  
Rückflusssdämpfung 144, 152, 154  
Ruhekontakt 319

**S**

Sägezahn-generator 219, 240  
Sallen-Key-Bandpass 255  
Satz von Vieta 23  
Schalterwert 299

- Schaltung, monostabile 320  
Scheinleistung 69, 118, 355  
Scheinleitwert 114  
Scheitelfaktor 70  
Scheitelwert 353  
Schering 362  
Schleifdrahtbrücke 63, 357  
Schmelzsicherung 392  
Schmitt-Trigger 201, 234, 322  
Schneckentrieb 389  
Schrittmotor 386  
Schutzleiter 391  
Schwellertschaltung 201  
Schwerpunkt 24  
16-Bit-Integer 302  
Seitencosinussatz 22  
Sekundärwiderstand 105  
Sekunde 16  
Selbstinduktion 102  
Selbstinduktionsspannung 99  
Selbstinduktivität 100  
Sensor 327  
Sensorik 327  
Short Real 302  
Shunt 62  
Sicherungspatrone 393  
Siebfaktor 132  
SI-Einheiten (Système International d'Unités) 15  
Sign 301  
Signalgeschwindigkeit 47  
Signallaufzeit 74  
Signalwert 299  
Sink-Strom 317  
Sinus 7  
Sinusgenerator 240  
Sinussatz 10, 21  
Skalarprodukt 27  
Skineffekt 146  
Sollwert 351  
Source 215  
Sourceschaltung 216, 221  
Source-Strom 317  
Spannung 45  
Spannungsanpassung 54  
Spannungsbegrenzung 172  
Spannungsfall 51  
Spannungsgegenkopplung 196  
Spannungsquelle 52, 53  
Spannungsrückwirkung 185  
Spannungsstabilisierung 180  
Spannungs-Strom-Kennlinie 328  
Spannungs-Strom-Verstärker 229  
Spannungsvergleich 357  
Spannungsverlust 379  
Spannungsverstärker 229  
Spannungsverstärkung 190  
Spannungswandlerfehler 355  
Speicherzeit 75  
Sperrschicht-FET 216  
sphärischer Exzess 22  
Spitzendurchlassstrom 175  
Spitzenwert 67  
Spitze-Spitze-Wert 376  
Sprungantwort 264  
Spulengüte 105  
Spulenkonstante 104  
Stabilisierungsfaktor 182  
Standardabweichung 368  
Stauchung 332  
Steilheit 224  
Stellgröße 289  
Sternschaltung 63, 377, 380  
Störgröße 262  
Störpegelabstand 153  
Störsicherheit 317  
Störverhalten 264, 288  
Strahlensatz 8  
Strahlungsdichte 160  
Strangstrom 377  
Streckenmittelpunkt 24  
Stromanpassung 54  
Stromgegenkopplung 195  
Stromquelle 53  
Strom-Spannungs-Verstärker 229  
Strom-Spannungs-Wandler 236  
Stromstärke 45  
Stromverstärker 229

Stromverstärkung 189  
Stromwandler 236  
Stromwandlerfehler 355  
Stromwärme 57  
Stufungsfunktion 64  
Subtrahierer 232  
Summenschwingung 83  
Summierer 232, 274  
Suszeptanz 114

**T**

Tangens 8  
Tangenssatz 21  
Tastgrad 73  
Tastverhältnis 297  
Taylor'sche Reihe 34  
Teilmenge 41  
Temperaturänderung 87  
Temperaturbeiwert 50, 52  
Temperaturkoeffizient 180  
Temporary 302  
Tesla 46  
Tetrade 301  
Tetraden-Code 303  
T-Flipflop 313  
T-Glied 153, 158  
Thomson 63, 361  
Tiefpass, aktiver 243  
Tiefpass-Doppelglied 137  
Tiefpass-Phasenschieber 241  
TN-S-Netz 392  
Totzeit 264  
Totzeit-Regler 287  
Transistor 185  
Trapez 12  
Trigonometrie 2  
Triode 226  
Tschebyscheff 242  
TTL-Monoflop 320  
Tt-Regler 287  
Tunneldiode 183

**U**

Überschwingweite 292  
Übersetzungsverhältnis 165  
Übersteuerungsfaktor 197  
Überstrom-Schutzschalter 392  
Übertragungsbeiwert 264  
– der Regelstrecke 272  
Übertragungsfaktor 149  
Übertragungswinkel 259  
Umschlagstemperatur 330  
UND 307  
UND-Funktion 18  
URMS 72

**V**

Variable 309  
Varianz 368  
VDR-Widerstand 338  
Vektor 4, 27  
Vereinigung 42  
Verknüpfung 1  
Verkürzungsfaktor 163  
Verlustfaktor 93, 114, 117, 121  
Verlustleistung 169  
Verlustwiderstand 105  
Verstärker, logarithmischer 238  
Verstärkerbetrieb 231  
Verteilung  
– dreieckförmige 369  
– glockenförmige 370  
– trapezförmige 369  
Verteilungsfunktion 44  
Verzerrungsgrad 157  
Verzögerungszeit 75, 198, 259  
Verzugszeit 295  
Vierpol 124  
Vierpol-Parameter 188  
Viertelbrücke 331, 332  
64-Bit-Integer 302  
Villard 179  
Vollbrücke 331, 333  
Vorhaltezeit 295  
Vorwiderstand 61

**W**

Wahrscheinlichkeit 43  
Weber 46  
Wechselkontakt 319  
Wechselspannungsverstärker 220, 236  
Wechselstrom 375  
Wechselstromverstärkung 187  
Wechselstromwiderstand 171  
Wellenlänge 159  
Wellenwiderstand 142, 154  
Welligkeit 176, 247  
Welligkeitsfaktor 144  
Wheatstone 62  
Wheatstone-Messbrücke 360  
Wickelsinn 101  
Widerstand 45  
– magnetischer 97  
Widerstandmessung 356  
Widerstandsänderung 50  
Widerstandsform 125  
Wien 361  
Wienbrücke 140  
Winkelaufnehmer 334  
Winkelbeziehung 9  
Winkelcosinussatz 22  
Winkelfunktion 7, 9, 19  
Wirkleistung 69, 118, 355  
Wirkleitwert 114  
Wirkungsgrad 49

Word 301

Würfel 13

**Y**

y-Kenngröße 186

**Z**

Zahlenmenge 3  
Zahlensystem 3, 299  
Zähler 323  
Zahnradtrieb 389  
Zehnerlogarithmus 6  
Zehnersystem 300  
Zeichengeschwindigkeit  
157  
Zeigerdiagramm 69  
Zeitkonstante 92  
Ziegler 293  
Ziffernerkennung 305  
Zweieck 22  
Zweierlogarithmus 6  
Zweiersystem 300  
Zweipol 124  
Zweipunktegleichung 25  
Zweipunktregelung 296  
32-Bit-Integer 302  
Zweiweggleichrichter 238  
Zylinder 13  
Zylinderkondensator 88