



گزینه ۳

۱

گام اول

الف) اگر ضریب ثابت پلانک $6/6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ ژول ثانیه باشد $h = 6/6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
 ب) این ضریب چند الکترون ولت ثانیه است؟ $(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C})$ $h = ? (\text{eV.s})$

گام دوم

برای تبدیل ژول ثانیه به الکترون ولت ثانیه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$h = 6/6 \times 10^{-34} \text{ J.s} \xrightarrow{(1\text{J} = \frac{1}{1/6 \times 10^{-19}} \text{eV})} h = 6/6 \times 10^{-34} \times \frac{1}{1/6 \times 10^{-19}} = \frac{33}{8} \times 10^{-15} \text{ eV.s}$$

گزینه ۲

۲

طول موج نور مرئی بین 400 nm تا 700 nm است و از آنجاکه طول موج با انرژی رابطه عکس دارد، بیشینه مقدار انرژی فوتون‌های نور مرئی مربوط به طول موج 400 nm است. داریم:

$$E = h \frac{c}{\lambda} = 6 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{400 \times 10^{-9}} = 4/5 \times 10^{-19} \text{ J}$$

گزینه ۲

۳

با استفاده از رابطه انرژی هر فوتون، داریم:

$$E = hf \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{400 \times 10^{-9}} \Rightarrow E = 4.5 \text{ eV}$$

گزینه ۱

۴

باتوجه به رابطه توان لامپ و انرژی فوتون‌های خارج شده از لامپ، تعداد فوتون‌های خارج شده از لامپ را در مدت زمان یک دقیقه به دست می‌آوریم:

$$nhf = P.t \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} \frac{nhc}{\lambda} = P.t \xrightarrow{t=60 \text{ s}, \lambda=528 \text{ nm} = 528 \times 10^{-9} \text{ m}, h=6/6 \times 10^{-34} \text{ J.s}, P=60 \text{ W}, c=3 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

$$n = \frac{60 \times 60 \times 528 \times 10^{-9}}{6/6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 9/6 \times 10^{21} \text{ فوتون}$$

گزینه ۲

۵

$$E = nhf \Rightarrow E = 5 \times 10^{22} \times 6/6 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{500 \times 10^{-9}} = 3 \times 6/6 \times 10^3 \text{ J}$$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{3 \times 6/6 \times 10^3}{3 \times 60} = 110 \text{ W}$$

$$E = nhf = \frac{n_1 hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{n_1}{10 \times 10^{-6}} = \frac{1}{0.2 \times 10^{-12}}$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{10^{-5}}{2 \times 10^{-13}} = \frac{10^8}{2} = 5 \times 10^7$$

نظریه کوانتومی مربوط به مطالعه پدیده‌ها در مقیاس‌های بسیار کوچک مانند مولکول‌ها، اتم‌ها و ذره‌های ریزی که اتم‌ها را می‌سازند، است و نظریه نسبیت مربوط به مطالعه پدیده‌ها در سرعت‌های بسیار زیاد و نزدیک به سرعت نور است.

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{E_B}{E_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \Rightarrow \omega = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$$

$$\Rightarrow \lambda_A = \omega \lambda_B, \lambda_A - \lambda_B = 100 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow \omega \lambda_B - \lambda_B = 100 \text{ nm} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_A = 1000 \text{ nm} \\ \lambda_B = 900 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\frac{f=c}{c=3 \times 10^8 \text{ m/s}} \rightarrow \begin{cases} f_A = \frac{3 \times 10^8}{1000 \times 10^{-9}} = 3 \times 10^{14} \text{ Hz} \\ f_B = \frac{3 \times 10^8}{900 \times 10^{-9}} = 15 \times 10^{14} \text{ Hz} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_A - f_B = -12 \times 10^{14} \text{ Hz} = -1/2 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

انرژی فوتون متناسب با بسامد نور است. با تغییر محیط پرتو نور، بسامد آن تغییری نخواهد کرد. در نتیجه انرژی فوتون‌ها ثابت خواهد ماند.

با تغییر محیط، بسامد پرتو و انرژی هر فوتون تغییر نمی‌کند.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{100 \times 10^{-9}} = 19.8 \times 10^{-19} \text{ J} = \frac{19.8 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} = \frac{19.8}{1.6} \approx 12.4 \text{ eV}$$

انرژی فوتون از رابطه $E = hf$ به دست می‌آید و چون نور هر دو لامپ قرمز است، انرژی فوتون‌های آن‌ها برابر است.

باتوجه به رابطه انیشتین در پدیده فوتوالکتریک $K_{\max} = hf - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0$ درمی‌یابیم که برای افزایش بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکتردها می‌توان بسامد نور فرودی را افزایش یا معادلش طول موج این نور را کاهش داد و یا تابع کار فلز را کاهش داد (دقت شود منظور از شدت نور فرودی، تعداد فوتون‌های نور است که با افزایش یا کاهش آن بیشینه انرژی جنبشی تغییری نمی‌کند).

گام اول

الف) فلز با نوری به طول موج 600 nm روشن شود $\leftarrow \lambda_0 = 600 \text{ nm}$
 ب) تابع کار سه فلز A، B و C به ترتیب $2/26$ ، $4/24$ و $4/37$ الکترون ولت
 $W_{0A} = 2/26 \text{ eV}$ ، $W_{0B} = 4/24 \text{ eV}$ ، $W_{0C} = 4/37 \text{ eV} \leftarrow$

گام دوم

ابتدا با استفاده از رابطه $W_0 = hf_0 = h \frac{c}{\lambda_0}$ ، تابع کار مربوط به طول موج داده شده را محاسبه کرده و در نهایت فلزی که تابع کارش از مقدار تابع کار مربوط به طول موج داده شده کمتر باشد، تا بتواند فوتوالکترون گسیل کند، را تعیین می‌کنیم:

$$W_0 = h \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow W_0 = 4/14 \times 10^{-15} \times \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^{-7}} = 2/07 \text{ eV}$$

باتوجه به اینکه تابع کار فوق از تابع کار هر سه فلز کمتر است، طول موج موردنظر نمی‌تواند فوتوالکترون از سطح فلزها گسیل کند.

گام اول

الف) تابع کار فلزی $W_0 = 4 \text{ eV} \leftarrow 4 \text{ eV}$
 ب) بلندترین طول موجی که سبب گسیل فوتوالکترون می‌شود، چند میکرون است؟ $\leftarrow \lambda_0 = ? (\mu\text{m})$ (معادل است با کمترین بسامد یا بسامد قطع)

گام دوم

با استفاده از رابطه $W_0 = hf_0 = h \frac{c}{\lambda_0}$ ، بلندترین طول موجی که سبب گسیل فوتوالکترون می‌شود را برحسب میکرون محاسبه می‌کنیم:

$$W_0 = h \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow 4 = 4 \times 10^{-15} \times \frac{3 \times 10^8}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = 3 \times 10^{-7} \text{ m} = 0/3 \mu\text{m}$$

گام اول

الف) بسامد قطع فلزی $1/2 \times 10^{15} \text{ Hz}$ هرتر $\leftarrow f_0 = 1/2 \times 10^{15} \text{ Hz}$
 ب) تابع کار این فلز چند الکترون ولت است؟ $W_0 = ? (\text{eV}) \leftarrow$

گام دوم

به کمک معادله $W_0 = hf_0$ تابع کار فلز را برحسب الکترون ولت به دست می‌آوریم:

$$W_0 = hf_0 \Rightarrow W_0 = 4 \times 10^{-15} \times 1/2 \times 10^{15} = 4/8 \text{ eV}$$

$$E = P \cdot t, E = \frac{nhc}{\lambda}, P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{n_1 hc}{\lambda_1} = \frac{n_2 hc}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{5}{4}$$

باتوجه به اینکه فلز گداخته موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند، طیف نشری است نه جذبی. ازطرفی طیفی که از جامدها و یا مایع‌های مذاب گسیل می‌شود، پیوسته است؛ یعنی بین طول موج‌های مختلف آن فاصله‌ای وجود ندارد؛ پس طیف فلز گداخته، طیف نشری پیوسته است.

۱۹

گزینه ۱

۲۰

گزینه ۴

تمام اجسام جامد در حال التهاب، طیفشان پیوسته است. بنابراین آهن مذاب، زغال ملتهب و لامپ رشته‌ای روشن دارای طیف پیوسته و لامپ جیوه‌ای دارای طیف خطی تابش است.

۲۱

گزینه ۱

باتوجه به اینکه طول موج فوتون، $112/5$ نانومتر است و این عدد، در گستره طول موج امواج فرابنفش است، مربوط به رشته لیمان است و $n' = 1$ است؛ پس:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{112/5} = 0/01 \times \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{200}{225} = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow n = 3$$

۲۲

گزینه ۴

در اتم هیدروژن تابش‌های رشته‌های پاشن، براکت و پفوند در ناحیه فروسرخ قرار دارند.

۲۳

گزینه ۳

با استفاده از رابطه ریدبرگ طول موج فوتون گسیلی را به دست آورده و با مقایسه طول موج طیف‌های موج الکترومغناطیسی ناحیه فوتون گسیلی و رشته آن را تعیین می‌کنیم:

$$n' = 1, \quad n = 3, \quad R_H = \frac{1}{100} \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{900}{\lambda} \text{ nm} = 112/5 \text{ nm} \Rightarrow \lambda < 400 \text{ nm}$$

باتوجه به اینکه الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n = 1$ سقوط کرده ($\lambda < 400 \text{ nm}$)، فوتون گسیلی حاصل از آن در رشته لیمان قرار دارد و مربوط به ناحیه فرابنفش است.

۲۴

گزینه ۴

باتوجه به اینکه در دماهای پایین، فوتون‌هایی با طول موج بلندتر و در دماهای بالا فوتون‌هایی با طول موج کوتاه‌تر گسیل می‌شود، با گرم کردن تدریجی گاز هیدروژن از دماهای پایین تا دماهای بالا، ابتدا طول موج‌های بلند مربوط به رشته پفوند و در نهایت طول موج‌های کوتاه مربوط به رشته لیمان ظاهر می‌شود.

بلندترین طول موجی که جذب اتم هیدروژن در حالت پایه می‌شود، چند نانومتر؟ $\leftarrow (\text{nm}) \lambda_{\max} = ?$, $n = 2$, $n' = 1$ (زیرا باید کمترین انرژی ممکن را داشته باشد)

با استفاده از رابطه ریذبرگ، طول موج موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$n' = 1, \quad n = 2, \quad R_H = 1.097 \times 10^7 (\text{nm})^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{400}{3} \text{ nm}$$

باتوجه به این مطلب که برخی از طول موج‌های رشته بالمر در ناحیه نور مرئی است، برای محاسبه بلندترین طول موج نور مرئی اتم هیدروژن باید بلندترین طول موج رشته بالمر را محاسبه کنیم. به همین منظور از رابطه ریذبرگ استفاده کرده و طول موج موردنظر را می‌یابیم:

$$n = 3, \quad n' = 2, \quad R_H = 1.097 \times 10^7 (\text{nm})^{-1}$$

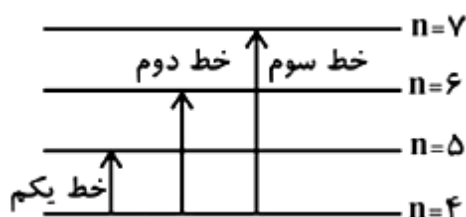
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda_{\max} = 720 \text{ nm}$$

وقتی الکترون از مدار n_1 به n_2 می‌رود ($n_2 < n_1$) طول موج فوتون گسیل‌شده همان طول موجی است که از رابطه ریذبرگ به ازای $n = n_1$ و $n' = n_2$ به دست می‌آید.

$$\left. \begin{aligned} n = 5 \rightarrow n = 3: \frac{1}{\lambda} &= R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) = \frac{16R_H}{9 \times 25} \\ n = 3 \rightarrow n = 1: \frac{1}{\lambda'} &= R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8R_H}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\frac{16}{9 \times 25}}{\frac{8}{9}} = \frac{25}{2}$$

تراز $n' = 2$ مربوط به سری بالمر است. با استفاده از رابطه ریذبرگ، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{720} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} = \frac{5}{36} \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow n = 3$$



اگر الکترون در اتم هیدروژن در تراز n قرار داشته باشد، با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن برای آن، تعداد فوتون‌هایی که با انرژی‌های مختلف گسیل می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{n=6} N = \frac{6 \times (6-1)}{2} \Rightarrow N = 15$$

کمترین طول موج گسیلی در حالتی است که انرژی فوتون تابشی بیشترین مقدار را داشته باشد و این در حالتی است که الکترون از تراز $n = 6$ به تراز $n' = 1$ برود.

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{n=6, n'=1} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{36} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100} \times \frac{35}{36} \Rightarrow \lambda = \frac{3600}{35} = \frac{720}{7} \text{ nm}$$

در مدل اتمی رادرفورد چون حرکت الکترون‌ها به دور هسته یک حرکت شتابدار است، این حرکت باعث گسیل امواج الکترومغناطیسی می‌شود که در نتیجه آن انرژی الکترون‌ها کاهش یافته و در نتیجه شعاع مدار حرکت آنها به دور هسته کوچک‌تر و بسامد حرکت آنها بیشتر می‌شود و در نهایت باعث می‌شود تا الکترون‌ها به درون هسته سقوط کنند؛ بنابراین طبق این نظریه اتم‌ها پایدار نخواهند بود.

نخستین الگوی اتمی توسط تامسون ارائه شد که در این الگو، اتم به صورت توزیع کروی یکنواختی از جرم و بار مثبت در نظر گرفته شده است که الکترون‌ها (بارهای منفی) مانند کشمش‌های درون یک کیک کشمش، درون آن قرار دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: درک سازوکار جذب و گسیل نور به وسیله اتم‌ها توسط دیدگاه فیزیک کلاسیک قابل توجیه است اما اینکه طیف جذبی و گسیلی هر اتم منحصر به فرد است، از دیدگاه فیزیک کلاسیک قابل توجیه نیست.

گزینه ۲: طیف حاصل از نور گسیلی بخار هر عنصر طیف اتمی نام دارد که به صورت گسسته است.

گزینه ۳: طیف حاصل از نور خورشید که به زمین می‌رسد، طیف جذبی نام دارد.

خطوط تاریکی که روی کره زمین دیده می‌شوند، در اثر جذب برخی طول موج‌های نور خورشید در مسیر خورشید تا زمین توسط ذرات موجود در این مسیر (عناصر موجود در اتمسفر زمین و اتمسفر خورشید) ایجاد می‌شوند و باعث می‌شود که در طیف نور خورشید، خطوط تاریک هم دیده شود.

گزینه ۱، جمله‌ای درست است.

گزینه ۲، جمله‌ای نادرست است. طیف خورشید، طیف جذبی خطی است.

گزینه ۳، جمله‌ای درست است.

گزینه ۴، جمله‌ای درست است.

اتم هر عنصر همان طول موجهایی را از نور سفید جذب می‌کند که اگر برانگیخته شود آنها را تابش می‌نماید، پس گزینه ۱ نادرست و گزینه ۲ درست است.

اینکه فوتونی با طول موج معین توسط اتم‌های یک عنصر جذب یا گسیل شود به این معنا است که ΔE میان دو تا از ترازهای انرژی آن اتم با hf آن فوتون برابر است؛ اما الزامی وجود ندارد که حتماً یکی از این ترازها تراز پایه باشد و یا حتماً دو تراز متوالی باشند.

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1200}{500} = 2/4 \text{ eV}$$

پس گزینه ۳ به‌خاطر تأکید روی تراز پایه و گزینه ۴ به دلیل عبارت "هیچ دو تراز متوالی" نادرست است.

گزینه ۱: طیف اتمی هر عنصر از مشخصه‌های یک عنصر است، بنابراین طیف گسیلی یا نشری بخار هر عنصر منحصر به فرد می‌باشد و با هیچ عنصر دیگری یکسان نیست.

گزینه ۲: فیزیک کلاسیک توانست تا سازوکار جذب و گسیل نور به وسیله اتم‌ها را توجیه کند ولی نتوانست توجیه کند چرا هر عنصر فقط طول موج‌های خاصی را جذب می‌کند.

گزینه ۳: طیف گسیلی یک عنصر یک طیف گسسته است و تنها طول موج‌های خاصی را منتشر می‌کند که از مشخصه‌های آن عنصر می‌باشد.

گزینه ۴: اگر نور سفید به اتم یک عنصر بتابد، اتم عنصر دقیقاً همان طول موج‌هایی را جذب می‌کند که اگر دمای آن به اندازه کافی بالا برود آن‌ها را تابش می‌کند بنابراین طیف جذبی فاقد خط‌های مربوط به طول موج‌هایی است که در طیف گسیلی وجود دارد.

گزینه ۱: طیف اتمی هر عنصر از مشخصه‌های یک عنصر است؛ بنابراین طیف گسیلی یا جذبی بخار هر عنصر منحصر به فرد می‌باشد.

گزینه ۲: فیزیک کلاسیک توانست تا سازوکار جذب و گسیل نور به وسیله اتم‌ها را توجیه کند؛ ولی نتوانست توجیه کند چرا هر عنصر طول موج‌های خاصی را جذب می‌کند.

گزینه ۳: اگر نور سفید به بخار یک عنصر بتابد، اتم عنصر دقیقاً همان طول موج‌هایی را جذب می‌کند که اگر دمای آن به اندازه کافی بالا برود آن‌ها را تابش می‌کند؛ بنابراین طیف جذبی فاقد خط‌های مربوط به طول موج‌هایی است که در طیف گسیلی وجود دارد.

گزینه ۴: طیف گسیلی اتم یک عنصر یک طیف گسسته است و تنها طول موج‌هایی را منتشر می‌کند که از مشخصه‌های آن عنصر می‌باشد.

طیف حاصل از عبور نور سفید از داخل بخار هر عنصر طیف جذبی نام دارد. همچنین طیف حاصل، دارای خطوط سیاه گسسته‌ای است، پس طیف مورد نظر، جذبی خطی است.

با نزدیک شدن الکترون به هسته، n (شماره تراز) کاهش می‌یابد، بنابراین طبق رابطه $K = +\frac{ke^2}{r_{a,n}}$ و شعاع بور a_0 مقادیر ثابت‌اند)، انرژی جنبشی الکترون افزایش و طبق رابطه $U = -\frac{ke^2}{a_0 n^2}$ ، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد، دقت کنید در رابطه انرژی پتانسیل الکتریکی با کاهش n ، اندازه U افزایش می‌یابد، اما چون عدد منفی است، کوچک‌تر می‌شود. زیرا هرچه عدد منفی از صفر دورتر باشد، کوچک‌تر است.

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{-E_R}{n^2} + \frac{E_R}{n'^2} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_R}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

از طرفی داشتیم:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{E_R}{hc} = R_H \Rightarrow \frac{E_R}{R_H} = hc$$

انرژی جنبشی الکترون هنگامی که در مداری با شعاع r به دور هسته می‌چرخد از رابطه $K = \frac{+ke^2}{r}$ به دست می‌آید؛ بنابراین با افزایش شعاع حرکت الکترون، انرژی جنبشی آن کاهش و از طرفی طبق رابطه $E = \frac{-ke^2}{r}$ انرژی کل الکترون با افزایش شعاع حرکت آن افزایش خواهد یافت.

$$hf = E_\delta - E_\gamma = \frac{-E_R}{25} - \frac{-E_R}{4} = \frac{21E_R}{100} = \frac{21 \times 13/6}{100} = 2/856 \text{ eV}$$

$$hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{hf} = \frac{1200}{2/856} \simeq 420 \text{ nm}$$

توجه کنید که این گذار ($5 \rightarrow 2$) قطعاً یک طول موج مرئی گسیل می‌نماید (سومین خط رشته بالمر).

انرژی بستگی در حالت n برابر است با $|E_n|$ ؛ بنابراین:

$$E' = |E_\delta| = \frac{E_R}{25}, \quad E = |E_\gamma| = \frac{E_R}{16}$$

$$E' - E = \frac{E_R}{25} - \frac{E_R}{16} = \frac{-9E_R}{400} = \frac{-9}{400} \text{ ریدبرگ}$$

*در مدل اتمی بور، اتم‌ها زمانی تابش انجام می‌دهند که الکترون از مدار بالاتر به مدار پایین‌تر برود و در مدارهای مانا باوجود اینکه الکترون حرکت شتابدار انجام می‌دهد، تابشی صورت نمی‌گیرد (گزینه ۱ نادرست است).
*باتوجه به مدل اتمی بور داریم:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} \Rightarrow \frac{v_n}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_n}} = \frac{1}{n}$$

بنابراین با افزایش n ، مقدار سرعت کم می‌شود.

*الکترون تنها روی مدارهای مانا با شعاع معین می‌تواند بگردد (گزینه ۳ نادرست است).

*در هر گذار از مدار بالاتر به مدار پایین‌تر، یک فوتون گسیل می‌شود که انرژی آن برابر است با اختلاف انرژی دو تراز (گزینه ۴ نادرست است).

در هر مدار $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ و $U = 2E$, $K = -E$

$$E_f = \frac{E_1}{16} \Rightarrow U_f = 2E_f = \frac{E_1}{8}$$

الگوی اتمی بور هیچ اطلاعی دربارهٔ تعداد فوتون‌هایی که با یک بسامد معین گسیل می‌شوند نمی‌دهد.

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} E_3 = -\frac{E_R}{9} \\ E_6 = -\frac{E_R}{36} \end{cases}$$

$$E_6 - E_3 = \frac{E_R}{12} = \frac{1}{12} \text{ ریدبرگ}$$

در هر گذار تنها یک فوتون گسیل می‌شود که انرژی آن برابر $(E_6 - E_3)$ است.

با توجه به رابطهٔ بین شعاع مدارها ($r_n = n^2 a_0$) فاصلهٔ بین مدارها زیاد می‌شود و با توجه به تراز انرژی الکترون در مدار n ام ($E_n = -\frac{E_R}{n^2}$) فاصلهٔ تراز انرژی بین مدارها کاسته می‌شود.

$$hf = E_f - E_i = -\frac{E_R}{16} + \frac{E_R}{4} = E_R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = E_R \times \frac{3}{16} = 13/6 \times \frac{3}{16} = 2/55 \text{ eV}$$

$$E = \frac{16/32 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = \frac{16/32}{1/6} = 10/2 \text{ eV}$$

انرژی فوتون جذب‌شده برابر با اختلاف انرژی میان دو تراز است.

$$\Delta E = E_R \left(\frac{-1}{n_i^2} - \frac{-1}{n_f^2} \right) \Rightarrow \frac{10/2}{13/6} = \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}$$

این یک معادلهٔ دومجهولی است و باتوجه‌به گزینه‌ها $n_i = 1$ و $n_f = 2$ پاسخ درست است.

بلندترین طول موج مرئی طیف اتمی هیدروژن یعنی اولین خط سری بالمر ($n = 3, n' = 2$) که مربوط به گذار الکترون از مدار ۳ به ۲ است.

$$hf = E_3 - E_2 = \frac{-E_R}{9} - \frac{-E_R}{4} = \frac{5}{36} E_R = \frac{5}{36} \text{ ریدبرگ}$$

برای اینکه الکترون از قید هسته آزاد شود باید انرژی‌ای به اندازه انرژی بستگی هسته در حالت پایه به آن داده شود:

$$|E| = \left| \frac{-E_R}{n^2} \right| \Rightarrow |E| = \frac{13/6 \text{ eV}}{1^2} = 13/6 \text{ eV}$$

$$E = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow 13/6 \text{ eV} = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot s \times \frac{3 \times 10^8}{\lambda} \Rightarrow \lambda \simeq 88/2 \text{ nm} \Rightarrow \text{مربوط به ناحیه فرابنفش طیف الکترومغناطیسی است}$$

گزینه "۱": یک فوتون فرابنفش گسیل می‌شود.

گزینه "۲": یک فوتون فروسرخ گسیل می‌شود.

گزینه "۳": یک فوتون مرئی گسیل می‌شود.

گزینه "۴": یک فوتون فروسرخ گسیل می‌شود.

پس بیشترین طول موج مربوط به گزینه "۲" یا "۴" است.

فوتون گزینه ۴ پُرانرژی‌تر و طول موج آن کوتاه‌تر است $(E_6 - E_3 > E_5 - E_3) \Rightarrow$

انرژی پتانسیل الکترون در اتم هیدروژن در مدار مانای n برابر است با:

$$U_n = 2E_n \xrightarrow{E_n = -\frac{E_R}{n^2}} U_n = -2 \frac{E_R}{n^2}$$

$$\Rightarrow -6/8 = -2 \times \frac{13/6}{n^2} \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$$

گام اول

الف) انرژی بستگی الکترون در اتم هیدروژن در حالت پایه $21/76 \times 10^{-19} \text{ J}$ است $\leftarrow n = 1, E_1 = -21/76 \times 10^{-19} \text{ J}$
 ب) اگر الکترون از مدار n به n' برود و انرژی فوتون گسیلی آن $16/32 \times 10^{-19} \text{ J}$ باشد، n و n' کدام است؟

$$\left. \begin{aligned} n' = ?, n = ? \\ E_{n'} - E_n = 16/32 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned} \right\} \leftarrow$$

گام دوم

با استفاده از رابطه $E = \frac{-E_R}{n^2}$ را محاسبه کرده و سپس از رابطه $E_{n'} - E_n = -E_R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ و n و n' را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{-E_R}{n^2} \xrightarrow{n=1} E_R = -E_1 = 21/76 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_{n'} - E_n = -E_R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow 16/32 \times 10^{-19} = -21/76 \times 10^{-19} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{\text{با چک کردن گزینه‌ها}} \left. \begin{aligned} n' = 1 \\ n = 2 \end{aligned} \right\}$$

الف) انرژی الکترون در مدار اول (E_1) برابر $13/6$ الکترون‌ولت $\leftarrow E_1 = -13/6 \text{ eV}$
 ب) انرژی الکترون در مدار دوم (E_2) چند الکترون‌ولت؟ $\leftarrow E_2 = ? \text{ eV}$

با استفاده از رابطه $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ ، نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ را نوشته و انرژی الکترون در مدار دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{-\frac{E_R}{2^2}}{-\frac{E_R}{1^2}} \Rightarrow \frac{E_2}{-13/6} = \frac{1}{4} \Rightarrow E_2 = -3/4 \text{ eV}$$

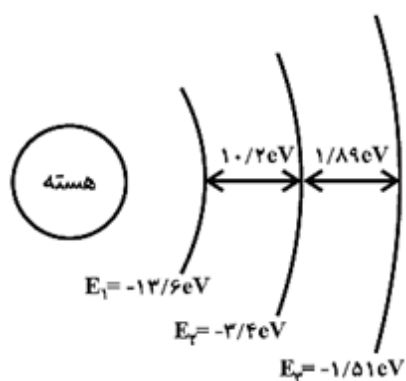
گسیل القایی هنگامی رخ می‌دهد که یک فوتون، اتم برانگیخته را وادار می‌کند تا با گسیل یک فوتون دیگر با همین بسامد به حالت پایین‌تر یا حالت پایه برود.

۲ فوتون + اتم \Rightarrow فوتون* + اتم

گزینه ۱ مربوط به جذب است، درحالی‌که اساس کار لیزر گسیل القایی است.

گزینه ۳ نادرست است.

باتوجه به شکل زیر، انرژی الکترون در ترازهای مختلف مشخص شده است. الکترون برای رفتن به تراز بالاتر باید دقیقاً به اندازه اختلاف انرژی دو لایه انرژی جذب کند. در غیر این صورت در تراز خود می‌ماند.
 حال اگر انرژی داده شده به الکترونی که در تراز بالاتر قرار دارد به اندازه اختلاف انرژی آن با تراز پایین‌تر باشد، گسیل القایی اتفاق می‌افتد و ۲ فوتون خارج می‌شود، که در این مسئله همین اتفاق روی خواهد داد.



۶۶

گزینه ۳

پرتو لیزر از جنس امواج الکترومغناطیس است و تمام امواج الکترومغناطیسی با سرعت یکسان و برابر با سرعت نور در خلأ منتشر می‌شوند.

۶۷

گزینه ۳

برش فلزات، از کاربردهای لیزر است.

۶۸

گزینه ۴

با استفاده از رابطه‌های $E = P \cdot t$ و $E = nh \frac{c}{\lambda}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E = nh \frac{c}{\lambda} \\ E = P \cdot t \end{cases} \Rightarrow nh \frac{c}{\lambda} = P \cdot t \Rightarrow \lambda = \frac{nhc}{P \cdot t} \xrightarrow[h=6/6 \times 10^{-34} \text{ J.s}, t=1 \text{ s}, c=3 \times 10^8 \text{ m/s}]{n=5 \times 10^{14}, P=3 \times 10^{-4} \text{ W}} \lambda = \frac{5 \times 10^{14} \times 6/6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{3 \times 10^{-4} \times 1}$$

$$\Rightarrow \lambda = 330 \times 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 330 \text{ nm}$$

۶۹

گزینه ۱

باتوجه به رابطه توان لامپ و انرژی فوتون‌های خارج شده از لامپ، تعداد فوتون‌های خارج شده را در مدت زمان یک دقیقه به دست می‌آوریم. داریم:

$$nhf = P \cdot t \xrightarrow[f=\frac{c}{\lambda}]{\lambda=528 \text{ nm}=528 \times 10^{-9} \text{ m}} \frac{nhc}{\lambda} = P \cdot t \xrightarrow[h=6/6 \times 10^{-34} \text{ J.s}, P=60 \text{ W}]{t=60 \text{ s}} n = \frac{60 \times 60 \times 528 \times 10^{-9}}{6/6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 9/6 \times 10^{21} \text{ فوتون}$$

۷۰

گزینه ۲

$$E = P \times t = 0/02 \times 60 = 1/2 \text{ J}$$

$$E = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{1/2 \times 10^{-1} \times 66 \times 10^{-8}}{66 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 4 \times 10^{18}$$

۷۱

گزینه ۱

۷۲

گزینه ۲

اگر از سبک‌ترین اتم‌ها به سنگین‌ترین آن‌ها برویم، عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) افزایش می‌یابد و با افزایش عدد اتمی نیروی رانشی الکتریکی بین آن‌ها افزایش یافته و سبب ناپایداری هسته می‌شود. پس به تعداد نوترون‌های بیشتری نیاز است تا نیروی ربایش هسته‌ای را افزایش دهند، بنابراین نسبت $\frac{N}{Z}$ افزایش می‌یابد.

۷۳

گزینه ۳

گزینه "۳" نادرست است، چون هرچه تعداد پروتون‌ها در یک هسته افزایش یابد، نیروی دافعه الکتریکی بین آن‌ها که باید خنثی شود بیشتر شده و در نتیجه هسته ناپایدارتر می‌شود.

در هسته اتم نیروی الکتریکی بین هر دو پروتون وجود دارد و به صورت دافعه است، پس مخالف پایداری هسته است. نیروی هسته‌ای قوی تنها بین نوکلئون‌های مجاور شکل می‌گیرد و قوی‌تر از دافعه الکتریکی است. نیروی هسته‌ای قوی بین هر دو نوکلئون مجاور (نوترون و پروتون / پروتون و پروتون / نوترون و نوترون) ایجاد می‌شود. نیروی گرانشی بین نوکلئون‌ها بسیار ضعیف است و عملاً نقشی در پایداری هسته ندارد.

در ایزوتوپ‌های مختلف یک عنصر عدد اتمی (Z) مساوی، اما عدد نوترونی (N) و عدد جرمی (A) متفاوت است. خواص شیمیایی آن‌ها یکسان و ویژگی‌های هسته‌ای آن‌ها متفاوت است. جداسازی آن‌ها از یکدیگر بر مبنای خواص شیمیایی امکان ندارد و بر مبنای اختلاف جرم هسته (یا سایر ویژگی‌های هسته) قابل تفکیک هستند.

X و W عدد اتمی یکسان دارند، پس یک عنصر هستند و خواص شیمیایی یکسان دارند؛ اما تعداد نوترون آن‌ها متفاوت است پس خواص هسته‌ای متفاوت دارند. X و Y دو عنصر مختلف هستند و خواص شیمیایی متفاوت دارند و اگرچه عدد جرمی یکسان دارند، اما تعداد نوترون و پروتون آن‌ها متفاوت است و خواص هسته‌ای متفاوت دارند.

خط پایداری ایزوتوپ‌ها ابتدا بر خط $N = Z$ منطبق است؛ اما با زیاد شدن Z به تدریج از آن منحرف می‌شود و ایزوتوپ‌های پایدار سنگین‌تر، دارای تعداد نوترون بیش از پروتون‌اند. نسبت $\frac{N}{Z}$ برای هسته‌های سنگین پایدار، حدود $\frac{3}{2}$ است.

وقتی A افزایش می‌یابد، هسته بزرگ‌تر شده و نیروی دافعه الکتریکی بین پروتون‌ها افزایش خواهد یافت. برای اینکه در این حالت هسته پایدار بماند، باید تعداد نوترون‌ها مقدار بیشتری افزایش یابد تا نیروی جاذبه هسته‌ای افزایش یابد.

گزینه ۲: نیروی کولنی گرچه دارای شدت کمتری است اما بلندپرو است.
گزینه ۳: جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کمتر است.
گزینه ۴: نسبت تعداد نوترون به پروتون، از ۱ به ۱ تا ۱ به $\frac{1}{3}$ است؛ بنابراین دقیقاً یکسان نیست.

جرم نوترون و پروتون ($ZM_p + NM_n$) از جرم اتم (M_x) بیشتر است و هرچه این اختلاف جرم بیشتر باشد، طبق رابطه $\Delta E = \Delta(Mc)$ ، نشان‌دهنده بزرگی انرژی بستگی هسته است.

طبق رابطه $\Delta E = \Delta Mc^2$ هرچه اختلاف جرم مجموع نوترون‌ها و پروتون‌ها (نوکلئون‌ها) از هسته بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته بیشتر است و آن هسته پایدارتر است.

$$E = mc^2 \Rightarrow E = 1 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J}$$

$$U = m'gh \Rightarrow 9 \times 10^{13} = m' \times 10 \times 100$$

$$\Rightarrow m' = 9 \times 10^{10} \text{ kg} = 9 \times 10^7 \text{ ton} \Rightarrow m' = 90 \text{ میلیون تن}$$

$$E = mc^2 = 4 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{16} = 3/6 \times 10^{14} \text{ J}$$

$$\text{kWh} = 3/6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$\Rightarrow E = 10^8 \text{ kWh} \Rightarrow \frac{10^8}{2000 \times 12} \simeq 4000 \text{ سال}$$

در واپاشی β^- یک نوترون به یک الکترون و یک پروتون تبدیل می‌شود که الکترون از هسته خارج می‌شود ولی پروتون در هسته باقی می‌ماند:

عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد افزایش می‌یابد $\Rightarrow Z' = Z + 1$: عدد اتمی

$$\text{عدد جرمی} : A' = Z' + N' \Rightarrow A' = Z + 1 + N - 1 = Z + N \Rightarrow A' = A \Rightarrow$$

عدد جرمی (مجموع نوکلئون‌ها) ثابت می‌ماند

باتوجه به اینکه α هسته اتم هلیوم است $\alpha \equiv {}_2^4\text{He}^{2+}$ ؛ وقتی از یک هسته، ذره α گسیل می‌شود عدد جرمی هسته به اندازه عدد جرمی هلیوم کاهش می‌یابد.

معادله واپاشی عنصر ${}_{11}^{11}\text{C}$ را که از خود یک پوزیترون تابش می‌کند می‌نویسیم:

$${}_{11}^{11}\text{C} \rightarrow {}_Z^A\text{X} + {}_{+1}^0\text{e}^+ \Rightarrow \begin{cases} A + 0 = 11 \Rightarrow A = 11 \\ Z + 1 = 11 \Rightarrow Z = 10 \end{cases} \Rightarrow {}_{10}^{11}\text{B}$$

باتوجه به ماهیت ذره α (${}_2^4\text{He}$)، معادله واپاشی اورانیوم را نوشته و عنصر موردنظر را پیدا می‌کنیم:

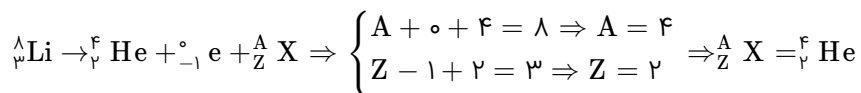
$${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_Z^A\text{X} \Rightarrow \begin{cases} A + 4 = 238 \Rightarrow A = 234 \\ Z + 2 = 92 \Rightarrow Z = 90 \end{cases} \Rightarrow {}_{90}^{234}\text{Th}$$

واکنش مسئله را کامل کرده و X را مشخص می‌کنیم:

$${}_{92}^{239}\text{U}^* \rightarrow {}_Z^A\text{X} + {}_{93}^{239}\text{Np} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ Z + 93 = 92 \Rightarrow Z = -1 \end{cases} \Rightarrow {}_{-1}^0\text{X}$$

درنتیجه ${}_{-1}^0\text{X}$ الکترون است.

معادله واپاشی هسته عنصر ${}^6_3\text{Li}$ که از خود ذره آلفا (${}^4_2\text{He}$) و ذره بتا (${}^0_{-1}\text{e}$) گسیل می‌کند، نوشته و عنصر تشکیل شده را مشخص می‌کنیم:



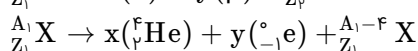
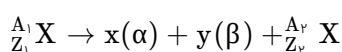
گام اول

الف) بدون تغییر عدد اتمی $Z_1 = Z_2 \leftarrow$

ب) عدد جرمی آن ۴ واحد کم شود $A_2 = A_1 - 4 \leftarrow$

گام دوم

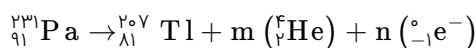
معادله واپاشی عنصر فرضی را نوشته و تعداد ذره‌های گسیلی را مطابق شرایط خواسته شده به دست می‌آوریم: (ذره آلفا: ${}^4_2\text{He}$ و ذره بتا: ${}^0_{-1}\text{e}$)



$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = 4(x) + \cancel{(0 \times y)} + A - 4 \Rightarrow x = 1 \quad (*) \\ Z_1 = (2x) + (-1 \times y) + Z \Rightarrow 2x - y = 0 \xrightarrow{(*)} y = 2 \end{cases}$$

(تعداد ذرات آلفا) (*) (تعداد ذرات بتا)

با فرض اینکه در تبدیل هر اتم، m ذره آلفا و n الکترون گسیل می‌شود، معادله واپاشی پروتکتینیم به صورت زیر نوشته می‌شود:



از سوی دیگر، می‌دانیم در تمام فرآیندهای واپاشی اصول پایستگی زیر برقرار است:

۱) مجموع عددهای اتمی در دو طرف معادله واپاشی یکسان است.

۲) مجموع عددهای جرمی در دو طرف معادله واپاشی یکسان است.

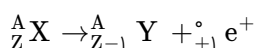
با استفاده از این اصول پایستگی برای معادله واپاشی پروتکتینیم، داریم:

$$\begin{cases} 231 = 207 + 4m + 0 \\ 91 = 81 + 2m - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m = 24 \\ 2m - n = 10 \end{cases} \Rightarrow m = 6, n = 4$$

بنابراین:

$$\frac{\text{تعداد ذرات آلفای گسیل شده}}{\text{تعداد الکترون‌های گسیل شده}} = \frac{m}{n} = \frac{6}{2} = 3$$

در واپاشی β^+ ، یک پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. در این حالت عدد اتمی هسته مادر، یک واحد بیشتر از عدد اتمی هسته دختر است و از هسته یک پوزیترون (ذره‌ای دارای جرم برابر با جرم الکترون و بار مخالف با آن) گسیل می‌شود.



باتوجه به اینکه ذره آلفا همان هسته اتم هلیوم و $({}^4_2\text{He}^{2+})$ و ذره بتای منفی همان ${}^0_{-1}\text{e}^-$ است، می‌توان نوشت:

$${}_Z^AX \rightarrow {}_Z^F\alpha + {}_{-1}^Ve^- + {}_{Z'}^{A'}Y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = (3 \times 4) + (2 \times 0) + A' \Rightarrow A' = A - 12 \\ Z = (3 \times 2) - (2 \times 1) + Z' \Rightarrow Z' = Z - 4 \end{cases}$$

بنابراین، عدد اتمی ۴ واحد کاهش و عدد جرمی ۱۲ کاهش می‌یابد.

در هر واکنش هسته‌ای، مجموع عددهای اتمی و عددهای جرمی در دو طرف واکنش برابر است، داریم:

$${}_{90}^{200}\text{X} \rightarrow {}_{86}^{188}\text{Y} + {}_{-1}^0\beta^- + n({}_0^1\alpha) + \omega\gamma$$

$$\begin{cases} 200 = 188 + n + 0 \\ 90 = -1 + n + 86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 12 \\ m = 4 \end{cases}$$

باتوجه به رابطه نیمه‌عمر یک ماده رادیواکتیو، می‌توان نوشت:

$$\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda t}{\ln 2} = 6$$

$$m_{\text{باقی‌مانده}} = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}} \Rightarrow m_0 = m \times 2^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}} \Rightarrow m_0 = 3 \times 2^6$$

$$\Rightarrow m_0 = 3 \times 64 \Rightarrow m_0 = 192 \text{ g}$$

$$m' = m_0 - m \Rightarrow m' = 192 - 3 \Rightarrow m' = 189 \text{ g}$$

اگر M_0 جرم اولیه ماده پرتوزا و m_1 جرم واپاشی‌شده آن بعد از ۴ نیمه‌عمر باشد، داریم:

$$m_1 = M_0 - \frac{M_0}{16} = \frac{15}{16}M_0 = 150 \text{ g} \Rightarrow M_0 = 160 \text{ g}$$

حالا مدت زمانی که طول می‌کشد تا تنها ۵ گرم از ماده پرتوزای اولیه باقی بماند را به دست می‌آوریم:

$$m_2 = \frac{M_0}{2^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}} \Rightarrow 5 = \frac{160}{2^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}} = 32 \Rightarrow \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} = 5 \Rightarrow t = 5T$$

دقت کنید در صورت سؤال گفته شده چند نیمه‌عمر دیگر باید بگذرد، بنابراین چون در ابتدا ۴ نیمه‌عمر گذشته، بنابراین باید ۱ نیمه‌عمر دیگر نیز بگذرد.

گام اول

الف) نیمه عمر یک ماده پرتوزا ۸ روز است $\leftarrow T = 8$ روز

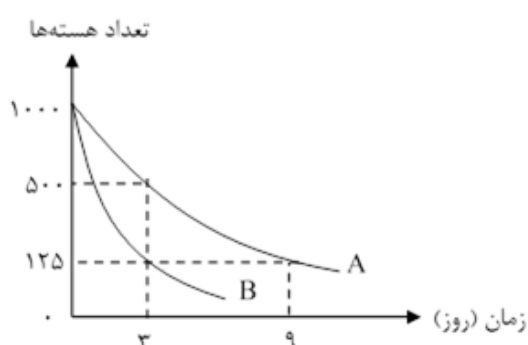
ب) پس از ۳۲ روز $\leftarrow t = 32$ روز

ج) چند درصد از هسته های آن ماده دچار واپاشی می شوند؟ $\leftarrow = ? \times 100 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ درصد واپاشی

گام دوم

با استفاده از رابطه $n = \frac{t}{T}$ و $\text{درصد واپاشی} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \times 100$ داریم:

$$\text{درصد واپاشی} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \times 100 = \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{32}{8}}}\right) \times 100 = \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \times 100 = \frac{15}{16} \times 100 = 93.75\%$$



گام اول

الف) نیمه عمر Sr برابر ۲۸ سال $\leftarrow T = 28$ سال

ب) چند سال طول می کشد تا ۲ میلی گرم از این عنصر به ۱۲۵ میکروگرم کاهش یابد؟

$\leftarrow t = ?$ (سال) $m_0 = 2mg = 2 \times 10^{-3}kg$, $m = 125mg = 125 \times 10^{-6}kg$

گام دوم

ابتدا تعداد نیمه عمرهای سپری شده را با استفاده از رابطه $\frac{m_0}{m} = 2^n$ به دست می آوریم و در رابطه $t = nT$ جایگذاری کرده تا زمان موردنظر را تعیین کنیم:

$$\frac{m_0}{m} = 2^n \Rightarrow \frac{2 \times 10^{-3}}{125 \times 10^{-6}} = 2^n \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

$$t = nT \Rightarrow t = 4 \times 28 = 112 \text{ سال}$$

از رابطه‌های جرم هسته‌های فعال باقی‌مانده برای تعداد نیمه‌عمرهای عدد صحیح استفاده می‌کنیم:
در زمان t روز داریم:

$$n_1 = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{T_{\frac{1}{2}} = 24 \text{ روز}} n_1 = \frac{t}{24}$$

$$m + \epsilon^3 = \frac{m_0}{2^{n_1}} \quad (1)$$

در زمان $(t + 72)$ روز داریم:

$$n_2 = \frac{t + 72}{T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{T_{\frac{1}{2}} = 24 \text{ روز}} n_2 = \frac{t + 72}{24} \xrightarrow{n_1 = \frac{t}{24}} n_2 = n_1 + 3 \Rightarrow n_2 - n_1 = 3 \quad (2)$$

$$m = \frac{m_0}{2^{n_2}} \quad (3)$$

با تقسیم کردن طرفین رابطه‌های (۱) و (۳) بر هم دیگر، داریم:

$$\frac{m + \epsilon^3}{m} = \frac{2^{n_2}}{2^{n_1}} = 2^{n_2 - n_1} \xrightarrow{(2)} \frac{m + \epsilon^3}{m} = 2^3$$

$$\Rightarrow m + \epsilon^3 = 8m \Rightarrow m = 9g$$

در زمان $(t + 120)$ روز داریم:

$$n' = \frac{t + 120}{T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{T_{\frac{1}{2}} = 24 \text{ روز}} n' = \frac{t + 120}{24}$$

$$\xrightarrow{n_1 = \frac{t}{24}} n' = n_1 + 5 \Rightarrow n' - n_1 = 5 \quad (4)$$

$$m' = \frac{m_0}{2^{n'}} \quad (5)$$

با تقسیم کردن طرفین رابطه‌های (۱) و (۵) بر هم دیگر، داریم:

$$\frac{m + \epsilon^3}{m'} = \frac{2^{n'}}{2^{n_1}} = 2^{n' - n_1} \xrightarrow{(4)} \frac{24}{m'} = 2^5 \Rightarrow m' = 2/25 g$$

ابتدا مقدار مادهٔ واپاشی‌شده را در مدت ۲ نیمه‌عمر به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{m_0}{2^n} \Rightarrow m = \frac{12}{2^2} \Rightarrow m = 3 g$$

بنابراین در مدت ۲ نیمه‌عمر، به مقدار $9 g = 12 - 3$ از مادهٔ رادیواکتیو واپاشی می‌شود. باتوجه به اینکه به ازای واپاشی هر گرم از این ماده $2 MJ$ انرژی آزاد می‌شود، به ازای واپاشی $9 g$ از این ماده $18 MJ$ انرژی آزاد خواهد شد.