

کتاب فیزیک پایه کنکور تجربی - جلد پاسخ های تشریحی



نیم نگاه

نمایش

عنوان کتاب :	کتاب فیزیک پایه کنکور تجربی - جلد پاسخ های تشریحی
سری کتاب :	میکرو طبقه بندی
مولف کتاب :	محمد آهنگر، بهروز نادری‌نژاد، سعید احمدی
سال انتشار :	۱۳۹۸
تعداد صفحات :	۵۶۰ صفحه
قیمت نسخه فیزیکی :	۱۱۰۰۰۰ تومان (صرفا جهت اطلاع)
قیمت نسخه الکترونیکی :	۳۷۰۰۰ تومان (صرفا جهت اطلاع)

چند دقیقه با مدیر تألیف

کتاب‌های میکروطبقه‌بندی یا نقره‌ای گاج از خوش‌نام‌ترین و پرفروش‌ترین کتاب‌های آموزشی کشور به‌شمار می‌روند و نیازی به معرفی ندارند. کم‌تر دانش‌آموزی در کشور وجود دارد که در جلسه کنکور حاضر شود و کتابی از کتاب‌های میکروطبقه‌بندی گاج را مطالعه نکرده باشد. در انتشارات گاج، هر سال تعداد هنگفتی کتاب میکروطبقه‌بندی با جلد نقره‌ای برای پایه‌های تحصیلی دهم، یازدهم، دوازدهم و کنکور رشته‌های تجربی، ریاضی و انسانی تولید می‌شود. این موضوع مهم، وظیفه تیم ما را در واحد کتاب‌های میکروطبقه‌بندی به مراتب سنگین‌تر می‌کند و به‌طور مداوم به ما گوشزد می‌کند که باید تلاشمان را چندین برابر نماییم.

با تغییر نظام آموزشی کشور از سیستم ۵-۳-۴ به ۶-۳-۳ انتشارات بین‌المللی گاج همچنان به تولید کتاب‌های میکروطبقه‌بندی در ۳ سال متوسطه دوم برای آمادگی دانش‌آموزان عزیز در آزمون‌های کنکور سراسری ادامه می‌دهد. امیدوارم که تلاش بنده و همکارانم مورد استفاده شما اساتید گرانقدر و دانش‌آموزان عزیز قرار بگیرد.

▪ مهندس افشین احمدی

Shinmadi

مقدمهٔ مؤلفان

این کتاب در برگیرندهٔ خلاصه نکات کاربردی، همراه با پاسخ‌های تشریحی کاملاً مفهومی، برای همهٔ سؤالات موجود در کتاب فیزیک پایه می‌باشد.

✡ در نوشتن خلاصه نکات کوشیده‌ایم:

* تمام مفاهیم موجود در کتاب‌های درسی را با بیان ساده و کاربردی شرح دهیم.
* از تصاویر دقیق و مثال‌های آموزشی، برای درک بهتر مطالب کتاب درسی استفاده کنیم.
* با یک طبقه‌بندی مناسب در خلاصه نکات و پاسخ‌های تشریحی، ذهن دانش‌آموزان عزیز را مرتب و ساختارمند کنیم.

دقت شود که از نظر ما کوتاه بودن و کاربردی بودن این خلاصه نکات، اصلی‌ترین ویژگی مربوط به آن است و دورهٔ این خلاصه نکات در مدت زمان کمی ممکن بوده و در کنار جزوات معلم‌های عزیز، باعث پیشرفت شما در فیزیک می‌شود.

✡ در پاسخ تشریحی سؤالات کوشیده‌ایم:

* به همهٔ سؤالات با دقت علمی بالا و به‌صورت ساده و روان، پاسخ درست بدهیم.
* در صورت نیاز، از چند روش برای پاسخ‌گویی به سؤالات استفاده کنیم.
* در سؤالات دشوار، مراحل پاسخ‌گویی را به‌صورت گام‌به‌گام ارائه کنیم.
* برای درک بهتر و هم‌چنین ایجاد علاقه در دانش‌آموزان، از تصاویر دقیق و گویا استفاده کنیم.

به دانش‌آموزان عزیز شدیداً توصیه می‌کنیم حتی اگر به سؤالی پاسخ صحیح دادید، پاسخ تشریحی آن را نیز با دقت مطالعه کنید. به شما قول می‌دهیم که با این کار، پیشرفت در فیزیک را خودتان احساس می‌کنید.

با آرزوی موفقیت برای شما آینده‌سازان ایران عزیز

محمد آهنگر ـ بهروز نادری‌نژاد ـ سعید احمدی

فهرست مطالب

پایهٔ دهم

فصل ۱ فیزیک و اندازه گیری ۷

فصل ۲ کار، انرژی و توان ۴۰

فصل ۳ ویژگی های فیزیکی مواد ۹۰

فصل ۴ دما و گرما ۱۵۸

پایهٔ یازدهم

فصل ۱ الکتریسیتهٔ ساکن ۲۶۴

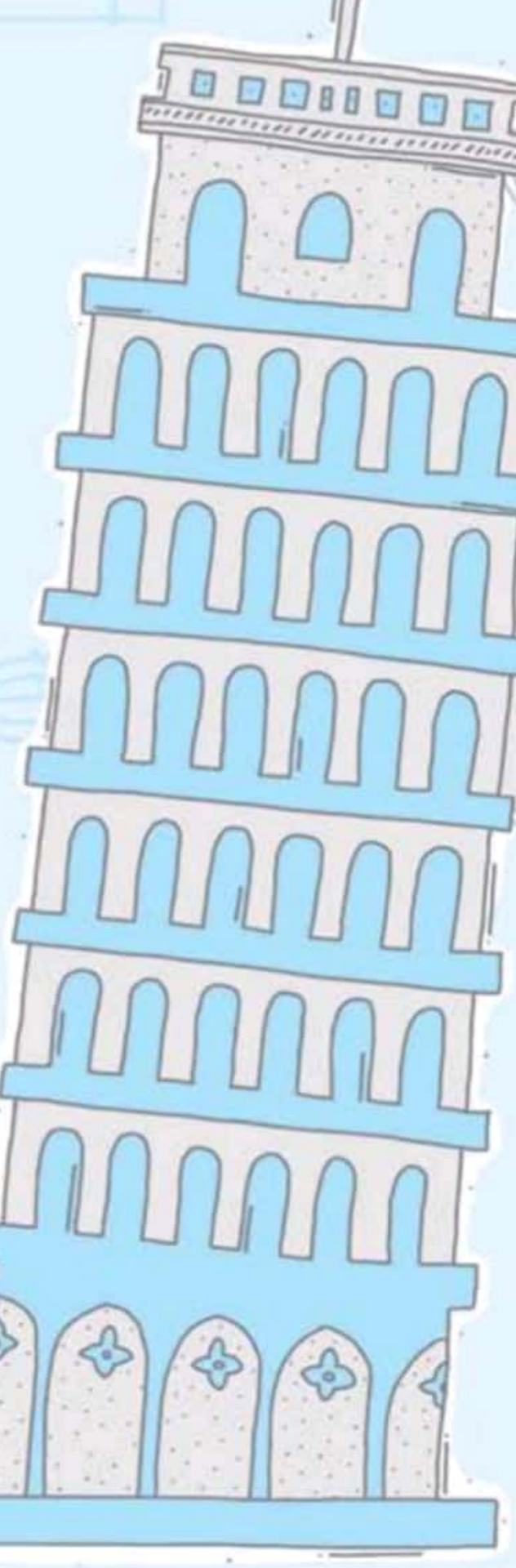
فصل ۲ جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم ۳۶۶

فصل ۳ مغناطیس و القای الکترومغناطیسی ۴۵۵

فصل اول

پایه دهم

فیزیک و اندازه گیری



خلاصه نکات	عنوان	صفحه
۱	دانش فیزیک و مدل‌سازی پدیده‌ها در آن	۸
۲	کمیت‌ها و یکاهای مختلف فیزیکی	۹
۳	آشنایی با پیشوندها و نمادگذاری علمی	۱۳
۴	دقت و خطای اندازه‌گیری	۱۷
۵	تخمین (برآورد) مرتبهٔ بزرگی	۲۳
۶	چگالی (جرم حجمی)	۲۷
۷	چگالی مخلوط چند ماده (آلیاژ)	۳۳

۱ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱ **دانش فیزیک و مدل‌سازی پدیده‌ها در آن** (تست‌های ۱ تا ۱۲)

شناخت دانش فیزیک

فیزیک از بنیادی‌ترین دانش‌ها و شالودهٔ تمام مهندسی‌ها و فناوری‌هاست که به طور مستقیم یا غیر مستقیم در زندگی روزمرهٔ ما نقش دارد. در رابطه با دانش فیزیک، به موارد زیر توجه کنید:

نکات مهم و کاربردی

۱ از آنجایی که فیزیک علمی تجربی است، لازم است درستی قوانین، مدل‌ها و نظریه‌های فیزیکی توسط آزمایش بررسی شوند.

۲ نظریه‌های فیزیکی در طول زمان همواره معتبر نبوده و دچار تغییر می‌شوند.

۳ ویژگی آزمون‌پذیری و اصلاح نظریه‌های فیزیکی، از نقاط قوت دانش فیزیک محسوب می‌شود.

۴ تفکر نقادانه و اندیشه‌ورزی فعال فیزیک‌دانان نسبت به پدیده‌ها، بیشترین نقش را در پیشبرد و تکامل علم فیزیک ایفا کرده است.

۵ مفهوم قانون و اصل در فیزیک:

قانون: گزارهٔ کلی و در عین حال مختصر است که برای دامنهٔ وسیعی از پدیده‌های گوناگون طبیعت معتبر می‌باشد (مانند قوانین نیوتون).

اصل: برای توصیف دامنهٔ محدودتری از پدیده‌های فیزیکی که عمومیت کم‌تری دارند، از اصل استفاده می‌کنیم (مانند اصل پاسکال).

مدل‌سازی در فیزیک

پدیده‌های فیزیکی که در اطراف ما رخ می‌دهند، پیچیدگی‌های بسیاری را به همراه دارند. از این‌رو برای تحلیل آن‌ها، باید بتوانیم کمی آن‌ها را ساده‌تر کنیم. مدل‌سازی در فیزیک، فرایندی است که در طی آن یک پدیدهٔ فیزیکی، آن‌قدر ساده و آرمانی می‌شود تا امکان بررسی و تحلیل آن فراهم گردد. البته در عین حال نباید به اصل مسأله خدشه‌ای وارد شود. در واقع فقط عوامل اصلی و تعیین‌کننده را لحاظ کرده و از اثرهای جزئی صرف‌نظر می‌کنیم.

برای درک بهتر مدل‌سازی در فیزیک به مثال زیر توجه کنید:

مثال **مدل‌سازی حرکت توپ بسکتبال در هوا:**

یک توپ بسکتبال پرتاب‌شده در هوا را درنظر بگیرید. در حرکت این توپ عوامل بسیار زیادی تأثیرگذار هستند. از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

توپ کاملاً به شکل کروی نیست، مقاومت هوا در مسیر توپ وجود دارد، توپ در طی حرکتش به دور خود نیز می‌چرخد، وزن توپ با تغییر فاصله از مرکز زمین تغییر می‌کند و ...

اگر ما بخواهیم اثر تمام این عوامل را لحاظ کنیم، تحلیل ما بسیار پیچیده و مشکل می‌شود. از این‌رو با یک مدل‌سازی ساده‌تر می‌توان موارد زیر را درنظر گرفت:

توپ را همانند یک جسم نقطه‌ای یا ذره در خلأ درنظر گرفته که اثر عوامل ذکرشده (مانند مقاومت هوا و اثر وزش باد) را دیگر لحاظ نمی‌کنیم.

هم‌چنین از تغییر وزن آن در اثر تغییر ارتفاع نیز صرف‌نظر می‌کنیم.

از این‌رو می‌توانیم به راحتی به تحلیل حرکت آن بپردازیم.



نمونه‌های کامل‌تر از مدل‌سازی رو تو تستای این قسمت براتون آوردیم تا رو این بحث کاملاً مسلط بشید...

ویژگی آزمون‌پذیری و اصلاح نظریه‌های فیزیکی، نقطه قوت دانش فیزیک است و نقش مهمی در فرایند پیشرفت دانش و تکامل شناخت ما از طبیعت پیرامون داشته است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ ۳ دانشمندان برای بیان قانون‌های فیزیکی از گزاره‌های کلی و در عین حال مختصر استفاده می‌کنند، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است. سایر گزینه‌ها در رابطه با مفاهیم قانون و اصل در علم فیزیک صحیح هستند.

gajmarket.com

۳ ۳ مدل‌سازی در فیزیک فرایندی است که در آن اثرهای مهم و تعیین‌کننده برای یک پدیدهٔ فیزیکی در نظر گرفته می‌شود و پدیده‌ها تا حد امکان ساده‌سازی می‌شوند نه جزئی‌سازی. بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ ۴ هنگام مدل‌سازی یک پدیدهٔ فیزیکی، باید اثرهای جزئی‌تر را نادیده بگیریم نه اثرهای مهم و تعیین‌کننده را. برای مثال، اگر به‌جای مقاومت هوا، نیروی جاذبهٔ زمین را نادیده می‌گرفتیم، آن‌گاه مدل ما پیش‌بینی می‌کرد که وقتی توپی به بالا پرتاب شود در یک خط مستقیم بالا می‌رود! این توضیحات یعنی نمی‌توان از اثر نیروی گرانش صرف‌نظر کرد.

۲ ۵ برای مدل‌سازی یک پدیدهٔ فیزیکی، اثرهای جزئی‌تر را نادیده می‌گیریم. هنگامی که یک گلولهٔ سنگین و کوچک را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم، عامل اصلی حرکت آن، نیروی وزن است و از نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت آن می‌توانیم صرف‌نظر کنیم، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تذکر اگر مقاومت هوا در برابر سقوط قطرهٔ باران وجود نداشته باشد، تندی حرکت قطره بر روی سطح زمین بسیار زیاد می‌شود، به طوری که با برخورد آن به زمین صدمه‌های بسیاری ایجاد می‌شود. هم‌چنین عاملی که باعث می‌شود تندی چترباز کاهش یابد تا در اثر سقوط به شخص صدمه وارد نشود، نیروی مقاومت هوا است. بنابراین مقاومت هوا عاملی مهم در نحوهٔ حرکت چترباز بوده و نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

۲ ۶ هنگام مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی، فقط می‌توانیم آثار جزئی را نادیده بگیریم. با توجه به این‌که ارتفاع درخت کم است، تغییرات شتاب جاذبه (g) و در نتیجه تغییرات وزن برگ (mg)، هنگام پایین آمدن قابل صرف‌نظر کردن است. دقت کنید که با توجه به این‌که سطح مقطع برگ، بزرگ و جرم آن کم است، بنابراین در مورد حرکت برگ نمی‌توانیم از اثر مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم، چون عاملی مهم و تعیین‌کننده در نحوهٔ حرکت برگ است.

۲ ۷ در هنگام سقوط برگ، دو نیروی وزن و مقاومت هوا به آن وارد می‌شوند که جهت نیروی وزن به سمت پایین و جهت نیروی مقاومت هوا، در خلاف جهت حرکت برگ، یعنی به سمت بالا است. با توجه به آن‌که برگ با شتاب به سمت پایین می‌آید، نیروی وزن وارد بر آن از نیروی مقاومت هوا بزرگ‌تر است و می‌توانیم حرکت برگ را به شکل مقابل مدل‌سازی کنیم (طول هر یک از بردارها متناسب با بزرگی آن رسم شده است).



۲ ۸ موارد (۱)، (۳) و (۴)، از اصلی‌ترین مواردی است که در مدل‌سازی‌های حرکت جسم بر روی سطح افقی لحاظ می‌شود، اما کم شدن جرم بر اثر ساییدگی بسیار ناچیز است و لزومی ندارد این موضوع در مدل‌سازی لحاظ شود.

۳ ۹ برای مدل‌سازی بهتر حرکت جسم، باید از اثرهای جزئی صرف‌نظر کرده و اثرهای مهم و تعیین‌کننده را لحاظ کنیم. با توجه به این‌که جسم به سمت راست حرکت می‌کند، بنابراین نیروی دست شخص باید بیشتر از نیروی اصطکاک باشد، پس گزینهٔ (۳) صحیح است (دقت شود برای مدل‌سازی حرکت این جسم، آن را به صورت نقطه‌ای در نظر می‌گیریم).

۳ ۱۰ در مدل‌سازی حرکت کمد بر روی سطح شیبدار، نیروی وزنِ کمد، نیرویی که شخص به کمد وارد می‌کند و زاویهٔ سطح شیبدار (θ)، عوامل اصلی مؤثر بر حرکت کمد هستند. سایر عوامل مانند شکل کمد، مقاومت هوا و تغییرات وزنِ کمد هنگام بالا رفتن، جزئی هستند و می‌توانیم از آن‌ها صرف‌نظر کنیم.

۳ ۱۱ نیرویی که باعث می‌شود ماهواره به دور زمین بچرخد، نیروی گرانش بین ماهواره و زمین است و در نتیجه در مدل‌سازی حرکت ماهواره به دور زمین، نمی‌توانیم از این عامل چشم‌پوشی کنیم. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴ ۱۲ با توجه به علوم پایهٔ هشتم، لیزر یک منبع نور گسترده است که آن را به‌دلیل کوچک بودن، منبع نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر، پرتوها به‌صورت واگرا می‌باشند که چون در لیزر واگرایی زیاد نیست، برای سادگی آن‌ها را موازی درنظر می‌گیریم، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۱۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ — **کمیت‌ها و یکاهای مختلف فیزیکی** — (تست‌های ۱۳ تا ۲۵)

تو این قسمت، اول مفاهیم کمیت و یکا رو می‌شناسیم و بعدش میریم سراغ دسته‌بندی‌های مختلف اونا. آخر کاری هم، رو مفهوم سازگاری یکاها تو یه معادلهٔ دلخواه کار می‌کنیم ...

کمیت و یکا

ابتدا شما را با دو تعریف مهم کمیت و یکا در این فصل آشنا می‌کنیم:

کمیت: هر پدیدهٔ فیزیکی که قابلیت افزایش یا کاهش داشته باشد و بتوان مقدار آن را اندازه‌گیری کرد، **کمیت** نام دارد.

مثال دمای هوا، فاصلهٔ دو جسم، سرعت یک جسم و ... ، از مواردی هستند که می‌توانند افزایش یا کاهش یابند و می‌توان به آن‌ها مقدار اختصاص داد و در نتیجه کمیت محسوب می‌شوند.

تذکر پدیده‌هایی مانند خوشحالی یک نفر، شور و اشتیاق افراد برای انجام یک کار و ... که مقدار آن‌ها را نمی‌توان اندازه‌گیری کرد، **کیفیت** نامیده می‌شود.

یکا: یکای هر کمیت، مقدار ثابتی از همان کمیت است که واحد اندازه‌گیری آن کمیت محسوب می‌شود. به‌طور مثال یکای کمیت فاصلهٔ دو جسم، متر است و یا یکای اندازه‌گیری سرعت یک جسم، $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

دقت: اگر برای هر کمیت یکای تعریف شده و معینی نداشته باشیم، ارقام حاصل از اندازه‌گیری آن برای ما بی‌معنا خواهد بود. مثلاً ما یک متر را می‌شناسیم و به همین دلیل ارتفاع ۲۰ متری برای یک درخت را می‌توانیم تجسم کنیم.

تذکر یکای انتخاب شده برای یک کمیت، باید مقداری ثابت بوده و در شرایط فیزیکی مختلف تغییر نکند. هم‌چنین باید قابلیت بازتولید در مکان‌های مختلف را داشته باشد.

کمیت و یکاهای اصلی و فرعی

همان‌طور که می‌دانیم بین کمیت‌های مختلف توسط قوانین فیزیک، روابط ریاضی برقرار می‌شود. این روابط به ما اجازه می‌دهند بعضی از کمیت‌ها را برحسب کمیت‌های دیگر بیان کنیم و نیازی به تعریف تعداد زیادی کمیت و یکای اصلی نداشته باشیم. از این رو کمیت‌ها را به دو دستهٔ اصلی و فرعی تقسیم می‌کنیم:

۱ کمیت‌هایی که یکای آن‌ها به‌طور مستقل تعریف شده‌اند و می‌توانیم تمام کمیت‌های دیگر را برحسب آن‌ها تعریف کنیم، **کمیت‌های اصلی** نام دارند و به یکای آن‌ها **یکای اصلی** می‌گوییم.

در فیزیک دبیرستان، معمولاً از سیستم بین‌المللی (SI) برای اندازه‌گیری کمیت‌ها استفاده می‌شود. کمیت‌های اصلی تعریف‌شده در این سیستم، به همراه یکای (واحد) آن کمیت‌ها در جدول زیر آورده شده است:

کمیت اصلی	جرم (m)	طول (L)	زمان (t)	دما (T)	مقدار ماده (M)	جریان الکتریکی (I)	شدت روشنایی (I_v)
یکای اصلی مرتبط	کیلوگرم (kg)	متر (m)	ثانیه (s)	کلوین (K)	مول (mol)	آمپر (A)	کندلا (cd)

۲ سایر کمیت‌های فیزیک، کمیت‌هایی هستند که یکای (واحد) آن‌ها مستقل نبوده و یکای آن‌ها برحسب یکای کمیت‌های اصلی بیان می‌شود. این کمیت‌ها، **کمیت‌های فرعی** نام دارند و در جدول زیر، برخی از کمیت‌های فرعی به همراه یکاهای آن‌ها آورده شده است. به وابستگی یکای این کمیت‌ها به یکاهای اصلی دقت کنید:

چند کمیت فرعی	سرعت	شتاب	فشار	حجم	سطح
یکای مرتبط	متر بر ثانیه m/s	متر بر مجذور ثانیه m/s^2	پاسکال یا کیلوگرم بر متر مجذور ثانیه Pa یا $kg/m.s^2$	مترمکعب m^3	مترمربع m^2

نکته در برخی از مواقع در سؤالات خواسته می‌شود که یکای یک کمیت فرعی را برحسب یکاهای فرعی و اصلی دیگر بیان کنیم، به‌عنوان یک روش ساده برای پاسخ به این‌گونه سؤالات، ابتدا با توجه به گزینه‌ها، یک رابطهٔ فیزیکی مناسب را بین آن‌ها به‌خاطر آورده و پارامتری که واحد آن موردنظر ماست را در یک طرف تساوی نگه داشته و سایر پارامترها را به‌طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم. در ادامه و به جای کمیت‌های رابطه، یکای آن‌ها را می‌گذاریم تا یکای (واحد) کمیت موردنظرمان را به‌دست آوریم.

تمرین۱ واحد کمیت سرعت را چگونه می‌توان به واحد کمیت‌های اصلی مرتبط کرد؟

پاسخ ابتدا رابطه‌ای از سرعت را به‌خاطر می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \text{واحد سرعت} \equiv \frac{\text{واحد } \Delta x \text{ (جابه‌جایی)}}{\text{واحد } \Delta t \text{ (زمان)}} \equiv \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}} (m/s)$$

تمرین۲ واحد کمیت نیرو (یعنی نیوتون) را چگونه می‌توان به واحد کمیت‌های اصلی مرتبط کرد؟

پاسخ با توجه به رابطهٔ $F = ma$، می‌توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow \text{واحد نیرو (نیوتون)} \equiv \text{(واحد جرم)} \times \text{(واحد شتاب)} \Rightarrow N \equiv kg.\frac{m}{s^2}$$

کمیت‌های نرده‌ای و برداری

در فیزیک کمیت‌ها از یک دیدگاه دیگر به دو دستهٔ نرده‌ای (اسکالر) و برداری تقسیم می‌شوند. در ادامه می‌خواهیم با این کمیت‌ها آشنا شویم:

gajmarket.com

کمیت‌های نرده‌ای (اسکالر)

کمیت‌هایی که برای نشان دادن آن‌ها از یک عدد و یکای مناسب آن کمیت استفاده می‌کنیم و جمع، تفریق و ضرب آن‌ها از قوانین جبری پیروی می‌کند، **کمیت‌های نرده‌ای** محسوب می‌شوند.

کمیت نرده‌ای طول: ۱۶۵ (عدد) cm (یکا)

تذکر برخی از کمیت‌های نرده‌ای مهم در فیزیک دبیرستان عبارت‌اند از:

زمان، جرم، طول، تندی، دما، فشار، حجم، مساحت، چگالی، مقاومت، ولتاژ، شدت جریان، بار الکتریکی، انرژی، کار، توان و ...

کمیت‌های برداری

کمیت‌هایی که برای نشان دادن آن‌ها علاوه بر عدد و یکای مناسب آن کمیت، از جهت نیز استفاده می‌شود و این کمیت‌ها از قاعدهٔ جمع برداری نیز پیروی می‌کنند، **کمیت‌های برداری** نام دارند.

کمیت برداری شتاب: ۱۰ (عدد) $\frac{m}{s^2}$ (یکا) (به طرف شرق) (جهت)

تذکر برخی از کمیت‌های برداری مهم در فیزیک دبیرستان عبارت‌اند از:

جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و ...

تذکر از حاصل‌ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک کمیت برداری، یک کمیت برداری جدید به‌دست می‌آید. به‌طور مثال کمیت برداری نیرو، از حاصل‌ضرب جرم که یک کمیت نرده‌ای است در کمیت برداری شتاب به‌دست می‌آید. در مورد جهت بردارها نیز داریم:

$\vec{F}$ و $\vec{a}$، همواره در جهت یک‌دیگر هستند. $\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow[\text{مثبت است.}]{\text{جرم، عددی}}$

$\vec{A}$ و $\vec{M}$، همواره در خلاف جهت یک‌دیگر هستند. $\vec{A} = K\vec{M} \xrightarrow[\text{منفی باشد.}]{\text{اگر } K}$

سازگاری یکاها در یک رابطهٔ فیزیکی

به‌طور کلی در یک رابطهٔ فیزیکی، یکاهای طرفین رابطه باید با یک‌دیگر معادل باشند. برای این منظور، اگر بخواهیم طرفین یک رابطه برحسب یکاهای SI باشد، باید یکای کمیت‌های داده‌شده در رابطه را به یکاهای SI تبدیل کنیم. به‌عنوان مثال اگر جرم یک جسم برابر ۱۰۰ گرم و شتاب آن برابر ۲ متر بر مربع ثانیه باشد، به منظور سازگاری یکاها در دو طرف رابطهٔ $F = ma$، باید یکای جرم را برحسب کیلوگرم بنویسیم. در این صورت یکای نیرو را می‌توان برحسب یکای نیوتون بیان کرد:

$$F = ma = (0.1\ \text{kg}) \times \left(2\frac{m}{s^2}\right) = 0.2\text{N}$$

(0.1 kg: جرم برحسب کیلوگرم، یکای SI جرم؛ $\frac{m}{s^2}$: یکای SI شتاب؛ 0.2N: یکای SI نیرو)

برای درک بهتر سازگاری یکاها تو یه معادله، به مثال زیر توجه کنید:

مثال **اگر در معادلهٔ $x = at^2 + bt + c$، نماد x معرف طول و نماد t معرف زمان باشد، یکاهای مربوط به a، b و c را به دست آورید.**

موضوع بسیار مهمی که باید به آن توجه داشته باشیم این است که اگر چند عبارت را بتوان با هم جمع کرد، لزوماً یکاهای هر کدام از آن‌ها باید با یک‌دیگر برابر باشد.

با توجه به این موضوع، یکای هر کدام از عبارت‌های at^2، bt و c اولاً باید با هم یکسان باشد تا این عبارات با هم جمع‌پذیر باشند، ثانیاً با توجه به این‌که عبارت سمت چپ رابطه، معرف طول (x) می‌باشد، یکای هر کدام از عبارت‌های سمت راست نیز باید برحسب متر (m) باشد و در نهایت می‌توان گفت:

$$x = at^2 + bt + c \Rightarrow \begin{cases} x \text{ یکای } \equiv at^2 \text{ یکای عبارت } \Rightarrow m \equiv (\text{یکای } a) \times (s)^2 \Rightarrow a \text{ یکای } \equiv \frac{m}{s^2} \\ x \text{ یکای } \equiv bt \text{ یکای عبارت } \Rightarrow m \equiv (\text{یکای } b) \times (s) \Rightarrow b \text{ یکای } \equiv \frac{m}{s} \\ x \text{ یکای } \equiv c \text{ یکای عبارت } \Rightarrow c \text{ یکای } \equiv m \end{cases}$$

(x: برحسب متر (m)؛ at^2: m؛ bt: m؛ c: m)

مجموعهٔ یکاهای مورد توافق بین‌المللی را به اختصار یکاهای SI می‌نامند که معمولاً یکاهایی هستند که در مجامع علمی دنیا مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکای کمیت‌های اصلی به صورت مستقل تعریف می‌شود و یکای کمیت‌های فرعی را می‌توان برحسب یکاهای اصلی تعیین کرد، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۴ ۳ قوانین فیزیک با کمک **روابط ریاضی**، کمیت‌های مختلف فیزیکی را به یک‌دیگر مرتبط می‌سازند. با توجه به این موضوع، یکای کمیت‌های فرعی برحسب یکای کمیت‌های اصلی بیان می‌شوند و نیازی به تعریف تعداد زیادی یکا (واحد) برای کمیت‌های مختلف نمی‌باشد.

۱۵ ۳ یکای اندازه‌گیری یک کمیت باید در شرایط فیزیکی تعیین‌شده برای آن تغییر نکند و قابلیت تولید در مکان‌های مختلف را داشته باشد. هم‌چنین اصلی‌ترین ویژگی کمیت‌های اصلی، تعریف‌شدن یکای مستقل برای آن‌ها می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۶ ۲ اگر یکای طول را به صورت فاصلهٔ نوک بینی تا نوک انگشتان و یکای زمان را تعداد ضربان قلب شخص در نظر بگیریم، مشکل اصلی این انتخاب، آن است که این یکاها کاملاً تغییرپذیر است. از این‌رو این موارد را نباید یکای کمیت‌های طول و زمان در نظر گرفت.

۱۷ ۳ طول و جرم از کمیت‌های اصلی هستند، در حالی که مساحت یک کمیت فرعی است، زیرا یکای آن (مترمربع) وابسته به یکای طول یعنی متر (m) است.

تذکر

در مورد نیرو نیز همین موضوع برقرار است و یکای آن برحسب کمیت‌های فرعی بیان می‌شود:

$$F = ma \Rightarrow \text{واحد نیرو} \equiv \text{کیلوگرم} \times \frac{\text{متر}}{\text{مجذور ثانیه}} \Rightarrow 1N \equiv 1kg.m/s^2$$

۱۸ ۳ با توجه به تعریف کمیت و یکا که درخلاصه نکات (۲) به آن اشاره کردیم و هم‌چنین با در نظر گرفتن جدول زیر، گزینهٔ (۳) صحیح است.

کمیت اصلی	جرم	طول	زمان	دما	مقدار ماده	شدت جریان	شدت روشنایی
یکای اصلی	کیلوگرم	متر	ثانیه	کلوین	مول	آمپر	کندلا

۱۹ ۳ از بین کمیت‌های داده‌شده، کمیت‌های سرعت و نیرو کمیتی برداری و سایر کمیت‌ها نرده‌ای هستند (بنابراین ۲ کمیت برداری است).
هم‌چنین از بین کمیت‌های داده شده، کمیت‌های دما، زمان و طول کمیتی اصلی و سایر کمیت‌ها فرعی هستند (بنابراین ۳ کمیت اصلی است).

۲۰ ۲ برای حل این سؤال، هر یک از گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

(۱

$$F = ma \Rightarrow \text{یکای نیرو} \equiv \underbrace{kg}_{\text{یکای جرم}} . \underbrace{\frac{m}{s^2}}_{\text{یکای شتاب}}$$

(۲

$$W = Fd \Rightarrow \text{یکای کار یا انرژی} \equiv \text{یکای نیرو} \times \text{یکای جابه‌جایی} \Rightarrow J \equiv kg.\frac{m}{s^2} \times m = kg.\frac{m^2}{s^2}$$

$$\text{یکای مساحت} \equiv m^2 \qquad \text{یکای نیرو} \equiv kg.\frac{m}{s^2}$$

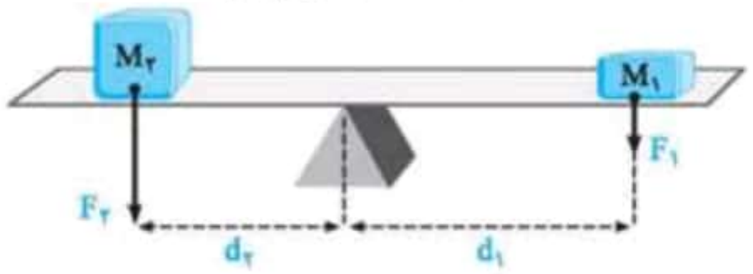
بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. طبق علوم پایهٔ نهم: $P = \frac{F}{A} \Rightarrow \text{یکای فشار} \equiv \frac{\text{یکای نیرو}}{\text{یکای مساحت}} = \frac{kg.\frac{m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m.s^2}$

۳) شدت روشنایی کمیتی اصلی است و یکای آن کَندِلا (شمع) است.

۴) تندی یک جسم برابر مسافت طی شده توسط آن در واحد زمان است و یکای آن m/s می‌باشد.

$$\text{یکای تندی} \equiv \frac{\text{یکای مسافت}}{\text{یکای زمان}} = \frac{m}{s}$$

۲۱ ۲ گشتاور نیرو عاملی است که باعث چرخش می‌شود. مثلاً در شکل مقابل، نیروی وزن وارد بر هر یک از وزنه‌ها سعی در چرخاندن اهرم روی تکیه‌گاه دارد.



گشتاور نیرو کمیتی برداری است و همان‌گونه که در علوم پایهٔ نهم خوانده‌اید، بزرگی آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

یکای نیرو × یکای فاصله ≡ یکای گشتاور نیرو ⇒ اندازهٔ نیرو × فاصلهٔ نقطه اثر نیرو تا محور چرخش = اندازهٔ گشتاور نیرو

$$F = ma \Rightarrow \text{یکای نیرو} \equiv kg.\frac{m}{s^2} \Rightarrow \text{یکای گشتاور نیرو} \equiv m \times \left(kg.\frac{m}{s^2}\right) = kg.\frac{m^2}{s^2}$$

۲۲ ۳ برای حل این سؤال، یکاهای انرژی و نیرو را برحسب یکاهای اصلی محاسبه می‌کنیم:

محاسبهٔ یکای نیرو:

$$F = ma \Rightarrow \text{یکای نیرو} \equiv kg.\frac{m}{s^2}$$

محاسبهٔ یکای انرژی:

$$\text{کار} = \text{نیرو} \times \text{جابه‌جایی} \Rightarrow \text{یکای انرژی (یا کار)} \equiv \text{یکای نیرو} \times \text{یکای جابه‌جایی} \Rightarrow \text{یکای انرژی} \equiv kg.\frac{m}{s^2} \times m = kg.\frac{m^2}{s^2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، برای تعریف یکای کمیت‌های نیرو و انرژی، از ۳ یکای اصلی kg، m و s استفاده می‌کنیم، بنابراین $\alpha = \beta = 3$ است. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{3} = 1$

www.gajmarket.com

۳ ۲۳ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: یکای نیرو در SI برابر است با:

$$F = ma \Rightarrow F\ \text{یکای} \equiv kg.\frac{m}{s^2}$$

گام دوم: یکای پارامتر k برابر است با (یکای مکان متحرک (x) در SI، متر است):

$$k = -\frac{F}{x} \Rightarrow k\ \text{یکای} \equiv \frac{kg.\frac{\cancel{m}}{s^2}}{\cancel{m}} \equiv \frac{kg}{s^2}$$

این موضوع یعنی یکای k، معادل با کیلوگرم بر مربع ثانیه است.

۳ ۲۴ برای حل این سؤال، یکای نیرو را برحسب یکاهای kg، m و s به‌دست می‌آوریم.

$$F = ma \Rightarrow \text{یکای نیرو} \equiv kg.\frac{m}{s^2} = \underset{b}{kg}^{1} \times \underset{c}{m}^{1} \times \underset{d}{\left(\frac{1}{s}\right)}^{2} \Rightarrow \alpha = 1\ ,\ \beta = 1\ ,\ \gamma = 2$$

۴ ۲۵ می‌دانیم وقتی کمیتی برابر حاصل جمع چند کمیت دیگر است، یکای هر یک از جملات جمع‌شونده باید با یکای این کمیت برابر باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$A = \frac{B^2}{C} + CDE \Rightarrow A\ \text{یکای} \equiv \left(\frac{B^2}{C}\right)\ \text{یکای} \Rightarrow J \equiv \frac{B^2\ \text{یکای}}{kg}$$

با توجه به رابطهٔ $W = Fd$، می‌دانیم که یکای ژول معادل $kg.\frac{m^2}{s^2}$ است، بنابراین داریم:

$$kg.\frac{m^2}{s^2} \equiv \frac{B^2\ \text{یکای}}{kg} \Rightarrow B^2\ \text{یکای} \equiv kg^2.\frac{m^2}{s^2}$$

از طرفی یکای A با یکای CDE نیز باید برابر باشد، پس می‌توان نوشت:

$$A\ \text{یکای} \equiv (CDE\ \text{یکای}) \Rightarrow J \equiv kg \times (DE\ \text{یکای}) \Rightarrow kg.\frac{m^2}{s^2} \equiv kg \times (DE\ \text{یکای}) \Rightarrow DE\ \text{یکای} \equiv \frac{m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B^2}{DE}\right)\ \text{یکای کمیت} \equiv \frac{B^2\ \text{یکای}}{DE\ \text{یکای}} = \frac{kg^2.\frac{m^2}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}} = kg^2$$

۱ ۲۶ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ — آشنایی با پیشوندها و نمادگذاری علمی (تست‌های ۲۶ تا ۴۰)

در این خلاصه نکات می‌خواهیم سه مهارت پرکاربرد زیر را به‌دست آوریم:

مهارت اول (استفاده از پیشوندها)

در فیزیک گاهی اوقات که کمیت اندازه‌گیری‌شده خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ است، اگر بخواهیم از یکای استاندارد آن استفاده کنیم، باید از اعداد با رقم‌های زیاد استفاده کنیم. برای جلوگیری از این موضوع از پیشوندها استفاده می‌کنیم، این پیشوندها همگی به‌صورت 10^n هستند و کار ما را در نوشتن اعداد ساده‌تر می‌سازند. به‌عنوان مثال به جای این‌که بگوییم ۱۰۰۰ متر، می‌گوییم یک کیلومتر یا به جای ۰/۰۱ متر از یک سانتی‌متر استفاده می‌کنیم.

تذکر پیشوندهای مورد استفاده در فیزیک می‌توانند پیشوندهای بزرگ‌تر از واحد (برای مقادیر بزرگ) و یا کوچک‌تر از واحد (برای مقادیر کوچک) باشند. در زیر پیشوندهای مهم را آورده‌ایم:

پیشوندهای بزرگ‌تر از واحد ⇐

نام	ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا
نماد	T	G	M	k	h	da
معنا	$\times 10^{12}$	$\times 10^{9}$	$\times 10^{6}$	$\times 10^{3}$	$\times 10^{2}$	$\times 10^{1}$

پیشوندهای کوچک‌تر از واحد ⇐

نام	پیکو	نانو	میکرو	میلی	سانتی	دسی
نماد	p	n	μ	m	c	d
معنا	$\times 10^{-12}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-6}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$

پیشوندهای دیگه‌ای هم هست که نسبت به پیشوندهایی که گفتیم کاربردش کم‌تره و حفظی نیست، چندتاشو ببینید:

نام	نماد	معنا
یوتا	Y	$\times 10^{24}$
زِتا	Z	$\times 10^{21}$
اِگزا	E	$\times 10^{18}$
پِتا	P	$\times 10^{15}$

پیشوندهای بزرگ‌تر از واحد ⇐

نام	نماد	معنا
یوکتو	y	$\times 10^{-24}$
زِپتو	z	$\times 10^{-21}$
آتو	a	$\times 10^{-18}$
فِمتو	f	$\times 10^{-15}$

پیشوندهای کوچک‌تر از واحد ⇐

مهارت دوم (نمایش عددها به کمک نمادگذاری علمی)

یک روش دیگر جهت نمایش اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک، استفاده از نمادگذاری علمی است. در این روش مقدار یک پارامتر را به‌صورت $A = a \times 10^{\pm n}$ نمایش داده که a یک عدد حقیقی $(1 \le a < 10)$ و n یک عدد طبیعی است. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید:

(۱) $0/000000\underbrace{12}_{\text{۶ رقم}} = 1/2 \times 10^{-6}$

(۲) $\underbrace{12000}_{\text{۴ رقم}} = 1/2 \times 10^{4}$

(۳) $0/00\underbrace{4}_{\text{۳ رقم}}0801 = 4/0801 \times 10^{-3}$

(۴) $\underbrace{10348001}_{\text{۷ رقم}} = 1/0348001 \times 10^{7}$

توجه
- ممیز را به سمت راست (جلو) جابه‌جا کنیم ⇐ $10^{n}(n<0)$ ⇐ مثال‌های (۱) و (۳)
- ممیز را به سمت چپ (عقب) جابه‌جا کنیم ⇐ $10^{n}(n>0)$ ⇐ مثال‌های (۲) و (۴)

مهارت سوم (استراتژی تبدیل یکا در فیزیک)

در بسیاری از اوقات در حل مسائل فیزیکی، باید یک کمیت را از یک مقیاس به مقیاس دیگر تبدیل کنیم. به‌طور مثال فرض کنید می‌خواهیم ۱۲ سانتی‌متر را برحسب متر بازنویسی کنیم. در این مواقع، از دو استراتژی زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

استراتژی ۱: همان‌طور که می‌دانیم هر سانتی‌متر، 10^{-2} متر است. بنابراین خیلی سریع به کمک شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم:

$$1\underbrace{c}_{\text{یعنی } 10^{-2}}m \equiv 1 \times 10^{-2} m = 10^{-2} m$$

$$x = 12cm \xrightarrow[\text{به متر}]{\text{تبدیل سانتی‌متر}} x = 12 \times 10^{-2} m = 0/12m$$

استراتژی ۲: در این روش که در کتاب درسی به آن اشاره شده است، از یک **تبدیل زنجیره‌ای** استفاده می‌کنیم. برای این منظور، اندازهٔ کمیت موردنظر را در یک **عامل تبدیل** (یعنی نسبتی از یکاها که برابر **یک** است) ضرب می‌کنیم. برای مثال، چون $1m$ برابر $100cm$ است، داریم:

$$\frac{1m}{100cm} = 1 \quad , \quad \frac{100cm}{1m} = 1$$

بنابراین، هر دو کسر بالا که برابر یک هستند را می‌توان به عنوان عامل تبدیل به‌کار برد (دقت کنید که ذکر یکاها در صورت و مخرج کسر الزامی است). از آنجا که ضرب کردن هر کمیت در عدد یک، اندازهٔ آن کمیت را تغییر نمی‌دهد، هرگاه عامل تبدیلی را مناسب بدانیم، می‌توانیم از آن برای تبدیل یکا استفاده کنیم. برای مثال، یکای cm را در عدد $12cm$، به‌صورت زیر به m تبدیل می‌کنیم:

$$12cm = (12cm)(1) = (12\,\cancel{cm})\underbrace{\left(\frac{1m}{100\,\cancel{cm}}\right)}_{\text{عامل تبدیل}} = 0/12m$$

برای تسلط بیشتر بر روی مفاهیم فوق، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین) **۷۲ کیلومتر بر ساعت چند متر بر ثانیه است؟**

پاسخ با هر یک از دو استراتژی مطرح شده در فوق، به این سؤال پاسخ می‌دهیم:

استراتژی ۱: نحوهٔ حل به شکل زیر است:

$$\text{تندی}: v = 72\frac{km}{h} \xrightarrow[\text{تبدیل ساعت به ثانیه در مخرج}]{\text{تبدیل کیلومتر به متر در صورت}} v = 72 \times \frac{1000m}{60 \times 60s} = 72 \times \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s}$$

gajmarket.com

استراتژی ۲: با کمک دو عامل تبدیل، می‌توان $\frac{km}{h}$ را به $\frac{m}{s}$ تبدیل کرد:

$$v = ۷۲\frac{km}{h} = (۷۲\frac{km}{h}) \times (۱) \times (۱) = (۷۲\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}) \times \boxed{(\frac{۱\cancel{h}}{۳۶۰۰s})} \times \boxed{(\frac{۱۰۰۰m}{۱\cancel{km}})} = ۲۰\frac{m}{s}$$

عامل تبدیل برای تبدیل h به s ← | → عامل تبدیل برای تبدیل km به m

تذکر در تمرین ۱، از شیوهٔ تبدیل یکای $\frac{km}{h}$ به $\frac{m}{s}$ در استراتژی دوم که مدنظر کتاب پایهٔ دهم است، موارد بسیار مهم زیر برداشت می‌شود:

۱) با توجه به این‌که یکای km به m و یکای h به s باید تبدیل شود، عملاً به دو عامل تبدیل نیاز داریم.

۲) در نوشتن عامل تبدیل مرتبط با تبدیل واحد h به s، چون h در مخرج یکای $\frac{km}{h}$ است، در عامل تبدیل برای ساده شدن، h باید در صورت و s در مخرج باشد. همین تفکر برای km نیز حاکم است. به ساده شدن‌ها در رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$۷۲\frac{km}{h} = ۷۲\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{۱\cancel{h}}{۶۰ \times ۶۰\cancel{s}} \times \frac{۱۰۰۰\cancel{m}}{۱\cancel{km}} = ۲۰\frac{m}{s}$$

ثانیه می‌ماند ← | → متر می‌ماند

تمرین ۲ **جرم جسمی ۰/۰۰۵ میلی‌گرم اندازه‌گیری شده است. جرم این جسم به‌صورت نمادگذاری علمی چند مگاگرم است؟**

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا میلی‌گرم را به گرم و سپس گرم را به مگاگرم تبدیل می‌کنیم:

$$m = ۰/۰۰۵ mgr = ۰/۰۰۵ \times ۱۰^{-۳} gr \xrightarrow[\text{مگاگرم}]{\text{تبدیل گرم به}} m = ۰/۰۰۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۶} Mgr = ۰/۰۰۵ \times ۱۰^{-۹} Mgr$$

تذکر به‌طور کلی این‌گونه به‌خاطر بسپاریم که برای تبدیل واحد بزرگ مگاگرم به واحد کوچک گرم (قطعه‌های کوچک‌تر) باید تعداد آن‌ها افزایش یابد، یعنی باید در $۱۰^{\text{عدد مثبت}}$ ضرب کنیم. از طرفی برای تبدیل واحد کوچک گرم به واحد بزرگ مگاگرم (قطعه‌های بزرگ‌تر) باید تعداد آن‌ها کاهش یابد، یعنی در $۱۰^{\text{عدد منفی}}$ ضرب کنیم.

$$\underbrace{۱Mgr}_{\text{واحد بزرگ}} = ۱۰^{۶}\ \underbrace{gr}_{\text{واحد کوچک}} \Rightarrow \underbrace{۱gr}_{\text{واحد کوچک}} = ۱۰^{-۶}\ \underbrace{Mgr}_{\text{واحد بزرگ}}$$

گام دوم: عدد به‌دست آمده را به شیوهٔ نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$m = \underbrace{۰/۰۰۵}_{\text{۳ رقم}} \times ۱۰^{-۹} Mgr = ۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۹} Mgr = \underbrace{۵}_{۱ \le a < ۱۰} \times ۱۰^{\overbrace{(-۱۲)}^{\text{عدد صحیح}}} Mgr$$

تمرین ۳ **زمان انجام یک واکنش بسیار سریع، ۴۰ میکروثانیه است. زمان انجام این واکنش مطابق شیوهٔ نمادگذاری علمی، چند پیکوثانیه است؟** (تألیفی)

۱) ۴۰×۱۰^{۶} ۲) ۴×۱۰^{۷} ۳) ۴۰×۱۰^{۳} ۴) ۴×۱۰^{۴}

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا روند تبدیل واحد را انجام می‌دهیم. به‌همین منظور میکروثانیه را به ثانیه و سپس ثانیه را به پیکوثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$t = ۴۰\mu s \xrightarrow[\text{به ثانیه}]{\text{تبدیل میکروثانیه}} t = ۴۰ \times (۱۰^{-۶}\ s) \xrightarrow[\text{به پیکوثانیه}]{\text{تبدیل ثانیه}} t = ۴۰ \times ۱۰^{-۶} \times (۱۰^{۱۲}\ ps) = ۴۰ \times ۱۰^{۶}\ ps$$

حال مقدار به‌دست آمده را به روش نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$t = \underbrace{۴۰}_{\text{یک رقم}} \times ۱۰^{۶}\ ps = ۴ \times \overbrace{۱۰}^{(۱)} \times ۱۰^{۶}\ ps = ۴ \times ۱۰^{۷}\ ps$$ (گزینهٔ ۲)

دقت:

$$۱ps = ۱۰^{-۱۲}\ s \xrightarrow{\text{یا}} ۱s = ۱۰^{+۱۲}\ ps$$

می‌دانیم که هر لیتر (معادل با) ۱۰۰۰ سانتی‌متر مکعب است و داریم:

$$V = ۱m\ Lit \xrightarrow[\text{به لیتر}]{\text{تبدیل میلی‌لیتر}} V = ۱۰^{-۳}\ Lit \xrightarrow[\text{سانتی‌متر مکعب}]{\text{تبدیل لیتر به}} V = ۱۰^{-۳} \times (۱۰^{۳}\ cm^{۳}) = ۱cm^{۳}$$

برای پیدا کردن رابطهٔ بین دسی‌متر مکعب و لیتر داریم ($۱dm = ۱۰^{-۱}m$ (دسی‌متر) یا $۱m = ۱۰dm$):

$$V = ۱dm^{۳} \xrightarrow[\text{به مترمکعب}]{\text{تبدیل دسی‌مترمکعب}} V = ۱ \times (۱۰^{-۱}m)^{۳} = ۱۰^{-۳}m^{۳} \xrightarrow[\text{به لیتر}]{\text{تبدیل مترمکعب}} V = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۳}\ Lit = ۱Lit$$

۲۷ ۳ ابتدا جرم هسته را برحسب نانوگرم به‌دست می‌آوریم و سپس آن را به صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$\text{جرم هسته} = ۱۶۷۷\times۱۰^{-۳۰}\,\underbrace{\text{kg}}_{\text{یکای SI جرم}} \xrightarrow{\text{تبدیل kg به gr}} ۱۶۷۷\times۱۰^{-۳۰}\times(۱۰^{۳}\text{gr}) \xrightarrow{\text{تبدیل gr به ng}} ۱۶۷۷\times۱۰^{-۳۰}\times۱۰^{۳}\times(۱۰^{۹}\text{ng}) = ۱۶۷۷\times۱۰^{-۱۸}\text{ng}$$

$$\Rightarrow \text{جرم هسته به صورت نمادگذاری علمی} = ۱/۶۷۷\times۱۰^{-۱۵}\text{ng}$$

۲۸ ۳ ابتدا فاصلهٔ بین دو شهر را برحسب پیکومتر (pm) به‌دست می‌آوریم و سپس آن را به صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$\text{فاصله} = ۷۸\text{km} \xrightarrow{\text{تبدیل m به km}} ۷۸\times(۱۰^{۳}\text{m}) \xrightarrow{\text{تبدیل pm به m}} ۷۸\times۱۰^{۳}\times(۱۰^{۱۲}\text{pm}) = ۷۸\times۱۰^{۱۵}\text{pm}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله به صورت نمادگذاری علمی} = ۷/۸\times۱۰^{۱۶}\text{pm} \Rightarrow n = ۱۶$$

۲۹ ۳ برای حل این سؤال، اعداد داده شده در هر یک از گزینه‌ها را برحسب کیلوگرم محاسبه می‌کنیم:

(۱)
$$۱/۲۵\times۱۰^{۱۱}\mu\text{g} \xrightarrow{\text{تبدیل gr به μg}} ۱/۲۵\times۱۰^{۱۱}\times(۱۰^{-۶}\text{gr}) \xrightarrow{\text{تبدیل kg به gr}} ۱/۲۵\times۱۰^{۱۱}\times۱۰^{-۶}\times(۱۰^{-۳}\text{kg}) = ۱۲۵\text{kg}$$

(۲)
$$۵\times۱۰^{۷}\text{mg} \xrightarrow{\text{تبدیل gr به mg}} ۵\times۱۰^{۷}\times(۱۰^{-۳}\text{gr}) \xrightarrow{\text{تبدیل kg به gr}} ۵\times۱۰^{۷}\times۱۰^{-۳}\times(۱۰^{-۳}\text{kg}) = ۵۰\text{kg}$$

(۳)
$$۷/۵\times۱۰^{۱۲}\text{ng} \xrightarrow{\text{تبدیل gr به ng}} ۷/۵\times۱۰^{۱۲}\times(۱۰^{-۹}\text{gr}) \xrightarrow{\text{تبدیل kg به gr}} ۷/۵\times۱۰^{۱۲}\times۱۰^{-۹}\times(۱۰^{-۳}\text{kg}) = ۷/۵\text{kg}$$

(۴)
$$۴/۵\times۱۰^{-۴}\text{Gg} \xrightarrow{\text{تبدیل gr به Gg}} ۴/۵\times۱۰^{-۴}\times(۱۰^{۹}\text{gr}) \xrightarrow{\text{تبدیل kg به gr}} ۴/۵\times۱۰^{-۴}\times۱۰^{۹}\times(۱۰^{-۳}\text{kg}) = ۴۵۰\text{kg}$$

طبق صورت سؤال، حداکثر جرمی که می‌توان بر روی میز شیشه‌ای قرار داد برابر ۲۵kg است. فقط در گزینهٔ (۳)، جرم جسم از ۲۵kg کم‌تر است و در نتیجه شیشهٔ میز نمی‌شکند.

۳۰ ۲ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳۱ ۲ برای مقایسهٔ دو مقدار، باید هر دو برحسب یک واحد یکسان بیان شوند؛ بنابراین در هر یک گزینه‌ها، باید کمیت‌ها را با واحد یکسان محاسبه کنیم.

(۱)
$$۳/۸\times۱۰^{-۴}\text{km} \xrightarrow{\text{تبدیل m به km}} ۳/۸\times۱۰^{-۴}\times(۱۰^{۳}\text{m}) \xrightarrow{\text{تبدیل dm به m}} ۳/۸\times۱۰^{-۴}\times۱۰^{۳}\times(۱۰\text{dm}) = ۳/۸\text{dm} < ۵۴۰\text{dm}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

(۲)
$$۹/۸\times۱۰^{۶}\text{Mm} \xrightarrow{\text{تبدیل m به Mm}} ۹/۸\times۱۰^{۶}\times(۱۰^{۶}\text{m}) \xrightarrow{\text{تبدیل pm به m}} ۹/۸\times۱۰^{۶}\times۱۰^{۶}\times(۱۰^{۱۲}\text{pm}) = ۹/۸\times۱۰^{۲۴}\text{pm} < ۲/۷\times۱۰^{۲۵}\text{pm}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

(۳)
$$۱۰۰\text{هکتار} \xrightarrow{\text{تبدیل هکتار } (\text{hm}^۲) \text{ به } \text{m}^۲} ۱۰۰\times(۱۰۰\text{m})^۲ \xrightarrow{\text{تبدیل } \text{m}^۲ \text{ به دکامتر مربع } (\text{dam}^۲)} ۱۰۰\times۱۰^{۴}\times(۱۰^{-۱}\text{dam})^۲ = ۱۰۰۰۰\text{dam}^۲$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

(۴)
$$۱\text{Gm}^۲ \xrightarrow{\text{تبدیل } \text{m}^۲ \text{ به } \text{Gm}^۲} ۱\times(۱۰^{۹}\text{m})^۲ \xrightarrow{\text{تبدیل } \text{km}^۲ \text{ به } \text{m}^۲} ۱۰^{۱۸}\times(۱۰^{-۳}\text{km})^۲ = ۱۰^{۱۲}\text{km}^۲ > ۱۰۰۰\text{km}^۲$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳۲ ۱ ابتدا حجم و ضخامت گلبول قرمز را به ترتیب برحسب $\text{m}^۳$ و m محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم}: V = ۱۰^{۱۱}\text{nm}^۳ = ۱۰^{۱۱}\times(۱۰^{-۹}\text{m})^۳ = ۱۰^{-۱۶}\text{m}^۳$$

$$\text{ضخامت}: h = ۲/۵\mu\text{m} = ۲/۵\times(۱۰^{-۶}\text{m}) = ۲/۵\times۱۰^{-۶}\text{m}$$

$$V = A.h \Rightarrow ۱۰^{-۱۶} = A\times۲/۵\times۱۰^{-۶} \Rightarrow A = \frac{۱۰^{-۱۶}}{۲/۵\times۱۰^{-۶}} = ۴\times۱۰^{-۱۱}\text{m}^۲$$

با توجه به خواستهٔ سؤال، سطح مقطع را برحسب میلی‌متر مربع محاسبه می‌کنیم:

$$A = ۴\times۱۰^{-۱۱}\text{m}^۲ \xrightarrow{\text{تبدیل } \text{m}^۲ \text{ به } \text{mm}^۲} ۴\times۱۰^{-۱۱}\times(۱۰^{۳}\text{mm})^۲ = ۴\times۱۰^{-۵}\text{mm}^۲$$

۳۳ ۳ برای به‌دست آوردن مساحت برحسب مترمربع $(\text{m}^۲)$، کافی است طول و عرض آن را برحسب متر (m) بنویسیم و داریم:

$$\begin{cases} \text{عرض صفحه} = ۹\text{nm} = ۹\times۱۰^{-۹}\text{m} \\ \text{طول صفحه} = ۰/۲\mu\text{m} = ۰/۲\times۱۰^{-۶}\text{m} \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت صفحهٔ مستطیلی} = \text{عرض}\times\text{طول} = ۰/۲\times۱۰^{-۶}\times۹\times۱۰^{-۹}\text{m}^۲ = ۱/۸\times۱۰^{-۱۵}\text{m}^۲$$

دقت کنید که مقدار به‌دست آمده برای مساحت با توجه به شیوهٔ نمادگذاری علمی صحیح است و نیاز به اصلاح ندارد.

gajmarket.com

۳۴ ۴ طبق صورت سؤال در هر ثانیه، $۲۰۰cm^۳$ آب هدر می‌رود، پس در هر ساعت، مقدار $۳۶۰۰ \times ۲۰۰cm^۳$ آب هدر می‌رود. در نتیجه در مدت زمان ۱۰ ساعت، مقدار $۱۰ \times ۳۶۰۰ \times ۲۰۰cm^۳$ آب به هدر خواهد رفت.

$$V = ۱۰ \times ۳۶۰۰ \times ۲۰۰cm^۳ \xrightarrow{\text{تبدیل } cm^۳ \text{ به } lit} ۱۰ \times ۳۶۰۰ \times ۲۰۰ \times (۱۰^{-۳}\,lit) = ۷۲۰۰lit$$: حجم آب هدر رفته

۳۵ ۱ برای محاسبهٔ قد کودک برحسب فوت، با انتخاب عامل تبدیل‌های مناسب، از روش تبدیل زنجیره‌ای به‌صورت زیر کمک می‌گیریم:

$$۱۵۲/۴cm = ۱۵۲/۴cm \times (۱) \times (۱) = ۱۵۲/۴\,cm \times \frac{۱\,inch}{۲/۵۴\,cm} \times \frac{۱ft}{۱۲\,inch} = ۵ft$$

۳۶ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به‌صورت زیر از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$۳۱۲km = ۳۱۲\,km \times \frac{۱۰۰۰m}{۱km} \times \frac{۱۰۰cm}{۱m} \times \frac{۱\,ذرع}{۱۰۴cm} = ۳ \times ۱۰^۵\ ذرع$$

از طرفی برای نمایش عدد برحسب فرسنگ، در ادامهٔ روند تبدیل زنجیره‌ای، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۳۱۲km = ۳۱۲km \times \frac{۱۰۰۰m}{۱km} \times \frac{۱۰۰cm}{۱m} \times \frac{۱\,ذرع}{۱۰۴cm} \times \frac{۱\,فرسنگ}{۶۰۰۰\,ذرع} = ۵ \times ۱۰^۱\ فرسنگ$$

۳۷ ۲ برای حل، از روش تبدیل زنجیره‌ای به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$۶۲۲۰۸kg = ۶۲۲۰۸kg \times \frac{۱۰۰۰gr}{۱kg} \times \frac{۱\,مثقال}{۴/۸۶gr} \times \frac{۱\,من\ تبریز}{۶۴۰\,مثقال} \times \frac{۱\,خروار}{۱۰۰\,من\ تبریز} = ۲۰۰\ خروار = ۲ \times ۱۰^۲\ خروار$$

۳۸ ۲ یکای نجومی، معادل میانگین فاصلهٔ زمین تا خورشید است و این یعنی فاصلهٔ متوسط زمین تا خورشید، برابر ۱AU می‌باشد.

۳۹ ۴ **گام اول:** ابتدا تندی ناوشکن را بر حسب متر بر ثانیه بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{تندی ناوشکن} = ۴۰۰\ گره = ۴۰۰\ گره \times \frac{۰/۵\frac{m}{s}}{۱\ گره} = ۲۰۰\frac{m}{s}$$

گام دوم: در ادامه، مسافت طی‌شده را برحسب متر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مسافت طی شده} = ۲\ مایل = ۲\ مایل \times \frac{۱۸۵۰m}{۱\ مایل} = ۳۷۰۰m$$

گام سوم: زمان موردنظر برابر است با:

$$\text{تندی} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان}} \Rightarrow ۲۰۰ = \frac{۳۷۰۰}{\text{زمان}} \Rightarrow \text{زمان} = ۱۸/۵s = ۱۸/۵ \times ۱۰^۶\,\mu s \xrightarrow{\text{نمادگذاری علمی}} \text{زمان} = ۱/۸۵ \times ۱۰^۷\,\mu s$$

۴۰ ۲ ابتدا حجم آب و سطح مقطع ظرف را به ترتیب برحسب $m^۳$ و $m^۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$\text{حجم}: V = ۶\ گالن \times \frac{۴/۴lit}{۱\ گالن} = ۲۶/۴lit = ۲۶/۴ \times ۱۰^{-۳}\,m^۳$$

$$\text{سطح مقطع}: A = \pi R^۲ = ۳ \times (۰/۲m)^۲ = ۰/۱۲m^۲$$

$$\Rightarrow V = Ah \Rightarrow ۲۶/۴ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۱۲ \times h \Rightarrow h = \frac{۲۶/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۱۲} = ۰/۲۲m = ۲۲۰mm$$

۴۱ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ — **دقت و خطای اندازه‌گیری** — (تست‌های ۴۱ تا ۶۲)

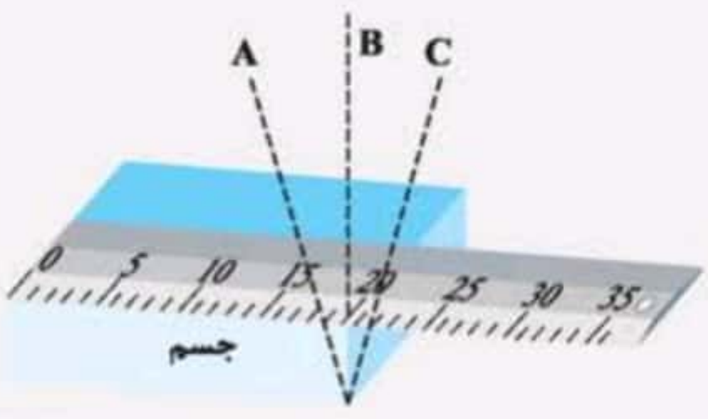
همان‌طور که می‌دانید، اندازه‌گیری همیشه با خطا همراه است. به‌طور کلی برای افزایش دقت اندازه‌گیری، عوامل زیر تأثیرگذار است:

۱) دقت شخص آزمایشگر ۲) تعداد دفعات اندازه‌گیری ۳) کیفیت و دقت وسیلهٔ اندازه‌گیری مورد استفاده

در رابطه با موارد (۱) و (۲)، به نکات کاربردی زیر توجه کنید:

نکات مهم و کاربردی

۱) مهارت شخص آزمایشگر در قرائت عدد اندازه‌گیری شده، می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر روی دقت اندازه‌گیری داشته باشد. به‌طور مثال در شکل مقابل که تفاوت زاویهٔ دید افراد مختلف را در اندازه‌گیری نشان می‌دهد، شخص B که به‌صورت عمود بر جسم نتیجهٔ اندازه‌گیری را قرائت می‌کند، عملاً بیشترین دقت را در اندازه‌گیری داشته و خطای آن از سایرین کم‌تر است.



۲ برای کاهش خطای ناشی از اندازه‌گیری، می‌توان کمیت موردنظر را چندین‌بار اندازه‌گیری کرد و در نهایت میانگین آن‌ها را به‌عنوان نتیجهٔ اندازه‌گیری آن کمیت درنظر گرفت. البته دقت کنید که اگر در نتایج مختلف اندازه‌گیری، یک یا دو عدد اختلاف زیادی با دیگر اعداد داشته باشند (داده‌های پرت) آن‌ها را حذف کرده و در میانگین‌گیری به‌حساب نمی‌آوریم. به‌طور مثال در شکل زیر که هر یک از خطوط آبی رنگ نتیجهٔ یک اندازه‌گیری می‌باشد، دادهٔ به‌دست آمده در سمت چپ که اختلاف زیادی با بقیهٔ اعداد دارد را حذف کرده و در میانگین‌گیری وارد نمی‌کنیم.



در رابطه با دقت وسایل اندازه‌گیری و نحوهٔ نمایش عدد اندازه‌گیری شده، به ادامهٔ بحث توجه کنید. دقت کنید که برای تعیین دقت و خطای اندازه‌گیری، باید به نوع آن دستگاه (یعنی مدرج یا دیجیتالی بودن آن) توجه کنیم. به همین منظور ابتدا به تحلیل دستگاه‌های مدرج و سپس دیجیتال می‌پردازیم:

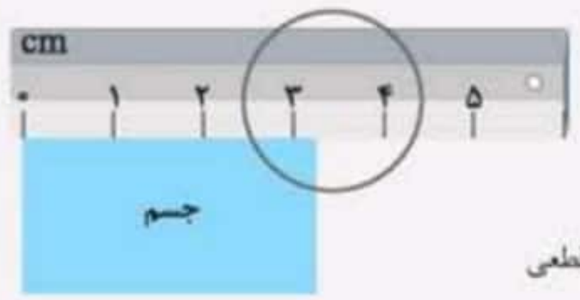
دقت و خطای اندازه‌گیری در وسایل درجه‌بندی شده

در وسایل درجه‌بندی شده (مانند خط‌کش فلزی) که در نهایت عدد اندازه‌گیری شده را با چشم تخمین می‌زنیم، نکات زیر حائز اهمیت است:

۱ دقت اندازه‌گیری یک خط‌کش و یا یک وسیلهٔ درجه‌بندی شده، برابر کوچک‌ترین مقدار درجه‌بندی آن می‌باشد. به‌عنوان مثال در یک خط‌کش مدرج برحسب سانتی‌متر، دقت اندازه‌گیری $1\,cm$ است.

۲ بنابر یک قاعدهٔ کلی، خطای اندازه‌گیری توسط خط‌کش و سایر وسایل درجه‌بندی شده، $\pm\frac{1}{2}$ کوچک‌ترین تقسیم‌بندی آن وسیله (دقت وسیله) است. به‌عنوان مثال در خط‌کشی که برحسب سانتی‌متر مدرج شده است، خطای اندازه‌گیری برابر $\pm\frac{1}{2}cm = \pm 0/5\,cm$ و در خط‌کشی که برحسب میلی‌متر مدرج شده است، برابر $\pm\frac{1}{2}mm = \pm 0/5\,mm = \pm 0/05\,cm$ است (این یعنی دقت اندازه‌گیری و خطای اندازه‌گیری، دو مفهوم متفاوت دارند).

۳ در علم فیزیک، برای تخمین زدن اندازه‌گیری‌هایی که با چشم انجام می‌شود، تنها حق داریم یک **رقم غیرقطعی و مشکوک** داشته باشیم. به طور مثال اگر در شکل زیر، طول جسم را توسط خط‌کش سانتی‌متری اندازه‌گیری کنیم، عدد گزارش شده برای طول جسم، نمی‌تواند به صورت $3/23\,cm$ باشد، زیرا احتمالاً با ما موافق هستید که طول جسم بیشتر از $3\,cm$ است ولی برای تخمین زدن طول جسم مطابق علم فیزیک، فقط باید یک رقم غیرقطعی داشته باشیم. پس در خط‌کش سانتی‌متری فقط می‌توان تا مرتبهٔ دهم سانتی‌متر حدس زد.



دو رقم غیرقطعی دارد، پس عدد گزارش شده نادرست است. $\Rightarrow 3/23\,cm \pm 0/5\,cm$

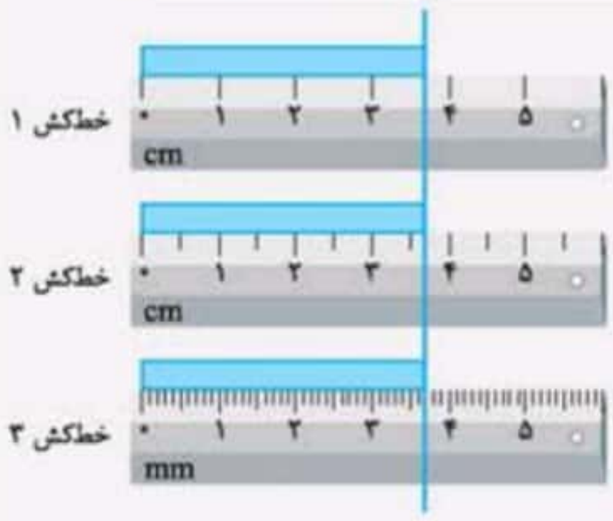
یک رقم غیرقطعی دارد، پس عدد گزارش شده صحیح است. $\Rightarrow 3/2\,cm \pm 0/5\,cm$

(رقم غیرقطعی) (خطای وسیلهٔ اندازه‌گیری)

۴ در وسیله‌های اندازه‌گیری، عدد ارائه‌شده باید به‌گونه‌ای باشد که رقم غیرقطعی و خطای اندازه‌گیری با یک‌دیگر هم‌خوانی داشته باشد. به‌عنوان مثال به موارد زیر توجه کنید:

خط‌کش مدرج‌شده برحسب سانتی‌متر (یعنی خطای اندازه‌گیری برابر $\pm 0/5\,cm$)	
توضیحات	عدد پیشنهادشده
رقم غیرقطعی با خطای اندازه‌گیری هم‌خوانی دارد ($0/7\,cm$ با $0/5\,cm$) و عدد پیشنهادی درست است.	$42/7\,cm \pm 0/5\,cm$ (رقم غیرقطعی)
رقم غیرقطعی با خطای اندازه‌گیری هم‌خوانی ندارد ($0/1\,cm$ با $0/5\,cm$) و عدد پیشنهادی نادرست است.	$42/71\,cm \pm 0/5\,cm$ (رقم غیرقطعی)

تمرین۱ **در سه تصویر نشان داده شده، نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط هر خط‌کش چگونه (به همراه خطای آن) نمایش داده می‌شود؟** (کتاب درسی)



پاسخ **خط‌کش ۱:** کمینهٔ درجه‌بندی این خط‌کش، برابر $1\,cm$ و در نتیجه دقت آن نیز برابر $1\,cm$ است. مطابق قاعده‌ای که اشاره کردیم، خطای اندازه‌گیری توسط این خط‌کش به‌صورت $\pm 0/5\,cm$ بیان می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط این خط‌کش را $3/7\,cm \pm 0/5\,cm$ بیان کرد.

gajmarket.com

خطکش ۲: کمینهٔ درجه‌بندی این خطکش، برابر ۰/۵cm و در نتیجه دقت آن نیز برابر ۰/۵cm است. مطابق قاعده‌ای که اشاره کردیم، خطای اندازه‌گیری توسط این خطکش به‌صورت ±۰/۲۵cm بیان می‌شود که باید به‌صورت ±۰/۳cm گرد شود (در این روند گرد کردن، باید به‌سمت بالا گرد کنید). بنابراین می‌توان نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط این خطکش را ۳/۷cm ± ۰/۳cm بیان کرد. اگر نتیجهٔ اندازه‌گیری را به‌صورت ۳/۷cm ± ۰/۲۵cm بیان کنید هر چند از نظر ریاضیات مشکلی ندارد ولی از نظر محاسبه‌های فیزیکی نادرست است، زیرا رقم غیرقطعی و خطای اندازه‌گیری با یکدیگر هم‌خوانی ندارد.

خطکش ۳: کمینهٔ درجه‌بندی این خطکش، برابر ۱mm و در نتیجه دقت آن نیز برابر ۱mm است. مطابق قاعده‌ای که اشاره کردیم، خطای اندازه‌گیری توسط این خطکش، ±۰/۵mm یا ±۰/۰۵cm است. بنابراین می‌توان نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط این خطکش را ۳/۶۸cm ± ۰/۰۵cm یا ۳۶/۸mm ± ۰/۵mm بیان کرد.

ارقام بامعنا و رقم غیرقطعی

رقم‌هایی را که بعد از اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی ثبت می‌کنند، **رقم‌های بامعنا** می‌گویند. در رابطه با این موضوع به موارد زیر توجه کنید:

۱) برای شمارش ارقام معنادار از اولین عدد (غیرصفر) سمت چپ شروع می‌کنیم و تا آخرین رقم سمت راست (حتی صفرها) پیش می‌رویم. به‌عنوان مثال عدد ۱/۴۱۱ دارای چهار رقم بامعنا و عدد ۰/۰۵۲۰ دارای سه رقم بامعنا می‌باشد.



۲) آخرین رقم معنادار سمت راست را رقم غیرقطعی (حدسی) می‌گویند. به‌عنوان مثال در اعداد ۱/۴۱۱ و ۰/۰۵۲۰ داریم:



۳) در مقایسهٔ دو اندازه‌گیری، بدیهی است که هرچه مرتبهٔ رقم غیرقطعی کوچک‌تر باشد، یعنی حدس کم‌تری در اندازه‌گیری داشته‌ایم و اندازه‌گیری با وسیلهٔ دقیق‌تری انجام شده است.

دقت و خطای اندازه‌گیری در وسایل رقمی (دیجیتال)

با پیشرفت علم، در بسیاری از موارد عملاً اندازه‌گیری با وسایل دیجیتالی (رقمی) انجام می‌شود و دیگر به کمک چشم مقدار کمیت موردنظر تخمین زده نمی‌شود. دقت اندازه‌گیری برای وسایل دیجیتالی با وسایل درجه‌بندی شده که تاکنون بررسی کردیم، تفاوت دارد و در مورد آن نکات زیر حائز اهمیت است:

۱) در این دستگاه‌ها، یک واحد از کوچک‌ترین (آخرین) رقمی که توسط دستگاه اندازه‌گیری می‌شود **معادل با دقت و خطای دستگاه** است. به‌عنوان مثال دماسنج‌های دیجیتالی مقابل را درنظر بگیرید:



در این شکل‌ها، خطای دماسنج شکل (۱) که عدد ۲۶/۸°C را می‌خواند برابر ±۰/۱°C و خطای دماسنج شکل (۲) که عدد ۳۲°C را می‌خواند برابر ±۱°C است.

۲) در شکل‌های نشان داده شده در فوق، دماسنج (۱) دقت بیشتری نسبت به دماسنج (۲) دارد و اگر بخواهیم اعداد اندازه‌گیری شده توسط آن‌ها را دقیق‌تر نشان دهیم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

عدد دماسنج (۲): ۳۲°C ± ۱°C (۳۲: رقم غیر قطعی، ±۱: خطای اندازه‌گیری)

عدد دماسنج (۱): ۲۶/۸°C ± ۰/۱°C (۸: رقم غیر قطعی، ±۰/۱: خطای اندازه‌گیری)

۳) در دماسنج (۱)، عملاً عدد واقعی اندازه‌گیری شده برای دما، در محدودهٔ زیر قرار می‌گیرد:

۲۶/۸ − ۰/۱ (= ۲۶/۷°C) ≤ عدد واقعی دما در دماسنج (۱) ≤ ۲۶/۸ + ۰/۱ (= ۲۶/۹°C)

۴) در اندازه‌گیری با دستگاه‌های دیجیتالی، برای محاسبهٔ دقت اندازه‌گیری، می‌توان به‌جای آخرین رقم سمت راست، عدد یک و به‌جای بقیهٔ رقم‌ها عدد صفر گذاشت و ممیز در سرجای خود باقی می‌ماند. با این روش، دقت اندازه‌گیری برحسب واحد داده شده به‌دست می‌آید. به‌طور مثال اگر عدد گزارش شده توسط یک دستگاه دیجیتال به صورت ۱۸/۰۶۳mm گزارش شود، برای محاسبهٔ دقت اندازه‌گیری این دستگاه می‌توان نوشت:

۱۸/۰۶۳ —محاسبهٔ دقت اندازه‌گیری→ ۰۰/۰۰۱mm یا ۰/۰۰۱mm

تمرین۲ ریزسنج دیجیتالی، یکی از وسایلی است که به کمک آن با دقت بسیار زیادی می‌توان طول یک جسم را اندازه گرفت. شکل زیر نمایشی از یک اندازه‌گیری با ریزسنج دیجیتالی است. در رابطه با این ریزسنج، به موارد زیر پاسخ دهید:



الف) این اندازه‌گیری چند رقم بامعنا دارد؟

ب) رقم غیرقطعی در این اندازه گیری کدام است؟

ج) دقت اندازه‌گیری ریزسنج دیجیتالی چند میلی‌متر است؟

د) نمایش واقعی این عدد به چه صورت است؟

ه) طول واقعی این جسم در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد؟

پاسخ **الف)** همان‌طور که می‌دانید، رقم‌هایی که پس از اندازه‌گیری برای نمایش عدد موردنظر به‌کار می‌رود، ارقام بامعنا نام دارند. این اندازه‌گیری با ۵ رقم نمایش داده شده است، بنابراین ۵ رقم بامعنا دارد.

اولین رقم غیرصفر سمت چپ ← ۲۰/۰۸۳ mm → آخرین رقم سمت راست

پنج رقم بامعنا

ب) آخرین رقم سمت راست را رقم غیرقطعی گویند، بنابراین داریم:

۲۰/۰۸۳ mm

رقم غیرقطعی

ج) با توجه به این‌که نمایش عدد موردنظر به‌صورت دیجیتالی است، بنابراین دقت و خطای اندازه‌گیری آن از مرتبهٔ آخرین رقم قابل اندازه‌گیری توسط دستگاه، یعنی مرتبهٔ رقم غیرقطعی بوده و برابر ۰/۰۰۱mm است.

د) با توجه به خطای اندازه‌گیری دستگاه، نمایش واقعی این عدد به‌صورت زیر می‌باشد:

۲۰/۰۸۳ mm ±۰/۰۰۱mm

خطای دستگاه اندازه‌گیری

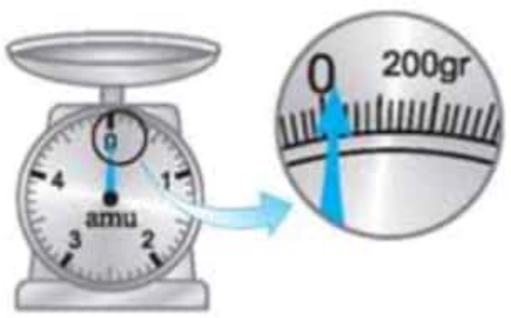
ه) طول واقعی این جسم در محدودهٔ زیر قرار می‌گیرد:

۲۰/۰۸۳ mm − ۰/۰۰۱mm ≤ طول واقعی ≤ ۲۰/۰۸۳mm + ۰/۰۰۱mm → ۲۰/۰۸۲ mm ≤ طول واقعی ≤ ۲۰/۰۸۴ mm

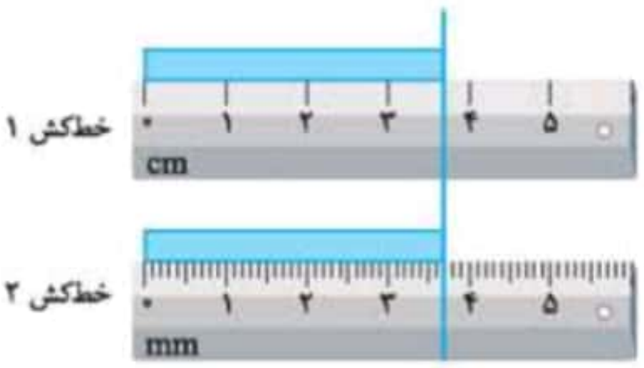
دقتِ وسیلهٔ اندازه‌گیری، مهارت شخص آزمایشگر و تعداد دفعات انجام آزمایش، از عواملی هستند که بر خطای آزمایش و دقت اندازه‌گیری در آن مؤثر هستند (۳ مورد). از طرفی یکای مورد استفاده برای گزارشِ مقدار کمیت‌های اندازه‌گیری‌شده و همین‌طور دیجیتالی بودن یا نبودنِ وسیلهٔ اندازه‌گیری، ارتباطی با مقدار دقت و خطای آزمایش ندارند.

۴۲ ۳ با توجه به خلاصه نکات (۴)، برای وسایل درجه‌بندی شده، $\pm\frac{۱}{۲}$ برابر کم‌ترین تقسیم‌بندی آن وسیله و برای وسایل دیجیتالی مثبت و منفی یک واحد (±۱) از آخرین رقمی که خوانده می‌شود برابر خطای اندازه‌گیری آن‌ها می‌باشد.

۴۳ ۱ همان‌گونه که در صفحهٔ ترازو می‌بینیم، فاصلهٔ بین صفر تا عدد ۲۰۰ گرم، به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است. بنابراین هر قسمت برابر ۲۰gr است و در نتیجه دقت اندازه‌گیری این ترازو برابر ۲۰gr یا $۲\times۱۰^{۷}\mu g$ است.



۴۴ ۱ در گزارش عدد ۶/۷۴mm ± ۰/۰۵mm، رقم‌های ۶، ۷ و ۴ که در اندازه‌گیری ثبت شده‌اند، ارقام بامعنا هستند. به آخرین رقم با معنای ثبت شده، یعنی رقم ۴، رقم غیرقطعی (حدسی) می‌گوییم. هم‌چنین عبارت ±۰/۰۵mm، نمایانگر خطای وسیلهٔ اندازه‌گیری است.



۴۵ ۳ **خطکش ۱:** کمینهٔ درجه‌بندی این خطکش، برابر ۱cm و در نتیجه دقت آن نیز برابر ۱cm است. مطابق قاعده‌ای که در خلاصه نکات (۴)، به آن اشاره کردیم، خطای اندازه‌گیری توسط این خطکش به‌صورت $\pm\frac{۱}{۲}\times۱cm=\pm۰/۵cm$ بیان می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط این خطکش را ۳/۷cm ± ۰/۵cm یا ۳۷mm ± ۵mm بیان کرد.

خطکش ۲: کمینهٔ درجه‌بندی این خطکش، برابر ۱mm و در نتیجه دقت آن نیز برابر ۱mm است. مطابق قاعده‌ای که اشاره کردیم، خطای اندازه‌گیری توسط این خطکش، ±۰/۵mm یا ±۰/۰۵cm است. بنابراین می‌توان نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط این خطکش را ۳/۶۸cm ± ۰/۰۵cm یا ۳۶/۸mm ± ۰/۵mm بیان کرد.

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

www.gajmarket.com

۴۶ ۳ کوچک‌ترین تقسیم‌بندی این ترازوی مدرج، برابر یک گرم است. بنابراین خطای اندازه‌گیری آن برابر $\pm\frac{۱}{۲}\times ۱ = \pm ۰/۵\text{gr}$ می‌باشد. هم‌چنین با توجه به این‌که دستگاه تا یک گرم، می‌تواند جرم جسم را اندازه بگیرد، بنابراین یک مرتبه کوچک‌تر، یعنی مرتبهٔ یک دهم را می‌توانیم خودمان با نگاه کردن به ترازوی مدرج حدس بزنیم. بنابراین عدد نشان داده شده می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

(گزینهٔ ۳) $۴/۲\text{gr} \pm ۰/۵\text{ gr}$

$۴/۲\text{gr}$: رقم غیرقطعی — $\pm ۰/۵\text{ gr}$: خطای اندازه‌گیری وسیله

۴۷ ۴ در این حالت، خطای اندازه‌گیری برابر $\left(\pm\frac{۱}{۲}\times ۰/۱ =\right) \pm ۰/۰۵\text{gr}$ می‌باشد و مشابه با استدلال پاسخ سؤال قبل، نمایش درست می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

(گزینهٔ ۴) $۴/۲۱\text{gr} \pm ۰/۰۵\text{gr}$

$۴/۲۱\text{gr}$: رقم غیرقطعی — $\pm ۰/۰۵\text{gr}$: خطای اندازه‌گیری وسیله

۴۸ ۳ در خط‌کش سانتی‌متری که کوچک‌ترین تقسیم‌بندی آن برابر ۱cm است، خطای وسیلهٔ اندازه‌گیری برابر $\pm\frac{۱}{۲}\text{cm} = \pm ۰/۵\text{cm}$ است. بنابراین مقدار اندازه‌گیری شده به‌صورت $۲۲/۳\text{cm} \pm ۰/۵\text{cm}$ نشان داده می‌شود که طول واقعی جسم در محدودهٔ زیر قرار می‌گیرد:

$$۲۲/۳\text{cm} - ۰/۵\text{cm} \le \text{طول واقعی جسم} \le ۲۲/۳\text{cm} + ۰/۵\text{cm} \Rightarrow ۲۱/۸\text{cm} \le \text{طول واقعی جسم} \le ۲۲/۸\text{cm}$$

۴۹ ۲ ضخامت جسم برابر $۲/۴۵\times ۱۰^{-۳}\text{ m}$ یا $۲/۴۵\text{mm}$ اندازه‌گیری شده است. از بین موارد مطرح شده، فقط عدد اندازه‌گیری شده توسط کولیس می‌تواند به این صورت گزارش شود، زیرا تا مرتبهٔ $۰/۱\text{mm}$ را اندازه‌گیری کرده و فقط یک رقم غیرقطعی (حدسی) دارد.

$$۲/۴۵\times ۱۰^{-۳}\text{ m} = ۲/۴۵\text{mm}$$

۵ ← رقم غیر قطعی (حدسی)

تذکر

طبق صورت سؤال، دقت اندازه‌گیری کولیس برابر $۰/۱\text{mm}$ است.

۵۰ ۳ کمینهٔ درجه‌بندی این خط‌کش برابر $۰/۵\text{cm}$ است، در نتیجه دقت آن برابر $۰/۵\text{cm}$ و خطای اندازه‌گیری آن برابر $\pm\frac{۱}{۲}\times ۰/۵ = \pm ۰/۲۵\text{cm}$ بیان می‌شود که باید به صورت $\pm ۰/۳\text{cm}$ گرد شود (در این روند گرد کردن، باید به سمت بالا گرد کنید). بنابراین می‌توان نتیجهٔ اندازه‌گیری توسط این خط‌کش را به صورت $۴/۷\text{cm} \pm ۰/۳\text{cm}$ بیان کرد.

دقت: اگر نتیجهٔ این اندازه‌گیری را به صورت $۴/۷\text{cm} \pm ۰/۲۵\text{cm}$ بیان کنید، هر چند از لحاظ ریاضیات مشکلی ندارد ولی از لحاظ محاسبات فیزیکی نادرست است، زیرا مرتبهٔ رقم غیرقطعی و خطای اندازه‌گیری با یک‌دیگر هم‌خوانی ندارد.

۵۱ ۱ با توجه به شکل داده شده در صورت سؤال، کوچک‌ترین مقیاس دماسنج نشان داده شده برابر ۵°C می‌باشد. بنابراین خطای اندازه‌گیری این وسیله $\pm\frac{۱}{۲}$ کوچک‌ترین تقسیم‌بندی آن، یعنی برابر $\pm\frac{۱}{۲}\times ۵ = \pm ۲/۵^\circ\text{C}$ می‌باشد که باید به‌صورت $\pm ۳^\circ\text{C}$ گرد شود. از طرفی دمای موردنظر بین ۲۵°C تا ۳۰°C است، در نتیجه نمایش عدد موردنظر به‌صورت $۲۷^\circ\text{C} \pm ۳^\circ\text{C}$ می‌تواند باشد.

* دقت شود که فقط یک رقم مشکوک و غیرقطعی می‌توانیم داشته باشیم و نمی‌توان $۲۷/۲^\circ\text{C}$ را اعلام کرد.

۵۲ ۳ دقت اندازه‌گیری این کولیس برابر $۰/۱\text{mm}$ است و در نتیجه خطای اندازه‌گیری آن برابر $\pm ۰/۰۵\text{mm}$ خواهد بود. برای حل این سؤال، دقت و خطای اندازه‌گیری در هر یک از گزینه‌ها را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم تا با دقت و خطای این کولیس برابر باشند.

(۱

$$۲/۱۲\text{mm} \pm ۰/۰۵\text{mm} \Rightarrow \text{خطا} = \pm ۰/۰۵\text{mm} \quad ، \quad \text{دقت} = ۲\times ۰/۰۵ = ۰/۱\text{mm}$$

۲ ← رقم حدسی

(۲

$$۳/۱۲۴\text{cm} \pm ۰/۰۰۵\text{cm} \Rightarrow \text{خطا} = \pm ۰/۰۰۵\text{cm} = \pm ۰/۰۵\text{mm} \quad ، \quad \text{دقت} = ۲\times ۰/۰۰۵ = ۰/۰۱\text{cm} = ۰/۱\text{mm}$$

۴ ← رقم حدسی

(۳

$$۰/۰۴۷۸\text{dm} \pm ۰/۰۰۵\text{dm} \Rightarrow \text{خطا} = \pm ۰/۰۰۵\text{dm} = \pm ۰/۵\text{mm} \quad ، \quad \text{دقت} = ۲\times ۰/۰۰۵ = ۰/۰۱\text{dm} = ۱\text{mm}$$

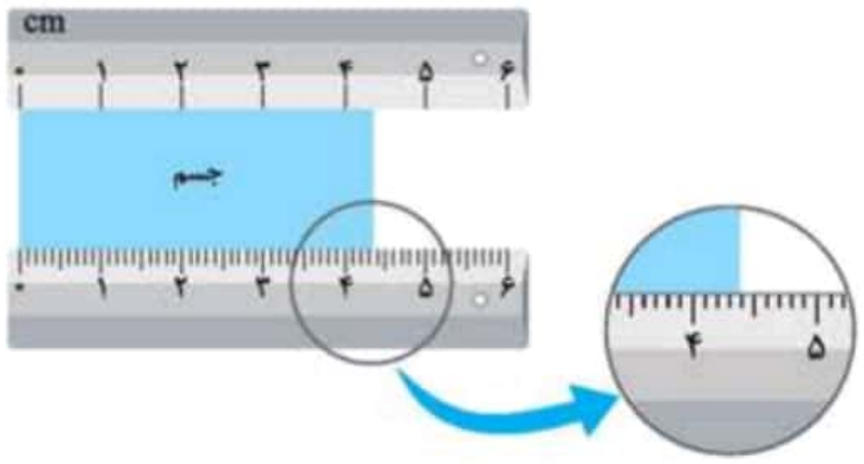
۸ ← رقم حدسی

در این گزینه خطا به اشتباه گزارش شده است و گزارش صحیح به صورت $۰/۰۴۷۸\text{dm} \pm ۰/۰۰۰۵\text{dm}$ خواهد بود.

(۴

$$۰/۰۰۶۷۲\text{m} \pm ۰/۰۰۰۰۵\text{m} \Rightarrow \text{خطا} = \pm ۰/۰۰۰۰۵\text{m} = \pm ۰/۰۵\text{mm} \quad ، \quad \text{دقت} = ۲\times ۰/۰۰۰۰۵ = ۰/۰۰۰۱\text{m} = ۰/۱\text{mm}$$

۲ ← رقم حدسی



۵۳ ۲ موضوع مهمی که باید به آن توجه کنیم این است که هر چه وسیلهٔ اندازه‌گیری دقیق‌تر باشد، خطای اندازه‌گیری کم‌تر بوده و طول اندازه‌گیری شده به طول واقعی جسم نزدیک‌تر است. در این سؤال چون خط‌کش میلی‌متری دقیق‌تر از خط‌کش سانتی‌متری است، بنابراین محدودهٔ طول واقعی جسم را خط‌کش میلی‌متری تعیین می‌کند.

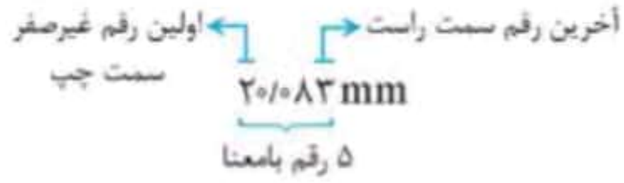
$$\text{مقدار اندازه‌گیری شده توسط خط‌کش میلی‌متری} = ۴۳/۸\text{mm} \pm ۰/۵\text{mm}$$

$$\Rightarrow ۴۳/۸\text{mm} - ۰/۵\text{mm} \le \text{طول واقعی} \le ۴۳/۸\text{mm} + ۰/۵\text{mm}$$

$$\Rightarrow ۴۳/۳\text{mm} \le \text{طول واقعی} \le ۴۴/۳\text{mm}$$

۵۴ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، هر یک از گزینه‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

۱) همان‌طور که می‌دانید، رقم‌هایی که پس از اندازه‌گیری برای نمایش عدد موردنظر به‌کار می‌رود، ارقام بامعنا نام دارند. این اندازه‌گیری با ۵ رقم نمایش داده شده است، بنابراین ۵ رقم بامعنا دارد.



هم‌چنین آخرین رقم سمت راست را رقم غیرقطعی گویند، بنابراین عدد ۳ در گزارش این اندازه‌گیری رقم غیرقطعی محسوب می‌شود.



۲) با توجه به این‌که دستگاه موردنظر به‌صورت دیجیتالی است، بنابراین دقت و خطای اندازه‌گیری آن از مرتبهٔ آخرین رقم قابل اندازه‌گیری توسط دستگاه، یعنی مرتبهٔ رقم غیرقطعی بوده و برابر ۰/۰۰۱mm است.

۳) با توجه به خطای اندازه‌گیری دستگاه، نمایش واقعی این عدد به‌صورت زیر می‌باشد:



۴) طول واقعی این جسم در محدودهٔ زیر قرار می‌گیرد:

$$۲۰/۰۸۳\text{mm} - ۰/۰۰۱\text{mm} \le \text{طول واقعی} \le ۲۰/۰۸۳\text{mm} + ۰/۰۰۱\text{mm} \rightarrow ۲۰/۰۸۲\text{mm} \le \text{طول واقعی} \le ۲۰/۰۸۴\text{mm}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۵۵ ۲ برای محاسبهٔ دقت اندازه‌گیری در وسایل دیجیتالی، می‌توان به‌جای آخرین رقم سمت راست، عدد یک و به‌جای بقیهٔ رقم‌ها عدد صفر گذاشت و ممیز در سر جای خود باقی بماند. با این روش، دقت اندازه‌گیری برحسب واحدِ داده شده به‌دست می‌آید. در این سؤال، عدد گزارش شده توسط آمپرسنج دیجیتال برابر ۲/۰۰۴mA است، بنابراین دقت اندازه‌گیری آن برحسب میکروآمپر برابر است با:

$$\text{دقت اندازه‌گیری}: ۰/۰۰۱\text{mA} = ۰/۰۰۱ \times ۱۰^{۳}\,\mu\text{A} = ۱\,\mu\text{A}$$

از طرفی می‌دانیم در وسایل اندازه‌گیری دیجیتالی، دقت و خطای اندازه‌گیری یکسان است. بنابراین خطای اندازه‌گیری این آمپرسنج دیجیتالی برابر $\pm ۱\,\mu\text{A}$ است.

تذکر

دقت شود هر میلی‌آمپر برابر $۱۰^{۳}$ میکروآمپر است.

$$۱\text{mA} = ۱۰^{-۳}\text{A} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۶}\,\mu\text{A} = ۱۰^{۳}\,\mu\text{A} \Rightarrow ۱\text{mA} = ۱۰^{۳}\,\mu\text{A}$$

۵۶ ۳ برای محاسبهٔ دقت اندازه‌گیری ترازوی دیجیتالی A برحسب کیلوگرم، با توجه به این‌که عدد گزارش شده شامل سه رقم اعشار است، دقت اندازه‌گیری آن به‌اندازهٔ ۰/۰۰۱ واحد نوشته شده در جلوی عدد است:

$$\text{دقت اندازه‌گیری}: ۰/۰۰۱\text{kg} \Rightarrow ۲/۴۰۰\text{kg}$$

دقت: ۰/۰۰۱kg

از طرفی برای محاسبهٔ دقت اندازه‌گیری ترازوی دیجیتالی B برحسب گرم (gr)، ابتدا دقت اندازه‌گیری آن را برحسب واحد نوشته شده در جلوی عدد، یعنی kg، به‌دست می‌آوریم و سپس دقت اندازه‌گیری آن را برحسب گرم محاسبه می‌کنیم:

$$\text{دقت اندازه‌گیری}: ۰/۰۰۰۱\text{kg} = ۰/۰۰۰۱ \times (۱۰^{۳}\text{ gr}) = ۰/۱\text{gr} \Rightarrow ۴/۹۰۱۰\text{kg}$$

دقت: ۰/۰۰۰۱kg

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

سوال **به‌نظر شما دقت اندازه‌گیری ترازوی دیجیتالی A برحسب گرم چه‌قدر است؟**

gajmarket.com

۵۷ ۱ کم‌ترین مقداری که ساعت اول می‌تواند اندازه‌گیری کند، ۱ دقیقه می‌باشد و در نتیجه دقت اندازه‌گیری این ساعت برابر ۱ دقیقه یا همان ۶۰ ثانیه است.
از سوی دیگر دقت اندازه‌گیری ساعت دوم، برابر یک ثانیه است (چون کم‌ترین مقداری که می‌تواند اندازه‌گیری کند، برابر یک ثانیه است).

دقت اندازه‌گیری ۱ ثانیه است. ← ۱۲ : ۰۰ : ۰۰ (ثانیه)

دقت اندازه‌گیری ۱ دقیقه یا ۶۰ ثانیه است. ← ۱۲ : ۰۰ : ۰۰ (ساعت، دقیقه)

۵۸ ۳ ابتدا باید دقت شود، آن اندازه‌گیری دقیق‌تر است که مقادیر کوچک‌تری را بتواند اندازه بگیرد و مرتبهٔ رقم غیرقطعی در آن کوچک‌تر باشد. برای بررسی راحت‌تر، مرتبهٔ رقم غیرقطعی در هر یک از اندازه‌گیری‌ها را برحسب متر به دست می‌آوریم:

اندازه‌گیری (الف):

$$۰/۰۱\text{km} = ۰/۰۱ \times ۱۰^{۳}\text{m} = ۱۰\text{m} \quad \text{: مرتبهٔ رقم غیرقطعی} \Rightarrow ۸/۷۹\text{km} = ۸/۷۹\text{km}$$

(مرتبهٔ رقم غیرقطعی: ۰/۰۱km)

اندازه‌گیری (ب):

$$۰/۰۰۱ \times ۱۰^{۶}\text{mm} = ۰/۰۰۱ \times ۱۰^{۶} \times ۱۰^{-۳}\text{m} = ۱\text{m} \quad \text{: مرتبهٔ رقم غیرقطعی} \Rightarrow ۸/۷۹۰ \times ۱۰^{۶}\text{mm} = ۸/۷۹۰ \times ۱۰^{۶}\text{mm}$$

(مرتبهٔ رقم غیرقطعی: $۰/۰۰۱ \times ۱۰^{۶}$ mm)

اندازه‌گیری (پ):

$$۱\text{cm} = ۱ \times ۱۰^{-۲}\text{m} = ۱۰^{-۲}\text{m} \quad \text{: مرتبهٔ رقم غیرقطعی} \Rightarrow ۷۸۹۰۰۰\text{cm}$$

اندازه‌گیری (ت):

$$۱۰^{-۱}\text{m} \quad \text{: مرتبهٔ رقم غیرقطعی} \Rightarrow ۸/۷۹۰۰ \times ۱۰^{۳}\text{m}$$

(مرتبهٔ رقم غیرقطعی: $۰/۰۰۰۱ \times ۱۰^{۴}$ m)

بنابراین مرتبهٔ رقم غیرقطعی در اندازه‌گیری (پ) از همه کوچک‌تر و دقت اندازه‌گیری در آن بیشتر می‌باشد.

۵۹ ۱ هرچه دقت وسیلهٔ اندازه‌گیری کم‌تر باشد، خطای اندازه‌گیری آن وسیله بیشتر است. در این سؤال، با توجه به این‌که مرتبهٔ رقم غیرقطعی در اندازه‌گیری (الف) بیشتر است، بنابراین دقت اندازه‌گیری در (الف) کم‌تر و در نتیجه خطای آن بیشتر از سایر اندازه‌گیری‌ها می‌باشد.

۶۰ ۴ خطای اندازه‌گیری گزارش‌شده برابر $\pm ۰/۰۰۱\text{kg}$ است.

$۴/۷۵۶\text{kg} \pm ۰/۰۰۱\text{kg}$ (خطای اندازه‌گیری)

هر دو حالتِ رقمی بودن یا مدرج بودن وسیلهٔ اندازه‌گیری را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر وسیلهٔ اندازه‌گیری از نوع رقمی (دیجیتالی) باشد، دقت اندازه‌گیری هم برابر $۰/۰۰۱\text{kg}$ خواهد بود و در نتیجه گزینهٔ (۲) می‌تواند صحیح باشد.

حالت دوم: اگر این وسیله از نوع مدرج باشد، دقت اندازه‌گیری آن ۲ برابر مقدار خطا، یعنی برابر $۰/۰۰۲\text{kg}$ خواهد بود و در نتیجه گزینهٔ (۳) هم می‌تواند صحیح باشد.

۶۱ ۲ هنگامی‌که فرد در مکان B قرار دارد، به‌صورت عمود بر جسم، عدد نشان داده شده توسط خطکش را می‌بیند. از این‌رو عدد خوانده شده در این حالت به‌طول واقعی جسم نزدیک‌تر است.

۶۲ ۲ اختلاف بین اندازه‌گیری‌های اول و ششم با سایر اندازه‌گیری‌ها خیلی زیاد است (داده‌های پرت)، بنابراین از آن‌ها صرف‌نظر کرده و برای داده‌های باقی‌مانده، به‌صورت زیر میانگین‌گیری می‌کنیم:

$$\text{طول جسم} = \frac{۸/۲ + ۸/۳ + ۸/۴ + ۸/۳}{۴} = ۸/۳\,\text{cm}$$

از طرفی این اندازه‌گیری با یک خطکش مدرج برحسب سانتی‌متر انجام شده و با توجه به خطای اندازه‌گیری آن می‌توان نوشت:

$$\text{طول جسم} = ۸/۳ \underbrace{\pm ۰/۵\,\text{cm}}_{\text{خطای اندازه‌گیری}}$$

۶۳ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ — **تخمین (برآورد) مرتبه بزرگی** — (تست‌های ۶۳ تا ۷۵)

گاهی اوقات برای شناخت بهتر یک موضوع و کمیت‌های وابسته به آن، نیاز داریم اندازه‌ای هرچند غیر دقیق و تقریبی از یک کمیت داشته باشیم. در این موارد از تخمین یا برآورد استفاده می‌کنیم. به طور مثال عدد ۳/۷ را حدوداً ۴ تخمین می‌زنیم.

نوعی از تخمین که در فیزیک کاربرد دارد، **برآورد یا تخمین مرتبهٔ بزرگی** یک عدد نامیده می‌شود. برای این نوع از تخمین، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا عدد داده شده را به‌صورت نمادگذاری علمی نمایش می‌دهیم:

$a \times ۱۰^{n} \quad (۱ \le a < ۱۰)$: عدد موردنظر

گام دوم: در نهایت دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

حالت اول: عدد $1 \le a < 5$ باشد ⟸ برای تعیین مرتبهٔ بزرگی، به‌جای a، عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

حالت دوم: عدد $5 \le a < 10$ باشد ⟸ برای تعیین مرتبهٔ بزرگی، به‌جای a، عدد ۱۰ را قرار می‌دهیم.

به‌طور مثال به تخمین مرتبهٔ بزرگی اعداد زیر توجه کنید:

$۷۶۴ = ۷/۶۴ \times ۱۰^{۲} \sim ۱۰ \times ۱۰^{۲} = ۱۰^{۳}$ (یعنی عدد ۷۶۴ به سمت ۱۰۰۰ تمایل دارد.)

↳ این عدد بزرگ‌تر از ۵ است، بنابراین به‌جای آن، عدد ۱۰ را قرار می‌دهیم.

$۱۲۶ = ۱/۲۶ \times ۱۰^{۲} \sim ۱ \times ۱۰^{۲} = ۱۰^{۲}$ (یعنی عدد ۱۲۶ به سمت ۱۰۰ تمایل دارد.)

↳ به‌جای آن، عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$۰/۰۰۲۸۷ = ۲/۸۷ \times ۱۰^{-۳} \sim ۱ \times ۱۰^{-۳} = ۱۰^{-۳}$

↳ این عدد کوچک‌تر از ۵ است، بنابراین آن را ۱ درنظر می‌گیریم.

برای درک بهتر این موضوع، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین) **مرتبهٔ بزرگی تعداد کل تپش‌های قلب یک انسان عادی، در طول زندگی آن، به کدام‌یک از گزینه‌های زیر نزدیک‌تر است؟** (تألیفی)

۱) $۱۰^{۹}$ ۲) $۱۰^{۱۲}$ ۳) $۱۰^{۱۵}$ ۴) $۱۰^{۱۸}$

پاسخ برای بررسی این تمرین، باید اطلاعات کلی زیر را داشته باشیم و گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: یک قلب عادی، در حالت استراحت ۷۰ بار در دقیقه تپیده و در هنگام فعالیت، مقدار تپش آن خیلی بیشتر است که در مجموع میانگین ۸۰ بار در دقیقه (۸×۱۰^{۱}) برای آن منطقی است.

گام دوم: فرض کنید عمر مفید یک انسان حدوداً ۷۰ سال است که بر حسب دقیقه برابر است با:

تعداد دقیقه: ۶۰ — تعداد ساعت: ۲۴ — تعداد روز: ۳۶۵

$\text{طول عمر برحسب دقیقه} = ۷۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \sim ۱۰۰ \times ۴۰۰ \times ۲۰ \times ۵۰ = ۴ \times ۱۰^{۷}\ \text{min}$

↳ حدوداً ۲۰ فرض کردیم. ↳ حدوداً ۴۰۰ فرض کردیم.

گام سوم: تعداد ضربان قلب فرد در طول عمر حدوداً برابر است با:

$\text{تعداد ضربان قلب} = \text{تعداد ضربان در هر دقیقه} \times \text{طول عمر برحسب دقیقه} = (۸ \times ۱۰^{۱}) \times (۴ \times ۱۰^{۷}) = ۳۲ \times ۱۰^{۸} = ۳/۲ \times ۱۰^{۹}$

$۱۰^{۹} \sim ۳/۲ \times ۱۰^{۹}$

↳ به جای آن ۱ می‌گذاریم

بنابراین مرتبهٔ بزرگی عدد به‌دست آمده، برابر $۱۰^{۹}$ است و گزینهٔ (۱) صحیح است.

تذکر در سؤالاتی که در آن‌ها مرتبهٔ بزرگی را تخمین می‌زنیم، حتی اگر اطلاعات بسیار تقریبی نیز داشته باشیم، پاسخ ما در نهایت تفاوت چندانی نخواهد کرد. به طور مثال در تمرین قبل، فرض کنید دانش‌آموز دیگری برای حل این سؤال، عمر مفید را حدود ۱۰۰ سال و تعداد ضربان قلب در هر دقیقه را ۵۰ بار لحاظ کند. در این حالت نیز می‌توان نوشت:

طول عمر بر حسب دقیقه: $۱۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \sim ۱۰۰ \times ۴۰۰ \times ۲۰ \times ۵۰ = ۴ \times ۱۰^{۷}\ \text{min}$

تعداد ضربان قلب: $(۴ \times ۱۰^{۷}) \times (۵۰) = ۲ \times ۱۰^{۹} \sim ۱ \times ۱۰^{۹} = ۱۰^{۹}$

همان طور که مشاهده می‌کنید، تفاوت چندانی در نتیجهٔ تخمین مرتبهٔ بزرگی حاصل نمی‌شود *(بنابراین با خیال راحت این سؤالارو حل کنید).*

گاهی اوقات برای شناخت بهتر یک موضوع، لازم است اندازه‌ای نه چندان دقیق از آن داشته باشیم. در موارد زیر از تخمین یا برآورد استفاده می‌کنیم:

- دقت بالا در محاسبات، اهمیت چندانی نداشته باشد.
- زمان کافی برای محاسبه‌های دقیق نداشته باشیم.
- همه یا بخشی از داده‌های موردنیاز، در دسترس نباشد.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۶۴ ۴ برای حل این سؤال، ابتدا هر یک از اعداد داده شده در گزینه‌ها را به صورت نمادگذاری علمی نوشته و سپس مرتبهٔ بزرگی هر یک از آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

۱) $۱۳۶ = ۱/۳۶ \times ۱۰^{۲} \sim ۱ \times ۱۰^{۲} = ۱۰^{۲}$

۲) $۰/۰۰۰۳۷۶ = ۳/۷۶ \times ۱۰^{-۴} \sim ۱ \times ۱۰^{-۴} = ۱۰^{-۴}$

۳) $۸۷۶۰۰ = ۸/۷۶۰۰ \times ۱۰^{۴} \sim ۱۰ \times ۱۰^{۴} = ۱۰^{۵}$

۴) $۰/۰۰۵۷۹۴ = ۵/۷۹۴ \times ۱۰^{-۳} \sim ۱۰ \times ۱۰^{-۳} = ۱۰^{-۲}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، فقط در گزینهٔ (۴)، تخمین مرتبهٔ بزرگی نادرست است.

www.gajmarket.com

۶۵ **۴** در این سؤال، دریاچه به شکل یک استوانه فرض شده و حجم آب موجود در دریاچه برحسب متر مکعب، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi r^2 h = 3 \times (5 \times 10^2)^2 \times 10 = 8 \times 10^6\,m^3 \xrightarrow{\text{مرتبهٔ بزرگی}} 10^1 \times 10^6 = 10^7\,m^3$$

دقت: عدد π تقریباً برابر ۳ فرض شده و شعاع دریاچه $r = \frac{1}{2}km = 500m$ است.

۶۶ **۳** برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: مرتبهٔ بزرگی مساحت زمین موردنظر و حجم باران باریده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت زمین}: A = 180km^2 = 180 \times 10^6\,m^2 = 1/8 \times 10^{\overset{\text{عدد ۱ درنظر می‌گیریم}}{2}} \times 10^6\,m^2 \sim 1 \times 10^2 \times 10^6\,m^2 = 10^8\,m^2$$

$$\text{ارتفاع آب باران بر روی سطح زمین}: h = 10mm = 10 \times 10^{-3}\,m = 10^{-2}\,m$$

$$\text{حجم باران کل}: V_{\text{کل}} = Ah = 10^8 \times 10^{-2} = 10^6\,m^3$$

گام دوم: مرتبهٔ بزرگی حجم یک قطرهٔ باران را تخمین می‌زنیم (شعاع هر قطرهٔ باران نصف قطر آن و برابر $2mm = \frac{4}{2}$ است):

$$V_{\text{قطره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (2 \times 10^{-3})^3 = \frac{32}{3}\underbrace{\pi}_{\simeq 3} \times 10^{-9} \simeq 32 \times 10^{-9} = 3/2 \times 10^{-8} \simeq \underbrace{10^0}_{\text{مرتبهٔ بزرگی عدد ۳/۲}} \times 10^{-8}\,m^3 = 10^{-8}\,m^3$$

گام سوم: بنابراین مرتبهٔ بزرگی تعداد قطره‌های باران برابر است با:

$$\frac{V_{\text{کل}}}{V_{\text{قطره}}} \sim \frac{10^6}{10^{-8}} \sim 10^{14}$$

۶۷ **۱** برای پاسخ دادن به این سؤال، باید اطلاعات کلی زیر را داشته باشیم و گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: یک قلب عادی، در حالت استراحت ۷۰ بار در دقیقه تپیده و در هنگام فعالیت، مقدار تپش آن خیلی بیشتر است که در مجموع میانگین ۸۰ بار در دقیقه (8×10^1) برای آن منطقی است.

گام دوم: فرض کنید عمر مفید یک انسان حدوداً ۷۰ سال است که برحسب دقیقه برابر است با:

$$\text{طول عمر برحسب دقیقه} = 70 \times \underbrace{365}_{\text{حدوداً ۴۰۰ فرض کردیم}} \times \underbrace{24}_{\text{حدوداً ۲۰ فرض کردیم}} \times 60 \sim 100 \times 400 \times 20 \times 50 = 4 \times 10^7\,min$$

(تعداد دقیقه ساعت: تعداد ساعت روز: تعداد روز)

گام سوم: تعداد ضربان قلب فرد در طول عمر حدوداً برابر است با:

$$\text{تعداد ضربان قلب} = \text{طول عمر برحسب دقیقه} \times \text{تعداد ضربان در هر دقیقه} = (4 \times 10^7) \times (8 \times 10^1) = 32 \times 10^8 = 3/2 \times 10^9$$

$$3/2 \times 10^9 \sim 10^9$$

(به جای آن ۱ می‌گذاریم)

بنابراین مرتبهٔ بزرگی عدد به‌دست آمده، برابر 10^9 است و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶۸ **۱** همان‌طور که در پاسخ سؤال قبل مشاهده کردید، مرتبهٔ بزرگی تعداد ضربان قلب در طول عمر یک شخص برابر 10^9 است. از سوی دیگر در هر ضربان قلب، $70cm^3$ خون به سرخرگ آئورت پمپاژ می‌شود و داریم:

$$\text{میزان خون پمپاژ شده} = 70cm^3 \times 10^9 = \underbrace{7}_{\text{در تخمین مرتبهٔ بزرگی، عدد ۷ را برابر ۱۰ درنظر می‌گیریم}} \times 10^{10}\,cm^3 \sim 10 \times 10^{10} = 10^{11}\,cm^3$$

$$\text{مرتبهٔ بزرگی برحسب lit} = 10^{11} \times 10^{-3}\,lit = 10^8\,lit$$

۶۹ **۱** برای تخمین مقدار گاز دی‌اکسید کربن تولیدشده در تنفس و بازدم، فرض می‌کنیم انسان در هر دقیقه ۲۰ بار تنفس کند و عمر متوسط انسان را حدود ۸۰ سال درنظر می‌گیریم.

$$\text{تعداد تنفس در عمر} = \underbrace{20}_{\text{تعداد تنفس در دقیقه}} \times \underbrace{60}_{\text{در ساعت}} \times \underbrace{24}_{\text{در شبانه‌روز}} \times \underbrace{365}_{\text{در سال}} \times \underbrace{80}_{\text{در عمر}} \sim 20 \times 50 \times 25 \times 400 \times 100 = 10^9$$

$$\text{جرم دی‌اکسید کربن تولیدشده} = \underbrace{10^9}_{\text{تعداد تنفس}} \times \underbrace{30\mu g}_{\text{مقدار تولیدشده در هر بار تنفس}} = 3 \times 10^{10}\,\mu g = 3 \times 10^4\,gr \Rightarrow \text{مرتبهٔ بزرگی برحسب gr} = 10^4\,gr$$

۷۰ **۳** مدت زمانی که طول می‌کشد تا فرد از ابتدای پایهٔ اول تا پایان پایهٔ دوازدهم تحصیل کند، برابر ۱۲ سال است. حال باید این زمان را به ثانیه تبدیل کنیم.

$$12\text{سال} = 12 \times \underbrace{365}_{\text{روز}} \times \underbrace{24}_{\text{ساعت}} \times \underbrace{60}_{\text{دقیقه}} \times \underbrace{60}_{\text{ثانیه}} \sim 10 \times 400 \times 20 \times 50 \times 50 = 2 \times 10^8 \sim 10^8\,s$$

۷۱ ۲ طبق فرض سؤال، هر نفر در هر روز ۵ لیوان آب می‌نوشد.

$$\text{آب آشامیدنی موردنیاز برای هر نفر در هر روز} = \underbrace{۵}_{\text{لیوان}} \times \underbrace{۲۰۰\text{cm}^۳}_{\text{هر لیوان}} = ۱۰۰۰\text{cm}^۳ = ۱\text{lit}$$

برای تخمین آب آشامیدنی موردنیاز در ایران در مدت یک روز، جمعیت ایران را ۸۰ میلیون نفر درنظر می‌گیریم. بنابراین تخمین مرتبهٔ بزرگی کل آب آشامیدنی موردنیاز در ایران طی یک روز برابر است با:

$$\text{کل آب موردنیاز برای آشامیدن در ایران در روز} = \underbrace{(۸۰\times۱۰^۶)}_{\text{۸۰ میلیون جمعیت}} \times ۱\text{lit} = ۸\times۱۰^۷\,\text{lit} \sim ۱۰\times۱۰^۷ = ۱۰^۸\,\text{lit}$$

۷۲ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: تخمین تعداد خودروهای شخصی (جمعیت ایران را ۸۰ میلیون در نظر می‌گیریم).

$$\text{تعداد خودروها} \Rightarrow \frac{\text{کل جمعیت ایران}}{۵} = \frac{۸۰\times۱۰^۶}{۵} = ۱۶\times۱۰^۶$$ از هر ۵ نفر یک نفر خودرو شخصی دارد.

گام دوم: محاسبهٔ مصرف بنزین یک خودرو در یک روز:

طبق صورت سؤال، یک خودرو به ازای هر ۱۰۰ کیلومتر، ۱۰ لیتر بنزین مصرف می‌کند، بنابراین در یک روز و با حرکت متوسط ۵۰ کیلومتر، تقریباً $\frac{۱۰}{۲} = ۵\text{lit}$ بنزین مصرف خواهد کرد.

گام سوم: تخمین کل بنزین مصرفی در ایران در یک روز:

$$\text{حجم کل بنزین مصرفی در یک روز} = \underbrace{۱۶\times۱۰^۶}_{\substack{\text{تعداد خودروها}}} \times \underbrace{۵}_{\substack{\text{مصرف}\\\text{یک خودرو}}} \sim ۱۰^۸\,\text{lit}$$

۷۳ ۱ برای برآورد مرتبهٔ بزرگی جرم جوّ زمین، از رابطهٔ $P = \frac{F}{A}$ که در علوم سال نهم با آن آشنا شدید استفاده می‌کنیم. در این رابطه، به‌جای F، وزن جوّ زمین (mg) و به جای A، مساحت سطح زمین $(۴\pi R^۲)$ را قرار می‌دهیم:

$$A = ۴\pi R^۲ = ۱۳\times(۶/۴\times۱۰^۶\,\text{m})^۲ \sim ۱۰^{۱۵}\,\text{m}^۲$$ (تخمین مرتبهٔ بزرگی مساحت سطح زمین)

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA \Rightarrow F \sim (۱۰^۵\,\text{Pa})(۱۰^{۱۵}\,\text{m}^۲) \Rightarrow F \sim ۱۰^{۲۰}\,\text{N}$$ (تخمین مرتبهٔ بزرگی وزن کل جوّ زمین)

$$mg \sim ۱۰^{۲۰}\,\text{N} \Rightarrow m \sim ۱۰^{۱۹}\,\text{kg}$$ (تخمین مرتبهٔ بزرگی جرم کل جوّ زمین)

۷۴ ۳ همان‌طور که می‌دانیم، واحد AU معادل با متوسط فاصلهٔ زمین از خورشید است و داریم:

$$\text{مسافت متوسط طی شده از زمین تا خورشید} = \text{تندی} \times \text{زمان}$$

$$۱/۵\times۱۰^{۱۱} = ۳\times۱۰^۸ \times \text{زمان} \Rightarrow \text{زمان} = ۰/۵\times۱۰^۳\,\text{s} = ۰/۵\times۱۰^۳\times۱۰^۳\,\text{ms}$$

$$\text{زمان} = ۵\times۱۰^۵\,\text{ms} \xrightarrow{\text{مرتبهٔ بزرگی}} ۱۰\times۱۰^۵ = ۱۰^۶\,\text{ms}$$

۷۵ ۲ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: تخمین تعداد تارهای موی سر یک نفر:

سر انسان را مانند یک نیمکره به شعاع ۱۰cm درنظر می‌گیریم تا مساحت آن را تخمین بزنیم.

$$A = \frac{\text{مساحت کره}}{۲} = \frac{۴\pi R^۲}{۲} = ۲\pi R^۲ = ۲\underbrace{\pi}_{=۳}\times(۰/۱)^۲ = ۶\times۱۰^{-۲} \sim ۱۰\times۱۰^{-۲} = ۱۰^{-۱}\,\text{m}^۲ = ۱۰^{-۱}\times۱۰^۶\,\text{mm}^۲ = ۱۰^۵\,\text{mm}^۲$$

طبق صورت سؤال، در هر میلی‌متر مربع یک تار مو وجود دارد، پس سر انسان به طور متوسط $۱۰^۵$ تار مو دارد.

گام دوم: تخمین تعداد تارهای موی سر کل مردم ایران:

$$\text{تعداد کل تارهای موی سر برای مردم ایران} = \underbrace{۸۰\times۱۰^۶}_{\text{جمعیت ایران}} \times \underbrace{۱۰^۵}_{\substack{\text{تعداد تارهای موی سر برای یک نفر}}} \sim ۱۰^۲\times۱۰^۶\times۱۰^۵ = ۱۰^{۱۳}$$

gajmarket.com

۷۶ ۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ **چگالی (جرم حجمی)** (تست‌های ۷۶ تا ۱۰۷)

به نسبت جرم (m) به حجم (V) یک ماده، چگالی آن ماده می‌گویند. به‌عبارتی، «**جرم واحد حجم هر ماده، برابر با چگالی آن ماده است**» و می‌توان نوشت:

$$\text{چگالی}: \rho = \frac{\text{جرم ماده}}{\text{حجم ماده}} = \frac{m}{V} \Rightarrow \text{یکای چگالی در SI} \equiv kg/m^3$$

معمولاً سؤالاتی که از مبحث چگالی در کنکور مطرح می‌شوند، نیاز به تبدیل واحد دارند. در اکثر این سؤالات، تبدیل یکاهای زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند، بنابراین توصیه می‌شود آن‌ها را به خاطر بسپارید:

۱ تبدیل لیتر به مترمکعب و برعکس: هر مترمکعب برابر با ۱۰۰۰ لیتر است، بنابراین:

$$\text{مترمکعب} \underset{\times 1000}{\overset{\div 1000}{\rightleftarrows}} \text{لیتر}$$

- برای تبدیل مترمکعب به لیتر، حجم داده شده را در ۱۰۰۰ (یا 10^3) ضرب می‌کنیم.
- برای تبدیل لیتر به مترمکعب، حجم داده شده را بر ۱۰۰۰ (یا 10^3) تقسیم می‌کنیم.

۲ تبدیل سانتی‌مترمکعب به لیتر و برعکس: می‌دانیم هر لیتر برابر با ۱۰۰۰ سانتی‌مترمکعب است، بنابراین:

$$cm^3 \underset{\times 1000}{\overset{\div 1000}{\rightleftarrows}} Lit$$

- برای تبدیل لیتر به سانتی‌مترمکعب، حجم داده شده را در ۱۰۰۰ (یا 10^3) ضرب می‌کنیم.
- برای تبدیل سانتی‌مترمکعب به لیتر، حجم داده شده را بر ۱۰۰۰ (یا 10^3) تقسیم می‌کنیم.

۳ تبدیل گرم بر سانتی‌مترمکعب (gr/cm^3) به کیلوگرم بر مترمکعب (kg/m^3) و برعکس: یک گرم بر سانتی‌مترمکعب برابر با ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب است، بنابراین:

$$kg/m^3 \underset{\times 1000}{\overset{\div 1000}{\rightleftarrows}} gr/cm^3$$

- برای تبدیل gr/cm^3 به kg/m^3، چگالی داده شده را در ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم.
- برای تبدیل kg/m^3 به gr/cm^3، چگالی داده شده را بر ۱۰۰۰ تقسیم می‌کنیم.

تذکر برای مقایسهٔ چگالی دو ماده، به‌صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A}$$

در ادامه با حل سه تمرین خوب و آموزشی، مفاهیم این بخش را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۱ **جرم ۵۰ سانتی‌مترمکعب محلول یک اسید ۶۰ گرم است. جرم حجمی این محلول برحسب gr/Lit و kg/m^3، از راست به چپ کدام است؟**

۱) ۰/۱۲، ۱/۲ ۲) ۱۲، ۱۲ ۳) ۱۲۰، ۱/۲ ۴) ۱۲۰۰، ۱۲۰۰

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول (محاسبهٔ چگالی محلول برحسب kg/m^3):

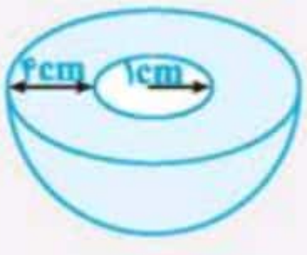
$$\begin{cases} m = 60gr \\ V = 50cm^3 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{60}{50} = 1/2 gr/cm^3 \xrightarrow[\text{تبدیل } gr/cm^3 \text{ به } kg/m^3]{\times 1000} \rho = 1200 kg/m^3$$

گام دوم (محاسبهٔ چگالی محلول برحسب gr/Lit):

$$\begin{cases} m = 60gr \\ V = 50cm^3 \xrightarrow[\text{تبدیل } cm^3 \text{ به } Lit]{\div 1000} V = 0/05 Lit \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{60}{0/05} = 1200 gr/Lit$$

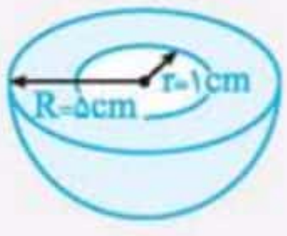
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تمرین ۲ **شکل روبه‌رو نیم‌کره‌ای از جنس یک فلز با چگالی $6 gr/cm^3$ را نشان می‌دهد که حفره‌ای به شکل نیم‌کره در آن ایجاد شده است. وزن این جسم چند نیوتون است؟ $(g \simeq 10 \frac{m}{s^2}, \pi \simeq 3)$**



۱) ۷/۴۴ ۲) ۱۴/۸۸ ۳) ۱/۵ ۴) ۲۹/۷۶

پاسخ ابتدا با کمک رابطهٔ حجم یک کره $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$، حجم فلز به‌کار رفته در ساخت این جسم را از تفاضل حجم نیم‌کره‌های خارجی و داخلی به دست می‌آوریم که برابر است با:



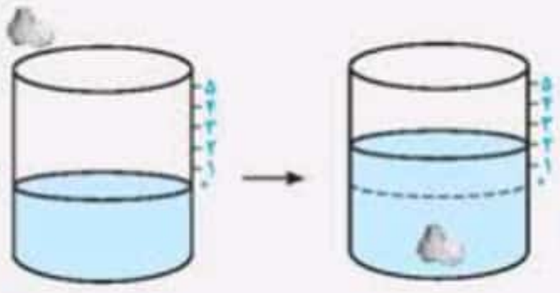
$$\text{حجم فلز}: V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) \Rightarrow V = \frac{2}{3} \times 3 \times (5^3 - 1^3) = 248 cm^3$$

در ادامه جرم این جسم به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = ۶ \times ۲۴۸ = ۱۴۸۸ gr = ۱/۴۸۸ kg$$

حال وزن این جسم برابر است با:

$$W = mg = ۱/۴۸۸ \times ۱۰ = ۱۴/۸۸ N$$ (گزینهٔ ۲)



نکات مهم وکاربردی معمولاً برای اندازه‌گیری حجم اجسامی که شکل مشخصی ندارند از استوانهٔ مدرج استفاده می‌کنند، یعنی جسم موردنظر را درون یک استوانهٔ مدرج می‌اندازند، حجم مایع (آب) جابه‌جا شده (با فرض آن که آب در ماده نفوذ نکند که البته برای این منظور ماده را آغشته به پارافین می‌کنند)، برابر با حجم جسم است.

تمرین۳ **جرم یک گلولهٔ آهنی ۳۹۰۰ گرم و چگالی آن $۷۸۰۰ kg/m^۳$ است. اگر گلولهٔ آهنی را به آرامی در ظرف پر از الکل فرو بریم و چگالی الکل ۸۰۰ گرم بر لیتر باشد، چند گرم الکل از ظرف خارج می‌شود؟** (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۴۰۰ ۲) ۳۹۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ در این‌گونه مسائل ابتدا باید توجه شود که حجم الکل سرریز شده برابر حجم گلولهٔ آهنی است. در ادامه برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ حجم گلولهٔ آهنی):

جرم گلوله آهنی: $m = ۳۹۰۰ gr$ ، چگالی آهن: $\rho = ۷۸۰۰ kg/m^۳ = ۷/۸ gr/cm^۳$

حجم گلوله: $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{۳۹۰۰}{۷/۸} = ۵۰۰ cm^۳$

گام دوم: (محاسبهٔ جرم الکل سرریز شده): حجم الکل سرریز شده برابر حجم گلوله بوده و می‌توان نوشت:

چگالی الکل: $\rho_{الکل} = ۸۰۰ gr/Lit = ۰/۸ gr/cm^۳$ ، حجم الکل: $V_{الکل} = ۵۰۰ cm^۳$

جرم الکل: $m_{الکل} = \rho_{الکل} \times V_{الکل} = ۰/۸ \times ۵۰۰ = ۴۰۰ gr$ (گزینهٔ ۱)

با توجه به تساوی حجم گلوله و حجم الکل سرریز شده می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_{آهن} = V_{الکل} \Rightarrow \frac{m_{آهن}}{\rho_{آهن}} = \frac{m_{الکل}}{\rho_{الکل}} \Rightarrow \frac{۳۹۰۰}{۷۸۰۰} = \frac{m_{الکل}}{۸۰۰} \Rightarrow m_{الکل} = ۴۰۰ gr$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

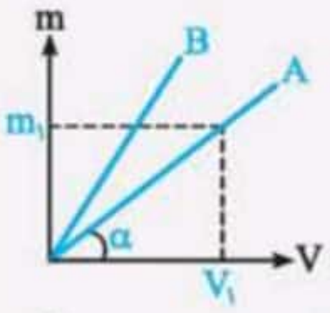
دقت شود که gr/Lit و $kg/m^۳$ با یک‌دیگر معادل هستند (چرا؟).

نمودارهای مربوط به چگالی

در صورت رسم نمودار جرم یک جسم برحسب حجم آن، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) شیب نمودار برابر با چگالی جسم است $\left(\rho_A = \tan\alpha = \frac{m_۱}{V_۱}\right)$.

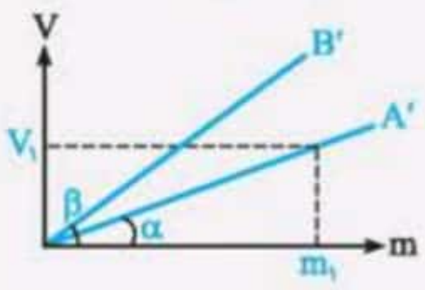
۲) هرچه شیب نمودار بیشتر باشد، چگالی آن جسم بیشتر است $(\rho_B > \rho_A)$.



تذکر در صورت رسم نمودار حجم یک جسم برحسب جرم آن که در برخی تست‌ها انجام می‌شود، به موارد زیر توجه کنید:

۱) شیب نمودار برابر با عکس چگالی جسم است $\left(\tan\alpha = \frac{V_۱}{m_۱} = \frac{۱}{\rho_{A'}}\right)$.

۲) این موضوع یعنی در شکل مقابل هرچه شیب نمودار کم‌تر باشد، چگالی جسم بیشتر است $(\rho_{A'} > \rho_{B'})$.



با توجه به تعریف چگالی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{چگالی}: \rho = \frac{m}{V} \\ \text{جرم}: m = ۴۰۵ gr = ۴۰۵ \times (۱۰^{-۳} kg) = ۴۰۵ \times ۱۰^{-۳} kg \Rightarrow \rho = \frac{۴۰۵ \times ۱۰^{-۳} kg}{۱۵۰ \times ۱۰^{-۶} m^۳} = ۲۷۰۰ kg/m^۳ \\ \text{حجم}: V = ۱۵۰ cm^۳ = ۱۵۰ \times (۱۰^{-۲} m)^۳ = ۱۵۰ \times ۱۰^{-۶} m^۳ \end{cases}$$

gajmarket.com

۷۷ ۱ ابتدا باید دقت شود که دسی‌متر یعنی $10^{-1}m$ و دسی‌متر مکعب، معادل $10^{-3}m^3$ است. $1(dm)^3 = 1\times(10^{-1}m)^3 = 10^{-3}m^3$

در SI، یکاهای کمیت‌های جرم، چگالی و حجم به‌ترتیب kg، kg/m^3 و m^3 است. بنابراین ابتدا باید داده‌های سؤال را به یکای آن‌ها در SI تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} \text{جرم}: m = 5gr = 5\times(10^{-3}kg) = 5\times10^{-3}kg \\ \text{حجم}: V = 0/002dm^3 = 0/002\times(10^{-1}m)^3 = 2\times10^{-6}m^3 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{5\times10^{-3}}{2\times10^{-6}} = 2/5\times10^3 kg/m^3$$

۷۸ ۱ دو لیتر خون معادل با $2000cm^3$ بوده و جرم آن برابر است با:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1/05 = \frac{m}{2000} \Rightarrow m = 2100gr = 210dagr$$

تذکر

برای تبدیل گرم به دکاگرم، آن را در 10^{-1} ضرب کرده‌ایم: $1dagr = 10^1 gr \longrightarrow 1gr = 10^{-1}dagr$

۷۹ ۳ برای تبدیل gr/mm^3 به kg/cm^3 به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\rho = 0/01\frac{gr}{(mm)^3} = 0/01\times\frac{(10^{-3}kg)}{(10^{-1}cm)^3} = 0/01\times\frac{10^{-3}kg}{10^{-3}cm^3} = 0/01kg/cm^3$$

توجه هر میلی‌متر برابر با $0/1$ یا 10^{-1} سانتی‌متر است.

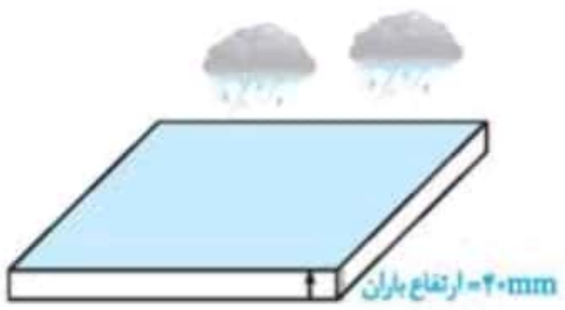
۸۰ ۴ **گام اول:** (محاسبهٔ حجم باران):

حجم باران باریده شده روی زمین $V =$ مساحت زمین $\times$ ارتفاع آب باران

ارتفاع باران $= 40mm = 4\times10^{-2}m$

سطح زمین $= 2500km^2 = 2500\times(10^3m)^2 = 2/5\times10^9 m^2$

حجم باران: $V = 2/5\times10^9\times4\times10^{-2} = 10^8 m^3$



گام دوم: (محاسبهٔ جرم باران): طبق رابطهٔ چگالی داریم:

جرم باران: $m = \rho V = 10^3\times10^8 = 10^{11}kg$

۸۱ ۴ **گام اول:** (محاسبهٔ جرم ظرف و جرم مایع): اگر ظرف به طور کامل از مایع پر شود، جرم مایع درون ظرف را برابر $m_{\text{مایع}}$ در نظر می‌گیریم. حال اگر ظرف تا نیمه از مایع پر شود، جرم مایع داخل ظرف برابر $\frac{m_{\text{مایع}}}{2}$ خواهد بود. حال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{ظرف تا نیمه از مایع پر شود.} \Rightarrow \text{جرم کل} = m_{\text{ظرف}} + \frac{m_{\text{مایع}}}{2} = 240gr \\ \text{ظرف به طور کامل از مایع پر شود.} \Rightarrow \text{جرم کل} = m_{\text{ظرف}} + m_{\text{مایع}} = 300gr \end{cases}$$

با توجه به دو معادلهٔ به دست آمده در فوق، جرم ظرف و جرم مایع به دست می‌آید.

$$\begin{cases} m_{\text{ظرف}} + \frac{m_{\text{مایع}}}{2} = 240 \\ m_{\text{ظرف}} + m_{\text{مایع}} = 300 \end{cases} \Rightarrow m_{\text{ظرف}} = 180gr\ ,\ m_{\text{مایع}} = 120gr$$

گام دوم: (محاسبهٔ چگالی مایع): حال با توجه به حجم کل ظرف که برابر حجم کل مایع است، می‌توان چگالی مایع را به دست آورد:

$$\rho_{\text{مایع}} = \frac{m_{\text{مایع}}}{V_{\text{مایع}}} = \frac{120}{80} = 1/5gr/cm^3$$

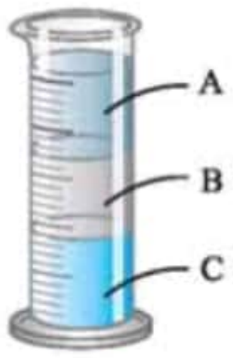
۸۲ ۴ برای حل این سؤال می‌توان گفت، جرم مایع پرکنندهٔ ظرف برابر $240gr(= 300 - 540)$ و جرم روغن پرکنندهٔ ظرف برابر $160gr(= 300 - 460)$ است. از طرفی حجم مایع و حجم روغن داخل ظرف با هم برابر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_{\text{مایع}} = V_{\text{روغن}} \Rightarrow \frac{m_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{مایع}}} = \frac{m_{\text{روغن}}}{\rho_{\text{روغن}}} \Rightarrow \frac{240}{1/2} = \frac{160}{\rho_{\text{روغن}}} \Rightarrow \rho_{\text{روغن}} = 0/8gr/cm^3 = 800kg/m^3 = 800gr/Lit$$

۸۳ ۲ دقت شود که سنگین بودن یک جسم نسبت به جسم دیگر، دلیل بر فرورفتن آن جسم در آب نمی‌شود. به طور مثال فرض کنید $0/5kg$ آهن و $5kg$ چوب را بر روی سطح آب قرار دهیم. گرچه جرم این چوب بیشتر از آهن است (سنگین‌تر است)، ولی چون چگالی آن کم‌تر از چگالی آب است، در آب فرو نمی‌رود ولی از آن‌جایی که چگالی آهن بیشتر از چگالی آب است، آهن در آب فرو می‌رود.

در گزینهٔ (۲) نیز چون چگالی پرتقالِ با پوست، کم‌تر از آب است بر روی سطح آب شناور می‌ماند ولی چون چگالی پرتقالِ بدون پوست، بیشتر از آب است، در آب فرو می‌رود.

۸۴ ۴ در داخل استوانهٔ شیشه‌ای، مایعی که چگالی آن بیشتر است، پایین‌تر قرار می‌گیرد. بنابراین جیوه که چگالی آن بیشتر از دو مایع دیگر است در کف ظرف قرار می‌گیرد.

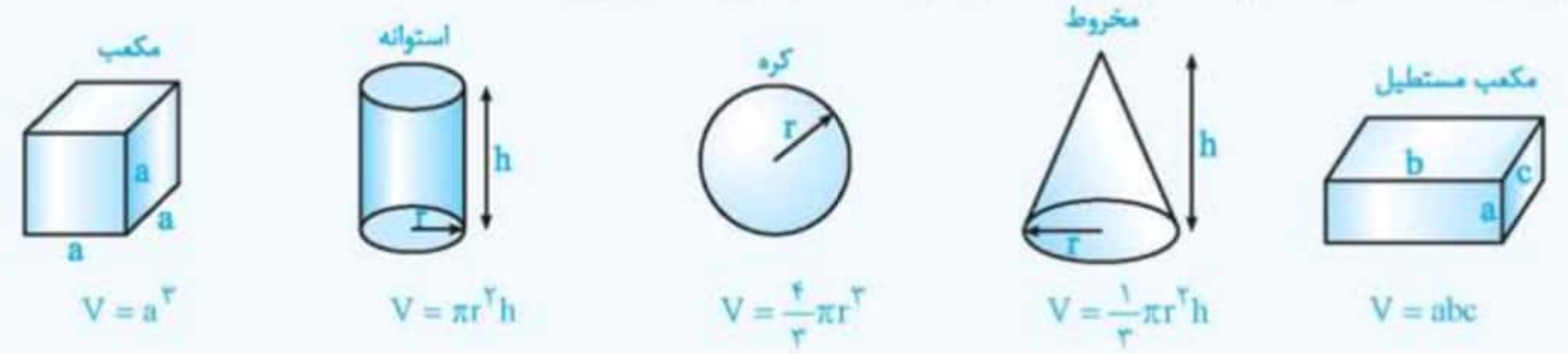


$$\rho_{\text{جیوه}} > \rho_{\text{آب}} > \rho_{\text{روغن زیتون}} \rightarrow \begin{cases} A: \text{روغن زیتون} \\ B: \text{آب} \\ C: \text{جیوه} \end{cases}$$

۸۵ ۳

یادآوری

حجم برخی از اجسام که شکل هندسی مشخصی دارند به‌صورت زیر است، آن‌ها را به‌خاطر بسپارید:



در مسائلی که شکل هندسی یک جسم تغییر می‌کند، جرم آن ثابت می‌ماند.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 cm^3 \ , \ \rho = 6 \frac{gr}{cm^3} \ , \ m = ?$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = 6 \times \frac{4}{3} \times \pi \times \underbrace{25 \times 5}_{5^3} = 1000\pi gr \Rightarrow m = \pi kg = 3/14 kg$$

۸۶ ۲ باتوجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

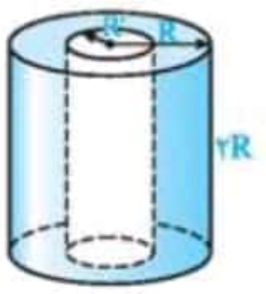
۸۷ ۴ **گام اول:** ابتدا جرم جسم را از رابطهٔ زیر برحسب گرم به‌دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = \underbrace{4}_{\frac{gr}{cm^3}\text{ واحد}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{cm^3\text{ حجم مکعب برحسب}} = 32gr$$

گام دوم: در ادامه با توجه به استراتژی تبدیل واحد به‌صورت زنجیره‌ای داریم:

$$m = 32gr = 32gr \times \frac{1 \text{ قیراط}}{200 \times 10^{-3} gr} = 160 \text{ قیراط}$$

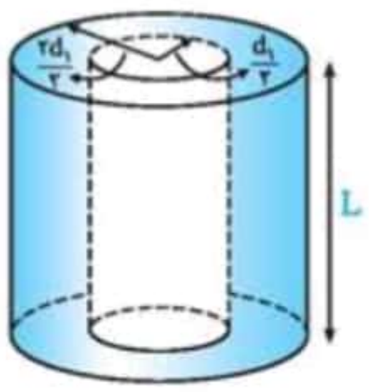
۸۸ ۲ در طول فرایند تغییر شکل، جرم جسم ثابت می‌ماند. از طرفی چگالی ماده نیز ثابت است، در نتیجه با توجه به رابطهٔ $m = \rho V$، حجم ماده نیز در طول فرایند ثابت می‌ماند و داریم:



$$\begin{cases} \text{حجم کره (در حالت اول)}: V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{حجم استوانه (در حالت دوم)}: V_2 = (\pi R^2 - \pi R'^2) \times 2R = 2\pi R^3 - 2\pi R'^2 \times R \end{cases}$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R^3 - 2\pi R'^2 R \Rightarrow 2\pi R R'^2 = \frac{2}{3}\pi R^3 \Rightarrow R'^2 = \frac{1}{3}R^2 \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

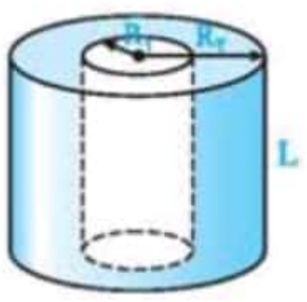
۸۹ ۴ با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، به راحتی می‌توان نوشت:



$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow m = \rho\left(\pi\frac{d_2^2}{4} - \pi\frac{d_1^2}{4}\right)L = \frac{1}{4}\pi\rho L(d_2^2 - d_1^2)$$

$$\xrightarrow{d_2 = 2d_1} m = \frac{1}{4}\pi\rho L((2d_1)^2 - d_1^2) = \frac{3}{4}\pi\rho L d_1^2$$

۹۰ ۴ برای دو حالت، چگالی جسم ثابت می‌ماند، بنابراین می‌توان نوشت:



$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\begin{cases} \text{حجم در حالت اول}: V_1 = L \times (\pi R_2^2 - \pi R_1^2) \\ \text{حجم در حالت دوم}: V_2 = 3L \times (\pi(2R_2)^2 - \pi(2R_1)^2) = 12\underbrace{L(\pi R_2^2 - \pi R_1^2)}_{V_1} = 12V_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{V_2}{V_1} = 12$$

$$\Rightarrow m_2 = 12m_1 \Rightarrow m_2 = 12M$$

gajmarket.com

۹۱ ۲ با توجه به مطالب خلاصه نکات (۶)، از آن‌جایی‌که پس از قرار دادن جسم در داخل استوانه، سطح آب از $۱۵۰cm^۳$ به $۱۵۴cm^۳$ می‌رسد، می‌توان فهمید که حجم گلوله $۴cm^۳$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V = ۴cm^۳ \quad , \quad m = ۴۲gr \quad , \quad \rho = ?$$

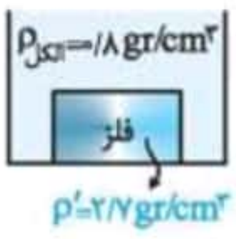
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۴۲}{۴} = ۱۰/۵\ gr/cm^۳$$

۹۲ ۳ برای محاسبهٔ چگالی فلز، ابتدا حجم آب جابه‌جا شده را (که برابر با حجم قطعه فلز است) به‌دست می‌آوریم:

$$\text{حجم فلز} = \text{حجم آب جابه‌جا شده} \Rightarrow V = \text{سطح مقطع داخلی استوانه} \times \text{ارتفاع آب بالا آمده} = ۱۰ \times ۱/۲ = ۱۲cm^۳$$

$$\text{جرم فلز}: m = ۹۰gr \Rightarrow \text{چگالی فلز}: \rho = \frac{m}{V} = \frac{۹۰gr}{۱۲cm^۳} = ۷/۵gr/cm^۳$$

۹۳ ۱ در این مسأله باید دقت شود که حجم الکل سرریز شده از ظرف با حجم قطعه فلز برابر است. بنابراین می‌توان نوشت:



$$\text{برای الکل}: \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۱۶۰}{V} \Rightarrow V = \frac{۱۶۰}{۰/۸} = ۲۰۰cm^۳$$

$$\text{برای قطعه فلز}: \rho' = \frac{m'}{V'} \Rightarrow ۲/۷ = \frac{m'}{۲۰۰} \Rightarrow \text{جرم قطعه فلز}: m' = ۵۴۰gr$$

خلاقیت حرفه‌ای

حل این تست پر تکرار، به‌صورت زیر سریع‌تر انجام می‌پذیرد:

$$V_{\text{فلز}} = V_{\text{مایع}} \Rightarrow \frac{m_{\text{فلز}}}{\rho_{\text{فلز}}} = \frac{m_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{مایع}}} \Rightarrow \frac{m_{\text{فلز}}}{۲/۷} = \frac{۱۶۰}{۰/۸} \Rightarrow m_{\text{فلز}} = ۵۴۰gr$$

۹۴ ۲ با قرار دادن هر گوی در داخل ظرف، حجم مایع بالا آمده در ظرف، برابر حجم گوی می‌شود. حال فرض کنید با قرار دادن N عدد گوی در داخل ظرف، مایع به اندازهٔ $۲cm$ بالا می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$N \times V_{\text{گوی}} = \underbrace{V_{\text{مایع بالا آمده}}}_{Ah} \Rightarrow N \times V_{\text{گوی}} = Ah \xrightarrow{V_{\text{گوی}} = \frac{m_{\text{گوی}}}{\rho_{\text{گوی}}}} N \times \frac{m_{\text{گوی}}}{\rho_{\text{گوی}}} = Ah \Rightarrow N \times \frac{۱۲۰}{۸} = ۶۰ \times ۲ \Rightarrow N = ۸$$

بنابراین با قرار دادن ۸ گوی در داخل ظرف، مایع تا لبهٔ ظرف بالا می‌آید.

۹۵ ۴ ابتدا حجم واقعی فلز به‌کار رفته در ساخت کره را محاسبه می‌کنیم که برابر است با:

$$\text{حجم فلز}: V = \text{حجم کره} - \text{حجم حفره} = \frac{۴}{۳}\pi \times (۰/۱)^۳ - \frac{۴}{۳}\pi \times (۰/۰۵)^۳ \simeq ۳/۵ \times ۱۰^{-۳} m^۳$$

در ادامه جرم کره به سادگی از رابطهٔ $m = \rho V$ به‌دست می‌آید:

$$\text{چگالی فلز}: \rho = ۸\frac{kg}{Lit} = ۸ \times \frac{۱kg}{(۱۰^{-۳} m^۳)} = ۸۰۰۰kg/m^۳ \Rightarrow \text{جرم کره}: m = \underbrace{۸۰۰۰}_{\rho} \times \underbrace{۳/۵ \times ۱۰^{-۳}}_{V} = ۲۸kg$$

۹۶ ۴ گام اول: ابتدا محاسبه می‌کنیم که اگر یک مکعب با طول ضلع $۱۰cm$ و بدون حفره داشته باشیم، جرم آن چه‌قدر است؟

$$\text{جرم مکعب بدون حفره}: m = \rho V = ۸ \times (۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰) = ۸۰۰۰gr = ۸kg$$

گام دوم: جرم مکعب در سؤال برابر با $۶kg$ داده شده است، بنابراین به اندازهٔ حجم ۲ کیلوگرم از فلز، در آن حفره وجود دارد.

$$\text{حجم حفره} = \text{حجم ۲ کیلوگرم از فلز (یا ۲۰۰۰gr از فلز)}: V = \frac{m}{\rho} = \frac{۲۰۰۰gr}{۸gr/cm^۳} = ۲۵۰cm^۳$$

بنابراین، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۹۷ ۳ گام اول: با توجه به جرم کرهٔ فلزی و چگالی آن، حجم واقعی فلز مورد استفاده را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m_{\text{فلز}}}{V_{\text{فلز}}} \Rightarrow ۲/۷ = \frac{۱۰۸۰}{V_{\text{فلز}}} \Rightarrow \text{حجم واقعی فلز}: V_{\text{فلز}} = ۴۰۰cm^۳$$

گام دوم: حال با توجه به اختلاف حجم واقعی فلز و حجم ظاهری کره، می‌توان نوشت:

$$\text{حجم کره}: V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times ۵^۳ = ۵۰۰cm^۳$$

$$\text{حجم حفره}: V_{\text{حفره}} = V_{\text{کره}} - V_{\text{فلز}} = ۵۰۰ - ۴۰۰ = ۱۰۰cm^۳$$

$$\text{خواستهٔ مسئله}: \frac{\text{حجم حفره}}{\text{حجم کره}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۵۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۲۰$$

۹۸ ۱ مشابه با سؤالات قبل داریم:

$$\begin{cases} \text{حجم ظاهری مکعب} = \text{حجم آب خارج‌شده} = ۲۰۰\text{cm}^۳ \\ \text{حجم ظاهری مکعب} = \text{حجم حفرهٔ موجود} + \text{حجم واقعی مکعب فلزی} \end{cases}$$

هم‌چنین با استفاده از اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} \text{جرم مکعب} = ۱۴۰۰\text{gr} \\ \text{چگالی فلز} = ۸\text{gr}/\text{cm}^۳ \end{cases} \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}} \text{حجم واقعی مکعب} = \frac{۱۴۰۰}{۸} = ۱۷۵\text{cm}^۳$$

در نتیجه حجم حفرهٔ موجود در مکعب برابر است با:

$$\text{حجم حفرهٔ موجود} = \text{حجم ظاهری} - \text{حجم واقعی} = ۲۰۰ - ۱۷۵ = ۲۵\text{cm}^۳$$

۹۹ ۱ **گام اول:** حجم خالص برنز استفاده شده در مجسمه، با توجه به جرم و چگالی آن برابر است با:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۸۰۰۰ = \frac{۴۰}{V} \Rightarrow V = ۰/۰۰۵\text{m}^۳$$

گام دوم: در ادامه به‌صورت زیر، حجم فضای خالی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم فضای خالی} = \text{حجم ظاهری مجسمه} - \text{حجم خالص برنز} = ۰/۰۵ - ۰/۰۰۵ = ۰/۰۴۵\text{m}^۳$$

گام سوم: جرم نفت مورد نیاز برای پرکردن فضای خالی داخل مجسمه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_{\text{نفت}} = \frac{m_{\text{نفت}}}{V_{\text{نفت}}} \xrightarrow{\rho_{\text{نفت}}=۸۰۰\text{kg}/\text{m}^۳} m_{\text{نفت}} = ۸۰۰ \times \frac{۴۵}{۱۰۰۰} = ۳۶\text{kg}$$

(حجم فضای خالی)

۱۰۰ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا حجم واقعی فلز توپر و فلز توخالی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{وزن مکعب توپر} = m_۱g \Rightarrow ۱۰m_۱ = ۸ \Rightarrow m_۱ = ۰/۸\text{kg} = ۸۰۰\text{gr} \Rightarrow \text{حجم مکعب توپر}: V_۱ = \frac{m_۱}{\rho} = \frac{۸۰۰}{۱۰} = ۸۰\text{cm}^۳ \\ \text{وزن مکعب توخالی} = m_۲g \Rightarrow ۱۰m_۲ = ۴ \Rightarrow m_۲ = ۰/۴\text{kg} = ۴۰۰\text{gr} \Rightarrow \text{حجم واقعی مکعب توخالی}: V_۲ = \frac{m_۲}{\rho} = \frac{۴۰۰}{۱۰} = ۴۰\text{cm}^۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حجم حفره} = ۸۰ - ۴۰ = ۴۰\text{cm}^۳$$

۱۰۱ ۱ با توجه به داده‌های مسأله و کمک گرفتن از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ داریم:

$$\rho_A = ۱/۵\rho_B \ , \ (V_B = ۵۰۰\text{cm}^۳ \Rightarrow m_B = ۲۰۰\text{gr}) \ , \ (V_A = ۲۰۰\text{cm}^۳ \Rightarrow m_A = ?)$$

$$\text{چگالی}: \rho = \frac{m}{V} \rightarrow \rho_B = \frac{m_B}{V_B} = \frac{۲۰۰}{۵۰۰} = ۰/۴\text{gr}/\text{cm}^۳ \xrightarrow{\rho_A = ۱/۵\rho_B} \rho_A = ۱/۵ \times ۰/۴ = ۰/۶\text{gr}/\text{cm}^۳$$

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} \Rightarrow m_A = \rho_A V_A = ۰/۶ \times ۲۰۰ = ۱۲۰\text{gr}$$

نگاه دیگر: برای مقایسهٔ چگالی دو ماده با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{m_A}{۲۰۰} \times \frac{۵۰۰}{۲۰۰} \Rightarrow m_A = ۱۲۰\text{gr}$$

۱۰۲ ۴

$$\rho_A = \frac{۴}{۵}\rho_B \ , \ V_A = ۱۰\text{Lit} \ , \ m_A = ۸\text{kg} \ , \ m_B = ۵\text{kg} \ , \ V_B = ?$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۵} \times \frac{V_B}{۱۰} \Rightarrow V_B = ۵\text{Lit}$$

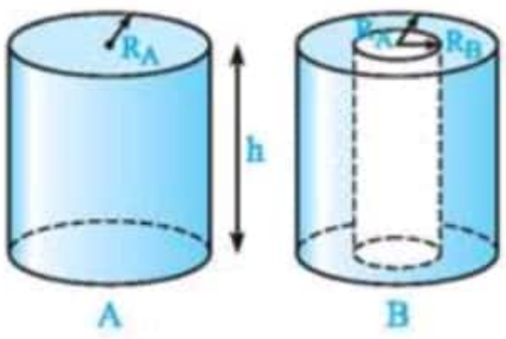
۱۰۳ ۲ اطلاعات سؤال به‌صورت زیر است:

$$\rho_{\text{آلومینیم}} = ۲۲/۵ \times ۱۰^۳ \frac{\text{kg}}{\text{m}^۳} \ , \ \rho_{\text{مس}} = ۹\frac{\text{gr}}{\text{cm}^۳} \xrightarrow{\text{تبدیل } \frac{\text{gr}}{\text{cm}^۳} \text{ به } \frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}} \rho_{\text{مس}} = ۹ \times ۱۰^۳ \frac{\text{kg}}{\text{m}^۳} \ , \ V_{\text{آلومینیم}} = V_{\text{مس}}$$

حال با مقایسهٔ رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ برای دو فلز داریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{V_{\text{آلومینیم}} = V_{\text{مس}}} \frac{\rho_{\text{آلومینیم}}}{\rho_{\text{مس}}} = \frac{m_{\text{آلومینیم}}}{m_{\text{مس}}} \Rightarrow \frac{m_{\text{آلومینیم}}}{m_{\text{مس}}} = \frac{۲۲/۵ \times ۱۰^۳}{۹ \times ۱۰^۳} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۱۰۴ ۴ در مقایسهٔ چگالی استوانه‌های A و B، کافی است حجم آن‌ها را مقایسه کنیم:



$$\begin{cases} m_A = m_B \\ V_A = \pi R_A^۲ h \\ V_B = \pi(R_A^۲ - \underbrace{R_B^۲}_{(\frac{۱}{۲}R_A)^۲})h = \frac{۳}{۴}\pi R_A^۲ h \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} = ۱ \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

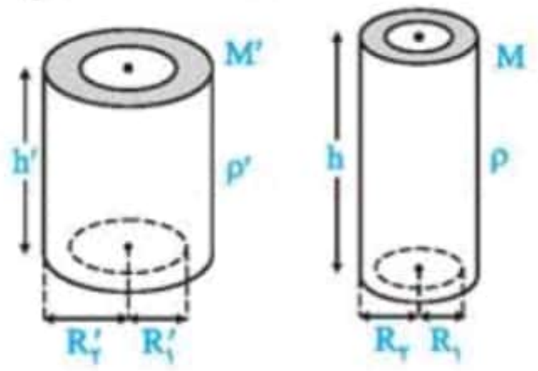
gajmarket.com

۱۰۵ ۳ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\frac{\rho_A}{\rho_B}=۱/۶\\ r_A=۳\,cm\ ,\ r_B=۶\,cm\end{cases}\xrightarrow{\text{حجم کره: } V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳}\frac{V_B}{V_A}=\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^۳=\left(\frac{۶}{۳}\right)^۳=۸$$

$$\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{V_B}{V_A}\Rightarrow ۱/۶=\frac{m_A}{m_B}\times ۸\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}=\frac{۱}{۵}$$

۱۰۶ ۳ ابتدا حجم دو استوانه و نسبت آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:



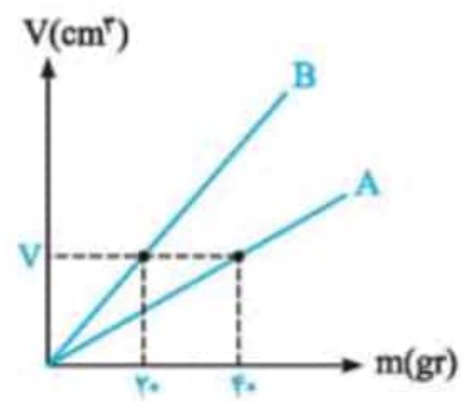
$$M=۳M'$$
$$\rho=۲\rho'$$
$$R'_۱=۳R_۱$$
$$R'_۲=۳R_۲$$

$$\begin{cases}V'=\pi R'^{۲}_{۲}h'-\pi R'^{۲}_{۱}h'=\pi h'(R'^{۲}_{۲}-R'^{۲}_{۱})=\pi h'((۳R_۲)^۲-(۳R_۱)^۲)=۹\pi h'(R^۲_۲-R^۲_۱)\\ V=\pi R^{۲}_{۲}h-\pi R^{۲}_{۱}h=\pi h(R^۲_۲-R^۲_۱)\end{cases}\Rightarrow\frac{V}{V'}=\frac{\pi h(R^۲_۲-R^۲_۱)}{۹\pi h'(R^۲_۲-R^۲_۱)}=\frac{h}{۹h'}$$

در ادامه با کمک رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V}$، می‌توان نوشت:

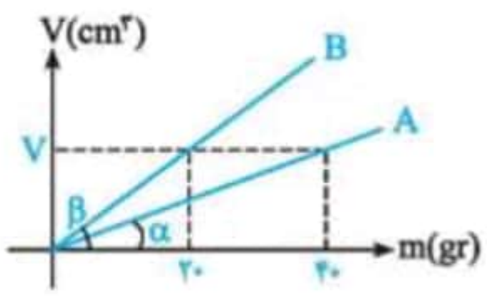
$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow\frac{\rho'}{\rho}=\frac{M'}{M}\times\frac{V}{V'}\Rightarrow\frac{\rho'}{۲\rho'}=\frac{M'}{۳M'}\times\frac{h}{۹h'}\Rightarrow\frac{h}{h'}=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$$

۱۰۷ ۴ در حجم یکسان V، جرم A برابر ۴۰gr و جرم B برابر ۲۰gr است و می‌توان نوشت:



$$V_A=V_B=V$$
$$m_B=۲۰gr\ ,\ m_A=۴۰gr$$
$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{V_B}{V_A}=\frac{۴۰}{۲۰}\times\frac{V}{V}=۲$$

به جور دیگه فکر کنیم: با توجه به این‌که نمودار حجم برحسب جرم برای دو ماده رسم شده است، شیب نمودار برابر عکس چگالی است و داریم:



$$\tan\theta=\frac{۱}{\rho}\Rightarrow\rho=\frac{۱}{\tan\theta}\Rightarrow\begin{cases}\rho_A=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{\frac{V}{۴۰}}=\frac{۴۰}{V}\\ \rho_B=\frac{۱}{\tan\beta}=\frac{۱}{\frac{V}{۲۰}}=\frac{۲۰}{V}\end{cases}\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=۲$$

۱۰۸ ۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — **چگالی مخلوط چند ماده (آلیاژ)** — (تست‌های ۱۰۸ تا ۱۱۴)

در صورتی‌که دو یا چند ماده را با هم مخلوط کنیم (به‌طوری که تغییر حجم صورت نگیرد)، چگالی مادهٔ مخلوط با توجه به تعریف چگالی، به سادگی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{\text{کل}}=\frac{\text{مجموع جرم مواد}}{\text{مجموع حجم مواد}}=\frac{m_۱+m_۲+\dots}{V_۱+V_۲+\dots}$$

$\begin{cases}\text{حجم مادهٔ اول: } V_۱\ ,\ \text{جرم مادهٔ اول: } m_۱\\ \text{حجم مادهٔ دوم: } V_۲\ ,\ \text{جرم مادهٔ دوم: } m_۲\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\end{cases}$

نکته در بعضی موارد، حجم یا جرم ماده‌ها به‌طور مستقیم در صورت سؤال داده نمی‌شود، در این مواقع از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱ در صورتی که چگالی و حجم مواد به‌کار رفته در صورت سؤال داده شود:

$$\rho_{\text{کل}}=\frac{\overbrace{(\rho_۱V_۱)}^{(m_۱)}+\overbrace{(\rho_۲V_۲)}^{(m_۲)}+\dots}{V_۱+V_۲+\dots}$$

۲ در صورتی که چگالی و جرم مواد به‌کار رفته در صورت سؤال داده شود:

$$\rho_{\text{کل}}=\frac{m_۱+m_۲+\dots}{\underbrace{\left(\frac{m_۱}{\rho_۱}\right)}_{V_۱}+\underbrace{\left(\frac{m_۲}{\rho_۲}\right)}_{V_۲}+\dots}$$

دقت شود که نیازی به حفظ کردن این روابط نبوده و کافی است آن‌ها را کمی درک کنید.

تمرین۱ چگالی مخلوط دو مایع A و B با حجم‌های اولیهٔ V_A و V_B، برابر ۰/۷۵ گرم بر سانتی‌متر مکعب است. اگر چگالی مایع A برابر $600\,g/lit$ و چگالی مایع B برابر $800\,g/lit$ باشد، V_A چند برابر V_B است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ برای حل این تمرین خوب، ابتدا جرم تک‌تک مایع‌های A و B را با توجه به رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{مایع A}: \rho_A=\frac{m_A}{V_A}\Rightarrow m_A=\rho_A V_A=600V_A \\ \text{مایع B}: \rho_B=\frac{m_B}{V_B}\Rightarrow m_B=\rho_B V_B=800V_B \end{cases}$$

پس از مخلوط کردن دو مایع A و B، داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}}=0/75\,gr/cm^3=750\,gr/Lit$$

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m_{\text{کل}}}{V_{\text{کل}}}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}\Rightarrow 750=\frac{600V_A+800V_B}{V_A+V_B}\Rightarrow 750V_A+750V_B=600V_A+800V_B$$

$$\Rightarrow 150V_A=50V_B\Rightarrow\frac{V_A}{V_B}=\frac{1}{3}$$ (گزینهٔ ۳)

با توجه به خلاصه نکات فوق، چگالی مخلوط همگن دو ماده از رابطهٔ $\rho_{\text{کل}}=\frac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}$ به‌دست می‌آید و داریم:

$$\begin{cases} \rho_{\text{کل}}=1400\,kg/m^3=1/4\,gr/cm^3 \\ \rho_1=1300\,kg/m^3=1/3\,gr/cm^3 \quad , \quad V_1=300\,cm^3 \\ \rho_2=1500\,kg/m^3=1/5\,gr/cm^3 \quad , \quad V_2=? \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$1/4=\frac{(1/3\times300)+(1/5\times V_2)}{300+V_2}\Rightarrow 420+1/4V_2=390+1/5V_2\Rightarrow \text{حجم مایع دوم}: V_2=300\,cm^3$$

۱ ۱۰۹ برای محاسبهٔ چگالی مخلوط از رابطهٔ $\rho_{\text{کل}}=\frac{m_{\text{کل}}}{V_{\text{کل}}}$ استفاده می‌کنیم:

$$\rho_A=2\,gr/cm^3\ ,\ \rho_B=9\,gr/cm^3\ ,\ m_B=3m_A$$

$$\rho_{\text{کل}}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}=\frac{m_A+m_B}{\frac{m_A}{\rho_A}+\frac{m_B}{\rho_B}}=\frac{4m_A}{\frac{m_A}{2}+\frac{3m_A}{9}}=\frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{4}{\frac{5}{6}}=4/8\,gr/cm^3=4800\,kg/m^3$$

۳ ۱۱۰ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۱۱ برای محاسبهٔ چگالی مخلوط به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \rho_{\text{کل}}=\frac{m_{\text{کل}}}{V_{\text{کل}}}=\frac{m_1+m_2}{V_1+V_2} \\ V_1=\frac{1}{3}V\rightarrow m_1=\rho_1V_1=\frac{1}{3}V\rho_1 \\ V_2=\frac{2}{3}V\rightarrow m_2=\rho_2V_2=\frac{2}{3}V\rho_2 \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{کل}}=\frac{\frac{1}{3}\cancel{V}\rho_1+\frac{2}{3}\cancel{V}\rho_2}{\frac{1}{3}\cancel{V}+\frac{2}{3}\cancel{V}}=\frac{1}{3}\rho_1+\frac{2}{3}\rho_2=\frac{\rho_1+2\rho_2}{3}$$

۴ ۱۱۲ اگر جرم مخلوط را برابر m درنظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} m_1=\frac{25}{100}m=\frac{1}{4}m\Rightarrow V_1=\frac{m_1}{\rho_1}=\frac{\frac{1}{4}m}{\rho_1}=\frac{m}{4\rho_1} \\ m_2=m-\frac{25}{100}m=\frac{75}{100}m=\frac{3}{4}m\Rightarrow V_2=\frac{m_2}{\rho_2}=\frac{\frac{3}{4}m}{\rho_2}=\frac{3m}{4\rho_2} \end{cases}$$

$$\rho_{\text{کل}}=\frac{m_1+m_2}{V_1+V_2}=\frac{\frac{1}{4}\cancel{m}+\frac{3}{4}\cancel{m}}{\frac{\cancel{m}}{4\rho_1}+\frac{3\cancel{m}}{4\rho_2}}=\frac{1}{\frac{\rho_2+3\rho_1}{4\rho_1\rho_2}}=\frac{4\rho_1\rho_2}{\rho_2+3\rho_1}$$

www.gajmarket.com

۲ ۱۱۳ با توجه به رابطهٔ مربوط به چگالی مخلوط دو ماده می‌توان نوشت: (مادهٔ ۱ طلا و مادهٔ ۲ نقره است):

$$\begin{cases}\rho_{\text{کل}}=\dfrac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}\Rightarrow 13/6=\dfrac{19V_1+10V_2}{\underbrace{V_1+V_2}_{5cm^3}}\Rightarrow 19V_1+10V_2=68cm^3 & \text{رابطهٔ (I):}\\ V_1+V_2=5cm^3 & \text{رابطهٔ (II):}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{روابط I, II}}\begin{cases}19V_1+10V_2=68\\ V_1+V_2=5\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}V_1=2cm^3\ ,\ V_2=3cm^3$$

$$m_{\text{نقره}}=\rho_{\text{نقره}}V_{\text{نقره}}\xrightarrow{V_{\text{نقره}}=V_2=3cm^3}m_{\text{نقره}}=10\times 3=30gr$$

۳ ۱۱۴ با توجه به رابطهٔ مربوط به چگالی مخلوط چند ماده، از تقسیم کردن جرم کل مایعات بر حجم کل مایعات، چگالی مخلوط به دست می‌آید (البته اگر کاهش حجم صورت نگیرد). بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_1=\frac{25}{100}V\ ,\ V_2=\frac{30}{100}V\ ,\ V_3=(1-\frac{25}{100}-\frac{30}{100})V=\frac{45}{100}V$$

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m_1+m_2+m_3}{V_1+V_2+V_3}=\frac{\rho_1V_1+\rho_2V_2+\rho_3V_3}{V_1+V_2+V_3}$$

$$\Rightarrow\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\rho_1(\frac{25}{100}V)+2\rho_1(\frac{30}{100}V)+3\rho_1(\frac{45}{100}V)}{V}=(\frac{25}{100}+\frac{60}{100}+\frac{135}{100})\rho_1=\frac{220}{100}\rho_1\Rightarrow\rho_{\text{مخلوط}}=2/2\rho_1$$

۳ ۱۱۵ برای حل این سؤال، دو گام زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: تبدیل یکای $\frac{\mu g.mm}{s^2}$ به $\frac{kg.m}{s^2}$:

$$10^{13}\frac{\mu g.mm}{s^2}\xrightarrow{\text{تبدیل }\mu g\text{ به }gr}10^{13}\times(10^{-6}gr.m\,m/s^2)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل }g\text{ به }kg}10^{13}\times10^{-6}\times(10^{-3}kg.m\,m/s^2)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل }mm\text{ به }m}10^{13}\times10^{-6}\times10^{-3}\times(10^{-3}kg.m/s^2)=10kg.m/s^2$$

گام دوم: معادل قرار دادن دو عدد:

$$10\frac{kg.m}{s^2}=10^{-8}\frac{kg.[N]}{s^2}\rightarrow[N]=10^9m=1Gm$$

۱ ۱۱۶ با توجه به این‌که a برابر حاصل جمع دو عبارت است، باید یکای آن با یکای هر یک از این عبارت‌ها برابر باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

گام اول: (به دست آوردن یکای α):

$$a=\alpha x+\beta x^3\rightarrow a_{\text{یکای}}\equiv(\alpha x)_{\text{یکای}}=(\alpha_{\text{یکای}})\times(x_{\text{یکای}})$$

$$\rightarrow\frac{mm}{\mu s^2}\equiv(\alpha_{\text{یکای}})\times cm$$

$$\rightarrow\frac{10^{-3}m}{(10^{-6}s)^2}\equiv(\alpha_{\text{یکای}})\times(10^{-2}m)$$

$$\rightarrow\alpha_{\text{یکای}}\equiv\frac{10^{-3}m}{(10^{-12}s^2)\times(10^{-2}m)}=10^{11}s^{-2}$$

گام دوم: (به دست آوردن یکای β):

$$a=\alpha x+\beta x^3\rightarrow a_{\text{یکای}}\equiv(\beta x^3)_{\text{یکای}}=(\beta_{\text{یکای}})\times(x_{\text{یکای}})^3$$

$$\rightarrow\frac{mm}{\mu s^2}\equiv(\beta_{\text{یکای}})\times(cm)^3$$

$$\rightarrow\frac{10^{-3}m}{(10^{-6}s)^2}\equiv(\beta_{\text{یکای}})\times(10^{-2}m)^3$$

$$\rightarrow\beta_{\text{یکای}}\equiv\frac{10^{-3}m}{(10^{-6}s)^2\times(10^{-2}m)^3}=\frac{10^{-3}m}{10^{-12}s^2\times10^{-6}m^3}=10^{15}s^{-2}.m^{-2}$$

۳ ۱۱۷ فرض کنیم تندی انتشار امواج به صورت $v=A^\alpha B^\beta$ باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v=A^\alpha B^\beta\rightarrow\text{یکای تندی}\equiv(A_{\text{یکای}})^\alpha\times(B_{\text{یکای}})^\beta$$

$$\rightarrow m/s\equiv(N)^\alpha\times(kg/m)^\beta$$

با توجه به رابطهٔ $F=ma$، می‌دانیم که نیوتون (N) معادل $kg.m/s^2$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$m/s\equiv(kg.m/s^2)^\alpha\times(kg/m)^\beta=(kg)^{\alpha+\beta}\times(m)^{\alpha-\beta}\times\frac{1}{s^{2\alpha}}$$

برای آن‌که یکاها در دو طرف یکسان باشند، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲\alpha = ۱ \\ \alpha - \beta = ۱ \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲}, \beta = \frac{-۱}{۲} \rightarrow v = A^{\alpha}B^{\beta} = A^{\frac{۱}{۲}}B^{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

دقت: با قرار دادن مقادیر به‌دست آمده برای α و β، مقدار $(\alpha+\beta)$ برابر صفر شده و توان kg برابر صفر می‌شود که قابل‌قبول است.

۱ ۱۱۸ ابتدا جرم کهکشان را بر حسب گرم به دست می‌آوریم و سپس آن را به صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم.

$$\text{جرم کهکشان}: m = ۱۲۰۰GM_{\odot} \xrightarrow{\text{تبدیل } M_{\odot} \text{ به } GM_{\odot}} ۱۲۰۰ \times (۱۰^{۹}M_{\odot}) \xrightarrow{\text{تبدیل } kg \text{ به } M_{\odot}} ۱۲۰۰ \times ۱۰^{۹} \times (۲ \times ۱۰^{۳۰}kg) \xrightarrow{\text{تبدیل } gr \text{ به } kg} ۱۲۰۰ \times ۱۰^{۹} \times ۲ \times ۱۰^{۳۰} \times (۱۰^{۳}gr)$$

$$= ۲۴۰۰ \times ۱۰^{۴۲}gr = ۲/۴ \times ۱۰^{۴۵}gr$$

۴ ۱۱۹ همان‌طور که می‌دانیم، یکای نجومی (AU)، برابر میانگین فاصلهٔ خورشید تا زمین است که طبق صورت سؤال، نور آن را در مدت ۸ دقیقه طی می‌کند. حال باید به دست بیاوریم در مدت زمان یک‌سال، نور چند یکای نجومی را طی می‌کند. بنابراین ابتدا یک سال را بر حسب دقیقه محاسبه می‌کنیم.

$$\text{۱سال} = ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ = ۵۲۵۶۰۰ \text{دقیقه}$$

(روز، ساعت، دقیقه)

در ادامه با یک تناسب، مسافتی که نور در یک سال طی می‌کند (یعنی یک سال نوری) را به دست می‌آوریم:

مسافت (یکای نجومی)	زمان (دقیقه)
۱	۸
x	۵۲۵۶۰۰

$$\rightarrow x = \frac{۵۲۵۶۰۰}{۸} = ۶۵۷۰۰AU$$

۳ ۱۲۰ در گزارش عدد $۱۱۴cm \pm ۱cm$، عبارت $\pm ۱cm$ نشان‌دهندهٔ خطای وسیله اندازه‌گیری است. با توجه به آن‌که در وسایل اندازه‌گیری مدرج، دقت وسیله (یعنی کم‌ترین تقسیم‌بندی وسیله)، دو برابر مقدار خطای آن است، دقت اندازه‌گیری این وسیله برابر $۲cm$ خواهد بود.

۲ ۱۲۱ وقتی حاصل اندازه‌گیری توسط یک دستگاه رقمی (دیجیتال) برابر $۲/۸۳kg/m^{۳}$ گزارش شود، دقت اندازه‌گیری برای این وسیلهٔ دیجیتالی برابر $۰/۰۱kg/m^{۳}$ خواهد بود.

$$\text{دقت اندازه‌گیری} = ۰/۰۱kg/m^{۳} \xrightarrow[\times ۱۰^{-۳}]{\text{تبدیل } gr/cm^{۳} \text{ به } kg/m^{۳}} ۰/۰۱ \times ۱۰^{-۳}gr/cm^{۳} = ۱۰^{-۵}gr/cm^{۳}$$

۳ ۱۲۲ محل قطع خط‌چین با خط‌کش، معادل با عددی است که شخص قرائت می‌کند. در حالتی‌که شخص در امتداد (۳) نگاه می‌کند، عدد قرائت‌شده بیشتر از مقدار واقعی است.

عدد قرائت (۱) < عدد قرائت (۲) < عدد قرائت (۳)

۲ ۱۲۳ تقسیم‌بندی‌های تندی‌سنج، به‌اندازهٔ $۲\frac{km}{h}$ است و خطای حاصل از این اندازه‌گیری $\pm ۱\frac{km}{h}$ است. در ادامه با توجه به این‌که عقربهٔ تندی‌سنج بین $۱۱۴\frac{km}{h}$ و $۱۱۶\frac{km}{h}$ است و تنها یک رقم غیرقطعی می‌توانیم داشته باشیم، عدد $۱۱۵\frac{km}{h}$ را می‌خوانیم و در نهایت می‌نویسیم:

$$\text{عدد تندی‌سنج} = ۱۱۵\frac{km}{h} \pm ۱\frac{km}{h}$$

بنابراین برای نمایش عدد اندازه‌گیری شده توسط این تندی‌سنج، از سه رقم با معنا (۵؛ ۱؛ ۱) استفاده می‌کنیم.

۳ ۱۲۴ طول این جسم برحسب میلی‌متر باید بین ۲۰۰ و ۲۱۰ میلی‌متر باشد. از طرفی در خط‌کش میلی‌متری که کوچک‌ترین مقیاس‌بندی آن $۱mm$ است، تا دهم اندازه‌گیری برحسب میلی‌متر را می‌توانیم حدس بزنیم. بنابراین به‌طور مثال اندازه‌گیری می‌تواند به‌صورت $۲۰۰/۶mm$ بیان شود که دارای چهار رقم بامعنا است.

۲ ۱۲۵ در اغلب آزمایشگاه‌ها، کوچک‌ترین مقیاس‌بندی کولیس برابر $۰/۱mm$ و ریزسنج برابر $۰/۰۱mm$ است. بنابراین اگر بخواهیم طول این جسم را که بین $۱۸۰mm$ تا $۱۹۰mm$ است به کمک این دو وسیله اندازه‌گیری کنیم، به‌طور مثال می‌تواند به‌صورت زیر نشان داده شود:

$$\text{ریزسنج}: \underbrace{۱۸۰/۲۳۱}_{\text{شش رقم با معنا}}mm \pm ۰/۰۰۵mm \quad (\text{رقم غیرقطعی})$$

$$\text{کولیس}: \underbrace{۱۸۰/۲۳}_{\text{پنج رقم با معنا}}mm \pm ۰/۰۵mm \quad (\text{رقم غیرقطعی})$$

بنابراین در اندازه‌گیری با ریزسنج از تعداد ارقام با معنای بیشتری استفاده می‌کنیم.

نکته

به‌طور کلی هرچه دقت وسیلهٔ اندازه‌گیری بیشتر باشد، اندازه‌گیری به‌وسیلهٔ آن می‌تواند با تعداد ارقام با معنای بیشتری نشان داده شود.

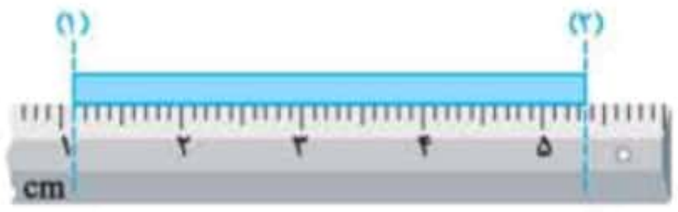
gajmarket.com

۱۲۶ **۲** همان‌طور که می‌دانیم، در عدد گزارش شده یعنی $25/11\,cm$، عدد صدم سانتی‌متر به‌صورت مشکوک و غیرقطعی می‌باشد. بنابراین وسیلهٔ اندازه‌گیری موردنظر تا دهم سانتی‌متر، یعنی میلی‌متر را به‌صورت دقیق می‌تواند اندازه بگیرد $(0/1\,cm = 1\,mm)$. پس کوچک‌ترین مقیاس وسیلهٔ اندازه‌گیری موردنظر می‌تواند به‌صورت $1\,mm$ بوده و می‌تواند خط‌کش مدرج برحسب میلی‌متر باشد.

۱۲۷ **۴** همان‌طور که از روی شکل مشخص است، کوچک‌ترین تقسیم‌بندی این خط‌کش برابر $1cm$ است. بنابراین برای نمایش عدد اندازه‌گیری شده، رقم غیرقطعی از مرتبهٔ دهم سانتی‌متر باید باشد (بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند). هم‌چنین خطای اندازه‌گیری این دستگاه مدرج برابر $\pm\frac{1}{2}\times 1cm = \pm 0/5cm$ است، بنابراین نمایش این عدد به صورت گزینهٔ (۴) می‌تواند صحیح باشد.

گزینهٔ (۴) : $3/0cm \pm 0/5cm$

۱۲۸ **۳** برای تخمین طول میله، کافیست اعداد قرائت شده از محل خط‌چین‌های (۱) و (۲) را از هم کم کنیم:



$$\text{طول میله} = 42/2\,mm \Leftarrow \begin{cases} \text{محل خط‌چین ۲}: 53/3\,mm \\ \text{محل خط‌چین ۱}: 11/1\,mm \end{cases}$$

دقت: در تخمین‌ها، نمی‌توانیم محل خط‌چین (۲) را برابر $53/31mm$ اعلام کنیم زیرا در خط‌کشی که برحسب میلی‌متر تخمین زده می‌شود، مرتبهٔ رقم غیرقطعی برابر $0/01$ میلی‌متر نمی‌تواند باشد.

۱۲۹ **۱** اگر مقداری که می‌خواهیم اندازه بگیریم، بر کوچک‌ترین مقدار درجه‌بندی وسیلهٔ اندازه‌گیری بخش‌پذیر باشد، می‌توانیم این مقدار را دقیق‌تر اندازه بگیریم. کوچک‌ترین درجه‌بندی پیمانه‌های مدرج (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب برابر $2cm^3$، $3cm^3$ و $4cm^3$ است که مقدار $46cm^3$ فقط بر $2cm^3$ بخش‌پذیر است و در نتیجه توسط پیمانهٔ (۱)، حجم مایع دقیق‌تر اندازه‌گیری می‌شود.

۱۳۰ **۲** برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (تخمین حجم روده‌ها):

$$\text{حجم رودهٔ کوچک}: V_1 = A_1h_1 = \pi R_1^2 h_1 = \pi \times \left(\frac{2/5\times 10^{-2}}{2}\right)^2 \times (600\times 10^{-2}) \sim 3\times (10^{-2})^2 \times 6 \sim 10^{-3}\,m^3$$

$$\text{حجم رودهٔ بزرگ}: V_2 = A_2h_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi \times \left(\frac{6/5\times 10^{-2}}{2}\right)^2 \times (180\times 10^{-2}) \sim 3\times (3\times 10^{-2})^2 \times \underbrace{1/8}_{=2} = 5/4\times 10^{-3}\,m^3$$

$$\Rightarrow \text{حجم کل}: V_1 + V_2 = 10^{-3} + 5/4\times 10^{-3} \sim 10\times 10^{-3}\,m^3 = 10^{-2}\,m^3$$

پس مجموع حجم روده‌ها حدود $10^{-2}\,m^3$ است.

گام دوم: (تخمین حجم هر باکتری):

$$\text{حجم باکتری}: V_3 \sim (1\mu m)^3 = (10^{-6}\,m)^3 = 10^{-18}\,m^3$$

گام سوم: (تخمین مرتبهٔ بزرگی تعداد باکتری‌ها):

یک درصد از حجم روده‌ها، یعنی $10^{-4}\,m^3$، توسط باکتری‌ها اشغال شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{حجم اشغال شده توسط کل باکتری‌ها} = \frac{1}{100}\times \text{حجم کل روده‌ها} = \frac{1}{100}\times 10^{-2} = 10^{-4}\,m^3$$

$$\text{تعداد باکتری‌ها} = \frac{\text{حجم اشغال شده توسط کل باکتری‌ها}}{\text{حجم هر باکتری}} = \frac{10^{-4}}{10^{-18}} = 10^{14}$$

۱۳۱ **۲** برای حل این سؤال، با استفاده از جرم و چگالی جسم، حجم آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow 2700\,kg/m^3 = \frac{6500\times 10^{-3}\,kg}{V} \rightarrow V = \frac{6500\times 10^{-3}}{2700} = \frac{65}{27}\times 10^{-3} \sim 1\times 10^{-3} = 10^{-3}\,m^3 = 10^{-3}\times 10^6\,cm^3 = 10^3\,cm^3$$

۱۳۲ **۱** به‌طور متوسط برای یک دوش گرفتن ۱/۵ دقیقه‌ای در کشورمان ۲۰ لیتر آب مصرف می‌شود و در هر بار استحمام ۵ دقیقه‌ای، این عدد به حدود ۵۰ لیتر می‌رسد. حال تصور کنید که ۸۰ میلیون جمعیت کشور، در هفته ۳ بار استحمام می‌کنند و در طول سال، تقریباً ۵۲ هفته داریم $\left(\frac{365}{7}\right)$، با این حساب می‌توان نوشت:

$$V = \underbrace{80\times 10^6}_{\text{جمعیت کشور}} \times \underbrace{52}_{\text{تعداد هفته}} \times \underbrace{(3\times 50\times 10^{-3})}_{\text{آب مصرفی در هر هفته برحسب مترمکعب}} \sim 600\times 10^6\,m^3 = 600 \text{ میلیون مترمکعب} = 6\times 10^2 \text{ میلیون مترمکعب}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتبهٔ بزرگی}} 10\times 10^2 = 10^3 \text{ میلیون مترمکعب}$$

تذکر

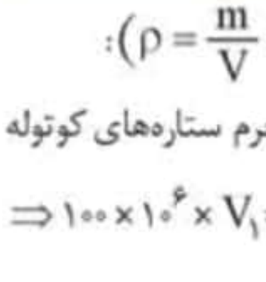
اگر تعداد باری که فرد استحمام می‌کند را یک بار در هفته در نظر می‌گرفتید، مرتبهٔ بزرگی 10^2 به‌دست می‌آمد که باز هم باید نزدیک‌ترین گزینه، یعنی (۱) را انتخاب می‌کردید.

۱۳۳ ۴ می‌دانیم وزن یک جسم در هر نقطه از سطح زمین، برابر است با حاصل‌ضرب جرم جسم در شتاب گرانشی در آن نقطه. در ادامه ابتدا جرم جسم و سپس شتاب گرانشی در فاصلهٔ R_e از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم.

گام اول: (محاسبهٔ جرم جسم):

$$\begin{cases}\rho = \frac{m}{V} \\ \rho = ۷۸۰۰ kg/m^۳ = ۷/۸ gr/cm^۳\end{cases} \Rightarrow m = ۷/۸ \times ۵۰ = ۳۹۰ gr = ۰/۳۹ kg$$

گام دوم: (محاسبهٔ شتاب گرانشی در فاصلهٔ R_e از سطح زمین):



$$g = \frac{GM_e}{r^۲} \Rightarrow \frac{g'}{g_۰} = \left(\frac{R_e}{R'}\right)^۲ = \left(\frac{R_e}{۲R_e}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow g' = \frac{۱}{۴} g_۰ = ۲/۵ m/s^۲$$

گام سوم: (محاسبهٔ وزن جسم):

$$W = mg' = ۰/۳۹ \times ۲/۵ = ۰/۹۷۵ N$$

۱۳۴ ۱ می‌دانیم چگالی یک ماده تا هنگامی‌که ساختار مولکولی آن تغییر نکند، ثابت می‌ماند، بنابراین در اثر تغییرات فیزیکی مانند تغییر شکل یا تکه‌تکه کردن، چگالی واقعی ماده تغییر نمی‌کند.

اما اگر بخواهیم نحوهٔ تغییر چگالی ظاهری کره که از تقسیم جرم کره بر حجم ظاهری آن به‌دست می‌آید را بسنجیم، می‌توان نوشت:

$$\text{جرم ثانویهٔ کره}: m' = \rho_۰ \times V_{\text{واقعی}} = \rho_۰ \times \left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳ - \frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^۳\right) = \frac{۷}{۸} \times \rho_۰ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\rho_{\text{ظاهری}} = \frac{m'}{V_{\text{ظاهری}}} = \frac{\frac{۷}{۸} \times \rho_۰ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = \frac{۷}{۸}\rho_۰$$

دقت شود که در کرهٔ سوراخ‌شده، حجم ظاهری کره برابر حجم بیرونی آن می‌باشد.

تذکر

یک کرهٔ تو خالی فلزی ممکن است بتواند بر روی سطح آب بایستد زیرا چگالی ظاهری آن از چگالی آب کم‌تر می‌شود. از این موضوع، عملاً در صنعت کشتی‌سازی بسیار استفاده می‌شود.

۱۳۵ ۱ با توجه به این‌که می‌خواهیم جرم ستاره‌ها با جرم کل آب خلیج فارس برابر شود، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم $\left(\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V\right)$:

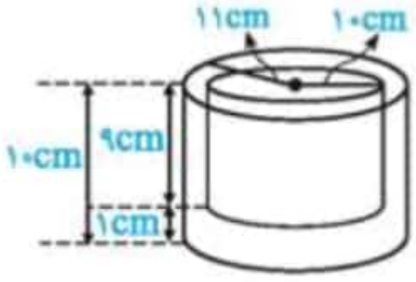
$$\text{جرم ستاره‌های کوتوله} = \text{جرم آب خلیج‌فارس} \Rightarrow \rho_۱ V_۱ = \rho_۲ V_۲$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ \times ۱۰^۶ \times V_۱ = ۱۰۰۰ \times (۲۵۰۰۰۰ \times \underbrace{۱۰^۶}_{\text{تبدیل } km^۲ \text{ به } m^۲} \times ۵۰) \Rightarrow V_۱ = ۱/۲۵ \times ۱۰^۸ m^۳$$

۱۳۶ ۱ حجم آب درون استوانه برابر است با:

$$V_{\text{آب}} = \pi r^۲ h = ۳ \times (۱۰)^۲ \times ۹ cm^۳ = ۲۷۰۰ cm^۳ = ۲۷۰۰ \times ۱۰^{-۶} m^۳$$

در ادامه برای محاسبهٔ حجم فلز این استوانه، حجم آب را از حجم استوانه‌ای با شعاع خارجی استوانه کم می‌کنیم:



$$V' = \pi r^۲ h = ۳ \times (۱۱)^۲ \times ۱۰ cm^۳ = ۳۶۳۰ cm^۳$$

$$\Rightarrow \text{حجم فلز ظرف}: V_{\text{فلز}} = (۳۶۳۰ - ۲۷۰۰) cm^۳ = ۹۳۰ cm^۳$$

در ادامه همین رویکرد را برای پیدا کردن جرم ظرف انجام می‌دهیم:

$$\text{جرم آب}: m_{\text{آب}} = \rho . V = ۱۰۰۰ \times ۲۷۰۰ \times ۱۰^{-۶} kg = ۲/۷ kg \Rightarrow m_{\text{فلز}} = (۱۰/۱۴ - ۲/۷) kg = ۷/۴۴ kg = ۷۴۴۰ gr$$

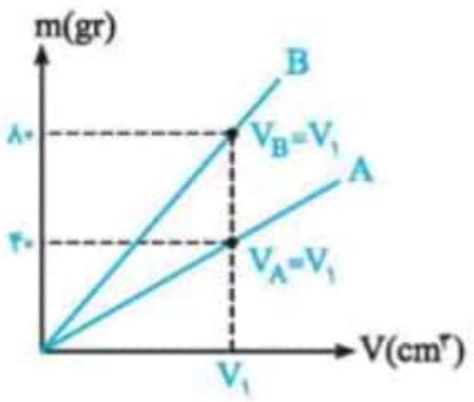
$$\text{چگالی ظرف}: \rho = \frac{m_{\text{فلز}}}{V_{\text{فلز}}} = \frac{۷۴۴۰}{۹۳۰} \frac{gr}{cm^۳} = ۸ gr/cm^۳$$

۱۳۷ ۳ اختلاف حجم مخلوط در دو حالت، در واقع مربوط به جرم یخ ذوب شده در دو حالت است، بنابراین اگر فرض کنیم حجم m گرم یخ، قبل از ذوب برابر $V_{\text{یخ}}$ و بعد از ذوب برابر $V_{\text{آب}}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V_{\text{یخ}} - V_{\text{آب}} = ۵ cm^۳ \\ V_{\text{یخ}} = \frac{m}{\rho_{\text{یخ}}} = \frac{m}{۰/۹} \Rightarrow \frac{m}{۰/۹} - m = ۵ \Rightarrow m = ۴۵ gr \quad \text{(جرم یخ ذوب شده)} \\ V_{\text{آب}} = \frac{m}{\rho_{\text{آب}}} = \frac{m}{۱} \end{cases}$$

gajmarket.com

۳ ۱۳۸



$$\rho_A=\frac{m_A}{V_A}\xrightarrow{\rho_A=۴۰۰۰kg/m^3=۴gr/cm^3}۴=\frac{۴۰}{V_A}\Rightarrow V_A=V_1=۱۰cm^3$$

$$\rho_B=\frac{m_B}{V_B}=\frac{۸۰}{۱۰}=۸gr/cm^3\Rightarrow\begin{cases}m'_B=۴۰۰gr\\ \rho_B=۸gr/cm^3\end{cases}\Rightarrow V'_B=\frac{۴۰۰}{۸}=۵۰cm^3=۵۰mLit$$

(V_B برابر V_1 است)

به جور دیگه فکر کنیم: با توجه به شکل، شیب نمودار مربوط به B (چگالی فلز B) دو برابر شیب نمودار مربوط به A (چگالی فلز A) است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\rho_B=۲\rho_A=۲\times۴۰۰۰=۸۰۰۰kg/m^3=۸gr/cm^3$$

$$m'_B=۴۰۰gr\Rightarrow V'_B=\frac{m'_B}{\rho_B}=\frac{۴۰۰}{۸}=۵۰cm^3=۵۰mLit$$

۱ ۱۳۹ برای شروع حل، ابتدا جرم الکل و آب را مقایسه می‌کنیم. دقت شود که حجم آب و الکل یکسان بوده و برابر حجم داخل ظرف است.

$$V_{آب}=V_{الکل}\Rightarrow\frac{m_{آب}}{\rho_{آب}}=\frac{m_{الکل}}{\rho_{الکل}}\xrightarrow{\rho_{الکل}=۰/۸\rho_{آب}}m_{الکل}=۰/۸m_{آب}$$

در ادامه می‌توان گفت در حالت اول ترازو عدد $g\times(m_{ظرف}+m_{آب})$ و در حالت دوم عدد $g\times(m_{ظرف}+m_{الکل})$ را نشان می‌دهد. در مقایسهٔ آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}(m_{آب}+m_{ظرف})\times۱۰=۲۰N\Rightarrow m_{آب}+m_{ظرف}=۲ & \text{رابطهٔ (۱)}\\ (m_{الکل}+m_{ظرف})\times۱۰=۱۸N\Rightarrow ۰/۸m_{آب}+m_{ظرف}=۱/۸ & \text{رابطهٔ (۲)}\end{cases}$$

($m_{الکل}\to ۰/۸m_{آب}$)

$$m_{آب}=۱kg\xrightarrow[\text{از رابطهٔ (۱)}]{\text{کمک گرفتن}}m_{ظرف}=۱kg$$ رابطهٔ (۲) را از (۱) کم می‌کنیم: $۰/۲m_{آب}=۰/۲\Rightarrow$

۲ ۱۴۰ **حالت اول:** اگر حجم ظرف را برابر V در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$V_A=\frac{۱}{۲}V\ ,\ V_B=\frac{۱}{۲}V$$

$$(\rho_{کل})_۱=\frac{\rho_AV_A+\rho_BV_B}{V}=\frac{\rho_A\times\frac{۱}{۲}V+\rho_B\times\frac{۱}{۲}V}{V}=\frac{\rho_A+\rho_B}{۲}=۴۰۰۰\Rightarrow\rho_A+\rho_B=۸۰۰۰:\text{رابطهٔ I}$$

حالت دوم: مشابه با روند طی شده در حالت (۱)، داریم $(V_A=\frac{۱}{۴}V\ ,\ V_B=\frac{۳}{۴}V)$:

$$(\rho_{کل})_۲=\frac{\rho_A\times\frac{۱}{۴}V+\rho_B\times\frac{۳}{۴}V}{V}=\frac{\rho_A+۳\rho_B}{۴}=۵۰۰۰\Rightarrow\rho_A+۳\rho_B=۲۰۰۰۰:\text{رابطهٔ II}$$

$$\text{رابطه‌های (I) و (II)}\Rightarrow\begin{cases}\rho_A+\rho_B=۸۰۰۰\\ \rho_A+۳\rho_B=۲۰۰۰۰\end{cases}\Rightarrow\rho_A=۲۰۰۰kg/m^3\ ,\ \rho_B=۶۰۰۰kg/m^3$$

۴ ۱۴۱

نکته

برای محاسبهٔ چگالی مخلوط چند مایع، باید جرم کل مایعات را بر حجم کل آن‌ها تقسیم کنیم. بنابراین اگر در اثر مخلوط کردن دو مایع، حجم کل به اندازهٔ V' کاهش یابد، برای محاسبهٔ چگالی مخلوط آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲-V'}$$

(V': حجمِ کاهش‌یافته بر اثر مخلوط کردن)

بنابراین در این سؤال می‌توان نوشت:

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲-V'}=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲}{V_۱+V_۲-V'}=\frac{۴\times۲۰۰+۵\times۱۰۰}{۲۰۰+۱۰۰-۴۰}=\frac{۱۳۰۰}{۲۶۰}=۵gr/cm^3=۵۰۰۰kg/m^3$$

۳ ۱۴۲ اگر در اثر مخلوط چند ماده، حجم کل به اندازه V' کاهش یابد، برای محاسبهٔ چگالی مخلوط می‌توان نوشت:

$$V_۱=\frac{m_۱}{\rho_۱}=\frac{۹۰}{۷/۵}=۱۲cm^3\ ,\ V_۲=\frac{m_۲}{\rho_۲}=\frac{۱۲۰}{۴}=۳۰cm^3$$

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲-V'}\Rightarrow۶=\frac{۹۰+۱۲۰}{۱۲+۳۰-V'}\Rightarrow V'=۷cm^3$$

(۶ برحسب gr/cm^3)

پایه دهم

فصل دوم

کار، انرژی و توان



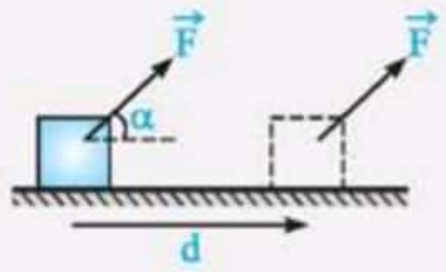
خلاصه نکات عنوان صفحه

۱	تعریف کار و مفاهیم اولیه	۴۱
۲	محاسبهٔ کار ناشی از نیروی وزن	۴۴
۳	انرژی جنبشی	۵۰
۴	انرژی پتانسیل	۵۳
۵	قضیهٔ کار و انرژی جنبشی	۵۶
۶	پایستگی انرژی مکانیکی	۶۱
۷	پایستگی انرژی مکانیکی در حضور فنر	۷۰
۸	بررسی تغییرات انرژی مکانیکی در حضور اصطکاک و مقاومت هوا (نیروهای ناپایستار)	۷۲
۹	توان و بازده	۷۸

۱۴۳ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱ — **تعریف کار و مفاهیم اولیه** — (تست‌های ۱۴۳ تا ۱۴۹)

هرگاه مطابق شکل، نیروی $\vec{F}$ به جسمی وارد شده و آن را به اندازهٔ d جابه‌جا کند، کار انجام شده توسط این نیرو برابر است با:



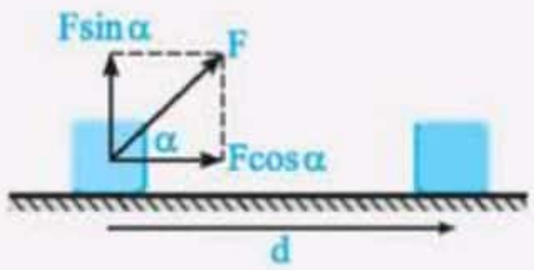
F: نیرو، d: جابه‌جایی، α: زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی

$$W = Fd\cos\alpha \quad : \text{کار}$$

نکات مهم و کاربردی

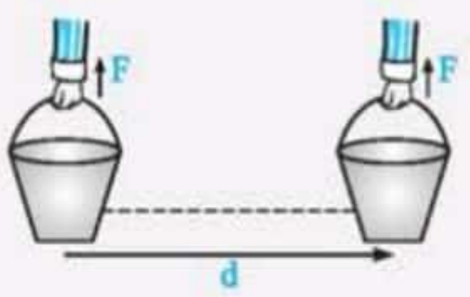
۱ کار، یک کمیت نرده‌ای و از جنس انرژی بوده و واحد آن در SI ژول (نیوتون متر) است.

۲ کار انجام شده روی جسم، تنها ناشی از مؤلفه‌ای از نیرو است که در راستای جابه‌جایی می‌باشد. در شکل روبه‌رو تنها مؤلفهٔ افقی نیروی F، یعنی $F_x = F\cos\alpha$ کار انجام می‌دهد.



$$W_F = (F\cos\alpha)d$$

۳ اگر نیروی وارد شده بر جسم، هم‌جهت با جابه‌جایی آن باشد $(\alpha = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1)$، در این‌صورت رابطهٔ فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$W_F = Fd\cos\alpha \xrightarrow{\cos\alpha = 1} W_F = Fd$$

۴ اگر نیرو بر راستای جابه‌جایی جسم عمود باشد $(\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos\alpha = 0)$، کار انجام شده توسط نیرو برابر صفر است. به‌عنوان مثال در شکل مقابل کار انجام شده توسط شخص بر روی سطل برابر صفر است.

$$W = Fd\cos\alpha \xrightarrow{\cos\alpha = 0} W = 0$$

۵ به طور کلی با توجه به زاویهٔ بین جابه‌جایی و نیرو (α)، سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

$$W = Fd\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \alpha < 90^\circ & \rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow W > 0 \\ \alpha = 90^\circ & \rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow W = 0 \\ 90^\circ < \alpha \le 180^\circ & \rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow W < 0 \end{cases}$$

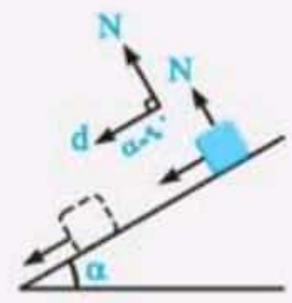
۶ اگر نیروی $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ به جسمی وارد شده و جابه‌جایی جسم به صورت $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ باشد، برای محاسبهٔ کار نیروی $\vec{F}$، می‌توانیم کار انجام‌شده توسط نیروی F را در هر دو راستا به دست آوریم:

$$\begin{cases} \text{در راستای } x: W_x = F_x \times x\cos\alpha \\ \text{در راستای } y: W_y = F_y \times y\cos\beta \end{cases} \Rightarrow W_F = W_x + W_y$$

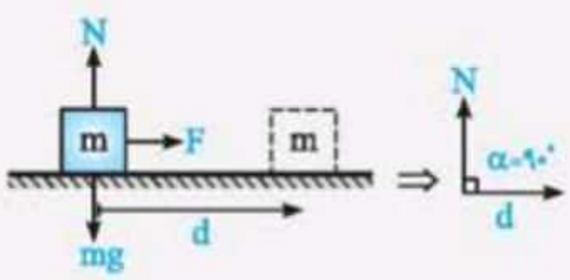
در بسیاری از تست‌ها، کار نیروهای عکس‌العمل عمودی سطح (N)، اصطکاک (f_k) و عکس‌العمل سطح (R) پرسیده می‌شود. در ادامه با حل چند تمرین مفهومی، به بررسی هر یک از آن‌ها می‌پردازیم.

تمرین ۱ **کار نیروی عکس‌العمل عمودی سطح، با توجه به تعریف اصلی کار، چگونه محاسبه می‌شود؟**

پاسخ هنگامی که یک بسته بر روی سطح افقی و یا یک سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، زاویهٔ بین نیروی عکس‌العمل عمودی سطح و جابه‌جایی برابر $\alpha = 90^\circ$ بوده و کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل عمودی سطح صفر است.

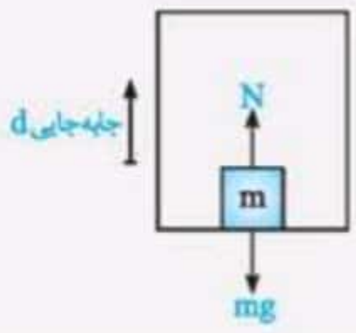


$$W_N = Nd\cos 90^\circ = 0$$



$$W_N = N.d.\cos 90^\circ = 0$$

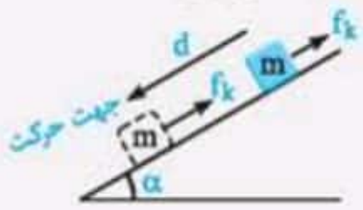
اما اگر بسته در راستای قائم جابه‌جا شود (مانند داخل یک آسانسور)، کار نیروی عکس‌العمل عمودی سطح دیگر صفر نیست. به‌طور مثال در شکل مقابل که بسته در راستای قائم به اندازهٔ d جابه‌جا شده است داریم:



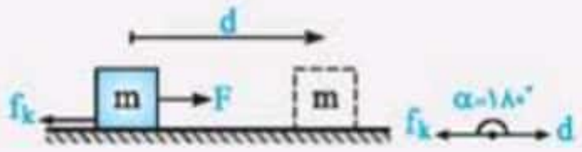
$$W_N = Nd\cos 0 = Nd$$

تمرین۲ کار نیروی اصطکاک، با توجه به تعریف اصلی کار، چگونه محاسبه می‌شود؟

پاسخ هنگامی که بسته مطابق شکل مقابل بر روی یک سطح افقی و یا یک سطح شیب‌دار دارای اصطکاک جابه‌جا می‌شود، نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت بسته بوده و کار آن برابر است با:



$$W_{f_k} = f_k d\cos 180^\circ$$



$$W_{f_k} = f_k d\cos 180^\circ = -\mu_k mgd \quad (f_k = \mu_k N = \mu_k mg)$$

تذکر در فیزیک پایهٔ دوازدهم خواهید دید که برای محاسبهٔ نیروی اصطکاک، در صورت حرکت جسم می‌توان از رابطهٔ $f_{\text{اصطکاک}} = \mu N$ استفاده کرد.

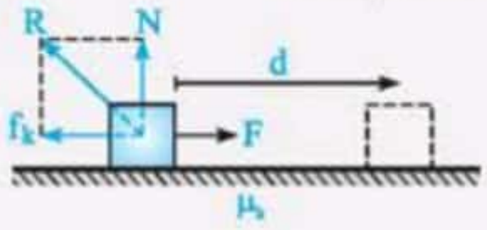
$$f_{\text{اصطکاک}} = \mu N$$

ضریب اصطکاک — نیروی عمودی سطح

به طور مثال در حرکت بسته در راستای افقی در شکل فوق، $N = mg$ بوده و نیروی اصطکاک برابر $f_k = \mu mg$ است.

تمرین۳ کار نیروی عکس‌العمل سطح، با توجه به تعریف اصلی کار چگونه محاسبه می‌شود؟

پاسخ برای محاسبهٔ کار نیروی عکس‌العمل سطح، ابتدا به این نکته توجه کنید که اگر یک نیرو به دو مؤلفهٔ افقی و قائم تجزیه شود، کار انجام شده توسط آن نیرو، جمع جبری کار انجام شده توسط مؤلفه‌های آن است. نیروی عکس‌العمل سطح، دو مؤلفهٔ N و f_k دارد و کار آن نیز مجموع جبری کار N و f_k است.



$$W_R = W_N + W_{f_k}$$

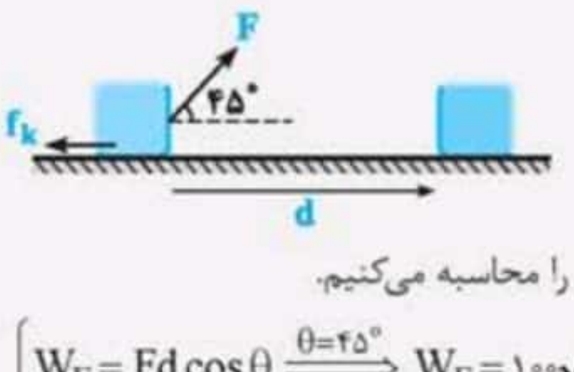
$$\begin{cases} W_N = 0 \\ W_{f_k} = -\mu_k mgd \end{cases} \Rightarrow W_R = -\mu_k mgd$$

تمرین۴ بسته‌ای با تندی ثابت بر روی یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد. کار نیروی مرکزگرا چگونه محاسبه می‌شود؟

پاسخ در حرکت‌هایی مانند حرکت دایره‌ای یکنواخت که نیروی مرکزگرا **همواره** بر مسیر حرکت عمود است، در هر قسمت از مسیر $\alpha = 90^\circ$ بوده و کار انجام شده توسط نیروی مرکزگرا صفر است (F_c: نیروی مرکزگرا).

$$W_{F_c} = F_c d\cos\alpha \xrightarrow{\alpha=90^\circ} W = 0$$

تمرین۵ مطابق شکل، بسته‌ای به جرم $5kg$ توسط نیروی ثابت $F = 100\sqrt{2}N$ بر روی یک سطح دارای اصطکاک کشیده می‌شود. اگر نیروی اصطکاک جنبشی برابر $50N$ باشد، کل کار انجام شده بر روی بسته در جابه‌جایی ۲۰۰ متر در راستای افقی، چند ژول است؟



پاسخ برای محاسبهٔ کل کار انجام شده بر روی بسته، به دو روش زیر می‌توان عمل کرد:

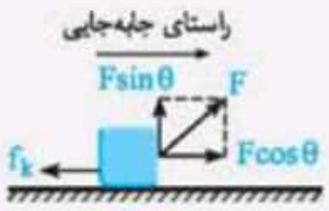
روش اول: ابتدا کار انجام شده توسط هریک از نیروها را به دست آورده و سپس با جمع جبری آن‌ها، کل کار را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} W_F = Fd\cos\theta \xrightarrow{\theta=45^\circ} W_F = 100\sqrt{2}\times 200\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 20000\,J \\ W_{f_k} = f_k d\cos\theta \xrightarrow{\theta=180^\circ} W_{f_k} = 50\times 200\times(-1) = -10000\,J \\ W_{mg} = 0 \\ W_N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{\text{کل}} = W_F + W_{f_k} + W_{mg} + W_N \Rightarrow W_{\text{کل}} = 20000 + (-10000) + 0 + 0 = 10000\,J$$

توجه داشته باشید که در این سؤال، کار نیروهای وزن و عکس‌العمل عمودی سطح برابر صفر است، چون این نیروها بر راستای حرکت عمود می‌باشند.

روش دوم: در این روش ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم را به دست آورده و سپس به کمک آن، کل کار انجام‌شده بر روی جسم را محاسبه می‌کنیم:



گام اول: (محاسبهٔ نیروی برایند (خالص)):

$$\begin{cases} \text{برایند نیروها در راستای } x: \sum F_x = F\cos\theta - f_k \Rightarrow \sum F_x = 100\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 50 = 50N \\ \text{برایند نیروها در راستای } y: \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{\text{برایند}} = 50N$$

گام دوم: (محاسبهٔ کار نیروی برایند):

$$W_{\text{کل}} = F_{\text{برایند}} d\cos\alpha = 50\times 200\times \overbrace{\cos 0^\circ}^{1} = 10000\,J$$

در این سؤال، نیروی خالص در جهت مثبت محور x است، پس زاویهٔ آن با جابه‌جایی برابر صفر است ($\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1$).

gajmarket.com

همان‌طور که در خلاصه نکات قبل گفته شد، کار یک کمیت نرده‌ای است و با توجه به تعریف، یکای آن برابر حاصل‌ضرب یکای نیرو در یکای جابه‌جایی $(N.m)$ است:

$$W = Fd\cos\alpha \Rightarrow \text{واحد کار} = \text{واحد نیرو} \times \text{واحد جابه‌جایی} = \text{نیوتون} . \text{متر}$$

۱۴۴ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، هریک از موارد را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:



بررسی (الف): می‌دانیم از دیدگاه یک ناظر بر روی سطح زمین، مسافر در حال حرکت است اما نیرویی که او بر چمدان وارد می‌کند، به سمت بالا بوده و بر وزن چمدان غلبه می‌کند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow W = Fd\cos 90^\circ = 0$$

بررسی (ب): در این حالت چون جسم جابه‌جا نشده است، بنابراین کار انجام شده بر روی آن صفر است.

بررسی (پ): در این حالت جابه‌جایی جسم برابر صفر است (چون جسم به محل اولیه‌اش بازگشته است)، بنابراین کار انجام شده از طرف شخص بر روی جسم صفر است.

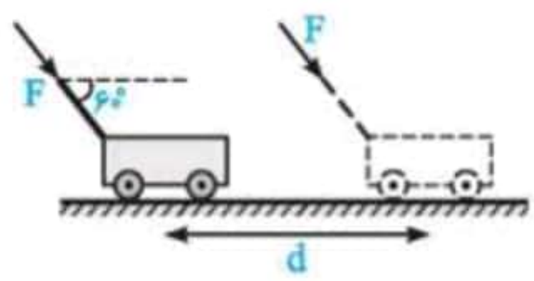
بررسی (ت): در این حالت نیروی وارد شده از طرف شخص به سمت بالا و در جهت جابه‌جایی جسم است، بنابراین کار انجام شده توسط شخص مقداری مثبت بوده و صفر نیست.

بررسی (ث): در این حالت نیز مشابه قسمت (الف)، نیروی شخص به سمت بالا و عمود بر جهت جابه‌جایی جسم است $(\alpha = 90^\circ)$، بنابراین کار شخص بر روی جسم صفر است.

پس در مجموع در ۴ مورد کار انجام شده توسط شخص صفر بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۴۵ ۱ ثانیهٔ دوم حرکت، یعنی $1s < t < 2s$ است. بنابراین جابه‌جایی این ماشین برابر است با:

$$\text{جابه‌جایی} : d = v\Delta t = 1\times(2-1) = 1m$$



با توجه به شکل روبه‌رو، زاویهٔ بین نیرو و راستای جابه‌جایی برابر ۶۰ درجه است، بنابراین با استفاده از تعریف کار می‌توان نوشت:

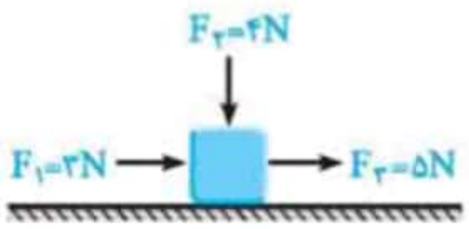
$$F = 100N\ ,\ d = 1m\ ,\ \alpha = 60^\circ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$W = Fd\cos\alpha = 100\times 1\times\frac{1}{2} = 50J$$

تذکر

در این مسأله می‌توان گفت نیروی وارد بر ماشین چمن‌زنی به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی تجزیه می‌شود به‌طوری که ماشین در جهت مؤلفهٔ افقی نیرو $(F_x = F\cos\alpha = 50N)$ به اندازهٔ یک متر جابه‌جا می‌شود، این نیرو عامل کار است و کارِ مؤلفهٔ عمودی نیرو $(F_y = F\sin\alpha)$، برابر صفر است (چرا؟).

۱۴۶ ۲ در جابه‌جایی جسم به اندازهٔ d به سمت راست، کار تک‌تک نیروها را به‌دست می‌آوریم:

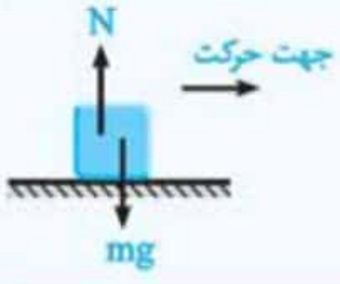


$$\begin{cases} W_1 = F_1 d\cos 0 = 3d \\ W_2 = F_2 d\cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow W_{کل} = 3d + 0 + 5d = 8d \\ W_3 = F_3 d\cos(0) = 5d \end{cases}$$

طبق صورت سؤال، کار کل انجام شده برابر ۴۰ ژول شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

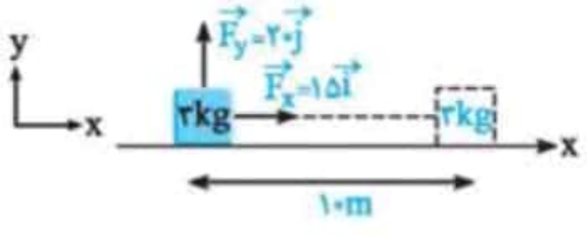
$$W_{کل} = 40J \Rightarrow 8d = 40 \Rightarrow d = 5m$$

تذکر



بر این جسم نیروی وزن و نیروی عکس‌العمل عمودی سطح نیز وارد می‌شود، ولی چون هر دوی این نیروها بر مسیر حرکت عمود هستند، بنابراین کار آن‌ها صفر است (در بخش‌های بعدی این موضوع را به طور کامل‌تر بررسی می‌کنیم).

۱۴۷ ۳ مطابق شکل، مشخص است که مؤلفهٔ افقی نیروی $\vec{F}$ (یعنی $\vec{F}_x = 15\vec{i}$) در جهت حرکت جسم و مؤلفهٔ عمودی نیروی $\vec{F}$ (یعنی $\vec{F}_y = 20\vec{j}$) عمود بر مسیر حرکت جسم می‌باشد. بنابراین کار هر یک از این نیروها برابر است با:



$$W_{کل} = W_{F_x} + W_{F_y}$$

$$\begin{cases} W_{F_x} = F_x.d.\overbrace{\cos 0}^{1} = 15\times 10\times 1 = 150J \\ W_{F_y} = F_y.d.\overbrace{\cos 90^\circ}^{0} = 0 \end{cases} \Rightarrow W_{کل} = W_{F_x} + W_{F_y} = 150J$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

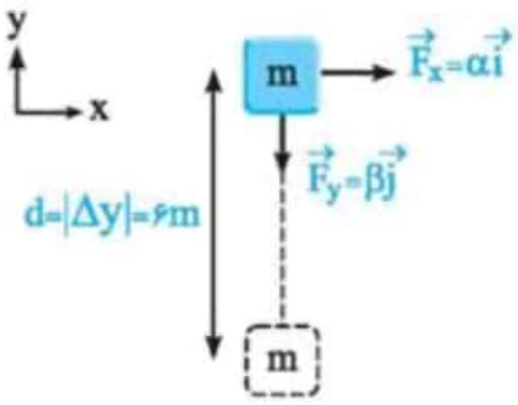
ضرب داخلی (یا نقطه‌ای) دو بردار $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ و $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ با توجه به ریاضیات به‌صورت زیر نیز تعریف می‌شود:

$$\vec{A}.\vec{B}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}).(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=a_1b_1+a_2b_2$$

از طرفی در فیزیک، از ضرب داخلی نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی نیز می‌توان کار نیروی $\vec{F}$ را محاسبه کرد:

$$\begin{cases}\vec{F}=15\vec{i}+20\vec{j}\\ \vec{d}=10\vec{i}+0\vec{j}\end{cases}\Rightarrow W=\vec{F}.\vec{d}=15\times10+20\times0=150J$$

۱۴۸ ۳ چون جسم با تندی $2m/s$ در خلاف جهت محور y حرکت می‌کند، بنابراین در مدت زمان ۳ ثانیه به اندازهٔ $\Delta y=-2\times3=-6m$ جابه‌جا می‌شود.



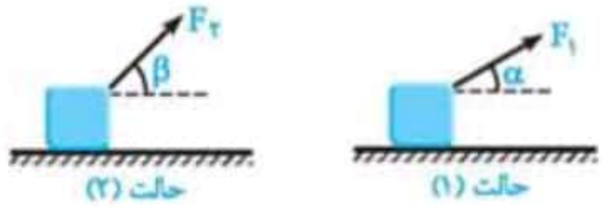
مطابق شکل، مشخص است که مؤلفهٔ افقی نیروی $\vec{F}$ (یعنی $\vec{F}_x=\alpha\vec{i}$) عمود بر مسیر حرکت جسم است. از طرفی از آن‌جایی که طبق صورت سؤال، کار نیروی F مثبت است، بنابراین مؤلفهٔ قائم نیروی F، در جهت جابه‌جایی جسم (یعنی در خلاف جهت محور y) است. بنابراین کار هریک از این نیروها برابر است با:

$$W_{کل}=W_{F_x}+W_{F_y}$$

$$\begin{cases}W_{F_y}=F_y d\overbrace{\cos0^\circ}^{1}=|\beta|\times6\times(1)=6|\beta|\\ W_{F_x}=F_x d\overbrace{\cos90^\circ}^{0}=0\end{cases}\Rightarrow W_{کل}=W_{F_x}+W_{F_y}=30J\Rightarrow0+6|\beta|=30\Rightarrow|\beta|=5\xrightarrow[\text{محور }y\text{ است.}]{\vec{F}_y\text{ در خلاف جهت}}\beta=-5$$

چون جسم در راستای قائم حرکت کرده است، بنابراین کار نیروی $\vec{F}_x=\alpha\vec{i}$ همواره برابر صفر بوده و α مقادیر متفاوتی را می‌تواند داشته باشد.

۱۴۹ ۱ **مقایسهٔ نیروها:** با توجه به شکل‌های نشان داده شده، می‌توان فهمید که در حالت (۱)، شخص نیروی کوچک‌تری را وارد می‌کند.



(با افزایش β بین صفر تا 90°، $\sin\beta$ افزایش و $\cos\beta$ کاهش می‌یابد.) $\beta>\alpha\Rightarrow\cos\beta<\cos\alpha$

$$W_1=W_2\Rightarrow F_1 d\cos\alpha=F_2 d\cos\beta\Rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}<1$$

یعنی F_1 از F_2 کوچک‌تر می‌باشد.

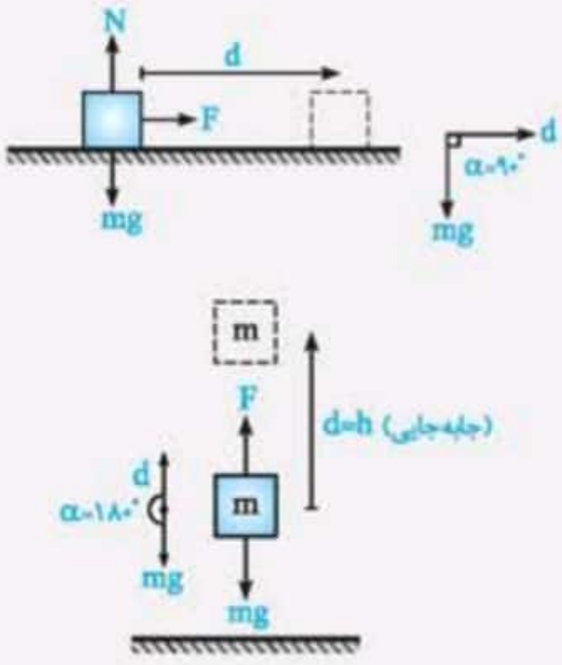
مقایسهٔ شتاب‌ها: برای مقایسهٔ شتاب حرکت دو بسته، با توجه به قانون دوم نیوتون $(F_x=ma)$، می‌توان نوشت:

$$F_x=ma\Rightarrow\begin{cases}(1)\text{ شکل}: F_1\cos\alpha=ma_1\\ (2)\text{ شکل}: F_2\cos\beta=ma_2\end{cases}\xrightarrow{\text{با توجه به قسمت قبل، در این سؤال } F_1\cos\alpha=F_2\cos\beta\text{ است.}}ma_1=ma_2\Rightarrow a_1=a_2$$

۱۵۰ ۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ **محاسبهٔ کار ناشی از نیروی وزن** (تست‌های ۱۵۰ تا ۱۷۴)

می‌دونیم به هر جسمی از طرف زمین نیروی گرانشی وارد میشه که این نیرو، همیشه در راستای قائم و به سمت مرکز زمین هستش. تو این قسمت، می‌خوایم با نحوهٔ محاسبهٔ کار ناشی از نیروی وزن تو حالت‌های مختلف آشنا بشیم ...



۱ **اگر بسته در راستای افق جابه‌جا شود:** در شکل مقابل جرم m را با کمک نیروی F، به اندازهٔ d در راستای افق جابه‌جا کرده‌ایم. به‌طور کلی در این‌گونه جابه‌جایی‌های افقی، با توجه به این که نیروی وزن بر مسیر حرکت عمود است و مؤلفه‌ای در راستای جابه‌جایی ندارد، کار انجام شده توسط آن صفر است.

$$\Rightarrow W_{mg}=(mg)d\cos90^\circ=0$$

۲ **اگر بسته در راستای قائم جابه‌جا شود:** در شکل مقابل بسته‌ای را در راستای قائم به اندازهٔ h، به سمت بالا جابه‌جا کرده‌ایم. در این حالت کار انجام شده توسط نیروی وزن بسته برابر است با:

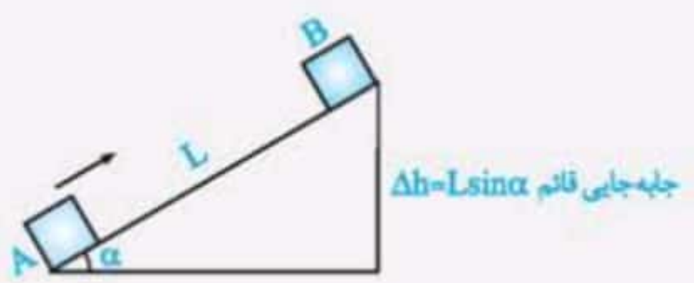
$$W_{mg}=(mg)d\cos\alpha=mgh\cos180^\circ=-mgh$$

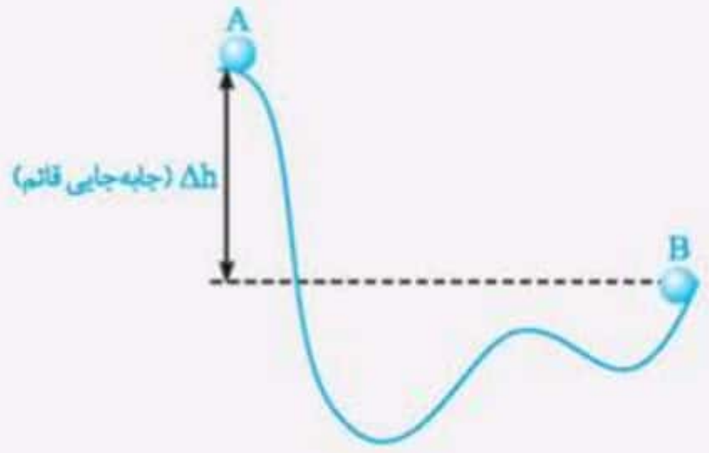
gajmarket.com

تذکر با توجه به روند فوق، به‌سادگی می‌توان فهمید اگر بسته به سمت بالا حرکت کند، کار نیروی وزن مقداری منفی (جابه‌جایی در خلاف جهت نیروی وزن) و اگر بسته به سمت پایین حرکت کند کار نیروی وزن مثبت است (جابه‌جایی در جهت نیروی وزن) و مقدار آن برابر است با:

$$|W_{mg}| = |mg\Delta h| \Rightarrow \begin{cases} \text{حرکت به سمت بالا} \Rightarrow W_{mg} < 0 \\ \text{حرکت به سمت پایین} \Rightarrow W_{mg} > 0 \end{cases}$$

۳ اگر بسته یک حرکت کلی داشته باشد که در راستای افقی و قائم جابه‌جا شود: در این گونه از سؤالات جابه‌جایی را به‌صورت دو جابه‌جایی افقی و قائم در ذهن خود فرض می‌کنیم. در جابه‌جایی افقی، کار نیروی وزن بسته صفر است و در جابه‌جایی قائم، اندازهٔ کار نیروی وزن بسته برابر $|mg\Delta h|$ است که Δh میزان جابه‌جایی قائم بسته است. حال اگر بسته به سمت پایین جابه‌جا شود، $W_{mg} > 0$ و اگر به‌سمت بالا جابه‌جا شود، $W_{mg} < 0$ است.

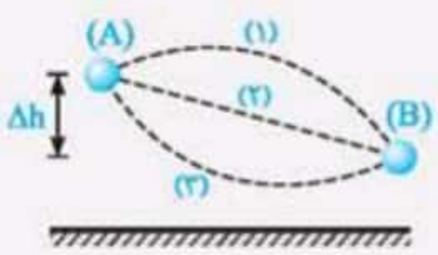




(جابه‌جایی بسته به‌سمت بالا) $W_{mg} = -mg\Delta h$

(جابه‌جایی بسته به‌سمت پایین) $W_{mg} = +mg\Delta h$

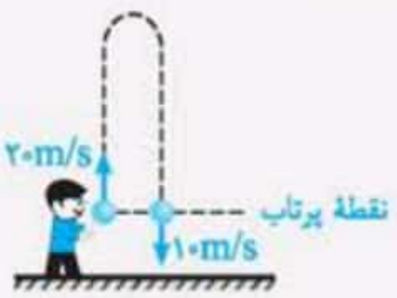
تذکر کار نیروی وزن مستقل از مسیر حرکت است و تنها به جابه‌جایی بسته در راستای قائم بستگی دارد. هم‌چنین مقدار کار نیروی وزن به نوع حرکت بسته نیز در شکل‌های مقابل بستگی ندارد.



$$\xrightarrow[\text{از A تا B جابه‌جا می‌شود.}]{\text{بسته در هر سه مسیر مقابل}} W_{mg_1} = W_{mg_2} = W_{mg_3} = +mg\Delta h$$

تمرین۱ جسمی از سطح زمین با تندی ۲۰ متر بر ثانیه در راستای قائم رو به بالا پرتاب شده است. اگر تندی جسم در لحظهٔ برگشت به نقطهٔ پرتاب برابر با ۱۰ متر بر ثانیه باشد، کار نیروی جاذبهٔ زمین در این مسیر چند ژول است؟ (جرم جسم ۴ کیلوگرم و $g = 10\,N/kg$ است.)

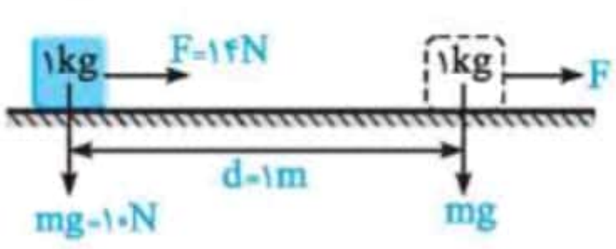
۱) ۶۰۰- ۲) ۳۰۰- ۳) صفر ۴) ۶۰۰



پاسخ همان‌طور که می‌دانیم، نیروی جاذبهٔ واردشده از طرف زمین بر جسم (نیروی وزن $= mg$)، مقدار و جهت ثابت دارد. بنابراین برای بررسی کار انجام شده بر روی جسم، کافی است بردار جابه‌جایی جسم را مشخص کنیم.

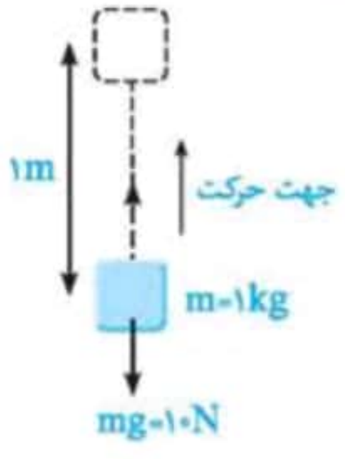
با توجه به شکل روبه‌رو، هنگامی که جسم پرتاب شده و مجدداً به نقطهٔ پرتاب باز می‌گردد، جابه‌جایی آن برابر صفر بوده و کار انجام شده توسط نیروی وزن نیز صفر است.

کار نیروی وزن: $W = Fd\cos\alpha \xrightarrow{d=0} W = 0$ (گزینهٔ ۳)



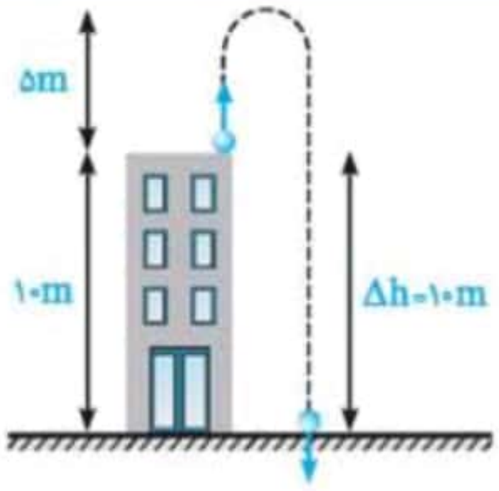
حالت اول: (جابه‌جایی در راستای افقی): با توجه به شکل مقابل، نیروی وزن جسم عمود بر مسیر حرکت است ($\cos\alpha = 0$)، درنتیجه می‌توان گفت کار نیروی وزن در این جابه‌جایی برابر صفر است.

کار نیروی وزن: $W_{mg} = 0 \Leftarrow mg \perp d$: نیروی وزن



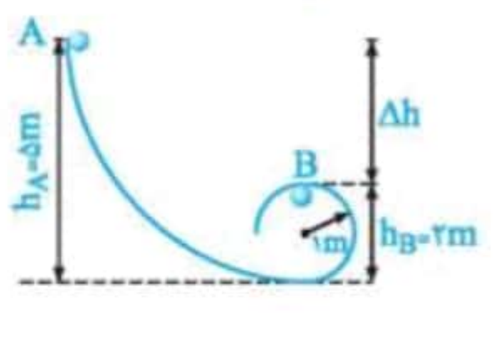
حالت دوم: (جابه‌جایی در راستای قائم): در این حالت جسم به اندازهٔ ۱m به سمت بالا جابه‌جا شده است، بنابراین کار نیروی وزن منفی بوده و می‌توان نوشت:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -1\times10\times1 = -10\,J$$



۱ ۱۵۱ همان‌طور که می‌دانیم، کار نیروی وزن یک جسم، فقط به جابه‌جایی آن در راستای قائم بستگی دارد. در این سؤال چون جابه‌جایی کل جسم به سمت پایین است، بنابراین کار نیروی وزن جسم مثبت بوده و می‌توان نوشت:

$$W_{mg} = mg\Delta h \Rightarrow W_{mg} = ۴\times۱۰\times۱۰ = ۴۰۰J$$

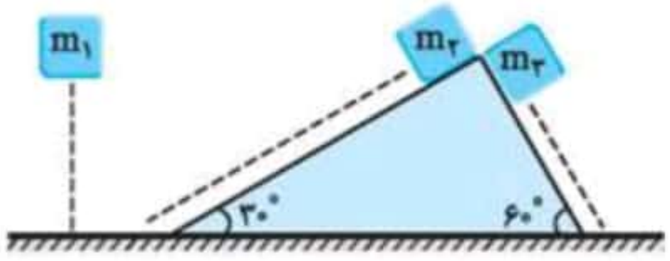


۱ ۱۵۲ مشابه با سؤال قبل، کار نیروی وزن به جابه‌جایی قائم گلوله بستگی دارد و برای محاسبهٔ کار نیروی وزن از A تا B می‌توان نوشت:

کار نیروی وزن: $W = +mg\,\Delta h$ ⇒ جسم به سمت پایین حرکت می‌کند

$$\Delta h = h_A - h_B = ۵ - ۲ = ۳m \;,\; m = ۰/۵kg \;,\; g = ۱۰m/s^۲$$

$$W = +۰/۵\times۱۰\times۳ = ۱۵J$$



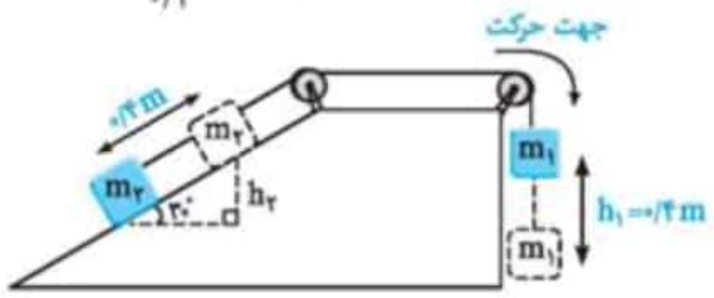
۳ ۱۵۳ کار نیروی وزن جسم به جرم آن و جابه‌جایی آن در راستای قائم بستگی دارد. در این سؤال جابه‌جایی هر سه جسم در راستای قائم یکسان است. بنابراین کار نیروی وزن دو جسم $m_۱$ و $m_۳$ با هم برابر است. از آن جایی که جرم $m_۲$ بیشتر از جرم بقیه است، بنابراین کار نیروی وزن آن، بیشتر از بقیه است.

$$W = mg\underbrace{(\Delta h)}_{\text{یکسان}} \rightarrow W_۱ = W_۳ < W_۲$$

۳ ۱۵۴ در این سؤال، جسم $m_۱$ با تندی $۰/۲m/s$ به سمت پایین حرکت می‌کند. بنابراین در دو ثانیهٔ سوم حرکت $(۴s < t < ۶s)$ جسم $m_۱$ اندازهٔ ۰/۴ متر به سمت پایین آمده و جسم $m_۲$ به اندازهٔ ۰/۴ متر بر روی سطح شیب‌دار بالا می‌رود.

$$h_۱ = \Delta y = v\times\Delta t = ۰/۲\times\underbrace{(۶-۴)}_{\text{۲ ثانیهٔ سوم}} = ۰/۴m$$

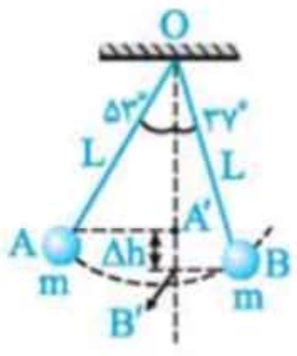
$$\sin۳۰^\circ = \frac{h_۲}{۰/۴} \Rightarrow h_۲ = ۰/۲m$$



جسم $m_۱$ به سمت پایین آمده و جسم $m_۲$ به سمت بالا رفته است، بنابراین کار نیروی وزن $m_۱$ مثبت و کار نیروی وزن $m_۲$ منفی است.

$$W_۱ = m_۱gh_۱ = ۳\times۱۰\times۰/۴ = ۱۲J$$

$$W_۲ = -m_۲gh_۲ = -۴\times۱۰\times۰/۲ = -۸J$$



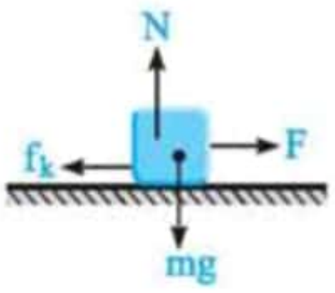
۳ ۱۵۵ در شکل روبه‌رو، گلوله از نقطهٔ A تا B به اندازهٔ Δh در راستای عمودی پایین‌تر آمده است، بنابراین کار نیروی وزن مقداری مثبت داشته و مقدار آن برابر است با:

$$W_{mg} = mg\Delta h \;,\; \Delta h = OB' - OA'$$

از طرفی با توجه به شکل روبه‌رو و با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$OB' = L\cos۳۷^\circ = ۰/۸L \;,\; OA' = L\cos۵۳^\circ = ۰/۶L$$

⇒ کار نیروی وزن: $W_{mg} = mg(۰/۸L - ۰/۶L) = ۰/۲mgL$



۴ ۱۵۶ چون جسم به صورت افقی حرکت می‌کند، بنابراین نیروهای وزن و عکس‌العمل عمودی سطح بر مسیر حرکت عمود بوده و کار آن‌ها صفر است.

$$W_{mg} = (mg)d\overbrace{\cos۹۰^\circ}^{۰} = ۰ \;,\; W_N = Nd\overbrace{\cos۹۰^\circ}^{۰} = ۰$$

از طرفی چون جسم با تندی ثابت در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، بنابراین شتاب حرکت آن صفر بوده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است.

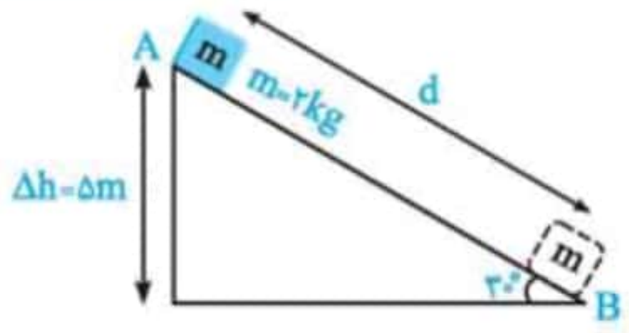
$$d = \Delta x = v\Delta t = ۰/۵\times۴ = ۲m$$

$$F - f_k = ma \xrightarrow[a=۰]{\text{تندی ثابت}} F - f_k = ۰ \Rightarrow f_k = F = ۱۰N$$

$$W_F = Fd\cos(۰) = ۱۰\times۲ = ۲۰J$$

$$W_{f_k} = f_k d\cos(۱۸۰^\circ) = ۱۰\times۲\times(-۱) = -۲۰J$$

gajmarket.com



۴ ۱۵۷ **محاسبهٔ کار نیروی وزن:** با توجه به خلاصه نکات (۲)، کار نیروی وزن به جابه‌جایی قائم بسته بستگی داشته و مستقل از نیروی اصطکاک یا شکل مسیر است.

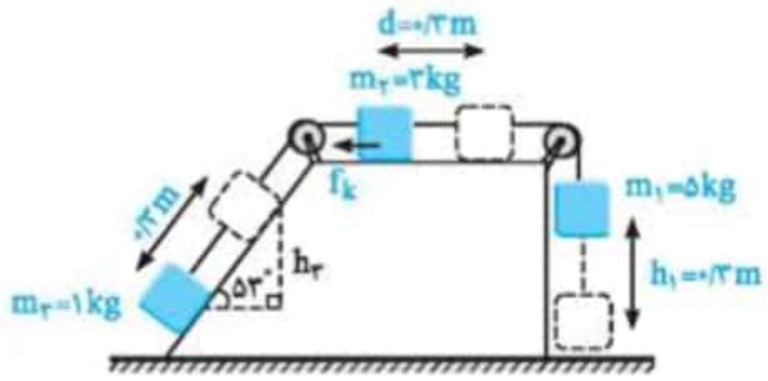
در این مسأله جسم به سمت پایین (هم‌جهت با نیروی وزن) به‌اندازهٔ $5m$ حرکت کرده است و کار نیروی وزن مقداری مثبت بوده و برابر است با:

$$W = +mg\Delta h = ۲\times ۱۰\times ۵ = +۱۰۰J$$

محاسبهٔ کار نیروی اصطکاک: با توجه به صورت سؤال، نیروی اصطکاک $\frac{۱}{۱۰}$ برابر وزن جسم است. بنابراین برای محاسبهٔ کار نیروی اصطکاک می‌توان نوشت:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{\Delta h}{d} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{d} \Rightarrow d = ۱۰m$$

$$W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰^\circ \xrightarrow{f_k = \frac{۱}{۱۰}mg = \frac{۱}{۱۰}\times ۲\times ۱۰ = ۲N} W_{f_k} = ۲\times ۱۰\times (-۱) = -۲۰J$$



۱ ۱۵۸ با توجه به مقدار جابه‌جایی هر یک از جسم‌های m_1 و m_2 در راستای قائم، کار نیروی وزن هریک از آن‌ها برابر است با:

$$W_{m_1g} = m_1gh_1 = ۵\times ۱۰\times ۰/۳ = ۱۵J$$

$$\sin ۵۳^\circ = \frac{h_2}{۰/۳} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{h_2}{۰/۳} \Rightarrow h_2 = ۰/۲۴m$$

$$W_{m_2g} = -m_2gh_2 = -۱\times ۱۰\times ۰/۲۴ = -۲/۴J$$

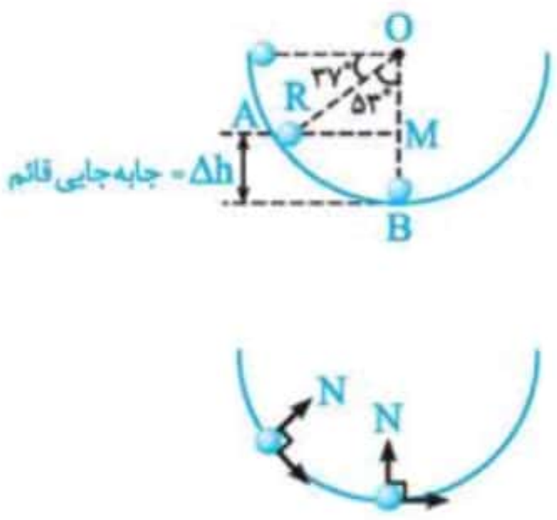
کار نیروی اصطکاک بین جسم m_2 و سطح افقی برابر است با:

$$W_{f_k} = f_k d\cos(۱۸۰^\circ) = ۱۲\times ۰/۳\times (-۱) = -۳/۶J$$

۱ ۱۵۹ در جابه‌جایی جسم از A تا B، جسم به سمت پایین حرکت کرده است و کار نیروی وزن مثبت است:

$$W = +mg\Delta h$$

برای محاسبهٔ مقدار Δh، از روابط مثلثاتی استفاده می‌کنیم:



$$۲R = ۶۰cm \Rightarrow R = ۳۰cm\ ,\ m = ۰/۱kg$$

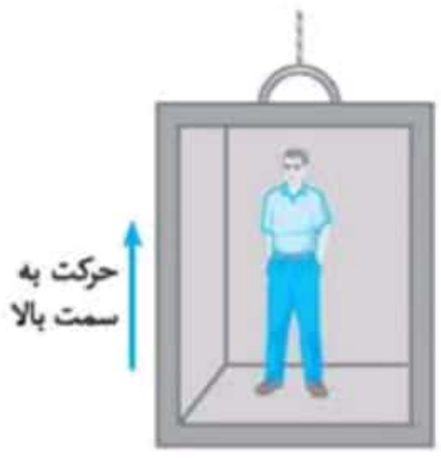
$$\begin{cases}\Delta h = MB = OB - OM = R - OM \\ \cos ۵۳^\circ = \frac{OM}{R} \Rightarrow OM = ۰/۶R\end{cases} \Rightarrow \Delta h = R - ۰/۶R = ۰/۴R = ۰/۴\times ۳۰ = ۱۲cm = ۰/۱۲m$$

کار نیروی وزن: $W = +۰/۱\times ۱۰\times ۰/۱۲ = ۰/۱۲J$

از طرفی نیروی عکس‌العمل عمودی سطح، در هر لحظه بر مسیر حرکت عمود است. بنابراین $\alpha = ۹۰^\circ$ بوده و کار این نیرو برابر صفر است.

$$W_N = Nd\cos ۹۰^\circ = ۰$$

۴ ۱۶۰ **گام اول:** (یافتن نیرویی که آسانسور به شخص وارد می‌کند): با توجه به این‌که بین طبقات پنجم تا هفتم تندی آسانسور ثابت است $(a = ۰)$، $N = mg$ می‌باشد.





$$m = ۷۰ + ۵ = ۷۵kg$$

$$a = ۰ \Rightarrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow N = mg = ۷۵۰\ N$$

گام دوم: (یافتن کار):

$$W_N = Nd\cos\alpha$$

$$W_N = ۷۵۰\times ۶\times \cos ۰ = ۴۵۰۰J$$

۴ ۱۶۱ می‌دانیم بزرگی کار نیروی گرانش بر روی وزنه، برابر حاصل‌ضرب نیروی گرانش در جابه‌جایی در راستای قائم (h) است.

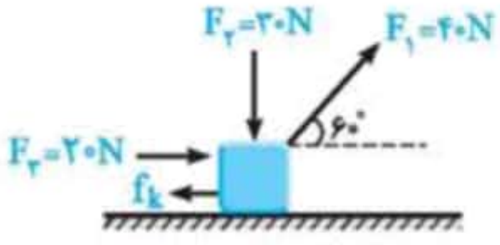
کار نیروی گرانش: $W = mgh\cos ۱۸۰^\circ \Rightarrow |W| = mgh = ۱۰mh$

نیرویی که کف دست شخص بر وزنه وارد می‌کند برابر نیرویی است که وزنه بر کف دست شخص وارد می‌کند و با توجه به رابطهٔ $F = m(g \pm a)$، می‌توان نوشت:

ضریب a مثبت است. $\Rightarrow$ تندشونده $= (+)\times(+) = +$ بالا $\times$

$$F = m(۱۰ + ۳) = ۱۳m \Rightarrow W' = Fh\cos\alpha \xrightarrow[F=۱۳m]{\alpha=۰} W' = ۱۳mh \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{۱۳mh}{۱۰mh} = ۱/۳$$

۴ ۱۶۲ کار هریک از نیروهای F_1، F_2، F_3 و f_k را در جابه‌جایی جسم به اندازهٔ d به سمت راست به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} W_1 = F_1 d\cos(60^\circ) = 40d \times \frac{1}{2} = 20d \\ W_2 = F_2 d\underbrace{\cos(90^\circ)}_{0} = 0 \\ W_3 = F_3 d\cos(0) = 20d \\ W_{f_k} = f_k d\underbrace{\cos(180^\circ)}_{-1} = -10d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{W_{کل}}{W_{f_k}} = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_{f_k} + \cancel{W_{mg}}^{0} + \cancel{W_N}^{0}}{W_{f_k}} = \frac{20d + 0 + 20d + (-10d)}{-10d} = -3$$

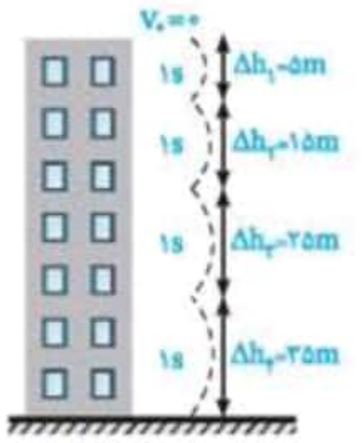
۳ ۱۶۳ **توجه** از آن‌جایی که نیروی وارد بر بسته ثابت است، با توجه به رابطهٔ $W = Fd\cos\alpha$، نسبت کار انجام شده در دو بازهٔ زمانی، برابر نسبت جابه‌جایی در آن بازه‌ها می‌باشد.

برای مقایسهٔ جابه‌جایی‌ها از رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام $(\Delta x_n = \frac{1}{2}a(2t-1) + v_0)$ استفاده می‌کنیم. با قرار دادن $t = 5s$، جابه‌جایی $d_5 = 4/5\,a$ (جابه‌جایی ثانیهٔ پنجم) و با قرار دادن $t = 1s$، جابه‌جایی $d_1 = 0/5\,a$ (جابه‌جایی ثانیهٔ اول) به‌دست می‌آید:

$$W = Fd\cos\alpha \Rightarrow \frac{W_5}{W_1} = \frac{d_5}{d_1} = \frac{4/5\,a}{0/5\,a} = 9$$

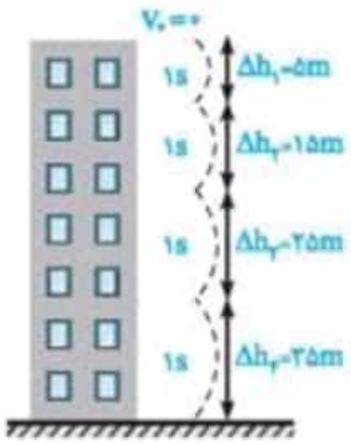
۳ ۱۶۴ همان‌طور که می‌دانیم، با رها کردن گلوله، تندی گلوله پیوسته افزایش یافته و جابه‌جایی آن در ثانیه‌های متوالی حرکتش بیشتر می‌شود، به طوری که در ثانیه‌های متوالی تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت g را می‌دهد.

بنابراین کار نیروی وزن گلوله در ثانیه‌های متوالی افزایش می‌یابد.



$$W = +\underbrace{mg}_{\text{ثابت}}\underbrace{\Delta h}_{\uparrow}$$

۲ ۱۶۵ با توجه به شکل مقابل و مفاهیم سقوط آزاد، جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ سوم سقوط برابر ۲۵ m است. بنابراین کار نیروی وزن در ثانیهٔ سوم حرکت برابر است با:



$$W = +mg\,\Delta h_3 = 1 \times 10 \times 25 = 250\,J$$

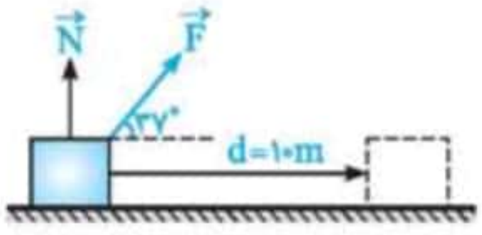
نگاه دیگر: برای محاسبهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم حرکت می‌توان از رابطهٔ $\Delta y_t = \frac{1}{2}a(2t-1) + v_0$ استفاده کرد:

$$\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم حرکت}: \Delta y_3 = \frac{1}{2} \times 10 \times (2\times 3 - 1) + 0 = 25\,m$$

۱ ۱۶۶ با توجه به پاسخ سؤال (۱۶۴)، اختلاف جابه‌جایی گلوله در ثانیه‌های متوالی حرکتش مقداری ثابت و برابر ۱۰ m است (تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱۰ متر را می‌دهد). بنابراین اختلاف کار نیروی وزن گلوله در ثانیه‌های متوالی حرکت مقداری ثابت است.

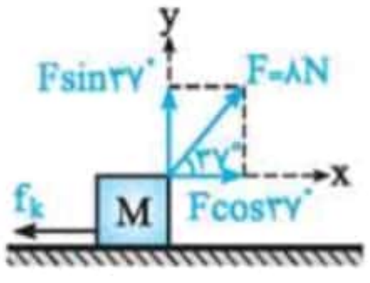
اختلاف کار نیروی وزن گلوله در ثانیه‌های متوالی حرکت، مقداری ثابت است. $\Rightarrow \Delta W = W_2 - W_1 = (mgh_2) - (mgh_1) = \underbrace{mg}_{\text{ثابت}}\underbrace{(h_2 - h_1)}_{\text{۱۰ متر}}$

۴ ۱۶۷ با توجه به عمود بودن N بر d، کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل عمودی سطح برابر صفر است و نیازی به محاسبهٔ مقدار N نداریم:



$$\vec{N} \perp \vec{d} \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{کار } N: W = Nd\cos 90^\circ = 0$$

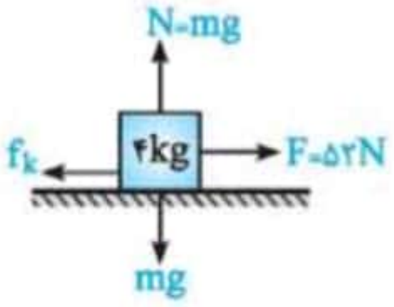
از طرفی با توجه به صورت سؤال، جسم با تندی ثابت بر روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند ($a = 0$: شتاب) و برای محاسبهٔ کار نیروی اصطکاک می‌توان نوشت:



$$a = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow f_k = F\cos 37^\circ = 8 \times 0/8 = 6/4\ N$$

$$\text{کار نیروی اصطکاک در ۱۰ متر جابه‌جایی}: W = f_k d\cos\alpha = 6/4 \times 10 \times \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -64\,J$$

gajmarket.com



۳ ۱۶۸ با توجه به خلاصه نکات ۱، کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل سطح، برابر کار نیروی اصطکاک است (در واقع کار مؤلفهٔ عمودی سطح (N) برابر صفر می‌باشد.)، بنابراین کافی است اندازهٔ نیروی اصطکاک و جابه‌جایی بسته را در ثانیه دوم حرکت به‌دست آوریم:

۱) محاسبهٔ نیروی اصطکاک:

$$f_k = \mu_k mg = ۰/۳ \times ۴ \times ۱۰ = ۱۲\,N$$

۲) محاسبهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم:

$$\sum F = ma \Rightarrow ۵۲ - \overbrace{۰/۳ \times ۴ \times ۱۰}^{f_k} = ۴a \Rightarrow a = ۱۰\,m/s^۲$$

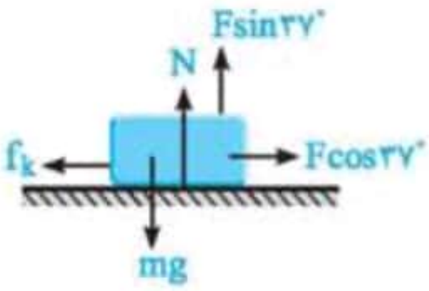
$$\begin{cases} v_۰ = ۰ \\ a = ۱۰\,m/s^۲ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{۱}{۲}a(۲t-۱) + v_۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰(۲ \times ۲ - ۱) + ۰ = ۱۵\,m$$

۳) محاسبهٔ کار نیروی عکس‌العمل سطح:

$$W_R = W_N + W_{f_k}$$

$$\begin{cases} W_N = Nd\cos ۹۰^\circ = ۰ \\ W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰^\circ = (۱۲) \times (۱۵) \times (-۱) = -۱۸۰\,J \end{cases} \Rightarrow W_R = -۱۸۰\,J$$

۳ ۱۶۹ سطح بر جسم دو نیروی N و f_k وارد می‌کند که کار نیروی N برابر صفر است (چرا؟). بنابراین کار نیروی f_k، که برابر کل کار انجام شده از طرف سطح بر جسم است، برابر است با:



$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N + F\sin ۳۷^\circ = mg \Rightarrow N + ۵۰\sin ۳۷^\circ = ۵ \times ۱۰ \Rightarrow N = ۲۰N$$

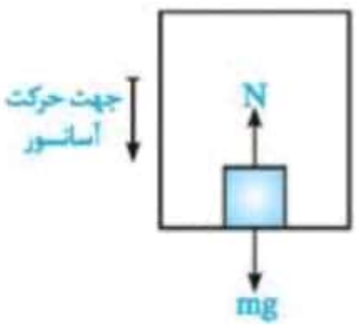
$$f_k = \mu_k N = \frac{۵}{۱۰} \times ۲۰ = ۱۰N$$

$$W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰^\circ = ۱۰ \times ۵ \times (-۱) = -۵۰J$$

۱ ۱۷۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) جسم همراه با آسانسور به سمت پایین حرکت می‌کند، ولی نیروی عمودی سطح به سمت بالا بر آن وارد می‌شود ($\alpha = ۱۸۰^\circ$).

۲) با توجه به مسائل مربوط به وزن ظاهری در فصل دینامیک از کتاب فیزیک پایهٔ دوازدهم، اندازهٔ نیروی N برابر است با:



$$N = m(g-a) = ۲ \times (۱۰ - ۲) = ۱۶\,N$$

(حرکت آسانسور تندشونده (+) و به سمت پایین (-) است).

۳) جسم همراه با آسانسور با شتاب $۲\,m/s^۲$ به سمت پایین حرکت می‌کند و جابه‌جایی آن در ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ \xrightarrow{t=۱s} d = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱^۲ = ۱m$$

۴) کار نیروی عکس‌العمل عمودی سطح برابر است با:

$$W_N = Nd\cos\alpha = ۱۶ \times ۱ \times \cos ۱۸۰^\circ = ۱۶ \times ۱ \times (-۱) = -۱۶\,J$$

نکته برای تعیین وزن ظاهری همواره می‌توان از رابطه‌ی $N = m(g \pm a)$ استفاده کرد. برای تعیین علامت a باید به تندشونده بودن و کندشونده بودن حرکت و هم‌چنین جهت حرکت آسانسور (بالا یا پایین رفتن آسانسور) توجه کرد، به همین منظور به علامت‌های فرضی زیر توجه کنید:

تندشونده $\xleftarrow[\text{فرضی}]{\text{علامت}}$ (+) کندشونده $\xleftarrow[\text{فرضی}]{\text{علامت}}$ (-) بالا رفتن $\xleftarrow[\text{فرضی}]{\text{علامت}}$ (+) پایین رفتن $\xleftarrow[\text{فرضی}]{\text{علامت}}$ (-)

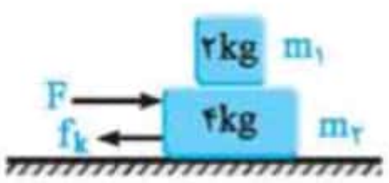
سؤال **اگر آسانسور کندشونده به سمت پایین حرکت کند، N چگونه به‌دست می‌آید؟**

پاسخ $N = m(g \pm a) \xrightarrow{\text{تعیین علامت } a}$ کندشونده × پایین $= (-) \times (-) = + \Rightarrow N = m(g+a)$

سؤال **اگر آسانسور تندشونده به سمت پایین حرکت کند، N چگونه به‌دست می‌آید؟**

پاسخ $N = m(g \pm a) \xrightarrow{\text{تعیین علامت } a}$ تندشونده × پایین $= (+) \times (-) = - \Rightarrow N = m(g-a)$

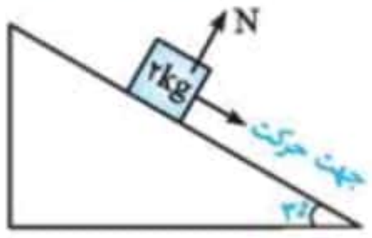
۴ ۱۷۱ **گام اول:** (محاسبهٔ نیروی f_k): با توجه به این‌که کل مجموعه با هم به سمت راست حرکت می‌کند، به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F - f_k = (m_۱ + m_۲)a \Rightarrow ۳ - f_k = (۲ + ۴) \times ۰/۳ \Rightarrow f_k = ۱/۲\,N$$

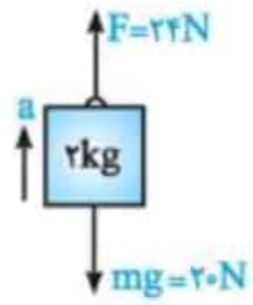
گام دوم: نسبت کار نیروی F به کار نیروی f_k برابر است با:

$$\frac{W_F}{W_{f_k}} = \frac{Fd\cos ۰}{f_k d\cos(۱۸۰^\circ)} = -\frac{F}{f_k} = -\frac{۳}{۱/۲} = -\frac{۱}{۰/۴} = -\frac{۱۰}{۴} = -\frac{۵}{۲}$$



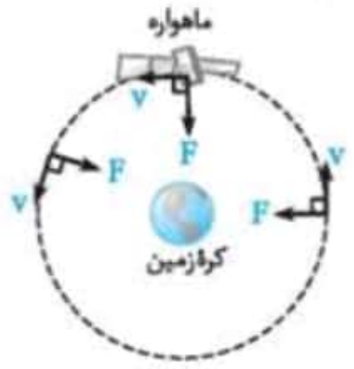
۱۷۲ ۳ جسم روی سطح شیب‌دار به سمت پایین جابه‌جا می‌شود. بنابراین زاویهٔ بین نیروی عمودی سطح و جابه‌جایی برابر ۹۰ درجه است. در نتیجه کار نیروی عکس‌العمل عمودی سطح (N) برابر صفر است.

$$W_N = Nd\cos 90^\circ = 0$$



۱۷۳ ۴ با توجه به شکل روبه‌رو، برایند نیروهای وارد بر جسم برابر ۴N و به سمت بالاست، بنابراین جسم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. از آن‌جایی که نیروهای وارد برجسم ثابت است، برای مقایسهٔ کار انجام شده در بازه‌های زمانی مختلف، کافی است جابه‌جایی‌ها را بررسی کنیم.

از آن‌جایی که در صورت سؤال به جهت حرکت جسم اشاره‌ای نشده است (جهت سرعت اولیه)، با توجه به کندشونده یا تندشونده بودن حرکت، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی می‌تواند کاهش، افزایش یا ابتدا کاهش و سپس افزایش داشته باشد، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.



۱۷۴ ۳ نیروی جاذبهٔ بین زمین و ماهواره و نیروی جاذبهٔ بین هستهٔ اتم هیدروژن و الکترون، همواره بر مسیر حرکت دایره‌ای آن‌ها عمود هستند. بنابراین کار هریک از آن‌ها برابر صفر است.

۱۷۵ ۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ — انرژی جنبشی (تست‌های ۱۷۵ تا ۱۸۴)

در صورتی که یک جسم به جرم m با تندی v در حال حرکت باشد، دارای انرژی جنبشی است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

انرژی جنبشی : $K = \frac{1}{2}mv^2$

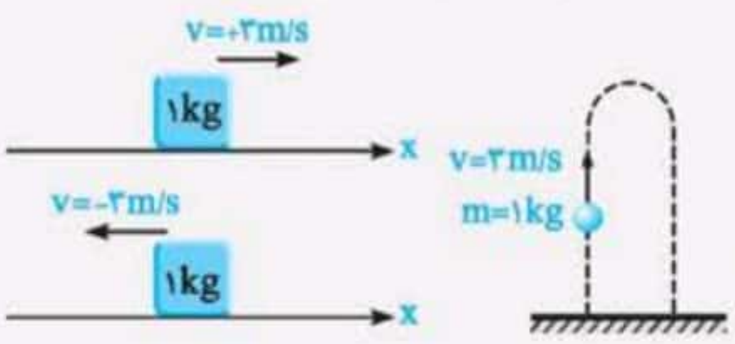
نکات مهم وکاربردی

۱ برای مقایسهٔ انرژی جنبشی دو جسم با جرم‌ها و سرعت‌های متفاوت می‌توان نوشت:

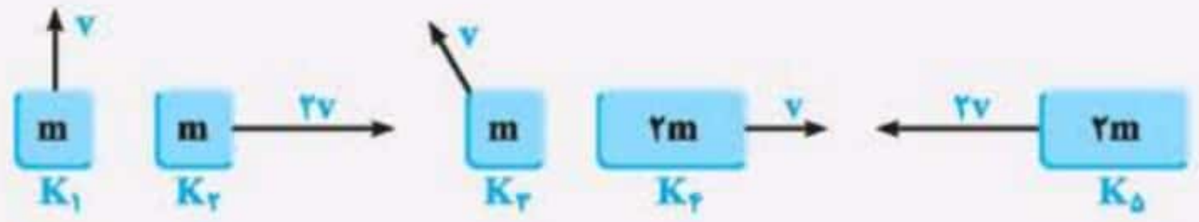
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

۲ از رابطهٔ فوق می‌توان دریافت که انرژی جنبشی یک جسم با توان دوم تندی آن جسم رابطهٔ مستقیم دارد ($K \propto v^2$).

۳ برای محاسبهٔ انرژی جنبشی یک متحرک، جهت سرعت آن حائز اهمیت نبوده و اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک در نظر گرفته می‌شود. به‌طور مثال انرژی جنبشی سه بستهٔ مقابل در لحظهٔ نشان داده شده با یک‌دیگر برابر است.



تمرین ۱ با توجه به تندی‌های مشخص‌شده بر روی هر یک از اجسام زیر، کدام گزینه در مقایسهٔ انرژی جنبشی آن‌ها صحیح می‌باشد؟ (کتاب درسی)



۱) $K_5 > K_2 = K_4 > K_1 = K_3$

۲) $K_2 > K_4 > K_3 > K_1 > K_5$

۳) $K_5 > K_2 > K_4 > K_3 = K_1$

۴) $K_2 > K_4 > K_1 = K_3 > K_5$

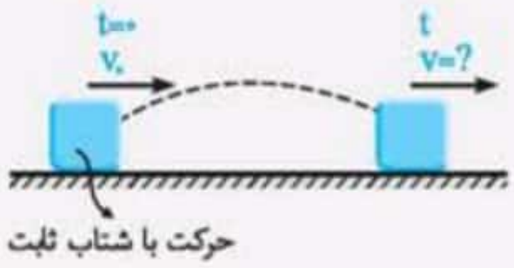
پاسخ همان‌طور که می‌دانیم، انرژی جنبشی یک جسم از رابطهٔ $K = \frac{1}{2}mv^2$ به‌دست می‌آید. پس برای هر کدام از اجسام خواهیم داشت:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{1}{2}mv^2 \\ K_2 = \frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{1}{2} \times m \times 4v^2 = 2mv^2 \\ K_3 = \frac{1}{2}mv^2 \\ K_4 = \frac{1}{2}(2m)v^2 = mv^2 \\ K_5 = \frac{1}{2}(2m)(2v)^2 = \frac{1}{2} \times 2m \times 4v^2 = 4mv^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow K_5 > K_2 > K_4 > K_3 = K_1$ گزینهٔ (۳)

gajmarket.com

نکته با توجه به رابطهٔ شتاب $\left(a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ که در علوم سال نهم خوانده‌اید، به‌راحتی می‌توان معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک در حرکت با شتاب ثابت را نوشت. برای این منظور داریم:



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{v-v_0}{t-t_0}\xrightarrow{t_0=0}a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow at=v-v_0\Rightarrow v=at+v_0$$

از طرفی همان‌طور که در علوم پایهٔ نهم خواندید، اگر جسمی از حال سکون با نیروی خالص F شروع به حرکت کند، شتاب آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}$$

با ترکیب این دو موضوع، سؤالات جالبی قابل طرح است که در ادامه به یک نمونه از آن‌ها می‌پردازیم.

تمرین۲ **جسمی به جرم $2kg$، در اثر نیروی افقی ثابت $5N$ بر روی یک سطح بدون اصطکاک از حال سکون به حرکت درمی‌آید. انرژی جنبشی جسم پس از گذشت ۴ ثانیه و تغییرات انرژی جنبشی از $t_1=6s$ تا $t_2=8s$، به‌ترتیب از راست به چپ برحسب ژول کدام است؟** (تألیفی)

۱) ۱۷۵ ،۲۵۰ ۲) ۱۵۰ ،۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ،۲۵۰ ۴) ۱۷۵ ،۱۰۰

پاسخ برای محاسبهٔ انرژی جنبشی پس از ۴ ثانیه، ابتدا تندی متحرک را به‌دست آورده و سپس از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ استفاده می‌کنیم:

$$m=2kg\ ,\ \text{نیروی خالص}: F=5N\Rightarrow \text{شتاب حرکت}: a=\frac{F}{m}=\frac{5}{2}m/s^2$$

$$\text{معادلهٔ سرعت ـ زمان}: v=at+v_0\xrightarrow[v_0=0]{t=4s}v=\frac{5}{2}\times 4+0=10m/s\Rightarrow \text{انرژی جنبشی}: K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2\times 10^2=100J$$

از طرفی میزان تغییر انرژی جنبشی از $t_1=6s$ تا $t_2=8s$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t_1=6s: v_1=at+v_0\xrightarrow[v_0=0]{t=6s}v_1=\frac{5}{2}\times 6+0=15m/s$$

$$t_2=8s: v_2=at+v_0\xrightarrow[v_0=0]{t=8s}v_2=\frac{5}{2}\times 8+0=20m/s$$

$$\Delta K=K_2-K_1=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=\frac{1}{2}\times 2\times(400-225)=175J$$ (گزینهٔ ۴)

با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳) گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۱۷۶ برای محاسبهٔ انرژی جنبشی ماهواره، ابتدا تندی آن را برحسب متر بر ثانیه به دست می‌آوریم:

$$v=72km/h=\frac{72}{3/6}m/s=20m/s, m=500kg$$

$$\text{انرژی جنبشی ماهواره}: K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 500\times(20)^2=10^5J=0/1MJ$$

۲ ۱۷۷ با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی و اطلاعات داده شده در صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$\text{اطلاعات سؤال}: v_2=v_1+5m/s\Rightarrow K_2=K_1+\frac{5}{4}K_1=\frac{9}{4}K_1\ ,\ v_1=?$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\frac{K_2}{K_1}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\Rightarrow\frac{9}{4}=\left(\frac{v_1+5}{v_1}\right)^2$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{جذر از}}\frac{3}{2}=\frac{v_1+5}{v_1}\Rightarrow v_1=10m/s$$

۲ ۱۷۸ در حالت دوم انرژی جنبشی اتومبیل دو برابر حالت اول است $(K_2=2K_1)$، با استفاده از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ می‌توان نوشت:

$$\frac{K_2}{K_1}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\xrightarrow{K_2=2K_1}2=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow v_2=\sqrt{2}v_1\xrightarrow{\sqrt{2}=1/4}v_2=1/4v_1$$

در ادامه کافی است تندی اولیهٔ اتومبیل را برحسب m/s به‌دست آوریم:

$$v_1=72km/h=\frac{72}{3/6}m/s=20m/s\Rightarrow v_2=1/4\times 20=28m/s$$

۴ ۱۷۹ با توجه به‌صورت سؤال، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) جرم کل کامیون ۲۵ درصد کم‌تر شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_2=m_1-\frac{25}{100}m_1=\frac{3}{4}m_1\Rightarrow\frac{m_2}{m_1}=\frac{3}{4}$$

۲) تندی حرکت کامیون ۲۰ درصد افزایش یافته است و داریم:

$$v_2=v_1+\frac{20}{100}v_1=\frac{6}{5}v_1$$

برای مقایسه انرژی جنبشی کامیون در دو حالت از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2=\frac{3}{4}\times\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{108}{100}\Rightarrow K_2=1/08K_1\Rightarrow\Delta K=\frac{8}{100}K_1$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، انرژی جنبشی کامیون ۸ درصد افزایش یافته است.

۱۸۰ ۱ با توجه به رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$v_1=v-5m/s\ ,\ v_2=v+5m/s$$

$$K_1=K_2-\frac{64}{100}K_2=\frac{36}{100}K_2$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\frac{K_1}{K_2}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\Rightarrow\frac{36}{100}=\left(\frac{v-5}{v+5}\right)^2\xrightarrow{\text{جذر}}\frac{6}{10}=\frac{v-5}{v+5}$$

$$\Rightarrow 10v-50=6v+30\Rightarrow 4v=80\Rightarrow v=20m/s$$

تذکر برای تبدیل km/h به m/s کافی است عدد داده شده را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

$$18km/h=\frac{18}{3/6}=5m/s$$

۱۸۱ ۴ بر اثر ضربه ۵ ژول انرژی به هر توپ منتقل شده و انرژی جنبشی هر یک از آن‌ها به ۵ ژول می‌رسد. بنابراین برای مقایسهٔ تندی دو توپ با استفاده از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$، می‌توان نوشت:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\Rightarrow 1=\frac{2}{0/5}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{2}$$

۱۸۲ ۱ درصورتی که انرژی جنبشی جسم ۰/۵ کیلوگرمی ($\frac{1}{2}$ کیلوگرمی) به ۲۵ ژول برسد، تندی آن برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 25=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times v^2\Rightarrow v^2=100\Rightarrow v=10m/s$$

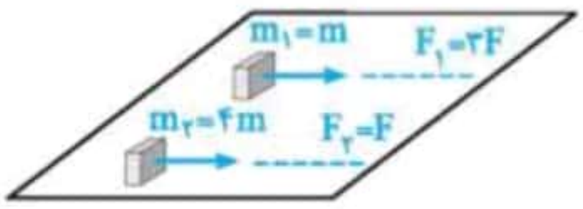
برای محاسبهٔ زمان رسیدن تندی (اندازهٔ سرعت) جسم به $10m/s$، ابتدا شتاب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$m=0/5kg\ ,\ F=2N\Rightarrow\text{شتاب}:\ a=\frac{F}{m}=\frac{2}{0/5}=4m/s^2$$

در ادامه با استفاده از روابط حرکت‌شناسی در فصل اول فیزیک پایهٔ دوازدهم می‌توان نوشت:

$$v=at+\cancel{v_0}\Rightarrow 10=4t\Rightarrow t=2/5s:$$ زمانی که اندازهٔ سرعت (تندی) جسم به $10m/s$ می‌رسد.

۱۸۳ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: (مقایسهٔ شتاب‌ها):

$$F=ma\Rightarrow\frac{F_2}{F_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\frac{a_2}{a_1}\Rightarrow\frac{F}{3F}=\frac{4m}{m}\times\frac{a_2}{a_1}\Rightarrow\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{12}$$

گام دوم: (مقایسهٔ اندازهٔ سرعت (تندی) دو جسم پس از گذشت زمان t):

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-\cancel{v_0}}{t}\Rightarrow v=at\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{12}$$

گام سوم: (مقایسهٔ انرژی جنبشی دو جسم):

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2=\frac{4m}{m}\times\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{36}$$

دید دیگر: ابتدا رابطه‌ای برای انرژی جنبشی جسم بر حسب F، m و t به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}\\ a=\frac{v-0}{t}=\frac{v}{t}\end{cases}\rightarrow\frac{F}{m}=\frac{v}{t}\Rightarrow v=\frac{Ft}{m}$$

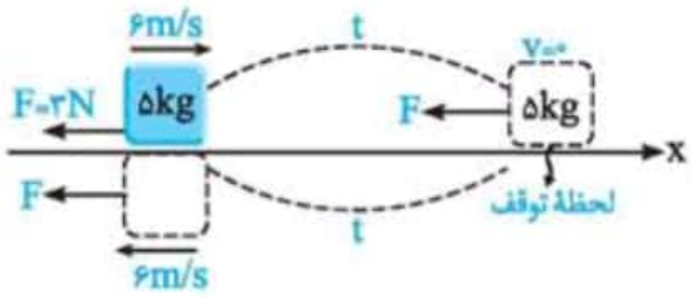
$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{Ft}{m}\right)^2\Rightarrow K=\frac{F^2t^2}{2m}$$

بنابراین برای مقایسه انرژی دو جسم پس از یک مدت زمان معین می‌توان نوشت:

$$\frac{K_2}{K_1}=\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\times\frac{m_1}{m_2}=\left(\frac{F}{3F}\right)^2\times\frac{m}{4m}=\frac{1}{36}$$

gajmarket.com

۱۸۴ با توجه به شکل مقابل، در آغاز حرکت نیروی وارد شده در خلاف جهت حرکت جسم است، بنابراین اندازهٔ سرعت جسم با شتاب ثابت رفته‌رفته کاهش یافته تا جایی که جسم برای یک لحظه متوقف شود و سپس در خلاف جهت حرکت اولیهٔ خود حرکت تندشونده‌ای را آغاز می‌کند. هنگامی که اندازهٔ سرعت (تندی) جسم مجدداً به $6\,m/s$ برسد، انرژی جنبشی آن برابر با حالت اول خواهد شد.



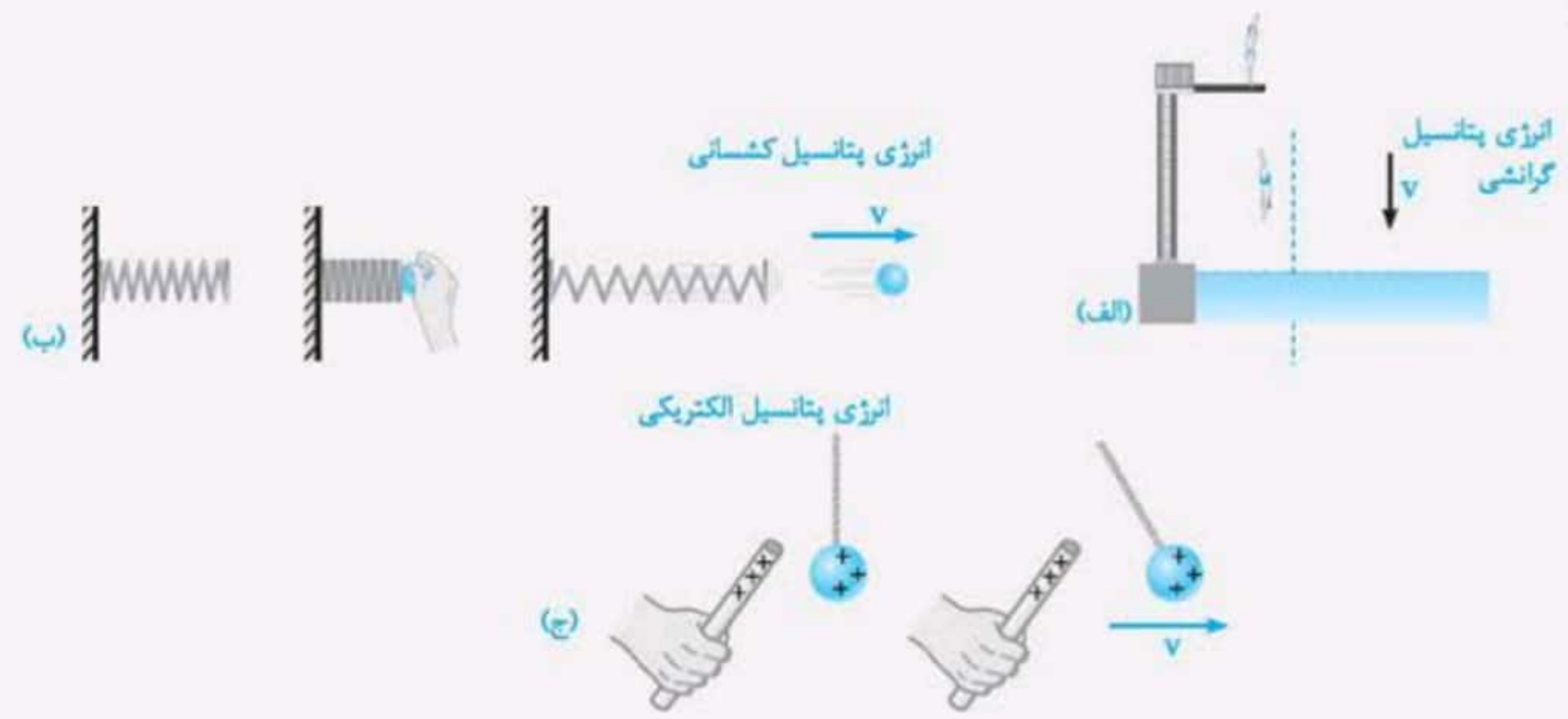
شتاب حرکت: $a = \frac{F}{m} = \frac{۳}{۵} m/s^۲$

زمان توقف: $t = \left|\frac{v_۰}{a}\right| = \frac{۶}{(\frac{۳}{۵})} = ۱۰s \Rightarrow$ زمانی که جسم به محل اولیه برمی‌گردد. $۲t = ۲۰s$

۱۸۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ — انرژی پتانسیل — (تست‌های ۱۸۵ تا ۱۹۴)

گاهی اوقات اجسام می‌توانند به علت داشتن یک موقعیت خاص، دارای نوعی از انرژی شوند که به آن انرژی پتانسیل گویند. انرژی پتانسیل برخلاف انرژی جنبشی که به حرکت یک جسم وابسته است، ویژگی یک سامانه (دستگاه) است. این انرژی به شکل‌های متنوعی مانند گرانشی، کشسانی و الکتریکی وجود دارد.



تو ادامهٔ این فصل، با انرژی‌های پتانسیل گرانشی و کشسانی فنر بیشتر آشنا می‌شیم. انرژی پتانسیل الکتریکی رو هم میذاریم برای فصل اول فیزیک پایهٔ یازدهم، تا اونجا در موردش بحث کنیم ...

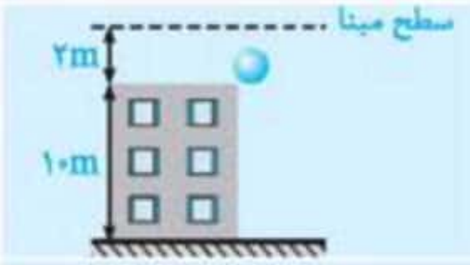
انرژی پتانسیل گرانشی

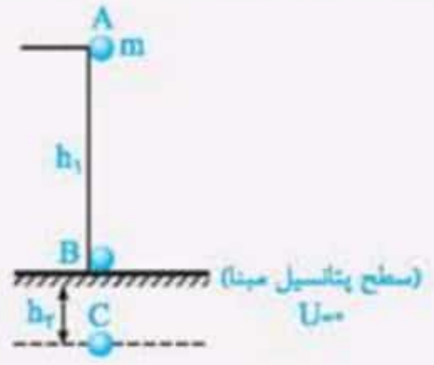
انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم، به علت نیروی جاذبهٔ بین سامانهٔ زمین و جسم ایجاد می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$U = mgh$$

نکات مهم و کاربردی

۱) در رابطهٔ فوق، h فاصلهٔ قائم جسم با سطحِ مبنای پتانسیل گرانشی است. سطح مبنا جایی است که انرژی پتانسیل اجسام در آن صفر می‌باشد و تعیین آن کاملاً اختیاری است. برای درک بهتر این موضوع به جدول زیر توجه کنید:

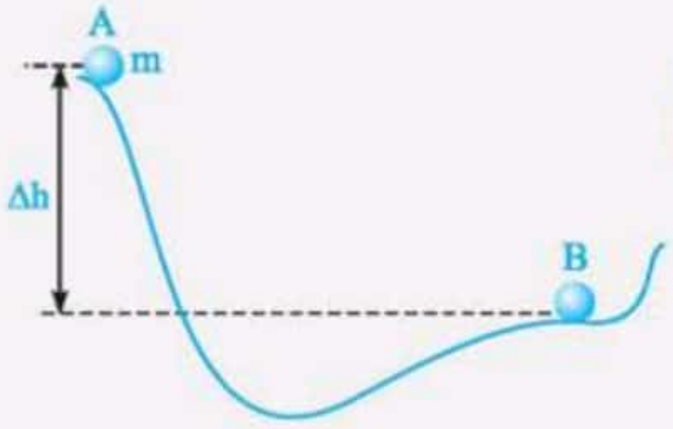
سطح مبنای فرضی			
فاصله تا سطح مبنا	$h = +۱۰m$	$h = ۰$	$h = -۲m$
انرژی پتانسیل	$mgh = mg \times (+۱۰)$	$mgh = ۰$	$mgh = mg \times (-۲)$



۲ با توجه به موارد بیان شده، اگر گلوله در بالای سطح پتانسیل مبنا قرار داشته باشد، انرژی پتانسیل گرانشی آن مثبت و در صورتی‌که در پایین سطح پتانسیل مبنا قرار داشته باشد، انرژی پتانسیل گرانشی آن منفی است.

$$\begin{cases} U_A = +mgh_1 \\ U_B = 0 \\ U_C = -mgh_2 \end{cases}$$

۳ اگر گلوله به اندازهٔ Δh به سطح زمین نزدیک شود، انرژی پتانسیل گرانشی آن به اندازهٔ $mg\Delta h$ کاهش می‌یابد $(\Delta U_g = -mg\Delta h)$ و اگر به اندازهٔ Δh از سطح زمین دور شود، به اندازهٔ $mg\Delta h$ افزایش می‌یابد $(\Delta U_g = +mg\Delta h)$. از طرفی در حالتی که جسم حرکت افقی دارد (ارتفاع آن از سطح زمین تغییر نمی‌کند)، انرژی پتانسیل گرانشی آن نیز تغییر نمی‌کند $(\Delta U_g = 0)$.



۴ به‌سادگی می‌توان فهمید، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم، قرینهٔ کار نیروی وزن است.

$$W_{mg} = -\Delta U$$

به‌طور مثال در شکل مقابل از A تا B، کار نیروی وزن $+mg\Delta h$ و انرژی پتانسیل بسته به اندازه‌ی $mg\Delta h$ کاهش یافته است $(\Delta U = -mg\Delta h)$.

$$\begin{cases} \Delta U = -mg\Delta h \\ W_{mg} = +mg\Delta h \end{cases} \Rightarrow \Delta U = -W_{mg}$$

نتیجه تغییر انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم، مستقل از مسیر حرکت است و تنها به جابه‌جایی آن در راستای قائم بستگی دارد.

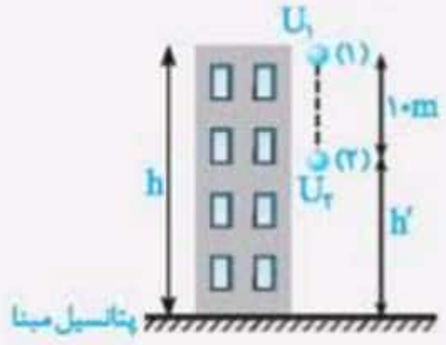
۵ در صورتی‌که جسمی به جرم m توسط یک نیروی خارجی (مانند جرثقیل) به آرامی و با تندی ثابت، به‌اندازهٔ Δh در راستای قائم جابه‌جا شود، کار انجام شده توسط نیروی خارجی، برابر تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است $(W_F = \Delta U = mg\Delta h)$.

تمرین۱ جسمی در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌گردد. اگر بعد از ۱۰ متر سقوط، انرژی پتانسیل آن ۴۰ درصد کاهش یابد، ارتفاع h چند متر است؟ (سطح زمین، سطح پتانسیل مبنا در نظر گرفته شود.)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۵

پاسخ در این مسأله با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:



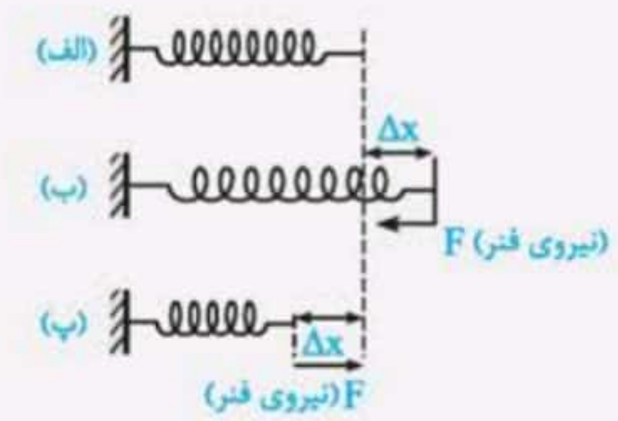
$$U_1 = mgh \;,\; U_2 = mgh' = mg(h-10)$$

انرژی پتانسیل در حالت دوم، ۴۰ درصد کم‌تر از حالت اول است، بنابراین داریم:

$$U_2 = U_1 - 0/4U_1 = 0/6U_1 \Rightarrow U_2 = 0/6U_1$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{mg(h-10)}{mgh} = 0/6 \Rightarrow \frac{h-10}{h} = \frac{6}{10} \Rightarrow h = 25m$$ (گزینهٔ ۳)

انرژی پتانسیل کشسانی فنر



در صورتی‌که یک فنر را به آرامی به‌اندازهٔ Δx فشرده کنیم یا آن را بکشیم، در این‌صورت انرژی صرف شده به‌صورت انرژی پتانسیل کشسانی در فنر ذخیره می‌شود. در شکل (الف)، فنر در حال تعادل است. در شکل‌های (ب) و (پ)، با کشیدن و فشردن فنر به اندازهٔ Δx، انرژی پتانسیل کشسانی در سامانهٔ دست ـ فنر ذخیره می‌شود.

نکته۱ وقتی جسمی را به سوی فنری پرتاب کنیم، در مدت تماس جسم با فنر، همواره فنر نیرویی در خلاف جهت جابه‌جایی به جسم وارد می‌کند. یعنی کار نیروی فنر در این جابه‌جایی منفی است و برابر قرینهٔ تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی فنر می‌باشد.

$$W_{\text{فنر}} = -\Delta U_{\text{کشسانی}}$$

gajmarket.com

رابطهٔ مربوط به انرژی ذخیره شده تو فنر، تو فیزیک پایهٔ دوازدهم اُورده شده. به خاطر همین، این‌جا یه اشارهٔ مختصری بهش می‌کنیم. احتمال داره ازش تو کنکور سؤال بیاد (چند تا تست کنکور هم براتون اُوردیم، تستای شمارهٔ ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳ و ۲۸۹)

نکته۲ انرژی پتانسیل کشسانی فنر: در صورتی که یک فنر با سختی k را به آرامی به اندازهٔ Δx فشرده کنیم یا آن را بکشیم، در این صورت انرژی صرف شده به صورت انرژی کشسانی در فنر ذخیره می‌شود و مقدار آن برابر است با:

Δx: تغییر طول فنر نسبت به حالت اولیه است.

$$U_{\text{فنر}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

نکته۳ براساس قانون هوک، در صورتی که یک فنر با ثابت k به اندازهٔ Δx تغییر طول دهد (کشیده و یا فشرده شود)، آن‌گاه نیروی فنر برابر است با:

$$F = k\Delta x$$

انرژی پتانسیل در اثر برهم کنش بین اجسام به‌وجود می‌آید. به عبارت دیگر انرژی پتانسیل، نوعی از انرژی است که به علت موقعیت اجسام نسبت به یک‌دیگر در آن‌ها ذخیره می‌شود و به یک جسم منفرد وابسته نیست. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱ ۱۸۶ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم تنها به تغییرات ارتفاع آن بستگی دارد ($\Delta U = mg\Delta h$) و از آن‌جایی که جابه‌جایی جسم در راستای قائم برابر صفر است ($\Delta h = 0$)، بنابراین تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی آن برابر صفر است.

۳ ۱۸۷ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۴)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۱۸۸ انرژی صرف شده برای بالا بردن جسم، تبدیل به انرژی پتانسیل گرانشی در آن می‌شود، بنابراین داریم:

$$U = mgh \;,\; m = 1kg \;,\; g = 9/8\,m/s^2 \;,\; U = 1J \Rightarrow 1 = 1\times 9/8\times h \Rightarrow h = \frac{1}{9/8} \approx 0/102m$$

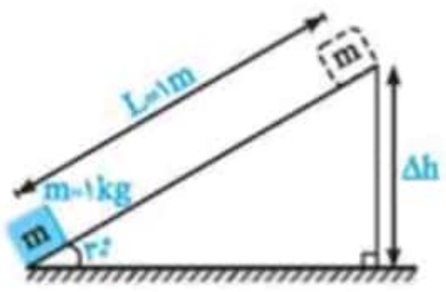
۳ ۱۸۹ نیروسنج دیجیتال، وزن جسم را $10/4\,N$ اندازه‌گیری کرده است، یعنی خطای اندازه‌گیری آن برابر $\pm 0/1N$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W = mg = 10/4 \pm 0/1N$$

حال برای به‌دست آوردن انرژی پتانسیل داریم:

$$\Delta U = mg\Delta h = (10/4 \pm 0/1)\times 20 = 208 \pm 2J$$

۲ ۱۹۰ همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، تغییرات انرژی پتانسیل به نیروی اصطکاک یا شکل مسیر بستگی ندارد و وابسته به تغییر مکان قائم بسته است. با توجه به شکل روبه‌رو برای این مسأله داریم:



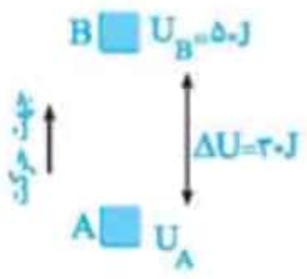
$$\sin 30^\circ = \frac{\Delta h}{L} \Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2}\times 1 = 0/5m \;,\; g = 9/8\,m/s^2$$

$$\Delta U = mg\Delta h = 1\times 9/8\times 0/5 = 4/9J$$

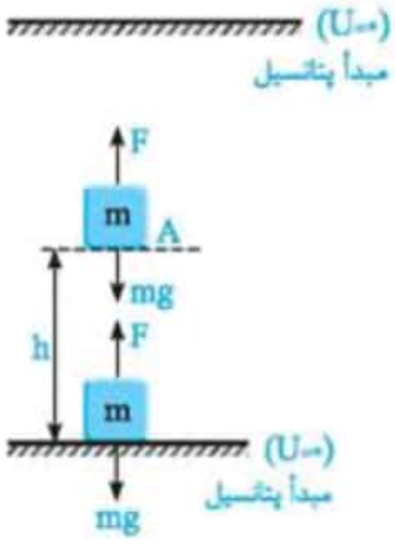
۳ ۱۹۱ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم فقط به تغییرات ارتفاع آن بستگی دارد ($\Delta U = mg\Delta h$). از آن‌جایی که در هر دو حالت جابه‌جایی قائم جسم یکسان است، بنابراین تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم در هر دو حالت با هم برابر است.

۲ ۱۹۲ نکته تغییر انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم برابر با قرینهٔ کار نیروی وزن جسم است ($\Delta U = -W_{mg}$).

با توجه به این‌که در این جابه‌جایی کار نیروی جاذبهٔ زمین مقداری منفی است، می‌توان نتیجه گرفت که جسم در خلاف جهت نیروی جاذبه (یعنی به سمت بالا) حرکت کرده است. با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$U_B - U_A = 30J \xrightarrow{U_B = 50J} U_A = 20J$$



۲ ۱۹۳ جسم تحت تأثیر نیروی F، با شتاب ثابت $\frac{g}{4}$ به سمت بالا حرکت می‌کند. با استفاده از قانون دوم نیوتون اندازهٔ نیروی F به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$F - mg = ma \xrightarrow{a = \frac{g}{4}} F = \frac{5}{4}mg$$

جسم به‌اندازهٔ h در جهت نیروی F جابه‌جا شده است ($\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1$)، بنابراین کار انجام شده توسط نیروی F برابر است با:

$$W_F = Fh\cos\alpha = \frac{5}{4}mgh$$

از طرفی انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع h برابر است با $U_A = mgh$، بنابراین داریم:

$$\frac{W_F}{U_A} = \frac{\frac{5}{4}mgh}{mgh} = \frac{5}{4}$$

۱۹۴ ۱ انرژی ذخیره شده در فنر از نوع پتانسیل کشسانی است، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۹۵ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ — **قضیهٔ کار و انرژی جنبشی** — (تست‌های ۱۹۵ تا ۲۱۶)

طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، **مجموع کار نیروهای وارد بر هر جسم در یک جابه‌جایی معین، برابر تغییر انرژی جنبشی جسم در آن جابه‌جایی است.** به عبارت دیگر، هرگاه در طی حرکت تندی جسم از v_1 به v_2 برسد، در این‌صورت کار برایند نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر است با:

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

نکات مهم و کاربردی

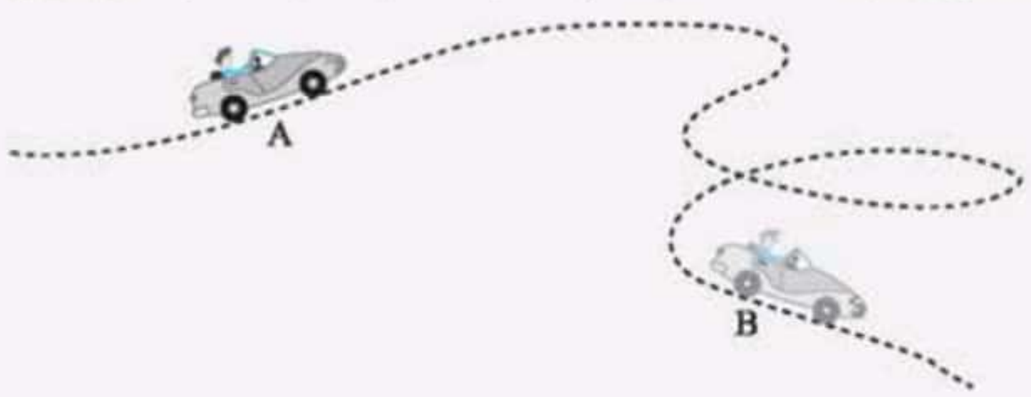
۱ با توجه به رابطهٔ فوق، سه حالت برای علامت کار برایند نیروهای وارد بر یک جسم وجود دارد:

۱) $|v_2| > |v_1| \rightarrow K_2 > K_1 \rightarrow W_t = K_2 - K_1 > 0$: حرکت تند شونده می‌تواند باشد

۲) $|v_2| < |v_1| \rightarrow K_2 < K_1 \rightarrow W_t = K_2 - K_1 < 0$: حرکت کند شونده می‌تواند باشد

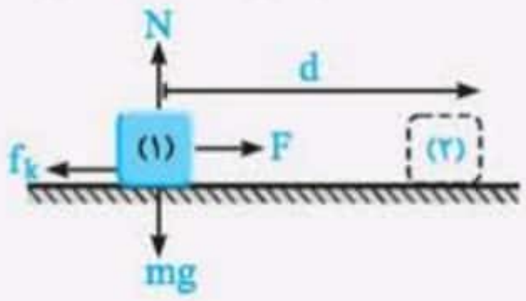
۳) $v_2 = v_1 \rightarrow K_2 = K_1 \rightarrow W_t = K_2 - K_1 = 0$: حرکت یکنواخت می‌تواند باشد

۲ در قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، مسیر حرکت اهمیت نداشته و فقط تندی جسم در ابتدا و انتهای مسیر اهمیت دارد. به طور مثال در شکل روبه‌رو کار کل انجام شده در طی مسیر AB مستقل از مسیر حرکت بوده و برابر است با:



$$W_t = K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

۳ هر یک از نیروهای وارد بر یک جسم که بتواند کار انجام دهد، می‌تواند انرژی جنبشی یک جسم را تغییر دهد. حال اگر کار نیرو مثبت باشد، انرژی جنبشی جسم را افزایش می‌دهد و اگر کار آن منفی باشد، انرژی جنبشی جسم را کاهش می‌دهد.



$$\begin{cases} W_F = Fd\cos 0^\circ > 0 \\ W_N = W_{mg} = (mg)d\cos 90^\circ = 0 \\ W_{f_k} = f_k d\cos 180^\circ < 0 \end{cases}$$

قضیهٔ کار و انرژی جنبشی : $W_t = W_N + W_{mg} + W_F + W_{f_k} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$

نیروهای N و mg ⇐ انرژی جنبشی را تغییر نمی‌دهند $(W_N = W_{mg} = 0)$. نیروی F ⇐ انرژی جنبشی را افزایش می‌دهد $(W_F > 0)$.

نیروی f_k ⇐ انرژی جنبشی را کاهش می‌دهد $(W_{f_k} < 0)$.

تمرین ۱ **اتومبیلی به جرم ۲ تن در یک جادهٔ شیب‌دار که با سطح افق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد، رو به بالا در حرکت است. اگر تندی حرکت اتومبیل در مدت ۲۰ ثانیه از $2m/s$ به $12m/s$ برسد، کار برایند نیروهای وارد بر اتومبیل در این بازهٔ زمانی چند کیلوژول است؟** (تجربی خارج ۸۷)

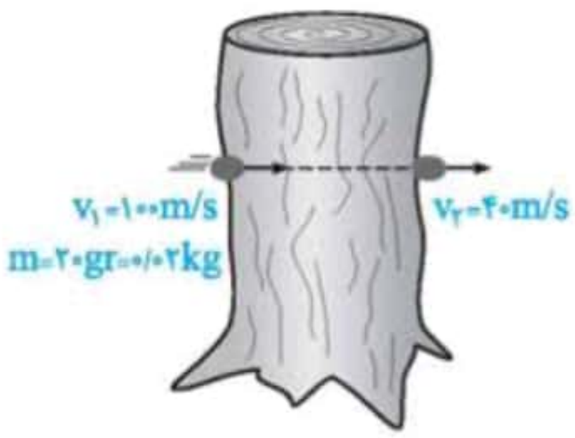
۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۸ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۱۸

پاسخ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، می‌دانیم که کار برایند نیروهای وارد بر اتومبیل، برابر اختلاف انرژی جنبشی آن در ابتدا و انتهای حرکت است و داریم:

$$m = 2ton = 2000kg \;,\; v_1 = 2m/s \;,\; v_2 = 12m/s \Rightarrow W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \times 2000 \times (12^2 - 2^2) = 140000J = 140kJ$$ (گزینهٔ ۱)

با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، تغییر انرژی جنبشی جسم در یک مدت معین، برابر کار برایند نیروهای وارد بر آن، در آن مدت زمان است.

۱۹۶ ۴ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، برایند نیروهای وارد بر گلوله، برابر اختلاف انرژی جنبشی گلوله می‌باشد و داریم:



$$v_2 = 144km/h = \frac{144}{3/6}m/s = 40m/s$$

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 0/02 \times (40^2 - 100^2) = -84J$$

توجه در مدت زمان عبور گلوله، نیروهای وارد بر آن در خلاف جهت حرکت به گلوله وارد می‌شوند، منفی بودن عدد به‌دست آمده نیز به همین دلیل است.

gajmarket.com

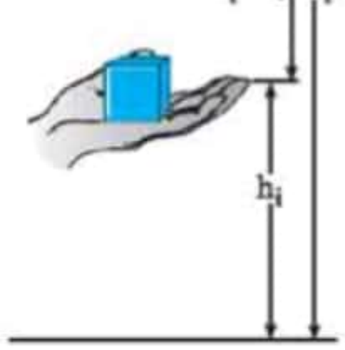
۱۹۷ ۱ **گام اول:** با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی، کار برایند نیروهای وارد بر گلوله برابر تغییر انرژی جنبشی آن است. بنابراین برای محاسبهٔ کار انجام شده بر روی گلوله از طرف چوب و آجر می‌توان نوشت:

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \begin{cases} \text{در چوب}: W_{t_{چوب}} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{3v}{4}\right)^2 - v^2\right) = -\frac{7}{32}mv^2 \\ \text{در آجر}: W_{t_{آجر}} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{v}{8}\right)^2 - \left(\frac{3v}{4}\right)^2\right) = -\frac{35}{128}mv^2 \end{cases}$$

گام دوم: چوب و آجر نیروهایی در خلاف جهت حرکت گلوله بر آن وارد می‌کنند. با توجه به تعریف کار، می‌توان نوشت:

$$W = \bar{F}d\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -\bar{F}d \Rightarrow \frac{W_{چوب}}{W_{آجر}} = \frac{\bar{F}_{چوب}}{\bar{F}_{آجر}} \times \frac{2d}{d} \Rightarrow \frac{-\frac{7}{32}mv^2}{-\frac{35}{128}mv^2} = \frac{\bar{F}_{چوب}}{\bar{F}_{آجر}} \times 2 \Rightarrow \frac{\bar{F}_{چوب}}{\bar{F}_{آجر}} = \frac{2}{5}$$

۱۹۸ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال بسیار مفهومی و مهم، به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:



۱) در این جابه‌جایی فقط دو نیروی دست و وزن جسم بر جسم وارد می‌شود. بنابراین با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$W_{برایند} = \Delta K \Rightarrow W_{وزن} + W_{دست} = \Delta K$$ (گزینهٔ ۱ نادرست است.)

۲) از آن‌جاکه جسم با تندی ثابت جابه‌جا شده است، انرژی جنبشی آن ثابت مانده و تغییر انرژی جنبشی آن صفر است ($\Delta K = 0$).

$$W_{وزن} + W_{دست} = 0 \Rightarrow W_{دست} = -W_{وزن}$$

۳) از طرفی با توجه به جابه‌جایی جسم به اندازهٔ ($\Delta h = h_f - h_i$) به سمت بالا، کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{وزن} = -mg\Delta h$$

بنابراین، داریم:

$$W_{وزن} + W_{دست} = 0 \Rightarrow W_{دست} = -W_{وزن} = mg\Delta h = mg(h_f - h_i)$$

نگاه دیگر: با توجه به این‌که نیروی وارد شده از طرف دست بر جسم به سمت بالا و جابه‌جایی جسم نیز در همین جهت است ($\alpha = 0$)، بنابراین باید کار نیروی دست مثبت باشد.

$$h_f > h_i \Rightarrow W_{دست} = mg(h_f - h_i)$$

۴) می‌دانیم که تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم، قرینهٔ کار نیروی وزن می‌باشد و داریم:

$$\begin{cases} W_{وزن} = -\Delta U \\ W_{دست} = -W_{وزن} \end{cases} \Rightarrow W_{دست} = -(-\Delta U) \Rightarrow W_{دست} = \Delta U$$ (کار نیروی دست برابر تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است.)

در مجموع با توجه به این توضیحات، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۹۹ ۳

تذکر

با توجه به رابطهٔ $K = \frac{1}{2}mv^2$، انرژی جنبشی جسم به اندازهٔ سرعت (تندی) بستگی داشته و مستقل از جهت آن است.

در این مسأله اندازهٔ سرعت (تندی) جسم دو برابر شده است، در نتیجه انرژی جنبشی آن ۴ برابر شده و به $K_2 = 400\,J$ می‌رسد. در ادامه با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

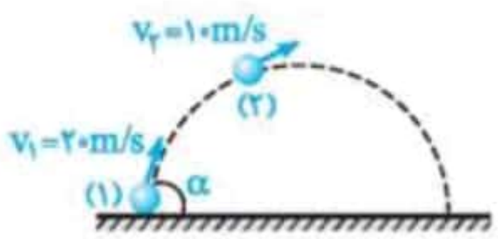
$$W_t = K_2 - K_1 = 400 - 100 = 300\,J$$: کار برایند نیروها

۲۰۰ ۱ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کافی است تا اندازهٔ سرعت (تندی) جسم را در دو لحظهٔ $t = 2s$ و $t = 4s$ به‌دست آوریم (دو ثانیه دوم حرکت، یعنی $2s \le t \le 4s$):

$$v = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 2 + 3 = 5\,m/s \\ t_2 = 4s \rightarrow v_2 = 2\sin(\pi) + 3 = 0 + 3 = 3\,m/s \end{cases}$$

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_R = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (3^2 - 5^2) = -4\,J$$

۲۰۱ ۴ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر تغییر انرژی جنبشی جسم می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$W_t = K_2 - K_1 \,,\, K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100\,J \,,\, K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 20^2 = 400\,J$$

$$W_t = K_2 - K_1 = 100 - 400 = -300\,J$$

۲۰۲ برای محاسبهٔ کار برایند نیروهای وارد بر آسانسور، از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا اندازهٔ سرعت (تندی) آسانسور را در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی داده شده (با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان) به‌دست می‌آوریم:

$$\text{معادلهٔ سرعت ـ زمان}: v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=0]{a=0/2\,m/s^2} v = 0/2t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \\ t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = 1m/s \end{cases}$$

$$\text{کار برایند نیروها}: W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 400 \times (1^2 - 0) = 200J$$

۲۰۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در صورتی‌که بردار نیرو همواره بر بردار سرعت عمود باشد، آن‌گاه بر مسیر حرکت نیز همواره عمود خواهد بود $(F \perp d \xrightarrow{\alpha=90^\circ} \cos\alpha = 0)$ و کار انجام شده توسط نیرو برابر صفر است.

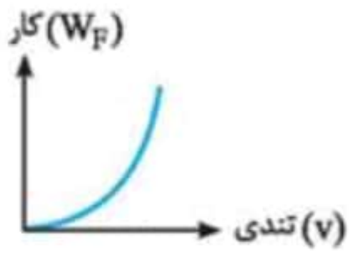
۲) با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، در صورتی‌که کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر صفر باشد، آن‌گاه انرژی جنبشی جسم در ابتدا و انتهای مسیر یکسان است.

$$W_t = K_2 - K_1 \xrightarrow{W_R=0} K_2 - K_1 = 0 \Rightarrow K_2 = K_1$$

۳) با توجه به رابطهٔ $K = \frac{1}{2}mv^2$، با ثابت ماندن انرژی جنبشی، اندازهٔ سرعت (تندی) جسم نیز ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۳) صحیح است.

دقت: توجه داشته باشید که جهت سرعت متحرک می‌تواند تغییر کند (چرا؟).

۲۰۴



$$W_F = K_2 - K_1 \xrightarrow{K_1=0} W_F = K_2 = \frac{1}{2}mv^2$$ (نمودار به‌صورت سهمی است.)

۲۰۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در مدتی که میخ در چوب فرو می‌رود از طرف چوب نیرویی در خلاف جهت حرکت میخ بر آن وارد می‌شود. این نیرو مقدار ثابتی ندارد، بنابراین متوسط آن را $\overline{F}$ می‌نامیم.

۲) با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار برایند نیروهای وارد بر میخ، برابر اختلاف انرژی جنبشی آن است:

$$|W_{\overline{F}}| = |\cancel{K_2}^{\,0} - K_1| \Rightarrow |W_{\overline{F}}| = K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 0/01 \times 4^2 = 0/08J$$

۳) از طرفی با توجه به تعریف کار می‌توان نوشت:

$$|W_{\overline{F}}| = \overline{F}d \xrightarrow{d=1cm=0/01m\ ,\ |W_{\overline{F}}|=0/08J} \text{متوسط نیرو}: \overline{F} = \frac{0/08}{0/01} = 8N$$

۲۰۶ کار نیروی وارد شده از طرف ورزشکار بر روی توپ برابر است با:

$$W_F = Fd\cos\alpha = 200 \times 2/5 \times \underbrace{\cos 0}_{1} = 500J$$

با توجه به این‌که تنها نیرویی که بر روی توپ کار انجام می‌دهد، نیروی وارد شده از طرف ورزشکار در راستای حرکت توپ است، می‌توان نوشت:

$$W_t = W_F = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[m=0/5kg]{v_1=0} 500 = \frac{1}{2} \times 0/5 \times v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = 2000 \Rightarrow v_2 = 20\sqrt{5}\,m/s$$

تذکر دقت کنیم علاوه بر نیرویی که ورزشکار در راستای افق بر توپ وارد می‌کند، دو نیروی وزن جسم $(W_{\text{وزن}})$ و نیروی وارد شده از طرف ورزشکار در راستای قائم که مانع از افتادن توپ شود $(W_{F'})$، نیز بر توپ وارد می‌شود. اما چون هر دوی این نیروها بر راستای حرکت عمود می‌باشند، کار آن‌ها صفر می‌باشد.

$$\text{کار برایند نیروها}: W_t = W_F + \cancel{W_{F'}}^{\,0} + \cancel{W_{\text{وزن}}}^{\,0} \Rightarrow W_t = W_F$$

۲۰۷ برای حل این سؤال، باید دقت شود که کار نیروی اصطکاک منفی و کار نیروی F مثبت است. با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$|W_F| = 3|W_{f_k}| \xrightarrow[W_{f_k}<0]{W_F>0} W_F = -3W_{f_k}$$

$$\text{قضیه کار و انرژی جنبشی}: W_t = \Delta K = K_2 - \cancel{K_1}^{\,0} \Rightarrow W_F + W_{f_k} = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{W_F=-3W_{f_k}} -3W_{f_k} + W_{f_k} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow -2W_{f_k} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow -2W_{f_k} = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100 \Rightarrow W_{f_k} = -50J$$

gajmarket.com

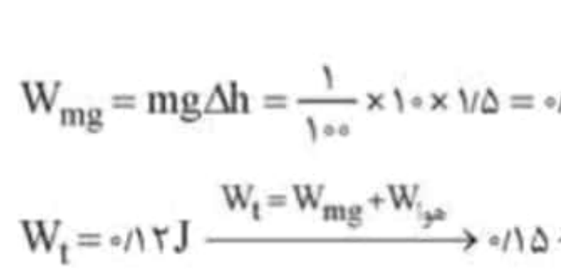
۱ ۲۰۸ انرژی جنبشی جسم قبل از اعمال نیرو برابر است با:

$$m = ۸kg \ , \ v_۱ = ۱۰m/s \Rightarrow K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۰^۲ = ۴۰۰J$$

از آن‌جایی که جسم بر روی خط راست حرکت می‌کند، نیروی F باید در جهت حرکت جسم بر آن وارد شود تا انرژی جنبشی آن از $۴۰۰J$ به $۱۲۰۰J$ افزایش یابد.
با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی مقدار کار انجام شده در این حالت برابر است با:

$$\text{کار نیروی } F : W_F = K_۲ - K_۱ = ۱۲۰۰ - ۴۰۰ = ۸۰۰J$$

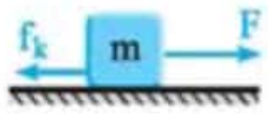
از طرفی با توجه به تعریف کار، می‌توان نوشت:



$$W_F = Fd\cos\alpha \xrightarrow[d=۸m]{\cos\alpha=۱} ۸۰۰ = F \times ۸ \Rightarrow F = ۱۰۰N$$

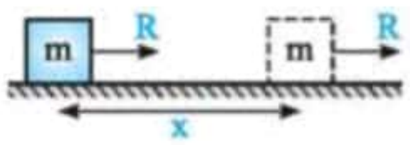
* به نظر شما در صورتی‌که نیروی F در خلاف جهت حرکت اولیه وارد شود، پس از طی ۸ متر انرژی جنبشی آن به چه‌قدر می‌رسد؟

۳ ۲۰۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم (دقت شود که این جسم در راستای قائم تعادل دارد و برایند نیروها در راستای افق مدنظر است):



برایند نیروها: $R = F - f_k$

از طرفی با توجه به این‌که جسم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند $(K_۱ = ۰)$، انرژی جنبشی جسم پس از تغییر مکان (x) برابر است با کار انجام شده توسط برایند نیروهای وارد برجسم.



$$K_۲ - \cancel{K_۱}^{\,۰} = R\,x\cos\alpha \xrightarrow[\alpha=۰]{\cos\alpha=۱} K_۲ = (F - f_k)x \Rightarrow K_۲ < Fx$$

تذکر

در حرکت تندشونده بر روی خط راست، برایند نیروهای وارد برجسم، در راستای حرکت جسم می‌باشند $(\cos\alpha = ۱)$.

۱ ۲۱۰ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K = K_۲ - K_۱ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

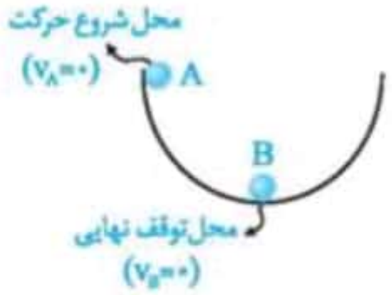
$$\Rightarrow W_t = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰۰} \times (۷^۲ - ۵^۲) = ۰/۱۲J$$

کار کل انجام شده بر روی گلوله برابر مجموع کار نیروی وزن آن و کار مقاومت هوا است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{mg} = mg\Delta h = \frac{۱}{۱۰۰} \times ۱۰ \times ۱/۵ = ۰/۱۵J$$

$$W_t = ۰/۱۲J \xrightarrow{W_t = W_{mg} + W_{هوا}} ۰/۱۵ + W_{هوا} = ۰/۱۲ \Rightarrow W_{هوا} = -۰/۰۳J$$

۲ ۲۱۱ تندی حرکت جسم در ابتدا و انتهای حرکت صفر است $(\Delta K = ۰ \Leftarrow K_۲ = K_۱ = ۰)$ و از طرفی تنها نیروهای وزن و اصطکاک بر جسم وارد می‌شوند. با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:



$$W_t = \cancel{\Delta K}^{\,۰} \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = ۰ \Rightarrow W_{mg} = -W_{f_k} \Rightarrow \frac{W_{f_k}}{W_{mg}} = -۱$$

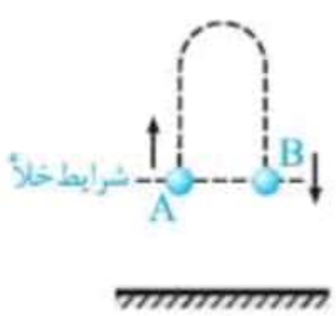
۳ ۲۱۲

نکته

در صورتی‌که بر یک جسم هم‌زمان چند نیرو وارد شود، آن‌گاه به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که کار انجام شده توسط برایند نیروها در یک جابه‌جایی معین، برابر مجموع جبری کارهای انجام شده توسط تک تک نیروها در همان جابه‌جایی است

$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ = \vec{R} \Rightarrow W_R = W_{F_۱} + W_{F_۲}$$

با توجه به نکتهٔ فوق، گزینهٔ (۳) صحیح است، یعنی در صورتی‌که کار برایند نیروهای وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی برابر صفر باشد، آن‌گاه مجموع کار نیروهای وارد شده برجسم نیز در آن جابه‌جایی برابر صفر است.



دقت: در شکل روبه‌رو، کار انجام شده توسط برایند نیروها، یعنی نیروی وزن، بین A و B برابر صفر بوده، ولی برایند نیروهای وارد بر گلوله برابر صفر نمی‌باشد.

* آیا می‌توانید نادرستی دو گزینهٔ (۲) و (۴) را با مثالی نشان دهید؟

۲ ۲۱۳ کار هریک از نیروها را بررسی می‌کنیم:

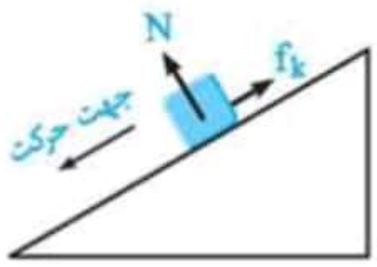
الف) چون جسم در راستای قائم جابه‌جا شده است، بنابراین کار نیروی وزن جسم صفر نیست $(W_{mg} = mg\Delta h)$.

ب) نیروی عکس‌العمل عمودی سطح بر مسیر حرکت عمود است $(\alpha = 90^\circ)$، بنابراین کار آن صفر است.

پ) چون جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند، بنابراین تغییرات انرژی جنبشی آن صفر است. پس طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، کل کار انجام شده بر روی جسم صفر است.

$$W_t = \Delta K \overset{\Delta K = 0}{\Rightarrow} W_t = 0$$

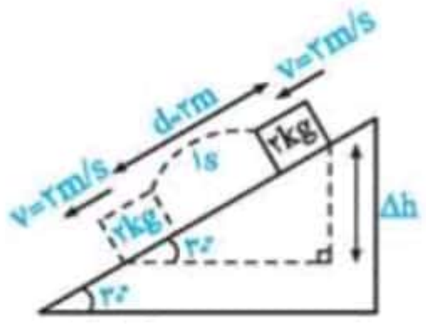
ت و ث) چون جسم با تندی ثابت بر روی سطح شیب‌دار به سمت پایین حرکت می‌کند، بنابراین حتماً بین جسم و سطح شیب‌دار نیروی اصطکاک وجود دارد. از این‌رو کار نیروی اصطکاک برابر صفر نیست.



از طرفی نیروی عکس‌العمل سطح شامل نیروهای اصطکاک و نیروی عکس‌العمل عمودی سطح می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{\text{عکس‌العمل سطح}} = \underbrace{W_N}_{=0} + \underbrace{W_{f_k}}_{\neq 0} \Rightarrow W_{\text{عکس‌العمل سطح}} \neq 0$$

۴ ۲۱۴ جسم در هر ثانیه روی سطح شیب‌دار به اندازهٔ ۲ متر جابه‌جا می‌شود. از آن‌جایی که تندی جسم ثابت است، تغییرات انرژی جنبشی آن برابر صفر بوده و کار نیروی اصطکاک برابر با منفی کار انجام شده توسط نیروی جاذبه است و داریم:



$$W_R = \Delta K = 0 \Rightarrow W_{f_k} + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_{f_k} = -W_{mg}$$

$$W_{mg} = mg\Delta h = 2 \times 10 \times (d \sin 30^\circ) = 2 \times 10 \times 2 \times \frac{1}{2} = 20\,J$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -20\,J \Rightarrow$$ در هر ثانیه ۲۰ ژول گرما تولید می‌شود.

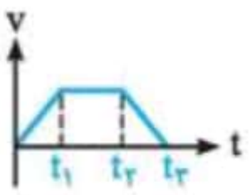
۳ ۲۱۵

نکته

با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی $\left[W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)\right]$، در بازه‌ای که اندازهٔ سرعت متحرک $(|v|)$ افزایش یابد، کار برایند نیروهای وارد بر جسم مثبت و در بازه‌ای که اندازهٔ سرعت متحرک $(|v|)$ کاهش یابد، کار برایند نیروها مقداری منفی است. هم‌چنین درصورتی‌که اندازهٔ سرعت (تندی) جسم ثابت بماند، کار برایند نیروها برابر صفر است.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R} \Rightarrow W_R = W_{F_1} + W_{F_2}$$

در شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان داده شده است، با توجه به توضیحات فوق دربازهٔ (۰ تا t_2) اندازهٔ سرعت (تندی) جسم افزایش یافته و کار برایند نیروها، مقداری مثبت دارد و گزینهٔ (۳) صحیح است.



نگاه دیگر: در بازه‌ای که حرکت متحرک به‌صورت تندشونده انجام می‌شود، کار برایند نیروهای وارد بر آن مثبت و در بازه‌ای که حرکت به‌صورت کندشونده انجام شود، کار برایند نیروهای وارد بر جسم منفی است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 حرکت از نوع تندشونده است و کار برایند نیروها مثبت است.

۲ ۲۱۶ **محاسبهٔ کار نیروی فنر:** همان‌طور که می‌دانیم کار نیروی کشسانی فنر برابر منفی تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی آن است.

$$W_{\text{فنر}} = -\Delta U_{\text{کشسانی}} = -(U_2 - U_1)$$

انرژی پتانسیل کشسانی اولیهٔ فنر برابر صفر است (چون فنر تغییر طولی ندارد).

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 15J \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -(15 - 0) = -15J$$

دقت: چون در مدت زمان تماس جسم با فنر، فنر نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌کند تا مانع از فشردگی خود شود، بنابراین $(\alpha = 180^\circ)$ بوده و کار نیروی فنر منفی است.

محاسبهٔ کار نیروی اصطکاک: با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی و با توجه به این‌که جسم در انتهای حرکت ساکن است، می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1 = 0 - 20 = -20J$$: کار برایند نیروها

از طرفی نیروهای وارد بر جسم، نیروهای فنر، اصطکاک، وزن و عمودی سطح می‌باشد. بنابراین داریم:

$$W_t = W_{\text{فنر}} + W_{\text{اصطکاک}} + W_{\text{وزن}} + W_{\text{عمودی سطح}} = -20J$$

کار نیروی وزن و نیروی عمودی سطح در این جابه‌جایی برابر صفر است (چرا؟) و از طرفی $W_{\text{فنر}} = -15J$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\underbrace{W_{\text{فنر}}}_{-15J} + W_{\text{اصطکاک}} + \cancel{W_{\text{وزن}}}^{0} + \cancel{W_{\text{عمودی سطح}}}^{0} = -20J \Rightarrow -15 + W_{\text{اصطکاک}} = -20 \Rightarrow W_{\text{اصطکاک}} = -5J$$

gajmarket.com

۲۱۷ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ — **پایستگی انرژی مکانیکی** — (تست‌های ۲۱۷ تا ۲۵۲)

انرژی مکانیکی: مجموع مقادیر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک جسم را انرژی مکانیکی آن جسم می‌نامیم $(E = K + U)$. در این رابطه K برابر $\frac{۱}{۲}mv^۲$ و U برابر $U_{فنر} + U_{گرانشی}$ (در صورت وجود فنر در مجموعه) است.

اصل پایستگی انرژی مکانیکی: هرگاه در مسیر حرکت یک جسم، نیروهای تلف‌کنندهٔ انرژی مانند نیروی مقاومت هوا و اصطکاک (که به آن‌ها نیروهای ناپایستار می‌گویند)، وجود نداشته باشند، آن‌گاه انرژی مکانیکی همواره ثابت می‌ماند و می‌توان نوشت:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$$

نکات مهم و کاربردی

۱ نیروهای تلف‌کنندهٔ انرژی مانند مقاومت هوا و اصطکاک (نیروهای ناپایستار)، انرژی مکانیکی مجموعه را کاهش می‌دهند.

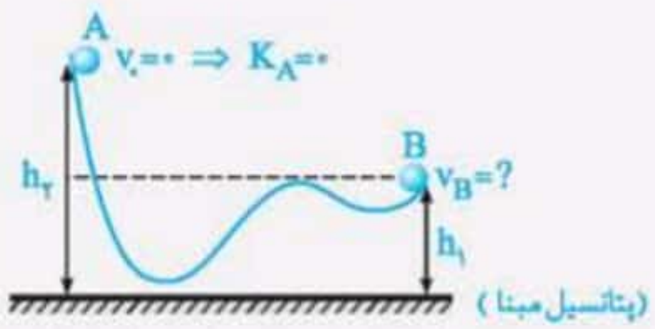
۲ نیروهایی مانند نیروی وزن و نیروی فنر (نیروهای پایستار)، انرژی مکانیکی را تغییر نمی‌دهند. شایان ذکر است که کار انجام شده توسط این نیروها به مسیر حرکت بستگی نداشته و این کار می‌تواند در مجموعه به‌صورت انرژی ذخیره شود.

۳ هنگامی که انرژی مکانیکی یک جسم ثابت بماند، اگر به‌طور مثال انرژی جنبشی جسم ۲۰ ژول کاهش یابد، در این صورت انرژی پتانسیل آن ۲۰J افزایش می‌یابد، یعنی ΔK و ΔU با یک‌دیگر هم‌اندازه و مختلف‌العلامت هستند.

بیان ریاضی: $E = K + U \xrightarrow{\text{گرفتن } \Delta} \underbrace{\Delta E}_{\text{صفر}} = \Delta K + \Delta U \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$ یا $|\Delta K| = |\Delta U|$

(انرژی مکانیکی ثابت است)

۴ فرض کنید که یک بسته از حالت سکون و بدون حضور نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا، از A رها شده و به B رسیده است. تندی آن در B برابر است با:



$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \Rightarrow mgh_۲ + ۰ = mgh_۱ + \frac{۱}{۲}mv_B^۲$$

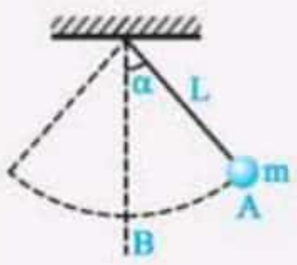
$$v_B^۲ = ۲g(h_۲ - h_۱) \Rightarrow v_B = \sqrt{۲g(h_۲ - h_۱)}$$

به طور کلی می‌توان گفت اگر بسته از حالت سکون در غیاب نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا رها شده و به اندازهٔ Δy در راستای قائم سقوط کند، تندی آن به $\sqrt{۲g\Delta y}$ می‌رسد.

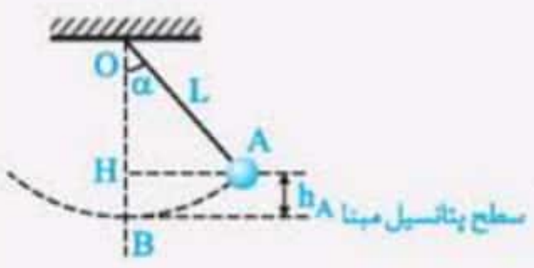
۵ اگر اندازهٔ تندی اولیهٔ بسته برابر $v_۰$ باشد و بسته به اندازهٔ Δy به‌سمت بالا برود، تندی آن کاهش یافته و به $\sqrt{v_۰^۲ - ۲g\Delta y}$ می‌رسد و اگر بسته به اندازهٔ Δy به‌سمت پایین برود، تندی آن افزایش یافته و به $\sqrt{v_۰^۲ + ۲g\Delta y}$ می‌رسد.

۶ توجه کنید برای استفاده از رابطهٔ مربوط به اصل پایستگی انرژی مکانیکی $(E_۱ = E_۲)$، همواره در شروع حل، یک سطح پتانسیل مبنا انتخاب کنید.

تمرین ۱ **در شکل زیر گلوله‌ای با جرم m، به ریسمانی با طول L متصل است. اگر گلوله از نقطهٔ A رها شود، در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر گلوله، تندی آن چه‌قدر است؟** (از اصطکاک و مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)



پاسخ برای به‌دست آوردن تندی گلوله در B، از اصل پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم و با تعیین سطح پتانسیل مبنا داریم:



$$\cos\alpha = \frac{OH}{L} \Rightarrow OH = L\cos\alpha$$

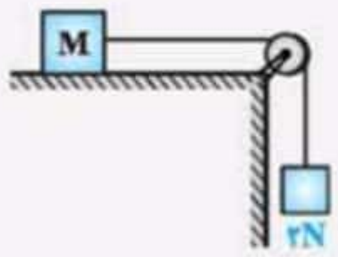
$$BH = OB - OH = L - L\cos\alpha$$

$$h_A = BH = L(۱ - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow (۰ + mgh_A) = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ + ۰ \Rightarrow v_B = \sqrt{۲gh_A} = \sqrt{۲gL(۱ - \cos\alpha)}$$ در غیاب نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا، انرژی مکانیکی ثابت است.

*** روش سریع‌تر:**

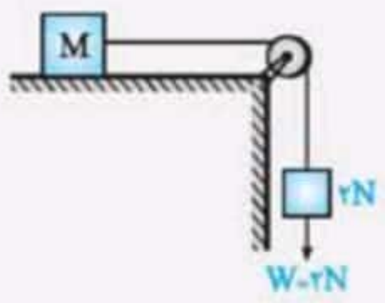
$$v = \sqrt{\underbrace{۲g\Delta y}_{\Delta y = h_A}} = \sqrt{۲g \times L(۱ - \cos\alpha)}$$



تمرین۲ در شکل روبه‌رو اصطکاک ناچیز است و دستگاه از حال سکون به حرکت درمی‌آید. پس از چند متر جابه‌جایی، انرژی جنبشی دستگاه به یک ژول می‌رسد؟ (M.K.A)

۱) ۰/۵ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) M باید معلوم باشد.

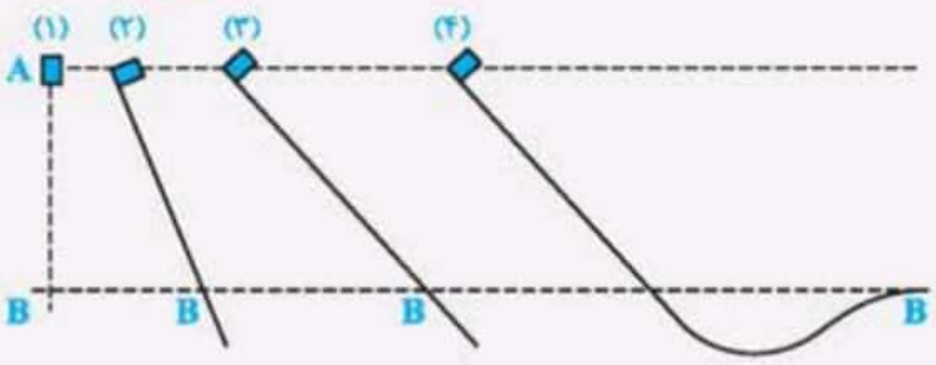


پاسخ همان‌طور که می‌دانیم اندازهٔ تغییرات انرژی جنبشی سیستم، برابر اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی آن می‌باشد. از طرفی در این مسأله جسم M حرکت عمودی نداشته و تغییرات انرژی پتانسیل، تنها مربوط به جسم دو نیوتونی می‌باشد و داریم:

$$|\Delta K| = |\Delta U| \Rightarrow K_2 - \cancel{K_1}^{\circ} = \left|\overbrace{(mg)h}^{W}\right| \xrightarrow{K_2 = 1J} 1 = 2 \times h \Rightarrow h = 0/5m$$ (گزینهٔ ۱)

روشی دیگر: با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار برایند نیروهای وارد بر مجموعه، برابر با تغییرات انرژی جنبشی آن است. سیستم از حالت سکون ($K_1 = 0$) شروع به حرکت کرده و پس از جابه‌جایی h، انرژی آن به $K_2 = 1J$ می‌رسد. از طرفی تنها نیرویی که در راستای حرکت بر مجموعه وارد می‌شود، نیروی وزن جسم آویزان است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_t = K_2 - \cancel{K_1}^{\circ} \Rightarrow W \times h \times \cos 0^\circ = 1 - 0 \Rightarrow 2 \times h \times 1 = 1 \Rightarrow h = 0/5m$$



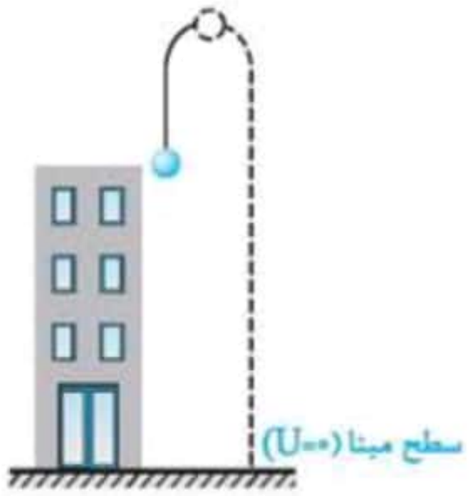
تمرین۳ در شکل روبه‌رو، چهار وضعیت متفاوت برای حرکت یک جسم نشان داده شده است. در حالت شماره (۱)، جسم از حالت سکون رها شده و در سه حالت دیگر، جسم از حال سکون روی مسیرهایی بدون اصطکاک رو به پایین حرکت می‌کند. تندی جسم را در نقطهٔ B در چهار وضعیت با هم مقایسه کنید.

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، باید توجه داشته باشیم که در هیچ یک از حالت‌ها اصطکاک یا مقاومت هوا وجود ندارد، پس اصل پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است و داریم:

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

حال اگر نقطهٔ B را مبدأ پتانسیل در نظر بگیریم، با توجه به رابطهٔ $U = mgh$، در می‌یابیم که انرژی پتانسیل گرانشی جسم در هر چهار وضعیت در نقطهٔ A با هم برابر است. از طرفی در هر چهار وضعیت، جسم از حال سکون رها شده است، پس انرژی جنبشی جسم در هر چهار وضعیت در نقطهٔ A برابر صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow[K_A=0]{U_B=0} U_A = K_B \xrightarrow{U_{A_1}=U_{A_2}=U_{A_3}=U_{A_4}}$$ انرژی جنبشی و در نتیجه تندی جسم در هر چهار وضعیت در نقطهٔ B یکسان است.



در این مسأله از آن‌جایی که از مقاومت هوا (نیروی ناپایستار) صرف‌نظر شده است، بنابراین انرژی مکانیکی گلوله ثابت می‌ماند.

از طرفی با افزایش ارتفاع گلوله از سطح زمین، انرژی پتانسیل گرانشی آن افزایش می‌یابد ($\uparrow U = mgh \uparrow$).

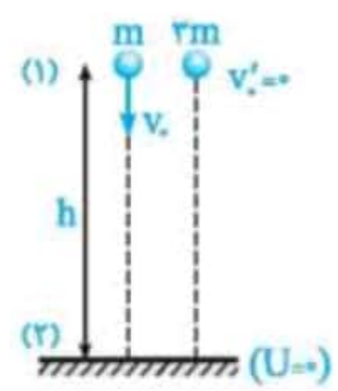
بنابراین انرژی جنبشی گلوله کاهش می‌یابد تا انرژی مکانیکی آن ثابت بماند.

$$\overset{\text{ثابت}}{E} = K + U \uparrow \Rightarrow K$$ کاهش می‌یابد.

۱ ۲۱۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در صورتی‌که سطح زمین را مبدأ پتانسیل در نظر بگیریم ($U_2 = U'_2 = 0$)، انرژی مکانیکی هر دو گلوله در سطح زمین به‌صورت انرژی جنبشی بوده و با توجه به‌صورت سؤال مقدار آن برابر است، بنابراین داریم:

$$K'_2 = K_2 \Rightarrow E'_2 = E_2$$



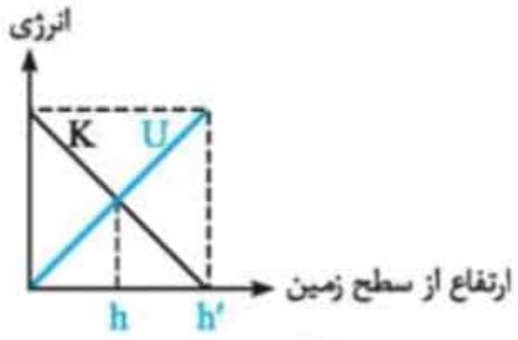
۲) انرژی مکانیکی دو گلوله در هنگام برخورد به زمین یکسان است، بنابراین با توجه به قانون پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی آن‌ها در هنگام پرتاب نیز یکسان است و داریم:

$$E'_1 = E_1 \Rightarrow U'_1 + \cancel{K'_1}^{\circ} = U_1 + K_1 \Rightarrow (3m)gh + 0 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgh \Rightarrow v_0^2 = 4gh \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{gh}$$

gajmarket.com

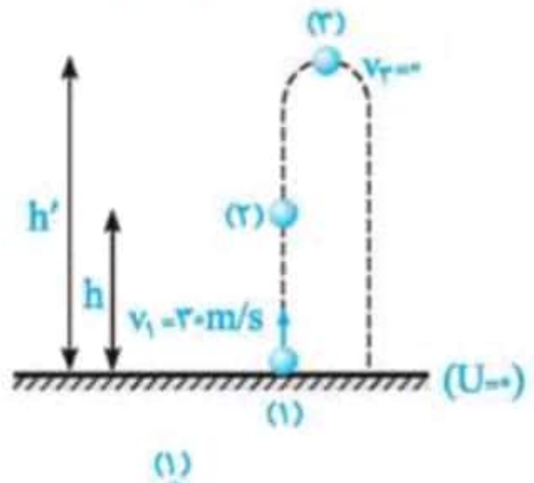
۳ ۲۱۹ با توجه به نمودار داده شده، در محل h، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل گرانشی گلوله با هم برابر شده است ($K = U$). بنابراین می‌توان نوشت:



$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$$

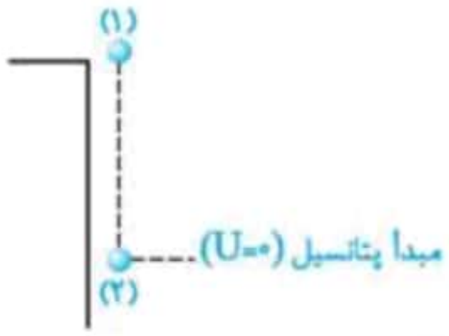
$$\xrightarrow{K_۲ = U_۲} K_۱ = U_۲ + U_۲ = ۲U_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = ۲mgh \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۳۰^۲ = ۲ \times ۱۰ \times h \Rightarrow h = ۲۲/۵m$$

از طرفی در ارتفاع h'، انرژی جنبشی جسم صفر شده و فقط انرژی پتانسیل گرانشی داریم (ارتفاع اوج گلوله). بنابراین می‌توان نوشت:



$$E_۱ = E_۳ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۳ + U_۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = mgh' \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۳۰^۲ = ۱۰h' \Rightarrow h' = ۴۵m$$

۴ ۲۲۰ اگر محل پایین گلوله را مبدأ پتانسیل در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:



پایستگی انرژی مکانیکی: $E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲$

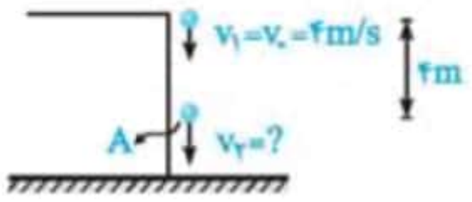
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴^۲ + ۱۰ \times ۴ = \frac{۱}{۲}v_۲^۲$$

$$\Rightarrow v_۲^۲ = ۹۶ \Rightarrow v = \sqrt{۹۶}\,m/s$$

اکنون با توجه به رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ در مقایسهٔ انرژی جنبشی اولیهٔ متحرک و انرژی جنبشی آن در نقطهٔ A، داریم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow \frac{K_۲}{K_۰} = \frac{v_۲^۲}{v_۰^۲} = \frac{(\sqrt{۹۶})^۲}{(۴)^۲} = \frac{۹۶}{۱۶} = ۶ \Rightarrow K_۲ = ۶K_۰$$

دید دیگر: با توجه به شکل مقابل، تندی گلوله بعد از ۴ متر پایین آمدن برابر است با:



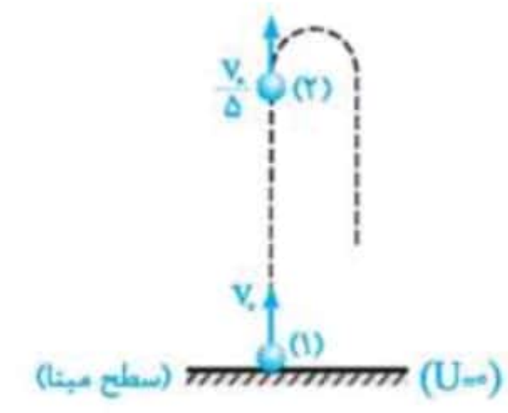
$$v_۱ = v_۰ = ۴m/s \;,\; a = -g = -۱۰m/s^۲ \;,\; \Delta y = -۴m \;,\; v_۲ = ?$$

رابطهٔ مستقل از زمان: $v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲ \times a \times \Delta y$

$$v_۲^۲ - (۴)^۲ = ۲ \times (-۱۰) \times (-۴) \Rightarrow |v_۲| = \sqrt{۹۶}\,m/s$$

۱ ۲۲۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر دقت کنید:

۱) در صورتی‌که مبدأ پتانسیل گرانشی را سطح زمین درنظر بگیریم، در لحظهٔ پرتاب تمام انرژی مکانیکی گلوله به‌صورت انرژی جنبشی بوده و برابر است با:



نقطهٔ (۱): $U_۱ = ۰ \Rightarrow E = K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲$

۲) در لحظه‌ای که تندی گلوله به $v_۲ = \frac{v_۰}{۵}$ می‌رسد، انرژی جنبشی آن $\frac{۱}{۲۵}$ مقدار اولیه می‌شود و داریم:

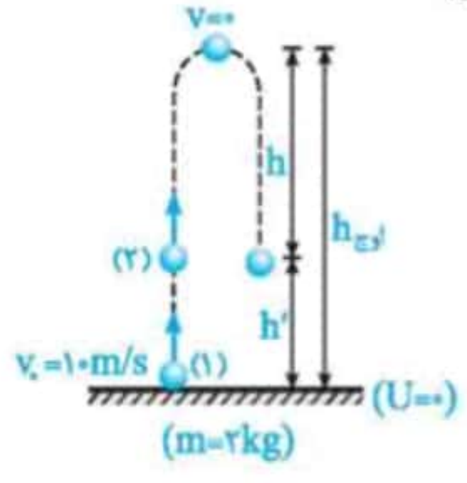
$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow{K \propto v^۲} K_۲ = \frac{۱}{۲۵}K_۱ = \frac{۱}{۲۵}E$$

۳) در نقطهٔ (۲)، $\frac{۱}{۲۵}$ انرژی مکانیکی کل به‌صورت جنبشی و $\frac{۲۴}{۲۵}$ آن به‌صورت انرژی پتانسیل گرانشی می‌باشد:

$$E = U_۲ + K_۲ \xrightarrow{K_۲ = \frac{۱}{۲۵}E} U_۲ = \frac{۲۴}{۲۵}E$$

* این سبک از تست‌ها، از اهمیت بالایی در کنکور سراسری برخوردار است و قابلیت طرح مجدد در کنکور سراسری را دارد.

۴ ۲۲۲ در صورتی‌که مبدأ پتانسیل گرانشی را سطح زمین درنظر بگیریم، انرژی مکانیکی جسم در لحظهٔ پرتاب تماماً به‌صورت انرژی جنبشی بوده و مقدار آن برابر است با:



نقطهٔ (۱): $E = K_۰ = \frac{۱}{۲}m\,v_۰^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۲ = ۱۰۰J$

هنگامی‌که انرژی جنبشی جسم به ۷۵ ژول می‌رسد، انرژی پتانسیل آن برابر ۲۵ ژول می‌باشد، در این حالت ارتفاع جسم از سطح زمین برابر است با:

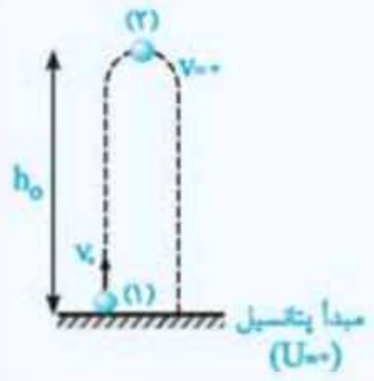
نقطهٔ (۲): $U' = mgh' = ۲۵J \Rightarrow h' = \frac{۲۵}{۲ \times ۱۰} = ۱/۲۵m$

از طرفی بالاترین ارتفاع گلوله در مسیر حرکتش از محل پرتاب برابر $h_o = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{10^2}{2\times10} = 5\,m$ بوده و می‌توان نوشت:

$$h = h_o - h' = 5 - 1/25 = 3/75\,m$$

تذکر

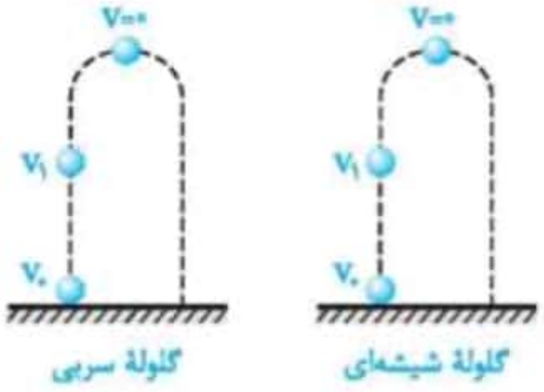
هرگاه گلوله‌ای با تندی اولیهٔ v_o از سطح زمین به سمت بالا پرتاب شود، بالاترین ارتفاعی که گلوله به آن می‌رسد (نقطهٔ اوج) برابر است با:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh_o \Rightarrow \boxed{h_o = \frac{v_o^2}{2g}}$$

۳ ۲۲۳ با توجه به این‌که مقاومت هوا ناچیز بوده و تندی اولیهٔ پرتاب هر دو گلوله از سطح زمین یکسان است، پس ارتفاع اوج برای هر دو گلوله یکسان است $(h_o = \frac{v_o^2}{2g})$.

بنابراین تندی هر دو گلوله در هر نقطهٔ مسیر (از جمله وسط فاصلهٔ بین نقطهٔ پرتاب تا ارتفاع اوج)، یکسان است و با توجه به این‌که جرم گلولهٔ سربی بیشتر از جرم گلولهٔ شیشه‌ای است، انرژی جنبشی گلولهٔ سربی بیشتر است.

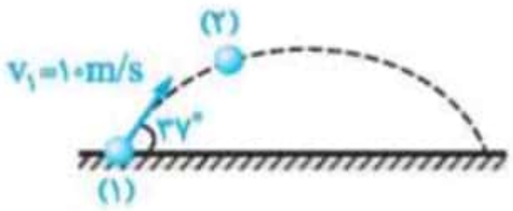


$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow[m_{\text{شیشه‌ای}} < m_{\text{سربی}}]{v_{\text{شیشه‌ای}} = v_{\text{سربی}}} K_{\text{سربی}} > K_{\text{شیشه‌ای}}$$

تذکر

با توجه به رابطهٔ $U = mgh$، انرژی پتانسیل گرانشی برای گلولهٔ سربی نیز بیشتر از گلولهٔ شیشه‌ای است. بنابراین انرژی مکانیکی که برابر مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل است نیز برای گلولهٔ سربی بیشتر است.

۲ ۲۲۴ در صورتی‌که از نیروی مقاومت هوا و اتلاف انرژی صرف‌نظر کنیم، انرژی مکانیکی وزنه در سراسر مسیر برابر انرژی مکانیکی آن در نقطهٔ پرتاب است. از آن‌جایی که سطح زمین مبدأ پتانسیل گرانشی وزنه درنظر گرفته شده است $(U_1 = 0)$، انرژی مکانیکی وزنه، برابر انرژی جنبشی آن در لحظهٔ پرتاب می‌باشد.



انرژی مکانیکی در نقطهٔ (۱) = انرژی مکانیکی در نقطهٔ (۲) : $E_2 = E_1 = U_1 + K_1 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\times0/5\times10^2 = 25\,J$

تذکر

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، نیازی به محاسبهٔ ارتفاع نقطهٔ (۲) یا تندی گلوله در آن نقطه نیست.

۲ ۲۲۵ انرژی جنبشی جسم از صفر به $\frac{1}{2}mv^2$ رسیده است، با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی $(E = K + U)$، انرژی مکانیکی ثابت بوده و همین مقدار از انرژی پتانسیل گرانشی آن کم شده است. دقت کنید که انرژی مکانیکی جسم ثابت می‌ماند و گزینه‌های (۳) و (۴) نمی‌توانند صحیح باشند.

$E = K + U \rightarrow \Delta E = \Delta K + \Delta U \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$ (تغییرات انرژی پتانسیل و جنبشی قرینهٔ یک‌دیگر است.)

۴ ۲۲۶ با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$E = \text{ثابت} \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

از طرفی اختلاف فاصلهٔ بین نقاط A و B و همچنین C و D یکسان و برابر ۱m است. $(\Delta h_{AB} = \Delta h_{CD} = 1\,m)$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{CD} = mg\Delta h = 2\times10\times1 = 20\,J$$

$$\Delta K = -\Delta U \xrightarrow{\Delta U_{AB} = \Delta U_{CD}} \Delta K_{AB} = \Delta K_{CD} \Rightarrow \Delta K = \Delta K' = -\Delta U_{AB} = -20\,J$$

۳ ۲۲۷ با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، اندازهٔ تغییرات انرژی جنبشی برابر اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow |\Delta K| = |\Delta U| = mg\Delta h \xrightarrow{|\Delta K| = 2J} 2 = m\times10\times1 \Rightarrow m = 0/2\,kg = 200\,gr$$

دید دیگر: با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

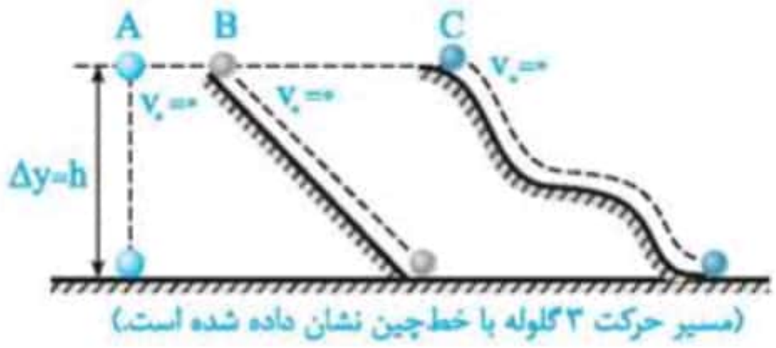
$$\Delta K = W_{\text{کل}} \Rightarrow \Delta K = W_{mg} = mg\Delta h \Rightarrow 2 = m\times10\times1 \Rightarrow m = 0/2\,kg = 200\,gr$$

gajmarket.com

۳ ۲۲۸ به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) هر سه گلوله بر روی مسیرهای بدون اصطکاک از حالت سکون رها شده‌اند و پس از طی جابه‌جایی قائم $\Delta y = h$، به زمین رسیده‌اند. بنابراین تندی هر سه گلوله در هنگام رسیدن به زمین یکسان و برابر $\sqrt{2gh}$ است.

$$v_A = v_B = v_C = \sqrt{2gh}$$



(مسیر حرکت ۳ گلوله با خط‌چین نشان داده شده است.)

۲) گلولهٔ A، مسیرش کوتاه‌تر است، بنابراین زودتر به سطح زمین می‌رسد.

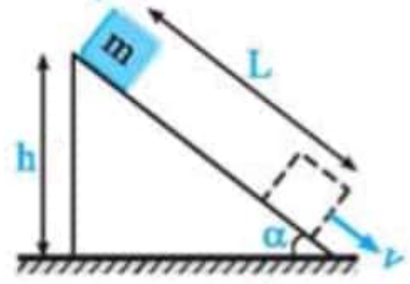
۳) با توجه به رها شدن گلوله‌ها، انرژی مکانیکی در لحظهٔ رها شدن گلوله‌ها برابر است با:

$$E = \cancel{K}^{0} + U = mgh$$

چون ممکن است جرم گلوله‌ها با یک‌دیگر یکسان نباشد، بنابراین انرژی مکانیکی گلوله‌ها ممکن است یکسان نباشد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

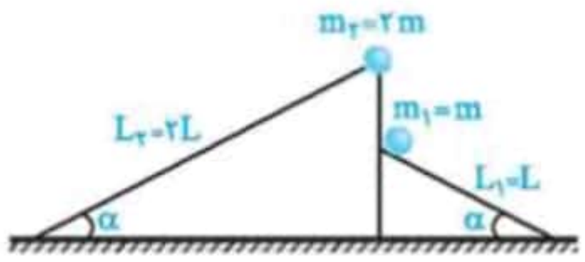
۴) مشابه با استدلال گزینهٔ (۳)، می‌توان گفت گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱ ۲۲۹ تندی اولیهٔ هر دو جسم برابر صفر است. همان‌طور که می‌دانیم، تندی جسم در هنگام رسیدن به سطح زمین، تنها به ارتفاع قائم سطح شیب‌دارِ بدون اصطکاک بستگی داشته ($v = \sqrt{2gh}$) و مستقل از جرم آن است. از طرفی مطابق شکل روبه‌رو، رابطهٔ بین ارتفاع و طول سطح شیب‌دار عبارت است از:



$$\sin\alpha = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L\sin\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2g(L\sin\alpha)}$$

بنابراین در مقایسهٔ تندی دو جسم در پایین سطح شیب‌دار، می‌توان نوشت:



$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{L}{2L}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

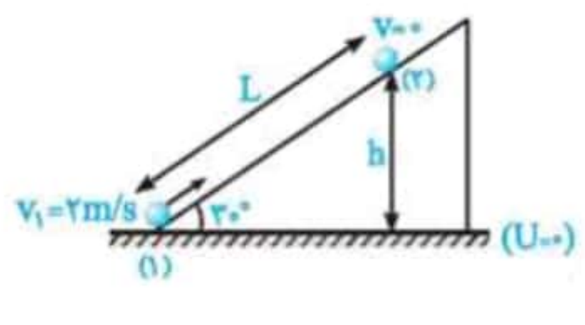
۲ ۲۳۰ در صورتی‌که پایین سطح شیب‌دار را مبدأ پتانسیل گرانشی در نظر بگیریم، انرژی مکانیکی جسم در محل (۱) تماماً به‌صورت جنبشی بوده و داریم:

رابطهٔ(۱): $E_1 = \cancel{U_1}^{0} + K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$

از طرفی هنگامی که جسم به بیشترین فاصله از محل پرتاب خود می‌رسد (لحظهٔ توقف)، تندی آن صفر شده و انرژی مکانیکی آن تماماً به صورت انرژی پتانسیل گرانشی می‌شود:

رابطهٔ(۲): $E_2 = U_2 + \cancel{K_2}^{0} = U_2$

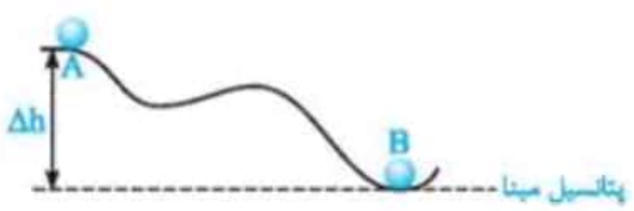
$$(1),(2) \Rightarrow E_2 = E_1 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\times 4\times 2^2 = 8J$$



سؤال در این سؤال، جسم حداکثر چند متر بر روی سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟

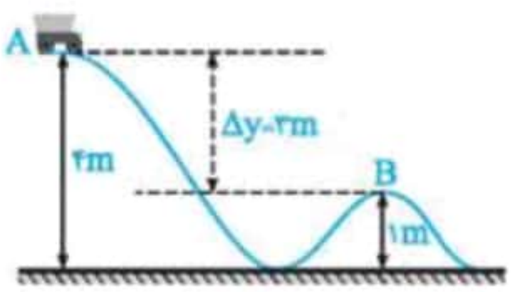
پاسخ ۰/۴m

۲ ۲۳۱ **یادآوری:** اگر جسم در یک سطح بدون اصطکاک Δh متر در راستای قائم به سمت پایین حرکت کند، تندی آن از v_0 به $\sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}$ می‌رسد.



$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}$$

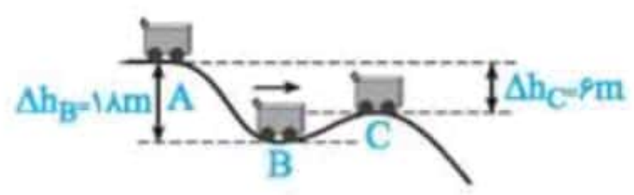
ارتفاع جسم از نقطه A تا B، به اندازهٔ ۳ متر کاهش یافته، در نتیجه تندی آن افزایش یافته و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



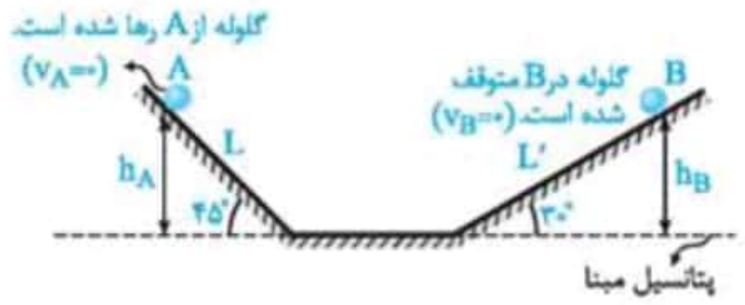
$$\Delta y = h_A - h_B = 4 - 1 = 3m \ , \ v_A = 2m/s$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g\Delta y} = \sqrt{2^2 + 2\times 10\times 3} = \sqrt{64} = 8m/s$$

۲ ۲۳۲ در حل این سؤال $v_0 = 0$ بوده و تندی در نقاط B و C با توجه به میزان ارتفاع سقوط (پایین آمدن) آن‌ها برابر است با:



$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta y} \Rightarrow \begin{cases} v_B = \sqrt{0 + 2g\times 18} \\ v_C = \sqrt{0 + 2g\times 6} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_B}{v_C} = \sqrt{3}$$

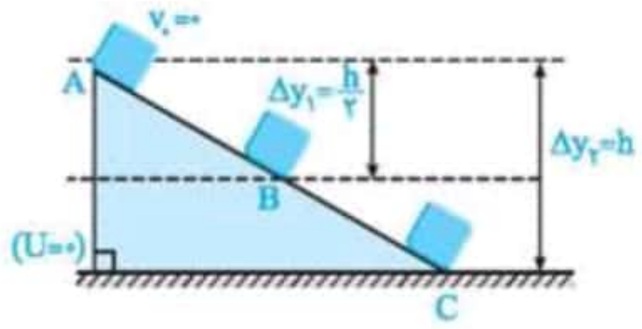


۴ ۲۳۳ ابتدا باید دقت شود که اصطکاک و مقاومت هوا ناچیز بوده و در نتیجه انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر حرکت ثابت می‌ماند. حال اگر گلوله در نقطهٔ B متوقف شده باشد، در مقایسهٔ انرژی مکانیکی در نقاط A و B می‌توان نوشت:

$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \ , \ v_A = v_B = 0 \Rightarrow K_A = K_B = 0$$

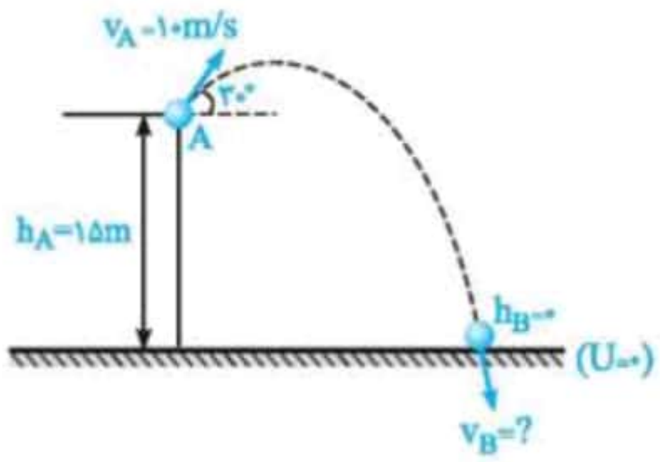
$$U_A = U_B \Rightarrow mgh_A = mgh_B \Rightarrow h_A = h_B$$

با توجه به شکل : $\begin{cases} h_A = L\sin 45^\circ \\ h_B = L'\sin 30^\circ \end{cases} \Rightarrow L\sin 45^\circ = L'\sin 30^\circ \Rightarrow L \times \frac{\sqrt{2}}{2} = L' \times \frac{1}{2} \Rightarrow L' = \sqrt{2}L$



۲ ۲۳۴ با توجه به رابطهٔ $U = mgh$، زمانی انرژی پتانسیل گرانشی جسم نصف می‌شود که ارتفاع جسم از سطح زمین (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی) نصف شود. بنابراین مطابق شکل، در نقطهٔ B انرژی پتانسیل گرانشی جسم نصف شده است. از طرفی بسته از حالت سکون رها شده است و برای محاسبهٔ تندی در هر نقطه، کافی است میزان تغییر مکان قائم بسته از محل رها شدن تا آن نقطه را به‌دست آوریم:

$$v = \sqrt{2g\Delta y} \Rightarrow \frac{v_B}{v_C} = \sqrt{\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



۲ ۲۳۵ **روش اول:** با توجه به این‌که در این سؤال از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، با به کارگیری قانون پایستگی انرژی برای دو نقطهٔ A و B می‌توان نوشت:

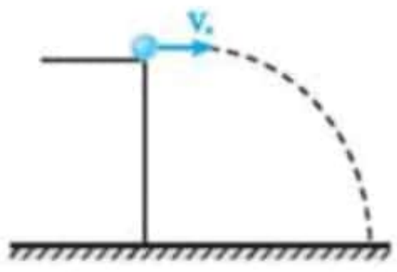
$$E_B = E_A \Rightarrow U_B + K_B = U_A + K_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 \xrightarrow{\text{ساده کردن m}} v_B^2 = v_A^2 + 2gh_A$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh_A} = \sqrt{10^2 + 2\times 10\times 15} = 20m/s$$

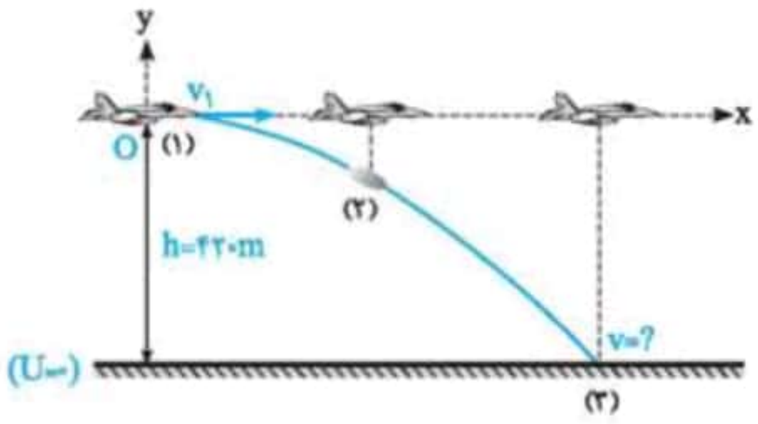
روش دوم: ارتفاع گلوله از سطح زمین در طول مسیر (بدون اصطکاک)، به اندازهٔ $\Delta y = 15\,m$ کاهش یافته است، در نتیجه بر تندی آن افزوده می‌شود و تندی آن هنگام برخورد به زمین برابر است با:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta y} = \sqrt{10^2 + 2\times 10\times 15} = \sqrt{400} = 20m/s$$



توجه داشته باشید که تندی گلوله هنگام برخورد به زمین، به جرم آن بستگی ندارد (چرا؟).

۳ ۲۳۶ با توجه به پاسخ سؤال قبل، تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین برابر $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ است. بنابراین با توجه به ثابت بودن تندی اولیه و ارتفاع ساختمان، تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به سطح زمین نیز ثابت می‌ماند. (به عبارت دیگر زاویهٔ پرتاب اولیهٔ گلوله، تأثیری بر تندی برخورد آن با سطح زمین ندارد).



۱ ۲۳۷ انرژی مکانیکی این گلوله ثابت بوده و برابر است با:

$$E_2 = K_2 + U_2 = 21/2\times 10^3 + 3\times 10^3 = 24/2\times 10^3\,J$$

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، برای محاسبهٔ تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین و تندی آن در لحظهٔ پرتاب اولیه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = 24/2\times 10^3 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 1\times v_1^2 + 1\times 10\times 420 = 24/2\times 10^3 \Rightarrow v_1^2 = 4\times 10^4 \Rightarrow v_1 = 200m/s \\ E_3 = E_2 \Rightarrow K_3 + U_3 = 24/2\times 10^3 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 1\times v_3^2 = 24/2\times 10^3 \Rightarrow v_3^2 = 2\times 24200 = 4\times 121\times 100 \Rightarrow v_3 = 2\times 11\times 10 = 220m/s \end{cases}$$

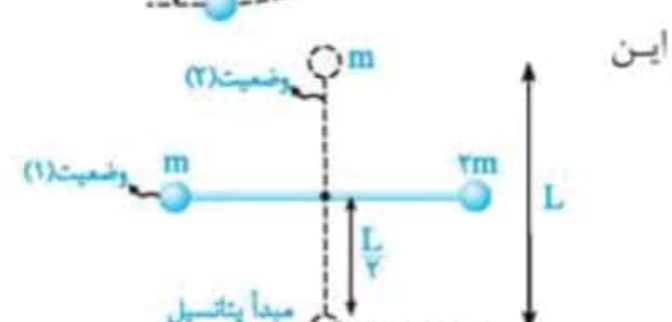
$$\Rightarrow \frac{v_3}{v_1} = \frac{220}{200} = \frac{11}{10}$$

gajmarket.com

۲ ۲۳۸ مقدار کاهش انرژی پتانسیل گرانشی جسم، برابر مقدار افزایش انرژی جنبشی آن است و داریم:

$$|\Delta U| = |\Delta K| = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ - ۰ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۲ \times ۴^۲ = ۱/۶ J$$

نگاه دیگر: با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی در دو نقطهٔ A و B، می‌توان نوشت:



$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$\xrightarrow{v_A = ۰} \text{تغییرات انرژی پتانسیل} : U_A - U_B = K_B - \cancel{K_A}^{۰} = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ - ۰$$

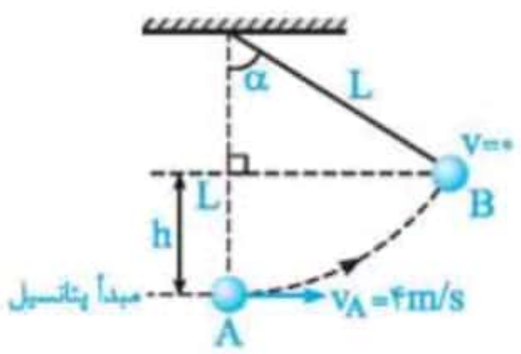
$$\Delta U = \frac{۱}{۲} \times ۰/۲ \times ۴^۲ = ۱/۶ J$$

سوال اختلاف ارتفاع دو نقطهٔ A و B چند متر است؟

پاسخ

$$|\Delta U| = |\Delta K| \Rightarrow \cancel{m} g \Delta h = \frac{۱}{۲}\cancel{m}(v_B^۲ - v_A^۲) \Rightarrow \Delta h = \frac{۴^۲ - ۰^۲}{۲ \times ۱۰} = ۰/۸ m$$

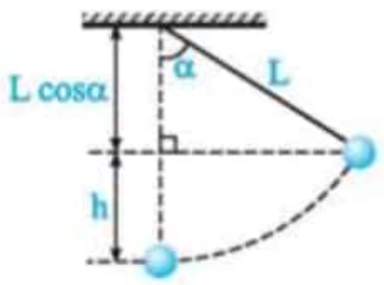
۳ ۲۳۹ در شکل روبه‌رو، درصورتی که آونگ در نقطهٔ B متوقف شود، به اندازهٔ h در راستای قائم جابه‌جا شده است و با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:



$$E_A = E_B \Rightarrow \cancel{U_A}^{۰} + K_A = U_B + \cancel{K_B}^{۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲}m v_A^۲ = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_A^۲}{۲g} = \frac{۴^۲}{۲ \times ۱۰} = ۰/۸ m$$

از طرفی در شکل روبه‌رو طول نخ (L)، برابر مجموع h و $L\cos\alpha$ می‌باشد و داریم:



$$L = L\cos\alpha + h \Rightarrow ۱/۶ = ۱/۶\cos\alpha + ۰/۸$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

۱ ۲۴۰ برای حل این سؤال، از قانون پایستگی انرژی در دو لحظهٔ مختلف استفاده می‌کنیم. برای این منظور، به موارد زیر توجه کنید:

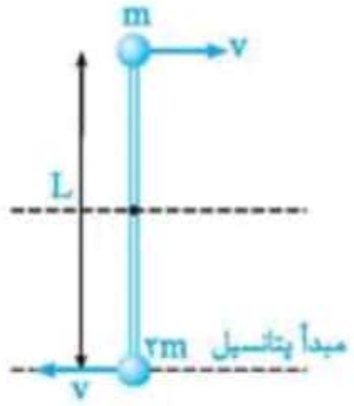
۱) هنگامی که میله در راستای قائم قرار می‌گیرد، گلولهٔ سنگین‌تر (۲m) در پایین قرار می‌گیرد.

۲) در حالت اول تندی گلوله‌ها برابر صفر و در نتیجهٔ انرژی جنبشی آن‌ها نیز برابر صفر است.

$$E_۲ = E_۱ \Rightarrow U_۲ + K_۲ = U_۱ + \cancel{K_۱}^{۰} \Rightarrow K_۲ = U_۱ - U_۲$$

$$\begin{cases} K_۱ = ۰ \\ U_۱ = mg(\frac{L}{۲}) + (۲m)g(\frac{L}{۲}) \\ U_۲ = mg \times L + (۲m)g \times ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_۲ = U_۱ - U_۲ = \frac{۳}{۲}mgL - mgL = \frac{mgL}{۲}$$

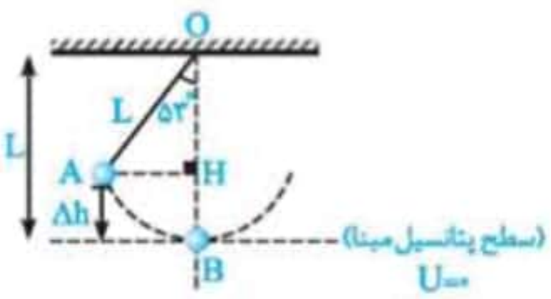


۳ ۲۴۱ ابتدا با نوشتن اصل بقای انرژی مکانیکی بین A و B داریم:

$$\text{اصل بقای انرژی مکانیکی} : E_A = E_B \Rightarrow \cancel{m} g \Delta h = \frac{۱}{۲}\cancel{m} v_B^۲ \Rightarrow v_B = \sqrt{۲g\Delta h}$$

$$\Delta h = OB - OH = L - L\cos\alpha = L(۱ - \cos\alpha) \Rightarrow v_B = \sqrt{۲gL(۱ - \cos\alpha)}$$

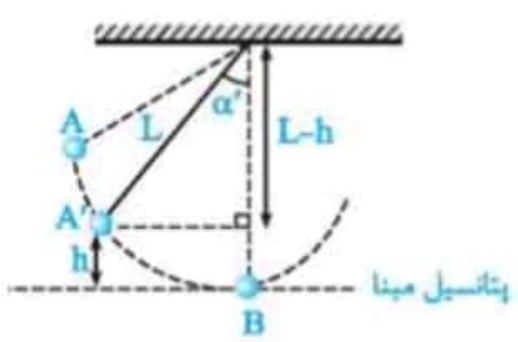
$$v_B = \sqrt{۲ \times ۱۰ \times ۱ \times (۱ - \cos ۵۳^\circ)} = ۲\sqrt{۲} m/s$$



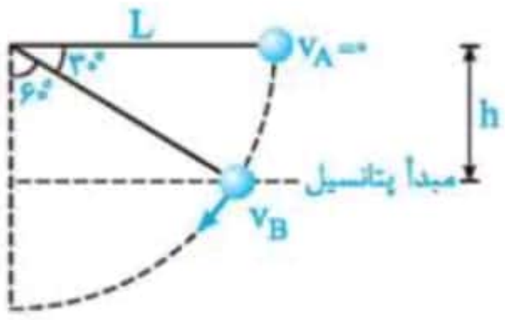
حال فرض کنید می‌خواهیم زاویه‌ای را بیابیم که تندی گلوله در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_B$ است. برای این منظور داریم:

$$v_{A'} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}v_B = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۲ m/s$$

$$K_{A'} + U_{A'} = K_B + U_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{m} \times (۲)^۲ + \cancel{m} \times ۱۰ \times h = \frac{۱}{۲} \times \cancel{m} \times (۲\sqrt{۲})^۲ + ۰ \Rightarrow h = \frac{۱}{۵}m$$



$$\cos\alpha' = \frac{L - h}{L} = \frac{۱ - \frac{۱}{۵}}{۱} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸ \Rightarrow \alpha' = ۳۷^\circ$$



۲۴۲ **روش اول:** استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی:

$$E_A=E_B \Rightarrow U_A+K_A=U_B+K_B \Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B^2=2gh$$

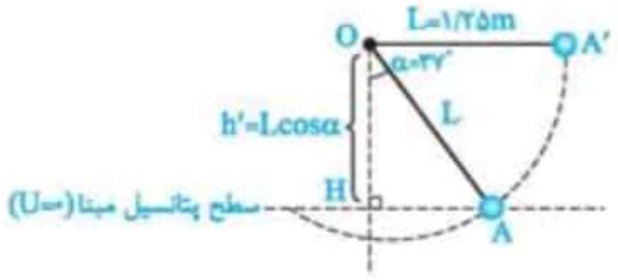
از طرفی با توجه به شکل روبه‌رو، مقدار h برابر است با:

$$h=L\sin 30^\circ=0/2\times\frac{1}{2}=0/1m \Rightarrow v_B^2=2\times10\times0/1 \Rightarrow v_B=\sqrt{2}\ m/s$$

روش دوم: با استفاده از رابطهٔ $v_B=\sqrt{v_A^2+2g\Delta y}$ داریم:

$$\Delta y=h=L\sin 30^\circ \Rightarrow v_B=\sqrt{0^2+2\times10\times\left(0/2\times\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2}\ m/s$$

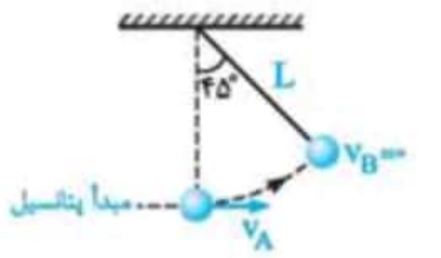
۲۴۳ مطابق با اصل بقای انرژی مکانیکی، مقدار کل انرژی مکانیکی گلوله در نقطهٔ A با نقطهٔ A' یکسان است. از سوی دیگر اگر کم‌ترین تندی گلوله در نقطهٔ A را بخواهیم به گونه‌ای که گلوله به نقطهٔ A' برسد، باید تندی گلوله در نقطهٔ A' برابر صفر شود (چرا؟).



$$E_A=E_{A'} \Rightarrow K_A+U_A=K_{A'}+U_{A'} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2+0=0+mgh'$$

$$\Rightarrow v_A=\sqrt{2gh'}=\sqrt{2gL\cos\alpha} \Rightarrow v_A=\sqrt{2\times10\times1/25\times0/8}=2\sqrt{5}\ m/s$$

۲۴۴ در صورتی‌که مبدأ پتانسیل گرانشی را پایین‌ترین نقطهٔ آونگ درنظر بگیریم، حداکثر انرژی پتانسیل گرانشی آونگ مربوط به بالاترین نقطهٔ مسیر یعنی B (حداکثر ارتفاع) می‌باشد.

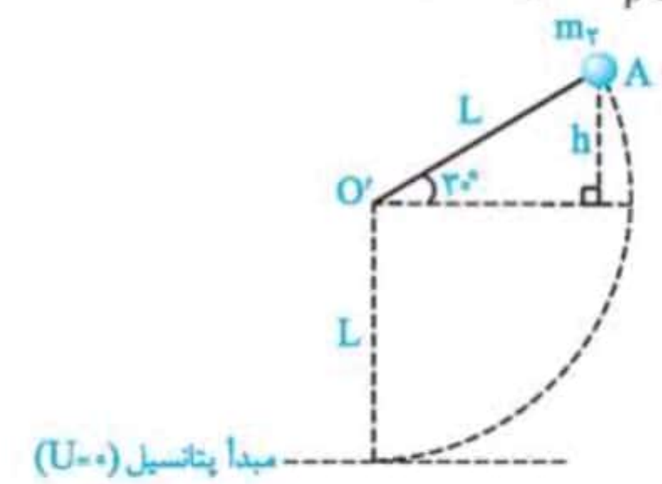


از طرفی می‌دانیم حداکثر انرژی جنبشی آونگ مربوط به حالتی است که تندی جسم حداکثر باشد (پایین‌ترین نقطهٔ مسیر، نقطهٔ A). با به کارگیری قانون پایستگی انرژی برای این دو نقطه می‌توان نوشت:

$$E_A=E_B \Rightarrow U_A+K_A=U_B+K_B \Rightarrow K_A=U_B \Rightarrow E_c=E_p$$

دقت: صورت سؤال بیشینهٔ انرژی جنبشی (K_A) را E_c نامیده و بیشینهٔ انرژی پتانسیل گرانشی (U_B) را E_p نامیده است.

۲۴۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

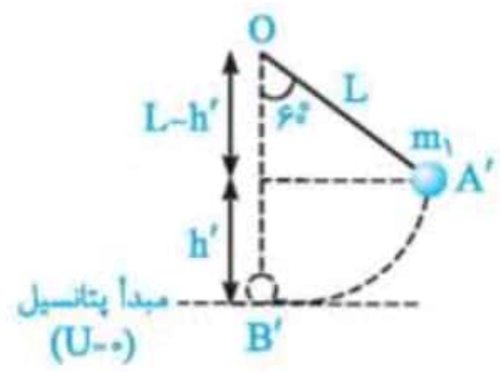


جسم m_2: بیشینهٔ انرژی پتانسیل در این حالت برابر است با:

$$U_A=m_2g(L+h) \xrightarrow{\sin30^\circ=\frac{h}{L}\Rightarrow h=L\sin30^\circ} U_A=m_2g(L+L\sin30^\circ)$$

$$U_A=m_2gL(1+\sin30^\circ)=\frac{3}{2}m_2gL$$

جسم m_1: بیشینهٔ انرژی جنبشی در این حالت مربوط به زمانی است که جسم از پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکتش عبور می‌کند.



$$\cos60^\circ=\frac{L-h'}{L} \Rightarrow h'=\frac{L}{2}$$

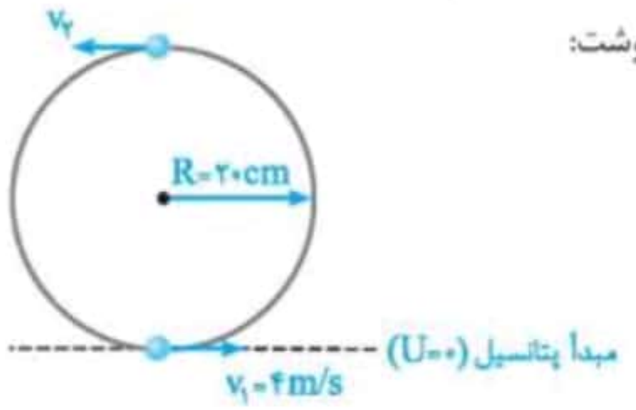
پایستگی انرژی مکانیکی: $E_{A'}=E_{B'} \Rightarrow K_{A'}+U_{A'}=K_{B'}+U_{B'}$

$$\Rightarrow K_{B'}=m_1gh' \xrightarrow{h'=\frac{L}{2}} K_{B'}=\frac{1}{2}m_1gL$$

طبق صورت سؤال، $K_{B'}=U_A$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}m_1gL=\frac{3}{2}m_2gL \Rightarrow \frac{m_2}{m_1}=\frac{1}{3}$$

۲۴۶ با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی در پایین‌ترین و بالاترین نقطهٔ مسیر حرکت گلوله، می‌توان نوشت:



$$E_1=E_2$$

$$\Rightarrow U_1+K_1=U_2+K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2=mg\Delta h+\frac{1}{2}mv_2^2$$

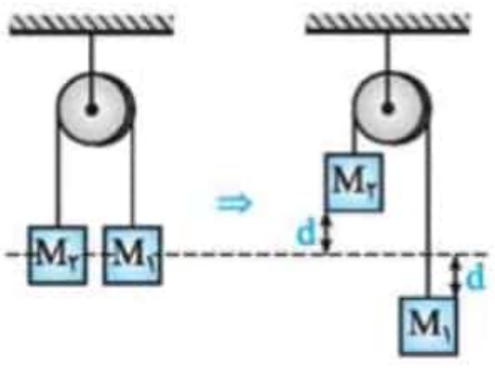
$$\xrightarrow[v_1=4m/s]{\Delta h=2R=0/4m} \frac{1}{2}\times4^2=10\times0/4+\frac{1}{2}v_2^2 \Rightarrow v_2^2=8 \Rightarrow v_2=2\sqrt{2}\ m/s$$

gajmarket.com

۲ ۲۴۷

تذکر

در تست‌های (۲۴۷) تا (۲۵۲)، می‌خواهیم کاربرد رابطهٔ $\Delta U = -\Delta K$ را در مسائل کنکور با هم بررسی کنیم.



در شکل روبه‌رو هنگامی که وزنهٔ سنگین‌تر (M_1) به‌اندازه d به سمت پایین جابه‌جا شود انرژی پتانسیل گرانشی آن به‌اندازهٔ M_1gd کاهش می‌یابد. هم‌چنین وزنهٔ M_2 به اندازهٔ d بالاتر رفته و انرژی پتانسیل آن M_2gd افزایش می‌یابد.

تغییر انرژی پتانسیل مجموعه، برابر قرینهٔ تغییرات انرژی جنبشی آن است $(\Delta K = -\Delta U)$، بنابراین می‌توان نوشت:

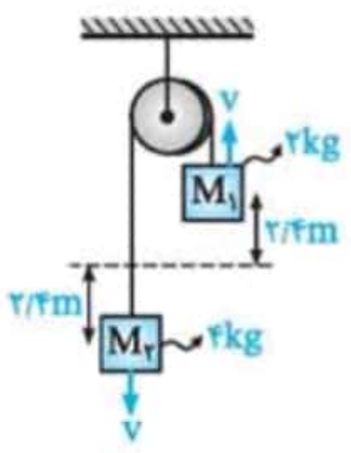
$$K_2 - \cancel{K_1}^{\circ} = -\Delta U \Rightarrow K_2 = -(M_2gd - M_1gd) = (M_1 - M_2)gd$$

۳ ۲۴۸ با توجه به پاسخ سؤال قبل، انرژی جنبشی وزنه‌ها پس از جابه‌جایی d برابر $K_2 = (M_1 - M_2)gd$ است. با توجه به این‌که فقط مقدار جابه‌جایی تغییر کرده است، بنابراین انرژی جنبشی وزنه‌ها پس از جابه‌جایی $2d$، دو برابر می‌شود.

$$\begin{cases} K'_2 = (M_1 - M_2)g(2d) \\ K_2 = (M_1 - M_2)gd \end{cases} \Rightarrow \frac{K'_2}{K_2} = 2$$

۴ ۲۴۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) هنگامی‌که وزنهٔ ۴ کیلوگرمی به اندازهٔ ۲/۴ متر به سمت پایین حرکت کند، وزنه ۲ کیلوگرمی به اندازهٔ ۲/۴ متر به‌سمت بالا می‌رود. اندازهٔ تغییر انرژی پتانسیل مجموعه در این حالت برابر است با:



$$|\Delta U| = (M_2 - M_1)g\,\Delta h = (4-2)\times 10 \times 2/4 = 48\,J$$

۲) این مقدار تغییر انرژی پتانسیل، به انرژی جنبشی دو جسم تبدیل می‌شود $(|\Delta U| = |\Delta K|)$، از آنجایی که تندی دو جسم یکسان است، می‌توان نوشت:

$$\Delta K = K_2 - \cancel{K_1}^{\circ} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2+4)v^2 = 48 \Rightarrow v^2 = 16 \Rightarrow v = 4\,m/s$$

۲ ۲۵۰ مشابه با سؤال قبل، تندی حرکت هر سه وزنه یکسان بوده و می‌توان نوشت:

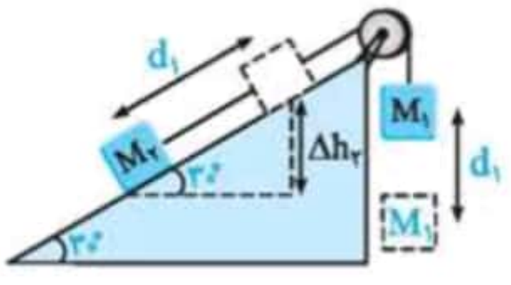
مجموع انرژی جنبشی دو وزنهٔ m_1 و m_2 : $K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 22/5\,J$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 2 \times v^2 + \frac{1}{2}\times 3 \times v^2 = 22/5 \Rightarrow 2/5v^2 = 22/5 \Rightarrow v^2 = 9 \Rightarrow v = 3\,m/s$$

حال با کمک پایستگی انرژی مکانیکی برای کل مجموعه، داریم:

$$|\Delta U| = |\Delta K| \Rightarrow m_3 \times g \times \Delta h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2 - 0 \Rightarrow m_3 \times 10 \times 0/9 = \frac{1}{2}(2+3+m_3)\times 3^2 \Rightarrow m_3 = 5kg$$

۴ ۲۵۱ در شکل مقابل وزنه‌ها به هم متصل‌اند و در صورتی که وزنهٔ M_1 به اندازهٔ d_1 به سمت پایین حرکت کند، وزنهٔ M_2 نیز به همان اندازه روی سطح شیب‌دار به سمت بالا حرکت می‌کند. در این‌صورت تغییر ارتفاع آن برابر است با:



$$\Delta h_2 = d_1 \sin 30^\circ = \frac{d_1}{2}$$

$$\Delta h_1 = -d_1$$

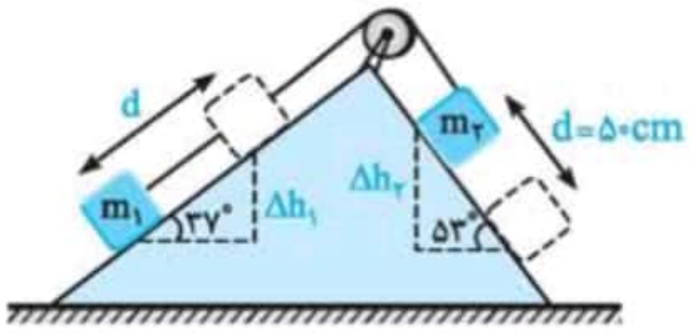
از طرفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی سیستم برابر مجموع انرژی جنبشی دو جسم در حالت ثانویه است و داریم:

$$|\Delta K_{\text{سیستم}}| = |\Delta U_{\text{سیستم}}| \Rightarrow K_1 + K_2 = |(\Delta U_1 + \Delta U_2)|$$

$$\Rightarrow 4 + 4 = |(m_1g\Delta h_1 + m_2g\Delta h_2)| \Rightarrow 8 = \left|\left(-10 \times d_1 + 10 \times \frac{d_1}{2}\right)\right| = 5d_1$$

$$\Rightarrow 5d_1 = 8 \Rightarrow d_1 = \frac{8}{5} = 1/6\,m$$

۳ ۲۵۲ در شکل مقابل، وزنه‌ها به هم متصل‌اند و در صورتی که وزنهٔ $m_۲$ به اندازهٔ d بر روی سطح شیب‌دار به سمت پایین حرکت کند، وزنهٔ $m_۱$ نیز به همان اندازه روی سطح شیب‌دار به سمت بالا حرکت می‌کند. در این‌صورت تغییر ارتفاع هر یک از آن‌ها برابر است با:



$$\Delta h_۱ = d\sin ۳۷^\circ = ۵۰ \times \frac{۶}{۱۰} = ۳۰cm$$

$$\Delta h_۲ = -d\sin ۵۳^\circ = -۵۰ \times \frac{۸}{۱۰} = -۴۰cm$$

از طرفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی سیستم برابر مجموع انرژی جنبشی دو جسم در حالت ثانویه است و داریم:

$$|\Delta K_{سیستم}| = |\Delta U_{سیستم}| \Rightarrow K_۱ + K_۲ = |(\Delta U_۱ + \Delta U_۲)|$$

$$\Rightarrow K_۱ + K_۲ = |(m_۱ g\Delta h_۱ + m_۲ g\Delta h_۲)| \Rightarrow K_۱ + K_۲ = \left|۲ \times ۱۰ \times \frac{۳}{۱۰} + ۴ \times ۱۰ \times \left(-\frac{۴}{۱۰}\right)\right| = ۱۰J$$

۲ ۲۵۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — **پایستگی انرژی مکانیکی در حضور فنر** — (تست‌های ۲۵۳ تا ۲۶۳)

همان‌گونه که انرژی جنبشی و پتانسیل گرانشی می‌توانند به یک‌دیگر تبدیل شوند، انرژی جنبشی و پتانسیل کشسانی نیز چنین حالتی دارند. در بررسی مسائلی که یک جسم به فنر برخورد می‌کند و آن را فشرده می‌سازد، کافی است از قانون پایستگی انرژی مکانیکی استفاده کنیم.

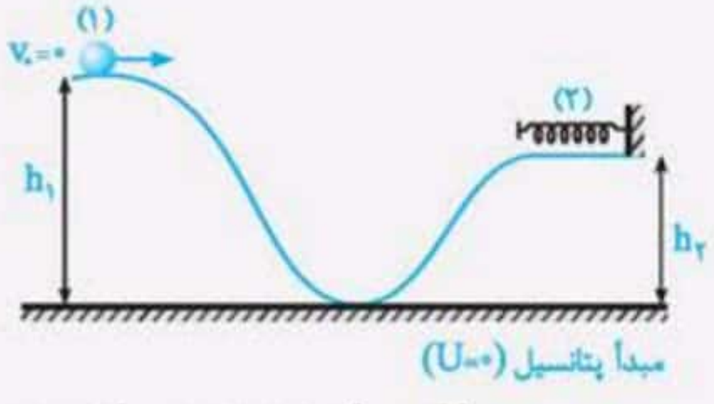
به‌عنوان مثال در شکل زیر جسمی را در نظر بگیرید که از ارتفاع h رها شده و با تندی $v_۱$ به یک فنر برخورد می‌کند. پس از برخورد جسم با فنر، فنر تا جایی فشرده می‌شود که جسم برای یک لحظه ساکن شود (حداکثر فشردگی) و در این‌صورت می‌توان نوشت:

قانون پایستگی انرژی مکانیکی : $E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_{۱گرانشی} + U_{۱کشسانی} = K_۲ + U_{۲گرانشی} + U_{۲کشسانی}$

در این مثال، چون جسم رها شده است و در انتهای حرکت، پس از فشردن کامل فنر، در یک لحظه در محل (۲) متوقف می‌شود، بنابراین $K_۱ = K_۲ = ۰$ است.

هم‌چنین دقت شود که قبل از برخورد، فنر تغییر طولی ندارد و پس از برخورد، فنر فشرده شده است. بنابراین در حالت اول، انرژی ذخیره شده در فنر برابر صفر بوده و در حالت دوم، انرژی پتانسیل کشسانی در فنر ذخیره شده است.

بنابراین در این مثال می‌توان نوشت:



$$۰ + mgh_۱ + ۰ = ۰ + mgh_۲ + U_{۲کشسانی}$$

در این سؤال، ابتدا فنر تغییر طول ندارد ($U_{۱فنر} = ۰$) و در حالت دوم فنر به حداکثر فشردگی خود رسیده و جسم یک لحظه ساکن می‌شود ($K_۲ = ۰$). می‌توان گفت در این حالت انرژی جنبشی جسم به انرژی کشسانی فنر تبدیل شده است و داریم:

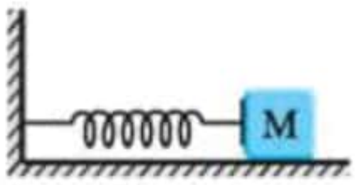
$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_{۱فنر} = K_۲ + U_{۲فنر} \Rightarrow U_{۲فنر} = \frac{۱}{۲} m v_۱^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۵ \times ۲^۲ = ۱J$$

۳ ۲۵۴ وقتی فنر طول عادی خود را دارد، $U_{۱کشسانی} = ۰$ است. از طرفی با توجه به پاسخ سؤال قبل، وقتی فنر بیشترین فشردگی را دارد، انرژی ذخیره شده در فنر $U_{۲کشسانی} = ۱J$ است. با توجه به رابطهٔ $W_{فنر} = -\Delta U_{کشسانی}$ می‌توان نوشت:

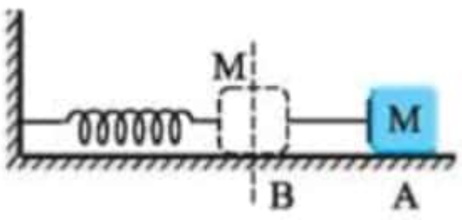
$$W_{فنر} = -\Delta U_{کشسانی} = -(U_۲ - U_۱) = -(۱ - ۰) = -۱J$$

دید دیگر: به عبارت دیگر، نیروی وارد شده از طرف فنر بر جسم، به سمت راست و در خلاف جهت جابه‌جایی جسم است ($\alpha = ۱۸۰^\circ$). بنابراین کار انجام شده از طرف فنر بر روی جسم باید مقداری منفی باشد.

۱ ۲۵۵ در شکل روبه‌رو، جرم M به فنر متصل شده و به اندازه‌ای کشیده شده است که انرژی فنر برابر U شده است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \Rightarrow U_A = K_B$$



در این سؤال حداکثر انرژی ذخیره‌شده در دو فنر با هم برابر است، بنابراین حداکثر انرژی جنبشی دو وزنه، یعنی زمانی که از وضعیت تعادل عبور می‌کنند، با هم برابر خواهد بود ($K_۱ = K_۲$).

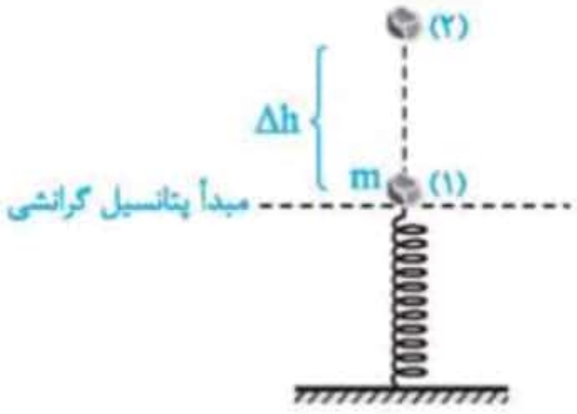
gajmarket.com

از طرفی برای مقایسهٔ تندی حرکت دو جسم، در لحظه‌ای که فنر طول عادی خود را دارد، می‌توان نوشت:

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\xrightarrow[m_1=m]{m_2=2m} v_1^2 = 2v_2^2 \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

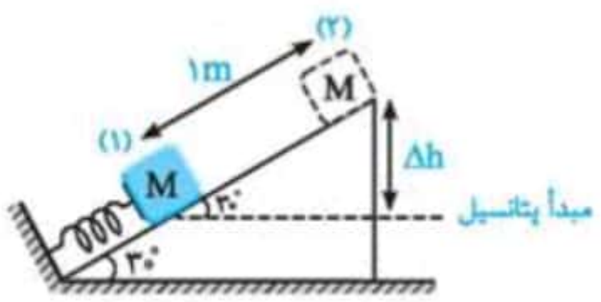
۲ ۲۵۶ فرض کنید سنگ از حالت فشرده (نقطهٔ ۱) رها شده و حداکثر تا نقطهٔ (۲) بالا رود. بنابراین داریم:



پایستگی انرژی مکانیکی : $E_1 = E_2 \Rightarrow \cancel{U_{1,\text{گرانشی}}} + U_{1,\text{فنر}} + \cancel{K_1} = U_{2,\text{گرانشی}} + \cancel{U_{2,\text{فنر}}} + \cancel{K_2}$

$$\Rightarrow U_{1,\text{فنر}} = U_{2,\text{گرانشی}} \Rightarrow 12 = 0/3 \times 10 \times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 4\,m$$

۳ ۲۵۷ با توجه به شکل زیر داریم:



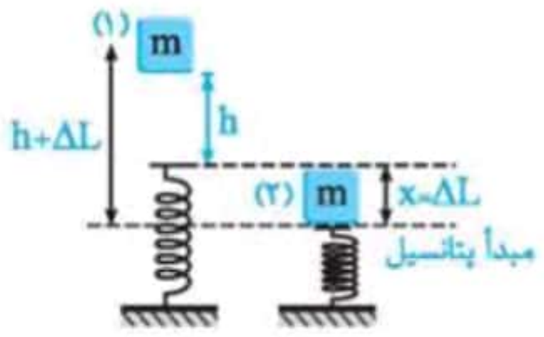
$$\sin 30^\circ = \frac{\Delta h}{1} \Rightarrow \Delta h = 0/5\,m$$

حال از قانون پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \cancel{U_1} + U_{1,\text{فنر}} + \cancel{K_1} = U_2 + \cancel{U_{2,\text{فنر}}} + K_2$$

$$(1) \Rightarrow U_{1,\text{فنر}} = mg\Delta h + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 7 = 1 \times 10 \times 0/5 + \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v^2 = 4 \Rightarrow v = 2\,m/s$$

۱ ۲۵۸ با توجه به شکل روبه‌رو، در صورتی‌که فنر به‌اندازهٔ ΔL متراکم شود، تغییر ارتفاع وزنه به اندازهٔ $(h + \Delta L)$ می‌باشد و با تساوی انرژی مکانیکی در دو حالت نشان داده شده داریم:



$$E_2 = E_1 \Rightarrow U_{\text{کشسانی}} = mg\,\Delta h \Rightarrow U_{\text{کشسانی}} = mg(h + \Delta L)$$

دقت: در هر دو موقعیت (۱) و (۲)، تندی وزنه برابر صفر است، زیرا وزنه از موقعیت (۱) رها شده $(v_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 0)$ و آن قدر فنر را متراکم کرده است تا در موقعیت (۲) متوقف شود $(v_2 = 0 \Rightarrow K_2 = 0)$.

از طرفی می‌دانیم $W_{\text{فنر}} = -\Delta U_{\text{کشسانی}}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{\text{فنر}} = -\Delta U_{\text{کشسانی}} = -mg\,(h + \Delta L)$$

۱ ۲۵۹ با توجه به این‌که از کلیه اصطکاک‌ها و مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، بنابراین انرژی مکانیکی وزنه ثابت می‌ماند. پس وزنه دوباره تا همان ارتفاع H بالا می‌رود $(H = H')$.

۲ ۲۶۰ با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$v_2 = v_1 - \frac{50}{100}v_1 = \frac{50}{100}v_1 = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2} \times 20 = 10\,m/s$$

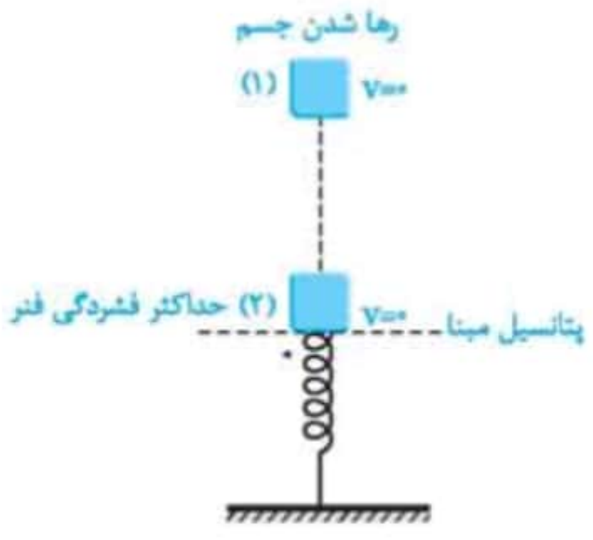
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = U_{2,\text{فنر}} + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 20^2 = U_{2,\text{فنر}} + \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 \Rightarrow U_{2,\text{فنر}} = 300\,J$$

۱ ۲۶۱ در این سؤال عملاً توسط بسته، فنر را $10\,cm$ $(0/1\,m)$ فشرده کرده و سپس رها کرده‌ایم. با توجه به ناچیز بودن اصطکاک، به‌سادگی با کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی، به‌صورت زیر تندی بسته در هنگام جدا شدن از فنر را به‌دست می‌آوریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 400 \times (0/1)^2 = \frac{1}{2} \times 0/5 \times v^2 \Rightarrow v^2 = 8 \Rightarrow v = 2\sqrt{2}\,m/s$$

۴ ۲۶۲ با توجه به این‌که مقاومت هوا ناچیز است، از پایستگی انرژی مکانیکی بین دو لحظهٔ (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم:



$$E_2 = E_1 \Rightarrow \cancel{K_2} + U_{2,\text{کشسانی}} + \cancel{U_{2,\text{گرانشی}}} = \cancel{K_1} + \cancel{U_{1,\text{کشسانی}}} + U_{1,\text{گرانشی}} \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta L^2 = mg(\Delta L + h)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 200 \times \Delta L^2 = 0/1 \times 10 \times (\Delta L + 0/9) \Rightarrow 100\Delta L^2 = \Delta L + 0/9$$

در ادامه با امتحان کردن گزینه‌ها مشخص است که $\Delta L = 0/1\,m = 10\,cm$ بوده و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲۶۳ مشابه با تست قبل، با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، می‌توان نوشت:

$$mg(h+\Delta x)=\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

از طرفی با کمی دقت می‌توان فهمید سمت چپ رابطه همان کار نیروی وزن جسم از لحظه‌ی رها شدن آن تا لحظه‌ای است که فنر حداکثر فشردگی را دارد و در نهایت داریم:

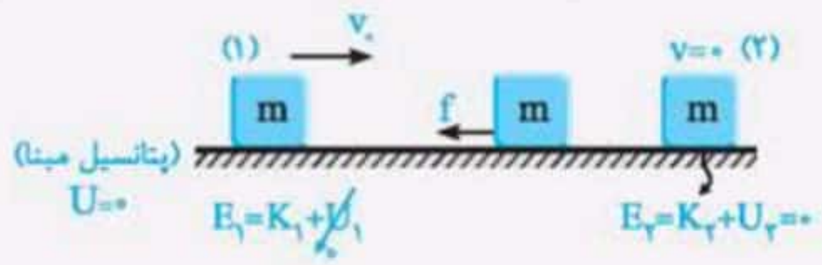
$$\text{سمت چپ رابطه} = \frac{1}{2}k\Delta x^2=\frac{1}{2}\times 2/5\times \underbrace{100}_{\text{تبدیل } \frac{N}{cm} \text{ به } \frac{N}{m}}\times\left(\frac{12}{100}\right)^2=1/8J$$

۲۶۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۸ بررسی تغییرات انرژی مکانیکی در حضور اصطکاک و مقاومت هوا (نیروهای ناپایستار) (تست‌های ۲۶۴ تا ۲۸۹)

در این قسمت ابتدا تغییرات انرژی درونی و سپس تغییرات انرژی مکانیکی یک مجموعه را در حضور نیروهایی مانند اصطکاک و مقاومت هوا بررسی می‌کنیم:

در شکل مقابل، بسته‌ای بر روی یک سطح افقی پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت d، بسته متوقف می‌شود. در این بحث می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:



تغییرات انرژی درونی:

۱) در این حرکت، نیروی اصطکاک در خلاف جهت جابه‌جایی بسته بر آن وارد شده و کار انجام شده توسط آن منفی است $(W_{f_k}<0)$.

۲) با گذشت زمان در اثر کار نیروی اصطکاک، انرژی جنبشی بسته صفر شده و به انرژی درونی جسم و محیط تبدیل می‌شود که در این گونه موارد، اصطلاحاً می‌گوییم انرژی تلف شده است.

۳) انرژی درونی عملاً مجموع انرژی‌های ذرات تشکیل دهندهٔ ماده است، بنابراین با تعداد ذرات و انرژی هر ذره رابطهٔ مستقیم دارد.

تغییرات انرژی مکانیکی:

۱) با گذشت زمان، انرژی مکانیکی بسته دائماً کاهش می‌یابد $(E_2<E_1)$، زیرا نیروی اصطکاک، بر بسته اثر می‌کند و بسته در موقعیت (۲) هیچ‌گونه انرژی مکانیکی ندارد و متوقف می‌شود.

۲) تمام انرژی بسته ابتدا به‌صورت جنبشی بوده و برابر $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌باشد و در انتها $E_2=0$ است، یعنی تمام انرژی مکانیکی بسته به گرما تبدیل شده است.

۳) اگر در یک مجموعه، نیروهای تلف کنندهٔ انرژی مانند اصطکاک و مقاومت هوا وجود داشته باشد، می‌توان گفت انرژی مکانیکی دیگر ثابت نبوده و تغییر انرژی مکانیکی برابر کار نیروهای تلف کنندهٔ انرژی است:

$$E_2-E_1=W_f$$

یک تمرین ساده برای شکل فوق:

$$\text{کار نیروی اصطکاک} = \text{کاهش انرژی مکانیکی} \Rightarrow E_2-E_1=W_{f_k}\Rightarrow 0-\frac{1}{2}mv_0^2=\overbrace{-f_kd}^{f_kd\cos 180^\circ}$$

E_2 E_1

نکته در صورت حضور نیروهای تلف کنندهٔ انرژی مانند اصطکاک و مقاومت هوا، رابطهٔ بین ΔU و ΔK برابر است با:

$$E_2-E_1=W_f\Rightarrow (U_2+K_2)-(U_1+K_1)=W_f$$

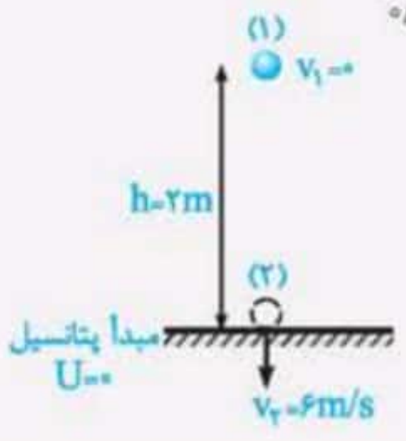
$$(U_2-U_1)+(K_2-K_1)=W_f\Rightarrow \boxed{\Delta U+\Delta K=W_f}$$

برای تسلط بر مفاهیم فوق، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین ۱ **جسمی به جرم ۰/۲ کیلوگرم از ارتفاع ۲ متر بدون تندی اولیه در هوا سقوط می‌کند و با تندی ۶ متر بر ثانیه به زمین می‌رسد. اگر $g=10m/s^2$ باشد، مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت جسم چند نیوتون خواهد بود؟** (کتاب درسی)

۱) ۱/۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

پاسخ می‌دانیم کار نیروی مقاومت هوا، برابر تغییرات انرژی مکانیکی است، بنابراین داریم:



$$W_f=E_2-E_1=(U_2+K_2)-(U_1+K_1)=\left(0+\frac{1}{2}mv_2^2\right)-(mgh_1+0)$$

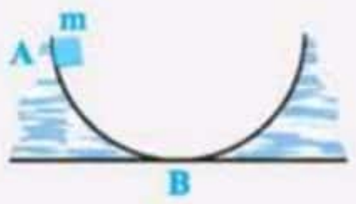
$$\Rightarrow W_f=\frac{1}{2}\times 0/2\times 6^2-0/2\times 10\times 2=3/6-4=-0/4J$$

حال می‌توان مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا را محاسبه کرد:

$$W_f=fd\cos\alpha\Rightarrow -0/4=\bar{f}\times 2\times\cos 180^\circ\Rightarrow \bar{f}=0/2N$$ (گزینهٔ ۴)

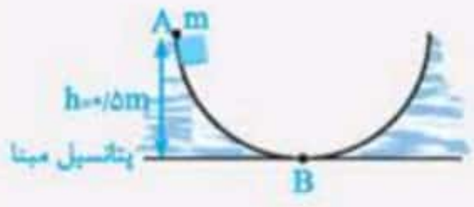
gajmarket.com

تمرین۲ **در شکل روبه‌رو جسمی به جرم ۵۰ گرم از نقطهٔ A، لبهٔ نیم‌کره‌ای به شعاع ۰/۵ متر رها می‌شود. اگر تندی حرکت جسم در نقطهٔ B برابر با $۲m/s$ باشد، مجموع کار نیروی اصطکاک و مقاومت هوا در مسیر A تا B چند برابر کار نیروی وزن در این مسیر است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$**



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا، نیروهای مقاوم (اتلافی) در برابر حرکت هستند. اختلاف انرژی مکانیکی در دو نقطهٔ B و A برابر کار نیروهای اتلافی در حرکت از نقطهٔ A تا B است، بنابراین داریم:



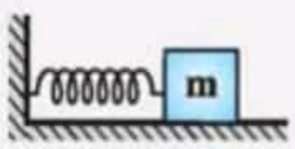
$$W_f = E_B - E_A = \left(\frac{۱}{۲}mv_B^۲ + ۰\right) - (۰ + mgh)$$

$$\Rightarrow W_f = \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۰۰}\times ۲^۲ - \frac{۵}{۱۰۰}\times ۱۰\times\frac{۱}{۲} = -۰/۱۵J$$

از طرفی کار نیروی وزن در این جابه‌جایی برابر است با:

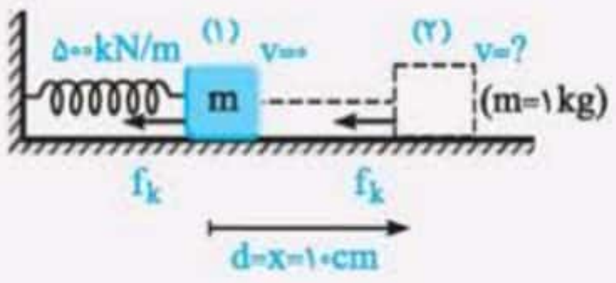
$$W_{mg} = mg\Delta h = \frac{۵}{۱۰۰}\times ۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۰/۲۵J \Rightarrow \frac{W_f}{W_{mg}} = \frac{-۰/۱۵}{۰/۲۵} = -\frac{۳}{۵}$$ (گزینهٔ ۲)

تمرین۳ **مطابق شکل، جسمی به جرم یک کیلوگرم را به فنری متصل کرده و فنر را به اندازهٔ ۱۰ سانتی‌متر فشرده می‌کنیم تا انرژی $۲/۵J$ در آن ذخیره شود. اگر در این حالت جسم را بدون تندی اولیه و از حالت سکون رها کنیم، تندی جسم در لحظهٔ عبور از نقطه‌ای که فنر طول عادی خود را دارد چند متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$ و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح افقی برابر ۵ نیوتون است.)** (ریاضی دانش ۸۷، با تغییر)



۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ در شکل مقابل، جسم بر روی سطح افقی حرکت می‌کند. بنابراین اگر این سطح را پتانسیل مبنا فرض کنیم، انرژی پتانسیل گرانشی بسته برابر صفر است.



برای دو نقطهٔ (۱) و (۲) (هنگام فشردگی فنر و هنگامی‌که فنر به طول عادی خود می‌رسد)، می‌توان نوشت:

$$W_f = E_۲ - E_۱ = (K_۲ + U_{۲\,\text{فنر}}) - (K_۱ + U_{۱\,\text{فنر}})$$

در حالت اول جسم ساکن است $(K_۱ = ۰)$ و در حالت دوم که فنر به طول عادی خود می‌رسد، $U_{۲\,\text{فنر}} = ۰$ می‌باشد. دقت کنید که در طول حرکت، اندازهٔ نیروی اصطکاک ثابت می‌ماند و می‌توان نوشت:

$$W_{f_k} = f_k \times d \times \cos ۱۸۰^\circ = \frac{۱}{۲}mv^۲ - U_{۱\,\text{فنر}}$$

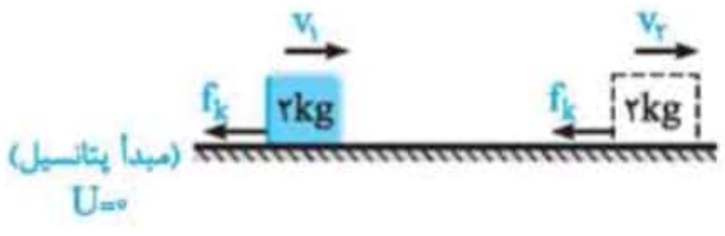
$$\Rightarrow ۵\times ۰/۱\times(-۱) = \frac{۱}{۲}\times ۱\times v^۲ - ۲/۵ \Rightarrow -۰/۵ = \frac{۱}{۲}v^۲ - ۲/۵ \Rightarrow v^۲ = ۴ \Rightarrow v = ۲m/s$$ (گزینهٔ ۱)

در این سؤال اتومبیل بر روی سطح افقی حرکت می‌کند (یعنی اگر سطح افقی را پتانسیل مبنا فرض کنیم، $U_۲ = U_۱ = ۰$ می‌شود.) و انرژی جنبشی اتومبیل در اثر نیروی اصطکاک به گرما تبدیل می‌شود و می‌توان نوشت:

تندی اتومبیل: $v_۱ = ۵۴km/h = ۱۵\ m/s$ ، $m = ۶۰۰kg$ کار نیروی اصطکاک: $W_f = E_۲ - E_۱ = K_۲ - K_۱ = -\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$

$$\Rightarrow W_f = -\frac{۱}{۲}\times ۶۰۰\times ۱۵^۲ = -۶۷۵۰۰J = -۶۷/۵kJ$$

۲ ۲۶۵ از آن‌جایی که جسم بر روی یک سطح افقی دارای اصطکاک حرکت می‌کند، داریم:



کار نیروی اصطکاک: $W_f = E_۲ - E_۱ = K_۲ - K_۱$ ، $m = ۲kg$ ، $v_۲ = v_۱ - ۵$

$$\Rightarrow -۴۵ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = \frac{۱}{۲}m\left[(v_۱ - ۵)^۲ - v_۱^۲\right]$$

$$\Rightarrow -۴۵ = \frac{۱}{۲}\times ۲\times \underbrace{(v_۱ - ۵ - v_۱)(v_۱ - ۵ + v_۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \Rightarrow -۴۵ = \frac{۱}{۲}\times ۲\times(-۵)\times(۲v_۱ - ۵)$$

تندی اولیه: $v_۱ = ۷m/s \Rightarrow$

۲ ۲۶۶ در صورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر نشود، هنگامی‌که جسم سقوط می‌کند، در اثر نیروی مقاومت هوا، مقداری از انرژی مکانیکی جسم به گرما تبدیل می‌شود و گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$W_f = E_2 - E_1 \ , \ E_2 < E_1$$

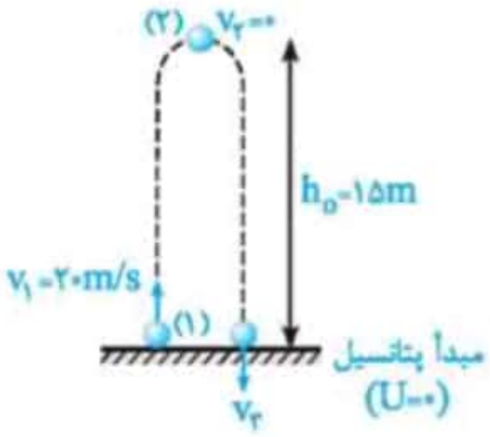
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) از آن‌جایی که تندی جسم در حال سقوط صفر نیست، بخشی از انرژی مکانیکی جسم به‌صورت انرژی جنبشی ظاهر می‌شود $(K_2 \neq 0)$ و در نتیجه گزینهٔ (۱) نمی‌تواند صحیح باشد.

۴) کاهش انرژی پتانسیل جسم، برابر مجموع افزایش انرژی جنبشی و گرمای تولید شده است.

۴ ۲۶۷ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۸)، گزینهٔ(۴) صحیح است.

۲ ۲۶۸ کار نیروی مقاومت هوا برابر تغییرات انرژی مکانیکی جسم می‌باشد. با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:



کار نیروی مقاومت هوا در مسیر رفت: $W_f = E_2 - E_1 = (U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = mgh_2 - \frac{1}{2}m v_1^2$

$$\Rightarrow W_f = 2 \times 10 \times 15 - \frac{1}{2} \times 2 \times 20^2 = 300 - 400 = -100J$$

کار نیروی مقاومت هوا در مسیر برگشت: $W_f = E_3 - E_2 \Rightarrow -100 = (K_3 + U_3) - (K_2 + U_2)$

$$\Rightarrow -100 = K_3 - 2 \times 10 \times 15 \Rightarrow K_3 = 200J$$

۴ ۲۶۹ در ابتدا توپ ساکن است و انرژی پتانسیل آن برابر است با:

$$U_1 = mgh = m \times 10 \times 20 = 200m$$

جسم پس از برخورد به زمین با تندی v برگشته و ۲۰ درصد از انرژی پتانسیل گرانشی اولیهٔ آن تلف شده است، بنابراین ۸۰ درصد باقی مانده به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

$$K_2 = \frac{80}{100}U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{80}{100} \times 200m \Rightarrow v^2 = 320$$

تندی توپ هنگام برگشت از زمین: $\Rightarrow v = \sqrt{320} = \sqrt{64 \times 5} = 8\sqrt{5} \ m/s$

۴ ۲۷۰ با توجه به قانون پایستگی انرژی مکانیکی، اگر اصطکاک سطح و مقاومت هوا صفر باشد، همواره انرژی مکانیکی نوسانگر ثابت می‌ماند. در نتیجه در این‌صورت جسم بر روی یک مسیر ثابت، حرکت رفت و برگشت (نوسانی) انجام می‌دهد. در این سؤال اگر اصطکاک سطح و مقاومت هوا قابل صرف‌نظر کردن نباشد، پس از چند بار حرکت رفت و برگشت بسته، انرژی مکانیکی و دامنهٔ حرکت بسته کاهش پیدا کرده و در نهایت متوقف خواهد شد.

۲ ۲۷۱ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۸)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ ۲۷۲ در صورتی‌که نیروی مقاومت هوا وجود نداشته باشد، تمام ۳۰۰ ژول انرژی پتانسیل کاهش یافته به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، ولی با در نظرگرفتن مقاومت هوا، انرژی جنبشی مقداری کم‌تر از ۳۰۰ ژول افزایش می‌یابد، زیرا بخشی از انرژی مکانیکی جسم در آن تلف می‌شود.

۱ ۲۷۳ کار نیروی مقاومت هوا برابر کاهش انرژی مکانیکی جسم است و داریم:

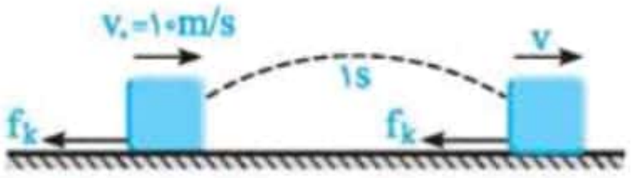
$$W_f = E_2 - E_1 = \Delta K + \Delta U = 24 - 40 = -16J$$

از طرفی کار نیروی مقاومت هوا در طول ۱۲ متر سقوط برابر است با:

$$W_f = \overline{f}\, d \cos\alpha \Rightarrow -16 = \overline{f} \times 12 \times (-1) \Rightarrow \text{متوسط نیروی مقاومت هوا}: \overline{f} = \frac{4}{3}N$$

نگاه دیگر: اگر انرژی پتانسیل در شرایط خلأ ۴۰ ژول کاهش یابد، انرژی جنبشی ۴۰J افزایش می‌یابد. حال‌که انرژی جنبشی ۲۴J افزایش یافته است، یعنی ۱۶J از آن هدر شده است.

۴ ۲۷۴ از آن‌جایی که جسم روی سطح افقی حرکت می‌کند، کاهش انرژی مکانیکی، برابر کاهش انرژی جنبشی آن است. حال برای حل این سؤال، کافی است ابتدا شتاب و سپس اندازهٔ سرعت (تندی) جسم را پس از یک ثانیه به‌دست آوریم:



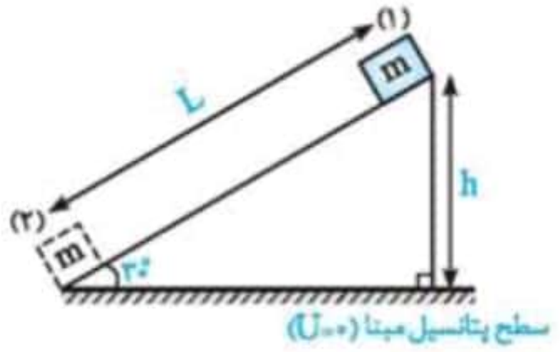
$$\sum F = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -10 = 2a \Rightarrow a = -5m/s^2$$

معادلهٔ سرعت ـ زمان: $v = at + v_0 \xrightarrow{v_0=10m/s} v = -5t + 10 \xrightarrow{t=1s} v = 5m/s$

$$\Rightarrow \text{کاهش انرژی جنبشی} = \text{کاهش انرژی مکانیکی} \Rightarrow |\Delta E| = |\Delta K| = \frac{1}{2}m\left|v_2^2 - v_1^2\right| = \frac{1}{2} \times 2 \times \left|5^2 - 10^2\right| = 75J$$

● می‌دانیم کاهش انرژی مکانیکی جسم برابر اندازهٔ کار نیروی اصطکاک است. بنابراین در این مسأله به عنوان تمرین، جابه‌جایی جسم پس از یک ثانیه را به‌دست آورید و سپس با استفاده از رابطهٔ $|W_f| = f_k d$ سؤال را حل کنید.

gajmarket.com



۲ ۲۷۵ **روش اول:** با توجه به این‌که سطح شیب‌دار دارای اصطکاک می‌باشد، کاهش انرژی مکانیکی جسم برابر کار نیروی اصطکاک در طی مسیر است.

$$W_f = E_2 - E_1 = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh$$

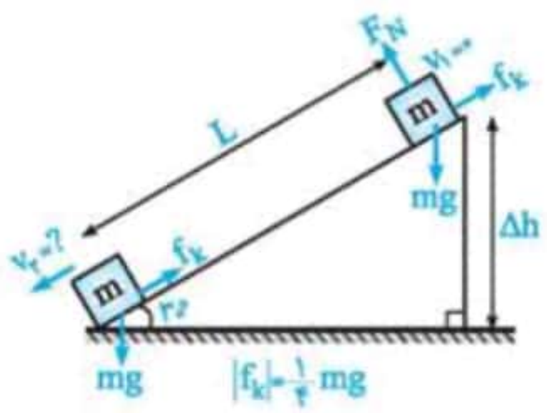
از طرفی با توجه به این‌که طبق اطلاعات داده شده در صورت سؤال، نیروی اصطکاک در مقابل حرکت جسم $\frac{1}{4}$ نیروی وزن آن است $\left(f_k = \frac{1}{4}mg\right)$، با توجه به تعریف کار $(W = Fd\cos\alpha)$، می‌توان نوشت:

$$W = Fd\cos\alpha \xrightarrow[\alpha=180^\circ]{f_k=\frac{1}{4}mg} W_f = \left(\frac{1}{4}mg\right) \times L \times \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -\frac{1}{4}mgL$$

بنابراین داریم:

$$W_f = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh \xrightarrow{h=L\sin 30^\circ=\frac{1}{2}L} -\frac{1}{4}mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mgL$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2^2 = \frac{2gL}{4} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2gL}$$



روش دوم: برای حل این مسأله با توجه به شکل روبه‌رو و استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$W_{کل} = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = K_2 - K_1 \quad (I)$$

جسم به سمت پایین (در جهت نیروی وزن) حرکت کرده و در نتیجه کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{mg} = +mg\,\Delta h = mgL\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mgL$$

هم‌چنین کار نیروی اصطکاک برابر است با:

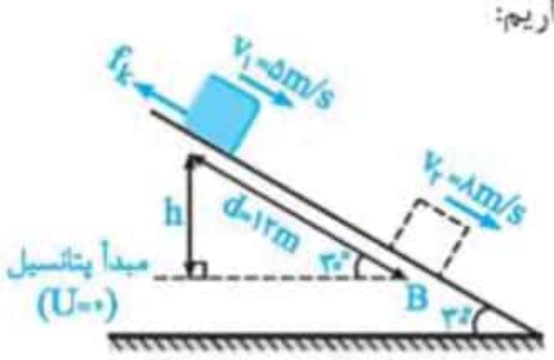
$$W_{f_k} = f_k d\cos\alpha = \frac{1}{4}mg \times L \times (-1) = -\frac{1}{4}mgL$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{1}{2}mgL - \frac{1}{4}mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow \frac{1}{4}mgL = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2gL}$$

تذکر

در جابه‌جایی بر روی سطح افقی و شیب‌دار، نیروی F_N همواره بر راستای حرکت عمود بوده و کار آن برابر صفر است $(W_{F_N} = 0)$.

۴ ۲۷۶ مطابق شکل مقابل، اگر ارتفاعی که نقطهٔ B در آن قرار دارد را مبدأ پتانسیل گرانشی درنظر بگیریم، داریم:

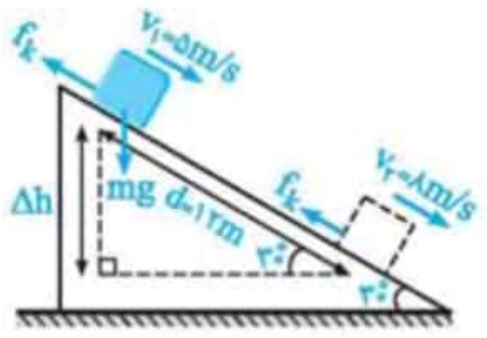


$$\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6\,m$$

$$W_{f_k} = E_2 - E_1 = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh = \frac{1}{2}\times 2\times 8^2 - \frac{1}{2}\times 2\times 5^2 - 2\times 10\times 6 = -81\,J$$

روش دیگر (با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی):



دو نیروی وارد شده بر جسم، نیروی وزن و نیروی اصطکاک می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:

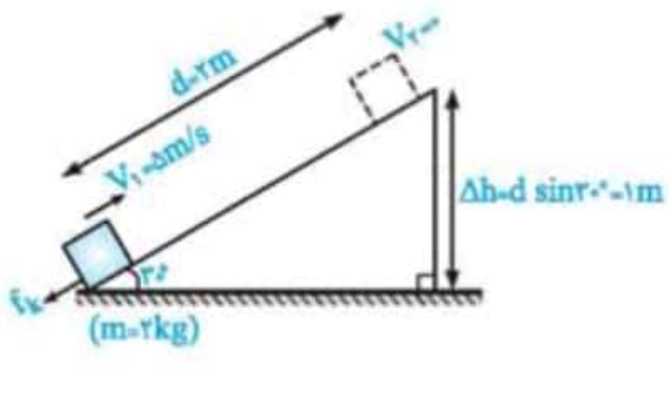
$$\Delta h = d\sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6\,m$$

$$W_{برایند} = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{f_k} + W_{mg} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow W_{f_k} + mg\,\Delta h = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow W_{f_k} + 2\times 10\times 6 = \frac{1}{2}\times 2\times (8^2 - 5^2) \Rightarrow W_{f_k} = 39 - 120 = -81\,J$$

* چون جسم به‌سمت پایین و در جهت نیروی وزن حرکت می‌کند، بنابراین کار نیروی وزن مثبت است، اما کار نیروی اصطکاک منفی است.

۳ ۲۷۷ می‌دانیم اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی مقداری ثابت است، بنابراین در این مسأله کافی است کار نیروی اصطکاک را در مسیر رفت حساب کنیم. با توجه به این‌که جسم به محل اول برمی‌گردد $(d_2 - d_1)$، کل کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت و برگشت دو برابر کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت می‌شود.



$$W_{f_k} + W_{mg} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

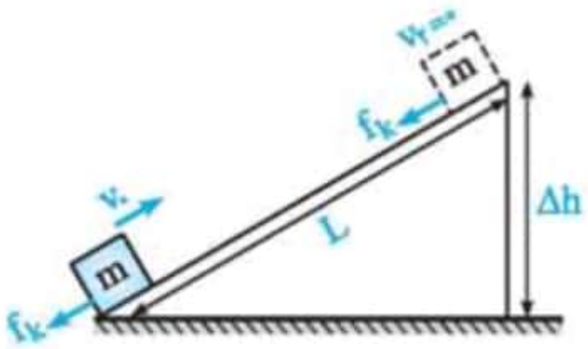
کار نیروی وزن با توجه به این که بسته بالا رفته است، برابر است با:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -2\times10\times1 = -20J$$

W_{f_k} (در مسیر رفت و برگشت) $= 2\times(-5) = -10J$: (در مسیر رفت) $W_{f_k} - 20 = -\frac{1}{2}\times2\times5^2 \Rightarrow W_{f_k} = -5J$

* توصیه می‌شود این تست را با کمک رابطهٔ $W_f = E_2 - E_1$ نیز بررسی کنید.

۲۷۸ ۳ مشابه با سؤالات قبل و با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:



$$W_{f_k} + W_{mg} = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{f_k} + (-mg\Delta h) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_0^2)$$

از طرفی داریم:

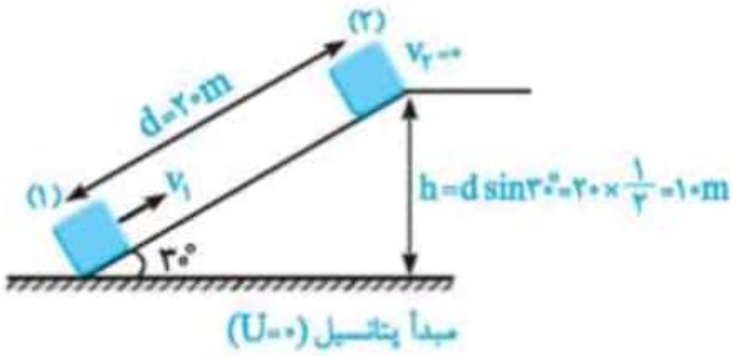
$$\Delta h = L\sin\alpha \xrightarrow{L=\frac{v_0^2}{6g\sin\alpha}} \Delta h = \frac{v_0^2}{6g} \Rightarrow W_{f_k} - mg\times\frac{v_0^2}{6g} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -\frac{1}{3}mv_0^2$$

در نتیجه کار لازم برای غلبه بر نیروی اصطکاک برابر $\frac{1}{3}mv_0^2$ می‌باشد.

* توصیه می‌شود این تست را با کمک رابطهٔ $W_f = E_2 - E_1$ نیز بررسی کنید.

۲۷۹ ۴ برای به دست آوردن حداقل تندی جسم در نقطهٔ (۱)، باید تندی آن در بالای سطح را برابر صفر در نظر بگیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

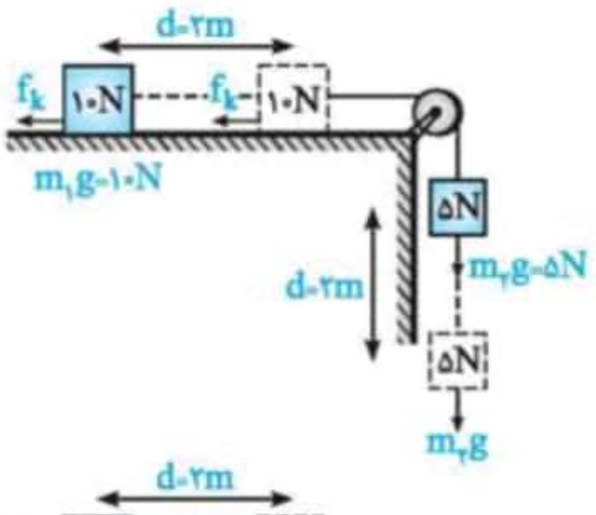


$$W_f = E_2 - E_1 = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$$

$$\xrightarrow{W_f = f_k d\cos180^\circ} 5\times20\times(-1) = (2\times10\times10) - \left(\frac{1}{2}\times2\times v_1^2\right) \Rightarrow -100 = 200 - v_1^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 300 \Rightarrow v_1 = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\,m/s$$

۲۸۰ ۱ در این مسأله، کار نیروی اصطکاک تنها به وزنهٔ ۱۰ نیوتونی و کار نیروی وزن، تنها به وزنهٔ ۵ نیوتونی اثر می‌کند و داریم:



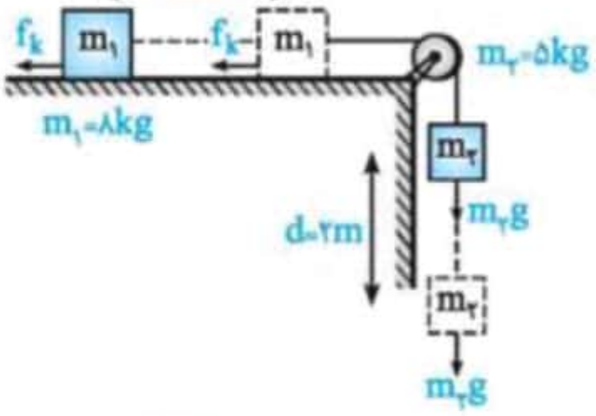
$$W_{f_k} + W_{mg} = K_2 - K_1 \;,\; K_2 = 8J \;,\; K_1 = 0$$

$$f_k d\cos180^\circ + (m_2 g)d\cos0 = 8 - 0 \Rightarrow f_k\times2\times(-1) + 5\times2 = 8$$

$$\Rightarrow -2f_k = -2 \Rightarrow f_k = 1N$$

* توصیه می‌شود این تست را با کمک رابطهٔ $W_f = E_2 - E_1$ نیز بررسی کنید.

۲۸۱ ۲ در شکل روبه‌رو نیروی وزن روی وزنهٔ m_2 و نیروی اصطکاک روی وزنهٔ m_1 کار انجام می‌دهد و مشابه با سؤال قبل می‌توان نوشت:



$W_{برایند} = K_2 - K_1$، سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند $\Rightarrow K_1 = 0$

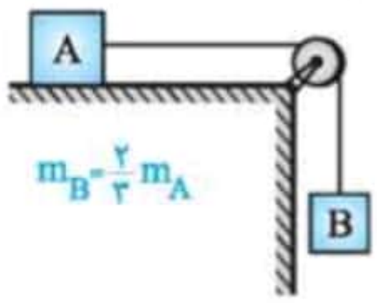
$$W_{f_k} + W_{mg} = K_2 - 0$$

$$\Rightarrow W_{f_k} + (m_2 g)d\cos0 = 80 \Rightarrow W_{f_k} + 5\times10\times2 = 80 \Rightarrow W_{f_k} = -20J$$

در نتیجه در اثر کار نیروی اصطکاک، ۲۰ ژول انرژی تلف و به گرما تبدیل می‌شود.

* توصیه می‌شود این تست را با کمک رابطهٔ $W_f = E_2 - E_1$ نیز بررسی کنید.

۲۸۲ ۳ در شکل مقابل وزنه‌ها با تندی ثابت حرکت می‌کنند و کار نیروی اصطکاک و میزان تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر است.



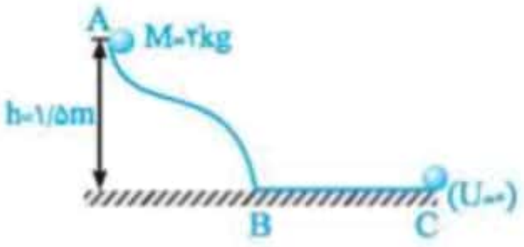
$$|\Delta K| + |W_f| = \Delta U \Rightarrow |W_f| = \Delta U$$

دقت شود افزایش انرژی درونی در سطح تماس وزنهٔ A با سطح افقی، برابر اندازهٔ کار نیروی اصطکاک است.

۲۸۳ ۳ در این سؤال، جسم بدون شتاب (با تندی ثابت) به سمت پایین حرکت می‌کند، در نتیجه انرژی جنبشی جسم ثابت مانده (گزینهٔ (۱) نادرست است) و اندازهٔ کار نیروی وزن برابر اندازهٔ کار نیروهای اتلافی وارد بر جسم است.

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{\text{تندی ثابت}} W_{mg} + W_f = 0 \Rightarrow |W_{mg}| = |W_f|$$

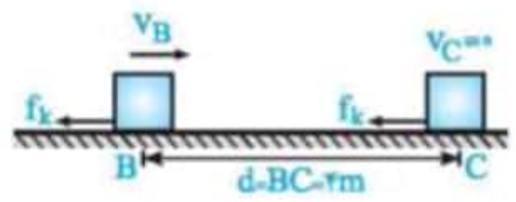
gajmarket.com



۲۸۴ ۳ در شکل روبه‌رو در قسمت AB از مسیر، نیروی اصطکاک وجود ندارد و انرژی جنبشی جسم در پایین مسیر (نقطهٔ B) برابر است با:

$$E_B = E_A \Rightarrow ۰ + K_B = U_A + ۰ \Rightarrow K_B = mgh = ۲ \times ۱۰ \times ۱/۵ = ۳۰J$$

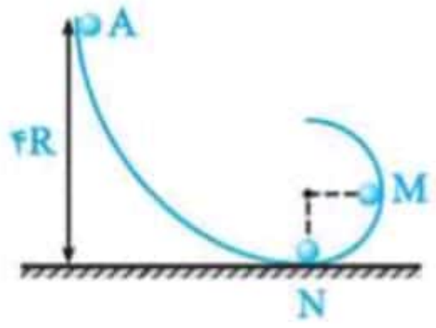
در صورتی که در قسمت BC از مسیر، نیروی یکنواخت f_k در جهت مخالف بر جسم وارد شود تا جایی که گلوله در C متوقف شود ($K_C = ۰$)، با توجه به قضیهٔ کار و انرژی می‌توان نوشت:



$$W_{f_k} = \Delta K \Rightarrow W_{f_k} = K_C - K_B = ۰ - ۳۰ = -۳۰J$$

در نتیجه نیروی اصطکاک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_{f_k} = f_k d \cos\alpha \Rightarrow -۳۰ = f_k \times ۴ \times (-۱) \Rightarrow f_k = ۷/۵N$$



۲۸۵ ۴ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی بین نقاط A و N می‌توان نوشت:

$$W_{کل} = \Delta K = K_۲ - K_۱ = ۰ \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = ۰$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -W_{mg} = -mg(۴R) \Rightarrow |W_{f_k}| = ۴mgR$$

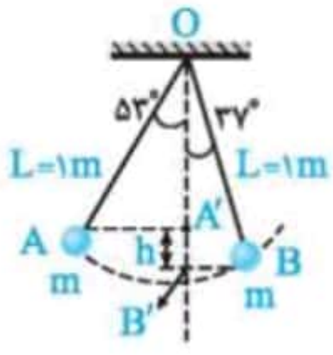
بنابراین انرژی درونی جسم و محیط به اندازهٔ کار نیروی اصطکاک، یعنی $۴mgR$، افزایش می‌یابد.

* توصیه می‌شود این تست را با کمک رابطهٔ $W_f = E_۲ - E_۱$ نیز بررسی کنید.

۲۸۶ ۴ تندی گلولهٔ آونگ در نقطه A و B برابر صفر است. هم‌چنین با در نظر گرفتن مکان نقطهٔ B به‌عنوان مبدأ پتانسیل گرانشی، می‌توان نوشت:

رابطهٔ (۱): $W_f = E_B - E_A = (K_B + U_B) - (K_A + U_A) = -U_A$

از طرفی در شکل روبه‌رو گلوله از نقطهٔ A تا B به اندازهٔ h در راستای عمودی پایین‌تر آمده است و مقدار آن برابر است با:



$$h = OB' - OA'$$

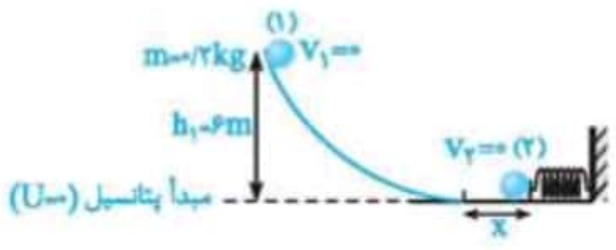
از طرفی با توجه به شکل روبه‌رو و با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$OB' = L\cos ۳۷^\circ = ۰/۸L \;,\; OA' = L\cos ۵۳^\circ = ۰/۶L$$

$$\Rightarrow h = ۰/۸L - ۰/۶L = ۰/۲L = ۰/۲ \times ۱ = ۰/۲m$$

$$\xRightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} W_f = -U_A = -mgh \Rightarrow W_f = -\frac{۱۵۰}{۱۰۰۰} \times ۱۰ \times \frac{۲}{۱۰} = -۰/۳J = -۳۰۰mJ$$

۲۸۷ ۳ در شکل مقابل گلوله در نقطهٔ (۱) از حالت سکون ($K_۱ = ۰$) شروع به حرکت می‌کند. در این حالت فنر طول عادی خود را دارد ($U_{۱\,فنر} = ۰$). پس از سقوط گلوله هنگامی‌که فنر حداکثر فشردگی خود را دارد، جسم برای یک لحظه ساکن می‌شود ($K_۲ = ۰$)، هم‌چنین در این لحظه انرژی پتانسیل گرانشی گلوله برابر صفر است ($U_۲ = ۰$)، بنابراین می‌توان نوشت:

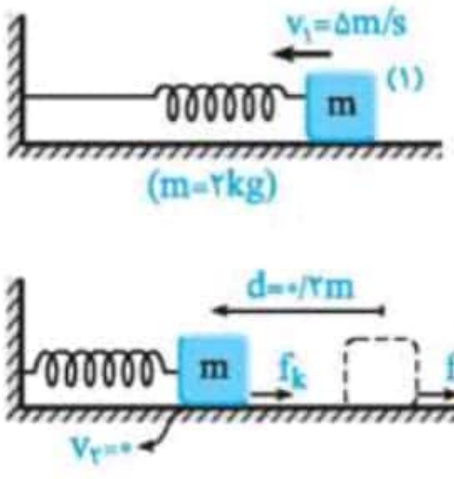


کار نیروی اصطکاک: $W_{f_k} = E_۲ - E_۱ = (K_۲ + U_۲ + U_{۲\,فنر}) - (K_۱ + U_۱ + U_{۱\,فنر})$

$$\Rightarrow W_{f_k} = U_{۲\,فنر} - mgh_۱ \Rightarrow -۲ = U_{۲\,فنر} - ۰/۲ \times ۱۰ \times ۶ \Rightarrow$$

حداکثر انرژی کشسانی فنر: $U_{۲\,فنر} = ۱۲ - ۲ = ۱۰J$

۲۸۸ ۲ هنگامی‌که فنر طول عادی خود را دارد، انرژی پتانسیل کشسانی در فنر برابر صفر و هنگامی که فنر به حداکثر فشردگی خود می‌رسد، انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره‌شده در فنر بیشینه شده و انرژی جنبشی جسم صفر می‌شود. در ادامه می‌توان نوشت:

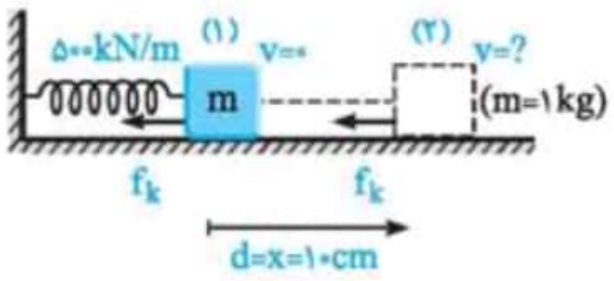


$$W_f = E_۲ - E_۱ = (K_۲ + U_{۲\,فنر}) - (K_۱ + U_{۱\,فنر})$$

$$f_k d\cos ۱۸۰^\circ = U_{۲\,فنر} - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \Rightarrow f_k \times ۰/۲ \times (-۱) = ۲۴ - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۵^۲$$

$$\Rightarrow -۰/۲ f_k = ۲۴ - ۲۵ \Rightarrow f_k = ۵N$$

۲۸۹ ۱ در شکل مقابل جسم بر روی سطح افقی حرکت می‌کند، بنابراین اگر این سطح را پتانسیل مبنا فرض کنیم، انرژی پتانسیل گرانشی بسته برابر صفر است.



برای دو نقطهٔ (۱) و (۲) (هنگام فشردگی فنر و هنگامی‌که فنر به طول عادی خود می‌رسد) می‌توان نوشت:

$$W_f = E_2 - E_1 = (K_2 + U_{2\,\text{فنر}}) - (K_1 + U_{1\,\text{فنر}})$$

در حالت اول جسم ساکن است $(K_1 = 0)$ و در حالت دوم که فنر به طول عادی خود می‌رسد، $U_{2\,\text{فنر}} = 0$ می‌باشد. دقت کنید که در طول حرکت اندازهٔ نیروی اصطکاک ثابت می‌ماند و مقدار آن برابر است با:

$$f_k = \mu_k mg \Rightarrow W_{f_k} = \mu_k mg \times x \times \cos 180^\circ = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow 0/5 \times 1 \times 10 \times 0/1 \times (-1) = \frac{1}{2} \times 1 \times v^2 - \frac{1}{2} \times 500 \times 0/1^2 \Rightarrow -0/5 = \frac{1}{2}v^2 - 2/5 \Rightarrow v^2 = 4 \Rightarrow v = 2\,m/s$$

۲۹۰ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ — توان و بازده — (تست‌های ۲۹۰ تا ۳۱۶)

تو این قسمت، ابتدا به تعریف توان و روابط مربوط به اون می‌پردازیم و بعدش میریم سراغ بازده ...

توان

برای در نظر گرفتن سرعت انجام کار، کمیتی به نام توان تعریف می‌شود. در واقع کار انجام‌شده (و یا انرژی مصرف‌شده) در واحد زمان توسط یک دستگاه، معادل با توان آن دستگاه است و از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$P = \frac{W}{t}$$

نکات مهم و کاربردی

۱ توان کمیتی نرده‌ای است و واحد آن در SI، ژول بر ثانیه یا وات می‌باشد $(J/s \equiv Wat)$، در واقع آهنگ مصرف انرژی برابر توان مصرفی می‌باشد.

۲ یکی دیگر از واحدهای رایج برای توان، اسب بخار می‌باشد. هر اسب بخار تقریباً برابر با ۷۴۶ وات است $(1hp = 746\,W)$.

۳ با توجه به رابطهٔ توان $\left(P = \frac{W}{t}\right)$، اگر مقدار کار معینی در زمان کم‌تری انجام شود، توان انجام آن کار بیشتر است.

$$P = \frac{\overset{\text{ثابت}}{W}}{t\downarrow} \Rightarrow P\uparrow$$

هم‌چنین اگر در زمان معینی، مقدار کار بیشتری انجام شود، توان انجام آن کار بیشتر است.

$$P = \frac{W\uparrow}{\underset{\text{ثابت}}{t}} \Rightarrow P\uparrow$$

۴ اگر نیروی ثابت F در مدت زمان t به جسمی وارد شده و آن را به اندازهٔ d جابه‌جا کند، توان نیروی ثابت F برابر است با:

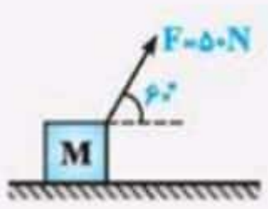
$$\begin{cases} W = Fd\cos\alpha \\ \text{سرعت متوسط}: \bar{v} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{d}{t} \Rightarrow d = \bar{v}t \end{cases} \xrightarrow{P=\frac{W}{t}} P = \frac{F\bar{v}t\cos\alpha}{t} = F\bar{v}\cos\alpha \Rightarrow \boxed{P = F\bar{v}\cos\alpha}$$

α زاویهٔ بین نیروی F و جهت حرکت متحرک است.

حال اگر متحرک با تندی ثابت v بر روی مسیر مستقیم حرکت کند، $\bar{v} = v$ بوده و داریم:

$$P = Fv\cos\alpha$$

تمرین ۱ **در شکل زیر، وزنهٔ M که اصطکاک آن با سطح ناچیز است، از حال سکون به حرکت درمی‌آید و در مدت ۵ ثانیه، ۱۰ متر روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. متوسط توان مفید آن چند وات است؟** (M.K.A)

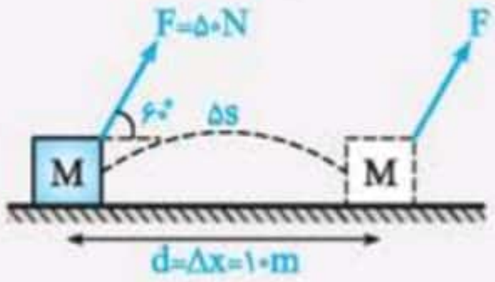


۱) $50\sqrt{3}$ ۲) $25\sqrt{3}$ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

پاسخ **روش اول:** ابتدا با استفاده از رابطهٔ $W = Fd\cos\alpha$ کار انجام شده و سپس توان نیروی F را به دست می‌آوریم:

کار: $W = 50 \times 10 \times \frac{1}{2} = 250\,J$ ، $t = 5s \Rightarrow$ توان: $P = \frac{W}{t} = \frac{250}{5} = 50\,W$ (گزینهٔ ۳)

روش دوم: توان متوسط نیروی ثابت F (یا متوسط کار نیروی F در هر ثانیه)، از رابطهٔ $P = F\bar{v}\cos\alpha$ به دست می‌آید و داریم:



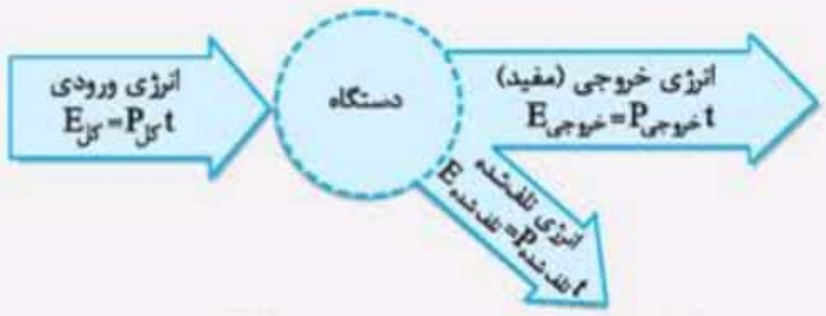
$$\alpha = 60^\circ \ , \ F = 50\,N \ , \ \Delta x = 10\,m \ , \ \Delta t = 5s \Rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2\,m/s$$

توان نیروی F: $P = 50 \times 2 \times \cos 60^\circ = 50 \times 2 \times \frac{1}{2} = 50\,W$ (گزینهٔ ۳)

gajmarket.com

بازده

به‌طور کلی هر دستگاهی فقط بخشی از انرژی ورودی را به انرژی موردنظر ما تبدیل می‌کند که به آن **انرژی مفید** گویند. بازده عبارت است از نسبت کار (انرژی) یا توان مفید به کل کار (انرژی) یا توان ورودی به یک سیستم. به عبارت دیگر، بازده بیانگر این است که چند درصد از توان کل مصرف شده به توان مفید تبدیل می‌شود.



$$\eta=\frac{P_{مفید}}{P_{کل}}\times ۱۰۰ \quad \text{یا} \quad \eta=\frac{W_{مفید}}{W_{کل}}\times ۱۰۰ \ (\text{یا } Ra)$$

نکته۱ کار یا توان تلف شده از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

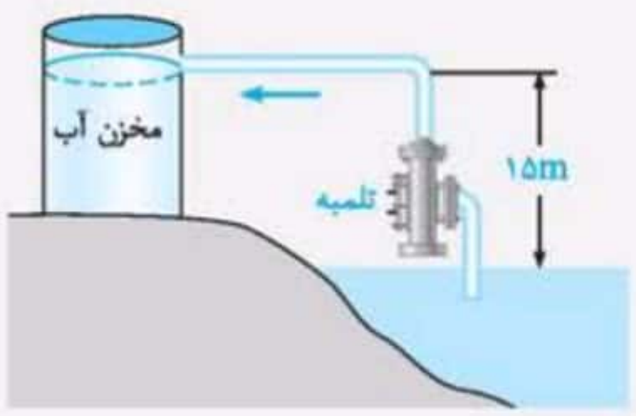
$$\begin{cases} W_{تلف\ شده}=W_{کل}-W_{مفید} \\ P_{تلف\ شده}=P_{کل}-P_{مفید} \end{cases}$$

نکته۲ با توجه به نکتهٔ فوق، بازده از روابط زیر نیز به دست می‌آید:

$$\eta=\frac{W_{کل}-W_{تلف}}{W_{کل}}\times ۱۰۰=\left(۱-\frac{W_{تلف}}{W_{کل}}\right)\times ۱۰۰=\frac{W_{مفید}}{W_{مفید}+W_{تلف}}\times ۱۰۰$$

$$\eta=\frac{P_{کل}-P_{تلف}}{P_{کل}}\times ۱۰۰=\left(۱-\frac{P_{تلف}}{P_{کل}}\right)\times ۱۰۰=\frac{P_{مفید}}{P_{مفید}+P_{تلف}}\times ۱۰۰$$

تمرین۲ **تلمبه‌ای با توان ورودی $۱۵kW$ در هر ثانیه ۷۰ لیتر آب دریاچه‌ای به چگالی $۱۰^۳ kg/m^۳$ را مطابق شکل روبه‌رو تا ارتفاع ۱۵ متری مخزنی می‌فرستد. بازده تلمبه چند درصد است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$** (کتاب درسی)



۱) ۳۵ ۲) ۵۰

۳) ۷۰ ۴) ۹۰

پاسخ انرژی الکتریکی ورودی به تلمبه برابر است با:

$$E_{ورودی}=Pt=۱۵\times ۱۰^۳\times ۱=۱۵\times ۱۰^۳ J$$

جرم هر لیتر آب دریاچه برابر $۱kg$ و کار مفید تلمبه برابر است با:

$$E_{خروجی}=mg(h_۲-h_۱)=۷۰\times ۱۰\times (۱۵-۰)=۷۰\times ۱۰\times ۱۵ J$$

در محاسبهٔ بالا، مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح آب دریاچه گرفته‌ایم. درصد بازده تلمبه برابر است با:

$$\text{بازده برحسب درصد}=\frac{۷۰\times ۱۰\times ۱۵}{۱۵\times ۱۰^۳}\times ۱۰۰=۷۰\% \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

لازم است توجه کنید که بخشی از توان ورودی تلمبه به دلیل اصطکاک آب در حال حرکت با جدارهٔ داخلی لوله تلف می‌شود.

آهنگ مصرف انرژی، همان توان است که کمیتی نرده‌ای می‌باشد.

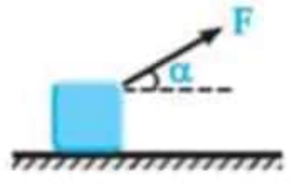
$$\begin{cases} P=\frac{W}{\Delta t} \Rightarrow \text{وات}\equiv\frac{J}{s} \\ K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow J\equiv kg(m/s)^۲ \end{cases} \Rightarrow \text{وات}\equiv\frac{kg(m/s)^۲}{s}=\frac{kg.m^۲}{s^۳}$$

۲۹۱ ۴ وزنهٔ دو کیلوگرمی توسط شخص نگه داشته شده و جابه‌جایی ندارد $(d=۰)$، بنابراین کار انجام شده توسط شخص بر روی وزنه برابر صفر و در نتیجه توان شخص نیز برابر صفر است.

کار انجام شده: $W=Fd\cos\alpha=۰ \Rightarrow P=\frac{W}{t}=۰$

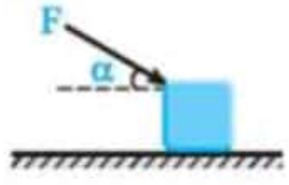
۲۹۲ ۳ در هر دو حالت، زاویهٔ بین نیروی وارد شده از طرف شخص و جابه‌جایی جسم یکسان است، بنابراین کار انجام شده توسط شخص در هر دو حالت با هم برابر است.

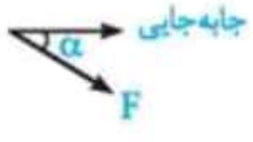
شکل(۱):





شکل(۲):





$$\left.\begin{aligned} W_۱&=Fd\cos\alpha \\ W_۲&=Fd\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_۱=W_۲$$

$$P=\frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t_۱=\Delta t_۲]{W_۱=W_۲} P_۱=P_۲$$

۲ ۲۹۳ هر یک از موتورهای هواپیما، نیرویی برابر $۲\times۱۰^۵ N$ در جهت حرکت هواپیما بر آن وارد می‌کنند. بنابراین کار انجام شده توسط هر موتور در $۱۸\times۱۰^۳ m$ جابه‌جایی برابر است با:

$$W = Fd\cos\alpha = ۲\times۱۰^۵\times۱۸\times۱۰^۳\times\cos۰ = ۳۶\times۱۰^۸ J$$

بنابراین توان متوسط هر موتور برابر است با:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۳۶\times۱۰^۸}{۶۰} = ۶\times۱۰^۷ W \xrightarrow[\text{تبدیل وات به اسب بخار}]{\div ۷۴۶} P = \frac{۶\times۱۰^۷}{۷۴۶} \simeq ۸\times۱۰^۴ hp$$

۲ ۲۹۴ از آن‌جایی که از اصطکاک صرف نظر شده و اتومبیل در راستای افق حرکت می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت کار انجام شده توسط موتور اتومبیل، تماماً به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود و با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$m = ۹۰۰kg \ , \ v_۰ = ۰ \ , \ t = ۱۰s \ , \ v_۲ = ۷۲km/h = \frac{۷۲}{۳/۶} m/s = ۲۰m/s$$

کار موتور اتومبیل: $W_F = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۰^۲) = \frac{۱}{۲}\times۹۰۰\times(۲۰^۲ - ۰) = ۱۸۰۰۰۰J$

توان متوسط اتومبیل: $\overline{P} = \frac{W_F}{t} = \frac{۱۸۰۰۰۰}{۱۰} = ۱۸۰۰۰W = ۱۸kW$

۲ ۲۹۵ **روش اول:** ابتدا جابه‌جایی جسم را در مدت ۲۰ ثانیه به‌دست می‌آوریم:

$$a = ۰/۵m/s^۲ \ , \ v_۰ = ۰ \ , \ m = ۵kg \ , \ t = ۲۰s$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + \cancel{v_۰^{\,۰}}t = ۰/۲۵t^۲ \xrightarrow{t=۲۰s} \Delta x = ۱۰۰m$$

از طرفی برایند نیروهای وارد بر جسم برابر است با:

$$F = ma = ۵\times۰/۵ = ۲/۵N$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{Fd\cos\alpha}{t} = \frac{۲/۵\times۱۰۰\times۱}{۲۰} = ۱۲/۵W$$

روش دوم: با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار انجام شده توسط نیروی برایند، برابر تغییرات انرژی جنبشی جسم است و داریم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۰^۲) \ , \ v_۰ = ۰ \ , \ v_۲ = at = ۰/۵t \xrightarrow{t=۲۰s} v_۲ = ۱۰m/s$$

کار نیروهای برایند: $W_t = \frac{۱}{۲}\times۵(۱۰^۲ - ۰) = ۲۵۰J \Rightarrow$ توان نیروی برایند $= \frac{W_t}{t} = \frac{۲۵۰}{۲۰} = ۱۲/۵W$

۲ ۲۹۶ همان‌طور که می‌دانیم، اگر جسمی با تندی ثابت حرکت کند، توان نیروی F برابر $P = Fv\cos\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$P = Fv\cos۰ = Fv$$

۱ ۲۹۷ جسم تحت تأثیر نیروی ثابت F و با **شتاب ثابت** حرکت می‌کند. در صورتی که پس از مدت t ثانیه تندی آن به v برسد، با توجه به رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x = \frac{v_۲ + v_۱}{۲}\times\Delta t \Rightarrow d = \frac{v+۰}{۲}\times t = \frac{vt}{۲}$$

در این صورت کار انجام شده و متوسط کار نیروی F در هر ثانیه (توان متوسط نیروی F) برابر است با:

کار نیروی F: $W_F = Fd\overbrace{\cos\alpha}^{۱} = \frac{Fvt}{۲} \Rightarrow$ توان متوسط: $\overline{P} = \frac{W_F}{t} = \frac{\frac{Fvt}{۲}}{t} = \frac{۱}{۲}Fv$

دید دیگر: همان‌طور که می‌دانیم، توان متوسط از رابطهٔ $\overline{P} = F\overline{v}$ نیز به دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت: $\overline{v} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \xrightarrow[v_۲ = v]{v_۱ = ۰} \overline{v} = \frac{v}{۲}$

$$\overline{P} = F\overline{v} = F\times\left(\frac{v}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}Fv$$

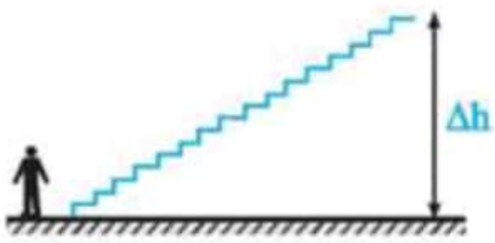
۱ ۲۹۸ جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند $(\Delta K = ۰)$، بنابراین کار انجام شده توسط موتور الکتریکی برابر مقدار افزایش انرژی پتانسیل گرانشی جسم است و کافی است تغییر ارتفاع جسم را در مدت ۵۰ ثانیه به دست آوریم:

کار انجام شده توسط موتور الکتریکی: $W = mg\Delta h = ۲۰۰\times۱۰\times۶۰۰ = ۱۲۰۰۰۰۰J \Rightarrow \Delta h = vt = ۱۲\times۵۰ = ۶۰۰m$

توان موتور: $P = \frac{W}{t} = \frac{۱۲۰۰۰۰۰}{۵۰} = ۲۴۰۰۰W = ۲۴kW$

gajmarket.com

۲۹۹ ۳ ابتدا مقدار ارتفاعی را که شخص در راستای قائم بالا می‌رود به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta h = ۵۰ \times \underbrace{۳۰}_{\text{ارتفاع یک پله}} = ۱۵۰۰\,cm = ۱۵\,m$$

حال مشابه با سؤال قبل، داریم:

$$W_F = mg\Delta h = ۷۰ \times ۱۰ \times ۱۵ = ۱۰۵۰۰\,J$$

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{۱۰۵۰۰}{۶۰} = ۱۷۵\,W$$

تذکر با توجه به این‌که تندی حرکت شخص در پایین و بالای پله‌ها صفر می‌شود و سطح بدون اصطکاک است، داریم:

$$W_{کل} = \Delta K \xrightarrow{\Delta K = ۰} W_{وزن} + W_{شخص} = ۰ \Rightarrow W_{شخص} = -W_{وزن} = -(-mg\Delta h) = mg\Delta h$$: قضیهٔ کار و انرژی جنبشی

* حتی اگر شخصی با تندی ثابت نیز حرکت کند، دوباره عبارت فوق صحیح است.

۳۰۰ ۳ با توجه به مسائل قبل، کار انجام شده توسط شخص برابر افزایش انرژی پتانسیل گرانشی می‌باشد و داریم:

$$m = ۶۰kg\ ,\ t = ۲۰min = ۲۰ \times ۶۰s\ ,\ \Delta h = ۵۰۰m\ ,\ g = ۱۰m/s^۲ \Rightarrow P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{۶۰ \times ۱۰ \times ۵۰۰}{(۲۰ \times ۶۰)} = ۲۵۰\,W$$

۳۰۱ ۲ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کل کار انجام شده بر روی اتاقک بالابر (شامل کار نیروی وزن و کار نیروی موتور بالابر) برابر تغییر انرژی جنبشی آن است. از طرفی تندی حرکت جسم در ابتدا و انتهای حرکت صفر است. بنابراین کار نیروی موتور بالابر، هم‌اندازهٔ کار نیروی وزن (برابر تغییر انرژی پتانسیل اتاقک بالابر) است.

$$W_{وزن} + W_{موتور} = \cancel{K_۲}^{\,۰} - \cancel{K_۱}^{\,۰} \Rightarrow W_{موتور} = -W_{وزن} \xrightarrow{W_{وزن} = -mg(h_۲ - h_۱)} W_{موتور} = mg(h_۲ - h_۱)$$

$$W_{موتور} = ۵۰۰ \times ۱۰ \times ۶/۲ = ۳۱ \times ۱۰^۳\,J \Rightarrow P_{موتور} = \frac{W_{موتور}}{t} = \frac{۳۱ \times ۱۰^۳}{۱۰} = ۳۱۰۰\,W$$

۳۰۲ ۱ پمپ ماشین آتش‌نشانی، در هر دقیقه (۶۰ ثانیه)، ۷۵ کیلوگرم آب ساکن $(v_۱ = ۰)$ را با تندی $v_۲ = ۲۰m/s$ به سمت بیرون می‌فرستد، بنابراین کار انجام شده توسط پمپ برابر است با:

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - \cancel{v_۱^۲}^{\,۰}) = \frac{۱}{۲} \times ۷۵ \times ۲۰^۲ = ۱۵۰۰۰\,J$$: کار انجام شده

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۱۵۰۰۰}{۶۰} = ۲۵۰\,W \xrightarrow{۱hp = ۷۵۰W} \text{توان پمپ برحسب اسب بخار} = \frac{۲۵۰}{۷۵۰} = \frac{۱}{۳}hp$$: توان پمپ

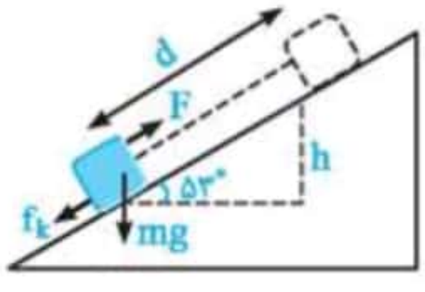
۳۰۳ ۴ با توجه به این‌که حرکت با تندی ثابت انجام می‌شود، توان موتور خودرو از رابطهٔ $P = Fv$ به دست می‌آید و داریم:

$$P = ۱۲kW = ۱۲۰۰۰\,W\ ,\ v = ۲۰m/s \Rightarrow F = \frac{P}{v} = \frac{۱۲ \times ۱۰^۳}{۲۰} = ۶۰۰\,N$$: نیروی موتور خودرو

در ادامه از آن‌جایی که خودرو با تندی ثابت در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند، برایند نیروهای وارد بر آن صفر بوده و در نتیجه اندازهٔ نیروهای مقاوم در برابر حرکت برابر اندازهٔ نیروی موتور و برابر ۶۰۰N می‌باشد.

۳۰۴ ۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۹)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳۰۵ ۲ فرض کنید جسم به اندازهٔ d با تندی ثابت بر روی سطح شیب‌دار به سمت بالا جابه‌جا شده است. با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:



$$W_{کل} = \cancel{\Delta K}^{\,۰} \Rightarrow W_{کل} = ۰ \Rightarrow W_F + W_{f_k} + W_{mg} + \cancel{W_N}^{\,۰} = ۰$$

$$\Rightarrow W_F + f_k d\cos(۱۸۰^\circ) - mgh = ۰$$

$$\xrightarrow{h = d\sin ۵۳^\circ = ۰/۸d} W_F + ۱۲d \times (-۱) - ۱۰ \times ۱۰ \times (۰/۸d) = ۰ \Rightarrow W_F = ۹۲d$$

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{۹۲d}{t} = ۹۲ \times v = ۹۲ \times ۵ = ۴۶۰\,W$$: توان نیروی F

۳۰۶ ۱ در این مسأله بازده سامانه برابر ۸۰ درصد است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\eta = \frac{\text{توان مفید}}{\text{کل توان}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ = \frac{P_{مفید}}{P_{مفید} + P_{تلف‌شده}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{P_{مفید}}{P_{مفید} + P_{تلف‌شده}} = \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow P_{تلف‌شده} = \frac{۱}{۴}P_{مفید}$$

۴ ۳۰۷ توان تلف شده در موتور الکتریکی به گرما تبدیل می‌شود و داریم:

$$P_{\text{ورودی}} = ۴۰۰\,W \;,\; \eta = ۷۵٪ \Rightarrow P_{\text{تلف شده}} = ?$$

$$\eta = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{P_{\text{مفید}}}{۴۰۰} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = ۳۰۰\,W \Rightarrow P_{\text{تلف شده}} = ۴۰۰ - ۳۰۰ = ۱۰۰\,W$$

در مدت یک دقیقه (۶۰s) انرژی گرمایی تولید شده برابر است با:

$$P_{\text{تلف شده}} = \frac{E_{\text{تلف شده}}}{t} \Rightarrow E_{\text{تلف شده}} = P_{\text{تلف شده}}\, t = ۱۰۰ \times ۶۰ = ۶۰۰۰\,J = ۶\,kJ$$

۲ ۳۰۸ توان ورودی تلمبهٔ برقی با بازده ۹۵ درصد برابر ۲kW است، بنابراین ابتدا باید توان مفید آن را به دست آوریم:

$$\eta = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۹۵}{۱۰۰} = \frac{P_{\text{مفید}}}{۲۰۰۰} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = ۱۹۰۰\,W$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ توان $P = \frac{W}{t}$ می‌توان نوشت:

$$W = mg\Delta h \;,\; \Delta h = ۹/۵\,m \;,\; g = ۱۰\,m/s^۲ \;,\; t = ۶۰\,s$$

$$\Rightarrow \cancel{۱۹۰۰}^{۲۰۰} = \frac{m \times ۱۰ \times \cancel{۹/۵}^{۱}}{۶۰} \Rightarrow \text{جرم آب}: m = ۱۲۰۰\,kg = ۱/۲ \times ۱۰^۳\,kg$$

دقت: اگر m کیلوگرم آب را به اندازهٔ Δh به سمت بالا جابه‌جا کنیم، حداقل کار لازم $mg\Delta h$ است.

۱ ۳۰۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) بازده مولد A بیشتر از مولد B است، در نتیجه با توجه به رابطهٔ $\eta = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{ورودی}}}$ به ازای سوخت یکسان ($W_{\text{ورودی}}$ یکسان) برای دو مولد، مولد A کار مفید بیشتری انجام می‌دهد.

$$\uparrow \eta = \frac{\uparrow W_{\text{مفید}}}{\underbrace{W_{\text{ورودی}}}_{\text{ثابت}}} \xrightarrow{\eta_A > \eta_B} (W_{\text{مفید}})_A > (W_{\text{مفید}})_B$$

۲) توان مولد A کم‌تر از توان مولد B است، در نتیجه با توجه به رابطهٔ $P = \frac{W}{t}$ به ازای یک مقدار کار یکسان (W)، زمان لازم برای مولد A بیشتر است.

$$\downarrow P = \frac{\overbrace{W}^{\text{ثابت}}}{\uparrow t} \xrightarrow{P_A < P_B} t_A > t_B$$

بنابراین مولد A نسبت به مولد B، کار بیشتر را در زمان بیشتر انجام می‌دهد.

۲ ۳۱۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در مدت زمان مساوی (یک ساعت) کار مفید ماشین B بیشتر از کار مفید ماشین A است $(W_{\text{مفید}_B} = ۲۸\,kJ > W_{\text{مفید}_A} = ۱۵\,kJ)$، در نتیجه توان ماشین B بیشتر است $\left(P = \frac{W}{t}\right)$.

۲) با توجه به رابطهٔ $\eta = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{مصرفی}}} \times ۱۰۰$، بازده هر یک از ماشین‌ها برابر است با:

$$\eta_A = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{مصرفی}}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۵}{۲۰} \times ۱۰۰ = ۷۵٪ \;,\; \eta_B = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{مصرفی}}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۸}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۷۰٪$$

بنابراین بازده ماشین B کم‌تر از بازده ماشین A است.

۴ ۳۱۱ توان مفید ماشین برابر است با:

$$\eta = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = \eta \times P_{\text{ورودی}} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \times ۲۰۰ = ۱۶۰\,W$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ توان می‌توان نوشت:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W}{t} = \frac{mg\Delta h}{t} \;,\; P_{\text{مفید}} = ۱۶۰\,W \;,\; mg = ۴۰۰\,N \;,\; \Delta h = ۱۰\,m \Rightarrow ۱۶۰ = \frac{۴۰۰ \times ۱۰}{t} \Rightarrow t = ۲۵\,s$$

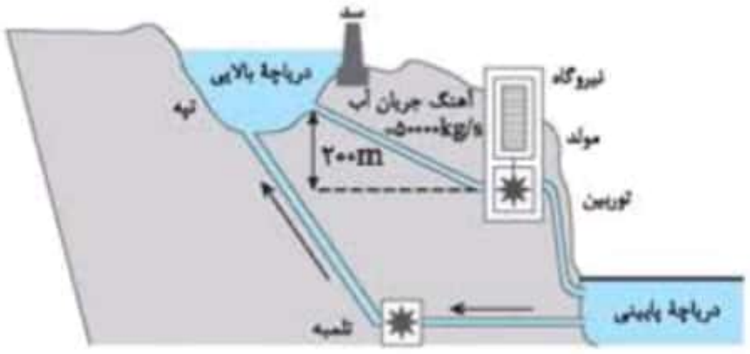
۳ ۳۱۲ کار مفید انجام شده بر روی جسم ۲ کیلوگرمی با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی برابر انرژی جنبشی آن، هنگام رسیدن به زمین است:

$$W_{\text{مفید}} = |\Delta K| = \frac{۱}{۲} m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times (۴\sqrt{۵})^۲ = ۸۰\,J$$

بنابراین بازده این ماشین برابر است با:

$$\eta = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{کل}}} \times ۱۰۰ = \frac{۸۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = ۸۰٪ \text{ یا } ۰/۸$$

۲ ۳۱۳ شکل روبه‌رو یک نیروگاه تلمبه ـ ذخیره‌ای را نشان می‌دهد که در آن در هر ثانیه ۵۰۰۰۰kg آب به اندازهٔ ۲۰۰ متر در راستای قائم جریان می‌یابد و ۴۰ درصد از تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی در آن تبدیل به انرژی الکتریکی می‌شود، در نتیجه می‌توان نوشت:



انرژی الکتریکی تولید شده در هر ثانیه: $E = ۰/۴ \times \Delta U = ۰/۴ \times mg\Delta h$

$$= ۰/۴ \times ۵ \times ۱۰^۴ \times ۱۰ \times ۲۰۰ = ۴ \times ۱۰^۷\,J$$

توان خروجی نیروگاه: $P = \frac{E}{t} = \frac{۴ \times ۱۰^۷\,J}{۱s} = ۴ \times ۱۰^۷\,J/s \;(\text{یا } W)$

gajmarket.com

۴ ۳۱۴ بازده این سد برابر ۸۰ درصد بوده و توان الکتریکی مولد (توان مفید سد) برابر ۲۰۰MW می‌باشد. بنابراین توان کل ورودی (ناشی از نیروی گرانش آب)، برابر است با:

$$\eta = \frac{P_{مفید}}{P_{ورودی}} \Rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۲۰۰}{P_{ورودی}} \Rightarrow P_{ورودی} = \frac{۲۰۰۰}{۸} MW = ۲۵۰MW$$

بنابراین انرژی ورودی ناشی از انرژی پتانسیل گرانشی آب برابر ۲۵۰MJ در هر ثانیه می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$U = mgh \Rightarrow ۲۵۰\times۱۰^{۶} = m\times۱۰\times۱۰۰ \Rightarrow m = ۲۵۰\times۱۰^{۳}kg$$: انرژی ورودی در هر ثانیه

از طرفی حجم هر ۱۰۰۰kg آب برابر یک متر مکعب ($۱m^{۳}$) می‌باشد. بنابراین حجم $۲۵۰\times۱۰^{۳}kg$ آب برابر است با:

$$V = \frac{۲۵۰\times۱۰^{۳}}{۱۰۰۰} = ۲۵۰m^{۳}$$

بنابراین در هر ثانیه باید $۲۵۰m^{۳}$ آب از بالای سد بر روی پره‌های توربین واقع در پایین سد ریخته شود.

۴ ۳۱۵

$$\text{بازده تبدیل انرژی بدن} = \frac{\text{انرژی مصرف شده برای انجام فعالیت}}{\text{مقدار انرژی مورد نیاز}}$$

حال کافی است انرژی مورد نیاز بدن، برای ۵۰ دقیقه نشستن در کلاس را به‌دست آوریم:

$$\text{انرژی مصرف شده} = ۱۲kJ/min\times۵۰min = ۶۰۰kJ \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۶۰۰kJ}{E} \Rightarrow$$ مقدار انرژی مورد نیاز: $E = \frac{۶۰۰\times۱۰۰}{۲۵} = ۲۴۰۰kJ$

اکنون می‌توانیم مقدار کرهٔ مورد نیاز را محاسبه کنیم:

$$۲۴۰۰kJ = m\times۳۰kJ/gr \Rightarrow m = ۸۰gr$$

توضیح: در این مثال ۲۴۰۰ کیلوژول انرژی وارد بدن شخص می‌شود، ولی تنها ۶۰۰ کیلوژول از آن در بدن، تبدیل به انرژی برای حضور در کلاس می‌شود.

۴ ۳۱۶ ابتدا مقدار انرژی موردنیاز برای نیم‌ساعت دوچرخه‌سواری را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ مصرف انرژی} = \frac{\text{انرژی مصرف شده}}{\text{مدت زمان دوچرخه‌سواری}} \Rightarrow$$ انرژی مصرف‌شده $= ۴۲kJ/min\times۳۰min = ۱۲۶۰kJ$

مطابق صورت سؤال، اگر میزان کل انرژی جذب شده از شیر برابر E باشد، فقط $\frac{۱}{۳}$ آن صرف دوچرخه‌سواری می‌شود. بنابراین داریم:

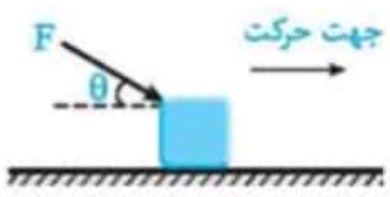
$$\frac{۱}{۳}E = ۱۲۶۰kJ \Rightarrow E = ۳۷۸۰kJ$$

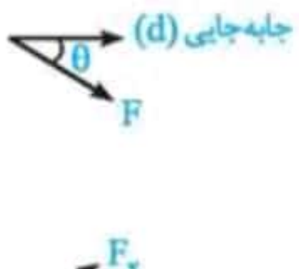
حال با توجه به این‌که میزان انرژی قابل جذب موجود در شیر $۲/۷kJ/gr$ است، مقدار شیر لازم برای تأمین ۳۷۸۰kJ انرژی را به سادگی به‌دست می‌آوریم:

$$۳۷۸۰kJ = ۲/۷kJ/gr\times m \Rightarrow m = \frac{۳۷۸۰}{۲/۷} = ۱۴۰۰gr$$

۳ ۳۱۷ هر دو شکل را بررسی می‌کنیم.

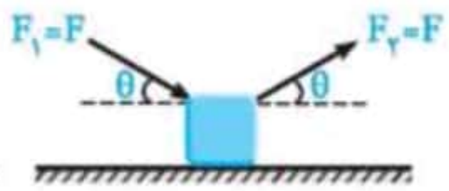
شکل (۱):

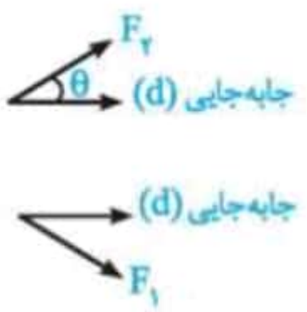




$$W = Fd\cos\theta$$

شکل (۲):

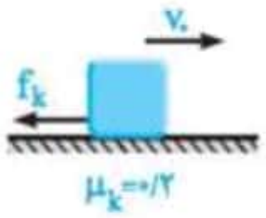




$$W_۲ = F_۲d\cos\theta = Fd\cos\theta$$
$$W_۱ = F_۱d\cos\theta = Fd\cos\theta$$
$$\Rightarrow W_۱ + W_۲ = ۲\underbrace{Fd\cos\theta}_{W} = ۲W$$

۳ ۳۱۸ می‌دانیم بردار جابه‌جایی مستقل از مسیر حرکت بوده و تنها به نقطهٔ ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد، بنابراین در هر سه مسیر، جابه‌جایی (d) برای جرم M یکسان است. از طرفی با توجه به صورت سؤال در همهٔ مسیرها نیروی F با جهت و اندازهٔ یکسان (مفهوم نیروی ثابت $\vec{F}$ در صورت سؤال) بر جرم وارد می‌شود، در نتیجه طبق رابطهٔ $W = Fd\cos\alpha$ کار انجام شده توسط نیروی F در هر سه مسیر یکسان است.

۱ ۳۱۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: (محاسبهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم):

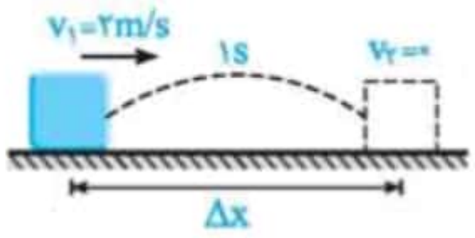
$$f_k = \mu_k mg = ۰/۲\times۲\times۱۰ = ۴N$$

گام دوم: (محاسبهٔ جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ آخر حرکت):

از آن‌جایی که نیروی اصطکاک ثابت است، بنابراین جسم با شتاب ثابت و به صورت کندشونده متوقف می‌شود. بنابراین شتاب جسم برابر است با:

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{۴}{۲} = -۲m/s^{۲}$$

با توجه به مفهوم شتاب، اندازهٔ سرعت (تندی) جسم در هر ثانیه $۲m/s$ کاهش می‌یابد، بنابراین در ثانیهٔ آخر حرکت، اندازهٔ سرعت آن از $۲m/s$ به صفر می‌رسد. جابه‌جایی جسم در این بازهٔ زمانی به صورت زیر به دست می‌آید:



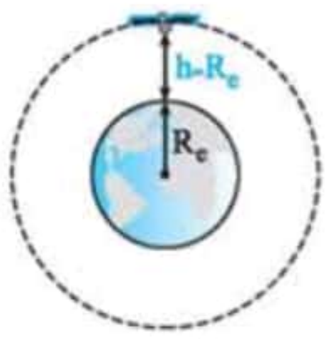
$$\Delta x = \frac{v_۲ + v_۱}{۲} \times \Delta t = \frac{۰ + ۲}{۲} \times ۱ = ۱m$$

گام سوم: (محاسبهٔ کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک در ثانیهٔ آخر حرکت):

$$W = f_k d \cos\alpha = ۴ \times ۱ \times (-۱) = -۴J$$

۴ ۳۲۰ می‌دانیم شتاب گرانشی وارد بر یک جسم با مجذور فاصلهٔ آن از مرکز زمین رابطهٔ معکوس دارد.

با توجه به شکل روبه‌رو، شتاب گرانشی در فاصلهٔ R_e از سطح زمین برابر است با:



$$\frac{g}{g_۰} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^۲ \Rightarrow g = \left(\frac{R_e}{R_e + R_e}\right)^۲ g_۰ = \frac{g_۰}{۴}$$

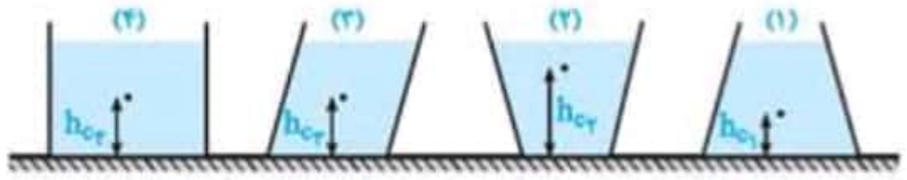
نیروی وارد بر ماهواره : $W' = mg = \frac{mg_۰}{۴}$

از طرفی با توجه به مفاهیم حرکت دایره‌ای در فیزیک پایهٔ دوازدهم، مسیر حرکت ماهواره به صورت یک دایره بوده و نیروی وارد بر جسم همواره در جهت مرکز این دایره و بر مسیر عمود است $(\cos\alpha = ۰)$، در نتیجه کار نیروی گرانش در هر بازهٔ دلخواه برابر صفر است:

$$W = W d \cos\theta \xrightarrow[\alpha = ۹۰^\circ]{W \perp d} W = ۰$$

کار نیروی گرانش ← W ، وزن ماهواره ← W

۲ ۳۲۱ کار نیروی جاذبه برابر $W = mgh_c$ است که در این رابطه h_c برابر ارتفاع نقطهٔ گرانیگاه ظرف‌ها است. در شکل‌های داده شده، نقطهٔ گرانیگاه ظرف شمارهٔ (۲) در ارتفاع بالاتری قرار دارد زیرا بیشتر جرم آب در قسمت بالای ظرف قرار گرفته است، از طرفی جرم آب درون همهٔ ظرف‌ها یکسان است، بنابراین کار نیروی جاذبه در خالی شدن آب ظرف (۲) بیشتر از سایر ظرف‌ها است.



$$h_{c_۲} > h_{c_۳} = h_{c_۴} > h_{c_۱} \Rightarrow W_۲ > W_۳ = W_۴ > W_۱$$

تذکر

این تست از مفاهیم کتاب‌های درسی قدیم بوده و فقط برای تکمیل تست‌ها در این‌جا گنجانده شده است و احتمال طرح تست از این مفاهیم بسیار کم است.

۱ ۳۲۲ با توجه به داده‌های مسأله در حالت اول می‌توان نوشت:

$$K_{۱A} = \frac{۱}{۲} K_B \Rightarrow \frac{۱}{۲} m_A v_A^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} m_B v_B^۲\right) \xrightarrow{m_A = ۲m_B} v_A^۲ = \frac{۱}{۴} v_B^۲ \Rightarrow v_B^۲ = ۴ v_A^۲$$ رابطهٔ (۱):

حال اگر تندی متحرک A به اندازهٔ $۲m/s$ افزایش یابد، انرژی جنبشی آن با متحرک B برابر می‌شود و داریم:

$$K_{۲A} = K_B \xrightarrow{v_{۲A} = v_A + ۲} \frac{۱}{۲} m_A (v_A + ۲)^۲ = \frac{۱}{۲} m_B v_B^۲$$

$$\xrightarrow{m_A = ۲m_B} (v_A + ۲)^۲ = \frac{۱}{۲} v_B^۲ \xrightarrow[v_B^۲ = ۴v_A^۲]{\text{رابطهٔ (۱)}} (v_A + ۲)^۲ = ۲ v_A^۲ \xRightarrow{\text{جذر}} v_A + ۲ = \sqrt{۲} v_A \Rightarrow v_A = \frac{۲}{\sqrt{۲} - ۱}$$

$$v_A = \frac{۲}{\sqrt{۲} - ۱} \times \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} + ۱} = ۲(\sqrt{۲} + ۱)$$

۳ ۳۲۳ **گام اول:** (محاسبهٔ تندی قطره): اگر تندی قطره باران را از بالا تا پایین ساختمان ثابت فرض کنیم، بنابراین تندی آن برابر است با:

$$\Delta y = v \Delta t \Rightarrow v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۵}{۰/۲} = ۲۵ m/s$$

گام دوم: (محاسبهٔ جرم قطره):

حجم قطره : $V' = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \simeq \frac{۴}{۳} \times ۳ \times (۱ \times ۱۰^{-۳})^۳ = ۴ \times ۱۰^{-۹} m^۳$

جرم قطره : $\rho = \frac{m}{V'} \Rightarrow m = \rho V' = \underset{kg/m^۳ \text{ برحسب}}{۱۰^۳} \times ۴ \times ۱۰^{-۹} = ۴ \times ۱۰^{-۶} kg$

گام سوم: (محاسبهٔ انرژی جنبشی قطره):

انرژی جنبشی قطره : $K = \frac{۱}{۲} m v^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۰^{-۶} \times (۲۵)^۲ = \overset{۱۲/۵}{\left(\frac{۲۵}{۲}\right)} \times ۱۰^{-۴} = ۱۰ \times ۱۰^{-۴} = ۱۰^{-۳} J$

gajmarket.com

۳۲۴ ۴ شخص در دو مرحله بر روی وزنه کار انجام می‌دهد:

مرحلهٔ اول: افزایش ارتفاع جسم به اندازهٔ ۲ متر:

$$W_1 = mgh = 1\times 10\times 2 = 20\,J$$

مرحلهٔ دوم: پرتاب جسم با تندی $5\,m/s$ از حالت سکون:

$$W_2 = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\times 1\times 5^2 = 12/5\,J$$

بنابراین کار انجام شده توسط شخص در مجموع دو مرحله برابر است با:

$$W_{کل} = W_1 + W_2 = 20 + 12/5 = 32/5\,J$$

۳۲۵ ۲ با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$W_{کل} = \Delta K = K_2 - K_1 = 0 \Rightarrow W_{فنر} + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_{فنر} = -W_{mg}$$

از طرفی جسم m به سمت پایین آمده است، بنابراین $W_{mg} = +mgh$ است و داریم:

$$W_{فنر} = -mgh$$

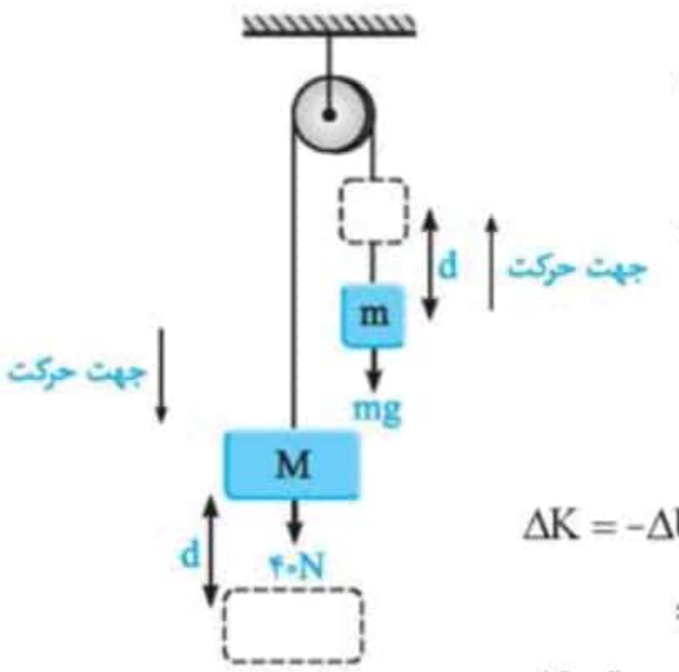
۳۲۶ ۲ همان‌گونه که در خلاصه نکات (۲) نیز بیان کردیم، کار نیروی وزن تنها به جابه‌جایی قائم جسم بستگی داشته و مستقل از مسیر و نوع حرکت است.

۳۲۷ ۲ اگر در یک جابه‌جایی کار نیروی وزن جسم مثبت باشد، یعنی جسم در راستای قائم به سمت پایین جابه‌جا شده است. بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی جسم قطعاً کاهش یافته است. اما چون از دیگر نیروهای وارد بر جسم اطلاع نداریم، انرژی جنبشی ممکن است افزایش یا کاهش یافته و یا ثابت بماند، به عبارت دیگر با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی می‌توان گفت:

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1 \Rightarrow \begin{cases} W_t > 0 \Rightarrow K_2 > K_1 \\ W_t = 0 \Rightarrow K_2 = K_1 \\ W_t < 0 \Rightarrow K_2 < K_1 \end{cases}$$

بررسی گزینهٔ (۳): اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، انرژی مکانیکی جسم ثابت بوده و تغییرات آن صفر است، در حالی‌که در این سؤال، کار نیروی وزن مثبت است. بنابراین این گزینه نادرست است.

۳۲۸ ۳ در این سؤال، یادی هم از علوم نهم می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم، به نسبت نیروی مقاوم به نیروی محرک، **مزیت مکانیکی** گویند.



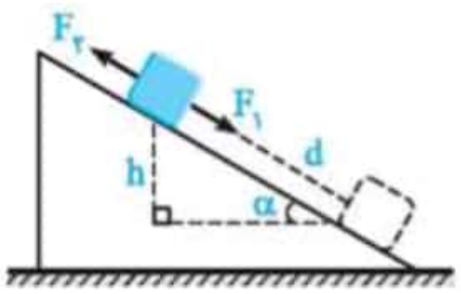
گام اول: در این سؤال، نیروی وزن جرم ۴ کیلوگرمی در جهت حرکت بوده و نیروی وزن m در برابر حرکت مخالفت می‌کند. بنابراین داریم:

$$\text{مزیت مکانیکی} = \frac{\text{نیروی مقاوم}}{\text{نیروی محرک}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{mg}{4\times 10} \Rightarrow m = 2kg$$

گام دوم: با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow K_2 - K_1 = -(mgd - Mgd) \Rightarrow K_2 = (M-m)gd = (4-2)\times 10\times 2 = 40\,J$$

۳۲۹ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، در هر دو حالت از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم:



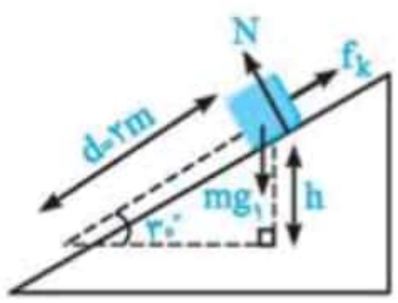
قضیهٔ کار و انرژی جنبشی در حالت کلی : $W_{کل} = \Delta K \Rightarrow W_{F_1} + W_{F_2} + W_{f_k} + W_{mg} = \Delta K$

$$\begin{cases} \text{در هنگام پایین آمدن}: \xrightarrow[\Delta K = 0]{\text{تندی ثابت}} W = 0 \Rightarrow F_1 d\cos 0 + F_2 d\cos(180^\circ) + f_k d\cos(180) + mgh = 0 \\ \Rightarrow F_1 d - F_2 d - f_k d + mgh = 0 \quad \text{رابطهٔ (۱):} \\ \text{در هنگام بالا رفتن}: \xrightarrow[\Delta K = 0]{\text{تندی ثابت}} W' = 0 \Rightarrow F_1 d\cos(180^\circ) + F_2 d\cos(0) + f_k d\cos(180^\circ) - mgh = 0 \\ \Rightarrow -F_1 d + F_2 d - f_k d - mgh = 0 \quad \text{رابطهٔ (۲):} \end{cases}$$

با جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-2f_k d = 0 \Rightarrow f_k = 0$$ جمع روابط (۱) و (۲) با یک‌دیگر $\Rightarrow$ بنابراین در این سؤال نیروی اصطکاک و در نتیجه کار آن برابر صفر است.

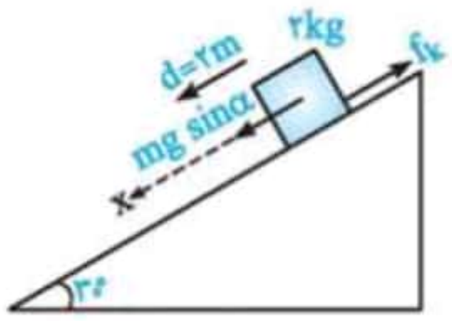
۳۳۰ ۲ **روش اول:** با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی، چون جسم با تندی ثابت به سمت پایین سطح شیب‌دار حرکت کرده است، بنابراین کار کل نیروهای انجام شده بر روی جسم صفر است.



$$W_{کل} = \Delta K = K_2 - K_1 = 0 \Rightarrow W_{mg} + W_N + W_{f_k} = 0 \Rightarrow W_{f_k} = -W_{mg}$$

$$\xrightarrow{W_{mg} = +mgh} W_{f_k} = -mgh$$

$$\xrightarrow{h = d\sin 30^\circ = 2\times\frac{1}{2} = 1\,m} W_{f_k} = -2\times 10\times 1 = -20\,J$$

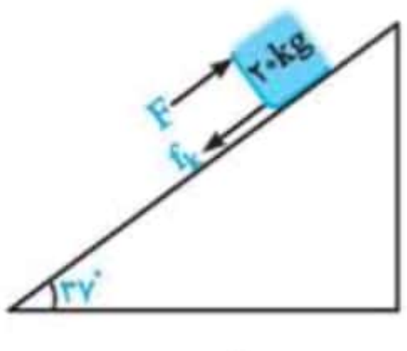


روش دوم: همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم بوده $(\alpha = 180^\circ)$ و کار آن منفی است. برای این مسأله می‌توان نوشت:

$$\text{شتاب} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow f_k = mg\sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10\,N$$

در نتیجه کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک، پس از طی ۲ متر جابه‌جایی برابر است با:

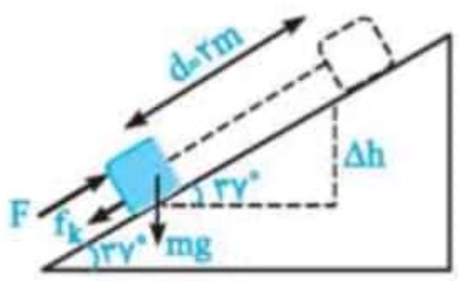
$$W_{f_k} = f_k\, d \cos 180^\circ = 10 \times 2 \times \cos 180^\circ = -20\,J$$



۲ ۳۳۱ نیرویی که از طرف سطح به صندوق وارد می‌شود دو مؤلفه دارد، یکی نیروی عمودی سطح که کار آن در این جابه‌جایی صفر است (چرا؟) و دیگری نیروی اصطکاک که در خلاف جهت حرکت جسم بر آن وارد می‌شود.

با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_{کل} = \Delta K = K_2 - K_1 \xrightarrow[K_2 = K_1]{\text{تندی ثابت}} W_{کل} = 0$$



$$W_F + W_{f_k} + W_N + W_{mg} = 0$$

$$\Rightarrow Fd\cos(0) + W_{f_k} + (-mg\Delta h) = 0 \xrightarrow{\Delta h = d\sin 37^\circ} 160 \times 2 \times 1 + W_{f_k} - 20 \times 10 \times 2 \times \frac{6}{10} = 0$$

$$\rightarrow W_{f_k} = -80\,J$$

کار نیروی وارد شده از طرف سطح: $W_R = W_N + W_{f_k} = 0 + (-80) = -80\,J$

۴ ۳۳۲

تذکر

به حاصل‌ضرب جرم در سرعت یک جسم، **تکانه** یا **اندازهٔ حرکت** آن جسم می‌گویند. $\vec{P} = m\vec{v}$ یا $P = mv$

گام اول: هنگامی که اندازهٔ حرکت جسم برابر ۱۰ واحد است، اندازهٔ سرعت (تندی) آن برابر است با:

$$P = mv = 10 \xrightarrow{m=2kg} v = \frac{10}{2} = 5\,m/s$$

از طرفی اندازهٔ سرعت (تندی) جسم در مدت ۱/۲ ثانیه از صفر به $5\,m/s$ رسیده است، بنابراین شتاب حرکت آن برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5-0}{1/2} = \frac{25}{6}\,m/s^2$$

گام دوم: با توجه به قانون دوم نیوتون، برایند نیروهای وارد برجسم $(F - f_k)$ برابر است با:

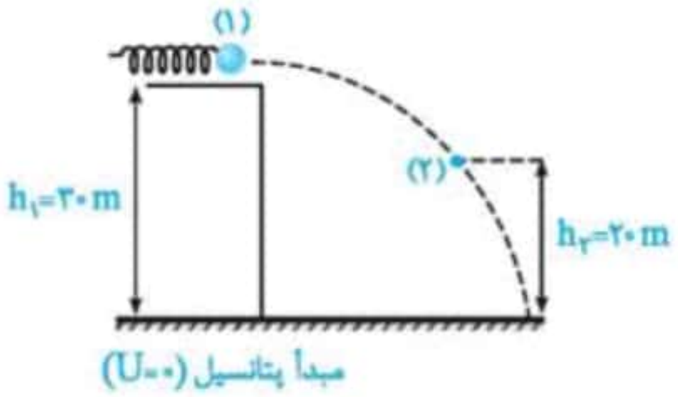
$$F - f_K = ma = 2 \times \frac{25}{6} = \frac{25}{3}\,N \xrightarrow{F=10N} f_k = \frac{5}{3}\,N$$

گام سوم: از طرفی جابه‌جایی جسم در مدت ۱/۲ ثانیه برابر است با:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \times \Delta t = \frac{0+5}{2} \times 1/2 = 3\,m \Rightarrow W_{f_k} = f_k \Delta x \cos\alpha \xrightarrow[\alpha = 180^\circ]{\cos\alpha = -1} W_{f_k} = \frac{5}{3} \times 3 \times (-1) = -5\,J$$

دقت شود که کار نیروی اصطکاک، به‌صورت گرما در مجموعه ظاهر می‌شود و در مجموع ۵J گرما در مجموعه تولید می‌شود.

* به نظر شما این سؤال را با قضیهٔ کار و انرژی جنبشی چگونه می‌توان تحلیل کرد؟

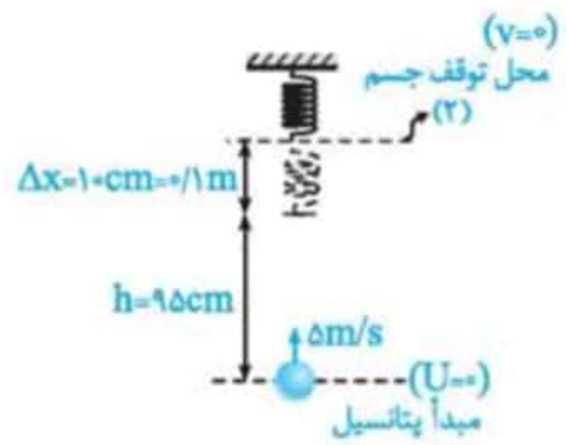


۱ ۳۳۳ با توجه به شکل مقابل، به کمک قانون پایستگی انرژی بین نقاط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 + U_{1\,فنر} = K_2 + U_2 + U_{2\,فنر}$$

$$\xrightarrow[K_2 = U_2 = mgh_2]{\text{طبق صورت سؤال}} mgh_1 + U_{1\,فنر} = 2mgh_2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{100} \times 10 \times 30 + U_{1\,فنر} = 2 \times \frac{2}{100} \times 10 \times 20 \Rightarrow U_{1\,فنر} = 2\,J$$

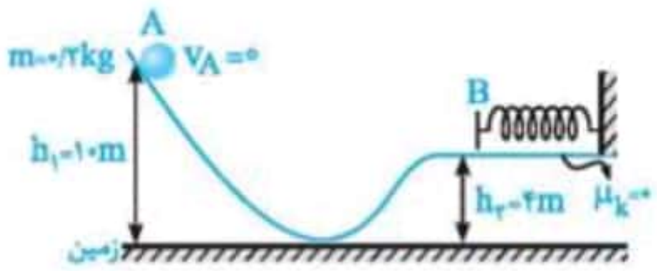


۴ ۳۳۴ در صورتی که مبدأ پتانسیل گرانشی را نقطهٔ (۱) (محل پرتاب) در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل گرانشی آن برابر صفر است. از طرفی فنر در حالت عادی است و می‌توان گفت انرژی مکانیکی جسم تنها به صورت انرژی جنبشی است $(E_1 = K_1)$. در حالت دوم پس از این‌که جسم متوقف شود، انرژی مکانیکی به صورت پتانسیل گرانشی و کشسانی ذخیره می‌شود و می‌توان نوشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 = U_{2\,فنر} + mg(h + \Delta x)$$

$$\xrightarrow{m=1kg} \frac{1}{2} \times 1 \times 5^2 = U_{2\,فنر} + 1 \times 10 \times (0/95 + 0/1) \Rightarrow 12/5 = U_{2\,فنر} + 10/5 \Rightarrow U_{2\,فنر} = 2\,J$$

gajmarket.com



۳ ۳۳۵ با توجه به شکل مقابل، در صورتی که مبدأ پتانسیل گرانشی را سطح زمین در نظر بگیریم، در نقطهٔ A داریم:

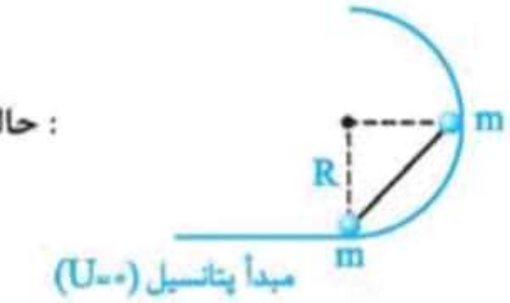
$$E = U_1 + K_1 = mgh_1 = 0/2 \times 10 \times 10 = 20J$$: انرژی مکانیکی جسم در نقطهٔ A

هنگامی که گلوله به نقطهٔ B می‌رسد، ۳۰ درصد از انرژی مکانیکی آن تلف شده و ۷۰ درصد باقی‌مانده به صورت انرژی ذخیره شده در فنر و انرژی پتانسیل گرانشی در نقطهٔ B تبدیل می‌شود:

$$E_B = 0/7E_A \Rightarrow mgh_2 + U_{فنر} = 0/7 \times 20 \Rightarrow 0/2 \times 10 \times 4 + U_{فنر} = 14 \Rightarrow U_{فنر} = 6J$$

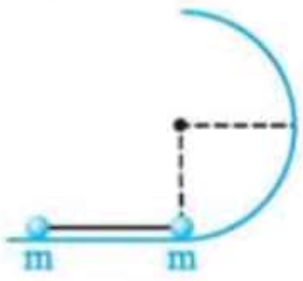
۱ ۳۳۶ با توجه به این‌که اتلاف انرژی ناچیز است، از پایستگی انرژی مکانیکی برای کل مجموعه استفاده می‌کنیم:

حالت اول :



$$E_1 = K + U = mgR$$

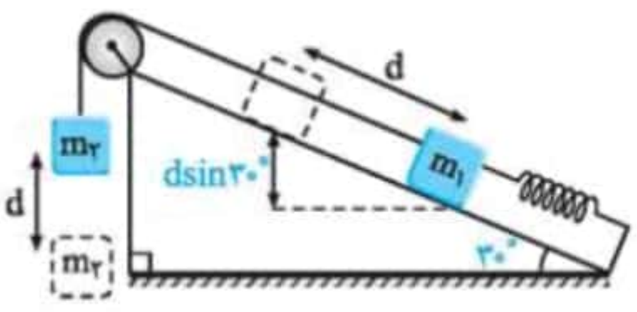
حالت دوم :



$$E_2 = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$$

$$\xrightarrow{E_1 = E_2} mgR = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gR}$$

۲ ۳۳۷ در شکل مقابل هنگامی‌که جسم m_2 به‌اندازهٔ d پایین می‌آید، انرژی پتانسیل گرانشی آن به اندازهٔ m_2gd کاهش می‌یابد. هم‌چنین جسم m_1 به‌اندازهٔ d روی سطح شیب‌دار به زاویهٔ 30° بالا رفته و انرژی پتانسیل گرانشی آن به اندازهٔ $m_1g \times d\sin 30^\circ$ افزایش می‌یابد (تغییر انرژی پتانسیل گرانشی به مقدار جابه‌جایی در راستای قائم بستگی دارد). از طرفی چون فنر نیز به‌اندازهٔ d کشیده می‌شود، انرژی پتانسیل کشسانی فنر U_2 در آن ذخیره می‌شود.



در نهایت می‌دانیم که اندازهٔ تغییر انرژی پتانسیل مجموعه و تغییر انرژی جنبشی مجموعه با هم برابر است. چون مجموعه در ابتدا و انتهای حرکت ساکن است، بنابراین تغییر انرژی جنبشی مجموعه صفر بوده و داریم:

$$|\Delta K| = |\Delta U| \xrightarrow{K_{T_1} = K_{T_2} = 0} \Delta U = 0 \Rightarrow +m_1gd\sin 30^\circ - m_2gd + U_{2\,فنر} = 0$$

$$\xrightarrow{U_{2\,فنر} = 2/25J} 1 \times 10 \times d \times \frac{1}{2} - 2 \times 10 \times d + 2/25 = 0 \Rightarrow 2/25 = 15d \Rightarrow d = \frac{15}{100}m = 15cm$$

۳ ۳۳۸ هنگامی‌که فنر فشرده شده است، انرژی پتانسیل کشسانی فنر برابر است با:

$$U_1 = 180mJ = 0/18J$$

پس از حذف نیرو (تا لحظهٔ توقف کامل)، جسم تحت تأثیر نیروی ثابت اصطکاک (f_k) متوقف می‌شود. در این صورت اندازهٔ کار نیروی اصطکاک برابر انرژی ذخیره شده در فنر در حالت اول است:

$$f_k \times d \times \cos 180^\circ = E_2 - E_1 = (0) - (U_1 + 0) \Rightarrow -f_k \times d = -0/18 \Rightarrow$$ جابه‌جایی جسم: $d = \frac{0/18}{3/6} = \frac{1}{20}m = 5cm$

۳ ۳۳۹ گام اول: با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

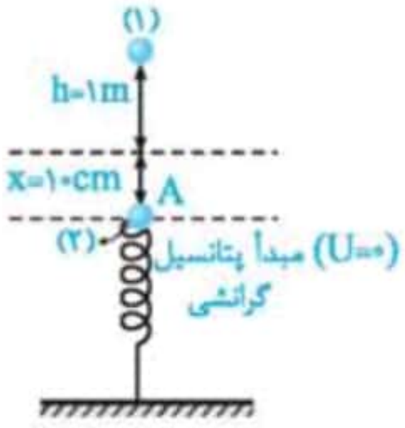
$$\begin{cases} W_{فنر} = -\Delta U = -3/2J \\ |W_{هوا}| = W_{mg} - \frac{80}{100}W_{mg} = 0/2W_{mg} \Rightarrow W_{هوا} = -0/2W_{mg} \end{cases}$$

$$W_{کل} = \Delta K = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{کل} = 0 \Rightarrow W_{فنر} + W_{هوا} + W_{mg} = 0$$

$$\Rightarrow -3/2 - 0/2W_{mg} + W_{mg} = 0 \Rightarrow 0/8W_{mg} = 3/2 \Rightarrow W_{mg} = 4J$$

گام دوم: حال با توجه به $W_{mg} = mgh$ داریم:

$$W_{mg} = mgh \Rightarrow 0/1 \times 10 \times h = 4 \Rightarrow h = 4m$$

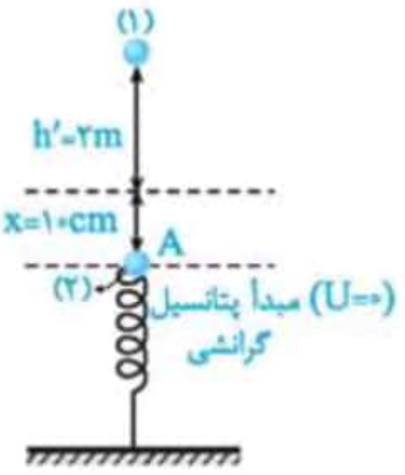


۲ ۳۴۰ با استفاده از قانون پایستگی انرژی در دو حالت، می‌توان نوشت:

حالت اول: در این حالت، ارتفاع نقطهٔ A را مبدأ پتانسیل گرانشی درنظر می‌گیریم. با توجه به این‌که فنر به اندازهٔ $x = ۱۰cm$ فشرده شده و گلوله متوقف می‌شود، انرژی ذخیره شده در فنر برابر $U_{فنر}$ می‌شود. در ادامه با تساوی انرژی مکانیکی بین (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_{۱\,گرانشی} + U_{۱\,فنر} = K_۲ + U_{۲\,گرانشی} + U_{۲\,فنر} \Rightarrow mg(h + x) = U_{۲\,فنر}$$

$$\Rightarrow ۰/۲ \times ۱۰ \times (۱ + ۰/۱) = U_{۲\,فنر} \Rightarrow U_{۲\,فنر} = ۲/۲J$$



حالت دوم: در این حالت گلوله در نقطهٔ A تندی دارد، هم‌چنین چون فنر تا نقطهٔ A دوباره به همان اندازه فشرده شده است، بنابراین انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر برابر همان مقدار به دست آمده در حالت اول بوده و می‌توان نوشت:

$$E'_۱ = E'_۲ \Rightarrow K'_۱ + U'_{۱\,گرانشی} + U'_{۱\,فنر} = K'_۲ + U'_{۲\,گرانشی} + U'_{۲\,فنر}$$

$$\Rightarrow mg(h' + x) = \frac{۱}{۲}mv^۲ + U_{۲\,فنر}$$

$$\Rightarrow ۰/۲ \times ۱۰ \times (۲ + ۰/۱) = \frac{۱}{۲} \times ۰/۲ \times v^۲ + ۲/۲$$

$$\Rightarrow ۴/۲ = ۰/۱v^۲ + ۲/۲ \Rightarrow ۰/۱v^۲ = ۲ \Rightarrow v^۲ = ۲۰ \Rightarrow v = \sqrt{۲۰}\,m/s = ۲\sqrt{۵}\,m/s$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

می‌توان گفت اگر گلوله را $h = ۱m$ بالاتر از تراز اولیه ببریم، انرژی مکانیکی آن به اندازهٔ mgh افزایش می‌یابد که این افزایش انرژی، در نهایت تبدیل به انرژی جنبشی در نقطهٔ (۲) می‌شود.

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \rightarrow v_۲ = \sqrt{۲gh} = \sqrt{۲ \times ۱۰ \times ۱} = \sqrt{۲۰}\,m/s = ۲\sqrt{۵}\,m/s$$

۲ ۳۴۱ فرض کنیم جسم تا ارتفاع h بالا می‌رود، در این صورت با توجه به قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

بنابراین جسم تا ارتفاع r (نقطهٔ C) بالا می‌رود. $E_۲ = E_A \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}mv_A^۲ \Rightarrow h = \frac{(\sqrt{۲gr})^۲}{۲g} = r \Rightarrow$

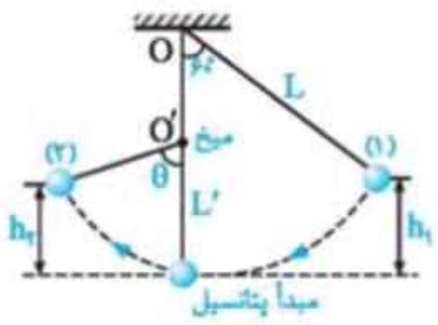
۲ ۳۴۲ با توجه به این‌که سطح دارای اصطکاک است، قسمتی از کار انجام شده توسط نیروی F یعنی $|W_F|$ توسط نیروهای اتلافی به گرما تبدیل می‌شود و می‌توان نوشت:

$$W_F = E_c + |W_f| \Rightarrow W_F > E_c$$

۳ ۳۴۳ از آن‌جایی که تکه گل به صورت افقی حرکت می‌کند، اتلاف انرژی آن (کار نیروهای اتلافی) برابر تغییرات انرژی جنبشی آن است.

$$W_f = E_۲ - E_۱ = K_۲ - K_۱ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

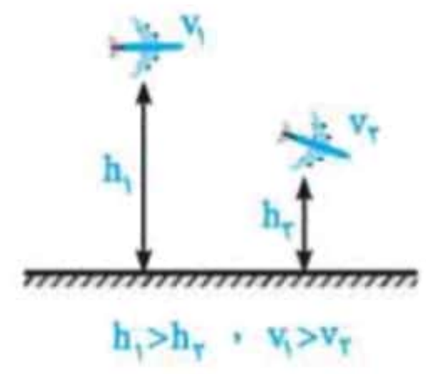
تندی قطار: $v_۲ = ۵۴km/h = \frac{۵۴}{۳/۶}m/s = ۱۵m/s$ ، $v_۱ = ۲۰m/s \Rightarrow |W_f| = \frac{۱}{۲} \times ۰/۴ \times (۲۰^۲ - ۱۵^۲) = ۳۵J$



۳ ۳۴۴ فرض کنیم پس از برخورد نخ به میخ، گلوله به اندازهٔ $h_۲$ بالا می‌رود، در این صورت با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$E_۲ = E_۱ \Rightarrow U_۲ + K_۲ = U_۱ + K_۱ \Rightarrow mgh_۲ = mgh_۱ \Rightarrow h_۲ = h_۱$$

$$L' - L'\cos\theta = L - L\cos۶۰^\circ \xrightarrow{L' = \frac{L}{۲}} \cos\theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۹۰^\circ$$



۱ ۳۴۵ می‌دانیم که انرژی مکانیکی یک جسم برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی آن می‌باشد. از طرفی هواپیما برای فرود آمدن در فرودگاه تندی خود را کاهش می‌دهد و با توجه به این‌که تندی جسم با تندی هواپیما برابر است (چرا؟)، انرژی جنبشی جسم نیز کاهش می‌یابد. از سوی دیگر به‌دلیل این‌که ارتفاع هواپیما در حال کاهش است، انرژی پتانسیل گرانشی جسم نیز کاهش می‌یابد، بنابراین انرژی مکانیکی جسم در حال کاهش است.

$$\Rightarrow E = \overset{\downarrow}{K} + \overset{\downarrow}{U} \Rightarrow E \downarrow$$

دقت: انرژی درونی جسم که مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل مولکول‌های سازندهٔ آن ماده است، با فرض ثابت ماندن دمای جسم، ثابت می‌ماند (این موضوع را در گرما در فیزیک پایهٔ دهم در این کتاب بیشتر بررسی می‌کنیم)، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

gajmarket.com

۳۴۶ ۴ با توجه به‌صورت سؤال، فقط ۲۰ درصد از توان کل مصرفی به توان مفید تبدیل می‌شود:

$$\eta = ۱۰۰٪ - (۶۵٪ + ۱۵٪) = ۲۰٪$$

با توجه به این‌که در هر $۱۰۰\,km$، ۶ لیتر بنزین لازم بوده و انرژی شیمیایی هر لیتر بنزین $۳/۵ \times ۱۰^۷\,J$ است، ابتدا انرژی شیمیایی لازم برای طی کردن $۱۰۰\,km$ را به‌دست می‌آوریم:

$$E_{کل} = ۶ \times ۳/۵ \times ۱۰^۷ = ۲۱ \times ۱۰^۷\,J$$

از طرفی زمان لازم برای طی کردن $۱۰۰\,km$ با تندی ثابت $۹۰\,km/h$ برابر است با:

$$\Delta x = vt \Rightarrow ۱۰۰ = ۹۰ \times t \Rightarrow t = \frac{۱۰۰}{۹۰} h = \frac{۱۰۰}{۹۰} \times ۳۶۰۰ s = ۴۰۰۰ s$$

بنابراین توان کل برابر است با:

$$P_{کل} = \frac{E_{کل}}{t} = \frac{۲۱ \times ۱۰^۷}{۴۰۰۰} = \frac{۲۱}{۴} \times ۱۰^۴\,W$$

با توجه به بازدهٔ ۲۰ درصد، برای محاسبهٔ توان مفید خودرو، داریم:

$$\eta = \frac{P_{مفید}}{P_{کل}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{P_{مفید}}{\frac{۲۱}{۴} \times ۱۰^۴} \Rightarrow P_{مفید} = \frac{۲۱}{۴} \times ۱۰^۴ \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۱۰۵۰۰\,W$$

با توجه به این‌که هر اسب بخار، ۷۴۶ وات است، برای تبدیل کردن واحد توان مفید از وات به اسب بخار (hp)، باید عدد داده شده را بر ۷۴۶ تقسیم کنیم:

$$P_{مفید} = \frac{۱۰۵۰۰}{۷۴۶} = ۱۴\,hp$$

تذکر یکای رایج برای توان خودرو اسب بخار (hp) است. هر اسب بخار، ۷۴۶ وات است.

۳۴۷ ۳ موتور الکتریکی آب را با آهنگ $۰/۸\,m^۳/s$ بالا می‌برد، یعنی این موتور $۰/۸\,m^۳$ آب را در مدت $۱\,s$ بالا می‌برد. از طرفی هر متر مکعب آب $۱۰۰۰\,kg$ جرم دارد، پس جرم $۰/۸\,m^۳$ آب برابر $۰/۸ \times ۱۰۰۰ = ۸۰۰\,kg$ می‌باشد. بنابراین توان لازم برای بالا بردن $۸۰۰\,kg$ آب در مدت زمان $۱\,s$ تا ارتفاع $h = ۱۵\,m$ برابر است با:

$$P_{مفید} = \frac{mgh}{t} \Rightarrow P_{مفید} = \frac{۸۰۰ \times ۱۰ \times ۱۵}{۱} = ۱۲۰ \times ۱۰^۳\,W$$

از طرفی بازدهٔ موتور آب الکتریکی برابر ۰/۸ است، بنابراین توان الکتریکی مصرفی (ورودی) موتور برابر است با:

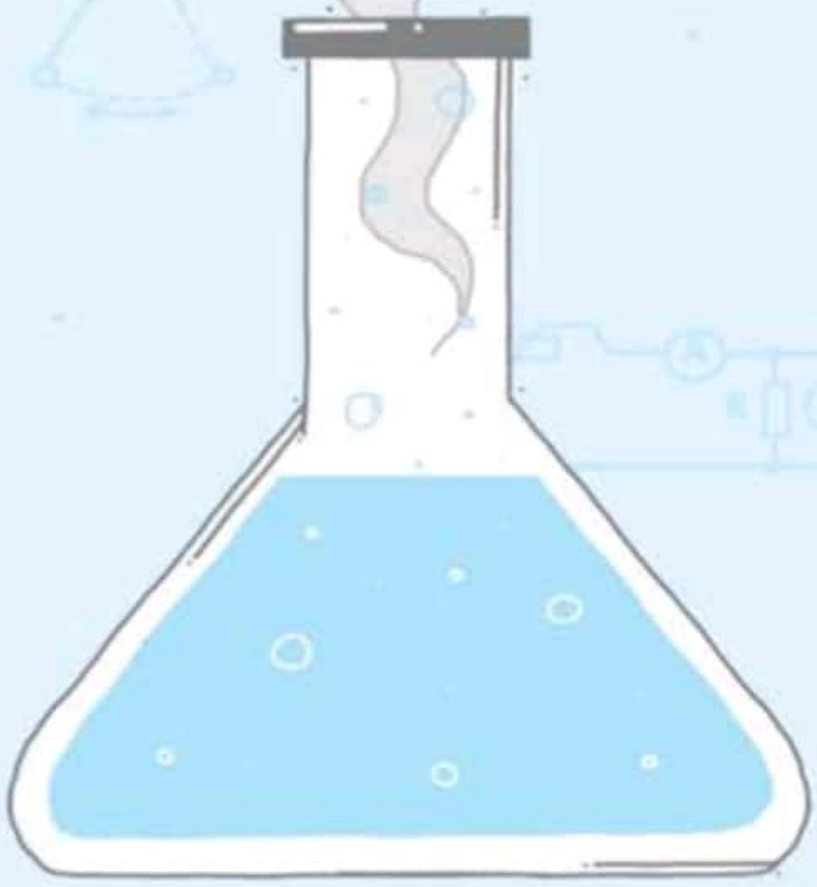
$$\eta = \frac{P_{مفید}}{P_{مصرفی}} \Rightarrow P_{مصرفی} = \frac{P_{مفید}}{\eta} = \frac{۱۲۰ \times ۱۰^۳}{۰/۸} = ۱۵۰ \times ۱۰^۳\,W = ۱۵۰\,kW$$

یادداشت

پایه دهم

ویژگی های فیزیکی مواد

فصل سوم



خلاصه نکات	عنوان	صفحه
۱	حالت‌های مختلف ماده	۹۱
۲	نیروی هم چسبی و دگرچسبی	۹۳
۳	خاصیت مویینگی	۹۶
۴	مفاهیم فشار	۹۷
۵	فشار مایعات	۱۰۱
۶	فشار معادل دو مایع مختلف	۱۱۱
۷	فشار سنج هوا (بارومتر)	۱۱۴
۸	بررسی مسائل لولهٔ U شکل	۱۱۸
۹	محاسبهٔ فشار گاز متصل به یک لولهٔ U شکل (فشار سنج شارمها یا مانومتر)	۱۲۱
۱۰	اصل پاسکال	۱۲۴
۱۱	بالابرهیدرولیکی	۱۲۶
۱۲	تغییرات فشار هوا بر حسب فاصله از سطح زمین	۱۲۷
۱۳	مقایسهٔ نیروی وارد بر کف ظرف با نیروی وزن مایع	۱۳۰
۱۴	آشنایی با مفاهیم اصل ارشمیدس و نیروی شناوری	۱۳۵
۱۵	بررسی وضعیت‌های مختلف قرارگیری جسم در داخل سیال	۱۳۹
۱۶	بررسی وزن ظاهری، عدد نیروسنج و عدد ترازو در حضور نیروی شناوری	۱۴۲
۱۷	آهنگ شارش سیال و معادلهٔ پیوستگی	۱۵۰
۱۸	اصل برنولی	۱۵۲

۳۴۸ ۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

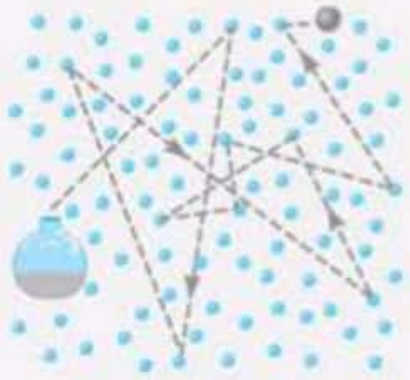
خلاصه نکات ۱ **حالت‌های مختلف ماده** (تست‌های ۳۴۸ تا ۳۶۸)

در این خلاصه نکات، ابتدا به بررسی ویژگی‌های ماده در حالت‌های مختلف می‌پردازیم و سپس ویژگی‌های فیزیکی مواد در مقیاس نانو را تحلیل می‌کنیم:

بررسی ویژگی حالت‌های مختلف ماده

به‌طور کلی حالت ماده، بستگی به دما و فشار محیط دارد و با تغییر این شرایط، ممکن است عوض شود. مثلاً در دمای صد درجهٔ سلسیوس آب از حالت مایع به گاز تبدیل می‌شود. در ادامه ویژگی‌های حالت‌های مختلف ماده را بررسی می‌کنیم.

حالت گازی: در این حالت از ماده، نکات زیر حائز اهمیت است:



۱ فاصلهٔ میانگین مولکول‌ها از هم، نسبت به اندازهٔ مولکول‌ها بسیار بیشتر است و مولکول‌ها می‌توانند آزادانه به اطراف حرکت کنند. این موضوع سبب می‌شود که مولکول‌ها با تندی زیاد به یک‌دیگر و یا به دیواره‌های ظرف برخورد کنند.

۲ برای درک بهتر نکتهٔ (۱)، بد نیست بدانید اندازهٔ مولکول‌های هوا بین ۱ تا ۳ آنگستروم $(1\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m})$ است، در حالی‌که فاصلهٔ میانگین بین آن‌ها در شرایط معمولی $35\,\text{Å}$ است.

۳ در اثر برخوردهای متوالی مولکول‌ها به یک‌دیگر و به دیوارهٔ ظرف، مولکول‌ها مرتباً تغییر جهت می‌دهند و یک حرکت نامنظم یا **کاتوره‌ای** رخ می‌دهد که به **حرکت براونی** معروف است.

۴ گازها در محیط پخش می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر درِ یک شیشهٔ عطر مطابق شکل فوق، در گوشه‌ای از اتاق باز شود، بعد از مدتی در اثر برخورد مولکول‌های هوا و عطر به یکدیگر، بوی عطر در همهٔ اتاق احساس می‌شود، به این پدیده **پخش** می‌گویند.

۵ به دلیل وجود فاصلهٔ زیاد بین مولکول‌ها، گازها تراکم‌پذیر هستند، یعنی می‌توان آن‌ها را به مقدار زیاد فشرده کرد و حجم گاز را کاهش داد.

حالت مایع: در این حالت از ماده، نکات زیر حائز اهمیت است:

۱ در مایع‌ها نیز مانند گازها، مولکول‌ها نظم معینی ندارند ولی به دلیل این‌که به هم بسیار نزدیک‌اند، به جای حرکت آزادانه، فقط روی هم می‌لغزند (مانند حالتی که لیوان آب را کج می‌کنیم و آب می‌ریزد).

۲ مولکول‌ها به آسانی جابه‌جا می‌شوند، ولی تندی حرکت آن‌ها کم‌تر از گازها است. از طرفی پدیدهٔ پخش نیز در آن‌ها رخ می‌دهد.

۳ مولکول‌های مایع در فاصله‌های زیاد (در حد مولکولی) یک‌دیگر را جذب می‌کنند ولی در فاصله‌های کم، یک‌دیگر را دفع می‌کنند. به‌همین دلیل است که مایعات تراکم‌ناپذیر محسوب می‌شوند.

حالت جامد: در این حالت از ماده، نکات زیر حائز اهمیت است:

۱ فاصلهٔ بین مولکول‌های جامد نسبتاً ثابت است. این فاصله تقریباً مشابه فاصلهٔ مولکول‌ها در مایعات و برابر 1Å است.

۲ موقعیت مولکول‌ها ثابت است و نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند و فقط سر جای خود می‌توانند حرکت‌های نوسانی کوچکی انجام دهند.

۳ تراکم‌ناپذیرند (قابل فشرده شدن نیستند).

۴ الف **جامدهای بلورین:** اگر در جسم جامد، مولکول‌ها به‌صورت طرح‌های منظمی کنار یک‌دیگر قرار بگیرند، از تکرار این طرح‌ها **جامدهای بلورین** تشکیل می‌شود. شایان ذکر است که فلزها، نمک‌ها، الماس، یخ و بیشتر مواد معدنی از نوع جامدات بلورین محسوب می‌شوند.

ب **جامدهای بی‌شکل:** در این حالت مولکول‌ها در کنار هم به‌صورت طرح منظمی چیده نشده‌اند. این نوع از جامدات، مانند شیشه، تا حدود زیادی در وضعیت نامنظمی که در حالت مایع داشته‌اند باقی می‌مانند و معمولاً از سردشدن سریع مایعات به‌دست آمده‌اند.

۵ این مواد چگالی نسبتاً بالایی دارند.

حالت پلاسما: در این حالت از ماده، نکات زیر حائز اهمیت است:

۱ این حالت اغلب در دماهای خیلی بالا به‌وجود می‌آید.

۲ مادهٔ درون ستارگان، بیشتر فضای بین‌ستاره‌ای، آذرخش، شفق‌های قطبی، آتش و مادهٔ داخل لولهٔ تابان لامپ‌های مهتابی از پلاسما تشکیل شده است.

جمع‌بندی **در یک مقایسهٔ کلی بین حالت‌های جامد، مایع و گاز می‌توان به جدول زیر اشاره کرد:**

	تراکم‌پذیری	نیروی جاذبه بین مولکول‌ها	شکل	حرکت و انرژی
گاز	تراکم‌پذیر است.	ناچیز است.	فاقد شکل مشخص	زیاد
مایع	با تقریب خوبی تراکم ناپذیر است.	نیروی اندکی وجود دارد.	به شکل ظرف در می‌آیند.	متوسط
جامد	تراکم ناپذیر است.	نیروی زیاد وجود دارد.	دارای شکل مشخص	کم

ویژگی‌های فیزیکی مواد در مقیاس نانو

آزمایش‌ها نشان می‌دهد که اگر ابعاد یک جسم بسیار بسیار کوچک و در حد نانومتر باشد، در ویژگی‌های فیزیکی آن نسبت به ابعاد عادی تغییرات زیادی به‌وجود می‌آید. **علم نانو**، قصد بررسی تغییر در این ویژگی‌های فیزیکی را دارد. در رابطه با این علم، به موارد زیر توجه کنید:

نکات مهم و کاربردی

۱ ویژگی‌های فیزیکی مواد از قبیل نقطهٔ ذوب، رسانندگی الکتریکی و گرمایی، شفافیت، استحکام، رنگ و ... اغلب می‌توانند به‌طور چشمگیری در مقیاس نانو تغییر کند.

۲ نکتهٔ مهمی که باید توجه داشت این است که ویژگی‌های فیزیکی **تمام مواد**، شامل جامدها، مایع‌ها و گازها، در مقیاس نانو تغییر می‌کنند و این موضوع محدود به گروه خاصی نمی‌شود.

۳ در تحقیقات اخیر مشخص شده است که در علم نانو، لازم نیست که همهٔ ابعاد یک ماده در مقیاس نانو باشند. برای نمونه، یک **نانو ذره** در هر سه بُعد کوچک است، اما اگر صرفاً یک بُعد ماده‌ای را در مقیاس نانو محدود کنیم، در این‌صورت یک **نانولایه** داریم که لایه‌ای به ضخامت نانو مقیاس است. آزمایش نشان می‌دهد که ویژگی‌های فیزیکی نانولایه‌ها نیز همچون نانوذره‌ها، به‌طور قابل توجهی تغییر می‌کند.

برای درک بهتر مفهوم نانو و تغییر ویژگی‌های فیزیکی مواد در این مقیاس، به مثال زیر توجه کنید:

مثال نقطهٔ ذوب طلا در حالت عادی، حدود $1064^\circ C$ است. این یعنی با قرار دادن یک قطعه طلا در کوره‌ای با دمای بالا، وقتی دما به $1064^\circ C$ می‌رسد طلای جامد تغییر حالت می‌دهد و به شکل توده‌ای از طلای مایع درمی‌آید. اگر این آزمایش را دوباره انجام دهیم، ولی به جای یک قطعهٔ بزرگ طلا که می‌توانیم آن را ببینیم و به راحتی لمس کنیم، قطعه‌ای را که قطر آن تنها چند نانومتر است در کوره بگذاریم و ذوب کنیم (بدیهی است برای انجام این کار به تجهیزات و روش‌های خاص نیاز داریم، اما شدنی است) با شگفتی درمی‌یابیم که دمای ذوب طلا فقط $427^\circ C$ است و تقریباً ۶۰ درصد نسبت به حالت عادی کم شده است. با این آزمایش در واقع درمی‌یابیم که دمای ذوب ذره‌های طلا در مقیاس نانو، تفاوت زیادی با دمای ذوب طلا در اندازه‌های معمولی دارد. این‌گونه موضوعات، مورد بحث علم نانو است.

تمرین **آلومینیم یکی از رساناهای بسیار خوب جریان الکتریکی است. سطح آلومینیم، چه به صورت سیم یا قوطی نوشابه یا بال هواپیما، در مجاورت هوا به آلومینیم اکسید تبدیل می‌شود. آلومینیم اکسید، عایق بسیار خوبی است و رسانای الکتریسیته نیست، اما وقتی روی سطح یک سیم آلومینیمی می‌نشیند، مشکل نارسانایی ایجاد نمی‌کند. علت چیست؟** (تألیفی)

پاسخ برای جواب دادن به این تمرین، باید به ضخامت لایه‌ای توجه کنیم که روی سطح آلومینیم تشکیل می‌شود. بررسی‌های تجربی نشان می‌دهند که وقتی قطعه‌ای آلومینیمی در مجاورت هوا قرار می‌گیرد، لایه‌ای بسیار نازک از آلومینیم اکسید روی سطح آن تشکیل می‌شود که ضخامت آن از مرتبهٔ نانومتر است. در این مقیاس، ویژگی‌های الکتریکی اکسید آلومینیم تغییر می‌کند و به یک رسانا تبدیل می‌شود و مشکل نارسانایی ایجاد نمی‌کند. به عبارت دیگر، آلومینیم اکسید وقتی به صورت نانولایه باشد، به دلیل ابعاد و شکل هندسی‌اش، مانند یک رسانا عمل می‌کند نه عایق!

با توجه به خلاصه نکات فوق، از جمله ویژگی‌های مولکول‌ها در حالت مایع، می‌توان به نامنظم بودن، فشرده بودن و جابه‌جایی آسان آن‌ها نسبت به یک‌دیگر اشاره کرده و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۳۴۹ در حالت مایع و گاز، مولکول‌های تشکیل‌دهندهٔ ماده، در جای خود ثابت نیستند و پیوسته حرکت می‌کنند.

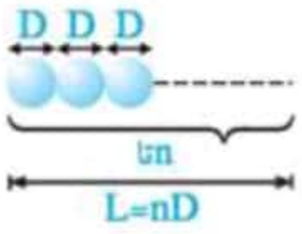
۱ ۳۵۰ جاری شدن و سرریز شدن مایعات، به دلیل امکان لغزیدن مولکول‌های مایع بر روی یک‌دیگر است و گزینهٔ (۱) صحیح است.

تذکر

ویژگی‌های مطرح‌شده در گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) به‌ترتیب مربوط به حالت گاز، جامد و جامد می‌باشد.

۴ ۳۵۱ در جامدهای بلورین، اتم‌های سازندهٔ آن‌ها در طرح‌های منظمی کنار هم قرار دارند، ولی ذرات سازندهٔ جامدهای بی‌شکل (آمورف)، در طرح منظمی کنار هم قرار نمی‌گیرند. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴ ۳۵۲ فرض کنید که قطر مولکول D و n مولکول از آن را کنار هم قرار داده‌ایم، در این صورت طول حاصل‌شده برابر nD می‌شود (چرا؟). با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:



$L = nD \Rightarrow 6 \times 10^{-2} = n \times 3 \times 10^{-10} \Rightarrow n = 2 \times 10^{8} = 200 \times 10^{6} =$ ۲۰۰ میلیون مولکول

www.gajmarket.com

۲ ۳۵۳ فرض کنید که قطرهٔ روغن پس از چکیدن بر روی سطح، از شکل (۱) به شکل (۲) تغییر شکل داده است. با توجه به این‌که حجم لکهٔ روغن ثابت است، می‌توان نوشت:



$V_1=7/5\times10^{-5}\,cm^3$: حجم قطرهٔ روغن در وضعیت (۱) ، $V_2=\pi r^2h=3\times5^2\times h$

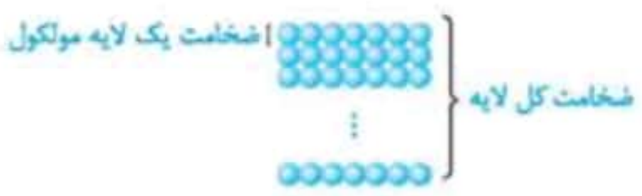
$$V_1=V_2\Rightarrow 7/5\times10^{-5}=75\times h\Rightarrow h=10^{-6}cm=10^{-6}\times(10^{-2}m)=10^{-8}\times10^{+10}\mathring{A}=100\mathring{A}$$

توجه

آنگستروم یک واحد بسیار کوچک برای اندازه‌گیری قطر ذرات، طول موج و ... است. ارتباط بین این واحدِ طول با متر به‌صورت زیر است:

$$1\mathring{A}=10^{-10}m\Leftrightarrow 1m=10^{10}\mathring{A}$$

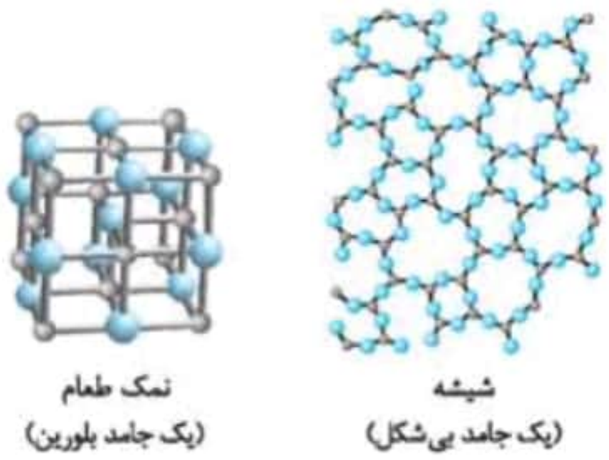
۴ ۳۵۴ برای محاسبهٔ تعداد لایهٔ مولکول روغن، کافی است ضخامت کل لایه را بر قطر مولکول تقسیم کنیم:



$$n=\frac{100}{10}=10$$

۴ ۳۵۵ نمک طعام و الماس هر دو جامد بلورین هستند، بدین‌معنی که در ساختار آن‌ها مولکول‌ها در طرح‌های منظمی در کنار یک‌دیگر قرار می‌گیرند. ولی شیشه یک جامد بی‌شکل است، زیرا مولکول‌های آن در طرح منظمی در کنار هم قرار ندارند.

برای درک بهتر، دو شکل مقابل که مربوط به ساختار نمک طعام و شیشه است را ملاحظه کنید:



شیشه (یک جامد بی‌شکل) — نمک طعام (یک جامد بلورین)

۳ ۳۵۶ با توجه به شکل‌های کتاب درسی، شکل (۱) مربوط به یک جامد فلزی، شکل (۲) مربوط به یک جامد بلورین و شکل (۳) مربوط به یک جامد بی‌شکل (مانند شیشه) است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲ ۳۵۷ اگر با میکروسکوپ درون ظرف محتوی دود را مشاهده کنیم، دیده می‌شود که ذره‌های دود به طور نامنظم و درهم و برهم در یک مسیر زیگزاگی حرکت می‌کنند. این حرکت نامنظم و کاتوره‌ای ذرات دود را **حرکت براونی** می‌نامند.

مشاهدهٔ بیشتر توسط میکروسکوپ نشان می‌دهد که ذره‌های دود برخوردهای اندکی با یک‌دیگر دارند. پس می‌توان نتیجه گرفت باید ذرات دیگری که قابل مشاهده نیستند با آن‌ها برخورد کرده و مسیر حرکت آن‌ها را تغییر داده باشند. این ذره‌های مشاهده‌ناپذیر، همان مولکول‌های هوا هستند.

نتیجهٔ مهم: حرکت زیگزاگی و نامنظم ذره‌های دود، نشانگر این است که مولکول‌های هوا به صورت کاتوره‌ای و نامنظم در حرکت‌اند.

۱ ۳۵۸ مولکول‌های هوا آزادانه در همهٔ جهت‌ها به اطراف حرکت می‌کنند و وقتی به مولکول‌های عطر برخورد می‌کنند، مسیر حرکت مولکول‌های عطر را تغییر می‌دهند و با توجه به این‌که مولکول‌های عطر نیز گاز هستند، در محیط پخش می‌شوند و بوی آن‌ها در تمام اتاق احساس می‌شود. این موضوع در هنگام پخش شدن قطرهٔ جوهر در آب نیز مشاهده می‌شود.

تذکر

عواملی مانند افزایش دما و هم‌زدن یک مایع، باعث می‌شود تا پدیدهٔ پخش با سرعت بیشتری انجام شود.

۳ ۳۵۹ با باز کردن درب عطر، پس از چند ثانیه بوی عطر در فضای اطراف پخش می‌شود. از طرفی با چکاندن چند قطره جوهر در داخل عطر، جوهر نیز در عطر پخش می‌شود، ولی پخش شدن بوی عطر در فضای اطراف، سریع‌تر از پخش شدن جوهر در مایع است، زیرا برخورد مولکول‌های گاز بیشتر از برخورد مولکول‌های مایع با یک‌دیگر است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

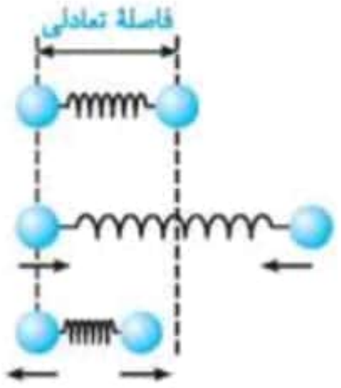
تذکر

دقت شود که در هر دو حالت، مولکول‌های گاز و مایع، حرکت کاتوره‌ای دارند.

۲ ۳۶۰ در یک نگاه کلی، میزان حرکت مولکول‌ها با نیروی بین مولکولی آن‌ها نسبت عکس دارد، بنابراین با توجه به این‌که حرکت مولکول‌ها در گازها بیشتر از مایعات و در مایعات نیز بیشتر از جامدات است، می‌توان نوشت:

جابه‌جایی مولکول‌های جامد < جابه‌جایی مولکول‌های مایع < جابه‌جایی مولکول‌های گاز

نیروی بین‌مولکولی در جامدات > نیروی بین‌مولکولی در مایعات > نیروی بین‌مولکولی در گازها $\Rightarrow F_g<F_l<F_s$ یا $F_s>F_l>F_g$



۳ ۳۶۱ مولکول‌ها در فاصله‌های زیاد (در حد مولکولی) هم‌دیگر را جذب و در فاصلهٔ خیلی کم هم‌دیگر را دفع می‌کنند.
برای درک بهتر این موضوع دو گلولهٔ مقابل را درنظر بگیرید که با یک فنر به هم متصل هستند:
نیرو ربایشی است. ⇒ فاصله بیشتر از فاصلهٔ تعادلی باشد. ⇒
نیرو رانشی است. ⇒ فاصله کم‌تر از فاصلهٔ تعادلی باشد. ⇒

۳ ۳۶۲ مشابه با سؤال قبل، با توجه به این‌که در مایع فاصلهٔ بین مولکول‌ها نسبتاً کم است، در صورت فشرده شدن مایعات، بین آن‌ها نیروی دافعه به‌وجود می‌آید و مایع در برابر متراکم شدن مقاومت می‌کند.

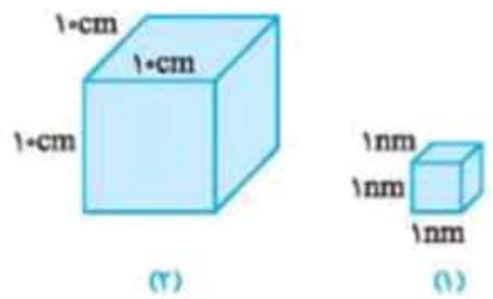
۲ ۳۶۳ مادهٔ داخل مهتابی در حالت تابان از نوع پلاسما بوده و در گزینهٔ (۲)، حالت ماده درست معرفی نشده است. سایر گزینه‌ها با توجه به مطالب کتاب درسی صحیح است.

۳ ۳۶۴ حالت پلاسما (مانند آذرخش)، اغلب در دماهای خیلی بالا به وجود می‌آید، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲ ۳۶۵ همان‌طور که در خلاصه نکات (۱)، بیان کردیم، علت اصلی بررسی اجسام در ابعاد نانو، تغییر در ویژگی‌های فیزیکی مواد در این وضعیت، نسبت به ابعاد عادی است.

۱ ۳۶۶ علم نانو، شاخه‌ای از علوم است که تغییر در ویژگی‌های فیزیکی مواد (جامد، مایع یا گاز) را در ابعاد نانو بررسی می‌کند، از جمله رسانندگی الکتریکی، استحکام، رنگ و ... .

دقت شود که برای تغییر در ویژگی‌های یک ماده، لازم نیست تمام ابعاد آن در مقیاس نانو باشد. یعنی اگر صرفاً یک بُعد ماده را در مقیاس نانو محدود کنیم، در این صورت یک **نانولایه** خواهیم داشت. ویژگی نانولایه‌ها هم مانند نانوذره‌ها، به طور قابل توجهی تغییر می‌کند.



۴ ۳۶۷ همان‌طور که می‌دانیم، ویژگی‌های ماده در ابعاد نانو با ویژگی‌های آن در ابعاد عادی‌اش متفاوت است. به طور مثال نقطهٔ ذوب طلا در ابعاد نانو (شکل ۱)، ۶۰ درصد کم‌تر از نقطهٔ ذوب آن در ابعاد عادی‌اش (شکل ۲) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۳۶۸ با توجه به توضیحات مطرح شده در خلاصه نکات (۱)، آلومینیم رسانا است، ولی اکسید آلومینیم در ابعاد عادی نارسانا و در هنگامی‌که ضخامت آن در حد نانو باشد، به‌صورت رسانا است. بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ این سؤال است.

۲ ۳۶۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

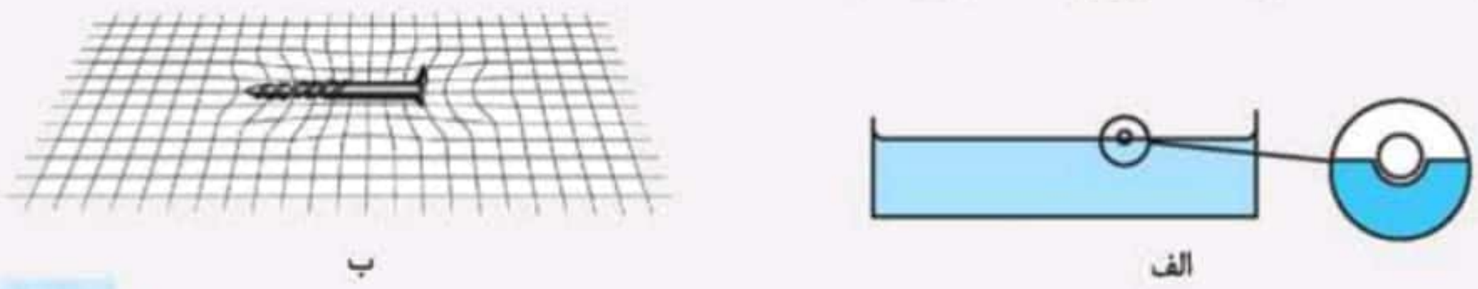
خلاصه نکات ۲ — نیروی هم‌چسبی و دگرچسبی (تست‌های ۳۶۹ تا ۳۷۹)

نیروی هم‌چسبی: به‌طور کلی، بین مولکول‌های مایع یک نیروی ربایشی وجود دارد که به آن **نیروی هم‌چسبی** می‌گویند.

نکات مهم و کاربردی

۱ اگر به یک قطرهٔ آب که از شیر می‌چکد توجه کنید، مشاهده می‌کنید که قطره پس از جدا شدن از شیر، در تمام طول مسیر به‌صورت قطره باقی‌می‌ماند. (مولکول‌های این قطره در حین سقوط از یک‌دیگر دور نمی‌شوند و متصل به یک‌دیگر باقی می‌مانند.) برای توجیه این پدیده می‌توان گفت که بین مولکول‌های مایع یک نیروی ربایشی وجود دارد که همان **نیروی هم‌چسبی** است.

۲ اگر یک میخ کوچک را بر روی سطح آب قرار دهید، در سطح آب یک فرورفتگی ایجاد می‌شود و کشش سطحی بین مولکول‌های آب مانع از فرورفتن میخ در آب می‌شود. این پدیده مانند نگه‌داری یک میخ توسط یک پارچهٔ توری است.





۳ علت فرونرفتن حشرات در آب نیز مشابه موضوع مطرح شده در نکتهٔ (۲) است.

نیروی دگرچسبی: هنگامی‌که یک ماده در تماس با یک مادهٔ دیگر قرار می‌گیرد نیز بین آن‌ها یک نیروی ربایشی وجود دارد که به **دگرچسبی** معروف است.

www.gajmarket.com

ترشوندگی: به‌طور کلی هرگاه مایعی در تماس با یک جسم جامد قرار گیرد، دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) اگر نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و جامد از هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع **بیشتر** باشد، در این صورت می‌گوییم مایع، جامد را تر می‌کند. مثلاً در شکل مقابل می‌بینیم که آب سطح شیشهٔ تمیز را تر کرده و روی آن پهن شده است، به زبان ساده می‌توان گفت در این حالت، مولکول‌های شیشه با شدت بیشتری مولکول‌های آب را جذب کرده است.



پخش آب روی سطح شیشه

۲) اگر نیروهای هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع از دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و جامد بیشتر باشد، می‌گوییم مایع جامد را تر نمی‌کند. با توجه به این موضوع در شکل مقابل می‌بینیم که سطح شیشه با جیوه تر نشده و جیوه به شکل قطره روی سطح شیشه باقی مانده است. جالب است بدانید در این حالت هر چه قطر جیوه بزرگ‌تر باشد، قطره تخت‌تر می‌شود.

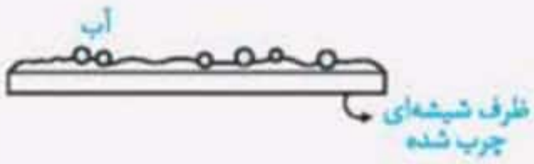


قطره‌های جیوه روی شیشه

در ادامه با حل تمرین زیر، این موضوع را بهتر بررسی می‌کنیم.

تمرین **در مورد پخش شدن آب بر روی ظرف شیشه‌ای چرب‌شده، چه اظهارنظری می‌توان کرد؟**

پاسخ آب بر روی یک ظرف شیشه‌ای چرب پخش نمی‌شود (به شکل قطره باقی می‌ماند)، زیرا نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و روغن است. این موضوع در شکل مقابل نشان داده شده است:



هم‌چسبی جاذبهٔ بین مولکول‌های همسان و دگرچسبی جاذبهٔ بین مولکول‌های ناهمسان است، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

دقت شود که وقتی شیشه می‌شکند، با نزدیک کردن قطعه‌های آن به هم، نمی‌توان اجزای شیشه را به هم چسباند، ولی اگر قطعه‌های شیشه را آن‌قدر گرم کنیم که نرم شوند، می‌توان آن‌ها را به هم چسباند. در واقع با گرم کردن شیشه، مولکول‌های آن به هم نزدیک شده و به علت کوتاه بُرد بودن نیروهای بین‌مولکولی، این مولکول‌ها به هم نیروی جاذبه وارد کرده و دو قطعه به هم می‌چسبند.

۱ ۳۷۰ کشش سطحی در مایعات، در واقع همان نیروی ربایشی از نوع هم‌چسبی میان مولکول‌های موجود در سطح مایع (لایهٔ بیرونی مولکول‌ها) است.

۴ ۳۷۱ هر چهار مورد اشاره شده در صورت سؤال، جلوه‌هایی از کشش سطحی می‌باشند.

دقت شود به کمک کشش سطحی می‌توان توضیح داد که چرا قطره‌هایی که آزادانه سقوط می‌کنند، تقریباً کروی‌اند. به‌ازای حجمی معین، کره نسبت به هر شکل هندسی دیگری، کوچک‌ترین مساحت را دارد. به این ترتیب سطح کروی که آزادانه سقوط می‌کند، مانند یک پوسته کشیده شده، تمایل به کمینه کردن مساحتش را دارد.

۴ ۳۷۲ مشابه با سؤال قبل، علت شناور ماندن یک تیغ روی سطح آب، وجود نیروهای کشش سطحی در سطح آب است.

۲ ۳۷۳ با بزرگ شدن قطرهٔ آب، مولکول‌های آب روی سطح قطره از بقیهٔ مولکول‌های آب موجود بر روی برگ کمی دور می‌شوند و نیروی جاذبهٔ بین مولکول‌های آب (هم‌چسبی) در برابر نیروی وزن مقاومت کرده و مانع از سقوط قطره می‌شود. با ادامه داشتن این روند، سرانجام نیروی وزن قطره از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب موجود بر روی قطره بیشتر می‌شود و قطره به شکل کُره سقوط می‌کند.

۲ ۳۷۴ با توجه به شکل‌های داده‌شده، در شکل (۱) دمای روغن بیشتر است، زیرا در دمای بیشتر، نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن کاهش یافته و مولکول‌های روغن راحت‌تر جاری می‌شوند.

۴ ۳۷۵ با توجه به توضیحات مطرح شده در خلاصه نکات (۲)، نیروی دگرچسبی سطحی بین دو مادهٔ B و A بیشتر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مادهٔ A بوده و باعث پخش شدن مادهٔ A روی B می‌شود. در این حالت، مادهٔ A مطابق شکل، به‌صورت لایهٔ نازکی روی B پخش می‌شود.

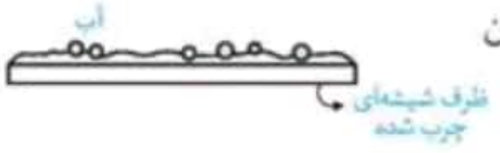


۴ ۳۷۶ مشابه با سؤال قبل، علت تر شدن شیشه توسط آب این است که نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه، بزرگ‌تر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب است.

۴ ۳۷۷ نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه بزرگ‌تر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و شیشه است، بنابراین جیوه روی شیشه پخش نمی‌شود و به‌صورت گلوله‌های کوچک روی شیشه باقی می‌ماند.



۲ ۳۷۸ از آن‌جا که نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و روغن است، آب بر روی یک ظرف شیشه‌ای چرب‌شده پخش نمی‌شود و به‌صورت قطره بر روی ظرف باقی می‌ماند.



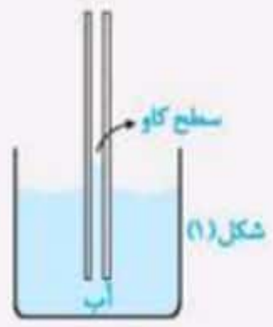
۳ ۳۷۹ می‌دانیم علت شناور ماندن سوزن روی سطح آب، وجود کشش سطحی بین مولکول‌های سطح آب است. با اضافه کردن مایع ظرف‌شویی، مولکول‌های مایع ظرف‌شویی در بین مولکول‌های آب قرار گرفته و نیروی کشش سطحی بین مولکول‌های آب را ضعیف می‌کنند، در نتیجه سوزن در آب فرومی‌رود.

۳۸۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

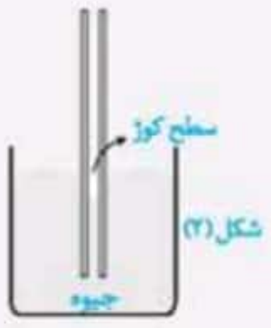
خلاصه نکات ۳ — **خاصیت مویینگی** — (تست‌های ۳۸۰ تا ۳۸۸)

یکی دیگر از اثرات نیروهای دگرچسبی بین دو ماده، خاصیت مویینگی است. برای درک بهتر این موضوع به موارد زیر توجه کنید:

۱) اگر یک لولهٔ نازک شیشه‌ای را در آب وارد کنیم، آب در لوله بالا می‌رود و سطح آن بالاتر از سطح آب ظرف قرار می‌گیرد. این موضوع به‌دلیل خاصیت مویینگی است.



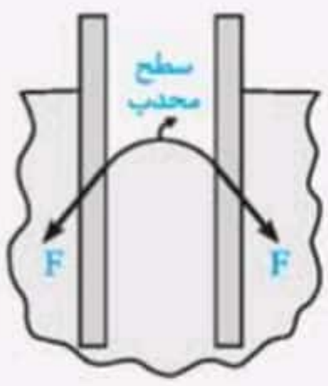
۲) اگر یک لولهٔ نازک شیشه‌ای را در جیوه فرو کنیم، مطابق شکل (۲) جیوه در لوله بالا می‌رود ولی سطح آن پایین‌تر از سطح جیوهٔ درون ظرف قرار می‌گیرد. این موضوع نیز به‌دلیل خاصیت مویینگی است.



۳) نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های شیشه و آب، بیشتر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب است. در نتیجه مولکول‌های آب شیشه را تر کرده و به‌طرف سطح داخلی لولهٔ مویین کشیده می‌شوند و در سطح آب مانند شکل (۱) فرورفتگی ایجاد می‌شود.

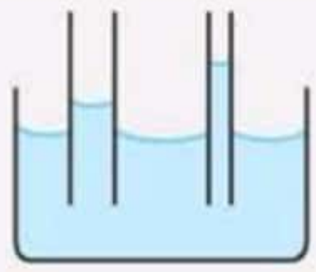


از طرف سطح داخلی لولهٔ مویین، نیروی F مطابق شکل به آبی که با لوله در تماس است، وارد می‌شود. این نیرو باعث بالا رفتن آب در لولهٔ مویین می‌شود.

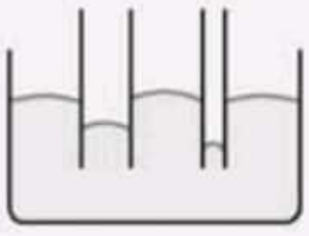


۴) نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و شیشه است. مولکول‌های جیوه که به سطح داخلی لولهٔ مویین نزدیک‌اند، به‌طرف مرکز لوله کشیده می‌شوند و در سطح جیوه، مطابق شکل برآمدگی ایجاد می‌شود.

۵) هرچه سطح مقطع (یا قطر) لوله کم‌تر باشد، ارتفاع مایع در لوله نسبت به سطح آزاد مایع درون ظرف بیشتر تغییر می‌کند. به عنوان مثال، در شکل‌های زیر نحوهٔ قرارگیری آب و جیوه در لوله‌های مویین با قطرهای مختلف نشان داده شده است.

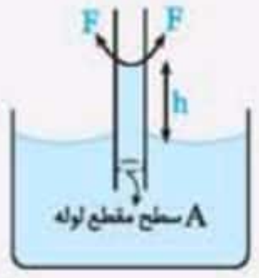


شکل آب در لوله‌های مویین با قطرهای مختلف



شکل جیوه در لوله‌های مویین با قطرهای مختلف

۶) نیروی دگرچسبی بین لولهٔ مویین و مایع بالا رفته، برابر با نیروی وزن مایع جابه‌جا شده است.



به عنوان مثال:

نیروی دگرچسبی: $F = mg$

جرم مایع جابه‌جا شده: $m = \rho V$ (ρ: چگالی مایع)

حجم مایع جابه‌جا شده: $V =$ ارتفاع مایع $\times$ سطح مقطع لوله $= h.A$

تمرین **لولهٔ شیشه‌ای باریکی را به‌طور عمودی تا نیمه وارد مایع درون ظرفی می‌کنیم. اگر نیروی دگرچسبی کم‌تر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع باشد، سطح مایع درون لوله به‌صورت ..... درمی‌آید و این سطح در مقایسه با سطح مایع درون ظرف ..... قرار می‌گیرد.**

۱) فرورفته ـ بالاتر ۲) فرورفته ـ پایین‌تر ۳) برآمده ـ بالاتر ۴) برآمده ـ پایین‌تر

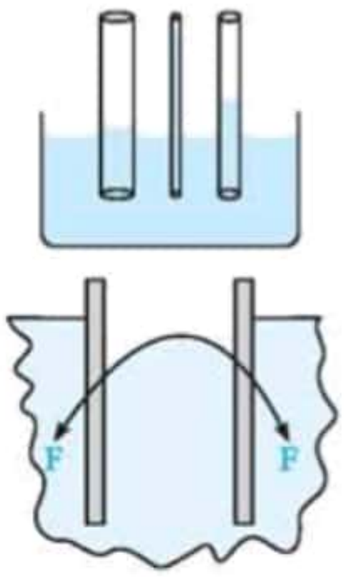
پاسخ با توجه به توضیحات ارائه شده در مورد شمارهٔ ۴، در این سؤال مفهومی، مایع رفتاری شبیه جیوه داشته و گزینهٔ (۴) رخ می‌دهد.



با توجه به خلاصه نکات فوق، پدیدهٔ مویینگی یکی از اثرات اختلاف در بزرگی نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های یک ماده و بزرگی نیروی دگرچسبی در بین دو ماده است. با توجه به این‌که در شکل داده‌شده ارتفاع مایع در لوله بالاتر از سطح مایع است و تقعر مایع در لوله رو به بالا است، نتیجه می‌گیریم که بزرگی نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و لوله، بیشتر از بزرگی نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع است.

۳۸۱ آب در لولهٔ مویین بالا می‌رود و سطح آن بالاتر از سطح آب ظرف قرار می‌گیرد. سطح آب در لولهٔ مویین دارای فرورفتگی است، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

gajmarket.com

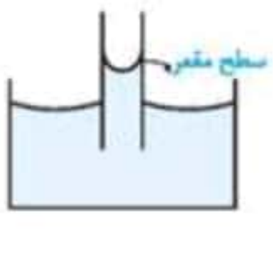


۳۸۲ ۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) آب در لولهٔ مویین، همیشه بالاتر از سطح آب ظرف قرار می‌گیرد.

۲) ارتفاع آب در درون لوله، با سطح مقطع لوله نسبت عکس دارد، بنابراین در لولهٔ نازک‌تر، ارتفاع آب بیشتر است (به شکل روبه‌رو دقت کنید.).

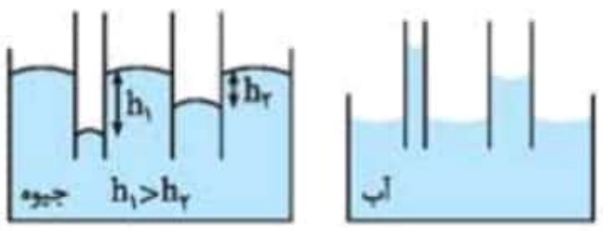
۳۸۳ ۳ همان‌طور که می‌دانیم اگر لولهٔ شیشه‌ای تمیز وارد یک ظرف جیوه شود، سطح جیوهٔ درون لولهٔ شیشه‌ای پایین‌تر از سطح جیوهٔ درون ظرف خواهد بود. دلیل این پدیده آن است که نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و شیشه است، بنابراین جیوه سطح شیشه را تر نمی‌کند و گزینهٔ (۳) صحیح است.



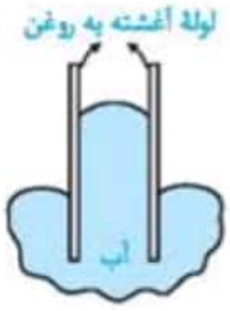
۳۸۴ ۳ با توجه به این‌که نیروی دگرچسبی بین مایع و شیشه بیشتر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع است، بنابراین مایع در داخل لوله بالا آمده و سطح مایع در درون لوله به‌صورت مقعر (فرورفته) می‌باشد.

۳۸۵ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) جیوه در لولهٔ مویین، در سطح پایین‌تری از سطح جیوهٔ درون ظرف قرار می‌گیرد و اختلاف ارتفاع جیوهٔ درون لوله و جیوهٔ بیرون از لوله، در لولهٔ نازک‌تر، بیشتر است. بنابراین شکل (ج) وضعیت جیوه را در لوله‌های مویین نشان می‌دهد.



۲) آب در لولهٔ مویین، در سطح بالاتری از سطح آب درون ظرف قرار می‌گیرد و اختلاف ارتفاع آب درون لوله و آب بیرون از لوله، در لولهٔ نازک‌تر بیشتر است. بنابراین شکل (الف) وضعیت آب را در لوله‌های مویین نشان می‌دهد.



۳۸۶ ۴ با یک سؤال نسبتاً مفهومی روبه‌رو شده‌ایم که گزینهٔ (۴) شکل نادرست را نشان می‌دهد، زیرا نیروهای هم‌چسبی بین مولکول‌های آب، بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و لولهٔ آغشته به روغن است. با توجه به این موضوع، سطح آب در لولهٔ مویین آغشته به روغن پایین‌تر از سطح آب در درون ظرف قرار گرفته و این موضوع یعنی سطح آب در داخل لولهٔ مویین دارای برآمدگی است، درست مانند شکل گزینهٔ (۲) که جیوه در درون لولهٔ مویین نشان داده شده است.

۳۸۷ ۳ ارتفاع آب درون لولهٔ مویین، تنها به نیروی دگرچسبی بین آب و لوله (وابسته به نوع ماده‌ها) و سطح مقطع لوله بستگی دارد، بنابراین در این سؤال با توجه به این‌که قطر لوله ثابت است، ارتفاع آب درون آن تغییری نمی‌کند.

۳۸۸ ۱ با توجه به سؤال قبل، ارتفاع آب درون لوله ارتباطی به طول لولهٔ مویین یا طولی که لوله در آب فرورفته است، ندارد. بنابراین تغییرات اعمال‌شده، تأثیری در ارتفاع آب درون لوله ایجاد نمی‌کند و میزان آب بالا آمده در لوله برابر با همان مقدار قبلی خواهد بود $(h = ۱۲cm)$.

۳۸۹ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ — مفاهیم فشار (تست‌های ۳۸۹ تا ۴۰۱)

فشار وارد بر یک سطح عبارت است از اندازهٔ نیرویی که به‌صورت عمودی، بر واحد آن سطح وارد می‌شود:

$$P = \frac{F_\perp}{A}$$

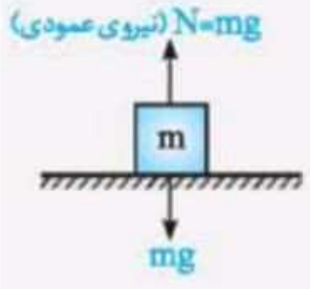
باید توجه شود که فشار یک کمیت نرده‌ای بوده و یکای آن در SI نیوتون بر متر مربع $\left(\frac{N}{m^۲}\right)$ یا پاسکال (Pa) است.

تذکر نیرویی که به‌صورت عمودی بر سطحی با مساحت A وارد می‌شود برابر است با:

$$F = PA$$

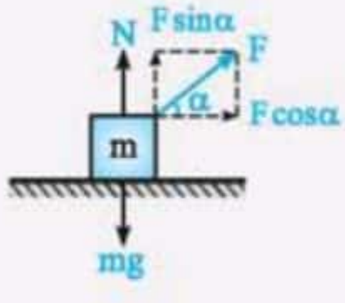
نکات مهم و کاربردی

۱ اگر بسته‌ای با جرم m و با مساحت مقطع A بر روی یک سطح افقی قرار گیرد، نیروی قائم وارد بر سطح از طرف بسته و فشار ناشی از آن برابر است با:



$$\Rightarrow P = \frac{F_\perp}{A} = \frac{mg}{A}$$

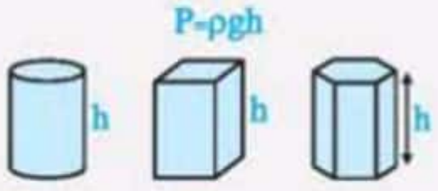
۲ اگر بسته‌ای با جرم m و با مساحت مقطع A را با نیروی F مطابق شکل بر روی سطح افق بکشیم، نیروی قائم وارد بر سطح و فشار ناشی از آن برابر است با:



$$F_\perp = N = mg - F\sin\alpha$$

$$P = \frac{F_\perp}{A} = \frac{mg - F\sin\alpha}{A}$$

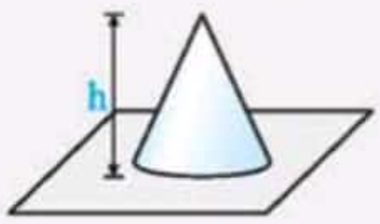
۳ در صورتی‌که یک جسم همگن با چگالی ρ و ارتفاع h طوری روی سطح زمین قرار گیرد که سطح مقطع آن با فاصله از سطح زمین تغییر نکند، فشاری که از طرف این جسم بر زمین وارد می‌شود از رابطهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید:



$$F_{\perp} = W = mg \xrightarrow{m=\rho V \ , \ V=Ah} W = (\rho Ah)g$$

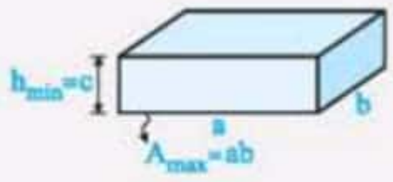
$$P = \frac{W}{A} \Rightarrow P = \frac{\rho Ahg}{A} \Rightarrow P = \rho gh \quad \text{(مشابه با فشار مایعات)}$$

۴ در مورد جسمی مانند مخروط که سطح مقطع آن با فاصله از سطح زمین تغییر می‌کند، نکتهٔ (۳) برقرار نیست.



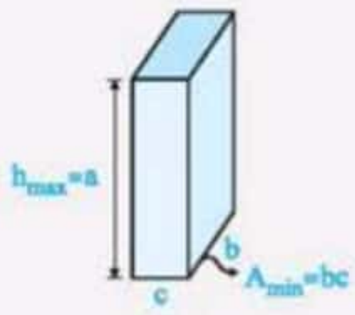
$$P \neq \rho gh$$

تذکر در بعضی از تست‌های کنکور، یک مکعب مستطیل با ابعاد a، b و c که $a > b > c$ است را بر روی یک سطح افقی قرار می‌دهند. در این حالت داریم:



۱ اگر مکعب مستطیل از بزرگ‌ترین وجه یعنی $a \times b$ بر روی سطح قرار گیرد، فشار وارد بر سطح از طرف مکعب مستطیل کم‌ترین مقدار است و مقدار آن برابر است با:

$$P_{min} = \frac{W}{A_{max}} = \rho g h_{min} = \rho gc$$

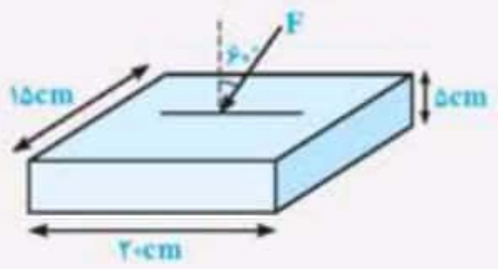


۲ اگر مکعب مستطیل از کوچک‌ترین وجه یعنی $b \times c$ بر روی سطح قرار گیرد، فشار وارد بر سطح از طرف مکعب مستطیل بیشترین مقدار است و مقدار آن برابر است با:

$$P_{max} = \frac{W}{A_{min}} = \rho g h_{max} = \rho ga$$

در ادامه برای تسلط بیشتر، به تمرین بعد توجه کنید:

تمرین۱ **مطابق شکل مقابل نیروی $F = ۱۰۰\,N$ بر جسمی وارد می‌شود. اگر چگالی جسم $۷۰۰\,kg/m^۳$ باشد، فشار وارد بر سطح اتکای جسم تقریباً چند پاسکال است؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$** (تألیفی)

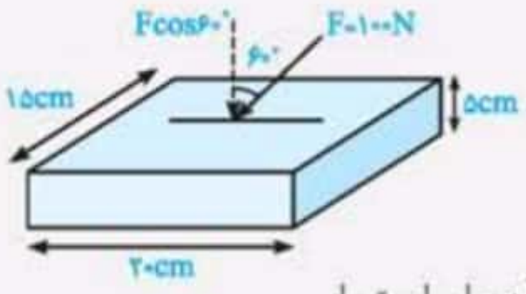


۱) ۱۷۱۵ ۲) ۳۰۲۵

۳) ۲۰۱۵ ۴) ۲۰۳۵

پاسخ برای پاسخ دادن به این تمرین، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که فشار وارد بر سطح برابر نیرویی است که به‌صورت **عمود** به واحد سطح وارد می‌شود، ابتدا مؤلفه‌ای از نیروی F را که به‌صورت عمود بر سطح وارد می‌شود، محاسبه می‌کنیم:



$$\rho = ۷۰۰\,kg/m^۳ \ , \ F = ۱۰۰\,N \ , \ g = ۱۰\,N/kg$$

مؤلفهٔ عمودی نیرو: $F_{\perp} = F\cos ۶۰^\circ = ۱۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵۰\,N$

این نیرو بر سطح قاعده جسم با مساحت $(۱۵\,cm \times ۲۰\,cm =) ۳۰۰\,cm^۲$ تأثیر می‌گذارد. بنابراین فشار ناشی از آن برابر است با:

فشار ناشی از نیروی F: $P_۱ = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{۵۰}{۳۰۰ \times ۱۰^{-۴}} = \frac{۵}{۳} \times ۱۰^۳\,Pa$

گام دوم: فشاری نیز ناشی از وزن خود جسم بر سطح وارد می‌شود که با توجه به همگن بودن جسم و این‌که سطح مقطع آن ثابت است، می‌توان از رابطهٔ $P_۲ = \rho gh$ آن را به‌دست آورد:

فشار ناشی از وزن جسم: $P_۲ = \rho gh = ۷۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} = ۳۵۰\,Pa$

گام سوم: فشار کل وارد بر سطح برابر مجموع $P_۱$ و $P_۲$ می‌باشد.

$$P = P_۱ + P_۲ = \frac{۵}{۳} \times ۱۰^۳ + ۳۵۰ \simeq ۲۰۱۵\,Pa \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

روش دیگری برای محاسبهٔ فشار: با توجه به این‌که جرم جسم در صورت مسأله داده نشده است، می‌توان با استفاده از رابطهٔ $m = \rho V$، جرم جسم را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} \rho = ۷۰۰\,kg/m^۳ \\ V = ۵ \times ۱۵ \times ۲۰ = ۱۵۰۰\,cm^۳ = ۱۵۰۰ \times ۱۰^{-۶}\,m^۳ = ۱/۵ \times ۱۰^{-۳}\,m^۳ \end{cases}$$

$$m = \rho V \Rightarrow m = ۷۰۰ \times ۱/۵ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow m = ۱/۰۵\,kg \Rightarrow W = mg = ۱/۰۵ \times ۱۰ = ۱۰/۵\,N \quad , \quad \text{نیروی قائم}: F_{\perp} = W + F\cos ۶۰^\circ = ۶۰/۵\,N$$

$$P = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{۶۰/۵}{۰/۱۵ \times ۰/۲} \simeq ۲۰۱۵\,Pa$$

با توجه به رابطهٔ فشار $\left(P = \frac{F}{A}\right)$، فشار با نیرو رابطهٔ مستقیم و با سطح مقطع رابطهٔ عکس دارد. بنابراین با افزایش سطح مقطع، فشار کاهش می‌یابد و برعکس. اسکی باز نیز از چوب اسکی استفاده می‌کند تا با افزایش سطح مقطع تماس با برف، فشار وارد بر برف را کاهش دهد تا در آن فرو نرود. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

gajmarket.com

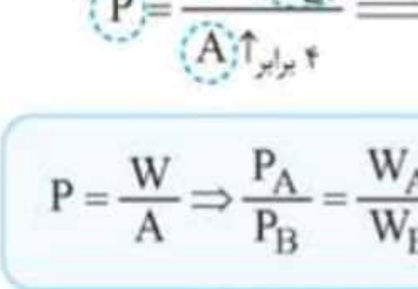
۳۹۰ با سؤال نسبتاً ساده و جالبی روبه‌رو شده‌ایم. برای پاسخ به این سؤال، با توجه به روابط زیر داریم:

$$P=\frac{F}{A}\Rightarrow \text{پاسکال}\equiv\frac{N}{m^2}$$

$$F=ma\Rightarrow N\equiv kg.m/s^2$$

$$\Rightarrow \text{پاسکال}\equiv\frac{kg.m/s^2}{m^2}=\frac{kg}{m.s^2}$$

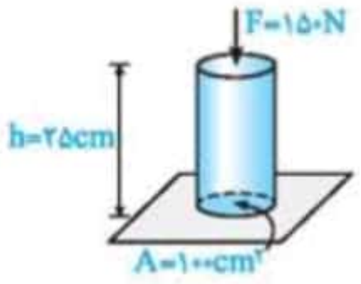
۳۹۱ فشاری که از طرف شخص بر کف اتاق وارد می‌شود، معادل است با حاصل تقسیم نیروی وزن شخص بر سطح انتقال نیرو:



$$\text{نیروی وزن شخص}: F=W=800N\ ,A=a^2=0/2\times0/2=0/04\,m^2$$

$$P=\frac{F}{A}=\frac{800}{0/04}=2\times10^4\,Pa=20kPa$$

۳۹۲ نیرویی که استوانه بر قاعدهٔ پایین آن وارد می‌کند، برابر مجموع نیروی خارجی F و نیروی وزن آن است و داریم:

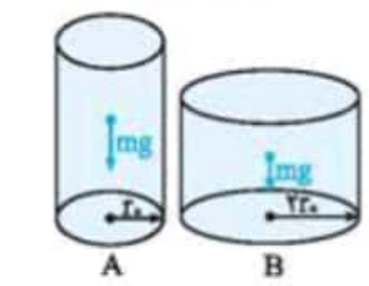


$$\text{نیروی عمودی}: F_{کل}=F+W=F+mg\ ,A=100cm^2=100\times10^{-4}m^2=10^{-2}m^2\ ,F=150N$$

$$P=\frac{F_{کل}}{A}\Rightarrow 30000=\frac{150+10m}{10^{-2}}\Rightarrow m=15kg$$

۳۹۳ همان‌طور که در خلاصه نکات (۴) بیان کردیم، در یک استوانهٔ همگن با توجه به رابطهٔ $P=\rho gh$، فشاری که بر قاعدهٔ آن وارد می‌شود با ارتفاع آن متناسب است.

۳۹۴ با توجه به رابطهٔ $A=\pi r^2$ و دو برابر بودن شعاع قاعدهٔ استوانهٔ B نسبت به A، مساحت قاعدهٔ استوانهٔ B چهار برابر مساحت قاعدهٔ استوانهٔ A است. بنابراین می‌توان نوشت:



$$A=\pi r^2\xrightarrow{r_B=2r_A}A_B=4A_A$$

در ادامه در مقایسهٔ فشار ناشی از دو استوانه می‌توان نوشت:

$$P=\frac{F=mg}{A}\xrightarrow{A_B=4A_A}P_B=\frac{1}{4}P_A\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=4$$

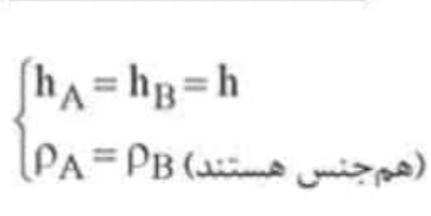
(P: برابر $\frac{1}{4}$؛ F: یکسان؛ A: ۴ برابر)

توجه

این‌گونه نیز می‌توان سؤال را تحلیل کرد:

$$P=\frac{W}{A}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=\frac{W_A}{W_B}\times\frac{A_B}{A_A}\xrightarrow[A_B=4A_A]{W_A=W_B}\frac{P_A}{P_B}=4$$

۳۹۵ شکل مقابل، وضعیت دو استوانهٔ هم‌جنس (یعنی ρ یکسان) را نشان می‌دهد که به طور قائم بر روی سطح افقی قرار دارند. برای مقایسهٔ فشار وارد بر سطح از طرف استوانه‌ها، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:



روش اول: با توجه به این‌که سطح مقطع هر دو استوانه در کل ارتفاع آن‌ها ثابت است، با کمک رابطهٔ $P=\rho gh$ به سادگی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}h_A=h_B=h\\ \rho_A=\rho_B\ (\text{هم‌جنس هستند})\end{cases}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{h_A}{h_B}=1$$

یعنی فشار وارد شده از طرف هر یک از دو استوانه بر سطح، یکسان است.

روش دوم: می‌خواهیم با کمک رابطهٔ $P=\frac{F}{A}$، به مقایسهٔ فشار وارد شده بر سطح افقی از طرف هر یک از دو استوانه بپردازیم. در مقایسهٔ F برای دو استوانه داریم:

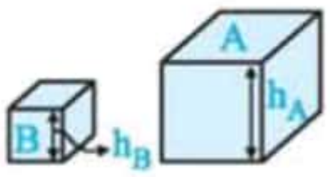
$$\begin{cases}F=mg\\ \rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho V=\rho Ah\end{cases}\Rightarrow F=\rho Ahg\xrightarrow[A_B=\pi(2R)^2-\pi R^2=3\pi R^2]{A_A=\pi(2R)^2=4\pi R^2}\frac{F_A}{F_B}=\frac{A_A}{A_B}=\frac{4}{3}$$

با توجه به این‌که نیروی F_A، $\frac{4}{3}$ برابر نیروی F_B و سطح مقطع A نیز $\frac{4}{3}$ برابر سطح مقطع B است، بنابراین فشار وارد شده از طرف هر یک از دو استوانه بر سطح افقی یکسان است.

(P: یکسان؛ F: $\frac{4}{3}$ برابر؛ A: $\frac{4}{3}$ برابر)

توجه

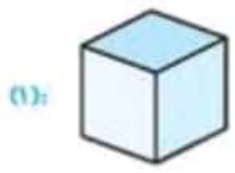
همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مسائلی که سطح مقطع جسم ثابت بوده و چگالی و ارتفاع جسم را می‌دانیم، استفاده از رابطهٔ $P=\rho gh$ حل را بسیار ساده‌تر می‌کند.

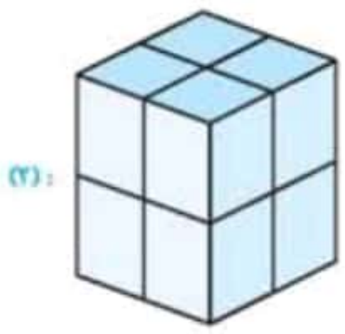


۳۹۶ از رابطهٔ $P=\rho gh$ کمک می‌گیریم، با توجه به این‌که دو مکعب همگن A و B فشار یکسانی را بر سطح وارد می‌کنند، داریم:

$$P_A=P_B\ ,h_A=۳h_B$$

$$P=\rho gh \xrightarrow{P_A=P_B} \rho_A g h_A=\rho_B g h_B \Rightarrow \rho_A\times ۳h_B=\rho_B\times h_B \Rightarrow \rho_B=۳\rho_A$$





۳۹۷ **روش اول:** جرم هر یک از مکعب‌های کوچک‌تر را برابر m و مساحت یک وجه آن را A درنظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_۱=\frac{W_۱}{A_۱}=\frac{mg}{A}$$

$$P_۲=\frac{W_۲}{A_۲}\xrightarrow[A_۲=۴A_۱]{W_۲=۸W_۱} P_۲=\frac{۸mg}{۴A}=\frac{۲mg}{A}\Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱}=\frac{\frac{۲mg}{A}}{\frac{mg}{A}}=۲$$

روش دوم: ابتدا دقت کنید که سطح مقطع دو شکل (۱) و (۲) با تغییر ارتفاع، تغییر نمی‌کند و در این‌گونه موارد می‌توان از رابطهٔ $P=\rho gh$ فشار ناشی از جسم جامد را به‌دست آورد. در ادامه با توجه به یکسان بودن چگالی در شکل‌های (۱) و (۲) و دو برابر بودن ارتفاع شکل (۲) نسبت به شکل (۱) می‌توان نوشت:

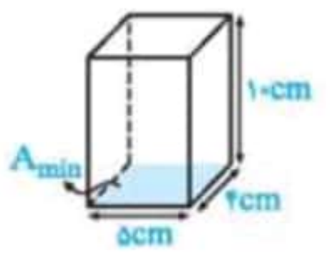
$$P=\rho gh \xrightarrow{\rho \text{ و } g \text{ یکسان است.}} \frac{P_۲}{P_۱}=\frac{h_۲}{h_۱}=\frac{۲h}{h}=۲$$

۳۹۸ با توجه به رابطهٔ $P=\frac{F}{A}=\frac{W}{A}$، چون وزن آجر در هر سه حالت ثابت است، فشار ناشی از طرف آجر با مساحت وجه قرارگرفته بر روی ماسه رابطهٔ عکس دارد، یعنی هرچه مساحت وجه قرارگرفته بیشتر باشد، فشار ناشی از طرف آجر بر سطح کم‌تر بوده و در واقع مقدار فرورفتگی آجر در ماسه کم‌تر است (در واقع مقدار فرورفتگی آجر در ماسه را فشار وارد بر سطح تعیین می‌کند و نه نیروی عمودی وارد بر سطح). بنابراین داریم:

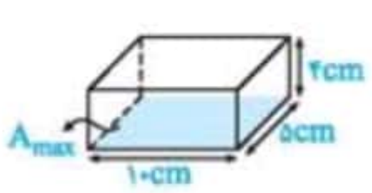
$$\begin{cases} \text{مساحت وجه (۱)}: A_۱=۱۰\times ۱۵=۱۵۰\,cm^۲ \\ \text{مساحت وجه (۲)}: A_۲=۱۰\times ۲۰=۲۰۰\,cm^۲ \\ \text{مساحت وجه (۳)}: A_۳=۲۰\times ۱۵=۳۰۰\,cm^۲ \end{cases} \Rightarrow A_۱<A_۲<A_۳ \xrightarrow{P=\frac{F}{A}} P_۱>P_۲>P_۳$$

روش دیگر: با استفاده از رابطهٔ $P=\rho gh$ و با توجه به این‌که $h_۱=۲۰cm$، $h_۲=۱۵cm$ و $h_۳=۱۰cm$ است نیز به همین جواب می‌رسیم (چه‌طور؟).

۳۹۹ با توجه به رابطهٔ $P=\frac{W}{A}$ و با توجه به شکل‌های مقابل، بیشترین فشار هنگامی اتفاق می‌افتد که مکعب مستطیل روی کوچک‌ترین وجه خود بایستد و کم‌ترین فشار زمانی رخ می‌دهد که مکعب مستطیل روی بزرگ‌ترین وجه خود بایستد:



$$A_{min}=۴\times ۵cm^۲=۲۰\times ۱۰^{-۴}\,m^۲ \Rightarrow P_{max}=\frac{W}{A_{min}}=\frac{W}{۲\times ۱۰^{-۳}}$$



$$A_{max}=۱۰\times ۵cm^۲=۵۰\times ۱۰^{-۴}\,m^۲ \Rightarrow P_{min}=\frac{W}{A_{max}}=\frac{W}{۵\times ۱۰^{-۳}}$$

از طرفی با توجه به صورت سؤال، اختلاف فشار در دو حالت $(P_{max}-P_{min})$ برابر است با:

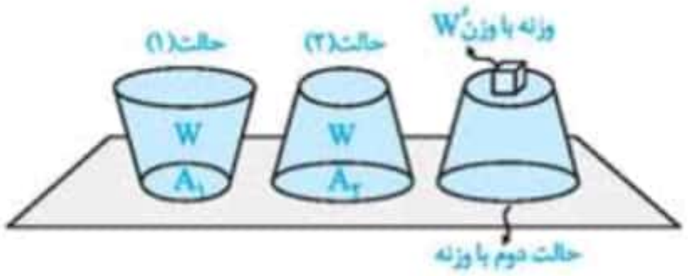
$$P_{max}-P_{min}=۳\times ۱۰^۴\,Pa \Rightarrow \frac{W}{۲\times ۱۰^{-۳}}-\frac{W}{۵\times ۱۰^{-۳}}=۳\times ۱۰^۴\,Pa$$

$$\Rightarrow ۵۰۰W-۲۰۰W=۳\times ۱۰^۴ \Rightarrow ۳۰۰W=۳\times ۱۰^۴ \Rightarrow \text{وزن جسم}: W=۱۰۰\,N$$

و جرم جسم برابر است با:

$$W=mg \xrightarrow{g=۱۰N/kg} m=۱۰kg$$

۴۰۰ در شکل صورت سؤال، شعاع قاعدهٔ بزرگ مخروط ۲ برابر شعاع قاعدهٔ کوچک آن است، بنابراین با توجه به رابطهٔ $A=\pi r^۲$ مساحت قاعدهٔ بزرگ ۴ برابر مساحت قاعدهٔ کوچک است.



از طرفی وزن جسم در دو حالت یکسان بوده و با توجه به رابطهٔ $P=\frac{W}{A}$، فشار در حالت دوم $\frac{۱}{۴}$ برابر فشار در حالت اول است. حال اگر بخواهیم فشار در حالت دوم به اندازهٔ حالت اول شود، داریم:

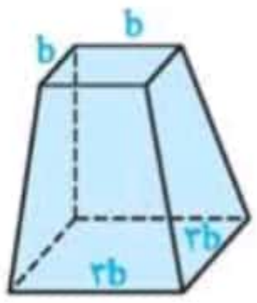
$$\text{شرط تساوی فشار} \Rightarrow \frac{W'+W}{A_۲}=\frac{W}{A_۱}\Rightarrow \frac{W'+W}{۴A_۱}=\frac{W}{A_۱}\Rightarrow W'=۳W$$

هشدار

در این سؤال که سطح مقطع جسم جامد در حال تغییر است، برای محاسبهٔ فشار نمی‌توان از رابطهٔ $P=\rho gh$ استفاده کرد. این رابطه فقط مربوط به زمانی است که سطح مقطع جسم جامد ثابت است.

gajmarket.com

۱ ۴۰۱ با توجه به رابطهٔ $P=\frac{F}{A}$، فشار را در هر دو حالت به دست می‌آوریم. دقت شود در هر دو حالت نیروی وارد بر سطح برابر وزن هرم $(W=mg=۸۱۰N)$ است.



حالت دوم: $P_۲=\frac{F}{A_۲}=\frac{۸۱۰}{b^۲}$ ، حالت اول: $P_۱=\frac{F}{A_۱}=\frac{۸۱۰}{۳b\times ۳b}=\frac{۸۱۰}{۹b^۲}$

طبق صورت سؤال: $P_۲-P_۱=۷۲۰\Rightarrow\frac{۸۱۰}{b^۲}-\frac{۸۱۰}{۹b^۲}=۷۲۰\Rightarrow\frac{۸\times ۸۱۰}{۹b^۲}=۷۲۰$

$\Rightarrow b^۲=۱\Rightarrow b=۱m=۱۰۰cm$

۴ ۴۰۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ — **فشار مایعات** — (تست‌های ۴۰۲ تا ۴۴۵)

مایعات به دلیل وزن خود، فشار ایجاد می‌کنند. به‌طور کلی در یک ظرف مطابق شکل مقابل، فشار در عمق h از سطح آزاد مایع برابر است با:



ρ: چگالی مایع (برحسب $kg/m^۳$) g: شتاب گرانش (برحسب $m/s^۲$)

h: فاصلهٔ نقطه از سطح آزاد مایع (برحسب m)

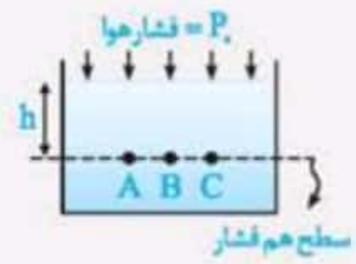
فشار ناشی از هوا

$$P=P_۰+\rho gh$$

فشار ناشی از مایع

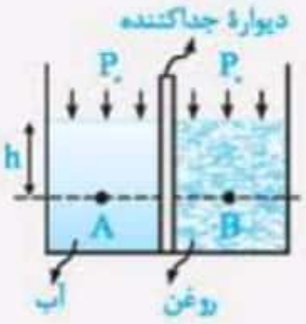
نکات مهم و کاربردی

۱ در شکل مقابل هر سه نقطهٔ A، B و C در یک مایع و در فاصلهٔ یکسان از سطح آزاد مایع قرار دارند و فشار آن‌ها با یک‌دیگر برابر است. در اصطلاح می‌گوییم نقاط A، B و C بر روی یک سطح **هم‌تراز** یا **هم‌فشار** قرار دارند.



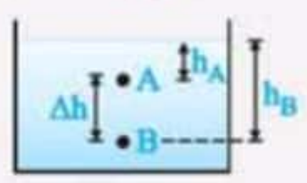
$$P_A=P_B=P_C=P_۰+\rho gh$$

۲ در شکل مقابل درست است که نقاط A و B در یک فاصله از سطح آزاد قرار دارند، اما چون در یک مایع قرار ندارند، فشار آن‌ها با یک‌دیگر برابر نیست.



$$\begin{cases}P_A=P_۰+\rho_{\text{آب}}\,gh\\ P_B=P_۰+\rho_{\text{روغن}}\,gh\end{cases}\xrightarrow{\rho_{\text{روغن}}\neq\rho_{\text{آب}}}P_A\neq P_B$$

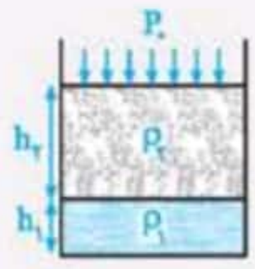
۳ اختلاف فشار بین دو نقطهٔ A و B در شکل مقابل که در یک مایع قرار دارند، به فاصلهٔ قائم آن‌ها از یک‌دیگر بستگی داشته و مقدار آن برابر است با:



$$\begin{cases}P_A=P_۰+\rho gh_A\\ P_B=P_۰+\rho gh_B\end{cases}\Rightarrow P_B-P_A=\rho g(h_B-h_A)=\rho g\Delta h$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، میزان اختلاف فشار بین دو نقطه، از $P_۰$ مستقل است.

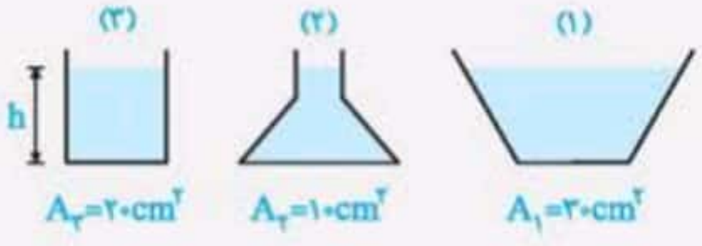
۴ در شکل مقابل، در حالت تعادل فشار ناشی از دو مایع مخلوط‌نشدنی بر کف ظرف، برابر مجموع فشار تک‌تک مایعات می‌باشد و داریم:



فشار وارد شده بر کف ظرف ناشی از مایعات $= P_۱+P_۲=\rho_۱gh_۱+\rho_۲gh_۲$

فشار کل وارد بر کف ظرف: $P=P_۰+\rho_۱gh_۱+\rho_۲gh_۲$

تمرین۱ در شکل زیر، در سه ظرف نشان داده شده تا ارتفاع یکسان آب ریخته‌ایم. فشار کل وارد بر کف ظرف‌ها و نیروی کل وارد بر کف ظرف‌ها را با یک‌دیگر مقایسه کنید.

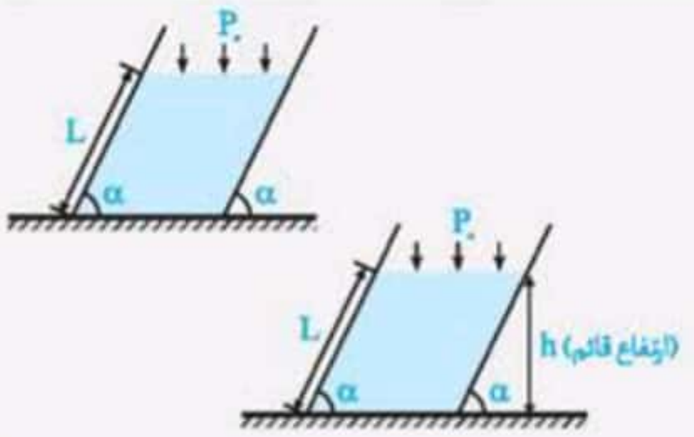


پاسخ فشار مایعات، به شکل ظرف و مساحت قاعدهٔ آن‌ها بستگی ندارد. به طور مثال در هر سه شکل مقابل، فشار وارد بر کف ظرف برابر $P_۰+\rho gh$ است.

$$P_۱=P_۲=P_۳=P_۰+\rho gh$$

از طرفی نیروی وارد بر کف سه ظرف با یک‌دیگر متفاوت است و به کف ظرفی که مساحت بزرگ‌تری دارد، نیروی بیشتری وارد می‌شود.

$$F=PA\xrightarrow[A_۱>A_۳>A_۲]{P_۱=P_۲=P_۳}F_۱>F_۳>F_۲$$



تمرین۲ **در شکل مقابل، فشار کل وارد بر کف ظرف کدام است؟**

پاسخ در محاسبهٔ فشار مایعات، ارتفاع قائم ستون مایع حائز اهمیت است، به‌طور مثال در شکل زیر، فشار وارد بر کف ظرف برابر است با:

$$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L\sin\alpha$$

$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gL\sin\alpha$$

معادل‌سازی واحدهای فشار

واحدهای زیر در فشار با یک‌دیگر معادل هستند:

$$1atm \equiv 10^5 Pa \equiv 10 mH_2O$$

با توجه به این موضوع کاربردی، بسیاری از سؤالات این قسمت به‌طور ذهنی قابل حل است.

تمرین۳ **فشار ۱۰ متر آب معادل است با ..... (A) پاسکال و ..... (B) اتمسفر.**

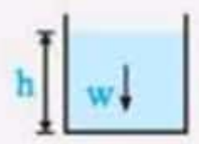
پاسخ $1atm : (B)\ ,\ 10^5 Pa : (A)$

تمرین۴ **فشار ۲۰ متر آب معادل است با ..... (A) پاسکال و ..... (B) اتمسفر.**

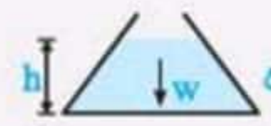
پاسخ

$$\text{تناسب}: \begin{array}{c|c} 10mH_2O & 10^5 Pa \\ \hline 20mH_2O & \Delta P \end{array} \Rightarrow \Delta P = 2\times 10^5 Pa = 2atm$$

نکته در یک ظرف استوانه‌ای با سطح مقطع ثابت، اگر وزن مایع درون ظرف برابر W باشد، فشار ناشی از مایع در کف ظرف را علاوه بر رابطهٔ ρgh، می‌توان به صورت مقابل نیز به دست آورد:



فشار ناشی از مایع $\Rightarrow P = \frac{W}{A}$

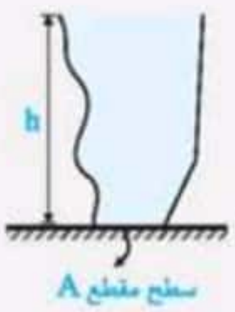


فشار ناشی از مایع $\Rightarrow P \neq \frac{W}{A}$

در این حالت نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع نیز برابر W است. این موضوع در ظرف مقابل که سطح مقطع آن در حال تغییر است، برقرار نمی‌باشد:

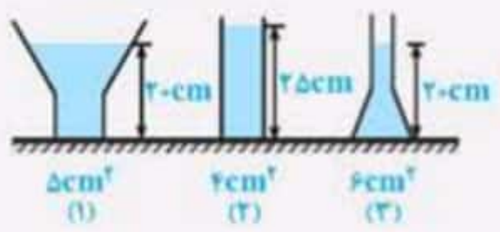
نیروی وارد بر کف ظرف حاوی مایع

برای محاسبهٔ نیروی وارد بر کف ظرف ناشی از مایع، کافی است فشار ناشی از مایع در کف ظرف را در سطح مقطع قاعدهٔ کف ظرف ضرب کنیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم:



$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = P\times A \xrightarrow{P=\rho gh} F = \rho ghA \quad \text{(نیروی ناشی از مایع در کف ظرف)}$$

تمرین۵ **در ظرف‌های شکل مقابل آب وجود دارد. اگر نیروی وارد بر کف ظرف‌های (۱)، (۲) و (۳) ناشی از مایعات به‌ترتیب F_1، F_2 و F_3 باشد، کدام رابطه صحیح است؟** (M.K.A)



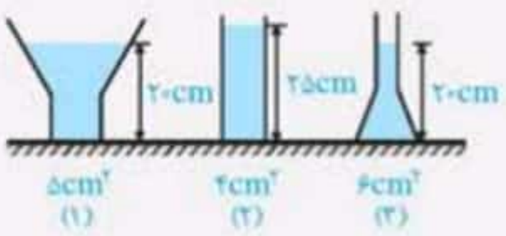
۱) $F_1 = F_2 > F_3$

۲) $F_1 = F_2 < F_3$

۳) $F_1 > F_2 > F_3$

۴) $F_1 = F_3 < F_2$

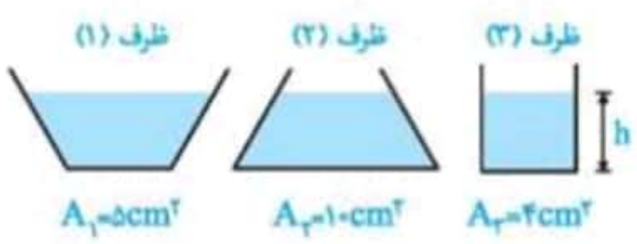
پاسخ با توجه به رابطهٔ $F = \rho ghA\ (\Rightarrow F = PA)$، نیروی وارد بر کف ظرف ناشی از یک مایع با حاصل‌ضرب hA رابطهٔ مستقیم دارد و در ظروف با مایع یکسان، ظرفی که مقدار hA برای آن بزرگ‌تر است، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع نیز برای آن بیشتر است.



$$\begin{cases} \text{(۱) ظرف}: h_1A_1 = 20\times 5 = 100 \\ \text{(۲) ظرف}: h_2A_2 = 25\times 4 = 100 \Rightarrow F_3 > F_2 = F_1 \quad \text{(گزینهٔ ۲)} \\ \text{(۳) ظرف}: h_3A_3 = 20\times 6 = 120 \end{cases}$$

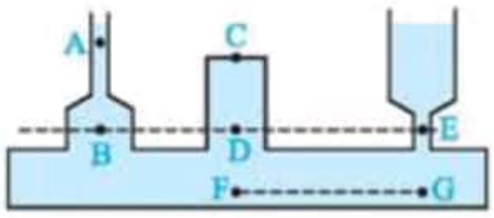
همان‌طور که می‌دانیم، فشار کل در عمق h از سطح آزاد یک مایع، ناشی از فشار هوا و فشار آن مایع است و از رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$ به دست می‌آید. بنابراین فشار به سطح مقطع ظرف بستگی ندارد. دقت شود که رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$ برای محاسبهٔ فشار در عمق h از مایعات ساکن و متعادل به کار می‌رود. بنابراین بر هر یک از سطوح جسم که در داخل یک مایع ساکن قرار گرفته است، از طرف مایع، نیرو و فشار وارد می‌شود $(F = PA)$، پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴۰۳ فشار وارد بر ته ظرف به حجم و سطح مقطع ظرف یا مقدار مایع درون آن بستگی نداشته و فقط به ارتفاع مایع درون ظرف و چگالی آن بستگی دارد. بنابراین از آن‌جایی که ارتفاع آب درون سه ظرف یکسان است، فشار اعمال شده بر کف آن‌ها نیز یکسان است.



$$\Rightarrow P_1 = P_2 = P_3 = P_0 + \rho gh$$

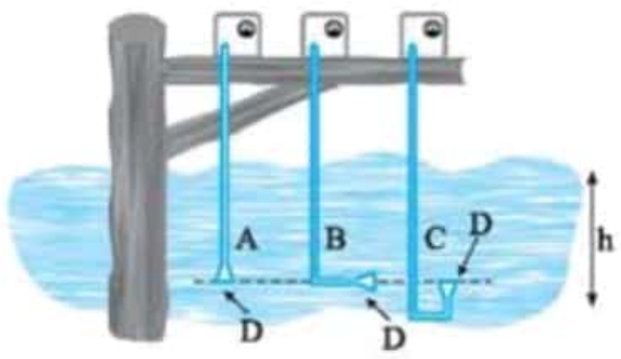
gajmarket.com



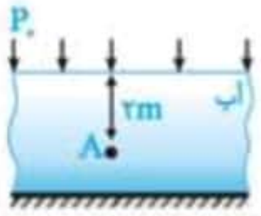
۱۴۰۴ همان‌طور که می‌دانیم، فشار هر نقطه درون یک مایع فقط به ارتفاع قائم آن نقطه از سطح آزاد مایع بستگی دارد. بنابراین هر چه فاصلهٔ قائم یک نقطه از سطح آزاد مایع بیشتر باشد، فشار در آن نقطه بیشتر است.

$$P = P_0 + \rho gh \xrightarrow{h_G = h_F > h_E = h_D = h_B > h_C > h_A} P_G = P_F > P_E = P_D = P_B > P_C > P_A$$

۱۴۰۵ اگر جریان آب ساکن شود، عمق غشای کوچک D در هر سه شکل A، B و C یکسان بوده و بنابراین با توجه به رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$، فشار هر سه برابر است $(P_A = P_B = P_C = P_0 + \rho gh)$.



۱۴۰۶ فشار در عمق ۲ متری آب یک استخر، برابر مجموع فشار هوا و فشار ناشی از ارتفاع ۲ متر آب است و داریم:



$$P_0 = 10^5\ Pa\ ,\ h = 2m\ ,\ \rho = 1gr/cm^3 = 1000kg/m^3\ ,\ g = 10m/s^2$$

$$\text{فشار کل در A}: P_A = P_0 + \rho gh = 10^5 + 1000 \times 10 \times 2 = 10^5 + 2 \times 10^4 = 1/2 \times 10^5\ Pa$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

همان‌طور که می‌دانیم، فشار ناشی از ۱۰ متر آب معادل با $10^5 Pa$ است و در نتیجه فشار ۲ متر آب برابر است با:

$$\text{تناسب}: \begin{array}{c|c} 10m & \Delta P = 10^5 Pa \\ \hline 2m & \Delta P = 0/2 \times 10^5 Pa \end{array}$$

بنابراین فشار در عمق ۲ متری برابر است با:

$$P = P_0 + \text{فشار مایع} = 10^5 + 0/2 \times 10^5 = 1/2 \times 10^5\ Pa$$

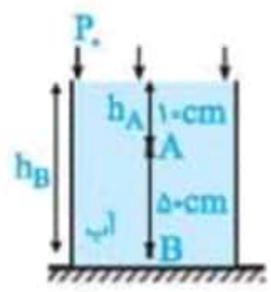
۱۴۰۷ فشار کل در عمق h متری یک مایع، از رابطهٔ $P_{\text{کل}} = P_0 + \rho gh$ به‌دست می‌آید و داریم:

$$\text{اطلاعات سؤال}: P_{\text{کل}} = 1/76\,atm = 1/76 \times 10^5\ Pa\ ,\ P_0 = 1atm = 10^5\ Pa\ ,\ h = 8m$$

$$P_{\text{کل}} = P_0 + \rho gh \Rightarrow 1/76 \times 10^5 = 10^5 + \rho \times 10 \times 8 \Rightarrow 0/76 \times 10^5 = 80\rho \Rightarrow \rho = \frac{0/76 \times 10^5}{80} = 950\,kg/m^3$$

$$\Rightarrow \text{چگالی مایع} = 950\,kg/m^3 \xrightarrow[\times 1000]{\text{تبدیل به } gr/cm^3} \rho = \frac{950}{1000}\,gr/cm^3 = 0/95\,gr/cm^3$$

۱۴۰۸ فشار در نقطهٔ A، برابر مجموع فشار هوا و فشار ۱۰ سانتی‌متر آب است، هم‌چنین فشار در نقطهٔ B، برابر مجموع فشار هوا و فشار ناشی از ۶۰ سانتی‌متر (۵۰ + ۱۰) آب می‌باشد:



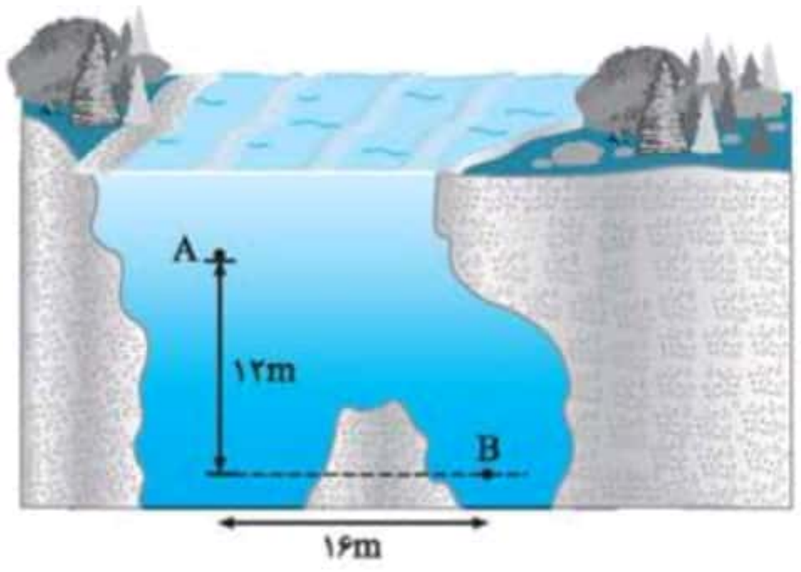
$$\begin{cases} P_B = P_0 + \rho_{\text{آب}}\, gh_B \\ P_A = P_0 + \rho_{\text{آب}}\, gh_A \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$P_0 = 9/9 \times 10^4\ Pa\ ,\ \rho_{\text{آب}} = 1gr/cm^3 = 1000kg/m^3\ ,\ g = 10m/s^2\ ,\ h_A = 0/1m\ ,\ h_B = 0/6m$$

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{P_0 + \rho_{\text{آب}}\, gh_B}{P_0 + \rho_{\text{آب}}\, gh_A} = \frac{9/9 \times 10^4 + 1000 \times 10 \times 0/6}{9/9 \times 10^4 + 1000 \times 10 \times 0/1} = \frac{10/5 \times 10^4}{10 \times 10^4} = \frac{10/5}{10} = \frac{21}{20}$$

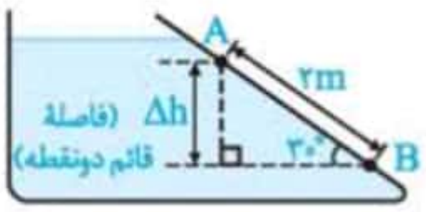
۱۴۰۹ اختلاف فشار بین هر دو نقطهٔ دلخواه از یک مایع، تنها به اختلاف ارتفاع قائم آن‌ها بستگی داشته و به فشار هوای محیط بستگی ندارد. در ادامه با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$\rho = 1gr/cm^3 = 1000kg/m^3\ ,\ \Delta h = h_B - h_A = 12m$$

$$P_B - P_A = \rho g \Delta h = 1000 \times 10 \times 12 = 1/2 \times 10^5\ Pa$$

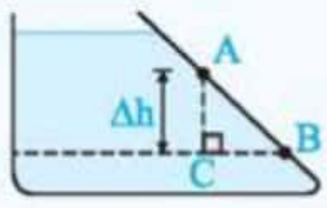
۲ ۴۱۰ دو نقطهٔ A و B درون آب قرار دارند و اختلاف فشار آن‌ها به اختلاف ارتفاع قائم آن‌ها بستگی داشته و با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{\Delta h}{AB} \Rightarrow \Delta h = AB \sin ۳۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱m$$

نکته

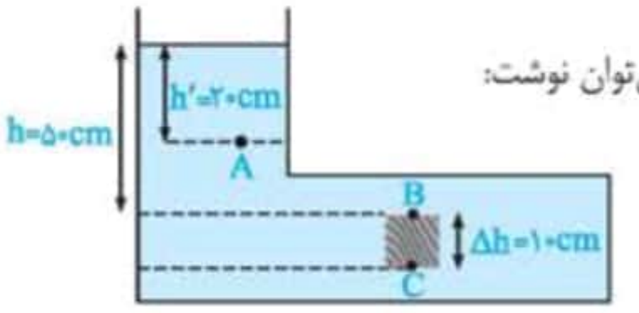
می‌توان گفت دو نقطهٔ B و C در یک ارتفاع از سطح آزاد مایع و در یک مایع قرار دارند و در نتیجه فشار دو نقطه با یک‌دیگر برابر است. بنابراین اختلاف فشار بین A و B، با اختلاف فشار بین A و C برابر است و این اختلاف فشار برابر $\rho g \Delta h$ است:



$$P_C - P_A = P_B - P_A = \rho g \Delta h$$

$$\Delta P = \rho g \Delta h = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۱ = ۱۰۰۰۰ Pa = ۱۰ kPa$$

۳ ۴۱۱ **روش اول:** برای پاسخ دادن به این سؤال، سه گام زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: اختلاف فشار بین نقاط بالا و پایین مکعب، برابر فشار ناشی از ارتفاع ۱۰cm از مایع است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_C - P_B = \rho g \Delta h \xrightarrow[P_B = ۱۱۰ kPa]{P_C = ۱۱۲ kPa} (۱۱۲ - ۱۱۰) \times ۱۰^۳ = \rho \times ۱۰ \times \frac{۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow \rho = ۲ \times ۱۰^۳ \, kg/m^۳$$

گام دوم: فشار در نقطهٔ B ناشی از مایع بالای سر آن و فشار هواست، پس داریم:

$$P_B = P_۰ + \rho g h \Rightarrow ۱۱۰ \times ۱۰^۳ = P_۰ + ۲ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow P_۰ = ۱۰۰ \times ۱۰^۳ = ۱۰^۵ Pa$$

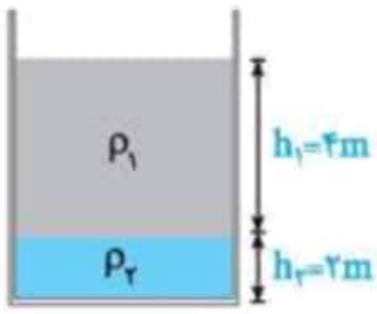
گام سوم: حال باید فشار در نقطهٔ A را حساب کنیم که ناشی از فشار مایع بالای سر آن و فشار هوا است:

$$P_A = P_{هوا} + \rho g h' \Rightarrow P_A = ۱۰^۵ + ۲ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۱۰^۵ + ۴ \times ۱۰^۳ = ۱۰۴ kPa$$

روش دوم: اختلاف فشار بین نقطهٔ B و A ناشی از اختلاف ارتفاع مایع بین آن‌ها است، بنابراین داریم:

$$P_B - P_A = \rho g \Delta h_{BA} \Rightarrow P_A = P_B - \rho g \Delta h_{BA} = ۱۱۰ \times ۱۰^۳ - ۲ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times \frac{۳۰}{۱۰۰} = ۱۰۴ \times ۱۰^۳ Pa = ۱۰۴ kPa$$

۲ ۴۱۲ **گام اول** (محاسبهٔ فشار وارد بر کف ظرف):



فشار در کف ظرف، ناشی از فشار هوا و فشار ناشی از دو مایع است. بنابراین داریم:

فشار کل در کف ظرف: $P = P_۱ + P_۲ + P_۰ = \rho_۱ g h_۱ + \rho_۲ g h_۲ + P_۰$

$$\Rightarrow P = ۱۵۰۰ \times ۱۰ \times ۴ + ۲۰۰۰ \times ۱۰ \times ۲ + ۱۰^۵ = ۲۰ \times ۱۰^۴ Pa$$

گام دوم (محاسبهٔ فشار در مرز بین دو مایع):

فشار در مرز بین دو مایع، ناشی از فشار هوا و فشار مایع با چگالی $\rho_۱$ است. بنابراین داریم:

فشار کل در مرز بین دو مایع: $P' = P_۱ + P_۰ = \rho_۱ g h_۱ + P_۰ = ۱۵۰۰ \times ۱۰ \times ۴ + ۱۰^۵ = ۱۶ \times ۱۰^۴ Pa \Rightarrow \frac{P}{P'} = \frac{۲۰ \times ۱۰^۴}{۱۶ \times ۱۰^۴} = \frac{۵}{۴}$

۱ ۴۱۳ برای پاسخ دادن به این سؤال ترکیبی و زیبا، دو گام زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا چگالی مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho_{مخلوط} = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} = \frac{\rho_A V_A + \rho_B V_B}{V_A + V_B}$$

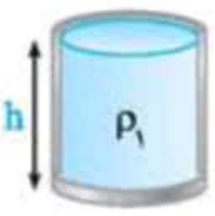
$$\rho_{مخلوط} = \frac{۱۲۰۰ \times \frac{۱}{۳} V + ۶۰۰ \times \frac{۲}{۳} V}{\frac{۱}{۳} V + \frac{۲}{۳} V} = ۸۰۰ \, kg/m^۳$$

گام دوم: در ادامه فشار مخلوط در کف ظرف برابر است با:

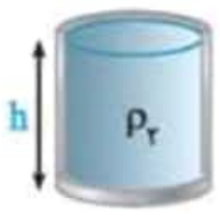
$$\text{فشار مایع}: P_{مایع} = \rho_{مخلوط} gh = ۸۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۷۵}{۱۰۰} = ۶۰۰۰ Pa$$

۲ ۴۱۴ در هر کدام از این حالت‌ها، فشار وارد بر کف ظرف از طرف مایع را به دست می‌آوریم:

حالت اول: رابطهٔ (۱): $P_۱ = \rho_۱ gh$

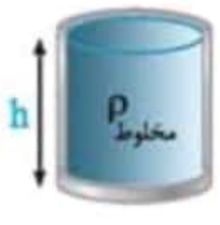


حالت دوم: رابطهٔ (۲): $P_۲ = \rho_۲ gh$



www.gajmarket.com

حالت سوم: در این حالت دو مایع با هم مخلوط شده‌اند. بنابراین چگالی معادل آن‌ها برابر است با:

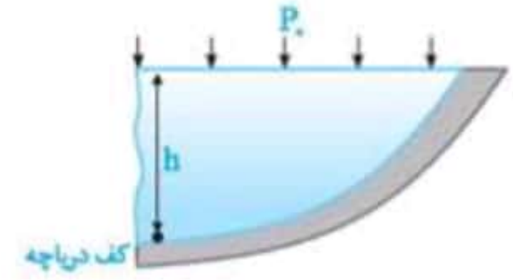


$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}=\frac{\rho_1(\frac{1}{4}V)+\rho_2(\frac{3}{4}V)}{V}=\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$$

$$P_3=\rho_{\text{مخلوط}}gh=(\frac{\rho_1+3\rho_2}{4})gh=\frac{1}{4}(\rho_1gh)+\frac{3}{4}(\rho_2gh)$$

$$\xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} P_3=\frac{1}{4}P_1+\frac{3}{4}P_2=\frac{P_1+3P_2}{4}$$

۱ ۴۱۵ فرض کنید در عمق h متر از سطح دریا فشار دو برابر فشار جو ($P_{\text{کل}}=2P_0$) باشد، در این‌صورت داریم:



$$P_{\text{کل}}=P_0+\rho gh\ ,\ P_0=10^5\,Pa\ ,\ \rho=1000\,kg/m^3\ ,\ g=10\,m/s^2$$

$$2P_0=P_0+\rho gh\Rightarrow\rho gh=P_0\Rightarrow 1000\times10\times h=10^5\Rightarrow h=10\,m$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

فشار کل در عمق h از سطح آب برابر $2\times10^5\,Pa$ است با توجه به این‌که P_0 برابر $10^5\,Pa$ است، فشار ناشی از مایع نیز برابر $10^5\,Pa$ است.

$P_{\text{کل}}=P_0+$ فشار ناشی از آب $\Rightarrow 2\times10^5=10^5+$ فشار ناشی از آب $\Rightarrow$ فشار ناشی از آب $=10^5\,Pa$

از طرفی می‌دانیم که $10\,m$ آب فشار $10^5\,Pa$ را ایجاد می‌کند و در نتیجه ارتفاع h برابر $10\,m$ است.

۳ ۴۱۶ با کمک خلاقیتی که در سؤال قبل نیز آن را تمرین کردیم، فشار ناشی از ۱۰ متر ستون آب برابر فشار هواست (P_0)، در نتیجه فشار ناشی از ۸ متر ستون آب، برابر ($0/8P_0$) و فشار ناشی از ۸۰ متر ستون آب، برابر ($8P_0$) می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}P_1=P_0+0/8P_0=1/8P_0 & \text{: فشار کل در عمق ۸ متری آب دریا}\\ P_2=P_0+8P_0=9P_0 & \text{: فشار کل در عمق ۸۰ متری آب دریا}\end{cases}\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\frac{1/8P_0}{9P_0}=0/2=\frac{1}{5}$$

۲ ۴۱۷ فشار کل، در عمق h و $2h$ از سطح آب به‌ترتیب برابر $P_1=P_0+\rho g(h)$ و $P_2=P_0+\rho g(2h)$ می‌باشد، همان‌گونه که می‌بینید با دو برابر شدن عمق مایع فشار کل بیشتر می‌شود ولی دو برابر نمی‌شود.

$$\begin{cases}P_1=P_0+\rho gh\\ 2P_1=2P_0+2\rho gh\Rightarrow P_1<P_2<2P_1\\ P_2=P_0+2\rho gh\end{cases}$$

تذکر

به‌طور کلی اگر a و b دو عدد مثبت و $c=a+b$ باشد، اگر یکی از اعداد a یا b دو برابر شود، عدد c افزایش می‌یابد ولی ۲ برابر نمی‌شود.

۴ ۴۱۸ در صورتی‌که فشارسنج به‌اندازهٔ Δh در آب فرو رود، فشار نشان داده شده به‌اندازهٔ $\Delta P=\rho g\Delta h$ افزایش می‌یابد و داریم:

$$\Delta h=1\,cm=0/01\,m\ ,\ \rho=1000\,kg/m^3\Rightarrow\Delta P=1000\times10\times0/01=100\,Pa$$

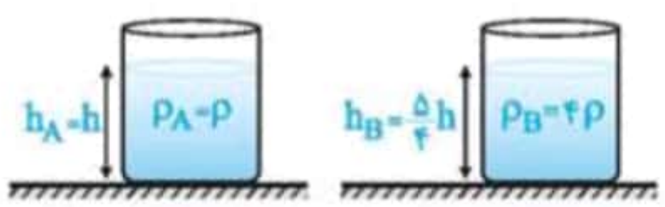
خلاقیت‌های حرفه‌ای

فشار ناشی از ۱۰ متر آب برابر $10^5\,Pa$ است، فشار ناشی از $1\,cm$ آب برابر است با:

تناسب :

$\Delta h=10\,mH_2O$	$\Delta P=10^5\,Pa$
$\Delta h=0/01\,mH_2O$	$\Delta P=\frac{0/01\times10^5}{10}=100\,Pa$

۱ ۴۱۹ فشار واردشده از طرف مایعات بر کف دو ظرف A و B به‌صورت زیر قابل محاسبه است:



$$\begin{cases}P_A=\rho_Agh_A=\rho gh\\ P_B=\rho_Bgh_B=4\rho g\times\frac{5}{4}h=5\rho gh\end{cases}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=\frac{1}{5}$$

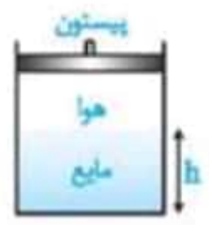
۴ ۴۲۰ فشار کل وارد بر کف ظرف از رابطهٔ $P_{کل} = \rho gh + P_0$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P_{کل_A} = \rho_A g h_A + P_0 = \rho gh + P_0 \\ P_{کل_B} = \rho_B g h_B + P_0 = 4\rho g \times \frac{5}{4} h + P_0 = 5\rho gh + P_0 \end{cases}$$

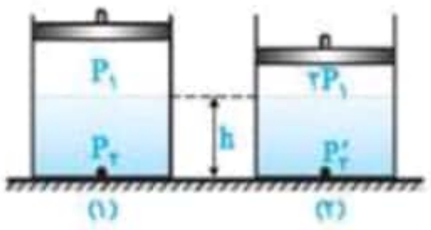
$$\Rightarrow \frac{P_{کل_A}}{P_{کل_B}} = \frac{\rho gh + P_0}{5\rho gh + P_0} = \frac{\rho gh + P_0 + \overbrace{4\rho gh - 4\rho gh}^{\text{اضافه و کم کردیم}}}{5\rho gh + P_0} = 1 - \frac{4\rho gh}{5\rho gh + P_0}$$

بنابراین این نسبت بستگی به فشار هوا دارد و نمی‌توان اظهارنظر کرد. (ولی با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده، می‌توان گفت که نسبت موردنظر، عددی کمتر از یک می‌باشد.)

۴ ۴۲۱ فشار کل در کف ظرف، برابر مجموع فشار هوا و فشار ناشی از ستون مایع است ($P_{کل} = P_{هوا} + \rho gh$). از طرفی می‌دانیم در اثر افزایش فشار، مایع متراکم نمی‌شود یعنی ارتفاع آن ثابت می‌ماند، بنابراین در دو حالت فشار ناشی از مایع بر کف ظرف یکسان است و داریم:



$$P_2 = P_{هوا} + \overbrace{\rho gh}^{P'} \xrightarrow{\text{فشار هوا دو برابر شود}} P'_2 = 2P_{هوا} + \overbrace{\rho gh}^{P'} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = P_1 + P' \\ P'_2 = 2P_1 + P' \end{cases}$$



همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، فشار در کف ظرف بیشتر می‌شود ($P'_2 > P_2$) ولی دو برابر نمی‌شود ($P'_2 < 2P_2$) و می‌توان نوشت:

$$P_2 < P'_2 < 2P_2$$

۳ ۴۲۲ حجم آب درون دو ظرف یکسان است با توجه به رابطهٔ سطح مقطع‌ها، ابتدا نسبت ارتفاع آب درون دو ظرف را به‌دست می‌آوریم:

$$V_1 = V_2 \,,\, V = Ah \Rightarrow A_1 h_1 = A_2 h_2 \xrightarrow{A_2 = \frac{3}{2}A_1} h_2 = \frac{2}{3} h_1$$

در نتیجه با توجه به رابطهٔ $P = \rho gh$، فشار ناشی از مایع در کف ظرف دوم $\frac{2}{3}$ برابر فشار ناشی از مایع در کف ظرف اول است.

از طرفی می‌دانیم فشار کل وارد بر کف ظرف از رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$ به‌دست می‌آید و داریم:

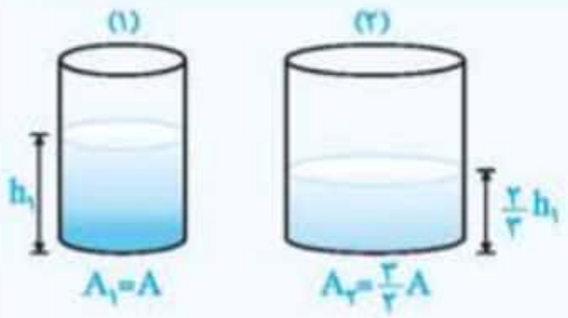
$$P_1 = P_0 + \rho gh_1 \,,\, P_2 = P_0 + \rho g\left(\frac{2}{3} h_1\right)$$

همان‌گونه که می‌بینید فشار کل در کف ظرف اول بیشتر از ظرف دوم است ($P_2 < P_1$) ولی کم‌تر از $\frac{3}{2}$ برابر آن است $\left(P_1 < \frac{3}{2} P_2\right)$:

$$\left(\frac{3}{2} P_2 = \frac{3}{2} P_0 + \rho gh_1\right) > P_1 \Rightarrow P_2 < P_1 < \frac{3}{2} P_2$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

با توجه به این‌که به مقدار مساوی مایع در درون دو ظرف ریخته‌ایم، وزن ستون مایع در دو ظرف یکسان است و داریم:



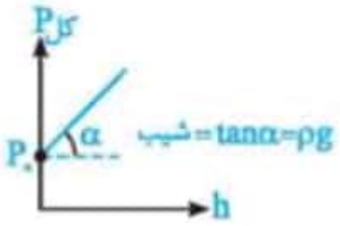
$$P = \frac{W}{A} + P_0 \quad \frac{2}{3} P_1 < P_2 < P_1$$

($\frac{W}{A}$: برابر $\frac{2}{3}$ — کاهش می‌یابد ولی $\frac{2}{3}$ برابر نمی‌شود؛ P_0: ثابت — برابر $\frac{3}{2}$)

بیانی دیگر: P_1 بزرگ‌تر از P_2 است اما $\frac{3}{2}$ برابر نیست، زیرا P_0 در آن $\frac{3}{2}$ برابر نشده است:

$$P_2 < P_1 < \frac{3}{2} P_2$$

۲ ۴۲۳ با توجه به رابطهٔ $P_{کل} = P_0 + \rho gh$، نمودار فشار وارد بر کف ظرف برحسب عمق مایع (h)، به‌صورت یک خط راست با عرض از مبدأ P_0 می‌باشد.



$$P_{کل} = \underbrace{\rho g}_{\text{شیب}} h + \underbrace{P_0}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

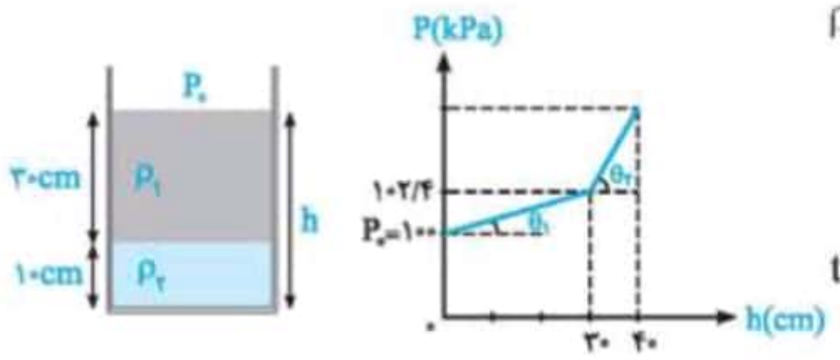
تذکر

۱) هنگامی‌که ارتفاع مایع صفر است ($h = 0$)، تنها فشار هوا بر کف ظرف وارد می‌شود ($P = P_0$) و گزینه‌های (۱) و (۳) نمی‌توانند صحیح باشند (چرا؟).

۲) با افزایش فاصله از سطح مایع، فشار نیز افزایش می‌یابد و شیب خط مثبت است (بنابراین گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند پاسخ صحیح باشد).

gajmarket.com

۴ ۴۲۴ با توجه به پاسخ سؤال قبل، در نمودار فشار برحسب عمق مایع، شیب نمودار برابر ρg است. $\left(\text{شیب نمودار} = \tan\theta = \frac{\Delta P}{\Delta h} = \frac{\rho g \Delta h}{\Delta h} = \rho g\right)$



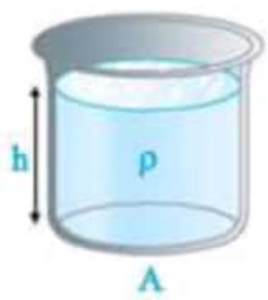
با توجه به نکتهٔ فوق، در این نمودار می‌توان نوشت:

$$\tan\theta_2 = 17\tan\theta_1 \Rightarrow \rho_2 g = 17\rho_1 g \Rightarrow \rho_2 = 17\rho_1$$

از طرفی چگالی ρ_1 با توجه به اطلاعات سؤال برابر است با:

$$\Delta P = \rho g \Delta h \Rightarrow (۱۰۲/۴ - ۱۰۰)\times ۱۰^۳ = \rho_1 \times ۱۰ \times (۳۰\times ۱۰^{-۲}) \Rightarrow \rho_1 = ۸۰۰\frac{kg}{m^۳} \xrightarrow{\rho_2 = 17\rho_1} \rho_2 = 17\times ۸۰۰ = ۱۳۶۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

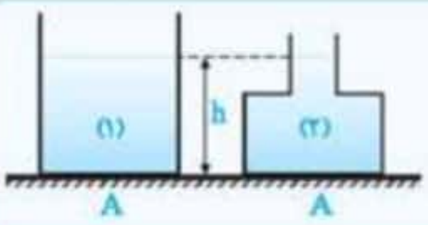
۲ ۴۲۵ با توجه به خلاصه نکات (۵) و با دقت در روابط زیر، نیرویی که از طرف مایع بر کف ظرف وارد می‌شود، به چگالی و ارتفاع مایع و هم‌چنین مساحت کف ظرف بستگی دارد:



$$P = \rho gh \Rightarrow F = P\times A = \rho gh \times A$$

دقت

به عنوان مثال در دو شکل مقابل، نیروی وارد بر کف ظرف‌ها یکسان است.

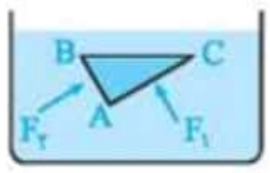


$$F_1 = F_2 = \rho ghA$$

۴ ۴۲۶ طبق صورت سؤال، بر هر $۱cm^۲$ از وجه بالایی مکعب، نیروی $۱۰۰N$ وارد می‌شود، بنابراین برای محاسبهٔ فشار در این سطح می‌توان نوشت:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{۱۰۰N}{۱cm^۲} = \frac{۱۰۰N}{۱۰^{-۴}m^۲} = ۱۰^۶\frac{N}{m^۲} = ۱۰^۶ Pa = ۱MPa$$

۴ ۴۲۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



۱) با توجه به کوچک بودن منشور، می‌توان از تغییر فشار بر روی وجه‌های آن صرف‌نظر کرد و با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ دو وجه کوچک از سطح آزاد، فشار وارد بر این دو وجه یکسان است (هر چند که می‌توان اثبات کرد حتی اگر منشور بزرگ نیز باشد، فشار متوسط در دو وجه یکسان است).

۲) برای مقایسهٔ نیروی وارد بر دو وجه با استفاده از رابطهٔ $F = PA$ می‌توان گفت، با توجه به بزرگ‌تر بودن مساحت وجه AC نسبت به وجه AB، نیروی بیشتری بر وجه AC وارد می‌شود $(F_{AC} > F_{AB})$.

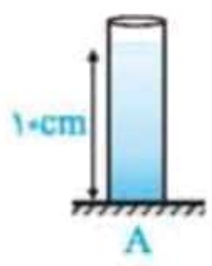
۲ ۴۲۸ فشار در عمق ۶ متری از سطح آب و فشار در سطح آب برابر است با:

$$\begin{cases} \text{فشار در عمق ۶متری}: P_۲ = \rho gh + P_۰ = ۱۰۰۰\times ۱۰\times ۶ + ۱۰^۵ = ۱۶\times ۱۰^۴ Pa \\ \text{فشار در سطح آب}: P_۱ = P_۰ = ۱۰^۵ Pa \quad \text{(فشار در سطح آب، فقط ناشی از فشار هوا است.)} \end{cases}$$

حال باتوجه به رابطهٔ $F = PA$، نیروی وارد بر پردهٔ گوش شناگر را در هر دو حالت مقایسه می‌کنیم:

$$F = PA \Rightarrow \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{A_۲}{A_۱} \xrightarrow{A_۲ = A_۱} \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۱۶\times ۱۰^۴}{۱۰^۵} = ۱/۶$$

۱ ۴۲۹ **روش اول:** (استفاده از رابطهٔ $F = PA$):



$$\pi = ۳ \,,\, \rho = ۱۳/۶ gr/cm^۳ = ۱۳۶۰۰ kg/m^۳ \,,\, D = ۲cm$$

$$\Rightarrow r = ۱cm = ۰/۰۱m \,,\, h = ۱۰cm = ۰/۱m$$

$$\text{سطح مقطع استوانه}: A = \pi r^۲ = ۳\times ۰/۰۱^۲ = ۳\times ۱۰^{-۴} m^۲$$

$$\text{فشار ناشی از جیوه}: P = \rho gh = ۱۳۶۰۰\times ۱۰\times ۰/۱ = ۱۳۶۰۰ Pa$$

$$\text{نیروی وارد بر کف استوانه از طرف جیوه}: F = PA = ۱۳۶۰۰\times ۳\times ۱۰^{-۴} = ۴/۰۸ N \simeq ۴N$$

روش دوم: نیروی وارد بر کف استوانه از طرف جیوه، برابر نیروی وزن جیوهٔ درون آن $(W = mg)$ می‌باشد، بنابراین کافی است جرم جیوه را محاسبه کنیم:

$$m = \rho V = \rho Ah = ۱۳۶۰۰\times ۳\times ۱۰^{-۴}\times ۰/۱ \simeq ۰/۴ kg \Rightarrow F = W = mg = ۴N$$

تذکر

دقت شود که تساوی نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع با وزن مایع، تنها در ظرف‌هایی برقرار است که سطح مقطع آن ثابت است (مانند استوانه).

۴۴۳۰ **روش اول:** فشار حاصل از آب در کف استوانه به ارتفاع آب درون آن بستگی دارد و برای محاسبهٔ آن، کافی است ارتفاع آب درون استوانه را محاسبه کنیم:



سطح مقطع استوانه: $A=\pi r^2=\pi\times 1^2=3/14\,cm^2$ ، $D=2cm\Rightarrow r=1cm$

حجم آب: $V=Ah=157cm^3\Rightarrow 3/14\times h=157\Rightarrow h=50cm=0/5m$

فشار ناشی از ستون ۰/۵ متر آب: $P=\rho gh=1000\times 10\times 0/5=5000Pa$

نیروی وارد بر کف ظرف از طرف آب: $F=PA=5000\times 3/14\times 10^{-4}=1/57N$

روش دوم: با توجه به این‌که سطح مقطع این ظرف در کل ارتفاع آن یکسان است، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف آب، برابر وزن آن می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $P=\frac{F}{A}=\frac{W}{A}$، کافی است نیروی وزن آب را محاسبه کنیم:

حجم آب: $V=157cm^3=157\times 10^{-6}\,m^3$

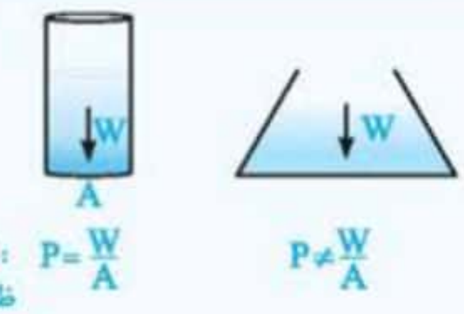
نیروی وزن: $W=mg=(\rho V)\times g=(1000\times 157\times 10^{-6})\times 10=1/57N\Rightarrow F=1/57N$

سطح مقطع استوانه: $A=\pi r^2=\pi\times 0/01^2=3/14\times 10^{-4}\Rightarrow P=\frac{F}{A}=\frac{W}{A}=\frac{1/57}{3/14\times 10^{-4}}=5000Pa$

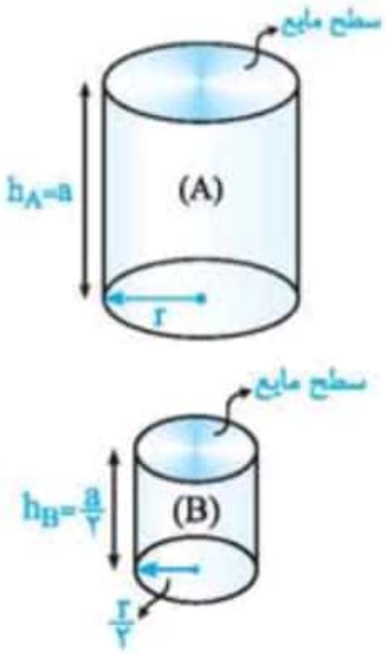
نکته

استفاده از رابطهٔ $P=\frac{W}{A}$ جهت محاسبهٔ فشار ناشی از مایع در کف ظرف، تنها در مواردی که سطح مقطع ظرف در کل ارتفاع آن یکسان است، صحیح می‌باشد (چرا؟!).

هم‌چنین دقت شود که در این تست، فشار ناشی از مایع در کف ظرف را خواسته است.



۴۴۳۱ برای حل، به دو شکل رسم شده متناسب با شرایط سؤال توجه کنید (دقت شود که فشار و نیروی ناشی از مایع، خواستهٔ سؤال است):



$$\begin{cases}P_A=\rho gh_A=\rho g\times a\\ F_A=P_A\times A_A=\rho ga\times(\pi r^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_B=\rho gh_B=\rho g\times\frac{a}{2}\\ F_B=P_BA_B=\rho g\frac{a}{2}\times\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\end{cases}$$

خواستهٔ سؤال: $\frac{F_A}{F_B}=8$ ، $\frac{P_A}{P_B}=2$

۴۴۳۲ با نصف شدن ارتفاع مایع درون ظرف، فشار حاصل از مایع نیز در کف ظرف نصف می‌شود.

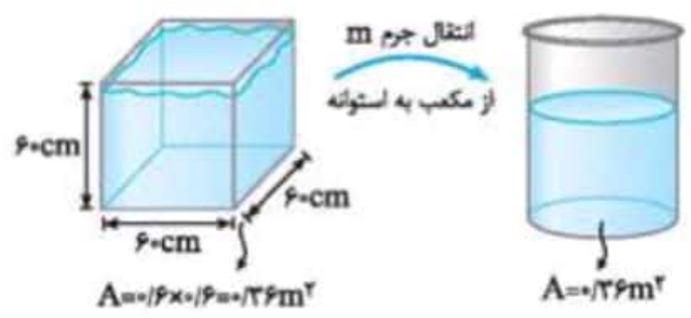
$\frac{1}{2}$ برابر $\downarrow P=\rho g\,h\downarrow$ برابر $\frac{1}{2}$ (ρg: ثابت)

از طرفی نیرویی که از طرف مایع بر کف ظرف وارد می‌شود، برابر است با $F=PA$ و می‌توان نوشت:

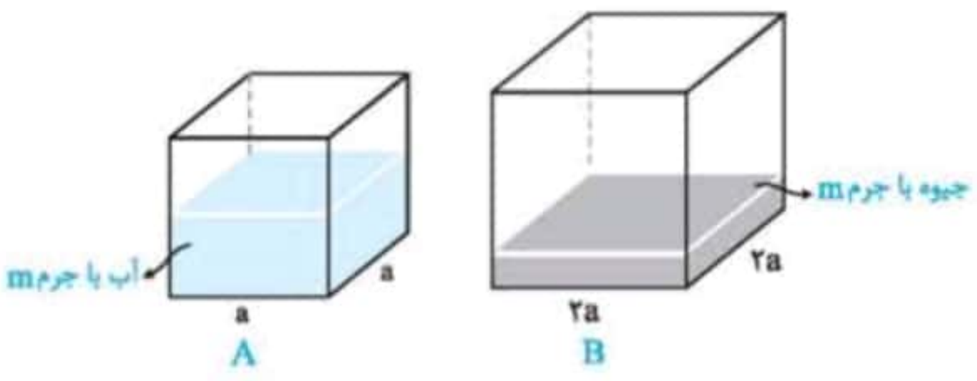
$F=PA=\rho ghA\Rightarrow F\ (\text{ثابت})=\rho g\ (\text{ثابت})\times h\downarrow(\text{برابر }\frac{1}{2})\times A\uparrow(\text{برابر }2)$

نیرویی که مایع بر کف ظرف وارد می‌کند، تغییر نمی‌کند. $\Rightarrow$

۴۴۳۳ فشار ناشی از آب در یک ظرف با سطح مقطع ثابت، از رابطهٔ $\frac{W}{A}$ نیز به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که جرم آب و سطح مقطع کف دو ظرف یکسان است، بنابراین فشار آن‌ها نیز یکسان است.



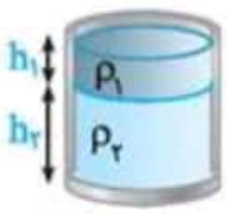
۴۴۳۴ اگر ابعاد ظرف B، دو برابر ظرف A باشد، مساحت مقطع آن ۴ برابر است. در ادامه باتوجه به ثابت بودن مقطع ظرف، برای محاسبهٔ فشار ناشی از مایع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\begin{cases}P_A=\frac{F_A}{A_A}=\frac{mg}{a^2}\\ P_B=\frac{F_B}{A_B}=\frac{mg}{4a^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=4$$

gajmarket.com

۴ ۴۳۵ در حالت کلی، فشار ناشی از مایع از رابطهٔ $P = \rho gh$ به دست می‌آید. در این سؤال، با توجه به این‌که سطح مقطع ظرف در همه جا یکسان است، می‌توان برای محاسبهٔ فشار ناشی از مایع، از رابطهٔ $P = \frac{W}{A}$ نیز استفاده کرد. بنابراین با توجه به این‌که فشار ناشی از هر کدام از مایعات را می‌توان از دو رابطهٔ ارائه شده به دست آورد، هر ۴ رابطهٔ زیر را می‌توان برای محاسبهٔ مجموع فشار ناشی از مایعات بر کف ظرف به کار برد:



A: سطح کف ظرف

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{W_1}{A} + \frac{W_2}{A} \\ P = \frac{W_1}{A} + \rho_2 g h_2 \\ P = \rho_1 g h_1 + \frac{W_2}{A} \\ P = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \end{cases}$$

۳ ۴۳۶ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ فشار ناشی از روغن:

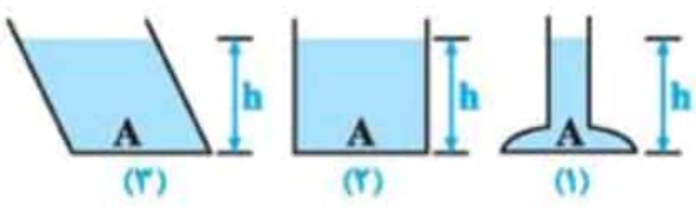
$$P_{آب} = \rho gh_{آب} = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰^{-۲} = ۱۰۰۰Pa$$

$$P = P_{آب} + P_{روغن} \Rightarrow ۲۰۰۰ = ۱۰۰۰ + P_{روغن} \Rightarrow P_{روغن} = ۱۰۰۰Pa$$

گام دوم:

$$P_{روغن} = \frac{m_{روغن} g}{A} \Rightarrow ۱۰۰۰ = \frac{m_{روغن} \times ۱۰}{۲۰ \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow m_{روغن} = ۰/۲kg = ۲۰۰gr$$

۳ ۴۳۷ در شکل روبه‌رو، ارتفاع مایع درون سه ظرف یکسان و در نتیجه فشار وارد بر کف سه ظرف نیز یکسان است ($P_1 = P_2 = P_3 = \rho gh + P_0$). از طرفی با توجه به این‌که مساحت کف سه ظرف نیز برابر است، نیروی وارد بر کف آن‌ها نیز یکسان می‌باشد ($F = PA \Rightarrow F_1 = F_2 = F_3$).



۲ ۴۳۸ برای مقایسهٔ نیروی کل وارد بر کف ظرف‌ها، با توجه به فشار کل وارد شده بر کف ظرف، می‌توان نوشت:

$$P_{کل} = \rho gh + P_0 \Rightarrow F_{کل} = \underbrace{\rho ghA}_{(۱)} + \underbrace{P_0 A}_{(۲)}$$

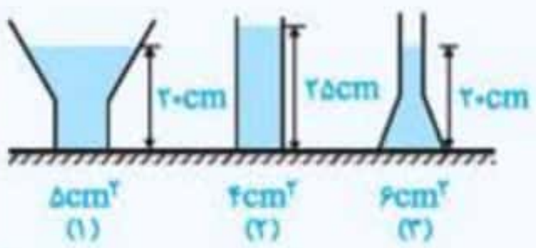
مقایسهٔ ظرف‌های (۱)، (۲) و (۳):

$$\begin{cases} F_{کل_1} = \rho g \times (۲۰) \times (۵) + P_0 \times ۵ \\ F_{کل_2} = \rho g \times (۲۵) \times (۴) + P_0 \times ۴ \Rightarrow F_2 > F_1 > F_3 \\ F_{کل_3} = \rho g \times (۲۰) \times (۶) + P_0 \times ۶ \end{cases}$$

دقت شود با توجه به این‌که قصد مقایسه داشتیم، نیازی به تبدیل واحد A و h نبود.

تذکر

برای مقایسهٔ نیروی وارد بر کف ظرف‌ها از طرف مایع، با توجه به رابطهٔ $F = \rho ghA$، نیروی وارد بر کف ظرف ناشی از مایع با حاصل‌ضرب hA رابطهٔ مستقیم دارد (ρghA) و ظرفی که مقدار hA برای آن بزرگ‌تر است، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع نیز برای آن بیشتر است.

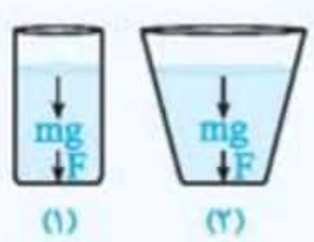


$$\begin{cases} (۱) \text{ ظرف}: h_1 A_1 = ۲۰ \times ۵ = ۱۰۰ \\ (۲) \text{ ظرف}: h_2 A_2 = ۲۵ \times ۴ = ۱۰۰ \Rightarrow F_2 > F_3 = F_1 \\ (۳) \text{ ظرف}: h_3 A_3 = ۲۰ \times ۶ = ۱۲۰ \end{cases}$$

۱ ۴۳۹

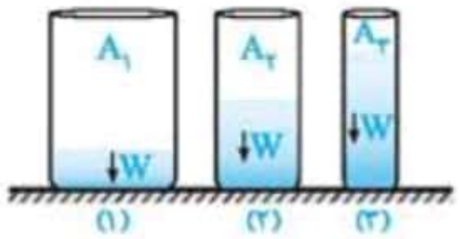
نکته

مجدداً تأکید می‌شود در صورتی‌که سطح مقطع ظرف در کل ارتفاع آن ثابت باشد، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع برابر نیروی وزن مایع درون ظرف است.



$$\begin{cases} (۱) \text{ ظرف}: F = mg \\ (۲) \text{ ظرف}: F \neq mg \end{cases}$$

مقایسهٔ بیشتر این موضوع را در تست‌های (۵۳۳) تا (۵۴۰) انجام می‌دهیم.



با توجه به این‌که هر سه ظرف استوانه‌ای شکل هستند، نیروی وارد بر کف ظرف‌ها از طرف مایع برابر نیروی وزن مایع است و از آن‌جایی که در هر سه ظرف مقدار مساوی مایع ریخته شده است، داریم:

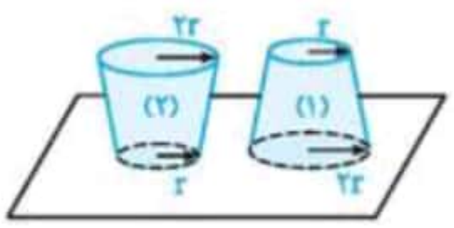
$$F_۱ = F_۲ = F_۳ = mg$$

تذکر

به عنوان یک سؤال مهم، می‌خواهیم نیروی کل وارد بر کف سه ظرف را مقایسه کنیم، در مقایسهٔ نیروی کل در این سه ظرف استوانه‌ای می‌توان گفت:

$$\overset{\uparrow}{F_{\text{کل}}} = \overset{\text{یکسان}}{\text{وزن مایع}} + P_۰ \times \overset{\uparrow}{A} \xrightarrow{A_۳ < A_۲ < A_۱} F_۳ < F_۲ < F_۱$$

۳ ۴۴۰ فشار وارد بر ته ظرف به حجم ظرف و سطح مقطع ظرف یا مقدار مایع درون آن بستگی نداشته و فقط به ارتفاع مایع در داخل ظرف بستگی دارد، بنابراین $P_۱ = P_۲$ می‌باشد، چون ارتفاع آب در هر دو ظرف یکسان است.



از طرفی با کمی فکر می‌توان گفت نیرویی که ظرف‌ها بر سطح افقی وارد می‌کنند، برابر مجموع وزن مایع و ظرف است که در هر دو شکل یکسان است و در نتیجه نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ نیز برابر است.

۳ ۴۴۱ با توجه به یکسان بودن ارتفاع آب، فشار ناشی از آب بر ته هر دو ظرف یکسان است $(P_۱ = P_۲)$. بنابراین برای مقایسهٔ نیروی وارد شده از طرف مایع بر کف ظرف، می‌توان نوشت:

$$F = PA \Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲} = \frac{P_۱}{P_۲} \times \frac{A_۱}{A_۲} \xrightarrow{A \propto r^۲} \frac{F_۱}{F_۲} = \frac{P_۱}{P_۲} \times \left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲ = ۱ \times \left(\frac{۲r}{r}\right)^۲ = ۴$$

نگاهی دیگر

شعاع قاعدهٔ ظرف (۱)، دو برابر ظرف (۲) است، بنابراین مساحت کف ظرف (۱)، چهار برابر ظرف (۲) است. با توجه به رابطهٔ $F = PA$ و یکسان بودن فشار ناشی از مایع بر کف دو ظرف، نیروی وارد شده از طرف مایع بر کف ظرف (۱)، چهار برابر ظرف (۲) است.

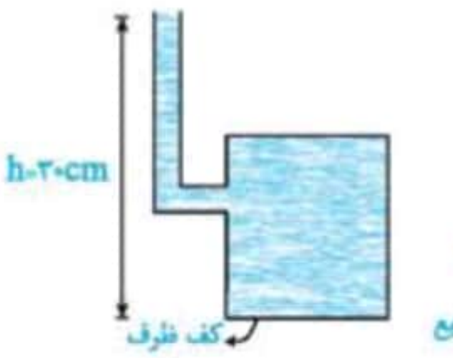
۴ برابر یکسان ۴ برابر

$F = P \quad A$

۳ ۴۴۲ فشاری که بر کف ظرف وارد می‌شود برابر است با:

$$P_{\text{مایع}} = \rho gh = ۸۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۳}{۱۰} = ۲۴۰۰\,Pa$$: سهم فشار ناشی از مایع

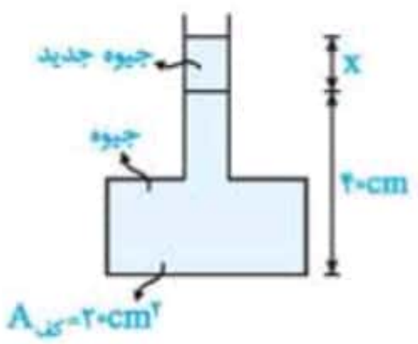
اکنون با توجه به رابطهٔ $P = \frac{F}{A}$، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع برابر است با:



$$P_{\text{مایع}} = ۲۴۰۰\,Pa \;,\; A = ۱۰۰\,cm^۲ = ۰/۰۱\,m^۲$$

$$\Rightarrow F_{\text{مایع}} = P_{\text{مایع}} \times A = ۲۴۰۰ \times ۰/۰۱ = ۲۴\,N$$

۲ ۴۴۳ فرض کنید x سانتی‌متر به ارتفاع جیوه در داخل ظرف اضافه شود، در این حالت ارتفاع جیوه در ظرف به $(۴۰ + x)$ سانتی‌متر رسیده و نیروی وارد از طرف جیوه بر کف ظرف برابر است با:



$$F = \rho ghA_{\text{کف}} = ۱۳۵۰۰ \times ۱۰ \times (۴۰ + x) \times ۱۰^{-۲} \times ۲۰ \times ۱۰^{-۴} = ۲/۷(۴۰ + x)$$

تبدیل سانتی‌متر به متر

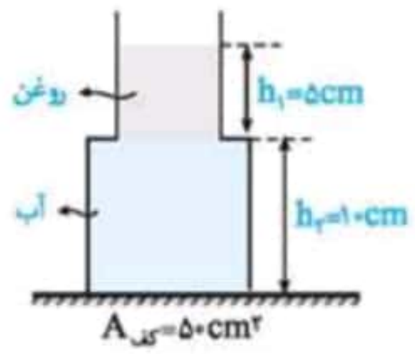
تبدیل سانتی‌مترمربع به مترمربع

حال اگر بخواهیم ظرف در آستانهٔ شکستن قرار گیرد، با توجه به این‌که نیروی قابل تحمل کف آن ۱۳۵ نیوتون است، داریم:

$$۲/۷(۴۰ + x) = ۱۳۵ \Rightarrow x = ۱۰\,cm \Rightarrow x \le ۱۰\,cm$$

بنابراین حداکثر ۱۰cm می‌توان به ارتفاع جیوه در داخل ظرف اضافه کرد تا ظرف نشکند.

۴ ۴۴۴ فشار ناشی از دو مایع بر کف ظرف، برابر مجموع فشار ناشی از دو مایع می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



$P = P_۱ + P_۲ = \rho_۱ gh_۱ + \rho_۲ gh_۲$: فشار ناشی از دو مایع بر کف ظرف

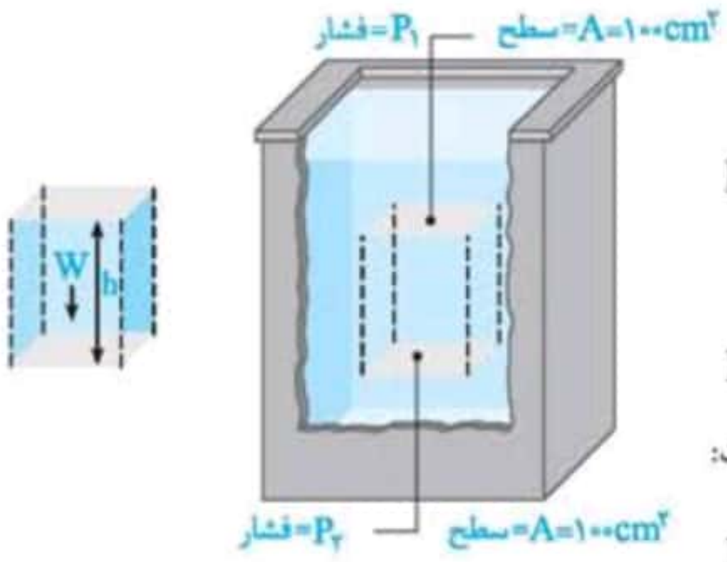
$$\Rightarrow P = (۰/۸ \times ۱۰^۳) \times ۱۰ \times ۰/۰۵ + (۱ \times ۱۰^۳) \times ۱۰ \times ۰/۱ = ۱۴۰۰\,Pa$$

بنابراین نیروی وارد بر کف ظرف ناشی از دو مایع برابر است با:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA = ۱۴۰۰ \times ۵۰ \times ۱۰^{-۴} = ۷\,N$$

www.gajmarket.com

۴۴۵ ۲ این سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



روش اول: فشار در نقطهٔ (۱) ناشی از فشار هوا و فشار مایع بالای آن است، پس داریم:

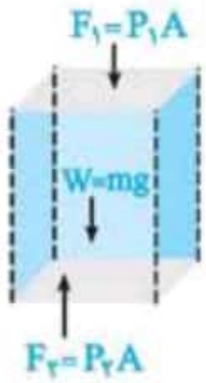
$$P_1=\frac{F_1}{A}+P_0=\frac{W_1}{A}+P_0$$

فشار در نقطهٔ (۲) نیز ناشی از فشار هوا و فشار مایع بالای آن است، پس داریم:

$$P_2=\frac{F_2}{A}+P_0=\frac{W_2}{A}+P_0$$

مقدار مایع درون بخش نشان داده شده، باعث اختلاف فشار بین دو نقطه می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$P_2-P_1=\frac{W}{A}\xrightarrow[P_1=112kPa]{P_2=115kPa}(115-112)\times10^3=\frac{W}{100\times10^{-4}}\Rightarrow W=30N$$



روش دوم: باتوجه به این‌که مایع نشان داده شده در حال تعادل است، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. بر قسمت نشان داده شده از مایع، سه نیروی F_1، F_2 و وزن آن (mg) وارد می‌شود (F_1 و F_2 نیروهای وارد شده بر بالا و پایین مایع ناشی از فشار مایع است).

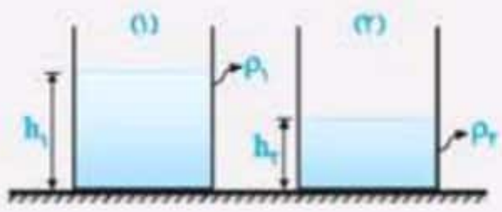
$$F_1+W=F_2\xrightarrow[F_1=P_2A]{F_1=P_1A}P_1A+W=P_2A$$

$$\Rightarrow 112\times10^3\times100\times10^{-4}+W=115\times10^3\times100\times10^{-4}\Rightarrow W=30N$$:وزن مایع نشان داده‌شده

۴۴۶ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ — فشار معادل دو مایع مختلف (تست‌های ۴۴۶ تا ۴۵۵)

در شکل مقابل، می‌خواهیم فشار وارد بر کف دو ظرف با یک‌دیگر برابر باشد، به همین منظور رابطهٔ زیر باید بین پارامترهای ρ_1، h_1، ρ_2 و h_2 برقرار باشد:

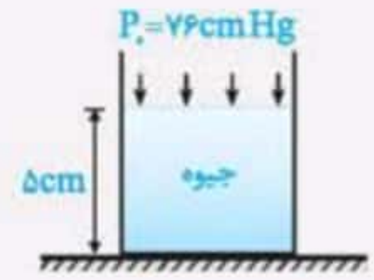


$$P_1=P_2\Rightarrow \cancel{P_0}+\rho_1gh_1=\cancel{P_0}+\rho_2gh_2\Rightarrow \boxed{\rho_1h_1=\rho_2h_2}$$

در اصطلاح می‌گوییم، فشار h_1 متر از مایعی با چگالی ρ_1 معادل با فشار h_2 متر از مایعی با چگالی ρ_2 است.

نکات مهم و کاربردی

۱ یکی از واحدهای رایج فشار، سانتی‌متر جیوه است. به‌طور مثال اگر فشار محیط در شکل مقابل برابر $76cmHg$ باشد، فشار وارد بر کف ظرف برابر $81cmHg$ است.



$$P_{کل}=\text{فشار هوا}+\text{فشار مایع}=76+5=81cmHg$$

۲ برای تبدیل سانتی‌متر جیوه به پاسکال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$P=\rho_{جیوه}gh_{جیوه}=13600\times10\times h_{جیوه}$ (فشار بر حسب پاسکال) ($h_{جیوه}$، ارتفاع جیوه بر حسب متر است.)

فشار $81cmHg$ است $\Rightarrow P=13600\times10\times\frac{81}{100}=110160Pa$

۳ اگر بخواهیم فشار ناشی از h_1 متر مایع با چگالی ρ_1 را برحسب سانتی‌متر جیوه به‌دست آوریم، کافی است به صورت زیر عمل کنیم:

$$\rho_{جیوه}\times h_{جیوه}=\rho_1h_1\Rightarrow h_{جیوه}=\frac{\rho_1}{\rho_{جیوه}}\times h_1$$

تمرین فشار ناشی از $20cm$ مایعی با چگالی $6/8gr/cm^3$، برابر چند سانتی‌متر جیوه است؟ ($\rho_{جیوه}=13/6gr/cm^3$)

پاسخ $\rho_{جیوه}\times h_{جیوه}=\rho_1h_1\Rightarrow \overset{2}{\cancel{13/6}}\times h_{جیوه}=20\times\overset{1}{\cancel{6/8}}\Rightarrow h_{جیوه}=10cm$

۴ فشار ناشی از $76cmHg$، به طور تقریبی برابر 10^5Pa یا $1atm$ است.

$$1atm\equiv10^5Pa\equiv76cmHg$$

۵ فشار هر سانتی‌متر جیوه، معادل با فشار $13/6cm$ آب است ($\rho_{جیوه}=13/6gr/cm^3$ ، $\rho_{آب}=1gr/cm^3$):

$$\rho_{آب}h_{آب}=\rho_{جیوه}h_{جیوه}\Rightarrow 1\times h_{آب}=13/6\times(1cm)\Rightarrow h_{آب}=13/6cm$$

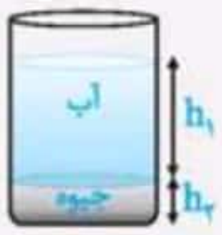
به‌طور مثال اگر از ما بپرسند که فشار ناشی از ۶۸cm آب برابر چند سانتی‌متر جیوه است، کافی است حاصل را بر ۱۳/۶ تقسیم کنیم:

$$\text{فشار معادل با } 68\text{cm آب} = \frac{68}{13/6} = 5\text{cmHg}$$

تمرین۲ در یک مخزن استوانه‌ای، آب و جیوه به جرم‌های برابر ریخته شده است. مجموع ارتفاع دو لایه مایع ۷۳ سانتی‌متر است. فشاری که از این دو مایع بر ته مخزن وارد می‌شود چند سانتی‌مترجیوه است؟ ($13/6\,gr/cm^3$ = چگالی جیوه)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ با توجه به شکل مقابل و با توجه به این‌که جرم آب و جیوه درون مخزن استوانه‌ای یکسان است، می‌توان نوشت:



$$m_1 = m_2 \Rightarrow \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \rho_1 A h_1 = \rho_2 A h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

$$\Rightarrow 1 \times h_1 = 13/6 \times h_2 \Rightarrow h_{\text{آب}} = 13/6\, h_{\text{جیوه}} \quad (I)$$

از طرفی با توجه به صورت سؤال، مجموع ارتفاع دو لایهٔ آب و جیوه برابر ۷۳ سانتی‌متر است.

$$h_{\text{آب}} + h_{\text{جیوه}} = 73\text{cm} \quad (II)$$

با حل دستگاه زیر ارتفاع آب و جیوه به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} h_{\text{آب}} = 13/6\, h_{\text{جیوه}} \\ h_{\text{آب}} + h_{\text{جیوه}} = 73 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{\text{آب}} = 68\text{cm} \\ h_{\text{جیوه}} = 5\text{cm} \end{cases}$$

از طرفی با توجه به نکات فوق، می‌دانیم که هر ۱cm جیوه، معادل با ۱۳/۶cm آب است. حال کافی است ارتفاع جیوهٔ معادل ۶۸ سانتی‌متر آب را به‌دست آوریم، برای این منظور ارتفاع آب را بر ۱۳/۶ تقسیم می‌کنیم:

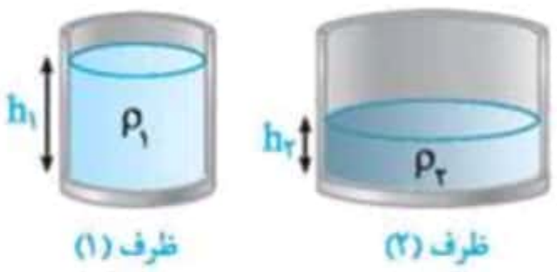
$$\text{ارتفاع جیوهٔ معادل آب} = \frac{68}{13/6} = 5\text{cm}$$

در نتیجه فشاری که از طرف دو مایع بر کف ظرف وارد می‌شود، برابر ۱۰cm Hg (= ۵ + ۵) می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

خلاقیت حرفه‌ای

با توجه به تساوی جرم آب و جیوه، وزن آن‌ها نیز با یک‌دیگر برابر است و در نتیجه فشار آن‌ها در کف ظرف نیز با یک‌دیگر برابر است $\left(P = \frac{W}{A}\right)$. فشار ناشی از ۵ سانتی‌متر جیوه، برابر ۵cmHg و فشار ناشی از ۶۸cm آب نیز برابر با جیوه و برابر ۵cmHg است و در نتیجه فشار ناشی از دو مایع در کف ظرف برابر ۱۰cmHg است.

در این سؤال، فشار ناشی از مایع‌ها مدنظر است، بنابراین فشار هوا تأثیری ندارد و می‌توان نوشت:



$$P_1 = \rho_1 g h_1 \ , \ P_2 = \rho_2 g h_2$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \xrightarrow{\rho_2 = n\rho_1} \rho_1 h_1 = n\rho_1 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{n} h_1$$

۳ ۴۴۷ در این مسأله برای برابر شدن فشار ناشی از دو مایع آب و جیوه داریم:

$$\text{آب} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} = 1000\,kg/m^3 \ , h_{\text{آب}} = ? \quad , \quad \text{جیوه} \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}} = 13600\,kg/m^3 \ , h_{\text{جیوه}} = 150\text{mm} = 0/15\text{m}$$

$$P_{\text{آب}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 1000 \times h_{\text{آب}} = 13600 \times 0/15 \Rightarrow h_{\text{آب}} = 13/6 \times 0/15 = 2/04\text{m}$$

۲ ۴۴۸ **قسمت اول:** برای تبدیل فشار برحسب پاسکال به سانتی‌متر جیوه، با توجه به رابطهٔ $P = \rho g h$ می‌توان نوشت:

$$P = 119\text{kPa} = 119000\text{Pa} \ , \ \rho = 13600\,kg/m^3 \ , g = 10\,m/s^2 \ , h_{\text{جیوه}} = ?$$

$$P = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 119000 = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 119000 = 13600 \times 10 h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{119}{136} = 0/875\text{m} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 87/5\text{cm}$$

قسمت دوم: برای این‌که فشار ناشی از آب برابر ۱۱۹kPa شود، می‌توان نوشت:

$$P = \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} \Rightarrow 119000 = 1000 \times 10 \times h_{\text{آب}} \Rightarrow h_{\text{آب}} = 11/9\text{m} = 1190\text{cm}$$

www.gajmarket.com

۴۴۹ ۲ ابتدا فشار حاصل از ارتفاع ۱۳۶cm آب را برحسب cmHg محاسبه می‌کنیم:

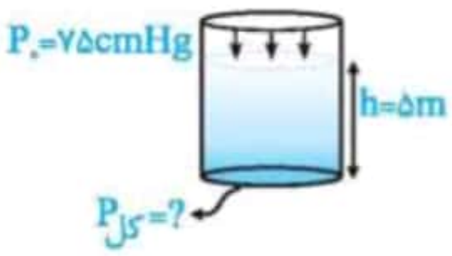
$$\rho_{آب} h_{آب} = \rho_{جیوه} h_{جیوه} \Rightarrow ۱۰۰۰ \times ۱۳۶ = ۱۳۶۰۰ \times h_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه} = ۱۰ cmHg$$

با توجه به این‌که فشار هوا برابر ۷۶cmHg است، فشار در عمق ۱۳۶ سانتی‌متری آب در مجموع برابر $۷۶ + ۱۰ = ۸۶ cmHg$ به‌دست می‌آید.

خلاقیت‌های حرفه‌ای

با توجه به خلاصه نکات (۶)، می‌دانیم هر ۱۳/۶cm آب، فشاری معادل با یک سانتی‌متر جیوه ایجاد می‌کند. بنابراین با یک تناسب ساده می‌توان گفت که ۱۳۶cm آب رودخانه فشاری معادل ۱۰ سانتی‌متر جیوه ایجاد می‌کند و فشار در عمق موردنظر برابر ۸۶ سانتی‌متر جیوه (۱۰ + ۷۶) می‌باشد.

۴۵۰ ۳ ابتدا فشار معادل با ۵ متر از مایع را برحسب سانتی‌متر جیوه محاسبه می‌کنیم:



$$\rho_{جیوه} = ۱۳/۶ gr/cm^۳ \ , \ \rho_{مایع} = ۳/۴ gr/cm^۳$$

$$\rho_{مایع} h_{مایع} = \rho_{جیوه} h_{جیوه} \Rightarrow ۵ \times \cancel{۳/۴}^{۱} = \cancel{۱۳/۶}^{۴} \times h_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه} = ۱/۲۵ m = ۱۲۵ cm$$

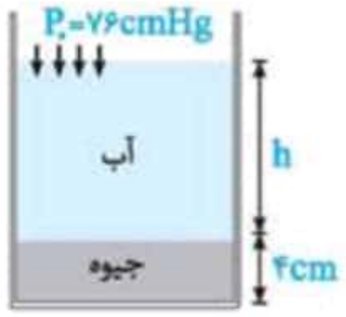
بنابراین فشار کلی که بر کف مخزن وارد می‌شود برابر است با:

$$P_{کل} = \text{فشار مایع} + \text{فشار هوا} = ۷۵ + ۱۲۵ = ۲۰۰ cm\,Hg$$

۴۵۱ ۳ سؤال جالب و مفهومی است. فشار کلی در عمق ۲ متری ظرف برابر ۱۰۰cm Hg است، با توجه به این‌که فشار هوا برابر ۷۵cm Hg است، یعنی فشار ناشی از ۲ متر مایع برابر ۲۵cm Hg(= ۷۵ - ۱۰۰) می‌باشد. در نتیجه فشار ناشی از ۸ متر مایع ۴ برابر آن یعنی برابر ۱۰۰cm Hg$\left(= \frac{۸}{۲} \times ۲۵\right)$ است. با توجه به توضیحات ذکر شده، فشار کل در عمق ۸ متری این ظرف برابر است با:

$$P_{کل} = \underbrace{۷۵}_{\text{فشار هوا}} + \underbrace{۱۰۰}_{\text{فشار مایع}} = ۱۷۵ cm\,Hg$$

۴۵۲ ۲ فشار کل وارد بر کف ظرف، ناشی از فشار هوا و فشار دو مایع است. طبق صورت سؤال، فشار هوا برابر ۷۶ cm Hg و فشار ناشی از ستون جیوه برابر ۴cmHg است. بنابراین داریم:

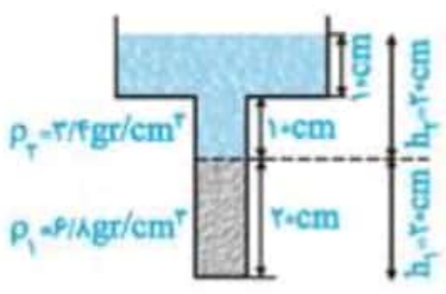


فشار کل وارد بر کف ظرف : $P = P_{آب} + P_{جیوه} + P_0 \Rightarrow ۸۵ = P_{آب} + ۴ + ۷۶ \Rightarrow P_{آب} = ۵ cmHg$

فشار ناشی از آب، برابر ۵ سانتی‌متر جیوه است. حال باید حساب کنیم که این فشار معادل با چند سانتی‌متر آب است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $\rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲$، می‌توان ارتفاع آب معادل با ۵cm جیوه را به دست آورد.

$$\rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲ \Rightarrow ۱ \times h_۱ = ۱۳/۶ \times ۵ \Rightarrow h_۱ = ۶۸ cm = ۰/۶۸ m$$

۴۵۳ ۳ فشار ناشی از دو مایع در کف ظرف، برابر فشار معادل ۲۰ سانتی‌متر از مایعی با چگالی $\rho_۱ = ۶/۸ gr/cm^۳$ و ۲۰(= ۱۰ + ۱۰) سانتی‌متر از مایع با چگالی $\rho_۲ = ۳/۴ gr/cm^۳$ است و برای محاسبهٔ فشار ناشی از دو مایع برحسب سانتی‌متر جیوه داریم:

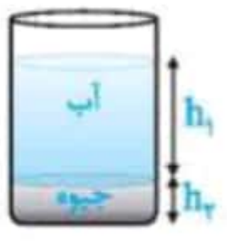


$$\begin{cases} \rho_۱ h_۱ = \rho' h' \\ \rho_۲ h_۲ = \rho' h'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶/۸ \times ۲۰ = ۱۳/۶ \times h' \Rightarrow h' = ۱۰ cm \\ ۳/۴ \times ۲۰ = ۱۳/۶ \times h'' \Rightarrow h'' = ۵ cm \end{cases}$$

$$P_{کل} = P_۱ + P_۲ = h' + h'' = ۱۰ + ۵ = ۱۵ cm\,Hg$$

۴۵۴ ۲ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴۵۵ ۱ به اصل بقای تست توجه کنید. مشابه با سؤال قبل با توجه به این‌که جرم جیوه ۴ برابر جرم آب است، می‌توان نوشت:



$$۴ m_۱ = m_۲ \Rightarrow ۴ \rho_۱ V_۱ = \rho_۲ V_۲ \Rightarrow ۴ \rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲$$

$$\Rightarrow ۴ \times ۱ \times h_{آب} = ۱۳/۶ \times h_{جیوه} \Rightarrow h_{آب} = ۳/۴ h_{جیوه}$$

از طرفی مجموع ارتفاع دو مایع برابر ۴۴ سانتی‌متر است و داریم:

$$\begin{cases} h_{آب} + h_{جیوه} = ۴۴ \\ h_{آب} = ۳/۴ h_{جیوه} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{آب} = ۳۴ cm = ۰/۳۴ m \\ h_{جیوه} = ۱۰ cm = ۰/۱ m \end{cases}$$

یادآوری



فشار ناشی از چند مایع مخلوط نشدنی بر کف یک ظرف، برابر مجموع فشار تک‌تک لایه‌ها می‌باشد:

$$P = P_۱ + P_۲ = \rho_۱ g h_۱ + \rho_۲ g h_۲$$

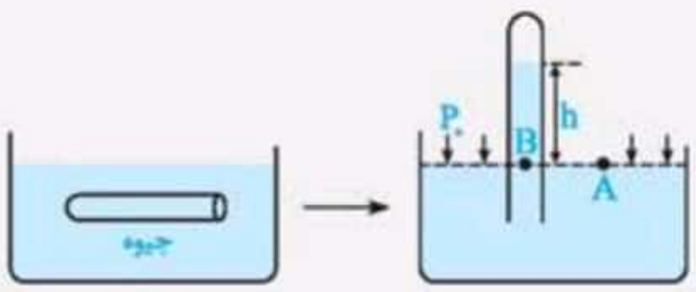
با توجه به نکتهٔ فوق، فشار ناشی از دو مایع برابر است با:

$$P = P_{آب} + P_{جیوه} = \rho_{آب} g h_{آب} + \rho_{جیوه} g h_{جیوه} = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۳۴ + ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۱ = ۱۷۰۰۰ Pa = ۱۷ kPa$$

۳ ۴۵۶ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — **فشارسنج هوا (بارومتر)** — (تست‌های ۴۵۶ تا ۴۷۰)

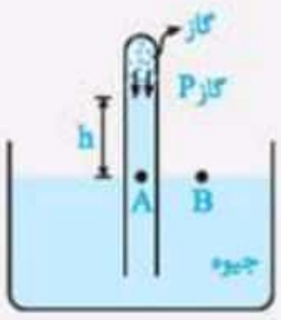
یکی از روش‌های اندازه‌گیری فشار در محیط استفاده از فشارسنج هوا (بارومتر) است. در این روش لوله‌ای بلند که یک انتهایش بسته است را کاملاً درون جیوه قرار می‌دهند و آن را از سر بسته بیرون می‌آورند، ارتفاعی از جیوه که نسبت به سطح آزاد مایع در لوله بالا می‌رود، فشار هوا را نشان می‌دهد. دقت کنید که در این حالت در بالای لوله هوا وجود ندارد و خلأ است. در این حالت، فشار نقطهٔ A (فشار هوا) برابر فشار نقطهٔ B (فشار ستون جیوه) است.



نکات مهم و کاربردی

۱ یکی از اتفاقات جالبی که رخ می‌دهد آن است که میزان جیوه‌ای که نسبت به سطح آزاد مایع در لوله بالا می‌رود، مستقل از سطح مقطع لوله است، یعنی اگر قطر لوله دو برابر شود مجدداً جیوه به اندازهٔ h در لوله بالا می‌رود.

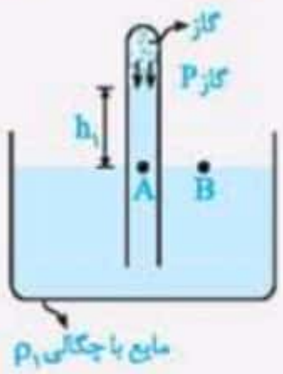
۲ ممکن است مطابق شکل مقابل در انتهای لوله مقداری هوا محبوس شده باشد. در این حالت اگر اعداد بر حسب سانتی‌متر جیوه باشند، فشار هوای محبوس در انتهای لوله بر حسب سانتی‌متر جیوه برابر است با:



$$\begin{cases} P_A = P_B = P_. \\ P_A = h + P_{\text{گاز}} \end{cases} \Rightarrow P_. = h + P_{\text{گاز}} \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_. - h$$

می‌توان این گونه توجیه کرد که در این حالت فشار گاز از فشار محیط کم‌تر بوده است، به همین دلیل به جیوه اجازه داده است که به اندازهٔ h نسبت به سطح آزاد مایع، در لوله بالا بیاید.

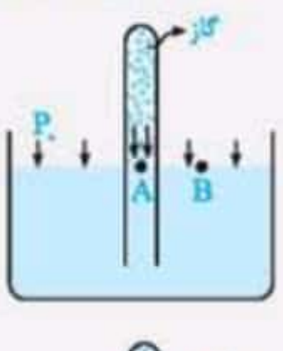
۳ در نکتهٔ قبل اگر مایع درون ظرف جیوه نباشد و بخواهیم فشار را بر حسب سانتی‌متر جیوه به دست آوریم، ابتدا باید ارتفاع معادل با مایع را بر حسب سانتی‌متر جیوه محاسبه کنیم و سپس بنویسیم:



$$\rho_1 h_1 = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{\rho_1}{\rho_{\text{جیوه}}} \times h_1$$

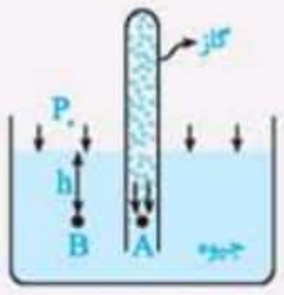
$$P_{\text{گاز}} = P_. - h_{\text{جیوه}}$$

۴ در شکل مقابل گاز به جیوه اجازهٔ بالا آمدن در لوله نسبت به سطح آزاد را نداده است و سطح جیوه در بیرون و داخل لوله یکسان است. در این حالت فشار گاز درون لوله برابر فشار محیط است.



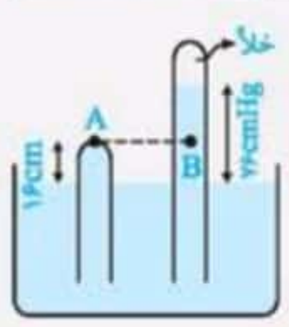
$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_.$$

۵ در شکل مقابل، فشار گاز از فشار محیط بیشتر بوده است، به همین دلیل سطح جیوه در داخل لوله، پایین‌تر از سطح جیوه در بیرون ظرف است.



$$\begin{cases} P_A = P_{\text{گاز}} \\ P_A = P_B = P_. + h \end{cases} \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_. + h$$

۶ فرض کنید که در شکل مقابل، فشار محیط برابر $۷۶\,cmHg$ است. این موضوع یعنی اگر طول لوله محدودیتی نداشت و در بالای لوله خلأ موجود بود، جیوه $۷۶\,cm$ در لوله بالا می‌رفت، در حال حاضر تنها $۱۶\,cm$ می‌تواند بالا برود و به میزانی که نمی‌تواند در لوله بالا برود، بر انتهای لوله فشار وارد می‌کند.



$$P_A = P_B = (۷۶ - ۱۶) = ۶۰\,cmHg$$

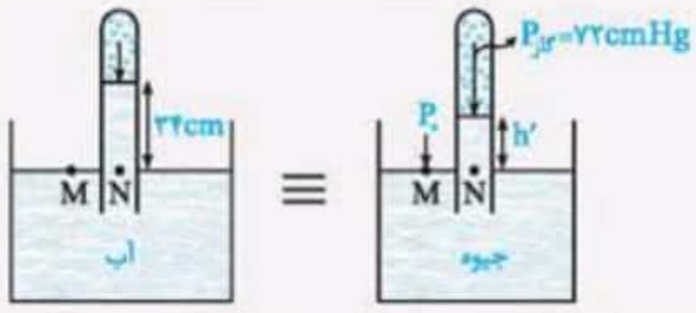
تمرین ۱ **در شکل روبه‌رو، فشار گاز جمع‌شده در انتهای لوله، ۷۲ سانتی‌متر جیوه است. چگالی آب $۱\,gr/cm^۳$ و چگالی جیوه $۱۳/۶\,gr/cm^۳$ است. اگر اختلاف سطح آب در لوله و ظرف $۳۴\,cm$ باشد، فشار هوا چند سانتی‌متر جیوه است؟** (تجربی داخل ۹۳)



۱) ۷۶
۲) ۷۴/۵
۳) ۶۹/۵
۴) ۶۸

www.gajmarket.com

پاسخ گزینهٔ (۲). برای حل این تست خوب و مفهومی، ابتدا باید فشار معادل با ۳۴ سانتی‌متر آب را برحسب ارتفاع جیوه محاسبه کنیم:



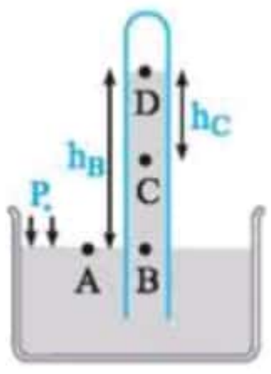
$$\rho_{آب} g\, h_{آب} = \rho_{جیوه} g\, h_{جیوه} \Rightarrow ۱ \times ۳۴ = ۱۳/۶ \times h' \Rightarrow h' = ۲/۵\,cm$$

در ادامه برای محاسبهٔ فشار هوا برحسب سانتی‌متر جیوه می‌توان نوشت:

$$\text{نقاط } M \text{ و } N \text{ روی یک سطح هم‌فشار قرار دارند.} \Rightarrow P_M = P_N \Rightarrow P_\circ = P_{گاز} + \underbrace{\rho g h'}_{\text{فشار ستون جیوه}}$$

$$\xrightarrow{\text{محاسبهٔ فشار برحسب cmHg}} P_\circ = ۷۲ + ۲/۵ = ۷۴/۵\,cmHg \quad (\text{گزینهٔ ۲})$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای فشار هوای بیرون لوله بیشتر از فشار گاز درون لوله می‌باشد، به همین دلیل آب در داخل لوله بالا می‌آید. با توجه به این موضوع گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند.



دو نقطهٔ B و A، هم ارتفاع بوده و درون یک مایع هستند، پس فشار در این نقاط با هم برابر است. فشار در نقطهٔ A ناشی از فشار هوا است، بنابراین داریم:

$$P_A = P_B = P_\circ$$

از طرفی فشار ناشی از مایعات در یک نقطه، به ارتفاع قائم آن از سطح آزاد مایع بستگی دارد. چون $h_B > h_C$ است، بنابراین فشار در نقطهٔ B بیشتر از فشار در نقطهٔ C است $(P_B > P_C)$. هم‌چنین به طور مشابه $P_C > P_D$ است. بنابراین در مقایسهٔ فشار در این نقاط می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B = P_\circ > P_C > P_D$$

تذکر

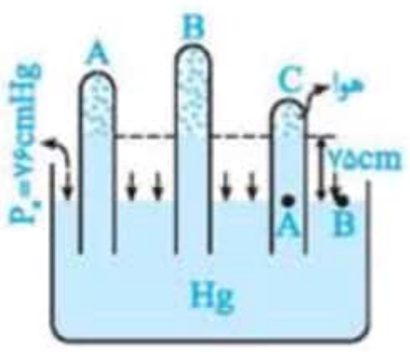
این سؤال نشان‌دهندهٔ آزمایش توریچلی برای محاسبهٔ فشار هوای محیط است. در واقع با اندازه‌گیری ارتفاع ستون جیوه در داخل لوله (h_B)، فشار هوای محیط برحسب سانتی‌متر جیوه به‌دست می‌آید.

$$\underbrace{P_A}_{\text{فشار ناشی از هوا}} = \underbrace{P_B}_{\text{فشار هوا}}$$

۴ ۴۵۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) ارتفاع جیوهٔ بالا آمده درون لوله‌ها، به سطح مقطع لوله‌ها بستگی ندارد (گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است).

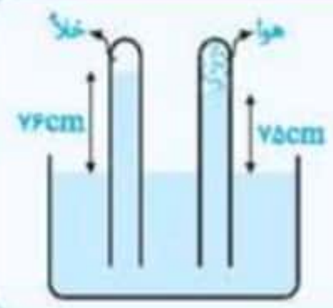
۲) جیوه درون لوله‌ها تا ۷۵ سانتی‌متر بالا رفته است، از آن‌جایی که فشار جو ۷۶ سانتی‌متر جیوه است می‌توان گفت از ابتدا درون لوله‌ها مقداری گاز وجود داشته است و هوای انتهای لوله‌ها دارای فشار است. با در نظر گرفتن دو نقطهٔ A و B می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} P_A = P_B = ۷۶\,cm\,Hg \\ P_A = P_{جیوه} + P_{هوای\ محبوس} \Rightarrow ۷۶ = ۷۵ + P_{هوای\ محبوس} \Rightarrow P_{هوای\ محبوس} = ۱\,cm\,Hg \end{cases}$$

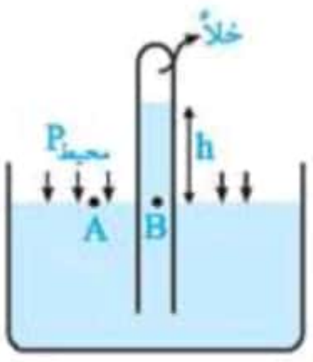
برای سایر لوله‌ها نیز به همین‌ترتیب می‌توان فشار هوای محبوس را محاسبه کرد که همگی برابر ۱cm Hg می‌باشند.

خلاقیت‌های حرفه‌ای اگر انتهای ستون جیوه هوا وجود نداشت، به راحتی ۷۶cm بالا می‌رفت ولی در حال حاضر ۷۵cmHg بالا رفته است، این موضوع یعنی هوا ۱cm کم‌تر به جیوه اجازهٔ بالا آمدن داده است و فشار هوای محبوس ۱cmHg است.



$$P_{هوای\ محبوس} = ۷۶ - ۷۵ = ۱\,cmHg$$

۲ ۴۵۸ با توجه به خلاصه نکات (۷)، ارتفاع جیوه درون فشارسنج جیوه‌ای به سطح مقطع لوله بستگی ندارد و با تغییر قطر مقطع لوله، برابر مقدار اولیه باقی می‌ماند.



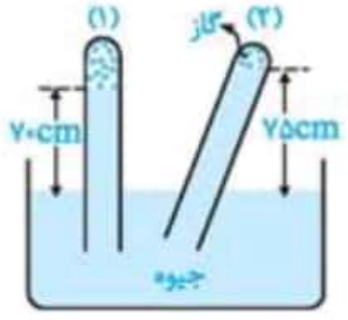
از طرفی می‌دانیم که فشار ناشی از طول ستون جیوه در داخل لوله باید برابر فشار هوای محیط باشد.

$$P_B = P_A \Rightarrow \rho g h = P_{محیط}$$

وقتی بالای کوه می‌رویم، فشار هوای محیط کاهش می‌یابد، بنابراین طول ارتفاع ستون جیوه در داخل لوله نیز کم‌تر می‌شود.

$$\underbrace{\rho g}_{\text{ثابت}} \downarrow \; h \downarrow = P_{محیط} \downarrow$$

۳ ۴۵۹ در صورتی‌که در انتهای لوله خلأ باشد (هوا وجود نداشته باشد) ارتفاع قائم جیوه، فشار هوا را نشان می‌دهد، ولی در صورتی‌که در انتهای لوله هوا وجود داشته باشد، فشار هوا برابر مجموع ارتفاع جیوه و فشار هوای محبوس است، در شکل روبه‌رو در لولهٔ کج جیوه تا ۷۵ سانتی‌متر بالا رفته است. بنابراین فشار هوای محیط حداقل $75\,cm\,Hg$ است.

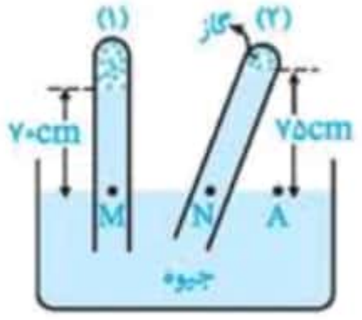


$$P_{\text{محیط}} = P_{\text{گاز}} + \text{ارتفاع قائم ستون جیوه} \Rightarrow P_{\text{محیط}} \geq 75\,cmHg$$: شکل (۲)

تمرین **فشار هوای محبوس در کدام لوله بیشتر است؟**

پاسخ *لولهٔ سمت چپ، زیرا به جیوه کم‌تر اجازهٔ بالا آمدن داده است.*

۴ ۴۶۰ ابتدا فشار هوای محبوس شده در انتهای لوله‌ها را به صورت جداگانه به دست می‌آوریم:

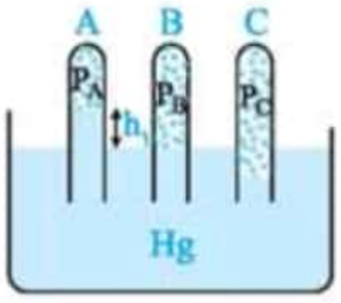


$$\begin{cases} P_M = P_A \Rightarrow P_1 + 70\,cm\,Hg = P_0 \\ P_N = P_A \Rightarrow P_2 + 75\,cm\,Hg = P_0 \end{cases} \rightarrow P_1 + 70\,cmHg = P_2 + 75\,cmHg \Rightarrow P_1 - P_2 = 5\,cmHg$$

اختلاف فشار بین هوای محبوس شده در انتهای لوله‌های (۱) و (۲) برابر $5\,cmHg$ است. این فشار بر حسب پاسکال برابر است با:

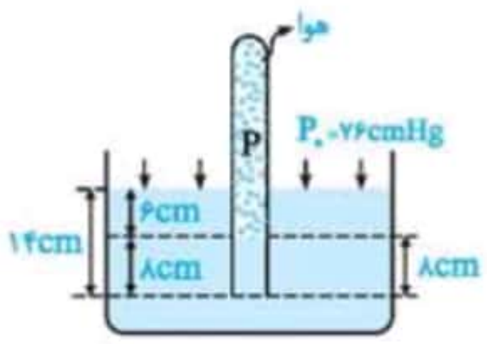
$$P_1 - P_2 = 13600 \times 10 \times \frac{5}{100} = 6800\,Pa$$

۲ ۴۶۱ با توجه به خلاصه نکات (۷) می‌توان نوشت:



$$P_C > P_0\,,P_B = P_0\,,\ P_A < P_0 \Rightarrow P_C > P_B > P_A$$

۳ ۴۶۲ با توجه به شکل مقابل، هوای داخل لوله، سطح جیوه را پایین‌تر از سطح آزاد جیوه در خارج از ظرف برده است و فشار آن از فشار هوا بزرگ‌تر است ($P_{\text{گاز}} > P_0$). از طرفی فشار هوای داخل لوله به اندازهٔ ارتفاع $6\,cm\,(=14-8)$ از ستون مایع از فشار هوای آزاد بیشتر است، بنابراین کافی است ببینیم ۶ سانتی‌متر از مایع درون ظرف، فشارش معادل چند سانتی‌متر جیوه است:



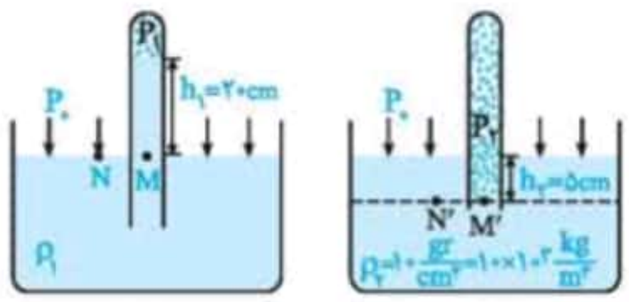
$$\rho_{\text{مایع}}\, h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}}\, h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 0/9 \times 6\,cm = 13/6 \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 0/4\,cm$$

بنابراین فشار هوای محبوس درون لوله برابر است با:

$$P = P_0 + P' = 76 + 0/4 = 76/4\,cm\,Hg$$

۲ ۴۶۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ ۴۶۴ با توجه به شکل مقابل، مشخص است که فشار گاز محبوس‌شده در لولهٔ (۱) کم‌تر از فشار هوا و فشار هوای محبوس‌شده در لولهٔ (۲) بیشتر از فشار هوا می‌باشد (چرا؟)، بنابراین $P_1 < P_2$ است.



رابطهٔ (I): $P_M = P_N \Rightarrow P_1 + \rho_1 g h_1 = P_0 \Rightarrow P_1 = P_0 - \rho_1 g h_1$

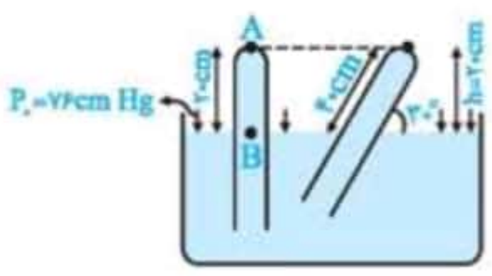
رابطهٔ (II): $P_{M'} = P_{N'} \Rightarrow P_2 = P_0 + \rho_2 g h_2$

با توجه به این‌که $P_2 > P_1$ می‌باشد، طبق صورت سؤال فشار P_2، ۲۵ درصد بیشتر از فشار P_1 است، بنابراین داریم:

$$P_2 = P_1 + \frac{25}{100} P_1 = 1/25 P_1 \xrightarrow{\text{رابطه‌های I و II}} P_0 + \rho_2 g h_2 = 1/25(P_0 - \rho_1 g h_1)$$

$$\Rightarrow 10^5 + 10 \times 10^3 \times 10 \times \frac{5}{100} = 1/25\left(10^5 - \rho_1 \times 10 \times \frac{2}{10}\right) \Rightarrow 1/05 \times 10^5 = 1/25(10^5 - 2\rho_1) \Rightarrow 2/5\rho_1 = 0/2 \times 10^5 \Rightarrow \rho_1 = 8000\,kg/m^3 = 8\,gr/cm^3$$

۲ ۴۶۵ با توجه به شکل روبه‌رو، ارتفاع قائم صعود مایع در لوله برابر ۲۰ سانتی‌متر است و می‌توان نوشت:



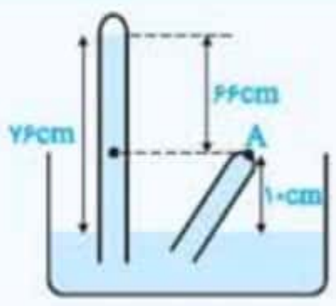
$$h = 40 \times \sin 30^\circ = 20\,cm$$

در ادامه ابتدا فشار معادل با ۲۰ سانتی‌متر از مایع با چگالی $\rho_{\text{مایع}} = 6/8\,gr/cm^3$ را برحسب ارتفاع جیوه محاسبه کرده و داریم:

$$\rho_{\text{مایع}}\, h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}}\, h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 6/8 \times 20 = 13/6 \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 10\,cm$$

$$P_B = P_0 \Rightarrow P_A + 10\,cmHg = 76\,cmHg \Rightarrow P_A = 66\,cmHg$$

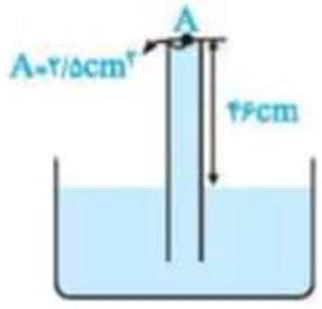
خلاقیت هرفه‌ای



فرض کنید که مایع داخل ظرف جیوه است. در صورتی‌که در طول لوله محدودیتی وجود نداشت، جیوه تا ارتفاع $76\,cm$ بالا می‌رفت ($P_0 = 76\,cm\,Hg$) ولی در این سؤال انتهای لوله جلوی صعود جیوه را گرفته و جیوه $10\,cm$ (معادل با $20\,cm$ از مایع با چگالی $6/8\,gr/cm^3$) بیشتر صعود قائم نکرده است، مثل این است که بگوییم جیوه مقداری که نتوانسته است صعود کند، یعنی $66\,cm\,(=10-76)$ را به انتهای لوله فشار وارد می‌کند.

gajmarket.com

۱ ۴۶۶ مشابه با سؤال قبل، می‌توان گفت فشار وارد بر ته لوله برابر $۳۰cmHg (= ۴۶ - ۷۶)$ است و کافی است این مقدار فشار را برحسب پاسکال به‌دست آوریم:



ارتفاع جیوه: $h = ۳۰cm = ۰/۳m \ , \ \rho = ۱۳/۶ gr/cm^۳ = ۱۳۶۰۰ kg/m^۳$

$$P_A = \rho gh_{\text{جیوه}} = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۳ = ۳ \times ۱۳۶۰۰ Pa$$

نیروی وارد بر انتهای لوله از رابطهٔ $F = P_A \times A$ به‌دست می‌آید، و داریم:

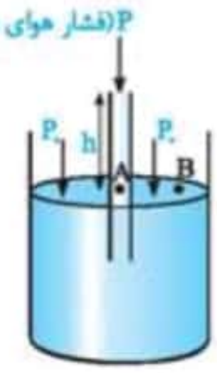
$$A = ۲/۵cm^۲ = ۲/۵ \times ۱۰^{-۴} m^۲ \Rightarrow F = ۳ \times ۱۳۶۰۰ \times ۲/۵ \times ۱۰^{-۴} = ۱۰/۲ N$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

با توجه به تناسب‌هایی که در خلاصه نکات (۶) یاد گرفتیم نیز می‌توان فشار و در نتیجه نیروی جیوه را به صورت تقریبی به دست آورد. به همین منظور داریم:

$$\begin{cases} ۷۶ cm\ Hg \xrightarrow{\text{معادل است با}} P = ۱۰^۵ Pa \\ ۳۰ cm\ Hg \xrightarrow{\text{معادل است با}} P = \frac{۳۰}{۷۶} \times ۱۰^۵ Pa \end{cases} \Rightarrow F = PA = \frac{۳۰}{۷۶} \times ۱۰^۵ \times (۲/۵ \times ۱۰^{-۴}) = ۱۰ N$$

۲ ۴۶۷ مطابق شکل مقابل، هنگامی می‌توان آب داخل لیوان را به کمک مکیدن نی نوشید که اختلاف فشار هوای درون دهان و فشار بر روی سطح آب در اطراف نی، برابر فشار ناشی از ارتفاعی از آب که از نی بالا رفته است، باشد. به عبارت دیگر از آن‌جایی که نقاط A و B بر روی یک سطح هم‌فشار قرار دارند، می‌توان نوشت:



$$P_A = P_B \Rightarrow P + \rho gh = P_۰$$

$$\Rightarrow P_۰ - P = \rho gh = ۱۰^۳ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۱۰} = ۱۰^۳ Pa$$

۳ ۴۶۸

تذکر

فشار کلی یک شاره از رابطهٔ $P = P_۰ + \rho gh$ به‌دست می‌آید. حال اگر فقط اختلاف فشار کلی شاره با فشار هوا در نظر گرفته شود، به آن **فشار پیمانه‌ای** گویند.

فشار پیمانه‌ای: $\Delta P = P - P_۰ = \rho gh$

برای اندازه‌گیری فشار هوای لاستیک اتومبیل‌ها، از فشار پیمانه‌ای استفاده می‌شود (یعنی برای محاسبهٔ فشار کل باید فشار هوا را با آن جمع کرد). فشار پیمانه‌ای $۲۲۰kPa$ معادل است با:

$$P = \rho gh_{\text{جیوه}} \Rightarrow ۲۲۰ \times ۱۰^۳ = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = ۱/۶۲m = ۱۶۲cmHg$$

۲ ۴۶۹ باتوجه به اینکه غواص از طریق لولهٔ متصل به دهان خود تنفس می‌کند، بنابراین فشار درون قفسهٔ سینهٔ او برابر فشار هوا می‌باشد. از طرفی فشار خارج از قفسهٔ سینهٔ غواص، ناشی از فشار هوا و فشار آب است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{درون قفسهٔ سینه}: P_۱ = P_۰ \\ \text{خارج قفسهٔ سینه}: P_۲ = P_۰ + \rho gh \end{cases} \Rightarrow \Delta P = P_۰ + \rho gh - P_۰ = \rho gh \Rightarrow \Delta P_{max} = \rho gh_{max}$$

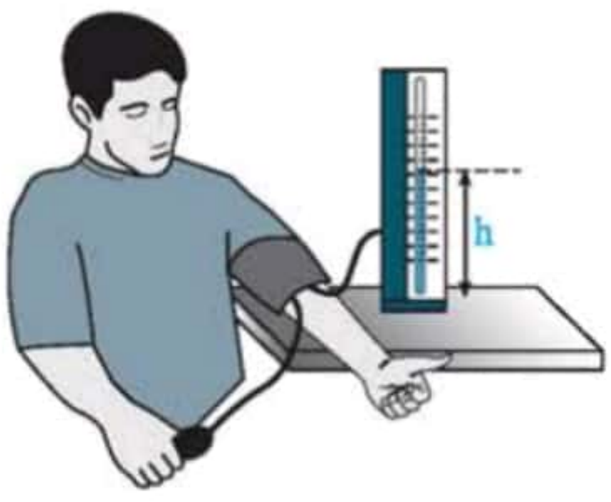
$$\xrightarrow{\Delta P_{max} = ۱/۵ \times ۱۰^۵ Pa} ۱/۵ \times ۱۰^۵ = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times h_{max} \Rightarrow h_{max} = ۱۵m$$

۴ ۴۷۰ فشار پیمانه‌ای خونِ شخص، برابر اختلاف فشار خون و فشار هوا است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{خون}} - P_۰ \rightarrow P_{\text{خون}} = P_۰ + P_{\text{پیمانه‌ای}}$$

هم‌چنین فشار ستون آب نمک نیز برابر است با:

$$P_{\text{آب‌نمک}} = P_۰ + \rho gh$$



برای آن‌که آب نمک بتواند وارد خون شود، باید فشار بیشتری نسبت به خون داشته باشد. پس برای به‌دست آوردن کم‌ترین مقدار h، باید فشار آب نمک با فشار خون شخص برابر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_{\text{آب‌نمک}} = P_{\text{خون}}$$

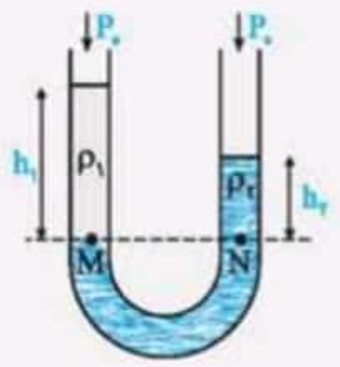
$$\Rightarrow P_۰ + P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_۰ + \rho gh$$

$$\Rightarrow ۱۲/۴۸ \times ۱۰^۴ = ۱/۰۴ \times ۱۰^۴ \times ۱۰ \times h$$

$$\Rightarrow h = \frac{۱۲/۴۸}{۱۰/۴} = ۱/۲m = ۱۲۰cm$$

۴۷۱ ۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۸ **بررسی مسائل لولهٔ U شکل** (تست‌های ۴۷۱ تا ۴۸۶)

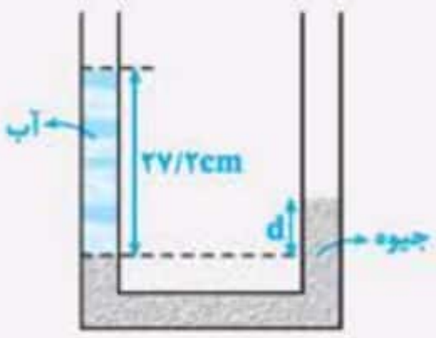


در بررسی مسائلی که دو یا چند مایع مخلوط نشدنی مختلف در یک لولهٔ U شکل قرار دارند، برای یافتن مجهول موردنظر تنها کافی است دو نقطهٔ مناسب از یک مایع را که در یک سطح هم‌تراز هستند، مشخص کرده و شرط مساوی بودن فشار در آن‌ها را بنویسیم:

$$P_M = P_N \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2 \Rightarrow \boxed{\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2}$$

برای درک بهتر، به تمرین زیر توجه کنید:

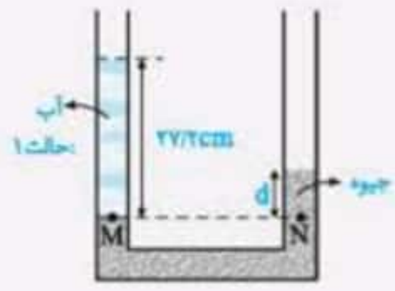
تمرین ۱ **در شکل روبه‌رو سیستم به حالت تعادل است و d برابر با ..... سانتی‌متر است و اگر در لولهٔ سمت راست ..... سانتی‌متر نفت بریزیم، ارتفاع جیوه در هر دو لوله یکسان خواهد شد. (چگالی آب، جیوه و نفت به ترتیب ۱، ۱۳/۶ و ۰/۸ گرم بر سانتی‌متر مکعب است.)**



۱) ۲ و ۲۱/۷۶
۲) ۳/۴ و ۲۱/۷۶
۳) ۲ و ۳۴
۴) ۳/۴ و ۳۴

پاسخ

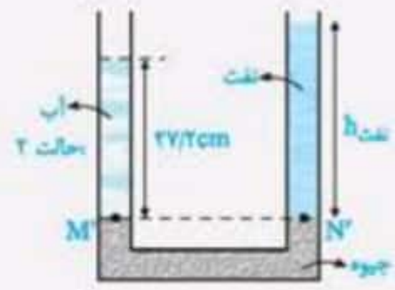
$$\rho_{آب} = 1 gr/cm^3 \ , \ \rho_{جیوه} = 13/6 gr/cm^3 \ , \ \rho_{نفت} = 0/8 g/cm^3$$



در حالت اول، فشار در دو نقطهٔ M و N یکسان بوده (چرا؟) و با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_{آب} h_{آب} = \rho_{جیوه} h_{جیوه}$$

$$\Rightarrow 1 \times 27/2 = 13/6 \times d \Rightarrow d = 2 cm$$

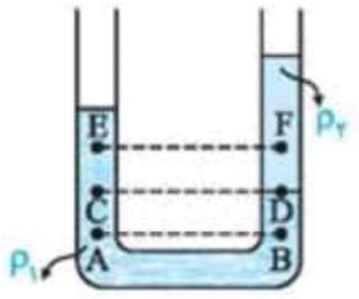


در صورتی‌که در لولهٔ سمت راست مقداری نفت بریزیم تا جایی که ارتفاع جیوه در دو لوله یکسان شود، در این‌صورت فشار دو نقطهٔ M′ و N′ یکسان است و داریم:

$$P_{M'} = P_{N'} \Rightarrow \rho_{آب} h_{آب} = \rho_{نفت} h_{نفت} \Rightarrow 1 \times 27/2 = 0/8 \times h_{نفت}$$

$$\Rightarrow h_{نفت} = 34 cm$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.



با توجه به مطالبی که تاکنون خوانده‌ایم، می‌دانیم فشار در نقاطی که در یک سطح هم‌تراز (واقع در یک مایع) قرار گیرند، یکسان است. با توجه به این مطلب، به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) نقاط A و B هر دو در مایع به چگالی ρ_1 و در ارتفاع یکسان قرار دارند، بنابراین فشار در این نقاط با هم برابر است.

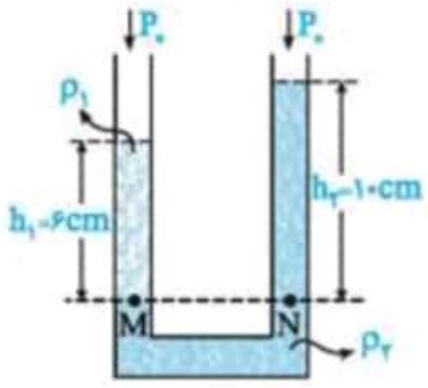
۲) مطلب بالا در مورد دو نقطهٔ C و D نیز صدق می‌کند (هر دو درون مایع با چگالی ρ_1 و در یک ارتفاع قرار دارند)، در نتیجه فشار در دو نقطهٔ C و D نیز یکسان است.

۳) حال توجه کنید که در مورد دو نقطهٔ E و F، با این حال که ارتفاع این دو نقطه یکسان است ولی چون هریک در مایع جداگانه‌ای با چگالی متفاوت قرار دارند، بنابراین فشار در این دو نقطه یکسان نیست.

۴) نقاط A، C و E هر سه در یک مایع قرار داشته و نقطهٔ A در عمق بیشتری واقع است. بنابراین فشار در این نقطه (A) بیشتر از نقاط C و E است.

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴۷۲ ۳ در شکل زیر نقطهٔ M و N متعلق به مایع (۲) بوده و در یک سطح هم‌فشار قرار دارند. بنابراین فشار آن‌ها یکسان بوده و داریم:



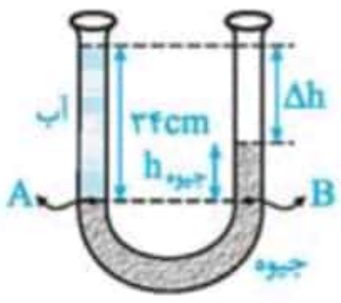
$$\begin{cases} P_N = P_0 + \rho_2 g h_2 \\ P_M = P_0 + \rho_1 g h_1 \end{cases} \xrightarrow{P_M = P_N} \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

$$h_1 = 6 cm \ , \ h_2 = 10 cm \ , \ \rho_2 = 1000 kg/m^3 \ , \ \rho_1 = ?$$

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow \rho_1 \times 6 = 1000 \times 10 \Rightarrow \rho_1 = \frac{5000}{3} kg/m^3$$

gajmarket.com

۴ ۴۷۳ در شکل مقابل، نقاط A و B هر دو در داخل جیوه قرار داشته و در یک سطح هم‌فشار قرار دارند. بنابراین فشار در نقاط A و B برابر است و می‌توان نوشت:



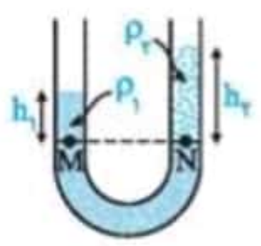
$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_{آب} g h_{آب} = P_0 + \rho_{جیوه} g h_{جیوه}$$

$$\Rightarrow h_{جیوه} = \frac{\rho_{آب} h_{آب}}{\rho_{جیوه}} = \frac{۱ \times ۳۴}{۱۳/۶} = ۲/۵ cm$$

بنابراین اختلاف ارتفاع سطح آزاد آب و جیوه در دو طرف لوله، برابر $\Delta h = h_{آب} - h_{جیوه} = ۳۴ - ۲/۵ = ۳۱/۵ cm$ است. بنابراین برای به‌دست آوردن خواستهٔ سؤال، می‌توان نوشت:

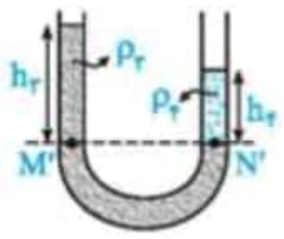
$$\Rightarrow \frac{\Delta h}{h_{جیوه}} = \frac{۳۱/۵}{۲/۵} = ۱۲/۶$$

۱ ۴۷۴ چگالی مایع سمت چپ (ρ_1) بزرگ‌تر از چگالی مایع سمت راست (ρ_2) است ($\rho_1 > \rho_2$)، زیرا وزن زیاد آن باعث شده است مایع ρ_2 سطحش بالاتر از آن قرار گیرد. به عبارت ریاضی نیز می‌توان این موضوع را به صورت زیر اثبات کرد:



$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \xrightarrow{h_1 < h_2} \rho_1 > \rho_2$$

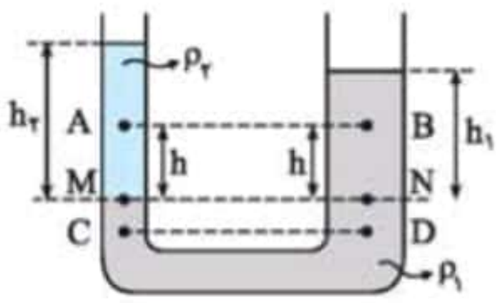
در مقایسهٔ ρ_3 و ρ_4 نیز می‌توان به‌طور مشابه نوشت:



$$P_{M'} = P_{N'} \Rightarrow \rho_3 h_3 = \rho_4 h_4 \xrightarrow{h_3 > h_4} \rho_3 < \rho_4$$

۴ ۴۷۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) نقاط C و D در یک مایع یکسان و در یک ارتفاع قرار دارند (سطح هم‌تراز)، بنابراین فشار در این نقاط با هم برابر است.



$$P_C = P_D$$

۲) فشار در نقاط M و N نیز یکسان است (چرا؟)، بنابراین $\rho_1 > \rho_2$ است.

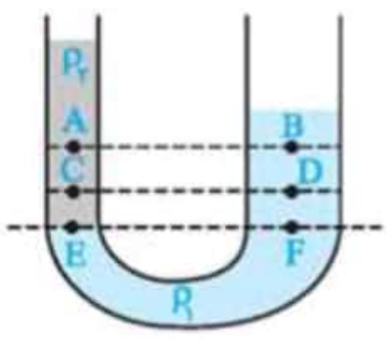
$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \xrightarrow{h_2 > h_1} \rho_1 > \rho_2$$

۳) برای محاسبهٔ فشار در نقاط هم‌ارتفاع A و B برحسب فشار در نقاط M و N می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P_A = P_M - \rho_2 gh \\ P_B = P_N - \rho_1 gh \end{cases}$$

از آن‌جایی که ρ_1 بزرگ‌تر از ρ_2 است، بنابراین فشار در نقطهٔ B کم‌تر از فشار در نقطهٔ A است ($P_B < P_A$).

۱ ۴۷۶ با توجه به سؤال قبل، می‌دانیم چگالی $\rho_1 > \rho_2$ است. همچنین در مورد فشار در نقاط A، B و همچنین C و D مشابه با استدلال سؤال قبل، می‌توان نوشت:



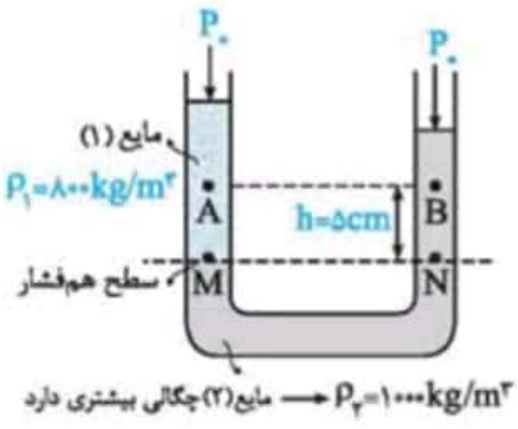
$$\begin{cases} P_A > P_B \\ P_C > P_D \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم هر چه عمق مایع بیشتر باشد، فشار نیز بیشتر می‌شود، بنابراین $P_C > P_A$ و $P_D > P_B$ است. بیشترین فشار مربوط به نقطهٔ C و کم‌ترین فشار مربوط به نقطهٔ B است.

تذکر

فشار مایعات به ارتفاع قائم مایع از سطح آزاد مایع بستگی دارد و به سطح مقطع لوله بستگی ندارد.

۴ ۴۷۷ با توجه به این‌که نقاط M و N در یک مایع یکسان و در یک سطح هم‌تراز قرار دارند، بنابراین فشار در این دو نقطه با هم برابر است ($P_N = P_M$) و در مورد فشار در نقاط M و N با توجه به فشار در نقاط A و B می‌توان نوشت:



$$P_M = P_A + \rho_1 gh$$

$$P_N = P_B + \rho_2 gh$$

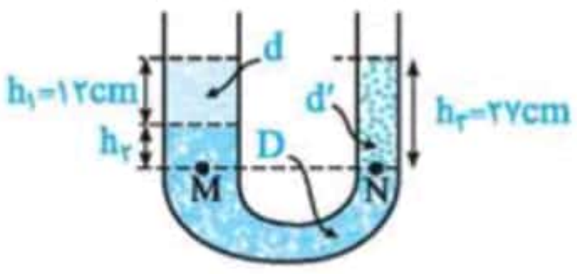
$$P_M = P_N \Rightarrow P_A + \rho_1 gh = P_B + \rho_2 gh$$

$$\Rightarrow P_A = P_B + (\rho_2 - \rho_1) gh \Rightarrow P_A = P_B + (۱۰۰۰ - ۸۰۰) \times ۱۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} = P_B + ۱۰۰$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

با توجه به شکل و با کمک مفاهیم ارائه شده در دو تست ۴۷۵ و ۴۷۶، می‌توان گفت که $P_A > P_B$ بوده و گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست می‌باشند. در ضمن علت آن‌که $\rho_1 > \rho_2$ است را در تست ۴۷۴ بیان کرده‌ایم.

۱ ۴۷۸ در شکل زیر، دو نقطهٔ هم‌سطح M و N متعلق به مایع D بوده و دارای فشار یکسان هستند، بنابراین می‌توان نوشت:



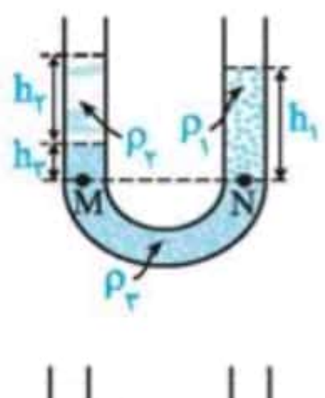
$$P_M = P_\circ + \rho_d g h_1 + \rho_D g h_2 \ , \ P_N = P_\circ + \rho_{d'} g h_3$$

$$h_1 = ۱۲cm \ , \ h_3 = ۲۷cm \ , \ h_2 = h_3 - h_1 = ۱۵cm$$

$$\rho_D = D = ۱/۲۴ gr/cm^3 \ , \ \rho_{d'} = d' = ۱ gr/cm^3 \ , \ \rho_d = d = ?$$

$$P_M = P_N \Rightarrow dh_1 + Dh_2 = d'h_3 \Rightarrow d \times ۱۲ + ۱/۲۴ \times ۱۵ = ۱ \times ۲۷ \Rightarrow d = ۰/۷ gr/cm^3$$

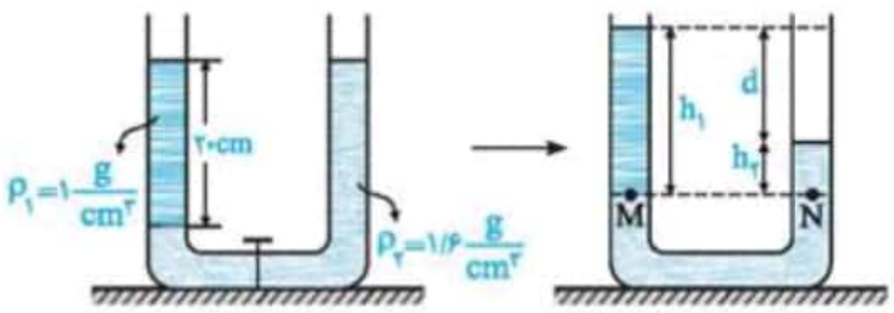
۴ ۴۷۹ با توجه به شکل روبه‌رو و مشابه با سؤال قبل می‌توان نوشت:



$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 = \rho_1 h_1$$

با توجه به رابطهٔ به دست آمده قطعاً حاصل $\rho_2 h_2 < \rho_1 h_1$ است (چرا؟).

۲ ۴۸۰ مایع سمت راست (ρ_2) سنگین‌تر است (چگالی بیشتری دارد)، بنابراین پس از باز شدن شیر رابط سطح آن پایین آمده و مایع دیگر را به بالا می‌راند. پس از به تعادل رسیدن دو مایع می‌توان نوشت:



$$\rho_1 = ۱ gr/cm^3 \ , \ \rho_2 = ۱/۶ gr/cm^3 \ , \ h_1 = ۲۰cm \ , \ h_2 = ?$$

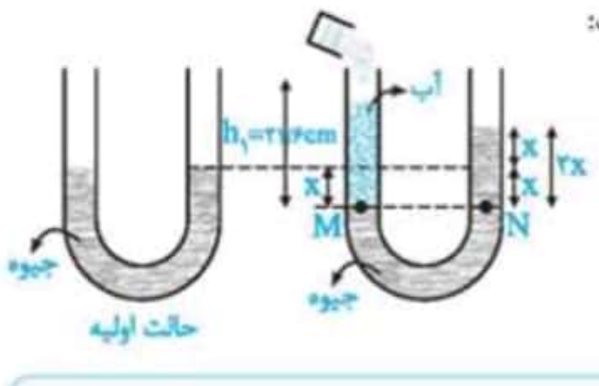
$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow ۱ \times ۲۰ = ۱/۶ \times h_2 \Rightarrow h_2 = ۱۲/۵cm$$

اختلاف ارتفاع: $d = h_1 - h_2 = ۲۰ - ۱۲/۵ = ۷/۵cm$

هشدار

همواره به خواستهٔ تست توجه کرده و به سادگی نمرهٔ منفی نگیرید. در این سؤال، اختلاف ارتفاع سطح مایع در دو شاخه خواسته شده است ولی بسیاری از دانش‌آموزان که با عجله تست می‌زنند، با انتخاب $۱۲/۵cm$ نمرهٔ منفی می‌گیرند.

۱ ۴۸۱ با افزودن $۲۱/۶cm$ آب در یکی از شاخه‌های لوله، سطح جیوه در آن لوله کمی پایین و در لولهٔ دیگر به همان مقدار بالا می‌رود. با توجه به این‌که سطح مقطع دو لوله یکسان است، اختلاف ارتفاع ایجاد شده برای جیوه در دو طرف $(۲x)$ است و می‌توان نوشت:



$$\rho_1 = ۱ gr/cm^3 \ , \ \rho_2 = ۱۳/۵ gr/cm^3 \ , \ h_1 = ۲۱/۶cm \ , \ h_2 = ۲x$$

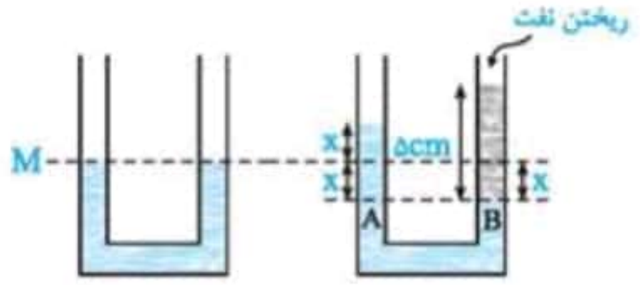
$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow ۱ \times ۲۱/۶ = ۱۳/۵ \times (۲x) \Rightarrow x = ۰/۸cm$$

$\Rightarrow x = ۰/۸cm$ مقدار جابه‌جایی جیوه درون لوله:

دقت

با توجه به شکل مشخص است که در هر لوله ارتفاع جیوه نسبت به حالت اولیه به اندازهٔ x تغییر کرده است و نباید $۲x$ را به عنوان پاسخ صحیح انتخاب کنیم.

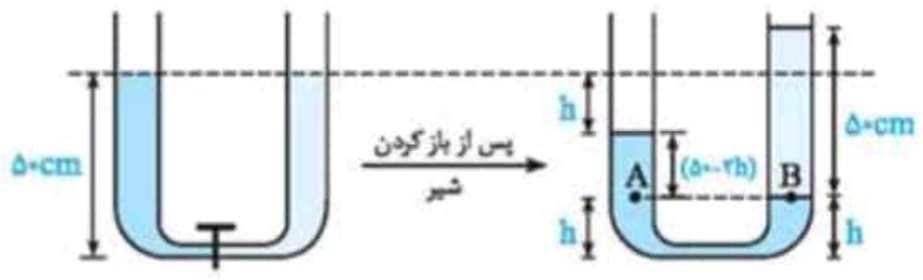
۲ ۴۸۲ فرض کنید با ریختن نفت در سمت راست، آب x سانتی‌متر در این شاخه پایین رفته و در طرف مقابل نیز x سانتی‌متر بالا می‌رود (زیرا شاخه‌ها مشابه هستند) و داریم:



$$P_B = P_A \Rightarrow \rho_{نفت} h_{نفت} = \rho_{آب} h_{آب} \Rightarrow ۰/۸ \times ۵ = ۱ \times ۲x \Rightarrow x = ۲cm$$

۳ ۴۸۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۸)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲ ۴۸۴ همان‌طور که می‌دانیم، اگر آب در لولهٔ سمت چپ h سانتی‌متر پایین بیاید، نفت در لولهٔ سمت راست h سانتی‌متر بالا می‌آید و داریم:

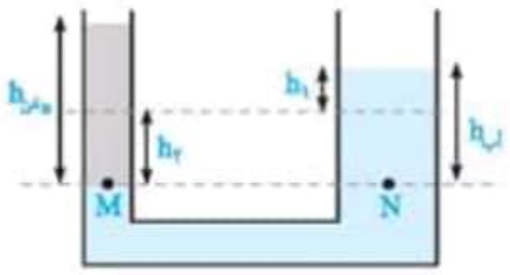


$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{آب} g \times (۵۰ - ۲h) + P_\circ = \rho_{نفت} g \times (۵۰) + P_\circ$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰ \times (۵۰ - ۲h) = ۸۰۰ \times (۵۰) \Rightarrow h = ۵cm$$

www.gajmarket.com

۲ ۴۸۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: حجم آب جابه‌جا شده در سمت چپ و راست لوله باید با هم برابر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 h_1 = A_2 h_2 \Rightarrow 5 \times 4 = 2 \times h_2 \Rightarrow h_2 = 10\,cm$$

گام دوم: باتوجه به یکسان بودن فشار در نقاط هم‌تراز M و N می‌توان نوشت:

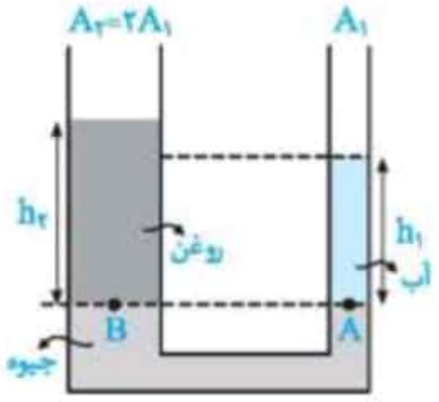
$$\rho_{روغن} h_{روغن} = \rho_{آب} h_{آب} \xrightarrow{h_{آب} = h_1 + h_2 = 14\,cm} 0/8\, h_{روغن} = 1 \times 14 \Rightarrow h_{روغن} = \frac{14}{0/8}\,cm$$

گام سوم: بنابراین جرم روغن برابر است با:

$$\text{جرم روغن}: m = \rho V = \rho(Ah) = 0/8 \times 2 \times \frac{14}{0/8} = 28\,gr$$

۱ ۴۸۶ **گام اول:** با توجه به این‌که نقاط A و B هم‌ارتفاع و درون یک مایع هستند، بنابراین $P_A = P_B$ است.

هم‌چنین فشار نقاط درون مایع را می‌توان از رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$ محاسبه کرد، پس می‌توان نوشت:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_{آب} g h_1 = P_0 + \rho_{روغن} g h_2$$

$$\Rightarrow \rho_{آب} h_1 = \rho_{روغن} h_2 \rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_{روغن}}{\rho_{آب}} \quad \text{رابطهٔ (۱)}:$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ $m = \rho V$، می‌توان نوشت:

$$m = \rho V = \rho A h \Rightarrow \frac{m_{آب}}{m_{روغن}} = \frac{\rho_{آب}}{\rho_{روغن}} \times \frac{A_{آب}}{A_{روغن}} \times \frac{h_1}{h_2} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \frac{m_{آب}}{m_{روغن}} = \frac{\rho_{آب}}{\rho_{روغن}} \times \frac{A_{آب}}{A_{روغن}} \times \frac{\rho_{روغن}}{\rho_{آب}} = \frac{A_{آب}}{A_{روغن}} = \frac{1}{2}$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

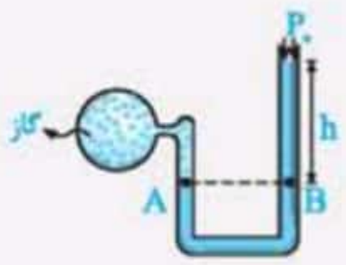
با توجه به برابر بودن فشار در نقاط A و B، فشار حاصل از ستون آب و روغن با هم برابر است. از طرفی با توجه به این‌که سطح مقطع هر دو طرف در کل ارتفاع ظرف ثابت است، برای فشار آن‌ها می‌توان از رابطهٔ $P = \frac{W}{A}$ نیز استفاده کرد. پس می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \frac{W_1}{A_1} = P_0 + \frac{W_2}{A_2} \xrightarrow[W_2 = m_{روغن} g]{W_1 = m_{آب} g} \frac{m_{آب} g}{A_1} = \frac{m_{روغن} g}{2A_1} \Rightarrow \frac{m_{آب}}{m_{روغن}} = \frac{1}{2}$$

۲ ۴۸۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ **محاسبهٔ فشارگاز متصل به یک لولهٔ U شکل (فشار سنج شاره‌ها یا مانومتر)** (تست‌های ۴۸۷ تا ۴۹۶)

برای محاسبهٔ فشار گاز درون یک مخزن متصل به لولهٔ U شکل، کافی است دو نقطهٔ مناسب هم‌ارتفاع از مایع درون لوله را انتخاب کرده و شرط برابری فشار در آن دو نقطه را بنویسیم:



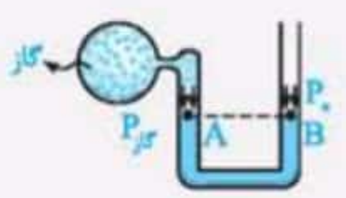
(۱)

حالت ۱: در شکل مقابل فشار گاز درون مخزن از فشار هوا بیشتر است و مقدار فشار گاز درون مخزن برابر است با:

$$\begin{cases} P_A = P_{گاز} & (A \text{ با گاز در تماس است.}) \\ P_B = P_0 + \rho gh & (\text{بالای نقطهٔ } B \text{، فشار هوا و فشار ستون مایع با ارتفاع } h \text{ را داریم.}) \end{cases}$$

$P_A = P_B \Rightarrow P_{گاز} = P_0 + \rho gh \Rightarrow P_{گاز} > P_0$: A و B روی یک سطح هم‌تراز قرار دارند.

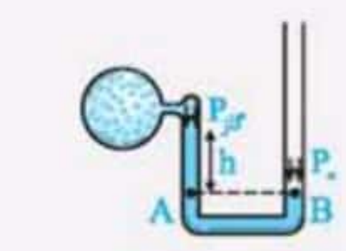
می‌توان گفت فشار گاز بیشتر از فشار هوا بوده است، به همین دلیل سطح مایع در سمت چپ پایین‌تر از سمت راست است.



(۲)

حالت ۲: در شکل مقابل، فشار گاز درون مخزن با فشار هوا برابر است، به همین دلیل سطح مایع در سمت چپ و راست یکسان است.

$$\begin{cases} P_A = P_{گاز} \\ P_B = P_0 \end{cases} \xrightarrow{P_A = P_B} P_{گاز} = P_0$$



(۳)

حالت ۳: در شکل مقابل، فشار گاز درون مخزن از فشار هوا کم‌تر است، به همین دلیل سطح مایع در سمت چپ بالاتر از سمت راست قرار دارد:

$$\begin{cases} P_B = P_0 \\ P_A = P_{گاز} + \rho gh \end{cases} \Rightarrow P_{گاز} = P_0 - \rho gh$$

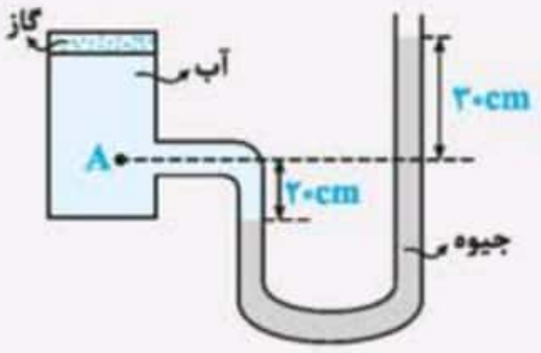
نکته در برخی مواقع به جای آن‌که به P_0 و $P_{گاز}$ و مقدارهای آن‌ها توجه داشته باشیم ترجیح می‌دهیم با اندازه‌گیری h مقدار ρgh را محاسبه کنیم. این کمیت که برابر اختلاف فشار گاز درون محفظه و فشار هوا است، **فشار پیمانه‌ای** نامیده می‌شود. در شکل‌های فوق فشار پیمانه‌ای در سه حالت برابر است با:

حالت ۱: $P_{گاز} - P_0 = +\rho gh$ **حالت ۲:** $P_{گاز} - P_0 = 0$ **حالت ۳:** $P_{گاز} - P_0 = -\rho gh$

تذکر در اندازه‌گیری فشار خون و یا فشار هوای داخل لاستیک‌های خودروها از فشار پیمانه‌ای استفاده می‌شود به‌عنوان مثال، فشار پیمانه‌ای هوای داخل تایر در لاستیک خودرو در حدود ۲۲۰kPa است (یعنی فشار گاز در تایر ۲۲۰kPa از فشار هوا بیشتر است). برای به دست آوردن فشار کل، باید فشار پیمانه‌ای را با فشار هوا (حدود 10^5 Pa یا ۱۰۰kPa) جمع کنیم (یعنی فشار کل هوای داخل تایر در حدود ۳۲۰kPa است).

تمرین۱ در شکل مقابل، فشار در نقطهٔ A چند کیلوپاسکال است؟

(فشار هوا 10^5 پاسکال، $\rho_{جیوه} = 13600 kg/m^3$ ، $g = 10 N/kg$ ، $\rho_{آب} = 1000 kg/m^3$)



(ریاضی شارق ۹۴)

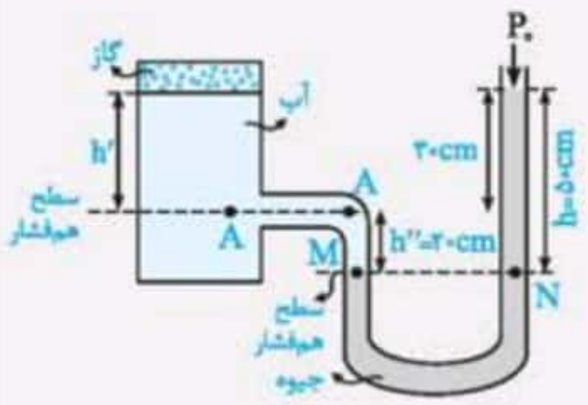
۱) ۶۸

۲) ۱۴۱

۳) ۱۶۶

۴) ۱۷۰

پاسخ با توجه به این‌که در شکل مقابل دو نقطهٔ M و N در یک مایع یکسان و در یک سطح هم‌تراز (هم‌فشار) قرار گرفته‌اند، $P_N = P_M$ می‌باشد.



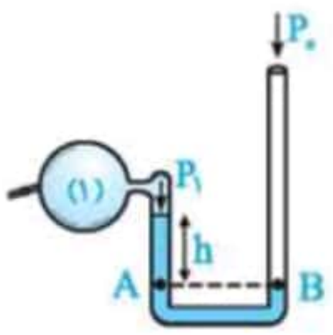
از طرفی فشار در نقطهٔ M، برابر مجموع فشار در نقطهٔ A و فشار ناشی از ارتفاع $h'' = 20cm$ آب است.

به شیوهٔ مشابه، فشار نقطهٔ N نیز برابر فشار P_0 و فشار $h = 50cm$ جیوه است.

$$P_M = P_N \Rightarrow P_A + \rho_{آب} gh'' = P_0 + \rho_{جیوه} gh$$

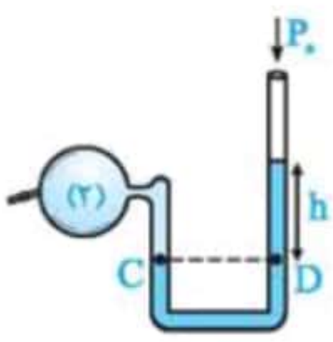
$$\Rightarrow P_A + 1000 \times 10 \times 0/2 = 10^5 + 13600 \times 10 \times 0/5 \Rightarrow P_A = 166 \times 10^3 Pa = 166 kPa$$ (گزینهٔ ۳)

برای پاسخ دادن به این سؤال، هر دو شکل را جداگانه بررسی می‌کنیم:



شکل (۱): دو نقطهٔ A و B در یک سطح از مایع قرار داشته و فشارهای برابری دارند. در نقطهٔ B فقط فشار هوا داریم و فشار در نقطهٔ A، ناشی از فشار مایع و فشار گاز (۱) است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P_B = P_0 \\ P_A = \rho gh + P_1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سطح هم‌فشار}]{P_A = P_B} P_0 = \rho gh + P_1 \Rightarrow$$ رابطهٔ (۱) : $P_1 - P_0 = -\rho gh$: فشار پیمانه‌ای مخزن ۱



شکل (۲): فشار در نقطهٔ D، ناشی از فشار هوا و فشار مایع است و فشار در نقطهٔ C، فقط ناشی از فشار گاز (۲) می‌باشد.

با توجه به این‌که دو نقطهٔ C و D در سطح یکسان از مایع قرار دارند، بنابراین فشار آن‌ها برابر است و می‌توان نوشت:

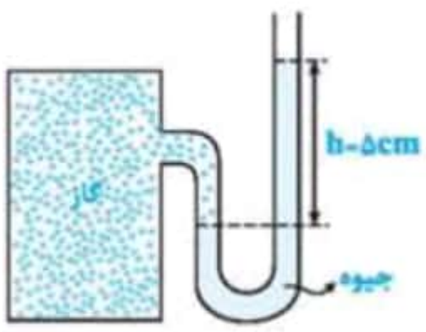
$$\begin{cases} P_D = P_0 + \rho gh \\ P_C = P_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{سطح هم فشار}]{P_C = P_D} P_0 + \rho gh = P_2 \Rightarrow$$ رابطهٔ (۲) : $P_2 - P_0 = +\rho gh$: فشار پیمانه‌ای مخزن ۲

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} P_2 = P_0 + Pgh \Rightarrow P_2 > P_0 \\ P_1 = P_0 - Pgh \Rightarrow P_1 < P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 - P_0 = -\rho gh : \text{فشار پیمانه‌ای مخزن (۱)} \\ P_2 - P_0 = \rho gh : \text{فشار پیمانه‌ای مخزن (۲)} \end{cases} \Rightarrow P_{1\text{پیمانه‌ای}} = -P_{2\text{پیمانه‌ای}}$$

۱ ۴۸۸ فشار پیمانه‌ای، همان اختلاف فشار گاز درون مخزن با فشار هوا است. بنابراین می‌توان نوشت:

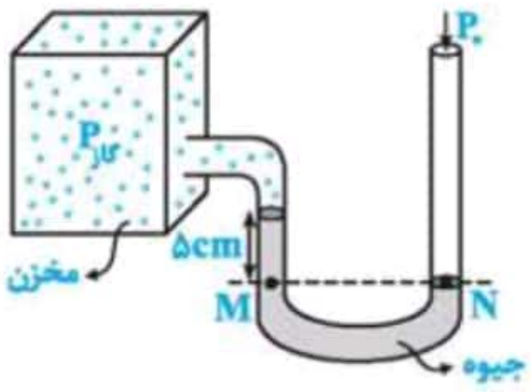


$$\Delta P = \rho gh = 13/6 \times 10^3 \times 10 \times 5 \times 10^{-2} = 6800 Pa$$: اختلاف فشار گاز درون مخزن و هوا

تبدیل gr/cm^3 به kg/m^3

gajmarket.com

۲ ۴۸۹ با توجه به شکل روبه‌رو، برای دو نقطهٔ M و N می‌توان نوشت:



$$P_M = P_N \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho gh = P_0 \Rightarrow P_0 = P_{\text{گاز}} + ۵\,\text{cmHg}$$

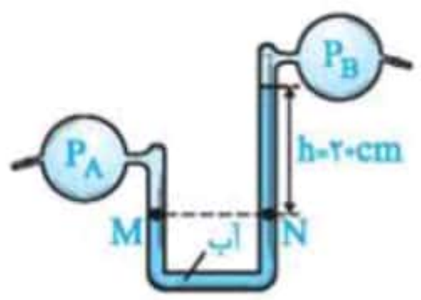
بنابراین کافی است فشار گاز را بر حسب سانتی‌متر جیوه محاسبه کنیم:

$$P_{\text{گاز}} = \rho gh \Rightarrow ۹۵/۲ \times ۱۰^۳ = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times h \Rightarrow h = ۰/۷\,\text{m} = ۷۰\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \text{فشار هوا}: P_0 = \underbrace{۷۰}_{\text{فشار گاز برحسب سانتی‌متر جیوه}} + ۵ = ۷۵\,\text{cmHg}$$

دقت: در این حالت، فشار گاز درون مخزن از فشار هوا کم‌تر است. (چرا؟)

۳ ۴۹۰ در شکل روبه‌رو برای دو نقطهٔ M و N می‌توان نوشت:

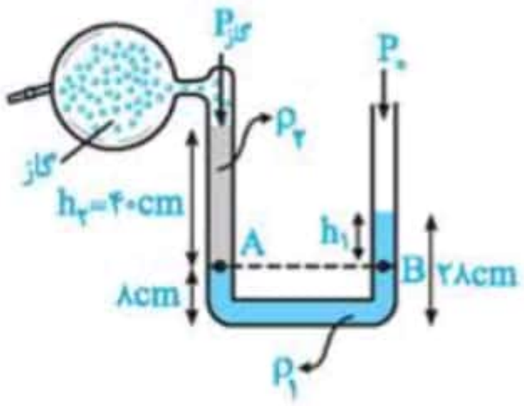


$$P_M = P_N \;,\; P_M = P_A \;,\; P_N = P_B + \rho gh$$

$$\Rightarrow P_A = P_B + \rho gh \Rightarrow \text{اختلاف فشار A و B}: P_A - P_B = \rho gh = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۲ = ۲۰۰۰\,\text{Pa}$$

۳ ۴۹۱ دو نقطهٔ A و B، در یک سطح از یک مایع قرار دارند، پس فشار در این دو نقطه با هم برابر است.

بنابراین می‌توان نوشت:



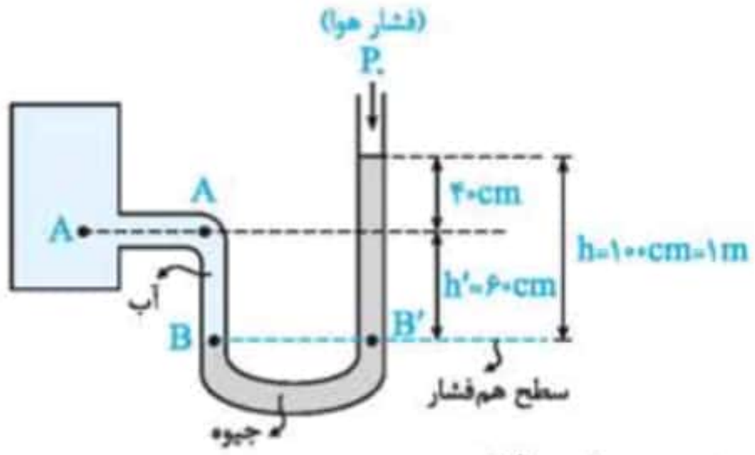
$$\begin{cases} P_A = P_{\text{گاز}} + \rho_2 gh_2 \\ P_B = P_0 + \rho_1 gh_1 \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow[\text{سطح هم‌فشار}]{P_A = P_B} P_{\text{گاز}} + \rho_2 gh_2 = P_0 + \rho_1 gh_1 \Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho_1 gh_1 - \rho_2 gh_2$$

با توجه به این‌که فشار پیمانه‌ای، اختلاف فشار گاز و فشار هوا است، داریم:

$$\text{فشار پیمانه‌ای}: P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho_1 gh_1 - \rho_2 gh_2$$

$$\Rightarrow -۱۲۰۰ = \rho_1 \times ۱۰ \times \left(\frac{۲۸ - ۸}{۱۰۰}\right) - ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow ۲۸۰۰ = ۲\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = ۱۴۰۰\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^۳} = ۱/۴\,\text{gr/cm}^۳$$

۳ ۴۹۲ برای حل این سؤال جالب، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



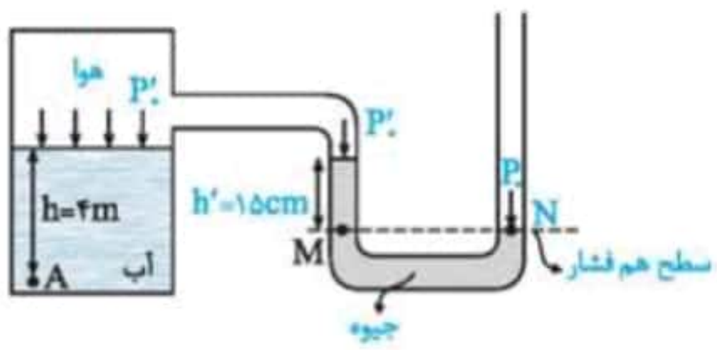
$$P_{B'} = \rho_{\text{جیوه}} \times gh + P_0 \quad , \quad P_B = P_A + \rho_{\text{آب}} gh'$$

$$P_B = P_{B'} \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}} \times gh + P_0 = P_A + \rho_{\text{آب}} gh'$$

$$\Rightarrow P_A - P_0 = \rho_{\text{جیوه}} \times gh - \rho_{\text{آب}} gh' = ۱۳/۶ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۱ - ۱ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰/۶$$

$$P_A - P_0 = ۱۳۰۰۰۰\,\text{Pa} = ۱۳۰\,\text{kPa}$$

۲ ۴۹۳ برای محاسبهٔ فشار در نقطهٔ A، در گام اول باید فشار هوای گرفتار شده در داخل مخزن را به‌دست آورد (P'_0):



$$P_M = P_N \Rightarrow P'_0 + \rho_{\text{جیوه}} gh' = P_0$$

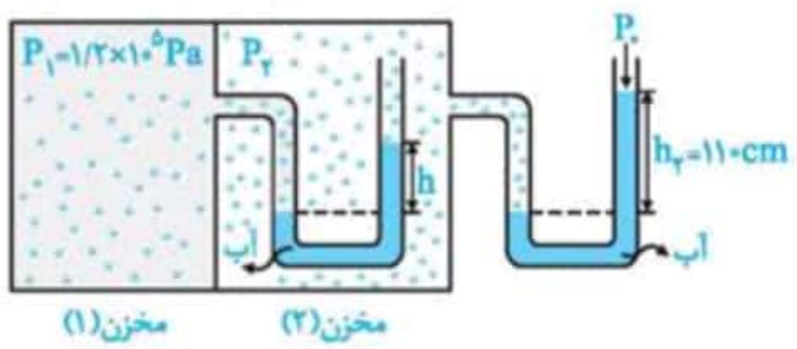
$$\Rightarrow P'_0 = P_0 - \rho_{\text{جیوه}} gh'$$

پس از محاسبهٔ P'_0، فشار در نقطهٔ A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P_A = P'_0 + \rho_{\text{آب}} gh = P_0 - \rho_{\text{جیوه}} gh' + \rho_{\text{آب}} gh$$

$$\xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{جایگذاری}} P_A = ۱۰^۵ - ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۱۵ + ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۴ = ۱۱۹۶۰۰\,\text{Pa} = ۱۱۹/۶\,\text{kPa}$$

۴ ۴۹۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: (محاسبهٔ P_2): با توجه به شکل زیر، فشار محبوس‌شده در مخزن (۲) معادل است با مجموع فشار هوا و فشار ناشی از ۱۱۰ سانتی‌متر آب. بنابراین داریم:

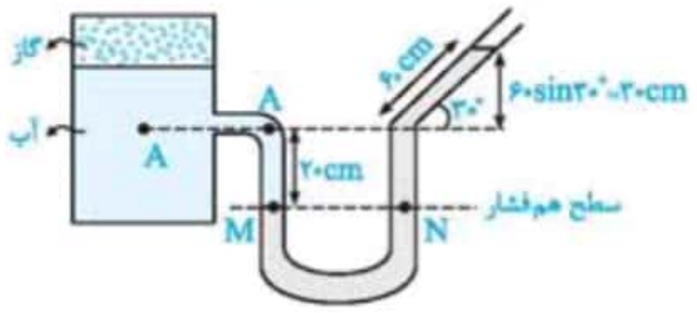
$$h_2 = ۱۱۰\,\text{cm} = ۱/۱\,\text{m} \;,\; \rho_{\text{آب}} = ۱\,\text{gr/cm}^۳ = ۱۰۰۰\,\text{kg/m}^۳ \;,\; P_0 = ۱۰^۵\,\text{Pa} \;,\; P_2 = ?$$

$$P_2 = \rho_{\text{آب}} gh_2 + P_0 \Rightarrow P_2 = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۱/۱ + ۱۰^۵ = ۱۱۱۰۰۰\,\text{Pa}$$

گام دوم: (محاسبهٔ h): با توجه به شکل، فشار محبوس‌شده درون مخزن (۱) برابر است با مجموع فشار P_2 و فشار ناشی از h سانتی‌متر آب. بنابراین داریم:

$$P_1 = \rho_{\text{آب}} gh + P_2 \Rightarrow ۱/۲ \times ۱۰^۵ = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times h + ۱۱۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۲۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰h + ۱۱۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰۰h = ۹۰۰۰ \Rightarrow h = ۰/۹\,\text{m} = ۹۰\,\text{cm}$$

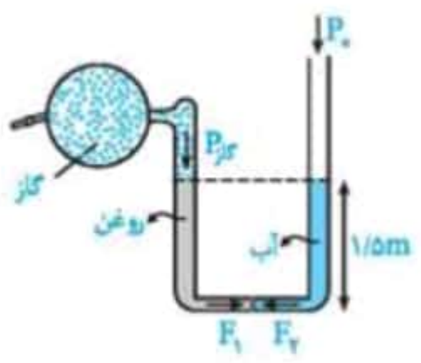


۳ ۴۹۵ در این سؤال درست مانند تمرین حل‌شده در خلاصه نکات (۹) عمل می‌کنیم، تنها کافی‌ست توجه کنید که در محاسبهٔ فشار، ارتفاع قائم مایع حائز اهمیت است و به‌جای قسمت مایل با طول ۶۰cm در ذهن خود یک قسمت قائم با ارتفاع ۳۰cm درنظر بگیرید. پس از انجام این کار به تمرین حل‌شده در خلاصه نکات (۹) می‌رسیم و گزینهٔ (۳) صحیح است.

کمی دقت

علت این‌که چرا ارتفاع قائم در محاسبات فشار حائز اهمیت است را در خلاصه‌نکات (۵) بیان کردیم.

۲ ۴۹۶ با توجه به این‌که ورق پایین لوله در حالت تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن از دو طرف صفر است.



بنابراین داریم:

$$F_1 = F_2 \xrightarrow{F=PA} P_1A = P_2A \xrightarrow{\text{یکسان } A} P_1 = P_2 \quad \text{رابطهٔ (۱):}$$

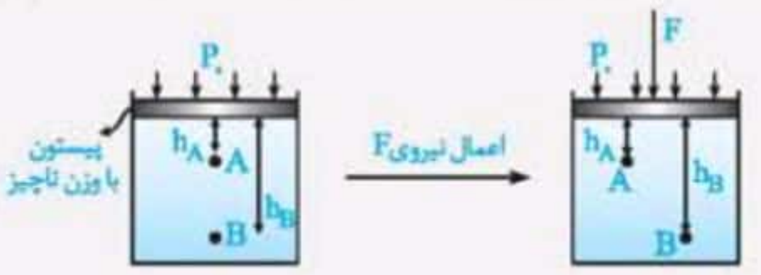
فشار P_1، ناشی از فشار گاز و فشار روغن می‌باشد و فشار P_2، ناشی از فشار هوا و فشار آب است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P_1 = P_{گاز} + \rho_{روغن}gh \\ P_2 = P_0 + \rho_{آب}gh \end{cases} \xrightarrow[P_1=P_2]{\text{رابطهٔ (۱)}} P_{گاز} + \rho_{روغن}gh = P_0 + \rho_{آب}gh$$

$$\Rightarrow \text{فشار پیمانه‌ای: } P_{گاز} - P_0 = \rho_{آب}gh - \rho_{روغن}gh = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۱/۵ - ۸۰۰ \times ۱۰ \times ۱/۵ = ۳۰۰۰\,Pa = ۳\,kPa$$

۴ ۴۹۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۰ — اصل پاسکال (تست‌های ۴۹۷ تا ۵۰۴)

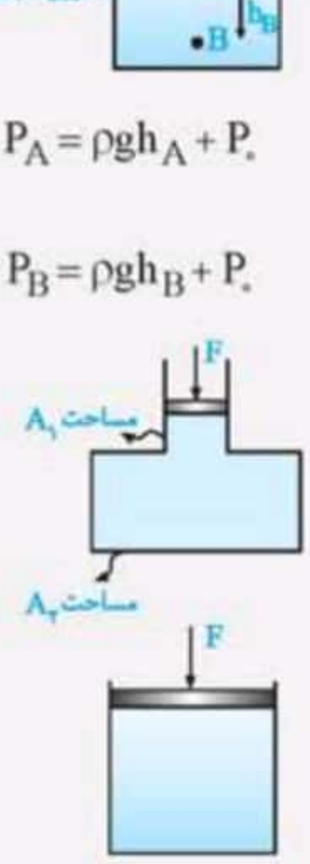


در شکل مقابل یک پیستون با وزن ناچیز بر روی سطح یک مایع قرار دارد. اگر نیروی F را بر این پیستون اعمال کنیم، فشار در همهٔ نقاط ظرف به اندازهٔ $\frac{F}{A}$ افزایش می‌یابد:

$$P_A = \rho gh_A + P_0 \qquad P'_A = \rho gh_A + P_0 + \frac{F}{A}$$

$$P_B = \rho gh_B + P_0 \qquad P'_B = \rho gh_B + P_0 + \frac{F}{A}$$

این موضوع، بیانی از اصل پاسکال است. مطابق این اصل، اضافه فشار (یا کاهش فشار) وارد بر سطح یک مایع بدون تغییر به تمام قسمت‌های مایع و دیواره‌های ظرف منتقل می‌شود.



تمرین! **در شکل مقابل اگر نیروی F به پیستون واقع در قسمت نازک ظرف وارد شود، بر اثر آن، تغییر نیروی وارد بر کف ظرف چه مقداری می‌شود؟**

پاسخ با توجه به اصل پاسکال می‌دانیم که اضافه فشار در قسمت (۱) و کف ظرف با یک‌دیگر برابر است. بنابراین برای محاسبهٔ نیروی وارد بر کف ظرف می‌توان نوشت:

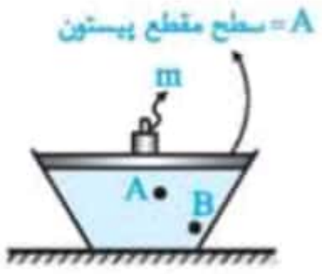
$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{F'}{A_2} \Rightarrow F' = \frac{A_2}{A_1}F$$

تذکر اگر سطح مقطع ظرف ثابت باشد، اضافه نیروی وارد بر کف ظرف نیز با F برابر است:

$$F' = \frac{A_2}{A_1}F \xrightarrow{A_2=A_1} F' = F$$

اگر فشار در نقاط A، B، C و D یکسان نباشد، باعث می‌شود که مایع درون ظرف جریان پیدا کند. حال چون در حالت تعادل، دیگر این امر اتفاق نمی‌افتد، می‌توان نتیجه گرفت که فشار در نقاط A، B، C و D یکسان است، در نتیجه باید سطح آزاد مایع در تمام ستون‌های این ظرف در یک ارتفاع (تراز) باشد (چون فشار در مایع، فقط به ارتفاع آن از سطح آزاد مایع بستگی دارد).

۴ ۴۹۸ با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان گفت:



۱) در ابتدا فشار نقطهٔ B بزرگ‌تر از فشار نقطهٔ A است $(P_B > P_A)$، زیرا نقطهٔ B در عمق بیشتری قرار دارد.

۲) با افزودن یک وزنه روی پیستون، طبق اصل پاسکال، فشار در تمام نقاط مایع به یک اندازه افزایش می‌یابد و داریم:

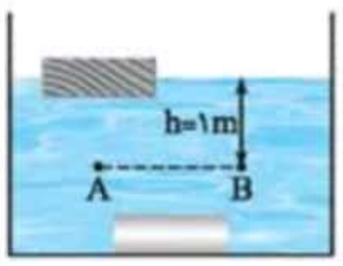
$$\Delta P_A = \Delta P_B = \frac{mg}{A \rightarrow \text{سطح مقطع}}$$

www.gajmarket.com



۳ ۴۹۹ نقاط A و B در یک عمق یکسان و در یک مایع قرار دارند و فشار آن‌ها همواره برابر است.

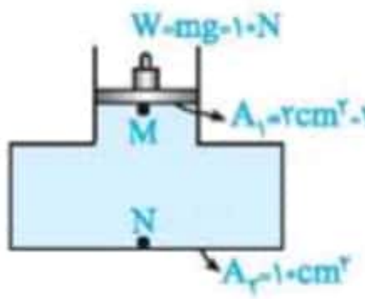
دقت: در این مثال قرار دادن چوب باعث بالاتر رفتن سطح آب و افزایش فشار در نقاط A و B می‌شود و طبق اصل پاسکال این افزایش فشار برای تمام نقاط از جمله A و B یکسان است.



۲ ۵۰۰ با توجه به پاسخ سؤال قبل، از آن‌جایی که دو نقطهٔ A و B در یک عمق یکسان و در یک مایع (آب) قرار دارند، بنابراین فشار آن‌ها با هم برابر بوده و می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B = P_0 + \rho gh$$

$$\Rightarrow P_A = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 1 = 1/1 \times 10^5\,Pa$$



۴ ۵۰۱ ابتدا افزایش فشار در نقطه M را محاسبه می‌کنیم، با قرار دادن وزنهٔ ۱ کیلوگرمی با توجه به خلاصه نکات (۱۰)، میزان افزایش فشار در نقطهٔ M برابر است با:

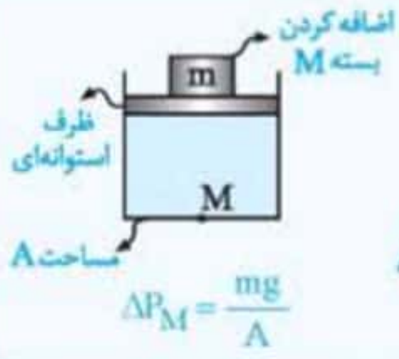
$$\Delta P_M = \frac{\Delta F_M}{A_1} = \frac{mg}{A_1} = \frac{1 \times 10}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^4\,Pa$$

با توجه به اصل پاسکال میزان افزایش فشار در تمام نقاط ظرف از جمله کف ظرف نیز همین مقدار است و می‌توان نوشت:

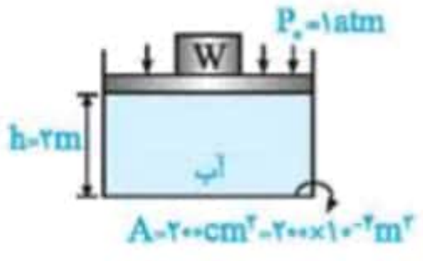
$$\Delta P_N = \Delta P_M \;,\; \Delta F_N = \Delta P_N \times A_2 \;,\; A_2 = 10\,cm^2 = 10 \times 10^{-4}\,m^2 \Rightarrow \Delta F_N = 5 \times 10^4 \times 10^{-3} = 50\,N$$

هشدار

نمی‌توان گفت که میزان افزایش فشار در کف ظرف برابر $\frac{mg}{A_2}$ است، زیرا ظرف استوانه‌ای نیست (سطح مقطع آن تغییر می‌کند) و نیرویی که به کف ظرف وارد می‌شود بزرگ‌تر از mg است.



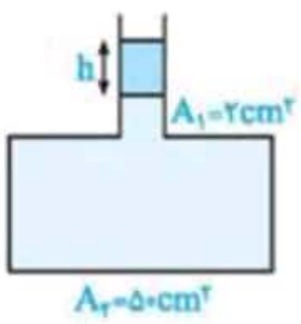
۳ ۵۰۲ فشار وارد بر کف ظرف در حالت جدید، حاصل فشار ناشی از ستون ۲ متری آب، فشار هوا و افزایش فشار ناشی از وزن پیستون و قرار دادن وزنه بر روی پیستون است و داریم:



$$P_M = P_0 + \rho gh + \Delta P \;,\; P_0 = 1atm = 10^5\,Pa \;,\; \rho = 10^3\,kg/m^3$$

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{A} = \frac{W}{A} = \frac{(50+150)\times 10}{200 \times 10^{-4}} = 10^5\,Pa$$ (افزایش فشار ناشی از وزن پیستون و بسته)

فشار وارد بر کف ظرف : $P_M = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 2 + 10^5 = 220000\,Pa = 220\,kPa$



۴ ۵۰۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام های زیر را طی می‌کنیم:

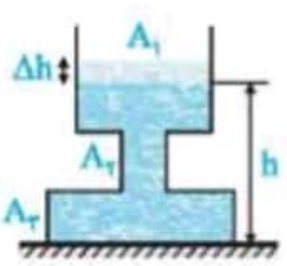
گام اول: ابتدا افزایش فشار وارد بر کف ظرف، ناشی از اضافه کردن روغن در قسمت بالای ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta F = 1/5\,N \quad , \quad A_2 = 50\,cm^2 = 50 \times 10^{-4}\,m^2$$

$$\Delta F = \Delta P \times A_2 \Rightarrow \Delta P = \frac{\Delta F}{A_2} = \frac{1/5}{50 \times 10^{-4}} = 300\,Pa$$

گام دوم: طبق اصل پاسکال افزایش فشار ناشی از وزن روغن در قسمت کف ظرف برابر افزایش فشار در قسمت باریک ظرف می‌باشد. از طرفی اگر فرض کنیم ارتفاع روغن در قسمت بالای ظرف به اندازهٔ h باشد، فشار ناشی از آن برابر ρgh بوده و داریم:

$$\Delta P = \rho_{\text{روغن}}\, gh \Rightarrow 300 = 600 \times 10 \times h \Rightarrow h = \frac{1}{20}m = 5cm$$



۴ ۵۰۴ **گام اول:** در صورتی‌که مقدار ۲ لیتر آب را در قسمت بالای ظرف اضافه کنیم، افزایش ارتفاع آب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta V = A_1 \times \Delta h \;,\; \Delta V = 2\,Lit = 2 \times 10^{-3}\,m^3 \;,\; A_1 = 0/04\,m^2$$

$$\Rightarrow 2 \times 10^{-3} = 0/04 \times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 0/05\,m$$: افزایش ارتفاع آب

گام دوم: با توجه به اصل پاسکال، افزایش فشار ناشی از افزایش ارتفاع آب، عیناً به کف ظرف نیز منتقل می‌شود و داریم:

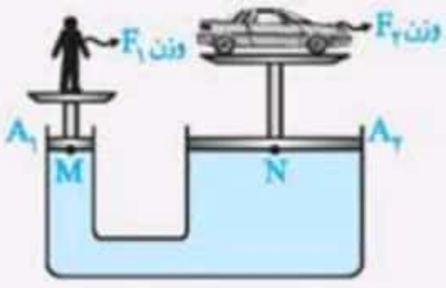
افزایش فشار کف ظرف : $\Delta P = \rho_{\text{آب}}\, g\,\Delta h = 1000 \times 10 \times 0/05 = 500\,Pa$

افزایش نیروی وارد بر کف ظرف : $\Delta F = \Delta P \times A_{\text{کف}} = 500 \times 0/08 = 40N$

۲۵۰۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۱ **بالابر هیدرولیکی** (تست‌های ۵۰۵ تا ۵۱۳)

یکی از کاربردهای اصل پاسکال، بالابر هیدرولیکی است. روش کار بالابر به این گونه است که در یک لولهٔ U شکل که سطح مقطع یکی از دو شاخه از دیگری بسیار بزرگ‌تر است، با وارد کردن یک نیروی نسبتاً کوچک به لولهٔ باریک باعث ایجاد یک نیروی بزرگ در سمت دیگر می‌شوند. با توجه به این موضوع، با یک نیروی کوچک می‌توان یک ماشین سنگین را به بالا جابه‌جا کرد.

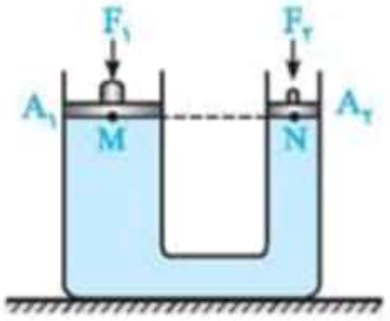


اصل پاسکال: $\Delta P_1 = \Delta P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \xrightarrow{A_1 \ll A_2} F_1 \ll F_2$

نگاه دیگر: $P_M = P_N \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} + P_0 = \frac{F_2}{A_2} + P_0 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

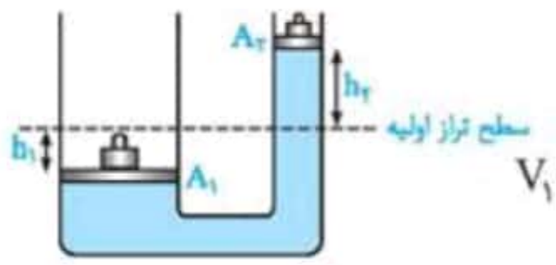
تذکر باید دقت شود که در شکل فوق با توجه به این‌که دو پیستون در یک تراز قرار دارند، فشار یکسانی بر آن‌ها وارد می‌شود ($P_{A_1} = P_{A_2}$).

با توجه به خلاصه نکات فوق و با توجه به شکل روبه‌رو، رابطهٔ زیر برقرار است:



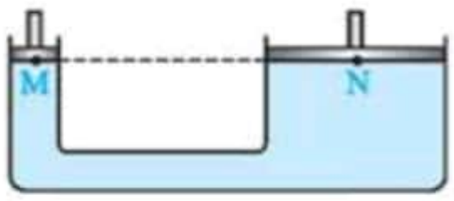
$$P_M = P_N \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} + P_0 = \frac{F_2}{A_2} + P_0 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)F_2$$

۱۵۰۶ همان‌طور که می‌دانیم، حجم مایع پایین آمده در سمت چپ لوله برابر حجم مایع بالا آمده در سمت راست لوله است. بنابراین با توجه به سطح مقطع لوله‌های سمت راست و چپ می‌توان نوشت:



$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 h_1 = A_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)h_1$$

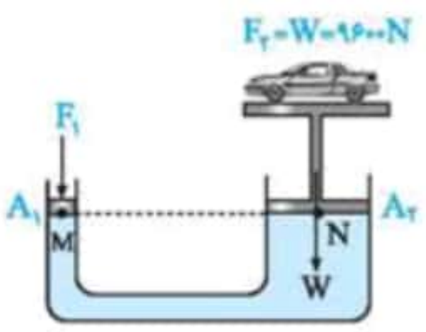
۴۵۰۷ با توجه به این‌که مایع زیر پیستون‌ها در یک تراز قرار دارند، فشار در دو نقطهٔ M و N یکسان است.



۴۵۰۸ با توجه به این که دو نقطهٔ M و N در یک سطح هم‌تراز قرار دارند، فشار در این دو نقطه با هم برابر است و طبق صورت سؤال مقدارش 8×10^5 Pa است.

$$P_N = P_M = 8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

اگر فرض کنیم که فشار 8×10^5 پاسکال فقط ناشی از جرم سکو و اتومبیل روی آن است، داریم:

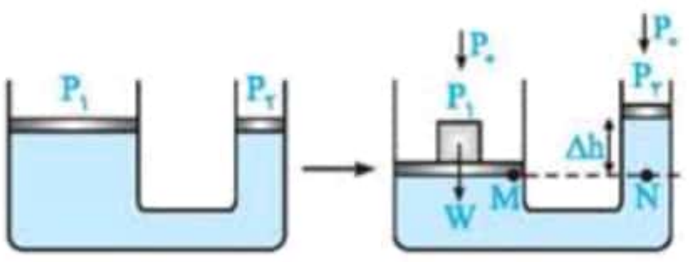


$$P_N = \frac{F_2}{A_2} = \frac{W}{A_2} \xrightarrow{W=mg} 8 \times 10^5 = \frac{9600 \times 10}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{96}{800} = \frac{12}{100} \text{m}^2$$

در نهایت اگر پیستون را دایره‌ای شکل در نظر بگیریم، قطر آن برابر است با:

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow \frac{12}{100} \simeq 3 \times \frac{d^2}{4} \Rightarrow d^2 = \frac{16}{100} \Rightarrow d = 0/4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

۲۵۰۹ در شکل روبه‌رو پس از به تعادل رسیدن مایع، برای نقاط هم‌سطح M و N که فشار یکسانی دارند، می‌توان نوشت:



رابطهٔ (۱): $P_M = P_0 + \frac{W}{A_1}$, $P_N = P_0 + \rho g \Delta h \xrightarrow{P_M = P_N} \frac{W}{A_1} = \rho g \Delta h$

$$W = mg = 0/48 \times 10 = 4/8 \text{ N} \text{ , } A_1 = 200 \text{cm}^2 = 0/02 \text{m}^2 \text{ , } \rho = 800 \text{kg/m}^3 \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \frac{4/8}{0/02} = 800 \times 10 \times \Delta h$$

$\Rightarrow$ اختلاف ارتفاع پیستون‌ها: $\Delta h = 0/03 \text{m} = 3 \text{cm}$

دقت

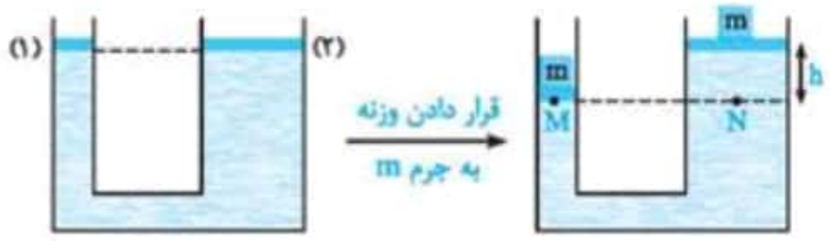
با توجه به ناچیز بودن وزن پیستون‌ها، فشارهای ناشی از وزن آن‌ها ناچیز است.

www.gajmarket.com

۳ ۵۱۰ مشابه با پاسخ سؤال (۵۰۶)، حجم مایع جابه‌جا شده در دو طرف لوله باید با هم برابر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1h_1 = A_2h_2 \xrightarrow[A_2=50cm^2]{A_1=200cm^2} 200h_1 = 50h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4}$$

۲ ۵۱۱ ابتدا باید دقت شود که با قرار دادن وزنه‌ای به جرم m بر روی هر یک از پیستون‌ها، فشار در زیر آن‌ها به اندازهٔ $\frac{mg}{A}$ افزایش خواهد یافت. با توجه به این‌که $A_1 < A_2$ می‌باشد، بنابراین فشار وارد شده از طرف پیستون (۱) بر سطح مایع بیشتر از پیستون (۲) است.



$$\uparrow P = \frac{mg}{A\downarrow} \xrightarrow{A_1<A_2} P_1 > P_2$$

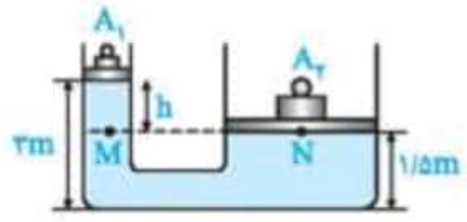
در ادامه می‌توان گفت با توجه به این‌که فشار حاصل از گذاشتن وزنه بر روی پیستون (۱) بیشتر است، باید ارتفاع مایع در ستون (۲) بالاتر برود تا فشار ناشی از مایع بالا رفته، بتواند به گونه‌ای عمل کند که در مجموع فشار در دو نقطهٔ M و N برابر شود.

$$P_M = P_N \Rightarrow \frac{mg}{A_1} + P_0 = \frac{mg}{A_2} + \rho gh + P_0$$

دیدگاه ساده‌تر

با توجه به بیشتر بودن فشار در بالای لولهٔ (۱)، مایع در این لوله پایین رفته و در لولهٔ دیگر بالا می‌رود. با توجه به این موضوع ارتفاع مایع در لولهٔ (۲) بیشتر از لولهٔ (۱) می‌شود.

۴ ۵۱۲ در شکل مقابل فشار نقاط M و N یکسان است و می‌توان نوشت:



$$P_M = P_0 + \frac{F_1}{A_1} + \rho gh \;,\; P_N = P_0 + \frac{F_2}{A_2}$$

$$\rho = 2gr/cm^3 = 2000kg/m^3 \;,\; h = (3 - 1/5)m = 1/5m \;,\; A_1 = 50cm^2 = 5\times10^{-3}m^2$$

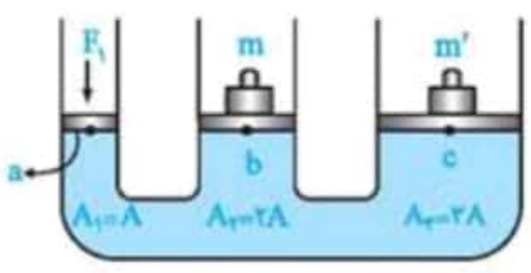
$$A_2 = 1m^2 \;,\; F_2 = W = (\text{جرم پیستون + جرم وزنه}) \times g = 100000N = 10^5N$$

$$F_1 = m'g = (5 + \Delta m)\times10N \quad (\Delta m: \text{جرم وزنهٔ قرار گرفته بر روی پیستون (۱)})$$

$$P_M = P_N \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} + \rho gh = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{(5+\Delta m)\times10}{5\times10^{-3}} + 2000\times10\times1/5 = \frac{10^5}{1}$$

$$2000\times(5+\Delta m) = 70000 \Rightarrow 5 + \Delta m = 35kg \Rightarrow \Delta m = 30kg \Rightarrow \text{وزن وزنهٔ افزوده شده}: W' = 30\times10 = 300N$$

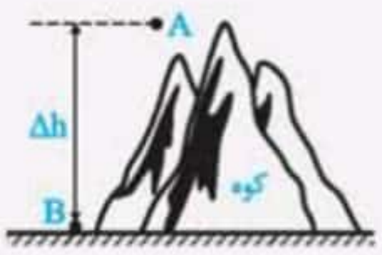
۱ ۵۱۳ نقاط a، b و c هم ارتفاع و درون یک مایع هستند، بنابراین فشار در این نقاط با هم برابر است و می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} P_a = P_b \Rightarrow P_0 + \frac{F_1}{A} = P_0 + \frac{mg}{2A} \Rightarrow \frac{10}{A} = \frac{10m}{2A} \Rightarrow m = 2kg \\ P_a = P_c \Rightarrow P_0 + \frac{F_1}{A} = P_0 + \frac{m'g}{3A} \Rightarrow \frac{10}{A} = \frac{10m'}{3A} \Rightarrow m' = 3kg \end{cases} \Rightarrow \Delta m = m' - m = 1kg$$

۳ ۵۱۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۲ — **تغییرات فشار هوا بر حسب فاصله از سطح زمین** — (تست‌های ۵۱۴ تا ۵۱۹)

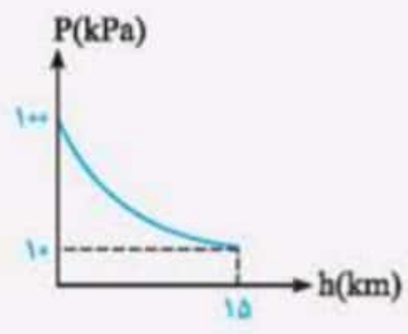


ستون هوا نیز مانند مایعات اختلاف فشار ایجاد می‌کند، ولی از آن‌جایی‌که چگالی هوا بسیار کوچک است، معمولاً در ارتفاع‌های معمولی از آن صرف‌نظر می‌شود. حال اگر اختلاف ارتفاع مقدار زیادی باشد، اختلاف فشار همانند مایعات از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta P_{AB} = \rho g\Delta h \Rightarrow P_A = P_B - \rho g\Delta h$$

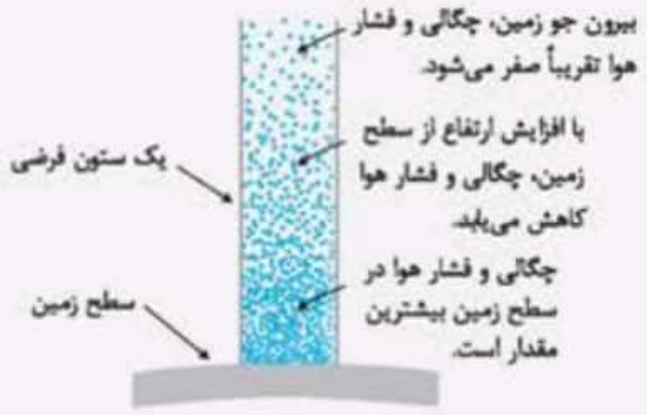
در رابطه با فشار هوا، به موارد زیر توجه کنید:

۱ در هوا نیز مانند مایعات فشار دو نقطهٔ هم‌ارتفاع یکسان است.



۲ در تحلیل‌های دقیق، برای محاسبهٔ اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع قابل توجهی دارند، نمی‌توان از رابطهٔ فوق استفاده کرد، زیرا چگالی هوا ثابت نبوده و با افزایش زیاد ارتفاع از سطح زمین، چگالی هوا به شدت کاهش می‌یابد (لایه‌هایی با هوای فشرده‌تر که چگالی بیشتری دارند، به سطح زمین نزدیک‌تر هستند). محاسبهٔ دقیق نشان می‌دهد تغییر فشار هوا برحسب فاصله از سطح زمین تا فاصلهٔ ۱۵۰۰۰ متری سطح زمین به‌صورت مقابل است:

۳ شکل مقابل نحوهٔ تغییرات چگالی هوا برحسب فاصله از سطح زمین را به‌صورت کیفی نشان می‌دهد:



۴ در هواسنجی و بر روی نقشه‌های آب و هوا، از یکای بار (bar) برای فشار هوا استفاده می‌شود، به‌طوری که داریم:

$$1\,bar = 10^5\,Pa$$

۵ به افتخار توریچلی ، یک میلی‌متر جیوه را، 1torr می‌نامند.

ستون هوا نیز مانند مایعات اختلاف فشار ایجاد می‌کند. ولی از آن‌جایی که چگالی هوا بسیار کم است، معمولاً در اختلاف ارتفاع‌های کم تغییر فشار ناشی از آن را ناچیز فرض می‌کنند، ولی به هر حال با افزایش فاصله از سطح زمین (همانند فاصله گرفتن از کف ظرف در مایع‌ها)، فشار هوا کم می‌شود. دقت شود که تراکم مولکول‌های هوا با فاصله از سطح زمین کاهش یافته و چگالی هوا به شدت کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست می‌باشد.



در مورد نوشیدنِ نوشیدنی با مکیدن نی، فشار در داخل نی کاهش یافته و این موضوع باعث بالا آمدن نوشیدنی در نی می‌شود تا سطوح هم‌تراز در سطح نوشیدنی و داخل نی (A و B) هم‌فشار شوند.

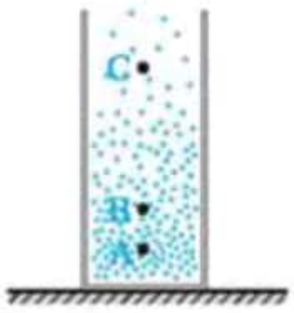
گزینهٔ چهارم نیز عبارت درستی است و علت وارد شدن فشار هوا بر سطح آزاد مایع، برخورد مولکول‌های هوا با سطح آزاد مایع است.

۲ ۵۱۵ ابتدا باید دقت شود که با افزایش زیاد ارتفاع از سطح زمین فشار هوا به شدت کاهش می‌یابد و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست است. از سوی دیگر با توجه به تغییر زیاد چگالی هوا، این کاهش فشار به‌صورت خطی نیست و گزینهٔ (۲) تغییرات فشار را درست نشان می‌دهد.

تذکر

اگر فرض کنیم که در رابطهٔ $P = P_0 + \rho gh$ ، چگالی عددی ثابت است، آن‌گاه رابطهٔ بین فشار (P) و ارتفاع (h) به‌صورت خطی بوده و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد ولی در مورد هوا چون چگالی (ρ) نیز تغییر می‌کند، بنابراین رابطهٔ P و h خطی نیست.

۲ ۵۱۶ همان‌طور که می‌دانیم، با افزایش ارتفاع از سطح زمین، چگالی هوا کاهش می‌یابد (رد گزینه‌های (۳) و (۴)).



از طرفی چون در نقاط پایین‌تر، چگالی هوا بیشتر است ($\rho \uparrow$)، بنابراین برای یکسان بودن اختلاف فشار بین نقاط A و B با نقاط B و C ($\Delta P_{AB} = \Delta P_{BC}$)، باید اختلاف ارتفاع نقاط A و B کم‌تر از اختلاف ارتفاع نقاط B و C باشد ($\Delta h_{AB} < \Delta h_{BC}$)، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ ۵۱۷ **خواستهٔ ۱:** محاسبهٔ وزن هوای داخل اتاق با استفاده از رابطهٔ $m = \rho V$:

$$V = 3 \times 4 \times 2/5 = 30\,m^3\ ,\ \rho = 1/2\,kg/m^3 \Rightarrow m = \rho V = 1/2 \times 30 = 36\,kg$$

خواستهٔ ۲: محاسبهٔ نیروی وارد بر کف اتاق از طرف هوای اتاق:

با توجه به روابط زیر، برای محاسبهٔ فشار و نیروی وارد بر کف اتاق، می‌توان نوشت:

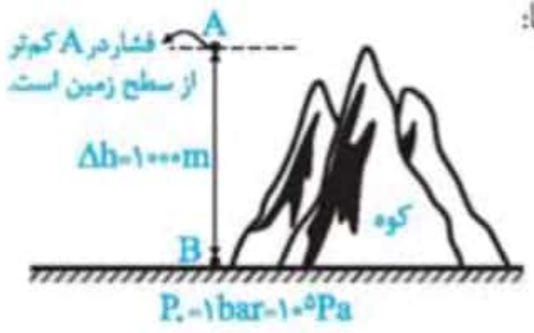
$$F = P_0 A = 30 \times \underbrace{(3 \times 4)}_{\text{مساحت کف اتاق}} = 360\,N$$

$$P = \rho gh = 1/2 \times 10 \times \underbrace{2/5}_{\text{ارتفاع اتاق}} = 30\,Pa$$

به جور دیگه فکر کنیم: با توجه به یکسان بودن مساحت قاعدهٔ اتاق در کل ارتفاع آن، نیروی وارد بر کف اتاق از طرف هوای داخل اتاق، برابر وزن هوای داخل اتاق می‌باشد.

$$F = W = mg = 36 \times 10 = 360\,N$$

۴ ۵۱۸ با توجه به خلاصه نکات (۱۲) و با توجه به شکل روبه‌رو، فشار در ارتفاع ۱۰۰۰ متری از سطح زمین برابر است با:



$$\rho_{هوا} = 1/2\,kg/m^3\ ,\ \Delta h = 1000\,m$$

$$\Delta P_{AB} = P_0 - P_A = \rho_{هوا}\, g\Delta h \Rightarrow P_A = P_0 - \rho_{هوا}\, g\Delta h$$

$$P_A = 10^5 - 1/2 \times 10 \times 1000 = 100000 - 12000 = 88000\,Pa = 8/8 \times 10^4\,Pa$$

۲ ۵۱۹ با توجه به رابطهٔ $P = \rho gh$ ، فشار هوا برحسب سانتی‌متر جیوه برابر است با:

$$P = \rho_{جیوه}\, gh_{جیوه} \Rightarrow 95200 = 13600 \times 10 \times h_{جیوه} \Rightarrow h_{جیوه} = 0/7\,m = 70\,cm$$

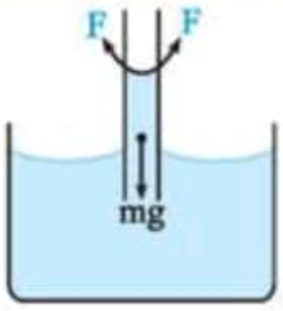
در نتیجه فشار هوا در این محل 70cm Hg است. از طرفی به هر 1mmHg به افتخار توریچلی 1torr گفته می‌شود، بنابراین فشار هوا در این محل برحسب این واحد (torr) برابر 700torr است.

$$P = 70\,cmHg = 700\,mmHg = 700\,torr$$

تذکر

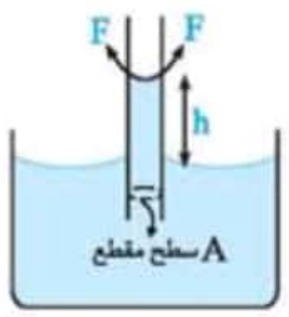
به هر 1mm Hg به افتخار توریچلی 1torr گفته می‌شود.

gajmarket.com



۲ ۵۲۰ با توجه به خلاصه نکات (۳)، در شکل روبه‌رو آب تا وقتی در لولهٔ مویین بالا می‌آید که در حالت تعادل، نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و ظرف برابر با وزن ستون آب بالا آمده در لوله شود.

۲ ۵۲۱ برای حل این مسأله می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} \text{جرم ستون آب}: m = \rho_{آب} V = \rho \times Ah \\ \text{ارتفاع ستون آب}: h = ۴۰cm = ۰/۴m \\ \text{سطح مقطع لوله}: A = ۰/۴mm^۲ = ۰/۴ \times (۱۰^{-۳}m)^۲ = ۰/۴ \times ۱۰^{-۶} m^۲ = ۴ \times ۱۰^{-۷} m^۲ \\ \text{چگالی آب}: \rho = ۱۰۰۰ kg/m^۳ \end{cases}$$

برایند نیروهای دگرچسبی: $F = mg \Rightarrow F = \underbrace{۱۰۰۰}_{\rho} \times \underbrace{۰/۴}_{h} \times \underbrace{۴ \times ۱۰^{-۷}}_{A} \times \underbrace{۱۰}_{g} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۳} N$

۳ ۵۲۲ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۴)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۵۲۳ برای محاسبهٔ فشار ناشی از وزن مخروط بر سطح افق، کافیست وزن مخروط (یعنی نیروی عمودی وارد شده بر سطح) را بر مساحت مقطع آن تقسیم کنیم و داریم:

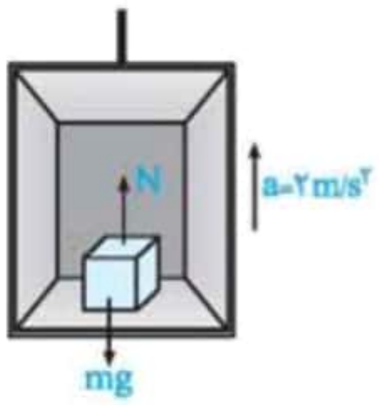
$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = \rho\left(\frac{۱}{۳}Ah\right)$$

$$P = \frac{W}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\left(\frac{۱}{۳}\rho Ah\right)g}{A} = \frac{۱}{۳}\rho gh$$

دقت

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هنگامی‌که حجم مخروط در ارتفاع آن تغییر می‌کند، فشار وارد بر سطح افق دیگر از رابطهٔ ρgh به‌دست نمی‌آید.

۱ ۵۲۴ آسانسور تندشونده به سمت بالا حرکت می‌کند، بنابراین سرعت و شتاب آن هم‌جهت و به سمت بالا است. برای حل ابتدا باید نیرویی که سطح آسانسور بر مکعب وارد می‌کند را محاسبه کنیم:



$$N - mg = ma \Rightarrow N - ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰ \times ۲ \Rightarrow N = ۲۴۰N \text{ یا } N = m(g+a) = ۲۴۰N$$

مکعب نیز همین نیرو را به سطح آسانسور وارد می‌کند و از طرفی سطح یکی از وجه‌های مکعب، $\frac{۱}{۶}$ برابر سطح کل آن است و داریم:

$$F = N = ۲۴۰N \,,\, A = \frac{۳۰۰۰}{۶} = ۵۰۰cm^۲ = ۰/۰۵m^۲$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{۲۴۰}{۰/۰۵} = ۴۸۰۰Pa = ۴/۸kPa$$

۳ ۵۲۵

تذکر

اگر مجموعه در حال حرکت باشد، در رابطهٔ $\Delta P = \rho g \Delta h$، به جای شتاب گرانشی از $g \pm a$ (شتاب نسبی) استفاده می‌کنیم که تعیین علامت مثبت یا منفی در این رابطه، مانند مسائل آسانسور در فصل دینامیک در فیزیک پایهٔ دوازدهم است.

$$\Delta P = \rho g_{\text{نسبی}} \Delta h = \rho(g \pm a)\Delta h$$

بسته تندشونده (+) به سمت پایین (-) حرکت می‌کند، شتاب نسبی آن برابر است با:

$$g_{\text{نسبی}} = g - \frac{g}{۳} = \frac{۲}{۳}g$$

در این‌صورت اختلاف فشار بین دو نقطه $\frac{۲}{۳}$ مقدار اولیه می‌شود.

$$\Delta P = \rho g_{\text{نسبی}} \Delta h \Rightarrow \Delta P \propto g_{\text{نسبی}} \Rightarrow \frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{g_{\text{نسبی}}}{g} = \frac{\frac{۲}{۳}g}{g} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \Delta P' = \frac{۲}{۳}\Delta P$$

تذکر

حرکت بسته از حالت سکون شروع شده و لزوماً تندشونده است.

۱ ۵۲۶ هنگامی که سطل آب با شتاب g سقوط آزاد می‌کند (در واقع مانند حالتی است که آسانسور با شتاب g به‌صورت تندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند) شتاب نسبی برابر است با: $g_{\text{نسبی}} = g - a = g - g = ۰$

با توجه به رابطهٔ $\Delta P = \rho g_{\text{نسبی}} \Delta h$، در حالت سقوط آزاد، بین هیچ دو نقطه‌ای از مایع اختلاف فشار وجود ندارد ($\Delta P = ۰$).

۴ ۵۲۷ هنگامی‌که فشار هوا در دو طرف پنجره یکسان است، نیروی یکسانی از دو طرف آن بر شیشه‌ها وارد شده و نیروی خالص وارد بر پنجره صفر است. حال اگر در دو طرف پنجره اختلاف فشار ΔP به‌وجود آید، نیروی خالصی به اندازهٔ $F = \Delta P \times A$ بر سطح پنجره وارد می‌شود:

$$P_۱ = ۱/۰ atm \,,\, P_۲ = ۰/۹۶ atm \Rightarrow \Delta P = ۱ - ۰/۹۶ atm = ۰/۰۴ atm = ۰/۰۴ \times ۱۰^۵ Pa = ۴ \times ۱۰^۳ Pa$$

$$A = ۲ \times ۳ = ۶m^۲ \Rightarrow F = \Delta PA = ۴ \times ۱۰^۳ \times ۶ = ۲۴ \times ۱۰^۳ N = ۲۴kN$$



۴ ۵۲۸ مطابق شکل مقابل، حداقل مقدار جرم m باید به گونه‌ای انتخاب شود که فشار پایین و بالای روزنهٔ زودپز با هم برابر شود، پس می‌توان نوشت:

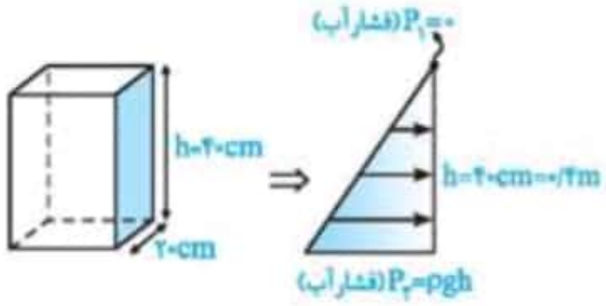
$$P_1 + \frac{mg}{A} = P_2 \Rightarrow \frac{mg}{A} = P_2 - P_1 \Rightarrow m = \frac{(P_2 - P_1)A}{g}$$

۱ ۵۲۹ از آن‌جایی که مساحت سطح‌های مشخص شده در شکل روبه‌رو همگی برابر است، بنابراین کافی است فشار وارد بر سطح‌ها را مقایسه کنیم. از طرفی فشار در هر نقطه تنها به عمق مایع (فاصلهٔ صفحه از سقف مخزن) بستگی دارد و داریم:



$$(P_a = P_c) < (P_b = P_d) < P_e \Rightarrow F_a < F_b < F_e$$

۱ ۵۳۰ در این سؤال دشوار، فشار وارد بر بدنهٔ ظرف در عمق‌های مختلف متفاوت است ولی از آن‌جایی که رابطهٔ فشار با عمق مایع به‌صورت خطی است $(P = \rho gh)$، میانگین فشار وارد بر بدنهٔ ظرف از طرف مایع به‌صورت زیر است:



$$\overline{P} = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{0 + \rho gh}{2} = \frac{1}{2}\rho gh = \frac{1}{2} \times 1000 \times 10 \times 0/4 = 2000\,Pa$$

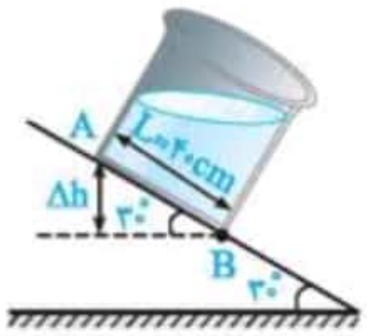
مساحت یک بدنه از ظرف: $A = 0/2 \times 0/4 = 0/08\,m^2$

$$F = \overline{P}A = 2000 \times 0/08 = 160\,N$$

۴ ۵۳۱ به طور کلی نیرویی که یک مایع در حالت تعادل بر سطح وارد می‌کند، همواره بر آن سطح عمود است، این موضوع مستقل از شکل ظرف است.

۲ ۵۳۲ همان‌طور که می‌دانیم، فشار ناشی از مایع در یک نقطه، به ارتفاع قائم آن نقطه از سطح آزاد مایع بستگی دارد.

بنابراین در بین نقاط کف ظرف، کم‌ترین فشار را نقطهٔ A و بیشترین فشار را نقطهٔ B دارد.



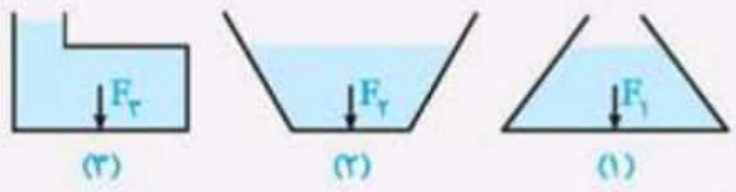
اختلاف فشار این دو نقطه برابر فشار حاصل از اختلاف ارتفاع قائم مایع بین این دو نقطه است. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta P = P_B - P_A = \rho g \Delta h \\ \Delta h = L \sin 30^\circ = 0/4 \times \frac{1}{2} = 0/2\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta P = 1000 \times 10 \times 0/2 = 2000\,Pa = 2\,kPa$$

۴ ۵۳۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

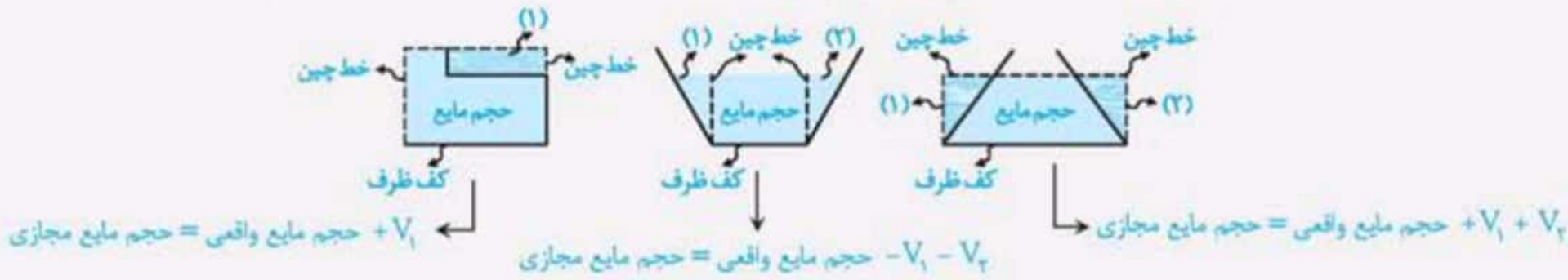
خلاصه نکات ۱۳ — **مقایسهٔ نیروی وارد بر کف ظرف با نیروی وزن مایع** — (تست‌های ۵۳۳ تا ۵۴۰)

در برخی از تست‌های کنکور، ظرف‌هایی مطابق شکل‌های زیر را کشیده و از ما می‌خواهند که نیروی وارد بر کف ظرف را با وزن مایع مقایسه کنیم:



برای پاسخ دادن به این تست‌ها، یک روش کاملاً ساده و تستی وجود دارد که در ادامه مراحل آن را شرح می‌دهیم:

مرحلهٔ ۱: از دو طرف کف ظرف، خط‌چین‌های قائمی را تا سطح آزاد مایع ادامه دهید. حجم داخل این خط‌چین‌ها، **حجم مایع مجازی** نام دارد.



مرحلهٔ ۲: می‌توان ثابت کرد که نیروی وارد بر کف ظرف، برابر وزن مایع مجازی است. اگر حجم مایع مجازی از حجم مایع واقعی بیشتر باشد، نیروی وارد بر کف ظرف بیشتر از وزن مایع واقعی است و اگر حجم مایع مجازی از حجم مایع واقعی کم‌تر باشد، نیروی وارد بر کف ظرف کم‌تر از وزن مایع واقعی است.

ظرف ۱: حجم مایع واقعی < حجم مایع مجازی $\Rightarrow F_1 > W$

ظرف ۲: حجم مایع واقعی > حجم مایع مجازی $\Rightarrow F_2 < W$

ظرف ۳: حجم مایع واقعی < حجم مایع مجازی $\Rightarrow F_3 > W$

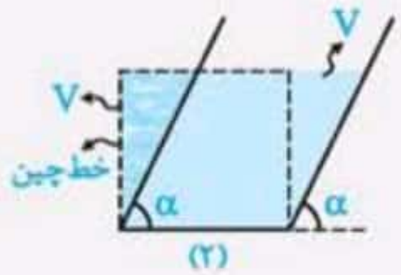
gajmarket.com

تذکر در دو ظرف زیر، حجم مایع مجازی و واقعی برابر بوده و نیروی وارد بر کف ظرف با وزن مایع برابر است (چرا؟).



حجم مایع واقعی = حجم مایع مجازی

$F_1 = W$



$+V - V$ حجم مایع واقعی - حجم مایع مجازی

$F_2 = W$

نکتهٔ بسیار مهم: در همهٔ ظرف‌هایی که در این قسمت نشان دادیم اگر وزن مایع W_1 و وزن ظرف W_2 باشد، نیرویی که بر سطح افقی وارد می‌شود، برابر $W_1 + W_2$ می‌باشد. بسیاری از دانش‌آموزان این موضوع را در تست‌ها خوب درک نکرده و نمرهٔ منفی می‌گیرند. در ادامه با حل دو تمرین، این موضوع را بهتر درک می‌کنید.



تمرین۱ ظرفی مطابق شکل، پر از مایع است. نیرویی که از طرف مایع به کف ظـرف وارد می‌شـود، ..... از وزن مایع و نیرویی که ظرف به میز وارد می‌کند، ..... از وزن مایع است.

۱) کم‌تر ـ کم‌تر
۲) بیشتر ـ کم‌تر
۳) بیشتر ـ بیشتر
۴) کم‌تر ـ بیشتر



پاسخ در ابتدا باید توجه شود که با توجه به شکل ظرف، حجم مایع مجازی از حجم مایع واقعی کم‌تر است و نیرویی که از طرف مایع به کف ظرف وارد می‌شود، کم‌تر از وزن مایع است.

$$\text{حجم مایع واقعی} < \text{حجم مایع مجازی} \Rightarrow F < W$$

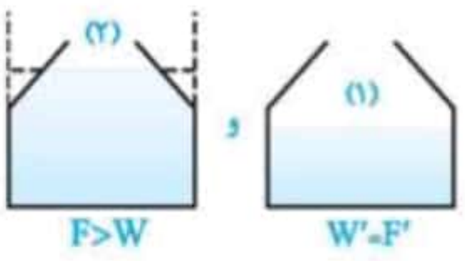
از طرفی نیروی وارد شده به میز، برابر مجموع وزن واقعی مایع و وزن ظرف می‌باشد که مشخص است از وزن مایع بیشتر است و در مجموع گزینهٔ (۴) صحیح است.

تمرین۲ درون ظرفی به وزن W ، مایعی ریخته‌ایم که وزن مایع W' است. اگر نیرویی که مایع بر کف ظرف وارد می‌کند برابـر $W + 2W'$ و این ظرف حاوی مایع را روی یک ترازو قرار دهیم، نیرویی که ظرف به ترازو وارد می‌کند چه اندازه است؟

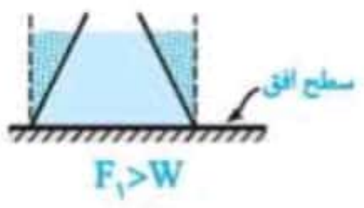
۱) $W + W'$
۲) $W + 2W'$
۳) $W + 3W'$
۴) $W + \frac{1}{2}W'$

پاسخ در این سؤال، طراح قصد انحراف ذهن شما دانش‌آموزان عزیز را دارد، نیروی وارد بر ترازو، برابر مجموع وزن ظرف و مایع $(W + W')$ بوده و گزینهٔ (۱) صحیح است.

می‌دانیم در یک ظرف با دیواره‌های قائم، نیروی وارد بر کف ظرف برابر وزن مایع است. حال با توجه بـه شـکل‌های مقابـل می‌توان نتیجه گرفت در شکل موجود در صورت سؤال، نیروی وارد بر کف ظرف مساوی یا بیشتر از نیـروی وزن آب اسـت. (با توجه به مقدار آب ریخته شده دو حالت مقابل رخ می‌دهد).

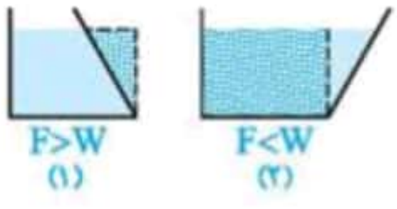


۲ ۵۳۴ با توجه به شکل روبه‌رو حجم مایع مجازی بیشتر از حجم مایع واقعی بوده و در نتیجه نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند مقداری بیشتر از وزن آن است $(F_1 > W)$. از طرفی نیرویی که کف ظرف به سـطح افـق وارد می‌کند برابر مجموع نیروی وزن مایع و وزن ظرف است، با توجه به ناچیز فرض شدن وزن ظرف می‌توان نوشت:



$$F_2 \simeq W \ , \ F_1 > W \Rightarrow F_1 > W \simeq F_2$$

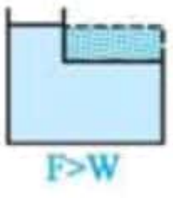
۱ ۵۳۵ با توجه به خلاصه نکات (۱۳) و با دقت در شکل‌های مقابل می‌توان نتیجه گرفت در ظـرف (۱) وزن آب درون ظرف کم‌تر از نیرویی است که مایع به قاعده وارد می‌کند ولی در ظرف (۲) نیروی وزن مایع بزرگ‌تر از نیرویـی است که مایع بر کف ظرف وارد می‌کند.



$$\text{حجم مایع واقعی} > \text{حجم مایع مجازی: شکل (۱)} \Rightarrow F > W$$

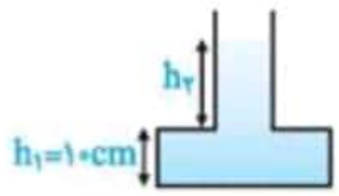
$$\text{حجم مایع واقعی} < \text{حجم مایع مجازی : شکل (۲)} \Rightarrow F < W$$

۱ ۵۳۶ با توجه به پاسخ سؤالات قبل و با توجه به شکل روبه‌رو، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع بزرگ‌تـر از نیروی وزن مایع است.



$$\text{حجم مایع واقعی} > \text{حجم مایع مجازی} \Rightarrow F > W$$

۳ ۵۳۷ با توجه به این‌که حجم قسمت پایین ظرف برابر $۵۰۰۰cm^۳$ $(=۵۰\times۱۰)$ است، اگر $۷۰۰۰cm^۳$ مایع درون ظرف بریزیم، $۲۰۰۰cm^۳$ از آن در قسمت بالای ظرف جای می‌گیرد و داریم:



$$V_۲=A_۲h_۲\Rightarrow ۲۰۰۰=۱۰۰\times h_۲\Rightarrow h_۲=۲۰cm$$

حال کافی است فشار ناشی از ارتفاع $(h_۱+h_۲)۳۰cm$ از مایع را حساب کنیم:

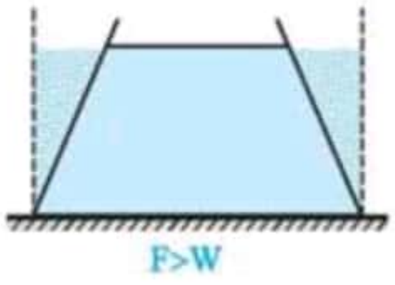
$$A_۱=۵۰۰cm^۲=۵۰۰\times۱۰^{-۴}m^۲\ ,\ \rho=۳gr/cm^۳=۳۰۰۰kg/m^۳\ ,\ P=\rho g(h_۱+h_۲)=۳۰۰۰\times۱۰\times۰/۳=۹۰۰۰Pa$$

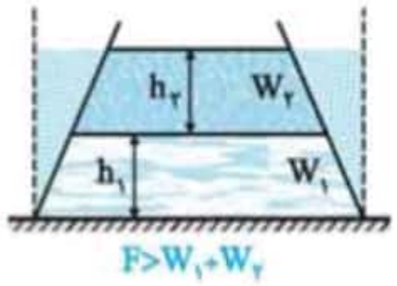
نیروی ناشی از مایع بر کف ظرف: $F=PA_۱=۹۰۰۰\times۵۰۰\times۱۰^{-۴}=۴۵۰N$

دقت: باید در صورت سؤال ذکر شود که نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع چه‌قدر است؟

۳ ۵۳۸ مشابه حالتی‌که تنها یک مایع درون ظرف است، نیرویی که به کف ظرف وارد می‌شود، بزرگ‌تر از مجموع نیروی وزن دو مایع درون ظرف است.

$$\Rightarrow F>W_۱+W_۲$$ ⇒ حجم مایع واقعی < حجم مایع مجازی

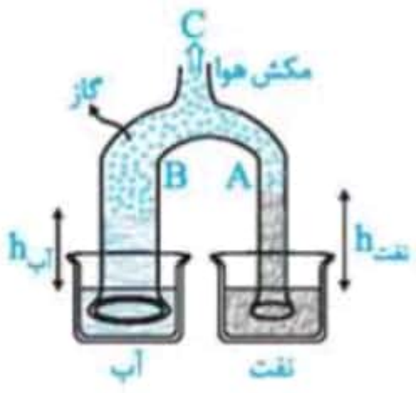




۴ ۵۳۹ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۳)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱ ۵۴۰ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۳)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲ ۵۴۱ هنگامی که هوای درون لوله‌ها مکیده می‌شود، فشار گاز کمی کاهش می‌یابد و سطح آب و نفت درون لوله‌ها به اندازهٔ کاهش فشار ایجاد شده، بالا می‌آید (دقت کنید که قطر لوله‌ها در ارتفاع آب یا نفت بالا آمده تأثیری ندارد)، در این‌صورت فشار ستون‌های آب و نفت با یک‌دیگر یکسان است و می‌توان نوشت:

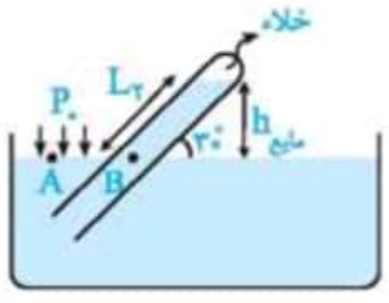


$$\rho_{آب}=۱gr/cm^۳\ ,\ \rho_{نفت}=۰/۸gr/cm^۳$$

$$\rho_{آب}gh_{آب}=\rho_{نفت}gh_{نفت}\Rightarrow\frac{h_{آب}}{h_{نفت}}=\frac{\rho_{نفت}}{\rho_{آب}}=\frac{۰/۸}{۱}=۰/۸$$

۳ ۵۴۲ هنگامی که لوله را در همان راستای ۳۰ درجه نسبت به سطح مایع از آن خارج می‌کنیم، مایع در داخل لوله بالا می‌آید تا جایی‌که ارتفاع قائم ستون مایع در داخل لوله برابر فشار هوای محیط اطراف شود.

از این‌جا به بعد، با بیرون آوردن لوله، در بالای لوله محیطی تقریباً خلأ با فشار صفر ایجاد خواهد شد و بر انتهای لوله از طرف مایع نیرویی وارد نمی‌شود.



با توجه به شکل مقابل، نقاط B و A هم‌سطح و درون یک مایع هستند، بنابراین فشار در آن نقاط برابر بوده و می‌توان نوشت:

$$P_B=P_A\xrightarrow{P_A=P_۰}P_B=۷۶cmHg$$

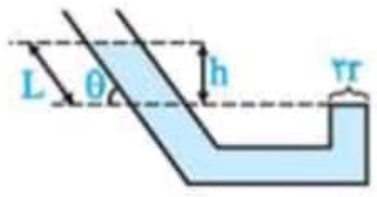
فشار نقطهٔ B برحسب سانتی‌متر جیوه به دست آمد. حال باید محاسبه کنیم ۷۶ سانتی‌متر جیوه، فشاری معادل چند سانتی‌متر از مایع با چگالی $۶/۸\frac{gr}{cm^۳}$ دارد:

فشار معادل دو مایع: $\rho_{Hg}h_{Hg}=\rho_{مایع}h_{مایع}\Rightarrow ۱۳/۶\times۷۶=۶/۸\times h_{مایع}\Rightarrow h_{مایع}=۱۵۲cm$

$$\sin۳۰^\circ=\frac{مقابل}{وتر}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{h_{مایع}}{L_۲}\Rightarrow L_۲=۲h_{مایع}=۳۰۴cm$$

در شکل صورت سؤال، $۲۰۰cm$ از لوله بیرون از مایع قرار دارد، بنابراین باید $۱۰۴cm$ $(=۲۰۰-۳۰۴)$ دیگر لوله را از مایع خارج کنیم.

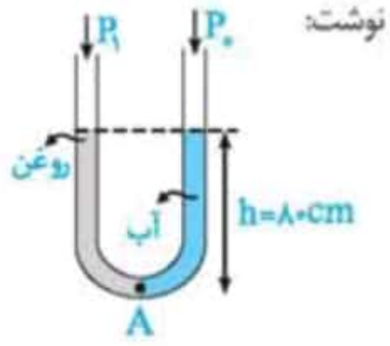
۱ ۵۴۳ نیروی وارد بر انتهای بستهٔ ظرف از طرف مایع، ناشی از اختلاف ارتفاع قائم انتهای بستهٔ ظرف و سطح آزاد مایع است و داریم:



$$F=\Delta PA\ ,\ \Delta P=\rho gh\ ,\ h=L\sin\theta\ ,\ A=\pi r^۲$$

$$\Rightarrow F=\rho gL\sin\theta\times\pi r^۲=\rho g\pi r^۲L\sin\theta$$

۱ ۵۴۴ برای حل این سؤال، می‌توان فشار نقطهٔ A را یک بار از سمت راست و یک بار از سمت چپ محاسبه کرد. بنابراین می‌توان نوشت:

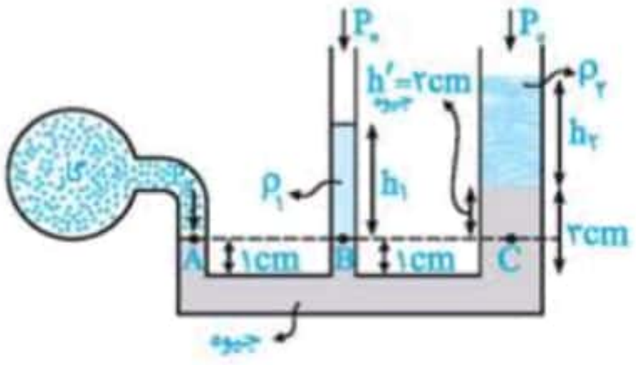


$$\begin{cases}\text{از سمت راست}: P_A=\rho_{آب}gh+P_۰=۱۰^۳\times۱۰\times۰/۸+P_۰=۸۰۰۰+P_۰\\ \text{از سمت چپ}: P_A=P_۱+\rho_{روغن}gh=P_۱+۸۰۰\times۱۰\times۰/۸=۶۴۰۰+P_۱\end{cases}\Rightarrow ۸۰۰۰+P_۰=۶۴۰۰+P_۱$$

$$\Rightarrow \text{فشار پیمانه‌ای}: P_۱-P_۰=۱۶۰۰Pa$$

www.gajmarket.com

۳ ۵۴۵ با توجه به شکل زیر، نقاط A، B و C هم‌ارتفاع بوده و در یک مایع (جیوه) قرار دارند. بنابراین فشار در این سه نقطه با هم برابر است.



حال در دو قسمت به این سؤال پاسخ می‌دهیم:

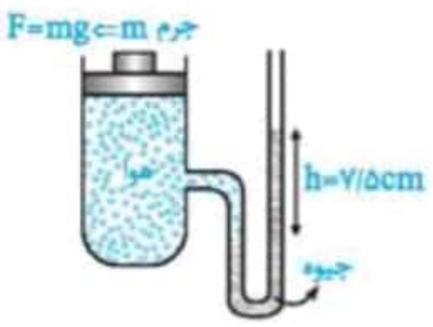
قسمت اول: (به دست آوردن $h_۱$): فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن، یعنی اختلاف فشار گاز درون مخزن و فشار هوا ($P_{گاز} - P_0$)، برابر ۴cmHg است. یعنی فشار ناشی از ارتفاع $h_۱$ از مایع $\rho_۱$ برابر ۴cmHg است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\rho_{جیوه} h_{جیوه} = \rho_۱ h_۱ \Rightarrow ۱۳/۶ \times ۴ = ۶/۸ h_۱ \Rightarrow h_۱ = ۸cm$$

قسمت دوم: (به دست آوردن $h_۲$): برای برابر شدن فشار در نقاط A و C، با توجه به شکل، باید فشار ناشی از ۲ سانتی‌متر جیوه و $h_۲$ سانتی‌متر از مایع $\rho_۲$ برابر ۴cmHg شود. حال باید محاسبه کنیم که فشار ناشی از چه ارتفاعی از مایع $\rho_۲$ (یعنی $h_۲$) برابر ۲cmHg می‌شود.

$$\rho_{جیوه} h''_{جیوه} = \rho_۲ h_۲ \Rightarrow ۱۳/۶ \times ۲ = ۳/۴ \times h_۲ \rightarrow h_۲ = ۸cm \Rightarrow \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{۸}{۸} = ۱$$

۳ ۵۴۶ فشار حاصل از قرار دادن جرم m روی پیستون، با توجه به اصل پاسکال بدون کاهش به تمام قسمت‌های مایع منتقل می‌شود و باعث اختلاف ارتفاع جیوه در سمت چپ و راست لوله می‌شود، با توجه به این موضوع داریم:

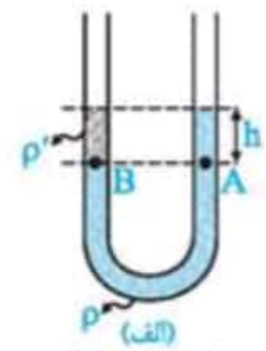


$$A = ۵۰cm^۲ = ۵۰ \times ۱۰^{-۴} m^۲ \;,\; \rho = ۱۳/۶ gr/cm^۳ = ۱۳۶۰۰ kg/m^۳ \;,\; h = ۷/۵cm = ۷/۵ \times ۱۰^{-۲} m$$

$$\frac{F}{A} = \rho gh \Rightarrow \frac{mg}{A} = \rho gh \Rightarrow \frac{m \times ۱۰}{۵۰ \times ۱۰^{-۴}} = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۷/۵ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow m = ۵/۱ kg$$

۱ ۵۴۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

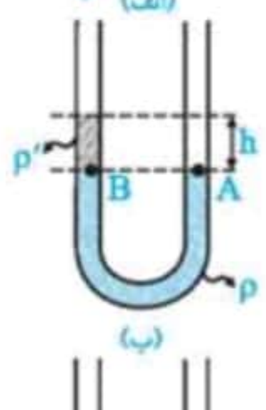
۱) با درنظر گرفتن دو نقطهٔ A و B هم‌سطح در لولهٔ (الف)، فشار در این نقاط یکسان نیست.



بنابراین مایع در حالت تعادل نیست (دقت شود که با توجه به صورت سؤال، چگالی دو مایع لزوماً متفاوت است).

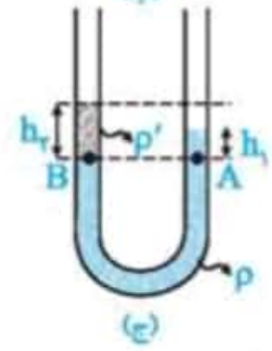
$$(P_A = P_0 + \rho gh) \neq (P_B = P_0 + \rho' gh)$$

۲) در لولهٔ شکل (ب)، فشار دو نقطهٔ هم‌سطح A و B یکسان نیست، بنابراین این مایع نیز در حالت تعادل نمی‌باشد.



$$(P_A = P_0) \neq (P_B = P_0 + \rho' gh)$$

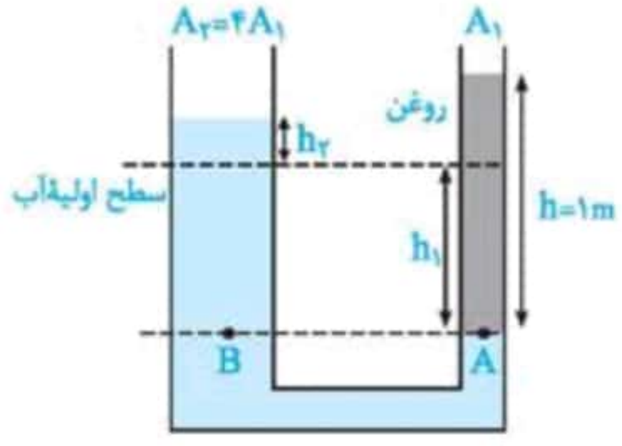
۳) در شکل (ج) در صورتی‌که چگالی مایع سمت راست بیشتر از مایع سمت چپ باشد، مایع درون این لوله می‌تواند در تعادل باشد.



تساوی ممکن است برقرار باشد. $P_A = P_0 + \rho gh_۱ \;,\; P_B = P_0 + \rho' gh_۲ \xrightarrow{\rho > \rho'}$

۱ ۵۴۸ فرض کنید پس از اضافه کردن روغن به سمت راست لوله، آب در سمت راست لوله به اندازه $h_۱$ پایین آمده و آب در سمت چپ لوله، به اندازهٔ $h_۲$ بالا برود. بنابراین با توجه به یکسان بودن حجم آب جابه‌جا شده در دو طرف لوله می‌توان نوشت:

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow A_۱ h_۱ = A_۲ h_۲ \xrightarrow{A_۲ = ۴A_۱} h_۱ = ۴h_۲ \quad \text{رابطهٔ (۱):}$$



با توجه به یکسان بودن فشار در نقاط A و B می‌توان نوشت:

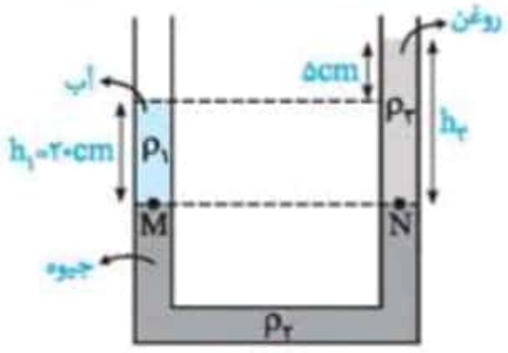
$$\begin{cases} P_A = P_0 + \rho_{روغن} gh \\ P_B = P_0 + \rho_{آب} g(h_۱ + h_۲) \end{cases} \xrightarrow{P_A = P_B} P_0 + \rho_{روغن} gh = P_0 + \rho_{آب} g(h_۱ + h_۲)$$

$$\Rightarrow ۸۰۰ \times ۱ = ۱۰۰۰ \times (h_۱ + h_۲) \Rightarrow h_۱ + h_۲ = ۰/۸ m = ۸۰cm \quad \text{رابطهٔ (۲):}$$

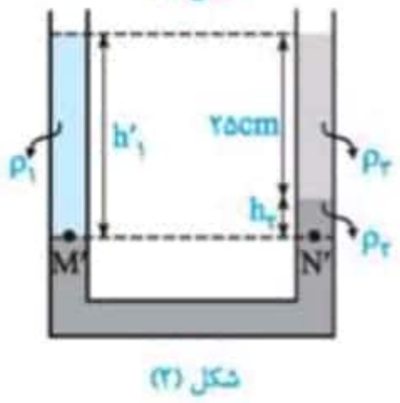
حال با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} h_۱ = ۴h_۲ \\ h_۱ + h_۲ = ۸۰cm \end{cases} \Rightarrow ۴h_۲ + h_۲ = ۸۰ \Rightarrow h_۲ = ۱۶cm$$

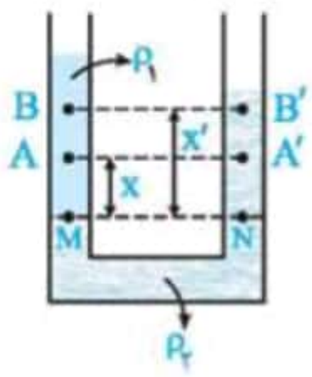
بنابراین سطح آب در شاخهٔ سمت چپ، به اندازهٔ ۱۶ سانتی‌متر بالاتر می‌آید.



شکل (۱)



شکل (۲)



۳ ۵۴۹ **گام اول:** ابتدا با کمک حالت اول، چگالی روغن را محاسبه می‌کنیم:

$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \Rightarrow 1 \times 20 = \rho_2 \times 25 \Rightarrow \rho_2 = 0/8\,gr/cm^3$$

گام دوم: با رساندن ارتفاع آب به h'_1 در شکل (۲)، سطح آزاد روغن و آب در یک تراز قرار دارند و می‌توان نوشت:

$$P_{M'} = P_{N'} \Rightarrow \rho_1 h'_1 = \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$$

$$\Rightarrow 1 \times h'_1 = 13/6 \times \overbrace{(h'_1 - 25)}^{h_2} + 0/8 \times 25$$

$$\Rightarrow h'_1 = 25/4\,cm$$

با توجه به این‌که ارتفاع آب در ابتدا ۲۰cm بوده است، مقدار ۵/۴cm آب به آن اضافه شده است $(25/4 - 20 = 5/4\,cm)$.

۱ ۵۵۰ در شکل، فشار نقاط M و N برابر است و در مقایسهٔ فشار نقاط A و A' و هم‌چنین نقاط B و B' داریم:

مقایسهٔ فشار نقاط A و A':

$$P_A = P_M - \rho_1 g x \;,\; P_{A'} = P_N - \rho_2 g x$$

$$P_M = P_N \Rightarrow P_A - P_{A'} = (\rho_2 - \rho_1) g x \Rightarrow \Delta P_1 = (\rho_2 - \rho_1) g x$$

مقایسهٔ فشار نقاط B و B':

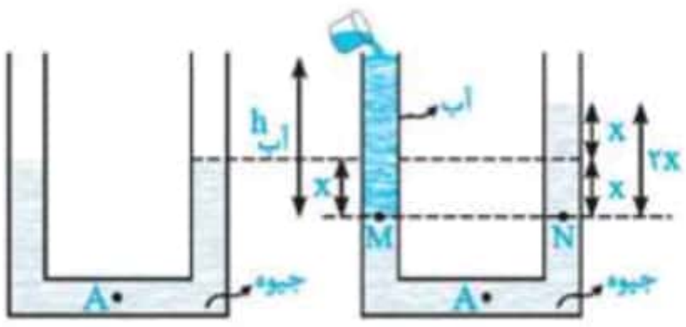
$$P_B = P_M - \rho_1 g x' \;,\; P_{B'} = P_N - \rho_2 g x'$$

$$P_M = P_N \Rightarrow P_B - P_{B'} = (\rho_2 - \rho_1) g x' \Rightarrow \Delta P_2 = (\rho_2 - \rho_1) g x'$$

$$x' > x \Rightarrow \Delta P_2 > \Delta P_1$$

در مقایسهٔ ΔP_1 و ΔP_2 می‌توان گفت:

نگاه مفهومی‌تر: هرچه از سطح هم‌فشار MN دور می‌شویم، اختلاف فشار بین دو نقطه که در یک تراز ولی در دو مایع قرار دارد بیشتر می‌شود و اختلاف فشار بین B و B' از اختلاف فشار بین A و A' بیشتر است.



۱ ۵۵۱ این تست، یک سؤال زیبا و مفهومی از بحث فشار می‌باشد. با ریختن آب در یکی از شاخه‌ها، برای محاسبهٔ افزایش فشار در نقطهٔ A، باید مقدار تغییر ارتفاع جیوه در شاخهٔ دیگر لوله را به‌دست آوریم. مطابق شکل مقابل، با ریختن آب در سمت چپ لوله، سطح جیوه در آن شاخه کمی پایین رفته و در شاخهٔ مقابل به همان مقدار، بالا می‌آید.

رابطهٔ (I): $P_M = P_N \Rightarrow \rho_{آب} h_{آب} = \rho_{جیوه} \times 2x$

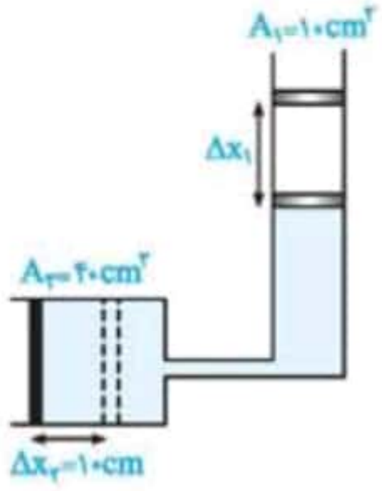
در ادامه برای یافتن $h_{آب}$ با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ و این‌که جرم آب ۶۸gr است، می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1 = \frac{68}{V} \Rightarrow V = 68\,cm^3 \xrightarrow[A=2cm^2]{V=Ah} 2 \times h_{آب} = 68 \Rightarrow h_{آب} = 34\,cm$$

حال به کمک رابطهٔ (I) داریم:

$$\xrightarrow{(I)} 1 \times 34 = 13/6 \times 2x \Rightarrow x = 1/25\,cm$$

بنابراین ارتفاع جیوه در شاخهٔ راست لولهٔ فوق به اندازهٔ 1/25cm نسبت به وضعیت اولیه افزایش می‌یابد. اما نکتهٔ جالب آن است که با توجه به اصل پاسکال، فشار در تمامی نواحی (از جمله نقطهٔ A در پایین لوله) به اندازهٔ ۱/۲۵ سانتی‌متر جیوه افزایش می‌یابد.



۴ ۵۵۲ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به برابر نبودن سطح مقطع پیستون و سطح مقطع لوله، باید حساب کنیم به ازای ۱۰cm حرکت پیستون به سمت راست، ارتفاع مایع درون لوله چند سانتی‌متر بالا می رود. بنابراین داریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 \Rightarrow 10 \times \Delta x_1 = 40 \times 10 \Rightarrow \Delta x_1 = 40\,cm$$

گام دوم: با توجه به اصل پاسکال، تغییر فشار در نقطهٔ B، برابر با فشار حاصل از تغییر ارتفاع مایع است، پس می‌توان نوشت:

$$\Delta P_B = \rho g \Delta x_1 = 1200 \times 10 \times 0/4 = 4800\,Pa$$

www.gajmarket.com



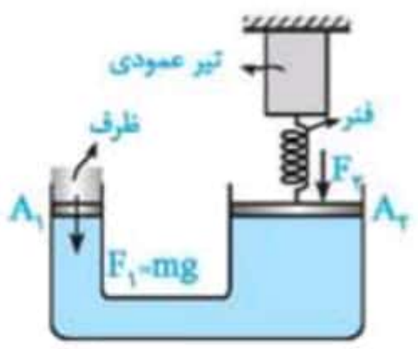
۲ ۵۵۳ **گام اول:** ابتدا فشار وارد بر درپوش از طرف مایع را هنگامی که ارتفاع آب در لوله به ۵ متر می‌رسد، به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{درپوش}} = \rho_{\text{آب}} gh = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۵ = ۵ \times ۱۰^۴ \, Pa$$

گام دوم: حال با توجه به رابطهٔ $F = PA$، نیروی وارد بر درپوش از طرف آب برابر است با:

$$A_{\text{درپوش}} = \pi r^۲ = ۳ \times \left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)^۲ = ۳ \times \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ = \frac{۳}{۱۶} m^۲$$

$$F = PA \Rightarrow F = ۵ \times ۱۰^۴ \times \frac{۳}{۱۶} = ۹۳۷۵ N$$



۲ ۵۵۴ با توجه به قانون پاسکال می‌توان نوشت:

$$F_۱ = mg \ , \ A_۱ = A \ , \ F_۲ = k\Delta x \ , \ A_۲ = ۱۵A$$

$$k = ۳۰ kN/m \ , \ \Delta x = ۵ cm = ۰/۰۵ m$$

$$\frac{F_۱}{A_۱} = \frac{F_۲}{A_۲} \Rightarrow \frac{mg}{A} = \frac{k\Delta x}{۱۵A} \Rightarrow \text{جرم شن}: m = \frac{k\Delta x}{۱۵g} = \frac{۳۰ \times ۱۰^۳ \times ۰/۰۵}{۱۵ \times ۱۰} = ۱۰ kg$$

۳ ۵۵۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۴ — آشنایی با مفاهیم اصل ارشمیدس و نیروی شناوری (تست‌های ۵۵۵ تا ۵۶۳)

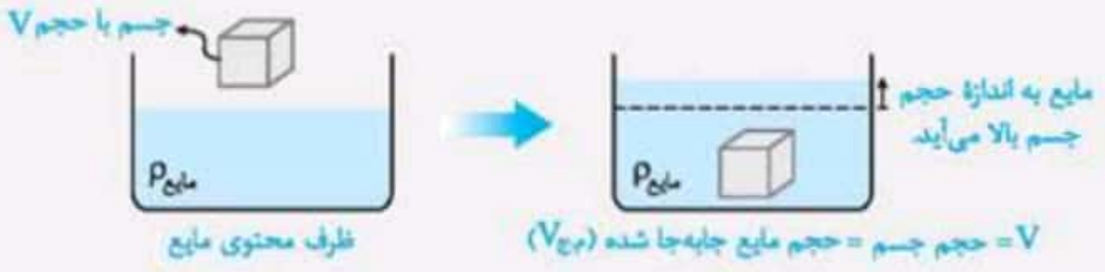
پدیده‌هایی مثل سبک‌شدن انسان توی آب، وایسادن یه کشتی فولادی روی سطح آب و ... باعث شد تا برای توجیه این پدیده‌ها، نیرویی به نام نیروی شناوری مطرح بشه. تو این قسمت با این نیرو آشنا میشیم ...

اصل ارشمیدس: طبق اصل ارشمیدس، وقتی تمام یا قسمتی از یک جسم درون یک سیال (منظور مایع یا گاز است که به آن‌ها شاره نیز گفته می‌شود) قرار می‌گیرد، سیال نیرویی رو به بالا به آن وارد می‌کند که با **وزن سیال جابه‌جا شده** توسط جسم برابر است که به آن **نیروی شناوری (F_b)** می‌گویند.

برای آشنایی و درک بهتر نیروی شناوری، به دو حالت زیر توجه کنید:

حالت اول: کل جسم در داخل مایع فرو رود:

با نگاهی ساده به دو شکل زیر، می‌توان فهمید که اگر جسمی با حجم V را در درون یک مایع وارد کنیم، مایع به‌اندازهٔ حجم آن جسم بالا می‌آید.



با یک بیان ساده، ارشمیدس می‌گوید نیروی شناوری وارد بر جسم قرار گرفته در یک مایع، برابر **وزن مایع جابه‌جا شده** می‌باشد و این یعنی داریم:

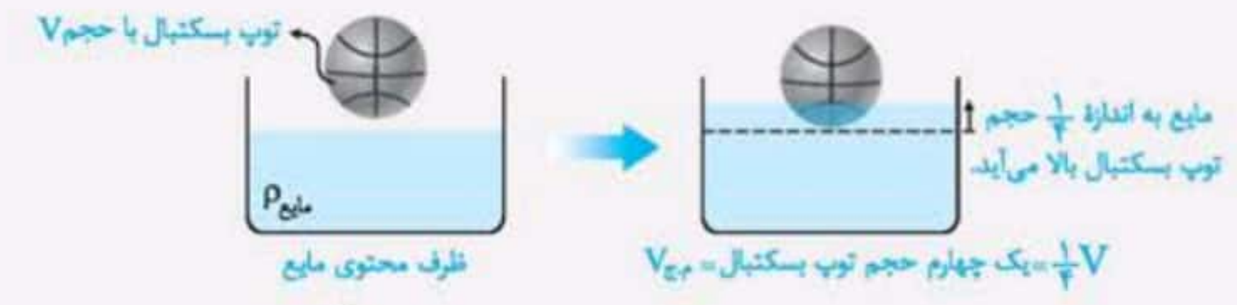
وزن مایع جابه‌جا شده $= F_b$ $\xrightarrow{\text{وزن مایع جابه‌جا شده}: W_{\text{م.ج}} = \rho_{\text{مایع}} . V_{\text{م.ج}} g}$ $F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{م.ج}} g$

از طرفی در شکل فوق با توجه به این‌که حجم مایع جابه‌جا شده برابر حجم جسم است ($V_{\text{جسم}} = V_{\text{م.ج}}$)، می‌توان نوشت:

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{جسم}} g$$

حالت دوم: فقط قسمتی از جسم در داخل مایع قرار گیرد:

به دو شکل زیر توجه کنید که این بار یک توپ بسکتبال را درون مایع انداخته‌ایم و مثلاً $\frac{۱}{۴}$ از آن به درون مایع فرو رفته است:



در این مثال ساده که $\frac{۱}{۴}$ حجم توپ درون مایع فرو رفته است، حجم مایع جابه‌جا شده برابر $\frac{۱}{۴}$ حجم جسم است و طبق اصل ارشمیدس خواهیم داشت:

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{م.ج}} g = \rho_{\text{مایع}} \times \left(\frac{۱}{۴} V_{\text{جسم}}\right) g$$

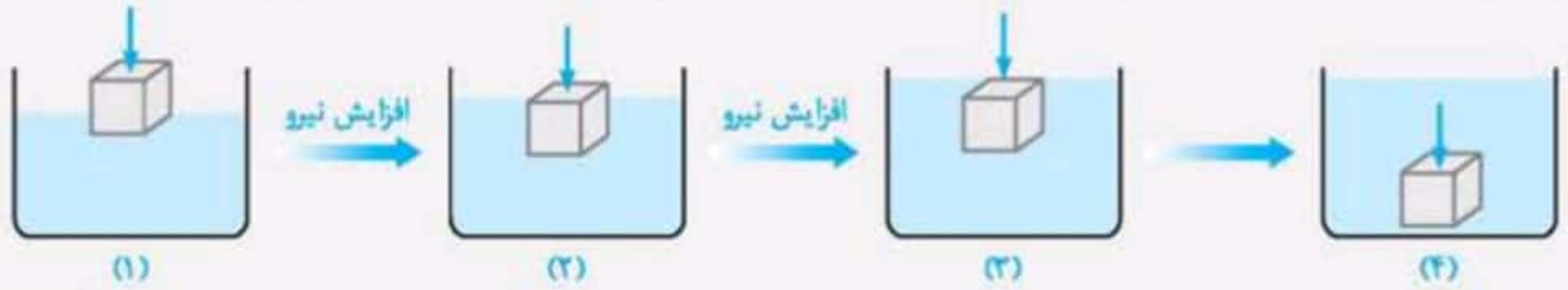
نکات مهم و کاربردی

۱ با توجه به مفاهیم ارائه شده، در محاسبهٔ نیروی شناوری، حجم مایع جابه‌جا شده ($V_{م.ج}$) مهم است که الزاماً با حجم جسم برابر **نمی‌باشد**.

۲ اگر کل جسم در مایع غرق شود، حجم مایع جابه‌جا شده برابر حجم جسم است و اگر قسمتی از جسم در مایع غرق شود، حجم مایع جابه‌جا شده برابر حجم قسمت غرق شده است.

۳ بسیاری از مراجع علم فیزیک، نیروی شناوری را **نیروی سبک‌کننده** نیز نامیده‌اند. دلیل این موضوع آن است که جهت این نیرو، همواره به سمت بالا می‌باشد (اصطلاحاً بالاسو) و این یعنی در خلاف جهت نیروی وزن است و در نهایت باعث سبکی جسم می‌شود.

۴ اگر خوب فکر کنید، می‌فهمید که هرچه جسم بیشتر وارد مایع شود، مقدار مایع بیشتری جابه‌جا می‌شود و نیروی شناوری وارد بر آن بزرگ‌تر است. این یعنی بیشترین نیروی شناوری، زمانی است که جسم به‌طور کامل داخل آب شود. به‌عنوان مثال، اگر یک مکعب سبک را با اعمال نیرو وارد آب کنیم، در مقایسهٔ چهار حالت داریم:



$$F_{b_1} < F_{b_2} < F_{b_3} = F_{b_4}$$

هنگامی که جسم به‌طور کامل داخل یه مایع میشه، دیگه با افزایش عمق، نیروی شناوری زیاد نمیشه. به قول معروف، آب که از سر بگذشت، چه یک وجب، چه صد وجب ☺

۵ مقدار نیروی شناوری، به چگالی مایع و شتاب گرانش نیز وابسته است و در مجموع می‌توان گفت:

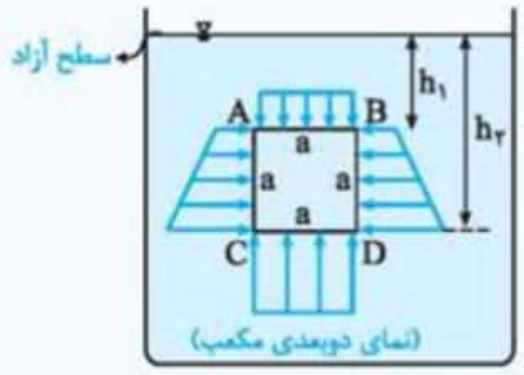
$$F_b \propto \rho_{مایع} \quad , \quad F_b \propto V_{جم} \quad , \quad F_b \propto g$$

۶ جالب است بدانید که در حالت کلی‌تر، نیروی شناوری علاوه بر مایعات، در مورد گازها نیز برقرار است. به‌عنوان مثال هنگامی که یک بادکنک محتوی گاز هلیوم را در هوا رها می‌کنید، به‌دلیل نیروی شناوری که از جانب هوا بر آن وارد می‌شود، این بادکنک به سمت بالا حرکت می‌کند.



نگاهی دیگر به نیروی شناوری

فرض کنید مکعبی مطابق شکل در داخل آب قرار دارد. در این حالت، فشار بر روی وجه AB برابر $(P_0 + \rho gh_1)$ و فشار بر روی وجه CD برابر $(P_0 + \rho gh_2)$ می‌باشد. بر روی وجه‌های AC و BD نیز به دلیل تغییر ارتفاع نقاط نسبت به سطح آزاد، فشار تغییر می‌کند.

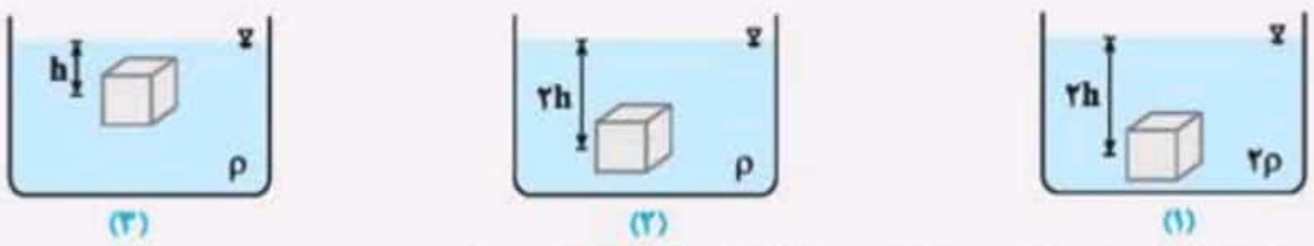


اگر بخواهیم نیروهای وارد بر این مکعب را بررسی کنیم، نیروهای افقی وارد بر وجه‌های AC و BD یک‌دیگر را خنثی کرده و اختلاف نیروی وجه‌های CD و AB، در نهایت یک نیرو به‌سمت بالا می‌باشد. این نیرو، در واقع همان نیروی شناوری وارد بر مکعب می‌باشد که به سادگی مقدار آن برابر $\rho_{مایع} Vg$ به‌دست می‌آید.

دقت: در واقع نیروی شناوری، به دلیل اختلاف فشار در بالا و پایین مکعب ایجاد می‌شود.

حالا برای درک بهتر مفاهیم این قسمت، تمرین زیر رو با هم حل می‌کنیم ...

تمرین۱ **یک مکعب با حجم V، در سه وضعیت مطابق شکل‌های زیر در مایع نشان داده شده است:**



در مقایسهٔ نیروی شناوری وارد بر مکعب در این سه وضعیت، کدام گزینه صحیح است؟ (تألیفی)

۱) $F_{b_1} = F_{b_2} = 2F_{b_3}$ ۲) $F_{b_1} = 2F_{b_2} = 2F_{b_3}$ ۳) $F_{b_1} = 2F_{b_2} = 4F_{b_3}$ ۴) $F_{b_1} = F_{b_2} = F_{b_3}$

www.gajmarket.com

پاسخ در مقایسهٔ سه وضعیت نشان داده شده، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- در هر سه وضعیت، جسم به‌طور کامل داخل مایع وارد شده است و این یعنی حجم مایع جابه‌جا شده، در سه حالت یکسان و برابر حجم جسم است.

$$(V_{\text{م.ج}})_1 = (V_{\text{م.ج}})_2 = (V_{\text{م.ج}})_3 = V$$

۲- در شکل‌های (۲) و (۳)، با توجه به این‌که چگالی مایع در هر دو حالت برابر ρ است، نیروی شناوری نیز یکسان است:

$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{م.ج}} g$ (یکسان ← $\rho_{\text{مایع}}$، یکسان ← $V_{\text{م.ج}}$، یکسان ← g) $\Rightarrow F_b$ نیز یکسان است. $\Rightarrow F_{b_2} = F_{b_3}$

این موضوع یعنی عمق‌های h و $2h$، اطلاعاتی اضافی بوده‌اند و در محاسبهٔ نیروی شناوری نقشی نداشته‌اند.

۳- در شکل (۱)، چگالی مایع برابر 2ρ بوده و این یعنی نیروی شناوری در آن، دو برابر شکل‌های (۲) و (۳) می‌باشد.

$$F_{b_1} = 2F_{b_2} = 2F_{b_3}$$ (گزینهٔ ۲)

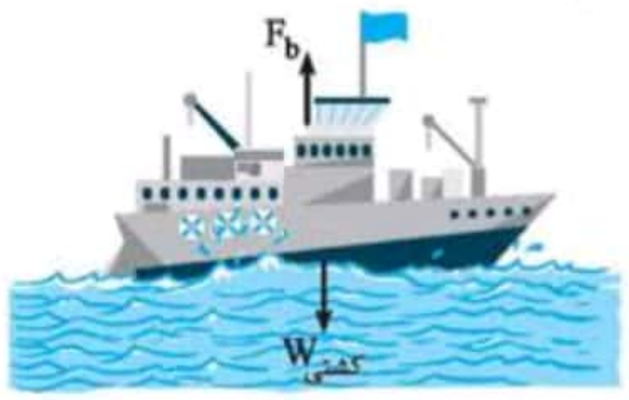
همان‌طور که می‌دانیم، هرچه عمق مایع بیشتر شود، فشار مایع افزایش می‌یابد. بنابراین فشار وارد بر سطح زیرین توپ از فشار وارد بر سطح بالایی آن بیشتر است، درنتیجه نیروی رو به بالایی که از طرف آب بر توپ وارد می‌شود، بیشتر از نیروی رو به پایین وارد بر توپ از طرف آب است و توپ به سمت بالا حرکت خواهد کرد.

۲ ۵۵۶ همان‌طور که می‌دانیم، هر چه عمق مایع بیشتر شود، فشار مایع افزایش می‌یابد ($P_{\text{مایع}} = \rho gh$)، بنابراین نیروی وارد بر توپ از طرف مایع نیز با افزایش عمق بیشتر می‌شود که این موضوع، فقط در گزینهٔ (۲) رعایت شده است (اندازهٔ فلش‌ها نشان‌دهندهٔ بزرگی نیرو در هر مکان است).

تذکر

دقت کنید هرگاه جسمی در داخل مایع قرار گیرد، نیروهای وارد بر جسم از طرف مایع، باید بر سطح جسم عمود باشد.

۲ ۵۵۷ کشتی بر سطح آب شناور شده است، در نتیجه برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نیروی شناوری که آب بر کشتی وارد می‌کند با وزن کشتی برابر است ($F_b = W_{\text{کشتی}}$).



۴ ۵۵۸ نیرویی که باعث سبک شدن اجسام در آب می‌شود، همان نیروی شناوری است. در این سؤال چون جسم A بیشتر از جسم B سبک شده است، بنابراین نیروی شناوری وارد بر جسم A از نیروی شناوری وارد بر B بیشتر است، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تذکر

(مقایسهٔ حجم دو جسم): دقت کنید که در رابطه با مقایسهٔ جرم و چگالی جسم‌ها نمی‌توان اظهار نظر کرد، ولی می‌توانیم حجم آن‌ها را مقایسه کنیم.

مطابق اصل ارشمیدس، نیروی شناوری وارد بر جسم برابر وزنِ مایع جابه‌جاشده توسط جسم است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{م.ج}} g$$

چون جسم‌ها به‌طور کامل درون مایع قرار گرفته‌اند، حجم مایع جابه‌جاشده، همان حجم جسم‌هاست و با توجه به این‌که نیروی شناوری A بیشتر از B است، می‌توان نتیجه گرفت حجم A از حجم B بیشتر است.

سؤال **اگر جسم‌ها به‌طور کامل درون آب نبودند، آیا می‌توانستیم حجم آن‌ها را مقایسه کنیم؟**

۱ ۵۵۹ اولین موضوعی که باید به آن توجه داشته باشیم آن است که هر دو کره به‌طور کامل در آب غرق شده‌اند و این یعنی حجم مایع جابه‌جاشده در هر دو، برابر حجم ظاهری دو کره است که مقدار یکسانی می‌باشد (حفرهٔ موجود در داخل یکی از کره‌ها، تأثیری ندارد) و داریم:

$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{م.ج}} g \longrightarrow F_b$ برای دو کره یکسان است.

۴ ۵۶۰ **گام اول:** همان‌طور که می‌دانیم، چگالی آب از چگالی نفت بیشتر است (به‌همین دلیل لکه‌های نفتی بر روی سطح آب قرار می‌گیرد).

گام دوم: نیروی شناوری وارد بر سه گوی یکسان است و این یعنی می‌توان نوشت:

$F_b = \rho_{مایع} \boxed{V_{م.ج}} g \Rightarrow$ حاصل‌ضرب ($\rho_{مایع} V_{جسم}$) در هر سه حالت یکسان است.

$V_{م.ج}$ ← برابر حجم جسم غرق‌شده است.

گام سوم: در نهایت در مقایسهٔ حجم سه جسم داریم:

مقایسهٔ دو گوی a و b : $\rho_{آب} \times V_a = \rho_{آب} \times V_b \Rightarrow V_a = V_b$

مقایسهٔ دو گوی a و c: $\rho_{آب} \times V_a = \rho_{نفت} \times V_c \Rightarrow V_c = \boxed{\frac{\rho_{آب}}{\rho_{نفت}}} \times V_a \Rightarrow V_c > V_a$

$\frac{\rho_{آب}}{\rho_{نفت}}$ ← بزرگ‌تر از یک

تذکر

از این سؤال می‌توان فهمید که در اجسام غرق‌شده، چگالی اجسام در محاسبهٔ نیروی شناوری نقش ندارد.

۲ ۵۶۱ **روش اول:** برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: طبق اصل ارشمیدس، نیروی شناوری وارد بر هر جسم برابر وزن مایع جابه‌جاشده توسط جسم است. در این سؤال چون اجسام به‌طور کامل داخل مایع قرار گرفته‌اند، حجم مایع جابه‌جاشده، همان حجم جسم‌هاست، بنابراین می‌توان نوشت:

رابطهٔ (۱) : $F_b = \rho_{مایع} V_{جم} g \rightarrow \frac{F_{b_{مس}}}{F_{b_{آلومینیم}}} = \frac{\rho_{مایع} V_{مس} g}{\rho_{مایع} V_{آلومینیم} g} = \frac{V_{مس}}{V_{آلومینیم}}$

گام دوم: از طرفی چون جرم دو جسم با هم برابر است و چگالی مس بیشتر از آلومینیم است، طبق رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، می‌توان نتیجه گرفت که حجم جسم مسی از جسم آلومینیمی کم‌تر است.

$\rho = \frac{\overset{\text{یکسان}}{m}}{V} \xrightarrow{\rho_{مس} > \rho_{آلومینیم}} V_{مس} < V_{آلومینیم}$

بنابراین طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$V_{مس} < V_{آلومینیم} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \frac{F_{b_{مس}}}{F_{b_{آلومینیم}}} = \frac{V_{مس}}{V_{آلومینیم}} < ۱ \Rightarrow F_{b_{مس}} < F_{b_{آلومینیم}}$

درنتیجه جسم آلومینیمی بیشتر سبک می‌شود.

روش دوم (روش مفهومی):

گام اول: چگالی مس بیشتر از آلومینیم است، بنابراین طبق رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، چون جرم هر دو جسم با هم برابر است، حجم مس کم‌تر از حجم آلومینیم است.

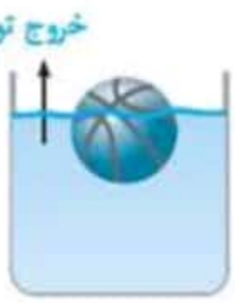
گام دوم: همان‌طور که می‌دانیم، نیروی شناوری وارد بر جسم با حجم مایع جابه‌جاشده که در این سؤال همان حجم جسم‌هاست، متناسب است، بنابراین چون حجم مس از آلومینیم کم‌تر است، نیروی شناوری وارد بر جسم مسی هم کم‌تر از نیروی شناوری وارد بر جسم آلومینیمی خواهد بود. بنابراین جسم آلومینیمی سبک‌تر خواهد شد.

۳ ۵۶۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، نیروی شناوری وارد بر توپ را در سه مرحله بررسی می‌کنیم:



مرحلهٔ اول: تا قبل از لحظهٔ خروج توپ از آب:

مطابق شکل، در ابتدا که توپ را رها می‌کنیم، توپ کاملاً درون آب قرار دارد و حجم مایع جابه‌جاشده توسط توپ، برابر حجم توپ است که مقدار ثابتی دارد، بنابراین از لحظهٔ رها شدنِ توپ تا لحظه‌ای که توپ هنوز از آب خارج نشده است، نیروی شناوری وارد بر آن مقداری ثابت است.



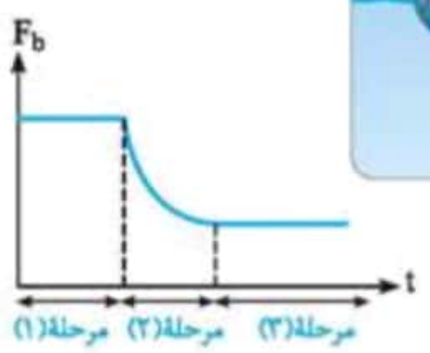
مرحلهٔ دوم: در هنگام خروج توپ از آب:

هنگامی که بخشی از توپ از آب خارج می‌شود، حجم مایع جابه‌جاشده توسط توپ کاهش می‌یابد و درنتیجه طبق اصل ارشمیدس، نیروی شناوری وارد بر توپ هم کم می‌شود.



مرحلهٔ سوم: پس از حداکثر خروج توپ از آب:

در نهایت با شناور شدن توپ بر سطح آب، نیروی شناوری وارد بر آن به مقدار ثابتی می‌رسد (برابر وزن توپ می‌شود). دقت کنید که در انتها چون هم‌چنان مقداری از توپ درون آب است، نیروی شناوری صفر نمی‌شود.



بنابراین نمودار نیروی شناوری وارد بر توپ برحسب زمان در این سه مرحله، به صورت مقابل است:

www.gajmarket.com

۵۶۳ ۱ در شکل مقابل، نیروهای وارد بر یک بالن نشان داده شده است. واضح است که با کاهش چگالی هوا (هوایی که بالن در آن غوطه‌ور است)، نیروی شناوری وارد بر بالن کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۱) صحیح است.



با کاهش چگالی هوا، نیروی شناوری وارد بر بالن کاهش می‌یابد. $\Rightarrow F_b=\rho_{هوا} Vg$

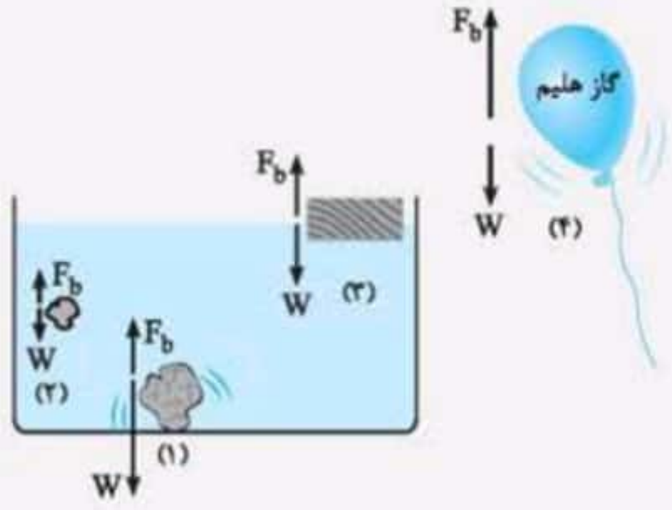
تذکر

در این سؤال، چون $F_b > W$ است، بالن به سمت بالا حرکت می‌کند و از سطح زمین دور می‌شود.

۵۶۴ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

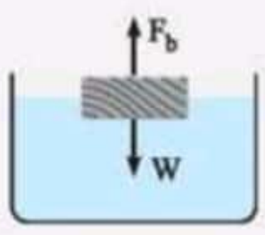
خلاصه نکات ۱۵ **بررسی وضعیت‌های مختلف قرارگیری جسم در داخل سیال** (تست‌های ۵۶۴ تا ۵۷۳)

در شکل مقابل، نیروی شناوری وارد بر اجسام را با F_b و وزن اجسام را با W نشان داده‌ایم. با مقایسهٔ مقدار F_b و W، چهار حالت زیر می‌تواند برای جسم رخ دهد:



حالت ۱ (فرو رفتن): اگر نیروی وزن جسم از نیروی شناوری وارد بر آن بیشتر باشد، در آن‌صورت جسم به درون مایع فرو می‌رود تا در نهایت به کف ظرف برسد (مانند سنگی که درون حوض آب می‌اندازیم).

حالت ۲ (غوطه‌وری): اگر وزن جسمی که به‌طور کامل درون مایع قرار گرفته، با نیروی شناوری وارد بر آن برابر باشد، در آن‌صورت جسم در وضعیت عادی در داخل مایع ثابت مانده و بالا و پایین نمی‌رود. در واقع جسم در داخل آب به‌صورت غوطه‌ور باقی می‌ماند.



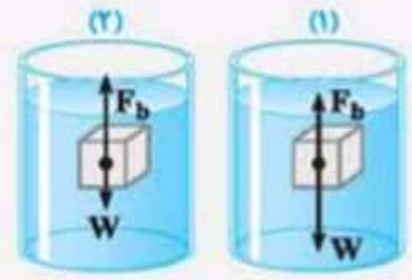
حالت ۳ (شناوری): اگر یک جسم سبک (مانند یک توپ) را به‌طور کامل درون مایع قرار دهیم، در آن‌صورت این جسم به بالا خواهد آمد و در نهایت در سطح مایع به تعادل رسیده و شناور می‌شود. در این حالت ضمن این‌که قسمتی از جسم بیرون از مایع است، نیروی وزن و شناوری نیز با هم برابر خواهند بود (در این حالت $V_{مج}$ و $V_{جسم}$ یکسان نمی‌باشد).

$$F_b = W \Rightarrow \rho_{مایع} V_{مج} g = \rho_{جسم} V_{جسم} g$$

حالت ۴ (بالا رفتن): اگر نیروی شناوری از نیروی وزن جسم بیشتر باشد، در آن‌صورت جسم به سمت بالا حرکت خواهد کرد (مانند بادکنکی که محتوی گاز هلیم است و به سمت بالا حرکت می‌کند).

در ادامه با حل تمرین زیر، مفاهیم ارائه شده در این قسمت را بهتر درک می‌کنید.

تمرین **در دو شکل مقابل با مقایسهٔ F_b و W:**



الف) وضعیت نهایی اجسام را در داخل مایع مشخص کنید.

ب) چگالی اجسام در دو حالت مذکور را با چگالی مایع داخل ظرف مقایسه کنید.

پاسخ با توجه به طول بردارهای متناظر با F_b و W، پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب) را می‌دهیم:

الف) در شکل (۱)، W بزرگ‌تر از F_b می‌باشد (مانند انداختن قطعه سنگ داخل آب) و در این حالت، جسم تحت وزن پایین رفته و در نهایت به کف ظرف می‌چسبد. در شکل (۲)، F_b بزرگ‌تر از W می‌باشد (مانند توپ پلاستیکی که به زور داخل آب کرده‌ایم)، در این حالت جسم بالا رفته و در نهایت بر روی سطح آب به تعادل می‌رسد (در حالی‌که تنها قسمتی از آن داخل آب قرار می‌گیرد).

ب) برای مقایسهٔ چگالی جسم و مایع در دو شکل فوق، می‌توان نوشت (دقت شود که حجم مایع جابه‌جا شده، با حجم جسم برابر است):

شکل (۱): $W > F_b \Rightarrow \rho_{جسم} \cancel{V_{جسم}} \cancel{g} > \rho_{مایع} \cancel{V_{مج}} \cancel{g} \Rightarrow \rho_{جسم} > \rho_{مایع}$

شکل (۲): $W < F_b \Rightarrow \rho_{جسم} \cancel{V_{جسم}} \cancel{g} < \rho_{مایع} \cancel{V_{مج}} \cancel{g} \Rightarrow \rho_{جسم} < \rho_{مایع}$

نتیجه‌گیری مهم:

- اگر جسمی بر سطح مایعی شناور بماند، چگالی آن کم‌تر از چگالی مایع است.
- اگر جسمی درون مایعی غوطه‌ور بماند، چگالی آن برابر چگالی مایع است.
- اگر جسمی درون مایعی فرو رود تا به کف ظرف برسد، چگالی آن بیشتر از چگالی مایع است.

جسم‌ها در حال تعادل هستند، یعنی برایند نیروهای وارد بر آن‌ها برابر صفر است. بنابراین برای حل این سؤال، برایند نیروهای وارد بر هر یک از جسم‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:



جسم (۱): مطابق شکل، نیروهای شناوری، وزن و عمودی سطح به این جسم وارد می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\text{شرایط تعادل جسم (۱)}: N + F_b = mg \xrightarrow[m=\rho_1 V_1]{F_b=\rho_{\text{مایع}} V_1 g} N + \rho_{\text{مایع}} V_1 g = \rho_1 V_1 g$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \rho_{\text{مایع}} + \frac{N}{V_1 g} \Rightarrow \rho_1 > \rho_{\text{مایع}}$$



جسم (۲): مطابق شکل، نیروهای شناوری و وزن به جسم (۲) وارد می‌شوند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{شرایط تعادل جسم (۲)}: F_b = mg \xrightarrow[m=\rho_2 V_2]{F_b=\rho_{\text{مایع}} V_2 g} \rho_{\text{مایع}} V_2 g = \rho_2 V_2 g \Rightarrow \rho_2 = \rho_{\text{مایع}}$$



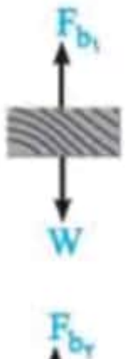
جسم (۳): مشابه با نیروهای واردشده به جسم (۲)، به جسم (۳) نیز نیروهای وزن و شناوری وارد می‌شوند، با این تفاوت که در این شکل، حجم مایع جابه‌جاشده از حجم جسم (۳) کم‌تر است، بنابراین داریم:

$$\text{شرایط تعادل جسم (۳)}: F_b = mg \xrightarrow[m=\rho_3 V_3]{F_b=\rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g} \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g = \rho_3 V_3 g \Rightarrow \frac{\rho_3}{\rho_{\text{مایع}}} = \frac{V_{\text{مج}}}{V_3} < 1 \Rightarrow \rho_3 < \rho_{\text{مایع}}$$

تذکر

همان‌طور که در خلاصه نکات (۱۵) مطرح شد، اگر جسمی بر سطح مایعی شناور بماند، چگالی آن کم‌تر از چگالی مایع و اگر جسمی درون مایعی غوطه‌ور بماند، چگالی آن برابر چگالی مایع است. همچنین اگر جسمی درون مایعی فرو رود تا به کف ظرف برسد، چگالی آن بیشتر از چگالی مایع است. بنابراین با توجه به این توضیحات گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۵۶۵ هر سه جسم در حال تعادل هستند، بنابراین با نوشتن شرایط تعادل برای هر یک از جسم‌ها داریم:



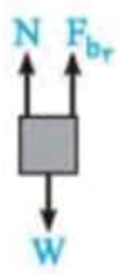
جسم (۱): به جسم (۱) نیروهای وزن و شناوری وارد می‌شود.

تعادل: $F_{b_1} = W$



جسم (۲): به جسم (۲) نیز نیروهای وزن و شناوری وارد می‌شود.

تعادل: $F_{b_2} = W$



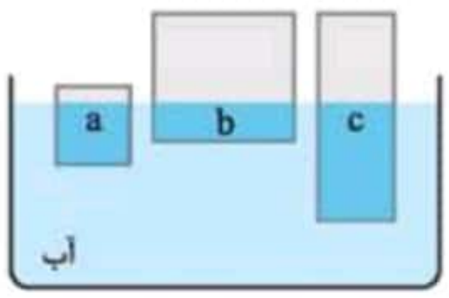
جسم (۳): به جسم (۳) علاوه بر نیروهای وزن و شناوری، نیروی عمودی سطح هم وارد می‌شود.

تعادل: $F_{b_3} + N = W \Rightarrow F_{b_3} < W$

در نهایت چون وزن جسم‌ها با هم برابر است، نتیجه به صورت زیر است:

$$F_{b_3} < F_{b_2} = F_{b_1} = W$$

۲ ۵۶۶ **گام اول:** هر سه جسم a، b و c در سطح آب شناورند و می‌توان نوشت:



$$W_{\text{جسم}} = F_b \Rightarrow \rho_{\text{جسم}} \times V_{\text{جسم}} \times g = \rho_{\text{آب}} \times V_{\text{مج}} \times g \Rightarrow \rho_{\text{جسم}} = \frac{V_{\text{مج}}}{V_{\text{جسم}}} \times \rho_{\text{آب}}$$

گام دوم: هر چه نسبت $V_{\text{مج}}$ (که برابر با مقدار حجم جسم غرق‌شده می‌باشد) به $V_{\text{جسم}}$ بیشتر باشد، چگالی جسم بیشتر است. مطابق شکل مقابل، در جسم (a)، درصدی از جسم که در مایع فرورفته است، نسبت به دو جسم دیگر بیشتر است و این یعنی ρ_a بیشتر است و در نهایت داریم:

$$\rho_a > \rho_c > \rho_b$$

www.gajmarket.com

۲ ۵۶۷ **روش اول:** این جسم، هم بر سطح آب و هم بر سطح روغن در حال تعادل است، بنابراین در هر دو حالت نیروی شناوری وارد بر جسم برابر وزن آن است. درنتیجه نیروی شناوری وارد بر جسم از طرف آب و روغن با هم برابر است، پس می‌توان نوشت:

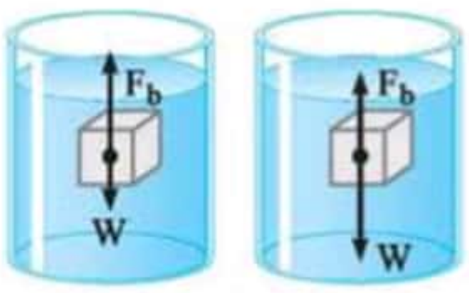
$$\begin{cases} \text{جسم‌شناور بر سطح آب}: F_{b_{آب}} = W \\ \text{جسم‌شناور بر سطح روغن}: F_{b_{روغن}} = W \end{cases} \Rightarrow F_{b_{روغن}} = F_{b_{آب}} \Rightarrow \rho_{روغن} V_{ج.روغن} g = \rho_{آب} V_{ج.آب} g$$

$$\xrightarrow{\rho_{آب} > \rho_{روغن}} \frac{V_{ج.روغن}}{V_{ج.آب}} = \frac{\rho_{آب}}{\rho_{روغن}} > ۱ \Rightarrow V_{ج.روغن} > V_{ج.آب}$$

بنابراین حجم روغن جابه‌جاشده، بیشتر از حجم آب جابه‌جاشده است، این یعنی جسم بیشتر در روغن فرو رفته است. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

روش دوم: چگالی روغن کم‌تر از آب است، بنابراین برای این‌که نیروی شناوری واردشده از طرف روغن بر جسم برابر نیروی شناوری واردشده از طرف آب بر جسم باشد، باید حجم بیشتری از روغن نسبت به آب جابه‌جا شود، پس بیشتر از ۵۰ درصد از حجم جسم باید درون روغن فرو برود.

۴ ۵۶۸ با توجه به طول بردارهای متناظر با F_b و W، می‌توان نوشت:



شکل (۲) شکل (۱)

گام اول: در شکل (۱)، W بزرگ‌تر از F_b می‌باشد (مانند انداختن قطعه سنگ داخل آب) و در این حالت، جسم تحت تأثیر نیروی وزن پایین رفته و در نهایت به کف ظرف می‌چسبد. در شکل (۲)، F_b بزرگ‌تر از W می‌باشد (مانند توپ پلاستیکی که به زور داخل آب فرو برده‌ایم)، در این حالت جسم بالا رفته و در نهایت بر روی سطح آب به تعادل می‌رسد (در حالی‌که تنها قسمتی از آن داخل آب قرار می‌گیرد).

گام دوم: برای مقایسهٔ چگالی جسم و مایع در دو شکل فوق، می‌توان نوشت (دقت شود که حجم مایع جابه‌جاشده، با حجم جسم برابر است):

$$\text{شکل (۱)}: W > F_b \Rightarrow \rho_{جسم} V_{جسم} g > \rho_{مایع} V_{ج.م} g \Rightarrow \rho_{جسم} > \rho_{مایع}$$

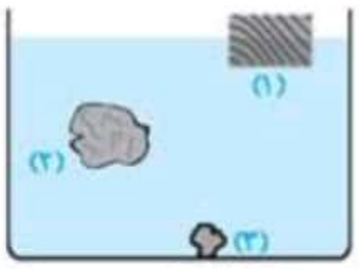
$$\text{شکل (۲)}: W < F_b \Rightarrow \rho_{جسم} V_{جسم} g < \rho_{مایع} V_{ج.م} g \Rightarrow \rho_{جسم} < \rho_{مایع}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ ۵۶۹ توپ بر روی هر دو سطح آب و روغن در حال تعادل قرار دارد، بنابراین در هر دو حالت، نیروی شناوری با وزن توپ برابر است، یعنی $F_{b_۱} = F_{b_۲}$ است.

برای مقایسهٔ حجم خیس‌شده در هر دو حالت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F_{b_۱} = F_{b_۲} \Rightarrow \rho_{آب} (V_{ج.م})_{آب} g = \rho_{روغن} (V_{ج.م})_{روغن} g \Rightarrow \frac{(V_{ج.م})_{آب}}{(V_{ج.م})_{روغن}} = \frac{\rho_{روغن}}{\rho_{آب}} < ۱ \Rightarrow V_{(ج.م)_{آب}} < V_{(ج.م)_{روغن}} \Rightarrow V_۱ < V_۲$$

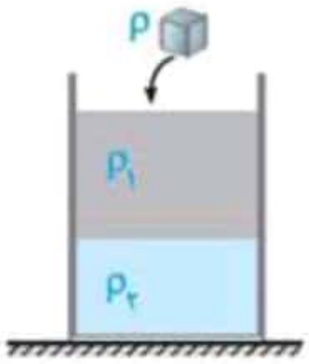


۴ ۵۷۰ هر سه جسم در حال تعادل هستند، بنابراین طبق قانون دوم نیوتون، برایند نیروهای وارد بر هر سه جسم برابر صفر است و می‌توان نوشت:

$$F_{T_۱} = F_{T_۲} = F_{T_۳} = ۰$$

۴ ۵۷۱ همان‌طور که می‌دانیم، اگر چگالی جسمی از چگالی یک مایع کم‌تر باشد، جسم بر روی سطح مایع شناور می‌ماند. هم‌چنین اگر چگالی جسم برابر چگالی مایع باشد، جسم درون مایع غوطه‌ور می‌شود و اگر چگالی جسم بیشتر از چگالی مایع باشد، جسم درون مایع به سمت پایین حرکت خواهد کرد تا به انتهای مایع برسد.

با استفاده از این توضیحات، هر یک از گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

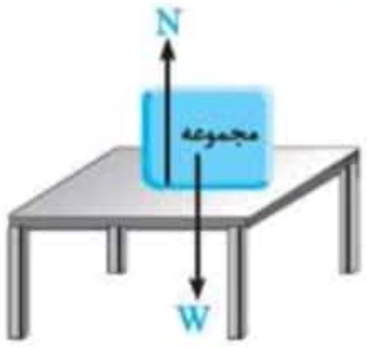


۱) اگر $\rho < \rho_۱$ باشد، جسم بر روی سطح مایع (۱) شناور می‌ماند.

۲) اگر $\rho = \rho_۲$ باشد، یعنی چگالی جسم از چگالی مایع اول بیشتر است، بنابراین ابتدا جسم درون مایع (۱) پایین می‌رود تا به مایع (۲) برسد و درون مایع (۲) غوطه‌ور می‌شود.

۳) اگر $\rho_۱ < \rho < \rho_۲$ باشد، جسم ابتدا درون مایع (۱) پایین می‌آید ولی به‌طور کامل درون مایع (۲) فرو نمی‌رود و بین دو مایع در تعادل قرار می‌گیرد (در واقع روی سطح مایع (۲) شناور می‌شود).

۴) اگر $\rho > \rho_۱$ باشد، جسم حتماً درون مایع (۱) پایین می‌رود تا به مایع (۲) برسد ولی نمی‌توانیم تعیین کنیم که درون مایع (۲) غوطه‌ور می‌شود یا بین دو مایع در حالت تعادل قرار می‌گیرد و یا درون مایع (۲) پایین می‌رود تا به کف ظرف بچسبد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.



۲ ۵۷۲ اگر مجموعهٔ ظرف، مایع و قطعه چوب را به عنوان یک جسم روی میز در نظر بگیریم، مطابق شکل به این مجموعه، نیروهای وزن و عمودی سطح وارد می‌شود.

$N = W$: مجموعه در حالت تعادل است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نیرویی که از طرف میز به مجموعه وارد می‌شود، برابر وزن کل مجموعه است. بنابراین با اضافه کردن چوب به مجموعه، نیرویی که میز به مجموعه وارد می‌کند، به اندازهٔ وزن قطعه چوب افزایش یافته است.

تذکر

در این سؤال، وزن چوب برابر وزن مایع جابه‌جا شده (نیروی شناوری) است.



۴ ۵۷۳ مطابق توضیحات سؤال قبل، می‌دانیم که نیروی واردشده از طرف میز به مجموعهٔ ظرف، مایع و قطعه چوب، برابر وزن مجموعه است. با اضافه کردن قطعه چوب به مجموعه، مقداری مایع از ظرف بیرون می‌ریزد که حجم آن برابر حجم قطعه چوبی است که درون مایع قرار گرفته است، بنابراین وزن مجموعه به اندازهٔ وزن قطعه چوب اضافه می‌شود و به اندازهٔ وزن مایع بیرون ریخته‌شده کاهش می‌یابد، پس داریم:

$\Delta W = W_{\text{چوب}} - W_{\text{مایع بیرون ریخته‌شده}}$:تغییر وزن مجموعه پس از اضافه کردن چوب

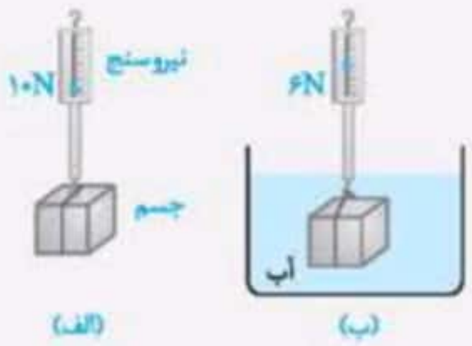
با توجه به اصل ارشمیدس، می‌دانیم که وزن مایع بیرون ریخته‌شده با وزن قطعه چوب برابر است، بنابراین $\Delta W = 0$ است و نیرویی که میز به مجموعه وارد می‌کند، تغییری نخواهد کرد.

۱ ۵۷۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۶ بررسی وزن ظاهری، عدد نیروسنج و عدد ترازو در حضور نیروی شناوری (تست‌های ۵۷۴ تا ۶۰۳)

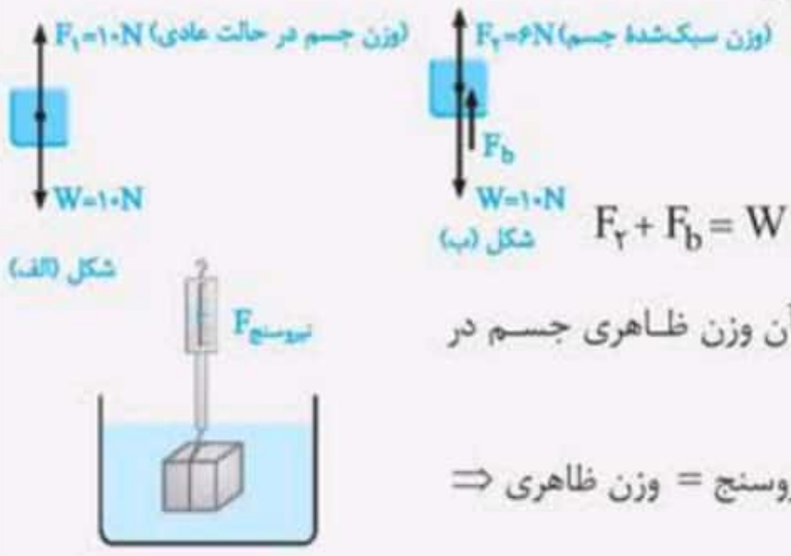
در این قسمت، ابتدا به تغییر عدد نیروسنج و سپس به تغییر عدد ترازو در حضور نیروی شناوری می‌پردازیم:

بررسی تغییر عدد نیروسنج در حضور نیروی شناوری



دو شکل مقابل را درنظر بگیرید که در حالت (الف)، جسم متصل به نیروسنج فنری خارج از آب و در حالت (ب)، درون یک ظرف آب قرار گرفته است. دلیل اصلی تفاوت عدد نیروسنج در این دو حالت، سبک شدن جسم در حالت (ب)، به علت قرارگیری در داخل آب و وارد شدن نیروی شناوری رو به بالا به آن است.

مقدار سبک‌شدگی جسم که عملاً از تفاضل اعداد نیروسنج در این دو حالت به‌دست می‌آید ($۱۰ - ۶ = ۴\text{N}$)، دقیقاً برابر نیروی شناوری وارد بر آن است.

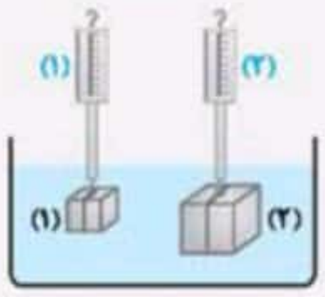


$$F_2 + F_b = W \Rightarrow F_b = W - F_2 = ۱۰ - ۶ = ۴\text{N}$$

نتیجهٔ مهم و کاربردی: در حالت کلی‌تر می‌توان گفت عدد نیروسنج در شکل مقابل (که به آن وزن ظاهری جسم در مایع نیز می‌گوییم)، برابر تفاضل نیروی وزن واقعی و شناوری است.

$$\Rightarrow \text{عدد نیروسنج} = \text{وزن ظاهری} \Rightarrow F_{\text{نیروسنج}} = W - F_b$$

توجه شود که $F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g$ و $W = \rho_{\text{جسم}} V_{\text{جسم}} g$ می‌باشد.



تمرین ۱ **مطابق شکل دو جسم با جرم یکسان و حجم متفاوت، به نیروسنج‌های مقابل متصل شده و در آب غوطه‌ور شده‌اند. در مقایسهٔ اعداد نیروسنج‌های نشان داده شده، کدام گزینه صحیح است؟** (تألیفی)

۱) $F_1 > F_2$

۲) $F_2 > F_1$

۳) $F_1 = F_2$

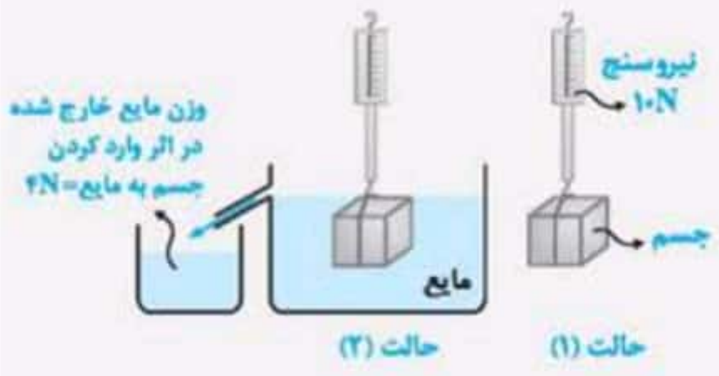
۴) $F_2 \geq F_1$

پاسخ برای مقایسهٔ عدد نیروسنج‌ها، ابتدا باید توجه داشت که حجم جسم (۲) از جسم (۱) بیشتر است و این یعنی حجم مایع جابه‌جا شده توسط آن بیشتر بوده و $F_{b_2} > F_{b_1}$ است.

از سوی دیگر جرم دو جسم یکسان بوده و وزن آن‌ها نیز یکسان است $(W = mg)$ و در نهایت می‌توان گفت:

$$\begin{cases} F_{b_1} < F_{b_2} \\ W_1 = W_2 \end{cases} \xrightarrow{F = W - F_b \text{ :عدد نیروسنج}} F_1 > F_2 \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

www.gajmarket.com



تمرین۲ **در آزمایش نشان داده‌شده، در دو حالت وزن جسمی با حجم $500cm^3$ را اندازه‌گیری کرده‌ایم. نیروی شناوری وارد بر جسم برابر ..... نیوتون، عدد نیروسنج در حالت دوم برابر ..... نیوتون و چگالی مایع برابر ..... واحد SI است. $(g \simeq 10m/s^2)$** (کتاب درسی)

۱) ۴، ۶، ۸۰۰ ۲) ۴، ۶، ۱۲۰۰

۳) ۶، ۴، ۱۲۰۰ ۴) ۶، ۴، ۸۰۰

پاسخ برای پاسخ دادن به این تمرین خوب و مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

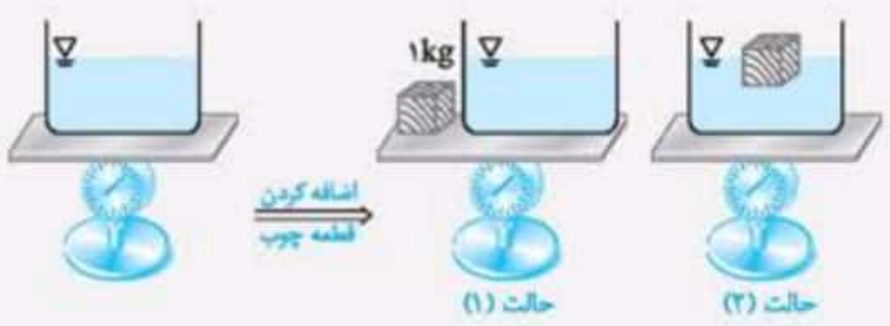
۱- طبق اصل ارشمیدس، وزن مایع خارج‌شده (جابه‌جاشده)، برابر نیروی شناوری است. بنابراین با توجه به شکل داده‌شده در حالت (۲)، نیروی شناوری برابر $4N$ است.

۲- در این‌گونه موارد، عدد نیروسنج برابر اختلاف وزن واقعی و نیروی شناوری بوده و برابر $6N(=4-10)$ است.

۳- چگالی مایع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{وزن مایع جابه‌جاشده} = \text{نیروی شناوری} \Rightarrow F_b = \rho_{\text{مایع}} \times V_{\text{م.ج}} \times g \Rightarrow 4 = \rho_{\text{مایع}} \times 500 \times 10^{-6} \times 10 \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = 800 kg/m^3$$ (گزینهٔ ۱)

بررسی تغییر عدد نیروسنج در حضور نیروی شناوری



فرض کنید که یک ظرف آب بر روی یک نیروسنج قرار دارد و نیروسنج وزن مجموعه را $40N$ نشان می‌دهد. در ادامه در دو حالت، مطابق شکل، یک قطعه چوب با جرم $1kg$ را به مجموعه اضافه کرده‌ایم:

در مورد این دو شیوهٔ اضافه کردن قطعه چوب به مجموعه، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱ در حالت (۱)، عدد نیروسنج به اندازهٔ وزن قطعه چوب افزایش یافته و نیروسنج عدد $50N$ را نشان می‌دهد.

۲ در حالت (۲) نیز عدد نیروسنج دقیقاً به اندازهٔ وزن قطعه چوب افزایش یافته و نیروسنج باز هم عدد $50N$ را نشان می‌دهد. در واقع می‌توان کل ظرف، آب و چوب را به عنوان یک مجموعه تصور کرد که نیروسنج وزن این مجموعه را نشان می‌دهد.

بررسی دقیق‌تر موضوع



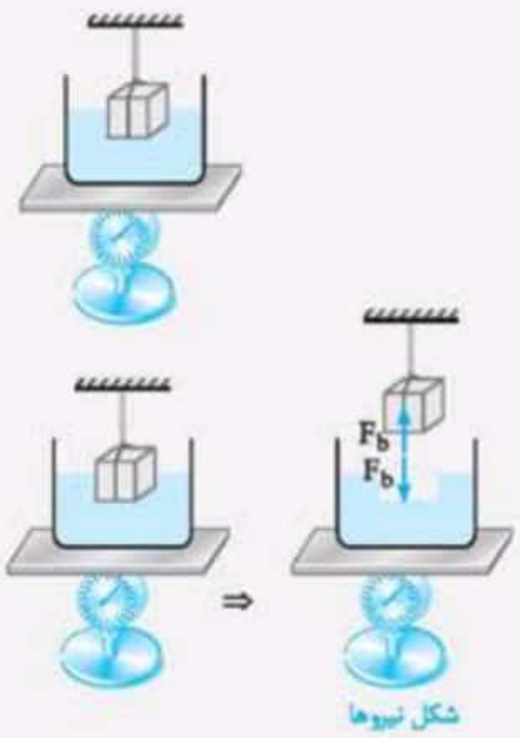
برای درک بهتر شما عزیزان باید بگوییم که در اثر نیروی شناوری، قطعه چوب به اندازهٔ F_b سبک می‌شود. اما داستان این‌گونه است که طبق قانون سوم نیوتون (حتماً شنیده‌اید که هر عملی را عکس‌العملی است، مساوی و در خلاف جهت آن)، عکس‌العمل نیروی F_b بر مایع وارد می‌شود و مایع به‌اندازهٔ F_b سنگین می‌شود.

مجموع وزن مایع، ظرف و چوب = F_b + وزن مایع و ظرف = عدد ترازو

(F_b برابر وزن چوب است.)

در نهایت می‌توان گفت عدد ترازو یک بار به‌اندازهٔ F_b کوچک و بار دیگر به‌اندازهٔ F_b بزرگ می‌شود و در نهایت، نیروی شناوری بر آن بی‌تأثیر است.

تو ادامهٔ کار، دو تا تمرین فوق‌العاده قشنگ براتون آوردیم تا مفهوم این قسمت رو کامل‌تر کنه ...



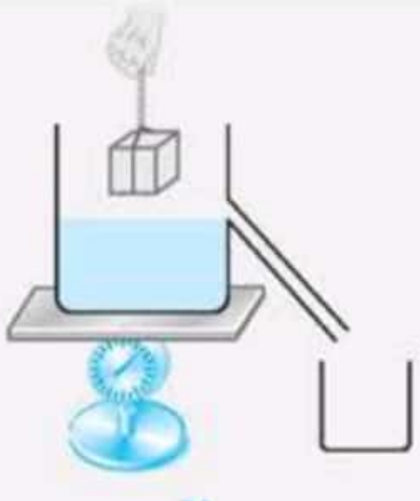
تمرین۳ **در شکل مقابل، قسمتی از یک مکعب آویزان از ریسمان، داخل مایع شده است. عدد نیروسنج در این حالت، چگونه محاسبه می‌شود؟** (تألیفی)

پاسخ اگر قسمتی از بسته توسط یک ریسمان داخل مایع شود، به دلیل وجود ریسمان، عملاً تمام وزن آن به نیروسنج منتقل نمی‌شود و در این حالت، عدد نیروسنج برابر است با:

عدد نیروسنج = وزن مایع و ظرف + F_b و $F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{م.ج}} g$

(F_b در این حالت به دلیل وجود ریسمان، F_b دیگر برابر وزن جسم نیست.)

در این‌گونه از سؤالات، نیروی شناوری (F_b)، برابر تفاضل نیروی وزن بسته و نیروی کشش نخ می‌باشد.



تمرین ۴ **در شکل مقابل، اگر جسم را به آرامی و به‌طور کامل وارد ظرف پر از آب کنیم، عدد نشان داده‌شده توسط ترازو چگونه تغییر می‌کند؟ (جسم با کف ظرف تماس پیدا نمی‌کند.)** (تألیفی)

۱) ثابت می‌ماند.

۲) به‌طور دائم افزایش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) تا هنگامی‌که جسم به‌طور کامل وارد آب شود، عدد ترازو افزایش یافته و پس از آن ثابت می‌ماند.

پاسخ هنگامی‌که جسم وارد آب می‌شود، نیروی شناوری (F_b) از طرف آب بر جسم به سمت بالا وارد می‌شود.



طبق قانون سوم نیوتون، عکس‌العمل این نیرو (F'_b) از طرف جسم بر آب، به همان اندازه و به سمت پایین وارد می‌شود. بنابراین به مجموعهٔ آب و ظرف آن، نیروهای وزن، عمودی تکیه‌گاه و عکس‌العمل شناوری وارد می‌شود.

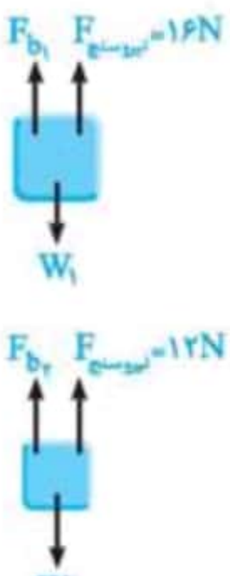
$$\text{تعادل} : N = W + F'_b$$

پس عددی که ترازو نشان می‌دهد، برابر مجموع مقدار عکس‌العمل نیروی شناوری وارد بر جسم و وزن ظرف و آبِ درون آن است.

با وارد شدن جسم به درون آب، مقداری آب از ظرف بیرون می‌ریزد و وزن مجموعه کم می‌شود $(W \downarrow)$، ولی در عوض نیروی شناوری و در نتیجه عکس‌العمل نیروی شناوری زیاد خواهد شد $(F'_b \uparrow)$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{تغییرات عدد ترازو} : \Delta N = F'_b - W_{\text{وزن آب بیرون ریخته}}$$

طبق قانون ارشمیدس، می‌دانیم نیروی شناوری با وزن آب بیرون ریخته‌شده برابر است $(F_b = F'_b = W_{\text{وزن مایع بیرون ریخته شده}})$، بنابراین عددی که ترازو نشان می‌دهد، تغییری نخواهد کرد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.



با توجه به این‌که هر یک از جسم‌ها در حال تعادل هستند، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن‌ها برابر صفر است. به هر یک از جسم‌ها نیروهای وزن، شناوری و فنر (نیروسنج) وارد می‌شود، بنابراین برای هر یک از جسم‌ها می‌توان نوشت:

جسم (۱): $\text{شرط تعادل} : W_1 = F_{b_1} + ۱۶ \Rightarrow W_1 > ۱۶N$

جسم (۲): $\text{شرط تعادل} : W_۲ = F_{b_۲} + ۱۲ \Rightarrow W_۲ > ۱۲N$

بنابراین از بین گزینه‌های داده‌شده، فقط گزینهٔ (۱) می‌تواند صحیح باشد.

تذکر

در هر دو شکل به دلیل وجود نیروی شناوری، وزن جسم از عددی که نیروسنج نشان می‌دهد بیشتر است و می‌توان نوشت:

$$\text{وزن جسم} : W = F_b + F_{\text{نیروسنج}}$$

۲ ۵۷۵ همان‌طور که در حل سؤال قبل مطرح شد، وزن جسم برابر مجموع نیروی شناوری و عدد نیروسنج است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} W_A = F_{b_A} + F_{\text{نیروسنج}_A} \\ W_B = F_{b_B} + F_{\text{نیروسنج}_B} \end{cases} \xrightarrow[F_{\text{نیروسنج}_A} = F_{\text{نیروسنج}_B}]{\text{تفریق رابطه‌ها}} W_A - W_B = F_{b_A} - F_{b_B}$$

۳ ۵۷۶ در این سؤال با وارد کردن انگشت به داخل ظرفِ آب، از طرف آب نیروی شناوری رو به بالا به دست وارد می‌شود و بر طبق قانون سوم نیوتون، عکس‌العمل آن رو به پایین به آب و در نهایت به ترازو منتقل می‌شود و عدد ترازو افزایش می‌یابد. از سوی دیگر هرچه انگشت بیشتر داخل آب شود، نیروی شناوری بیشتری ایجاد شده و عدد ترازو بیشتر افزایش می‌یابد.

۱ ۵۷۷ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۶)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۵۷۸ با خروج قطعهٔ فلزی از مایع داخل ظرف، عدد نیروسنج (۲) به اندازهٔ نیروی شناوری وارد بر بسته کاهش می‌یابد. نیروی شناوری را با کمک عدد نیروسنج (۱) به‌صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$W = F_b + F_{\text{نیروسنج}} \Rightarrow ۱۰ = F_b + ۴ \Rightarrow F_b = ۶N$$

www.gajmarket.com

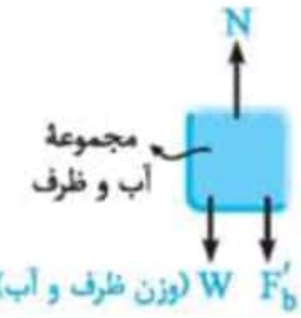
۲ ۵۷۹ برای حل این سؤال، ابتدا به بررسی تغییرات عدد نیروسنج و سپس به بررسی تغییرات عدد ترازو می‌پردازیم:

گام اول: (بررسی تغییرات عدد نیروسنج): همان‌طور که می‌دانیم، وزن جسم برابر مجموع عدد نیروسنج و نیروی شناوری است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$W = F_b + F_{\text{نیروسنج}} \rightarrow F_{\text{نیروسنج}} = W - F_b$$

هنگامی‌که جسم درون مایع است $F_b > 0$ است و درنتیجه نیروسنج، عددی کم‌تر از وزن جسم را نشان می‌دهد $(F_{\text{نیروسنج}} < W)$. ولی هنگامی‌که جسم را از درون مایع خارج می‌کنیم، $F_b = 0$ است و درنتیجه نیروسنج، وزن جسم را نشان خواهد داد $(F_{\text{نیروسنج}} = W)$. بنابراین با خارج کردن جسم از مایع، عددی که نیروسنج نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

گام دوم: (بررسی تغییرات عدد ترازو): نیروی شناوری از طرف مایع بر جسم به طرف بالا وارد می‌شود. از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، عکس‌العمل این نیرو از طرف جسم بر آب، به همان اندازه و رو به پایین وارد می‌شود (F'_b). بنابراین اگر ظرف و آب درون آن را یک مجموعه با وزن W در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم:



تعادل : $N = W + F'_b$

با خارج کردن جسم از درون مایع، F'_b صفر می‌شود و درنتیجه N هم کاهش می‌یابد، بنابراین عددی که ترازو نشان خواهد داد کم می‌شود.

۱ ۵۸۰ با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۱۶)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱ ۵۸۱ با مچاله کردن فویل (پوش‌برگ) سمت چپ، نیروی شناوری وارد بر آن که به سمت بالا است، کاهش می‌یابد، درنتیجه ورقهٔ مچاله‌شده به سمت پایین حرکت می‌کند و فویل سمت راست، به سمت بالا می‌رود.

۲ ۵۸۲ همان‌طور که می‌دانیم، نیرویی که به هر کفهٔ ترازو وارد می‌شود، برابر وزن مجموعهٔ قرارگرفته بر روی آن کفه است. بنابراین با اضافه کردن جسم یک کیلوگرمی درون آب، باید 1kg هم به وزنهٔ سمت چپ اضافه کرد تا ترازو تعادل داشته باشد. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

تذکر

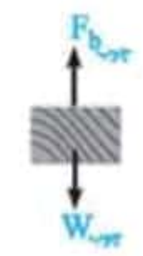
برای حل این سؤال، نیازی به اطلاعات چگالی آب و حجم قطعه که در متن سؤال داده شده است، نداریم.

۳ ۵۸۳ در هر سه شکل، مجموعهٔ چوب و وزنه در حال تعادل قرار دارند و برایند نیروهای وارد بر آن‌ها برابر صفر است. بنابراین در هر سه شکل، نیروی شناوری برابر وزن مجموعهٔ شناور است و می‌توان نوشت:

$$F_{b_1} = W_{\text{چوب}} \quad , \quad F_{b_2} = W_{\text{چوب}} + W_{\text{وزنه}} \quad , \quad F_{b_3} = W_{\text{چوب}} + W_{\text{وزنه}} \Rightarrow F_{b_3} = F_{b_2} > F_{b_1}$$

۴ ۵۸۴ در هر سه شکل، مجموعه در حال تعادل است و برایند نیروهای وارد بر آن صفر است، بنابراین می‌توان نوشت:

شکل (۱): در این شکل، نیروهای وزن و شناوری چوب به مجموعه وارد می‌شود و داریم:



رابطهٔ (۱) : تعادل : $F_{b_{1\text{چوب}}} = W_{\text{چوب}}$

شکل (۲): در این شکل، نیروهای وزن و شناوری چوب و همین‌طور وزن و شناوری وزنه به مجموعه وارد می‌شوند و داریم:



تعادل : $F_{b_{2\text{چوب}}} + F_{b_{2\text{وزنه}}} = W_{\text{چوب}} + W_{\text{وزنه}}$

رابطهٔ (۲) : $F_{b_{2\text{چوب}}} = W_{\text{چوب}} + W_{\text{وزنه}} - F_{b_{2\text{وزنه}}}$

چون چگالی وزنه از آب بیشتر است، نیروی شناوری وارد بر وزنه از وزن آن کم‌تر خواهد بود (چرا؟)، بنابراین داریم:



$$W_{\text{وزنه}} > F_{b_{2\text{وزنه}}} \Rightarrow W_{\text{وزنه}} - F_{b_{2\text{وزنه}}} > 0 \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۲)}} F_{b_{2\text{چوب}}} > W_{\text{چوب}}$$

شکل (۳): در این شکل، نیروهای وزن و شناوری چوب و همین‌طور وزن وزنه به مجموعه وارد می‌شوند و داریم:

رابطهٔ (۳): تعادل : $F_{b_{3\text{چوب}}} = W_{\text{چوب}} + W_{\text{وزنه}}$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) می‌فهمیم که $F_{b_{2\text{چوب}}} > F_{b_{1\text{چوب}}}$ است و از مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و (۳) می‌فهمیم که $F_{b_{3\text{چوب}}} > F_{b_{2\text{چوب}}}$ است، بنابراین داریم:

$$F_{b_{3\text{چوب}}} > F_{b_{2\text{چوب}}} > F_{b_{1\text{چوب}}} \Rightarrow F_3 > F_2 > F_1$$

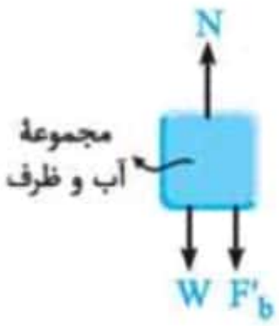
۴ ۵۸۵ همان‌طور که می‌دانیم، نیروی شناوری وارد بر چوب، متناسب با حجم مایع جابه‌جاشده است که در واقع برابر حجم چوب خیس‌شده می‌باشد. با توجه به پاسخ سؤال قبل، نیروی شناوری وارد بر چوب در شکل (۳)، بیشتر از بقیه بوده و می‌توان نوشت:

مقایسهٔ نیروی شناوری وارد بر چوب : $F_3 > F_2 > F_1 \xrightarrow{F_{\text{شناوری}} \propto V_{\text{خیس}}} V_3 > V_2 > V_1$

۱ ۵۸۶ برای حل این سؤال، در گام اول، حجم آب سرریز شده را مقایسه می‌کنیم و در گام دوم، به بررسی عدد ترازوها در سه شکل می‌پردازیم:

گام اول: (مقایسهٔ حجم آب سرریز شده): در هر یک از شکل‌های (۲) و (۳)، مجموعهٔ چوب و وزنه در حالت تعادل قرار دارند. بنابراین نیروی شناوری که به مجموعهٔ شناور در هر دو شکل وارد می‌شود، برابر مجموع وزن چوب و وزنه است. چون نیروی شناوری متناسب با حجم مایع جابه‌جاشده (یعنی سرریز شده) است و این نیرو در هر دو شکل (۲) و (۳) با هم برابر است، بنابراین حجم مایع سرریز شده در هر دو شکل نیز با هم برابر خواهد بود.

گام دوم: (مقایسهٔ عدد ترازوها): آب به مجموعهٔ چوب و وزنه نیروی شناوری را به سمت بالا وارد می‌کند و عکس‌العمل این نیرو، مطابق شکل به همان اندازه و به سمت پایین بر آب وارد می‌شود.

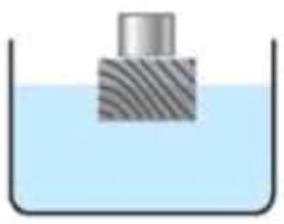


تعادل : $N = F'_b + W$

با اضافه شدن مجموعهٔ جسم و وزنه، مقداری آب سرریز می‌شود و W کاهش می‌یابد، ولی F'_b زیاد می‌شود. طبق اصل ارشمیدس، می‌دانیم که وزن مایع سرریز شده با نیروی شناوری اضافه‌شده برابر است و در نتیجه مقدار N تغییر نمی‌کند و ترازو در هر سه شکل عدد یکسانی را نشان می‌دهد.

۲ ۵۸۷ این سؤال جالب و مفهومی را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم (دقت شود که چون در حالت دوم فلز داخل مایع غرق می‌شود، این یعنی چگالی فلز از مایع بیشتر است):

حالت ۱: وزن چوب و فلز توسط نیروی شناوری خنثی می‌شود و حجم مایع جابه‌جاشده برابر است با:

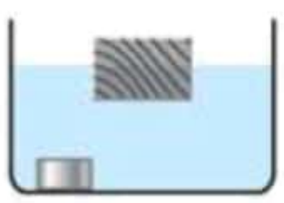


$$W_{چوب} + W_{فلز} = \rho_{مایع}(V_{جم})_1 g$$

$$(V_{جم})_1 = \frac{W_{چوب}}{\rho_{مایع} g} + \frac{W_{فلز}}{\rho_{مایع} g} \xrightarrow[\rho_{فلز} > \rho_{مایع}]{W_{فلز} = \rho_{فلز} V_{فلز} g} (V_{جم})_1 = \frac{W_{چوب}}{\rho_{مایع} g} + \frac{\rho_{فلز}}{\rho_{مایع}} V_{فلز}$$

(بزرگ‌تر از یک)

حالت ۲: فلز کاملاً درون مایع قرار گرفته و حجم مایع را به اندازهٔ $V_{فلز}$ افزایش می‌دهد. در این حالت مقداری مایع هم در اثر وزن چوب جابه‌جا می‌شود و در مجموع داریم:



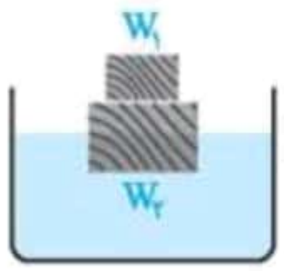
$$W_{چوب} = \rho_{مایع} V_{جم} g \Rightarrow V_{جم} = \frac{W_{چوب}}{\rho_{مایع} g}$$

$$(V_{جم})_2 = \frac{W_{چوب}}{\rho_{مایع} g} + V_{فلز}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، حجم مایع جابه‌جاشده در حالت دوم کم‌تر است، بنابراین با انداختن فلز به داخل آب، ارتفاع آب در ظرف کاهش می‌یابد.

۳ ۵۸۸ دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

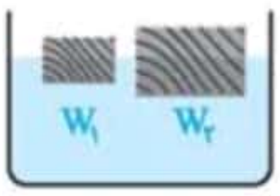
حالت اول: وزن دو قطعه چوب توسط نیروی شناوری خنثی می‌شود، بنابراین داریم:



$$W_1 + W_2 = \rho_{مایع} V_{جم} g$$

$$V_{جم} = \frac{W_1 + W_2}{\rho_{مایع} g}$$

حالت دوم: در این حالت وزن هر قطعه چوب، توسط نیروی شناوری وارد بر خود آن خنثی می‌شود، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} W_1 = \rho_{مایع} V_{جم_1} g \\ W_2 = \rho_{مایع} V_{جم_2} g \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} W_1 + W_2 = \rho_{مایع}(V_{جم_1} + V_{جم_2}) g \xrightarrow{V_{جم} = V_{جم_1} + V_{جم_2}} V_{جم} = \frac{W_1 + W_2}{\rho_{مایع} g}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، حجم مایع جابه‌جاشده در هر دو حالت با هم برابر است و ارتفاع آب تغییری نخواهد کرد.

۳ ۵۸۹ در هر دو حالت قبل و بعد از برداشتن آب از حفرهٔ چوب، مقدار آب جابه‌جاشده در ظرف را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: با توجه به پاسخ سؤال (۵۸۷)، می‌دانیم که وقتی دو جسم روی هم (آب و چوب) در سطح آب شناور می‌شوند، حجم مایع جابه‌جاشده از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$V_{جم_1} = \frac{W_{چوب}}{\rho_{آب} g} + \frac{\rho_{آب}}{\rho_{آب}} V_{آب} = \frac{W_{چوب}}{\rho_{آب} g} + V_{آب}$$

حالت دوم: وقتی نیمی از آب را از درون حفرهٔ چوب خارج می‌کنیم و داخل ظرف می‌ریزیم، در این حالت قطعه چوب به همراه نیمی از آب داخل حفره، بر روی سطح آب شناور می‌شود. بنابراین مشابه استدلال مطرح‌شده برای حالت (۱)، می‌توان نوشت:

$$V_{جم_2} = \frac{W_{چوب}}{\rho_{آب} g} + \frac{V_{آب}}{2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، حجم مایع جابه‌جاشده در حالت اول، به اندازهٔ $\frac{V_{آب}}{2}$ بیشتر از حالت دوم است. ولی این اختلاف را قبلاً خودمان به صورت دستی از حفره برداشته و به ظرف اضافه کردیم، پس مقدار تغییر حجم در هر دو حالت یکسان است و ارتفاع تغییری نمی‌کند.

www.gajmarket.com

۱ ۵۹۰ با توجه به تعادل قطعه چوب، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F_b = W_{جسم} \Rightarrow \rho_{آب} V_{جـ م} g = \rho_{جسم} V_{جسم} g \Rightarrow \rho_{جسم} = \frac{۵}{۶}\rho_{آب}$$

$\frac{۵}{۶}$ برابر حجم جسم است.

۴ ۵۹۱ در مقایسهٔ نیروی شناوری وارد بر مکعب در دو حالت نشان داده شده، می‌توان نوشت:

$$(V_{جـ م})_۱ = \text{حجم مکعب داخل آب} = x \quad , \quad (V_{جـ م})_۲ = \text{حجم کل مکعب} = V$$

$$F_{b_۲} = ۲F_{b_۱} \Rightarrow \rho_۲ (V_{جـ م})_۲ g = ۲ \times \rho_۱ (V_{جـ م})_۱ \times g \Rightarrow \rho \times V \times g = ۲ \times ۳\rho \times x \times g \Rightarrow x = \frac{۱}{۶}V$$

در نهایت باید گفت اگر در شکل (۱) به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ حجم مکعب داخل مایع فرو رفته باشد، به‌اندازهٔ $\frac{۵}{۶}$ حجم مکعب خارج از مایع می‌ماند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳ ۵۹۲ عدد نیروسنج در حالت (۱) برابر وزن واقعی مکعب است و از سوی دیگر، اختلاف عدد نیروسنج در حالت‌های (۱) و (۲)، برابر نیروی شناوری است. از طرفی چون کل جسم در مایع وارد شده است، $V_{جـ م}$ برابر $V_{جسم}$ است و داریم:

$$\begin{cases} W = mg = \rho_{جسم} Vg \\ F_b = \rho_{مایع} V_{جـ م} g \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم رابطه‌ها}} \frac{F_b}{W} = \frac{\rho_{مایع}}{\rho_{جسم}} \Rightarrow \frac{۲۰-۱۰}{۲۰} = \frac{\rho_{مایع}}{\rho_{جسم}} \Rightarrow \rho_{مایع} = \frac{۱}{۲}\rho_{جسم}$$

$V_{جـ م}$ برابر حجم جسم است.

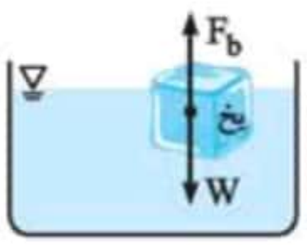
۳ ۵۹۳ عدد نیروسنج برابر اختلاف بین وزن واقعی جسم و نیروی شناوری وارد بر جسم می‌باشد. برای مقایسهٔ عدد نیروسنج در دو حالت، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{عدد نیروسنج}: F_{نیروسنج} = W_{جسم} - F_b = W_{جسم} - \rho_{مایع} \times V_{جـ م} \times g \quad , \quad W_{جسم} = \rho V_{جسم} g \ , \ V_{جـ م} = V_{جسم} = V$$

$$\begin{cases} F_{۱نیروسنج} = \rho Vg - \rho_{نفت} Vg = (\rho - \rho_{نفت})Vg \\ F_{۲نیروسنج} = \rho Vg - \rho_{آب} Vg = (\rho - \rho_{آب})Vg \end{cases}$$

$$F_{۱نیروسنج} = ۱/۲ F_{۲نیروسنج} \Rightarrow (\rho - ۰/۸)Vg = ۱/۲(\rho - ۱)Vg \Rightarrow \rho - ۰/۸ = ۱/۲\rho - ۱/۲ \Rightarrow \text{چگالی جسم}: \rho = ۲gr/cm^۳$$

۳ ۵۹۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: قطعه یخ در سطح آب شناور بوده و در حالت تعادل قرار دارد. با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$F_b = W \Rightarrow \rho_{مایع} V_{جـ م} g = \rho_{یخ} V_{یخ} g \Rightarrow ۱۰۰۰ \times V_{جـ م} = ۹۰۰ \times V_{یخ} \Rightarrow V_{جـ م} = \frac{۹}{۱۰}V_{یخ}$$

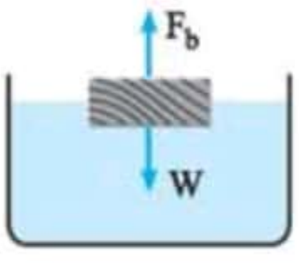
حجم مایع جابه‌جا شده $\frac{۹}{۱۰}$ حجم کل یخ است و این یعنی $\frac{۱}{۱۰}$ از حجم کل یخ خارج از آب قرار دارد و با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۱۰}V_{یخ} = ۰/۳m^۳ \Rightarrow V_{یخ} = ۳m^۳$$

گام دوم: پس از محاسبهٔ حجم یخ، جرم آن نیز به سادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m_{یخ} = \rho_{یخ} V_{یخ} = ۹۰۰ \times ۳ = ۲۷۰۰kg$$

۱ ۵۹۵



گام اول: جسم در سطح مایع شناور است و داریم:

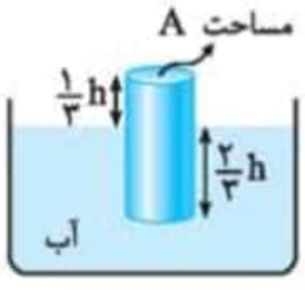
$$F_b = W \Rightarrow \rho_{مایع} \times V_{جـ م} \times g = \rho \times V \times g$$

$$۱/۲ \times V_{جـ م} = ۰/۹ \times V \Rightarrow V_{جـ م} = \frac{۳}{۴}V$$

گام دوم: با توجه به $V_{جـ م}$، حجم $\frac{۳}{۴}V$ از جسم درون مایع قرار دارد و مابقی آن (یعنی $\frac{۱}{۴}V$) خارج از مایع قرار دارد و می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{حجم قسمت درون مایع}}{\text{حجم قسمت خارج از مایع}} = \frac{\frac{۳}{۴}V}{\frac{۱}{۴}V} = ۳$$

۱ ۵۹۶

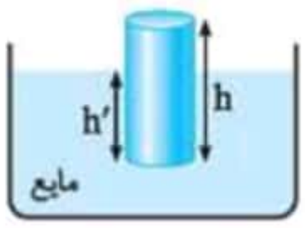


حالت اول: در این حالت، $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع استوانه بیرون از آب قرار دارد و این یعنی می‌توان نوشت:

$$F_b = W \Rightarrow \rho_{آب} \times V_{جـ م} \times g = \rho_{جسم} V_{جسم} g$$

$$\rho_{آب} \times \left(\frac{۲}{۳}h \times A\right) \times g = \rho_{جسم} \times (Ah) \times g \Rightarrow \rho_{جسم} = \frac{۲}{۳}\rho_{آب}$$

حالت دوم: در این حالت که چگالی مایع، $\frac{۴}{۵}$ برابر چگالی آب است، داریم:



$$\rho_{\text{مایع}} \times V'_{\text{جسم}} \times g = \rho_{\text{جسم}} V_{\text{جسم}} g$$

$$\frac{۴}{۵}\rho_{\text{آب}} \times (h' \times A) \times g = \left(\frac{۲}{۳}\rho_{\text{آب}}\right) \times (h \times A) \times g \Rightarrow h' = \frac{۵}{۶}h$$

این یعنی در حالت دوم، $\frac{۱}{۶}h$ از ارتفاع استوانه، خارج از مایع قرار دارد.

خلاقیت‌های حرفه‌ای

برای این استوانه در هر دو حالت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{حالت اول} : F_b = W_{\text{جسم}} \\ \text{حالت دوم} : F'_b = W_{\text{جسم}} \end{cases} \Rightarrow F_b = F'_b$$

بنابراین به راحتی با جای‌گذاری مقادیر داده‌شده، داریم:

$$\rho_{\text{آب}} \times \left(\frac{۲}{۳}h \times A\right) \times g = \underbrace{\frac{۴}{۵}\rho_{\text{آب}}}_{\rho_{\text{مایع}}} \times (h' \times A) \times g \Rightarrow h' = \frac{۵}{۶}h \Rightarrow \text{ارتفاع استوانه در خارج از مایع} = \frac{۱}{۶}h$$

۱ ۵۹۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با استفاده از رابطهٔ نیروی شناوری، ابتدا نسبت چگالی جسم A به چگالی آب را محاسبه می‌کنیم (دقت شود ۴۰ درصد از جسم A درون آب قرار دارد):

$$F_{b_A} = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_A} g \xrightarrow{F_{b_A} = m_A g} m_A g = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_A} g \xrightarrow[V_{\text{جسم}_A} = ۰/۴V_A]{m_A = \rho_A V_A} \rho_A V_A = \rho_{\text{آب}} \times ۰/۴ V_A \Rightarrow \rho_A = ۰/۴\rho_{\text{آب}}$$

گام دوم: طبق صورت سؤال، چگالی جسم B، دو برابر چگالی جسم A است، بنابراین داریم:

$$\rho_B = ۲\rho_A = ۲ \times ۰/۴\rho_{\text{آب}} = ۰/۸\rho_{\text{آب}}$$

از آن‌جایی که چگالی جسم B از چگالی آب کم‌تر است، بنابراین این جسم بر سطح آب شناور می‌ماند و به تعادل می‌رسد. پس برای جسم B می‌توان نوشت:

$$F_{b_B} = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_B} g \xrightarrow{F_{b_B} = m_B g} m_B g = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_B} g$$

$$\xrightarrow{m_B = \rho_B V_B} \rho_B V_B = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_B} \xrightarrow{\rho_B = ۰/۸\rho_{\text{آب}}} ۰/۸\rho_{\text{آب}} V_B = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_B}$$

$$\Rightarrow V_{\text{جسم}_B} = ۰/۸V_B \Rightarrow$$ ۸۰ درصد حجم B درون آب قرار می‌گیرد و ۲۰ درصد آن، بیرون آب می‌ماند.

۱ ۵۹۸ در هر دو حالت، نیروی شناوری که به چوب وارد می‌شود، برابر وزن چوب است. بنابراین نیروی شناوری در هر دو حالت یکسان است و می‌توان نوشت:

$$F_{b_۱} = F_{b_۲} \xrightarrow{F_b = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}} g} \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_۱} g = \rho_{\text{آب}} V_{\text{جسم}_۲} g \Rightarrow V_{\text{جسم}_۱} = V_{\text{جسم}_۲}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، حجمی از چوب که درون آب قرار می‌گیرد، در هر دو حالت برابر است و می‌توان نوشت:

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow A_۱h_۱ = A_۲h_۲ \Rightarrow \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{A_۲}{A_۱}$$

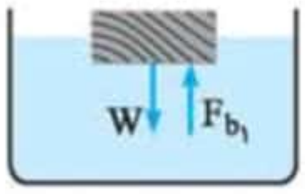
$$\xrightarrow[\text{کم‌ترین سطح}: A_۲ = ۶\times۴ = ۲۴\text{cm}^۲]{\text{بیشترین سطح}: A_۱ = ۶\times۶ = ۳۶\text{cm}^۲} \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{۲۴}{۳۶} = \frac{۲}{۳}$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

فرایند با توجه به این‌که حجم فرو رفته از جسم به درون آب، در هر دو حالت با هم برابر است، بنابراین در حالتی که سطح مقطع جسم بزرگ‌تر است، جسم باید کم‌تر در آب فرو برود ($V = Ah$). بنابراین فقط گزینهٔ (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۴ ۵۹۹ مسئله را در دو حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم:

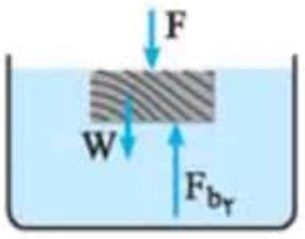
حالت اول: در حالت عادی، $\frac{۱}{۶}$ حجم جسم از مایع بیرون است ($\frac{۵}{۶}$ حجم جسم در مایع غرق است) و داریم:



$$W_{\text{جسم}} = F_{b_۱} = \rho_{\text{مایع}} \times (V_{\text{جسم}})_۱ \times g \Rightarrow W_{\text{جسم}} = \rho \times \left(\frac{۵}{۶}V\right) \times g \quad \text{: رابطهٔ I}$$

www.gajmarket.com

حالت دوم: فرض کنید که با اعمال نیروی F، تمام جسم غرق شده است. در این حالت داریم:

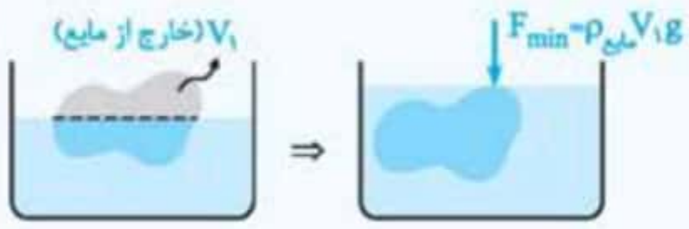


$$F_{b_2} = \rho_{\text{مایع}} \times (V_{\text{مج}})_2 \times g = \rho V g \quad : \text{II رابطهٔ}$$

$$F + W_{\text{جسم}} = F_{b_2} \Rightarrow F = F_{b_2} - W_{\text{جسم}} \xrightarrow{\text{رابطه‌های I و II}} F = \rho V g - \frac{5}{6}\rho V g = \frac{1}{6}\rho V g$$

نکته مهم و کاربردی

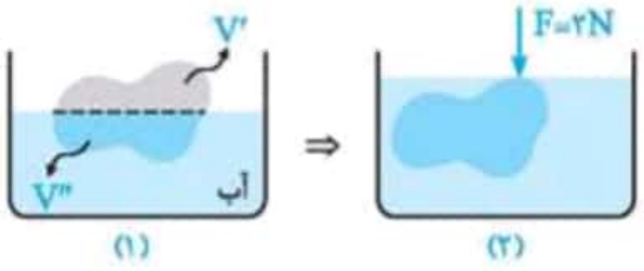
در این‌گونه از سؤالات، اگر حجم V_1 از جسم در حالت عادی خارج از مایع قرار گرفته باشد، حداقل نیرویی که جسم را به‌طور کامل داخل مایع می‌کند، برابر است با نیرویی که بتواند بر نیروی شناوری قسمت بیرون از مایع غلبه کند. بنابراین در این سؤال، می‌توان نوشت:



$$V_1 = \frac{1}{6}V \Rightarrow F_{min} = \rho_{\text{مایع}} V_1 g = \rho \times \left(\frac{1}{6}V\right) \times g = \frac{1}{6}\rho V g \quad : \text{حجم جسم در خارج از آب}$$

۳۶۰۰ برای حل این سؤال خوب و مفهومی، با توجه به سؤال قبل، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که با نیروی ۲ نیوتونی جسم به‌طور کامل در آب غوطه‌ور می‌شود، حجم قسمت خارج از آب به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$F = \rho_{\text{آب}} V' g \Rightarrow 2 = \underbrace{1000}_{\frac{kg}{m^3}\text{ برحسب}} \times V' \times 10 \Rightarrow V' = 2 \times 10^{-4}\, m^3 \quad : \text{در شکل (۲)}$$

گام دوم: حجم قسمت داخل آب در حالت عادی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_b = W_{\text{جسم}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} V_{\text{مج}} g = W_{\text{جسم}} \Rightarrow 1000 \times V'' \times 10 = 800 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow V'' = 8 \times 10^{-4}\, m^3 \quad : \text{در شکل (۱)}$$

گام سوم: چگالی جسم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V_{\text{جسم}} = V' + V'' = 10 \times 10^{-4}\, m^3$$

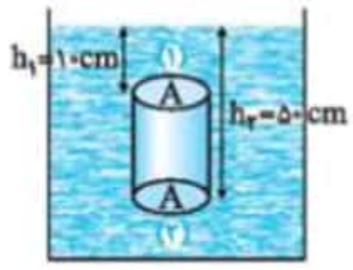
$$\rho_{\text{جسم}} = \frac{m}{V} = \frac{800 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 800\, kg/m^3$$

۲۶۰۱ اختلاف نیروهای وارد بر سطح قاعدهٔ پایینی و بالایی، در واقع همان نیروی شناوری وارد بر جسم می‌باشد (نیروهای وارد بر بدنهٔ استوانه، یک‌دیگر را خنثی می‌کنند) و داریم:

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} \boxed{V_{\text{مج}}} g \Rightarrow 2/4 = \rho_{\text{مایع}} \times \underbrace{300 \times 10^{-6}}_{\text{حجم جسم برحسب مترمکعب}} \times 10 \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = 800\, kg/m^3$$

برابر حجم جسم است.

۲۶۰۲ مشابه با سؤال قبل، می‌توان نوشت:



$$\rho = 1000\, kg/m^3 \;,\; g = 10\, m/s^2 \;,\; A = 20\, cm^2 = 2 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$\text{ارتفاع جسم} : h = h_2 - h_1 = 50 - 10 = 40\, cm = 0/4\, m$$

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} \boxed{V_{\text{مج}}} g = \rho_{\text{مایع}} \times (Ah) g \Rightarrow F_b = 1000 \times 2 \times 10^{-3} \times 0/4 \times 10 = 8\, N$$

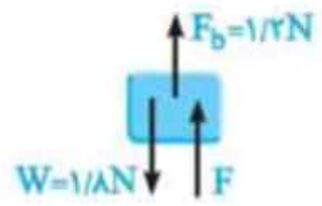
برابر حجم جسم است. — ارتفاع جسم

نگاه دیگر: به کمک روابط زیر نیز می‌توان به رابطهٔ مربوط به F_b در فوق رسید:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = P_2 A - P_1 A = (P_2 - P_1)A = \rho g (h_2 - h_1) A$$

۳۶۰۳ برای محاسبهٔ نیروی واردشده بر فنر، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول (محاسبهٔ نیروی شناوری وارد بر جسم):



$$F_b = \rho_{\text{مایع}} \times V_{\text{مج}} \times g = 1000 \times (120 \times 10^{-6}) \times 10 = 1/2\, N$$

گام دوم (نشان دادن نیروهای وارد بر جسم و محاسبهٔ نیروی وارد شده بر فنر):

$$\text{وزن جسم} : W = mg = (180 \times 10^{-3}) \times 10 = 1/8\, N$$

$$\text{تعادل جسم} : W = F_b + F \Rightarrow 1/8 = 1/2 + F \Rightarrow \text{نیروی واردشده بر فنر} : F = 0/6\, N$$

تذکر

اگر جسم در داخل آب نبود، نیروی واردشده بر فنر برابر وزن جسم ($W_{\text{جسم}} = 1/8\, N$) بود، ولی با قرار دادن مجموعه در آب، یک نیروی شناوری رو به بالا به جسم وارد شده و درنتیجه نیرویی که بر فنر وارد می‌شود، باید کم‌تر از وزن جسم و برابر ($F = W_{\text{جسم}} - F_b$) باشد.

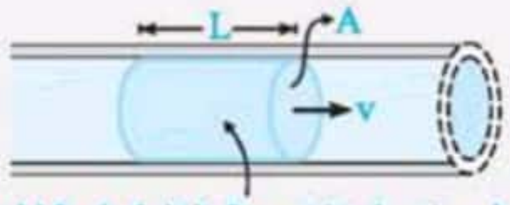
۶۰۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۷ — **آهنگ شارش سیال و معادلهٔ پیوستگی** — (تست‌های ۶۰۴ تا ۶۱۳)

تو این قسمت می‌خوایم شما رو با بعضی قوانین مربوط به شاره (سیال) در حال حرکت آشنا کنیم. بحث قشنگیه ...

آهنگ شارش سیال (شاره)

لوله‌ای مطابق شکل زیر را درنظر بگیرید که سیال در حالت حرکت، در مدت t ثانیه، به‌اندازهٔ L و با تندی v در آن جابه‌جا می‌شود. به مقدار حجمی از سیال که در واحد زمان از یک مقطع لوله عبور می‌کند، **آهنگ شارش سیال (شاره)** می‌گویند و با رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



حجم این بخش از شارش سیال (شاره) برابر AL است.

$$\text{آهنگ شارش سیال (شاره)} = \frac{\text{حجم سیال عبوری}}{\text{زمان}} = \frac{AL}{t} = A\left(\frac{L}{t}\right) = Av$$

($\frac{L}{t}$: تندی (v))

$$\boxed{\text{آهنگ شارش سیال (شاره)} = Av}$$

تو ادامهٔ کار، با حل یه تمرین، مفاهیم مربوط به آهنگ شارش سیال رو بهتر درک می‌کنید ...

تمرین۱ **در شکل زیر در دیوارهٔ یک مخزن بزرگ، سوراخ کوچکی با شعاع $10\,cm$ ایجاد شده و آب با تندی $2\,m/s$ از آن خارج می‌شود:**



الف) آهنگ خروج جریان شاره از مخزن، چند واحد SI است؟ ($\pi \simeq 3$)

ب) در مدت زمان ۱۰ ثانیه، چند متر مکعب آب داخل ظرف جمع می‌شود؟

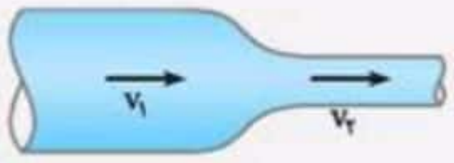
پاسخ **الف** برای محاسبهٔ آهنگ خروج شارش سیال از طریق سوراخ می‌نویسیم:

$$\text{آهنگ شارش سیال } A_{\text{سوراخ}}v = \pi r^2 \times v = \pi \times (10 \times 10^{-2})^2 \times 2 \simeq 0/06\,m^3/s$$

ب با توجه به قسمت (الف)، در هر ثانیه $0/06$ متر مکعب آب از مخزن خارج‌شده و داخل ظرف می‌ریزد و در طی ۱۰ ثانیه به اندازهٔ $0/6\,m^3$ ($= 10 \times 0/06$) آب در ظرف جمع می‌شود.

معادله پیوستگی جریان

مطابق شکل نشان داده شده، تصور کنید که جریان یکنواخت و لایه‌ای سیال از یک لوله با قطر بیشتر، وارد یک لوله با قطر کم‌تر می‌شود. مقدار حجمی از سیال که در یک مدت زمان معین از طریق لولهٔ (۱) وارد مجموعه می‌شود، برابر مقدار حجمی از آن سیال است که در همان مدت زمان از لولهٔ (۲) خارج می‌شود. به این بیان، **معادلهٔ پیوستگی جریان سیال (شاره)** گویند.



نکات مهم و کاربردی

۱ **آهنگ شارش سیال (شاره) در هر دو لوله یکسان است.**

۲ بیان ریاضی معادلهٔ پیوستگی جریان در لولهٔ فوق، به‌صورت زیر است:

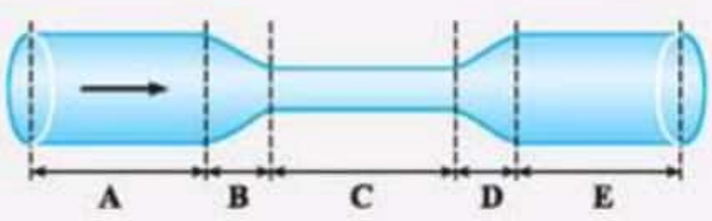
$$\text{آهنگ شارش سیال در لولهٔ (۲)} = \text{آهنگ شارش سیال در لولهٔ (۱)} \Rightarrow \boxed{A_1v_1 = A_2v_2}$$

۳ با توجه به رابطهٔ فوق و معادلهٔ پیوستگی جریان، **اگر سطح مقطع لوله کوچک‌تر شود، تندی سیال در لوله افزایش خواهد یافت و بالعکس.**

۴ بحث مربوط به **اصل پیوستگی جریان**، زمانی معتبر است که جریان سیال، تراکم‌ناپذیر باشد، یعنی سیال در داخل لوله فشرده نشود و حجم آن ثابت بماند. به‌عنوان مثال اگر هوا به‌عنوان یک سیال وارد لوله شود، با توجه به این‌که تراکم‌پذیر بوده و حجم آن تغییر می‌کند، اصل پیوستگی جریان برای آن برقرار نیست.

برای درک بهتر معادلهٔ پیوستگی شاره، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین۲ **در لوله‌ای پر از آب مطابق شکل مقابل، آب از سمت چپ به‌سمت راست در جریان است. بر روی این لوله، ۵ قسمت (A و B, C, D, E) نشان داده شده است:**



الف) در کدام‌یک از قسمت‌های لوله، تندی آب در حال افزایش، در حال کاهش و یا ثابت است؟

ب) تندی آب در قسمت A، چند برابر C می‌باشد؟ (شعاع لوله در قسمت A برابر $3r$ و در قسمت C، برابر r می‌باشد.) (کتاب درسی)

gajmarket.com

پاسخ برای حل این‌گونه سؤالات، ابتدا به نکتهٔ مفهومی زیر توجه کنید:

نکته با توجه به اصل پیوستگی جریان، آهنگ شارش سیال (شاره) ثابت است و می‌توان گفت:

$$\text{آهنگ شارش شاره} = \underbrace{A}_{\text{مساحت مقطع لوله}} \times \underbrace{v}_{\text{تندی جریان}} \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } A \text{ ثابت بماند.} \Rightarrow v \text{ ثابت می‌ماند.} \\ \text{اگر } A \text{ کاهش یابد.} \Rightarrow v \text{ افزایش می‌یابد.} \\ \text{اگر } A \text{ افزایش یابد.} \Rightarrow v \text{ کاهش می‌یابد.} \end{cases}$$

(آهنگ شارش شاره ثابت است)

الف در قسمت‌های A، C و E، سطح مقطع لوله ثابت بوده و تندی جریان تغییر نمی‌کند. در قسمت B، سطح مقطع لوله در حال کاهش بوده و تندی جریان سیال افزایش می‌یابد و در قسمت D، سطح مقطع لوله در حال افزایش بوده و تندی جریان کاهش می‌یابد.

ب در مقایسهٔ تندی آب در A و C با توجه به تراکم‌ناپذیر بودن آب و ثابت ماندن آهنگ شارش شاره می‌توان نوشت:

$$A_A v_A = A_C v_C \Rightarrow \pi r_A^2 \times v_A = \pi r_C^2 \times v_C \Rightarrow \frac{v_A}{v_C} = \left(\frac{r_C}{r_A}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_A}{v_C} = \left(\frac{r}{3r}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

تمرین۳ **وقتی شیر آبی را مطابق شکل کمی باز کنید، آب به‌آرامی جریان می‌یابد و باریکهٔ آب با نزدیک‌تر شدن به زمین، باریک‌تر می‌شود. این موضوع چگونه توجیه می‌شود؟**



پاسخ هرچه آب پایین‌تر می‌آید، تندی ذرات آب بیشتر می‌شود (مانند گلوله‌ای که در حال سقوط به سمت پایین است و هرچه پایین‌تر می‌آید، تندی آن بیشتر می‌شود) و با افزایش تندی، سطح مقطع باریکهٔ آب ناچار است که کاهش یابد تا آهنگ شارش شاره ثابت بماند.

$$\text{آهنگ شارش شاره} = \underbrace{A}_{\text{کاهش می‌یابد}} \underbrace{v}_{\text{افزایش می‌یابد}} \quad (\text{آهنگ شارش شاره ثابت است})$$

برای مقایسهٔ آهنگ شارش شاره در چهار لوله، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) آهنگ شارش شاره در لولهٔ (۱) $= A_1 v_1 = \frac{\pi D^2}{4} \times v$

۲) آهنگ شارش شاره در لولهٔ (۲) $= A_2 v_2 = \frac{\pi (2D)^2}{4} \times \frac{v}{2}$

۳) آهنگ شارش شاره در لولهٔ (۳) $= A_3 v_3 = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{4} \times v$

۴) آهنگ شارش شاره در لولهٔ (۴) $= A_4 v_4 = \frac{\pi (3D)^2}{4} \times \frac{v}{2}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، آهنگ شارش شاره در لولهٔ (۴) از سایر لوله‌ها بیشتر است.

تذکر

در یک لوله به قطر D، مساحت مقطع لوله برابر است با:

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

۴ ۶۰۵ با توجه به تساوی آهنگ شارش شاره از دو مقطع، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow a^2 \times \frac{1}{2} v = \pi R^2 \times v \Rightarrow \frac{a}{R} = \sqrt{2\pi}$$

۲ ۶۰۶ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۷)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱ ۶۰۷ مطابق با اصل پیوستگی جریان شاره، آهنگ شارش سیال از لوله‌های (۱) و (۲) با یک‌دیگر برابر است و داریم:

$$\text{آهنگ شارش سیال از لولهٔ (۱)} = A_1 v_1 = \pi r_1^2 \times v_1 = \pi \times (0/1)^2 \times 1 = 0/01\pi = 0/03\,m^3/s = 30\,lit/s$$

۲ ۶۰۸ طبق اصل پیوستگی جریان، می‌دانیم حجمی از مایع که از قسمت باریک‌تر سرنگ خارج می‌شود، برابر حجمی از مایع است که در قسمت ضخیم‌تر جابه‌جاشده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{آهنگ عبور شاره} = A_1 v_1 = 1/5 \times 1 = 1/5\,cm^3/s$$

بنابراین در هر ثانیه، $1/5\,cm^3$ از مایع شارش پیدا می‌کند، پس در مدت زمان ۰/۵ ثانیه، $\frac{1}{2} \times 1/5 = 0/75\,cm^3$ از مایع، درون سرنگ شارش پیدا می‌کند.

۴ ۶۰۹ در مدت زمان اعمال نیرو، معادل با حجم مایع پایین آمده در سمت راست لوله، مایع در سمت چپ لوله بالا رفته و داریم:

حجم مایع بالاآمده در سمت چپ در مدت زمان معین = حجم مایع پایین‌آمده در سمت راست در مدت زمان معین

$$\Rightarrow \underbrace{\pi r^2}_{\text{مساحت قاعده سمت راست}} \times \underbrace{8}_{\text{ارتفاع جابه‌جاشده در سمت راست}} = \pi (2r)^2 \times h \Rightarrow h = 2\,cm$$

۴ ۶۱۰ با توجه به اصل پیوستگی جریان، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A_1v_1 = A_2v_2 \Rightarrow \frac{\pi d_1^2}{4}v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}v_2 \Rightarrow \frac{\pi \times 10^2}{4} \times 1/5 = \frac{\pi \times (2/5)^2}{4} \times v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{10}{2/5}\right)^2 \times 1/5 = 16 \times 1/5 = 24\,m/s$$

۱ ۶۱۱ باکمک معادلهٔ پیوستگی جریان، به سادگی می‌توان تندی خروج آب از تفنگ را به‌دست آورد و داریم:

$$A_1v_1 = A_2v_2 \Rightarrow (1\,cm^2)(0/15\,cm/s) = (1 \times 10^{-2}\,cm^2)v_2 \Rightarrow v_2 = 0/15 \times 10^2\,cm/s$$

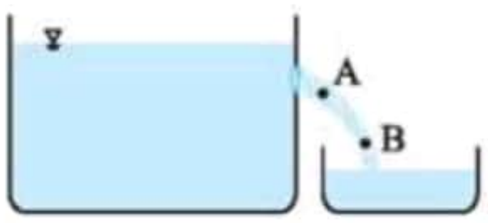
به این ترتیب تندی خروج آب از تفنگ برابر $v_2 = 0/15 \times 10^2\,cm/s = 15\,cm/s$ است.

۳ ۶۱۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، از اصل پیوستگی جریان استفاده می‌کنیم:

اصل پیوستگی شاره: $A_1v_1 = A_2v_2 \Rightarrow 200 \times 10 = 250 \times v_2 \Rightarrow v_2 = 8\,m/s$

درصد تغییر تندی شاره: $\frac{\Delta v}{v_1} \times 100 = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \times 100 = \frac{8-10}{10} \times 100 = -20\% \Rightarrow$ تندی آب ۲۰٪ کاهش یافته است.

۱ ۶۱۳ مشابه با اتفاقی که برای آب خروجی از شیر آب می‌افتد، در این‌جا نیز با خروج آب، تندی افزایش یافته و با توجه به اصل پیوستگی جریان شاره، سطح مقطع جریان عبوری کاهش می‌یابد تا آهنگ عبور جریان ثابت بماند.

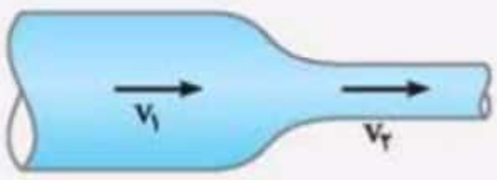


$$A_Av_A = A_Bv_B \xrightarrow{v_B > v_A} A_A > A_B$$

۴ ۶۱۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۸ — اصل برنولی (تست‌های ۶۱۴ تا ۶۲۲)

اصل برنولی، یکی از مفاهیم مربوط به حرکت شاره‌ها می‌باشد که برای توجیه بسیاری از پدیده‌های فیزیکی کاربرد دارد. برای درک مفهوم اصل برنولی، یک جریان سیال در داخل یک لولهٔ افقی، مطابق شکل مقابل درنظر بگیرید.



برای مقدار مشخصی از یک سیال در حال حرکت، در حالت کلی سه نوع انرژی زیر تعریف می‌گردد:

۱- **انرژی پتانسیل:** با توجه به این‌که لوله افقی است، این انرژی در طول لوله ثابت است.

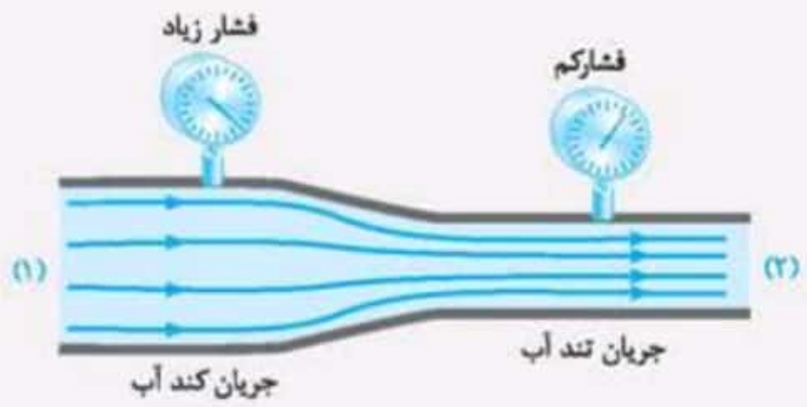
۲- **انرژی جنبشی:** همان‌طور که می‌دانید، این انرژی با توان دوم تندی (v^2) متناسب بوده و با افزایش تندی، مقدار آن افزایش می‌یابد و بالعکس.

۳- **انرژی فشاری:** همان‌طور که می‌دانید، این انرژی برخلاف دو انرژی قبلی، فقط مخصوص جریان سیال است و ثابت می‌شود که مقدار آن با فشار سیال متناسب است، یعنی با افزایش فشار این انرژی افزایش می‌یابد و بالعکس.

طبق **اصل برنولی**، مجموع انرژی‌های جریان سیال در طی حرکت آن ثابت بوده و تغییر نمی‌کند.

مقدار ثابت = انرژی فشاری + انرژی جنبشی + انرژی پتانسیل

در ادامه به مثال زیر توجه کنید:



مثال در شکل مقابل با ورود جریان از لولهٔ (۱) به (۲)، جریان آب تندتر می‌شود (با توجه به معادلهٔ پیوستگی) و این یعنی انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد. از طرفی انرژی پتانسیل در طول لوله ثابت است (ارتفاع یکسان است). بنابراین با توجه به ثابت بودن انرژی کل، می‌توان نتیجه گرفت انرژی فشاری کاهش‌یافته و فشار جریان کم می‌شود.

این موضوع یعنی با حرکت سیال در طول لوله و افزایش تندی، فشار آن کاهش می‌یابد.

مقدار ثابت = انرژی فشاری (کاهش) + انرژی جنبشی (افزایش) + انرژی پتانسیل (ثابت)

نکات مهم و کاربردی

۱ طبق اصل برنولی، برای شاره‌ای که به‌طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که: **در مسیر حرکت یک شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد و بالعکس.**

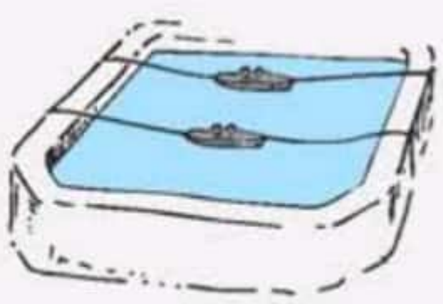
www.gajmarket.com

در واقع برنولی میگه اگه تندی سیال (شاره) زیاد بشه، فشارش کم میشه. شما اینجوری فکر کنید که وقتی تندی حرکت یه سیال زیاد میشه، زور میخواد بره و وقت فشار وارد کردن رو نداره ☺ ...

۲ معادلهٔ برنولی که در واقع بیانی از اصل پایستگی انرژی است، زمانی برقرار است که اولاً سیال تراکم‌ناپذیر باشد، ثانیاً پایدار بوده و قطع نشود و ثالثاً از اصطکاک جریان و لوله صرف‌نظر گردد.

حالا برای درک بهتر اصل برنولی، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین **در شکل زیر، دو قایق را با نخ‌هایی شل روی سطح آب بسته و سپس با کمک شیلنگ، جریان آبی را بین آن‌ها برقرار می‌کنیم. در طی انجام این کار:** (کتاب درسی)



۱) دو قایق وضعیت خاصی نسبت به هم ندارند.

۲) قایق‌ها از هم دور می‌شوند.

۳) فاصلهٔ قایق‌ها از یک‌دیگر تغییر نمی‌کند.

۴) قایق‌ها به هم نزدیک می‌شوند.

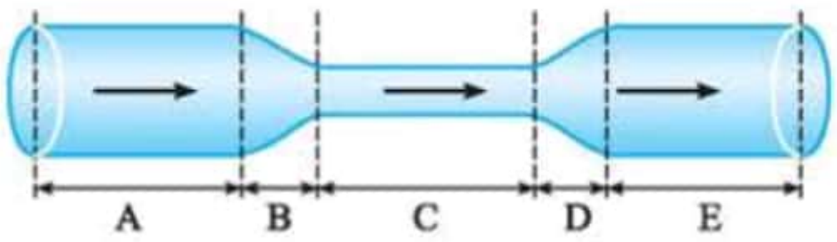
پاسخ برای تحلیل این تمرین جالب، به موارد زیر توجه کنید:

۱) با ایجاد جریان بین دو قایق، مایع شروع به حرکت می‌کند (افزایش انرژی جنبشی) و با حرکت مایع، طبق اصل برنولی انرژی فشاری و فشار در بین دو قایق کم می‌شود.

۲) با کم شدن فشار در وسط، مایع‌های طرفین قایق‌ها که فشار بیشتری دارند، به قایق‌ها فشار وارد کرده و آن‌ها را به هم نزدیک می‌کنند و گزینهٔ (۱) صحیح است.



برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



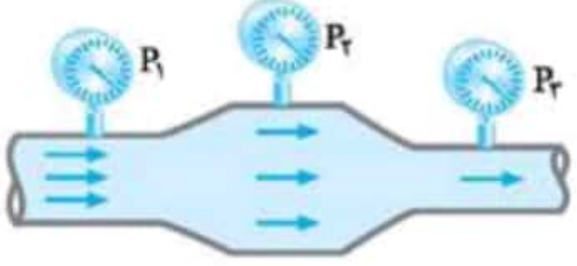
۱) در قسمت B از لوله، سطح مقطع کوچک‌تر شده و طبق اصل پیوستگی جریان، تندی شارش جریان آب افزایش می‌یابد.

$$\downarrow A \quad \uparrow v = \text{ثابت}$$

۲) با توجه به اصل برنولی، با افزایش تندی جریان در B، فشار جریان آب کاهش می‌یابد.

۳) با همین استدلال در D، تندی جریان آب، کاهش و فشار آن، افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴)، عبارت نادرستی است.

۲ ۶۱۵ با توجه به سطح مقطع لوله‌ها و با کمک اصل پیوستگی جریان، در مقایسهٔ تندی عبور جریان می‌توان گفت:



$$A_۳ < A_۱ < A_۲ \Rightarrow v_۳ > v_۱ > v_۲$$

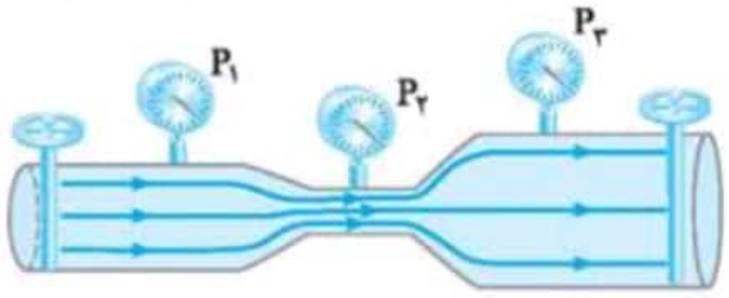
از طرفی با توجه به اصل برنولی، می‌دانیم با افزایش تندی جریان در لولهٔ افقی، فشار آن کاهش می‌یابد، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$v_۳ > v_۱ > v_۲ \Rightarrow P_۳ < P_۱ < P_۲$$

۳ ۶۱۶ **حالت اول:** (بسته بودن شیرها): در حالتی که مایع ساکن است، هر سه فشارسنج عدد یکسانی را نشان می‌دهند، زیرا ارتفاع مایع در هر سه حالت یکسان است.

$$P_۱ = P_۲ = P_۳$$

حالت دوم: (باز کردن شیرها): هنگامی که شیرهای آب باز شوند، مایع درون لوله به حرکت در می‌آید و با توجه به معادلهٔ پیوستگی جریان می‌توان نتیجه گرفت:



$$A_۳ > A_۱ > A_۲ \xrightarrow[Av=\text{ثابت}]{\text{پیوستگی}} v_۳ < v_۱ < v_۲$$

از طرفی طبق اصل برنولی، می‌دانیم هر جا تندی مایع کم‌تر باشد، فشار مایع بیشتر خواهد بود، بنابراین می‌توان نوشت:

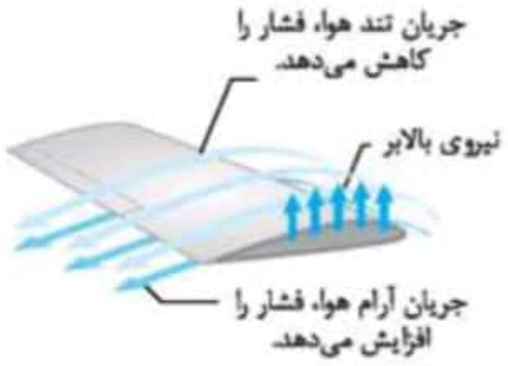
$$v_۳ < v_۱ < v_۲ \xrightarrow{\text{برنولی}} P'_۳ > P'_۱ > P'_۲$$

۳ ۶۱۷ هر چه به سطح زمین نزدیک‌تر می‌شویم، به دلیل شتاب گرانش، تندی جریان آب بیشتر می‌شود. از طرفی طبق معادلهٔ پیوستگی، می‌دانیم که هر چه تندی حرکت شاره بیشتر شود، مساحت مقطع حرکت آن کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۶۱۸ مشابه با تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۸)، با افزایش شدت دمیدن بین کاغذها، تندی جریان هوای بین آن‌ها زیاد شده و فشار هوای آن ناحیه کم می‌شود. این موضوع سبب می‌شود که کاغذها به هم نزدیک شوند.

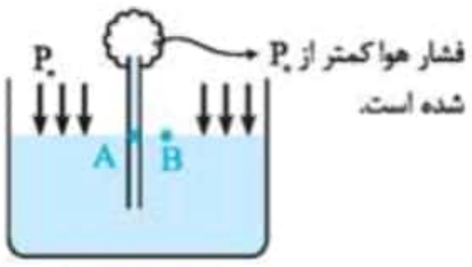
۴ ۶۱۹ هنگامی‌که کامیون در حال حرکت است، سرعت حرکت هوا در بالای برزنت، بیشتر از سرعت حرکت هوا در پایین برزنت است. بنابراین طبق اصل برنولی، فشار هوا در هر سمت برزنت کم می‌شود، ولی کاهش فشار هوا در بالای برزنت، بیشتر از پایین آن است. بنابراین برزنت به سمت محل کم فشارتر، یعنی بالا، حرکت کرده و پُف می‌کند.

۴ ۶۲۰ بال‌های هواپیما را طوری طراحی می‌کنند که تندی هوا در بالای آن بیشتر از زیر آن باشد. بنابراین با توجه به اصل برنولی، در بالای بال، تندی هوا بیشتر و فشار هوا کم‌تر است و این موضوع سبب می‌شود که اختلاف فشاری در بالا و پایین بال به‌وجود آید که در نهایت یک نیروی به سمت بالا بر بال وارد کند.



۳ ۶۲۱ با دمیدن هوا در نی افقی، هوا با سرعت از بالای نی قائم می‌گذرد و با افزایش تندی آن، طبق اصل برنولی، فشار هوا در بالای نی کاهش می‌یابد. با کاهش این فشار، آب درون ظرف که عملاً محلی را پیدا کرده است که فشارش از فشار هوا کم‌تر است، در نی قائم بالا می‌رود.

در حالتی‌که آب از نی قائم سرریز می‌شود، فشار هوای متحرک بالای لوله به اندازهٔ فشار $5\,cm$ آب از فشار P_0 (هوای ساکن) کم‌تر شده است و داریم:



$$P_B = P_A \Rightarrow P_0 = P + \rho gh \Rightarrow \Delta P = P_0 - P = \rho gh$$

$$\text{اختلاف فشار هوای متحرک و هوای ساکن} = \rho gh = 10^3 \times 10 \times (0/05) = 500\,Pa$$

۴ ۶۲۲ در شکل (۳)، جریان دود از سر چوب، در ابتدا یکنواخت بوده و سپس تلاطمی می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.



شکل(۳)

سایر گزینه‌ها با توجه به مفاهیم حرکت یکنواخت و حرکت تلاطمی شاره‌ها، صحیح می‌باشند.

۱ ۶۲۳ **روش اول:** طبق صورت سؤال، با تغییر دمای مایع، چگالی آن افزایش یافته است، از طرفی حجم مایع جابه‌جاشده توسط جسم تغییری نکرده است (چون از تغییر حجم جسم صرف‌نظر کرده‌ایم)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g \rightarrow$$ نیروی شناوری (F_b) هم افزایش می‌یابد. ($\rho_{\text{مایع}}$: افزایش)

در اثر افزایش نیروی شناوری، جسم شروع به حرکت به سمت بالا می‌کند.

روش دوم: در ابتدا که جسم درون مایع غوطه‌ور است، چگالی آن با چگالی مایع برابر می‌باشد (چرا؟). هنگامی‌که چگالی مایع را افزایش می‌دهیم، چگالی جسم کم‌تر از چگالی مایع خواهد بود و در نتیجه جسم به سمت بالا حرکت می‌کند تا بر روی سطح آب شناور شود.

۳ ۶۲۴ از آن‌جایی که قطعه چوب بر روی سطح مایع شناور است، می‌توان نوشت:

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g \xrightarrow{F_b = m_{\text{چوب}} g} m_{\text{چوب}} g = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g$$

$$\xrightarrow{m_{\text{چوب}} = \rho_{\text{چوب}} V_{\text{چوب}}} \rho_{\text{چوب}} V_{\text{چوب}} = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} \Rightarrow V_{\text{مج}} = \frac{\rho_{\text{چوب}}}{\rho_{\text{مایع}}} V_{\text{چوب}} \Rightarrow$$

($\rho_{\text{چوب}}$: ثابت، $\rho_{\text{مایع}}$: ثابت، $V_{\text{چوب}}$: ثابت)

مقدار مایع جابه‌جاشده $(V_{\text{مج}})$ نیز ثابت می‌ماند.

دید دیگر: طبق اصل ارشمیدس، می‌دانیم که وزن چوب برابر وزن مایع جابه‌جاشده است. با تغییر مقدار شتاب گرانش (g)، وزن مایع و وزن چوب به یک نسبت تغییر می‌کنند و درنتیجه حجم مقداری از چوب که درون مایع است، تغییری نخواهد کرد.

۲ ۶۲۵ جسم در حال تعادل قرار دارد و به آن نیروهای وزن، شناوری و کشش نخ وارد می‌شوند. برای به دست آوردن حداقل مقدار چگالی مایع، کل حجم جسم را درون مایع در نظر می‌گیریم. بنابراین برای تعادل این جسم می‌توان نوشت:



$$\text{شرط تعادل}: F_b + T = mg \xrightarrow[m=\rho_{\text{جسم}} V]{F_b = \rho_{\text{مایع}} Vg} \rho_{\text{مایع}} Vg + T = \rho_{\text{جسم}} Vg$$

$$\Rightarrow T = (\rho_{\text{جسم}} - \rho_{\text{مایع}}) Vg$$

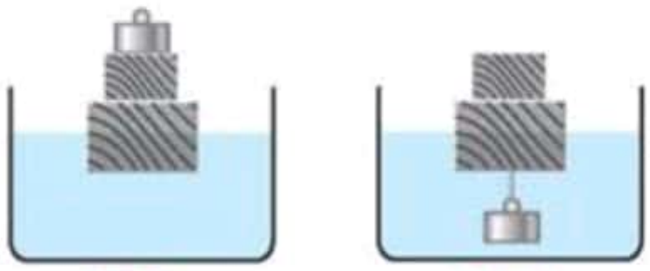
برای آن‌که نخ پاره نشود، باید کشش آن کم‌تر از $60N$ باشد، بنابراین داریم:

$$T = (\rho_{\text{جسم}} - \rho_{\text{مایع}}) Vg < 60N \xrightarrow{\rho_{\text{جسم}} = \frac{m}{V}} \left(\frac{10}{2000 \times 10^{-6}} - \rho_{\text{مایع}}\right) \times 2000 \times 10^{-6} \times 10 < 60N$$

$$\Rightarrow (5000 - \rho_{\text{مایع}}) < 3000 \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} > 2000\,kg/m^3 \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} > 2gr/cm^3$$

www.gajmarket.com

۶۲۶ در هر دو شکل، مجموعه در حال تعادل قرار دارد و برایند نیروهای وارد بر آن برابر صفر است. بنابراین می‌توان گفت در هر دو شکل، نیروی شناوری برابر نیروی وزن مجموعهٔ سه جسم است، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که نیروی شناوری در هر دو شکل با هم برابر است.


شکل (۱) شکل (۲)

$$F_b = W_{\text{کل سه جسم}} \Rightarrow F_{b_1} = F_{b_2}$$

از طرفی می‌دانیم که نیروی شناوری برابر وزن مایع جابه‌جاشده است، بنابراین چون نیروی شناوری در هر دو شکل یکسان است، حجم مایع جابه‌جاشده در هر دو شکل نیز برابر است.

$$F_b = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مج}} g \xrightarrow{F_{b_1}=F_{b_2}} V_{\text{مج}_1} = V_{\text{مج}_2} \Rightarrow$$ سطح آزاد آب در هر دو شکل یکسان است.

۶۲۷ با توجه به پاسخ سؤال قبل، ارتفاع آب در هر دو ظرف یکسان است، بنابراین فشار وارد بر کف ظرف در هر دو حالت با هم برابر است.

$$P = \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} + P_\circ \xrightarrow{h_1=h_2} P_1 = P_2$$

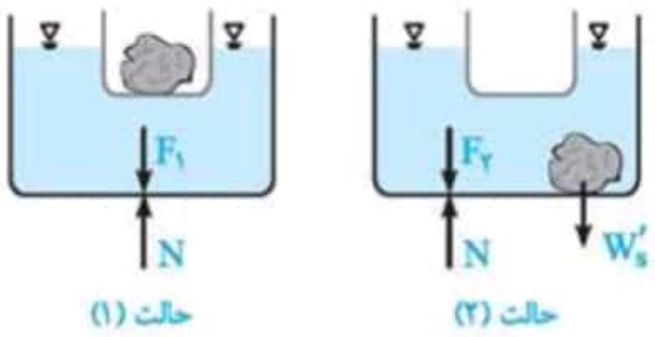
۶۲۸ **روش اول:** با توجه به پاسخ تست (۵۸۷)، با انداختن قطعه سنگ به درون آب، ارتفاع سطح آزاد آب در داخل مخزن کاهش می‌یابد. بنابراین با توجه به رابطهٔ $P = \rho gh$، فشار ناشی از آب بر کف مخزن نیز کم می‌شود.

$$P_{\text{مایع}} = \rho g \downarrow h \Rightarrow P_{\text{مایع}}$$ کاهش می‌یابد.

در نتیجه نیروی ناشی از آب بر کف ظرف کاهش می‌یابد.

$$F_{\downarrow \text{مایع}} = P_{\downarrow \text{مایع}} A$$

روش دوم: اگر نیروی وارد بر کف مخزن (فقط ناشی از آب) را در حالت اول با F_1 و در حالت دوم با F_2 نشان دهیم، در این صورت نیروهای وارد بر کف مخزن به صورت روبه‌رو است:



حالت (۱) حالت (۲)

چون در حالت دوم چیزی به درون مخزن اضافه یا از آن کم نشده است (سنگ در داخل خود مخزن جابه‌جاشده است)، بنابراین نیروی عمودی سطح (N) در هر دو حالت یکسان خواهد بود. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: N = F_1 \\ \text{حالت دوم}: N = F_2 + W'_s \end{cases} \Rightarrow F_1 = F_2 + W'_s \Rightarrow F_2 < F_1$$

یعنی نیروی وارد بر کف مخزن از طرف آب، در حالت دوم نسبت به حالت اول، کاهش می‌یابد.

۶۲۹ برای پاسخ دادن به این سؤال دشوار، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: در حالت وجود قطعه یخ بر روی سطح آب، نیروی شناوری وارد شده بر قطعه یخ برابر وزن آن می‌باشد.

$$F_b = W_{\text{یخ}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} V_{\text{مج}} g = W_{\text{یخ}} \Rightarrow V_{\text{مج}} = \frac{W_{\text{یخ}}}{\rho_{\text{آب}}\, g}$$

گام دوم: وقتی قطعه یخ به‌طور کامل ذوب شود، وزن آب حاصل‌شده از آن برابر وزن قطعه یخ اولیه است ($W_{\text{یخ}} = W_{\text{آب اضافه شده}}$). بنابراین حجم آبی که پس از ذوب شدنِ یخ، اضافه می‌شود ($V_{\text{آب اضافه شده}}$) برابر است با:

$$W_{\text{آب اضافه‌شده}} = W_{\text{یخ}} \Rightarrow \overbrace{(\rho_{\text{آب}} V_{\text{آب اضافه‌شده}})g}^{\text{وزن آب اضافه‌شده}} = W_{\text{یخ}} \Rightarrow V_{\text{آب اضافه‌شده}} = \frac{W_{\text{یخ}}}{\rho_{\text{آب}} \cdot g}$$

بنابراین حجم آب جابه‌جاشده در حالت، اول برابر حجم آب اضافه‌شده پس از ذوب شدن یخ در حالت دوم است. بنابراین با توجه به یکسان بودن سطح مقطع ظرف در دو حالت، ارتفاعی از آب که بالا می‌آید در دو حالت یکسان است.

۶۳۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: در حالت وجود یخ و سنگ بر روی سطح آب، نیروی شناوری واردشده بر قطعه یخ، برابر وزن مجموعهٔ یخ و سنگ است.

$$F_b = W_{\text{یخ}} + W_{\text{سنگ}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} V_{\text{مج}} g = W_{\text{یخ}} + W_{\text{سنگ}} \Rightarrow V_{\text{مج}} = \frac{W_{\text{یخ}} + W_{\text{سنگ}}}{\rho_{\text{آب}} g} \Rightarrow V_{\text{مج}} = \frac{W_{\text{یخ}}}{\rho_{\text{آب}} g} + \frac{W_{\text{سنگ}}}{\rho_{\text{آب}} g} : \text{رابطهٔ (I)}$$

گام دوم: وقتی یخ به‌طور کامل ذوب شود، وزن آب حاصل از آن برابر وزن قطعه یخ اولیه است و همین‌طور در اثر افتادن سنگ در آب، حجم به اندازهٔ حجم سنگ اضافه می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{یخ} = W_{آب\ اضافه‌شده} \Rightarrow W_{یخ} = \rho_{آب} V_{آب\ اضافه‌شده}\, g \Rightarrow V_{آب\ اضافه‌شده} = \frac{W_{یخ}}{\rho_{آب} g} \quad : \text{رابطهٔ (۱)}$$

$$W_{سنگ} = \rho_{سنگ}\, V_{سنگ}\, g \Rightarrow V_{سنگ} = \frac{W_{سنگ}}{\rho_{سنگ}\, g} \quad : \text{رابطهٔ (۲)}$$

$$\xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} V_{اضافه‌شده} = V_{آب\ اضافه‌شده} + V_{سنگ} = \frac{W_{یخ}}{\rho_{آب}\, g} + \frac{W_{سنگ}}{\rho_{سنگ}\, g} : \text{رابطهٔ(II)}$$

گام سوم: با مقایسهٔ دو رابطهٔ (I) و (II)، از آن‌جایی که $\rho_{آب} < \rho_{سنگ}$ است، $V_{اضافه‌شده} < V_{مج}$ می‌شود و در نتیجه ارتفاع آب داخل ظرف، پس از ذوب یخ و فرو رفتن سنگ در آن، پایین می‌آید.

۶۳۱ ۴ می‌دانیم عددی که ترازو نشان می‌دهد، برابر مجموع وزن جسم، مایع و ظرف است. از طرفی وزن جسمی که بر روی سطح آب شناور است، برابر نیروی شناوری وارد بر آن است، پس می‌توان نوشت:

$$N = W_{مایع\ و\ ظرف} + W_{جسم} \xrightarrow{W_{جسم} = F_b} N = W_{مایع\ و\ ظرف} + F_b \xrightarrow{F_b = W_{\text{وزن مایع جابه‌جا شده}}} N = W_{مایع\ و\ ظرف} + W_{مج}$$

$W_{مایع\ و\ ظرف} + W_{مج}$ در واقع همان وزن ظرف پر از آب، در حالت بدون جسم شناور است، زیرا به اندازهٔ نیروی شناوری وارد بر جسم، مایع از ظرف بیرون می‌ریزد. بنابراین ترازوها در هر سه حالت عددی یکسان را نشان خواهند داد.

۶۳۲ ۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، دو مورد زیر را در نظر بگیرید:

۱) در حالت اول، کل وزن استوانه توسط نیروی شناوری که توسط آب به آن وارد می‌شود، خنثی می‌شود.

۲) در حالت دوم، وزن استوانه توسط نیروی شناوری نفت و نیروی شناوری آب خنثی می‌شود. این یعنی در این حالت سهم آب از نیروی شناوری دیگر برابر کل وزن چوب نمی‌باشد (کمی از وزن چوب را نفت تحمل می‌کند) و با کم شدن سهم آب از نیروی شناوری، حجمی از چوب که در آب فرو می‌رود کاهش می‌یابد و این یعنی استوانه کمی از آب خارج می‌شود.

۶۳۳ ۳ به جسم یک نیروی شناوری از طرف مایع (۱) و یک نیروی شناوری از طرف مایع (۲) وارد می‌شود و جسم در حال تعادل است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$\text{تعادل} : F_{b_1} + F_{b_2} = mg \xrightarrow[m=\rho_{جسم} V_{جسم}]{F_b = \rho_{مایع} V_{مج} g} \rho_1 V_{مج_1} g + \rho_2 V_{مج_2} g = \rho_{جسم} V_{جسم} g$$

$$\xrightarrow[V_{مج_2} = ۰/۷ V_{جسم}]{V_{مج_1} = ۰/۳ V_{جسم}} ۳۰۰۰ \times ۰/۳ V_{جسم} + ۱۰۰۰ \times ۰/۷ V_{جسم} = \rho_{جسم} V_{جسم} \Rightarrow \rho_{جسم} = ۱۶۰۰ kg/m^3$$

۶۳۴ ۲ اگر جسم به‌طور کامل در مایع پایینی فرو رود، از طرف مایع پایینی یک نیروی شناوری به سمت بالا بر جسم وارد می‌شود. از طرفی نیروی وزن و نیروی ما (F)، به سمت پایین بر جسم وارد خواهد شد. برای آن‌که جسم به‌طور کامل در مایع پایینی فرو رود، باید $F + mg \geq F_b$ باشد.



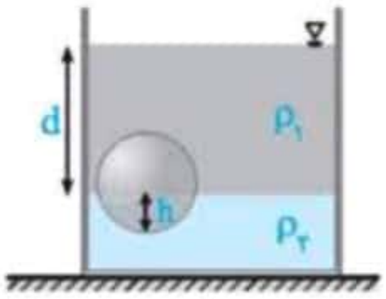
$$F + mg \geq F_b$$

$$\xrightarrow[m=\rho_{جسم} V]{F_b = \rho_1 V g} F + \rho_{جسم} V g \geq \rho_1 V g \Rightarrow F + ۱۶۰۰ \times (۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}) \times ۱۰ \geq ۳۰۰۰ \times (۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}) \times ۱۰$$

$$\Rightarrow F + ۱/۶ \geq ۳ \Rightarrow F \geq ۱/۴ N$$

بنابراین حداقل مقدار F برای این‌که جسم کاملاً درون مایع پایینی فرو برود، برابر ۱/۴ N است (با اعمال نیروهای بیشتر از ۱/۴ N نیز جسم به درون مایع (۲) خواهد رفت).

۶۳۵ ۱ مشابه با تست (۶۳۳)، برای این‌که جسم در مرز بین دو مایع به تعادل برسد، باید مجموع نیروی شناوری واردشده بر جسم از طرف دو مایع با نیروی وزن آن برابر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$F_{b_1} + F_{b_2} = mg \Rightarrow \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \rho V_{جسم} g \xrightarrow{V_1 = V_{جسم} - V_2} \rho_1 (V_{جسم} - V_2) + \rho_2 V_2 = \rho V_{جسم}$$

$$\Rightarrow \rho_1 V_{جسم} - \rho_1 V_2 + \rho_2 V_2 = \rho V_{جسم} \Rightarrow V_2 = \frac{\rho V_{جسم} - \rho_1 V_{جسم}}{\rho_2 - \rho_1} = \left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\right) V_{جسم}$$

www.gajmarket.com

با توجه به ثابت بودن ρ، ρ_1، ρ_2 و $V_{جسم}$، حجم فرورفته در مایع پایینی (یعنی V_2) و درنتیجه ارتفاع h ثابت می‌ماند و به ارتفاع d بستگی ندارد.

جمع‌بندی

در این سؤال، جسم کروی در داخل دو سیال به صورت غوطه‌ور قرار گرفته است. در این حالت عمق قرار گرفتن جسم در داخل سیال (یا سیال‌ها)، تأثیری در نیروی شناوری وارد بر آن نداشته و موقعیت جسم را تغییر نمی‌دهد. بنابراین با افزایش ارتفاع d، عمق h تغییری نخواهد کرد.

۳ ۶۳۶ با قرار دادن قطعه چوب بر روی سطح آب، نیروی شناوری وارد بر قطعه چوب در هر دو حالت یکسان و برابر وزن قطعه چوب می‌باشد ($F_{b_1} = F_{b_2} = W_{چوب}$). از طرفی با توجه به مفاهیمی که در خلاصه نکات (۱۶) به آن اشاره شد، در هر دو حالت عدد ترازو به اندازهٔ جرم قطعه چوب اضافه شده و درنتیجه گزینهٔ (۳) نادرست است.

بررسی گزینهٔ (۲): با قرار گرفتن قطعه چوب بر روی سطح آب درون هر دو ظرف، در هر دو حالت مقدار حجمی از مایع که جابه‌جا می‌شود (بالا می‌آید)، باید با یک‌دیگر برابر باشد.

$$F_{b_2} = F_{b_1} = W_{چوب} \Rightarrow \rho_{مایع} V_{م.ج} g = W_{چوب} \Rightarrow \overset{\text{یکسان}}{V_{م.ج}} = \overset{\text{یکسان}}{\frac{W_{چوب}}{\rho_{مایع} \cdot g}}$$

از طرفی با توجه به نازک‌تر بودن سطح مقطع بالای ظرف (۱)، با توجه به افزایش حجم یکسان، ارتفاعی از مایع که در ظرف (۱) بالا می‌آید بیشتر از ظرف (۲) است.

بنابراین با توجه به رابطهٔ $\Delta P = \rho g \Delta h$، افزایش فشار ناشی از مایع در کف ظرف (۱)، بیشتر افزایش یافته و درنتیجه نیروی بیشتری بر کف این ظرف از طرف مایع وارد می‌شود.

ظرف (۱): h_1، قرار دادن چوب

ظرف (۲): h_2، قرار دادن چوب

$$\Rightarrow h_1 > h_2$$

۳ ۶۳۷ **گام اول:** با وارد کردن جسم به درون مایع، نیروی شناوری از طرف مایع به جسم رو به بالا وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتون، عکس‌العمل این نیرو از طرف جسم به مایع رو به پایین وارد می‌شود.

گام دوم: طبق اصل ارشمیدس، مقدار نیروی شناوری برابر وزن مایع جابه‌جاشده (بیرون ریخته‌شده) از ظرف است. بنابراین گرچه به اهرم سمت چپ به اندازهٔ نیروی شناوری اضافه می‌شود، ولی چون به اندازهٔ همین نیرو، آب از ظرف خارج می‌شود، بنابراین نیروی هر دو طرف اهرم هم‌چنان ثابت مانده و مجموعه متعادل می‌ماند.

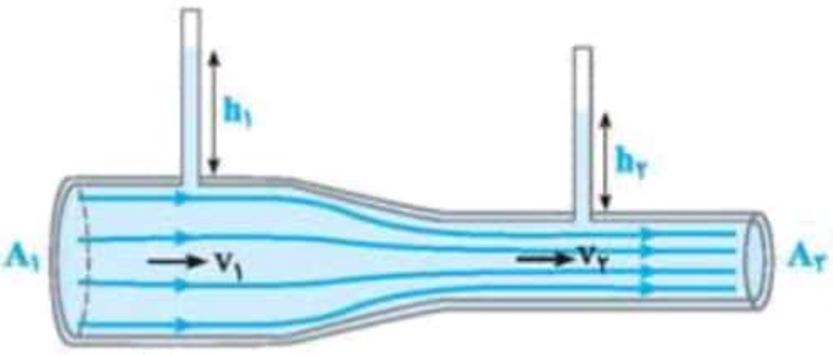
۳ ۶۳۸ با انداختن سنگ در داخل ظرف پر از آب، به اندازهٔ حجم قطعه سنگ، یعنی $400\,cm^3$، آب از ظرف بیرون می‌ریزد. بنابراین مقدار جرمی از آب که از ظرف بیرون می‌ریزد، برابر است با:

$$\rho_{آب} = \frac{m_{آب}}{V_{آب}} \Rightarrow m_{آب} = \rho_{آب} V_{آب} \Rightarrow m_{آب}: \text{جرم آب بیرون ریخته‌شده از ظرف} = 1 \times 400 = 400\,gr$$

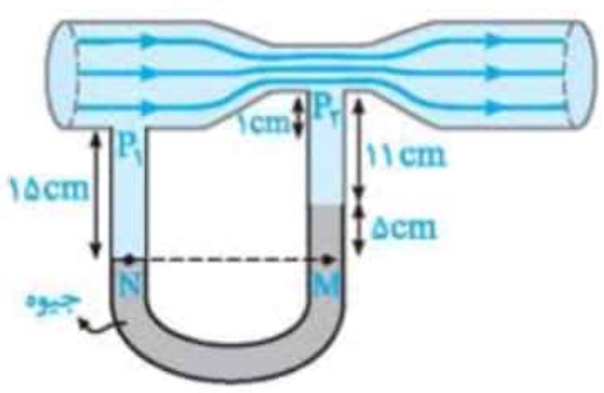
از طرفی جرم خود قطعه سنگ برابر $1\,kg = 1000\,gr$ می‌باشد، بنابراین در مجموع جرم سمت راست ترازو به میزان $600\,gr$ (= ۱۰۰۰ − ۴۰۰) سنگین‌تر شده است. پس برای ایجاد تعادل در ترازو، باید یک وزنهٔ ۶۰۰ گرمی در سمت دیگر آن اضافه کنیم.

۳ ۶۳۹ **گام اول:** با توجه به اصل پیوستگی شاره، چون $A_1 > A_2$ است، بنابراین $v_1 < v_2$ خواهد بود.

گام دوم: از طرفی طبق اصل برنولی، می‌دانیم که هر چه تندی مایع بیشتر شود، فشار آن کاهش می‌یابد، بنابراین چون $v_1 < v_2$ است، $P_1 > P_2$ خواهد بود و درنتیجه $h_1 > h_2$ می‌شود (دقت کنید که ارتفاع‌های h_1 و h_2 متناسب با فشار مایع هستند، به‌طوری که هر چه ارتفاع مایع در ستون قائم بیشتر باشد، فشار در آن محل بیشتر است).



۱ ۶۴۰ این سؤال ترکیبی از لولهٔ U شکل و اصل برنولی است. ابتدا به بررسی لولهٔ U شکل می‌پردازیم. نقاط M و N دو نقطهٔ هم‌ارتفاع از یک مایع هستند، بنابراین فشار آن‌ها با هم برابر است. فشار نقطهٔ N همان فشار مایع در لولهٔ افقی بالای آن است و فشار در نقطهٔ M برابر مجموع فشار مایع در لولهٔ افقی و فشار $5\,cm$ جیوه در لولهٔ قائم است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$P_N = P_M \Rightarrow P_1 = P_2 + \rho g h \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g h = 13600 \times 10 \times \frac{5}{100} = 6800\,Pa$$

فصل
چهارم

خلاصه نکات	عنوان	صفحه
۱	دما و مقیاس‌های اندازه‌گیری دما	۱۵۹
۲	انواع دماسنج‌ها	۱۶۱
۳	گرما	۱۶۳
۴	گرمای ویژهٔ مولی	۱۷۰
۵	تغییر حالت اجسام	۱۷۳
۶	آشنایی با گرمای لازم برای ذوب و تحلیل مسائل آن	۱۷۶
۷	آشنایی با گرمای لازم برای تبخیر و میعان و تحلیل مسائل آن	۱۷۹
۸	تبخیر سطحی	۱۸۲
۹	دمای تعادل	۱۸۲
۱۰	تعادل گرمایی آب و یخ	۱۸۶
۱۱	انواع روش‌های انتقال گرما	۱۹۸
۱۲	بررسی رسانش گرما در فلزات	۲۰۲
۱۳	مفهوم انبساط	۲۱۷
۱۴	مقادیر مختلف ضریب انبساط برای یک جسم جامد	۲۱۸
۱۵	انبساط طولی اجسام	۲۱۹
۱۶	اساس عملکرد دماپایاترموستات	۲۲۴
۱۷	انبساط سطحی اجسام	۲۲۴
۱۸	تغییر حجم یک جسم جامد	۲۲۷
۱۹	انبساط ظاهری مایعات	۲۳۰
۲۰	چگالی جسم جامد	۲۳۲
۲۱	انبساط غیرعادی آب	۲۳۳
۲۲	بررسی قانون گازهای کامل (معادله حالت)	۲۳۷
۲۳	بررسی معادلهٔ حالت برای یک گاز کامل با تغییر پارامترهای آن	۲۴۰
۲۴	مقایسهٔ شرایط دو گاز متفاوت با یک دیگر	۲۴۴
۲۵	چگالی (جرم حجمی) یک گاز کامل	۲۴۷
۲۶	بررسی تغییرات دمای مقدار معینی از یک گاز کامل	۲۵۰
۲۷	قانون گازها در فشار ثابت	۲۵۱
۲۸	قانون گازها در حجم ثابت	۲۵۳
۲۹	قانون گازها در دمای ثابت	۲۵۴

پایه دهم

دما و گرما

۶۴۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات! **دما و مقیاس‌های اندازه‌گیری دما** (تست‌های ۶۴۱ تا ۶۵۰)

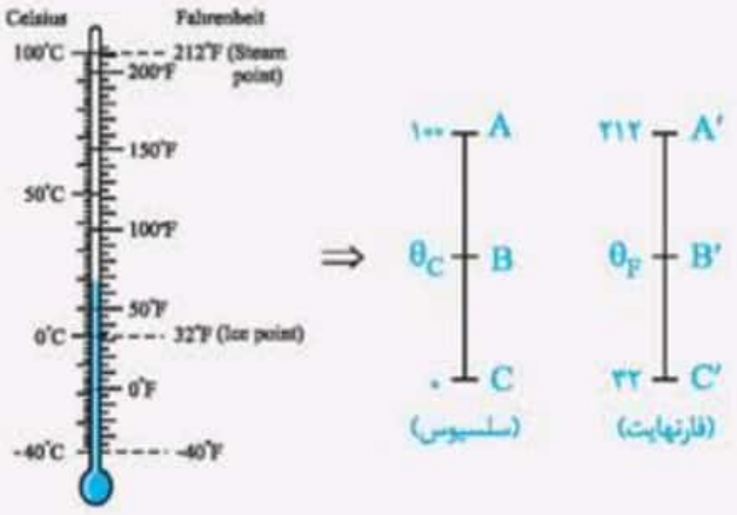
دما کمیتی است که میزان سردی و گرمی اجسام را مشخص می‌کند. به این منظور لازم است یک مقیاس برای مقایسهٔ دما به‌وجود آوریم و برای این کار، می‌توان از هر خاصیت قابل اندازه‌گیری‌ای که با گرم شدن و سرد شدن جسم تغییر کند بهره گرفت که به آن **کمیت دماسنجی** می‌گوییم.

برای اندازه‌گیری دما می‌توان مقیاس‌های متفاوتی را درنظر گرفت که متداول‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱ **سلسیوس:** یکای متداول دما درجهٔ سلسیوس است که با نماد $^\circ C$ نمایش داده می‌شود.

۲ **کلوین:** در بسیاری از محاسبات مربوط به گازها، از دمای مطلق استفاده می‌کنند که واحد آن کلوین (K) است (واحد دما در SI). صفر کلوین تقریباً برابر $-۲۷۳^\circ C$ است و برای تبدیل دما از مقیاس سلسیوس به کلوین، باید مقدار دما برحسب سلسیوس را با عدد ۲۷۳ جمع کرد، یعنی:

$$T(K) = \theta(^\circ C) + ۲۷۳$$



تذکر میزان **تغییر دما** در مقیاس کلوین و سلسیوس با یک‌دیگر برابر است، به‌طور مثال اگر دمای هوا $۲۰^\circ C$ تغییر کرده باشد، $۲۰K$ نیز تغییر کرده است.

$$\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱ = ۲۰^\circ C \Rightarrow \Delta T = T_۲ - T_۱ = ۲۰K \xrightarrow{\text{یا}} \Delta T(K) = \Delta\theta(^\circ C)$$

۳ **فارنهایت:** یکی دیگر از مقیاس‌های دماسنجی، مقیاس فارنهایت است. در این مقیاس $۰^\circ C$ برابر $۳۲^\circ F$ و $۱۰۰^\circ C$ برابر $۲۱۲^\circ F$ است، به شکل‌های مقابل توجه کنید.

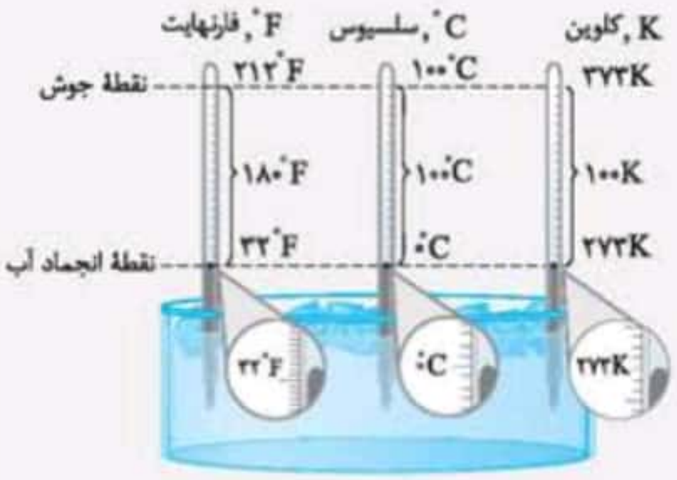
برای مقایسهٔ درجه‌بندی دو دماسنج برحسب مقیاس‌های مختلف، در قدم اول دو سیستم دماسنجی را در کنار یک‌دیگر رسم می‌کنیم و در ادامه بین هر دو قسمت دلخواه می‌توان تناسب نوشت. با توجه به این موضوع و با کمک شکل سمت راست، داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \Rightarrow \frac{۱۰۰ - \theta_C}{۱۰۰ - ۰} = \frac{۲۱۲ - \theta_F}{۲۱۲ - ۳۲} \Rightarrow$$ دما برحسب درجهٔ فارنهایت : $$\theta_F = \frac{۹}{۵}\theta(^\circ C) + ۳۲$$

تذکر اگر دمای $\theta_۱^\circ C$ معادل $\theta_۱^\circ F$ و دمای $\theta_۲^\circ C$ معادل $\theta_۲^\circ F$ باشد، به‌صورت زیر می‌توان رابطهٔ $\Delta\theta_F$ و $\Delta\theta_C$ را پیدا کرد:

$$\begin{cases} \theta_۲^\circ F = \frac{۹}{۵}\theta_۲^\circ C + ۳۲ \\ \theta_۱^\circ F = \frac{۹}{۵}\theta_۱^\circ C + ۳۲ \end{cases} \xrightarrow[\text{هم کم کنیم}]{\text{طرفین را از}} (\theta_۲^\circ F - \theta_۱^\circ F) = \frac{۹}{۵}(\theta_۲^\circ C - \theta_۱^\circ C) \Rightarrow \Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C$$

جمع‌بندی برای جمع‌بندی سه مقیاس درجه‌بندی مطرح شده در این قسمت، به شکل نشان داده شده و میزان تغییر دما بین نقطهٔ انجماد آب و نقطهٔ جوش آب توجه کنید:



$$\begin{cases} \Delta T_{\text{کلوین}} = ۱۰۰K \\ \Delta\theta_{\text{سلسیوس}} = ۱۰۰^\circ C \\ \Delta\theta_{\text{فارنهایت}} = ۱۸۰^\circ F \end{cases}$$

در ادامه برای یادگیری بهتر، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین! **دمای ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس معادل با ..... درجهٔ فارنهایت است و اگر دمای اتاق ..... سلسیوس افزایش یابد، معادل با ۹۰ درجهٔ فارنهایت افزایش یافته است.**

۱) ۱۴۸، ۹۰ ۲) ۱۴۸، ۵۰ ۳) ۲۱۲، ۹۰ ۴) ۲۱۲، ۵۰

پاسخ ارتباط بین سلسیوس و فارنهایت به‌صورت زیر است و $۱۰۰^\circ C$ در مقیاس فارنهایت برابر است با:

$$\theta_F = \frac{۹}{۵}\theta(^\circ C) + ۳۲ \xrightarrow{\theta = ۱۰۰^\circ C} \theta_F = \frac{۹}{۵} \times ۱۰۰ + ۳۲ = ۲۱۲^\circ F$$

از سوی دیگر با توجه به رابطهٔ $\Delta\theta_C$ و $\Delta\theta_F$ می‌توان گفت اگر تغییر دما برابر $۹۰^\circ F$ باشد، $\Delta\theta$ برحسب درجهٔ سلسیوس برابر است با:

$$\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C \Rightarrow ۹۰ = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C \Rightarrow \Delta\theta_C = ۵۰^\circ C$$ (گزینهٔ ۴)

با توجه به خلاصه نکات فوق، دما معیاری است که میزان گرمی و سردی اجسام را مشخص می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳ ۶۴۲ شرط لازم برای این‌که بتوان از یک کمیت به عنوان کمیت دماسنجی استفاده کرد، این است که با تغییر دما، مقدار آن کمیت تغییر کند.
از آن‌جایی که جرم یک جسم با تغییر دما تغییر نمی‌کند، بنابراین نمی‌توان از آن به عنوان یک کمیت دماسنجی استفاده کرد، پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ ۶۴۳ با توجه به رابطهٔ $\theta_F = \frac{۹}{۵}\theta_C + ۳۲$، به‌ازای هر یک درجهٔ سلسیوس تغییر دما، در دماسنج فارنهایت به میزان $۱/۸^\circ F$ تغییر ایجاد می‌شود.
بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

$$\theta_F = \frac{۹}{۵}\theta_C + ۳۲ \Rightarrow \Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C = ۱/۸\Delta\theta_C$$

بررسی درستی سایر گزینه‌ها:

۱) طبق رابطهٔ $T = ۲۷۳ + \theta$، تغییرات دما در دماسنج‌های سلسیوس و کلوین برابر است $(\Delta T = \Delta\theta_C)$.

۲) با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده در فوق $(\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C = ۱/۸\Delta\theta_C)$، به‌ازای هر یک درجه تغییر دما در دماسنج سلسیوس، دماسنج فارنهایت به میزان ۱/۸ درجه تغییر می‌کند.

۳) طبق گفته‌های فوق، هر کلوین برابر $۱/۸^\circ F$ است $(\Delta T = \Delta\theta_C = ۱/۸\Delta\theta_F)$. بنابراین تغییر دما به اندازهٔ ۱۰۰ کلوین، معادل تغییر دما به اندازهٔ ۱۸۰ درجهٔ فارنهایت می‌شود.

۴ ۶۴۴ با توجه به تمرین (۱)، در خلاصه نکات (۱)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳ ۶۴۵ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا میزان تغییر دما را برحسب درجهٔ سلسیوس به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \theta_۱ = ۲۰^\circ C \\ T_۲ = ۲۷۳ + \theta_۲ \xrightarrow{T_۲ = ۳۲۳K} \theta_۲ = ۳۲۳ - ۲۷۳ = ۵۰^\circ C \end{cases} \Rightarrow \Delta\theta = ۳۰^\circ C$$

گام دوم: در ادامه، میزان تغییر دما را بر حسب درجهٔ فارنهایت محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C \Rightarrow \Delta\theta_F = \frac{۹}{۵} \times ۳۰ = ۵۴^\circ F$$

۲ ۶۴۶ طبق صورت سؤال، دما برحسب درجهٔ سلسیوس (θ)، ۷۵ درصد کم‌تر از دما برحسب کلوین (T) است، بنابراین داریم:

$$\theta = T - \frac{۷۵}{۱۰۰}T = \frac{۲۵}{۱۰۰}T = \frac{۱}{۴}T \Rightarrow T(K) = ۴\theta(^\circ C)$$

با توجه به رابطهٔ $T(K) = \theta(^\circ C) + ۲۷۳$، چون $T(K) = ۴ \times \theta(^\circ C)$ است، خواهیم داشت:

$$T(K) = \theta + ۲۷۳ \xrightarrow{T = ۴\theta} ۴\theta = \theta + ۲۷۳ \Rightarrow \theta = \frac{۲۷۳}{۳} = ۹۱^\circ C$$

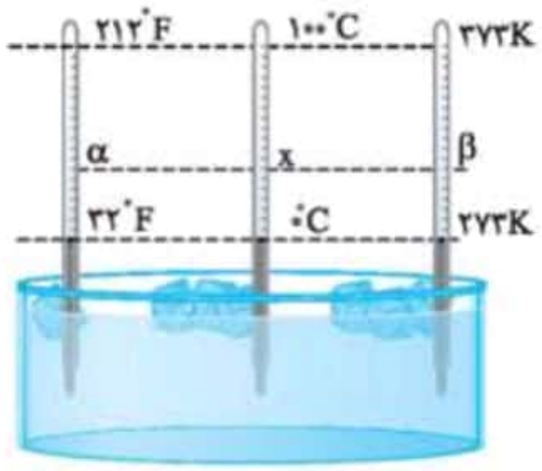
۱ ۶۴۷ با توجه به این‌که در دمای x درجهٔ سلسیوس قرار داریم، می‌توان عدد دماسنج‌های کلوین و فارنهایت را مطابق عبارات زیر نوشت:

$$\begin{cases} \text{دماسنج کلوین}: \beta = ۲۷۳ + x \\ \text{دماسنج فارنهایت}: \alpha = \frac{۹}{۵}x + ۳۲ \end{cases}$$

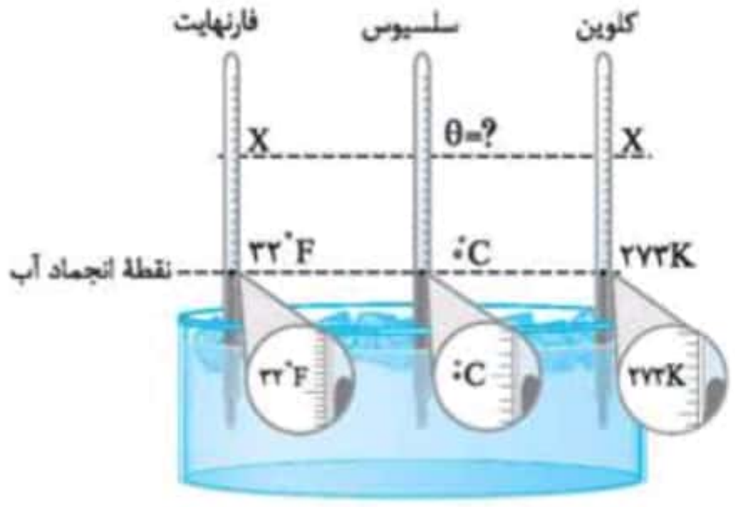
بنابراین با توجه به اطلاعات داده‌شده در صورت سؤال، می‌توان نوشت:

$$\alpha + \beta = ۳۶۱ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۵}x + ۳۲\right) + (۲۷۳ + x) = ۳۶۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴}{۵}x + ۳۰۵ = ۳۶۱ \Rightarrow x = ۲۰^\circ C$$



۲ ۶۴۸ با توجه به شکل، اعداد دماسنج‌های کلوین و فارنهایت با هم یکسان است $(T = \theta_F = X)$. بنابراین با توجه به رابطهٔ بین کلوین و درجهٔ فارنهایت با درجهٔ سلسیوس، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} T = \theta(^\circ C) + ۲۷۳ \\ \theta_F = \frac{۹}{۵}\theta(^\circ C) + ۳۲ \end{cases} \xrightarrow{T = \theta_F} \theta(^\circ C) + ۲۷۳ = \frac{۹}{۵}\theta(^\circ C) + ۳۲$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵}\theta(^\circ C) = ۲۷۳ - ۳۲ = ۲۴۱ \Rightarrow \theta(^\circ C) = \frac{۱۲۰۵}{۴}^\circ C$$

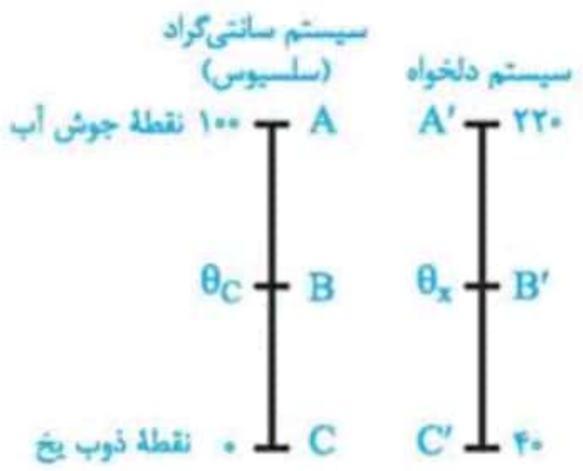
www.gajmarket.com

۱ ۶۴۹

تذکر

در این‌گونه از سؤالات، در قدم اول دو سیستم دماسنجی را در کنار یک‌دیگر رسم می‌کنیم و در ادامه بین هر دو قسمت دلخواه می‌توانیم تناسب بنویسیم.

با توجه به اطلاعات سؤال شکل متناظر با این تست، به‌صورت مقابل است در ادامه با یک تناسب بسیار ساده، به راحتی می‌توان رابطهٔ θ_x و θ_C را به‌دست آورد:



$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}\Rightarrow\frac{100-\theta_C}{100-0}=\frac{220-\theta_x}{220-40}$$

$$\overset{9}{\cancel{180}}\times(100-\theta_C)=\overset{5}{\cancel{100}}\times(220-\theta_x)\Rightarrow 900-9\theta_C=1100-5\theta_x\Rightarrow\theta_x=\frac{9}{5}\theta_C+40$$

۲ ۶۵۰ صفر کلوین، دمایی است که در آن، مولکول‌های آب به کم‌ترین میزان انرژی درونی خود می‌رسند.

۲ ۶۵۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ — انواع دماسنج‌ها (تست‌های ۶۵۱ تا ۶۵۶)

به‌طور کلی برای اندازه‌گیری دما، از دماسنج استفاده می‌کنیم. دماسنج‌ها انواع مختلفی دارند که معروف‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

۱ دماسنج گازی ۲ دماسنج مقاومت پلاتینی ۳ تف‌سنج (پیرومتر) ۴ ترموکوپل ۵ دماسنج جیوه‌ای (الکلی)

نکات مهم و کاربردی

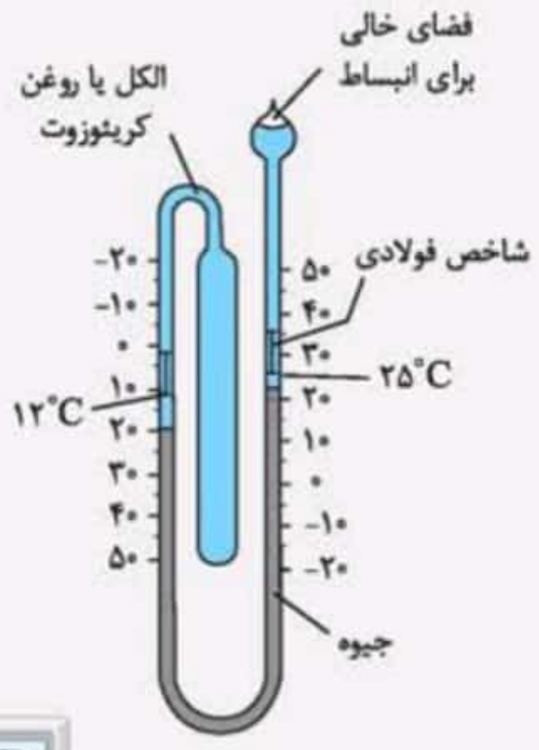
۱ ساده‌ترین و رایج‌ترین نوع دماسنج، دماسنج‌های جیوه‌ای (الکلی) می‌باشد.

۲ امروزه دانشمندان برای کارهای علمی، سه دماسنج گازی، دماسنج مقاومت پلاتینی و تف‌سنج را به عنوان **دماسنج‌های معیار** در نظر گرفته‌اند.

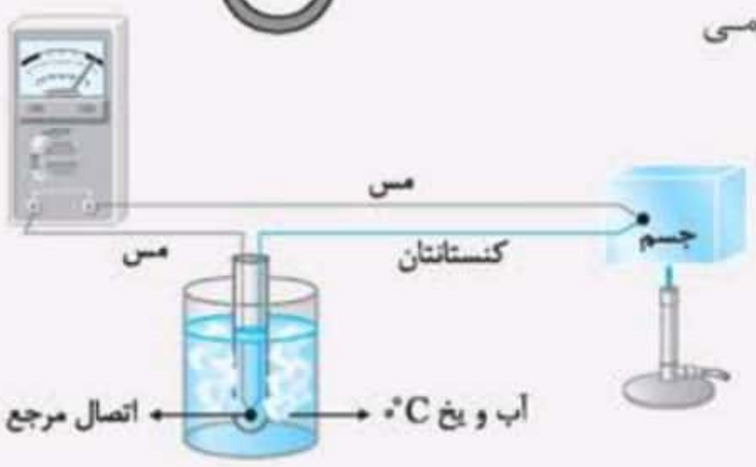
۳ دماسنج ترموکوپل تا قبل از سال ۱۹۹۰ میلادی، از دماسنج‌های معیار به شمار می‌آمد، ولی به علت دقت کم‌تر نسبت به سه دماسنج معیار اشاره شده، از مجموعهٔ دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد.

۴ اساس کار دماسنج گازی، مبتنی بر قانون گازهای کامل و اساس کار تف‌سنج، مبتنی بر تابش گرمایی است.

۵ نوع ویژه‌ای از دماسنج‌های مایعی که بیشینه و کمینهٔ دما را در یک مدت زمان معین مشخص می‌کند، دماسنج **بیشینه ـ کمینه** نام دارد. از این دماسنج معمولاً در مراکز پرورش گل و گیاه، باغداری، هواشناسی و ... استفاده می‌شود. در شکل مقابل این دماسنج را مشاهده می‌کنید.



در ادامه در مورد دماسنج‌های ترموکوپل و دماسنج‌های جیوه‌ای (الکلی) که حاوی نکات مهمی هستند، بیشتر توضیح می‌دهیم:



۱- ترموکوپل: در این نوع دماسنج با کمک دو سیم رسانای غیر هم‌جنس A و B (مثلاً A از جنس مس و B از جنس کنستانتان) و یک ولت‌سنج حساس مداری مانند شکل مقابل ایجاد می‌کنیم. یک طرف دو سیم A و B در یک دمای ثابت (مثلاً دمای ذوب یخ) بوده و سر دیگر دو سیم در مکانی به هم متصل‌اند که می‌خواهیم دمای آن مکان را اندازه بگیریم. ملاحظه می‌شود وقتی بین دو سر سیم‌ها اختلاف دما وجود دارد، ولت‌سنج عددی را نشان می‌دهد.

به عبارتی در ترموکوپل، تغییر دما باعث تغییر عدد نشان داده شده توسط ولت‌سنج می‌شود و عدد نشان داده شده توسط ولت‌سنج متناسب با اختلاف دما است، یعنی هر چه اختلاف دما بیشتر شود، عدد ولت‌سنج افزایش می‌یابد. اصطلاحاً می‌گوییم کمیت دماسنجی در این نوع دماسنج، **ولتاژ** است، زیرا با تغییر آن، دما را می‌سنجیم.

نکات مهم و کاربردی

۱ مزیت دماسنج ترموکوپل در این است که به علت جرم کوچک محل اتصال، خیلی سریع با دستگاهی که دمای آن را اندازه‌گیری می‌کنیم به حالت تعادل گرمایی می‌رسد، بنابراین تغییر دما را سریع‌تر نشان می‌دهد. شایان ذکر است که در مورد تعادل گرمایی، در ادامهٔ فصل بحث خواهیم کرد.

۲ گسترهٔ دمایی یک دماسنج ترموکوپل به جنس سیم‌های آن بستگی دارد و با توجه به جنس سیم‌ها، می‌تواند محدودهٔ وسیعی از دماها (به‌طور مثال از $-۲۷۰^{\circ}C$ تا $۱۳۷۰^{\circ}C$) را اندازه بگیرد.

۳ در ترموکوپل جهت جریان ایجاد شده در مدار، از منبع با دمای پایین‌تر به‌سمت منبع با دمای بالاتر است.

۲- دماسنج جیوه‌ای (یا الکلی): اساس کار این نوع از دماسنج، انبساط جیوه (یا الکل) در اثر تغییرات دما است. در این دماسنجِ بسیار رایج مطابق شکل مقابل، حبابی وجود دارد که تقریباً همهٔ جیوه (یا الکل) داخل آن قرار دارد و به یک لولهٔ مویین متصل است.



برای اندازه‌گیری دمای یک جسم، باید دماسنج را در تماس با آن قرار دهیم به گونه‌ای که مخزن دماسنج در تماس کامل با آن باشد. در ادامه مدتی (حدود دو الی سه دقیقه) صبر می‌کنیم تا ارتفاع مایع در لولهٔ دماسنج دیگر تغییر نکند. عددی را که در مقابل سطح مایع در لوله ثابت شده است را می‌خوانیم، این عدد دمای جسم را نشان می‌دهد.

نکات مهم و کاربردی

۱ با توجه به این‌که اساس کار این نوع دماسنج‌ها تغییر ارتفاع جیوه (یا الکل) در درون لولهٔ مویین است، هرچه لولهٔ مویین نازک‌تر باشد، در اثر تغییرات دمایی جزئی نیز، ارتفاع جیوه در درون لوله تغییر می‌کند و دقت دماسنج بالاتر می‌رود زیرا به تغییر دماهای جزئی‌تر نیز حساسیت نشان می‌دهد. به سادگی می‌توان نشان داد که افزایش حجم مخزن نیز دقت دماسنج را افزایش می‌دهد.

۲ با توجه به پایین بودن نقطهٔ جوش الکل (حدود $۸۰^{\circ}C$) و پایین بودن نقطهٔ انجماد الکل (حدود $-۱۱۵^{\circ}C$) از آن برای اندازه‌گیری دماهای پایین و از جیوه به دلیل نقطهٔ جوش بالا (حدود $۳۵۶^{\circ}C$)، برای اندازه‌گیری دماهای بالا استفاده می‌کنیم.

با توجه به خلاصه نکات فوق، در ترموکوپل تغییر دما باعث ایجاد ولتاژ می‌شود و ولتاژ ایجاد شده، متناسب با میزان اختلاف دما است.

۶۵۲ ۴ در ترموکوپل، تغییر دما باعث ایجاد ولتاژ می‌شود و ولتاژ ایجاد شده متناسب با اختلاف دما است. بنابراین هرچه اختلاف دمای دو اتصال ترموکوپل بیشتر باشد، عدد ولتاژ نشان داده شده بیشتر می‌شود و گزینهٔ (۴) نادرست است. با توجه به این توضیحات، در ترموکوپل کمیت دماسنجی که با آن دما را می‌سنجیم، ولتاژ است.

۶۵۳ ۱ همان‌طور که در خلاصه نکات (۲) نیز اشاره شد دماسنج ترموکوپل:

۱) تغییرات دما را با سرعت بیشتری نسبت به دماسنج جیوه‌ای نشان می‌دهد.

۲) گسترهٔ دماهای بیشتری را می‌تواند اندازه بگیرد.

۳) دقت بیشتری نسبت به دماسنج جیوه‌ای دارد.

۴) برای اندازه‌گیری دماهای خیلی پایین و خیلی بالا مناسب است.

با توجه به موارد ذکر شده، گزینهٔ (۱) صحیح است (دماسنج جیوه‌ای سرعت کم‌تری برای نشان دادن تغییرات دما نسبت به ترموکوپل دارد).

۶۵۴ ۴ در بین دماسنج‌های مطرح شده در این سؤال، دقت دماسنج ترموکوپل نسبت به سه دماسنج دیگر کم‌تر است، به همین دلیل از مجموعهٔ دماسنج‌های معیار، کنار گذاشته شده است.

۶۵۵ ۴ این دماسنج، دماسنج بیشینه ـ کمینه نام دارد که کم‌ترین و بیشترین مقدار دما را در یک مدت زمان معین مشخص می‌کند. از این دماسنج معمولاً در مراکز پرورش گل و گیاه، باغداری، هواشناسی و ... استفاده می‌شود. دماسنج بیشینه ـ کمینه، از دماسنج‌های معیار نمی‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۶۵۶ ۲ هنگامی‌که حجم مخزن جیوه بزرگ‌تر است یعنی حجم بیشتری جیوه در اختیار داریم، بنابراین با تغییر دمای یکسان، تغییر حجم بیشتری نیز در جیوه خواهیم داشت و با داشتن تغییر حجم بیشتر، اثر تغییر دما بهتر مشاهده شده و حساسیت و دقت دماسنج بالا می‌رود. از طرفی همان‌طور که در خلاصه نکات نیز به آن اشاره شد، وقتی لولهٔ متصل به مخزن باریک‌تر است، با تغییر دمای یکسان، ارتفاع جیوه در درون لوله بیشتر تغییر می‌کند و مجدداً حساسیت دماسنج بالاتر می‌رود و این موضوع نیز به‌معنای افزایش دقت دماسنج است.

تذکر

میزان تغییر حجم یک ماده به ازای یک تغییر دمای مشخص، با حجم اولیهٔ آن متناسب است، این موضوع را در قسمت دوم فصل چهارم فیزیک پایه دهم به صورت کامل بررسی می‌کنیم.

www.gajmarket.com

۶۵۷ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصهٔ نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ — **گرما** — (تست‌های ۶۵۷ تا ۶۹۴)

گرما: مقدار انرژی‌ای که به دلیل اختلاف دما، بین یک جسم و جسم دیگری که با آن در تماس است مبادله می‌شود، **گرما** نام دارد. اگر دمای یک جسم با مبادلهٔ گرمای Q از θ_1 به θ_2 برسد، میزان گرمای مبادله شده توسط آن برابر است با:



$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1) = mc\Delta\theta$$

نکات مهم و کاربردی

۱ پارامتر c، گرمای ویژه نام دارد و مطابق تعریف مقدار گرمایی است که باید به $1kg$ از جسم داده شود تا دمای آن $1^\circ C$ (یا $1K$) افزایش یابد.

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[\Delta\theta = 1^\circ C]{m = 1kg} Q = c$$

۲ در رابطهٔ فوق Q (گرما) برحسب ژول (J)، m (جرم) برحسب kg و $\Delta\theta$ برحسب درجهٔ سلسیوس یا کلوین است، بنابراین یکای گرمای ویژه برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow c = \frac{Q}{m\Delta\theta} \Rightarrow c \text{ واحد} \equiv \frac{J}{kg.^\circ C} \equiv \frac{J}{kg.K}$$

۳ گاهی از اوقات پارامتر mc را با C نشان داده و به آن **ظرفیت گرمایی** می‌گوییم: $Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{C = mc} Q = C\Delta\theta$

مطابق رابطهٔ فوق، ظرفیت گرمایی یک ماده، مقدار گرمایی است که باید به **کل ماده** داده شود تا دمای آن $1K$ افزایش یابد.

$$C = \frac{Q}{\Delta\theta} \Rightarrow C \text{ واحد} \equiv \frac{J}{K} \text{ یا } \frac{J}{^\circ C}$$

۴ **گرمای ویژه (c)** وابسته به جنس مولکول‌های ماده بوده و از جرم جسم مستقل است. اما ظرفیت گرمایی $(C = mc)$، علاوه بر جنس مولکول‌های ماده به جرم جسم نیز وابسته است.

۵ **گرمای ویژهٔ آب** در مقایسه با بسیاری از فلزات مانند آلومینیوم، آهن، جیوه، سرب و ... بالاتر است. بالا بودن گرمای ویژهٔ آب دلیل اصلی استفاده از آن در رادیاتور اتومبیل‌ها و ... است، زیرا گرمای زیادی را قبل از بخار شدن جذب کرده و سبب خنک شدن رادیاتور می‌شود.

۶ علامت Q مشخص می‌کند که جسم گرما گرفته و یا از دست داده است:
$Q > 0 \Leftarrow$ جسم گرما گرفته است.
$Q < 0 \Leftarrow$ جسم گرما از دست داده است.

تمرین ۱ **جسمی به جرم $2kg$، بدون تغییر حالت $40kJ$ گرما از دست می‌دهد. اگر دمای اولیهٔ جسم $50^\circ C$ باشد، دمای ثانویه‌اش به چند درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ $(c = 400 J/kg.^\circ C)$** (تجربی داخل ۸۷)

۱) صفر ۲) ۲۵ ۳) -50 ۴) ۱۰۰

پاسخ در ابتدا با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، میزان $\Delta\theta$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m = 2kg \ , \ \theta_1 = 50^\circ C \ , \ \theta_2 = ? \ , \ c = 400 J/kg.^\circ C \ , \ Q = -40kJ = -40000J \Rightarrow \text{جسم گرما از دست می‌دهد.}$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow -40000 = 2 \times 400 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = -50^\circ C$$

حال، با توجه به این‌که $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ است، داریم:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow -50 = \theta_2 - 50 \Rightarrow \theta_2 = 0^\circ C$$ (گزینهٔ ۱)

دقت: این جسم گرما از دست داده است و $Q < 0$ است، بنابراین دمایش قطعاً کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۴)، بدون حل کردن نادرست است.

تعبیر مولکولی دما (دیدگاه میکروسکوپی دما): ماده از ذره‌های ریزی تشکیل شده است که با تندی‌های متفاوت و در نتیجه انرژی‌های متفاوت در حرکت و جنبش هستند. ذره‌های جسم علاوه بر انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل نیز دارند. مجموع انرژی‌های مولکول‌های تشکیل‌دهندهٔ هر جسم (جنبشی و پتانسیل)، انرژی درونی نام دارد.

مثال **انرژی درونی یک فنجان چای داغ، از انرژی درونی همان فنجان چای وقتی مدتی مانده و سرد شده است بیشتر می‌باشد. می‌دانیم چای سرد دمای پایین‌تری نسبت به چای داغ دارد. به این ترتیب هرچه دمای جسم معینی بالاتر باشد، انرژی درونی آن بیشتر است.**

نکته اگر انرژی جنبشی همهٔ ذره‌های جسم را بر تعداد ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ جسم تقسیم کنیم، انرژی جنبشی متوسط یک ذره به‌دست می‌آید. می‌توان گفت دمای هر جسم متناسب است با انرژی جنبشی متوسط مولکول‌های سازندهٔ آن. برای درک بهتر به مثال صفحهٔ بعد توجه کنید:

مثال **انرژی جنبشی متوسط ذره‌های آبی که به وسیلهٔ یک لیوان از استخری برداشته شده است، با انرژی جنبشی متوسط ذره‌های آب استخر برابر است ولی به‌دلیل تفاوت تعداد ذره‌های آب لیوان و آب استخر، انرژی درونی آب لیوان به مراتب کم‌تر از انرژی درونی آب استخر است.**

آشنایی با سه نوع سؤال پرتکرار در کنکور:

۱) در بسیاری از سؤالات کنکور، به دو جسم با جرم‌های m_1 و m_2 گرما داده و این دو جسم را با یک‌دیگر مقایسه می‌کنند. برای مقایسهٔ آن‌ها کافیست دو بار از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ استفاده کنیم.

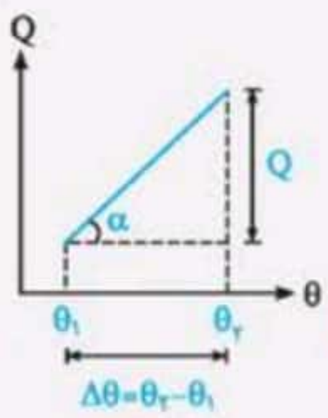
$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{c_2}{c_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1}$$

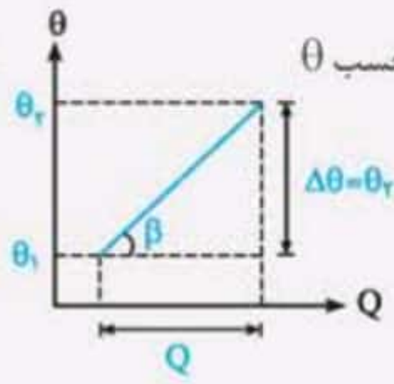
۲) در بعضی از تست‌های کنکور، با یک گرمکن با توان P، با بازده Ra به یک ماده گرما داده می‌شود. میزان افزایش دمای جسم عبارت است از:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta : \text{گرمای گرفته شده توسط جسم} \\ Q = Ra \times Pt : \text{گرمای مفید داده شده توسط گرمکن به جسم} \end{cases} \Rightarrow mc\Delta\theta = Ra \times Pt$$

دقت شود که اگر بازده گرمکن در صورت سؤال داده نشده بود، آن را یک (۱۰۰ درصد) درنظر می‌گیریم.

۳) نمودار Q برحسب θ به‌صورت خطی است که شیب آن برابر ظرفیت گرمایی می‌باشد (البته تا زمانی‌که ماده تغییر حالت ندهد، که این بحث در ادامه بیشتر بررسی می‌شود.)



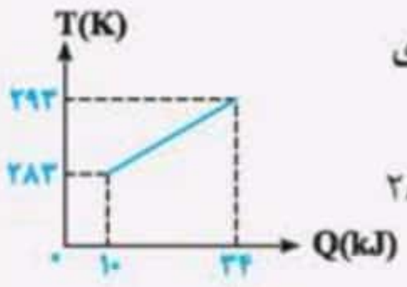


$$\text{شیب نمودار } Q \text{ برحسب } \theta = \tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{Q}{\Delta\theta} \xrightarrow[Q=mc\Delta\theta]{\text{از طرفی داریم:}} \tan\alpha = \frac{mc\Delta\theta}{\Delta\theta} = mc$$

دقت کنیم اگر نمودار θ برحسب Q داده شود، شیب آن برابر عکس ظرفیت گرمایی می‌باشد.

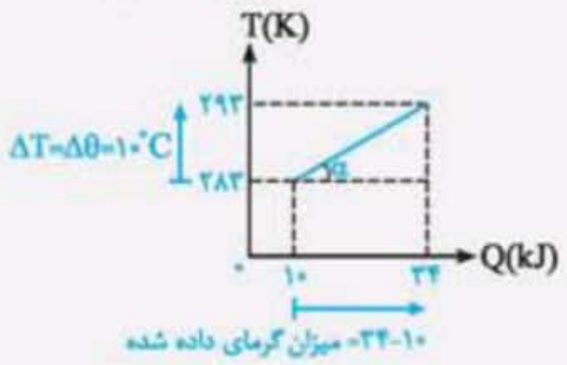
$$\tan\beta = \frac{1}{mc}$$

تمرین۲ **نمودار تغییرات دمای ۱۰ کیلوگرم از یک ماده بر حسب گرمای داده شده به آن، مطابق شکل است. گرمای ویژهٔ این جسم چند $kJ/kg.K$ است؟**



۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۲/۴

پاسخ با توجه به نمودار، اطلاعات زیر را از آن استخراج کرده و داریم:



$$m = 10kg \ , \ \Delta T = 293 - 283 = 10K \xrightarrow{\Delta\theta = \Delta T} \Delta\theta = 10^\circ C$$

میزان گرمای داده شده: $Q = Q_2 - Q_1 = 34 - 10 = 24kJ$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 24 = 10 \times c \times 10 \Rightarrow c = 0/24 kJ/kg.K$$ (گزینهٔ ۲)

تذکر تغییر دما برحسب درجهٔ سلسیوس و کلوین با هم برابر است.

$$\Delta T(K) = \Delta\theta(^\circ C)$$

با توجه به خلاصه نکات فوق، گرما مقدار انرژی‌ای است که به‌دلیل اختلاف دمای بین یک جسم و جسم دیگری که با آن در تماس است، بین آن‌ها مبادله می‌شود و به‌طور کلی به‌صورت خودبه‌خودی، از جسم با دمای بیشتر به جسم با دمای کم‌تر منتقل می‌شود.

۲ ۶۵۸ گرمای ویژهٔ یک جسم، از جرم آن مستقل بوده و به جنس ماده بستگی دارد، با توجه به این موضوع، گزینهٔ (۲) نادرست است. از سوی دیگر داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \begin{cases} Q \propto m \\ Q \propto c \\ Q \propto \Delta\theta \end{cases}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با افزایش جرم جسم، گرمای لازم برای تغییر دمای معین جسم افزایش می‌یابد.

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \uparrow Q \propto m \uparrow$$

۳) از $\theta_1 = 10^\circ C$ تا $\theta_2 = 20^\circ C$، تغییر دمای $\Delta\theta_1 = 10^\circ C$ ایجاد شده و از سوی دیگر از $\theta_2 = 20^\circ C$ تا $\theta_3 = 30^\circ C$ نیز تغییر دمای $\Delta\theta_2 = 10^\circ C$ ایجاد می‌شود و در نتیجه میزان گرمای لازم برای مقدار مشخصی از آب، در هر دو حالت یکسان است.

۴) همان‌طور که در خلاصه نکات (۳) نیز بیان کردیم، مقدار گرمایی که به $1kg$ از جسم باید داده شود تا دمای آن $1^\circ C$ افزایش یابد را **گرمای ویژهٔ** آن جسم می‌گویند:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[\Delta\theta=1^\circ C]{m=1kg} Q = c$$

با توجه به رابطهٔ ارائه شده، یکای c عبارت است از:

$$c = \frac{Q}{m\Delta\theta} = \frac{J}{kg.K}$$

gajmarket.com

۴ ۶۵۹ ظرفیت گرمایی یک ماده، مقدار گرمایی است که به کل جسم داده می‌شود تا دمای آن $1^\circ C$ (یا $1K$) افزایش یابد و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$C = mc$: ظرفیت گرمایی $\Rightarrow Q = C\Delta\theta$ یا $Q = mc\Delta\theta$

بنابراین ظرفیت گرمایی یک جسم، متناسب با جرم آن جسم است.

از سوی دیگر یکای ظرفیت گرمایی در SI برابر است با:

$$C = \frac{Q}{\Delta\theta} \Rightarrow (C)\text{ یکای ظرفیت گرمایی} \equiv \frac{J}{K}$$

تذکر

همان‌طور که می‌دانیم، تغییرات دمای یک جسم برحسب درجهٔ سلسیوس با تغییرات دمای آن جسم برحسب کلوین برابر است (یعنی: $\Delta\theta = \Delta T$)، بنابراین $\frac{J}{kg.K}$ و $\frac{J}{kg.^\circ C}$ با یکدیگر معادل‌اند.

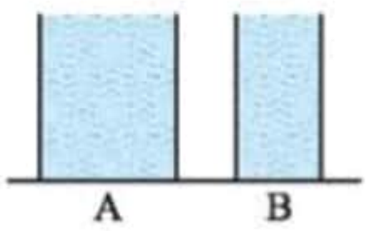
۱ ۶۶۰ گرمای ویژه به جرم جسم بستگی ندارد و با نصف شدن جرم لولهٔ مسی، مقدار آن ثابت می‌ماند (یک برابر). از طرفی ظرفیت گرمایی به جرم جسم وابسته بوده و با نصف شدن جرم، $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

$\frac{1}{2}$ برابر $\quad$ $\frac{1}{2}$ برابر

ظرفیت گرمایی $= m \times c$ (c: ثابت)

۳ ۶۶۱ بزرگ‌تر بودن گرمای ویژهٔ آب نسبت به دیگر مایعات، باعث می‌شود که از آن به‌عنوان مایع خنک کننده در رادیاتور اتومبیل استفاده شود، زیرا هر چقدر گرمای ویژهٔ مایع بزرگ‌تر باشد، برای افزایش دما انرژی بالاتری نیاز دارد و مایع دیرتر به جوش می‌آید. به‌عبارت بهتر مقدار کمی آب (مثلاً ۲ لیتر)، انرژی زیادی را جذب می‌کند تا به جوش آید و این مورد، موضوع مناسبی در یک رادیاتور محسوب می‌شود.

۴ ۶۶۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



۱) با توجه به این‌که مقدار آب درون دو ظرف A و B متفاوت است، می‌توان نتیجه گرفت که انرژی درونی و ظرفیت گرمایی آب درون دو ظرف با یکدیگر متفاوت است.

۲) با توجه به این‌که مساحت کف دو ظرف A و B متفاوت است، می‌توان نتیجه گرفت که نیروی وارد بر کف ظرف‌ها نیز متفاوت است.

$$F = PA = (\rho gh + P_0) \times A \xrightarrow{A_A > A_B} F_A > F_B$$

۳) انرژی جنبشی متوسط مولکول‌ها، یعنی انرژی جنبشی کل مولکول‌های ظرف تقسیم بر تعداد کل مولکول‌های ظرف، مستقل از جرم آب درون ظرف است و به دمای آب درون ظرف بستگی دارد و در نتیجه برای هر دو ظرف یکسان است.

۱ ۶۶۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴ ۶۶۴ **گام اول:** ابتدا میزان افزایش دما را برحسب درجهٔ سلسیوس به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\theta_F = \frac{9}{5}\Delta\theta_C \xrightarrow{\Delta\theta_F = 72^\circ F} \frac{9}{5}\Delta\theta_C = 72 \Rightarrow \Delta\theta_C = 40^\circ C$$

گام دوم: حال به راحتی با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، داریم:

$$Q = \underset{C}{mc}\Delta\theta \Rightarrow Q = C\Delta\theta = 4500 \times 40 = 1/8 \times 10^5 J$$

۲ ۶۶۵ با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ برای هر دو تغییر دمای زیر داریم:

حالت اول: تغییر دما از θ_1 به $\theta_2 = 3\theta_1$:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 3\theta_1 - \theta_1 = 2\theta_1 \Rightarrow Q = mc\Delta\theta = mc(2\theta_1) \Rightarrow Q = 2mc\theta_1 \quad : (I)$$

حالت دوم: تغییر دما از θ_2 به $4\theta_2$:

$$\Delta\theta' = 4\theta_2 - \theta_2 = 3\theta_2 \xrightarrow{\theta_2 = 3\theta_1} \Delta\theta' = 3(3\theta_1) = 9\theta_1$$

$$Q' = mc\Delta\theta' = mc(9\theta_1) = 9mc\theta_1 \quad : (II)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{I,II} \frac{Q'}{Q} = \frac{9mc\theta_1}{2mc\theta_1} = \frac{9}{2} = 4/5 \Rightarrow Q' = 4/5\,Q$$

۳ ۶۶۶ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول (محاسبهٔ دمای اولیهٔ جسم): طبق صورت سؤال، با دو برابر شدن دمای جسم برحسب کلوین، دمای آن برحسب درجهٔ سلسیوس ۴ برابر می‌شود.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: T_1 = \theta_1 + 273 \\ \text{حالت دوم}: 2T_1 = 4\theta_1 + 273 \end{cases} \Rightarrow 2(\theta_1 + 273) = 4\theta_1 + 273 \Rightarrow 2\theta_1 = 273 \Rightarrow \theta_1 = 136/5^\circ C$$

گام دوم: حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

تغییرات دما: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 4\theta - \theta = 3\theta = 3 \times 136/5 = 409/5^\circ C$

$$Q = \overset{C}{mc}\Delta\theta \Rightarrow Q = C\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q}{C} = \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta = 409/5^\circ C} \frac{Q}{C} = 409/5^\circ C$$

۳ ۶۶۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که در صورت سؤال، به‌جای جرم آب، حجم آن داده شده است، ابتدا با کمک رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، جرم آب را به‌دست می‌آوریم:

$$V = ۱۰^{۵}\,m^{۳}\ ,\ \rho = ۱۰۰۰\,kg/m^{۳} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۱۰۰۰ = \frac{m}{۱۰^{۵}} \Rightarrow m = ۱۰^{۸}\,kg$$

گام دوم: در ادامه با استفاده از رابطهٔ زیر، دمای ثانویهٔ جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$Q = ۲۱۰۰\,\underset{\text{گیگاژول}}{GJ} = ۲۱۰۰\times ۱۰^{۹}\,J = ۲۱\times ۱۰^{۱۱}\,J\ ,\ \theta_۱ = ۲۵^\circ C\ ,\ \theta_۲ = ?\ ,\ c = ۴۲۰۰\,J/kg.^\circ C$$

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ \Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱ \end{cases} \Rightarrow Q = mc(\theta_۲ - \theta_۱) \Rightarrow ۲۱\times ۱۰^{۱۱} = ۱۰^{۸}\times ۴۲۰۰\times(\theta_۲ - ۲۵) \Rightarrow \theta_۲ = ۳۰^\circ C$$

۲ ۶۶۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که در صورت سؤال، به جای جرم آب، حجم آن داده شده است، ابتدا با کمک رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، جرم آب را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{حجم آب}: V = ۱/۵\times ۱۰^{-۲}\,Lit = ۱/۵\times ۱۰^{-۲}\times ۱۰^{-۳} = ۱/۵\times ۱۰^{-۵}\,m^{۳}\ ,\ \rho = ۱۰۰۰\,kg/m^{۳}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = ۱۰۰۰\times ۱/۵\times ۱۰^{-۵} = ۱/۵\times ۱۰^{-۲}\,kg$$

گام دوم: در هر ثانیه، $۱/۵\times ۱۰^{-۲}\,kg$ آب با دمای $۸۰^\circ C$ وارد رادیاتور شده و با دمای $۶۰^\circ C$ از آن خارج می‌شود. بنابراین گرمای داده شده توسط رادیاتور به هوای محیط در هر ثانیه برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta = ۱/۵\times ۱۰^{-۲}\times ۴۲۰۰\times(۶۰ - ۸۰) = -۱۲۶۰\,J$$

بنابراین مقدار گرمای منتقل شده در یک شبانه‌روز برابر است با:

$$Q_T = Q\times t = (-۱۲۶۰)\times(۲۴\times ۶۰\times ۶۰) = -۱۰۸۸۶۴۰۰۰\,J = -۱۰۸۸۶۴\,kJ$$

۳ ۶۶۹ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا جرم کره را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \rho V = \rho\left(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}_{\text{خارجی}} - \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}_{\text{داخلی}}\right) = \frac{۴}{۳}\pi(r^{۳}_{\text{خارجی}} - r^{۳}_{\text{داخلی}})\rho$$

$$\xrightarrow[r_{\text{خارجی}}=۵cm\ ،\ r_{\text{داخلی}}=۴cm]{\rho=۳\,gr/cm^{۳}} m = \underbrace{\frac{۴}{۳}\times ۳\times(۱۲۵ - ۶۴)}_{\text{حجم برحسب } cm^{۳}}\times\underbrace{۳}_{\substack{\text{چگالی برحسب} \\ gr/cm^{۳}}} = ۱۲\times ۶۱\,gr = ۱۲\times ۶۱\times ۱۰^{-۳}\,kg$$

گام دوم: حال افزایش دمای این کره را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[\substack{m=۱۲\times ۶۱\times ۱۰^{-۳}\,kg \\ c=۴۰۰\,J/kg.^\circ C}]{Q=۷۳۲۰\,J} ۷۳۲۰ = ۱۲\times ۶۱\times ۱۰^{-۳}\times ۴۰۰\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۲۵^\circ C$$

گام سوم: حال برای به‌دست آوردن تغییرات دما برحسب درجهٔ فارنهایت، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C = \frac{۹}{۵}\times ۲۵ = ۴۵^\circ F$$

۱ ۶۷۰ با توجه به رابطهٔ $E = P\times t$ بین انرژی و توان، در مقایسهٔ انرژی دریافت‌شده و انرژی گسیل‌شده توسط این گیرنده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_{\text{دریافت}} = P_{\text{دریافت}}\times t = ۱۰\times ۱۰۰ = ۱۰۰۰\,J \\ E_{\text{گسیل}} = P_{\text{گسیل}}\times t = ۳\times ۱۰۰ = ۳۰۰\,J \end{cases}$$

اختلاف این دو انرژی در واقع انرژی درونی دستگاه گیرنده را افزایش می‌دهد و می‌توان نوشت:

$$\text{تغییر انرژی درونی} = \Delta U = E_{\text{دریافت}} - E_{\text{گسیل}} = ۱۰۰۰ - ۳۰۰ = ۷۰۰\,J$$

با توجه به میزان افزایش انرژی درونی دستگاه گیرنده، میزان افزایش دمای آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta U = Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۷۰۰ = \underset{\text{جرم برحسب kg}}{\boxed{۰/۵}}\times ۷۰۰\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۲^\circ C = ۲K$$

دقت: در عمل، این افزایش دما برای دستگاه گیرنده دائمی نیست و پس از مدتی دمای دستگاه گیرنده ثابت می‌ماند. به‌عبارت بهتر پس از آن که دمای دستگاه به مقدار معینی رسید، با سازوکارهایی مانع از افزایش بیشتر دمای دستگاه می‌شویم.

۲ ۶۷۱ برای پاسخ دادن به این مسأله، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به اطلاعات مسأله، دمای جسم نسبت به حالت قبل ٪۲۵ افزایش یافته است، یعنی:

$$\Delta\theta_۲ = \Delta\theta_۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰}\Delta\theta_۱ \Rightarrow \Delta\theta_۲ = \Delta\theta_۱ + \frac{۱}{۴}\Delta\theta_۱ = \frac{۵}{۴}\Delta\theta_۱$$

www.gajmarket.com

گام دوم: با توجه به $\frac{۵}{۴}$ برابر شدن $\Delta\theta_۱$، جرم جسم با توجه به محاسبات زیر باید $\frac{۴}{۵}$ برابر شود تا در یک گرمای ثابت، به خواستهٔ مسأله برسیم:

$$Q=\underset{\text{ثابت}}{m}\ \underset{\text{ثابت}}{c}\ \Delta\theta \Rightarrow m_۲=\frac{۴}{۵}m_۱$$

($\frac{۵}{۴}$ برابر، $\frac{۴}{۵}$ برابر)

جرم جسم باید ۲۰ درصد کاهش یابد. $\Rightarrow$ محاسبهٔ تغییر جرم ایجاد شده: $\Delta m = m_۲ - m_۱ = \frac{۴}{۵}m_۱ - m_۱ = -\frac{۱}{۵}m_۱ = -\frac{۲۰}{۱۰۰}m_۱$

نگاهی دیگر

می‌توانستید به‌صورت زیر نیز این سؤال را حل کنید:

$$Q_۱=Q_۲ \Rightarrow m_۱ \cancel{c}\Delta\theta_۱ = m_۲ \cancel{c}\Delta\theta_۲ \Rightarrow m_۱ \times \cancel{\Delta\theta_۱} = m_۲ \times \left(\frac{۵}{۴}\cancel{\Delta\theta_۱}\right) \Rightarrow m_۲=\frac{۴}{۵}m_۱$$

۶۷۲ ۴ با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، در مقایسهٔ دو ماده چون گرمای داده شده به دو جسم و تغییرات دمای هر دو جسم یکسان است $(Q_۱=Q_۲\ ,\ \Delta\theta_۱=\Delta\theta_۲)$، خواهیم داشت:

$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_۱}{Q_۲}=\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{c_۱}{c_۲}\times\frac{\Delta\theta_۱}{\Delta\theta_۲} \Rightarrow ۱=\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{c_۱}{c_۲} \Rightarrow \frac{c_۱}{c_۲}=\frac{m_۲}{m_۱}$$

بنابراین نسبت گرمای ویژهٔ آن‌ها، برابر با نسبت عکس جرم آن‌هاست.

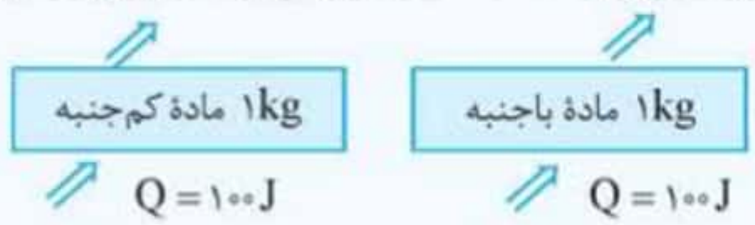
۶۷۳ ۲ با توجه به برابر بودن جرم دو جسم $(m_۱=m_۲)$ و گرمای داده شده به آن‌ها $(Q_۱=Q_۲)$، داریم:

$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_۱}{Q_۲}=\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{c_۱}{c_۲}\times\frac{\Delta\theta_۱}{\Delta\theta_۲} \xrightarrow[m_۱=m_۲]{Q_۱=Q_۲} ۱=\frac{c_۱}{c_۲}\times\frac{\Delta\theta_۱}{\Delta\theta_۲} \Rightarrow c_۲\Delta\theta_۲=c_۱\Delta\theta_۱$$

با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده، اندازهٔ تغییر دمای جسمی بیشتر است که گرمای ویژه‌اش کم‌تر باشد (c کم‌تر $\Leftarrow \Delta\theta$ بیشتر).

نتیجه

کاریکاتوری برای درک بهتر:



یعنی در دو ماده با جرم یکسان، ماده با گرمای ویژهٔ بیشتر (با جنبه‌تر) به ازای گرمای یکسان، تغییر دمای کم‌تری دارد.

۶۷۴ ۲ با توجه به اطلاعات صورت سؤال، داریم:

$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_۱}{Q_۲}=\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{c_۱}{c_۲}\times\frac{\Delta\theta_۱}{\Delta\theta_۲} \xrightarrow[\Delta\theta_۱=\Delta\theta_۲]{Q_۲=\frac{۵}{۴}Q_۱} \frac{\cancel{Q_۱}}{\frac{۵}{۴}\cancel{Q_۱}}=\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{c_۱}{c_۲}\times\frac{\cancel{\Delta\theta_۱}}{\cancel{\Delta\theta_۲}} \Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{c_۱}{c_۲} \Rightarrow \frac{m_۱}{m_۲}=\frac{۴}{۵}\frac{c_۲}{c_۱}$$

۶۷۵ ۲ با توجه به سؤال، به هر دو جسم A و B، گرمای Q را داده‌ایم و با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان نوشت: C: ظرفیت گرمایی

$$Q=\overset{\uparrow}{mc}\Delta\theta = C\Delta\theta \xrightarrow{Q_A=Q_B} C_A\Delta\theta_A = C_B\Delta\theta_B \Rightarrow \frac{C_A}{C_B}=\frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

۶۷۶ ۱ **گام اول:** ابتدا جرم دو جسم A و B را مقایسه می‌کنیم:

$$V_A = ۲V_B\ ,\ \rho_A = ۰/۸\rho_B$$

$$\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow m=\rho V \Rightarrow \frac{m_A}{m_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B}=۰/۸\times۲=۱/۶$$

گام دوم: در ادامه برای مقایسهٔ $\Delta\theta$ داریم:

$$Q_A=Q_B\ ,\ c_A=\frac{۱}{۲}c_B\ ,\ \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}=?$$

$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{c_A}{c_B}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \Rightarrow ۱=۱/۶\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}=\frac{۲}{۱/۶}=\frac{۵}{۴}$$

۶۷۷ ۳ برای حل این سؤال، دو گام زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: تغییرات دمای جسم B را برحسب درجهٔ سلسیوس محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta\theta_F=\frac{۹}{۵}\Delta\theta_C \Rightarrow ۳۶=\frac{۹}{۵}\Delta\theta_c \Rightarrow \Delta\theta_c=۲۰^\circ C$$

گام دوم: حال با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، در مقایسهٔ دو جسم می‌توان نوشت:

$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{c_A}{c_B}\times\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \xrightarrow{Q_A=Q_B} ۱=\frac{۳۰۰}{m_B}\times\frac{۵۰۰}{۷۵۰}\times\frac{۴۰}{۲۰} \Rightarrow m_B=۴۰۰gr$$

۳ ۶۷۸ با مقایسهٔ گرمای داده شده به دو گلولهٔ مسی و با کمک رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، می‌توان نوشت:

$$Q_1 = ۱۲۰۰J \ , \ Q_۲ = ۳۰۰J \ , \ \Delta\theta_1 = \Delta\theta_۲ = ۳۰^\circ C \ , \ c = ۴۰۰J/kg.^\circ C \ , \ m_1 - m_۲ = ?$$

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 c_1 \Delta\theta_1 \Rightarrow ۱۲۰۰ = m_1 \times ۴۰۰ \times ۳۰ \\ Q_۲ = m_۲ c_۲ \Delta\theta_۲ \Rightarrow ۳۰۰ = m_۲ \times ۴۰۰ \times ۳۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{را از هم کم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی}} (۱۲۰۰ - ۳۰۰) = (m_1 - m_۲) \times ۴۰۰ \times ۳۰$$

$$\Rightarrow ۹۰۰ = (m_1 - m_۲) \times ۱۲۰۰۰ \Rightarrow (m_1 - m_۲) = \frac{۹۰۰}{۱۲۰۰۰} kg = \frac{۳}{۴} \times ۱۰^{-۱} = ۷۵ \times ۱۰^{-۳} kg = ۷۵gr$$

۴ ۶۷۹ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا جرم دو گلوله را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$m = \rho V = \rho \times \left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right) \xrightarrow{\rho \text{ یکسان}} \frac{m_A}{m_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^۳ = (۲)^۳ = ۸$$

گام دوم: حال میزان افزایش دمای گلوله‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{c_A = c_B} \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \xrightarrow{Q_A = Q_B} ۱ = ۸ \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{۱}{۸}$$

۲ ۶۸۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (مقایسهٔ حجم فلز به کار رفته در دو کره):

$$V_A = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲۰^۳ \ , \ V_B = \frac{۴}{۳}\pi(۲۰^۳ - ۱۰^۳) \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{۸}{۷}$$ کرهٔ A توپر و B توخالی است.

گام دوم: (مقایسهٔ جرم دو کره):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \underset{\text{یکسان}}{\rho} V \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{۸}{۷}$$

گام سوم: (مقایسهٔ تغییر دمای دو کره):

$$Q_A = Q_B \Rightarrow m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B \Rightarrow \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{۸}{۷}$$

۳ ۶۸۱ با توجه به این‌که گرمای ویژهٔ آلومینیم از گرمای ویژهٔ مس و سرب بیشتر است، به‌ازای هر $۱^\circ C$ که دمای یک کیلوگرم آلومینیم بالا رود، $۹۰۰J$ گرما از آب گرفته می‌شود ولی به‌ازای هر $۱^\circ C$ که دمای یک کیلوگرم از هریک از مس و سرب بالا رود، به‌ترتیب $۳۹۰J$ و $۱۳۰J$ گرما از آب گرفته می‌شود. بنابراین گلولهٔ آلومینیمی گرمای بیشتری از آب می‌گیرد و آن را سردتر می‌کند.

۳ ۶۸۲ با توجه به این‌که گرمای ویژهٔ آلومینیم بیشتر از دو فلز دیگر است، بنابراین در یک جرم یکسان از سه فلز و برای یک تغییر دمای یکسان، گرمای داده‌شده توسط این فلز به پارافین بیشتر خواهد بود ($Q \uparrow = m \uparrow c \Delta\theta$). بنابراین با قرار دادن فلز آلومینیم بر روی پارافین، مقدار بیشتری از پارافین ذوب خواهد شد.

* دقت شود که دمای هر سه گلوله از $۱۰۰^\circ C$ به دمای محیط خواهد رسید. بنابراین اندازهٔ تغییر دما در هر سه گلوله برابر است.

۱ ۶۸۳ در این سؤال، بازده گرمکن ۱۰۰ درصد نمی‌باشد، یعنی فقط بخشی از گرمای داده شده به آب توسط گرمکن صرف بالا بردن دمای آن می‌شود. کل گرمای داده شده توسط گرم‌کن برابر $Q_{\text{کل}} = Pt$ می‌باشد که فقط قسمتی از آن ($Q_{\text{مفید}}$) صرف بالا بردن دمای آب می‌شود.

$$\text{بازده: } Ra = \frac{Q_{\text{مفید}}}{Q_{\text{کل}}} \Rightarrow Q_{\text{مفید}} = Ra \times Q_{\text{کل}} = Ra \times Pt$$

در ادامه با توجه همزمان به رابطهٔ $Q_{\text{مفید}} = mc\Delta\theta$ و رابطهٔ $Q_{\text{مفید}} = Ra \times Pt$، می‌توان نوشت:

$$mc\Delta\theta = Ra \times Pt \Rightarrow t = \frac{mc\Delta\theta}{Ra \times P}$$

$$m = ۴۰۰gr = ۰/۴kg \ , \ c = ۴۲۰۰J/kg.^\circ C \ , \ \Delta\theta = \theta_۲ - \theta_1 = ۷۰ - ۲۰ = ۵۰^\circ C \ , \ Ra = \frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \ , \ P = ۲kW = ۲۰۰۰W$$

$$t = \frac{۰/۴ \times ۴۲۰۰ \times ۵۰}{\frac{۱}{۲} \times ۲۰۰۰} = ۸۴s$$

۲ ۶۸۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به توان گرمکن ($P = ۳۰۰W$)، در مدت $۲۴s$ مقدار گرمای تولید شده برابر است با: $Q_{\text{کل}} = Pt = ۳۰۰ \times ۲۴J$

گام دوم: گرمایی که به مایع می‌رسد، صرف بالا بردن دمای آن می‌شود و با توجه به این موضوع، مقدار گرمای رسیده به مایع برابراست با:

$$Q_{\text{مفید}} = mc\Delta\theta = \frac{۶۰}{۱۰۰۰} \times ۱۵۰۰ \times (۵۰ - ۳۰) = ۱۸۰۰J$$

گام سوم: در نهایت برای محاسبهٔ درصد گرمای دریافت‌شده توسط مایع از گرمای کل تولیدی (یعنی بازده گرمکن) داریم:

$$\text{درصد گرمای دریافت‌شده} = \frac{Q_{\text{مفید}}}{Q_{\text{کل}}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۸۰۰}{۳۰۰ \times ۲۴} \times ۱۰۰ = ۲۵٪$$

gajmarket.com

۳ ۶۸۵ اطلاعات مسأله به‌صورت زیر است و نسبت $\frac{c_۲}{c_۱}$ از ما پرسیده شده است. به‌همین منظور داریم:

$$\text{آب (مادهٔ ۱)}: \begin{cases} m_۱ = ۱kg \\ t_۱ = ۱۰min = ۱۰ \times ۶۰ = ۶۰۰s \\ \Delta\theta_۱ = ۳۰^\circ C \end{cases} \qquad \text{روغن (مادهٔ ۲)}: \begin{cases} m_۲ = ۳kg \\ t_۲ = ۱۵min = ۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰s \\ \Delta\theta_۲ = \Delta\theta_۱ = ۳۰^\circ C \end{cases}$$

$$\text{مقایسهٔ دو حالت} \Rightarrow \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{P_۲ t_۲}{P_۱ t_۱} \xrightarrow[P_۱ = P_۲]{\text{اجاق‌ها یکسان است}} \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{t_۲}{t_۱} \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times \frac{c_۲}{c_۱} \times \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} \Rightarrow \frac{۹۰۰}{۶۰۰} = \frac{۳}{۱} \times \frac{c_۲}{c_۱} \times \frac{۳۰}{۳۰} \Rightarrow \frac{c_۲}{c_۱} = \frac{۱}{۲}$$

۳ ۶۸۶ برای حل این سؤال، ابتدا کل گرمای منتقل‌شده به آب را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = P\Delta t \xrightarrow[\Delta t = ۶ \times ۶۰s]{P = ۲۸۰J/s} Q = ۲۸۰ \times ۶ \times ۶۰J$$

حال برای به‌دست آوردن دمای نهایی آب می‌توان نوشت:

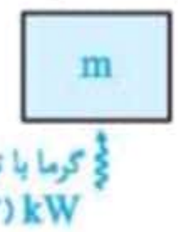
$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[m = ۱/۲kg]{c = ۴۲۰۰J/kg.^\circ C} ۲۸۰ \times ۶ \times ۶۰ = ۱/۲ \times ۴۲۰۰ \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۲۰^\circ C \Rightarrow \theta_۲ - \theta_۱ = ۲۰ \xrightarrow{\theta_۱ = ۱۸^\circ C} \theta_۲ = ۲۰ + ۱۸ = ۳۸^\circ C$$

۴ ۶۸۷ ابتدا به رابطهٔ زیر می‌رسیم که در سؤالات قبل نیز آن را مشاهده کردیم:

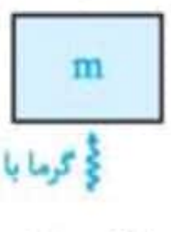
$$\begin{cases} \text{گرمای داده شده به جسم}: Q_۱ = Pt \\ \text{گرمای صرف‌شده برای افزایش دمای جسم}: Q_۲ = mc\Delta\theta \end{cases} \Rightarrow Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow Pt = mc\Delta\theta$$

در ادامه در مقایسهٔ دو آزمایش انجام‌شده با توجه به ثابت ماندن پارامترهای m، c و t می‌توان نوشت:

در مدت t دما از $-۱۲^\circ C$ به $۲۴^\circ C$ رسیده است.



در مدت t دما از $-۱۲^\circ C$ به $۱۸^\circ C$ رسیده است.



$$\text{مقایسهٔ دو حالت}: \frac{P'}{P} = \frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta} \Rightarrow \frac{P+۲}{P} = \frac{۲۴ - (-۱۲)}{۱۸ - (-۱۲)} \Rightarrow \frac{P+۲}{P} = \frac{۳۶}{۳۰}$$

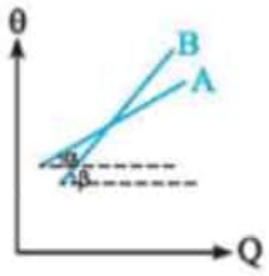
$$\frac{P+۲}{P} = \frac{۶}{۵} \xrightarrow{\text{حل معادله}} P = ۱۰kW$$

۲ ۶۸۸ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴ ۶۸۹ باتوجه به نمودار داده شده، $۸kJ$ گرما لازم است تا دمای جسم $\Delta\theta = ۷ - (-۳) = ۱۰^\circ C$ افزایش یابد. بنابراین برای این‌که دمای جسم $\Delta T = \Delta\theta = ۳^\circ C$ افزایش یابد، می‌توان نوشت:

$$Q = \overset{\text{ثابت}}{(mc)}\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} \Rightarrow \frac{Q_۲}{۸} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow Q_۲ = ۲/۴kJ$$

۳ ۶۹۰ با یک مثال مقایسه‌ای بدون عدد مواجه شده‌ایم و می‌خواهیم از شیب نمودار کمک بگیریم. با توجه به شکل زیر، شیب هر نمودار برابر است با:



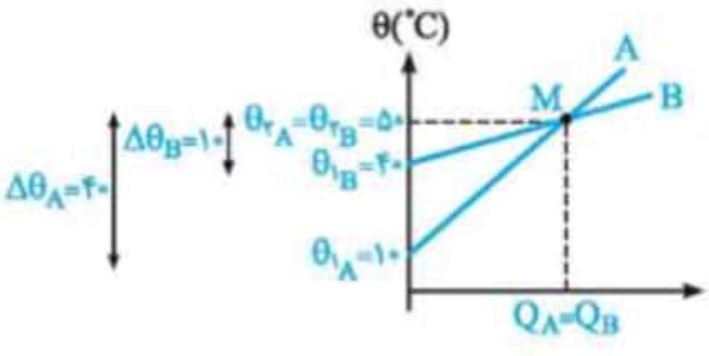
$$\begin{cases} A \text{ شیب نمودار} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\Delta\theta_A}{Q_A} = \frac{\Delta\theta_A}{m_A c_A \Delta\theta_A} = \frac{۱}{m_A c_A} \\ B \text{ شیب نمودار} \Rightarrow \tan\beta = \frac{\Delta\theta_B}{Q_B} = \frac{\Delta\theta_B}{m_B c_B \Delta\theta_B} = \frac{۱}{m_B c_B} \end{cases}$$

با توجه به شکل فوق، شیب نمودار B بیشتر از شیب نمودار A است و داریم:

$$\tan\beta > \tan\alpha \Rightarrow \frac{۱}{m_B c_B} > \frac{۱}{m_A c_A} \Rightarrow m_A c_A > m_B c_B \Rightarrow C_A > C_B$$ (ظرفیت گرمایی A از B بیشتر است)

دقت: بدون دانستن جرم دو جسم، گرمای ویژهٔ دو جسم A و B را نمی‌توان مقایسه کرد (چرا؟!).

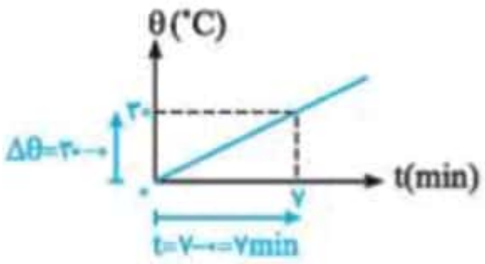
۳ ۶۹۱ گرمای منتقل‌شده به جسم‌های A و B در نقطه M با هم برابر است، بنابراین می‌توان نوشت: $Q_A = Q_B$ ، $\Delta\theta_A = ۵۰ - ۱۰ = ۴۰^\circ C$ ، $\Delta\theta_B = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰^\circ C$ ، $c_A = ۲c_B$



$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{c_A}{c_B} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{m_A}{m_B} \times ۲ \times \frac{۴۰}{۱۰} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{۱}{۸}$$

۲ ۶۹۲ با توجه به نمودار مقابل و اطلاعاتی که از آن استخراج می‌شود، داریم:

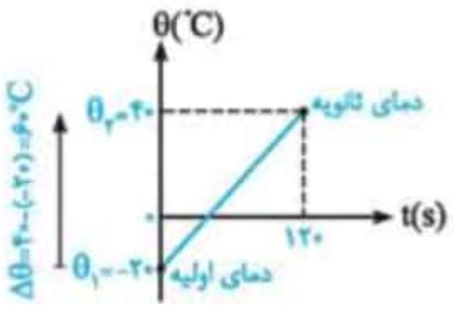


$$m = ۲kg \;,\; \Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱ = ۳۰ - ۰ = ۳۰^\circ C$$

$$t = ۷ - ۰ = ۷\,min = ۷ \times ۶۰ = ۴۲۰s \;,\; c = ۴۲۰۰\,J/kg.^\circ C \;,\; P = ?$$

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ Q = Pt \end{cases} \Rightarrow Pt = mc\Delta\theta \Rightarrow P \times ۴۲۰ = ۲ \times ۴۲۰۰ \times ۳۰ \Rightarrow P = ۶۰۰\,W$$

۳ ۶۹۳ در مدت ۱۲۰ ثانیه، دمای این جسم از $-۲۰^\circ C$ به $۴۰^\circ C$ رسیده است و در نتیجه گرمای دریافت شده در این مدت برابر است با:



$$m = ۱۰۰gr = ۰/۱kg \;,\; c = ۴۰۰\,J/kg.^\circ C$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = ۰/۱ \times ۴۰۰ \times \big(۴۰ - (-۲۰)\big) = ۲۴۰۰J$$

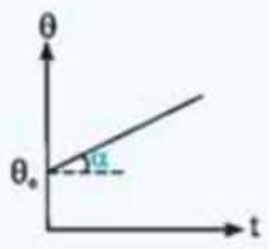
در ادامه با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱۲۰s \rightarrow ۲۴۰۰J \\ ۱s \rightarrow ۲۰J \end{cases} \Rightarrow$$ جسم در هر ثانیه ۲۰ ژول گرما گرفته است.

۴ ۶۹۴

نکته

اگر توسط یک گرم‌کن با توان ثابت P به یک گلوله با دمای اولیهٔ $\theta_۰$ گرما دهیم، بعد از t ثانیه دمای آن به θ می‌رسد. معادلهٔ $\theta - t$ برای این گلوله به‌صورت زیر است:

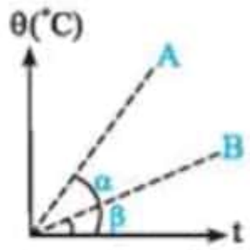


$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow mc\Delta\theta = Pt \Rightarrow \Delta\theta = \frac{P}{mc}t \xrightarrow{\Delta\theta = \theta - \theta_۰} \boxed{\theta = \frac{P}{mc}t + \theta_۰}$$

نتیجه نمودار $\theta - t$ برای این گلوله، خطی با شیب ثابت $\frac{P}{mc}$ است:

$$\tan\alpha = \frac{P}{mc}$$

در مقایسهٔ دو گلولهٔ هم‌جرم A و B، با توجه به نکتهٔ فوق داریم:



$$\begin{cases} m_A = m_B \;,\; \theta_{۰A} = \theta_{۰B} = ۰ \\ P_A = P_B \;,\; c_B > c_A \end{cases} \Rightarrow \frac{P}{mc_B} < \frac{P}{mc_A} \Rightarrow \tan\alpha > \tan\beta$$

دقت شود که نمودار $\theta - t$ برای هر دو گلوله، دو خط عبوری از مرکز است.

۴ ۶۹۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ — **گرمای ویژهٔ مولی** — (تست‌های ۶۹۵ تا ۷۰۲)

تو ادامهٔ بحث، می‌خوایم در مورد مول، عدد آووگادرو و گرمای مولی بحث کنیم و ویژگی‌های جالب اونارو هم یاد بگیریم ...

مول و عدد آووگادرو

در بسیاری از موارد، یکای مناسب برای تعیین مقدار یک ماده، **مول (mol)** است. یک مول از هر ماده به معنای تعداد $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ذره از اجزای سازندهٔ آن ماده است که به آن **عدد آووگادرو** می‌گویند. در رابطه با این موضوع، موارد زیر حائز اهمیت است:

نکات مهم و کاربردی

۱) اگر m جرم یک ماده و M جرم یک مول از آن ماده (جرم مولی) باشد، تعداد مول آن ماده (n) برابر است با: $n = \frac{m}{M}$

۲) تعداد اجزای سازندهٔ n مول از یک ماده برابر است با:

$$\text{تعداد اجزای سازنده} = n \times \underbrace{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}_{\text{عدد آووگادرو}}$$

۳) برعکس فرایند نکتهٔ ۲، با داشتن تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ یک ماده، به سادگی می‌توان تعداد مول آن را با یک تقسیم ساده، به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\text{تعداد مول}: n = \frac{\text{تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ ماده}}{\text{عدد آووگادرو}}$$

gajmarket.com

برای یادگیری بهتر مفاهیم قبل، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۱ **جرم یک ماده برابر ۵ مثقال و جرم مولی ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن ماده برابر ۱۲ گرم است. اگر هر مثقال تقریباً برابر ۴/۸ گرم باشد:**

الف) تعداد مول ذرات تشکیل‌دهندهٔ این ماده چه‌قدر است؟ **ب) تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ این ماده چه‌قدر است؟**

پاسخ الف) ابتدا جرم ماده را برحسب گرم یافته و سپس تعداد مول ماده را به‌دست می‌آوریم:

برحسب مثقال

$$m = 5 \times 4/8 = 24\,gr \quad : \text{جرم ماده} \qquad , \qquad M = 12\frac{gr}{mol} \Rightarrow n = \frac{m}{M} = \frac{24}{12} = 2\,mol \quad : \text{تعداد مول}$$

ب) هر مول از یک ماده برابر $6/02 \times 10^{23}$ از اجزای آن ماده است، بنابراین تعداد اجزای ۲ مول از یک ماده برابر است با:

$$\text{تعداد اجزای ماده} = (\text{تعداد مول}) \times (\text{عدد آووگادرو}) = 2 \times 6/02 \times 10^{23} = 12/04 \times 10^{23} = 1/204 \times 10^{24}$$

گرمای ویژهٔ مولی

در رابطهٔ گرمای مبادله شده با یک جسم $(Q = mc\Delta\theta)$، m معادل با جرم ماده برحسب کیلوگرم بود. حال اگر بخواهیم جرم ماده را برحسب مول نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ n = \frac{m}{M} \Rightarrow m = nM \end{cases} \Rightarrow Q = (nM)c\,\Delta\theta = n\underbrace{(Mc)}_{c_m}\Delta\theta \Rightarrow \boxed{Q = nc_m\Delta\theta}$$

نکات مهم و کاربردی

۱ پارامتر c_m در رابطهٔ فوق، **ظرفیت گرمایی مولی** یا **گرمای ویژهٔ مولی** نام دارد و مطابق تعریفی که از روی رابطهٔ فوق می‌توان برداشت کرد، مقدار گرمایی است که باید به یک مول از آن ماده بدهیم تا در شرایط فیزیکی تعیین شده، دمای آن $1^\circ C$ (یا $1K$) افزایش یابد.

$$Q = nc_m\Delta\theta \xrightarrow[\Delta\theta = 1^\circ C]{n = 1\,mol} Q = c_m$$

۲ یکای گرمای ویژهٔ مولی برابر است با:

$$Q = nc_m\Delta\theta \Rightarrow c_m = \frac{Q}{n\Delta\theta} \Rightarrow c_m \text{ واحد} \equiv \frac{J}{mol.K} \text{ یا } \frac{J}{mol.^\circ C}$$

۳ اگر c گرمای ویژهٔ یک فلز و c_m گرمای ویژهٔ مولی آن باشد، رابطهٔ زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ Q = nc_m\Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{mc = nc_m} \xrightarrow{mc = C} \boxed{C = nc_m}$$

۴ مطلب شگفت‌انگیزی که از مقایسهٔ گرمای ویژهٔ مولی مواد بلورین مختلف (در حجم ثابت) به‌دست می‌آید این است که برای بیشتر فلزها، مقدار آن یکسان و برابر $25\frac{J}{mol.K}$ است. این نظم به نام **قاعدهٔ «دولن و پتی»** مشهور است.

۵ با توجه به قاعدهٔ دولن و پتی، می‌توان گفت گرمای لازم برای افزایش دمای یکسان برای یک مول از اکثر فلزات، یکسان بوده و به جنس آن‌ها بستگی ندارد.

$$Q = \underbrace{n}_{\text{یکسان}}\ c_m\ \Delta\theta \Rightarrow$$ مقدار گرما برای افزایش دمای یکسان برای یک مول از فلزات با هم برابر است.

تمرین۲ **تعداد اجزای تشکیل‌دهندهٔ یک فلز با دمای اولیهٔ $20^\circ C$ برابر $3/01 \times 10^{25}$ است. اگر بخواهیم دمای این فلز به $30^\circ C$ برسد، چه مقدار گرما برحسب ژول باید به آن بدهیم؟ ($6/02 \times 10^{23}$ = عدد آووگادرو)** (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۲۵۰ ۲) ۱۲۵۰۰ ۳) ۲۵۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

پاسخ برای پاسخ دادن به این تمرین، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ تعداد مول فلز:

$$n = \frac{\text{تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ ماده}}{\text{عدد آووگادرو}} = \frac{3/01 \times 10^{25}}{6/02 \times 10^{23}} = 50\,mol \quad : \text{تعداد مول}$$

گام دوم: با توجه به این‌که گرمای ویژهٔ مولی در فلزات برابر $25\frac{J}{mol.K}$ است، گرمای لازم برای افزایش دمای جسم از $20^\circ C$ به $30^\circ C$ برابر است با:

$$n = 50\,mol \quad , \quad c_m = 25\frac{J}{mol.K} \quad , \quad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 30 - 20 = 10^\circ C = 10K$$

$$Q = nc_m\Delta\theta = 50 \times 25 \times 10 = 12500\,J \quad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

همان‌طور که در خلاصه نکات (۴) اشاره کردیم، گرمای ویژهٔ مولی، برابر حاصل‌ضرب گرمای ویژهٔ جسم در جرم مولی ماده است $(c_m = Mc)$ و گزینهٔ (۴) نادرست است. سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات (۴) صحیح هستند.

۳ ۶۹۶ گرمای ویژهٔ مولی برای فلزها با یک‌دیگر برابر است ($c_{m_A} = c_{m_B}$). از طرفی گرمای ویژهٔ مولی از رابطهٔ $c_m = Mc$ برای هر فلز به‌دست می‌آید و بنابراین با توجه به بیشتر بودن جرم مولی فلز A نسبت به فلز B، گرمای ویژهٔ فلز A کم‌تر از فلز B است.

$$c_m = Mc \xrightarrow{c_{m_A} = c_{m_B}} M_A c_A = M_B c_B \xrightarrow{M_A > M_B} c_A < c_B$$

۳ ۶۹۷ همان‌طور که می‌دانیم، گرمای ویژهٔ مولی برای فلزها تقریباً یکسان است، بنابراین با یکسان بودن تعداد مول دو فلز، با دادن مقدار گرمای یکسان به آن‌ها، تغییر دمای آن‌ها یکسان است.

با انتقال مقدار گرمای یکسان به دو فلز با تعداد مول برابر، تغییر دمای آن‌ها یکسان است. ← $Q = (n)(c_m)\Delta\theta$ (یکسان، یکسان)

۳ ۶۹۸ با توجه به رابطهٔ $Q = nc_m\Delta\theta$، برای دو جسم می‌توان نوشت:

$$Q = nc_m\Delta\theta \xrightarrow{Q_A = Q_B} n_A \cancel{c_{m_A}} \Delta\theta_A = n_B \cancel{c_{m_B}} \Delta\theta_B \Rightarrow ۲ \times \Delta\theta = n_B \times \frac{۱}{۲}\Delta\theta \Rightarrow n_B = ۴\,mol$$

دید دیگر: با توجه به یکسان بودن c_m و Q برای دو فلز، برای این‌که افزایش دمای فلز B نصف A باشد، باید تعداد مول فلز B، دو برابر تعداد مول فلز A باشد.

$$Q = (n)(c_m)(\Delta\theta) \Rightarrow n_B = ۲n_A = ۲ \times ۲ = ۴\,mol$$

(n: ۲ برابر، $\Delta\theta$: $\frac{۱}{۲}$ برابر، Q: یکسان، c_m: یکسان)

۲ ۶۹۹ با توجه به رابطهٔ $Q = nc_m\Delta\theta$ و این‌که گرمای ویژهٔ مولی در اغلب فلزها ثابت و تقریباً برابر $۲۵\,J/mol.K$ است، می‌توان نوشت:

$$Q = nc_m\Delta\theta \Rightarrow ۱۰۰ = ۲ \times ۲۵\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۲^\circ C$$

۲ ۷۰۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ تعداد مول فلز:

$$n: \text{تعداد مول} = \frac{\text{تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ ماده}}{\text{عدد آووگادرو}} = \frac{۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۵}}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} = ۵۰\,mol$$

گام دوم: با توجه به این‌که گرمای ویژهٔ مولی در فلزات برابر $۲۵\frac{J}{mol.K}$ است، گرمای لازم برای این افزایش دما، برابر است با:

$$\theta_F = \frac{۹}{۵}\theta(^\circ C) + ۳۲ \Rightarrow ۸۶ = \frac{۹}{۵}\theta_۲(^\circ C) + ۳۲ \Rightarrow \theta_۲(^\circ C) = ۳۰^\circ C$$

$$\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱ = ۳۰ - ۲۰ = ۱۰^\circ C = ۱۰K \quad , \quad c_m = ۲۵\frac{J}{mol.K} \quad , \quad n = ۵۰\,mol$$

$$Q = nc_m\Delta\theta = ۵۰ \times ۲۵ \times ۱۰ = ۱۲۵۰۰\,J$$

۳ ۷۰۱ همان‌طور که در خلاصه نکات (۴) مطرح شد، ارتباط بین ظرفیت گرمایی و گرمای ویژهٔ مولی به صورت زیر است:

$$\text{ظرفیت گرمایی}: C = nc_m$$

در ادامه برای تساوی ظرفیت گرمایی قلع و آهن، باید نوشت:

$$C_{\text{آهن}} = C_{\text{قلع}} \Rightarrow n_{\text{آهن}} c_{m_{\text{آهن}}} = n_{\text{قلع}} c_{m_{\text{قلع}}}$$

از سوی دیگر c_m برای آهن و قلع طبق قاعدهٔ دولن و پتی یکسان است و در نهایت داریم:

$$\xrightarrow{c_{m_{\text{آهن}}} = c_{m_{\text{قلع}}}} n_{\text{آهن}} = n_{\text{قلع}} \xrightarrow{n_{\text{آهن}} = ۵/۶\,mol} n_{\text{قلع}} = ۵/۶\,mol$$

۴ ۷۰۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) (محاسبهٔ جرم فلز): $\text{جرم فلز برحسب گرم}: m = ۳۸۴ \times ۰/۲gr \xrightarrow{۱\text{ قیراط} = ۰/۲gr} \text{قیراط } ۳۸۴ = m$

۲) (محاسبهٔ تعداد مول فلز): $\text{تعداد مول}: n = \frac{m}{M} = \frac{۳۸۴ \times ۰/۲}{۹۶} = ۰/۸\,mol$

۳) (محاسبهٔ تعداد اتم فلز): می‌دانیم تعداد اتم فلز در هر مول از آن برابر عدد آووگادرو، یعنی $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ است. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد اتم} = \text{تعداد مول} \times \text{عدد آووگادرو} \Rightarrow \text{تعداد اتم} = ۰/۸ \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} = ۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۳}$$

۴) با توجه به رابطهٔ $Q = nc_m\Delta\theta$، می‌توان نوشت:

(c_m: برای فلزها برابر $۲۵\,J/mol.K$ است.)

$$Q = n(c_m)\Delta\theta = ۰/۸ \times ۲۵ \times ۱ = ۲۰\,J$$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

gajmarket.com

۱ ۷۰۳

تذکر

در تست‌های (۷۰۳) تا (۷۰۷) با چند تست ترکیبی ساده بین فصل‌های کار و انرژی و گرما برخورد می‌کنیم. تلاش کرده‌ایم تا با پاسخ‌های کامل، شما را با شیوهٔ حل این‌گونه سؤالات آشنا کنیم.

انرژی جنبشی این گلوله برابر است با:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}\times(m)\times(۴۰۰)^۲=۸۰۰۰۰m$$

با توجه به صورت سؤال، ۵۰ درصد این انرژی (یعنی $\frac{۱}{۲}$ از انرژی) صرف افزایش دمای گلوله شده و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}Q=\frac{۱}{۲}K=۴۰۰۰۰m\\ Q=mc\Delta\theta\end{cases}\Rightarrow ۴۰۰۰۰\cancel{m}=\cancel{m}\times۱۲۵\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=۳۲۰K$$

۳ ۷۰۴ مطابق صورت سؤال با برخورد گلوله به مانع، تمام انرژی جنبشی آن به گرما تبدیل شده و صرف افزایش دمای گلوله می‌شود، بنابراین داریم:

$$v=۱۰۰m/s\ ,\ c=۱۰۰J/kg.^\circ C$$

$$K=Q\Rightarrow\frac{۱}{۲}\cancel{m}v^۲=\cancel{m}c\Delta\theta\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times(۱۰۰)^۲=۱۰۰\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta_C=۵۰^\circ C\xrightarrow{\Delta\theta_F=\frac{۹}{۵}\Delta\theta_C}\Delta\theta_F=\frac{۹}{۵}\times۵۰=۹۰^\circ F$$

۴ ۷۰۵ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا انرژی جنبشی چکش و سپس کل گرمایی که چکش به میخ می‌دهد را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{کل گرمای تولیدشده در هر ضربهٔ چکش}=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۴۹)=۴۹J$$

طبق فرض مسأله، ۷۰ درصد از انرژی جنبشی چکش، صرف گرم شدن میخ می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{گرمای منتقل‌شده به میخ در هر ضربه}=Q_۱=۰/۷\times۴۹J$$

$$\Rightarrow Q_{\text{کل میخ}}=\underset{\text{تعداد دفعات ضربه‌زدن}}{n}\times Q_۱=۱۰\times۰/۷\times۴۹J=۷\times۴۹J$$

گام دوم: حال می‌توانیم با توجه به رابطهٔ $Q=mc\Delta\theta$، مقدار افزایش دمای میخ را محاسبه کنیم:

$$m=۱۰gr=۱۰^{-۲}kg\ ,\ c=۴۹۰J/kg.^\circ C$$

$$Q=mc\Delta\theta\Rightarrow۷\times۴۹=۱۰^{-۲}\times۴۹۰\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=۷۰^\circ C$$

۲ ۷۰۶

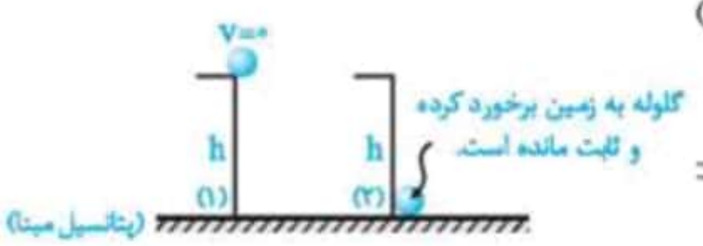
$$h=۹m\ ,\ g=۱۰m/s^۲\ ,\ c=۴۵۰J/kg^\circ C$$

با توجه به قانون پایستگی انرژی، مقدار انرژی که جسم در ارتفاع $h=۹m$ داشته است با مقدار انرژی که جسم در هنگام برخورد به زمین داشته است برابر بوده و این انرژی پس از برخورد گلوله به زمین تماماً، صرف گرم شدن آهن می‌شود، بنابراین داریم:

(جسم از حال سکون رها شده است)

$$\begin{cases}E=\frac{۱}{۲}\cancel{m}\overset{۰}{v^۲}+mgh\\ Q=mc\Delta\theta\end{cases}\xrightarrow{E=Q}\cancel{m}gh=\cancel{m}c\Delta\theta\Rightarrow۱۰\times۹=۴۵۰\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=\frac{۹۰}{۴۵۰}=\frac{۱}{۵}=۰/۲^\circ C$$

۴ ۷۰۷ با توجه به شکل‌های مقابل، برای محاسبهٔ انرژی مکانیکی قطعه فلز در دو موقعیت (۱) و (۲) می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow\begin{cases}E_۱=U_۱+K_۱=mgh+۰\\ E_۲=U_۲+K_۲=۰+۰=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow|\Delta E|=Q\Rightarrow mgh=Q\xrightarrow[h=۵m]{m=۴kg}Q=۴\times۱۰\times۵=۲۰۰J$$

تغییر انرژی مکانیکی، صرف گرم شدن محیط و افزایش انرژی درونی آن شده است.

۷۰۸ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ — **تغییر حالت اجسام** — (تست‌های ۷۰۸ تا ۷۲۴)

همان‌طور که می‌دانید موادی که در محیط اطراف ما وجود دارند، در سه فاز جامد، مایع و گاز یافت می‌شوند. به‌طور کلی گذار از یک حالت (فاز) به یک حالت (فاز) دیگر را یک تغییر حالت (گذار فاز) می‌نامند. به‌طور مثال یخ با گرفتن گرما و ذوب شدن از فاز جامد به فاز مایع گذار می‌کند.

نکات مهم و کاربردی

۱ هر تغییر حالت (در فشار ثابت) در دمای ثابتی صورت می‌گیرد که آن را **دمای گذار** می‌نامند. به‌طور مثال ذوب شدن یخ در فشار یک اتمسفر، در دمای صفر درجهٔ سلسیوس انجام می‌شود.

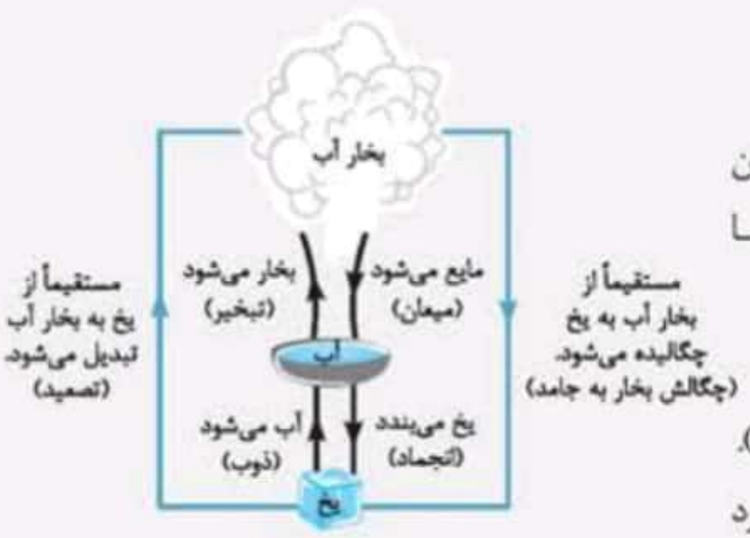
۲ تغییر حالت‌ها معمولاً با گرفتن و یا از دست دادن گرما همراه‌اند. علاوه بر این حجم و چگالی ماده نیز با تغییر حالت تغییر می‌کند.

۳ تبدیل جامد به مایع را **ذوب**، تبدیل مایع به بخار را **تبخیر**، تبدیل مایع به جامد را **انجماد** و تبدیل بخار به مایع را **میعان** می‌گوییم.

۴ امکان دارد که تغییر حالت از جامد به بخار و وارون آن از بخار به جامد نیز به‌طور مستقیم (بدون گذر از حالت مایع) صورت گیرد. تغییر حالت از جامد به بخار، **تصعید** و تغییر حالت وارون آن یعنی از بخار به جامد **چگالش** نام دارد.

بررسی یک موضوع کاربردی

شکل بسیار مهم مقابل انواع گذار را برای یخ نشان می‌دهد:



در شکل مقابل فرایندهایی که جهت فلششان به سمت بالا است در واقع در راستای آزادتر شدن مولکول‌های ماده هستند و گرماگیر محسوب می‌شوند (برای شکستن پیوند بین مولکول‌ها گرما می‌خواهند) و فرایندهایی که جهت فلششان به سمت پایین است، گرمازا هستند.

حال به مثال‌های زیر که در هر یک تغییر حالت رخ می‌دهد، توجه کنید:

- ایجاد شبنم (قطرات آب) بر روی گلبرگ گل‌ها در هوای سرد، نمونه‌ای از میعان است (تبدیل بخار آب به آب).
- ایجاد برفک در یخچال‌ها و بلورهای یخ بر روی شیشهٔ اتومبیل و گل‌ها در هوای بسیار سرد نمونه‌ای از چگالش است (تبدیل بخار آب به یخ).
- کوچک شدن گلولهٔ نفتالین با گذشت زمان، نمونه‌ای از تصعید است.

بررسی دقیق‌تر تبخیر

وقتی به مایعی گرما می‌دهیم، دمای آن افزایش می‌یابد. اگر عمل گرما دادن به این مایع را ادامه دهیم، هنگامی‌که دمای مایع به مقدار مشخصی رسید، افزایش دما متوقف شده و دما ثابت می‌ماند. مایع در این موقع به جوش آمده و تبدیل به بخار می‌شود. این دمای ثابت را **«دمای جوش»** یا **«نقطهٔ جوش»** می‌نامند.

نکات مهم و کاربردی

۱ نقطهٔ جوش هر مایع، به جنس آن و فشار وارد بر آن بستگی دارد. **افزایش فشار** وارد بر مایع جدا شدن مولکول‌ها از سطح مایع را سخت‌تر کرده و سبب **بالا رفتن نقطهٔ جوش** آن می‌شود.

۲ فرایند میعان (تبدیل بخار به مایع)، در واقع وارون فرایند تبخیر است. اگر مقداری از بخار یک ماده را سرد کنیم (یعنی از آن گرما بگیریم) هنگامی‌که به **«دمای میعان»** یا **«نقطهٔ میعان»** خود می‌رسد، شروع به مایع شدن می‌کند.

۳ دمای نقطهٔ میعان یک ماده در شرایط یکسان با دمای نقطهٔ جوش آن برابر است. یعنی به‌طور مثال اگر در فشار یک اتمسفر به آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس گرما دهیم شروع به جوشیدن می‌کند و هم‌چنین اگر در همان فشار از بخار آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس گرما بگیریم شروع به مایع شدن می‌کند.

بررسی دقیق‌تر ذوب

اگر به جسم جامدی گرما بدهیم، دمای آن افزایش می‌یابد. اگر این عمل گرما دادن را ادامه دهیم، هنگامی‌که دمای جسم به مقدار مشخصی رسید، افزایش دما متوقف می‌شود (دما ثابت می‌ماند) و جسم شروع به ذوب شدن می‌کند (به مایع تبدیل می‌شود). این دمای ثابت را که به جنس جسم و فشار وارد بر آن بستگی دارد **«دمای ذوب»** یا **«نقطهٔ ذوب»** می‌نامند.

نکات مهم و کاربردی

۱ افزایش فشار وارد بر جسم به‌جز در چند مورد سبب بالا رفتن نقطهٔ ذوب آن می‌شود. در بعضی از جسم‌ها مانند یخ، افزایش فشار سبب کاهش نقطهٔ ذوب می‌شود.

gajmarket.com

۲ عمل ذوب گرماگیر است، یعنی به جسم جامدی که به دمای ذوب خود رسیده باید گرما بدهیم تا به مایع تبدیل شود.

۳ معمولاً حجم جامدهای بلورین هنگام ذوب شدن افزایش می‌یابد. زیرا حجمی که بلور با آرایش منظم مولکول‌ها در حالت جامد اشغال می‌کند نسبت به این حجم در حالت مایع، که آرایش مولکولی نامنظمی دارد، کم‌تر است.

۴ برخلاف جامدهای خالص و بلورین، جامدهای بی‌شکل مانند شیشه و قیر نقطهٔ ذوب کاملاً مشخصی ندارند. در واقع، وقتی این مواد را گرم می‌کنیم پیش از ذوب شدن خمیری شکل می‌شوند. این مواد در گستره‌ای از دما به تدریج ذوب می‌شوند.

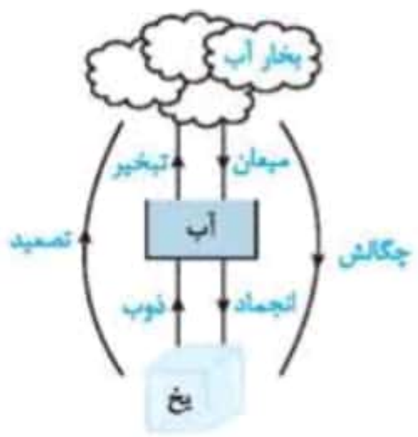
۵ فرایند انجماد، در واقع وارون فرایند ذوب است (تبدیل مایع به جامد). اگر مایعی را سرد کنیم (یعنی از آن گرما بگیریم) هنگامی‌که به دمای انجماد یا نقطهٔ انجماد خود می‌رسد، شروع به جامد شدن می‌کند. این موضوع یعنی دمای نقطهٔ ذوب یک ماده در شرایط یکسان با دمای نقطهٔ انجماد آن برابر است.

۶ هر جسم به هنگام انجماد، همان‌قدر گرما از دست می‌دهد (آزاد می‌کند) که به هنگام ذوب می‌گیرد.

۷ وجود ناخالصی نیز موجب می‌شود که مایع نقطهٔ انجماد مشخصی نداشته باشد بلکه انجماد در گستره‌ای از دما رخ می‌دهد. مثلاً هنگام یخ زدن آب نمک، اولین بلورها در دمای کم‌تر از $0^\circ C$ تشکیل می‌شود و انجماد کامل در دماهای کم‌تر، تا $-18^\circ C$ روی می‌دهد.

با توجه به خلاصه نکات فوق، در دمای گذار، یک ماده با گرفتن و یا از دست دادن گرما در دمای ثابت تغییر حالت می‌دهد، به‌طور مثال با دادن گرما به یخ صفر درجهٔ سلسیوس، فرایند ذوب شدن یخ در دمای صفر درجهٔ سلسیوس انجام می‌شود. این موضوع یعنی با دادن گرما به یک جسم، لزوماً دمای آن افزایش نمی‌یابد و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ ۷۰۹ با توجه به خلاصه نکات (۵) و شکل مقابل، تبدیل یک جسم از حالت بخار به حالت مایع را **میعان** گویند.



۴ ۷۱۰ با توجه به خلاصه نکات (۵)، تبدیل مستقیم جامد به بخار، **تصعید** نام دارد.

۲ ۷۱۱ در ناپدید شدن قرص نفتالین، نفتالین جامد به گاز تبدیل می‌شود، بنابراین این پدیده تصعید است. در تشکیل برفک در یخچال، بخارات آب درون یخچال به یخ تبدیل می‌شوند، بنابراین این پدیده چگالش است و در خشک کردن لباس‌ها، آب روی لباس‌ها به بخار تبدیل می‌شود بنابراین این پدیده تبخیر است.

۴ ۷۱۲ همان‌طور که در خلاصهٔ نکات این بخش به آن اشاره شد، برای تبدیل جامد به مایع (ذوب)، تبدیل مایع به گاز (تبخیر) و تبدیل مستقیم جامد به گاز (تصعید) به جسم گرما می‌دهیم، پس سه عمل ذوب، تبخیر و تصعید گرماگیر هستند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

تذکر

فرایندهای چگالش، میعان و انجماد هر سه به‌صورت گرماده هستند.

۱ ۷۱۳ می‌دانیم هنگامی‌که جسم در حال تغییر حالت از یک فاز به فاز دیگر است (مثلاً از جامد به مایع یا مایع به گاز)، گرما دریافت کرده ولی تغییر دما نمی‌دهد، در گزینه‌های این سؤال، تنها آب در حال جوش در حال تغییر حالت است، بنابراین دمای آن ثابت بوده و تغییر نمی‌کند ولی گرما می‌گیرد.

۳ ۷۱۴ در فرایند تغییر حالت، باید مقداری انرژی به جسم بدهیم یا مقداری انرژی از آن بگیریم تا این فرایند اتفاق بیفتد. بنابراین انرژی درونی در فرایند تغییر حالت، تغییر می‌کند. ولی در این فرایند میزان دمای جسم عوض نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

۴ ۷۱۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، گزینه‌های آن را بررسی می‌کنیم:

۱) عمل تبخیر گرماگیر است، بنابراین این گزینه نادرست است.

۲) چگالش، تبدیل مستقیم بخار به جامد است که عملی گرمازا است، زیرا باید از بخار گرما دریافت شود تا به جامد تبدیل شود و این گزینه نادرست است.

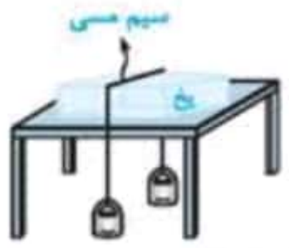
۳) افزایش فشار وارد بر یک جسم، در اکثر موارد سبب بالا رفتن نقطهٔ ذوب آن می‌شود. در برخی از اجسام مانند یخ، نقره و ... ، افزایش فشار نقطهٔ ذوب را کاهش می‌دهد، بنابراین این گزینه نیز نادرست است.

۴) افزایش فشار وارد بر سطح یک مایع، سبب بالا رفتن نقطهٔ جوش آن می‌شود (مانند زودپز) و این گزینه درست است.

۲ ۷۱۶ برخلاف جامدهای خالص و بلورین، جامدهای بی‌شکل مانند شیشه و قیر نقطهٔ ذوب کاملاً مشخصی ندارند، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

* سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات (۵) صحیح می‌باشند.

۱ ۷۱۷ معمولاً افزایش فشار وارد بر جسم سبب بالا رفتن نقطهٔ ذوب جسم می‌شود. در برخی اجسام مانند یخ، این موضوع برعکس بوده و افزایش فشار به کاهش نقطهٔ ذوب می‌انجامد. نقطهٔ ذوب یخ در فشار یک اتمسفر برابر صفر درجهٔ سلسیوس است.



۲ ۷۱۸ با توجه به این‌که افزایش فشار باعث پایین آمدن نقطهٔ ذوب یخ می‌شود، هنگامی‌که مانند شکل روبه‌رو سیم مسی را روی یخ قرار می‌دهیم، فشار وارد بر یخ در محل سیم افزایش می‌یابد، بنابراین نقطهٔ ذوب در آن ناحیه پایین می‌رود و در نتیجه یخ زیر سیم زودتر ذوب شده و قالب یخ از وسط نصف می‌شود.

تذکر

افزایش وزنه‌ها به دو طرف سیم مسی، باعث می‌شود که فشار وارد شده به یخ از طرف سیم به‌طور قابل توجهی افزایش یابد و عمل ذوب شدن تسریع یابد.

۴ ۷۱۹ با کاهش فشار هوا، نقطهٔ جوش آب کاهش، ولی نقطهٔ انجماد آب افزایش می‌یابد. بنابراین با کاهش فشار هوا، نقطه‌ای وجود دارد که در آن دمای نقطهٔ جوش و نقطهٔ انجماد آب با هم برابر می‌شود. فشار این نقطه کم می‌باشد و بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱ ۷۲۰ برای جلوگیری از یخ‌زدن آب رادیاتور اتومبیل، به آن مایع ضدیخ اضافه می‌کنند. در واقع اضافه کردن مایع ضدیخ، نقطهٔ انجماد آب را پایین‌تر از صفر درجهٔ سلسیوس برده و از راحت یخ زدن آن در دماهای پایین جلوگیری می‌کند.

۳ ۷۲۱ در دیگ زودپز، فشار وارد بر سطح آب افزایش می‌یابد، بنابراین نقطهٔ جوش آب بالا می‌رود و غذا در دمای بالاتری قرار می‌گیرد و در نتیجه سریع‌تر می‌پزد.

دقت شود که بالا رفتن نقطهٔ جوش، باعث می‌شود که آب درون دیگ در دمای بالاتری به جوش آید، برای مثال اگر آب در فشار $1atm$ در دمای ۱۰۰ درجه به جوش می‌آید، در درون دیگ زودپز در دمای $110^\circ C$ به جوش خواهد آمد.

۱ ۷۲۲ در ارتفاعات بالای کوه، تخم‌مرغ دیرتر آب‌پز می‌شود چون در بالای کوه فشار کاهش می‌یابد و در فشار کم، نقطهٔ جوش آب پایین می‌آید و آب زودتر به جوش می‌آید (تخم‌مرغ در دمای پایین‌تری قرار می‌گیرد).

۲ ۷۲۳ با افزایش فشار هوا، دمای جوش آب و اکثر مواد افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

حال نادرستی سه گزینهٔ دیگر را بررسی می‌کنیم:

۱) در اکثر مواد با افزایش فشار، دمای جوش و دمای انجماد بالا می‌رود. دمای جوش آب نیز به همین ترتیب تغییر می‌کند، اما دمای انجماد (ذوب) آن عکس این رفتار را دارد. یعنی دمای انجماد آب، با افزایش فشار، کاهش می‌یابد.

۳) حجم اکثر مواد هنگام انجماد کم می‌شود ولی حجم آب زیاد می‌شود.

۴) در اکثر مواد با افزایش دما، حجم زیاد می‌شود، در صورتی که آب در دماهای بین صفر تا چهار درجه سلسیوس، عکس این رفتار را نشان می‌دهد.

۲ ۷۲۴ با گرم کردن مایع، دمای آن افزایش می‌یابد. وقتی به دمای مشخصی می‌رسیم، حباب‌های گاز درون مایع بالا می‌آیند که نشانهٔ آغاز فرایند جوشیدن است. به این دمای خاص، نقطهٔ جوش می‌گویند. در مورد آب، به محض این‌که حباب‌ها بالا می‌آیند، به آبِ کمی سردتر می‌رسند و پیش از رسیدن به سطح آزاد آب، با صدای تیزی فرو می‌پاشند و دوباره به مایع تبدیل می‌شوند. ولی وقتی دمای آب بالاتر می‌رود، حباب‌ها می‌توانند بیشتر بالا بروند تا این‌که سرانجام به سطح آزاد آب برسند و اصطلاحاً صدای غلغل‌کردن آب به گوش می‌رسد. در این حالت می‌گوییم آب به **جوش کامل** رسیده است.

۲ ۷۲۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ — آشنایی با گرمای لازم برای ذوب و تحلیل مسائل آن (تست‌های ۷۲۵ تا ۷۳۶)

گرمایی که جسم جامد در نقطهٔ ذوب خود می‌گیرد تا به مایع تبدیل شود، سبب تغییر دمای آن نمی‌شود، بلکه صرف تغییر حالت آن خواهد شد. از این رو به این گرما، گرمای لازم برای ذوب می‌گوییم. دادن گرمای لازم برای ذوب به جامدی که به نقطهٔ ذوب خود رسیده است، آن را ذوب می‌کند.

تذکر **گرمای نهان ویژهٔ ذوب** یا به اختصار **گرمای نهان ذوب** (L_F) برای یک جامد، برابر است با مقدار انرژی‌ای که باید به یک کیلوگرم از آن جسم جامد در دمای نقطهٔ ذوب بدهیم تا به مایع در همان دما تبدیل شود. یکای گرمای نهان ذوب در SI ژول بر کیلوگرم است.

$$Q = mL_F \xrightarrow{m=1kg} Q = L_F$$

$$L_F \text{ واحد} \Rightarrow L_F = \frac{Q}{m} \equiv \frac{\text{ژول}}{\text{کیلوگرم}}$$

تذکر گرمای نهان ویژهٔ ذوب و نقطهٔ ذوب مواد مختلف، با یک‌دیگر متفاوت است.

تمرین ۱ **حداقل گرمایی که یک کیلوگرم یخ ۱۰- درجهٔ سلسیوس را به آب تبدیل می‌کند، چند کیلوژول است؟** (تجربی خارج ۸۸)

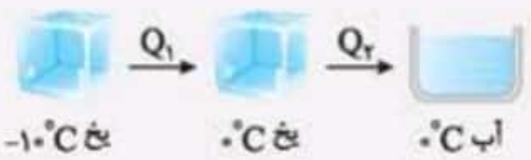
$$(L_F = 334 \times 10^3 \, J/kg \, , \, c_{\text{یخ}} = 2100 \, J/kg.K)$$

۱) ۳۵۵ ۲) ۴۳۶ ۳) ۵۴۲ ۴) ۶۴۳

www.gajmarket.com

پاسخ با توجه به صورت سؤال، حداقل گرما زمانی است که یخ $-10^\circ C$ به آب $0^\circ C$ تبدیل شود و با توجه به شکل زیر داریم:

$$m = 1kg \ , \ \theta_0 = -10^\circ C \ , \ c_{\text{یخ}} = 2100 J/kg.K \ , \ L_F = 334 \times 10^3 J/kg$$



$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = mc_{\text{یخ}} \Delta\theta = 1 \times 2100 \times (0 - (-10)) = 21000 J = 21 kJ \\ Q_2 = mL_F = 1 \times 334 \times 10^3 J = 334 kJ \end{cases}$$

محاسبهٔ گرمای کل $\Rightarrow Q = Q_1 + Q_2 = 21 + 334 = 355 kJ$ (گزینهٔ ۱)

دقت شود که گرما بیشتر از $355kJ$، یخ را به آب با دمای بیشتر از صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کند که موردنظر سؤال نیست.

تمرین۲ **می‌خواهیم با دادن گرما به یک قطعهٔ یخ با جرم یک کیلوگرم و دمای ۱۰- درجهٔ سلسیوس، نیمی از آن را ذوب کنیم. میزان گرمای لازم برای این عمل چند کیلوژول است؟** $(L_F = 336 kJ/kg \ , \ c_{\text{یخ}} = 2/1 kJ/kg.K)$ (تجربی خارج ۸۱)

۱) ۳۵۷ ۲) ۲۲۰ ۳) ۱۸۹ ۴) ۱۷۸

پاسخ برای ذوب شدن نیمی از یخ، ابتدا باید به کل یخ با دمای $-10^\circ C$ گرما دهیم تا به یخ با دمای صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، سپس به نیمی از آن گرما می‌دهیم تا ذوب شود، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} Q_1 = mc_{\text{یخ}} \Delta\theta = 1 \times 2/1 \times (0 - (-10)) = 21 kJ \\ Q_2 = \frac{m}{2} L_F = \frac{1}{2} \times 336 = 168 kJ \end{cases}$$

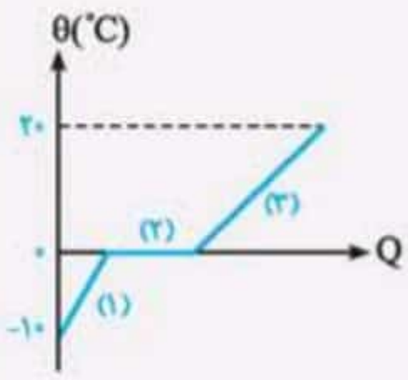
$$\Rightarrow Q = 21 + 168 = 189 kJ$$ (گزینهٔ ۳)

تمرین۳ **آیا ممکن است به یک جسم گرما بدهیم ولی دمای آن تغییر نکند؟**

پاسخ بله در هنگام تغییر حالت جسم این اتفاق رخ می‌دهد. به‌طور مثال در هنگام تبدیل یخ صفر درجهٔ سلسیوس به آب صفر درجهٔ سلسیوس، به مجموعه گرما داده می‌شود ولی دما ثابت است. این گرما صرف شکسته شدن پیوند بین مولکول‌ها و تغییر حالت ماده می‌شود.

تمرین۴ **قطعه یخی با دمای $-10^\circ C$ را حرارت داده تا در نهایت به دمای $+20^\circ C$ رسیده است. نمودار $\theta - Q$ را برای این قطعه یخ رسم کنید.**

پاسخ وقتی به یخ $-10^\circ C$ گرما می‌دهیم، دمای آن افزایش یافته و به $-9^\circ C$ و سپس $-8^\circ C$ و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند تا به یخ با دمای $0^\circ C$ تبدیل شود. حال با این‌که به یخ $0^\circ C$ گرما داده می‌شود ولی دما ثابت مانده و این گرما صرف شکسته شدن پیوند بین مولکول‌ها می‌شود و تغییر حالت ماده رخ داده و ماده از یخ با دمای $0^\circ C$ به آب با دمای $0^\circ C$ تبدیل می‌شود. حال آب $0^\circ C$ گرما گرفته و دمای آن افزایش می‌یابد و به $1^\circ C$ و سپس $2^\circ C$ و به همین ترتیب ادامه پیدا کرده تا به خواستهٔ خود، یعنی آب با دمای $20^\circ C$ برسیم. بنابراین سه مرحلهٔ زیر اتفاق می‌افتد:



مرحلهٔ اول: تبدیل یخ $-10^\circ C$ به یخ $0^\circ C$ $\Leftarrow$ افزایش دما با دادن گرما

مرحلهٔ دوم: تبدیل یخ $0^\circ C$ به آب $0^\circ C$ (ماده تغییر حالت پیدا کرده است.) $\Leftarrow$ ثابت بودن دما با وجود دادن گرما

مرحلهٔ سوم: تبدیل آب $0^\circ C$ به آب $20^\circ C$ $\Leftarrow$ افزایش دما با دادن گرما

تذکر در تمرین فوق، معادلهٔ مربوط به ناحیهٔ (۱) برابر $Q = mc_{\text{یخ}} \Delta\theta = mc_{\text{یخ}} (\theta - \theta_0)$ و معادلهٔ مربوط به ناحیهٔ (۳) برابر $Q = mc_{\text{آب}} \Delta\theta' = mc_{\text{آب}} (\theta' - \theta'_0)$ می‌باشد. شیب مربوط به نمودار θ برحسب Q برابر $\frac{1}{mc}$ می‌باشد (چرا؟) و از آن‌جا که c آب تقریباً دو برابر c یخ می‌باشد، بنابراین $\frac{1}{mc_{\text{آب}}}$ نصف عبارت $\frac{1}{mc_{\text{یخ}}}$ بوده و بنابراین در نمودار فوق، شیب ناحیهٔ (۱) دو برابر شیب ناحیهٔ (۳) می‌باشد.

با توجه به خلاصه نکات فوق و رابطهٔ $Q = mL_F$، می‌توان نوشت:

$$Q = mL_F \Rightarrow L_F = \frac{Q}{m} \Rightarrow L_F \text{ واحد} \equiv J/kg \left(\frac{\text{ژول}}{\text{کیلوگرم}}\right)$$

۲ ۷۲۶ در انجماد نیز مانند فرایند ذوب، برای جامدهای غیر بلورین نقطهٔ انجماد مشخصی وجود ندارد. وجود ناخالصی نیز موجب می‌شود که مایع نقطهٔ انجماد مشخصی نداشته باشد بلکه انجماد در گستره‌ای از دما رخ دهد. مثلاً هنگام یخ زدن آب نمک، اولین بلورها در دمای کم‌تر از $0^\circ C$ تشکیل می‌شود و انجماد کامل در دماهای کم‌تر، تا $-18^\circ C$ روی می‌دهد.

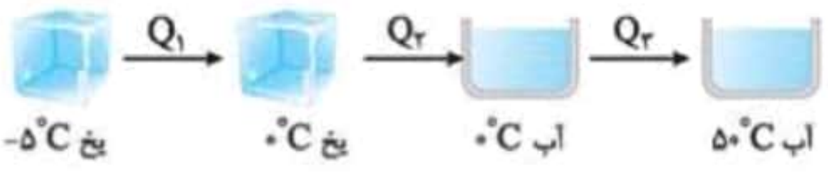
در ضمن همان‌طور که می‌دانیم فرایند انجماد، عملی گرماده بوده و گزینهٔ (۲) عبارت نادرستی است.

۲ ۷۲۷ برای محاسبهٔ گرمای جذب شده توسط گالیم در نقطهٔ ذوبش، به‌صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$Q = mL_F \Rightarrow Q = \underbrace{(10 \times 10^{-3})}_{kg} \times \underbrace{(80 \times 10^3)}_{J/kg} = 800 J$$

در واقع $10gr$ فلز گالیم با جذب $800J$ گرما در نقطهٔ ذوب خود $(30^\circ C)$، به‌طور کامل از حالت جامد به مایع تبدیل می‌شود.

۲ ۷۲۸ مقدار گرمایی که یخ $-5^\circ C$ می‌گیرد تا به آب $50^\circ C$ تبدیل شود، برابر است با:



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = mc_{\text{یخ}}\Delta\theta_{\text{یخ}} + mL_F + m_{\text{آب}}c_{\text{آب}}\Delta\theta_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow Q = 0/2\times 2100\times(0-(-5)) + 0/2\times 335000 + 0/2\times 4200\times(50-0) \Rightarrow Q = 2100 + 67000 + 42000 = 111100\,J = 111/1\,kJ$$

۲ ۷۲۹ برای حل این مسئله، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا باید جرم یخ روی دریاچه را محاسبه کنیم:

$$\rho_{\text{یخ}} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho_{\text{یخ}} V = \rho_{\text{یخ}} (A\,h) = \underbrace{(0/9\times 10^3)}_{kg/m^3}\underbrace{(500\times 10^6)}_{m^2}\underbrace{(0/1)}_{m} = 45\times 10^9\,kg$$

(A: سطح مقطع یخ، h: ضخامت یخ)

گام دوم: گرمای لازم برای ذوب یخ دریاچه برابر است با:

$$Q_F = m\ L_F = 45\times 10^9\times 336000 = 1/512\times 10^{16}\,J \Rightarrow Q_F = 1/512\times 10^{16}\times 10^{-6}\,MJ = 1/512\times 10^{10}\,MJ$$

(J) (kg) (J/kg)

۱ ۷۳۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ گرمایی که ۵۰ گرم یخ $-20^\circ C$ را به آب $70^\circ C$ تبدیل می‌کند): با توجه به شکل زیر داریم:



$$m = 50\,gr\ ,\ \theta_0 = -20^\circ C\ ,\ \theta = 70^\circ C\ ,\ L_F = 80c_{\text{آب}} = 160c_{\text{یخ}} \Rightarrow \begin{cases} L_F = 160c_{\text{یخ}} \\ c_{\text{آب}} = 2c_{\text{یخ}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = mc_{\text{یخ}}\Delta\theta_1 = 50\times c_{\text{یخ}}\times(0-(-20)) = 1000c_{\text{یخ}} \\ Q_2 = mL_F = 50\times(160c_{\text{یخ}}) = 8000c_{\text{یخ}} \\ Q_3 = mc_{\text{آب}}\Delta\theta_2 = 50\times 2c_{\text{یخ}}\times(70-0) = 7000c_{\text{یخ}} \end{cases} \Rightarrow Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1000c_{\text{یخ}} + 8000c_{\text{یخ}} + 7000c_{\text{یخ}} = 16000c_{\text{یخ}}$$

گام دوم: (محاسبهٔ مقدار یخی که گرمای $Q = 16000c_{\text{یخ}}$، می‌تواند آن را ذوب کند):

$$Q = m'L_F \Rightarrow 16000c_{\text{یخ}} = m'\times 160c_{\text{یخ}} \Rightarrow m' = \frac{16000}{160} = 100\,gr$$

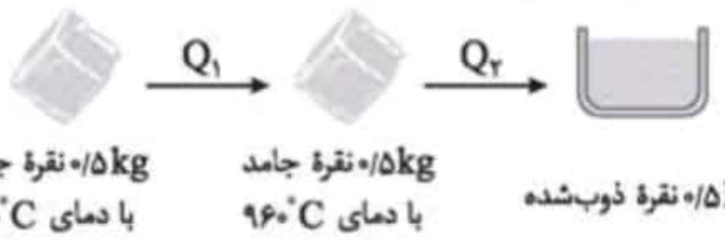
دقت: چون مقدار جرم یخ خواسته شده در صورت مسأله برحسب گرم است، نیازی نبود جرم $(m = 50\,gr)$ داده شده در مسأله را به SI برده و آن را به kg تبدیل کنیم.

۳ ۷۳۱ در این سؤال **حداقل** مقدار آب ۲۰ درجهٔ سلسیوس خواسته شده است تا تمام یخ ذوب شود. برای رخ دادن این اتفاق، آب باید به آب صفر درجهٔ سلسیوس برسد. از طرفی مقدار گرمایی که آب $20^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب $0^\circ C$ برسد (Q_1) را یخ $-10^\circ C$ جذب کرده و آن هم به آب $0^\circ C$ می‌رسد (Q_2). برای رخ دادن این اتفاق داریم:



$$|Q_1| = Q_2 \Rightarrow m_1c_{\text{آب}}\times(20-0) = m_2c_{\text{یخ}}\big(0-(-10)\big) + m_2L_F \Rightarrow m_1\times 4/2\times 20 = 200\times 2/1\times 10 + 200\times 336 \Rightarrow m_1 = 850\,gr$$

۲ ۷۳۲ **گام اول:** برای ذوب کردن این مقدار نقره، ابتدا باید دمای آن را از $60^\circ C$ به $960^\circ C$ رسانده و سپس آن را ذوب کنیم.



$$\begin{cases} Q_1 = mc\Delta\theta = 0/5\times 236\times(960-60) = 106200\,J \\ Q_2 = mL_F = 0/5\times 88\times 10^3 = 44000\,J \end{cases} \Rightarrow Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 = 150200\,J$$

گام دوم: فقط گرمای Q_1 باعث افزایش دمای نقره شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{درصد گرمای لازم برای افزایش دما} = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2}\times 100 = \frac{106200}{150200}\times 100 \simeq 70\%$$

۴ ۷۳۳ اگر از $500\,gr$ آب صفر درجهٔ سلسیوس $100/8\,kJ$ گرما بگیریم، میزان آب منجمد شده برابر است با:

$$Q = 100/8\,kJ\ ,\ m_0 = 500\,gr = 0/5\,kg\ ,\ L_F = 336\,kJ/kg$$

$$Q = mL_F \Rightarrow 100/8 = 336\times m_1 \Rightarrow m_1 = 0/3\,kg \quad \text{(جرم آب منجمد شده)}$$

در ادامه، درصد آب منجمد شده برابر است با:

$$\text{درصد آب منجمد شده} = \frac{\text{جرم آب منجمد شده}}{\text{جرم کل}}\times 100 = \frac{m_1}{m_0}\times 100 = \frac{0/3}{0/5}\times 100 = \frac{3}{5}\times 100 = 60\%$$

(۶۰ درصد از آب منجمد شده است.)

gajmarket.com

۳ ۷۳۴ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۷۳۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: میزان گرمایی که در طی ۱۲۲/۵ ثانیه و با بازده ۸۰ درصد توسط گرمکن به یخ داده می‌شود، برابر است با:

$$Q = Ra \times Pt = ۰/۸ \times ۷۵۰ \times ۱۲۲/۵ = ۷۳۵۰۰\,J$$

گام دوم: برای شروع فرایند ذوب یخ، نیاز است در اولین مرحله دمای یخ به صفر درجهٔ سلسیوس برسد و برای این منظور گرمای $Q_۱$ لازم است:

$$Q_۱ = mc_{\text{یخ}}\Delta\theta = ۰/۵ \times ۲۱۰۰ \times (۰ - (-۶)) = ۶۳۰۰\,J$$

گام سوم: گرمای $Q - Q_۱$ صرف ذوب یخ می‌شود و میزان یخ ذوب شده برابر است با:

$$Q - Q_۱ = m'L_f \Rightarrow ۷۳۵۰۰ - ۶۳۰۰ = m' \times ۳۳۶۰۰۰ \Rightarrow \text{مقدار یخ ذوب شده}: m' = ۰/۲kg = ۲۰۰gr$$

بنابراین ۲۰۰gr یخ ذوب شده و $m'' = ۵۰۰ - ۲۰۰ = ۳۰۰gr$ از آن در گرماسنج باقی می‌ماند.

۱ ۷۳۶ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ کل گرمای داده شده به یخ): در این سؤال، با توان ۱kW به یخ گرما می‌دهیم، بنابراین پس از ۱۰۰ ثانیه به اندازهٔ $۱kW \times ۱۰۰s = ۱۰۰kJ$ گرما به یخ منتقل می‌شود.

گام دوم: با توجه به صورت سؤال، گرمای نهان ذوب یخ، $L_F = ۳۳۵J/gr = ۳۳۵kJ/kg$ است و این موضوع یعنی برای ذوب شدن یک کیلوگرم یخ صفر درجهٔ سلسیوس، ۳۳۵kJ گرما لازم است و در نتیجه ۱۰۰kJ گرما نمی‌تواند یک کیلوگرم یخ را ذوب کند و در نتیجه در پایان مخلوطی از آب و یخ در اختیار داریم که دمای کل مجموعه برابر صفر درجهٔ سلسیوس است.

۴ ۷۳۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — آشنایی با گرمای لازم برای تبخیر و میعان و تحلیل مسائل آن (تست‌های ۷۳۷ تا ۷۴۷)

به‌طور کلی گرمایی را که یک مایع در نقطهٔ جوش خود می‌گیرد تا به بخار در همان دما تبدیل شود، گرمای لازم برای تبخیر می‌گویند.

$$Q = mL_V$$

تذکر **گرمای نهان ویژهٔ تبخیر** یا به اختصار، **گرمای نهان تبخیر (L_V)** برای یک مایع، تعریفی مشابه با (L_F) دارد و برابر است با مقدار گرمایی که باید به یک کیلوگرم مایع در دمای نقطهٔ جوش آن بدهیم تا به بخار در همان دما تبدیل شود. در SI یکای گرمای نهان تبخیر نیز همانند گرمای نهان ذوب ژول بر کیلوگرم است.

$$\begin{cases} Q = mL_V \xrightarrow{m=۱kg} Q = L_V \\ L_V = \dfrac{Q}{m} \Rightarrow L_V \text{ واحد} \equiv \dfrac{J}{kg} \end{cases}$$

نکات مهم و کاربردی

۱ گرمای نهان تبخیر و نقطهٔ جوش مایع‌های مختلف، متفاوت است.

۲ گرمای نهان تبخیر، همواره بزرگ‌تر از گرمای نهان ویژهٔ ذوب است، یعنی $L_V > L_F$. به‌طور مثال L_V برای آب تقریباً ۶/۸ برابر L_F است.

۳ گرمای تبخیر هر مایع به جنس و دمای آن بستگی دارد.

۴ مایع در هر دمایی می‌تواند تبخیر شود و این تبخیر، تبخیر سطحی است، اما آهنگ تبخیر هر ماده در نقطهٔ جوش آن به بیشترین مقدار خود می‌رسد، به عبارت دیگر در نقطهٔ جوش مایع، تبخیر سطحی با شدت بیشتر و صرف انرژی کم‌تری انجام می‌شود. به همین دلیل با افزایش دما گرمای نهان تبخیر (L_V) کاهش می‌یابد. به‌طور مثال جدول مقابل گرمای نهان تبخیر آب را در دماهای مختلف نشان می‌دهد.

دما ($^\circ C$)	L_V (kJ / kg)
۰	۲۴۹۰
۱۵	۲۴۵۴
۵۰	۲۳۷۴
۱۰۰	۲۲۵۶

نتیجه گرمای نهان تبخیر با افزایش دما کاهش می‌یابد، یعنی با افزایش دما، مایع راحت‌تر بخار می‌شود.

۵ میعان وارون فرایند تبخیر است. بخار هنگام تبدیل شدن به مایع گرما از دست می‌دهد. این گرما برابر همان گرمایی است که هنگام تبخیر می‌گیرد. گرمای مربوط به میعان مقداری بخار به جرم m و گرمای نهان تبخیر L_V از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Q = -mL_V$$

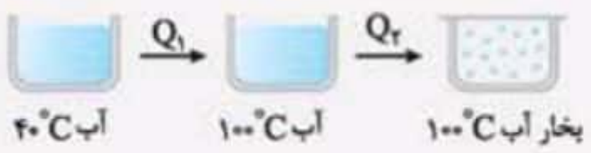
* دقت شود که علامت منفی نشان‌دهندهٔ گرماده بودن فرایند میعان است. از سوی دیگر جالب است بدانید که میعان نیز مانند تبخیر در هر دمایی رخ می‌دهد.

در ادامه به تمرین‌های زیر توجه کنید.

تمرین۱ **مقداری آب ۴۰ درجهٔ سلسیوس را در محلی که نقطهٔ جوش آب $100^\circ C$ است، به بخار آب $100^\circ C$ تبدیل می‌کنیم. چند درصد گرمای داده شده صرف افزایش دمای آب شده است؟ ($L_V = 540 c$ آب)** (ریاضی خارج ۸۷ و ۸۳)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ با توجه به صورت مسأله و شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} Q_1 = mc\Delta\theta = mc(100-40) = 60mc & \text{(گرمای باعث افزایش دما)} \\ Q_2 = mL_V = m(540c) = 540mc & \text{(گرمای باعث تغییر حالت)} \end{cases}$$

محاسبهٔ کل گرما: $Q = Q_1 + Q_2 = 60mc + 540mc = 600mc$

مقدار درصد کل گرمای داده شده (Q) که صرف افزایش دمای آب شده است (Q_1)، برابر است با:

$$\frac{\text{گرمای باعث افزایش دما}}{\text{کل گرما}} \times 100 = \frac{Q_1}{Q} \times 100 = \frac{60\,mc}{600\,mc} \times 100 = \%10 \quad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

تمرین۲ **یک گرمکن با توان گرمایی ثابت، در مدت ۱۰ دقیقه، ۱۰۰ گرم یخ صفر درجه را به آب صفر درجه تبدیل می‌کند. این گرمکن همین آب را تقریباً در مدت چند دقیقه به بخار آب ۱۰۰ درجه تبدیل می‌کند؟ ($c = 4/2\,kJ/kg.^\circ C$, $L_V = 2256\,kJ/kg$, $L_F = 334\,kJ/kg$)**

۱) ۲۶ ۲) ۴۰ ۳) ۵۶ ۴) ۸۰ (تجربی داخل ۸۹)

پاسخ در این سؤال در دو قسمت به ماده گرما داده‌ایم. با توجه به این‌که توان گرمکن در هر دو حالت ثابت است و با توجه به شکل‌های زیر داریم:

قسمت اول گرما دادن (تبدیل یخ $0^\circ C$ به آب $0^\circ C$):



$$\begin{cases} Q = Q_1 = mL_F \\ Q = P.t_1 \end{cases} \Rightarrow mL_F = P.t_1 \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

قسمت دوم گرما دادن (تبدیل آب $0^\circ C$ به بخار آب $100^\circ C$):



$$\begin{cases} Q' = Q'_1 + Q'_2 = mc\Delta\theta + mL_V \\ Q' = P.t_2 \end{cases} \Rightarrow P.t_2 = mc\Delta\theta + mL_V \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

در ادامه، با توجه به روابط زیر داریم:

$$\begin{cases} (1): P.t_1 = mL_F \\ (2): P.t_2 = mc\Delta\theta + mL_V \end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین تساوی را بر هم}} \frac{P.t_1}{P.t_2} = \frac{mL_F}{mc\Delta\theta + mL_V}$$

$$t_1 = 10\,min \ , \ t_2 = ? \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{L_F}{c\Delta\theta + L_V} \Rightarrow \frac{10}{t_2} = \frac{334}{4/2 \times (100-0) + 2256} \Rightarrow t_2 = 80\,min \quad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

در هنگام میعان، ماده تغییر حالت داده و دمای ماده در این فرایند ثابت می‌ماند، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

* سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات (۷) صحیح هستند.

۱ ۷۳۸ با توجه به صورت سؤال فرایند تبدیل آب $50^\circ C$ به بخار آب $100^\circ C$ به‌صورت زیر است:

$$m = 200\,gr = 0/2\,kg \ , \ \theta_0 = 50^\circ C \ , \ \theta = 100^\circ C \ , \ c = 4200\,J/kg.^\circ C \ , \ L_V = 2/3 \times 10^6\,J/kg$$



$$\begin{cases} Q_1 = mc\Delta\theta = 0/2 \times 4200 \times (100-50) = 42000\,J \\ Q_2 = mL_V = 0/2 \times 2/3 \times 10^6 = 460000\,J \end{cases} \Rightarrow Q = Q_1 + Q_2 = 460000 + 42000 = 502000\,J = 5/02 \times 10^5\,J = 5 \times 10^5\,J$$

۱ ۷۳۹ گرمای لازم برای تبدیل $100\,gr$ آب $100^\circ C$ به بخار آب $100^\circ C$ برابر $Q_1 = mL_V$ و گرمای لازم برای تبدیل $100\,gr$ یخ صفر درجهٔ سلسیوس به آب صفر درجهٔ سلسیوس برابر $Q_2 = mL_F$ است و همان‌طور که در خلاصه نکات قبل نیز گفته شد، $L_V > L_F$ است (L_V، تقریباً هفت برابر L_F است)، در نتیجه $Q_1 > Q_2$ خواهد بود.

۲ ۷۴۰ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

gajmarket.com

۷۴۱ ۴ با توجه به اطلاعات مسأله و روابط $Q = mL_V$ و $Q = Pt$ داریم:

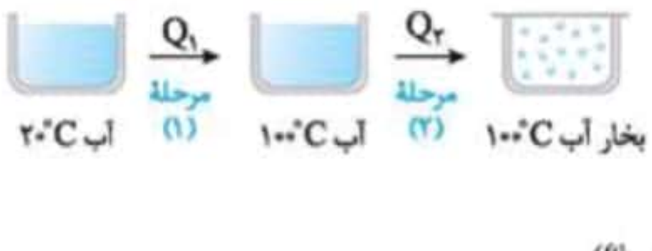
$$P = ۲kW = ۲۰۰۰W \ , \ t = (۹\times۶۰+۲۴)s = ۵۶۴s \ , \ L_V = ۲/۲۵۶\times۱۰^۶ J/kg$$

$$\begin{cases} Q = Pt \\ Q = mL_V \end{cases} \Rightarrow Pt = mL_V \Rightarrow ۲۰۰۰\times۵۶۴ = ۲/۲۵۶\times۱۰^۶\times m \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}kg = ۵۰۰gr$$

دقت: ۵۶۴ و ۲۲۵۶ با یک‌دیگر ساده می‌شوند $\left(\frac{۵۶۴}{۲۲۵۶} = \frac{۱}{۴}\right)$.

۷۴۲ ۳ با توجه به ثابت بودن توان گرمادهی اجاق و اطلاعات سؤال داریم:

$$t_۱ = ۸min \ , \ t_۲ = ? \ , \ \theta_۱ = ۲۰^\circ C \ , \ \theta_۲ = ۱۰۰^\circ C \ , \ c = ۴/۲J/gr.K \ , \ L_V = ۲۲۶۸J/gr$$



$$\begin{cases} Q_۱ = Pt_۱ = mc\Delta\theta \\ Q_۲ = Pt_۲ = mL_V \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲} = \frac{mc\Delta\theta}{mL_V} \Rightarrow \frac{۸}{t_۲} = \frac{۴/۲\times(۱۰۰-۲۰)}{۲۲۶۸} \Rightarrow t_۲ = ۵۴min$$

دقت: واحد c در صورت $J/gr.K$ و واحد L_V در مخرج J/gr است و نیازی به تبدیل واحد نیست (چرا؟).

۷۴۳ ۴ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا جرم آبی که بخار می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{آب} = \rho V \xrightarrow[V=۲lit=۲\times۱۰^{-۳}m^۳]{\rho=۱۰۰۰kg/m^۳} m_{آب} = ۱۰۰۰\times۲\times۱۰^{-۳} = ۲kg$$

جرم آب بخارشده: $m' = \frac{۲۵}{۱۰۰}m_{آب} = \frac{۱}{۴}m_{آب} \Rightarrow m' = \frac{۱}{۴}\times۲ = ۰/۵kg$

گام دوم: با توجه به روابط زیر، زمان مورد نیاز برای تبخیر ۰/۵kg آب را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} Q = m'L_V \\ Q = P\Delta t \end{cases} \Rightarrow P\Delta t = m'L_V \Rightarrow \Delta t = \frac{m'L_V}{P} = \frac{\frac{۱}{۲}\times۲/۳\times۱۰^۶}{۲۳۰} = ۵۰۰۰s$$

۷۴۴ ۲ در این عمل، میعان رخ داده و بخار آب تبدیل به مایع می‌شود. بنابراین فرایند گرماده بوده و می‌توان نوشت:

$$Q = -mL_V = -۵۰\times۱۰^{-۳}\times۲۴۹۰\times۱۰^۳ = -۱۲۴۵۰۰J \Rightarrow$$ بخار آب ۱۲۴۵۰۰ ژول گرما به شیشه می‌دهد.

(عمل میعان گرماده است)

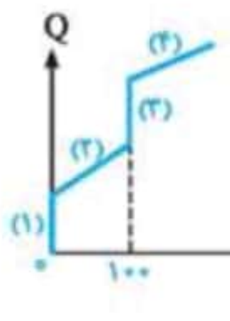
۷۴۵ ۴ این فرایند را در چهار مرحله بررسی می‌کنیم:

۱) در مرحلهٔ اول، یخ گرما دریافت کرده و یخ صفر درجهٔ سلسیوس به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌شود. در این مرحله نمودار $Q-\theta$ به‌صورت یک خط قائم است.

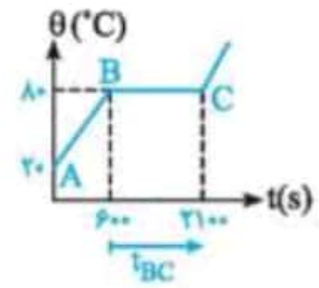
۲) در مرحلهٔ دوم، آب صفر درجهٔ سلسیوس گرما دریافت کرده و به آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌شود و نمودار $Q-\theta$ یک خط مورب است.

۳) در مرحلهٔ سوم، آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس گرما دریافت کرده و به بخار آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌شود و نمودار $Q-\theta$ به‌صورت یک خط قائم است.

۴) در مرحلهٔ چهارم، بخار آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس افزایش دما داده و به بخار فوق داغ تبدیل می‌شود.



۷۴۶ ۴ با توجه به این‌که در مرحلهٔ BC، با دادن گرما به جسم دما تغییری نمی‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که جسم در حال ذوب شدن است، بنابراین می‌توان با استفاده از گرمای داده شده به جسم در این مرحله، جرم آن را به‌دست آورد:



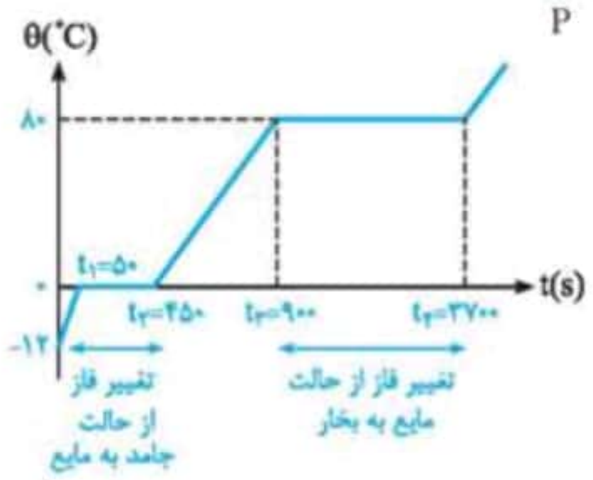
$$Q_{BC} = Pt_{BC} = ۱۰۰\times(۲۱۰۰-۶۰۰) = ۱۰۰\times۱۵۰۰ = ۱۵۰۰۰۰J$$

$$Q_{BC} = mL_F \Rightarrow ۱۵۰۰۰۰ = m\times۱۵\times۱۰^۴ \Rightarrow m = ۱kg$$

در ادامه، با توجه به میزان گرمای داده‌شده در قسمت AB، گرمای ویژهٔ این جسم به سادگی برابر است با:

$$Q_{AB} = Pt_{AB} = mc(\theta_B-\theta_A) \Rightarrow \underset{P}{۱۰۰}\times\underset{t_{AB}}{۶۰۰} = ۱\times c\times(۸۰-۲۰) \Rightarrow c = ۱۰۰۰J/kg.^\circ C$$

۷۴۷ ۲ در بازه زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، جسم در حال تغییر حالت از جامد به مایع و در بازه زمانی $t_۳$ تا $t_۴$، جسم در حال تغییر حالت از مایع به بخار می‌باشد (چرا؟). بنابراین برای به‌دست آوردن گرمای نهان تبخیر و گرمای نهان ذوب می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} Q_{ذوب} = P(t_۲-t_۱) = mL_F & \text{: (۱) رابطهٔ} \\ Q_{تبخیر} = P(t_۴-t_۳) = mL_V & \text{: (۲) رابطهٔ} \end{cases}$$

بنابراین از تقسیم رابطهٔ (۲) به رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{L_V}{L_F} = \frac{t_۴-t_۳}{t_۲-t_۱} = \frac{۳۷۰۰-۹۰۰}{۴۵۰-۵۰} = \frac{۲۸۰۰}{۴۰۰} = ۷$$

۳ ۷۴۸ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۸ — **تبخیر سطحی** — (تست‌های ۷۴۸ تا ۷۵۲)

پارچهٔ خیسی را روی یک سنگ‌فرش پهن کنید. پس از یکی دو ساعت می‌بینید که کاملاً خشک شده است. آب موجود در آن کجا رفته است؟
پاسخ آن است که آب تبخیر شده است. تجربه‌هایی مانند این نشان می‌دهند که در سطح آزاد هر مایع همواره و **در هر دمایی** عمل تبخیر روی می‌دهد، این پدیده را **تبخیر سطحی** می‌گویند. مولکول‌های جداشده از سطح مایع در اثر تبخیر سطحی گرمای نهان تبخیر ($Q = mL_V$) را جذب می‌کنند و **بدون رسیدن به نقطهٔ جوش** بخار می‌شوند.

تذکر مولکول‌های جداشده از سطح مایع، گرمای لازم برای تبخیر را از مولکول‌های دیگر می‌گیرند و در نتیجه با انجام تبخیر سطحی، دمای مایع کاهش می‌یابد.

تمرین **عوامل مؤثر در تبخیر سطحی را بررسی کنید.**

پاسخ عوامل مؤثر عبارت‌اند از:

۱) **دما:** هرچه دما بیشتر باشد، انرژی بیشتری برای جداشدن مولکول‌ها از سطح فراهم می‌شود.

۲) **مساحت سطح آزاد مایع:** هرچه سطح آزاد مایع بزرگ‌تر باشد، تعداد بیشتری از مولکول‌های مایع تبخیر می‌شوند.

۳) **وزش باد:** برخی از مولکول‌های مایع پس از جداشدن از سطح مایع، امکان دارد به مایع برگردند، وزش باد یا نسیم از برگشت مجدد مولکول‌ها بر سطح مایع جلوگیری می‌کند.

۴) **فشار هوا:** هرچه فشار هوا در محیط کم‌تر باشد، تبخیر سطحی با سرعت بیشتری انجام می‌گیرد.

۵) **کم بودن رطوبت هوا:** هرچه رطوبت هوا کم‌تر باشد، تبخیر سطحی با سرعت بیشتری انجام می‌شود.

با توجه به آن‌چه در خلاصه نکات فوق بیان کردیم، گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا افزایش فشار هوا باعث کاهش آهنگ تبخیر سطحی در سطح یک مایع می‌شود.

۴ ۷۴۹ همان‌طور که می‌دانیم، امکان انجام فرایند تبخیر در هر دمایی وجود دارد. بنابراین فرایند تبخیر در هر سه دما می‌تواند رخ دهد که به آن تبخیر سطحی می‌گوییم، اما این عمل در نقطهٔ جوش مایع با شدت بیشتر و صرف انرژی کم‌تری انجام می‌شود.

۱ ۷۵۰ با توجه به آن‌چه در خلاصهٔ نکات (۸) بیان شد، در اثر تبخیر سطحی برای جرم m از مایع، مایع گرمای mL_V را از دست می‌دهد و در اثر آن، دمای مایع پایین می‌آید. این موضوع یعنی انرژی درونی مایع باقی‌مانده نسبت به حالت اولیه، کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در حین تبخیر سطحی، مولکول‌های پرانرژی‌تر از سطح مایع می‌گریزند و انرژی درونی مایع کاهش می‌یابد.

۳ ۷۵۱ مقداری از آب درون کوزه‌های سفالی، از دیواره‌های آن نشت می‌کند. این آب نشت‌کرده، از آب درون کوزه گرما گرفته و سپس تبخیر می‌شود. بنابراین مقداری از گرمای آب درون کوزه گرفته شده و این موضوع باعث خنک نگه‌داشتن آب می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴ ۷۵۲ افزایش دما، افزایش سطح آزاد مایع، وزش باد، کاهش فشار هوا و کاهش رطوبت هوا، آهنگ تبخیر سطحی را در سطح افزایش می‌دهد و لباس زودتر خشک می‌شود، بنابراین هوای آفتابی، خشک و باد زیاد شرایط مساعد برای خشک کردن لباس است.

۱ ۷۵۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ — **دمای تعادل** — (تست‌های ۷۵۳ تا ۷۷۱)

به‌طور کلی اگر چند جسم بخواهند با یک‌دیگر به تعادل گرمایی برسند، اجسامی که دمای بیشتری دارند، انرژی از دست داده و اجسامی که دمای کم‌تری دارند آن انرژی را دریافت می‌کنند، این انتقال انرژی گرمایی آن‌قدر ادامه می‌یابد تا دمای تمام اجسامی که در تبادل گرمایی شرکت داشته‌اند، یکسان شود و به بیان دیگر همهٔ اجسام به **تعادل گرمایی** می‌رسند. در این حالت دمای نهایی اجسام را **دمای تعادل** مجموعه می‌نامیم.

تذکر۱ جسمی که دمای بیشتری دارد لزوماً انرژی درونی بیشتری ندارد، به‌طور مثال دمای یک لیوان چای داغ بیشتر از یک استخر آب صفر درجهٔ سلسیوس است ولی انرژی درونی آن در مقابل انرژی درونی آب استخر ناچیز است.

تذکر۲ اگر دو جسم با جرم‌های m_1 و m_2 را که گرمای ویژهٔ آن‌ها به‌ترتیب c_1 و c_2 و دمای اولیهٔ آن‌ها θ_1 و θ_2 $(\theta_2 > \theta_1)$ است در تماس با یک‌دیگر قرار دهیم، انتقال گرما از جسم دوم که دمای بیشتری دارد (θ_2)، به جسم اول که دمای کم‌تری دارد (θ_1) تا زمانی صورت می‌گیرد که دو جسم هم‌دما شوند (θ_e)، اگر انرژی گرمایی تلف نشده باشد، جمع جبری انرژی‌های مبادله‌شده میان دو جسم، صفر است.

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1c_1(\theta_e - \theta_1) + m_2c_2(\theta_e - \theta_2) = 0$$

www.gajmarket.com

این مطلب را می‌توان برای بیش از دو جسم نیز به‌صورت مقابل نوشت: $Q_1+Q_2+Q_3+\ldots+Q_n=0$

روش تستی: در حل مسائل تعادل اگر تغییر حالت و اتلاف گرما وجود نداشته باشد، با ساده کردن رابطهٔ بقای انرژی رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta_e=\frac{m_1c_1\theta_1+m_2c_2\theta_2+\ldots}{m_1c_1+m_2c_2+\ldots}$$



تذکر۳ اگر مقداری آب و یک جسم را در داخل گرماسنج قرار دهیم و به کمک همزن، آب را هم بزنیم تا تعادل برقرار شود، در این صورت قانون پایستگی انرژی را می‌توان به صورت زیر به کار برد:

$$Q_{\text{گرماسنج}}+Q_{\text{جسم}}+Q_{\text{آب}}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_{\text{گرماسنج}}c_{\text{گرماسنج}}}_{C_{\text{گرماسنج}}}(\theta_e-\theta_{1\text{گرماسنج}})+m_{\text{جسم}}c_{\text{جسم}}(\theta_e-\theta_{1\text{جسم}})+m_{\text{آب}}c_{\text{آب}}(\theta_e-\theta_{1\text{آب}})=0$$

نکته دمای تعادل یک مجموعه، همواره بین بیشترین و کم‌ترین دمای اجسام قبل از تعادل قرار دارد.

تمرین۱ **یک قطعهٔ ۵۰۰ گرمی از مس را که دمای آن $67^\circ C$ است، در ظرف عایق حرارت که حاوی ۳۸۰ گرم آب در دمای $20^\circ C$ است می‌اندازیم. دمای تعادل چند درجهٔ سلسیوس می‌شود؟ (گرمای ویژهٔ آب و مس به ترتیب $4200\,J/kg.K$ و $380\,J/kg.K$ و اتلاف گرما ناچیز است.)**

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۸ (ریاضی داخل ۸۲ و ۸۳)

پاسخ **روش اول:** با توجه به اطلاعات مسأله و قانون بقای انرژی داریم:

$$\text{آب}:\begin{cases}m_2=380\,gr\\ \theta_2=20^\circ C\xrightarrow{\text{می‌رسد به}}\theta_e\\ c_2=4200\,J/kg.K\end{cases}\qquad \text{مس}:\begin{cases}m_1=500\,gr\\ \theta_1=67^\circ C\xrightarrow{\text{می‌رسد به}}\theta_e\\ c_1=380\,J/kg.K\end{cases}$$

$$Q_1+Q_2=0\Rightarrow \underbrace{m_1c_1(\theta_e-\theta_1)}_{\text{گرمای مبادله شدهٔ مس}}+\underbrace{m_2c_2(\theta_e-\theta_2)}_{\text{گرمای مبادله شدهٔ آب}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{500}}{5}\times\cancel{380}\times(\theta_e-67)=-\cancel{380}\times\frac{\cancel{4200}}{42}\times(\theta_e-20)\Rightarrow 5\theta_e-5\times67=-42\theta_e+42\times20\Rightarrow 47\theta_e=840+335\Rightarrow\theta_e=25^\circ C$$

روش دوم (راه‌حل تستی): با توجه به این‌که در این مسأله تغییر حالت و اتلاف گرما نداشته‌ایم، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\theta_e=\frac{m_1c_1\theta_1+m_2c_2\theta_2}{m_1c_1+m_2c_2}\Rightarrow\theta_e=\frac{500\times\cancel{380}\times67+\cancel{380}\times4200\times20}{500\times\cancel{380}+\cancel{380}\times4200}=25^\circ C$$ (گزینهٔ ۳)

دقت: نیازی نیست جرم را از gr به kg تبدیل کنیم و کافی است واحد در طرفین تساوی یکسان باشد.

تمرین۲ **چند لیتر آب ۵۰ درجهٔ سلسیوس را با چند لیتر آب ۲۰ درجهٔ سلسیوس مخلوط کنیم تا ۶۰ لیتر آب با دمای ۴۰ درجهٔ سلسیوس داشته باشیم؟ (به ترتیب از راست به چپ)** (تجربی خارج ۸۶)

۱) ۲۰ و ۴۰ ۲) ۳۵ و ۲۵ ۳) ۴۰ و ۲۰ ۴) ۳۵ و ۳۵

پاسخ m_1 کیلوگرم آب $50^\circ C$ با m_2 کیلوگرم آب $20^\circ C$ با یک‌دیگر مخلوط شده و ۶۰ لیتر (یا $60\,kg$) آب با دمای $40^\circ C$ حاصل شده است. با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$\theta_e=\frac{m_1\cancel{c_1}\theta_1+m_2\cancel{c_2}\theta_2}{m_1\cancel{c_1}+m_2\cancel{c_2}}\Rightarrow \cancel{40}^{4}=\frac{m_1\times\cancel{50}^{5}+m_2\times\cancel{20}^{2}}{m_1+m_2}\Rightarrow 5m_1+2m_2=4m_1+4m_2\Rightarrow m_1=2m_2$$

از طرفی m_1+m_2 (مجموع جرم دو آب) برابر $60\,kg$ است و داریم (هر یک لیتر آب جرمی برابر با یک کیلوگرم دارد):

$$m_1+m_2=60\xrightarrow{m_1=2m_2}3m_2=60\Rightarrow m_2=20\,kg\Rightarrow V_2=20\,Lit$$

$$m_1=2m_2=40\,kg\Rightarrow V_1=40\,Lit$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

نگاه دیگر: با توجه به اطلاعات مسأله و قانون بقای انرژی داریم:

$$۱)\begin{cases}m_1=?\\ \theta_1=50^\circ C\xrightarrow{\text{می‌رسد به}}\theta_e=40^\circ C\\ c_1=c\end{cases}\qquad ۲)\begin{cases}m_2=?\\ \theta_2=20^\circ C\xrightarrow{\text{می‌رسد به}}\theta_e=40^\circ C\\ c_2=c\end{cases}\quad , \quad m_1+m_2=60\,kg$$

$$Q_1+Q_2=0\Rightarrow m_1c_1(\theta_e-\theta_1)+m_2c_2(\theta_e-\theta_2)=0\Rightarrow m_1(40-50)+m_2(40-20)=0\Rightarrow m_1=2m_2$$

در ادامه با توجه به این‌که $m_1+m_2=60\,kg$ است، می‌توان نوشت:

$$m_1+m_2=60\,kg\Rightarrow 3m_2=60\Rightarrow m_2=20\,kg\Rightarrow V_2=20\,Lit\quad,\quad m_1=40\,kg\Rightarrow V_1=40\,Lit$$

با توجه به خلاصه نکات فوق، هنگامی که چند جسم در تعادل گرمایی قرار دارند، **دمای** آن‌ها با یک‌دیگر برابر است.

۴ ۷۵۴ هنگامی‌که دو جسم در کنار یک‌دیگر قرار می‌گیرند، گرما از جسم با دمای بالاتر به جسم با دمای پایین‌تر منتقل می‌شود و این روند ادامه دارد تا زمانی‌که دمای دو جسم با یک‌دیگر برابر شود. بنابراین در تعادل گرمایی لزوماً کاهش دمای جسم گرم، با افزایش دمای جسم سرد برابر نیست، بلکه فقط دمای نهایی آن‌ها با هم برابر است. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ ۷۵۵ هنگامی‌که دو جسم با یک‌دیگر در تعادل گرمایی قرار دارند، با یک‌دیگر هم‌دما هستند. با توجه به صورت سؤال جسم A با دو جسم B و C در تعادل گرمایی قرار دارد، بنابراین جسم A با دو جسم B و C هم‌دماست و در نتیجه دمای دو جسم B و C با هم برابر است.

۲ ۷۵۶ دمای این سه جسم را به سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\theta_1 = 350\,K = (350-273)\,^\circ C = 77\,^\circ C\\ \theta_2 = 380\,K = (380-273)\,^\circ C = 107\,^\circ C\\ \theta_3 = 385\,K = (385-273)\,^\circ C = 112\,^\circ C\end{cases}$$

با توجه به این‌که دمای تعادل همواره بین کم‌ترین و بیشترین دماهای اجسام قبل از برقراری تعادل گرمایی قرار دارد، پس:

$77^\circ C < \theta_e < 112^\circ C \Rightarrow$ تنها گزینه‌ای که در این بازه صدق می‌کند، گزینهٔ (۲) است.

۴ ۷۵۷ پس از برقراری تعادل گرمایی، دمای مس و آلومینیم هر دو به دمای محیط یعنی θ می‌رسد. در ادامه با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

$$\text{مس}: \begin{cases} m_{Cu} = 2\,kg\\ \theta_e = 95\,^\circ C\\ c_{Cu} = 400\,J/kg.K\end{cases} \qquad \text{آلومینیم}: \begin{cases} m_{Al} = 1\,kg\\ \theta_e = 90\,^\circ C\\ c_{Al} = 900\,J/kg.K\end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{Al} = m_{Al}c_{Al}\Delta\theta = 1\times 900\times(\theta-90)\\ Q_{Cu} = m_{Cu}c_{Cu}\Delta\theta = 2\times 400\times(\theta-95)\end{cases} \Rightarrow \frac{Q_{Al}}{Q_{Cu}} = \frac{900\times(\theta-90)}{800\times(\theta-95)} \Rightarrow \frac{Q_{Al}}{Q_{Cu}} = \frac{9}{8}\left(\frac{\theta-90}{\theta-95}\right)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت مقدار گرمایی که آلومینیم از دست داده است به گرمایی که مس از دست داده است، به دمای اولیهٔ محیط بستگی دارد و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۷۵۸ در این سؤال، آلومینیم گرما می‌گیرد و مس گرما از دست می‌دهد، بنابراین نسبت $\frac{Q_{AL}}{Q_{Cu}}$ عددی منفی است (چرا؟). با توجه به پاسخ سؤال قبل، می‌توان نوشت:

$$\frac{Q_{Al}}{Q_{Cu}} = \frac{9(\theta-90)}{8(\theta-95)} \xrightarrow{\frac{Q_{Al}}{Q_{Cu}} = -4/5 = -\frac{9}{2}} -\frac{9}{2} = \frac{9(\theta-90)}{8(\theta-95)} \Rightarrow 8(\theta-95) = -2(\theta-90) \Rightarrow 8\theta - 760 = -2\theta + 180$$

$$\Rightarrow 10\theta = 760 + 180 = 940 \Rightarrow \theta = 94\,^\circ C$$

۳ ۷۵۹ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۹)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۷۶۰ با توجه به این‌که در این مسأله تغییر حالت نداریم، به کمک رابطهٔ زیر می‌توان دمای تعادل مجموعه را به‌دست آورد:

$$\theta_e = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2}{m_1c_1 + m_2c_2} = \frac{80\times 4200\times 11/5 + 420\times 380\times 100}{80\times 4200 + 420\times 380} = 40\,^\circ C$$

دمای آب از $11/5\,^\circ C$ به $40\,^\circ C$ رسیده است، از طرفی می‌دانیم میزان افزایش دما برحسب درجهٔ سلسیوس و کلوین با هم برابر است. بنابراین برای محاسبهٔ تغییر دمای آب می‌توان نوشت:

$$\Delta\theta_{\text{آب}} = 40 - 11/5 = 28/5\,^\circ C \xrightarrow[\text{کلوین و سلسیوس برابر است}]{\text{تغییر دما برحسب}} \Delta T_{\text{آب}} = 28/5\,K$$

هشدار

بسیاری از دانش‌آموزان، صورت سؤال را به درستی مطالعه نکرده و به اشتباه گزینهٔ (۲) را انتخاب می‌کنند.

۲ ۷۶۱ با توجه به پاسخ سؤال قبل، دمای قطعه فلز از $\theta = 100\,^\circ C$ به $\theta_e = 40\,^\circ C$ می‌رسد. بنابراین مقدار گرمای از دست داده شده توسط فلز برابر است با:

$$Q_{\text{فلز}} = mc\Delta\theta = \frac{420}{1000}\times 380\times(40-100) = -9576\,J$$

۲ ۷۶۲ **روش اول:** دمای قطعهٔ فلزی از $70\,^\circ C$ به‌اندازهٔ $50\,^\circ C$ کاهش یافته و به دمای تعادل رسیده است. بنابراین دمای تعادل برابر $\theta_e = 70 - 50 = 20\,^\circ C$ می‌باشد. با توجه به اطلاعات مسأله و قانون بقای انرژی داریم:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_2 = m\\ \theta_2 = 10\,^\circ C \xrightarrow{\text{می‌رسد به}} \theta_e = 20\,^\circ C\\ c_2 = 4200\,J/kg.^\circ C\end{cases} \qquad \text{فلز}: \begin{cases} m_1 = 210\,gr\\ \theta_1 = 70\,^\circ C \xrightarrow{\text{می‌رسد به}} \theta_e = 70-50 = 20\,^\circ C\\ c_1 = 380\,J/kg.^\circ C\end{cases}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1c_1(\theta_e - \theta_1) + m_2c_2(\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow 210\times 380\times(20-70) = -m\times 4200\times(20-10) \Rightarrow 19\times 50 = 10m \Rightarrow m = 95\,gr$$

gajmarket.com

روش دوم (راه‌حل تستی): با توجه به این‌که در این مسأله تغییر حالت و اتلاف انرژی نداشته‌ایم، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\theta_e=\frac{m_1c_1\theta_1+m_2c_2\theta_2}{m_1c_1+m_2c_2}\Rightarrow ۲۰=\frac{\overset{۱}{\cancel{۲۱۰}}\times ۳۸۰\times ۷۰+m\times \overset{۲۰}{\cancel{۴۲۰۰}}\times ۱۰}{\underset{۱}{\cancel{۲۱۰}}\times ۳۸۰+\underset{۲۰}{\cancel{۴۲۰۰}}\times m}\Rightarrow ۲۰\times ۳۸۰+۲۰\times ۲۰\times m=۳۸۰\times ۷۰+m\times ۲۰\times ۱۰\Rightarrow m=۹۵gr$$

۲ ۷۶۳ در ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V}$، جرم آلومینیم و آب را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho.V\Rightarrow\begin{cases}m_{\text{آب}}=۵۴۰cm^۳\times ۱gr/cm^۳=۵۴۰gr\\ m_{\text{آلومینیم}}=۲۰۰cm^۳\times ۲/۷gr/cm^۳=۵۴۰gr\end{cases}$$

در ادامه با استفاده از اصل بقای انرژی، خواهیم داشت:

$$\text{آب}:\begin{cases}m_1=۵۴۰gr\\ c_1=۴/۲J/gr.K\\ \theta_1=۲۰^\circ C\xrightarrow{\text{می‌رسد به}}\theta_e\end{cases}\qquad \text{آلومینیم}:\begin{cases}m_2=۵۴۰gr\\ c_2=۰/۹J/gr.K\\ \theta_2=۱۰۰^\circ C\xrightarrow{\text{می‌رسد به}}\theta_e\end{cases}$$

$$Q_1+Q_2=۰\Rightarrow m_1c_1\Delta\theta_1+m_2c_2\Delta\theta_2=۰\Rightarrow \cancel{۵۴۰}\times ۴/۲\times(\theta_e-۲۰)+\cancel{۵۴۰}\times ۰/۹\times(\theta_e-۱۰۰)=۰\Rightarrow ۴/۲\times(\theta_e-۲۰)=-۰/۹\times(\theta_e-۱۰۰)$$

$$\Rightarrow ۴/۲\theta_e-۸۴=-۰/۹\theta_e+۹۰\Rightarrow ۵/۱\theta_e=۱۷۴\Rightarrow\theta_e=\frac{۱۷۴}{۵/۱}\simeq ۳۴^\circ C$$

۴ ۷۶۴ برای حل این تست، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) هنگامی‌که مس و آلومینیم $۱۰۰^\circ C$ را داخل آب صفر درجهٔ سلسیوس می‌اندازیم، بعد از مدتی به تعادل گرمایی رسیده و هم‌دما می‌شوند، بنابراین تغییر دمای آلومینیم و مس یکسان می‌باشد. در نتیجه این گزینه صحیح است.

۲) در این فرایند مس و آلومینیم که دارای دمای $۱۰۰^\circ C$ می‌باشند گرما از دست داده و از $۱۰۰^\circ C$ به θ_e می‌رسند و آب گرمای از دست دادهٔ آن‌ها را جذب کرده و از صفر درجهٔ سلسیوس به θ_e می‌رسد. به‌عبارتی می‌توان نوشت:

$$|Q_{\text{آب}}|=|Q_{\text{مس}}|+|Q_{\text{آلومینیم}}|$$

این رابطه نشان می‌دهد که گرمایی که مس از دست می‌دهد کم‌تر از گرمایی است که آب می‌گیرد ($|Q_{\text{مس}}|<|Q_{\text{آب}}|$)، بنابراین این گزینه نیز صحیح است.

۳) با توجه به این‌که $c_{Al}>c_{Cu}$ است و اختلاف دما و جرم نیز برای هر دو گلوله یکسان است، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}|Q_{Cu}|=|mc_{Cu}(\theta_e-۱۰۰)|\\ |Q_{Al}|=|mc_{Al}(\theta_e-۱۰۰)|\end{cases}\xrightarrow{c_{Al}>c_{Cu}}|Q_{Al}|>|Q_{Cu}|$$

بنابراین این گزینه نیز صحیح است و هر سه گزینهٔ مطرح شده در این تست صحیح هستند.

۳ ۷۶۵ اگر جرم قطعه به جای $۱kg$ برابر $۲kg$ شود، واضح است که گرمای بیشتری را به آب می‌تواند بدهد و اگر در حالت اول دمای تعادل $۱۰^\circ C$ شده است، در حالت دوم بیشتر از $۱۰^\circ C$ می‌شود.

۴ ۷۶۶ با توجه به این‌که چگالی آب $\rho=۱kg/Lit$ است، ۲ لیتر آب دارای جرم $m_1=۲kg$ و ۳ لیتر آب دارای جرم $m_2=۳kg$ است و می‌توان نوشت:

$$\theta_e=\frac{m_1\cancel{c}\theta_1+m_2\cancel{c}\theta_2}{m_1\cancel{c}+m_2\cancel{c}}\xrightarrow[m_2=۳kg]{m_1=۲kg}\theta_e=\frac{۲\times\theta_1+۳\times\theta_2}{۲+۳}=\frac{۲\theta_1+۳\theta_2}{۵}$$

دقت: با توجه به این‌که مایع (۱) و (۲) هر دو آب است، $c_1=c_2$ بوده و این دو از صورت و مخرج ساده می‌شوند.

۱ ۷۶۷ مشابه با سؤال قبل می‌توان نوشت:

$$\theta_e=\frac{m_1\cancel{c}\theta_1+m_2\cancel{c}\theta_2}{m_1\cancel{c}+m_2\cancel{c}}\xrightarrow[\theta_e=۳۰^\circ C]{\theta_1=۱۰^\circ C\ ,\ \theta_2=۵۰^\circ C}\frac{\cancel{۳۰}}{۳}=\frac{m_1\times\overset{۱}{\cancel{۱۰}}+m_2\times\overset{۵}{\cancel{۵۰}}}{m_1+m_2}\Rightarrow ۳m_1+۳m_2=m_1+۵m_2\Rightarrow m_1=m_2$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

اگر m_1 گرم آب θ_1 را با m_2 گرم آب θ_2 مخلوط کردیم و آب $\frac{\theta_1+\theta_2}{۲}$ به‌دست آمد، این موضوع یعنی $m_1=m_2$ است و دمای تعادل برابر میانگین دمای دو آب شده است. در این سؤال نیز این شرایط حاکم شده است ($\theta_e=\frac{۵۰+۱۰}{۲}=۳۰^\circ C$) و $m_1=m_2$ است.

۲ ۷۶۸ مشابه با دو سؤال قبل می‌توان نوشت:

$$[\text{A مایع}:m_A=۴kg,\theta_A=۸۰^\circ C]\ ,\ [\text{B مایع}:m_B=۴kg\ ,\ \theta_B=۲۰^\circ C],\theta_e=۳۰^\circ C,\frac{c_A}{c_B}=?$$

$$\theta_e=\frac{m_Ac_A\theta_A+m_Bc_B\theta_B}{m_Ac_A+m_Bc_B}\Rightarrow ۳۰=\frac{\cancel{۴}\times c_A\times ۸۰+\cancel{۴}\times c_B\times ۲۰}{\cancel{۴}\times c_A+\cancel{۴}\times c_B}\Rightarrow ۳۰c_A+۳۰c_B=۸۰c_A+۲۰c_B\Rightarrow ۱۰c_B=۵۰c_A\Rightarrow\frac{c_A}{c_B}=\frac{۱}{۵}$$

۳ ۷۶۹ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۹)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۷۷۰ هر دو مایع از یک جنس هستند ($c_۱ = c_۲$)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\theta_e = \frac{m_۱c_۱\theta_۱ + m_۲c_۲\theta_۲}{m_۱c_۱ + m_۲c_۲} \xrightarrow{c_۱=c_۲} \theta_e = \frac{m_۱\theta_۱ + m_۲\theta_۲}{m_۱ + m_۲}$$

با توجه به این‌که چگالی آب برابر $\rho = ۱kg/lit$ است، بنابراین یک لیتر آب دارای جرم $۱kg$ و دو لیتر آب دارای جرم $۲kg$ است. حال از رابطهٔ فوق برای هر دو حالت استفاده می‌کنیم:

حالت اول:

$$\xrightarrow[m_۲=۱kg]{m_۱=۱kg} \theta_{e_۱} = \frac{۱\times\theta_۱ + ۱\times\theta_۲}{۱+۱} = \frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲} = ۳۵^\circ C \Rightarrow \theta_۱ + \theta_۲ = ۷۰^\circ C$$ رابطهٔ (۱):

حالت دوم:

$$\xrightarrow[m'_۲=۱kg]{m'_۱=۲kg} \theta_{e_۲} = \frac{۲\times\theta_۱ + ۱\times\theta_۲}{۲+۱} = ۳۰^\circ C \Rightarrow ۲\theta_۱ + \theta_۲ = ۹۰^\circ C$$ رابطهٔ (۲):

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲)، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\theta_۱ + \theta_۲ = ۷۰\\ ۲\theta_۱ + \theta_۲ = ۹۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta_۱ = ۲۰^\circ C\\ \theta_۲ = ۵۰^\circ C\end{cases} \Rightarrow \frac{\theta_۱}{\theta_۲} = \frac{۲}{۵}$$

۱ ۷۷۱ این سؤال خوب و نسبتاً جدید را در دو مرحله بررسی می‌کنیم (دقت شود که تغییر حالت رخ نمی‌دهد):

مرحلهٔ اول: (محاسبهٔ دمای تعادل در ترکیب $۴۰gr$ آب $۱۰^\circ C$ و $۱۰gr$ آب صفر درجهٔ سلسیوس):

$$\begin{cases}m_۱ = ۴۰gr\\ c_۱ = c_{آب}\\ \theta_۱ = ۱۰^\circ C\end{cases} \quad و \quad \begin{cases}m_۲ = ۱۰gr\\ c_۲ = c_{آب}\\ \theta_۲ = ۰^\circ C\end{cases}$$

$$\theta_{e_۱} = \frac{m_۱c_۱\theta_۱ + m_۲c_۲\theta_۲}{m_۱c_۱ + m_۲c_۲} \xrightarrow{c_۱=c_۲=c} \theta_{e_۱} = \frac{۴۰\times۱۰ + ۱۰\times۰}{۴۰+۱۰} = ۸^\circ C$$

مرحلهٔ دوم: در حالت جدید یک ظرف با ۵۰ گرم آب $۸^\circ C$ در اختیار داریم. اگر $۱۰gr$ از این آب را برداشته و مجدداً $۱۰gr$ آب صفر درجهٔ سلسیوس اضافه کنیم، دمای تعادل نهایی برابر است با:

$$\begin{cases}m'_۱ = ۴۰gr\\ c'_۱ = c_{آب}\\ \theta'_۱ = ۸^\circ C\end{cases} \quad و \quad \begin{cases}m'_۲ = ۱۰gr\\ c'_۲ = c_{آب}\\ \theta'_۲ = ۰^\circ C\end{cases}$$

$$\theta_{e_۲} = \frac{m'_۱c'_۱\theta'_۱ + m'_۲c'_۲\theta'_۲}{m'_۱c'_۱ + m'_۲c'_۲} \Rightarrow \theta_{e_۲} = \frac{۴۰\times۸ + ۱۰\times۰}{۴۰+۱۰} = ۶/۴^\circ C$$

۳ ۷۷۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۰ — **تعادل گرمایی آب و یخ** — (تست‌های ۷۷۲ تا ۸۰۸)

هرگاه جرم $m_۱$ از آب $\theta_۱\ ^\circ C$ و جرم $m_۲$ از یخ $\theta_۲\ ^\circ C$ را با هم مخلوط کنیم، برای بررسی وضعیت تعادل آب و یخ با دو روش زیر می‌توانیم عمل کنیم:

روش اول (روش زورآزمایی):



گام اول: ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_۱| = |m_۱c_۱\theta_۱|$$

گام دوم: سپس گرمایی را که یخ نیاز دارد تا به‌طور کامل ذوب شده و به آب صفر درجه تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_۲| = |m_۲c_۲\theta_۲| + m_۲L_F$$

پس از محاسبهٔ مقادیر $|Q_۱|$ و $|Q_۲|$ یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت ۱: اگر $|Q_۲| = |Q_۱|$ باشد تمام یخ به‌طور کامل ذوب‌شده و دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است.

حالت ۲: اگر $|Q_۲| < |Q_۱|$ باشد، تمام یخ ذوب‌شده و دمای تعادل $\theta_e > ۰$ است.

می‌توان این‌گونه فرض کرد که آب ابتدا با دادن گرمای $|Q_۲|$ به یخ، آن را ذوب کرده است و باقی‌ماندهٔ گرما $(|Q_۱| - |Q_۲|)$ صرف بالا بردن دمای جرم $(m_۱ + m_۲)$ آب جدید موجود در ظرف می‌شود. بنابراین دمای تعادل برابر است با:

$$(|Q_۱| - |Q_۲|) = (m_۱ + m_۲)c_w(\theta_e)$$

حالت ۳: اگر $|Q_۱| < |Q_۲|$ باشد، در اصطلاح آب زورش به یخ نمی‌رسد و همهٔ یخ ذوب نمی‌شود.

روش دوم: در این‌گونه مسائل تبادل گرمایی آب و یخ، فرض می‌کنیم که همهٔ یخ ذوب می‌شود و دمای تعادل را مانند مسائل قبل محاسبه می‌کنیم اگر دمای تعادل مثبت و یا صفر به‌دست آید، فرض ما درست بوده و همهٔ یخ ذوب شده است ولی اگر دمای تعادل منفی به‌دست آید، فرض ما غلط بوده و همهٔ یخ ذوب نشده است. این روش در مثال‌هایی که دمای تعادل در صورت سؤال داده شده است، روش مناسبی محسوب می‌شود.

www.gajmarket.com

تذکر بسیار مهم: در این‌گونه مسائل اگر $c_{\text{یخ}}=۲۱۰۰\frac{J}{kg.K}$ یا $۲/۱\frac{J}{gr.^\circ C}$ ، $c_{\text{آب}}=۴۲۰۰\frac{J}{kg.K}$ یا $۴/۲\frac{J}{gr.^\circ C}$ و $L_F=۳۳۶\frac{J}{gr}$ یا $۳۳۶\times۱۰^۳\frac{J}{kg}$ داده شود، استفاده از این اعداد معمولاً محاسبات را بسیار دشوار و زمان‌بر کرده و معمولاً دانش‌آموزان از حل سؤال پشیمان می‌شوند. برای کوتاه‌تر شدن زمان حل، می‌توان به‌جای این اعداد از اعداد $c_{\text{آب}}=۱\frac{cal}{gr.^\circ C}$، $c_{\text{یخ}}=۰/۵\frac{cal}{gr.^\circ C}$ و $L_F=۸۰\frac{cal}{gr}$ استفاده کرد تا ضرب و تقسیم‌ها و اعمال محاسباتی بسیار راحت‌تر شود. در ادامه با حل چند تمرین، این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

تمرین۱ **قطعه یخی به جرم m و دمای صفر درجهٔ سلسیوس را درون همان جرم آب ۹۰ درجهٔ سلسیوس می‌اندازیم. اگر از اتلاف گرما صرف‌نظر کنیم، دمای تعادل چند درجهٔ سلسیوس خواهد شد؟** ($c_{\text{آب}}=۴۲۰۰J/kg.K$ و $L_F=۸۰\times۴۲۰۰J/kg$) (تجربی داخل ۹۰)

۱) صفر ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ برای حل این تست، گرمای $|Q_1|$ و $|Q_2|$ را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$|Q_1|=mL_F=m\times۸۰\times۴۲۰۰J$: گرمای لازم برای ذوب کامل یخ

$|Q_2|=|mc_{\text{آب}}(\theta_2-\theta_1)|=m\times۴۲۰۰\times(۹۰-۰)=۹۰\times m\times۴۲۰۰J$: گرمایی که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجه تبدیل شود.

با مقایسهٔ مقدار Q_1 و Q_2، می‌توان دریافت که گرمای آب برای رسیدن به دمای صفر درجهٔ سلسیوس ($|Q_2|$)، بیشتر از گرمای مورد نیاز برای ذوب کامل یخ می‌باشد و در نتیجه آب تمام یخ را ذوب کرده و مقداری گرما اضافه می‌ماند، این گرمای اضافی، دمای یخ ذوب شده و آب اولیه که آن را به دمای صفر رسانده‌ایم را توأماً از صفر تا θ_e بالا می‌آورد:

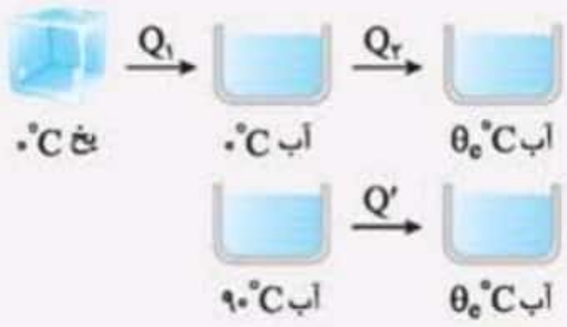
گرمای اضافی $=|Q_2|-|Q_1|=(۹۰-۸۰)\times m\times۴۲۰۰=۱۰m\times۴۲۰۰J$

گرمای اضافی: $\Delta Q=(m+m)c_{\text{آب}}(\theta_e-۰)\Rightarrow ۱۰m\times۴۲۰۰=۲m\times۴۲۰۰\times\theta_e\Rightarrow\theta_e=\frac{۱۰}{۲}=۵^\circ C$ (گزینهٔ ۳)

تذکر به‌عنوان یک روش دیگر فرض کنید، m گرم یخ به‌طور کامل ذوب شود و دمای تعادل مجموعه θ_e شود، در این صورت داریم:

$c_{\text{آب}}=۴۲۰۰J/kg.K=۱cal/gr.K$ ، $L_F=۸۰\times۴۲۰۰J/kg=۸۰cal/gr$ ، $c_{\text{یخ}}=۲۱۰۰J/kg.K=۰/۵cal/gr.K$

۱) یخ ذوب شده و به دمای θ_e می‌رسد.



$$\begin{cases}Q_1=mL_F=۸۰\times m=۸۰m\\ Q_2=mc\Delta\theta=m\times۱\times(\theta_e-۰)=m\theta_e\end{cases}\Rightarrow Q=Q_1+Q_2=۸۰m+m\theta_e$$

۲) آب گرما از دست داده و به دمای θ_e می‌رسد:

$$\Rightarrow Q'=mc\Delta\theta=m\times۱\times(\theta_e-۹۰)$$

در ادامه با توجه به اصل بقای انرژی داریم:

$$Q+Q'=۰\Rightarrow ۸۰m+m\theta_e+m\times۱\times(\theta_e-۹۰)=۰\Rightarrow ۸۰+\theta_e+\theta_e-۹۰=۰\Rightarrow\theta_e=۵^\circ C$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید استفاده از اعداد برحسب کالری و گرم، حل را بسیار سریع‌تر می‌کند.

تمرین۲ **در ظرف عایقی که حاوی ۱۷۰ گرم آب ۳۰° می‌باشد، یک قطعه یخ صفر درجهٔ سلسیوس را که جرم آن ۸۰ گرم است، می‌اندازیم. پس از ایجاد تعادل چند گرم یخ ذوب نشده باقی می‌ماند؟ (گرمای ویژهٔ آب $۴۲۰۰J/kg.^\circ C$ و گرمای نهان ذوب یخ $۳/۴\times۱۰^۵J/kg$ است.)**

۱) ۱۷ ۲) ۳۴ ۳) ۲۱ ۴) ۸/۵ (M.K.A)

پاسخ **روش اول:** با توجه به اطلاعات سؤال، آب تنها قسمتی از یخ را ذوب می‌کند و دمای تعادل مجموعه صفر درجهٔ سلسیوس است. برای حل سؤال گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

$$\text{آب}:\begin{cases}m_1=۱۷۰gr\\ c_1=۴۲۰۰J/kg.^\circ C\\ \theta_1=۳۰^\circ C\end{cases}\qquad \text{یخ}:\begin{cases}m_2=۸۰gr\\ L_F=۳/۴\times۱۰^۵J/kg\\ \theta_2=۰^\circ C\end{cases}$$

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس برسد، را به‌دست می‌آوریم:

$$|Q_1|=m_1c_1(\theta_1-۰)=(۱۷۰\times۱۰^{-۳})\times۴۲۰۰\times(۳۰-۰)$$

گام دوم: این گرما تنها توانسته m' گرم یخ را ذوب کند:

$$|Q_2|=m'L_F=m'\times۳/۴\times۱۰^۵$$

تذکر نیازی نیست کنترل کنیم که آب می‌تواند تمام یخ را ذوب کند یا خیر، با توجه به‌صورت سؤال، نمی‌تواند این کار را انجام دهد.

با تساوی $|Q_1|$ و $|Q_2|$، جرم یخ ذوب شده به سادگی به‌دست می‌آید:

$$|Q_1|=|Q_2|\Rightarrow(۱۷۰\times۱۰^{-۳})\times۴۲۰۰\times۳۰=m'\times۳/۴\times۱۰^۵\Rightarrow m'=۶۳\times۱۰^{-۳}kg=۶۳gr$$

جرم یخ ذوب نشده $=۸۰-۶۳=۱۷gr$ (گزینهٔ ۱)

روش دوم: با توجه به این‌که در انتها چند گرم یخ ذوب نشده در ظرف باقی‌مانده است، می‌توان نتیجه گرفت که دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است. در این‌گونه از سؤالات که دمای تعادل مشخص است، استفاده از روش اصل بقای انرژی توصیه می‌شود. حال با توجه به قانون بقای انرژی، جمع جبری انرژی که صرف ذوب کردن m' گرم یخ می‌شود با انرژی که آب از دست می‌دهد تا به صفر درجهٔ سلسیوس برسد، برابر صفر است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_1=170gr\ ,\ \theta_1=30^\circ C\ ,\ m_2=80gr\ ,\ \theta_2=0^\circ C\ ,\ c=4200J/kg.^\circ C\ ,\ L_F=3/4\times10^5\ J/kg$$

$$Q_1+Q_2=0\Rightarrow m_1c\Delta\theta_1+m'L_F=0\Rightarrow 170\times4200\times(0-30)+m'\times3/4\times10^5=0\Rightarrow m'=63gr$$

بنابراین جرم یخ ذوب نشده برابر است با:

جرم یخ ذوب نشده: $m_2-m'=80-63=17gr$ (گزینهٔ ۱)

هشدار: در این سؤال $L_F=3/4\times10^5\ J/kg$ داده شده است ($3/36\times10^5\ J/kg$ داده نشده است) و نباید از اعداد $c_{یخ}=1cal/gr.K$ و $L_F=80cal/gr$ استفاده کرد. البته نگران نباشید اگر از این اعداد استفاده کنید، یک جواب تقریبی نزدیک به عدد مورد نظر طراح به‌دست می‌آید.

تمرین۳ **۲۰۰ گرم نوشابه با دمای $20^\circ C$ با افزودن حداقل چند گرم یخ $-8^\circ C$، به دمای صفر درجهٔ سلسیوس می‌رسد؟ (مبادلهٔ گرما با محیط ناچیز است، $L_F=334J/gr$ ، $c_{یخ}=2000J/kg.K$ و $c_{نوشابه}=4200J/kg.K$)**

۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

پاسخ با توجه به اطلاعات داده شده در صورت مسأله، دمای نهایی تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است و با کمک اصل بقای انرژی داریم:

$$\text{نوشابه}:\begin{cases}m_1=200gr\\ \theta_1=20^\circ C\\ c_1=4200J/kg.K\end{cases}\qquad \text{یخ}:\begin{cases}m_2=?\\ \theta_2=-8^\circ C\\ c_2=2000J/kg.K\\ L_F=334J/gr\end{cases}$$

۱) نوشابه گرما از دست می‌دهد و دمای آن از $20^\circ C$ به $0^\circ C$ کاهش می‌یابد:

$$Q_1=m_1c_1\Delta\theta_1=0/2\times4200\times(0-20)=-16800J$$

۲) یخ گرما گرفته و دمای آن از $-8^\circ C$ به $0^\circ C$ رسیده و سپس یخ $0^\circ C$ به آب $0^\circ C$ تبدیل می‌شود:

$$Q_2=m_2c_2\Delta\theta_2+m_2L_F=m_2\times2000\times(0-(-8))+m_2\times334000=350000m_2$$

از طرفی با توجه به اصل بقای انرژی و این‌که در صفر درجهٔ سلسیوس به تعادل می‌رسیم، داریم:

$$Q_1+Q_2=0\Rightarrow -16800+350000m_2=0\Rightarrow m_2=48gr$$ (گزینهٔ ۳)

تذکر دقت کنیم که این مقدار یخ کم‌ترین مقدار یخ موردنیاز است. اگر مقداری بیشتر از این نیز یخ قرار دهیم، باز هم دمای تعادل به صفر درجهٔ سلسیوس می‌رسد ولی مقداری یخ صفر درجهٔ سلسیوس نیز باقی می‌ماند.

البته به شرطی که گرمای لازم برای این‌که دمای آن مقدار یخ از $-8^\circ C$ به $0^\circ C$ برسد، کم‌تر از گرمای از دست داده شده توسط نوشابه باشد در غیر این‌صورت نوشابه هم شروع به یخ زدن می‌کند.

در این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_1|=m_1c_w\theta_1=5m\times4/2\times22=462m$$

گام دوم: سپس مقدار گرمایی را که یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود و به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_2|=m_2L_F=336\times m$$

گام سوم: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $|Q_1|>|Q_2|$ است، یعنی یخ به‌طور کامل ذوب می‌شود و مقداری گرما اضافه می‌ماند. این گرمای اضافی صرف بالا بردن دمای مجموعه (آب اولیه و یخ ذوب شده) می‌شود و دمای تعادل برابر است با:

$$\text{گرمای باقی مانده}=|Q_1|-|Q_2|=(m_1+m_2)c_w\theta_e\Rightarrow 462m-336m=(m+5m)\times4/2\times\theta_e$$

$$\Rightarrow 126m=6m\times4/2\times\theta_e\Rightarrow\theta_e=5^\circ C$$

www.gajmarket.com

تذکر

۱) اگر به‌جای $c_w = ۴/۲\,J/gr.^\circ C$، $L_F = ۳۳۶\,J/gr$، $c_i = ۲/۱\,J/gr.^\circ C$ از اعداد $c_w = ۱\,cal/gr.^\circ C$، $c_i = ۰/۵\,cal/gr.^\circ C$ و $L_F = ۸۰\,cal/gr$ استفاده می‌کردیم، محاسبات بسیار ساده‌تر می‌شد.

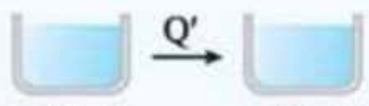
۲) به‌عنوان روش دیگر فرض می‌کنیم تمام m گرم یخ ذوب شده و دمای نهایی تعادل θ_e است، در این صورت داریم:

گام اول: یخ ذوب‌شده و به دمای θ_e می‌رسد:



$$\begin{cases} Q_۱ = mL_F = m \times ۳۳۶ = ۳۳۶m \\ Q_۲ = mc\Delta\theta = m \times ۴/۲ \times (\theta_e - ۰) = ۴/۲m\theta_e \end{cases} \Rightarrow Q = Q_۱ + Q_۲ = ۳۳۶m + ۴/۲m\theta_e$$

گام دوم: آب گرما از دست می‌دهد و به دمای تعادل می‌رسد:



$$Q' = mc\Delta\theta = ۵m \times ۴/۲ \times (\theta_e - ۲۲)$$

گام سوم: حال حاصل $Q + Q'$ را طبق اصل بقای انرژی برابر صفر قرار می‌دهیم و θ_e به‌دست می‌آید:

$$Q + Q' = ۰ \Rightarrow ۳۳۶m + ۴/۲m\theta_e + ۵m \times ۴/۲ \times (\theta_e - ۲۲) = ۰ \Rightarrow \theta_e = \frac{۱۲۶}{۶ \times ۴/۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\,^\circ C$$

۳ ۷۷۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۷۷۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، محاسبه می‌کنیم: $|Q_۱| = |m_۲c_w\Delta\theta| = ۵ \times ۱ \times (۲۰ - ۰) = ۱۰۰$

گام دوم: مقدار گرمایی را که یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود را محاسبه می‌کنیم: $|Q_۲| = m_۱c_i\Delta\theta + m_۱L_F = ۱ \times ۰/۵ \times (۰ - (-۱۰)) + ۱ \times ۸۰ = ۸۵$

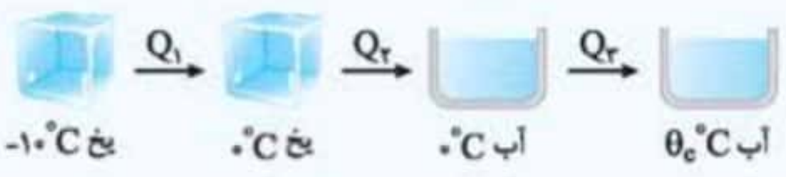
همان‌طور که مشاهده می‌کنید $|Q_۱| > |Q_۲|$ است، یعنی یخ به‌طور کامل ذوب شده است و دمای تعادل از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\underbrace{|Q_۱| - |Q_۲|}_{\text{گرمای اضافه}} = (m_۱ + m_۲)c_w\theta_e \Rightarrow ۱۰۰ - ۸۵ = (۱ + ۵) \times ۱ \times \theta_e \Rightarrow \theta_e = ۲/۵\,^\circ C$$

دقت: برای سرعت بیشتر، از واحدها برحسب کالری استفاده کردیم و در ضمن m را نیز از kg به gr تبدیل نکردیم، ولی در طرفین تساوی در گام دوم واحد باید یکسان باشد.

تذکر

به‌عنوان روش دیگر فرض می‌کنیم که تمام $۱kg$ یخ ذوب شده باشد و دمای نهایی تعادل θ_e درجهٔ سلسیوس شود، در این صورت داریم:



$$m_۱ = ۱kg \;,\; \theta_۱ = -۱۰^\circ C \;,\; m_۲ = ۵kg \;,\; \theta_۲ = ۲۰^\circ C$$
$$c_{\text{یخ}} = ۲۱۰۰\,J/kg.^\circ C = ۰/۵\,cal/gr.^\circ C$$
$$c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰\,J/kg.^\circ C = ۱\,cal/gr.^\circ C \;,\; L_F = ۳۳۶\,J/gr = ۸۰\,cal/gr$$

گام اول: یخ ذوب شده و به دمای θ_e می‌رسد:



$$\begin{cases} Q_۱ = m_۱c_i\Delta\theta = ۱ \times ۰/۵ \times (۰ - (-۱۰)) = ۵ \\ Q_۲ = m_۱L_F = ۱ \times ۸۰ = ۸۰ \\ Q_۳ = m_۱c_w\Delta\theta = ۱ \times ۱ \times (\theta_e - ۰) = \theta_e \end{cases} \Rightarrow Q = Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ = ۵ + ۸۰ + \theta_e = ۸۵ + \theta_e$$

گام دوم: آب گرما از دست داده و به دمای θ_e می‌رسد:

$$Q' = m_۲c_w\Delta\theta = ۵ \times ۱ \times (\theta_e - ۲۰)$$

گام سوم: در ادامه می‌توان نوشت:

اصل بقای انرژی: $Q' + Q = ۰ \Rightarrow ۵ \times ۱ \times (\theta_e - ۲۰) + ۸۵ + \theta_e = ۰ \Rightarrow ۵\theta_e - ۱۰۰ + ۸۵ + \theta_e = ۰ \Rightarrow ۶\theta_e = ۱۵ \Rightarrow \theta_e = ۲/۵\,^\circ C$

۳ ۷۷۵ در این مسأله، می‌خواهیم دمای تعادل را مشخص کنیم:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_۱ = ۴۰۰gr \\ \theta_۱ = ۳۰^\circ C \\ c_۱ = c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰\,J/kg.K = ۱\,cal/gr.^\circ C \end{cases} \qquad \text{یخ}: \begin{cases} m_۲ = ۱۰۰gr \\ \theta_۲ = ۰^\circ C \\ L_F = ۳۳۶۰۰۰\,J/kg = ۸۰\,cal/gr \end{cases}$$

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را به‌دست می‌آوریم:

$$|Q_۱| = m_۱c_{\text{آب}}\,\theta_۱ = ۴۰۰ \times ۱ \times ۳۰ = ۱۲۰۰۰cal$$

گام دوم: در ادامه، مقدار گرمایی را که یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود را محاسبه می‌کنیم.

$$|Q_۲| = m_۲L_F = ۱۰۰ \times ۸۰ = ۸۰۰۰cal$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $|Q_۲|>|Q_۱|$ است، یعنی آب گرمای لازم برای ذوب کردن کل یخ را دارد و دمای تعادل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\overbrace{|Q_۱|-|Q_۲|}^{\text{گرمای اضافی}}=(m_۱+m_۲)c_{\text{آب}}\Delta\theta \Rightarrow ۱۲۰۰۰-۸۰۰۰=(۴۰۰+۱۰۰)\times ۱\times(\theta_{\text{تعادل}}-۰)$$

$$\Rightarrow ۴۰۰۰=۵۰۰\theta_{\text{تعادل}} \Rightarrow \theta_{\text{تعادل}}=۸^\circ C \Rightarrow \text{تغییر دمای آب}: \Delta\theta=\theta_e-\theta_۱=۸-۳۰=-۲۲^\circ C$$

تذکر

با توجه به اعداد داده شده برای $c_{\text{آب}}$ و L_F، از مقادیر $c_{\text{آب}}=۱\frac{cal}{gr.^\circ C}$ و $L_F=۸۰\frac{cal}{gr}$ برای راحت‌تر شدن محاسبات استفاده کردیم.

۷۷۶ ۳ **گام اول:** با توجه به محاسبات زیر، دمای آب با از دست دادن ۲۹۴kJ گرما، به $۵^\circ C$ می‌رسد:

$$Q=mc_{\text{آب}}\Delta\theta_{\text{آب}} \Rightarrow -۲۹۴\times ۱۰^۳=۲\times ۴۲۰۰\times(\theta_{\text{تعادل}}-۴۰) \Rightarrow \theta_{\text{تعادل}}=۵^\circ C$$

گام دوم: مقدار گرمای از دست داده‌شده توسط آب، برابر مقدار گرمای دریافتی توسط یخ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$Q_{\text{آب}}+Q_{\text{یخ}}=۰ \Rightarrow (-۲۹۴\times ۱۰^۳)+Q_{\text{یخ}}=۰ \Rightarrow Q_{\text{یخ}}=۲۹۴\times ۱۰^۳ J$$

$$Q_{\text{یخ}}=m'c_{\text{یخ}}\Delta\theta_{\text{یخ}}+m'L_F+m'c_{\text{آب}}\Delta\theta$$

$$\Rightarrow ۲۹۴\times ۱۰^۳=m'\times ۲۱۰۰\times(۰-(-۵))+m'\times ۳۳۶۰۰۰+m'\times ۴۲۰۰\times(۵-۰) \Rightarrow m'=۰/۸kg=۸۰۰gr$$

۷۷۷ ۴

تذکر

در مثال‌هایی که دمای تعادل در صورت سؤال داده شده و مقدار یک مجهول (مثلاً جرم آب، جرم یخ و ...) خواسته شده است، استفاده از اصل بقای انرژی معمولاً روش ساده‌تری است. شیوهٔ حل این‌گونه سؤالات را در سه تست با هم یاد می‌گیریم.

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت مسأله، دمای تعادل $\theta_e=۱۰^\circ C$ است و داریم:

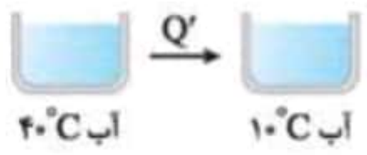
$$\text{آب}:\begin{cases}m_۱=۶kg=۶۰۰۰gr\\ \theta_۱=۴۰^\circ C\\ c_w=۴۲۰۰J/kg.K=۱cal/gr.K\end{cases} \quad \text{یخ}:\begin{cases}m_۲=?\\ \theta_۲=۰^\circ C\\ L_F=۳۳۶kJ/kg=۸۰cal/gr\end{cases}$$

۱) یخ به‌طور کامل ذوب شده، سپس گرما گرفته و به دمای $۱۰^\circ C$ می‌رسد:



$$\begin{cases}Q_۱=mL_F=m_۲\times ۸۰=۸۰m_۲\\ Q_۲=mc_w\times\underbrace{\Delta\theta}_{(\theta_e-۰)}=m_۲\times ۱\times(۱۰-۰)=۱۰m_۲\end{cases} \Rightarrow Q=Q_۱+Q_۲=۸۰m_۲+۱۰m_۲=۹۰m_۲$$

۲) آب گرما از دست می‌دهد و دمای آن از $۴۰^\circ C$ به $۱۰^\circ C$ کاهش می‌یابد.



$$Q'=m_۱c_w\Delta\theta=۶۰۰۰\times ۱\times(۱۰-۴۰)=-۱۸۰۰۰۰cal$$

در ادامه می‌توان نوشت:

$$Q+Q'=۰ \Rightarrow ۹۰m_۲-۱۸۰۰۰۰=۰ \Rightarrow m_۲=\frac{۱۸۰۰۰۰}{۹۰}=۲۰۰۰gr$$

* این سؤال را با روش اصلی سؤالات تعادل گرمایی آب و یخ (روش زورآزمایی) نیز بررسی کنید.

۷۷۸ ۳ فرض کنید که m' گرم یخ صفر درجهٔ سلسیوس با m گرم آب صفر درجهٔ سلسیوس و ۲۰۰gr فلز با دمای $۱۰۵^\circ C$ را مخلوط کرده و دمای تعادل برابر $۵^\circ C$ شده است (دمای نهایی آب). در این حالت کافیست بنویسیم:

$$Q_{\text{یخ}}+Q_{\text{آب}}+Q_{\text{فلز}}=۰ \Rightarrow m'L_F+m'c_{\text{آب}}(۵-۰)+mc_{\text{آب}}(۵-۰)+m_{\text{فلز}}\times c_{\text{فلز}}(۵-۱۰۵)=۰$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کردن به ۴۲۰۰}} m'\times\frac{۳۳۶۰۰۰}{۸۰}+m'\times\frac{۴۲۰۰}{۱}\times ۵+m\times\frac{۴۲۰۰}{۱}\times ۵+\frac{۸۴۰}{۰/۲}\times(-۱۰۰)=۰$$

$$\Rightarrow ۸۰m'+۵m'+۵m-۴=۰ \Rightarrow ۸۵m'+۵m=۴ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}} ۱۷m'+m=۰/۸kg$$

$$\begin{cases}\text{دادهٔ سؤال} \rightarrow m+m'=۰/۴kg & (۱)\\ \text{معادلهٔ به‌دست آمده} \rightarrow m+۱۷m'=۰/۸kg & (۲)\end{cases} \xrightarrow{(۲)-(۱)} ۱۶m'=۰/۴ \Rightarrow m'=\frac{۰/۴}{۱۶}kg=۲۵gr$$

www.gajmarket.com

۷۷۹ ۲ جرم یخ اولیهٔ صفر درجهٔ سلسیوس را برابر m گرم و جرم یخ اولیهٔ $-۳۰^\circ C$ را برابر m' گرم در نظر بگیرید. در ادامه با توجه به دمای تعادل $\theta_e = ۵^\circ C$ و مشابه با سؤال قبل، می‌توان نوشت:

$$\overbrace{Q_{\text{یخ } -۳۰^\circ C}}^{(۱)} + \overbrace{Q_{\text{یخ } ۰^\circ C}}^{(۲)} + \overbrace{Q_{\text{آب}}}^{(۳)} = ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{m' c_{\text{یخ}}(۰-(-۳۰))}_{(۱)} + \underbrace{m' L_F + m' c_{\text{آب}}(۵-۰)}_{(۲)} + \underbrace{\overbrace{۸۰۰۰}^{\text{جرم آب اولیه}} c_{\text{آب}}(۵-۱۵)}_{(۳)} = ۰$$

$$\Rightarrow m' \times \frac{۱}{۲} \times ۳۰ + ۸۰m' + m' \times ۱ \times ۵ + ۸۰m + m \times ۱ \times ۵ + ۸۰۰۰ \times ۱ \times (-۱۰) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰m' + ۸۵m = ۸۰۰۰۰ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}} ۲۰m' + ۱۷m = ۱۶۰۰۰gr \quad :\text{رابطهٔ (I)}$$

طبق صورت سؤال، پس از آب شدن یخ‌ها، جرم آب $۸۷۵gr$ افزایش یافته است. بنابراین $m' + m = ۸۷۵gr$ بوده و داریم:

$$\begin{cases} \text{I رابطهٔ} \Rightarrow ۲۰m' + ۱۷m = ۱۶۰۰۰gr \\ \text{دادهٔ سؤال} \Rightarrow m' + m = ۸۷۵gr \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m' = ۳۷۵gr \ , \ m = ۵۰۰gr$$

بنابراین جرم قطعه یخ $-۳۰^\circ C$ اولیه، برابر $m' = ۳۷۵gr$ است.

۷۸۰ ۲ در حل این مسأله وضعیت نهایی تعادل را می‌خواهیم مشخص کنیم، پس گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_۱ = ۱kg \\ \theta_۱ = ۴۰^\circ C \\ c_۱ = c_{\text{آب}} \end{cases} \qquad \text{یخ}: \begin{cases} m_۲ = ۱kg \\ \theta_۲ = ۰^\circ C \\ L_F = ۸۰c_{\text{آب}} \end{cases}$$

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_۱| = m_۱ c_{\text{آب}} \theta_۱ = ۱ \times c_{\text{آب}} \times ۴۰ = ۴۰c_{\text{آب}}$$

گام دوم: در ادامه، مقدار گرمایی را که یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_۲| = m_۲ L_F = ۱ \times ۸۰ \times c_{\text{آب}} = ۸۰c_{\text{آب}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $|Q_۱| < |Q_۲|$ بوده و آب گرمای لازم برای ذوب کردن کل یخ را ندارد.

گام سوم: در این حالت آب با گرمای $|Q_۱| = ۴۰c_{\text{آب}}$ خود، $m_۳$ گرم یخ را ذوب می‌کند، که مقدار $m_۳$ برابر است با:

$$|Q_۱| = m_۳ L_F \Rightarrow ۴۰c_{\text{آب}} = m_۳ \times ۸۰c_{\text{آب}} \Rightarrow m_۳ = ۰/۵kg$$

در این وضعیت داریم:

$$\begin{cases} \text{جرم یخ باقی‌مانده} = m_۲ - m_۳ = ۱kg - ۰/۵kg = ۰/۵kg \\ \text{جرم آب در ظرف پس از تعادل}: = ۱kg + ۰/۵kg = ۱/۵kg \end{cases}$$

جرم آب اولیه ← ، جرم یخ ذوب شده →

* بررسی این گونه سؤالات با اصل بقای انرژی کمی باعث گمراهی دانش‌آموزان عزیز می‌شود و این روش برای حل توصیه نمی‌شود.

۷۸۱ ۲ همان‌طور که می‌دانیم، چگالی یخ کم‌تر از آب بوده و با ذوب‌شدن یخ، حجم آن کاهش می‌یابد. در سؤال قبل، در حالت قبل از تعادل، $۱kg$ آب و $۱kg$ یخ داریم ولی بعد از رسیدن به حالت تعادل، $۰/۵kg$ از یخ ذوب‌شده و تبدیل به آب می‌شود. بنابراین حجم یخ و در نتیجه حجم مجموعه پس از رسیدن به حالت تعادل کم‌تر می‌شود.

۷۸۲ ۳ در حل این مسأله، می‌خواهیم وضعیت نهایی تعادل را مشخص کنیم و گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_۱ = m \\ \theta_۱ = ۳۰^\circ C \\ c_w = ۱cal/gr.^\circ C \end{cases} \qquad \text{یخ}: \begin{cases} m_۲ = m \\ \theta_۲ = ۰^\circ C \\ L_F = ۸۰c_w = ۸۰ \times ۱ = ۸۰cal/gr \end{cases}$$

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_۱| = m_۱ c_w \theta_۱ = m \times ۱ \times ۳۰ = ۳۰m$$

گام دوم: در ادامه، مقدار گرمایی را که یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_۲| = m_۲ L_F = m \times ۸۰ = ۸۰m$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $|Q_۱| < |Q_۲|$ است و آب گرمای لازم برای ذوب کردن کل یخ را ندارد.

گام سوم: در این حالت آب با گرمای $|Q_1| = ۳۰m$ خود، m' گرم از یخ را ذوب می‌کند که مقدار m' برابر است با:

$$Q_1 = m'L_F \Rightarrow ۳۰m = ۸۰m' \Rightarrow m' = \frac{۳}{۸}m \quad \text{(جرم یخ ذوب شده)}$$

تذکر

مقدار یخ و آب موجود در ظرف پس از برقراری تعادل گرمایی نیز می‌تواند مورد سؤال قرار بگیرد که برابر است با:

$$\begin{cases} \text{جرم یخ باقی‌مانده}: & m - m' = m - \frac{۳}{۸}m = \frac{۵}{۸}m \\ \text{جرم آب در ظرف پس از تعادل}: & m + m' = m + \frac{۳}{۸}m = \frac{۱۱}{۸}m \end{cases}$$

۷۸۳ ۴ فرض کنید در اثر تبادل گرمایی، m' گرم از یخ ذوب شود. در این صورت درون مخلوط به اندازهٔ $(m - ۸۰۰)$ گرم یخ وجود داشته و دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است $(\theta_e = ۰^\circ C)$ و می‌توان نوشت:

$$|\text{گرمایی که یخ جذب می‌کند}| = |\text{گرمایی که آب از دست می‌دهد}| \Rightarrow |Q| = |Q'| \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_{\text{آب}} - \theta_e) = m'L_F$$

$$\Rightarrow \underset{\text{برحسب گرم}}{۸۰۰} \times ۴۲۰۰ \times (۶۰ - ۰) = \underset{\text{برحسب گرم}}{m'} \times ۳۳۶۰۰۰ \Rightarrow m' = ۶۰۰gr$$

$$\text{جرم آب} = \text{جرم اولیهٔ آب} + \text{جرم یخ ذوب شده} = ۸۰۰ + ۶۰۰ = ۱۴۰۰gr = ۱/۴kg$$

۷۸۴ ۲ **گام اول:** ابتدا مقدار گرمایی که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_1| = |m_1 c_w \Delta\theta_1| = ۲۰۰ \times ۱ \times (۸ - ۰) = ۱۶۰۰cal$$

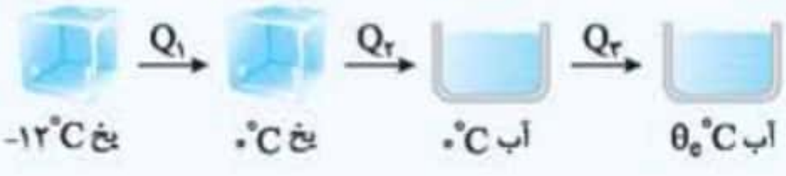
گام دوم: در ادامه مقدار گرمایی را که یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_2| = m_2 c_i \Delta\theta_2 + m_2 L_F = ۵۰ \times ۰/۵ \times (۰ - (-۱۲)) + ۵۰ \times ۸۰ = ۳۰۰ + ۴۰۰۰ = ۴۳۰۰cal$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $|Q_2| > |Q_1|$ است، یعنی همهٔ یخ ذوب نشده است و در انتها مخلوطی از آب و یخ با دمای تعادل $۰^\circ C$ در اختیار داریم.

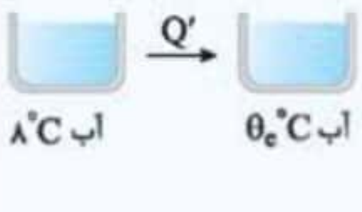
تذکر

به‌عنوان روش دیگر، ابتدا فرض می‌کنیم تمام $۵۰gr$ یخ ذوب شده است و دمای تعادل برابر θ_e خواهد بود، بنابراین داریم:



$$m_1 = ۲۰۰gr \ , \ \theta_1 = ۸^\circ C \ , \ m_2 = ۵۰gr \ , \ \theta_2 = -۱۲^\circ C$$

گام اول: یخ ذوب شده و به دمای θ_e می‌رسد:



$$\begin{cases} Q_1 = m_2 c_i \Delta\theta = ۵۰ \times ۰/۵ \times (۰ - (-۱۲)) = ۳۰۰cal \\ Q_2 = m_2 L_F = ۵۰ \times ۸۰ = ۴۰۰۰cal \\ Q_3 = m_2 c_w \Delta\theta = ۵۰ \times ۱ \times (\theta_e - ۰) = ۵۰\theta_e \end{cases} \Rightarrow Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = ۳۰۰ + ۴۰۰۰ + ۵۰\theta_e = ۴۳۰۰ + ۵۰\theta_e$$

گام دوم: آب گرما از دست داده و به دمای θ_e می‌رسد:

$$Q' = m_1 c_w \Delta\theta_1 = ۲۰۰ \times ۱ \times (\theta_e - ۸)$$

گام سوم: در ادامه با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توان نوشت:

$$Q' + Q = ۰ \Rightarrow ۲۰۰(\theta_e - ۸) + ۴۳۰۰ + ۵۰\theta_e = ۰ \Rightarrow ۲۰۰\theta_e - ۱۶۰۰ + ۴۳۰۰ + ۵۰\theta_e = ۰ \Rightarrow ۲۵۰\theta_e = -۲۷۰۰ \Rightarrow \theta_e = -۱۰/۸^\circ C$$

چون دمای تعادل منفی به‌دست آمده است، پس فرض ما مبنی بر ذوب شدن تمام یخ غلط بوده و تمام یخ ذوب نمی‌شود، بنابراین دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است.

۷۸۵ ۴ با توجه به این‌که پس از برقراری تعادل گرمایی، یخ در ظرف باقی می‌ماند، بنابراین دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است و با توجه به این‌که جمع جبری گرماهای مبادله شده برابر صفر است، داریم $(۸۰ \times ۴۲۰۰ = ۳۳۶۰۰۰)$:

$$Q_{\text{یخ}} + Q_{\text{آب}} = ۰ \Rightarrow \underset{\text{برحسب gr}}{(m - ۱۰۰)} L_F + \underset{\text{برحسب gr}}{۸۰۰} \times c_{\text{آب}} \times (۰ - ۵۰) = ۰$$

$$\Rightarrow (m - ۱۰۰) \times (۸۰ \times ۴۲۰۰) + ۸۰۰ \times ۴۲۰۰ \times (-۵۰) = ۰ \Rightarrow m = ۶۰۰gr$$

www.gajmarket.com

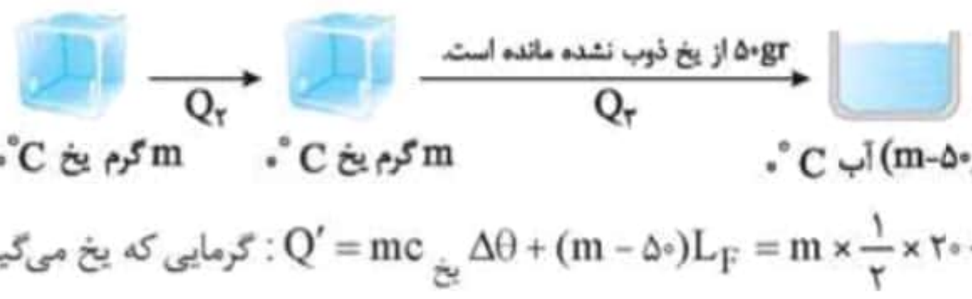
۲ ۷۸۶ برای پاسخ دادن به این تست خوب و مفهومی که به نوعی مکمل تست قبل است، به نکات زیر توجه کنید:

۱) چون بعد از رسیدن به تعادل مقداری یخ صفر درجهٔ سلسیوس باقی‌مانده است، بنابراین دمای نهایی مخلوط آب و یخ، صفر درجهٔ سلسیوس می‌باشد.

۲) با توجه به توضیحات داده شده در خلاصه نکات شمارهٔ (۱۰)، در حل این سؤال از مقادیر $c_{آب}=1\,cal/gr.^\circ C$ ، $c_{یخ}=0/5\,cal/gr.^\circ C$ و $L_F=80\,cal/gr$ استفاده می‌شود و داریم:



$Q=mc_{آب}\Delta\theta=250\times1\times(0-20)=-5000\,cal$: مقدار گرمایی که آب از دست می‌دهد.



$Q'=mc_{یخ}\Delta\theta+(m-50)L_F=m\times\frac{1}{2}\times20+(m-50)\times80\Rightarrow Q'=90m-4000$: گرمایی که یخ می‌گیرد.

با توجه به اصل بقای انرژی، داریم:

$$Q+Q'=0\Rightarrow-5000+90m-4000=0\Rightarrow m=100gr$$

تذکر مهم: در حل این مسأله فراموش نشود که ابتدا باید دمای تمام جرم یخ اولیه با جذب گرما، به دمای ذوب (صفر درجهٔ سلسیوس) برسد و سپس مقداری از آن با جذب گرمای نهان ذوب، آب شود و در آخر ۵۰ گرم از یخ صفر درجهٔ سلسیوس باقی می‌ماند.

۴ ۷۸۷ برای پاسخ به این سؤال، فرض کنید m گرم آب را با یخ مخلوط کرده و m' گرم از یخ ذوب شده است و در مجموع جرم $(m+m')$ آب در ظرف ایجاد شده است. با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$m+m'=520gr=0/52kg\Rightarrow m'=0/52-m$$

$$Q_1+Q_2=0\Rightarrow \underbrace{mc\Delta\theta}_{آب}+m'L_F=0$$

$$\Rightarrow m\times4200\times(0-50)+(0/52-m)\times\boxed{336000}=0\xrightarrow[به\ 4200]{ساده\ کردن}m=0/32kg=320gr$$

80×4200

کمی‌توجه

می‌توانستید از اعداد $c_{آب}=1\frac{cal}{gr.^\circ C}$ و $L_F=80\frac{cal}{gr}$ نیز استفاده کنید، استفاده از این اعداد، روند محاسبات را کوتاه‌تر می‌کرد. از طرفی می‌توانید مشابه با تست قبل با $|Q_1|=Q_2$ نیز سؤال را حل کنید.

۲ ۷۸۸ در این سؤال در وضعیت موردنظر (حالتی که فلز حداقل جرم را دارد و یخ ذوب شده است)، دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است (دمای اولیهٔ آب و یخ نیز صفر درجهٔ سلسیوس بوده است) و می‌توان نوشت:

$$Q_{آب}+Q_{یخ}+Q_{فلز}=0$$

$$m_{آب}c_{آب}(\theta_e-\theta)+mL_F+m_{فلز}c_{فلز}(\theta_e-\theta')=0$$

$$1\times4200(0-0)+0/2\times336000+m_{فلز}\times400\times(0-250)=0\Rightarrow m_{فلز}=\frac{0/2\times336}{100}kg=672gr$$

دید دیگر: به عبارت دیگر مقدار گرمایی که فلز از دست می‌دهد باید هم‌اندازهٔ مقدار گرمایی باشد که یخ می‌گیرد ($Q_{یخ}=|Q_{فلز}|$).

۲ ۷۸۹ ابتدا مقدار گرمایی که گلولهٔ فلزی از دست می‌دهد تا به دمای صفر درجهٔ سلسیوس برسد را به‌دست می‌آوریم:

$$Q_1=mc\Delta\theta=0/3\times420\times(0-80)$$

حال این گرما توسط مقداری از یخ (m') جذب شده و باعث ذوب آن می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q_1+Q_2=0\Rightarrow 0/3\times420\times(-80)+m'+336\times10^3=0\Rightarrow m'=30gr$$: جرم یخ ذوب شده

۳ ۷۹۰ ابتدا دقت کنید که ظرف بزرگ آب در نهایت با محیط هم‌دما شده و دمای آب داخل ظرف نیز برابر صفر درجهٔ سلسیوس می‌شود. حال هر یک از این دو حالت را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت اول: هنگامی‌که یخ $-15^\circ C$ را درون ظرف بزرگ آبی با دمای صفر درجهٔ سلسیوس می‌اندازیم، یخ و آب درون ظرف باید به تعادل گرمایی برسند که در این حالت با توجه به این که ظرف آب بزرگ است مانند یک منبع گرمایی محسوب شده و دمای آب صفر درجهٔ سلسیوس باقی می‌ماند و یخ دمایش افزایش یافته و به صفر می‌رسد، بنابراین دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است. بنابراین یخ $-15^\circ C$ گرمای مورد نیاز خود را باید از آب درون ظرف بگیرد. چون آب در نقطهٔ انجماد قرار دارد، هر قسمت از آب که گرما از دست بدهد، خود یخ زده و به جرم یخ اضافه می‌شود، بنابراین جرم کل یخ افزایش می‌یابد.

یک موضوع جالب

اگر بستنی یخی شما در استخر آب صفر درجهٔ سلسیوس افتاد، اصلاً نگران نباشید چون نه تنها بستنی شما آب نمی‌شود، بلکه بزرگ‌تر هم می‌شود! به‌نظر شما اگر دمای آب استخر یک درجهٔ سلسیوس بود نیز همین‌قدر آرامش خاطر باید داشته باشید؟

حالت دوم: در این حالت دمای اولیهٔ یخ و آب هر دو برابر $0^\circ C$ است، بنابراین در این حالت یخ و آب در تعادل گرمایی قرار داشته و گرمایی بین آن‌ها مبادله نمی‌شود. پس جرم یخ در این حالت ثابت می‌ماند.

۳ ۷۹۱ همان‌طور که در تست قبل بیان کردیم، هنگامی‌که یخ $-10^\circ C$ در ظرف بزرگ آب صفر درجهٔ سلسیوس می‌افتد، از آب اطراف خود گرما می‌گیرد تا به یخ $0^\circ C$ تبدیل شود. گرما گرفتن از آب باعث می‌شود تا m' گرم از آب یخ بزند. از سوی دیگر می‌دانیم انرژی آزاد شده از یخ بستن m' گرم آب، با انرژی که یخ از آب می‌گیرد تا دمایش $0^\circ C$ شود برابر است، بنابراین داریم:

جرم آب یخ زده $= m'$ ، $L_F = 320 J/gr$ ، $\theta_e = 0^\circ C$ ، $\theta = -10^\circ C$ ، $m = 80 gr$:یخ ، $c_{\text{یخ}} = 2 J/gr.^\circ C$

محاسبهٔ انرژی‌ها:

مقدار انرژی آزاد شده ناشی از یخ زدن m' گرم آب $= m'L_F = m' \times 320$

مقدار انرژی لازم برای رسیدن ۸۰ گرم یخ $-10^\circ C$ به یخ صفر درجهٔ سلسیوس $= mc_{\text{یخ}} \times (\theta_e - \theta) = 80 \times 2 \times (0 - (-10))$

$$mc_{\text{یخ}} \underset{\downarrow}{\Delta\theta} = m'L_F \Rightarrow 80 \times 2 \times (0 - (-10)) = m' \times 320 \Rightarrow m' = 5 gr$$

دمای یخ از $-10^\circ C$ به $0^\circ C$ می‌رسد.

تذکر

بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه تصور می‌کنند که آب $0^\circ C$ آن‌قدر انرژی از دست می‌دهد تا تمام یخ را ذوب کند. این موضوع کاملاً اشتباه است. آب $0^\circ C$ آن‌قدر انرژی از دست می‌دهد که دمای یخ به صفر درجهٔ سلسیوس برسد و هر دو به تعادل گرمایی برسند، شرط تعادل گرمایی هم‌دما شدن آب و یخ است نه این که همهٔ یخ ذوب شود.

۴ ۷۹۲ با توجه به این‌که **حداقل** مقدار یخ با دمای $-20^\circ C$ خواسته شده است تا تمام آب موجود در مجموعه یخ ببندد، در این حالت یخ و آب هر دو به یخ با دمای صفر درجه می‌رسند. از طرفی جمع جبری مقدار گرمایی که یخ $-20^\circ C$ می‌گیرد تا به یخ صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود (Q_1) با مقدار گرمایی که آب صفر درجهٔ سلسیوس از دست می‌دهد تا به یخ صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود (Q_2) برابر صفر است و داریم:



$$|Q_1| = |Q_2| \Rightarrow m_1 c_1 (0 - (-20)) = m_2 L_F \Rightarrow m_1 \times 2100 \times 20 = 0/2 \times 3/36 \times 10^5 \Rightarrow m_1 = 1/6 kg = 1600 gr$$

نگاه دیگر (اصل بقای انرژی) : $Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 \Delta\theta + (-m_2 L_F) = 0 \Rightarrow m_1 \times 2100 \times [0 - (-20)] - 0/2 \times 3/36 \times 10^5 = 0$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{2 \times 336 \times 10^2}{2100 \times 20} = 1/6 kg = 1600 gr$$

۱ ۷۹۳ این سؤال نسبتاً جدید و دشوار است. با توجه به این‌که در تمام گزینه‌ها دمای تعادل مجموعه صفر درجهٔ سلسیوس بیان شده است، می‌توان نتیجه گرفت که دمای تعادل مجموعه صفر درجهٔ سلسیوس است. حال برای این‌که ببینیم جرم یخ و آب چه تغییری می‌کند، کافی است گرمایی را که آب $1^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود (Q_1) و گرمایی را که یخ $-10^\circ C$ می‌گیرد تا به یخ صفر درجه سلسیوس تبدیل شود (Q_2) را محاسبه کنیم:

$$|Q_1| = |m_1 c_1 \Delta\theta_1| = |1 \times 4200 \times (0 - 1)| = 4200 J \qquad |Q_2| = m_2 c_{\text{یخ}} \Delta\theta = 0/5 \times 2100 \times (0 - (-10)) = 10500 J$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، آب حتی آن‌قدر گرما ندارد که بتواند تمام یخ را به دمای صفر درجهٔ سلسیوس برساند (چه برسد به آن‌که بخواهد آن را ذوب کند). در این حالت ابتدا آب به دمای صفر می‌رسد ولی گرمای آن برای رساندن یخ به دمای صفر درجهٔ سلسیوس کافی نیست، برای تأمین باقی ماندهٔ گرما، مقداری از آب مجبور است یخ بزند و جرم یخ اندکی افزایش می‌یابد.

تذکر

به‌عنوان یک سؤال دشوار میزان آبی که یخ می‌زند با کمک اصل بقای انرژی برابر است با:

$$\begin{cases} \text{آب}: Q_1 = m_1 c_w \Delta\theta_1 - m' L_F = 1 \times 4200 \times (0 - 1) - m' \times 334000 J \\ \text{یخ}: Q_2 = m c_i \Delta\theta_2 = 0/5 \times 2100 \times (0 - (-10)) = 10500 J \end{cases}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow (-4200 - m' \times 334000) + 10500 = 0 \Rightarrow m' \simeq 0/0188 kg = 18/8 gr$$

www.gajmarket.com

۴ ۷۹۴ برای حل این سؤال، باید میزان گرمایی که آب به محیط می‌دهد را محاسبه کنیم:



$$\begin{cases} Q_1 = mc\Delta\theta \\ Q_2 = -mL_F \end{cases} \xrightarrow{Q_{کل}=Q_1+Q_2} Q_{کل} = mc\Delta\theta + (-mL_F) = ۱۵۰ \times ۴۲۰۰ \times (۰-۲۰) + (-۳۳۶ \times ۱۰^۳ \times ۱۵۰)$$

$$\Rightarrow Q_{کل} = -۶/۳ \times ۱۰^۷ J = -۶/۳ \times ۱۰^۷ \times ۱۰^{-۶} MJ = -۶۳MJ$$

علامت منفی نشان می‌دهد که آب گرما از دست داده است.

۲ ۷۹۵

نکته

روند کلی حل سؤالات تعادل گرمایی بین بخار آب و آب، مشابه سؤالات تعادل گرمایی بین یخ و آب است که در تست‌های ۷۹۵ تا ۸۰۱ با دقت توضیح داده شده است.

با توجه به این‌که دمای تعادل مشخص است، استفاده از اصل بقای انرژی حل را ساده‌تر می‌کند. با توجه به این موضوع داریم:

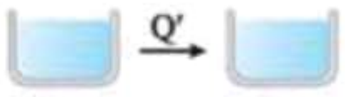
$$\text{بخار آب}: \begin{cases} m_1 = ? \\ \theta_1 = ۱۰۰\,^\circ C \\ L_V = ۲۲۶۸ J/gr \end{cases} \quad , \quad \text{آب}: \begin{cases} m_2 = ۵۹۰ gr \\ \theta_2 = ۱۰\,^\circ C \\ c = ۴/۲ J/gr.^\circ C \end{cases} \quad , \quad \theta_e = ۵۰\,^\circ C$$

گام اول: ابتدا انرژی‌ای را که بخار آب از دست می‌دهد تا به آب با دمای $\theta_e = ۵۰\,^\circ C$ برسد را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} Q_1 = -m_1 L_V = -m_1 \times ۲۲۶۸ \\ Q_2 = m_1 c_1 \Delta\theta_1 = m_1 \times ۴/۲ \times (۵۰-۱۰۰) = -۵۰ \times ۴/۲ m_1 \end{cases} \Rightarrow Q = -۲۲۶۸m_1 - ۵۰ \times ۴/۲ m_1$$

گام دوم: در ادامه انرژی‌ای را که آب $۱۰\,^\circ C$ می‌گیرد تا به آب با دمای $\theta_e = ۵۰\,^\circ C$ تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:



$$Q' = m_2 c_2 \Delta\theta_2 = ۵۹۰ \times ۴/۲ \times (۵۰-۱۰) = ۵۹۰ \times ۴/۲ \times ۴۰$$

گام سوم: در نهایت با توجه به قانون بقای انرژی داریم:

$$Q + Q' = ۰ \Rightarrow [-۲۲۶۸m_1 - ۵۰ \times ۴/۲ m_1] + ۵۹۰ \times ۴/۲ \times ۴۰ = ۰ \Rightarrow m_1 = ۴۰ gr$$

۲ ۷۹۶ با توجه به این‌که وضعیت نهایی تعادل را نمی‌دانیم، مشابه با سؤالات قبل، برای حل این مسأله نیز گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

$$\text{بخار آب}: \begin{cases} m_1 = ۲ gr \\ \theta_1 = ۱۰۰\,^\circ C \\ L_V = ۲۳۱۰ J/gr \end{cases} \quad \text{یخ}: \begin{cases} m_2 = ۱۵ gr \\ \theta_2 = -۱۰\,^\circ C \\ L_F = ۳۳۶ J/gr \end{cases} \quad c_{یخ} = ۲/۱ J/gr.^\circ C \ , \ c_{آب} = ۴/۲ J/gr.^\circ C$$

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی که بخار آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را به‌دست می‌آوریم:

$$|Q_1| = |m_1 L_V + m_1 c_{آب} \Delta\theta| = ۲ \times ۲۳۱۰ + ۲ \times ۴/۲ \times (۱۰۰-۰) = ۵۴۶۰ J$$

گام دوم: در ادامه مقدار گرمایی که یخ می‌گیرد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_2| = m_2 c_{یخ} \Delta\theta + m_2 L_F = ۱۵ \times ۲/۱ \times (۰-(-۱۰)) + ۱۵ \times ۳۳۶ = ۵۳۵۵ J$$

گام سوم: با توجه به بزرگ‌تر بودن $|Q_1|$ از $|Q_2|$، تمام یخ ذوب‌شده و دمای تعادل از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\overbrace{|Q_1| - |Q_2|}^{\text{گرمای اضافی}} = (m_1 + m_2) c_{آب} \theta_e \Rightarrow ۱۰۵ = ۱۷ \times ۴/۲ \times \theta_e \Rightarrow \theta_e \simeq ۱/۵\,^\circ C$$

۴ ۷۹۷ با توجه به این‌که مقدار یخ ذوب‌شده در طی فرایند از ما خواسته شده است، می‌توان دریافت که بخار آب نتوانسته تمام یخ را ذوب کند و در مجموعه مخلوط آب و یخ داریم. در این حالت، دمای تعادل مجموعه صفر درجهٔ سلسیوس است، بنابراین با استفاده از قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$\text{بخار آب}: m_1 = ۸ gr \ , \ \theta_1 = ۱۰۰\,^\circ C$$

$$L_F = ۸۰ cal/gr \ , \ L_V = ۵۴۰ cal/gr \ , \ c_{آب} = ۱ cal/gr.^\circ C$$

گام اول: محاسبهٔ گرمایی که بخار آب $۱۰۰\,^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب $۰\,^\circ C$ تبدیل شود:



$$\begin{cases} Q_1 = m_1 L_V = -۸ \times ۵۴۰ cal \\ Q_2 = m_1 c_{آب} \Delta\theta = ۸ \times ۱ \times (۰-۱۰۰) = -۸۰۰ cal \end{cases} \Rightarrow Q = Q_1 + Q_2 = -۸ \times ۵۴۰ - ۸۰۰ \text{ cal}$$

گام دوم: فرض می‌کنیم m گرم از یخ ذوب می‌شود و گرمایی که m گرم یخ صفر درجه می‌گیرد تا به m گرم آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow Q' = mL_F = m \times ۸۰$$

اصل بقای انرژی : $Q' + Q = ۰ \Rightarrow ۸۰m - ۸۰۰ - ۸ \times ۵۴۰ = ۰ \Rightarrow m = ۵۴ + ۱۰ = ۶۴ gr$

۳ ۷۹۸ با توجه به اطلاعات مسأله، برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

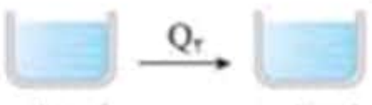
$$\text{بخار آب}:\begin{cases} m_1 = m\,gr \\ \theta_1 = 100\,^\circ C \\ L_V = 2200\,kJ/kg = 2200\,J/gr \end{cases} \qquad \text{آب}:\begin{cases} m_2 = 10m\,gr \\ \theta_2 = 50\,^\circ C \\ c_2 = 4200\,J/kg.^\circ C = 4/2\,J/gr.^\circ C \end{cases}$$

گام اول: گرمایی که m گرم بخار آب $100\,^\circ C$ از دست می‌دهد تا به m گرم آب $100\,^\circ C$ تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:



$$Q_1 = -mL_V = -2200m \Rightarrow |Q_1| = 22 \times 10^2 m$$

گام دوم: گرمایی که $10m$ گرم آب $50\,^\circ C$ می‌گیرد تا به $10m$ گرم آب $100\,^\circ C$ تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم.



$$Q_2 = m_2 c_2 \Delta\theta_2 = 10m \times 4/2 \times (100 - 50) = 21 \times 10^2 m$$

گام سوم: چون $|Q_2| > |Q_1|$ می‌باشد، بنابراین m گرم بخار آب، گرمای لازم برای رساندن دمای $10m$ گرم آب از دمای $50\,^\circ C$ به $100\,^\circ C$ را دارد. حال فرض می‌کنیم که m گرم بخار و $10m$ گرم آب هر دو به آب $100\,^\circ C$ تبدیل شده $(m + 10m = 11m)$ و سپس گرمای اضافی $(|Q_2| - |Q_1|)$ صرف تبدیل m' گرم آب $100\,^\circ C$ به بخار آب $100\,^\circ C$ شود. بنابراین داریم:

گرمای اضافی: $|Q_1| - |Q_2| = m'L_V \Rightarrow 22 \times 10^2 m - 21 \times 10^2 m = m' \times 22 \times 10^2 \Rightarrow m' = \frac{1}{22} m$

بنابراین پس از برقراری تعادل، $\frac{1}{22} m$ گرم از کل آب $(m + 10m = 11m)$ تبدیل به بخار شده و مقدار آب باقی‌مانده برابر است با:

$$\text{مقدار آب باقی‌مانده} = 11m - \frac{1}{22} m = \frac{241}{22} m$$

به جور دیگه فکر کنیم: چون $|Q_2| > |Q_1|$ می‌باشد، بنابراین کافی است قسمتی از بخار آب $100\,^\circ C$ تبدیل به آب $100\,^\circ C$ شده و دمای آب $50\,^\circ C$ را به آب $100\,^\circ C$ برساند. حال چون دیگر هم آب و هم بخار در دمای $100\,^\circ C$ قرار دارند، بنابراین در وضعیت تعادل قرار می‌گیرند. بنابراین کافی است که مقدار بخار لازم (m'') که با آب شدنِ خود، گرمای کافی برای رساندن دمای $10m$ گرم آب از $50\,^\circ C$ به $100\,^\circ C$ را برعهده دارد، محاسبه کنیم.

$$|m''L_V| = |(10m)c\Delta\theta| \Rightarrow m'' \times 22 \times 10^2 = 10m \times 4/2 \times (100 - 50) \Rightarrow m'' = \frac{21}{22} m$$

بنابراین پس از برقراری تعادل جرم کل آب برابر است با:

$$\text{جرم کل آب بعد از برقراری تعادل} = 10m + m'' = 10m + \frac{21}{22} m = \frac{241}{22} m$$

۴ ۷۹۹ با توجه به این‌که آب صفر درجهٔ سلسیوس درون گودال قرار دارد، پس مولکول‌های سطح آب برای انجام تبخیر سطحی، از سایر مولکول‌ها گرما می‌گیرند و سایر مولکول‌ها تنها با یخ‌زدن می‌توانند به آن‌ها گرما بدهند. این موضوع باعث می‌شود m گرم آب تبخیر شده و $(680 - m)$ گرم آب یخ ببندد. با مساوی قرار دادن مقدار گرمای آزاد شده ناشی از یخ زدن $(680 - m)$ گرم آب با گرمای دریافت شده توسط m گرم آب بخار شده داریم:

$$|Q_1| = |Q_2| \Rightarrow (680 - m)L_F = mL_V \Rightarrow (680 - m) \times L_F = m \times 7/5 L_F \Rightarrow m = 80\,gr \text{ (جرم بخار)} \Rightarrow \text{جرم یخ} = 680 - 80 = 600\,gr$$

مجدداً تأکید می‌شود که برای بخار شدن آب در تبخیر سطحی، بدون نیاز به رسیدن به دمای $\theta = 100\,^\circ C$ تبخیر رخ می گرمای لازم برابر

۳ ۸۰۰ گرمایی که آب بدن در اثر عرق کردن برای تبخیر نیاز دارد، از طرف بدن شخص تأمین می‌شود. بنابراین گرمایی که بدن باید از دست بدهد را محاسبه کرده و سپس مقدار آن را با انرژی تبخیر آب بدن برابر قرار می‌دهیم. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{گرمای از دست رفته بدن}: Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[c=3630\,J/kg.^\circ C]{m=50\,kg} Q = 50 \times 3630 \times (-1)^\circ\,J \\ \text{گرمای تبخیر آب بدن}: Q' = m'L_V = 2/42 \times 10^6\,m' \end{cases}$$

$$Q' = |Q| \Rightarrow m' \times 2/42 \times 10^6 = 50 \times 3630 \Rightarrow m' = 7/5 \times 10^{-2}\,kg = 75\,gr$$

۲ ۸۰۱ شخص موردنظر باید به میزانی که آب از دست داده، آب بنوشد. با توجه به پاسخ سؤال قبل، ۷۵ گرم از آب بدن در اثر عرق کردن، بخار شده است. بنابراین برای جبران آن، شخص باید ۷۵ گرم آب بنوشد. حال برای محاسبهٔ حجم آب مورد نیاز، از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ استفاده می‌کنیم:

$$V = \frac{m_{\text{آب مورد نیاز}}}{\rho_{\text{آب}}} = \frac{7/5 \times 10^{-2}}{1000} = 7/5 \times 10^{-5}\,m^3 = 7/5 \times 10^{-2}\,lit$$

gajmarket.com

۲ ۸۰۲

نکته

در تست‌های ۸۰۲ تا ۸۰۴ تعادل گرمایی بین یک قطعه فلز و یک قطعه یخ بزرگ را می‌خواهیم بررسی کنیم. در این‌گونه سؤالات، همهٔ یخ ذوب نمی‌شود و دمای تعادل مجموعه صفر است.

با توجه به صورت سؤال، فلز نتوانسته است تمام یخ را ذوب کند، پس در نتیجه مقداری از یخ باقی‌مانده است و هرگاه قسمتی از یخ ذوب شده و مقداری از آن نیز باقی‌مانده باشد، می‌توان گفت دمای تعادل قطعاً صفر درجهٔ سلسیوس است (بیان دقیق‌تر: قطعهٔ بزرگ یخ مانند یک منبع گرمایی عمل می‌کند و قطعه فلز را با خود هم‌دما می‌کند، بنابراین دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است). در ادامه می‌دانیم جمع جبری گرمایی که فلز از دست می‌دهد تا به دمای $0\,^\circ C$ برسد با گرمایی که صرف ذوب شدن m_2 گرم یخ می‌شود برابر با صفر است، بنابراین داریم:

$$\text{فلز}: m_1 = 2/5\,kg \quad , \quad \theta_1 = 68\,^\circ C \quad , \quad \theta_e = 0\,^\circ C \quad , \quad \text{جرم یخ ذوب شده} = m_2 = ?$$

$$L_F = 3/4 \times 10^5\,J/kg \quad , \quad c_{\text{فلز}} = 380\,J/kg.K$$

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 c_{\text{فلز}} (\theta_e - \theta_1) = 2/5 \times 380 \times (0 - 68) : \text{گرمایی که فلز از دست می‌دهد.} \\ Q_2 = m_2 L_F = m_2 \times 3/4 \times 10^5 : \text{گرمایی که صرف ذوب کردن یخ می‌شود.} \end{cases}$$

$$\text{اصل بقای انرژی} \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow -2/5 \times 380 \times 68 + 3/4 \times 10^5 m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = 190\,gr$$

۲ ۸۰۳ با توجه به این‌که تمام یخ ذوب نشده و مقداری یخ در مجموعه باقی‌مانده است، می‌توان گفت دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است و در ادامه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 c_{\text{فلز}} (\theta_e - \theta_1) = 2/5 \times c_{\text{فلز}} \times (0 - 68) = -68 \times 2/5\, c_{\text{فلز}} : \text{گرمایی که فلز از دست می‌دهد تا به دمای تعادل برسد.} \\ Q_2 = m_2 L_F = 0/19 \times 3/4 \times 10^5 : \text{گرمایی که صرف ذوب کردن } 190\,gr \text{ یخ می‌شود.} \end{cases}$$

$$\text{اصل بقای انرژی} : Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow -68 \times 2/5\, c_{\text{فلز}} + 0/19 \times 3/4 \times 10^5 = 0 \Rightarrow c_{\text{فلز}} = \frac{0/19 \times 3/4 \times 10^5}{68 \times 2/5} = 380\,J/kg.^\circ C$$

۴ ۸۰۴ تحلیل این سؤال، مشابه سؤال قبل است. با توجه به این‌که هر دو گلوله را روی یک قالب بزرگ یخ قرار داده‌ایم، می‌توان گفت که دمای تعادل برای هر دو گلوله صفر درجهٔ سلسیوس است، در نتیجه اختلاف دما برای هر دو گلوله یکسان است. در ادامه چون گلولهٔ A میزان یخ بیشتری را ذوب کرده است، می‌توان گفت اندازهٔ گرمایی که از دست داده است بزرگ‌تر بوده و داریم:

$$|Q_A| > |Q_B| \Rightarrow |m_A c_A \Delta\theta_A| > |m_B c_B \Delta\theta_B| \xrightarrow{\Delta\theta_A = \Delta\theta_B} m_A c_A > m_B c_B \Rightarrow C_A > C_B$$

یعنی ظرفیت گرمایی گلولهٔ A از B بیشتر است.

۳ ۸۰۵ با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، دمای اولیهٔ گرماسنج برابر $12\,^\circ C$، دمای آب صفر درجهٔ سلسیوس و دمای تعادل $2\,^\circ C$ است و داریم:

$$\text{گرماسنج}: \begin{cases} C_{\text{گرماسنج}} = m_1 c_1 = ? \\ \theta_1 = 12\,^\circ C \end{cases} \quad , \quad \text{آب}: \begin{cases} m_2 = 50\,gr = 0/05\,kg \\ c_2 = 4200\,J/kg.K \\ \theta_2 = 0\,^\circ C \end{cases} \Rightarrow \theta_e = \frac{\overbrace{m_1 c_1}^{C_{\text{گرماسنج}}}\ \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2}{\underbrace{m_1 c_1}_{C_{\text{گرماسنج}}} + m_2 c_2} \Rightarrow 2 = \frac{12 C_{\text{گرماسنج}} + \cancel{0/05 \times 4200 \times 0}}{C_{\text{گرماسنج}} + 0/05 \times 4200}$$

$$\Rightarrow 2C_{\text{گرماسنج}} + 2 \times 0/05 \times 4200 = 12 C_{\text{گرماسنج}} \Rightarrow 10 C_{\text{گرماسنج}} = 2 \times 0/05 \times 4200 \Rightarrow C_{\text{گرماسنج}} = 42\,J/K$$

۴ ۸۰۶ با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\text{گرماسنج}: \begin{cases} C_{\text{گرماسنج}} = 150\,J/^\circ C \\ \theta_1 = 8\,^\circ C \end{cases} \quad , \quad \text{آب}: \begin{cases} m_2 = 0/5\,kg \\ \theta_2 = 8\,^\circ C \\ c_2 = 4200\,J/kg.^\circ C \end{cases} \quad , \quad \text{فلز}: \begin{cases} C_{\text{فلز}} = ? \\ \theta_3 = 110\,^\circ C \end{cases} \quad , \quad \theta_e = 10\,^\circ C$$

$$\theta_e = \frac{\overbrace{m_1 c_1}^{C_{\text{گرماسنج}}}\ \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 + \overbrace{m_3 c_3}^{C_{\text{فلز}}}\ \theta_3}{\underbrace{m_1 c_1}_{C_{\text{گرماسنج}}} + m_2 c_2 + \underbrace{m_3 c_3}_{C_{\text{فلز}}}} \Rightarrow 10 = \frac{150 \times 8 + 0/5 \times 4200 \times 8 + C_{\text{فلز}} \times 110}{150 + 0/5 \times 4200 + C_{\text{فلز}}}$$

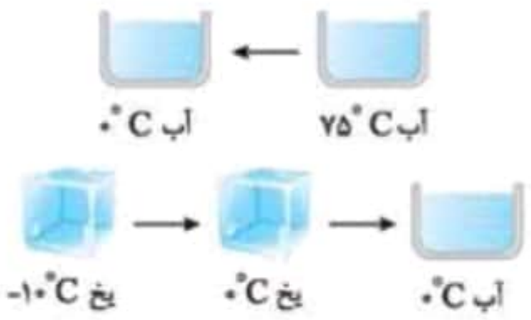
$$\Rightarrow 1500 + 21000 + 10 C_{\text{فلز}} = 1200 + 16800 + 110 C_{\text{فلز}} \Rightarrow C_{\text{فلز}} = 45\,J/^\circ C$$

۲۸۰۷ با توجه به اطلاعات مسأله و پاسخ سؤال قبل، می‌توان نوشت:

$$Q = \overbrace{mc}^{C}\Delta\theta = C\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_{\text{گرماسنج}}}{Q_{\text{فلز}}} = \frac{C_{\text{گرماسنج}}\Delta\theta_{\text{گرماسنج}}}{C_{\text{فلز}}\Delta\theta_{\text{فلز}}} \Rightarrow \frac{Q_{\text{گرماسنج}}}{Q_{\text{فلز}}} = \frac{۱۵۰\times(۱۰-۸)}{۴۵\times(۱۰-۱۱۰)} = -\frac{۱}{۱۵}$$

ظرفیت گرمایی

۳۸۰۸ با توجه به این‌که **حداکثر** جرم آب خواسته شده، بعد از رسیدن به تعادل، باید تمام یخ درون گرماسنج به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود. فرض کنید جرم m کیلوگرم آب $۷۵^\circ C$ را درون مجموعه می‌ریزیم تا مجموعه به تعادل برسد. پس می‌توان نوشت:



$$Q_۱ = m_۱c_۱\Delta\theta_۱ = m\times۴۲۰۰\times(۰-۷۵) = -m\times۴۲۰۰\times۷۵J$$

$$Q_۲ = m_۲c_۲\Delta\theta + m_۲L_F \xrightarrow{m_۲=۹kg} Q_۲ = ۹\times۲۱۰۰\times(۰-(-۱۰)) + ۹\times۳۳۶۰۰۰ = ۹\times۳۵۷۰۰۰J$$

$$Q_۳ = \boxed{m_۳c_۳}\Delta\theta = C_{\text{گرماسنج}}\Delta\theta \xrightarrow[C_{\text{گرماسنج}}=۶۳۰۰J/^\circ C]{} Q_۳ = ۶۳۰۰\times(۰-(-۱۰)) = ۶۳۰۰۰J$$

$c_{\text{گرماسنج}}$

پس با توجه به پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$Q_۱+Q_۲+Q_۳=۰ \Rightarrow -m\times۴۲۰۰\times۷۵+۹\times۳۵۷۰۰۰+۶۳۰۰۰=۰ \Rightarrow m=۱۰/۴kg$$

۴۸۰۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۱ — **انواع روش‌های انتقال گرما** — (تست‌های ۸۰۹ تا ۸۲۶)

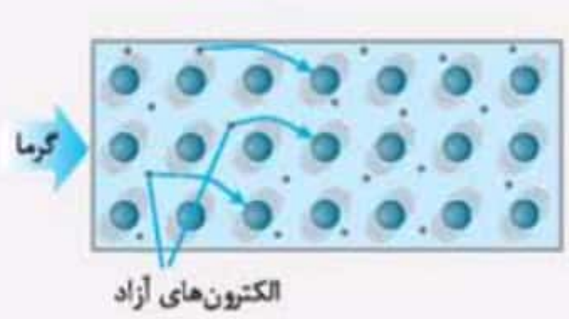
همان‌طور که می‌دانیم، اختلاف دما باعث شارش گرما از جسم با دمای بالاتر به جسم با دمای پایین‌تر می‌شود. این شارش گرما به سه صورت متفاوت می‌تواند رخ دهد که عبارتند از **رسانش**، **همرفتی** و **تابش**. در ادامه به بررسی نحوهٔ رخ دادن هر یک از این روش‌ها می‌پردازیم. دقت شود که ممکن است در یک فرایند انتقال گرما، هر سه روش فوق در انتقال گرما دخالت داشته باشند.

روش رسانش

احتمالاً تجربه کرده‌اید که وقتی انتهای یک قاشق فلزی که درون یک ظرف غذای داغ است را با دست گرفته‌ایم، داغی آن احساس می‌شود. در این حالت گرما از طریق رسانش به انتهای قاشق منتقل شده است. در واقع اگر بین دو نقطه از یک جسم، اختلاف دمایی وجود داشته باشد، گرما درون جسم از قسمت با دمای بالاتر، به قسمت با دمای پایین‌تر شارش پیدا می‌کند. این نوع شارش را **رسانش** می‌نامند.

تمرین پدیدهٔ رسانش را برحسب ارتعاشات مولکولی چگونه می‌توان توجیه کرد؟

پاسخ برای بررسی دقیق‌تر روند انتقال گرما به روش رسانش می‌توان گفت که ارتعاش اتم‌ها و الکترون‌های آزاد در ناحیهٔ گرم‌شدهٔ جسم، موجب انتقال بخشی از انرژی آن‌ها به اتم‌ها و الکترون‌های بسیار زیاد مجاورشان و در نتیجه انتقال گرما به روش رسانش می‌شود. رسانش گرما در مواد مختلف متفاوت است. چون الکترون‌ها بسیار کوچک‌اند، به سرعت حرکت می‌کنند و با برخورد با سایر الکترون‌ها و اتم‌ها سبب رسانش گرمایی می‌شوند. بنابراین در رساناهای فلزی مطابق شکل مقابل، سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرمایی بیشتر از اتم‌هاست.



در حالی‌که فلزها رساناهای خوب گرما هستند، موادی مانند شیشه، چوب و آجر رساناهای چندان خوبی به‌شمار نمی‌روند. در این مواد مطابق شکل مقابل، گرما صرفاً از طریق ارتعاش اتم‌ها انتقال می‌یابد.



نکات مهم و کاربردی

۱ در انتقال گرما به روش رسانش، ذرات ماده نقش مهمی دارند. آن‌ها بدون آن‌که خودشان منتقل شوند می‌توانند گرما را منتقل کنند. این روش در جامدات که مولکول‌های آن‌ها بسیار نزدیک است، روش بسیار مؤثری در انتقال گرما محسوب می‌شود.

۲ گرما در ماده‌های مختلف با آهنگ‌های متفاوتی شارش می‌کند. دقت شود که رساناهای خوب را برای قسمت‌هایی که می‌خواهیم گرما را زیاد منتقل کنیم و نارساناهای خوب را برای عایق‌کاری‌ها استفاده می‌کنیم.

gajmarket.com

تمرین۲ با بررسی چند مثال عینی، چند کار که به منظور جلوگیری از رسانش انجام می‌شود را شرح دهید.

پاسخ یکی از مواردی که به دلیل رسانش گرما انجام می‌شود، استفاده از ماده‌های عایق مخصوص در دیوارها و سقف بناها می‌باشد. این عایق‌ها به این منظور است که از شارش گرما از داخل به سمت بیرون در زمستان و از بیرون به سمت داخل در تابستان جلوگیری کنند. به‌عنوان مثال می‌توان به پنجره‌های دو جداره که در بین آن‌ها لایه‌ای از هوا (عایق) قرار داده می‌شود اشاره کرد.

به‌عنوان مثالی دیگر از طبیعت، می‌توان به این مورد اشاره کرد که موهای خرس‌های قطبی توخالی هستند. این موضوع عملاً یک لایهٔ هوا در سطح بدن خرس قطبی ایجاد می‌کند که اجازهٔ رسانش گرما را نمی‌دهد و عملاً باعث گرم ماندن بدن خرس قطبی می‌شود.

روش همرفت

اگر مقداری از یک مایع را در یک نقطه گرم کنیم، دمای آن نقطه بالا رفته و با افزایش دما، حجم مایع در اطراف آن نقطه زیاد و چگالی آن کم می‌شود. کم‌شدن چگالی سبب حرکت مایع با دمای زیادتر به‌سمت بالا و مایع با دمای کم‌تر به جای آن می‌شود. این حرکت مایع باعث انتقال گرما به همهٔ نقاط ظرف می‌شود، به این شیوه از انتقال گرما، **روش همرفتی** می‌گویند.

تذکر روش همرفت می‌تواند به دو صورت طبیعی و واداشته انجام شود. با توجه به شیوهٔ اشاره شده در فوق برای جریان همرفتی، گرم شدن هوای داخل اتاق به‌وسیلهٔ بخاری یا شومینه، جریان‌های باد ساحلی، گرم شدن آب درون قابلمه، انتقال گرما از کورهٔ هسته‌ای واقع در مرکز خورشید به سطح آن و ... همگی بر اثر پدیدهٔ همرفت است. همهٔ این مثال‌ها نمونه‌هایی از **همرفت طبیعی** است. نوع دیگری از همرفت، **همرفت واداشته** است که در آن شاره به کمک یک تلمبه (طبیعی یا مصنوعی) به چرخش واداشته می‌شود تا با این چرخش انتقال گرما صورت پذیرد. سیستم گرم‌کنندهٔ مرکزی در ساختمان‌ها، سیستم خنک‌کنندهٔ موتور اتومبیل، دستگاه گردش خون در بدن جانوران خون‌گرم و ... مثال‌هایی از انتقال گرما به روش همرفت واداشته هستند.

تمرین۳ پدیدهٔ همرفت در کنار دریا، چگونه باعث حرکت جریان هوا می‌شود؟

پاسخ جریان همرفتی در هوا در مناطقی که جنس زمین آن‌ها در قسمت‌های مختلف متفاوت باشد، بسیار آشکار است. مثلاً در کنار دریا قبل از ظهر با تابش خورشید، شن‌ها که گرمای ویژهٔ آن‌ها کم‌تر از آب دریاست دمای بیشتری پیدا می‌کنند. شن‌ها رسانای خوبی برای گرما هستند و گرما را به هوای اطراف خود می‌دهند و به این ترتیب هوای روی شن‌ها گرم‌تر از هوای روی سطح آب دریاست. هوای گرم که چگالی کم‌تری دارد به بالا رانده می‌شود و **هوای خنک از روی آب دریا به سمت خشکی می‌وزد**. هنگام شب شن‌ها زودتر به دمای پایین می‌رسند. اما آب که گرمای ویژهٔ بالایی دارد مانند یک مخزن ذخیرهٔ گرما عمل می‌کند و موجب می‌شود هوای روی سطح آب دریا گرم‌تر از قسمت خشکی باشد. پس جریان هوای خنک **از خشکی به سمت دریا** خواهد بود.



نکات مهم و کاربردی

۱ روش همرفتی علاوه بر مایعات، در گازها نیز می‌تواند رخ دهد ولی در جامدات که مولکول‌ها حرکت چندانی ندارند، چندان روش مؤثری نیست.

۲ در روش همرفتی برای انتقال گرما به محیط مادی احتیاج داریم. بنابراین در خلأ که مولکول مادی ندارد، انتقال گرما با این روش رخ نمی‌دهد.

۳ وارونگی هوا که معمولاً در شب‌های آرام و بدون ابر زمستان شروع می‌شود، پیامد توقف همرفت طبیعی در جوّ زمین است. این موضوع را در سؤال‌های (۸۲۵) و (۸۲۶) بررسی کرده‌ایم.

روش تابش

همهٔ ما تجربهٔ گرم شدن در نور خورشید را داریم. این نور برای رسیدن به ما از خلأ موجود بین زمین و خورشید می‌گذرد. این نوع انتقال گرما را که نیاز به محیط مادی ندارد، **تابش** می‌نامند. این انتقال توسط امواج الکترومغناطیس (مانند فروسرخ، نور مرئی، پرتوهای x و ...) با سرعت زیاد انجام می‌شود و در فیزیک پایهٔ دوازدهم این موضوع را به‌صورت کامل بررسی خواهیم کرد.

نکات مهم و کاربردی

۱ سرعت انتقال گرما از طریق تابش بسیار زیاد است. در این روش مولکول‌ها هیچ نقشی در انتقال گرما ندارند. به‌طور کلی هر جسمی در هر دمایی از سطح خود تابش گرمایی گسیل می‌کند. شدت و بسامد این تابش به دمای جسم بستگی دارد و به همین دلیل آن را تابش گرمایی می‌نامیم.

۲ میزان تابش گرمایی از سطح هر جسم علاوه بر دما، به مساحت، اندازهٔ صیقلی بودن و رنگ سطح آن جسم بستگی دارد.

۳ تابش گرمایی در محدودهٔ دماهای زیر $500^{\circ}C$ عمدتاً به صورت تابش فروسرخ است که نامرئی است. برای آشکارسازی تابش‌های فروسرخ، از ابزاری به نام **دمانگار** استفاده می‌شود و به تصویر به دست آمده از این ابزار **دمانگاشت** گویند.

۴ هر چه دمای جسم بیشتر باشد تابش آن نیز بیشتر است. به این ترتیب همهٔ جسم‌ها در حال تابش از سطح خود هستند و هر جسمی تابش اجسام مجاور خود را دریافت می‌کند. از این تابش دریافتی، بخشی جذب می‌شود و دمای جسم را بالا می‌برد و بخش دیگری بازتاب می‌شود. این‌که چه درصدی از تابش توسط جسم جذب یا بازتاب شود به جنس، رنگ و وضعیت سطح جسم بستگی دارد.

چند مثال جالب از تابش

۱ یک روز آفتابی لباس مشکی بپوشید و در فضای آزاد، خود را در معرض تابش نور خورشید قرار دهید. دما در قسمت‌هایی که لباستان تیره است به سرعت بالا می‌رود و ممکن است برایتان آزاردهنده هم باشد. یک تکه کاغذ سفید را روی قسمتی از لباستان قرار دهید. در قسمتی که کاغذ سفید را قرار داده‌اید، دمای بدنتان زیاد نمی‌شود. از این آزمایش چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ با این‌که میزان تابش خورشید برای قسمت تیره و روشن یکسان است ولی قسمت‌های تیره بیشتر گرم می‌شوند، زیرا جذب گرما توسط سطح‌های تیره‌تر بیشتر است.



۲ دو قطعه فلز هم‌اندازه و هم‌جنس یکی کاملاً براق و دیگری تیره را انتخاب کنید. آن‌ها را به کمک گیره یا دسته درون آب جوش قرار دهید. سپس هم‌زمان آن‌ها را از آب خارج و به یک فاصله از پوست صورتتان نگه دارید. فلز تیره‌تر گرمای بیشتری تابش می‌کند. هر دو فلز به یک اندازه گرم شده‌اند و دمای یکسانی دارند؛ اما فلز صیقلی تابشگر خوبی نیست و قطعهٔ تیره در دماهای بالا بهتر از قطعهٔ روشن امواج تابش می‌کند.

۳ مثال‌هایی دیگر از تابش گرمایی در پدیده‌های زیست محیطی:

الف) گونه‌ای از گیاهان (کلم اسکانک) در زمستان به منظور این‌که برف اطراف خود را آب کنند، انرژی خود را به‌صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهند و همین امر باعث افزایش دمای گیاهان فوق، نسبت به دمای محیط می‌شود.

ب) در طبیعت نیز برخی از حیوانات به روش تفسنجی طعمه‌های خود را شناسایی می‌کنند. برای مثال گونه‌ای از مارها با استفاده از اندام‌های حفره‌ای که نسبت به تابش فروسرخ حساس هستند، طعمه‌های خون گرم خود را به واسطهٔ تابش امواج فروسرخ آن‌ها، در تاریکی و سرمای شب مشاهده می‌کنند.

نکته **(تفسنج)**: از تابش گرمایی می‌توان به عنوان مبنایی برای اندازه‌گیری دمای اجسام استفاده کرد. به روش‌های اندازه‌گیری دما مبتنی بر تابش گرمایی، تفسنجی و به ابزارهای اندازه‌گیری دما به این روش، تفسنج می‌گویند. تفسنج بر خلاف سایر دماسنج‌ها بدون تماس با جسمی که می‌خواهیم دمای آن را اندازه بگیریم، دمای جسم را اندازه می‌گیرد. تفسنجی، به‌خصوص در اندازه‌گیری دماهای بالای $1100^{\circ}C$ اهمیت ویژه‌ای دارد. تفسنج تابشی و تفسنج نوری، تفسنج‌هایی برای اندازه‌گیری این دماها هستند و تفسنج نوری به‌عنوان دماسنج معیار برای اندازه‌گیری این دماها انتخاب شده است.

در ادامه برای درک بهتر مفاهیم فوق، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۴ **سه دیگ هم‌اندازه و هم‌جنس را به یک اندازه از آب پر کرده‌ایم و آن‌ها را روی شعله‌های کاملاً مشابه قرار می‌دهیم. یکی از دیگ‌ها را کاملاً براق کرده‌ایم، دومی از بیرون کاملاً دوده‌اندود است، کف سومی کاملاً دوده‌اندود اما دور تا دورش کاملاً صیقلی است. دمای آب کدام ظرف زودتر افزایش می‌یابد؟**

پاسخ سؤال بسیار تحلیلی است که شاید در برخی آشپزخانه‌ها کاربردش را دیده باشید. در ظرف سوم چون کف ظرف دوده‌اندود است، گرمای تابشی شعله را به‌خوبی از کف دریافت می‌کند و وقتی دمای آن بالا می‌رود دیواره‌ها قصد تابش دارند که باعث کاهش دمای آب می‌شود. در ظرف (۲) نیز همین اتفاق رخ می‌دهد با این تفاوت که تابش دیواره در آن نسبت به ظرف (۳) زیادتر است، زیرا در ظرف (۳) به دلیل صیقلی بودن دیواره‌ها، در اثر تابش، گرمای کمی از دست می‌رود و در مجموع آب در ظرف (۳) زودتر به جوش می‌آید. دقت شود که ظرف (۱) به دلیل صیقلی بودن کف، گرما را خوب جذب نمی‌کند.



با توجه به آن‌چه در خلاصه نکات (۱۱) مطرح کردیم، در فلزها انتقال گرما به‌صورت رسانش انجام می‌شود. به‌طور کلی در رسانش جابه‌جایی ماده صورت نمی‌گیرد و تنها در اثر ارتعاش اتم‌ها و الکترون‌های آزاد، گرما از یک نقطه به نقطهٔ دیگر منتقل می‌شود. با توجه به این موضوع، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۸۱۰ رسانش گرما در مواد مختلف متفاوت است. در حالی‌که فلزها رساناهای خوب گرما هستند، موادی مانند شیشه، چوب و آجر رساناهای چندان خوبی به‌شمار نمی‌روند ولی انتقال گرما از طریق رسانش در آن‌ها صفر نیست، پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۱۱)، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح می‌باشند.

gajmarket.com

۸۱۱ ۴ گرم شدن آب درون قابلمه در اثر حرارت، نمونه‌ای از جریان همرفت طبیعی است، نه واداشته. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است. با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۱۱)، سایر گزینه‌ها صحیح می‌باشند.

تذکر

در رسانش گرمایی جابه‌جایی مولکول‌ها (یا الکترون‌ها) در فاصلهٔ بین برخوردهای متوالی آن‌ها کوچک است اما در همرفت، که انتقال گرما با انتقال تکه‌هایی از خود ماده صورت می‌گیرد، مولکول‌ها مسافت‌های طولانی‌تری طی می‌کنند تا انرژی را منتقل کنند.

۸۱۲ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

۱) در یک روز گرم و آفتابی، هوای قرار گرفته در بالای سطح ساحل، سریع‌تر از هوای قرار گرفته در بالای سطح آب دریا، گرم می‌شود و هوای خنک‌تر، از دریا به‌سوی ساحل حرکت می‌کند. پس از غروب خورشید، چون زمین سریع‌تر از آب خنک می‌شود، جهت جریان هوا معکوس شده و هوای خنک از ساحل به‌سوی دریا حرکت می‌کند. با توجه به این توضیحات، گزینه‌های (۱) و (۴) صحیح هستند.

۲) تابش، سریع‌ترین راه انتقال گرما از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر است و گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳) انتقال گرما از طریق تابش، تنها راه انتقال گرما در خلأ است و گزینهٔ (۳) عبارت نادرستی است.

۸۱۳ ۲ می‌دانیم که تنها روش انتقال گرما که نیاز به محیط مادی ندارد، تابش است، بنابراین برای رسیدن انرژی از خورشید تا جو زمین که به نوعی انرژی از خلأ می‌گذرد، انتقال انرژی به‌صورت تابش انجام می‌شود.

۸۱۴ ۴ الف **عبور گرما از خلأ:** همان‌طور که گفته شد، تنها نوع انتقال گرما که نیاز به محیط مادی ندارد، تابش است و در نتیجه عبور گرما از خلأ به روش تابش انجام می‌شود.

ب **عبور گرما از ابتدای قاشق به انتهای آن:** می‌دانیم که اگر بین دو نقطه از یک جسم، اختلاف دمایی باشد، گرمای درون جسم از قسمت با دمای بالاتر به قسمت با دمای پایین‌تر شارش می‌کند، که به این روش انتقال گرما رسانش می‌گوییم، بنابراین انتقال گرما از ابتدای قاشق به انتهای آن به روش رسانش است.

پ **انتقال گرما همراه با انتقال ماده:** می‌دانیم که در جریان همرفتی حرکت مایع یا گاز باعث انتقال گرما می‌شوند، بنابراین در جریان همرفتی انتقال گرما همراه با انتقال ماده صورت می‌گیرد.

۸۱۵ ۲ انتقال گرما به‌صورت رسانش و همرفتی احتیاج به محیط مادی دارد و در خلأ با توجه به عدم حضور محیط مادی، گرما فقط از طریق تابش (یعنی انتشار امواج الکترومغناطیس) منتقل می‌شود. در حالی‌که در محیط‌های غیرخلأ نیز می‌توان از طریق تابش گرما را انتقال داد. با توجه به این توضیحات، خلأ رسانای ضعیف‌تری برای انتقال گرماست.

تذکر

در یک مقایسهٔ کلی بین آب، هوا، خلأ و مس از نظر قابلیت رسانش گرمایی (یعنی راحت‌تر انتقال دادن گرما)، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\text{مس} > \text{آب} > \text{هوا} > \text{خلأ} \quad \xrightarrow{\text{افزایش رسانش}}$$



۸۱۶ ۴ می‌دانیم که هوا عایق نسبتاً مناسبی برای انتقال گرما است، در این شکل نیز پرنده پرهای خود را باد کرده است تا هوای قرار گرفته در زیر پرها مانند عایق عمل کرده و سرمای هوای بیرون، کم‌تر به بدن او منتقل شود. می‌توان این عمل پرنده را به نوعی شبیه به شیشهٔ دوجداره دانست.

توجه



موهای خرس‌های قطبی توخالی هستند. این موضوع عملاً یک لایهٔ هوا در سطح بدن خرس قطبی ایجاد می‌کند که اجازهٔ رسانش گرما را نمی‌دهد و عملاً باعث گرم ماندن بدن خرس قطبی می‌شود.

۸۱۷ ۲ با سؤال بسیار تحلیلی و زیبایی روبه‌رو شده‌ایم. ابتدا باید دقت کنیم که هوا رسانای ضعیفی است و انتقال گرما در این حالت از نوع رسانش نیست. از سوی دیگر چون دست در زیر اتو قرار دارد، همرفت نیز نمی‌تواند باعث شارش گرما شده باشد، زیرا در همرفت هوای گرم بالا می‌رود، نه پایین. در این حالت پرتوهای الکترومغناطیس ناشی از تابش اتو، باعث انتقال گرما می‌شود و گزینهٔ (۲) صحیح است.

۸۱۸ ۱ علت انجام این کار توسط آشپز، انتقال گرما به روش رسانش گرما در سیخ فلزی به داخل سیب‌زمینی است، زیرا فلزات در انتقال گرما به روش رسانش عملکرد خوبی دارند و گرما را به داخل سیب‌زمینی منتقل می‌کنند. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۸۱۹ ۲ دستگاه گردش خون در بدن جانوران خون‌گرم، نمونه‌ای از **همرفت واداشته** است، پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات (۱۱) صحیح هستند.



۱ ۸۲۰ در پاسخ به این سؤال باید گفت که آب در قسمت وسط گرم شده و حجم آن افزایش و در نتیجه چگالی‌اش کاهش می‌یابد و بالا می‌رود. در ادامه آب سردتر به پایین حرکت کرده و جایگزین آب گرم‌شده می‌شود. این موضوع را گزینهٔ (۱) به درستی نشان می‌دهد.

۲ ۸۲۱ همهٔ اجسام در حال تابش از سطح خود هستند. از طرفی همهٔ جسم‌ها تابش جسم‌های دیگر را که در اطراف آن‌ها قرار دارند، دریافت می‌کنند. از این تابش دریافتی بخشی را جذب می‌کنند (که باعث زیادتر شدن دمای آن‌ها می‌شود) و بخش دیگر را بازتاب می‌کنند. آن جسم‌هایی که سطح صیقلی‌تری دارند بازتابش بیشتری انجام می‌دهند و بخش کم‌تری از تابش دریافتی را جذب می‌کنند.

۱ ۸۲۲ برای پاسخ دادن به این تست، به نکات زیر توجه کنید:

۱) پوشش‌های براق، بازتاب‌کننده‌های مناسب گرما بوده و برای لباس‌های آتش‌نشانی مناسب‌ترند (گزینهٔ (۱) درست است).

۲) هنگامی‌که در یخچال را باز می‌کنیم، هوای سرد از پایین یخچال بیرون می‌آید (گزینهٔ (۲) نادرست است).

۳) در کشورهای با آب و هوای گرم، نماهای روشن‌تر که بازتاب‌کننده‌های خوبی برای گرما هستند، مناسب‌تر است (گزینهٔ (۳) نادرست است).

۴) وقتی فلز سرد را لمس می‌کنیم، نسبت به چوب سردتر به‌نظر می‌رسد، زیرا در فلز گرما به سرعت از محل تماس رسانش پیدا می‌کند ولی در قطعه چوب، رسانش گرما به کندی انجام می‌شود (گزینهٔ (۴) نادرست است).

۱ ۸۲۳ می‌دانیم که فلز رسانای گرمایی بهتری نسبت به پلاستیک است، پس اگر در این حالت از ظرف پلاستیکی استفاده کنیم گرما دیرتر به هوای اطراف داده می‌شود و ظرف دیرتر خنک می‌شود. از طرفی با کاهش مساحت دهانهٔ ظرف، آهنگ تبخیر سطحی نیز کم‌تر می‌شود و مایع دیرتر گرمای خود را از دست می‌دهد و به‌عبارتی دیرتر خنک می‌شود.



۴ ۸۲۴ همان‌طور که در شکل مقابل نشان داده شده است، آب در سر لولهٔ آزمایش در حال جوشیدن است در حالی‌که در انتهای لولهٔ آزمایش، یخ موجود است. این آزمایش نشان می‌دهد که آب رسانای حرارتی خوبی نیست.

۱ ۸۲۵ **وارونگی هوا:** وارونگی هوا که معمولاً در شب‌های آرام و بدون ابر زمستان شروع می‌شود پیامد توقف همرفت طبیعی در جوّ زمین است. در چنین شب‌هایی لایهٔ هوای بسیار سردی بین سطح زمین و لایهٔ هوای گرم بالاتر قرار می‌گیرد. این لایهٔ هوای گرم پیش از این بر اثر پدیدهٔ همرفت در یک روز معمولی ایجاد شده است. در واقع سردی زیاد لایهٔ هوای سرد مجاور زمین آن را چگال‌تر از هوای سردی می‌کند که در شرایط طبیعی به پایین رانده می‌شود و بدین ترتیب مانع از چرخش هوا بر اثر پدیدهٔ همرفت می‌شود. در این وضعیت گرد و غبار و گازهای آلایندهٔ شهری واقع در لایهٔ هوای سرد مجاور زمین در این لایه حبس می‌شوند. به این پدیده وارونگی هوا می‌گویند.

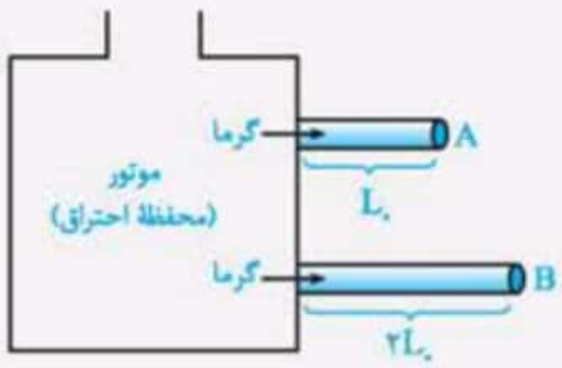
۴ ۸۲۶ وارونگی هوا تا وقتی تداوم دارد که بر اثر وزیدن باد، لایه‌های هوای سرد و گرم جابه‌جا شود و یا با افزایش دمای قابل توجه لایهٔ هوای سرد مجاور زمین، همرفت طبیعی دوباره در جو زمین از سر گرفته شود. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴ ۸۲۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۲ — **بررسی رسانش گرما در فلزات** — (تست‌های ۸۲۷ تا ۸۴۶)

شاید تاکنون با خود اندیشیده باشید که چرا در اطراف رادیاتور شوفاژها در منزل، پره‌های فلزی متعددی را طراحی می‌کنند؟

بله حتماً متوجه شده‌اید که این مطلب برای انتقال گرما و حرارت بیشتر به محیط اطراف رادیاتور است و یا حتماً مشاهده کرده‌اید که در اطراف بدنهٔ فلزی موتور بنزینی پره‌هایی نصب می‌کنند که باعث خنک شدن اتوماتیک موتور می‌شود. در ادامه با توجه به شکل مقابل، به دو سؤال زیر توجه کنید:



تمرین۱ **به‌نظر شما دمای نقطهٔ A بیشتر است یا B؟**

پاسخ مشخص است نقطهٔ A که به محفظه نزدیک‌تر است دمایش بالاتر است. به‌طور کلی میزان گرمای مبادله شده (رسانش شده) با طول، رابطهٔ عکس دارد.

$$Q \propto \frac{1}{L}$$

تمرین۲ **به‌نظر شما هنگامی‌که اختلاف دمای درون موتور و بیرون موتور بیشتر باشد رسانش گرما بیشتر است یا هنگامی که کم‌تر است؟**

پاسخ واضح است که میزان گرمای رسانش شده با اختلاف دمای بیرون و درون موتور رابطهٔ مستقیم دارد.

به‌سادگی می‌توان درک کرد که میزان رسانش میله‌ها با جنس میله‌ها، سطح مقطع میله‌ها و هم‌چنین مدت زمان رسانش گرما رابطهٔ مستقیم دارد.

www.gajmarket.com

بررسی رسانش گرما در فلزات: در شکل زیر، یک میلهٔ فلزی نشان داده شده است. اگر در دو سر این میله اختلاف دمای $\Delta\theta$ را ایجاد کنیم، به علت اختلاف دما، گرما از محل با دمای بیشتر به محل با دمای کم‌تر رسانش می‌یابد. میزان رسانش گرما در این میله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$Q = \frac{kAt\Delta\theta}{L}$$

رسانش گرمایی (J)

A: سطح مقطع میله (m^2)

t: زمان (s)

$\Delta\theta$: اختلاف دما (K کلوین)

k: ضریب رسانندگی گرمایی که به جنس فلز بستگی دارد.

نکات مهم و کاربردی

۱ واحد ضریب رسانندگی گرمایی در SI عبارت است از:

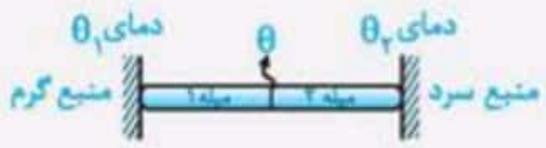
$$Q = \frac{kAt\Delta\theta}{L} \Rightarrow k = \frac{QL}{At.\Delta\theta} \Rightarrow k \text{ واحد} \equiv \frac{J.m}{m^2.s.K} \equiv \frac{J}{m.s.K}$$

$$\text{وات} \equiv \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}} \Rightarrow k \text{ واحد} \equiv \frac{\overset{\text{وات}}{J}}{m.s.K} \equiv \frac{\text{وات}}{\text{متر.کلوین}}$$

۲ با توجه به رابطهٔ فوق، میزان رسانش گرما با پارامترهای A ، t (زمان) و $\Delta\theta$ رابطهٔ مستقیم و با طول میله رابطهٔ معکوس دارد. در مقایسهٔ دو میلهٔ مختلف می‌توان نوشت:

$$Q = \frac{kAt\Delta\theta}{L} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{k_2}{k_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{t_2}{t_1} \times \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} \times \frac{L_1}{L_2}$$

۳ در شکل زیر دو میله از جنس‌های (۱) و (۲) بین دو نقطه قرار گرفته‌اند واضح است که گرمایی که از میلهٔ اول عبور می‌کند (رسانش می‌شود) از میلهٔ دوم نیز عبور می‌کند، پس رسانش گرمایی آن‌ها یکسان است، با توجه به این موضوع به سادگی می‌توان دمای محل اتصال دو میله را به‌دست آورد:



$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow k_1 \frac{A_1 t_1 (\theta_1 - \theta)}{L_1} = k_2 \frac{A_2 t_2 (\theta - \theta_2)}{L_2}$$

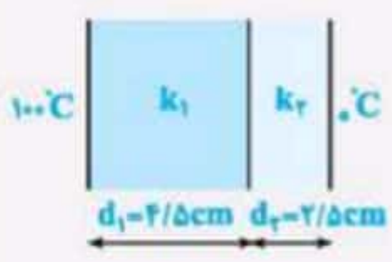
دقت شود که چون انتقال گرما در زمان یکسان انجام می‌شود، t_1 و t_2 با یک‌دیگر ساده می‌شوند. هم‌چنین برای محاسبهٔ $\Delta\theta$، همواره دمای بزرگ‌تر از دمای کوچک‌تر کم می‌شود.

۴ میزان گرمای انتقال‌یافته در واحد زمان را آهنگ شارش گرما (H) گویند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{آهنگ شارش گرما}: H = \frac{Q}{t} \Rightarrow H = \frac{KA\Delta\theta}{L}$$

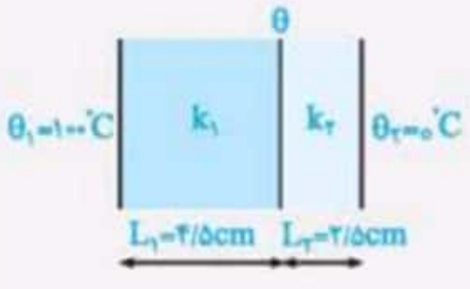
با حل تمرین بعدی، بر روی این موضوع مسلط‌تر می‌شوید.

تمرین۳ دو صفحهٔ فلزی به ضخامت‌های $d_1 = 4/5\,cm$ و $d_2 = 2/5\,cm$ که رسانندگی گرمایی آن‌ها به‌ترتیب $k_1 = 90\,J/s.m.K$ و $k_2 = 200\,J/s.m.K$ است، مطابق شکل به یک‌دیگر چسبیده‌اند و دمای یک طرف ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس و دمای طرف دیگر صفر درجهٔ سلسیوس است. دمای سطح مشترک دو فلز چند درجهٔ سلسیوس است؟ (ریاضی خارج ۹۴)



۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۸۰

پاسخ اگر دمای محل اتصال دو صفحه را θ فرض کنیم، با توجه به تساوی مقدار گرمای منتقل شده از لایهٔ اول و لایهٔ دوم در یک مدت زمان یکسان، می‌توان نوشت:



رسانش گرمایی : $Q = \frac{kAt\Delta\theta}{L}$

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{k_1 A t (\theta_1 - \theta)}{L_1} = \frac{k_2 A t (\theta - \theta_2)}{L_2}$$

$$\Rightarrow \frac{90(100 - \theta)}{4/5} = \frac{200(\theta - 0)}{2/5} \Rightarrow \theta = 20^\circ C$$ (گزینهٔ ۱)

با توجه به رابطهٔ $H = \frac{Q}{t} = \frac{kA\Delta\theta}{L}$، می‌توان گفت آهنگ شارش گرما، با سطح مقطع و اختلاف دمای دو سر میله رابطهٔ مستقیم و با طول میله رابطهٔ عکس دارد. بنابراین با کاهش سطح مقطع (A) و اختلاف دمای دو سر میله ($\Delta\theta$)، آهنگ شارش گرما کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۸۲۸ ۴ با توجه به رابطهٔ رسانش گرمایی می‌توان نوشت:

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow k = \frac{QL}{At\Delta\theta} \Rightarrow \text{واحد } k \equiv \frac{J.m}{m^2.s.K} \equiv \frac{J}{s.m.K} \xrightarrow{W \equiv \frac{J}{s}} \text{واحد } k \equiv \frac{W}{m.K} \Rightarrow \left(\frac{\text{وات}}{\text{متر . کلوین}}\right)$$

۸۲۹ ۲ با توجه به اطلاعات داده شده و رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ داریم:

$$L = ۳۰cm = ۰/۳m \ , \ \theta_۲ = ۱۵۰^\circ C \ , \ \theta_۱ = ۰^\circ C \ , \ Q = ۷۳۸J \ , \ t = ۱min = ۶۰s \ , \ \text{قطر} = d = ?$$

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow \overset{۹}{\cancel{۷۳۸}} = \overset{۱}{\cancel{۸۲}} \times \frac{A \times ۶۰ \times (۱۵۰ - ۰)}{۰/۳} \Rightarrow A = ۳ \times ۱۰^{-۴} m^2 = ۳cm^2$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow ۳ = ۳ \times r^2 \Rightarrow r^2 = ۱ \Rightarrow r = ۱cm \Rightarrow \text{قطر} : d = ۲r = ۲cm$$

دقت: مخلوط آب و یخ در کنار یک‌دیگر، دمایی برابر $\theta = ۰^\circ C$ دارند.

۸۳۰ ۲ می‌دانیم که مقدار گرمای منتقل شده و آهنگ رسانش گرما از میلهٔ مقابل برابر است با:



$$Q = \frac{kAt\Delta\theta}{L} \Rightarrow \text{آهنگ رسانش گرما} : \frac{Q}{t} = \frac{kA\Delta\theta}{L}$$

اکنون با توجه به مقادیر داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\text{سطح مقطع میله} : A = \pi r^2 \simeq ۳(۰/۱)^2 = ۳ \times ۱۰^{-۴} m^2 \ , \ k = ۲۴۰J/s.m.K \ , \ L = ۱m \ , \ \frac{Q}{t} = ?$$

$$\Delta\theta_F = ۴۰۰ - ۴۰ = ۳۶۰^\circ F \xrightarrow{\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C} \Delta\theta_C = \frac{۵}{۹}\Delta\theta_F = \frac{۵}{۹} \times ۳۶۰ = ۲۰۰^\circ C$$

$$\text{آهنگ رسانش گرما} : \frac{Q}{t} = \frac{kA\Delta\theta}{L} = \frac{۲۴۰ \times ۳ \times ۱۰^{-۴} \times ۲۰۰}{۱} = ۱۴/۴W$$

۸۳۱ ۱ با توجه به اطلاعات مسأله و رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$، در مقایسهٔ دو میله می‌توان نوشت:

$$\text{میلهٔ آهنی اول} : \begin{cases} L_۱ = L \\ A_۱ = A \\ \Delta\theta_۱ = (۱۰۰ - ۰) = ۱۰۰^\circ C \\ t_۱ = ۱min \\ Q_۱ = ۲۰۰J \end{cases} \qquad \text{میلهٔ آهنی دوم} : \begin{cases} L_۲ = ۲L \\ A_۲ = ۲A \\ \Delta\theta_۲ = (۵۰ - ۰) = ۵۰^\circ C \\ t_۲ = ۲min \\ Q_۲ = ? \end{cases}$$

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{A_۲}{A_۱} \times \frac{t_۲}{t_۱} \times \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} \times \frac{L_۱}{L_۲} \Rightarrow \frac{Q_۲}{۲۰۰} = \frac{۲A}{A} \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{L}{۲L} \Rightarrow \frac{Q_۲}{۲۰۰} = ۱ \Rightarrow Q_۲ = ۲۰۰J$$

۸۳۲ ۱ با توجه به رابطهٔ زیر، در مقایسهٔ آهنگ رسانش گرمایی در دو میله می‌توان نوشت:

$$\text{آهنگ رسانش گرمایی در میله} : \frac{Q}{t} = \frac{kA\Delta\theta}{L} \ , \ \Delta\theta_A = \Delta\theta_B \ , \ L_A = L_B \ , \ k_A = ۶k_B \ , \ A_A = \frac{۱}{۳}A_B$$

$$\frac{\text{آهنگ رسانش A}}{\text{آهنگ رسانش B}} = \frac{k_A}{k_B} \times \frac{A_A}{A_B} = ۶ \times \frac{۱}{۳} = ۲$$

۸۳۳ ۳ با توجه به اطلاعات مسأله و رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ داریم:

$$\Delta\theta = ۲۰^\circ C \ , \ t = ۱min = ۶۰s \ , \ A = (۱/۵ \times ۱/۵)m^2 \ , \ L = ۵mm = ۵ \times ۱۰^{-۳} m \ (\text{ضخامت شیشه})$$

$$k_{\text{شیشه}} = ۱J/s.m.K \ , \ Q = ?$$

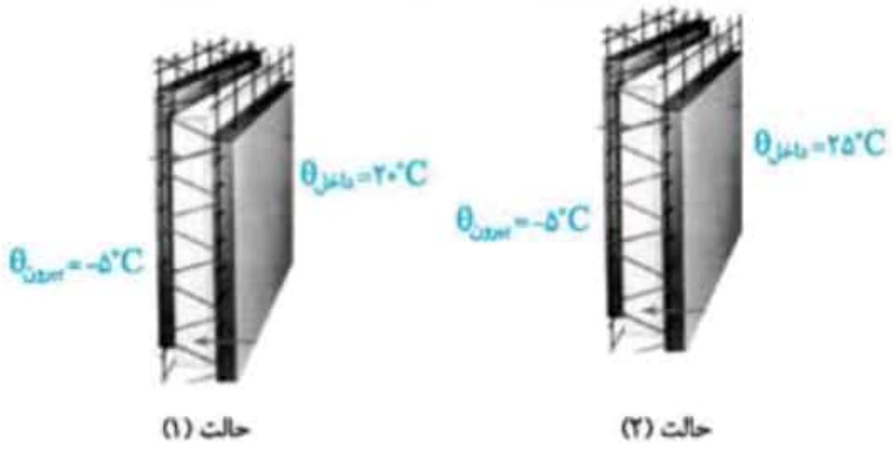
$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow Q = ۱ \times \frac{(۱/۵ \times ۱/۵) \times ۶۰ \times ۲۰}{۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۵۴۰ \times ۱۰^۳ J = ۵۴۰kJ$$

۸۳۴ ۴ با توجه به اطلاعات صورت مسأله و رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ (L : ضخامت شیشه) داریم:

$$\text{پنجرهٔ اول} : \begin{cases} A_۱ \\ L_۱ = ۲d_۲ \\ Q_۱ \end{cases} \ , \qquad \text{پنجرهٔ دوم} : \begin{cases} A_۲ = ۲A_۱ \\ L_۲ = d_۲ \\ Q_۲ \end{cases} \ , \ t_۱ = t_۲ \ , \ k_۱ = k_۲ \ , \ \Delta\theta_۱ = \Delta\theta_۲$$

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow \frac{Q_۱}{Q_۲} = \frac{\overset{۱}{\cancel{k_۱}}}{\cancel{k_۲}} \times \frac{A_۱}{A_۲} \times \frac{\overset{۱}{\cancel{t_۱}}}{\cancel{t_۲}} \times \frac{\overset{۱}{\cancel{\Delta\theta_۱}}}{\cancel{\Delta\theta_۲}} \times \frac{L_۲}{L_۱} \Rightarrow \frac{Q_۱}{Q_۲} = \frac{A_۱}{A_۲} \times \frac{L_۲}{L_۱} \Rightarrow \frac{Q_۱}{Q_۲} = \frac{\cancel{A_۱}}{\cancel{۲A_۱}} \times \frac{\cancel{d_۲}}{\cancel{۲d_۲}} = \frac{۱}{۴}$$

www.gajmarket.com



حالت (۲) حالت (۱)

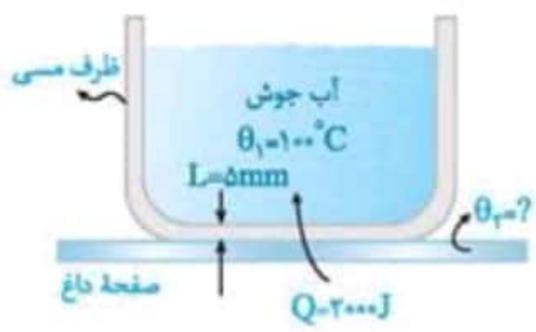
۱ ۸۳۵ آهنگ اتلاف انرژی، متناسب با اختلاف دمای داخل و خارج خانه است $(\frac{Q}{t}=\frac{kA\Delta\theta}{L})$، در این سؤال می‌توان نوشت:

حالت ۱ : $\Delta\theta_1 = ۲۰-(-۵) = ۲۵^\circ C$

حالت ۲ : $\Delta\theta_2 = ۲۵-(-۵) = ۳۰^\circ C$

$$\frac{\text{آهنگ رسانش حالت ۲}}{\text{آهنگ رسانش حالت ۱}} = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} = \frac{۳۰}{۲۵} = \frac{۶}{۵}$$

۱ ۸۳۶ ابتدا دقت شود که دمای کف ظرف با دمای سطح بالایی صفحهٔ داغ برابر است. در ادامه با توجه به اطلاعات داده شده در صورت مسأله و رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ برای کف ظرف مسی داریم:



$\theta_1 = ۱۰۰^\circ C, A = ۵۰۰cm^2 = ۵\times۱۰^{-2} m^2$

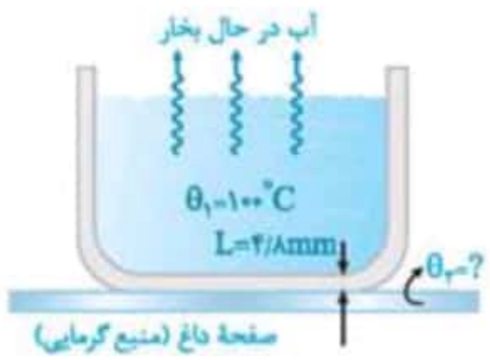
$L = ۵mm = ۵\times۱۰^{-3} m$ (ضخامت کف ظرف) , $t = ۱s$, $Q = ۲۰۰۰J$

$k_{Cu} = ۴۰۰ J/s.m.K$

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow ۲۰۰۰ = ۴۰۰\times\frac{(۵\times۱۰^{-2})\times۱\times\Delta\theta}{۵\times۱۰^{-3}} \Rightarrow \Delta\theta = ۰/۵^\circ C$$

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow ۰/۵ = \theta_2 - ۱۰۰ \Rightarrow \theta_2 = ۱۰۰/۵^\circ C$ (دمای سطح بالایی صفحهٔ داغ)

۲ ۸۳۷ همان ایدهٔ سؤال قبل تکرار شده است (اصل بقای تست). آب در قابلمهٔ آلومینیومی با آهنگ ۰/۱۸ لیتر بر دقیقه تبخیر می‌شود، این موضوع یعنی در هر دقیقه ۰/۱۸ لیتر آب از قابلمه تبخیر می‌شود. باتوجه به این‌که چگالی آب $۱kg/Lit$ است، یعنی هر لیتر آب یک کیلوگرم جرم دارد، بنابراین می‌توان گفت که در هر دقیقه ۰/۱۸ کیلوگرم آب تبخیر می‌شود، که گرمای مورد نیاز برای این‌کار برابر است با:



$$Q = mL_V \Rightarrow Q = ۰/۱۸\times۲۲۵۰ = ۴۰۵kJ = ۴۰۵۰۰۰J$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ برای کف قابلمه داریم (مشابه با تست قبل):

$A = \pi r^2 = \pi(\frac{۳۰\times۱۰^{-2}}{۲})^2 = ۳\times\frac{۹۰۰\times۱۰^{-4}}{۴} = ۶۷۵\times۱۰^{-4} m^2$ (مساحت کف قابلمه) , $L = ۴/۸mm = ۴/۸\times۱۰^{-3} m$ (ضخامت کف قابلمه)

(شعاع ← $\frac{۳۰\times۱۰^{-2}}{۲}$)

$k_{Al} = ۲۴۰\frac{W}{m.K}$, $t = ۱min = ۶۰s$

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow ۴۰۵۰۰۰ = \frac{۲۴۰\times۶۷۵\times۱۰^{-4}\times۶۰\times\Delta\theta}{۴/۸\times۱۰^{-3}} \Rightarrow \Delta\theta = ۲^\circ C$$

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = ۲^\circ C \Rightarrow \theta_2 - ۱۰۰ = ۲^\circ C \Rightarrow \theta_2 = ۱۰۲^\circ C$

۳ ۸۳۸ این مسأله را در دو گام زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ گرمایی که کل یخ می‌گیرد تا ذوب شود:

$m = ۱۰۰gr = ۰/۱kg$, $L_F = ۳۳۶kJ/kg = ۳۳۶\times۱۰^3 J/kg \Rightarrow Q = mL_F = ۰/۱\times۳۳۶\times۱۰^3 = ۳۳۶۰۰J$

گام دوم: محاسبهٔ مقدار زمانی که گرمای $Q = ۳۳۶۰۰J$، به‌وسیلهٔ رسانش در میله منتقل می‌شود:

$L = ۱۸cm = ۱۸\times۱۰^{-2} m$ (طول میله) , $A = \pi r^2 = ۳\times(\frac{۴\times۱۰^{-2}}{۲})^2 = ۱۲\times۱۰^{-4} m^2$, $\Delta\theta = (۱۰۰-۰) = ۱۰۰^\circ C$, $k = ۲۴۰ W/m.K$

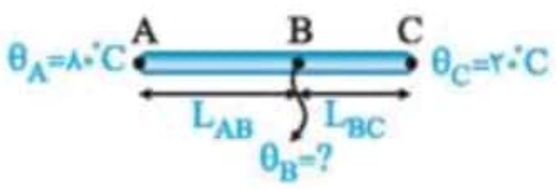
$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow ۳۳۶۰۰ = ۲۴۰\times\frac{۱۲\times۱۰^{-4}\times t\times۱۰۰}{۱۸\times۱۰^{-2}} \Rightarrow t = \frac{۳۳۶۰۰}{۱۶۰} = ۲۱۰s$$

۳ ۸۳۹ آهنگ شارش گرما از دیوار بتنی $۳۴۰۰ J/s$ است، می‌توان از رابطهٔ زیر، ضخامت تقریبی پشم شیشه که همان گرمای عبوری از دیوار بتنی در مدت $۱s$ از آن عبور می‌کند را محاسبه کرد، به‌طوری که پشم شیشه آهنگ شارشی معادل با $۳۴۰۰\frac{J}{s}$ داشته باشد ($t = ۱s \rightarrow Q = ۳۴۰۰J$):

$A = ۳\times۵ = ۱۵m^2$ (مساحت دیوار) , $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = ۲۵-(-۱۵) = ۴۰^\circ C$

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow ۳۴۰۰ = ۰/۰۴\times\frac{۱۵\times۱\times۴۰}{L} \Rightarrow L \simeq ۰/۰۰۷m = ۷mm$$

۲ ۸۴۰ می‌دانیم که میزان گرمای منتقل شده در زمان t برای دو قسمت AB و BC یکسان است. حال اگر رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ را برای دو قسمت AB و BC بنویسیم، چون جنس رسانا و مساحت سطح مقطع برای هر دو قسمت یکسان است، خواهیم داشت:

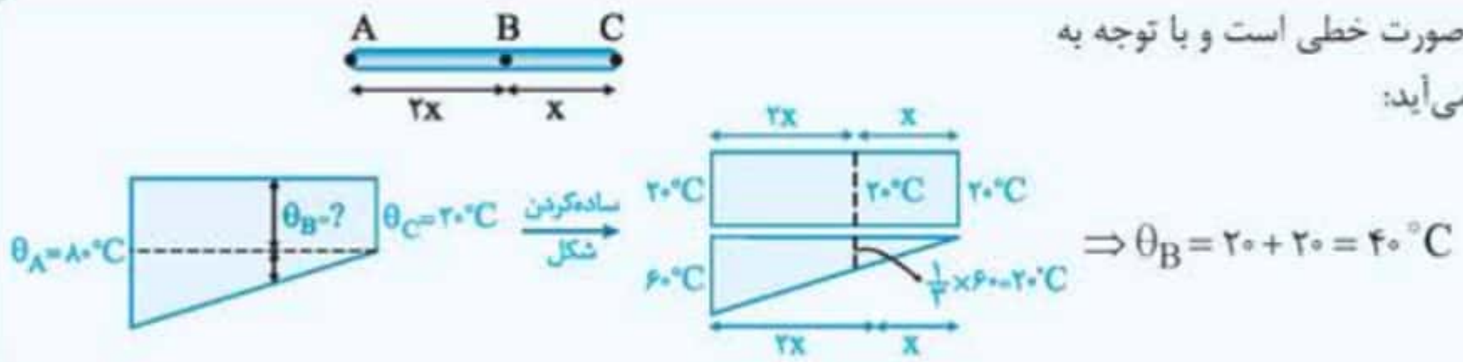


$$k_{AB}=k_{BC}\ ,\ A_{AB}=A_{BC}\ ,\ L_{AB}=2L_{BC}$$

$$Q_{AB}=Q_{BC}\Rightarrow k\frac{A\,t(\theta_A-\theta_B)}{L_{AB}}=k\frac{A\,t(\theta_B-\theta_C)}{L_{BC}}\Rightarrow\frac{80-\theta_B}{2L_{BC}}=\frac{\theta_B-20}{L_{BC}}\Rightarrow 80-\theta_B=2\theta_B-40\Rightarrow\theta_B=40\,^\circ C$$

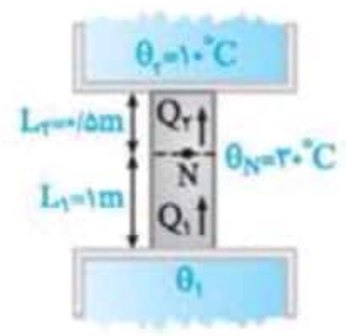
خلاقیت حرفه‌ای

تغییرات دما در طول میله به‌صورت خطی است و با توجه به شکل زیر به سادگی به‌دست می‌آید:



$$\Rightarrow\theta_B=20+20=40\,^\circ C$$

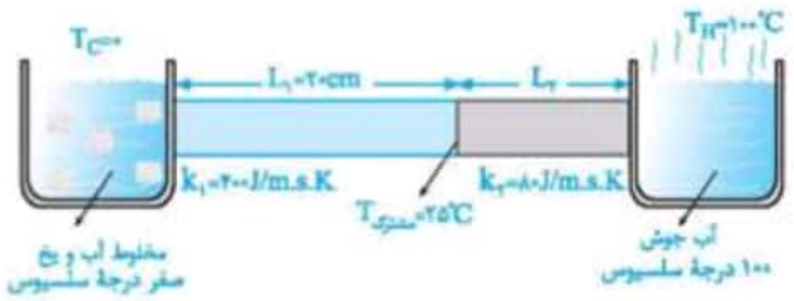
۳ ۸۴۱ مقدار گرمای عبوری از هر مقطع میلهٔ مقابل با هم برابر است. بنابراین با توجه به دو قسمت نشان داده شده بر روی شکل، می‌توان نوشت:



$$Q_1=Q_2\Rightarrow\frac{KA\,t\Delta\theta_1}{L_1}=\frac{KA\,t\Delta\theta_2}{L_2}\Rightarrow\frac{\theta_1-\theta_N}{L_1}=\frac{\theta_N-\theta_2}{L_2}$$

$$\Rightarrow\frac{\theta_1-30}{1}=\frac{30-10}{0/5}\Rightarrow\theta_1-30=40\Rightarrow\theta_1=70\,^\circ C$$

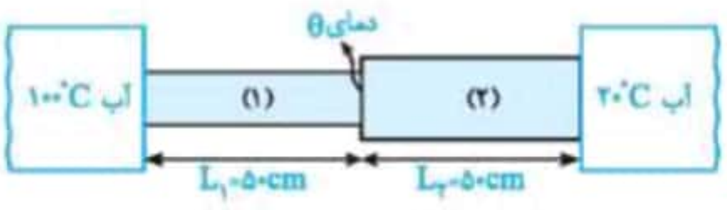
۲ ۸۴۲ گرمای عبوری در یک مدت زمان معین از هر دو میله با هم برابر است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$Q_1=Q_2\Rightarrow k_1\frac{A(T_{مشترک}-T_C)t}{L_1}=k_2\frac{A(T_H-T_{مشترک})t}{L_2}$$

$$\Rightarrow 400\times\frac{(25-0)}{20}=80\times\frac{(100-25)}{L_2}\Rightarrow L_2=12\,cm$$

۲ ۸۴۳ مقدار گرمای شارش شده در مدت زمان t، در طول دو میله با هم برابر است. از طرفی با توجه به این‌که شعاع میلهٔ سمت راست $\sqrt{3}$ برابر میلهٔ سمت چپ است، مساحت آن ۳ برابر میلهٔ سمت چپ است ($A=\pi r^2$). بنابراین می‌توان نوشت:

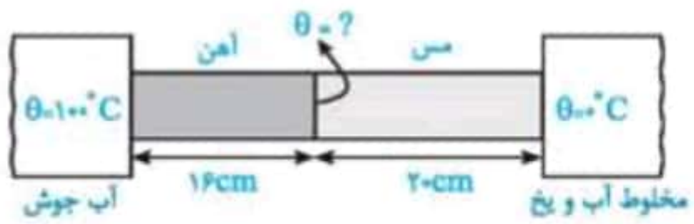


$$Q_1=Q_2\Rightarrow k_1\frac{A_1t\Delta\theta_1}{L_1}=k_2\frac{A_2t\Delta\theta_2}{L_2}$$

$$\xrightarrow[A_2=3A_1,\ L_1=L_2]{k_2=k_1}A_1(100-\theta)=3A_1(\theta-20)\Rightarrow 100-\theta=3\theta-60\Rightarrow\theta=40\,^\circ C$$

* دقت کنید در روابط بالا، برای جلوگیری از اشتباه، باید درنظر بگیرید که همیشه گرما از دمای بیشتر به دمای کم‌تر منتقل می‌شود. بنابراین باید برای محاسبهٔ $\Delta\theta_1$ و $\Delta\theta_2$، برای هم‌علامت شدن آن‌ها $(\Delta\theta_1=100-\theta)$ و $(\Delta\theta_2=\theta-20)$ بنویسیم $(100>\theta>20)$.

۳ ۸۴۴ ابتدا شکل مناسبی متناسب با شرایط سؤال رسم می‌کنیم:



$$k_{مس}=400\,W/m.K$$

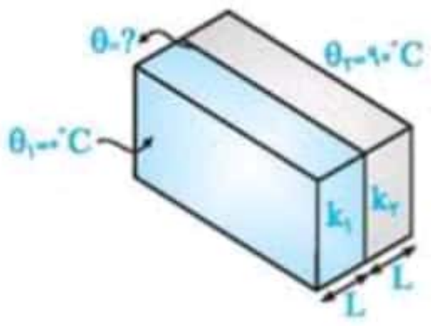
$$k_{آهن}=80\,W/m.K$$

$$A_{Fe}=A_{Cu}$$

می‌دانیم که گرمای شارش یافته در مدت زمان t، در هر دو میله یکسان است. اگر دما در نقطهٔ تلاقی دو میله را θ فرض کنیم و رابطهٔ $Q=k\frac{At\Delta\theta}{L}$ را برای هر یک از میله‌ها بنویسیم، با تساوی Q برای دو میله می‌توان نوشت:

$$Q_{آهن}=Q_{مس}\Rightarrow k_{Fe}\frac{A_{Fe}t\Delta\theta_{Fe}}{L_{Fe}}=k_{Cu}\frac{A_{Cu}t\Delta\theta_{Cu}}{L_{Cu}}\Rightarrow 80\times\frac{(100-\theta)}{16}=400\times\frac{(\theta-0)}{20}\Rightarrow\theta=20\,^\circ C$$

www.gajmarket.com

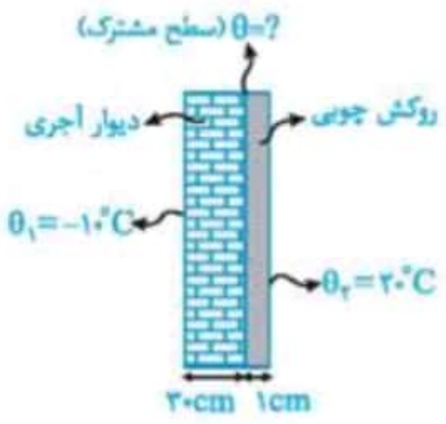


۲ ۸۴۵ برای محاسبهٔ دمای محل اتصال دو ورق، کافیست گرمای رسانش‌شده از دو ورق را برابر قرار دهیم:

$$A_1 = A_2 = A \ , \ L_1 = L_2 = L$$

$$Q_2 = Q_1 \Rightarrow \frac{k_2 A_2 t \Delta\theta_2}{L_2} = \frac{k_1 A_1 t \Delta\theta_1}{L_1} \Rightarrow k_2 \Delta\theta_2 = k_1 \Delta\theta_1$$

$$\Rightarrow ۸۰ \times (۹۰ - \theta) = ۴۰۰ \times (\theta - ۰) \Rightarrow \theta = ۱۵^\circ C$$



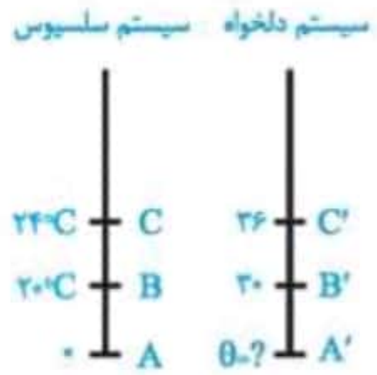
۳ ۸۴۶ می‌دانیم که میزان گرمای شارش شده در مدت زمان t، برای چوب و آجر یکسان است (دقت شود که روی کل دیوار یک روکش چوبی است و $A_1 = A_2$ است)، به همین دلیل اگر دمای سطح مشترک چوب و آجر را θ فرض کنیم و رابطهٔ $Q = k\frac{At\Delta\theta}{L}$ را برای چوب و آجر بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\overbrace{Q_1}^{\text{آجر}} = \overbrace{Q_2}^{\text{چوب}} \Rightarrow k_1 \frac{A_1 t \Delta\theta_1}{L_1} = k_2 \frac{A_2 t \Delta\theta_2}{L_2} \Rightarrow ۰/۶ \times \frac{(\theta - (-۱۰))}{۳۰} = ۰/۰۸ \times \frac{(۲۰ - \theta)}{۱}$$

$$\Rightarrow ۰/۰۲\theta + ۰/۲ = ۱/۶ - ۰/۰۸\theta \Rightarrow ۰/۱\theta = ۱/۴ \Rightarrow \theta = ۱۴^\circ C$$

۲ ۸۴۷ آب در دمای بین صفر تا ۴ درجهٔ سلسیوس، انبساط غیرعادی دارد و به همین دلیل این دماسنج خطای بیشتری نسبت به سایر دماسنج‌ها از خود نشان می‌دهد.

۲ ۸۴۸ همان‌طور که در خلاصه نکات (۲) نیز گفته شد، چون الکل در دماهای نزدیک به $۸۰^\circ C$ به جوش می‌آید، از آن معمولاً برای اندازه‌گیری دماهای خیلی پایین و از جیوه به‌دلیل نقطهٔ جوش بالا ($۳۵۶^\circ C$)، معمولاً برای اندازه‌گیری دماهای بالا استفاده می‌شود، بنابراین برای اندازه‌گیری دمای $۳۰۰^\circ C$ از دماسنج جیوه‌ای استفاده می‌شود (دماسنج الکلی نمی‌تواند استفاده شود).



۱ ۸۴۹ برای حل این سؤال، با رسم اطلاعات دو سیستم دماسنجی در کنار یک‌دیگر و استفاده از تناسب داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \Rightarrow \frac{۲۰ - ۰}{۲۴ - ۰} = \frac{۳۰ - \theta}{۳۶ - \theta} \Rightarrow \overset{۵}{\cancel{۲۰}} \times (۳۶ - \theta) = \overset{۶}{\cancel{۲۴}} \times (۳۰ - \theta)$$

$$\Rightarrow ۱۸۰ - ۵\theta = ۱۸۰ - ۶\theta \Rightarrow \theta = ۱۸۰ - ۱۸۰ = ۰$$

یعنی نقطهٔ ذوب یخ در این سیستم نیز صفر درجه است.

۱ ۸۵۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: با توجه به این‌که گرمای داده شده به هر دو جسم برابر است، داریم: $Q_1 = Q_2 \ , \ \Delta\theta_1 = ۱۵^\circ C \ , \ \Delta\theta_2 = ۳۰^\circ C$

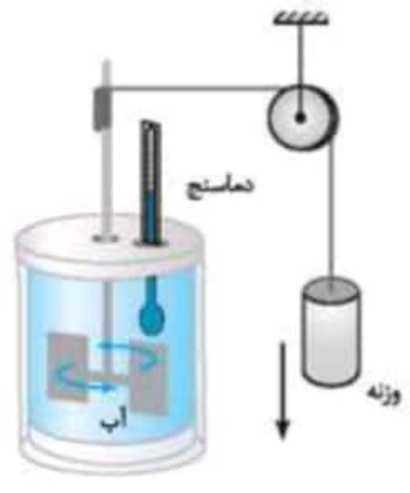
$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{Q_1 = Q_2} m_1 c_1 \Delta\theta_1 = m_2 c_2 \Delta\theta_2 \Rightarrow m_1 c_1 \times ۱۵ = m_2 c_2 \times ۳۰ \Rightarrow m_1 c_1 = ۲ m_2 c_2 \quad : (I)$$

حالت دوم: با توجه به این‌که در این حالت دو جسم در کنار یک‌دیگر بوده و دمای اولیهٔ آن‌ها با هم برابر است، با دادن همان گرمای Q به مجموعهٔ دو جسم تغییر دمای دو جسم یکسان بوده و می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = m_1 c_1 \Delta\theta + m_2 c_2 \Delta\theta \xrightarrow{(I)} Q = (۲m_2 c_2)\Delta\theta + m_2 c_2 \Delta\theta = ۳m_2 c_2 \Delta\theta \quad : (II)$$

از طرفی با توجه به حالت اول $Q = m_2 c_2 \times ۳۰$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_2 c_2 \times ۳۰ = ۳m_2 c_2 \Delta\theta \Rightarrow ۳\Delta\theta = ۳۰ \Rightarrow \Delta\theta = ۱۰^\circ C$$



۱ ۸۵۱ با توجه به شکل، تغییر انرژی پتانسیل وزنه، درون ظرف تبدیل به انرژی گرمایی می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

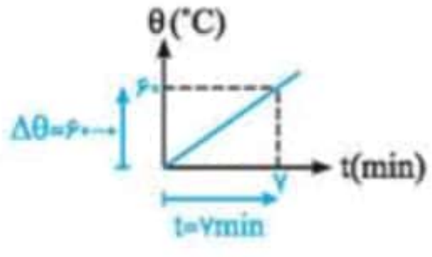
$$|\Delta U| = |mg\Delta h| \xrightarrow[g=۱۰ m/s^2]{m=۷kg, \Delta h=۰/۳m} |\Delta U| = ۷ \times ۱۰ \times ۰/۳ = ۲۱J$$

گرمای داده شده به آب: $Q = m_{آب} c_{آب} \Delta\theta_{آب} = |\Delta U| \xrightarrow[c_{آب}=۴۲۰۰ J/kg.^\circ C]{m_{آب}=۲kg} ۲ \times ۴۲۰۰ \times \Delta\theta = ۲۱ \Rightarrow \Delta\theta = \frac{۱}{۴۰۰}^\circ C$

۱ ۸۵۲ ابتدا گرمای داده شده به آب را با توجه به اطلاعات استخراج شده از نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$m = ۴kg \ , \ \theta_2 = ۶۰^\circ C \ , \ \theta_1 = ۰^\circ C \ , \ t = ۷min = ۷ \times ۶۰ = ۴۲۰s \ , \ c = ۴۲۰۰ J/kg.^\circ C$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = ۴ \times ۴۲۰۰ \times (۶۰ - ۰) = ۴ \times ۴۲۰۰ \times ۶۰ J$$

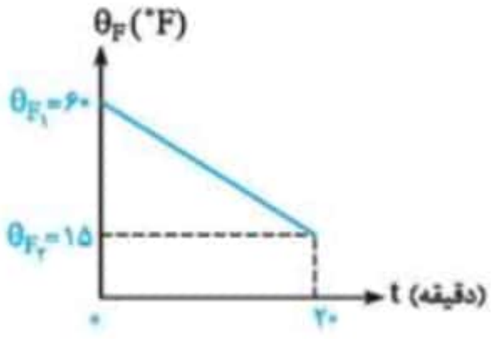


در ادامه با توجه به این‌که ۸۰ درصد (یعنی $\frac{۸}{۱۰}$ برابر) انرژی تولیدی صرف افزایش دمای آب شده است، داریم:

$$Q_{آب} = Ra \times Q_{گرم‌کن} \Rightarrow Q_{آب} = \frac{۸}{۱۰} Q_{گرم‌کن} = \frac{۸}{۱۰} Pt \Rightarrow ۴ \times ۴۲۰۰ \times ۶۰ = \frac{۸}{۱۰} \times P \times ۴۲۰$$

$$\Rightarrow P = ۳۰۰۰ W = ۳kW$$

۴ ۸۵۳ کافیست مقدار گرمای گرفته شده از جسم ($|Q|$) را با Pt برابر قرار دهیم:



$$m = ۳۰۰gr = ۰/۳kg \ , \ P = ۳W \ , \ t = ۲۰min = ۱۲۰۰s$$

$$\theta_{F_۱} = ۶۰^\circ F \ , \ \theta_{F_۲} = ۱۵^\circ F \Rightarrow \Delta\theta_F = ۱۵ - ۶۰ = -۴۵^\circ F$$

$$\xrightarrow{\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C} \Delta\theta_C = \frac{۵}{۹}\Delta\theta_F = \frac{۵}{۹} \times (-۴۵) = -۲۵^\circ C$$

$$Pt = |mc\Delta\theta| \Rightarrow ۳ \times ۱۲۰۰ = |۰/۳ \times c \times (-۲۵)| \Rightarrow c = \frac{۳ \times ۱۲۰۰}{۰/۳ \times ۲۵} = ۴۸۰ J/kg.K$$

۳ ۸۵۴ با توجه به مفاهیم مطرح شده در خلاصه نکات (۳)، انرژی جنبشی متوسط ذره‌های سازندهٔ یک جسم متناسب با دمای آن جسم است، بنابراین با توجه به تغییرات دمای یکسان برای دو مادهٔ هم‌جنس A و B، انرژی جنبشی متوسط ذره‌های آن‌ها با هم برابر است.

از آنجایی که در مورد جرم دو جسم A و B اطلاعی نداریم، نمی‌توان در مورد تغییرات انرژی درونی دو جسم اظهارنظر کرد.

۳ ۸۵۵

نکته

انرژی جنبشی متوسط مولکول‌های یک ماده، متناسب با دمای ماده است.

در هنگام فرایند ذوب شدن، دمای مولکول‌ها ثابت مانده و انرژی جنبشی متوسط مولکول‌ها ثابت می‌ماند. از طرفی در این‌گونه سؤالات با دادن گرما، همواره انرژی پتانسیل مولکول‌ها افزایش می‌یابد.

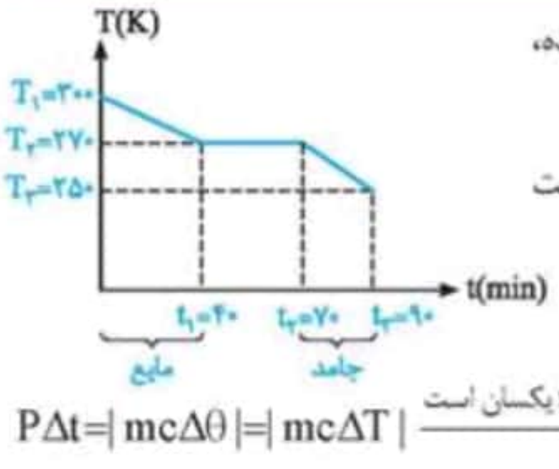
۲ ۸۵۶ می‌دانیم که فرایند ذوب باعث افزایش حجم یک ماده می‌شود ولی در این بین موادی مانند یخ، نقره و ... استثنا هستند و در هنگام ذوب شدن حجم آن‌ها کاهش می‌یابد. با توجه به این نکته درمی‌یابیم که جسم مطرح شده در صورت مسأله، از جنس یخ، نقره یا ... است.

از طرفی با توجه به خلاصه نکات (۵)، در جسمی مانند یخ، افزایش فشار باعث زودتر ذوب شدن می‌شود (نقطهٔ ذوب را پایین می‌برد).

تذکر

در اکثر مواد، افزایش فشار، نقطهٔ ذوب را بالا می‌برد (رفتار طبیعی اجسام).

۲ ۸۵۷ با توجه به نمودار داده شده، از زمان $t_۱ = ۴۰min$ تا $t_۲ = ۷۰min$ با از دست دادن گرما توسط ماده، دمای آن تغییری نمی‌کند، بنابراین در این بازهٔ زمانی ماده در حال منجمد شدن می‌باشد.



در قسمت اول نمودار، دمای ماده در حالت مایع در حال کاهش بوده و در قسمت سوم نمودار دمای ماده در حالت جامد در حال کاهش می‌باشد.

حال مقدار گرمای گرفته از جسم در هر بازهٔ زمانی ($|Q|$) را با $P\Delta t$ برابر قرار می‌دهیم.

$$P\Delta t = |mc\Delta\theta| = |mc\Delta T| \xrightarrow{m \text{ و } p \text{ یکسان است}} \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \left|\frac{c}{c'} \times \frac{\Delta T}{\Delta T'}\right| \Rightarrow \frac{۹۰ - ۷۰}{۴۰ - ۰} = \left|\frac{c}{c'} \times \frac{(۲۵۰ - ۲۷۰)}{(۲۷۰ - ۳۰۰)}\right| \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{c}{c'} \times \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{۳}{۴}$$

۴ ۸۵۸ با توجه به دو نمودار نشان داده شده در صورت سؤال، سرب دیرتر سرد شده (پس از زمانی حدود ۳/۵ دقیقه) و برای سرد شدن گرمای بیشتری از دست می‌دهد و گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

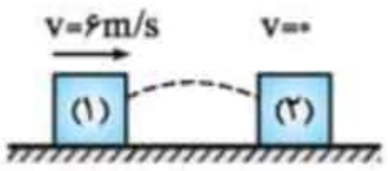
بررسی گزینه‌های درست:

۱) با توجه به نمودار مربوط به سرب از حدود $t = ۰/۵min$ (یا ۳۰s)، دما ثابت و نمودار افقی پیش می‌رود که این یعنی از این لحظه سرب تغییر فاز از حالت مایع به جامد را شروع کرده است.

۲) سرب در مدت زمان طولانی به جامد تبدیل‌شده در حالی‌که لحیم این مرحله را با سرعت رد کرده است و این یعنی مقدار گرمای نهان ذوب و انجماد در سرب بیشتر از لحیم است.

۳) با توجه به توضیحات گزینهٔ (۲)، لحیم برای اتصال فلزات مناسب‌تر از سرب است، زیرا سریع‌تر سرد می‌شود و اتصال را برقرار می‌کند.

۱ ۸۵۹ در ابتدا که یخ در حال حرکت است، دارای انرژی $E_۱$ بوده و این انرژی جنبشی به‌دلیل اصطکاک، به‌طور کامل به‌صورت گرما به جسم داده می‌شود. این گرما m گرم از یخ را ذوب کرده و داریم:



$$\begin{cases} E_۱ = K_۱ + U_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \\ E_۲ = K_۲ + U_۲ = ۰ + ۰ \end{cases}$$

$$E_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۵۵/۵ \times ۶^۲ = ۱۸ \times ۵۵/۵ J$$

$$\Delta E = Q = mL_F \Rightarrow ۱۸ \times \cancel{۵۵/۵}^{۱} = m \times \cancel{۳۳۳ \times ۱۰^۳}^{۶} \Rightarrow m = ۳ \times ۱۰^{-۳} kg = ۳gr$$

www.gajmarket.com

۴ ۸۶۰ با توجه به رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow V=\frac{m}{\rho}$، چون در طی فرایند ذوب جرم ثابت می‌ماند، می‌توان نوشت:

$$V_{\text{یخ}}-V_{\text{آب}}=۴۰\text{cm}^۳ \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}} \frac{m_{\text{یخ}}}{\rho_{\text{یخ}}}-\frac{m_{\text{آب}}}{\rho_{\text{آب}}}=۴۰\text{cm}^۳ \xrightarrow{m_{\text{آب}}=m_{\text{یخ}}=m} \frac{m}{۰/۹}-\frac{m}{۱}=۴۰\text{cm}^۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱m-۰/۹m}{۰/۹}=۴۰\Rightarrow ۰/۱m=۰/۹\times ۴۰\Rightarrow m=۳۶۰\text{gr}$$

در ادامه گرمای لازم برای ذوب کردن ۳۶۰gr یخ برابر است با:

$$Q=mL_F=۳۶۰\times ۸۰=۲۸۸۰۰\text{cal}$$

۱ ۸۶۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به مراحل زیر توجه کنید:

۱) با خارج کردن هوا از داخل ظرف، فشار وارد بر سطح مایع کاهش می‌یابد.

۲) با کم شدن فشار مایع، آهنگ انجام تبخیر سطحی افزایش می‌یابد و مولکول‌های سطح آب، گرمای $Q=mL_V$ را از سایر مولکول‌ها گرفته و تبخیر سطحی می‌شوند (دقت شود که اساسی‌ترین فرق تبخیر سطحی با تبخیر عادی آن است که در تبخیر سطحی نیازی نیست به نقطهٔ جوش آب برسیم).



۳) با گرفته شدن گرما از آب، دمای آب کاهش می‌یابد.

نکته

اگر این روند ادامه یابد، سرانجام دمای آب باقی‌مانده به صفر رسیده و شروع به یخ زدن می‌کند، در حالی‌که شما در عین ناباوری بخار شدن آب را مشاهده می‌کنید.

۳ ۸۶۲ دمای اولیهٔ دو گلوله یکسان بوده است (هر دو گلوله در یک منبع گرم یکسان قرار داشته‌اند). این دو گلوله در هر دو گرماسنج به یک اندازه تغییر دما ایجاد کرده‌اند و در نتیجه گرمای جذب شده توسط دو گلوله از گرماسنج‌ها یکسان است و هم‌چنین دمای هر دو گلوله به دمای گرماسنج در حالت ثانویه رسیده و در نتیجه می‌توان نوشت:



$$Q=Q'\Rightarrow mc\Delta\theta=m'c'\Delta\theta\Rightarrow\frac{c'}{c}=\frac{m}{m'}$$

۱ ۸۶۳

$$\theta_e=\frac{m_۱c_۱\theta_۱+m_۲c_۲\theta_۲}{m_۱c_۱+m_۲c_۲} \xrightarrow{\text{جرم‌ها برابر است.}} \theta_e=\frac{c_۱\theta_۱+c_۲\theta_۲}{c_۱+c_۲}=\frac{۴۲۰۰\times ۰+c_۲\times ۱۰۰}{۴۲۰۰+c_۲}$$

اگر $c_۲$ برابر ۴۲۰۰ باشد، دمای تعادل ۵۰°C می‌شود ولی $c_۲<۴۲۰۰$ بوده و با یک مثال عددی ساده به سادگی می‌توان فهمید که $\theta_e<۵۰^\circ\text{C}$ است.

نگاه مفهومی‌تر

در این سؤال سه حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

حالت ۱: اگر $m_۱c_۱=m_۲c_۲$ باشد، دمای تعادل برابر میانگین دماها یعنی $\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}$ می‌شود.

حالت ۲: اگر $m_۱c_۱>m_۲c_۲$ باشد، دمای تعادل برابر میانگین نخواهد بود و به سمت $\theta_۱$ نزدیک می‌شود (یعنی بین $\theta_۱$ و $\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}$).

حالت ۳: اگر $m_۱c_۱<m_۲c_۲$ باشد، دمای تعادل برابر میانگین نخواهد بود و به سمت $\theta_۲$ نزدیک می‌شود (یعنی بین $\theta_۲$ و $\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}$).

در این سؤال (جیوه) $m_۱c_۱>m_۲c_۲$ (آب) است و دمای تعادل بین $\theta_۱=۰^\circ\text{C}$ و $\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}=\frac{۰+۱۰۰}{۲}=۵۰^\circ\text{C}$ است.

یعنی θ_e کم‌تر از ۵۰°C است $\Rightarrow ۰<\theta_e<۵۰$

۴ ۸۶۴ با ورود شیشه از بیرون به داخل اتاق، شیشه سرد بوده و از هوای اطراف خود در داخل اتاق گرما جذب می‌کند. بنابراین دمای شیشه بالاتر رفته و بخار هوای اطراف شیشه، گرما از دست داده و تبدیل به مایع می‌شود، در ادامه با توجه به اصل پایستگی انرژی، می‌توان نوشت:

$$Q_{\text{بخار}}+Q_{\text{شیشه}}=۰\Rightarrow -m_{\text{بخار}}L_V+m_{\text{شیشه}}c_{\text{شیشه}}\Delta\theta_{\text{شیشه}}=۰\Rightarrow -۲\times ۱۰^{-۳}\times ۲۵۰۰\times ۱۰^۳+۱\times ۵۰۰\times\Delta\theta=۰\Rightarrow\Delta\theta=\frac{۲\times ۲۵۰۰}{۵۰۰}=+۱۰^\circ\text{C}$$

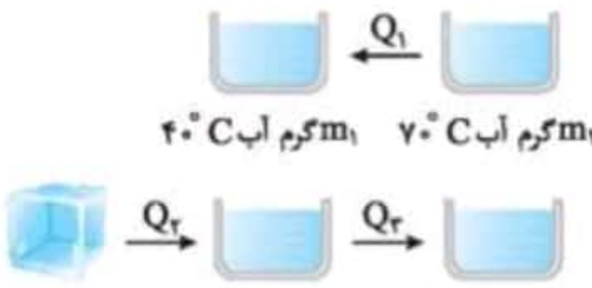
دمای شیشه به اندازهٔ ۱۰°C افزایش می‌یابد.

۱ ۸۶۵ در حالت دوم، دمای آب کم‌تر از ۸°C کاهش می‌یابد، زیرا در این حالت، قطعهٔ یخ به آب با جرم بیشتر و دمای کم‌تر اضافه می‌شود و نقشش در پایین آوردن دما، کم‌تر می‌شود.

۲ ۸۶۶ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که جرم آب و قطعه یخ را نداریم، با استفاده از قانون پایستگی انرژی، رابطهٔ بین آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_1 = ? \\ \theta_1 = 70^\circ C \longrightarrow \theta_{e_1} = 40^\circ C \\ c_1 = 4200 J/kg.^\circ C = 4/2 J/g.^\circ C \end{cases} \qquad \text{یخ}: \begin{cases} m_2 = ? \\ \theta_2 = 0 \longrightarrow \theta_{e_1} = 40^\circ C \\ L_F = 336000 J/kg.^\circ C = 80 \times 4/2 J/g.^\circ C \end{cases}$$



$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta\theta_1 = m_1 \times 4/2 \times (40 - 70) = -4/2 \times 30 m_1$$

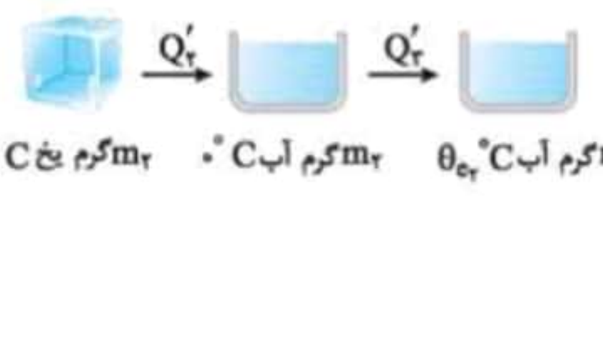
$$Q_2 = m_2 L_F = m_2 \times 80 \times 4/2$$

$$Q_3 = m_2 c_2 \Delta\theta_2 = m_2 \times 4/2 \times (40 - 0) = 40 \times 4/2 m_2$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow -4/2 \times 30 m_1 + 80 \times 4/2 m_2 + 40 \times 4/2 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = 4 m_2$$

گام دوم: در این حالت، جرم آب برابر $m_1 + m_2$ است (چون در حالت قبل، یخ کاملاً ذوب و تبدیل به آب شده است). حال با اضافه کردن یک قطعه یخ جدید (m_2)، با توجه به قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_1' = m_1 + m_2 \xrightarrow{m_1 = 4m_2} m_1' = 5m_2 \\ \theta_1' = 40^\circ C \\ c_1 = 4/2 J/g.^\circ C \end{cases} \qquad \text{یخ}: \begin{cases} m_2' = m_2 \\ \theta_2' = 0^\circ C \\ L_F = 80 \times 4/2 J/g.^\circ C \end{cases}$$



$$Q_1' = m_1' c_1 \Delta\theta_1' = 5m_2 \times 4/2 \times (\theta_{e_2} - 40)$$

$$Q_2' = m_2 L_F = m_2 \times 80 \times 4/2$$

$$Q_3' = m_2 c_2 \Delta\theta_2' = m_2 \times 4/2 \times (\theta_{e_2} - 0) = 4/2 \times \theta_{e_2} m_2$$

$$Q_1' + Q_2' + Q_3' = 0 \Rightarrow 5m_2 \times 4/2 \times (\theta_{e_2} - 40) + m_2 \times 80 \times 4/2 + 4/2 \theta_{e_2} m_2 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{کل عبارت تقسیم بر } 4/2 m_2]{} 5(\theta_{e_2} - 40) + 80 + \theta_{e_2} = 0 \Rightarrow \theta_{e_2} = 20^\circ C$$

۳ ۸۶۷ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به تعادل اول بین مایع A و B، رابطهٔ بین c_1 و c_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\theta_{e_1} = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \xrightarrow{m = \rho V} \theta_{e_1} = \frac{\rho_1 V_1 c_1 \theta_1 + \rho_2 V_2 c_2 \theta_2}{\rho_1 V_1 c_1 + \rho_2 V_2 c_2}$$

$$\rho_1 = 1 g/cm^3 \ , \ \rho_2 = 0/8 g/cm^3 \ , \ V_1 = 500 cm^3 \ , \ V_2 = 400 cm^3 \ , \ \theta_1 = 16^\circ C \ , \ \theta_2 = 45^\circ C \ , \ \theta_{e_1} = 20^\circ C$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{1 \times 500 \times c_1 \times 16 + 0/8 \times 400 \times c_2 \times 45}{1 \times 500 \times c_1 + 0/8 \times 400 \times c_2} \Rightarrow 10000 c_1 + 6400 c_2 = 8000 c_1 + 3200 \times 45 c_2 \Rightarrow c_1 = 4 c_2$$

گام دوم: حال دمای تعادل را در حالت دوم محاسبه می‌کنیم:

$$\theta_{e_2} = \frac{\rho_1 V_1' c_1 \theta_1 + \rho_2 V_2' c_2 \theta_2}{\rho_1 V_1' c_1 + \rho_2 V_2' c_2} = 0 \xrightarrow{c_1 = 4c_2} \theta_{e_2} = \frac{4\rho_1 V_1' \theta_1 + \rho_2 V_2' \theta_2}{4\rho_1 V_1' + \rho_2 V_2'} \xrightarrow[V_2' = 500 cm^3]{V_1' = 400 cm^3} \theta_{e_2} = \frac{4 \times 1 \times 400 \times 16 + 0/8 \times 500 \times 45}{4 \times 1 \times 400 + 0/8 \times 500} = 21/8^\circ C$$

۱ ۸۶۸ با توجه به داده‌های صورت مسأله $(\theta_e = 22^\circ C)$ و قانون پایستگی انرژی داریم:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_1 = 500 gr = 0/5 kg \\ \theta_1 = 20^\circ C \xrightarrow{\text{می‌رسد به}} \theta_e = 22^\circ C \\ c_1 = 4200 J/kg.^\circ C \end{cases} \quad \text{مس}: \begin{cases} m_2 = 100 gr = 0/1 kg \\ \theta_2 = 50^\circ C \xrightarrow{\text{می‌رسد به}} \theta_e = 22^\circ C \\ c_2 = 380 J/kg.^\circ C \end{cases} \quad \text{فلز}: \begin{cases} m_3 = 150 gr = 0/15 kg \\ \theta_3 = 62/5^\circ C \xrightarrow{\text{می‌رسد به}} \theta_e = 22^\circ C \\ c_3 = ? \end{cases}$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 \Delta\theta_1 + m_2 c_2 \Delta\theta_2 + m_3 c_3 \Delta\theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow 0/5 \times 4200 \times (22 - 20) + 0/1 \times 380 \times (22 - 50) + 0/15 \times c_3 \times (22 - 62/5) = 0 \Rightarrow c_3 \simeq 516 J/kg^\circ C$$

gajmarket.com

۱ ۸۶۹ با فرض آن‌که دمای اولیهٔ یخ برابر صفر درجهٔ سلسیوس است، گرمای لازم برای ذوب نیمی از ۲۰ گرم یخ صفر درجهٔ سلسیوس برابر است با:

$$Q = mL_F = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۳۳۳۰۰۰ = ۳۳۳۰J$$

بنابراین یخ هنگام رسیدن به سطح دریاچه، باید بیش از این مقدار انرژی جنبشی داشته باشد $\left(\frac{۱}{۲}mv^۲ > Q\right)$. از طرفی به علت مقاومت هوا، قسمتی از انرژی اولیهٔ یخ هدر شده و در نتیجه انرژی جنبشی آن در لحظهٔ برخورد، از انرژی پتانسیل اولیه کم‌تر است $\left(mgh > \frac{۱}{۲}mv^۲\right)$ و در مجموع می‌توان نوشت:

$$mgh > Q \Rightarrow mgh > Q \Rightarrow h > \frac{Q}{mg}$$

$$h > \frac{Q}{mg} = \frac{۳۳۳۰}{۲ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰} = ۱۶/۶۵ \times ۱۰^۳ m \Rightarrow h > ۱۶/۶۵km$$

* دقت شود که اگر دمای اولیهٔ یخ کم‌تر از صفر درجهٔ سلسیوس باشد، برای ارتفاع h حداقل مقدار بزرگ‌تری به‌دست می‌آید.

۲ ۸۷۰ با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال داریم $(\theta_e = ۴۵\,^\circ C)$:

$$\text{ظرف آلومینیمی}: \begin{cases} m_۱ = ۱۰۰gr = ۰/۱kg \\ \theta_۱ = ۳۰\,^\circ C \\ c_۱ = ۹۰۰J/kg.^\circ C \end{cases} \quad \text{و} \quad \text{آب}: \begin{cases} m_۲ = ۵۰۰gr = ۰/۵kg \\ \theta_۲ = ۳۰\,^\circ C \\ c_۲ = ۴۲۰۰J/kg.^\circ C \end{cases} \quad \text{و} \quad \text{آب داغ}: \begin{cases} m_۳ = ۲۰۰gr = ۰/۲kg \\ \theta_۳ = ? \\ c_۳ = ۴۲۰۰J/kg.^\circ C \end{cases}$$

$$\theta_e = \frac{m_۱c_۱\theta_۱ + m_۲c_۲\theta_۲ + m_۳c_۳\theta_۳}{m_۱c_۱ + m_۲c_۲ + m_۳c_۳} \Rightarrow ۴۵ = \frac{۰/۱ \times ۹۰۰ \times ۳۰ + ۰/۵ \times ۴۲۰۰ \times ۳۰ + ۰/۲ \times ۴۲۰۰ \times \theta_۳}{۰/۱ \times ۹۰۰ + ۰/۵ \times ۴۲۰۰ + ۰/۲ \times ۴۲۰۰} \Rightarrow \theta_۳ \simeq ۸۴/۱\,^\circ C$$

۴ ۸۷۱ در این فرایند، آلومینیم گرمای کافی برای ذوب کامل یخ را ندارد. در این حالت گرمایی که آلومینیم از دست می‌دهد تا به دمای صفر درجهٔ سلسیوس برسد، با گرمایی که نیاز است تا نیمی از یخ را ذوب کند، برابر است:

گرمای آلومینیم: $|Q_۱| = |mc_{\text{آلومینیم}}(۰ - ۵۰)| = ۱۰۰۰ \times ۵۰ \times m = ۵۰۰۰۰m$

گرمای یخ: $|Q_۲| = m'c_{\text{یخ}}(۰ - (-۱۰)) + \frac{۱}{۲}m'L_F = ۰/۱ \times ۲۰۰۰ \times ۱۰ + \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times ۳۰۰۰۰۰ = ۱۷۰۰۰J$

$$|Q_۱| = |Q_۲| \Rightarrow ۵۰۰۰۰m = ۱۷۰۰۰ \Rightarrow m = \frac{۱۷}{۵۰}kg = ۳۴۰gr$$

۴ ۸۷۲ اندازهٔ گرمایی که یخ صفر درجهٔ سلسیوس می‌گیرد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، برابر است با اندازهٔ گرمایی که آب $۵۰\,^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، بنابراین داریم:

$$\text{یخ}: \begin{cases} m_۱ = ۱۰۰gr \\ \theta_۱ = ۰\,^\circ C \\ L_F = ۳۳۴۰۰۰J/kg \end{cases} \qquad \text{آب}: \begin{cases} m_۲ = ? \\ \theta_۲ = ۵۰\,^\circ C \\ c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰J/kg.K \end{cases}$$

$$|Q_۱| = |Q_۲| \Rightarrow \overbrace{m_۱L_F}^{|Q_{\text{یخ}}|} = \overbrace{m_۲c_{\text{آب}}\Delta\theta}^{|Q_{\text{آب}}|} \Rightarrow ۰/۱ \times ۳۳۴۰۰۰ = |m_۲ \times ۴۲۰۰ \times (۰ - ۵۰)| \Rightarrow m_۲ = ۱۶۰gr$$

تذکر

اگر جرم m از $۱۶۰gr$ بیشتر باشد، تمام یخ ذوب شده و دمای تعادل بزرگ‌تر از صفر می‌شود و اگر جرم m کم‌تر از $۱۶۰gr$ باشد، تمام یخ ذوب نمی‌شود.

۱ ۸۷۳ با توجه به این‌که حداکثر آب $۴۰\,^\circ C$ برحسب گرم خواسته شده است تا دمای تعادل مجموعه صفر شود، می‌توان نتیجه گرفت که انرژی آب باید یخ را ابتدا از دمای $-۱۰\,^\circ C$ به دمای $۰\,^\circ C$ برساند و سپس تمام آن را ذوب کند:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_۱ = ? \\ \theta_۱ = ۴۰\,^\circ C \end{cases} \quad , \quad \text{یخ}: \begin{cases} m_۲ = ۵۰gr \\ \theta_۲ = -۱۰\,^\circ C \end{cases} \quad , \quad L_F = ۸۰c_{\text{آب}} = ۱۶۰c_{\text{یخ}}$$

$|Q_۱| = |m_۱c_{\text{آب}}\Delta\theta_۱| = |m_۱ \times ۲c_{\text{یخ}} \times (۰ - ۴۰)| = ۸۰m_۱c_{\text{یخ}}$: گرمایی که $m_۱$ گرم آب $۴۰\,^\circ C$ از دست می‌دهد تا دمایش به $۰\,^\circ C$ برسد.

$|Q_۲| = |m_۲c_{\text{یخ}}\Delta\theta_۲ + m_۲L_F|$: گرمایی که $۵۰gr$ یخ $-۱۰\,^\circ C$ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود.

$$= |۵۰ \times c_{\text{یخ}} \times (۰ - (-۱۰))| + |۵۰ \times ۱۶۰c_{\text{یخ}}| = ۵۰۰c_{\text{یخ}} + ۸۰۰۰c_{\text{یخ}}$$

$$|Q_۱| = |Q_۲| \Rightarrow ۸۰m_۱c_{\text{یخ}} = ۵۰۰c_{\text{یخ}} + ۸۰۰۰c_{\text{یخ}} \Rightarrow ۸۰m_۱ = ۵۰۰ + ۸۰۰۰ \Rightarrow m_۱ = \frac{۴۲۵}{۴} = ۱۰۶/۲۵gr$$

۲ ۸۷۴ با توجه به این‌که حداقل مقدار آب با دمای $20^\circ C$ خواسته شده است تا دمای تعادل کل مجموعه صفر درجهٔ سلسیوس شود، می‌توان نتیجه گرفت که باید مقداری آب با دمای $20^\circ C$ به آن اضافه کنیم تا یخ به دمای صفر درجهٔ سلسیوس برسد ولی ذوب نشود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{آب}: \begin{cases} m_1 = ? \\ \theta_1 = 20^\circ C \\ c_{آب} = 4/2\, J/gr.^\circ C = 1\, cal/gr.^\circ C \end{cases} \qquad \text{یخ}: \begin{cases} m_2 = 50\, gr \\ \theta_2 = -10^\circ C \\ c_{یخ} = 2/1\, J/gr.^\circ C = 0/5\, cal/gr.^\circ C \\ L_F = 336\, kJ/kg = 80\, cal/gr \end{cases}$$

گرمایی که آب $20^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود: $|Q_1| = |m_1 c_{آب} \Delta\theta_1| = |m_1 \times 1 \times (0-20)| = 20 m_1$

گرمایی که یخ $-10^\circ C$ می‌گیرد تا به یخ صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود: $|Q_2| = |m_2 c_{یخ} \Delta\theta_2| = 50 \times 0/5 \times (0-(-10)) = 250\, cal$

$$|Q_1| = |Q_2| \Rightarrow 20 m_1 = 250 \Rightarrow m_1 = 12/5\, gr$$

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، استفاده از واحدهای cal و گرم که آن‌ها را حفظ کرده‌ایم، محاسبات سؤال را بسیار کوتاه‌تر می‌کند.

۱ ۸۷۵ ابتدا محاسبه می‌کنیم که ۳۲ گرم یخ $-20^\circ C$ می‌تواند حداکثر m گرم آب صفر درجهٔ سلسیوس را منجمد کند و مقدار m از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

گرمایی که آب $0^\circ C$ از دست می‌دهد تا یخ ببندد: $Q_1 = -mL_F = -m \times 160 c_{یخ} = -160 mc_{یخ}$

گرمایی که یخ $-20^\circ C$ از دست می‌دهد تا به یخ $0^\circ C$ تبدیل شود: $Q_2 = mc_{یخ} \Delta\theta = 32 \times c_{یخ} \times (0-(-20)) = 640 c_{یخ}$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow -160 mc_{یخ} + 640 c_{یخ} = 0 \Rightarrow m = 4\, gr$$

اگر جرم آب موجود در ظرف از ۴gr بیشتر شود، دیگر با ریختن یخ، تمام آب یخ نمی‌بندد و حداقل جرم آب مورد نیاز ۴gr است.

۱ ۸۷۶ **گام اول:** ابتدا مقدار گرمایی را که آب از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_1| = m_1 c_w \theta_1 = 55 \times 4 \times 10 = 2200\, J$$

گام دوم: سپس مقدار گرمایی را که یخ لازم دارد تا به‌طور کامل ذوب شده و به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود را محاسبه می‌کنیم:

$$|Q_2| = m_2 c_2 \Delta\theta_2 + m_2 L_F = \underbrace{100 \times 2 \times (0-(-5))}_{(1) \Rightarrow 1000\, J} + \underbrace{100 \times 300}_{(2)} = 31000\, J$$

با توجه به این‌که $|Q_2| > |Q_1|$ است، پس تمام یخ ذوب نمی‌شود.

گام سوم: آب ابتدا از $22000\, J$ گرمایی که دارد، $1000\, J$ گرما به یخ داده تا دمایش به صفر درجهٔ سلسیوس برسد و بتواند فرایند ذوب شدن را آغاز کند (قسمت (۱)). دقت شود تا تمام یخ به دمای صفر درجهٔ سلسیوس نرسد، ذوب شدن آغاز نمی‌شود. در ادامه با $1200\, J$ گرمای باقی‌مانده آب تلاش می‌کند تا کمی از یخ را ذوب کند. میزان یخی که آب می‌تواند ذوب کند برابر است با:

$$\text{گرمای باقی مانده} = 1200 = m' L_F \Rightarrow 1200 = m' \times 300 \Rightarrow m' = \frac{1200}{300} = 4\, gr$$

بنابراین دمای تعادل مجموعه صفر است و ۴gr از یخ ذوب می‌شود.

۴ ۸۷۷ سؤال دشواری است. در این سؤال واضح است که آب $0^\circ C$ برای رسیدن به دمای تعادل با یخ، باید به آن گرما بدهد تا دمایش پایین بیاید و این موضوع تنها با یخ زدن آب ممکن است (گزینهٔ (۱) نادرست است). برای پاسخ دادن به این سؤال گام‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

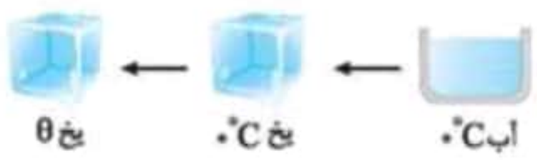
گام اول (محاسبهٔ گرمای آزاد شده در اثر یخ زدن ۵gr آب موجود در مجموعه): $|Q| = mL_F = 5 \times (160 c_{یخ}) = 800 c_{یخ}$

گام دوم (محاسبهٔ گرمای مورد نیاز برای ۴۰gr یخ $-40^\circ C$ برای رسیدن به دمای $0^\circ C$): $Q' = m_{یخ} c_{یخ} \Delta\theta = 40 \times c_{یخ} \times (0-(-40)) = 1600 c_{یخ}$

گام سوم: همان‌طور که مشاهده می‌کنید حتی اگر تمام آب موجود در ظرف یخ بزند نیز نمی‌تواند یخ را به دمای صفر درجهٔ سلسیوس برساند و در این حالت دمای تعادل کوچک‌تر از صفر درجهٔ سلسیوس است. برای محاسبهٔ دمای تعادل به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$Q_1 = m_1 c_{یخ} \Delta\theta = 40 \times c_{یخ} \times (\theta - (-40)) = 40 c_{یخ} \times \theta + 1600 c_{یخ}$$



$$Q_2 = -m_2 L_F + m_2 c_{یخ} \Delta\theta = -5 \times 160 c_{یخ} + 5 \times c_{یخ} (\theta - 0)$$

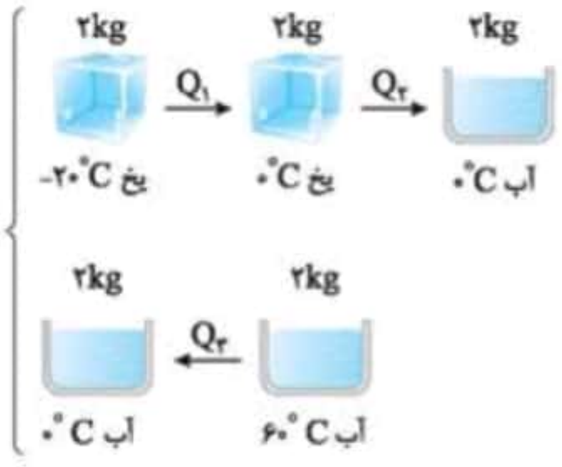
$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow 40 \cancel{c_{یخ}} \times \theta + 1600 \cancel{c_{یخ}} - 800 \cancel{c_{یخ}} + 5 \cancel{c_{یخ}} \times \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{800}{-45} \simeq -17/7^\circ C$$: اصل بقای انرژی

دقت: در ذهن خود تصور کنید که بر روی یک قطعه یخ بزرگ با دمای $-40^\circ C$، چند قطره آب ($5\, gr$ یا $5\, cm^3$) می‌چکانید، واضح است که یخ کمی کاهش دما می‌دهد ولی دمایش به صفر نمی‌رسد.

www.gajmarket.com

۳ ۸۷۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: از روش زورآزمایی به شرح زیر استفاده می‌کنیم:



$$Q = Q_1 + Q_2 = m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \Delta\theta_{\text{یخ}} + m_{\text{یخ}} L_F$$

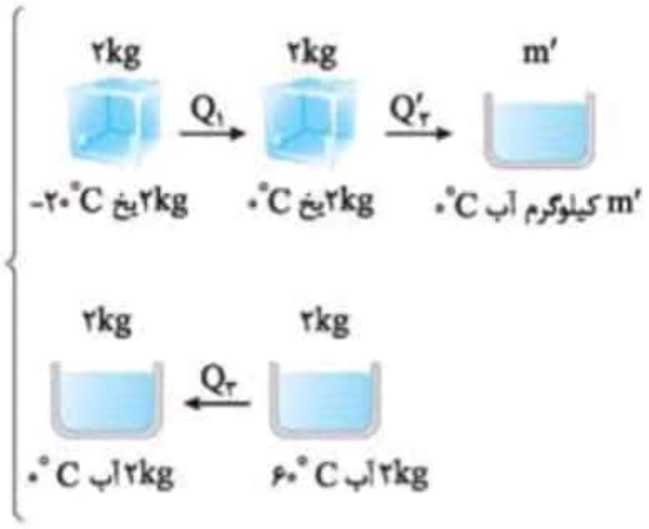
$$\xrightarrow[L_F = ۴۲۰۰ \times ۸۰ J/kg]{m_{\text{یخ}} = ۲kg \ , \ c_{\text{یخ}} = ۲۱۰۰ J/kg.^\circ C} Q = ۲ \times ۲۱۰۰ \times (۰ - (-۲۰)) + ۲ \times ۴۲۰۰ \times ۸۰ = ۴۲۰۰ \times ۱۸۰ J$$

$$|Q'| = |Q_3| = |m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}}|$$

$$\xrightarrow[c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰ J/kg.^\circ C]{m_{\text{آب}} = ۲kg} |Q'| = |۲ \times ۴۲۰۰ \times (۰ - ۶۰)| = ۴۲۰۰ \times ۱۲۰ J$$

با توجه به این‌که Q از $|Q'|$ بیشتر است، بنابراین کل یخ موجود در ظرف ذوب نمی‌شود.

گام دوم: با توجه به بیشتر بودن $|Q_3| = |m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta|$ نسبت به $|Q_1| = m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \Delta\theta$، یخ $-۲۰^\circ C$ به یخ $۰^\circ C$ تبدیل شده و مقداری از یخِ صفر درجهٔ سلسیوس (m') ذوب خواهد شد. برای به‌دست آوردن مقدار یخ ذوب‌شده می‌توان نوشت:



$$Q_1 + Q'_2 + Q_3 = ۰ \Rightarrow m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \Delta\theta_{\text{یخ}} + m' L_F + m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۲۱۰۰ \times (۰ - (-۲۰)) + m' \times ۴۲۰۰ \times ۸۰ + ۲ \times ۴۲۰۰ \times (۰ - ۶۰) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲۰ + ۸۰ m' - ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow m' = \frac{۱۰۰}{۸۰} = ۱/۲۵ kg$$

گام سوم: حال می‌توانیم حجم کل مواد را در دو حالت قبل و بعد از رسیدن به تعادل گرمایی، با یک‌دیگر مقایسه کنیم. در حالت اولیه، جرم آب برابر $۲۰۰۰gr$ و جرم یخ برابر $۲۰۰۰gr$ است و در حالت نهایی جرم آب برابر $۲۰۰۰ + ۱۲۵۰ = ۳۲۵۰gr$ و جرم یخ برابر $۲۰۰۰ - ۱۲۵۰ = ۷۵۰gr$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_{\text{آب}_1} = ۲۰۰۰gr \ , \ m_{\text{یخ}_1} = ۲۰۰۰gr \ , \ m_{\text{آب}_2} = ۳۲۵۰gr \ , \ m_{\text{یخ}_2} = ۷۵۰gr \ , \ \rho_{\text{آب}} = ۱ \frac{gr}{cm^3} \ , \ \rho_{\text{یخ}} = ۰/۸ \frac{gr}{cm^3}$$

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{m_{\text{آب}}}{\rho_{\text{آب}}} + \frac{m_{\text{یخ}}}{\rho_{\text{یخ}}} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{۲۰۰۰}{۱} + \frac{۲۰۰۰}{۰/۸} = ۴۵۰۰ cm^3 \\ V_2 = \frac{۳۲۵۰}{۱} + \frac{۷۵۰}{۰/۸} = ۴۱۸۷/۵ cm^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{۴۱۸۷/۵}{۴۵۰۰} = \frac{۶۷}{۷۲}$$

۴ ۸۷۹ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} |m_1 \times c \times \Delta\theta_1| = |(۲m') L_F| \Rightarrow m_1 \times c \times ۵۰ = ۲m' L_F \quad (۱) \\ |m_2 \times c \times \Delta\theta_2| = |m' L_F| \Rightarrow m_2 \times c \times ۲۰ = m' L_F \quad (۲) \end{cases} \xrightarrow[(۲)]{(۱)} \frac{m_1}{m_2} \times \frac{۵}{۲} = ۲ \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{۲}{۵} \times ۲ = \frac{۴}{۵}$$

۴ ۸۸۰ با توجه به این‌که در ظرف، مخلوط به حالت تعادل رسیدهٔ آب و یخ داریم، دمای مخلوط صفر درجهٔ سلسیوس است. در ادامه قطعه‌ای مس در این مخلوط انداختیم، قطعهٔ مس نیز دمایش به صفر درجهٔ سلسیوس رسیده و در اثر آزاد شدن گرما، مقداری از جرم یخ ذوب شده است. می‌توان گفت مقدار گرمایی که قطعهٔ مس از دست می‌دهد تا به دمای صفر درجهٔ سلسیوس برسد، با مقدار گرمایی که m گرم یخ ذوب شده جذب کرده است، برابر است و داریم:

$$\text{مس} : m_1 = ۳kg \ , \ \theta_1 = ۱۱/۱^\circ C \ , \ \theta_2 = ۰^\circ C \ , \ c_{Cu} = ۴۰۰ J/kg.K, \ \text{یخ} : L_F = ۳۳۳ kJ/kg, \ m = ? \ (\text{جرم یخ ذوب‌شده})$$

$$|Q_1| = |Q_2| \Rightarrow |m_1 \times c_{Cu} \times \Delta\theta| = |m L_F| \Rightarrow |۳ \times ۴۰۰ \times (۰ - ۱۱/۱)| = |m \times ۳۳۳۰۰۰| \Rightarrow m = ۰/۰۴ kg = ۴۰ gr$$

۲ ۸۸۱ سؤال نسبتاً جالب و جدیدی است. در این سؤال ابتدا گرمایی را که کل یخ می‌گیرد تا به‌طور کامل ذوب شود را محاسبه می‌کنیم:

$$m = ۲kg \ , \ \theta_0 = -۱۵^\circ C \ , \ c_{\text{یخ}} = ۲۱۰۰ J/kg.K \ , \ c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰ J/kg.K \ , \ L_F = ۳۳۶ kJ/kg = ۳۳۶۰۰۰ J/kg$$



$$Q_1 = m c_{\text{یخ}} \Delta\theta + m L_F = ۲ \times ۲۱۰۰ \times (۰ - (-۱۵)) + ۲ \times ۳۳۶۰۰۰$$

$$= ۶۳۰۰۰ + ۶۷۲۰۰۰ = ۷۳۵۰۰۰ J$$

با توجه به این‌که کل گرمایی که به مجموعه داده‌ایم $(Q = ۷۷۷ kJ = ۷۷۷۰۰۰ J)$ از Q_1 بزرگ‌تر است $(Q > Q_1)$، پس ابتدا تمام یخ ذوب شده و سپس دمای آب ایجاد شده در اثر ذوب یخ، از صفر درجهٔ سلسیوس به θ درجهٔ سلسیوس می‌رسد که θ را در آن از روابط زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{گرمای باقی‌مانده} = Q - Q_1 = m c_{\text{آب}} (\theta - ۰) \Rightarrow ۴۲۰۰۰ = ۲ \times ۴۲۰۰ \times \theta \Rightarrow \theta = ۵^\circ C$$

۲ ۸۸۲ با توجه به این‌که یخ و آب در تعادل هستند، در ابتدا دمای مجموعه برابر صفر درجهٔ سلسیوس است. گرمایی که به ظرف می‌دهیم، ابتدا یخ صفر درجهٔ سلسیوس را ذوب کرده و به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کند و سپس دمای آب در حالت جدید $(۱۰۰+۲۰۰)\text{gr}$ و ظرف را به ۵°C می‌رساند، بنابراین مقدار گرمای لازم برابر است با $(\theta_{\text{نهایی}}=۵^\circ\text{C})$:

$$\text{یخ}:\begin{cases}m_۱=۱۰۰\text{gr}\\ \theta_۱=۰^\circ\text{C}\\ L_F=۳۳۶\text{J/gr}\end{cases},\quad \text{آب}:\begin{cases}m_۲=۲۰۰\text{gr}\\ \theta_۲=۰^\circ\text{C}\\ c_{\text{آب}}=۴۲۰۰\text{J/kg.}^\circ\text{C}=۴/۲\text{J/gr.}^\circ\text{C}\end{cases},\quad \text{ظرف}:\begin{cases}C_۳=m_۳c_۳=۱۰۰\text{J/}^\circ\text{C}\\ \theta_۳=۰^\circ\text{C}\end{cases}$$

$Q_۱=m_۱L_F=۱۰۰\times۳۳۶=۳۳۶۰۰\text{J}$: گرمایی که یخ می‌گیرد تا ذوب شود.

$Q_۲=(m_۱+m_۲)c_{\text{آب}}\Delta\theta=(۱۰۰+۲۰۰)\times۴/۲\times(۵-۰)=۶۳۰۰\text{J}$: گرمایی که ۳۰۰gr آب جدید ۰°C می‌گیرد تا به آب ۵°C برسد.

$Q_۳=m_۳c_۳\Delta\theta=C_۳\Delta\theta=۱۰۰\times(۵-۰)=۵۰۰\text{J}$: گرمایی که ظرف می‌گیرد تا دمایش از ۰°C به ۵°C افزایش یابد.

$$\Rightarrow Q_{\text{کل}}=Q_۱+Q_۲+Q_۳=۳۳۶۰۰+۶۳۰۰+۵۰۰=۴۰۴۰۰\text{J}$$

۲ ۸۸۳ با توجه به این‌که یخ و آب در تعادل گرمایی هستند، پس دمای اولیهٔ مجموعه صفر درجهٔ سلسیوس است:

$$\text{یخ}:\begin{cases}m_۱=۱\text{kg}\\ \theta_۱=۰^\circ\text{C}\\ L_F=۳۳۶\text{kJ/kg}\end{cases},\quad \text{آب}:\begin{cases}m_۲=۴\text{kg}\\ \theta_۲=۰^\circ\text{C}\\ c=۴۲۰۰\text{J/kg.K}=۴/۲\text{kJ/kg.K}\end{cases},\quad \text{گرمای داده شده}: Q=۵۴۶\text{kJ}$$

گام اول: در ابتدا گرمای مورد نیاز برای ذوب کردن ۱kg یخ را محاسبه می‌کنیم، دقت شود که تا تمام یخ ذوب نشود، افزایش دمایی در مجموعه ایجاد نمی‌شود:

$$Q_۱=m_۱L_F=۱\times۳۳۶=۳۳۶\text{kJ}$$

گام دوم: با توجه به این‌که گرمای داده شده به مجموعه بزرگ‌تر از $Q_۱$ است $(Q>Q_۱)$، پس گرمای داده شده به مجموعه ابتدا ۱kg یخ را به‌طور کامل ذوب کرده و سپس دمای ۵kg آب جدید (۴ کیلوگرم آب اولیه و ۱ کیلوگرم یخ ذوب شده) را بالا برده و به θ درجه می‌رساند، بنابراین داریم:

$Q-Q_۱=(m_۱+m_۲)c_{\text{آب}}\Delta\theta\Rightarrow۵۴۶-۳۳۶=(۱+۴)\times۴/۲\times(\theta-۰)\Rightarrow۲۱۰=۵\times۴/۲\times\theta\Rightarrow\theta=۱۰^\circ\text{C}$: باقی‌ماندهٔ گرما

۲ ۸۸۴ گام اول: دمای اولیهٔ گرماسنج با آب درون آن برابر است. با توجه به این موضوع، در ابتدا ظرفیت گرمایی گرماسنج را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{گرماسنج}:\begin{cases}C_{\text{گرماسنج}}=?\\ \theta_۱=۱۰^\circ\text{C}\end{cases},\quad \text{آب اولیه}:\begin{cases}m_۲=۷۰۰\text{gr}\\ \theta_۲=۱۰^\circ\text{C}\\ c_{\text{آب}}=۱\text{cal/gr.}^\circ\text{C}\end{cases},\quad \text{آب ثانویه}:\begin{cases}m_۳=۲۴۰\text{gr}\\ \theta_۳=۰^\circ\text{C}\\ c_{\text{آب}}=۱\text{cal/gr.}^\circ\text{C}\end{cases},\quad \theta_e=۷/۵^\circ\text{C}$$

$$\theta_e=\frac{m_۱c_۱\ \theta_۱+m_۲c_۲\theta_۲+m_۳c_۳\theta_۳}{m_۱c_۱\ +m_۲c_۲+m_۳c_۳}\Rightarrow۷/۵=\frac{C_{\text{گرماسنج}}\times۱۰+۷۰۰\times۱\times۱۰+۲۴۰\times۱\times۰}{C_{\text{گرماسنج}}+۷۰۰\times۱+۲۴۰\times۱}$$

$$\Rightarrow۷/۵C_{\text{گرماسنج}}+۷/۵\times۷۰۰+۷/۵\times۲۴۰=۱۰C_{\text{گرماسنج}}+۷۰۰۰\Rightarrow۲/۵C_{\text{گرماسنج}}=۵۰\Rightarrow C_{\text{گرماسنج}}=۲۰\text{cal/}^\circ\text{C}$$

گام دوم: حال می‌خواهیم ببینیم ظرفیت گرمایی گرماسنج معادل ظرفیت گرمایی چند گرم آب است، برای پیدا کردن این موضوع با نوشتن یک تساوی ساده داریم:

$$C_{\text{گرماسنج}}=mc_{\text{آب}}\Rightarrow۲۰\text{cal/}^\circ\text{C}=m\times۱\text{cal/gr.}^\circ\text{C}\Rightarrow m=۲۰\text{gr}$$

۳ ۸۸۵ با توجه به این‌که دمای تعادل مشخص است، می‌توان با استفاده از پایستگی انرژی مسئله را حل کرد. با توجه به این موضوع داریم:

$$\text{آب درون گرماسنج}:\begin{cases}m_۱=۸۰\text{gr}=۸\times۱۰^{-۲}\text{kg}\\ \theta_۱=۳۰^\circ\text{C}\\ c_۱=۴۲۰۰\text{J/kg.}^\circ\text{C}\end{cases},\quad \text{قطعهٔ نامعلوم}:\begin{cases}m_۲=۸۰\text{gr}=۸\times۱۰^{-۲}\text{kg}\\ \theta_۲=۳۰^\circ\text{C}\\ c_۲=?\end{cases}$$

$$\text{گرماسنج}:\begin{cases}m_۳=۲۰۰\text{gr}=۰/۲\text{kg}\\ \theta_۳=۳۰^\circ\text{C}\\ c_۳=۴۰۰\text{J/kg.}^\circ\text{C}\end{cases},\quad \text{آب اضافه‌شده}:\begin{cases}m_۴=۱۱۰\text{gr}=۱۱\times۱۰^{-۲}\text{kg}\\ \theta_۴=۷۶^\circ\text{C}\\ c_۴=۴۲۰۰\text{J/kg.}^\circ\text{C}\end{cases},\quad \theta_e=۵۲^\circ\text{C}$$

www.gajmarket.com

گام اول: انرژی که آب درون گرماسنج به‌دست می‌آورد را به‌دست می‌آوریم: $Q_1 = m_1 c_1 \Delta\theta_1 = ۸ \times ۱۰^{-۲} \times ۴۲۰۰ \times (۵۲ - ۳۰) = ۲۲ \times ۸ \times ۴۲$

گام دوم: انرژی که قطعهٔ نامعلوم به‌دست می‌آورد را به‌دست می‌آوریم: $Q_2 = m_2 c_2 \Delta\theta_2 = ۸ \times ۱۰^{-۲} \times c_2 \times (۵۲ - ۳۰) = ۲۲ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} c_2$

گام سوم: انرژی که گرماسنج به‌دست می‌آورد را محاسبه می‌کنیم: $Q_3 = m_3 c_3 \Delta\theta_3 = ۰/۲ \times ۴۰۰ \times (۵۲ - ۳۰) = ۸۰ \times ۲۲$

گام چهارم: انرژی که آب اضافه شده از دست می‌دهد را محاسبه می‌کنیم: $Q_4 = m_4 c_4 \Delta\theta_4 = ۱۱ \times ۱۰^{-۲} \times ۴۲۰۰ \times (۵۲ - ۷۶) = -۱۱ \times ۴۲ \times ۲۴$

گام نهایی: از قانون پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم: $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = ۰ \Rightarrow ۲۲ \times ۸ \times ۴۲ + ۲۲ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} c_2 + ۸۰ \times ۲۲ - ۱۱ \times ۴۲ \times ۲۴ = ۰$

$$\Rightarrow \overset{۲}{\cancel{۲۲}} \times \cancel{۸} [۴۲ + ۱۰^{-۲} c_2 + ۱۰] = \cancel{۱۱} \times \overset{۲۱}{\cancel{۴۲}} \times \overset{۳}{\cancel{۲۴}} \Rightarrow ۵۲ + ۱۰^{-۲} c_2 = ۶۳ \Rightarrow ۱۰^{-۲} c_2 = ۱۱ \Rightarrow c_2 = ۱۱۰۰ J/kg.^\circ C$$

۱ ۸۸۶ هنگامی‌که بخار آب $۱۴۰^\circ C$ را وارد مخزن آب $۱۰۰^\circ C$ می‌کنیم، با فرض زیاد بودن آب درون مخزن، دمای آب درون مخزن ثابت فرض شده (آب مخزن مانند منبع گرمایی است) و دمای تعادل آن $۱۰۰^\circ C$ می‌شود. از سوی دیگر بخار آب $۱۴۰^\circ C$ مقداری گرما از دست می‌دهد تا تبدیل به بخار آب $۱۰۰^\circ C$ شود، گرمای از دست داده شده را آب $۱۰۰^\circ C$ موجود در مخزن جذب کرده و این موضوع باعث می‌شود که مقداری از این آب بخار شود و در نتیجه مقدار بخار آب موجود در مخزن افزایش می‌یابد.

۴ ۸۸۷ بعد از رسیدن به تعادل، مقداری از آب تبدیل به بخار می‌شود و مجموعه به دمای $۱۰۰^\circ C$ می‌رسد. بنابراین برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مقدار گرمایی که قطعه فلز از دست می‌دهد را محاسبه می‌کنیم:

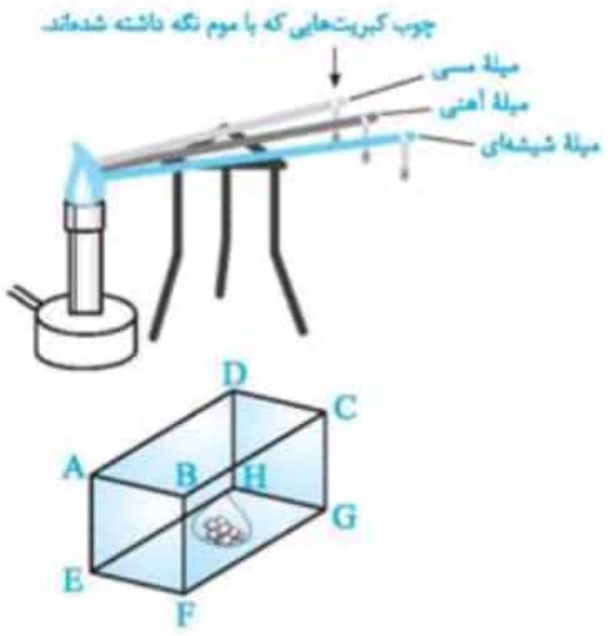
$$|Q_{\text{فلز}}| = |mc\Delta\theta| \xrightarrow{m=۰/۵kg, c=۵۰۰J/kg.^\circ C} |Q| = |۰/۵ \times ۵۰۰ \times (۱۰۰ - ۲۸۰)| = ۹۰ \times ۵۰۰ J$$

گام دوم: گرمای از دست داده شده توسط فلز، توسط آب جذب شده و مقداری از آن (m') بخار می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q_{\text{بخار}} = |Q_{\text{فلز}}| \Rightarrow m' L_V = |Q_{\text{فلز}}| \Rightarrow ۲۲۵۰ \times ۱۰^۳ m' = ۹۰ \times ۵۰۰ \Rightarrow \text{جرم آب بخار شده}: m' = \frac{۱}{۵۰} kg = ۲۰gr$$

$$\text{جرم آب باقی‌مانده} = ۱۰۰ - ۲۰ = ۸۰gr$$

۳ ۸۸۸ آزمایش مقابل، برای مقایسهٔ آهنگ رسانش گرما در سه میله با جنس‌های مختلف در کتاب درسی طراحی شده است. چوب کبریت‌ها با موم به سر هر سه میله محکم شده‌اند و سر دیگر میله‌ها روی شعله قرار دارد، هر کدام از میله‌ها که رسانایی حرارتی بیشتری داشته باشند، موم سر آن زودتر ذوب می‌شود و کبریت از سر آن زودتر می‌افتد. پس هر میله‌ای که کبریت انتهای آن سریع‌تر بیفتد، آهنگ رسانش گرمایی بیشتری دارد.



۲ ۸۸۹ یک یخچال را به‌خاطر بیاورید. می‌دانیم که در یک یخچال، هوای سرد از پایین یخچال خارج می‌شود. در این سؤال نیز با یک تشابه‌سازی ذهنی، اگر دیواره‌های پایینی مانند ABFE و BCGF برداشته شود، هوای سرد راحت‌تر از داخل جعبه خارج می‌شود و یخ زودتر ذوب می‌شود و برای دیرتر ذوب شدن یخ، برداشتن ABCD بهتر است.

۲ ۸۹۰ اگر میله‌ای با طول L و سطح مقطع A را بکشیم تا طول آن دو برابر شود، با توجه به رابطهٔ $V = A \times L$، چون حجم میله ثابت است پس سطح مقطع آن $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود. حال اگر میلهٔ جدید را بین همان دو منبع سرد و گرم قرار دهیم ($\Delta\theta$ ثابت)، با توجه به رابطهٔ $\frac{Q}{t} = \frac{kA\Delta\theta}{L}$ داریم:

$$\text{ثابت } V = A \; L \uparrow_{\text{۲ برابر}} \quad (A: \text{برابر } \tfrac{۱}{۲})$$

$$\text{آهنگ شارش گرما } (\frac{Q}{t}) = \frac{k \; A \downarrow_{\frac{۱}{۲}} \; \Delta\theta}{L \uparrow_{۲}} \Rightarrow \text{آهنگ شارش گرما برابر } \tfrac{۱}{۴} \text{ می‌شود.}$$

۴ ۸۹۱ با توجه به رابطهٔ $\frac{Q}{t} = \frac{kA\Delta\theta}{L}$، مشاهده می‌شود که آهنگ شارش گرما با مساحت (A) رابطهٔ مستقیم و با ضخامت جعبه (L) رابطهٔ معکوس دارد. بنابراین برای آن‌که آهنگ شارش گرما بیشینه شود باید مساحت بیشترین مقدار و ضخامت جعبه کم‌ترین مقدار را داشته باشد. در نتیجه باید آهنگ شارش گرما را از رویهٔ بزرگ‌تر محاسبه کنیم:

$$\text{آهنگ شارش گرما}: H = \frac{Q}{t} = k\frac{A\Delta\theta}{L} = ۴۰ \times \frac{(۲۰ \times ۵۰ \times ۱۰^{-۴}) \times ۲۰}{۱۰ \times ۱۰^{-۲}} = ۸۰۰ J$$

سؤال **در این سؤال کم‌ترین آهنگ شارش گرما چند برابر بیشترین آهنگ شارش گرما می‌باشد؟**

۴ ۸۹۲

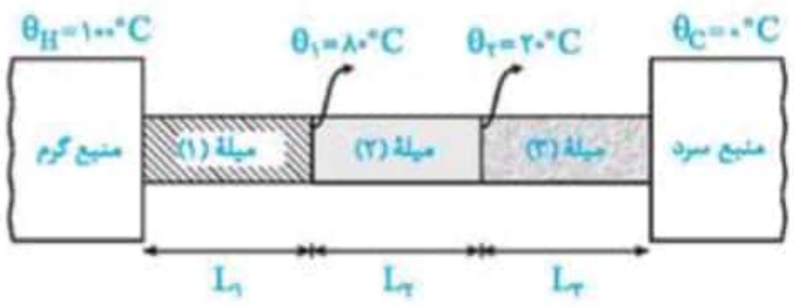
نکته

در میله‌های پشت سر هم، آهنگ شارش گرمای عبوری از میله‌ها با هم برابر است و می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید:

$$Q = k\frac{At\Delta\theta}{L} \Rightarrow \Delta\theta = \underbrace{\frac{Q}{t}}_{\text{یکسان در میله‌ها}}\frac{L}{Ak} \Rightarrow \Delta\theta \propto \frac{L}{Ak}$$

این موضوع یعنی در فرایند رسانش این‌گونه میله‌ها، تغییر دمای ایجاد شده در دو سر میله، متناسب با نسبت $\frac{L}{Ak}$ در میله‌ها است.

با توجه به نتیجه‌ای که به‌دست آوردیم، در مقایسهٔ سه میلهٔ ارائه شده در این سؤال می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\theta_1 = 100 - 80 = 20^\circ C \\ \Delta\theta_2 = 80 - 20 = 60^\circ C \\ \Delta\theta_3 = 20 - 0 = 20^\circ C \end{cases}$$

$$\Delta\theta_2 = 3\Delta\theta_1 = 3\Delta\theta_3 \Rightarrow \frac{L_2}{Ak_2} = 3\frac{L_1}{Ak_1} = 3\frac{L_3}{Ak_3}$$

بنابراین رابطهٔ $\frac{L_2}{k_2} = 3\frac{L_1}{k_1} = 3\frac{L_3}{k_3}$ بین طول و ضریب رسانندگی گرمایی در میله‌ها برقرار است.

۱ ۸۹۳ برای تحلیل این سؤال، فرض کنید که اختلاف دما در دو سر میلهٔ (۱) برابر $\Delta\theta_1$، در دو سر میلهٔ (۲) برابر $\Delta\theta_2$ و در دو سر میلهٔ (۳) برابر $\Delta\theta_3$ است. از طرفی می‌دانیم مجموع این $\Delta\theta$ها برابر $T_H - T_C$ است. با کمک این مطلب می‌توان نوشت:

$$H = \frac{Q}{t} = k\frac{A\Delta\theta}{L} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{L}{Ak}H$$

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 = (T_H - T_C) \Rightarrow \frac{L_1}{Ak_1}H + \frac{L_2}{Ak_2}H + \frac{L_3}{Ak_3}H = (T_H - T_C)$$

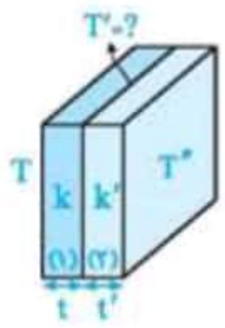
$$\Rightarrow \frac{H}{A}\left(\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3}\right) = T_H - T_C \Rightarrow H = A\frac{1}{\left(\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3}\right)}(T_H - T_C)$$

نکته

در حالت کلی در میله‌های پشت سر هم آهنگ شارش گرمای عبوری از میله‌ها با هم برابر بوده و برابر است با:

$$H = A\left(\frac{1}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \ldots + \frac{L_n}{k_n}}\right)(T_H - T_C)$$

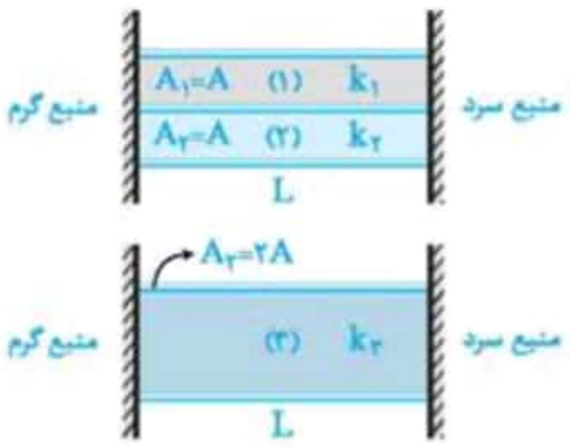
۲ ۸۹۴ اگر دمای محل اتصال دو لایه را T' درنظر بگیریم، با توجه به تساوی مقدار گرمای منتقل شده از لایهٔ اول و لایهٔ دوم در مدت زمان یکسان، می‌توان نوشت:



$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{kA\cancel{t}(T - T')}{t} = \frac{k'A\cancel{t}(T' - T'')}{t'} \Rightarrow \frac{k(T - T')}{t} = \frac{k'(T' - T'')}{t'}$$

$$\Rightarrow kt'T - kT't' = k'tT' - k'tT'' \Rightarrow T' = \frac{kt'T + k'tT''}{kt' + k't}$$

۴ ۸۹۵ با توجه به صورت سؤال، مجموع گرمای شارش شده از میله‌های (۱) و (۲)، با گرمای شارش شده از میلهٔ (۳) برابر است و داریم:



$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \Rightarrow \frac{k_1At\Delta\theta}{L} + \frac{k_2At\Delta\theta}{L} = \frac{k_3(2A)t\Delta\theta}{L}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کردن پارامترها}} k_3 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

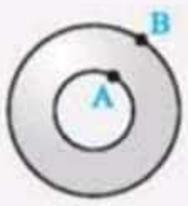
www.gajmarket.com

۸۹۶ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۳ — **مفهوم انبساط** — (تست‌های ۸۹۶ تا ۸۹۹)

در اکثر اجسام، با افزایش دما، بر انرژی و دامنهٔ نوسان اتم‌ها افزوده می‌شود و این موضوع سبب می‌شود که اجسام منبسط شوند. با رخ دادن انبساط، حجم و ابعاد آن‌ها بزرگ‌تر می‌شود و به‌طور کلی فاصلهٔ هر دو نقطهٔ دلخواه در آن‌ها از یک‌دیگر افزایش می‌یابد.

تذکر با افزایش حجم جسم و ثابت ماندن جرم آن، با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V} \downarrow \uparrow$، چگالی آن کاهش می‌یابد.



تمرین ۱ **در شکل مقابل دمای صفحهٔ فلزی مقابل را افزایش می‌دهیم، فاصلهٔ نقاط A و B چگونه تغییر می‌کند؟**

پاسخ در اثر گرم کردن صفحه، انبساط رخ می‌دهد و فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه در آن، از جمله A و B افزایش می‌یابد.

تمرین ۲ **کدام‌یک از رخدادهای زیر، با مفهوم انبساط گرمایی اجسام قابل توجیه نیست؟** (کتاب درسی)

۱) باز کردن در فلزی یک قوطی شیشه‌ای با ریختن آب داغ بر روی آن

۲) احساس گرما، چند لحظه پس از ورود به حمام حاوی مقداری بخار آب

۳) برای جدا کردن دو لیوان از هم، آب سرد در لیوان داخلی ریخته و لیوان بیرونی در آب گرم گذاشته می‌شود.

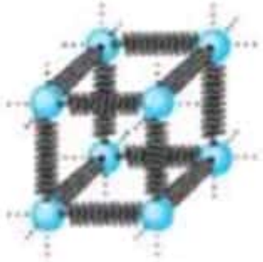
۴) ایجاد درد در دندان با خوردن یک بستنی سرد یا یک لیوان چای داغ، هنگامی‌که از مادهٔ پر کنندهٔ نامرغوب در دندانپزشکی استفاده می‌شود.

پاسخ این سؤال تمرین جالبی است که در آن، انبساط را بهتر درک می‌کنیم. برای پاسخ به این تمرین باید گفت که معمولاً برای آن‌که در فلزی محکم شدهٔ یک ظرف شیشه‌ای را باز کنیم، روی آن آب داغ می‌ریزیم. وقتی دو لیوان شیشه‌ای در هم گیر کرده باشند می‌توانیم با ریختن آب سرد در لیوان داخلی و گذاشتن لیوان بیرونی در آب گرم، آن‌ها را از هم جدا کنیم. وقتی دندانپزشک سوراخ دندانی را پر می‌کند باید مادهٔ پرکننده همان مشخصه‌های انبساط گرمایی دندان را داشته باشد، در غیر این صورت خوردن یک بستنی سرد و در پی آن نوشیدن یک لیوان چای داغ، بسیار دردناک خواهد بود. این بحث‌ها، همگی ناشی از انبساط گرمایی اجسام است و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) با مفهوم انبساط قابل توجیه است.

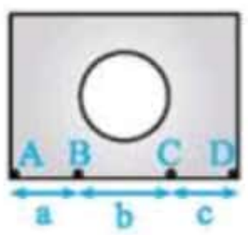
از سوی دیگر دقت شود که وقتی شما وارد حمام شدید پس از چند لحظه احساس می‌کنید که گرمتان شده است، زیرا در اثر باز بودن دوش (حتی اگر آب سرد باشد) مقداری بخار آب در فضای اتاقک ایجاد شده و با ورود شما به حمام، میعان این بخار روی بدنتان به شما گرما می‌دهد (زیرا فرایند میعان گرماده بوده و گرمای ایجاد شده به سطح بدن می‌رسد.). بنابراین، این رخداد ارتباطی به مفهوم انبساط گرمایی ندارد.

نکته آب از موارد استثنایی است که در دماهای پایین با کاهش دما منبسط می‌شود، در این مورد بعداً بیشتر بحث خواهیم کرد.

انبساط گرمایی از دیدگاه مولکولی نیز قابل درک است. در مدل مقابل، نیروهای بین اتمی در جامدها مثل فنر عمل می‌کنند. هر اتم در اطراف مکان تعادل خود نوسان می‌کند و با افزایش دما بر انرژی و دامنهٔ نوسان اتم‌ها افزوده می‌شود. در این حالت فاصلهٔ متوسط اتم‌ها از یک‌دیگر افزایش می‌یابد و در نتیجه جسم انبساط می‌یابد.



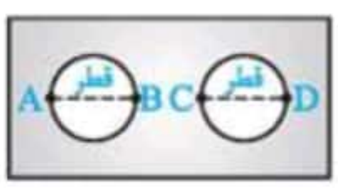
۸۹۷ ۳ با افزایش دما، صفحهٔ فلزی منبسط می‌شود و همان‌گونه که در خلاصه نکات (۱۳) نیز اشاره کردیم، صرف‌نظر از این‌که جسم چه شکلی داشته باشد، در اثر انبساط، فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ دلخواه از آن افزایش می‌یابد و در نتیجه هر سه فاصلهٔ a، b و c افزایش می‌یابد.



دقت

در این صفحهٔ فلزی فاصلهٔ بین نقاط A، B، C و D نیز از هم بیشتر می‌شود.

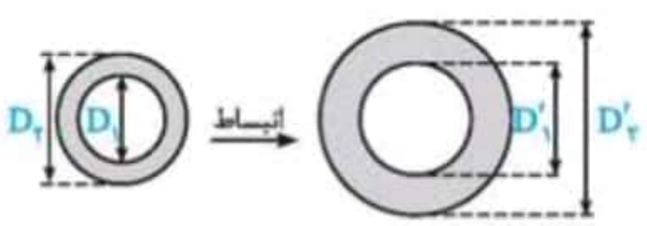
۸۹۸ ۳ با افزایش دما، صفحهٔ فلزی منبسط می‌شود و می‌دانیم در اثر انبساط، فاصلهٔ بین تمام نقاط، از جمله A و B و نقاط C و D افزایش یافته و قطر هر دو سوراخ نیز افزایش می‌یابد. فاصلهٔ نقاط B و C نیز افزایش یافته و در واقع فاصلهٔ بین دو سوراخ نیز بزرگ می‌شود.



۸۹۹ ۱ در اثر افزایش دما و انبساط، هم قطر داخلی و هم قطر خارجی لولهٔ آهنی افزایش می‌یابد.

هم‌چنین می‌دانیم در اثر انبساط، جرم لوله ثابت و حجم آن زیاد و در نتیجه چگالی آن کم می‌شود، پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

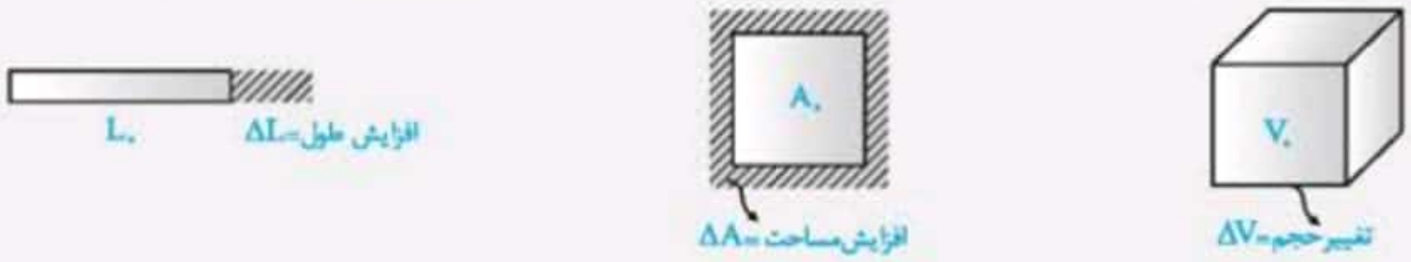
$$\downarrow \rho = \frac{\overset{\text{ثابت}}{m}}{V \uparrow}$$



۲۹۰۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۴ — **مقادیر مختلف ضریب انبساط برای یک جسم جامد** — (تست‌های ۹۰۰ تا ۹۰۳)

به‌طور کلی هنگامی که در مورد انبساط اجسام تحت تغییر دمای $\Delta\theta$ بحث می‌کنیم، سه حالت زیر می‌تواند مد نظر قرار بگیرد:



در حالت اول انبساط از نوع خطی، در حالت دوم از نوع سطحی و در حالت سوم از نوع حجمی محسوب می‌شود. نکتهٔ حائز اهمیت آن است که در محاسبهٔ میزان انبساط خطی به پارامتری به نام ضریب انبساط خطی نیاز داریم و در انبساط‌های سطحی و حجمی نیز به‌ترتیب به پارامترهای ضریب انبساط سطحی و حجمی نیاز داریم. در مورد این پارامترها می‌توان به تعاریف زیر اشاره کرد:

۱ **ضریب انبساط طولی (α)**: افزایش طول میله‌ای به طول یک متر از یک ماده به ازای افزایش دمای یک درجهٔ سلسیوس را ضریب انبساط طولی گویند.

۲ **ضریب انبساط سطحی (γ)**: افزایش سطح یک ورق با مساحت یک مترمربع از یک ماده به ازای افزایش دمای یک درجهٔ سلسیوس را ضریب انبساط سطحی گویند.

۳ **ضریب انبساط حجمی (β)**: افزایش حجم یک جسم با حجم یک مترمکعب از یک ماده به ازای افزایش دمای یک درجهٔ سلسیوس را ضریب انبساط حجمی گویند.

نکات مهم و کاربردی

۱ می‌توان ثابت کرد که در یک جسم جامد، ضریب انبساط سطحی **تقریباً دو برابر** ضریب انبساط طولی آن و ضریب انبساط حجمی **تقریباً سه برابر** ضریب انبساط طولی آن است:

$$\gamma = ۲\alpha \ , \ \beta = ۳\alpha$$

۲ رابطهٔ ضریب انبساط حجمی و ضریب انبساط سطحی یک جسم جامد عبارت است از:

$$\begin{cases} \beta = ۳\alpha \\ \gamma = ۲\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲}\gamma$$

۳ واحد ضریب انبساط خطی، سطحی و حجمی، هر سه یکسان و در SI معادل با $\frac{۱}{K}$ می‌باشد.

۴ همان‌طور که در فصل قبل مشاهده کردید، رابطهٔ بین تغییر دما برحسب سلسیوس و فارنهایت به‌صورت زیر است:

$$\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C$$

از طرفی واحد متداول برای مقادیر α، β و γ به‌صورت $\frac{۱}{^\circ C}$ یا $\frac{۱}{K}$ است که برای تبدیل کردن به واحد $\frac{۱}{^\circ F}$، باید مقادیر α، β و γ را در عدد $\frac{۵}{۹}$ ضرب کرد. دلیل نکات (۳) و (۴) را در قسمت‌های بعد بیشتر درک خواهید کرد.

مطابق خلاصه نکات (۱۴)، ضریب انبساط حجمی (β) یک جسم جامد تقریباً سه برابر ضریب انبساط طولی (α) آن است.

$$\beta = ۳\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۳}\beta$$

۲۹۰۱ ۱) ضریب انبساط سطحی یک ماده تقریباً دو برابر ضریب انبساط طولی آن است ($\gamma = ۲\alpha$).

۲) ضریب انبساط حجمی یک ماده تقریباً سه برابر ضریب انبساط طولی آن است ($\beta = ۳\alpha$).

$$\frac{\text{ضریب انبساط سطحی}}{\text{ضریب انبساط حجمی}} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{۲\alpha}{۳\alpha} = \frac{۲}{۳}$$

۱۹۰۲ در مقایسهٔ ضریب انبساط سطحی و حجمی یک جسم جامد، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{ضریب انبساط حجمی} : \beta = ۳\alpha \\ \text{ضریب انبساط سطحی} : \gamma = ۲\alpha \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{۲}{۳}\beta \xrightarrow{\beta = ۶\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{K}} \gamma = \frac{۲}{۳}\times \underbrace{۶\times۱۰^{-۶}}_{\beta} = ۴\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{K}$$

۴۹۰۳ ضریب انبساط حجمی فلز: $\beta = ۳\alpha = ۲۷\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{K}$ (بر کلوین) $\Rightarrow$ ضریب انبساط خطی فلز: $\alpha = ۹\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{K}$ (بر کلوین)

در ادامه باید واحد ضریب انبساط حجمی را از $\frac{۱}{K}$ به $\frac{۱}{^\circ F}$ تغییر دهیم. برای این‌کار همان‌طور که در خلاصه نکات (۱۴) اشاره شد، باید عدد به‌دست آمده را در نسبت $\frac{۵}{۹}$ ضرب کنیم:

$$\beta = ۲۷\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{K} \xrightarrow{\times\frac{۵}{۹}} \beta = ۲۷\times۱۰^{-۶}\times\frac{۵}{۹}\,^\circ F = ۱/۵\times۱۰^{-۵}\,^\circ F$$

www.gajmarket.com

۴۰۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۵ — **انبساط طولی اجسام** — (تست‌های ۹۰۴ تا ۹۳۳)

مطابق شکل یک خط‌کش فلزی با طول اولیهٔ L_1 در اختیار داریم. با گرم کردن این خط‌کش، طول آن به اندازهٔ ΔL افزایش یافته و به L_2 می‌رسد. میزان تغییر طول خط‌کش برابر است با:



$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta$$

(L_1: طول اولیهٔ خط‌کش، α: ضریب انبساط طولی خط‌کش، $\Delta\theta$: میزان افزایش دمای خط‌کش)

نکات مهم و کاربردی

۱ یکای ضریب انبساط طولی در SI، بر کلوین $\left(\frac{1}{K}\right)$ یا بر درجهٔ سلسیوس $\left(\frac{1}{^\circ C}\right)$ است. البته واحد $\frac{1}{^\circ F}$ نیز می‌تواند مطرح شود.

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_1 \Delta\theta} \Rightarrow \alpha \text{ واحد} \equiv \frac{m}{m \times \underbrace{K}_{^\circ C}} = \frac{1}{K} \text{ یا } \frac{1}{^\circ C} \xrightarrow[\Delta\theta_F = \frac{9}{5}\Delta\theta_C]{\text{برای تبدیل به } \frac{1}{^\circ F}} \text{در } \frac{5}{9} \text{ ضرب شود.}$$

۲ با توجه به رابطهٔ فوق مشاهده می‌شود که هرچه طول اولیهٔ خط‌کش بزرگ‌تر باشد، میزان تغییر طول آن نیز بیشتر است. $\Delta L \propto L_1$

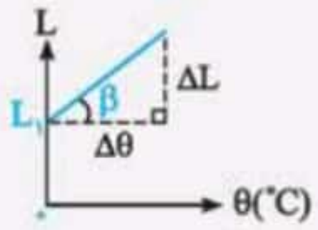
۳ با توجه به رابطهٔ فوق مشاهده می‌شود که هرچه میزان افزایش دمای خط‌کش بیشتر باشد، میزان تغییر طول آن نیز بیشتر است. $\Delta L \propto \Delta\theta$

۴ اگر دمای خط‌کش کاهش یابد ($\Delta\theta < 0$)، طول خط‌کش کوتاه می‌شود و رابطهٔ فوق میزان کاهش طول خط‌کش را نشان می‌دهد.

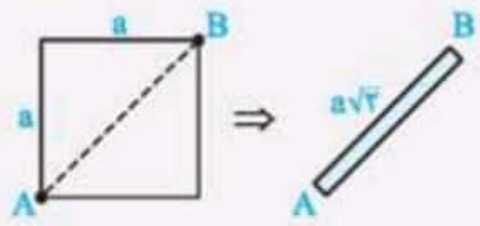
۵ اگر طول اولیهٔ خط‌کش L_1 باشد و دمای آن به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر کند، طول ثانویهٔ آن برابر است با: $L_2 = L_1 + \Delta L = L_1(1 + \alpha\Delta\theta)$

بررسی دو موضوع مهم و پر تکرار:

موضوع ۱: نمودار طول خط‌کش برحسب دما به‌صورت مقابل است: $\tan\beta = \frac{\Delta L}{\Delta\theta} = L_1\alpha$

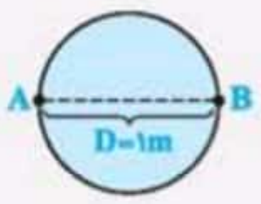


موضوع ۲: فرض کنید که می‌خواهیم افزایش طول قطر مربع نشان داده شده در شکل روبه‌رو را در اثر افزایش دمای $\Delta\theta$ به‌دست آوریم. به‌همین منظور فرض می‌کنیم که یک میلهٔ فرضی از جنس ورق بین دو نقطهٔ A و B از صفحه قرار دارد، میزان افزایش فاصلهٔ دو نقطه، همان افزایش طول میلهٔ فرضی است.



$$\Delta L_{AB} = L_{AB}\alpha\Delta\theta = (a\sqrt{2})\alpha\Delta\theta$$

تمرین ۱ **مطابق شکل مقابل، به یک صفحهٔ فلزی و دایره‌ای شکل با قطر ۱m و جرم ۱۰۰gr، با توان ثابت ۲۰۰ وات گرما می‌دهیم. پس از ۱۰ ثانیه، افزایش قطر این صفحهٔ فلزی چند سانتی‌متر می‌شود؟** ($c = 1000\,J/kg.K$: گرمای ویژه، $\alpha = 2\times10^{-5}\,\frac{1}{K}$: ضریب انبساط طولی)



۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۱

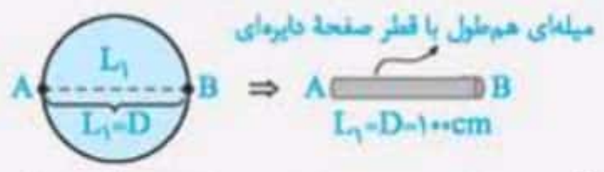
پاسخ برای حل این تمرین خوب، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ گرمای منتقل‌شده به میله پس از ۱۰ ثانیه): $Q = Pt = 200\times10 = 2000J$

گام دوم: (محاسبهٔ تغییر دمای صفحهٔ فلزی در اثر دادن گرمای ۲۰۰۰J به آن):

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 2000 = (100\times10^{-3})\times(1000)\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 20\,^\circ C$$

گام سوم: (محاسبهٔ تغییر طول میلهٔ فلزی معادل با قطر): با توجه به مفاهیمی که در این خلاصه نکات آموختیم، برای محاسبه کردن تغییر قطر صفحه، می‌توان میله‌ای هم‌طول با قطر صفحهٔ دایره‌ای درنظر گرفت.



$$\Delta L = L_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta L = 100\times(2\times10^{-5})\times20 \Rightarrow \Delta L = 4\times10^{-2}\,cm = 0/04\,cm$$ (گزینهٔ ۲)

دقت شود با توجه به این‌که تغییر طول قطر برحسب سانتی‌متر خواسته شده است، طول اولیهٔ آن را نیز برحسب سانتی‌متر قرار دادیم.

با توجه به خلاصه نکات فوق می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta L = L_1\alpha\Delta\theta : \text{مقدار افزایش طول} \\ \Delta\theta = 1\,^\circ C : \text{افزایش دما} \\ \alpha = 2\times10^{-5}\,/^\circ C : \text{ضریب انبساط طولی} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta L = L_1\times(2\times10^{-5})\times1 \Rightarrow \text{افزایش طول میله} = (2\times10^{-5}) \times (\text{طول اولیهٔ میله})$$

یعنی به ازای هر $1\,^\circ C$ افزایش دما، 2×10^{-5} برابر طول اولیهٔ میله، به طول میله اضافه می‌شود.

۱ ۹۰۵ با کمک گرفتن از رابطهٔ $\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta$، داریم:

$$L_1 = ۱۲\,m \;,\; \alpha = ۱/۲ \times ۱۰^{-۵}\,/^\circ C \;,\; \Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱ = -۵۰^\circ C \;,\; \Delta L = ?$$

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta = ۱۲ \times ۱۰^{۳} \times ۱/۲ \times ۱۰^{-۵} \times (-۵۰) = -۷/۲\,mm$$

تبدیل طول میله از m به mm

علامت منفی یعنی طول این میله ۷/۲ میلی‌متر کاهش می‌یابد.

دقت

با توجه به این‌که تغییر طول میله برحسب میلی‌متر خواسته شده است، طول L_1 را برحسب میلی‌متر در رابطه قرار داده‌ایم.

۳ ۹۰۶

$$\begin{cases} \Delta L = ۱/۰۰۰۳۷۵ - ۱ = ۰/۰۰۰۳۷۵\,m \\ \text{افزایش طول}: \Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow ۰/۰۰۰۳۷۵ = ۱ \times \alpha \times ۳۰ \Rightarrow ۳۰\alpha = \underbrace{۰/۰۰۰۳۷۵}_{۴\text{ رقم}} = ۳/۷۵ \times ۱۰^{-۴} \\ \text{تغییرات دما}: \Delta\theta = ۶۵ - ۳۵ = ۳۰^\circ C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ضریب انبساط طولی}: \alpha = \frac{۳/۷۵ \times ۱۰^{-۴}}{۳۰} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵}\,K^{-1}$$

۱ ۹۰۷ ابتدا باید دقت شود که افزایش طول نسبت به طول اولیه برابر است با $\frac{\Delta L}{L_1}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow \text{درصد افزایش طول} = \frac{\Delta L}{L_1} \times ۱۰۰ = (\alpha\Delta\theta) \times ۱۰۰ = \left[(۲ \times ۱۰^{-۵}) \times ۵۰\right] \times ۱۰۰ = ٪۰/۱$$

۲ ۹۰۸ طبق صورت سؤال، با بالا بردن دمای میله، طول آن $\frac{۵۰۱}{۵۰۰}$ برابر طول اولیه‌اش شده است. بنابراین تغییر طول آن برابر است با:

$$L_۲ = \frac{۵۰۱}{۵۰۰} L_1 \Rightarrow \Delta L = L_۲ - L_1 = \frac{۵۰۱}{۵۰۰} L_1 - L_1 = \frac{۱}{۵۰۰} L_1$$

میزان افزایش دمای لازم برای این‌که افزایش طول میله، $\frac{۱}{۵۰۰}$ طول اولیهٔ آن شود، برحسب درجهٔ سلسیوس برابر است با:

$$\alpha = ۴ \times ۱۰^{-۵}\,/^\circ C \;,\; \Delta L = \frac{۱}{۵۰۰} L_1 \;,\; \Delta\theta = ?$$

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow \frac{۱}{۵۰۰} L_1 = L_1 \times ۴ \times ۱۰^{-۵} \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۵۰^\circ C$$

در نهایت برای تبدیل مقدار تغییر دما $(\Delta\theta)$ از سلسیوس به فارنهایت، داریم:

$$\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵} \Delta\theta_C = \frac{۹}{۵} \times ۵۰ = ۹۰^\circ F$$

۲ ۹۰۹ برای مقایسهٔ تغییر طول در دو حالت مطرح شده می‌توان نوشت:

$$\Delta L = \overset{\text{ثابت}}{L_1 \alpha}\, \Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_1} = \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_1} \Rightarrow \frac{۳\Delta L}{\Delta L} = ۳ = \frac{(\theta' - ۱۰)}{(۳۰ - ۱۰)} \Rightarrow \theta' = ۷۰^\circ C$$

۴ ۹۱۰ دمای اولیهٔ میله را θ درجهٔ سلسیوس فرض می‌کنیم. پس تغییر طول میله را با توجه به رابطهٔ زیر، در هر دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$\Delta L = L\alpha\Delta\theta \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اول}: \Delta L_1 = L\alpha(۱۰ - \theta) = -۱/۵\,cm \\ \text{حالت دوم}: \Delta L_۲ = L\alpha(۷۰ - \theta) = +۳\,mm = ۳ \times ۱۰^{-۱}\,cm \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta L_1}{\Delta L_۲} = \frac{L\alpha(۱۰ - \theta)}{L\alpha(۷۰ - \theta)} = \frac{۱۰ - \theta}{۷۰ - \theta} = \frac{-۱/۵}{۳ \times ۱۰^{-۱}} = -۵$$

$$\Rightarrow ۱۰ - \theta = -۳۵۰ + ۵\theta \Rightarrow ۶\theta = ۳۶۰ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ C \xrightarrow{T = \theta + ۲۷۳} T = ۶۰ + ۲۷۳ = ۳۳۳\,K$$

- توجه کنید که در اثر کاهش دما، طول میلهٔ فلزی کم شده و تغییر طول آن منفی است، از این رو در حالت اول، $\Delta L_1 = -۱/۵\,cm$ است.

۲ ۹۱۱ با توجه به داشتن ضریب انبساط طولی پل، به سادگی می‌توان تغییر طول آن را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_1 = ۵۰ - (-۵۰) = ۱۰۰^\circ C \;,\; \alpha = ۱۳ \times ۱۰^{-۶}\,K^{-1} \;,\; L_1 = ۱۲۰۰\,m \;,\; \Delta L = ?$$

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow \Delta L = ۱۲۰۰ \times (۱۳ \times ۱۰^{-۶}) \times ۱۰۰ \Rightarrow \Delta L = ۱/۵۶\,m$$

۱ ۹۱۲ در مقایسهٔ تغییر طول پل در دو حالت مطرح شده، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta L = \overset{\text{ثابت}}{L_1 \alpha}\, \Delta\theta \\ \Delta L_۲ = ۶\,cm \\ \Delta L_1 = ۳\,cm \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_1} = \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_1} \Rightarrow \frac{۶}{۳} = \frac{\Delta\theta_۲}{(۲۵ - ۰)} \Rightarrow \Delta\theta_۲ = ۵۰^\circ C \Rightarrow \theta_۲ - \theta_1 = ۵۰ \Rightarrow \theta_۲ = ۵۰^\circ C$$

۲ ۹۱۳ وجود فضاهای خالی نشان داده شده در ریل‌های راه‌آهن و دو قسمت متوالی پل، به دلیل درنظر گرفتن انبساط فلز در اثر تغییر دمای محیط در محل پروژه است و اگر این موضوع در یک اجرای غلط درنظر گرفته نشود، می‌تواند باعث ایجاد نیروهای اضافی در پل و ریل‌های راه‌آهن شده و بستری برای خرابی آن‌ها فراهم شود.

www.gajmarket.com

۴ ۹۱۴ همان‌طور که گفتیم با افزایش دما، ریل‌ها افزایش طول می‌یابند و در صورتی‌که بین آن‌ها فاصله نباشد، ریل‌ها به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، برای جلوگیری از این اتفاق فاصلهٔ هر ریل با ریل جلویی باید به اندازهٔ افزایش طول هر ریل در اثر بیشترین افزایش دمای هوای ممکن در محیط، یعنی تغییر دما به‌اندازهٔ $\Delta\theta = (۴۰-(-۱۰))۵۰^\circ C$ باشد: $L_۱ = ۱۰m \quad , \quad \Delta\theta = ۵۰^\circ C \quad , \quad \alpha = ۱۲\times۱۰^{-۶} K^{-۱} \quad , \quad \Delta L = ?$: طول هر ریل

$$\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta L = ۱۰\times(۱۲\times۱۰^{-۶})\times۵۰ = ۶\times۱۰^{-۳} m = ۶ mm$$

۴ ۹۱۵ اگر مجموع افزایش طول دو میلهٔ (۱) و (۲) بخواهد از مقدار e بیشتر شود (فاصلهٔ دو میله)، با توجه به این‌که دیگر فضایی در بین دو میله وجود نخواهد داشت، دو میله بر هم فشار وارد می‌کنند پس شرط آن‌که دو میله بر هم فشار وارد نکنند عبارت است از:

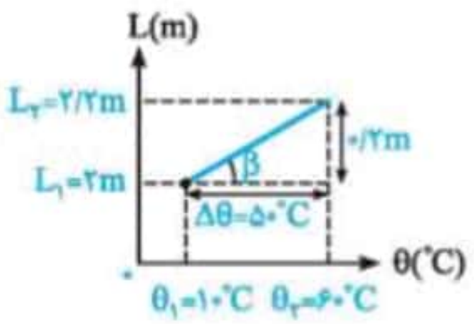
$$\Delta L_۱ + \Delta L_۲ \le e \Rightarrow L_۱\alpha_۱\Delta T + L_۲\alpha_۲\Delta T \le e \Rightarrow L\alpha\Delta T + ۱/۵L\times۲\alpha\times\Delta T \le e \Rightarrow \Delta T \le \frac{e}{۴\alpha L}$$

۲ ۹۱۶ با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. اگر میله به اندازهٔ $\Delta T = ۲۰^\circ C$ گرم شود، نقطهٔ A در اثر انبساط میله به اندازهٔ $L\alpha\Delta T$ به سمت راست می‌رود. در ادامه اگر میله به‌اندازهٔ ΔT سرد شود، میله به اندازهٔ $L\alpha\Delta T$ کاهش طول داده و نقطهٔ A در اثر این موضوع $L\alpha\Delta T$ به سمت چپ می‌رود و مسافت طی‌شده توسط نقطهٔ A در مجموع برابر $۲L\alpha\Delta T$ است.

$$\text{مسافت طی‌شده توسط نقطهٔ A} = ۲L\alpha\Delta T \Rightarrow ۰/۴ = ۲\times۲۰۰\times\alpha\times۲۰ \Rightarrow \alpha = ۵\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{K}$$

* دقت کنیم در رابطهٔ فوق چون مسافت طی‌شده را برحسب cm قرار دادیم، طول میله را نیز برحسب cm گذاشتیم.

۳ ۹۱۷ با توجه به رابطهٔ $\Delta L = \underbrace{L_۱\alpha}_{\text{شیب خط}}\Delta\theta$، در شکل روبه‌رو شیب خط برابر $L_۱\alpha$ می‌باشد.



$$\tan\beta = L_۱\alpha \xrightarrow{\tan\beta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}} \frac{۰/۲}{۵۰} = ۲\times\alpha \Rightarrow \alpha = ۲\times۱۰\left(\frac{۱}{^\circ C}\right)$$

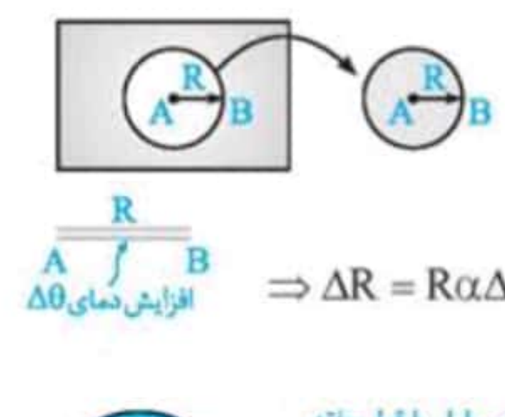
به جور دیگه فکر کنیم:

$$\begin{cases} \Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \\ \Delta\theta = ۶۰-۱۰ = ۵۰^\circ C \Rightarrow ۰/۲ = ۲\times\alpha\times۵۰ \Rightarrow \alpha = ۲\times۱۰^{-۳}\ (۱/^\circ C) \\ \Delta L = ۲/۲ - ۲ = ۰/۲ m \end{cases}$$

۴ ۹۱۸

نکته

در این گونه مسائل، برای محاسبهٔ افزایش فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه از ورق فلزی، فرض می‌کنیم میله‌ای بین آن دو نقطه قرار دارد و افزایش فاصلهٔ بین آن دو نقطه در واقع، همان افزایش طول آن میله است.



$$\Rightarrow \Delta R = R\alpha\Delta\theta$$

در این سؤال برای محاسبهٔ افزایش طول شعاع در اثر افزایش دمای $\Delta\theta$، میلهٔ AB را که در واقع یکی از شعاع‌های دایره است، درنظر بگیرید.

۳ ۹۱۹ با توجه به مفاهیمی که در تست قبل یاد گرفتیم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\begin{cases} \Delta L = L_۱\times\alpha\times\Delta\theta = L_۱\times۲\times۱۰^{-۵}\times۵۰ = ۱۰^{-۳}L_۱ \\ \text{میزان افزایش قطر برحسب درصد} = \frac{\Delta L}{L_۱}\times۱۰۰ = ۱۰^{-۳}\times۱۰۰ = ٪۰/۱ \end{cases}$$

۲ ۹۲۰ **تغییر محیط** یک دایره بر اثر تغییر دما را می‌توانیم از رابطهٔ **انبساط طولی** جامدات محاسبه کنیم. بنابراین با توجه به رابطهٔ $\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta$، برای محاسبهٔ تغییر محیط دایره داریم:

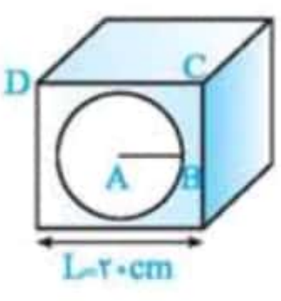


$$\text{ضریب انبساط سطحی} = ۲\alpha = ۴\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{K} \Rightarrow \text{ضریب انبساط طولی} = \alpha = \frac{۴\times۱۰^{-۵}}{۲} = ۲\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{K}$$

$$\Delta L = \overbrace{(۲\pi r_۱)}^{L_۱}\times\alpha\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta L = (۲\times۳\times۵)\times۲\times۱۰^{-۵}\times۴۰۰ = ۰/۲۴cm = ۲/۴mm$$

* توجه کنید که ضریب انبساط سطحی، دو برابر ضریب انبساط طولی است.

۲ ۹۲۱ در اثر انبساط، فاصلهٔ هر دو نقطهٔ دلخواه افزایش می‌یابد، بنابراین شعاع حفرهٔ داخلی نیز افزایش می‌یابد. افزایش طول ضلع مکعب و شعاع داخلی حفره، با انبساط طولی بیان می‌شوند و برای محاسبهٔ افزایش شعاع حفرهٔ داخلی کافیست میلهٔ AB را در آن درنظر بگیریم و با مقایسهٔ AB و CD بنویسیم:



$$\begin{cases} \Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \\ \Delta\theta = \Delta\theta' \text{: افزایش دما برای هر دو یکسان است} \\ \alpha = \alpha' \text{: جنس هر دو یکسان است} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta L_{AB}}{\Delta L_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}} \Rightarrow \frac{\Delta L_{AB}}{۰/۰۰۴mm} = \frac{۵cm}{۲۰cm} \Rightarrow \Delta L_{AB} = ۰/۰۰۱mm$$

۳ ۹۲۲ با توجه به مفاهیم مطرح شده در دو تست قبلی، می‌توانیم بین دو نقطهٔ A و B یک میلهٔ نازک در نظر بگیریم و انبساط طولی آن را به دست آوریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{ضریب انبساط طولی} \Rightarrow \alpha = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{۱}{K} \Rightarrow \text{ضریب انبساط سطحی} = ۲\alpha = ۳/۶ \times ۱۰^{-۵}$$

$$\Delta L_{AB} = L_{AB}\alpha\Delta\theta = \underbrace{۵۰۰}_{\text{برحسب mm}} \times ۱/۸ \times ۱۰^{-۵} \times ۲۰۰ = ۱/۸\,mm$$

$$\text{طول جدید AB}: L'_{AB} = L_{AB} + \Delta L_{AB} = ۵۰۰ + ۱/۸ = ۵۰۱/۸\,mm$$

۲ ۹۲۳ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: صفحه با مساحت $S_۲$، دو برابر صفحه با مساحت $S_۱$ جرم دارد. در مرحلهٔ اول می‌خواهیم بررسی کنیم که با توجه به گرماهای داده شده، کدام صفحه افزایش دمای بیشتری دارد و داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} \Rightarrow \frac{۲Q_۱}{Q_۱} = \frac{۲m_۱}{m_۱} \times \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} = ۱$$

تذکر

با توجه به آن‌که $S_۲ = ۲S_۱$ بوده و دو صفحه از یک ورقهٔ مسی با ضخامت ثابت بریده شده‌اند، می‌توان گفت که $m_۲ = ۲m_۱$ می‌باشد.

گام دوم: در مقایسهٔ افزایش شعاع دو صفحه، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \pi(R_۲)^۲ = ۲\pi(R_۱)^۲ \Rightarrow R_۲ = \sqrt{۲}R_۱ \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = \sqrt{۲}$$

$$\Delta R = R\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta R_۲}{\Delta R_۱} = \frac{R_۲}{R_۱} \times \underbrace{\frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱}}_{۱} \Rightarrow \frac{\Delta R_۲}{\Delta R_۱} = \frac{R_۲}{R_۱} = \sqrt{۲}$$

۲ ۹۲۴ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۵)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱ ۹۲۵

$$\alpha_۲ = \frac{\alpha_۱}{۲}\ ,\ \Delta\theta_۲ = \Delta\theta_۱ = ۰ - ۱۰۰ = -۱۰۰\,^\circ C\ ,\ L_۲ = ۲L_۱$$

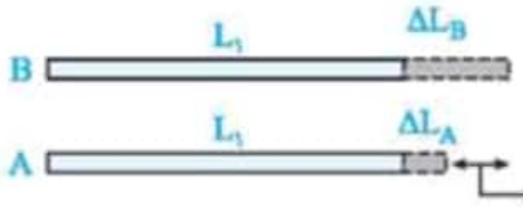
$$\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_۱} = \frac{L_۲}{L_۱} \times \frac{\alpha_۲}{\alpha_۱} \times \frac{\Delta\theta_۲}{\Delta\theta_۱} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{-۱۰۰}{-۱۰۰} = ۱$$

بنابراین میزان کاهش طول هر دو میله با یک‌دیگر برابر است.

۱ ۹۲۶ توجه کنید که جنس هر دو میله یکسان است، پس ضرایب انبساط طولی آن‌ها با هم برابر است. با استفاده از رابطهٔ $L_۲ = L_۱(۱ + \alpha\Delta\theta)$، برای مقایسهٔ طول ثانویهٔ دو میله می‌توان نوشت:

$$\frac{L_{۲A}}{L_{۲B}} = \frac{L_{۱A}\,(۱+\alpha\Delta\theta)}{L_{۱B}\,(۱+\alpha\Delta\theta)} = \frac{L_{۱A}}{L_{۱B}} \xrightarrow{L_{۱A} = ۲L_{۱B}} \frac{L_{۲A}}{L_{۲B}} = \frac{۲L_{۱B}}{L_{۱B}} = ۲ \Rightarrow L_{۲A} = ۲L_{۲B}$$

۲ ۹۲۷ با توجه به این‌که ضریب انبساط طولی میلهٔ B بزرگ‌تر از میلهٔ A است، بنابراین در اثر افزایش دمای معین، طول میلهٔ B بیشتر از A افزایش یافته و اختلاف طول دو میله با افزایش دمای $\Delta\theta$ عبارت است از:



$$L_{۱A} = L_{۱B} = L_۱ = ۲m\ ,\ \alpha_A = ۱۲ \times ۱۰^{-۶}\ \frac{۱}{^\circ C}\ ,\ \alpha_B = ۲۰ \times ۱۰^{-۶}\ \frac{۱}{^\circ C}\ ,\ \Delta\theta = ?$$

$$\Delta L_B - \Delta L_A = L_۱\alpha_B\Delta\theta - L_۱\alpha_A\Delta\theta = L_۱(\alpha_B - \alpha_A)\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف طول دو میله}: ۰/۸ \times ۱۰^{-۳} = ۲ \times (۲۰ - ۱۲) \times ۱۰^{-۶} \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۵۰\,^\circ C \text{ (میزان افزایش دما)}$$

۳ ۹۲۸ برای محاسبهٔ نسبت طول ثانویهٔ دو میله پس از افزایش دمای $\Delta\theta$ داریم:

$$\begin{cases} \text{طول میله بعد از انبساط}: L_۲ = L_۱(۱+\alpha\Delta\theta) \\ \text{تغییرات دما برای هر دو میله}: \Delta\theta = \Delta\theta' = \theta_۲ - \theta_۱ = ۲۵ - (-۵) = ۳۰\,^\circ C \\ \text{طول اولیهٔ هر دو میله برابر است.}: L_۱ = L'_۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{L'}{L} = \frac{L'_۱}{L_۱} \times \frac{۱+\alpha'\Delta\theta'}{۱+\alpha\Delta\theta} \Rightarrow \frac{L'}{L} = ۱ \times \frac{۱+۳۰\alpha'}{۱+۳۰\alpha} = \frac{۱+۳۰\alpha'}{۱+۳۰\alpha}$$

۴ ۹۲۹ با کمک گرفتن از رابطهٔ $L_۲ = L_۱(۱ + \alpha\Delta\theta)$ و محاسبهٔ طول دو میله در اثر افزایش دمای $۳۰\,^\circ C$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} L_{۲A} = L_{۱A}\,(۱ + \alpha_A\Delta\theta) = ۵۰(۱ + \alpha_A \times ۳۰) \\ L_{۲B} = L_{۱B}\,(۱ + \alpha_B\Delta\theta) = ۷۰(۱ + \alpha_B \times ۳۰) \end{cases} \xrightarrow{L_{۲B} - L_{۲A} = ۲۰cm} ۷۰(۱ + ۳۰\alpha_B) - ۵۰(۱ + ۳۰\alpha_A) = ۲۰cm$$

$$\Rightarrow ۷۰ + ۲۱۰۰\alpha_B - ۵۰ - ۱۵۰۰\alpha_A = ۲۰ \Rightarrow ۲۱۰۰\alpha_B = ۱۵۰۰\alpha_A \Rightarrow \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{۲۱۰۰}{۱۵۰۰} = \frac{۷}{۵}$$

www.gajmarket.com

نگاه مفهومی‌تر

در واقع می‌توان گفت تغییر طول دو میله با افزایش دمای $30^\circ C$ برابر بوده و به همین دلیل با این افزایش دما، اختلاف طول دو میله ثابت مانده است:

$$\Delta L_A = \Delta L_B \Rightarrow L_{1A}\alpha_A\Delta\theta = L_{1B}\alpha_B\Delta\theta \Rightarrow \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{L_{1B}}{L_{1A}} = \frac{7}{5}$$

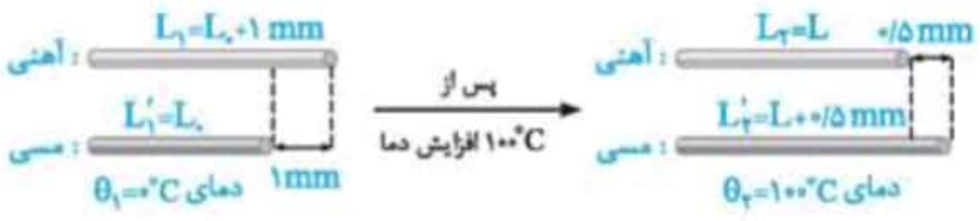
۹۳۰ ۱ طول ثانویهٔ یک میله پس از تغییر دما، از رابطهٔ $L_2 = L_1(1+\alpha\Delta\theta)$ به‌دست می‌آید. در این سؤال برای این‌که طول ثانویهٔ دو میله، پس از افزایش دما با هم برابر شود، می‌توان نوشت:

$$L_{1A} = L_{1B} - \frac{2}{100}L_{1B} = \frac{98}{100}L_{1B} \quad , \quad \alpha_A = 5\times10^{-5}\frac{1}{^\circ C} \quad , \quad \alpha_B = 10^{-5}\frac{1}{^\circ C}$$

$$L_{2B} = L_{2A} \Rightarrow L_{1B}(1+\alpha_B\Delta\theta) = L_{1A}(1+\alpha_A\Delta\theta) \xrightarrow{L_{1A}=0/98L_{1B}} L_{1B}(1+10^{-5}\Delta\theta) = 0/98L_{1B}(1+5\times10^{-5}\Delta\theta)$$

$$\Rightarrow 1+10^{-5}\Delta\theta = 0/98 + 4/9\times10^{-5}\Delta\theta \Rightarrow 3/9\times10^{-5}\Delta\theta = 0/02 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\times10^{-2}}{3/9\times10^{-5}} \approx 512^\circ C$$

۹۳۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به شکل‌های زیر توجه کنید:



رابطهٔ اصلی: $L_2 = L_1 + \alpha L_1\Delta\theta$

در ادامه با دو بار نوشتن رابطهٔ مطرح‌شده برای مس و آهن و کم کردن طرفین داریم:

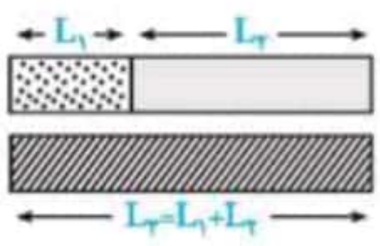
$$\begin{cases} \text{میلهٔ مسی}: L'_2 = L'_1 + L'_1\alpha_{\text{مس}}\Delta\theta \\ \text{میلهٔ آهنی}: L_2 = L_1 + L_1\alpha_{\text{آهن}}\Delta\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow L'_2 - L_2 = L'_1 - L_1 + (\alpha_{\text{مس}}L'_1 - \alpha_{\text{آهن}}L_1)\Delta\theta \Rightarrow 0/5 = -1 + (1/8\times10^{-5}\times L_0 - 1/2\times10^{-5}\times(L_0+1))\times100$$

$$\Rightarrow 1/5 = 0/6\times10^{-3}L_0 - 1/2\times10^{-3} \Rightarrow L_0 = 2502\,mm$$

طول اولیهٔ میلهٔ آهنی $= 2503mm = 2/503m$

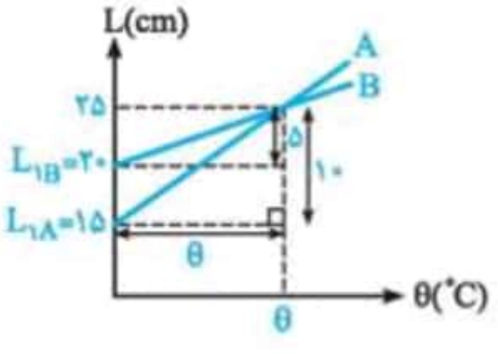
۹۳۲ ۳ برای رخ‌دادن خواستهٔ سؤال، باید مجموع افزایش طول میله‌های L_1 و L_2، برابر با افزایش طول میلهٔ L_3 شود و می‌توان نوشت:



$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta L_3 \Rightarrow L_1\alpha_1\Delta\theta + L_2\alpha_2\Delta\theta = L_3\alpha_3\Delta\theta$$

$$\Rightarrow L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2 = L_3\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2}{L_3}$$

۹۳۳ ۲ **روش اول:** می‌دانیم شیب نمودار طول میله برحسب دما، برابر است با $L_1\alpha$ (حاصل‌ضرب طول اولیهٔ میله در ضریب انبساط طولی آن). بنابراین برای این سؤال می‌توان نوشت:



$$L_{1A} = 15cm \quad , \quad L_{1B} = 20cm \Rightarrow \frac{L_{1A}}{L_{1B}} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \text{شیب نمودار A} = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{10}{\theta} = L_{1A}\times\alpha_A \\ \text{شیب نمودار B} = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{5}{\theta} = L_{1B}\times\alpha_B \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{L_{1A}}{L_{1B}}\times\frac{\alpha_A}{\alpha_B} \Rightarrow \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{8}{3}$$

($\frac{3}{4}$ روی $\frac{L_{1A}}{L_{1B}}$)

روش دوم: با توجه به نمودار رسم شده در روش اول، تغییر دمای دو میله یکسان بوده و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta L_A = (25-15) = L_{1A}\alpha_A\Delta\theta \\ \Delta L_B = (25-20) = L_{1B}\alpha_B\Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{3}{4}\times\frac{\alpha_A}{\alpha_B} \Rightarrow \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{8}{3}$$

۲ ۹۳۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۶ — **اساس عملکرد دماپا یا ترموستات** — (تست‌های ۹۳۴ و ۹۳۵)

در شکل مقابل، دو تیغه از دو فلز مختلف، با ضریب انبساط‌های متفاوت در سرتاسر طول خود به هم جوش داده شده‌اند. در این حالت یک دماپا یا ترموستات ساخته‌ایم:

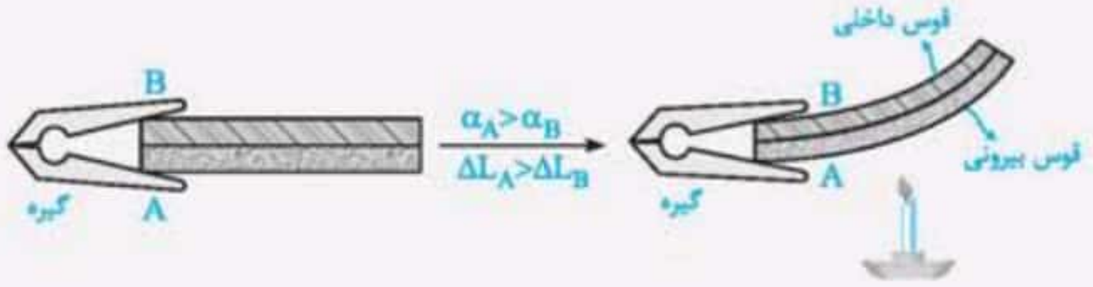


اگر ضریب انبساط طولی فلز A از B بیشتر باشد، نحوهٔ کار دماپا به‌صورت زیر است:

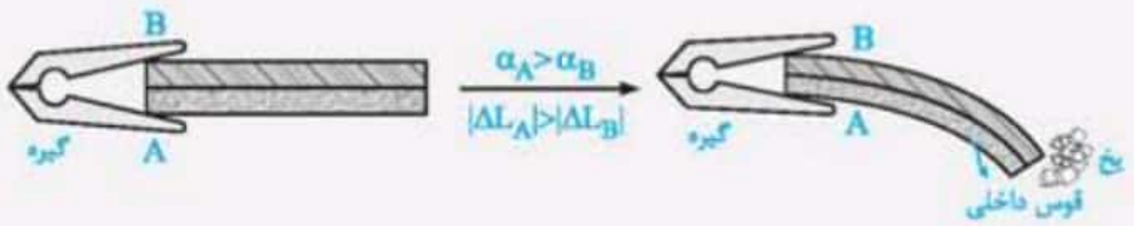
۱ اگر دمای هر دو تیغه افزایش یابد، تیغهٔ A که ضریب انبساط بزرگ‌تری دارد، افزایش طول بیشتری پیدا کرده و از آن‌جایی که دو فلز به هم جوش خورده‌اند، مجموعه خمیده می‌شود به‌طوری که فلز A قوس بیرونی (قوس با طول بیشتر) را تشکیل دهد تا عملاً افزایش طول A از B بیشتر باشد.

$$\uparrow \Delta L = L_1 \uparrow \alpha \Delta\theta$$

(یکسان ← L_1، یکسان ← α، $\Delta\theta$ → یکسان)



۲ اگر دمای هر دو تیغه کاهش یابد، در این صورت تیغهٔ A کاهش طول بیشتری دارد و ترموستات به‌گونه‌ای خمیده می‌شود که تیغهٔ A قوس داخلی (قوس با طول کم‌تر) را تشکیل دهد تا عملاً کاهش طول A بیشتر از B باشد. (مقدار کاهش طول A بیشتر از B است.)



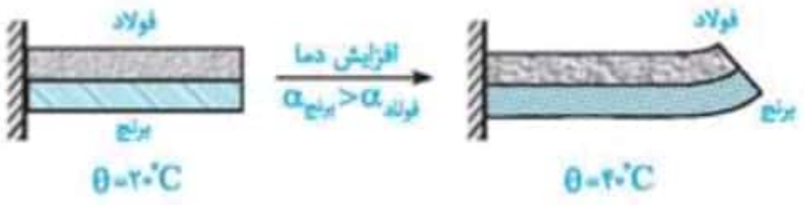
تذکر از ویژگی فوق، می‌توان برای دماسنجی و ساختن دماسنج استفاده کرد. به این نوع دماسنج‌ها، **دماسنج نواری دو فلزه** گفته می‌شود. در واقع در این نوع از دماسنج‌ها، توسط دو تیغهٔ فلزی با ضریب انبساط خطی مختلف که سرتاسر به هم جوش داده یا پرچ شده‌اند، استفاده شده است. هرگاه این نوار گرم یا سرد شود، عقربه چرخیده و دمای خاصی را نشان می‌دهد.



از آن‌جایی که ضریب انبساط خطی برنج، بیشتر از فولاد است ($\alpha_{برنج} > \alpha_{فولاد}$)، در اثر افزایش دما، میلهٔ برنجی افزایش طول بیشتری دارد. بنابراین با تغییر دما، تیغه خمیده شده و میلهٔ برنجی قوس بیرونی را تشکیل می‌دهد:

$$\uparrow \Delta L = L_1 \uparrow \alpha \Delta\theta$$

(یکسان ← L_1، یکسان ← α، $\Delta\theta$ → یکسان)



۳ ۹۳۵ به علت اختلاف ضریب‌های انبساط طولی دو فلز، با کاهش دما، میله خمیده می‌شود و میله‌ای که کاهش طول بیشتری داشته باشد (یعنی ضریب انبساط طولی آن بیشتر باشد)، قوس داخلی را تشکیل می‌دهد. بنابراین با توجه به شکل می‌توان فهمید که $\alpha_1 > \alpha_2$ است.



۱ ۹۳۶ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۷ — **انبساط سطحی اجسام** — (تست‌های ۹۳۶ تا ۹۴۶)

در شکل زیر، دمای ورقی با مساحت اولیهٔ A_1 را به اندازهٔ $\Delta\theta$ افزایش داده و مساحت آن به A_2 می‌رسد. میزان افزایش مساحت این صفحه برابر است با:



$$\Delta A = A_1 \gamma \Delta\theta = A_1 (\underbrace{2\alpha}_{\gamma}) \Delta\theta$$

A_1: مساحت اولیهٔ صفحه، γ: ضریب انبساط سطحی، $\Delta\theta$: میزان تغییر دمای صفحه

www.gajmarket.com

نکات مهم و کاربردی

۱ یکای ضریب انبساط سطحی یک جسم عبارت است از:

$$\gamma = \frac{\Delta A}{A_1 \Delta\theta} \Rightarrow \gamma \text{ واحد} \equiv \frac{m^2}{m^2 \times K} \equiv \frac{1}{K} \text{ (بر کلوین) یا } \frac{1}{^\circ C}$$

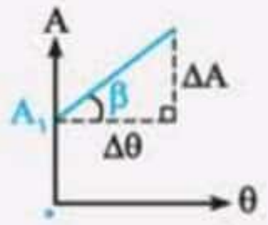
۲ هرچه مساحت اولیهٔ صفحه بزرگ‌تر باشد، میزان افزایش سطح آن نیز بزرگ‌تر است.

$$\Delta A \propto A_1$$

۳ مساحت ثانویهٔ جسم به‌سادگی از مجموع مساحت اولیه و میزان تغییر سطح جسم، به‌دست می‌آید:

$$A_2 = A_1 + \Delta A = A_1 + A_1(2\alpha)\Delta\theta = A_1(1 + 2\alpha\Delta\theta)$$

۴ نمودار سطح جسم برحسب دما به شکل مقابل است و شیب این نمودار عبارت است از:



$$\tan\beta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\Delta A}{\Delta\theta} = 2\alpha A_1$$

۵ نسبت درصد افزایش سطح یک جسم نسبت به سطح اولیهٔ آن عبارت است از:

$$\Delta A = A_1(2\alpha)\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta A}{A_1} = (2\alpha)\Delta\theta \xrightarrow{\text{برحسب درصد}} \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = (2\alpha)\Delta\theta \times 100$$

تمرین ۱ **دمای یک ورقهٔ فلزی را ۲۵۰ درجهٔ سلسیوس افزایش می‌دهیم، مساحت آن یک درصد افزایش می‌یابد. ضریب انبساط حجمی آن فلز در SI کدام است؟** (تجربی داخل ۸۴، ریاضی داخل ۹۳)

۱) 2×10^{-4} ۲) 2×10^{-5} ۳) 6×10^{-4} ۴) 6×10^{-5}

پاسخ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\Delta A}{A_1} = \frac{1}{100} \Rightarrow \text{مساحت ورق یک درصد افزایش یابد.} \\ \frac{\Delta A}{A_1} = 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow \text{از طرفی داریم:} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{100} = 2\alpha \times 250 \Rightarrow \text{ضریب انبساط طولی: } \alpha = 2\times10^{-5}\ /^\circ C$$

از سوی دیگر ضریب انبساط حجمی ورق تقریباً سه برابر ضریب انبساط طولی آن است $(\beta = 3\alpha)$ و می‌توان نوشت:

ضریب انبساط حجمی: $\beta = 3\alpha = 6\times10^{-5}\ /^\circ C$ (گزینهٔ ۴)

یکای پارامترهای ضریب انبساط طولی، سطحی و حجمی هر سه یکسان و معادل با «بر کلوین» یا «بر درجهٔ سلسیوس» است.

$$\alpha \text{ یکای} \equiv \gamma \text{ یکای} \equiv \beta \text{ یکای} \equiv \frac{1}{K} \equiv \frac{1}{^\circ C}$$

۹۳۷ ۴ با توجه به اطلاعات صورت سؤال، داریم:

$$\text{اختلاف دما: } \Delta\theta = 1^\circ C\ ,\ \frac{\Delta A}{A_1} = 10^{-5}\ ,\ \alpha = ?$$

$$\text{نسبت افزایش سطح به سطح اولیه: } \frac{\Delta A}{A_1} \xrightarrow[\gamma = 2\alpha]{\Delta A = A_1\gamma\Delta\theta} \frac{\Delta A}{A_1} = 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow 10^{-5} = 2\alpha \times 1 \Rightarrow \alpha = \frac{10^{-5}}{2} = 5\times10^{-6}\ /^\circ C$$

۹۳۸ ۴ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۷)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۹۳۹ ۴ برای حل این سؤال، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ ضریب انبساط طولی میلهٔ مسی

$$\begin{cases} \Delta L = L_0\alpha\Delta\theta \\ \frac{\Delta L}{L_0} = 0/17\% \Rightarrow \Delta L = \frac{17}{10000}L_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{17}{10000}L_0 = L_0\alpha \times 100 \Rightarrow \alpha = 17\times10^{-6}\frac{1}{K}$$

گام دوم: محاسبهٔ تغییر مساحت و مساحت ثانویهٔ ورقهٔ مسی

$$\text{ضریب انبساط سطحی: } \gamma = 2\alpha \Rightarrow \Delta A = A_0\gamma\Delta\theta = A_0 \times [2\times17\times10^{-6}] \times 100 \Rightarrow \Delta A = 0/0034A_0$$

$$A_{\text{ثانویه}} = A_0 + \Delta A = A_0 + 0/0034A_0 = 1/0034A_0$$

۹۴۰ ۱ ابتدا توجه کنید که مساحت ورق برحسب سانتی‌مترمربع خواسته شده است، پس نیازی به تبدیل واحد نیست و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} A_1 = 80\,cm^2 \\ \Delta\theta = 70 - 20 = 50^\circ C \xrightarrow{A_2 = A_1(1+2\alpha\Delta\theta)} A_2 = 80(1 + 2\times(5\times10^{-4})\times50) = 80(1 + 5\times10^{-2}) = 80(1/05) = 84\,cm^2 \\ \alpha = 5\times10^{-4}\frac{1}{K} \end{cases}$$

۴ ۹۴۱ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: شعاع اولیهٔ صفحه را با توجه به رابطهٔ $\Delta R = R_1\alpha\Delta\theta$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta R = R_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow +۴/۸ = R_1\times(۱/۲\times۱۰^{-۵})\times۴۰ \Rightarrow R_1 = ۱۰^{۴}\,mm = ۱۰^{۳}\,cm$$

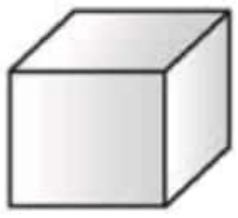
گام دوم: تغییر مساحت این صفحه را با استفاده از رابطهٔ $\Delta A = A_1(۲\alpha)\Delta\theta$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta A = A_1(۲\alpha)\Delta\theta \xrightarrow{A_1=\pi R_1^۲} \Delta A = \underbrace{۳\times(۱۰^{۳})^۲}_{\text{برحسب } cm^۲}\times(۲\times۱/۲\times۱۰^{-۵})\times۵۰ = ۳۶۰۰\,cm^۲$$

۱ ۹۴۲ اگر فرض کنیم در دمای صفر درجهٔ سلسیوس، مساحت صفحه برابر $A_۰$ و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ برحسب $^\circ C$ باشند، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\theta_۱ \text{ مساحت در دمای } : A_۱ = A_۰(۱+\gamma(\theta_۱-۰)) = A_۰(۱+۲\alpha\theta_۱)\\ \theta_۲ \text{ مساحت در دمای } : A_۲ = A_۰(۱+\gamma(\theta_۲-۰)) = A_۰(۱+۲\alpha\theta_۲)\end{cases} \Rightarrow \frac{A_۲}{A_۱} = \frac{۱+۲\alpha\theta_۲}{۱+۲\alpha\theta_۱} \xrightarrow[\text{بر عدد } ۲]{\text{تقسیم صورت و مخرج}} \frac{A_۲}{A_۱} = \frac{\frac{۱}{۲}+\alpha\theta_۲}{\frac{۱}{۲}+\alpha\theta_۱}$$

۲ ۹۴۳ طول ضلع این مکعب برابر $a = ۲۰cm = ۰/۲m$ است. بنابراین مساحت جانبی مکعب، ۶ برابر مساحت یک وجه مکعب بوده و برابر است با:



$$\text{مساحت جانبی} = ۶\times\underbrace{a^۲}_{\text{مساحت یک وجه}} = ۶\times(۰/۲)^۲ = ۰/۲۴\,m^۲$$

برای محاسبهٔ تغییر مساحت جانبی مکعب فلزی در اثر افزایش دما، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}A_۱ = ۰/۲۴\,m^۲\\ \Delta\theta = ۱۰۰\,^\circ C\\ \alpha = ۲\times۱۰^{-۵}\,K^{-۱}\end{cases} \xrightarrow{\gamma=۲\alpha} \Delta A = A_۱\gamma\Delta\theta = ۰/۲۴\times(۲\times۲\times۱۰^{-۵})\times۱۰۰ = ۰/۹۶\times۱۰^{-۳}\,m^۲ \Rightarrow \Delta A = ۰/۹۶\times۱۰^{-۳}\times(۱۰۰cm)^۲ = ۹/۶\,cm^۲$$

تذکر

رابطهٔ $\Delta A = A_۱\gamma\Delta\theta$ تنها برای محاسبهٔ افزایش مساحت یک ورق به‌کار نمی‌رود و می‌تواند برای محاسبهٔ افزایش سطح جانبی هر شکل دلخواهی استفاده شود.

۲ ۹۴۴ با توجه به مطالبی که تاکنون آموختیم (خلاصه نکات (۱۵)، تمرین ۱)، برای محاسبهٔ افزایش شعاع صفحه، کافیست افزایش طول میله‌ای به طول اولیهٔ R را به‌صورت زیر به‌دست بیاوریم:

رابطهٔ I : $\Delta R = R\alpha\Delta\theta$

از طرفی محیط یک دایره برابر $P = ۲\pi R$ می‌باشد، بنابراین برای محاسبهٔ تغییرات محیط دایره می‌توان نوشت:

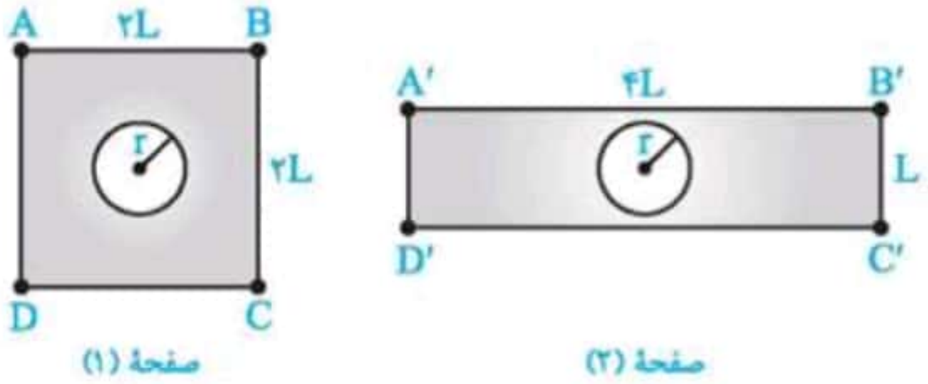
$$P = ۲\pi R \xrightarrow{\text{از طرفین } \Delta \text{ می‌گیریم}} \Delta P = ۲\pi(\Delta R) \xrightarrow{\text{رابطهٔ I}} \Delta P = ۲\pi R\alpha\Delta\theta$$

از سوی دیگر برای محاسبهٔ افزایش سطح این سوراخ، به عنوان یک ایدهٔ خوب می‌توان افزایش سطح یک دایرهٔ فلزی (مشابه با سوراخ روی ورق) را به‌دست آورد:



$$\Delta A = A\underbrace{(۲\alpha)}_{\text{ضریب انبساط سطحی}}\Delta\theta = \pi R^۲\times(۲\alpha)\times\Delta\theta = ۲\pi R^۲\alpha\Delta\theta$$

۴ ۹۴۵ دو صفحهٔ فلزی هم‌جنس هستند، بنابراین ضریب انبساط طولی آن‌ها با هم برابر است.



برای حل این سؤال، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) برای مقایسهٔ تغییر قطر دایره‌ها با توجه به رابطهٔ $\Delta r = r_۱\alpha\Delta\theta$ داریم:

$$\frac{\Delta r_۱}{\Delta r_۲} = \frac{r_۱\alpha\Delta\theta}{r_۲\alpha\Delta\theta} \xrightarrow{\text{قطر دایره‌ها : } r_۱=r_۲=r} \Delta r_۱ = \Delta r_۲$$

۲) با توجه به رابطهٔ $\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta$، تغییر عرض دو صفحه را مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta L_{BC}}{\Delta L_{B'C'}} = \frac{L_{BC}\times\cancel{\alpha}\times\cancel{\Delta\theta}}{L_{B'C'}\times\cancel{\alpha}\times\cancel{\Delta\theta}} = \frac{۲L}{L} = ۲ \Rightarrow \Delta L_{BC} = ۲\Delta L_{B'C'}$$

gajmarket.com

۳) به طور مشابه، تغییر طول ورق‌ها را می‌توانیم مقایسه کنیم:

$$\frac{\Delta L_{AB}}{\Delta L_{A'B'}} = \frac{L_{AB} \times \alpha \times \Delta\theta}{L_{A'B'} \times \alpha \times \Delta\theta} = \frac{2L}{4L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta L_{A'B'} = 2\Delta L_{AB}$$

۴) ابتدا مساحت اولیهٔ هر دو صفحه را با هم مقایسه می‌کنیم:

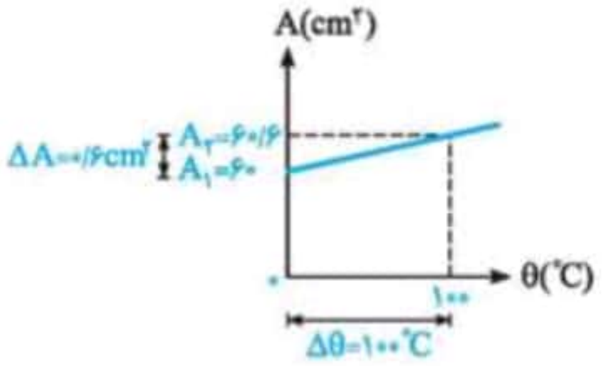
$$\begin{cases} A_1 = (2L)^2 - \pi r^2 = 4L^2 - \pi r^2 \\ A_2 = (4L \times L) - (\pi r^2) = 4L^2 - \pi r^2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2$$

حال برای مقایسهٔ تغییر مساحت دو صفحه، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \frac{A_1(2\alpha)\Delta\theta}{A_2(2\alpha)\Delta\theta} \xrightarrow{A_1=A_2} \Delta A_1 = \Delta A_2$$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴ ۹۴۶ با توجه به نمودار داده شده، در اثر افزایش دمای $\Delta\theta = 100 - 0 = 100\,^\circ C$، مساحت صفحه به اندازه $\Delta A = 60/6 - 60 = 0/6\,cm^2$ افزایش یافته است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$\Delta\theta = 100\,^\circ C\ ,\ \Delta A = 0/6\,cm^2\ ,\ A_1 = 60\,cm^2\ ,\ \alpha = ?$$

$$\Delta A = A_1(2\alpha)\Delta\theta \Rightarrow 0/6 = 60 \times 2\alpha \times 100 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}\,\frac{1}{K}$$

۳ ۹۴۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۸ — تغییر حجم یک جسم جامد (تست‌های ۹۴۷ تا ۹۶۱)

مشابه با نکاتی که در انبساط طولی و سطحی بیان کردیم، اگر حجم اولیهٔ یک ماده با ضریب انبساط خطی α برابر V_1 باشد، تغییرات حجم و حجم ثانویهٔ آن در اثر تغییر دمای $\Delta\theta$ به سادگی با کمک روابط زیر محاسبه می‌شود:

حجم ثانویه و $V_2 = V_1(1 + 3\alpha\Delta\theta)$: تغییرات حجم $\Delta V = V_1(\underbrace{3\alpha}_{\beta})\Delta\theta$

در ادامه می‌خواهیم برای درک بهتر شما عزیزان، دو تمرین نسبتاً مفهومی زیر را بررسی کنیم.

تمرین۱ در شکل مقابل، کرهٔ (۱) یک کرهٔ توپر و کرهٔ (۲) یک کرهٔ توخالی با حجم ظاهری و جنس یکسان هستند. اگر دمای هر دو کره را به اندازهٔ $\Delta\theta$ افزایش دهیم، افزایش حجم کدام کره بیشتر است؟

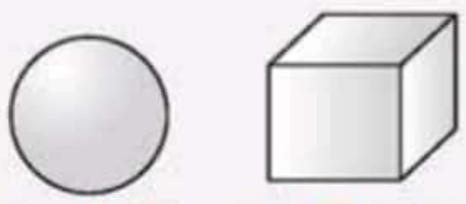


پاسخ میزان افزایش حجم دو کره وابسته به حجم اولیه، میزان تغییر دما و ضریب انبساط حجمی دو کره است. حجم اولیه و میزان تغییر دما با توجه به صورت سؤال برای دو کره یکسان است، با توجه به یکسان بودن جنس دو کره، α نیز برای آن‌ها یکسان است و در نتیجه افزایش حجم دو کره برابر است.

$$\Delta V = V_1(3\alpha)\Delta\theta$$

نتیجهٔ مهم: اگر میزان تغییر دما (یعنی $\Delta\theta$)، برای دو کرهٔ مطرح شده در این سؤال برابر باشد، افزایش حجم دو کره با یک‌دیگر برابر است.

یک موضوع جالب: اگر یک مکعب و یک کرهٔ هم‌جنس هر دو با حجم یکسان V_1 در اختیار داشته باشیم، با افزایش دمای آن‌ها به مقدار یکسان، در هر دو به اندازهٔ یکسان افزایش حجم خواهیم داشت، این موضوع یعنی افزایش حجم به شکل ماده بستگی ندارد.



$$\Delta V = V_1\beta\Delta\theta$$

تمرین۲ یک مکعب توپر و یک مکعب توخالی از مس موجود بوده و طول ضلع مکعب توپر α برابر مکعب توخالی است. اگر دمای هر دو مکعب را به اندازهٔ یکسان افزایش دهیم، تغییر حجم مکعب توپر چند برابر تغییر حجم ظاهری مکعب توخالی است؟

۱) 3α برابر ۲) کم‌تر از 3α برابر ۳) α^3 برابر ۴) کم‌تر از α^3 برابر

پاسخ با توجه به نتیجهٔ فوق، می‌دانیم تغییر حجم مکعب‌ها به توپر یا تو خالی بودن آن‌ها بستگی نداشته و تغییر حجم ظاهری، به حجم اولیه و میزان تغییر دما بستگی دارد، بنابراین می‌توان نوشت:

$V_1 = (\alpha L_1)^3$: حجم مکعب بزرگ، $V_1' = L_1^3$: حجم مکعب کوچک $\Rightarrow L_1$ = طول ضلع مکعب کوچک، $\beta = \beta', \Delta\theta$: دو مکعب هم‌جنس هستند

$$\Delta V = V_1\beta\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{V_1}{V_1'} = \alpha^3 \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

همان‌طور که در خلاصه نکات فوق مطرح شد، تغییر حجم یک جسم، به شکل جسم بستگی ندارد و مقدار آن از رابطهٔ $\Delta V = V_1(3\alpha)\Delta\theta$ به‌دست می‌آید. توجه داشته باشید که ضریب انبساط یک جسم، وابسته به جنس جسم است.

۴ ۹۴۸ برای محاسبهٔ تغییر حجم مکعب مستطیل، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{حجم اولیه: } V_1 = ۶\times ۱۰\times ۵ = ۳۰۰\,cm^۳ \;,\; \Delta\theta = ۵۵ - ۵ = ۵۰\,^\circ C,\; \alpha_{Fe} = ۱/۲\times ۱۰^{-۵}\,/\,K \Rightarrow \beta_{Fe} = ۳\alpha_{Fe} = ۳/۶\times ۱۰^{-۵}\,/\,K$$

$$\text{تغییر حجم مکعب مستطیل: } \Delta V = V_1\beta\Delta\theta = ۳۰۰\times ۳/۶\times ۱۰^{-۵}\times ۵۰ = ۰/۵۴\,cm^۳$$

۲ ۹۴۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به حجم‌های داده‌شده برای کره در دماهای $۲۰^\circ C$ و $۵۰^\circ C$، ضریب انبساط طولی این فلز را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta V = V_1\times(۳\alpha)\times\Delta\theta \Rightarrow \overbrace{(۴۰۰۵/۴ - ۴۰۰۰)}^{۵/۴} = ۴۰۰۰\times(۳\alpha)\times ۳۰ \Rightarrow \text{ضریب انبساط طولی: } \alpha = ۱/۵\times ۱۰^{-۵}\,\frac{۱}{^\circ C}$$

گام دوم (محاسبهٔ حجم کره در دمای $۷۰^\circ C$): دمای اولیه را $۲۰^\circ C$ و دمای ثانویه را $۷۰^\circ C$ در نظر می‌گیریم. سپس با توجه به رابطهٔ $\Delta V' = V_1(۳\alpha)\Delta\theta$ تغییرات حجم را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta V' = V_1\times(۳\alpha)\times\Delta\theta \xrightarrow{V_1 = ۴۰۰۰\,cm^۳} \text{افزایش حجم کره: } \Delta V' = ۴۰۰۰\times(۳\times ۱/۵\times ۱۰^{-۵})\times(۷۰ - ۲۰) = ۹\,cm^۳$$

$$\text{حجم کره در دمای } ۷۰^\circ C: V_۲ = \Delta V' + V_1 \Rightarrow V_۲ = ۹ + ۴۰۰۰ = ۴۰۰۹\,cm^۳$$

۲ ۹۵۰ برای محاسبهٔ تغییر حجم این قطعه فلز تحت افزایش دمای $\Delta\theta = ۱۰۰^\circ C$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1\beta\Delta\theta = V_1\times(۳\alpha)\Delta\theta \Rightarrow \Delta V = V_1\times(۳\times ۱۰^{-۵})\times ۱۰۰$$

$$\text{درصد افزایش حجم} = \frac{\Delta V}{V_1}\times ۱۰۰ = ۳\times ۱۰^{-۳}\times ۱۰۰ = ٪۰/۳$$

۴ ۹۵۱ در این سؤال، با توجه به این‌که میله را درون مقدار بسیار زیادی از مخلوط آب و یخ صفر درجهٔ سلسیوس قرار داده‌ایم، بنابراین دمای میله از $۲۰۰^\circ C$ به $۰^\circ C$ می‌رسد. پس برای محاسبهٔ حجم ثانویهٔ قطعه فلز می‌توان نوشت:

$$V_۲ = V_1(۱ + \overbrace{۳\alpha}^{\beta}\Delta\theta)$$

بنابراین نسبت $\frac{V_۲}{V_1}$ برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{V_۲}{V_1} = ۱ + ۳\alpha\Delta\theta = ۱ + ۳\times ۱۰^{-۵}\times(۰ - ۲۰۰) = ۱ - \frac{۶}{۱۰۰۰} = \frac{۹۹۴}{۱۰۰۰}$$

هشدار

بعضی از دانش‌آموزان با توجه به این‌که جسم موردنظر یک میله است، برای تغییر حجم آن از α استفاده می‌کنند، اما به‌طور کلی هر جسمی افزایش حجم دارد و برای محاسبهٔ افزایش حجم یک جسم جامد، همواره از ضریب $\beta = ۳\alpha$ استفاده می‌کنیم.

۳ ۹۵۲ برای محاسبهٔ تغییر حجم کره به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{قطر کره: } D = ۲۰\,cm \Rightarrow \text{شعاع کره: } r = \frac{D}{۲} = ۱۰\,cm \quad , \quad \text{حجم کره: } V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \simeq \frac{۴}{۳}\times ۳\times(۱۰)^۳ = ۴\times ۱۰^۳\,cm^۳$$

$$\text{تغییرات دما: } \Delta\theta_F = ۵۴^\circ F \xrightarrow{\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C} \Delta\theta(^\circ C) = \frac{۵}{۹}\times ۵۴ = ۳۰^\circ C \;,\; \text{ضریب انبساط طولی: } \alpha = ۱۷\times ۱۰^{-۶}\,\frac{۱}{K}$$

$$\Delta V = V_1(۳\alpha)\Delta\theta \Rightarrow \Delta V = ۴\times ۱۰^۳\times ۳\times ۱۷\times ۱۰^{-۶}\times ۳۰ = ۶/۱۲\,cm^۳$$

۲ ۹۵۳ با توجه به اندازهٔ تغییر طول این میله، ضریب انبساط خطی آن برابر است با:

$$\begin{cases}\Delta L = ۰/۰۱L_۰\\ \Delta L = L_۰\alpha\Delta\theta\end{cases} \Rightarrow ۰/۰۱L_۰ = L_۰\alpha\Delta\theta \Rightarrow \alpha = \frac{۰/۰۱}{\Delta\theta}$$

و تغییر حجم این میله برابر است با:

$$\text{ضریب انبساط حجمی: } \beta = ۳\alpha \Rightarrow \beta = \frac{۰/۰۳}{\Delta\theta}$$

$$\Delta V = V_۰\beta\Delta\theta = ۰/۰۳V_۰ \Rightarrow \text{حجم میله ۳ درصد افزایش می‌یابد.}$$

نگاه مفهومی‌تر

نسبت تغییر حجم به تغییر طول، در واقع همان نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ است.

gajmarket.com

۳ ۹۵۴ ابتدا با توجه به انبساط سطحی، حاصل $\alpha\Delta\theta$ را برای فلز محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\Delta A = (2\alpha)A_0\Delta\theta \\ \Delta A = 0/04A_0\end{cases} \Rightarrow 0/04A_0 = (2\alpha)A_0 \times \Delta\theta \Rightarrow \alpha\Delta\theta = 0/02$$

در ادامه تغییر حجم مکعب برابر است با:

$$\Delta V = (3\alpha)V_0\Delta\theta \Rightarrow \Delta V = 3V_0 \times (\alpha\Delta\theta) = 3V_0 \times 0/02 = 0/06V_0$$

بنابراین حجم مکعب ۶ درصد افزایش می‌یابد.

یه جور دیگه فکر کنیم: سطح جانبی مکعب ۴ درصد افزایش می‌یابد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\text{افزایش نسبی سطح جانبی مکعب}: \dfrac{\Delta A}{A_1} = \overset{\gamma}{(2\alpha)}\Delta\theta = 4\% \text{ یا } \dfrac{4}{100} \\ \text{افزایش نسبی حجم مکعب}: \dfrac{\Delta V}{V_1} = \overset{\beta}{(3\alpha)}\Delta\theta\end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{3\alpha}{2\alpha} \times \frac{\Delta A}{A_1} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{100} = \%6$$

۴ ۹۵۵ تغییرات شعاع و قطر با کمک رابطهٔ انبساط طولی محاسبه می‌شود و صرف‌نظر از توخالی یا توپر بودن، برابر است با: $\Delta R = R_1\alpha\Delta\theta$

از آن‌جایی که قطر خارجی، تغییر دما و جنس هر دو کره یکسان است، افزایش قطرهای خارجی دو کره برابر است.

تذکر

پس از این‌که هر دو کره با آب جوش به تعادل گرمایی رسیدند، دمای هر دو کره به $\theta_2 = 100^\circ C$ می‌رسد، حال اگر در سؤال دیگری دمای اولیهٔ دو کره یکسان نباشد، تغییر دمای دو کره نیز برابر نیست. در این‌صورت تغییر حجم و تغییر قطر دو کره برابر نمی‌باشد.

۱ ۹۵۶ همان‌طور که در سؤال قبل نیز گفته شد، افزایش شعاع از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید و با توجه به یکسان بودن R، α و $\Delta\theta$، برای هر دو کره برابر است.

$$\Delta R = R\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta R_B = \Delta R_A$$

از سوی دیگر با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، گرمای گرفته شده به جرم کره‌ها وابسته است و از آن‌جایی که جرم کرهٔ توپر بیشتر از جرم کرهٔ توخالی است $(m_B > m_A)$، می‌توان نوشت:

$$m_B > m_A \xrightarrow[\Delta\theta_A = \Delta\theta_B]{c_A = c_B} Q_B > Q_A$$

۳ ۹۵۷ **گام اول:** جرم کرهٔ توپر بیشتر از جرم کرهٔ توخالی است. با توجه به رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، با دادن گرمای یکسان به دو کره، دمای کرهٔ توخالی به میزان بیشتری نسبت به کرهٔ توپر افزایش می‌یابد.

$$\overset{\text{یکسان}}{Q} = \uparrow m \overset{\text{یکسان}}{c} \Delta\theta \downarrow \Rightarrow m_{\text{توپر}} > m_{\text{توخالی}} \Rightarrow \Delta\theta_{\text{توخالی}} > \Delta\theta_{\text{توپر}}$$

گام دوم: از طرفی می‌دانیم میزان افزایش شعاع، به‌صورت زیر بین دو کره مقایسه می‌شود:

$$\Delta R = R_1\alpha\Delta\theta \xrightarrow[\Delta\theta_{\text{توپر}} < \Delta\theta_{\text{توخالی}}]{R_1 \text{ و } \alpha \text{ ثابت}} \Delta R_{\text{توخالی}} > \Delta R_{\text{توپر}}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۹۵۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (یافتن دمای تعادل): برای محاسبهٔ دمای تعادل، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\theta_e = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2}{m_1c_1 + m_2c_2} = \frac{m \times c \times 95 + 9m \times 10c \times 4}{mc + 9m \times 10c} = 5^\circ C$$

گام دوم: (یافتن تغییر شعاع کره): برای محاسبهٔ تغییر شعاع کرهٔ تو خالی، داریم:

$$\Delta R = R \times \alpha_{\text{خطی}}\ \Delta\theta = R \times 10^{-5} \times (5 - 95) = -9 \times 10^{-4}R$$

$$\frac{\Delta R}{R} \times 100 = -9 \times 10^{-4} \times 100 = -\%0/09$$

۲ ۹۵۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به فرمول $Q = mc\Delta\theta$، تغییر دما را در دو حالت با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1c_1\Delta\theta_1}{m_2c_2\Delta\theta_2} \xrightarrow{Q_1 = Q_2 \text{ یکسان}} 1 = \frac{m_1}{m_2} \times 1 \times \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{m_2}{m_1} \xrightarrow[V_2 = \frac{1}{2}V_1]{m = \rho V} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{\rho \times \frac{1}{2}V_1}{\rho \times V_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\theta_2 = 2\Delta\theta_1$$

گام دوم: با توجه به فرمول $\Delta V = V(3\alpha)\Delta\theta$، برای مقایسهٔ تغییر حجم در دو حالت می‌توان نوشت:

$$\Delta V = V(3\alpha)\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta V'}{\Delta V} = \frac{V_2 \times 3\alpha \times \Delta\theta_2}{V_1 \times 3\alpha \times \Delta\theta_1} \xrightarrow[V_2 = \frac{1}{2}V_1]{\Delta\theta_2 = 2\Delta\theta_1} \frac{\Delta V'}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}V_1 \times 2\Delta\theta_1}{V_1 \times \Delta\theta_1} = 1$$

۲ ۹۶۰

تذکر

برای محاسبهٔ جرم کرهٔ توخالی، باید از حجم فلز به کار رفته در آن استفاده کرد.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$$

(V: حجم فلز به کار رفته)

گام اول: مقایسهٔ دو کره تحت گرمای یکسان:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow m_{\text{توپر}}\Delta\theta_{\text{توپر}} = m_{\text{توخالی}}\Delta\theta_{\text{توخالی}} \Rightarrow \rho V_{\text{توپر}} \times \Delta\theta_{\text{توپر}} = \rho V_{\text{توخالی}} \times \Delta\theta_{\text{توخالی}} \quad \text{رابطهٔ (۱):}$$

(Q: یکسان، c: یکسان)

گام دوم: مقایسهٔ تغییر حجم کرهٔ A و تغییر حجم فلز به کار رفته در B:

$$\Delta V = V\beta\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta V_{\text{توپر}}}{\Delta V_{\text{توخالی}}} = \frac{V_{\text{توپر}}\ \Delta\theta_{\text{توپر}}}{V_{\text{توخالی}}\Delta\theta_{\text{توخالی}}} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \frac{\Delta V_{\text{توپر}}}{\Delta V_{\text{توخالی}}} = ۱$$

دقت

در این سؤال، حجم V برای دو کره یکسان نمی‌باشد. برای کرهٔ توپر (A)، این حجم برابر حجم کل کره و برای کرهٔ توخالی (B)، برابر حجم فلز به کار رفته در آن است.

سؤال **در این سؤال خوب و مفهومی، اگر طراح مقایسهٔ تغییر حجم ظاهری دو کره را می‌پرسید، پاسخ چند بود؟**

پاسخ $\frac{۷}{۸}$

۱ ۹۶۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: مقایسهٔ جرم دو کره:

$$m = \rho V \xrightarrow{\rho\ \text{یکسان}} \frac{m_{\text{توخالی}}}{m_{\text{توپر}}} = \frac{V_{\text{توخالی}}}{V_{\text{توپر}}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi(۲۰^۳ - ۱۰^۳)}{\frac{۴}{۳}\pi \times ۲۰^۳} = \frac{۸۰۰۰ - ۱۰۰۰}{۸۰۰۰} = \frac{۷}{۸}$$

گام دوم: محاسبهٔ تغییر دمای دو کره:

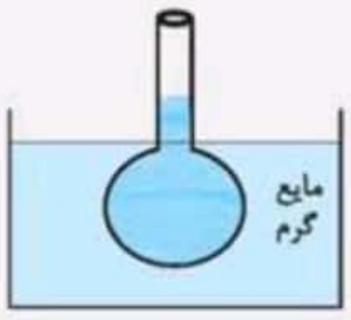
$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow{Q,c\ \text{یکسان}} ۱ = \frac{m_{\text{توپر}}}{m_{\text{توخالی}}} \times ۱ \times \frac{\Delta\theta_{\text{توپر}}}{\Delta\theta_{\text{توخالی}}} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_{\text{توپر}}}{\Delta\theta_{\text{توخالی}}} = \frac{۷}{۸}$$

گام سوم: برای مقایسهٔ تغییر قطر دو کره، با توجه به رابطهٔ انبساط طولی می‌توان نوشت:

$$\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \xrightarrow[\alpha\ \text{یکسان}]{L_{۱\text{توپر}} = L_{۱\text{توخالی}} = ۴۰\text{cm}} \frac{\Delta L_{\text{توپر}}}{\Delta L_{\text{توخالی}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{توپر}}}{\Delta\theta_{\text{توخالی}}} = \frac{۷}{۸}$$

۲ ۹۶۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۹ — انبساط ظاهری مایعات (تست‌های ۹۶۲ تا ۹۶۸)



فرض کنید که یک ظرف حاوی یک مایع را به آرامی گرم می‌کنیم (مثلاً مطابق شکل ظرف را درون یک مایع گرم‌تر قرار می‌دهیم.)

در این حالت مشاهده می‌شود که سطح مایع درون ظرف ابتدا پایین آمده و سپس شروع به بالا رفتن می‌کند تا جایی که در جایی بالاتر از سطح اولیهٔ آن بایستد.

نکات مهم و کاربردی

۱ در این حالت ابتدا خود ظرف در اثر گرما منبسط شده و حجم ظرف بیشتر می‌شود، به همین دلیل سطح مایع ابتدا پایین می‌آید.

۲ سپس با گرم شدن تدریجی مایع درون ظرف، مایع شروع به انبساط می‌کند و حجم آن افزایش می‌یابد و از آن‌جایی که اغلب میزان انبساط مایعات بیشتر از جامدات است، در نهایت سطح مایع بالاتر از سطح اولیهٔ آن قرار می‌گیرد.

۳ میزان انبساط واقعی مایع منهای انبساط حجمی ظرف، برابر با انبساط ظاهری مایع است.

(انبساط ظاهری مایع) + (انبساط حجمی ظرف) = انبساط واقعی مایع

$$\Delta V' = \Delta V_{\text{مایع}} - \Delta V_{\text{ظرف}} = V_{\text{مایع}}\beta_{\text{مایع}}\Delta\theta - V_{\text{ظرف}}(۳\alpha_{\text{ظرف}})\Delta\theta \quad \text{: انبساط ظاهری مایع}$$

$$\Delta V' = V_{\text{اولیه}}\Delta\theta(\beta_{\text{مایع}} - ۳\alpha_{\text{ظرف}}) \quad \text{: انبساط ظاهری مایع}$$

۴ در صورتی که در ابتدا ظرف از مایع لبریز باشد، انبساط ظاهری مایع برابر است با مقدار مایع سرریز شده از ظرف پس از انبساط.

gajmarket.com

در ادامه با حل یک تمرین، بر روی مفاهیم مطرح‌شده در این خلاصه نکات مسلط‌تر می‌شویم.

تمرین۱ **در دمای صفر درجهٔ سلسیوس حجم ظرف شیشه‌ای توسط یک لیتر جیوه کاملاً پر شده است. وقتی دمای مجموعه را به ۸۰ درجهٔ سلسیوس می‌رسانیم، $۱۲cm^۳$ جیوه از ظرف خارج می‌شود. اگر ضریب انبساط حجمی جیوه $۱/۸\times۱۰^{-۴}K^{-۱}$ باشد، ضریب انبساط خطی شیشه در SI چه‌قدر است؟** (ریاضی داخل ۸۶)

۱) $۱/۲\times۱۰^{-۴}$ ۲) $۱۰^{-۴}$ ۳) $۱۰^{-۵}$ ۴) ۳×۱۰^{-۵}

پاسخ همان‌طور که بیان کردیم، انبساط ظاهری جیوه، برابر است با حجم جیوه‌ای که از ظرف سرریز می‌شود، بنابراین داریم:

$$V_۱=۱Lit=۱۰۰۰cm^۳\ ,\ \text{ظاهری}\ \Delta V=۱۲cm^۳\ ,\ \Delta\theta=۸۰-۰=۸۰^\circ C,\ \beta_{\text{جیوه}}=۱/۸\times۱۰^{-۴}K^{-۱},\ \alpha_{\text{شیشه}}=?\ :\ \text{حجم ظرف}$$

$$\Delta V=V_۱\Delta\theta(\beta_{\text{جیوه}}-۳\alpha_{\text{شیشه}})\Rightarrow ۱۲=۱۰۰۰\times۸۰\times(۱/۸\times۱۰^{-۴}-۳\alpha_{\text{شیشه}})\Rightarrow ۳\alpha_{\text{شیشه}}=۳\times۱۰^{-۵}K^{-۱}\Rightarrow \alpha_{\text{شیشه}}=۱۰^{-۵}K^{-۱}$$ (گزینهٔ ۳)

با توجه به توضیحات خلاصه نکات فوق، با گرم کردن ظرف محتوی مایع، ابتدا در اثر انبساط ظرف، سطح مایع پایین می‌آید (زیرا ابتدا انبساط جسم جامد آغاز می‌شود)، ولی با گرم شدن مایع و انبساط آن، به‌تدریج سطح مایع بالا می‌آید تا جایی‌که بالاتر از سطح اولیه می‌ایستد.

۳ ۹۶۳ گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا در حالت کلی تا زمانی‌که به هر ماده از جمله جامدات، گرما داده شود و دمای آن بالا رود، انبساط آن‌ها ادامه می‌یابد.

تذکر

انبساط جامدات (به علت نزدیکی مولکول‌های سازندهٔ آن‌ها به هم) معمولاً زودتر از مایعات شروع می‌شود و هم‌چنین ضریب انبساط حجمی مایعات معمولاً بیشتر از ضریب انبساط حجمی جامدات است.

۴ ۹۶۴ افزایش حجم واقعی هر ماده، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$V_۱=۱Lit=۱۰۰۰cm^۳\ ,\ \Delta\theta=۲۵^\circ C\ ,\ \Delta V=۶cm^۳$$

$$\Delta V=V_۱\beta\Delta\theta\Rightarrow ۶=۱۰۰۰\times\beta\times۲۵\Rightarrow \beta=۲/۴\times۱۰^{-۴}\ ^\circ C^{-۱}\ :\ \text{ضریب انبساط مطلق مایع}$$

هشدار

انبساط واقعی مایع را با موضوع انبساط ظاهری مایع اشتباه نگیرید.

۲ ۹۶۵ برای حل این سؤال، کافی است از رابطهٔ $\Delta V=V_۱\beta\Delta\theta$ استفاده کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_۱=۵۵lit\ ,\ \beta=۱۰^{-۳}\frac{۱}{^\circ C}\ ,\ \Delta\theta=\theta_۲-\theta_۱=۴۰-۱۲=۲۸^\circ C\ ,\ \Delta V=?$$

$$\Delta V=۵۵\times۱۰^{-۳}\times(۴۰-۱۲)=۱/۵۴lit\ :\ \text{حجم سرریز شده از مخزن}$$

۳ ۹۶۶ با افزایش دما، حجم ظرف و حجم گلیسرین هر دو افزایش می‌یابند. از آن‌جایی که ضریب انبساط حجمی گلیسرین، بیشتر از ضریب انبساط حجمی شیشه است ($\beta_{\text{گلیسرین}}>۳\alpha_{\text{شیشه}}$)، بنابراین افزایش حجم گلیسرین، بیشتر از افزایش حجم ظرف بوده و مقداری گلیسرین از ظرف بیرون می‌ریزد.

بنابراین می‌توان نوشت:

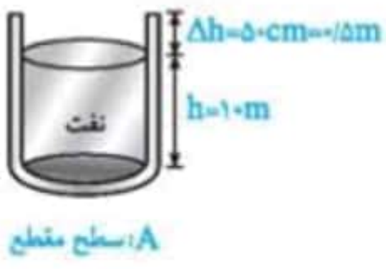
$$\Delta V_{\text{ظاهری}}=\Delta V_{\text{مایع}}-\Delta V_{\text{ظرف}}=V_۱(\beta_{\text{مایع}}-۳\alpha_{\text{شیشه}})\Delta\theta\ :\ \text{حجم گلیسرین سرریز شده از ظرف}$$

$$\Rightarrow \Delta V_{\text{ظاهری}}=۲۰۰\times(۴۹\times۱۰^{-۵}-۳\times۹\times۱۰^{-۶})\times(۷۰-۲۰)=۴/۶۳cm^۳$$

با توجه به این‌که تغییر حجم مایع از تغییر حجم ظرف بیشتر است، پس $۴/۶۳cm^۳$ مایع از ظرف بیرون می‌ریزد.

۳ ۹۶۷ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۹)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۹۶۸ با توجه به شکل مقابل و اطلاعات داده شده در صورت سؤال، برای سرریز شدن نفت از ظرف، کافیست نفت افزایش حجم پیدا کرده و به میزان $\Delta h=۵۰cm$ از ظرف بالا بیاید (دقت شود که از انبساط ظرف صرف‌نظر شده است.) بنابراین می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} V_۱=\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=Ah=۱۰A: \text{حجم اولیهٔ نفت} \\ \Delta V=A\Delta h=۰/۵A: \text{میزان افزایش حجم نفت} \end{cases},\ \beta=۱۰^{-۴}K^{-۱}\ :\ \text{ضریب انبساط حجمی نفت},\ \theta_۱=-۱۰^\circ C,\ \theta_۲=?$$

$$\Delta V=V_۱\beta\Delta\theta\Rightarrow ۰/۵\cancel{A}=۱۰\cancel{A}\times۱۰^{-۴}\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=۵۰۰^\circ C\Rightarrow\theta_۲=\theta_۱+\Delta\theta=-۱۰+۵۰۰=۴۹۰^\circ C\ :\ \text{میزان انبساط نفت}$$

کمی دقت

در این سؤال اگر از انبساط ظرف صرف‌نظر نمی‌شد، برای سرریزشدن نفت، انبساط ظاهری نفت باید فضای خالی ظرف را جبران کند (یعنی باید از ضریب انبساط (ظرف β - نفت ۳α) برای حل سؤال استفاده می‌کردیم).

۱ ۹۶۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

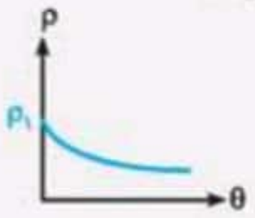
خلاصه نکات ۲۰ — **چگالی جسم جامد** — (تست‌های ۹۶۹ تا ۹۷۴)

می‌دانیم که در اثر تغییر دما، جرم یک ماده تغییر نمی‌کند، بنابراین طبق رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، چگالی با حجم رابطهٔ معکوس دارد و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V = V_1(1+\beta\Delta\theta) \\ \rho = \frac{m}{V} \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V_1(1+\beta\Delta\theta)} \xrightarrow{\rho_1 = \frac{m}{V_1}} \boxed{\rho = \frac{\rho_1}{1+\beta\Delta\theta}}$$

چگالی: $\rho \propto \frac{1}{1+\beta\Delta\theta}$

نتیجه به‌طور کلی نمودار چگالی برحسب دما برای یک جسم جامد، به‌صورت یک منحنی هموگرافیک است:



با افزایش دما $\Rightarrow V \uparrow \Rightarrow \rho \downarrow$

آشنایی با یک ایده مهم: در این قسمت می‌خواهیم با یک ابتکار ساده، رابطهٔ چگالی (ρ) را کمی ساده‌تر کنیم. به‌همین منظور اگر صورت و مخرج رابطهٔ فوق را در $(1-\beta\Delta\theta)$ که همان مزدوج عبارت مخرج است ضرب کنیم، داریم:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{(1+\beta\Delta\theta)} \times \frac{(1-\beta\Delta\theta)}{(1-\beta\Delta\theta)} = \frac{\rho_1}{1-(\beta\Delta\theta)^2}(1-\beta\Delta\theta) \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \rho_1(1-\beta\Delta\theta)}$$

این عبارت ناچیز است.

رابطهٔ فوق برای محاسبهٔ تغییر چگالی با دما، در کتاب درسی عنوان شده است. از این رو برای مسائل محاسباتی تغییر چگالی با دما، از این رابطه استفاده می‌کنیم (دقت شود که اگر به‌طور مثال $\beta = 10^{-5}$ و $\Delta\theta = 100^\circ C$ باشد $(\beta\Delta\theta)^2$ برابر 10^{-6} می‌شود که در مقایسه با عدد یک در مخرج قابل صرف‌نظر کردن است).

نتیجهٔ مهم: اگر دمای جسمی به اندازهٔ $\Delta\theta$ افزایش یابد، چگالی آن به اندازهٔ $\Delta\rho = -\rho_1\beta\Delta\theta$ کاهش می‌یابد.

تمرین **چگالی یک جسم فلزی در دمای صفر درجهٔ سلسیوس $12\,gr/cm^3$ است. چگالی جسم تقریباً در چه دمایی برحسب سلسیوس به $11/95\,gr/cm^3$ می‌رسد؟ (ضریب انبساط طولی جسم فلزی $\frac{1}{K}$ $1/5\times10^{-5}$ است.)**

۱) ۲۶/۶ ۲) ۴۶/۶ ۳) ۵۶/۶ ۴) ۹۳

پاسخ با کمک گرفتن از رابطهٔ $\Delta\rho = -\rho_1\beta\Delta\theta$، می‌توان نوشت:

$$\rho_1 = 12\,gr/cm^3 \;,\; \rho_2 = 11/95\,gr/cm^3 \Rightarrow \Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = -0/05\,gr/cm^3$$

$$\Delta\rho = -\rho_1(3\alpha)\Delta\theta \Rightarrow -0/05 = -12\times3\times1/5\times10^{-5}\times\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{0/05}{36\times1/5\times10^{-5}} = \frac{5000}{36\times1/5} \approx 93^\circ C$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \xrightarrow{\theta_1 = 0^\circ C} 93 = \theta_2 - 0 \Rightarrow \theta_2 = 93^\circ C \quad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

با توجه به خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱ ۹۷۰ با توجه به مطالب مطرح شده در خلاصه نکات (۲۰)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲ ۹۷۱ با افزایش دما، حجم جیوه اندکی زیادتر شده ولی جرم ثابت می‌ماند، بنابراین چگالی آن اندکی کاهش می‌یابد.

$$\downarrow \rho = \frac{\overset{\text{ثابت}}{m}}{V\uparrow}$$

۲ ۹۷۲ همان‌طور که می‌دانیم با افزایش دما، چگالی جسم کاهش می‌یابد و با کمک گرفتن از رابطهٔ $\rho_2 = \rho_1(1-\beta\Delta\theta)$ می‌توان نوشت:

$$\rho_2 = \rho_1(1-\beta\Delta\theta) \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = (1-\beta\Delta\theta) = 1-(3\alpha)\Delta\theta \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1-3\times2\times10^{-5}\times250 = 1-\frac{15}{1000} = 1-\frac{3}{200} = \frac{197}{200}$$

۲ ۹۷۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: افزایش طول میله، ۰/۱ درصد طول اولیه است و از روی این داده، حاصل $\alpha\Delta\theta$ عبارت است از:

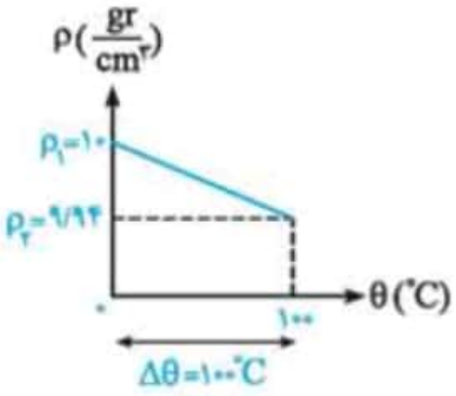
$$\begin{cases} \frac{\Delta L}{L_0} = 0/1\% = \frac{1}{1000} \\ \Delta L = L_0\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \alpha\Delta\theta = \frac{1}{1000}$$

گام دوم: با افزایش دما، چگالی ماده کاهش می‌یابد (گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست است) و می‌توان نوشت:

$$\Delta\rho = -\rho\beta\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta\Delta\theta = -3\overset{0/001}{\boxed{\alpha\Delta\theta}} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = -0/003 = -0/3\%$$

این موضوع یعنی چگالی ماده، ۰/۳ درصد کاهش می‌یابد.

gajmarket.com



۹۷۴ ۲ با توجه به رابطهٔ $\Delta\rho = -\rho_1 \times (3\alpha) \times \Delta\theta$ و داده‌های روی نمودار می‌توان نوشت:

$$\Delta\rho = -\rho_1 \times (3\alpha)\Delta\theta \Rightarrow 9/94 - 10 = -10 \times 3\alpha \times 100 \Rightarrow \alpha = 2\times10^{-5}\ \frac{1}{^\circ C}$$ ضریب انبساط طولی

$$\Rightarrow 2\alpha = 2\times(2\times10^{-5}) = 4\times10^{-5}\ \frac{1}{^\circ C}$$ ضریب انبساط سطحی:

توجه داشته باشید که ضریب انبساط سطحی دو برابر ضریب انبساط طولی می‌باشد.

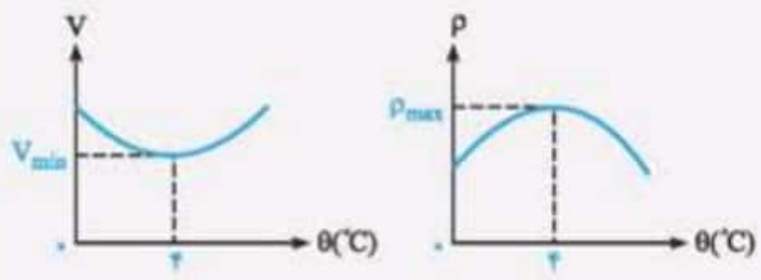
۹۷۵ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۱ — انبساط غیرعادی آب (تست‌های ۹۷۵ تا ۹۸۳)

اکثر مواد، با افزایش دما منبسط و با کاهش دما دچار کاهش حجم می‌شوند، اما اگر آبی را به تدریج با گرم کردن از دمای صفر درجهٔ سلسیوس، به دمای $4^\circ C$ برسانیم، حجم آن کاهش و چگالی آن افزایش می‌یابد.

$$\uparrow(\rho) = \frac{m}{(V)\downarrow}$$

اگر دمای آب هم‌چنان افزایش یابد، پس از $4^\circ C$ حجم آن شروع به افزایش می‌کند.



نکات مهم و کاربردی

۱ به‌طور تقریبی، نمودار تغییر حجم و چگالی مقدار معینی آب به‌صورت مقابل است:

۲ شکسته شدن حوض آب یخ، ترکیدن لوله‌ها در اثر یخ زدن و غوطه‌ور شدن یخ روی آب، نمودهای طبیعی از پدیدهٔ انبساط غیرعادی آب هستند.

۳ اساس کار دماسنج‌های جیوه‌ای و الکلی، افزایش حجم مایع (انبساط مایع) با افزایش دما است؛ ولی از آن‌جایی که در بازهٔ صفر تا $4^\circ C$ تغییرات حجم آب با دما منظم نیست، آب مادهٔ مناسبی برای دماسنجی در این محدوده نیست. از طرفی گرمای ویژهٔ آب نسبتاً زیاد است و این موضوع نیز نقطهٔ ضعف دیگری برای آب به‌عنوان مادهٔ دماسنجی محسوب می‌شود (چرا؟).

۴ کم‌ترین حجم و بیشترین چگالی آب در دمای ۴ درجهٔ سلسیوس اتفاق می‌افتد.

بحث دقیق‌تر در مورد انبساط آب

برای بررسی دقیق‌تر در مورد انبساط غیرعادی آب، به موارد زیر توجه کنید:

۱ تغییر حجم غیرعادی آب است که موجب می‌شود دریاچه‌ها به جای این‌که از پایین به بالا یخ بزنند از بالا یخ بزنند.

۲ وقتی دمای سطح آب مثلاً از $10^\circ C$ کمی کم‌تر شود، حجم آب موجود در سطح دریاچه کاهش یافته و در نتیجه چگالی آب موجود در سطح، نسبت به آب زیر خود افزایش می‌یابد و این آب پایین می‌رود.

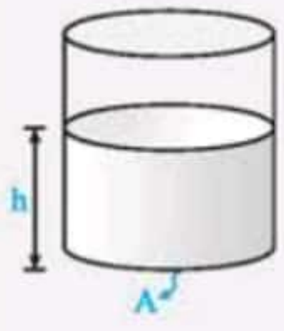
۳ این رفتار تا رسیدن به دمای $4^\circ C$ ادامه می‌یابد. ولی همان‌طور که دیدیم در دمای پایین‌تر از $4^\circ C$ انبساط آب غیرعادی بوده و حجم آب افزایش و در نتیجه چگالی آن کاهش می‌یابد. یعنی سرد شدن بیشتر آب موجب می‌شود که چگالی آب سطح دریا نسبت به آب زیر آن کم‌تر شود و در نتیجه در سطح باقی بماند تا این‌که یخ بزند.

۴ بنابراین در حالی‌که آب زیر دریاچه هنوز مایع است و دمایی بیش از صفر درجه دارد، سطح آب یخ می‌زند.

۵ اگر آب دریاچه‌ها از پایین به بالا یخ می‌زد، اثرات زیست‌محیطی زیان‌بار فراوانی در پی داشت و حیات گیاهی و جانوری در عمق دریاچه‌ها از بین می‌رفت. این موضوع به نوعی نشان‌دهندهٔ شاهکار خالق هستی، برای حفظ بقاء موجودات زنده در دریا است.

۶ وجود لایهٔ یخ در سطح دریاچه مانند یک عایق گرمایی عمل می‌کند و مانع سرد شدن آب در عمق دریاچه می‌شود.

تمرین۱ در ظرف مقابل که انبساط ظرف ناچیز است، اگر دمای آب را از $2^\circ C$ به $6^\circ C$ برسانیم، فشار وارد بر کف ظرف چگونه تغییر می‌کند؟



پاسخ نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع برابر وزن مایع درون ظرف است و در نتیجه فشار وارد بر کف ظرف از طرف مایع برابر است با:

$$P = \frac{mg}{A}$$

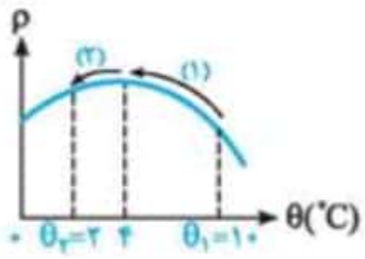
اگر مایع را گرم کنیم، با صرف‌نظر کردن از انبساط کف ظرف، فشار وارد بر کف ظرف ثابت می‌ماند، زیرا جرم مایع ثابت است. این تمرین، سؤال پرتکراری در کنکور محسوب می‌شود.

$$\overset{\text{ثابت}}{(P)} = \frac{\overset{\text{ثابت}}{(mg)}}{\underset{\text{ثابت}}{(A)}}$$

با توجه به خلاصه نکات فوق تنها عبارت مطرح شده در گزینهٔ (۴) درست است. دقت شود که انبساط غیرعادی آب، به دلیل گرمای ویژهٔ بالای آن نمی‌باشد.

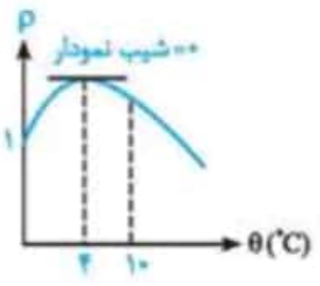
۳ ۹۷۶ ابتدا دماهای داده شده را به درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} T_1 = ۲۸۳\,K \Rightarrow \theta_1 = ۲۸۳ - ۲۷۳ = ۱۰^\circ C \\ T_2 = ۲۷۵\,K \Rightarrow \theta_2 = ۲۷۵ - ۲۷۳ = ۲^\circ C \end{cases}$$



با توجه به نمودار مقابل که تغییرات چگالی آب را برحسب دما نشان می‌دهد، از دمای $۱۰^\circ C$ تا $۴^\circ C$ چگالی آب افزایش و از دمای $۴^\circ C$ تا $۲^\circ C$ چگالی آن کاهش می‌یابد و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴ ۹۷۷ نمودار مقابل، تغییرات چگالی آب برحسب دما را نشان می‌دهد. با توجه به نمودار، کم‌ترین تغییرات چگالی آب نسبت به دما (همان شیب نمودار)، در دمای $۴^\circ C$ رخ می‌دهد. برای حل این سؤال، کافی است این دما را برحسب درجهٔ فارنهایت محاسبه کنیم:



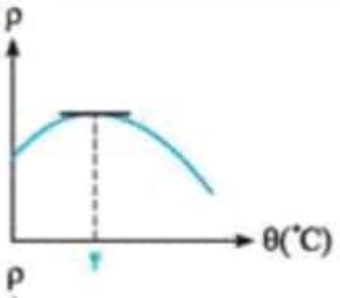
$$\theta_F = \frac{۹}{۵}\theta_C + ۳۲ \xrightarrow{\theta_C = ۴^\circ C} \theta_F = \frac{۹}{۵} \times ۴ + ۳۲ = ۳۹/۲^\circ F$$

تذکر

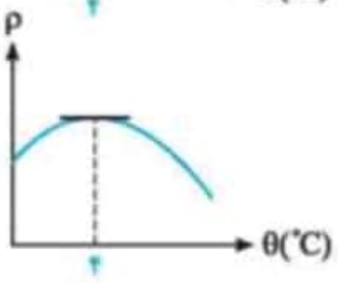
در واقع کمترین تغییرات چگالی آب نسبت به تغییرات دما، مربوط به زمانی است که شیب نمودار $\rho - \theta$ کمترین مقدار باشد.

۳ ۹۷۸ با توجه به مطالب ارائه‌شده در خلاصه نکات (۲۱)، گزینهٔ (۳) عبارت نادرستی بوده و پاسخ این سؤال است.

۲ ۹۷۹ تغییرات جرم حجمی (چگالی) در هر دما، برابر با شیب نمودار $\rho - \theta$ در آن نقطه است. با توجه به نمودار مقابل مشخص است که کم‌ترین تغییرات چگالی در دمای ۴ درجهٔ سلسیوس رخ می‌دهد و مقدار آن برابر با صفر است.



۳ ۹۸۰ از بین عبارت‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۳) درست است. در دمای $۴^\circ C$ برای آب $\beta = ۰$ است و با تغییر جزئی دما، حجم و در نتیجه چگالی تغییر نمی‌کند. این موضوع از روی نمودار ρ برحسب θ نیز مشخص است:



۱ ۹۸۱ این سؤال یکی از سؤالات ترکیبی و بسیار مهم این فصل است. برای حل، ابتدا باید ببینیم که با گرمای داده شده، دمای آب چه‌قدر افزایش می‌یابد:

$$c_{آب} = ۴۲۰۰\,J/kg.^\circ C\ ,\ m = ۱۰۰gr = ۰/۱kg\ ,\ Q = ۱۶۸۰\,J$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۱۶۸۰ = ۰/۱ \times ۴۲۰۰ \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۴^\circ C \xrightarrow{\theta_1 = ۰^\circ C} \theta_2 = ۴^\circ C$$

بنابراین دمای آب از صفر درجهٔ سلسیوس به ۴ درجهٔ سلسیوس می‌رسد و می‌دانیم برای دماهای کم‌تر از ۴ درجهٔ سلسیوس با افزایش دما، حجم آب کاهش می‌یابد.

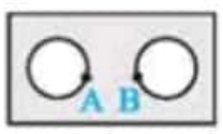
۴ ۹۸۲ با افزایش دما از $۲۰^\circ C$ تا $۵۰^\circ C$، حجم آب زیاد شده و از آن‌جایی که سطح مقطع استوانه ثابت است، ارتفاع آب زیاد می‌شود. از طرفی همان‌طور که در خلاصه نکات (۲۱) نیز گفته شد، با ثابت ماندن سطح مقطع استوانه، فشار وارد بر کف استوانه ثابت می‌ماند (چرا؟).

تذکر

به‌عبارت دیگر می‌توان گفت از آن‌جایی که فشار ناشی از مایعات برابر با $P = \rho gh$ است، با افزایش دما به همان نسبت که چگالی تغییر می‌کند، ارتفاع مایع نیز در جهت معکوس تغییر می‌کند و در نهایت فشار ثابت می‌ماند.

۲ ۹۸۳ نیروی وارد بر کف لوله برابر وزن آب موجود در لوله است که چون با تغییر دما وزن آب تغییر نمی‌کند (با تغییر دما جرم آب تغییر نمی‌کند)، پس نیروی وارد بر کف لوله تغییر نخواهد کرد.

۲ ۹۸۴ گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا در اثر گرما، فاصلهٔ هر دو نقطهٔ دلخواه از جمله نقاط A و B افزایش می‌یابد، بنابراین دو سوراخ از هم دور می‌شوند.

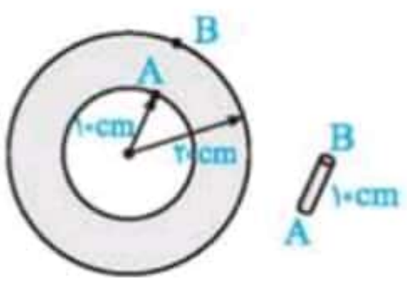


بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) طول مستطیل دو برابر عرض آن است، بنابراین با گرم کردن ورق، افزایش طول ورق دو برابر افزایش عرض آن است.

۳ و ۴) مساحت و قطر هر دو سوراخ با گرم کردن ورق افزایش می‌یابد.

۱ ۹۸۵ تغییر فاصلهٔ بین هر دو نقطه از جمله نقاط A و B تابع انبساط خطی است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$L_{AB} = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰cm = ۰/۱m,\ \gamma = ۳ \times ۱۰^{-۵}\frac{۱}{K} \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{۲} = ۱/۵ \times ۱۰^{-۵}\frac{۱}{K},\ \Delta\theta = ۲۰^\circ C$$

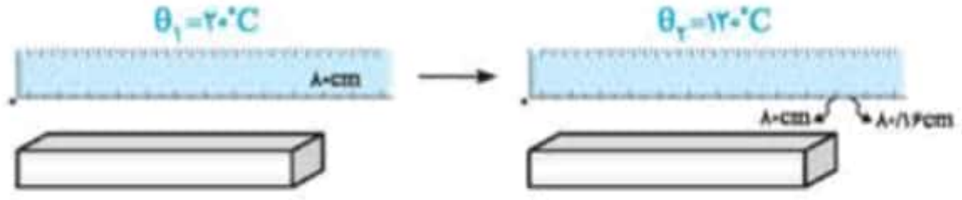
$$\Delta L_{AB} = L_{AB}\alpha\Delta\theta = ۰/۱ \times ۱/۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۲۰ = ۳ \times ۱۰^{-۵}\,m = ۰/۰۳\,mm$$

دقت

در واقع برای محاسبهٔ افزایش فاصلهٔ بین نقاط A و B، یک خط‌کش فلزی فرضی بین نقاط A و B درنظر گرفته‌ایم.

gajmarket.com

۱ ۹۸۶ در دمای $20^\circ C$ طول نوار پلاستیکی $80/00cm$ خوانده شده است. با توجه به صورت سؤال اگر دمای محیط به $120^\circ C$ برسد $(\Delta\theta = 120 - 20 = 100^\circ C)$، تغییر طول نوار پلاستیکی ظاهراً $0/16cm$ است (از $80/00cm$ به $80/16cm$ رسیده است) در حالی‌که با گرم کردن مجموعه، طول $80cm$ از خطکش که در مرحلهٔ قبل با آن نوار را اندازه‌گیری کرده‌ایم نیز افزایش یافته است و می‌توان گفت:



$$\Delta L_{\text{نوار پلاستیکی}} = \underbrace{\Delta L_{\text{خطکش}}}_{\text{از طول خطکش } 80cm} + 0/16cm$$

$$80 \times \alpha_{\text{نوار پلاستیکی}} \times 100 = 80 \times \alpha_{Al} \times 100 + 0/16 \Rightarrow 80(\alpha_{\text{نوار پلاستیکی}} - \alpha_{Al}) \times 100 = 0/16$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{نوار پلاستیکی}} = \frac{0/16}{80 \times 100} + \alpha_{Al} = 2 \times 10^{-5} + 24 \times 10^{-6} = 20 \times 10^{-6} + 24 \times 10^{-6} = 44 \times 10^{-6}\ \frac{1}{K}$$

۲ ۹۸۷ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ میزان گرمای تولیدشده در ۸ دقیقه:

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = Pt \Rightarrow Q = 100 \times 8 \times 60 = 48 \times 10^3\ J$$

گام دوم: محاسبهٔ افزایش دمای ناشی از گرما:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{48 \times 10^3}{40 \times 800} = 1/5^\circ C$$

گام سوم: محاسبهٔ تغییر حجم ناشی از تغییر دما:

$$\Delta V = V_1 \times (3\alpha) \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta V = \underbrace{\left(\frac{4}{3} \times 3 \times 10^3\right)}_{\text{برحسب } cm^3} \times (3 \times 5 \times 10^{-5}) \times 1/5 = 0/9cm^3$$

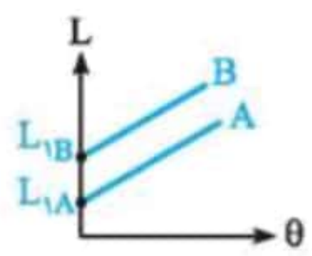
۳ ۹۸۸ با توجه به مفاهیم مطرح شده در سؤال قبل، از آن‌جا که طول میله و خطکش در هر دمایی با یک‌دیگر برابر است، بنابراین ΔL میله و خطکش در هر دمایی با یک‌دیگر برابر است و این موضوع زمانی رخ می‌دهد که ضریب انبساط طولی میله و خطکش یکسان باشد.

۱ ۹۸۹

یادآوری

شیب نمودار طول برحسب دما، برابر با حاصل‌ضرب طول اولیه در ضریب انبساط طولی میله است $(L_1\alpha)$.

در شکل زیر، نمودار A و B به‌صورت دو خط موازی (شیب برابر) هستند، بنابراین هر کدام که طول اولیهٔ کوچک‌تری داشته باشد، ضریب انبساط طولی بزرگ‌تری دارد تا حاصل $L_1\alpha$ برای آن‌ها برابر شود:



$$\begin{cases} \text{شیب} : L_1\alpha \\ A_{\text{شیب}} = B_{\text{شیب}} \Rightarrow L_{1A}\alpha_A = L_{1B}\alpha_B \xrightarrow{L_{1A} < L_{1B}} \alpha_A > \alpha_B \\ L_{1B} > L_{1A} \end{cases}$$

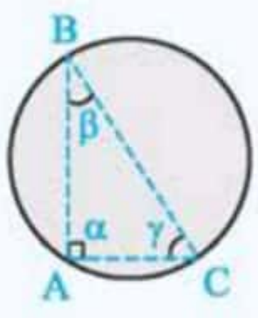
۴ ۹۹۰ با توجه به رابطهٔ $\Delta L = L\alpha\Delta\theta$، درصد تغییرات طول هر قسمت دلخواه از شکل، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد تغییرات افزایش طول}: \frac{\Delta L}{L} \times 100 = \alpha\Delta\theta \times 100$$

با توجه به یکسان بودن α و $\Delta\theta$ برای کل جسم، با تغییر دما، کل جسم بزرگ‌تر یا کوچک‌تر شده و تمامی زوایای روی شکل، قبل و بعد از تغییر دما با هم برابر است (گویی فقط تصویر را بزرگ‌تر یا کوچک‌تر کرده‌ایم). بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

درک بهتر

در شکل زیر، زوایای α، β و γ را بر روی شکل در نظر بگیرید. با افزایش دما، درصد افزایش طول هر یک از میله‌های AB، AC و BC با هم برابر است.



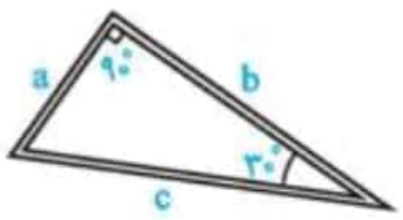
$$\Delta L = L_1\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_1} = \overbrace{\alpha\Delta\theta}^{\text{یکسان}}$$

$$L_2 = L_1\overbrace{(1 + \alpha\Delta\theta)}^{\text{یکسان}}$$

$$\text{به طور مثال}: \sin\beta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

دو ضلع AC و BC با افزایش دما، به گونه‌ای افزایش می‌یابند که نسبت آن‌ها ثابت است. بنابراین $\sin\beta$ و در نتیجه زاویهٔ β ثابت می‌ماند.

۳ ۹۹۱ اگر بخواهیم زاویهٔ بین a و b همواره ۹۰ درجه باقی بماند، باید رابطهٔ فیثاغورث همواره برقرار باشد (در حالت اول $a^۲+b^۲=c^۲$ برقرار است):

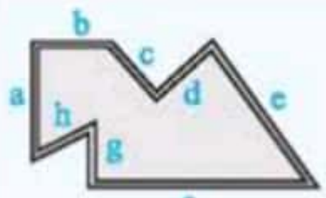


$$a_۲=a(۱+\alpha\Delta\theta)\ ,\ b_۲=b(۱+\alpha\Delta\theta)\ ,\ c_۲=c(۱+\alpha_c\Delta\theta)$$

$$a_۲^۲+b_۲^۲=c_۲^۲\Rightarrow a^۲(۱+\alpha\Delta\theta)^۲+b^۲(۱+\alpha\Delta\theta)^۲=c^۲(۱+\alpha_c\Delta\theta)^۲$$

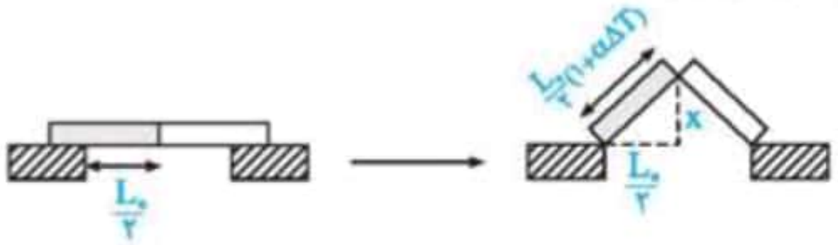
$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}(a^۲+b^۲)(۱+\alpha\Delta\theta)^۲=c^۲(۱+\alpha_c\Delta\theta)^۲\xrightarrow[\text{تساوی}]{\text{برای برقراری}}\alpha=\alpha_c\Rightarrow\frac{\alpha_c}{\alpha}=۱$$

نکته جالب



در یک شکل هندسی دلخواه به‌صورت مقابل، اگر ضریب انبساط حرارتی همهٔ میله‌ها یکسان و برابر α باشد، پس از گرم کردن مجموعه به‌اندازهٔ ΔT، هیچ‌یک از زوایای شکل تغییر نمی‌کند.

۲ ۹۹۲ برای محاسبهٔ x، مثلث مشخص شده توسط خط‌چین را درنظر گرفته و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\begin{cases}\text{طول وتر مثلث با توجه به روابط انبساط}=\frac{L_۰}{۲}(۱+\alpha\Delta T) & (۱)\\ \text{طول وتر مثلث با توجه به قضیهٔ فیثاغورث}=\sqrt{\left(\frac{L_۰}{۲}\right)^۲+x^۲} & (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\text{ و }(۲):\frac{L_۰}{۲}(۱+\alpha\Delta T)=\sqrt{\left(\frac{L_۰}{۲}\right)^۲+x^۲}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}}\left(\frac{L_۰}{۲}\right)^۲(۱+۲\alpha\Delta T+(\alpha\Delta T)^۲)=\left(\frac{L_۰}{۲}\right)^۲+x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲=\left(\frac{L_۰}{۲}\right)^۲(۲\alpha\Delta T+(\alpha\Delta T)^۲)\Rightarrow x=\frac{L_۰}{۲}\sqrt{(\alpha\Delta T)^۲+۲\alpha\Delta T}$$

۲ ۹۹۳ این تست بسیار جالب، از روند اثبات رابطهٔ $\Delta A=A_۱\gamma\Delta\theta$ در کتاب درسی طرح شده است. با استفاده از رابطهٔ انبساط طولی اجسام، می‌توان Δa و Δb در ورقهٔ مستطیلی و در ادامهٔ آن طول ثانویهٔ اضلاع ورقهٔ مستطیلی را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{cases}\Delta a=\alpha a_۱\Delta T\Rightarrow a_۲=a_۱+\alpha a_۱\Delta T\Rightarrow a_۲=a_۱(۱+\alpha\Delta T)\\ \Delta b=\alpha b_۱\Delta T\Rightarrow b_۲=b_۱+\alpha b_۱\Delta T\Rightarrow b_۲=b_۱(۱+\alpha\Delta T)\end{cases}$$

در ادامه می‌توان گفت که مساحت ورقهٔ مستطیلی پس از افزایش دما برابر با $a_۲b_۲$ است و داریم:

$$A_۲=a_۲b_۲=a_۱(۱+\alpha\Delta T)b_۱(۱+\alpha\Delta T)=a_۱b_۱(۱+\alpha\Delta T)^۲=a_۱b_۱(۱+۲\alpha\Delta T+(\alpha\Delta T)^۲)$$

تذکر

با توجه به این‌که α معمولاً از مرتبهٔ $۱۰^{-۵}$ بر کلوین است و ΔT معمولاً از مرتبهٔ $۱۰^۲$ درجهٔ سلسیوس بیشتر نیست، می‌توان نتیجه گرفت که جملهٔ $(\alpha\Delta T)^۲$ در مقایسه با جملهٔ $۲\alpha\Delta T$ بسیار کوچک است و می‌شود از آن چشم‌پوشی کرد. از طرفی $a_۱b_۱$ همان مساحت اولیهٔ ورقه است که آن را با $A_۱$ نشان می‌دهیم و می‌توان نوشت:

$$A_۲=A_۱(۱+۲\alpha\Delta T)\Rightarrow\text{به‌عبارت دیگر}:A_۲-A_۱=A_۱۲\alpha\Delta T\Rightarrow\Delta A=A_۱(۲\alpha)\Delta T$$

دقت شود که در صورت سؤال، تأکید شده است که از عبارات کوچک صرف‌نظر نشود (در حالت کلی ما از این جملات صرف‌نظر می‌کنیم).

۴ ۹۹۴ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۲۰)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۹۹۵ با توجه به مقدار گرمای یکسان داده شده به دو کره، می‌توان نوشت:

$$\text{گرمای داده شده یکسان است}:Q=mc\Delta\theta\Rightarrow m_{\text{توخالی}}\times c\times\Delta\theta_{\text{توخالی}}=m_{\text{توپر}}\times c\times\Delta\theta_{\text{توپر}}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta\theta_{\text{توخالی}}}{\Delta\theta_{\text{توپر}}}=\frac{m_{\text{توپر}}}{m_{\text{توخالی}}}=\frac{۱۰۰}{۸۰}=\frac{۵}{۴}$$

$$\text{تغییر حجم}:\Delta V=V_۱\beta\Delta\theta\Rightarrow\frac{\Delta V_{\text{توخالی}}}{\Delta V_{\text{توپر}}}=\frac{V_{۱\text{ توخالی}}}{V_{۱\text{ توپر}}}\times\frac{\Delta\theta_{\text{توخالی}}}{\Delta\theta_{\text{توپر}}}=۱\times\frac{۵}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

www.gajmarket.com

۹۹۶ ۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

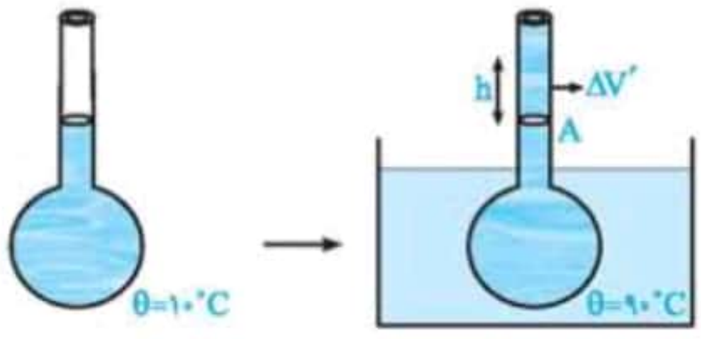
گام اول: محاسبهٔ افزایش حجم ظاهری مایع:

$$\Delta V' = V_1 \Delta\theta (\beta_{\text{مایع}} - 3\alpha_{\text{ظرف}})$$

$$\Delta V' = 200 \times (90 - 10) \times (0/5 \times 10^{-3} - 3 \times 9 \times 10^{-6}) = 7/568\,cm^3$$

گام دوم: محاسبهٔ افزایش ارتفاع گلیسیرین در لوله:

مطابق شکل مقابل ارتفاع بالا رفتن مایع برابر است با:



$$\Delta V' = Ah \Rightarrow 7/568\,(cm^3) = 7\,(cm^2) \times h \Rightarrow h = 1/1cm$$

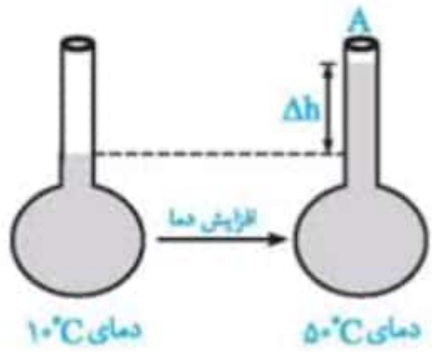
۹۹۷ ۳ با افزایش دما، حجم جیوهٔ درون لوله افزایش یافته و در نتیجه ارتفاع جیوه درون لوله افزایش می‌یابد.

برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ تغییر حجم جیوه در اثر تغییر دما:

$$\Delta V = V_1 \times \beta_{\text{جیوه}} \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta V = 3 \times 1/8 \times 10^{-4} \times (50 - 10) = 216 \times 10^{-4}\,cm^3$$

گام دوم: محاسبه تغییر ارتفاع جیوه در داخل لولهٔ قائم:



$$\Delta V = A\Delta h \xrightarrow[r=0/2mm]{A=\pi r^2} 216 \times 10^{-4} = \underbrace{3 \times (0/2 \times 10^{-1})^2}_{\text{برحسب } cm^2} \times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 18cm$$

تذکر

دمای ثانویه جیوه در اثر تماس دماسنج با جسم به $50^\circ C$ می‌رسد.

۹۹۸ ۴ در هنگام یخ زدن دریاچه، یخ زدگی از سطح دریاچه شروع می‌شود و دمای آب زیر دریاچه بین صفر تا ۴ درجهٔ سلسیوس است چون در این بازهٔ دمایی (صفر تا ۴ درجهٔ سلسیوس) انبساط آب غیرعادی بوده و در این محدودهٔ دمایی هرچه دما کم‌تر باشد، حجم آب بیشتر و چگالی آن کم‌تر است. از طرفی آب با چگالی کم‌تر به سطح دریاچه می‌رود. دقت شود که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳)، هیچ‌یک الزاماً رخ نمی‌دهند (چرا؟).

۹۹۹ ۴ می‌دانیم فشار مایع در یک عمق معین، تنها به چگالی آن مایع بستگی دارد و از آن‌جایی که چگالی آب با افزایش دما، تغییرات منظمی ندارد، بدون مشخص کردن گسترهٔ دمایی آزمایش، نمی‌توان در مورد تغییرات چگالی اظهار نظر کرد.

به طور مثال ⇐ اگر دما از $2^\circ C$ به $4^\circ C$ برسد ⇐ چگالی آب افزایش می‌یابد ⇐ فشار در عمق ۲ متری از سطح آب افزایش می‌یابد.

به طور مثال ⇐ اگر دما از $4^\circ C$ به $6^\circ C$ برسد ⇐ چگالی آب کاهش می‌یابد ⇐ فشار در عمق ۲ متری از سطح آب کاهش می‌یابد.

۱۰۰۰ ۴ ابتدا دمای تکه یخ صفر درجهٔ سلسیوس را پس از این‌که ۳۶ کیلوژول گرما به آن داده شود، به‌دست می‌آوریم:

$$Q = 36kJ \;,\; L_F = 320J/gr \;,\; c_{\text{یخ}} = 4J/gr.^\circ C \;,\; m = 100gr$$

$$Q = mL_F + mc\Delta\theta \Rightarrow 36 \times 10^3 = (100 \times 320) + (100 \times 4 \times \Delta\theta) \Rightarrow \Delta\theta = \theta_2 - 0 = 10 \Rightarrow \theta_2 = 10^\circ C$$: دمای نهایی آب

در ادامه روند تغییرات حجم به‌صورت زیر است:

یخ صفر درجهٔ سلسیوس : فرایند ذوب $\xrightarrow[\text{از } 0/9 \text{ به } 1]{\text{افزایش } \rho}$ آب صفر درجهٔ سلسیوس $\Rightarrow \rho = \frac{m}{V}$ یا $V = \frac{m}{\rho}$ ⇐ حجم کاهش می‌یابد.

کاهش حجم ⇐ تبدیل آب صفر درجهٔ سلسیوس به آب $4^\circ C$

افزایش حجم ⇐ تبدیل آب $4^\circ C$ به آب $10^\circ C$

بنابراین حجم ابتدا روند کاهشی و سپس روند افزایشی دارد.

۱۰۰۱ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۲ — **بررسی قانون گازهای کامل (معادله حالت)** — (تست‌های ۱۰۰۱ تا ۱۰۰۷)



در شکل مقابل مقدار معینی از یک گاز کامل در زیر پیستونی قرار دارد. اگر پیستون اندکی بالاتر رود [مثلاً مقداری گرما به گاز داده شود] یا اندکی پایین بیاید، با توجه به شرایط مسأله هر سه پارامتر P (فشار)، V (حجم) و T (دما) می‌تواند تغییر کند ولی آزمایش نشان می‌دهد برای مقدار معینی از یک گاز کامل، نسبت « $\frac{PV}{T}$ » همواره ثابت باقی می‌ماند، به‌گونه‌ای که می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = \text{مقدار ثابت} = n.R \Rightarrow \boxed{\frac{PV}{T} = nR}$$

معادلهٔ حالت گاز کامل یا قانون گازهای کامل (آرمانی): در رابطهٔ ارائه‌شده در صفحهٔ قبل، با طرفین و وسطین کردن، به رابطهٔ زیر می‌رسیم که آن را معادلهٔ حالت گاز کامل می‌نامند. معادلهٔ حالت، معادله‌ای است که چگونگی ارتباط بین متغیرهای P، V و T را برای یک گاز کامل بیان می‌کند.

$$PV = nRT$$

نکات مهم و کاربردی

۱) در این رابطه، P فشار گاز است که در SI برحسب پاسکال بیان می‌شود:

توجه: پاسکال (SI) $\rightarrow \times 10^{5}$ اتمسفر

۲) V حجم گاز است که در SI برحسب مترمکعب بیان می‌شود:

توجه: مترمکعب (SI) $\rightarrow \times 10^{-3}$ لیتر

۳) n تعداد مول‌های گاز می‌باشد و با داشتن جرم گاز و یا تعداد ذرات گاز، برای محاسبهٔ آن از رابطه‌های زیر استفاده می‌شود:

$$n = \frac{N \rightarrow \text{تعداد ذرات گاز}}{N_A \rightarrow \text{عدد آووگادرو } (\simeq 6/02 \times 10^{23})}$$

و

$$\text{تعداد مول}: \quad n = \frac{m \rightarrow \text{جرم گاز}}{M \rightarrow \text{جرم مولی}}$$

۴) T دمای مطلق گاز است که برحسب کلوین بیان می‌شود. یعنی اگر دما برحسب درجهٔ سلسیوس (سانتی‌گراد) داده شده باشد، کافی است عدد ۲۷۳ را به آن اضافه کنیم تا به کلوین تبدیل شود.

توجه: $T(K) = \theta(^{\circ}C) + 273$ «کلوین»

۵) R عدد ثابتی است که ثابت عمومی گازها نام دارد و مقدار آن در SI برابر $8/314\ J/mol.K$ است. (تقریباً برابر ۸ فرض می‌شود).

۶) نکتهٔ بسیار جالب آن است که نسبت $\frac{PV}{T}$، از جنس گاز کامل مستقل بوده و تنها به تعداد مول گاز بستگی دارد.

۷) **قانون آووگادرو:** دانشمندی ایتالیایی به نام آووگادرو بیان کرد که در دما و فشار ثابت، نسبت حجم گاز به تعداد مولکول‌های آن مقداری ثابت است.

در دما و فشار ثابت داریم: $\frac{V}{N} = \text{عدد ثابت}$

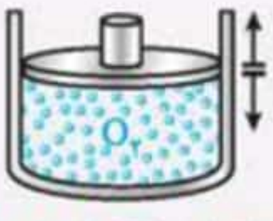
از طرفی تعداد مولکول‌های یک گاز را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب تعداد مول‌های گاز در عدد آووگادرو، یعنی همان عدد $6/02 \times 10^{23}$، نوشت $(N = nN_A)$. به عبارت دیگر می‌توان این‌گونه بیان کرد که در دما و فشار ثابت، نسبت حجم گاز کامل به تعداد مول‌های آن عددی ثابت است.

در دما و فشار ثابت داریم: $\frac{V}{n} = \text{عدد ثابت}$

تمرین **به‌نظر شما در حل مسائل قوانین گازها، آیا می‌توان همواره از رابطهٔ $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ استفاده کرد؟**

پاسخ با توجه به توضیحات فوق، احتمالاً شما هم حدس درستی زده‌اید! استفاده از این رابطه فقط زمانی امکان‌پذیر است که تعداد مول گاز (یا تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن) ثابت باقی بماند. برای درک بهتر موضوع به موارد زیر توجه کنید!

در شکل مقابل، با توجه به این‌که گاز نمی‌تواند از مخزن خارج شود، اگر پیستون به سمت بالا یا پایین جابه‌جا شود، نسبت $\frac{PV}{T}$ ثابت می‌ماند.

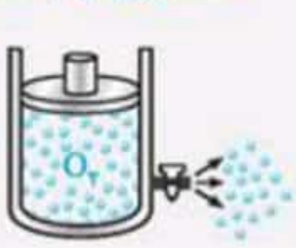


(تعداد مول گاز ثابت است)

$$\text{ثابت} \leftarrow \frac{PV}{T} = nR \rightarrow \text{ثابت}$$

(ثابت بالای $\frac{PV}{T}$ و ثابت بالای n)

تذکر در شکل مقابل، اگر شیر مخزن را برای مدت کوتاهی باز نگه داریم، به‌گونه‌ای که مقداری گاز از مخزن خارج شود، نسبت $\frac{PV}{T}$ دیگر ثابت نیست و قطعاً عدد کوچکتری می‌باشد، زیرا تعداد مول‌های گاز کاهش یافته است.



$$\frac{PV}{T} = nR \rightarrow \text{ثابت}$$

(کاهش بالای $\frac{PV}{T}$ و کاهش زیر n)

تذکر در شکل مقابل لاستیک چرخ، یک پنچری سوزنی دارد، به‌گونه‌ای که دائماً مقداری از هوای داخل آن خارج می‌شود. در این وضعیت نیز نسبت $\frac{PV}{T}$ دائماً در حال کاهش است (چرا؟!).



با توجه به خلاصه نکات ارائه شده، نسبت $\frac{PV}{T}$ در گازهای کامل از جنس گاز مستقل بوده و تنها به تعداد مول گاز بستگی دارد.

۴ ۱۰۰۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) با باز شدن شیر مخزن و خروج مقداری گاز کامل از آن، جرم گاز موجود در مخزن کاهش یافته و در نتیجه تعداد مول باقی مانده در مخزن کاهش می‌یابد.

$$\downarrow n = \frac{m}{M} \downarrow$$

www.gajmarket.com

۲) حجم مخزن ثابت است. از طرفی طبق صورت سؤال با ثابت بودن دما، می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow \underset{\downarrow}{P} = \underset{\downarrow}{n}\overbrace{\frac{RT}{V}}^{\text{ثابت}} \Rightarrow$$ فشار گاز کامل موجود در مخزن کاهش می‌یابد.

۳) نسبت $\frac{PV}{T}$ متناسب با تعداد مول گاز (n) می‌باشد، بنابراین با کاهش n، این نسبت نیز کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۴) نادرست می‌باشد.

۳ ۱۰۰۳ با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow ۱۰^۵ \times (۵ \times ۱۰^{-۳}) = n \times ۸ \times (۲۷ + ۲۷۳) \Rightarrow n = \frac{۵۰۰}{۸ \times ۳۰۰} = \frac{۵}{۲۴} mol$$

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{m}{\cancel{۳۲}^{۴}} = \frac{۵}{\cancel{۲۴}^{۳}} \Rightarrow m = \frac{۲۰}{۳} gr$$

۴ ۱۰۰۴ برای حل، ابتدا با کمک معادلهٔ حالت گاز کامل، تعداد مول گاز کامل را محاسبه می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow \underset{\text{فشار گاز برحسب پاسکال}}{\boxed{۱۰^۵}} \times ۱ \times ۱۰^{-۶} = n \times ۸ \times (۲۷۳ + ۲۷) \Rightarrow n = \frac{۰/۱}{۲۴۰۰} = \frac{۱}{۲۴۰۰۰} mol$$

در ادامه با توجه به مفهوم عدد آووگادرو، با یک تناسب ساده داریم:

$$\begin{cases} ۱ \text{ مول} \Rightarrow \text{تعداد مولکول} = \text{عدد آووگادرو} = ۶ \times ۱۰^{۲۳} \\ \frac{۱}{۲۴۰۰۰} \text{ مول} \Rightarrow N = ? \end{cases} \Rightarrow N = \frac{۱}{۲۴۰۰۰} \times ۶ \times ۱۰^{۲۳} = \frac{۱}{۴} \times ۱۰^{۲۰} = ۲/۵ \times ۱۰^{۱۹}$$

نگاهی دیگر

$$\text{تعداد مول} = \frac{\text{تعداد مولکول‌ها}}{\text{عدد آووگادرو}} \Rightarrow n = \frac{N}{N_A} \Rightarrow N = nN_A = \frac{۱}{۲۴۰۰۰} \times ۶ \times ۱۰^{۲۳} = ۲/۵ \times ۱۰^{۱۹}$$

۲ ۱۰۰۵ همان‌طور که می‌دانید، فشارسنج، فشار پیمانه‌ای گاز را نشان می‌دهد. بنابراین فشار گاز درون مخزن برابر مجموع فشار پیمانه‌ای و فشار هوا می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$n = ? \ , \ V = ۸/۳ Lit = ۸/۳ \times ۱۰^{-۳} m^۳ \ , \ P = ۱atm + ۵atm = ۶atm = ۶ \times ۱۰^۵ Pa \ , \ T = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K \ , \ R = ۸/۳ J/mol.K$$

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{۶ \times ۱۰^۵ \times ۸/۳ \times ۱۰^{-۳}}{۸/۳ \times ۳۰۰} = ۲mol$$

در ادامه با توجه به دانستن تعداد مول گاز، جرم گاز موجود در ظرف برابر است با:

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow m = nM = ۲ \times ۴ = ۸gr$$

یادآوری

مترمکعب $\rightarrow ۱۰^{-۳} \times$ لیتر , پاسکال $\rightarrow ۱۰^۵ \times$ اتمسفر

هشدار: در این سؤال اگر دمای گاز را به جای کلوین برحسب سلسیوس در روابط وارد کنید، به اشتباه پاسخ را ۸۸/۸ به‌دست می‌آورید.

۴ ۱۰۰۶ **گام اول:** برای پاسخ‌دادن به این سؤال، ابتدا مجموع تعداد مول گازهای هیدروژن و نیتروژن را به دست می‌آوریم.

$$n_۱ = \frac{۶}{۲} = ۳mol \ , \ n_۲ = \frac{۱۱۲}{۲۸} = ۴mol \Rightarrow n = n_۱ + n_۲ = ۷mol$$: تعداد مول هیدروژن , تعداد مول نیتروژن :

گام دوم: حال با استفاده از رابطهٔ $PV = nRT$، برای کل مجموعه می‌توان نوشت:

$$PV = \underset{\text{مجموع تعداد مول}}{\underset{\downarrow}{n}}RT \Rightarrow P \times ۱۴ \times ۱۰^{-۳} = ۷ \times ۸ \times \underset{\text{دما برحسب کلوین}}{\underset{\downarrow}{۳۰۰}} \Rightarrow P = ۱۲ \times ۱۰^۵ Pa = ۱۲atm$$

۴ ۱۰۰۷ باتوجه به معادلهٔ حالت گاز کامل می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow ۷/۵ \times ۱۰^۵ \times ۸۰ \times ۱۰^{-۳} = n_{\text{کل}} \times ۸ \times (۲۷۳ + ۲۷) \Rightarrow n_{\text{کل}} = ۲۵mol \Rightarrow n_{H_۲} + n_{He} = ۲۵mol$$

از طرفی $n = \frac{m}{M}$ بوده و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{m_{H_۲}}{۲} + \frac{m_{He}}{۴} = ۲۵ \Rightarrow ۲m_{H_۲} + m_{He} = ۱۰۰ \\ \text{طبق صورت سؤال}: m_{H_۲} + m_{He} = ۸۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m_{H_۲} = ۲۰gr \ , \ m_{He} = ۶۰gr$$

بنابراین درصد جرم هلیم برابر است با:

$$\text{درصد جرم هلیم} = \frac{۶۰}{۸۰} \times ۱۰۰ = ۷۵٪$$

۴۱۰۰۸ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۳ بررسی معادلهٔ حالت برای یک گاز کامل با تغییر پارامترهای آن (تست‌های ۱۰۰۸ تا ۱۰۲۰)

تا به این‌جای کار، با معادلهٔ حالت یه گاز کامل ($PV = nRT$) آشنا شدیم. حالا می‌خوایم بدونیم اگه تغییراتی بر روی یکی یا چندتا از پارامترای اون انجام بدیم، سایر پارامترهای اون، چه‌جوری تغییر می‌کنه ...

در حالت کلی، با تغییر هر یک از پارامترهای P، V، T و یا n، می‌توان رابطهٔ مربوط به گاز کامل را برای هر دو حالت نوشت:



$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} \times \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{T_1}{T_2}$$

P_1, V_1, T_1, n_1 $\qquad$ P_2, V_2, T_2, n_2

نکات مهم و کاربردی

۱ مقدار عبارت $\frac{PV}{T}$، متناسب با تعداد مول گاز (n) است.

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} \Rightarrow n \propto \frac{PV}{T}$$

۲ در برخی از مسائل به جای مطرح شدن تعداد مول گاز کامل، جرم آن گاز کامل داده می‌شود، در این صورت با تقسیم جرم گاز کامل به جرم مولی آن، می‌توان تعداد مول گاز کامل را به دست آورد:

$$n_1 = \frac{m_1}{M_1} \quad , \quad n_2 = \frac{m_2}{M_2}$$

۳ بهتر است جرم مولی گازهای زیر را به خاطر بسپاریم:

$$\begin{cases} M_{H_2} = 2\,gr/mol \quad , \quad M_{O_2} = 32\,gr/mol \\ M_{N_2} = 28\,gr/mol \quad , \quad M_{هوا} = 29\,gr/mol \end{cases}$$

۴ برای جای‌گذاری نسبت‌های $\frac{P_1}{P_2}$ و $\frac{V_1}{V_2}$، یکسان بودن واحدهای صورت و مخرج کسر کافی بوده و استفاده از واحدهای SI در صورت و مخرج کسر الزامی نیست.

۵ به خاطر بسپاریم در کسر $\frac{T_1}{T_2}$، واحدهای صورت و مخرج لزوماً باید برحسب کلوین نوشته شوند (چرا؟!).

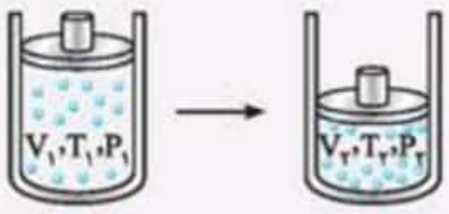
بررسی معادله حالت در صورت ثابت بودن مقدار گاز

برای مقدار معینی (یعنی تعداد مول ثابت یا جرم ثابت) از یک گاز کامل، نسبت حاصل‌ضرب فشار گاز در حجم گاز به دمای مطلق آن، یک مقدار ثابت است:

$$\text{مقدار ثابت} = \frac{PV}{T} \text{: (برای تعداد مول ثابت یا جرم ثابت)}$$

نکات مهم و کاربردی

۱ مقدار معینی از یک گاز کامل را در نظر بگیرید که در یک سیلندر و توسط یک پیستون محبوس شده است. اگر با انجام یک فرایند، ویژگی‌های گاز کامل تغییر کند، می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \text{ : جرم گاز ثابت بماند.}$$

۲ گاز کامل گازی رقیق است که در آن از برهم کنش مولکول‌ها صرف‌نظر شده است، یعنی فرض می‌شود که در آن مولکول‌ها بر یک‌دیگر نیرو وارد نمی‌کنند.

۳ در فشار پایین و دمای بالا، با تقریب مناسبی می‌توان گازها را کامل فرض کرد. هم‌چنین هرچه مولکول‌های گاز کوچک‌تر و ظرفی که گاز در آن قرار دارد بزرگ‌تر باشد، شرایط به گاز کامل نزدیک‌تر است.

تمرین۱ اگر فشار گاز کاملی را چهار برابر کرده و حجم آن را ۵۰ درصد کاهش دهیم، دمای مطلق آن چند برابر می‌شود؟

پاسخ این سؤال را از دو نگاه بررسی می‌کنیم:

نگاه اول: با نوشتن داده‌های سؤال می‌توان گفت:

$$P_2 = 4P_1 \; , \; V_2 = V_1 - \frac{50}{100}V_1 = \frac{50}{100}V_1 = \frac{1}{2}V_1 \; , \; T_2 = ?$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{\cancel{P_1}\,\cancel{V_1}}{T_1} = \frac{(4\cancel{P_1})(\frac{1}{2}\cancel{V_1})}{T_2} \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

دقت: اگر حجم گاز ۵۰ درصد کاهش یابد، در واقع حجم گاز نصف شده است.

gajmarket.com

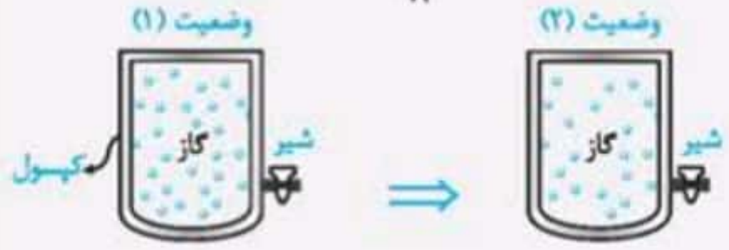
نگاه دوم: به ثابت بودن کسر $\frac{PV}{T}$ توجه کنید. اگر P چهار برابر و V، $\frac{1}{2}$ برابر شود، صورت کسر ۲ برابر می‌شود. حال اگر بخواهیم کل کسر ثابت بماند، مخرج کسر باید ۲ برابر شود (دقت شود که حاصل اعداد ضرب شده در صورت تقسیم بر عدد ضرب شده در مخرج باید برابر یک شود تا کسر ثابت بماند):

$\downarrow \frac{1}{2}$ برابر ۴ برابر $\uparrow$

دمای مطلق گاز باید ۲ برابر شود تا کسر ثابت بماند. $\Rightarrow$ مقدار ثابت $= \frac{PV}{T}$ ۲ برابر $\uparrow$

تمرین۲ **در یک کپسول مقداری گاز اکسیژن با فشار P و دمای T موجود است. اگر نصف جرم این گاز از کپسول خارج شود، فشار گاز باقی‌مانده در کپسول در همان دما چه اندازه می‌شود؟** (تألیفی)

۱) P ۲) $\frac{P}{4}$ ۳) $\frac{P}{2}$ ۴) $\frac{P}{8}$



پاسخ اگر نصف جرم این گاز به مصرف برسد، تعداد مول گاز موجود در مخزن نصف می‌شود و توجه شود که حجم گاز در دو حالت یکسان است. بنابراین با توجه به شکل‌های مقابل در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

وضعیت (۲)	وضعیت (۱)
تعداد مول: $n_2 = \frac{1}{2}n$	تعداد مول: $n_1 = n$
فشار گاز: $P_2 = ?$	فشار گاز: $P_1 = P$
حجم گاز: $V_2 = V$	حجم گاز: $V_1 = V$
دمای گاز: $T_2 = T$	دمای گاز: $T_1 = T$

$$\frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P} \times \frac{V}{V} = \frac{\frac{1}{2}n}{n} \times \frac{T}{T} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}P$$ (گزینهٔ ۳)

قانون گازها برای مقدار معینی از یک گاز کامل بیان می‌شود (یعنی جرم یا تعداد مول ثابت)، بنابراین تنها شرط برقرار بودن قانون گازها در طی یک فرایند، ثابت بودن جرم یا همان تعداد مول گاز در طول فرایند است.

دقت: سایر مشخصات گاز از جمله دما، حجم و فشار می‌توانند در طی فرایند تغییر کنند، هم‌چنین گاز می‌تواند در طی فرایند گرما دریافت کند یا گرما از دست بدهد.

۱۰۰۹ ۲ به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) حجم گاز ثابت مانده و دمای مطلق آن نصف شده است. $\Leftarrow$ ثابت $= \frac{P\ V}{T}$ ($\frac{1}{2}$ برابر $\downarrow$، ثابت، $\frac{1}{2}$ برابر $\downarrow$) $\Leftarrow$ فشار گاز نصف می‌شود تا کسر ثابت بماند (گزینهٔ نادرست).

۲) دمای مطلق ثابت مانده و حجم گاز نصف شده است. $\Leftarrow$ ثابت $= \frac{P\ V}{T}$ ($\frac{1}{2}$ برابر $\downarrow$، ۲ برابر $\uparrow$، ثابت) $\Leftarrow$ فشار گاز دو برابر می‌شود تا کسر ثابت بماند (گزینهٔ صحیح).

* به‌عنوان تمرین، تغییرات فشار در دو گزینهٔ دیگر را نیز بررسی کنید.

۱۰۱۰ ۴ طبق صورت سؤال، تغییراتی که بر روی گاز انجام می‌دهیم به‌صورت زیر است:

حالت اول: $\begin{cases} P_1 \\ V_1 \\ T_1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{مرحلهٔ ۱}}$ حالت دوم: $\begin{cases} P_2 = P_1 \\ V_2 = 2V_1 \\ T_2 = ? \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{مرحلهٔ ۲}}$ حالت سوم: $\begin{cases} P_3 = 2P_2 = 2P_1 \\ V_3 = V_2 = 2V_1 \\ T_3 = ? \end{cases}$

حال با توجه به ثابت بودن نسبت $\frac{PV}{T}$، حالت‌های اول و سوم را مقایسه کرده و دمای T_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_3V_3}{T_3} \Rightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{2P_1 \times 2V_1}{T_3} \Rightarrow T_3 = 4T_1$$

۱۰۱۱ ۴ با توجه به این‌که میزان افزایش حجم گاز کامل و کم‌شدن فشار آن مشخص نیست، نمی‌توان میزان تغییرات دمای مطلق گاز را تعیین کرد و گزینهٔ (۴) صحیح است. به موارد زیر توجه کنید:

حالت ۱: اگر حجم گاز دو برابر و فشار گاز نصف شود، دمای مطلق آن ثابت می‌ماند.

$\frac{P\ V}{T}$ ($\frac{1}{2}$ برابر $\downarrow$، ۲ برابر $\uparrow$، ثابت) $=$ ثابت $\Rightarrow$ دمای مطلق گاز ثابت می‌ماند.

حالت ۲: اگر حجم گاز دو برابر و فشار گاز $\frac{۱}{۴}$ برابر شود، دمای مطلق آن نصف می‌شود (یعنی کاهش می‌یابد).

$$\frac{\frac{۱}{۴}\text{برابر}\downarrow P \quad V\uparrow ۲\text{برابر}}{\frac{۱}{۲}\text{برابر}\downarrow T} = \text{ثابت} \Rightarrow$$ دمای مطلق گاز $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود.

حالت ۳: اگر حجم گاز دو برابر و فشار گاز $\frac{۲}{۳}$ برابر شود، دمای مطلق آن $\frac{۴}{۳}$ برابر می‌شود (یعنی افزایش می‌یابد).

$$\frac{\frac{۲}{۳}\text{برابر}\downarrow P \quad V\uparrow ۲\text{برابر}}{\frac{۴}{۳}\text{برابر}\uparrow T} = \text{ثابت} \Rightarrow$$ دمای مطلق گاز $\frac{۴}{۳}$ برابر می‌شود.

۲ ۱۰۱۲ با توجه به رابطهٔ $\frac{P_۲V_۲}{T_۲} = \frac{P_۱V_۱}{T_۱}$، داریم:

$$V_۱ = ۱/۵\,\text{Lit} \;,\; P_۱ = ۱\,\text{atm} \;,\; T_۱ = ۲۷^\circ\text{C} = ۳۰۰\,\text{K} \;,\; P_۲ = ۱/۵\,\text{atm} \;,\; T_۲ = T_۱ + ۵۰ = ۳۵۰\,\text{K} \;,\; V_۲ = ?$$

$$\frac{P_۲V_۲}{T_۲} = \frac{P_۱V_۱}{T_۱} \Rightarrow \frac{۱/۵ \times V_۲}{۳۵۰} = \frac{۱ \times ۱/۵}{۳۰۰} \Rightarrow V_۲ = \frac{۷}{۶}\,\text{Lit}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\Delta V = V_۲ - V_۱ = \frac{۷}{۶} - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۳}\,\text{Lit} \Rightarrow$$ بنابراین حجم گاز $\frac{۱}{۳}$ لیتر کاهش یافته است.

۲ ۱۰۱۳ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$T_۱ = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳\,\text{K} \;,\; V_۲ = \frac{۱}{۳}V_۱ \;,\; P_۲ = ۴P_۱ \;,\; \Delta T = T_۲ - T_۱ = ?$$

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۱V_۱}{۲۷۳} = \frac{۴P_۱ \times (\frac{۱}{۳}V_۱)}{T_۲} \Rightarrow T_۲ = ۴ \times ۹۱\,\text{K} \;,\; \Delta T = T_۲ - T_۱ = ۴ \times ۹۱ - ۳ \times ۹۱ = ۹۱\,\text{K} \xrightarrow{\Delta\theta = \Delta T} \Delta\theta = ۹۱^\circ\text{C}$$

۳×۹۱

تذکر

ایدهٔ نوشتن عدد ۲۷۳ به‌صورت ۳×۹۱ در بسیاری از تست‌های کنکور مورد استفادهٔ طراحان قرار می‌گیرد، به آن توجه ویژه‌ای داشته باشید.

۱ ۱۰۱۴

تذکر

در بسیاری از سؤالات این قسمت، تغییرات فشار، حجم و دما را برحسب درصد در صورت سؤال مطرح می‌کنند، برای حل این‌گونه سؤالات، کافیست عبارت درصدی را به‌صورت کسری بازنویسی کنید. مثلاً اگر فشار گازی ۲۵ درصد افزایش یابد، می‌توان نوشت:

$$P_۲ = P_۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰}P_۱ = P_۱ + \frac{۱}{۴}P_۱ = \frac{۵}{۴}P_۱$$

یا اگر حجم گازی ۲۰ درصد کاهش یابد، می‌توان نوشت:

$$V_۲ = V_۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰}V_۱ = V_۱ - \frac{۱}{۵}V_۱ = \frac{۴}{۵}V_۱$$

با توجه به‌صورت سؤال، دو تغییر زیر بر روی گاز رخ داده است:

۱) فشار گاز ۲۵ درصد افزایش یافته است، پس:

$$P_۲ = P_۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰}P_۱ \Rightarrow P_۲ = \frac{۵}{۴}P_۱$$

۲) حجم گاز ۳۶ درصد کاهش یافته است، پس:

$$V_۲ = V_۱ - \frac{۳۶}{۱۰۰}V_۱ \Rightarrow V_۲ = \frac{۱۰۰ - ۳۶}{۱۰۰}V_۱ = \frac{۶۴}{۱۰۰}V_۱$$

در ادامه با توجه به قانون گازها می‌توان نوشت:

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{(\frac{۵}{۴}P_۱) \times (\frac{۶۴}{۱۰۰}V_۱)}{T_۲} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۳۲۰}{۴۰۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \Rightarrow T_۲ = \frac{۸۰}{۱۰۰}T_۱$$

می‌توان گفت دمای مطلق ثانویه برابر با ۸۰ درصد دمای مطلق اولیهٔ گاز بوده و دمای مطلق گاز ۲۰ درصد کاهش یافته است.

۲ ۱۰۱۵ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$T_۱ = ۱۲۷ + ۲۷۳ = ۴۰۰\,\text{K} \;,\; T_۲ = ?$$

$V_۲ = \frac{۱۰۰ - ۳۶}{۱۰۰}V_۱ = \frac{۶۴}{۱۰۰}V_۱$: حجم گاز ۳۶ درصد کاهش یافته است. ، $P_۲ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰}P_۱ = \frac{۵}{۴}P_۱$: فشار گاز ۲۵ درصد افزایش یافته است.

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۱V_۱}{۴۰۰} = \frac{(\frac{۵}{۴}P_۱) \times (\frac{۶۴}{۱۰۰}V_۱)}{T_۲} \Rightarrow T_۲ = ۳۲۰\,\text{K}$$

اما باید دقت شود که دمای ثانویهٔ گاز برحسب درجهٔ سلسیوس خواسته شده است و داریم:

$$\theta_۲ = T_۲ - ۲۷۳ = ۳۲۰ - ۲۷۳ = ۴۷^\circ\text{C}$$

www.gajmarket.com

۴ ۱۰۱۶ طبق صورت سؤال، دمای گاز ۵۴ درجهٔ فارنهایت افزایش یافته است. از طرفی $\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta\theta_F = \frac{۹}{۵}\Delta\theta_C \Rightarrow \Delta\theta_C = \frac{۵}{۹}\Delta\theta_F = \frac{۵}{۹}\times ۵۴ = ۳۰^\circ C \Rightarrow \Delta\theta_C = \Delta T = ۳۰K$$

تذکر

میزان تغییر دما برحسب کلوین و درجهٔ سلسیوس با یک‌دیگر برابر است. $\Delta T(K) = \Delta\theta(^\circ C)$

با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت: $T_۱ = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K \ , \ T_۲ = T_۱ + \Delta T = ۳۰۰ + ۳۰ = ۳۳۰K \ , \ P_۱ = ۵۰cm\,Hg \ , \ P_۲ = ۴۰cm\,Hg$

حجم گاز ۳ لیتر افزایش می‌یابد: $V_۲ = (V_۱ + ۳)Lit \ , \ V_۱ = ?$

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{\overset{۵}{\cancel{۵۰}}\times V_۱}{\cancel{۳۰۰}} = \frac{\overset{۴}{\cancel{۴۰}}(V_۱ + ۳)}{\cancel{۳۳۰}} \Rightarrow ۵۵V_۱ = ۴۰(V_۱ + ۳) \Rightarrow ۱۵V_۱ = ۴۰\times ۳ \Rightarrow V_۱ = ۸Lit$$

۲ ۱۰۱۷ باتوجه به متن کتاب درسی، در این‌گونه مسائل فشارسنج عدد فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد و ما باید در رابطهٔ قانون گازها، از فشار مطلق گاز استفاده کنیم (شایان ذکر است که این موضوع در برخی کنکورهای گذشته، توسط طراح رعایت نمی‌شد). بنابراین برای حل این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{حالت ۱}: V_۱ = ۴lit \ , \ T_۱ = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K \ , \ P_۱ = ۴ + ۱ = ۵atm \\ \text{حالت ۲}: V_۲ = ۸lit \ , \ T_۲ = ۸۷ + ۲۷۳ = ۳۶۰K \ , \ P_۲ = ? \end{cases}$$

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{۵\times ۴}{۳۰۰} = \frac{P_۲\times ۸}{۳۶۰} \Rightarrow P_۲ = ۳atm \Rightarrow \text{(عدد فشارسنج)}\ P = ۳ - ۱ = ۲atm$$

۱ ۱۰۱۸ برای مقایسهٔ وضعیت گاز در دو حالت شکل‌های زیر نشان داده شده است:



جرم گاز: $m_۱ = m$	جرم گاز: $m_۲ = \frac{۱}{۲}m$ (جرم گاز نصف می‌شود.)
فشار گاز: $P_۱ = P$	فشار گاز: $P_۲ = ?$
حجم گاز: $V_۱ = V$	حجم گاز: $V_۲ = ۲V$ (حجم گاز دو برابر می‌شود.)
دمای گاز: $T_۱ = T$	دمای گاز: $T_۲ = \frac{۱}{۲}T$ (دمای مطلق گاز نصف می‌شود.)

با نوشتن معادلهٔ حالت گاز کامل بین دو وضعیت فوق، مقدار $P_۲$ برابر است با:

$$\frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱}\times\frac{T_۲}{T_۱} \Rightarrow \frac{P_۲}{P}\times\frac{۲V}{V} = \frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۱}{۲}T}{T} \Rightarrow P_۲ = \frac{۱}{۸}P$$

بنابراین فشار گاز درون محفظه $\frac{۱}{۸}$ برابر می‌شود. توجه شود که تعداد مول گاز درون محفظه با نصف‌شدن جرم گاز، نصف شده است.

۲ ۱۰۱۹ وضعیت گاز درون محفظه در دو حالت، در شکل‌های زیر نشان داده شده است:



جرم گاز: $m_۱ = ۲۰gr$	جرم گاز: $m_۲ = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰gr$
فشار گاز: $P_۱ = ۴\,atm$	فشار گاز: $P_۲ = ?$
حجم گاز: $V_۱ = ۳۰\,Lit$	حجم گاز: $V_۲ = \frac{۱}{۲}V_۱ = ۱۵\,Lit$
دمای گاز: $T_۱ = T$	دمای گاز: $T_۲ = T$ (دما ثابت می‌ماند.)

با نوشتن معادلهٔ حالت گاز کامل بین دو وضعیت فوق، مقدار $P_۲$ برابر است با:

$$\frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱}\times\frac{T_۲}{T_۱} \Rightarrow \frac{P_۲}{۴}\times\frac{۱۵}{۳۰} = \frac{۱}{۲}\times\frac{T}{T} \Rightarrow P_۲ = ۴\,atm$$

دقت شود که اگر جرم گاز درون محفظه نصف شود، تعداد مول گاز درون محفظه نیز نصف می‌شود (چرا؟).

نگاه دیگر: در واقع در این سؤال در دمای ثابت، تعداد مول و حجم گاز کامل را نصف کرده‌ایم، بنابراین فشار این گاز ثابت باقی‌مانده و تغییر نمی‌کند.

۴ ۱۰۲۰ با توجه به این‌که حجم گاز با حجم مخزن برابر است و می‌توان از تغییر حجم مخزن فلزی صرف نظر کرد، حجم گاز نیز در طی فرایند ثابت است. در ادامه وضعیت گاز در دو حالت در شکل‌های زیر نشان داده شده است (در حالت دوم، ۲۵ درصد گاز از مخزن خارج شده است):



وضعیت (۲)	وضعیت (۱)
تعداد مول: $n_2 = n - \frac{25}{100}n = n - \frac{1}{4}n = \frac{3}{4}n$	تعداد مول: $n_1 = n$
فشار گاز: $P_2 = ?$	فشار گاز: $P_1 = P$
حجم گاز: $V_2 = V$	حجم گاز: $V_1 = V$
دمای گاز: $T_2 = 27 + 273 = 300K$	دمای گاز: $T_1 = 327 + 273 = 600K$

با نوشتن معادلهٔ حالت گاز کامل بین دو وضعیت فوق، مقدار P_2 برابر است با:

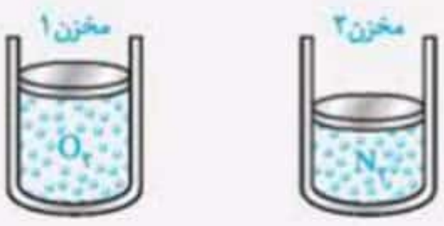
$$\frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P} \times \frac{V}{V} = \frac{\frac{3}{4}n}{n} \times \frac{300}{600} \Rightarrow P_2 = \frac{3}{8}P$$

بنابراین فشار گاز درون مخزن $\frac{3}{8}$ برابر شده است.

۱ ۱۰۲۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۴ **مقایسهٔ شرایط دو گاز متفاوت با یک‌دیگر** (تست‌های ۱۰۲۱ تا ۱۰۲۹)

در شکل‌های مقابل، هر یک از مخازن نشان داده شده دارای شرایط دما، فشار، حجم و تعداد مول متفاوت می‌باشند، برای برقراری ارتباط بین این پارامترها خواهیم داشت:



$$PV = nRT \Rightarrow \begin{cases} P_1V_1 = n_1RT_1 & \text{«مخزن ۱»} \\ P_2V_2 = n_2RT_2 & \text{«مخزن ۲»} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1: \text{فشار} \\ V_1: \text{حجم} \\ n_1: \text{تعداد مول} \\ T_1: \text{دما} \end{cases} \quad \begin{cases} P_2: \text{فشار} \\ V_2: \text{حجم} \\ n_2: \text{تعداد مول} \\ T_2: \text{دما} \end{cases} \xrightarrow[\text{خواهیم داشت}]{\text{با تقسیم دو رابطه}} \boxed{\frac{P_1}{P_2} \times \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{T_1}{T_2}}$$

تذکر آزمایش نشان می‌دهد که یک مول از هر گاز کامل و دلخواهی، در دمای صفر درجهٔ سلسیوس و در فشار ۱ اتمسفر، حجمی برابر با ۲۲/۴ لیتر را اشغال می‌کند.

برای مقایسهٔ پارامترهای یک گاز دلخواه با شرایط متعارفی که در برخی از تست‌های کنکور مطرح شده است، داریم:



$$\text{شرایط مسأله: } P_{\text{گاز}}V_{\text{گاز}} = n_{\text{گاز}}RT_{\text{گاز}}$$
$$\text{شرایط متعارفی: } P_0V_0 = n_0RT_0$$
$$\xrightarrow[\text{دو رابطه}]{\text{تقسیم}} \boxed{\frac{P_{\text{گاز}}}{P_0} \times \frac{V_{\text{گاز}}}{V_0} = \frac{n_{\text{گاز}}}{n_0} \times \frac{T_{\text{گاز}}}{T_0}}$$

تمرین **دو ظرف با حجم مساوی، یکی محتوی گاز هیدروژن و دیگری محتوی گاز اکسیژن، در دمای یکسان می‌باشند. اگر جرم هیدروژن و اکسیژن برابر باشد، فشار هیدروژن چند برابر فشار اکسیژن است؟** (M.K.A)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ با توجه به اطلاعات سؤال در مقایسهٔ دو گاز می‌توان نوشت:

$$T_{H_2} = T_{O_2} \text{ (تساوی دمای دو ظرف)} \quad , \quad V_{H_2} = V_{O_2} \text{ (تساوی حجم دو ظرف)}$$

$$m_{H_2} = m_{O_2} = m \text{ (تساوی جرم دو گاز)} \Rightarrow n_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} = \frac{m}{2} \ , \ n_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} = \frac{m}{32}$$

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P_{H_2}}{P_{O_2}} \times \frac{V_{H_2}}{V_{O_2}} = \frac{n_{H_2}}{n_{O_2}} \times \frac{T_{H_2}}{T_{O_2}} \Rightarrow \frac{P_{H_2}}{P_{O_2}} \times 1 = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{m}{32}} \times 1 \Rightarrow \frac{P_{H_2}}{P_{O_2}} = 16 \quad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

هشدار: اگر تفاوت تساوی جرم با تساوی تعداد مول را نمی‌فهمیدیم، نسبت $\frac{n_{H_2}}{n_{O_2}}$ را برابر یک در نظر گرفته و نسبت $\frac{P_{H_2}}{P_{O_2}}$ را به اشتباه یک به دست می‌آوریم.

www.gajmarket.com

برای مقایسهٔ حجم دو گاز، کافیست شرایط اولیهٔ دو گاز را به‌دست آورده و مطابق خلاصه نکات ارائه‌شده عمل کنیم. دقت شود که با توجه به صورت تست، فشار دو مخزن با یک‌دیگر برابر است $\left(\frac{P_{H_2}}{P_{O_2}}=1\right)$:

شرایط گاز هیدروژن:

$$n_{H_2}=\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}=\frac{4}{2}=2 \quad , \quad T_{H_2}=27+273=300K$$

شرایط گاز اکسیژن:

$$n_{O_2}=\frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4} \quad , \quad T_{O_2}=47+273=320K$$

$$PV=nRT \Rightarrow \frac{P_{H_2}}{P_{O_2}}\times\frac{V_{H_2}}{V_{O_2}}=\frac{n_{H_2}}{n_{O_2}}\times\frac{T_{H_2}}{T_{O_2}}$$

$$\text{جایگذاری پارامترها} \Rightarrow 1\times\frac{V_{H_2}}{V_{O_2}}=\frac{2}{\frac{1}{4}}\times\frac{300}{320}=\frac{15}{16} \Rightarrow \frac{V_{H_2}}{V_{O_2}}=8\times\frac{15}{16}=\frac{15}{2}$$

۱۰۲۲ **۴** با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۲۴)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۰۲۳ **۲** برای مقایسهٔ تعداد مولکول‌های اکسیژن و هیدروژن، ابتدا تعداد مول آن‌ها را با یک‌دیگر مقایسه می‌کنیم (توجه شود که با توجه به‌صورت تست، دمای دو گاز یکسان است $(T_{O_2}=T_{H_2})$:

گاز هیدروژن: $V_{H_2}=2Lit \ , \ P_{H_2}=1atm$ و گاز اکسیژن: $V_{O_2}=3Lit \ , \ P_{O_2}=2atm$

$$PV=nRT \Rightarrow \frac{P_{O_2}}{P_{H_2}}\times\frac{V_{O_2}}{V_{H_2}}=\frac{n_{O_2}}{n_{H_2}}\times\frac{T_{O_2}}{T_{H_2}}$$

$$\text{جایگذاری پارامترها} \Rightarrow \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{n_{O_2}}{n_{H_2}}\times 1 \Rightarrow \frac{n_{O_2}}{n_{H_2}}=3$$

اگر تعداد مول اکسیژن ۳ برابر تعداد مول هیدروژن باشد، تعداد مولکول‌های آن نیز ۳ برابر هیدروژن است.

یادآوری

احتمالاً از درس شیمی به‌خاطر دارید که هر مول از هر ماده، تقریباً تعداد 6×10^{23} مولکول دارد که این عدد به عدد آووگادرو معروف است. حل این سؤال با جزئیات بیشتر به‌صورت زیر است:

$$N=6\times10^{23}n \Rightarrow \frac{N_{O_2}}{N_{H_2}}=\frac{6\times10^{23}\times n_{O_2}}{6\times10^{23}\times n_{H_2}}=\frac{n_{O_2}}{n_{H_2}}=3$$

(N: تعداد مولکول، n: تعداد مول)

مجدداً تأکید می‌شود که در نوشتن نسبت پارامترهای بین دو گاز، دما حتماً باید برحسب کلوین باشد ولی برای حجم و فشار، تنها کافی است صورت و مخرج کسر واحد یکسان داشته باشند، یعنی در نوشتن نسبت، نیازی نیست که واحدهای حجم و فشار لزوماً برحسب SI باشد.

۱۰۲۴ **۳** شرایط متعارفی یک گاز کامل در صورت تست مطرح شده و برای محاسبهٔ حجم گاز هیدروژن، آن را با شرایط متعارفی مقایسه می‌کنیم:

شرایط گاز هیدروژن: $V_{H_2}=? \ , \ P_{H_2}=2atm \ , \ T_{H_2}=182+273=2\times91+3\times91=5\times91K \ , \ n_{H_2}=\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}=\frac{6}{2}=3mol$

شرایط متعارفی: $V_0=22/4Lit \ , \ P_0=1atm \ , \ T_0=0+273=3\times91K \ , \ n_0=1mol$

$$\frac{P_{H_2}}{P_0}\times\frac{V_{H_2}}{V_0}=\frac{n_{H_2}}{n_0}\times\frac{T_{H_2}}{T_0} \Rightarrow \frac{2}{1}\times\frac{V_{H_2}}{22/4}=\frac{3}{1}\times\frac{5\times91}{3\times91} \Rightarrow V_{H_2}=56Lit$$

تذکر

ابتکاری که در روند ساده کردن دماها در این سؤال انجام دادیم، در کنکور زیاد استفاده می‌شود. به خاطر بسپاریم عدد ۲۷۳ که برای تبدیل دمای سلسیوس به کلوین کاربرد دارد به عدد ۹۱ ساده می‌شود $(91\times3=273)$.

۲ ۱۰۲۵ برای محاسبهٔ جرم گاز اکسیژن، ابتدا با مقایسهٔ آن با شرایط متعارفی، تعداد مول گاز اکسیژن را به‌دست می‌آوریم:

$V_{O_2}=۵/۶\,Lit\ ,\ P_{O_2}=۲atm\ ,\ T_{O_2}=۹۱+۲۷۳=۹۱+۳\times۹۱=۴\times۹۱K\ ,\ n_{O_2}=?$ (شرایط گاز اکسیژن)

$V_۰=۲۲/۴\,Lit\ ,\ P_۰=۱atm\ ,\ T_۰=۰+۲۷۳=۳\times۹۱K\ ,\ n_۰=۱$ (شرایط متعارفی)

$$\frac{P_{O_2}}{P_۰}\times\frac{V_{O_2}}{V_۰}=\frac{n_{O_2}}{n_۰}\times\frac{T_{O_2}}{T_۰}\xrightarrow{\text{جایگذاری پارامترها}}\frac{۲}{۱}\times\frac{۵/۶}{۲۲/۴}=\frac{n_{O_2}}{۱}\times\frac{۴\times۹۱}{۳\times۹۱}\Rightarrow n_{O_2}=\frac{۳}{۸}mol$$

در ادامه با توجه به تعداد مول گاز اکسیژن، جرم آن را محاسبه می‌کنیم:

$$n_{O_2}=\frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}\Rightarrow\frac{۳}{۸}=\frac{m_{O_2}}{۳۲}\Rightarrow m_{O_2}=۱۲gr$$

۳ ۱۰۲۶ **روش اول:** برای حل این تست با توجه به داده نشدن مقدار R توسط طراح، می‌توان برای حل، این گاز کامل را با شرایط متعارفی که مقادیر آن را می‌دانیم، مقایسه کرد.

$V_{H_2}=۲۲/۴\,Lit\ ,\ P_{H_2}=?\ ,\ T_{H_2}=۲+۲۷۳=۲۷۵K\ ,\ n_{H_2}=\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}}=\frac{۱۰}{۲}=۵$ (شرایط گاز هیدروژن)

$V_۰=۲۲/۴Lit, P_۰=1atm, T_۰=۰+۲۷۳=۲۷۳K, n_۰=۱$ (شرایط متعارفی)

$$\frac{P_{H_2}}{P_۰}\times\frac{V_{H_2}}{V_۰}=\frac{n_{H_2}}{n_۰}\times\frac{T_{H_2}}{T_۰}\xrightarrow{\text{جایگذاری پارامترها}}\frac{P_{H_2}}{۱}\times\frac{۲۲/۴}{۲۲/۴}=\frac{۵}{۱}\times\frac{۲۷۵}{۲۷۳}\Rightarrow P_{H_2}=۵atm$$

تقریباً برابر یک است

روش دوم: برای حل مقدار R را به طور تقریبی برابر $۸/۳J/mol.K$ قرار داده و از معادلهٔ حالت گاز کامل استفاده می‌کنیم:

$$PV=nRT\Rightarrow P\times۲۲/۴\times۱۰^{-۳}=۵\times۸/۳\times۲۷۵\Rightarrow P=۵۰۹/۴\times۱۰^{۳}Pa=۵/۰۹atm$$

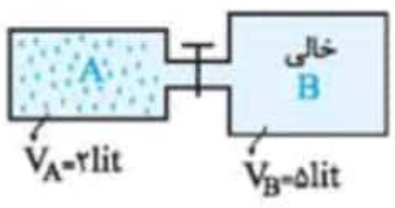
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در این حالت نیز فشار گاز تقریباً برابر ۵atm به دست آمد.

۴ ۱۰۲۷ در فشار ۱atm و دمای صفر درجهٔ سلسیوس (که در واقع همان فشار و دمای شرایط متعارفی است)، معادلهٔ حالت این گاز کامل را می‌نویسیم:

$P=۱atm=۱۰^{۵}Pa\ ,\ V=۴\times۳\times۳=۳۶m^{۳}\ ,\ n=?\ ,\ T=۰+۲۷۳=۲۷۳K$

$$PV=nRT\Rightarrow۱۰^{۵}\times۳۶=n\times۸/۳\times۲۷۳\Rightarrow n=۱۵۸۸/۷۷=۱۵۸۹mol$$

۳ ۱۰۲۸ برای بررسی این سؤال، با توجه به این‌که تعداد مول گاز قبل از باز کردن شیر و بعد از باز کردن آن یکسان است، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



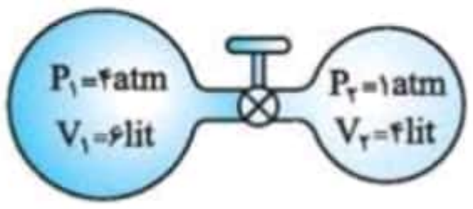
$$\xrightarrow[\text{باز کردن شیر}]{\text{پس از}}\begin{cases}T_{\text{مخلوط}}=۷^{\circ}C=۲۸۰K\ ,\ V_{\text{مخلوط}}=V_A+V_B=۷lit\\ P_{\text{مخلوط}}=?\end{cases}$$

$T_A=۴۷^{\circ}C=۴۷+۲۷۳=۳۲۰K$ و $P_A=۴atm$

$$n_A+n_B=n_{\text{مخلوط}}\Rightarrow\frac{P_AV_A}{RT_A}+\boxed{۰}=\frac{P_{\text{مخلوط}}(V_A+V_B)}{RT_{\text{مخلوط}}}\Rightarrow\frac{۴\times۲}{۳۲۰}=\frac{P_{\text{مخلوط}}\times۷}{۲۸۰}\Rightarrow P_{\text{مخلوط}}=1atm$$

ظرف B خالی بوده است.

۲ ۱۰۲۹ در این سؤال می‌خواهیم با سبک جدیدی از سؤالات آشنا شویم. فرض کنید تعداد مول گاز موجود در مخزن (۱) برابر n_1 و تعداد مول گاز موجود در مخزن (۲) برابر n_2 است. پس از باز کردن شیر، گویی یک مخزن با حجم (V_1+V_2) در اختیار داریم که (n_1+n_2) مول گاز در آن قرار دارد و می‌توان نوشت:



$$n_{\text{کل}}=n_1+n_2$$

از طرفی با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل برای محاسبهٔ تعداد مول گاز می‌توان نوشت:

$$PV=nRT\Rightarrow n=\frac{PV}{RT}$$

بنابراین به کمک رابطهٔ فوق، داریم:

$$n_{\text{کل}}=n_1+n_2\xrightarrow{T_{\text{کل}}=T_1=T_2}\frac{P_{\text{کل}}V_{\text{کل}}}{RT_{\text{کل}}}=\frac{P_1V_1}{RT_1}+\frac{P_2V_2}{RT_2}\Rightarrow P_{\text{کل}}\times(V_1+V_2)=P_1V_1+P_2V_2$$

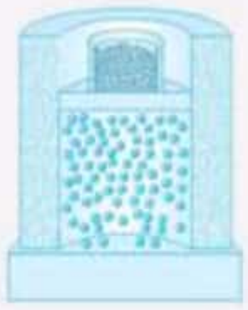
$$P_{\text{کل}}\times(۶+۴)=۴\times۶+۱\times۴\Rightarrow P_{\text{کل}}=\frac{۲۸}{۱۰}=۲/۸atm$$

یعنی دو مخزن پس از تعادل، به فشار مشترک ۲/۸atm می‌رسند.

gajmarket.com

۱۰۳۰ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۵ **چگالی (جرم حجمی) یک گاز کامل** (تست‌های ۱۰۳۰ تا ۱۰۴۰)



همان‌طور که می‌دانیم، چگالی یک ماده از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ به‌دست می‌آید. به کمک معادلهٔ حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، می‌توان یک رابطهٔ دیگر را برای چگالی گاز کامل به‌دست آورد:

$$\begin{cases} n = \frac{m}{M} \Rightarrow m = nM \text{ : تعداد مول} \\ PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{\frac{nRT}{P}} = \frac{P.M}{R.T} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{P.M}{R.T}}$$

نکات مهم و کاربردی

۱) چگالی یک گاز کامل با نسبت $\frac{P}{T}$ رابطهٔ مستقیم دارد.

۲) برای مقایسهٔ چگالی دو گاز کامل مختلف، می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{M_2}{M_1} \times \frac{T_1}{T_2}}$$

۳) اگر حجم مقدار معینی از یک گاز کامل (مقدار معینی گاز، یعنی m و n ثابت است.) ثابت بماند، چگالی گاز نیز ثابت می‌ماند. به‌عبارت دیگر در این حالت نسبت $\frac{P}{T}$ در گاز ثابت می‌ماند، درحالی‌که مقادیر P و T می‌توانند تغییر کنند.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (m,V \text{ ثابت}) \qquad , \qquad \rho \propto \frac{P}{T} \quad (\rho \text{ ثابت})$$

برای یادگیری بهتر این مفاهیم، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۱ **برای آن‌که بتوان جرم حجمی مقدار معینی از یک گاز کامل را ۲ برابر کرد، کدام‌یک از روش‌های زیر را می‌توان به‌کار برد؟**

۱) فشار و دمای مطلق را دو برابر کرد.

۲) فشار آن را نصف و دمای مطلق آن را دو برابر کرد.

۳) در فشار ثابت دمای مطلق آن را نصف کرد.

۴) در حجم ثابت فشار آن را دو برابر کرد.

پاسخ با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$، چگالی گاز را در هر کدام از گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

۱)

$$\rho = \frac{P\,M}{R\,T} \Rightarrow \text{چگالی گاز ثابت می‌ماند.}$$

(P: ۲ برابر، T: ۲ برابر)

۲)

$$\rho = \frac{P\,M}{R\,T} \Rightarrow \text{چگالی گاز } \frac{1}{4} \text{ برابر می‌شود.}$$

(P: $\frac{1}{2}$ برابر، T: ۲ برابر، ρ: $\frac{1}{4}$ برابر)

۳)

$$\rho = \frac{P\,M}{R\,T} \Rightarrow \text{چگالی گاز دو برابر می‌شود.}$$

(P: ۲ برابر، T: $\frac{1}{2}$ برابر، ρ: ۲ برابر)

بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ این تمرین است.

۴) با توجه به ثابت بودن حجم مقدار معینی گاز، چگالی آن ثابت می‌ماند (در واقع با دو برابر کردن فشار گاز در حجم ثابت، دمای مطلق آن نیز دو برابر شده و درنتیجه چگالی گاز ثابت می‌ماند).

تمرین۲ **با توجه به رابطهٔ فوق، در چه شرایطی می‌توان یک گاز را کامل درنظر گرفت؟**

پاسخ برای این منظور بهتر است گاز، رقیق (دارای چگالی کم) باشد. با توجه به رابطهٔ فوق، فشار کم‌تر و دمای مطلق بیشتر یک گاز، شرایط بهتری برای ایده‌آل بودن آن گاز ایجاد می‌نماید:

$$\downarrow \rho = \frac{\downarrow P.M}{R\,T\uparrow}$$

(ρ: کم، P: کم، T: زیاد)

با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$، چگالی گاز کامل با فشار آن رابطهٔ مستقیم و با دمای مطلق آن رابطهٔ معکوس دارد.

۱۰۳۱ ۱ با توجه به خلاصه نکات (۲۵)، چگالی یک گاز کامل از رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$ به‌دست می‌آید.

۳ ۱۰۳۲ برای حل ابتدا چگالی گاز کامل را در SI محاسبه کرده و سپس آن را به گرم بر لیتر تبدیل می‌کنیم:

$$T_1 = ۷ + ۲۷۳ = ۲۸۰K \ , \ M = ۳۲gr/mol = ۳۲\times۱۰^{-۳}kg/mol \ , \ P = ۱۰^۵Pa \ , \ R = ۸J/mol.K \ , \ \rho = ?$$

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{۱۰^۵ \times ۳۲ \times ۱۰^{-۳}}{۸ \times ۲۸۰} = \frac{۱۰}{۷} kg/m^۳ = \frac{۱۰}{۷} gr/Lit$$

یادآوری: از فصل اول فیزیک پایهٔ دهم به‌خاطر داریم: $۱kg/m^۳ = ۱gr/Lit$

۱ ۱۰۳۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، تأثیر تغییرات پارامترهای داده شده در هر یک از چهار گزینه را بر روی چگالی یک مقدار معین از گاز کامل بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

۱) کاهش دما در فشار ثابت:

$$\frac{PV}{T} \overset{\text{ثابت}}{\simeq} \text{ثابت} \xrightarrow{\text{T کاهش یابد}} \frac{V\downarrow}{T\downarrow} \simeq \text{ثابت} \xrightarrow{\text{V کاهش یابد}} \uparrow \rho = \frac{m}{V\downarrow}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید در فشار ثابت، کاهش دما باعث کاهش حجم گاز و در نتیجه افزایش چگالی گاز می‌شود.

۲) با شیوهٔ مشابه قسمت (۱)، به سادگی می‌توان فهمید که افزایش دما در فشار ثابت، باعث کاهش چگالی گاز می‌شود.

۳) کاهش فشار در دمای ثابت:

$$\frac{PV}{T} \simeq \text{ثابت} \Rightarrow \underset{\text{کاهش}}{P}\ \underset{\text{افزایش}}{V} \simeq \text{ثابت} \xrightarrow{\text{V افزایش یابد}} \downarrow \rho = \frac{m}{V\uparrow}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، کاهش فشار در دمای ثابت، موجب افزایش حجم و در نتیجه کاهش چگالی می‌شود.

۴) افزایش دما در حجم ثابت:

همان‌گونه که در خلاصه نکات (۲۵)، نیز بیان کردیم، در حجم ثابت، چگالی گاز ثابت است.

نگاهی دیگر

با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$ که در خلاصه نکات (۲۵) نیز به آن اشاره کردیم، با کاهش دما در فشار ثابت، چگالی گاز افزایش می‌یابد:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \xrightarrow[\text{اعداد ثابت}]{P \text{ و } R \cdot M} \uparrow \rho \propto \frac{۱}{T\downarrow}$$

۴ ۱۰۳۴ با توجه به آن‌که حجم ظرف ثابت است و جرم گاز درون ظرف نیز ثابت است، چگالی گاز ثابت می‌ماند.

$$\text{ثابت } \rho = \frac{\overset{\text{ثابت}}{m}}{\underset{\text{ثابت}}{V}}$$

برای مقایسهٔ فشار در دو حالت داریم:

$$\frac{P_۲}{P_۱} \times \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱} \times \frac{T_۲}{T_۱} \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} \times ۱ = ۱ \times \frac{۳۲۷ + ۲۷۳}{۲۷ + ۲۷۳} \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۶۰۰}{۳۰۰} \Rightarrow P_۲ = ۲P_۱$$

۳ ۱۰۳۵ در مقایسهٔ دو حالت داده شده داریم:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \frac{P_۲}{P_۱} \times \frac{T_۱}{T_۲}$$

$$\begin{cases} \text{حالت اولیه} : T_۱ = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳K \ , \ P_۱ = ۱atm \ , \ \rho_۱ = ۱/۴kg/m^۳ \\ \text{حالت ثانویه} : T_۲ = ۲۷۳ + ۲۷۳ = ۲ \times ۲۷۳K \ , \ P_۲ = ۲atm \ , \ \rho_۲ = ? \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho_۲}{۱/۴} = \frac{۲}{۱} \times \frac{۲۷۳}{۲ \times ۲۷۳} = ۱ \Rightarrow \rho_۲ = ۱/۴kg/m^۳$$

نگاهی دیگر

با توجه به این‌که دمای مطلق و فشار مقدار معینی از گاز کامل را دو برابر کرده‌ایم، بنابراین چگالی این گاز کامل تغییر نمی‌کند.

۳ ۱۰۳۶ با توجه به خلاصه نکات (۲۵)، چگالی مقدار مشخصی از یک گاز کامل با فشار آن رابطهٔ مستقیم و با دمای مطلق آن رابطهٔ معکوس دارد، بنابراین داریم:

$$\theta_۱ = ۱۰^\circ C \Rightarrow T_۱ = ۲۷۳ + ۱۰ = ۲۸۳K \ , \ P_۱ = ۱atm \ , \ \theta_۲ = ۲۰^\circ C \Rightarrow T_۲ = ۲۷۳ + ۲۰ = ۲۹۳K \ , \ P_۲ = ۲atm$$

$$\text{چگالی} : \rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \frac{P_۲}{P_۱} \times \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{۲}{۱} \times \underbrace{\frac{۲۸۳}{۲۹۳}}_{\text{کم‌تر از یک}} < ۲$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، چگالی گاز، کم‌تر از دو برابر می‌شود.

هشدار

اگر در نسبت زیر به اشتباه $T_۱$ و $T_۲$ را برحسب سلسیوس وارد کنیم، پاسخ یک برابر (تغییر نمی‌کند) به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \frac{P_۲}{P_۱} \times \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{۲}{۱} \times \frac{۱۰}{۲۰} = ۱$$

دقت شود که دما در روابط مربوط به قانون گازها برحسب کلوین است.

gajmarket.com

۱۰۳۷ ۲ برای مقایسهٔ چگالی، ابتدا حجم گاز در دو حالت را مقایسه می‌کنیم:

$$\theta_1 = -۷۳\,^\circ C \Rightarrow T_1 = ۲۷۳ - ۷۳ = ۲۰۰K \;,\; T_2 = ۴۰۰K \;,\; P_1 = ۲۰cmHg \;,\; P_2 = ۴۰cmHg$$

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{P_1}{P_2} = \frac{۴۰۰}{۲۰۰} \times \frac{۲۰}{۴۰} = ۱$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، حجم گاز ثابت مانده و با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، چگالی آن نیز ثابت می‌ماند.

روش بهتر: با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$، در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{T_1}{T_2} = \frac{۴۰}{۲۰} \times \frac{۲۰۰}{۴۰۰} = ۱$$

۱۰۳۸ ۱ در مقایسهٔ شرایط گاز کامل در دو حالت داریم:

۱) حجم گاز کامل موجود در مخزن ۴۰ درصد کاهش یافته است، بنابراین:

$$V_2 = V_1 - \frac{۴۰}{۱۰۰}V_1 = \frac{۶۰}{۱۰۰}V_1 = \frac{۶}{۱۰}V_1$$

۲) نیمی از گاز موجود در مخزن از آن خارج شده است، بنابراین:

$$n_2 = n_1 - \frac{۱}{۲}n_1 = \frac{۱}{۲}n_1$$

۳) فرایند در دمای ثابت انجام می‌شود، بنابراین:

$$T_2 = T_1$$

مقایسهٔ فشار: با توجه به اطلاعات فوق برای مقایسهٔ فشار گاز در دو حالت می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} \times \frac{\frac{۶}{۱۰}V_1}{V_1} = \frac{\frac{۱}{۲}n_1}{n_1} \times \frac{T_1}{T_1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{۵}{۶}$$

$$P_2 = \frac{۵}{۶}P_1 \Rightarrow \Delta P = P_2 - P_1 = -\frac{۱}{۶}P_1 = -۰/۱۶P_1 \Rightarrow$$ فشار گاز ۱۶ درصد کاهش می‌یابد.

مقایسهٔ چگالی: از طرفی با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$ و ثابت بودن دما، برای مقایسهٔ چگالی گاز در دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{T_1}{T_2} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \rho_2 = \frac{۵}{۶}\rho_1$$

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = -\frac{۱}{۶}\rho_1 = -۰/۱۶\rho_1 \Rightarrow$$ چگالی گاز ۱۶ درصد کاهش می‌یابد.

خلاقیت‌های حرفه‌ای

با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ نیز می‌توان چگالی گاز را در دو حالت مقایسه کرد:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{۱}{۲}m_1}{m_1} \times \frac{V_1}{\frac{۶}{۱۰}V_1} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

۱۰۳۹ ۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در یک فرایند هم‌فشار (فشار ثابت است)، برای مقدار معینی گاز کامل داریم:

قانون عمومی گازهای کامل: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \xrightarrow{P=\text{ثابت}} \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$

۲) در این مسأله دمای گاز ۲۵ درصد افزایش یافته است و داریم:

$$T_2 = T_1 + \frac{۲۵}{۱۰۰}T_1 = \frac{۵}{۴}T_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{۵}{۴}$$

۳) برای مقایسهٔ چگالی گاز کامل در دو حالت، از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ کمک می‌گیریم. دقت کنید که در طول فرایند، گازی از مخزن خارج نشده و جرم گاز (m) ثابت می‌ماند.

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{V_1}{V_2} = ۱ \times \frac{۴}{۵} = ۰/۸ \Rightarrow \rho_2 = ۰/۸\rho_1 = \frac{۸۰}{۱۰۰}\rho_1 \Rightarrow$$ یعنی چگالی گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.

روش بهتر: با کمک گرفتن از رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{T_1}{T_2} \\ T_2 = T_1 + \frac{۲۵}{۱۰۰}T_1 \;,\; P_2 = P_1 \;\text{(فشار ثابت است.)} \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \overbrace{\frac{P_2}{P_1}}^{=۱} \times \frac{T_1}{\frac{۵}{۴}T_1} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \rho_2 = \frac{۴}{۵}\rho_1$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \frac{۴}{۵}\rho_1 = \frac{۸۰}{۱۰۰}\rho_1 \Rightarrow$$ یعنی چگالی گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.

۱۰۴۰ ۲ حجم مقدار معینی (جرم ثابت) از یک گاز کامل ۶۰ درصد افزایش یافته است. داریم:

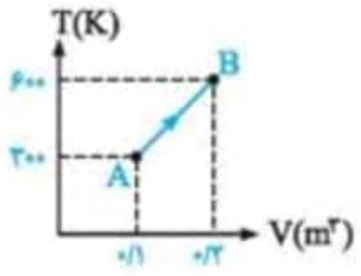
$$V_2 = V_1 + \frac{۶۰}{۱۰۰}V_1 = ۱/۶V_1$$

برای بررسی تغییرات چگالی هنگامی‌که تغییرات حجم مقدار معینی از گاز کامل را می‌دانیم، راحت‌تر است که از رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ استفاده کنیم:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{۱/۶V_1} = \frac{۱۰}{۱۶} = ۰/۶۲۵ \Rightarrow \rho_2 = \frac{۶۲/۵}{۱۰۰}\rho_1$$ m ثابت است.

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، چگالی گاز به ۶۲/۵ درصد مقدار اولیه رسیده است، بنابراین ۳۷/۵ درصد $(۱۰۰-۶۲/۵)$ مقدار اولیه کاهش یافته است.

۳ ۱۰۴۱ با مقایسهٔ شرایط گاز کامل بین دو نقطهٔ A و B، به‌سادگی نسبت $\frac{P_A}{P_B}$ را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{A نقطهٔ}: V_A = ۰/۱ m^۳ \ , \ T_A = ۳۰۰ K \ , \ n_A = n$$

$$\text{B نقطهٔ}: V_B = ۰/۲ m^۳ \ , \ T_B = ۶۰۰ K \ , \ n_B = n$$

$$\frac{P_A}{P_B} \times \frac{V_A}{V_B} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{T_A}{T_B} \xrightarrow{\text{جایگذاری پارامترها}} \frac{P_A}{P_B} \times \frac{۰/۱}{۰/۲} = ۱ \times \frac{۳۰۰}{۶۰۰} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = ۱$$

۳ ۱۰۴۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۶ **بررسی تغییرات دمای مقدار معینی از یک گاز کامل** (تست‌های ۱۰۴۲ و ۱۰۴۴)

برای بررسی چگونگی تغییر دمای یک گاز کامل، استفاده از معادلهٔ حالت و تحلیل پارامترهای P و V روش مناسبی است. اگر فشار و حجم مقدار معینی از یک گاز (تعداد مول ثابت) هر دو افزایش یابد، دمای مطلق گاز نیز الزاماً افزایش می‌یابد، زیرا:

زیاد زیاد ثابت زیاد

$$P \ V = nR \ T$$

نکات مهم و کاربردی

۱ دمای مطلق مقدار معینی از یک گاز کامل، متناسب است با حاصل‌ضرب کمیت‌های فشار و حجم.

$$PV \propto T$$

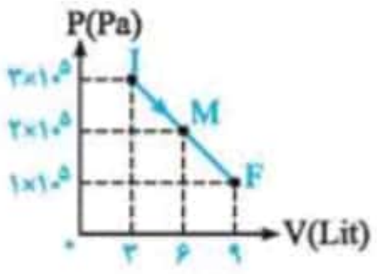
۲ برای مقدار معینی گاز کامل، با افزایش حاصل‌ضرب PV، دمای مطلق گاز نیز افزایش می‌یابد و بالعکس.

۳ تغییرات فشار و حجم گاز، لزوماً نمی‌تواند باعث تغییر دمای گاز شود، به‌طور مثال اگر فشار گاز کاملی را ۲ برابر و حجم آن را نصف کنیم حاصل‌ضرب PV ثابت مانده و در نتیجه دمای گاز نیز ثابت می‌ماند.

برای حل این سؤال، مطابق روش زیر عمل می‌نماییم:

۱) می‌دانیم حاصل‌ضرب PV، متناسب با دمای مطلق گاز کامل است.

۲) برای نقاط ابتدایی، میانی و پایانی از نمودار، حاصل‌ضرب PV را به‌دست می‌آوریم:



$$\text{I نقطهٔ}: P_I V_I = ۳ \times ۱۰^۵ \times ۳ = ۹ \times ۱۰^۵ \quad , \quad \text{M نقطهٔ}: P_M V_M = ۲ \times ۱۰^۵ \times ۶ = ۱۲ \times ۱۰^۵$$

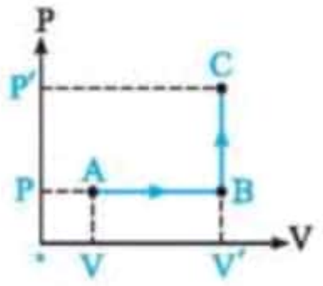
$$\text{F نقطهٔ}: P_F V_F = ۱ \times ۱۰^۵ \times ۹ = ۹ \times ۱۰^۵$$

۳) با توجه به یکسان بودن مقادیر $P_I V_I$ با $P_F V_F$، می‌توان دریافت $T_I = T_F$ است و البته $P_M V_M$ مقدار بزرگ‌تری نسبت به دو مقدار دیگر دارد، بنابراین خواهیم داشت:

$$[T_M > T_I = T_F]$$

دقت: با توجه به این‌که به مقایسهٔ حاصل‌ضرب PV می‌پردازیم، نیازی به تبدیل واحد نیست.

۲ ۱۰۴۳ نقطه‌ای که حاصل‌ضرب PV برای آن بزرگ‌تر است، دمای مطلق بیشتری دارد و می‌توان نوشت:



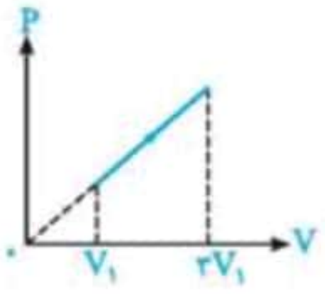
$$\begin{cases} T_A \propto P_A V_A = PV \\ T_B \propto P_B V_B = PV' \\ T_C \propto P_C V_C = P'V' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مقایسهٔ دمای A و B} \xrightarrow{V'>V} T_B > T_A \quad (۱) \\ \text{مقایسهٔ دمای B و C} \xrightarrow{P'>P} T_C > T_B \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \ , \ (۲) \Rightarrow T_C > T_B > T_A \ \text{یا} \ T_A < T_B < T_C$$

تذکر

از A تا B و از B تا C، حاصل‌ضرب PV دائماً در حال افزایش است و در نتیجه دما نیز در حال افزایش است.

۴ ۱۰۴۴ معادلهٔ نمودار داده‌شده به‌صورت $P = cV$ می‌باشد (که c یک عدد ثابت است) و می‌توان گفت:



۳ برابر ۳ برابر

$$P = c \ V \Rightarrow$$

با ۳ برابر شدن V، مقدار P هم ۳ برابر می‌شود.

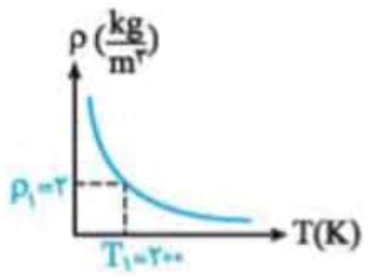
از طرفی دمای مطلق مقدار معینی از یک گاز کامل، متناسب با حاصل‌ضرب PV می‌باشد. بنابراین دمای مطلق گاز، ۹ برابر شده است:

۹ برابر ۳ برابر ۳ برابر

$$T \propto P \ V$$

www.gajmarket.com

۴ ۱۰۴۵ با توجه به اطلاعات داده شده بر روی نمودار، می‌توان نوشت:



$$P_1=P_2\ ,\ T_1=200K,\ T_2=300K,\ \rho_1=2kg/m^3,\ \rho_2=?$$

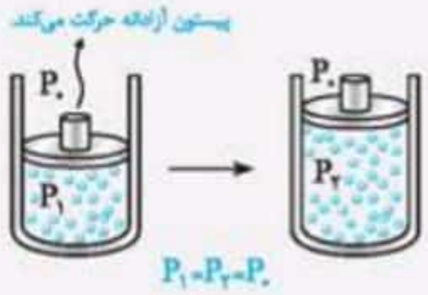
$$\rho=\frac{P.M}{R.T}\Rightarrow\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{P_2}{P_1}\times\frac{T_1}{T_2}\xrightarrow{P\text{ ثابت}}\frac{\rho_2}{2}=1\times\frac{200}{300}\Rightarrow\rho_2=\frac{4}{3}kg/m^3$$

برای محاسبهٔ حجم گاز نیز به کمک معادلهٔ حالت می‌توان نوشت:

$$P_2V_2=nRT_2\Rightarrow(1\times10^5)\times V_2=2\times8\times300\Rightarrow V_2=4/8\times10^{-2}m^3$$

۲ ۱۰۴۶ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا باید به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۷ — **قانون گازها در فشار ثابت** — (تست‌های ۱۰۴۶ تا ۱۰۵۶)



اگر در یک فرایند فشار گاز ثابت بماند (فرایند هم‌فشار باشد)، در این حالت قانون گازها شکل ساده‌تری به خود می‌گیرد و دا ریم:

$$\frac{\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{P}}V}{T}=\text{مقدار ثابت}\Rightarrow\frac{V}{T}=\text{مقدار ثابت}\Rightarrow V\propto T$$

نکات مهم و کاربردی

۱ در فرایند هم‌فشار، حجم و دمای مطلق گاز متناسب با یک‌دیگر تغییر می‌کنند، مثلاً اگر دما دو برابر شود، حجم هم دو برابر می‌شود. در سؤال‌هایی که به وضوح اشاره می‌شود که فشار گاز ثابت است، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}\quad\text{یا}\quad\frac{V_2}{V_1}=\frac{T_2}{T_1}:\text{فشار گاز ثابت باشد.}$$

۲ در مسائلی که تغییرات دما یا تغییرات حجم مطرح شده است، برای راحتی می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{T_2}{T_1}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب کسر}}\frac{V_2-V_1}{V_1}=\frac{T_2-T_1}{T_1}\Rightarrow\boxed{\frac{\Delta V}{V_1}=\frac{\Delta T}{T_1}}$$

۳ در مسائلی مانند شکل مقابل که پیستون می‌تواند آزادانه به سمت بالا و پایین حرکت کند، فشار گاز ثابت فرض می‌شود و به عبارتی نسبت $\frac{V}{T}$ ثابت است.



در این گونه موارد می‌توان گفت ارتفاع گاز زیر پیستون، متناسب با دمای گاز است.

$$\begin{cases}\frac{V}{T}=\text{ثابت}\\ V=A\times h\end{cases}\Rightarrow\frac{A\times h}{T}=\text{عدد ثابت}\Rightarrow h=\frac{(\text{عدد ثابت})}{A}\times T\Rightarrow h\propto T$$



به عنوان مثال اگر دمای مطلق گاز ۲۰ درصد مقدار اولیه افزایش یابد، ارتفاع گاز زیر پیستون نیز ۲۰ درصد مقدار اولیه افزایش می‌یابد. به‌عبارت بهتر در این حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta V}{V_1}=\frac{\Delta T}{T_1}\xrightarrow[V_1=Ah_1]{\Delta V=A\Delta h}\frac{\Delta h}{h_1}=\frac{\Delta T}{T_1}\xrightarrow{\Delta T=0/2T_1}\Delta h=0/2h_1$$

با توجه به این که فشار مقدار معین گاز ثابت است، افزایش یا کاهش T مستقیماً موجب افزایش یا کاهش V می‌شود و حجم گاز متناسب با دمای مطلق آن است:

$$\text{فشار گاز ثابت است}\Rightarrow\frac{V}{T}=\text{عدد ثابت}\Rightarrow V\propto T$$

تذکر

رابطهٔ مستقیم بین دو پارامتر، یعنی در صورتی‌که سایر پارامترها ثابت بمانند، تغییرات این دو پارامتر متناسب باشد.

۱ ۱۰۴۷ با توجه به این‌که فشار گاز ثابت است، می‌توان نوشت:

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}\xrightarrow[T_2=273+273=2\times273K]{T_1=0+273=273K}\frac{V_1}{\cancel{273}}=\frac{V_2}{2\times\cancel{273}}\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=2:\text{فشار گاز ثابت است.}$$

نگاهی دیگر

می‌توان گفت که در فشار ثابت، دمای مطلق یک گاز کامل دو برابر شده است، بنابراین حجم این گاز نیز دو برابر می‌شود.

۴ ۱۰۴۸ ابتدا دماها را به کلوین تبدیل می‌کنیم:

$$T_1 = ۲۷۳ + ۲۷/۳ = ۱۱\times(۲۷/۳)K \ , \ T_2 = ۲۷۳ + ۲۷۳ = ۲۰\times(۲۷/۳)\ K$$

فشار گاز ثابت است: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{۲۰\times ۲۷/۳}{۱۱\times ۲۷/۳} = \frac{۲۰}{۱۱} \Rightarrow V_1 < V_2 < ۲V_1$

۱ ۱۰۴۹ با کمک نتیجهٔ قانون گازها در فشار ثابت، (ترکیب کسر در صورت)، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta T = ۱K \ , \ T_1 = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳K \ , \ \frac{\Delta V}{V_1} = ?$$

فشار گاز ثابت است: $\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{۱}{۲۷۳}$

۱ ۱۰۵۰ مشابه با سؤال قبل، داریم:

$$\Delta T = ۱^\circ C = ۱K \ , \ \Delta V = \frac{۱}{۲۷۳}V_1 \ , \ \text{دمای اولیه برحسب سلسیوس} = \theta_۰ = ?$$

فشار گاز ثابت است $\Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \Rightarrow \frac{۱}{۲۷۳} = \frac{۱}{T_1} \Rightarrow$ دمای مطلق اولیه: $T_1 = ۲۷۳K = \theta_۰ + ۲۷۳ \Rightarrow \theta_۰ = ۰^\circ C$

۴ ۱۰۵۱ **روش اول:** با توجه به قانون گازهای کامل، داریم:

$$P_1 = P_2 \ , \ T_1 = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K \ , \ T_2 = ۴۲ + ۲۷۳ = ۳۱۵K \ , \ \frac{V_2}{V_1} = ?$$

فشار ثابت: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{۳۱۵}{۳۰۰} = ۱/۰۵ \Rightarrow V_2 = ۱/۰۵V_1$

$\Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = ۱/۰۵V_1 - V_1 = ۰/۰۵V_1 \Rightarrow$ حجم گاز ۵ درصد افزایش می‌یابد.

روش دوم: در فشار ثابت می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\overbrace{۴۲ - ۲۷}^{\Delta T}}{\underbrace{۲۷۳ + ۲۷}_{T_1}} = \frac{۱۵}{۳۰۰} = \frac{۵}{۱۰۰} \Rightarrow \Delta V = \frac{۵}{۱۰۰}V_1$$ (حجم گاز، ۵ درصد افزایش می‌یابد.)

دقت: مقدار ۳gr هیدروژن در روند سؤال بی‌تأثیر است و این عدد دادهٔ اضافی مسئله محسوب می‌شود.

۲ ۱۰۵۲ **روش اول:**

$$V_2 = V_1 + \frac{۲۵}{۱۰۰}V_1 = \frac{۱۲۵}{۱۰۰}V_1 = \frac{۵}{۴}V_1$$

فشار گاز ثابت است: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{\theta + ۲۷۳} = \frac{\frac{۵}{۴}V_1}{۲۲۷ + ۲۷۳} \Rightarrow \frac{۱}{\theta + ۲۷۳} = \frac{\frac{۵}{۴}}{۵۰۰} = \frac{۱}{۴۰۰} \Rightarrow \theta + ۲۷۳ = ۴۰۰ \Rightarrow \theta = ۱۲۷^\circ C$

روش دوم: با توجه به اطلاعات سؤال، مشابه با سه تست قبل عمل کرده و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta T = \Delta\theta = ۲۲۷ - \theta \\ T_1 = ۲۷۳ + \theta \\ \Delta V = \frac{۲۵}{۱۰۰}V_1 = \frac{۱}{۴}V_1 \end{cases} \xrightarrow[\text{است.}]{\text{فشار ثابت}} \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{۲۲۷ - \theta}{۲۷۳ + \theta} \xrightarrow[\text{و حل معادله}]{\text{طرفین وسطین}} \theta = ۱۲۷^\circ C$$

۴ ۱۰۵۳ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$V_2 = ۲V_1 \ , \ \text{دمای اولیه}: T_1 = \theta + ۲۷۳ \ , \ \text{دمای ثانویه}: T_2 = ۵\theta + ۲۷۳$$

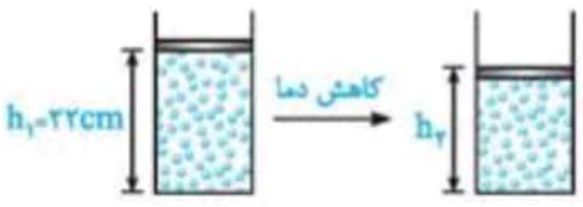
در ادامه با توجه به فشار ثابت گاز می‌توان نوشت:

فشار گاز ثابت است: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{\theta + ۲۷۳} = \frac{۲V_1}{۵\theta + ۲۷۳} \Rightarrow ۲\times(\theta + ۲۷۳) = ۵\theta + ۲۷۳ \Rightarrow ۳\theta = ۲۷۳ \Rightarrow \theta = ۹۱^\circ C$

۲ ۱۰۵۴ با توجه به خلاصه نکات (۲۷)، در این سؤال پیستون می‌تواند آزادانه حرکت کند و فشار هوای محیط نیز ثابت است، بنابراین فشار گاز درون سرنگ نیز در طی فرایند ثابت می‌ماند. از سوی دیگر با گرم شدن آب، هوای درون سرنگ نیز گرم شده و حجم آن نیز افزایش می‌یابد.

$$\frac{\overbrace{P}^{\text{ثابت}}\ \overbrace{V}^{\uparrow}}{\underbrace{T}_{\uparrow}} = \text{ثابت}$$

۲ ۱۰۵۵ با توجه به مفاهیم مطرح شده در سؤال قبل می‌توان گفت:



۱) پیستون بدون اصطکاک است، پس فشار گاز ثابت است.

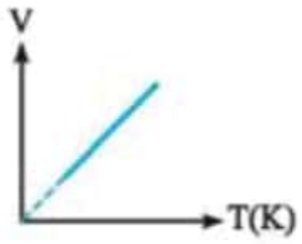
۲) دمای گاز کاهش یافته است، پس حجم گاز نیز کاهش می‌یابد و پیستون به سمت پایین می‌رود.

۳) سطح مقطع سیلندر ثابت است، پس حجم گاز متناسب با ارتفاع پیستون از کف سیلندر است.

فشار ثابت: $\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \Rightarrow \frac{\Delta h}{۲۲} = \frac{(۲۷ - ۵۷)}{۵۷ + ۲۷۳} = \frac{-۳۰}{۳۳۰} \Rightarrow \Delta h = -۲cm$

علامت منفی برای Δh به این معنی است که پیستون پایین آمده است.

gajmarket.com



۱۰۵۶ ۱ می‌دانیم در فشار ثابت، حجم گاز کامل با دمای مطلق آن متناسب است:

$$\frac{\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{PV}}}{T} = \text{ثابت} \Rightarrow V = \frac{\text{عدد ثابت}}{P} \times T \Rightarrow V \propto T$$

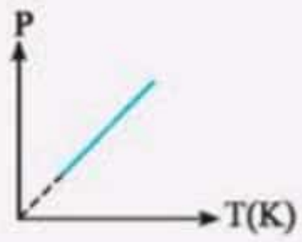
بنابراین نمودار حجم ـ دما برای گاز کامل با فشار ثابت، به‌صورت خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد.

تذکر

نقطه‌چین‌های رسم شده در نمودارها به این دلیل است که اگر گاز خیلی سرد یا خیلی فشرده باشد، رابطه‌های مربوط به گاز کامل برای آن صدق نمی‌کند، علاوه بر این موضوع به خاطر داشته باشید که اگر دمای گاز خیلی پایین برود، گاز به مایع تبدیل می‌شود.

۱۰۵۷ ۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۸ — **قانون گازها در حجم ثابت** — (تست‌های ۱۰۵۷ تا ۱۰۶۲)



اگر حجم یک گاز در طول فرایند ثابت بماند (فرایند هم‌حجم)، داریم:

$$\frac{P\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{V}}}{T} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \frac{P}{T} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow P \propto T$$

نکات مهم و کاربردی

۱ هنگامی‌که حجم ثابت بماند، دمای مطلق و فشار گاز کامل با هم متناسب هستند و تغییر در هر کدام، باعث ایجاد همان تغییر در دیگری می‌شود.

۲ در مسائلی که حجم گاز ثابت می‌ماند، از رابطهٔ ساده شدهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad , \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$$: حجم گاز ثابت باشد.

۳ در صورتی‌که تغییرات فشار و دما در سؤال مطرح شده باشد، استفاده از رابطهٔ زیر معمولاً ساده‌تر است:

$$\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$$: حجم گاز ثابت باشد.

تمرین ۱ **اگر در حجم ثابت، دمای مقدار معینی گاز کامل را از ۴۵/۵ درجهٔ سلسیوس به ۹۱ درجهٔ سلسیوس برسانیم، فشار گاز چند برابر می‌شود؟** (تجربی داخل ۹۱)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۸}{۷}$

پاسخ با توجه به ثابت بودن حجم گاز کامل و با کمک گرفتن از قانون گازها می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \xrightarrow{V_1=V_2} \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

در این سؤال کمی ابتکار در محاسبهٔ دماها داشته و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم (بد نیست بدانید $۴۵/۵ \times ۶ = ۹۱ \times ۳ = ۲۷۳$ می‌باشد):

$$\begin{cases} T_1 = ۴۵/۵^\circ C = ۴۵/۵ + ۲۷۳ = ۴۵/۵ + ۶ \times ۴۵/۵ = ۷ \times ۴۵/۵K \\ T_2 = ۹۱^\circ C = ۲ \times ۴۵/۵ + ۲۷۳ = ۲ \times ۴۵/۵ + ۶ \times ۴۵/۵ = ۸ \times ۴۵/۵K \end{cases} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{۸ \times \cancel{۴۵/۵}}{۷ \times \cancel{۴۵/۵}} = \frac{۸}{۷}$$ (گزینهٔ ۴)

حجم گاز برابر حجم مخزن فلزی است و با توجه به ثابت بودن حجم مخزن و اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$T_1 = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K \; , \; P_1 = ۳atm \; , \; T_2 = ۱۲۷ + ۲۷۳ = ۴۰۰K \; , \; P_2 = ?$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{۳}{۳۰۰} = \frac{P_2}{۴۰۰} \Rightarrow P_2 = ۴atm$$: حجم گاز ثابت است.

توجه

یک جَو معادل با یک اتمسفر است. از طرفی دلیل ثابت بودن حجم مخزن، صرف‌نظر کردن از انبساط آن است.

۱۰۵۸ ۴ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۲۸)، گزینهٔ(۴) صحیح است.

۱۰۵۹ ۲ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = ۵۴۶^\circ C \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 + ۵۴۶ \; , \; P_2 = ۳P_1 \; , \; \theta_1 = ?$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow ۳ = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 = ۳T_1 \Rightarrow \theta_2 + ۲۷۳ = ۳(\theta_1 + ۲۷۳) \Rightarrow \theta_1 + ۵۴۶ = ۳\theta_1 + ۵۴۶ \Rightarrow \theta_1 = ۰^\circ C$$

* توصیه می‌شود که این تست را با رابطهٔ $\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$ نیز بررسی کنید.

۱۰۶۰ با توجه به ثابت بودن حجم مقدار معینی گاز کامل در این فرایند، داریم:

$$T_1 = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K \ , \ T_2 = ۸۷ + ۲۷۳ = ۳۶۰K$$

حجم گاز ثابت است: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1}{۳۰۰} = \frac{P_2}{۳۶۰} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{۳۶۰}{۳۰۰} = ۱/۲ \Rightarrow P_2 = ۱/۲P_1$

بنابراین فشار گاز در این فرایند، ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. $\Rightarrow \Delta P = P_2 - P_1 = ۰/۲P_1 = \frac{۲۰}{۱۰۰}P_1 \Rightarrow$

۱۰۶۱

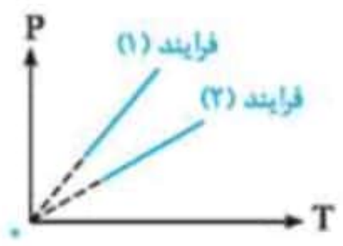
$$T_1 = -۳ + ۲۷۳ = ۲۷۰K \ , \ P_1 = ۱/۷ + ۱ = ۲/۷ \ atm \ , \ P_2 = ۲ + ۱ = ۳ \ atm \ , \ \theta_2 = ?$$

حجم تایر اتومبیل ثابت است: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{۳}{۲/۷} = \frac{T_2}{۲۷۰} \Rightarrow T_2 = ۳۰۰K \Rightarrow \theta_2 = ۳۰۰ - ۲۷۳ = ۲۷ \ ^\circ C$

۱۰۶۲ با توجه به رابطهٔ $PV = nRT$، شیب نمودار P برحسب T برای مقدار معینی از یک گاز کامل، متناسب با عکس حجم گاز است.

شیب نمودار

$$PV = nRT \Rightarrow P = \left(\frac{nR}{V}\right)T$$



با توجه به این‌که شیب نمودار (۱) بیشتر از (۲) است. بنابراین حجم گاز کامل در فرایند (۱) کم‌تر از فرایند (۲) است.

$$\text{شیب نمودار (۱)} < \text{شیب نمودار (۲)} \Rightarrow \frac{nR}{V_1} > \frac{nR}{V_2} \Rightarrow V_2 > V_1$$

۱۰۶۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲۹ — **قانون گازها در دمای ثابت** — (تست‌های ۱۰۶۳ تا ۱۰۶۷)

اگر دمای یک گاز کامل در طی انجام فرایند ثابت بماند (فرایند هم‌دما)، قانون گازها به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{PV}{T} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow PV = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow P_1V_1 = P_2V_2$$

(اگر ثابت بماند)

این قانون، بویل ـ ماریوت نام دارد.

نکته در فشارهای بالا، چون فاصلهٔ بین مولکول‌ها کم است، تعداد برخوردهای بین مولکول‌ها زیاد می‌شود و نیروهای بین مولکولی قابل صرف‌نظر کردن نیستند، بنابراین گاز دیگر کامل نیست و رابطهٔ $\left(\frac{PV}{T} = \text{مقدار ثابت}\right)$ برای آن صادق نیست.

تمرین در دمای ثابت، حجم گاز کاملی را چند درصد افزایش دهیم تا فشار آن ۲۰ درصد کم شود؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P_2 = P_1 - \frac{۲۰}{۱۰۰}P_1 = \frac{۸۰}{۱۰۰}P_1 : \text{فشار گاز ۲۰ درصد کم می‌شود.} \\ P_1V_1 = P_2V_2 : \text{دمای گاز ثابت است.} \end{cases} \Rightarrow P_1V_1 = \frac{۸۰}{۱۰۰}P_1V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{۵}{۴}V_1 = \frac{۱۲۵}{۱۰۰}V_1 \Rightarrow \Delta V = \frac{۲۵}{۱۰۰}V_1$$

بنابراین باید حجم گاز را ۲۵ درصد افزایش دهیم و گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته در این قسمت می‌خواهیم شما را با اعداد بسیار رایجی در کنکور سراسری آشنا کنیم. به‌طور کلی اگر حاصل‌ضرب $x \times y$ عدد ثابتی باشد و عدد x به اندازهٔ ۲۵ درصد افزایش یابد، عدد y باید ۲۰ درصد کاهش یابد تا حاصل‌ضرب دو عدد ثابت بماند.

(x: برابر $\frac{۵}{۴}$ ، y: برابر $\frac{۴}{۵}$)

$$x \times y = \text{ثابت} \Rightarrow y' = \frac{۴}{۵}y \Rightarrow \Delta y = y' - y = -\frac{۱}{۵}y = -\frac{۲۰}{۱۰۰}y$$

یعنی y باید ۲۰ درصد کاهش یابد، تا حاصل‌ضرب xy ثابت بماند.

در تمرین فوق نیز حاصل‌ضرب PV ثابت بوده و فشار گاز ۲۰ درصد کاهش یافته است، بنابراین حجم گاز باید ۲۵ درصد افزایش یابد.

با توجه به ثابت بودن دمای گاز و اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$P_1 = ۵۰cmHg \ , \ P_2 = ۶۰cmHg \ , \ V_2 = (V_1 - ۲/۵)Lit$$

دمای گاز ثابت است: $P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow ۵۰V_1 = ۶۰(V_1 - ۲/۵) \Rightarrow -۱۰V_1 = ۶۰ \times (-۲/۵) \Rightarrow V_1 = ۱۵Lit$

gajmarket.com

۴ ۱۰۶۴ دمای گاز ثابت است بنابراین، می‌توان نوشت:

$$P_۲ = P_۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰}P_۱ \Rightarrow P_۲ = ۱/۲۵P_۱$$: فشار گاز ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \Rightarrow P_۱V_۱ = ۱/۲۵P_۱V_۲ \Rightarrow V_۲ = \frac{۱}{۱/۲۵}V_۱ = \frac{۴}{۵}V_۱ = ۰/۸V_۱ = \frac{۸۰}{۱۰۰}V_۱$$

حجم ثانویهٔ گاز، ۸۰ درصد حجم اولیهٔ آن است، بنابراین باید حجم گاز را ۲۰ درصد کاهش دهیم.

نگاهی دیگر

با توجه به نکتهٔ مطرح شده در خلاصه نکات (۲۹)، هرگاه در دمای ثابت، فشار گاز کاملی ۲۵ درصد افزایش یابد، حجم آن باید ۲۰ درصد کاهش پیدا کند.

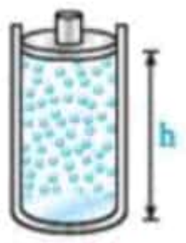
۱ ۱۰۶۵ با توجه به افزایش فشار در دمای ثابت، لزوماً حجم کاهش یافته است و داریم:

در دمای ثابت، افزایش فشار، باعث کاهش حجم می‌شود. $\Rightarrow$ ثابت $= PV \Rightarrow$ دما ثابت

$$V_۲ = V_۱ - ۰/۶V_۱ \quad , \quad P_۲ = (P_۱ + ۱۵\times۱۰^۴)\,Pa$$

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \Rightarrow P_۱\times V_۱ = (P_۱ + ۱۵\times۱۰^۴)\times ۰/۴V_۱ \Rightarrow P_۱ = ۰/۴P_۱ + ۰/۴\times۱۵\times۱۰^۴ \Rightarrow P_۱ = ۱۰^۵\,Pa$$

۴ ۱۰۶۶ چون دمای گاز ثابت است، داریم:



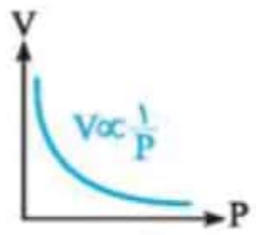
$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \xrightarrow{V=Ah} P_۱A_۱h_۱ = P_۲A_۲h_۲ \xrightarrow[\text{(مساحت کف استوانه ثابت است.)}]{A_۱=A_۲} ۲\times۳۰ = ۵\times h_۲$$

$$\Rightarrow h_۲ = ۱۲\,cm$$

در ادامه چون اختلاف طول خواسته شده است، داریم:

$$\Delta h = h_۲ - h_۱ = ۱۲ - ۳۰ = -۱۸\,cm$$

بنابراین باید طول استوانه را ۱۸cm کاهش دهیم (علامت منفی در Δh به‌معنی کاهش طول استوانه است) و گزینهٔ (۴) صحیح است.



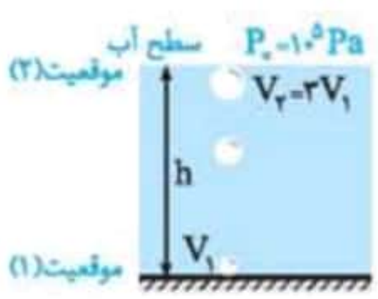
۲ ۱۰۶۷ می‌دانیم برای مقدار مشخصی گاز کامل، رابطهٔ (مقدار ثابت $= \frac{PV}{T}$) همواره برقرار است. حال اگر دمای گاز کامل ثابت باشد، عبارت (مقدار ثابت $= PV$) برقرار است و داریم:

$$PV = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow V = \frac{\text{مقدار ثابت}}{P} \Rightarrow V \propto \frac{۱}{P}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید حجم متناسب با معکوس فشار است و نمودار آن در حالت دمای ثابت، به شکل یک تابع هموگرافیک است.

۲ ۱۰۶۸ در مقایسهٔ موقعیت (۱) و (۲) حباب‌ها، حجم حباب‌های هوا در دمای ثابت، ۳ برابر شده است $(V_۲ = ۳V_۱)$ و با توجه به رابطهٔ $P_۱V_۱ = P_۲V_۲$ در دمای ثابت برای گاز درون حباب می‌توان نوشت:

رابطهٔ (۱): $P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \Rightarrow P_۱V_۱ = P_۲\times ۳V_۱ \Rightarrow P_۱ = ۳P_۲$



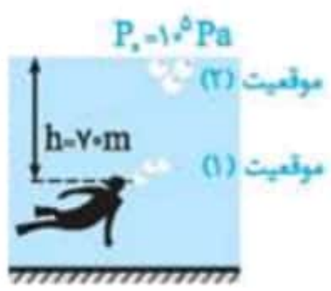
از طرفی می‌دانیم در موقعیت (۱) فشار گاز درون حباب، برابر با فشار در عمق h از یک مایع بوده و از رابطهٔ $P = P_۰ + \rho gh$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{فشار در سطح آب}: P_۲ = P_۰ = ۱۰^۵\,Pa \\ \text{فشار در عمق h}: P_۱ = P_۰ + \rho gh = ۱۰^۵ + ۱۰۰۰\times۱۰\times h = ۱۰^۵ + ۱۰^۴ h \end{cases}$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow[P_۱=۳P_۲]{\text{رابطهٔ (۱)}} ۱۰^۵ + ۱۰^۴ h = ۳\times(۱۰^۵) \Rightarrow ۱۰^۴ h = ۲\times۱۰^۵ \Rightarrow h = ۲۰m$$: عمق آب دریاچه

۲ ۱۰۶۹ مشابه با سؤال قبل، از آن‌جایی که دما ثابت فرض شده است، از مقایسهٔ حباب در موقعیت‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:



$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{P_۱}{P_۲}$$

بنابراین برای حل کافی است فشار را در دو موقعیت (۱) و (۲) محاسبه کنیم:

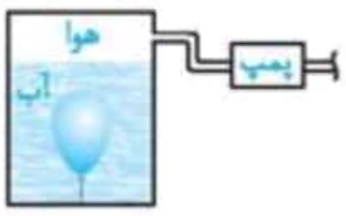
$$\begin{cases} P_۱ = P_۰ + \rho gh = ۱۰^۵ + ۱۰۰۰\times۱۰\times۷۰ = ۸\times۱۰^۵\,Pa \\ P_۲ = P_۰ = ۱۰^۵\,Pa \ \text{(سطح آب)} \end{cases}$$

بنابراین نسبت حجم حباب در سطح آب به عمق ۷۰ متری آب برابر است با:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{P_۱}{P_۲} = \frac{۸\times۱۰^۵}{۱۰^۵} = ۸$$

حال اگر حباب را به‌صورت کروی فرض کنیم، حجم آن از رابطهٔ $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ به‌دست می‌آید و حجم حباب متناسب با $r^۳$ است، بنابراین داریم:

$$V \propto r^۳ \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^۳ = ۸ \Rightarrow \frac{r_۲}{r_۱} = ۲$$ (در نتیجه شعاع حباب دو برابر می‌شود.)



۴ ۱۰۷۰ می‌دانیم که در دمای ثابت با افزایش فشار، حجم گاز کاهش می‌یابد. با افزایش فشار هوای بالای مخزن، فشار آب اطراف بادکنک و هم‌چنین فشار هوای درون آن نیز افزایش می‌یابد و با توجه به ثابت بودن دمای گاز، حجم آن کم‌تر می‌شود. از طرفی توجه داشته باشید علت ترکیدن بادکنک، افزایش کشیده شدن سطح آن است و با کاهش حجم آن، احتمال ترکیدن آن کم‌تر می‌شود.

تذکر

در صورتی که بادکنک در هوای آزاد باشد با افزایش فشار درون آن احتمال ترکیدن زیاد می‌شود زیرا سطح آن کشیده‌تر می‌شود.

دقت: با افزایش فشار بر سطح آب، دمای آب تغییر نمی‌کند (چرا؟) و با توجه به یکسان بودن دمای گاز درون بادکنک با دمای آب (دمای محیط)، می‌توان دمای گاز درون بادکنک را ثابت فرض کرد.

۱ ۱۰۷۱ در این سؤال جابه‌جا نشدن پیستون، یعنی حجم گاز زیر آن ثابت بماند. برای رسیدن به این هدف با کمک قانون گازها داریم:



$$P_1=\frac{(m+M)g}{A}+P_0=\frac{(1+4)\times 10}{5\times 10^{-4}}+10^5=2\times 10^5\,Pa$$

(جرم وزنه، جرم پیستون)

$$V_1=V_2\ ,\ T_1=27+273=300K\ ,\ T_2=87+273=360K$$

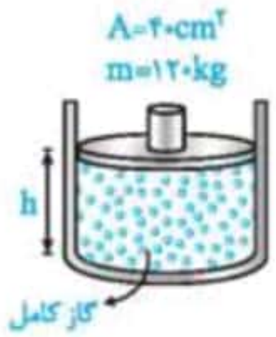
$$\text{حجم ثابت}:\ \frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}\Rightarrow P_2=2/4\times 10^5\,Pa$$

در ادامه جرم بستهٔ اضافه‌شده (x) برابر است با:

$$P_2=\frac{(1+4+x)\times 10}{5\times 10^{-4}}+10^5=2/4\times 10^5\Rightarrow x=2kg$$

۳ ۱۰۷۲ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ فشار در حالت اول و دوم):



$$\begin{cases}P_1=P_0=10^5\,Pa\\ P_2=P_0+\frac{mg}{A}=10^5+\frac{120\times 10}{40\times 10^{-4}}=4\times 10^5\,Pa\end{cases}$$

گام دوم: فرض کنید در حالت دوم، حجم گاز زیر پیستون برابر V_2 باشد، بنابراین با توجه به قانون گازها می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\xrightarrow[T_1=300K,\,T_2=400K]{V_1=Ah=40\times 6=2400cm^3}\frac{10^5\times 2400}{300}=\frac{4\times 10^5\times V_2}{400}\Rightarrow V_2=800cm^3$$

پس می‌توان ارتفاع جدید و در نتیجه تغییرات میزان ارتفاع پیستون را محاسبه کرد:

$$h_2=\frac{V_2}{A}=\frac{800}{40}=20cm\Rightarrow|\Delta h|=|h_2-h_1|=|20-60|=40cm$$

دید دیگر

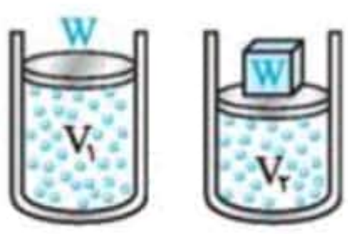
در رابطهٔ قانون گازها، به طور مستقیم می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\xrightarrow{V=Ah}\frac{P_1(Ah_1)}{T_1}=\frac{P_2(Ah_2)}{T_2}\Rightarrow\frac{P_1h_1}{T_1}=\frac{P_2h_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow\frac{10^5\times 60}{300}=\frac{4\times 10^5\times h_2}{400}\Rightarrow h_2=20cm\Rightarrow|\Delta h|=|20-60|=40cm$$

۳ ۱۰۷۳ مشابه با سؤال قبل، ابتدا فشار گاز را در دو حالت به‌دست می‌آوریم:

$$P_1=P_0+\frac{W}{A}\ ,\ P_2=P_0+\frac{2W}{A}$$

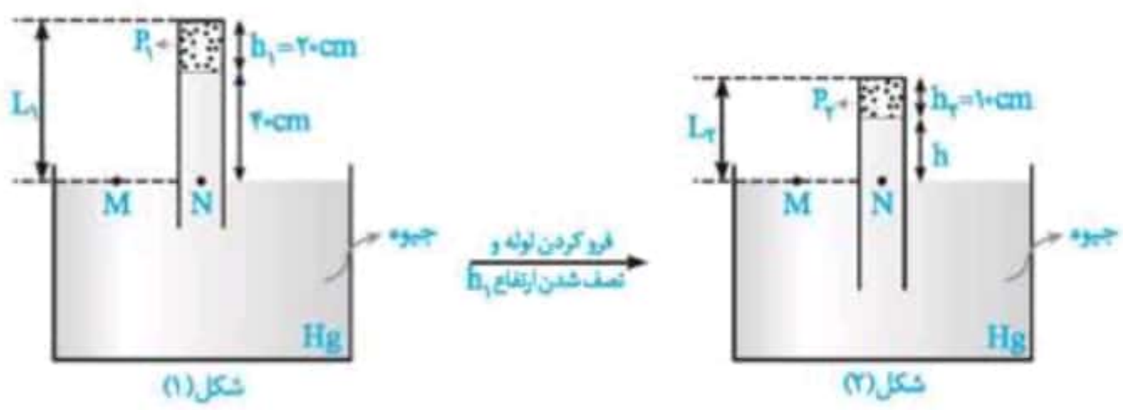


همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، فشار گاز زیر پیستون در حالت دوم بیشتر از حالت اول شده است ولی دو برابر نشده است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $\frac{V_2}{V_1}=\frac{P_1}{P_2}$ (در دمای ثابت)، می‌توان گفت که حجم گاز در حالت دوم کم‌تر می‌شود ولی نصف نمی‌شود:

$$\frac{P_2}{P_1}=k'\ ,\ 1<k'<2\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=\frac{P_1}{P_2}=\frac{1}{k'}\xrightarrow{1<k'<2}\frac{1}{2}<k<1\ \text{یا}\ 0/5<k<1$$

www.gajmarket.com

۴ ۱۰۷۴ **گام اول:** ابتدا فشار گاز محبوس درون لوله را در دو حالت محاسبه می‌کنیم:



$$\text{حالت اول}: \begin{cases} P_N = P_1 + ۴۰\,cmHg \;,\; P_N = P_M = ۷۶\,cmHg \\ \Rightarrow P_1 = ۷۶ - ۴۰ = ۳۶\,cmHg \qquad (۱) \end{cases}$$

$$\text{حالت دوم}: \begin{cases} P_N = P_2 + h\,cmHg \;,\; P_N = P_M = ۷۶\,cmHg \\ \Rightarrow P_2 = (۷۶ - h)\,cm\,Hg \qquad (۲) \end{cases}$$

گام دوم: از طرفی در دمای ثابت، ارتفاع ستون هوا و حجم گاز محبوس درون لوله نصف شده است، بنابراین با توجه به رابطهٔ زیر فشار آن دو برابر می‌شود.

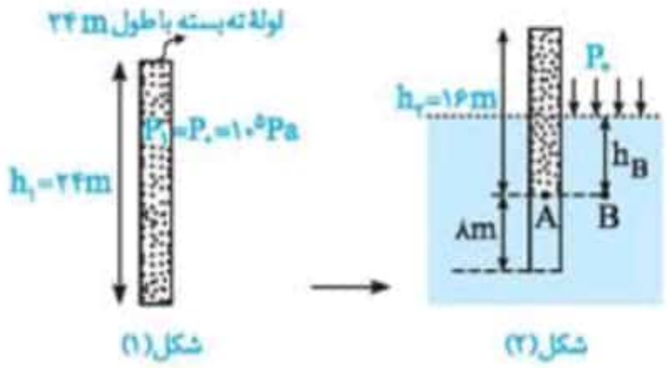
$$\frac{PV}{T} = \text{مقدار ثابت} \xrightarrow{T \text{ ثابت}} P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} = ۲$$

در ادامه با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$(۲),(۱) \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{۷۶ - h}{۳۶} = ۲ \Rightarrow ۷۶ - h = ۷۲ \Rightarrow h = ۴\,cm$$

گام سوم: با توجه به شکل فوق، طول لولهٔ خارج از جیوه، در حالت اول برابر $L_1 = ۲۰ + ۴۰ = ۶۰cm$ و در حالت دوم برابر $L_2 = ۱۰ + ۴ = ۱۴cm$ است، بنابراین لوله به اندازهٔ $L_1 - L_2 = ۶۰ - ۱۴ = ۴۶cm$ در جیوه پایین رفته است.

۳ ۱۰۷۵ **گام اول:** با توجه به شکل مقابل، آب تا $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع لوله $\left(\frac{۱}{۳} \times ۲۴ = ۸\,m\right)$ بالا آمده است، پس در ۱۶ متر از لوله هم‌چنان هوا وجود دارد و به‌عبارتی در حالت دوم حجم هوای محبوس درون لوله $\frac{۱}{۳}$ مقدار اولیه کاهش یافته و برابر $\frac{۲}{۳}$ مقدار اولیه می‌شود.

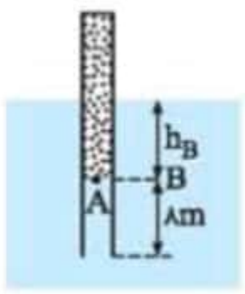


$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{۱۶}{۲۴} = \frac{۲}{۳}$$

از طرفی با توجه به ثابت بودن دما و با استفاده از رابطهٔ $P_1V_1 = P_2V_2$ برای هوای درون لوله می‌توان نوشت:

$$\frac{P_2}{P_1} = \underbrace{\frac{V_1}{V_2}}_{\text{برابر } \frac{۳}{۲}} \xrightarrow{P_1 = ۱۰^5\,Pa} P_2 = \frac{۳}{۲} \times ۱۰^5\,Pa$$

گام دوم: از سوی دیگر در شکل شمارهٔ (۲)، فشار هوای درون لوله برابر فشار در نقطهٔ B بوده و داریم:

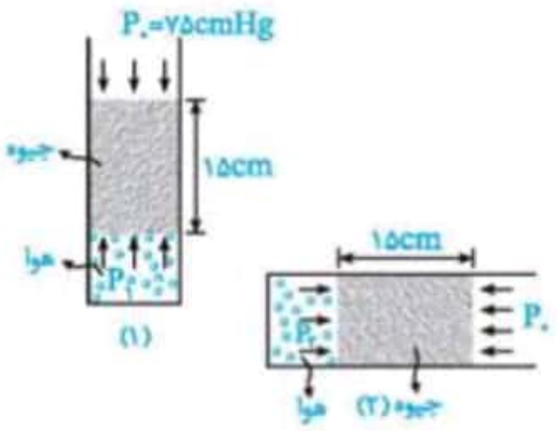


$$P_2 = P_B \;,\; P_{\text{گاز}} = P_B = P_0 + \rho g h_B = ۱۰^5 + ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times h_B$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} \times ۱۰^5 = ۱۰^5 + ۱۰^4 h_B \Rightarrow h_B = ۵\,m$$

در ادامه با توجه به شکل روبه‌رو، لوله به اندازهٔ $۸ + ۵ = ۱۳\,m$ (یعنی $۸ + h_B$) در آب فرورفته است.

۳ ۱۰۷۶ در حالت اول، فشار هوای درون لوله بیشتر از فشار هوای محیط بوده و برابر مجموع فشار هوای محیط و فشار ناشی از ستون جیوه است:



$$P_1 = (P_0 + ۱۵)\,cmHg = (۷۵ + ۱۵)\,cmHg = ۹۰\,cmHg$$

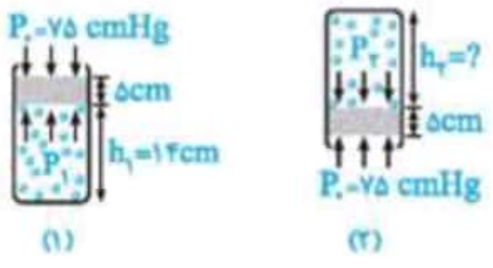
در حالت دوم، فشار هوای درون لوله برابر فشار هوای محیط بوده و برابر $۷۵\,cmHg$ می‌باشد.

$$P_2 = P_0 = ۷۵\,cmHg$$

از آن‌جایی که دمای هوا ثابت است، در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{۹۰}{۷۵} = \frac{۶}{۵}$$

۲ ۱۰۷۷ با توجه به سؤال قبل، هنگامی‌که لوله رو به بالا است فشار هوای محبوس درون لوله برابر مجموع فشار هوای محیط و فشار ۵ سانتی‌متر جیوه است و هنگامی‌که لوله رو به پایین است، فشار هوای درون لوله برابر فشار هوای محیط منهای فشار ۵ سانتی‌متر جیوه است. با توجه به این‌که دما ثابت است، می‌توان نوشت:



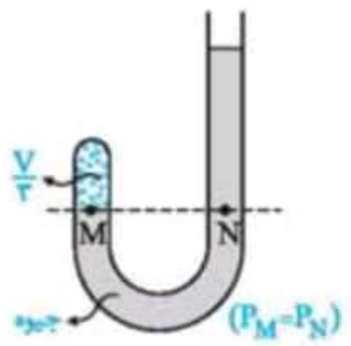
$$\begin{cases} P_1 = P_0 + ۵ \Rightarrow P_1 = ۷۵ + ۵ = ۸۰\,cmHg \\ P_2 + ۵ = P_0 \Rightarrow P_2 = P_0 - ۵ = ۷۰\,cmHg \end{cases}$$

دما ثابت است: $P_1V_1 = P_2V_2 \xrightarrow[(A=\text{ثابت})]{V=Ah} P_1h_1 = P_2h_2 \Rightarrow ۸۰ \times ۱۴ = ۷۰ \times h_2 \Rightarrow h_2 = ۱۶\,cm$

$\Delta h = ۱۶ - ۱۴ = ۲\,cm$ (میزان تغییر ارتفاع ستون هوا)

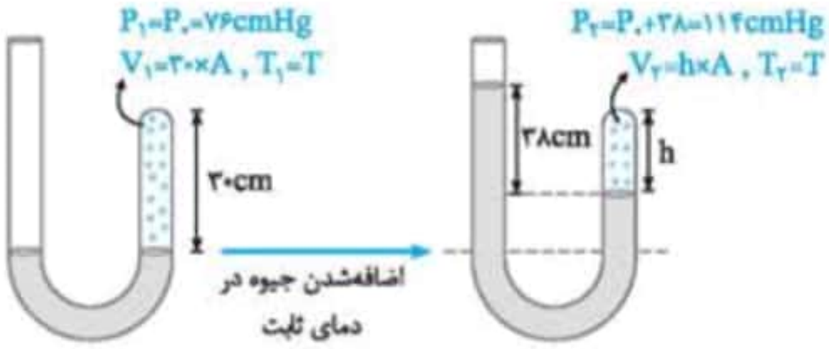
۳ ۱۰۷۸ **گام اول:** با توجه به ثابت بودن دما، اگر حجم گاز محبوس از V به $\frac{V}{۳}$ برسد، فشار آن از $P_۱$ به $۳P_۱$ خواهد رسید.

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱}=\frac{P_۲V_۲}{T_۲} \xrightarrow{\text{دما ثابت}} P_۱\times V=P_۲\times\frac{۱}{۳}V \rightarrow P_۲=۳P_۱ \xrightarrow{P_۱=P_۰=۷۶cmHg} P_۲=۳\times ۷۶cmHg$$



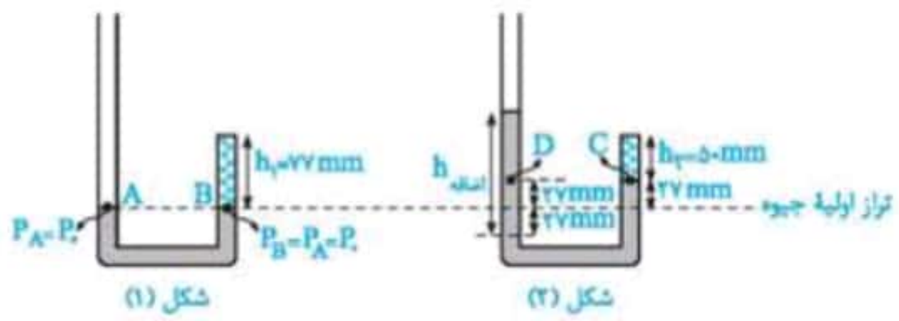
گام دوم: بنابراین آن‌قدری جیوه در ستون سمت راست می‌ریزیم تا فشار ناشی از اختلاف ارتفاع ستون جیوه در دو سمت لوله به اندازهٔ $۲P_۱$ باشد. یعنی باید $۲\times ۷۶=۱۵۲cmHg=۱۵۲۰mmHg$ اختلاف ارتفاع ستون جیوه در دو طرف ایجاد شود.

۴ ۱۰۷۹ در هر یک از شکل‌های مقابل، در هر دو حالت حجم و فشار گاز محبوس شده در انتهای لوله را محاسبه کرده‌ایم. حال با توجه به رابطهٔ قانون گازهای کامل، می‌توان نوشت:



$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱}=\frac{P_۲V_۲}{T_۲}\Rightarrow\frac{۷۶\times(۳۰A)}{T}=\frac{۱۱۴\times(hA)}{T}\Rightarrow h=۲۰cm$$

۴ ۱۰۸۰ با اضافه کردن جیوه، سمت چپ ۲۷mm پایین رفته و سمت راست ۲۷mm بالا رفته و ارتفاع $h_۱$ از ۷۷mm به ۵۰mm رسیده است.



$$\begin{cases}P_۱=P_B=P_۰\\V_۱=۷۷A\\T_۱=T\end{cases}\quad\text{سطح مقطع}\qquad\begin{cases}P_۲=P_C=P_D=P_۰+\rho_{Hg}gh_D\\V_۲=۵۰A\\T_۲=T\end{cases}\quad\text{سطح مقطع}$$

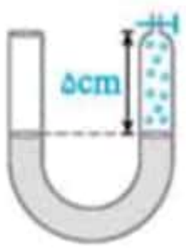
$$\text{قانون گازها برای هوای محبوس‌شده}\Rightarrow\frac{P_۱V_۱}{T_۱}=\frac{P_۲V_۲}{T_۲}\Rightarrow P_۱V_۱=P_۲V_۲$$

$$\Rightarrow ۱۰^۵\times ۷۷A=(۱۰^۵+۱۳۵۰۰\times ۱۰\times h_D)\times ۵۰A\Rightarrow h_D=۰/۴m=۴۰cm$$

$$h_D=h_{\text{اضافه}}-۵/۴cm\Rightarrow h_{\text{اضافه}}=۴۵/۴cm$$

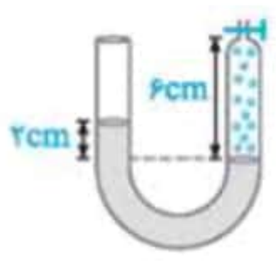
$$V_{\text{اضافه}}=h_{\text{اضافه}}\times A=۴۵/۴\times ۱=۴۵/۴cm^۳$$

۱ ۱۰۸۱ برای حل این سؤال کافیست قانون گازها برای گاز انتهای لوله در دو حالت نوشته شود:



حالت ۱:

$$\begin{cases}P_۱=P_۰=۷۸cmHg\\V_۱=۵A\\T_۱=۳۹+۲۷۳=۳۱۲K\end{cases}$$



حالت ۲: با توجه به صورت سؤال، در سمت راست لوله جیوه ۱cm پایین رفته و در سمت چپ لوله جیوه ۱cm بالا رفته و اختلاف ارتفاع ۲cm است.

$$\begin{cases}P_۲=P_۰+۲=۸۰cmHg\\V_۲=۶A\\T_۲=?\end{cases}\qquad\Rightarrow\frac{P_۱V_۱}{T_۱}=\frac{P_۲V_۲}{T_۲}\Rightarrow\frac{۷۸\times ۵A}{۳۱۲}=\frac{۸۰\times ۶A}{T_۲}\Rightarrow T_۲=۳۸۴K\Rightarrow\Delta T=۳۸۴-۳۱۲=۷۲K$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=۷۲^\circ C$$

۲ ۱۰۸۲ ابتدا تعداد مول گاز کامل را با مقایسهٔ شرایط آن با شرایط متعارفی به‌دست می‌آوریم:

$$PV=nRT\Rightarrow\frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{n_۲}{n_۱}\times\frac{T_۲}{T_۱}$$

شرایط متعارفی: یک مول گاز کامل در دمای صفر درجهٔ سلسیوس (۲۷۳K) و فشار یک اتمسفر، حجمی برابر ۲۲/۴ لیتر دارد.

شرایط گاز: n مول گاز در دمای صفر درجهٔ سلسیوس (۲۷۳K) و فشار دو اتمسفر، حجمی برابر ۲۲/۴ لیتر دارد.

$$\frac{۲}{۱}\times\frac{۲۲/۴}{۲۲/۴}=\frac{n}{۱}\times\frac{۲۷۳}{۲۷۳}\Rightarrow n=۲mol$$

پس از محاسبهٔ تعداد مول گاز، به سادگی با یک تناسب، تعداد مولکول‌های آن به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\text{۱ مول}\rightarrow\text{تعداد مولکول}: N_A=۶\times ۱۰^{۲۳}\ \text{(عدد آووگادرو)}\\\text{۲ مول}\rightarrow N=?\end{cases}\Rightarrow N=\frac{۲\times ۶\times ۱۰^{۲۳}}{۱}=۱۲\times ۱۰^{۲۳}$$

روش دیگر: $n=\frac{\text{تعداد مولکول}}{\text{عدد آووگادرو}}=\frac{N}{N_A}\Rightarrow ۲=\frac{N}{۶\times ۱۰^{۲۳}}\Rightarrow N=۱۲\times ۱۰^{۲۳}$

www.gajmarket.com

۳ ۱۰۸۳ در این مخزن با توجه به این‌که اگر فشار گاز کامل درون مخزن $3\,atm$ بیشتر شود، شیر اطمینان مخزن باز می‌شود، خارج شدن گاز همواره به‌گونه‌ای است که فشار گاز کامل درون مخزن ثابت و برابر $3\,atm$ باقی بماند. از طرفی حجم مخزن نیز ثابت است (چرا؟).

بنابراین اگر دمای گاز درون مخزن از $27^\circ C$ (یعنی $27+273=300\,K$) به $127^\circ C$ (یعنی $127+273=400\,K$) برسد، داریم:

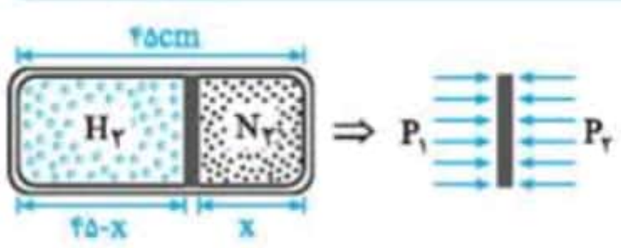
$$PV=nRT \xrightarrow{P\text{ و }V\text{ ثابت است.}} n_1RT_1=n_2RT_2 \Rightarrow 8\times 300=n_2\times 400 \Rightarrow n_2=6\,mol$$

تعداد مول گاز خارج شده: $n'=8-6=2\,mol$

۱ ۱۰۸۴ اگر فشار گاز هیدروژن را P_1 و فشار گاز نیتروژن را P_2 درنظر بگیریم، برای برقراری تعادل پیستون می‌توان از دینامیک کمک گرفت.

یادآوری

اگر بر سطحی با مساحت A فشار P وارد شود، نیروی وارد بر آن PA است.



$$\Rightarrow \sum F_x=0 \Rightarrow P_1\times A_{\text{پیستون}}=P_2\times A_{\text{پیستون}} \Rightarrow P_1=P_2$$

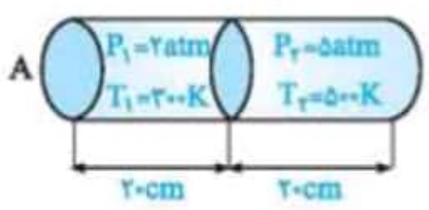
به عبارت دیگر وقتی در چنین وضعیتی پیستون ثابت است یعنی فشار دو طرف یکسان است.

در ادامه با توجه به این‌که دما و جرم در دو طرف پیستون برابر است، می‌توان معادلهٔ حالت گاز کامل را به این شکل بازنویسی کرد:

$$PV=nRT \Rightarrow P(Ah)=\frac{m}{M}RT \Rightarrow P=\frac{mRT}{hMA}$$

$$P_1=P_2 \xrightarrow[\text{برای دو گاز یکسان است.}]{\text{پارامترهای } m\,,\,R\,,\,T \text{ و } A} h_{H_2}M_{H_2}=h_{N_2}M_{N_2} \Rightarrow (45-x)\times 2=x\times 28 \Rightarrow x=3\,cm$$

۲ ۱۰۸۵ برای پاسخ دادن به این سؤال دشوار و زیبا، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: با توجه به حالت اولیهٔ داده شده برای هر یک از گازها، ابتدا تعداد مول آن‌ها را با یک‌دیگر مقایسه می‌کنیم:

$$P_1=2\,atm\,,\ T_1=273+27=300\,K\,,\ P_2=5\,atm\,,\ T_2=273+227=500\,K\,,\ V_1=V_2=V=\frac{\text{حجم استوانه}}{2}$$

$$PV=nRT \Rightarrow \frac{P_1}{P_2}\times\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2}\times\frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{2}{5}\times 1=\frac{n_1}{n_2}\times\frac{300}{500} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2}=\frac{2}{3}$$

گام دوم: پس از رها کردن پیستون و به تعادل رسیدن دو گاز، فشار دو محفظه باید با هم برابر شود تا دیگر پیستون حرکت نکند، این موضوع به‌سادگی از تعادل افقی پیستون به‌دست می‌آید ($F_1=F_2 \rightarrow P_1A=P_2A \rightarrow P_1=P_2$: شرط تعادل پیستون). از طرفی طبق صورت سؤال، در شرایط تعادل دو گاز با یک‌دیگر هم‌دما می‌شوند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$P'V'=nRT' \xrightarrow{P'_1=P'_2\,,\,T'_1=T'_2} \frac{V'_1}{V'_2}=\frac{n_1}{n_2} \xrightarrow{V=Ah} \frac{h_1}{h_2}=\frac{2}{3} \Rightarrow h_2=\frac{3}{2}h_1$$

(سطح مقطع پیستون)

از طرفی مجموع h_1+h_2 در حالت جدید نیز باید برابر طول استوانه شود و داریم:

$$\begin{cases} h_1+h_2=40\,cm \\ h_2=\frac{3}{2}h_1 \end{cases} \Rightarrow h_2=24\,cm$$

بنابراین طول ستون گاز (۲) از $20\,cm$ به $24\,cm$ رسیده است و این یعنی پیستون به اندازهٔ $4\,cm$ حرکت کرده است.

۱ ۱۰۸۶ برای پاسخ دادن به این سؤال جدید و زیبا، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ مجموع حجم گاز هلیم و اکسیژن در مخلوط، با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل:

$$\begin{cases} n_{O_2}=\frac{m_{O_2}}{M_{O_2}}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2} \\ n_{He}=\frac{m_{He}}{M_{He}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow n_{\text{کل}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\,mol$$

$$PV=nRT \Rightarrow 10^5\times V=1\times 8\times 300 \Rightarrow V=24\times 10^{-3}\,m^3$$

گام دوم: محاسبهٔ چگالی مخلوط دو ماده با توجه به رابطهٔ $\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\sum m}{V_{\text{کل}}}$:

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\sum m}{V}=\frac{(2+16)\times 10^{-3}}{24\times 10^{-3}}=\frac{18\times 10^{-3}}{24\times 10^{-3}}=\frac{3}{4}=0/75\,kg/m^3$$

(تبدیل gr به kg)

۴ ۱۰۸۷ این سؤال را در دو گام بررسی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ حجم هلیم در حالت گازی):

$$PV = nRT \Rightarrow ۴۰\times۱۰^{۵}\times V = ۲۰\times۸\times۳۰۰ \Rightarrow V_۱ = ۰/۰۱۲ m^۳ = ۱۲\times۱۰^{-۳} m^۳$$

گام دوم: (محاسبهٔ حجم هلیم در حالت مایع): با تبدیل هلیم از حالت گاز به مایع، جرم آن تغییر نمی‌کند و می‌توان نوشت:

$$m = n\,M = ۲۰\times۴ = ۸۰ gr \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = \frac{m}{V_{\text{مایع}}} \Rightarrow V_{\text{مایع}} = V_۲ = \frac{m}{\rho_{\text{مایع}}} = \frac{۸۰\times۱۰^{-۳}}{۱۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵}\times۱۰^{-۳} m^۳$$

جرم مولکولی ← ← تعداد مول

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\frac{۱۶}{۲۵}\times۱۰^{-۳}}{۱۲\times۱۰^{-۳}} = \frac{۱۶}{۲۵\times ۱۲} = \frac{۴}{۷۵}$$

۲ ۱۰۸۸ در حالت اول در مخزن ۳ مول گاز $(n_A + n_B)$ وجود داشته و در حالت دوم در مخزن ۲ مول گاز (فقط n_A) وجود دارد. از طرفی حجم مخزن ثابت مانده (چرا؟) و دمای مخزن نیز در هر دو حالت برابر T است. بنابراین در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱}\times\frac{T_۲}{T_۱} \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow P_۲ = \frac{۲}{۳}P_۱ = \frac{۲}{۳}P$$

۱ ۱۰۸۹ اگر $n_۱$ تعداد مول اولیه در مخزن، $n_۲$ تعداد مول باقی‌مانده در مخزن و $n_۳$ تعداد مول خارج شده از مخزن باشد، $n_۱ = n_۲ + n_۳$ است. در ادامه با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} \xrightarrow{n_۱ = n_۲ + n_۳} \frac{P_۱V_۱}{RT_۱} = \frac{P_۲V_۲}{RT_۲} + \frac{P_۳V_۳}{RT_۳} \Rightarrow \frac{۱۵\times۱۰^{۵}\times۲۰\times۱۰^{-۳}}{۳۰۰} = \frac{۷\times۱۰^{۵}\times۲۰\times۱۰^{-۳}}{۲۸۰} + \frac{۴\times۱۰^{۵}\times V_۳}{۳۲۰} \Rightarrow V_۳ = ۴۰ Lit$$

۳ ۱۰۹۰ این سؤال را در دو مرحله پاسخ می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: (باز کردن شیر $K_۱$): اگر حجم هر کدام از مخزن‌ها را V در نظر بگیریم، با باز کردن شیر $K_۱$ حجم گاز دو برابر می‌شود و داریم:



$$n_A + n_B = n_{\text{مخلوط}} \Rightarrow \frac{P_A V_A}{RT_A} + \circ = \frac{P_{\text{مخلوط}}(V_A + V_B)}{RT_{\text{مخلوط}}} \Rightarrow \frac{۱۲V}{T} = \frac{P_۱\times۲V}{T} \Rightarrow P_۱ = ۶ atm$$

ظرف B در ابتدا خالی است.

مرحلهٔ دوم: (باز کردن شیر $K_۲$): ظرف C در ابتدا خالی بوده و دو ظرف A و B در مجموع دارای حجم $۲V$ و فشار $۶atm$ و همان دمای اولیه است. بنابراین داریم:

$$n_{A,B} + n_C = n_{\text{مخلوط نهایی}} \Rightarrow \frac{۶\times۲V}{R\times T} + \circ = \frac{P_۲\times۳V}{R\times T} \Rightarrow P_۲ = ۴ atm \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

ظرف C در ابتدا خالی است.

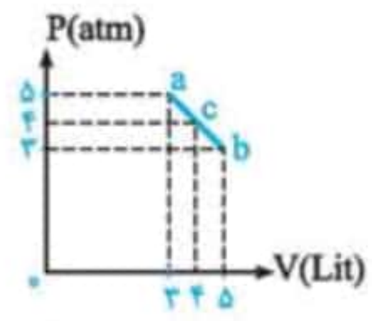
۲ ۱۰۹۱ مخزن اصلی تا زمانی برای پر کردن مخازن دیگر کارایی دارد که فشار گاز آن بیشتر از $۲atm$ باشد (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \frac{P_۱V_۱}{T} = n\frac{P_۲V_۲}{T} + \frac{P_۳V_۱}{T} \Rightarrow P_۱V_۱ = nP_۲V_۲ + P_۳V_۱ \xrightarrow{P_۲ = ۲atm} ۶۰\times۲ = n\times۲\times۱ + ۲\times۲ \Rightarrow n = ۵۸$$

تساوی مول گاز در حالت اولیه و ثانویه

دقت کنید که دما در طی انجام فرایند ثابت بوده است.

۳ ۱۰۹۲ با توجه به بحثی که در تست (۱۰۴۲) انجام دادیم، در این شکل خاص که حاصل‌ضرب P_aV_a با حاصل‌ضرب P_bV_b برابر است، دما از a تا c (وسط پاره‌خط) افزایش یافته و سپس از c تا b کاهش می‌یابد، بنابراین کم‌ترین دمای گاز در نقاط a و b و هم‌چنین بیشترین دمای گاز در نقطهٔ c است.

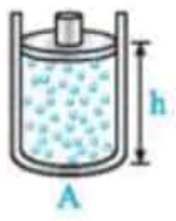


$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

$$\begin{cases} T_a = \frac{P_aV_a}{nR} = \frac{۵\times۳\times۱۰^{۲}}{۱\times۸} = ۱۸۷/۵ K \\ T_b = \frac{P_bV_b}{nR} = \frac{۳\times۵\times۱۰^{۲}}{۱\times۸} = ۱۸۷/۵ K \end{cases} \Rightarrow T_a = T_b = T_{min} = ۱۸۷/۵ K$$

$$T_{max} = T_c = \frac{P_cV_c}{nR} = \frac{(\frac{۵+۳}{۲})\times(\frac{۵+۳}{۲})\times۱۰^{۲}}{۱\times۸} = ۲۰۰ K$$

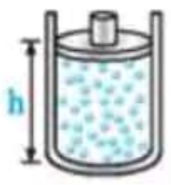
۱ ۱۰۹۳ پیستون بدون اصطکاک است و آزادانه می‌تواند به سمت بالا و پایین حرکت کند، بنابراین فشار گاز زیر پیستون ثابت می‌ماند و در یک فرایند هم‌فشار می‌توان نوشت: $V \propto T$: حجم گاز $\Rightarrow V = T\times$ مقدار ثابت $\xrightarrow{P\text{ ثابت}} \frac{PV}{T} =$ مقدار ثابت



از طرفی حجم گاز از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید، پس ارتفاع h نیز متناسب با T است. $V = Ah \Rightarrow h \propto T$

www.gajmarket.com

۱ ۱۰۹۴ این سؤال برگرفته از سؤال قبل است. با توجه به توضیحات سؤال قبل، در این سؤال می‌توان گفت که تغییرات ارتفاع پیستون متناسب با تغییرات دمای مطلق گاز می‌باشد و داریم:



$$h \propto T \quad \text{یا} \quad \Delta h \propto \Delta T,\ \Delta T_۲ = ۴۰\,^\circ C\ ,\ \Delta T_۱ = ۲۰\,^\circ C$$

$$\Delta h \propto \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta h_۲}{\Delta h_۱} = \frac{\Delta T_۲}{\Delta T_۱} \Rightarrow \frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱} = \frac{۴۰}{۲۰} = ۲$$

۳ ۱۰۹۵ **گام اول:** محاسبهٔ فشار گاز در حالت اولیه و ثانویه با یک یکا:

$$P_۱ = ۱/۰۲\,atm \xrightarrow[P=\rho g h]{\text{تبدیل atm به cm Hg}} \underbrace{۱/۰۲\times ۱۰^۵}_{\text{برحسب پاسکال}} = ۱۳۶۰۰\times ۱۰\times h \Rightarrow h = ۰/۷۵\,m = ۷۵\,cm\,Hg$$

بنابراین فشار گاز از $۷۵\,cm\,Hg$ به $۸۰\,cm\,Hg$ می‌رسد.

گام دوم: با توجه به این‌که دما در این فرایند ثابت است، داریم:

$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \xrightarrow[\text{ثابت}:A]{V=Ah} P_۱h_۱ = P_۲h_۲ \Rightarrow ۷۵\times ۱ = ۸۰\times h_۲ \Rightarrow h_۲ = \frac{۷۵}{۸۰} = \frac{۱۵}{۱۶}\,m$$: دمای گاز ثابت است.

۳ ۱۰۹۶ با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$T_۱ = ۲۷۳+۲۷ = ۳۰۰K\ ,\ T_۲ = ۲۷۳+۵۷ = ۳۳۰K\ ,\ V_۱ = ۸Lit\ ,\ V_۲ = ۱۱Lit\ ,\ P_۲ = (P_۱ - ۱۰)cmHg$$

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۱\times ۸}{\cancel{۳۰۰}_{۱۰}} = \frac{(P_۱-۱۰)\times ۱۱}{\cancel{۳۳۰}_{۱۱}} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰}P_۱ = P_۱ - ۱۰ \Rightarrow -۰/۲P_۱ = -۱۰ \Rightarrow P_۱ = ۵۰cmHg$$: فشار اولیهٔ گاز

۱ ۱۰۹۷ در صورتی که دمای اولیهٔ گاز کامل را برحسب سلسیوس برابر $\theta_۱$ فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

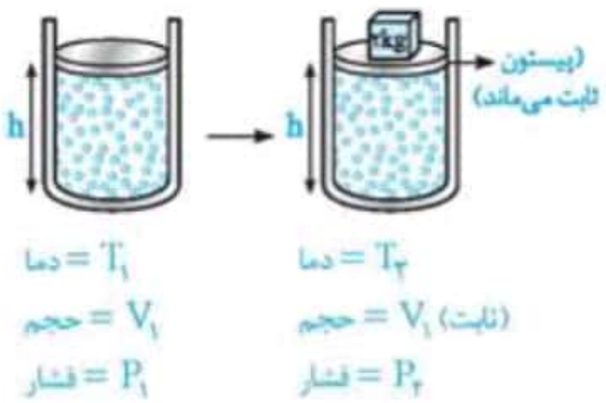
$$T_۱ = ۲۷۳+\theta_۱\ ,\ P_۲ = \frac{۱}{۲}P_۱\ ,\ \rho_۲ = \frac{۱}{۸}\rho_۱$$: دمای گاز برحسب سلسیوس ۱۰ برابر شده است. $\theta_۲ = ۱۰\theta_۱ \Rightarrow T_۲ = ۲۷۳+۱۰\theta_۱$

با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{PM}{RT}$ می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{T_۱}{T_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲۷۳+\theta_۱}{۲۷۳+۱۰\theta_۱} \Rightarrow \frac{۲۷۳+\theta_۱}{۲۷۳+۱۰\theta_۱} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴\times ۲۷۳ + ۴\theta_۱ = ۲۷۳+۱۰\theta_۱ \Rightarrow ۳\times ۲۷۳ = ۶\theta_۱ \Rightarrow \theta_۱ = \frac{۲۷۳}{۲} = ۱۳۶/۵\,^\circ C$$

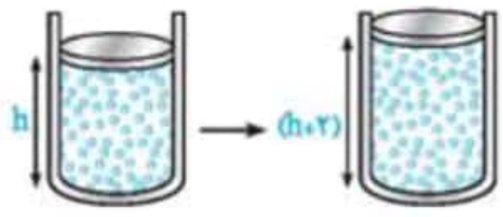
۳ ۱۰۹۸ در حالت اول که پیستون جابه‌جا نمی‌شود، حجم گاز ثابت بوده و داریم:



$$\frac{P_۱\cancel{V_۱}}{T_۱} = \frac{P_۲\cancel{V_۲}}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۲}{T_۲} = \frac{P_۱}{T_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{T_۲}{T_۱} \qquad (I)$$

هم‌چنین در حالت دوم پیستون آزادانه حرکت می‌کند، پس در این حالت فشار ثابت است و داریم:



$$\frac{\cancel{P_۱}V_۱}{T_۱} = \frac{\cancel{P_۲}V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{V_۲}{T_۲} = \frac{V_۱}{T_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{T_۲}{T_۱} \qquad (II)$$

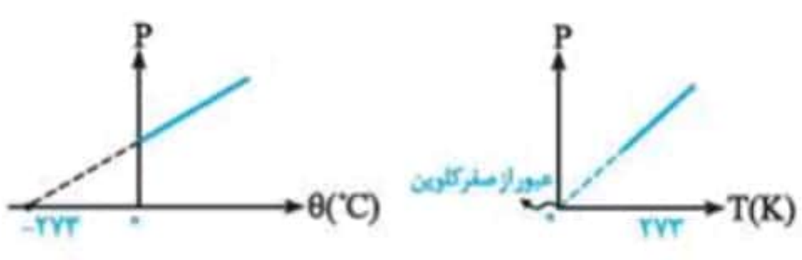
با توجه به یکسان بودن $T_۱$ و $T_۲$ در دو حالت، نسبت $\frac{T_۲}{T_۱}$ در دو حالت یکسان است و به همین‌منظور برای مقایسهٔ دو رابطهٔ (I) و (II) سمت چپ آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{V_۲}{V_۱} \xrightarrow{P=P_۰+\frac{W}{A}} \frac{P_۰+\frac{W_۲}{A}}{P_۰+\frac{W_۱}{A}} = \frac{\overbrace{A(h+۲)}^{V_۲}}{\underbrace{Ah}_{V_۱}} \Rightarrow \frac{۱۰^۵+\frac{۴\times ۱۰}{۱۰\times ۱۰^{-۴}}}{۱۰^۵+\frac{۲\times ۱۰}{۱۰\times ۱۰^{-۴}}} = \frac{h+۲}{h} \Rightarrow \frac{۱۴\times \cancel{۱۰^۴}}{۱۲\times \cancel{۱۰^۴}} = \frac{h+۲}{h} \Rightarrow ۱۲\times(h+۲) = ۱۴\times h \Rightarrow h = ۱۲cm$$

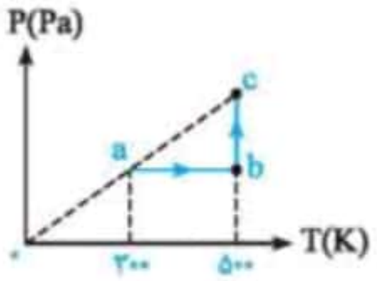
۳ ۱۰۹۹ با توجه به رابطهٔ «مقدار ثابت $= \frac{PV}{T}$»، در حجم ثابت، فشار با دمای مطلق (یعنی دما برحسب کلوین) رابطهٔ مستقیم دارد، بنابراین نمودار فشار برحسب دمای مطلق به‌صورت یک خط راست است که در حالتی که محور افقی برحسب کلوین است از مبدأ می‌گذرد.

$$\frac{PV}{T} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow P = \text{مقدار ثابت}\times T$$

با توجه به این‌که دمای صفر کلوین معادل $-۲۷۳\,^\circ C$ است، اگر محور افقی برحسب سلسیوس باشد، نمودار فشار برحسب دما به‌صورت مقابل است:



۴ ۱۱۰۰ با توجه به این‌که نمودار $P-T$ در صورت سؤال داده شده است و خط‌چین عبوری از نقاط a و c از مبدأ مختصات عبور می‌کند، بنابراین فرایند ac هم‌حجم بوده و $V_a = V_c$ است.



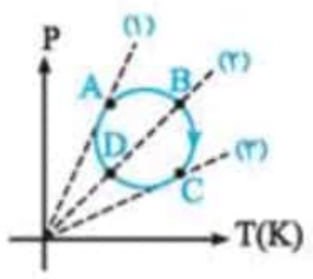
حال با توجه به ثابت بودن فشار در فرایند ab داریم:

$$\frac{V_a}{T_a} = \frac{V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{V_a}{۳۰۰} = \frac{V_b}{۵۰۰} \Rightarrow \text{در فرایند ab فشار ثابت است.}$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{۳}{۵}V_b \xrightarrow{V_a = V_c} V_c = \frac{۳}{۵}V_b = \frac{۶۰}{۱۰۰}V_b \Rightarrow$$

بنابراین V_c، ۴۰ درصد کم‌تر از V_b است.

۳ ۱۱۰۱ برای مقایسهٔ حجم در نقاط مختلف نمودار نشان داده شده، مشابه با سؤال قبل چند خط هم‌حجم را بر روی منحنی رسم می‌کنیم. در بین خطوط هم‌حجم رسم شده آن‌که شیب کم‌تری دارد، حجم بیشتری دارد.

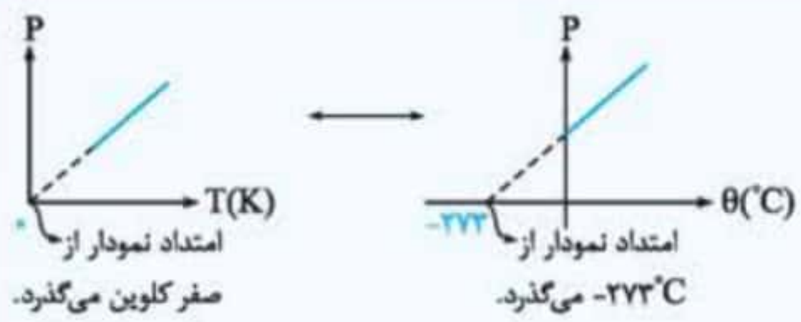


$$V_۳ > V_۲ > V_۱ \Rightarrow V_C > V_B = V_D > V_A$$

۲ ۱۱۰۲

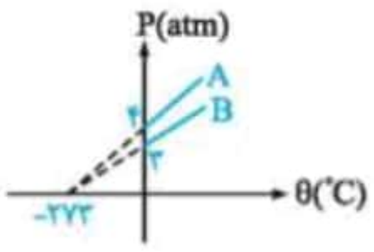
نکته

در یک فرایند هم‌حجم، نمودار $P-T$ در حالتی‌که محور افقی برحسب کلوین است، از مبدأ می‌گذرد و اگر محور افقی برحسب سلسیوس باشد، نمودار به‌صورت مقابل است:



با توجه به نکتهٔ فوق، هر دو نمودار A و B خطی بوده و از $-۲۷۳^\circ C$ می‌گذرد. بنابراین هر دو فرایند A و B به‌صورت هم‌حجم می‌باشند.

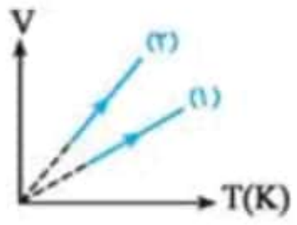
بنابراین حجم دو فرایند را در دمای $۰^\circ C$ (همان ۲۷۳K) مقایسه می‌کنیم:



$$\begin{cases} P_A = ۴atm \ , & T_A = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳K \ , & n_A = ۲mol \\ P_B = ۳atm \ , & T_B = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳K \ , & n_B = ۳mol \end{cases}$$

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{T_A}{T_B} \times \frac{P_B}{P_A} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{۲}{۳} \times ۱ \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

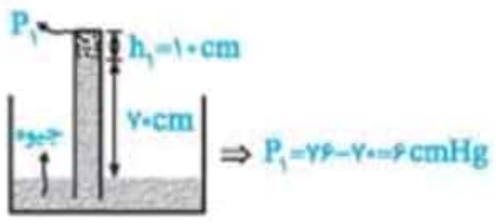
۳ ۱۱۰۳ این نمودارها مربوط به دو فرایند هم‌فشار است که در فشار یکسان P انجام می‌شود $(P_۲ = P_۱ = P)$، با توجه به این‌که شیب نمودار (۲) از (۱) بزرگ‌تر است، داریم:

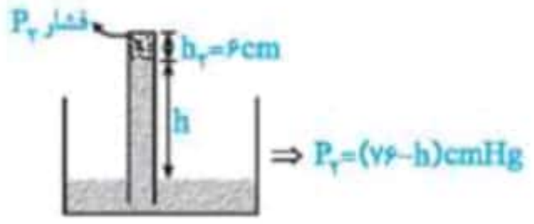


$$PV = nRT \Rightarrow V = \underbrace{\frac{nR}{P}}_{\text{شیب خط}} T$$

$$\text{شیب (۲)} > \text{شیب (۱)} \Rightarrow \frac{n_۲ R}{P_۱} > \frac{n_۱ R}{P_۱} \Rightarrow n_۲ > n_۱$$

۱ ۱۱۰۴ با توجه به شکل‌های زیر ابتدا فشار هوای محبوس درون لوله را در دو حالت به‌دست می‌آوریم:

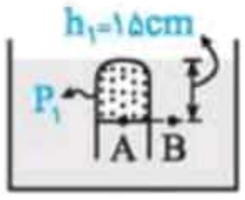




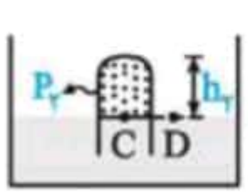
از طرفی فرایند فوق در دمای ثابت رخ داده و می‌توان نوشت:

$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \xrightarrow{V = Ah \text{ هوا}} P_۱h_۱ = P_۲h_۲ \xrightarrow{h_۱ = ۱۰cm \, , \, h_۲ = ۶cm} ۶ \times ۱۰ = (۷۶ - h) \times ۶ \Rightarrow h = ۶۶cm$$

۱ ۱۱۰۵ مشابه با سؤال قبل و با توجه به شکل‌های زیر، فشار هوای درون لوله در دو حالت برابر است با:



$$P_۱ = P_A = P_B = (P_۰ + ۱۵)cmHg = (۷۵ + ۱۵)cmHg = ۹۰cmHg$$



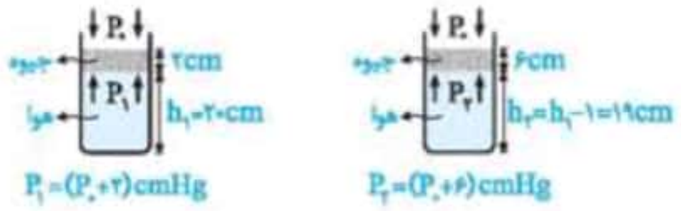
$$P_۲ = P_C = P_D = P_۰ = ۷۵cmHg$$

www.gajmarket.com

از طرفی دمای هوای محبوس درون لوله ثابت مانده است و می‌توان نوشت:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \xrightarrow{V \propto h} P_1h_1 = P_2h_2 \xrightarrow{h_1 = 15cm} 90 \times 15 = 75 \times h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{90 \times 15}{75} = 18cm$$

۲ ۱۱۰۶ با توجه به توضیحات سؤال و رسم دو شکل مقابل، فشار هوای درون لوله در دو حالت برابر است با:

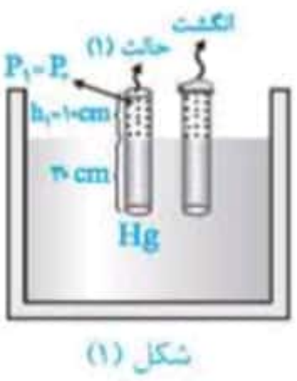


(در حالت دوم، ۴cm به جیوهٔ موجود در لوله اضافه شده است.)

از طرفی با توجه به‌صورت سؤال، دمای هوا ثابت است و می‌توان نوشت:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \xrightarrow{V=Ah} P_1h_1 = P_2h_2 \Rightarrow (P_0+2) \times 20 = (P_0+6) \times 19 \Rightarrow 20P_0 + 40 = 19P_0 + 114 \Rightarrow P_0 = 114 - 40 = 74cmHg$$: دما ثابت است.

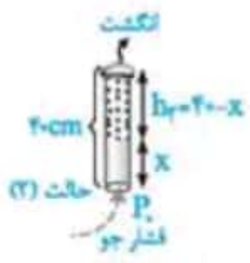
۳ ۱۱۰۷ **گام اول:** در حالت اول $h = 10\,cm$ از لوله بیرون از جیوه بوده و فشار هوای درون آن، برابر فشار هوای محیط است $(P_1 = P_0 = 75cmHg)$. پس از مسدود کردن سر لوله و خارج کردن آن، تعداد مول هوای محبوس‌شده ثابت مانده و با توجه به این‌که دمای هوا ثابت است با کمک قانون گازها برای آن می‌توان نوشت:



شکل (۱)

$$P_1V_1 = P_2V_2 \xrightarrow{V=Ah} P_1h_1 = P_2h_2 \quad (1)$$

گام دوم: حال با توجه به شکل شمارهٔ (۲)، در صورتی‌که ارتفاع جیوهٔ باقی‌مانده درون لوله برابر x باشد، ارتفاع هوای درون لوله به $h_2 = 40 - x$ سانتی‌متر می‌رسد. از طرفی فشار هوای درون لوله در این حالت برابر است با:



شکل (۲)

$$P_2 + x\,cmHg = P_{\text{محیط}} \Rightarrow P_2 = (75 - x)cmHg$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \overbrace{75 \times 10}^{\text{حالت ۱}} = \overbrace{(75 - x)(40 - x)}^{\text{حالت ۲}}$$

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم فوق مقدار x (ارتفاع جیوه) برابر ۲۵cm به‌دست می‌آید.

خلاقیت حرفه‌ای

بهتر است به‌جای حل معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست آمده، مقادیر مختلف x را از گزینه‌ها در این رابطه کنترل کنیم:

معادله: $75 \times 10 = (75 - x)(40 - x)$

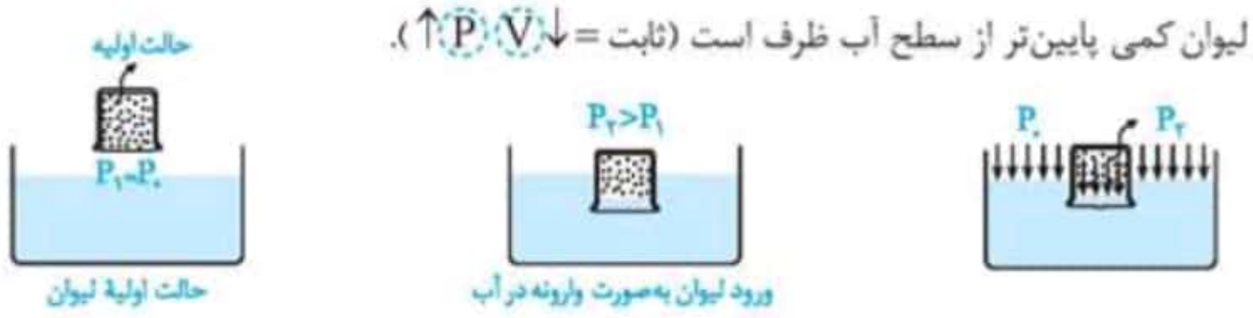
$x = 10cm \Rightarrow 75 \times 10 \neq (75 - 10)(40 - 10) = 65 \times 30$ ✗

$x = 15cm \Rightarrow 75 \times 10 \neq (75 - 15)(40 - 15) = 60 \times 25$ ✗

$x = 25cm \Rightarrow 75 \times 10 = (75 - 25)(40 - 25) = 50 \times 15 = 750$ ✓

$x = 20cm \Rightarrow 75 \times 10 \neq (75 - 20)(40 - 20) = 55 \times 20$ ✗

۲ ۱۱۰۸ در شکل زیر، در اثر کاهش حجم هوای درون لیوان (با ثابت ماندن مقدار آن) فشار هوای محبوس افزایش یافته و بیشتر از فشار هوای آزاد می‌شود. بنابراین سطح آب درون لیوان کمی پایین‌تر از سطح آب ظرف است (ثابت $= \downarrow V, \uparrow P$).



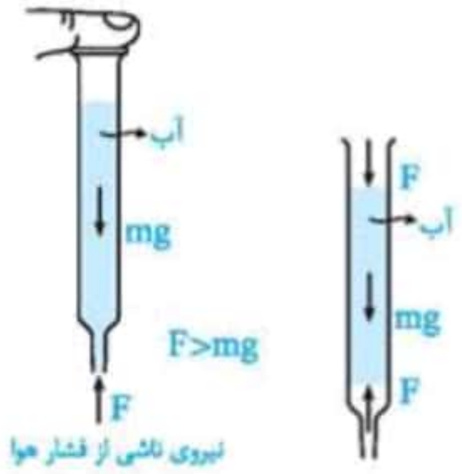
دقت

دمای هوای درون لیوان، ثابت فرض می‌شود.

۴ ۱۱۰۹ با توجه به این‌که سمت بالای پیپت (دهانهٔ پیپت) مسدود شده است، فشار هوای اطراف به آب درون آن نیرو وارد کرده و مانع از ریختن آن می‌شود و این نیرو بزرگ‌تر از نیروی جاذبهٔ گرانشی زمین است.

حال اگر دهانهٔ بالایی پیپت باز شود، هوای اطراف از دو طرف بر آن نیرو وارد کرده $(F = P.A)$ و این نیروها هم‌دیگر را خنثی می‌کنند و در نهایت نیروی جاذبه باعث ریختن آب می‌شود.

دقت کنید که اگر گزینهٔ (۳) صحیح بود، در حالتی که دهانهٔ بالایی پیپت باز است نیز نباید آب ریخته شود.





پایه یازدهم

الکتریسیتهٔ ساکن

فصل اول

	عنوان	صفحه
۱	بار الکتریکی و روش‌های باردار کردن اجسام	۲۶۵
۲	الکتروسکوپ	۲۷۰
۳	قانون کولن	۲۷۲
۴	تماس دادن چند کرهٔ رسانای مشابه باردار به یک دیگر	۲۷۹
۵	بررسی قانون کولن برای بیش از دو ذرهٔ باردار	۲۸۱
۶	صفر شدن نیروی الکتریکی وارد بر یکی از بارهای واقع در یک راستا	۲۸۵
۷	میدان الکتریکی در اطراف یک بار نقطه ای	۲۹۴
۸	برایندگیری از میدان های الکتریکی حاصل از چند بار نقطه ای	۲۹۶
۹	تحلیل یک موضوع مفهومی	۳۰۲
۱۰	خطوط میدان الکتریکی	۳۱۱
۱۱	نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی و مفاهیم میدان الکتریکی یکنواخت	۳۱۵
۱۲	برایندگیری بردارها در حالت کلی	۳۲۳
۱۳	تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذرهٔ باردار و کار میدان انجام شده بر روی آن	۳۳۴
۱۴	مقایسهٔ پتانسیل الکتریکی نقاط مختلف میدان الکتریکی	۳۳۸
۱۵	ارتباط بین انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره و پتانسیل نقاط میدان و محاسبهٔ کار	۳۴۲
۱۶	چگونگی توزیع بار در رساناها	۳۵۰
۱۷	آشنایی با خازن و بار و انرژی ذخیره شده در آن	۳۵۲
۱۸	عوامل مؤثر بر ظرفیت یک خازن	۳۵۵
۱۹	تغییر در ویژگی‌های یک خازن در حالت متصل به باتری و در حالت شارژ شده و جدا از باتری	۳۵۸

خلاصه نکات

۱۱۱۱۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱ **بار الکتریکی و روش‌های باردارکردن اجسام** (تست‌های ۱۱۱۰ تا ۱۱۳۵)

وقتی دو جسم خنثی به یکدیگر مالش داده می‌شوند، تعدادی الکترون از یکی از آن‌ها به دیگری منتقل می‌شود. جسمی که الکترون از دست می‌دهد، تعداد الکترون‌هایش کم‌تر از تعداد پروتون‌هایش می‌شود و بار الکتریکی آن مثبت می‌شود و جسمی که الکترون اضافی دریافت می‌کند، دارای بار الکتریکی منفی می‌شود.

نکات مهم و کاربردی

۱) افزایش تعداد الکترون‌ها در یک جسم، بار جسم را منفی کرده و کاهش تعداد الکترون‌ها بار آن را مثبت می‌کند.

۲) اگر به یک جسم خنثی n الکترون داده شود و اندازهٔ بار الکتریکی هر الکترون را e در نظر بگیریم $(e=1/6\times10^{-19}C)$، بار الکتریکی جسم برابر است با:

$$q=-ne \quad (n=0,1,2,\dots)$$

هم‌چنین اگر n الکترون از جسمی گرفته شود، بار الکتریکی جسم برابر است با:

$$q=+ne$$

۳) با توجه به رابطهٔ $q=\pm ne$، بار الکتریکی هر جسم مضرب صحیحی از یک مقدار پایه است که آن مقدار پایه، بار یک الکترون است.

$$q=\underbrace{\pm n}_{\text{مضرب صحیح}}\ \underbrace{e}_{\text{مقدار پایه}}$$

به عبارتی حاصل $\frac{q}{e}$ برای یک جسم، نمی‌تواند هر مقداری داشته باشد و حاصل آن باید حتماً یک عدد صحیح باشد.

روش‌های باردار کردن اجسام

به طور کلی سه روش برای باردار کردن اجسام مطرح می‌کنیم:
۱) مالش
۲) تماس
۳) القا

حال در ادامهٔ کار، به توضیح هر یک از این سه روش می‌پردازیم:

۱) مالش: در اثر مالشِ دو جسم بر یکدیگر، می‌توان آن‌ها را باردار کرد. در رابطه با این روش برای باردار کردن اجسام، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در اثر مالش دو جسم بر یکدیگر، الکترون‌ها تولید نمی‌شوند، بلکه فقط از جسمی به جسم دیگر منتقل می‌شوند.

۲) جسمی که الکترون از دست می‌دهد، دارای بار مثبت و جسمی که الکترون دریافت می‌کند، دارای بار الکتریکی منفی می‌شود.

۳) به‌دست آوردن یا از دست دادن الکترون در تماس دو جسم با یک‌دیگر را می‌توان براساس جدولی موسوم به **سری الکتریسیتهٔ مالشی (سری تریبوالکتریک)** مشخص کرد. در این جدول، مواد پایین‌تر، الکترون‌خواهی بیشتری دارند؛ یعنی اگر دو ماده در این جدول در تماس با یک‌دیگر قرار گیرند، الکترون‌ها از مادهٔ بالاتر جدول به ماده‌ای که پایین‌تر قرار دارد، منتقل می‌شود.

در ادامه، این جدول به همراه دو مثال بر روی آن آورده شده است:

سری الکتریسیتهٔ مالشی (تریبوالکتریک)

انتهای مثبت سری
موی انسان
شیشه
نایلون
پشم
موی گربه
شرب
ابریشم
آلومینیم
پوست انسان
کاغذ
چوب
پارچهٔ کتان
کهربا
برنج، نقره
پلاستیک، پلی‌اتیلن
لاستیک
تفلون
انتهای منفی سری

مثال ۱: اگر میلهٔ شیشه‌ای با پارچهٔ ابریشمی مالش داده شود، میلهٔ شیشه‌ای به علت بالاتر بودن در سری، بار مثبت و پارچهٔ ابریشمی بار منفی پیدا می‌کند.

مثال ۲: اگر میلهٔ پلاستیکی با پارچهٔ پشمی مالش داده شود، میلهٔ پلاستیکی به علت پایین‌تر بودن در سری، بار منفی و پارچهٔ پشمی بار مثبت پیدا می‌کند.

تذکر دقت کنید که نیاز به حفظ‌کردن این سری نیست و اگر نیاز به بخشی از آن باشد، در صورت مسأله داده خواهد شد.

تمرین۱ **با توجه به جدول الکتریسیتهٔ مالشی فوق، فرض کنید هنگام مالش یک میلهٔ پلاستیکی خنثی و یک پارچهٔ پشمی، با انتقال بار خالصی در حدود $1nC$ روبه‌رو می‌شویم. در این انتقال بار:**

۱) میلهٔ پلاستیکی $6/25\times10^{9}$ الکترون از دست می‌دهد.
۲) میلهٔ پلاستیکی $6/25\times10^{9}$ الکترون اضافی می‌گیرد.
۳) میلهٔ پلاستیکی $3/125\times10^{9}$ الکترون از دست می‌دهد.
۴) میلهٔ پلاستیکی $3/125\times10^{9}$ الکترون اضافی می‌گیرد.

پاسخ با توجه به سری تریبوالکتریک، میلهٔ پلاستیکی (که الکترون‌خواه‌تر است) از پارچهٔ پشمی الکترون اضافی می‌گیرد و بار آن منفی می‌شود. تعداد این الکترون‌ها برابر است با:

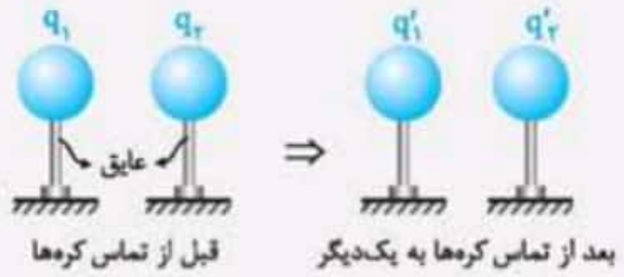
$$q=ne\Rightarrow n=\frac{q}{e}=\frac{1\times10^{-9}C}{1/6\times10^{-19}C}=6/25\times10^{9}\ \text{الکترون}$$ (گزینهٔ ۲)

۲) تماس: این روش، برای باردارکردن اجسام رسانا، استفاده می‌شود. برای درک این روش برای باردار کردن اجسام، به مثال زیر توجه کنید:

مثال فرض کنید یک کرهٔ رسانای با بار مثبت و یک کرهٔ رسانای خنثی داریم. پس از تماس آن‌ها با یکدیگر، می‌توان این‌گونه تصور کرد که مقداری از بارهای مثبت کرهٔ باردار، به کرهٔ خنثی منتقل شده است و هر دو دارای بار مثبت شده‌اند.



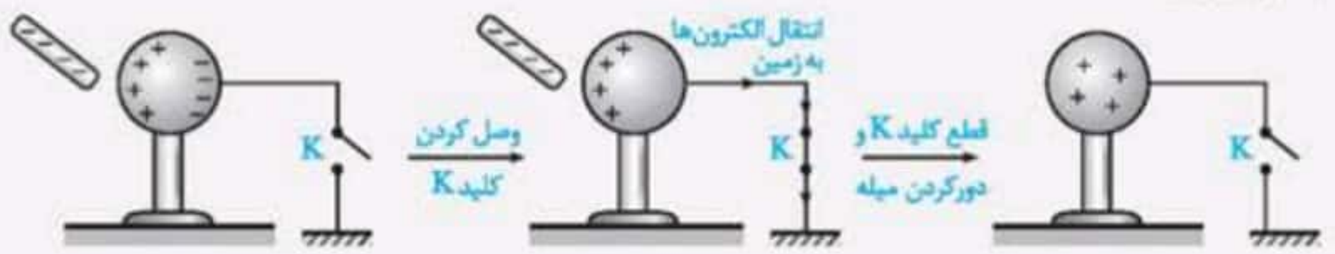
نکته اگر دو کرهٔ یکسان با بارهای q_1 و q_2 را به یکدیگر متصل کرده و سپس از هم جدا کنیم، پس از جدا کردن، بار هر دو کره با یکدیگر یکسان و برابر $\frac{q_1+q_2}{2}$ می‌شود (البته با این فرض که تبادل بار الکتریکی فقط بین دو کره انجام می‌شود).



$$q'_1=q'_2=\frac{q_1+q_2}{2}$$

۳) القا: از این روش نیز برای باردارکردن اجسام رسانا استفاده می‌شود. برای درک بهتر این روش، به مثال زیر توجه کنید:

مثال در شکل زیر یک میلهٔ باردار را به یک کرهٔ رسانا با پایه‌های عایق نزدیک می‌کنیم تا تفکیک بار انجام شود. سپس با وصل کردن کلید K، کرهٔ رسانا را به زمین متصل می‌کنیم تا بارهای هم‌نام با میلهٔ باردار، از کرهٔ رسانا خارج شود. در نهایت کلید K را قطع و میلهٔ باردار را دور می‌کنیم، کرهٔ رسانا دارای باری غیرهم‌نام با میلهٔ باردار اولیه شده است.



برای جمع‌بندی روش‌های مختلف باردارکردن اجسام، به نمودار درختی زیر توجه کنید:



با توجه به خلاصه نکات ارائه شده، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۱۱۱۱ همان‌طور که می‌دانیم، بار الکتریکی پروتون و الکترون هم‌اندازه و مختلف العلامت و بار الکتریکی نوترون برابر صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$q_p=+e\ ,\ q_e=-e\ ,\ q_n=0$$

$$\text{طبق صورت سؤال}:\begin{cases}q_n=\alpha q_e\xrightarrow{q_n=0}\alpha=0\\ q_p=\beta q_e\xrightarrow{q_p=-q_e}\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=0+(-1)=-1$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۱۱۲ همان‌طور که می‌دانیم، اگر یک جسم الکترون دریافت کند، بار آن منفی و اگر الکترون از دست دهد، بار آن مثبت می‌شود. در این سؤال بار جسم منفی است، بنابراین الکترون دریافت کرده است. برای محاسبهٔ تعداد الکترون‌های دریافتی این جسم می‌توان نوشت:

$$q = ne \Rightarrow -8\times10^{-9} = n\times(-1/6\times10^{-19}) \Rightarrow n = 5\times10^{10}$$

بنابراین این جسم به تعداد 5×10^{10} الکترون دریافت کرده است و تعداد الکترون‌های آن به همین اندازه از تعداد پروتون‌هایش بیشتر است.

۳ ۱۱۱۳ همان‌طور که در خلاصه نکات (۱) مطرح شد، وقتی جسمی دارای بار الکتریکی مثبت و یا منفی است، در واقع الکترون از آن گرفته و یا به آن داده شده است، این موضوع یعنی باردار کردن یک جسم، تعداد پروتون‌های آن جسم را تغییر نمی‌دهد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است. حال می‌توان نوشت:

جسم A: $q_A = ne \Rightarrow 80\times10^{-9} = n\times1/6\times10^{-19} \Rightarrow n = 5\times10^{11}$ ⇒ جسم A، 5×10^{11} الکترون از دست داده است.

جسم B: $q_B = -ne \Rightarrow -4/8\times10^{-7} = -n\times1/6\times10^{-19} \Rightarrow n = 3\times10^{12}$ ⇒ به جسم B، 3×10^{12} الکترون داده‌ایم.

۳ ۱۱۱۴ مطابق با رابطهٔ $q = \pm ne$، بار الکتریکی یک جسم، مضرب صحیحی از بار پایه می‌باشد:

$$q = ne \Rightarrow n = \frac{q}{e}$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $n = \frac{q}{e} = \frac{2\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}} = 1/25 \rightarrow$ عدد صحیح نمی‌باشد. ×

۲) $n = \frac{q}{e} = \frac{4\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}} = 2/5 \rightarrow$ عدد صحیح نمی‌باشد. ×

۳) $n = \frac{q}{e} = \frac{8\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}} = 5 \rightarrow$ عدد صحیح است. ✓

۴ ۱۱۱۵ همان‌طور که می‌دانیم، اگر از یک جسمِ خنثی الکترون بگیریم، بار الکتریکی آن مثبت می‌شود که با توجه به رابطهٔ $q = ne$ می‌توان نوشت:

$$q = ne \Rightarrow 1\times10^{-6} = n\times1/6\times10^{-19} \Rightarrow n = \frac{10^{-6}}{1/6\times10^{-19}} = \frac{10^{14}}{16} = 6/25\times10^{12}$$

1×10^{-6}: تبدیل میکروکولن به کولن

۱ ۱۱۱۶ چون جسم الکترون از دست می‌دهد، بنابراین در حالت ثانویه بار آن مثبت و در حالت اولیه بار آن منفی است (رد گزینه‌های ۲ و ۳). بار جسم به مقدار $-2q_0$ تغییر کرده است (از q_0 به $-q_0$ رسیده است) و داریم:

$$\begin{cases}\Delta q = -q_0 - (q_0) = -2q_0\\ \Delta q = ne\end{cases} \Rightarrow -2q_0 = ne = 5\times10^{15}\times1/6\times10^{-19} = 8\times10^{-4} \Rightarrow q_0 = -4\times10^{-4}\,C = -400\,\mu C$$

۲ ۱۱۱۷ چون بار الکتریکی خطکش منفی شده است، بنابراین این خطکش الکترون دریافت کرده است. کل الکترون‌های دریافتی توسط خطکش برابر است با:

کل الکترون‌های دریافتی خطکش: $q = ne \Rightarrow -32\times10^{-6} = -n\times1/6\times10^{-19} \Rightarrow n = 2\times10^{14}$

حال برای محاسبهٔ تعداد الکترون‌های دریافتی در هر سانتی‌متر از این خطکش ۸ سانتی‌متری می‌توان نوشت:

تعداد الکترون‌های دریافتی در هر سانتی‌متر: $n' = \frac{n}{8} = \frac{2\times10^{14}}{8} = 2/5\times10^{13}$

۳ ۱۱۱۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- عبارت $Z = 92$ در هستهٔ اورانیم، یعنی تعداد ۹۲ پروتون در هسته موجود است و بار الکتریکی هستهٔ اتم اورانیم برابر است با:

$$q = +ne = +92\times(1/6\times10^{-19}) = +147/2\times10^{-19} = +1/472\times10^{-17}\,C = 1/472\times10^{-11}\,\mu C$$

۲- با توجه به این‌که در این سؤال، اتم اورانیم خنثی است، بنابراین بار الکتریکی کل اتم برابر صفر می‌باشد.

تذکر

در حالت خنثی، تعداد الکترون‌های اتم و پروتون‌های هسته با هم برابر است. بنابراین در این سؤال می‌توان گفت بار منفی ناشی از الکترون‌ها نیز برابر $-1/472\times10^{-11}\,\mu C$ می‌باشد.

۳ ۱۱۱۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ تعداد الکترون‌های اتم دو بار مثبت X^{2+}:

$$q = -ne \Rightarrow -4/8\times10^{-18} = -n\times1/6\times10^{-19} \Rightarrow n = 30$$

گام دوم: تعداد الکترون‌های اتم دو بار مثبت (X^{2+})، ۲ واحد کم‌تر از تعداد پروتون‌های آن می‌باشد. بنابراین تعداد پروتون‌های این اتم برابر ۳۲ می‌باشد.

۳ ۱۱۲۰ در هنگام مالش دو جسم خنثی بر یک‌دیگر، با انتقال تعدادی الکترون از یک جسم به جسمی دیگر، تعادل بارها در آن‌ها بر هم می‌خورد. جسمی که الکترون از دست می‌دهد، تعداد الکترون‌هایش کم‌تر از تعداد پروتون‌های آن می‌شود و بار الکتریکی خالص آن مثبت می‌گردد و هم‌چنین، جسمی که الکترون اضافی دریافت می‌کند، تعداد الکترون‌هایش از پروتون‌های آن بیشتر شده و بار الکتریکی خالص آن منفی می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۱۲۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

انتهای مثبت سری
موی انسان
شیشه
پشم
موی گربه
ابریشم
لاستیک
انتهای منفی سری

۱) شیشه نسبت به موی گربه به سر مثبت سری الکتریسیتهٔ مالشی نزدیک‌تر است، بنابراین با مالش میلهٔ شیشه‌ای با موی گربه، بار میله مثبت و بار موی گربه منفی می‌شود.

۲) اگر یک جسم لاستیکی را با پارچهٔ پشمی مالش دهیم، بار الکتریکی پارچه مثبت و بار الکتریکی جسم لاستیکی منفی می‌شود (چرا؟)، بنابراین پارچه الکترون از دست داده و جسم لاستیکی الکترون دریافت می‌کند.

۳) در مالش یک پارچهٔ ابریشمی با موی سر انسان، بار الکتریکی پارچه منفی و بار الکتریکی موی سر مثبت می‌شود، چون موی سر به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر است. بنابراین الکترون از موی انسان به پارچه منتقل می‌شود. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴) در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی (سری تریبوالکتریک)، هر چه جسم به انتهای منفی سری نزدیک‌تر باشد، الکترون‌خواهی بیشتری دارد.

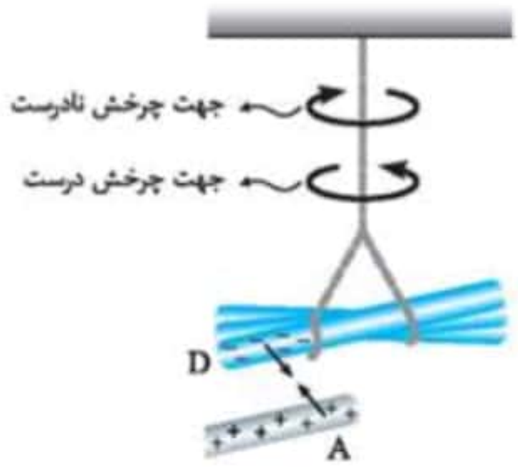
۱ ۱۱۲۲ چون جسم A نسبت به B به انتهای مثبت سری تریبوالکتریک نزدیک‌تر است، بنابراین در اثر مالش این دو جسم به یکدیگر، بار الکتریکی جسم A مثبت و بار الکتریکی جسم B منفی می‌شود. به طور مشابه، ثابت می‌شود که در تماس دو جسم C و D، بار الکتریکی C مثبت و بار الکتریکی D منفی می‌شود. بنابراین اجسام A و C و هم‌چنین B و D یک‌دیگر را دفع می‌کنند، پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

انتهای مثبت سری
A
B
C
D
انتهای منفی سری

در مالش این دو جسم به یکدیگر، بار A مثبت و بار B منفی می‌شود $(q_A > 0, q_B < 0)$

در مالش این دو جسم به یکدیگر، بار C مثبت و بار D منفی می‌شود. $(q_C > 0, q_D < 0)$

۴ ۱۱۲۳ مشابه با پاسخ سؤال قبل، بار الکتریکی میله‌های A و C مثبت و بار الکتریکی میله‌های B و D منفی می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، بارهای هم‌علامت یک‌دیگر را دفع و بارهای مختلف‌العلامت یک‌دیگر را جذب می‌کنند. حال به بررسی گزینهٔ (۴) می‌پردازیم:



۴) چون بار الکتریکی دو میلهٔ A و D مختلف‌العلامت است، بنابراین این دو میله هم‌دیگر را جذب می‌کنند. در نتیجه جهت چرخش میلهٔ آویخته شده در این گزینه، نادرست نشان داده شده است.

۳ ۱۱۲۴ در اثر مالش دو جسم A و B با یک‌دیگر، بار الکتریکی جسم A مثبت و بار الکتریکی جسم B منفی می‌شود، زیرا جسم A به سر مثبت جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی نزدیک‌تر است، بنابراین دو گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست است. از طرفی با توجه به رابطهٔ $q = \pm ne$، بار الکتریکی یک جسم، مضرب صحیحی از بار پایه می‌باشد:

$$q = ne \Rightarrow n = \frac{q}{e}$$

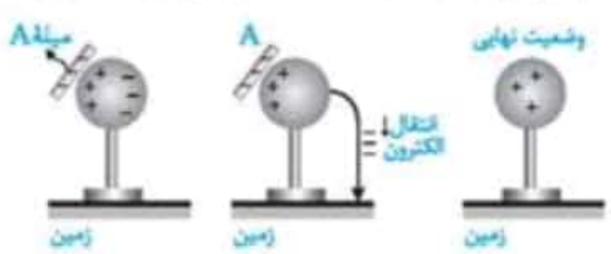
حال به بررسی گزینه‌های (۱) و (۳) می‌پردازیم:

۳) $n = \frac{q}{e} = \frac{8 \times 10^{-10}}{1/6 \times 10^{-19}} = 5 \times 10^{9}$ ← ✓ عدد صحیح است.

۱) $n = \frac{q}{e} = \frac{2 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = 1/25$ ← ✗ عدد صحیح نمی‌باشد.

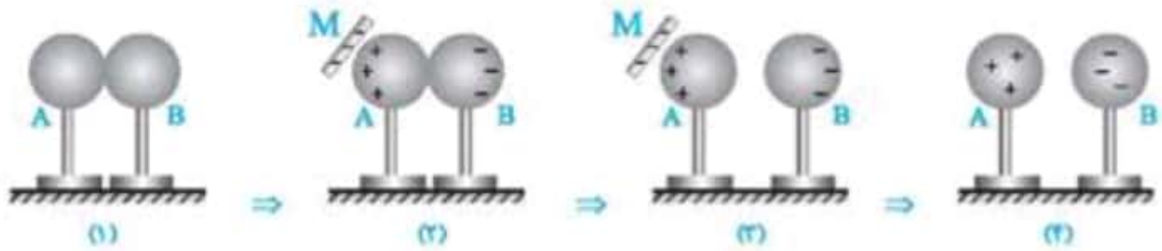
بنابراین فقط در گزینهٔ (۳)، یک عدد صحیح به دست آمده و جواب سؤال می‌باشد.

۲ ۱۱۲۵ هرگاه جسم رسانایی در نزدیکی جسم باردار قرار گیرد، بارهای جسم رسانا در اثر القا تفکیک می‌شوند. با توجه به سری الکتریسیتهٔ مالشی، میلهٔ A در اثر مالش با پارچه B، دارای بار الکتریکی منفی می‌شود (چرا؟). با نزدیک کردن میلهٔ A با بار منفی به کرهٔ رسانا، بارهای کره از یک‌دیگر جدا شده و بارهای مثبت به سمت میله جذب می‌شوند. هنگامی‌که دست ما با کره تماس پیدا می‌کند، بارهای منفی کره که از میله دور شده‌اند، توسط دست ما به زمین منتقل می‌شوند. در این وضعیت با دور کردن میله از کره، مطابق شکل بارهای مثبت در سطح کره به‌صورت یکنواخت پخش می‌شوند.



www.gajmarket.com

۴ ۱۱۲۶ در سری الکتریسیتهٔ مالشی، N نسبت به M، به سر مثبت سری نزدیک‌تر است، بنابراین در اثر مالش دو تیغهٔ M و N، تیغهٔ M دارای بار منفی می‌شود. با نزدیک کردن تیغهٔ M به کرهٔ A، در دو کرهٔ رسانا، تفکیک بار صورت می‌گیرد. با جدا کردن دو کره و سپس دور کردن تیغهٔ M مطابق شکل، کرهٔ A دارای بار الکتریکی مثبت و کرهٔ B دارای بار الکتریکی منفی خواهد شد.

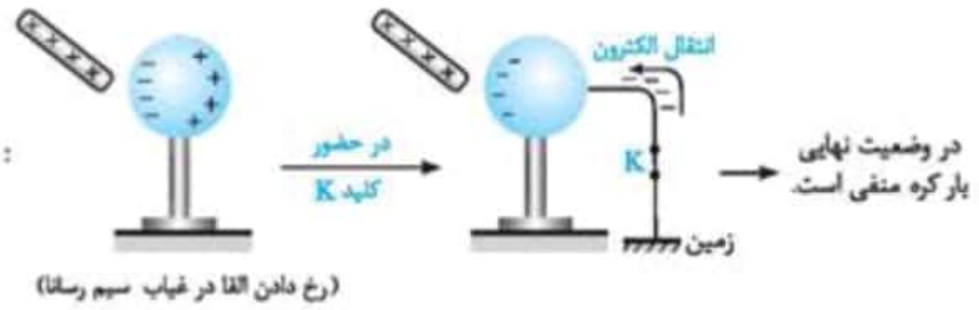


۲ ۱۱۲۷ ابتدا دقت کنید که هرگاه جسم رسانایی در نزدیکی یک جسم باردار قرار بگیرد، بارهای جسم رسانا در اثر القا تفکیک می‌شوند. حال به بررسی هریک از شکل‌ها می‌پردازیم:

توضیحات شکل ۱ :

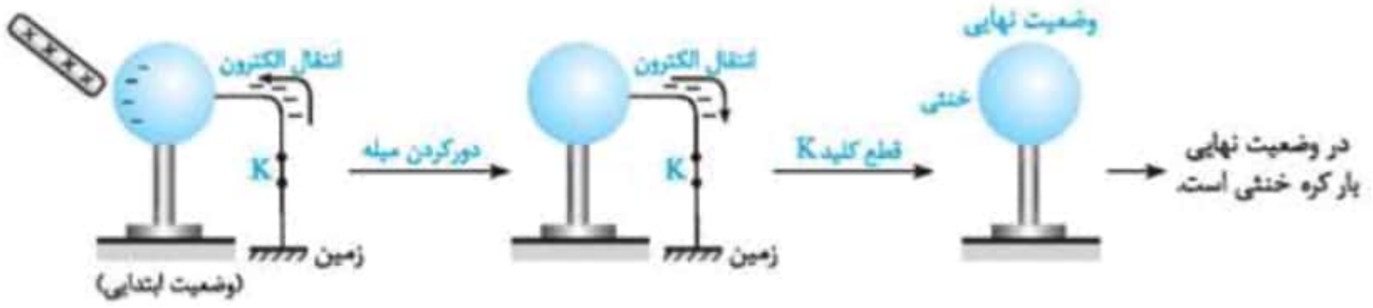


توضیحات شکل ۲ :



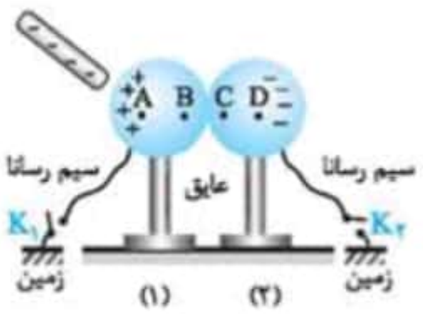
دقت: در شکل (۲) در حضور میله با بار مثبت، بارها در کره تفکیک شده و در حالتی‌که کلید وصل است، الکترون‌ها از زمین به کره منتقل می‌شوند تا بار الکتریکی مثبت در سمتی از کره که از میله دورتر است را خنثی کنند و در نهایت بار الکتریکی کره منفی می‌شود.

توضیحات شکل ۳ :

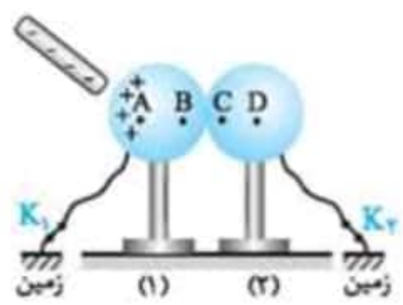


دقت: در شکل (۳) اگر ابتدا میله را دور کنیم، کرهٔ رسانا چون به زمین وصل است، به همان حالت اولیهٔ خود (خنثی) باز می‌گردد، یعنی الکترون‌های انتقال یافته از زمین به آن، دوباره به زمین برمی‌گردند. حال با قطع کلید K، مشخص است که کره خنثی باقی می‌ماند.

۴ ۱۱۲۸ با نزدیک کردن میلهٔ دارای بار منفی به دو کره، بارها مطابق شکل از هم تفکیک شده و نقطهٔ A در سمت چپ دارای بار مثبت و نقطهٔ D در سمت راست دارای بار منفی می‌شود (در نقاط B و C که محل برخورد دو کره است، باری جمع نمی‌شود). با توجه به این موضوع کرهٔ (۱) دارای بار مثبت و کرهٔ (۲) دارای بار منفی می‌شود.

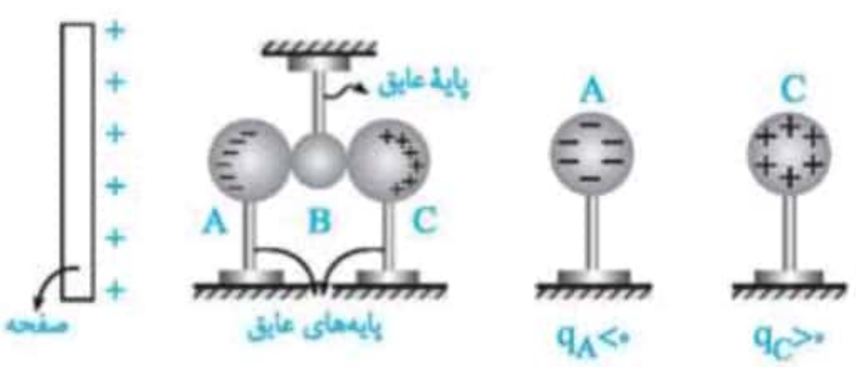


حال اگر کلیدها را وصل کنیم، مجموعه توسط سیم رسانا به زمین وصل می‌شود. به دلیل وجود میله در کنار کره، بارهای مثبت همچنان در اثر القا در نزدیکی میله باقی می‌مانند، ولی بارهای منفی در مجموعهٔ دو کره به زمین منتقل می‌شود. دقت کنید که مهم نیست کدام‌یک از کلیدها وصل شوند، در هر حالتی که کلیدها وصل باشند، کرهٔ (۱) دارای بار مثبت شده و کرهٔ (۲) خنثی می‌شود و گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

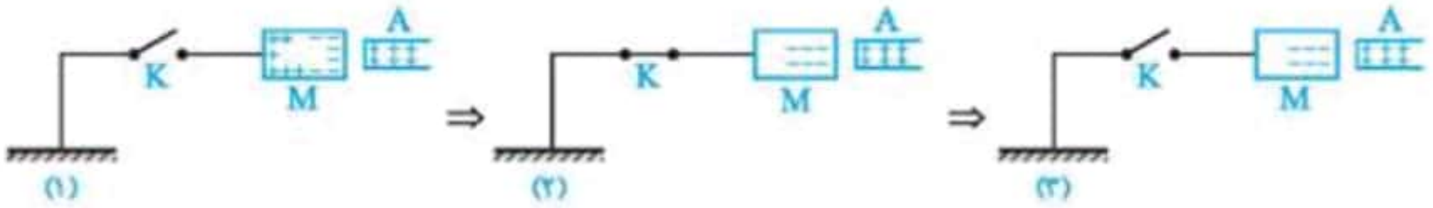


۱ ۱۱۲۹ صفحه دارای بار الکتریکی مثبت است و از طریق القا، در کرهٔ A بار منفی و در کرهٔ C بار مثبت ایجاد می‌شود. هنگامی‌که کرهٔ B را از بین دو کرهٔ A و C خارج می‌کنیم و سپس صفحهٔ باردار را دور می‌کنیم، دو کرهٔ A و C دیگر با هم در تماس نبوده و بار منفی در کرهٔ A و بار مثبت در کرهٔ C باقی می‌ماند. اندازهٔ بار الکتریکی دو کره در این حالت با هم برابر است، زیرا به تعداد الکترون‌هایی که از کرهٔ C خارج شده، به کرهٔ A الکترون وارد شده است.

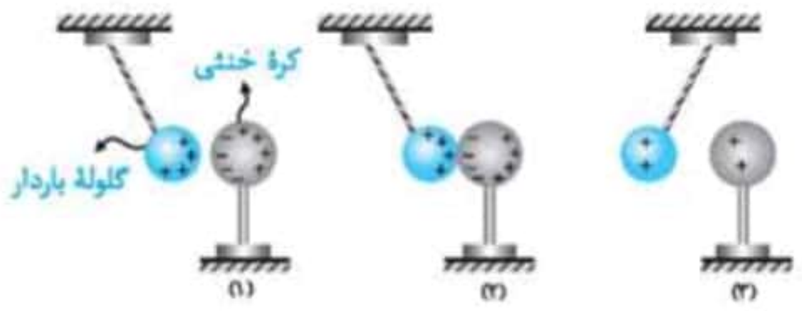
$$\Rightarrow |q_A| = |q_C|$$



۱ ۱۱۳۰ در اثر مالش دو جسم A و B، جسم A دارای بار مثبت می‌شود (چرا؟). حال با نزدیک کردن جسم A با بار الکتریکی مثبت به رسانای M، بارهای منفی در رسانای M، به سمت بارهای مثبتِ جسم A می‌آیند. با بستن کلید، بارهای مثبت M توسط الکترون‌های زمین خنثی می‌شوند و با باز کردن کلید K، جسم M فقط دارای بار الکتریکی منفی خواهد بود.



۱ ۱۱۳۱ این سؤال برگرفته از آزمایش کتاب درسی است. با نزدیک کردن کرهٔ فلزی به گلولهٔ باردار، به دلیل القای الکتریکی، مطابق شکل (۱) گلوله به سمت کره جذب می‌شود و بارهای کره از یکدیگر تفکیک می‌شوند. بعد از تماس، گلوله و کره دارای بار الکتریکی هم‌نام می‌شوند و در نتیجه یکدیگر را دفع می‌کنند (مطابق شکل (۳)).

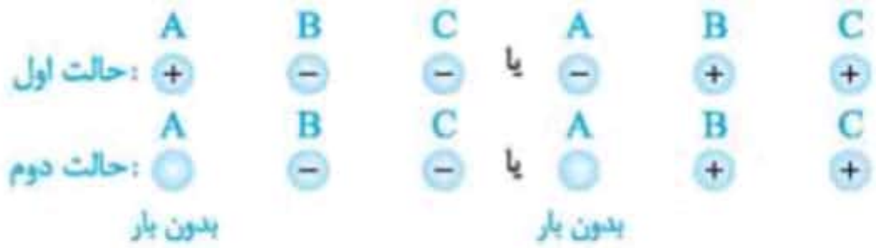


۴ ۱۱۳۲ برای بررسی این سؤال، به موارد زیر توجه شود:

۱) اگر A و B یک‌دیگر را جذب کنند، یا دارای بار ناهم‌نام هستند و یا یکی از آن‌ها بدون بار است.

۲) اگر B و C یک‌دیگر را دفع کنند، قطعاً هر دو باردار و دارای بار هم‌نام هستند. در نتیجه گزینه‌های (۲) و (۳) غلط هستند.

۳) حالت‌های ممکن برای این سه جسم عبارت است از:



بنابراین با توجه به شکل‌های روبه‌رو، گلوله‌های A و C نمی‌توانند بار هم‌نام داشته باشند.

۴ ۱۱۳۳ هنگامی که به آونگ وسطی بار الکتریکی منفی داده می‌شود، باعث تفکیک بارها در دو کرهٔ مشابه دیگر می‌شود. به‌طوری‌که در دو کرهٔ سمت راست و سمت چپ بارها مطابق شکل مقابل تفکیک شده و به علت جاذبهٔ به‌وجود آمده بین هر یک از کره‌های کناری با کرهٔ وسطی، آن‌ها جذب کرهٔ وسطی شده و شکل آونگ‌ها به‌صورت مقابل می‌شود:



۲ ۱۱۳۴ هنگامی‌که بادکنک را با پارچهٔ پشمی مالش می‌دهیم، بادکنک دارای بار الکتریکی می‌شود. در اثر نزدیک کردن بادکنک به باریکهٔ آب، به علت پدیدهٔ القای الکتریکی، باریکهٔ آب به سمت بادکنک جذب می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲ ۱۱۳۵ با توجه به جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی داده‌شده، در اثر مالش دو جسم A و B، بار الکتریکی جسم A مثبت و بار الکتریکی جسم B منفی می‌شود (چرا؟). بنابراین دو گزینهٔ (۳) و (۴) نادرست است. از طرفی با نزدیک کردن یک میلهٔ باردار به یک جسم بدون بار، بارهای الکتریکی جسم تفکیک‌شده و بارهای الکتریکی ناهم‌نام با میله، در نزدیکی میله قرار می‌گیرد. بنابراین با نزدیک کردن هر یک از اجسام A و B به خرده‌های کاغذ، آرایش بارها به صورت زیر می‌باشد:



: نزدیک کردن جسم B به خرده‌های کاغذ



: نزدیک کردن جسم A به خرده‌های کاغذ

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ ۱۱۳۶ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ — **الکتروسکوپ** — (تست‌های ۱۱۳۶ تا ۱۱۴۰)

الکتروسکوپ وسیله‌ای است که با کمک آن، در مورد بار الکتریکی اجسام می‌توان اظهار نظر کرد. با توجه به شکل مقابل، این وسیله از سه قسمت اصلی کلاهک فلزی، تیغهٔ فلزی و ورقه‌های نازک تشکیل شده است.



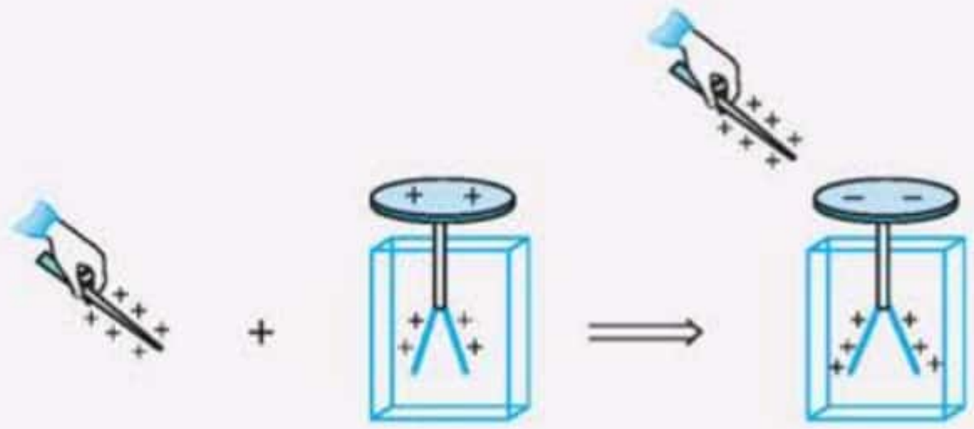
برای حل مسائل مربوط به برق‌نما (الکتروسکوپ)، چهار حالت کلی زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) هنگامی‌که میلهٔ بارداری را به یک الکتروسکوپ خنثی نزدیک می‌کنیم، روی کلاهک الکتروسکوپ، باری مخالف با بار میلهٔ باردار و روی ورقه‌های نازک الکتروسکوپ، باری هم‌علامت با بار میلهٔ باردار القا می‌شود.

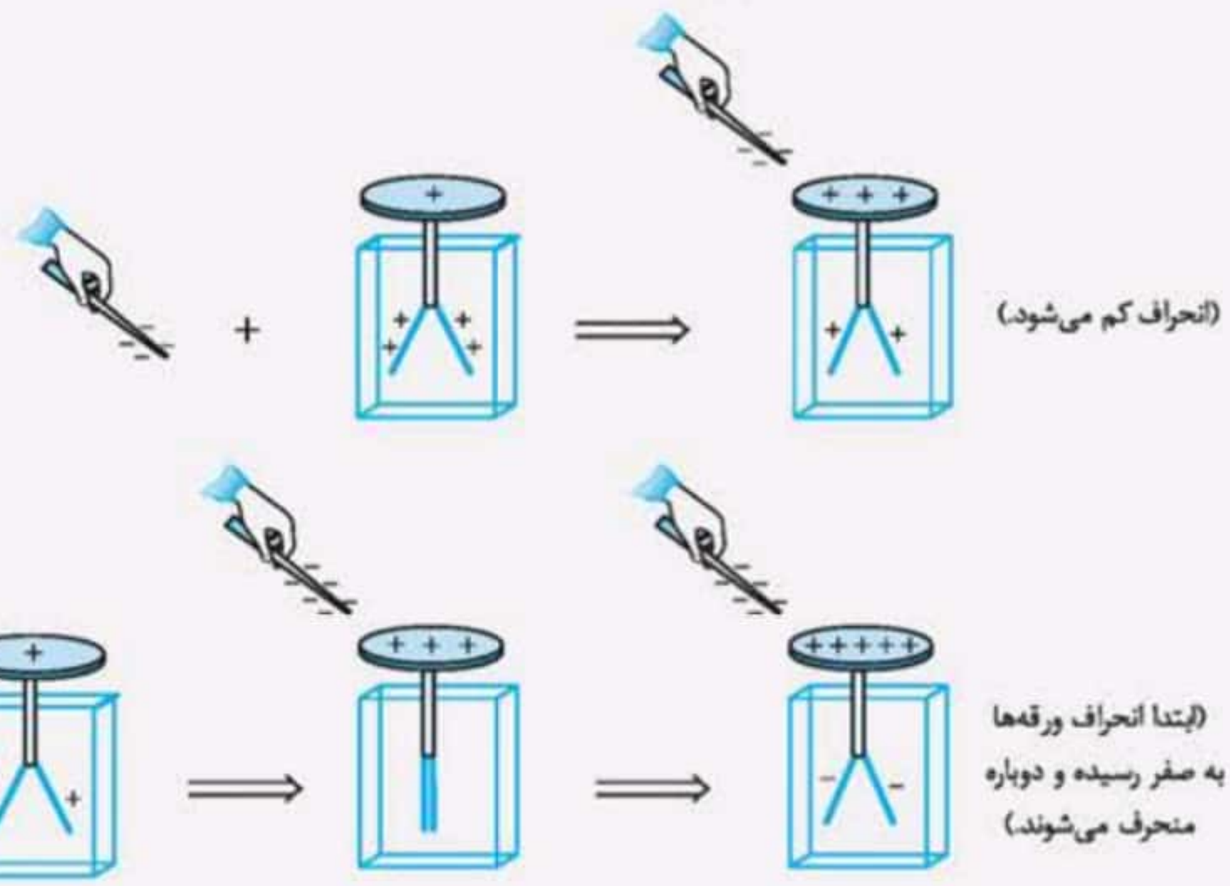


www.gajmarket.com

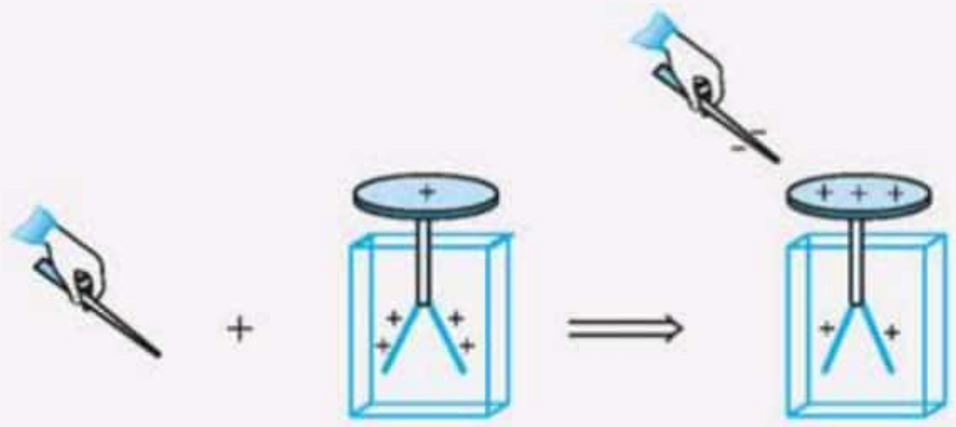
۲ هنگامی‌که میلهٔ بارداری را به یک الکتروسکوپ باردار هم‌علامت با بار میله نزدیک کنیم، مقداری از بارهای روی کلاهک به علت نیروی دافعه بین بارهای روی کلاهک و میلهٔ باردار، کاسته‌شده و به بار ورقه‌های نازک اضافه می‌شود و در نتیجه انحراف ورقه‌های نازک بیشتر می‌شود.



۳ هنگامی‌که میلهٔ بارداری را به یک الکتروسکوپ باردار غیرهم‌علامت با بار میله نزدیک کنیم، به علت نیروی جاذبه بین میلهٔ باردار و بار روی کلاهک الکتروسکوپ، مقداری از بار ورقه‌های نازک به کلاهک منتقل می‌شود و در نهایت بسته به مقدار بار میله و کلاهک، حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:



۴ هنگامی‌که یک میلهٔ رسانای خنثی را به الکتروسکوپ باردار نزدیک کنیم، مقداری بار ناهم‌نام با بار الکتروسکوپ، بر روی میله القا می‌شود. این موضوع باعث می‌شود مقداری از بار روی ورقه‌های نازک الکتروسکوپ به سمت کلاهک حرکت کند و در نتیجه از انحراف ورقه‌ها کاسته می‌شود.



تمرین) **با یک الکتروسکوپ، چگونه می‌توان تعیین کرد:**

الف) جسمی باردار است؟ **ب) جسم چه نوع باری دارد؟**

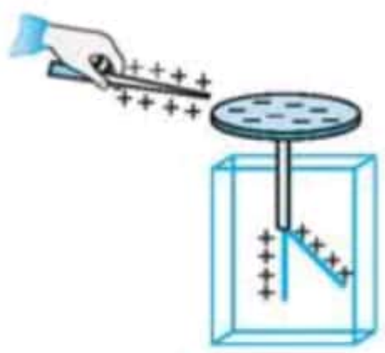
ج) جسمی رسانا است یا نارسانا؟ **د) کدام‌یک از دو کرهٔ هم‌اندازه، رسانا و باردار، مقدار بار بیشتری دارد؟**

پاسخ **الف)** برای تشخیص باردار بودن اجسام، نیازی به باردار بودن الکتروسکوپ نیست و کافی است جسم را به کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم. اگر ورقه‌ها از هم فاصله بگیرند، نشانهٔ باردار بودن جسم است.

ب) برای تشخیص نوع بار اجسام باید حتماً الکتروسکوپ باردار و نوع بار آن نیز برای ما معلوم باشد. به همین‌منظور جسم باردار را به آرامی از بالا به کلاهک نزدیک می‌کنیم. اگر انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ بیشتر شود، نوع بار جسم هم‌نام با بار الکتروسکوپ است و اگر انحراف برای لحظه‌ای کم شود، بار جسم مخالف بار الکتروسکوپ است.

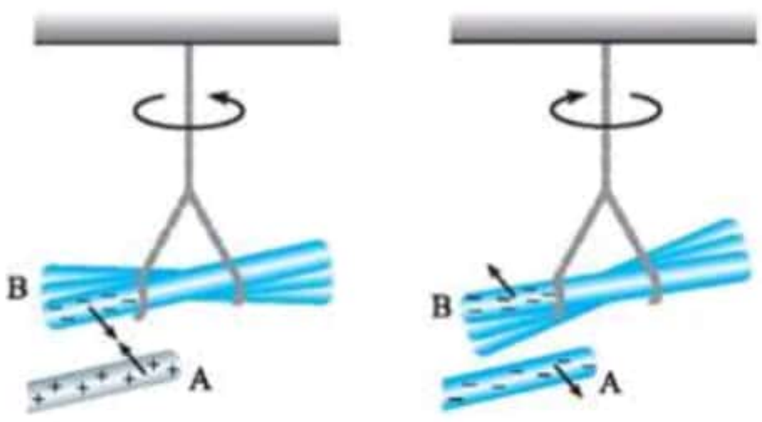
ج) برای تشخیص رسانایی اجسام باید الکتروسکوپ باردار باشد ولی نوع بار آن برای ما مهم نیست. برای این منظور یک نقطه از جسم بدون باری را که در دست داریم، به کلاهک الکتروسکوپ تماس می‌دهیم. اگر انحراف ورقه‌ها تغییر محسوسی نکند، جسم نارساناست. اگر جسم رسانا باشد، تماس آن به کلاهک، موجب تخلیهٔ قسمتی از بار الکتروسکوپ می‌شود و انحراف ورقه‌ها کم می‌شود و حتی ممکن است از بین برود (چرا؟).

د) چون دو کره کاملاً مشابه انتخاب شده‌اند، اگر بتوانیم آن‌ها را هر بار در شرایط کاملاً یکسان به کلاهک الکتروسکوپ نزدیک نگه داریم، میزان انحراف ورقه‌ها می‌تواند به صورت نه‌چندان دقیق نشان‌دهندهٔ میزان بار دو جسم باشد.



با نزدیک کردن جسم با بار الکتریکی مثبت به کلاهک الکتروسکوپ خنثی، الکترون‌های موجود بر روی ورقه‌های الکتروسکوپ به سمت کلاهک جذب می‌شوند. کلاهک الکتروسکوپ با جذب این الکترون‌ها دارای بار الکتریکی منفی می‌شود. در این حالت ورقه‌های الکتروسکوپ که الکترون خود را از دست داده‌اند، دارای بار الکتریکی مثبت می‌شوند.

۴ ۱۱۳۷ با باز شدن ورقه‌های الکتروسکوپ، متوجه می‌شویم که جسم نزدیک شده به الکتروسکوپ (A) باردار است، ولی با توجه به اطلاعات صورت سؤال، نمی‌توان نوع بار جسم A را تعیین کرد. بنابراین بار میلهٔ A می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

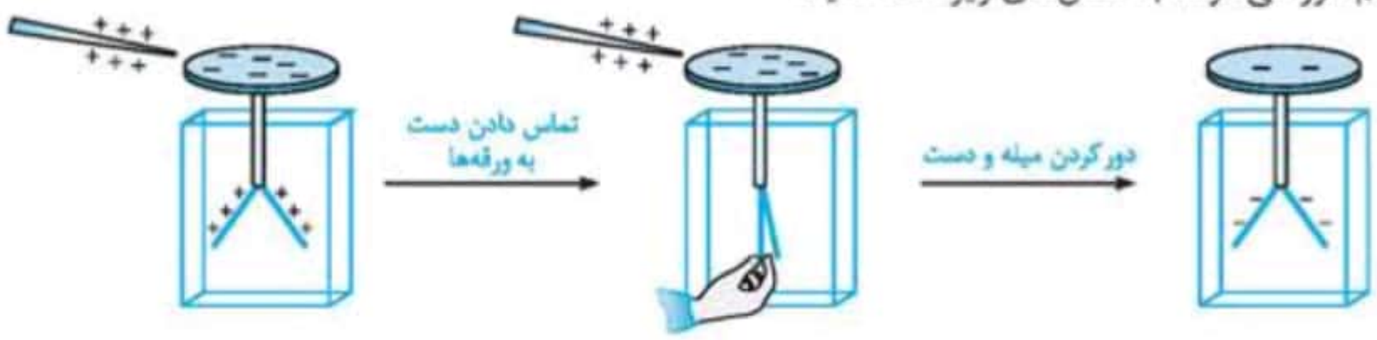


با توجه به این‌که طبق صورت سؤال، بار الکتریکی میلهٔ B منفی است، بنابراین میلهٔ A می‌تواند آن را جذب و یا دفع کند، در نتیجه هر دو گزینهٔ (۱) و (۲) می‌توانند صحیح باشند.

۲ ۱۱۳۸ با توجه به خلاصه نکات (۲)، اگر ورقه‌های الکتروسکوپ ابتدا بسته و سپس باز شوند قطعاً بار اولیهٔ الکتروسکوپ باری مخالف بار میله (یعنی مثبت) بوده و بار آن منفی است.

۱ ۱۱۳۹ در این آزمایش، از طریق القا قسمتی از بار ورقه‌ها به سمت کلاهک متمایل می‌شوند، بنابراین بار ورقه‌ها کاهش یافته و در نتیجه زاویهٔ بین ورقه‌ها نیز کم می‌شود.

۴ ۱۱۴۰ با نزدیک کردن میله با بار مثبت به کلاهک الکتروسکوپ خنثی، تعدادی از الکترون‌های آزاد ورقه‌های الکتروسکوپ در اثر نیروی ربایشی بار مثبت میله، به کلاهک منتقل و روی آن جمع می‌شوند، در نتیجه ورقه‌ها با از دست دادن تعدادی الکترون، دارای بار مثبت می‌شوند. با اتصال دست به ورقه‌ها، بار مثبت اضافی روی ورقه‌ها با دریافت الکترون آزاد (که از طریق تماس دست ما به آن منتقل می‌شود) خنثی می‌شوند. اما بار منفی القا شده در کلاهک روی آن باقی می‌ماند. با قطع تماس دست و سپس دور کردن میله از کلاهک، بار منفی جمع شده در کلاهک، روی ورقه‌ها و کلاهک پخش شده و در نتیجه دوباره ورقه‌ها از هم دور می‌شوند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



۱ ۱۱۴۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ — قانون کولن (تست‌های ۱۱۴۱ تا ۱۱۶۴)

مشاهدات فیزیکی نشان می‌دهد که دو ذرهٔ باردار بر یک‌دیگر نیرو وارد می‌کنند، به گونه‌ای که اگر بار الکتریکی دو ذره هم‌نام (هر دو مثبت و یا هر دو منفی) باشد، آن‌ها یک‌دیگر را دفع کرده و اگر بار دو ذره ناهم‌نام (یکی مثبت و دیگری منفی) باشد، آن‌ها یک‌دیگر را جذب می‌کنند.



حال این سؤال در ذهن ایجاد می‌شود که مقدار این نیرو چگونه محاسبه می‌شود، در این خلاصه نکات به این موضوع می‌پردازیم.

www.gajmarket.com

قانون کولن: با توجه به این قانون، بزرگی نیروی الکتریکی (ربایشی یا رانشی) بین دو ذره با بارهای q_1 و q_2 که در فاصلهٔ r از یک‌دیگر قرار دارند، با **حاصل‌ضرب اندازهٔ بار دو ذره** نسبت **مستقیم** و با **مجذور فاصلهٔ آن‌ها** از هم نسبت **عکس** دارد و با کمک رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} F \propto \frac{1}{r^2} & \text{(نیرو با مجذور فاصلهٔ بین دو بار الکتریکی، رابطهٔ معکوس دارد)} \\ F \propto q_1 q_2 & \text{(نیرو متناسب با حاصل‌ضرب اندازهٔ دو بار الکتریکی است)} \end{cases}$$

دقت کنید که در این رابطه برای محاسبهٔ مقدار F، علامت بارهای q_1 و q_2 را در نظر نمی‌گیریم و در واقع اندازه‌های این دو بار $|q_1|$ و $|q_2|$ را در رابطه وارد می‌کنیم.

نکات مهم و کاربردی

۱ در این رابطه k ثابت کولن نام دارد و واحد آن در سیستم SI عبارت است از:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \xrightarrow[\text{در یک طرف رابطه}]{\text{تنها کردن } k} k = \frac{Fr^2}{q_1 q_2} \equiv \frac{N.m^2}{C^2} \quad , \quad k \simeq 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

۲ ارتباط بین ثابت کولن (k) و ضریب گذردهی الکتریکی خلأ (ε_0) به‌صورت مقابل است:

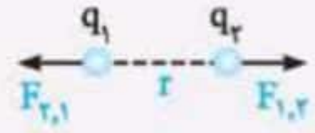
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

بنابراین واحد ε_0 معکوس واحد k بوده و معادل با $\frac{C^2}{N.m^2}$ است.

۳ اگر اندازهٔ بارهای q_1 و q_2 و یا فاصلهٔ r تغییر کند در مقایسهٔ نیروی کولنی در دو حالت می‌توان نوشت:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{q_1' q_2'}{q_1 q_2} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

۴ مطابق قانون سوم نیوتون، هر عملی را عکس‌العملی است مساوی و در خلاف جهت آن، بنابراین نیرویی که بار q_1 بر بار q_2 وارد می‌کند، با نیرویی که بار q_2 بر بار q_1 وارد می‌کند، هم‌اندازه و در خلاف جهت یک‌دیگر است.



$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}|$$

جالب است بدانید که این موضوع نسبتاً ساده، محل اشتباه بسیاری از دانش‌آموزان است.

۵ با توجه به قانون دوم نیوتون $(F = ma)$، اگر دو بار الکتریکی برای دو گلولهٔ کوچک در نظر گرفته شوند و فقط تحت اثر نیروی کولنی که به یک‌دیگر وارد می‌کنند، شتاب بگیرند، در مقایسهٔ شتاب آن‌ها می‌توان گفت:

$$F_{2,1} = F_{1,2} \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow$$

هرچه گلوله دارای جرم بیشتری باشد، شتاب آن کم‌تر است.

۶ نمودار نیروی بین دو ذرهٔ باردار برحسب فاصلهٔ آن‌ها به‌صورت مقابل است:

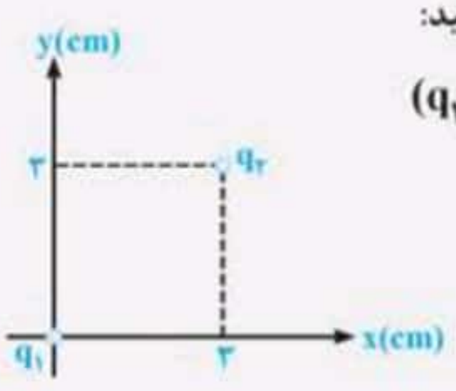


$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$$

در ادامه با حل چند تمرین، بر روی نکات ارائه‌شده در این قسمت مسلط‌تر می‌شویم:

تمرین۱ **دو بار الکتریکی q_1 و q_2 مطابق شکل در صفحه ثابت شده‌اند. به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید:**

$$(q_1 = q_2 = 2\mu C \ , \ k = 9\times10^9 \ N.m^2/C^2)$$

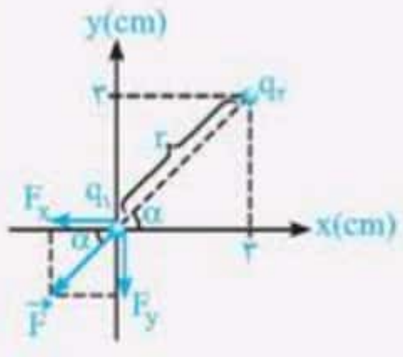


الف) اندازهٔ نیروی الکتریکی بین این دو بار چند نیوتون است؟

ب) بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 را در SI به‌دست آورید.

ج) اگر بار q_1 دو برابر شود، بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار q_2 را به دست آورید.

پاسخ الف) ابتدا با توجه به شکل، فاصلهٔ بین دو بار الکتریکی و سپس بزرگی نیروی الکتریکی که دو بار بر هم وارد می‌کنند را به‌دست می‌آوریم (دقت شود که واحدها به SI باید تبدیل شود):



$$\Rightarrow r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}\ cm = 3\sqrt{2}\times10^{-2}\ m \quad \text{با توجه به رابطهٔ فیثاغورث}$$

$$|\vec{F}| = \frac{kq_1 q_2}{r^2} = \frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{(3\sqrt{2}\times10^{-2})^2} = 20\,N$$

ب) از آن‌جایی که دو بار الکتریکی با یک‌دیگر هم‌نام‌اند، نیروی الکتریکی بین آن‌ها از نوع دافعه است و با توجه به شکل، مؤلفه‌های نیروی $\vec{F}$ را در راستای محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} |F_y| = |\vec{F}| \sin\alpha \xrightarrow{\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}} |F_y| = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\sqrt{۲}\ N \\ |F_x| = |\vec{F}| \cos\alpha \xrightarrow{\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}} |F_x| = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\sqrt{۲}\ N \end{cases}$$

چون هر دو مؤلفهٔ F_x و F_y در خلاف جهت محورهای x و y هستند، ضرایب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ هر دو منفی بوده و داریم: $\vec{F}_{۲,۱} = -۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i} - ۱۰\sqrt{۲}\,\vec{j}$

ج) با توجه به قانون سوم نیوتون، اندازهٔ نیروی وارد بر بار $q_۲$ از طرف $q_۱$ ($F_{۱,۲}$)، برابر نیروی وارد بر بار $q_۱$ از طرف $q_۲$ ($F_{۲,۱}$) است و بردار آن، قرینهٔ بردار نیروی وارد بر بار $q_۱$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت: $\vec{F}_{۱,۲} = -\vec{F}_{۲,۱}$ ، $|F_{۱,۲}| = |F_{۲,۱}|$

از طرفی با توجه به دو برابر شدن بار $q_۱$، می‌توان نوشت:

$$F_{۱,۲} = \frac{k\,(\overset{\text{۲برابر}}{q_۱})\,q_۲}{r^۲} \Rightarrow F'_{۱,۲} = ۲F_{۱,۲} \quad \text{یا} \quad \frac{F'_{۱,۲}}{F_{۱,۲}} = \frac{q'_۱}{q_۱} \times \frac{q'_۲}{q_۲} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^۲ = \frac{۲}{۱} \times ۱ \times ۱ = ۲ \Rightarrow F'_{۱,۲} = ۲F_{۱,۲}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\vec{F}'_{۱,۲} = ۲(-\vec{F}_{۲,۱}) = ۲(۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i} + ۱۰\sqrt{۲}\,\vec{j}) = ۲۰\sqrt{۲}\,\vec{i} + ۲۰\sqrt{۲}\,\vec{j}$$

تذکر در تعداد زیادی از تست‌های کنکور و سؤالات امتحانات در این قسمت، تغییرات بار الکتریکی یا فاصله را برحسب درصد در صورت سؤال مطرح می‌کنند. برای حل این‌گونه سؤالات، کافیست عبارت درصدی را به‌صورت کسری بازنویسی کنید. به‌طور مثال اگر بار الکتریکی یک ذره ۲۵ درصد افزایش یافته باشد، می‌توان نوشت:

$$q' = q + \frac{۲۵}{۱۰۰}q = q + \frac{۱}{۴}q = \frac{۵}{۴}q$$

یا به عنوان مثال دیگر اگر فاصلهٔ بین دو بار الکتریکی ۲۰ درصد کاهش یابد، می‌توان نوشت:

$$d' = d - \frac{۲۰}{۱۰۰}d = d - \frac{۱}{۵}d = \frac{۴}{۵}d$$

با حل تمرین بعد، این موضوع را بهتر درک می‌کنید.

تمرین۲ **دو بار الکتریکی هم‌نام $q_۱ = ۸\mu C$ و $q_۲$ در فاصلهٔ r، نیروی F را بر هم وارد می‌کنند. اگر ۲۵ درصد از بار $q_۱$ را برداشته و به $q_۲$ اضافه کنیم، بدون تغییر فاصلهٔ بارها از یک‌دیگر، نیروی متقابل بین آن‌ها ۵۰ درصد افزایش می‌یابد. مقدار اولیهٔ $q_۲$ چند میکروکولن است؟** (ریاضی داخل ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ با بررسی تغییرات بار (اضافه کردن ۲۵ درصد یا $\frac{۱}{۴}$ بار $q_۱$ به $q_۲$) در دو حالت داریم:

حالت اولیه : $q_۱=۸\mu C$ ---(r)--- $q_۲$

حالت ثانویه: $q'_۱ = q_۱ - \frac{۱}{۴}q_۱$ ---(r)--- $q'_۲ = q_۲ + \frac{۱}{۴}q_۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} q'_۱ = q_۱ - \frac{۲۵}{۱۰۰}q_۱ = q_۱ - \frac{۱}{۴}q_۱ = \frac{۳}{۴}q_۱ = \frac{۳}{۴} \times ۸ = ۶\mu C \\ q'_۲ = q_۲ + \left(\frac{۱}{۴} \times ۸\right) = q_۲ + ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (۱): F = \frac{k\,q_۱ q_۲}{r^۲} = \frac{k\,(۸q_۲)}{r^۲} \\ (۲): F' = \frac{k\,q'_۱ q'_۲}{r'^۲} = \frac{k \times ۶ \times (q_۲ + ۲)}{r^۲} = \frac{k(۶q_۲ + ۱۲)}{r^۲} \end{cases}$$

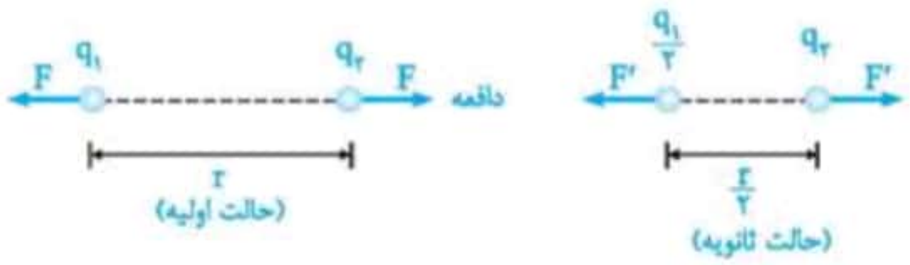
$$F' = F + \frac{۵۰}{۱۰۰}F = \frac{۱۵۰}{۱۰۰}F = \frac{۳}{۲}F \Rightarrow \frac{k(۶q_۲ + ۱۲)}{r^۲} = \frac{۳}{۲}\frac{k(۸q_۲)}{r^۲} \Rightarrow ۶q_۲ + ۱۲ = \frac{۳}{۲} \times ۸q_۲ = ۱۲q_۲ \Rightarrow ۶q_۲ = ۱۲ \Rightarrow q_۲ = ۲\mu C$$ (گزینهٔ ۲)

با توجه به قانون کولن می‌توان گفت:

$$F = \frac{k q_۱ q_۲}{r^۲} \rightarrow \begin{cases} F \propto q_۱ q_۲ \Rightarrow & \text{رابطهٔ مستقیم با حاصل‌ضرب اندازهٔ بارها} \\ F \propto \frac{۱}{r^۲} \Rightarrow & \text{رابطهٔ معکوس با مجذور فاصلهٔ بین دو بار} \end{cases}$$

www.gajmarket.com

۲ ۱۱۴۲ با توجه به این‌که در این سؤال اندازهٔ یکی از بارها و هم‌چنین فاصلهٔ بین دو بار الکتریکی نصف شده است، در مقایسهٔ دو حالت داریم:



$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\xrightarrow{\text{مقایسهٔ دو حالت}}\frac{F'}{F}=\frac{q_1'q_2'}{q_1q_2}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{F'}{F}=\frac{\frac{q_1}{2}\times q_2}{q_1\times q_2}\times\left(\frac{r}{\frac{r}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times(2)^2=2$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

با نصف شدن صورت کسر، کل کسر نصف می‌شود و با $\frac{1}{4}$ برابر شدن مخرج کسر $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$، کل کسر ۴ برابر می‌شود و در مجموع کسر دو برابر می‌شود $\left(\frac{1}{2}\times 4\right)$.

$$2\uparrow F=\frac{k\,(q_1)\,q_2}{(r^2)}$$

(q_1: برابر $\frac{1}{2}\downarrow$، r^2: $\downarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2$)

۱ ۱۱۴۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، با توجه به رابطهٔ قانون کولن می‌توان نوشت:

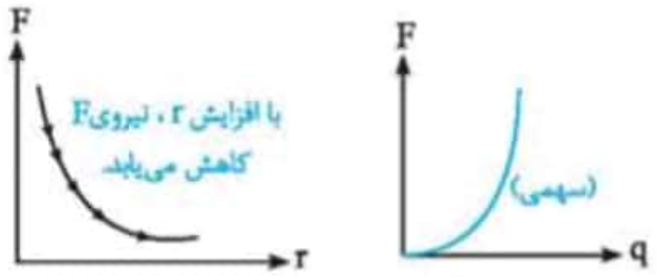
$$F=k\frac{q_1q_2}{r^2}\Rightarrow k=\frac{Fr^2}{q_1q_2}\Rightarrow k\text{ واحد}\equiv\frac{\text{نیوتون}\times(\text{متر})^2}{\text{کولن}\times\text{کولن}}\equiv\frac{N.m^2}{C^2}$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$، واحد ضریب گذردهی الکتریکی در خلأ (ε_0)، برعکس واحد ثابت کولن (k) است و داریم:

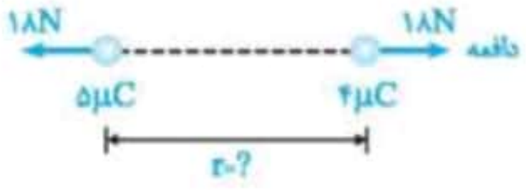
$$k\text{ واحد}\equiv\frac{N.m^2}{C^2}\Rightarrow\varepsilon_0\text{ واحد}\equiv\frac{C^2}{N.m^2}$$

۳ ۱۱۴۴ با توجه به رابطهٔ نیروی کولنی بین دو بار، رابطهٔ F با r و q به‌صورت زیر است:

$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\xrightarrow{q_1=q_2=q}F=\frac{kq^2}{r^2}\Rightarrow\begin{cases}F\propto q^2\\F\propto\frac{1}{r^2}\end{cases}\Rightarrow$$



۴ ۱۱۴۵ با جای‌گذاری مقادیر q_1، q_2 و F در رابطهٔ کولن داریم:



$$F=k\frac{q_1q_2}{r^2}\Rightarrow r^2=\frac{kq_1q_2}{F}=\frac{9\times10^9\times(5\times10^{-6})\times(4\times10^{-6})}{18}=0/01\Rightarrow r=0/1m=10cm$$

۴ ۱۱۴۶ اندازهٔ نیروی بین بارهای الکتریکی هم‌نام q_1 و $q_2=5q_1$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\ ,\ k=9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\ ,\ r=3m\ ,\ F=0/02N$$

$$0/02=\frac{9\times10^9\times5q_1^2}{3^2}\Rightarrow q_1^2=4\times10^{-12}\Rightarrow|q_1|=2\times10^{-6}C=2\mu C$$

$$q_1=ne\Rightarrow2\times10^{-6}=n\times(1/6\times10^{-19})\rightarrow n=\frac{2}{1/6}\times10^{13}=1/25\times10^{13}$$

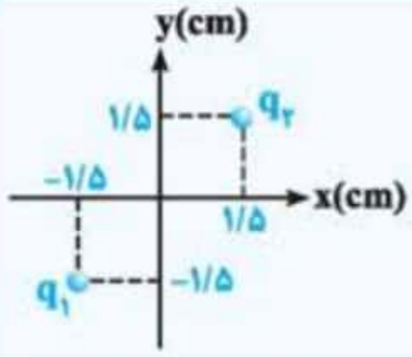
۳ ۱۱۴۷ با توجه به اطلاعات مسأله، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}F=k\frac{q_1q_2}{r^2}\Rightarrow5=9\times10^9\times\frac{q_1q_2}{(3\times10^{-1})^2}\Rightarrow q_1q_2=5\times10^{-11}C^2=50\mu C^2\\q_1+q_2=15\mu C\end{cases}$$

حاصل‌ضرب دو بار هم‌نام $50\mu C^2$ و حاصل‌جمع آن‌ها $15\mu C$ است، بنابراین اندازهٔ بار الکتریکی دو ذره برابر $5\mu C$ و $10\mu C$ است. البته اگر علاقه‌مند باشید می‌توانید با حل معادله‌ای درجه دوم نیز دو معادله دو مجهول اخیر را حل کنید، ولی این‌کار، زمان‌بر و طولانی است.

۲ ۱۱۴۸ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۲) صحیح است. برای تسلط بیشتر، تمرین زیر را نیز بررسی کنید.

تمرین در شکل مقابل، بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 در SI کدام است؟



$(q_۱ = q_۲ = ۲\mu C\ ,\ k = ۹\times۱۰^۹\ N.m^۲/C^۲)$

۱) $\vec{F} = ۱۰\vec{i} + ۱۰\vec{j}$

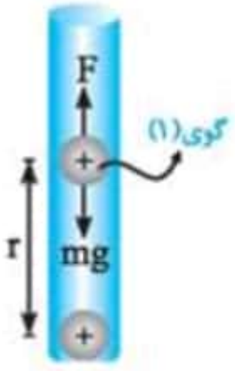
۲) $\vec{F} = -۱۰\sqrt{۲}\,\vec{i} - ۱۰\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۳) $\vec{F} = -۲۰\sqrt{۲}\,\vec{i} - ۲۰\sqrt{۲}\,\vec{j}$

۴) $\vec{F} = -۲۰\vec{i} + ۲۰\vec{j}$

پاسخ گزینهٔ (۲)

۲ ۱۱۴۹ برای معلق ماندن گوی بالایی، نیروی دافعهٔ الکتریکی بین دو گوی باید وزن گوی (۱) را خنثی کند و برای رسیدن به این هدف داریم:



شرط معلق ماندن: $F = mg \Rightarrow \frac{kq\times q}{r^۲} = mg$

$$\Rightarrow \frac{۹\times۱۰^۹\times q^۲}{(۱\times۱۰^{-۲})^۲} = (۰/۹\times۱۰^{-۳})\times۱۰ \Rightarrow q^۲ = ۱۰^{-۱۶}C^۲ \Rightarrow q = ۱۰^{-۸}C$$

و برای پیدا کردن تعداد الکترون‌های کنده شده از هر گوی می‌توان نوشت:

$$q = ne \Rightarrow ۱۰^{-۸} = n\times(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) \Rightarrow n = \frac{۱}{۱/۶}\times۱۰^{۱۱} = ۶/۲۵\times۱۰^{۱۰}$$

۴ ۱۱۵۰ با توجه به شکل زیر، نیرویی که بار q بر بار ۲q وارد می‌کند، با نیرویی که بار ۲q بر بار q وارد می‌کند، مساوی و در خلاف جهت هم است. این موضوع بیانی از قانون سوم نیوتون است (هر عملی را عکس‌العملی است مساوی و در خلاف جهت آن) و در نهایت می‌توان نوشت:



دافعه

$$\begin{cases} \text{نیروی q بر ۲q} = \vec{F} = ۱۰\vec{i} \\ \text{نیروی ۲q بر q} = -\vec{F} = -۱۰\vec{i} \end{cases}$$

۳ ۱۱۵۱ از آن جایی‌که نیرویی که ذرهٔ A بر ذرهٔ B وارد می‌کند، با نیرویی که ذرهٔ B بر ذرهٔ A وارد می‌کند، با توجه به قانون سوم نیوتون برابر است، می‌توان نوشت:

$$F_A = F_B \xrightarrow{F=ma} m_A a_A = m_B a_B \Rightarrow m a_A = ۲m a_B \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{۲m}{m} = ۲$$

خلاقیت هندسی چون اندازهٔ نیروها با یکدیگر یکسان است، ذرهٔ A که جرم آن نصف جرم ذرهٔ B است، لزوماً شتابی ۲ برابر شتاب ذرهٔ B دارد.

۴ ۱۱۵۲ با توجه به جذب شدن بارهای $q_۱$ و $q_۲$ می‌فهمیم که این دو بار ناهم‌نام هستند، در نتیجه بارهای $-۶q_۱$ و $+۸q_۲$ لزوماً هم‌نام هستند و یکدیگر را دفع می‌کنند (چرا؟). از طرفی با توجه به رابطهٔ زیر داریم:

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'_۲ q'_۱}{q_۲ q_۱}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{۸q_۲\times(۶q_۱)}{q_۲ q_۱}\times\left(\frac{۱۰}{۲۰}\right)^۲ = ۱۲ \Rightarrow F' = ۱۲F$$

۴ ۱۱۵۳ می‌دانیم نیروی کولنی با مجذور فاصلهٔ بین دو بار رابطهٔ عکس دارد، با جایگذاری در رابطهٔ کولن با توجه به دو برابر شدن نیروی کولنی می‌توان نوشت:

$$F = k\frac{q_۱ q_۲}{r^۲} \xrightarrow{F\propto\frac{۱}{r^۲}} \frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^۲ \xrightarrow{F'=۲F} \frac{۲F}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{r}{r'} = \sqrt{۲} \Rightarrow r' = \frac{۱}{\sqrt{۲}}r \Rightarrow r' = \frac{\sqrt{۲}}{۲}r$$

۱ ۱۱۵۴ **روش اول:** با توجه به ثابت ماندن نیرو در دو حالت می‌توان نوشت:

$$F = F' \Rightarrow \frac{k q_۱ q_۲}{r^۲} = \frac{k(۲q_۱)\times q_۲}{(r')^۲} \Rightarrow r' = \sqrt{۲}\,r$$

روش دوم: با دو برابر شدن اندازهٔ یکی از بارها، نیروی بین دو بار الکتریکی هم ۲ برابر می‌شود و برای ثابت ماندن نیرو، باید r را طوری انتخاب کنیم که کسر را نصف کند و این موضوع یعنی r باید $\sqrt{۲}$ برابر شود:

$$\text{ثابت } F = \frac{k\,q_۱\,q_۲}{r^۲}$$

($q_۱$: ۲ برابر ↑، $r^۲$: $(\sqrt{۲})^۲$ برابر ↓)

۳ ۱۱۵۵ برای پاسخ دادن به این سؤال، نیروی الکتریکی که از طرف هسته بر الکترون در هر یک از اتم‌های هیدروژن و یون $Li^{۲+}$ وارد می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{در اتم هیدروژن}: F_H = \dfrac{k\,q_{\text{هستهٔ H}}\,q_{\text{الکترون}}}{r_H^۲} \\ \text{در یون } Li^{۲+}: F_{Li} = \dfrac{k\,q_{\text{هستهٔ Li}}\,q_{\text{الکترون}}}{r_{Li}^۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_H}{F_{Li}} = \frac{q_{\text{هستهٔ H}}}{q_{\text{هستهٔ Li}}}\times\left(\frac{r_{Li}}{r_H}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۲۷}$$

دقت شود چون عدد اتمی لیتیم برابر ۳ و عدد اتمی هیدروژن برابر ۱ است، بنابراین بار هستهٔ لیتیم، ۳ برابر بار هستهٔ هیدروژن است.

www.gajmarket.com

۲ ۱۱۵۶ با بررسی دو حالت داریم:

حالت اولیه: $F \leftarrow q_1 \quad r \quad q_2 \rightarrow F \quad F = ۰/۰۲N$

حالت ثانویه: $F' \leftarrow q'_1 = q_1 \quad r \quad q'_2 = q_2 + ۲\mu C \rightarrow F' \quad F' = ۰/۰۳N$

$$\begin{cases} (۱)\ F = \dfrac{k q_1 q_2}{r^2} \xrightarrow{\text{بارها مشابه‌اند}} ۰/۰۲ = \dfrac{k q^2}{r^2} \\ (۲)\ F' = \dfrac{k q'_1 q'_2}{r'^2} \Rightarrow ۰/۰۳ = \dfrac{k q(q+۲)}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{۰/۰۲}{۰/۰۳} = \frac{k\frac{q^2}{r^2}}{k\frac{q(q+۲)}{r^2}} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{q}{q+۲} \Rightarrow ۲q+۴ = ۳q \Rightarrow q = ۴\mu C$$

۳ ۱۱۵۷

تذکر

در تست‌های (۱۱۵۷) تا (۱۱۶۴)، با گروه ساده و نسبتاً مهمی از تست‌های کنکور برخورد می‌کنیم که در آن قسمتی از بار q_1 را برداشته و به q_2 اضافه می‌کنیم. در این گونه از سؤالات، کافی است دو بار قانون کولن را بنویسیم و یا از تناسب کمک بگیریم. با مطالعهٔ پاسخ تشریحی این تست‌ها، این موضوع را به‌خوبی یاد می‌گیرید.

اگر ۲۵ درصد $\left(\frac{۱}{۴}\right)$ یکی از بارها را برداشته و به دیگری اضافه کنیم، در مقایسهٔ دو حالت داریم:

حالت اولیه: $F \leftarrow q \quad r \quad q \rightarrow F$

حالت ثانویه: $F' \leftarrow q - \frac{۱}{۴}q \quad r \quad q + \frac{۱}{۴}q \rightarrow F'$

$$\begin{cases} (۱): F = \dfrac{k q_1 q_2}{r^2} \xrightarrow{\text{بارها مشابه‌اند}} F = \dfrac{k q^2}{r^2} \\ (۲): F' = \dfrac{k q'_1 q'_2}{r^2} = \dfrac{k(\frac{۳}{۴}q)(\frac{۵}{۴}q)}{r^2} = \dfrac{k\frac{۱۵}{۱۶}q^2}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{۱۵}{۱۶} \Rightarrow F' = \frac{۱۵}{۱۶}F$$

۴ ۱۱۵۸ درصد باری که از یکی از بارها برداشته و به دیگری اضافه شده است را x درنظر می‌گیریم. حال با بررسی دو حالت، مقدار مجهول را به‌دست می‌آوریم:

حالت اولیه: $F \leftarrow +Q \quad r \quad +Q \rightarrow F$

حالت ثانویه: $F' \leftarrow Q - xQ \quad r \quad Q + xQ \rightarrow F'$

$$\begin{cases} (۱): F = \dfrac{k q_1 q_2}{r^2} \xrightarrow{\text{بارها مشابه‌اند}} F = \dfrac{k Q^2}{r^2} \\ (۲): F' = \dfrac{k q'_1 q'_2}{r'^2} = k\dfrac{\overbrace{(Q-xQ)}^{Q(۱-x)}\overbrace{(Q+xQ)}^{Q(۱+x)}}{r^2} = \dfrac{kQ^2}{r^2}(۱-x^2) \end{cases}$$

$$F' = \frac{۱۵}{۱۶}F \Rightarrow (۱-x^2)\left(\frac{kQ^2}{r^2}\right) = \frac{۱۵}{۱۶}\left(\frac{kQ^2}{r^2}\right) \Rightarrow ۱-x^2 = \frac{۱۵}{۱۶} \Rightarrow x^2 = ۱ - \frac{۱۵}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow x = \frac{۱}{۴} \equiv ٪۲۵$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

به‌دلیل اهمیت این سؤال می‌خواهیم کمی بیشتر به بررسی آن بپردازیم. کافیست کمی ذهنی‌تر به این سؤال نگاه کنیم:

$F \leftarrow q \quad r \quad q \rightarrow F \Rightarrow F' \leftarrow q + xq = q(۱+x) \quad r \quad q - xq = q(۱-x) \rightarrow F'$

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'_1 q'_2}{q_1 q_2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = ۱ - x^2 = \frac{۱۵}{۱۶} \Rightarrow x^2 = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow x = \frac{۱}{۴} \equiv ۲۵٪$$

باز هم سریع‌تر: نیرو چه‌قدر کم شده است؟ $\frac{۱}{۱۶}F \Leftarrow$ جذر $\frac{۱}{۱۶}$ برابر x است. $\Leftarrow x = \frac{۱}{۴}$ یا ۲۵٪ است.

تمرین **اگر نیرو $\frac{۲۴}{۲۵}$ برابر شود، x چه‌قدر است؟**

پاسخ *نیرو چه‌قدر کم شده است؟ $\frac{۱}{۲۵}F \Leftarrow$ جذر $\frac{۱}{۲۵}$ برابر x است. $\Leftarrow x = \frac{۱}{۵}$ یا ۲۰٪ است.*

۱ ۱۱۵۹ ابتدا باید دقت شود که دو بار **ناهم‌نام** هستند و اگر ۵۰ درصد (به زبان ساده‌تر نصف) یکی از بارها را برداشته و به دیگری اضافه کنیم و هم‌زمان فاصلهٔ بارها را نیز نصف کنیم، داریم:

حالت اولیه : $F \leftarrow \overset{r}{\text{----------}} \rightarrow F$; $q_1=+۲\mu C$; $q_2=-۲\mu C$

حالت ثانویه : ۵۰ درصد q_1 را کاهش دادیم یعنی نصف کردیم. ۵۰ درصد (q_1) را به q_2 اضافه کردیم.

$F' \leftarrow \overset{\frac{r}{2}}{\text{----}} \rightarrow F'$; $q'_1=+۲\times\frac{1}{2}=+۱\mu C$; $q'_2=-۲۰\frac{1}{2}\times۲=-۱\mu C$

$$F=\frac{k q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F}=\frac{q'_1 q'_2}{q_1 q_2}\times\left(\frac{r}{r'}\right)^2=\frac{۱\times۱}{۲\times۲}\times\left(\frac{r}{\frac{r}{2}}\right)^2=۱$$

۲ ۱۱۶۰ این سؤال، مکمل خوبی برای تست قبل محسوب می‌شود. در این سؤال ۲۰ درصد $\left(\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵}\right)$ یکی از بارها را کم کرده و به دیگری اضافه کرده‌ایم. برای این‌که نیروی کولنی بین دو بار تغییر نکند، باید فاصلهٔ دو بار را تغییر دهیم. بنابراین می‌توان نوشت:

حالت اولیه : $q \leftarrow \overset{r}{\text{----------}} \rightarrow -q$; F ; F

حالت ثانویه : $F' \leftarrow \overset{r'}{\text{----------}} \rightarrow F'$

$q'_1=q-\frac{1}{5}q=\frac{4}{5}q$ $\quad q'_2=-q+\frac{1}{5}q=-\frac{4}{5}q$

$$F=k\frac{q_1 q_2}{r^2} \xrightarrow{F'=F} k\frac{q\times q}{r^2}=k\frac{\frac{4}{5}q\times\frac{4}{5}q}{(r')^2} \Rightarrow \left(\frac{r'}{r}\right)^2=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \frac{r'}{r}=\frac{4}{5}$$

۲ ۱۱۶۱ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴ ۱۱۶۲ این یک سؤال بسیار جالب و جدید است. با توجه به قانون کولن در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$F=k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} F_1=k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} \\ F_2=k\dfrac{(q_1-\frac{1}{2}q_1)(q_2+\frac{1}{2}q_1)}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1}=\frac{\frac{1}{2}q_1 q_2+\frac{1}{4}q_1^2}{q_1 q_2}=۰/۵+\frac{q_1}{4q_2}$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1}=۰/۵+\frac{q_1}{4q_2} \Rightarrow \text{اگر} \begin{cases} \frac{q_1}{4q_2}=۰/۵ \Rightarrow q_1=۲q_2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1}=۱ \Rightarrow F_2=F_1 \\ \frac{q_1}{4q_2}>۰/۵ \Rightarrow q_1>۲q_2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1}>۱ \Rightarrow F_2>F_1 \\ \frac{q_1}{4q_2}<۰/۵ \Rightarrow q_1<۲q_2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1}<۱ \Rightarrow F_2<F_1 \end{cases}$$

بنابراین بسته به شرایط بارهای q_1 و q_2، هر یک از گزینه‌ها می‌تواند صحیح باشد و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ ۱۱۶۳ با توجه به پاسخ سؤال قبل، اگر $|q_2|>۲|q_1|$ باشد، نیروی بین دو بار پس از اعمال تغییرات، افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲ ۱۱۶۴ فرض کنید که x درصد از بار q_2 را به q_1 منتقل کرده‌ایم:

$$F=\frac{kq'_1 q'_2}{r^2}=\frac{k(q_1+x\times q_2)(q_2-x\times q_2)}{r^2} \xrightarrow{q_2=۲q_1} F=\frac{k(q_1+x\times ۲q_1)(۲q_1-x\times ۲q_1)}{r^2}$$

$$\Rightarrow F=\frac{kq_1\times ۲q_1(۱+۲x)(۱-x)}{r^2}=\frac{۲kq_1^2}{r^2}(۱+x-۲x^2)$$

حال باید مقدار بیشینهٔ تابع به دست آمده را محاسبه کنیم. همان‌طور که می‌دانیم، در توابع درجهٔ (۲) به فرم $y=ax^2+bx+c$، برای به دست آوردن مرکز سهمی، می‌توانیم از رابطهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$ استفاده کنیم. بنابراین در این سؤال می‌توان نوشت:

رأس سهمی : $x=-\frac{۱}{۲\times(-۲)}=\frac{۱}{4}\equiv ٪۲۵$

نکته

اگر دو بار الکتریکی هم‌نام باشند، با ثابت بودن مجموع بار الکتریکی آن‌ها، در صورتی نیروی الکتریکی بین آن‌ها در یک فاصلهٔ معین بیشینه است که اندازهٔ دو بار الکتریکی با هم برابر باشد $\left(q'_1=q'_2=\frac{\text{مجموع بار آن‌ها}}{۲}\right)$. بنابراین در این سؤال نیز زمانی نیروی بین دو بار بیشینه است که داشته باشیم:

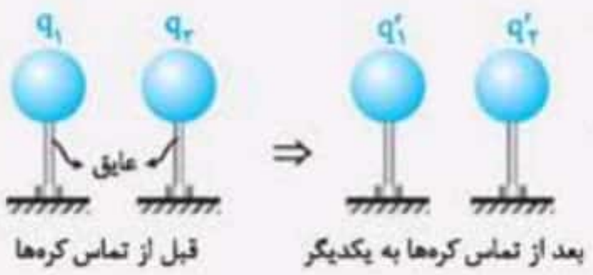
$$q'_1=q'_2=\frac{q_1+q_2}{۲}=\frac{q_1+۲q_1}{۲}=\frac{۳}{۲}q_1 \Rightarrow q_2 \text{ تغییرات بار} : \frac{۳}{۲}q_1-۲q_1=-\frac{1}{2}q_1 \Rightarrow q_2 \text{ درصد تغییرات بار}=\frac{-\frac{1}{2}q_1}{۲q_1}=-\frac{1}{4}=-۲۵٪$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۱۶۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ **تماس دادن چند کرهٔ رسانای مشابه باردار به یک‌دیگر** (تست‌های ۱۱۶۵ تا ۱۱۷۲)

برای شروع بحث، دو کرهٔ رسانای کوچک و مشابه با قطر یکسان که دارای بارهای q_1 و q_2 می‌باشد را در نظر بگیرید. اگر این دو کره را به یک‌دیگر متصل کرده و سپس از هم جدا کنیم، پس از جدا کردن، بار هر دو کره با یک‌دیگر یکسان و برابر $\frac{q_1+q_2}{2}$ می‌شود (البته با این فرض که تبادل بار الکتریکی فقط بین دو کره انجام می‌شود).



$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1+q_2}{2}$$

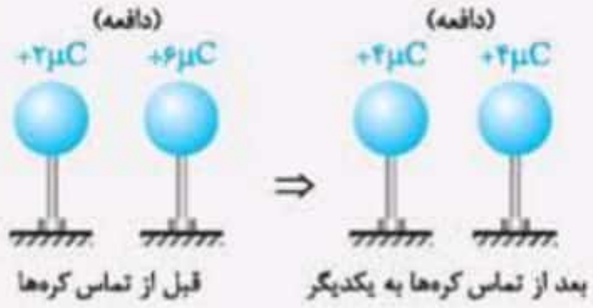
تذکر به عنوان یک موضوع جالب توجه کنید که اگر بار کره‌ها قبل از تماس به یک‌دیگر q و $-q$ باشد، بعد از تماس آن‌ها به هم، بار هر یک برابر صفر خواهد شد.

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1+q_2}{2} = \frac{q+(-q)}{2} = 0$$

بررسی نوع نیروی جاذبه یا دافعهٔ بین دو کره قبل و بعد از تماس به یک‌دیگر

در ادامهٔ بحث فرض کنید که دو کرهٔ کوچک مشابه با بارهای q_1 و q_2 را که در فاصلهٔ r از یک‌دیگر قرار دارند را به یک‌دیگر متصل کرده و پس از تبادل بار الکتریکی، مجدداً در همان فاصلهٔ r قرار داده‌ایم. حال می‌خواهیم به بررسی نیروی بین این دو کره پس از تماس بپردازیم که در مورد آن می‌توان به حالت‌های زیر اشاره کرد:

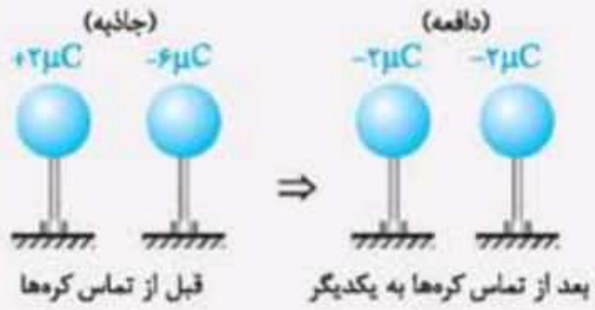
حالت اول: اگر بار دو کره هم‌نام باشد، نیروی بین کره‌ها قبل و بعد از تماس دافعه بوده و اندازهٔ نیروی بین دو کره بعد از تماس به یک‌دیگر بیشتر می‌شود. این موضوع را با یک مثال عددی ساده نشان داده‌ایم:



$$q'_1 = q'_2 = \frac{2+6}{2} = 4\mu C$$

$$F \propto q_1 q_2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{4\times 4}{2\times 6} = \frac{16}{12} > 1 \Rightarrow F_2 > F_1$$

حالت دوم: اگر بار دو کره ناهم‌نام و غیر هم‌اندازه باشد، نیروی بین دو کره قبل از تماس جاذبه و بعد از تماس دافعه است. همچنین اندازهٔ نیروی بین دو کره بعد از تماس دادن آن‌ها به یک‌دیگر کم‌تر می‌شود.



$$q'_1 = q'_2 = \frac{2+(-6)}{2} = -2\mu C$$

$$F \propto q_1 q_2 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{2\times 2}{2\times 6} = \frac{4}{12} < 1 \Rightarrow F_2 < F_1$$

حالت سوم: اگر بار دو کره ناهم‌نام و هم‌اندازه باشد، بار هر یک از کره‌ها و نیروی بین دو کره بعد از تماس دادن آن‌ها به یک‌دیگر صفر می‌شود، بنابراین اندازهٔ نیروی بین دو کره کاهش می‌یابد.

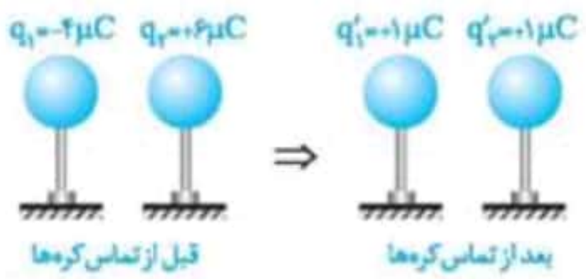
حالت چهارم: اگر بار دو کرهٔ مشابه، کاملاً یکسان باشد (هم‌اندازه و هم علامت)، بار دو کره، قبل و بعد از تماس به یک‌دیگر یکسان بوده و در نتیجه نیروی بین دو کره تغییر نمی‌کند (خودتان این موضوع را بررسی کنید).

نکته اگر به جای دو کرهٔ مشابه، چند کرهٔ رسانای کاملاً مشابه را به یک‌دیگر متصل کنیم، بار تمامی آن‌ها بعد از تماس به یک‌دیگر با هم یکسان شده و برابر می‌شود با:

به‌طور مثال برای سه کره : $q'_1 = q'_2 = q'_3 = \frac{q_1+q_2+q_3}{3}$

برای حل این سؤال، به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با توجه به مشابه بودن کره‌ها، پس از تماس آن‌ها با یک‌دیگر، بار الکتریکی کره‌ها با یک‌دیگر برابر شده و مقدار آن برابر است با:



$$\begin{cases} q_1 = -4\mu C \\ q_2 = +6\mu C \end{cases} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_1+q_2}{2} = \frac{(-4)+6}{2} = 1\mu C$$

۲) بار کره‌ها قبل از تماس ناهم‌نام و بعد از تماس هم‌نام است. بنابراین نیروی کولنی بین بارها قبل از تماس جاذبه و بعد از تماس دافعه می‌شود.

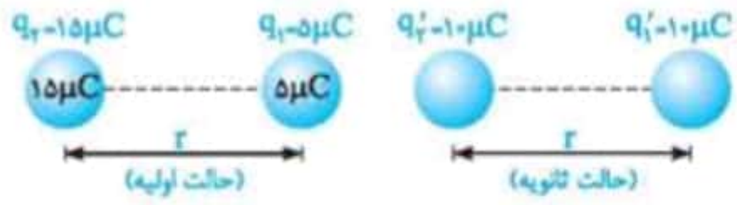
۳) بار کره‌ها بعد از تماس $+۱\mu C$ می‌شود. به‌عبارت دیگر با تماس دادن دو کره با یک‌دیگر باید به میزان $-۵\mu C$ بار از کرهٔ A به کرهٔ B منتقل شود (نه از کرهٔ B به A). در ادامه با توجه به رابطهٔ $q = ne$، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$q = ne \Rightarrow -۵\times۱۰^{-۶} = n\times(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) \Rightarrow n = ۳/۱۲۵\times۱۰^{۱۳}$$

۴) با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F = k\frac{q_۱q_۲}{r^۲} = ۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۱۰^{-۶}\times۱۰^{-۶}}{(\frac{۱}{۲})^۲} = ۳۶\times۱۰^{-۳}N = ۳۶mN$$

۴ ۱۱۶۶ با توجه به مشابه بودن دو کره، پس از تماس آن‌ها به یک‌دیگر بار الکتریکی هر یک از آن‌ها برابر $\frac{q_۱+q_۲}{۲}$ است و برای مقایسهٔ دو حالت داریم:



$$q'_۱ = q'_۲ = \frac{q_۱+q_۲}{۲} = ۱۰\mu C$$

$$F = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{q'_۱q'_۲}{q_۱q_۲} = \frac{۱۰\times۱۰}{۱۵\times۵} = \frac{۱۰۰}{۷۵} = \frac{۴}{۳} \simeq ۱/۳۳ = \frac{۱۳۳}{۱۰۰} \Rightarrow$$ نیروی کولنی تقریباً ۳۳ درصد افزایش می‌یابد.

سؤال **اگر دو کره ناهم‌نام بودند، آن‌گاه نیروی بین آن‌ها چند برابر می‌شد؟**

۳ ۱۱۶۷ چون کره‌ها مشابه هستند، مجموع بار آن‌ها به‌صورت یکسان بین کره‌ها تقسیم می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$q'_۱ = q'_۲ = q'_۳ = \frac{q_۱+q_۲+q_۳}{۳} = \frac{۴+(-۱۲)+(-۱۰)}{۳} = -\frac{۱۸}{۳} = -۶\mu C$$

۱ ۱۱۶۸ طبق صورت سؤال، بار اولیهٔ کره‌ها به صورت مقابل است: $q_۱ = ۴\mu C\ ,\ q_۲ = -۱۲\mu C\ ,\ q_۳ = -۱۰\mu C$

وقتی دو کرهٔ مشابه (۱) و (۲) را به هم تماس دهیم، مجموع بار الکتریکی این دو کره، به طور یکسان بین آن‌ها تقسیم می‌شود.

$$q'_۱ = q'_۲ = \frac{q_۱+q_۲}{۲} = \frac{۴+(-۱۲)}{۲} = -۴\mu C$$

حال بار الکتریکی کرهٔ (۲) برابر $-۴\mu C$ و بار الکتریکی کرهٔ (۳) برابر $-۱۰\mu C$ است. اگر این دو کرهٔ مشابه را با هم تماس دهیم، بار الکتریکی آن‌ها برابر است با:

$$q''_۳ = q''_۲ = \frac{q_۳+q'_۲}{۲} = \frac{(-۱۰)+(-۴)}{۲} = -۷\mu C$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲ ۱۱۶۹ می‌دانیم که دو کره قبل از تماس یک‌دیگر را جذب می‌کنند، بنابراین بار دو کره ناهم‌نام است. اکنون دو حالت را فرض می‌کنیم:

الف) اندازهٔ بار دو کره برابر است ($|q_۱| = |q_۲|$): در این حالت با تماس دو کره، بارها یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و دیگر باری برای کره‌ها باقی نمی‌ماند، بنابراین در این حالت کره‌ها نمی‌توانند پس از اتصال یک‌دیگر را دفع کنند.

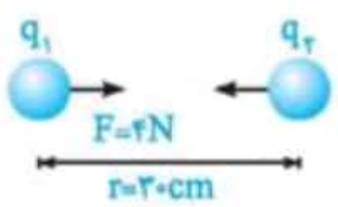
$$q'_۱ = q'_۲ = \frac{q_۱+q_۲}{۲} = ۰$$

ب) اندازهٔ بار دو کره برابر نباشد: در این حالت با تماس دو کره، مقداری از بار بزرگ‌تر توسط بار کوچک‌تر خنثی شده و مابقی آن بین دو کره به‌طور یکسان پخش می‌شود، بنابراین در این حالت کره‌ها پس از اتصال یک‌دیگر را دفع می‌کنند.

تذکر

دقت کنیم در این سؤال مقدار نیروی بین دو کره در حالت قبل از تماس بیشتر از حالت بعد از تماس است (چرا؟).

۲ ۱۱۷۰ در شروع حل باید دقت شود که دو کره در ابتدا یک‌دیگر را جذب می‌کنند و این یعنی بارهای آن‌ها ناهم‌نام بوده‌اند. در ادامه با توجه به اطلاعات سؤال، حاصل‌ضرب $|q_۱q_۲|$ برابر است با:



$$F = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۹\times۱۰^{۹}q_۱q_۲}{(۳۰\times۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow |q_۱q_۲| = ۴\times۱۰^{-۱۱}C^۲ = ۴۰(\mu C)^۲ \quad (۱)$$

(در $۱۰^{۱۲}$ ضرب کرده‌ایم)

از طرفی پس از تماس دو کره، به‌دلیل مشابه بودن کره‌ها، بار هریک از آن‌ها برابر $\frac{q_۱+q_۲}{۲}$ می‌شود که برابر $+۳\mu C$ است.

$$\text{بار هر کره پس از تماس} = \frac{q_۱+q_۲}{۲} = +۳\mu C \Rightarrow q_۱+q_۲ = +۶\mu C \quad (۲)$$

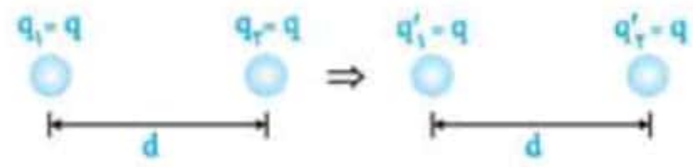
در بین گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۲) در هر دو معادلهٔ (۱) و (۲) صدق می‌کند.

دقت: نیازی نبود معادلهٔ (۲) را به‌دست آوریم، از روی معادلهٔ (۱) به تنهایی نیز می‌توان گزینهٔ صحیح را انتخاب کرد.

www.gajmarket.com

۴ ۱۱۷۱ در این سؤال با توجه به علامت بار دو کره، هر سه حالت می‌تواند رخ دهد. با سه مثال ساده این موضوع را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر دو کره بار هم‌علامت و مساوی داشته باشند، پس از اتصال نیروی بین دو کره تغییر نمی‌کند، زیرا حاصلضرب q_1q_2 تغییر نمی‌کند.



$$q'_1 = q'_2 = \frac{q+q}{2} = q$$

حالت دوم: اگر دو کره بار مساوی و مختلف‌العلامت داشته باشند، پس از اتصال نیروی بین دو کره صفر شده و به عبارتی کاهش می‌یابد.



$$q'_1 = q'_2 = \frac{q+(-q)}{2} = 0 \Rightarrow F' = 0 < F$$

حالت سوم: اگر دو کره بار نامساوی و هم‌علامت داشته باشند، پس از اتصال نیروی بین دو کره افزایش می‌یابد. برای درک بهتر این حالت به اعداد زیر توجه کنید:



$$q'_1 = q'_2 = \frac{q+2q}{2} = \frac{3}{2}q$$

$$\begin{cases} q'_1q'_2 = \frac{3}{2}q \times \frac{3}{2}q = \frac{9}{4}q^2 \\ q_1q_2 = q \times 2q = 2q^2 \end{cases} \xrightarrow{F \propto q_1q_2} F' > F$$

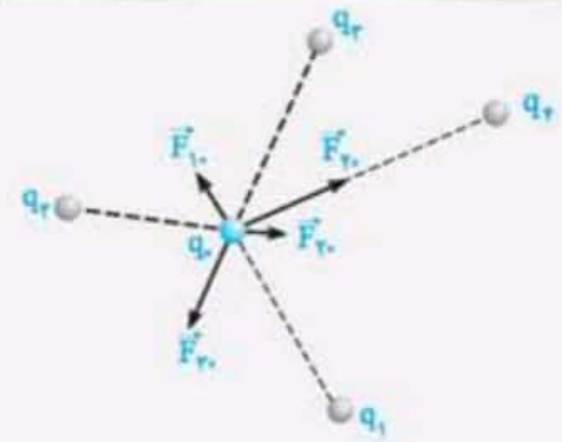
بنابراین هر سه حالت ممکن است رخ دهد.

۲ ۱۱۷۲ در پاسخ سؤال قبل، در حالت سوم به کمک یک مثال عددی دیدیم که اگر دو کره دارای بار الکتریکی هم‌نام و نامساوی باشند، اندازهٔ نیروی بین دو کره بعد از تماس دادن به یک‌دیگر بیشتر از حالت قبل از تماس است (این موضوع با کمک اصول ریاضی نیز به سادگی قابل اثبات است).

۱ ۱۱۷۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵

بررسی قانون کولن برای بیش از دو ذرهٔ باردار (تست‌های ۱۱۷۳ تا ۱۲۱۰)



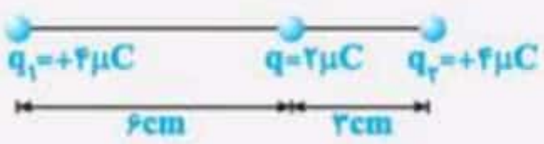
تا این‌جای کار قانون کولن را برای دو ذرهٔ باردار بررسی کرده‌ایم، حال سؤال آن است که اگر تعدادی ذرهٔ باردار در یک ناحیه از فضا قرار داشته باشند، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره چگونه به‌دست می‌آید؟ در جواب باید گفت دراین حالت، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره برایند نیروهایی است که هریک از ذره‌های دیگر در غیاب سایر ذره‌ها، بر آن ذره وارد می‌کند.

به عبارت دیگر، وقتی چند ذرهٔ باردار را در یک راستا و یا در یک صفحه قرار داده و از ما می‌خواهند برایند نیروهای وارد بر یکی از ذرات را محاسبه کنیم، برای رسیدن به این منظور، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: نیروهای وارد بر آن ذره از طرف ذره‌های باردار دیگر را رسم کرده و اندازهٔ هر یک از این نیروها را با کمک رابطهٔ $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$ محاسبه می‌کنیم. یادآوری می‌شود که بارهای هم‌نام، یک‌دیگر را دفع کرده و بارهای ناهم‌نام، یک‌دیگر را جذب می‌کنند.

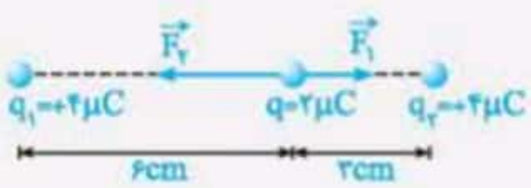
گام دوم: برایند بردارهای رسم شده را با کمک خواص بردارها محاسبه می‌کنیم (دقت شود طبق تأکید کتاب درسی فیزیک پایهٔ یازدهم، در این کتاب برایند نیروهایی را بررسی می‌کنیم که آن‌ها در یک راستا بوده و یا بر هم عمود هستند).

تمرین۱ **در شکل زیر، برایند نیروهای وارد بر بار الکتریکی نقطه‌ای $q = 2\mu C$ برابر ..... نیوتون و به سمت ..... است.** $(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 SI)$



۱) ۱۰۰، چپ
۲) ۱۰۰، راست
۳) ۶۰، چپ
۴) ۶۰، راست

پاسخ ابتدا نیروهایی را که هر یک از دو ذرهٔ باردار q_1 و q_2 بر بار q وارد می‌کنند به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} (\vec{F}_1)\ q_1 \text{ بار } q \text{ را دفع می‌کند} \Rightarrow (\text{دافعه}): F_1 = \frac{kqq_1}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-6} \times 4\times10^{-6}}{(6\times10^{-2})^2} = 20N \\ (\vec{F}_2)\ q_2 \text{ بار } q \text{ را دفع می‌کند} \Rightarrow (\text{دافعه}): F_2 = \frac{kqq_2}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-6} \times 4\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2} = 80N \end{cases}$$

با برایندگیری از نیروهای در خلاف جهت F_1 و F_2، به سادگی نیروی برایند به‌دست می‌آید:



$$F = F_2 - F_1 = 80 - 20 = 60N$$

با توجه به بزرگ‌تر بودن نیروی F_2، جهت نیروی برایند نیز به سمت چپ می‌باشد و گزینهٔ (۳) صحیح است. دقت شود این موضوع یعنی نیروی وارد بر این ذره برابر $-60\vec{i}$ است.

تمرین۲ در سؤال قبل، اگر بار الکتریکی q_2 حذف شود، برایند نیروهای وارد بر بار الکتریکی نقطه‌ای q برابر ..... نیوتون شده و تغییر جهت ..... (تألیفی)

۱) ۸۰، نمی‌دهد. ۲) ۲۰، می‌دهد. ۳) ۱۰۰، می‌دهد. ۴) ۲۰، نمی‌دهد.

پاسخ در سؤال قبل، با حذف بار الکتریکی q_2، تنها نیرویی که بر بار q وارد می‌شود، ناشی از نیروی دافعهٔ بار q_1 بر آن می‌باشد. با توجه به پاسخ سؤال قبل، این نیرو برابر $F_1 = 20N$ و به سمت راست می‌باشد.



بنابراین برایند نیروهای وارد بر بار q برابر $20N$ شده و نسبت به حالت قبل تغییر جهت می‌دهد (به سمت راست می‌شود)، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

بررسی یک موضوع کاربردی

نکات ساده‌ای که باعث افزایش سرعت دانش‌آموزان در محاسبات می‌شود:

۱) در محاسبات رابطهٔ $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$، ترجیحاً اعداد به‌صورت ممیزدار نوشته نشود، زیرا این موضوع کمی ساده کردن اعداد را سخت می‌کند.



$$F = 9\times10^9 \times \frac{(2\times10^{-7})(4\times10^{-6})}{(2\times10^{-1})^2}$$

شکل مناسب

$$F = 9\times10^9 \times \frac{(0/2\times10^{-6})(4\times10^{-6})}{(0/2)^2}$$

شکل نامناسب

۲) در محاسبات کمی باهوش عمل کنیم. به‌طور مثال اگر در دو حالت زیر، نیرو در حالت (۱) را برابر ۰/۹ نیوتون به‌دست می‌آوریم، در حالت دوم تنها یکی از بارها دو برابر شده است و نیرو دو برابر حالت اول است، یعنی ۱/۸ نیوتون و نیازی به انجام محاسبات جدید نیست.

حالت اول :



$$F = 9\times10^9 \frac{(1\times10^{-6})(1\times10^{-6})}{(1\times10^{-1})^2} = 0/9N$$

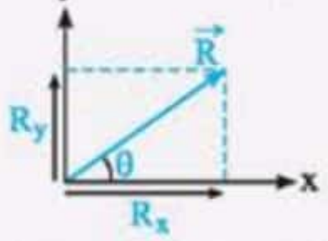
حالت دوم :



$$F' = 2F = 1/8N$$

یادآوری از بردارها

۱) همان‌طور که می‌دانید، هر بردار دارای دو مؤلفهٔ افقی و قائم می‌باشد و می‌توان آن را به‌صورت بردارهای یکه به‌صورت زیر نشان داد:



$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

$$\begin{cases} \text{مؤلفهٔ افقی} : R_x = R\cos\theta \\ \text{مؤلفهٔ عمودی} : R_y = R\sin\theta \end{cases}$$

تذکر برعکس روند طی‌شده، با داشتن مؤلفه‌های افقی و عمودی یک بردار نیز به‌سادگی می‌توان اندازهٔ آن بردار و زاویهٔ آن را با افق یافت. به‌طور مثال در شکل فوق داریم:

$$\begin{cases} \vec{R} \text{ اندازهٔ بردار} : R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ \theta \text{ محاسبهٔ زاویهٔ} : \tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{R_y}{R_x} \end{cases}$$

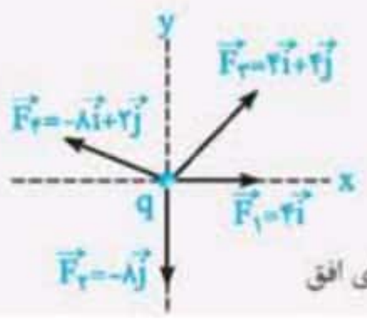
۲) **جمع بردارها با کمک بردارهای یکه:** جمع دو بردار $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ و $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ به‌صورت زیر است:

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$$

در این حالت، پس از رسم بردار $\vec{A} + \vec{B}$، به سادگی می‌توان زاویهٔ آن با افق را نیز پیدا کرد:

$$\tan\theta = \frac{\text{ضریب } \vec{j}}{\text{ضریب } \vec{i}}$$

برای درک بهتر، فرض کنید بر ذرهٔ الکتریکی مقابل نیروهای نشان داده شده وارد شده است. برایند نیروهای وارد بر این ذرهٔ باردار برابر است با:

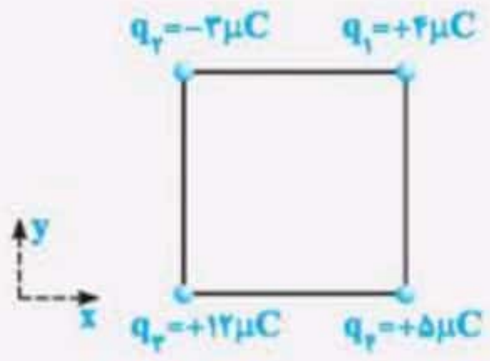


$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = (4\vec{i} + 0\vec{j}) + (0\vec{i} - 8\vec{j}) + (4\vec{i} + 4\vec{j}) + (-8\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$F_T = \underbrace{(4 + 0 + 4 + (-8))}_{\text{مجموع ضرایب در راستای افق}}\vec{i} + \underbrace{(0 + (-8) + 4 + 2)}_{\text{مجموع ضرایب در راستای قائم}}\vec{j} = 0\vec{i} - 2\vec{j}$$

www.gajmarket.com

تمرین۳ مطابق شکل، چهار بار الکتریکی در رأس‌های مربعی به ضلع ۶ cm قرار دارند. بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار الکتریکی q_1 در SI کدام است؟ $(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}، \sqrt{2} \simeq 1/4)$



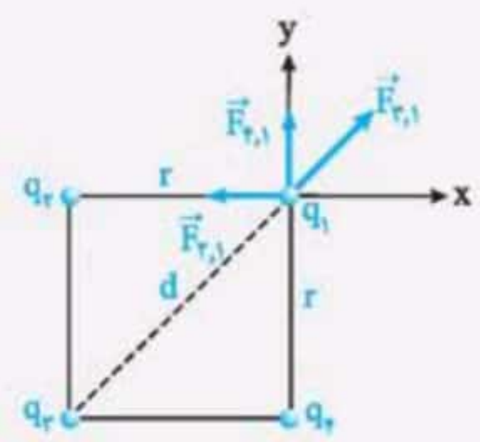
۱) $-12\vec{i} + 92\vec{j}$

۲) $12\vec{i} + 92\vec{j}$

۳) $-42\vec{i} + 60\vec{j}$

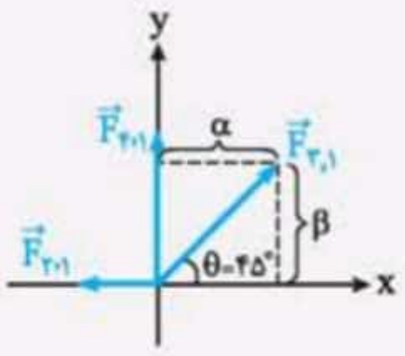
۴) $42\vec{i} + 60\vec{j}$

پاسخ برای شروع حل، مطابق شکل نیروهای وارد بر بار q_1 را رسم کرده و اندازهٔ هر یک را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} F_{2,1} = \frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{9\times10^9\times(4\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{(6\times10^{-2})^2} = 30\,N \\ F_{3,1} = \frac{kq_1q_3}{d^2} = \frac{9\times10^9\times(4\times10^{-6})\times(12\times10^{-6})}{(6\sqrt{2}\times10^{-2})^2} = 60\,N \\ F_{4,1} = \frac{kq_1q_4}{r^2} = \frac{9\times10^9\times(4\times10^{-6})\times(5\times10^{-6})}{(6\times10^{-2})^2} = 50\,N \end{cases}$$

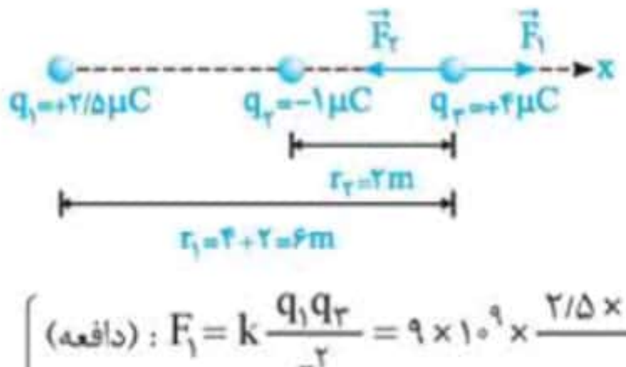
در ادامه با انتخاب محورهای مختصات داریم (توجه شود که $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0/7$ می‌باشد):



$$\begin{cases} \vec{F}_{2,1} = -30\vec{i} + 0\vec{j} \\ \vec{F}_{3,1} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \\ \vec{F}_{4,1} = 0\vec{i} + 50\vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = F_{3,1}\cos\theta = 60\cos45^\circ \simeq 42N \\ \beta = F_{3,1}\sin\theta = 60\sin45^\circ \simeq 42N \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{3,1} = 42\vec{i} + 42\vec{j}$$

(گزینهٔ ۲) نیروی برایند: $\vec{R} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{4,1} \Rightarrow \vec{R} = (-30+42+0)\vec{i} + (0+42+50)\vec{j} \Rightarrow \vec{R} = 12\vec{i} + 92\vec{j}$

بار الکتریکی q_1 بار q_3 را دفع می‌کند $(\vec{F}_1)$ و بار الکتریکی q_2 بار q_3 را جذب می‌کند $(\vec{F}_2)$.



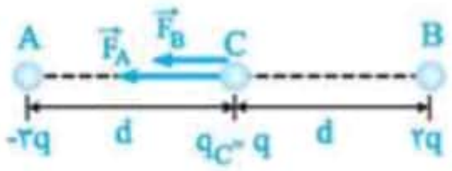
$$\begin{cases} (\text{دافعه}): F_1 = k\frac{q_1q_3}{r_1^2} = 9\times10^9\times\frac{2/5\times10^{-6}\times4\times10^{-6}}{(6)^2} = 2/5\times10^{-3}\,N \xrightarrow{x \text{ در جهت محور } \vec{F}_1} \vec{F}_1 = 2/5\times10^{-3}\vec{i} \\ (\text{جاذبه}): F_2 = k\frac{q_2q_3}{r_2^2} = 9\times10^9\times\frac{1\times10^{-6}\times4\times10^{-6}}{(2)^2} = 9\times10^{-3}\,N \xrightarrow{x \text{ در خلاف جهت محور } \vec{F}_2} \vec{F}_2 = -9\times10^{-3}\vec{i} \end{cases}$$

بنابراین برایند نیروهای وارد بر بار q_3 برابر است با:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2/5\times10^{-3}\vec{i} + (-9\times10^{-3}\vec{i}) = -6/5\times10^{-3}\vec{i}$$

به عبارت دیگر اندازهٔ برایند نیروهای وارد بر بار q_3 برابر $6/5\times10^{-3}$ نیوتون و در خلاف جهت محور x می‌باشد.

۲ ۱۱۷۴ فرض می‌کنیم اندازهٔ نیرویی که دو بار q در فاصلهٔ d بر یکدیگر وارد می‌کنند، برابر F باشد در این صورت اندازهٔ نیروهای F_A و F_B برابر است با:

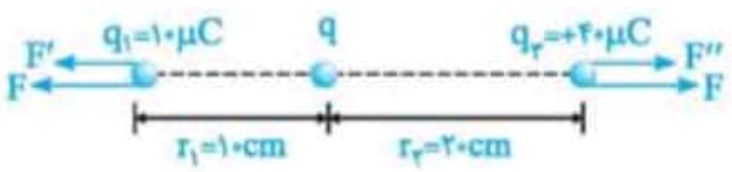


$$F = \frac{k\,q_B\,q}{d^2} \Rightarrow F_B = 2F \quad (\text{دافعه}) \text{ : نیروی بین B و C} \qquad F = \frac{k\,q_A\,q}{d^2} \Rightarrow F_A = 3F \quad (\text{جاذبه}) \text{ : نیروی بین A و C}$$

با برایندگیری از نیروهای هم‌جهت به‌دست آمده، داریم:

$$R = 3F + 2F = 5F \quad (\text{به سمت چپ})$$

۴ ۱۱۷۵ این سؤال، یک سؤال جالب و مفهومی است. دو بار q_1 و q_2 یک‌دیگر را با نیروی F دفع می‌کنند. حال اگر بار q را مثبت فرض کنیم، این بار q دو بار q_1 و q_2 را نیز دفع می‌کند. با توجه به نیروهای نشان داده شده بر روی شکل، برای برابر بودن اندازهٔ برایند نیروهای وارد بر دو بار q_1 و q_2 باید داشته باشیم:



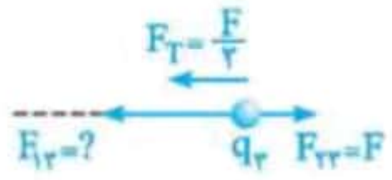
$$\begin{cases} F_{T_1} = F + F' = F + k\dfrac{q_1 q}{r_1^2} = F + k \times \dfrac{10 \times 10^{-6} q}{(10^{-1})^2} = F + 10^{-3}\,kq \\ F_{T_2} = F + F'' = F + k\dfrac{q_2 q}{r_2^2} = F + k \times \dfrac{40 \times 10^{-6} q}{(2 \times 10^{-1})^2} = F + 10^{-3}\,kq \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، بدون توجه به این‌که اندازهٔ بار الکتریکی q چه مقدار باشد همیشه دو نیروی F_{T_1} و F_{T_2} با هم برابر می‌باشند. بنابراین بار الکتریکی q هر مقدار دلخواهی را می‌تواند داشته باشد.

تذکر توصیه می‌شود که به عنوان تمرین نشان دهید که اگر بار q منفی باشد نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

۳ ۱۱۷۶ **گام اول:** چون بارهای q_2 و q_3 یک‌دیگر را دفع می‌کنند، بنابراین هم‌نام می‌باشند و از طرفی نیرویی که q_2 به q_3 وارد می‌کند نیز طبق قانون سوم نیوتون برابر F و باید به‌سمت راست باشد (حالت دافعه).

گام دوم: همان‌طور که در صورت سؤال مطرح شده است، بزرگی برایند نیروهای وارد بر بار q_3 برابر $\frac{F}{2}$ و به‌سمت چپ است، بنابراین مطابق شکل رسم شده، بار q_1، باید بار q_3 را با نیروی $F_{13} = \frac{3}{2}F$ به سمت خود، یعنی به سمت چپ، جذب کند:



$$F_T = F_{13} - F_{23} \Rightarrow \frac{F}{2} = F_{13} - F \Rightarrow F_{13} = \frac{3}{2}F$$

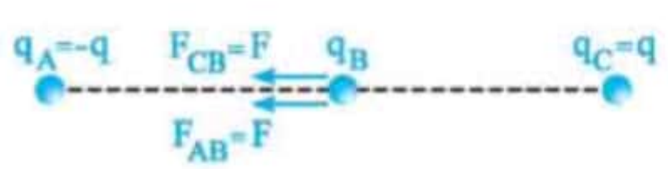
گام سوم: حال با توجه به این‌که $F_{13} = \frac{3}{2}F$ و $F_{23} = F$ می‌باشد، به سادگی می‌توان نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ را به‌دست آورد:

$$F_{13} = \frac{3}{2}F \Rightarrow F_{13} = \frac{3}{2}F_{23} \Rightarrow k\frac{q_1 q_3}{(2d)^2} = \frac{3}{2} \times k\frac{q_2 q_3}{d^2} \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = 6$$

بار q_1، بار q_3 را جذب و بار q_2، بار q_3 را دفع می‌کند، بنابراین بارهای q_1 و q_2 مختلف‌العلامت می‌باشد و $\frac{q_1}{q_2} = -6$ می‌باشد.

۳ ۱۱۷۷ این سؤال را در هر دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: نیرویی که بار $q_C = q$ بر بار q_B وارد می‌کند را برابر F در نظر می‌گیریم. با توجه به یکسان بودن اندازهٔ q_A و q_C و هم‌چنین برابر بودن فاصلهٔ آن‌ها تا بار q_B، اندازهٔ نیروی وارد شده از طرف بار $q_A = -q$ بر q_B نیز برابر F است.



$$F = \frac{kq\,q_B}{d^2} \xrightarrow[d_A = d_C = d]{|q_A| = q_C} F_{CB} = F_{AB} = F$$

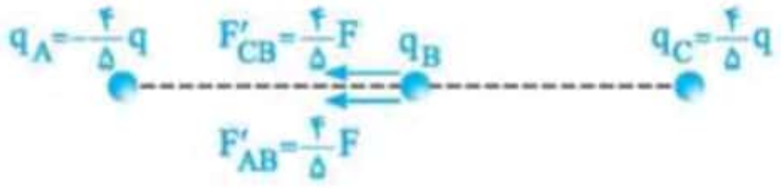
$$F_{\text{برایند}} = F + F = 2F$$

حالت دوم: اگر ۲۰ درصد از بار q_A را به q_C منتقل کنیم، می‌توان نوشت:

$$q'_A = q_A - \frac{20}{100}q_A = -q - \frac{20}{100}(-q) = -\frac{80}{100}q = -\frac{4}{5}q$$

$$q'_C = q_C + \frac{20}{100}q_A = q + \frac{20}{100}(-q) = \frac{80}{100}q = \frac{4}{5}q$$

بنابراین نیروی وارد شده از طرف هر یک از بارهای q'_C و q'_A بر q_B برابر $\frac{4}{5}F$ می‌شود.

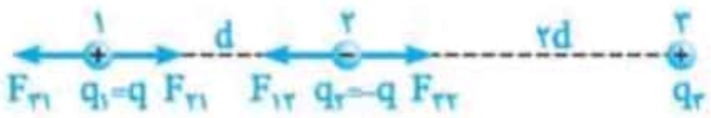


$$F' = \frac{k\,q'_A\,q_B}{d^2} \quad (F' \text{ برابر } \tfrac{4}{5} \text{ برابر } q'_A)$$

$$F'_{\text{برایند}} = \frac{4}{5}F + \frac{4}{5}F = \frac{8}{5}F \Rightarrow \frac{F'_{\text{برایند}}}{F_{\text{برایند}}} = \frac{\frac{8}{5}F}{2F} = \frac{4}{5}$$

www.gajmarket.com

۴ ۱۱۷۸ دو بار الکتریکی $q_1 = q$ و $q_2 = -q$ یکدیگر را با نیروی هم‌اندازه جذب می‌کنند. از طرفی اندازهٔ نیروی واردشده از طرف بار q_3 بر q_2 بزرگ‌تر از اندازهٔ نیروی واردشده از طرف بار q_3 بر q_1 است (زیرا فاصلهٔ بار q_3 از q_2 کم‌تر از فاصلهٔ بار q_3 از q_1 است). بنابراین می‌توان نوشت:



$$F_{21} = F_{12} = \frac{k|q|\times|q|}{d^2} \quad , \quad F_{31} = \frac{k|q_3||q|}{(3d)^2} \quad , \quad F_{32} = \frac{k|q_3||q|}{(2d)^2}$$

$$|\sum F_1| = |\sum F_2| \Rightarrow F_{21} - F_{31} = F_{32} - F_{12} \Rightarrow \frac{k|q^2|}{d^2} - \frac{k|q_3||q|}{9d^2} = \frac{k|q_3||q|}{4d^2} - \frac{k|q^2|}{d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2k|q^2|}{d^2} = \frac{13}{36}\frac{k|q_3||q|}{d^2} \Rightarrow \frac{|q_3|}{|q|} = \frac{72}{13} \Rightarrow \frac{q_3}{q_1} = \frac{72}{13}$$

۲ ۱۱۷۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ **صفرشدن نیروی الکتریکی وارد بر یکی از بارهای واقع در یک راستا** (تست‌های ۱۱۷۹ تا ۱۱۸۷)

دو ذرهٔ باردار q_1 و q_2 که در جای خود ثابت فرض شده‌اند را در نظر بگیرید:



سؤالی که در بسیاری از تست‌های کنکور مطرح می‌شود آن است که بار q_3 را در چه مکانی قرار دهیم تا نیروی الکتریکی برایند وارد بر آن، از طرف بارهای q_1 و q_2 صفر شود. اگر بار q_3 مثبت باشد، تحلیل این موضوع به‌صورت زیر انجام می‌شود:

حالت اول: بارهای q_1 و q_2 هم علامت باشند:

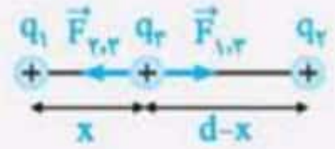
فرض کنید دو بار q_1 و q_2 مثبت باشند. در این صورت برای به‌دست آوردن نقطهٔ موردنظر برای صفر شدن نیروی وارد بر بار q_3، باید توجه داشت که در خارج از فاصلهٔ بین دو بار، نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار q_3 از طرف بارهای مثبت q_1 و q_2، هم‌جهت است و امکان ندارد برایند آن‌ها صفر شود، بنابراین ذرهٔ q_3 در خارج از فاصلهٔ بین دو بار به تعادل نمی‌رسد.



$$|\vec{F}_T| = F_{1,3} + F_{2,3} \neq 0$$

بنابراین برای به‌تعادل رسیدن ذرهٔ q_3، این ذره باید در فاصلهٔ بین دو بار الکتریکی و نزدیک به بار با مقدار کوچک‌تر قرار گیرد.

به عبارت دیگر نیروهای وارد شده بر بار q_3 از طرف دو بار دیگر باید برابر و در خلاف جهت یک‌دیگر باشند.



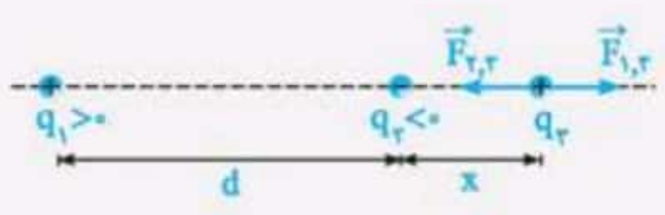
$$F_T = 0 \Rightarrow F_{1,3} = F_{2,3}$$

$$\frac{k|q_1||q_3|}{x^2} = \frac{k|q_2||q_3|}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{x^2} = \frac{|q_2|}{(d-x)^2}$$

تذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مقدار و علامت بار q_3، تأثیری در به تعادل رسیدن آن ندارد که این موضوع خود، موضوع بسیار جالبی است.

حالت دوم: بارهای q_1 و q_2 مختلف‌العلامت باشند:

در این حالت بار سوم در خارج از فاصلهٔ دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد (چرا؟). برای به‌دست آوردن رابطهٔ بین اندازهٔ بارها و نقطهٔ موردنظر، فرض کنید بار q_1 مثبت، بار q_2 منفی و اندازه بار q_1 بزرگ‌تر باشد. پس با توجه به شکل می‌توان نوشت:



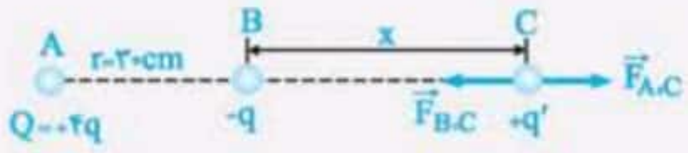
$$F_T = 0 \Rightarrow |\vec{F}_{1,3}| = |\vec{F}_{2,3}| \Rightarrow \frac{k|q_1||q_3|}{(d+x)^2} = \frac{k|q_2||q_3|}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_1|}{(d+x)^2} = \frac{|q_2|}{x^2}$$

برای درک بهتر مفاهیم فوق، به دو تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۱ **دو بار الکتریکی $-q$ و $Q = +4q$ در دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $AB = 30cm$ از هم قرار دارند. بار $+q'$ را در چه فاصله‌ای برحسب سانتی‌متر از بار Q قرار دهیم تا به حال تعادل قرار گیرد؟**

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰



پاسخ با توجه به این‌که بار $-q$ مقدار کوچک‌تری نسبت به $Q=+4q$ دارد، پس بار سوم برای تعادل باید نزدیک به بار $-q$ باشد و چون بارها ناهم‌نام هستند، بار سوم باید خارج از فاصلهٔ بین دو بار قرار گیرد. در ادامه اگر فاصلهٔ بار $+q'$ تا بار $-q$ را x درنظر بگیریم، مقدار x به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

بررسی تعادل برای بار $+q'$: $\sum F=0 \Rightarrow F_{A,C}=F_{B,C} \Rightarrow \frac{k|4q||q'|}{(30+x)^2}=\frac{k|q||q'|}{x^2} \Rightarrow \frac{4}{(30+x)^2}=\frac{1}{x^2}$

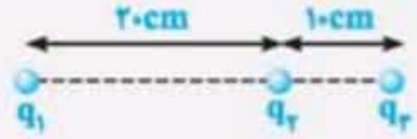
$$\Rightarrow 4x^2=(30+x)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2x=30+x \Rightarrow x=30\,cm$$

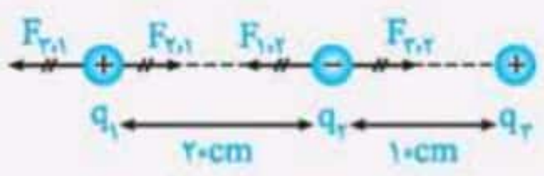
در نهایت باید گفت فاصلهٔ بار Q تا بار $+q'$، برابر $60\,cm$ است $(30+x=30+30)$ و گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

تذکر همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقدار و علامت بار q'، در به تعادل رسیدن آن نقشی ندارد و اگر اندازهٔ بار q' دو برابر نیز شود، مجدداً تعادل برای آن برقرار است.

تمرین۲ **در شکل روبه‌رو، برایند نیروهای الکتریکی وارد بر هـر یک از بارهای نقطه‌ای برابر صفر است. $\frac{q_3}{q_2}$ کدام است؟** (تجربی داخل ۹۳)

۱) -4 ۲) $+4$ ۳) $-\frac{9}{4}$ ۴) $+\frac{9}{4}$





پاسخ با یک سؤال جالب و تحلیلی مواجه شده‌ایم. چون بار الکتریکی q_2 متعادل است، بنابراین دو بار الکتریکی q_1 و q_3 حتماً باید هم‌نام باشند. مثلاً می‌توان هر دو بار الکتریکی q_1 و q_3 را مثبت درنظر گرفت. هم‌چنین برای متعادل بودن بار q_1، دو بار q_2 و q_3 باید لزوماً غیرهم‌نام باشند (چرا؟).

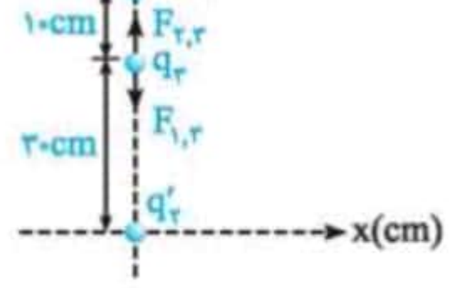
بررسی شرایط تعادل برای بار الکتریکی q_1 : $|F_{3,1}|=|F_{2,1}| \Rightarrow \frac{k\cancel{q_1}q_3}{(30)^2}=\frac{kq_2\cancel{q_1}}{(20)^2} \Rightarrow \frac{q_3}{900}=\frac{q_2}{400} \Rightarrow \left|\frac{q_3}{q_2}\right|=\frac{900}{400} \Rightarrow \left|\frac{q_3}{q_2}\right|=\frac{9}{4}$

در نهایت از آن‌جا که q_3 و q_2 غیرهم‌نام‌اند، $\frac{q_3}{q_2}=-\frac{9}{4}$ می‌باشد و گزینهٔ (۳) صحیح است.

با توجه به خلاصه نکات (۶) از آن‌جایی‌که نقطهٔ C (محل صفر شدن برایند نیروها) خارج از فاصلهٔ بین دو بار q_A و q_B قرار دارد، درمی‌یابیم این دو بار با یک‌دیگر مختلف‌العلامت هستند (q_B, q_A) و چون نقطهٔ C به نقطهٔ B نزدیک‌تر است، می‌فهمیم این بار اندازهٔ کوچک‌تری دارد.

۱۱۸۰ **۴** با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۱۸۱ **۱** برای تعادل بار الکتریکی q_3 باید دو نیروی مساوی و در خلاف جهت هم به آن وارد شود.

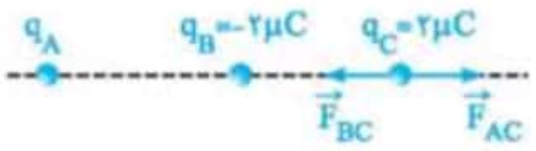


بار جدید q_2 را با q_2' نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$F_{2,3}=F_{1,3} \Rightarrow \frac{k\cancel{q_2'}\cancel{q_3}}{(30)^2}=\frac{k\cancel{q_1}\cancel{q_3}}{(10)^2} \Rightarrow \frac{q_2'}{900}=\frac{1}{100} \Rightarrow q_2'=9\mu C$$

با توجه به این‌که $q_2=6\mu C$ است، باید $3\mu C$ به بار q_2 بیافزاییم تا بار q_3 متعادل شود.

۱۱۸۲ **۲** این سؤال را در هر دو حالت بررسی می‌کنیم:



حالت اول: در این حالت، برایند نیروهای وارد بر بار q_C برابر صفر است، یعنی $\vec{F}_{AC}=-\vec{F}_{BC}$ می‌باشد.



حالت دوم: وقتی q_A دو برابر شود، $\vec{F}_{AC}$ هم دو برابر می‌شود، یعنی برایند نیروهای وارد بـر بـار q_C بـه صورت زیر می‌شود:

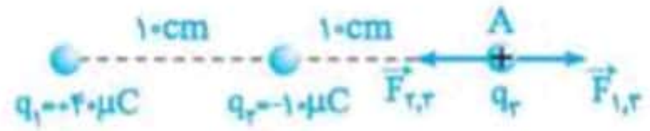
برایند نیروهای وارد بر q_C در حالت دوم : $\vec{\Sigma F}=\vec{F}'_{AC}+\vec{F}_{BC} \xrightarrow{F'_{AC}=2\vec{F}_{AC}=-2\vec{F}_{BC}} \vec{\Sigma F}=-2\vec{F}_{BC}+\vec{F}_{BC}=-\vec{F}_{BC}$

$$F_{BC}=\frac{k|q_B||q_C|}{r^2}=\frac{9\times10^9\times(2\times10^{-6})\times(2\times10^{-6})}{10^{-2}}=3/6\,N$$

بردار نیروی $\vec{F}_{BC}$ در خلاف جهت محور x است (چون نیروی بین q_B و q_C از نوع جاذبه بوده و نیروی وارد بر q_C از طرف q_B به سمت چپ می‌باشد). بنابراین برایند نیروهای وارد بر q_C در حالت دوم که برابر $-\vec{F}_{BC}$ شده است، به طرف راست و برحسب نیوتن برابر $\vec{\Sigma F}=+3/6\,\vec{i}$ می‌باشد.

www.gajmarket.com

۴ ۱۱۸۳ برای این‌که برایند نیروهای وارد بر بار الکتریکی در نقطهٔ A صفر شود، باید یک نیروی ربایشی و یک نیروی رانشی به بار واقع در نقطهٔ A وارد شود. اگر در این نقطه یک بار مثبت فرضی را قرار دهیم، داریم:

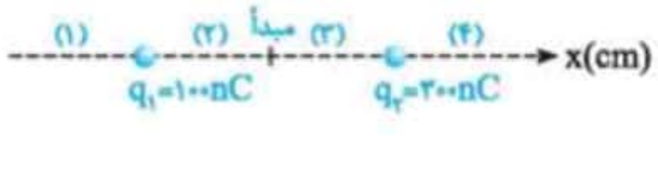


$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ بین } q_1 \text{ و } q_3: r_{1,3}=۲۰cm \\ \text{فاصلهٔ بین } q_2 \text{ و } q_3: r_{2,3}=۱۰cm \end{cases}$$

$$F_{1,3}=F_{2,3}\Rightarrow \frac{k\,q_1 q_3}{(r_{1,3})^2}=\frac{k\,q_2 q_3}{(r_{2,3})^2}\Rightarrow \frac{۴۰q_3}{۲^2}=\frac{۱۰q_3}{۱^2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بار q_3 (واقع در نقطهٔ A)، هر مقداری داشته باشد، رابطهٔ فوق برقرار است و به عبارتی گزینهٔ (۴) صحیح است. دقت شود که مثبت یا منفی بودن q_3 نیز مشکلی برای تحلیل فوق ایجاد نمی‌کند (چرا؟).

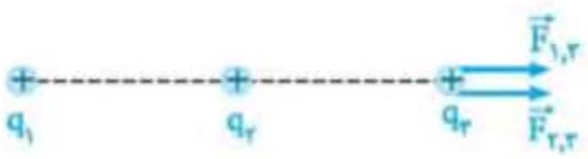
۲ ۱۱۸۴ نیروی وارد از طرف بارهای مثبت q_1 و q_2 بر پروتون دافعه می‌باشد. بنابراین نیروهای وارد بر بار پروتون در ناحیهٔ (۴) به سمت راست (در جهت محور x) و در ناحیهٔ (۱) به سمت چپ (در خلاف جهت محور x) می‌باشد.



از طرفی در ناحیهٔ (۳) نیروی دافعهٔ وارد از طرف q_2 بر پروتون بیشتر از نیروی دافعهٔ وارد شده از طرف q_1 بر پروتون می‌باشد (چرا؟)، بنابراین در این ناحیه برایند نیروهای وارد بر پروتون حتماً به سمت چپ و در خلاف جهت محور x می‌باشد. در سمت چپ ناحیهٔ (۲) نیروی وارد بر پروتون از طرف q_1 می‌تواند بیشتر از نیروی وارد بر پروتون از طرف بار q_2 شود (چون پروتون به بار q_1 نزدیک‌تر است)، بنابراین در محدوده‌ای از ناحیهٔ (۲) برایند نیروی وارد بر پروتون می‌تواند در جهت محور x باشد.

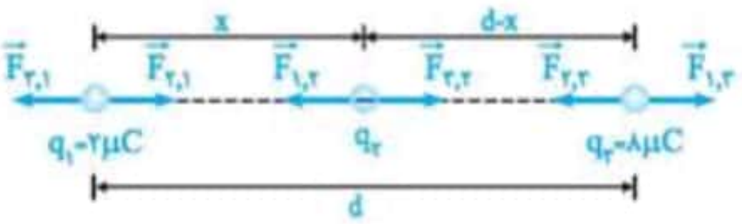
در مجموع می‌توان گفت در دو ناحیهٔ (۴) و (۲) برایند نیروی وارد بر پروتون از طرف دو بار دیگر می‌تواند به‌سمت راست و در جهت محور x باشد.

۳ ۱۱۸۵ با توجه به این‌که برایند نیروهای الکترواستاتیکی وارد بر بار q_3 صفر است، نتیجه می‌گیریم بار q_2 منفی است، زیرا اگر q_1 و q_2 هر دو مثبت باشند، هر دو q_3 را دفع کرده و امکان ندارد برایند نیروهای وارد بر آن صفر شود.



$$R=F_{1,3}+F_{2,3}\neq ۰ \text{ (تعادل ندارد)}$$

در ادامه نیروهای وارد بر بارها را مشخص می‌کنیم:



کنترل صفر شدن برایند نیروهای وارد بر q_2: $F_{1,2}=F_{3,2}\Rightarrow k\frac{۲q_2}{x^2}=k\frac{۸q_2}{(d-x)^2}$

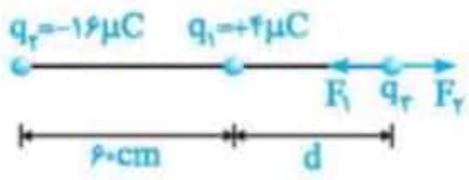
$$\Rightarrow ۴x^2=(d-x)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} ۲x=d-x\Rightarrow x=\frac{d}{۳}$$

کنترل صفر شدن برایند نیروهای وارد بر q_1: $F_{2,1}=F_{3,1}\Rightarrow k\frac{۲q_2}{x^2}=k\frac{۸\times ۲}{d^2}\Rightarrow |q_2|=\frac{۸}{۹}\mu C\Rightarrow q_2=-\frac{۸}{۹}\mu C$

($x=\frac{d}{۳}$ را قرار می‌دهیم)

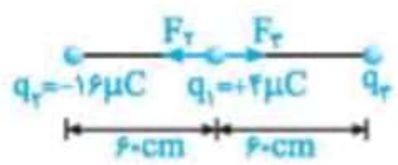
دقت: در رابطهٔ $F=k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ در واقع اندازهٔ بارها یعنی $|q_1|$ و $|q_2|$ را قرار می‌دهیم.

۲ ۱۱۸۶ این سؤال، مکمل بسیار خوبی برای سؤال قبل محسوب می‌شود. با توجه به این‌که بارها در حال تعادل و طناب‌ها به طور قائم قرار گرفته‌اند، بنابراین برایند نیروی الکتریکی وارد بر هر یک از بارها برابر صفر است.



$$F_{T_3}=۰\Rightarrow F_1=F_2\Rightarrow k\frac{۴\times q_3}{d^2}=k\frac{۱۶\times q_3}{(d+۶۰)^2}\Rightarrow \frac{۴}{d^2}=\frac{۱۶}{(d+۶۰)^2}\Rightarrow \frac{۲}{d}=\frac{۴}{d+۶۰}\Rightarrow d=۶۰cm$$

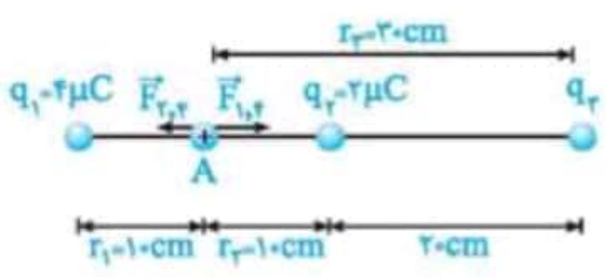
برای این‌که بار q_1 نیز در حال تعادل باشد، باید بارهای q_2 و q_3 هم‌علامت بوده (در نتیجه علامت بار q_3 باید منفی باشد) و اندازهٔ نیروهای وارد شده از طرف آن‌ها بر بار q_1 با هم برابر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$F_{T_1}=۰\Rightarrow F_2=F_3\Rightarrow k\frac{۱۶\times ۴}{۶۰^2}=k\frac{۴\times q_3}{۶۰^2}\Rightarrow |q_3|=۱۶\mu C$$

بنابراین بار q_3 برابر ۱۶- میکروکولن خواهد بود ($q_3=-۱۶\mu C$).

۳ ۱۱۸۷ برای صفر بودن برایند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_4، باید برایند نیروهای ناشی از سه بار دیگر وارد بر بار q_4 (در نقطهٔ A) هم‌دیگر را خنثی کنند. در ادامه حل را با فرض مثبت بودن بار الکتریکی q_4 ادامه می‌دهیم. برای بررسی وضعیت نیروی ناشی از بار q_3 وارد بر q_4، ابتدا نیروهای $\vec{F}_{1,4}$ و $\vec{F}_{2,4}$ را محاسبه کرده و آن‌ها را مقایسه می‌کنیم:



$$\begin{cases} F_{1,4}=\frac{kq_1q_4}{r_1^2}=\frac{۹\times ۱۰^9\times ۴\times ۱۰^{-6}q_4}{(۱۰^{-1})^2}=۳۶\times ۱۰^5\,q_4 \\ F_{2,4}=\frac{kq_2q_4}{r_2^2}\xrightarrow[q_2=\frac{۱}{۲}q_1]{r_1=r_2} F_{2,1}=\frac{۱}{۲}F_{1,4}=۱۸\times ۱۰^5\,q_4 \end{cases}$$

با مقایسهٔ مقادیر $F_{۱,۴}$ و $F_{۲,۴}$ به سادگی می‌توان فهمید که برایند آن‌ها برابر $۱۸\times۱۰^{۵}q_۴$ و به سمت راست می‌باشد. با توجه به این موضوع برای صفر شدن برایند نیروها، $F_{۳,۴}$ باید برابر $۱۸\times۱۰^{۵}q_۴$ و به سمت چپ باشد تا نیروی برایند وارد بر بار $q_۴$ در نقطهٔ A صفر شود (چرا؟).

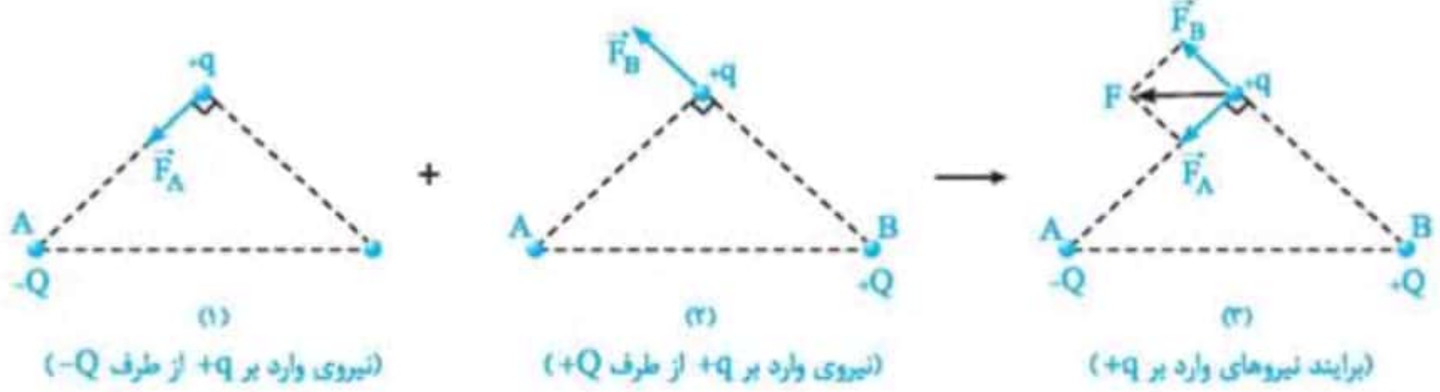


$$F_{۳,۴}=\frac{kq_۳q_۴}{r_۳^۲}\Rightarrow ۱۸\times۱۰^{۵}q_۴=\frac{۹\times۱۰^{۹}\times q_۳q_۴}{(۳\times۱۰^{-۱})^۲}\Rightarrow |q_۳|=۱۸\times۱۰^{-۶}C=۱۸\mu C$$

از طرفی چون نیروی $F_{۳,۴}$ به سمت چپ است، بنابراین بار $q_۳$ مثبت است که $q_۴$ را دفع کرده است (چرا؟).

دقت: همان‌طور که مشاهده کردید پارامتر $q_۴$ در طی روند محاسبات ساده شد، این موضوع یعنی مقدار بار $q_۴$ در متعادل بودن آن نقش ندارد. از طرفی به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر $q_۴$ را منفی فرض می‌کردیم نیز در پاسخ نهایی مسأله تأثیر نداشت، این موضوع را بررسی کنید.

۱ ۱۱۸۸ اگر اندازهٔ نیرویی که دو بار Q و q برهم وارد می‌کنند را F' در نظر بگیریم، داریم:

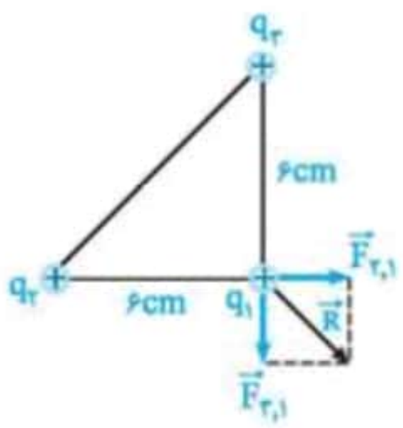


دقت: با توجه به یکسان بودن فاصله و اندازهٔ بار در شکل‌های (۱) و (۲)، F_A و F_B با هم برابرند:

$$F_A=F_B=F'=\frac{kqQ}{r^۲}$$

۴ ۱۱۸۹ این سؤال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: ابتدا نیروهای وارد بر بار $q_۱$ را مطابق شکل مقابل رسم می‌کنیم. از آن‌جایی‌که بارهای $q_۲$ و $q_۳$ مشابه هستند، داریم:



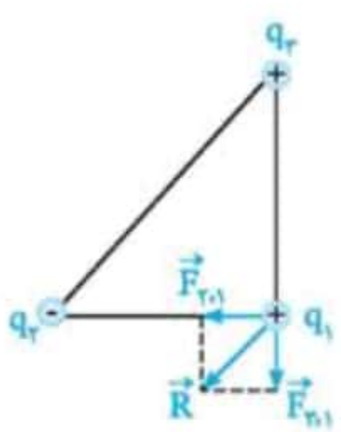
$q_۱$ ، $q_۳$ را دفع می‌کند.
$q_۱$ ، $q_۲$ را دفع می‌کند.

$$F_{۲,۱}=F_{۳,۱}=\frac{۹\times۱۰^{۹}\times۴\times۴\times۱۰^{-۱۲}}{(۶\times۱۰^{-۲})^۲}=۴۰N$$

در ادامه با برایندگیری از دو نیروی عمود بر هم $\vec{F}_{۲,۱}$ و $\vec{F}_{۳,۱}$ پاسخ سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$R=\sqrt{F_{۲,۱}^۲+F_{۳,۱}^۲}=۴۰\sqrt{۲}\,N$$

حالت دوم: (بار $q_۲$ قرینه شود): در این حالت با ثابت بودن اندازهٔ بارها و فاصلهٔ بین آن‌ها، همچنان $F_{۲,۱}=F_{۳,۱}=۴۰N$ باقی می‌ماند ولی بار $q_۳$، بار $q_۱$ را دفع کرده و بار $q_۲$، بار $q_۱$ را جذب می‌کند.



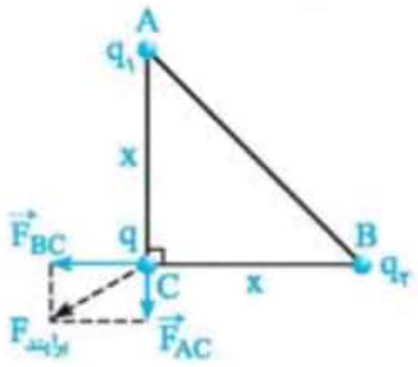
$q_۱$ ، $q_۳$ را دفع می‌کند.
$q_۱$ ، $q_۲$ را جذب می‌کند.

باز هم با توجه به عمود بودن $F_{۲,۱}$ و $F_{۳,۱}$ داریم:

$$R'=\sqrt{F_{۳,۱}^۲+F_{۲,۱}^۲}=۴۰\sqrt{۲}N$$

بنابراین اندازهٔ بردار برایند نیروهای وارد بر بار $q_۱$ ثابت مانده ولی مطابق شکل مقابل، جهت آن تغییر می‌کند.

۲ ۱۱۹۰ هر سه بار مثبت بوده و یک‌دیگر را دفع می‌کنند. برای محاسبهٔ برایند نیروهای وارد بر بار q در نقطهٔ C، ابتدا با توجه به اندازهٔ نیروی بین بارهای B و C، اندازهٔ نیروی بین بارهای A و C را به‌دست می‌آوریم:



$q_۱$ ، q را دفع می‌کند.
$q_۲$ ، q را دفع می‌کند.

$$\begin{cases}F_{AC}=\dfrac{kq_۱q}{x^۲}\\ F_{BC}=\dfrac{kq_۲q}{x^۲}=۸N\end{cases}\Rightarrow\frac{F_{AC}}{F_{BC}}=\frac{q_۱}{q_۲}\xrightarrow{q_۱=\frac{۳}{۴}q_۲}\frac{F_{AC}}{۸}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow F_{AC}=۶N$$

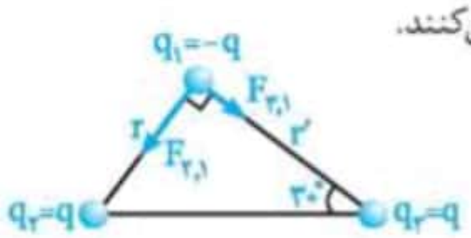
در ادامه به سادگی برایند نیروهای وارد بر بار q در نقطهٔ C محاسبه می‌شود:

$$F_{\text{برایند}}=\sqrt{F_{AC}^۲+F_{BC}^۲}=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰N\ :\text{برایند نیروها}$$

* به‌عنوان یک تمرین، بررسی کنید که اگر بار $q_۱$ منفی باشد، برایند نیروهای وارد بر بار q در نقطهٔ C، چند برابر وضعیت فعلی خواهد شد؟

www.gajmarket.com

۱ ۱۱۹۱ با توجه به ناهم‌نام بودن بارهای q_1 و q_2 و همچنین بارهای q_1 و q_3، دو بار q_2 و q_3 بار q_1 را جذب می‌کنند.



با توجه به روابط مثلثاتی، فاصلهٔ دو بار q_1 و q_3، $\sqrt{3}$ برابر فاصلهٔ دو بار q_1 و q_2 است.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow r' = \sqrt{3}r$$

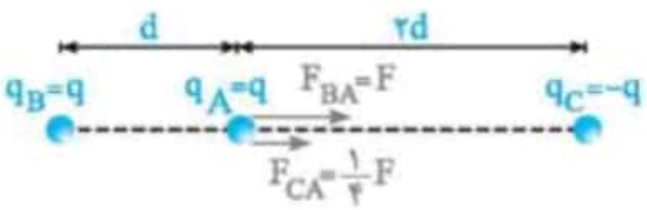
بنابراین نیروی $F_{3,1}$، در این شکل $\frac{1}{3}$ برابر نیروی $F_{2,1}$ است.

$$F \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{F_{3,1}}{F_{2,1}} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow F_{3,1} = \frac{1}{3}F$$

دو نیروی $F_{2,1}$ و $F_{3,1}$ بر هم عمود هستند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_{T_1} = \sqrt{F_{3,1}^2 + F_{2,1}^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{3}\right)^2 + F^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 1}\ F = \frac{\sqrt{10}}{3}F$$

۳ ۱۱۹۲ در هر دو شکل، برایند نیروهای وارد بر بار q_8 را به دست می‌آوریم:



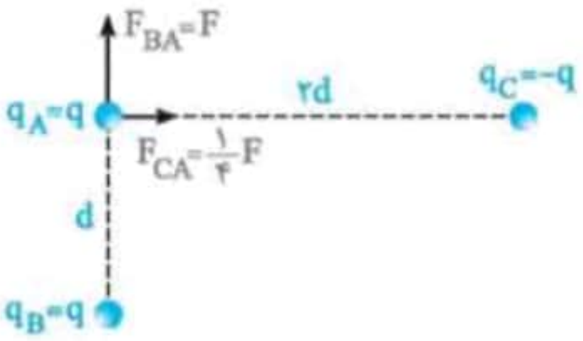
شکل (۱): نیرویی که دو بار q در فاصلهٔ d بر هم وارد می‌کنند را برابر F در نظر می‌گیریم. بنابراین نیروی بین دو بار $q_A = q$ و $q_B = q$ برابر F و نیروی بین دو بار $q_A = q$ و $q_C = -q$ برابر $\frac{1}{4}F$ است (چون فاصلهٔ بین نقاط A و C، دو برابر فاصلهٔ بین نقاط A و B است).

$$F_{BA} = \frac{kq_Aq_B}{r^2}\ ,\ F_{CA} = \frac{kq_Cq_B}{r^2}$$

(F_{CA}: برابر $\frac{1}{4}$؛ r^2: برابر $(2)^2 = 4$)

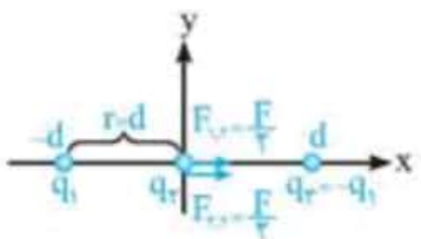
$$F_{\text{برایند}} = F + \frac{1}{4}F = \frac{5}{4}F$$

شکل (۲): در این شکل، اندازهٔ نیروهای بین دو بار، برابر همان شکل (۱) است، فقط جهت نیروها تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:



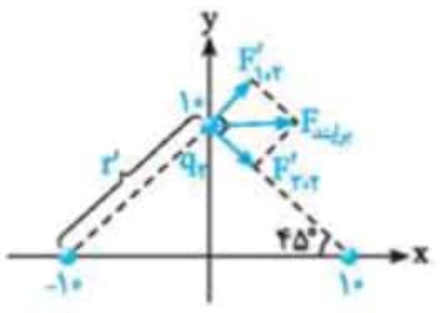
$$F'_{\text{برایند}} = \sqrt{F^2 + \left(\frac{1}{4}F\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}}F = \frac{\sqrt{17}}{4}F \Rightarrow \frac{F'_{\text{برایند}}}{F_{\text{برایند}}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}F}{\frac{5}{4}F} = \frac{\sqrt{17}}{5}$$

۳ ۱۱۹۳ از آن‌جا که اندازهٔ بارهای q_1 و q_3 با یک‌دیگر برابر و مختلف‌العلامت هستند و فاصلهٔ آن‌ها تا بار q_2 برابر است، بنابراین نیروهای وارد شده از طرف آن‌ها بر بار q_2 مساوی و برابر $\frac{F}{2}$ می‌باشد.



$$F = F_{1,2} + F_{3,2} \xrightarrow{F_{1,2}=F_{3,2}} F_{1,2} = F_{3,2} = \frac{F}{2}$$

در ادامه وقتی بار q_2 را به اندازهٔ d روی محور y جابه‌جا می‌کنیم، اندازهٔ بارها ثابت بوده و فقط فاصلهٔ بین q_2 و دو بار الکتریکی دیگر $\sqrt{2}$ برابر می‌شود، بنابراین داریم:



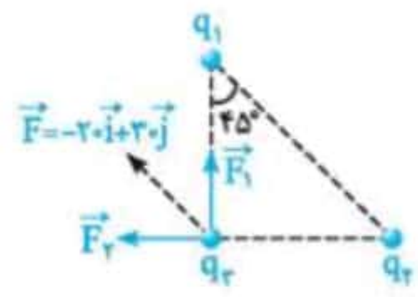
$$r'^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Rightarrow r' = \sqrt{2}\,d$$

$$\frac{F'_{1,2}}{F_{1,2}} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}d}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow F'_{1,2} = F'_{3,2} = \frac{1}{2}F_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F\right) = \frac{1}{4}F$$

حال برایند دو نیروی عمود بر هم $F'_{1,2}$ و $F'_{3,2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{\text{برایند}} = \sqrt{(F'_{1,2})^2 + (F'_{3,2})^2} \xrightarrow{F'_{1,2}=F'_{3,2}} F_{\text{برایند}} = \sqrt{2}F'_{1,2} = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}F\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

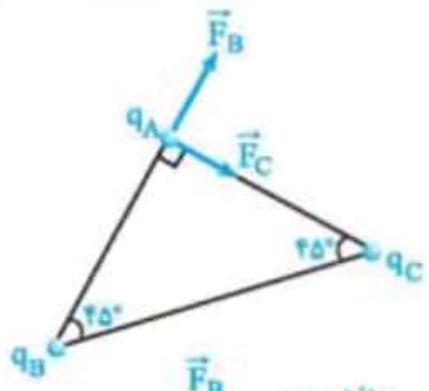
۴ ۱۱۹۴ مطابق شکل، به بار q_3، نیروهای F_1 و F_2 به ترتیب از طرف بارهای q_1 و q_2 وارد می‌شود. نیروی $\vec{F}_2$ در راستای بردار یکهٔ $\vec{i}$ و $\vec{F}_1$ در راستای بردار یکهٔ $\vec{j}$ است، بنابراین $\vec{F}_1 = 30\vec{j}$ و $\vec{F}_2 = -20\vec{i}$ خواهد بود.



با ۲ برابر کردن q_1، نیروی $\vec{F}_1$ هم ۲ برابر می‌شود و با ۲ برابر و قرینه کردن q_2، نیروی $\vec{F}_2$ هم ۲ برابر و قرینه می‌شود، یعنی می‌توان نوشت:

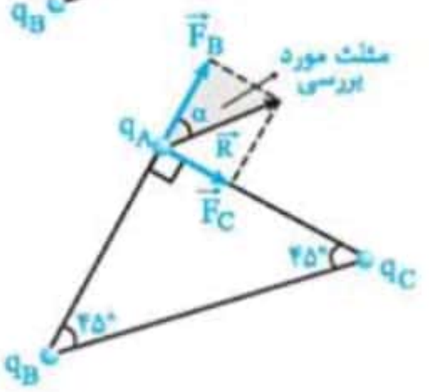
$$\left.\begin{aligned}\vec{F}'_1 &= 2\vec{F}_1 = 60\vec{j}\\ \vec{F}'_2 &= -2\vec{F}_2 = 40\vec{i}\end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F}'_2 + \vec{F}'_1 = 40\vec{i} + 60\vec{j}$$

۱ ۱۱۹۵ ابتدا نیروهای وارد بر بار q_A را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} F_B = \dfrac{k q_A q_B}{r^2} = \dfrac{k\sqrt{2} q \times q}{r^2} = \sqrt{2} k \dfrac{q^2}{r^2} \\ F_C = \dfrac{k q_C q_A}{r^2} = \dfrac{k q \times q}{r^2} = k \dfrac{q^2}{r^2} \end{cases}$$

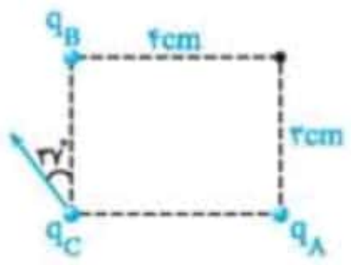
حال برایند این دو نیروی عمود بر هم را با توجه به شکل زیر رسم می‌کنیم، دقت شود که α خواستهٔ مسأله است (زاویهٔ بردار برایند با امتداد BA):



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{F_C}{F_B} = \frac{k\dfrac{q^2}{r^2}}{\sqrt{2} k \dfrac{q^2}{r^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

۲ ۱۱۹۶ مطابق شکل، به بار q_C از طرف بارهای q_A و q_B به ترتیب نیروهای $\vec{F}_A$ و $\vec{F}_B$ وارد می‌شود که برایند آن‌ها برابر $\vec{F}$ است.



با توجه به شکل، می‌توان نوشت:



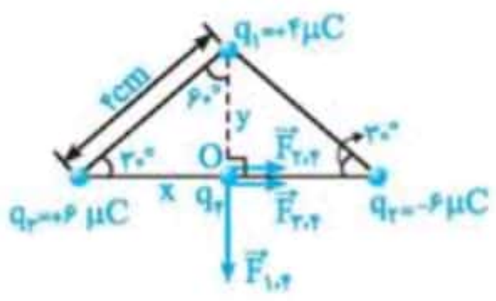
$$\underbrace{\tan 37^\circ}_{\frac{3}{4}} = \frac{F_A}{F_B} \rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{3}{4}$$

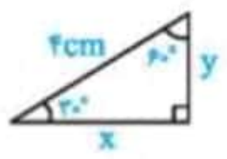
از طرفی برای مقایسهٔ F_A و F_B می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{k|q_A||q_C|}{r_A^2} \\ F_B = \dfrac{k|q_B||q_C|}{r_B^2} \end{cases} \rightarrow \overset{\frac{3}{4}}{\left(\frac{F_A}{F_B}\right)} = \frac{|q_A|}{|q_B|} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \xrightarrow[r_B = 3cm]{r_A = 4cm} \frac{3}{4} = \frac{|q_A|}{|q_B|} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow \frac{|q_A|}{|q_B|} = \frac{4}{3}$$

با توجه به شکل، q_A بار q_C را دفع کرده است و q_B بار q_C را جذب کرده است، بنابراین بارهای q_A و q_B ناهم‌نام هستند و $\frac{q_A}{q_B} = -\frac{4}{3}$ خواهد بود.

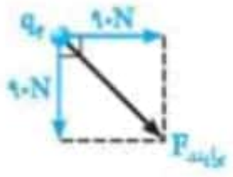
۴ ۱۱۹۷ بارهای q_1 و q_3، بار q_4 را دفع کرده و بار q_2 آن را جذب می‌کند. در ادامه مطابق شکل نیروهای وارد بر این بار را حساب می‌کنیم:





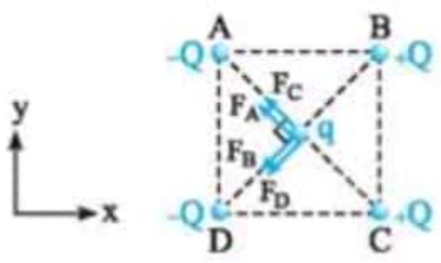
$$\begin{cases} \sin 60^\circ = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{x}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}\ cm \\ \cos 60^\circ = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2cm \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,4} = \dfrac{k q_1 q_4}{y^2} = \dfrac{9\times10^9 \times (4\times10^{-6})(1\times10^{-6})}{(2\times10^{-2})^2} = 90\,N \\ F_{2,4} = F_{3,4} = \dfrac{k q_2 q_4}{x^2} = \dfrac{9\times10^9 \times (6\times10^{-6})(1\times10^{-6})}{(2\sqrt{3}\times10^{-2})^2} = 45\,N \end{cases} \Rightarrow \text{برایند } F_{2,4} \text{ و } F_{3,4} : F' = 45 + 45 = 90\,N$$

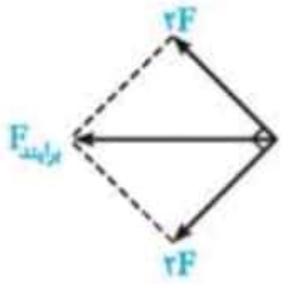


$$\Rightarrow F_{برایند} = \sqrt{90^2 + 90^2} = 90\sqrt{2}\,N$$

۲ ۱۱۹۸ برای شروع حل، اگر نیروی وارد بر بار q از طرف یک بار Q را برابر F در نظر بگیریم، مطابق شکل جهت نیروی وارد شده از طرف هریک از بارهای دیگر بر بار q به‌صورت مقابل است:



$$F_A = F_B = F_C = F_D = F$$

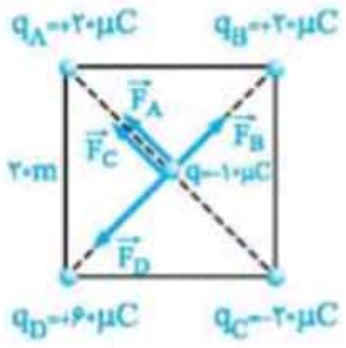


بنابراین برایند نیروهای وارد بر بار q در جهت منفی محور x می‌باشد.

دقت: با توجه به هم‌اندازه بودن تمام بارهای رئوس و یکسان بودن فاصلهٔ آن‌ها از بار q، اندازهٔ نیروی بین بار q و هر چهار ذرهٔ قرار گرفته در رئوس A، B، C و D نیز برابر F بوده و تنها جهت این نیروها متفاوت است.

www.gajmarket.com

۱ ۱۱۹۹ مطابق شکل نیروهای وارد بر ذرهٔ q در مرکز مربع را رسم می‌کنیم. اندازهٔ قطر مربع $۲۰\sqrt{۲}\ cm$ می‌باشد، در نتیجه فاصلهٔ بار q در مرکز مربع با هریک از بارهای موجود بر روی رئوس مربع، نصف اندازهٔ قطر مربع $\left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)$ بوده و برابر $۱۰\sqrt{۲}\ cm$ می‌باشد.



$$\begin{cases} F_B=\dfrac{kq_Bq}{r^۲}=\dfrac{۹\times۱۰^۹\times(۲۰\times۱۰^{-۶})\times(۱۰\times۱۰^{-۶})}{(۱۰\sqrt{۲}\times۱۰^{-۲})^۲}=۹۰N \\ F_D=\dfrac{kq_Dq}{r^۲}\xrightarrow{q_D=۳q_B} F_D=۳F_B=۲۷۰N \end{cases}$$

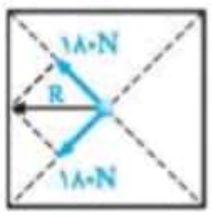
$\Rightarrow$  $\Rightarrow F_{D,B\text{برایند}}=F_D-F_B=۲۷۰-۹۰=۱۸۰N$ ($\vec{F}_D$ در جهت نیروی)

$$F_A=\frac{kq_Aq}{r^۲}\xrightarrow{q_A=q_C=q_B} F_A=F_B=F_C=۹۰N$$

از طرفی برایند دو نیروی $\vec{F}_A$ و $\vec{F}_C$ نیز برابر است با:



$F_{C,A\text{برایند}}=F_A+F_C=۹۰+۹۰=۱۸۰N$ (در جهت این دو نیرو)

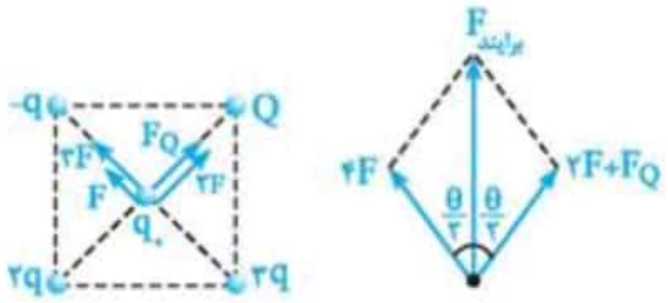


$F_{کل}=\sqrt{۱۸۰^۲+۱۸۰^۲}=۱۸۰\sqrt{۲}\ N$ (به سمت چپ)

دقت: همان‌طور که مشاهده کردید با کمی تیزهوشی، به جای محاسبهٔ چهار نیرو، فقط یک نیرو را حساب کردیم و مابقی نیروها را با توجه به آن به‌دست آوردیم.

۳ ۱۲۰۰ اگر اندازهٔ نیرویی که بار q بر $q_۰$ وارد می‌کند برابر F باشد، بار ۳q نیرویی به بزرگی ۳F را بر $q_۰$ اعمال می‌کند. با توجه به شکل زیر، برایند دو نیروی هم‌جهتی که بارهای $-q$ و ۳q بر $q_۰$ وارد می‌کنند، ۴F می‌شود.

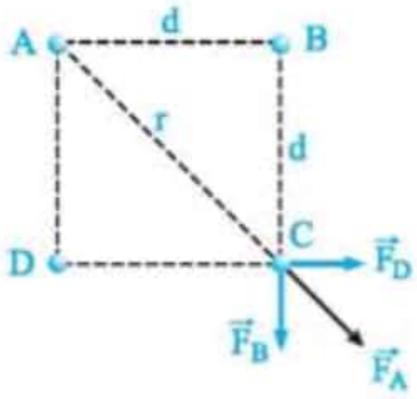
از طرفی برایند نیروهایی که بارهای ۲q و Q بر بار $q_۰$ وارد می‌کنند، باید همین مقدار باشد تا برایند کل نیروهای وارد شده بر بار $q_۰$، بر روی نیمساز زاویهٔ θ و به‌سمت بالا قرار گیرد.



$\Rightarrow ۴F=F_Q+۲F\Rightarrow F_Q=۲F$

بنابراین اندازهٔ نیروی وارد شده از طرف بار Q بر $q_۰$ دو برابر نیروی وارد شده از طرف بار q بر $q_۰$ می‌باشد. با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ تمام بارها از $q_۰$، بنابراین بار Q باید برابر $-۲q$ باشد (منفی است زیرا باید $q_۰$ را جذب کند).

۴ ۱۲۰۱ مطابق شکل مقابل فاصلهٔ بار A تا بار C معادل قطر مربع می‌باشد و قطر مربع، $\sqrt{۲}$ برابر اندازهٔ ضلع مربع است $(r=\sqrt{۲}d)$. در ادامه با توجه به مشابه بودن بارها نیروهای وارد بر بار (C) را رسم می‌کنیم، دقت شود که بارها یکدیگر را دفع می‌کنند.



$$\Rightarrow\begin{cases} F_A=\dfrac{kq_A\times q_C}{r^۲}=\dfrac{kq^۲}{(\sqrt{۲}d)^۲}=\dfrac{kq^۲}{۲d^۲} \\ F_D=F_B=\dfrac{kq_Dq_C}{d^۲}=\dfrac{kq^۲}{d^۲} \end{cases}$$

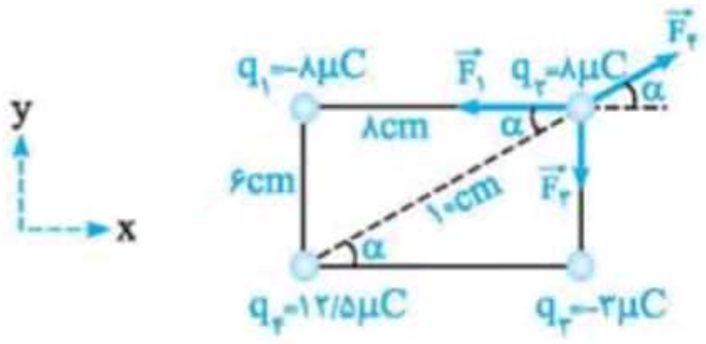
(در راستای نیمساز F_D و F_B که در واقع همان راستای قطر است، قرار دارد.) $R'=\sqrt{۲}\frac{kq^۲}{d^۲}$: برایند دو نیروی $\vec{F}_D$ و $\vec{F}_B$

$R=F_A+R'=\frac{kq^۲}{۲d^۲}+(\sqrt{۲})\frac{kq^۲}{d^۲}=(\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲})\frac{kq^۲}{d^۲}$: برایند کلی با توجه به هم‌جهت بودن $\vec{R}'$ و $\vec{F}_A$

با توجه به این‌که در صورت سؤال، پاسخ براساس $\frac{kq^۲}{۲d^۲}$ خواسته شده است، در نتیجه صورت و مخرج کسر حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$R=۲\times(\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲})\frac{kq^۲}{۲\times d^۲}=(۱+۲\sqrt{۲})\frac{kq^۲}{۲d^۲}\Rightarrow R=(۱+۲\sqrt{۲})\frac{kq^۲}{۲d^۲}$$

۳ ۱۲۰۲ برای حل، نیروهای وارد بر بار q_2 را رسم می‌کنیم:



$$F_1=\frac{kq_1q_2}{r_1^2}=\frac{9\times10^9\times(8\times10^{-6})\times(8\times10^{-6})}{(8\times10^{-2})^2}=90N$$

$$F_3=\frac{kq_2q_3}{r_3^2}=\frac{9\times10^9\times(8\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{(6\times10^{-2})^2}=60N$$

$$F_4=\frac{kq_2q_4}{r_4^2}=\frac{9\times10^9\times(12/5\times10^{-6})\times(8\times10^{-6})}{(10\times10^{-2})^2}=90N$$

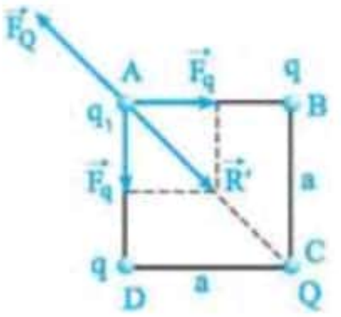
در ادامه با محاسبهٔ برایند نیروها در راستای افقی و قائم، برایند کل نیروها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\text{برایند نیروها در راستای افق}=F_1-F_4\cos\alpha=90-90\times\frac{8}{10}=18N\\ \text{برایند نیروها در راستای قائم}=F_3-F_4\sin\alpha=60-90\times\frac{6}{10}=6N\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R=\sqrt{(3\times6)^2+(6)^2}=6\sqrt{10}N$$

از طرفی بردار نیروی وارد بر q_2، با توجه به شکل فوق برابر $-18\vec{i}-6\vec{j}$ می‌باشد.

۴ ۱۲۰۳ ابتدا فرض می‌کنیم که علامت بار Q و q_1 مثبت باشد. در شکل مقابل بار الکتریکی Q، بار q_1 را با نیروی $\vec{F}_Q$ دفع می‌کند. اگر بار q_1 توسط بارهای q نیز دفع شود، در این صورت امکان ندارد که برایند نیروهای وارد بر این بار صفر شود (چرا؟)، بنابراین بار q_1 توسط بارهای q جذب می‌شود. به بیان دیگر بارهای Q و q مختلف‌العلامت هستند و برایند دو نیروی $\vec{F}_q$ (یعنی $\vec{R}'$)، $\vec{F}_Q$ را خنثی می‌کند.



محاسبهٔ $|\vec{F}_q|$ و $|\vec{R}'|$:

قانون کولن: $F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\Rightarrow F_q=\frac{kqq_1}{a^2}$

برایند نیروهای F_q: $R'=\sqrt{F_q^2+F_q^2}=\sqrt{2}F_q\Rightarrow R'=\frac{\sqrt{2}kqq_1}{a^2}$

محاسبهٔ F_Q:

قطر مربع $=\sqrt{2}\times$ ضلع مربع $\Rightarrow r=\sqrt{2}a$

قانون کولن: $F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\Rightarrow F_Q=\frac{kQq_1}{2a^2}$

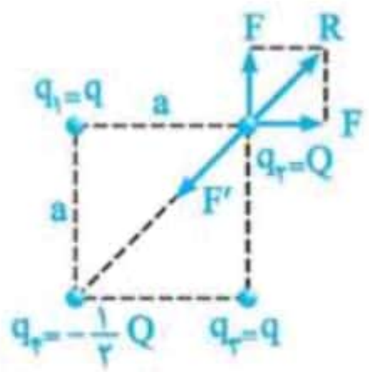
بررسی تعادل بار واقع در A $\Rightarrow F_Q=R'\Rightarrow\frac{kQq_1}{2a^2}=\frac{\sqrt{2}kqq_1}{a^2}\Rightarrow\left|\frac{Q}{q}\right|=2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{Q}{q}=-2\sqrt{2}$ (بارهای Q و q ناهم‌نام هستند.)

دقت: نیروی $\vec{F}_Q$ در راستای قطر مربع است. از طرفی به‌دلیل هم‌اندازه بودن نیروهای $\vec{F}_q$، نیروی $\vec{R}'$ نیز در راستای قطر مربع می‌باشد. بنابراین نیروهای $\vec{R}'$ و $\vec{F}_Q$ در راستای یک‌دیگر می‌باشند.

حال اگر علامت بار Q را منفی فرض کنیم، علامت بار q باید مثبت باشد (به عنوان تمرین مشابه روند فوق بررسی کنید.)، بنابراین هریک از گزینه‌های (۱) و (۲) می‌تواند صحیح باشد. در هر دو حالت اندازهٔ بار Q باید $2\sqrt{2}$ برابر اندازهٔ بار q باشد $\left(\frac{Q}{q}=-2\sqrt{2}\right)$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، اندازهٔ بار q_1 در تعادل آن نقشی ندارد، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ ۱۲۰۴ ابتدا دقت شود که بارهای q_2 و q_4 مختلف‌العلامت هستند و یک‌دیگر را جذب می‌کنند. با توجه به این موضوع بارهای $q_2=Q$ و $q_1=q$ باید حتماً هم‌علامت باشند تا یک‌دیگر را دفع کنند و در نهایت برایند نیروی حاصل از q_1 و q_3 یعنی R نیروی F' را خنثی کند و q_2 متعادل شود. در ادامه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

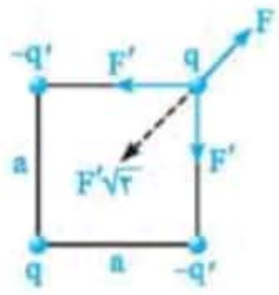


$$R=\sqrt{F^2+F^2}=F\sqrt{2}$$

$$F_{T_2}=0\Rightarrow F'=R\Rightarrow\frac{k\times|Q|\times\left|-\frac{1}{2}Q\right|}{(a\sqrt{2})^2}=\frac{k|q||Q|}{a^2}\times\sqrt{2}\Rightarrow\frac{|Q|}{|q|}=4\sqrt{2}\Rightarrow\frac{Q}{q}=4\sqrt{2}$$

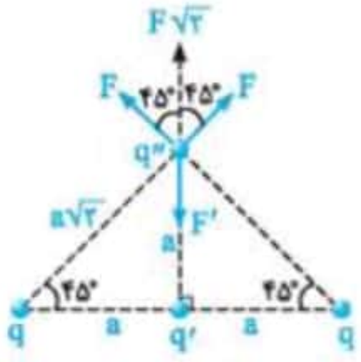
www.gajmarket.com

۱۲۰۵ ۳ با قرینه کردن بارهای q'، بار q در حال تعادل قرار می‌گیرد، بنابراین مطابق شکل، برایند بردار F و دو بردار F' باید برابر صفر شود. توجه کنید که با توجه به شکل و پاسخ دو تست قبل، دو بار $q'-$ و q ناهم‌نام هستند و در نتیجه q' و q هم‌نام هستند.



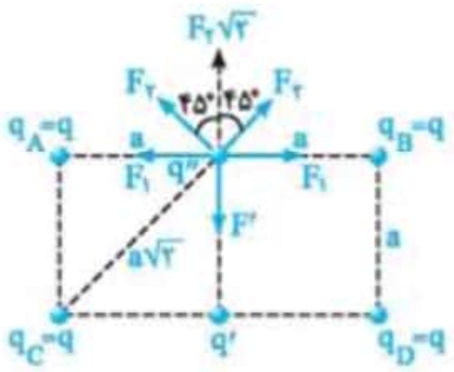
$$\begin{cases} F=k\dfrac{q^2}{(a\sqrt{2})^2}=k\dfrac{q^2}{2a^2} \\ F'=k\dfrac{|q'||q|}{a^2} \end{cases} \xrightarrow{F'\sqrt{2}=F} \sqrt{2}k\frac{|q'||q|}{a^2}=k\frac{q^2}{2a^2}\rightarrow\frac{|q'|}{|q|}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{هم‌نام}} \frac{q'}{q}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۲۰۶ ۲ به بار q'' در نقطهٔ A، از طرف هر یک از بارهای q و بار q' نیرو وارد می‌شود که طبق صورت سؤال، برایند این نیروها برابر صفر است، بنابراین با توجه به شکل، برایند دو بردار F که با هم زاویهٔ 90° می‌سازند، باید با F' برابر و در خلاف جهت آن باشد. توجه کنید که چون q، بار q'' را دفع کرده ولی q'، بار q'' را جذب کرده، بنابراین بارهای q و q' مختلف‌العلامت هستند.



$$\begin{cases} F=k\dfrac{|q||q''|}{(a\sqrt{2})^2}=k\dfrac{|q||q''|}{2a^2} \\ F'=k\dfrac{|q'||q''|}{a^2} \end{cases} \xrightarrow{F'=F\sqrt{2}} k\frac{|q'||q''|}{a^2}=\sqrt{2}k\frac{|q||q''|}{2a^2}\rightarrow\frac{|q'|}{|q|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{بار ناهم‌نام}} \frac{q'}{q}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲۰۷ ۴ به بار q'' از طرف ۴ بار q و بار q' نیرو وارد می‌شود، به گونه‌ای که طبق صورت سؤال، برایند این نیروها برابر صفر است. مطابق شکل، نیرویی که دو بار q_A و q_B بر بار q'' وارد می‌کنند را F_1 و نیرویی که دو بار q_C و q_D بر بار q'' وارد می‌کنند را F_2 می‌نامیم و هم‌چنین نیروی q' بر q'' را هم F' نام‌گذاری می‌کنیم. واضح است که دو نیروی F_1 هم‌دیگر را خنثی می‌کنند، بنابراین برای آن‌که q'' در حال تعادل باشد، کافی است برایند دو بردار F_2 که با هم زاویهٔ 90° می‌سازند (یعنی $F_2\sqrt{2}$)، برابر F' و در خلاف جهت آن باشد تا آن را خنثی نماید.

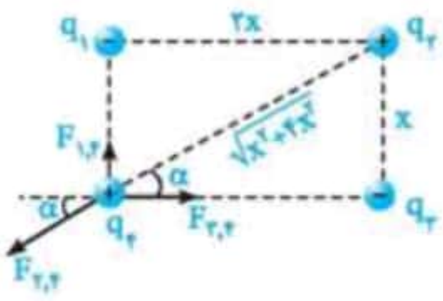


$$\begin{cases} F_2=k\dfrac{|q||q''|}{(a\sqrt{2})^2}=k\dfrac{|q||q''|}{2a^2} \\ F'=k\dfrac{|q'||q''|}{a^2} \end{cases} \xrightarrow{F_2\sqrt{2}=F'} \sqrt{2}k\frac{|q||q''|}{2a^2}=k\frac{|q'||q''|}{a^2}\rightarrow\frac{|q'|}{|q|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مطابق شکل، q' بار q'' را جذب کرده ولی q، بار q'' را دفع کرده است، بنابراین q و q' ناهم‌نام هستند، پس داریم:

$$\frac{|q'|}{|q|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{ناهم‌نام}} \frac{q'}{q}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲۰۸ ۱ اگر بارهای q_2 و q_4 را مثبت فرض کنیم، نیروی بین آن‌ها به شکل نشان داده شده است. در ادامه برای صفر شدن برایند نیروهای وارد بر q_4، q_1 و q_3 باید با q_4 مختلف‌العلامت باشند تا در نهایت برایند نیروها صفر شود.

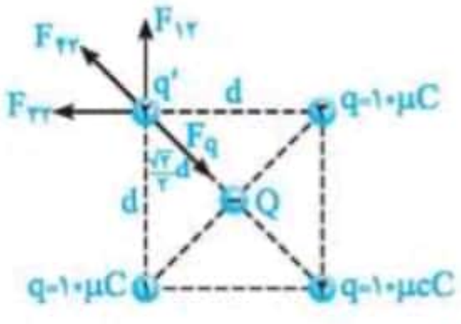


شرط تعادل : $\sum F_y=0\Rightarrow F_{1,4}=F_{2,4}\sin\alpha$

$$\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4x^2}}$$

$$\frac{k|q_1||q_4|}{x^2}=\frac{k|q_2||q_4|}{(\sqrt{x^2+4x^2})^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+4x^2}}\Rightarrow\left|\frac{q_2}{q_1}\right|=5\sqrt{5}\Rightarrow\frac{q_2}{q_1}=-5\sqrt{5}$$

۱۲۰۹ ۴ ذرهٔ q تحت اثر نیروی بارهای $10\mu C$ متعادل است و کافیست تعادل یکی از بارهای $10\mu C$ را بررسی کنیم. برای این منظور، علامت بار q باید منفی باشد تا نیروهای نشان داده شده در نهایت یک‌دیگر را خنثی کنند (بار $10\mu C$ را q' فرض کرده‌ایم):



$$\begin{cases} F_{12}=F_{32}=\dfrac{kq'\times q'}{d^2}=F \\ F_{42}=\dfrac{kq'\times q'}{(\sqrt{2}d)^2}=\dfrac{F}{2} \end{cases}$$

برایند F_{12} و F_{32} و F_{42} : $R=\sqrt{F_{12}^2+F_{32}^2}+F_{42}=F\sqrt{2}+\frac{F}{2}=F\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{kq'\times q'}{d^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$

(برایند F_{12} و F_{32})

حال برایند فوق را نیروی F_q باید خنثی کند و داریم:

$$F_q = R \Rightarrow \frac{kq \times q'}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d\right)^2} = \frac{kq' \times q'}{d^2} \times \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$F(\sqrt{2} + \frac{1}{2})$$

مقدار تقریبی $\sqrt{2}$

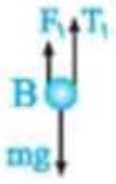
$$|q| = q'\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\right) = 10\left(\frac{1/4}{2} + \frac{1}{4}\right) = 9/5\mu C \Rightarrow q = -9/5\mu C$$

۱ ۱۲۱۰ این سؤال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: ابتدا نیروی الکتریکی بین دو گلوله را به‌دست می‌آوریم:

$$F = k\frac{q_A q_B}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 10^{-6} \times 0/5\times10^{-6}}{9\times10^{-4}} = 5\,N$$

چون بار گلوله‌های A و B مثبت است، نیروی الکتریکی وارد بر گلولهٔ B به‌سمت بالا می‌باشد (دافعه)، اما وزن آن (mg) همیشه رو به پایین است.



$$F_1 + T_1 = mg \Rightarrow 5 + T_1 = 2\times10 \Rightarrow T_1 = 15\,N$$

حالت دوم: در این حالت با منفی شدن بار گلولهٔ A، گلوله‌های A و B یک‌دیگر را جذب کرده و در نتیجه نیروی الکتریکی وارد بر بار B به سمت پایین می‌شود ولی با توجه به ثابت بودن اندازهٔ بارها و فاصلهٔ بین آن‌ها اندازهٔ این نیروی الکتریکی تغییری نمی‌کند.



$$T_2 = F_2 + mg \Rightarrow T_2 = 5 + (2\times10) \Rightarrow T_2 = 25\,N \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

۴ ۱۲۱۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — میدان الکتریکی در اطراف یک بار نقطه‌ای (تست‌های ۱۲۱۱ تا ۱۲۲۱)

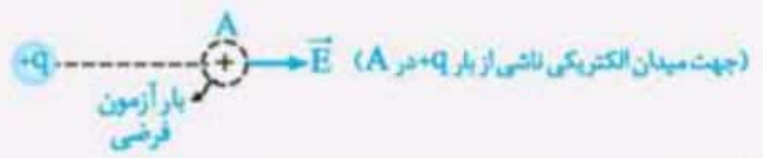
اگر یک ذرهٔ باردار در فضای اطراف یک ذرهٔ باردار دیگر قرار بگیرد، بر آن نیرو وارد می‌شود، این موضوع به این دلیل است که در فضای اطراف ذرهٔ باردار، میدان الکتریکی ایجاد می‌شود.

نکات مهم و کاربردی

۱ بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ r از بار الکتریکی q عبارت است از:

$$E = k\frac{q}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E \propto q \\ E \propto \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

۲ میدان الکتریکی یک کمیت برداری است و برای به‌دست آوردن جهت میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا، کافیست یک بار مثبت آزمون را در آن نقطه قرار دهیم و جهت نیروی وارد بر آن را به‌دست آوریم. جهت میدان الکتریکی، همان جهت نیروی وارد بر بار مثبت آزمون است.



۳ با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$، شدت میدان الکتریکی در اطراف یک ذرهٔ باردار، با دور شدن از ذرهٔ باردار کاهش می‌یابد و در اصطلاح غیریکنواخت است.



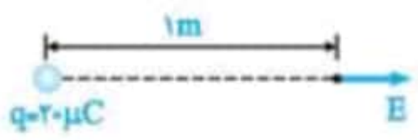
$$E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

مطابق رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$ می‌توان نوشت:

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E \propto q \Rightarrow \text{میدان الکتریکی با اندازهٔ بار الکتریکی نقطه‌ای رابطهٔ مستقیم دارد.} \\ E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \text{میدان الکتریکی با مجذور فاصله از بار الکتریکی رابطهٔ معکوس دارد.} \end{cases}$$

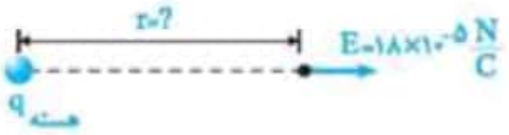
۴ ۱۲۱۲ میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ r از آن برابر است با:



$$r = 1m\ ,\ q = 20\mu C = 2\times10^{-5}\,C \Rightarrow E = \frac{kq}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-5}}{(1)^2} = 1/8\times10^5\,N/C$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۲۱۳ بار هستهٔ هلیم برابر بار الکتریکی دو پروتون است.



$$q_{\text{هسته}} = 2q_p = 2 \times 1/6 \times 10^{-19} C = 3/2 \times 10^{-19} C$$

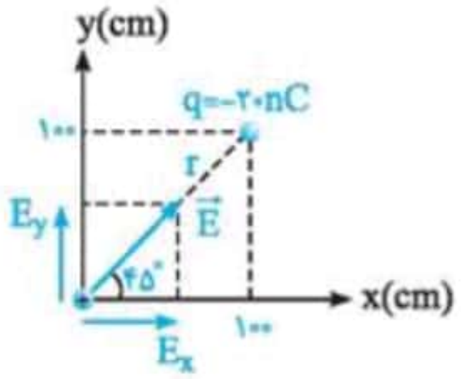
با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$ می‌توان نوشت:

$$E = 0/18 mN/C = 18 \times 10^{-5} N/C$$

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow 18 \times 10^{-5} = \frac{9 \times 10^9 \times 3/2 \times 10^{-19}}{r^2} \Rightarrow r^2 = 16 \times 10^{-6} \Rightarrow r = 4 \times 10^{-3} m = 4 mm$$

۳ ۱۲۱۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به شکل، ابتدا فاصلهٔ بار q تا مبدأ مختصات را به‌دست آورده و سپس بزرگی میدان ناشی از آن را در مبدأ محاسبه می‌کنیم:



$$r = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}\ cm = \sqrt{2}\ m$$

$$E = k\frac{q}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 20 \times 10^{-9}}{(\sqrt{2})^2} = 90 N/C$$

گام دوم: حال با قرار دادن بار مثبت آزمون در مبدأ مختصات، متوجه می‌شویم که جهت میدان الکتریکی در این نقطه به سمت بار q خواهد بود، زیرا بار ۲۰nC-، بار مثبت آزمون را جذب می‌کند.

گام سوم: در ادامه مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی را در راستاهای افقی و قائم به‌دست می‌آوریم:

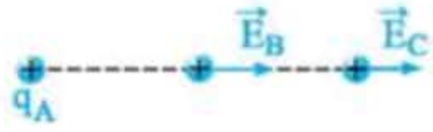
$$\begin{cases} E_x = E\cos 45^\circ = 90 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 45\sqrt{2}\ N/C \\ E_y = E\sin 45^\circ = 90 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 45\sqrt{2}\ N/C \end{cases} \Rightarrow E = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = 45\sqrt{2}\,\vec{i} + 45\sqrt{2}\,\vec{j}$$

۳ ۱۲۱۵ در مقایسهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی در نقاط B و C می‌توان نوشت:

$$(BC = \frac{2}{3}AB)$$

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_C}{E_B} = \left(\frac{r_B}{r_C}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AB+BC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AB+\frac{2}{3}AB}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

در ادامه برای پیدا کردن بردار میدان در C، باید به این موضوع توجه شود که میدان در B و C هم‌جهت است.



$$\vec{E}_C = \frac{9}{25}\vec{E}_B = \frac{9}{25} \times (25 \times 10^9\vec{i}) = 9 \times 10^9\vec{i}$$

۲ ۱۲۱۶ با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$ و اطلاعات قابل استخراج از نمودار، می‌توان نوشت:

$$E_1 = 250 N/C\ ,\ r_1 = r\ ,\ E_2 = 160 N/C\ ,\ r_2 = r + 10$$

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{250}{160} = \left(\frac{r+10}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{r+10}{r} \Rightarrow 5r = 4r + 40 \Rightarrow r = 40 cm$$

* با توجه به این‌که در حل فوق نسبت دو کمیت یکسان مدنظر است، نیازی به تبدیل واحد نداشته و r برحسب cm به‌دست آمد.

۳ ۱۲۱۷ گام اول: (مقایسهٔ میدان الکتریکی در فواصل ۴ متری و ۶ متری): با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$ در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{E_1 = E_2 + 100} \frac{E_2}{E_2 + 100} = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 9E_2 = 4E_2 + 400 \Rightarrow 5E_2 = 400 \Rightarrow E_2 = 80 N/C$$: میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۶ متری

گام دوم: (مقایسهٔ میدان الکتریکی در فواصل ۶ متری و ۳ متری): با توجه به این‌که میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۶ متری برابر $۸۰\frac{N}{C}$ است، میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۳ $\left(=\frac{۶}{۲}\right)$ متری، ۴ برابر شده و برابر $۳۲۰\frac{N}{C} = ۸۰ \times ۴$ می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۳ متری}}{\text{میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۶ متری}} = \frac{E_۳}{E_۲} = \left(\frac{r_۲}{r_۳}\right)^۲ \Rightarrow \frac{E_۳}{۸۰} = \left(\frac{۶}{۳}\right)^۲ = ۴ \Rightarrow \text{میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۳ متری} : E_۳ = ۳۲۰\frac{N}{C}$$

۲ ۱۲۱۸ اگر میدان الکتریکی ۷۵ درصد کاهش یابد، به $\frac{۱}{۴}$ مقدار اولیه می‌رسد و می‌توان نوشت:

$$E_۲ = E_۱ - \frac{۷۵}{۱۰۰}E_۱ = \frac{۱}{۴}E_۱$$

$$\frac{E_۲}{E_۱} = \left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۲۰}{r_۲}\right)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{۱}{۲} = \frac{۲۰}{r_۲} \Rightarrow r_۲ = ۴۰\,cm$$

یعنی باید از فاصلهٔ ۲۰cm به فاصلهٔ ۴۰cm منتقل شویم و به عبارتی ۲۰cm از بار الکتریکی دور شویم.

۲ ۱۲۱۹ با اضافه کردن بار $-۲q$ به بار q، مقدار بار جدید برابر $-q$ می‌شود.

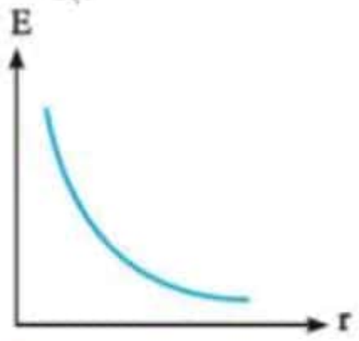
$$q_۲ = q + (-۲q) = -q$$

چون اندازهٔ بار جدید برابر اندازهٔ بار اولیه است $(|-q| = q)$، بنابراین اندازهٔ میدان در همان فاصلهٔ قبلی ثابت می‌ماند.

$$|E| = k\frac{\overset{\text{یکسان}}{\overbrace{|q|}}}{\underset{\text{ثابت}}{\underbrace{r^۲}}} \Rightarrow \text{اندازهٔ } E \text{ تغییر نمی‌کند.}$$

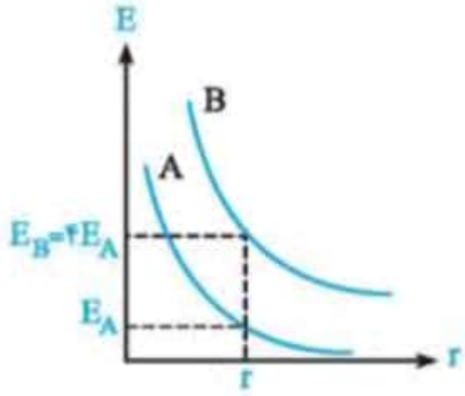
ولی چون علامت بار جدید تغییر کرده است، بنابراین جهت میدان الکتریکی عوض می‌شود.

۲ ۱۲۲۰ نمودار اندازهٔ میدان الکتریکی برحسب فاصله از یک بار نقطه‌ای به صورت مقابل است:



$$E = \frac{kq}{r^۲} \Rightarrow E \propto \frac{۱}{r^۲}$$

در یک فاصلهٔ یکسان از دو بار نقطه‌ای، بار بزرگ‌تر، اندازهٔ میدان الکتریکی بیشتری دارد $(E \propto q)$. بنابراین نمودار مربوط به B در بالای نمودار A قرار می‌گیرد، چون اندازهٔ بار الکتریکی B، بزرگ‌تر از A است.



$$|q_B| > |q_A|$$

$$E = k\frac{q}{r^۲} \xrightarrow[r_A = r_B = r]{\text{در فاصلهٔ یکسان از دو بار}} \frac{E_B}{E_A} = \left|\frac{q_B}{q_A}\right| = ۴ \Rightarrow \text{گزینهٔ (۲) صحیح است.}$$

۲ ۱۲۲۱ اگر شمع در فاصلهٔ دور از کرهٔ باردار قرار داشته باشد، شعلهٔ آن به صورت قائم است. در حالی که اگر شمع را به کرهٔ باردار نزدیک کنیم، شعلهٔ شمع به سمت کره (سمت چپ) کشیده می‌شود. دلیل آن است که کره بار منفی بزرگی دارد که یون‌های مثبت درون شعلهٔ شمع را به سمت خود می‌کشد. (دقت کنید در شرایطی که شمع در فاصلهٔ دور از کره قرار دارد، تحت تأثیر میدان الکتریکی ضعیف‌تری قرار می‌گیرد و شعلهٔ شمع تقریباً قائم باقی می‌ماند).

۱ ۱۲۲۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۸ برایندگیری از میدان‌های الکتریکی حاصل از چند بار نقطه‌ای (تست‌های ۱۲۲۲ تا ۱۲۶۹)

این بحث مشابه برایندگیری از نیروهای حاصل از چند بار می‌باشد که در خلاصه نکات (۵) مطرح شد. برای محاسبهٔ میدان الکتریکی برایند ناشی از چند بار در یک نقطهٔ دلخواه از فضا، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: یک بار مثبت آزمون را در نقطهٔ موردنظر قرار داده و جهت میدان الکتریکی هر یک از بارها در آن نقطه را تعیین می‌کنیم.

گام دوم: با کمک رابطهٔ $E = k\frac{q}{r^۲}$، میدان‌های الکتریکی هریک از بارها را در نقطهٔ موردنظر به‌دست می‌آوریم.

گام سوم: پس از محاسبهٔ بزرگی میدان‌های الکتریکی هریک از بارها در نقطهٔ موردنظر، با توجه به برداری بودن میدان الکتریکی، بردار میدان الکتریکی برایند را محاسبه می‌کنیم. (دقت شود طبق تأکید کتاب درسی پایهٔ یازدهم، تمرکز ما برای به‌دست آوردن آن دسته از برایند میدان‌های الکتریکی می‌باشد که آن میدان‌ها، هم‌راستا و یا بر هم عمود باشند.)

www.gajmarket.com

نکات مهم و کاربردی

سرعت در محاسبات

۱ در محاسبات کمی باهوش عمل کنیم. به‌طور مثال در حالت‌های زیر، اگر در حالت (۱) میدان الکتریکی در نقطهٔ A برابر E_1 باشد، در حالت (۲) که بار دو برابر شده است، میدان نیز در نقطهٔ A دو برابر شده و در حالت (۳) که فاصلهٔ نقطهٔ موردنظر نسبت به حالت (۱) تا بار نقطه‌ای دو برابر شده است، میدان $\frac{1}{4}$ برابر حالت (۱) می‌شود. بنابراین نیازی به محاسبات جدید نیست.

حالت (۱): $q_1=16\mu C$ — ۳۰cm — A

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{9\times10^9\times16\times10^{-6}}{(3\times10^{-1})^2} = 16\times10^5\ N/C$$

حالت (۲): $q_2=2q_1=32\mu C$ — ۳۰cm — A

$$E_2 = 2E_1 = 32\times10^5\ N/C$$

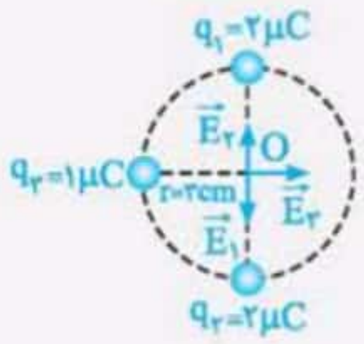
حالت (۳): $q_3=q_1=16\mu C$ — ۶۰cm — A

$$E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{4}E_1 = 4\times10^5\ N/C$$

($\frac{1}{4}$ برابر؛ $(2)^2=4$ برابر)

۲ گاهی اوقات پس از تعیین جهت میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای مختلف، برخی از میدان‌ها اثر یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و نیازی به محاسبهٔ مقدار آن میدان‌ها نیست. به‌طور مثال در شکل زیر با توجه به یکسان بودن اندازهٔ بارهای q_1 و q_2 و برابر بودن فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ O، اندازهٔ میدان‌های آن دو با هم برابر است و چون جهت آن‌ها مخالف یک‌دیگر است، بنابراین این دو میدان یک‌دیگر را خنثی می‌کنند.

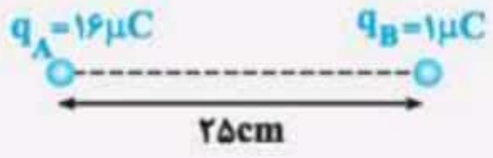
با توجه به این موضوع برای محاسبهٔ میدان برایند در نقطهٔ O تنها کافی است، میدان بار q_3 را محاسبه کنیم.



$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. $\xrightarrow{E_1=E_2}$ $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ در خلاف جهت یک‌دیگر هستند.

$$E_{\text{برایند}} = E_3 = k\frac{q_3}{r^2} = \frac{9\times10^9\times1\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2} = 10^7\ N/C$$

تمرین۱ در شکل روبه‌رو، میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای هم‌نام q_A و q_B در فاصلهٔ چند سانتی‌متری از بار q_A می‌تواند صفر شود؟



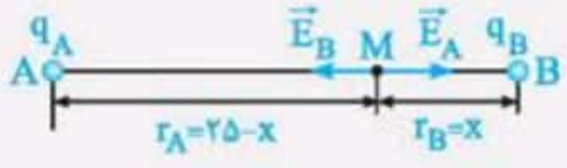
۱) ۵ ۲) ۲۰ ۳) ۴۵ ۴) ۲۵

پاسخ با پاسخ دادن به این سؤال می‌خواهیم به یک نتیجهٔ مهم برسیم که از آن در حل این‌گونه از سؤالات بسیار استفاده خواهد شد.

با توجه به شکل مقابل، اگر دو بار q_A و q_B هم‌نام (مثبت) باشند، در خارج از فاصلهٔ بین دو بار میدان هرگز نمی‌تواند صفر شود، زیرا جهت میدان الکتریکی حاصل از دو بار یکسان است و نمی‌توانند یک‌دیگر را خنثی کنند.



بنابراین میدان الکتریکی در نقطه‌ای بین فاصلهٔ دو بار الکتریکی هم‌نام می‌تواند صفر شود، زیرا میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار هم‌نام در بین فاصلهٔ بین دو بار، مختلف‌الجهت هستند و به شرط برابر بودن اندازهٔ میدان آن‌ها می‌توانند یک‌دیگر را خنثی کنند.



$$\text{برایند میدان در نقطهٔ M صفر است.} \Rightarrow E_A = E_B \Rightarrow \frac{kq_A}{(r_A)^2} = \frac{kq_B}{(r_B)^2} \Rightarrow \frac{16}{(25-x)^2} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{4}{25-x} = \frac{1}{x}$$

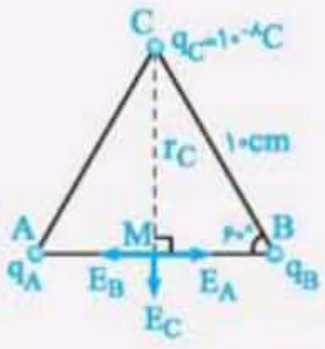
$$\Rightarrow 25-x = 4x \Rightarrow x = 5\,cm$$

بنابراین میدان الکتریکی در فاصلهٔ $20cm\ (=25-5)$ از بار q_A می‌تواند صفر شود، پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

نتیجهٔ کاربردی: در این‌گونه از سؤالات میدان الکتریکی برایند در بین فاصلهٔ دو بار الکتریکی هم‌نام و در خارج از فاصلهٔ بین دو بار الکتریکی غیرهم‌نام می‌تواند صفر شود. در هر دو حالت محل صفر شدن میدان به بار کوچک‌تر، نزدیک‌تر است.

تمرین۲ روی هریک از رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۰cm، بار الکتریکی ۱۰ نانو کولن قرار دارد. اندازهٔ میدان الکتریکی در وسط هریک از ضلع‌های این مثلث برحسب واحد SI کدام است؟ $(k = 9\times10^9\ N.m^2/C^2)$

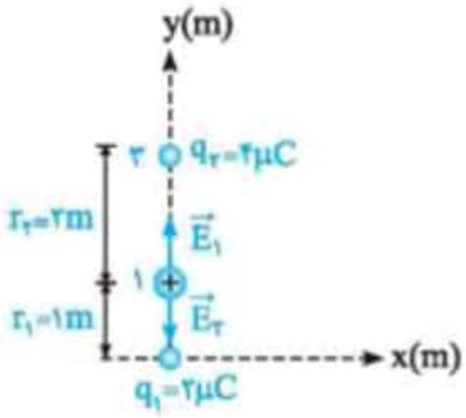
۱) صفر ۲) $1/2\times10^4$ ۳) $1/2\times10^5$ ۴) ۱۲۰۰



پاسخ در شروع حل باید دقت شود که با توجه به برابر بودن اندازهٔ بارهای q_A و q_B و یکسان بودن فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ M (وسط ضلع AB)، میدان‌های $E_A = E_B$ است. از طرفی با توجه به مختلف‌الجهت بودن آن‌ها این دو میدان اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین برای محاسبهٔ میدان الکتریکی برایند، نیازی به محاسبهٔ آن‌ها نیست و میدان در نقطهٔ M، فقط ناشی از بار q_C می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$r_C = |MC| = |BC|\sin 60^\circ = 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm = 5\sqrt{3}\times10^{-2}\ m\ ,\ q_C = 10nC = 10^{-8}C$$

$$E_C = \frac{k|q_C|}{r_C^2} = \frac{9\times10^9\times10^{-8}}{(5\sqrt{3}\times10^{-2})^2} = 1/2\times10^4\ N/C \quad \text{(گزینهٔ ۲)}$$



مطابق شکل مقابل، اندازه و جهت میدان الکتریکی حاصل از هریک از بارها را در نقطهٔ مطرح‌شده، به‌دست می‌آوریم:

$$q_1 = 2\mu C = 2\times10^{-6}\ C\ ,\ r_1 = 1m\ ,\ E_1 = ?$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}}{(1)^2} = 18\times10^3\ N/C \Rightarrow \vec{E}_1 = 18\times10^3\,\vec{j}$$

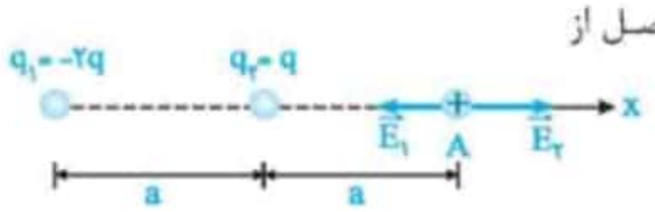
$$q_2 = 4\mu C = 4\times10^{-6}\ C\ ,\ r_2 = 2m\ ,\ E_2 = ?$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}}{(2)^2} = 9\times10^3\ N/C \Rightarrow \vec{E}_2 = -9\times10^3\,\vec{j}$$

با توجه به آن‌که میدان‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ در خلاف جهت یکدیگر هستند، بردار برایند آن‌ها برابر است با:

$$\vec{E}_{\text{برایند}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 18\times10^3\,\vec{j} + (-9\times10^3\,\vec{j}) = 9\times10^3\,\vec{j}$$

۳ ۱۲۲۳ مطابق شکل با قرار دادن بار مثبت آزمون در نقطهٔ A، می‌توان جهت میدان الکتریکی حاصل از هریک از بارهای q و $-2q$ را در این نقطه به‌دست آورد:



اکنون اندازهٔ هریک از بردارهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ را با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$q_1 = -2q\ ,\ r_1 = 2a\ ,\ E_1 = ? \Rightarrow E_1 = \frac{k\times2q}{(2a)^2} = \frac{kq}{2a^2} \quad ,\quad q_2 = q\ ,\ r_2 = a\ ,\ E_2 = ? \Rightarrow E_2 = \frac{kq}{a^2}$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده، واضح است که $E_2 > E_1$ می‌باشد، بنابراین برایند میدان حاصل از بارهای q و $-2q$ در نقطهٔ A در جهت میدان E_2 (جهت مثبت x) است و اندازهٔ آن برابر است با:

$$E_{\text{برایند}} = E_2 - E_1 = \frac{kq}{a^2} - \frac{kq}{2a^2} = \frac{kq}{2a^2}$$

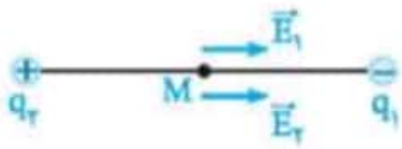
۴ ۱۲۲۴ در هریک از حالت‌های زیر، با قرار دادن بار مثبت آزمون در نقطهٔ M، برایند میدان‌های E_1 و E_2 در نقطهٔ M به سمت راست است:



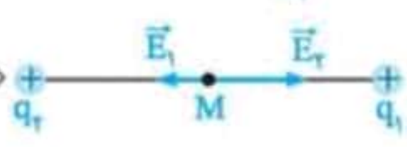
حالت اول: $\begin{cases} q_1 < 0\ ,\ q_2 < 0 \\ |q_1| > |q_2| \end{cases} \Rightarrow$



حالت دوم: $q_1 < 0\ ,\ q_2 > 0 \Rightarrow$



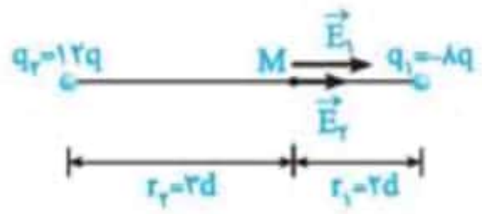
حالت سوم: $\begin{cases} q_1 > 0\ ,\ q_2 > 0 \\ |q_2| > |q_1| \end{cases} \Rightarrow$



با توجه به حالت‌های فوق، هر سه حالت امکان‌پذیر است، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

www.gajmarket.com

۳ ۱۲۲۵ اگر اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار مثبت q در فاصلهٔ d از آن برابر $E = ۳\times۱۰^{۵}\ N/C$ باشد، اندازه و جهت میدان الکتریکی هریک از بارهای مقابل در نقطهٔ M برابر است با:



می‌دانیم: $\begin{cases} E \propto q \\ E \propto \frac{۱}{r^{۲}} \end{cases} \Rightarrow$

(به سمت راست) $\frac{E_۲}{E} = \frac{q_۲}{q}\times\left(\frac{d}{r_۲}\right)^{۲} = \frac{۱۲q}{q}\times\left(\frac{d}{۳d}\right)^{۲} = ۱۲\times\frac{۱}{۹} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow E_۲ = \frac{۴}{۳}E$

(به سمت راست) $\frac{E_۱}{E} = \frac{q_۱}{q}\times\left(\frac{d}{r_۱}\right)^{۲} = \frac{۸q}{q}\times\left(\frac{d}{۲d}\right)^{۲} = ۸\times\frac{۱}{۴} = ۲ \Rightarrow E_۱ = ۲E$

اکنون با توجه به شکل فوق، می‌توان اندازهٔ برایند میدان‌های الکتریکی را در نقطهٔ M به‌دست آورد:

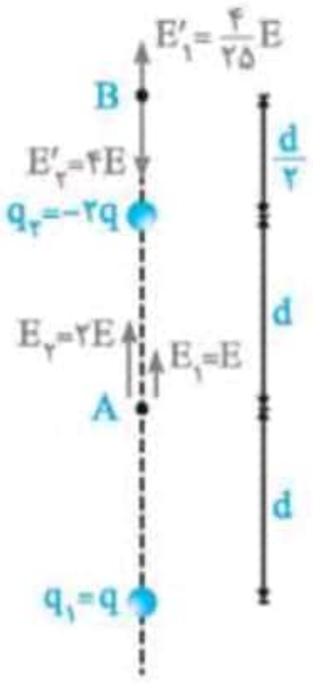
$$E_M = E_۱ + E_۲ = ۲E + \frac{۴}{۳}E = \frac{۱۰}{۳}E \xrightarrow{E=۳\times۱۰^{۵}\ N/C} E_M = \frac{۱۰}{۳}\times(۳\times۱۰^{۵}) = ۱۰^{۶}\ N/C \text{ (به سمت راست)} \Rightarrow \vec{E}_M = ۱۰^{۶}\vec{i}$$

۳ ۱۲۲۶ میدان الکتریکی برایند را در هر یک از نقاط A و B به دست می‌آوریم:

میدان الکتریکی در A: میدان الکتریکی را در فاصلهٔ d از بار q برابر E در نظر می‌گیریم. بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ d از بار $-۲q$ برابر $۲E$ است.

$$E_{\text{برایند}} = E + ۲E = ۳E$$

میدان الکتریکی در B: فاصلهٔ نقطهٔ B از بار q برابر $\frac{۵}{۲}d$ است. بنابراین میدان الکتریکی بار q در نقطهٔ B، برابر $\frac{۴}{۲۵}E$ است.



میدان بار $q_۱$ در B: $E = \frac{kq}{r^{۲}} \Rightarrow E'_۱ = \frac{۴}{۲۵}E_۱ = \frac{۴}{۲۵}E$

($\frac{۴}{۲۵}$ برابر، $(\frac{۵}{۲})^{۲} = \frac{۲۵}{۴}$ برابر)

میدان بار $q_۲$ در B: $E = \frac{kq}{r^{۲}} \Rightarrow E'_۲ = ۴E_۲ = ۴(۲E) = ۸E$

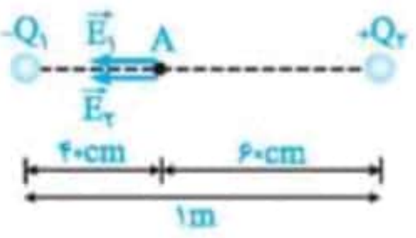
(۴ برابر، $(\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$ برابر)

$$E'_{\text{برایند}} = E'_۲ - E'_۱ = ۸E - \frac{۴}{۲۵}E = \frac{۱۹۶}{۲۵}E$$

حال در مقایسهٔ میدان الکتریکی در دو نقطه می‌توان نوشت:

$$\frac{E'_{\text{برایند}}}{E_{\text{برایند}}} = \frac{\frac{۱۹۶}{۲۵}E}{۳E} = \frac{۱۹۶}{۷۵} \xrightarrow{E_{\text{برایند}}=۷۵\ N/C} E'_{\text{برایند}} = ۱۹۶\ N/C$$

۳ ۱۲۲۷ در شکل زیر، اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از هر کدام از بارهای $-Q_۱$ و $+Q_۲$ در نقطهٔ A برابر است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \frac{kQ_۱}{r_۱^{۲}} = \frac{kQ_۲}{r_۲^{۲}} \Rightarrow \frac{kQ_۱}{(۴۰)^{۲}} = \frac{kQ_۲}{(۶۰)^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_۱}{۱۶۰۰} = \frac{Q_۲}{۳۶۰۰} \Rightarrow \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{۳۶۰۰}{۱۶۰۰} = ۲/۲۵$$

۲ ۱۲۲۸ در شکل مقابل، برایند شدت میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ در وسط خط واصل بین دو بار برابر $۱۰۰۰\ N/C$ است:

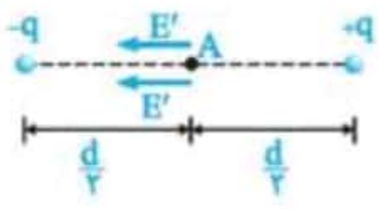


$$\Rightarrow |\vec{E}_{\text{برایند}}| = |\vec{E}_۱ + \vec{E}_۲| = ۱۰۰۰\ N/C$$

از طرفی با توجه به آن‌که $(E \propto q)$، با دو برابر شدن اندازهٔ هریک از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ میدان حاصل از آن‌ها نیز دو برابر می‌شود، بنابراین میدان برایند در نقطهٔ A برابر است با:

$$E'_{\text{برایند}} = |۲\vec{E}_۱ + ۲\vec{E}_۲| = ۲|\vec{E}_۱ + \vec{E}_۲| = ۲\times۱۰۰۰ = ۲۰۰۰\ N/C$$

۳ ۱۲۲۹ برایند میدان الکتریکی حاصل از بارها را در هر دو حالت به‌دست می‌آوریم:



حالت اول: اندازه و فاصلهٔ دو بار تا نقطهٔ A (وسط دو بار) برابر است، بنابراین اندازهٔ میدان‌های الکتریکی حاصل از هر یک از دو بار نیز در نقطهٔ A یکسان می‌باشد.

$$E_{\text{برایند}} = E' + E' = E \Rightarrow E' = \frac{E}{۲}$$

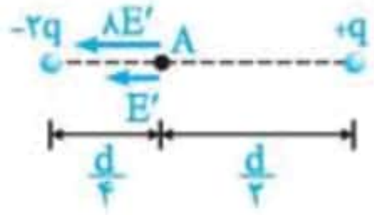
حالت دوم:

تذکر

با توجه به رابطهٔ $E = k\frac{q}{r^2}$، با نصف شدن فاصله و دو برابر شدن بار الکتریکی اندازهٔ میدان الکتریکی ۸ برابر می‌شود.

$$E \propto \frac{q}{r^2} \quad \begin{matrix} \text{۲ برابر} \\ \text{} \\ (\frac{1}{2})^2 \text{ برابر} \end{matrix} \quad \text{۸ برابر}$$

در شکل مقابل بار $-q$ را دو برابر کرده به اندازهٔ $\frac{d}{4}$ به بار $+q$ نزدیک کرده‌ایم. به عبارت دیگر بار $-q$ تبدیل به $-2q$ شده و فاصله‌اش تا نقطهٔ A نصف شده است. بنابراین با توجه به تذکر فوق، میدان الکتریکی حاصل از آن در نقطهٔ A هشت برابر می‌شود. اکنون می‌توان نوشت:



$$E'_{\text{برایند}} = 8E' + E' = 9E' = 9\left(\frac{E}{2}\right) = 4/5\,E$$

۲ ۱۲۳۰ با توجه به خلاصه نکات (۸)، میدان الکتریکی حاصل از دو بار الکتریکی **هم‌نام** در نقطه‌ای می‌تواند صفر شود که بین دو بار و نزدیک به بار با اندازهٔ کم‌تر باشد. بنابراین در شکل (الف) میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ B می‌تواند صفر شود.

میدان برایند در این نقطه می‌تواند صفر شود.



$(q \text{ و } q' \text{ هم‌نام}, |q'| > |q|)$

برای دو بار **غیرهم‌نام** نیز میدان الکتریکی برایند در نقطه‌ای می‌تواند صفر شود که خارج از فاصلهٔ بین دو بار و باز هم نزدیک به بار با اندازهٔ کوچک‌تر باشد.

میدان برایند در این نقطه می‌تواند صفر شود.



$(Q \text{ و } Q' \text{ غیرهم‌نام}, |Q| > |Q'|)$

۱ ۱۲۳۱ با توجه به تذکر بالا، می‌دانیم که میدان الکتریکی در خارج از فاصلهٔ بین دو بار **غیرهم‌نام** و نزدیک به بار کوچک‌تر می‌تواند صفر شود، بنابراین بارهای q_1 و q_2 غیرهم‌نام می‌باشند و $|q_1| < |q_2|$ می‌باشد. اکنون با توجه به آن‌که میدان در نقطهٔ C صفر است، داریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{kq_1}{(AB+BC)^2} = \frac{kq_2}{(BC)^2} \Rightarrow \frac{kq_1}{(80)^2} = \frac{kq_2}{(20)^2} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \frac{1}{16} \xrightarrow[\text{غیرهم‌نام هستند}]{q_2 \text{ و } q_1} \frac{q_2}{q_1} = -\frac{1}{16}$$

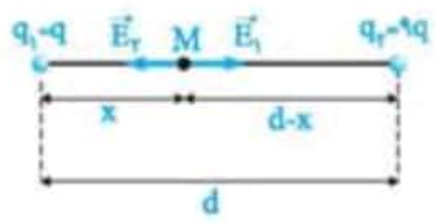
* از همان ابتدا مشخص است گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند (چرا؟).

تذکر

۱ برای پاسخ به این سؤال می‌توانستیم q_1 را منفی و q_2 را مثبت در نظر بگیریم (فرقی نمی‌کند!).

۲ جوابی که به‌دست آمد کاملاً انتظارات ما را برآورده می‌کند. یعنی میدان الکتریکی در خارج فاصلهٔ بین دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر (q_2) می‌تواند صفر باشد.

۱ ۱۲۳۲ از آن‌جایی که دو بار q و $9q$ هم‌نام هستند، بنابراین میدان الکتریکی در نقطه‌ای بین دو بار می‌تواند صفر باشد. اکنون با توجه به آن‌که میدان الکتریکی در نقطهٔ M صفر است، می‌توان نوشت:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq}{x^2} = \frac{k(9q)}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{9}{(d-x)^2}$$

$$\xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{1}{x} = \frac{3}{d-x} \Rightarrow d - x = 3x \Rightarrow x = \frac{d}{4}$$

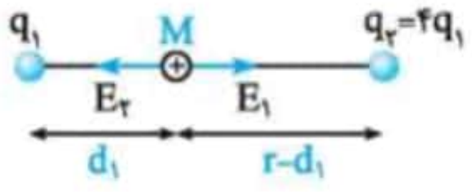
بنابراین میدان الکتریکی در فاصلهٔ $\frac{d}{4}$ از بار q صفر می‌شود.

نکته

جواب به‌دست آمده کاملاً انتظارات ما را برآورده می‌کند، یعنی میدان الکتریکی در فاصلهٔ بین دو بار هم‌نام و نزدیک به بار کوچک‌تر صفر می‌شود. به عبارتی از همان ابتدا مشخص بود که گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست‌اند (چرا؟).

www.gajmarket.com

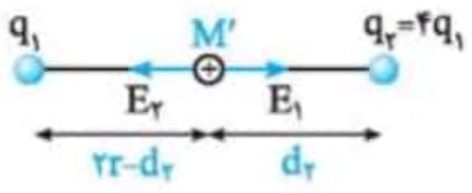
۴ ۱۲۳۳ در این سؤال با رسم یک شکل ساده (با فرض مثبت بودن بارها) برای هریک از حالت‌ها، خواستهٔ مسئله را بررسی می‌کنیم:



$$E_M = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{d_1^2} = \frac{kq_2}{(r-d_1)^2}$$

$$\frac{(r-d_1)^2}{d_1^2} = \frac{q_2}{q_1} = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{r-d_1}{d_1} = 2 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}r$$

در حالت دوم، فاصلهٔ دو بار برابر $2r$ شده و میدان در فاصلهٔ d_2 از بار q_2 صفر شده است:



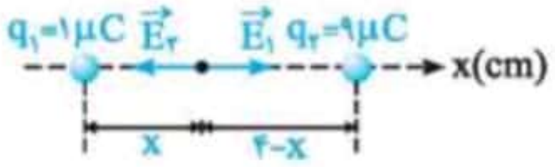
$$E_M = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{(2r-d_2)^2} = \frac{kq_2}{d_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d_2^2}{(2r-d_2)^2} = \frac{q_2}{q_1} = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{d_2}{2r-d_2} = 2 \Rightarrow d_2 = \frac{4}{3}r$$

و در نهایت نسبت $\frac{d_2}{d_1}$ در این تست، برابر ۴ است.

۳ ۱۲۳۴ در هر دو حالت محل صفر شدن میدان الکتریکی بریند را محاسبه می‌کنیم:

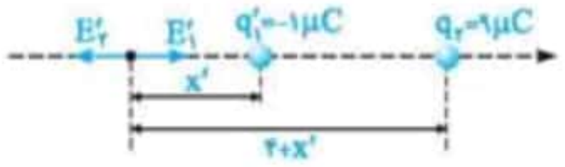
حالت اول: (دو بار هم‌نام): در این حالت میدان الکتریکی در فاصلهٔ بین دو بار صفر می‌شود (چرا؟).



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{x^2} = \frac{kq_2}{(4-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{9}{(4-x)^2} \xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{1}{x} = \frac{3}{4-x}$$

$$\Rightarrow 4 - x = 3x \Rightarrow x = 1\text{cm}$$

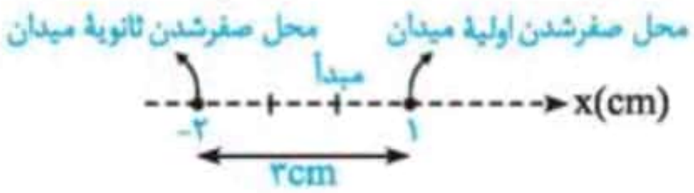
حالت دوم: (دو بار ناهم‌نام): در این حالت میدان الکتریکی بریند در خارج از فاصلهٔ بین دو بار و در سمت چپ بار $-1\mu C$ می‌تواند صفر شود، چون دو بار ناهم‌نام بوده و اندازهٔ بار q_1' کوچک‌تر از q_2 است.



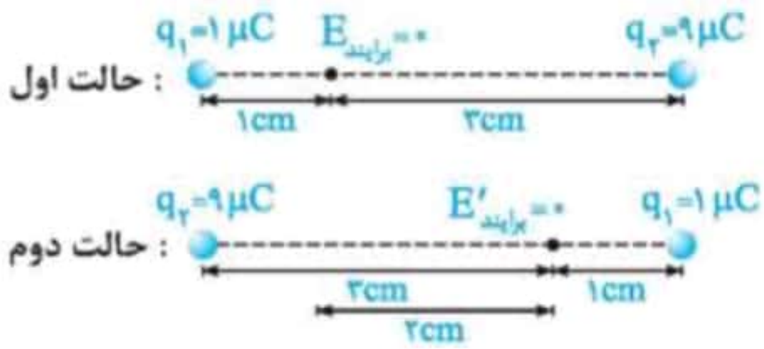
$$E_1' = E_2' \Rightarrow \frac{k|q_1'|}{(x')^2} = \frac{kq_2}{(4+x')^2} \Rightarrow \frac{1}{(x')^2} = \frac{9}{(4+x')^2} \xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{1}{x'} = \frac{3}{4+x'}$$

$$\Rightarrow 4 + x' = 3x' \Rightarrow x' = 2\text{cm}$$

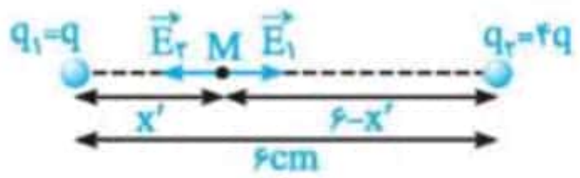
بنابراین محل صفر شدن میدان الکتریکی بریند از فاصلهٔ یک سانتی‌متری سمت راست مبدأ به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری سمت چپ آن جابه‌جا می‌شود. بنابراین محل صفر شدن میدان الکتریکی ۳ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود.



۲ ۱۲۳۵ با توجه به پاسخ سؤال قبل، میدان الکتریکی بریند در فاصلهٔ یک سانتی‌متری از بار q_1 برابر صفر می‌شود. با جابه‌جا کردن مکان دو بار الکتریکی با یک‌دیگر، باز هم میدان الکتریکی در فاصلهٔ یک سانتی‌متری از بار $1\mu C$ صفر می‌شود. با توجه به شکل مقابل که هر دو حالت را نشان می‌دهد، مشخص است که محل صفر شدن میدان الکتریکی، 2cm تغییر می‌کند.



۴ ۱۲۳۶ همان‌طور که در خلاصه نکات (۸) مطرح شد، وقتی دو بار هم‌نام در کنار یک‌دیگر قرار می‌گیرند، میدان الکتریکی در نقطه‌ای بین آن دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر صفر می‌شود.

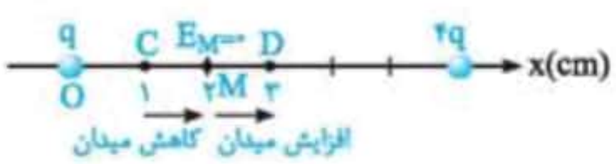


$$\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq}{(x')^2} = \frac{k \times 4q}{(6-x')^2} \Rightarrow \frac{1}{(x')^2} = \frac{4}{(6-x')^2}$$

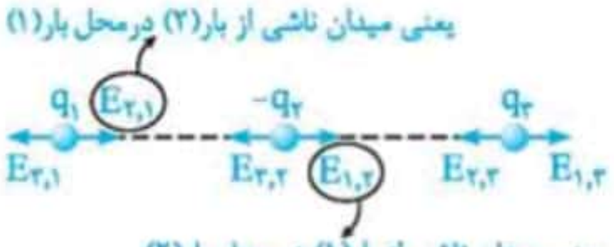
میدان در نقطهٔ M صفر است.

$$\Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{2}{6-x'} \Rightarrow 6 - x' = 2x' \Rightarrow x' = 2\text{cm}$$

بنابراین وقتی از نقطهٔ C به مختصات $x = 1\text{cm}$ به نقطهٔ D به مختصات $x = 3\text{cm}$ حرکت می‌کنیم، ابتدا بزرگی میدان کاهش یافته تا در نقطهٔ M به مختصات $x = 2\text{cm}$ به صفر برسد و سپس دوباره بزرگی میدان الکتریکی افزایش می‌یابد.



۴ ۱۲۳۷ شرط لازم برای این که میدان الکتریکی در محل هر بار، ناشی از بارهای دیگر صفر شود، این است که میدان‌های ناشی از دو بار دیگر در محل بار سوم در خلاف جهت یک‌دیگر باشند. همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنیم، در گزینهٔ (۴) این مورد صدق می‌کند.



حال در هر یک از گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) بررسی می‌کنیم که میدان‌های ناشی از دو بار در محل بار سوم هم جهت بوده و امکان صفر شدن میدان برایند در آن‌ها وجود ندارد.

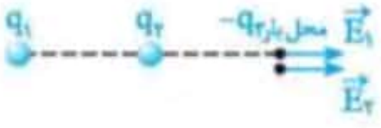
بررسی گزینهٔ (۱):



بررسی گزینهٔ (۲):



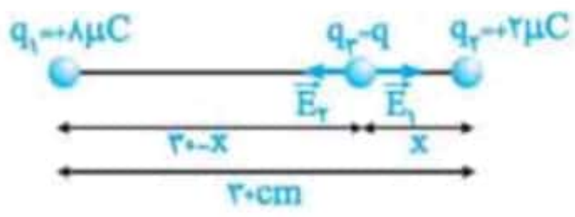
بررسی گزینهٔ (۳):



تذکر

دقت کنید که جهت میدان ناشی از بار (۱) در محل بار (۲)، به علامت بار دوم بستگی ندارد، ولی برای در نظر گرفتن نیروی وارد بر دو بار، علامت هر دو بار اهمیت پیدا می‌کند.

۱ ۱۲۳۸ **گام اول:** با توجه به آن‌که بارهای $+۲\mu C$ و $+۸\mu C$ هم‌نام هستند، بنابراین بار الکتریکی q را در داخل فاصلهٔ بین دو بار قرار می‌دهیم تا میدان الکتریکی در محل q صفر شود. اکنون می‌توان نوشت:

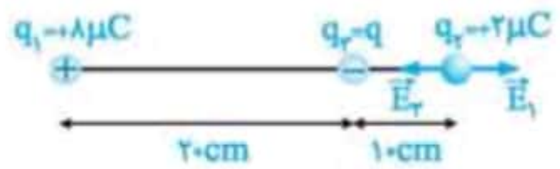


$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{۸}{(۳۰-x)^2} = \frac{۲}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{(۳۰-x)^2} = \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{x}{۳۰-x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۳۰ - x \Rightarrow x = ۱۰cm$$

گام دوم: با توجه به صورت سؤال، اندازهٔ بار q را باید طوری تعیین کنیم که میدان الکتریکی در محل بار $q_2 = +۲\mu C$ نیز صفر شود.

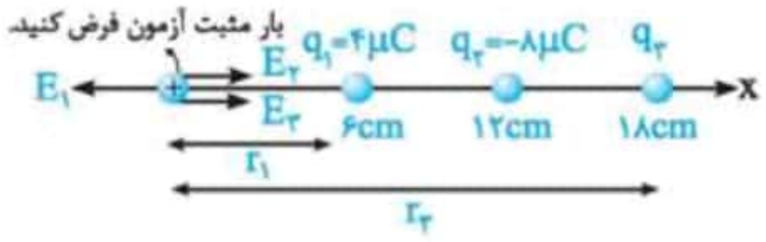
می‌دانیم که شرط لازم برای صفر شدن میدان در محل q_2 آن است که بارهای $q_3 = q$ و $q_1 = +۸\mu C$ ناهم‌نام باشند (چرا؟)، بنابراین بار الکتریکی q منفی است. اکنون می‌توان نوشت:



$$E_1 = E_3 \Rightarrow \frac{kq_1}{(r_1)^2} = \frac{kq_3}{(r_3)^2} \Rightarrow \frac{۸}{(۲۰+۱۰)^2} = \frac{|q|}{۱۰^2} \Rightarrow \frac{۸}{۹۰۰} = \frac{|q|}{۱۰۰} \Rightarrow q = -\frac{۸}{۹}\mu C$$

دقت کنید با قرار دادن بار q_3 در محل به‌دست آمده، میدان الکتریکی ناشی از دو بار q_2 و q_3 در محل بار q_1 نیز صفر می‌شود.

۲ ۱۲۳۹ با توجه به شکل زیر، اگر میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 را در مبدأ مختصات برابر E_1 در نظر بگیریم، میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 در مبدأ مختصات در خلاف جهت آن است (چرا؟) از طرفی چون نسبت $\frac{q_1}{r_1^2}$ بزرگ‌تر از $\frac{q_2}{r_2^2}$ است، میدان الکتریکی E_1 از E_2 بزرگ‌تر است و E_3 باید به سمت راست باشد تا در نهایت میدان الکتریکی در مبدأ صفر شود.



$$\vec{E}_T = ۰ \Rightarrow E_1 = E_2 + E_3 \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2} + \frac{kq_3}{r_3^2}$$

$$\frac{۴}{۶^2} = \frac{۸}{۱۲^2} + \frac{q_3}{۱۸^2} \xrightarrow{\text{ساده کردن } ۶^2} ۴ = \frac{۸}{۲^2} + \frac{q_3}{۳^2} \rightarrow |q_3| = ۱۸\mu C$$

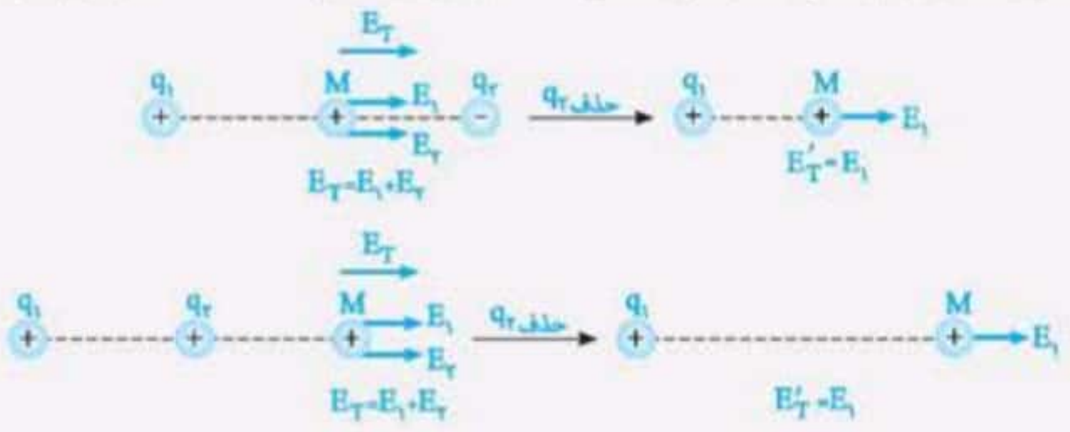
از طرفی چون میدان الکتریکی بار q_3 در مبدأ به سمت راست است، بنابراین علامت بار q_3 منفی است زیرا بار مثبت آزمون را جذب کرده است $(q_3 = -۱۸\mu C)$.

۴ ۱۲۴۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ — **تحلیل یک موضوع مفهومی** — (تست‌های ۱۲۴۰ تا ۱۲۴۳)

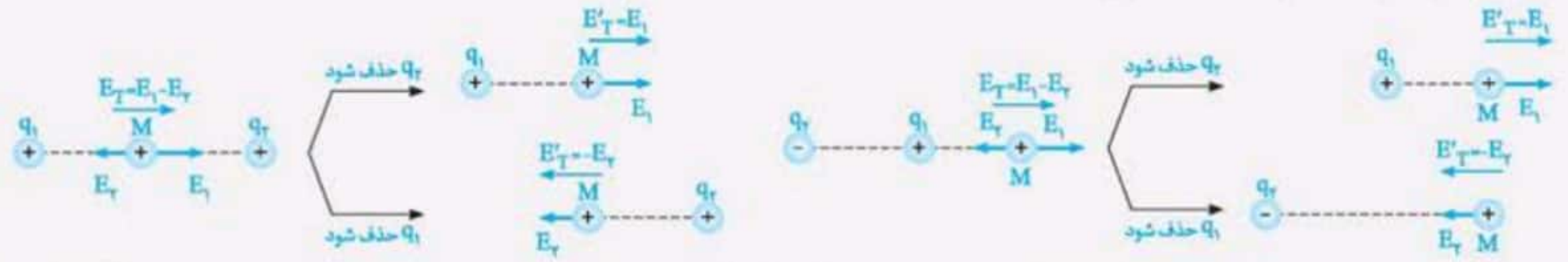
فرض کنید دو بار الکتریکی q_1 و q_2 در یک نقطه (مانند M) میدان‌های الکتریکی E_1 و E_2 را تولید کرده‌اند، در این گونه سؤالات حالت‌های مهم زیر قابل بررسی است:

حالت اول: اگر میدان‌های الکتریکی E_1 و E_2 هم‌جهت باشند، بزرگی میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ M برابر $E_1 + E_2$ است و با حذف یکی از بارها، میدان الکتریکی در نقطهٔ M تغییر جهت نمی‌دهد و مقدارش کاهش می‌یابد. به‌طور مثال به شکل‌های مقابل توجه کنید:

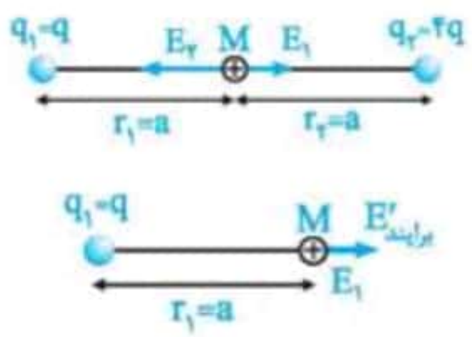


www.gajmarket.com

حالت دوم: اگر میدان‌های الکتریکی E_1 و E_2 مختلف‌الجهت باشند، میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ M از تفاضل میدان‌های E_1 و E_2 به‌دست می‌آید. حال اگر به‌طور مثال $E_2 > E_1$ باشد، میدان برایند برابر $E_2 - E_1$ است. در این حالت اگر q_2 حذف شود (ذره‌ای که میدان الکتریکی کوچک‌تر یعنی E_2 را دارد) میدان برایند نه تنها تغییر جهت نداده بلکه بزرگ‌تر نیز می‌شود (برابر E_1 می‌شود). اما اگر q_1 را حذف کنیم، میدان برایند تغییر جهت داده و برابر $-E_2$ می‌شود (علامت منفی یعنی برایند در خلاف جهت حالت اول می‌شود):



قبل از حذف بار بزرگ‌تر، برایند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار را در وسط فاصلهٔ آن‌ها به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} E_2 = \dfrac{kq_2}{r_2^2} = \dfrac{k(4q)}{a^2} \\ E_1 = \dfrac{kq_1}{r_1^2} = \dfrac{kq}{a^2} \end{cases} \Rightarrow E_{\text{برایند}} = E_2 - E_1 = \frac{4kq}{a^2} - \frac{kq}{a^2} = \frac{3kq}{a^2}$$

از طرفی، میدان الکتریکی در نقطهٔ M پس از حذف بار بزرگ‌تر برابر است با:

$$E'_{\text{برایند}} = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq}{a^2}$$

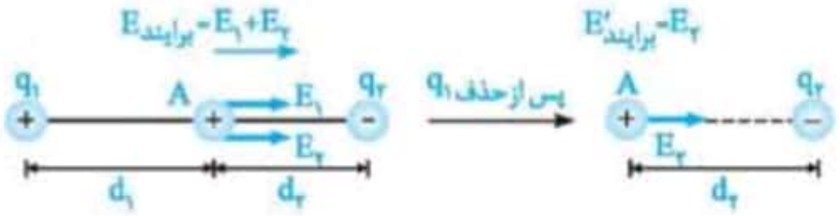
اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_{\text{برایند}} = \dfrac{3kq}{a^2} \\ E'_{\text{برایند}} = \dfrac{kq}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{E'_{\text{برایند}}}{E_{\text{برایند}}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{E_{\text{برایند}} = 300\,N/C} E'_{\text{برایند}} = 100\,N/C$$

از طرفی در این سؤال میدان برایند در نقطهٔ M با حذف بار بزرگ‌تر تغییر جهت می‌دهد و میدان برایند در نقطهٔ موردنظر برابر $+100\,\vec{i}$ می‌شود (در حالت اول برابر $-300\,\vec{i}$ بوده است).

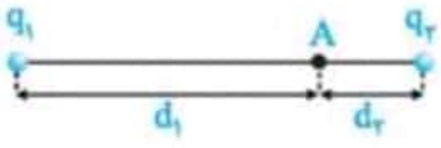
۳ ۱۲۴۱ با حذف بار q_1، جهت میدان عوض نشده و اندازهٔ آن کوچک‌تر شده است. بنابراین بارهای q_1 و q_2 ناهم‌نام بوده‌اند و میدانشان در A هم‌جهت است. از طرفی می‌توان نوشت:

به‌طور مثال :



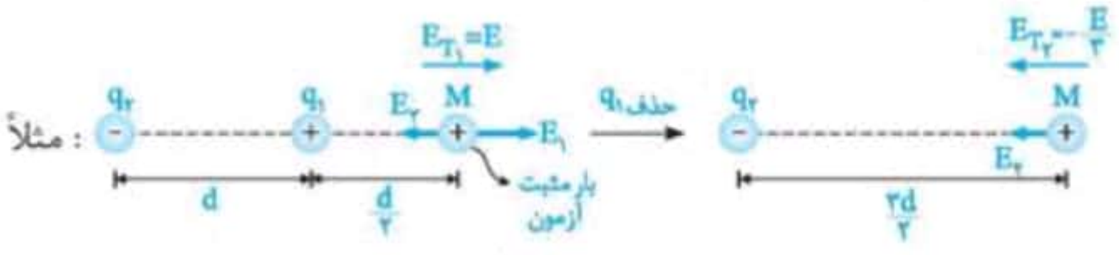
$$\begin{cases} q_1 \text{ میدان برایند قبل از حذف} : E_1 + E_2 = E \\ q_1 \text{ میدان برایند بعد از حذف} : E_2 = \dfrac{E}{2} \end{cases} \Rightarrow E_1 = \frac{E}{2} \Rightarrow E_2 = \frac{E}{2} \Rightarrow E_1 = E_2$$

با توجه به رابطهٔ فوق، اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطهٔ A برابر می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{d_1^2} = \frac{kq_2}{d_2^2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \xrightarrow[d_1 > d_2]{\text{با توجه به شکل}} \frac{q_1}{q_2} > 1 \Rightarrow |q_1| > |q_2|$$

۱ ۱۲۴۲ با حذف یکی از بارها، میدان الکتریکی از $\vec{E}$ به $-\frac{\vec{E}}{3}$ تبدیل شده است، این موضوع یعنی میدان الکتریکی تغییر جهت داده است و میدان‌های الکتریکی دو بار در نقطهٔ M لزوماً مختلف‌الجهت هستند و باری که میدان بزرگ‌تر داشته است را حذف کرده‌ایم (به همین دلیل میدان برایند تغییر جهت داده است). در این حالت دو بار لزوماً مختلف‌العلامت هستند که میدانشان در M مختلف‌الجهت شده است.



$$\begin{cases} E_{T_1} = E_1 - E_2 = E \\ E_{T_2} = -E_2 = -\dfrac{E}{3} \end{cases} \Rightarrow E_1 + \overbrace{\left(-\frac{E}{3}\right)}^{-E_2} = E \Rightarrow E_1 = \frac{4}{3}E$$

اکنون با توجه به مقادیر E_1 و E_2 می‌توان نوشت:

$$E_1 = 4E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} = 4\frac{kq_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{kq_1}{(\frac{d}{2})^2} = \frac{4kq_2}{(d+\frac{d}{2})^2} \Rightarrow \frac{4kq_1}{d^2} = \frac{16kq_2}{9d^2} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

با توجه به آن‌که بردارهای میدان ناشی از q_1 و q_2 در نقطه‌ای خارج از دو بار مختلف‌الجهت می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت که بارهای q_1 و q_2 ناهم‌نام هستند، بنابراین $\frac{q_2}{q_1} = -\frac{9}{4}$ می‌باشد.

۳ ۱۲۴۳ با دو برابر کردن بار q_2، میدان الکتریکی از $4\vec{i}$ به $-12\vec{i}$ تبدیل شده است، این موضوع یعنی میدان الکتریکی تغییر جهت داده است و میدان‌های الکتریکی دو بار در نقطهٔ A، لزوماً مختلف الجهت هستند. بنابراین در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

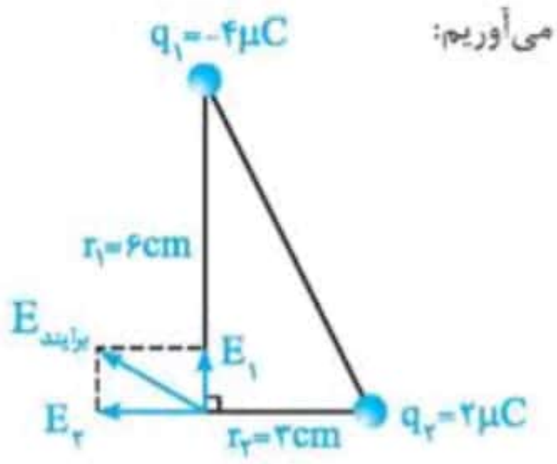
حالت اول: q_1 ---r--- q_2 ---r--- E_2 A E_1 → (با دو برابر کردن q_2) → حالت دوم: q_1 ---------- $2q_2$ --- $2E_2$ A E_1

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: E_{T_1} = E_1 - E_2 = 4 \\ \text{حالت دوم}: E_{T_2} = 2E_2 - E_1 = 12 \end{cases} \Rightarrow E_2 = 16\,N/C \ , \ E_1 = 20\,N/C$$

حال با توجه به مقادیر E_1 و E_2 می‌توان نوشت:

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left|\frac{q_2}{q_1}\right| \times (\frac{r_1}{r_2})^2 \Rightarrow \frac{16}{20} = \left|\frac{q_2}{q_1}\right| \times (\frac{2r}{r})^2 \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = -\frac{1}{5}$$

۳ ۱۲۴۴ ابتدا اندازه و جهت میدان‌های الکتریکی ناشی از هر یک از بارهای q_1 و q_2 را در نقطهٔ O به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{9\times10^9 \times 4\times10^{-6}}{(6\times10^{-2})^2} = 10^7\,N/C\ (\uparrow) \\ E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2} = 2\times10^7\,N/C\ (\leftarrow) \end{cases}$$

$$E_{\text{برایند}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(10^7)^2 + (2\times10^7)^2} = \sqrt{1+4}\times10^7 = \sqrt{5}\times10^7\,N/C$$

۴ ۱۲۴۵

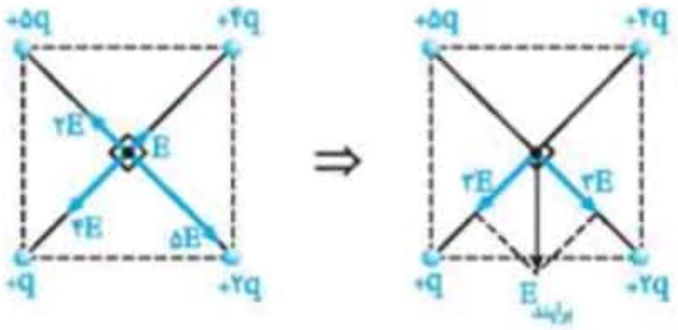
تذکر

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} E \propto q \\ E \propto \frac{1}{r^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{فاصله تا مرکز یکسان است.}]{\text{برای هر ۴ بار الکتریکی}} E \propto q$$

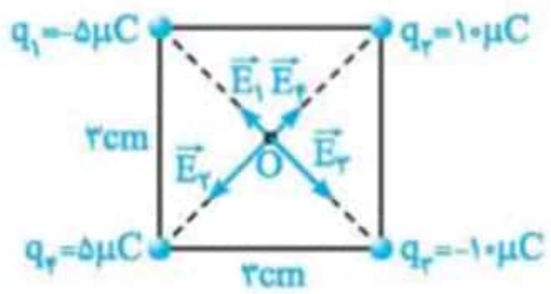
پس می‌توان گفت که اندازهٔ میدان الکتریکی هریک از بارها در مرکز مربع فقط با اندازهٔ بار متناسب است.

می‌دانیم که شدت میدان الکتریکی حاصل از بار q در مرکز مربع برابر E فرض شده است. بنابراین با توجه به تذکر فوق شدت میدان حاصل از هریک از بارهای $2q$، $4q$ و $5q$ به‌ترتیب برابر $2E$، $4E$ و $5E$ می‌باشد. اکنون برایند میدان‌های الکتریکی حاصل از ۴ بار در مرکز مربع برابر است با:



$$E_{\text{برایند}} = \sqrt{(3E)^2 + (3E)^2} = 3\sqrt{2}E$$

۲ ۱۲۴۶ ابتدا با قرار دادن یک بار مثبت آزمون در نقطهٔ O، میدان الکتریکی حاصل از هریک از بارها در مرکز مربع را به‌دست می‌آوریم. به عنوان یک روش ساده و سریع، اگر اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطهٔ O برابر E' باشد، داریم:

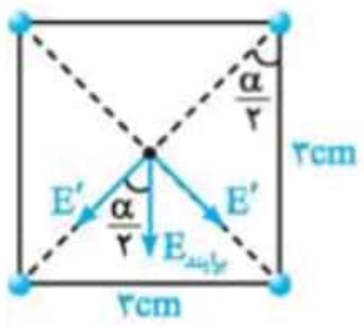


$$E = \frac{kq}{r^2} \xrightarrow{E \propto q} \begin{cases} E_1 = E' \\ E_2 = 2E' \\ E_3 = 2E' \\ E_4 = E' \end{cases}$$

فاصلهٔ بارها تا نقطهٔ O یکسان است.

www.gajmarket.com

چون دو میدان E_1 و E_3 در خلاف جهت یک‌دیگر و دو میدان E_2 و E_4 در خلاف جهت یک‌دیگر هستند، مطابق شکل زیر داریم:



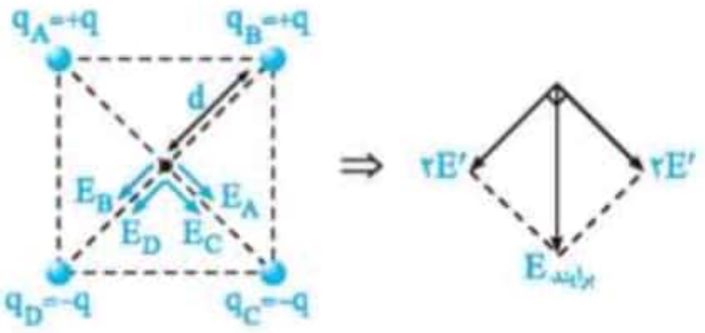
$$\begin{cases} E_{\text{برایند}} = \sqrt{E'^2 + E'^2} = \sqrt{2}E' \\ E' = E_1 = \dfrac{kq_1}{\left[\frac{1}{2}(\text{قطر مربع})\right]^2} = \dfrac{9\times10^9\times5\times10^{-6}}{\left(\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times10^{-2}\right)^2} = \dfrac{9\times10^9\times5\times10^{-6}}{\frac{1}{4}\times9\times2\times10^{-4}} = 10^8\ N/C \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{\text{برایند}} = \sqrt{2}E' = \sqrt{2}\times10^8\ N/C$$

از طرفی مطابق شکل فوق، درمی‌یابیم که جهت میدان الکتریکی برایند به سمت پایین است.

۳ ۱۲۴۷ میدان الکتریکی برایند را در هر دو حالت به‌دست می‌آوریم:

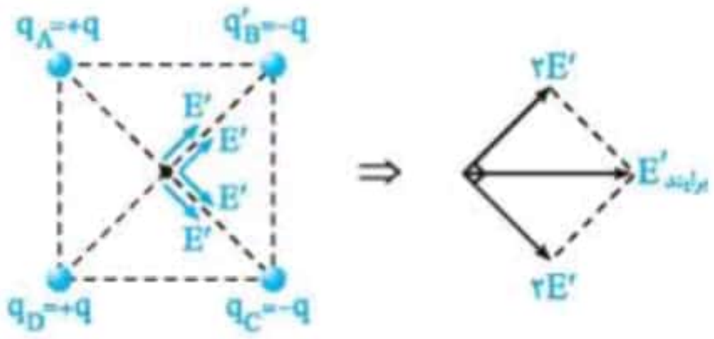
حالت اول: با توجه به برابر بودن اندازهٔ هر یک از بارها با هم و یکسان بودن فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز مربع، اندازهٔ میدان الکتریکی هر یک از ۴ بار در مرکز مربع، با هم برابر است.



$$E_A = E_B = E_C = E_D = E' = \frac{kq}{d^2}$$

$$E_{\text{برایند}} = E = \sqrt{(2E')^2 + (2E')^2} = 2\sqrt{2}E'$$

حالت دوم: با قرینه شدن بارهای واقع در نقاط B و D، جهت میدان‌های هر یک از آن‌ها برعکس شده، ولی اندازهٔ میدان‌های هر یک تغییری نمی‌کند، چون اندازهٔ بارها و فاصله‌ها عوض نشده است.



$$E'_{\text{برایند}} = \sqrt{(2E')^2 + (2E')^2} = 2\sqrt{2}E'$$

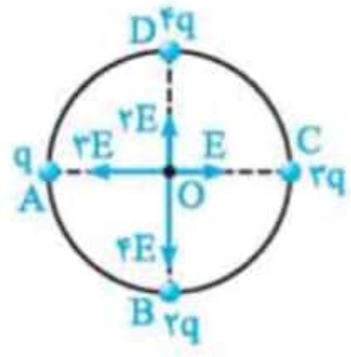
بنابراین در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$E'_{\text{برایند}} = E_{\text{برایند}} \xrightarrow[\text{طبق صورت سؤال}]{E_{\text{برایند}} = E} E'_{\text{برایند}} = E$$

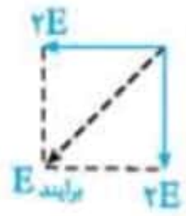
بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی برایند در مرکز مربع ثابت مانده ولی جهت آن ۹۰ درجه به صورت پادساعتگرد می‌چرخد.

سؤال **اگر در این سؤال، علامت بارهای واقع در نقاط C و D قرینه می‌شد، چه اتفاقی رخ می‌داد؟**

۲ ۱۲۴۸ در شکل مقابل با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$، می‌توان نوشت:



$$E = \frac{kq}{r^2} \xrightarrow{r_A = r_B = r_C = r_D} E \propto q \Rightarrow \begin{cases} E_A = E \\ E_B = 2E \\ E_C = 3E \\ E_D = 4E \end{cases}$$



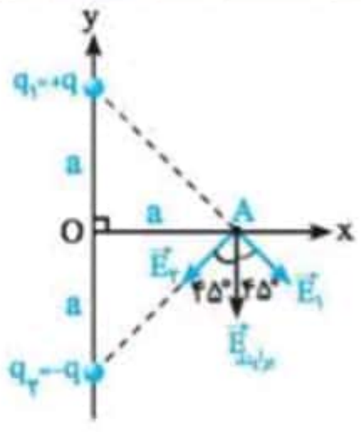
بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی برایند حاصل از چهار بار الکتریکی در مرکز دایره به‌صورت زیر است:

$$E_{\text{برایند}} = \sqrt{(2E)^2 + (2E)^2} = 2\sqrt{2}E$$

تذکر

دقت شود در حل این سؤال بار q مثبت فرض شده است. اگر بار q منفی فرض می‌شد، تمامی بارها منفی می‌شوند. در این صورت اندازهٔ بردار برایند در مرکز دایره همان $2\sqrt{2}E$ می‌شد، ولی جهت آن نسبت به این حالت، برعکس به دست می‌آمد.

۴ ۱۲۴۹ ابتدا با در نظر گرفتن یک بار مثبت آزمون در نقطهٔ A، میدان‌های الکتریکی ناشی از دو بار q+ و q- را با توجه به علامت آن‌ها در نقطهٔ A رسم می‌کنیم. در شکل مقابل، $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ می‌باشد (چرا؟)، بنابراین برایند $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ روی نیمساز این دو بردار قرار می‌گیرد و برایند $\vec{E}$ موازی محور y و عمود بر محور x می‌باشد و جهت آن به سمت پایین است.



۴ ۱۲۵۰

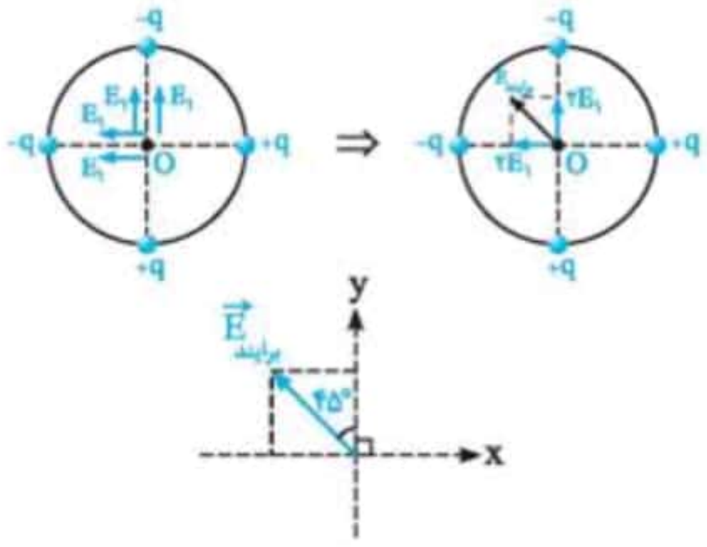
تذکر

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} E \propto q \\ E \propto \frac{1}{r^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{فاصله تا مرکز یکسان است}]{\text{برای هر ۴ بار الکتریکی}} E \propto q$$

پس می‌توان گفت که اندازهٔ میدان الکتریکی هریک از بارها در مرکز دایره، فقط با اندازهٔ بار متناسب است.

در شکل مقابل، یک بار مثبت آزمون در مرکز دایره فرض می‌کنیم و با توجه به اندازه و علامت هریک از بارها، میدان الکتریکی حاصل از هر بار الکتریکی را در مرکز دایره رسم می‌کنیم:



در ادامه با توجه به شکل مقابل، بردار برایند میدان‌های الکتریکی حاصل از هر ۴ بار الکتریکی در مرکز دایره بر روی نیمساز ربع دوم دستگاه مختصات قرار گرفته و با جهت مثبت محور x زاویهٔ $\frac{3\pi}{4}$ می‌سازد.

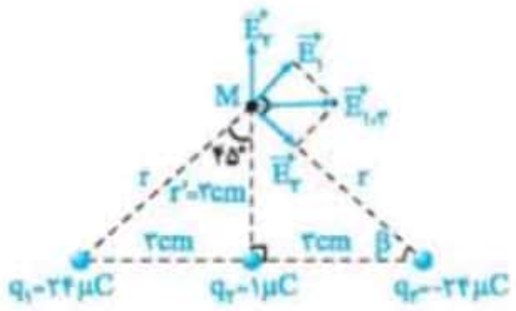
$$\text{زاویهٔ برایند } \vec{E} \text{ با جهت مثبت محور } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$E_{\text{برایند}} = \sqrt{(2E_1)^2 + (2E_1)^2} = 2\sqrt{2}E_1$$

سؤال **اندازهٔ میدان برایند در مرکز دایره چند برابر E_1 است؟**

پاسخ

۱ ۱۲۵۱ اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از دو بار q_1 و q_3 در نقطهٔ M با هم برابر است (چرا؟) و مقدار آن برابر است با:



$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}\,cm = 3\sqrt{2} \times 10^{-2}\,m$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_3| = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 24 \times 10^{-6}}{(3\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = 12 \times 10^7\,N/C$$

برایند دو بردار عمود بر هم $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$، به‌صورت افقی و به سمت راست می‌باشد (چرا؟)، بنابراین با استفاده از شکل فوق، برایند این دو بردار برابر است با:

$$|\vec{E}_{1,3}| = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} \xrightarrow{E_1 = E_3} |\vec{E}_{1,3}| = \sqrt{2}\,|\vec{E}_1| = 12\sqrt{2} \times 10^7\,N/C$$

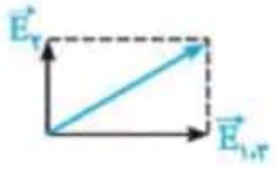
از طرفی اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 در نقطهٔ M برابر است با:

$$|\vec{E}_2| = \frac{kq_2}{r'^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 10^7\,N/C$$

بردار $\vec{E}_2$ بر $\vec{E}_{1,3}$ عمود می‌باشد. بنابراین برای به‌دست آوردن بردار برایند کل می‌توان نوشت:

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_{1,3}|^2 + |\vec{E}_2|^2} = \sqrt{(12\sqrt{2} \times 10^7)^2 + (10^7)^2} = \sqrt{288 + 1} \times 10^7 = \sqrt{289} \times 10^7 = 17 \times 10^7\,N/C$$

دقت شود که برایند $E_{1,3}$ و E_2، به‌صورت مقابل می‌باشد:

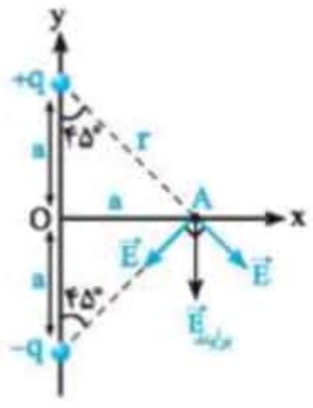


بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

۴ ۱۲۵۲ ابتدا باید دقت شود که با قرار دادن یک بار مثبت آزمون فرضی در نقطهٔ A، میدان ناشی از بارهای $+2q$ یک‌دیگر را خنثی می‌کنند (چرا؟) و تنها میدان ناشی از بارهای $+q$ و $-q$ در A حائز اهمیت است.



در ادامه برایند میدان‌های الکتریکی ناشی از دو بار باقی‌مانده در نقطهٔ A برابر است با:



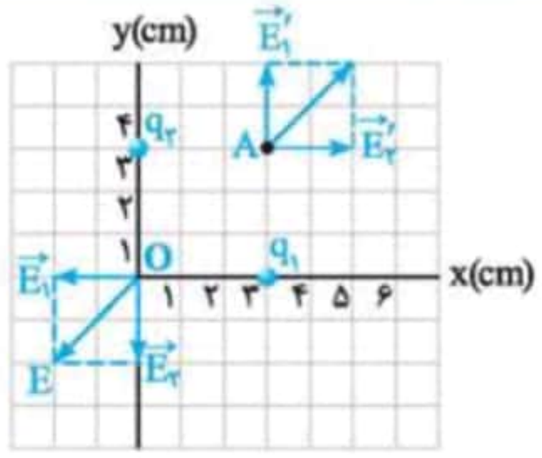
$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a \quad , \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$$

$$E_{\text{برایند}} = \sqrt{E^2 + E^2} = \sqrt{2}E \Rightarrow E_{\text{برایند}} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$$

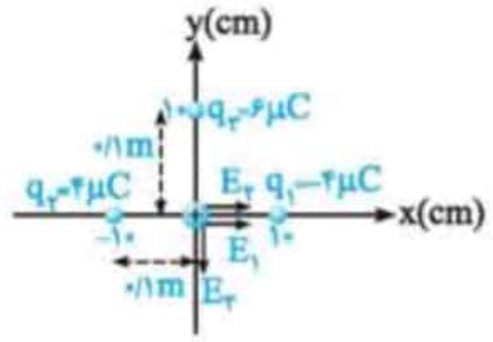
www.gajmarket.com

۱۲۵۳ ۲ در نقطهٔ O میدان‌های الکتریکی مانند شکل مقابل می‌شوند، دقت شود چون بارها با هم برابر و فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ O نیز یکسان است، پس اندازهٔ میدان‌ها در این نقطه با هم برابرند.



از سوی دیگر، همین میدان‌ها در A نیز وجود دارند، با این تفاوت که جهت آن‌ها تغییر کرده است (به فاصله‌ها بر روی شکل توجه کنید) و در نهایت میدان الکتریکی خالص در A، برابر میدان الکتریکی در نقطهٔ O و در خلاف جهت آن است $(\vec{E}_A = -\vec{E})$.

۱۲۵۴ ۳ برای محاسبهٔ بردار میدان الکتریکی در مبدأ مختصات، یک بار مثبت فرضی در آن‌جا قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در مبدأ مختصات هم جهت و در راستای محور x می‌باشند، بنابراین میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها با هم جمع می‌شود.



$$\vec{E}_x = \vec{E}_2 + \vec{E}_1 = \left(\frac{kq_2}{r_2^2} + \frac{kq_1}{r_1^2}\right)\vec{i} = 2\left(\frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}}{(0/1)^2}\right)\vec{i} = 7/2\times10^6\,\vec{i}$$

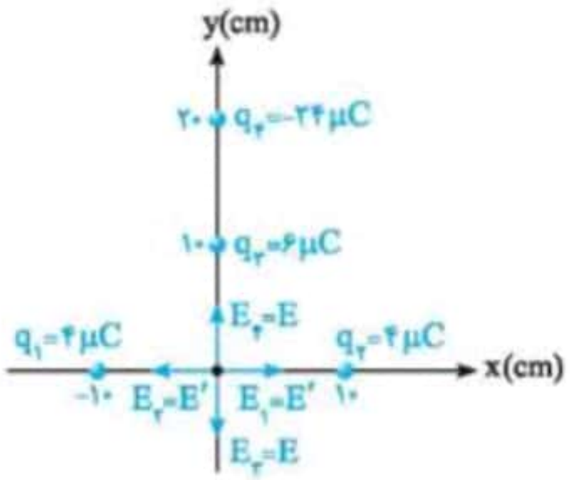
هم‌چنین میدان الکتریکی ناشی از بار q_3 در مبدأ مختصات در خلاف جهت محور y است و داریم:

$$\vec{E}_y = \left(\frac{kq_3}{r_3^2}\right)(-\vec{j}) = \left(\frac{9\times10^9\times6\times10^{-6}}{(0/1)^2}\right)(-\vec{j}) = -5/4\times10^6\,\vec{j}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = (7/2\vec{i} - 5/4\vec{j})\times10^6\ \frac{N}{C}$$

۱۲۵۵ ۴ با توجه به شکل، بار الکتریکی q_1 و q_2 یکسان و فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ مختصات برابر است. بنابراین میدان‌های آن‌ها هم‌دیگر را خنثی می‌کند $(E_1 = E_2 = E')$. میدان بار q_3 را در مبدأ مختصات برابر E در نظر بگیریم. حال برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از بار q_4 می‌توان نوشت:



$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow E_3 = E_4 = E \Rightarrow$$

(q_4 برابر، r^2 برابر $(2)^2 = 4$)

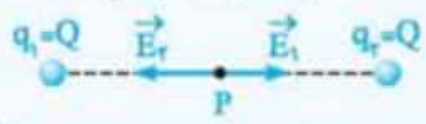
E_3 و E_4 در مبدأ هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند.

بنابراین دو بردار میدان الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ و هم‌چنین دو بردار میدان الکتریکی $\vec{E}_3$ و $\vec{E}_4$ هم‌دیگر را خنثی می‌کنند و میدان الکتریکی برایند در مبدأ مختصات برابر صفر می‌شود.

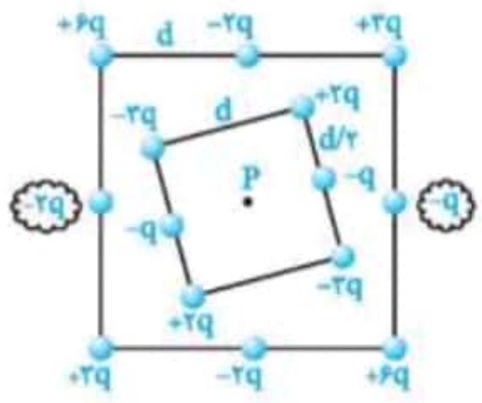
۱۲۵۶ ۴

تذکر

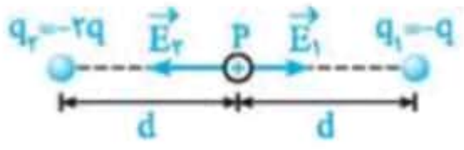
میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار هم‌اندازه و هم‌نام که به یک فاصله از نقطهٔ P و روبه‌روی یک‌دیگر قرار گرفته‌اند مختلف‌الجهت بوده و در نتیجه یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و برایند آن‌ها صفر است.



با توجه به تذکر فوق، در شکل زیر فقط میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای $-q$ و $-2q$ که مشخص شده‌اند باقی می‌ماند و بقیهٔ میدان‌ها یک‌دیگر را خنثی می‌کنند.



$\Rightarrow$

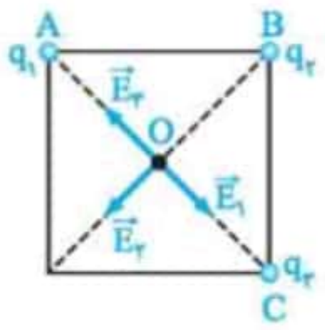


$$E_1 = E = \frac{kq}{d^2} \quad \text{و} \quad E_2 = 2E_1 = 2E \quad \text{(چون بار } q_2 \text{ دو برابر } q_1 \text{ است.)}$$

$$\Rightarrow E_{\text{برایند}} = E_2 - E_1 = 2E_1 - E_1 = E_1 \Rightarrow E_{\text{برایند}} = \frac{kq}{d^2}$$

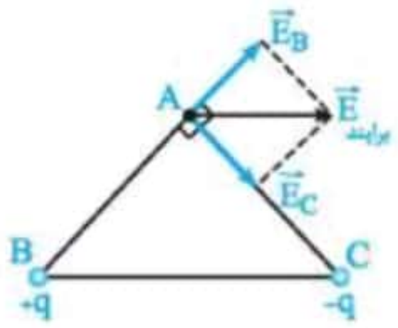
با توجه به جهت بردارهای رسم‌شده، بردار برایند در جهت بردار بزرگ‌تر، یعنی در جهت بردار $\vec{E}_2$ می‌باشد. بنابراین جهت آن به سمت چپ (←) است.

۳ ۱۲۵۷ با توجه به این‌که می‌خواهیم میدان الکتریکی برایند در مرکز مربع در راستای OB قرار گیرد، بنابراین باید بار $q_۳$ را در محل C قرار دهیم تا میدان $q_۱$ را خنثی کرده و میدان برایند در راستای OB قرار گیرد. از آن‌جایی که با قرار دادن بار الکتریکی $q_۳$ در C، میدان الکتریکی کل در راستای OB می‌شود، واضح است که میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۳$ در نقطهٔ O یک‌دیگر را خنثی کرده‌اند. اکنون می‌توان نوشت:



$$E_۱ = E_۳ \xrightarrow[\text{نقطهٔ O یکسان است}]{\text{فاصلهٔ هر دو بار تا}} q_۱ = q_۳$$

۴ ۱۲۵۸ ابتدا قبل از خنثی شدن یکی از بارها، اندازهٔ میدان الکتریکی را در نقطهٔ A به‌دست می‌آوریم. با توجه به آن‌که در شکل مقابل $AB = AC$ است، پس اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از دو بار در نقطهٔ A یکسان می‌باشد و می‌توان نوشت:



$$AB = AC \ , \ |+q| = |-q| \Rightarrow E_B = E_C = E$$

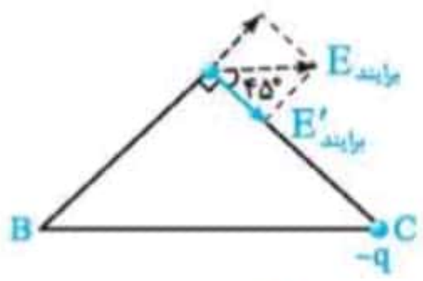
$$E_{برایند} = \sqrt{E^۲ + E^۲} = \sqrt{۲}E$$

با برداشتن یکی از بارها (برای مثال بار الکتریکی q_C) اندازهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ A با اندازهٔ میدان الکتریکی بار دیگر در آن نقطه برابر می‌شود، یعنی:

$$E'_{برایند} = E_B = E \Rightarrow \frac{E'_{برایند}}{E_{برایند}} = \frac{E}{\sqrt{۲}E} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

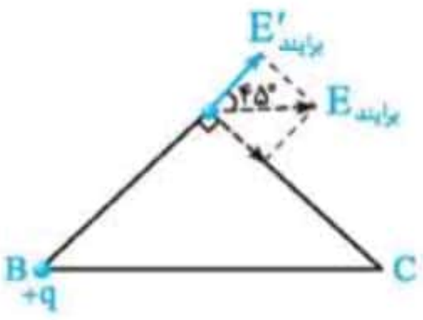
۴ ۱۲۵۹ با توجه به این‌که مشخص نیست کدام‌یک از بارهای قرار گرفته در نقاط B و C حذف می‌شوند، بنابراین دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: بار q_B حذف شود $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ بردار میدان الکتریکی برایند، ۴۵ درجه ساعتگرد می‌چرخد.

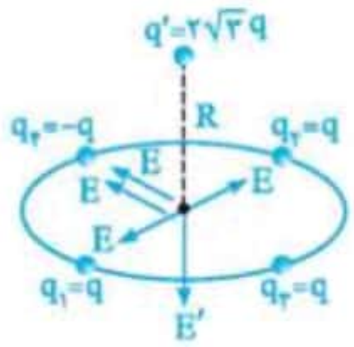
حالت دوم: بار q_C حذف شود $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ بردار میدان الکتریکی برایند، ۴۵ درجه پادساعتگرد می‌چرخد.

بنابراین هر دو گزینهٔ (۱) و (۲) امکان‌پذیر است.

۲ ۱۲۶۰ میدان الکتریکی حاصل از بار q در مرکز دایره را برابر E در نظر می‌گیریم. میدان‌های الکتریکی ناشی از دو بار $q_۱$ و $q_۲$ که روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند، یک‌دیگر را خنثی می‌کنند (چرا؟). بنابراین می‌توان نوشت:



$$E = k\frac{q}{R^۲}$$

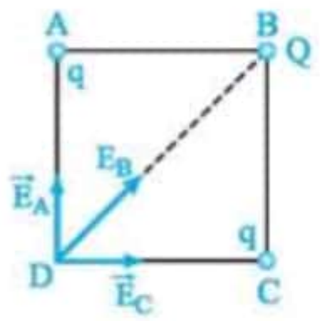
$$E' = \frac{kq'}{R^۲} = k\frac{۲\sqrt{۳}q}{R^۲}$$

مطابق شکل، میدان کل در مرکز دایره، برابر برایند بردارهای میدان E' و $۲E$ است که به صورت عمود بر یک‌دیگر قرار دارند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$E_{کل} = \sqrt{(۲E)^۲ + (E')^۲} = \sqrt{(۲k\frac{q}{R^۲})^۲ + (۲\sqrt{۳}\frac{kq}{R^۲})^۲} = \sqrt{۴(\frac{kq}{R^۲})^۲ + ۱۲(\frac{kq}{R^۲})^۲} = ۴\frac{kq}{R^۲}$$

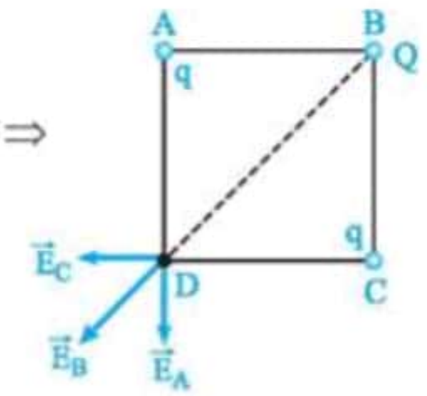
۱ ۱۲۶۱ اگر بارهای Q و q هم‌نام باشند، با در نظر گرفتن یک بار مثبت فرضی در نقطهٔ D و رسم میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها در نقطهٔ D، متوجه خواهید شد که میدان الکتریکی در این نقطه نمی‌تواند صفر باشد:

$Q < ۰ \ , \ q < ۰ \Rightarrow$



$$E_{برایند} = E_A + E_B + E_C \neq ۰$$

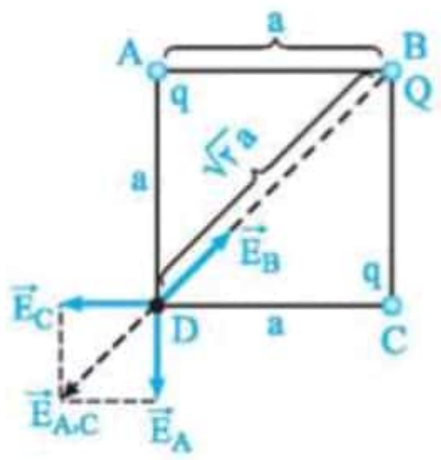
$Q > ۰ \ , \ q > ۰ \Rightarrow$



$$E_{برایند} = E_A + E_B + E_C \neq ۰$$

www.gajmarket.com

بنابراین برای آن‌که میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ D صفر شود، باید بارهای q و Q ناهم‌نام باشند. برای مثال فرض می‌کنیم بار Q منفی و بار q مثبت باشد. در این صورت با رسم بردارهای میدان الکتریکی در نقطهٔ D داریم:



$$E_A = E_C = \frac{kq}{a^۲} \Rightarrow E_C \text{ و } E_A \text{ برایند}: E_{A,C} = \sqrt{E_A^۲ + E_C^۲} = \sqrt{۲}\,E_A$$

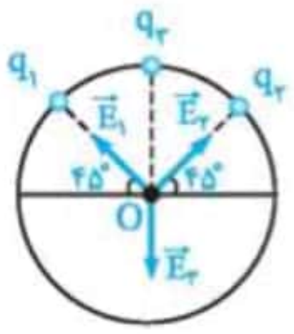
$$E_B = \frac{kQ}{(\sqrt{۲}a)^۲} = \frac{kQ}{۲a^۲}$$

می‌دانیم که برایند میدان‌ها در نقطهٔ D صفر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$E_{AC} = E_B \Rightarrow \sqrt{۲}E_A = E_B \Rightarrow \sqrt{۲}\frac{kq}{a^۲} = \frac{kQ}{۲a^۲} \Rightarrow \left|\frac{Q}{q}\right| = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{Q}{q} = -۲\sqrt{۲}$$

* دقت کنیم که E_{AC} و E_B در یک راستا هستند.

۴ ۱۲۶۲ با توجه به شکل زیر، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی $q_۳$ باید میدان حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را خنثی کند، بنابراین بار $q_۳$ مثبت می‌باشد (رد گزینه‌های ۱ و ۳). اکنون می‌توان نوشت:

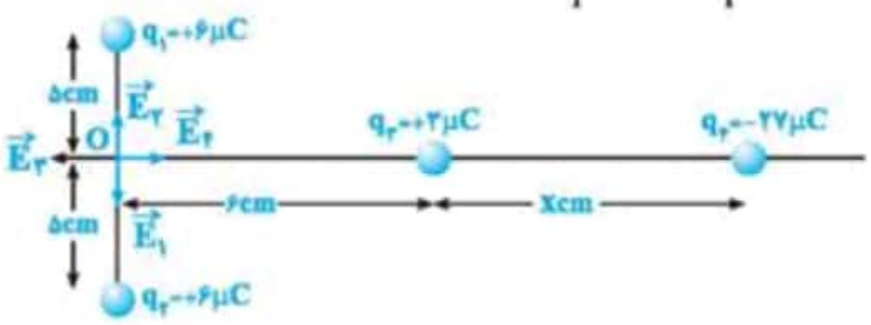


$$E_۱ = E_۲ = \frac{kq_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۲ \text{ و } E_۱ \text{ برایند}: E_{۱,۲} = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} = \sqrt{۲}E_۱$$

$$E_۳ = E_{۱,۲} \Rightarrow E_۳ = \sqrt{۲}E_۱ \text{ : برایند میدان در نقطهٔ O صفر است.}$$

$$\Rightarrow \frac{kq_۳}{r^۲} = \frac{\sqrt{۲}kq_۱}{r^۲} \Rightarrow q_۳ = \sqrt{۲}q_۱ = \sqrt{۲} \times ۲ = ۲\sqrt{۲}\,\mu C$$

۱ ۱۲۶۳ یک بار مثبت آزمون در نقطهٔ O قرار می‌دهیم و جهت میدان الکتریکی هر یک از بارها را در نقطهٔ O به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که اگر فاصلهٔ بار $q_۴$ از $q_۳$ برابر x باشد، میدان در نقطهٔ O صفر خواهد شد. اکنون با توجه به آن‌که میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ O صفر است، داریم:



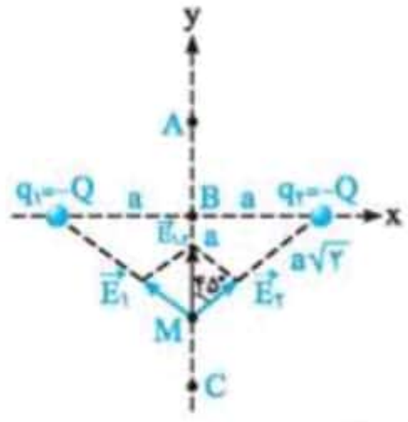
$$\begin{cases} q_۱ = q_۲ = ۶\mu C \\ r_۱ = r_۲ = ۵cm \end{cases} \Rightarrow E_۱ = E_۲ \Rightarrow$$ میدان‌های الکتریکی $E_۱$ و $E_۲$، در نقطهٔ O یک‌دیگر را خنثی می‌کنند.

$$\Rightarrow E_۳ = E_۴ \Rightarrow \frac{kq_۳}{r_۳^۲} = \frac{kq_۴}{r_۴^۲} \Rightarrow \frac{k \times ۳}{(۶)^۲} = \frac{k \times ۲۷}{(۶+x)^۲}$$ میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ O صفر است.

$$\Rightarrow \frac{۱}{۶^۲} = \frac{۹}{(۶+x)^۲} \xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۶+x} \Rightarrow ۶ + x = ۱۸ \Rightarrow x = ۱۲cm$$

با توجه به این‌که در شکل صورت سؤال فاصلهٔ بارهای $q_۳$ و $q_۴$ برابر ۸ سانتی‌متر است و با توجه به مقدار $x = ۱۲cm$، نتیجه می‌گیریم که برای صفر شدن میدان الکتریکی در نقطهٔ O، بار $q_۴$ باید به اندازهٔ $۱۲ - ۸ = ۴cm$ به سمت راست جابه‌جا شود.

۱ ۱۲۶۴ برایند میدان الکتریکی ناشی از دو بار $-Q$ در نقطهٔ M در جهت مثبت y است (چرا؟)، بنابراین برای صفر شدن میدان در نقطهٔ M باید میدان بار $+۲Q$ در خلاف جهت $\vec{E}_{۱,۲}$ باشد (نقطهٔ A یا B). حال بررسی می‌کنیم که بار $+۲Q$ را در کدام‌یک از نقاط A و B می‌توان قرار داد تا میدان برایند در نقطهٔ M صفر شود:



$$E_{۱,۲} = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} \xrightarrow{E_۱ = E_۲} E_{۱,۲} = \sqrt{۲}E_۱ = \sqrt{۲}\frac{kQ}{(\sqrt{۲}a)^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{kQ}{a^۲}$$

$$E_۳ = E_{۱,۲} \text{ : شرط صفر شدن میدان در نقطهٔ M} \Rightarrow \frac{k(۲Q)}{r^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{kQ}{a^۲} \Rightarrow r^۲ = ۲\sqrt{۲}a^۲ = ۲^{\frac{۳}{۲}}a^۲$$

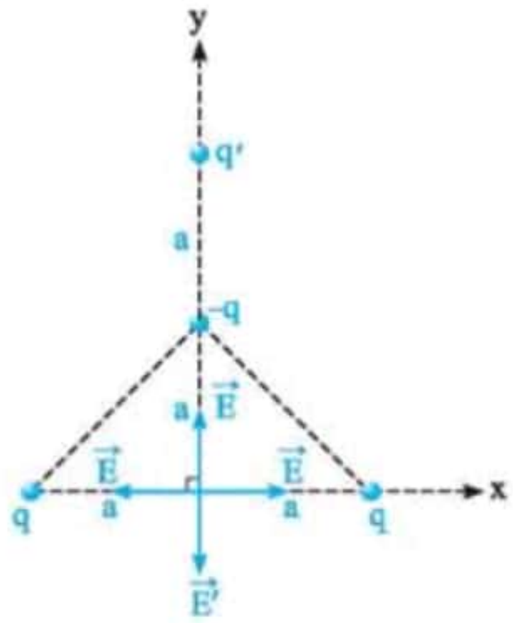
$$\xrightarrow{\text{جذر}} r = \sqrt[۴]{۲^۳}\,a \xrightarrow{\sqrt[۴]{۲^۳} > ۱} r > a$$

بنابراین بار $+۲Q$ را باید در فاصله‌ای بیشتر از a نسبت به نقطهٔ M در بالای آن قرار دهیم، پس نقطهٔ موردنظر، فقط نقطهٔ A می‌تواند باشد.

۲ ۱۲۶۵ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ نسبت q' به q:

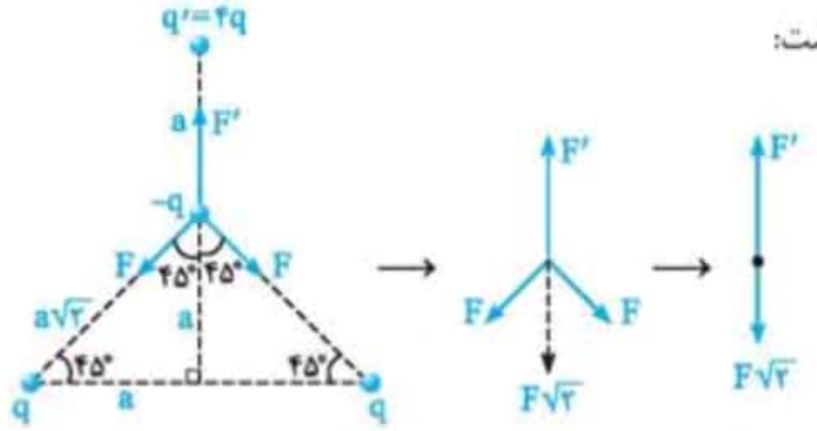
در مبدأ مختصات، میدان‌های الکتریکی دو بار q یک‌دیگر را خنثی می‌کنند (چرا؟)، بنابراین برای آن‌که میدان کل در مبدأ مختصات برابر صفر شود، لازم است میدان هر یک از بارهای $(-q)$ و q' در مبدأ با هم برابر و در خلاف جهت هم باشند، بنابراین بارهای $(-q)$ و q' ناهم‌نام هستند و در نتیجه بارهای q و q' هم‌نام می‌باشند.



$$\begin{cases} E = k\dfrac{|q|}{a^2} \\ E' = k\dfrac{|q'|}{(2a)^2} \end{cases} \xrightarrow{E=E'} k\frac{|q|}{a^2} = k\frac{|q'|}{4a^2} \rightarrow \frac{|q'|}{|q|} = 4$$

گام دوم: محاسبهٔ برایند نیروهای الکتریکی وارد بر بار $(-q)$:

مطابق شکل مقابل، به بار $(-q)$ سه نیرو از طرف سایر بارها وارد می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

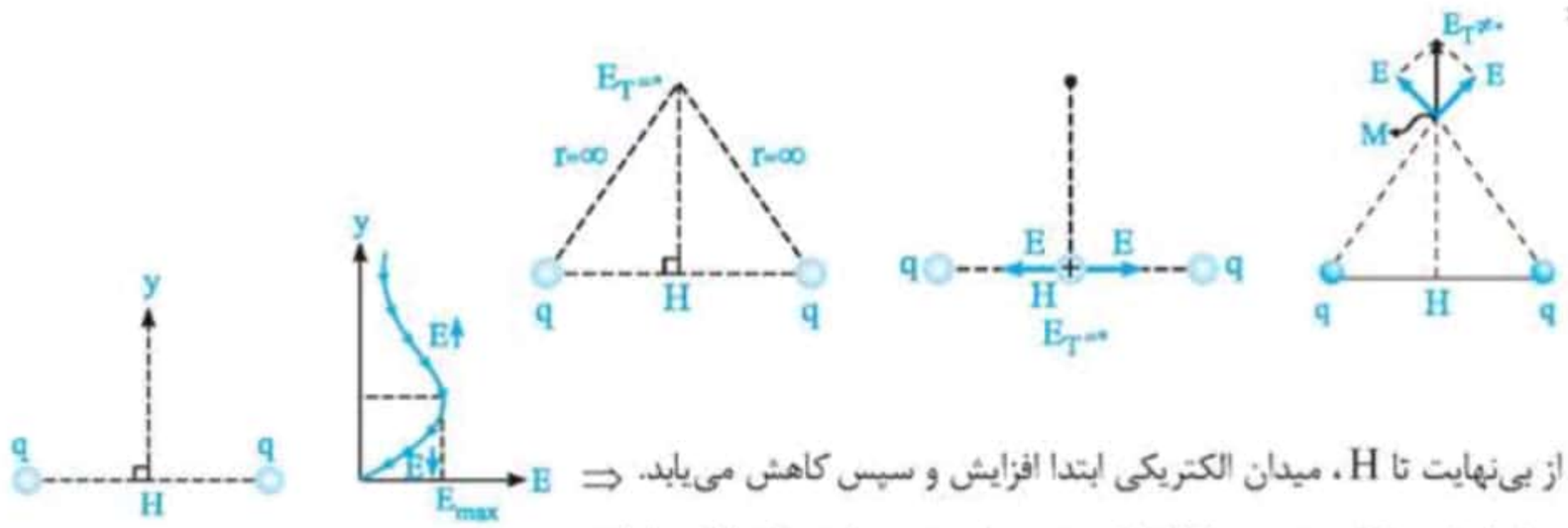


$$F' = k\frac{|q'||q|}{a^2} \xrightarrow{q'=4q} F' = 4k\frac{q^2}{a^2}$$

$$F = k\frac{|q||q|}{(a\sqrt{2})^2} = k\frac{q^2}{2a^2}$$

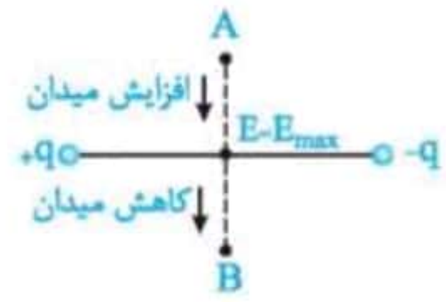
$$F_{\text{برایند}} = F' - F\sqrt{2} = 4k\frac{q^2}{a^2} - \sqrt{2}k\frac{q^2}{2a^2} = (4 - \frac{\sqrt{2}}{2})k\frac{q^2}{a^2}$$

۴ ۱۲۶۶ در فاصلهٔ بسیار دور، فاصله از دو بار الکتریکی (r) برابر بی‌نهایت بوده و با توجه به رابطهٔ $E = \frac{kq}{r^2}$، اندازهٔ میدان دو بار صفر بوده و میدان برایند نیز برابر صفر است. از طرفی در نقطهٔ H نیز، میدان الکتریکی دو بار یک‌دیگر را خنثی کرده و میدان برایند برابر صفر است، اما در نقطه‌ای مانند M میدان برایند مخالف صفر است، بنابراین وقتی از فاصلهٔ دور تا نقطهٔ H حرکت می‌کنیم، میدان الکتریکی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد تا به صفر برسد که نمودار آن مطابق شکل زیر است:



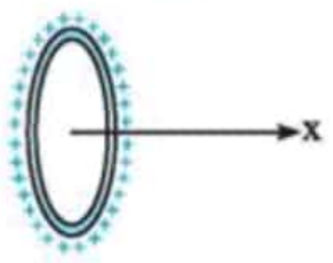
با حرکت از بی‌نهایت تا H، میدان الکتریکی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. $\Rightarrow$

۱ ۱۲۶۷ اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از دوقطبی در وسط فاصلهٔ بین دو بار بیشینه است (چرا؟)، بنابراین با حرکت بار q' از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، میدان الکتریکی برایند روی عمودمنصف دو قطبی و هم‌چنین نیروی وارد بر بار q' ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.



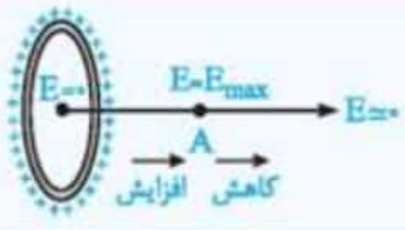
۳ ۱۲۶۸ ایدهٔ این سؤال، مشابه با تست (۱۲۶۶) است. میدان الکتریکی حاصل از حلقهٔ رسانای باردار در مرکز حلقه و هم‌چنین در فواصل بسیار دور برابر صفر است:

$$\begin{cases} r \to \infty \xrightarrow{E \propto \frac{1}{r^2}} E \to 0 & \text{: فواصل بسیار دور} \\ \Rightarrow E = 0 & \text{: مرکز حلقه} \end{cases}$$



از طرفی در نقطه‌ای مثل A روی محور x، میدان حاصل از حلقهٔ رسانای باردار مخالف صفر است، بنابراین می‌توان گفت که با حرکت از مرکز حلقه تا فاصلهٔ دور، میدان الکتریکی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

درک بهتر



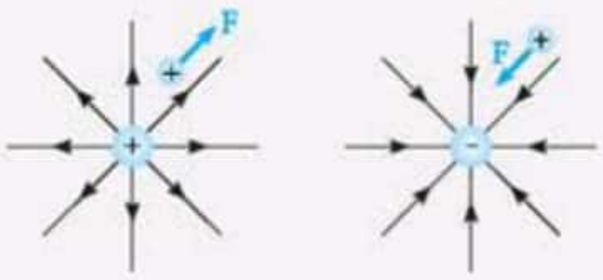
به عبارتی میدان در مرکز حلقه و در فاصلهٔ بی‌نهایت دور صفر است. بنابراین با حرکت از مرکز حلقه به سمت بی‌نهایت میدان ابتدا افزایش می‌یابد و سپس باید کاهش یابد تا دوباره به صفر برسد، بنابراین در نقطه‌ای در این فاصله، میدان الکتریکی بیشینه است.

www.gajmarket.com

۱۲۶۹ ۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

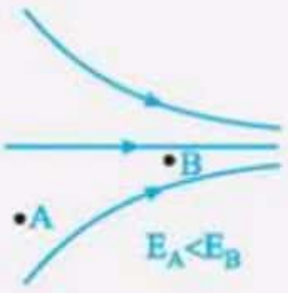
خلاصه نکات ۱۰ — **خطوط میدان الکتریکی** — (تست‌های ۱۲۶۹ تا ۱۲۸۲)

به‌طور کلی نقش میدان الکتریکی در اطراف بارها را با کمک خطوط میدان الکتریکی نشان می‌دهیم. همان‌طور که می‌دانیم برای مشخص شدن جهت میدان الکتریکی در هر نقطه، کافیست یک بار مثبت آزمون را در آن نقطه قرار دهیم و جهت میدان الکتریکی، هم‌جهت با نیروی وارد بر بار مثبت آزمون است. به همین دلیل است که میدان الکتریکی همواره از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شود.



نکات مهم و کاربردی

۱ تراکم خطوط میدان الکتریکی نشانگر قدرت میدان است، یعنی در هر ناحیه که میدان قوی‌تر باشد، خطوط میدان به یک‌دیگر نزدیک‌تر و فشرده‌ترند.



۲ خطوط میدان الکتریکی در هر نقطه طوری رسم می‌شوند که مماس ترسیمی بر آن‌ها در هر نقطه، جهت میدان الکتریکی در آن نقطه را نشان می‌دهد.



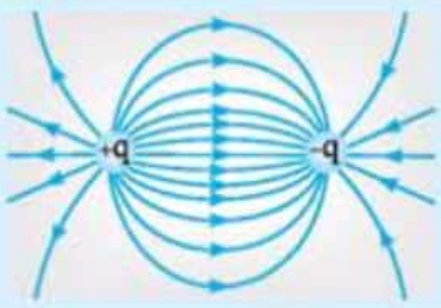
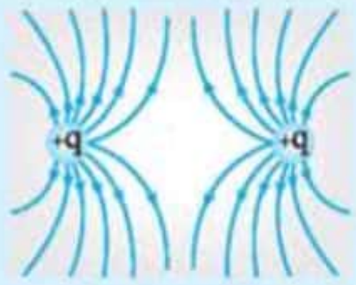
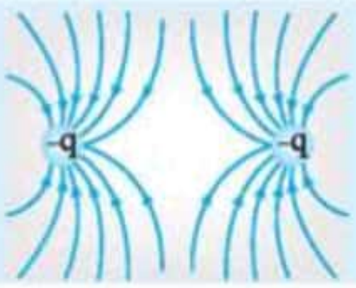


۳ چون بر باری که در هر نقطه از میدان الکتریکی قرار گیرد فقط یک نیرو با بزرگی و جهت مشخص وارد می‌شود (حتی اگر این نیرو، برایند بردار نیروهای متعدد باشد)، پس از هر نقطهٔ میدان الکتریکی فقط یک خط میدان می‌گذرد. یعنی خط‌های میدان الکتریکی یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند.

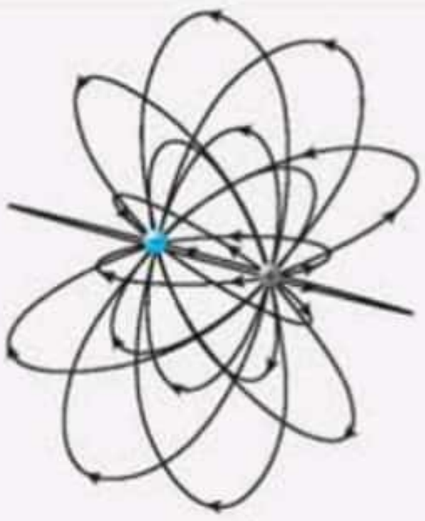


⇒ اگر خطوط میدان الکتریکی یک‌دیگر را قطع کنند، میدان الکتریکی در نقطهٔ A دارای یک جهت مشخص نیست، زیرا دو مماس در A قابل رسم است.

۴ میدان الکتریکی برای چند حالت نسبتاً مهم در شکل‌های زیر نشان داده شده است:

میدان الکتریکی در اطراف یک دوقطبی الکتریکی (دو بار q+ و q−)	
میدان الکتریکی در اطراف دو بار q+	
میدان الکتریکی در اطراف دو بار q−	

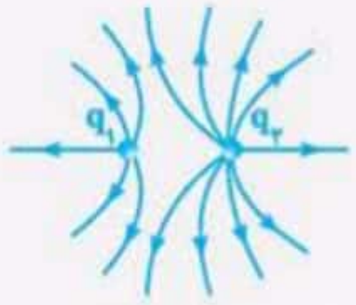
۵ همان‌طور که در نکات قبل مشاهده کردید، خطوط میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای، به صورت شعاعی در راستای شعاع می‌باشد. از طرفی وقتی دو بار الکتریکی در کنار یک‌دیگر قرار می‌گیرند، شکل این خطوط در فضا تغییر می‌کند، به طوری که وقتی دو بار نقطه‌ای غیرهم‌نام کنار یک‌دیگر قرار می‌گیرند، این خطوط به یک‌دیگر متمایل می‌شوند و در دو بار هم‌نام این خطوط از یک‌دیگر فاصله می‌گیرند (در شکل‌های ارائه شده در این قسمت، این موضوع را مشاهده می‌کنیم).



۶ دقت شود تمامی شکل‌های فوق، به‌صورت سه‌بُعدی می‌باشند که به علت رسم آن‌ها در صفحه، در دو بُعد رسم شده‌اند. به طور مثال در شکل مقابل، تصویر سه‌بعدی خطوط میدان الکتریکی در اطراف یک دوقطبی الکتریکی (*بارهای* $q+$ و $q-$ *را اصطلاحاً دوقطبی الکتریکی میگن*) نشان داده شده است که میدان از بار مثبت خارج و به بار منفی داخل می‌شود.

حال برای تسلط بیشتر بر مفاهیم فوق، به دو تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۱ **شکل زیر، خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را نشان می‌دهد. کدام گزینه در مورد این بارها درست است؟**



۱) هر دو بار منفی و اندازهٔ q_1 بیشتر است.

۲) هر دو بار مثبت و اندازهٔ q_2 بیشتر است.

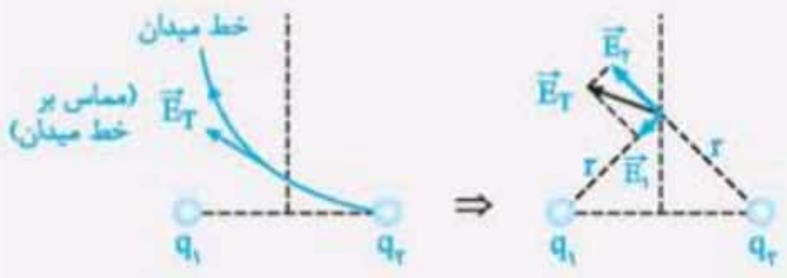
۳) هر دو بار مثبت و اندازه‌ها یکسان است.

۴) هر دو بار مثبت و اندازهٔ q_1 بیشتر است.

پاسخ با توجه به شکل داده شده، جهت خطوط میدان الکتریکی به طرف خارج از هر دو بار می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت که علامت هر دو بار مثبت می‌باشد. هم‌چنین با توجه به این‌که تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_2 بیشتر از بار q_1 می‌باشد، بنابراین اندازهٔ بار q_2 بزرگ‌تر از اندازهٔ بار q_1 می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

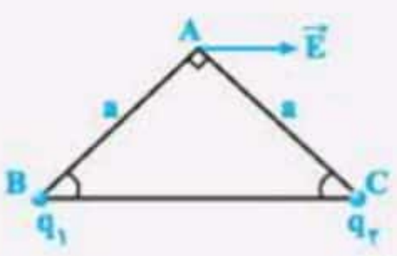
نکته خطوط میدان الکتریکی در نزدیکی بار بزرگ‌تر خمیدگی کم‌تری دارد. بنابراین در این سؤال، چون خمیدگی خطوط در نزدیکی q_2 کم‌تر است، بنابراین اندازهٔ بار q_2 بزرگ‌تر از اندازهٔ بار q_1 می‌باشد.

روش دقیق برای مقایسهٔ بار الکتریکی q_1 و q_2: اگر بر روی عمودمنصف دو بار الکتریکی q_1 و q_2 مماسی بر خطوط میدان الکتریکی رسم کنیم، جهت میدان الکتریکی در آن نقطه را نشان می‌دهد. از سوی دیگر مشخص است که میدان برایند خود را به بردار بزرگ‌تر نزدیک می‌کند و داریم:



$$E_2 > E_1 \Rightarrow \frac{k|q_2|}{r^2} > \frac{k|q_1|}{r^2} \Rightarrow |q_2| > |q_1|$$

تمرین۲ **در دو رأس یک مثلث قائم‌الزاویه، دو ذره با بار الکتریکی q_1 و q_2 قرار دارند و میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها در رأس دیگر مثلث، مطابق شکل و موازی ضلع BC است. کدام رابطه بین q_1 و q_2 برقرار است؟**



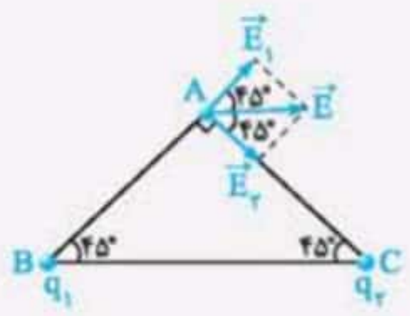
۱) q_1 مثبت و q_2 منفی و $|q_1| = |q_2|$

۲) q_1 مثبت و q_2 منفی و $|q_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}|q_2|$

۳) q_1 منفی و q_2 مثبت و $|q_1| = |q_2|$

۴) q_1 منفی و q_2 مثبت و $|q_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}|q_2|$

پاسخ در این سؤال می‌خواهیم ایدهٔ نسبتاً جالبی را به شما یاد دهیم. در این‌گونه سؤالات برای مشخص کردن میدان‌های حاصل از q_1 و q_2 کافی است در راستای اضلاع مثلث (یعنی AB و AC) دو بردار به‌گونه‌ای رسم کنیم که برایند آن‌ها برابر $\vec{E}$ شود. این موضوع یعنی مؤلفه‌های بردار $\vec{E}$ را بر روی راستای دو ضلع AB و AC بیابیم.



مؤلفهٔ بردار $\vec{E}$ در راستای ضلع AC: $\vec{E}_2$ و مؤلفهٔ بردار $\vec{E}$ در راستای ضلع AB: $\vec{E}_1$

بنابراین با توجه به شکل فوق، واضح است که بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی می‌باشد ($\vec{E}_1$ در راستای AB و از بار الکتریکی q_1 دور می‌شود، پس q_1 مثبت است. $\vec{E}_2$ در راستای AC و به بار الکتریکی q_2 نزدیک می‌شود، پس q_2 منفی است).

از آن‌جایی که بردار $\vec{E}$ موازی قاعدهٔ مثلث است، می‌توان گفت که $\vec{E}$ روی نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ است، بنابراین $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم‌اندازه می‌باشند:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \Rightarrow \frac{kq_1}{a^2} = \frac{kq_2}{a^2} \Rightarrow |q_1| = |q_2| \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

با توجه به مطالب خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۴) نادرست است.

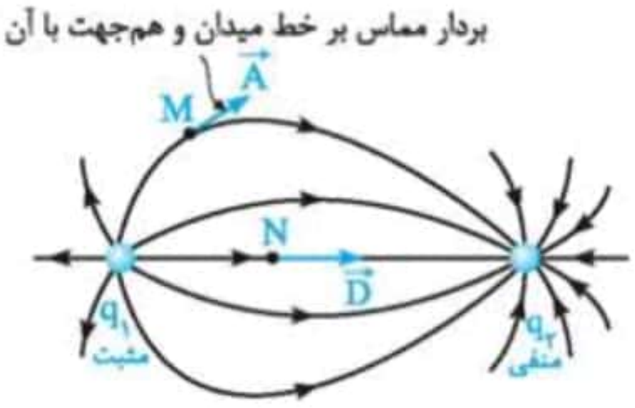
gajmarket.com

۱ ۱۲۷۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شوند. بنابراین جهت خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو بار q_1 و q_2 به صورت نشان داده شده است.

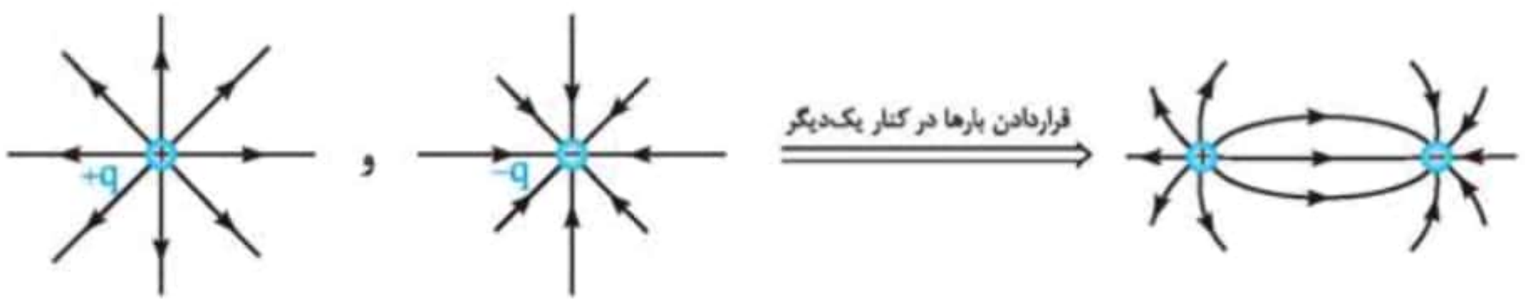
۲) میدان الکتریکی در هر نقطه، برداری است مماس بر خط میدانی که از آن نقطه می‌گذرد و با آن خط میدان هم‌جهت است. بنابراین میدان الکتریکی در نقطهٔ M در جهت بردار $\vec{A}$ و در نقطهٔ N در جهت بردار $\vec{D}$ است.

بردار مماس بر خط میدان و هم‌جهت با آن



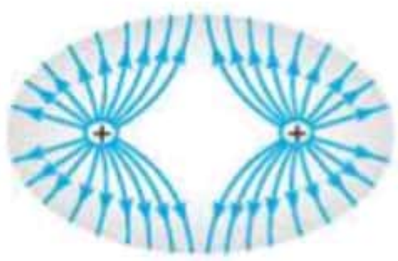
۳) با توجه به آن که تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_2 بیشتر است، در نتیجه اندازهٔ بار q_2 بزرگتر از اندازهٔ بار q_1 می‌باشد ($|q_2| > q_1$). بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴ ۱۲۷۱ دو بار هم‌اندازه و غیرهم‌نام تشکیل یک دوقطبی الکتریکی را می‌دهند. خطوط میدان در اطراف یک بار الکتریکی، به صورت شعاعی می‌باشد، ولی وقتی یک بار غیرهم‌نام را در نزدیکی آن قرار می‌دهیم، خطوط میدان تغییر وضعیت داده و به سمت آن بار متمایل می‌شود.



خطوط میدان الکتریکی دو بار نام‌هم‌نام به سمت یکدیگر متمایل می‌شوند، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

دقت: خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شوند.



۲ ۱۲۷۲ با توجه به آن‌که خطوط میدان الکتریکی از هر دو بار خارج شده است، بنابراین علامت هر دو بار مثبت می‌باشد و با توجه به این‌که شکل دارای تقارن است، اندازهٔ بار الکتریکی A و B با یکدیگر یکسان است.

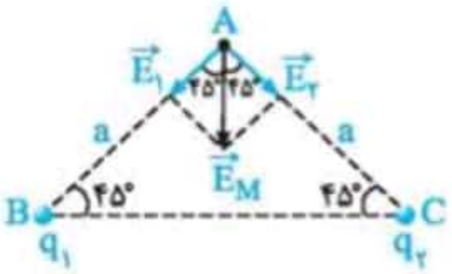
۴ ۱۲۷۳ همان‌طور که می‌دانیم، خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند. بنابراین فقط گزینهٔ (۴) صحیح است.

وضعیت صحیح خطوط میدان الکتریکی برای سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:



گزینهٔ (۱) گزینهٔ (۲) گزینهٔ (۳)

۲ ۱۲۷۴ برای پاسخ دادن به این‌گونه از سؤالات، کافی است در راستای اضلاع مثلث (اضلاع AB و AC) دو بردار به گونه‌ای رسم کنیم که برایند آن‌ها برابر $\vec{E}$ شود. به عبارت دیگر باید مؤلفه‌های بردار $\vec{E}$ در راستای اضلاع مثلث را به دست آوریم:



$\vec{E}_1$ در راستای AB به q_1 نزدیک می‌شود $\Leftarrow$ q_1 منفی است.

$\vec{E}_2$ در راستای AC به q_2 نزدیک می‌شود $\Leftarrow$ q_2 منفی است.

از آن‌جایی که بردار $\vec{E}_M$ بر روی نیمساز زاویهٔ رأس مثلث قرار دارد، بنابراین $E_1 = E_2$ است. چون فاصلهٔ q_1 و q_2 از رأس A یکسان است، بنابراین اندازهٔ دو بار الکتریکی q_1 و q_2 نیز با هم برابر است.

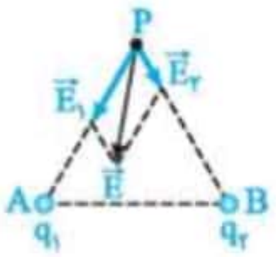
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{a^2} = \frac{kq_2}{a^2} \Rightarrow q_1 = q_2$$

۱ ۱۲۷۵ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲ ۱۲۷۶ در این‌گونه سؤالات، برای مشخص کردن میدان‌های حاصل از q_1 و q_2، کافی است در راستای اضلاع مثلث (یعنی AP و BP) دو بردار به‌گونه‌ای رسم کنیم که برایند آن‌ها برابر $\vec{E}$ شود. به عبارت دیگر مؤلفه‌های بردار $\vec{E}$ را بر روی راستای دو ضلع AP و BP بیابیم.

مؤلفهٔ بردار $\vec{E}$ در راستای ضلع BP: $\vec{E}_2$ ، مؤلفهٔ بردار $\vec{E}$ در راستای ضلع AP: $\vec{E}_1$

در ادامه، با توجه به راستای بردارهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ واضح است که هر دو بار منفی می‌باشند.



E_1 در راستای AP به q_1 نزدیک می‌شود $\Leftarrow$ q_1 منفی است.

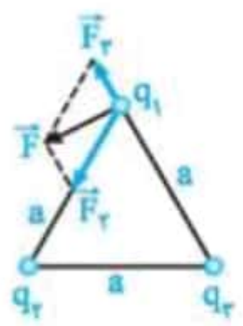
E_2 در راستای BP به q_2 نزدیک می‌شود $\Leftarrow$ q_2 منفی است.

تذکر

از روی شکل درمی‌یابیم که $|q_2|>|q_1|$ است، زیرا:

$$|\vec{E}_1|>|\vec{E}_2| \Rightarrow \frac{k|q_1|}{a^2} > \frac{k|q_2|}{a^2} \Rightarrow |q_1|>|q_2|$$

۱ ۱۲۷۷ همان‌طور که می‌دانیم نیروی بین دو بار هم‌نام رانشی و نیروی بین دو بار ناهم‌نام ربایشی می‌باشد. ابتدا مؤلفه‌های نیروی F را در جهت اضلاع مثلث به‌دست می‌آوریم. با توجه به شکل مقابل به نکات زیر می‌توان اشاره کرد:



۱) بارهای q_2 و q_1 یک‌دیگر را می‌رانند، بنابراین با توجه به عبارت فوق، بارهای q_1 و q_3 هم‌نام هستند.

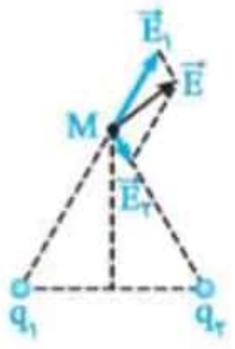
۲) اندازهٔ نیروی F_2 بزرگ‌تر از F_3 است $(F_2 > F_3)$. از طرفی با توجه به آن‌که فاصلهٔ q_1 از بارهای q_2 و q_3 یکسان است، بنابراین می‌توان گفت که $|q_2|>|q_3|$ می‌باشد.

$$F_2 > F_3 \Rightarrow \frac{kq_2 \times q_1}{a^2} > \frac{kq_3 \times q_1}{a^2} \Rightarrow |q_2|>|q_3|$$

با توجه به توضیحات فوق گزینهٔ (۱) صحیح است.

* دقت کنیم در مقایسهٔ اندازهٔ q_1 با q_3 (و q_2) نمی‌توان اظهارنظری کرد.

۳ ۱۲۷۸ ابتدا مؤلفه‌های بردار $\vec{E}$ را در راستای اضلاع مثلث رسم می‌کنیم، با توجه به شکل زیر به دو نکتهٔ مهم می‌توان پی برد:



۱- اندازهٔ میدان $\vec{E}_1$ بزرگ‌تر از $\vec{E}_2$ است $(E_1 > E_2)$، زیرا بردار برایند به سمت آن متمایل شده است.

۲- با توجه به جهت E_1 و E_2 می‌توان گفت که q_1 مثبت و q_2 منفی است $\left(K = \frac{q_2}{q_1} < 0\right)$.

از طرفی با توجه به آن‌که M روی عمودمنصف خط واصل بارها قرار دارد، بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ M از هر دو بار الکتریکی یکسان است، پس می‌توان نوشت:

$$E_1 > E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{a^2} > \frac{kq_2}{a^2} \Rightarrow |q_1|>|q_2| \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| < 1$$

اکنون با توجه به مطالب فوق می‌توان نوشت:

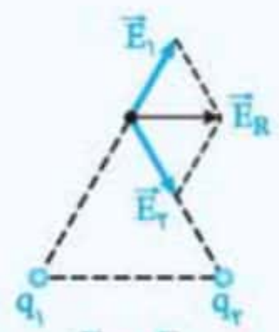
یادآوری

$$y = |x| \xrightarrow{x<0} y = -x \quad , \quad y < |x| \Rightarrow -x < y < x$$

$$\left|\frac{q_2}{q_1}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{q_2}{q_1} < 1 \xrightarrow{\frac{q_2}{q_1}<0} -1 < \frac{q_2}{q_1} < 0 \Rightarrow -1 < K < 0$$

جمع‌بندی

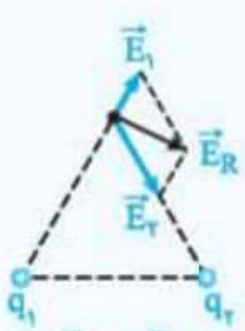
در این‌گونه مسائل معمولاً سه حالت زیر رخ می‌دهد $(q_1>0, q_2<0)$:



$E_1 = E_2$

$\Downarrow$

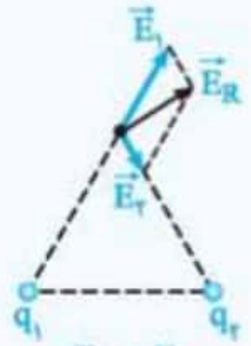
برایند روی نیمساز E_1 و E_2 است و $|q_1|=|q_2|$



$E_2 > E_1$

$\Downarrow$

برایند متمایل به E_2 است و $|q_1|<|q_2|$



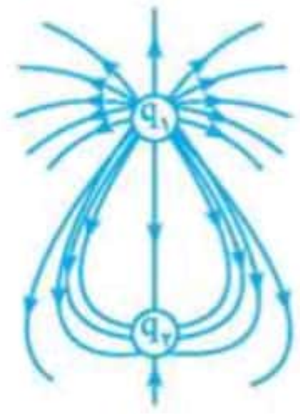
$E_1 > E_2$

$\Downarrow$

برایند متمایل به E_1 است و $|q_1|>|q_2|$

۲ ۱۲۷۹ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

gajmarket.com

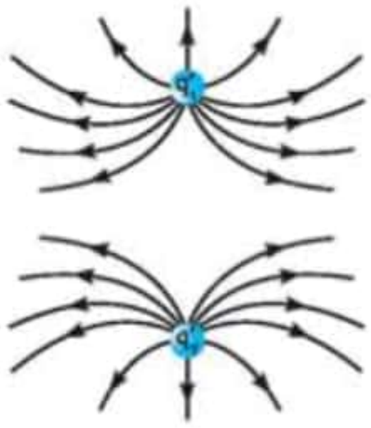


۲ ۱۲۸۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) با توجه به آن‌که خطوط میدان از بار q_1 خارج شده و به بار q_2 وارد می‌شوند، در نتیجه علامت بار q_1 مثبت و علامت بار q_2 منفی است ($q_1 > 0 , q_2 < 0$).

۲) مشابه با سؤال قبل، با توجه به این‌که تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_1 بیشتر است، در نتیجه اندازهٔ بار q_1 بزرگ‌تر از اندازهٔ بار q_2 است ($|q_1| > |q_2|$).

۳ ۱۲۸۱ با توجه به پاسخ سؤال قبل، q_1 مثبت و q_2 منفی است، هم‌چنین اندازهٔ بار q_1 بزرگ‌تر از q_2 است. در نتیجه پس از تماس دادن آن‌ها به یکدیگر، مقداری از بار آن‌ها خنثی می‌شود و بار مثبت باقی مانده، به صورت مساوی بین دو کرهٔ فلزی تقسیم می‌شود. بنابراین بار هر دو کره یکسان و مثبت می‌شود ($q'_1 = q'_2 > 0$) و خطوط میدان الکتریکی در اطراف آن‌ها به صورت مقابل رسم می‌شود:

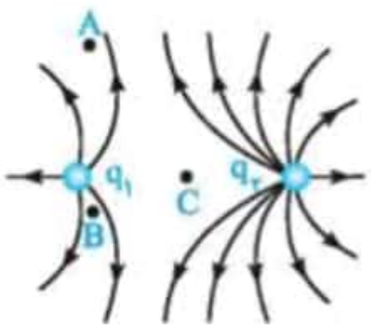


۲ ۱۲۸۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) خطوط میدان الکتریکی از هر دو بار خارج شده است، بنابراین علامت هر دو بار الکتریکی مثبت می‌باشد.

۲) چون تراکم خطوط در اطراف بار q_2 بیشتر است، بنابراین اندازهٔ بار q_2 بزرگتر از بار q_1 می‌باشد ($|q_2| > |q_1|$).

۳) در هر ناحیه‌ای که تراکم خطوط بیشتر باشد، میدان الکتریکی در آن ناحیه قوی‌تر است. چون تراکم خطوط در نقطهٔ B بیشتر از نقطهٔ A و در نقطهٔ A بیشتر از نقطهٔ C است، بنابراین $E_B > E_A > E_C$ می‌باشد.



۱ ۱۲۸۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۱ نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی و مفاهیم میدان الکتریکی یکنواخت (تست‌های ۱۲۸۳ تا ۱۲۹۸)

همانطور که تا اینجا متوجه شده‌ایم، هر بار الکتریکی q در فضای اطراف خود، ایجاد یک میدان الکتریکی می‌کند، به‌طوری که اگر بار دیگری (q) در این فضا قرار گیرد، این میدان الکتریکی بر بار q نیرو وارد می‌کند. به عبارت بهتر:

اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از اجسام باردار دیگری قرار گیرد، این میدان بر بار q نیروی $\vec{F}$ وارد می‌کند که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{F} = \vec{E}.q$$

نکات مهم و کاربردی

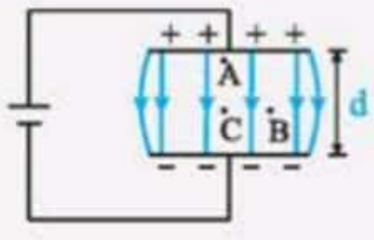
۱ در رابطهٔ فوق، بار q همراه با علامت آن وارد می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت نیروی وارد بر بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی می‌باشد.

۲ بزرگی نیروی وارد شده بر بار را می‌توان از رابطهٔ $F = E|q|$ به دست آورد که در این رابطه از آن‌جایی که بزرگی نیرو را می‌خواهیم به‌دست آوریم، علامت بار را در نظر نمی‌گیریم.

۳ با توجه به رابطهٔ $F = Eq$، واحد میدان الکتریکی برابر نیوتون بر کولن است.

$$F = Eq \Rightarrow E = \frac{F}{q} \Rightarrow E \text{ واحد} \equiv \frac{\text{نیوتون}}{\text{کولن}}$$

میدان الکتریکی یکنواخت: اگر دو صفحهٔ رسانای موازی با بارهای هم‌اندازه و مختلف‌العلامت را مطابق شکل مقابل، در مقابل هم قرار دهیم، در بین صفحات و در نقاط دور از لبه‌های آن یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که جهت آن از صفحهٔ مثبت به سمت صفحهٔ منفی می‌باشد.



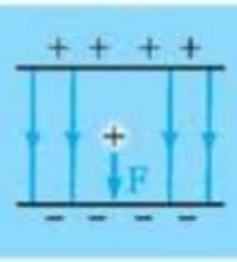
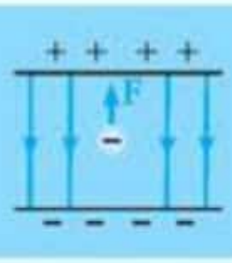
$$E_A = E_B = E_C$$

نکات مهم و کاربردی

۱ با توجه به این که در یک میدان الکتریکی یکنواخت، اندازهٔ میدان ثابت است، بنابراین نیروی وارد بر یک بار معین در نقاط مختلف آن میدان با هم برابر است. به‌طور مثال در شکل فوق، نیروی وارد بر بار q در نقاط A، B و C یکسان است.

$$F = \overset{\text{ثابت}}{(E)}q \Rightarrow F_A = F_B = F_C$$

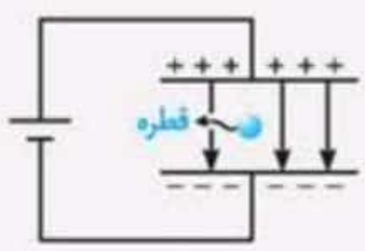
۲ جهت نیروی وارد بر بار مثبت و منفی در میدان الکتریکی یکنواخت به‌صورت دو شکل زیر می‌باشد:

	
بار مثبت به سمت صفحهٔ منفی جذب می‌شود، یعنی نیروی وارد بر آن در جهت میدان الکتریکی است.	بار منفی به سمت صفحهٔ مثبت جذب می‌شود، یعنی نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

۳ بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد شده بین دو صفحه در شکل فوق برابر است با:

$$E = \frac{V \rightarrow}{d \rightarrow}$$ (V → : اختلاف پتانسیل بین دو صفحه، d → : فاصلهٔ بین دو صفحه)

۴ در شکل مقابل، با تولید یک میدان الکتریکی معین و ایجاد تعادل برای ذره، می‌توان نوع بار ذره را مشخص کرد.





⇒ بار ذره برای ایجاد تعادل باید منفی باشد، زیرا نیرویی در خلاف جهت میدان الکتریکی به آن وارد می‌شود و در نهایت تعادل برقرار می‌شود.

۵ در صورت معلق ماندن و تعادل ذره روغن، زیرا نیرویی در خلاف جهت میدان الکتریکی به آن وارد می‌شود و در نهایت تعادل برقرار می‌شود. از شرط تعادل می‌توان بار و تعداد الکترون‌های هر ذره را به‌دست آورد:



$$F_E = mg \Rightarrow |q_{ذره}| E = mg \Rightarrow |q_{ذره}| = \frac{mg}{E} \quad , \quad n = \frac{|q_{ذره}|}{e}$$

حال برای یادگیری بهتر مفاهیم ارائه شده، به دو تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۱ ذره‌ای به جرم ۴ گرم و بار الکتریکی $۲\mu C$ را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $۴\times۱۰^{۴} N/C$ قرار می‌دهیم. به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید:

الف) نیروی الکتریکی وارد بر این بار چند نیوتون است؟

ب) اندازهٔ شتاب حاصل از نیروی الکتریکی وارد بر این ذره، چند برابر اندازهٔ شتاب گرانش زمین است؟ $(g = ۱۰ m/s^{۲})$

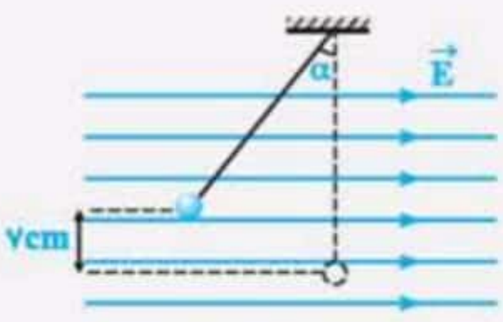
پاسخ الف) نیرویی که از طرف میدان الکتریکی یکنواخت بر بار الکتریکی وارد می‌شود، برابر است با:

$$E = ۴\times۱۰^{۴} N/C \, , \, q = ۲\mu C = ۲\times۱۰^{-۶} C \Rightarrow F = Eq = (۴\times۱۰^{۴})\times(۲\times۱۰^{-۶}) = ۸\times۱۰^{-۲} N$$

ب) طبق قانون دوم نیوتون، شتاب حاصل از نیروی فوق برابر است با:

$$\begin{cases} m = ۴gr = ۴\times۱۰^{-۳} kg \, , \, F = ۸\times۱۰^{-۲} N \, , \, a = ? \\ F = ma \Rightarrow ۸\times۱۰^{-۲} = ۴\times۱۰^{-۳} a \Rightarrow a = ۲۰ m/s^{۲} \xrightarrow{g=۱۰ m/s^{۲}} a = ۲g \end{cases}$$

تمرین۲ در شکل روبه‌رو، گلولهٔ آونگ به جرم ۴ گرم به انتهای نخی با جرم ناچیز و به طول $۳۵ cm$ بسته شده و در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲\times۱۰^{۴} N/C$ در حال تعادل است. بار الکتریکی گلوله چند میکروکولن است؟ $(g = ۱۰ N/kg)$



۱) $-۱/۵$ ۲) $-۱/۲$

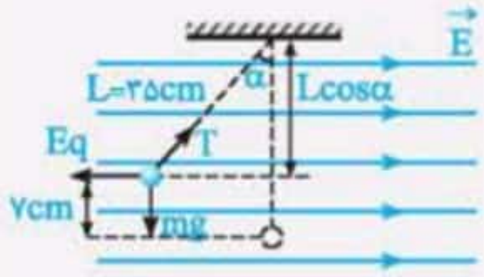
۳) $۰/۱۵$ ۴) $۰/۱۲$

پاسخ در این سؤال، تعادل یک گلولهٔ آویخته در میدان الکتریکی را بررسی می‌کنیم. اگر طول نخ L باشد، مطابق شکل زیر، $L\cos\alpha = L - ۷$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

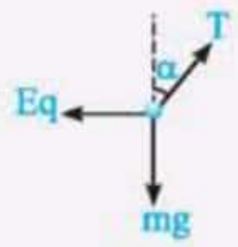
$$L\cos\alpha = L - ۷ \xrightarrow{L=۳۵cm} ۳۵\cos\alpha = ۳۵ - ۷ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۲۸}{۳۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{۱-\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}} = \frac{۳}{۵}$$

gajmarket.com

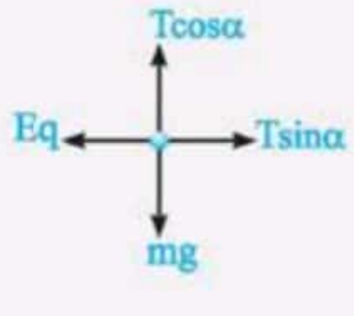
در ادامه مطابق شکل مقابل می‌توان گفت نیروهای وارد بر گلوله سه نیروی T، mg و Eq می‌باشد. با توجه به این‌که در این شکل نیروی الکتریکی وارد بر بار در خلاف جهت میدان می‌باشد (چون بار در خلاف جهت میدان منحرف شده است)، بنابراین علامت بار منفی است ($q<0$) و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.



$\Rightarrow$



در نهایت با تجزیهٔ نیروی کشش نخ در شکل فوق و با توجه به متعادل بودن بار، داریم:

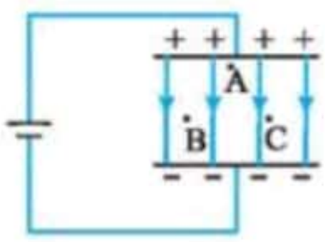


گلوله در حال تعادل است: $\begin{cases}\sum F_x=0 \Rightarrow T\sin\alpha = Eq \\ \sum F_y=0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg\end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را برهم}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{Eq}{mg}$ (I)

$$\xrightarrow{(I)} \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۲\times۱۰^{۴}\times q}{۴\times۱۰^{-۳}\times۱۰} \Rightarrow |q|=۱/۵\times۱۰^{-۶}C=۱/۵\mu C \xrightarrow{q<0} q=-۱/۵\mu C$$

(گزینهٔ ۱)

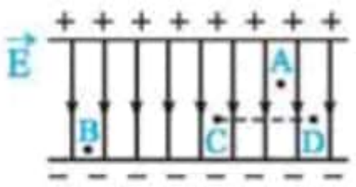
با قرار گرفتن دو صفحهٔ موازی در مقابل یک‌دیگر که دارای بارهای هم‌اندازه و **مختلف‌العلامت** می‌باشند، میدان الکتریکی یکنواخت در بین دو صفحه به‌وجود می‌آید و اندازهٔ میدان الکتریکی در تمام نقاط بین دو صفحه برابر است.



$E_A=E_B=E_C$ (میدان الکتریکی یکنواخت است.)

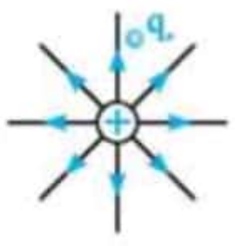
بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۱۲۸۴ **۳** می‌دانیم که نیروی وارد بر بار الکتریکی q برابر $F=Eq$ می‌باشد. از طرفی نقاط A، B، C و D در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار گرفته‌اند. بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی در هر یک از این نقاط با هم برابر بوده و در نتیجه نیروی وارد بر بار الکتریکی $+q$ در تمامی این نقاط یکسان است.



$$F=\overset{\text{ثابت}}{E}q \Rightarrow F_A=F_B=F_C=F_D$$

۱۲۸۵ **۴** با یک سؤال جالب و مفهومی روبه‌رو شده‌ایم. با توجه به این‌که خطوط میدان الکتریکی چه‌طور باشند و توسط ذرهٔ با بار منفی و یا مثبت ایجاد شده باشد، هر سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

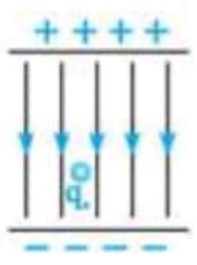


۱) اگر بار آزمون (q_0) در میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای مثبت منفرد، در خلاف جهت میدان حرکت کند، به چشمهٔ میدان نزدیک شده و بزرگی میدان افزایش می‌یابد. بنابراین طبق رابطهٔ $F=Eq_0$، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره از طرف میدان افزایش می‌یابد.



۲) اگر بار آزمون (q_0) در خلاف جهت میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای منفی منفرد حرکت کند، از بار منفی دور شده و بزرگی میدان کاهش یافته و طبق رابطهٔ $F=Eq_0$، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر آن کاهش می‌یابد.

۳) اگر بار آزمون (q_0) در میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحهٔ نشان داده شده در شکل مقابل و در خلاف جهت میدان حرکت کند، چون اندازه و جهت میدان الکتریکی در تمام نقاط ثابت است، پس اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره ثابت است.



$F=E\overset{\text{ثابت}}{q_0} \Rightarrow F=\text{ثابت}$

۱۲۸۶ **۲** با استفاده از رابطهٔ $F=Eq$ و در نظر گرفتن اندازهٔ بارها در این رابطه، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}F_1=Eq_1=E\times(۶\times۱۰^{-۶}) \\ F_2=Eq_2=E\times(۵۰۰\times۱۰^{-۹})=E\times(۰/۵\times۱۰^{-۶})\end{cases} \xrightarrow{F_1-F_2=۱۱۰N} \underbrace{۶\times۱۰^{-۶}E-۰/۵\times۱۰^{-۶}E}_{۵/۵\times۱۰^{-۶}E}=۱۱۰N \Rightarrow E=۲\times۱۰^{۷}\,N/C$$

۱۲۸۷ **۳** ابتدا اندازهٔ نیروی وارد بر بار الکتریکی را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}=-۴۰۰\vec{i}+۳۰۰\vec{j} \Rightarrow |\vec{F}|=\sqrt{(-۴۰۰)^{۲}+(۳۰۰)^{۲}}=۵۰۰N$$

اکنون با توجه به رابطهٔ $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ می‌توان نوشت:

$$F=۵۰۰N\ ,\ |q|=۵\times۱۰^{۵}\mu C=\frac{۵}{۱۰}C \Rightarrow E=\frac{F}{q}=\frac{۵۰۰}{\frac{۵}{۱۰}}=۱۰۰۰N/C$$

۳ ۱۲۸۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا با توجه به رابطهٔ $F = Eq$ اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{E} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j} \Rightarrow |\vec{E}| = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵ N/C \ , \ q = ۱۰\mu C = ۱۰^{-۵} C \ , F = ?$$

$$F = Eq \Rightarrow F = ۵ \times ۱۰^{-۵} N$$

گام دوم: حال با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ و این فرض که تنها نیرویی که در راستای حرکت بار بر آن وارد می‌شود، نیروی کولنی می‌باشد، می‌توان نوشت $(m = ۲gr = ۲ \times ۱۰^{-۳} kg)$:

$$F = ma \Rightarrow ۵ \times ۱۰^{-۵} = ۲ \times ۱۰^{-۳} \times a \Rightarrow a = ۲/۵ \times ۱۰^{-۲} m/s^۲$$

۳ ۱۲۸۹ **گام اول:** بزرگی میدان الکتریکی برابر است با:

$$E = \frac{F}{q_۰} = \frac{۶ \times ۱۰^{-۵}}{۳ \times ۱۰^{-۸}} = ۲ \times ۱۰^۳ N/C$$

از طرفی چون بار $q_۰$ مثبت است، در نتیجه جهت $\vec{E}$ در همان جهت نیروی $\vec{F}$ می‌باشد.

گام دوم: به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$E = \frac{F'}{|q'|} \Rightarrow F = E|q'| = (۲ \times ۱۰^۳) \times (۱۲ \times ۱۰^{-۸}) = ۲۴ \times ۱۰^{-۵} N$$

جهت نیروی وارد شده بر بار $-۱۲ \times ۱۰^{-۸} C$، در خلاف جهت نیروی وارد شده بر بار $q_۰$ است (↙)، زیرا علامت بار الکتریکی جدید منفی است (نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان می‌باشد). بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۲۹۰ **گام اول:** ابتدا اندازهٔ میدان الکتریکی را در فاصلهٔ r از بار q به‌دست می‌آوریم:

$$E_۱ = \frac{F}{q} \Rightarrow E_۱ = \frac{۰/۴}{۵۰ \times ۱۰^{-۶}} = ۸ \times ۱۰^۳ \ N/C$$

گام دوم: بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای، با مربع فاصله از آن نسبت عکس دارد. بنابراین با ۴ برابر شدن فاصله، بزرگی میدان الکتریکی $\frac{۱}{۱۶}$ برابر می‌شود. بنابراین:

$$E \propto \frac{۱}{r^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{۱}{۱۶} E_۱ = \frac{۱}{۱۶} \times ۸ \times ۱۰^۳ = ۵ \times ۱۰^۲ \ N/C$$

(E برابر $\frac{۱}{۱۶}$ — $r^۲$ برابر $(۴)^۲$)

۲ ۱۲۹۱ با توجه به رابطهٔ $F = Eq$، نیروی وارد بر بار $q_۲$، توسط میدان الکتریکی حاصل از بار $q_۱$ در محل بار $q_۲$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبهٔ میدان الکتریکی در محل بار $q_۲$ می‌توان نوشت:

$$F = Eq \Rightarrow ۱۰ = E \times ۵ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow E = ۲ \times ۱۰^۶ N/C$$

* کرهٔ دوم وجود داشته باشد یا نباشد، میدان الکتریکی در محل آن کره تفاوتی نخواهد کرد، چون این میدان را کرهٔ (۱) با بار $q_۱$ ایجاد خواهد کرد.

۳ ۱۲۹۲

تذکر

در رابطه با ذرات الکترون (e)، پروتون (p) و آلفا (α) به موارد زیر دقت کنید:

۱) آلفا در واقع هستهٔ عنصر هلیم است که تشکیل شده از دو پروتون و دو نوترون می‌باشد $\left({}^۴_۲He^{۲+}\right)$ و دارای بار مثبت است.

۲) جرم پروتون و نوترون تقریباً ۲۰۰۰ برابر جرم الکترون است، بنابراین برای مقایسهٔ جرم سه ذرهٔ الکترون، پروتون و آلفا داریم $(m_\alpha > m_p > m_e)$:

$$m_e \simeq \frac{۱}{۲۰۰۰} m_p \simeq \frac{۱}{۸۰۰۰} m_\alpha$$

۳) برای مقایسهٔ اندازهٔ بار الکتریکی ذرات الکترون، پروتون و آلفا داریم:

$$|q_e| = |q_p| = \frac{۱}{۲}|q_\alpha|$$

باتوجه به نکات فوق، با توجه به این که ذرهٔ آلفا دارای بار مثبت است، در یک میدان الکتریکی یکنواخت، نیرویی در جهت میدان الکتریکی بر آن وارد می‌شود و گزینهٔ (۳) عبارت نادرستی است.

۲ ۱۲۹۳ با توجه به روابط زیر داریم:

$$\begin{cases} F = Eq \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m}$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$\frac{m_\alpha}{m_p} = ۴ \ , \ \frac{q_\alpha}{q_p} = ۲ \ , \ \frac{a_\alpha}{a_p} = ? \text{ و دو ذره در یک میدان الکتریکی قرار دارند} \Rightarrow E_\alpha = E_p$$

$$a = \frac{Eq}{m} \Rightarrow \frac{a_\alpha}{a_p} = \frac{q_\alpha}{q_p} \times \frac{m_p}{m_\alpha} = ۲ \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a_\alpha = \frac{۱}{۲} a_p$$

www.gajmarket.com

۱۲۹۴ ۲ با توجه به شکل زیر، شرط تعادل بادکنک آن است که نیروی الکتریکی وارد بر آن و نیروی وزن آن، هم‌اندازه و در خلاف جهت یک‌دیگر باشند:



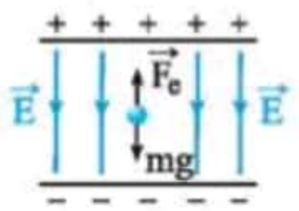
$$|q| = ۵۰۰nC = ۵\times۱۰^{-۷}\,C\ ,\ m = ۱۰gr = ۱۰^{-۲}\,kg\ ,\ E = ?$$

$$\begin{cases} F_e = Eq \\ W = mg \end{cases} \Rightarrow F_e = W \Rightarrow Eq = mg \Rightarrow E\times(۵\times۱۰^{-۷}) = ۱۰^{-۲}\times۱۰ \Rightarrow E = ۲\times۱۰^{۵}\,N/C$$ ذره در تعادل است:

با توجه به این‌که بادکنک در حال تعادل است، نیروی الکتریکی وارد شده بر ذرهٔ با بار الکتریکی منفی به سمت بالا و در خلاف جهت وزن آن است. از طرفی می‌دانیم که نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ با بار منفی، همواره در خلاف جهت میدان الکتریکی است، بنابراین میدان الکتریکی در خلاف جهت F_e و به سمت پایین است.

۱۲۹۵ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: چون قطب مثبت مولد به صفحهٔ بالایی متصل است، بنابراین جهت میدان الکتریکی از بالا به سمت پایین است. از طرفی برای این‌که ذره به حالت معلق باقی بماند، باید نیروی الکتریکی وارد بر آن، وزن ذره را خنثی کند. بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر ذره به سمت بالا و در خلاف جهت میدان می‌باشد. پس بار این ذره منفی بوده و الکترون به دست آورده است.



بار ذره منفی است. $\Rightarrow \vec{F}_e$ در خلاف جهت $\vec{E}$

گام دوم: با توجه به معلق بودن ذره، می‌توان نوشت:

$$F_e = mg \Rightarrow Eq = mg \xrightarrow{q=ne} E(ne) = mg \Rightarrow n = \frac{mg}{eE}$$



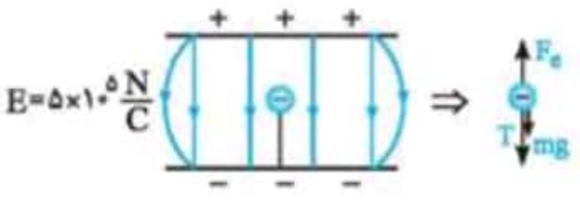
تبدیل ng به kg

$$\Rightarrow n = \frac{(۸\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۱۲})\times(۱۰)}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱۰^{۵}} = ۵$$

بنابراین این ذره ۵ الکترون به دست آورده است.

۱۲۹۶ ۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا نیروهای واردشده به گلوله را رسم می‌کنیم و اندازهٔ هر یک را به‌دست می‌آوریم:



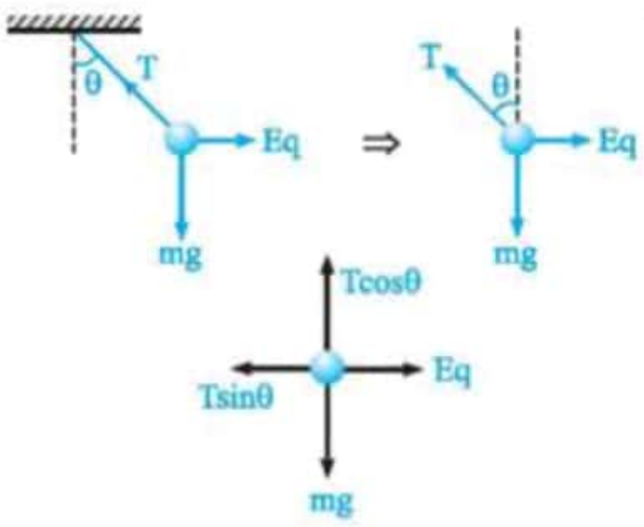
$$W = mg = ۰/۱\times۱۰ = ۱N\ ,\ F_e = Eq = ۵\times۱۰^{۵}\times۸\times۱۰^{-۶} = ۴N$$

چون بار الکتریکی گلوله منفی است، نیروی الکتریکی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی می‌باشد.

گام دوم: از آن‌جایی‌که گلوله در حال تعادل است، برایند نیروهای واردشده بر آن برابر صفر می‌باشد و داریم:

$$\sum F = ۰ \Rightarrow F_e = T + mg \Rightarrow ۴ = T + ۱ \Rightarrow T = ۳N$$

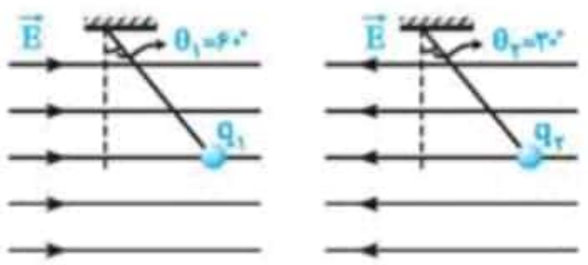
۱۲۹۷ ۴ مطابق شکل مقابل، نیروهای وارد بر گلوله را رسم می‌کنیم:



با تجزیهٔ نیروی کشش نخ T در شکل فوق می‌توان نوشت:

گلوله در حالت تعادل است.: $\begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow T\sin\theta = Eq \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow T\cos\theta = mg \end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر هم}} \tan\theta = \frac{Eq}{mg}$

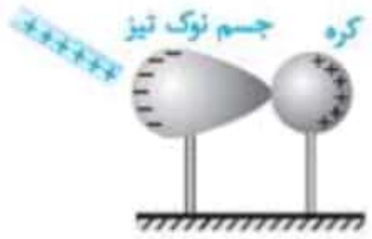
۱۲۹۸ ۴ با توجه به پاسخ سؤال قبل، می‌دانیم وقتی یک گلولهٔ آویخته از نخ، در یک میدان الکتریکی یکنواخت با بزرگی E به تعادل برسد، رابطهٔ $\tan\theta = \frac{Eq}{mg}$ برقرار است. با استفاده از این رابطه برای دو گلوله، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} \tan ۳۰^\circ = \frac{Eq_۲}{m_۲g} \\ \tan ۶۰^\circ = \frac{Eq_۱}{m_۱g} \end{cases} \xrightarrow{m_۱=m_۲=m} \frac{\tan ۳۰^\circ}{\tan ۶۰^\circ} = \frac{\frac{Eq_۲}{mg}}{\frac{Eq_۱}{mg}} = \frac{q_۲}{q_۱} \Rightarrow \left|\frac{q_۲}{q_۱}\right| = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۳}$$

از طرفی همان‌طور که از دو شکل زیر مشخص می‌شود، برای حفظ تعادل، نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 در جهت خطوط میدان الکتریکی و نیروی الکتریکی وارد بر بار q_2 در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی است. بنابراین بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی می‌باشد $\left(\frac{q_2}{q_1}=-\frac{1}{3}\right)$.





۳ ۱۲۹۹ با نزدیک کردن میلهٔ با بار مثبت به جسم نوک‌تیز، الکترون‌ها به سمت جسم نوک‌تیز حرکت می‌کنند و به همان اندازه که الکترون به جسم نوک‌تیز منتقل می‌شود، کره دارای بار مثبت می‌گردد. در نتیجه اندازهٔ بار القا شده در هر دو جسم یکسان می‌باشد.

$$q_1=|q_2|\neq 0$$

تذکر

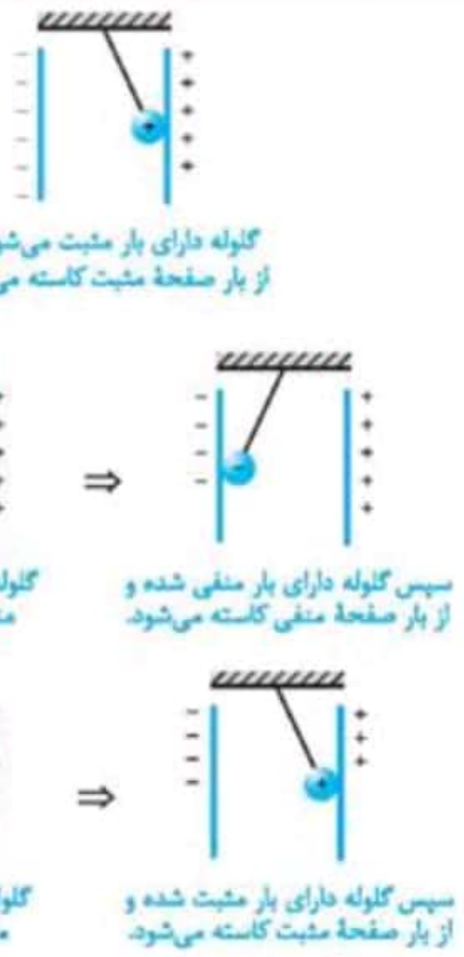
پس از جدا کردن کره و جسم نوک‌تیز و دور کردن میله، اندازهٔ چگالی سطحی بار در نقاط نوک تیز در جسم نوک‌تیز، بیشتر از کره خواهد بود (چرا؟).

۴ ۱۳۰۰ **گام اول:** فرض کنید در ابتدا گلوله را به صفحهٔ مثبت تماس می‌دهیم، در نتیجه گلوله دارای بار الکتریکی مثبت شده و از بار صفحهٔ مثبت اندکی کاسته می‌شود.

گام دوم: پس از باردار شدن گلوله با بار الکتریکی مثبت، این گلوله توسط صفحهٔ منفی جذب می‌شود. با حرکت گلوله به سمت صفحهٔ منفی و تماس با آن، گلوله ابتدا خنثی شده و سپس دارای بار الکتریکی منفی می‌گردد، بنابراین مقداری از بار صفحهٔ منفی کاسته می‌شود.

گام سوم: پس از باردار شدن گلوله با بار منفی، این گلوله توسط صفحهٔ مثبت جذب می‌شود. با تماس گلوله به صفحهٔ مثبت، ابتدا گلوله خنثی شده و سپس دارای بار الکتریکی مثبت می‌گردد. در نتیجه، دوباره مقداری از بار صفحهٔ مثبت کاسته می‌شود و گلوله به سمت صفحهٔ منفی حرکت می‌کند.

فرایند فوق تا جایی ادامه می‌یابد که بار دو صفحه به‌وسیلهٔ تماس گلوله کاملاً خنثی شود. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.



۲ ۱۳۰۱ پس از مالش دو جسم A و B با یک‌دیگر، بار الکتریکی جسم B مثبت شده است، بنابراین B به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر می‌باشد.
پس از مالش دو جسم C و D با یک‌دیگر، جسم C جسم B را دفع کرده است، بنابراین بار C با بار B هم‌نام است و در نتیجه بار C مثبت و بار D منفی است. بنابراین C نسبت به D به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر است که این شرایط فقط در گزینهٔ (۲) رعایت شده است.

۴ ۱۳۰۲ برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر دقت کنید:

۱) وقتی میلهٔ A را با پارچهٔ B مالش می‌دهیم، میله دارای بار الکتریکی منفی می‌شود (چرا؟).

۲) با نزدیک کردن میلهٔ A دارای بار منفی به کلاهک دارای بار مثبت، ابتدا تمام بارهای مثبت الکتروسکوپ توسط تعدادی از بارهای منفی میله القا شده و به عبارتی بارهای مثبت الکتروسکوپ به کلاهک آن منتقل شده و ورقه‌های الکتروسکوپ به یک‌دیگر نزدیک می‌شوند.

۳) بقیهٔ بارهای منفی میله، باید بارهای مثبت بیشتری در الکتروسکوپ القا کنند. بنابراین با انتقال بارهای مثبت بیشتر، کلاهک دارای بار مثبت و ورقه‌ها دارای بار منفی می‌شوند و در نتیجه ورقه‌های الکتروسکوپ دوباره از هم دور می‌شوند.

تذکر

دقت کنید که بارهای مثبت حرکت نمی‌کنند، بلکه این بارهای منفی (الکترون‌ها) هستند که می‌توانند حرکت کنند. وقتی می‌گوییم جسمی دارای بار مثبت می‌شود، این بدین معنی است که تعدادی الکترون از آن جسم خارج شده است.

gajmarket.com

۴ ۱۳۰۳ این سؤال بسیار جالب و تحلیلی است. برای پاسخ به این سؤال که در آن میله به کلاهک الکتروسکوپ تماس داده شده است، شرایط مختلفی را فرض می‌کنیم:

الف) میله خنثی باشد: در این حالت با تماس میله و کلاهک، مقداری از بار مثبت کلاهک به میله منتقل می‌شود و در نتیجه ورقه‌های الکتروسکوپ دارای بار کم‌تر شده و به هم نزدیک می‌شوند.

ب) میله دارای بار منفی باشد: در این حالت نیز با تماس میله و کلاهک، مقداری از بار مثبت کلاهک به وسیلهٔ بار منفی میله خنثی شده، در نتیجه ورقه‌های الکتروسکوپ دارای بار کمتر شده و به هم نزدیک می‌شوند.

ج) میله دارای بار مثبت کمی باشد (به گونه‌ای که پتانسیل نقاط روی میله از پتانسیل نقاط روی کلاهک الکتروسکوپ کم‌تر باشد):

در این حالت به دلیل اختلاف پتانسیل بین میله و کلاهک و کم‌تر بودن پتانسیل میله، مقداری از بار منفی میله به کلاهک منتقل می‌شود تا میله و کلاهک هم‌پتانسیل شوند. در نتیجه در این حالت نیز ورقه‌های الکتروسکوپ به هم نزدیک می‌شوند.

* به نظر شما در حالت (ج) اگر پتانسیل نقاط روی میله و کلاهک الکتروسکوپ یکسان باشد، چه اتفاق رخ می‌دهد؟ اگر پتانسیل نقاط روی میله بیش‌تر از الکتروسکوپ باشد چه‌طور؟

۴ ۱۳۰۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، دو گام زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: محاسبهٔ بار الکتریکی جابه‌جا شده برحسب میکروکولن:

$$q = ne = ۱/۲۵ \times ۱۰^{۱۳} \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} = ۲ \times ۱۰^{-۶}\,C = ۲\mu C$$

گام دوم: محاسبهٔ بار کره‌های (۱) و (۲):

با جابه‌جایی الکترون‌ها از کرهٔ (۱) به (۲)، به بار کرهٔ (۱)، به اندازهٔ $۲\mu C+$ و به بار کرهٔ (۲)، $۲\mu C-$ اضافه می‌شود. بنابراین اگر بار اولیهٔ کره‌های (۱) و (۲) را با q نشان دهیم، پس از جابه‌جایی الکترون، بار کرهٔ (۱) برابر $(q+۲)\mu C$ و بار کرهٔ (۲) برابر $(q-۲)\mu C$ خواهد بود که طبق فرض سؤال، می‌توان نوشت:

$$\frac{q_۱}{q_۲} = ۲ \rightarrow \frac{q+۲}{q-۲} = ۲ \rightarrow q+۲ = ۲q-۴ \rightarrow q = ۶\mu C$$

بنابراین بار نهایی کرهٔ (۲) برابر $۴\mu C$ می‌شود.

$$\Rightarrow q_۱ = q+۲ = ۸\mu C \;,\; q_۲ = q-۲ = ۴\mu C$$

۲ ۱۳۰۵ با توجه به تست (۱۱۶۴)، می‌دانیم که نیروی الکتریکی بین دو بار الکتریکی هم‌نام با مجموع بارهای ثابت، زمانی بیشینه می‌شود که مقدار بار الکتریکی آن‌ها با هم برابر باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$q_۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰}q_۱ = q_۲ + \frac{۲۰}{۱۰۰}q_۱ \rightarrow ۰/۸q_۱ = q_۲ + ۰/۲q_۱ \rightarrow q_۲ = ۰/۶q_۱$$

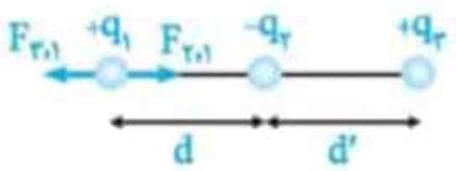
هم‌چنین نیروی بیشینهٔ $F_۱$ را می‌توانیم به صورت روبه‌رو به دست آوریم:

$$F_۱ = k\frac{(q_۱ - ۰/۲q_۱)(q_۲ + ۰/۲q_۱)}{r^۲} \xrightarrow{q_۲ = ۰/۶q_۱} F_۱ = k\frac{(۰/۸q_۱)^۲}{r^۲} = ۰/۶۴k\frac{q_۱^۲}{r^۲}$$

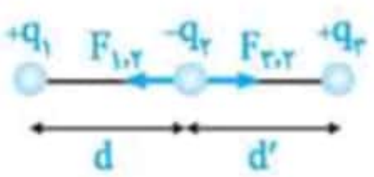
حال با توجه به خواستهٔ سؤال، نیروی الکتریکی بین بارهای اولیهٔ $q_۱$ و $q_۲$ را در فاصلهٔ $\frac{r}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$F_۲ = k\frac{q_۱q_۲}{(\frac{r}{۴})^۲} \xrightarrow{q_۲ = ۰/۶q_۱} F_۲ = k\frac{۰/۶q_۱^۲}{\frac{r^۲}{۱۶}} = ۹/۶k\frac{q_۱^۲}{r^۲} \Rightarrow \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{۹/۶k\frac{q_۱^۲}{r^۲}}{۰/۶۴k\frac{q_۱^۲}{r^۲}} = \frac{۹/۶}{۰/۶۴} = ۱۵$$

۴ ۱۳۰۶ **گام اول:** برای آن‌که برایند نیروهای وارد بر بارهای $q_۱$ و $q_۲$ صفر باشد، شرط لازم آن است که $q_۱$ و $q_۳$ هم‌نام باشند و بار $q_۲$ مخالف بار آن‌ها باشد (چرا؟).



گام دوم: با رسم نیروهای وارد بر بار $q_۱$ داریم:



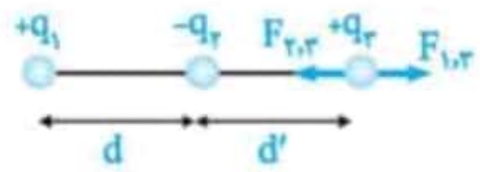
رابطهٔ (۱): $\sum F = ۰ \Rightarrow F_{۳,۱} = F_{۲,۱}$: برایند نیروهای وارد بر بار $q_۱$ صفر می‌باشد.

گام سوم: از طرفی با رسم نیروهای وارد بر بار $q_۲$ داریم:

رابطهٔ (۲): $\sum F = ۰ \Rightarrow F_{۱,۲} = F_{۳,۲} \xrightarrow[F_{۲,۱}=F_{۱,۲}]{\text{بنابر قانون سوم نیوتون}} F_{۲,۱} = F_{۳,۲}$: برایند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ صفر می‌باشد.

با توجه به روابط (۱) و (۲) واضح است که $F_{۳,۱} = F_{۳,۲}$ می‌باشد.

گام چهارم: اکنون با رسم نیروهای وارد بر بار $q_۳$ داریم:



رابطهٔ (۳):

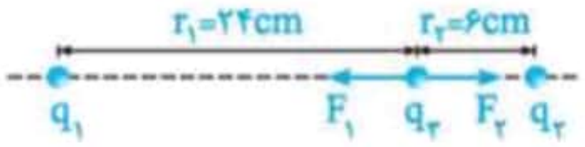
$$\text{قانون سوم نیوتون}: \begin{cases} F_{۳,۱} = F_{۱,۳} \\ F_{۳,۲} = F_{۲,۳} \end{cases}$$

$$\sum F = F_{۱,۳} - F_{۲,۳} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۳)}} \sum F = F_{۳,۱} - F_{۳,۲} \xrightarrow{F_{۳,۱} = F_{۳,۲}\ :\ \text{ثابت کردیم}} \sum F = ۰ \quad : \text{برایند نیروهای وارد بر بار } q_۳$$

بنابراین برایند نیروهای وارد بر بار $q_۳$ نیز الزاماً برابر صفر می‌باشد.

۲ ۱۳۰۷ هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: طبق صورت سؤال، قبل از جابه‌جایی بار $q_۳$، این بار در حال تعادل است، بنابراین نیروهایی که بارهای $q_۱$ و $q_۲$ بر $q_۳$ وارد می‌کنند، یکدیگر را خنثی خواهند کرد.



$$F_۱ = F_۲ \to k\frac{q_۱ q_۳}{r_۱^۲} = k\frac{q_۲ q_۳}{r_۲^۲} \to \frac{q_۱}{۲۴^۲} = \frac{q_۲}{۶^۲} \to q_۱ = ۱۶q_۲$$

از طرفی طبق صورت سؤال، بار $q_۱$، $۳۰\mu C$ بیشتر از بار $q_۲$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$q_۱ - q_۲ = ۳۰\mu C \xrightarrow{q_۱ = ۱۶q_۲} ۱۶q_۲ - q_۲ = ۳۰\mu C \to q_۲ = ۲\mu C\ ,\ q_۱ = ۳۲\mu C$$

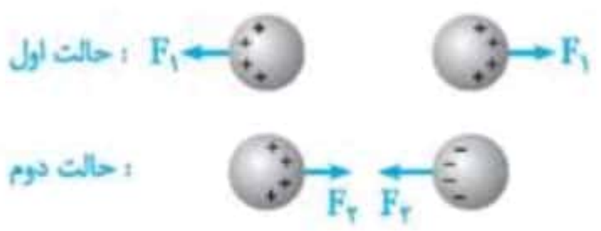
حالت دوم: پس از آن‌که بار $q_۳$، $۴cm$ به سمت چپ برود، بار $q_۱$ در تعادل قرار می‌گیرد، بنابراین نیروهایی که بارهای $q_۲$ و $q_۳$ بر $q_۱$ وارد می‌کنند، یکدیگر را خنثی خواهند کرد. بار $q_۳$، بار مثبت $q_۱$ را جذب می‌کند، بنابراین علامت بار $q_۳$، منفی خواهد بود.



$$F_۲ = F_۳ \to k\frac{q_۲ q_۱}{۳۰^۲} = k\frac{|q_۳| q_۱}{۲۰^۲} \to \frac{۲}{۳۰^۲} = \frac{|q_۳|}{۲۰^۲} \to q_۳ = -\frac{۸}{۹}\mu C$$

۱ ۱۳۰۸ ابتدا باید دقت شود که شعاع کره‌ها در مقایسه با فاصلهٔ بین دو کره مقدار قابل توجهی است.

وقتی دو کره دارای بار الکتریکی $q+$ هستند، این بارها در حداکثر فاصلهٔ ممکن از یکدیگر قرار گرفته و یکدیگر را با نیروی $F_۱$ دفع می‌کنند. اما وقتی بار یکی از کره‌ها $q+$ و دیگری $q-$ باشد، این بارها در حداقل فاصلهٔ ممکن قرار گرفته و یکدیگر را با نیروی $F_۲$ جذب می‌کنند.

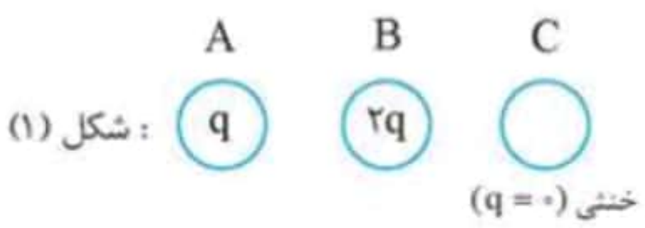


در حالت دوم به‌دلیل نزدیک شدن بارها، نیرویی که دو کره بر یکدیگر وارد می‌کنند بیشتر می‌باشد:

$$r_۲ < r_۱ \xrightarrow{F \propto \frac{۱}{r^۲}} F_۲ > F_۱$$

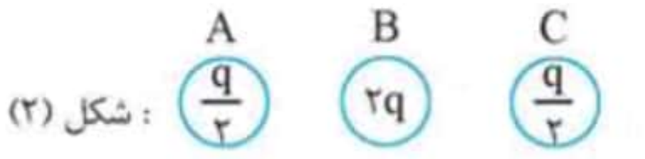
دقت: اگر شعاع کره‌ها در مقایسه با فاصلهٔ بین دو کره ناچیز باشد، نیروی $F_۱$ و $F_۲$ را می‌توان مساوی درنظر گرفت (به‌طور مثال اگر شعاع دوکره R و فاصلهٔ دو کره $۲۰۰R$ باشد).

۴ ۱۳۰۹ گام اول: با توجه به شکل مقابل کرهٔ A، B و C به‌ترتیب دارای بارهای q، $۲q$ و خنثی هستند:



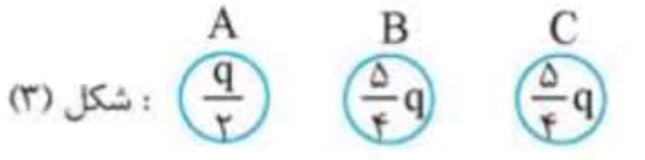
$$q_{A_۱} = q\ ,\ q_{B_۱} = ۲q\ ,\ q_{C_۱} = ۰$$

با تماس دادن کرهٔ A و C، بار موجود روی کرهٔ A، بین این دو کره به‌طور مساوی تقسیم می‌شود (دقت شود که شعاع کره‌های A و C یکسان است) و داریم:



$$q_{C_۲} = q_{A_۲} = \frac{q_{A_۱} + q_{C_۱}}{۲} = \frac{q + ۰}{۲} = \frac{q}{۲}$$

گام دوم: در نهایت با تماس دادن کرهٔ B و C، داریم:



$$q_{B_۳} = q_{C_۳} = \frac{q_{B_۲} + q_{C_۲}}{۲} = \frac{۲q + \frac{q}{۲}}{۲} = \frac{۵}{۴}q$$

گام سوم: اکنون وضعیت نهایی توزیع بارها را روی هر سه کره پیدا کردیم. از آن‌جایی که فاصلهٔ بین دو کرهٔ A و B ثابت مانده است، در مقایسهٔ نیروی کولنی در دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{F_۳}{F_۱} = \frac{q_{A_۳} \cdot q_{B_۳}}{q_{A_۱} \cdot q_{B_۱}} = \frac{\frac{q}{۲} \times \frac{۵}{۴}q}{q \times ۲q} = \frac{۵}{۱۶}$$

www.gajmarket.com

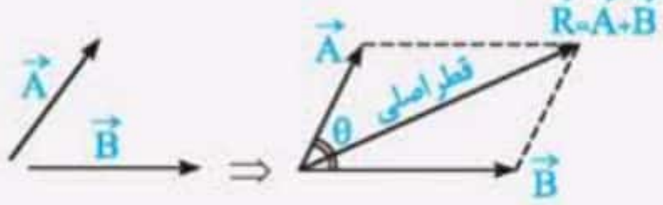
۳ ۱۳۱۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۲ — **برایندگیری بردارها در حالت کلی** (تست‌های ۱۳۱۰ تا ۱۳۱۶)

طبق گفتهٔ کتاب درسی، فقط حالت‌هایی برای برایندگیری از بردارها تو کتاب درسی مطرح میشه که بردارها تو یه راستا و یا بر هم عمود باشند. تو این قسمت، می‌خوایم نشون بدیم که اگه دو تا بردار زاویهٔ دیگه‌ای با هم بسازن، چه جوری باید برایند اونا رو حساب کنیم. دانش‌آموزای علاقه‌مند میتونن اونو بخونن ...

برایند دو بردار به روش متوازی‌الاضلاع

دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را مطابق شکل مقابل درنظر بگیرید:



برای به‌دست آوردن برایند **دو بردار**، آن‌ها را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که ابتدای آن‌ها از یک نقطه باشند، سپس متوازی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم که دو ضلع آن بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد. در این حالت، قطری از متوازی‌الاضلاع که از نقطهٔ شروع دو بردار آغاز می‌شود، معادل برایند دو بردار می‌باشد (منظور قطر اصلی است).

حال برای محاسبهٔ اندازهٔ برایند دو بردار، به دو رابطهٔ زیر که کاربرد بسیاری دارند، توجه کنید:

۱ اگر زاویهٔ بین دو بردار برابر θ باشد، اندازهٔ برایند آن‌ها برابر است با:

$$|\vec{R}|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

۲ اگر اندازهٔ دو بردار با هم برابر باشد، اندازهٔ بردار برایند از رابطهٔ ساده شدهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$|\vec{R}|=2A\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

نکات مهم و کاربردی

برایندگیری دو بردار در حالت کلی

به‌طور کلی زمانی‌که دو بردار هم‌جهت باشند $(\theta=0)$، اندازهٔ برایند آن‌ها حداکثر است و از جمع اندازه‌های دو بردار به‌دست می‌آید و زمانی‌که مختلف‌الجهت باشند $(\theta=180^\circ)$ اندازهٔ برایند آن‌ها حداقل است و از تفاضل اندازه‌های دو بردار به‌دست می‌آید.

مثال‌هایی برای درک بهتر:

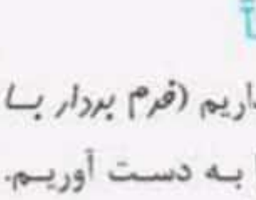
بهترین روش برای انتقال جسم: $4N \rightarrow m \rightarrow F=20N$ (زاویهٔ بین دو نیرو $\theta=0$) $\equiv m \rightarrow 24N$ (بیشترین برایند دو نیروی $4N$ و $20N$)

بدترین روش برای انتقال جسم: $4N \leftarrow m \rightarrow F=20N$ (زاویهٔ بین دو نیرو $\theta=180^\circ$) $\equiv m \rightarrow 16N$ (کم‌ترین برایند دو نیروی $4N$ و $20N$)



(دو بردار عمود برهم) $\equiv R=\sqrt{20^2+4^2}$ (برایند برابر قطر مستطیل است.)

حالت بینابین:



(زاویهٔ بین دو بردار: θ) $\equiv 16N<R<24N$

روش تجزیه برای برایندگیری بردارها

فرض کنید که اندازهٔ چند نیرو و زاویهٔ آن‌ها با افق را داریم (*فرم بردار با* $\vec{i}$ و $\vec{j}$ *برای اونا رو نداریم*) و می‌خواهیم برایند آن‌ها را به دست آوریم. در روش تجزیه برای برایندگیری نیروها گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا تمامی نیروها را روی دو محور x و y تجزیه می‌کنیم.

گام دوم: برایند مؤلفه‌ها را روی دو محور x و y به‌دست می‌آوریم.

گام سوم: در نهایت برایند کل نیروها را محاسبه می‌کنیم.

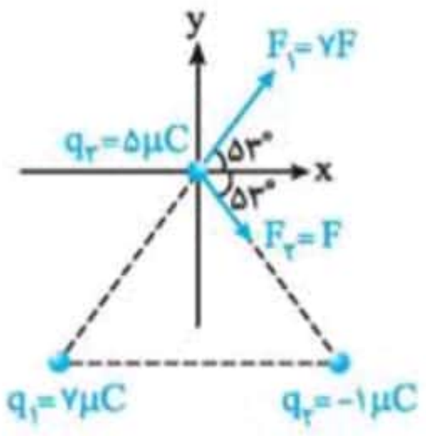


$$\begin{cases} F_{Ty}=\overbrace{F_1\sin\alpha}^{F_{1y}}+\overbrace{F_2\sin\beta}^{F_{2y}} : \text{برایند در راستای محور } y \\ F_{Tx}=\underbrace{F_1\cos\alpha}_{F_{1x}}-\underbrace{F_2\cos\beta}_{F_{2x}} : \text{برایند در راستای محور } x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_T=(F_1\cos\alpha-F_2\cos\beta)\vec{i}+(F_1\sin\alpha+F_2\sin\beta)\vec{j}\ ,\ |\vec{F}_T|=\sqrt{F_{Tx}^2+F_{Ty}^2}$$

نکته اگر با وجود تأثیر چند نیرو سیستم متعادل باشد، پس از تجزیهٔ همهٔ نیروها، برای حل مسائل و یافتن مجهول از دو شرط زیر استفاده می‌شود:

$\sum F_y=0$ (مجموع نیروها در راستای محور y) و $\sum F_x=0$ (مجموع نیروها در راستای محور x)



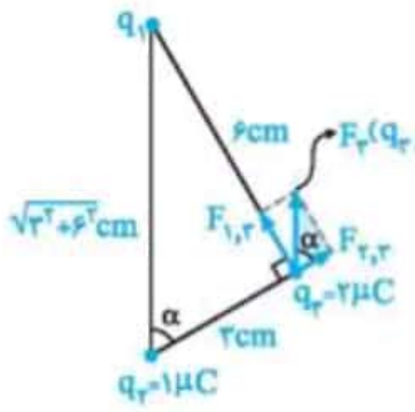
برای حل این سؤال، با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ بین بارهای q_2 و q_3 با فاصلهٔ بین بارهای q_1 و q_3، اگر اندازهٔ نیروی بین q_2 و q_3 را برابر F فرض کنیم، اندازهٔ نیروی بین q_1 و q_3 برابر $7F$ است. در ادامه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\vec{F}_1=(7F\cos 53^\circ)\vec{i}+(7F\sin 53^\circ)\vec{j}\\ \vec{F}_2=(F\cos 53^\circ)\vec{i}-(F\sin 53^\circ)\vec{j}\end{cases}$$

$$\vec{F}_{برایند}=(8F\cos 53^\circ)\vec{i}+(6F\sin 53^\circ)\vec{j}\Rightarrow \vec{F}_{برایند}=(8F\times 0/6)\vec{i}+(6F\times 0/8)\vec{j}=4/8F\vec{i}+4/8F\vec{j}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مؤلفه‌های افقی و قائم $\vec{F}_{برایند}$ با یکدیگر برابر هستند و این بردار با افق زاویهٔ 45° می‌سازد.

۴ ۱۳۱۱ ابتدا نیرویی که بار q_2 به q_3 وارد می‌کند را به دست می‌آوریم:



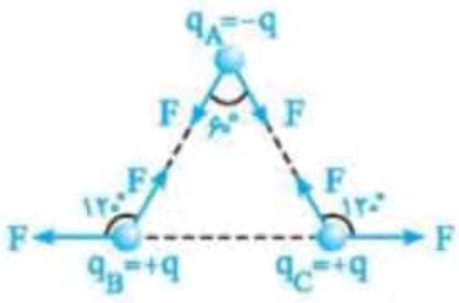
$$F_{2,3}=\frac{kq_2q_3}{r^2}=\frac{9\times10^9\times2\times1\times10^{-12}}{(3\times10^{-2})^2}=20N$$

رابطهٔ(۱): $\cos\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{F_{2,3}}{F_3}=\frac{20}{F_3}$: مثلث هاشور خورده

حال با توجه به شکل فوق می‌توان نوشت:

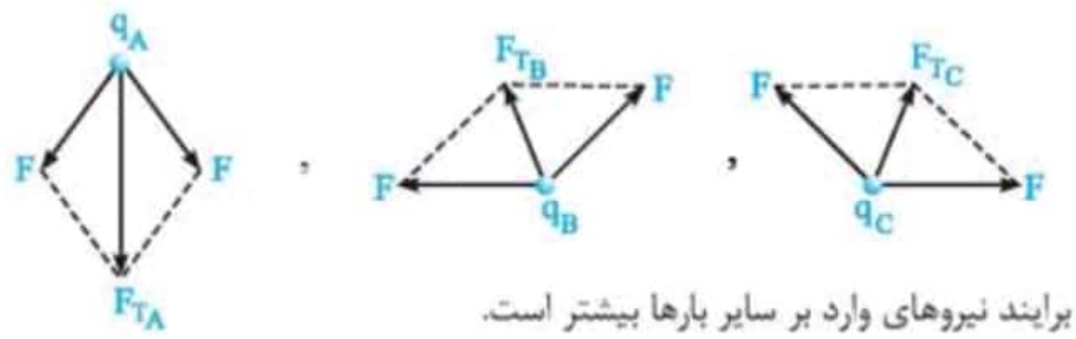
مثلث بزرگ سمت چپ : $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{3^2+6^2}}=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\xrightarrow[\text{رابطهٔ(۱)}]{\text{پاسخ نهایی}}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{20}{F_3}\rightarrow F_3=20\sqrt{5}N$

۱ ۱۳۱۲ با توجه به هم‌اندازه بودن تمام بارها و یکسان بودن فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر، اندازهٔ نیروی وارد شده از هر دو بار بر بار دیگر برابر است (F). حال کافی است که با توجه به زاویهٔ نیروهای وارد شده بر هریک از بارها، برایند نیروهای وارد بر هر بار از طرف سایر بارها را به‌دست آورد.



با توجه به شکل مقابل، چون نیروهای هم‌اندازهٔ واردشده بر بار q_A، زاویهٔ کم‌تری با هم می‌سازند، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن بیشتر است.

دید دیگر: به عبارت دیگر، با توجه به هم‌اندازه بودن نیروها، می‌توان از رابطهٔ $F_{برایند}=2F\cos\frac{\alpha}{2}$ برای برایندگیری استفاده کرد.

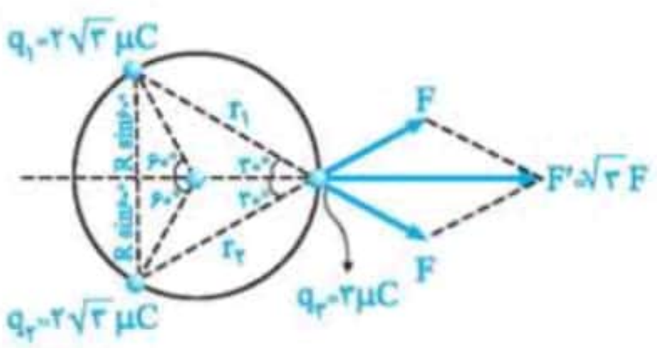


$$F_{T_B}=F_{T_C}=2F\cos\frac{120^\circ}{2}=F$$

$$F_{T_A}=2F\cos\frac{60^\circ}{2}=\sqrt{3}F$$

بنابراین برایند نیروهای وارد بر بار قرار گرفته در رأس A از مثلث از برایند نیروهای وارد بر سایر بارها بیشتر است.

۱ ۱۳۱۳ از طرف هریک از بارهای q_1 و q_2، نیروی یکسانی به بار q_3 اعمال می‌شود و آن را F درنظر می‌گیریم و برایند این دو نیرو برابر $F\sqrt{3}$ می‌باشد.



$$\begin{cases}F'=2F\cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right)=\sqrt{3}F\\ r_1=2\times R\sin 60^\circ=R\sqrt{3}=10\sqrt{3}\times10^{-2}\,m\\ F=\frac{kq_1q_3}{r_1^2}=\frac{9\times10^9\times(2\sqrt{3}\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{(\sqrt{3}\times10^{-1})^2}=1/8\sqrt{3}\,N\end{cases}$$

$$\Rightarrow F'=F\sqrt{3}=1/8\sqrt{3}\times\sqrt{3}=5/4N$$

از سوی دیگر طبق صورت سؤال، برایند نیروهای وارد بر q_3 برابر $8/1N$ می‌باشد، پس بار مثبت q_4 نیرویی برابر $2/7N$ $(=8/1-5/4)$ را به سمت راست بر آن وارد می‌کند و مقدار q_4 برابر است با (دقت شود که فاصلهٔ بین q_4 و q_3 برابر شعاع دایره است):

$$\begin{cases}F_{4,3}=F_T-F'=8/1-5/4=2/7\,N\\ F_{4,3}=\frac{kq_4q_3}{R^2}=\frac{9\times10^9\times q_4\times(3\times10^{-6})}{(0/1)^2}=2/7\Rightarrow 2/7=2/7\times10^6q_4\Rightarrow q_4=10^{-6}C=1\mu C\end{cases}$$

www.gajmarket.com

* به نظر شما اگر بار $q_۴$ منفی بود، مقدارش چه‌قدر بود؟

خلاقیت حرفه‌ای ها

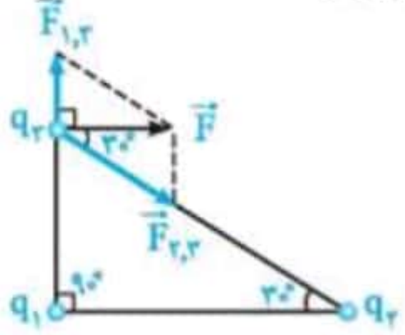
در یک دایره مطابق شکل، طول ضلع AB با تفاضل دو بردار هم‌اندازهٔ OA و OB برابر است و به سادگی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|\overrightarrow{AB}| = ۲R\sin\frac{\alpha}{۲}$$

از این ابتکار در حل این تست، بهره بردیم.



۱۳۱۴ ۴ با توجه به جهت مؤلفه‌های F روی راستای اضلاع مثلث واضح است که بارهای $q_۱$ و $q_۳$ هم‌نام و بارهای $q_۲$ و $q_۳$ ناهم‌نام‌اند و در نتیجه بارهای $q_۱$ و $q_۲$ لزوماً ناهم‌نام‌اند. از طرفی با توجه به مؤلفه‌های $F_{۲,۳}$ و $F_{۱,۳}$ واضح است که $F_{۲,۳} > F_{۱,۳}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:



با توجه به شکل: $\sin ۳۰^\circ = \frac{r_{۱,۳}}{r_{۲,۳}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{r_{۱,۳}}{r_{۲,۳}} \Rightarrow r_{۲,۳} = ۲r_{۱,۳}$

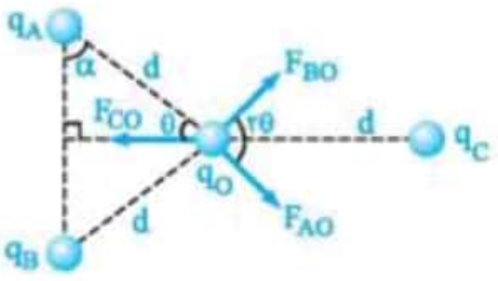
$$F_{۲,۳} > F_{۱,۳}$$

$$\frac{k q_۲ q_۳}{(r_{۲,۳})^۲} > \frac{k q_۱ q_۳}{(r_{۱,۳})^۲} \Rightarrow \frac{q_۲}{(۲r_{۱,۳})^۲} > \frac{q_۱}{(r_{۱,۳})^۲} \Rightarrow \frac{q_۲}{۴r_{۱,۳}^۲} > \frac{q_۱}{r_{۱,۳}^۲} \Rightarrow q_۲ > ۴q_۱$$

تذکر

در روش متوازی‌الاضلاع، بردار برایند همواره با بردار بزرگ‌تر، زاویهٔ کوچک‌تر را می‌سازد و به آن نزدیک‌تر است. به همین دلیل با توجه به این‌که بردار $\vec{F}$ زاویهٔ کوچکتری با $F_{۲,۳}$ ساخته است، بنابراین $\vec{F}_{۲,۳}$، لزوماً از $\vec{F}_{۱,۳}$ بزرگ‌تر است.

۱۳۱۵ ۲ برای آن‌که برایند نیروهای وارد بر بار q_O صفر باشد، می‌بایست نیروی بار q_C وارد بر بار q_O برابر و در خلاف جهت برایند نیروهای دوبار q_A و q_B وارد بر بار q_O باشد، بنابراین می‌توان نوشت:



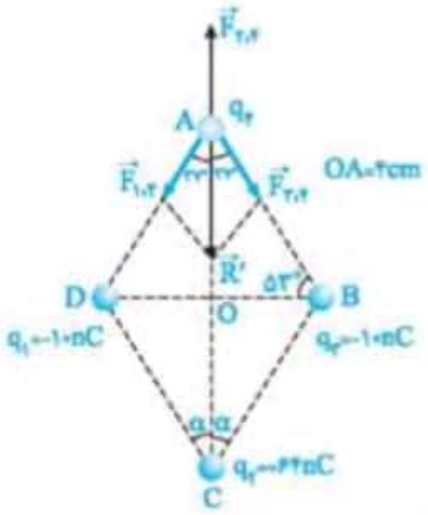
$$\begin{cases} q_A = q_B \\ r_{AO} = r_{BO} = d \end{cases} \Rightarrow F_{AO} = F_{BO} = \frac{k q_A q_O}{d^۲}$$

F_{AO} و F_{BO} برایند: $F_۱ = ۲F_{AO}\cos\left(\frac{۲\theta}{۲}\right) = ۲F_{AO}\cos\theta \xrightarrow[\cos\theta=\sin\alpha]{\alpha+\theta=\frac{\pi}{۲}} F_۱ = ۲\times\frac{k q_A q_O}{d^۲}\times\sin\alpha$ ، از طرفی : $F_{CO} = \frac{k q_O q_C}{d^۲}$

برایند نیروهای وارد بر q_O صفر است: $F_{CO} = F_۱ \Rightarrow \frac{k q_O q_C}{d^۲} = ۲\times\frac{k q_O q_A}{d^۲}\times\sin\alpha \Rightarrow \frac{q_C}{۲q_A} = \sin\alpha \xrightarrow[\frac{q_C}{q_A}=\frac{۴}{۲/۵}]{۲/۵q_C=۴q_A}$

$$\sin\alpha = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۲/۵}\right) = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \alpha = ۵۳^\circ$$

۱۳۱۶ ۴ ابتدا با توجه به بارهای داده شده، نیروهای وارد بر بار $q_۴$ را رسم می‌کنیم. در این شکل به دلیل تقارن، نیروهای $\vec{F}_{۳,۴}$ و $\vec{F}_{۱,۴}$ با یک‌دیگر برابر هستند و اکنون اندازهٔ نیروی $\vec{F}_{۳,۴}$ را محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} \sin ۵۳^\circ = \frac{OA}{AB} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۴}{AB} \Rightarrow AB = ۵\,cm \\ \text{قانون کولن}: F_{۳,۴} = \frac{k q_۳ q_۴}{(AB)^۲} = \frac{k\times۱۰\times q_۴}{(۵)^۲} \end{cases}$$

در ادامه از آن‌جایی که برایند نیروهای وارد بر بار $q_۴$ صفر است، بنابراین نیروی $\vec{F}_{۲,۴}$ برابر و در خلاف جهت برایند نیروهای $\vec{F}_{۱,۴}$ و $\vec{F}_{۳,۴}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{۱,۴} + \vec{F}_{۳,۴} = -\vec{F}_{۲,۴} \Rightarrow |\vec{F}_{۱,۴} + \vec{F}_{۳,۴}| = |\vec{F}_{۲,۴}|$$

$$۲|F_{۳,۴}|\cos\left(\frac{۲\times۳۷^\circ}{۲}\right) = |\vec{F}_{۲,۴}| \Rightarrow ۲\times\frac{k\times۱۰\times q_۴}{۲۵}\times\frac{۸}{۱۰} = \frac{k\times۶۴\times q_۴}{(AC)^۲} \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۶۴}{(AC)^۲} \Rightarrow AC = ۱۰\,cm$$

بنابراین زاویهٔ α برابر است با:

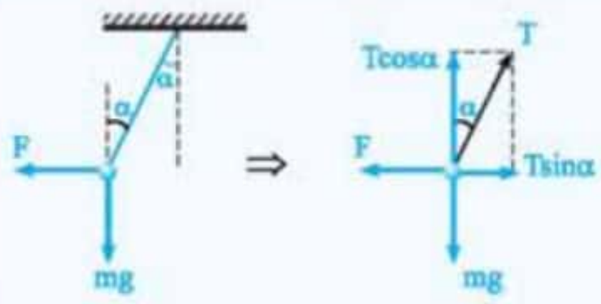
$$AC = AO + OC \Rightarrow ۱۰ = ۴ + OC \Rightarrow OC = ۶\,cm \;,\; OB = AB\cos ۵۳^\circ = ۵\times۰/۶ = ۳\,cm$$

$$\tan\alpha = \frac{OB}{OC} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow \alpha = \text{Arc}\tan\frac{۱}{۲}$$

۳ ۱۳۱۷

نکته

در شکل مقابل اگر گلوله در حالت تعادل باشد، رابطهٔ بین F، mg و α به‌صورت زیر است:



$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow T\sin\alpha = F \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg\end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{F}{mg}$$

این نکته در حل دو تست بعد، کاربرد بسیار زیادی دارد.

به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که گلولهٔ باردار A بر B وارد می‌کند، برابر و در خلاف جهت نیرویی است که گلولهٔ باردار B بر A وارد می‌کند، بنابراین $F_A = F_B$ بوده و در خلاف جهت یک‌دیگر می‌باشد.

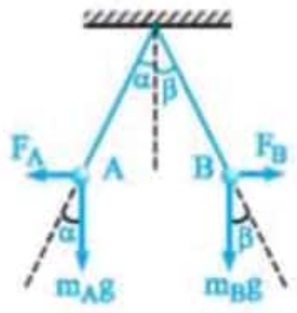
۲ و ۳) طبق نکتهٔ فوق، برای برابر بودن زاویهٔ انحراف دو گلوله از راستای قائم ($\alpha = \beta$)، از آن‌جا که اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو گلوله یکسان است، باید جرم دو گلوله نیز یکسان باشد.

$$\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \frac{F_A}{m_A g} = \frac{F_B}{m_B g} \xrightarrow{F_A = F_B} m_A = m_B$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

دقت کنید که برابر بودن زاویهٔ انحراف دو گلوله ارتباطی به بار دو گلوله ندارد، چون در هر صورت نیروی الکتریکی بین دو بار یکسان می‌شود.

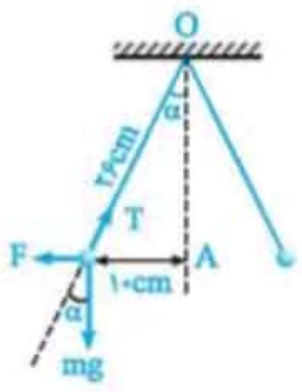
۴) با توجه به نکتهٔ فوق و شکل مقابل، برای هریک از گلوله‌های A و B می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}\tan\alpha = \frac{F_A}{m_A g} \\ \tan\beta = \frac{F_B}{m_B g}\end{cases} \xrightarrow[F_A = F_B]{\text{طرفین را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{m_B}{m_A} \xrightarrow{m_B > m_A} \tan\alpha > \tan\beta \Rightarrow \alpha > \beta$$

۲ ۱۳۱۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: به‌دست آوردن $\tan\alpha$ به کمک روابط مثلثاتی:



فیثاغورث: $۲۶^۲ = ۱۰^۲ + OA^۲ \Rightarrow OA^۲ = ۲۶^۲ - ۱۰^۲ = \overbrace{(۲۶-۱۰)}^{۱۶}\overbrace{(۲۶+۱۰)}^{۳۶} \Rightarrow OA = \sqrt{۱۶\times۳۶} = ۴\times۶ = ۲۴\,cm$

$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۱۰}{۲۴}$$

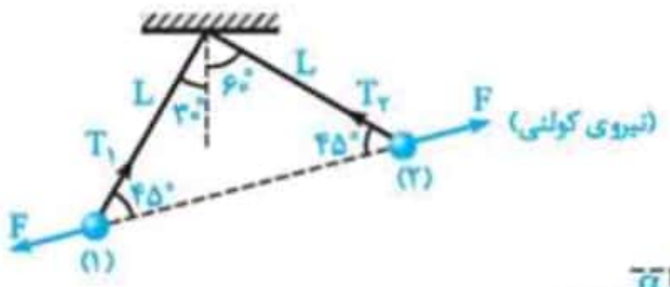
گام دوم: به‌دست آوردن نیروی الکتریکی بین دو گلوله (F):

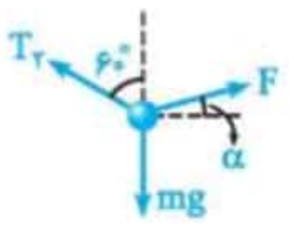
$$\tan\alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{F}{۲۴\times۱۰^{-۳}\times۱۰} \Rightarrow F = ۰/۱\,N$$

گام سوم: به‌دست آوردن بار گلوله‌ها با استفاده از قانون کولن:

$$F = k\frac{q_۱q_۲}{r^۲} \xrightarrow[r = ۲\times۱۰ = ۲۰\,cm]{q_۱ = q_۲ = q} ۰/۱ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{q^۲}{(۲\times۱۰^{-۱})^۲} \Rightarrow q^۲ = \frac{۴}{۹}\times۱۰^{-۱۲} \Rightarrow q = \frac{۲}{۳}\times۱۰^{-۶}\,C = \frac{۲}{۳}\mu C$$

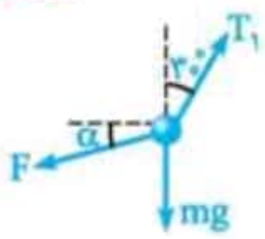
۳ ۱۳۱۹ برای حل می‌توان گفت با توجه به برابر بودن طول نخ‌ها، زاویهٔ خط‌چین با نخ‌ها برابر ۴۵° است. از طرفی نیروهای کولنی هر دو در یک راستا هستند و با افق زاویهٔ یکسان می‌سازند و با توجه به تعادل گلوله‌ها داریم:





تعادل گلولهٔ (۲) در راستای افق

رابطهٔ (۲): $T_۲\sin۶۰^\circ = F\cos\alpha$



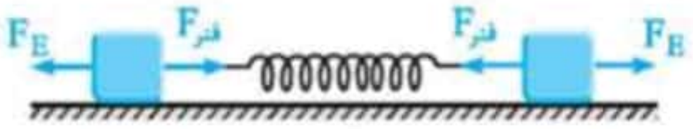
تعادل گلولهٔ (۱) در راستای افق

رابطهٔ (۱): $T_۱\sin۳۰^\circ = F\cos\alpha$

$$\frac{\text{رابطهٔ (۱)}}{\text{رابطهٔ (۲)}} \Rightarrow \frac{T_۱\sin۳۰^\circ}{T_۲\sin۶۰^\circ} = ۱ \Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{\sin۶۰^\circ}{\sin۳۰^\circ} = \sqrt{۳}$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۳۲۰ با توجه به این‌که دو بار الکتریکی هم‌نام هستند، بنابراین این دو بار یک‌دیگر را دفع کرده و فنر کشیده می‌شود. در حالت تعادل، نیروی فنر با نیروی دافعهٔ الکتریکی بین بارها هم‌اندازه است، بنابراین می‌توان نوشت:

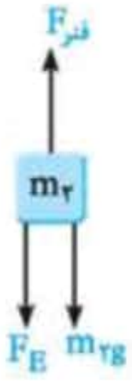


$$|F_{فنر}| = |F_E| \rightarrow k_{فنر}\overbrace{\Delta x}^{(x_۲ - x_۱)} = k\frac{|q_۱||q_۲|}{x_۲^۲}$$

$$\rightarrow ۲۵۰(x_۲ - ۰/۰۲) = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۱\times۱۰^{-۶}\times۴\times۱۰^{-۶}}{x_۲^۲} \Rightarrow ۲۵۰x_۲ - ۵ = \frac{۳۶\times۱۰^{-۳}}{x_۲^۲}$$

با استفاده از گزینه‌های سؤال، مشاهده می‌شود که فقط $x_۲ = ۰/۰۶\,m$ در معادلهٔ بالا صدق می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۳۲۱ جسم $m_۲$ در حال تعادل قرار دارد، بنابراین برایند نیروهای الکتریکی، وزن و نیروی کشسانی فنر وارد بر آن برابر صفر خواهد بود و می‌توان نوشت:



$$F_{فنر} = F_E + m_۲g = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲} + m_۲g$$

$$F_{فنر} = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۵\times۱۰^{-۶}\times۵\times۱۰^{-۶}}{(۵\times۱۰^{-۲})^۲} + ۰/۵\times۱۰ = ۹۰ + ۵ = ۹۵N$$

* برای حل این سؤال، نیازی به دانستن جرم $m_۱$ نداشتیم.

۲ ۱۳۲۲ می‌دانیم که واحد شدت میدان الکتریکی در سیستم SI، نیوتون بر کولن می‌باشد. اما طبق روابط زیر، واحد شدت میدان الکتریکی را به شیوه‌ای دیگر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\begin{cases} F = ma \Rightarrow \text{نیوتون} \equiv \text{کیلوگرم}.\dfrac{\text{متر}}{\text{مجذور ثانیه}} \\ q = It \Rightarrow \text{کولن} \equiv \text{آمپر} . \text{ثانیه} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{نیوتون}}{\text{کولن}} \equiv \frac{\text{متر}.\text{کیلوگرم}}{\text{ثانیه} . \text{آمپر}} \equiv \frac{\text{متر} . \text{کیلوگرم}}{\text{مکعب ثانیه} . \text{آمپر}} \equiv \frac{kg.m}{A.s^۳}$$

۲ ۱۳۲۳ با توجه به شکل مقابل، دو نیرو بر بار مثبت q وارد می‌شود:



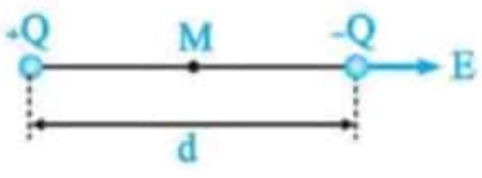
۱- نیروی وزن (W) ۲- نیروی الکتریکی (F_e)

برایند دو نیروی فوق را با $\vec{F}_{برایند}$ نشان می‌دهیم. از آن‌جایی که حرکت ذره بدون سرعت اولیه است، در نتیجه این ذره در جهت نیروی $\vec{F}_{برایند}$ شروع به حرکت می‌کند.

* دقت کنیم اندازهٔ نیروی برایند F در حین حرکت ثابت است (چون W و F_e ثابت است)، بنابراین حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود. از طرفی سرعت و شتاب همواره هم‌جهت هستند و هرگاه این اتفاق رخ دهد، مسیر حرکت لزوماً خط راست است.

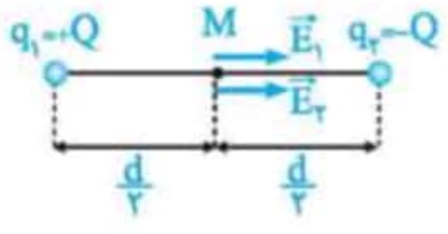
$\vec{v} = \frac{\vec{F}_{برایند}}{m}t + \vec{v}_۰ \Rightarrow \vec{v}$ با $\vec{F}_{برایند}$ هم‌جهت است.

۴ ۱۳۲۴ **گام اول:** ابتدا میدان الکتریکی بار Q را در محل بار Q- به‌دست آورده و آن را E می‌نامیم:



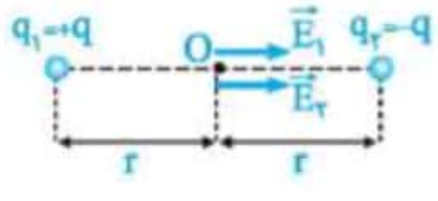
رابطهٔ (۱): $E = \frac{kQ}{d^۲}$

گام دوم: با محاسبهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ M داریم:



$$\begin{cases} E_۱ = \frac{kQ}{(\frac{d}{۲})^۲} = ۴\frac{kQ}{d^۲} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} E_۱ = ۴E \\ E_۲ = \frac{kQ}{(\frac{d}{۲})^۲} = ۴\frac{kQ}{d^۲} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} E_۲ = ۴E \end{cases} \Rightarrow E_{برایند} = E_۱ + E_۲ = ۸E$$

۱ ۱۳۲۵ **گام اول:** ابتدا میدان الکتریکی را در وسط خط واصل دو بار به‌دست می‌آوریم:

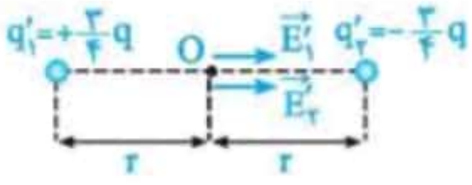


$$\begin{cases} r_۱ = r_۲ = r \\ |q_۱| = |q_۲| = q \end{cases} \Rightarrow E_۱ = E_۲ = \frac{kq}{r^۲} \Rightarrow E_{برایند} = E_۱ + E_۲ = \frac{۲kq}{r^۲}$$

گام دوم: با توجه به آن‌که دو بار ناهم‌نام هستند، در نتیجه با برداشتن ۲۵ درصد یکی از بارها (مثلاً بار مثبت) و افزودن آن به بار الکتریکی دیگر، اندازهٔ هریک از بارها $\frac{۳}{۴}$ برابر می‌شود:

$$\begin{cases} q_۱ = +q \\ q_۲ = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q'_۱ = (+q) - \left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)(+q) = \frac{۷۵}{۱۰۰}q = \frac{۳}{۴}q \\ q'_۲ = (-q) + \left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)(+q) = \frac{-۷۵}{۱۰۰}q = -\frac{۳}{۴}q \end{cases}$$

گام سوم: در حالت جدید میدان برایند در نقطهٔ O برابر است با:



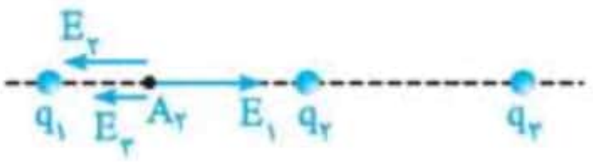
$$\begin{cases} r'_۱ = r'_۲ = r \\ |q'_۱| = |q'_۲| = \frac{۳}{۴}q \end{cases} \Rightarrow E'_۱ = E'_۲ = \frac{k\left(\frac{۳}{۴}q\right)}{r^۲} \Rightarrow E'_{\text{برایند}} = E'_۱ + E'_۲ = \frac{۳}{۲}\frac{kq}{r^۲}$$

$$\frac{E'_{\text{برایند}}}{E_{\text{برایند}}} = \frac{\frac{۳}{۲}\frac{kq}{r^۲}}{\frac{۲kq}{r^۲}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow E'_{\text{برایند}} = \frac{۳}{۴}E_{\text{برایند}} \Rightarrow$$ میدان برایند، ۲۵ درصد کاهش می‌یابد.

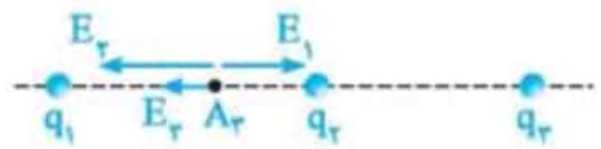
۳ ۱۳۲۶ همان‌طور که می‌دانیم اگر از طرف سه‌بار $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ بر بار الکتریکی q' نیرویی وارد نشود، در واقع میدان الکتریکی حاصل از سه‌بار $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ در محل بار q' برابر صفر است. برای حل این سؤال، هر یک از نقاط را جداگانه بررسی می‌کنیم تا مشخص شود میدان الکتریکی برایند، در کدام‌یک از این نقاط می‌تواند برابر صفر شود. هم‌چنین فرض می‌کنیم هر سه بار مثبت باشند.



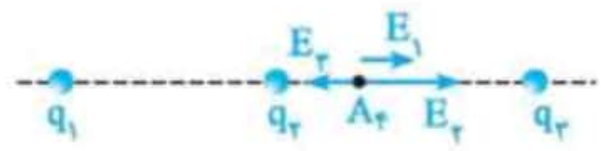
نقطهٔ $A_۱$: مطابق شکل، در این نقطه هر سه میدان به سمت چپ خواهند بود. بنابراین برایند این سه میدان الکتریکی، برابر صفر نخواهد شد.



نقطهٔ $A_۲$: مطابق شکل، در این نقطه میدان $\vec{E}_۱$ به سمت راست است و میدان‌های $\vec{E}_۲$ و $\vec{E}_۳$ به سمت چپ خواهند بود. با توجه به این‌که نقطهٔ $A_۲$ به $q_۱$ نزدیک‌تر است، اندازهٔ میدان $\vec{E}_۱$ از هر یک از میدان‌های $\vec{E}_۲$ و $\vec{E}_۳$ بزرگ‌تر است و بنابراین میدان الکتریکی کل در این نقطه می‌تواند صفر شود.



نقطهٔ $A_۳$: مانند نقطهٔ $A_۲$ است، با این تفاوت که چون $A_۳$ به $q_۲$ نزدیک‌تر است، اندازهٔ میدان $\vec{E}_۲$ از اندازهٔ میدان‌های $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۳$ بزرگ‌تر است و در نتیجه میدان کل نمی‌تواند صفر شود.



نقطهٔ $A_۴$: در این نقطه میدان‌های $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ به سمت راست هستند و $\vec{E}_۳$ به سمت چپ خواهد بود. با توجه به این‌که نقطهٔ $A_۴$ به $q_۲$ نزدیک‌تر است، اندازهٔ $\vec{E}_۲$ از سایر میدان‌ها بزرگ‌تر است و مطابق شکل، میدان الکتریکی کل در این نقطه نمی‌تواند صفر شود.

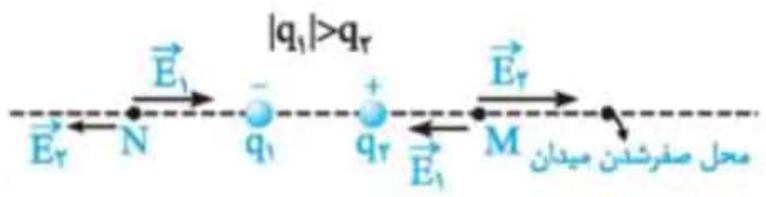
نقطهٔ $A_۵$: مشابه استدلال مطرح شده برای نقطهٔ $A_۱$، میدان الکتریکی برایند در این نقطه نمی‌تواند صفر شود.

۴ ۱۳۲۷ حالت‌های مختلف زیر را درنظر می‌گیریم:

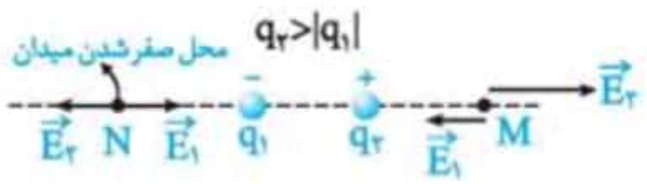


حالت اول: هر دو بار $q_۱$ و $q_۲$ مثبت باشند:

بنابراین در این حالت میدان در نقطهٔ N به سمت چپ است.



حالت دوم: بار $q_۲$ مثبت و $q_۱$ منفی و $|q_۱| > q_۲$ باشد، در این حالت می‌دانیم میدان در خارج از دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر، یعنی $q_۲$، صفر می‌شود و جهت میدان برایند در سمت دیگر بار بزرگ‌تر، تابع جهت میدان بار بزرگ‌تر است. بنابراین در نقطهٔ N میدان می‌تواند به سمت راست باشد.

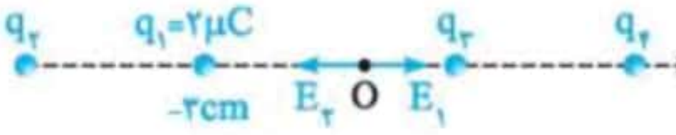


حالت سوم: بار $q_۲$ مثبت و $q_۱$ منفی و $|q_۱| < q_۲$ باشد. در این حالت میدان در سمت چپ $q_۱$ (یعنی نقطهٔ N) می‌تواند صفر شود (چرا؟) و در خارج از فاصلهٔ بین دو بار و در سمت نزدیک به بار بزرگ‌تر (یعنی نقطهٔ M) تابع جهت میدان بار بزرگ‌تر می‌باشد.

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

gajmarket.com

۳ ۱۳۲۸ میدان الکتریکی در مبدأ مختصات برابر صفر است، بنابراین اگر میدان ناشی از بار q_1 در مبدأ مختصات را با $\vec{E}_1$ و میدان کل ناشی از بارهای q_2، q_3 و q_4 در مبدأ مختصات را با $\vec{E}_2$ نمایش دهیم، $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ باید با هم برابر و در خلاف جهت هم باشند تا میدان برایند در مبدأ مختصات صفر شود. بنابراین می‌توان نوشت:



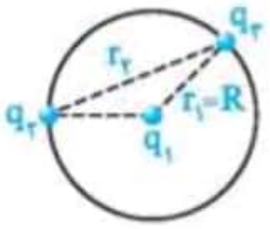
$$E_2 = E_1 = k\frac{q_1}{r^2} = 9\times10^9 \times \frac{2\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2} = 2\times10^7\ N/C$$

هنگامی که بار q_1 به مبدأ مختصات منتقل می‌شود، از طرف میدان الکتریکی سایر بارها، یعنی $\vec{E}_2$، به آن نیرو وارد می‌شود، بنابراین اندازهٔ نیروی وارد شده بر بار الکتریکی q_1 در مبدأ مختصات برابر است با:

$$F = q_1E_2 = 2\times10^{-6}\times2\times10^7 = 40\ N$$

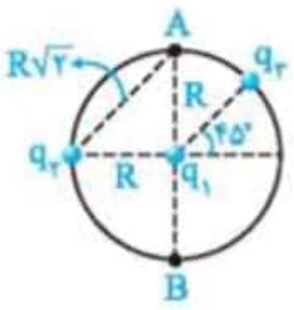
میدان $\vec{E}_2$ به سمت چپ است، بنابراین به بار مثبت q_1، نیروی الکتریکی به سمت چپ، یعنی در خلاف جهت محور x وارد می‌شود.

۲ ۱۳۲۹ نیرویی که بار q_3 به q_1 وارد می‌کند را F_1 و نیرویی که q_3 به q_2 وارد می‌کند را F_2 می‌نامیم، بنابراین با توجه به خواستهٔ سؤال، می‌توان نوشت:



$$F_1 = F_2 \rightarrow k\frac{|q_1||q_3|}{r_1^2} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_2^2}$$: طبق صورت سؤال

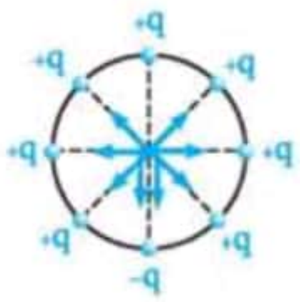
$$\xrightarrow{r_1=R} \frac{|q_1|}{R^2} = \frac{|q_2|}{r_2^2}$$



$$\xrightarrow[q_2=20\mu C]{q_1=10\mu C} \frac{10}{R^2} = \frac{20}{r_2^2} \rightarrow r_2^2 = 2R^2 \rightarrow r_2 = R\sqrt{2}$$

برای آن‌که اندازهٔ r_2 برابر $R\sqrt{2}$ شود، کافی است بار q_3 را به یکی از نقاط A یا B در شکل نشان داده شده منتقل کنیم. بنابراین باید بار q_3 را ۴۵ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم و یا ۱۳۵ درجه در جهت عقربه‌های ساعت این بار را جابه‌جا کنیم.

۱ ۱۳۳۰ با توجه به آن‌که اندازه بارها و فاصلهٔ همهٔ بارها تا مرکز دایره برابر است، بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از همهٔ بارها در مرکز دایره یکسان است. در ادامه با توجه به شکل مقابل، میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای مثبت که روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند، خنثی می‌شوند و میدان الکتریکی در مرکز دایره فقط ناشی از دو بار $q+$ و $q-$ است که در یک راستا هستند.



اکنون می‌توان نوشت:

$$E_{\text{برایند}} = 2E = 2\frac{kq}{r^2} = \frac{2\times9\times10^9\times5\times10^{-9}}{(3\times10^{-1})^2} = 10^3\ N/C$$

۳ ۱۳۳۱

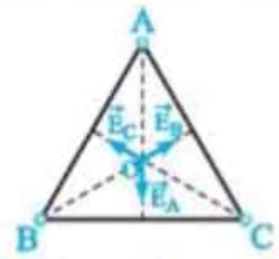
نکته

برایند سه بردار هم‌اندازه که زاویهٔ بین آن‌ها دوبه‌دو ۱۲۰ درجه است، برابر صفر می‌باشد.

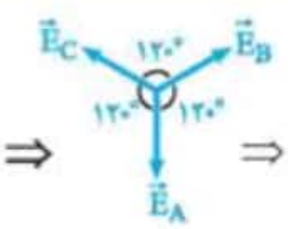


$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{برایند}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

در شکل مقابل واضح است که هر سه بار الکتریکی از نقطهٔ O یک فاصله دارند و با توجه به هم‌اندازه بودن بارها، میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای q_A، q_B و q_C در نقطهٔ O هم‌اندازه هستند. از طرفی زاویهٔ بین آن‌ها دوبه‌دو برابر ۱۲۰ درجه می‌باشد (چرا؟)، بنابراین با توجه به نکتهٔ فوق، برایند میدان الکتریکی در نقطهٔ O صفر می‌باشد.

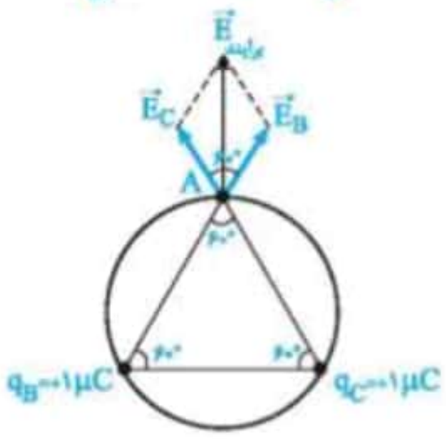


$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{برایند}} = 0$$

۴ ۱۳۳۲ با توجه به شکل مقابل، برایند میدان‌های الکتریکی ناشی از q_B و q_C در نقطهٔ سوم (نقطهٔ A) برابر است با:



$$AB = AC = \sqrt{3}\ m$$

$$E_B = E_C = \frac{kq}{r^2} = \frac{9\times10^9\times10^{-6}}{(AB)^2} = \frac{9\times10^3}{(\sqrt{3})^2} = 3000\ N/C$$

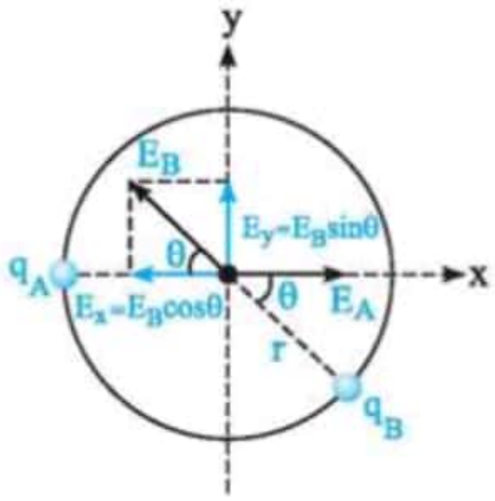
$$E_{\text{برایند}} = 2E_B\cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = 2E_B\cos30^\circ = 2\times(3000)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3}\ N/C$$

تذکر

مشابه با تست (۱۳۱۳)، فاصله‌های AB و AC برابر $2R\sin\frac{\alpha}{2}$ است.

$$AB = AC = 2\times1\times\sin\left(\frac{120^\circ}{2}\right) = \sqrt{3}\ m$$

۱ ۱۳۳۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



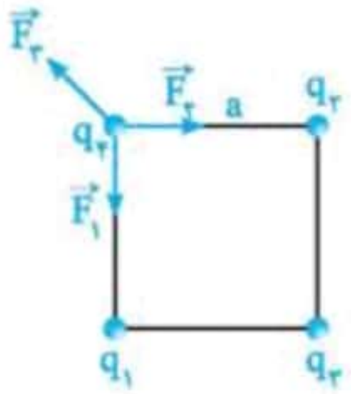
گام اول: بردار میدان الکتریکی ناشی از بار q_A در مرکز دایره در راستای افقی می‌باشد. بنابراین اگر قرار باشد طبق صورت سؤال، میدان الکتریکی برایند در جهت مثبت محور y باشد، باید بار q_B بتواند مؤلفه‌ای از میدان الکتریکی را در جهت مثبت y ایجاد کند، بنابراین بار q_B مثبت می‌باشد.

گام دوم: از طرفی چون میدان الکتریکی برایند در راستای y است، بنابراین باید q_A مثبت باشد تا بتواند مؤلفهٔ افقی میدان ناشی از q_B را خنثی کند.

گام سوم: با توجه به برابر بودن مؤلفهٔ افقی دو میدان E_A و E_B، می‌توان نوشت:

$$E_A = E_{B_x} = E_B\cos\theta \xrightarrow[E_B=k\frac{q_B}{r^2}]{E_A=k\frac{q_A}{r^2}} k\frac{q_A}{r^2}=k\frac{q_B}{r^2}\cos\theta \Rightarrow \left|\frac{q_A}{q_B}\right|=\cos\theta \xrightarrow{q_A>0,\,q_B>0} \frac{q_A}{q_B}=\cos\theta$$

۳ ۱۳۳۴ این سؤال را در هر دو حالت بررسی می‌کنیم:



حالت اول: در این حالت بار q_4 در حال تعادل است، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن از طرف سایر بارها برابر صفر است و می‌توان نوشت:

$$F_1 = F_2 = k\frac{|q_1||q_4|}{a^2}$$

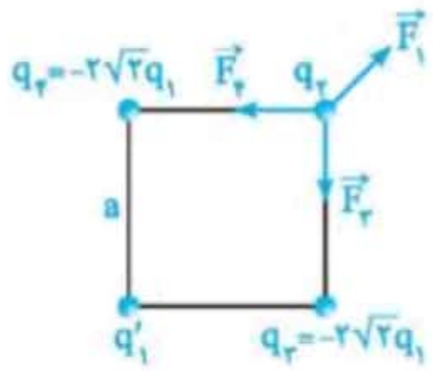
$$F_3 = k\frac{|q_3||q_4|}{(a\sqrt{2})^2} = k\frac{|q_3||q_4|}{2a^2}$$

برای آن‌که بار q_4 در حال تعادل باشد، باید اندازهٔ برایند $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، برابر اندازهٔ $\vec{F}_3$ شود، یعنی داریم:

$$\sqrt{F_1^2+F_2^2}=F_3 \xrightarrow{F_1=F_2} F_1\sqrt{2}=F_3 \rightarrow \sqrt{2}\,k\frac{|q_1||q_4|}{a^2}=k\frac{|q_3||q_4|}{2a^2} \rightarrow |q_3|=2\sqrt{2}\,|q_1|$$

با توجه به آن‌که بار q_3، بار هم‌نام q_4 را دفع کرده ولی q_1 و q_2 آن را جذب کرده‌اند، علامت بار q_3 و q_4 قرینهٔ علامت q_1 و q_2 است، پس $q_3 = -2\sqrt{2}q_1$ خواهد بود.

حالت دوم: در این حالت بررسی می‌کنیم که بار q_1 چند برابر شود تا q_2 در حال تعادل قرار بگیرد. اگر مقدار جدید q_1 را با q_1' نشان دهیم، مطابق شکل داریم:



$$F_3 = F_4 = k\frac{2\sqrt{2}\,|q_1||q_2|}{a^2}$$

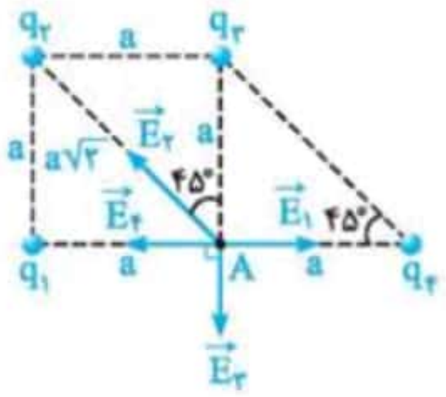
$$F_1 = k\frac{|q_1'||q_2|}{(a\sqrt{2})^2} = k\frac{|q_1'||q_2|}{2a^2}$$

برای آن‌که برایند نیروهای وارد بر بار q_2 برابر صفر شود، باید اندازهٔ برایند $\vec{F}_3$ و $\vec{F}_4$ برابر اندازهٔ $\vec{F}_1$ شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sqrt{F_3^2+F_4^2}=F_1 \xrightarrow{F_3=F_4} \sqrt{2}\,F_3=F_1 \rightarrow \sqrt{2}\,k\frac{2\sqrt{2}\,|q_1||q_2|}{a^2}=k\frac{|q_1'||q_2|}{2a^2} \rightarrow |q_1'|=8\,|q_1|$$

با توجه به آن‌که q_1'، بار q_2 که برابر q_1 است را دفع کرده است، بار q_1' با q_1 و q_2 هم‌نام است و در نتیجه $q_1' = 8q_1$ خواهد بود.

۱ ۱۳۳۵ برای آن‌که برایند میدان الکتریکی در نقطهٔ A برابر صفر شود، باید برایند میدان‌ها هم در راستای افقی (محور x) و هم در راستای قائم (محور y) برابر صفر شود. با توجه به شکل زیر، برای این‌که برایند نیروها در راستای قائم برابر صفر شود، باید بارهای q_2 و q_3 مختلف‌العلامت باشند (چرا؟). در این صورت می‌توان نوشت:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow E_2\cos 45^\circ = E_3 \Rightarrow k\frac{|q_2|}{(a\sqrt{2})^2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=k\frac{|q_3|}{a^2}$$

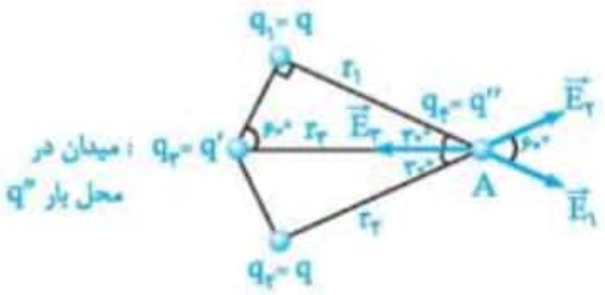
$$\Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_3}\right|=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \xrightarrow{q_2,q_3\text{ ناهم‌نام}} \frac{q_2}{q_3}=-2\sqrt{2}$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۳۳۶ ۱) با توجه به آن‌که میدان الکتریکی در محل بار q'' صفر است، در نتیجه q و q' ناهم‌نام می‌باشند (چرا؟).

۲) از آن‌جایی که میدان در محل بار q' صفر است، در نتیجه q و q'' ناهم‌نام می‌باشند (چرا؟).

با توجه به موارد (۱) و (۲) بارهای q' و q'' هم‌نام هستند (رد گزینه‌های ۲ و ۴). اکنون با محاسبهٔ میدان در محل هریک از بارهای q' و q'' داریم:



$$r_1 = r_2 = r_3 \cos 30^\circ \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_3$$: با توجه به شکل

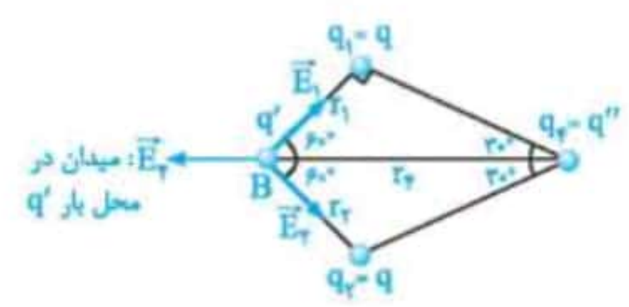
$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ q_1 = q_2 = q \end{cases} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{kq}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_3\right)^2} = \frac{4kq}{3r_3^2} \Rightarrow E_{1,2} = 2E_1 \cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = 2\left(\frac{4kq}{3r_3^2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}kq}{3r_3^2}$$

$$E_3 = \frac{kq_3}{r_3^2} = \frac{kq'}{r_3^2}$$

اکنون با توجه به آن‌که میدان برایند در محل بار $q_4 = q''$ صفر است، می‌توان نوشت:

رابطهٔ (۱): $\frac{kq'}{r_3^2} = \frac{4\sqrt{3}kq}{3r_3^2} \Rightarrow q' = \frac{4\sqrt{3}}{3} q$ ⇒ میدان برایند در A صفر است.

$$r_1 = r_2 = r_4 \sin 30^\circ \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{2} r_4$$: با توجه به شکل



$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{kq}{\left(\frac{1}{2} r_4\right)^2} = \frac{4kq}{r_4^2} \Rightarrow E_{1,2} = 2E_1 \cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{4kq}{r_4^2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{4kq}{r_4^2}$$

$$E_4 = \frac{kq_4}{r_4^2} = \frac{kq''}{r_4^2}$$

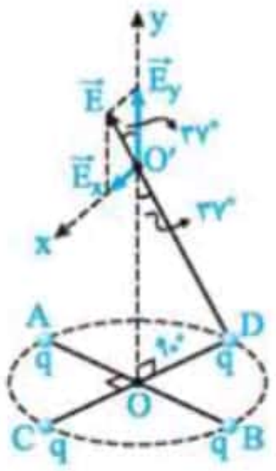
اکنون با توجه به آن‌که میدان برایند در محل بار q' صفر است، می‌توان نوشت:

رابطهٔ (۲): $\frac{kq''}{r_4^2} = \frac{4kq}{r_4^2} \Rightarrow q'' = 4q$ ⇒ میدان برایند در B صفر است.

اکنون با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{رابطهٔ (۲)}}{\text{رابطهٔ (۱)}} \Rightarrow \frac{q''}{q'} = \frac{4q}{\frac{4\sqrt{3}}{3} q} = \sqrt{3}$$

۳ ۱۳۳۷ با فرض آن‌که هر چهار بار الکتریکی مثبت باشند، میدان الکتریکی هر کدام از بارها را روی محورهای افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم. در این‌صورت داریم:



۱) مؤلفهٔ افقی میدان الکتریکی بار q_A، توسط مؤلفهٔ افقی میدان الکتریکی بار q_B خنثی می‌شود.

۲) مؤلفهٔ افقی میدان الکتریکی بار q_C، توسط مؤلفهٔ افقی میدان الکتریکی بار q_D خنثی می‌شود.

۳) مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی هر چهار بار با یک‌دیگر جمع می‌شود.

با توجه به موارد فوق، برایند میدان‌ها در نقطهٔ O' برابر است با:

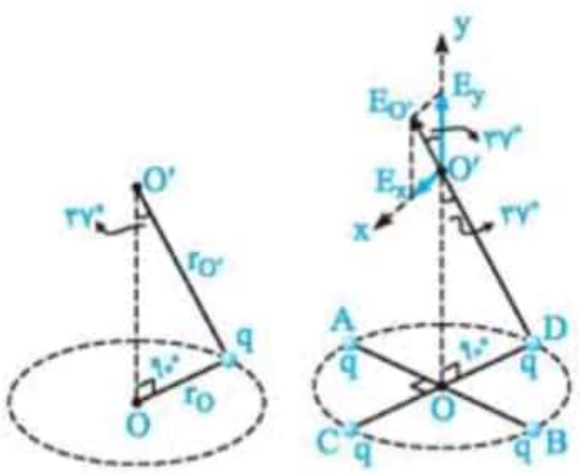
اندازهٔ میدان الکتریکی هریک از بارها در نقطهٔ O': $E = 5 \times 10^4 \ N/C$

مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی هریک از بارها در نقطهٔ O': $E_y = E\cos 37^\circ = 5 \times 10^4 \times \frac{8}{10} = 4 \times 10^4 \ N/C$

برایند میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ O': $E_{\text{برایند}} = 4E_y = 4 \times (4 \times 10^4) = 1/6 \times 10^5 \ N/C$

۴ ۱۳۳۸ این تست، برگرفته از سؤال قبل است. برای حل آن ابتدا با داشتن میدان الکتریکی هریک از بارها در نقطهٔ O، میدان هریک از بارها در نقطهٔ O' را به‌دست می‌آوریم:

$$r_O = r_{O'} \sin 37^\circ \Rightarrow r_O = \frac{6}{10} r_{O'}$$: با توجه به شکل



$$E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{E_{O'}}{E_O} = \left(\frac{r_O}{r_{O'}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{6}{10} r_{O'}}{r_{O'}}\right)^2 = \frac{36}{100}$$: می‌دانیم

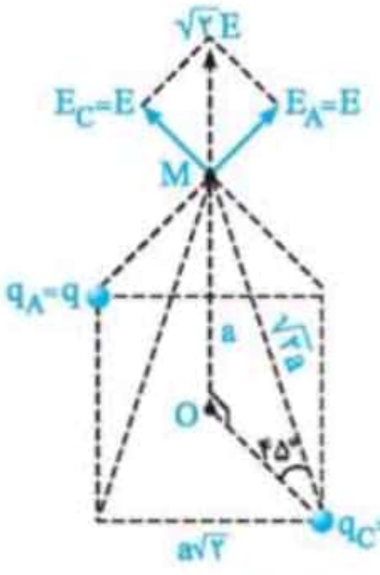
$$\Rightarrow E_{O'} = \frac{36}{100} E_O = \frac{36}{100}(62/5 \times 10^4) = 22/5 \times 10^4 \ N/C$$

از طرفی با توجه به سؤال قبل، می‌دانیم که برایند میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ O' برابر است با مجموع مؤلفه‌های عمودی میدان الکتریکی هریک از بارها در نقطهٔ O'، بنابراین می‌توان نوشت:

$$E_{\text{برایند}} = ۴E_y = ۴E_{O'}\cos ۳۷^\circ = ۴\times ۲۲/۵\times ۱۰^۴ \times \frac{۸}{۱۰} = ۷۲\times ۱۰^۴ \ N/C$$: برایند میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ O'

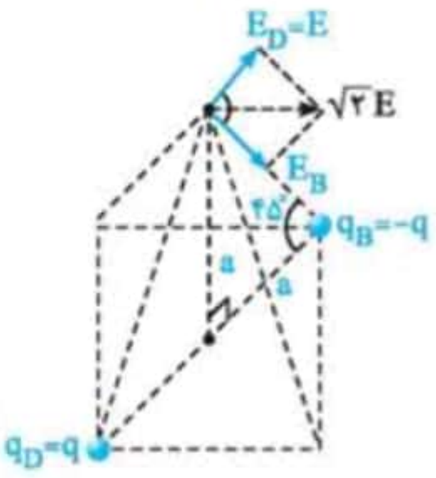
۱ ۱۳۳۹ اندازهٔ بارها و فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ M بر روی محور مربع، مطابق شکل با هم برابر است. بنابراین داریم:

$$E = \frac{kq}{(a\sqrt{۲})^۲} = \frac{kq}{۲a^۲}$$: اندازهٔ میدان الکتریکی هر یک از بارها در نقطهٔ M



حال ابتدا برایند دو میدان عمود بر هم E_A و E_C و سپس برایند دو میدان عمود بر هم E_B و E_D را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} E_{A,C} = \sqrt{E_A^۲ + E_C^۲} \xrightarrow{E_A=E_C=E} E_{AC} = \sqrt{۲}E \quad \text{(در راستای قائم و به سمت بالا)} \\ E_{B,D} = \sqrt{E_B^۲ + E_D^۲} \xrightarrow{E_B=E_D=E} E_{B,D} = \sqrt{۲}E \quad \text{(در راستای افقی)} \end{cases}$$



دو میدان $\vec{E}_{A,C}$ و $\vec{E}_{B,D}$ بر هم عمود هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

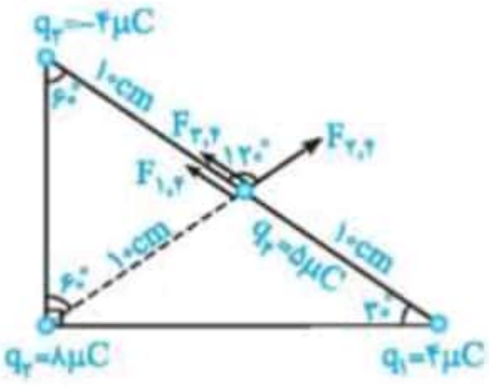
$$E_{\text{برایند}} = \sqrt{E_{A,C}^۲ + E_{B,D}^۲} = \sqrt{(\sqrt{۲}E)^۲ + (\sqrt{۲}E)^۲} = ۲E$$

$$\xrightarrow{E=\frac{kq}{۲a^۲}} E_{\text{برایند}} = ۲\times\frac{kq}{۲a^۲} = \frac{kq}{a^۲}$$

۴ ۱۳۴۰

تذکر

خط‌چین نشان داده شده در شکل، در واقع میانهٔ وارد بر وتر است و با توجه به هندسه، اندازهٔ آن نصف وتر است (یعنی ۱۰cm).



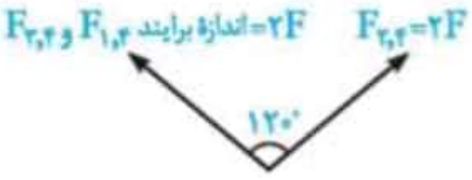
این سؤال را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: با توجه به این‌که $|q_۱| = |q_۳|$ بوده و اندازهٔ آن‌ها تا محل بار $q_۴$ برابر است، $F_{۱,۴} = F_{۳,۴}$ است (که آن را F می‌نامیم) و برایند این دو نیرو برابر است با:

$$F_{۱,۴} = F_{۳,۴} = F \xrightarrow{\text{برایند دو نیرو}} ۲F$$

از طرفی با توجه به آن‌که اندازهٔ بار $q_۲$ دو برابر اندازهٔ بار $q_۱$ بوده و فاصلهٔ آن تا محل بار $q_۴$ برابر فاصلهٔ دو بار دیگر تا آن است، بنابراین $F_{۲,۴}$ برابر $۲F$ می‌باشد.

با توجه به اندازهٔ برایند $\vec{F}_{۱,۴}$ و $\vec{F}_{۳,۴}$ که اندازهٔ آن $۲F$ بوده و با $\vec{F}_{۲,۴}$ زاویهٔ ۱۲۰° می‌سازد، بنابراین برایند کل برابر است با:

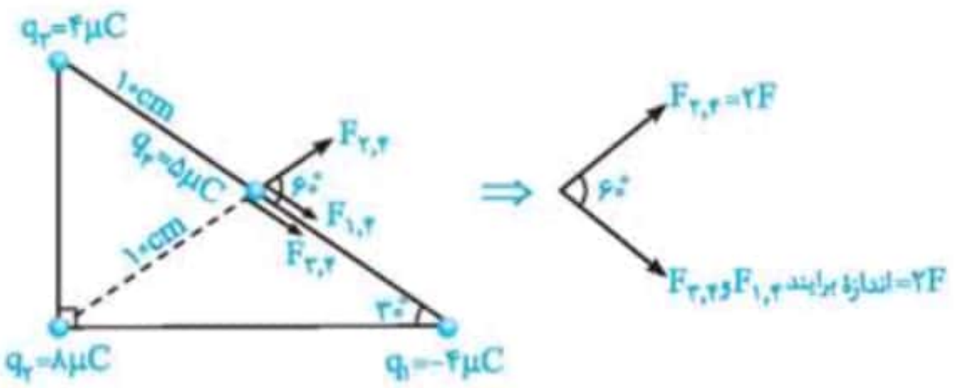


$$F_{\text{برایند}} = ۲(۲F)\cos\frac{۱۲۰^\circ}{۲} \qquad (I)$$

حالت دوم (جابه‌جایی دو بار $q_۱$ و $q_۳$ با هم):

در این حالت نیز مشابه حالت قبل $F_{۱,۴} = F_{۳,۴} = F$ است. فقط جهت برایند این دو بردار برعکس شده و برایند این دو که هم‌اندازهٔ نیروی $F_{۲,۴}$ است، با آن زاویهٔ ۶۰° می‌سازد.

$$F'_{\text{برایند}} = ۲(۲F)\cos\frac{۶۰^\circ}{۲} \qquad (II)$$

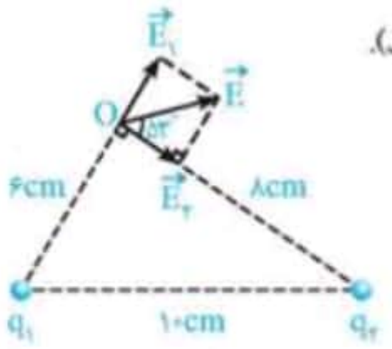


$$\xrightarrow{(II),(I)} \frac{F'}{F} = \frac{۲(۲F)\cos\frac{۶۰^\circ}{۲}}{۲(۲F)\cos\frac{۱۲۰^\circ}{۲}} = \frac{\cos ۳۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

همان‌طور که مشاهده کردید، به سؤال تحلیلی و جالبی برخورد کردیم.

www.gajmarket.com

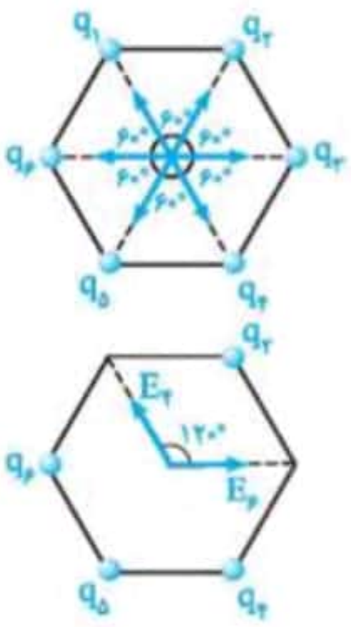
۱۳۴۱ **۳** ابتدا مؤلفه‌های بردار $\vec{E}$ در رأس O را روی امتداد اضلاع مثلث رسم می‌کنیم:



با توجه به راستای بردارهای $\vec{E_1}$ و $\vec{E_2}$ واضح است که بار الکتریکی q_1 مثبت و بار الکتریکی q_2 منفی است (دو بار علامت مخالف دارند).
از طرفی با توجه به اعداد داده شده برای اضلاع مثلث روبه‌رو، مشخص است که مثلث قائم‌الزاویه است (چرا؟).
بنابراین می‌توان نوشت:

$$\tan 53^\circ = \frac{|\vec{E_1}|}{|\vec{E_2}|} = \frac{\frac{kq_1}{(6\times10^{-2})^2}}{\frac{kq_2}{(8\times10^{-2})^2}} = \frac{q_1}{q_2}\times\left(\frac{8}{6}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{q_1}{q_2}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = \frac{3}{4} \Rightarrow 4|q_1| = 3|q_2|$$

۱۳۴۲ **۴** از آن‌جایی که بارها به‌صورت دوبه‌دو مقابل هم و به فاصلهٔ یکسان از مرکز شش‌ضلعی قرار گرفته‌اند، در نتیجه میدان آن‌ها یک‌دیگر را خنثی کرده و میدان الکتریکی برایند در مرکز شش‌ضلعی صفر است.



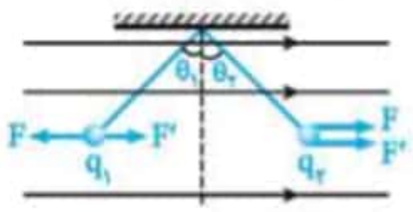
در شکل فوق با برداشتن بارهای q_1 و q_3، میدان حاصل از بارهای q_4 و q_6 خنثی نمی‌شود. از آن‌جایی که اندازهٔ میدان‌های الکتریکی E_4 و E_6 برابر بوده $(E_4 = E_6 = E)$ و زاویهٔ بین آن‌ها برابر 120° است، در نتیجه برایند آن‌ها برابر E می‌باشد:

$$|\vec{E}_4| = |\vec{E}_6| \Rightarrow E_{\text{برایند}} = 2E_4\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right) = E_4 = E$$

* به عبارت دیگر هر دو باری را که به صورت یک در میان قرار گرفته‌اند را می‌توان حذف کرد تا خواستهٔ مسأله برآورده شود. مثلاً (q_3, q_1) یا (q_5, q_3) یا (q_2, q_6)

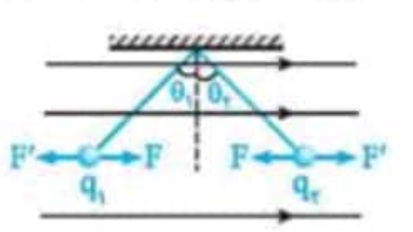
۱۳۴۳ **۱** با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۱)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۳۴۴ **۴** سؤال بسیار جالب و زیبایی است. دو گزینهٔ (۱) و (۴) را بررسی می‌کنیم (برای کوتاه‌تر شدن حل، بررسی گزینه‌های (۲) و(۳) را به دانش‌آموزان عزیز می‌سپاریم). با توجه به جهت نیروهای وارد بر گلوله‌ها، دربارهٔ تعادل آن‌ها اظهارنظر می‌کنیم: (F نیروی کولنی بین دو گلوله و F' نیروی وارد شده از طرف میدان الکتریکی بر گلوله است.)

۱) 

$\Leftarrow q_1 > 0 \ , \ q_2 > 0$

در این حالت با توجه به جهت نیروها، واضح است که برایند نیروهای وارد بر گلوله‌ها با یک‌دیگر برابر نمی‌باشد. در نتیجه زاویه‌ای که گلوله‌ها با خط قائم می‌سازند، برابر نخواهد بود $(\theta_1 \neq \theta_2)$، در حالی که با توجه به صورت سؤال این زاویه‌ها باید برابر باشد، بنابراین این حالت نمی‌تواند جواب مسأله باشد.

۴) 

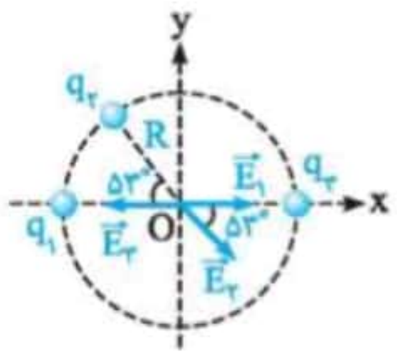
$\Leftarrow q_1 < 0 \ , \ q_2 > 0$

در این حالت با توجه به جهت نیروها، گلوله‌ها قابلیت تعادل را دارند و چون برایند نیروهای وارد بر دو گلوله یکسان است، در نتیجه زاویه‌ای که گلوله‌ها با محور قائم می‌سازند، برابر می‌باشد $(\theta_1 = \theta_2)$، بنابراین این حالت قابل قبول است. پس، گزینهٔ (۴) صحیح است.

تذکر

توصیه می‌شود که به عنوان تمرین، بررسی کنید که چرا گزینه‌های (۲) و (۳) پاسخ این سؤال نمی‌باشد. می‌توان نشان داد که در دو حالت اول و دوم امکان دارد که تعادل برقرار شود ولی در آن‌ها $\theta_1 = \theta_2$ نمی‌شود، ولی در حالت سوم امکان برقراری تعادل وجود ندارد.

۱۳۴۵ **۲** در شکل زیر، واضح است که میدان‌های E_1 و E_3 یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و برایند میدان‌ها در نقطهٔ O برابر E_2 می‌باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} q_1 = q_3 = 4\mu C \\ r_1 = r_3 = R \end{cases} \Rightarrow E_1 = E_3 \Rightarrow \text{میدان‌های } E_1 \text{ و } E_3 \text{ یک‌دیگر را خنثی می‌کنند.}$$

$$q_2 = 4\mu C = 4\times10^{-6}\,C \ , \ R = 6cm = 6\times10^{-2}\,m \ , \ E_2 = ?$$

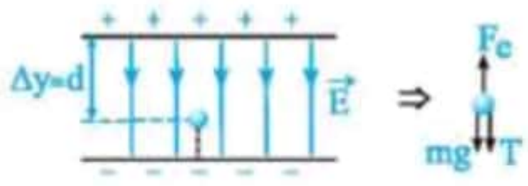
$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} = \frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}}{(6\times10^{-2})^2} = 10^7\,N/C$$

برای محاسبهٔ مؤلفه‌های $\vec{E}_۲$ روی محورهای x و y داریم:

$$\begin{cases} |E_x| = E_۲ \cos ۵۳^\circ = ۱۰^۷ \times \frac{۶}{۱۰} = ۶ \times ۱۰^۶ \, N/C \\ |E_y| = E_۲ \sin ۵۳^\circ = ۱۰^۷ \times \frac{۸}{۱۰} = ۸ \times ۱۰^۶ \, N/C \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_۲ = ۶ \times ۱۰^۶ \vec{i} - ۸ \times ۱۰^۶ \vec{j}$$

دقت: مؤلفهٔ E_y در خلاف جهت محور y است.

۳ ۱۳۴۶ این سؤال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:



حالت اول: قبل از پاره شدن نخ و در حالت تعادل، سه نیرو بر گلولهٔ کوچک وارد می‌شود: ۱- نیروی وزن، ۲- نیروی کشش نخ، ۳- نیروی الکتریکی. با توجه به این‌که نیروهای وزن و کشش نخ به سمت پایین است، به‌دلیل تعادل گلوله، باید نیروی الکتریکی وارد بر گلوله به سمت بالا باشد، بنابراین بار گلوله منفی خواهد بود.

تعادل گلوله : $\sum F = ۰ \Rightarrow F_e = T + mg \Rightarrow T = F_e - mg$:(I) رابطهٔ

حالت دوم: با پاره شدن نخ، شتاب گلوله برابر است با (دقت کنیم که چون نخ پاره شده است دیگر در این حالت نیروی کشش نخ نداریم):



$$\sum F = ma \Rightarrow F_e - mg = ma \xrightarrow{\text{از رابطهٔ (I)}} T = ma \Rightarrow a = \frac{T}{m}$$

با توجه به صفر بودن سرعت اولیهٔ حرکت گلوله، می‌توان نوشت:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow d = \frac{۱}{۲}\left(\frac{T}{m}\right)t^۲ \Rightarrow t^۲ = \frac{۲md}{T} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{۲md}{T}}$$

تذکر

فرض کنید تعدادی نیرو به یک جسم وارد شده و جسم متعادل باشد، اگر یکی از نیروها حذف شود، برایند نیروهای باقی مانده برابر نیروی حذف شده و در خلاف جهت آن می‌باشد.



$$\vec{F}_{\text{برایند}} = \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ + \vec{F}_۴ + \vec{F}_۵ = -\vec{F}_۱$$

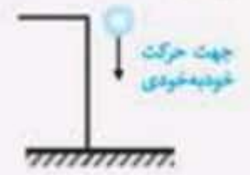
۴ ۱۳۴۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۳ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذرهٔ باردار و کار میدان انجام شده بر روی آن (تست‌های ۱۳۴۷ تا ۱۳۵۶)

در این قسمت ابتدا به بررسی نحوهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی و سپس به محاسبهٔ مقدار آن می‌پردازیم:

نحوهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذرهٔ باردار

در این قسمت می‌خواهیم با یک نگاه جدید، به بررسی نحوهٔ تغییر انرژی پتانسیل یک ذره در یک میدان الکتریکی بپردازیم. پس به موارد زیر توجه کنید:

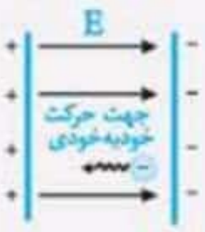


اصل اساسی ۱: هر حرکتی که به‌صورت خودبه‌خودی در طبیعت انجام شود، در راستای آن است که انرژی پتانسیل مجموعه را کاهش دهد. برای مثال در شکل مقابل، گلوله پس از رها شدن به‌صورت خودبه‌خودی به طرف پایین حرکت می‌کند، بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی گلوله کاهش می‌یابد.

با توجه به مطلب فوق می‌توان به سادگی موارد زیر را بررسی کرد:



الف) می‌دانیم که بار مثبت (پروتون) به‌صورت خودبه‌خودی در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کند، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون با حرکت در جهت میدان الکتریکی کاهش می‌یابد (در شکل مقابل بار مثبت به‌صورت خودبه‌خودی تمایل به حرکت به سمت صفحهٔ منفی دارد).

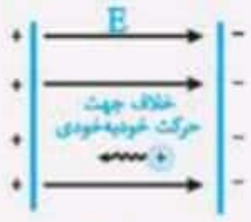


ب) بار منفی (الکترون) به‌صورت خودبه‌خودی در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کند، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی (در جهت خودبه‌خودی)، کاهش می‌یابد (در شکل مقابل بار منفی به‌صورت خودبه‌خودی تمایل به حرکت به سمت صفحهٔ مثبت دارد).

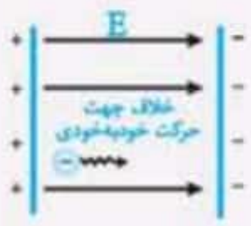
اصل اساسی ۲: هر حرکتی که در خلاف جهت خودبه‌خودی انجام می‌شود، برای انجام آن انرژی صرف می‌شود و در راستای آن است که انرژی پتانسیل مجموعه را افزایش دهد. برای مثال در شکل مقابل، تا زمانی که گلوله در خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی‌اش به سمت بالا حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل گرانشی آن افزایش می‌یابد.

www.gajmarket.com

با توجه به مطلب فوق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:



الف) انرژی پتانسیل الکتریکی بار مثبت (پروتون) با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی) افزایش می‌یابد، دقت شود که برای جابه‌جایی پروتون در خلاف جهت میدان الکتریکی باید انرژی مصرف کنیم و این انرژی به‌صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در پروتون ذخیره می‌شود. به‌عبارت ساده‌تر، ذره با بار مثبت دوست ندارد در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کند (به‌سمت صفحهٔ مثبت برود) و برای انجام این کار انرژی باید مصرف کرد.



ب) مشابه با تحلیل قسمت الف، انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی (الکترون) با حرکت در جهت میدان (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی) افزایش می‌یابد. به‌عبارت ساده‌تر ذره با بار منفی دوست ندارد به سمت صفحهٔ با بار منفی حرکت کند و برای این انتقال باید انرژی مصرف کرد و این انرژی به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در الکترون ذخیره می‌شود.

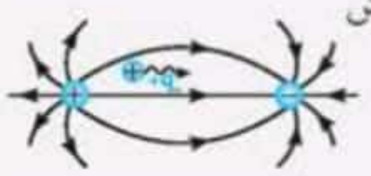
تذکر مهم: موارد مطرح شده در فوق، فقط برای حضور یک بار در داخل میدان الکتریکی یکنواخت نمی‌باشد. کافی است به این نکته توجه داشته باشیم که جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت به سمت بارهای منفی و جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی به سمت بارهای مثبت می‌باشد.



به‌طور مثال اگر دوقطبی مقابل را در نظر بگیرید، با حرکت بار $+q_0$ از مجاورت بار مثبت دوقطبی به سمت بار منفی، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد، چون بار $+q_0$ در جهت حرکت خودبه‌خودی جابه‌جا شده است.

روش علمی‌تر: روش دیگر برای بررسی این‌گونه موارد تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی، با استفاده از جهت خطوط میدان الکتریکی می‌باشد. به این صورت که ابتدا جهت خطوط میدان الکتریکی را مشخص کرده و سپس با توجه به جهت حرکت بار و علامت آن، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی آن را بررسی می‌کنیم.

به‌طور مثال اگر دوقطبی زیر را در نظر بگیرید، با حرکت بار مثبت q_0 از مجاورت بار مثبت به سمت بار منفی انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد، چون بار مثبت q_0 در جهت خطوط میدان (جهت حرکت خودبه‌خودی) جابه‌جا می‌شود.

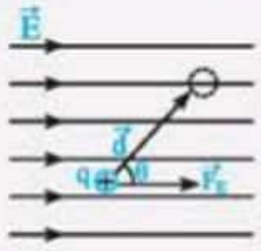


با دقت در مفاهیم مطرح شده در فوق می‌توان نتیجهٔ مهم زیر را گرفت:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک جابه‌جایی مشخص، برابر منفی کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی در همان جابه‌جایی است. یعنی می‌توان نوشت:

$$\Delta U = -W_{\text{میدان}}$$

محاسبهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت و کار میدان الکتریکی



مطابق شکل روبه‌رو، بار ذره‌ای q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام داده است. کار انجام شده توسط میدان الکتریکی بر روی بار برابر است با:

$$W_{\text{میدان}} = F_{\text{میدان}}\, d \cos\theta$$

نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار از رابطهٔ $F = Eq$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{\text{میدان}} = E\,|q|\,d\cos\theta$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی: $\Delta U = -W_{\text{میدان}} = -E\,|q|\,d\cos\theta$

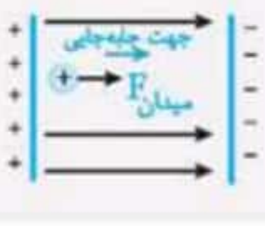
در رابطهٔ فوق، θ زاویهٔ بین نیروی $\vec{F}_E$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ است و این رابطه چه برای ذره‌ای مثبت و چه برای ذره‌ای منفی برقرار است.

نکته برای محاسبهٔ علامت کار انجام شده بر روی بار از طرف میدان الکتریکی، باید به زاویهٔ بین $\vec{F}_E$ و $\vec{d}$ توجه کنیم.

$$\theta \begin{cases} 0 \le \theta < 90^\circ \xrightarrow{\cos\theta > 0} W_{\text{میدان}} > 0 \\ 90^\circ < \theta \le 180^\circ \xrightarrow{\cos\theta < 0} W_{\text{میدان}} < 0 \end{cases}$$

تذکر گاهی اوقات در مسائل می‌توان فقط اندازهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی را از روابط فوق به دست آورد و برای تعیین علامت آن، از دو اصل بیان شده در ابتدای این خلاصه نکات استفاده کرد (مفهوم جهت خودبه‌خودی و غیر خودبه‌خودی).

حال برای یادگیری بهتر مفاهیم فوق، به تمرین زیر توجه کنید:



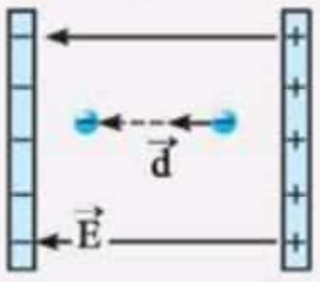
تمرین ۱ **مطابق شکل روبه‌رو، با حرکت بار الکتریکی مثبت در جهت میدان الکتریکی، هر یک از موارد زیر چگونه تغییر می‌کند؟**

الف) اندازهٔ نیروی وارد بر ذره چگونه تغییر می‌کند؟ **ب) انرژی پتانسیل بار چگونه تغییر می‌کند؟**

ج) کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی بر روی بار، مثبت است یا منفی؟

پاسخ الف) با توجه به یکنواخت بودن میدان الکتریکی، نیروی وارد بر بار q در تمام نقاط میدان ثابت است.

$$\overset{\text{ثابت}}{\vec{F}} = \overset{\text{ثابت}}{\vec{E}}\, q$$



ب) با حرکت بار مثبت در جهت میدان الکتریکی (جهت حرکت خودبه‌خودی) انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

ج) با جابه‌جایی بار الکتریکی مثبت در جهت میدان الکتریکی داریم:

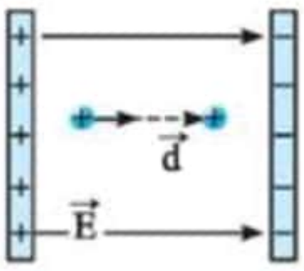
$$F_{\text{میدان}} = Eq$$

$$W_{\text{میدان}} = F_{\text{میدان}}.d\cos\alpha = Eqd\cos\alpha \xrightarrow{\alpha = 0^\circ \text{ (زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی)}} W = +Eqd \Rightarrow W > 0 : \text{کار میدان}$$

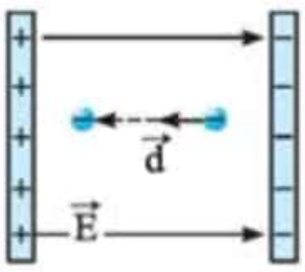
نگاه دیگر: با توجه به کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی ذره ($\Delta U < 0$)، با استفاده از رابطهٔ $\Delta U = -W_{\text{میدان}}$، مشخص است که $W_{\text{میدان}} > 0$ می‌باشد.

$$\Delta U = -W_{\text{میدان}} \xrightarrow{\Delta U < 0} W_{\text{میدان}} > 0$$

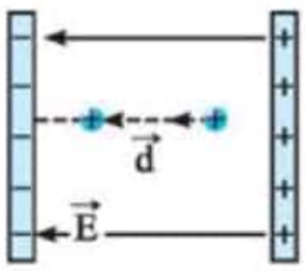
با توجه به خلاصه نکات فوق، اگر یک ذرهٔ باردار در جهت حرکت خودبه‌خودی‌اش حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش و اگر در خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی‌اش حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد. با توجه به این موضوع، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



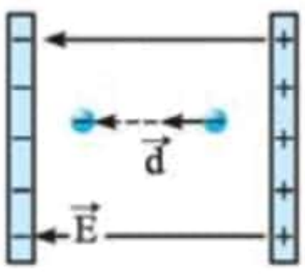
۱) در این گزینه، بار مثبت در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است، بنابراین در جهت خودبه‌خودی‌اش حرکت کرده است و انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد (به عبارت دیگر بار مثبت، توسط صفحهٔ مثبت رانده شده و به صورت خودبه‌خودی جذب صفحهٔ منفی می‌شود).



۲) در این گزینه، بار منفی در خلاف جهت میدان حرکت کرده است، بنابراین در جهت حرکت خودبه‌خودی‌اش جابه‌جا شده و انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.



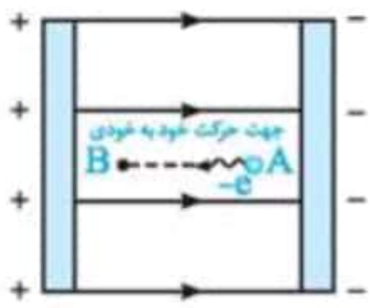
۳) در این گزینه، بار مثبت در جهت خودبه‌خودی‌اش حرکت کرده است (چرا؟)، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.



۴) در این گزینه، بار منفی در جهت میدان و در خلاف جهت خودبه‌خودی‌اش جابه‌جا شده است، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

۳ ۱۳۴۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) نیروی الکتریکی وارد بر الکترون همیشه در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی می‌باشد. بنابراین در این سؤال الکترون در جهت نیروی وارد بر آن جابه‌جا شده است.



۲) با توجه به هم‌جهت بودن جابه‌جایی الکترون و جهت نیروی الکتریکی وارد بر آن، کار نیروی الکتریکی وارد بر آن مثبت می‌باشد (در واقع هرگاه یک ذرهٔ باردار در جهت حرکت خودبه‌خودی آن در میدان جابه‌جا شود، کار نیروی وارد شده از طرف میدان بر آن مثبت است).

$$W_{\text{میدان}} = F_{\text{میدان}}\, d\cos\alpha = (Eq)d\cos 0^\circ = Eqd \Rightarrow W_{\text{میدان}} > 0$$

۳) با توجه به خلاصه نکات (۱۳)، با حرکت ذرهٔ باردار در جهت حرکت خودبه‌خودی، انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد، بنابراین این گزینه نادرست است.

۴) با حرکت ذرهٔ باردار در جهت حرکت خودبه‌خودی آن در میدان الکتریکی تندی حرکت ذره افزایش می‌یابد. بنابراین انرژی جنبشی آن افزایش خواهد یافت.

دید دیگر: با توجه به رها کردن گلوله و کاهش انرژی پتانسیل آن، انرژی جنبشی آن افزایش خواهد یافت.



۱ ۱۳۴۹ انرژی پتانسیل الکتریکی بار q وقتی افزایش می‌یابد که در خلاف جهت خودبه‌خودی حرکت کند. بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی بار مثبت q وقتی که در خلاف جهت میدان (خلاف جهت خودبه‌خودی) حرکت می‌کند، افزایش می‌یابد و گزینهٔ (۱) صحیح است.

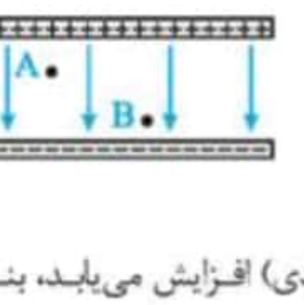
www.gajmarket.com



۱ ۱۳۵۰ می‌دانیم که بار الکتریکی منفی به‌صورت خودبه‌خودی در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کند. در این مسأله با توجه به شکل مقابل، بار الکتریکی منفی در جهت میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی) از A تا B حرکت می‌کند، بنابراین با توجه به توضیحات سؤال قبل، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

۳ ۱۳۵۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) هرچه تراکم خطوط میدان در یک ناحیه بیشتر باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی در آن ناحیه بزرگ‌تر است. چون با حرکت از نقطهٔ A تا B تراکم خطوط میدان کاهش می‌یابد، بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی کاهش می‌یابد.

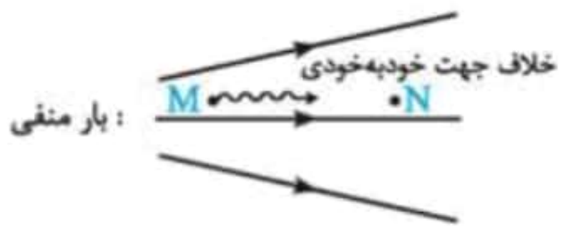


۲) با توجه به این‌که اندازهٔ نیروی وارد بر یک بار از رابطهٔ $F = Eq$ به‌دست می‌آید، بنابراین با کاهش میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد بر بار نیز کاهش خواهد یافت.

$$F = Eq \xrightarrow{E_A > E_B} F_A > F_B$$

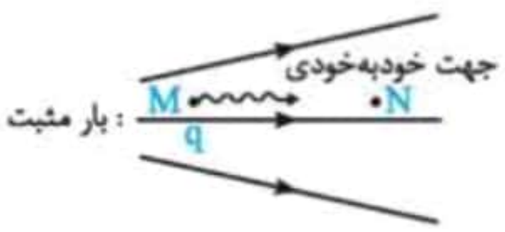
۳) می‌دانیم که بار الکتریکی مثبت به‌صورت خودبه‌خودی در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کند، در این سؤال، با توجه به شکل، بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی) از نقطهٔ A تا B حرکت می‌کند، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

۳ ۱۳۵۲ هر دو حالت ممکن برای علامت بار q را بررسی می‌کنیم:



حالت اول: (اگر بار q منفی باشد): با حرکت از M تا N، در جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت می‌کنیم. از طرفی می‌دانیم نیروی وارد بر بار منفی از طرف میدان الکتریکی، در خلاف جهت میدان الکتریکی می‌باشد. بنابراین در این سؤال، ذرهٔ q با بار منفی، در خلاف جهت خودبه‌خودی‌اش حرکت کرده است، پس انرژی پتانسیل آن افزایش و انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد. پس گزینه‌های (۲) و (۴) صحیح است.

$$\text{بار } q \text{ منفی باشد} \Rightarrow U_N > U_M \Rightarrow K_N < K_M$$

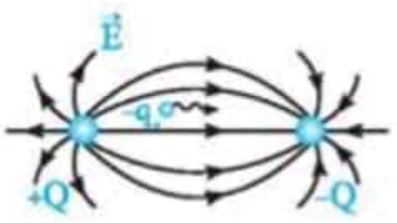


حالت دوم: (اگر بار q مثبت باشد): در این حالت بار q در جهت خودبه‌خودی‌اش حرکت کرده است. پس انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش و انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ ۱۳۵۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) نیروی وارد بر بار الکتریکی q، برابر $F = Eq$ است. از طرفی می‌دانیم که در شکل مقابل، شدت میدان الکتریکی یکنواخت (E) در نقاط A و B برابر است (چرا؟)، بنابراین نیروی وارد بر بار (q-) در نقاط A و B برابر می‌باشد ($F_A = F_B$).

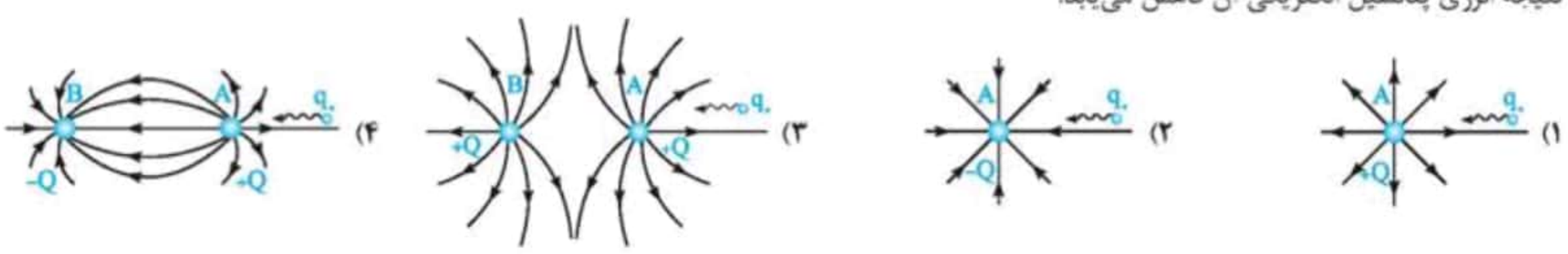
۲) می‌دانیم که انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی (q-) در حرکت از نقطهٔ A به B در جهت میدان (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی) افزایش می‌یابد، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی بار (q-) در نقطهٔ B بیشتر از نقطهٔ A می‌باشد ($U_A < U_B$) و گزینهٔ (۴) صحیح است.



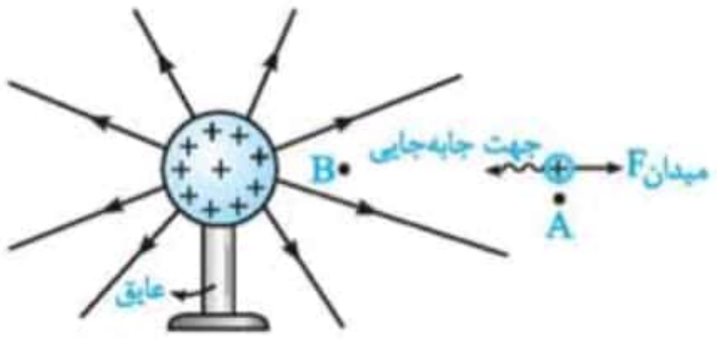
۱ ۱۳۵۴ در شکل مقابل، خطوط میدان حاصل از یک دوقطبی الکتریکی را مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم با حرکت یک بار الکتریکی منفی در جهت خطوط میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی)، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

سؤال **اندازه و جهت نیروی وارد بر این بار منفی چگونه تغییر می‌کند؟**

۲ ۱۳۵۵ اگر بار مثبت در جهت خطوط میدان الکتریکی (جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت) حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد. با توجه به جهت خطوط میدان رسم شده برای هر یک از گزینه‌ها، در گزینهٔ (۲) بار مثبت q_0 در جهت خطوط میدان ناشی از بار Q- حرکت کرده و در نتیجه انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.



۲ ۱۳۵۶ جهت خطوط میدان حاصل از کرهٔ باردار به سمت خارج از کره می‌باشد. بنابراین حرکت ذرهٔ با بار مثبت از نقطهٔ A تا B، در خلاف جهت میدان الکتریکی می‌باشد.



زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی

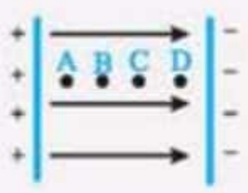
$W_{\text{میدان}} = F_{\text{میدان}}\, d\cos 180^\circ = -F_{\text{میدان}}\, d \Rightarrow$ کار میدان : $W_{\text{میدان}} < 0$

از طرفی می‌دانیم که با حرکت بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت) انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱ ۱۳۵۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۴ **مقایسهٔ پتانسیل الکتریکی نقاط مختلف میدان الکتریکی** (تست‌های ۱۳۵۷ تا ۱۳۷۴)

در این قسمت می‌خواهیم به مقایسهٔ پتانسیل الکتریکی نقاط مختلف یک میدان الکتریکی بپردازیم، به‌همین منظور به اصل زیر توجه کنید:



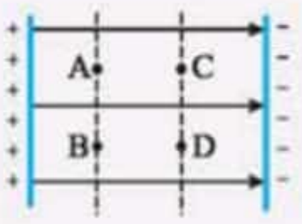
اصل اساسی: به‌طور کلی با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد (این گونه به‌خاطر بسپارید که پتانسیل صفحهٔ مثبت از منفی بیشتر است و با نزدیک شدن به صفحهٔ منفی پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد).

$$V_A > V_B > V_C > V_D$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت که با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری افزایش می‌یابد.

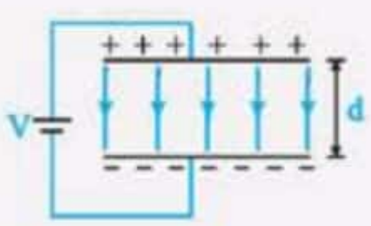
تذکر تغییرات پتانسیل الکتریکی نقاط (V)، به نوع بار عبوری ربطی ندارد. دقت شود پتانسیل الکتریکی از جنس ولتاژ بوده و واحد آن ولت است در حالی‌که انرژی پتانسیل الکتریکی از جنس انرژی بوده و واحد آن ژول است.

نکات مهم و کاربردی



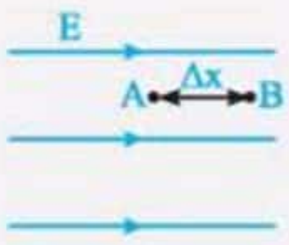
۱ در یک میدان الکتریکی یکنواخت اگر خط‌چینی عمود بر خطوط میدان الکتریکی رسم کنیم، پتانسیل الکتریکی نقاط واقع شده بر روی آن خط‌چین با یکدیگر برابر است و به‌عبارتی آن نقاط هم‌پتانسیل هستند.

$$V_A = V_B > V_C = V_D$$



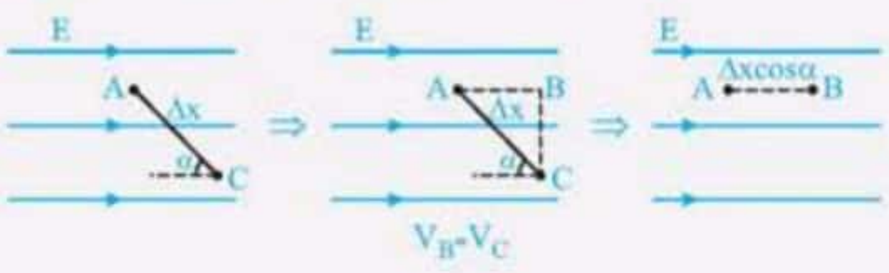
۲ همان‌طور که در قسمت‌های قبل نیز بیان کردیم، شدت میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحهٔ فلزی موازی (خازن) که به یک باتری با پتانسیل V متصل هستند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (d: فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی):

$$E = \frac{V}{d}$$



۳ در یک میدان الکتریکی یکنواخت اگر اندازهٔ اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و B مطابق شکل زیر برابر $|\Delta V_{AB}|$ باشد، شدت میدان الکتریکی یکنواخت موجود در فضا برابر است با:

$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{\Delta x}$$

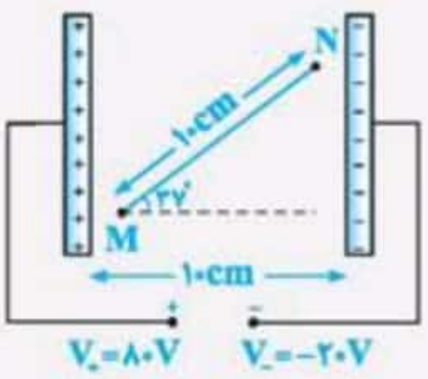


۴ اگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و C مطابق شکل پرسیده شود، ابتدا به این موضوع توجه شود که پتانسیل B و C با یکدیگر برابر است و $|\Delta V_{AB}| = |\Delta V_{AC}|$ است. با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{AB} = \frac{|\Delta V_{AB}|}{\Delta x \cos\alpha} = \frac{|\Delta V_{AC}|}{\Delta x \cos\alpha}$$

به‌عبارتی در این گونه مسائل، فاصلهٔ دو نقطه در راستای میدان الکتریکی حائز اهمیت است.

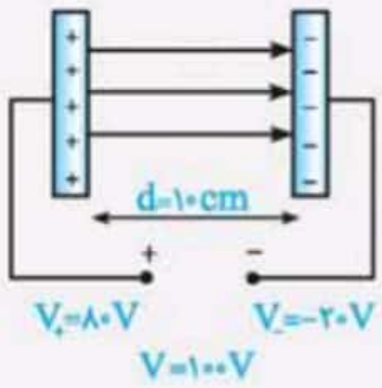
تمرین ۱ **در شکل روبه‌رو، M و N دو نقطه در فضای بین دو صفحهٔ رسانای موازی هم است که در آن فضا میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد شده است. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقاط M و N چند ولت است؟ $(\cos 37^\circ = 0/8)$**



۱) ۴۸ ۲) ۶۰

۳) ۶۴ ۴) ۸۰

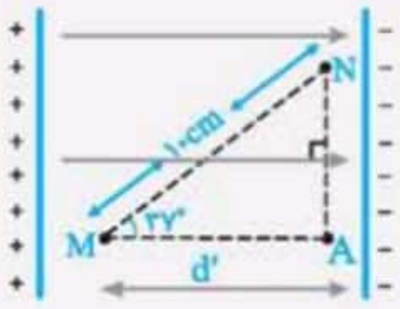
www.gajmarket.com



پاسخ **گام اول:** ابتدا با توجه به آن‌که اختلاف پتانسیل بین دو صفحه برابر $V_+ - V_- = ۸۰ - (-۲۰) = ۱۰۰\,V$ است، اندازهٔ میدان الکتریکی را در بین دو صفحه به‌دست می‌آوریم:

$$V = ۱۰۰\,V \;,\; d = ۱۰\,cm = \frac{۱}{۱۰}\,m \;,\; E = ?$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{۱۰۰}{\frac{۱}{۱۰}} = ۱۰^۳\,N/C$$

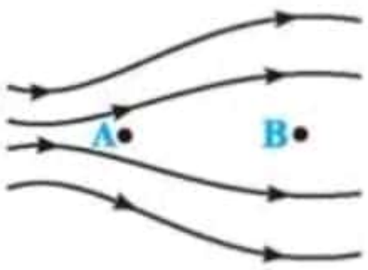


گام دوم: از طرفی می‌دانیم که با حرکت در جهت عمود بر خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی تغییر نمی‌کند، بنابراین در شکل مقابل پتانسیل الکتریکی نقاط N و A برابر می‌باشد. اکنون می‌توان نوشت:

$$d' = MA = MN \times \cos ۳۷^\circ = ۱۰ \times \frac{۸}{۱۰} = ۸\,cm = \frac{۸}{۱۰۰}\,m$$

$$E = \frac{|\Delta V_{MA}|}{d'} \Rightarrow ۱۰^۳ = \frac{|\Delta V_{MA}|}{\frac{۸}{۱۰۰}} \Rightarrow |\Delta V_{MA}| = ۸۰\,V$$

$$\Rightarrow |\Delta V_{MN}| = |\Delta V_{MA}| = ۸۰\,V \quad \text{(گزینهٔ ۴)}$$



مقایسهٔ پتانسیل الکتریکی: در شکل مقابل با حرکت از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B، در واقع در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنیم، بنابراین با توجه به خلاصه نکات فوق، با حرکت از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد و در نتیجه پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A بزرگ‌تر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B می‌باشد $(V_A > V_B)$.

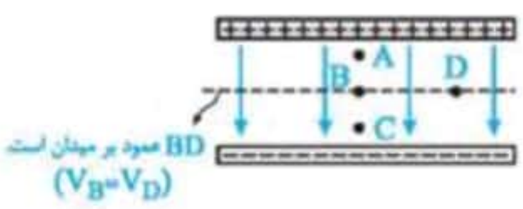
مقایسهٔ میدان الکتریکی: از طرفی با توجه به آن‌که در شکل فوق، تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطهٔ A بیشتر از نقطهٔ B است، در نتیجه میدان الکتریکی در نقطهٔ A بزرگ‌تر از میدان الکتریکی در نقطهٔ B است $(E_A > E_B)$.

مقایسهٔ انرژی پتانسیل الکتریکی بار q-: چون بار q- در خلاف جهت خود به خودی‌اش جابه‌جا شده است (در جهت میدان الکتریکی)، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد $(U_B > U_A)$، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴ ۱۳۵۸

نکته

با حرکت در جهت عمود بر خطوط یک میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری تغییری نمی‌کند.



می‌دانیم که با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد، بنابراین می‌توان گفت:

$$V_A > V_B = V_D > V_C$$

* دقت کنیم جهت خطوط میدان، از صفحهٔ مثبت به‌سمت صفحهٔ منفی است.

۴ ۱۳۵۹ با رها کردن الکترون، الکترون در جهت خودبه‌خودی‌اش حرکت می‌کند. با توجه به این‌که جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی در یک میدان الکتریکی، در خلاف جهت میدان می‌باشد (چرا؟)، بنابراین بار منفی از نقاط با پتانسیل کم‌تر به نقاط با پتانسیل بیشتر حرکت می‌کند و با این حرکت، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[\Delta V > ۰]{q < ۰} \Delta U = \underbrace{q}_{\text{مثبت منفی}}\,\Delta V \rightarrow \Delta U < ۰$$

۴ ۱۳۶۰ هر یک از دو مسیر AB و BC را بررسی می‌کنیم:

مسیر $A \rightarrow B$: با حرکت در جهت عمود بر خطوط یک میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری و میدان الکتریکی تغییری نمی‌کند و ثابت است.

مسیر $B \rightarrow C$: با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد (این موضوع ارتباطی به علامت بار متحرک ندارد).

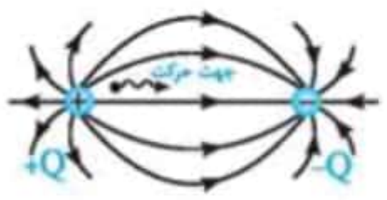
از طرفی با حرکت بار منفی در جهت میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی) انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد (چرا؟).

تذکر

چون تراکم خطوط میدان در کل فضا یکسان است، اندازهٔ میدان الکتریکی در تمام فضا ثابت است.

۱۳۶۱ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) با توجه به خطوط میدان رسم شده برای دو قطبی الکتریکی در شکل مقابل، با حرکت بر روی خط واصل دو بار و از سمت بار مثبت به سمت بار منفی، ابتدا خطوط میدان از یکدیگر فاصله گرفته و سپس این خطوط دوباره به هم نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر، ابتدا تراکم خطوط میدان کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



۲) با حرکت از سمت بار مثبت به سمت بار منفی، در جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت می‌کنیم. بنابراین پتانسیل الکتریکی نقاط در این جابه‌جایی کاهش می‌یابد.

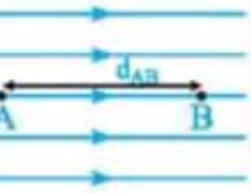
۱۳۶۲ ۱ برای حل این سؤال، ابتدا جهت میدان الکتریکی را در اطراف بارهای q_1 و q_2 به دست می‌آوریم.



بنابراین با حرکت از A به سمت B و هم‌چنین از C به سمت D، در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده‌ایم و در نتیجه پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_A > V_B \ , \ V_C > V_D$$

۱۳۶۳ ۴ اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه مخالف صفر باشد، ممکن است هر دو نقطه بدون بار الکتریکی باشند، برای درک بهتر به شکل مقابل توجه کنید:



در نقاط A و B بار الکتریکی وجود ندارد $\Rightarrow V_A > V_B \Rightarrow \Delta V \neq 0 \Rightarrow$

دقت شود که عامل شارش الکتریکی بین دو نقطه، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین آن دو نقطه است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۳۶۴ ۳ با استفاده از رابطهٔ مطرح شده در خلاصه نکات (۱۴)، برای محاسبهٔ میدان الکتریکی بین دو صفحه می‌توان نوشت:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{۲/۴ \times ۱۰^{۴}}{۱/۲ \times ۱۰^{-۲}} = ۲ \times ۱۰^{۶} \, V/m$$

۱۳۶۵ ۲ نیروی وارد بر الکترون از طرف میدان الکتریکی برابر $F_e = Eq$ می‌باشد. بنابراین به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F = Eq \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m} = \frac{۲ \times ۱۰^{۶} \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}{۹ \times ۱۰^{-۲۸} \times ۱۰^{-۳}} = \frac{۳۲}{۹} \times ۱۰^{۱۷} \, m/s^{۲}$$

تبدیل گرم به کیلوگرم

۱۳۶۶ ۲ در ابتدا میدان الکتریکی قبل از کم کردن فاصلهٔ صفحات را محاسبه می‌کنیم:

$$E_۱ = \frac{V}{d_۱} = \frac{۱۲}{۰/۵ \times ۱۰^{-۳}} = ۲۴۰۰۰ \, V/m$$

حال اگر فاصلهٔ بین صفحات ۲۰ درصد کاهش یابد، می‌توان نوشت:

$$d_۲ = d_۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰} d_۱ = \frac{۸۰}{۱۰۰} d_۱ = \frac{۴}{۵} d_۱ \Rightarrow d_۲ = \frac{۴}{۵} \times ۰/۵ = ۰/۴ mm = ۰/۴ \times ۱۰^{-۳} \, m$$

$$E_۲ = \frac{V}{d_۲} = \frac{۱۲}{۰/۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۳۰۰۰۰ \, V/m \Rightarrow E_۲ - E_۱ = ۶۰۰۰ \, V/m = ۶ kV/m$$

۱۳۶۷ ۴ با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی از نقطهٔ A تا B، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد، بنابراین پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A بزرگ‌تر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B می‌باشد (رد گزینه‌های ۱ و ۳).

$$V_A > V_B \Rightarrow V_A - V_B > ۰$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $E = \frac{|\Delta V|}{d}$، داریم:

$$E = ۳۰۰۰ \, N/C \ , \ d_{AB} = ۲ cm = ۲ \times ۱۰^{-۲} \, m \ , \ |\Delta V_{AB}| = ?$$

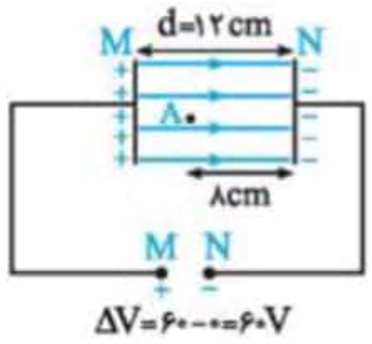
$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{d_{AB}} \Rightarrow ۳۰۰۰ = \frac{|\Delta V_{AB}|}{۲ \times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow |\Delta V_{AB}| = ۶۰ V \Rightarrow V_A - V_B = +۶۰ V$$

۱۳۶۸ ۴ با توجه به پاسخ سؤال قبل، $V_A - V_B = +۶۰V$ است، پس می‌توان نوشت:

$$V_A - V_B = +۶۰ V \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } V_B = ۰ \text{ باشد} \Rightarrow V_A - ۰ = +۶۰ \Rightarrow V_A = +۶۰ V \\ \text{اگر } V_B = -۱۰۰ V \text{ باشد} \Rightarrow V_A - (-۱۰۰) = +۶۰ \Rightarrow V_A = -۴۰ V \end{cases}$$

gajmarket.com

۳ ۱۳۶۹ **گام اول:** با توجه به رابطهٔ $E=\frac{\Delta V}{d}$، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر است با:



$$\Delta V=60V\ ,\ d=12cm=12\times10^{-2}m\Rightarrow E=\frac{\Delta V}{d}=\frac{60}{12\times10^{-2}}=500N/C$$

گام دوم: با توجه به صفر بودن پتانسیل نقطهٔ N، از آنجایی‌که صفحهٔ منفی به آن متصل است، بنابراین پتانسیل آن را نیز صفر در نظر می‌گیریم. حال می‌توانیم پتانسیل نقطهٔ A به فاصلهٔ Δx از صفحهٔ منفی را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$E=\frac{\Delta V_{NA}}{\Delta x}\Rightarrow \Delta V_{NA}=V_A-V_N=E\times\Delta x\Rightarrow V_A=E\times\Delta x=500\times8\times10^{-2}=40V$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

بین این دو صفحه، میدان الکتریکی یکنواخت تشکیل می‌شود که جهت میدان در جهت کاهش پتانسیل الکتریکی است. بین این دو صفحه از صفحهٔ مثبت تا صفحهٔ منفی، پتانسیل از ۶۰ ولت تا صفر کاهش می‌یابد. با توجه به فاصلهٔ بین دو صفحه و اختلاف پتانسیل بین آن‌ها، $\frac{60}{12}\frac{V}{cm}=5\frac{V}{cm}$، پس به ازای ۴ سانتی‌متر، پتانسیل ۲۰ ولت کاهش می‌یابد. بنابراین پتانسیل نقطهٔ A برابر با $V=40V\ (60-20)$ خواهد شد.

۴ ۱۳۷۰ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۴)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۱۳۷۱ به ترکیب دو رابطهٔ مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases}E=\frac{F}{q}\\ E=\frac{V}{d}\end{cases}\Rightarrow\frac{F}{q}=\frac{V}{d}\Rightarrow\frac{\text{نیوتون}}{\text{کولن}}\equiv\frac{\text{ولت}}{\text{متر}}$$

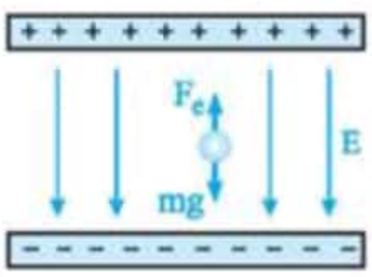
۲ ۱۳۷۲ به ترکیب روابط زیر توجه کنید:

$$\text{می‌دانیم}:\begin{cases}E=\frac{V}{d}\Rightarrow F=(\frac{V}{d})q=\frac{Vq}{d}\xrightarrow{q_\alpha=+2e}F=\frac{2Ve}{d}\\ F=Eq\end{cases}$$

۴ ۱۳۷۳ **گام اول:** با داشتن فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی و اختلاف پتانسیل بین آن‌ها، می‌توان میدان الکتریکی بین صفحات را محاسبه کرد:

$$E=\frac{\Delta V}{d}=\frac{V}{d}$$

گام دوم: با توجه به شکل مقابل، شرط به تعادل رسیدن ذره آن است که نیروی الکتریکی وارد بر ذره برابر با نیروی وزن و در خلاف جهت آن باشد. اکنون برای محاسبهٔ بار الکتریکی ذره می‌توان نوشت:



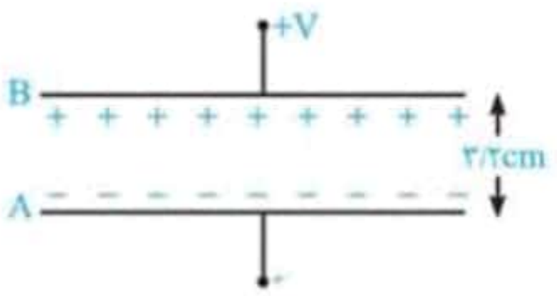
$$\begin{cases}\text{نیروی الکتریکی}: F_e=Eq\\ \text{نیروی وزن}: W=mg\end{cases}$$

گلوله در حالت تعادل است: $\sum F_y=0\Rightarrow F_e=W\Rightarrow Eq=mg\Rightarrow\frac{V}{d}q=mg\Rightarrow q=\frac{mgd}{V}$

می‌دانیم که جهت میدان الکتریکی از صفحهٔ مثبت به سمت صفحهٔ منفی می‌باشد. بنابراین با توجه به جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره (خلاف جهت میدان الکتریکی)، واضح است که علامت بار این ذره باید منفی باشد تا توسط صفحهٔ مثبت جذب شود (نیروی الکتریکی وارد بر آن به سمت بالا باشد)، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ ۱۳۷۴ برای پاسخ دادن به این سؤال ترکیبی و جالب، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا به کمک روابط فصل حرکت‌شناسی در فیزیک پایهٔ دوازدهم، شتاب حرکت الکترون را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow3/2\times10^{-2}=\frac{1}{2}a\times(2\times10^{-8})^2\Rightarrow a=1/6\times10^{14}\ m/s^2$$

گام دوم: حال به کمک قانون دوم نیوتون و با توجه به رابطهٔ $F=Eq$ داریم:

$$\begin{cases}F=ma\\ F=Eq\end{cases}\Rightarrow Eq=ma\Rightarrow E=\frac{ma}{q}=\frac{10^{-30}\times1/6\times10^{14}}{1/6\times10^{-19}}=10^3\ N/C$$

گام سوم: در ادامه با توجه به شدت میدان بین دو صفحه، به‌سادگی اختلاف پتانسیل بین دو صفحه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E=\frac{\Delta V}{d}\Rightarrow10^3=\frac{\Delta V}{3/2\times10^{-2}}\Rightarrow\Delta V=32V$$

۴ ۱۳۷۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۵ ارتباط بین انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره و پتانسیل نقاط میدان و محاسبهٔ کار (تست‌های ۱۳۷۵ تا ۱۴۰۸)

فرض کنید که بار الکتریکی q، از نقطهٔ A به B منتقل شده و انرژی پتانسیل آن از U_A به U_B رسیده است. ارتباط بین پتانسیل الکتریکی نقاط A و B و انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در A و B، با کمک رابطهٔ زیر بررسی می‌شود:

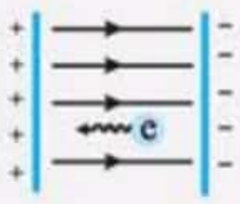
$$V_{\text{مقصد}} - V_{\text{مبدا}} = \frac{U_{\text{مقصد}} - U_{\text{مبدا}}}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q} \Rightarrow \boxed{\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U_{AB}}{q}}$$

تذکر مهم: در هنگام استفاده از رابطهٔ فوق، بار q لزوماً با علامتش باید لحاظ شود. با یک تمرین این موضوع را بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین **اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحهٔ رسانای موازی، ۵۰۰ ولت و فاصلهٔ بین دو صفحه، یک سانتی‌متر است. الکترونی از صفحهٔ منفی جدا شده و به‌سمت صفحهٔ مثبت شتاب می‌گیرد. انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون تا رسیدن آن به‌صفحهٔ مثبت به اندازهٔ ..... ژول ..... می‌یابد. ($e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C$)**

۱) ۸×۱۰^{-۱۷}، افزایش ۲) ۸×۱۰^{-۱۹}، افزایش ۳) ۸×۱۰^{-۱۹}، کاهش ۴) ۸×۱۰^{-۱۷}، کاهش

پاسخ این سؤال را مطابق گام‌های زیر بررسی می‌کنیم:



گام اول: الکترون از صفحهٔ منفی جدا شده و به سمت صفحهٔ مثبت حرکت می‌کند، بنابراین الکترون در جهت حرکت خودبه‌خودی حرکت کرده و در نتیجه انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد ($\Delta U < ۰$).

گام دوم: محاسبهٔ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی با استفاده از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$:

$$V_{\text{مقصد}} - V_{\text{مبدأ}} = V_{\text{صفحهٔ مثبت}} - V_{\text{صفحهٔ منفی}} = \Delta V = ۵۰۰ V \quad , \quad q_e = -۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C \quad , \quad \Delta U = ?$$

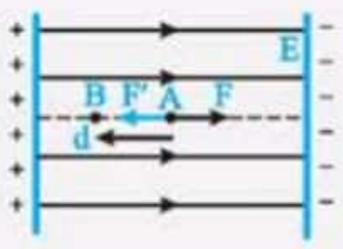
$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow ۵۰۰ = \frac{\Delta U}{-۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} \Rightarrow \Delta U = -۸ \times ۱۰^{-۱۷} J$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نگاه دیگر: اگر در تعیین علامت‌های q و ΔV درست عمل کنیم، با توجه به رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ نیز به‌سادگی می‌توانیم کاهش یا افزایش انرژی پتانسیل الکتریکی را مشخص کنیم. برای مثال در این سؤال می‌دانیم که پتانسیل الکتریکی صفحهٔ مثبت بیشتر از پتانسیل الکتریکی صفحهٔ منفی است، بنابراین در حرکت الکترون از صفحهٔ منفی به سمت صفحهٔ مثبت، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد و علامت ΔV مثبت است. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta U = \overset{\ominus}{q} \times \overset{\oplus}{\Delta V} \Rightarrow \Delta U < ۰$$ (انرژی پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد.)

ارتباط بین کار انجام شده توسط میدان و ΔU



در شکل مقابل می‌خواهیم ذرهٔ $(+q)$ با تندی ثابت در مسیر مستقیم در خلاف جهت میدان الکتریکی از A تا B جابه‌جا شود (یعنی در خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی‌اش)، شرط حرکت با تندی ثابت آن است که برایند نیروی وارد بر جسم صفر باشد، پس لازم است نیرویی برابر با $F' = Eq$ و در خلاف جهت نیروی میدان بر ذره وارد کنیم.

در مورد شکل فوق، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) کار انجام شده توسط نیروی F' که توسط ما برای غلبه بر نیروی F بر ذره وارد شده است برابر است با:

$$W' = F'd\cos\alpha \xrightarrow[\text{است } \alpha = ۰]{\text{زاویهٔ بین } F', d} W' = (Eq)d \times \cos ۰ = Eqd$$

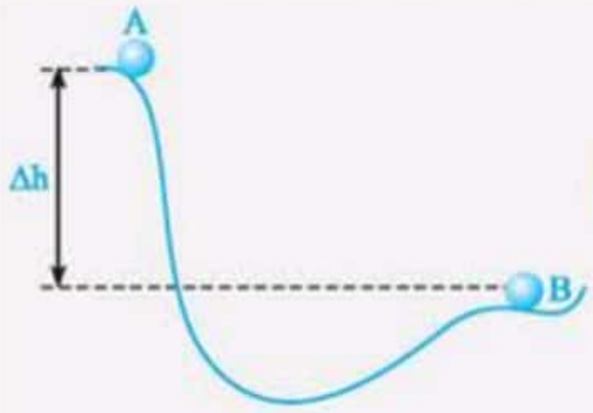
۲) کار انجام شده توسط نیروی میدان (F) برابر است با:

$$W = Fd\cos\alpha \xrightarrow[\text{است } \alpha = ۱۸۰^\circ]{\text{زاویهٔ بین } F, d} W = (Eq)d \times \cos ۱۸۰^\circ = -Eqd$$

۳) در این حرکت که ذره با تندی ثابت بین دو نقطه جابه‌جا شده است، تمام کار انجام شده توسط ما در واقع به‌صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در ذره ذخیره شده است (این موضوع فقط هنگامی‌که تندی ذره در مسیر مستقیم ثابت است، برقرار می‌باشد).

۴) حال اگر ذره را در نقطهٔ B رها کنیم (یعنی نیروی $\vec{F'}$ بر آن اعمال نشود) آن‌گاه حرکت ذره با تندی ثابت انجام نخواهد شد و ذره با شتاب ثابت به‌سمت نقطهٔ A برمی‌گردد و کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی آن برابر با افزایش انرژی جنبشی‌اش خواهد بود، یعنی انرژی جنبشی‌اش در بازگشت از B به A به اندازهٔ Eqd افزایش خواهد یافت.

gajmarket.com



۵ همان‌گونه که مشاهده می‌شود در این حالت ΔU با کار میدان (W) قرینهٔ یک‌دیگر است. می‌توان نشان داد این موضوع کلی بوده و رابطهٔ زیر همواره برقرار است (یعنی حتی اگر ذره با تندی ثابت حرکت نکند):

$$\Delta U = -W_{\text{میدان}}$$

یادآوری: مطلب مشابهی در فصل کار و انرژی از فیزیک پایه دهم نیز وجود دارد، به این‌صورت که کار انجام شده توسط نیروی وزن جسم و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی آن قرینهٔ یک‌دیگر است.

$$\Delta U_{\text{گرانش}} = -W_{mg} = -mg\Delta h$$

تمرین۲ بار الکتریکی ۵- میلی کولنی، از نقطهٔ A به پتانسیل الکتریکی ۲ ولت به نقطهٔ B منتقل می‌شود. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی میدان الکتریکی ۵ میلی ژول باشد، پتانسیل نقطهٔ B چند ولت است؟ (ریاضی داخل ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۱۰ ۴) ۳۰

پاسخ با توجه به رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توان نوشت:

$$W_{\text{میدان}} = +5\,mJ = +5\times10^{-3}\,J \xrightarrow{\Delta U = -W_{\text{میدان}}} \Delta U = -5\times10^{-3}\,J\ ,\ q = -5\,mC = -5\times10^{-3}\,C\ ,\ \Delta V = ?$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{-5\times10^{-3}}{-5\times10^{-3}} = +1 \xrightarrow{V_A = 2V} V_B - 2 = 1 \Rightarrow V_B = 3\,V$$ (گزینهٔ ۲)

تمرین۳ یک الکترون که بار الکتریکی آن $1/6\times10^{-19}$ کولن است، در یک میدان الکتریکی از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود و در نتیجه انرژی جنبشی آن $6/4\times10^{-19}$ ژول افزایش می‌یابد. اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B $(V_B - V_A)$ چند ولت است؟

۱) ۴- ۲) ۴

۳) ۲- ۴) ۲

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر دقت کنید:

۱) از آن‌جایی که در سیستم نیروی تلف‌کننده وجود ندارد، در نتیجه انرژی مکانیکی ثابت و تغییرات انرژی مکانیکی الکترون صفر است.

۲) اگر انرژی جنبشی الکترون به اندازهٔ $6/4\times10^{-19}\,J$ افزایش یابد، انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون به اندازهٔ $6/4\times10^{-19}$ ژول کاهش یافته است و داریم:

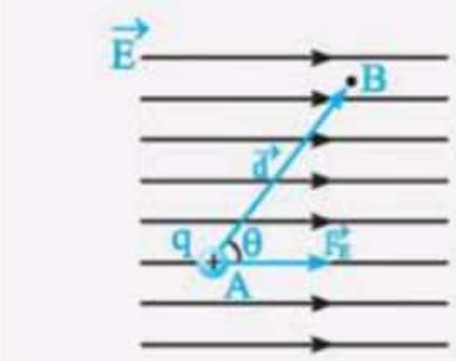
$$\text{مفاهیم فصل کار و انرژی در فیزیک پایه دهم} \Rightarrow \Delta U = -\Delta K = -6/4\times10^{-19}\,J$$

۳) اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B $(V_B - V_A)$ برابر است با:

$$\Delta U = -6/4\times10^{-19}\,J\ ,\ q_e = -1/6\times10^{-19}\,C\ ,\ \Delta V_{AB} = ?$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{-6/4\times10^{-19}}{-1/6\times10^{-19}} = +4\,V$$ (گزینهٔ ۲)

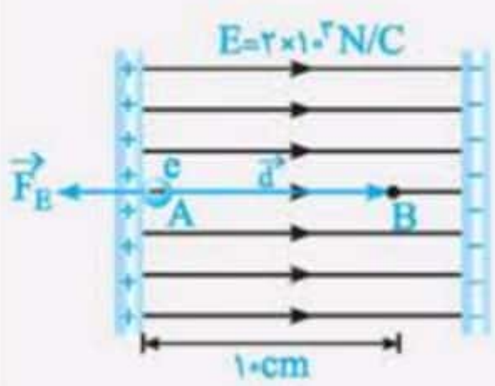
نگاه دیگر: از آن‌جایی که انرژی جنبشی الکترون افزایش یافته است (به عبارتی دیگر انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش یافته است)، می‌توان به این نکته پی برد که الکترون در جهت خودبه‌خودی (خلاف جهت میدان الکتریکی) جابه‌جا شده است و در نتیجه $V_B - V_A > 0$ می‌باشد.



نکته به سادگی می‌توان نشان داد که در شکل مقابل اگر بار q از A تا B جابه‌جا شود، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی این ذره برابر است با:

$$\Delta U_E = -W_E = -|q|Ed\cos\theta$$

در این رابطه θ زاویهٔ بین نیروی $\vec{F}_E$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ است و این رابطه چه برای بار ذره‌ای مثبت و چه برای بار ذره‌ای منفی برقرار است.



تمرین۴ در میدان الکتریکی یکنواخت نشان داده شده در شکل، الکترونی از نقطهٔ A با تندی v_0 پرتاب شده است. الکترون سرانجام در نقطهٔ B متوقف می‌شود. بار الکترون $1/6\times10^{-19}\,C$ و جرم آن $9/1\times10^{-31}\,kg$ است. (برگرفته از کتاب درسی)

الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون در این جابه‌جایی چه مقدار است؟

ب) تندی اولیهٔ پرتاب الکترون را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) با توجه به رابطهٔ ارائه شده داریم: $\Delta U_E = -|q| E d \cos\theta = -(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲\times۱۰^{۳})(۱۰\times۱۰^{-۲})(\cos۱۸۰^\circ) = ۳/۲\times۱۰^{-۱۷}\,J$

دقت کنید چون نیروی وارد بر الکترون در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی می‌باشد، بنابراین زاویه بین نیروی الکتریکی و جابه‌جایی برابر $\theta = ۱۸۰^\circ$ به‌دست آمد.

ب) طبق قضیهٔ کار و انرژی می‌توان نوشت:

$$W_E = \Delta K \Rightarrow -\Delta U_E = \frac{۱}{۲}m(۰ - v_۰^۲)$$

$$\Rightarrow -۳/۲\times۱۰^{-۱۷} = \frac{۱}{۲}(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(-v_۰^۲) \Rightarrow v_۰ = ۸/۴\times۱۰^{۶}\,m/s$$

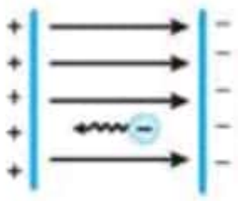
* تلاش کنید با روابط حرکت‌شناسی نیز به این سؤال پاسخ دهید.

اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B در یک میدان الکتریکی یکنواخت، فقط به فاصلهٔ آن دو نقطه در راستای میدان الکتریکی ارتباط دارد و این اختلاف پتانسیل مستقل از علامت و اندازهٔ بار الکتریکی است که داخل میدان جابه‌جا شده است. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

بررسی علت نادرستی دو گزینهٔ ۱ و ۳: با توجه به رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$، مقدار تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره به مقدار بار ذره بستگی دارد (علت نادرستی گزینهٔ ۱). هم‌چنین با توجه به این که اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B به فاصلهٔ آن‌ها بستگی دارد $(\Delta V_{AB} = E\times\Delta x_{AB})$، بنابراین میزان تغییر انرژی پتانسیل ذره نیز به فاصلهٔ بین آن نقاط بستگی دارد (علت نادرستی گزینهٔ ۳).

۱۳۷۶ **۴** با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۵)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۳۷۷ **۴**



$$\Delta V = V_{\text{مقصد}} - V_{\text{مبدأ}} = V_۲ - V_۱ = (-۱۰) - (-۴۰) = ۳۰\,V \;,\; q = -۲\mu C = -۲\times۱۰^{-۶}\,C \;,\; \Delta U = ?$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow ۳۰ = \frac{\Delta U}{(-۲\times۱۰^{-۶})} \Rightarrow \Delta U = -۶\times۱۰^{-۵}\,J$$

علامت منفی یعنی انرژی پتانسیل الکتریکی کاهش یافته است و گزینهٔ (۴) صحیح است.

نگاه دیگر: برای پاسخ به این سؤال می‌توان گفت:

پتانسیل الکتریکی از $V_۱ = -۴۰\,V$ به $V_۲ = -۱۰\,V$ تغییر کرده است. ⟸ پتانسیل الکتریکی افزایش یافته است. ⟸ حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی است. ⟸ بار الکتریکی منفی خودبه‌خودی حرکت کرده است. ⟸ انرژی پتانسیل الکتریکی بار الکتریکی منفی کاهش یافته است.

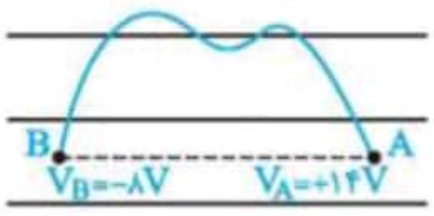
۱۳۷۸ **۴** با توجه به رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$، می‌توان نوشت:

$$|\Delta U| = |q\Delta V| \rightarrow ۶۰۰\times۱۰^{-۳} = ۲۵\times۱۰^{-۳}\times|\Delta V| \rightarrow |\Delta V| = ۲۴\,V$$

چون اصطلاحاً بار الکتریکی مثبت از M به N رفته است، پتانسیل M از N بیشتر است و بنابراین $V_N - V_M = -۲۴\,V$ خواهد بود.

۱۳۷۹ **۳** با توجه به این‌که پتانسیل الکتریکی در جهت خطوط میدان الکتریکی کاهش می‌یابد، بنابراین جهت خطوط میدان به سمت چپ (←) می‌باشد.

از طرفی با حرکت بار $q = +۲\mu C$ در جهت خطوط میدان الکتریکی (جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت)، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.



$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U_{AB}}{q} \Rightarrow \Delta U_{AB} = q\Delta V_{AB}$$

$$\xrightarrow{\Delta V_{AB} = V_B - V_A} \Delta U_{AB} = (+۲\times۱۰^{-۶})\times\overbrace{(-۸ - (+۱۴))}^{-۲۲} = -۴/۴\times۱۰^{-۵}\,J$$

علامت منفی به معنی کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در حرکت از نقطهٔ A تا B است.

۱۳۸۰ **۳** برای حل این سؤال، باید توجه کنید که در مسیرهای BC و DG، میدان الکتریکی بر جابه‌جایی عمود است، بنابراین کار میدان الکتریکی و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی برای بار q در این مسیرها برابر صفر است.

هم‌چنین چون مسیرهای AB و CD هر دو در راستای میدان بوده و طول مسیر CD، دو برابر طول مسیر AB است، بنابراین کار میدان الکتریکی در این مسیر، دو برابر مسیر AB و برابر $۲\times۲\mu J = ۴\mu J$ است. حال موارد مطرح شده در هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

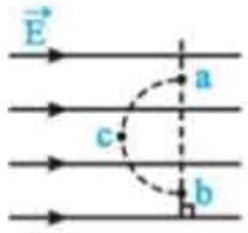
۱) $W_{AC} = W_{AB} + \cancel{W_{BC}}^{۰} = ۲\mu J \xrightarrow{\Delta U_{AC} = -W_{AC}} \Delta U_{AC} = -۲\mu J$

۲) $W_{AG} = W_{AB} + \cancel{W_{BC}}^{۰} + W_{CD} + \cancel{W_{DG}}^{۰} = ۲ + ۰ + ۴ + ۰ = ۶\mu J \rightarrow \Delta U_{AG} = -۶\mu J$

۳) $W_{BG} = \cancel{W_{BC}}^{۰} + W_{CD} + \cancel{W_{DG}}^{۰} = ۴\mu J \Rightarrow$ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴) $W_{DG} = ۰$

gajmarket.com



۲ ۱۳۸۱ با توجه به شکل، چون از نقطهٔ a تا c، پروتون (بار مثبت) در خلاف جهت میدان (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت) حرکت می‌کند، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد. هم‌چنین این بار در ادامهٔ حرکتش از نقطهٔ c تا b در جهت میدان (جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت) حرکت می‌کند، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن در مسیر c تا b کاهش می‌یابد.

از طرفی مطابق شکل، چون نقاط a و b بر روی یک خط‌چین عمود بر خطوط میدان قرار گرفته‌اند، بنابراین $V_a = V_b$ می‌باشد. در نتیجه تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی از نقطهٔ a تا b برابر صفر است.

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} \xrightarrow{\Delta V_{ab} = V_b - V_a = 0} \Delta U_{ab} = U_b - U_a = 0 \Rightarrow U_b = U_a$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی بار مثبت (پروتون) از a تا c افزایش و از c تا b کاهش یافته و در نقطهٔ b به مقدار اولیهٔ انرژی خود در نقطهٔ a می‌رسد.

۲ ۱۳۸۲ با توجه به رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توان نوشت:

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q} \Rightarrow V_B - ۲۰ = \frac{(۰/۶ - ۰/۴) \times ۱۰^{-۳}}{-۲ \times ۱۰^{-۶}} = -۱۰۰ \Rightarrow V_B = -۸۰\,V$$

خلاقیت و حرفه‌ای ها

با توجه به این‌که در حرکت بار الکتریکی منفی از نقطهٔ A تا B انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی افزایش یافته است، بنابراین مشخص است که این بار در خلاف جهت خودبه‌خودی (یعنی در جهت میدان الکتریکی) جابه‌جا شده است و در نتیجه $V_B < V_A$ بوده و گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند.

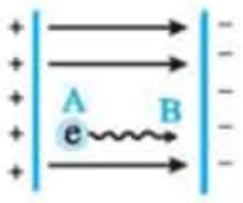
۳ ۱۳۸۳ با توجه به رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توان نوشت:

$$\Delta V = ۵۰۰\,V \;,\; q = ۰/۸\,\mu C = ۸ \times ۱۰^{-۷}\,C \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow ۵۰۰ = \frac{\Delta U}{۸ \times ۱۰^{-۷}} \Rightarrow \Delta U = ۴ \times ۱۰^{-۴}\,J$$

۲ ۱۳۸۴ ابتدا بار الکتریکی معادل تعداد $۱۰^۸$ الکترون را به‌دست می‌آوریم:

$$q = -ne \Rightarrow q = -۱۰^۸ \times (۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}) = -۱/۶ \times ۱۰^{-۱۱}\,C$$

$$|\Delta V| = ۵\,V \;,\; |\Delta U| = ? \Rightarrow |\Delta V| = \frac{|\Delta U|}{|q|} \Rightarrow ۵ = \frac{|\Delta U|}{(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۱})} \Rightarrow |\Delta U| = ۸ \times ۱۰^{-۱۱}\,J$$



تحلیل دقیق‌تر: برای انتقال الکترون در خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی، باید انرژی مصرف شود. به عبارت بهتر در این انتقال، الکترون در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شده است و داریم:

$$\text{حرکت در جهت میدان الکتریکی} \Rightarrow V_B < V_A \Rightarrow V_B - V_A < ۰ \Rightarrow \Delta V < ۰ \xrightarrow{q<۰} \Delta U > ۰$$

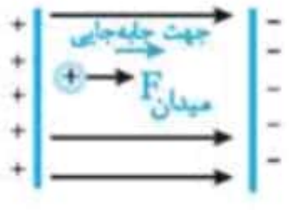
۱ ۱۳۸۵ از آن‌جایی که در انتقال بار $+۵\,\mu C$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B به اندازهٔ $۲\,mJ$ انرژی **آزاد شده** است، در نتیجه می‌توان گفت که علامت ΔU منفی می‌باشد و بار $+۵\,\mu C$ در جهت حرکت خودبه‌خودی‌اش (یعنی در جهت میدان الکتریکی) جابه‌جا شده است. اکنون می‌توان نوشت:

$$\Delta U = -۲\,mJ = -۲ \times ۱۰^{-۳}\,J \;,\; q = +۵\,\mu C = +۵ \times ۱۰^{-۶}\,C \;,\; \Delta V_{AB} = V_B - V_A$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-۲ \times ۱۰^{-۳}}{۵ \times ۱۰^{-۶}} = -۴۰۰\,V \Rightarrow V_B - V_A = -۴۰۰ \xrightarrow{V_B = ۱۰۰\,V} ۱۰۰ - V_A = -۴۰۰ \Rightarrow V_A = ۵۰۰\,V$$

نتیجه ۱: در حرکت بار الکتریکی اگر انرژی مصرف شود، پس انرژی پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد.

نتیجه ۲: در حرکت بار الکتریکی اگر انرژی آزاد شود، پس انرژی پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد.



۳ ۱۳۸۶ با جابه‌جایی بار الکتریکی مثبت در جهت میدان الکتریکی داریم:

$$F_{\text{میدان}} = Eq$$

$$W_{\text{میدان}} = F_{\text{میدان}} . d \cos\alpha = Eqd \cos\alpha$$

$$\alpha = ۰ \Rightarrow W = +Eqd \Rightarrow \text{کار میدان}: W > ۰ \quad \text{(زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی)}$$

از طرفی می‌دانیم که با حرکت بار مثبت در جهت میدان الکتریکی (جهت حرکت خودبه‌خودی) انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد، با توجه به توضیحات فوق گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲ ۱۳۸۷ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی برابر قرینهٔ کار میدان الکتریکی است، بنابراین می‌توان نوشت:

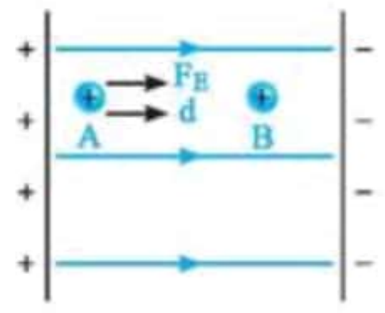
$$\Delta U = U_B - U_A = -W_E \xrightarrow[W_E = ۳۶\,\mu J]{U_A = ۲۰\,\mu J} U_B - ۲۰ = -۳۶ \rightarrow U_B = ۲۰ - ۳۶ = -۱۶\,\mu J$$

۱ ۱۳۸۸ با توجه به اطلاعات سؤال، به کمک روابط مقابل می‌توان نوشت.

$$\Delta U = -W_E = -5\times10^{-5}\,J$$

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{-5\times10^{-5}}{+2\times10^{-6}} \Rightarrow V_B - V_A = -25V$$

نگاه مفهومی: با توجه به این‌که کار میدان بر روی ذرهٔ $+2\mu C$ مقداری مثبت دارد، یعنی ذره در جهت میدان جابه‌جا شده است (F_E و d در این حالت هم‌جهت می‌باشد) و در این حالت پتانسیل (V) و انرژی پتانسیل هر دو کاهش می‌یابد.

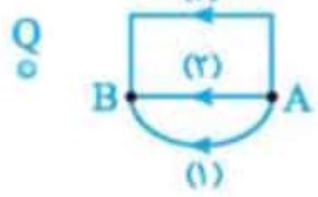


$U_B < U_A$ (حرکت در جهت خودبه‌خودی) $\Rightarrow \Delta U < 0$

$V_B < V_A$ (حرکت در جهت میدان) $\Rightarrow V_B - V_A < 0$

بنابراین فقط با یک نگاه مفهومی نیز می‌توان به این سؤال پاسخ داد.

۱ ۱۳۸۹ با توجه به رابطهٔ $\Delta U = -W_{\text{میدان}} = q\times\Delta V$، کار انجام شده به تغییرات پتانسیل الکتریکی (ΔV) بستگی دارد. از طرفی ΔV نیز برابر مقدار اختلاف پتانسیل الکتریکی نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت است، در نتیجه مقدار کار انجام شده تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت بستگی دارد و به مسیر حرکت وابسته نیست. با توجه به توضیحات فوق، در شکل مقابل داریم:



$$W_1 = W_2 = W_3 = -q(V_B - V_A)$$

توجه

همان‌طور که مشاهده می‌کنید کار انجام شده توسط نیروی الکتریکی تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت وابسته است و به مسیر حرکت بستگی ندارد.

۱ ۱۳۹۰ مطابق شکل، بار مثبت را در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت داده‌ایم، بنابراین زاویهٔ بین نیروی الکتریکی و جابه‌جایی بیش از 90° است و کار نیروی الکتریکی یعنی W_E منفی است $(W_E < 0)$.



از طرفی طبق رابطهٔ $\Delta U = -W_E$، چون کار نیروی الکتریکی منفی است، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی مثبت خواهد بود $(\Delta U > 0)$. به عبارت دیگر، چون بار $q+$ در خلاف جهت خودبه‌خودی‌اش جابه‌جا شده است، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش یافته است.

در نهایت در مورد کار نیروی دست می‌توانیم بگوییم که چون نیروی دست با جابه‌جایی هم جهت است، کار دست مثبت خواهد بود.



$$W_{\text{دست}} = F_{\text{دست}}\,d\cos\alpha = F_{\text{دست}}\,d\cos0 = F_{\text{دست}}\,d > 0$$

نکته

با کمک قضیهٔ کار و انرژی نیز می‌توان گفت (دقت شود که تندی در ابتدا و انتها صفر است):

$$W_{\text{کل}} = \Delta K \Rightarrow W_{\text{کل}} = W_E + W_{\text{دست}} = 0 \Rightarrow W_{\text{دست}} = -W_E \xrightarrow{W_E<0} W_{\text{دست}} > 0$$

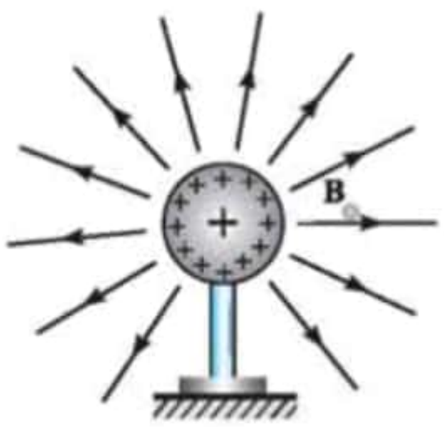
۲ ۱۳۹۱ همان‌طورکه می‌دانیم، اگر در جهت خطوط میدان حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی نقاط کاهش می‌یابد و بالعکس، بنابراین $V_B > V_A$ بوده و $\Delta V = V_A - V_B < 0$ است.

از طرفی حرکت خود به خودی بار مثبت، در جهت خطوط میدان می‌باشد و در آن انرژی پتانسیل الکتریکی بار (U) کاهش می‌یابد. چون در این سؤال بار مثبت در جهت خود به خودی‌اش جابه‌جا شده است، بنابراین $\Delta U < 0$ بوده و کار میدان مثبت $(W' = -\Delta U > 0)$ و کار شخص منفی است $(W < 0)$.

دید دیگر: کار میدان برابر است با:

$W' = F_E \times d \times \cos\theta$: کار میدان

↳ زاویهٔ بین نیروی وارد شده از طرف میدان و جابه‌جایی

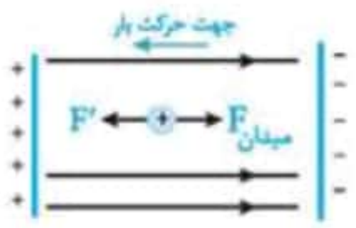


$\theta = 0 \Rightarrow$ جهت حرکت بار و نیرو هم‌جهت است. $\Rightarrow W' > 0$

$$\Longrightarrow W' = -W > 0 \Rightarrow \begin{cases} W' > 0 \\ W < 0 \end{cases}$$

۳ ۱۳۹۲ برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر دقت کنید:

۱) از آن‌جایی که بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی (خلاف جهت حرکت خودبه‌خودی) حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش یافته و نیرویی خارجی بر آن وارد می‌شود (F')، پس می‌توان نوشت:



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F' = F_{\text{میدان}} = Eq$: بار با تندی ثابت در مسیر مستقیم حرکت می‌کند

gajmarket.com

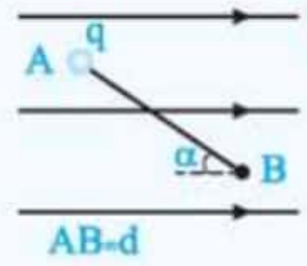
۲) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در این جابه‌جایی برابر است با:

$$\begin{cases}\Delta U = -W_{\text{میدان}} \\ W_{\text{میدان}} = F_{\text{میدان}} \times d \times \cos\alpha = (Eq) \times d \times \cos 180^\circ = -Eqd\end{cases} \Rightarrow \Delta U = +Eqd$$

با توجه به توضیحات ارائه‌شده، وقتی بار مثبت در خلاف جهت میدان یکنواخت E به اندازهٔ d جابه‌جا می‌شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن به اندازهٔ $\Delta U = Eqd$ افزایش می‌یابد.

دقت کنید چون تندی ذره ثابت است، بنابراین انرژی جنبشی ذره ثابت می‌ماند $(K = \frac{1}{2}mv^2)$.

تذکر

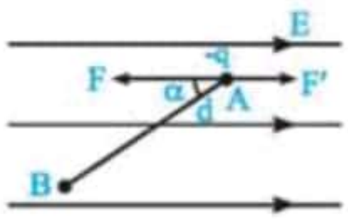


اگر بار الکتریکی q با تندی ثابت در میدان الکتریکی یکنواخت E مطابق شکل به اندازهٔ d حرکت کند، در این‌صورت تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (ΔU) آن برابر است با:

$$\Delta U = -W \quad , \quad |\Delta U| = |Eqd\cos\alpha|$$

(α: زاویهٔ بین جابه‌جایی و میدان)

۳ ۱۳۹۳ می‌دانیم که با حرکت بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی (یعنی در جهت حرکت خود به خودی حرکت بارِ منفی)، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.



تحلیل دیگر : $V_B > V_A \rightarrow V_B - V_A > 0 \xrightarrow[\Delta U = q\Delta V]{q<0} \Delta U < 0$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

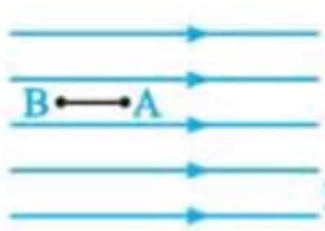
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) چون $\Delta U = -W_{\text{میدان}}$ بوده و $\Delta U < 0$ است، بنابراین $W_{\text{میدان}} > 0$ می‌باشد.

۲) چون تندی بار ثابت است، بنابراین انرژی جنبشی آن ثابت می‌ماند.

۴) پتانسیل نقطهٔ B بیشتر از پتانسیل نقطهٔ A است (چرا؟)، بنابراین بار از پتانسیل کم‌تر به پتانسیل بیشتر منتقل شده است.

۱ ۱۳۹۴ می‌دانیم که با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل نقاط عبوری کاهش می‌یابد. بنابراین در شکل مقابل، $V_B > V_A$ می‌باشد و $V_B - V_A > 0$ است (رد گزینه‌های ۲ و ۴).



از طرفی می‌دانیم که انرژی جنبشی الکترون ۸ میلی‌ژول افزایش یافته است، در نتیجه انرژی پتانسیل الکتریکی آن ۸ میلی‌ژول کاهش یافته است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta U = -8\,mJ = -8 \times 10^{-3}\,J \quad , \quad q = -4\,\mu C = -4 \times 10^{-6}\,C \quad , \quad \Delta V_{AB} = V_B - V_A = ?$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-8 \times 10^{-3}}{-4 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^3\,V = 2\,kV$$

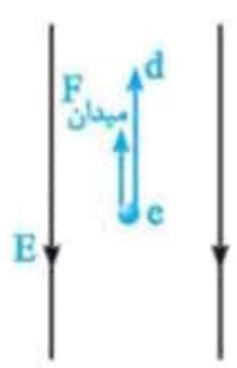
۳ ۱۳۹۵ با توجه به این‌که میزان افزایش انرژی جنبشی این ذرهٔ باردار، برابر مقدار کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی آن می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$|\Delta K| = |\Delta U| \Rightarrow \frac{1}{2}m(v^2 - \cancel{v_0^2}^{\,0}) = |q\Delta V|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 0/1 \times 10^{-3} \times (10^2 - 0^2) = |q \times (-100 - 100)| \Rightarrow q = \frac{1}{4} \times 10^{-4}\,C = 25\,\mu C$$

۲ ۱۳۹۶ برای حل این سؤال، در گام اول تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی و در گام دوم اختلاف پتانسیل الکتریکی را محاسبه می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ ΔU:



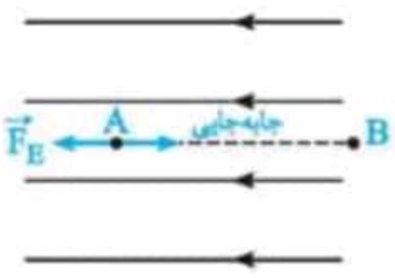
مطابق شکل، به الکترون در خلاف جهت میدان الکتریکی نیرو وارد می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta U = -W_E = -F_{\text{میدان}}\,d\cos\alpha = -E|q|d\underbrace{\cos(0)}_{1} = -200 \times 1/6 \times 10^{-19} \times 400 \times 1 = -1/28 \times 10^{-14}\,J$$

گام دوم: محاسبهٔ ΔV:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-1/28 \times 10^{-14}}{-1/6 \times 10^{-19}} = 8 \times 10^4\,V$$

۱ ۱۳۹۷ با توجه به رابطهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی داریم:



زاویهٔ بین نیروی الکتریکی و جابه‌جایی

$$\Delta U_E = -|q|Ed\cos\overset{\uparrow}{\theta} = -(1/6\times10^{-19})(2\times10^{3})(10\times10^{-2})(\cos180^\circ) = 3/2\times10^{-17}\,J$$

در ادامه می‌توان نوشت:

$$\Delta U_E = -\Delta K \Rightarrow 3/2\times10^{-17} = -(K_B - K_A) \xrightarrow{K_B=0} K_A = 3/2\times10^{-17}\,J$$

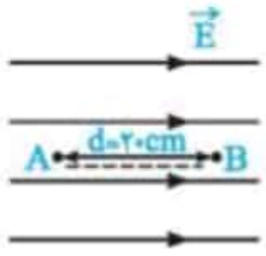
$$\Rightarrow K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow 3/2\times10^{-17} = \frac{1}{2}\times(1/6\times10^{-27})\times v_A^2 \Rightarrow v_A = 2\times10^{5}\,m/s$$

روش دیگر: طبق قضیهٔ کار و انرژی می‌توان نوشت:

$$W_{کل} = -\Delta U_E = \Delta K \Rightarrow -\Delta U_E = \frac{1}{2}m(0 - v_A^2) \Rightarrow -3/2\times10^{-17} = \frac{1}{2}(1/6\times10^{-27})(-v_A^2) \Rightarrow v_A = 2\times10^{5}\,m/s$$

۱ ۱۳۹۸ مشابه با تمرین (۴) در خلاصه نکات (۱۵)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱ ۱۳۹۹ با رها کردن بار منفی در نقطهٔ B، این ذره در خلاف جهت میدان الکتریکی (در جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی) حرکت کرده و انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش و انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد. از طرفی افزایش انرژی جنبشی برابر اندازهٔ کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی آن می‌باشد و داریم:



$$\Delta U = -W_{میدان} = -(E|q|)d\cos0^\circ = -10^{5}\times5\times10^{-6}\times0/2 = -0/1$$

$$|\Delta K| = |\Delta U| \Rightarrow K - \cancel{K_0} = |\Delta U| \Rightarrow K = 0/1\,J$$

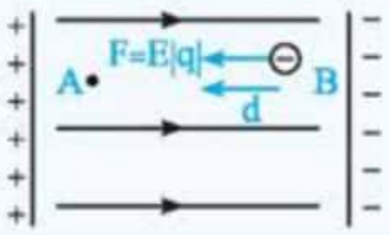
خلاقیت و حرفه‌ای‌ها

برای حل این سؤال، به‌صورت زیر نیز می‌توان تغییر انرژی جنبشی را به‌دست آورد:

$$\sum F = ma \Rightarrow Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m}$$

$$\text{d جابه‌جایی} \rightarrow v^2 - \cancel{v_0^2} = 2ad \Rightarrow v^2 = 2\times\frac{Eq}{m}\times d$$

$$\text{انرژی جنبشی ثانویه} \rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\times\left(2\frac{Eq}{m}\times d\right) = Eqd \xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{جایگذاری}} K = 0/1\,J$$



دقت: در محاسبهٔ کار میدان، با توجه به این‌که نیروی وارد بر ذرهٔ باردار منفی در خلاف جهت میدان است و جابه‌جایی نیز در خلاف جهت میدان انجام شده است، کار به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$W_{میدان} = Eq\times d\times\cos0^\circ$$

۲ ۱۴۰۰ کار میدان برای جابه‌جا کردن بار الکتریکی $-2\mu C$ از A تا B، قرینهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی آن می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$W_E = -\Delta U = -q\Delta V = -q(V_B - V_A) = -(-2\times10^{-6})\times(-6) = -1/2\times10^{-5}\,J$$

توجه کنید که پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B از A کم‌تر است (چرا؟).

۱ ۱۴۰۱

تذکر

انرژی پتانسیل الکتریکی بار مثبت با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی، افزایش می‌یابد (رد گزینه‌های ۲ و ۴).



برای حل ابتدا تغییرات پتانسیل الکتریکی بار الکتریکی را از نقطهٔ A تا B به‌دست می‌آوریم (دقت شود که $V_B > V_A$ است و $\Delta V_{AB} > 0$ است).

$$MB = AB\times\cos37^\circ = 25\times\frac{8}{10} = 20\,cm = 0/2\,m$$

$$E = \frac{|\Delta V_{MB}|}{MB} \Rightarrow 1/5\times10^{6} = \frac{|\Delta V_{MB}|}{0/2} \Rightarrow \Delta V_{MB} = 0/3\times10^{6}\,V \Rightarrow \Delta V_{AB} = \Delta V_{MB} = 0/3\times10^{6}\,V$$

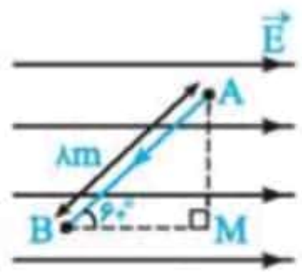
از طرفی طبق رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار الکتریکی q برابر است با:

$$\Delta V = 0/3\times10^{6}\,V\ ,\ q = 4\mu C = 4\times10^{-6}\,C\ ,\ \Delta U = ?$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow 0/3\times10^{6} = \frac{\Delta U}{4\times10^{-6}} \Rightarrow \Delta U = 1/2\,J$$

gajmarket.com

۲ ۱۴۰۲ مشابه با سؤال قبل، اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B را یافته و برای محاسبهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار الکتریکی با حرکت بین دو نقطهٔ A و B می‌توان نوشت:



$$MB = AB \times \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4\,m$$

$$E = \frac{|\Delta V_{MB}|}{MB} \Rightarrow 4 \times 10^5 = \frac{|\Delta V_{MB}|}{4} \xrightarrow{V_B > V_M} \Delta V_{MB} = V_B - V_M = 16 \times 10^5\,V$$

$$V_A = V_M \Rightarrow \Delta V_{AB} = \Delta V_{MB} = 16 \times 10^5\,V$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow 16 \times 10^5 = \frac{\Delta U}{-10 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta U = -16\,J$$

چون بار منفی در خلاف جهت میدان (جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی) حرکت کرده است، بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی آن باید کاهش یابد ($\Delta U < 0$).

بنابراین انرژی جنبشی ذره، ۱۶ J افزایش یافته و داریم:

$$\Delta K = -\Delta U = -(-16\,J) = 16\,J$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 0/4 \times 10^{-3} \times \left[v_B^2 - (100)^2\right] = 16$$

$$\Rightarrow v_B^2 - 10^4 = 8 \times 10^4 \Rightarrow v_B^2 = 9 \times 10^4 \Rightarrow v_B = 3 \times 10^2 = 300\,m/s$$

۱ ۱۴۰۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: به دست آوردن تندی در B، با توجه به قضیهٔ کار و انرژی در فیزیک دهم:

$$\Delta K = W_E \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = E|q|\Delta x \overbrace{\cos 0}^{1} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2E|q|\Delta x}{m}}$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده برای تندی، می‌توان گفت چون خطوط میدان در شکل (الف) به هم نزدیک است، بنابراین میدان الکتریکی در شکل (الف) قوی‌تر بوده و تندی حرکت پروتون در نقطهٔ B در این شکل بیشتر است.

۳ ۱۴۰۴ مشابه با پاسخ سؤال قبل، می‌توان نوشت:

گام اول: به دست آوردن تندی در نقطهٔ B:

$$\Delta K = W_E \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = E|q|\Delta x \overbrace{\cos(180)}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - E|q|\Delta x \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - \frac{2}{m}E|q|\Delta x}$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ به دست آمده برای تندی در نقطهٔ B، چون میدان الکتریکی در شکل (پ) ضعیف‌تر است، بنابراین تندی الکترون در نقطهٔ B در این شکل بیشتر خواهد بود.

۱ ۱۴۰۵ با توجه به رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توان گفت:

$$\text{ولت} \equiv \frac{\text{ژول}}{\text{کولن}}$$

۴ ۱۴۰۶ با توجه به رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توان گفت که:

رابطهٔ (۱) : کولن. ولت ≡ ژول $\Rightarrow \Delta U = \Delta V.q \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$

از طرفی با توجه به رابطهٔ توان $\left(P = \frac{W}{t}\right)$ می‌توان گفت که:

رابطهٔ (۲) : ثانیه. وات ≡ ژول $\Rightarrow W = P.t \Rightarrow P = \frac{W}{t}$

با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان گفت که (کولن × ولت) معادل است با (وات × ثانیه)، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ ۱۴۰۷

تذکر

با توجه به رابطهٔ $\Delta U = \Delta V.q$ می‌توان گفت که یک الکترون‌ولت (1eV) برابر با مقدار انرژی‌ای است که صرف جابه‌جایی یک الکترون بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل 1V می‌شود و 1eV معادل با $1/6 \times 10^{-19}$ ژول است. به عبارتی برای تبدیل الکترون‌ولت به ژول حاصل را در $1/6 \times 10^{-19}$ ضرب کرده و برای تبدیل ژول به الکترون‌ولت، حاصل را بر $1/6 \times 10^{-19}$ تقسیم می‌کنیم.

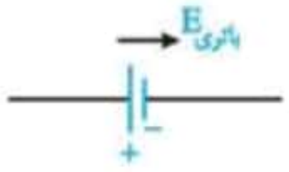
با توجه به تذکر فوق، 0/4 J برابر با $\frac{0/4}{1/6 \times 10^{-19}}$ الکترون‌ولت یا $2/5 \times 10^{18}$ الکترون‌ولت است.

نگاه دیگر:

$$\text{تناسب}: \left\{ \begin{array}{c|c} 1eV & 1/6 \times 10^{-19}\,J \\ x & 0/4\,J \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{0/4}{1/6 \times 10^{-19}} = 2/5 \times 10^{18}\,eV$$

۱ ۱۴۰۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) با توجه به این‌که برای انتقال الکترون انرژی مصرف شده است، الکترون در خلاف جهت خودبه‌خودی‌اش جابه‌جا شده است، یعنی در جهت میدان الکتریکی از قطب مثبت به منفی منتقل شده است.



$$\begin{cases}\text{قطب مثبت : مبدأ}\\ \text{قطب منفی : مقصد}\end{cases} \Rightarrow V_{\text{مقصد}} < V_{\text{مبدأ}} \Rightarrow V_{\text{مقصد}} - V_{\text{مبدأ}} < 0$$

۲) برای محاسبهٔ ΔV داریم (اگر ΔU برحسب الکترون‌ولت باشد، در مخرج تعداد الکترون باید قرار گیرد):

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{۱۲eV}{-۱e} = -۱۲ \Rightarrow V_{\text{مقصد}} - V_{\text{مبدأ}} = -۱۲V$$

تذکر

می‌دانیم که با صرف $۱eV$ انرژی، می‌توان یک الکترون را بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل $۱V$ جابه‌جا کرد، بنابراین با یک تناسب ساده می‌توان گفت که با صرف $۱۲eV$ انرژی می‌توان یک الکترون را بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل $۱۲V$ جابه‌جا کرد.

۴ ۱۴۰۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۶ **چگونگی توزیع بار در رساناها** (تست‌های ۱۴۰۹ تا ۱۴۲۲)

در این خلاصه نکات می‌خواهیم به چگونگی آرایش بار در یک رسانا و بررسی میدان الکتریکی در داخل و اطراف یک جسم رسانا بپردازیم. به این منظور جسم رسانایی را در نظر بگیرید که توسط عایقی از محیط اطراف خود جدا شده باشد، به این جسم اصطلاحاً رسانای منزوی می‌گویند.

آرایش بارها در یک رسانا

در **جسم رسانا** که دارای الکترون‌های آزاد است، بار الکتریکی داده‌شده در جسم توزیع می‌شود. می‌دانیم بارهای الکتریکی هم‌نام یک‌دیگر را می‌رانند و در جسم رسانا بارهای داده‌شده باید طوری قرار گیرند که برایند نیروی وارد بر آن‌ها به حداقل برسد و به همین دلیل بارها روی پوستهٔ خارجی جسم رسانا قرار می‌گیرند.

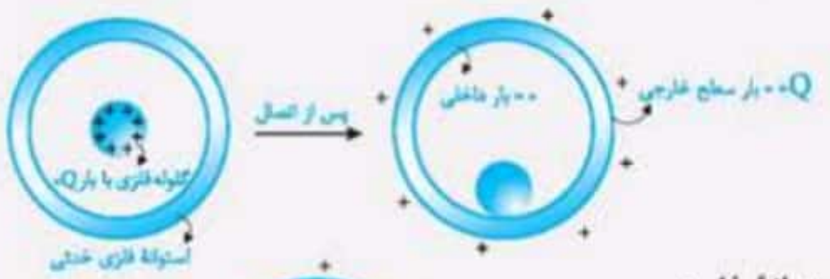


تذکر وقتی به **جسم نارسانا** بار الکتریکی داده می‌شود، چون در نارساناها تعداد الکترون‌های آزاد بسیار کم است، بارهای الکتریکی نمی‌توانند جابه‌جا شوند و بار در محل داده‌شده به جسم باقی می‌ماند.

تمرین۱ **گلولهٔ فلزی با بار $Q+$ را از درون به استوانهٔ فلزی توخالی خنثی که روی میز عایقی قرار دارد تماس می‌دهیم. بار ایجاد شده در درون و بیرون استوانه به‌ترتیب برابرند با:**

۱) $-Q$ و $+Q$ ۲) صفر و $+Q$ ۳) $\frac{+Q}{۲}$ و $\frac{+Q}{۲}$ ۴) $+Q$ و صفر

پاسخ می‌دانیم که تمام بار الکتریکی داده شده به استوانه، در سطح خارجی آن پخش می‌شود و بار الکتریکی سطح داخلی آن صفر است، بنابراین بار ایجاد شده در سطح خارجی استوانه $Q+$ و بار ایجاد شده در سطح داخلی آن صفر است، پس گزینهٔ (۲) صحیح است.



تمرین۲ **در تمرین قبل اگر گلولهٔ فلزی با بار الکتریکی $Q+$ را بدون تماس با استوانهٔ فلزی توخالی در مرکز آن قرار دهیم، بار ایجاد شده در درون و بیرون استوانه را بیابید.**

پاسخ با استفاده از روش القا در داخل استوانه بار الکتریکی $Q-$ ایجاد می‌شود و با توجه به صفر بودن کل بار استوانه، در سطح خارجی استوانه بار $Q+$ ایجاد می‌شود تا استوانه خنثی بماند.



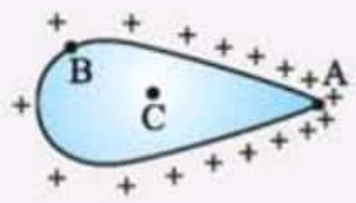
مفاهیم مربوط به میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در داخل و بر روی سطح یک جسم رسانا

۱ اگر باری اضافی به یک جسم رسانا داده شود و یا آن جسم در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، پس از مدت زمان کوتاهی که جسم در تعادل الکتروستاتیکی قرار می‌گیرد، میدان الکتریکی داخل رسانا صفر می‌شود.

۲ وقتی یک جسم رسانای خنثی در میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرد، الکترون‌های آزاد جسم تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی، طوری روی سطح رسانا جابه‌جا می‌شوند (یا به عبارتی القا می‌شوند) که میدان الکتریکی ناشی از آن‌ها، اثر میدان خارجی را در داخل رسانا خنثی کند، از این‌رو میدان الکتریکی خالص در داخل رسانا صفر می‌شود.

gajmarket.com

۳ اگر به یک جسم رسانا بار الکتریکی q را منتقل کنیم، بارها جابه‌جا شده و به سطح جسم منتقل می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتریکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، تراکم بار در نزدیکی نقاط نوک‌تیز بیشتر است. این موضوع یعنی در شکل مقابل، تراکم بار در نزدیکی A، از B و C بیشتر می‌باشد.

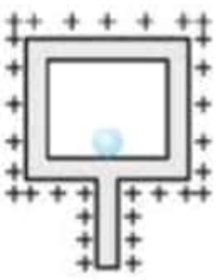


می‌دانیم که اگر به یک جسم رسانا مانند یک کره یا یک استوانه بار الکتریکی منتقل کنیم، بار الکتریکی به سطح خارجی کره یا استوانه منتقل می‌شود و سطح داخلی فاقد بار الکتریکی است. با توجه به شکل مقابل، گلوله‌هایی که در تماس با سطح خارجی استوانه هستند، باردار شده و یک‌دیگر را می‌رانند. اما گلوله‌هایی که با سطح داخلی در تماس می‌باشند، باردار نشده‌اند. بنابراین می‌توان گفت که بار الکتریکی در سطح خارجی جسم رسانا (استوانه) پخش می‌شود.

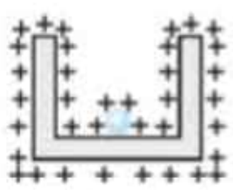


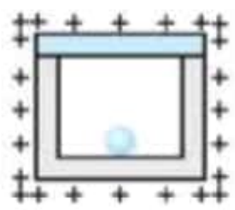
۴ ۱۴۱۰ چون مخروط فلزی و گلوله‌ها با یک‌دیگر در تماس‌اند، با باردار کردن مخروط، گلوله‌ها نیز باردار می‌شوند. از طرفی می‌دانیم که تجمع بارها در نقاط نوک‌تیز رسانا بیشتر است، بنابراین آونگ A بیشترین بار را گرفته و با بیشترین انحراف از مخروط دور می‌شود (زیرا هر دو دارای یک نوع بار الکتریکی هستند و یک‌دیگر را دفع می‌کنند)، هم‌چنین آونگ C کم‌ترین بار الکتریکی را می‌گیرد و در نتیجه با کم‌ترین انحراف از مخروط دور می‌شود.

۳ ۱۴۱۱ می‌دانیم که در حالت تعادل الکتروستاتیکی، بارها در سطح خارجی رسانا پخش می‌شوند، بنابراین در درون سطح بسته‌ای مانند شکل مقابل، بار الکتریکی وجود ندارد و در نتیجه سطح داخلی جعبه و سطح کرهٔ فلزی واقع در داخل آن هر دو خنثی هستند.



۱ ۱۴۱۲ بار کرهٔ فلزی $-q$ و بار ظرف فلزی $+4q$ است. وقتی با یک‌دیگر تماس پیدا می‌کنند، مجموعهٔ آن‌ها دارای بار $+3q$ می‌شود. قبل از این‌که درب ظرف بسته شود، بار به صورت شکل (۱) در سطح خارجی مجموعه توزیع می‌شود.


شکل (۱)


شکل (۲)

ولی وقتی درب فلزی ظرف بسته می‌شود، کرهٔ فلزی دیگر عضو داخلی ظرف محسوب می‌شود.

بنابراین کل بار $+3q$ بر روی سطح خارجی ظرف مطابق شکل (۲) پخش می‌شود.

۲ ۱۴۱۳ توضیحات این سؤال، مطابق توضیحات آزمایش فارادی در کتاب درسی است. در این حالت پس از خارج کردن کره از داخل ظرف، کره بدون بار الکتریکی می‌شود. در ادامه با توجه به توضیحات تست (۱۱۳۹)، ورقه‌های الکتروسکوپ به‌دلیل خاصیت القای الکتریکی اندکی به هم نزدیک می‌شوند.

۴ ۱۴۱۴ با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۱۶)، میدان الکتریکی درون جسم رسانا در حالت تعادل همواره صفر است، بنابراین پس از دو برابر شدن بار الکتریکی موجود در سطح جسم رسانا و ایجاد حالت تعادل، میدان الکتریکی درون رسانا هم‌چنان صفر می‌ماند. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

دقت: درستی سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات (۱۶)، مشخص است.

۱ ۱۴۱۵ برای پاسخ به این سؤال، ابتدا به دو نکتهٔ زیر توجه کنید:

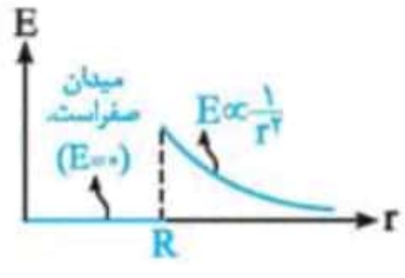
۱) اگر در داخل یک جسم رسانا، میدان الکتریکی وجود داشته باشد، بر همهٔ بارهای درون آن نیرو وارد کرده و آن‌ها را به حرکت در می‌آورد.

۲) در حالت تعادل الکتروستاتیکی، بار الکتریکی حرکت نمی‌کند.

با توجه به نکات فوق، می‌توان گفت که چون کره در تعادل الکتروستاتیکی است، بنابراین بارهای درون کره حرکت نمی‌کنند و در نتیجه شدت میدان الکتریکی درون کره صفر است.

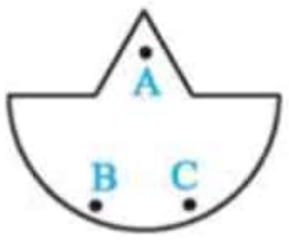
۳ ۱۴۱۶ میدان الکتریکی درون یک جسم رسانا که در حالت تعادل الکتروستاتیکی قرار دارد، همواره صفر است. در این حالت در درون جسم عملاً میدان الکتریکی ناشی از بارها پس از جابه‌جا شدن، میدان خارجی را خنثی کرده و میدان الکتریکی برایند صفر می‌شود.

۱ ۱۴۱۷ با توجه به صفر بودن میدان الکتریکی در داخل یک جسم رسانا، از مرکز کره تا فاصلهٔ R میدان الکتریکی صفر می‌باشد (نادرستی گزینه‌های ۲ و ۴).



از طرفی همان‌طور که می‌دانیم، پس از فاصلهٔ R از مرکز کره، میدان الکتریکی باید با عکس مجذور فاصله تا مرکز کره $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ کاهش پیدا کند $\left(E = k\frac{Q}{r^2}\right)$ و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱ ۱۴۱۸ با توجه به خلاصه نکات ۱۶، بار الکتریکی داده شده به یک جسم رسانا در سطح خارجی آن پخش می‌شود و تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیز بیشتر است. هم‌چنین در یک رسانا، پس از پخش شدن بارها و رسیدن به حالت تعادل الکتروستاتیکی، میدان الکتریکی در داخل جسم رسانا صفر می‌شود.



۴ ۱۴۱۹ بار الکتریکی داده شده به یک جسم رسانا در سطح خارجی آن پخش می‌شود و تراکم بار الکتریکی در نزدیکی نقاط نوک‌تیز بیشتر است. بنابراین تراکم بار در نزدیکی نقطهٔ A، بیشتر از نزدیکی نقاط B و C است.

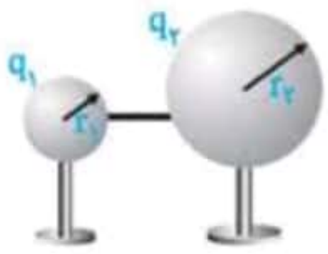
۱ ۱۴۲۰ برای پاسخ به این سؤال، ابتدا به دو نکتهٔ زیر توجه کنید:

۱) اگر به یک جسم رسانا مانند یک کرهٔ فلزی بار الکتریکی داده شود، این بار الکتریکی در سطح خارجی آن پخش می‌شود.

۲) اگر به یک جسم نارسانا مثل شیشه بار الکتریکی داده شود، این بار الکتریکی در نقطهٔ تماس باقی می‌ماند و توانایی پخش شدن در سطح شیشه را ندارد.

با توجه به نکات فوق، با دادن بار الکتریکی به کرهٔ شیشه‌ای، این بار الکتریکی در نقطهٔ تماس باقی می‌ماند و در نتیجه تراکم بار الکتریکی در بیشتر نقاط کرهٔ شیشه‌ای صفر باقی می‌ماند.

۳ ۱۴۲۱ در اجسام رسانا، بار الکتریکی در سطح خارجی آن‌ها پخش می‌شود، بنابراین در این سؤال، در سطح خارجی هر دو کره مقدار بار یکسانی قرار دارد و چون شعاع خارجی آن‌ها با هم برابر است، پس تراکم بار الکتریکی در سطح خارجی آن‌ها با هم برابر خواهد بود. توجه کنید که در سطح داخلی کرهٔ توخالی B، باری جمع نخواهد شد.

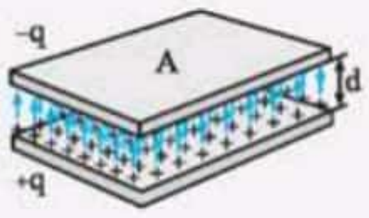


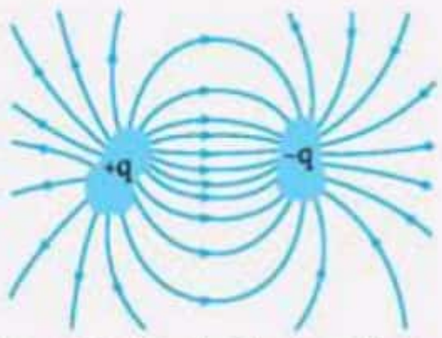
۳ ۱۴۲۲ پس از اتصال دو کرهٔ رسانا به یک‌دیگر و تعادل بار الکتریکی، می‌توان این مجموعه را به عنوان یک جسم فرض کرد. حال بار الکتریکی بر روی کل این مجموعه پخش می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیزتر بیشتر است، بنابراین تراکم بار بر روی کرهٔ کوچک‌تر که به دلیل شعاع کم‌تر به نوعی نوک‌تیزتر است، بیشتر است.

۲ ۱۴۲۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۷ — آشنایی با خازن و بار و انرژی ذخیره شده در آن (تست‌های ۱۴۲۳ تا ۱۴۳۶)

در شروع بحث باید گفت که خازن وسیلهٔ الکتریکی است که می‌تواند بار الکتریکی و انرژی الکتریکی را در خود ذخیره کند و در مواقع مورد نیاز، آن را خیلی سریع در مدار آزاد کند. خازن‌ها انواع مختلفی دارند که در کتاب درسی تنها خازن تخت بررسی می‌شود. این نوع خازن شامل دو صفحهٔ رسانای موازی با هم است که در شکل مقابل نمونه‌ای از آن را مشاهده می‌کنید.

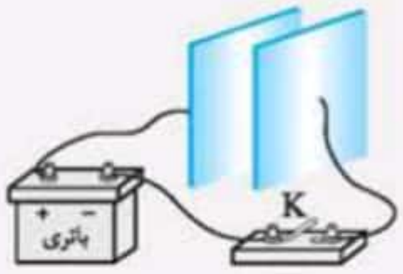




دو رسانا که به‌طور الکتریکی از یک‌دیگر و محیط اطراف خود جدا شده‌اند، تشکیل یک خازن را می‌دهند.

۱ – ظرفیت خازن و نحوهٔ باردار (شارژ) کردن آن

با وصل کردن یک خازن به یک باتری، می‌توان در آن بار الکتریکی ذخیره کرد. به عنوان یک موضوع بسیار مهم باید بدانید که شارش بار الکتریکی در یک مدار تا زمانی ادامه می‌یابد که اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن برابر اختلاف پتانسیل باتری شود. صفحه‌ای که به پایانهٔ مثبت باتری متصل است، دارای بار مثبت و صفحهٔ دیگر دارای بار منفی می‌شود.



نکتهٔ مهم: وقتی می‌گوییم یک خازن دارای بار q است، یعنی یک صفحهٔ آن بار q+ و یک صفحهٔ آن بار q- دارد.

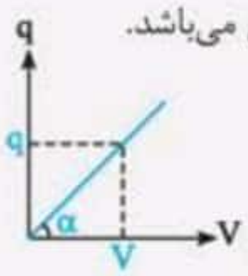
ظرفیت خازن: نسبت بار ذخیره شده در یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر آن مقدار ثابتی است که آن را **ظرفیت خازن** می‌نامند. واحد ظرفیت خازن در SI، فاراد (F) است.

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow (F)\ \text{فاراد} \equiv \frac{(C)\ \text{کولن}}{(V)\ \text{ولت}} \xrightarrow[\text{رابطه}]{\text{شکل دیگر}} q = CV$$

نکات مهم و کاربردی

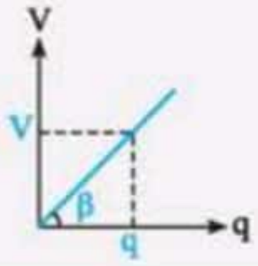
۱) ظرفیت خازن به مقدار q و V بستگی ندارد، این موضوع یعنی اگر به‌طور مثال ولتاژ بین دو سر یک خازن دو برابر شود، ظرفیت خازن ثابت مانده و بار ذخیره شده در آن (یعنی q) دو برابر می‌شود.

۲) با توجه به رابطهٔ $q = CV$، نمودار $q - V$ برای یک خازن به‌صورت یک خط راست است و شیب این نمودار برابر ظرفیت خازن می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار} = \tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{q}{V} = C$$

۳) نمودار $V - q$ نیز نموداری خطی بوده و شیب آن برابر عکس ظرفیت خازن می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار} = \tan\beta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{V}{q} = \frac{1}{C}$$

gajmarket.com

۲- انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن

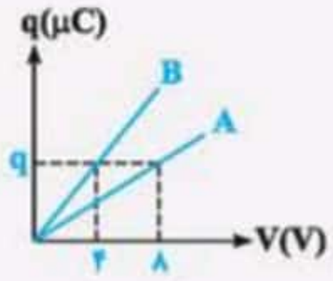
وقتی صفحه‌های خازن دارای بار الکتریکی می‌شوند، در خازن انرژی ذخیره می‌شود. مقدار انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن را می‌توان از هریک از روابط مقابل به‌دست آورد:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qV$$

تذکر برای علاقه‌مندان: در شارژ کردن یک خازن به کمک یک باتری با اختلاف پتانسیل V، انرژی پتانسیلی که باتری مصرف می‌کند تا خازن را شارژ کند از رابطهٔ $U_{\text{باتری}} = qV$ به‌دست می‌آید ولی انرژی ذخیره شده در خازن برابر $U_{\text{خازن}} = \frac{1}{2}qV$ می‌باشد. این گزاره به این معنا نیست که قانون پایستگی انرژی نقض شده است، بلکه مقداری انرژی (به‌اندازهٔ انرژی ذخیره شده در خازن) در حین این عمل، تلف شده است.

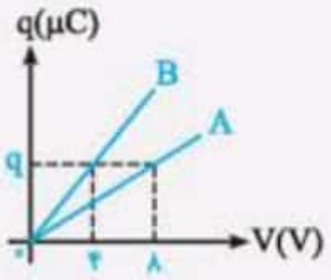
برای تسلط بر مفاهیم فوق، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین۱ **نمودار بار ذخیره شده در دو خازن A و B برحسب ولتاژ دو سر آن‌ها، مطابق شکل روبه‌رو است. ظرفیت خازن A چند برابر خازن B می‌باشد؟** (تجربی خارج ۸۱)



۱) ۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۴
۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ با توجه به رابطهٔ $q = CV$ و اطلاعات به‌دست آمده از روی نمودار، می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow \begin{cases} q = C_A \times 8 \\ q = C_B \times 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{q}{q} = \frac{C_A \times 8}{C_B \times 4} \Rightarrow \frac{C_A}{C_B} = \frac{1}{2}$$ (گزینهٔ ۲)

تمرین۲ **با تخلیهٔ قسمتی از بار الکتریکی یک خازن پُر شده، اختلاف پتانسیل دو سر آن ۸۰ درصد کاهش می‌یابد. انرژی این خازن چند درصد کاهش می‌یابد؟** (ریاضی داخل ۹۴)

۱) ۴۰
۲) ۶۴
۳) ۸۰
۴) ۹۶

پاسخ اگر اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۸۰ درصد کاهش یابد، ولتاژ ثانویهٔ آن ۰/۲ برابر ولتاژ اولیه شده است $(V_2 = V_1 - \frac{80}{100}V_1 = 0/2\,V_1)$:

انرژی خازن ۹۶ درصد $\left(\frac{96}{100}U_1\right)$ کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۴) صحیح است. $\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = (0/2)^2 = 0/04 = \frac{4}{100}$ $\Leftarrow U = \frac{1}{2}CV^2$

همان‌طور که در خلاصه نکات (۱۷) قبل مطرح شد، ظرفیت خازن از ویژگی‌های ساختمانی آن بوده و به ولتاژ و بار الکتریکی ذخیره شده در آن بستگی ندارد و با تغییر آن‌ها، ظرفیت خازن تغییری نمی‌کند.

بنابراین طبق رابطهٔ $C = \frac{q}{V}$ (یا $q = CV$)، ولتاژ خازن به هر نسبتی تغییر کند (مثلاً دو برابر شود)، بار آن نیز به همان نسبت تغییر می‌کند (دو برابر می‌شود) تا ظرفیت خازن ثابت بماند و گزینهٔ (۲) عبارت صحیح می‌باشد.

ثابت $C = \frac{q}{V}$ ۲ برابر / ۲ برابر

۱ ۱۴۲۴ هر یک از گزاره‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

گزارهٔ (الف): ظرفیت یک خازن برابر نسبت بار الکتریکی ذخیره شده در آن به اختلاف پتانسیل صفحات آن است. بنابراین این گزاره نادرست است.

گزارهٔ (ب): هنگامی که خازن بار Q را ذخیره کرده است، بار الکتریکی صفحهٔ مثبت آن برابر $Q+$ و بار صفحهٔ منفی آن برابر $Q-$ است. بنابراین این گزاره صحیح است.

گزارهٔ (پ): فقط خازن تخت، دارای دو صفحهٔ رسانای تخت و موازی است. خازن‌های دیگری هم مانند خازن استوانه‌ای و کروی وجود دارند که این‌گونه نیستند. بنابراین این گزاره نادرست است.

گزارهٔ (ت): یکای ظرفیت خازن کولن بر ولت است. توجه کنید که کولن ولت معادل ژول، یعنی یکای انرژی می‌باشد. بنابراین این گزاره نادرست است.

گزارهٔ (ث): با اتصال خازن به باتری، شارش بار تا زمانی ادامه دارد که اختلاف پتانسیل صفحات خازن با نیروی محرکهٔ باتری برابر شود. بنابراین این گزاره نادرست است.

۳ ۱۴۲۵ با توجه به اطلاعات سؤال، داریم:

$$V = 200\,V \;,\; U = 1/8\,J \;,\; C = ?$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 1/8 = \frac{1}{2}C \times (200)^2 \Rightarrow C = 0/9 \times 10^{-4}\,F = 90\,\mu F$$

۴ ۱۴۲۶ در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: q_1 = CV_1 \xrightarrow[V_1=10V]{C=4\mu F} q_1 = 4\times 10 = 40\mu C \\ \text{حالت دوم}: q_2 = CV_2 \xrightarrow[V_2=20V]{C=4\mu F} q_2 = 4\times 20 = 80\mu C \end{cases}$$

بنابراین میزان افزایش بار ذخیره شده در خازن برابر است با:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 80 - 40 = 40\mu C$$

۲ ۱۴۲۷

یادآوری

یک کیلووات ساعت برابر با 3.6×10^5 ژول است.

$$1kWh \equiv 1\times(\underbrace{1000\,W}_{\text{یک کیلووات}})\times(\underbrace{3600\,s}_{\text{یک ساعت}}) = 3.6\times 10^5 J$$

با توجه به یادآوری فوق، انرژی ذخیره شده در خازن را برحسب ژول می‌نویسیم:

$$U = 10^{-6}\,kWh = 10^{-6}\times(3.6\times 10^5)J = 3.6\,J$$

رابطهٔ بین انرژی ذخیره شده در خازن و اختلاف پتانسیل دو سر آن به شکل زیر است:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow[U=3.6J]{V=1kV=1000V} 3.6 = \frac{1}{2}\times C\times(1000)^2 \Rightarrow C = 7.2\times 10^{-6}F = 7.2\mu F$$

۳ ۱۴۲۸ با توجه به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، مقدار انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(600\times 10^{-6})(300)^2 = 27J$$

حال با توجه به تعریف توان داریم:

$$P = \frac{U}{t} = \frac{27}{1\times 10^{-3}} = 27\times 10^3 J/s = 27kW$$

تذکر

این سؤال یک تفاوت اساسی بین خازن و باتری که در هر دو، انرژی ذخیره شده است را نشان می‌دهد. یک خازن باردار، انرژی را با آهنگ بسیار بیشتری نسبت به یک باتری برای فلاش دوربین تأمین می‌کند.

۳ ۱۴۲۹ با افزایش ولتاژ خازن به اندازهٔ ۲۰ ولت، بار صفحات آن ۵ برابر شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$q = CV \xrightarrow{C\text{ثابت}} \overset{5}{\uparrow}\frac{q_2}{q_1} = \frac{V_2}{V_1} \xrightarrow{V_2=V_1+20V} 5 = \frac{V_1+20}{V_1} \to 5V_1 = V_1+20 \to V_1 = 5V$$

۲ ۱۴۳۰ رابطهٔ بین انرژی ذخیره شده در خازن و بار الکتریکی آن به شکل زیر است و می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2\cdot\frac{C_1}{C_2} \xrightarrow[q_2=2q_1\ ,\ C_1=C_2]{\text{ظرفیت خازن ثابت است.}} \frac{U_2}{U_1} = (2)^2\times 1 = 4$$

نگاه دیگر: می‌دانیم با تغییر ولتاژ و بار الکتریکی، ظرفیت خازن تغییری نمی‌کند و با توجه به رابطهٔ زیر با دو برابر شدن بار الکتریکی، انرژی ذخیره شده در خازن ۴ برابر می‌شود.

$$\underset{\text{۴ برابر}}{\uparrow U} = \frac{1}{2}\frac{\overset{\text{۴ برابر}=\uparrow(2)^2}{\overbrace{q^2}}}{\underbrace{C}_{\text{ثابت}}}$$

۴ ۱۴۳۱ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۷)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱ ۱۴۳۲ با توجه به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، اگر انرژی خازن ۴۴ درصد افزایش یابد، داریم:

$$U_2 = U_1 + \underbrace{0.44}_{\text{معادل با ۴۴ درصد}}U_1 = 1.44\,U_1$$

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{C}_{\text{ثابت}}V^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{1.44\,U_1}{U_1} = 1.44 \xrightarrow{\text{جذر از طرفین}} \frac{V_2}{V_1} = 1.2 \Rightarrow V_2 = 1.2V_1$$

به‌عبارت دیگر به‌اندازهٔ $V_2 - V_1 = 0.2V_1$ که معادل ۲۰ درصد V_1 است، باید اختلاف پتانسیل دو سر خازن را افزایش دهیم.

۲ ۱۴۳۳ **حالت اول:** با اضافه کردن $4\mu C$ بار الکتریکی به خازن، انرژی آن ۴۴ درصد افزایش یافته است، یعنی انرژی آن ۱/۴۴ برابر شده است.

$$U = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow \overset{1.44}{\uparrow}\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \xrightarrow{q_2=q_1+4\mu C} 1.44 = \left(\frac{q_1+4}{q_1}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \underbrace{\sqrt{1.44}}_{1.2} = \frac{q_1+4}{q_1} \to 1.2q_1 = q_1+4 \to 0.2q_1 = 4\mu C \to q_1 = 20\mu C$$

www.gajmarket.com

حالت دوم: در این حالت می‌خواهیم انرژی خازن ۵۱ درصد کاهش یابد، یعنی مقدار انرژی آن ۰/۴۹ برابر شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$U=\frac{q^2}{2C}\Rightarrow \overset{0/49}{\overbrace{\frac{U_2}{U_1}}}=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \xrightarrow{q_1=20\mu C} 0/49=\left(\frac{q_2}{20}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \underbrace{\sqrt{0/49}}_{0/7}=\frac{q_2}{20}\rightarrow q_2=20\times 0/7=14\,\mu C$$

بنابراین باید بار الکتریکی ذخیره شده در خازن را $6\mu C$ کاهش دهیم.

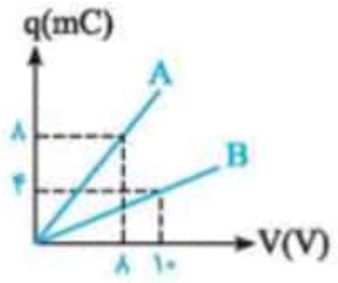
۳ ۱۴۳۴ با استفاده از رابطهٔ $q=CV$ برای بار ذخیره‌شده در خازن، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} q_1=CV_1=28\times C \\ q_2=CV_2=40\times C \end{cases}\Rightarrow q_2-q_1=40\times C-28\times C=12\times C$$

طبق صورت سؤال با افزایش ولتاژ، $15\mu C$ بر بار ذخیره شده در خازن افزوده شده است، بنابراین $q_2-q_1=15\mu C$ بوده و داریم:

$$q_2-q_1=12\times C \xrightarrow{q_2-q_1=15\mu C} 15\times 10^{-6}=12\times C\Rightarrow C=1/25\times 10^{-6}\,F=1/25\mu F$$

۴ ۱۴۳۵ با توجه به نمودار داده شده، ظرفیت هریک از خازن‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:



$$C_A=\frac{q_A}{V_A}=\frac{8}{8}=1mF$$

$$C_B=\frac{q_B}{V_B}=\frac{4}{10}=0/4mF$$

حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با توجه به رابطهٔ $q=CV$، در یک بار ذخیره شدهٔ یکسان در دو خازن، نسبت ولتاژ دو خازن برابر عکس نسبت ظرفیت دو خازن است.

$$q_A=q_B\Rightarrow C_AV_A=C_BV_B\Rightarrow \frac{V_A}{V_B}=\frac{C_B}{C_A}=\frac{0/4}{1}=0/4$$

۲) در یک ولتاژ یکسان برای دو خازن، نسبت بار دو خازن برابر نسبت ظرفیت دو خازن است.

$$q=CV \xrightarrow{V\ \text{یکسان}} \frac{q_B}{q_A}=\frac{C_B}{C_A}=\frac{0/4}{1}=0/4$$

۳) با توجه به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$، در حالت یکسان بودن بار دو خازن، می‌توان نوشت:

$$U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\xrightarrow{q_A=q_B}\frac{U_B}{U_A}=\frac{C_A}{C_B}=\frac{1}{0/4}=\frac{10}{4}=2/5$$

۴) با توجه به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، در حالت یکسان بودن ولتاژ دو سر خازن‌ها، می‌توان نوشت:

$$U=\frac{1}{2}CV^2\xrightarrow{V_A=V_B}\frac{U_A}{U_B}=\frac{C_A}{C_B}=\frac{1}{0/4}=2/5$$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۳ ۱۴۳۶ با توجه به روابط مربوط به انرژی ذخیره شده در دو سر خازن، دو گام زیر را طی می‌کنیم:

گام اول (محاسبهٔ ظرفیت خازن با توجه به اطلاعات نمودار):

$$U=\frac{1}{2}CV^2\Rightarrow 8\times 10^{-3}=\frac{1}{2}C\times(2)^2\Rightarrow C=4\times 10^{-3}\,F$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ مسأله):

$$U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\Rightarrow 2\times 10^{-3}=\frac{1}{2}\times\frac{q^2}{4\times 10^{-3}}\Rightarrow q^2=16\times 10^{-6}\Rightarrow q=4\times 10^{-3}\,C=4mC$$

۴ ۱۴۳۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۸ — **عوامل مؤثر بر ظرفیت یک خازن** — (تست‌های ۱۴۳۷ تا ۱۴۴۸)

همان‌طور که در خلاصه نکات قبل مشاهده کردید، ظرفیت یک خازن به بار ذخیره شده (q) و اختلاف پتانسیل دو سر آن (V) بستگی ندارد، بلکه به مشخصات ساختمانی آن وابسته است. در این قسمت می‌خواهیم به شناخت دقیق‌تر این موضوع بپردازیم.

به‌طور کلی باید بدانید که ظرفیت یک خازن از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$C=k\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

k: ثابت دی‌الکتریک — ε_0: ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $(\varepsilon_0=8/85\times 10^{-12}\,C^2/N.m^2)$

A: مساحت صفحات خازن — d: فاصلهٔ بین صفحات خازن

نکات مهم و کاربردی

۱ اگر فضای بین صفحات یک خازن را با یک مادهٔ عایق پر کنیم، به آن دی‌الکتریک خازن گفته و ثابت k برای هر دی‌الکتریک وابسته به جنس آن می‌باشد.

۲ ثابت دی الکتریک برای هوا (خلأ) برابر یک است $(k = ۱)$ و برای مواد عایق دیگر به جز هوا (خلأ) بزرگ‌تر از یک می‌باشد $(k > ۱)$. این موضوع یعنی اضافه‌کردن دی‌الکتریک به یک خازن با دی‌الکتریک هوا، ظرفیت خازن را افزایش می‌دهد.

۳ همان‌طور که مشاهده می‌کنید ظرفیت خازن با ثابت دی‌الکتریک و مساحت صفحات خازن رابطهٔ مستقیم و با فاصلهٔ بین صفحات خازن رابطهٔ معکوس دارد.

$$C \propto A \;,\; C \propto k \;,\; C \propto \frac{۱}{d}$$

تمرین ۱ اگر فاصلهٔ بین صفحات خازن مسطحی را نصف و اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ آن را دو برابر کنیم، بار الکتریکی ذخیره شده در خازن چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ چون ویژگی‌های ساختمانی خازن تغییر کرده است، ابتدا تغییرات ظرفیت خازن را بررسی کرده و سپس تغییرات بار الکتریکی را به‌دست می‌آوریم:

$$C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d} \xrightarrow{k \text{ و } A \text{ ثابت است.}} \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} \xrightarrow{d_۲ = \frac{۱}{۲}d_۱} \frac{C_۲}{C_۱} = ۲$$

بنابراین بار الکتریکی ذخیره شده در خازن ۴ برابر شده و گزینهٔ (۴) صحیح است. $\Rightarrow$

$$q = CV \Rightarrow \frac{q_۲}{q_۱} = \frac{C_۲}{C_۱}.\frac{V_۲}{V_۱} \xrightarrow[V_۲ = ۲V_۱]{C_۲ = ۲C_۱} \frac{q_۲}{q_۱} = ۲ \times ۲ = ۴$$

فروریزش الکتریکی

اثر دیگر حضور دی‌الکتریک‌ها در خازن، افزایش حداکثر ولتاژ قابل تحمل خازن است. اگر اختلاف پتانسیل دو صفحهٔ یک خازن را به اندازهٔ کافی زیاد کنیم، تعدادی از الکترون‌های اتم‌های مادهٔ دی‌الکتریک، توسط میدان الکتریکی ایجادشده بین دو صفحه کنده می‌شوند و مسیرهایی رسانا درون دی‌الکتریک ایجاد می‌شود که سبب تخلیهٔ خازن می‌گردد. به این پدیده، **فروریزش الکتریکی** مادهٔ دی‌الکتریک می‌گویند.

نکته فروریزش الکتریکی در عایق بین دو صفحهٔ خازن‌ها معمولاً، با ایجاد یک جرقه همراه است و در بیشتر مواقع خازن را می‌سوزاند. خازن‌ها معمولاً با مقدار ظرفیت آن‌ها و اختلاف پتانسیل بیشینه‌ای که می‌توانند تحمل کنند، مشخص می‌شوند.

ظرفیت خازن تنها به ویژگی‌های ساختمانی خازن بستگی دارد و از رابطهٔ $C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d}$ به‌دست می‌آید. پس ظرفیت خازن با مساحت صفحات روبه‌روی هم (A) و ثابت دی‌الکتریک (k) نسبت مستقیم دارد، اما با فاصلهٔ دو صفحه از یک‌دیگر (d) رابطهٔ عکس دارد.

$$C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d} \Rightarrow \begin{cases} C \propto k \\ C \propto A \\ C \propto \frac{۱}{d} \end{cases}$$

۳ ۱۴۳۸ ظرفیت خازن به ویژگی‌های ساختمانی آن بستگی دارد و از رابطهٔ $C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d}$ محاسبه می‌شود. بنابراین با کاهش فاصلهٔ بین صفحات خازن، ظرفیت آن افزایش می‌یابد:

$$\uparrow C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d}\downarrow$$

تذکر

دقت کنیم که تغییر بار الکتریکی و یا اختلاف پتانسیل دو سر خازن تأثیری بر ظرفیت خازن ندارد.

دقت شود که ثابت دی‌الکتریک برای خلأ (هوا) برابر یک می‌باشد $(k = ۱)$ و برای هر نارسانای دیگری، بیشتر از یک $(k > ۱)$ است. با توجه به این موضوع، با برداشتن عایق یا قسمتی از آن از بین دو صفحه، ظرفیت خازن نیز کاهش می‌یابد.

۳ ۱۴۳۹ با توجه به رابطهٔ $C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d}$، به سادگی می‌توان ثابت دی‌الکتریک پلاستیک را به‌دست آورد:

$$C = ۱۵۰\text{pF} = ۱۵۰ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F} \;,\; A = ۵\text{cm}^۲ = ۵ \times ۱۰^{-۴}\text{m}^۲ \;,\; d = ۰/۱۵\text{mm} = ۰/۱۵ \times ۱۰^{-۳}\text{m} \;,\; \varepsilon_{۰} = ۹ \times ۱۰^{-۱۲}\frac{\text{C}^۲}{\text{N.m}^۲} \;,\; k = ?$$

$$C = k\varepsilon_{۰}\frac{A}{d} \Rightarrow ۱۵۰ \times ۱۰^{-۱۲} = k \times ۹ \times ۱۰^{-۱۲} \times \frac{۵ \times ۱۰^{-۴}}{۰/۱۵ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow k = ۵$$

gajmarket.com

۲ ۱۴۴۰ ظرفیت خازن به ویژگی‌های ساختمانی آن بستگی دارد و از رابطهٔ $C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d}$ محاسبه می‌شود. نسبت ظرفیت خازن در دو حالت برابر است با:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow[d_2=\frac{1}{2}d_1 \, , \, A_1=A_2]{k_1=2 \, , \, k_2=1} \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = 1$$

۲ ۱۴۴۱ با توجه به اطلاعات مسأله، در مقایسهٔ دو حالت موردنظر می‌توان نوشت:

$$A_2 = \frac{1}{2}A_1 \, , \, d_2 = 2d_1 \, , \, k_1 = 1 \text{ (هوا)} \, , \, k_2 = ? \, , \, C_1 = C \, , \, C_2 = 1/5\,C = \frac{3}{2}C$$

$$C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{k_2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow k_2 = 6$$

۴ ۱۴۴۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا ظرفیت خازن را از رابطهٔ $C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d}$ به‌دست می‌آوریم:

$$A = 0/4 \times 0/5 = 0/2\,m^2 \, , \, d = 5mm = 5 \times 10^{-3}\,m \, , \, k = 25 \, , \, \varepsilon_0 = 8 \times 10^{-12}\,\frac{C^2}{N.m^2}$$

$$C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d} = 25 \times (8 \times 10^{-12}) \times \frac{0/2}{5 \times 10^{-3}} = 8 \times 10^{-9}\,F$$

گام دوم: پس از محاسبهٔ ظرفیت خازن، با استفاده از رابطهٔ $q = CV$، بار خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$q = CV \xrightarrow{V=400\,V} q = 8 \times 10^{-9} \times 400 = 32 \times 10^{-7}\,C = 3200\,nC$$

۴ ۱۴۴۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۸)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱ ۱۴۴۴ برای حل این سؤال، ظرفیت خازن قبل و بعد از فشردن کلید را محاسبه می‌کنیم:

$$C_1 = k\varepsilon_0 \frac{A}{d_1} = 3 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{10^{-4}}{3 \times 10^{-3}} = 9 \times 10^{-13}\,F = 0/9\,pF$$

$$C_2 = k\varepsilon_0 \frac{A}{d_2} = 3 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{10^{-4}}{0/1 \times 10^{-3}} = 27 \times 10^{-12}\,F = 27\,pF$$

بنابراین تغییرات مقدار ظرفیت خازن برابر $C_2 - C_1 = 26/1\,pF$ خواهد بود.

۳ ۱۴۴۵ ابتدا بیشترین و کم‌ترین ظرفیت ممکن برای خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$C_{min} = k\varepsilon_0 \frac{A}{d_{max}} = 1 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{8 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-3}} = 36 \times 10^{-14}\,F = 0/36\,pF$$

$$C_{max} = k\varepsilon_0 \frac{A}{d_{min}} = 1 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{8 \times 10^{-5}}{1/6 \times 10^{-3}} = 4/5 \times 10^{-13}\,F = 0/45\,pF$$

بنابراین اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار ظرفیت خازن برابر $C_{max} - C_{min} = 0/09\,pF$ است.

تذکر

توجه کنید که بیشترین ظرفیت خازن مربوط به حالتی است که فاصلهٔ بین صفحات کمینه باشد و کم‌ترین ظرفیت خازن مربوط به حالتی است که فاصلهٔ بین صفحات بیشینه باشد.

۳ ۱۴۴۶ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ ظرفیت خازن):

$$C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d} = 3 \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{10^{-10}}{10 \times 10^{-9}} = 27 \times 10^{-14}\,F$$

گام دوم: (محاسبهٔ بار ذخیره شده):

$$q = CV = 27 \times 10^{-14} \times 48 \times 10^{-3} = 27 \times 48 \times 10^{-17}\,C$$

گام سوم: (محاسبهٔ تعداد یون‌ها):

$$q = ne \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{27 \times 48 \times 10^{-17}}{1/6 \times 10^{-19}} = 81000 = 8/1 \times 10^4$$

۴ ۱۴۴۷ با توجه به کتاب درسی، به لحاظ میکروسکوپی، فروریزش الکتریکی ناشی از کنده شدن الکترون‌های اتم‌های مادهٔ دی‌الکتریک توسط میدان الکتریکی و سپس رانده شدن این الکترون‌ها توسط میدان الکتریکی و ایجاد یک مسیر رسانایی بین دو صفحهٔ خازن است که با یک جرقه همراه است و معمولاً خازن را می‌سوزاند. بنابراین دیگر به همان حالت قبل برنمی‌گردد و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴ ۱۴۴۸ فرو ریزش الکتریکی در عایق بین خازن‌ها، با ایجاد جرقه همراه است و بیشتر مواقع باعث سوختن خازن می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

* سایر گزینه‌ها با توجه به کتاب درسی و خلاصه نکات (۱۸) صحیح هستند.

۳ ۱۴۴۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

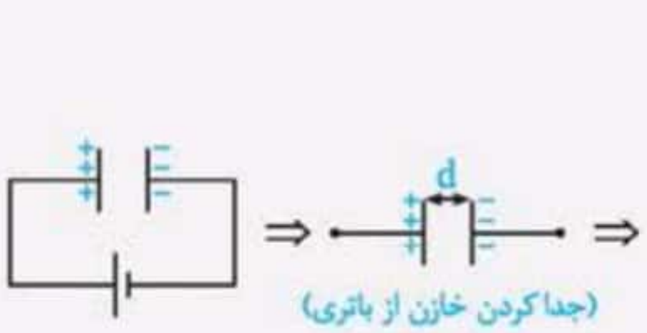
خلاصه نکات ۱۹ **تغییر در ویژگی‌های یک خازن در حالت متصل به باتری و در حالت شارژ شده و جدا از باتری (تست‌های ۱۴۴۹ تا ۱۴۵۹)**

در این خلاصه نکات می‌خواهیم به بررسی این موضوع بپردازیم که اگر ظرفیت یک خازن تغییر کند (مشخصات ساختمانی آن عوض شود)، چه تغییری بر روی ولتاژ و بار خازن ایجاد می‌شود. برای این منظور باید دو حالت جداگانهٔ زیر را درنظر بگیریم:

حالت ۱) خازن شارژ شده و سپس از باتری جدا شود

اگر خازنی را با یک مولد شارژ کرده و سپس آن را از مولد جدا کنیم، مهم‌ترین نکته‌ای که باید بدانیم آن است که بار الکتریکی ذخیره شده در آن با انجام تغییر در خازن ثابت باقی می‌ماند، زیرا خازن دیگر به مولد متصل نیست که بتواند در آن بار الکتریکی جدید ایجاد کند.

در این حالت اگر به‌طور مثال خازن را از مولد جدا کرده و فاصلهٔ بین صفحات آن را افزایش دهیم ($d\uparrow$)، ظرفیت خازن کاهش می‌یابد ($C \propto \frac{1}{d}$) ولی به‌علت ثابت بودن بار خازن، پتانسیل آن افزایش خواهد یافت. با توجه به این موضوع تغییرات ایجاد شده در سایر پارامترها عبارت است از:

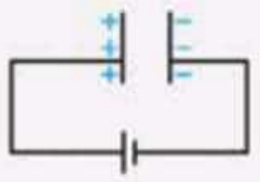


$$d\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \downarrow C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d\uparrow} \\ q = C V \quad (\text{ثابت}:\ q) \\ \uparrow U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad (\text{ثابت}:\ q) \\ E = \frac{V}{d} \quad (\text{ثابت}:\ E) \end{cases}$$

(V و d به یک نسبت تغییر می‌کند)

حالت ۲) خازن متصل به باتری است

اگر خازنی را با یک مولد شارژ کرده و خازن پس از شارژ هم‌چنان به مولد متصل بماند، مهم‌ترین موضوع آن است که با انجام تغییر بر روی خازن، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت باقی می‌ماند. به‌طور مثال اگر در شکل زیر فاصلهٔ بین صفحات خازن را هنگامی‌که به مولد متصل است افزایش دهیم، اتفاقات مقابل رخ می‌دهد:



$$d\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \downarrow C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d\uparrow} \\ \downarrow q = C V \quad (\text{ثابت}:\ V) \\ \downarrow U = \frac{1}{2} C V^2 \quad (\text{ثابت}:\ V) \\ \downarrow E = \frac{V}{d} \quad (\text{ثابت}:\ V) \end{cases}$$

بررسی یک نکتهٔ مهم: موضوع مهمی که باید به آن توجه داشت این است که وقتی بار خازن ثابت است، بهتر است از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ تغییرات انرژی آن را بررسی کنیم، در این حالت انرژی خازن با ظرفیت آن رابطهٔ عکس دارد. ولی وقتی اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت است، بهتر است از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}CV^2$ تغییرات انرژی آن را بررسی کنیم، در این حالت انرژی خازن با ظرفیت آن رابطهٔ مستقیم دارد.

$$\begin{cases} U \propto \frac{1}{C}: \text{در خازن شارژ شده و جدا از باتری} \\ U \propto C: \text{در خازن متصل به باتری} \end{cases}$$

www.gajmarket.com

حال برای یادگیری بهتر مفاهیم این خلاصه نکات، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین۱ خازن مسطحی که بین صفحات آن دی‌الکتریکی با ثابت ۴ قرار دارد، به یک مولد وصل است:

الف) اگر در همین حالت دی‌الکتریک را از بین صفحات خازن خارج کنیم، انرژی ذخیره شده در خازن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

ب) اگر ابتدا خازن را از مولد جدا کرده و سپس دی‌الکتریک را از بین صفحات آن خارج کنیم، انرژی ذخیره شده در خازن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

پاسخ الف) ابتدا ظرفیت خازن را در حالت بدون دی‌الکتریک (C_2) با حالت وجود داشتن دی‌الکتریک (C_1) مقایسه می‌کنیم:

$$C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow[k_1=4, k_2=1]{\text{ثابت: } d, A} \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{4}$$

با وصل بودن صفحات خازن به دو سر مولد، ولتاژ آن ثابت می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطهٔ $U = \frac{1}{2}CV^2$ داریم:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{V \text{ ثابت است.}} U \propto C \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \Rightarrow$$ انرژی خازن ۷۵ درصد کاهش می‌یابد.

ب) خازن شارژشده و جدا از باتری، دارای بار ثابت است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ داریم:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \xrightarrow{q \text{ ثابت است.}} U \propto \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} = 4 \Rightarrow U_2 = 4U_1$$

درصد افزایش انرژی خازن: $\frac{\Delta U}{U_1} \times 100 = \frac{4U_1 - U_1}{U_1} \times 100 = \%300 \Rightarrow$ انرژی خازن ۳۰۰ درصد افزایش می‌یابد.

برای مقایسهٔ پارامترهای ظرفیت خازن، بار الکتریکی ذخیره شده در آن، پتانسیل دو سر آن، میدان الکتریکی بین صفحات خازن و انرژی آن، با وارد کردن یک تیغهٔ شیشه‌ای بین صفحات خازن می‌توان نوشت:

ظرفیت خازن: $\uparrow C = \uparrow k\, \varepsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow$ ظرفیت خازن افزایش می‌یابد.

چون دو صفحهٔ خازن به اختلاف پتانسیل ثابتی متصل است، بنابراین تغییری در آن ایجاد نمی‌شود. $\Rightarrow$ اختلاف پتانسیل الکتریکی

بار خازن: $\uparrow q = \uparrow C \overset{\text{ثابت}}{V} \Rightarrow$ بار خازن افزایش می‌یابد.

انرژی: $\uparrow U = \frac{1}{2} \uparrow C \overset{\text{ثابت}}{V^2} \Rightarrow$ انرژی ذخیره شده در خازن افزایش می‌یابد.

میدان الکتریکی: $E = \frac{\overset{\text{ثابت}}{V}}{\underset{\text{ثابت}}{d}} \Rightarrow$ میدان الکتریکی بین صفحات خازن ثابت می‌ماند.

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱ ۱۴۵۰ چون این خازن به مولد متصل است، پس اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت خواهد ماند و با خارج کردن دی‌الکتریک از بین صفحات خازن، ظرفیت خازن و بار خازن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow[k_2=1,\ k_1=2]{A \text{ و } d \text{ ثابت}} \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}C_1 \xrightarrow{C_1 = 4\times10^{-2}\,\mu F} C_2 = \frac{1}{2}(4\times10^{-2}) = 2\times10^{-2}\,\mu F$$

$$q_2 = \underbrace{C_2}_{\text{پتانسیل ثابت}} V = \underbrace{(2\times10^{-2})}_{\text{ظرفیت برحسب میکروفاراد}} \times 200 = 4\mu C \quad \text{و برابر ۲۰۰ ولت است}$$

۳ ۱۴۵۱ ولتاژ دو سر خازن ثابت است. بنابراین برای مقایسهٔ انرژی ذخیره‌شده در خازن، باید ابتدا ظرفیت خازن را در دو حالت مقایسه کنیم:

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ d_2 = \frac{1}{2}d_1,\ A_2 = A_1 \xrightarrow{C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d}} \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_2}{k_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{2}{1} \times 1 \times 2 = 4 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = 4$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{V \text{ ثابت است.}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} = 4 \quad \text{و} \quad E = \frac{V}{d} \xrightarrow{V \text{ ثابت است.}} \frac{E_2}{E_1} = \frac{d_1}{d_2} = 2$$

۴ ۱۴۵۲ خازنی که به دو سر مولد وصل است، اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت است. با ۴ برابر کردن فاصلهٔ صفحات خازن، ظرفیت آن $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود.

$$C = k\varepsilon_۰\frac{A}{d} \xrightarrow[\text{۴ برابر}]{\text{برابر } \frac{۱}{۴}} C_۲ = \frac{۱}{۴}C_۱$$

با توجه به رابطهٔ $U = \frac{۱}{۲}CV^۲$ داریم:

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow U_۲ = \frac{۱}{۴}U_۱$$

$$\Delta U = U_۲ - U_۱ = \frac{۱}{۴}U_۱ - U_۱ = -\frac{۳}{۴}U_۱ = -\frac{۷۵}{۱۰۰}U_۱$$

بنابراین انرژی خازن ۷۵ درصد کاهش می‌یابد.

۴ ۱۴۵۳ اگر یک خازن را شارژ کرده و از باتری جدا کنیم، بار ذخیره شده در آن ثابت می‌ماند. حال برای مقایسهٔ کمیت‌های ظرفیت خازن، پتانسیل دو سر آن، میدان الکتریکی بین صفحات خازن و انرژی آن، با وارد کردن یک قطعه دی‌الکتریک بین صفحات خازن می‌توان نوشت:

ظرفیت خازن: $C \uparrow = k \uparrow \varepsilon_۰\frac{A}{d} \Rightarrow$ ظرفیت خازن افزایش می‌یابد.

بررسی اختلاف پتانسیل: $q \overset{\text{ثابت}}{=} C \uparrow V \downarrow \Rightarrow$ برای ثابت بودن بار، باید اختلاف پتانسیل دو سر خازن کاهش یابد. $\left(V \downarrow = \frac{q \overset{\text{ثابت}}{}}{C \uparrow}\right.$ یا $\left.\right)$

میدان: $E = \frac{V \downarrow}{d_{\text{ثابت}}} \Rightarrow$ میدان الکتریکی بین صفحات خازن کاهش می‌یابد.

انرژی: $U \downarrow = \frac{۱}{۲}\frac{q^۲ \overset{\text{ثابت}}{}}{C \uparrow} \Rightarrow$ انرژی ذخیره شده در خازن کاهش می‌یابد.

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

* سعی کنید به کمک رابطهٔ $U = \frac{۱}{۲}CV^۲$ و $U = \frac{۱}{۲}qV$ نیز به نتیجهٔ فوق برسید.

۳ ۱۴۵۴ بار خازنی که از مولد جدا شده است، مقداری ثابت می‌باشد. برای بررسی اختلاف پتانسیل دو سر خازن، ابتدا نحوهٔ تغییر ظرفیت آن را بررسی می‌کنیم:

$$C = k\varepsilon_۰\frac{A}{d} \xrightarrow{d \uparrow} C \downarrow \Rightarrow q \overset{\text{ثابت}}{=} \underset{C \downarrow}{\overset{\downarrow}{C}}\overset{\uparrow}{V} \xrightarrow[C \downarrow]{q \text{ ثابت}} V \uparrow$$

بنابراین ظرفیت خازن کاهش و اختلاف پتانسیل دو سر آن افزایش می‌یابد.

۳ ۱۴۵۵ با جدا کردن خازن از باتری، بار آن ثابت می‌ماند. بنابراین برای مقایسهٔ انرژی آن در دو حالت، ابتدا مقدار ظرفیت خازن را مقایسه می‌کنیم:

$$C = k\varepsilon_۰\frac{A}{d} \xrightarrow[k_۲ = ۱ \text{ (هوا)} \text{ و } k_۱ = ۳]{A \text{ و } d \text{ ثابت}} \frac{C_۱}{C_۲} = \frac{k_۱}{k_۲} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

$$U = \frac{۱}{۲}\frac{q^۲}{C} \Rightarrow \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{C_۱}{C_۲} = ۳ \xrightarrow{U_۱ = ۲\,mJ} \frac{U_۲}{۲} = ۳ \Rightarrow U_۲ = ۶\,mJ \Rightarrow \Delta U = ۶ - ۲ = ۴\,mJ$$

(انرژی خازن ۴mJ افزایش می‌یابد)

۴ ۱۴۵۶ این سؤال جالب را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: وقتی خازن به باتری وصل است، ولتاژ دو سر آن ثابت است و داریم:

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ \Rightarrow \frac{U'}{U} = \frac{C'}{C} \xrightarrow{C \propto \frac{۱}{d}} \frac{U'}{U} = \frac{d}{d'} = \frac{d}{nd} = \frac{۱}{n} \Rightarrow U' = \frac{۱}{n}U$$

حالت دوم: وقتی خازن از باتری جدا می‌شود، بار خازن ثابت می‌ماند و داریم:

$$U = \frac{۱}{۲}\frac{q^۲}{C} \Rightarrow \frac{U''}{U} = \frac{C}{C''} \xrightarrow{C \propto \frac{۱}{d}} \frac{U''}{U} = \frac{d''}{d} = \frac{nd}{d} = n \Rightarrow U'' = nU$$

بنابراین در مقایسهٔ دو حالت داریم:

$$\frac{U''}{U'} = \frac{nU}{\frac{۱}{n}U} = n^۲$$

۱ ۱۴۵۷ اگر صفحات یک خازن را از هم دور کنیم، ظرفیت خازن کاهش می‌یابد.

ظرفیت خازن (C) کاهش می‌یابد: $\downarrow C \propto \frac{۱}{d \uparrow} \Rightarrow$

از طرفی در یک خازن شارژ شده و جدا از باتری، بار ثابت بوده و انرژی خازن با ظرفیت آن نسبت عکس دارد.

$$\uparrow U = \frac{۱}{۲}\frac{q^۲ \overset{\text{ثابت}}{}}{C \downarrow}$$

بنابراین با کاهش ظرفیت خازن، انرژی ذخیره شده در آن افزایش می‌یابد، در نتیجه با اتصال صفحات آن به یک‌دیگر، انرژی بیشتری تخلیه شده و جرقهٔ بزرگ‌تری ایجاد خواهد شد.

gajmarket.com

۲ ۱۴۵۸ می‌دانیم با خارج کردن دی‌الکتریک، ظرفیت خازن $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود (چرا؟). با کمک گرفتن از روابط انرژی مربوط به خازن، می‌توان نوشت:

در هنگام وصل بودن به باتری:

$$U=\frac{1}{2}C\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{V^2}}\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{k}\Rightarrow U_2=\frac{1}{k}U_1=\frac{1}{k}U\Rightarrow \text{تغییر انرژی}: W_1=U_2-U_1=\frac{1}{k}U-U=\left(\frac{1}{k}-1\right)U$$

پس از جدا کردن از باتری:

$$U=\frac{1}{2}\frac{\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{q^2}}}{C}\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=\frac{C_1}{C_2}=k\Rightarrow U_2=kU_1=kU\Rightarrow \text{تغییر انرژی}: W_2=U_2-U_1=kU-U=(k-1)U$$

$$\Rightarrow\frac{W_2}{W_1}=\frac{(k-1)U}{\left(\frac{1}{k}-1\right)U}=\frac{k-1}{\frac{(1-k)}{k}}=-k\Rightarrow\left|\frac{W_2}{W_1}\right|=k$$

۲ ۱۴۵۹ **تحلیل قسمت اول سؤال:** خازن باردار شده‌ای که از مولد جدا شده است، دارای بار الکتریکی ثابت است. برای تعیین نسبت میدان الکتریکی یکنواخت در دو حالت ابتدا نسبت ظرفیت خازن و ولتاژ دو سر خازن را در دو حالت به‌دست می‌آوریم:

$$C=k\varepsilon_0\frac{A}{d}\xrightarrow[k\text{ ثابت است}]{A\text{ ثابت است}}\frac{C_2}{C_1}=\frac{d_1}{d_2}\xrightarrow{d_2=2d_1}\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{2}\quad,\quad q=C.V\xrightarrow{q\text{ ثابت است}}\frac{V_2}{V_1}=\frac{C_1}{C_2}=2$$

در نهایت در مقایسهٔ میدان الکتریکی یکنواخت ایجادشده در بین صفحات خازن در دو حالت می‌توان نوشت:

$$E=\frac{V}{d}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=\frac{V_2}{V_1}.\frac{d_1}{d_2}\xrightarrow[V_2=2V_1]{d_2=2d_1}\frac{E_2}{E_1}=2\times\frac{1}{2}=1$$

تحلیل قسمت دوم سؤال: اگر پس از شارژ خازن، یک دی‌الکتریک بین صفحات آن وارد کنیم، ظرفیت خازن افزایش‌یافته و با توجه به ثابت ماندن q، ولتاژ دو سر خازن کاهش می‌یابد.

$$\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{q}}=\overset{\uparrow}{C}\,\overset{\downarrow}{V}$$

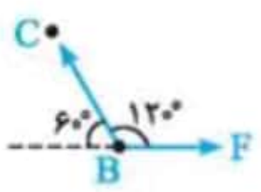
با کم شدن ولتاژ دو سر خازن، میدان الکتریکی ایجادشده در بین صفحات خازن نیز کاهش خواهد یافت.

$$\downarrow E=\frac{\overset{\downarrow}{V}}{d}\quad\text{یکسان}$$

۳ ۱۴۶۰ کار نیروی الکتریکی در مسیرهای AB و BC را به ترتیب W_{AB} و W_{BC} می‌نامیم. چون بار الکتریکی مثبت است، نیروی الکتریکی در جهت میدان به بار وارد می‌شود، بنابراین داریم:



$$W_{AB}=Fd\cos\alpha=Eqd\underbrace{\cos(180^\circ)}_{-1}=5\times10^5\times4\times10^{-6}\times0/8\times(-1)=-1/6\,J$$



$$W_{BC}=Fd\cos\alpha=Eqd\underbrace{\cos(120^\circ)}_{-\frac{1}{2}}=5\times10^5\times4\times10^{-6}\times0/4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-0/4\,J$$

$$\Rightarrow W_{کل}=W_{AB}+W_{BC}=(-1/6)+(-0/4)=-2\,J$$

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی برابر قرینهٔ کار نیروی الکتریکی است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta U=-W_{کل}=-(-2)=+2\,J$$

۴ ۱۴۶۱ ۱) با توجه به این‌که جهت حرکت در حالت دوم (از C تا B) با جهت حرکت در حالت اول (از B تا A) یکسان است، در نتیجه در حالت دوم نیز مانند حالت اول، انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد (رد گزینه‌های ۱ و ۳). به عبارت دیگر چون بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است، انرژی پتانسیل الکتریکی آن باید افزایش یابد.

۲) از طرفی با توجه به آن‌که میدان یکنواخت نیست، در نتیجه اختلاف پتانسیل بین نقاط C و B برابر اختلاف پتانسیل بین نقاط B و A نمی‌باشد:

$$\text{میدان یکنواخت نیست}\Rightarrow\Delta V_{CB}\neq\Delta V_{BA}\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در q}}\Delta V_{CB}.q\neq\Delta V_{BA}.q\Rightarrow\Delta U_{CB}\neq\Delta U_{BA}$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ به دست آمده، تغییرات انرژی پتانسیل بار الکتریکی از C تا B با تغییرات انرژی پتانسیل بار الکتریکی از B تا A برابر نمی‌باشد (رد گزینهٔ ۲) و بنابراین تنها گزینهٔ (۴) صحیح است.

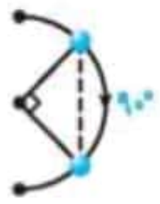
تذکر

هرجا که میدان الکتریکی کم‌تر باشد، برای جابه‌جایی ذره کار کم‌تری نیاز است و انرژی پتانسیل الکتریکی کم‌تر تغییر می‌کند و در نتیجه در این سؤال داریم: تراکم خطوط میدان الکتریکی بین نقاط B و A بیشتر از تراکم خطوط بین نقاط C و B است. $\Rightarrow\Delta U_{BA}>\Delta U_{CB}$



۱ ۱۴۶۲ برای تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در یک جابه‌جایی در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$، فقط مقدار جابه‌جایی بار در راستای میدان الکتریکی اهمیت دارد. بنابراین بیشترین تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی زمانی رخ می‌دهد که بیشترین جابه‌جایی بار در راستای میدان الکتریکی انجام شود، بنابراین داریم:

$$|\Delta U_{max}| = EqR$$



کم‌ترین اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی زمانی رخ می‌دهد که کم‌ترین جابه‌جایی در راستای میدان الکتریکی انجام شود و بار الکتریکی فقط در راستای عمود بر میدان جابه‌جا شود، پس داریم:

$$|\Delta U_{min}| = ۰ \rightarrow d = ۰ \text{ :جابه‌جایی افقی}$$

۳ ۱۴۶۳ **روش اول:** (به کمک مفاهیم حرکت‌شناسی و دینامیک در فیزیک پایهٔ دوازدهم):

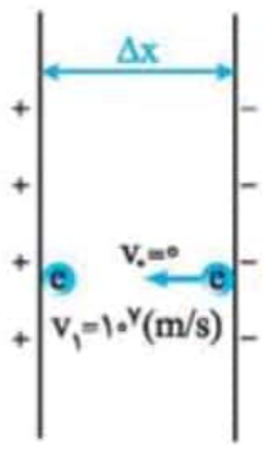
گام اول: ابتدا شتاب حاصل از نیروی الکتریکی وارد بر الکترون را به‌دست می‌آوریم:

$$E = ۱۰۰۰ V/m \;,\; q_e = -۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C \Rightarrow |F| = |Eq_e| = ۱۰۰۰ \times (۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}) = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۶} N$$

$$F = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۶} N \;,\; m_e = ۹/۱ \times ۱۰^{-۲۸} gr = ۹/۱ \times ۱۰^{-۳۱} kg \;,\; a = ?$$

محاسبهٔ شتاب با استفاده از قانون دوم نیوتون : $F = m_e a \Rightarrow ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۶} = ۹/۱ \times ۱۰^{-۳۱} \times a \Rightarrow a = \frac{۱/۶}{۹/۱} \times ۱۰^{۱۵} m/s^۲$

گام دوم: اکنون با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، می‌توانیم فاصلهٔ بین دو صفحه را به‌دست آوریم:



$$a = \frac{۱/۶}{۹/۱} \times ۱۰^{۱۵} m/s^۲ \;,\; v_۱ = ۱۰^۷ m/s \;,\; v_۰ = ۰ \;,\; \Delta x = ?$$

رابطهٔ مستقل از زمان : $v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow (۱۰^۷)^۲ - (۰)^۲ = ۲ \times \left(\frac{۱/۶}{۹/۱} \times ۱۰^{۱۵}\right)\Delta x$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{۹/۱}{۳۲} \simeq ۰/۲۸۴ m = ۲۸/۴ cm$$

روش دوم: (با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی):

$$W_{کل} = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲) \Rightarrow Fd\cos\alpha = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲)$$

$$\xrightarrow{F=Eq} Eqd\cos ۰ = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - ۰^۲) \Rightarrow ۱۰^۳ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times d = \frac{۱}{۲} \times ۹/۱ \times ۱۰^{-۲۸} \times ۱۰^{-۳} \times (۱۰^۷)^۲ \Rightarrow d = \frac{۹/۱}{۳۲} m = ۲۸/۴ cm$$

(تبدیل گرم به کیلوگرم)

۴ ۱۴۶۴ برای پاسخ به این سؤال، ابتدا سعی می‌کنیم رابطه‌ای بین m، q و K را به‌دست آوریم:

$$\text{انرژی جنبشی : } K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow[v=at]{\text{حرکت از حالت سکون } (v_۰=۰)} K = \frac{۱}{۲}m(at)^۲ \xrightarrow{a=\frac{F}{m}=\frac{Eq}{m}} K = \frac{۱}{۲}m\left(\frac{Eq}{m}t\right)^۲ \Rightarrow K = \frac{۱}{۲}\frac{E^۲q^۲t^۲}{m}$$

می‌دانیم که هر دو ذره در یک میدان الکتریکی قرار دارند و انرژی جنبشی دو ذره پس از t ثانیه برابر می‌شود، بنابراین با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$m_۱ = m \;,\; q_۱ = q \;,\; m_۲ = ۲m \;,\; q_۲ = q' \;,\; K_۲ = K_۱ \;,\; \frac{q'}{q} = ?$$

$$\begin{cases} K \propto q^۲ \\ K \propto \frac{۱}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{K_۲}{K_۱} = \left(\frac{q_۲}{q_۱}\right)^۲ \times \left(\frac{m_۱}{m_۲}\right) \Rightarrow ۱ = \left(\frac{q'}{q}\right)^۲ \left(\frac{m}{۲m}\right) \Rightarrow ۱ = \left(\frac{q'}{q}\right)^۲ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{q'}{q} = \sqrt{۲}$$

۳ ۱۴۶۵ **حالت اول:** در ابتدا قبل از آن‌که فاصلهٔ صفحات را تغییر دهیم، ذرهٔ باردار در حال تعادل قرار دارد، بنابراین نیروی الکتریکی $F_۱$ که با وزن ذره برابر است، به سمت بالا بر آن وارد می‌شود.



رابطهٔ (۱): $F_۱ = mg$

حالت دوم: حال اگر فاصلهٔ بین صفحات را ۲۵ درصد کم کنیم، میدان الکتریکی بین دو صفحه افزایش یافته و در نتیجه نیروی الکتریکی که به ذرهٔ باردار وارد می‌شود، افزایش می‌یابد. بنابراین ذره به سمت بالا شتاب می‌گیرد. پس می‌توان نوشت:



$$F = qE \xrightarrow{E=\frac{V}{d}} F = q\frac{V}{d} \rightarrow \frac{F_۲}{F_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{d}{۰/۷۵d} = \frac{۴}{۳} \rightarrow F_۲ = \frac{۴}{۳}F_۱$$

مطابق قانون دوم نیوتن، در حالت دوم می‌توان نوشت:

$$\Sigma F = F_۲ - mg = ma \rightarrow \frac{۴}{۳}F_۱ - mg = ma \xrightarrow[\text{رابطهٔ (۱)}]{F_۱=mg} \frac{۴}{۳}mg - mg = ma \rightarrow \frac{mg}{۳} = ma \Rightarrow a = \frac{g}{۳}$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۴۶۶ با توجه به نحوهٔ اتصال باتری‌ها، اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن با مجموع نیروی محرکهٔ دو باتری برابر است. $\Delta V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰\,V$

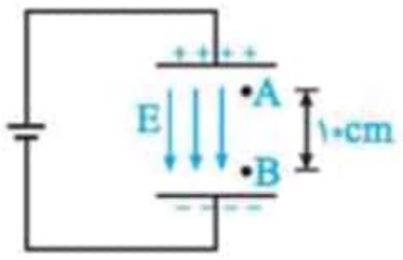
$$d = ۳\,cm = ۳\times۱۰^{-۲}\,m \;,\; \Delta V = ۳۰\,V \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{۳۰}{۳\times۱۰^{-۲}} = ۱۰۰۰\,N/C$$

دقت شود که میدان الکتریکی بین صفحات خازن یکنواخت بوده و در تمامی نقاط برابر است، بنابراین اندازهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ A نیز برابر $E = ۱۰۰۰\,N/C$ می‌باشد.

۱ ۱۴۶۷ **گام اول:** اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن برابر نیروی محرکهٔ باتری است. در نتیجه میدان بین صفحات خازن برابر است با:

$$\Delta V = \varepsilon = ۲۰\,V \;,\; d = ۲۰\,cm = ۲\times۱۰^{-۱}\,m \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{۲۰}{۲\times۱۰^{-۱}} = ۱۰۰\,N/C$$

گام دوم: اکنون با داشتن میدان الکتریکی بین صفحات خازن، می‌توان اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B را به‌دست آورد:



$$E = ۱۰۰\,N/C \;,\; d_{AB} = ۱۰\,cm = ۰/۱\,m \;,\; \Delta V_{AB} = ?$$

$$|\Delta V_{AB}| = E\times d_{AB} = ۱۰۰\times۰/۱ = ۱۰\,V \Rightarrow V_B - V_A = -۱۰\,V$$

گام سوم: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار در جابه‌جایی ذره از A تا B برابر است با:

$$V_B - V_A = -۱۰\,V \;,\; q = ۸\times۱۰^{-۱۹}\,C = ۵\times(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})C = ۵e \;,\; \Delta U = ?$$

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U_{A,B}}{q} \Rightarrow -۱۰\,V = \frac{\Delta U_{A,B}}{۵e} \Rightarrow \Delta U_{A,B} = -۵۰\,eV$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی بار به اندازهٔ ۵۰ الکترون‌ولت کاهش می‌یابد.

دقت: بدون حل نیز می‌توان گفت حرکت بار مثبت در جهت میدان الکتریکی، به‌صورت خودبه‌خودی انجام می‌شود و در نتیجه انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

۱ ۱۴۶۸ بار الکتریکی q در راستای افقی و بدون انحراف حرکت می‌کند، بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر ذره برابر وزن ذره و به سمت بالا می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

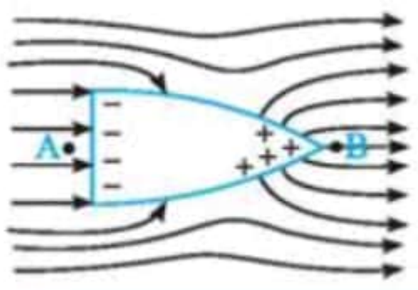


$$F = mg \xrightarrow{F=|q|E} |q|\,E = mg \Rightarrow ۲۵\times۱۰^{-۶}\times E = ۴۰\times۱۰^{-۶}\times۱۰ \rightarrow E = ۱۶\,N/C$$

حال با توجه به فاصلهٔ دو صفحهٔ رسانا، می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو صفحه را به دست آورد:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow V = Ed = ۱۶\times۰/۰۵ = ۰/۸\,V$$

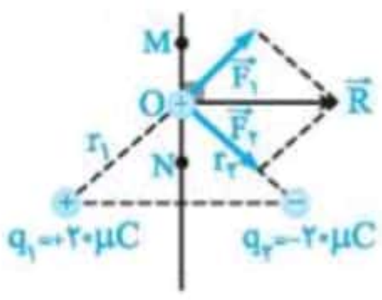
۴ ۱۴۶۹ همان‌طور که می‌دانیم، اگر در جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی نقاط عبوری کاهش می‌یابد، بنابراین $V_A > V_B$ است. از طرفی با توجه به این‌که سطح جسم در نزدیکی نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ A تیزتر است، بنابراین تراکم بار در این نقطه از رسانا بیشتر بوده و میدان در نزدیکی نقطهٔ B (در خارج از جسم) بیشتر از نقطهٔ A است $(E_B > E_A)$.



تذکر

دقت شود اگر نقاط A و B در داخل و یا بر روی جسم رسانا قرار داشتند، در این صورت $V_A = V_B$ بود. هم‌چنین میدان الکتریکی داخل رسانا برابر صفر است.

۲ ۱۴۷۰ با رسم برایند نیروهای حاصل از دو بار q_1 و q_2 در هر نقطه از مسیر MN (مثل O)، می‌توان فهمید که برایند نیروهای وارد بر بار نقطه‌ای همواره بر مسیر حرکت عمود است:



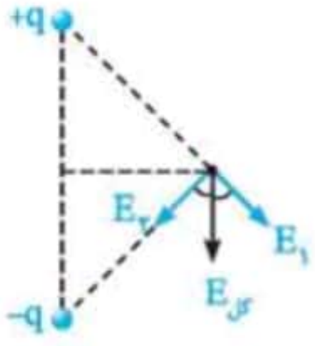
$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ q_1 = q_2 \end{cases} \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow$$ R بر روی نیمساز F_1 و F_2 قرار گرفته و بر MN عمود است.

از طرفی می‌دانیم که وقتی نیرو و جابه‌جایی بر یک‌دیگر عمود باشند، کار انجام شده برابر صفر است، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

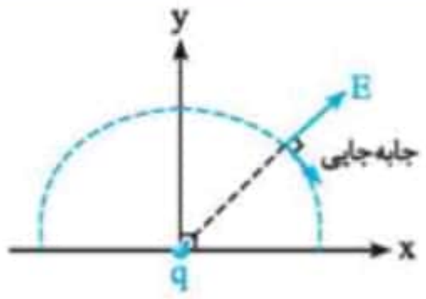
$$W = Fd\cos\alpha \xrightarrow[\cos\alpha=۰]{\alpha=۹۰^\circ} W = ۰$$

۴ ۱۴۷۱ مطابق شکل، میدان الکتریکی برایند روی عمودمنصف پاره‌خط واصل بارهای q+ و q− به سمت پایین است. از طرفی می‌دانیم انرژی پتانسیل بار منفی با حرکت در جهت میدان (خلاف جهت خودبه‌خودی‌اش) افزایش می‌یابد و با حرکت در خلاف جهت میدان کاهش می‌یابد. بنابراین برای آن‌که انرژی پتانسیل الکتریکی بار Q− کاهش یابد، باید آن را به سمت بالا جابه‌جا کنیم.

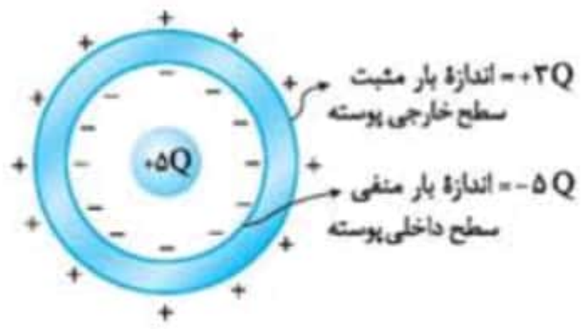
دقت کنید که با جابه‌جایی بار Q− به سمت چپ یا راست، انرژی پتانسیل آن تغییر نمی‌کند (چرا؟).



۴ ۱۴۷۲ مطابق شکل، در هر نقطه از مسیر حرکت بار q'، میدان الکتریکی حاصل از بار q بر مسیر حرکت بار q' عمود است، در نتیجه کار حاصل از نیروی میدان q بر روی q' در این جابه‌جایی برابر صفر خواهد بود.



۲ ۱۴۷۳ در شکل مقابل، بار $+5Q$ به اندازهٔ $-5Q$ الکترون روی سطح داخلی پوستهٔ فلزی از طریق القا جذب می‌کند. از طرفی برای آن‌که بار پوسته برابر $-2Q$ بماند، باید روی پوستهٔ خارجی بار $+3Q$ جمع شود $(-5Q + 3Q = -2Q)$.



خلاقیت‌های حرفه‌ای مجموع بار سطحی داخلی و خارجی پوسته باید برابر $-2Q$ بماند (چرا؟). همان‌طور که می‌بینیم، تنها در گزینهٔ (۲) این اتفاق رخ داده است.

۲ ۱۴۷۴ **روش اول:** اگر بار الکتریکی خازن ۲۰ درصد افزایش یابد، یعنی ۱/۲ برابر شده است و اگر انرژی آن ۱۶ میکروژول افزایش یابد، داریم:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \xrightarrow{\text{ثابت } C} \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2$$

$$q_2 = q_1 + 0/2q_1 \Rightarrow q_2 = 1/2\,q_1 \xrightarrow{U_2 = U_1 + 16\times10^{-6}\,J} \frac{U_1 + 16\times10^{-6}}{U_1} = \left(\frac{1/2q_1}{q_1}\right)^2 = (1/2)^2 \Rightarrow U_1 = \frac{4}{11}\times10^{-4}\,J$$

(0/2q₁ معادل با ۲۰ درصد)

در ادامه بار اولیهٔ خازن را به‌دست می‌آوریم:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C} \Rightarrow \frac{4}{11}\times10^{-4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q_1^2}{22\times10^{-6}} \Rightarrow q_1 = 40\,\mu C$$

روش دوم: انرژی در حالت دوم ۱۶ میکروژول افزایش یافته است، بنابراین داریم:

$$U_2 - U_1 = 16\times10^{-6}\,J \xrightarrow{U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}} \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C} = 16\times10^{-6}$$

$$\xrightarrow{q_2 = 1/2q_1} \frac{1}{2C}(q_2^2 - q_1^2) = \frac{1}{2C}\left((1/2q_1)^2 - q_1^2\right) = \frac{1}{2C}(0/44q_1^2) = 16\times10^{-6}$$

$$\xrightarrow{C = 22\mu F} \frac{1}{2\times22\times10^{-6}}(0/44q_1^2) = 16\times10^{-6} \Rightarrow q_1 = 4\times10^{-5}\,C = 40\,\mu C$$

۲ ۱۴۷۵ با جدا کردن بار الکتریکی $+3\,mC$ از صفحهٔ منفی و انتقال آن به صفحهٔ مثبت، در واقع بار الکتریکی خازن از q به $(q+3)$ می‌رسد و در واقع $8\,J$ انرژی برای این انتقال صرف شده است که معادل با تغییر انرژی خازن می‌باشد.

$$U_2 - U_1 = \frac{q_2^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} = \frac{1}{2C}\underbrace{(q_2^2 - q_1^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \frac{1}{2C}(q_2 + q_1)(q_2 - q_1)$$

$$8 = \frac{1}{2\times(12\times10^{-6})}\times((q+3)+q)((q+3)-q)\times10^{-6} \qquad (*)$$

(تبدیل بار الکتریکی به کولن)

$$\Rightarrow 8\times24\times10^{-6} = (2q+3)\times3\times10^{-6} \Rightarrow 64 = 2q + 3 \Rightarrow q = 30/5\,mC$$

دقت: در رابطهٔ $(*)$، برای تبدیل واحد پرانتز اول و پرانتز دوم از میلی‌کولن به کولن، هرکدام از پرانتزها را باید یک‌بار در 10^{-3} ضرب کنیم، یعنی کل عبارت باید در 10^{-6} ضرب شود.

۲ ۱۴۷۶ با توجه به رابطهٔ $U = \frac{1}{2}CV^2$، به‌راحتی می‌توان نوشت: $U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 20\times10^{-3} = \frac{1}{2}\times4\times10^{-6}V^2 \Rightarrow V^2 = 10^4 \Rightarrow V = 100\,V$

در ادامه به کمک رابطهٔ $q = CV$، بار الکتریکی ذخیره شده در خازن را به‌دست می‌آوریم: $q = CV = 4\times10^{-6}\times100 = 4\times10^{-4}\,C$

* البته با استفاده از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ نیز می‌توان به‌طور مستقیم مقدار q را به‌دست آورد.

در ادامه باید توجه داشت که انرژی صرف‌شده توسط باتری برای شارژ کردن خازن، دو برابر انرژی ذخیره شده در آن است و برابر ۴۰ میلی‌ژول می‌باشد.

۴ ۱۴۷۷ با توجه به رابطهٔ $U = \frac{1}{2}qV$، به‌راحتی می‌توان اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن را به‌دست آورد:

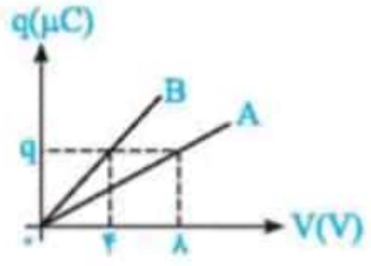
$$U = \frac{1}{2}qV \Rightarrow \underbrace{800}_{\text{برحسب }\mu J} = \frac{1}{2}\underbrace{(20)}_{\text{برحسب }\mu C}V \Rightarrow V = 80\,V$$

حال با داشتن اختلاف پتانسیل میان دو صفحه و فاصلهٔ آن‌ها، میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات خازن را به‌دست می‌آوریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{V}{d} \Rightarrow E = \frac{80}{0/01} = 8000\,N/C$$

www.gajmarket.com

۲ ۱۴۷۸ با توجه به رابطهٔ $q = CV$ و اطلاعات به‌دست آمده از روی نمودار، می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow \begin{cases} q = C_A \times ۸ \\ q = C_B \times ۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{q}{q} = \frac{C_A \times ۸}{C_B \times ۴} \Rightarrow \frac{C_A}{C_B} = \frac{۱}{۲}$$

۲ ۱۴۷۹ به ترکیب روابط به‌صورت زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} E = \frac{V}{d} \\ V = \frac{q}{C} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{q}{Cd} \quad (۱)$$

$$C = k\varepsilon_۰ \frac{A}{d} \xrightarrow[\text{(دی‌الکتریک هوا است)}]{k=۱} C = \varepsilon_۰ \frac{A}{d} \quad (۲) \qquad \Rightarrow E = \frac{q}{Cd} = \frac{q}{(\varepsilon_۰ \frac{A}{d}).d} = \frac{q}{\varepsilon_۰ A}$$

۴ ۱۴۸۰ این سؤال را در دو گام زیر حل می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ حداکثر اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن:

همان‌طور که می‌دانیم، میدان الکتریکی بین صفحات خازن از رابطهٔ $E = \frac{V}{d}$ به دست می‌آید، بنابراین می‌توان نوشت:

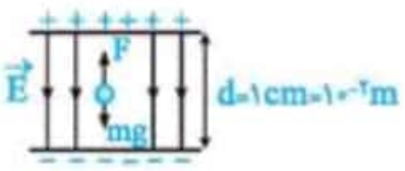
$$E = \frac{V}{d} \rightarrow ۲\frac{kV}{mm} = \frac{V}{۰/۲۵mm} \rightarrow V = ۰/۵kV = ۵۰۰V$$

گام دوم: محاسبهٔ بیشینهٔ انرژی ذخیره شده در خازن:

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ = \frac{۱}{۲} \times (۴۰ \times ۱۰^{-۶}) \times (۵۰۰)^۲ = ۵J$$

۱ ۱۴۸۱ ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم:

گام اول: با توجه به تعادل قطرهٔ روغن، نتیجه می‌گیریم که نیروی F با نیروی وزن قطره یعنی mg برابر است:



$$F = mg \xrightarrow{F = Eq_{\text{ذره}}} Eq_{\text{ذره}} = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{q_{\text{ذره}}}$$

گام دوم: از سوی دیگر $E = \frac{V}{d}$ است و با توجه به این موضوع اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر است با:

$$\begin{cases} E = \frac{mg}{q_{\text{ذره}}} \\ E = \frac{V}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{V}{d} = \frac{mg}{q_{\text{ذره}}} \Rightarrow V = \frac{mgd}{q_{\text{ذره}}}$$

با جایگذاری مقادیر در رابطهٔ فوق می‌توان نوشت:

$$m = ۱۶ \times ۱۰^{-۱۲} gr = ۱۶ \times ۱۰^{-۱۵} kg \;,\; |q_{\text{ذره}}| = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C \;,\; g = ۱۰ m/s^۲ \;,\; d = ۱ \times ۱۰^{-۲} m$$

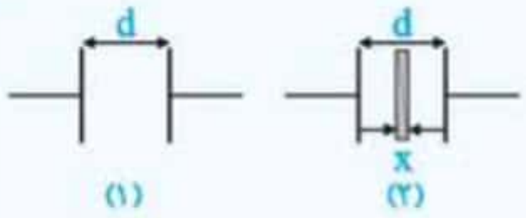
$$V = \frac{۱۶ \times ۱۰^{-۱۵} \times ۱۰ \times (۱ \times ۱۰^{-۲})}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۱۰^۴ V$$

گام سوم: با محاسبهٔ ولتاژ دو سر خازن و با توجه به داشتن ظرفیت آن، به سادگی بار الکتریکی خازن به‌دست می‌آید: $q = CV \Rightarrow q = (۴۰۰ \times ۱۰^{-۶}) \times ۱۰^۴ = ۴C$

۱ ۱۴۸۲

نکته

اگر در بین صفحات یک خازن یک تیغهٔ فلزی (رسانا) قرار دهیم، با توجه به این‌که میدان الکتریکی در درون آن صفر است، می‌توان فرض کرد که فاصلهٔ بین صفحات خازن به اندازهٔ ضخامت تیغه کاهش یافته است.



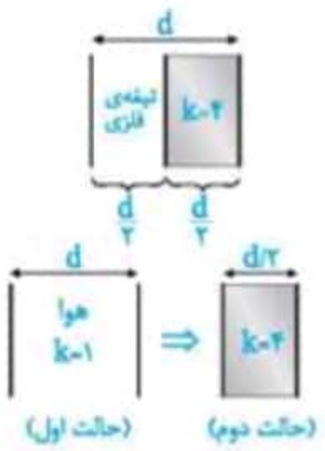
$$\Rightarrow C = k\varepsilon_۰ \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{d}{d - x}$$

در این سؤال چون تیغهٔ فلزی خیلی نازک است، می‌توان ضخامت آن را صفر در نظر گرفت و از آن چشم‌پوشی کرد. بنابراین ظرفیت خازن تغییری نمی‌کند و با توجه به رابطهٔ $q = CV$، بار الکتریکی آن نیز تغییر نمی‌کند:

$$\frac{C_۲}{C_۱} = \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{d}{d - x} \xrightarrow{x \text{ ناچیز است.}} \frac{C_۲}{C_۱} = ۱ \Rightarrow \underset{\text{ثابت}}{(q)} = \underset{\text{ثابت}}{(C)} \underset{\text{ثابت}}{(V)}$$

۳ ۱۴۸۳ با وارد کردن تیغهٔ فلزی در درون خازن، گویی فضای مفید درون خازن را کاهش داده‌ایم، در واقع فاصلهٔ مفید صفحات خازن در حالت جدید $\frac{d}{۲}$ می‌باشد.

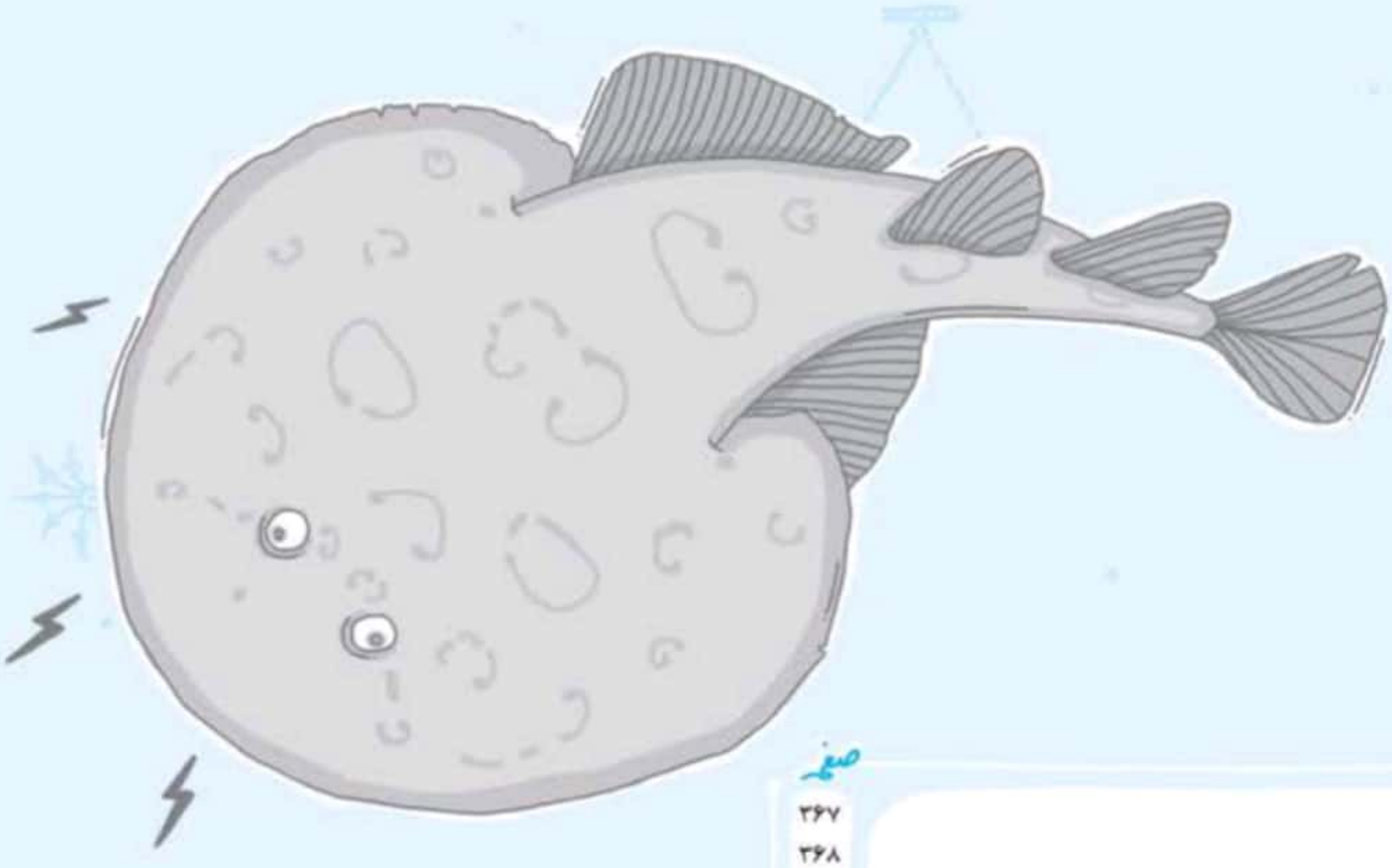
از طرفی در قسمت باقی‌مانده یک دی‌الکتریک با ثابت $k = ۴$ وارد کرده‌ایم و در مقایسهٔ ظرفیت خازن در دو حالت داریم:



$$C = k\varepsilon_۰ \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{k_۲}{k_۱} \times \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{۴}{۱} \times \frac{d}{\frac{d}{۲}} = ۸$$

پایه یازدهم

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم



فصل دوم

خلاصه نکات | عنوان | صفحه

۱	شدت جریان الکتریکی	۳۶۷
۲	قانون اهم	۳۶۸
۳	تحلیل ارتباط بین مقاومت الکتریکی یک رسانا با جنس و ابعاد آن و بررسی انواع مقاومت ها	۳۷۰
۴	تأثیر دما بر مقاومت الکتریکی یک جسم رسانا	۳۷۴
۵	محاسبهٔ مقاومت معادل در یک مدار	۳۷۵
۶	آشنایی با نحوهٔ توزیع جریان در مدارهای الکتریکی	۳۸۲
۷	آشنایی با تکنیک پتانسیل نویسی بین نقاط مختلف یک مدار	۳۸۷
۸	محاسبهٔ جریان خروجی از یک باتری و توزیع آن در مدار	۳۹۱
۹	افت پتانسیل در باتری	۳۹۷
۱۰	تحلیل مدارهای پیچیده تر با یک باتری	۴۰۲
۱۱	بررسی تأثیر تغییر مقاومت خارجی بر روی عدد آمپرسنج و ولت سنج و نور لامپ	۴۰۹
۱۲	توان مصرفی در یک مقاومت	۴۱۲
۱۳	آشنایی با مفاهیم توان و ولتاژ ثبت شده بر روی وسایل الکتریکی (توان اسمی و ولتاژ اسمی)	۴۱۵
۱۴	محاسبه و مقایسهٔ توان مصرفی مقاومت ها در یک مدار	۴۱۸
۱۵	مقایسهٔ توان مصرفی لامپ های یک مجموعه با توان ثبت شده بر روی آن ها (توان اسمی)	۴۲۶
۱۶	بررسی انواع توان در باتری	۴۳۱
۱۷	مدارهای ترکیبی خازن و مقاومت	۴۳۵
۱۸	قوانین کیرشهوف و بررسی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از یک مدار	۴۴۴
۱۹	بررسی مدارهای تک حلقه با چند باتری	۴۵۳

۱۴۸۴ ۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱ — **شدت جریان الکتریکی** — (تست‌های ۱۴۸۴ تا ۱۴۹۱)

برای شروع این بحث، ابتدا به شکل‌های زیر توجه کنید. هنگامی که به دو سر یک رسانا اختلاف پتانسیلی اعمال می‌کنیم (شکل ۱)، اتفاقات زیر رخ می‌دهد:

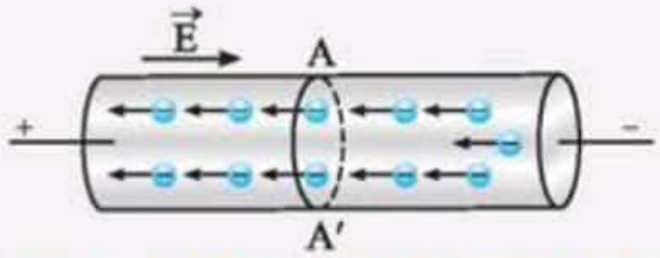
۱ یک میدان الکتریکی در داخل رسانا ایجاد می‌شود.

۲ این میدان به الکترون‌های درون رسانا نیرو وارد می‌کند و آن‌ها را در خلاف جهت میدان با سرعت متوسطی موسوم به **سرعت سوق** حرکت می‌دهد.

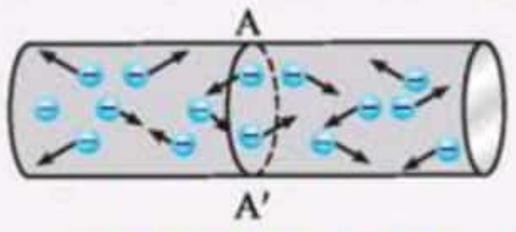
۳ در این حالت شارش بار خالص عبوری از سطح مقطع رسانا صفر نبوده و در داخل رسانا جریان الکتریکی ایجاد می‌شود.

۴ طبق قرارداد، جریان الکتریکی در خلاف جهت شارش الکترون‌ها می‌باشد، یعنی جریان الکتریکی هم‌جهت با میدان الکتریکی ایجاد شده در رسانا و از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کم‌تر است.

دقت: در صورت اعمال نشدن اختلاف پتانسیل به دو سر رسانا، الکترون‌های آزاد به صورت کاتوره‌ای در همهٔ جهت‌ها در داخل رسانا در حال حرکت بوده و شارش بار خالص عبوری از سطح مقطع رسانا صفر است (شکل ۲).



شکل ۱: در حضور اختلاف پتانسیل الکتریکی، شارش بار خالص از مقطع AA' سیم، دیگر برابر صفر نیست.



شکل ۲: در نبود اختلاف پتانسیل الکتریکی در دو سر رسانا، شارش بار خالصی از مقطع معین AA' سیم نداریم.

جریان الکتریکی متوسط

آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، معادل با **جریان الکتریکی متوسط** عبوری از آن است.

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

q: بار الکتریکی برحسب کولن (C)، t: زمان برحسب ثانیه (s)، $\bar{I}$: جریان الکتریکی متوسط برحسب آمپر (A)

نکات مهم و کاربردی

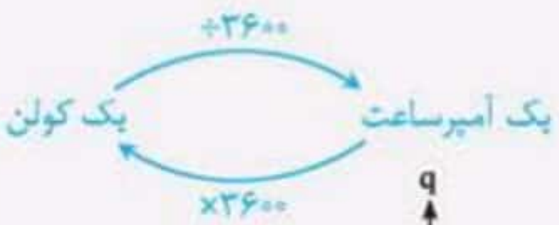
۱ اگر جریان عبوری از مدار مقدار ثابتی باشد، شدت جریان متوسط در بازهٔ زمانی دلخواه Δt و شدت جریان لحظه‌ای با یک‌دیگر برابر است و بار شارش یافته در مدار عبارت است از:

$$I = \bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta q = I\Delta t}$$

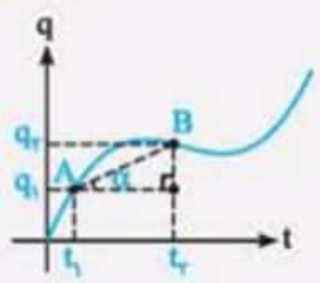
۲ یکی دیگر از واحدهای رایج بار الکتریکی، آمپر ساعت می‌باشد که ارتباط آن با واحد کولن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} q = It \xrightarrow[t\ \text{برحسب ثانیه}]{I\ \text{برحسب آمپر}} \text{کولن} \equiv \text{آمپر} \times \text{ثانیه} \\ q = It \xrightarrow[t\ \text{برحسب ساعت}]{I\ \text{برحسب آمپر}} q\ \text{واحد} \equiv \text{آمپر} \times \underbrace{\text{ساعت}}_{\text{۳۶۰۰ ثانیه}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{۳۶۰۰ کولن} = \text{۱ آمپر ساعت}}$$

بنابراین برای تبدیل کولن به آمپر ساعت، باید عدد داده شده را بر ۳۶۰۰ تقسیم کنیم و بالعکس.



۳ شیب خط واصل بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 از نمودار بار الکتریکی ـ زمان، معادل با شدت جریان متوسط بین آن دو لحظه است.



$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \bar{I}$$

۴ از قبل می‌دانیم بار الکتریکی مضرب صحیحی از یک مقدار پایه می‌باشد $(q = ne)$، بنابراین برای محاسبهٔ تعداد الکترون‌های عبوری از سطح مقطع رسانا، در یک مدت زمان معین، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} q = ne \\ q = It \end{cases} \Rightarrow ne = It \Rightarrow n = \frac{It}{e}$$

با توجه به خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۱) نادرست است و سه گزینهٔ دیگر صحیح می‌باشند (دقت کنید در شکل (۱) جریان الکتریکی برقرار نمی‌باشد).

۱ ۱۴۸۵ با توجه به رابطهٔ $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$، شدت جریان متوسط را در ثانیهٔ دوم و هم‌چنین در چهار ثانیهٔ اول محاسبه می‌کنیم $(q=t^۲-۲t+۱)$:

$$\begin{cases} t_۲=۲s \Rightarrow q_۲=(۲)^۲-۲\times(۲)+۱=۱C \\ t_۱=۱s \Rightarrow q_۱=(۱)^۲-۲\times(۱)+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow I_۱=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{q_۲-q_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱-۰}{۲-۱}=۱A$$

$$\begin{cases} t_۲=۴s \Rightarrow q_۲=(۴)^۲-۲\times(۴)+۱=۹C \\ t_۱=۰ \Rightarrow q_۱=۰-۰+۱=۱C \end{cases} \Rightarrow I_۲=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{۹-۱}{۴-۰}=۲A$$

$$\Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲}=\frac{۱}{۲}$$

۲ ۱۴۸۶ با توجه به نکتهٔ (۲) در خلاصه نکات (۱)، آمپر ساعت واحد بار الکتریکی می‌باشد.

۲ ۱۴۸۷ برای محاسبهٔ مدت زمان لازم برای تخلیهٔ بار الکتریکی ۵۰ آمپر ساعت با جریان متوسط ۵ آمپر، می‌توان نوشت:

$$q=It \Rightarrow ۵۰A.h=(۵A)\times t \Rightarrow t=۱۰h=۱۰\times ۳۶۰۰=۳/۶\times ۱۰^۴ s$$

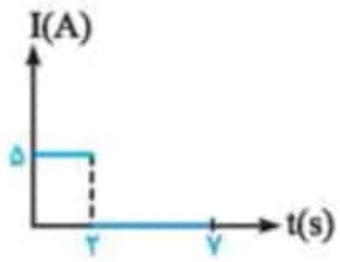
۴ ۱۴۸۸ باری که در مدت زمان یک ساعت از مدار می‌گذرد، برابر است با:

$$\Delta q=I(\Delta t)=(۰/۱۵\times ۱۰^{-۳}A)(۳/۶\times ۱۰^۳ s)=۰/۵۴C$$

از طرفی انرژی‌ای که باتری به مدار می‌دهد با توجه به رابطهٔ $W_{\text{خارجی}}=q\Delta V$، برابر است با:

$$\text{انرژی داده شده به مدار} = ۰/۵۴\times ۳=۱/۶۲J$$

۳ ۱۴۸۹ در دو ثانیهٔ اول، مقدار بار الکتریکی گذرنده از این جسم، به طور یکنواخت از صفر به ۱۰ کولن می‌رسد، بنابراین مقدار جریان در این بازهٔ زمانی برابر است با:



$$I=\bar{I}=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{۱۰-۰}{۲}=۵A$$

در بازهٔ زمانی $t=۲s$ تا $t=۷s$ تغییرات بار الکتریکی برابر صفر است، بنابراین جریان عبوری از مدار نیز برابر صفر می‌باشد و نمودار جریان ـ زمان به صورت نشان داده شده است:

تذکر

اگر بار شارش شده از یک جسم رسانا مقداری ثابت بوده و تغییر نکند، جریان الکتریکی در داخل رسانا به وجود نمی‌آید. $q=\text{ثابت} \Rightarrow I=۰$

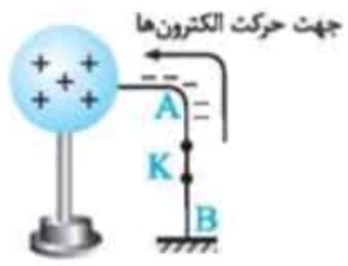
۱ ۱۴۹۰ ابتدا بار الکتریکی شارش‌یافته در سیم را به دست می‌آوریم:

$$t=۲۰s \ , \ I=۰/۸A \Rightarrow q=It=۰/۸\times ۲۰=۱۶C$$

از طرفی طبق رابطهٔ $q=ne$، می‌توان تعداد الکترون‌های شارش‌یافته را محاسبه کرد:

$$q=۱۶C \ , \ e=۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}C \Rightarrow q=ne \Rightarrow ۱۶=۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\times n \Rightarrow n=۱۰^{۲۰}$$

۲ ۱۴۹۱ با وصل شدن کلید K، با انتقال الکترون از زمین به کرهٔ رسانا، بار کره خنثی خواهد شد. از طرفی جهت جریان در خلاف جهت حرکت الکترون‌ها می‌باشد. بنابراین جهت جریان از A به B است.



با توجه به این‌که بار کره در مدت ۰/۰۲s از ۰/۵C به صفر می‌رسد، شدت جریان الکتریکی متوسط عبوری از سیم AB برابر است با:

$$\bar{I}=\left|\frac{\Delta q}{\Delta t}\right|=\left|\frac{۰-۰/۵}{۰/۰۲}\right|=۲۵A$$

۳ ۱۴۹۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ — **قانون اهم** — (تست‌های ۱۴۹۲ تا ۱۴۹۶)

وسیله‌هایی که جریان الکتریکی را از خود عبور می‌دهند، می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

دستهٔ اول: وسیله‌هایی که با تغییر اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها و در نتیجه تغییر جریان عبوری از آن‌ها، مقاومتشان تغییر می‌کند.

دستهٔ دوم: وسیله‌هایی که مقاومت آن‌ها ثابت و مستقل از اختلاف پتانسیل و جریان عبوری از آن‌هاست.

اگر مقاومت الکتریکی یک وسیله در ولتاژهای مختلف (در دمای ثابت) همواره مقدار ثابتی داشته باشد، به آن وسیله، مقاومت یا رسانای اهمی گفته می‌شود. به عبارت دیگر این وسیله‌ها از **قانون اهم** پیروی می‌کنند که بیان می‌کند، **نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به شدت جریان عبوری از آن در دمای ثابت، مقداری ثابت است.** این مقدار ثابت را **مقاومت الکتریکی آن جسم** نامیده و یکای آن در SI اهم است.

$$\frac{V}{I}=\text{مقدار ثابت}=R \text{ یا } V=RI$$

تذکر برای برخی از مواد، جریان الکتریکی (I) تابعی خطی از اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) دو سر آن می‌باشد و در اصطلاح می‌گوییم، این مواد از قانون اهم پیروی می‌کنند. این قانون برای اغلب فلزات و بسیاری از رساناهای غیر فلزی در دمای ثابت برقرار است.

gajmarket.com

تمرین۱ **اگر ولتاژ دو سر یک رسانای اهمی ۲ برابر شود، مقاومت الکتریکی و شدت جریان عبوری از آن، هر یک چند برابر می‌شود؟**

پاسخ در این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱- مقاومت الکتریکی یک رسانا در دمای ثابت مقداری ثابت است و با تغییر ولتاژ دو سر آن تغییری نمی‌کند.

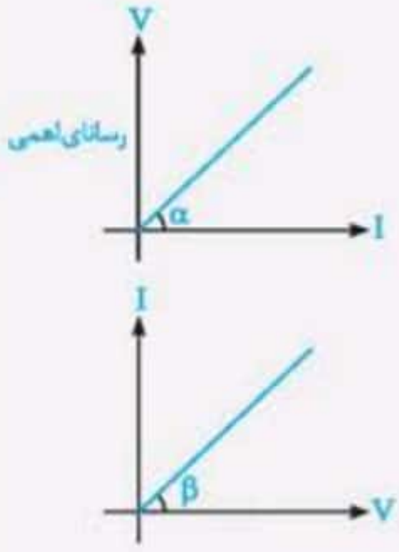
۲- با توجه به قانون اهم، داریم:

۲ برابر ۲ برابر

$V = RI \Rightarrow$ جریان عبوری دو برابر می‌شود.

تمرین۲ **نمودار ولتاژ دو سر یک رسانای اهمی برحسب شدت جریان عبوری از آن را رسم کنید.**

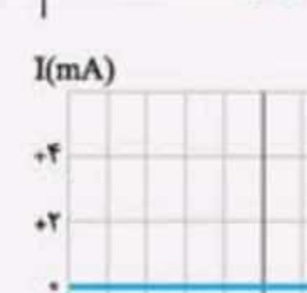
پاسخ



$$\tan\alpha = \frac{V}{I} = R$$

در این نمودار هر چه مقاومت جسم بزرگ‌تر باشد، شیب نمودار بزرگ‌تر است.

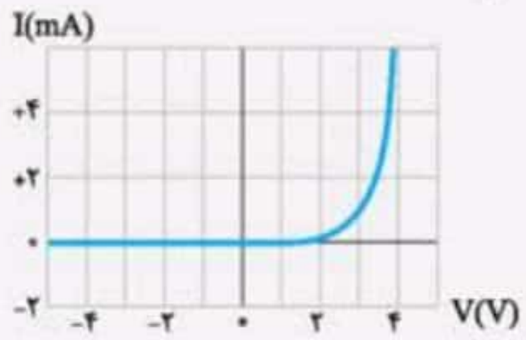
تذکر شیب نمودار V - I، عکس مقاومت یک رسانا، را نشان می‌دهد:



$$\tan\beta = \frac{I}{V} = \frac{1}{R}$$

در این نمودار هر چه مقاومت جسم بزرگ‌تر باشد، شیب نمودار کم‌تر است.

تذکر برای برخی از وسیله‌ها مانند دیود نورگسیل (LED) که از قانون اهم پیروی نمی‌کنند، نمودار جریان عبوری از آن‌ها برحسب اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها، دیگر به صورت یک خط راست گذرنده از مبدأ نیست. به طور مثال به شکل مقابل توجه کنید:



نمودار جریان بر حسب اختلاف پتانسیل برای یک دیود نورگسیل

با توجه به‌خلاصه نکات فوق، می‌دانیم که نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به شدت جریان عبوری از آن در دمای ثابت، برابر مقاومت الکتریکی رسانا است.

از طرفی می‌دانیم که اندازهٔ مقاومت الکتریکی با تغییر جریان عبوری از آن، تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۴۹۳ در وسیلهٔ الکتریکی (۱)، نسبت $\frac{V}{I}$ در یک دمای ثابت تغییر کرده و وسیلهٔ الکتریکی از قانون اهم پیروی نمی‌کند.

$$\text{در وسیلهٔ (۱) نسبت } \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{۲}{۰/۲} \neq \frac{۴}{۰/۸}$$

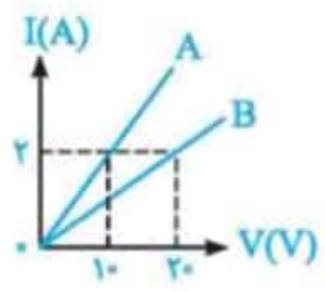
از طرفی در وسیلهٔ الکتریکی (۲)، نسبت $\frac{V}{I}$ در دمای ثابت با توجه به جدول ثابت بوده و دستگاه از قانون اهم پیروی می‌کند.

$$\text{در وسیلهٔ (۲) نسبت } \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{۲}{۰/۵} = \frac{۴}{۱} = \frac{۱۲}{۳}$$

۲ ۱۴۹۴ با استفاده از قانون اهم برای محاسبهٔ مقاومت رشتهٔ لامپ داریم:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{۱/۵}{۰/۳} = ۵\Omega$$

۱ ۱۴۹۵ با توجه به نمودار مقابل، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} I_A = ۲A \\ V_A = ۱۰V \end{cases} \Rightarrow R_A = \frac{V_A}{I_A} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\Omega$$

$$\begin{cases} I_B = ۲A \\ V_B = ۲۰V \end{cases} \Rightarrow R_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

۲ ۱۴۹۶ **گام اول:** ابتدا با توجه به رابطهٔ $R = \frac{V}{I}$، شدت جریان عبوری از مقاومت را به دست می‌آوریم:

$$R = ۱۰\Omega \ , \ V = ۸V \Rightarrow R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۸}{I} \Rightarrow I = \frac{۸}{۱۰}A$$

گام دوم: اکنون با توجه به روابط $q = It$ و $q = ne$، به سادگی می‌توان بار الکتریکی شارش‌یافته در سیم را در مدت زمان یک ثانیه محاسبه کرد:

$$I = \frac{۸}{۱۰}A \ , \ t = ۱s \Rightarrow It = ne \Rightarrow n = \frac{It}{e} = \frac{۰/۸ \times ۱}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۵ \times ۱۰^{۱۸}$$

۴ ۱۴۹۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

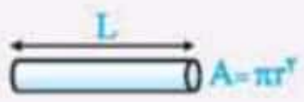
خلاصه نکات ۳ تحلیل ارتباط بین مقاومت الکتریکی یک رسانا با جنس و ابعاد آن و بررسی انواع مقاومت‌ها (تست‌های ۱۴۹۷ تا ۱۵۱۳)

به طور کلی در یک دمای ثابت، مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا به سطح مقطع، طول و جنس آن بستگی داشته و به صورت زیر به دست می‌آید:

L: طول سیم (m) ، R: مقاومت الکتریکی سیم (Ω)

A: سطح مقطع سیم (m^2) ، ρ: مقاومت ویژهٔ سیم $(\Omega.m)$

$$R = \rho\frac{L}{A}$$



نکات مهم و کاربردی

۱ در رابطهٔ ارائه شده، تأثیر عامل جنس رسانا بر مقاومت یک سیم، در مقاومت ویژهٔ سیم (ρ) وارد می‌شود.

۲ واحد مقاومت ویژه در SI عبارت است از:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \rho = \frac{R.A}{L} \Rightarrow \rho \text{ واحد} \equiv \frac{\Omega \times m^2}{m} = \Omega.m \quad \text{(اهم متر)}$$

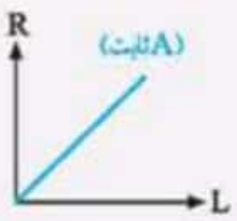
۳ مقاومت یک سیم با طول و مقاومت ویژهٔ آن رابطهٔ مستقیم و با سطح مقطع آن رابطهٔ عکس دارد.

$$\begin{cases} R \propto \rho \\ R \propto L \\ R \propto \frac{1}{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2}$$

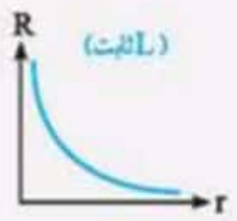
۴ با توجه به این‌که در سیم‌های با مقطع دایره‌ای، سطح مقطع برابر $A = \pi r^2$ می‌باشد، بنابراین مقاومت یک سیم فلزی استوانه‌ای با مجذور شعاع مقطع آن رابطهٔ معکوس دارد.

$$R \propto \frac{1}{A} \xrightarrow{A=\pi r^2} R \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

۵ با توجه به ارتباط بین مقاومت یک سیم با طول و شعاع سطح مقطع آن، نمودارهای مقابل را می‌توان رسم کرد:



$R \propto L$



$R \propto \frac{1}{r^2}$ (یا $R \propto \frac{1}{A}$)

بررسی یک موضوع کاربردی و بسیار مهم

فرض کنید سیمی را از دستگاهی عبور دهیم تا با ثابت ماندن جرم آن، طول آن ۲ برابر شود، یعنی سیم کشیده شده (L بزرگ‌تر) و سطح مقطع آن کم می‌شود (A کم‌تر). برای تحلیل نحوهٔ تغییرات مقاومت الکتریکی سیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱: می‌دانیم که اگر جرم سیم ثابت بماند، حجم آن نیز ثابت می‌ماند ($\rho = \frac{m}{V}$: چگالی) و داریم:

$$V = A \times L$$

(V ثابت، A ۲ برابر $\frac{1}{2}$، L ۲ برابر)

یعنی با این عمل سطح مقطع نصف می‌شود.

مرحلهٔ ۲: تغییرات مقاومت سیم را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{2L_1}{L_1} \times \frac{A_1}{\frac{1}{2}A_1} = 4$$

روش دیگر تحلیل:

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

(L ۲ برابر ↑، A $\frac{1}{2}$ برابر ↓) ⇒ R ۴ برابر ↑

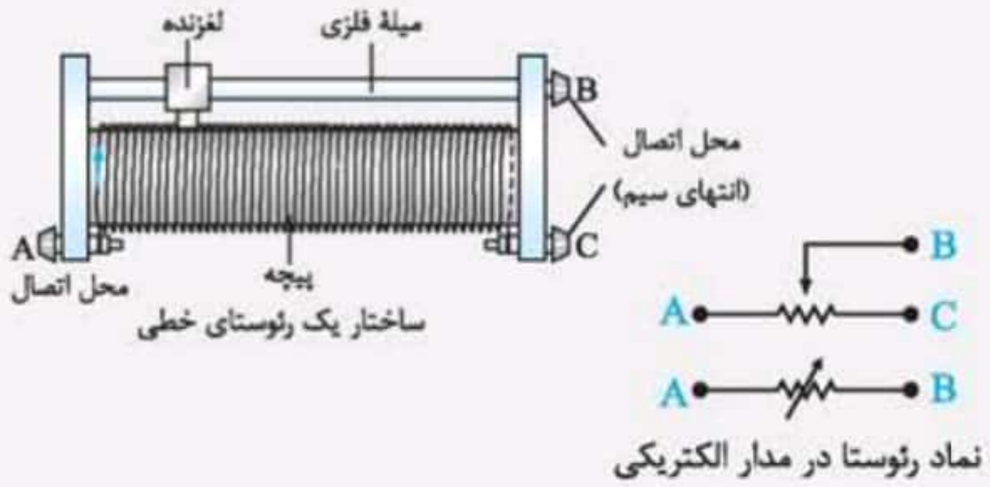
در نهایت می‌توان گفت اگر طول یک سیم با ثابت ماندن جرم آن، α برابر شود، مقاومت آن سیم α^2 برابر خواهد شد:

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \text{ یا } \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

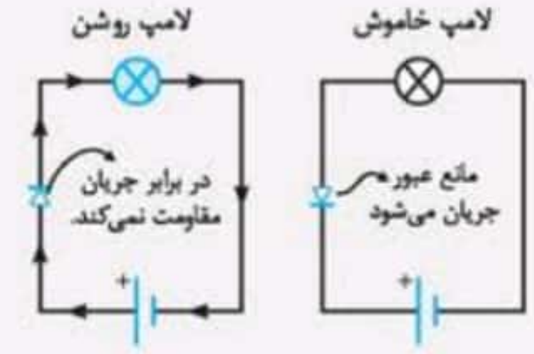
gajmarket.com

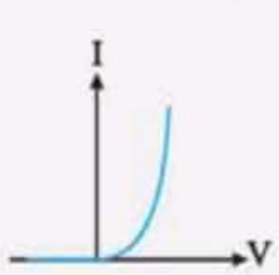
نکته **مقاومت‌های پیچه‌ای (آجری):** شامل پیچه‌ای از سیم نازک هستند که به دور یک هسته پیچیده می‌شوند. در صورت نیاز به مقاومت‌های کوچک بسیار دقیق و هم‌چنین مقاومت‌های با توان بالا می‌توان از این نوع مقاومت‌ها استفاده کرد.

یکی از انواع مشهور این مقاومت‌ها رئوستا می‌باشد که در مدارهای الکترونیکی پتانسیومتر نیز نامیده می‌شود. مقاومت رئوستا قابل تغییر می‌باشد و به این ترتیب می‌تواند جریان را در مدار تنظیم و کنترل کند.



تذکر دیود قطعه‌ای است که در یک جهت، جریان الکتریکی را از خود عبور می‌دهد (مقاومت ناچیز دارد) و در جهت مخالف مانع عبور جریان الکتریکی از خود می‌شود (مقاومت بی‌نهایت دارد).





دیود یک رسانای غیراهمی است.

حال برای یادگیری بهتر، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین۱ **قطر مقطع سیم مسی A، ۲ برابر قطر مقطع سیم مسی B است و طول آن نیز $\frac{۱}{۴}$ طول سیم B است. اگر مقاومت سیم A برابر ۵Ω باشد، مقاومت سیم B چند اهم است؟** (ریاضی خارج ۹۰، تجربی داخل ۹۱)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

پاسخ با توجه به رابطهٔ $R=\frac{\rho L}{A}=\frac{\rho L}{\frac{\pi d^۲}{۴}}$، می‌توان نوشت:

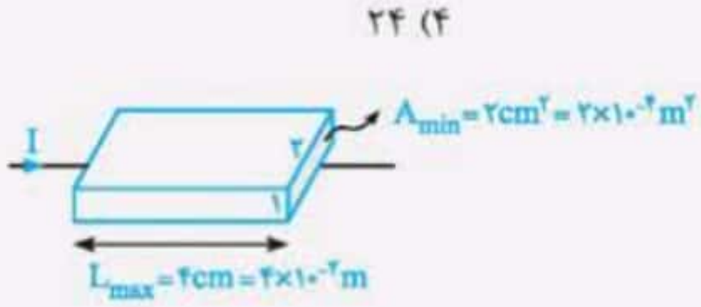
$$d_A=۲d_B\ ,\ L_A=\frac{۱}{۴}L_B\ ,\ \rho_A=\rho_B\ ,\ R_A=۵\Omega\ ,\ R_B=?$$ (هر دو سیم از یک جنس هستند.)

$$\frac{R_B}{R_A}=\frac{\rho_B}{\rho_A}\times\frac{L_B}{L_A}\times\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^۲\Rightarrow\frac{R_B}{۵}=۱\times۴\times(۲)^۲=۱۶\Rightarrow R_B=۸۰\Omega$$ (گزینهٔ ۴)

تمرین۲ **ابعاد یک مکعب مستطیل فلزی ۱، ۲ و ۴ سانتی‌متر است. این مکعب مستطیل را می‌توان از هر یک از دو وجه مقابل آن در مدار قرار داد. نسبت بزرگ‌ترین مقاومت آن به کوچک‌ترین مقاومت آن چند است؟**

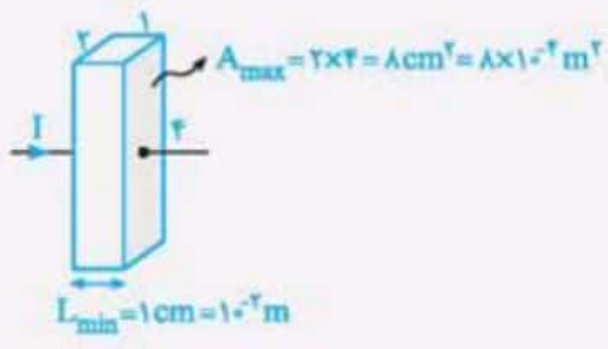
۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

پاسخ بیشترین مقاومت مکعب مستطیل هنگامی است که سطح مقطع آن کم‌ترین و طول آن بیشترین مقدار را داشته باشد و با توجه به این موضوع بیشترین مقاومت مکعب مستطیل برابر است با:



$$R_{max}=\rho\frac{L_{max}}{A_{min}}=\rho\times\frac{۴\times۱۰^{-۲}}{۲\times۱۰^{-۴}}=۲۰۰\rho$$

از طرفی کم‌ترین مقاومت مکعب مستطیل وقتی است که سطح مقطع آن بیشترین و طول آن کم‌ترین مقدار را داشته باشد و در نتیجه در این حالت داریم:



$$R_{min}=\rho\frac{L_{min}}{A_{max}}=\rho\times\frac{۱۰^{-۲}}{۸\times۱۰^{-۴}}=۱۲/۵\rho$$

بنابراین نسبت بیشترین مقاومت به کم‌ترین مقاومت مکعب مستطیل برابر است با:

$$\frac{R_{max}}{R_{min}}=\frac{۲۰۰\rho}{۱۲/۵\rho}=۱۶$$ (گزینهٔ ۳)

با توجه به خلاصه نکات فوق، مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا به مقاومت ویژهٔ مادهٔ سازندهٔ آن بستگی دارد که این مقاومت ویژه، خود به جنس سیم رسانا بستگی دارد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست می‌باشد.

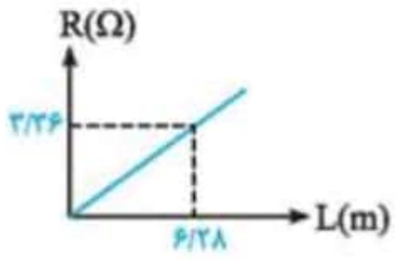
به جنس رسانا بستگی دارد.

$$R=(\rho)\frac{L}{A}$$

۴ ۱۴۹۸ اندازهٔ مقاومت الکتریکی یک سیم، از رابطهٔ $R=\frac{\rho L}{A}$ به دست می‌آید که A سطح مقطع سیم است. از طرفی می‌دانیم که مساحت مقطع سیمی به قطر d، برابر $A=\pi\left(\frac{d}{۲}\right)^۲=\frac{\pi d^۲}{۴}$ است و می‌توان نوشت:

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{\rho L}{\frac{\pi d^۲}{۴}}\Rightarrow R\propto\frac{۱}{d^۲}\Rightarrow$$ (مقاومت با مجذور قطر سیم، رابطهٔ معکوس دارد)

۲ ۱۴۹۹ با توجه به نمودار مقابل، در طول $۶/۲۸m$ مقاومت سیم برابر $۳/۳۶\Omega$ است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$R=۳/۳۶\Omega\ ,\ \rho=۱/۶۸\times۱۰^{-۸}\Omega m\ ,\ L=۶/۲۸m\ ,\ A=?$$

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow ۳/۳۶=۱/۶۸\times۱۰^{-۸}\times\frac{۶/۲۸}{A}\Rightarrow A=۳/۱۴\times۱۰^{-۸}m^۲$$

با توجه به سطح مقطع دایره‌ای سیم، $A=\pi r^۲$ بوده و داریم:

$$A=\pi r^۲\simeq ۳/۱۴r^۲\xrightarrow{A=۳/۱۴\times۱۰^{-۸}m^۲}۳/۱۴r^۲=۳/۱۴\times۱۰^{-۸}\Rightarrow r=۱۰^{-۴}m=۰/۱mm\Rightarrow$$ قطر سیم : $d=۲r=۰/۲mm$

۴ ۱۵۰۰ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱ ۱۵۰۱ با توجه به رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$، برای مقایسهٔ مقاومت دو سیم A و B داریم:

$$\rho_A=۳\rho_B\ ,\ L_A=L_B\ ,\ R_A=R_B$$

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}\xrightarrow{\text{مساحت: }A\propto d^۲}۱=۳\times۱\times\left(\frac{d_B}{d_A}\right)^۲\Rightarrow\left(\frac{d_B}{d_A}\right)^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^۲=۳\Rightarrow\frac{d_A}{d_B}=\sqrt{۳}$$

۴ ۱۵۰۲ برای محاسبهٔ مقاومت الکتریکی هر یک از آن‌ها، ابتدا با توجه به شکل‌های زیر، سطح مقطع هر کدام را به‌دست می‌آوریم:

سیم مسی:



$$A_۱=\pi r^۲=\pi\frac{d^۲}{۴}=\pi\frac{(۴)^۲}{۴}=۴\pi mm^۲\Rightarrow R_۱=\rho\frac{L_۱}{A_۱}=\rho\times\frac{۱}{۴\pi}$$

لوله مسی:



$$A_۲=\frac{\pi d^۲}{۴}-\frac{\pi d'^۲}{۴}=\frac{\pi}{۴}(d^۲-d'^۲)=\frac{\pi}{۴}(۴^۲-۲^۲)=۳\pi mm^۲\Rightarrow R_۲=\rho\frac{L_۲}{A_۲}=\rho\times\frac{۱}{۳\pi}$$

$$\Rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\frac{\rho}{۳\pi}}{\frac{\rho}{۴\pi}}=\frac{۴}{۳}$$

۲ ۱۵۰۳ با توجه به قطر سیم $D=۲mm$، سطح مقطع سیم برابر است با:

$$\text{قطر: }D=۲mm\Rightarrow\text{شعاع: }r=\frac{D}{۲}=۱mm\Rightarrow A=\pi r^۲\simeq ۳\times(۱۰^{-۳})^۲=۳\times۱۰^{-۶}m^۲$$

حال مقاومت این سیم برابر است با:

$$R=\rho\frac{L}{A}=۱/۷\times۱۰^{-۸}\times\frac{۱۸۰}{۳\times۱۰^{-۶}}=۱/۰۲\Omega$$

۱ ۱۵۰۴ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ نسبت طول دو سیم، یعنی $\frac{L_A}{L_B}$): با توجه به آن‌که هر دو سیم از یک جنس هستند، بنابراین چگالی دو سیم با هم برابر است و می‌توان نوشت:

$$\text{چگالی: }\rho'=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\underbrace{\rho'}_{\text{چگالی}}V\xrightarrow{m_A=m_B}\rho'_A V_A=\rho'_B V_B\xrightarrow{\rho'_A=\rho'_B}V_A=V_B$$

با توجه به رابطهٔ فوق، حجم دو سیم با هم برابر است. از طرفی می‌دانیم که حجم سیم برابر حاصل‌ضرب طول سیم در مساحت مقطع آن است و می‌توان نوشت:

$$V_A=V_B\Rightarrow A_A\times L_A=A_B\times L_B\Rightarrow\frac{\pi d_A^۲}{۴}\times L_A=\frac{\pi d_B^۲}{۴}\times L_B$$

$$\xrightarrow[\text{صورت سؤال}]{d_A=\sqrt{۲}d_B}(\sqrt{۲}d_B)^۲\times L_A=d_B^۲\times L_B\Rightarrow ۲L_A=L_B\Rightarrow\frac{L_A}{L_B}=\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: (محاسبهٔ جواب): با توجه به رابطهٔ $R=\frac{\rho L}{A}$، می‌توان نوشت:

$$R_B=۱۰\Omega\ ,\ R_A=?\ ,\ \frac{d_A}{d_B}=\sqrt{۲}\ ,\ \frac{L_A}{L_B}=\frac{۱}{۲}\ ,\ \rho_A=\rho_B\ (\text{هر دو سیم از جنس مس هستند.})$$

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}=۱\times\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{d_B}{d_A}\right)^۲=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow R_A=\frac{۱}{۴}R_B=۲/۵\Omega$$

gajmarket.com

۲ ۱۵۰۵ با توجه به آن‌که جرم و چگالی دو سیم برابر است، در نتیجه حجم دو سیم نیز یکسان است و می‌توان نوشت:

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow A_۱L_۱ = A_۲L_۲ \Rightarrow \frac{L_۱}{L_۲} = \frac{A_۲}{A_۱}$$ رابطهٔ (۱):

$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{L_۱}{L_۲} \times \frac{A_۲}{A_۱} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \frac{R_۱}{R_۲} = \left(\frac{A_۲}{A_۱}\right)^۲ \xrightarrow{A=\frac{\pi D^۲}{۴}} \frac{R_۱}{R_۲} = \left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^۴ \xrightarrow[\text{صورت مسئله}]{\left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^n} n = ۴$$

۱ ۱۵۰۶ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم (برای جلوگیری از ابهام، مقاومت ویژه را با ρ و چگالی ماده را با ρ' نشان داده‌ایم):

گام اول: دو سیم مسی و آلومینیمی هم‌طول هستند و در مقایسهٔ سطح مقطع آن‌ها داریم:

$$L_{Al} = L_{Cu} \;,\; \rho_{Cu} = \frac{۱}{۲}\rho_{Al}$$

$$R_{Al} = R_{Cu} \Rightarrow \rho_{Al}\frac{L_{Al}}{A_{Al}} = \rho_{Cu}\frac{L_{Cu}}{A_{Cu}} \Rightarrow \frac{A_{Al}}{A_{Cu}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = ۲$$

گام دوم: حال در مرحلهٔ بعد جرم دو سیم را به صورت زیر مقایسه می‌کنیم:

$$m = \underbrace{\rho'}_{\text{چگالی}} V = \rho'(AL)$$

$$\frac{m_{Al}}{m_{Cu}} = \frac{\rho'_{Al}}{\rho'_{Cu}} \times \frac{A_{Al}}{A_{Cu}} \times \frac{L_{Al}}{L_{Cu}} \Rightarrow \frac{m_{Al}}{m_{Cu}} = \frac{۲/۷}{۹} \times ۲ = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}$$

۴ ۱۵۰۷ مشابه با تست قبل، در مقایسهٔ جرم دو سیم داریم (برای جلوگیری از ابهام، مقاومت ویژه را با ρ و چگالی ماده را با ρ' نشان داده‌ایم):

$$m_B = \frac{۲}{۳}m_A \xrightarrow{m=\rho' V} \rho'_B V_B = \frac{۲}{۳}\rho'_A V_A \Rightarrow \rho'_B A_B L_B = \frac{۲}{۳}\rho'_A A_A L_A$$

$$\rho'_B = \frac{۱}{۳}\rho'_A \;,\; L_B = L_A \Rightarrow \frac{۱}{۳}\rho'_A \times A_B = \frac{۲}{۳}\rho'_A \times A_A \Rightarrow \frac{A_A}{A_B} = \frac{۱}{۲}$$ (چگالی)

در ادامه برای مقایسهٔ مقاومت ویژه (ρ) داریم:

$$\frac{R_B}{R_A} = ۱ \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{L_B}{L_A} \times \frac{A_A}{A_B} = ۱ \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} \times ۱ \times \frac{۱}{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = ۲$$

۱ ۱۵۰۸ با توجه به رابطهٔ $R = \frac{\rho L}{A}$ و یکسان بودن سطح مقطع سیم‌ها، به مقایسهٔ مقاومت آن‌ها می‌پردازیم:

$$\begin{cases} R_A = \dfrac{\rho_A L_A}{A} = \dfrac{۱/۵\rho \times ۲L}{A} = ۳\dfrac{\rho L}{A} \\ R_B = \dfrac{\rho_B L_B}{A} = \dfrac{۰/۵\rho \times L}{A} = \dfrac{۱}{۲}\dfrac{\rho L}{A} \end{cases} \Rightarrow R_A = ۳R_C \;,\; R_C = ۲R_B$$

$$R_C = \frac{\rho_C L_C}{A} = \frac{\rho L}{A}$$

از طرفی تعداد الکترون‌های عبوری برابر $n = \frac{It}{e}$ می‌باشد. از طرفی طبق رابطهٔ $I = \frac{V}{R}$، جریان با مقاومت رابطهٔ عکس دارد. بنابراین داریم:

$$q = It = ne \Rightarrow n = \frac{It}{e}$$

$$n \propto I \propto \frac{۱}{R} \Rightarrow n \propto \frac{۱}{R} \Rightarrow n_C = ۳n_A \;,\; n_B = ۲n_C$$

۲ ۱۵۰۹ سؤال را در سه گام به صورت زیر حل می‌کنیم:

گام اول: $V = RI \Rightarrow ۳ = R \times ۱/۲ \Rightarrow R = \frac{۳}{۱/۲} = ۲/۵\Omega$

گام دوم: $R = \rho' \frac{L}{A} \Rightarrow ۲/۵ = ۱/۸ \times ۱۰^{-۸} \times \frac{۲۵}{A} \Rightarrow A = ۱/۸ \times ۱۰^{-۷}\,m^۲$ (ρ': مقاومت ویژه)

گام سوم: $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = \rho AL = ۸۰۰۰ \times ۱/۸ \times ۱۰^{-۷} \times ۲۵ = ۳۶ \times ۱۰^{-۳}\,kg = ۳۶gr$

۲ ۱۵۱۰ با توجه به ثابت ماندن جرم سیم و چگالی آن، می‌توان فهمید که حجم آن نیز ثابت می‌ماند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow A_۱L_۱ = A_۲L_۲ \Rightarrow \frac{A_۱}{A_۲} = \frac{L_۲}{L_۱}$$ رابطهٔ (۱):

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{L_۲}{L_۱} \times \frac{A_۱}{A_۲} \xrightarrow{(۱)} \frac{R_۲}{R_۱} = \left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱۶R_۱}{R_۱} = \left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)^۲ \Rightarrow ۴ = \frac{L_۲}{۱۰} \Rightarrow L_۲ = ۴۰cm$$

۱ ۱۵۱۱ با توجه به ثابت ماندن حجم، داریم:

$$V' = V \Rightarrow L'A' = LA \Rightarrow \frac{L'}{L} = \frac{A}{A'}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $R = \frac{\rho L}{A}$، می‌توان نوشت:

$$\frac{D'}{D} = \frac{۲}{۳} \ , \ \frac{R'}{R} = ? \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \times \frac{A}{A'} = \left(\frac{A}{A'}\right)^۲ \xrightarrow{A = \frac{\pi D^۲}{۴}} \frac{R'}{R} = \left(\frac{D}{D'}\right)^۴ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۴ = \frac{۸۱}{۱۶}$$

دقت: در واقع با این کار، ما هم طول سیم را زیاد کرده‌ایم و هم مساحت مقطع آن را کم کرده‌ایم، بنابراین طبق رابطهٔ $R = \frac{\rho L}{A}$ باید مقاومت سیم بسیار بیشتر شود.

$$\uparrow R = \frac{\rho \, L \uparrow}{A \downarrow}$$

۲ ۱۵۱۲ **گام اول:** (محاسبهٔ طول سیم): ابتدا محیط (طول) یک دور سیم را که به دور استوانه‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر پیچیده شده است، محاسبه می‌کنیم:

$$L_۰ = ۲\pi r \xrightarrow{r = ۱۰cm = ۰/۱m} L_۰ = ۲\pi(۰/۱) = ۰/۲\pi \, m \xrightarrow{\text{۱۰۰ دور سیم}} L_{\text{کل}} = ۱۰۰ L_۰ = ۲۰\pi \, m$$

گام دوم: (محاسبهٔ مقاومت سیم): ابتدا دقت کنید که مساحت مقطع سیمی به قطر d برابر $A = \frac{\pi d^۲}{۴}$ است، اکنون با توجه به رابطهٔ $R = \frac{\rho L}{A}$ می‌توان نوشت:

$$d = ۲mm = ۲ \times ۱۰^{-۳} m \ , \ L = ۲۰\pi \, m \ , \ \rho = ۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \Omega.m \ , \ R = ?$$

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\frac{\pi d^۲}{۴}} = \frac{۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \times ۲۰\pi}{\frac{\pi \times ۴ \times ۱۰^{-۶}}{۴}} = ۰/۳۴\Omega$$

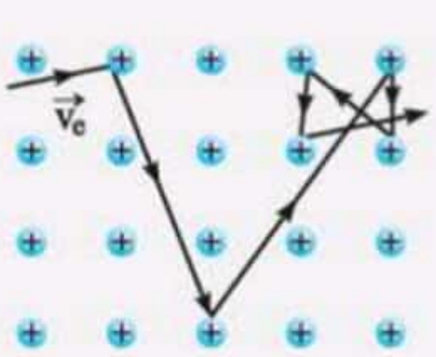
۳ ۱۵۱۳ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۳)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۵۱۴ با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۲) و (۳)، نمودار (ب) مربوط به اغلب فلزات در دمای ثابت می‌باشد و نمودار (ت) مربوط به یک دیود نورگسیل است.

۳ ۱۵۱۵ برای پاسخ به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ — **تأثیر دما بر مقاومت الکتریکی یک جسم رسانا** (تست‌های ۱۵۱۵ تا ۱۵۱۸)

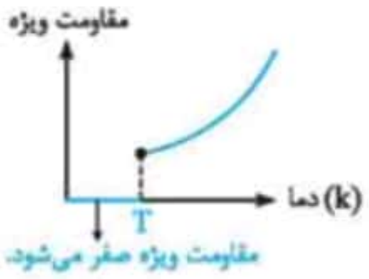
به طور کلی وقتی دمای یک رسانای فلزی افزایش می‌یابد، ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌ها و یون‌های آن افزایش می‌یابد و موجب افزایش برخورد الکترون‌های آزاد با شبکهٔ اتمی رسانای فلزی می‌شود. به این ترتیب، مقاومت رسانا در برابر عبور جریان زیاد می‌شود.



تذکر در مواد نیم‌رسانا **(مانند گرافیت، سیلیسیم و ژرمانیم)**، مقاومت الکتریکی با افزایش دما، کاهش می‌یابد.

تذکر در برخی رساناها، با کاهش دما مرتباً مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد تا سرانجام در یک دمای پایین مقاومت الکتریکی صفر می‌شود و در دماهای پایین‌تر نیز صفر باقی می‌ماند. این خاصیت ابررسانایی نام دارد.

با کاهش دما در مواردی که قابلیت ابررسانایی دارند، مقاومت ویژه در یک دمای خاص به طور ناگهانی به صفر می‌رسد و در دماهای پایین‌تر همچنان صفر است. این موضوع در نمودار مقابل بهتر نشان داده شده است.



۱ ۱۵۱۶ با توجه به خلاصه نکات (۴)، مقاومت رساناها (مثل روی) در اثر افزایش دما، افزایش می‌یابد، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴ ۱۵۱۷ با روشن شدن لامپ، دمای رشته سیم رسانای داخل آن افزایش یافته و مقاومت آن نیز افزایش می‌یابد.

۲ ۱۵۱۸ با توجه به رابطهٔ $R = \rho \frac{L}{A}$، تغییر مقاومت الکتریکی سیم به دلیل تغییر مقاومت ویژهٔ آن در اثر افزایش دما است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta R = R_۲ - R_۱ = \rho_۲ \frac{L}{A} - \rho_۱ \frac{L}{A} = (\rho_۲ - \rho_۱) \frac{L}{A} \Rightarrow \Delta R = (۸/۱۶ \times ۱۰^{-۵} - ۶/۸ \times ۱۰^{-۵}) \times \frac{۱/۵}{۳ \times ۱۰^{-۶}} = ۶/۸\Omega$$

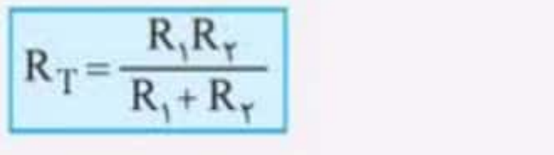
gajmarket.com

۱۵۱۹ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ — **محاسبهٔ مقاومت معادل در یک مدار** (تست‌های ۱۵۱۹ تا ۱۵۳۶)

در ابتدا به بررسی دو اتصال سری و موازی در بین مقاومت‌ها می‌پردازیم.

۱- اتصال سری: در این حالت، شدت جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌ها با یک‌دیگر یکسان است و مقاومت معادل مدار عبارت است از:



شدت جریان $\Rightarrow I = I_1 = I_2 = I_3$

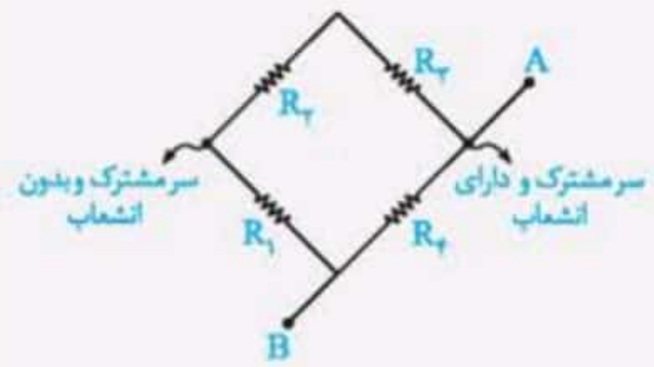
مقاومت معادل $\Rightarrow R_T = R_1 + R_2 + R_3$

نکات مهم و کاربردی

۱ اگر n مقاومت مشابه $R_\circ$ را به طور سری (متوالی) به یک‌دیگر متصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها عبارت است از:

$$R_T = nR_\circ$$

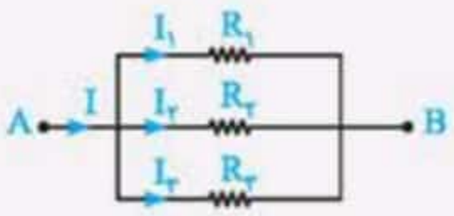
۲ اگر دو مقاومت یک سر مشترک و بدون انشعاب داشته باشند، با یک‌دیگر به صورت متوالی (سری) متصل شده‌اند.



R_1 ، R_2 ⇐ به صورت سری متصل شده‌اند.

R_3 ، R_4 ⇐ به صورت سری نیستند زیرا از سر مشترکشان انشعاب خارج شده است.

۲- اتصال موازی: در این حالت، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با یک‌دیگر یکسان است و مقاومت معادل مدار عبارت است از:



مقاومت معادل : $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

نکات مهم و کاربردی

۱ اگر n مقاومت مشابه را به صورت موازی ببندیم، مقاومت معادل مدار عبارت است از:

$$R_T = \frac{R_\circ}{n}$$

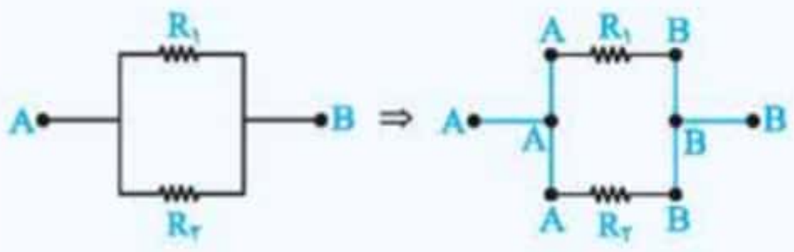
۲ اگر دو مقاومت R_1 و R_2 را به صورت موازی متصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

۳ به سادگی می‌توان نشان داد که در اتصال موازی مقاومت‌ها، مقاومت معادل مدار از کوچک‌ترین مقاومت موجود در مدار نیز کوچک‌تر است.

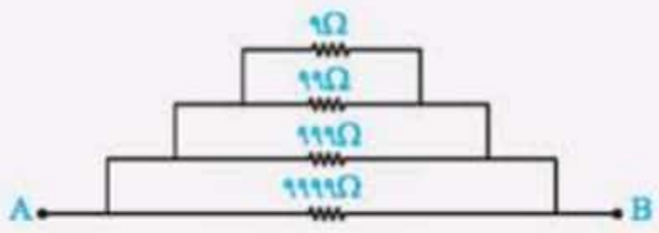
بررسی یک موضوع کاربردی

ایدهٔ جالبی که می‌توان از آن برای تشخیص شکل معادل مدار کمک گرفت، روشی به نام روش نام‌گذاری نقاط می‌باشد. در این روش، باید گره‌های مدار را نام‌گذاری کنیم و اگر دو نقطه با یک سیم رسانا به هم متصل شوند، هم‌نام هستند. به طور مثال در شکل زیر تمام نقاط سمت چپ توسط سیم آبی‌رنگ به هم وصل شده‌اند و هم‌نام هستند (نقطهٔ A). همین وضعیت برای سمت راست مدار نیز برقرار است. با توجه به این‌که مقاومت‌های R_1 و R_2 هر دو بین نقاط A و B قرار دارند، پس موازی هستند.



توجه شود که مهم‌ترین تکنیک در این قسمت، تکنیک نام‌گذاری نقاط و توانایی رسم شکل معادل، برای یک مدار نسبتاً پیچیده است.

تمرین۱ در شکل مقابل مقاومت معادل مدار چند اهم است؟



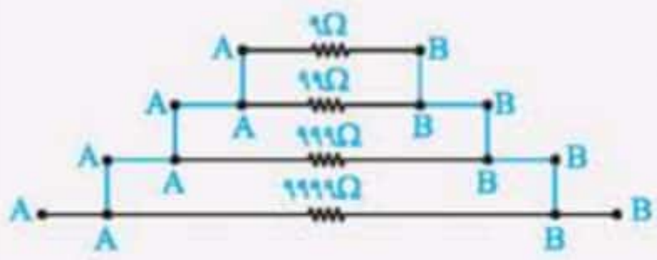
۱) ۱۸/۵Ω

۲) ۸۱/۷Ω

۳) ۸۱۷Ω

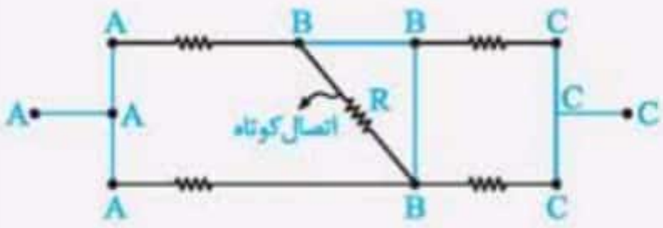
۴) ۸/۱۷Ω

پاسخ اگر گره‌های مدار را نام‌گذاری کنیم دو سر همهٔ مقاومت‌ها به نقاط A و B متصل شده و اتصال مقاومت‌ها موازی است. در اتصال موازی، مقاومت معادل مدار از کوچک‌ترین مقاومت موجود در مجموعه نیز کوچک‌تر بوده و تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند صحیح باشد.



$\Rightarrow R_T < 9\Omega$

نکته اگر پس از نام‌گذاری دو سر یک مقاومت هم‌نام شود، آن مقاومت اتصال کوتاه می‌شود.



دو سر مقاومت R، B نام گرفته و این مقاومت اتصال کوتاه می‌شود. $\Rightarrow$

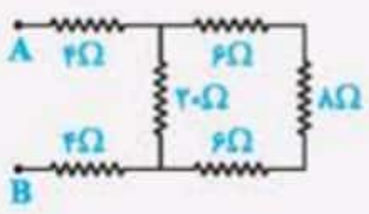
تمرین۲ در شکل داده شده، مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B از مدار چند اهم است؟

۱) ۲۴

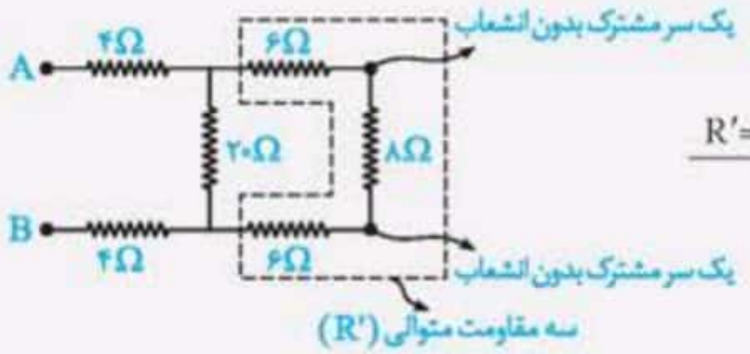
۲) ۱۶

۳) ۱۸

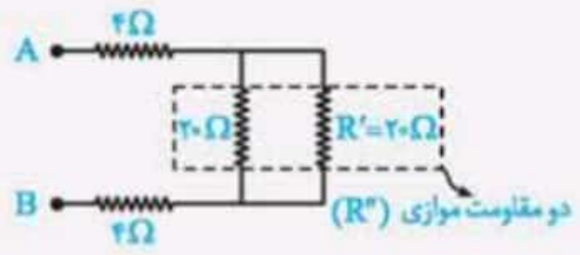
۴) ۲۲



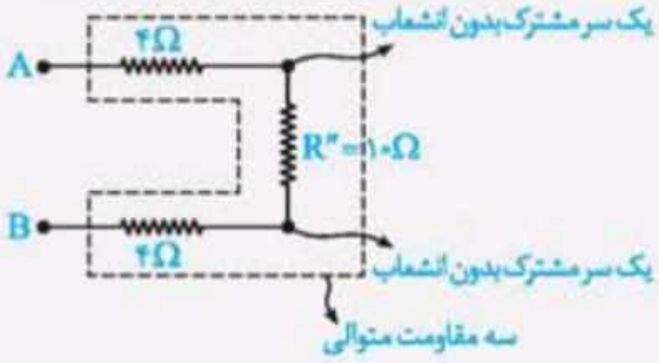
پاسخ مدار را ساده می‌کنیم تا مقاومت معادل مدار محاسبه شود:



$R' = ۶ + ۸ + ۶ = ۲۰\Omega$



$R'' = \frac{R}{n} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰\Omega$



$\Rightarrow R_T = ۴ + ۱۰ + ۴ = ۱۸\Omega$ (گزینهٔ ۳)

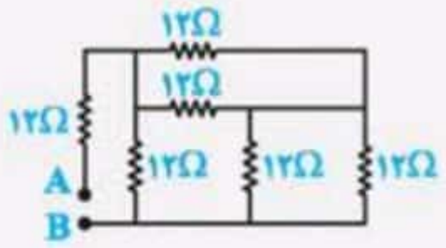
تمرین۳ در شکل روبه‌رو، مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B چند اهم است؟

۱) ۶

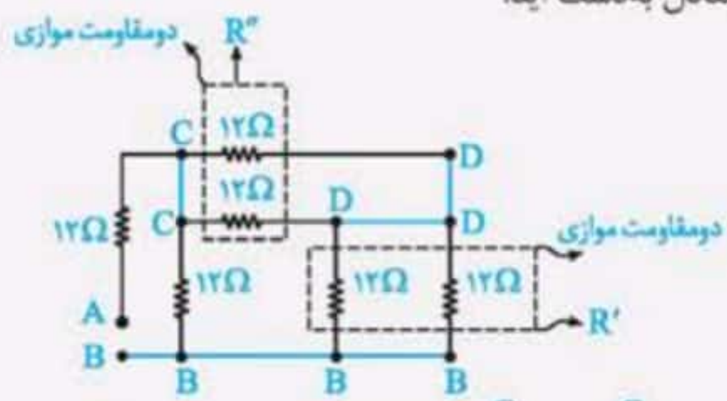
۲) ۹

۳) ۱۸

۴) ۲۴

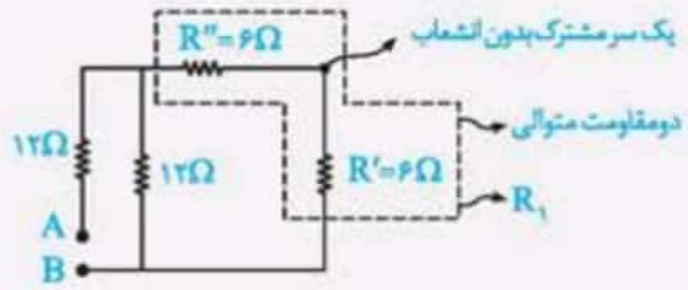


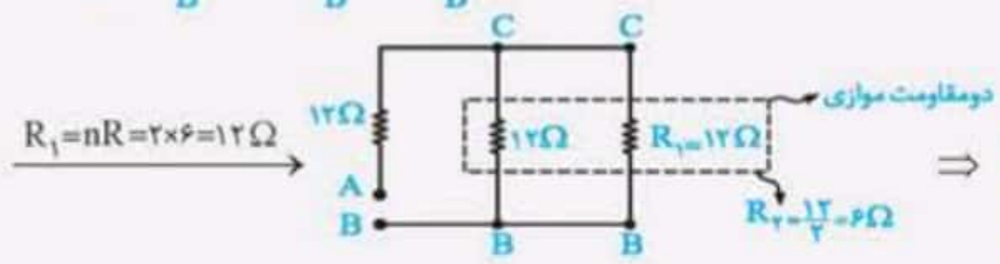
پاسخ با تکنیک نام‌گذاری نقاط مختلف مدار، در طی چند مرحله آن را ساده می‌کنیم تا مقاومت معادل به‌دست آید:



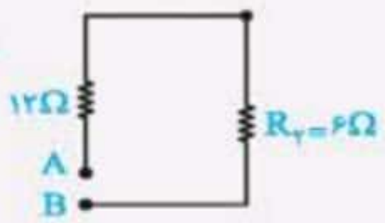
$R' = \frac{R}{n} = \frac{۱۲}{۲} = ۶\Omega$

$R'' = \frac{R}{n} = \frac{۱۲}{۲} = ۶\Omega$





$R_1 = nR = ۲ \times ۶ = ۱۲\Omega$



$\Rightarrow R_T = ۱۲ + ۶ = ۱۸\Omega$ (گزینهٔ ۳)

(دو مقاومت متوالی)

تذکر همان‌طور که مشاهده کردید، با کمک تکنیک نقطه‌گذاری، مدار نسبتاً سختی را به سادگی بررسی کردیم. در سؤال بعد، بر روی این تکنیک مسلط‌تر شده و نکتهٔ جدیدی را نیز خواهیم دید.

gajmarket.com

تمرین۴ **مقاومت معادل بین a و b چند اهم است؟** (ریاضی داخل ۸۶)

۱) ۵

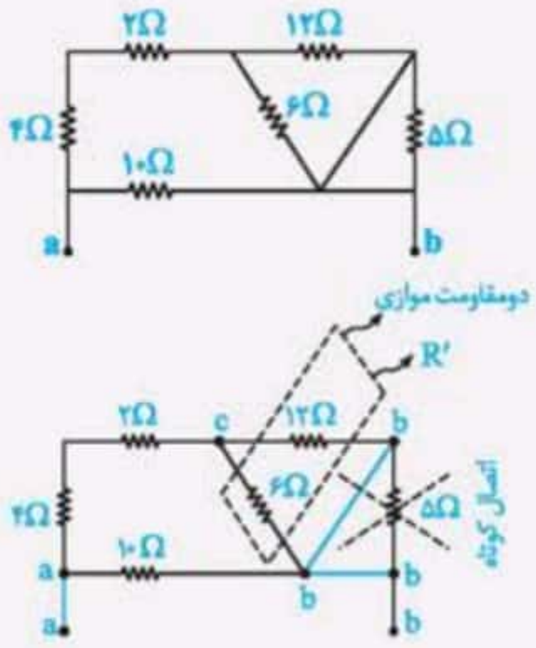
۲) ۱۰

۳) ۱۵

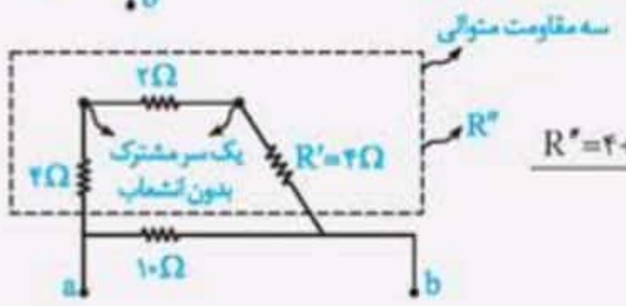
۴) ۲۰

پاسخ برای حل، مدار را با تکنیک نام‌گذاری، در طی چند مرحله ساده می‌کنیم:

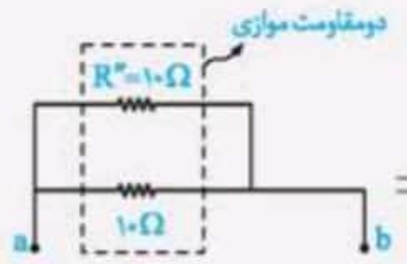
در تکنیک نام‌گذاری اگر دو سر یک مقاومت هم‌نام شود، آن مقاومت اتصال کوتاه می‌شود، بنابراین مقاومت 5Ω از مدار حذف می‌گردد.



$R' = \frac{6\times12}{6+12} = 4\Omega$

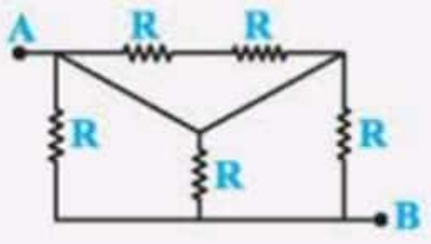


$R'' = 4+2+4 = 10\Omega$



$\Rightarrow R_T = \frac{R}{n} = \frac{10}{2} = 5\Omega$ (گزینهٔ ۱)

تمرین۵ **در شکل مقابل، مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B برابر ۳ اهم می‌باشد. هر یک از این مقاومت‌ها چند اهمی می‌باشند؟**



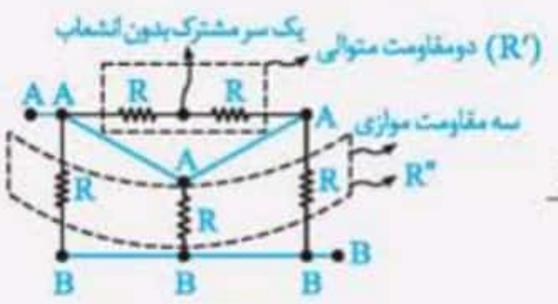
۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

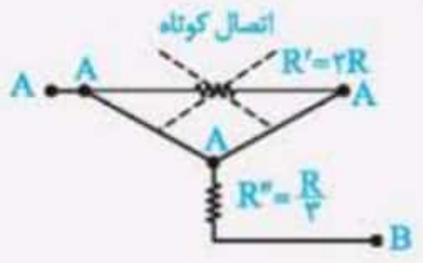
۴) ۱۲

پاسخ ابتدا مدار را در طی چند مرحله ساده می‌کنیم:

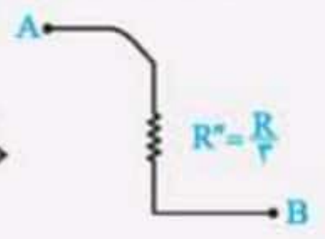


$R' = R+R = 2R$

$R'' = \frac{R}{n} = \frac{R}{3}$



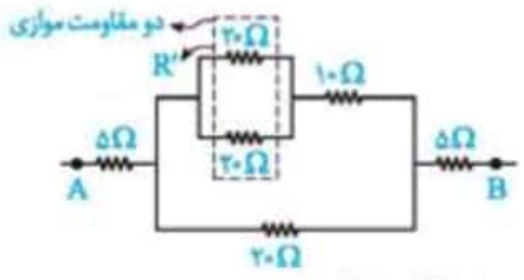
R' حذف می‌شود



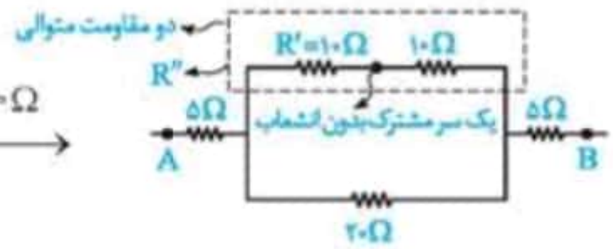
در ادامه با توجه به متن سؤال، مقاومت معادل برابر با ۳ اهم می‌باشد. بنابراین داریم:

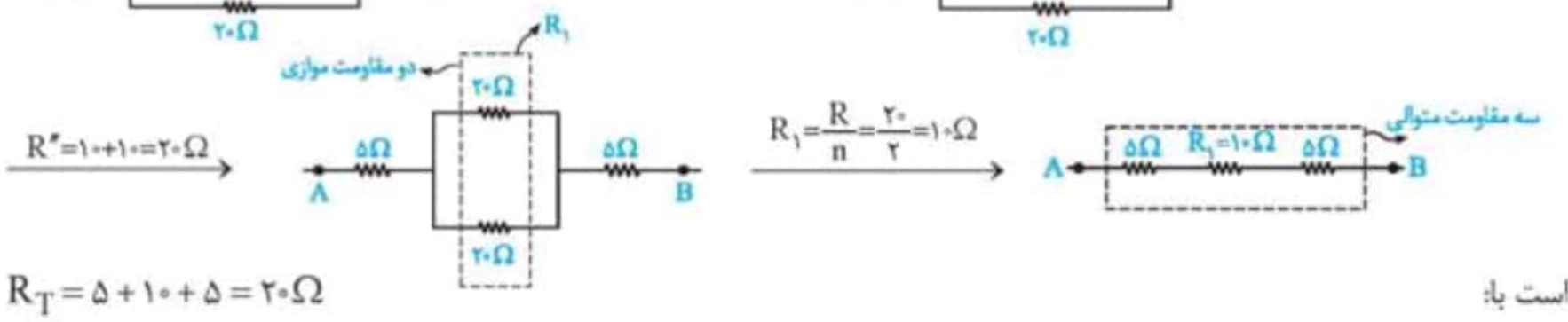
$R_T = R'' = \frac{R}{3} \xrightarrow{R_T=3\Omega} 3 = \frac{R}{3} \Rightarrow R = 9\Omega$ (گزینهٔ ۳)

مدار را در طی چند مرحله ساده می‌کنیم تا مقاومت معادل مدار به‌دست آید:



$R' = \frac{R}{n} = \frac{20}{2} = 10\Omega$



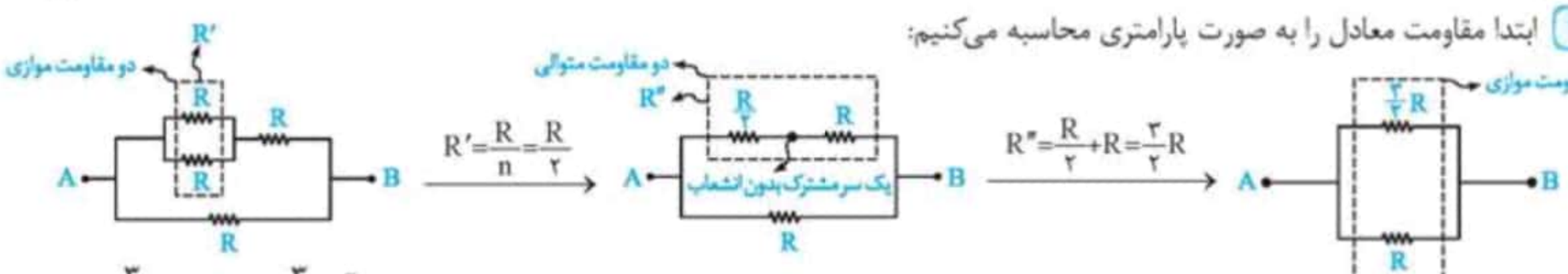


$R_1 = \frac{R}{n} = \frac{20}{2} = 10\Omega$

$R_T = 5+10+5 = 20\Omega$

مقاومت معادل برابر است با:

۲ ۱۵۲۰ ابتدا مقاومت معادل را به صورت پارامتری محاسبه می‌کنیم:



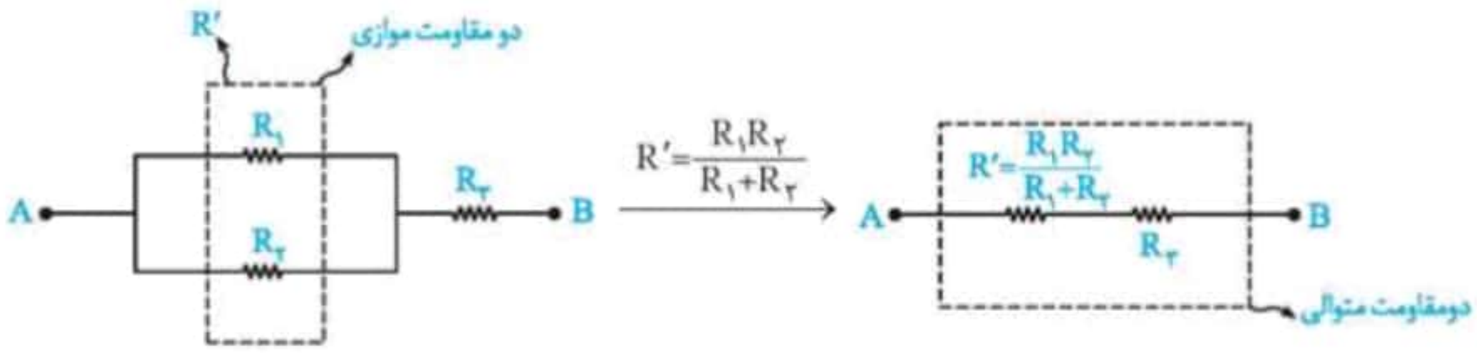
$R' = \frac{R}{n} = \frac{R}{2}$

$R'' = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$

$R_T = \frac{\frac{3}{2}R \times R}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{\frac{3}{2}R^2}{\frac{5}{2}R} = \frac{3}{5}R \xrightarrow[\text{صورت سؤال}]{R_T=3\Omega} \frac{3}{5}R = 3 \Rightarrow R = 5\Omega$

۳ ۱۵۲۱ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۵)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

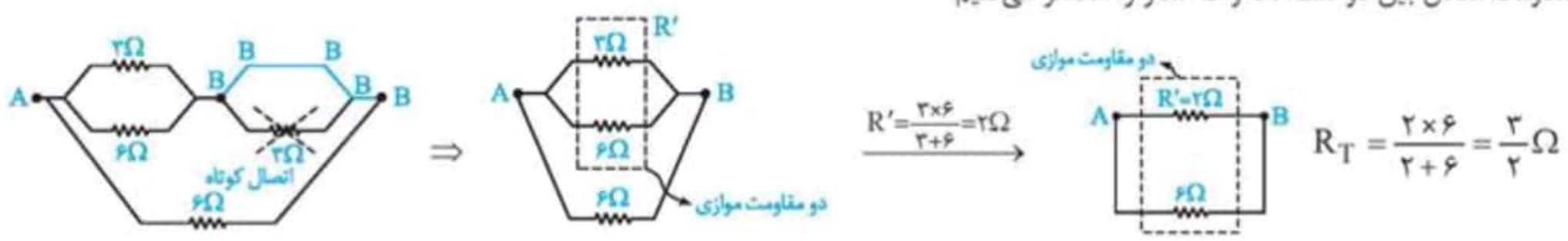
۱ ۱۵۲۲ ابتدا مدار را ساده می‌کنیم:



در ادامه با توجه به متن سؤال، مقاومت معادل را برابر با R_1 قرار می‌دهیم:

$$R_T=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_2 \xrightarrow{R_T=R_1} R_1=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_2 \Rightarrow R_2=R_1-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow R_2=\frac{R_1^2}{R_1+R_2}$$

۳ ۱۵۲۳ با توجه به شکل زیر، با بسته شدن کلید K، مقاومت ۳ اهمی اتصال کوتاه می‌شود، زیرا دو سر آن هم‌نام شده است. حال برای محاسبهٔ مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B مدار را ساده‌تر می‌کنیم:



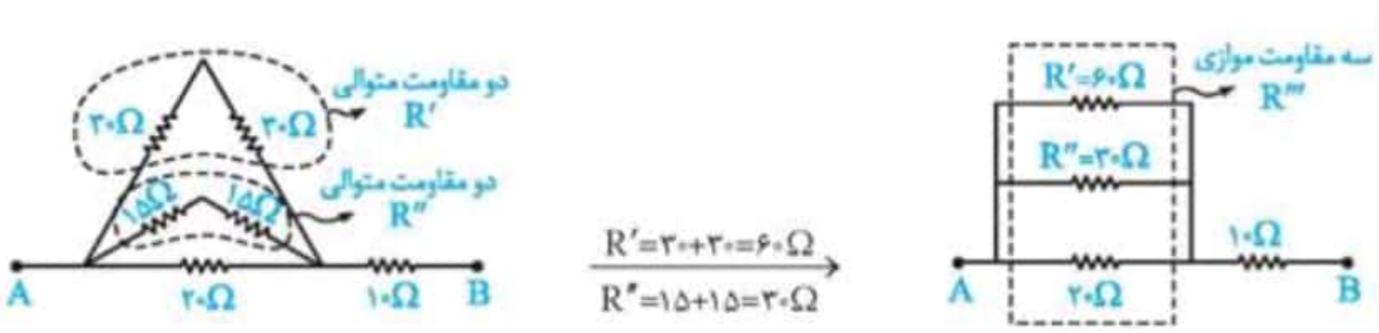
خلاقیت‌های حرفه‌ای

با کمی دقت در شکل دوم رسم‌شده در فوق نیز می‌توان فهمید که سه مقاومت باقی‌مانده با هم موازی هستند (هر سه مقاومت بین دو نقطهٔ A و B قرار دارند). بنابراین می‌توان نوشت:

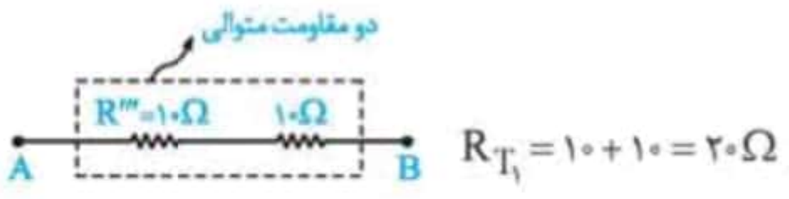
$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2+1+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow R_T=\frac{3}{2}\Omega$$

۱ ۱۵۲۴ مقاومت معادل مدار را در دو حالت قبل و بعد از بسته شدن کلید به‌دست می‌آوریم:

حالت اول: (قبل از بسته شدن کلید):

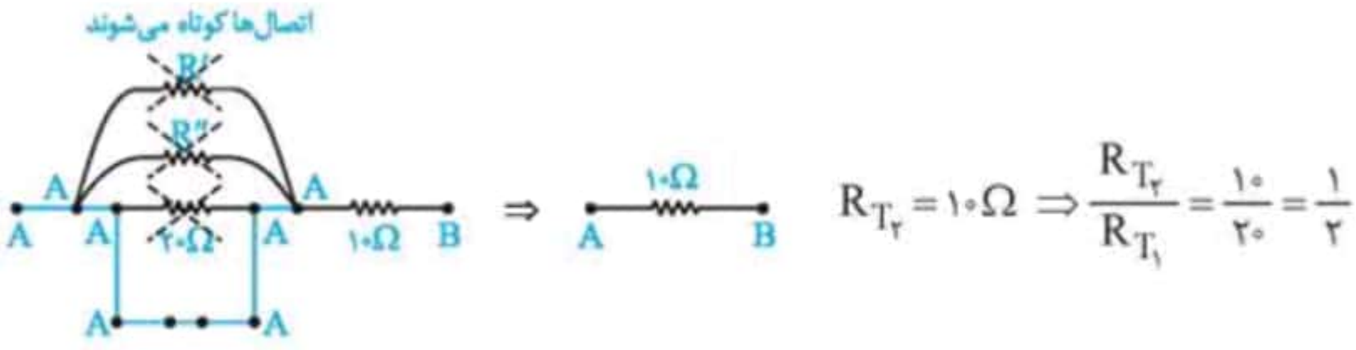


$$\frac{1}{R'''}=\frac{1}{60}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{1+2+3}{60}=\frac{1}{10} \Rightarrow R'''=10\Omega$$



$$R_{T_1}=10+10=20\Omega$$

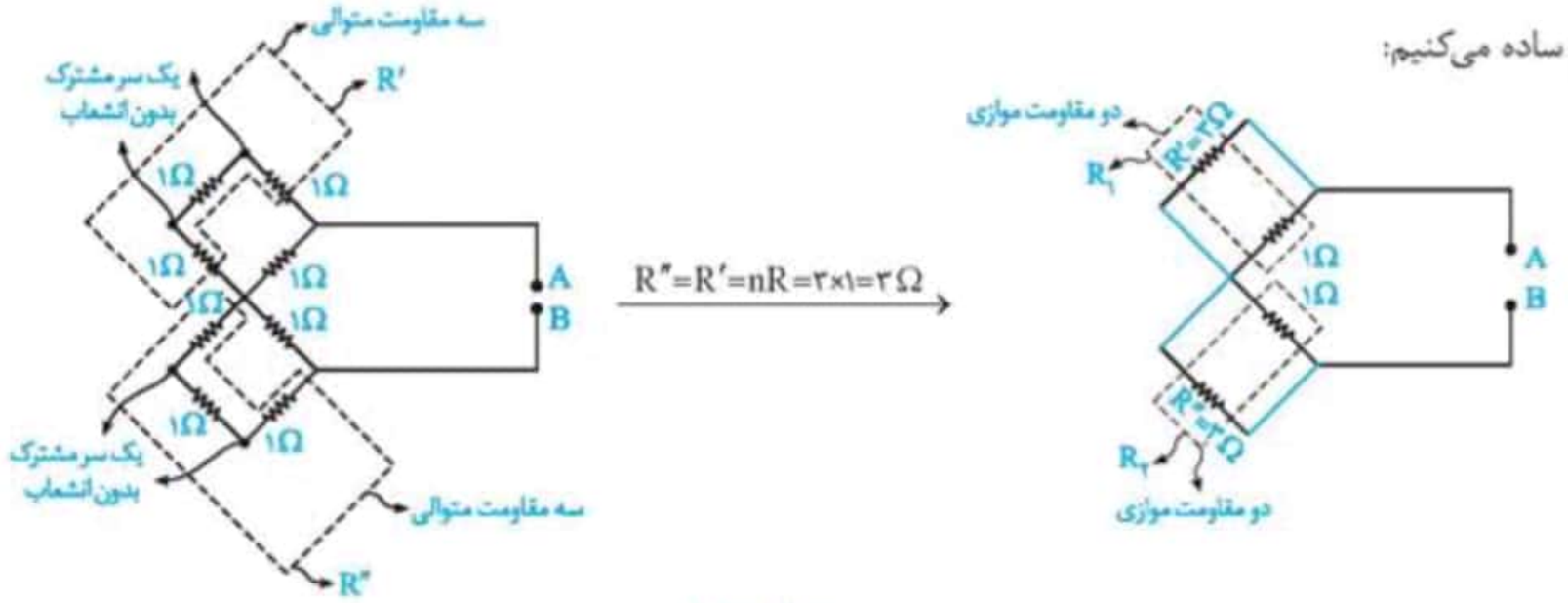
حالت دوم: (بعد از بسته شدن کلید): با بستن کلید K، دو سر مقاومت ۲۰ اهمی و مقاومت‌های R' و R'' نشان داده شده در شکل فوق، اتصال کوتاه می‌شوند، چون دو سر آن‌ها هم‌نام شده است (مقاومت R' معادل دو مقاومت ۳۰ اهمی و مقاومت R'' معادل دو مقاومت ۱۵ اهمی است).

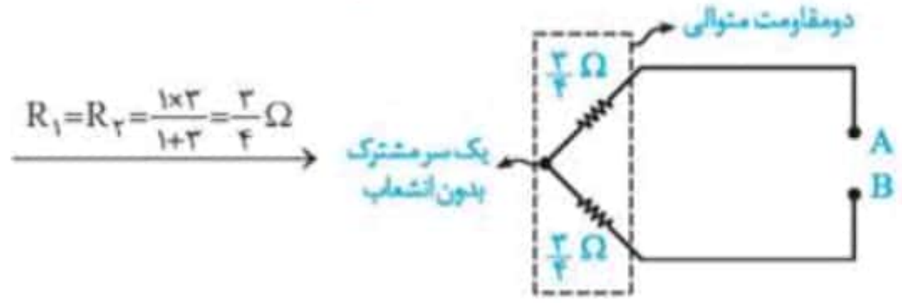


$$R_{T_2}=10\Omega \Rightarrow \frac{R_{T_2}}{R_{T_1}}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

www.gajmarket.com

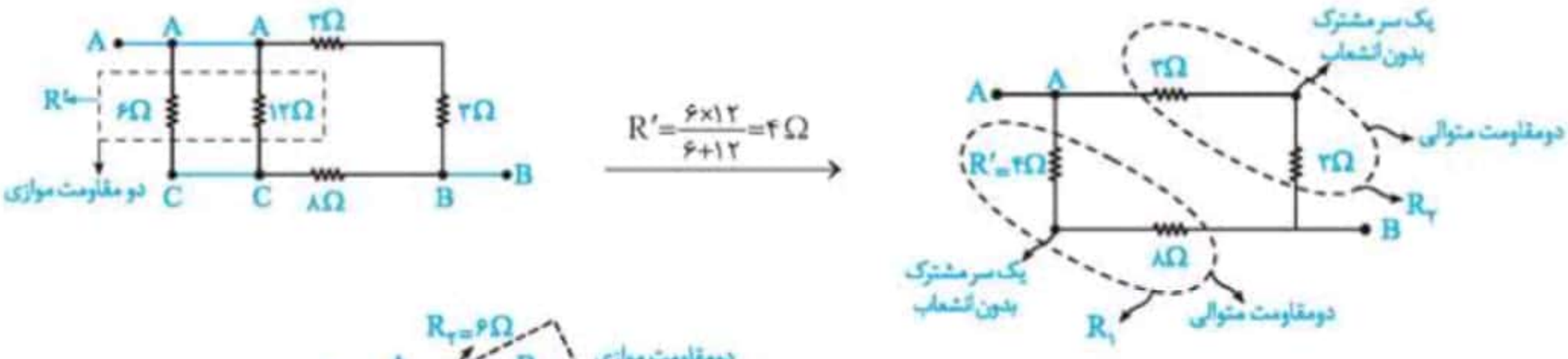
۳ ۱۵۲۵ مدار را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

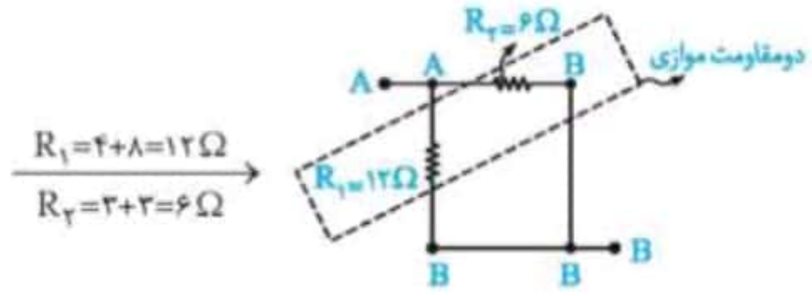




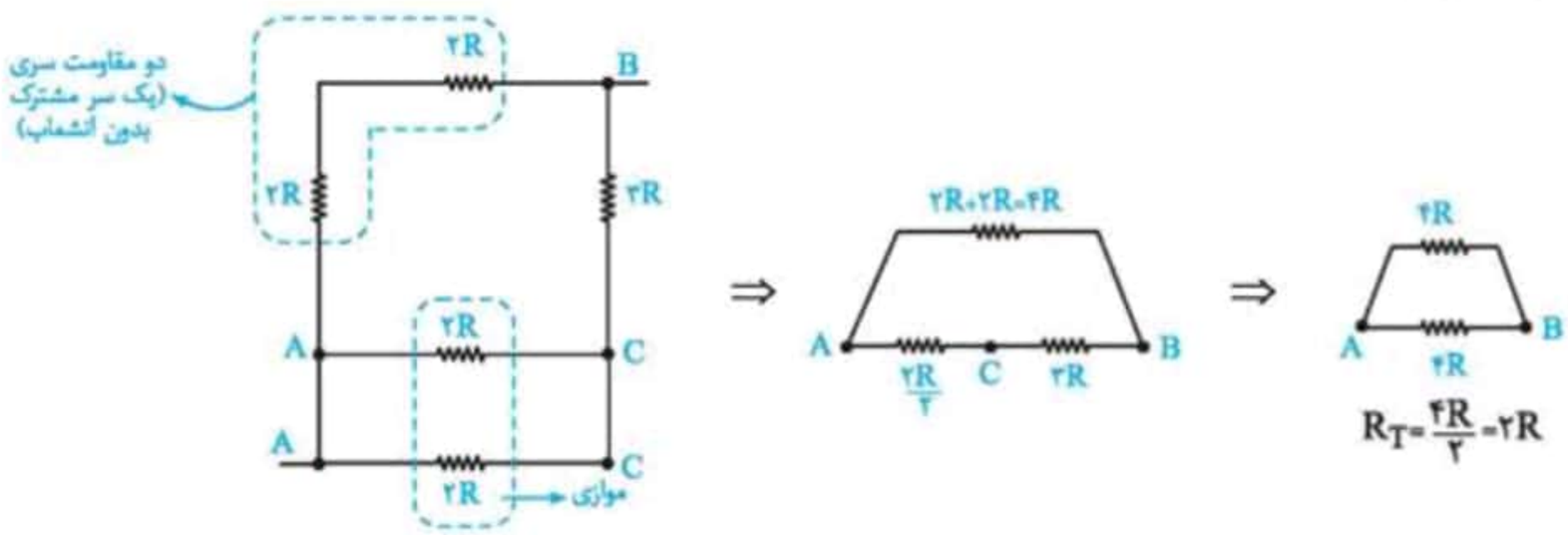
۳ ۱۵۲۶ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۵)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲ ۱۵۲۷ مدار را با تکنیک نام‌گذاری، در طی چند مرحله ساده می‌کنیم:



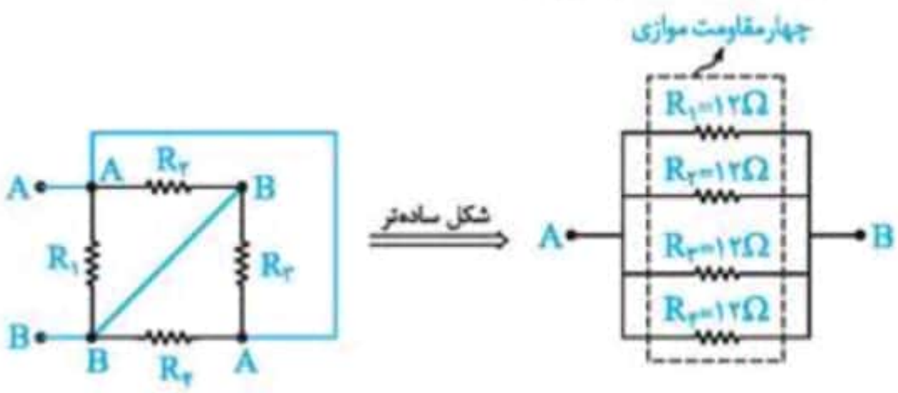


۳ ۱۵۲۸ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



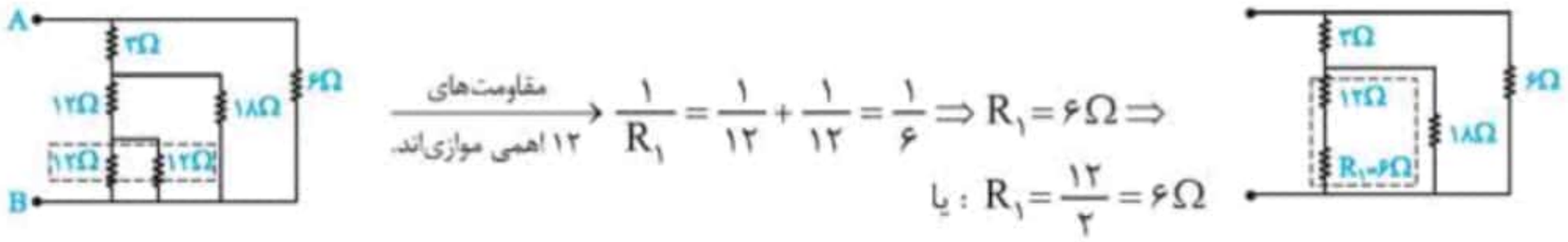
۱ ۱۵۲۹ با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۵)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲ ۱۵۳۰ این سؤال، مدار جالبی دارد و مکمل بسیار خوبی برای سؤال قبل محسوب می‌شود. با توجه به تکنیک نام‌گذاری نقاط، مشاهده می‌کنیم که دو سر هر کدام از این مقاومت‌های ۱۲ اهمی به دو نقطهٔ A و B متصل است. بنابراین هر ۴ مقاومت با یک‌دیگر موازی هستند.



۱۵۳۱ مدار را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: (کلید K باز است): در این حالت مدار به شکل زیر خواهد بود:



$$\frac{۱}{R_۱}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow R_۱=۶\Omega \Rightarrow$$

یا: $R_۱=\frac{۱۲}{۲}=۶\Omega$

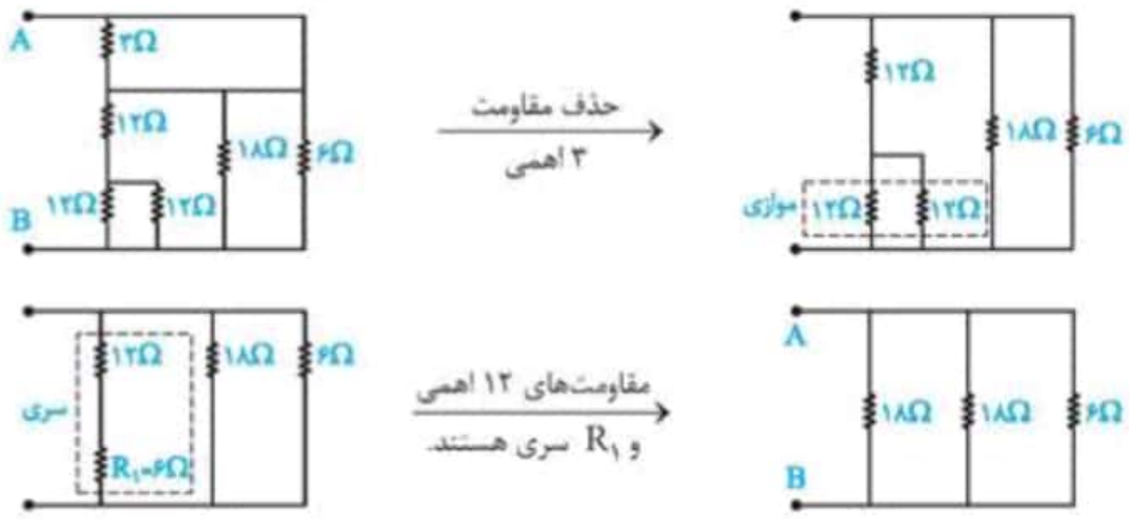
$$R_۲=R_۱+۱۲=۶+۱۲=۱۸\Omega \qquad \frac{۱}{R_۳}=\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{۱۸}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۱۸}=\frac{۲}{۱۸}$$

$$\Rightarrow R_۳=۹\Omega \text{ یا } R_۳=\frac{۱۸}{۲}=۹\Omega \qquad R_۴=R_۳+۳=۹+۳=۱۲\Omega$$

با توجه به مدار معادل به‌دست آمده، همان‌طور که واضح است، مقاومت معادل بین A و B برابر است با:

$$\frac{۱}{R_T}=\frac{۱}{R_۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۱۲}\Rightarrow R_T=۴\Omega$$

حالت دوم: (کلید K بسته است): در این حالت، با توجه به مدار زیر، دو سر مقاومت ۳ اهمی با یک سیم به یک‌دیگر متصل شده‌اند. بنابراین این مقاومت اتصال کوتاه می‌شود:



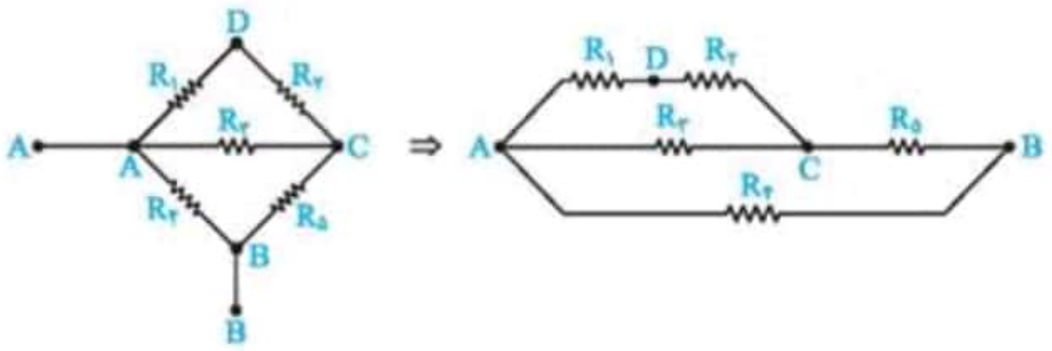
اکنون با توجه به مدار فوق، مقاومت معادل بین A و B برابر است با:

$$\frac{۱}{R'_T}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱+۱+۳}{۱۸}=\frac{۵}{۱۸}\Rightarrow R'_T=۳/۶\Omega$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقاومت معادل با بسته شدن کلید K به اندازهٔ ۰/۴ اهم تغییر کرده است:

$$\Delta R_T=|R_T-R'_T|=|۴-۳/۶|=۰/۴\Omega$$

۱۵۳۲ شکل معادل این مدار با کمک تکنیک نام‌گذاری نقاط مدار، به صورت نشان داده شده است:



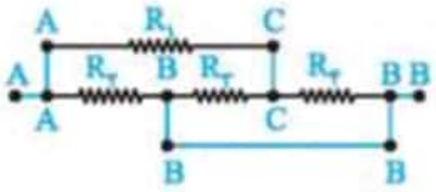
در این شکل R_1 با R_2 متوالی بسته شده، حاصل این دو مقاومت با R_3 موازی است. حاصل سه مقاومت R_1، R_2 و R_3 با R_5 متوالی است و حاصل همهٔ مقاومت‌ها با R_4 موازی است:

$$R_{۱,۲}=(۵+۵)\Omega=۱۰\Omega$$

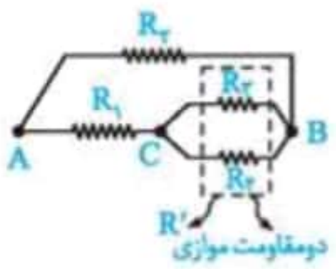
$$R_{۱,۲,۳}=\frac{۱۰\times۵}{۱۰+۵}\Omega=\frac{۱۰}{۳}\Omega\Rightarrow R_{۱,۲,۳,۵}=\left(\frac{۱۰}{۳}+۵\right)\Omega=\frac{۲۵}{۳}\Omega\Rightarrow R_T=\frac{\frac{۲۵}{۳}\times۵}{\frac{۲۵}{۳}+۵}\Omega=\frac{۲۵}{۸}\Omega$$

gajmarket.com

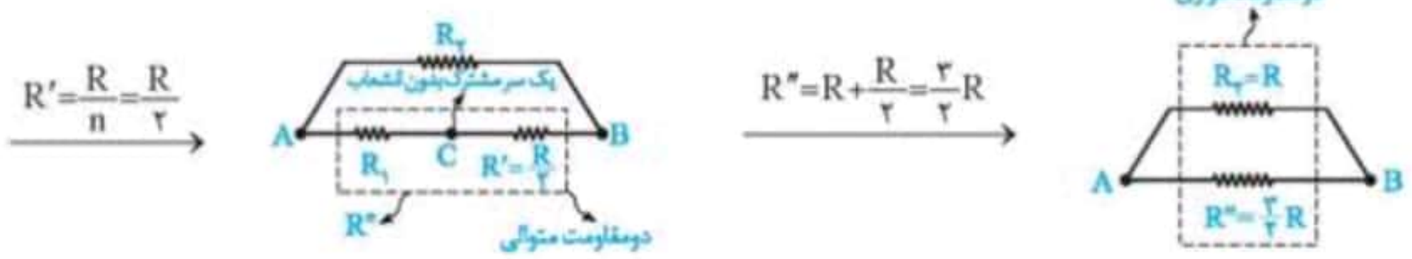
۴ ۱۵۳۳ مدار نسبتاً دشواری است. برای حل، ابتدا مقاومت‌ها را شماره‌گذاری کرده و سپس نقاط آن را نام‌گذاری می‌کنیم:



در ادامه سه نقطهٔ A، B و C را به صورت مقابل نشان داده (دو نقطهٔ A و B که مقاومت معادل بین آن‌ها مدنظر است ابتدا و انتها قرار بگیرد) و سایر مقاومت‌ها را بین این سه نقطه ترسیم می‌کنیم. مثلاً در شکل مقابل مشاهده می‌شود که مقاومت R_1 به دو نقطهٔ A و C متصل است و مقاومت R_2 بین دو نقطهٔ A و B قرار دارد و ... .



در ادامه مدار را ساده می‌کنیم:

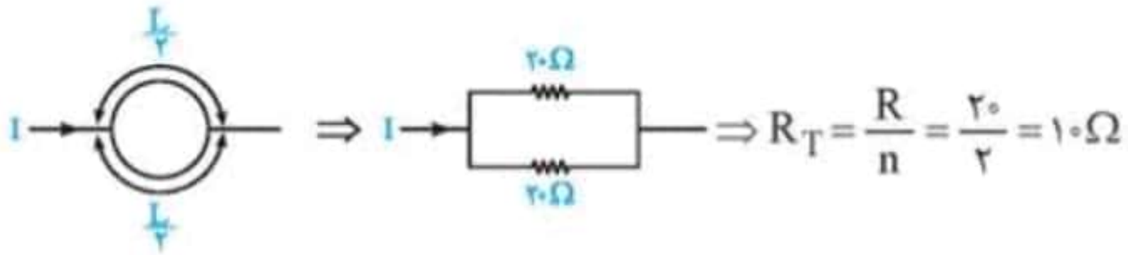


مقاومت معادل برابر است با:

$$R_T = \frac{\frac{۳}{۲}R.R}{\frac{۳}{۲}R + R} = \frac{\frac{۳}{۲}R^۲}{\frac{۵}{۲}R} = \frac{۳}{۵}R \xrightarrow[\text{صورت سؤال}]{R_T = ۹\Omega} ۹ = \frac{۳}{۵}R \Rightarrow R = ۱۵\Omega$$

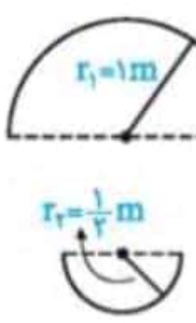
۲ ۱۵۳۴ فرض می‌کنیم طول سیم برابر L و مقاومت آن ۴۰ اهم است. در ادامه با توجه به رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$، اگر سیم را نصف کنیم، مقاومت آن نیز نصف می‌شود ($\frac{۴۰}{۲} = ۲۰\Omega$ = مقاومت نصف سیم).

در واقع حلقهٔ زیر از دو سیم به طول $\frac{L}{۲}$ تشکیل شده است که با یک‌دیگر موازی‌اند و می‌توان به جای سیم‌ها مقاومت آن‌ها را قرار دهیم:



۱ ۱۵۳۵ با توجه به این‌که مقاومت هر متر از سیم برابر ۲۰ اهم است، ابتدا مقاومت هریک از چهار تکه سیم را به‌دست می‌آوریم.

برای محاسبهٔ مقاومت سیم‌های نیم‌دایره‌ای شکل، باید نصف محیط دایره را در نظر بگیریم.

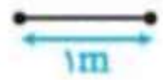


$R_۱ = (\pi r_۱) \times ۲۰ = ۳ \times ۱ \times ۲۰ = ۶۰\Omega$,



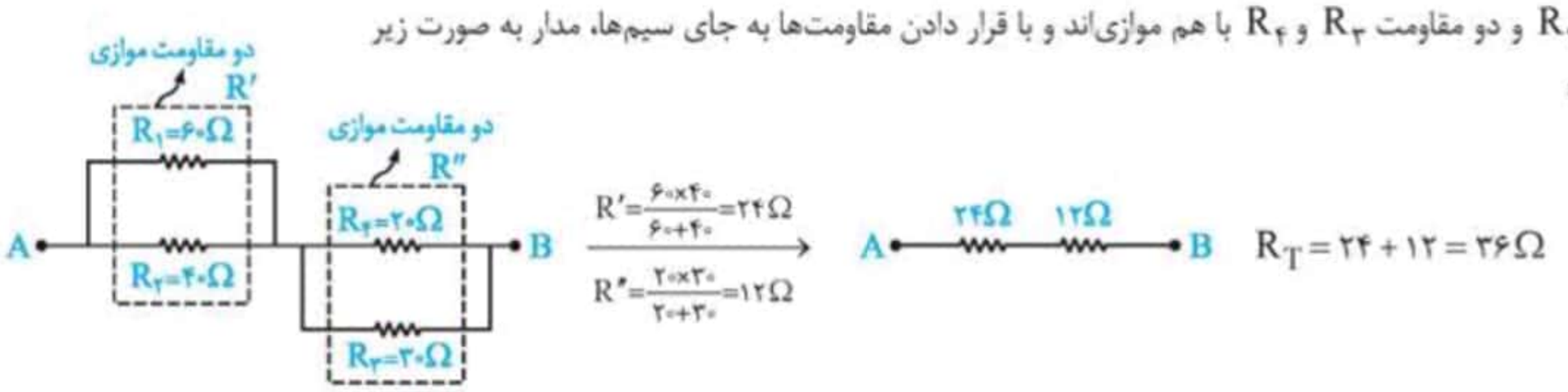
$R_۲ = ۲ \times ۲۰ = ۴۰\Omega$

$R_۳ = (\pi r_۲) \times ۲۰ = ۳ \times \frac{۱}{۲} \times ۲۰ = ۳۰\Omega$,

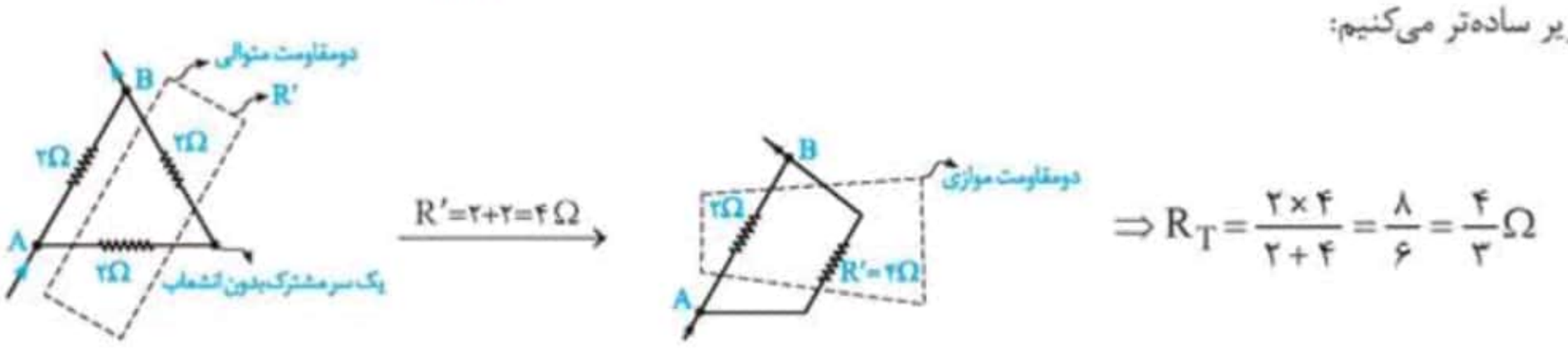


$R_۴ = ۱ \times ۲۰ = ۲۰\Omega$

دو مقاومت R_1 و R_2 و دو مقاومت R_3 و R_4 با هم موازی‌اند و با قرار دادن مقاومت‌ها به جای سیم‌ها، مدار به صورت زیر نشان داده می‌شود:



۱ ۱۵۳۶ مدار را به‌شکل زیر ساده‌تر می‌کنیم:



۲ ۱۵۳۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ **آشنایی با نحوهٔ توزیع جریان در مدارهای الکتریکی** (تست‌های ۱۵۳۷ تا ۱۵۴۹)

بسیاری از دانش‌آموزان در کنکور از حل سؤالات مدار می‌ترسند و با آن ارتباط خوبی برقرار نمی‌کنند. برای حل سؤالات مدار در کنکور، نیاز به چند مهارت دارید که به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

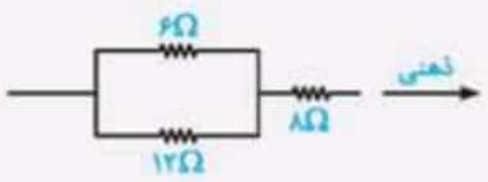
مهارت ۱: باید بتوانید مقاومت معادل در شکل‌های ساده را با تمرین، به‌صورت ذهنی محاسبه کنید. در انجام این کار، اعداد زیر را زیاد در کنکور مشاهده می‌کنید:

(به‌صورت ذهنی ⇐ اگر اندازهٔ یکی از مقاومت‌های موازی ۲ برابر دیگری بود، مقاومت معادل آن برابر است با مقاومت بزرگ‌تر بخش بر ۳).

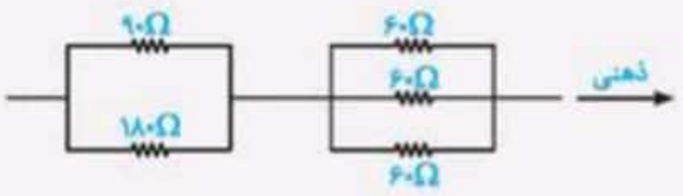
اعداد پر کاربرد $\Rightarrow 3\Omega , 6\Omega \xrightarrow{\text{اتصال موازی}} R_T=\frac{3\times 6}{3+6}=2\Omega$

اعداد پرکاربرد $\Rightarrow 6\Omega , 12\Omega \xrightarrow{\text{اتصال موازی}} R_T=\frac{6\times 12}{6+12}=4\Omega$

اعداد پرکاربرد $\Rightarrow 3n , 6n \xrightarrow{\text{اتصال موازی}} R_T=2n$



$$\begin{cases} 6\Omega,12\Omega \xrightarrow{\text{موازی}} R_1=4\Omega\left(\frac{\text{عدد بزرگ}}{3}\right) \\ 8\Omega,R_1 \xrightarrow{\text{متوالی}} R_T=12\Omega \end{cases}$$



$$\begin{cases} 90\Omega,180\Omega \xrightarrow{\text{موازی}} R_1=60\Omega\left(\frac{\text{عدد بزرگ}}{3}\right) \\ 60\Omega \text{ سه مقاومت موازی} \xrightarrow{\text{موازی}} R_2=\frac{R_*}{n}=\frac{60}{3}=20\Omega \\ R_2,R_1 \xrightarrow{\text{سری}} R_T=60\Omega+20\Omega=80\Omega \end{cases}$$

مهارت ۲: اگر می‌خواهید در سؤالات این فصل موفق عمل کنید، باید بتوانید بین دو مقاومت موازی به‌صورت ذهنی جریان را پخش کنید. در این‌جا می‌خواهیم به‌شما نشان دهیم که ما معلم‌ها چگونه این عمل را به‌صورت ذهنی انجام می‌دهیم:

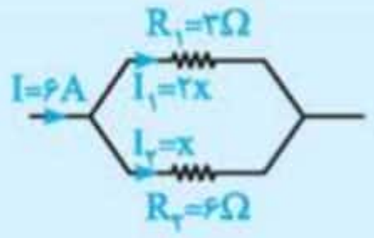
اتصال موازی : $V=RI$ (V یکسان) ↓↑

ترجمهٔ عبارت ریاضی: یعنی در شاخه‌های موازی، جریان بیشتر تمایل دارد، از مقاومتی عبور کند که مقدار کم‌تری دارد.

بیان سادهٔ تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی

R_2 می‌گوید ⇐ مقاومت من بزرگ‌تر است و من جریان کم‌تری را عبور می‌دهم، جریان من را x فرض کنید.

R_1 می‌گوید ⇐ مقاومت من نصف R_2 است $\left(\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{2}\right)$ و جریان عبوری از من دو برابر R_2 است، یعنی جریان من را $2x$ فرض کنید.



$$3x=6\Rightarrow x=2A$$
$$I_2=2A , I_1=4A$$

بیان دیگر : $V_1=V_2\Rightarrow R_1I_1=R_2I_2$

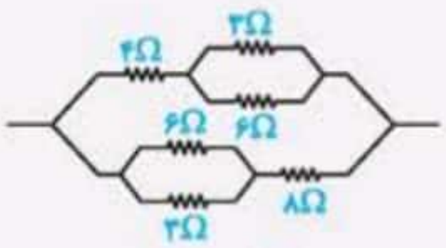
$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}\xrightarrow{I_1=x}\frac{I_1}{x}=\frac{6}{3}=2\Rightarrow I_1=2x$$

در ادامه با حل سه مدار، تلاش می‌کنیم نحوهٔ توزیع جریان را با شما مرور کنیم.

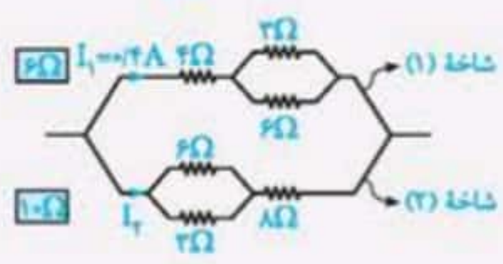
تمرین ۱ **در شکل روبه‌رو اگر جریانی به شدت ۰/۴ آمپر از مقاومت ۴ اهمی بگذرد، از مقاومت ۸ اهمی چند آمپر می‌گذرد؟**

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۸

۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۶۶



پاسخ در این گونه از سؤالات، ابتدا مقاومت معادل هر شاخه را به‌صورت ذهنی محاسبه کرده و در مستطیل آبی‌رنگ سمت چپ می‌نویسیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود این مدار دو شاخهٔ موازی دارد و جریان عبوری از مقاومت ۸ اهمی، همان جریان شاخهٔ ۲ (I_2) است.



gajmarket.com

با توجه به مقاومت‌های به‌دست آمده برای هر شاخه، مقاومت شاخهٔ (۲)، $\frac{۱۰}{۶}$ برابر شاخهٔ (۱) است $\left(\frac{۱۰\Omega}{۶\Omega}\right)$ و جریان شاخهٔ (۲)، $\frac{۶}{۱۰}$ برابر جریان شاخهٔ (۱) است، زیرا:

$$V = \uparrow R \; I \downarrow \quad \text{یکسان}$$

($\frac{۱۰}{۶}$ برابر، $\frac{۶}{۱۰}$ برابر)

بنابراین جریان شاخهٔ (۲) برابر است با:

$$I_۲ = \frac{۶}{۱۰} I_۱ \xrightarrow{I_۱ = ۰/۴A} I_۲ = \frac{۶}{۱۰} \times ۰/۴ = ۰/۲۴\,A \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

درک بهتر: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جریان از شاخهٔ با مقاومت بزرگ‌تر، کم‌تر عبور می‌کند (مانند این‌که بگوییم در مقایسهٔ دو مسیر برای رانندگی، اتومبیل‌ها از جادهٔ با پستی بلندی زیاد و نامناسب، کم‌تر عبور می‌کنند).

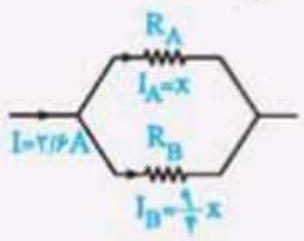
تمرین۲ قطر مقطع دو سیم مسی A و B به‌ترتیب ۰/۲mm و ۰/۳mm است و طول این دو سیم با هم برابر است. این دو سیم به‌طور موازی به اختلاف پتانسیل الکتریکی بسته شده‌اند و از مجموعه جریان ۲/۶۰ آمپر می‌گذرد. شدت جریان عبوری از سیم A چند آمپر است؟ (تجربی خارج ۸۸)

۱) ۰/۸۰ ۲) ۱/۰۴ ۳) ۱/۵۶ ۴) ۱/۸۰

پاسخ ابتدا به مقایسهٔ مقاومت دو سیم A و B می‌پردازیم:

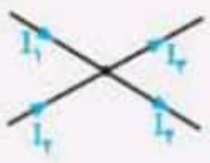
$$R = \rho\frac{L}{A} = \rho\frac{L}{\frac{\pi D^۲}{۴}} \xrightarrow{\text{طول یکسان}} \frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^۲ \Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{۰/۲}{۰/۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$$

حال اگر دو سیم را به صورت موازی به یکدیگر متصل کرده و جریان ۲/۶A از مدار بگذرد، داریم:



$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{I_A = x} I_B = \frac{۹}{۴}x$$

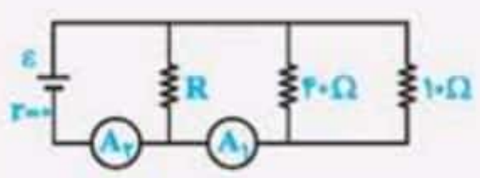
$$I_A + I_B = ۲/۶\,A \rightarrow x + \frac{۹}{۴}x = ۲/۶\,A \rightarrow x = ۰/۸\,A \rightarrow I_A = x = ۰/۸\,A \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$



تذکر در هر گره از مدار، جمع جریان‌های ورودی به گره، با جریان‌های خروجی از آن گره برابر است. این قانون ساده، **قانون جریان** نام دارد.

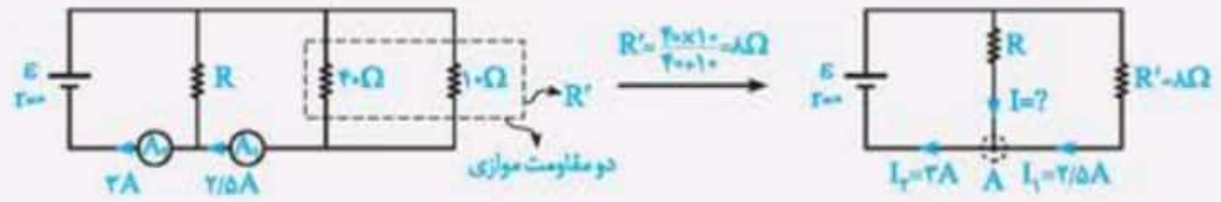
$$I_۱ + I_۲ = I_۳ + I_۴$$

تمرین۳ در مدار زیر آمپرسنج‌های $A_۱$ و $A_۲$ به ترتیب عددهای ۲/۵A و ۳A را نشان می‌دهند. مقاومت معادل مدار چند اهم است؟ (آمپرسنج‌ها ایده‌آل فرض شوند.) (تجربی داخل ۸۸)



۱) ۳۰ ۲) ۸ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $\frac{۴۰}{۳}$

پاسخ **گام اول:** ابتدا مدار را به‌شکل زیر ساده می‌کنیم:



حال با توجه به اعداد آمپرسنج‌ها، با نوشتن قانون جریان در گرهٔ A، جریان عبوری از مقاومت R را به‌دست می‌آوریم:

$$۳ = I + ۲/۵ \Rightarrow I = ۰/۵\,A$$

گام دوم: با توجه به این‌که جریان I یک پنجم جریان $I_۱$ است، بنابراین مقاومت این شاخه ۵ برابر R' است، زیرا داریم:

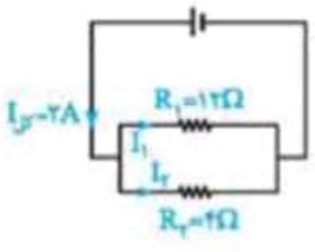
$$\frac{R'}{R} = \frac{I}{I_۱} = \frac{۰/۵}{۲/۵} = \frac{۱}{۵} \xrightarrow[R=۵R']{R'=۸\Omega} R = ۵ \times ۸ = ۴۰\Omega$$

(جریان ۵ برابر و مقاومت $\frac{۱}{۵}$ برابر است.)

گام سوم: مقاومت معادل این مدار برابر است با:

$$R' \Rightarrow R_T = \frac{RR'}{R + R'} = \frac{۴۰ \times ۸}{۴۰ + ۸} = \frac{۲۰}{۳}\Omega \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

R و R' موازی هستند.



مدار را به شکل مقابل رسم می‌کنیم (مقاومت معادل شاخهٔ بالایی ۱۲Ω و مقاومت معادل شاخهٔ پایینی ۴Ω است)، در این سؤال اگر جریان شاخهٔ بالایی را x فرض کنیم، جریان شاخهٔ پایینی برابر با ۳x است.

تذکر

با توجه به این‌که در اتصال موازی مقاومت‌ها، ولتاژ آن‌ها یکسان است، داریم:

$$\text{یکسان } V = RI \xrightarrow[\text{است. } R_1]{\text{برابر } \frac{1}{3}\text{، } R_2} I_2 = 3I_1$$

به‌عبارت دیگر در مقاومت‌های موازی، جریان با مقاومت رابطهٔ عکس دارد:

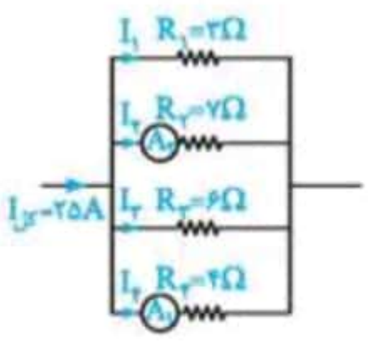
$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{12}{4} \xrightarrow{I_1 = x} I_2 = 3x$$

از طرفی مجموع جریان در شاخه‌ها برابر با جریان کل ($I_{\text{کل}}$) است و می‌توان نوشت:

$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 \xrightarrow[I_2 = 3x]{I_{\text{کل}} = 2A \text{ ، } I_1 = x} 2 = x + 3x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow I_2 = 3x = 1/5\,A$$

۳ ۱۵۳۸ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۱۵۳۹ این سؤال، مهارت پخش جریان در مقاومت‌های موازی را در شما تقویت می‌کند. با توجه به شکل زیر، اگر جریان I_3 را برابر با x فرض کنیم، جریان شاخه‌های دیگر به شکل زیر به‌دست می‌آید:



$$\begin{cases} \frac{I_3}{I_1} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \xrightarrow[I_1 = 2I_3]{I_3 = x} I_1 = 2x \\ \frac{I_3}{I_2} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{7}{6} \xrightarrow[I_2 = \frac{6}{7}I_3]{I_3 = x} I_2 = \frac{6}{7}x \\ \frac{I_3}{I_4} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \xrightarrow[I_4 = \frac{3}{2}I_3]{I_3 = x} I_4 = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

در ادامه می‌توان نوشت:

$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \Rightarrow 25 = 2x + \frac{6}{7}x + x + \frac{3}{2}x \xrightarrow{\text{دو طرف تساوی را در عدد ۱۴ ضرب می‌کنیم.}} 350 = 75x \Rightarrow x = \frac{14}{3}A$$

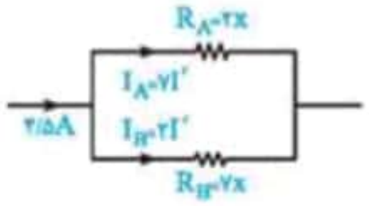
بنابراین اعدادی که آمپرسنج‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهد برابر است با:

$$\begin{cases} \text{عدد آمپرسنج ۱}: I_4 = \frac{3}{2}x \xrightarrow{x = \frac{14}{3}} I_4 = \frac{3}{2} \times \frac{14}{3} = 7A \\ \text{عدد آمپرسنج ۲}: I_2 = \frac{6}{7}x = \frac{6}{7} \times \frac{14}{3} = 4A \end{cases} \Rightarrow I_4 - I_2 = 3A$$

۲ ۱۵۴۰ در مقایسهٔ مقاومت دو سیم A و B، با توجه به یکسان بودن طول و سطح مقطع این دو سیم داریم:

$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{1/6 \times 10^{-8}}{5/6 \times 10^{-8}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \begin{cases} \text{مقاومت A} = 2x \\ \text{مقاومت B} = 7x \end{cases}$$

در شکل روبه‌رو شدت جریان I_A برابر است با:



$$7I' + 2I' = 4/5A \Rightarrow I' = 0/5A \xrightarrow{I_A \text{ جریان}} I_A = 7 \times 0/5 = 3/5A$$

تذکر

در مقاومت‌های موازی، شدت جریان هر مقاومت با مقاومت آن رابطهٔ عکس دارد، یعنی اگر نسبت مقاومت‌ها ۲ به ۷ است، نسبت شدت جریان‌ها ۷ به ۲ است.

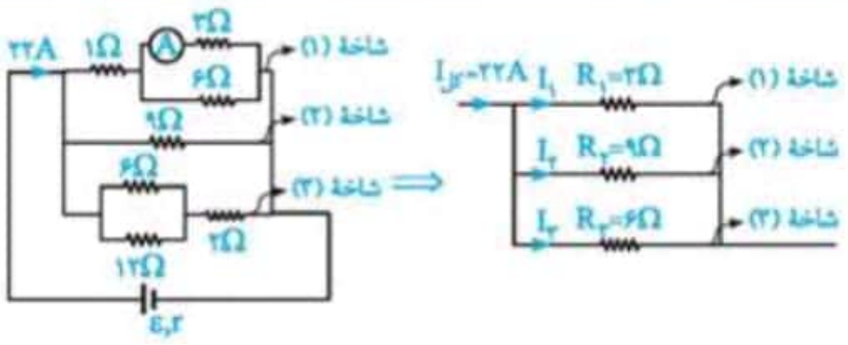
۱ ۱۵۴۱ در این سؤال، دو سیم توپر A و B به صورت موازی بوده و داریم:

رابطهٔ (I): $\xrightarrow{R = \frac{V}{I}} \frac{R_B}{R_A} = \frac{I_A}{I_B} = \frac{\frac{I}{3}}{\frac{2I}{3}} = \frac{1}{2}$ در مقاومت‌های موازی، اختلاف پتانسیل یکسان است.

حال با توجه به رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$، می‌توان نوشت:

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{L_B}{L_A} \times \frac{A_A}{A_B} \xrightarrow[\frac{R_B}{R_A} = \frac{1}{2}]{\text{رابطهٔ (I)}} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{A_A}{A_B} \Rightarrow \frac{A_A}{A_B} = \frac{3}{2}$$

gajmarket.com



۲ ۱۵۴۲ **گام اول:** این مدار از سه شاخهٔ موازی تشکیل شده است، ابتدا مقاومت معادل هر شاخه را به طور ذهنی به‌دست آورده و مدار را ساده می‌کنیم:

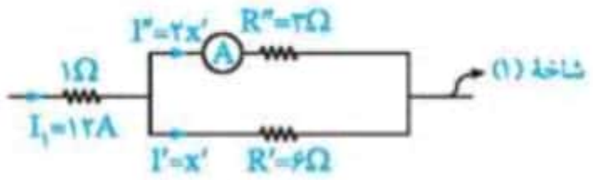
گام دوم: اگر جریان I_2 را x فرض کنیم (بهتر است جریان شاخه‌ای که مقاومت بزرگ‌تری دارد را x فرض کنیم)، جریان بقیهٔ شاخه‌ها به شکل مقابل است:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\xrightarrow[I_1=3I_2]{I_2=x} I_1=3x \;,\; \frac{I_2}{I_3}=\frac{R_3}{R_2}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\xrightarrow[I_3=\frac{3}{2}I_2]{I_2=x} I_3=\frac{3}{2}x$$

گام سوم: مجموع جریان شاخه‌ها برابر با جریان کل است:

$$I_{کل}=I_1+I_2+I_3 \xrightarrow[I_2=x\;,\;I_3=\frac{3}{2}x]{I_{کل}=22A\;,\;I_1=3x} 22=3x+x+\frac{3}{2}x\Rightarrow x=4A\Rightarrow \text{جریان شاخهٔ (۱)}: I_1=3x=12A$$

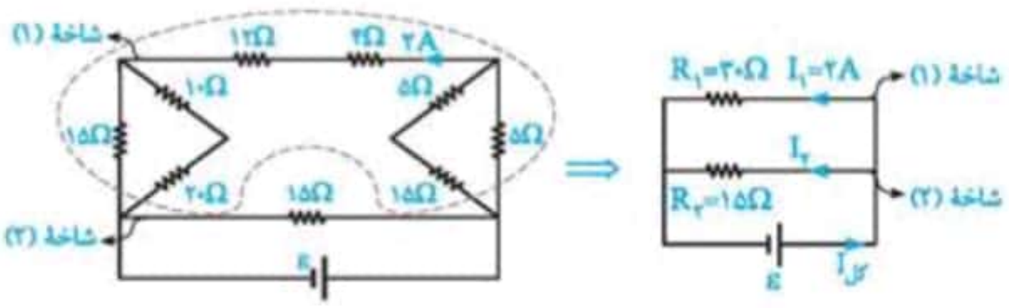
گام چهارم: شاخهٔ (۱) را جداگانه رسم می‌کنیم. در این حالت اگر جریان مقاومت ۶ اهمی را x' فرض کنیم، جریان مقاومت ۳ اهمی برابر $2x'$ است:



$$\Rightarrow R''=\frac{1}{2}R'\Rightarrow I''=2I'$$

$$I_1=I'+I''\xrightarrow[I''=2x']{I_1=12A\;,\;I'=x'} 12=x'+2x'\Rightarrow x'=4A\Rightarrow \text{عدد آمپرسنج}: I''=8A$$

۴ ۱۵۴۳ این مدار از دو شاخهٔ موازی تشکیل شده است، ابتدا مقاومت معادل هر شاخه را به‌دست آورده و مدار را مطابق شکل ساده می‌کنیم:



از طرفی دقت کنیم که جریان شاخهٔ (۱) برابر جریان عبوری از مقاومت ۴ اهمی است و داریم:

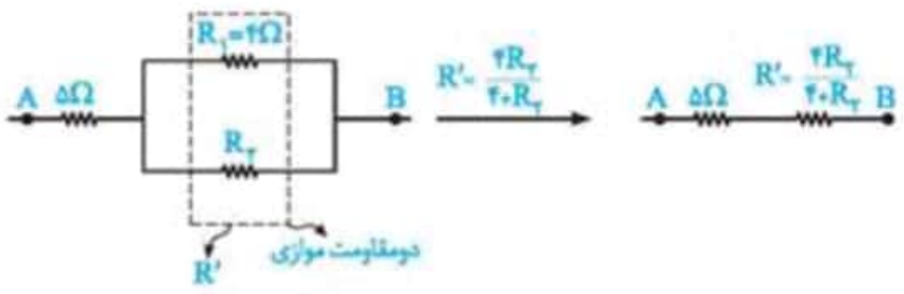
$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}\xrightarrow[I_2=2I_1]{I_1=2A} I_2=2\times 2=4A$$

در ادامه می‌توان گفت مجموع جریان شاخه‌ها، برابر با جریانی است که از مولد می‌گذرد:

$$I_{کل}=I_1+I_2\xrightarrow[I_2=4A]{I_1=2A} I_{کل}=2+4=6A$$

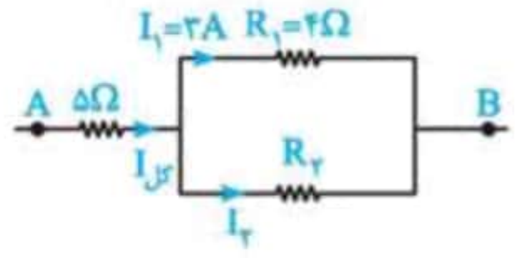
* اگر مهارت‌های مقاومت معادل‌گیری را خوب یاد گرفته باشید، به سادگی می‌توانید مقاومت شاخهٔ بالایی را حساب کنید. به‌عنوان تمرین، نشان دهید که مقاومت معادل شاخهٔ بالایی ۳۰Ω است.

۲ ۱۵۴۴ **گام اول:** ابتدا با ساده‌کردن مدار، مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:



$$R_{AB}=5+\frac{4R_2}{4+R_2}\xrightarrow[R_{AB}=8\Omega]{\text{صورت سؤال}} R_2=12\Omega \;:\; \text{مقاومت معادل بین A و B}$$

گام دوم: جریان در هر یک از شاخه‌ها را به‌دست می‌آوریم:



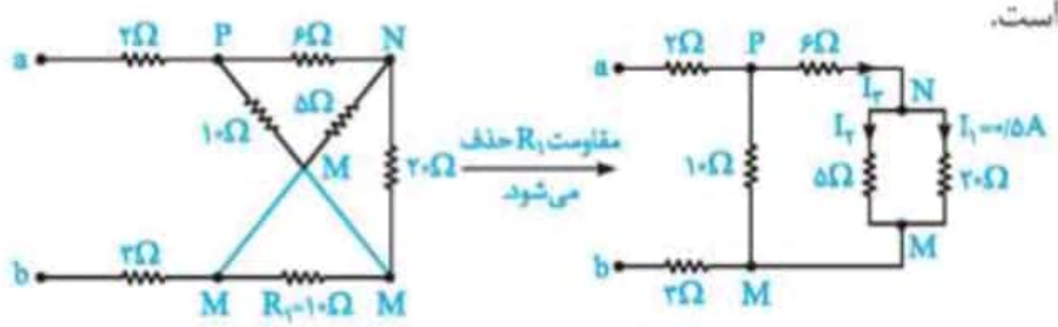
$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{12}{4}=3\xrightarrow[I_2=\frac{1}{3}I_1]{I_1=3A} I_2=\frac{1}{3}\times 3=1A\Rightarrow I_{کل}=I_1+I_2=3+1=4A$$

بنابراین جریان $I_{کل}$، چهار برابر جریان عبوری از مقاومت R_2 (یعنی I_2) است.

کمی ذهنی عمل می‌کنیم: مقاومت R_2، ۳ برابر R_1 است و جریان در آن $\frac{1}{3}$ برابر I_1 است، یعنی $I_2=1A$.

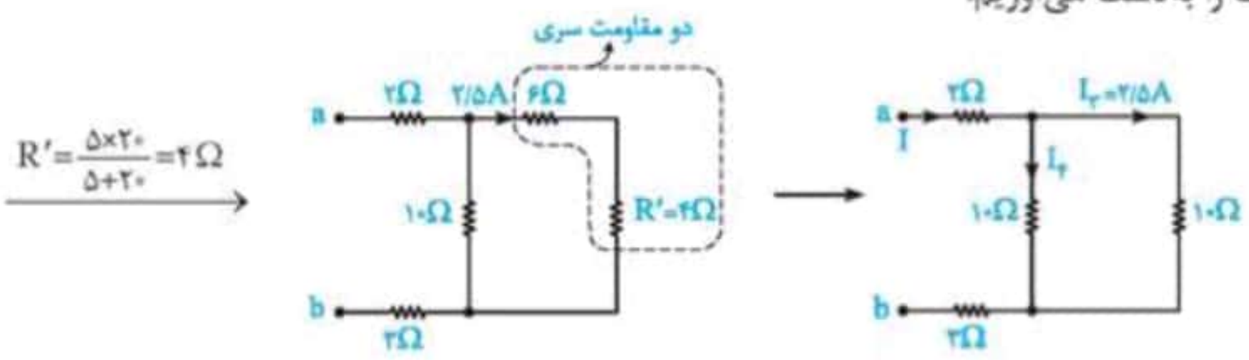
۳ ۱۵۴۵ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴ ۱۵۴۶ در شکل مقابل، دو سر مقاومت ۱۰ اهمی پایینی اتصال کوتاه شده (دو سر آن هم‌نام شده است) و این مقاومت از مدار حذف می‌شود. از طرفی مقاومت‌های ۵ و ۲۰ اهمی با هم موازی‌اند و مدار ساده شده به‌صورت مقابل است:



با توجه به موازی بودن مقاومت‌های ۵Ω و ۲۰Ω، شدت جریان مقاومت ۵Ω، ۴ برابر مقاومت ۲۰ اهمی بوده و برابر ۲A می‌باشد (چرا؟) و در نتیجه جریان عبوری از کل شاخهٔ سمت راست برابر $I_3=I_1+I_2=2/5A$ می‌باشد.

حال مقاومت معادل شاخهٔ سمت راست را به‌دست می‌آوریم:



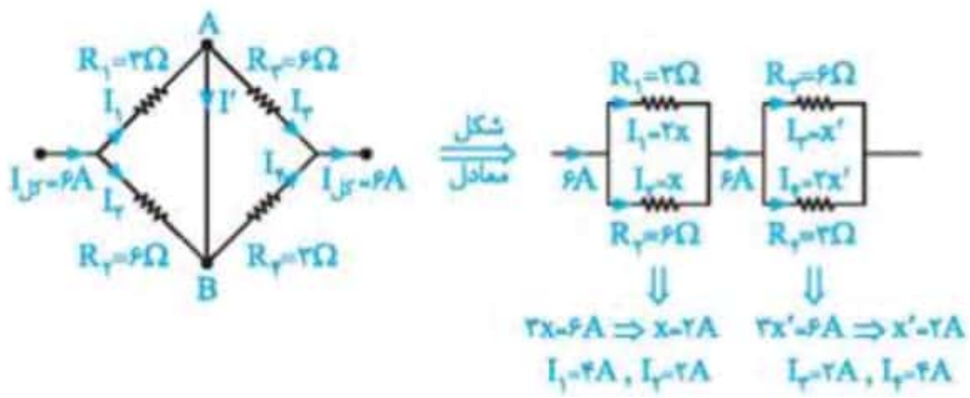
دو مقاومت ۱۰ اهمی در شکل جدید با هم موازی‌اند و چون اندازهٔ آن‌ها با هم برابر است، $I_۴ = ۲/۵\,A$ است. بنابراین جریان کل عبوری از مقاومت ۲ اهمی برابر $I = I_۳ + I_۴ = ۵A$ است.

۳ ۱۵۴۷ ابتدا مدار را ساده می‌کنیم:

توجه

با توجه به این‌که مقاومت آمپرسنج ایده‌آل صفر است، می‌توان آن را از مدار حذف کرد و به‌جای آن یک سیم بدون مقاومت قرار داد.

ابتدا سعی می‌کنیم شکل را کمی ساده‌تر کنیم و جریان مقاومت‌ها را به‌دست آوریم. با توجه به شکل معادل اگر جریان $I_۲$ را x فرض کنیم، جریان $I_۱$ برابر با ۲x است. (زیرا مقاومت $R_۱$، نصف مقاومت $R_۲$ بوده و جریان آن دو برابر است). مشابه با همین رویکرد را در مورد $I_۳$ و $I_۴$ نیز انجام می‌دهیم:



تذکر

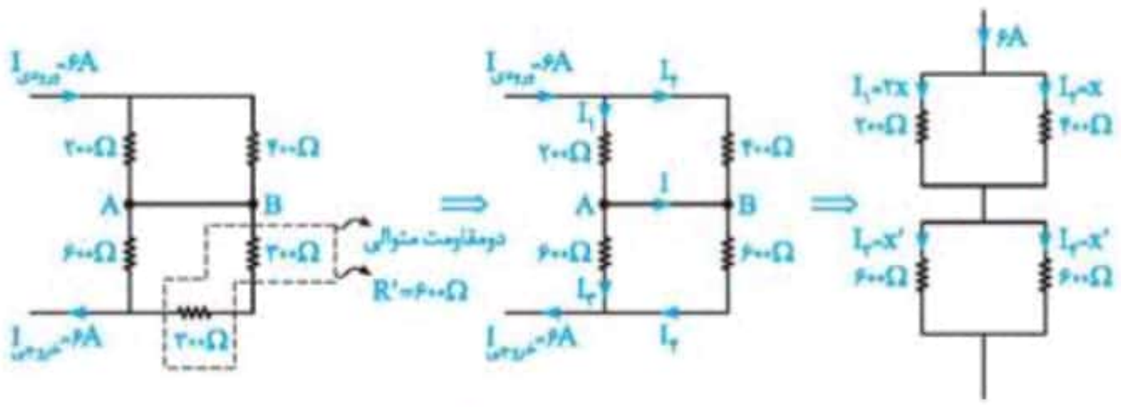
امیدواریم که بعد از حل ده‌ها تست متوالی در زمینهٔ پخش جریان در مقاومت‌های موازی، شما نیز این روند را به صورت ذهنی انجام دهید. مجدداً تأکید می‌کنیم که یکی از رمزهای موفقیت در این فصل، ذهنی انجام دادن پخش جریان در مقاومت‌های موازی است.

پس از محاسبهٔ $I_۱$ و $I_۲$، برای گرهٔ A در شکل سمت چپ، قانون جریان را می‌نویسیم:

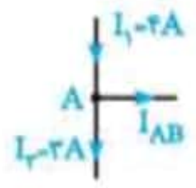
(عدد آمپرسنج) $I_۱ = I' + I_۲ \Rightarrow$ مجموع جریان‌های خروجی از A = مجموع جریان‌های ورودی به A $\Rightarrow ۴ = I' + ۲ \Rightarrow I' = ۲A$ $\xrightarrow[I_۲=۲A]{I_۱=۴A}$

بنابراین جریان عبوری از آمپرسنج ۲A است و از نقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B می‌باشد.

۲ ۱۵۴۸ دقیقاً مشابه با سؤال قبل عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۶A \Rightarrow x = ۲A \Rightarrow I_۱ = ۲x = ۴A \\ ۲x' = ۶A \Rightarrow x' = ۳A \Rightarrow I_۳ = x' = ۳A \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow I_{AB} = ۴ - ۳ = ۱A$

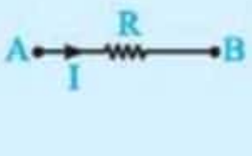
۱ ۱۵۴۹ مشابه با دو سؤال قبل، به سادگی می‌توان نشان داد که عدد آمپرسنج برابر صفر است.

gajmarket.com

۱۵۵۰ ۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

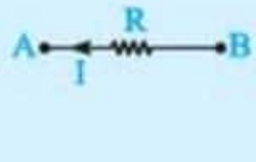
خلاصه نکات ۷ **آشنایی با تکنیک پتانسیل‌نویسی بین نقاط مختلف یک مدار** (تست‌های ۱۵۵۰ تا ۱۵۶۶)

در خلاصه نکات قبل، شما را با نحوهٔ پخش جریان بین مقاومت‌های یک مدار آشنا کردیم. در این خلاصه نکات به بررسی سؤالاتی خواهیم پرداخت که علاوه بر پخش جریان، نیاز به نوشتن عملیات پتانسیل‌نویسی بین نقاط مختلف مدار را دارد. نکتهٔ مهمی که باید به آن توجه کنیم این است که هنگام عبور از مقاومت R و در جهت جریان، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ RI کاهش می‌یابد و بالعکس. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید:



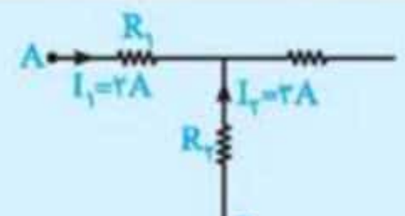
$V_A \ominus RI = V_B$

در جهت جریان از R عبور کردیم.



$V_A \oplus RI = V_B$

در خلاف جهت جریان از R عبور کردیم.



$V_A \ominus R_1I_1 \oplus R_2I_2 = V_B$

درخلاف جهت جریان از R_2 عبور کردیم.

در جهت جریان از R_1 عبور کردیم.

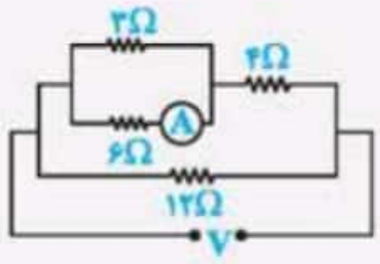
تذکر در هر گره از مدار، جمع جریان‌های ورودی به گره، با جریان‌های خروجی از آن گره برابر است. این قانون ساده، **قانون جریان** نام دارد.



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

در ادامه با حل چند تمرین، مفاهیم مطرح شده را بیشتر بررسی می‌کنیم:

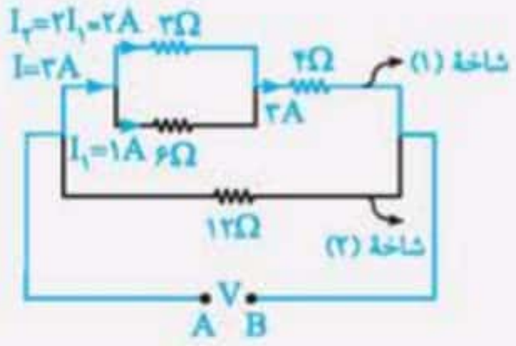
تمرین۱ **در شکل روبه‌رو، آمپرسنج عبور جریان یک آمپر را نشان می‌دهد. ولتاژ دو سر مدار (V) چند ولت است؟**



۱) ۱۴ ۲) ۱۶

۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ این سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



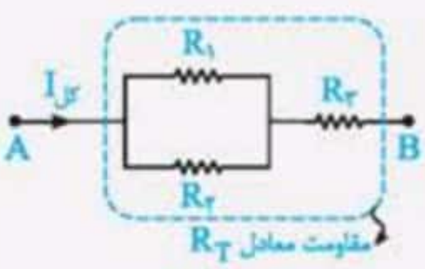
روش اول: با توجه به این‌که مقاومت‌های ۳ و ۶ اهمی با یک‌دیگر موازی‌اند، جریان I_2 دو برابر جریان I_1 است (چرا؟) و جریان در کل شاخهٔ بالایی ۳A است. در ادامه با حرکت از A تا B در مسیر آبی شده، به سادگی $V_A - V_B$ (ولتاژ دو سر مدار) به‌دست می‌آید:

$$V_A - \underbrace{3\times2}_{\text{یا } (6\times1)} - 4\times3 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 18V$$ (گزینهٔ ۳)

روش دوم: مقاومت معادل شاخهٔ بالایی برابر $R_{T_1} = 6\Omega$ می‌باشد (چرا؟) و جریان کل عبوری از شاخهٔ بالایی برابر $I_{\text{کل}_1} = 3A$ است. از طرفی ولتاژ دو سر این شاخه برابر V_{AB} می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_{AB} = R_{T_1} I_{\text{کل}_1} = 6\times3 = 18V$$

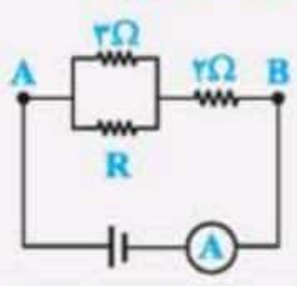
بررسی یک ایدهٔ کاربردی: ایدهٔ جالبی که به‌عنوان یک روش دیگر برای پاسخ دادن به سؤالات این قسمت می‌تواند استفاده شود، از قانون اهم به‌دست می‌آید. به‌طور مثال در مدار مقابل می‌توان نوشت:



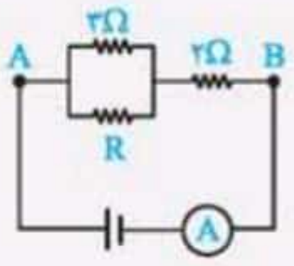
$$R_T = \frac{V_{AB}}{I_{\text{کل}}}$$

کاربرد این ایده را در تمرین بعد خواهید دید.

تمرین۲ **در شکل مقابل آمپرسنج ۳ آمپر را نشان می‌دهد. اگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B برابر ۱۲ ولت باشد، مقاومت R چند اهم است؟** (ریاضی خارج ۸۶)



۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

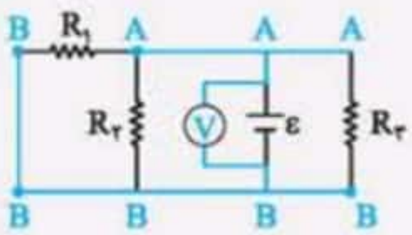


پاسخ ابتدا مقاومت معادل مدار را از رابطهٔ $V = RI$ به‌دست می‌آوریم:

$$V_{AB} = R_T I_{کل} \xrightarrow[V_{AB}=۱۲V]{I_{کل}=۳A} ۱۲ = R_T \times ۳ \Rightarrow R_T = ۴\Omega$$

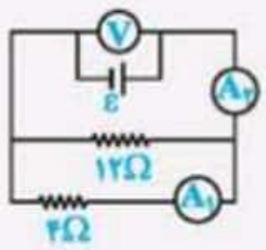
$$R_T = \frac{۳R}{۳+R} + ۲ \xrightarrow{R_T=۴\Omega} ۴ = \frac{۳R}{۳+R} + ۲ \Rightarrow R = ۶\Omega \quad (گزینهٔ ۱)$$

در ادامه می‌خواهیم به شما دو ایدهٔ جالب در برخورد با دو نوع از سؤالات را آموزش دهیم:



ایدهٔ ۱: اگر در مداری ولت‌سنج به دو سر مقاومت‌ها متصل شده باشد، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها را نشان می‌دهد. تشخیص این موضوع گاهی اوقات شاید مشکل به نظر برسد، ولی اگر از دو سر ولت‌سنج، سیم‌های رسم شده مستقیماً به دو سر مقاومت‌ها متصل شده باشد، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل آن‌ها را نشان خواهد داد. به‌طور مثال در شکل مقابل ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر هریک از مقاومت‌های $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ را نشان می‌دهد.

برای درک بهتر ایدهٔ فوق، به تمرین زیر توجه کنید:

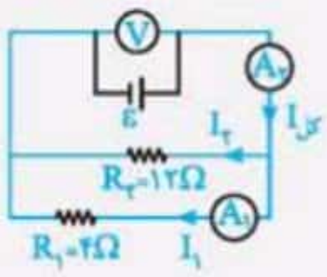


تمرین ۳ در مدار شکل روبه‌رو اگر ولت‌سنج ۱۲ ولت را نشان دهد، آمپرسنج‌های $A_۱$ و $A_۲$ به‌ترتیب از راست به چپ چند آمپر را نشان می‌دهند؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۲ و ۱

۳) ۳ و ۴ ۴) ۴ و ۳

پاسخ با توجه به شکل زیر و سیم‌های آبی شده که مستقیماً از دو سر ولت‌سنج به دو سر مقاومت‌ها می‌رسد، ولت‌سنج به دو سر مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ متصل است، بنابراین می‌توان جریان‌های عبوری از آن‌ها را به کمک رابطهٔ $V = RI$، به صورت جداگانه محاسبه کرد:

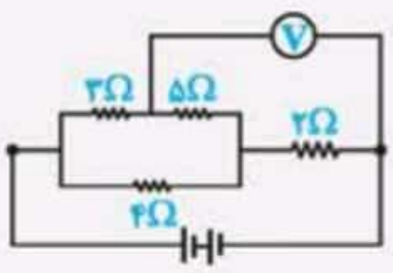


$$\begin{cases} V = R_۱ I_۱ \xrightarrow[R_۱=۴\Omega]{V=۱۲V} ۱۲ = ۴ I_۱ \Rightarrow I_۱ = ۳A \quad (عدد\ آمپرسنج\ ۱) \\ V = R_۲ I_۲ \xrightarrow[R_۲=۱۲\Omega]{V=۱۲V} ۱۲ = ۱۲ I_۲ \Rightarrow I_۲ = ۱A \end{cases}$$

$$I_{کل} = I_۱ + I_۲ \xrightarrow[I_۲=۱A]{I_۱=۳A} I_{کل} = ۳ + ۱ = ۴A \quad (عدد\ آمپرسنج\ ۲)$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

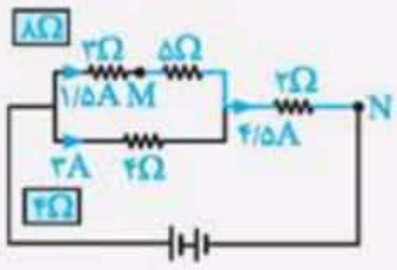
ایدهٔ ۲: هرگاه اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطهٔ دلخواه از یک مدار را بخواهیم محاسبه کنیم، از یکی از آن نقاط حرکت کرده و با نوشتن قانون پتانسیل‌نویسی به نقطهٔ دوم می‌رسیم. برای درک بهتر این ایده به تمرین زیر توجه کنید.



تمرین ۴ در شکل روبه‌رو، اگر از مقاومت ۳Ω شدت جریان ۱/۵ آمپر عبور کند، ولت‌سنج عدد چند ولت را نشان می‌دهد؟ (M.K.A)

۱) ۲۷ ۲) ۱۲

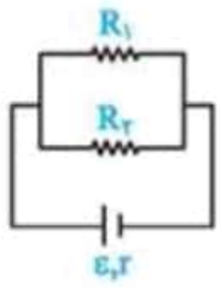
۳) ۱۶/۵ ۴) ۱۸/۵



پاسخ به شکل مقابل توجه کنید. دو سر ولت‌سنج مورد نظر صورت سؤال، به دو نقطهٔ M و N متصل می‌باشد (دقت شود که چون از ولت‌سنج جریانی عبور نمی‌کند، گویی در مدار حضور ندارد). از طرفی جریان در شاخهٔ پایینی، ۲ برابر شاخهٔ بالایی است (چرا؟ ⇐ زیرا مقاومت شاخهٔ پایینی نصف شاخهٔ بالایی است) و جریان کل برابر ۴/۵A است. در ادامه با حرکت از نقطهٔ M تا نقطهٔ N داریم:

$$V_M - ۵ \times ۱/۵ - ۲ \times ۴/۵ = V_N \Rightarrow \text{عدد ولت‌سنج} : V_M - V_N = ۱۶/۵V \quad (گزینهٔ ۳)$$

با توجه به ایده‌آل بودن ولت‌سنج‌ها و آمپرسنج‌ها، شکل سادهٔ مدار به‌صورت مقابل است:



همان‌طور که مشخص است اختلاف پتانسیل دو مقاومت یکسان و برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌باشد (دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ با هم موازی هستند).

از طرفی طبق پخش جریان بین مقاومت‌های موازی، می‌دانیم که جریان در مقاومت‌های موازی با مقدار مقاومت رابطهٔ عکس دارد. بنابراین شدت جریان در مقاومت $R_۱$ بیشتر است، چون $R_۱ < R_۲$ می‌باشد. پس آمپرسنج $A_۱$ مقدار جریان بیشتری را نشان می‌دهد.

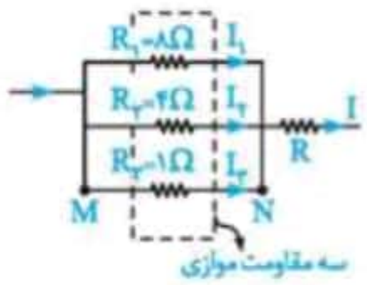
gajmarket.com

۲ ۱۵۵۱ ابتدا مقاومت معادل سمت چپ مدار را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{R_T}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱}\Rightarrow R'_T=\frac{۸}{۱۱}\Omega$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ $V=RI$، جریان I را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{MN}=R'_T I \xrightarrow[R'_T=\frac{۸}{۱۱}\Omega]{V_{MN}=۴V} ۴=\frac{۸}{۱۱}\times I\Rightarrow I=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵A$$



خلاقیت‌های حرفه‌ای

ولتاژ دو سر مقاومت معادل سه مقاومت موازی در بالا، همان V_{MN} می‌باشد (چرا؟!).

$$I_۱=\frac{V_{MN}}{R_۱}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}A\ ,\ I_۲=\frac{V_{MN}}{R_۲}=\frac{۴}{۴}=۱A\ ,\ I_۳=\frac{V_{MN}}{R_۳}=\frac{۴}{۱}=۴A$$

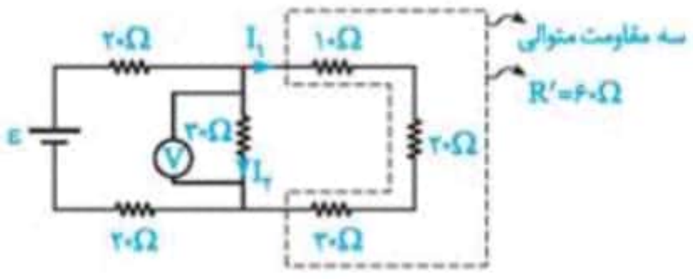
$$I=I_۱+I_۲+I_۳=۵/۵A$$

۱ ۱۵۵۲ ابتدا مدار را ساده می‌کنیم، با توجه به این‌که ولت‌سنج ۱۲ ولت را نشان می‌دهد و با استفاده از رابطهٔ $V=RI$، جریان $I_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

عدد ولت‌سنج : $V=RI_۲ \xrightarrow[R=۳۰\Omega]{V=۱۲} ۱۲=۳۰I_۲\Rightarrow I_۲=\frac{۱۲}{۳۰}=\frac{۴}{۱۰}A$

$$\frac{I_۱}{I_۲}=\frac{۳۰}{R'}\Rightarrow I_۱=\frac{۱}{۲}I_۲ \xrightarrow{I_۲=۰/۴A} I_۱=\frac{۱}{۲}\times ۰/۴=۰/۲A$$

($R'=۶۰\Omega$)

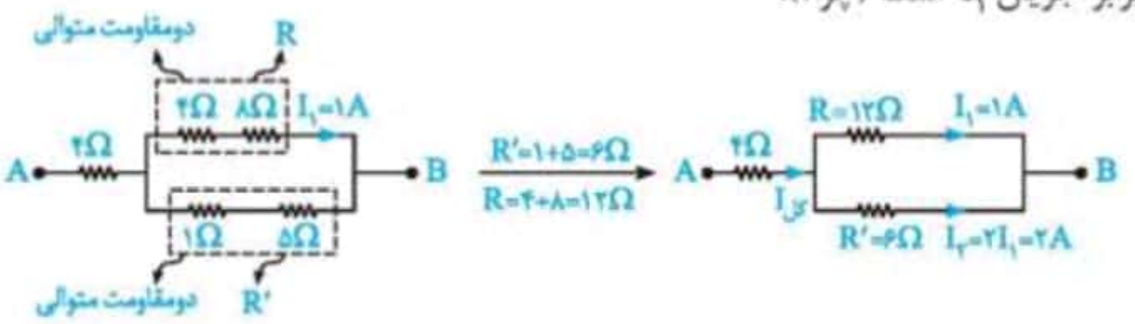


۲ ۱۵۵۳ ابتدا مدار را ساده می‌کنیم، توجه شود که جریان $I_۲$، ۲ برابر جریان $I_۱$ است (چرا؟!):

$$I_{کل}=I_۱+I_۲ \xrightarrow[I_۲=۲A]{I_۱=۱A} I_{کل}=۱+۲=۳A$$

$$R_T=۴+\frac{۱۲\times ۶}{۱۲+۶}\Rightarrow R_T=۴+۴=۸\Omega$$

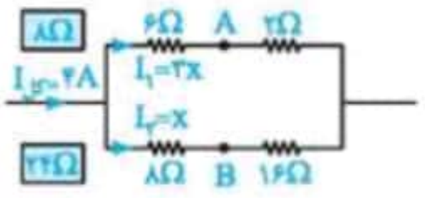
$$\Rightarrow V_{AB}=R_T I_{کل}=۲۴V$$



نگاه دیگر: برای محاسبهٔ V_A-V_B (اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B)، از نقطهٔ A حرکت کرده و به سمت نقطهٔ B می‌رویم (از مسیر مقاومت ۴Ω و ۱۲Ω عبور کرده‌ایم):

$$V_A-۴I_{کل}-۱۲I_۱=V_B\Rightarrow V_A-V_B=۴\times ۳+۱۲\times ۱=۲۴V$$

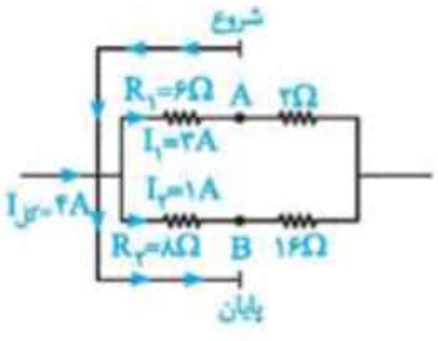
۳ ۱۵۵۴ مقاومت معادل شاخهٔ بالا ۸Ω و مقاومت معادل شاخهٔ پایین ۲۴Ω است، بنابراین مقاومت شاخهٔ بالا $\frac{۱}{۳}$ برابر شاخهٔ پایین است و جریان در شاخهٔ بالا، ۳ برابر شاخهٔ پایین است:



$$\Longrightarrow I_{کل}=I_۱+I_۲\Rightarrow ۴=۳x+x\Rightarrow x=۱\Rightarrow\begin{cases}I_۱=۳A\\I_۲=۱A\end{cases}$$

در ادامه از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و رابطهٔ بین اختلاف پتانسیل‌ها را می‌نویسیم تا به نقطهٔ B برسیم:

(در خلاف جهت جریان از $R_۱$ عبور کردیم و در جهت جریان از $R_۲$ عبور کردیم.)



$$V_A+R_۱I_۱-R_۲I_۲=V_B\Rightarrow V_A+۶\times ۳-۸\times ۱=V_B$$

$$\Rightarrow V_B-V_A=۱۰V$$ (اختلاف پتانسیل بین A و B)

* به نظر شما چه‌طور می‌توان از همان ابتدا مشخص کرد که پتانسیل نقطهٔ A بیشتر است یا B؟

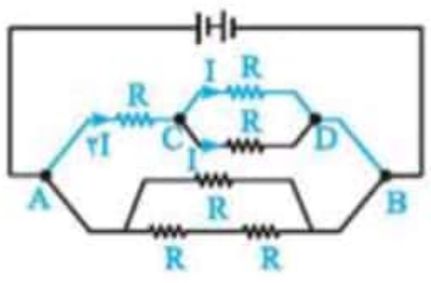
۲ ۱۵۵۵ به دلیل هم‌نام شدن دو سر مقاومت ۱۲Ω، این مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. حال سه مقاومت ۳Ω، ۲Ω و ۶Ω با یکدیگر موازی‌اند و با رسم یک شکل ساده‌تر، داریم:



اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B برابر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۶ اهمی می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_{AB}=RI=۶\times ۲=۱۲V$$

۲ ۱۵۵۶ اگر جریان یکی از مقاومت‌های بین C و D را I فرض کنیم، جریان دیگری نیز برابر I است و جریان شاخهٔ بالایی برابر ۲I است. برای حل یک بار از A تا B و یک بار از C تا D حرکت می‌کنیم:



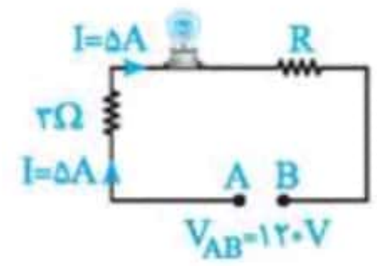
$$\text{حرکت از C تا D} \Rightarrow V_C - RI = V_D \Rightarrow V_C - V_D = RI = V$$

$$\text{حرکت از A تا B} \Rightarrow V_A - R\times 2I - R\times I = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 3RI = 3V$$

دقت: نقاط B و D هم‌پتانسیل‌اند یعنی $V_B = V_D$.

۳ ۱۵۵۷ با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴ ۱۵۵۸ با توجه به شکل روبه‌رو، ولتاژ دو سر مقاومت R برابر است با:

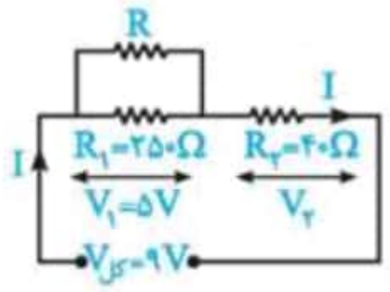


$$V_A - 3\times I - R_{\text{لامپ}}\times I - RI = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 3I + R_{\text{لامپ}} I + RI$$

ولتاژ دو سر لامپ = ۸۰ ولت

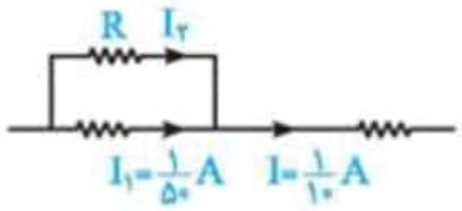
$$\Rightarrow 120 = 3\times 5 + 80 + R\times 5 \Rightarrow R = 5\Omega$$

۴ ۱۵۵۹ **گام اول:** ابتدا ولتاژ مقاومت ۴۰ اهمی و جریان در مدار را به‌دست می‌آوریم:



$$V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 \xrightarrow[V_1 = 5V]{V_{\text{کل}} = 9V} 9 = 5 + V_2 \Rightarrow V_2 = 4V \Rightarrow I = \frac{V_2}{R_2} = \frac{4}{40} = 0/1A$$

گام دوم: چون دو مقاومت R و ۲۵۰Ω با هم موازی هستند، بنابراین ولتاژ آن‌ها یکسان است. بنابراین جریان مقاومت ۲۵۰Ω برابر $I_1 = \frac{5}{250} = \frac{1}{50}A$ می‌باشد.

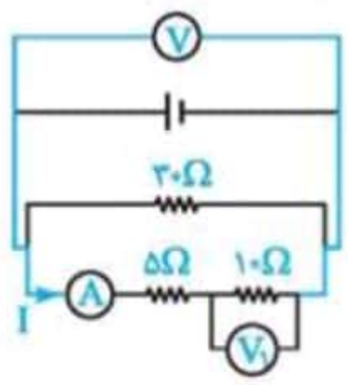


$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{50} + I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{50} = \frac{4}{50}A = 0/08A$$

گام سوم: بنابراین با توجه به روابط زیر، تعداد الکترون‌های عبوری از مقاومت R در مدت یک ثانیه برابر است با:

$$q = ne = It \Rightarrow n = \frac{It}{e} = \frac{0/08\times 1}{1/6\times 10^{-19}} = 5\times 10^{17}$$

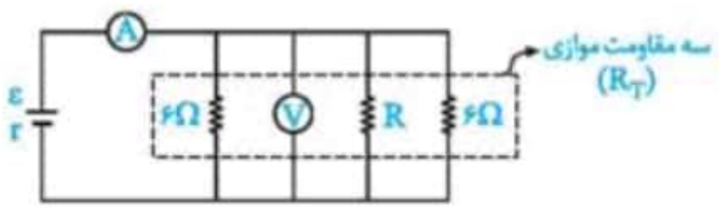
۴ ۱۵۶۰ مقاومت معادل ۵Ω و ۱۰Ω، برابر ۱۵Ω است. در ادامه با توجه به شکل مقابل و با توجه به سیم‌های آبی شده، مشخص می‌شود که ولت‌سنج به دو سر مقاومت ۱۵ اهمی متصل است و ولتاژ دو سر آن را نشان می‌دهد، بنابراین از رابطهٔ V = RI جریان عبوری از آمپرسنج را محاسبه می‌کنیم:



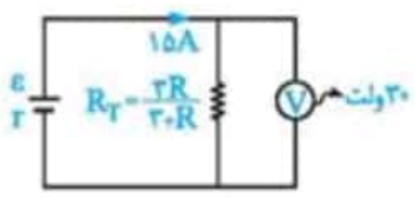
$$V = RI \xrightarrow[R=15\Omega]{V=15V} 15 = 15I \Rightarrow I = 1A \xrightarrow{\text{عدد ولت‌سنج } V_1} V_1 = 10\times 1 = 10V$$

۳ ۱۵۶۱ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۵۶۲ ابتدا مقاومت معادل مدار را به‌دست می‌آوریم (دقت شود که ولت‌سنج نقشی در مدار ندارد):



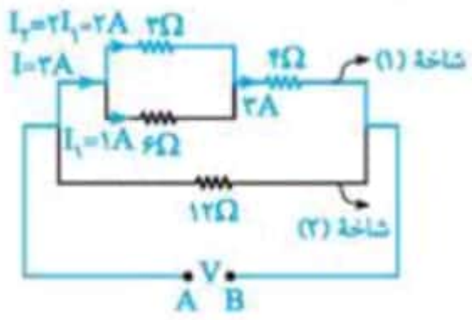
$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{6} + \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \rightarrow R_T = \frac{3R}{3+R}$$



مقاومت R را از رابطهٔ V = RI به‌دست می‌آوریم:

$$V = R_T I \xrightarrow[R_T = \frac{3R}{3+R}]{V=30V,\ I=15A} 30 = \frac{3R}{3+R}\times 15 \Rightarrow R = 6\Omega$$

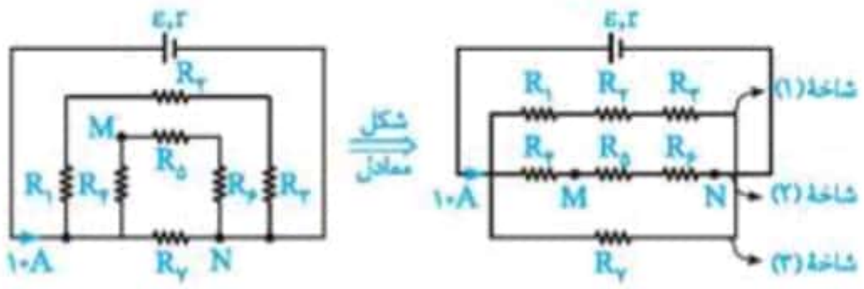
۳ ۱۵۶۳ با توجه به این‌که مقاومت‌های ۳ و ۶ اهمی با یکدیگر موازی‌اند، جریان I_2 دو برابر جریان I_1 است (چرا؟) و جریان در کل شاخهٔ بالایی ۳A است. در ادامه با حرکت از A تا B در مسیر آبی شده، به سادگی $V_A - V_B$ (ولتاژ دو سر مدار) به‌دست می‌آید:



$$V_A - 3\times 2 - 4\times 3 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 18V$$

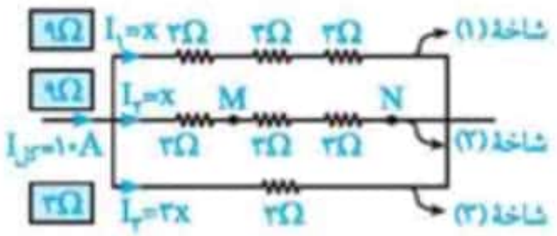
(۶×۱) یا

۱ ۱۵۶۴ ابتدا ولت‌سنج را از مدار حذف می‌کنیم و دو سر آن را با نقاط M و N نام‌گذاری می‌کنیم. حال تلاش می‌کنیم شکل ساده‌تری را برای مدار رسم کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر R_5 و R_6 را نشان می‌دهد:



www.gajmarket.com

در ادامه با توجه به این‌که مقاومت‌ها مشابه‌اند، مقاومت معادل هر شاخه را در سمت چپ آن در یک مستطیل آبی‌رنگ می‌نویسیم:

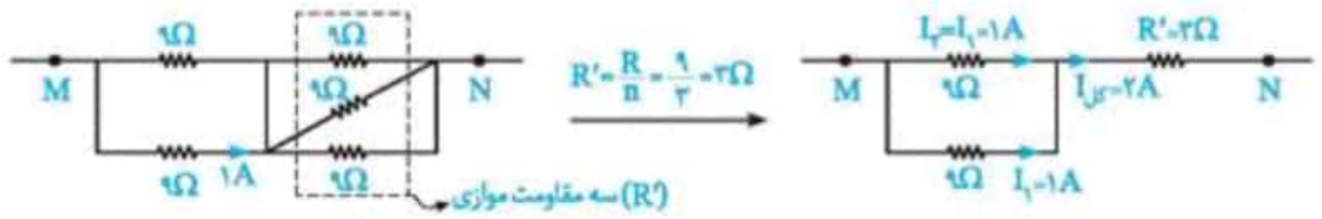


اگر جریان I_1 را x فرض کنیم، جریان I_2 نیز برابر با x است و جریان I_3 برابر با $3x$ می‌باشد (در مقاومت‌های موازی، جریان با مقاومت رابطهٔ عکس دارد):

$$I_{کل}=I_1+I_2+I_3 \xrightarrow[I_1=I_2=x]{I_{کل}=۱۰A\ ,\ I_3=۳x} ۱۰=x+x+۳x \Rightarrow x=۲A$$

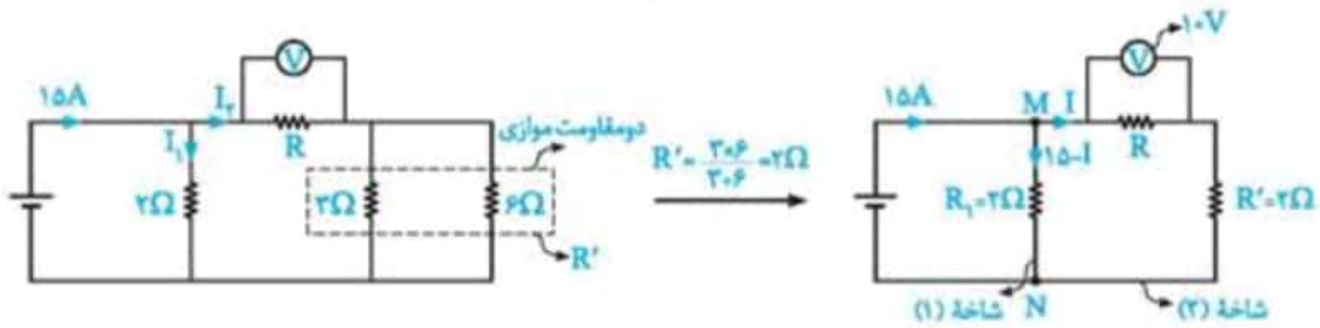
حرکت از M تا N : $V_M-R_5I_2-R_6I_2=V_N \xrightarrow{I_2=x=۲A} V_M-۳\times۲-۳\times۲=V_N \Rightarrow V_M-V_N=۱۲V$

۲ ۱۵۶۵ ابتدا مدار را کمی ساده‌تر می‌کنیم و سپس با حرکت از M تا N، حاصل V_M-V_N را به‌دست می‌آوریم:



حرکت از M تا N : $V_M-۹I_2-۳I_{کل}=V_N \Rightarrow V_M-V_N=۱۵V$

۱ ۱۵۶۶ ابتدا مدار را به‌شکل زیر ساده می‌کنیم. در ادامه اگر جریان مقاومت R و R' را I در نظر بگیریم، جریان مقاومت ۲Ω برابر $I-۱۵$ است:



با توجه به شکل فوق، اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ M و N برابر است با:

$$\begin{cases} \text{شاخهٔ (۱)} \rightarrow V_{MN}=R_1I_1=۲(۱۵-I) & (I) \\ \text{شاخهٔ (۲)} \rightarrow V_{MN}=V+R'I=۱۰+۲I & (II) \end{cases}$$

$$(I)\ و\ (II) \rightarrow ۲(۱۵-I)=۱۰+۲I \Rightarrow I=۵A$$

عدد ولت‌سنج : $V=RI \Rightarrow ۱۰=R\times۵ \Rightarrow R=۲\Omega$

۳ ۱۵۶۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

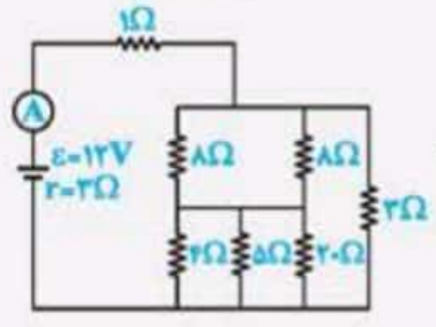
خلاصه نکات ۸ **محاسبهٔ جریان خروجی از یک باتری و توزیع آن در مدار** (تست‌های ۱۵۶۷ تا ۱۵۸۵)

به موارد زیر توجه کنید:

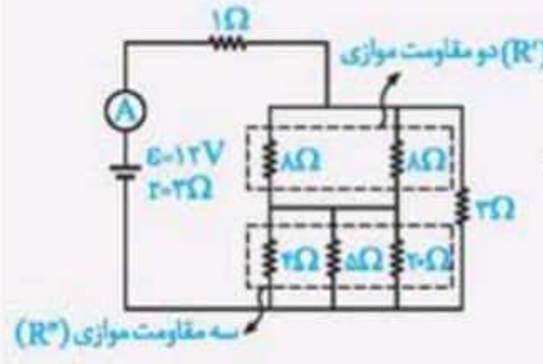
۱ در تست‌های (۱۵۶۷) تا (۱۵۷۴)، با سؤالات نسبتاً ساده‌ای روبه‌رو هستیم. در این سؤال‌ها، جریان خروجی از باتری خواسته شده است (بدون این‌که جریان در قسمتی از مدار داده شود) و برای حل باید، در گام اول مقاومت معادل مدار را به‌دست آورد و در گام دوم با کمک رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}$، جریان خروجی از باتری را محاسبه کرد. در این گونه از سؤالات، مقاومت معادل‌گیری مهم‌ترین کاری است که باید انجام شود.

تمرین۱ در شکل روبه‌رو آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲



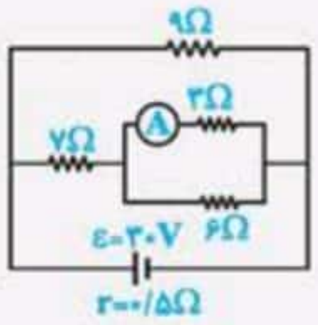
پاسخ برای حل نیاز است بتوانیم مقاومت معادل مدار را سریع حساب کنیم. به روند زیر دقت کنید:



$$\Rightarrow \begin{cases} ۸\Omega\ و\ ۸\Omega \xrightarrow{\text{موازی}} R'=\frac{۸}{۲}=۴\Omega \\ ۴\Omega\ ,\ ۵\Omega\ و\ ۲۰\Omega \xrightarrow{\text{موازی}} \frac{۱}{R''}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow R''=۲\Omega \\ R''\ و\ R' \xrightarrow{\text{سری}} R_1=۴+۲=۶\Omega \\ ۳\Omega\ ,\ R_1 \xrightarrow{\text{موازی}} R_2=\frac{۶\times۳}{۶+۳}=۲\Omega \\ R_T=۲\Omega+۱\Omega=۳\Omega \end{cases}$$

عدد آمپرسنج : $I=\frac{\varepsilon}{R_T+r} \xrightarrow[R_T=۳\Omega]{\varepsilon=۱۲V\ ,\ r=۳\Omega} I=\frac{۱۲}{۳+۳}=۲A$

۲ تست‌های (۱۵۷۵) تا (۱۵۸۵)، ادامهٔ سؤالات دستهٔ اول است. در این سؤالات ابتدا باید جریان خروجی از باتری را به‌دست آورد و سپس این جریان را بین مقاومت‌های مدار پخش کرد. در ادامه به تمرین زیر توجه شود.



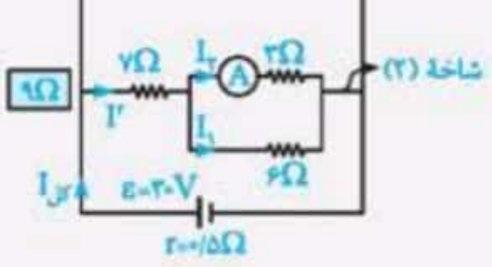
تمرین۲ در مدار الکتریکی شکل روبه‌رو آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ احتمالاً شما هم می‌توانید مقاومت معادل شاخهٔ پایین و مقاومت معادل کل مدار را به‌طور ذهنی محاسبه کنید. پس از محاسبهٔ مقاومت معادل جریان خروجی از باتری برابر است با:

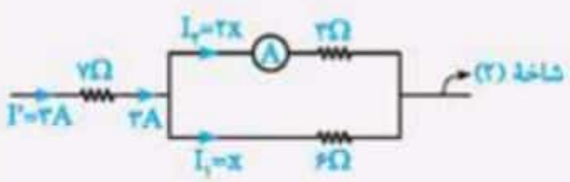
$$R_T = ۴/۵\Omega \Rightarrow I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۳۰}{۴/۵ + ۰/۵} = ۶\,A$$



حال باید جریان خروجی را بین شاخه‌ها پخش کنیم. با توجه به این‌که مقاومت معادل شاخه‌های (۱) و (۲) با یکدیگر برابرند (اعداد داخل مستطیل) یعنی جریان‌های I' و I'' نیز با یکدیگر برابرند و مقدار آن‌ها برابر است با:

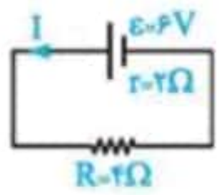
$$I' = I'' = \frac{I_{\text{کل}}}{۲} = ۳\,A$$

در ادامهٔ شاخهٔ (۲) را جداگانه رسم می‌کنیم و جریان‌های عبوری از مقاومت‌های ۳ اهمی و ۶ اهمی عبارت است از (اگر جریان مقاومت۶ اهمی را x فرض کنیم، جریان مقاومت ۳ اهمی، دو برابر آن است. یعنی $۲x$):



$$\Rightarrow ۳x = ۳\,A \Rightarrow x = ۱\,A \Rightarrow \text{عدد آمپرسنج} : I_۲ = ۲x = ۲\,A \quad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

برای بررسی این تست، ابتدا جریان جاری‌شده در مدار را محاسبه می‌کنیم:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow I = \frac{۶}{۴ + ۲} = ۱\,A$$

$$q = It \xrightarrow[t=۱s]{I=۱A} q = ۱ \times ۱ = ۱\,C \quad : \text{بار شارش شده در } ۱s$$

در ادامه تعداد الکترون‌های عبوری از مقطع سیم را به‌دست می‌آوریم:

$$q = ne \xrightarrow[e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C]{q=۱C} ۱ = n \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \Rightarrow n = ۶۲۵ \times ۱۰^{۱۶} = ۶/۲۵ \times ۱۰^{۱۸}$$

۳ ۱۵۶۸ آمپرسنج‌ها جریان خروجی از باتری را نشان می‌دهند. با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$ و یکسان بودن مقاومت درونی باتری‌ها، آمپرسنجی کم‌ترین عدد را نشان می‌دهد که مقاومت معادل مداری که در آن قرار دارد، بیشترین مقدار باشد (I با R_T رابطهٔ معکوس دارد).

در گزینهٔ (۳)، کم‌ترین جریان خروجی از باتری مشاهده می‌شود. $\xrightarrow{\text{در حالت سری } R_T \text{ بیش‌ترین مقدار را دارد.}} \downarrow I = \frac{\overset{\text{ثابت}}{\varepsilon}}{\uparrow R_T + \underset{\text{ثابت}}{r}}$

* به عنوان تمرین، مقاومت معادل در ۴ شکل را محاسبه کرده و اعدادی را که آمپرسنج‌های گزینه‌های (۱) تا (۴) نشان می‌دهند به‌ترتیب بزرگی مرتب کنید. (پاسخ: $I_۲ > I_۴ > I_۱ > I_۳$).

۱ ۱۵۶۹ این سؤال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر سه مقاومت R را به‌طور متوالی ببندیم، مقاومت معادل برابر $۳R$ شده و با توجه به جریان خروجی از باتری می‌توان نوشت:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[R_T = ۳R]{I = ۱/۵\,A\,,\ r = R} ۱/۵ = \frac{\varepsilon}{۳R + R} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{\varepsilon}{۴R} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} = ۶ \qquad \text{رابطهٔ (۱):}$$

حالت دوم: اگر سه مقاومت R را به‌طور موازی ببندیم، مقاومت معادل برابر $R'_T = \frac{R}{۳}$ می‌شود و داریم:

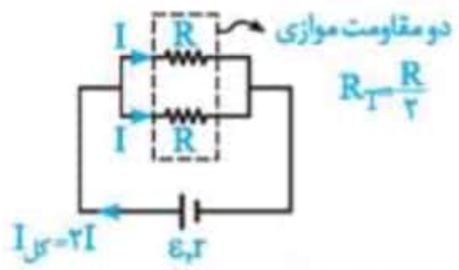
$$I' = \frac{\varepsilon}{R'_T + r} \xrightarrow[r = R]{R'_T = \frac{R}{۳}} I' = \frac{\varepsilon}{\frac{R}{۳} + R} = \frac{۳}{۴} \times \frac{\varepsilon}{R} \qquad \text{رابطهٔ (۲):}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱) و (۲)}} I' = \frac{۳}{۴} \times \frac{\varepsilon}{R} \xrightarrow{\frac{\varepsilon}{R} = ۶} \text{جریان خروجی از باتری در حالت دوم} : I' = \frac{۳}{۴} \times ۶ = ۴/۵\,A$$

gajmarket.com

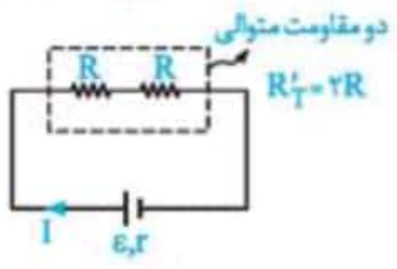
۲ ۱۵۷۰ مسأله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر دو مقاومت R موازی بسته شوند، مدار به‌شکل مقابل است. حال اگر جریان هر مقاومت را I فرض کنیم، جریان کل برابر ۲I است:



رابطهٔ (۱): $I_{کل}=2I=\dfrac{\varepsilon}{R_T+r}\xrightarrow{R_T=\frac{R}{2}}I_{کل}=2I=\dfrac{\varepsilon}{\frac{R}{2}+r}$

حالت دوم: اگر دو مقاومت متوالی بسته شوند، طبق صورت سؤال، شدت جریان عبوری از هر مقاومت مجدداً برابر I است و جریان کل نیز برابر I می‌باشد. در این حالت مدار به‌شکل مقابل است:

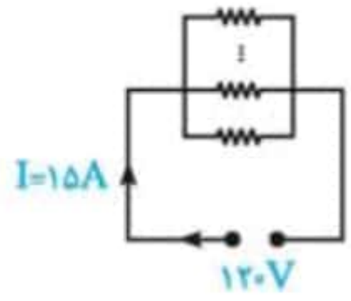


رابطهٔ (۲): $I=\dfrac{\varepsilon}{R'_T+r}\xrightarrow{R'_T=2R}I=\dfrac{\varepsilon}{2R+r}$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}\text{رابطهٔ (۱)}: I_{کل}=2I=\dfrac{\varepsilon}{\frac{R}{2}+r}\\ \text{رابطهٔ (۲)}: I=\dfrac{\varepsilon}{2R+r}\end{cases}\Rightarrow 2\times\frac{\cancel{\varepsilon}}{2R+r}=\frac{\cancel{\varepsilon}}{\frac{R}{2}+r}\Rightarrow r=R$$

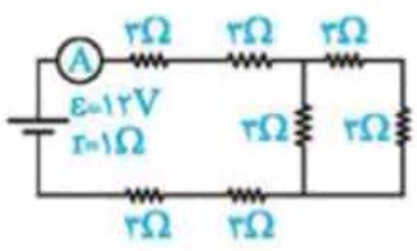
۳ ۱۵۷۱ در حالت موازی با اتصال تعداد مقاومت‌های یکسان، می‌توان جریان بیشتری را ایجاد کرد (زیرا مقاومت معادل در حالت اتصال موازی مقدار کمتری نسبت به اتصال‌های دیگر دارد). حال فرض کنید n مقاومت ۴۰ اهمی را به‌صورت موازی متصل کرده‌ایم، در این حالت شدت جریان باتری برابر است با:



$$R_T=\frac{40}{n}\quad,\quad I=\frac{V}{R_T}\Rightarrow 15=\frac{120}{\left(\frac{40}{n}\right)}\Rightarrow n=5$$

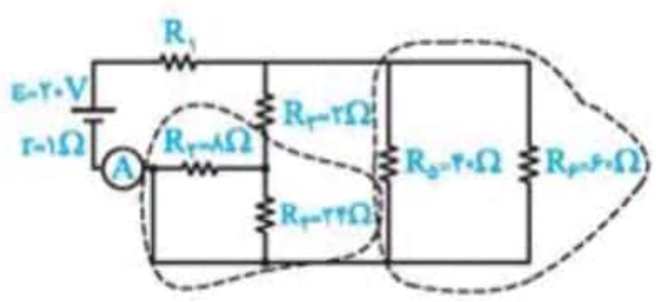
دقت: اگر n عدد صحیح به‌دست نیاید، این موضوع یعنی در حالت اتصال موازی نمی‌توان به خواستهٔ سؤال رسید.

۴ ۱۵۷۲ محاسبهٔ مقاومت معادل در این مدار کار بسیار ساده‌ای است و مقاومت معادل این مدار برابر ۱۴ اهم به‌دست می‌آید (تمرین برای دانش‌آموزان عزیز). در ادامه مقداری که آمپرسنج نشان می‌دهد (یعنی همان جریان خروجی از باتری) برابر است با:



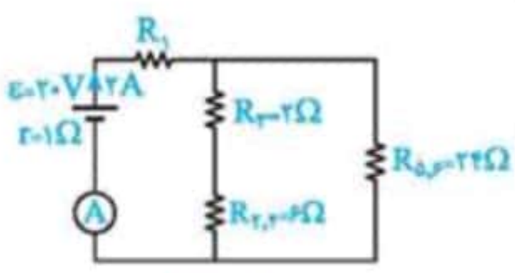
$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}\xrightarrow[R_T=14\Omega]{\varepsilon=12V\ ,\ r=1\Omega}I=\frac{12}{14+1}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}A$$

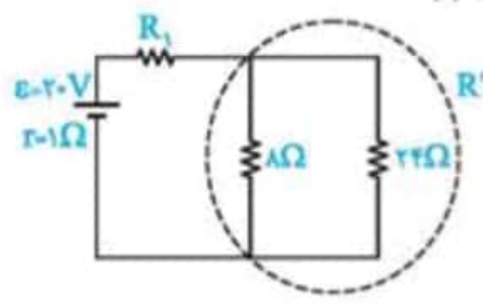
۱ ۱۵۷۳ برای محاسبهٔ جریان آمپرسنج (که همان جریان کل عبوری از باتری است)، ابتدا مقاومت معادل دو سر باتری را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که مقاومت‌های R_2 و R_4 به‌صورت موازی به هم بسته شده‌اند:



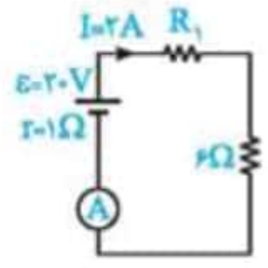
$$\begin{cases}R_5\text{ موازی با }R_6\Rightarrow R_{5,6}=\dfrac{60\times40}{60+40}=24\Omega\\ R_2\text{ موازی با }R_4\Rightarrow R_{2,4}=\dfrac{24\times8}{24+8}=6\Omega\end{cases}$$

و این مدار به‌صورت مقابل ساده می‌شود:



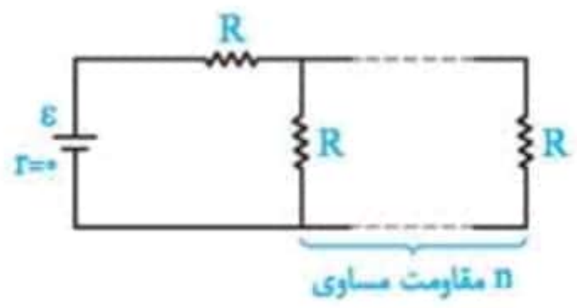


$$R'=\frac{24\times8}{24+8}=6\Omega$$



$$\text{جریان آمپرسنج}=I=\frac{\varepsilon}{r+(R_1+6)}\Rightarrow 2=\frac{20}{1+(R_1+6)}\Rightarrow R_1=3\Omega$$

۳ ۱۵۷۴ کافیست مقاومت معادل را در دو حالت داشته باشیم:



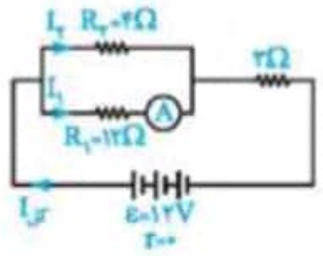
$$R_{T_2}=R+\frac{R}{n+1}\ ,\ R_{T_1}=R+\frac{R}{n}$$

$$I_2=\frac{16}{15}I_1\Rightarrow\frac{\varepsilon}{R_{T_2}+0}=\frac{16}{15}\frac{\varepsilon}{R_{T_1}+0}$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}}=\frac{15}{16}\Rightarrow\frac{R+\frac{R}{n+1}}{R+\frac{R}{n}}=\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{15}{16}\xrightarrow{\text{چک گزینه‌ها}}n=3$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

۱۵۷۵ ۲ ابتدا جریان کل I را با توجه به شکل مقابل به‌دست می‌آوریم:



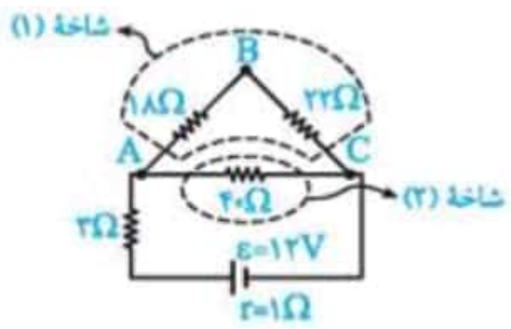
$$R_T=\frac{۴\times۱۲}{۴+۱۲}+۳=۶\Omega$$

$$I_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R_T+r}\Rightarrow I_{\text{کل}}=\frac{۱۲}{۶+۰}=۲A$$

حال باید جریان کل I را بین دو شاخهٔ (۱) و (۲) پخش کنیم. اگر جریان $I_۱$ را x فرض کنیم، جریان $I_۲$ برابر با $۳x$ می‌شود (چرا؟!) و داریم:

$$I_۱+I_۲=۲A\rightarrow x+۳x=۲A\rightarrow x=۰/۵A\rightarrow \text{عدد آمپرسنج}=I_۱=x=۰/۵A$$

۱۵۷۶ ۲ مقاومت معادل برابر است با:



$$\Rightarrow\begin{cases}۱۸\Omega \text{ و } ۲۲\Omega \xrightarrow{\text{سری}} R_۱=۴۰\Omega\\ ۴۰\Omega \text{ و } R_۱ \xrightarrow{\text{موازی}} R_۲=\frac{۴۰}{۲}=۲۰\Omega\\ ۳\Omega \text{ و } R_۲ \xrightarrow{\text{سری}} R_T=۲۰+۳=۲۳\Omega\end{cases}$$

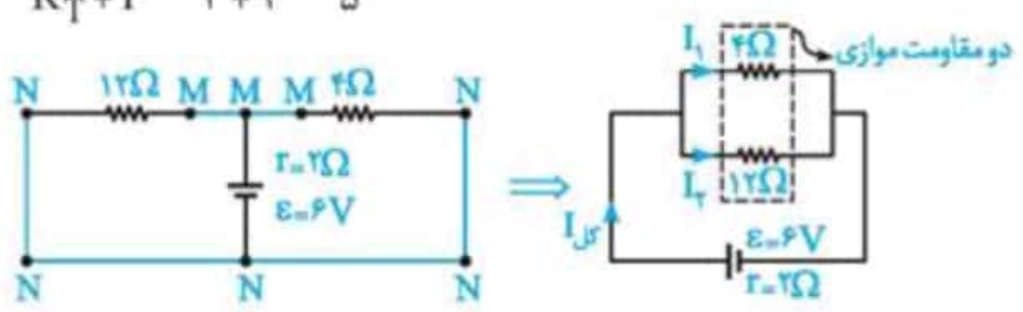
$$I_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R_T+r}\xrightarrow[R_T=۲۳\Omega]{\varepsilon=۱۲V\ ,\ r=۱\Omega} I_{\text{کل}}=\frac{۱۲}{۲۳+۱}=\frac{۱}{۲}A$$

حال باید جریان کل I را بین دو شاخهٔ (۱) و (۲) پخش کنیم. با توجه به این‌که مقاومت معادل شاخه‌های (۱) و (۲) با یک‌دیگر برابر است، بنابراین جریان آن‌ها نیز با یک‌دیگر برابر است:

$$I_۱=I_۲=\frac{۱}{۴}A\Rightarrow V_{AB}=۱۸I_۱=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵V$$

۱۵۷۷ ۳ با توجه به شکل زیر، دو مقاومت ۴ و ۱۲ اهمی با یک‌دیگر موازی‌اند که هر دو به دو سر باتری متصل شده‌اند (نقاط M و N)، بنابراین این مدار را می‌توان به صورت زیر ساده‌تر کرد:

$$R_T=\frac{۱۲\times۴}{۱۲+۴}=۳\Omega\Rightarrow I_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{۶}{۳+۲}=\frac{۶}{۵}A$$



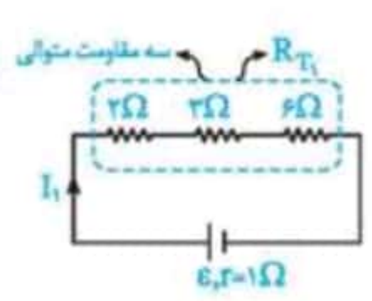
حال باید جریان کل را بین دو مقاومت پخش کنیم. در این مدار اگر جریان $I_۲$ را x فرض کنیم، جریان $I_۱$ برابر با $۳x$ است، بنابراین داریم:

$$I_{\text{کل}}=I_۱+I_۲\xrightarrow[I_۱=۳x]{I_{\text{کل}}=\frac{۶}{۵}A\ ,\ I_۲=x}\frac{۶}{۵}=۳x+x\Rightarrow x=\frac{۳}{۱۰}A$$

جریان مقاومت ۴ اهمی: $I_۱=۳x\xrightarrow{x=\frac{۳}{۱۰}} I_۱=۳\times\frac{۳}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}A$

۱۵۷۸ ۲ در هر دو حالت، مدار را بررسی می‌کنیم:

حالت متوالی:



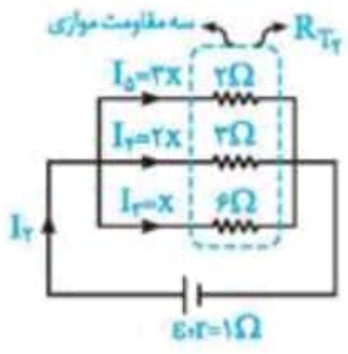
$$R_{T_۱}=۲+۳+۶=۱۱\Omega\ ,\ I_۱=\frac{\varepsilon}{R_{T_۱}+r}=\frac{\varepsilon}{۱۱+۱}=\frac{\varepsilon}{۱۲}$$

$$\text{جریان مقاومت ۲ اهمی در حالت متوالی}=I_۱=\frac{\varepsilon}{۱۲}$$

حالت موازی:

$$\frac{۱}{R_{T_۲}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳+۲+۱}{۶}=۱\Rightarrow R_{T_۲}=۱\Omega\ ,\ I_۲=\frac{\varepsilon}{R_{T_۲}+r}=\frac{\varepsilon}{۱+۱}=\frac{\varepsilon}{۲}$$

جریان $I_۲$ بین سه مقاومت موازی تقسیم می‌شود. اگر جریان مقاومت ۶ اهمی را x فرض کنیم، داریم:



$$I_۲=I_۳+I_۴+I_۵=x+۲x+۳x=۶x\Rightarrow x=\frac{۱}{۶}I_۲=\frac{۱}{۶}\left(\frac{\varepsilon}{۲}\right)=\frac{\varepsilon}{۱۲}$$

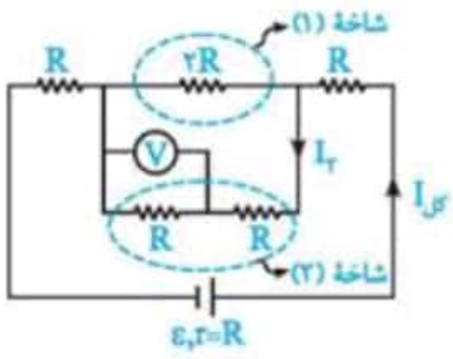
$$\text{جریان مقاومت ۲ اهمی در حالت موازی}=I_۵=۳x=۳\left(\frac{\varepsilon}{۱۲}\right)$$

بنابراین در مقایسهٔ دو حالت، داریم:

$$\Rightarrow\frac{I_۵}{I_۱}=\frac{۳\left(\frac{\varepsilon}{۱۲}\right)}{\frac{\varepsilon}{۱۲}}=۳$$

www.gajmarket.com

۳ ۱۵۷۹ **گام اول:** مقاومت معادل خارجی مدار برابر $R_T = 3R$ می‌باشد (چرا؟). بنابراین جریان کل مدار برابر است با:



$$I_{کل} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{\varepsilon}{3R + R} = \frac{\varepsilon}{4R}$$

گام دوم: از طرفی جریان عبوری از شاخهٔ پایین (شاخهٔ ۲)، نصف جریان کل مدار می‌باشد (چون مقاومت دو شاخهٔ ۱ و ۲ با هم برابر است).

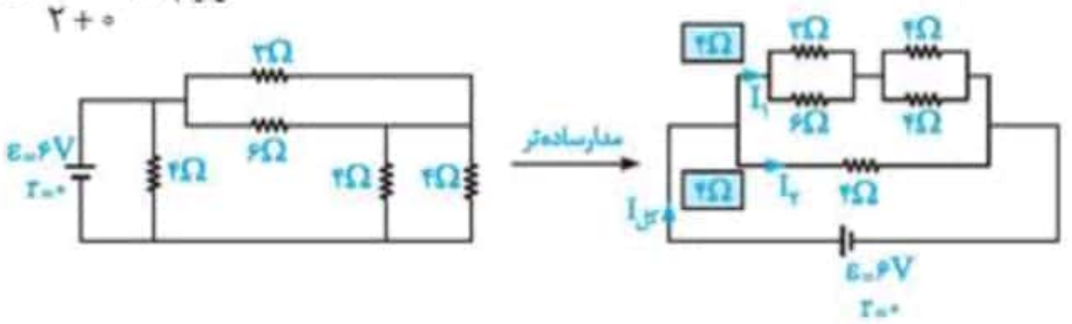
$$I_۲ = \frac{1}{2} I_{کل} = \frac{\varepsilon}{8R}$$

گام سوم: عدد ولت‌سنج برابر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R در شاخهٔ ۲ می‌باشد.

$$\text{عدد ولت‌سنج}: V = RI_۲ = R \times \frac{\varepsilon}{8R} = \frac{\varepsilon}{8} \Rightarrow \frac{V}{\varepsilon} = \frac{1}{8}$$

۱ ۱۵۸۰ **گام اول:** ابتدا مدار را ساده‌تر رسم می‌کنیم و جریان کل را به‌دست می‌آوریم:

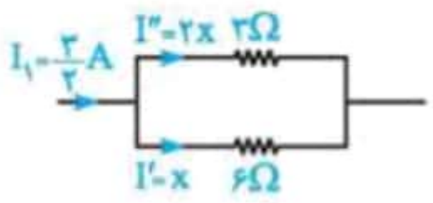
$$R_T = 2\Omega \Rightarrow I_{کل} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{6}{2 + 0} = 3A$$



گام دوم: جریان کل را بین دو شاخه پخش می‌کنیم. با توجه به برابر بودن مقاومت دو شاخه، جریان $I_۱$ و $I_۲$ با یک‌دیگر برابر است و داریم:

$$I_۱ = I_۲ = \frac{I_{کل}}{2} = \frac{3}{2} A$$

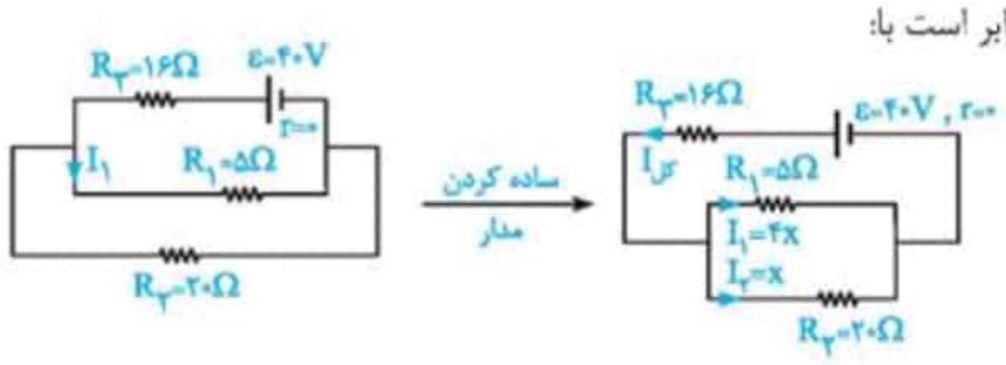
در ادامه، مقاومت‌های 3Ω و 6Ω از شاخهٔ بالایی را جداگانه رسم می‌کنیم:



$$I_۱ = x + 2x = \frac{3}{2} A \rightarrow x = \frac{1}{2} A$$

$$\text{جریان مقاومت ۶ اهمی}: I' = x = \frac{1}{2} A = 0/5\,A$$

۲ ۱۵۸۱ ابتدا مدار را کمی ساده‌تر رسم می‌کنیم. مقاومت معادل این مدار برابر است با:



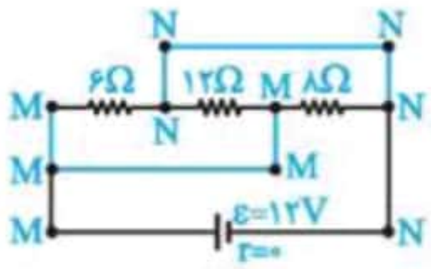
$$R_T = 16 + \frac{5 \times 20}{5 + 20} = 20\Omega$$

$$I_{کل} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{40}{20 + 0} = 2A$$

در ادامه اگر جریان $I_۲$ را x فرض کنیم، جریان $I_۱$ برابر با $4x$ است و داریم:

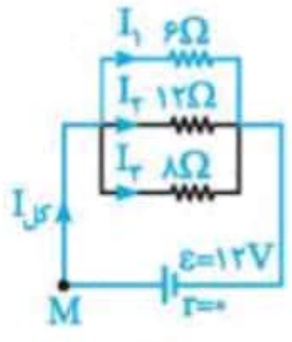
$$I_{کل} = I_۱ + I_۲ \Rightarrow 2 = 4x + x \Rightarrow x = \frac{2}{5} A \Rightarrow I_۱ = 4x = 1/6\,A$$

۲ ۱۵۸۲ از روی شکل مشاهده می‌شود که دو سر هر سه مقاومت به دو نقطهٔ M و N متصل است، بنابراین هر سه مقاومت با یک‌دیگر موازی‌اند و می‌توان مدار را به شکل سادهٔ مقابل رسم کرد. در ادامه با یک دور چرخیدن در مسیر آبی نشان داده شده در شکل (۲)، $I_۱$ به‌دست می‌آید:



$$V_M - 6I_۱ + 12 = V_M \Rightarrow I_۱ = 2A$$

نگاه دیگر: چون هر سه مقاومت موازی‌اند و مقاومت داخلی مولد صفر است ولتاژ $12V$ به هر سه مقاومت از جمله مقاومت ۶ اهمی می‌رسد، بنابراین جریان آن برابر است با:

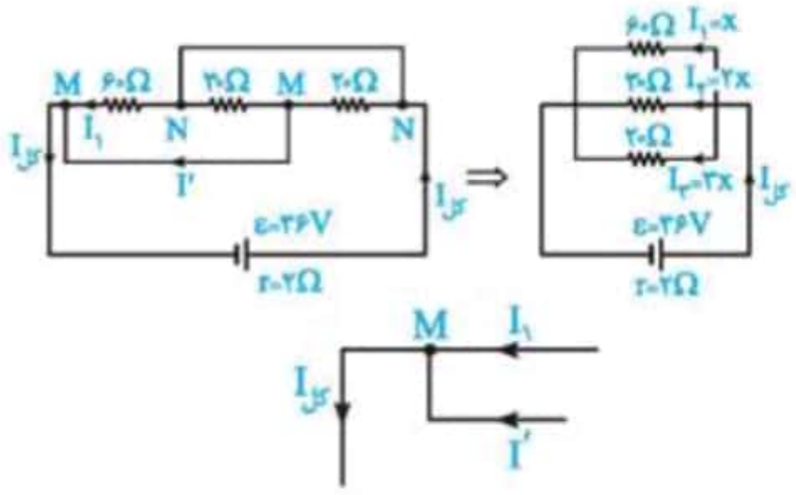


$$V = RI \Rightarrow 12 = 6 \times I \Rightarrow I = 2A$$

دقت کنید که اگر $r \neq 0$ باشد، دیگر نمی‌توانستیم از این روش استفاده کنیم، زیرا ولتاژ دو سر مقاومت‌ها دیگر برابر $12V$ نیست (این موضوع را در قسمت بعد بررسی می‌کنیم).

* به‌عنوان تمرین با محاسبهٔ $I_{کل}$ و پخش جریان بین سه مقاومت نیز این سؤال را حل کنید.

۳ ۱۵۸۳ مطابق شکل زیر، با نام‌گذاری گره‌های مدار، مشاهده می‌کنیم که هر سه مقاومت با هم موازی هستند. در ادامه برای محاسبهٔ جریان I'، باید جریان مقاومت 60Ω و جریان کل را محاسبه کنیم و در گرهٔ M در سمت چپ (یا سمت راست)، قانون جریان را بنویسیم:



$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{60}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{1+2+3}{60}=\frac{1}{10}\Rightarrow R_T=10\Omega$$

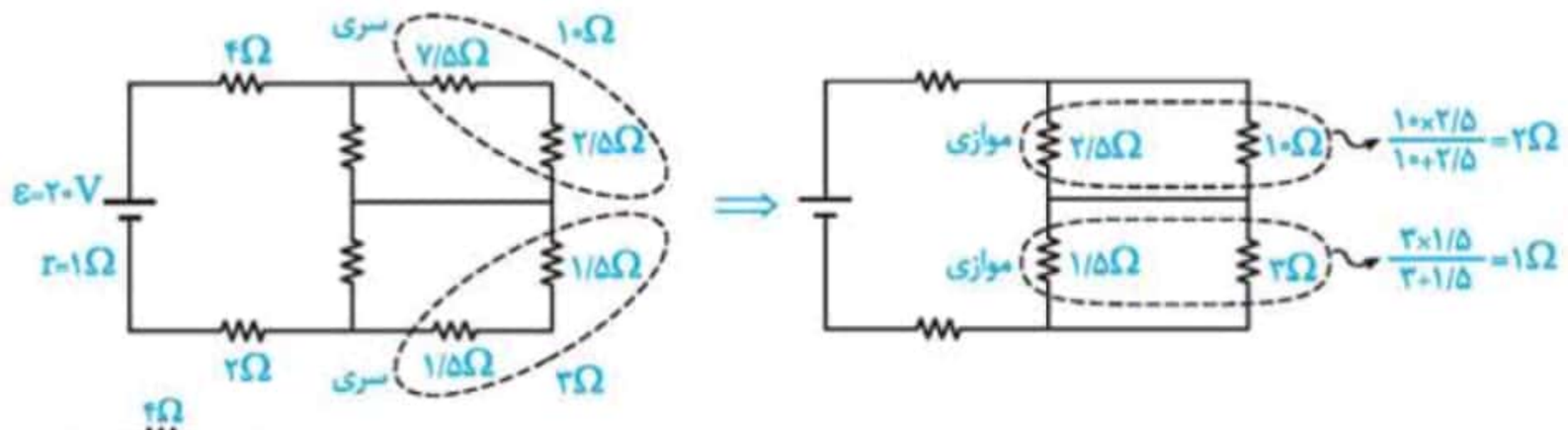
$$I_{کل}=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{36}{10+2}=3A$$

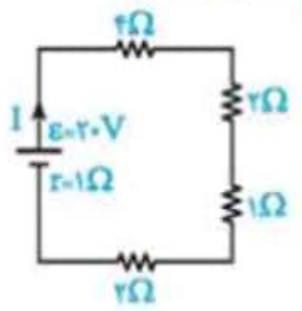
در ادامه اگر جریان در مقاومت ۶۰ اهمی را x بنامیم، داریم:

$$I_{کل}=I_1+I_2+I_3\Rightarrow 3=x+2x+3x\Rightarrow x=\frac{1}{2}A\Rightarrow I_1=x=\frac{1}{2}A$$

$$\text{گره M}: I_1+I'=I_{کل}\Rightarrow\frac{1}{2}+I'=3\Rightarrow I'=\frac{5}{2}=2/5A$$

۱ ۱۵۸۴ آمپرسنج ایده‌آل را مانند یک سیم بدون مقاومت درنظر می‌گیریم و ابتدا مقاومت معادل مدار را محاسبه کرده تا بتوانیم جریان اصلی مدار را به‌دست آوریم:

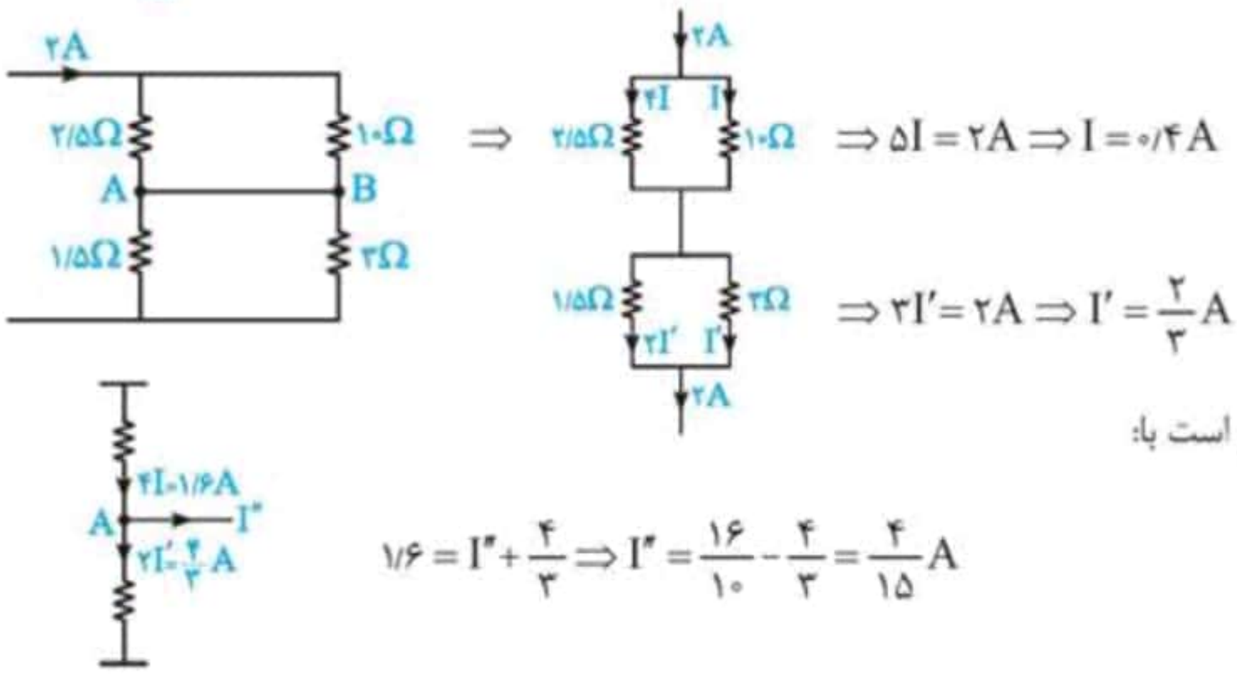




$$\Rightarrow R_T=4+2+1+2=9\Omega$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{20}{9+1}=2A$$

حال جریان ۲A را بین مقاومت‌های موازی توزیع کرده و داریم:



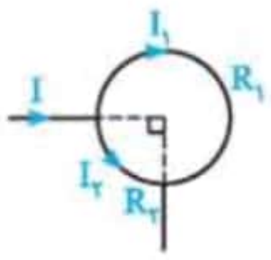
$$\Rightarrow 5I=2A\Rightarrow I=0/4A$$

$$\Rightarrow 3I'=2A\Rightarrow I'=\frac{2}{3}A$$

در ادامه با بررسی قانون جریان در گرهٔ A عدد آمپرسنج برابر است با:

$$1/6=I''+\frac{4}{3}\Rightarrow I''=\frac{16}{10}-\frac{4}{3}=\frac{4}{15}A$$

۲ ۱۵۸۵ مطابق شکل زیر، هنگامی که جریان I به حلقه می‌رسد به دو قسمت تقسیم می‌شود. ابتدا باید اندازهٔ مقاومت‌های R_1 (یعنی مقاومت $\frac{3}{4}$ حلقه) و R_2 (یعنی مقاومت $\frac{1}{4}$ حلقه) را به‌دست آوریم. چون مقاومت با طول سیم رابطهٔ مستقیم دارد، داریم:



$$\begin{cases}R_1=\frac{3}{4}R=\frac{3}{4}(24)=18\Omega\\ R_2=\frac{1}{4}R=\frac{1}{4}(24)=6\Omega\end{cases}\xrightarrow{\text{موازی هستند}}R_T=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{18\times6}{18+6}=4/5\Omega$$

حال می‌توانیم اندازهٔ جریان عبوری از مدار را به‌دست آوریم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{9}{4/5+1/5}=\frac{3}{2}A$$

حال اگر جریان مقاومت R_1 برابر $I_1=x$ باشد، جریان مقاومت R_2 برابر $I_2=3x$ می‌باشد (چرا؟). بنابراین داریم:

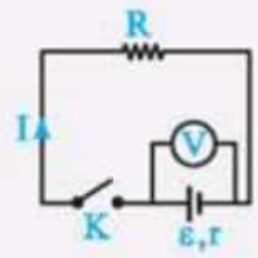
$$I=I_1+I_2=x+3x\Rightarrow\frac{3}{2}=4x\Rightarrow x=\frac{3}{8}A\Rightarrow I_2=3x=3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8}A$$

gajmarket.com

۱۵۸۶ ۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ — افت پتانسیل در باتری (تست‌های ۱۵۸۶ تا ۱۶۰۷)

در این خلاصه نکات می‌خواهیم به بررسی تأثیر مقاومت درونی باتری بر روی مدار بپردازیم. به همین منظور شکل مقابل را که یک ولت‌سنج به دو سر یک باتری متصل شده است، در نظر بگیرید:



هنگامی که کلید K باز است و جریان از پیل عبور نمی‌کند، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر نیروی محرکهٔ پیل (ε) است، اما وقتی کلید K را می‌بندیم و جریان از پیل عبور می‌کند، مشاهده می‌شود عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد کم‌تر از نیروی محرکهٔ پیل (ε) است. به‌عبارت دیگر پتانسیل الکتریکی اندکی افت (کاهش) داشته است. افت پتانسیل در باتری به دلیل وجود مقاومت درونی باتری (r) است.

مثال برای درک بهتر: $\begin{cases} \varepsilon = 2V \xrightarrow[\text{شدن کلید}]{\text{پس از بسته}} \text{عدد ولت‌سنج} = 1/8V \\ \text{افت پتانسیل} = 2 - 1/8 = 0/2V \end{cases}$

نکات مهم و کاربردی

۱ افت پتانسیل در باتری با شدت جریان عبوری از پیل متناسب است و برابر اختلاف ولتاژ دو سر پیل و نیروی محرکهٔ آن است:

$$\varepsilon - V = rI \quad (\text{افت پتانسیل})$$

۲ با توجه به رابطهٔ فوق، اگر جریان I از درون پیلی با نیروی محرکهٔ ε و مقاومت درونی r عبور کند، ولتاژ دو سر پیل برابر است با:

$$V = \varepsilon - rI$$

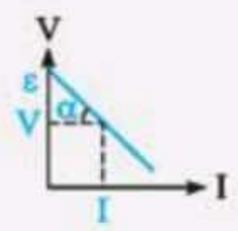
۳ افت پتانسیل در پیل (که از رابطهٔ rI به‌دست می‌آید) در موارد زیر ناچیز است:

الف) شدت جریان در مدار صفر باشد: این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که در مسیر اصلی مدار یک ولت‌سنج یا یک کلید باز قرار بگیرد و این دو مورد باعث قطع جریان در مدار می‌شود.

ب) مقاومت درونی پیل صفر باشد: این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که باتری ایده‌آل باشد.

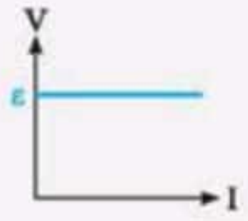
افت پتانسیل : $rI = 0$ ←
- $I = 0$ ← ولت‌سنج در مسیر اصلی مدار قرار بگیرد. / کلید باز در مسیر اصلی مدار قرار بگیرد.
- $r = 0$ ← باتری ایده‌آل باشد.

۴ نمودار ولتاژ دو سر باتری برحسب شدت جریان عبوری از آن در دو حالت باتری ایده‌آل ($r = 0$) و غیرایده‌آل ($r \neq 0$) به‌صورت زیر است:



باتری غیرایده‌آل: $r \neq 0 \Rightarrow$ ولتاژ دو سر باتری : $V = \varepsilon - rI$

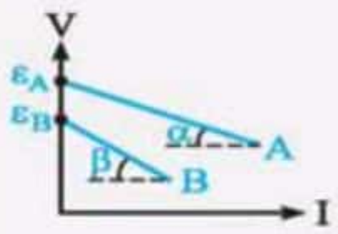
$$|\text{شیب نمودار}| = |\tan\alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\varepsilon - V}{I} = \frac{rI}{I} = r$$



باتری ایده‌آل: $r = 0 \Rightarrow$ ولتاژ دو سر باتری : $V = \varepsilon$

۵ در حالت کلی، شیب نمودارهای مقابل، برابر مقاومت درونی مولد و عرض از مبدأ آن برابر نیروی محرکهٔ مولد می‌باشد.

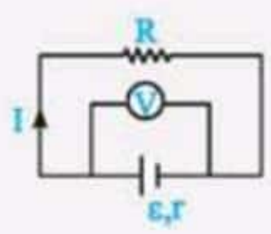
با توجه به این موضوع، در مقایسهٔ ε و r برای مولدهای A و B داریم:



با توجه به عرض از مبدأ $\Rightarrow \varepsilon_A > \varepsilon_B$

با توجه به شیب هر نمودار $\Rightarrow |\tan\beta| > |\tan\alpha| \Rightarrow r_B > r_A$

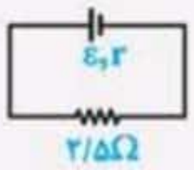
۶ نکتهٔ بسیار مهمی که در مدارهای به شکل مقابل باید به آن توجه کرد این است که ولت‌سنج علاوه بر اختلاف پتانسیل دو سر باتری، ولتاژ دو سر مقاومت R را نیز نشان می‌دهد.



$\begin{cases} \text{عدد ولت‌سنج} = \varepsilon - rI \\ \text{عدد ولت‌سنج} = RI \end{cases}$

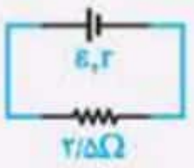
حال برای درک بهتر مفاهیم ارائه شده، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین۱ **افت پتانسیل در مقاومت داخلی پیل روبه‌رو ۰/۲۵ ولت و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲/۵ اهمی برابر ۱/۲۵ ولت است. نیروی محرکه (برحسب ولت) و مقاومت داخلی مولد (برحسب اهم) از راست به چپ برابر است با:**



۱) ۰/۵ ، ۱/۵ ۲) ۰/۵ ، ۲/۵ ۳) ۱/۵ ، ۰/۵ ۴) ۲/۵ ، ۱/۵

پاسخ در این مدار، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت برابر با اختلاف پتانسیل دو سر پیل است. بنابراین می‌توان نوشت:



$$V = ۱/۲۵\,V \ , \ \text{افت پتانسیل} = rI = ۰/۲۵\,V \ , \ \varepsilon = ?$$

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow ۱/۲۵ = \varepsilon - ۰/۲۵ \Rightarrow \varepsilon = ۱/۵\,V$$

بررسی ولتاژ دو سر مقاومت : $V = RI \Rightarrow ۱/۲۵ = ۲/۵I \Rightarrow I = ۰/۵\,A$

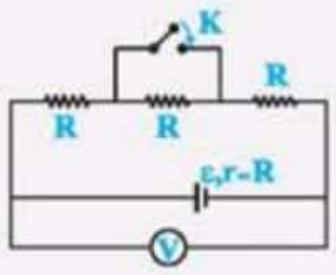
اکنون با داشتن شدت جریان و افت پتانسیل، می‌توان مقاومت درونی پیل را به‌دست آورد:

$$\text{افت پتانسیل} = rI = ۰/۲۵\,V \Rightarrow r \times \frac{۱}{۲} = ۰/۲۵ \Rightarrow r = ۰/۵\,\Omega$$ (گزینهٔ ۱)

نگاه دیگر:

$$\frac{\text{افت پتانسیل}}{\text{ولتاژ دو سر باتری}} = \frac{rI}{RI} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{۰/۲۵}{۱/۲۵} = \frac{r}{۲/۵} \Rightarrow r = ۰/۵\,\Omega$$

تمرین۲ **در مدار مقابل با بسته شدن کلید K، افت پتانسیل در باتری و عدد ولت‌سنج به‌ترتیب چند برابر می‌شوند؟**



۱) $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ، $\frac{۹}{۸}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ، $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$ ، $\frac{۸}{۹}$

پاسخ با بسته شدن کلید K، مقاومت وسطی اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. با توجه به این موضوع در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{حالت اول (کلید باز)}: I_۱ = \frac{\varepsilon}{R_{T_۱} + r} = \frac{\varepsilon}{۳R + R} = \frac{\varepsilon}{۴R} \Rightarrow V_۱ = \varepsilon - rI_۱ = \varepsilon - R \times \frac{\varepsilon}{۴R} = \frac{۳}{۴}\varepsilon \\ \text{حالت دوم (کلید بسته)}: I_۲ = \frac{\varepsilon}{R_{T_۲} + r} = \frac{\varepsilon}{۲R + R} = \frac{\varepsilon}{۳R} \Rightarrow V_۲ = \varepsilon - rI_۲ = \varepsilon - R \times \frac{\varepsilon}{۳R} = \frac{۲}{۳}\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\frac{۲}{۳}\varepsilon}{\frac{۳}{۴}\varepsilon} = \frac{۸}{۹}$$

می‌دانیم افت پتانسیل در باتری برابر rI می‌باشد. بنابراین در مقایسهٔ افت پتانسیل در باتری در دو حالت کافی است جریان در دو حالت را مقایسه کنیم:

$$\frac{\text{افت پتانسیل در حالت کلید بسته}}{\text{افت پتانسیل در حالت کلید باز}} = \frac{rI_۲}{rI_۱} = \frac{I_۲}{I_۱} = \frac{\frac{\varepsilon}{۳R}}{\frac{\varepsilon}{۴R}} = \frac{۴}{۳}$$ (گزینهٔ ۴)

دقت: با بستن کلید K، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد (چرا؟) بنابراین جریان در مدار افزایش می‌یابد. با توجه به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، اختلاف پتانسیل دو سر باتری کاهش و باتوجه به رابطهٔ (rI)، افت پتانسیل در باتری افزایش می‌یابد، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) بدون نیاز به حل کردن سؤال، نادرست می‌باشند.

با توجه به خلاصه نکات فوق، اختلاف پتانسیل دو سر مولد از رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$ به‌دست می‌آید، بنابراین با افزایش جریان، اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۳) نادرست می‌باشد. سایر گزینه‌ها با توجه به خلاصه نکات فوق صحیح می‌باشند.

۱۵۸۷ ۴ با باز شدن کلید K، جریان در مدار صفر می‌شود $(I' = ۰)$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{اختلاف پتانسیل دو سر مولد}: V = \varepsilon - rI' \xrightarrow{I'=۰} V = \varepsilon \\ \text{افت پتانسیل در داخل مولد} = rI' \xrightarrow{I'=۰} \text{افت پتانسیل} = ۰ \end{cases}$$

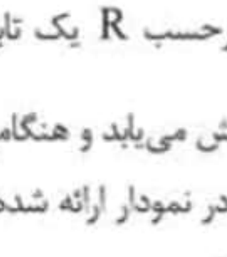
۱۵۸۸ ۴ با توجه به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، می‌دانیم که اگر اندازهٔ افت ولتاژ (rI) صفر باشد، آن‌گاه عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد (V) با نیروی محرکهٔ باتری (ε) برابر می‌باشد $(V = \varepsilon - rI \xrightarrow{rI=۰} V = \varepsilon)$.

gajmarket.com

از طرفی می‌دانیم که افت پتانسیل در سه حالت زیر برابر صفر می‌باشد:

$$rI=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \Rightarrow \text{باتری ایده‌آل باشد.} \Rightarrow \text{گزینهٔ ۳} \Rightarrow \\ I=0 \Rightarrow \begin{cases} \left(I=\frac{\varepsilon}{R+r}=\frac{\varepsilon}{\infty}=0\right) \Rightarrow \text{ولت‌سنج در مسیر عبور جریان اصلی باشد.} \Rightarrow \text{گزینهٔ ۱} \Rightarrow \\ \text{کلید باز در مسیر عبور جریان اصلی باشد.} \Rightarrow \text{گزینهٔ ۲} \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$$





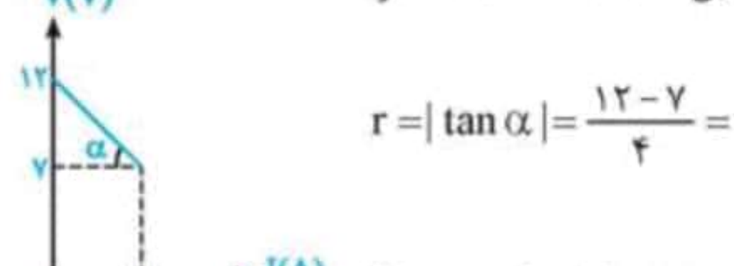
با توجه به توضیحات فوق، در هر سه مدار موجود در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳)، عدد ولت‌سنج با نیروی محرکه باتری برابر می‌باشد.

۲ ۱۵۸۹ وقتی کلید K باز است، ولت‌سنج نیروی محرکهٔ پیل را نشان می‌دهد $(V_1=\varepsilon)$ و وقتی کلید K بسته است، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر $(V_2=\varepsilon-rI)$ است. بنابراین اگر با باز و بسته شدن کلید تغییر قابل ملاحظه‌ای در عدد ولت‌سنج حاصل نشود $(V_1=V_2)$، آن‌گاه داریم:

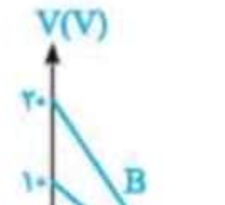
$$V_1=V_2 \Rightarrow \varepsilon=\varepsilon-rI \Rightarrow rI=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \Rightarrow \text{مقاومت درونی باتری در مقابل } R \text{ ناچیز است.} \\ I=0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{r+R}=0 \Rightarrow \text{مقاومت درونی باتری در مقابل } R \text{ ناچیز است.} \Rightarrow \text{مقاومت } R \text{ خیلی بزرگ است.} \end{cases}$$

با توجه به توضیحات فوق، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴ ۱۵۹۰ می‌دانیم که افت پتانسیل در باتری از رابطهٔ rI به‌دست می‌آید. بنابراین واضح است که نمودار افت پتانسیل برحسب شدت جریان، یک خط راست با شیب r است:



۱ ۱۵۹۱ افت پتانسیل در باتری از رابطهٔ rI قابل محاسبه بوده و شدت جریان (I) در مدار برابر $\frac{\varepsilon}{r+R}$ است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$\text{افت پتانسیل} = rI = \frac{r\varepsilon}{r+R} \Rightarrow \text{نمودار افت پتانسیل برحسب } R \text{ یک تابع هموگرافیک می‌باشد.} \Rightarrow$$



با توجه به رابطهٔ $rI=\frac{r\varepsilon}{r+R}$، با افزایش R افت پتانسیل کاهش می‌یابد و هنگامی که R به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، جریان و افت پتانسیل در باتری به‌سمت صفر میل می‌کند. برای افت پتانسیل در باتری این موضوع فقط در نمودار ارائه شده در شکل (ج) مشاهده می‌شود. هم‌چنین عدد ولت‌سنج برابر ولتاژ دو سر مولد می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{عدد ولت‌سنج}: V=\varepsilon-rI=\varepsilon-r\times\frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow \begin{cases} R=0 \Rightarrow V=\varepsilon-r\times\frac{\varepsilon}{r}=0 \\ R\to\infty \Rightarrow V=\varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

* اختلاف پتانسیل دو سر مولد برابر ولتاژ دو سر مقاومت خارجی نیز می‌باشد. بنابراین با کمک رابطهٔ $V=RI=R\times\frac{\varepsilon}{R+r}$ نیز می‌توان شکل فوق را برای نمودار اختلاف پتانسیل دو سر باتری رسم کرد.

۴ ۱۵۹۲ می‌دانیم که وقتی جریان در مدار صفر است، ولتاژ دو سر پیل برابر نیروی محرکهٔ پیل می‌باشد: $V=\varepsilon-rI \xrightarrow{I=0} V=\varepsilon$

بنابراین با توجه به نمودار ارائه شده در صورت سؤال، نیرو محرکهٔ باتری برابر ۱۲V است. از طرفی طبق خلاصه نکات (۹)، اندازهٔ شیب نمودار مقابل، برابر مقاومت درونی پیل می‌باشد:

$$r=|\tan\alpha|=\frac{۱۲-۷}{۴}=\frac{۵}{۴}=r=۱/۲۵\Omega$$

نگاه دیگر: در جریان ۴A ولتاژ دو سر پیل برابر ۷V است، بنابراین داریم:

$$V=\varepsilon-rI \Rightarrow ۷=۱۲-r\times۴ \Rightarrow r=۱/۲۵\Omega$$

۲ ۱۵۹۳ با توجه به نکتهٔ استفاده شده در سؤال قبل، مقاومت درونی هر یک از مولدهای A و B برابر است با:

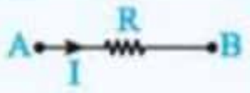
$$r_A=\tan\alpha=\frac{۱۰}{I}\ ,\ r_B=\tan\beta=\frac{۲۰}{I}$$

$$\frac{r_B}{r_A}=\frac{\frac{۲۰}{I}}{\frac{۱۰}{I}}=\frac{۲۰}{۱۰}=۲$$

۳ ۱۵۹۴

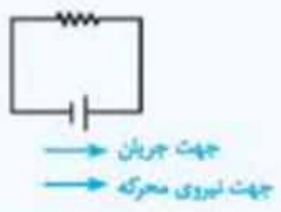
نکته

۱) جهت جریان در یک مقاومت از پتانسیل الکتریکی بیشتر به پتانسیل الکتریکی کم‌تر در دو سر آن است.



$\Rightarrow V_A > V_B$

۲) در یک مدار شامل یک باتری، جهت جریان در باتری از پایانهٔ منفی باتری به‌سمت پایانهٔ مثبت آن است.
(البته در خارج از باتری، جهت جریان از پایانهٔ مثبت به سمت پایانهٔ منفی آن است.)



۳) جهت نیروی محرکه در باتری از پایانهٔ منفی آن به‌سمت پایانهٔ مثبت آن است.

به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با توجه به سری بودن مقاومت‌ها و باتری، جریان الکتریکی در نقاط a، b و c با هم برابر است.

۲) با توجه به نکتهٔ۱ فوق و جهت جریان در مقاومت‌های R_1 و R_2، می‌توان نوشت:



$\Rightarrow V_b > V_c > V_a$

۳) با توجه به نکتهٔ ۳ فوق، جهت نیروی محرکه در باتری به‌سمت راست (←) می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

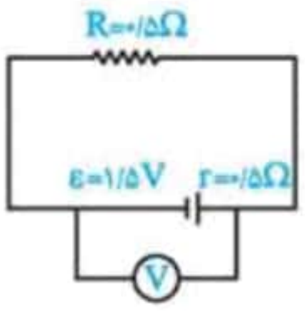
۴) می‌دانیم با جابه‌جایی بار الکتریکی مثبت از مکان‌های با پتانسیل الکتریکی بیشتر به پتانسیل الکتریکی کم‌تر، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[q>0]{\Delta V<0} \Delta U < 0$$

بنابراین با توجه به پتانسیل الکتریکی نقاط a، b و c، انرژی پتانسیل الکتریکی حامل‌های بار مثبت در این نقاط به‌صورت $E_b > E_c > E_a$ می‌باشد.

۱ ۱۵۹۵ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۹)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۱۵۹۶ اختلاف پتانسیل دو سر مولد برابر $V = \varepsilon - rI$ می‌باشد. با توجه به این موضوع کافی است که جریان مدار را در دو حالت کلید K باز و کلید K بسته به‌دست آوریم:



حالت اول (کلید باز):

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{T_1} + r} = \frac{1/5}{0/5 + 0/5} = 1/5A \Rightarrow V_1 = \varepsilon - rI_1 = 1/5 - 0/5 \times 1/5 = 0/75\,V$$

حالت دوم (کلید بسته): در این حالت با بستن کلید، مقاومت R اتصال کوتاه می‌شود و داریم:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{T_2} + r} = \frac{1/5}{0 + 0/5} = 3A \rightarrow V_2 = \varepsilon - rI_2 = 1/5 - 0/5 \times 3 = 0$$

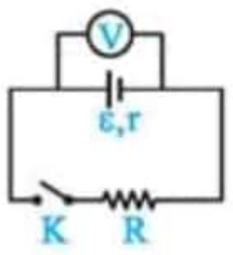
خواستهٔ سؤال $\Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = 0 - 0/75 = -0/75\,V$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

اختلاف پتانسیل دو سر مولد برابر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی R می‌باشد. بنابراین در حالت دوم که مقاومت خارجی صفر می‌شود، بدون حل می‌توان گفت که ولتاژ دو سر آن نیز برابر صفر می‌شود و می‌توانیم بنویسیم:

$$V = RI \Rightarrow \begin{cases} V_1 = RI_1 = 0/5 \times 1/5 = 0/75 \\ V_2 = 0 \text{ (مقاومت } R_2 \text{ اتصال کوتاه می‌شود.)} \end{cases} \Rightarrow \Delta V = 0 - 0/75 = -0/75\,V$$

۳ ۱۵۹۷ وقتی کلید K باز است، ولت‌سنج اندازهٔ نیروی محرکهٔ باتری را نشان می‌دهد $(\varepsilon = 10\,V)$ و وقتی کلید K بسته است، اندازهٔ ولتاژ دو سر باتری و همچنین ولتاژ دو سر مقاومت R را نشان می‌دهد $(V = 8\,V)$. بنابراین می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} V = \varepsilon - rI \Rightarrow 8 = 10 - rI \Rightarrow rI = 2 & (1) \\ V = RI \Rightarrow RI = 8 & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{R}{r} = 4$$

۳ ۱۵۹۸ وقتی کلید K بسته است، با توجه به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، می‌توان نوشت:

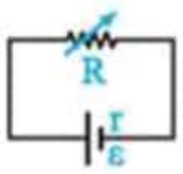
$$V = 0/8\varepsilon \quad , \quad r = 2\Omega \quad , \quad I = 0/8A$$

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow 0/8\varepsilon = \varepsilon - 2 \times 0/8 \Rightarrow 1/6 = 0/2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 8\,V$$

از طرفی می‌دانیم وقتی کلید قطع می‌شود، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر نیروی محرکهٔ باتری (ε)، یعنی ۸ ولت است.

gajmarket.com

۴ ۱۵۹۹ در هر دو حالت $R = r$ و $R = ۲r$، افت پتانسیل را به‌دست می‌آوریم:

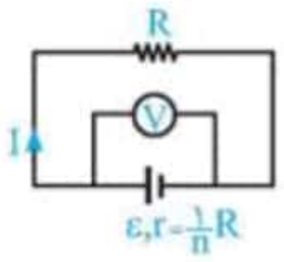


$$\text{افت پتانسیل} = rI = r \times \frac{\varepsilon}{r+R} \begin{cases} R = ۲r \Rightarrow \text{افت پتانسیل} = r \times \frac{\varepsilon}{r+۲r} = r \times \frac{\varepsilon}{۳r} = \frac{\varepsilon}{۳} \\ R = r \Rightarrow \text{افت پتانسیل} = r \times \frac{\varepsilon}{r+r} = r \times \frac{\varepsilon}{۲r} = \frac{\varepsilon}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{\varepsilon}{۳}}{\frac{\varepsilon}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین وقتی مقدار R را از $۲r$ تا r کاهش می‌دهیم، افت پتانسیل در باتری $\frac{۲}{۳}$ برابر می‌شود.

* وقتی مقاومت R را کاهش می‌دهیم، جریان در مدار افزایش می‌یابد و با توجه به رابطهٔ (rI)، افت پتانسیل در باتری افزایش می‌یابد، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست‌اند.

۳ ۱۶۰۰ با توجه به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$ برای محاسبهٔ اختلاف پتانسیل دو سر باتری، داریم:



ارتباط مقاومت درونی و مقاومت خارجی: $r = \frac{۱}{n}R \Rightarrow R = nr$

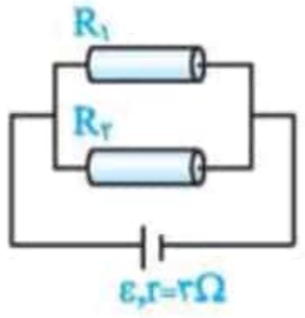
$$V = \varepsilon - rI = \varepsilon - r\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right) = \varepsilon - r\left(\frac{\varepsilon}{nr+r}\right) = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{n+۱} = \varepsilon\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right) = \frac{n}{n+۱}\varepsilon \Rightarrow \frac{V}{\varepsilon} = \frac{n}{n+۱}$$

۳ ۱۶۰۱ با توجه به رابطهٔ $rI = \frac{۱}{۹}RI$ داده شده در صورت سؤال، می‌توان نتیجه گرفت که مقاومت درونی باتری $\frac{۱}{۹}$ برابر R است $(r = \frac{۱}{۹}R)$ و در ادامه با کمک رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$ می‌توان نوشت:

$$I = ۰/۲A \ , \ \varepsilon = ۶V \ , \ r = \frac{۱}{۹}R \ , \ R = ?$$

$$I = \frac{\varepsilon}{r+R} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{۶}{\frac{۱}{۹}R + R} \Rightarrow \frac{۱۰}{۹}R = ۳۰ \Rightarrow R = ۲۷\Omega$$

۳ ۱۶۰۲ ابتدا مقاومت هر یک از قطعه سیم‌ها را محاسبه می‌کنیم:



$$R_۱ = R_۲ = R = \rho\frac{L}{A} = \frac{۱/۶۸ \times ۱۰^{-۴} \times \frac{۱}{۴}}{۳ \times (۱۰^{-۳})^۲} = ۱۴\Omega$$

حال برای محاسبهٔ افت پتانسیل در داخل مولد می‌توان نوشت:

$$R_T = \frac{۱۴}{۲} = ۷\Omega \Rightarrow \text{افت پتانسیل در مولد} = rI = r \times \frac{\varepsilon}{R_T + r} = ۳ \times \frac{\varepsilon}{۷+۳} = \frac{۳}{۱۰}\varepsilon$$

بنابراین نسبت افت پتانسیل در مولد به نیروی محرکهٔ آن برابر است با:

$$\frac{\text{افت پتانسیل}}{\text{نیروی محرکه}} = \frac{\frac{۳}{۱۰}\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{۳}{۱۰} = \frac{۳۰}{۱۰۰} \Rightarrow$$ افت پتانسیل در درون مولد، ۳۰ درصد نیروی محرکهٔ آن است.

۲ ۱۶۰۳ **گام اول:** با توجه به افت پتانسیل در باتری، جریان در مدار ۱ آمپر می‌باشد:

$$rI = ۳ \xrightarrow{r = ۳\Omega} I = ۱A$$

گام دوم: مقاومت خارجی برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow ۱ = \frac{۱۵}{R_T + ۳} \Rightarrow R_T = ۱۲\Omega$$

گام سوم: با توجه به سری بودن رئوستا و مقاومت ۴Ω داریم (R': مقاومت رئوستا):

$$R_T = R' + ۴ \Rightarrow R' = ۸\Omega$$

۳ ۱۶۰۴ در هر دو حالت ولتاژ دو سر باتری را به‌دست می‌آوریم، دقت شود که اندازهٔ هر یک از مقاومت‌ها، با مقاومت درونی باتری برابر است:

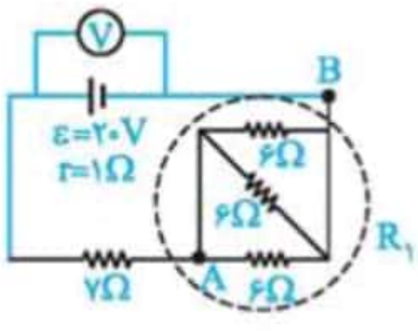
حالت سری $(R_{T_۱} = ۲r)$:

$$V_۱ = \varepsilon - rI_۱ = \varepsilon - r \times \frac{\varepsilon}{r + R_{T_۱}} \Rightarrow V_۱ = \varepsilon - \frac{r\varepsilon}{r+۲r} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{۳} = \frac{۲}{۳}\varepsilon$$

حالت موازی $(R_{T_۲} = \frac{r}{۲})$:

$$V_۲ = \varepsilon - rI_۲ = \varepsilon - r \times \frac{\varepsilon}{r + R_{T_۲}} \Rightarrow V_۲ = \varepsilon - \frac{r\varepsilon}{r + \frac{r}{۲}} \Rightarrow V_۲ = \varepsilon - \frac{۲}{۳}\varepsilon = \frac{۱}{۳}\varepsilon \Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\frac{۲}{۳}\varepsilon}{\frac{۱}{۳}\varepsilon} = ۲$$

۴ ۱۶۰۵ سه مقاومت ۶ اهمی موازی هستند و حاصل آن‌ها با مقاومت ۷ اهمی سری است. از طرفی در مدار مقابل واضح است که عدد ولت‌سنج در واقع برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری است. بنابراین می‌توان نوشت:

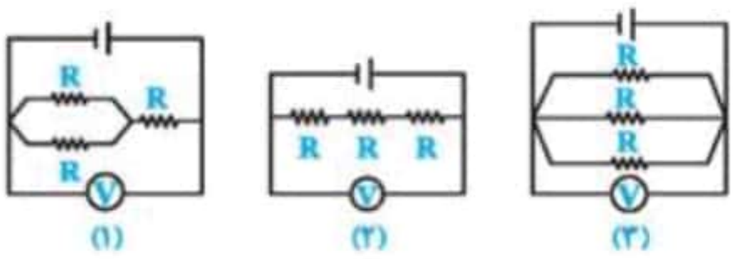


$$R_T = \frac{۶}{۳} + ۷ = ۹\Omega \ , \ I = \frac{\varepsilon}{r + R_T} = \frac{۲۰}{۱+۹} = ۲A$$

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow V = ۲۰ - ۱ \times ۲ = ۱۸\,V$$

از طرفی V_{AB}، برابر $V_{AB} = R_۱ I = \frac{۶}{۳} \times ۲ = ۴V$ می‌باشد.

۴ ۱۶۰۶ با توجه به شکل‌های مقابل، واضح است که در هر سه مدار ولت‌سنج‌ها در واقع اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهند. از طرفی طبق صورت سؤال می‌دانیم که اگر مقاومت درونی باتری ناچیز باشد، اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر نیروی محرکهٔ آن خواهد بود:



$$V = \varepsilon - rI \xrightarrow{r=0} V = \varepsilon = 20V$$

بنابراین در هر سه شکل فوق، از آن‌جایی که مقاومت درونی باتری صفر است، اعدادی که ولت‌سنج‌ها نشان می‌دهند برابر نیروی محرکهٔ باتری می‌باشد.

۴ ۱۶۰۷ سؤال نسبتاً ساده و مهمی است. در هر دو حالت با استفاده از رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، می‌توان نوشت:



رابطهٔ (۱) : $V = 40V\ ,\ I = 4A \Rightarrow V = \varepsilon - rI \Rightarrow 40 = \varepsilon - 4r$: **حالت اول**

رابطهٔ (۲) : $V = 36V\ ,\ I = 6A \Rightarrow V = \varepsilon - rI \Rightarrow 36 = \varepsilon - 6r$: **حالت دوم**

اکنون با توجه به روابط (۱) و (۲)، با حل دستگاه معادلات به‌دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon - 4r = 40 \\ \varepsilon - 6r = 36 \end{cases} \Rightarrow r = 2\Omega\ ,\ \varepsilon = 48V$$

- دقت کنید در این‌جا ولت‌سنج، ولتاژ دو سر باتری را نشان می‌دهد.

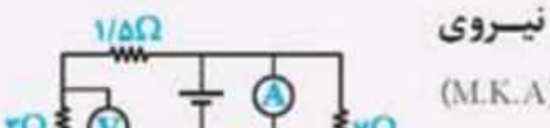
۱ ۱۶۰۸ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۰ — تحلیل مدارهای پیچیده‌تر با یک باتری (تست‌های ۱۶۰۸ تا ۱۶۳۲)

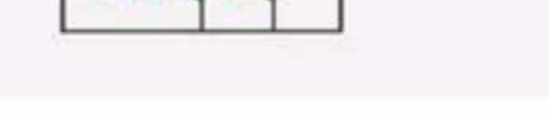
در این خلاصه نکات می‌خواهیم شیوهٔ تحلیل دو دسته از سؤالات پرتکرار در مدار را بررسی کنیم:

دستهٔ ۱: در این دسته جریان در مدار یا قسمتی از مدار معلوم و ε ، r یا اندازهٔ یکی از مقاومت‌ها مجهول است. در این‌گونه از سؤال‌ها، معمولاً با یافتن جریان در شاخه‌های مختلف و یک دور چرخیدن در یک حلقهٔ بسته که مجهول مورد نظرمان در آن مشارکت دارد، به‌سادگی به جواب می‌رسیم. برای رسیدن به این هدف، نکتهٔ بعد را باید یاد بگیریم:

نکته در هنگام عبور از درون باتری و از قطب منفی به مثبت، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ نیروی محرکه افزایش می‌یابد و بالعکس. این موضوع یعنی در پتانسیل‌نویسی بین دو نقطه، هنگامی‌که به قطب منفی باتری رسیدیم، علامت مثبت گذاشته و بالعکس. این موضوع از جهت جریان مستقل است.



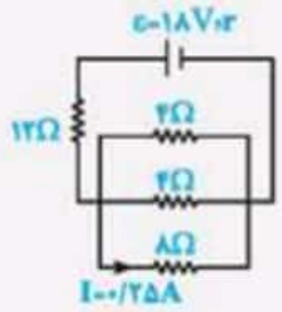
عبور از قطب منفی به مثبت : $V_A \boxed{+} \varepsilon - rI = V_B$ (به قطب منفی رسیدیم)



عبور از قطب مثبت به منفی : $V_A \boxed{-} \varepsilon - rI = V_B$ (به قطب مثبت رسیدیم)

توجه شود که در عملیات پتانسیل‌نویسی، با مقاومت درونی باتری مانند یک مقاومت خارجی رفتار می‌کنیم. در ادامه برای درک بهتر، به دو تمرین زیر توجه کنید:

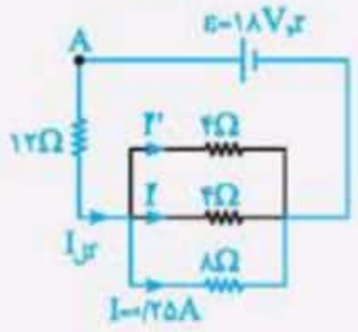
تمرین ۱ **در شکل روبه‌رو اگر شدت جریان در مقاومت 8Ω برابر ۰/۲۵ آمپر باشد، مقاومت درونی مولد برابر چند اهم است؟**



۱) ۱ ۲) ۰/۵

۳) ۲ ۴) ۰/۸

پاسخ با توجه به شکل مقابل، جریان I' دو برابر جریان I بوده (زیرا مقاومت شاخهٔ آن نصف می‌باشد) و هم‌چنین جریان‌های I' و I'' با یک‌دیگر برابرند (زیرا مقاومت شاخهٔ آن‌ها یکسان است). بنابراین داریم:



$$I' = I'' = 2I = 2 \times 0/25 = 0/5A \Rightarrow I_{کل} = I + I' + I'' = 1/25A$$

در ادامه با شروع از نقطهٔ A و یک دور چرخیدن در مدار در مسیر نشان داده شده با رنگ آبی، داریم:

$$V_A - 12I_{کل} - 8I + \varepsilon - rI_{کل} = V_A \Rightarrow -12 \times 1/25 - 8 \times 0/25 + 18 - r \times 1/25 = 0 \Rightarrow r = 0/8\Omega$$ (گزینهٔ ۴)

تمرین ۲ **در شکل روبه‌رو، ولت‌سنج ۴ ولت و آمپرسنج با مقاومت ناچیز ۱ آمپر را نشان می‌دهد. نیروی محرکهٔ مولد چند ولت است؟** (M.K.A)

۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۱۰/۵ ۴) ۲۱

gajmarket.com

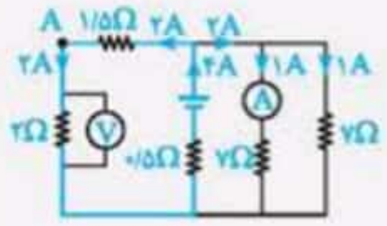
پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که ولت‌سنج عدد ۴ ولت را نشان می‌دهد، جریان عبوری از مقاومت ۲ اهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{عدد ولت‌سنج}: V = RI' \xrightarrow[V=۴V]{R=۲\Omega} ۴ = ۲I' \Rightarrow I' = ۲A$$

گام دوم: از سوی دیگر عدد آمپرسنج ۱A بوده و با توجه به موازی بودن دو مقاومت ۷ اهمی، جریان مقاومت ۷Ω دیگر نیز ۱A بوده و جریان کلی مدار ۴A است.

گام سوم: در ادامه با یک دور چرخیدن در حلقهٔ نشان داده شده، داریم:



$$\not{V_A} - ۲\times۲ - ۰/۵ \times I_{\text{کل}} + \varepsilon - ۲\times۱/۵ = \not{V_A} \Rightarrow \varepsilon = ۹V \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

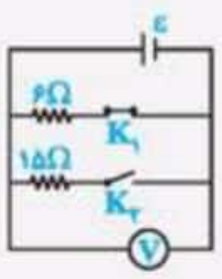
($I_{\text{کل}}$: ۴ آمپر)

$$I_{\text{کل}} = ۱+۱+۲ = ۴A$$

نکته در این سؤال نیازی به دادن عدد ولت‌سنج توسط طراح نبود (چرا؟).

دستهٔ ۲: در این دسته کلیدی در مدار وجود داشته و در دو حالت کلید باز و بسته به تحلیل مدار پرداخته و پارامترهای مدار را در دو حالت مقایسه می‌کنیم. در واقع در این سؤال‌ها، همان مهارت‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم را دو بار به کار می‌بریم. به همین منظور به تمرین زیر که یکی از نمونه‌های بسیار پرتکرار در کنکور است توجه کنید:

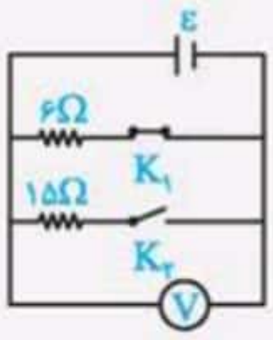
تمرین ۳ در مدار شکل مقابل کلید K_1 بسته است و ولت‌سنج ۱۲ ولت را نشان می‌دهد. اگر کلید K_1 را بـاز کنـیم و K_2 را ببندیم، ولت‌سنج ۱۵ ولت را نشان می‌دهد. نیروی محرکهٔ باتری (ε) چند ولت است؟ (ریاضی داخل ۸۶)



۱) ۱۵
۲) ۱۸
۳) ۲۱
۴) ۲۴

پاسخ با پاسخ دادن به این تمرین، شیوهٔ برخورد با این‌گونه سؤالات را یاد می‌گیریم. مدار را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر کلید K_1 بسته و K_2 باز باشد، مقاومت ۱۵Ω حذف می‌شود و می‌توان نوشت:



$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{T_1} + r} \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon}{۶ + r}$$

$$V_1 = R_{T_1} I_1 \Rightarrow ۱۲ = ۶ \times \frac{\varepsilon}{۶ + r} \qquad (۱)$$

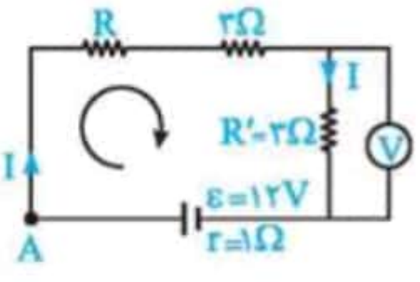
حالت دوم: اگر کلید K_1 را باز و K_2 را ببندیم، تنها مقاومت ۱۵ اهمی در مدار وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{T_2} + r} \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon}{۱۵ + r} \Rightarrow V_2 = R_2 I_2 \Rightarrow ۱۵ = ۱۵ \times \frac{\varepsilon}{۱۵ + r} \qquad (۲)$$

در ادامه با استفاده از دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۱۲ = \dfrac{۶\varepsilon}{۶ + r} \\ ۱۵ = \dfrac{۱۵\varepsilon}{۱۵ + r} \end{cases} \xrightarrow[\text{بر یکدیگر}]{\text{تقسیم طرفین}} \frac{۴}{۵} = \frac{۶(۱۵ + r)}{۱۵(۶ + r)} \Rightarrow r = ۳\Omega \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} \varepsilon = ۱۸V \qquad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

مقاومت معادل $\frac{۹ \times ۴/۵}{۹ + ۴/۵} = ۳\Omega$ موازی ۴/۵Ω و ۹Ω می‌باشد و مدار به‌صورت مقابل ساده می‌شود. در ادامه بـا توجه به این‌که مقدار عدد ولت‌سنج را داریم، جریان عبوری از مقاومت R' را در مدار محاسبه می‌کنیم:



$$V = R'I \xrightarrow[R'=۳\Omega]{V=۴/۵V} ۴/۵ = ۳I \Rightarrow I = ۱/۵A$$

در ادامه از نقطهٔ A شروع کرده و یک دور در مدار می‌چرخیم:

$$\not{V_A} - RI - ۳I - ۳I - ۱\times I + ۱۲ = \not{V_A} \xrightarrow{I=۱/۵A} ۱۲ = (۷ + R) \times ۱/۵ \Rightarrow R = ۱\Omega$$

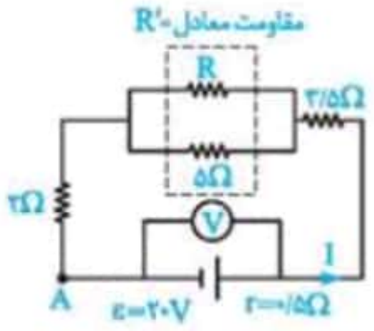
* توصیه می‌شود که به عنوان راه‌حل دوم، با کمک رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$ نیز این سؤال را حل کنید.

۱۶۰۹ مشابه با روند حل تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴ ۱۶۱۰ ولت‌سنجی که به دو سر یک مولد متصل است، مقدار $\varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد، بنابراین داریم:

عدد ولت‌سنج : $V = \varepsilon - rI \xrightarrow[r=۰/۵\Omega]{V=۱۹V ,\varepsilon=۲۰V} ۱۹ = ۲۰ - ۰/۵I \Rightarrow I = ۲A$

جریان عبوری از مدار ۲ آمپر است. حال مدار را ساده می‌کنیم:

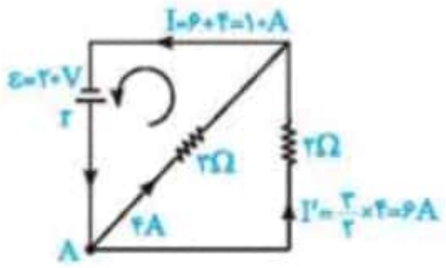


$$V_A + \varepsilon - ۰/۵I - ۳/۵I - R'I - ۲I = V_A$$

$$۲۰ - ۰/۵ \times ۲ - ۳/۵ \times ۲ - R' \times ۲ - ۲ \times ۲ = ۰ \Rightarrow R' = ۴\Omega$$

$$R' = \frac{۵ \times R}{۵ + R} \Rightarrow ۴ = \frac{۵ \times R}{۵ + R} \Rightarrow R = ۲۰\Omega$$

۲ ۱۶۱۱ دو مقاومت ۳Ω و ۲Ω با هم موازی هستند، بنابراین نسبت جریان در آن‌ها به نسبت عکس مقاومت‌ها می‌باشد و جریان مقاومت ۲Ω، $\frac{۳}{۲}$ برابر جریان مقاومت ۳ اهمی است. در ادامه با یک دور چرخیدن در مسیر نشان داده‌شده می‌توان نوشت:

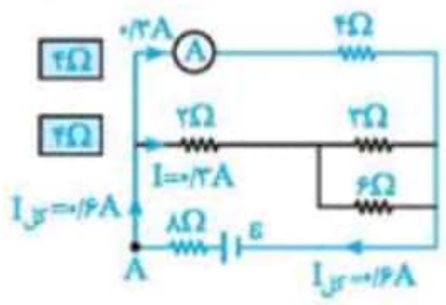


$$V_A - ۳ \times ۴ + ۲۰ - r \times ۱۰ = V_A \Rightarrow r = \frac{۸}{۱۰} = ۰/۸\Omega$$

نگاهی دیگر

می‌توان با محاسبهٔ R_T و استفاده از رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$ نیز r را به دست آورد.

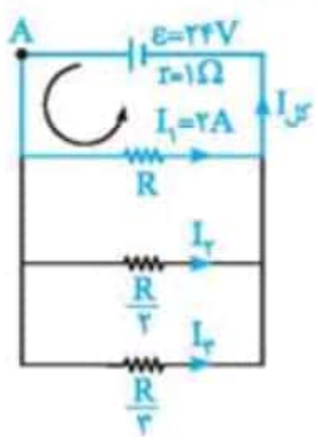
۲ ۱۶۱۲ با توجه به این‌که مقاومت معادل شاخه‌های موازی (۱) و (۲) با یک‌دیگر برابرند (هر دو ۴ اهم) جریان آن‌ها نیز با یک‌دیگر یکسان است، بنابراین داریم:



$$I_۱ = I_۲ = ۰/۳A \Rightarrow I_{کل} = ۰/۶A$$

چرخیدن در مسیر نشان داده شده : $V_A - ۰/۳ \times ۴ + \varepsilon - ۸I_{کل} = V_A \Rightarrow -۰/۳ \times ۴ + \varepsilon - ۸ \times ۰/۶ = ۰ \Rightarrow \varepsilon = ۶V$

۱ ۱۶۱۳ در شکل مقابل جریان $I_۲$ دو برابر جریان $I_۱$ و جریان $I_۳$ سه برابر جریان $I_۱$ است (چرا؟ ⇐ زیرا جریان در مقاومت‌های موازی، با مقاومت هر شاخه رابطهٔ معکوس دارد)، بنابراین داریم:

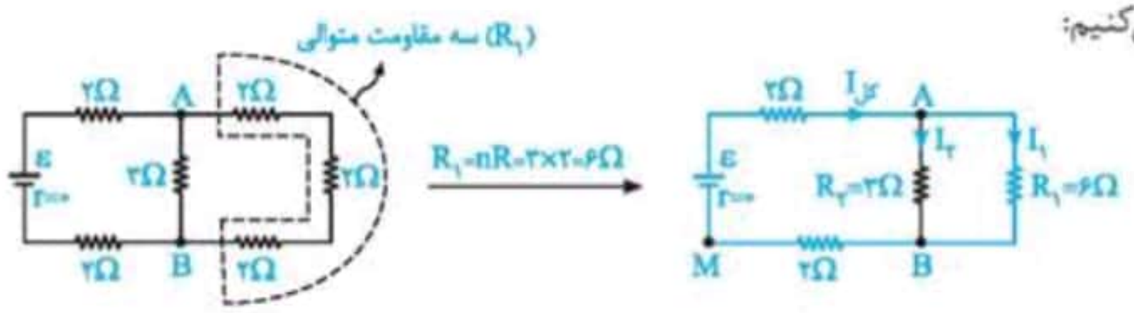


$$\begin{cases} I_۲ = ۲I_۱ \xrightarrow{I_۱=۲A} I_۲ = ۲ \times ۲ = ۴A \\ I_۳ = ۳I_۱ \xrightarrow{I_۱=۲A} I_۳ = ۳ \times ۲ = ۶A \end{cases} \Rightarrow I_{کل} = ۲ + ۴ + ۶ = ۱۲A$$

در ادامه یک دور در حلقهٔ آبی‌رنگ شده چرخیده، تا مقاومت R به‌دست آید:

$$V_A - RI_۱ - rI_{کل} + \varepsilon = V_A \Rightarrow -۲R - ۱ \times ۱۲ + ۲۴ = ۰ \Rightarrow R = ۶\Omega$$

۲ ۱۶۱۴ ابتدا مدار را ساده می‌کنیم:



با توجه به این که اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B برابر با ۴ ولت است، جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

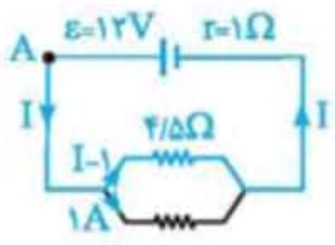
$$\begin{cases} V_{AB} = R_۲I_۲ \xrightarrow[R_۲=۳\Omega]{V_{AB}=۴V} ۴ = ۳I_۲ \Rightarrow I_۲ = \frac{۴}{۳}A \\ V_{AB} = R_۱I_۱ \xrightarrow[R_۱=۶\Omega]{V_{AB}=۴V} ۴ = ۶I_۱ \Rightarrow I_۱ = \frac{۲}{۳}A \end{cases} \Rightarrow I_{کل} = \frac{۴}{۳} + \frac{۲}{۳} = ۲A$$

در ادامه با یک دور چرخیدن در مدار در مسیر نشان داده شده، داریم:

$$V_M + \varepsilon - ۲I_{کل} - R_۱I_۱ - ۲I_{کل} = V_M \Rightarrow +\varepsilon - ۲ \times ۲ - ۶ \times \frac{۲}{۳} - ۲ \times ۲ = ۰ \Rightarrow \varepsilon = ۱۲V$$

$V_{AB} = ۴V$ همان ↵

۲ ۱۶۱۵ یک سؤالِ زیبا و ابتکاری است. اگر جریان در مدار I فرض شود، جریان در مقاومت $۴/۵\Omega$ برابر $(I - ۱)$ آمپر است و با یک دور چرخیدن در مدار در مسیر نشان داده شده، I به‌دست می‌آید:



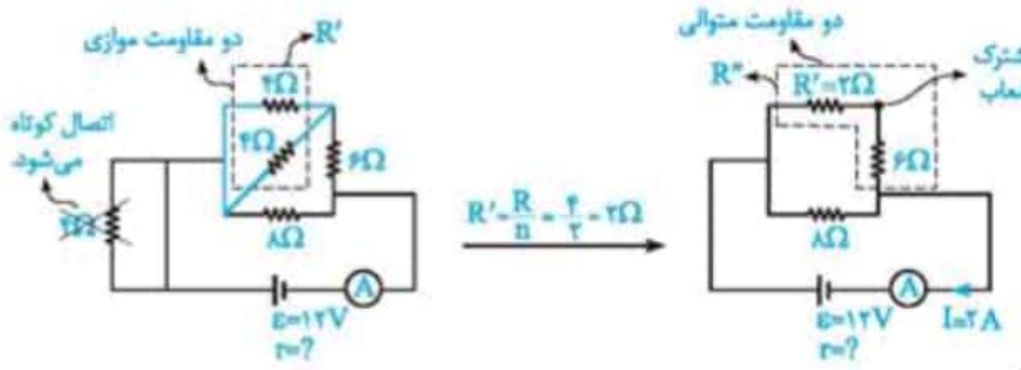
$$V_A - ۴/۵(I - ۱) + \varepsilon - rI = V_A$$

$$-۴/۵(I - ۱) + ۱۲ - ۱ \times I = ۰ \Rightarrow I = ۳A \Rightarrow \text{افت پتانسیل در داخل باتری} = rI = ۱ \times ۳ = ۳V$$

gajmarket.com

۱ ۱۶۱۶ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۱۶۱۷ مقاومت ۴ اهمی در سمت چپ مدار اتصال کوتاه شده است. حال مدار را ساده می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} ۶\Omega, ۲\Omega \xrightarrow{\text{سری}} R'' = ۸\Omega \\ ۸\Omega, R'' \xrightarrow{\text{موازی}} R_T = \frac{۸}{۲} = ۴\Omega \end{cases}$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$، مقاومت درونی باتری را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[R_T = ۴\Omega]{I = ۲A, \varepsilon = ۱۲V} ۲ = \frac{۱۲}{۴ + r} \Rightarrow r = ۲\Omega$$

* با یک دور چرخیدن در مدار نیز به‌سادگی این سؤال قابل حل است، توصیه می‌شود این کار را تمرین کنید.

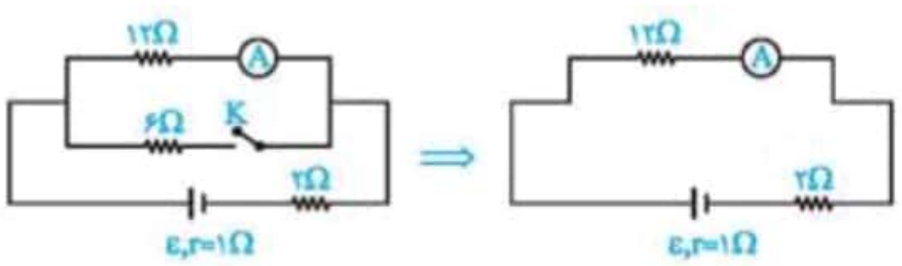
۱ ۱۶۱۸

تذکر

در تست‌های ۱۶۱۸ تا ۱۶۳۱، با سؤال‌هایی روبه‌رو می‌شویم که در آن‌ها کلید باز و بسته شده و تغییرات عدد آمپرسنج و ولت‌سنج پرسیده می‌شود. در این سؤال‌ها، در واقع همان مهارت‌هایی را که قبلاً یاد گرفتیم، دوباره باید تمرین شود. در پاسخ تشریحی این سؤالات تلاش کرده‌ایم این موضوع را به شما بهتر یاد بدهیم.

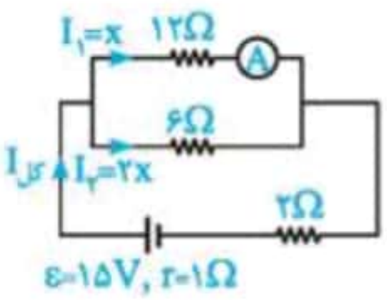
مدار را در دو حالت کلید بسته و کلید باز بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر کلید باز باشد مقاومت ۶ اهمی از مدار حذف می‌گردد و شکل مدار به‌صورت مقابل تبدیل می‌شود. در این حالت، آمپرسنج همان جریان عبوری از کل مدار را نشان می‌دهد:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[R_T = ۱۲+۲ = ۱۴\Omega]{I = ۱A, r = ۱\Omega} ۱ = \frac{\varepsilon}{۱۴ + ۱} \Rightarrow \varepsilon = ۱۵\,V$$

حالت دوم: اگر کلید K را ببندیم، مدار به شکل مقابل رسم می‌شود و دیگر کل جریان از مقاومت ۱۲ اهمی عبور نمی‌کند:



$$R_T = \frac{۱۲ \times ۶}{۱۲ + ۶} + ۲ \Rightarrow R_T = ۴ + ۲ = ۶\Omega$$

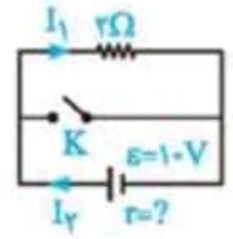
$$I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[R_T = ۶\Omega]{\varepsilon = ۱۵V, r = ۱\Omega} I_{\text{کل}} = \frac{۱۵}{۶ + ۱} = \frac{۱۵}{۷}A$$

حال اگر جریان عبوری از مقاومت ۱۲ اهمی را x بگیریم، جریان مقاومت ۶ اهمی برابر ۲x می‌شود و داریم:

$$I_{\text{کل}} = x + ۲x \Rightarrow \frac{۱۵}{۷} = ۳x \Rightarrow x = \frac{۵}{۷}A \Rightarrow \text{عدد آمپرسنج}: I_۱ = x = \frac{۵}{۷}A$$

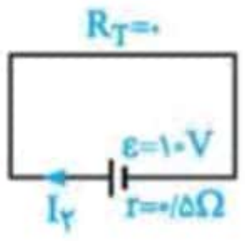
۴ ۱۶۱۹ مدار را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر کلید K باز باشد، مدار به‌صورت مقابل رسم می‌شود:



$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[R_T = ۲\Omega]{I = ۴A, \varepsilon = ۱۰V} ۴ = \frac{۱۰}{۲ + r} \Rightarrow r = ۰/۵\Omega$$

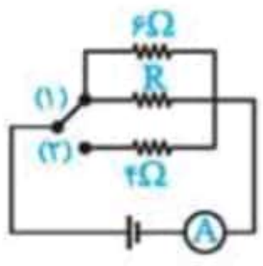
حالت دوم: با بسته شدن کلید K، مقاومت ۲ اهمی اتصال کوتاه می‌شود و از مدار حذف می‌گردد، بنابراین جریان $I_۱$ صفر می‌شود و مدار به شکل مقابل ساده می‌شود:



$$I_۲ = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[r = ۰/۵\Omega]{\varepsilon = ۱۰V, R_T = ۰} I_۲ = \frac{۱۰}{۰ + ۰/۵} = ۲۰A$$

۴ ۱۶۲۰ مدار را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر کلید در حالت (۱) باشد، مقاومت ۴ اهمی از مدار حذف می‌گردد و مقاومت معادل برابر $R_T = \frac{۶ \times R}{۶ + R}$ است.



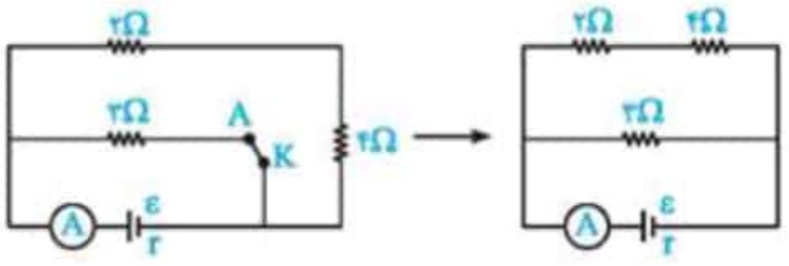
حالت دوم: اگر کلید در حالت (۲) باشد، مقاومت R و ۶ اهمی از مدار حذف می‌شوند و مقاومت معادل برابر ۴Ω است.

با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$، برای آن‌که جریان ایجاد شده در مدار در دو حالت یکسان باشد، باید مقاومت معادل مدار در دو حالت برابر باشد و می‌توان نوشت:

$$R_{T_۱} = R_{T_۲} \rightarrow \frac{۶R}{۶ + R} = ۴ \rightarrow R = ۱۲\Omega$$

۱ ۱۶۲۱ مشابه با سؤال قبل، مدار را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

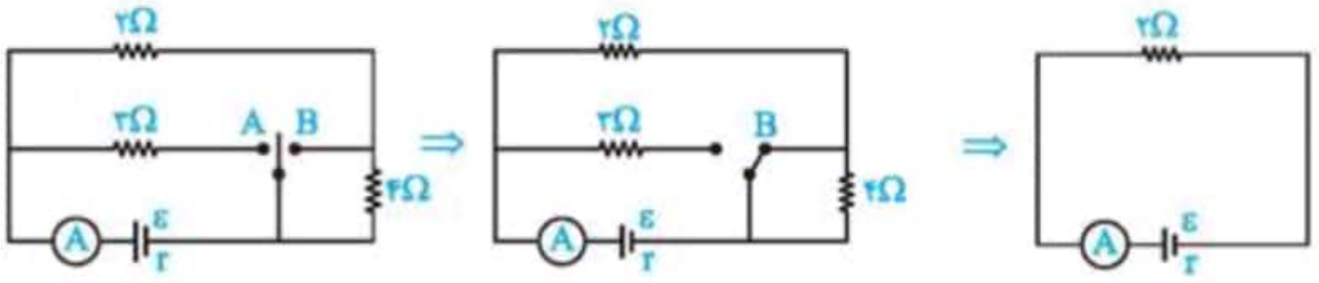
حالت اول: اگر کلید K به A وصل شود، مدار به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$\Rightarrow \begin{cases} 4\Omega, 2\Omega \xrightarrow{\text{سری}} R_1 = 6\Omega \\ 3\Omega, R_1 \xrightarrow{\text{موازی}} R_{T_1} = 2\Omega \end{cases}$$

$$I_A = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{R_{T_1} = 2\Omega} I_A = \frac{\varepsilon}{2 + r}$$

حالت دوم: اگر کلید K به B وصل شود، اولاً مقاومت ۴Ω اتصال کوتاه می‌شود و ثانیاً مقاومت ۳Ω از مدار حذف می‌شود و مدار به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:



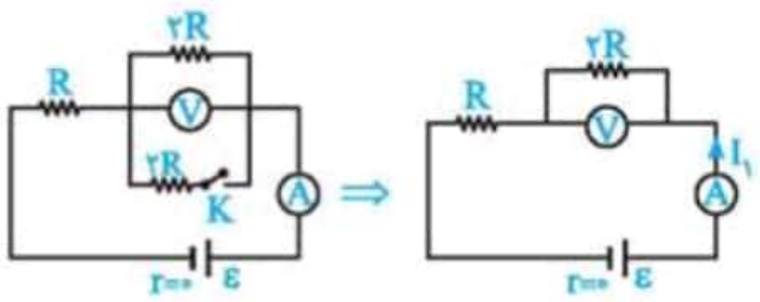
$$\Rightarrow R_{T_2} = 2\Omega \Rightarrow I_B = \frac{\varepsilon}{R_{T_2} + r} = \frac{\varepsilon}{2 + r}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، عدد آمپرسنج در هر دو حالت یکسان است.

تذکر

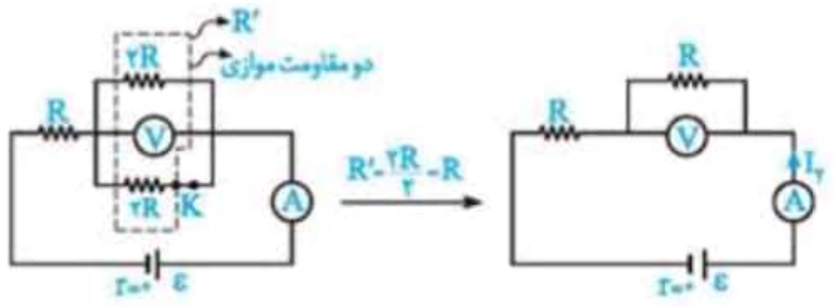
با توجه به این‌که مقدار r در صورت سؤال داده نشده است، بدون حل می‌توان گزینهٔ (۱) را انتخاب کرد (چرا؟).

۴ ۱۶۲۲ **حالت اول:** اگر کلید K باز باشد، مدار به‌صورت زیر ساده می‌شود:



$$\begin{cases} R_{T_1} = R + 2R = 3R \Rightarrow I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_T + r} \xrightarrow[r=0]{R_T = 3R} I_1 = \dfrac{\varepsilon}{3R} \\ \text{عدد ولت‌سنج}: V_1 = 2R \times I_1 = 2R \times \dfrac{\varepsilon}{3R} \Rightarrow V_1 = \dfrac{2\varepsilon}{3} \end{cases}$$

حالت دوم: اگر کلید K را ببندیم، مدار به‌صورت زیر ساده می‌شود:



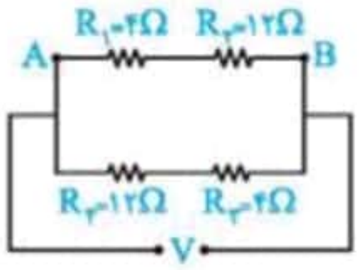
$$\begin{cases} R_{T_2} = R + R = 2R \Rightarrow I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_{T_2} + r} \xrightarrow[r=0]{R_{T_2} = 2R} I_2 = \dfrac{\varepsilon}{2R} \\ \text{عدد ولت‌سنج}: V_2 = RI_2 = R \times \dfrac{\varepsilon}{2R} \rightarrow V_2 = \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

نسبت اعدادی که ولت‌سنج و آمپرسنج در دو حالت نشان می‌دهند برابر است با:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{2\varepsilon}{3}} = \frac{3}{4} \quad , \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{\varepsilon}{2R}}{\frac{\varepsilon}{3R}} = \frac{3}{2}$$

* دقت کنیم که با یک تحلیل کیفی نیز می‌شود در این سؤال گزینهٔ درست را انتخاب کرد (چگونه؟).

۳ ۱۶۲۳ با توجه به این‌که منبع ولتاژ ثابت است، حل سؤال نسبتاً ساده بوده و آن را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:



حالت اول: در حالت اول مدار به‌صورت مقابل بوده و ولتاژ دو سر R_1 برابر است با:

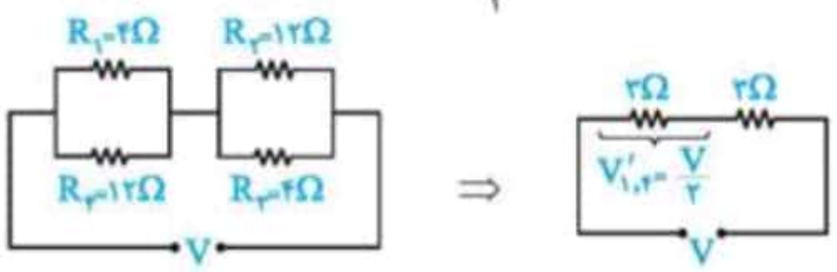
$$V_{AB} = V_{\text{کل}} = V$$

$$V = RI \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_2 = 3V_1$$

* به عبارت دیگر چون مقاومت‌های R_1 و R_2 سری بوده و R_2، ۳ برابر R_1 است، بنابراین ولتاژ دو سر آن (V_2) سه برابر V_1 است.

$$V_1 + V_2 = V \xrightarrow{V_2 = 3V_1} V_1 = \frac{1}{4}V$$

حالت دوم: در حالت دوم، R_1 و R_4 به‌صورت موازی بوده و هم‌چنین R_2 و R_3 نیز به‌صورت موازی بوده و حاصل آن‌ها سری است.



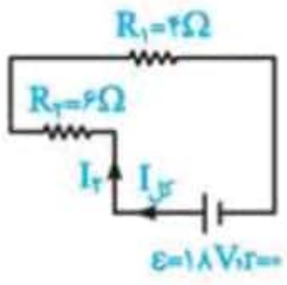
$$V'_{1,4} = V'_1 = \frac{V}{2}$$

بنابراین در مقایسهٔ شدت جریان R_1 در دو حالت داریم:

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{R_1 I'_1}{R_1 I_1} = \frac{\frac{1}{2}V}{\frac{1}{4}V} = 2 \Rightarrow \frac{I'_1}{I_1} = 2$$

gajmarket.com

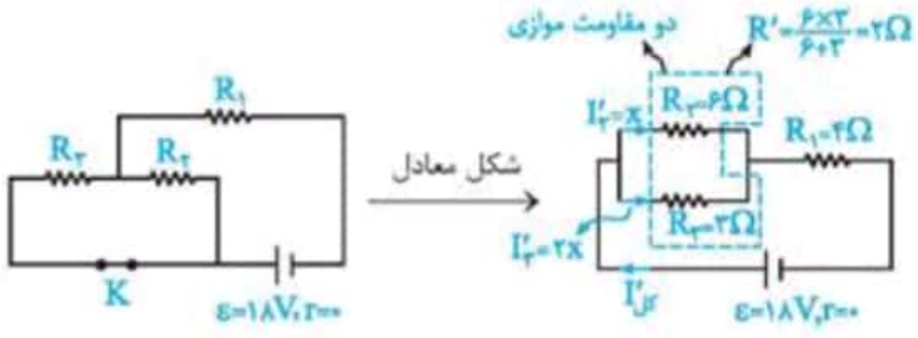
۴ ۱۶۲۴ این مدار را در دو حالت کلید باز و بسته بررسی می‌کنیم (توجه کنید که لامپ‌ها همانند مقاومت در نظر گرفته می‌شوند):



حالت اول: (کلید باز): در این حالت مقاومت R_3 در مدار نبوده و جریان عبوری از لامپ (۲) برابر است با:

$$R_{T_1}=4+6=10\Omega\ ,\ I_2=I_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R_{T_1}+r}=\frac{18}{10+0}=\frac{18}{10}A$$

حالت دوم: (کلید بسته): در این حالت دو مقاومت R_2 و R_3 با یک‌دیگر موازی بوده و داریم:



$$R_{T_2}=R'+R_1=2+4=6\Omega\ ,\ I'_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R_{T_2}+r}=\frac{18}{6+0}=3A$$

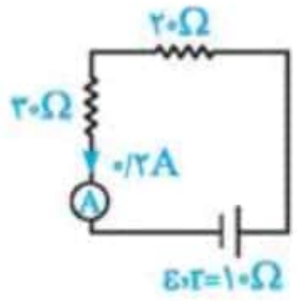
حال این جریان ۳A بین دو مقاومت موازی R_2 و R_3 پخش می‌شود.

$$I'_{\text{کل}}=I'_2+I'_3\ \xrightarrow[I'_2=x\ ,\ I'_3=2x]{I'_{\text{کل}}=3A}\ x+2x=3\Rightarrow x=1A\Rightarrow I'_2=x=1A$$

بنابراین در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{I'_2}{I_2}=\frac{1}{\frac{18}{10}}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

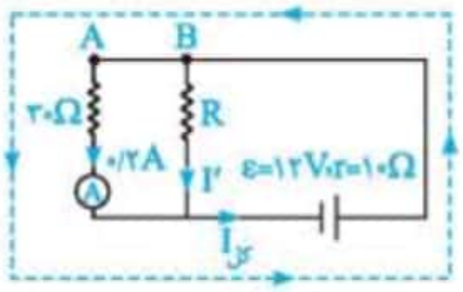
۳ ۱۶۲۵ این سؤال نسبتاً دشوار را در دو حالت تحلیل می‌کنیم:



حالت اول: (هنگامی‌که هر دو کلید K_1 و K_2 باز هستند): در این حالت از مقاومت R جریانی عبور نمی‌کند و نیروی محرکهٔ مولد برابر است با:

$$I_1=\frac{\varepsilon}{R_{c_1}+r}\Rightarrow 0/2=\frac{\varepsilon}{50+10}\Rightarrow\varepsilon=12V$$

حالت دوم: (هنگامی‌که هر دو کلید K_1 و K_2 بسته هستند): در این حالت مقاومت ۲۰Ω اتصال کوتاه می‌شود و مدار به شکل مقابل درمی‌آید. برای محاسبهٔ R در این مدار داریم:



$V_A=V_A$: یک دور چرخیدن در حلقهٔ خارجی از نقطهٔ A

$$V_A=I_{\text{کل}}\times 10-\boxed{12}+0/2\times 30=V_A$$

(ε)

$$I_{\text{کل}}=0/6A\Rightarrow I'=I_{\text{کل}}-0/2=0/4A$$

$V_B=V_B$: یک دور چرخیدن در حلقهٔ داخلی از B

$$V_B=0/6\times 10-12+\boxed{0/4}\times R\Rightarrow R=\frac{6}{0/4}=15\Omega$$

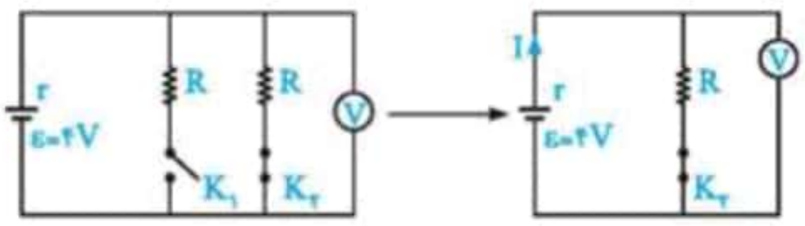
(I')

۱ ۱۶۲۶

تذکر

همان‌طور که در خلاصه نکات (۱۰) اشاره کردیم، در تست‌های (۱۶۲۶) تا (۱۶۳۱)، با تست‌های نسبتاً دشواری روبه‌رو هستیم که در آن‌ها باید دو بار جریان در مدار را به دست آورد و دو بار از رابطهٔ $V=RI$ استفاده کرد.

مدار را در دو حالت بررسی می‌کنیم:



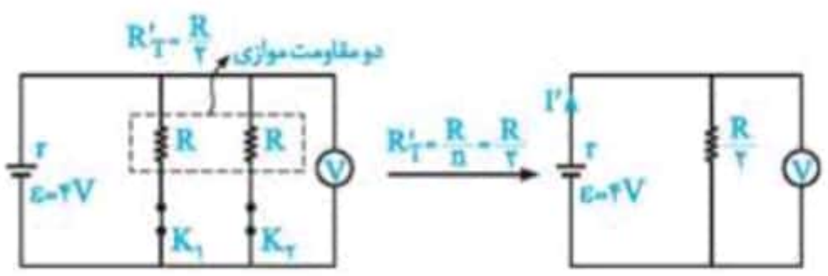
حالت اول: اگر یکی از کلیدها باز و دیگری بسته باشد، مدار به شکل مقابل رسم می‌شود:

$$\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R+r}\xrightarrow{\varepsilon=4V}I=\frac{4}{R+r}$$

مقداری که ولت‌سنج در این حالت نشان می‌دهد برابر است با:

$$V=RI\xrightarrow[V=3V]{I=\frac{4}{R+r}}3=R\times\frac{4}{R+r}\Rightarrow R=3r$$

حالت دوم: اگر هر دو کلید بسته شود، مدار به شکل مقابل رسم می‌شود:



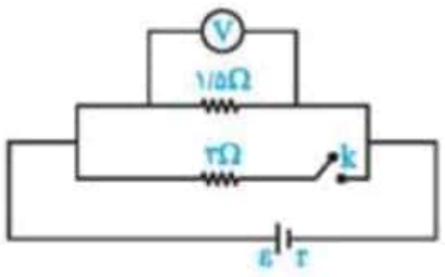
$$\Rightarrow I'=\frac{\varepsilon}{R'_T+r}\xrightarrow[R'_T=\frac{R}{2}=\frac{3r}{2}]{\varepsilon=4V}I'=\frac{4}{\frac{3r}{2}+r}$$

و مقداری که ولت‌سنج در این حالت نشان می‌دهد برابر است با:

$$V'=\frac{R}{2}I'\xrightarrow[\frac{R}{2}=\frac{3r}{2}]{I'=\frac{4}{\frac{3r}{2}+r}}V'=\frac{3r}{2}\times\frac{4}{\frac{3r}{2}+r}=2/4V$$

۱۶۲۷ مدار را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

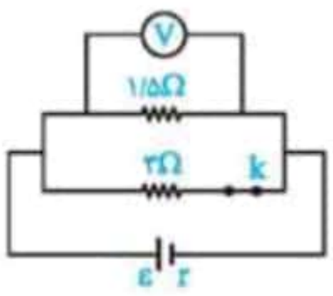
حالت اول: اگر کلید k باز باشد، مقاومت ۳ اهمی حذف می‌شود و جریان عبوری از مدار عبارت است از:



$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}\xrightarrow{R=1/5\Omega} I=\frac{\varepsilon}{1/5+r}$$

عدد ولت‌سنج: $V_1=RI\xrightarrow[I=\frac{\varepsilon}{1/5+r}]{R=1/5\Omega} V_1=1/5\times\frac{\varepsilon}{1/5+r}$

حالت دوم: اگر کلید k را ببندیم، هر دو مقاومت $1/5\Omega$ و 3Ω در مدار به‌صورت موازی حضور دارند و مقاومت معادل $R_{T_2}=\frac{3\times 1/5}{3+1/5}=1\Omega$ است.

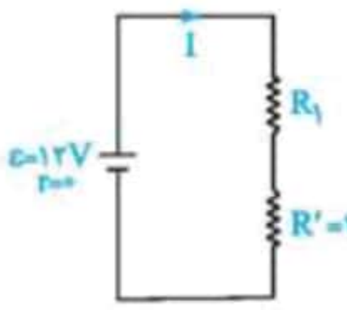


عدد ولت‌سنج: $I_2=\frac{\varepsilon}{R_{T_2}+r}\xrightarrow{R_{T_2}=1\Omega} I_2=\frac{\varepsilon}{1+r}\Rightarrow V_2=R_{T_2}I_2\Rightarrow V_2=1\times\frac{\varepsilon}{1+r}$

در ادامه با توجه به این‌که $\frac{V_2}{V_1}=\frac{8}{9}$ است، داریم:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{\varepsilon}{1+r}}{\frac{1/5\varepsilon}{1/5+r}}=\frac{1/5+r}{1/5(1+r)}=\frac{8}{9}\Rightarrow r=0/5\Omega$$

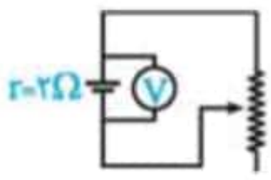
۱۶۲۸ برای روشن شدن کلید الکترونیکی، باید ولتاژ دو سر رئوستا برابر ۵ ولت شود. بنابراین می‌توان نوشت:



$$V'=R'I\xrightarrow{I=\frac{\varepsilon}{R_1+R'}} V'=R'\frac{\varepsilon}{R_1+R'}$$

$$\Rightarrow 5=200\times10^3\times\frac{12}{R_1+200\times10^3}\Rightarrow R_1=2/8\times10^5\Omega$$

۱۶۲۹ مقداری که ولت‌سنج در حالت اول نشان می‌دهد برابر است با:



$$V_1=R_1I_1\Rightarrow V_1=R_1\times\frac{\varepsilon}{R_1+r}\xrightarrow{R_1=20\Omega,\ r=2\Omega} V_1=\frac{20\varepsilon}{20+2}$$

از طرفی مقداری که ولت‌سنج در حالت دوم نشان می‌دهد برابر است با:

$$V_2=R_2I_2\rightarrow V_2=R_2\times\frac{\varepsilon}{R_2+r}\xrightarrow{r=2\Omega} V_2=\frac{R_2\varepsilon}{R_2+2}$$

با توجه به صورت سؤال نسبت $\frac{V_2}{V_1}$ برابر $\frac{1}{2}$ است و داریم:

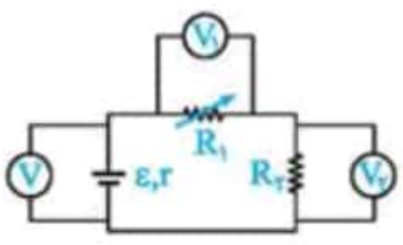
$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{R_2+2}{\frac{20\varepsilon}{20+2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{R_2(20+2)}{20(R_2+2)}=\frac{1}{2}\Rightarrow R_2=1/6\Omega$$

۲ ۱۶۳۰ وقتی R برابر صفر است، اختلاف پتانسیل دو سر مولد صفر می‌شود (گویی ولت‌سنج را به دو سر یک سیم بدون مقاومت متصل کرده‌ایم) و زمانی‌که R بی‌نهایت می‌شود، جریان صفر می‌شود و V برابر ε است، بنابراین عدد ولت‌سنج بین صفر تا ε تغییر می‌کند.

$$R_1=0\Rightarrow I_1=\frac{\varepsilon}{0+r}=\frac{\varepsilon}{r}\Rightarrow V_1=\varepsilon-rI_1=\varepsilon-r\times\frac{\varepsilon}{r}=0$$

$$R_2=\infty\Rightarrow I_2=\frac{\varepsilon}{R+r}=0\Rightarrow V_2=\varepsilon-rI_2\xrightarrow{I_2=0} V_2=\varepsilon$$

۱۶۳۱ در حالتی که مقاومت R_1 صفر است، ولتاژ دو سر آن با توجه به رابطهٔ $V_1=R_1I$ برابر صفر می‌شود. از طرفی در حالتی که مقاومت R_1 بی‌نهایت شود، جریان در مدار برابر صفر شده و ولتاژ دو سر مقاومت R_1، برابر با نیروی محرکهٔ مولد (ε) خواهد شد:



$$R_1=\infty\Rightarrow I=0\Rightarrow\begin{cases}V_2=R_2I=0\\ V=\varepsilon-rI=\varepsilon\end{cases}$$

$$V_{کل}=V_1+V_2\Rightarrow\varepsilon=V_1+0\Rightarrow V_1=\varepsilon$$

کمی بیشتر: نمی‌توان گفت $V_1=R_1I$ بوده و با توجه به صفر بودن I، V_1 صفر است، زیرا در این حالت $R_1=\infty$ است و حاصل $0\times\infty$، یک حد است که باید رفع ابهام شود.

gajmarket.com

۳ ۱۶۳۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

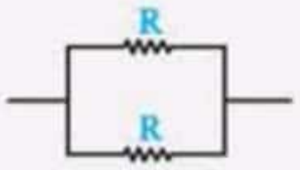
خلاصه نکات ۱۱ **بررسی تأثیر تغییر مقاومت خارجی بر روی عدد آمپرسنج و ولت‌سنج و نور لامپ** (تست‌های ۱۶۳۲ تا ۱۶۴۴)

در این قسمت، مطالب آموخته شده در خلاصه نکات‌های قبلی را به‌صورت مفهومی بررسی خواهیم کرد. برای بررسی سؤالات این قسمت، به‌طور اجمالی برخی از مفاهیم مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم:

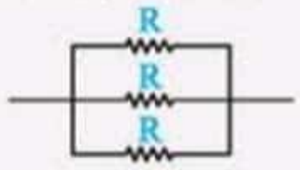
۱) اگر مقاومت خارجی مدار کاهش یابد، جریان کل مدار افزایش می‌یابد و بالعکس.

$$\uparrow I = \frac{\varepsilon}{\downarrow R_T + r}$$

۲) اگر تعداد مقاومت‌های موازی در مدار افزایش یابد، مقاومت معادل مدار کاهش و جریان کل مدار افزایش می‌یابد.



$$R_{T_1} = \frac{R}{2}$$



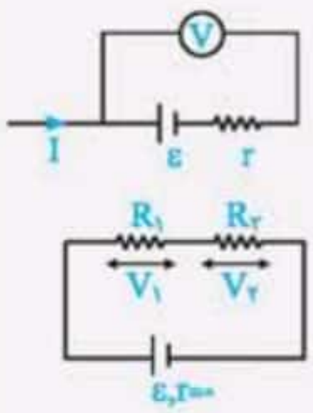
$$R_{T_2} = \frac{R}{3}$$

و اگر تعداد مقاومت‌های سری در مدار افزایش یابد، مقاومت معادل مدار افزایش و جریان کل مدار کاهش می‌یابد.

۳) با افزایش جریان عبوری از باتری، افت پتانسیل در داخل باتری افزایش یافته و اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد.

$$I \uparrow \Rightarrow \text{افت پتانسیل}: rI \uparrow$$

$$\downarrow V = \varepsilon - r\uparrow I \Rightarrow$$ اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد.



۴) در مدار شکل مقابل، مجموع دو ولتاژ V_1 و V_2 برابر ε می‌باشد (چون مقاومت درونی مولد صفر است). $\varepsilon = V_1 + V_2$

حال اگر به هر دلیلی V_2 کاهش یابد، باید V_1 افزایش یابد تا مجموع آن‌ها ثابت بماند.

V_1 باید افزایش یابد تا با کاهش V_2 مجموع آن‌ها ثابت بماند. $\Rightarrow \underset{\text{ثابت}}{\varepsilon} = V_1 + \downarrow V_2$

در سؤال‌های ارائه شده در این قسمت، استفاده از مطالب سادهٔ فوق را به خوبی آموزش می‌دهیم.

با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$، هر چه مقاومت R بیشتر شود، جریان در مدار کم‌تر می‌شود و آمپرسنج عدد کم‌تری را نشان می‌دهد. از طرفی با توجه به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، واضح است که هر چه جریان در مدار کم‌تر باشد، افت پتانسیل درون مولد (یعنی rI) نیز کم‌تر می‌شود و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر مولد، بیشتر می‌گردد و ولت‌سنج عدد بیشتری را نشان می‌دهد. $R \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow$ افت $\downarrow \Rightarrow \uparrow$ عدد ولت‌سنج (اختلاف پتانسیل دو سر باتری)

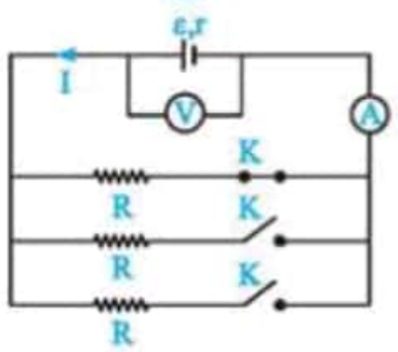
۲ ۱۶۳۳ سؤال جالب و خوبی است که دانش‌آموزان در آن نمرهٔ منفی زیاد می‌گیرند. با توجه به این‌که مقاومت درونی مولد ناچیز است $(r = 0)$، افت پتانسیل در مولد (یعنی rI) صفر بوده و نیروی محرکهٔ مولد با اختلاف پتانسیل دوسر آن برابر است $(V = \varepsilon)$، بنابراین با تغییر مقاومت مدار، عدد ولت‌سنج تغییر نمی‌کند.

$$V = \varepsilon - rI \xrightarrow{r=0} V = \varepsilon$$

در ادامه با توجه به رابطهٔ $R = R_0(1 + \alpha\Delta\theta)$، با کاهش دما، مقاومت مدار کاهش می‌یابد و در نتیجه جریان عبوری از مدار (مقداری که آمپرسنج نشان می‌دهد) افزایش می‌یابد.

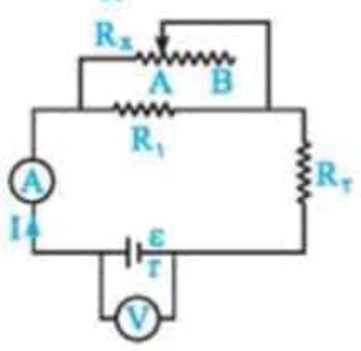
$$\uparrow I = \frac{\varepsilon}{\downarrow R + r}$$

۲ ۱۶۳۴ اگر با بستن کلیدهای بیشتر تعداد مقاومت‌های موازی در مدار بیشتر شود، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد $\left(R_T = \frac{R}{n}\right)$ و در نتیجه شدت جریان خروجی از باتری افزایش می‌یابد و با افزایش شدت جریان، افت پتانسیل در باتری زیاد می‌شود و ولتاژ دو سر باتری کاهش می‌یابد $(V = \varepsilon - rI)$.



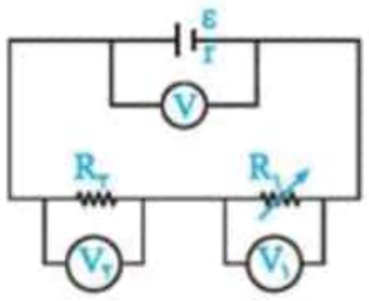
$\downarrow$ عدد ولت‌سنج دو سر باتری $\Rightarrow \uparrow$ افت پتانسیل $\Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \downarrow R_T = \frac{R}{\uparrow n} \Rightarrow$ کلیدهای بیشتری بسته شود

۲ ۱۶۳۵ با حرکت لغزنده از A به B، مقاومت شاخهٔ بالایی (R_X) افزایش یافته و در نتیجه مقاومت معادل R_1 و R_X هم افزایش یافته و مقاومت معادل کل مدار نیز در نهایت افزایش می‌یابد. با رخ دادن این اتفاق، داریم:



$$R_X \uparrow \rightarrow R_T \uparrow \rightarrow I \downarrow \rightarrow \text{افت} \downarrow \rightarrow V \uparrow$$

این موضوع یعنی $I' < I$ و $V' > V$ می‌شود.



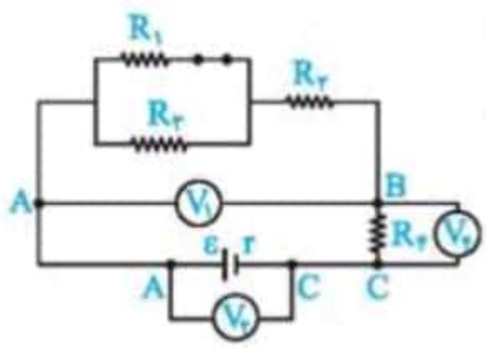
۱۶۳۶ با کاهش مقاومت R_1، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد و در نتیجه شدت جریان و افت پتانسیل در باتری (rI) افزایش می‌یابد. در اثر افزایش شدت جریان، بنا به رابطهٔ $V_2 = R_2 I$ و $V = \varepsilon - rI$، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_2 (یعنی V_2) افزایش و اختلاف پتانسیل دو سر مولد (V) کاهش می‌یابد. از طرفی چون V کاهش یافته و V_2 افزایش یافته است، پس V_1 الزاماً باید کاهش یابد تا تساوی زیر برقرار بماند.

$$R_1 \downarrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow (rI) \text{ افت } \uparrow \Rightarrow V \text{ (ولتاژ دو سر باتری)} \downarrow \quad \text{و} \quad \uparrow V_2 = R_2 I \uparrow$$

$$\downarrow V = V_1 + V_2 \uparrow \Rightarrow V_1 \text{ لزوماً کاهش می‌یابد تا تساوی برقرار شود.}$$

۱۶۳۷ با بستن کلید، مقاومت معادل کل مدار کاهش می‌یابد (چرا؟)، در نتیجه جریان عبوری از باتری افزایش می‌یابد و افت پتانسیل در باتری را زیاد می‌کند و در نهایت ولتاژ دو سر باتری کاهش می‌یابد $(V_2' < V_2)$.

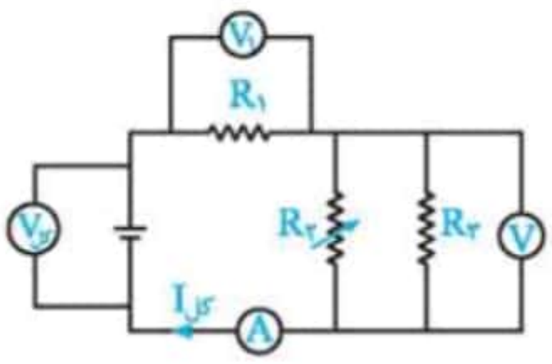
$$\text{کلید K بسته شود} \Rightarrow R_T \downarrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \text{افت} \uparrow \Rightarrow \text{ولتاژ دو سر باتری} : V_2 = \varepsilon - rI \uparrow \downarrow$$



با افزایش جریان (اگر به‌عنوان ابتکار یک ولت‌سنج فرضی در دو سر R_2 در نظر بگیریم) ولتاژ دو سر مقاومت R_2 زیاد می‌شود (کل $V_2 = R_2 I$). از طرفی مجموع ولتاژ R_2 با V_1 برابر با V_2 است، پس V_1 نیز باید کاهش یابد، تا تساوی زیر برقرار بماند.

$$\text{کلید K بسته شود} \Rightarrow R_T \downarrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \text{افت} \uparrow \Rightarrow V \text{ (ولتاژ دو سر باتری)} \downarrow$$

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} \Rightarrow V_2 = V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 \text{ باید کاهش یابد.}$$



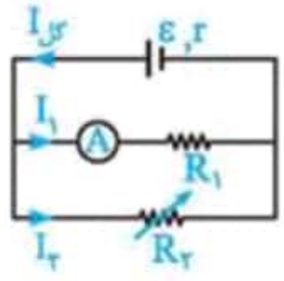
۱۶۳۸ این سؤال، سؤال معروفی است که چندین بار در کنکور و امتحانات مطرح شده است. با افزایش مقاومت R_2، مقاومت معادل کل مدار افزایش‌یافته و در نتیجه جریان کل مدار که همان جریان آمپرسنج است، کاهش می‌یابد.

$$R \uparrow \Rightarrow R_T \uparrow \Rightarrow I_{\text{کل}} \downarrow \Rightarrow \text{افت پتانسیل در باتری} \; rI_{\text{کل}} \downarrow \Rightarrow \text{ولتاژ دو سر مولد} : V = \varepsilon - rI_{\text{کل}} \uparrow$$

از طرفی با کاهش $I_{\text{کل}}$، ولتاژ دو سر مقاومت R_1 نیز کاهش می‌یابد. پس با توجه به رابطهٔ $V_{\text{کل}} = V_1 + V$، چون $V_{\text{کل}}$ افزایش یافته است، بنابراین V نیز باید افزایش بیابد.

$$V_1 = R_1 I_{\text{کل}} \downarrow \downarrow$$

$$V_{\text{کل}} = V_1 + V \Rightarrow V \text{ باید افزایش یابد تا تساوی برقرار باشد، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.} \uparrow \downarrow \uparrow$$



۱۶۳۹ با کاهش مقاومت متغیر R_2، مقاومت معادل مدار کاهش یافته و در نتیجه جریان در شاخهٔ اصلی مدار (کل I) افزایش می‌یابد. از طرفی با توجه به رابطهٔ کل $V = \varepsilon - rI$، با افزایش جریان، اختلاف پتانسیل دو سر مولد که همان اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 است، کاهش می‌یابد.

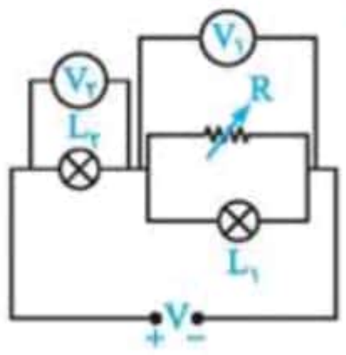
با توجه به رابطهٔ $V = R_1 I_1$، جریان گذرنده از این مقاومت (یعنی عدد آمپرسنج) نیز کاهش خواهد یافت.

$$R_2 \downarrow \Rightarrow R_T \downarrow \Rightarrow I_{\text{کل}} \uparrow \Rightarrow V = \varepsilon - rI_{\text{کل}} \downarrow \Rightarrow V = R_1 I_1 \downarrow \quad (\varepsilon, R_1 \text{ ثابت})$$

$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 \text{ لزوماً افزایش می‌یابد.}$$

تذکر

در این سؤال کل I افزایش یافته و I_1 کاهش می‌یابد. بنابراین طبق قانون جریان، باید I_2 افزایش یابد.



۱۶۴۰ اگر لغزندهٔ رئوستا را در جهت ساعت‌گرد حرکت دهیم، مقاومت بزرگ‌تری در مسیر جریان قرار می‌گیرد و مقاومت R افزایش می‌یابد. با افزایش R، مقاومت معادل کل مدار افزایش می‌یابد، بنابراین شدت جریان شاخهٔ اصلی مدار (کل I) کاهش می‌یابد و در نتیجه نور لامپ L_2 کاهش می‌یابد. از طرفی چون مجموع ولتاژهای V_1 و V_2 ثابت است (برابر ولتاژ ثابت دو سر مدار است)، پس با کاهش ولتاژ دو سر لامپ (L_2)، ولتاژ دو سر لامپ L_1 افزایش یافته و پرنورتر می‌شود.

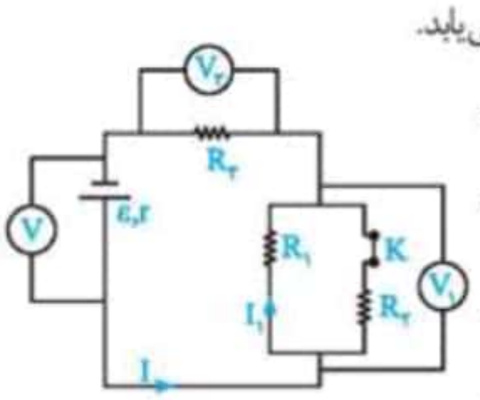
$$R \uparrow \Rightarrow R_T \uparrow \Rightarrow I_{\text{کل}} \downarrow \Rightarrow V_2 = R_2 I_{\text{کل}} \downarrow \Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_1 \text{ باید افزایش یابد.} \quad (V, R_2 \text{ ثابت})$$

تذکر

به‌طور کلی اگر ولتاژ دو سر لامپ یا جریان عبوری از آن افزایش یابد، لزوماً لامپ پرنورتر می‌شود.

gajmarket.com

۳ ۱۶۴۱ با باز کردن کلید K، مقاومت معادل مدار افزایش یافته (چرا؟) و شدت جریان در شاخهٔ اصلی مدار (I) کاهش می‌یابد.



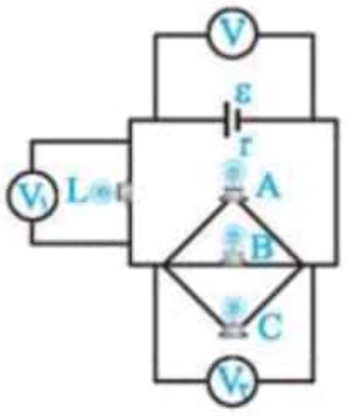
$V \uparrow$: (ولتاژ دو سر مولد) $\Rightarrow$ افت $\downarrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow R_T \uparrow \Rightarrow$ کلید باز شود

با کاهش I، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_2 نیز کاهش می‌یابد و از طرفی $V = V_1 + V_2$ و چون V افزایش یافته است، در نتیجه ولتاژ دو سر مقاومت R_1 افزایش یافته و جریان I_1 نیز افزایش می‌یابد.

$$\downarrow V_2 = \overset{\text{ثابت}}{R_2} I \downarrow$$

$$\uparrow V = V_1 + V_2 \downarrow \Rightarrow V_1 \text{ باید افزایش یابد تا تساوی برقرار شود.} \Rightarrow \uparrow V_1 = \overset{\text{ثابت}}{R_1} I_1 \uparrow$$

۴ ۱۶۴۲ با خاموش شدن لامپ A، یک لامپ از مدار حذف می‌شود و مقاومت معادل افزایش می‌یابد (در این حالت مقاومت لامپ‌های موازی از $\frac{R}{3}$ به $\frac{R}{2}$ می‌رسد) و می‌توان نوشت:



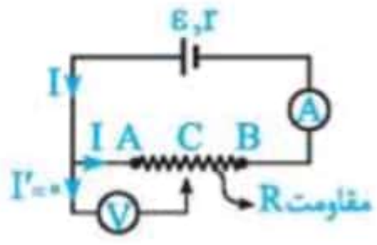
$R_T \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow$ ولتاژ دو سر باتری $\Rightarrow \downarrow$ افت پتانسیل $\Rightarrow V \uparrow$

$$V_1 = \overset{\text{ثابت}}{R_1} I \downarrow \Rightarrow \text{ولتاژ دو سر لامپ L } (V_1) \text{ کاهش می‌یابد.} \Rightarrow \text{نور لامپ L کاهش می‌یابد.}$$

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_2 \text{ باید افزایش یابد تا تساوی برقرار بماند.}$$

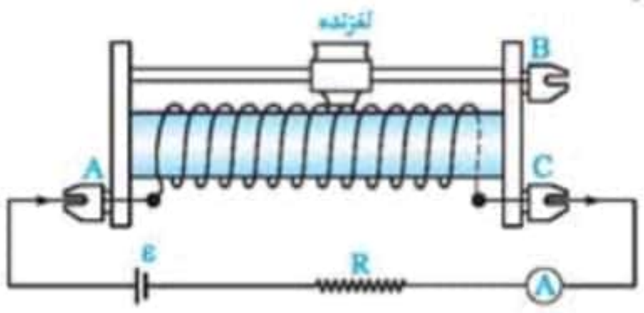
با توجه به افزایش ولتاژ دو سر لامپ‌های B و C، نور این لامپ‌ها افزایش می‌یابد.

۴ ۱۶۴۳ سؤال جالبی مطرح شده است. جریان از کل مقاومت AB عبور می‌کند و جریانی از ولت‌سنج عبور نمی‌کند، بنابراین با جابه‌جایی لغزنده کماکان تمام مقاومت R در مسیر جریان قرار دارد و جریان اصلی ثابت می‌ماند. در ادامه اگر لغزنده را به سمت B ببریم، ولت‌سنج دو سر مقاومت بزرگتر قرار می‌گیرد که از آن جریان ثابتی می‌گذرد، بنابراین ولت‌سنج مقدار بیشتری را نشان می‌دهد.



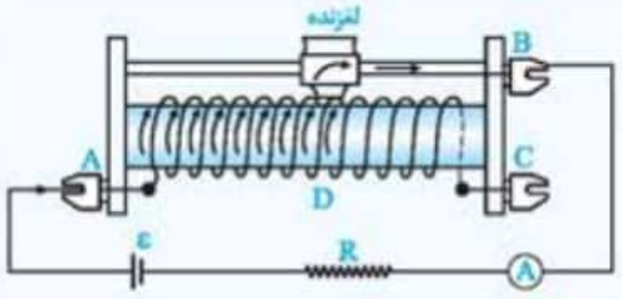
$$\uparrow V = \uparrow R_{AC} \overset{\text{ثابت}}{I}$$

۱ ۱۶۴۴ مشابه با سؤال قبل است. اگر لغزنده جابه‌جا شود، کماکان تمام مقاومت AC بر سر راه جریان است و مقاومت موجود در مدار تغییر نمی‌کند، بنابراین جریان تغییر نمی‌کند.



تذکر

در شکل مقابل که مدار به نقطهٔ B وصل شده است، قسمت DC از مدار حذف است و اگر لغزنده به سمت راست جابه‌جا شود، مقاومت بزرگ‌تری بر سر راه جریان قرار می‌گیرد و در نتیجه آمپرسنج جریان کم‌تری را نشان می‌دهد.



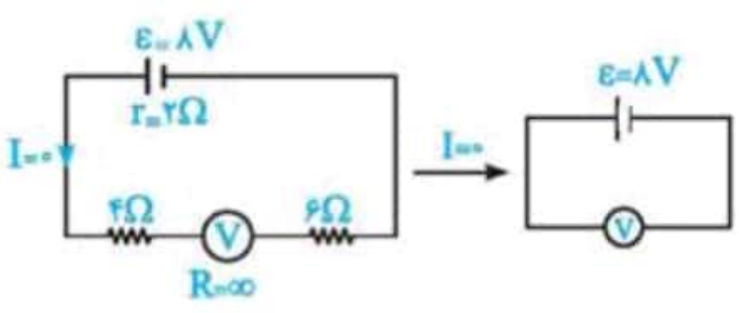
۱ ۱۶۴۵

نکته

در یک مدار ایده‌آل، مقاومت ولت‌متر باید بی‌نهایت باشد تا از آن جریانی عبور نکند (چون به‌صورت موازی در مدار قرار می‌گیرد.) و مقاومت آمپرمتر باید صفر باشد تا افت ولتاژ در آن صفر باشد (چون به‌صورت سری در مدار قرار می‌گیرد).

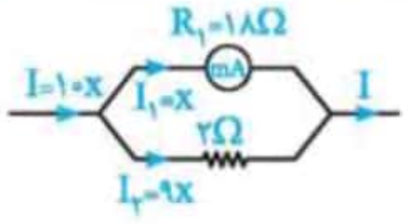
۴ ۱۶۴۶ ولت‌سنج در حالت درست به‌صورت موازی به مقاومت R وصل می‌شود و آمپرسنج به طور سری که در گزینهٔ (۴) درست نشان داده شده است.

۲ ۱۶۴۷ با توجه به اینکه مقاومت ولت‌سنج خیلی زیاد است و در شاخهٔ اصلی عبور جریان قرار گرفته است، بنابراین جریانی از مدار عبور نمی‌کند، و در نتیجه جریانی از مقاومت‌های مدار نمی‌گذرد و افت ولتاژ در آن‌ها صفر بوده و می‌توان آن‌ها را از مدار حذف کرد. پس در واقع ولت‌سنج مستقیماً به دو سر مولد متصل است و همان نیروی محرکه را نشان می‌دهد.



$$R_T = \infty \Rightarrow I = 0 \Rightarrow V_{\text{ولت‌سنج}} = \varepsilon = 8\,V$$

۴ ۱۶۴۸ با توجه به برابری ولتاژ دو سر میلی‌آمپرسنج و مقاومت ۲ اهمی، اگر جریان $R_1=18\Omega$ را x فرض کنیم، جریان مقاومت ۲ اهمی که $\frac{1}{9}$ برابر ۱۸ اهمی است $\left(\frac{2}{18}=\frac{1}{9}\right)$ برابر $9x$ است:



$$\frac{I_1}{I}=\frac{x}{10x}=\frac{1}{10}$$

۳ ۱۶۴۹

نکته

می‌توان آمپرسنج ایده‌آل را از مدار حذف کرد و به جای آن یک سیم بدون مقاومت در مدار قرار داد.

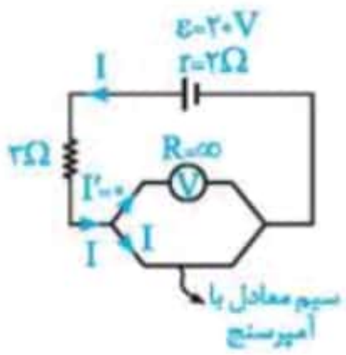
با توجه به نکتهٔ فوق، مدار به شکل مقابل ساده می‌شود:



$$\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R+r}=\frac{20}{2+2}=5A$$

دقت کنیم که همین جریان $5A$ از آمپرسنج ایده‌آل می‌گذرد، چون مقاومت ۶ اهمی اتصال کوتاه شده و در مدار قرار ندارد.

۱ ۱۶۵۰ جریانی که آمپرسنج نشان می‌دهد، همان جریان عبوری از کل مدار است و مقدار آن برابر است با:



$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}=\frac{20}{3+2}=4A$$

از طرفی عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد صفر است، زیرا ولت‌سنج به دو سر آمپرسنج ایده‌آل متصل است که مقاومت آن صفر است:

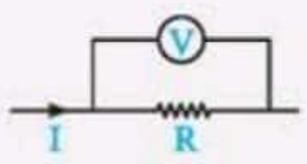
$$\text{عدد ولت‌سنج}: V=R_{\text{آمپرسنج}}\times I=0$$

* در واقع ولت‌سنج به دو سر یک سیم بدون مقاومت متصل شده است، بنابراین عدد صفر را نشان می‌دهد.

۴ ۱۶۵۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۲ — توان مصرفی در یک مقاومت (تست‌های ۱۶۵۱ تا ۱۶۶۶)

در شکل مقابل، جریان عبوری از مقاومت R برابر I و اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر V است، می‌توان نشان داد که برای محاسبهٔ مقدار توان مصرفی در مقاومت (انرژی مصرفی در واحد زمان) می‌توان نوشت:



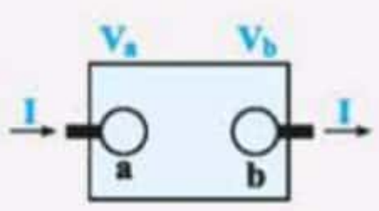
$$P=RI^2=\frac{V^2}{R}=VI$$

هم‌چنین از آن‌جا که توان مصرفی برابر انرژی مصرفی در واحد زمان است، برای محاسبهٔ مقدار انرژی مصرفی در مقاومت در مدت زمان t می‌توانیم از روابط مقابل استفاده کنیم:

$$P=\frac{U}{t}\Rightarrow U=Pt\Rightarrow U=RI^2t=\frac{V^2}{R}t=VIt$$

* در روابط فوق منظور از V همان ΔV، یعنی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت می‌باشد.

درک مفهومی‌تر روابط فوق: شکل مقابل یک عنصر از مداری را نشان می‌دهد که می‌تواند باتری، مقاومت و یا هر چیز دیگری باشد که اختلاف پتانسیلی بین پایانه‌های آن برقرار است. فرض کنید بار Δq در مدت زمان Δt تحت اختلاف پتانسیل $\Delta V=V_b-V_a$ از پایانهٔ a به پایانهٔ b این جزء مدار برود. در فصل پیش دیدیم کار نیروی خارجی برای چنین انتقالی برابر با $W=(\Delta q)(\Delta V)$ است. از طرفی توان الکتریکی، آهنگ انجام این کار است:



$$P=\frac{W}{t}=\frac{(\Delta q)(\Delta V)}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)\Delta V=I\Delta V\Rightarrow P=I\Delta V$$

توجه کنید این رابطه هم برای منبع نیروی محرکه (مثلاً باتری) و هم برای وسیلهٔ مصرف‌کننده (مثلاً مقاومت یک دستگاه الکتریکی) برقرار است.

حال با توجه به رابطهٔ $R=\frac{\Delta V}{I}$ برای یک مقاومت، می‌توان صورت‌های دیگری از رابطهٔ توان را برای یک مقاومت به‌دست آورد:

$$P=I\Delta V\xrightarrow{\Delta V=RI}P=RI^2$$

$$P=I\Delta V\xrightarrow{I=\frac{\Delta V}{R}}P=\frac{(\Delta V)^2}{R}$$

نکات مهم و کاربردی

۱ با توجه به مقدار بار جاری شده در مدار از رابطهٔ $q=It$، می‌توان روابط توان و انرژی مقاومت را برحسب q نیز به‌دست آورد. به‌طور مثال داریم:

$$U=RI^2t\xrightarrow{I=\frac{q}{t}}U=R\left(\frac{q}{t}\right)^2t=\frac{Rq^2}{t}$$

۲ یکای پرکاربرد دیگر انرژی، کیلووات ساعت (kWh) می‌باشد که برابر $3/6\times10^6$ ژول است.

$$1kWh=(10^3W)\times(3600s)=3/6\times10^6J$$

(یک کیلووات) (یک ساعت)

gajmarket.com

در ادامه برای یادگیری بهتر مفاهیم ارائه شده، به تمرین‌های زیر توجه کنید:

تمرین: **اگر ولتاژ دو سر یک مقاومت الکتریکی را دو برابر کنیم، برای یک فاصلهٔ زمانی معین، بار الکتریکی عبوری از آن و انرژی الکتریکی مصرف شده در آن به‌ترتیب از راست به چپ هر کدام چند برابر می‌شود؟**

۱) ۲ و ۲ ۲) ۲ و ۴ ۳) ۴ و ۳ ۴) ۴ و ۴

پاسخ در دمای ثابت، اگر ولتاژ دو سر یک مقاومت را دو برابر کنیم، با توجه به رابطهٔ $V = RI$، جریان الکتریکی عبوری از آن مقاومت نیز دو برابر می‌شود:

$$\uparrow V = R \; I \uparrow \quad \begin{matrix} \text{۲ برابر} \\ \text{ثابت} \end{matrix} \quad \text{۲ برابر}$$

از طرفی با دو برابر شدن جریان در یک زمان معین، مقدار بار الکتریکی عبوری از مقاومت نیز دو برابر می‌شود $(q = It)$.

هم‌چنین با توجه به رابطهٔ $U = \frac{V^2}{R} \times t$، واضح است که با دو برابر شدن ولتاژ دو سر مقاومت در یک زمان معین، انرژی مصرف شده در آن چهار برابر می‌شود $(U \propto V^2)$، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر ΔV و جریان عبوری از آن I می‌باشد. بنابراین با توجه به خلاصه نکات فوق، هر سه عبارت RI^2، $I\Delta V$ و $\frac{(\Delta V)^2}{R}$ برابر توان الکتریکی مصرفی در مقاومت است و گزینهٔ (۴) نادرست می‌باشد.

۱ ۱۶۵۲ با توجه به روابط زیر، انرژی الکتریکی مصرف شده در مقاومت R در مدت زمان t برابر است با:

$$\begin{cases} P = \frac{U}{t} \Rightarrow U = Pt \\ P = I\Delta V \end{cases} \Rightarrow U = (I\Delta V) \times t = \underbrace{It}_{q} \times \Delta V = q\Delta V$$

۴ ۱۶۵۳ همان‌طور که می‌دانید، وات یکای توان می‌باشد. حال با توجه به روابط زیر، چند واحد معادل با واحد وات را به‌دست می‌آوریم:

۱) $P = VI \xrightarrow{I=\frac{q}{t}} P = \frac{Vq}{t} \Rightarrow \text{وات} \equiv \frac{\text{کولن} \times \text{ولت}}{\text{ثانیه}}$

۲) $P = VI \Rightarrow \text{وات} \equiv \text{ولت} \times \text{آمپر}$

۳) $P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \text{وات} \equiv \frac{\text{مجذور ولت}}{\text{اهم}}$

بنابراین سه گزینهٔ اول معادل با یکای وات بوده و گزینهٔ (۴) معادل با آن نمی‌باشد.

۱ ۱۶۵۴ با توجه به رابطهٔ $P = RI^2$، مقاومت این سیم برابر است با:

$$P = ۴۸۰\,W \;,\; I = ۴A \Rightarrow P = RI^2 \Rightarrow ۴۸۰ = R \times (۴)^2 \Rightarrow R = ۳۰\Omega$$

۴ ۱۶۵۵ با توجه به روابط مقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} U = RI^2t \\ I = \frac{q}{t} \end{cases} \Rightarrow U = R \times \left(\frac{q}{t}\right)^2 \times t = \frac{Rq^2}{t}$$

$$R = ۵\Omega \;,\; q = ۲۰۰C \;,\; U = ۴۰۰۰J \Rightarrow U = \frac{Rq^2}{t} \Rightarrow ۴۰۰۰ = \frac{۵ \times (۲۰۰)^2}{t} \Rightarrow t = ۵۰s$$

۲ ۱۶۵۶ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۲)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴ ۱۶۵۷ سیم در اثر تحمل گرمای $۲/۵J$ در طی یک ثانیه ذوب می‌شود، بنابراین با توجه به رابطهٔ $U = RI^2t$ می‌توان نوشت:

$$U_{max} = ۲/۵J \;,\; t = ۱s \;,\; R = ۰/۱\Omega \;,\; I_{max} = ?$$

$$U_{max} = RI_{max}^2 t \Rightarrow ۲/۵ = ۰/۱ \times I_{max}^2 \times ۱ \Rightarrow I_{max} = ۵A \Rightarrow V_{max} = RI_{max} = ۰/۱ \times ۵ = ۰/۵V$$

بنابراین حداکثر جریان عبوری از این فیوز برابر $5A$ است و اگر جریان بیشتر از آن باشد، فیوز می‌سوزد. هم‌چنین حداکثر اختلاف پتانسیل قابل اعمال به دو سر فیوز برابر $۰/۵V$ بوده و در ولتاژهای بیش از آن، فیوز خواهد سوخت. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۱۶۵۸ با توجه به رابطهٔ $P = \frac{V^2}{R}$، از آن‌جایی که مقدار مقاومت‌ها با یک‌دیگر برابر است، توان مصرف شده در آن‌ها با مجذور اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها رابطهٔ مستقیم دارد. بنابراین داریم:

$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{R \text{ یکسان}} \frac{P_۲}{P_۱} = \left(\frac{V_۲}{V_۱}\right)^2 \xrightarrow{P_۱ = ۸P_۲} \frac{۱}{۸} = \left(\frac{V_۲}{V_۱}\right)^2 \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{۱}{\sqrt{۸}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۳ ۱۶۵۹ با توجه به رابطهٔ $P = RI^2$، توان مصرفی در مقاومت را در هر دو حالت می‌نویسیم:

رابطهٔ (I): **حالت (۱):** $P_1 = RI_1^2 \Rightarrow P = 2I_1^2$

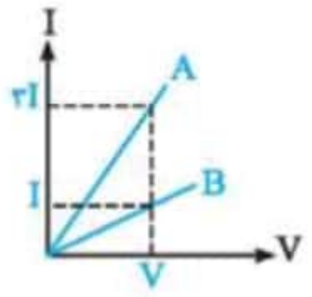
حالت (۲): $P_2 = RI_2^2 \xrightarrow[I_2 = I_1 + 2]{P_2 = P + 32} P + 32 = 2(I_1 + 2)^2 \xrightarrow{\text{بنابر رابطهٔ (I)}} 2I_1^2 + 32 = 2(I_1 + 2)^2 \Rightarrow 2I_1^2 + 32 = 2I_1^2 + 8I_1 + 8 \Rightarrow 8I_1 = 24 \Rightarrow I_1 = 3A$

۲ ۱۶۶۰ با توجه به رابطهٔ $q = It$، بار الکتریکی که در مدت زمان معین از دو سیم می‌گذرد یکسان است، چون جریان در دو سیم برابر است:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{I_2}{I_1} \times \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow q_2 = q_1$$

* به عنوان تمرین، نادرستی سایر گزینه‌ها را با کمک روابط $V = RI$ و $U = RI^2t$ بررسی کنید.

۲ ۱۶۶۱ **گام اول** (محاسبهٔ نسبت مقاومت‌ها): با توجه به اطلاعات نمودار، داریم:



$$V_A = V_B = V \;,\; I_A = 3I \;,\; I_B = I \;,\; \frac{R_A}{R_B} = ?$$

$$V_A = V_B \Rightarrow R_A I_A = R_B I_B \Rightarrow R_A \times 3I = R_B \times I \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{1}{3}$$

گام دوم: با توجه به آن که نسبت توان مصرفی دو مقاومت در یک ولتاژ یکسان پرسیده شده است، با استفاده از رابطهٔ $P = \frac{V^2}{R}$، برای مقایسهٔ توان‌ها می‌توان نوشت:

$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V \text{ یکسان}} \frac{P_A}{P_B} = \frac{R_B}{R_A} = 3$$

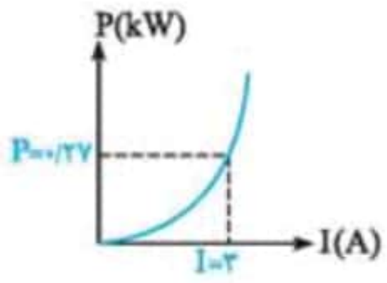
خلاقیت‌های حرفه‌ای

با توجه به نمودار فوق، برای مقایسهٔ توان دو رسانا به کمک رابطهٔ $P = VI$ می‌توان نوشت:

$$V_A = V_B = V \;,\; I_A = 3I \;,\; I_B = I$$

$$P = VI \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{I_A}{I_B} = 1 \times 3 = 3$$

۳ ۱۶۶۲ **گام اول:** به کمک نمودار داده شده و با استفاده از رابطهٔ توان ($P = RI^2$)، مقدار مقاومت را به‌دست می‌آوریم:



$$P = RI^2 \Rightarrow 0/27 \times 10^3 = R \times (3)^2 \Rightarrow R = 30\Omega$$

گام دوم: حال با داشتن مقدار مقاومت و با استفاده از قانون اهم، در لحظه‌ای که جریان عبوری از مقاومت برابر ۲A است، داریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow V = RI = 30 \times 2 = 60\,V$$

۱ ۱۶۶۳ اختلاف پتانسیل دو سر سیم رسانای نشان داده شده، برابر V بوده و مقاومت آن برابر R است. بنابراین توان مصرف شده در آن برابر است با:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

از طرفی مقاومت این سیم از رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P = \frac{V^2}{\rho\frac{L}{A}} = \frac{AV^2}{\rho L} \Rightarrow \begin{cases} P \propto A \\ P \propto V^2 \end{cases}$$

* طبق رابطهٔ به‌دست آمده در فوق، توان مصرفی با ρ و L رابطهٔ عکس دارد.

۲ ۱۶۶۴ از آن‌جایی که سیم تنگستن مربوط به لامپ L_1 ضخیم‌تر است، در نتیجه $A_1 > A_2$ بوده و طبق رابطهٔ $R = \frac{\rho L}{A}$ و برابر بودن جنس و طول دو سیم، مقاومت سیم (۱) کم‌تر است. اکنون طبق رابطهٔ $P = \frac{V^2}{R}$، اگر هر دو لامپ را به ولتاژ یکسان (۲۲۰ ولت) وصل کنیم، داریم:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} \xrightarrow{R_2 > R_1} P_1 > P_2 \Rightarrow$$

توان و روشنایی لامپ (۱) بیشتر است، چون مقاومت الکتریکی آن کم‌تر است.

۳ ۱۶۶۵ **گام اول:** ابتدا با توجه به رابطهٔ $R = \frac{\rho L}{A}$، مقاومت سیم را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = 10^{-6}\,\Omega m \;,\; L = 2m \;,\; A = 0/2\,mm^2 = 2 \times 10^{-7}\,m^2 \Rightarrow R = \frac{\rho L}{A} = \frac{10^{-6} \times 2}{2 \times 10^{-7}} = 10\Omega$$

گام دوم: با کمک رابطهٔ $P = \frac{V^2}{R}$، توان مصرفی در سیم را به‌دست می‌آوریم:

$$V = 200\,V \;,\; R = 10\Omega \Rightarrow P = \frac{V^2}{R} = \frac{(200)^2}{10} = 4 \times 10^3\,W = 4\,kW$$

gajmarket.com

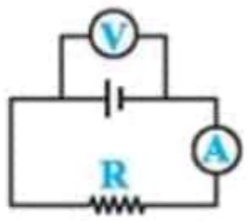
گام سوم: در آخرین گام با استفاده از رابطهٔ $U = Pt$، می‌توان مقدار انرژی مصرف شده در سیم را برحسب کیلووات ساعت محاسبه کرد:

$$P = ۴kW \ , \ t = ۲۰min = \frac{۱}{۳}h \Rightarrow U = Pt = ۴ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}kW.h$$

دید دیگر: می‌توانستیم مستقیماً از فرمول $U = \frac{V^۲}{R} \times t$ نیز انرژی را برحسب ژول به‌دست آورده و سپس آن را به کیلووات ساعت تبدیل کنیم:

$$U = \frac{(۲۰۰)^۲}{۱۰} \times (۲۰ \times ۶۰) = ۴۸ \times ۱۰^۵ \, J = \frac{۴۸ \times ۱۰^۵}{۳/۶ \times ۱۰^۶}kW.h = \frac{۴۸}{۳۶}kW.h = \frac{۴}{۳}kW.h$$

۴ ۱۶۶۶ در شکل روبه‌رو، ولت‌سنج در واقع اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت و آمپرسنج جریان گذرنده از آن را نشان می‌دهد.



بنابراین طبق رابطهٔ $P = VI$، توان مصرفی در مقاومت برابر است با:

$$P = ۲۰۰ \times ۲ = ۴۰۰ W = ۰/۴kW$$

در نهایت با توجه به رابطهٔ $U = Pt$، انرژی مصرفی برحسب کیلووات ساعت برابر است با:

$$P = ۰/۴kW \ , \ t = ۵min = \frac{۵}{۶۰}h = \frac{۱}{۱۲}h \Rightarrow U = Pt = ۰/۴ \times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۳۰}kW.h$$

دید دیگر: ابتدا انرژی مصرفی را برحسب ژول به‌دست آورده و سپس آن را به کیلووات ساعت تبدیل می‌کنیم. بنابراین طبق رابطهٔ $U = VIt$ می‌توان نوشت:

$$V = ۲۰۰V \ , \ I = ۲A \ , \ t = ۵min = ۳۰۰s \Rightarrow U = VIt = ۲۰۰ \times ۲ \times ۳۰۰ = ۱۲ \times ۱۰^۴ \, J = \frac{۱۲ \times ۱۰^۴}{۳/۶ \times ۱۰^۶}kW.h = \frac{۱}{۳۰}kW.h$$

۴ ۱۶۶۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۳ آشنایی با مفاهیم توان و ولتاژ ثبت شده بر روی وسایل الکتریکی (توان اسمی و ولتاژ اسمی) (تست‌های ۱۶۶۷ تا ۱۶۸۰)

احتمالاً تاکنون دیده‌اید که بر روی بسیاری از مصرف‌کننده‌های برقی دو عدد تحت نام‌های ولتاژ و توان به عنوان مشخصه‌های آن مصرف‌کننده معرفی می‌شود. منظور از هر یک از این اعداد عبارت است از:

ولتاژ اسمی: مناسب‌ترین اختلاف پتانسیلی است که می‌توان به دو سر یک وسیلهٔ برقی وصل کرد. معمولاً در ولتاژهای بیشتر از ولتاژ اسمی، به وسیله آسیب خواهد رسید و به هیچ وجه توصیه نمی‌شود.

توان اسمی: مقدار توانی است که وسیلهٔ برقی در صورت اتصال به ولتاژ اسمی مصرف خواهد کرد که به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$P_{\text{اسمی}} = \frac{V^۲_{\text{اسمی}}}{R}$$

نکات مهم و کاربردی

۱ با کمی دقت می‌توان گفت که اگر مصرف‌کننده‌ای به ولتاژهای کم‌تر از ولتاژ اسمی وصل شود، توان آن نیز کم‌تر از توان اسمی خواهد بود. توان یک لامپ در ولتاژ V، در مقایسه با توان اسمی برابر است با:

$$\downarrow P = \frac{V^۲}{R} \downarrow \rightarrow \frac{P}{P_{\text{اسمی}}} = \left(\frac{V}{V_{\text{اسمی}}}\right)^۲$$

دقت شود که در نوشتن این تناسب، مقاومت R ثابت فرض شده است.

۲ یک لامپ معمولی را در نظر بگیرید. دمای رشتهٔ تنگستن این لامپ در حالت روشن بسیار بیشتر از حالتی است که لامپ خاموش است. بنابراین مقاومت این لامپ (رشتهٔ تنگستن آن) در حالت روشن بودن لامپ بزرگ‌تر از حالت خاموش است. دقت کنید که مقدار مقاومتی که به کمک مقادیر ولتاژ اسمی و توان اسمی به‌دست می‌آید، مقاومت لامپ در حالت روشن بودن آن است و مقاومت لامپ در حالت خاموش، کم‌تر از این مقدار است.

$$P_{\text{اسمی}} = \frac{V^۲_{\text{اسمی}}}{R} \Rightarrow \text{مقاومت لامپ در حالت روشن} : R_{\text{لامپ روشن}} = \frac{V^۲_{\text{اسمی}}}{P_{\text{اسمی}}}$$

۳ مقاومت الکتریکی دو لامپ با توان‌های اسمی $P_۱$ و $P_۲$ و با ولتاژهای اسمی یکسان، به نسبت عکس توان‌های اسمی آن‌ها خواهد بود.

$$P_{\text{اسمی}} = \frac{V^۲_{\text{اسمی}}}{R} \xrightarrow{V_{\text{اسمی}۱} = V_{\text{اسمی}۲}} \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{P_{\text{اسمی}۱}}{P_{\text{اسمی}۲}}$$

در تمرین بعد، کاربرد نکات مهم فوق را مشاهده خواهید کرد:

تمرین ۱ بر روی یک لامپ التهابی، عددهای $۲۲۰V$ و $۱۰۰W$ ثبت شده است:

الف) اگر لامپ به ولتاژ $۲۲۰V$ وصل و هر روز ۵ ساعت روشن باشد، انرژی مصرفی آن در هفته چند کیلووات ساعت است؟

ب) اگر این لامپ را به ولتاژ $۱۱۰V$ متصل کنیم، با فرض آن که مقاومت آن ثابت است، جریان عبوری از لامپ چند آمپر و توان مصرفی آن چند وات خواهد بود؟

پاسخ الف) وقتی لامپ به ولتاژ ۲۲۰ ولت وصل شود (یعنی ولتاژ اسمی)، توان مصرفی آن ۱۰۰ وات است (یعنی توان اسمی):

$$P = ۱۰۰W = ۱۰^{-۱}kW \ , \ t = \text{روز } ۷ \times \text{ساعت } ۵ = ۳۵h$$

$$U = Pt \Rightarrow U = ۱۰^{-۱} \times ۳۵ = ۳/۵kWh$$

دقت شود که برای محاسبهٔ انرژی برحسب کیلووات ساعت، باید توان برحسب کیلووات و زمان برحسب ساعت باشد.

ب) در حالت روشن بودن لامپ، مقاومت الکتریکی آن کمیت ثابتی است و مقدار آن ربطی به ولتاژ دو سر آن ندارد، بنابراین با مقایسهٔ توان لامپ با توان اسمی داریم:

$$\begin{cases} V = ۲۲۰V \ , \ P = ۱۰۰W \\ V' = ۱۱۰V \ , \ P' = ? \end{cases} \xrightarrow{P=\frac{V^۲}{R}} \frac{P'}{P} = \left(\frac{V'}{V}\right)^۲ = \left(\frac{۱۱۰}{۲۲۰}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow P' = \frac{۱}{۴}P = \frac{۱}{۴} \times ۱۰۰ = ۲۵W$$

نتیجهٔ مهم: همان‌طور که ملاحظه کردید، اگر ولتاژ لامپ نصف ولتاژ اسمی باشد، توان لامپ، $\frac{۱}{۴}$ توان اسمی لامپ خواهد شد.

برای محاسبهٔ جریان عبوری از لامپ در ولتاژ $۱۱۰V$ که توان آن $۲۵W$ می‌شود نیز می‌توان نوشت:

$$P' = V'I' \Rightarrow ۲۵ = ۱۱۰I' \Rightarrow I' = \frac{۲۵}{۱۱۰}A$$

با توجه به مقادیر ذکر شده برای وسلیهٔ الکتریکی، اگر ولتاژ ۲۲۰ ولت به دو سر آن اعمال کنیم، توان مصرفی این وسیله برابر ۱۰۰ وات خواهد شد. با توجه به رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$ و ثابت فرض کردن مقاومت وسلیهٔ الکتریکی، در صورت اعمال ولتاژهای کم‌تر از ۲۲۰ ولت، توان آن نیز کم‌تر از ۱۰۰ وات خواهد بود و در صورت اعمال ولتاژهای بیشتر از ۲۲۰ ولت، توان آن بیشتر از ۱۰۰ وات می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

$$\uparrow P = \frac{V^۲}{R_{\text{ثابت}}} \uparrow$$

با توجه به مقادیر ولتاژ و توان ذکر شده برای این وسیله، مقاومت آن در حالت اتصال به منبع ولتاژ برابر است با:

$$P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{(۲۲۰)^۲}{R} \Rightarrow R = ۴۸۴\Omega$$

۱ ۱۶۶۸ با توجه به رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$ و یکسان بودن ولتاژ اسمی دو لامپ، نسبت مقاومت دو لامپ برابر عکس نسبت توان اسمی آن‌ها خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$P_۱ = ۱۰۰W \ , \ P_۲ = ۲۵W \Rightarrow P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{۱}{۴}$$

تذکر

ولتاژ اسمی دو سر لامپ‌های التهابی، معمولاً یکسان و برابر ۲۲۰ ولت است.

* در یک ولتاژ یکسان هر چه مقاومت کم‌تر باشد، توان مصرفی بیشتر خواهد بود، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

۳ ۱۶۶۹ با توجه به رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، در مقایسهٔ مقاومت دو اتو می‌توان نوشت:

$$V_A = ۲۲۰V \ , \ P_A = ۵۰۰W \ , \ V_B = ۱۱۰V \ , \ P_B = ۷۵۰W$$

$$P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^۲ \times \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow \frac{۷۵۰}{۵۰۰} = \left(\frac{۱۱۰}{۲۲۰}\right)^۲ \times \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۴} \times \frac{R_A}{R_B} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = ۶$$

۱ ۱۶۷۰ با توجه به رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، مقاومت لامپ در حالت اتصال به منبع ولتاژ برابر است با:

$$P = ۱۰۰W \ , \ V = ۲۲۰V \Rightarrow P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{(۲۲۰)^۲}{R} \Rightarrow R = \frac{۴۸۴۰۰}{۱۰۰} = ۴۸۴\Omega$$

مقدار به‌دست آمده برای مقاومت لامپ $(R = ۴۸۴\Omega)$، زمانی حاصل می‌شود که لامپ در مدار روشن باشد، ولی اگر مقاومت لامپ را خارج از مدار و در حالت خاموش اندازه بگیریم، اهم‌سنج عددی کم‌تر از ۴۸۴ اهم را نشان می‌دهد، زیرا دمای لامپ (دمای سیم تنگستن داخل لامپ) در حالت خاموش کم‌تر از حالت روشن است و با کم شدن دما، مقاومت لامپ کاهش می‌یابد $[R_۲ = R_۰(۱ + \alpha\Delta\theta)]$.

۴ ۱۶۷۱ هنگامی‌که یک لامپ رشته‌ای روشن است، دمای آن بسیار بالاتر از دمای معمولی آن (در حالت خاموش) است. هم‌چنین می‌دانیم مقاومت فلزات (از قبیل تنگستن استفاده شده در لامپ) با افزایش دما، افزایش می‌یابد. بنابراین زمانی که دانش‌آموز مقاومت یک لامپ خاموش را اندازه‌گیری می‌کند مقدار مقاومت لامپ را کم‌تر از مقدار واقعی به‌دست می‌آورد، بنابراین چون از رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$ استفاده می‌کند، به دلیل کم بودن مقاومت، توان بالاتری برای لامپ به‌دست می‌آورد. در حالی‌که توان نوشته شده بر روی لامپ مربوط به حالتی است که لامپ روشن بوده و مقاومت لامپ بیشتر است.

gajmarket.com

۴ ۱۶۷۲ با توجه به اعداد $220V$ و $100W$ مشخص شده برای لامپ، می‌توان مقاومت لامپ را در حالت روشن بودن آن به‌دست آورد:

$$R_2=\frac{V^2}{P}=\frac{(220)^2}{100}=484\Omega$$

از طرفی می‌دانیم در حالت خاموش بودن لامپ، به دلیل کم‌تر بودن دمای آن نسبت به حالت روشن، مقاومت لامپ کم‌تر است $(R_0=48/4\Omega)$.

حال با توجه به رابطهٔ $R_2=R_0(1+\alpha\Delta\theta)$ میزان اختلاف دما در حالت روشن و خاموش بودن لامپ برابر است با:

$$R_2=R_1(1+\alpha\Delta\theta)\Rightarrow 484=48/4\times(1+4\times10^{-3}\times\Delta\theta)\Rightarrow 9=4\times10^{-3}\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=2250^\circ C$$

۱ ۱۶۷۳ وقتی می‌گوییم یک لامپ ۲۲۰ ولت و ۲۰۰ وات است، یعنی اگر لامپ را به ولتاژ ۲۲۰ ولت (ولتاژ اسمی) وصل کنیم، توان مصرفی لامپ برابر توان اسمی آن، یعنی ۲۰۰ وات خواهد بود و انرژی الکتریکی مصرف شده توسط لامپ برابر است با:

$$P=P_{\text{اسمی}}=200W=0/2kW\ ,\ t=90min=\frac{3}{2}h\Rightarrow U=P.t=0/2\times\frac{3}{2}=0/3kW.h$$

(برحسب کیلووات ← P، برحسب ساعت ← t)

۴ ۱۶۷۴ اگر لامپ ۲۲۰ ولت و ۲۰۰ وات به ولتاژ ۱۱۰ ولت وصل شود، توان آن کم‌تر از مقدار اسمی خواهد بود و مقدار توان آن برابر است با:

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\left(\frac{110}{220}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow P_2=\frac{1}{4}P_1=\frac{1}{4}\times200=50W$$

در ادامه می‌توان انرژی مصرف شده توسط لامپ را به‌دست آورد:

$$P=50W\ ,\ t=0/5h=1800s\Rightarrow U=P.t=50\times1800=90000J=90kJ$$

۲ ۱۶۷۵ **گام اول:** طبق رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$، اگر ولتاژ دو سر رسانا نصف شود، توان آن $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. بنابراین توان جدید لامپ به $P_2=\frac{P_1}{4}=25W$ می‌رسد. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\left(\frac{110}{220}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow P_2=\frac{1}{4}P_1=25W$$

گام دوم: در این حالت جریان عبوری از لامپ برابر است با:

$$P_2=V_2I_2\Rightarrow25=110\times I_2\Rightarrow I_2=\frac{25}{110}A$$

گام سوم: با توجه به مقدار جریان به‌دست آمده، مقدار بار الکتریکی عبوری از لامپ در مدت نیم دقیقه $(30s)$ برابر است با:

$$q=It=\frac{25}{110}\times30=\frac{75}{11}\approx6/8C$$

۳ ۱۶۷۶ اگر لامپ به ولتاژ اسمی خود (۲۰۰ ولت) وصل شود، توان آن برابر توان اسمی‌اش می‌شود (۱۰۰ وات). حال با توجه به این‌که توان مصرفی لامپ ۱۹ درصد کاهش یافته است، ولتاژ لامپ کم‌تر از ولتاژ اسمی‌اش بوده و می‌توان نوشت:

(افت ۱۹ درصدی توان مصرفی ← $\frac{19}{100}P_1$)

$$P_2=P_1-\frac{19}{100}P_1=\frac{81}{100}P_1$$

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\Rightarrow\frac{81}{100}=\left(\frac{V_2}{200}\right)^2\xrightarrow{\text{جذر گرفتن از طرفین}}\frac{9}{10}=\frac{V_2}{200}\Rightarrow V_2=180V$$

(R تقریباً ثابت)

یعنی ولتاژ ۲۰ ولت کاهش یافته است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۱۶۷۷ ابتدا مقاومت این لامپ الکتریکی را محاسبه می‌کنیم:

$$P_1=\frac{V^2}{R}\Rightarrow R=\frac{(220)^2}{100}=484\Omega$$

در ادامه به مقایسهٔ توان مصرفی لامپ با توان ثبت شده بر روی آن (اسمی) می‌پردازیم:

$$P_2=RI^2=484\times(0/4)^2=77/44W\Rightarrow\Delta P=(77/44-100)W=-22/56W\simeq-23W$$

$$\frac{\Delta P}{P_1}\simeq\frac{-23}{100}=-0/23\Rightarrow$$ توان مصرفی تقریباً ۲۳ درصد کاهش می‌یابد (علامت منفی مفهوم کاهش دارد).

۲ ۱۶۷۸ انرژی مصرف شده توسط یک لامپ ۱۰۰ واتی در مدت ۵ ساعت برابر است با:

$$P=100W=0/1kW\ ,\ t=5h\Rightarrow U=P.t=0/1\times5=0/5kW.h$$

از طرفی اگر در شهر دو میلیون لامپ موردنظر باشد (تعداد خانه‌ها)، انرژی مصرف شده توسط این لامپ‌ها در مدت ۵ ساعت در هر شبانه‌روز برابر $2\times10^6\times U=10^6kW.h$ خواهد بود و انرژی مصرف شده توسط این لامپ‌ها در مدت یک ماه برابر $30\times10^6kW.h$ می‌باشد.

در آخرین مرحله از آن‌جایی که هزینهٔ هر کیلووات ساعت انرژی برابر ۱۰۰ ریال است، بهای برق مصرف شده توسط این لامپ‌ها در مدت یک ماه برابر $30\times10^6\times100=3\times10^9$ ریال، به عبارتی ۳ میلیارد ریال است.

۲ ۱۶۷۹ برای حل این سؤال، ابتدا مقدار گرمای (انرژی) لازم برای به جوش آوردن ۱/۵ لیتر آب با دمای $20^\circ C$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} Q = mc\Delta\theta \\ \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = 1000 \times 1/5 \times 10^{-3} = 1/5\,kg \end{cases} \Rightarrow Q = 1/5 \times \underbrace{4/18 \times 10^3}_{\text{c در SI}} \times (100 - 20)\,J$$

سپس مقدار انرژی الکتریکی‌ای را که کتری برقی برای به جوش آوردن آب مصرف می‌کند، طبق رابطهٔ $E = VIt$ محاسبه می‌کنیم:

$$E = VIt = 220 \times 2 \times 20 \times 60\,J$$

(زمان برحسب ثانیه)

بنابراین داریم:

$$\text{بازده}: Ra = \frac{Q}{E} = \frac{1/5 \times 4/18 \times 10^3 \times 80}{220 \times 2 \times 20 \times 60} = \frac{19}{20} = 0/95 \Rightarrow$$

مقدار بازده ۹۵ درصد است.

تذکر

در واقع بخشی از انرژی الکتریکی مصرفی توسط کتری برقی تلف شده و باقی‌ماندهٔ آن صرف به نقطهٔ جوش رساندن آب می‌شود که مقدار بازده، درصدِ آن را نشان می‌دهد.

● به نظر شما ضرب نکردن عبارت‌ها در یک‌دیگر، چه‌قدر مفید بود؟

۴ ۱۶۸۰

$$I = 4A \ , \ t = 10h = 36000s \ , \ V = 2/2V \ , \ U = ?$$

$$U = RI^2t = VIt = 2/2 \times 4 \times 36000 = 316800\,J$$

۴ ۱۶۸۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۴ **محاسبه و مقایسهٔ توان مصرفی مقاومت‌ها در یک مدار** (تست‌های ۱۶۸۱ تا ۱۷۰۸)

تاکنون در مورد توان مصرفی یک مقاومت توضیح داده‌ایم. حال می‌خواهیم این موضوع را تحلیل کنیم که در صورت اتصال یک مجموعه از مقاومت‌ها به یک منبع ولتاژ، چگونه می‌توانیم توان مصرفی یک مقاومت را به‌دست آورده و یا توان آن‌ها را با یک‌دیگر مقایسه کنیم. برای این منظور معمولاً باید گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

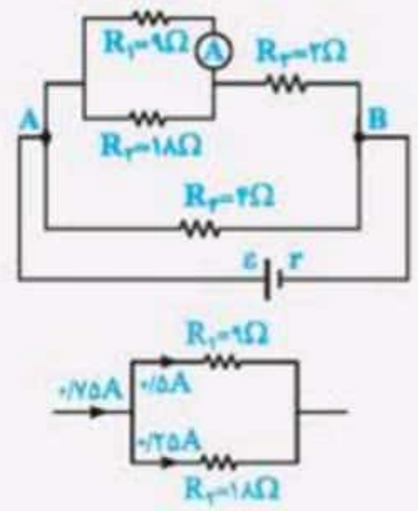
گام اول: ابتدا با کمک روش‌هایی که در قسمت‌های قبل در مورد پخش جریان در مدار آموختیم، جریان مقاومت موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

گام دوم: با استفاده از روابط مربوط به توان $(P = RI^2)$، توان مقاومت موردنظر را محاسبه می‌کنیم.

تذکر دقت شود که گاهی اوقات به‌جای محاسبهٔ جریان مقاومت، بهتر است که ولتاژ دو سر آن مقاومت را به‌دست آورده و از رابطهٔ $P = \frac{V^2}{R}$ استفاده کنیم.

برای یادگیری بهتر روند فوق، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین ۱ **در مدار مقابل، اگر آمپرسنج ایده‌آل ۰/۵ آمپر را نشان دهد، توان مصرفی در R_4 چند وات است؟** (تجربی داخل ۹۱)

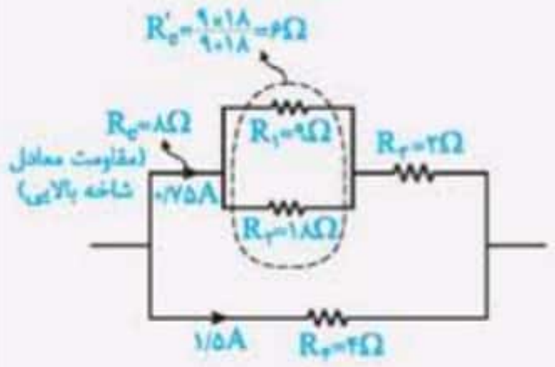


۱) ۹ ۲) ۴/۵ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ اگر جریان در R_1 برابر $0/5A$ باشد، جریان R_2 که مقاومت آن دو برابر مقاومت R_1 است (به‌علت موازی بودن) نصف جریان R_1 بوده و برابر $0/25A$ می‌شود.

$$I_{\text{شاخه بالایی}} = 0/5 + 0/25 = 0/75A$$

مقاومت معادل شاخهٔ بالایی 8Ω است و با توجه به موازی بودن R_4 با کل شاخهٔ بالایی، جریان در R_4 دو برابر جریان شاخهٔ بالایی بوده و برابر $1/5A$ است (چرا؟).



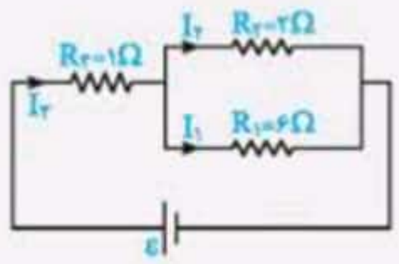
و در نهایت توان مصرفی مقاومت 4Ω برابر است با:

$$P = RI^2 = 4 \times (1/5)^2 = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9W \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

● دقت کنید در مقاومت‌های موازی، شدت جریان با مقدار مقاومت رابطهٔ عکس دارد.

مقایسهٔ توان مقاومت‌ها در یک مدار

برای شروع این بحث، مدار مقابل را درنظر بگیرید. در این مدار برای مقایسهٔ توان مقاومت‌ها با یک‌دیگر، روند زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: ابتدا در بین مقاومت‌های موازی قرار گرفته در مدار، جریان مقاومت بزرگ‌تر را x درنظر می‌گیریم $(I_1 = x)$.

gajmarket.com

گام دوم: با توجه به این‌که در مقاومت‌های موازی، جریان هر مقاومت با مقدار مقاومت رابطهٔ عکس دارد، جریان در هر یک از مقاومت‌های موازی را به‌دست می‌آوریم. سپس جریان در کل مقاومت‌های موجود در مدار را به‌صورت پارامتری برحسب x به‌دست می‌آوریم.

$I_2 = 3x \Rightarrow$ چون مقاومت R_2، $\frac{1}{3}$ برابر R_1 است، بنابراین جریان آن ۳ برابر جریان I_1 می‌باشد. $\xrightarrow{\text{در مقاومت‌های موازی}} V = RI \Rightarrow I \propto \frac{1}{R}$ (V یکسان)

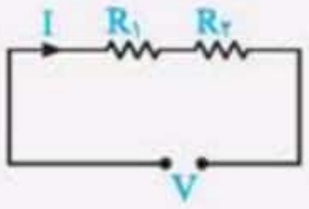
$I_3 = I_1 + I_2 = x + 3x = 4x$

گام سوم: با توجه به رابطهٔ توان $(P = RI^2)$، توان مصرفی برای هر یک از مقاومت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$P_1 = R_1 I_1^2 = 6 \times x^2 = 6x^2$ ؛ $P_2 = R_2 I_2^2 = 2 \times (3x)^2 = 18x^2$ ؛ $P_3 = R_3 I_3^2 = 1 \times (4x)^2 = 16x^2$

بنابراین در این مدار بیشترین توان مربوط به مقاومت R_2 می‌باشد.

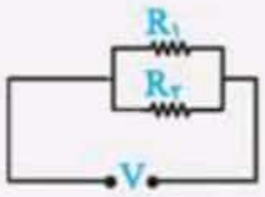
دو حالت خاص و پرکاربرد:



۱) در اتصال متوالی مقاومت‌ها به یک‌دیگر، به‌علت برابر بودن جریان آن‌ها، توان مصرفی در مقاومت‌ها با مقدار هر مقاومت رابطهٔ مستقیم دارد.

$P = RI^2 \xrightarrow{I \text{ یکسان}} P \propto R \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1}$

یعنی در حالت اتصال متوالی مقاومت‌ها، مقاومت بزرگ‌تر دارای توان بیشتری می‌باشد.



۲) در اتصال موازی مقاومت‌ها به یک‌دیگر، به‌علت برابر بودن ولتاژ آن‌ها، توان مصرفی در مقاومت‌ها با مقدار هر مقاومت رابطهٔ عکس دارد.

$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V \text{ یکسان}} P \propto \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2}$

یعنی در اتصال موازی مقاومت‌ها، مقاومت بزرگ‌تر دارای توان کم‌تری می‌باشد.

تذکر در مباحث فوق، توان مربوط به مقاومت‌های موجود در یک مدار را با یک‌دیگر مقایسه کردیم. حال اگر بخواهیم توان کل مربوط به دو مجموعهٔ جداگانه را که به منبع ولتاژ یکسانی متصل است با یک‌دیگر مقایسه کنیم، می‌توانیم به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

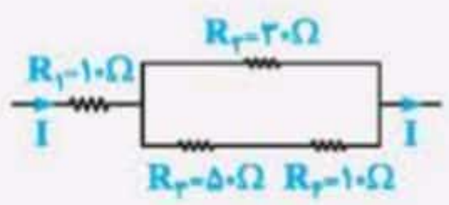
روش ۱: توان مصرفی مربوط به هر کدام از مقاومت‌ها را به‌دست آورده و سپس با جمع کردن آن‌ها، توان کل مدار را یافته و آن را در دو مدار مقایسه کنیم.

روش ۲: مقاومت معادل در هر یک از دو مجموعه را به‌دست آورده و به‌صورت زیر عمل کنیم:

$P_{\text{کل}} = \frac{V^2}{R_T} \xrightarrow{V \text{ یکسان}} \frac{P_{\text{کل}}}{P'_{\text{کل}}} = \frac{R'_T}{R_T}$

نتیجه در صورت اتصال یک مدار به یک منبع ولتاژ ثابت، توان مصرفی کل مجموعه هنگامی بیشترین مقدار را خواهد داشت که مقاومت معادل کل مدار کم‌ترین مقدار را داشته باشد.

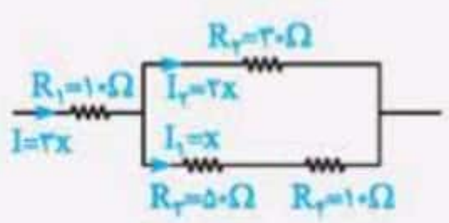
تمرین۲ در شکل روبه‌رو که قسمتی از یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد، در یک مدت زمان مشخص، گرمای ایجادشده در کدام مقاومت بیشتر است؟ (تجربی داخل ۸۴)



۱) R_1 ۲) R_2

۳) R_3 ۴) R_4

پاسخ اگر جریان در شاخهٔ با مقاومت بزرگ‌تر (شاخهٔ پایینی) را x فرض کنیم، به سادگی می‌توان گفت که جریان در شاخهٔ بالایی برابر ۲x و جریان کل برابر ۳x است (چرا؟). در ادامه در مقایسهٔ توان مقاومت‌ها می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} P_1 = R_1 I^2 = 10 \times (3x)^2 = 90x^2 \\ P_2 = R_2 I_2^2 = 30 \times (2x)^2 = 120x^2 \\ P_3 = R_3 I_1^2 = 50 \times (x)^2 = 50x^2 \\ P_4 = R_4 I_1^2 = 10 \times (x)^2 = 10x^2 \end{cases} \Rightarrow P_2 > P_1 > P_3 > P_4$$

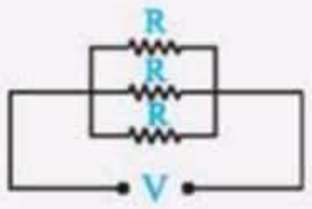
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، توان مصرفی در مقاومت $R_۴$، از بقیهٔ مقاومت‌ها بیشتر است، بنابراین گرمای ایجادشده در این مقاومت در یک مدت زمان مشخص نیز بیشتر از سایر مقاومت‌ها خواهد بود. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

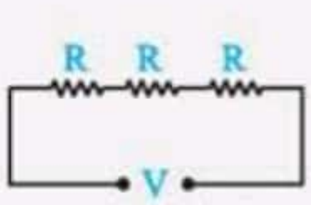
* چون دو مقاومت $R_۳$ و $R_۴$ سری هستند، بنابراین جریان در آن‌ها یکسان بوده و مقاومت بزرگ‌تر، یعنی $R_۳ = ۵۰\Omega$ توان بیشتری نسبت به مقاومت $R_۴ = ۱۰\Omega$ دارد، پس نیازی به محاسبهٔ $P_۴$ نبود.

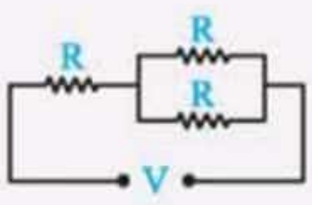
تمرین۳ **سه مقاومت مشابه ۳ اهمی را به یک‌دیگر متصل کرده و دو سر مجموعه را به اختلاف پتانسیل ۱۲ ولت وصل می‌کنیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر مقدار توان مصرفی این مدار برحسب وات نمی‌تواند باشد؟** (تألیفی)

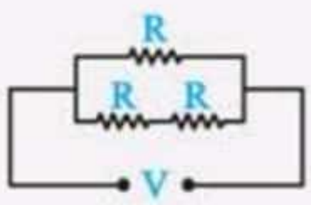
۱) ۱۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

پاسخ این سؤال بسیار زیبا و مفهومی می‌باشد. برای حل باید گفت که این سه مقاومت مشابه را می‌توانیم به حالت‌های زیر به یک‌دیگر متصل کنیم:


حالت (۱)


حالت (۲)


حالت (۳)


حالت (۴)

$$R_{T_۱} = \frac{R}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱\Omega \qquad R_{T_۲} = ۳R = ۳\times ۳ = ۹\Omega \qquad R_{T_۳} = R + \frac{R}{۲} = ۴/۵\Omega \qquad R_{T_۴} = \frac{۲R\times R}{۲R+R} = ۲\Omega$$

بنابراین با به‌دست آوردن مقاومت معادل کل مجموعه در هر یک از حالت‌های مطرح شده، می‌توانیم توان مصرفی کل مجموعه در هر حالت را محاسبه کنیم:

(۱) حالت : $P_۱ = \frac{V^۲}{R_{T_۱}} = \frac{۱۲^۲}{۱} = ۱۴۴\,W$

(۲) حالت : $P_۲ = \frac{V^۲}{R_{T_۲}} = \frac{۱۲^۲}{۹} = ۱۶\,W$

(۳) حالت : $P_۳ = \frac{V^۲}{R_{T_۳}} = \frac{۱۲^۲}{۴/۵} = ۳۲\,W$

(۴) حالت : $P_۴ = \frac{V^۲}{R_{T_۴}} = \frac{۱۲^۲}{۲} = ۷۲\,W$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، گزینهٔ (۳) نمی‌تواند توان حاصل از اتصال انواع مختلف این سه مقاومت به منبع ولتاژ باشد.

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

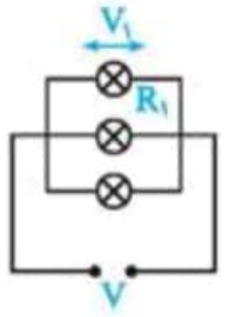
۱ و ۲) با توجه به خلاصه نکات فوق، توان مصرفی مقاومت‌ها در اتصال سری با مقدار مقاومت آن‌ها رابطهٔ مستقیم دارد و در اتصال موازی آن‌ها، توان مصرفی هر مقاومت با مقدار آن مقاومت رابطهٔ عکس دارد.

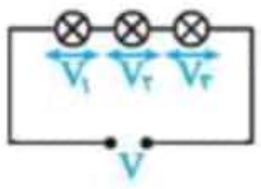
۳) با توجه به کم‌تر بودن مقاومت کل مدار در اتصال موازی ($R_{T_{\text{سری}}} > R_{T_{\text{موازی}}}$)، بنابراین با اتصال یک ولتاژ یکسان به دو سر هر یک از دو مجموعه، توان مصرفی کل مجموعه در حالت موازی بیشتر خواهد بود.

$$\uparrow P = \frac{V^۲}{R} \downarrow$$

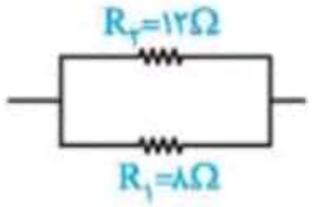
۴) در اتصال موازی مقاومت‌ها، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۱$ برابر ولتاژ دو سر منبع (V) است، ولی در اتصال سری، فقط بخشی از ولتاژ منبع، در دو سر مقاومت $R_۱$ قرار می‌گیرد. بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت $R_۱$ در اتصال سری کم‌تر از اتصال موازی است. پس طبق رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، توان آن نیز در اتصال سری کم‌تر خواهد بود. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

$$\downarrow P = \frac{V^۲}{R} \downarrow$$


$(V_۱ = V)$


$(V_۱ + V_۲ + V_۳ = V)$

۴ ۱۶۸۲ در حالت موازی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها یکسان است و در نتیجه با کمک رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، توان با مقاومت رابطهٔ معکوس دارد:



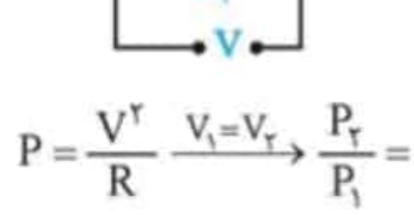
$$\Rightarrow P = \frac{\overset{\text{یکسان}}{V^۲}}{R} \Rightarrow P \propto \frac{۱}{R} \Rightarrow \frac{P_۱}{P_۲} = \frac{R_۲}{R_۱} \xrightarrow[R_۱ = ۸\Omega]{P_۲ = ۴۰W\ ,\ R_۲ = ۱۲\Omega} \frac{P_۱}{۴۰} = \frac{۱۲}{۸} \Rightarrow P_۱ = ۶۰\,W$$

gajmarket.com

۳ ۱۶۸۳ ابتدا با توجه به رابطهٔ $U = RI^2t$، مقاومت R_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$U_1 = R_1 I_1^2 t \xrightarrow[t=5min=300s]{U_1=6000J\ ,\ I_1=2A} 6000 = R_1 \times 2^2 \times 300 \Rightarrow R_1 = 5\Omega$$

از سوی دیگر مقاومت R_2 با R_1 موازی می‌باشد، بنابراین اختلاف پتانسیل آن‌ها با یکدیگر برابر است و داریم:



$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow 5 \times 2 = R_2 \times 0/5 \Rightarrow R_2 = 20\Omega$$

نگاه دیگر: به عبارت دیگر چون جریان I_2، $\frac{1}{4}$ برابر جریان I_1 است، بنابراین مقاومت R_2، ۴ برابر مقاومت R_1 است.

$$R_2 = 4R_1 = 4 \times 5 = 20\Omega$$

۳ ۱۶۸۴ از رابطهٔ $P = RI^2$، جریان را در مدار محاسبه می‌کنیم:

$$P_2 = R_2 I^2 \xrightarrow[R_2=200\Omega]{P_2=50W} 50 = 200\ I^2 \rightarrow I = 0/5A$$

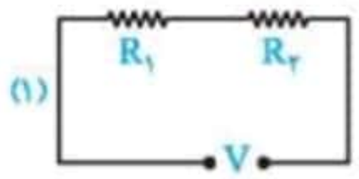
در ادامه با توجه به سری بودن دو مقاومت، جریان آن‌ها با یک‌دیگر برابر بوده و توان مقاومت R_1 برابر است با:

$$P_1 = R_1 I^2 \xrightarrow[I=0/5A]{R_1=100\Omega} P_1 = 100 \times (0/5)^2 = 25W$$

نگاه دیگر:

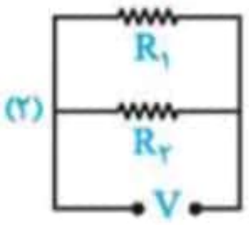
$$P = RI^2 \xrightarrow{I\ \text{یکسان}} \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{P_1}{50} = \frac{100}{200} \Rightarrow P_1 = 25W$$

۴ ۱۶۸۵ مقاومت معادل در مدار شکل (۱) عبارت است از:



$$R_{T_1} = R_1 + R_2 = 6 + R_2$$

همچنین مقاومت معادل مدار در شکل (۲) عبارت است از:



$$R_{T_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6R_2}{6 + R_2}$$

حال نسبت توان مصرفی در مجموعهٔ شکل (۱) به (۲) را محاسبه می‌کنیم:

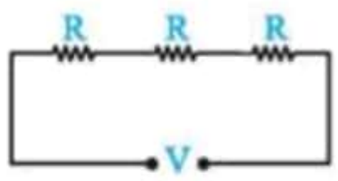
$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V_1=V_2} \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_{T_1}}{R_{T_2}} = \frac{6 + R_2}{\frac{6R_2}{6 + R_2}} \Rightarrow 4/5 = \frac{(6 + R_2)^2}{6R_2}$$

$$\Rightarrow 27R_2 = 36 + 12R_2 + R_2^2 \Rightarrow R_2^2 - 15R_2 + 36 = 0 \xrightarrow{\text{کنترل گزینه‌ها}} R_2 = 3\Omega \text{ یا } R_2 = 12\Omega$$

روش دیگر:

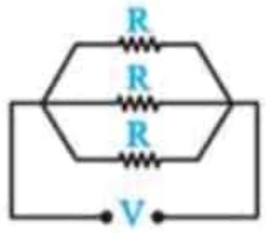
$$R_2^2 - 15R_2 + 36 = 0 \Rightarrow (R_2 - 12)(R_2 - 3) = 0 \Rightarrow R_2 = 12\Omega \text{ یا } R_2 = 3\Omega$$

۴ ۱۶۸۶ حالت سری:



$$\Rightarrow R_{T_1} = nR = 3R$$

حالت موازی:



$$\Rightarrow R_{T_2} = \frac{R}{n} = \frac{R}{3}$$

در ادامه توان کل مدار در دو حالت، به‌صورت زیر مقایسه می‌شود:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P \propto \frac{1}{R} \xrightarrow{V\ \text{یکسان}} \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_{T_1}}{R_{T_2}} \xrightarrow[R_{T_2}=\frac{R}{3}]{P_1=90W\ ,\ R_{T_1}=3R} \frac{P_2}{90} = \frac{3R}{\frac{R}{3}} \Rightarrow P_2 = 810W$$

۱ ۱۶۸۷ نسبت توان مصرفی در شکل (۱) به (۲) عبارت است از:

$$R_{T_1} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R\ ,\ R_{T_2} = nR = 3R \Rightarrow P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V\ \text{یکسان}} \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{3R}{\frac{3}{2}R} = 2$$

۱ ۱۶۸۸ با توجه به این‌که ولتاژ دو سر مجموعه در دو شکل یکسان است، نسبت توان مصرف شده در شکل (۱) به شکل (۲) برابر است با:

$$R_{T_1} = nR = 3R\ ,\ R_{T_2} = \frac{R}{n} = \frac{R}{3}$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{\frac{R}{3}}{3R} = \frac{1}{9}$$

۴ ۱۶۸۹ اگر سیم را به N قسمت مساوی تقسیم کنیم، مقاومت هر قسمت برابر $\frac{R}{N}$ شده (مطابق رابطهٔ $R=\frac{\rho L}{A}$) و مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R'_T=\frac{\frac{R}{N}}{N}=\frac{R}{N^2}$$

در ادامه در مقایسهٔ توان تلف‌شدهٔ مجموعه در دو حالت با توجه به ثابت بودن اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه، می‌توان نوشت:

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow\frac{P'}{P}=\frac{R_T}{R'_T}=\frac{R}{\frac{R}{N^2}}=N^2$$

۴ ۱۶۹۰ **حالت اول:** اگر دو مقاومت R_1 و R_2 با یک‌دیگر سری باشند، جریان آن‌ها یکسان بوده و در مقایسهٔ توان‌های آن‌ها می‌توان نوشت:

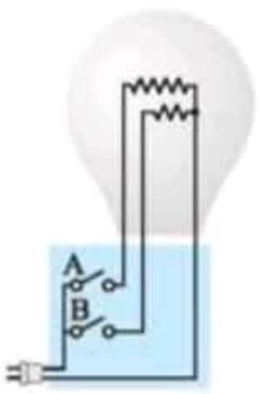
$$P=RI^2\Rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{2R_1}{R_1}=2$$

حالت دوم: اگر دو مقاومت R_1 و R_2 موازی باشند، ولتاژهای دو سر آن‌ها یکسان بوده و در مقایسهٔ توان‌های آن‌ها می‌توان نوشت:

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_1}{2R_1}=\frac{1}{2}$$

در این تست، $P_2=4P_1$ است و در نتیجه اتصال مقاومت‌ها به‌صورت موازی یا سری (متوالی) نیست.

۲ ۱۶۹۱ همان‌طور که می‌دانیم توان الکتریکی مصرفی در یک مقاومت از رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$ به‌دست می‌آید. با توجه به یکسان بودن V، بیشترین توان مربوط به کم‌ترین مقاومت و کم‌ترین توان مربوط به بیشترین مقاومت است. در بستن موازی مقاومت‌ها دیدیم مقاومت معادل کوچک‌تر از هر یک از مقاومت‌ها است. بنابراین، بیشترین توان مربوط به وقتی است که کلیدهای A و B هر دو بسته‌اند؛ یعنی:



$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

که در آن R_1 و R_2 مقاومت‌های دو رشتهٔ تنگستن هستند. بنابراین، برای مقاومت معادل داریم:

$$R_T=R_{min}=\frac{V^2}{P_{max}}=\frac{(220)^2}{160}$$

از طرفی کم‌ترین توان مربوط به وقتی است که کلید مربوط به تنگستن با مقاومت بیشتر بسته شده است. اگر این مقاومت را با R_1 نمایش دهیم، داریم:

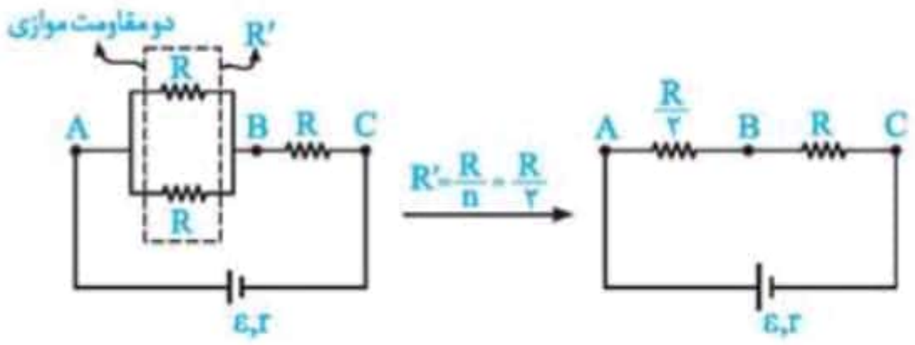
$$R_1=R_{max}=\frac{V^2}{P_{min}}=\frac{(220)^2}{50}$$

بنابراین، مقاومت کوچک‌تر (R_2)، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Rightarrow\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_1}=\frac{160}{(220)^2}-\frac{50}{(220)^2}=\frac{110}{(220)^2}=\frac{1}{440}\Rightarrow R_2=440\Omega$$

از طرفی مجموع توان دو مقاومت برابر 160 W و توان مقاومت بزرگ‌تر برابر 50 W است، بنابراین توان مقاومت کوچک‌تر برابر 110 W (= 160 - 50) می‌باشد.

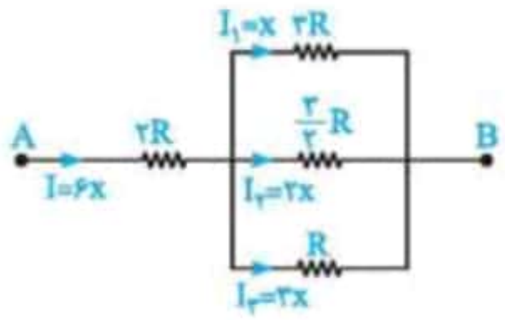
۲ ۱۶۹۲ ابتدا مدار را به شکل مقابل ساده می‌کنیم:



قسمت‌های AB و BC به‌صورت سری هستند، بنابراین جریان یکسانی از آن‌ها عبور می‌کند و می‌توان نوشت:

$$P=RI^2\Rightarrow\frac{P_{AB}}{P_{BC}}=\frac{R_{AB}\times I^2}{R_{BC}\times I^2}=\frac{R_{AB}}{R_{AC}}=\frac{\frac{R}{2}}{R}=\frac{1}{2}$$

۲ ۱۶۹۳ مطابق شکل مقابل اگر مقدار جریان I_1 را x فرض کنیم، مطابق مفاهیم مقاومت‌های موازی، جریان I_2 برابر با 2x است و جریان I_3 برابر با 3x می‌شود (چرا؟) و جریان کل برابر 6x است.



$$I=x+2x+3x=6x$$

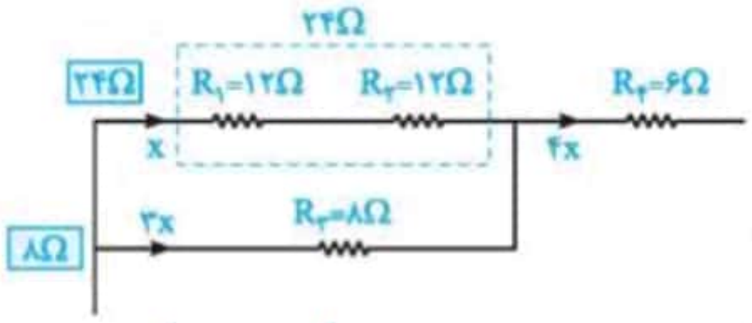
در ادامه نسبت توان مصرفی مقاومت 2R به مقاومت 3R برابر است با:

$$\text{جریان مقاومت } 3R=x\Rightarrow P=RI^2\Rightarrow\frac{P_{2R}}{P_{3R}}=\frac{2R}{3R}\times\left(\frac{6x}{x}\right)^2=24\quad,\quad\text{جریان مقاومت } 2R=6x$$

* مقاومت $\frac{3}{2}R$ در مدار فوق، مقاومت معادل دو مقاومت سری R و 0/5R می‌باشد.

gajmarket.com

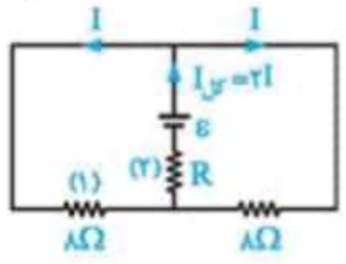
۴ ۱۶۹۴ ابتدا جریان تمامی مقاومت‌ها را به صورت پارامتری برحسب x به دست می‌آوریم.



بدین منظور، اگر جریان R_1 را برابر x فرض کنیم، جریان در بقیهٔ مقاومت‌ها برابر است با:

$$\frac{R_{۴}\text{توان}}{R_{۱}\text{توان}}=\frac{R_۴I_۴^۲}{R_۱I_۱^۲}=\frac{۶\times(۴x)^۲}{۱۲\times x^۲}=۸$$

۲ ۱۶۹۵ با توجه به این‌که دو مقاومت ۸ اهمی با یک‌دیگر موازی‌اند، جریان عبوری از آن‌ها یکسان می‌باشد و جریان در شاخهٔ باتری، ۲ برابر آن است ($I_{\text{کل}}=۲I$).



در ادامه با توجه به این‌که توان مقاومت‌ها با یکدیگر برابرند، داریم:

$$P_۱=P_۲\Rightarrow ۸I^۲=R\times I_{\text{کل}}^۲\Rightarrow ۸I^۲=۴RI^۲\Rightarrow R=۲\Omega$$

۲ ۱۶۹۶ ابتدا جریان عبوری از مقاومت ۶ اهمی را با کمک توان آن محاسبه می‌کنیم:

$$P=RI_۱^۲\Rightarrow ۲۴=۶\times I_۱^۲\Rightarrow I_۱=۲A$$

در ادامه مدار را به‌صورت زیر ساده‌تر می‌کنیم:



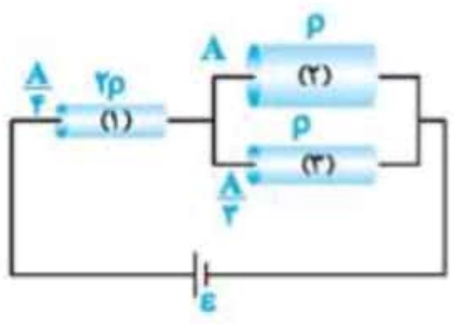
$$\Rightarrow\begin{cases}I_۲=\frac{۱}{۲}I_۱=۱A & \text{(مقاومت‌های موازی)}\\ I_{\text{کل}}=I_۱+I_۲=۳A\end{cases}$$

توان مقاومت ۱۰ اهمی: $P=RI_{\text{کل}}^۲=۱۰\times(۳)^۲=۹۰W$

۲ ۱۶۹۷ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۴) گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱ ۱۶۹۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مقدار مقاومت هر سه سیم را به دست آورده و کوچک‌ترین آن‌ها را R می‌نامیم (طول هر سه سیم یکسان و برابر L می‌باشد):



$$R_۱=۲\rho\times\frac{L}{(\frac{A}{۴})}=۸R$$

$$R_۲=\rho\frac{L}{A}=R$$

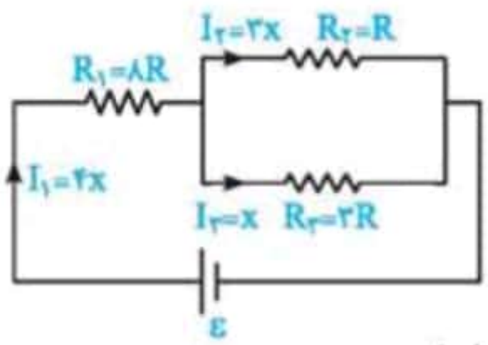
$$R_۳=\rho\frac{L}{(\frac{A}{۳})}=۳R$$

گام دوم: با توجه به شکل ساده شدهٔ زیر، ابتدا جریان در مقاومت بزرگ‌تر موازی، یعنی $۳R$ را برابر x درنظر می‌گیریم، بنابراین $I_۲=۳x$ خواهد بود (چرا؟)

و داریم:

$$I_۱=I_۲+I_۳=۳x+x=۴x$$

گام سوم: حال برای مقایسهٔ توان هر یک از مقاومت‌ها به راحتی می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}P_۱=R_۱I_۱^۲=۸R\times(۴x)^۲=۱۲۸Rx^۲\\ P_۲=R_۲I_۲^۲=R\times(۳x)^۲=۹Rx^۲\\ P_۳=R_۳I_۳^۲=۳R\times(x)^۲=۳Rx^۲\end{cases}$$

بنابراین بیشترین توان مصرفی، مربوط به مقاومت R_1 می‌باشد. $\Rightarrow$

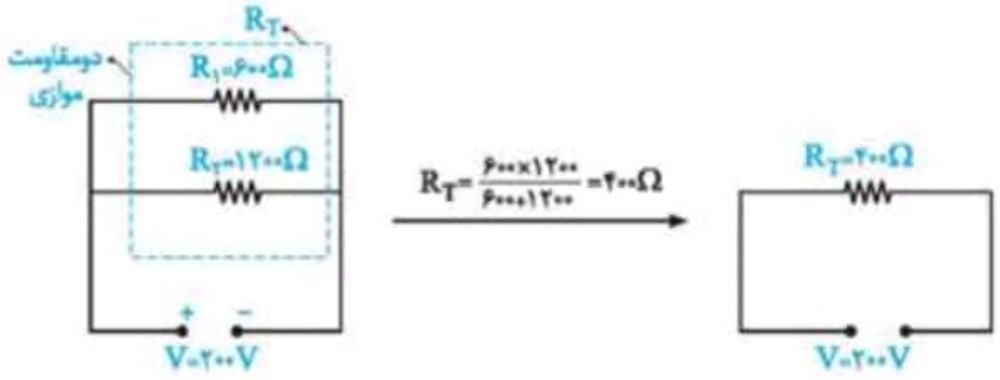
۴ ۱۶۹۹ **گام اول:** با توجه به برابر بودن طول و جنس دو سیم، مقاومت سیم (۱) برابر است با (چگالی را با ρ' نشان داده‌ایم):

$$m_۱=۲m_۲\Rightarrow(\rho'_۱A_۱L_۱)=۲(\rho'_۲A_۲L_۲)\xrightarrow[L_۱=L_۲]{\rho'_۱=\rho'_۲}A_۱=۲A_۲$$

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow\frac{R_۱}{R_۲}=\frac{\rho_۱}{\rho_۲}\times\frac{L_۱}{L_۲}\times\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow R_۱=\frac{۱}{۲}R_۲=۶۰۰\Omega$$

$A_۱=۲A_۲$

گام دوم: با به‌دست آوردن مقادیر هر یک از مقاومت‌ها، داریم:



$$P=\frac{V^2}{R_T}=\frac{(۲۰۰)^2}{۴۰۰}=۱۰۰W=۰/۱kW$$

$$W=Pt=۰/۱\times\frac{۹۰}{۶۰}=۰/۱\times\frac{۳}{۲}=۰/۱۵kWh$$

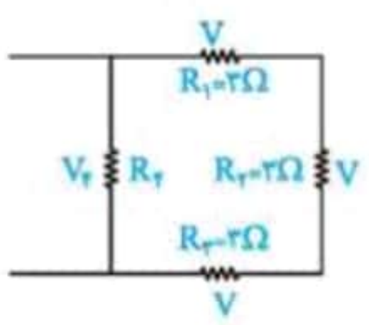
(برحسب kW) (برحسب ساعت (h))

۱۱۷۰۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به این‌که مقاومت‌های R_1، R_2 و R_3 سری هستند جریان عبوری از آن‌ها با هم برابر است و چون طبق صورت سؤال توان مصرفی این مقاومت‌ها با هم برابر است ($P=RI^2$)، بنابراین مقدار مقاومت‌های R_1، R_2 و R_3 با هم برابر است.

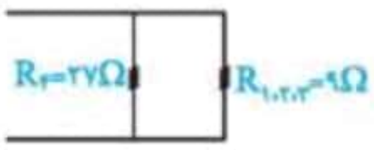
$$R_1=R_2=R_3=۳\Omega$$

گام دوم: با توجه به سری بودن مقاومت‌های R_1، R_2 و R_3 و هم‌اندازه بودن مقاومت آن‌ها، ولتاژ دو سر آن‌ها با هم برابر است $(V_1=V_2=V_3=V)$ بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت R_4 برابر $V_4=V+V+V=۳V$ می‌باشد و از رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$ برای برابر قرار دادن توان دو مقاومت R_1 و R_4 می‌توان استفاده کرد:



طبق صورت سؤال: $P_1=P_4 \xrightarrow{P=\frac{V^2}{R}} \frac{V^2}{۳}=\frac{(۳V)^2}{R_4}\Rightarrow R_4=۲۷\Omega$

گام سوم: محاسبهٔ مقاومت معادل:



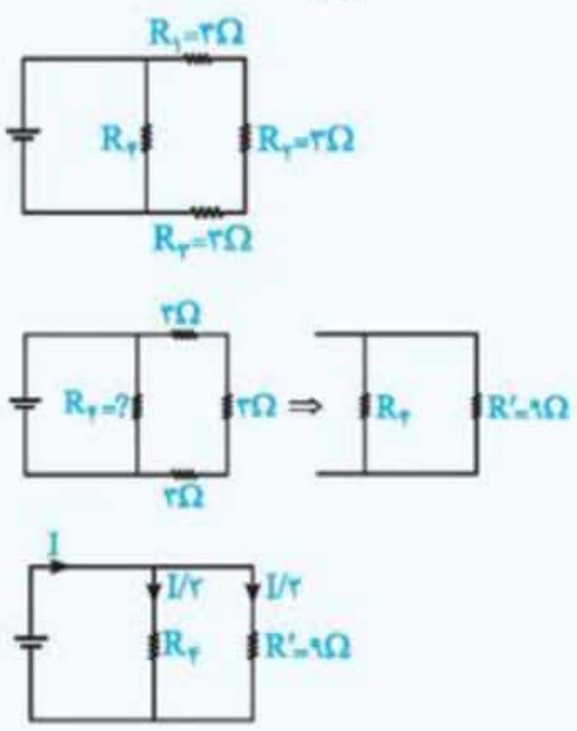
R_1، R_2 و R_3 سری‌اند $\Rightarrow R_{1,2,3}=R_1+R_2+R_3=۳+۳+۳=۹\Omega$

$$R_T=\frac{۹\times۲۷}{۹+۲۷}=\frac{۲۷}{۴}\Omega$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

می‌خواهیم تست را ساده‌تر حل کنیم. برای این منظور با حذف گزینه‌ها و تحلیل آن‌ها، حل را دنبال می‌کنیم که به‌صورت زیر است:

۱) $\frac{۲۷}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) ۱۸ ۴) ۹



نکتهٔ ۱ مطابق صورت سؤال توان مصرفی تمام مقاومت‌ها با هم برابر است، بنابراین چون از تمام مقاومت‌های R_1، R_2 و R_3 جریان یکسانی عبور می‌کند باید مقدار مقاومت الکتریکی آن‌ها یکسان و برابر باشد، یعنی: $R_1=R_2=R_3=۳\Omega$.

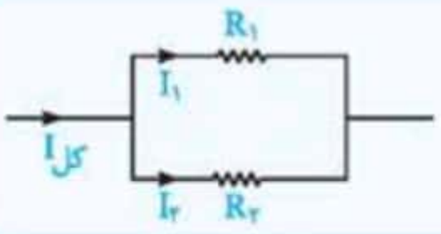
نکتهٔ ۲ در اتصال موازی مقاومت‌های $R'=۹\Omega$ و R_4 مقاومت معادل باید از هر کدام از مقاومت‌ها کوچک‌تر باشد $[R_T<۹\Omega \ , \ R_T<R_4]$، بنابراین گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند و نمی‌توانند درست باشند.

نکتهٔ ۳ اگر مقاومت معادل R_4 و $R'=۹\Omega$ برابر $\frac{۹}{۲}\Omega$ (مطابق گزینهٔ (۲)) باشد، آن‌گاه باید مقدار R_4 معادل با ۹Ω باشد. به سادگی می‌توان دریافت در این شرایط توان مصرفی R_4 با مجموع توان مصرفی ۳ مقاومت ۳Ω برابر می‌شود و نه با توان مصرفی هر کدام از آن‌ها، که مورد نظر ما نمی‌باشد.

۴ ۱۷۰۱

نکته

هنگامی که جریان کل I به دو مقاومت موازی وارد می‌شود، این جریان به صورت زیر بین آن دو مقاومت تقسیم می‌شود:



$$I_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}I_{کل} \qquad I_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}I_{کل}$$

با توجه به نکتهٔ فوق و اطلاعات سؤال می‌توان نوشت:

$$P_1=۳P_2\Rightarrow R_1I_1^2=۳R_2I_2^2 \xrightarrow{I_2=\frac{R_3}{R_2+R_3}I_1} ۸I_1^2=۳R_2\times\left(\frac{۱۲}{۱۲+R_2}I_1\right)^2$$

$$\Rightarrow ۸=۳R_2\left(\frac{۱۲}{۱۲+R_2}\right)^2 \Rightarrow R_2=۲۴\Omega$$ با چک کردن گزینه‌ها مشخص است که گزینهٔ (۴) صحیح است.

gajmarket.com

۱۷۰۲ ۱ با توجه به این‌که دو سر مقاومت ۹ اهمی هم‌نام شده است، پس اتصال کوتاه شده و جریان آن صفر است و در نتیجه انرژی نیز در آن مصرف نمی‌شود. $P_۹ = RI'^۲ \xrightarrow{I'=۰} P_۹ = ۰$

۱۷۰۳ ۱ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۴)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

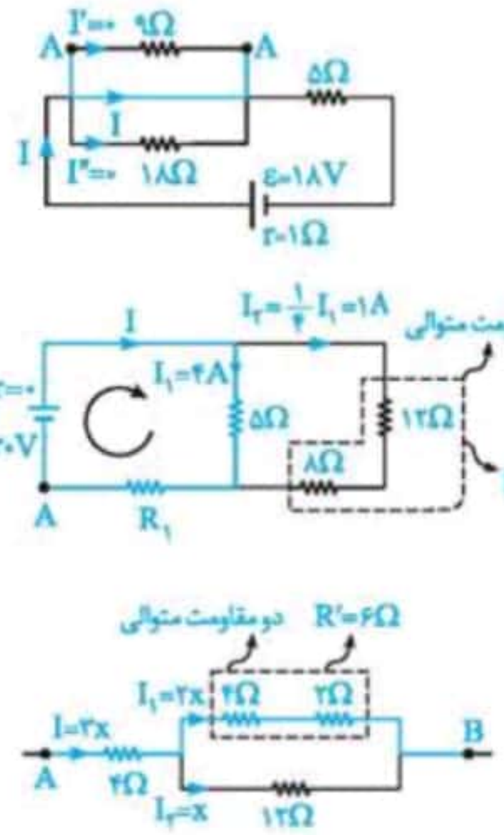
۱۷۰۴ ۳ با توجه به موازی بودن مقاومت معادل دو مقاومت ۱۲Ω و ۸Ω با مقاومت ۵Ω، جریان عبوری از مقاومت ۱۲Ω برابر یک آمپر است و داریم: $I = ۴ + ۱ = ۵A$

در ادامه با یک دور چرخیدن در حلقهٔ نشان داده شده، مقاومت $R_۱$ به‌دست می‌آید:

$$V_A + \varepsilon - ۵I_۱ - R_۱I = V_A \Rightarrow ۳۰ - ۵ \times ۴ - R_۱ \times ۵ = ۰ \Rightarrow R_۱ = ۲\Omega$$

و توان مقاومت $R_۱$ برابر است با: $P_۱ = R_۱I^۲ = ۲ \times (۵)^۲ = ۵۰W$

۱۷۰۵ ۲ اگر جریان در مقاومت ۱۲Ω را برابر x فرض کنیم، جریان در شاخهٔ بالایی برابر $۲x$ و جریان کل برابر $۳x$ است. در ادامه با حرکت از A تا B در مسیر نشان داده شده و با توجه به این‌که حاصل $V_A - V_B = ۲۴V$ است، به‌سادگی می‌توان مقدار x را به‌دست آورد:

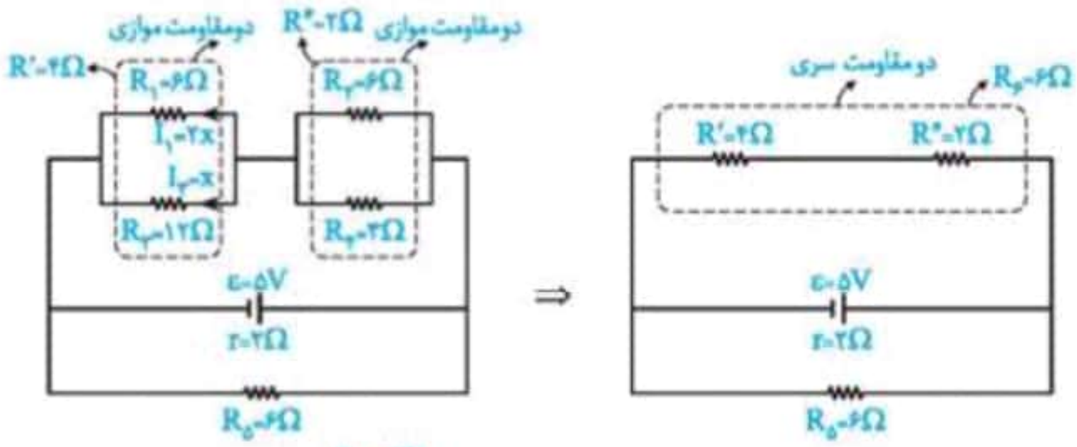


$$V_A - ۴I - ۴I_۱ - ۲I_۱ = V_B \Rightarrow V_A - ۴ \times ۳x - ۴ \times ۲x - ۲ \times ۲x = V_B$$

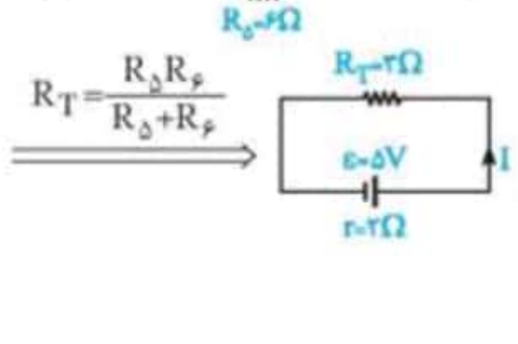
$$V_A - V_B = ۲۴x = ۲۴ \Rightarrow x = ۱A$$

پس از محاسبات فوق، مشخص می‌شود که جریان $I_۱$ برابر با $۲A$ $(۲x = ۲ \times ۱)$ بوده و توان مقاومت ۲Ω برابر است با: $P = RI_۱^۲ = ۲ \times (۲)^۲ = ۸W$

۱۷۰۶ ۱ ابتدا شکل را ساده‌تر می‌کنیم تا در نهایت، جریان را در مقاومت $R_۱$ به‌دست آوریم:



دو مقاومت $R_۵$ و $R_۶$ با هم موازی هستند و داریم:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۵}{۳ + ۲} = ۱A$$

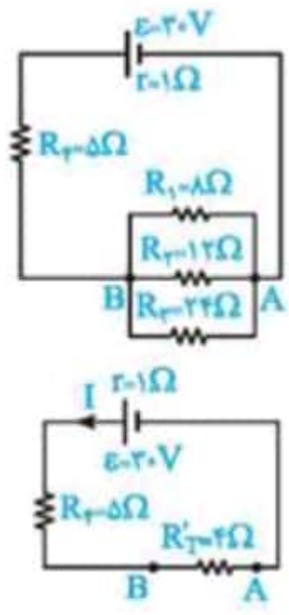
با توجه به تساوی $R_۵$ و $R_۶$، جریان $I = ۱A$ در دو شاخهٔ $R_۵$ و $R_۶$ به‌طور مساوی تقسیم می‌شود (چرا؟).

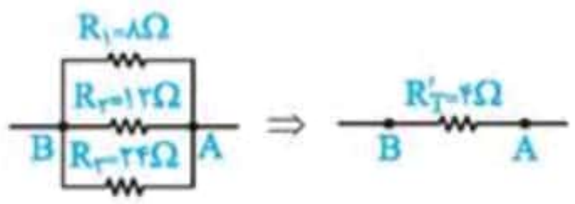
بنابراین جریان در مقاومت R' برابر $۰/۵A$ بوده و جریان در مقاومت $R_۱$ برابر است با:

$$x + ۲x = ۰/۵ \Rightarrow x = \frac{۱}{۶} \Rightarrow I_۱ = ۲x = \frac{۱}{۳}A \Rightarrow P_۱ = R_۱I_۱^۲ = ۶ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}W$$

۱۷۰۷ ۱ برای محاسبهٔ توان گرمایی تولید شده در مقاومت $R_۳$ با توجه به رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، ابتدا باید ولتاژ دو سر مقاومت $R_۳$ را به‌دست آوریم.

برای این منظور ابتدا مقاومت معادل $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ را محاسبه می‌کنیم.





$$\frac{۱}{R'_T} = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۴}$$

$$\frac{۱}{R'_T} = \frac{۳ + ۲ + ۱}{۲۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow R'_T = ۴\,\Omega$$

مدار معادل به‌صورت روبه‌رو است:

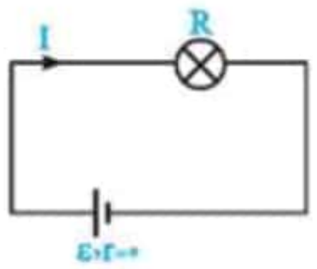
$$I = \frac{۳۰}{۱ + ۵ + ۴} = ۳A \Rightarrow V_{AB} = R'_T I = ۴ \times ۳ = ۱۲V$$

در این صورت توان مقاومت $R_۳$ برابر است با:

توان: $P = \frac{V_{AB}^۲}{R_۳} = \frac{۱۲^۲}{۲۴} = ۶W \Rightarrow$ گرمای تولید شده در ۱۰۰ ثانیه $= Pt = ۶ \times ۱۰۰ = ۶۰۰J$

تمرین **این مقاومت چند ثانیه گرما تولید کند تا با گرمای آن، دمای ۱۰ گرم آب را یک درجهٔ سلسیوس بتوان بالا برد؟** $(c_{آب} = ۴۲۰۰ J/kg.^\circ C)$

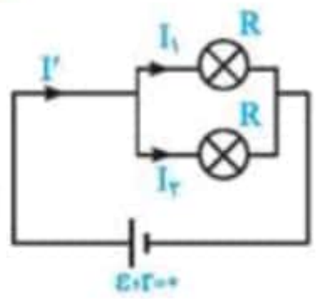
۴ ۱۷۰۸ اگر مقاومت لامپ را برابر R بگیریم، شدت جریان گذرنده از لامپ در مدار صورت سؤال برابر است با:



$$I=\frac{\varepsilon}{R+0}=\frac{\varepsilon}{R}$$

برای آن‌که شدت نور لامپ موجود در گزینه‌ها برابر شدت نور لامپ در مدار فوق شود، باید جریان گذرنده از هر لامپ برابر جریان $I=\frac{\varepsilon}{R}$ باشد. حال به بررسی گزینهٔ (۴) می‌پردازیم:

گزینهٔ (۴):



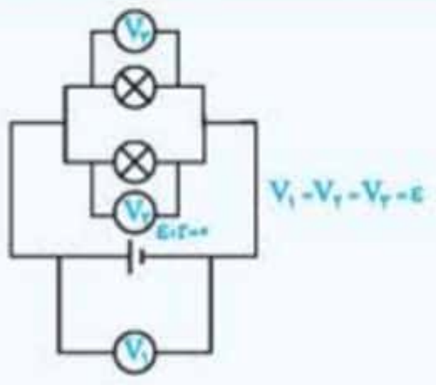
$R_T=\frac{R}{2}$: لامپ‌ها موازی‌اند.

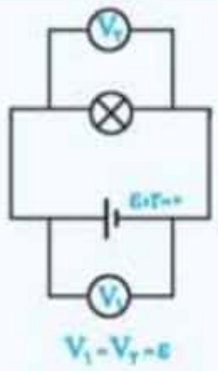
$$I'=\frac{\varepsilon}{R_T+0}=\frac{\varepsilon}{\frac{R}{2}+0}=\frac{2\varepsilon}{R} \xrightarrow{\text{مقاومت لامپ‌ها برابر است.}} I_1=I_2=\frac{I'}{2}=\frac{\varepsilon}{R}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود جریان گذرنده از هر یک از لامپ‌های موجود در گزینهٔ (۴)، برابر $I=\frac{\varepsilon}{R}$ است. پس شدت روشنایی لامپ‌ها در این حالت برابر شدت روشنایی لامپ موجود در مدار صورت سؤال است، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد (به عنوان تمرین، جریان در سه شکل دیگر را به‌دست آورید و نشان دهید که جریان هر یک از آن لامپ‌ها با جریان لامپ مدار اصلی برابر نمی‌باشد).

خلاقیت حرفه‌ای ها

به‌عنوان روش ساده‌تر و مفهومی‌تر می‌توان گفت با توجه به صفر بودن مقاومت درونی باتری، ولتاژ دو سر آن برابر ε است. در شکل اصلی و شکل گزینهٔ (۴) لامپ‌ها مستقیماً به دو سر مولد وصل بوده و ولتاژ دو سر لامپ‌ها برابر ε است و به همین دلیل نور لامپ‌ها یکسان است.





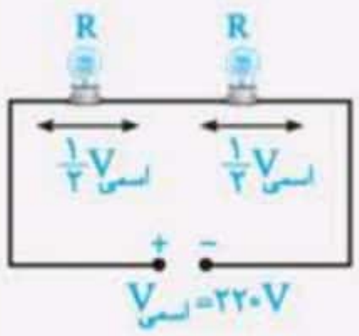
۴ ۱۷۰۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۵ مقایسهٔ توان مصرفی لامپ‌های یک مجموعه با توان ثبت شده بر روی آن‌ها (توان اسمی) (تست‌های ۱۷۰۹ تا ۱۷۲۰)

برای شروع این بحث، همان‌طور که در خلاصه نکات مطرح شد، اگر لامپی به ولتاژ اسمی خود متصل نشود، دیگر توان آن برابر توان اسمی‌اش نمی‌باشد. حال تحت عنوان یک مثال، می‌خواهیم روند کلی حل سؤالاتی که موضوع مورد بحث در این خلاصه نکات در آن‌ها مطرح می‌شود را به دو روش بررسی کنیم. روش اول یک روش مفهومی و مناسب بوده و روش دوم صرفاً یک روش محاسباتی و دشوارتر می‌باشد.

مثال **دو لامپ معمولی با مقادیر اسمی ۲۲۰ ولت و ۱۰۰ وات را به‌طور متوالی به یکدیگر متصل کرده و مجموعه را به برق ۲۲۰ ولت وصل می‌کنیم. حال می‌خواهیم توان هر لامپ و توان مجموعهٔ لامپ‌ها را به‌دست آوریم.**

روش اول: با توجه به مشابه بودن دو لامپ، ولتاژ هر کدام از لامپ‌ها برابر نصف ولتاژ منبع، یعنی برابر اسمی $\frac{1}{2}V$ می‌شود. از طرفی با توجه به ثابت بودن مقاومت لامپ‌ها در حالت روشن، می‌توان گفت که با نصف شدن ولتاژ لامپ‌ها نسبت به مقادیر اسمی آن‌ها، توان آن‌ها $\frac{1}{4}$ برابر توان اسمی خود خواهند شد.



$$\text{برابر } \frac{1}{4}\ P=\frac{V^2}{R} \quad (\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}$$

(R ثابت)

$\Rightarrow$ توان هرکدام از لامپ‌ها برابر $\frac{1}{4}P_{\text{اسمی}}=25W$ خواهد شد.

به‌عبارت دیگر، می‌توان نوشت:

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow\frac{P_{\text{لامپ}}}{P_{\text{اسمی}}}=\left(\frac{V_{\text{لامپ}}}{V_{\text{اسمی}}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow P_{\text{لامپ}}=\frac{1}{4}P_{\text{اسمی}}$$

(R ثابت)

بنابراین توان کل مجموعهٔ دو لامپ برابر است با:

$$P_1+P_2=\frac{1}{4}P_{\text{اسمی}}+\frac{1}{4}P_{\text{اسمی}}=\frac{1}{2}P_{\text{اسمی}}=50W$$

روش دوم: در این روش گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا با توجه به مقادیر اسمی داده شده، مقاومت هر لامپ را به‌دست می‌آوریم.

گام دوم: با توجه به ولتاژ جدید دو سر هر لامپ و مقاومت به‌دست آمده برای هریک، توان هر لامپ را محاسبه می‌کنیم.

به عنوان تمرین برای مثال فوق می‌توان نوشت:

$$P_{\text{اسمی}}=\frac{V^2_{\text{اسمی}}}{R_1}\Rightarrow R_1=R_2=\frac{220^2}{100}=484\Omega$$

gajmarket.com

در حالت سری کردن دو لامپ مشابه، ولتاژ دو سر هر یک از آن‌ها برابر $۱۱۰\,V$ می‌شود. بنابراین برای محاسبهٔ توان جدید هر لامپ می‌توان نوشت:

$$P_۱=\frac{V^۲}{R_۱}=\frac{۱۱۰^۲}{۴۸۴}=۲۵\,W \xrightarrow[V_۱=V_۲=۱۱۰\,V]{R_۱=R_۲} P_۱=P_۲=۲۵\,W$$

$$P_{کل}=P_۱+P_۲=۲۵+۲۵=۵۰\,W$$

دقت: هنگامی‌که لامپ‌ها را به‌طور متوالی متصل می‌کنیم، مقاومت معادل مجموعه دو برابر یک لامپ شده و با توجه به رابطهٔ $P=\frac{V^۲}{R}$ و ثابت ماندن V، با دو برابر شدن مقاومت معادل، توان مصرفی مجموعه نصف خواهد شد.

هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با توجه به این‌که لامپ‌ها به ولتاژ اسمی خود متصل شده‌اند $(۲۲۰\,V)$، بنابراین توان مصرفی هریک از لامپ‌ها برابر توان اسمی آن‌ها خواهد بود.

۲) با توجه به رابطهٔ $P=VI$ و یکسان بودن ولتاژ دو لامپ، هر لامپی که توان بالاتری دارد، جریان بیشتری نیز از آن عبور خواهد کرد. بنابراین لامپ ۶۰ واتی پرنورتر خواهد بود.

۳) توان مصرفی مجموعه برابر مجموع توان مصرفی دو لامپ می‌باشد $(P_{کل}=۶۰+۳۰=۹۰\,W)$. بنابراین توان مصرفی مجموعه از بزرگ‌ترین توان اسمی لامپ‌ها (یعنی $۶۰\,W$) بزرگ‌تر می‌باشد.

۴) با توجه به رابطهٔ $P=\frac{V^۲}{R}$، اگر اختلاف ولتاژ دو سر لامپ ۲۰ درصد کاهش یابد، داریم:

$$V_۲=V_۱-\frac{۲۰}{۱۰۰}V_۱=\frac{۸۰}{۱۰۰}V_۱=\frac{۴}{۵}V_۱$$

$$P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow\frac{P_۲}{P_۱}=\left(\frac{V_۲}{V_۱}\right)^۲=\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲=\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۶۴}{۱۰۰}=۰/۶۴$$

$$\Delta P=P_۲-P_۱=۰/۶۴P_۱-P_۱=-۰/۳۶P_۱$$

بنابراین اگر اختلاف پتانسیل دو سر یک لامپ ۲۰ درصد کاهش یابد، توان آن لامپ ۳۶ درصد کاهش خواهد یافت.

۳ ۱۷۱۰ با توجه به شکل سؤال، ولتاژ دو سر هریک از لامپ‌ها در مدار، نصف ولتاژ اسمی بوده (یعنی ۱۱۰ ولت) و در نتیجه توان مصرفی هر لامپ، $\frac{۱}{۴}$ توان اسمی آن است.

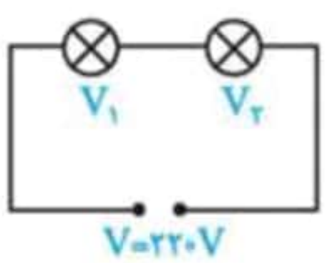
$$\text{برابر }\frac{۱}{۴}\downarrow P=\frac{V^۲\downarrow(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\text{ برابر}}{R}\Rightarrow P=\frac{۱}{۴}P_{\text{اسمی}}=\frac{۱}{۴}\times۱۰۰=۲۵\,W=۰/۰۲۵\,kW$$

$$W=Pt=۰/۰۲۵\times۲=۰/۰۵\,kW.h$$

* توجه شود که برای محاسبهٔ انرژی برحسب کیلووات ساعت، باید توان برحسب کیلووات و زمان برحسب ساعت باشد.

۴ ۱۷۱۱ هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با توجه به مشابه بودن دو لامپ سری، ولتاژ دو سر هریک از آن‌ها یکسان و برابر ۱۱۰ ولت می‌شود. با توجه به این‌که ولتاژ ثبت شده روی لامپ‌ها برابر ۲۲۰ ولت است، بنابراین ولتاژ دو سر هریک از لامپ‌ها نصف ۲۲۰ ولت می‌باشد.



$$V_۱=V_۲=\frac{V}{۲}=\frac{۲۲۰}{۲}=۱۱۰\,V$$

۲) چون ولتاژ لامپ‌ها نصف مقدار اسمی آن‌ها است، بنابراین توان هریک از لامپ‌ها، $\frac{۱}{۴}$ برابر توان ثبت شده روی هریک خواهد بود.

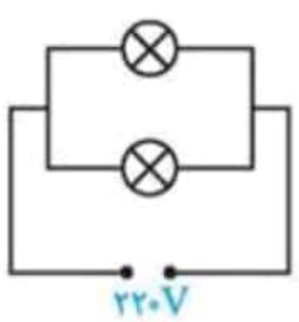
$$\text{برابر }\frac{۱}{۴}\ P=\frac{V^۲\ (\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\text{ برابر}}{R}$$

۳) توان مصرفی مجموعه برابر مجموع توان مصرفی هریک از لامپ‌ها می‌باشد.

$$P_{کل}=\underbrace{P_{\text{مصرفی ۱}}}_{\text{توان مصرفی هر لامپ}}+P_{\text{مصرفی ۲}}=\frac{۱}{۴}P_{\text{اسمی}}+\frac{۱}{۴}P_{\text{اسمی}}=\frac{۱}{۲}P_{\text{اسمی}}$$

بنابراین توان مصرفی مجموعه، نصف توان ثبت شده بر روی هریک از لامپ‌ها (اسمی) می‌باشد.

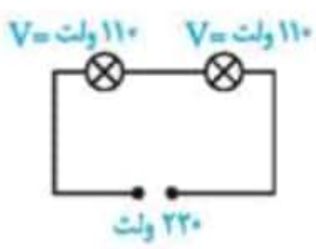
۴) اگر دو لامپ به‌صورت موازی متصل شوند، ولتاژ دو سر هریک از لامپ‌ها برابر ولتاژ اسمی آن‌ها شده و در نتیجه توان هریک از لامپ‌ها برابر توان اسمی آن‌ها می‌شود. بنابراین توان مصرفی مجموعه افزایش یافته و دو برابر توان اسمی یکی از لامپ‌ها می‌شود.



$$P'_{کل}=\underbrace{P_{\text{اسمی}}}_{\text{توان مصرفی هر لامپ}}+P_{\text{اسمی}}=۲P_{\text{اسمی}}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ ۱۷۱۲ با توجه به یکسان بودن مقاومت لامپ‌ها، ولتاژ دو سر هر یک از آن‌ها برابر ۱۱۰ ولت بوده و توان مصرفی هر لامپ $\frac{۱}{۴}$ توان اسمی آن می‌باشد:

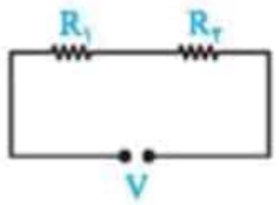


$$\frac{P}{P_{\text{اسمی}}}=\left(\frac{V}{V_{\text{اسمی}}}\right)^۲=\left(\frac{۱۱۰}{۲۲۰}\right)^۲\Rightarrow P=\frac{۱}{۴}P_{\text{اسمی}}=\frac{۱}{۴}\times ۱۰۰=۲۵\,W=۰/۰۲۵\,kW$$

در ادامه انرژی مصرف‌شده توسط هریک از لامپ‌ها در مدت ۴ ساعت برابر است با:

$$W=P.t=۰/۰۲۵\times ۴=۰/۱\,kW.h$$

۱ ۱۷۱۳ **گام اول:** مقاومت لامپ (۱) با توان اسمی ۶۰ وات را $R_۱$ و مقاومت لامپ (۲) با توان اسمی ۴۰ وات را $R_۲$ فرض می‌کنیم. مقاومت آن‌ها عبارت است از:



$$\begin{cases}P_۱=\dfrac{V^۲}{R_۱}\Rightarrow R_۱=\dfrac{V^۲}{P_۱}=\dfrac{V^۲}{۶۰}\\ P_۲=\dfrac{V^۲}{R_۲}\Rightarrow R_۲=\dfrac{V^۲}{P_۲}=\dfrac{V^۲}{۴۰}\end{cases}$$

گام دوم: مقاومت معادل مجموعه برابر است با:

$$R_T=R_۱+R_۲=\frac{V^۲}{۶۰}+\frac{V^۲}{۴۰}=\frac{V^۲}{۲۴}$$

گام سوم: حال اگر ولتاژ دو سر این دو مقاومت سری برابر V باشد، جریان الکتریکی عبوری از مدار برابر است با:

$$I=\frac{V}{R_T}=\frac{V}{\frac{V^۲}{۲۴}}=\frac{۲۴}{V}$$

گام چهارم: در آخرین مرحله، توان هر کدام از این لامپ‌ها برابر است با:

$$P'_۱=R_۱I^۲=\frac{V^۲}{۶۰}\times\left(\frac{۲۴}{V}\right)^۲=۹/۶\,W\ ,\ P'_۲=R_۲I^۲=\frac{V^۲}{۴۰}\times\left(\frac{۲۴}{V}\right)^۲=۱۴/۴\,W$$

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌شود، ولتاژ دو سر هریک از لامپ‌ها کم‌تر از ولتاژ اسمی بوده و توان آن‌ها کمتر از توان اسمی است. در این حالت توان مصرفی مجموعه، از توان اسمی تک‌تک لامپ‌ها کوچک‌تر است.

خلاقیت حرفه‌ای ها

۱) چون ولتاژ اسمی دو لامپ با هم برابر است، بنابراین مقاومت لامپ‌ها متناسب با عکس توان اسمی آن‌ها خواهد بود $\left(P_{\text{اسمی}}\propto\frac{۱}{R}\right)$. پس اگر مقاومت لامپ ۶۰ واتی را $R_۱=x$ درنظر بگیریم، مقاومت لامپ ۴۰ واتی برابر $R_۲=\frac{۳}{۲}x$ خواهد بود.

۲) با توجه به تقسیم ولتاژ بین دو مقاومت متوالی، اسمی $V_۱=\frac{۲}{۵}V$ و اسمی $V_۲=\frac{۳}{۵}V$ است.

۳)

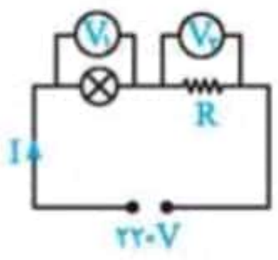
$$\text{برابر } \frac{۴}{۲۵}\ P=\frac{V^۲}{R}\ \ (\frac{۲}{۵})^۲=\frac{۴}{۲۵}\text{ برابر}\Rightarrow P_۱=\frac{۴}{۲۵}\times ۶۰=۹/۶\,W$$

$$\text{برابر } \frac{۹}{۲۵}\ P=\frac{V^۲}{R}\ \ (\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}\text{ برابر}\Rightarrow P_۲=\frac{۹}{۲۵}\times ۴۰=۱۴/۴\,W$$

۲ ۱۷۱۴ فرض کنید ولتاژ اسمی چند لامپ برابر V است. در اتصال سری آن لامپ‌ها به ولتاژ اسمی V، می‌توان ثابت کرد که توان مصرفی مجموعه از توان اسمی هر یک از لامپ‌ها کوچک‌تر است و در نتیجه توان مصرفی این مجموعه کم‌تر از ۱۰۰ وات است.

تذکر این موضوع را به‌سادگی باتوجه به اعداد تست قبل نیز می‌توان فهمید.

۱ ۱۷۱۵ لامپ حداکثر می‌تواند ولتاژ ۲۰ ولت را تحمل کند و در صورتی‌که بخواهیم با ولتاژ ۲۲۰ ولت آن را روشن کنیم، باید یک مقاومت را با آن به صورت سری متصل کنیم تا ۲۰۰ ولت از ولتاژ توسط آن مقاومت تحمل شود:



$$\begin{cases}V_۱=۲۰\,V\\ V_۲=۲۰۰\,V\end{cases}$$

از سوی دیگر با توجه به توان لامپ، به سادگی می‌توان جریان در مدار را به دست آورد:

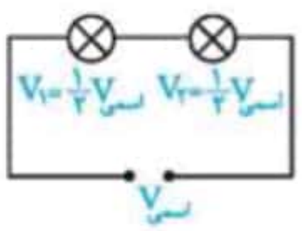
$$P_۱=V_۱I_۱\Rightarrow ۱۰=۲۰\times I_۱=۰/۵\,A$$

$$R=\frac{V_۲}{I}=\frac{۲۰۰}{۰/۵}=۴۰۰\,\Omega\ ,\ \text{توان مقاومت } R:\ P_R=V_۲I=۲۰۰\times ۰/۵=۱۰۰\,W$$

* دقت کنیم که چون ولتاژ دو سر لامپ برابر ولتاژ اسمی آن است، توان آن برابر توان اسمی شده و جریان را به کمک مقادیر اسمی لامپ یافتیم.

gajmarket.com

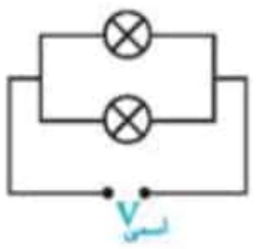
۲ ۱۷۱۶ **روش اول:** در حالت اتصال سری مقاومت‌ها، ولتاژ هر کدام نصف ولتاژ اسمی خود خواهد بود. بنابراین در این حالت توان هر کدام، $\frac{۱}{۴}$ توان اسمی آن‌ها می‌شود.



$$\text{برابر } \frac{۱}{۴}\ P=\frac{V^۲}{R} \quad \text{برابر } (\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

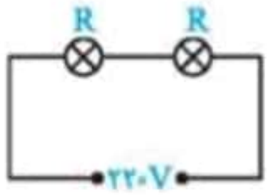
$$P_{کل}=P_۱+P_۲=\frac{۱}{۴}P_{اسمی}+\frac{۱}{۴}P_{اسمی}=\frac{۱}{۲}P_{اسمی}$$

ولی در حالت موازی ولتاژ هر کدام از لامپ‌ها برابر ولتاژ اسمی و در نتیجه توان آن‌ها برابر توان اسمی خواهد بود.



$$V_۱=V_۲=V_{اسمی} \Rightarrow P'_{کل}=P'_۱+P'_۲=P_{اسمی}+P_{اسمی}=۲P_{اسمی} \Rightarrow \frac{P_{کل}}{P'_{کل}}=\frac{\frac{۱}{۲}P_{اسمی}}{۲P_{اسمی}}=\frac{۱}{۴}$$

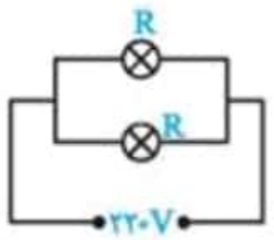
روش دوم: حالت اول: اگر لامپ‌ها را به طور متوالی ببندیم، مقاومت معادل آن‌ها $۲R$ است و داریم:



$$R_{T_۱}=۲R \Rightarrow P_۱=\frac{V^۲}{R_{T_۱}}=\frac{V^۲}{۲R}$$

حالت دوم: اگر لامپ‌ها را به طور موازی ببندیم، مقاومت معادل آن‌ها $\frac{R}{۲}$ است و داریم:

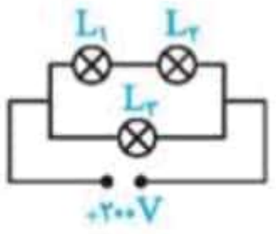
$$R_{T_۲}=\frac{R}{۲} \Rightarrow P_۲=\frac{V^۲}{R_{T_۲}}=\frac{V^۲}{\frac{R}{۲}}=۲\frac{V^۲}{R}$$



بنابراین نسبت توان مصرفی در این دو حالت برابر است با:

$$\frac{P_۱}{P_۲}=\frac{\frac{V^۲}{۲R}}{\frac{۲V^۲}{R}}=\frac{۱}{۴}$$

۱ ۱۷۱۷ **گام اول:** (به دست آوردن ولتاژ دو سر هر یک از لامپ‌ها): لامپ $L_۳$ مستقیماً به دو سر منبع ولتاژ ثابت ۲۰۰ ولتی متصل است و ولتاژ دو سر آن ۲۰۰ ولت است و لامپ‌های $L_۱$ و $L_۲$ هریک نیمی از ولتاژ ۲۰۰ ولت را تحمل می‌کنند.



$$V_۳=۲۰۰\,V\ ,\ V_۱=V_۲=۱۰۰\,V$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ $P=\frac{V^۲}{R}$، با مقایسهٔ ولتاژ دو سر لامپ‌ها با ولتاژ اسمی آن‌ها، توان هر لامپ را با توان اسمی مقایسه می‌کنیم:

$$V_۳=۲۰۰\,V=V_{اسمی} \Rightarrow P_۳=P_{اسمی}=۲۰۰\,W$$

$$V_۱=V_۲=\frac{۱}{۲}V_{اسمی} \xrightarrow{P=\frac{V^۲}{R}} P_۱=P_۲=\frac{۱}{۴}P_{اسمی}=\frac{۱}{۴}\times ۲۰۰=۵۰\,W$$

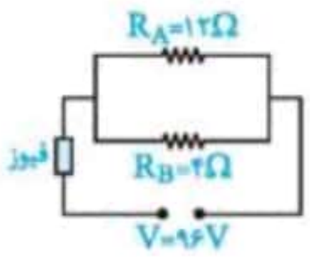
توان مجموعه: $P=P_۱+P_۲+P_۳=۵۰+۵۰+۲۰۰=۳۰۰\,W$

۳ ۱۷۱۸ ابتدا با توجه به مقادیر ولتاژ اسمی و توان اسمی هریک از وسیله‌های A (بخاری برقی) و B (سشوار)، مقاومت الکتریکی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

وسیلهٔ A (بخاری برقی): $P_{اسمی}=\frac{V^۲_{اسمی}}{R_A} \Rightarrow R_A=\frac{۱۲۰^۲}{۱/۲\times ۱۰^۳}=۱۲\Omega$

وسیلهٔ B (سشوار): $P_{اسمی}=\frac{V^۲_{اسمی}}{R_B} \Rightarrow R_B=\frac{۱۲۰^۲}{۳/۶\times ۱۰^۳}=۴\Omega$

با توجه به موازی بودن دو وسیلهٔ A و B مقاومت معادل آن‌ها برابر ۳Ω می‌شود و داریم:



$$R_T=\frac{۱۲\times ۴}{۱۲+۴}=۳\Omega$$

$$I=\frac{V}{R_T}=\frac{۹۶}{۳}=۳۲\,A$$

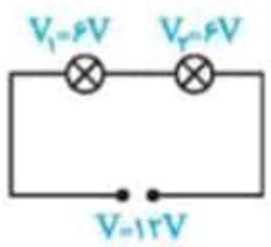
با توجه به این‌که جریان کل عبوری از فیوز، بزرگ‌تر از حداکثر جریان قابل تحمل آن $(۳۲\,A > ۲۵\,A)$ می‌شود، بنابراین فیوز می‌پرد (جریان قطع می‌شود).

۲ ۱۷۱۹ با مساوی قرار دادن انرژی تولیدی باتری و انرژی مصرفی لامپ، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} U_{تولیدی}=VIt=Vq=۱۲\times ۶۰ \\ U_{لامپ}=Pt=۳۶\times t \end{cases} \Rightarrow U_{تولیدی}=U_{لامپ} \Rightarrow ۱۲\times ۶۰=۳۶t \Rightarrow t=۲۰h$$

دقت: با توجه به برابر بودن ولتاژ باتری با ولتاژ اسمی لامپ، توان لامپ نیز با توان اسمی آن برابر است. از طرفی دقت کنیم در تساوی بالا، چون در هر دو طرف تساوی زمان را بر حسب ساعت درنظر گرفته‌ایم، نیازی به تبدیل آن به ثانیه نبود.

۳ ۱۷۲۰ اگر باتری ۱۲ ولتی با مقاومت درونی ناچیز به دو سر دو لامپ وصل شود، ولتاژ دو سر هر یک از لامپ‌ها برابر ۶ ولت می‌شود. با توجه به این‌که ولتاژ اسمی لامپ‌ها ۶ ولت و ولتاژ موجود در دو سر هریک از آن‌ها نیز ۶ ولت است، توان لامپ‌ها نیز با توان اسمی آن‌ها برابر است. در ادامه مشابه با سؤال قبل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} U_{\text{لامپ}} = ۲\times Pt = ۲\times[۱۲\times t] \\ U_{\text{تولیدی}} = Vq = ۱۲\times ۴۸ \end{cases} \Rightarrow U_{\text{لامپ}} = U_{\text{تولیدی}} \Rightarrow ۲\times[۱۲\times t] = ۱۲\times ۴۸ \Rightarrow t = ۲۴\,h$$

۲ ۱۷۲۱

نکته

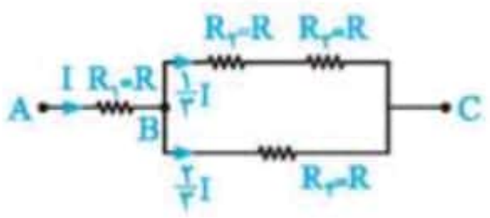
در تست‌های (۱۷۲۱) تا (۱۷۲۴)، تست‌هایی مطرح شده است که بیشترین توان قابل تحمل برای یک مجموعه از مقاومت‌ها را پرسیده است. در این سؤال‌ها، ابتدا توان مصرفی هریک از مقاومت‌ها را به صورت پارامتری به دست آورده و سپس با توجه به مقاومتی که بیشترین مقدار توان مصرفی را دارد، حداکثر توان قابل تحمل آن مجموعه از مقاومت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

اگر حداکثر توان مصرفی مقاومت ۴۵ اهمی، ۰/۲ وات باشد، حداکثر ولتاژ دو سر آن برابر است با:

$$P_{max} = \frac{V_{max}^{۲}}{R} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{V_{max}^{۲}}{۴۵} \Rightarrow V_{max}^{۲} = ۹ \Rightarrow V_{max} = ۳\,V$$

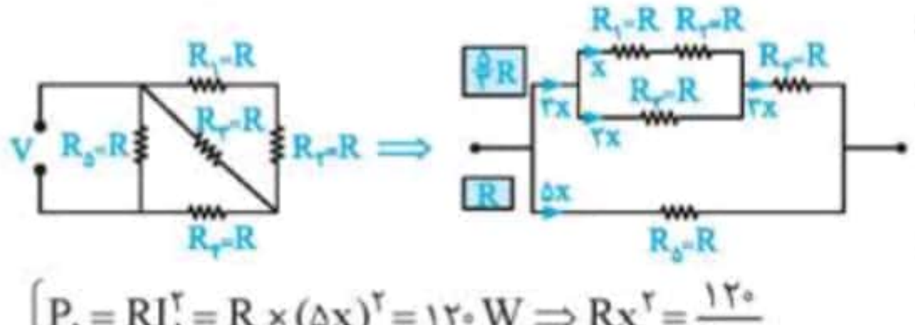
ولتاژ هر یک از مقاومت‌ها نباید از ۳ ولت بیشتر باشد، پس اگر ۳ مقاومت را با هم به صورت سری متصل کنیم و مجموعه را به ولتاژ ۹ ولت متصل کنیم، به هر کدام ۳ ولت می‌رسد و هیچ‌کدام نمی‌سوزد ولی اگر تعداد لامپ‌ها کمتر از ۳ عدد باشد، ولتاژ روی هر لامپ بیشتر از ۳ ولت شده و لامپ می‌سوزد.

۴ ۱۷۲۲ هریک از لامپ‌ها را با یک مقاومت R مطابق شکل نشان می‌دهیم. در این مدار اگر جریان اصلی برابر I باشد، جریان در شاخهٔ بالایی $\frac{۱}{۳}I$ و در شاخهٔ پایینی $\frac{۲}{۳}I$ است (چرا؟). در این مدار مقاومت $R_۱$ بیشترین جریان عبوری را داشته و بیشترین توان را دارد. فرض می‌کنیم توان این لامپ برابر ۹ وات باشد، در این صورت توان سایر مقاومت‌ها برابر است با:



$$\begin{cases} P_۱ = RI^{۲} = ۹W \\ P_۲ = P_۳ = R\times\left(\frac{۱}{۳}I\right)^{۲} = \frac{۱}{۹}\underbrace{RI^{۲}}_{۹} = \frac{۱}{۹}\times ۹ = ۱W \\ P_۴ = R\times\left(\frac{۲}{۳}I\right)^{۲} = \frac{۴}{۹}\underbrace{RI^{۲}}_{۹} = \frac{۴}{۹}\times ۹ = ۴W \end{cases} \Rightarrow P_{\text{کل}} = P_۱ + P_۲ + P_۳ + P_۴ = ۹ + ۱ + ۱ + ۴ = ۱۵\,W$$

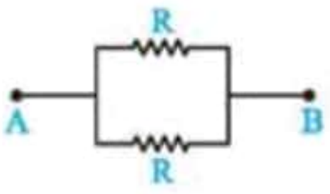
۳ ۱۷۲۳ مشابه با سؤال قبل عمل می‌کنیم. شکل ساده شدهٔ مدار به صورت مقابل است. اگر جریان در مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ را x فرض کنیم، جریان در سایر مقاومت‌ها عبارت است از:



در این مدار مقاومت $R_۵$ بیشترین توان را داشته و برای محاسبهٔ حداکثر توان، توان آن را برابر ۱۲۰ وات قرار می‌دهیم و به کمک آن توان سایر مقاومت‌ها را می‌یابیم. به همین منظور داریم:

$$\begin{cases} P_۵ = RI_۵^{۲} = R\times(۵x)^{۲} = ۱۲۰\,W \Rightarrow Rx^{۲} = \frac{۱۲۰}{۲۵} \\ P_۱ = P_۲ = R(x)^{۲} = \frac{۱۲۰}{۲۵}W \\ P_۳ = R(۲x)^{۲} = ۴Rx^{۲} = ۴\times\frac{۱۲۰}{۲۵}W \\ P_۴ = R(۳x)^{۲} = ۹Rx^{۲} = ۹\times\frac{۱۲۰}{۲۵}W \end{cases} \Rightarrow P_{\text{کل}} = P_۱ + P_۲ + P_۳ + P_۴ + P_۵ = ۱۹۲\,W$$

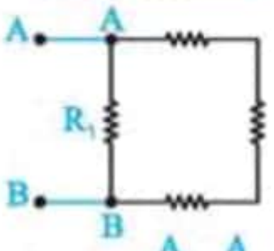
۴ ۱۷۲۴ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) 

ولتاژ دو سر هر کدام از مقاومت‌ها برابر V_{AB} است.

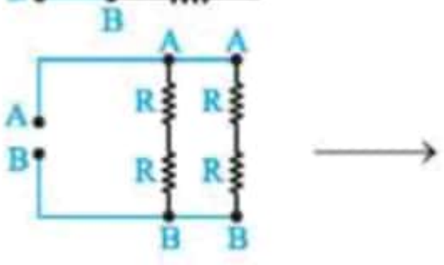
۲) 

ولتاژ دو سر هر مقاومت برابر V_{AB} است.

۳) 

ولتاژ دو سر مقاومت $R_۱$ برابر V_{AB} است. $\Rightarrow$

۴) با توجه به مشابه بودن مقاومت‌ها، ولتاژ دو سر هر کدام از مقاومت‌ها $\frac{۱}{۲}V_{AB}$ می‌باشد (چرا؟).



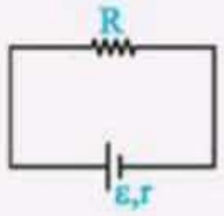
$\longrightarrow$

gajmarket.com

بنابراین اگر بین دو نقطهٔ A و B ولتاژی بیش از ۲۰ ولت اعمال شود، در هر کدام از گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مقاومتی وجود دارد که ولتاژ آن برابر V_{AB} بوده و ولتاژ آن بیش از ۲۰ ولت می‌شود، بنابراین آسیب می‌بیند. ولی در گزینهٔ (۴) تا قبل از رسیدن ولتاژ V_{AB} به ۴۰ ولت، ولتاژ هیچ کدام از مقاومت‌ها به ۲۰ ولت نرسیده و آسیب نمی‌بینند. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۷۲۵ **۴** برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۶ **بررسی انواع توان در باتری** (تست‌های ۱۷۲۵ تا ۱۷۴۱)



تا به این‌جای کار در خلاصه نکات قبلی، توان مصرفی در مقاومت خارجی R بررسی شد. حال سؤال آن است که این توان مصرفی در مقاومت، از کجا تأمین می‌شود؟ در تحلیل این موضوع باید گفت که در مدار باتری مقداری از انرژی خود را از دست داده و بخشی از این انرژی را به مقاومت خارجی تحویل می‌دهد (انرژی مصرفی در مقاومت خارجی). حال می‌خواهیم انواع توان در یک باتری را بررسی کنیم:

۱ **توان مصرف شده در پیل (هدر شده):** مقدار انرژی‌ای است که در واحد زمان توسط مقاومت درونی باتری تلف شده و به گرما تبدیل می‌شود. توان مصرفی در پیل از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$P_r = rI^2$: توان مصرفی در مقاومت درونی

r : مقاومت درونی باتری

۲ **توان خروجی باتری:** برابر مجموع توان مصرف شده در مقاومت‌های بیرون از باتری است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

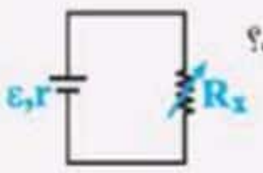
$$\text{توان خروجی} = I\Delta V = I(\varepsilon - rI) = R_T I^2 \Rightarrow \boxed{P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2 = R_T I^2}$$

(R_T: مقاومت خارجی)

درک مفهومی‌تر روابط فوق: رابطهٔ $P = I\Delta V$ را می‌توان برای منابع نیرو محرکه نیز به کار برد. از طرفی اختلاف پتانسیل دو سر یک باتری را در مدار تک باتری می‌توان از رابطهٔ $\Delta V = \varepsilon - rI$ به‌دست آورد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P = I\Delta V = I(\varepsilon - rI) = \varepsilon I - rI^2$$

همان‌طور که می‌بینیم عبارت فوق شامل دو قسمت εI و rI^2 می‌باشد. همان‌طور که می‌دانیم عبارت rI^2 بیان‌گر توان مصرفی در مقاومت درونی مولد می‌باشد. بنابراین کل توان تولیدی باتری برابر εI می‌باشد که مقدار rI^2 توسط مقاومت داخلی مولد از آن کم شده و باقی آن به‌صورت مفید به مقاومت خروجی تحویل داده می‌شود.



تمرین ۱ **در مدار مقابل، در صورتی‌که مقاومت متغیر خارجی را از $R_1 = r$ به $R_2 = 2r$ برسانیم، توان خروجی باتری چند برابر می‌شود؟**

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

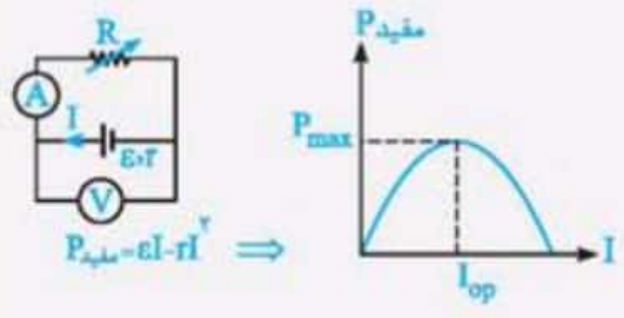
پاسخ برای شروع حل، ابتدا شدت جریان مدار را با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$، در هر دو حالت محاسبه می‌کنیم ($R_1 = r$, $R_2 = 2r$):

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} = \frac{\varepsilon}{r + r} = \frac{\varepsilon}{2r} \quad , \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r} = \frac{\varepsilon}{2r + r} = \frac{\varepsilon}{3r}$$

حال برای مقایسهٔ توان خروجی باتری در دو حالت، می‌توان نوشت:

$$P_{\text{خروجی}} = RI^2 \Rightarrow \frac{P_{2\,\text{مفید}}}{P_{1\,\text{مفید}}} = \frac{R_2}{R_1} \times \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = \frac{2r}{r} \times \left(\frac{\frac{\varepsilon}{3r}}{\frac{\varepsilon}{2r}}\right)^2 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

رسم نمودار توان خروجی برحسب جریان: در شکل مقابل اگر مقاومت خارجی را تغییر دهیم، نمودار توان مفید برحسب جریان، یک نمودار درجهٔ دو به صورت مقابل است:



نکات مهم و کاربردی

۱ به سادگی می‌توان ثابت کرد در حالتی‌که مقاومت خارجی مدار با مقاومت درونی باتری برابر شود ($R_T = r$)، توان مفید بیشینه می‌شود.

اثبات: می‌دانیم که توان مفید برابر تفاضل توان کل و توان تلف شده در باتری است. بنابراین می‌توان نوشت:

$P = \varepsilon I - rI^2$: توان مفید

از طرفی می‌دانیم که در معادلهٔ سهمی، رأس آن در مکان $x = -\frac{b}{2a}$ قرار دارد. بنابراین در این معادله می‌توان نوشت:

رابطهٔ (۱): $I_{op} = -\frac{\varepsilon}{2(-r)} = \frac{\varepsilon}{2r}$

هم‌چنین می‌دانیم که شدت جریان در مدار از رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$ به‌دست می‌آید. بنابراین با معادل قرار دادن رابطهٔ (۱) با رابطهٔ اصلی جریان می‌توان نوشت:

$$\frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{r + R_T} \Rightarrow 2r = r + R_T \Rightarrow \boxed{R_T = r}$$

۲ هنگامی‌که توان مفید مولد بیشینه است، شدت جریان عبوری از آن (عدد آمپرسنج) برابر $\frac{\varepsilon}{2r}$ می‌باشد $\left(I_{op}=\frac{\varepsilon}{2r}\right)$.

۳ هنگامی که توان مفید مولد بیشینه است، ولتاژ دو سر آن (عدد ولت‌سنج) نصف نیروی محرکهٔ آن است $\left(V_{op}=\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

اثبات : $V_{op}=\varepsilon-rI_{op}=\varepsilon-r\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)=\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow V_{op}=\frac{\varepsilon}{2}$

۴ با توجه به نکات فوق، بیشینهٔ توان مفید مولد برابر است با:

$$P_{max}=R_T I_{op}^2=r\times\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{4r}$$

با توجه به خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۴) نادرست است. در واقع توان خروجی باتری برابر توان مصرفی در مقاومت خارجی می‌باشد و گزینهٔ ۴ رخ نمی‌دهد.

۳ ۱۷۲۶ با توجه به خلاصه نکات (۱۶)، در هر دو حالت می‌توان نوشت: $P=\varepsilon I-rI^2$: توان مفید

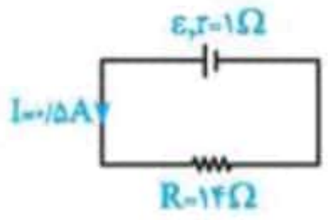
رابطهٔ (۱): **حالت اول :** $P=3/2\,W\ ,\ I=2A\Rightarrow P=\varepsilon I-rI^2\Rightarrow 3/2=2\times\varepsilon-r\times(2)^2\Rightarrow 3/2=2\varepsilon-4r$

رابطهٔ (۲): **حالت دوم :** $P=4/8\,W\ ,\ I=4A\Rightarrow P=\varepsilon I-rI^2\Rightarrow 4/8=4\times\varepsilon-r\times(4)^2\Rightarrow 4/8=4\varepsilon-16r$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و حل دستگاه معادلهٔ به‌دست آمده، می‌توان نیروی محرکه و مقاومت درونی باتری را محاسبه کرد:

$$\begin{cases}3/2=2\varepsilon-4r\\4/8=4\varepsilon-16r\end{cases}\xrightarrow[\text{دو مجهول}]{\text{دو معادله}}r=0/2\Omega\ ,\ \varepsilon=2V$$

۳ ۱۷۲۷ در مدار مقابل با توجه به رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{r+R}$، می‌توان نوشت:

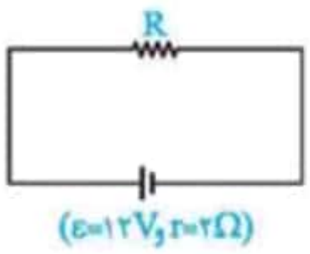


$$r=1\Omega\ ,\ R=14\Omega\ ,\ I=0/5A\ ,\ \varepsilon=?\ ,\ I=\frac{\varepsilon}{r+R}\Rightarrow 0/5=\frac{\varepsilon}{1+14}\Rightarrow\varepsilon=7/5V$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ rI^2، توان تلف‌شده در باتری برابر است با:

$$\text{توان تلف‌شده در باتری}=rI^2=1\times(0/5)^2=0/25\,W$$

۲ ۱۷۲۸ با توجه به روابط زیر، داریم:



$$\begin{cases}\text{توان تلف‌شده در مقاومت درونی}: P=rI^2\Rightarrow 8=2I^2\Rightarrow I=2A\\ I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}\Rightarrow 2=\frac{12}{R+2}\Rightarrow R=4\Omega\end{cases}$$

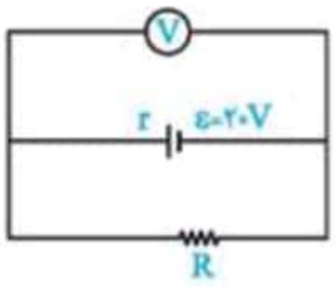
۳ ۱۷۲۹ ابتدا باید توجه شود که توان خروجی باتری، با توان مصرف شده در مقاومت معادل مدار (R_T) برابر است. با توجه به این موضوع داریم:

$$\text{توان خروجی باتری}: P_{\text{خروجی}}=\varepsilon I-rI^2=R_T I^2\xrightarrow{R_T=3R}P_{\text{خروجی}}=3R\times I^2$$

$$\text{توان هر یک از مقاومت‌ها}=P_{\circ}=RI^2\Rightarrow\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\circ}}=3$$

۱ ۱۷۳۰ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۶)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۱۷۳۱ در مدار زیر، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر RI (ولتاژ دو سر مقاومت R) و افت پتانسیل برابر rI می‌باشد.



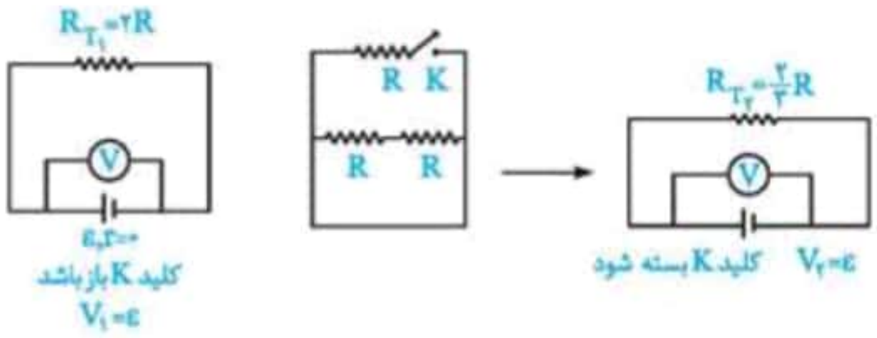
بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}V=RI=18\,V\\V=\varepsilon-rI\Rightarrow rI=\varepsilon-V=20-18=2V\end{cases}\Rightarrow\frac{RI}{rI}=\frac{18}{2}\Rightarrow\frac{R}{r}=9$$

اکنون برای مقایسهٔ توان مصرفی در مقاومت‌های R و r، می‌توان نوشت:

$$\frac{P}{P'}=\frac{RI^2}{rI^2}=\frac{R}{r}=9$$

۴ ۱۷۳۲ با توجه به صفر بودن مقاومت درونی، ولتاژ دو سر باتری برابر ε است و در مقایسهٔ توان مصرفی در مدار در دو حالت می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:



$$R_{T_2}=\frac{2R\times R}{2R+R}=\frac{2}{3}R$$

$$P_T=\frac{V^2}{R_T}\Rightarrow\frac{P_{T_2}}{P_{T_1}}=\frac{R_{T_1}}{R_{T_2}}=\frac{2R}{\frac{2}{3}R}=3$$

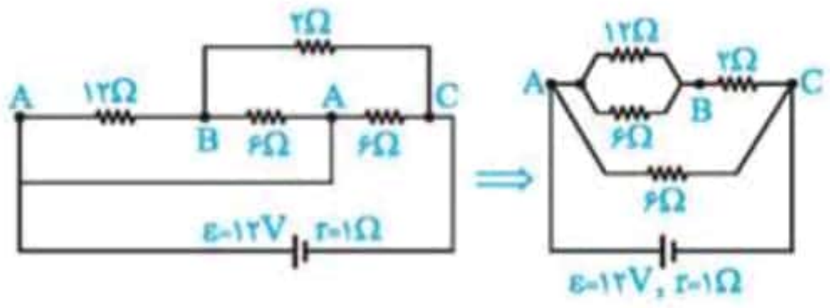
www.gajmarket.com

نگاهی دیگر

با توجه به صفر بودن مقاومت درونی، افت انرژی در مولد صفر بوده و توان تولیدی در باتری، با توان مصرفی برابر است.

$$P_{\text{تولیدی}} = \varepsilon I \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow{I=\frac{\varepsilon_۱}{R_T+r}} \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{R_{T_۱}}{R_{T_۲}} = ۳$$

۲ ۱۷۳۳ ابتدا با روش‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم، مدار را کمی ساده‌تر کرده و مقاومت معادل را محاسبه می‌کنیم تا با کمک آن جریان خروجی از باتری را محاسبه کنیم:



با کمک مدار ساده شده، مقاومت معادل به‌سادگی برابر ۳Ω محاسبه‌شده و شدت جریان برابر است با:

$$\varepsilon = ۱۲V \ , \ R_T = ۳\Omega \ , \ r = ۱\Omega \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r+R_T} \Rightarrow I = \frac{۱۲}{۱+۳} = ۳A$$

توان مصرفی در مقاومت r: $P = rI^۲ = ۱\times(۳)^۲ = ۹W$

۱ ۱۷۳۴ شرط برابری گرما در دو حالت برای مقاومت خارجی، برابری توان در دو حالت است و اگر در جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ توان یکسان شود، داریم:

$$R_۱I_۱^۲ = R_۲I_۲^۲ \Rightarrow R_۱\times\left(\frac{\varepsilon}{R_۱+r}\right)^۲ = R_۲\left(\frac{\varepsilon}{R_۲+r}\right)^۲$$

$$\frac{R_۱}{(R_۱+r)^۲} = \frac{R_۲}{(R_۲+r)^۲} \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{\sqrt{R_۱}}{R_۱+r} = \frac{\sqrt{R_۲}}{R_۲+r} \Rightarrow \sqrt{R_۱}(R_۲+r) = \sqrt{R_۲}(R_۱+r) \Rightarrow \sqrt{R_۱}\times R_۲ + \sqrt{R_۱}\times r = \sqrt{R_۲}R_۱ + \sqrt{R_۲}\times r$$

$$\Rightarrow r(\sqrt{R_۱} - \sqrt{R_۲}) = \sqrt{R_۲}\times R_۱ - \sqrt{R_۱}\times R_۲ \Rightarrow r(\sqrt{R_۱} - \sqrt{R_۲}) = \sqrt{R_۲R_۱}(\sqrt{R_۱} - \sqrt{R_۲}) \Rightarrow r = \sqrt{R_۲R_۱}$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

فرض کنید $R_۱ = ۱\Omega$ و $R_۲ = ۹\Omega$ است. در گزینه‌ها کنترل کنید که به ازای کدام مقدار r، حاصل $R_۱I_۱^۲ = R_۲I_۲^۲$ یکسان می‌شود:

۱) $r = \sqrt{R_۱R_۲} = \sqrt{۱\times۹} = ۳\Omega \rightarrow R_۱I_۱^۲ = R_۲I_۲^۲ \rightarrow ۱\times\left(\frac{\varepsilon}{۱+۳}\right)^۲ = ۹\times\left(\frac{\varepsilon}{۹+۳}\right)^۲$ ✓

۲) $r = \sqrt{۱^۲+۹^۲} = \sqrt{۸۲} \rightarrow ۱\times\left(\frac{\varepsilon}{۱+\sqrt{۸۲}}\right)^۲ \neq ۹\times\left(\frac{\varepsilon}{۹+\sqrt{۸۲}}\right)^۲$ ×

۳) $r = \frac{۱+۹}{۲} = ۵ \rightarrow ۱\times\left(\frac{\varepsilon}{۱+۵}\right)^۲ \neq ۹\times\left(\frac{\varepsilon}{۹+۵}\right)^۲$ ×

۴) $r = \frac{۲\times۱\times۹}{۱+۹} = ۱/۸ \rightarrow ۱\times\left(\frac{\varepsilon}{۱+۱/۸}\right)^۲ \neq ۹\times\left(\frac{\varepsilon}{۹+۱/۸}\right)^۲$ ×

۲ ۱۷۳۵ **روش اول:** توان مفید مولد برابر $\varepsilon I - rI^۲$ است. اگر توان مفید دو بار برابر $P_۱$ شود، داریم:

$$P_۱ = \varepsilon I - rI^۲ \xrightarrow{\text{معادلهٔ درجهٔ ۲}} \underset{a}{\boxed{-r}}\, I^۲ + \underset{b}{\boxed{\varepsilon}}\, I - P_۱ = ۰$$

فرض کنید پاسخ‌ها برابر $I_۱$ و $I_۲$ شود. $\rightarrow I_۱ + I_۲ = -\frac{b}{a} = -\frac{\varepsilon}{(-r)} = \frac{\varepsilon}{r}$

حال به اطلاعات سؤال بر می‌گردیم، با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان نوشت:

حالت ۱ : $R_۱ = ۸\Omega \ , \ r = ۴\Omega$ و حالت ۲ : $R_۲ = ? \ , \ r = ۴\Omega$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow \frac{\cancel{\varepsilon}}{R_۱+r} + \frac{\cancel{\varepsilon}}{R_۲+r} = \frac{\cancel{\varepsilon}}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۸+۴} + \frac{۱}{R_۲+۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow R_۲ = ۲\Omega$

روش دوم: توان مفید در واقع همان توان مصرف شده در مقاومت خارجی است و با توجه به تساوی آن در دو حالت داریم:

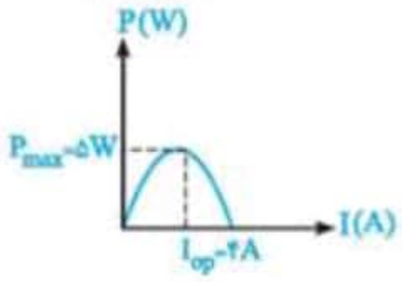
$$P_۱ = P_۲ \rightarrow R_۱I_۱^۲ = R_۲I_۲^۲ \Rightarrow ۸\times\left(\frac{\varepsilon}{۸+۴}\right)^۲ = R_۲\times\left(\frac{\varepsilon}{R_۲+۴}\right)^۲ \xrightarrow{\text{ساده کردن } \varepsilon^۲} \frac{۸}{۱۲^۲} = \frac{R_۲}{(R_۲+۴)^۲} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} R_۲ = ۲\Omega$$

دقت: می‌توانستید از نتیجهٔ تست قبل ($r = \sqrt{R_۱R_۲}$) نیز برای حل سریع این سؤال استفاده کنید.

۱ ۱۷۳۶ با توجه به خلاصه نکات (۱۶)، می‌دانیم که توان خروجی از باتری زمانی بیشینه می‌شود که مقاومت درونی باتری با مقاومت خارجی برابر باشد:

$$r = R \Rightarrow \frac{R}{r} = ۱$$

۳ ۱۷۳۷ با توجه به خلاصه نکات (۱۶)، در نمودار مقابل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} = 5 \\ I_{op} = \frac{\varepsilon}{2r} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_{max}}{I_{op}} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{4r}}{\frac{\varepsilon}{2r}} = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \varepsilon = 2/5\,V$$

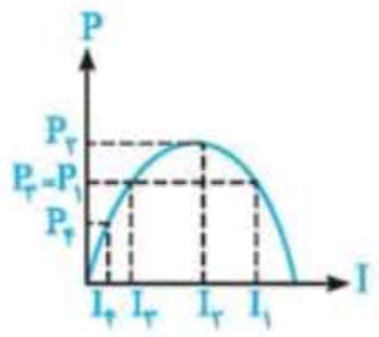
۳ ۱۷۳۸ با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$، با افزایش مقاومت R، شدت جریان در مدار کاهش می‌یابد. با کاهش شدت جریان می‌توان گفت که:

الف) با توجه به رابطهٔ $P = rI^2$، توان مصرفی در مقاومت درونی باتری کاهش می‌یابد.

ب) با توجه به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، ولتاژ دو سر باتری افزایش می‌یابد.

$$\uparrow V = \varepsilon - r \downarrow I$$

۴ ۱۷۳۹ توان الکتریکی مصرف‌شده در مقاومت در واقع همان توان خروجی باتری است. از طرفی می‌دانیم که با افزایش مقاومت R، شدت جریان در مدار کاهش می‌یابد و با توجه به نمودار مقابل برای توان مفید هر سه حالت می‌تواند رخ دهد:



الف) اگر جریان از مقدار I_1 به I_2 کاهش یابد، توان خروجی مولد افزایش می‌یابد.

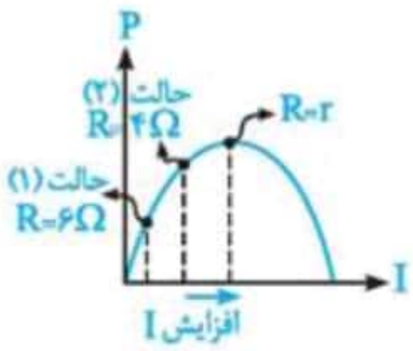
ب) اگر جریان از مقدار I_3 به I_4 کاهش یابد، واضح است که توان خروجی مولد کاهش می‌یابد.

ج) اگر جریان از مقدار I_1 به I_3 کاهش یابد، توان خروجی مولد تغییر نمی‌کند.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق، گزینهٔ (۴) صحیح است.

* توجه کنید که نمی‌توان با توجه به فرمول RI^2 اظهارنظر کرد، چون I کاهش و R افزایش می‌یابد و مشخص نیست که حاصل‌ضرب آن‌ها چگونه تغییر می‌کند.

۴ ۱۷۴۰ با توجه به نمودار مقابل، برای آن که با کاهش R توان خروجی (توان مصرف‌شده در R) پیوسته افزایش یابد (پیوسته به قلهٔ نمودار نزدیک شویم) مقاومت درونی همواره باید کم‌تر از مقاومت خارجی باشد و با کم کردن مقاومت خارجی به حالت $R = r$ نزدیک شویم. به‌عبارت دیگر مقاومت درونی باید کم‌تر از 4Ω باشد.



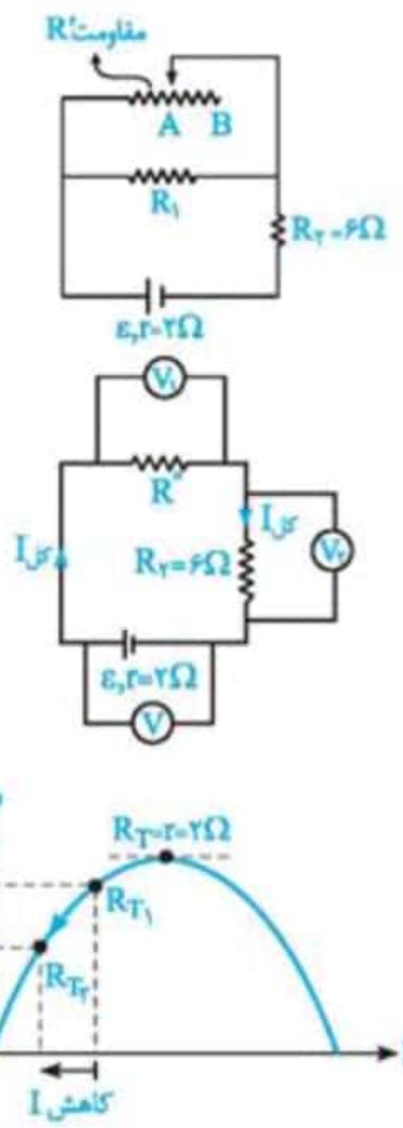
* دقت کنیم که با کاهش R، همواره جریان در حال افزایش است و در حالتی که $R = r$ می‌شود، به قلهٔ نمودار می‌رسیم.

نگاه دیگر: اگر شدت جریان مدار همواره کم‌تر از $\frac{\varepsilon}{2r}$ باشد، آن‌گاه با افزایش شدت جریان (کاهش مقاومت R) توان خروجی مولد پیوسته افزایش می‌یابد تا به قلهٔ نمودار برسد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$I < I_{op} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{r+R} < \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow r < R$$

۳ ۱۷۴۱ با جابه‌جا شدن رئوستا از A به B، مقاومت آن در مسیر جریان افزایش می‌یابد و این موضوع سبب می‌شود که مقاومت معادل کل مدار افزایش و جریان کل کاهش یابد.

حال می‌توان گفت که ولتاژ دو سر مولد افزایش، ولتاژ دو سر مقاومت R_2 کاهش و ولتاژ دو سر مقاومت R_1 افزایش می‌یابد.



$$\downarrow V = \varepsilon - r \downarrow I_{کل} \uparrow \Rightarrow R_{کل} \uparrow \Rightarrow I_{کل} \downarrow \Rightarrow$$ ولتاژ دو سر مولد: $\uparrow$ مقاومت رئوستا

$$\downarrow V_2 = R_2 \downarrow I_{کل} \downarrow$$

$$\uparrow V = V_1 + V_2 \downarrow \Rightarrow V_1$$ باید افزایش یابد.

با افزایش ولتاژ دو سر مقاومت R_1، توان مصرفی این مقاومت افزایش می‌یابد.

$$P_1 = \frac{V_1^2 \uparrow}{R_1} \Rightarrow$$ توان مصرفی مقاومت R_1 افزایش می‌یابد.

همان‌طور که در خلاصه نکات (۱۶) مطرح شد، می‌دانیم توان خروجی مولد ($P = \varepsilon I - rI^2$) در حالت $R_T = r$ بیشینه است. در این سؤال، با افزایش مقاومت رئوستا، مقاومت معادل مدار افزایش و جریان کل مدار کاهش می‌یابد. بنابراین در نمودار توان خروجی مولد برحسب جریان آن، مطابق شکل مقابل جابه‌جا می‌شویم. پس توان خروجی مولد کاهش می‌یابد.

$$R_T = 6 + (R_1 \text{ و } R' \text{ مقاومت معادل})$$

$$R' \uparrow \Rightarrow R_T \uparrow \Rightarrow I_{کل} \downarrow$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

gajmarket.com

۱۷۴۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۷ — **مدارهای ترکیبی خازن و مقاومت** — (تست‌های ۱۷۴۲ تا ۱۷۶۶)

در این خلاصه نکات می‌خواهیم به بررسی مدارهایی بپردازیم که در آن‌ها مقاومت و خازن به‌صورت همزمان در مدار حضور دارند. به این مدارها، در اصطلاح RC می‌گویند. مطلب بسیار مهمی که در سؤالات این قسمت باید به آن توجه کرد، این است که:

خازن پس از شارژ شدن مانند یک مقاومت بی‌نهایت عمل کرده و از آن جریانی عبور نمی‌کند.

سؤالات مربوط به این قسمت را می‌توان به دو دستهٔ زیر تقسیم کرد:

دستهٔ اول: در این دسته مدارهایی مدنظر است که خازن در شاخهٔ اصلی مدار قرار دارد. در این مدارها پس از شارژ خازن، مقاومت آن بی‌نهایت شده و جریان در شاخهٔ اصلی مدار صفر می‌شود. برای پاسخ دادن به سؤالات این دسته، می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:

۱) مقاومت‌های فاقد جریان را با یک سیم راست جایگزین کنیم (مقاومت فاقد جریان در حل مدار بی‌تأثیر است).

۲) پس از شارژ شدن خازن، مقاومت درونی باتری با توجه به این‌که جریانی از باتری نمی‌گذرد، در حل تأثیر ندارد.



به‌طور مثال در مدار مقابل خازن در شاخهٔ اصلی قرار گرفته و جریان در مدار را صفر می‌کند. بنابراین ولتاژ دو سر خازن برابر نیروی محرکهٔ باتری می‌شود.

دستهٔ دوم: در این دسته مدارهایی مدنظر است که خازن در شاخهٔ اصلی عبور جریان قرار ندارد و جریان در مدار می‌تواند برقرار شود. در این‌گونه از سؤالات دیگر دو مورد مطرح‌شده در دستهٔ اول را نمی‌توان لحاظ کرد (مقاومت‌ها را سیم و مقاومت درونی باتری را صفر نمی‌توانیم در نظر بگیریم).

برای پاسخ دادن به سؤالات این دسته، با توجه به این‌که از خازنِ شارژ شده، جریانی عبور نمی‌کند، شاخهٔ مربوط به خازن شارژ شده را از مدار حذف کرده و به محاسبهٔ جریان در مدار می‌پردازیم. سپس می‌توانیم ولتاژ دو سر خازن را به‌دست آوریم.

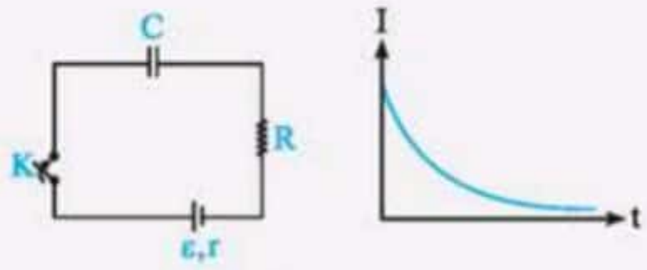
به‌طور مثال در مدار شکل مقابل، خازن در شاخهٔ اصلی قرار نگرفته است و درنتیجه جریان در مدار اصلی می‌تواند برقرار باشد.



در این مثال از طرفی خازن و مقاومت R_1 با هم موازی هستند. بنابراین ولتاژ دو سر خازن برابر ولتاژ دو سر مقاومت R_1 می‌باشد.

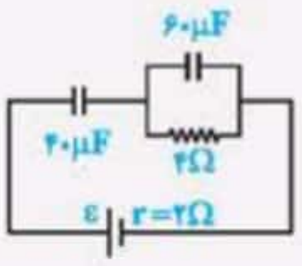
$V_C = R_1 I_{\text{اصلی}}$: خازن و مقاومت R_1 با هم موازی هستند.

کمی دقت: خازن خالی در ابتدای شارژ شدن مانند یک سیم عمل کرده و در برابر عبور جریان مقاومت نمی‌کند، ولی پس از مدت کوتاهی که شارژ می‌شود، مانند یک مقاومت بی‌نهایت عمل کرده و اجازهٔ عبور جریان را از خود نمی‌دهد. به‌عبارت دیگر در مدار مقابل، با وصل کلید K، جریان در مدار به‌صورت مقابل تغییر می‌کند:



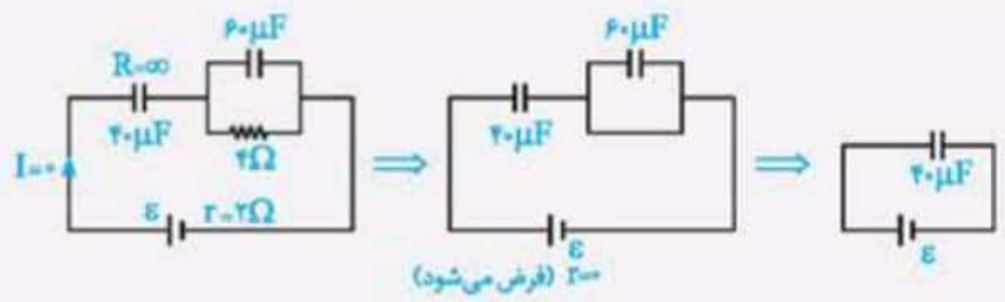
در ادامه با حل تمرین‌های زیر، مفاهیم فوق را بهتر درک خواهید کرد:

تمرین ۱ **اگر در مدار مقابل بار ذخیره‌شده در خازن ۴۰ میکروفارادی برابر ۱۲۰ میکروکولن باشد، نیروی محرکهٔ باتری چند ولت است؟** (تجربی خارج ۸۷)



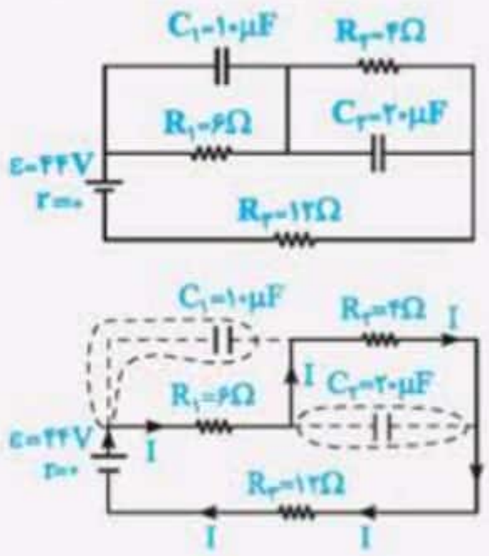
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

پاسخ در این مدار پس از شارژ شدن خازن ۴۰ میکروفارادی، مقاومت آن برابر بی‌نهایت شده و با توجه به این‌که در شاخهٔ اصلی مدار قرار دارد، $I = 0$ می‌شود (این یعنی با یک سؤال از دستهٔ اول روبه‌رو هستیم). در ادامه به‌سادگی می‌توان به جای مقاومت‌ها در مدار سیم قرار داد و از مقاومت درونی باتری صرف‌نظر کرد. با این ابتکار مشاهده می‌شود که خازن $60\mu F$ اتصال کوتاه شده و تمام ولتاژ ε، توسط خازن $40\mu F$ تحمل می‌شود.



(گزینهٔ ۱) $q = C\varepsilon \xrightarrow[q=120\mu C]{\text{صورت سؤال}} 120 = 40 \times \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 3\,V$

تمرین۲ **در مدار مقابل، انرژی ذخیره‌شده در مجموعهٔ خازن‌ها چند ژول است؟** (ریاضی خارج ۸۸ و ۹۲)



۱) صفر
۲) $۶/۴\times۱۰^{-۴}$
۳) $۷/۲\times۱۰^{-۴}$
۴) $۱/۳۶\times۱۰^{-۳}$

پاسخ مطابق شکل مقابل، پس از شارژ شدن خازن‌ها، در این مدار مسیری برای عبور جریان وجود دارد. بنابراین این سؤال در دستهٔ دوم قرار می‌گیرد. همان‌طور که می‌دانیم، از خازن‌ها پس از شارژ شدن جریانی عبور نمی‌کند. بنابراین می‌توان با حذف آن‌ها در مدار مقابل، جریان را محاسبه کرد:

$$R_T=۶+۴+۱۲=۲۲\Omega\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{۴۴}{۲۲+۰}=۲A$$

از طرفی خازن $C_۱$ موازی با مقاومت $R_۱$ و همچنین خازن $C_۲$ موازی با مقاومت $R_۲$ می‌باشد. بنابراین ولتاژ دو سر $C_۱$ برابر ولتاژ دو سر مقاومت $R_۱$ و ولتاژ دو سر $C_۲$ برابر ولتاژ دو سر مقاومت $R_۲$ می‌باشد.

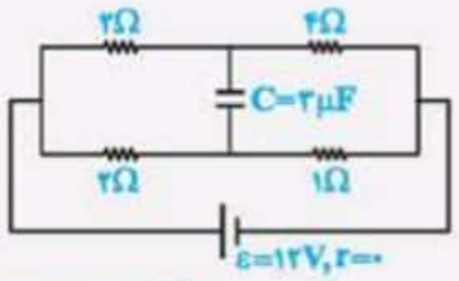
$$\begin{cases}V_{C_۱}=R_۱I=۶\times۲=۱۲V: \text{خازن } C_۱ \text{ موازی با مقاومت } R_۱ \text{ است.}\\ V_{C_۲}=R_۲I=۴\times۲=۸V: \text{خازن } C_۲ \text{ موازی با مقاومت } R_۲ \text{ است.}\end{cases}$$

پس از محاسبهٔ $V_۱$ و $V_۲$، به سادگی انرژی ذخیره‌شده در مجموعهٔ خازن‌ها محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}U_۱=\frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۰^{-۶}\times۱۲^۲=۷۲\times۱۰^{-۵}J\\ U_۲=\frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲=\frac{۱}{۲}\times۲۰\times۱۰^{-۶}\times۸^۲=۶۴\times۱۰^{-۵}J\end{cases}\Rightarrow U=U_۱+U_۲=۱/۳۶\times۱۰^{-۳}J$$ (گزینهٔ ۴)

دقت: برای ساده‌تر شدن حل، می‌توانید خازن‌ها را در ذهن خود از مدار حذف کنید.

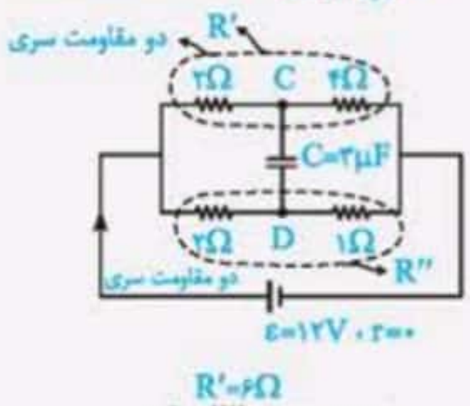
تمرین۳ **در مدار شکل روبه‌رو، بار خازن C چند میکروکولن است؟** (ریاضی داخل ۸۱)



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

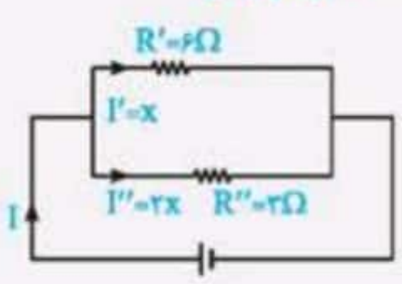
پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال به روش کلی، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: از خازن شارژ شده جریانی عبور نمی‌کند. بنابراین در ذهن خود خازن را از مدار حذف کنید. در این حالت مقاومت معادل شاخهٔ بالایی برابر ۶Ω و مقاومت معادل شاخهٔ پایینی برابر ۳Ω می‌باشد.



$$\begin{cases}R'=۲+۴=۶\Omega: \text{شاخهٔ بالایی}\\ R''=۲+۱=۳\Omega: \text{شاخهٔ پایینی}\end{cases}\Rightarrow R_T=\frac{۶\times۳}{۶+۳}=۲\Omega$$

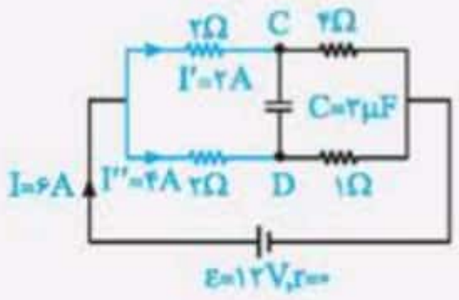
گام دوم: جریان در مدار را محاسبه کرده و بین شاخهٔ بالایی و پایینی تقسیم می‌کنیم:



$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{۱۲}{۲+۰}=۶A$$

$$I=I'+I''\Rightarrow ۶=x+۲x\Rightarrow x=۲A\Rightarrow\begin{cases}I'=۲A\\ I''=۴A\end{cases}$$

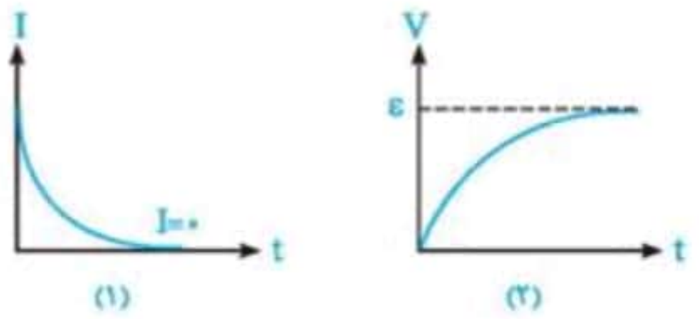
گام سوم: با حرکت از نقطهٔ C تا D در مسیر مشخص‌شده و نوشتن قانون ولتاژ، حاصل V_C-V_D را محاسبه کرده و به کمک آن بار خازن را به‌دست می‌آوریم:



$$V_C+۲I'-۲I''=V_D\Rightarrow V_C+۲\times۲-۲\times۴=V_D\Rightarrow V_C-V_D=۴V$$

$$\Rightarrow q=CV_{CD}=۳\times۴=۱۲\mu C$$ (گزینهٔ ۳)

خازن خالی به‌خوبی اجازهٔ عبور جریان در مدار را می‌دهد و به عبارتی مقاومتش صفر است، اما پس از مدت کوتاهی شارژ شده و جریان از آن عبور نمی‌کند و به عبارتی مقاومتش برابر بی‌نهایت می‌شود. بنابراین نمودار جریان ـ زمان مطابق نمودار (۱) و نمودار ولتاژ دو سر خازن برحسب زمان، مطابق نمودار (۲) است (پس از شارژ خازن، ولتاژ دو سر آن ثابت می‌شود).



gajmarket.com

۴ ۱۷۴۳ خازن در شاخهٔ اصلی مدار قرار گرفته و پس از شارژ شدن آن، جریان در مدار صفر می‌شود. بنابراین اختلاف پتانسیل مقاومت R و افت پتانسیل در باتری برابر صفر می‌شود.

$$V_{۵\Omega} = RI \ , \ V_r = rI \xrightarrow{I=۰} V_{۵\Omega} = ۰ \ , \ V_r = ۰$$ (گزینهٔ ۴ نادرست است.)

در این حالت ولتاژ دو سر خازن برابر ولتاژ دو سر باتری بوده و برابر $\varepsilon = ۱۲V$ است.



نگاه دیگر:

بار ذخیره‌شده در خازن: $q = CV_{AB} = C\varepsilon = ۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰\mu C$

$$V_A - RI + \varepsilon - rI = V_B \xrightarrow{I=۰} V_B - V_A = \varepsilon$$

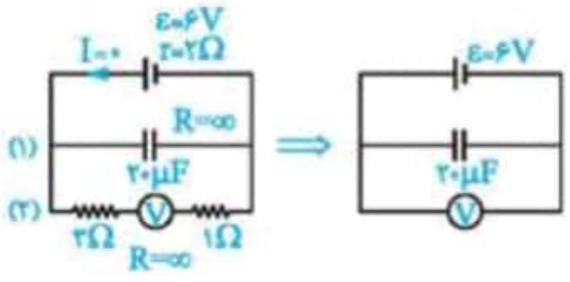
نتیجه

در مداری که جریان صفر است، می‌توان به‌جای مقاومت‌ها سیم در نظر گرفت و مقاومت درونی مولد را نیز در نظر نگرفت.

۱ ۱۷۴۴ خازن‌ها در شاخهٔ اصلی مدار قرار دارند و پس از پر شدن آن‌ها، مقاومت‌شان برابر بی‌نهایت شده و جریان در مدار صفر می‌شود. با توجه به این موضوع، ولتاژ دو سر مقاومت‌های ۲ اهمی و ۳ اهمی نیز صفر می‌شود.

$$V = RI \xrightarrow{I=۰} V = ۰$$

۴ ۱۷۴۵ در این سؤال، در شاخهٔ (۱) خازن شارژ شده و در شاخهٔ (۲) ولت‌سنج قرار دارد که هر دو راه عبور جریان را بسته‌اند $(R = \infty)$. بنابراین جریان در مدار صفر است و ولتاژ دو سر باتری برابر ε است.



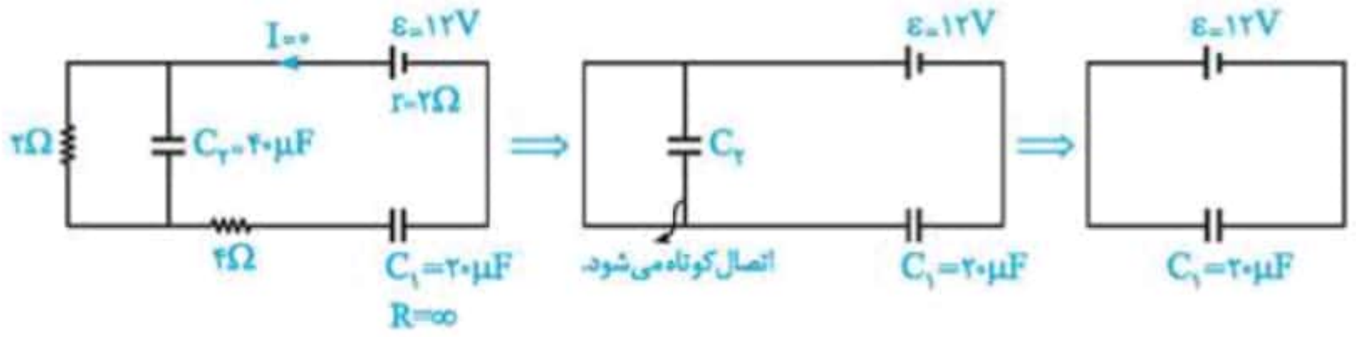
عدد ولت‌سنج $= V_{\text{خازن}} = \varepsilon = ۶V$

۱ ۱۷۴۶ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۷)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

تذکر

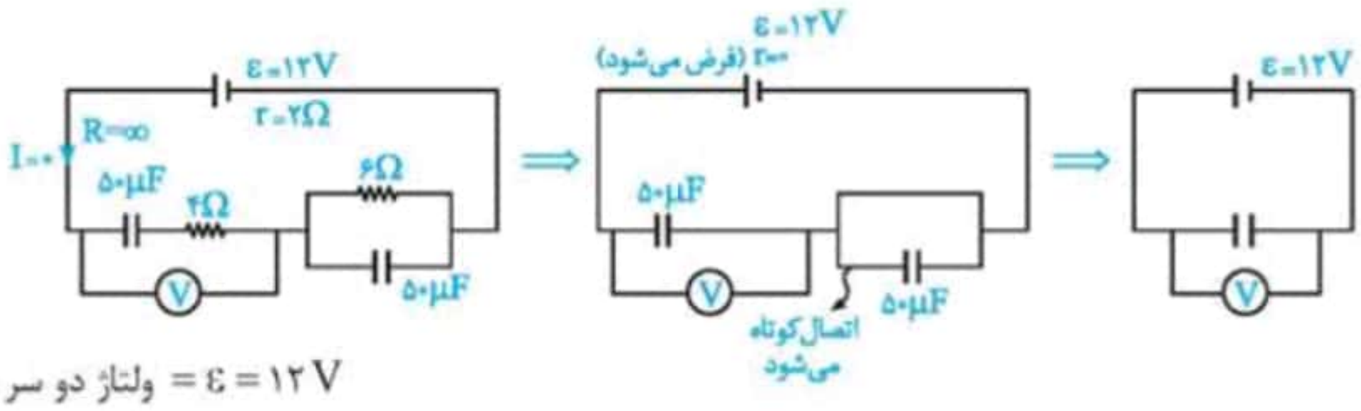
این ایده تاکنون بارها مدنظر طراحان کنکور سراسری قرار گرفته است. در ۲ تست بعد، نمونه‌هایی از آن را مشاهده می‌کنیم.

۴ ۱۷۴۷ مشابه با سؤال قبل است، خازن $C_۱$ در شاخهٔ اصلی مدار قرار دارد و پس از شارژ شدن آن جریانی از مدار عبور نمی‌کند و می‌توان مقاومت‌ها را با سیم جایگزین کرد و از مقاومت درونی باتری صرف‌نظر کرد. در ادامه مشابه با سؤال قبل داریم:



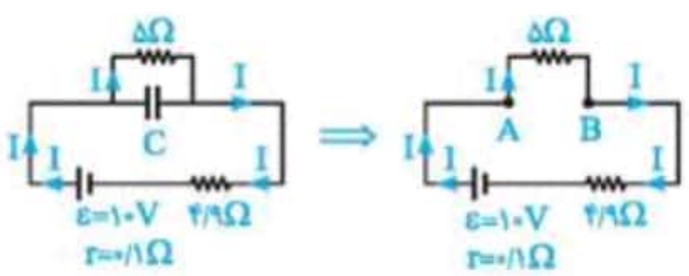
$C_۲ \Rightarrow q_۲ = ۰$ اتصال کوتاه می‌شود. $\ , \ q_۱ = C_۱\varepsilon = ۲۰ \times ۱۲ = ۲۴۰\mu C$

۴ ۱۷۴۸ پس از شارژ شدن خازن ۵۰μF، مقاومت آن بی‌نهایت شده و راه عبور جریان در مدار بسته می‌شود. در این حالت مشابه با دو تست قبل، می‌توان به‌جای مقاومت‌ها سیم در مدار قرار داد و از مقاومت درونی باتری صرف‌نظر کرد.



عدد ولت‌سنج = ولتاژ دو سر خازن $= \varepsilon = ۱۲V$

۴ ۱۷۴۹ **گام اول:** جریان در مدار می‌تواند در مسیر نشان داده شده حرکت کند و ولتاژ دو سر خازن، برابر ولتاژ دو سر مقاومت ۵ اهمی است، از طرفی در مسائلی که جریان در مدار RC اجازهٔ حرکت دارد، برای محاسبهٔ جریان، تصور کنید خازن در مدار حضور ندارد و با توجه به این موضوع، داریم:



$$R_T = ۵ + ۴/۹ = ۹/۹\Omega \qquad I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۱۰}{۹/۹ + ۰/۱} = ۱A$$

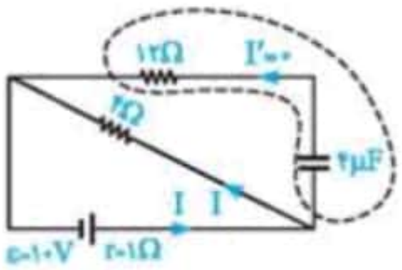
گام دوم: در ادامه با توجه به این‌که خازن بین دو نقطهٔ A و B متصل شده است، داریم:

$$V_A - ۵I = V_B \Rightarrow V_A - V_B = ۵ \times ۱ = ۵V \Rightarrow q = CV_{AB} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰\mu C = ۵ \times ۱۰^{-۵} C$$

۲ ۱۷۵۰ ابتدا دقت شود که یک خازن شارژ شده، اجازهٔ عبور جریان را نمی‌دهد، بنابراین از مقاومت ۱۲Ω جریانی عبور نمی‌کند. در نتیجه ولتاژ دو سر مقاومت ۱۲ اهمی صفر است.

$$V = RI \xrightarrow{I=۰} V = ۰$$

با محاسبهٔ جریان عبوری از مدار تک‌حلقهٔ نشان داده‌شده، می‌توان ولتاژ دو سر باتری را به دست آورد:



$$\begin{cases} I = \dfrac{\varepsilon}{R+r} = \dfrac{۱۰}{۴+۱} = ۲A \\ \text{ولتاژ دو سر باتری: } V = \varepsilon - rI \Rightarrow V = ۱۰ - ۱\times ۲ \Rightarrow V = ۸V \end{cases}$$

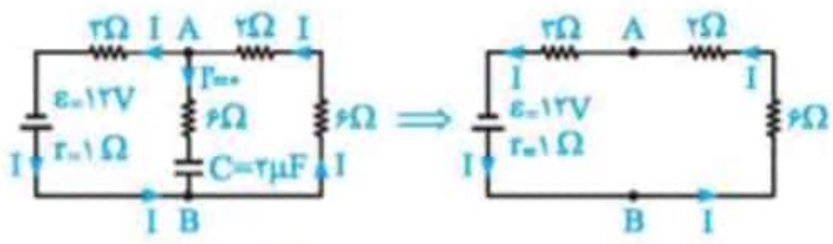
تذکر

با توجه به این‌که از مقاومت ۱۲Ω جریانی عبور نمی‌کند، آن را در محاسبهٔ مقاومت معادل درنظر نمی‌گیریم.

از طرفی ولتاژ دو سر خازن برابر ولتاژ دو سر باتری می‌باشد (چون از مقاومت ۱۲ اهمی جریان نمی‌گذرد و می‌توان به جای آن سیم در نظر گرفت). بنابراین بار ذخیره‌شده در آن برابر است با:

$$q = CV = ۴\times ۱۰^{-۶} \times ۸ = ۳/۲\times ۱۰^{-۵} C$$

۱ ۱۷۵۱ مقاومت معادل دو مقاومت موازی ۱۲Ω، یک مقاومت ۶Ω است. در ادامه با توجه به این‌که خازن شارژ شده اجازهٔ عبور جریان را نمی‌دهد، جریان مقاومت ۶Ω در شاخهٔ وسط برابر صفر بوده و از مدار حذف می‌شود. در ادامه برای محاسبهٔ جریان، شاخهٔ خازن را درنظر نمی‌گیریم و داریم:

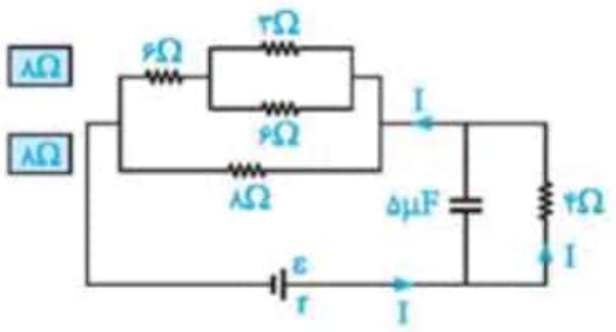


$$\text{گام اول: } R_T = ۶+۲+۳ = ۱۱\Omega \quad , \quad I = \frac{\varepsilon}{R_T+r} = \frac{۱۲}{۱۱+۱} = ۱A$$

$$\text{گام دوم: } V_B - ۶I - ۲I = V_A \Rightarrow V_B - V_A = ۸I = ۸\times ۱ = ۸V$$

$$U = \frac{۱}{۲}CV_{BA}^{۲} = \frac{۱}{۲}\times ۲\times (۸)^{۲} = ۶۴\mu J$$

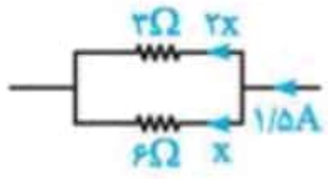
۲ ۱۷۵۲ با یک سؤال ترکیبی روبه‌رو شده‌ایم. ولتاژ دو سر خازن، برابر ولتاژ دو سر مقاومت ۴Ω است و جریان در این مدار برابر است با:



$$q = CV \Rightarrow ۶۰ = ۵\times V \Rightarrow V = ۱۲V$$

$$V = RI \Rightarrow ۱۲ = ۴I \Rightarrow I = ۳A$$

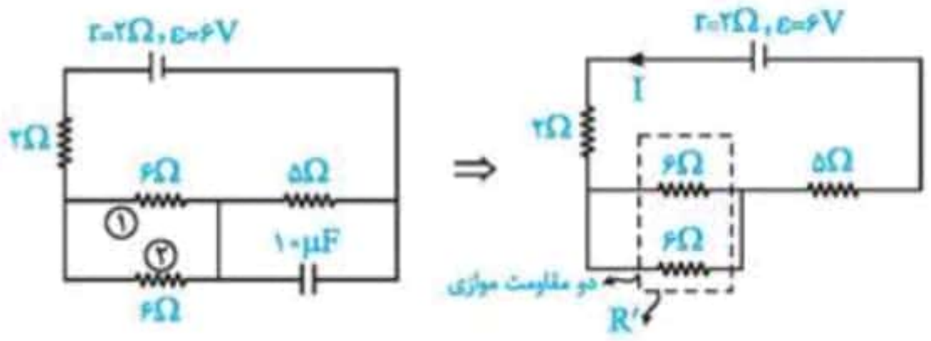
از طرفی مقاومت معادل دو شاخهٔ بالا و پایین یکسان است و جریان I به‌طور مساوی در دو شاخه تقسیم می‌شود (مقاومت شاخهٔ بالایی ۸Ω است) و سهم هر شاخه $۱/۵A$ است. در ادامه سهم مقاومت‌های ۳Ω و ۶Ω از جریان $۱/۵A$ عبارت است از:



$$x + ۲x = ۱/۵A \Rightarrow x = ۰/۵A$$

$$\text{جریان مقاومت } ۳\Omega = ۲x = ۱A$$

۴ ۱۷۵۳ از خازن شارژ شده، جریانی عبور نمی‌کند، بنابراین مسیر عبور جریان به صورت مقابل است و می‌توان نوشت:



$$R' = \frac{۶}{۲} = ۳\Omega$$

$$R_T = ۲+۳+۵ = ۱۰\Omega$$

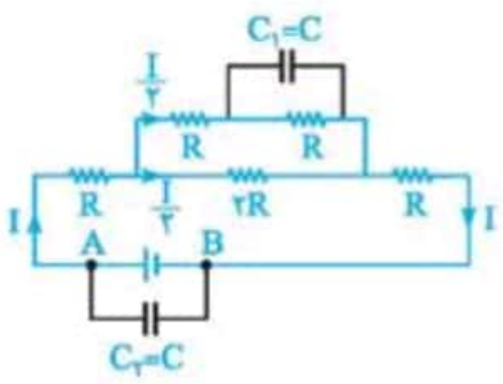
$$I = \frac{\varepsilon}{R_T+r} = \frac{۶}{۱۰+۲} = ۰/۵A$$

چون خازن با مقاومت ۵ اهمی موازی بسته شده است، بنابراین ولتاژ دو سر آن با ولتاژ دو سر این مقاومت برابر است و داریم:

ولتاژ دو سر خازن برابر ولتاژ دو سر مقاومت ۵Ω است: $V = IR \Rightarrow V = ۰/۵\times ۵ = ۲/۵V$

$$q = CV \Rightarrow q = ۱۰\times ۲/۵ \Rightarrow q = ۲۵\mu C$$

۴ ۱۷۵۴ فرض کنید جریان کل مدار برابر I باشد. بنابراین جریان هر شاخه به‌صورت شکل مقابل بوده و داریم:



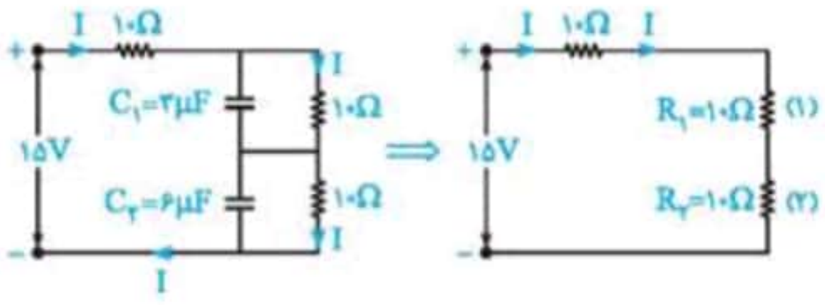
$$V_۱ = R\times \frac{I}{۲} \Rightarrow q_۱ = C_۱V_۱ = C\times\left(R\frac{I}{۲}\right)$$

$$V_A - RI - ۲R\times\frac{I}{۲} - RI = V_B \Rightarrow V_۲ = V_A - V_B = ۳RI$$

$$q_۲ = C_۲V_۲ = C\times(۳RI) \Rightarrow \frac{q_۲}{q_۱} = \frac{C\times ۳RI}{C\times\frac{RI}{۲}} = ۶$$

gajmarket.com

۴ ۱۷۵۵ مسیر جریان در این مدار به‌صورت مقابل است و از خازن‌های شارژ شده جریانی عبور نمی‌کند. در ادامه با توجه به موازی بودن اتصال خازن C_1 و مقاومت R_1 و هم‌چنین خازن C_2 و مقاومت R_2، داریم:



$$I=\frac{V}{R_T}=\frac{۱۵}{۳۰}=۰/۵\,A$$

ولتاژ دو سر C_1 برابر ولتاژ دو سر R_1 است: $V_1=R_1I=۱۰\times ۰/۵=۵\,V$

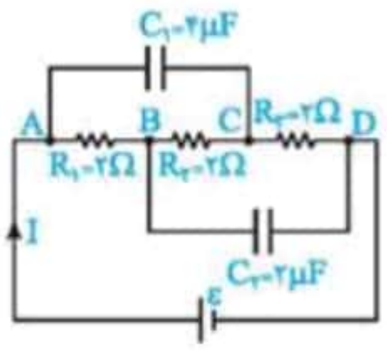
ولتاژ دو سر C_2 برابر ولتاژ دو سر R_2 است: $V_2=R_2I=۱۰\times ۰/۵=۵\,V$

$$q_1=C_1V_1=۳\times ۵=۱۵\mu C\ ,\ q_2=C_2V_2=۶\times ۵=۳۰\mu C$$

خلاقیت هنرهای حرفه‌ای

با توجه به تساوی V_1 و V_2، بدون حل می‌توان فهمید که $q_2=۲q_1$ است (چرا؟) و گزینهٔ (۴) صحیح است. از طرفی عده‌ای به اشتباه تصور می‌کنند که اتصال C_1 و C_2 به‌صورت سری است، در حالی‌که این‌گونه نیست. به نظر شما چرا؟

۳ ۱۷۵۶ پس از شارژ شدن خازن‌ها، از آن‌ها جریانی عبور نکرده و جریان تنها از مقاومت‌ها عبور می‌کند. در صورتی‌که این جریان را برابر I فرض کنیم، داریم:



$$\begin{cases}\text{ولتاژ دو سر خازن } C_1 = V_A-V_C=(R_1+R_2)I=۴I\\ \text{ولتاژ دو سر خازن } C_2 = V_B-V_D=(R_2+R_3)I=۴I\end{cases}\Rightarrow V_{C_1}=V_{C_2}$$

در ادامه برای مقایسهٔ انرژی ذخیره شده در خازن‌ها از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}CV^۲$ کمک گرفته و داریم:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{C_1}{C_2}\times\left(\frac{V_{C_1}}{V_{C_2}}\right)^۲\xrightarrow{V_{C_1}=V_{C_2}}\frac{U_1}{U_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۱ ۱۷۵۷ هنگامی که کلید K باز است، جریان در مدار جاری نمی‌شود و ولتاژ دو سر خازن برابر نیروی محرکهٔ باتری (ε) است ($V_1=\varepsilon$). حال اگر کلید K را ببندیم، ولتاژ دو سر خازن برابر ولتاژ دو سر مقاومت ۴Ω می‌شود (از مقاومت ۱۲ اهمی جریانی نمی‌گذرد و عملاً از مدار حذف می‌شود) و مقدار آن برابر است با:

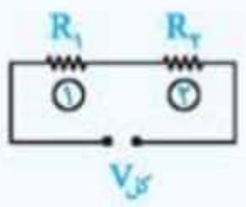
$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{\varepsilon}{۹+۱}=\frac{\varepsilon}{۱۰}\Rightarrow V_2=۴I=۴\times\frac{\varepsilon}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}\varepsilon\Rightarrow\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{۴}{۱۰}\varepsilon}{\varepsilon}=۰/۴$$

بنابراین ولتاژ دو سر خازن، ۰/۴ برابر شده است.

۳ ۱۷۵۸

نکته

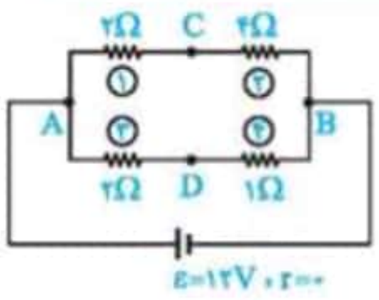
اگر دو مقاومت سری را به ولتاژ ثابت V وصل کنیم، مقاومت بزرگ‌تر ولتاژ بزرگ‌تری را به خود اختصاص می‌دهد ($V=RI$ ↑ بکسان ↑) و ولتاژ به نسبت مقاومت بین آن‌ها تقسیم می‌شود.



$$V_{کل}\Rightarrow\begin{cases}R_1 \text{ سهم برای مقاومت (۱)}\\ R_2 \text{ سهم برای مقاومت (۲)}\end{cases}\Rightarrow \text{کل سهم‌ها: } R_1+R_2$$

$$V_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{کل}\ ,\ V_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}V_{کل}$$

در این سؤال با توجه به صفر بودن مقاومت درونی باتری، اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر $\varepsilon=۱۲\,V$ است و این اختلاف پتانسیل، عملاً اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها نیز است ($V_{AB}=۱۲\,V$):



$$\begin{cases}V_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{کل}=\frac{۲}{۲+۴}V_{AB}=۴\,V\\ V_2=\frac{R_3}{R_3+R_4}V_{کل}=\frac{۲}{۲+۱}V_{AB}=۸\,V\end{cases}$$

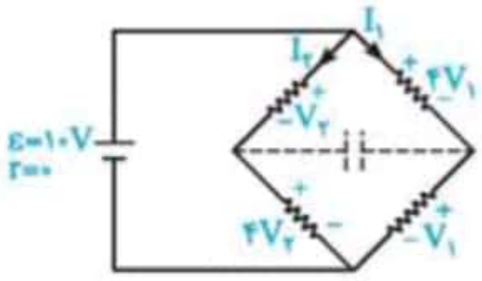
$$(۱)\begin{cases}V_1=V_A-V_C\\ (۲)\ V_2=V_A-V_D\end{cases}\xrightarrow{(۲)-(۱)}V_C-V_D=V_2-V_1$$

اختلاف پتانسیل C و D: $V_C-V_D=۸-۴=۴\,V\Rightarrow q=CV_{CD}=۳\times ۴=۱۲\mu C$

تذکر

روش کلی حل این تست را در تمرین (۳) در خلاصه نکات (۲۱) بررسی کردیم. روش فوق برای حالتی مناسب است که $r=۰$ باشد.

۴ ۱۷۵۹ برای حل این سؤال، با توجه به صفر بودن مقاومت درونی باتری، ابتدا ولتاژ دو سر خازن را مشابه با سؤال قبل به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:



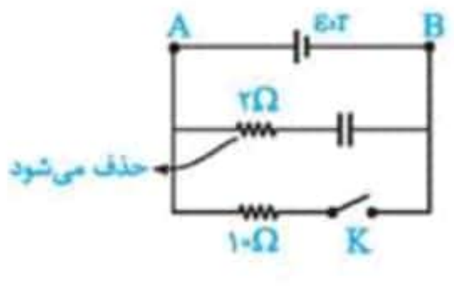
$$\begin{cases} ۴V_۱ + V_۱ = \varepsilon = ۱۰ \Rightarrow V_۱ = ۲V \\ V_۲ + ۴V_۲ = \varepsilon = ۱۰ \Rightarrow V_۲ = ۲V \end{cases}$$

$$V_{\text{خازن}} = -V_۲ + ۴V_۱ = -۲ + ۴ \times ۲ = ۶V$$

بنابراین انرژی ذخیره‌شده در خازن برابر است با:

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۰^{-۶} \times (۶)^۲ = ۹۰ \times ۱۰^{-۶} J = ۹۰\mu J$$

۴ ۱۷۶۰ مقاومت ۲ اهمی موجود در شاخهٔ خازن، به‌دلیل عدم عبور جریان از آن، از مدار حذف می‌شود. هنگامی که کلید K باز است، جریان در مدار صفر بوده و ولتاژ دو سر خازن برابر ولتاژ دو سر باتری بوده و برابر ε است.



با بسته شدن کلید K، جریان در مدار برقرار شده و در باتری افت پتانسیل ایجاد شده و ولتاژ دو سر آن کاهش می‌یابد. در نتیجه ولتاژ دو سر خازن که برابر ولتاژ دو سر باتری است، کاهش می‌یابد. بنابراین بار الکتریکی $(q = CV)$ و انرژی ذخیره شده در خازن $\left(U = \frac{۱}{۲}CV^۲\right)$ کاهش می‌یابد.

۲ ۱۷۶۱ **کلید K بسته باشد:** هنگامی که کلید K بسته است، جریان در مدار برقرار شده و ولتاژ دو سر خازن عبارت است از (مقاومت ۲۰ اهمی را در نظر نگیرید، زیرا از آن جریانی عبور نمی‌کند):

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{\varepsilon}{۲۰۰ + ۰} = \frac{\varepsilon}{۲۰۰} \Rightarrow V_۱ = ۱۰۰I = ۱۰۰ \times \frac{\varepsilon}{۲۰۰} = \frac{\varepsilon}{۲}$$

کلید K باز باشد: هنگامی که کلید K باز شود، جریان در مدار صفر شده و ولتاژ دو سر خازن برابر ε می‌شود.

$$V_۲ = \varepsilon$$

بنابراین اگر کلید K باز شود، ولتاژ دو سر خازن ۲ برابر شده (از $\frac{\varepsilon}{۲}$ به ε می‌رسد) و بار الکتریکی آن ۲ برابر می‌شود.

۲ برابر ۲ برابر

$$(\uparrow q = C \uparrow V)$$

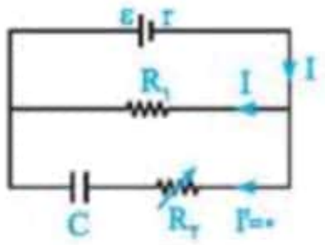
۱ ۱۷۶۲ **حالت اول:** اگر مقاومت $R_۲$ صفر باشد، عملاً مانند یک سیم عمل کرده و خازن را اتصال کوتاه می‌کند. در این حالت انرژی ذخیره شده در خازن صفر است.

حالت دوم: اگر مقاومت $R_۲ = \infty$ شود (گویی $R_۲$ مانند یک خازن پر یا یک ولت‌سنج شده است). در نتیجه عملاً جریان در مدار صفر می‌شود و مقاومت $R_۱$ را با سیم جایگزین می‌کنیم و ولتاژ دو سر خازن و مقاومت $R_۲$ برابر ε خواهد شد. بنابراین انرژی ذخیره شده در خازن C عبارت است از:

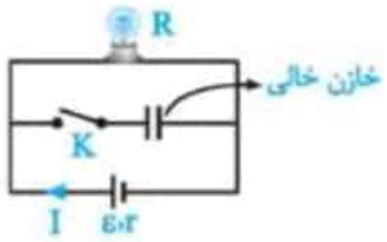
$$U_۲ = \frac{۱}{۲}CV_۲^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۱۰^{-۶} \times (۲۰)^۲ = ۰/۰۱J$$

بنابراین انرژی خازن از مقدار صفر به ۰/۰۱J افزایش می‌یابد.

۱ ۱۷۶۳ در این مدار پس از شارژ خازن، تمام جریان از $R_۱$ عبور می‌کند و مقاومت $R_۲$ عملاً از مدار حذف شده است و با تغییر این مقاومت، بار الکتریکی ذخیره شده در خازن تغییر نمی‌کند، چون ولتاژ دو سر خازن تغییری نمی‌کند.



۴ ۱۷۶۴ **حالت اول:** اگر خازن خالی باشد، با بستن کلید مشتاق عبور جریان است و مقاومت آن صفر است. در این حالت لامپ اتصال کوتاه می‌شود و جریان در باتری زیاد است. خازن که پر شود مجدداً شدت جریان کاهش می‌یابد.



(R اتصال کوتاه می‌شود، چون خازن خالی در لحظهٔ وصل کلید مانند یک سیم است.) $I = \frac{\varepsilon}{۰ + r} = \frac{\varepsilon}{r}$: در لحظهٔ وصل کلید

$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$: پس از شارژ شدن

حالت دوم: اگر خازن پر و ولتاژ دو سر آن برابر ولتاژ دو سر باتری باشد، با بستن کلید جریان عبوری از باتری ثابت است.

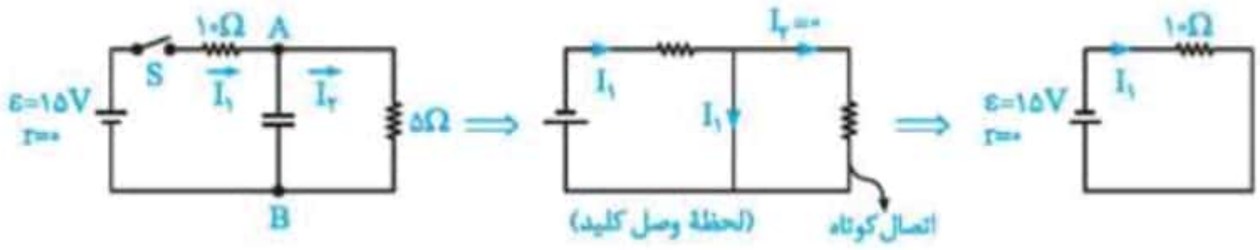
حالت سوم: حالتی که ممکن است تصورش برایتان سخت باشد، حالتی است که خازن پر باشد و ولتاژ دو سر آن بیشتر از ولتاژ دو سر باتری باشد، در این حالت با بستن کلید K، شدت جریان عبوری از باتری ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود (چرا؟).

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ ۱۷۶۵ پس از بسته شدن کلید، خازن خالی که شدیداً مشتاق ذخیرهٔ بار الکتریکی است، مانند یک مقاومت $R' = ۰$ عمل کرده و اجازهٔ عبور جریان را می‌دهد. پس از مدت کوتاهی خازن شارژ شده و دیگر اجازهٔ عبور جریان را نمی‌دهد، در این حالت تمام جریان از مقاومت R عبور کرده و ولتاژ دو سر خازن برابر RI است و بار خازن نیز برابر $q = CV = C \times RI$ است (مقدار ثابت). بنابراین بار الکتریکی خازن ابتدا افزایش یافته و سپس به مقدار ثابتی می‌رسد.

gajmarket.com

۲ ۱۷۶۶ سؤال بسیار جالب و نسبتاً دشواری است. درست بلافاصله پس از وصل کلید، خازن که هیچ بار الکتریکی در آن ذخیره نشده است، شدیداً مشتاق عبور جریان است و مقاومت آن صفر است. بنابراین گویی به جای خازن یک سیم قرار دارد و با رخ دادن این اتفاق در لحظهٔ وصل کلید، مقاومت ۵ اهمی اتصال کوتاه شده و $I_۲ = ۰$ است.



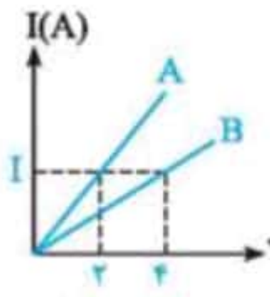
$$I_۱ = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{۱۵}{۱۰+۰} = ۱/۵\,A$$

تذکر

دقت داشته باشیم که مدتی پس از گذشت وصل کلید، خازن شارژ شده و دیگر از آن جریانی عبور نمی‌کند. بنابراین مدتی پس از وصل کلید $I_۱$ برابر $I_۲$ می‌شود و داریم:

$$I_۱ = I_۲ = \frac{۱۵}{۱۰+۵+۰} = ۱A$$

۳ ۱۷۶۷ در مقایسهٔ دو مقاومت A و B با توجه به اطلاعات استخراج شده از نمودار، می‌توان نوشت:



$$I_A = I_B \Rightarrow \frac{V_A}{R_A} = \frac{V_B}{R_B} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{با}} \frac{R_B}{R_A} = ۲$$

حال اگر دو مقاومت را به اختلاف پتانسیل یکسانی متصل کنیم، در مقایسهٔ جریان جاری شده و تعداد الکترون‌های عبوری در دو مدار، داریم:

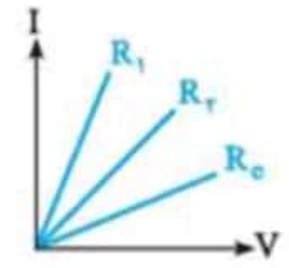
$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \frac{R_B}{R_A} = ۲ \Rightarrow q = It\ ,\ q = ne \Rightarrow It = ne \Rightarrow n = \frac{It}{e} \xrightarrow[\text{یکسان}]{\text{در مدت زمان}} \frac{n_A}{n_B} = \frac{I_A}{I_B} = ۲$$

۲ ۱۷۶۸ در مقایسهٔ مقاومت الکتریکی ستون جیوه در دو حالت می‌توان نوشت:

حجم جیوه ثابت است: $V = V' \Rightarrow AL = A'L' \xrightarrow{A' = \frac{۱}{۵}A} L' = ۵L$

مقایسهٔ مقاومت‌ها: $R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \times \frac{A}{A'} = ۵ \times ۵ \Rightarrow R' = ۲۵R$

۴ ۱۷۶۹ شیب نمودار $I - V$ برابر $\frac{۱}{R}$ بوده و نمودار با شیب کم‌تر، مقاومت بیش‌تری دارد:

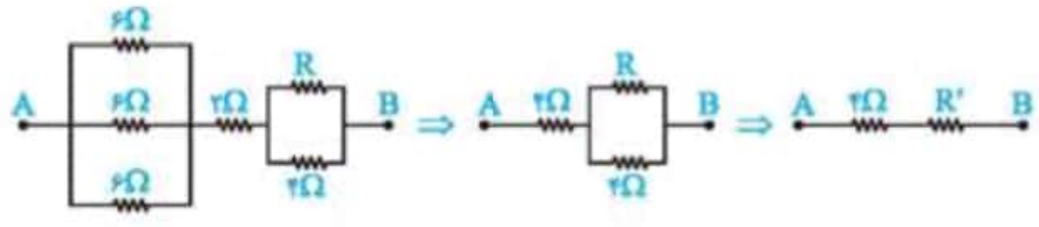


$$R_e \text{ شیب} < R_۲ \text{ شیب} < R_۱ \text{ شیب} \Rightarrow R_e > R_۲ > R_۱$$

با توجه به این‌که مقاومت معادل دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$، مقدار بزرگ‌تری نسبت به $R_۱$ و $R_۲$ دارد، اتصال این دو مقاومت تنها به‌صورت سری (متوالی) می‌تواند انجام شده باشد.

۲ ۱۷۷۰ برای حل، کمی شکل را ساده‌تر می‌کنیم و به همین منظور ابتدا مقاومت معادل ۴ مقاومت سمت چپ مدار را به دست می‌آوریم که برابر ۴Ω است.

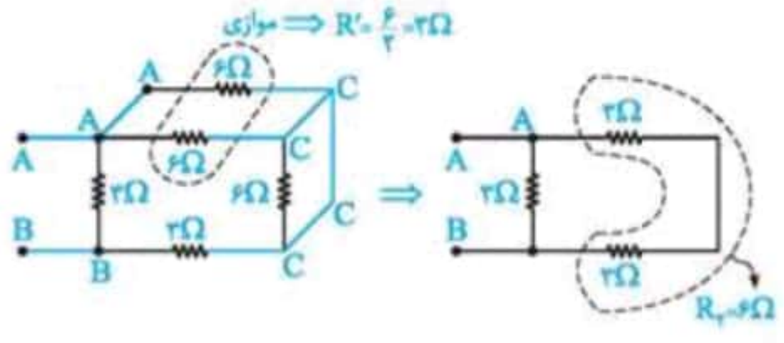
از سوی دیگر اگر مقاومت معادل ۴Ω و R را R' در نظر بگیریم، این مقاومت بین $۰ < R' < ۴\Omega$ قرار دارد (در مقاومت‌های موازی، مقاومت معادل از کوچک‌ترین مقاومت نیز کوچک‌تر است و با توجه به ندانستن مقدار R، مقاومت معادل قطعاً از ۴Ω کم‌تر است.) در نهایت می‌توان گفت مقاومت معادل کل برابر $R' + ۴$ است و داریم:



$$۰ < R' < ۴ \Rightarrow ۴ + ۰ < ۴ + R' < ۴ + ۴ \Rightarrow ۴ < R_T < ۸$$

عدد بیان شده برای مقاومت معادل حتماً باید بین ۴ و ۸ اهم باشد و این موضوع فقط در گزینهٔ (۲) رعایت شده است.

۲ ۱۷۷۱ با نام‌گذاری نقاط مدار، مشاهده می‌شود که دو سر مقاومت ۶Ω در سمت راست مدار هم‌نام شده (هر دو طرف C نام دارد) و این مقاومت اتصال کوتاه می‌شود و از مدار حذف می‌گردد. در ادامه، مقاومت معادل برابر است با:



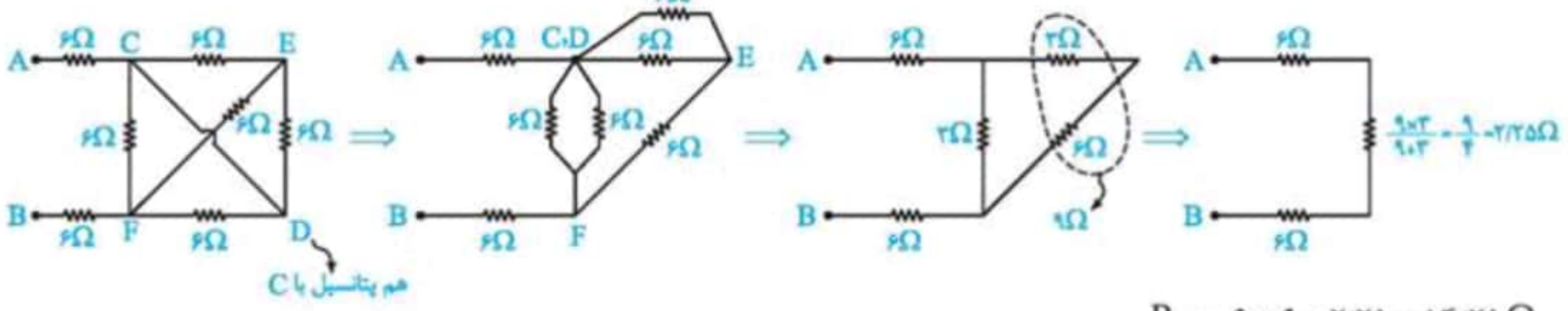
$$\Rightarrow R_T = \frac{۶ \times ۳}{۶ + ۳} = ۲\Omega$$

۲ ۱۷۷۲ به کمک تکنیک نام‌گذاری نقاط، مدار به‌صورت زیر ساده‌تر می‌شود:



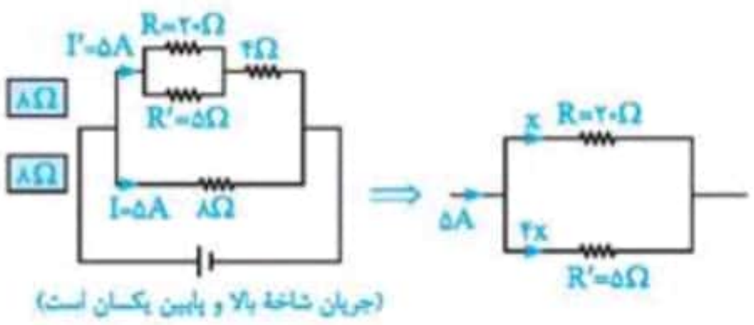
در شکل فوق، مقاومت معادل مدار برابر ۳Ω می‌شود (به عنوان تمرین آن را به‌دست آورید).

۱ ۱۷۷۳ با توجه به شکل، نقاط C و D با یک سیم به یک‌دیگر متصل شده‌اند و هم‌پتانسیل هستند، پس این دو نقطه را می‌توان مانند یک نقطه فرض کرد و مدار به شکل ساده‌تر زیر درمی‌آید:



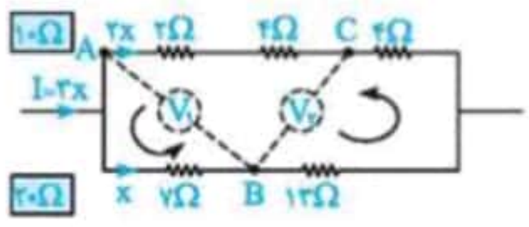
$$R_T = ۶ + ۶ + ۲/۲۵ = ۱۴/۲۵\Omega$$

۱ ۱۷۷۴ سؤال نسبتاً دشواری است. در بین حالت‌های مختلفی که این مقاومت‌ها را به یک‌دیگر متصل می‌کنیم، یکی از حالت‌هایی که مقاومت معادل مدار برابر ۴Ω می‌شود حالتی است که مدار به‌صورت مقابل باشد. در این حالت، جریان مقاومت ۲۰Ω برابر است با:



$$\Rightarrow x + ۴x = ۵A \Rightarrow x = ۱A \Rightarrow \text{جریان مقاومت ۲۰ اهمی} = ۱A$$

۴ ۱۷۷۵ جریان در شاخهٔ بالایی، ۲ برابر شاخهٔ پایینی است و اگر جریان شاخهٔ پایینی را x فرض کنیم، جریان شاخهٔ بالایی $۲x$ است. از طرفی ولت‌سنج (۱) حاصل $V_A - V_B$ و ولت‌سنج (۲) حاصل $V_B - V_C$ را نشان می‌دهد و داریم:

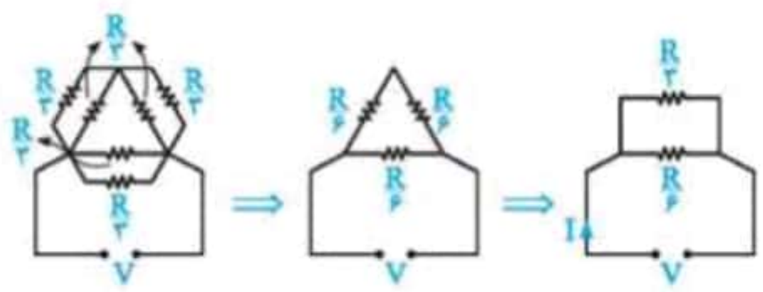


$$V_A - ۷x = V_B \Rightarrow V_A - V_B = ۷x \Rightarrow V_۱ = ۷x$$

$$V_B - ۱۳x + ۴ \times ۲x = V_C \Rightarrow V_B - V_C = ۵x \Rightarrow V_۲ = ۵x$$

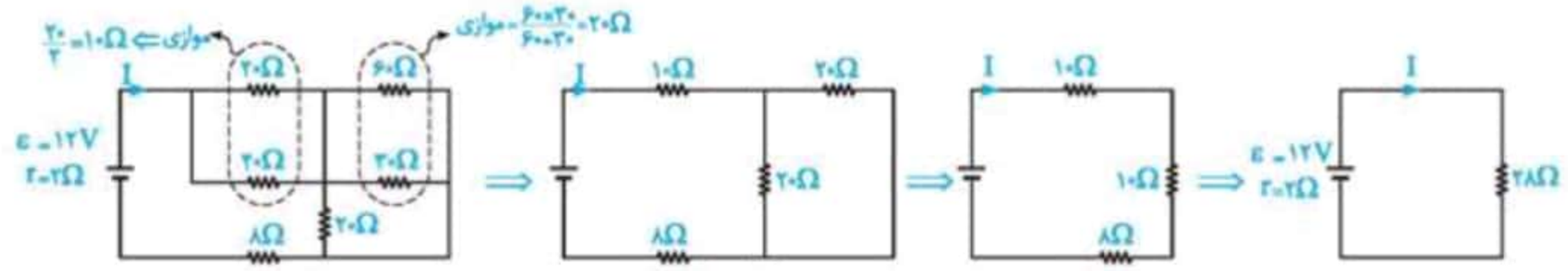
$$V_۱ - V_۲ = ۴ \Rightarrow ۷x - ۵x = ۴ \Rightarrow x = ۲A \Rightarrow I_{\text{کل}} = ۳x = ۶A$$: طبق صورت سؤال

۳ ۱۷۷۶ اگر مقاومت کل مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره R باشد، اگر $\frac{۱}{۳}$ از آن‌ها را جدا کنیم، مقاومت آن $\frac{۱}{۳}R$ است و شکل مدار به صورت مقابل تبدیل می‌شود:



$$R_T = \frac{\frac{R}{۳} \times \frac{R}{۶}}{\frac{R}{۳} + \frac{R}{۶}} = \frac{R}{۹} \rightarrow I = \frac{V}{R_T} = \frac{V}{\frac{R}{۹}} = \frac{۹V}{R}$$

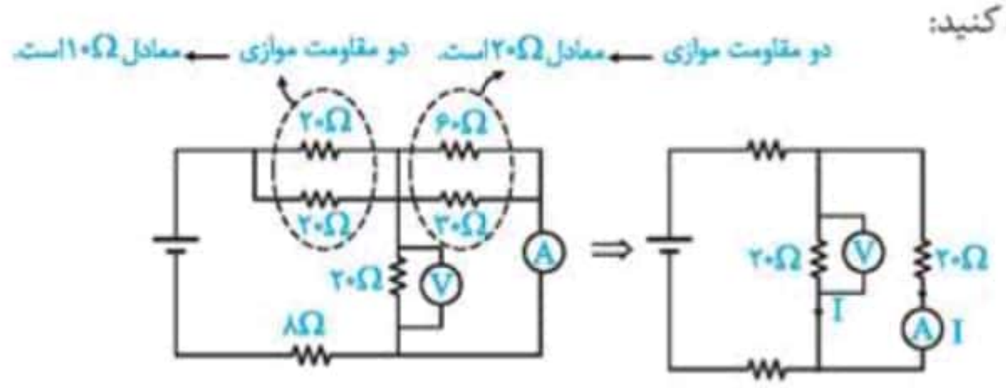
۳ ۱۷۷۷ هدف از این سؤال، در واقع یافتن مقاومت معادل مدار است:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۱۲}{۲۸ + ۲} = ۰/۴A$$

gajmarket.com

۲ ۱۷۷۸ به مدار ساده‌شدهٔ زیر توجه کنید:

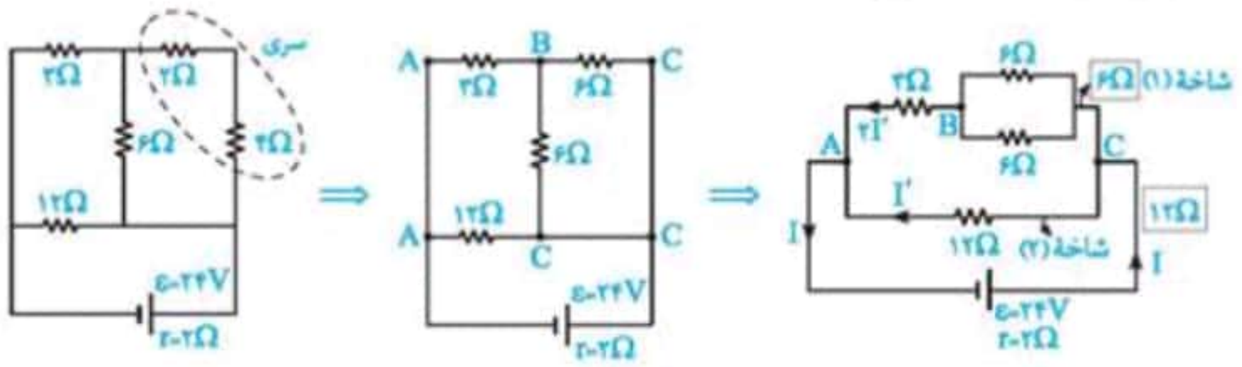


در واقع ولت‌سنج ولتاژ دو سر مقاومت ۲۰ اهمی سمت راست را نیز نشان می‌دهد (چون دو مقاومت ۲۰ اهمی با هم موازی هستند، ولتاژ آن‌ها با هم برابر است)، بنابراین برای محاسبهٔ جریان در مقاومت ۲۰ اهمی سمت راست داریم:

$$\text{جریان در مقاومت } ۲۰\Omega \text{ سمت راست} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{۵۰}{۲۰} = \frac{۵}{۲}A$$

$$\text{عدد آمپرسنج} = I = \frac{۵}{۲}A$$

۲ ۱۷۷۹ در مدار زیر ابتدا باید دقت کنید که مقاومت‌های ۴ و ۲ اهمی سری هستند و با نام‌گذاری نقاط مختلف مدار، می‌توان فهمید که با مقاومت ۶ اهمی موازی هستند. در شکل زیر برای درک بهتر، مدار را ساده‌تر کرده‌ایم، دقت شود با توجه به این‌که در مدار ساده‌شده مقاومت شاخهٔ (۱)، نصف مقاومت شاخهٔ (۲) است، جریان در شاخهٔ بالایی دو برابر شاخهٔ پایینی است (جریان شاخهٔ (۲) برابر I' و شاخهٔ (۱) برابر $۲I'$):



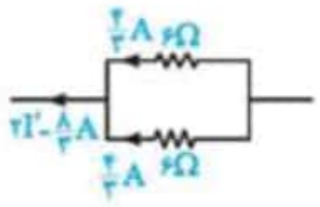
$$R_T = \frac{۶\times۱۲}{۶+۱۲} = ۴\Omega$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۲۴}{۴+۲} = ۴A$$

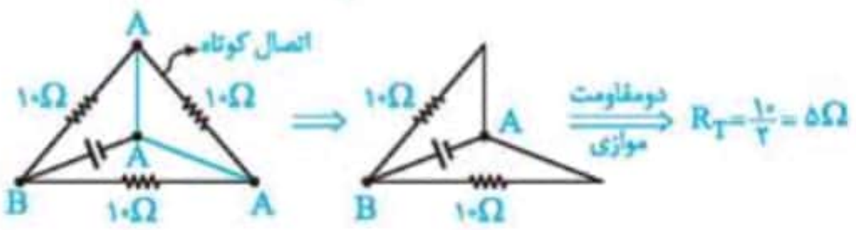
$$\Rightarrow ۳I' = ۴ \Rightarrow I' = \frac{۴}{۳}A$$

در ادامه، جریان $۲I'$ را بین دو مقاومت ۶ اهمی پخش می‌کنیم:

جریان عبوری از مقاومت ۶ اهمی برابر $\frac{۴}{۳}A$ است. $\Rightarrow$ شاخهٔ بالایی

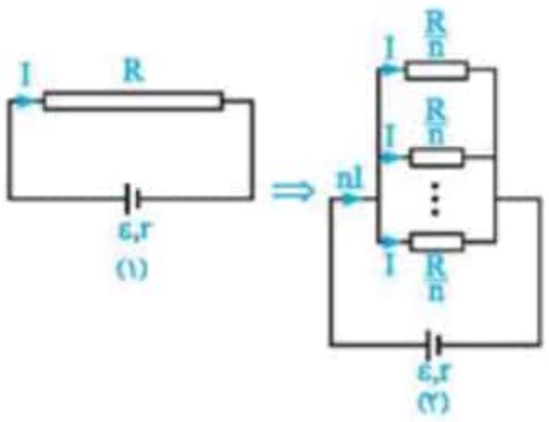


۴ ۱۷۸۰ یکی از مقاومت‌های ۱۰ اهمی که در شکل مقابل نشان داده شده است، اتصال کوتاه شده و دو مقاومت دیگر با یک‌دیگر موازی هستند.



$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۲۰}{۵+۵} = ۲A$$

۴ ۱۷۸۱ طول هر قطعه سیم جدید $\frac{L}{n}$ و در نتیجه مقاومت آن $\frac{R}{n}$ است. اگر جریان خروجی باتری در شکل (۱) برابر I باشد، با توجه به ثابت ماندن جریان در هر قطعه سیم، در حالت دوم جریان خروجی از باتری برابر nI است و می‌توان نوشت:

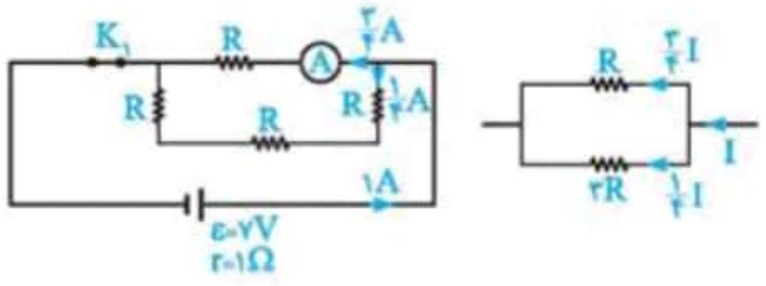


$$I_۲ = nI_۱ \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\frac{R}{n^۲} + r} = n \times \frac{\varepsilon}{R + r}$$

$$n\left(\frac{R}{n^۲} + r\right) = R + r \Rightarrow (n-۱)r = R - \frac{R}{n} \Rightarrow (n-۱)r = \frac{n-۱}{n}R \rightarrow r = \frac{R}{n}$$

دقت کنیم مقاومت معادل n مقاومت موازی با اندازه‌های یکسان $\frac{R}{n}$، برابر $\frac{\frac{R}{n}}{n} = \frac{R}{n^۲}$ می‌باشد.

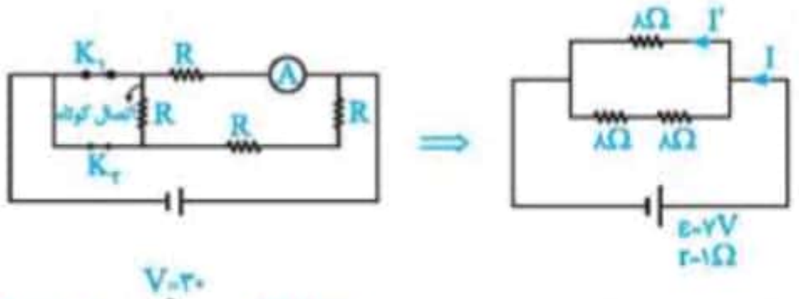
۴ ۱۷۸۲ اگر $K_۱$ بسته و $K_۲$ باز باشد، شکل مدار به صورت زیر بوده و مقاومت معادل مدار برابر است با:



$$\text{عدد آمپرسنج : صورت سؤال} = \frac{۳}{۴}I = \frac{۳}{۴} \Rightarrow I = ۱A$$

$$R_T = \frac{R\times۳R}{R+۳R} = \frac{۳}{۴}R \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow ۱ = \frac{۷}{\frac{۳}{۴}R + ۱} \Rightarrow R = ۸\Omega$$

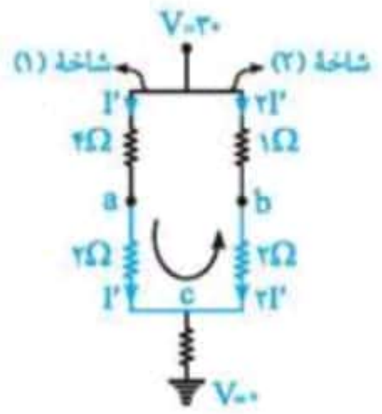
در حالت دوم با بسته شدن هر دو کلید، مقاومت R در سمت چپ اتصال کوتاه می‌شود و جریان کل عبارت است از:



$$R_T = \frac{16\times 8}{16+8} = \frac{16}{3}\Omega \rightarrow I_{کل} = \frac{7}{\frac{16}{3}+1} = \frac{21}{19}A$$

$$\Rightarrow I' = \frac{2}{3}I_{کل} = \frac{2}{3}\times\frac{21}{19} = \frac{14}{19}A$$

۴ ۱۷۸۳ اگر جریان شاخهٔ ۱ را برابر I' فرض کنیم، مقاومت شاخهٔ ۲ نصف شاخهٔ ۱ بوده و در نتیجه جریان در آن $2I'$ است. حال اگر از نقطهٔ a تا نقطهٔ b در مسیر نشان داده شده قانون ولتاژ را بنویسیم، داریم:



$$V_a - 2I' + 2\times(2I') = V_b$$

$$V_a - V_b = -2I' < 0 \Rightarrow V_a < V_b$$

تذکر

توجه شود که لزومی به محاسبهٔ جریان نمی‌باشد و از a تا c در جهت جریان جابه‌جا شده و از c تا b در خلاف جهت جریان جابه‌جا می‌شویم.

۲ ۱۷۸۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۸ قوانین کیرشهوف و بررسی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از یک مدار (تست‌های ۱۷۸۴ تا ۱۷۸۷)

در مدارهای الکتریکی دو قانون مهم وجود دارد که به قوانین ولتاژ و جریان کیرشهوف معروفند. در ادامهٔ این خلاصه نکات می‌خواهیم با این قانون‌ها آشنا شویم.

قاعدهٔ حلقه (قاعدهٔ ولتاژ کیرشهوف)

مطابق این قانون، در هر دور زدن کامل در حلقه‌ای از مدار، جمع جبری اختلاف پتانسیل‌های اجزای مدار باید برابر صفر باشد. (کاربرد این قانون را در خلاصه نکات بعد بررسی خواهیم کرد.)

در استفاده از این قانون، به دو مورد زیر باید توجه داشته باشید (از موارد زیر، در قسمت دوم این فصل نیز استفاده کردیم):

۱) هرگاه در مدار در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ RI یا rI کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی به همان اندازه افزایش می‌یابد.

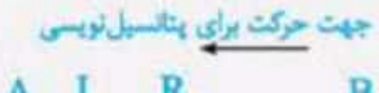
جهت حرکت برای پتانسیل‌نویسی



در جهت جریان حرکت می‌کنیم.

$$V_A \ominus RI = V_B$$

جهت حرکت برای پتانسیل‌نویسی



$$V_B \oplus RI = V_A$$

در خلاف جهت جریان حرکت می‌کنیم.

۲) در هنگام عبور از درون باتری و از قطب منفی به مثبت، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ نیروی محرکه افزایش می‌یابد و بالعکس. این موضوع یعنی در پتانسیل‌نویسی بین دو نقطه، هنگامی که به قطب منفی باتری رسیدیم، علامت مثبت گذاشته و بالعکس. این موضوع از جهت جریان مستقل است.



عبور از قطب منفی به مثبت

$$V_A \oplus \varepsilon - rI = V_B$$

به قطب منفی رسیدیم.



عبور از قطب مثبت به منفی

$$V_A \ominus \varepsilon - rI = V_B$$

به قطب مثبت رسیدیم.

* توجه شود که در عملیات پتانسیل‌نویسی، با مقاومت درونی باتری مانند یک مقاومت خارجی رفتار می‌کنیم.

تذکر قاعدهٔ حلقه و پتانسیل‌نویسی، در واقع همان قانون پایستگی انرژی می‌باشد.

قاعدهٔ انشعاب (قاعدهٔ جریان کیرشهوف)

طبق این قانون، مجموع جریان‌های ورودی به هر گره برابر است با مجموع جریان‌های خروجی از همان گره.



مجموع جریان‌های خروجی = مجموع جریان‌های ورودی $\Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 + I_4$

تذکر این قاعده در واقع بیانی از اصل پایستگی بار می‌باشد. به عبارتی دیگر در یک نقطهٔ انشعاب (گره)، نه باری ایجاد می‌شود و نه باری از بین می‌رود.

gajmarket.com

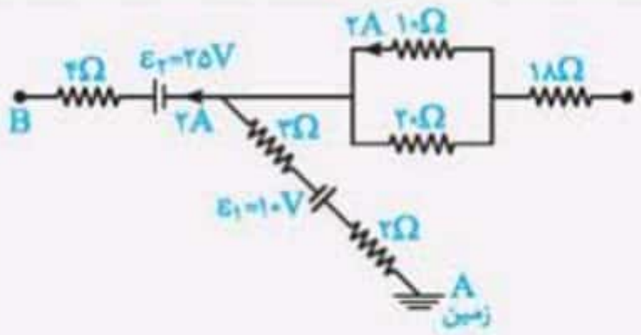
تمرین۱ در مدار مقابل، پتانسیل نقطهٔ B چند ولت است؟

۱) ۸

۲) ۱۲

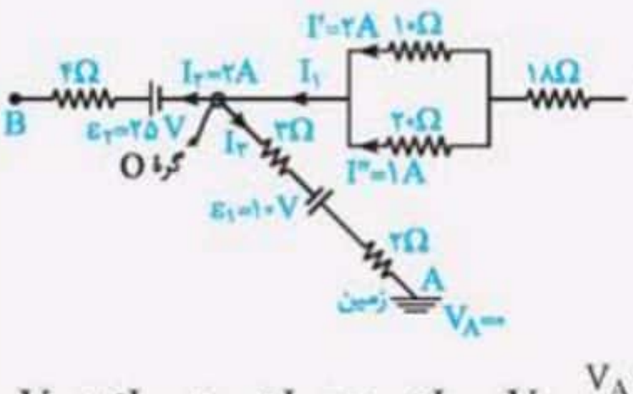
۳) -۸

۴) -۱۲



پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به موازی بودن دو مقاومت ۱۰Ω و ۲۰Ω جریان مقاومت ۲۰Ω نصف جریان مقاومت ۱۰Ω است $\left(I''=\frac{۲}{۲}=۱A\right)$.



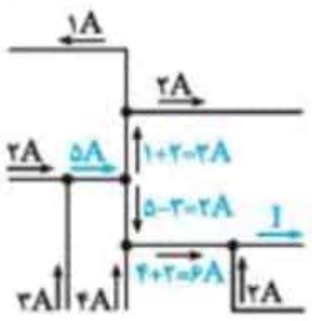
$$I_۱=I'+I''=۲+۱=۳A$$

گام دوم: با توجه به قانون جریان در گرهٔ O، جریان $I_۳=۱A$ است.

$$\text{گرهٔ O}: I_۱=I_۲+I_۳\Rightarrow ۳=۲+I_۳\Rightarrow I_۳=۱A$$

گام سوم: با حرکت از نقطهٔ B تا A و استفاده از قاعدهٔ پتانسیل‌نویسی می‌توان نوشت:

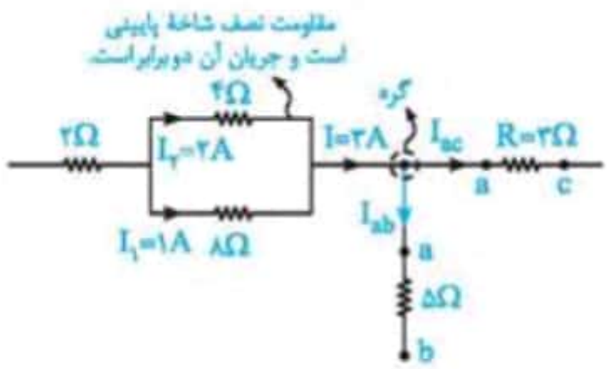
$$V_B+۴I_۲-\varepsilon_۲-۳I_۳+\varepsilon_۱-۲I_۳=V_A \xrightarrow{V_A=۰} V_B+۴\times۲-۲۵-۳\times۱+۱۰-۲\times۱=۰\Rightarrow V_B=۱۲V \quad \text{(گزینهٔ ۲)}$$



مجموع جریان‌های ورودی به هر گره، برابر مجموع جریان‌های خروجی از آن گره است. بنابراین با توجه به قانون جریان (قانون انشعاب)، جریان بر روی هر یک از قسمت‌های سیم به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$\Rightarrow I=۶+۲=۸A \quad \text{(به سمت راست)}$$

۱ ۱۷۸۵ چون $V_a-V_b=۱۰>۰$ است، بنابراین $V_a>V_b$ بوده و جریان در مقاومت ۵ اهمی به‌سمت پایین است، مقدار این جریان برابر است با:



$$V_a-۵\times I_{ab}=V_b\Rightarrow V_a-V_b=۵I_{ab}\xrightarrow[\text{طبق صورت سؤال}]{V_a-V_b=۱۰V}۱۰=۵I_{ab}\Rightarrow I_{ab}=۲A$$

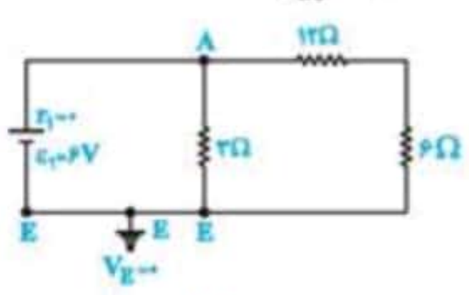
در ادامه مطابق شکل مقابل، جریان تمام شاخه‌ها را در سمت چپ گرهٔ a به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع جریان‌های ورودی به گره} = \text{مجموع جریان‌های خروجی از گره}\Rightarrow I=I_{ab}+I_{ac}\Rightarrow ۳=۲+I_{ac}\Rightarrow I_{ac}=۱A$$

در آخرین مرحله، حاصل V_a-V_c عبارت است از:

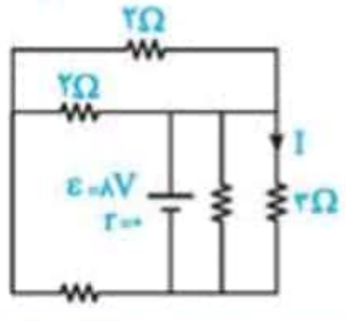
$$V_a-RI_{ac}=V_c\xrightarrow[I_{ac}=۱A]{R=۳\Omega}V_a-V_c=۳\times۱=۳V$$

۱ ۱۷۸۶ در مدار مقابل از نقطهٔ A در مسیر نشان داده‌شده حرکت کرده و قانون ولتاژها را می‌نویسیم تا به نقطهٔ E برسیم:



$$V_A-\varepsilon_۱=V_E=۰\Rightarrow V_A=\varepsilon_۱=۶V$$

۱ ۱۷۸۷ مقاومت ۳Ω با باتری به صورت موازی بسته شده است و ولتاژ دو سر آن با ولتاژ دو سر باتری برابر است $(r=۰)$. از سوی دیگر مقاومت درونی باتری صفر بوده و ولتاژ دو سر باتری ۸V است. در مجموع داریم:

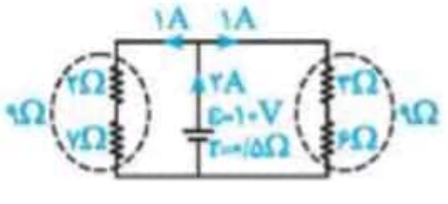


$$\text{ولتاژ دو سر مقاومت ۳ اهمی} = \text{ولتاژ دو سر باتری}\Rightarrow ۸=۳I\Rightarrow I=\frac{۸}{۳}A$$

تذکر

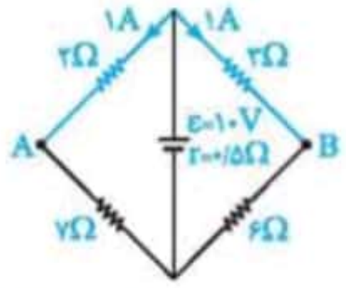
علت ساده بودن روند حل سوالات ۱۷۸۶ و ۱۷۸۷ صفر بودن r است (چرا؟)

۳ ۱۷۸۸ ابتدا مقاومت معادل را به‌دست آورده و سپس جریان کل را محاسبه می‌کنیم:



$$R_T=\frac{۹}{۲}=۴/۵\Omega$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_T+r}=\frac{۱۰}{۴/۵+۰/۵}=۲A$$

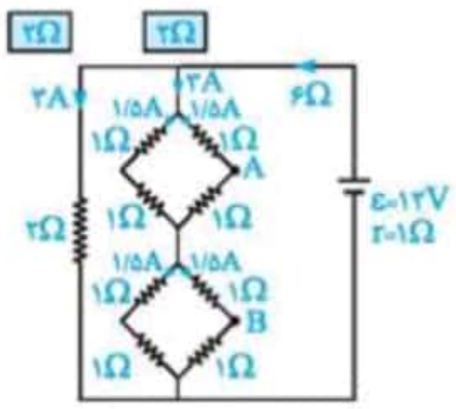


حال اگر نقاط A و B را در نظر بگیریم، با حرکت از A تا B در مسیر نشان داده شده، داریم:

$$V_A + ۲\times۱ - ۱\times۳ = V_B$$

$$V_A - V_B = ۱V \Rightarrow \text{عدد ولت‌سنج} = ۱V$$

۴ ۱۷۸۹ ابتدا مقاومت معادل مدار را به‌دست می‌آوریم و در این مرحله، به ولت‌سنج توجهی نمی‌کنیم:



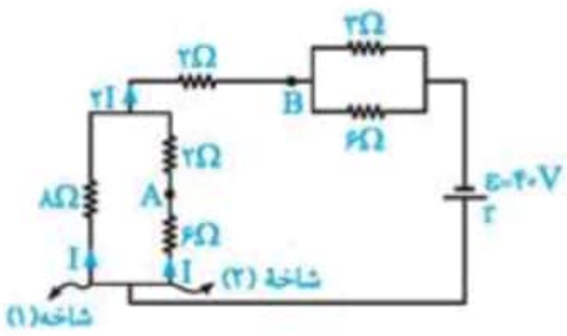
$$R_T = ۱\Omega \quad \text{(بر عهدهٔ دانش‌آموز)}$$

$$I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۱۲}{۱+۱} = ۶A$$

حال با توجه به جریان در هر شاخه، داریم:

$$V_A - ۱\times۱/۵ - ۱\times۱/۵ = V_B \Rightarrow V_A - V_B = ۳V$$

۲ ۱۷۹۰ اگر نقاط A و B را در نظر بگیریم، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه را نشان می‌دهد. حال اگر جریان شاخهٔ ۱ را برابر I فرض کنیم، جریان شاخهٔ ۲ نیز برابر I است و جریان کل در مدار ۲I است.



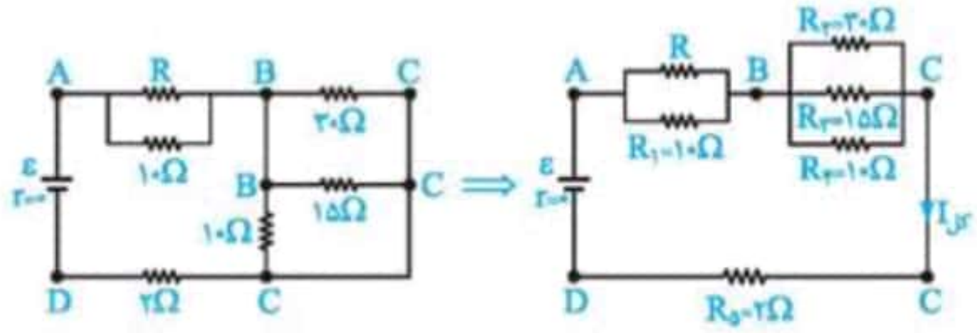
$$V_A - ۲\times I - ۲\times(۲I) = V_B \Rightarrow \begin{cases} V_A - V_B = ۶I \\ V_A - V_B = ۱۲ \end{cases} \rightarrow I = ۲A$$

$$I_{\text{کل}} = ۲I = ۴A$$

$$R_T = ۸\Omega \Rightarrow ۴ = \frac{۴۰}{۸ + r} \Rightarrow r = ۲\Omega$$

$$\Rightarrow \text{توان مصرفی در مقاومت درونی در باتری} = rI^۲_{\text{کل}} = ۲\times۴^۲ = ۳۲W$$

۲ ۱۷۹۱ سؤال ابتکاری و بسیار جالبی است. برای حل، ابتدا شکل ساده‌شدهٔ مدار را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} V_{BC} = V_۴ = V_۳ = V_۲ = ۳۰V \\ I_۴ = \dfrac{V_۴}{R_۴} = \dfrac{۳۰}{۱۰} = ۳A \\ I_۳ = \dfrac{V_۳}{R_۳} = \dfrac{۳۰}{۱۵} = ۲A \\ I_۲ = \dfrac{V_۲}{R_۲} = \dfrac{۳۰}{۳۰} = ۱A \end{cases}$$

$$I_{\text{کل}} = ۳+۲+۱ = ۶A \ , \ r = ۰ \Rightarrow \text{ولتاژ دو سر باتری} = V_{AD} = \varepsilon - \cancel{rI} = \varepsilon$$

$$\varepsilon = V_{AD} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} = ۳۰ + ۳۰ + R_۵ \times I_{\text{کل}} = ۷۲V$$

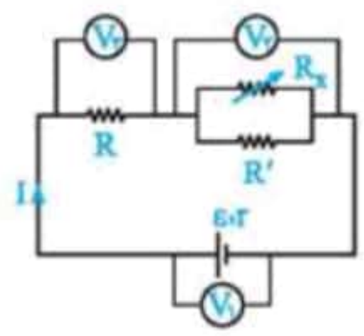
$$I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow ۶ = \frac{۷۲}{R_T + ۰} \Rightarrow R_T = ۱۲\Omega$$

۳ ۱۷۹۲ اگر $R_۳$ برابر صفر باشد، مانند یک سیم عمل کرده و مقاومت $R_۲$ اتصال کوتاه می‌شود و جریانی از آن نمی‌گذرد. از سوی دیگر اگر مقاومت $R_۳$ برابر بی‌نهایت شود هیچ جریانی از آن عبور نمی‌کند (مانند ولت‌سنج ایده‌آل) و گویی در مدار وجود ندارد. در این حالت، $R_۱$ و $R_۲$ به‌صورت سری به هم بسته شده‌اند و کل جریان از $R_۲$ می‌گذرد:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۳۰}{۵+۱۰+۰} = ۲A$$

بنابراین جریان $R_۲$ از صفر به ۲ آمپر می‌رسد.

۳ ۱۷۹۳ سؤال بسیار جالبی است. با کاهش مقاومت R_X، مقاومت معادل نیز کاهش یافته و جریان در مدار افزایش می‌یابد. با افزایش جریان، عدد ولت‌سنج فرضی $V_۳$ در شکل مقابل افزایش می‌یابد و داریم:

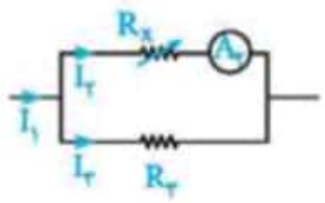


$$V_۳ = RI \xrightarrow{I\uparrow} V_۳ \uparrow$$

$$\begin{cases} V_۱ = V_۳ + V_۲ \\ V_۱ \Rightarrow \text{۱۰ ولت کاهش می‌یابد} \Rightarrow V_۲ \text{ باید بیشتر از ۱۰ ولت کاهش یابد تا تساوی برقرار بماند.} \\ V_۳ \Rightarrow \text{افزایش} \end{cases}$$

www.gajmarket.com

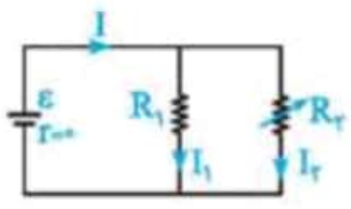
۳ ۱۷۹۴ با کاهش مقاومت R_X، مقاومت معادل مدار کاهش یافته و عدد آمپرسنج (۱) که جریان کل مدار را نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد. از طرفی با کاهش R_X، جریان I_2 افزایش و جریان I_3 کاهش می‌یابد (چرا؟) و داریم:



$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 \text{ باید بیش از ۳ آمپر افزایش یابد تا کاهش } I_3 \text{ را نیز جبران کرده و تساوی برقرار بماند.} \Rightarrow I_1 \Rightarrow \text{۳ آمپر افزایش می‌یابد} \\ I_3 \Rightarrow \text{کاهش} \end{cases}$$

۴ ۱۷۹۵ ابتدا دقت شود که مقاومت درونی باتری صفر است و در دو سر باتری، افت پتانسیل مشاهده نمی‌شود.

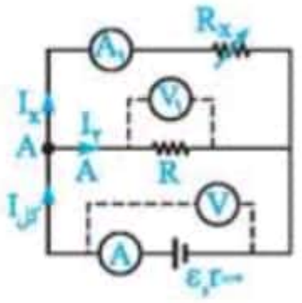
$r = 0 \Rightarrow$ افت پتانسیل $= 0 \Rightarrow$ ولتاژ دو سر باتری ثابت است. $\Rightarrow V = V_1 = V_2 = \varepsilon$ (R_1 و R_2 با باتری موازی‌اند.)



$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1}{R_1} \xrightarrow[\text{ثابت است.}]{R_1, V_1} I_1 \text{ ثابت می‌ماند.} \\ I_2 = \dfrac{V_2}{R_2} \xrightarrow[\uparrow R_2]{\text{ثابت } V_2} I_2 \text{ کاهش می‌یابد.} \end{cases}$$

از طرفی $I = I_1 + I_2$ است و با ثابت بودن I_1 و کاهش I_2، جریان کل (I) کاهش می‌یابد.

۱ ۱۷۹۶ این سؤال از تست قبل ایده گرفته شده است. ابتدا باید توجه شود که با توجه به صفر بودن مقاومت درونی باتری، عدد ولت‌سنج دو سر باتری ثابت است. چون جریان کلی افزایش یافته است، بنابراین مقاومت معادل کاهش یافته است ($R_T \downarrow$).

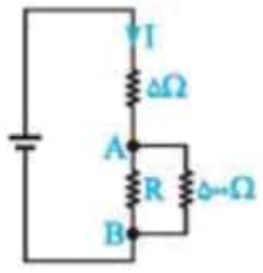


از طرفی چون R و R_X و باتری هر سه موازیند، ولتاژ آن‌ها یکسان است.

$V = RI_2 \Rightarrow I_2$ ثابت می‌ماند. $\qquad V = \varepsilon - rI \xrightarrow{r=0} V = \varepsilon \Rightarrow V = V_1 = \varepsilon$

$I_{\text{کل}} = \underbrace{I_2}_{\text{ثابت}} + I_X \xrightarrow[\text{افزایش می‌یابد.}]{\text{جریان کل } I, \text{ ۱۰ آمپر}}$ با توجه به ثابت بودن I_2، I_X نیز ۱۰ آمپر افزایش می‌یابد.

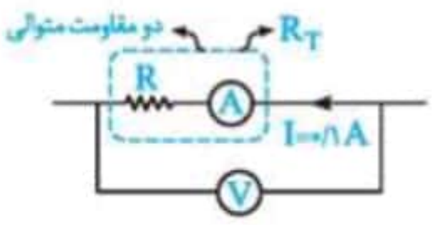
۳ ۱۷۹۷ سؤال تحلیلی و نسبتاً دشواری است. با توجه به این‌که وسایل اندازه‌گیری ایده‌آل نیستند، برای راحت‌تر حل کردن این سؤال، می‌توان به جای آمپرسنج یک مقاومت کوچک (مثلاً 5Ω) و به جای ولت‌سنج یک مقاومت نسبتاً بزرگ (مثلاً ۵۰۰ اهم) جایگزین کرد. در عمل می‌توان گفت آمپرسنج عدد I و ولت‌سنج حاصل $V_A - V_B$ را نشان می‌دهد.



تحلیل گزینهٔ (۳): اگر آمپرسنج حذف شود، گویی مقاومت 5Ω از مدار حذف شده است و مقاومت معادل مدار کاهش یافته و I افزایش می‌یابد. در این حالت حاصل $V_A - V_B$ که معادل با $R' \times I$ است لزوماً افزایش می‌یابد $\left(R' = \dfrac{R \times 500}{R + 500}\right)$ و این گزینه صحیح است.

* به عنوان تمرین، با کمک شکل فوق، نادرستی سایر گزینه‌ها را تحلیل کنید.

۴ ۱۷۹۸ مقاومت‌های R و R_A (مقاومت آمپرسنج) به‌صورت سری می‌باشد و اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها برابر ۱۲ ولت است. از طرفی جریان آن‌ها برابر جریان نشان داده شده توسط آمپرسنج $(I = 0/1A)$ می‌باشد. بنابراین مقاومت معادل R و R_A برابر است با:

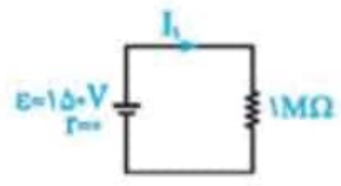


$$I = \frac{V}{R_T} \Rightarrow R_T = \frac{V}{I} = \frac{12}{0/1} = 120\Omega$$

$$R_T = R + R_A \Rightarrow 120 = R + 2 \Rightarrow R = 118\Omega$$

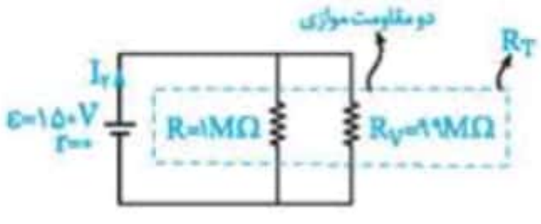
۴ ۱۷۹۹ در هر دو حالت مدار را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: در حالت ایده‌آل بودن ولت‌سنج، می‌توان آن را در نظر نگرفت و داریم:



$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{150}{1 \times 10^6} = 150\mu A$$

حالت دوم: در این حالت می‌توان گفت که دو مقاومت R و R_V با یک‌دیگر موازی شده و داریم:

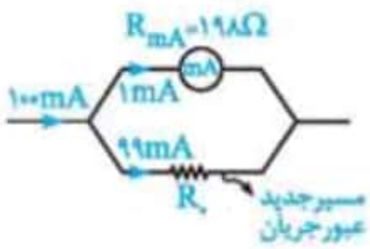


$$R_T = \frac{RR_V}{R + R_V} = \frac{(1 \times 10^6) \times (99 \times 10^6)}{(1 + 99) \times 10^6} = 0/99 \times 10^6 \Omega$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{150}{0/99 \times 10^6} \simeq 152\mu A \Rightarrow I_1 - I_2 = 150 - 152 = -2\mu A$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای همان‌طور که می‌دانیم، با موازی شدن دو مقاومت، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد. بنابراین در این سؤال، جریان مدار افزایش یافته و $I_2 > I_1$ است. بنابراین از همان ابتدا نیز مشخص بود که گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

۳ ۱۸۰۰ اگر بخواهیم با میلی‌آمپرسنجی که حداکثر یک میلی‌آمپر را اندازه‌گیری می‌کند، جریان ۱۰۰ میلی‌آمپر را اندازه‌گیری کنیم، باید یک مقاومت دیگر با میلی‌آمپرسنج به‌صورت موازی متصل کنیم (در واقع مسیر جدیدی برای عبور جریان ایجاد کنیم) که $99mA$ از جریان، از آن عبور کند. مقاومت این شاخهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



دو مقاومت موازی : $V_{mA} = V_s \Rightarrow 198 \times 1 = R_s \times 99 \Rightarrow R_s = 2\Omega$

تذکر

دقت کنیم که سری بستن مقاومت با میلی‌آمپرسنج فایده‌ای ندارد. چون در حالت سری باز هم کل جریان از میلی آمپرسنج عبور می‌کند و میلی‌آمپرسنج آسیب می‌بیند.

۲ ۱۸۰۱

$$P = \frac{U}{t} \Rightarrow \text{توان} = \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}} \quad , \quad R = \frac{V}{I} \Rightarrow \quad \text{مقاومت} = \frac{\text{ولت}}{\text{آمپر}} \quad , \quad C = \frac{q}{V} \Rightarrow \text{ظرفیت خازن} = \frac{\text{کولن}}{\text{ولت}}$$

$$P.R.C = \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}} \times \frac{\text{ولت}}{\text{آمپر}} \times \frac{\text{کولن}}{\text{ولت}} = \text{ژول} \Rightarrow$$ از جنس انرژی است.

دقت: با توجه به رابطهٔ $q = It$، کولن معادل است با (آمپر × ثانیه) و این دو عبارت در صورت و مخرج عملیات فوق با یک‌دیگر ساده شده‌اند.

۲ ۱۸۰۲ چون سیم‌ها هم‌جنس هستند، پس با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، جرم آن‌ها متناسب با حجم آن‌ها است و می‌توان نوشت:

گام اول: $m_A = 3m_B \xrightarrow{\rho_A = \rho_B} V_A = 3V_B \Rightarrow A_A.L_A = 3A_B.L_B \xrightarrow{L_A = 3L_B} A_A = A_B$

گام دوم: $R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A} = 3 \times 1 = 3$

گام سوم: $P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{\text{در ولتاژ یکسان}} \frac{P_A}{P_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{1}{3}$

۳ ۱۸۰۳ انرژی‌ای که باتری می‌تواند تحویل دهد، برابر است با:

$$U = q\varepsilon = 60(Ah) \times 24(V) = 60 \times 3600(C) \times 24(V) = 5184kJ$$

برای محاسبهٔ مدت زمانی که طول می‌کشد تا این انرژی با آهنگ $500W$ مصرف شود، می‌توان نوشت:

$$U = P \times t \Rightarrow 5184 \times 10^3 = 500 \times t \Rightarrow t = 10368s \Rightarrow t = \frac{10368}{3600}h = 2/88h$$

۳ ۱۸۰۴ **گام اول:** (محاسبهٔ جریان):

$$P_{\text{تولیدی}} = VI \Rightarrow I = \frac{P_{\text{تولیدی}}}{V} = \frac{150 \times 10^3}{7500} = 20A$$

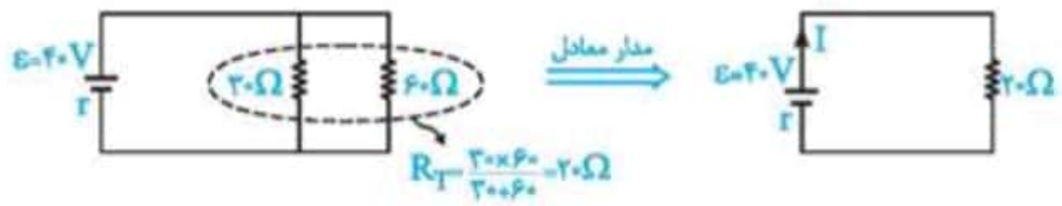
گام دوم: (محاسبهٔ توان هدرشده در کابل‌ها):

$$P_{\text{تلف‌شده}} = RI^2 = 30 \times 20^2 = 12000W = 12kW$$

گام سوم: (محاسبهٔ توانی که به محل مصرف (توان مفید) می‌رسد):

$$P = 150 - 12 = 138kW$$

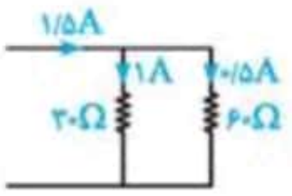
۱ ۱۸۰۵ برای محاسبهٔ توان مقاومت ۳۰ اهمی، ابتدا مقاومت درونی مولد را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{توان خروجی باتری} = 3 \times (\text{توان مصرفی در داخل باتری}) \Rightarrow R_T I^2 = 3 \times rI^2 \Rightarrow 20 = 3r \Rightarrow r = \frac{20}{3}\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{40}{20 + \frac{20}{3}} = \frac{40}{\frac{80}{3}} = 1/5A$$

در ادامه، جریان در مقاومت ۳۰ اهمی را محاسبه کرده و توان مصرفی آن را به‌دست می‌آوریم:

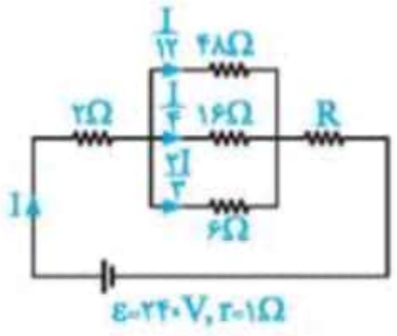


$$\Rightarrow P = RI^2 = 30 \times 1^2 = 30W$$

www.gajmarket.com

۴ ۱۸۰۶ اگر جریان مدار I باشد، به شاخهٔ بالا جریان $\frac{I}{12}$، به شاخه وسط جریان $\frac{I}{4}$ و به شاخهٔ پایین جریان $\frac{2I}{3}$ می‌رسد.

در ادامه توان هر یک از مقاومت‌ها را حساب می‌کنیم:



$$\text{مقاومت ۴۸ اهمی} \Rightarrow P = \frac{48 \times I^2}{144} = \frac{I^2}{3}$$

$$\text{مقاومت ۱۶ اهمی} \Rightarrow P = \frac{16 \times I^2}{16} = I^2$$

$$\text{مقاومت ۶ اهمی} \Rightarrow P = \frac{6 \times 4I^2}{9} = \frac{24I^2}{9} = \frac{8I^2}{3}$$

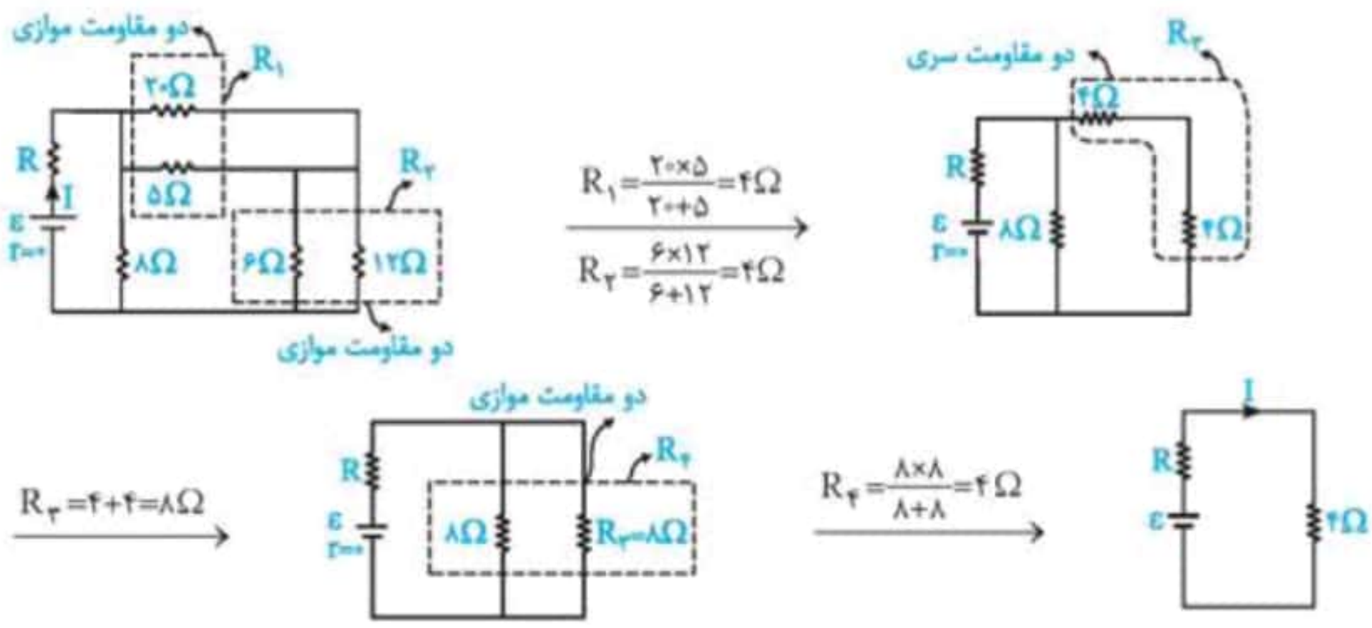
برای مقاومت ۲ اهمی هم داریم:

$$\text{مقاومت ۲ اهمی} \Rightarrow P = 2I^2$$

با توجه به صورت سؤال، باید توان مصرفی مقاومت R، از $\frac{8}{3}I^2$ که بیش‌ترین توان در بین ۴ مقاومت ذکر شده است، بیش‌تر شود. به عبارتی می‌توان گفت:

$$RI^2 > \frac{8}{3}I^2 \Rightarrow R > \frac{8}{3}\Omega$$

۳ ۱۸۰۷ می‌دانیم توان مصرفی در مقاومت موردنظر، از رابطهٔ $P = RI^2$ به‌دست می‌آید. بنابراین ابتدا باید مقدار جریان در مدار را به‌دست آوریم:



بنابراین مقدار جریان عبوری از مقاومت R برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{\varepsilon}{(R+4)+0} = \frac{\varepsilon}{R+4}$$

$$\text{محاسبهٔ توان مقاومت } R \Rightarrow P = RI^2 = R\left(\frac{\varepsilon}{R+4}\right)^2 = \varepsilon^2 \frac{R}{(R+4)^2}$$

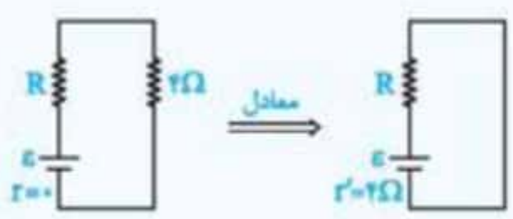
برای یافتن مقدار مقاومت R به منظور بیشینه شدن توان مصرفی در آن (P_{max})، باید مشتق P نسبت به R برابر صفر گردد، بنابراین از $\frac{R}{(R+4)^2}$ نسبت به R مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dP}{dR} = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \varepsilon^2\left[\frac{1\times(R+4)^2 - R[2(R+4)]}{(R+4)^4}\right] = 0 \xrightarrow{\text{صورت کسر} = 0} (R+4)^2 - 2R(R+4) = 0$$

$$\Rightarrow (R+4)[(R+4)-2R] = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = -4 \times \text{(غ‌ق‌ق)} \\ R + 4 - 2R = 0 \Rightarrow R = 4\Omega \end{cases}$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

همان‌طور که می‌دانیم، زمانی توان مصرفی در مقاومت خارجی R_T بیشینه می‌شود که $R_T = r$ شود. حال در این مدار اگر مقاومت ۴ اهمی به دست آمده را به عنوان مقاومت درونی باتری در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

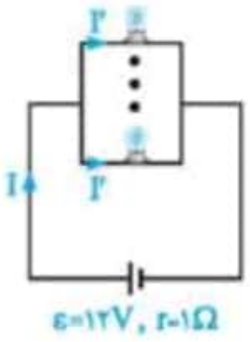


حال زمانی توان مصرفی در R، بیشینه می‌شود که $R = r' = 4\Omega$ باشد. $\Rightarrow$

۳ ۱۸۰۸ **گام اول:** ولتاژ دو سر لامپ‌ها با ولتاژ دو سر باتری برابر است و اگر بخواهیم لامپ‌ها با نور عادی خود تابش کنند، باید ولتاژ دو سر آن‌ها برابر ۱۰V یعنی برابر ولتاژ اسمی آن‌ها شود (یا به عبارتی ولتاژ دو سر باتری برابر ۱۰ ولت شود).

گام دوم: اگر ولتاژ دو سر باتری برابر ۱۰ ولت باشد، جریان عبوری از آن برابر است با:

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow 10 = 12 - 1\times I \Rightarrow I = 2A$$



گام سوم: هر لامپ برای آن‌که با نور عادی خود روشن شود، باید جریان $I'=\frac{P_{اسمی}}{V_{اسمی}}=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵\,A$ را از خود عبور دهد و اگر n لامپ موازی داشته باشیم، می‌توان نوشت:

$$I=nI'\Rightarrow ۲=n\times ۰/۵\Rightarrow n=۴$$

دقت: اگر n عددی غیرصحیح به‌دست بیاید، یعنی لامپ‌ها نمی‌توانند با نور عادی خود تابش کنند.

۱ ۱۸۰۹ مقاومت هر یک از لامپ‌ها و مقاومت معادل اتصال متوالی آن‌ها برابر است با:

$$R_۱=\frac{V_۱^۲}{P_۱}=\frac{۲۲۰^۲}{۱۰۰}\ ,\ R_۲=\frac{V_۲^۲}{P_۲}=\frac{۱۱۰^۲}{۱۰۰}\Rightarrow R_T=R_۱+R_۲=\frac{۵\times ۱۱۰^۲}{۱۰۰}\Omega=\frac{۱۱۰^۲}{۲۰}\Omega$$

توان مجموعه در حالت جدید برابر است با:

$$P=\frac{V^۲}{R_T}=\frac{۱۱۰^۲}{۱۱۰^۲}=۲۰\,W$$

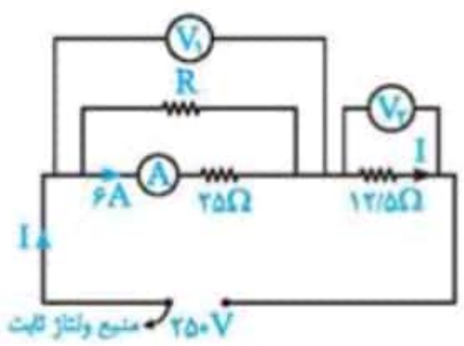
۲ ۱۸۱۰ با مقایسهٔ توان لامپ‌ها در حالت موازی، می‌توان نوشت:

$$P_B>P_A\Rightarrow\frac{V^۲}{R_B}>\frac{V^۲}{R_A}\Rightarrow R_A>R_B$$

وقتی دو لامپ را به‌صورت متوالی به یک‌دیگر ببندیم، جریان گذرنده از آن‌ها یکسان است و توان هر لامپ متناسب با مقاومت آن است، بنابراین داریم:

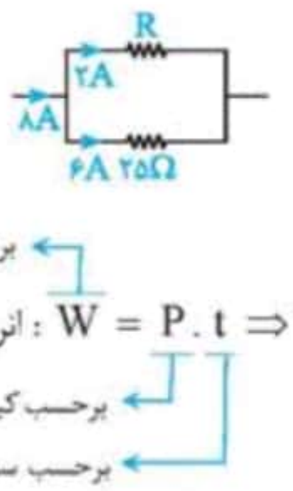
$$\begin{cases}P'_A=R_AI^۲\\P'_B=R_BI^۲\end{cases}\xrightarrow{R_A>R_B}P'_A>P'_B$$ در حالت متوالی، لامپ A روشن‌تر از لامپ B است. $\Rightarrow$

۱ ۱۸۱۱ سؤال نسبتاً دشواری است. با توجه به شکل مقابل اعداد ولت‌سنج‌های فرضی (۱) و (۲) عبارت است از:



$$\begin{cases}V_۱+V_۲=V_{کل}\\V_{کل}=۲۵۰V\\V_۱=۲۵\times ۶=۱۵۰V\ ,\ V_۲=۱۲/۵I\end{cases}\Rightarrow ۱۵۰+۱۲/۵I=۲۵۰\Rightarrow I=۸A$$

جریان کل مدار برابر $۸A$ و جریان عبوری از مقاومت R برابر $۲A$ بوده و می‌توان نوشت:

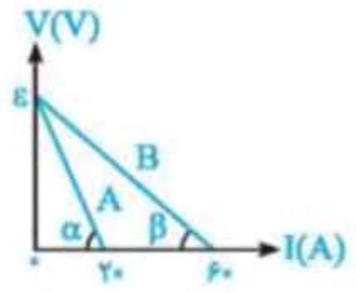


$$\Rightarrow ۲R=۶\times ۲۵\Rightarrow R=۷۵\Omega$$

توان مصرفی مقاومت R : $P=RI^۲=۷۵\times ۲^۲=۳۰۰\,W=۰/۳\,kW\ ,\ t=۳۰\,min=\frac{۱}{۲}h$

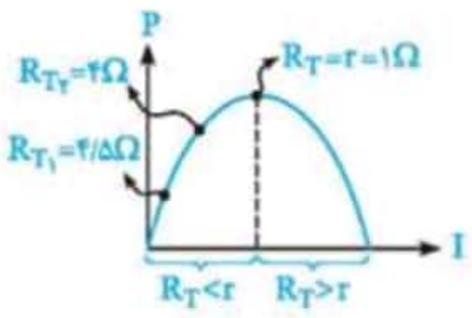
انرژی مصرفی (برحسب کیلووات ساعت) : $W=P.t\Rightarrow W=۰/۳\times\frac{۱}{۲}=۰/۱۵\,kWh$ (برحسب کیلووات، برحسب ساعت)

۴ ۱۸۱۲ با توجه به شکل، نیروی محرکهٔ دو باتری با یک‌دیگر برابر بوده و اندازهٔ شیب دو نمودار، معادل مقاومت درونی دو مولد است:



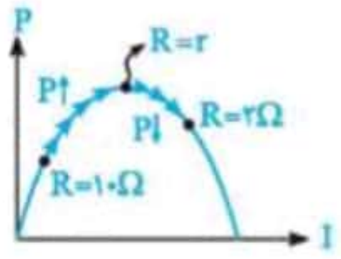
$$\begin{cases}r_A=\tan\alpha=\frac{\varepsilon}{۲۰}\\r_B=\tan\beta=\frac{\varepsilon}{۶۰}\end{cases}\Rightarrow\frac{r_B}{r_A}=\frac{\frac{\varepsilon}{۶۰}}{\frac{\varepsilon}{۲۰}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \text{توان هدر شده در باتری}=rI^۲\Rightarrow\frac{P_B}{P_A}=\frac{r_B}{r_A}=\frac{۱}{۳}$$

۲ ۱۸۱۳ در این گونه از سؤالات باید بررسی کنیم قبل و بعد از بسته شدن کلید، مقاومت معادل چگونه تغییر می‌کند. به راحتی می‌توان نشان داد با بستن کلید K، مقاومت معادل مدار از $۴/۵\Omega$ به ۴Ω می‌رسد (چرا؟) و جریان افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که در $R_T=r=۱\Omega$ توان مفید بیشینه است، به قلهٔ نمودار نزدیک شده و توان مفید افزایش می‌یابد.



gajmarket.com

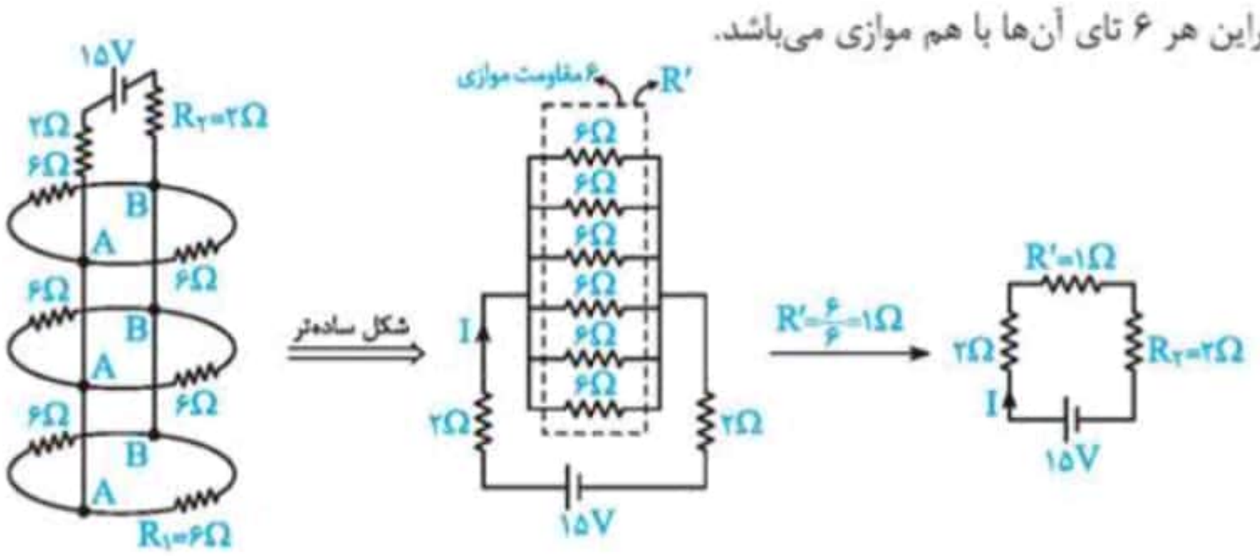
۱۸۱۴ ۱ از آن‌جا که توان مفید ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است، یعنی ابتدا به قلهٔ نمودار نزدیک شده و سپس از قلهٔ نمودار دور شده‌ایم و $R = r$ لزوماً در بازهٔ تغییرات $۲\Omega < R < ۱۰\Omega$ قرار دارد. بنابراین مقاومت درونی نمی‌تواند برابر ۱Ω باشد، زیرا ۱Ω در بازهٔ فوق قرار ندارد.



۱۸۱۵ ۱ بیشترین گرما زمانی ایجاد می‌شود که توان خارجی مدار (توان مفید) بیشینه باشد و در این حالت توان مفید برابر است با:

شرط بیشینه شدن توان: $R = r \Rightarrow P_{max} = \frac{\varepsilon^۲}{۴r} = \frac{۸^۲}{۴\times۲} = ۸\,W \Rightarrow U_{max} = P_{max} \times t = ۳۲\,J$

۱۸۱۶ ۳ این سؤال، تمرین کتاب درسی و سؤال جالبی است. با توجه به تکنیک نام‌گذاری نقاط مشاهده می‌کنیم که هر ۶ مقاومت ۶ اهمی بین دو نقطهٔ A و B قرار دارند، بنابراین هر ۶ تای آن‌ها با هم موازی می‌باشند.

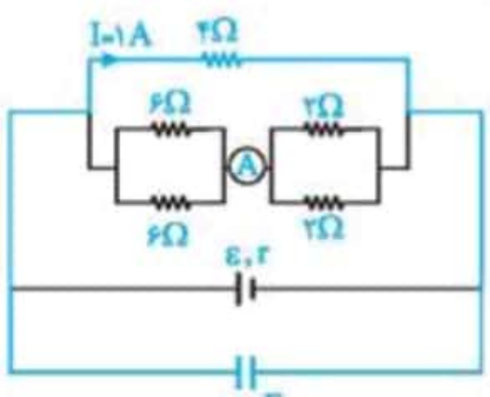


$I = \frac{\varepsilon}{۲+R'+۲} = \frac{۱۵}{۲+۱+۲} = ۳A \Rightarrow$ جریان عبوری از مقاومت $R_۲$ برابر $۳A$ است. $\Rightarrow P_۲ = ۲\times(۳)^۲ = ۱۸\,W$

با توجه به موازی بودن ۶ مقاومت ۶ اهمی، جریان آن‌ها یکسان و برابر $۰/۵A\,(=\frac{۳}{۶})$ می‌باشد.

۱۸۱۷ ۴ مشابه با تمرین (۲) در خلاصه نکات (۱۷)، انرژی ذخیره شده در مجموع خازن‌ها $۳۲۰\mu J$ به‌دست می‌آید.

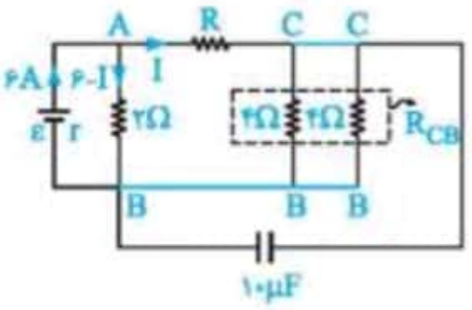
۱۸۱۸ ۴ شکل ساده شدهٔ مدار به‌صورت مقابل است:



مقاومت معادل شاخهٔ پایین (شاخهٔ شامل آمپرسنج) برابر ۴Ω بوده و با توجه به یکسان بودن مقاومت معادل شاخهٔ پایین با مقاومت شاخهٔ بالا، از شاخهٔ پایینی نیز جریان یک آمپر عبور کرده و آمپرسنج نیز همین عدد را نشان می‌دهد. از طرفی ولتاژ دو سر خازن با ولتاژ دو سر مقاومت ۴Ω برابر است و بار ذخیره شده در خازن برابر است با:

$q_{\text{خازن}} = C \times V_{\text{۴ اهمی}} = ۱۰\times(۴\times۱) = ۴۰\mu C$

۱۸۱۹ ۲ سؤال نسبتاً دشواری است. ولتاژ دو سر خازن، با ولتاژ دو سر هر یک از مقاومت‌های ۴Ω برابر است و داریم:



$q = CV_{CB} \Rightarrow ۴۰ = ۱۰\times V_{CB} \Rightarrow V_{CB} = ۴\,V$

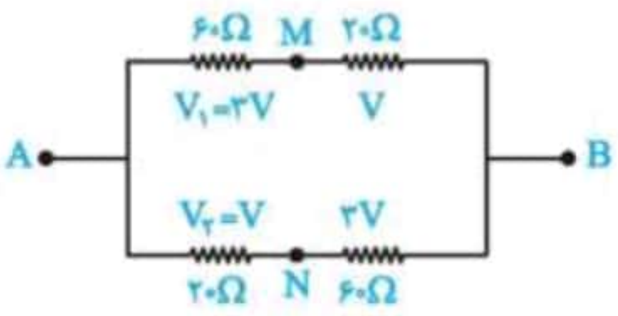
$V_{CB} = R_{CB}\times I \Rightarrow ۴ = ۲\times I \Rightarrow I = ۲A$

$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} \Rightarrow ۲(۶-I) = R\times I + ۴ \xrightarrow{I=۲A} ۲\times۴ = R\times۲ + ۴ \Rightarrow R = ۲\Omega$

۱۸۲۰ ۴ مقاومت معادل خارجی مدار برابر ۲۰Ω است (چرا؟)، بنابراین جریان مدار و ولتاژ کل شاخهٔ بالایی برابر است با:

$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۲۲}{۲۰+۲} = ۱A \Rightarrow V = \varepsilon - rI = ۲۲ - ۲\times۱ = ۲۰\,V$

در ادامه برای به‌دست آوردن عدد ولت‌سنج، ولتاژ دو سر هریک از مقاومت‌های شاخهٔ بالا را به‌دست می‌آوریم:



$۳V + V = ۴V = ۲۰ \Rightarrow V = ۵\,V$

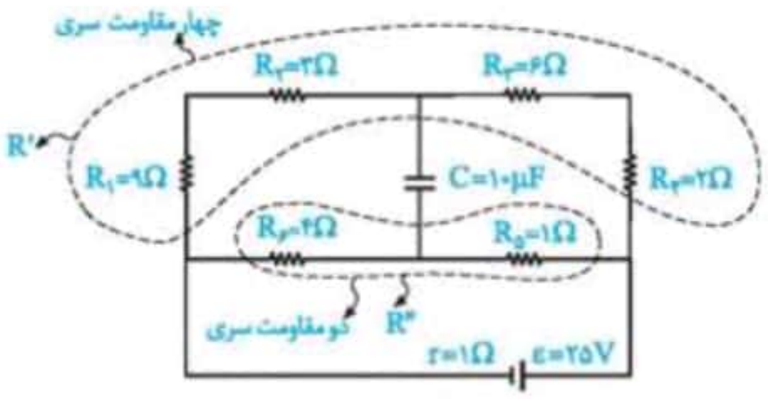
$\begin{cases} V_۱ = V_A - V_M \\ V_۲ = V_A - V_N \end{cases} \Rightarrow$ عدد ولت‌سنج $= V_N - V_M = V_۱ - V_۲$

عدد ولت‌سنج $= V_۱ - V_۲ = ۱۵ - ۵ = ۱۰\,V$

۳ ۱۸۲۱ **گام اول:** ابتدا در ذهن خود، خازن را از مدار حذف کنید. در این حالت در شاخهٔ بالایی ۴ مقاومت سری و در شاخهٔ پایین، ۲ مقاومت سری مشاهده می‌شود و مقاومت معادل برابر است با:

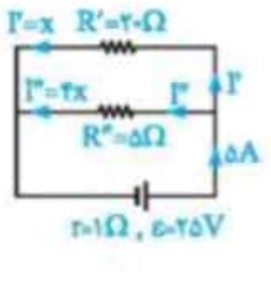
$$\begin{cases} \text{شاخهٔ بالایی}: R' = ۹ + ۳ + ۶ + ۲ = ۲۰\Omega \\ \text{شاخهٔ پایینی}: R'' = ۴ + ۱ = ۵\Omega \end{cases} \Rightarrow R_T = \frac{۲۰ \times ۵}{۲۰ + ۵} = ۴\Omega$$

گام دوم: جریان در مدار را محاسبه کرده و بین شاخهٔ بالایی و پایینی تقسیم می‌کنیم:

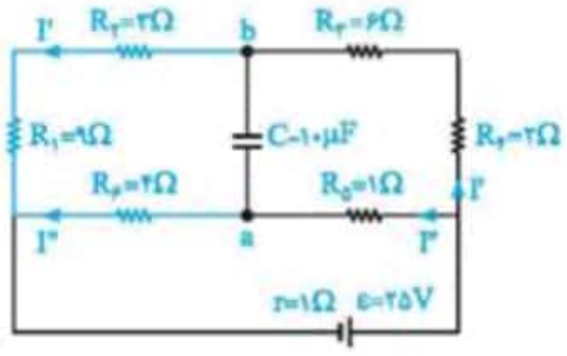


$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۲۵}{۴ + ۱} = ۵A \Rightarrow x + ۴x = ۵$$

$$\Rightarrow x = ۱A \Rightarrow I' = ۱A \ , \ I'' = ۴A$$



گام سوم: با حرکت از a تا b در مسیر نشان داده شده و نوشتن قانون ولتاژ، حاصل $V_a - V_b$ را به‌دست آورده و به کمک آن بار خازن را محاسبه می‌کنیم:

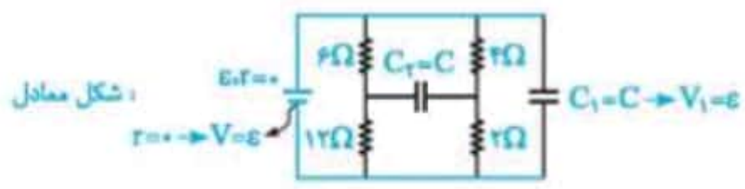


$$V_a - R_۶ I'' + R_۱ I' + R_۲ I' = V_b$$

$$V_a - ۴ \times ۴ + ۹ \times ۱ + ۳ \times ۱ = V_b \Rightarrow V_a - V_b = ۴\,V$$

$$q = CV_{ab} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰\mu C$$

۲ ۱۸۲۲ شکل مدار به‌صورت زیر ساده می‌شود:

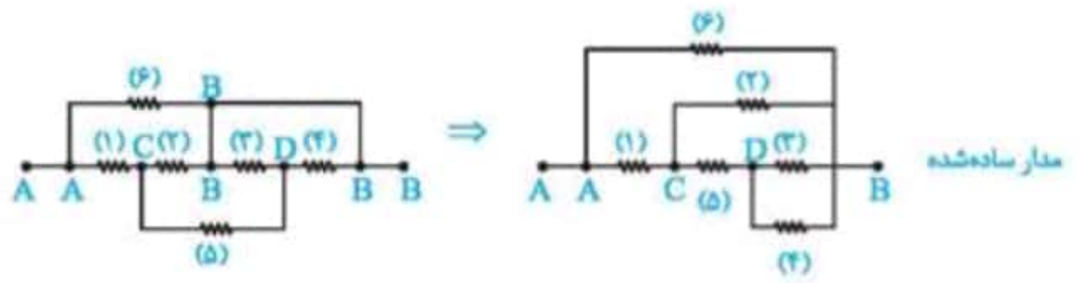


در این حالت دو سر خازن $C_۱$ به دو سر باتری وصل شده است و $V_۱ = \varepsilon$ است. از طرفی مشابه با تست قبل، به‌سادگی می‌توان نشان داد که $V_۲ = \frac{۱}{۳}\varepsilon$ است (محاسبه بر عهدهٔ دانش‌آموز) و در مقایسهٔ بار الکتریکی خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$، داریم:

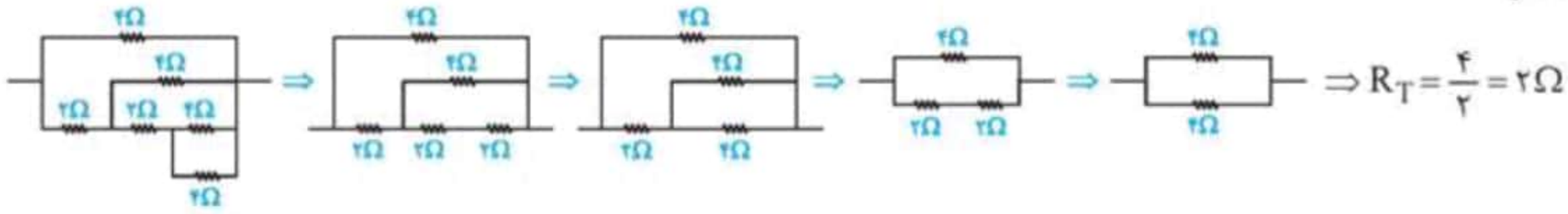
$$\frac{q_۱}{q_۲} = \frac{C_۱ V_۱}{C_۲ V_۲} = \frac{C\varepsilon}{C \times \frac{۱}{۳}\varepsilon} = ۳$$

* چون مقاومت درونی باتری برابر صفر است، ولتاژ دو سر باتری برابر ε است.

۴ ۱۸۲۳ ابتدا با نام‌گذاری مقاومت‌ها و گره‌ها، نقاط هم‌پتانسیل را مشخص کرده و مقاومت معادل مدار را به‌دست می‌آوریم:



باید دقت شود که در مدار ساده شده، مقاومت‌هایی که دو سر آن‌ها هم‌نام شده‌اند، به‌صورت موازی رسم می‌شوند. در ادامه مقاومت معادل مدار با توجه به شکل‌های زیر عبارت است از:



$$\Rightarrow R_T = \frac{۴}{۲} = ۲\Omega$$

محاسبهٔ ولتاژ دو سر خازن $\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۳}{۲ + ۱} = ۱A \Rightarrow V = RI = ۲ \times ۱ = ۲\,V$

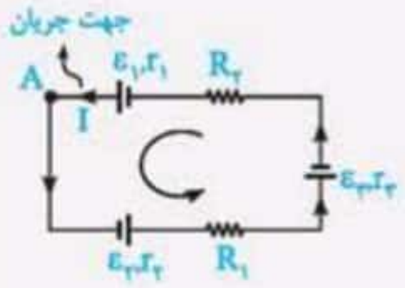
انرژی ذخیره شده در خازن: $U = \frac{۱}{۲}CV^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۳ \times ۲^۲ = ۲۶\mu J$

gajmarket.com

۳ ۱۸۲۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۹ **بررسی مدارهای تک‌حلقه با چند باتری** (تست‌های ۱۸۲۴ تا ۱۸۲۷)

در این خلاصه نکات می‌خواهیم به بررسی پارامترهای مختلف در یک مدار تک‌حلقه شامل چند باتری بپردازیم. به همین منظور مدار تک‌حلقهٔ زیر را در نظر بگیرید. قصد داریم اندازه و جهت جریان را در این مدار به‌دست آوریم. برای شروع فرض کنید مقدار جریان برابر I و در جهت نشان داده‌شده باشد. با حرکت از نقطهٔ A و در جهت فرضی جریان، یک دور کامل در مدار چرخیده و قانون پتانسیل‌نویسی را بررسی می‌کنیم:



$$V_A + \varepsilon_2 - r_2 I - R_1 I - \varepsilon_3 - r_3 I - R_2 I + \varepsilon_1 - r_1 I = V_A$$

$$-I(R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3) + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_1 = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_1}{(R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3)}$$

تذکر اگر $I > 0$ به‌دست آمد، یعنی جهت جریان را درست فرض کرده بودیم و اگر $I < 0$ به‌دست آمد، یعنی جهت جریان را برعکس در نظر گرفته‌ایم.

روشی سریع‌تر برای به‌دست آوردن جریان در مدار تک‌حلقه

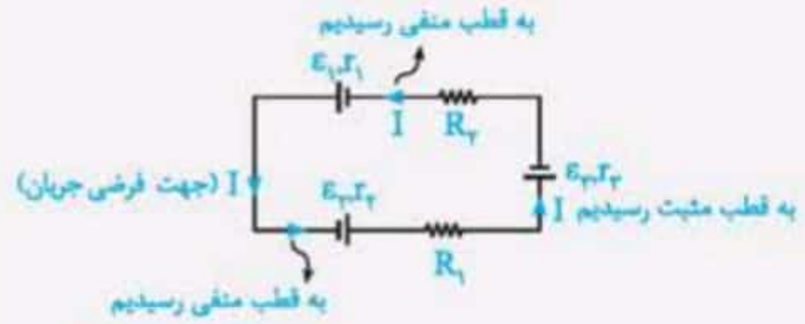
با الگوبرداری از رابطهٔ به‌دست آمده در فوق، برای به‌دست آوردن جریان در یک مدار تک‌حلقه و دارای چند باتری، می‌توان از رابطهٔ مقابل استفاده کرد:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R + r)}$$

که برای استفاده از رابطهٔ ارائه شده باید گام‌های زیر را طی کرد:

گام اول: یک جهت فرضی برای جریان در نظر می‌گیریم.

گام دوم: در رابطهٔ ارائه شده، نکتهٔ بسیار مهم آن است که ε دارای علامت است، به این صورت که برای حل، یک جریان فرضی در مدار در نظر می‌گیریم و در جهت آن در مدار حرکت می‌کنیم، به قطب منفی باتری رسیدیم، علامت مثبت برای ε آن باتری در نظر گرفته و به قطب مثبت باتری رسیدیم، علامت منفی برای ε آن باتری در نظر می‌گیریم:

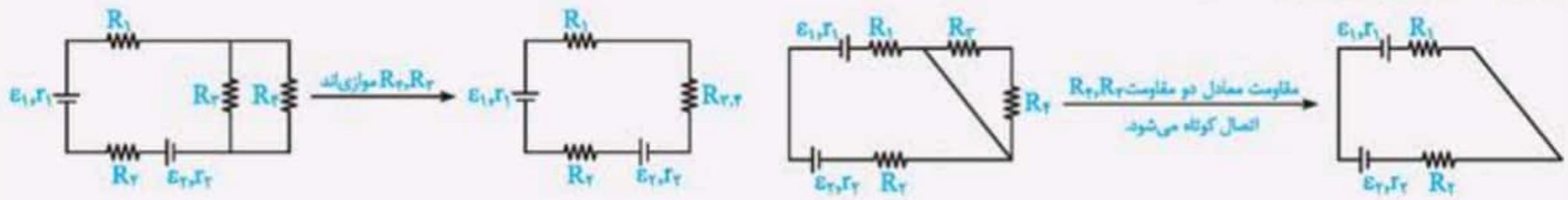


$$\Rightarrow I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R + r)} = \frac{+\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_1}{(R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3)}$$

گام سوم: اگر $I > 0$ به‌دست آمد، یعنی جهت جریان درست در نظر گرفته شده است و اگر $I < 0$ به‌دست آمد، یعنی جهت فرضی جریان را برعکس در نظر گرفته‌ایم.

تذکر اگر در یک مدار تک‌حلقه فقط دو باتری موجود باشد، جریان قطعاً از قطب مثبت باتری با نیروی محرکهٔ بزرگ‌تر خارج می‌شود.

بررسی یک موضوع کاربردی: گاهی اوقات با مدارهایی مواجه می‌شویم که به راحتی می‌توان آن‌ها را یک مدار تک‌حلقه تلقی کرد. به‌طور مثال هر یک از دو شکل زیر را می‌توان یک مدار تک‌حلقه دانست:

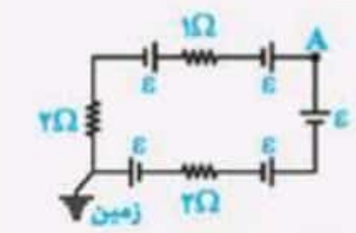


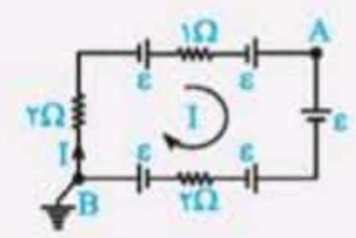
حال برای یادگیری بهتر مفاهیم این خلاصه نکات، به تمرین زیر توجه کنید:

تمرین ۱ **در مدار روبه‌رو، اگر مولدها مشابه و نیروی محرکهٔ هر یک ۲ ولت و مقاومت درونی آن‌ها ۱ اهم باشد:**

الف) مقدار جریان در حلقه چند آمپر و در چه جهتی است؟

ب) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A چند ولت است؟





پاسخ الف) با توجه به مدار مقابل، مشاهده می‌کنیم مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌هایی که می‌خواهند جریان ساعتگرد تولید کنند، بیشتر از مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌هایی است که قصد تولید جریان پادساعتگرد را دارند. بنابراین جریان در مدار ساعتگرد می‌باشد. اندازهٔ این جریان را می‌توانیم به دو روش محاسبه کنیم:

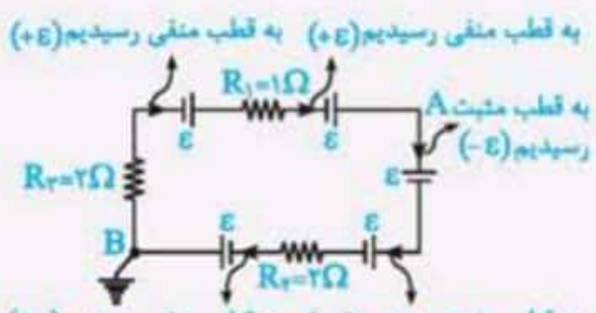
روش اول (روش پتانسیل‌نویسی): از نقطهٔ A شروع کرده و یک دور کامل در جهت جریان در مدار می‌چرخیم و قانون پتانسیل‌نویسی را بررسی می‌کنیم.

$$V_A - \varepsilon - rI - \varepsilon - rI - 2I + \varepsilon - rI - 2I + \varepsilon - rI - 1\times I + \varepsilon - rI = V_A$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon}{2+2+1+r+r+r+r+r} = \frac{2}{2+2+1+1+1+1+1+1} = 0/2\,A$$

روش دوم: این روش سریع‌تر بوده و مستقیم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R+r)} = \frac{-\varepsilon - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3 + r + r + r + r + r} = \frac{2}{1+2+2+1+1+1+1+1} = 0/2\,A$$



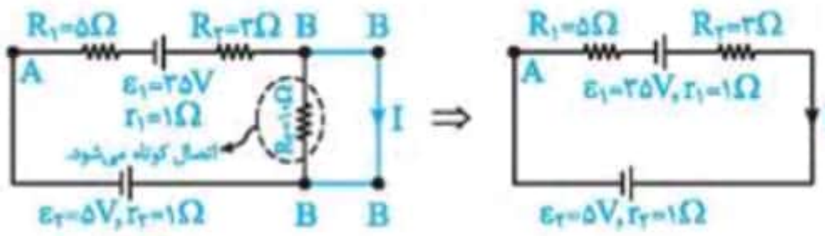
ب) اکنون در مدار، با حرکت از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ A در جهت جریان و نوشتن قانون ولتاژها، داریم:

$$V_B - 2I + \varepsilon - rI - 1I + \varepsilon - rI = V_A \Rightarrow V_B - 2\times 0/2 + 2 - 1\times 0/2 - 1\times 0/2 + 2 - 1\times 0/2 = V_A$$

$$V_B = 0 \xrightarrow{} V_A = +3\,V$$ نقطهٔ B به زمین متصل است.

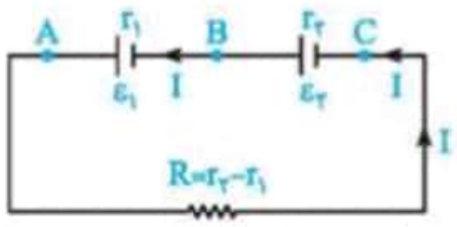
با توجه به شکل مدار، متوجه می‌شویم که مقاومت R_3 اتصال کوتاه شده است. بنابراین جریان I نشان داده‌شده بر روی شکل، جریان کل مدار می‌باشد.

چون $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ می‌باشد، بنابراین جریان در این مدار ساعتگرد (در جهت I نشان داده‌شده بر روی شکل) خواهد بود. بنابراین داریم:



$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R+r)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{35 - 5}{5 + 3 + 1 + 1} = 3\,A$$

۳ ۱۸۲۵ با توجه به اطلاعات سؤال، $r_1 < r_2$ و $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ است. ابتدا جریان مدار را به‌دست آورده و سپس بین نقاط مختلف عملیات پتانسیل‌نویسی را اجرا می‌کنیم:



$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{\varepsilon + \varepsilon}{r_1 + r_2 + (r_2 - r_1)} = \frac{\varepsilon}{r_2}$$

اختلاف پتانسیل A و C برابر RI بوده و صفر نمی‌شود. حال وضعیت B و C و در ادامه وضعیت A و B را بررسی می‌کنیم:

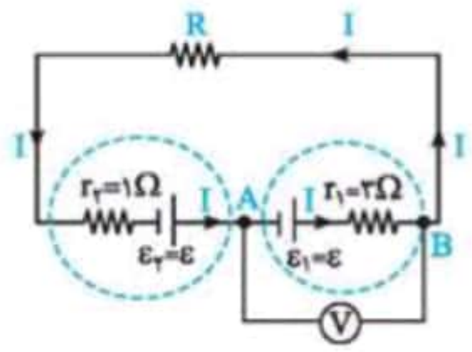
$$V_C + \varepsilon_2 - r_2 I = V_B \xrightarrow[\varepsilon_2 = \varepsilon]{I = \frac{\varepsilon}{r_2}} V_C - V_B = -\varepsilon + r_2 \times \frac{\varepsilon}{r_2} = 0$$

بنابراین اختلاف پتانسیل B و C صفر شده و اختلاف پتانسیل A و B را بررسی می‌کنیم:

$$V_B + \varepsilon_1 - r_1 I = V_A \Rightarrow V_B - V_A = -\varepsilon + r_1 I \Rightarrow V_B - V_A = -\varepsilon + r_1 \times \frac{\varepsilon}{r_2}$$

بنابراین تنها اختلاف پتانسیل بین B و C صفر است.

۳ ۱۸۲۶ با توجه به این‌که ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مولد (۱) را نشان می‌دهد، داریم:

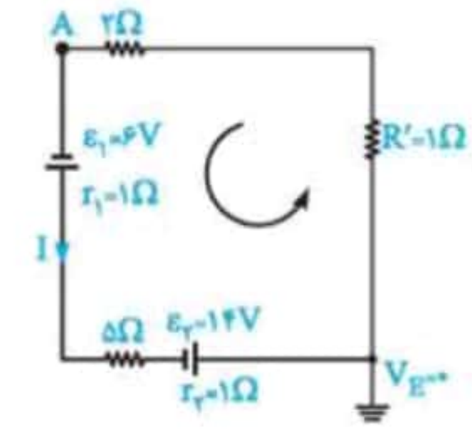


$$V_A + \varepsilon_1 - r_1 I = V_B \Rightarrow V_B - V_A = \varepsilon - rI \Rightarrow 0 = \varepsilon - 3I \Rightarrow \varepsilon = 3I$$

حال با استفاده از رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ جریان در مدار تک حلقه می‌توان نوشت:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R+r)} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{3I + 3I}{R + 3 + 1} \Rightarrow I = \frac{6I}{R+4} \Rightarrow R + 4 = 6 \Rightarrow R = 2\Omega$$

۴ ۱۸۲۷ دو مقاومت $1/5\Omega$ و 3Ω با هم موازی‌اند $\left(R' = \frac{1/5\times 3}{1/5+3} = 1\Omega\right)$ و برای محاسبهٔ جریان داریم:



$$\Rightarrow I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R+r)} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_1 + 5 + r_2 + R' + 2} = \frac{6 + 14}{1 + 5 + 1 + 1 + 2} = 2\,A$$

در ادامه با حرکت از نقطهٔ E تا A و با توجه به این‌که پتانسیل نقطهٔ E برابر صفر است، داریم:

$$V_E - R'I - 2I = V_A \Rightarrow 0 - 1\times 2 - 2\times 2 = V_A \Rightarrow V_A = -6\,V$$

gajmarket.com

پایه یازدهم

مغناطیس و القای الکترومغناطیسی

فصل سوم

تعداد تست	عنوان	صفحه
۱	آشنایی با میدان مغناطیسی و بررسی میدان مغناطیسی در اطراف یک آهنربا	۴۵۶
۲	بررسی خاصیت مغناطیسی مواد	۴۶۲
۳	میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست و بلند حامل جریان	۴۶۳
۴	میدان مغناطیسی در مرکز یک پیچهٔ مسطح	۴۷۱
۵	میدان مغناطیسی در یک سیملولهٔ حامل جریان	۴۷۳
۶	نیروی وارد بر سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی	۴۷۸
۷	نیرویی که سیم‌های موازی حامل جریان بر یک دیگر وارد می کنند	۴۸۴
۸	نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی	۴۸۸
۹	مفاهیم شار و تغییر شار	۵۰۴
۱۰	قانون القای فاراده	۵۰۶
۱۱	ویژگی‌های نمودار شار- زمان و نیرو محرکهٔ القایی- زمان	۵۱۲
۱۲	محاسبهٔ بار الکتریکی جاری شده در اثر تغییر شار	۵۱۶
۱۳	قانون لنز	۵۱۷
۱۴	نیروی محرکهٔ القایی ایجاد شده در یک سیم متحرک در میدان مغناطیسی یکنواخت	۵۲۶
۱۵	سیملوله (محاسبهٔ شار عبوری و انرژی ذخیره شده)	۵۳۱
۱۶	آشنایی با خودالقاوری و القای متقابل	۵۳۵
۱۷	جریان متناوب و معادلات مرتبط با آن	۵۳۸
۱۸	مبدل ها	۵۴۵

۴ ۱۸۲۸ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

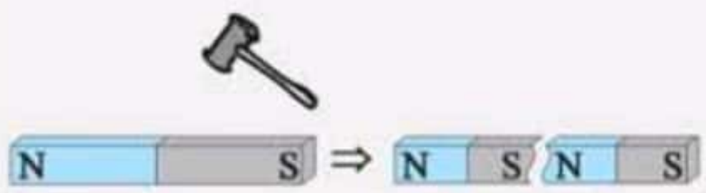
خلاصه نکات ۱ **آشنایی با میدان مغناطیسی و بررسی میدان مغناطیسی در اطراف یک آهنربا** (تست‌های ۱۸۲۸ تا ۱۸۵۰)

۱- مفاهیم اولیه

تالس در بیش از ۲۵۰۰ سال پیش، با پدیدهٔ آهنربایی آشنا بود و مادهٔ کانی مگنتیت (Fe_3O_4) را می‌شناخت. امروزه آهنرباها در بسیاری از وسایل الکتریکی کاربرد وسیعی دارند.

حال بیایید با یک آهنربا بیشتر آشنا شویم. احتمالاً مشاهده کرده‌اید که با نزدیک کردن آهنربا به یک میخ آهنی، میخ جذب آهنربا می‌شود. در این‌جا می‌خواهیم به بررسی عوامل مرتبط با این پدیده بپردازیم. برای درک بهتر این موضوع به موارد زیر توجه کنید:

۱) خاصیت آهنربایی در دو قسمت یک آهنربا بیشتر از سایر نواحی آن است که آن دو قسمت را قطب‌های N و S می‌نامیم که این موضوع در آهنربای میله‌ای مقابل نشان داده شده است.

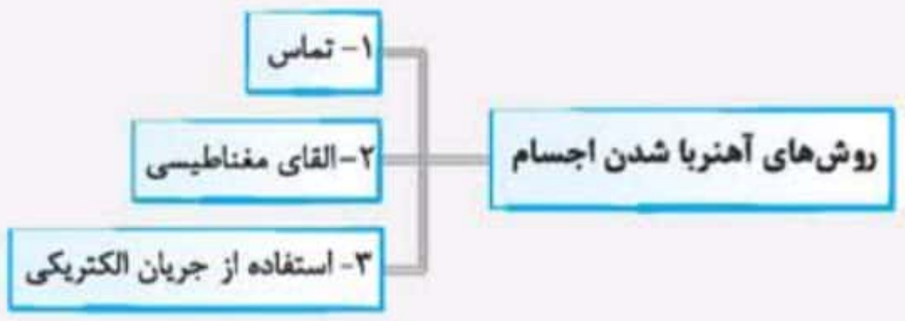


۲) تمامی آهنرباها لزوماً دو قطب N و S را دارند و این موضوع یعنی در طبیعت یک قطب S تنها و یا یک قطب N تنها وجود ندارد (به بیان دقیق‌تر تک‌قطبی مغناطیسی در طبیعت وجود ندارد).

۳) قطب‌های هم‌نام دو آهنربا یک‌دیگر را دفع و قطب‌های ناهم‌نام دو آهنربا یک‌دیگر را جذب می‌کنند.

۲- روش‌های آهدربا شدن اجسام

با توجه به کتاب درسی، سه روش برای آهنربا شدن اجسام وجود دارد که عبارتند از:

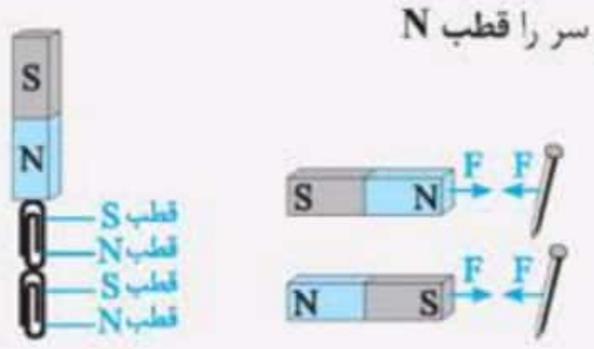


روش ۱ (تماس): هنگامی که یک آهنربای دائم برای چندین بار و در یک جهت به یک میلهٔ آهنی (مانند یک سوزن خیاطی یا سوزن ته گرد) کشیده شود (آهنربا از A تا B کشیده شود، سپس در B از سوزن جدا شود و مجدداً از A تا B کشیده شود)، میله نیز برای مدتی آهنربا می‌شود.



نکته جالب است بدانید اگر این میله را به آرامی روی سطح آب درون ظرفی شناور کنیم، یا آن را توسط ریسمانی از مرکزش بیاویزیم که بتواند آزادانه بچرخد، یک سر آن تقریباً به سوی شمال جغرافیایی قرار می‌گیرد که این سر را **قطب N** و سر دیگر را **قطب S** می‌نامند.

روش ۲ (جاذبه به روش القای مغناطیسی): شکل مقابل را درنظر بگیرید، در این شکل با نزدیک کردن آهنربا به چند گیرهٔ فلزی، در فلز خاصیت آهنربایی القا شده و جذب آهنربا می‌شود.



تذکر۱ در پدیدهٔ القای مغناطیسی همواره **جذب** وجود دارد.

تذکر۲ بد نیست که به قطب‌های تشکیل‌شده در گیره‌های فلزی نیز دقت کنید. قطب‌های تشکیل شده به گونه‌ای است که جذب ایجاد شود.

تذکر۳ اگر یک آهنربا را به یک میلهٔ شیشه‌ای نزدیک کنیم، جاذبه و دافعه‌ای به‌وجود نمی‌آید، زیرا خطوط میدان مغناطیسی از شیشه عبور کرده و در آن خاصیت مغناطیسی ایجاد نمی‌کنند.

روش ۳ (استفاده از جریان الکتریکی): این کار با کمک سیملوله انجام می‌شود که در ادامهٔ فصل آن را بررسی خواهیم کرد.

۳- میدان مغناطیسی و خطوط میدان مغناطیسی

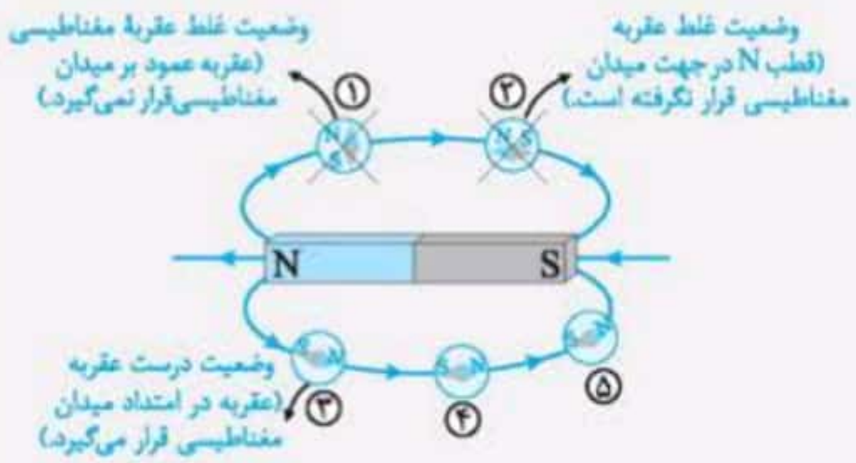
همان‌طور که مشاهده کردید با نزدیک کردن آهنربا به یک جسم فلزی، فلز جذب آن می‌شود، علت این موضوع آن است که آهنربا در فضای اطراف خود خاصیتی را ایجاد می‌کند که به آن میدان مغناطیسی می‌گویند. مشابه با میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی نیز کمیتی برداری بوده و برای نمایش آن، خطوط میدان مغناطیسی را نشان می‌دهیم. در مورد خطوط میدان مغناطیسی، نکات اشاره شده در صفحهٔ بعد حائز اهمیت است:

gajmarket.com

۱ در بیرون یک آهنربا، خطوط میدان مغناطیسی از قطب N خارج شده و به قطب S وارد می‌شوند.

۲ در داخل یک آهنربا، خطوط میدان مغناطیسی از قطب S به سمت قطب N هستند.

۳ خطوط میدان مغناطیسی همواره خطوط بسته‌ای هستند، یعنی همواره از یک قطب N خارج‌شده و به یک قطب S وارد می‌شوند. این موضوع یعنی در طبیعت یک قطب S تنها و یا یک قطب N تنها وجود ندارد و به‌عبارتی تک‌قطبی مغناطیسی وجود ندارد که خطوط میدان ناشی از آن بتواند فرم غیربسته را به خود بگیرد.



۴ اگر در اطراف یک آهنربا یک عقربهٔ مغناطیسی قرار دهیم، عقربهٔ مغناطیسی در هر نقطه مماس بر خطوط میدان مغناطیسی قرار گرفته و قطب N عقربهٔ مغناطیسی جهت خطوط میدان مغناطیسی را در آن نقطه نشان می‌دهد.

۵ خطوط میدان مغناطیسی یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند.

نکته برای تعیین جهت میدان مغناطیسی حاصل از چند آهنربا در یک نقطه، یک قطب N فرضی در آن نقطه قرار می‌دهیم، جهت برایند نیروهای وارد بر این قطب فرضی، جهت میدان مغناطیسی در آن نقطه را به ما می‌دهد. در ادامه با حل یک تمرین، این موضوع را بیشتر بررسی می‌کنیم.

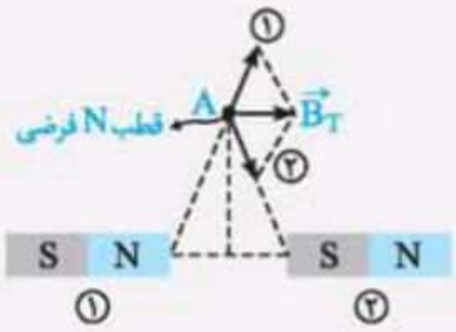
تمرین۱ در شکل زیر، جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ A حاصل از اثر دو آهنربای مشابه نشان داده شده، به کدام سمت می‌باشد؟ (نقطهٔ A روی عمودمنصف پاره‌خط وصل‌کنندهٔ بین قطب‌ها است.)



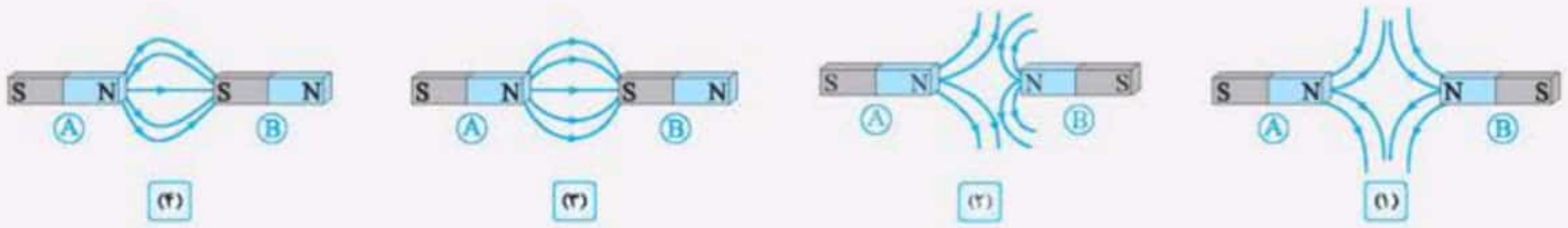
۱) → ۲) ←

۳) ↑ ۴) ↓

پاسخ برای این منظور، یک قطب N فرضی در نقطهٔ A قرار می‌دهیم. در ادامه همان‌طور که مشاهده می‌کنید، قطب N آهنربای (۱) قطب N فرضی را دفع کرده و قطب S آهنربای (۲)، قطب N فرضی را جذب می‌کند و میدان برایند در جهت نشان داده شده است. دقت شود که چون دو آهنربا مشابه و فاصلهٔ نقطهٔ A از دو آهنربا یکسان بوده، میدان‌های (۱) و (۲) هم‌اندازه بوده و میدان برایند به‌صورت نشان داده شده است و گزینهٔ (۱) صحیح است.



نکتهٔ بسیار کاربردی: به شکل‌های زیر با دقت نگاه کنید:



در مورد این چهار شکل، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱ با نگاه کردن به این چهار شکل، می‌توان فهمید که میدان مغناطیسی در خارج از آهنربا، لزوماً از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شود.

۲ در شکل‌های (۱) و (۳)، خطوط میدان مغناطیسی حالت کاملاً متقارن دارند و این موضوع نشان‌دهندهٔ آن است که در هریک از این شکل‌ها قدرت آهنرباهای A و B با یک‌دیگر برابر است.

۳ در شکل (۲) خطوط میدان مغناطیسی ناشی از آهنربای A، فضای بیشتری را نسبت به آهنربای B اشغال کرده است (به بیان دیگر خطوط آهنربای B نسبت به A بیشتر منحرف شده‌اند)، این موضوع نشان‌دهندهٔ آن است که آهنربای A نسبت به B از قدرت بیشتری برخوردار است.

۴ در شکل (۴) نیز اتفاقی مشابه با شکل (۲) رخ داده است. در این شکل خطوط اطراف آهنربای B فضای بیشتری را نسبت به A اشغال کرده‌اند (خطوط A نسبت به B بیشتر منحرف شده‌اند)، این موضوع یعنی آهنربای B نسبت به A، قدرت بیشتری دارد.

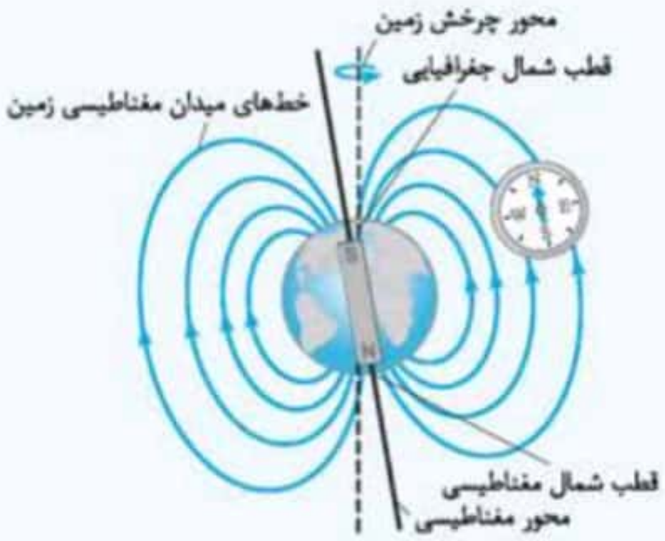
۴- میدان مغناطیسی زمین

کرهٔ زمین، مانند یک آهنربا است که قطب جنوب جغرافیایی آن تقریباً معادل با قطب N و قطب شمال جغرافیایی آن تقریباً معادل با قطب S می‌باشد و میدان مغناطیسی زمین در فضای اطراف آن از جنوب به شمال است. این نکته در پاسخ دادن به بسیاری از سؤالات این فصل کاربرد زیادی دارد. در این حالت نوک N از عقربهٔ مغناطیسی به سمت شمال متمایل می‌شود.



(شکل تقریبی)

نگاه دقیق‌تر بر میدان مغناطیسی زمین



مشاهدات نشان می‌دهد که قطب‌های مغناطیسی N و S زمین، بر قطب‌های جغرافیایی آن منطبق نیستند. در واقع، قطب‌های مغناطیسی و جغرافیایی زمین از یک‌دیگر فاصله دارند. مثلاً قطب S (قطب جنوب مغناطیسی) تقریباً در فاصلهٔ ۱۸۰۰ کیلومتری قطب شمال جغرافیایی قرار دارد. این بدان معناست که نوک N از عقربهٔ مغناطیسی قطب‌نما دقیقاً در جهت شمال واقعی جغرافیایی قرار نمی‌گیرد (به شکل روبه‌رو توجه کنید) و تا حدودی از شمال جغرافیایی انحراف دارد. طرح ساده‌ای از میدان مغناطیسی زمین که عقربهٔ مغناطیسی قطب‌نما در هر نقطه در امتداد این خط‌های میدان قرار می‌گیرد، در شکل مقابل نشان داده شده است. توجه شود که نشان دادن خط‌های میدان مغناطیسی زمین به صورت خط‌های میدان یک آهنربای میله‌ای، تنها یک توجیه ساده از ساختار پیچیده و ناشناختهٔ عوامل ایجاد میدان مغناطیسی در زمین است.

شیب مغناطیسی: وقتی یک آهنربای میله‌ای را از وسط آن آویزان می‌کنیم، در بیشتر نقاط زمین به طور افقی قرار نمی‌گیرد و امتداد آن با سطح افقی زمین زاویه می‌سازد. به این زاویه، **شیب مغناطیسی** گفته می‌شود.

تمرین۲ **چگونه با یک آزمایش ساده، می‌توان شیب مغناطیسی در نقاط مختلف زمین را پیدا کرد؟**

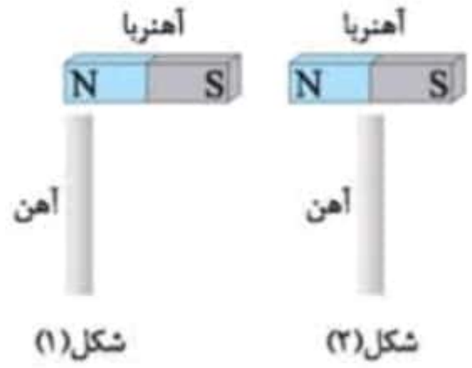
پاسخ برای یافتن شیب مغناطیسی در محلی که زندگی می‌کنید، ابتدا یکی از قطب‌های یک آهنربای دائم را چندین بار و در یک جهت به یک سوزن ته‌گرد مالش دهید. آن‌گاه سوزن مغناطیسی‌شده را درست از وسط، با نخی ببندید و آن را آویزان کنید. پس از تعادل، به کمک نقاله، زاویه‌ای که امتداد سوزن با راستای افق می‌سازد، شیب مغناطیسی محل زندگی شماست.



نکته میزان انحراف نوک عقربه از قطب شمال جغرافیایی، به مکان عقربه وابسته بوده و واضح است که هرچه از استوا به سمت قطب‌ها حرکت کنیم، میدان مغناطیسی افزایش یافته و این انحراف (α) بزرگ‌تر می‌شود (برای درک بهتر به شکل مقابل توجه کنید).

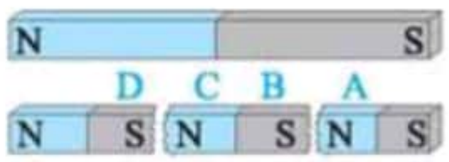
همان‌طور که در خلاصه نکات فوق به آن اشاره کردیم، خطوط میدان مغناطیسی منحنی‌های بسته‌ای هستند که جهت این خطوط در خارج از آهنربای میله‌ای، از قطب N به قطب S و در داخل آهنربا، از قطب S به قطب N می‌باشد و از طرفی تک‌قطبی مغناطیسی در طبیعت وجود ندارد. بنابراین گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

۲ ۱۸۲۹ با توجه به این‌که خاصیت مغناطیسی در قطب‌های آهنربا بیشتر از سایر نقاط آن است، بنابراین نیروی ربایش بین آهن و آهنربا در حالتی‌که آهن در نزدیکی قطب‌های آهنربا قرار دارد، بیشترین مقدار بوده و هنگامی‌که میله در وسط قرار دارد، کم‌ترین مقدار را دارد (نیروی جاذبهٔ بین آهن و آهنربا در شکل (۱) بیشتر از شکل (۲) می‌باشد) و این یعنی ربایش بین آهن و آهنربا تغییر می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

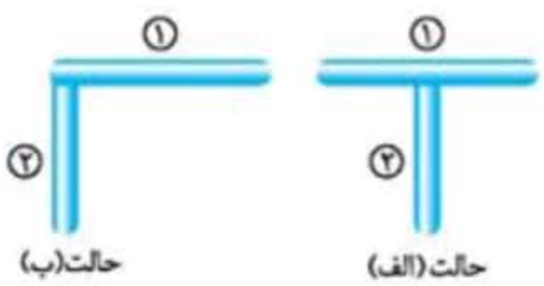


دقت: با توجه به خلاصه نکات (۱)، سه گزینهٔ دیگر صحیح می‌باشد.

۱ ۱۸۳۰ با توجه به این‌که در طبیعت تک‌قطبی مغناطیسی وجود ندارد، هریک از قطعه‌های جدید نیز خود باید یک آهنربای جدید باشند. دقت کنید که عملاً قطب‌های A و B باید یک‌دیگر را جذب کنند تا پس از در کنار یک‌دیگر قرار گرفتن آن‌ها، آهنربای اصلی به‌وجود بیاید.



۲ ۱۸۳۱ اگر فرض کنیم که میلهٔ (۱) آهنربا باشد، خاصیت مغناطیسی در قطب‌های آن (کناره‌های آن) باید بیشتر از نقاط دیگرش باشد، بنابراین قدرت جاذبهٔ مغناطیسی در شکل (ب) باید بیشتر از شکل (الف) باشد که این اتفاق رخ نداده است و طبق صورت سؤال، این نیروی جاذبه در دو شکل برابر است. رخ دادن این موضوع یعنی میلهٔ (۱) آهن و میلهٔ (۲) آهنربا بوده است و با کشیدن آن‌ها بر روی یک‌دیگر، میزان ربایش بین آن‌ها تغییر نکرده است. دقت کنید که با کمک این آزمایش، قطب‌های آهنربا قابل تشخیص نمی‌باشد، زیرا قطب N و قطب S آهنربا، هر دو میلهٔ آهنی را جذب می‌کنند.



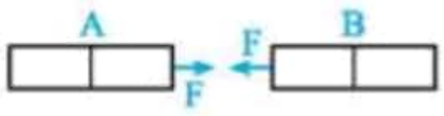
gajmarket.com

۲ ۱۸۳۲ برای پاسخ دادن به این سؤال جالب و مفهومی، به این موضوع توجه کنید که خاصیت القا همواره در مغناطیس به‌صورت جاذبه ظاهر می‌شود، یعنی همیشه آهنربا آهن را جذب می‌کند و این موضوع ارتباطی ندارد که کدام قطب آن را به آهن نزدیک کنیم. با توجه به این موضوع می‌توان گفت:

۱) با توجه به این‌که میلهٔ A میلهٔ C را دفع می‌کند، بنابراین هر دو لزوماً آهنربا می‌باشند و قطعاً از سر قطب‌های هم‌نامشان به هم نزدیک شده‌اند.



۲) میلهٔ A میلهٔ B را جذب می‌کند، با توجه به این موضوع می‌توان گفت میلهٔ B ممکن است آهنربایی باشد که از سر قطب ناهم‌نام با میلهٔ A به آن نزدیک می‌شود و یا این‌که میلهٔ B، یک میلهٔ آهنی باشد که در اثر پدیدهٔ القا جذب میلهٔ A می‌شود.

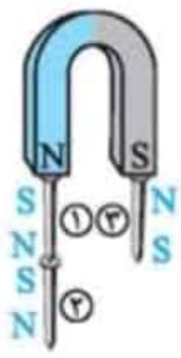


با توجه به این توضیحات، گزینهٔ (۲) عبارت نادرستی است.

۳ ۱۸۳۳ با توجه به دو نکتهٔ زیر، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱) پدیدهٔ القای مغناطیسی فقط در اجسام فلزی رخ می‌دهد. بنابراین کرهٔ فلزی جذب آهنربا می‌شود ولی کرهٔ شیشه‌ای منحرف نمی‌شود (به بیان دیگر خطوط میدان مغناطیسی از شیشه عبور می‌کنند).

۲) پدیدهٔ القای مغناطیسی همواره به‌صورت جاذبه ظاهر می‌شود.

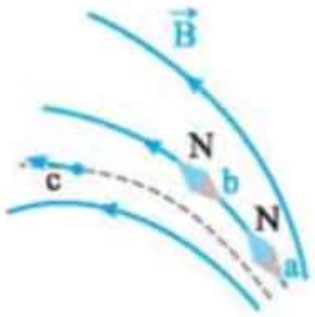


۲ ۱۸۳۴ در مورد این سؤال، می‌توان گفت که قطب‌های آهنربا و میخ‌های (۱) و (۲) به شکل مقابل است (دقت شود که اساس کار آن است که باید بین قطب‌های کنار هم، جاذبه به‌وجود آید):

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم. گزینهٔ (۱) عبارت درستی بوده و روش جاذبه در این سؤال از نوع القا می‌باشد. از طرفی با انطباق شکل مقابل با شکل صورت سؤال، می‌توان فهمید که گزینهٔ دوم عبارت نادرستی بوده و گزینهٔ (۳) عبارت درستی می‌باشد. هم‌چنین هرچه از آهنربا دور می‌شویم، میخ‌ها آهنربای ضعیف‌تری می‌شوند.

۳ ۱۸۳۵ در شکل نشان داده شده، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

بررسی گزارهٔ الف: قطب N عقربهٔ مغناطیسی در جهت خطوط میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. با توجه به این موضوع، در نقطهٔ a زاویهٔ عقربهٔ مغناطیسی با افق، نسبت به b بزرگ‌تر است.



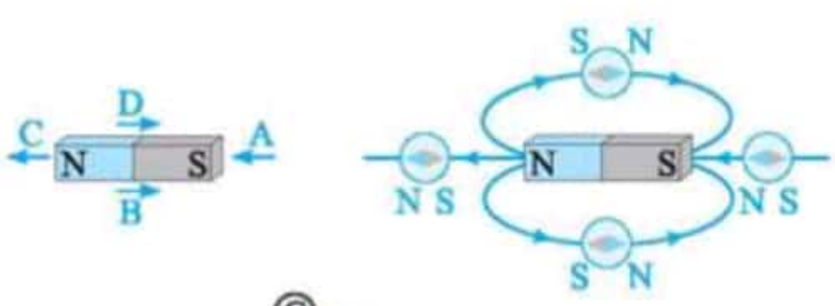
بررسی گزارهٔ ب: وضعیت عقربهٔ مغناطیسی در b به شکل  می‌باشد.

بررسی گزارهٔ پ: این میدان مغناطیسی فرم یکنواخت ندارد و اندازهٔ میدان مغناطیسی در a و b برابر نمی‌باشد. هم‌چنین می‌توان گفت در a تراکم خطوط میدان بیشتر بوده و میدان مغناطیسی بزرگ‌تر است.

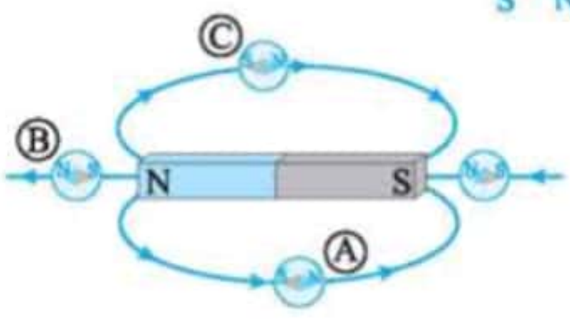
بررسی گزارهٔ ت: برای ترسیم جهت میدان در c، می‌توان یک خط میدان فرضی ترسیم کرد. جهت میدان در هر نقطه، مماس بر خطوط میدان می‌باشد.

بنابراین گزاره‌های (ب) و (پ) نادرست بوده و گزاره‌های (الف) و (ت) صحیح می‌باشند.

۱ ۱۸۳۶ با توجه به شکل مقابل، تنها عقربهٔ A در گزینه‌های این سؤال، وضعیت میدان مغناطیسی را درست نشان می‌دهد:



۱ ۱۸۳۷ با توجه به شکل مقابل، قطب‌های X و Y، به ترتیب N و S هستند و وضعیت سه عقربهٔ دیگر به صورت نشان داده شده است:

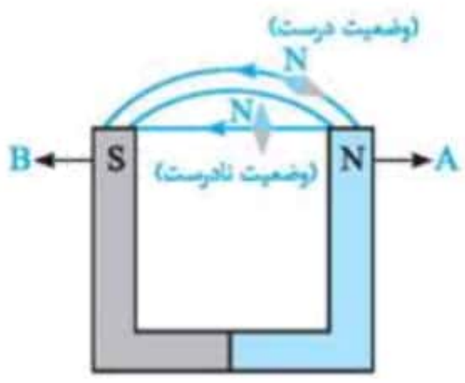


A: →

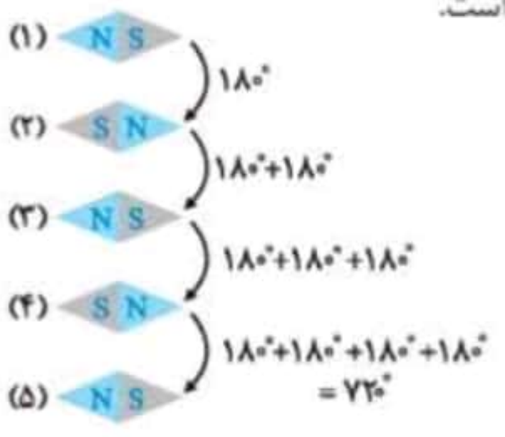
B: ←

C: →

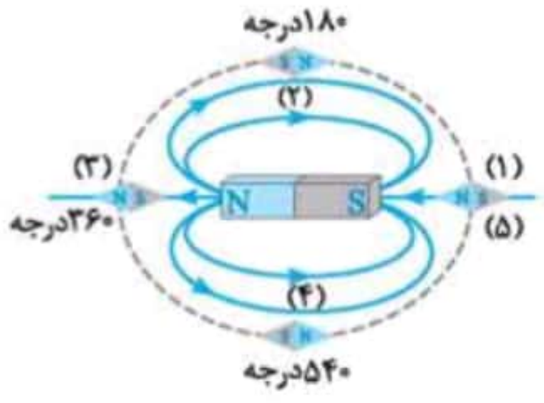
۲ ۱۸۳۸ در اطراف آهنربای نعلی‌شکل نیز، خطوط میدان مغناطیسی از قطب N خارج شده و به قطب S وارد می‌شوند و این یعنی A قطب N و B قطب S است. از سوی دیگر، قطب N عقربه در جهت خطوط میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد و عقربهٔ (۱) وضعیت صحیح عقربه در اطراف آهنربا را نشان می‌دهد، شایان ذکر است که قطب N عقربه، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار نمی‌گیرد. 

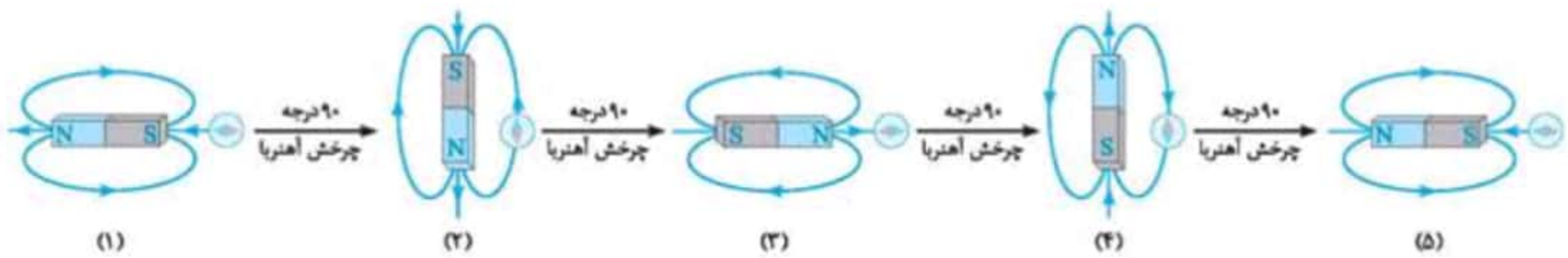


۴ ۱۸۳۹ با توجه به شکل زیر و ۵ وضعیت نشان داده شده بر روی آن، عقربه با یک دور چرخیدن بر روی دایره، ۷۲۰ درجه حول محور خود می‌چرخد، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.



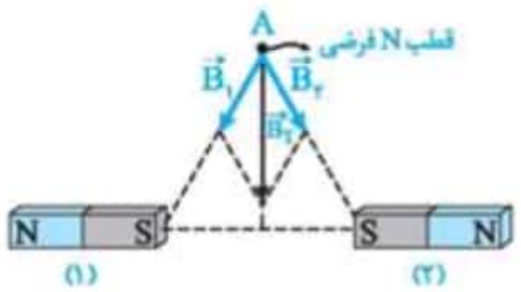
۳ ۱۸۴۰ در سؤال قبل، اگر آهنربا ۳۶۰ درجه حول محور خود می‌چرخید و محل عقربه ثابت بود، آن‌گاه در عقربه نیز ۳۶۰ درجه چرخش مشاهده می‌شد. برای درک این موضوع، به تصاویر زیر توجه کنید:



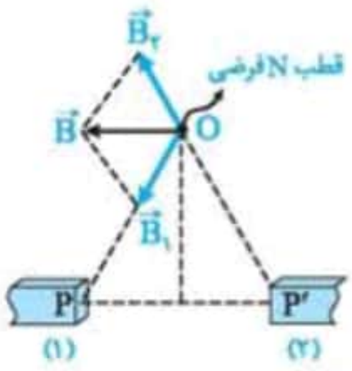




۱ ۱۸۴۱ برای تعیین جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ A، یک قطب N فرضی در نقطهٔ A درنظر می‌گیریم، قطب‌های S نشان داده شده این قطب را جذب می‌کنند و میدان برایند مطابق شکل مقابل است (دقت شود که در این روش باید تأثیر قطب نزدیک‌تر به A را در نقطهٔ A درنظر بگیریم، یعنی از تأثیر قطب‌های دورتر صرف‌نظر می‌کنیم).



۴ ۱۸۴۲ ابتدا یک قطب N از یک آهنربای فرضی را در نقطهٔ O درنظر بگیرید. با توجه به جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ O، میدان‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ که برایند آن‌ها $\vec{B}$ را ساخته است، مطابق شکل زیر می‌باشد:

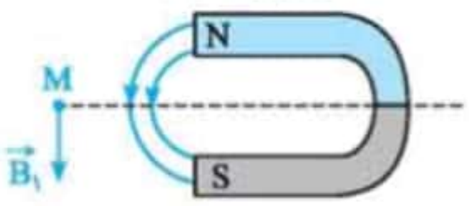


قطب P، قطب S بوده است، چرا؟ ⇐ زیرا قطب N را در O جذب کرده است.

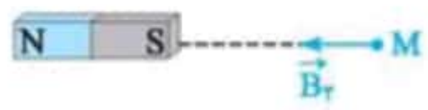
قطب P′، قطب N بوده است، چرا؟ ⇐ زیرا قطب N را در O دفع کرده است.

هم‌چنین با توجه به این‌که بردار برایند $\vec{B}$ بر روی نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ قرار دارد (و به همین دلیل افقی شده است)، بنابراین دو بردار $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ از لحاظ اندازه با هم برابر می‌باشند و با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ نقطهٔ O از دو قطب P و P′، قطب‌های P و P′ از نظر قدرت مغناطیسی مشابه یک‌دیگر هستند (مثلاً می‌توان گفت دو قطب غیرهم‌نام از دو آهنربای مشابه هستند).

۲ ۱۸۴۳ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

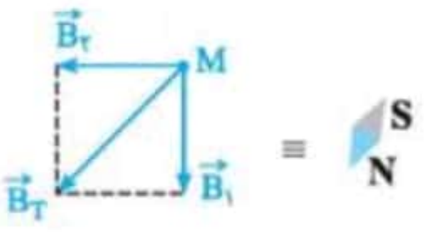


گام اول: میدان آهنربای نعلی شکل در نقطهٔ M، با توجه به وضعیت خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آن، به سمت پایین است (مماس بر خطوط میدان).



گام دوم: میدان آهنربای میله‌ای در نقطهٔ M به سمت چپ می‌باشد (میدان مغناطیسی به S وارد می‌شود).

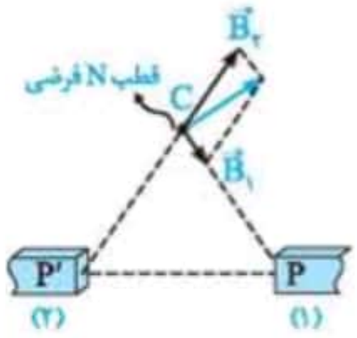
گام سوم: با توجه به جهت میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$، جهت میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ M به صورت زیر است:



$\equiv$

(وضعیت عقربه در M)

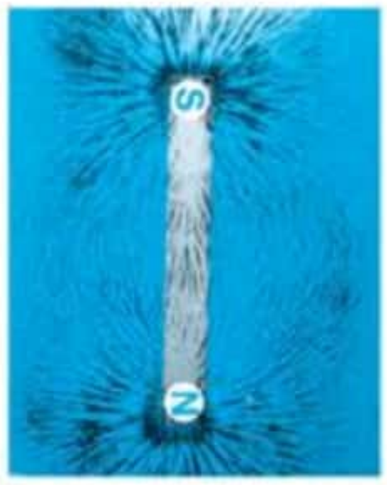
gajmarket.com



۳ ۱۸۴۴ مشابه با سؤالات بررسی شده، با درنظر گرفتن یک قطب N فرضی در نقطهٔ C، می‌توان فهمید که P قطب S و P' قطب N می‌باشد (چرا؟).

حال با توجه به این‌که بردار برایند به بردار $\vec{B}_2$ نزدیک‌تر می‌باشد، می‌توان فهمید که بردار $\vec{B}_2$ بزرگ‌تر از $\vec{B}_1$ بوده و در نتیجه قطب P' قوی‌تر از قطب P می‌باشد.

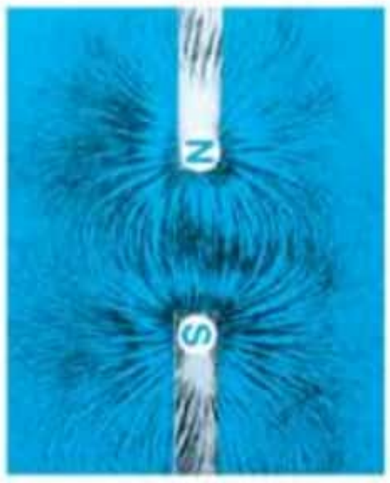
۴ ۱۸۴۵ به شکل‌های زیر که از کتاب درسی آورده شده است، توجه کنید. با توجه به شکل (ب)، گزینهٔ (۴) شکل خطوط میدان مغناطیسی را بر روی صفحه، در حالتی‌که قطب‌های هم‌نام دو آهنربا در مجاورت یک‌دیگر هستند، نشان می‌دهد. وضعیت براده‌ها در حالت‌های مختلف، در شکل‌های زیر نشان داده شده است (دقت شود که براده‌ها در راستای خطوط میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند):



(الف) آهنربای میله‌ای

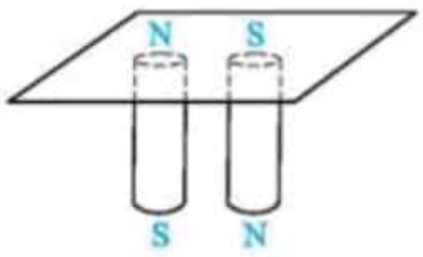


(ب) دو آهنربای میله‌ای که قطب‌های هم‌نام‌شان نزدیک یک‌دیگر است.



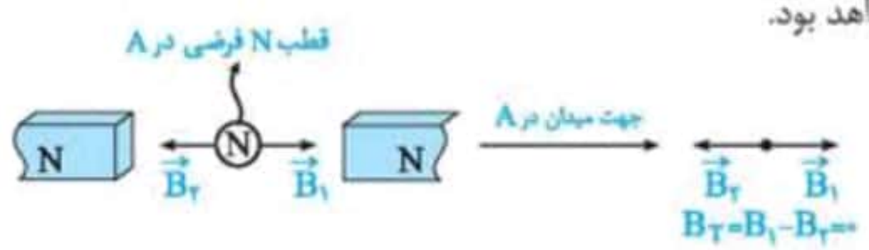
(پ) دو آهنربای میله‌ای که قطب‌های غیر هم‌نام‌شان نزدیک یک‌دیگر است.

خط‌های میدان مغناطیسی دو آهنربا در وضعیت‌های مختلف

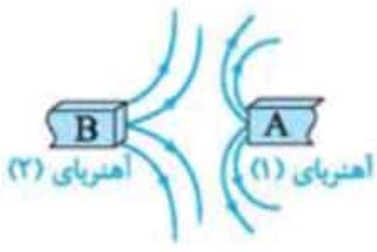


تمرین در شکل مقابل، براده‌های آهن بر روی کاغذ، به صورت کدام‌یک از گزینه‌های این سؤال ظاهر می‌شود؟

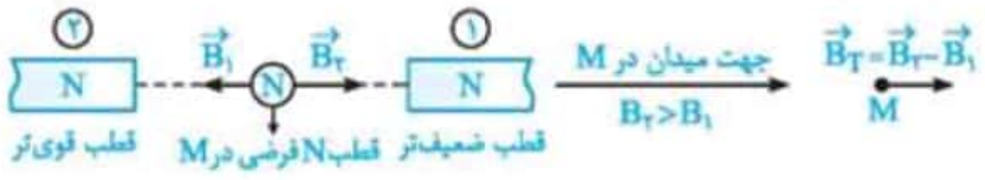
۴ ۱۸۴۶ با توجه به یکسان بودن دو آهنربا، اگر یک قطب N فرضی در نقطهٔ A در نظر بگیریم، به دلیل یکسان بودن فاصلهٔ نقطهٔ A از دو آهنربا، میدان مغناطیسی برایند در این نقطه صفر خواهد بود.



۳ ۱۸۴۷ میدان مغناطیسی از هر دو قطب A و B خارج شده و در نتیجه هر دو قطب A و B، قطب N محسوب می‌شوند. از طرفی با توجه به شکل، چون خطوط میدان مغناطیسی قطب B، فضای بزرگ‌تری را در اطراف آهنربای B تحت تأثیر قرار داده‌اند، قطب B از A قوی‌تر است (به‌عبارت دیگر چون خطوط میدان مغناطیسی B انحراف کم‌تری دارند، بنابراین این قطب قوی‌تر از قطب A است).



۱ ۱۸۴۸ در سؤال قبل فهمیدیم که A و B هر دو قطب‌های N هستند و قدرت قطب B در سمت چپ از قطب A در سمت راست بیشتر است. برای تعیین جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ M، یک قطب N فرضی را در این نقطه قرار می‌دهیم و داریم:



دقت شود که فاصلهٔ نقطهٔ M از دو قطب یکسان است و می‌توان گفت آهنربای قوی‌تر، میدان بزرگ‌تری در نقطهٔ M ایجاد می‌کند.

۲ ۱۸۴۹ با توجه به مطالب ارائه‌شده در خلاصه نکات (۱)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳ ۱۸۵۰ با توجه به توضیحات مطرح شده در خلاصه نکات (۱)، شدت میدان مغناطیسی و زاویهٔ انحراف عقربهٔ مغناطیسی نسبت به جهت شمال، در نزدیکی قطب شمال بیشتر از استوا می‌باشد.

۱۸۵۱ ۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲ **بررسی خاصیت مغناطیسی مواد** (تست‌های ۱۸۵۱ تا ۱۸۶۱)

برای آشنا شدن با انواع مواد معرفی‌شده در کتاب درسی، به نمودار درختی زیر توجه کنید:



نکات مهم و کاربردی

۱ مواد غیرمغناطیسی از خود خاصیت مغناطیسی نشان نمی‌دهند و خطوط میدان مغناطیسی از آن‌ها عبور می‌کند.

۲ در مواد مغناطیسی، اتم‌ها و یا مولکول‌های سازندهٔ ماده مانند دوقطبی مغناطیسی رفتار می‌کنند و نحوهٔ جهت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی خاصیت مغناطیسی ایجاد می‌کنند و خطوط میدان مغناطیسی جذب این مواد می‌شود.

تذکر موادی را که اتم‌ها یا مولکول‌های سازندهٔ آن‌ها دارای خاصیت مغناطیسی باشند، مواد مغناطیسی می‌نامند. در واقع می‌توان گفت کوچک‌ترین ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ این مواد (اتم‌ها یا مولکول‌ها) هر کدام آهنرباهای بسیار ریزی هستند که به آن‌ها **دوقطبی مغناطیسی** نیز گفته می‌شود. در این کتاب دوقطبی‌های مغناطیسی را با یک پیکان کوچک (→) نشان می‌دهیم که می‌توانند جهت‌گیری‌های متفاوتی داشته باشند و هر کدام از آن‌ها، وابسته به یک اتم یا مولکول‌اند. در ادامه به بررسی برخی از مواد مغناطیسی می‌پردازیم.

مواد پارامغناطیس



۱ در مواد پارامغناطیس، دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها در حالت عادی به‌صورت کاتوره‌ای (نامنظم) کنار یک‌دیگر قرار می‌گیرند، در نتیجه میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند (اثر همدیگر را خنثی می‌کنند) و ماده فاقد خاصیت مغناطیسی است. در شکل روبه‌رو هر کدام از فلش‌ها نشان‌دهندهٔ دوقطبی مغناطیسی یک ذرهٔ سازندهٔ ماده است.



۲ اگر این مواد را در یک میدان مغناطیسی خارجی بسیار قوی (مثلاً میدان مغناطیسی ناشی از یک آهنربای قوی) قرار دهیم، در این حالت برخی از دوقطبی‌های مغناطیسی اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ جسم به‌صورت انفرادی همانند عقربه‌های مغناطیسی، با میدان خارجی همسو می‌شوند و جسم خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند. بنابراین مواد پارامغناطیس در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی **ضعیف** و **موقت** پیدا می‌کنند.

۳ در این حالت اگر میدان مغناطیسی خارجی را از بین ببریم، ماده سریعاً خاصیت مغناطیسی‌اش را از دست می‌دهد و دوقطبی‌های مغناطیسی آن دوباره به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری می‌کنند. به این‌گونه مواد، **پارامغناطیس** می‌گویند.

۴ اورانیم، آلومینیم، سدیم، پلاتین، اکسیژن و اکسید نیتروژن از این نوع مواد هستند.

۵ یکی از اصلی‌ترین تفاوت‌های این مواد با مواد فرومغناطیس، نداشتن حوزهٔ مغناطیسی است. مفهوم این موضوع را در قسمت بعد بیشتر بررسی خواهیم کرد.

gajmarket.com

مواد دیامغناطیس

۱ اتم‌های مواد دیامغناطیسی به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند. به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند.

۲ با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود.

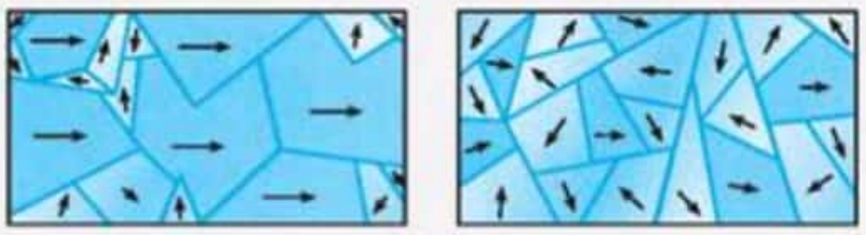
۳ از جمله مواد دیامغناطیس می‌توان به مس، نقره، سرب و بیسموت اشاره کرد.

مواد فرومغناطیس

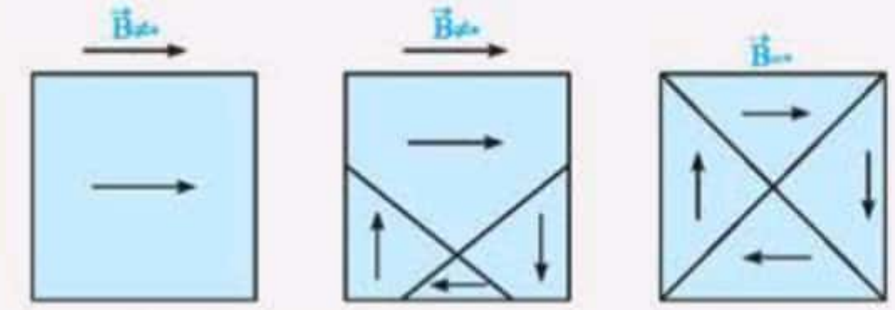
۱ دوقطبی‌های مغناطیسی اتم‌های تشکیل‌دهنده در مواد فرومغناطیس، برخلاف مواد پارامغناطیس به‌طور انفرادی عمل نمی‌کنند، بلکه به‌صورت گروهی حتی در نبود میدان خارجی در یک ناحیه همسو می‌شوند که به این ناحیه‌ها **حوزهٔ مغناطیسی** می‌گویند. حوزهٔ مغناطیسی مجموعه‌ای است از دوقطبی‌های مغناطیسی که به‌صورت خودبه‌خود، همسو و هم‌خط شده‌اند. در حالت عادی جهت‌گیری حوزه‌ها در این مواد متفاوت است.


ابعاد حوزه‌ها از مرتبهٔ دهم تا هزارم میلی‌متر است.

۲ اگر یک آهنربا را به جسم فرومغناطیس نزدیک کنیم، حوزه‌هایی که دوقطبی‌هایشان هم‌سو با خطوط میدان آهنربا است رشد می‌کنند و بزرگ می‌شوند و جسم را به آهنربا تبدیل می‌کنند. در این حالت حوزه‌های دیگر کوچک می‌شوند و یا حتی از بین می‌روند (این موضوع یعنی مرز بیشتر حوزه‌ها جابه‌جا می‌شود).


(الف) مادهٔ فرومغناطیسی آهنربا نیست. (ب) مادهٔ فرومغناطیسی آهنربا است.

۳ هرچه‌قدر آهنربا قوی‌تر باشد، مساحت حوزه‌هایی که دوقطبی‌شان همسو با خطوط میدان آهنربا است بیشتر می‌شود و خاصیت مغناطیسی جسم بیشتر می‌شود. اگر آهنربا خیلی قوی باشد درصد بالایی از دوقطبی‌های مغناطیسی حوزه‌ها به موازات یک‌دیگر هم‌خط می‌شوند. به عبارت دیگر حجم حوزه‌هایی که با میدان مغناطیسی خارجی همسو شده‌اند، به بیشترین مقدار خود می‌رسد. به این حالت مغناطیس اشباع گفته می‌شود.



الف) درغیاب میدان خارجی ب) درحضور میدان خارجی ضعیف ج) درحضور میدان خارجی قوی

جابه‌جا شدن مرزهای بین حوزه‌ها در مواد فرومغناطیس

۴ حوزه‌های مغناطیسی در برخی از مواد فرومغناطیس به‌راحتی و به سرعت در حضور میدان مغناطیسی خارجی تغییر می‌کند و این مواد به سادگی خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کنند و به راحتی با حذف میدان خارجی نیز این خاصیت را از دست می‌دهند، به این‌گونه مواد **فرومغناطیس نرم** می‌گویند. آهن از این دسته مواد است، به‌خاطر همین در جرثقیل‌های الکتریکی و هستهٔ پیچه‌ها و سیملوله‌ها (آهنرباهای غیردائم) از آهن استفاده می‌کنند.

۵ در مقابل برخی دیگر از مواد فرومغناطیس به سختی خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کنند، یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌ها در آن‌ها به سختی تغییر می‌کند و به سختی نیز این خاصیت را از دست می‌دهند. به این دسته از مواد **فرومغناطیس سخت** می‌گویند. فولاد (آهن به اضافهٔ ۲ درصد کربن)، آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل یک مادهٔ فرومغناطیس سخت محسوب می‌شوند. آهنرباهای دائمی را از مواد فرومغناطیس سخت می‌سازند.

۶ شدت خاصیت مغناطیسی در مواد فرومغناطیس نرم، بیشتر از مواد فرومغناطیس سخت می‌تواند افزایش یابد.

خاصیت مغناطیسی ایجاد شده در مواد فرومغناطیس بیشتر از سایر مواد است. هم‌چنین خاصیت مغناطیسی در آهن که یک مادهٔ فرومغناطیس نرم است، موقتی بوده و در فولاد که یک مادهٔ فرومغناطیس سخت است، به سختی از بین می‌رود و می‌توان آن را دائمی درنظر گرفت.

۲ ۱۸۵۲ با توجه به خلاصه نکات (۲)، عبارت‌های (ب) و (پ) نادرست می‌باشند. دقت شود که آهن از مواد فرومغناطیس محسوب می‌شود. از طرفی مواد دیامغناطیس، تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرند و میدان مغناطیسی خارجی، سبب القاء دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان می‌شود.

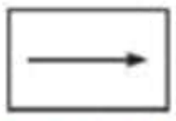
۱ ۱۸۵۳ مادهٔ فرومغناطیس سخت مانند فولاد، به‌سختی خاصیت مغناطیسی خود را از دست می‌دهد، ولی مادهٔ فرومغناطیس نرم مانند آهن به آسانی آهنربا شده و به آسانی نیز این خاصیت را از دست می‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست می‌باشد.

۱ ۱۸۵۴ با توجه به متن کتاب درسی، اکسیژن، اورانیم و پلاتین از جمله مواد پارامغناطیس محسوب می‌شوند.

تذکر

می‌دانیم که آهن و فولاد از مواد فرومغناطیس محسوب می‌شوند، با توجه به حضور یکی از این دو در هر سه گزینهٔ (۲)، (۳) و (۴)، تنها گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۱۸۵۵ مادهٔ فرومغناطیس وقتی در یک میدان مغناطیسی خارجی قوی قرار گیرد، تمام حوزه‌های مغناطیسی آن با یک‌دیگر هم‌خط می‌شوند، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.



مادهٔ فرومغناطیس در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی

تذکر

این وضعیت در یک مادهٔ مغناطیسی، حالت **مغناطیس اشباع** نام دارد، یعنی خاصیت مغناطیسی در این ماده بیش از این نمی‌تواند افزایش یابد.

۱ ۱۸۵۶ تصاویر نشان داده شده، مربوط به یک مادهٔ فرومغناطیس نرم مانند آهن می‌باشد که با حذف میدان مغناطیسی، حوزه‌های مغناطیسی جابه‌جا شده و خاصیت مغناطیسی از بین رفته است.

۳ ۱۸۵۷ تصویر نشان داده شده، مربوط به یک مادهٔ پارامغناطیس است. از طرفی با قرار دادن این ماده در یک میدان مغناطیسی قوی که از سمت چپ به راست می‌باشد، دوقطبی‌های مغناطیسی در جهت میدان مرتب می‌شوند و یک خاصیت مغناطیسی موقت و ضعیف را ایجاد می‌کنند.

۲ ۱۸۵۸ اگر مادهٔ فرومغناطیس در داخل میدان مغناطیسی قرار گیرد، حجم حوزه‌هایی که دوقطبی‌هایشان هم‌سو با خطوط میدان است، بزرگ‌تر شده و این ماده، خاصیت آهنربایی پیدا می‌کند. در حالت مغناطیس اشباع، درصد بالایی از دوقطبی‌های مغناطیسی حوزه‌ها هم خط هستند و خاصیت مغناطیسی بیشینه است. از طرفی در حالت عادی و در غیاب میدان مغناطیسی، برایند دوقطبی‌های مغناطیسی در حوزه‌های مغناطیسی صفر بوده و ماده خاصیت آهنربایی ندارد. هم‌چنین گزینهٔ (۲) عبارت نادرستی است، زیرا کبالت فرومغناطیس است.

۳ ۱۸۵۹ برای هستهٔ یک آهنربای الکتریکی، احتیاج به ماده‌ای داریم که خاصیت الکتریکی سریعاً در آن ایجاد شده و سریعاً نیز از بین برود (با وصل جریان برق خاصیت آهنربایی ایجاد شده و با قطع آن از بین برود). به همین دلیل برای هستهٔ یک آهنربای الکتریکی می‌توانیم از آهن که یک مادهٔ فرومغناطیس نرم است، استفاده می‌کنیم.

دقت: در فولاد خاصیت مغناطیسی به‌سختی از بین می‌رود و برای آهنربای الکتریکی که عموماً در آن به دنبال تغییر میدان با قطع و وصل جریان برق هستیم، مناسب نمی‌باشد.

۱ ۱۸۶۰ در بین گزینه‌ها آلومینیم، پارامغناطیس و سایر گزینه‌ها فرومغناطیس‌اند. با توجه به این موضوع، آلومینیم خاصیت مغناطیسی کم‌تری نسبت به سایر گزینه‌ها پیدا می‌کند.

۲ ۱۸۶۱ پزشک واشر آلومینیمی را نمی‌تواند از گلوی کودک بیرون بیاورد، زیرا پارامغناطیس بوده و خاصیت مغناطیسی قابل توجه در آن ایجاد نمی‌شود.

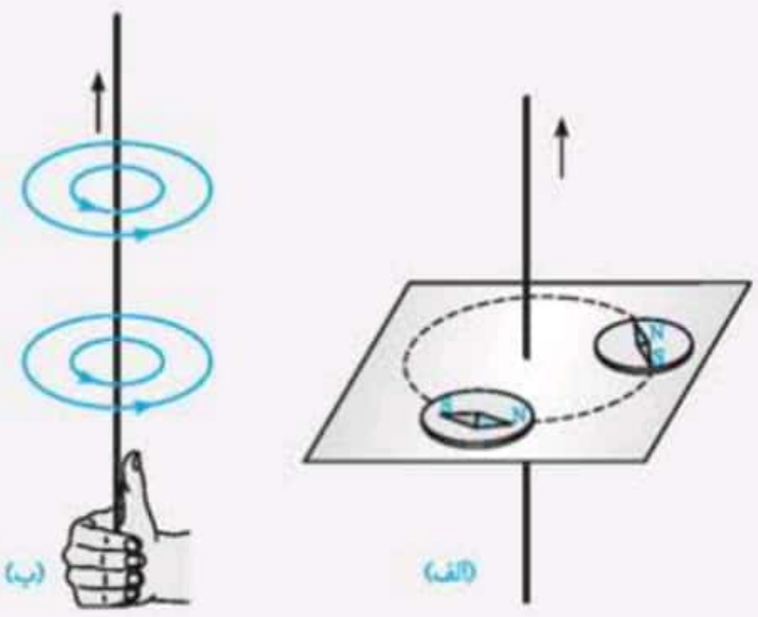
۴ ۱۸۶۲ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۳ **میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست و بلند حامل جریان** (تست‌های ۱۸۶۲ تا ۱۸۹۰)

اورستد دانشمند دانمارکی، اولین کسی بود که در طی آزمایش‌های خود متوجه شد که عقربهٔ مغناطیسی در کنار سیم حامل جریان الکتریکی منحرف می‌شود و این موضوع یعنی با عبور جریان، در اطراف آن میدان مغناطیسی تولید می‌شود. در این قسمت می‌خواهیم به بررسی این میدان مغناطیسی بپردازیم.

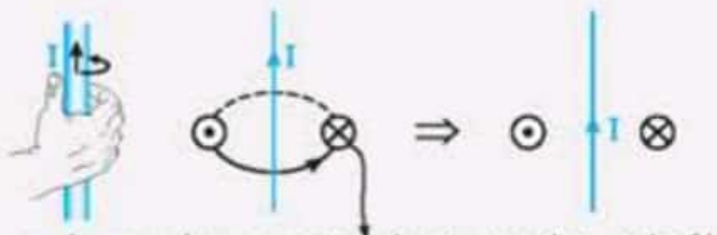
۱ – تعیین جهت میدان مغناطیسی در اطراف یک سیم حامل جریان

برای تعیین جهت میدان مغناطیسی، از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم. مطابق این قاعده، اگر سیم را مطابق شکل (ب) در دست راست خود بگیرید به‌گونه‌ای که انگشت شست در جهت جریان الکتریکی باشد، جهت خم شدن چهار انگشت دست شما، جهت خط‌های میدان مغناطیسی را در اطراف سیم نشان می‌دهد.



تعیین جهت میدان مغناطیسی معمولاً در سؤال‌ها در دو حالت سیم در داخل صفحه و یا عمود بر صفحه پرسیده می‌شود که در ادامه آن را بررسی می‌کنیم:

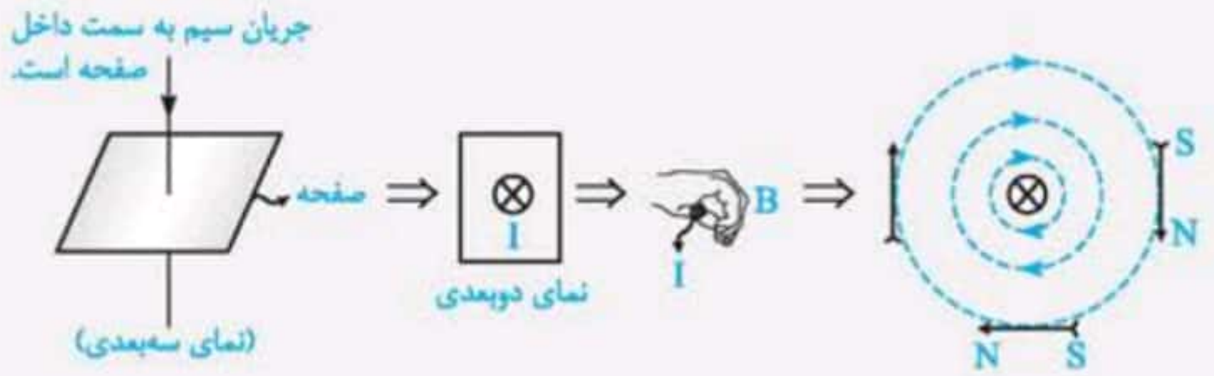
۱ سیم در داخل صفحه: در شکل فوق، اگر سیم حامل جریان را در یک صفحه درنظر بگیریم، به کمک قاعدهٔ دست راست مشاهده می‌کنیم که میدان در طرف راست سیم، عمود بر صفحه به سمت داخل و میدان در طرف چپ سیم، عمود بر صفحه به سمت بیرون است. برای نمایش جهت هر کدام از این‌ها، به‌ترتیب از نمادهای ⊗ (درون‌سو) و ⊙ (برون‌سو) استفاده می‌شود.



انگشتان دست راست به صفحه وارد می‌شود، یعنی میدان درون‌سو است.

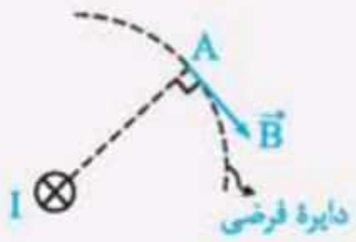
gajmarket.com

۲ سیم عمود بر صفحه: فرض کنید جریان در یک سیم مطابق شکل زیر به سمت داخل صفحه است، یعنی سیم حامل جریان عمود بر صفحهٔ کاغذ و به‌صورت نشان داده‌شده در شکل زیر قرار می‌گیرد. در این حالت نیز به سادگی با کمک قانون دست راست می‌توان جهت خطوط میدان مغناطیسی را در اطراف سیم حامل جریان مشخص کرد (در شکل زیر، کافی است شست دست راست خود را مطابق شکل به‌گونه‌ای قرار دهید که به صفحه وارد شود، جهت خم شدن انگشتان دست راست، جهت خطوط میدان مغناطیسی را در اطراف سیم نشان می‌دهد).



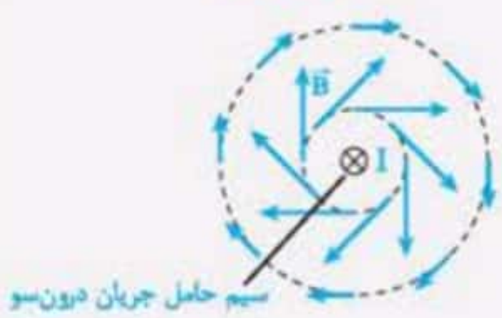
نتیجهٔ ۱: خطوط میدان مغناطیسی حاصل از سیم راست، به‌صورت دایره‌هایی هم‌مرکز هستند که سیم از مرکز آن‌ها گذشته و بر صفحهٔ دایره‌ها عمود است.

نتیجهٔ ۲: مطابق شکل مقابل، برای تعیین جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ A، خط‌چینی از سیم به نقطهٔ A وصل می‌کنیم، میدان مغناطیسی بر خط‌چین عمود است و جهت فلش نیز با قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود (اگر شست را در جهت I قرار دهیم، سایر انگشتان، ساعتگرد می‌چرخند).



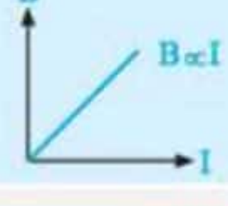
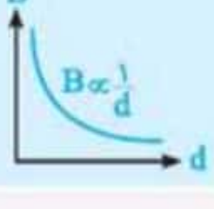
۲- اندازهٔ میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان

به شکل مقابل توجه کنید:



همان‌طور که در شکل می‌بینید، با دور شدن از سیم حامل جریان، بردارهای میدان مغناطیسی کوچک‌تر می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت میدان مغناطیسی در نزدیکی سیم حامل جریان بزرگ‌تر و با دور شدن از آن، بزرگی آن کاهش می‌یابد.

تذکر بزرگی میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان با افزایش مقدار جریان سیم نیز افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان گفت: میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست حامل جریان با شدت جریان عبوری از سیم رابطهٔ مستقیم $(B \propto I)$ و با فاصلهٔ عمودی نقطهٔ موردنظر از سیم رابطهٔ عکس $\left(B \propto \frac{1}{d}\right)$ دارد، یعنی با فاصله گرفتن از سیم اندازهٔ میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد.

نمودار B - I در یک فاصلهٔ معین از سیم	نمودار B - d در یک جریان ثابت عبوری از سیم
	

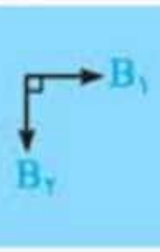
۳- محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از چند سیم حامل جریان

اگر در یک نقطه میدان مغناطیسی ناشی از چند سیم حامل جریان موردنظر باشد، با توجه به برداری بودن میدان مغناطیسی، برای محاسبهٔ برایند میدان مغناطیسی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

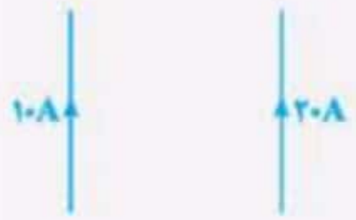
گام اول: یافتن جهت میدان‌های مغناطیسی با استفاده از قاعدهٔ دست راست توسط هر یک از سیم‌ها در نقطهٔ موردنظر.

گام دوم: یافتن میدان مغناطیسی برایند به کمک جمع برداری در آن نقطه.

برای برایندگیری تو سؤالای این قسمت، از شکلای زیر فیلی می‌تونید کمک بگیرید ...

			
$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$	$B_T = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$	$B_T = \lvert B_1 - B_2 \rvert$	$B_T = B_1 + B_2$

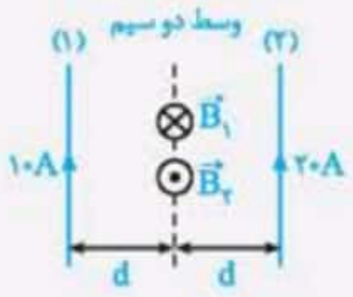
تمرین) **شکل روبه‌رو دو سیم راست و طویل حامل جریان الکتریکی را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی حاصل در وسط فاصلهٔ بین دو سیم در کدام جهت است؟** (تجربی داخل ۸۳ با تغییر)



۱) ⊙ ۲) ⊗

۳) ↓ ۴) میدان مغناطیسی در این نقطه صفر است.

پاسخ با توجه به قانون دست راست، میدان مغناطیسی سیم (۱) در وسط دو سیم درون‌سو و میدان مغناطیسی سیم (۲)، در وسط دو سیم برون‌سو است.



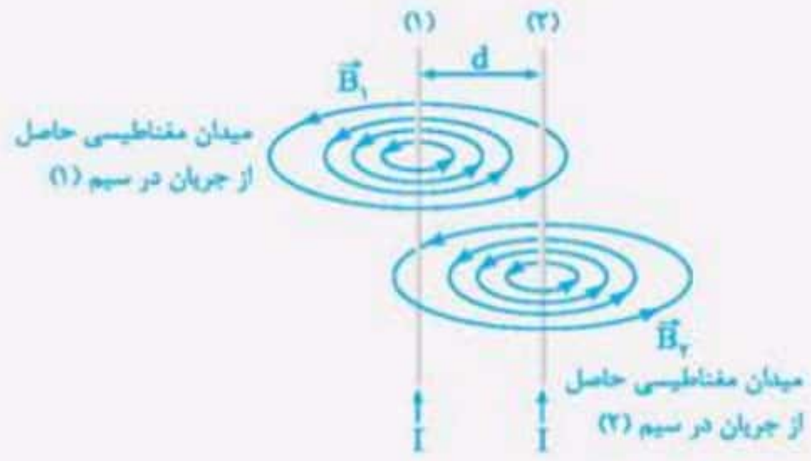
چون فاصلهٔ هر دو سیم از نقطهٔ موردنظر یکسان است، میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) یعنی B_2 بزرگ‌تر از B_1 است (چون جریان الکتریکی گذرنده از آن بزرگ‌تر است)، بنابراین داریم:

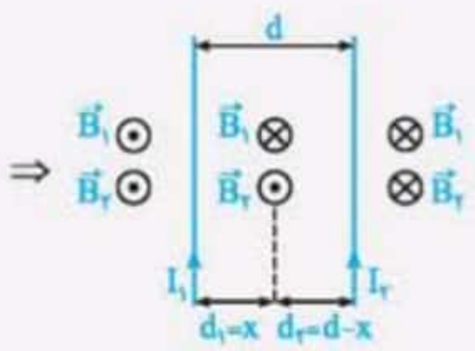
$\vec{B}_T = \vec{B}_2 - \vec{B}_1$ ⊙ برون‌سو (گزینهٔ ۱)

۴- محل صفر شدن میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم راست موازی

دو سیم راست موازی را درنظر بگیرید. با توجه به این‌که جریان در دو سیم هم‌جهت و یا در خلاف جهت یک‌دیگر باشد، در نقاطی از فضا میدان مغناطیسی می‌تواند صفر شود. حال می‌خواهیم با یک نگاه تحلیلی این دو حالت را بررسی کنیم.

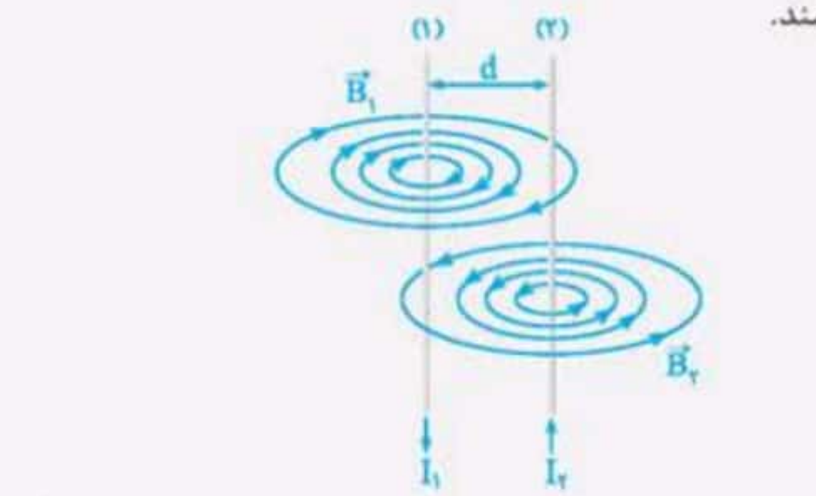
حالت ۱: دو سیم راست موازی با جریان‌های هم‌جهت: با توجه به شکل‌های زیر، با استفاده از قانون دست راست، مشخص است که در بیرون دو سیم، میدان‌های ناشی از دو سیم هم‌جهت و در بین دو سیم، میدان‌های آن‌ها در خلاف جهت یک‌دیگر می‌باشد.

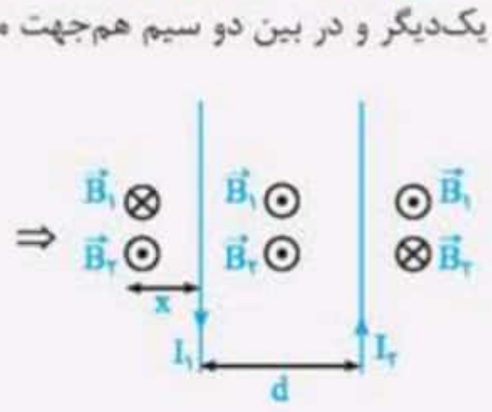




بنابراین در این حالت نقاطی که میدان مغناطیسی در آن‌ها می‌تواند صفر شود، در بین دو سیم و البته نزدیک به سیم با جریان کم‌تر می‌باشد.

حالت ۲: دو سیم راست موازی با جریان‌های در خلاف جهت هم: در این حالت میدان‌های مغناطیسی ناشی از دو سیم حامل جریان، در بیرون دو سیم در خلاف جهت یک‌دیگر و در بین دو سیم هم‌جهت می‌باشند.



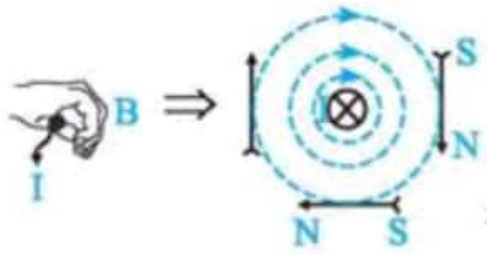


بنابراین در این حالت، در بیرون دو سیم و باز هم نزدیک به سیم با جریان کم‌تر میدان مغناطیسی برایند می‌تواند صفر شود. مثلاً اگر در شکل فوق $I_2 > I_1$ باشد، میدان مغناطیسی در نقاطی در سمت چپ سیم (۱) می‌تواند صفر شود.

با توجه به خلاصه نکات فوق، میدان مغناطیسی در اطراف یک سیم با جریان عبوری از آن رابطهٔ مستقیم و با فاصلهٔ عمودی از سیم رابطهٔ معکوس دارد. بنابراین با فاصله گرفتن از سیم، بزرگی میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) تنها عبارت صحیح در این سؤال است.

۳ ۱۸۶۳ با توجه به قانون دست راست، اگر شست دست راست را طوری بگیریم که به صفحه وارد شود، جهت خم شدن انگشتان دست راست جهت میدان مغناطیسی را در اطراف آن نشان می‌دهد.

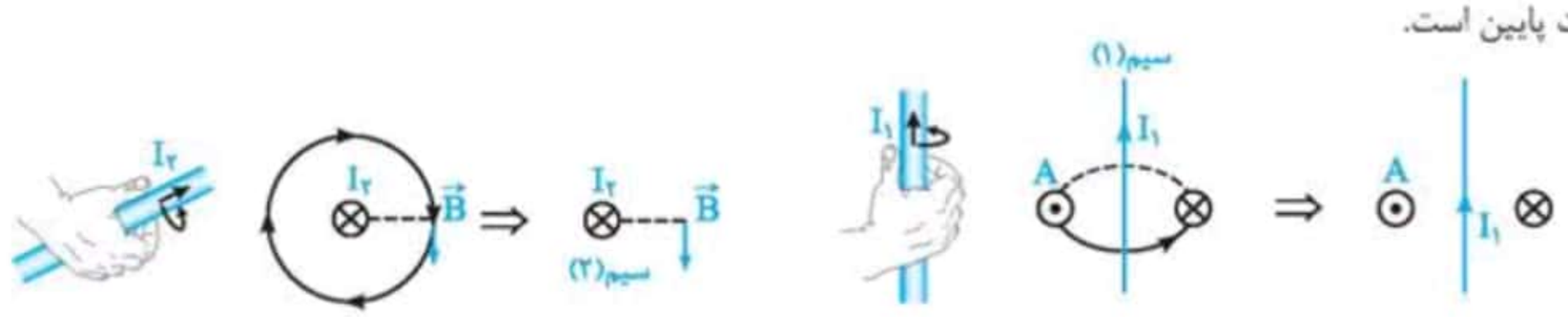
از طرفی می‌دانیم با دور شدن از سیم، اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از آن کاهش می‌یابد. بنابراین با دور شدن از سیم، فاصلهٔ بین خطوط مغناطیسی ناشی از سیم باید افزایش یابد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.



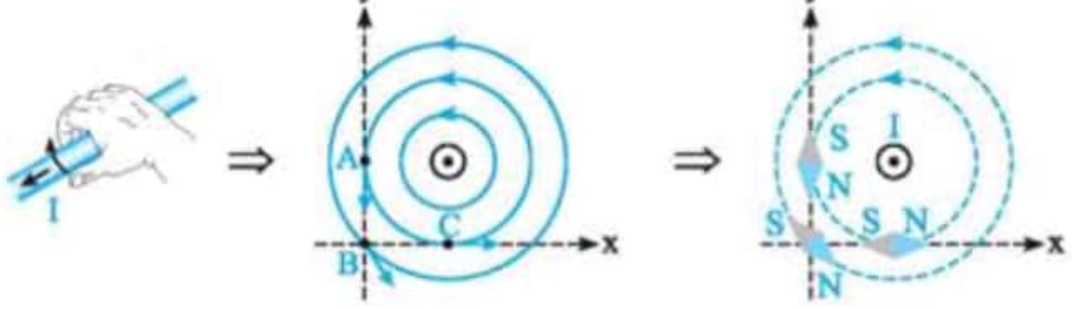
⇒ شکل گزینهٔ ۳

gajmarket.com

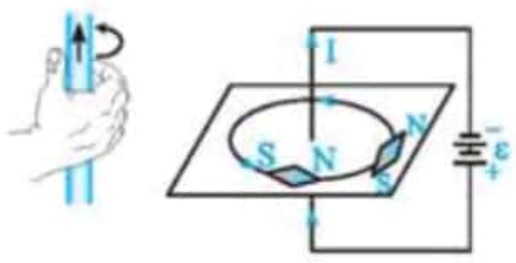
۴ ۱۸۶۴ با توجه به قاعدهٔ دست راست، میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۱) در نقطهٔ A به‌صورت برون‌سو و میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) در نقطهٔ B به سمت پایین است.



۳ ۱۸۶۵ با توجه به قانون دست راست، خطوط میدان مغناطیسی به شکل زیر است. از طرفی جهت میدان مغناطیسی در هر نقطه مماس بر خطوط میدان مغناطیسی در آن نقطه است. بنابراین وضعیت صحیح قرار گرفتن عقربه‌های مغناطیسی در نقاط A، B و C به‌صورت زیر بوده و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

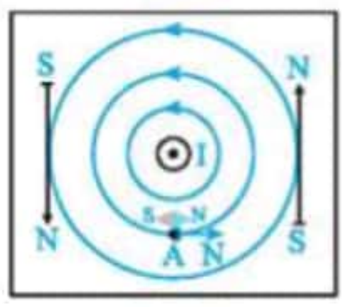


۱ ۱۸۶۶ با توجه به قطب‌های مثبت و منفی باتری، جریان در سیم به سمت بالا می‌باشد. از طرفی با توجه به قانون دست راست، میدان مغناطیسی در سیم به‌صورت مقابل بوده و وضعیت عقربه‌های مغناطیسی تنها در گزینهٔ (۱) درست نشان داده شده است.



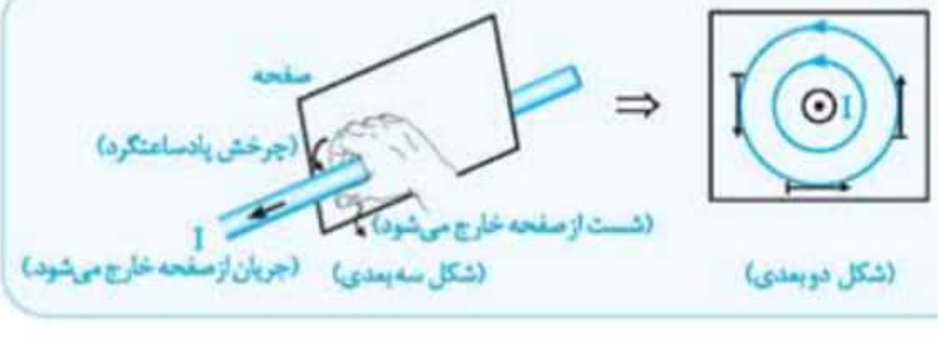
دقت: بدون حل می‌توان گفت که گزینه‌های (۳) و (۴) نمی‌توانند صحیح باشند، زیرا در این شکل‌ها، عقربهٔ مغناطیسی عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار دارد.

۴ ۱۸۶۷ خطوط میدان مغناطیسی در اطراف سیم مطابق شکل نشان داده شده است و میدان مغناطیسی در نقطهٔ A به‌صورت مقابل است:

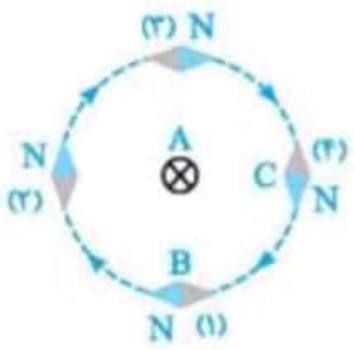


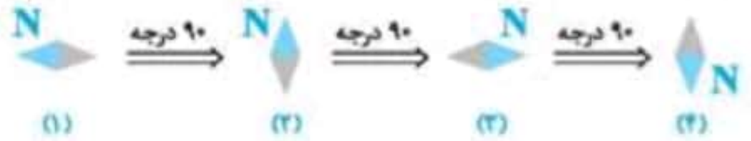
تذکر

برای درک بهتر، انگشت شست دست راست خود را به‌گونه‌ای قرار دهید که از صفحه خارج شود. در این حالت سایر انگشتان دست راست خود را بچرخانید، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، انگشتان دست راست در جهت پادساعتگرد می‌چرخند.

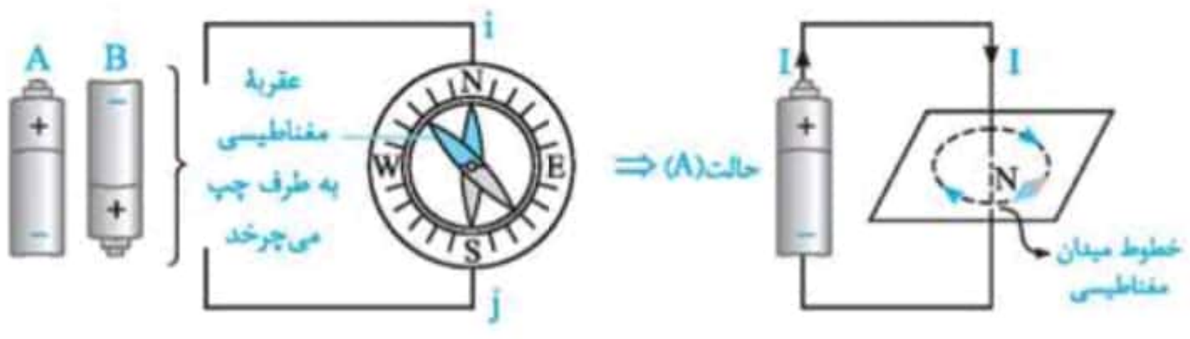


۱ ۱۸۶۸ با توجه به وضعیت عقربهٔ مغناطیسی در B، جریان سیم قرار گرفته در محل A، به صورت درون‌سو می‌باشد. از سوی دیگر با جابه‌جا کردن عقربه در جهت عقربه‌های ساعت از نقطهٔ B تا C، این عقربه به اندازهٔ ۲۷۰ درجه می‌چرخد (به موقعیت عقربه‌های (۱) تا (۴) توجه کنید).





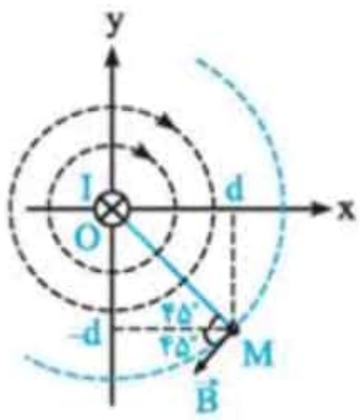
۱ ۱۸۶۹ همان‌طور که می‌دانیم، عقربهٔ مغناطیسی مماس بر خطوط میدان مغناطیسی می‌شود و قطب N از آن، در جهت میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. در این سؤال اگر باتری در وضعیت (A) قرار بگیرد، عقربه تمایل پیدا می‌کند به طرف چپ بچرخد و قطب N آن در وضعیت نشان داده شده در شکل زیر قرار بگیرد.

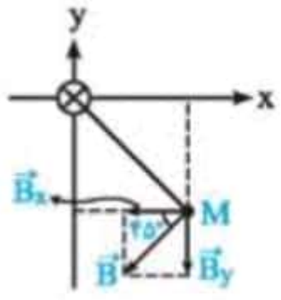


۳ ۱۸۷۰ با توجه به این‌که فاصلهٔ نقطهٔ B از سیم، بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ A از سیم است $(d' > d)$، بنابراین اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از سیم در نقطهٔ B، کم‌تر از نقطهٔ A است، پس می‌توان نوشت:

$$B_A > B_B > 0 \Rightarrow \overset{k}{\left(\frac{B_A}{B_B}\right)} > 1 \Rightarrow k > 1$$

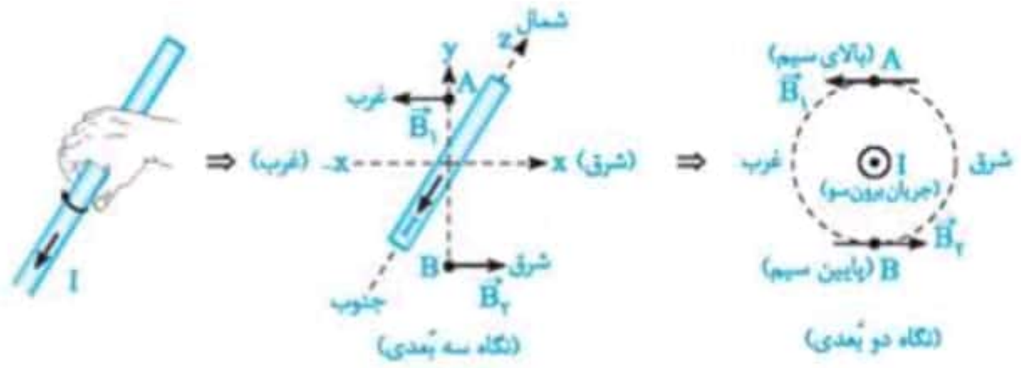
۱ ۱۸۷۱ ابتدا باید مؤلفه‌های میدان مغناطیسی را در هر یک از راستاهای x و y به‌دست آوریم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، بردار میدان مغناطیسی بر پاره‌خط OM عمود است. بنابراین بردار $\vec{B}$ با راستای افق زاویهٔ 45° می‌سازد و با توجه به شکل داریم:





$$\begin{cases} B_x = B\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}B \\ B_y = B\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}B \end{cases} \Rightarrow \vec{B}_1 = \overset{\text{در خلاف جهت محور x}}{\ominus}\frac{\sqrt{2}}{2}B\vec{i} \overset{\text{در خلاف جهت محور y}}{\ominus}\frac{\sqrt{2}}{2}B\vec{j}$$

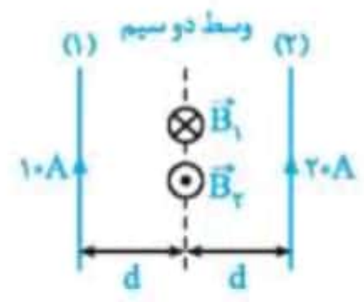
۴ ۱۸۷۲ با توجه به شکل زیر و با کمک قانون دست راست، میدان در نقطهٔ A واقع در بالای سیم، در جهت مغرب است (جهت میدان مماس بر خطوط میدان مغناطیسی است):



تذکر

کافیست در شکل مقابل، در ذهن خود انگشت شست دست راست را در جهت جریان به سمت جنوب قرار دهید و سایر انگشتان را خم کنید. مشاهده می‌کنید که انگشتان دست شما در بالای سیم به سمت غرب خم شده و در زیر سیم به سمت شرق خم می‌شوند.

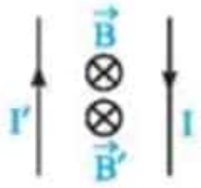
۱ ۱۸۷۳ با توجه به قانون دست راست، میدان مغناطیسی سیم (۱) در وسط دو سیم درون‌سو و میدان مغناطیسی سیم (۲)، در وسط دو سیم برون‌سو است.



چون فاصلهٔ هر دو سیم از نقطهٔ موردنظر یکسان است، بنابراین با توجه به درسنامه، میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) یعنی B_2 بزرگ‌تر است (چون جریان الکتریکی گذرنده از آن بزرگ‌تر است) بنابراین داریم: (گزینهٔ ۱) برون‌سو $\odot$ $\vec{B}_T = \vec{B}_2 - \vec{B}_1$

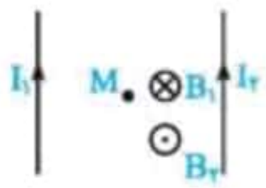
دقت: با توجه به این‌که در وسط دو سیم، $d_2 = d_1$ و $I_2 > I_1$ می‌باشد، میدان مغناطیسی سیم (۲) قوی‌تر از سیم (۱) می‌شود و جهت میدان مغناطیسی برایند در وسط برون‌سو می‌باشد (هم‌جهت با میدان قوی‌تر).

۳ ۱۸۷۴ اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان‌های I و I' در وسط دو سیم را به‌ترتیب B و B' درنظر می‌گیریم. برایند میدان مغناطیسی زمانی درون‌سو بوده و بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت که میدان‌های B و B' در وسط دو سیم هر دو درون‌سو باشند.

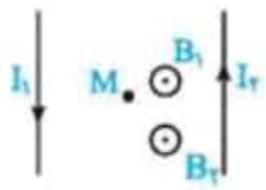


با توجه به قاعدهٔ دست راست، اگر جهت جریان‌ها به‌صورت شکل مقابل باشد، میدان مغناطیسی ناشی از هر یک از سیم‌ها در وسط فاصلهٔ بین دو سیم، درون‌سو می‌باشد.

۲ ۱۸۷۵ در هر دو حالت بررسی می‌کنیم:

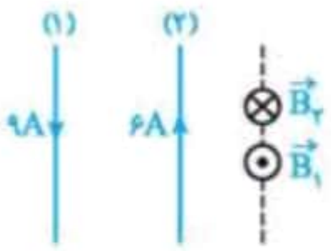


حالت اول: با توجه به قانون دست راست، در نقطهٔ M میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) به صورت برون‌سو و میدان سیم (۱) به صورت درون‌سو است، بنابراین اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند در این حالت برابر است با: $B = |B_1 - B_2|$



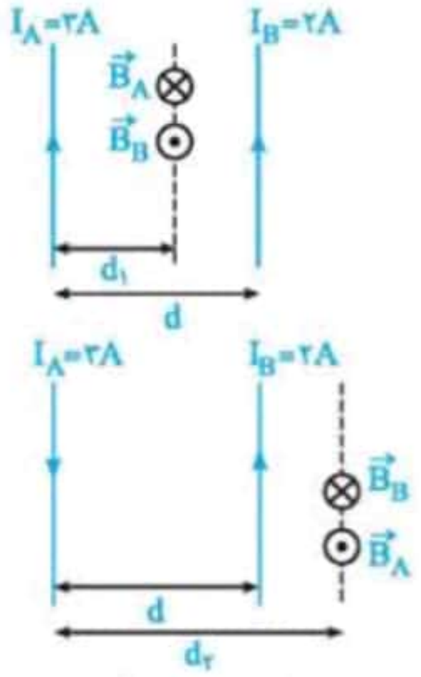
حالت دوم: در این حالت میدان مغناطیسی ناشی از هر دو سیم به صورت برون‌سو خواهد بود (دقت شود که میدان سیم (۱) از B_1 به‌صورت درون‌سو به B_1 به‌صورت برون‌سو تبدیل شده است، یعنی میدان سیم (۱) با حفظ اندازه، تغییر جهت داده است). بنابراین میدان مغناطیسی برایند در این حالت برابر است با: $B' = B_1 + B_2$

$$\Rightarrow k = \frac{B}{B'} = \frac{|B_1 - B_2|}{B_1 + B_2} \Rightarrow 0 \le k < 1$$



۲ ۱۸۷۶ با توجه به این‌که جریان دو سیم در خلاف جهت یک‌دیگر است، در بیرون از فاصلهٔ بین دو سیم میدان‌های مغناطیسی در خلاف جهت یک‌دیگر بوده و نزدیک به سیم با جریان کم‌تر میدان مغناطیسی برایند می‌تواند صفر باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

gajmarket.com



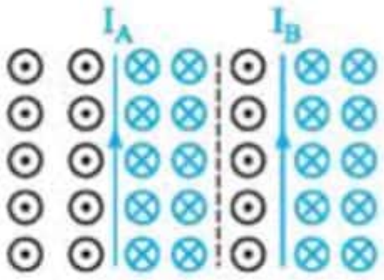
۳ ۱۸۷۷ کم‌ترین مقدار ممکن برای بزرگی میدان مغناطیسی برایند برابر صفر می‌باشد. بنابراین برای این سؤال، دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

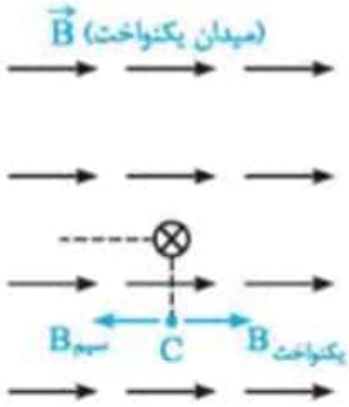
حالت اول: اگر جریان‌ها در دو سیم هم‌جهت باشند، میدان مغناطیسی برایند دو سیم در بین دو سیم می‌تواند صفر شود و این اتفاق در نزدیکی سیم با جریان کم‌تر رخ می‌دهد. بنابراین با توجه به شکل مقابل، $d_1 < d$ است.

حالت دوم: اگر جریان دو سیم در خلاف جهت یک‌دیگر باشند، میدان مغناطیسی دو سیم در خارج از دو سیم، در خلاف جهت یک‌دیگر و در نزدیکی سیم با جریان کم‌تر می‌تواند صفر شود. بنابراین با توجه به شکل مقابل، $d < d_۲$ است.

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: d_1 < d \\ \text{حالت دوم}: d < d_۲ \end{cases} \Rightarrow d_1 < d_۲$$

۲ ۱۸۷۸ می‌دانیم در این حالت که جریان دو سیم موازی، هم‌جهت می‌باشند، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای بین دو سیم و نزدیک به سیم حامل جریان کم‌تر صفر می‌شود (مثلاً بر روی خط‌چین). از سوی دیگر به کمک قاعدهٔ دست راست، می‌فهمیم که در سمت چپ سیم A میدان هر دو سیم برون‌سو بوده و میدان مغناطیسی برایند برون‌سو است و در سمت راست سیم B میدان هر دو سیم درون‌سو بوده و میدان مغناطیسی برایند نیز درون‌سو است. در بین دو سیم در سمت راست خط‌چین، میدان سیم B قوی‌تر از سیم A است و میدان برایند برون‌سو است، از طرفی در سمت چپ خط‌چین، میدان سیم A قوی‌تر از سیم B است و میدان برایند درون‌سو است.

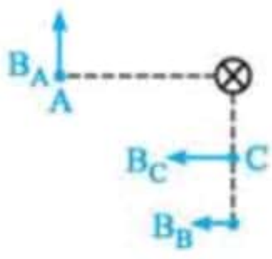




۲ ۱۸۷۹ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

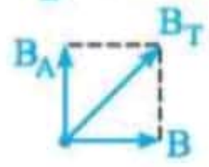
گام اول: با توجه به صفر شدن میدان برایند در C، در این نقطه میدان ناشی از سیم به سمت چپ بوده و این یعنی جریان سیم درون‌سو می‌باشد.

گام دوم: با دور شدن از سیم، میدان مغناطیسی ناشی از آن کاهش می‌یابد و این یعنی میدان سیم در B کوچک‌تر می‌شود و میدان برایند در نقطهٔ B، به سمت راست است. از سوی دیگر جهت میدان برایند در A نیز به سادگی مطابق شکل مقابل مشخص می‌شود.

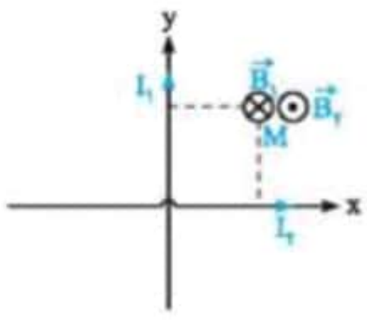


$\Rightarrow$ نقطهٔ B : $B_B \longleftrightarrow B \Rightarrow B_T$ به سمت راست است.

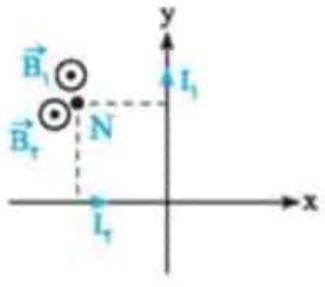
$\Rightarrow$ نقطهٔ A :



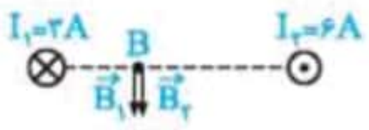
۲ ۱۸۸۰ در نقطهٔ M، با توجه به قانون دست راست، میدان مغناطیسی سیم (۱) درون‌سو است. بنابراین برای این‌که میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ M برابر صفر شود، باید میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) در نقطهٔ M به صورت برون‌سو باشد. بنابراین با توجه به قانون دست راست، جهت جریان در سیم (۲) به سمت راست (→) می‌باشد.



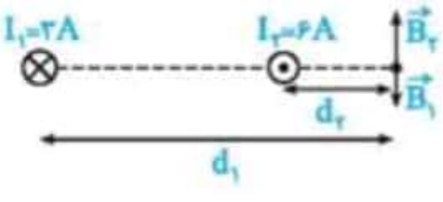
حال به کمک قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر دو سیم در نقطهٔ N به صورت برون‌سو بوده و در نتیجه میدان مغناطیسی برایند ناشی از این دو سیم در نقطهٔ N، به صورت برون‌سو می‌باشد.



۴ ۱۸۸۱ **قسمت اول:** (میدان مغناطیسی در نقطهٔ B): با کمک گرفتن از قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر دو سیم (۱) و (۲) در نقطهٔ B به سمت پایین می‌باشد. بنابراین میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ B به سمت پایین است.



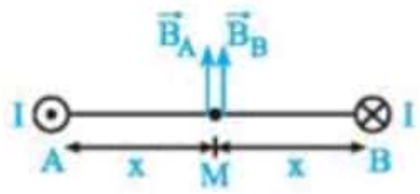
قسمت دوم: (میدان مغناطیسی در نقطهٔ D): در نقطهٔ D میدان مغناطیسی $\vec{B}_1$ به سمت پایین و میدان مغناطیسی $\vec{B}_2$ به سمت بالا می‌باشد (چرا؟). از طرفی با توجه به این‌که جریان سیم (۲) بیشتر از سیم (۱) بوده و هم‌چنین فاصلهٔ سیم (۲) از نقطهٔ D کم‌تر از فاصلهٔ سیم (۱) است، بنابراین اندازهٔ میدان مغناطیسی سیم (۲) بیشتر از اندازهٔ میدان مغناطیسی سیم (۱) در نقطهٔ D بوده و میدان مغناطیسی برایند در آن نقطه به سمت بالا (در جهت $\vec{B}_2$) است.





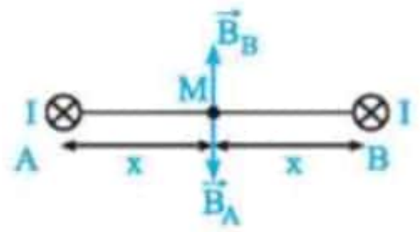
۱ ۱۸۸۲ با توجه به این‌که جریان دو سیم در خلاف جهت یک‌دیگر است، در خارج از فاصلهٔ بین دو سیم، میدان‌های مغناطیسی ناشی از آن‌ها در خلاف جهت یک‌دیگر بوده و نزدیک به سیم با جریان کم‌تر میدان مغناطیسی برایند می‌تواند صفر شود. بنابراین میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ A می‌تواند صفر شود.

۴ ۱۸۸۳ **حالت اول:** با توجه به قاعدهٔ دست راست، میدان مغناطیسی هر دو سیم در نقطهٔ M به سمت بالا می‌باشد. از طرفی چون جریان هر دو سیم و فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ M یکسان است، بنابراین میدان ناشی از هر دو سیم در نقطهٔ M هم‌اندازه است.



$$B_1 = B_A + B_B = B + B = 2B$$

حالت دوم: در این حالت میدان مغناطیسی سیم A در نقطهٔ M به سمت پایین بوده و میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ M برابر صفر می‌شود.

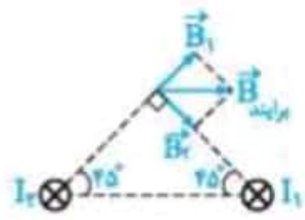


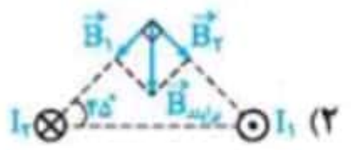
$$B_2 = B_B - B_A = B - B = 0$$

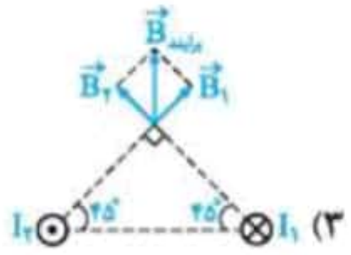
بنابراین تغییرات میدان مغناطیسی برابر است با:

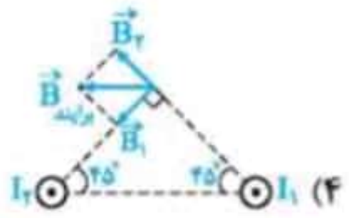
$$B_2 - B_1 = 0 - 2B = -2B$$

۳ ۱۸۸۴ در هریک از گزینه‌ها، ابتدا به کمک قاعدهٔ دست راست میدان‌های مغناطیسی ناشی از هریک از سیم‌ها را در نقطهٔ A تعیین کرده و سپس جهت میدان مغناطیسی برایند را مشخص می‌کنیم (میدان مغناطیسی در هر نقطه بر خط واصل بین سیم و آن نقطه عمود است).

۱) 

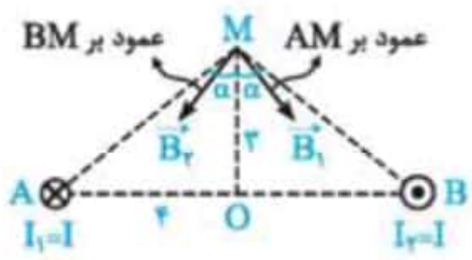
۲) 

۳) 

۴) 

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۱۸۸۵ میدان مغناطیسی هر سیم در نقطهٔ M، بر خط واصل آن سیم تا نقطهٔ M عمود است و جهت آن از قاعدهٔ دست راست به‌دست می‌آید. با توجه به این موضوع داریم:

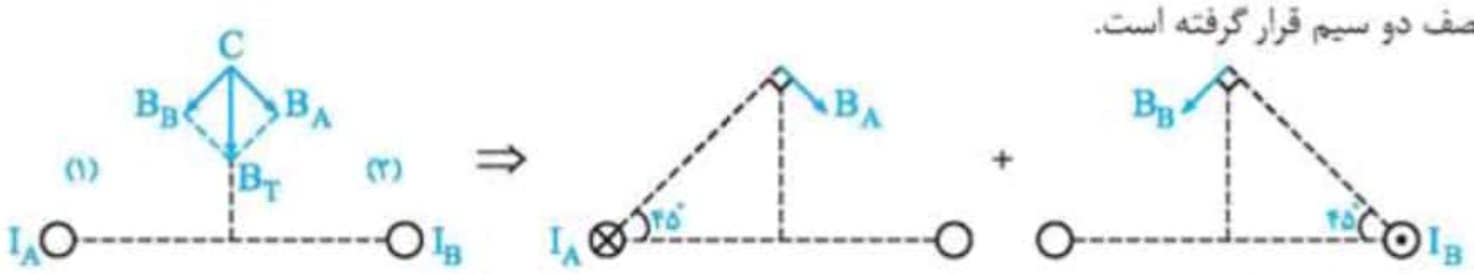


$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53^\circ$$

دقت: با توجه به مقدار α، خط عمود بر AM یا MB، از مثلث‌ها خارج نمی‌شود (چرا؟) و گزینهٔ (۳) پاسخ نیست.

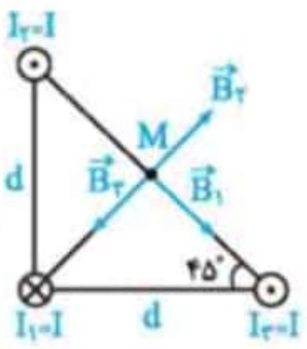
۳ ۱۸۸۶ با توجه به توضیحاتی که در تست قبل ارائه کردیم، در این تمرین α در رأس مثلث برابر 37° است و گزینهٔ (۳) نشانگر میدان‌ها در نقطهٔ M می‌باشد (چرا؟).

۱ ۱۸۸۷ میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان سیم‌های A و B به‌صورت زیر بوده‌اند که برایند آن‌ها در نقطهٔ C در راستای قائم، رو به پایین و منطبق بر عمودمنصف دو سیم قرار گرفته است.



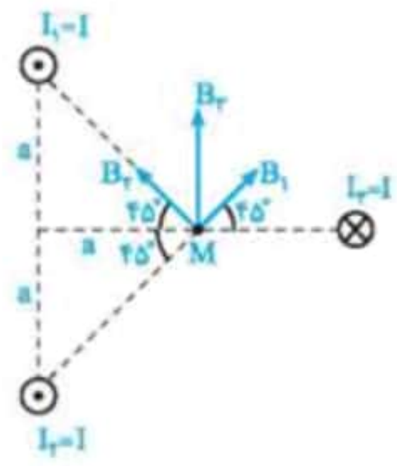
با توجه به شکل فوق و با توجه به قانون دست راست، جریان سیم A درون‌سو و جریان سیم B، برون‌سو است.

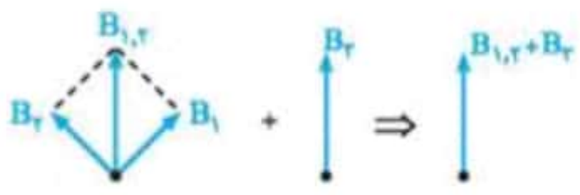
۴ ۱۸۸۸ ابتدا به کمک قانون دست راست، جهت هریک از میدان‌های $\vec{B}_1$، $\vec{B}_2$ و $\vec{B}_3$ را در نقطهٔ M تعیین می‌کنیم. با توجه به برابر بودن جریان سیم‌های I_2 و I_3 و هم‌چنین یکسان بودن فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ M، بنابراین اندازهٔ میدان مغناطیسی آن‌ها در نقطهٔ M یکسان است. پس این دو میدان با توجه به خلاف جهت بودنشان، یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین میدان برایند برابر میدان $\vec{B}_1$ می‌باشد.





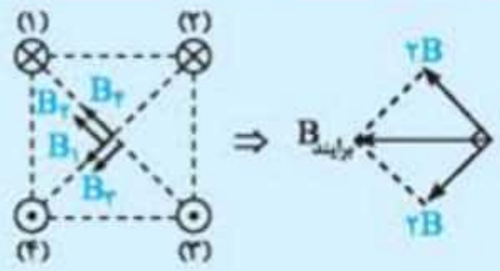
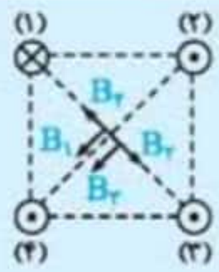
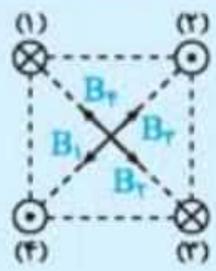
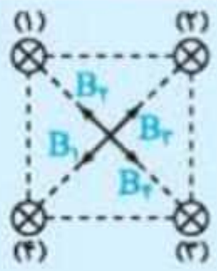
۱ ۱۸۸۹ ابتدا به کمک قانون دست راست، جهت بردار میدان مغناطیسی ناشی از هر یک از سیم‌ها را در نقطهٔ M به دست می‌آوریم (میدان‌های B_1 و B_2 هم‌اندازه هستند. چرا؟). با توجه به شکل، جهت میدان مغناطیسی برایند به سمت بالا می‌باشد.





gajmarket.com

۱۸۹۰ از آن‌جایی که جریان هر یک از سیم‌ها برابر I و فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز مربع یکسان می‌باشد، بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از هریک از سیم‌ها در مرکز مربع یکسان است (B). در ادامه کافی است تا جهت هر یک از آن‌ها را به کمک قانون دست راست به‌صورت زیر تعیین کنیم:

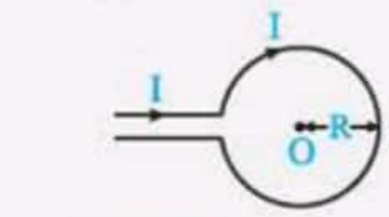
گزینهٔ (۱)	گزینهٔ (۲)	گزینهٔ (۳)	گزینهٔ (۴)
			
$B_{برایند} = \sqrt{(2B)^2 + (2B)^2} = 2B\sqrt{2}$	$B_{برایند} = 2B$ ⇒ برایند B ↙	⇒ $B_{برایند} = 0$	⇒ $B_{برایند} = 0$

بنابراین اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند در گزینهٔ (۱) بیشتر از سایر گزینه‌ها می‌باشد.

خلاقیت هنرهای حرفه‌ای در این سؤال که جریان سیم‌ها یکسان و بر روی رئوس مربع قرار دارند، میدان برایند ناشی از دو سیم مقابل هم (سیم‌هایی که بر روی یک قطر مربع قرار دارند)، اگر جریان دو سیم هم‌جهت باشد برابر صفر است. حال با توجه به این موضوع به این سؤال پاسخ دهید.

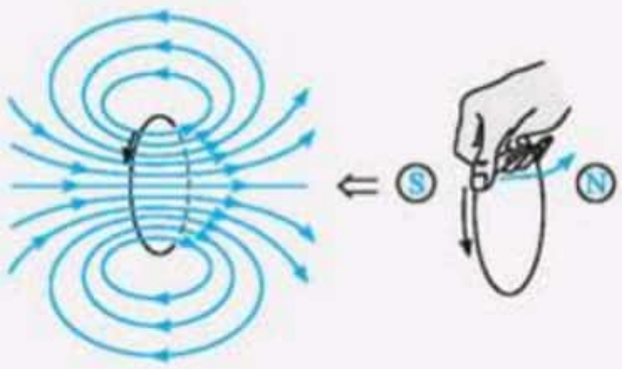
۱۸۹۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۴ **میدان مغناطیسی در مرکز یک پیچهٔ مسطح** (تست‌های ۱۸۹۱ تا ۱۸۹۹)

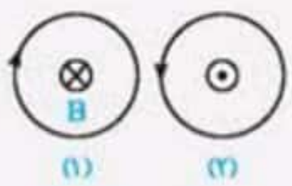


هرگاه از پیچهٔ مسطحی با شعاع R جریانی به‌شدت I عبور کند، اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه متناسب با جریان عبوری از پیچه می‌باشد.

برای مشخص کردن جهت میدان مغناطیسی، مجدداً مشابه با سیم عمل کرده و شست دست راست را بر روی سیم و در جهت جریان قرار می‌دهیم، خم شدن انگشتان دست راست میدان مغناطیسی درون حلقه را نشان می‌دهد و حلقه مانند یک آهنربا است و میدان مغناطیسی در داخل آن از S به N می‌باشد.

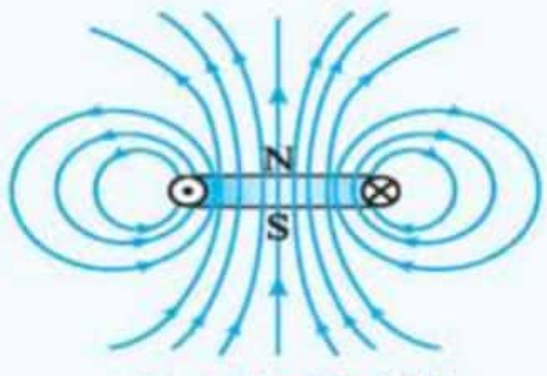


تذکر درحالت مسطح، میدان در مرکز را به‌صورت درون‌سو و برون‌سو نشان می‌دهیم (کافی است شست دست راست را در جهت I بگذارید و انگشتان دست راست را خم کنید)، در شکل (۱) انگشتان به صفحه وارد شده و میدان درون‌سو است و در شکل (۲) از صفحه خارج شده و میدان برون‌سو است.

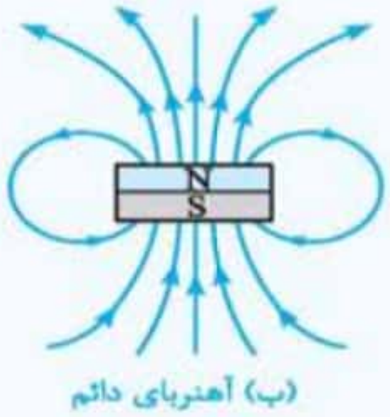


دید بهتر

بررسی و مقایسهٔ میدان مغناطیسی یک حلقهٔ حامل جریان و یک آهنربای تخت دایره‌ای‌شکل، نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی آن‌ها شبیه یک‌دیگر است. به همین دلیل، هر حلقهٔ حامل جریان را به عنوان یک دوقطبی مغناطیسی در نظر می‌گیرند.



(الف) حلقهٔ حامل جریان



(ب) آهنربای دائم

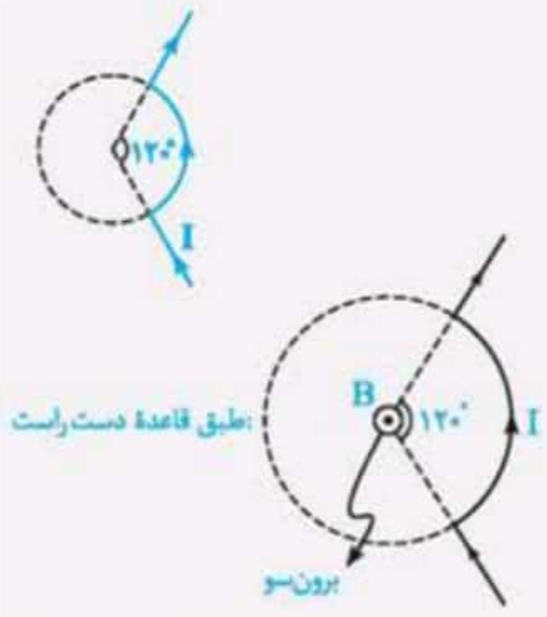


(پ) آهنربای تخت دایره‌ای

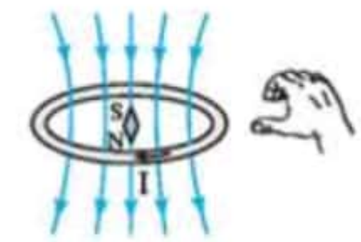
تمرین سیم راستی را مطابق شکل به‌صورت کمانی از دایره درمی‌آوریم. اگر جریان I را مطابق شکل از آن عبور دهیم، جهت میدان مغناطیسی در مرکز آن در کدام جهت می‌باشد؟ (تألیفی)

۱) ⊗ ۲) ⊙

۳) → ۴) ←

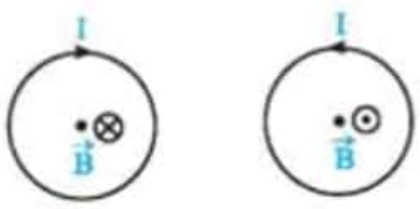


پاسخ این شکل یک حلقهٔ کامل نیست ولی در این‌گونه موارد نیز می‌توان جهت میدان در مرکز حلقه را با کمک قانون دست راست به دست آورد. با توجه به این موضوع، میدان در مرکز حلقه برون‌سو است و گزینهٔ (۲) صحیح می‌باشد.



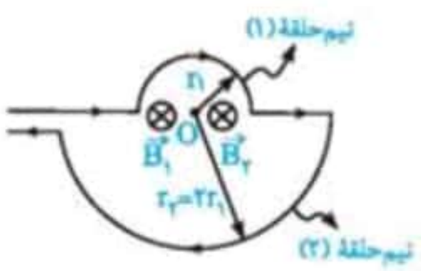
با توجه به جهت جریان I در گزینه‌های مطرح شده و به کمک قانون دست راست، متوجه می‌شویم که جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه به سمت پایین می‌باشد، بنابراین قطب N عقربهٔ مغناطیسی به سمت پایین جهت‌گیری می‌کند.

از طرفی در یک حلقهٔ (پیچهٔ) حامل جریان، فقط میدان در نزدیکی‌های مرکز حلقه به‌صورت خطوط راست می‌باشد و در سایر نقاط، خطوط میدان به‌صورت خط‌های راست نمی‌باشد و به شکل منحنی هستند. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

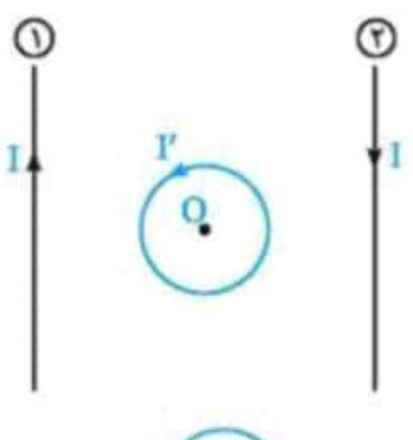


۳ ۱۸۹۲ با توجه به قانون دست راست، اگر جهت جریان در یک حلقه ساعتگرد باشد، میدان مغناطیسی در مرکز حلقه درون‌سو و اگر جهت جریان پادساعتگرد باشد، میدان در مرکز حلقه برون‌سو می‌باشد.

در شکل (۳) میدان هر سه حلقه در مرکز درون‌سو می‌باشد، بنابراین با هم جمع‌شده و میدان مغناطیسی برایند بیشترین مقدار ممکن را دارد ($B_{۳} = B_{\text{حلقه}(۱)} + B_{\text{حلقه}(۲)} + B_{\text{حلقه}(۳)}$).



۱ ۱۸۹۳ میدان مغناطیسی در نقطهٔ O (مرکز حلقه‌ها)، در اثر هر دو نیم‌حلقه‌های (۱) و (۲) به صورت درون‌سو می‌باشد. بنابراین میدان برایند نیز به شکل درون‌سو می‌باشد.

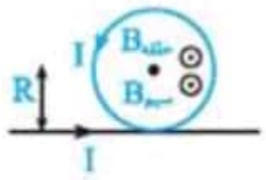


۲ ۱۸۹۴ با توجه به قانون دست راست، میدان‌های مغناطیسی سیم‌های راست (۱) و (۲) در مرکز حلقه به‌صورت درون‌سو می‌باشند. بنابراین برای صفر شدن میدان برایند در نقطهٔ O، باید میدان ناشی از حلقه به‌صورت برون‌سو باشد. پس جریان حلقه به‌صورت پادساعتگرد می‌باشد.

$$\text{میدان حلقه } B_{\text{حلقه}} \text{ (برون‌سو)} \xrightarrow[\text{برایند در نقطهٔ O}]{\text{برای صفر شدن میدان}} \begin{cases} \text{میدان سیم (۱) : } B_{۱} \text{ (درون‌سو)} \\ \text{میدان سیم (۲) : } B_{۲} \text{ (درون‌سو)} \end{cases}$$

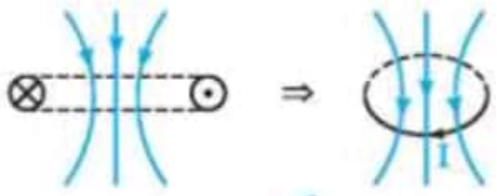
$$B_T = ۰ \Rightarrow B_{\text{حلقه}} = B_{۱} + B_{۲}$$

۲ ۱۸۹۵ ابتدا به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان‌های مغناطیسی حاصل از سیم و حلقه را در مرکز حلقه به‌دست می‌آوریم.



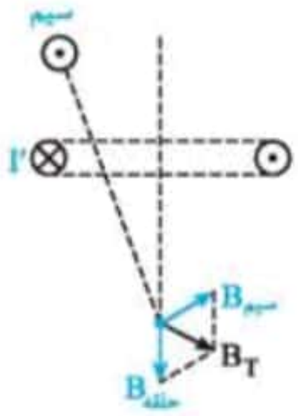
با توجه به هم‌جهت بودن میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست و حلقه در مرکز دایره، پس میدان برایند در مرکز حلقه، به صورت برون‌سو است.

۴ ۱۸۹۶ **گام اول:** با توجه به شکل کتاب درسی، در این حالت خطوط میدان مغناطیسی حلقه مطابق شکل مقابل می‌باشد:



گام دوم: در صورتی که میدان مغناطیسی در A برابر صفر شود، در این نقطه جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم به سمت بالا می‌باشد تا میدان حلقه را خنثی کند. بنابراین طبق قاعدهٔ دست راست، جریان سیم راست به صورت برون‌سو می‌باشد.

گام سوم: با توجه به برون‌سو شدن جریان سیم، جهت میدان آن در B با توجه به گزینه‌ها تنها به صورت نشان داده شده می‌تواند باشد:



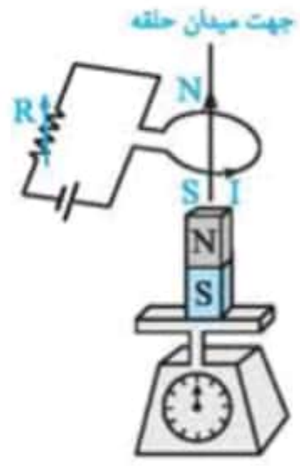
gajmarket.com

۴ ۱۸۹۷ برای پاسخ دادن به این سؤال مفهومی، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: با توجه به جریان خروجی از باتری، قطب‌های مغناطیسی حلقه به‌صورت مقابل است:

گام دوم: با مشخص شدن قطب‌های مغناطیسی حلقه، مشاهده می‌شود که حلقه و آهنربا یکدیگر را جذب می‌کنند. پس به آهنربا نیرویی رو به بالا وارد می‌شود و ترازو عدد کم‌تری نسبت به وزن آهنربا نشان می‌دهد.

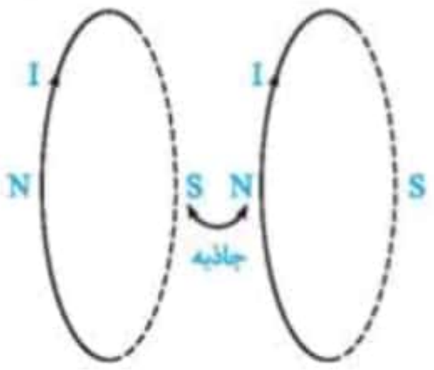
گام سوم: با کاهش مقاومت R، جریان عبوری از حلقه افزایش یافته و میدان مغناطیسی حلقه نیز بزرگ‌تر می‌شود. این موضوع سبب می‌شود که میزان جاذبهٔ حلقه و آهنربا افزایش یابد و عدد ترازو بیشتر کاهش یابد.



۳ ۱۸۹۸

نکته

با عبور جریان الکتریکی از یک حلقه، حلقه مانند یک آهنربا عمل می‌کند که برای تعیین قطب‌های آن از قانون دست راست استفاده می‌کنیم. به این ترتیب اگر انگشت شست دست راست را بر روی حلقه و همسو با جهت جریان الکتریکی قرار داده و سایر انگشتان دست راست را خم کنیم، جهت خم شدن انگشتان دست راست، سوی میدان مغناطیسی در درون حلقه را نشان می‌دهد، یعنی از سمت S به N است.



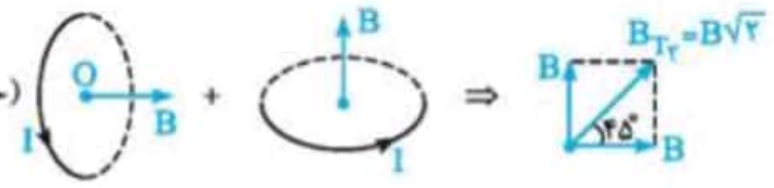
با توجه به قانون دست راست، قطب‌های دو حلقه مطابق شکل مقابل است و از آن‌جایی که قطب‌های S و N دو حلقه کنار یک‌دیگر هستند این دو حلقه یک‌دیگر را جذب می‌کنند. نوع این جاذبه از نوع مغناطیسی است.

نکته

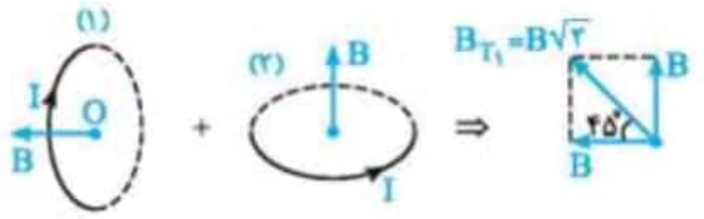
حلقه‌های دارای جریان‌های الکتریکی هم‌جهت، یک‌دیگر را جذب و حلقه‌های دارای جریان‌های الکتریکی در خلاف جهت، یک‌دیگر را دفع می‌کنند.

۲ ۱۸۹۹ با توجه به مفهوم ارائه‌شده در سؤالات قبل، اگر فرض کنیم جهت جریان در حلقهٔ (۱) معکوس شده است، داریم:

: حالت ۲



: حالت ۱

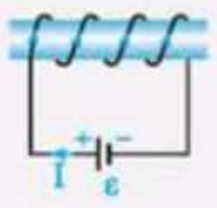


همان‌طور که مشاهده می‌کنید، میدان مغناطیسی برایند در حالت دوم، ۹۰ درجه مطابق شکل فوق چرخیده است.

۳ ۱۹۰۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۵ — میدان مغناطیسی در یک سیملولهٔ حامل جریان (تست‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۲۴)

۱ محاسبهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی در یک سیملولهٔ حامل جریان:



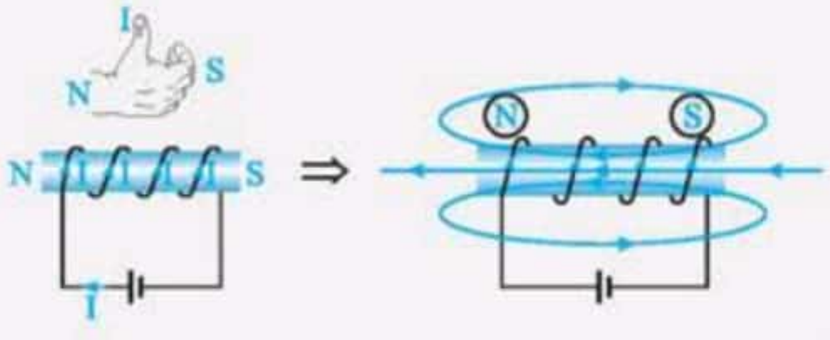
سیملوله (یا سلونوئید) از چند دور سیم دایره‌ای شکل مانند فنر تشکیل شده است. با عبور جریان الکتریکی از سیملوله، در داخل و خارج از آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود.

نکته اگر شعاع قاعدهٔ سیملوله در مقایسه با طول آن کوچک باشد و حلقه‌های سیملوله خیلی به هم نزدیک باشند، میدان مغناطیسی داخل سیملوله در نقطه‌های دور از لبه‌ها یکنواخت است و بزرگی آن از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

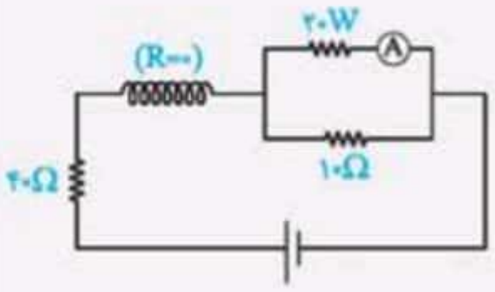
$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad \text{یا} \quad B = \mu_0 nI$$

I: جریانی است که از سیملوله می‌گذرد؛ **N**: تعداد دورهای سیملوله؛ **L**: طول سیملوله؛ **n**: تعداد دور سیم در واحد طول سیملوله $\left(n = \frac{N}{l}\right)$

۲ تعیین جهت میدان مغناطیسی در یک سیملوله:



تعیین جهت میدان مغناطیسی مجدداً با کمک قانون دست راست انجام می‌شود. با توجه به این قانون اگر انگشت شست دست راست را بر روی یکی از سیم‌ها و در راستای جریان الکتریکی قرار دهیم، جهت خم شدن سایر انگشتان سوی میدان مغناطیسی در داخل سیملوله را نشان می‌دهد و از قطب S به N است.

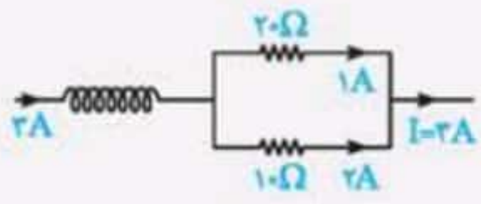


تمرین۱ در شکل روبه‌رو، طول سیملوله ۳۰cm، تعداد حلقه‌های آن ۵۰۰ دور و عدد آمپرسنج برابر یک آمپر است. میدان مغناطیسی داخل سیملوله چند گاوس می‌باشد؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T.m/A)$

۱) $0/2\pi$ ۲) 20π (ریاضی داخل ۸۴، با تغییر)

۳) $2\pi \times 10^{-2}$ ۴) $2\pi \times 10^{-3}$

پاسخ با توجه به عدد آمپرسنج و پخش جریان در مقاومت‌های موازی، جریان $I = 2+1 = 3A$ وارد سیملوله می‌شود و میدان مغناطیسی در داخل سیملوله برابر است با:



جریان سیملوله: $I = 2+1 = 3A$, $N = 500$, $L = 30cm = 30 \times 10^{-2} m$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{500}{30 \times 10^{-2}} \times 3 = 2\pi \times 10^{-3} T = 2\pi \times 10^{-3} \times 10^{4} G = 20\pi G$$ (گزینهٔ ۲)

تبدیل تسلا به گاوس

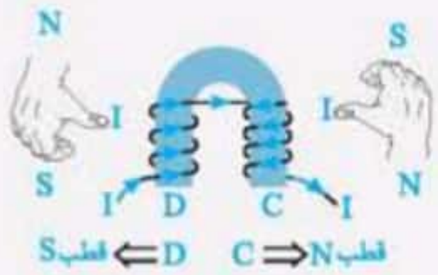
تمرین۲ با توجه به شکل، از راست به چپ نقاط A، B، C و D کدام قطب‌اند؟

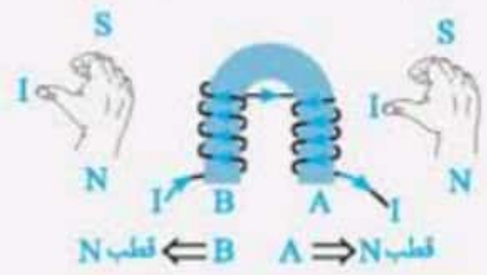


۱) S,N,S,S ۲) N,S,S,S

۳) S,S,S,N ۴) S,N,N,N

پاسخ هر یک از شاخه‌های A، B، C و D را مانند یک سیملوله در نظر گرفته و قانون دست راست را برای آن‌ها استفاده می‌کنیم. با توجه به این موضوع، قطب‌های A، B، C و D به ترتیب N، N، N و S می‌باشد.





(گزینهٔ ۴)

با توجه به رابطهٔ بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز سیملوله، داریم:

n : تعداد دور در واحد طول

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right) I \Rightarrow B \propto n \ , \ B \propto I \Rightarrow$$ (با افزایش I و n، اندازهٔ B نیز افزایش می‌یابد.)

با وارد کردن یک هستهٔ آهنی به داخل یک سیملوله و برقراری جریان در سیملوله، هستهٔ آهنی، آهنربا می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۱۹۰۱ با توجه به خلاصه نکات ارائه‌شده، میدان مغناطیسی داخل سیملوله و دور از لبه‌های آن یکنواخت بوده و بزرگی آن در تمام نقاط یکسان است.



$$B_A = B_B = B_C$$

۴۱۹۰۲ نمودار اندازهٔ میدان مغناطیسی برحسب شدت جریان عبوری از سیملوله مطابق شکل زیر است:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow B \propto I \Rightarrow$$



۲۱۹۰۳ اگر شدت جریان عبوری از سیملوله ۴ برابر و در طول ثابت تعداد حلقه‌ها ۲ برابر شود، اندازهٔ میدان مغناطیسی داخل سیملوله نیز ۸ برابر می‌شود.

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \xrightarrow[L_2 = L_1 , I_2 = 4I_1]{N_2 = 2N_1} \frac{B_2}{B_1} = \frac{N_2}{N_1} \times \frac{I_2}{I_1} = 8$$

۴۱۹۰۴ در مقایسهٔ شدت میدان مغناطیسی دو سیملولهٔ A و B می‌توان نوشت:

$$I_A = 2I_B \ , \ N_A = \frac{1}{2} N_B \ , \ I_A = I_B \ , \ \frac{B_A}{B_B} = ?$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow \frac{B_A}{B_B} = \frac{N_A}{N_B} \times \frac{I_B}{I_A} = \frac{\frac{1}{2} N_B}{N_B} \times \frac{I_B}{2I_B} = \frac{1}{4}$$

۲۱۹۰۵ با توجه به اطلاعات مسأله، می‌توان نوشت:

$$l = 62/8 cm = 10 \times (6/28) \times 10^{-2} m = (2\pi) \times 10^{-1} m \ , \ I = 3A \ , \ N = 100 \ , \ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T.m/A$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{100}{2\pi \times 10^{-1}} \times 3 = 6 \times 10^{-4} T$$

gajmarket.com

۳ ۱۹۰۶ با توجه به رابطهٔ $B=\mu_0\frac{N}{l}I$ در سیملوله داریم:

$$B=\mu_0\frac{N}{l}I=4\pi\times10^{-7}\times\frac{200}{0/2}\times5=2\pi\times10^{-3}T=2\pi\times10^{-3}\times10^{4}=20\pi G$$

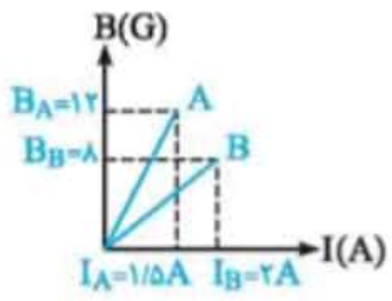
تبدیل تسلا به گاوس

۲ ۱۹۰۷ برای به‌دست آوردن تعداد دور سیم در هر سانتی‌متر از سیملوله، کافی است L را برابر $1cm$ فرض کرده و N را به‌دست آوریم. با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$B=0/012T\ ,\ I=2A\ ,\ \mu_0=12\times10^{-7}T.m/A\ ,\ L=1cm=10^{-2}m\ ,\ N=?$$

$$B=\mu_0\frac{N}{l}I\Rightarrow0/012=12\times10^{-7}\times\frac{N}{0/01}\times2\Rightarrow N=50$$

۳ ۱۹۰۸ با توجه به اعداد داده‌شده بر روی نمودار، می‌توانیم نسبت تعداد دور در واحد طول دو سیملوله $\left(\frac{n_A}{n_B}\right)$ را به‌دست آوریم:

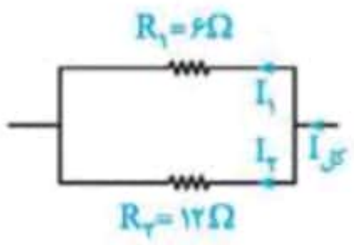


$$B=\mu_0nI\Rightarrow\frac{B_A}{B_B}=\frac{n_A}{n_B}\times\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\frac{12}{8}=\frac{n_A}{n_B}\times\frac{1/5}{2}\Rightarrow\frac{n_A}{n_B}=2$$

حال با داشتن نسبت $\frac{n_A}{n_B}$، به راحتی می‌توانیم میدان دو سیملوله را به‌ازای جریان عبوری یکسان مقایسه کنیم.

$$\frac{n_A}{n_B}=2\ ,\ I_A=I_B\ ,\ \frac{B_A}{B_B}=?\Rightarrow\frac{B_A}{B_B}=\frac{n_A}{n_B}\times\overset{1}{\left(\frac{I_A}{I_B}\right)}=2\times1\Rightarrow\frac{B_A}{B_B}=2$$

۱ ۱۹۰۹ ابتدا جریان الکتریکی در مدار را به‌دست می‌آوریم:



$$P_1=R_1I_1^2\Rightarrow24=6\times I_1^2\Rightarrow I_1=2A$$

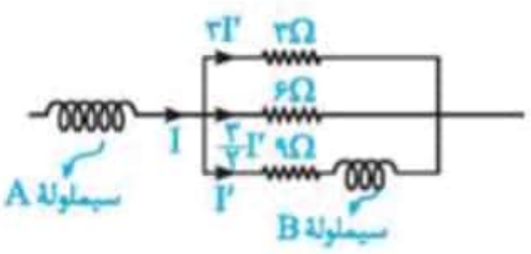
$R_1:V_1=V_2\Rightarrow R_1I_1=R_2I_2\Rightarrow6\times2=12\times I_2\Rightarrow I_2=1A$ و R_2 موازی هستند.

$$I_{کل}=I_1+I_2=3A$$

در ادامه با توجه به این‌که جریان $I_{کل}$ از سیملوله عبور می‌کند، برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی داخل سیملوله داریم:

$$\begin{cases}B=\mu_0\frac{N}{l}I_{کل}\\ \text{تعداد دور سیم در هر متر}:\frac{N}{l}=\frac{1000}{1}=1000\end{cases}\Rightarrow B=4\pi\times10^{-7}\times1000\times3=1/2\pi\times10^{-3}T$$

۱ ۱۹۱۰ با توجه به یکسان بودن تعداد دور سیم دو سیملوله در واحد طول، برای مقایسهٔ بزرگی میدان مغناطیسی، کافی است جریان در سیملوله‌ها را مقایسه کنیم. به همین منظور، در صورتی‌که جریان در مقاومت ۹ اهمی را I' فرض کنیم، جریان در مقاومت ۶ اهمی برابر $\frac{3}{2}I'$ و جریان در مقاومت ۳ اهمی برابر $3I'$ می‌باشد، زیرا در اتصال موازی، جریان با مقاومت رابطهٔ معکوس دارد:

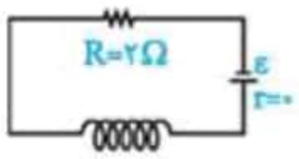


$$3I'+\frac{3}{2}I'+I'=I\Rightarrow I'=\frac{2}{11}I$$

$$I_A=I\ ,\ I_B=I'=\frac{2}{11}I\Rightarrow B=\mu_0\frac{N}{l}I\Rightarrow\frac{B_A}{B_B}=\frac{I_A}{I_B}=\frac{I}{\frac{2}{11}I}=\frac{11}{2}$$

خلاقیت حرفه‌ای‌ها با توجه به یکسان بودن $\frac{N}{l}$ برای دو سیملوله و این موضوع که مشخص است جریان سیملولهٔ A از B بیشتر می‌باشد، پس گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند.

۲ ۱۹۱۱ مشابه با تست قبل عمل می‌کنیم، به همین منظور ابتدا با توجه به توان مقاومت ۲ اهمی، جریان الکتریکی را در مدار محاسبه می‌کنیم:

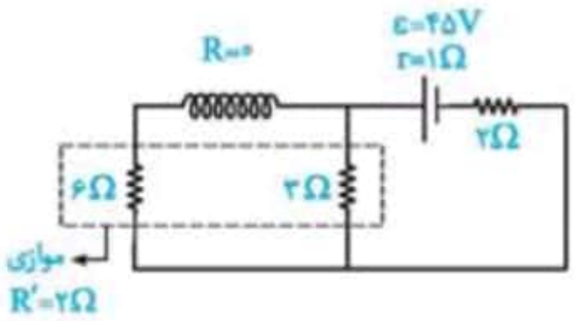


$$P=RI^2\Rightarrow8=2\times I^2\Rightarrow I=2A$$

و در ادامه برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی داخل سیملوله می‌توان نوشت:

$$B=\mu_0\frac{N}{l}I=4\pi\times10^{-7}\times\frac{30}{1}\times2=2/4\pi\times10^{-5}T$$

۲ ۱۹۱۲ **گام اول:** ابتدا مقاومت معادل مدار را محاسبه می‌کنیم (به صفر بودن مقاومت سیملوله توجه داشته باشید):

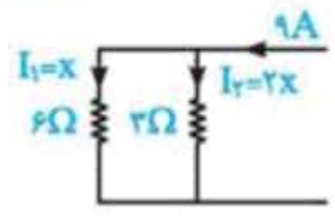


$$\Rightarrow R_T = ۲ + ۲ = ۴\Omega$$

گام دوم: جریان خروجی از باتری برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۴۵}{۴ + ۱} = ۹A$$

گام سوم: جریان عبوری از مقاومت ۶Ω، با توجه به تکنیک‌های پخش جریان در مقاومت‌های موازی برابر است با:



$$۳x = ۹ \Rightarrow x = ۳A$$

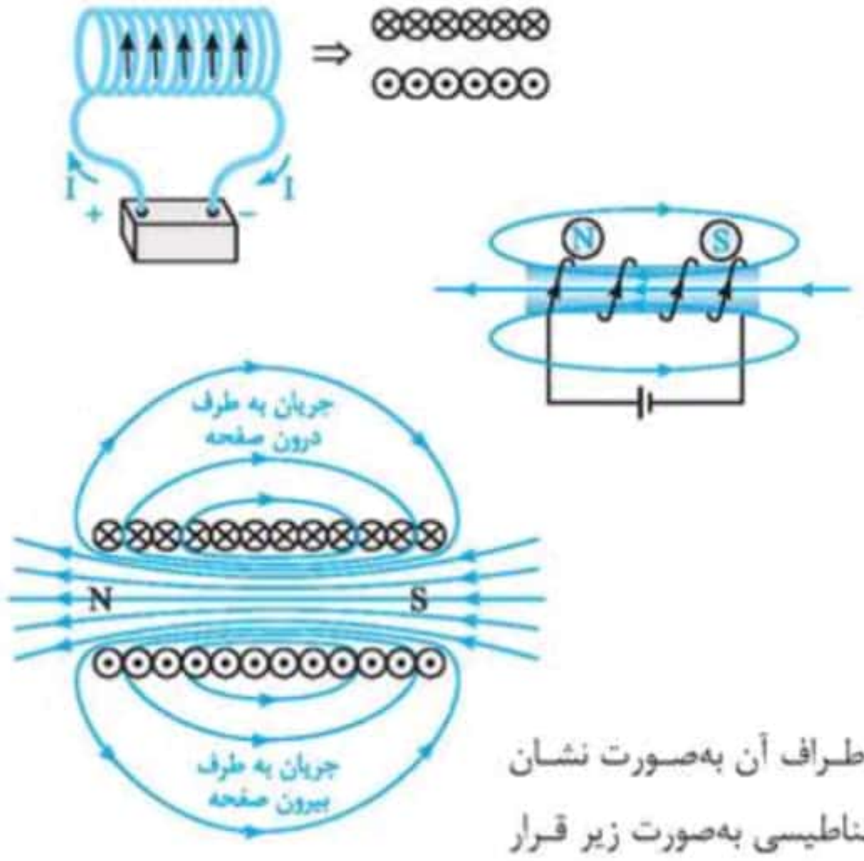
گام چهارم: میدان مغناطیسی ایجاد شده در داخل سیملوله برابر است با:

$$B = \mu_۰ \frac{N}{l} I = ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times \frac{۵۰۰}{۳۰ \times ۱۰^{-۲}} \times ۳ = ۲\pi \times ۱۰^{-۳}\, T = ۲۰\pi G$$

۳ ۱۹۱۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

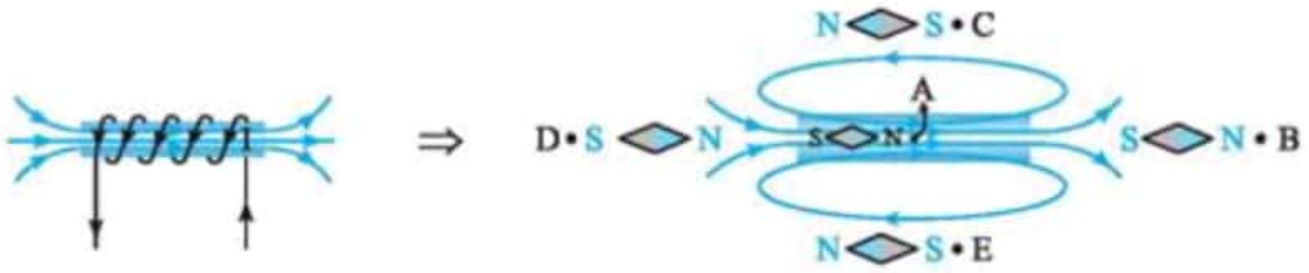
۱ با توجه به جهت جریان در سیملوله، از نگاه ناظر بالایی جریان در قسمت بالایی سیملوله به‌صورت درون‌سو و در قسمت پایینی آن به‌صورت برون‌سو می‌باشد.

۲ با توجه به قانون دست راست، میدان مغناطیسی در درون سیملوله و اطراف آن مطابق شکل مقابل می‌باشد (در داخل سیملوله خطوط میدان مغناطیسی به سمت چپ است).



۳ خطوط میدان مغناطیسی منحنی‌های بسته‌ای هستند، بنابراین جهت این خطوط در داخل و بیرون سیملوله در خلاف جهت یکدیگر می‌باشند و شکل موردنظر این سؤال، در گزینهٔ (۳) درست نشان داده شده است.

۴ ۱۹۱۴ با توجه به جهت جریان در سیملوله، خطوط میدان مغناطیسی در داخل و اطراف آن به‌صورت نشان داده شده در شکل زیر می‌باشد. بنابراین در هریک از نقاط A، B، C، D و E عقربهٔ مغناطیسی به‌صورت زیر قرار می‌گیرد، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

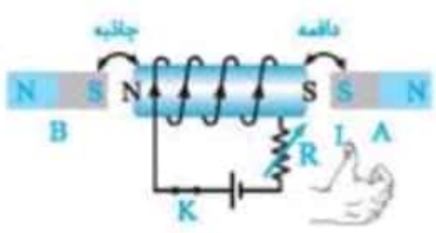


۳ ۱۹۱۵ در این آزمایش، وقتی جریان در سیملوله برقرار می‌شود، میدان مغناطیسی سیملوله در هستهٔ آهنی (میخ) خاصیت مغناطیسی القا کرده و میخ تبدیل به یک آهنربای الکتریکی می‌شود. از طرفی هرچه تعداد دورهای سیملوله و جریان عبوری از آن بیشتر شود، میدان مغناطیسی سیملوله قوی‌تر شده و آهنربای الکتریکی (یعنی میخ) قوی‌تر خواهد شد.

آهنربا قوی‌تر می‌شود. $\Rightarrow$ میدان سیملوله $\uparrow \Rightarrow$ جریان سیملوله $\uparrow \Rightarrow$ نیروی محرکهٔ باتری $\uparrow$ (یا مقاومت رئوستا $\downarrow$)

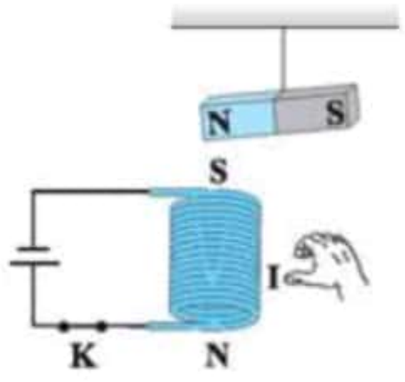
دقت شود که در هر نوع اتصال باتری به میخ، میخ تبدیل به آهنربا می‌شود و این مورد، ارتباطی به نحوهٔ اتصال پایانه‌های مثبت و منفی باتری به آن ندارد. همان‌طور که می‌دانیم، القای مغناطیسی همیشه از نوع **جذب** بوده و باعث جذب گیره‌های فلزی به میخ می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ ۱۹۱۶ با بسته شدن کلید K، در سیملوله جریان الکتریکی برقرار شده و قطب‌های سمت چپ و راست آن به ترتیب N و S می‌شود. به این ترتیب سیملوله، آهنربای سمت راست را دفع کرده و آهنربای سمت چپ را جذب می‌کند. از طرفی با افزایش مقاومت R، جریان عبوری از سیملوله کاهش یافته و تبدیل به آهنربای ضعیف‌تری می‌شود و این نیروها کاهش می‌یابد.

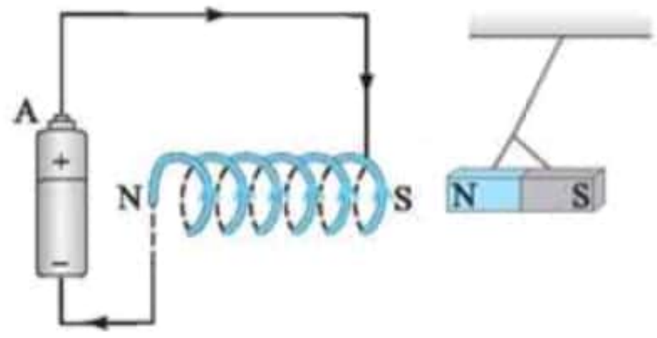


gajmarket.com

۳ ۱۹۱۷ **شکل (۱):** در این شکل با بستن کلید K، جریان در سیملوله برقرار شده و با توجه به جهت جریان الکتریکی ایجاد شده، لبهٔ بالای سیملوله قطب S و لبهٔ پایینی آن قطب N می‌شود. بنابراین آهنربای میله‌ای آویخته شده، جذب سیملوله شده و قطب N آهنربای میله‌ای به طرف پایین می‌آید.

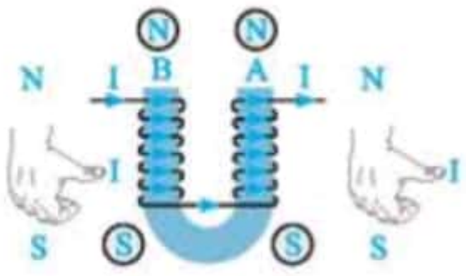


شکل (۲): در این شکل برای این‌که آهنربای میله‌ای جذب سیملوله شود، باید سمت راست سیملوله قطب S و سمت چپ آن قطب N باشد. بنابراین با توجه به قانون دست راست، جهت جریان در سیملوله باید مطابق شکل باشد. پس باید باتری در حالت A در مدار قرار گیرد.

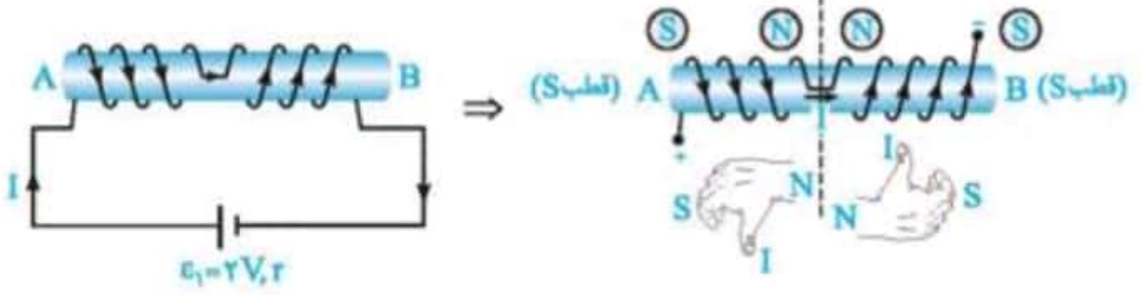


۴ ۱۹۱۸ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۵)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

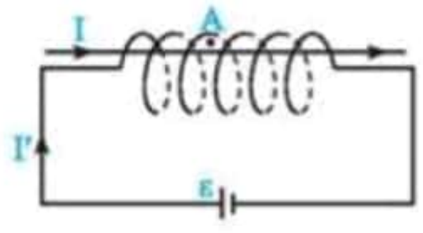
۱ ۱۹۱۹ ابتدا دقت شود که جریان از قطب مثبت به سمت قطب منفی بوده و به شکل نشان داده شده است. در ادامه برای بررسی این تست هر یک از شاخه‌های A و B را مانند یک سیملوله درنظر گرفته و قانون دست راست را برای آن بررسی می‌کنیم. با توجه به این موضوع، سرهای A و B هر دو قطب N خواهند بود.



۴ ۱۹۲۰ با توجه به این‌که $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ می‌باشد، جهت جریان در سیملوله مطابق شکل زیر است. از طرفی باید دقت شود که در نیمی از حلقه‌های این سیملوله جریان الکتریکی به‌سمت پایین و در نیمی دیگر جریان الکتریکی به‌سمت بالا می‌باشد. به‌عبارت بهتر، این شکل تشکیل شده از دو سیملوله است که دارای یک هستهٔ مشترک می‌باشند. مطابق شکل زیر، برای تعیین کردن قطب A، از سیملولهٔ سمت چپ و برای تعیین کردن قطب B، از سیملولهٔ سمت راست استفاده می‌کنیم.



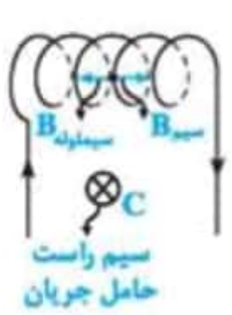
۳ ۱۹۲۱ با توجه به قانون دست راست، جهت میدان ناشی از سیم و سیملولهٔ حامل جریان به‌صورت مقابل است.



با توجه به این‌که این دو میدان بر هم عمود هستند، میدان مغناطیسی برایند آن‌ها عبارت است از:

$$\begin{matrix} B_{سیم}=2mT \\ \longleftarrow \odot \\ B_{سیملوله}=2mT \end{matrix} \Rightarrow B_T=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\,mT$$

۳ ۱۹۲۲ با توجه به جهت جریان الکتریکی سیملوله و قانون دست راست، جهت میدان سیملوله در داخل آن از راست به چپ (⟵) است.



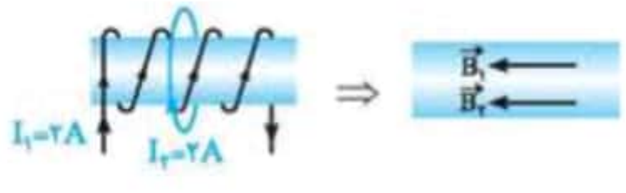
بنابراین برای این‌که میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ M بر روی محور سیملوله صفر شود، باید میدان مغناطیسیِ ناشی از سیمِ راستِ عمود بر صفحه، در نقطهٔ M به سمت راست باشد. پس سیم راست را باید در مکان C قرار دهیم و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳ ۱۹۲۳ برای صفر شدن میدان مغناطیسی در نقطهٔ M، میدان مغناطیسی سیملوله‌های P و Q باید با یک‌دیگر برابر و در خلاف جهت یک‌دیگر باشند. به همین منظور داریم:

$$B_P=B_Q \Rightarrow (\mu_0 \frac{N}{l} I)_P=(\mu_0 \frac{N}{l} I)_Q \Rightarrow N_P I_P=N_Q I_Q \Rightarrow 200\times I_P=300\times 1 \Rightarrow I_P=\frac{3}{2}A=1/5\,A$$

* با دقت به شکل سؤال بررسی کنید که جهت میدان ناشی از جریان در دو سیملوله مخالف یک‌دیگر است.

۲ ۱۹۲۴ ابتدا باید دقت شود که در مرکز حلقه، دو میدان ناشی از حلقه و سیملوله حضور دارد. از طرفی به کمک قانون دست راست، جهت هریک از میدان‌های حلقه و سیملوله در مرکز حلقه به سمت چپ می‌باشد.



$$\begin{cases} \text{میدان سیملوله}: B_1=\mu_0 \frac{N}{L} I_1=12\times10^{-7}\times\frac{4}{0/5}\times2=192\times10^{-7}\,T \quad \text{(به سمت چپ)} \\ \text{میدان حلقه با توجه به اطلاعات سؤال}: B_2=6\times10^{-6}\,T=60\times10^{-7}\,T \quad \text{(به سمت چپ)} \end{cases}$$

در نهایت با توجه به این‌که $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ هم‌جهت‌اند، بنابراین $\vec{B}_T$ در مرکز حلقه برابر است با:

$B_T = B_1 + B_2 = ۲۵۲ \times ۱۰^{-۷} T$ (گزینهٔ ۲)(به سمت چپ)

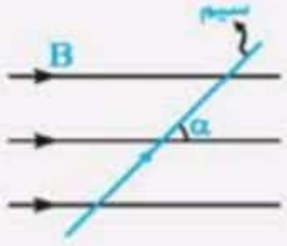
تذکر چون در داخل سیملوله هستهٔ پلاستیکی قرار داده‌ایم (و نه هستهٔ فلزی)، بنابراین میدان در داخل سیملوله به دلیل وجود هسته تقویت نخواهد شد و اندازهٔ آن با رابطهٔ $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$ به‌دست می‌آید.

۱۹۲۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۶ **نیروی وارد بر سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی** (تست‌های ۱۹۲۵ تا ۱۹۵۴)

۱ محاسبهٔ اندازهٔ نیروی وارد بر سیم حامل جریان:

اگر از سیمی به طول L، جریان I بگذرد و سیم در یک میدان مغناطیسی یکنواخت با شدت B تسلا قرار گیرد، از طرف میدان بر سیم نیروی الکترومغناطیسی F وارد می‌شود که مقدار آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



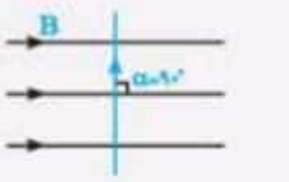
$F = BIL \sin \alpha$

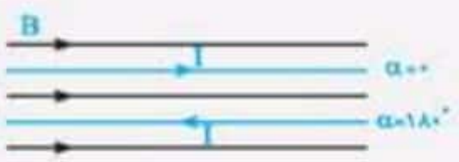
B: شدت میدان مغناطیسی (تسلا)، I: شدت جریان عبوری از سیم

L: طولی از سیم که در میدان مغناطیسی قرار دارد، α: زاویهٔ بین میدان مغناطیسی و جریان عبوری از سیم

تذکر۱ اگر راستای سیم و میدان مغناطیسی بر هم عمود باشند ($\alpha = ۹۰^\circ$) $\sin \alpha = ۱$ است، در این‌صورت نیروی وارد بر سیم بیشینه است.

تذکر۲ اگر سیم و میدان مغناطیسی در یک راستا قرار گیرند ($\alpha = ۰$ یا $\alpha = ۱۸۰^\circ$) از طرف میدان بر سیم نیرویی وارد نمی‌شود ($F = ۰$ و کمینه است).





$F_{max} = BIL \sin ۹۰^\circ = BIL$ $F_{min} = BIL \sin \alpha = ۰$

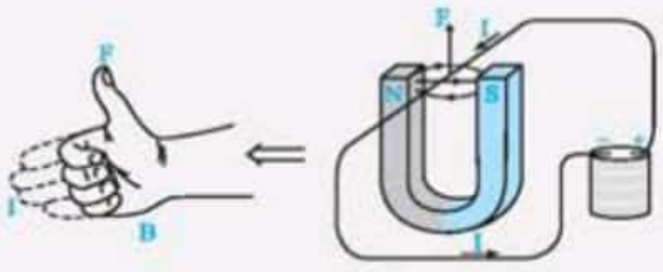
۲ تعیین جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان:

جهت نیروی F به کمک قانون دست راست تعیین می‌شود. به این صورت که اگر:

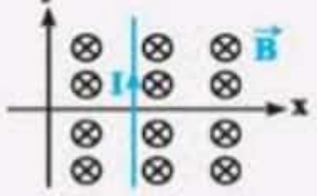
گام اول: چهار انگشت دست راست را در راستای جریان قرار دهیم.

گام دوم: به‌گونه‌ای که جهت خم شدن انگشتان جهت میدان مغناطیسی را نشان دهد.

گام سوم: در این‌صورت انگشست شست، سوی نیروی وارد بر سیم را مشخص می‌سازد.



تمرین۱ **از سیم مستقیمی که موازی محور y می‌باشد، شدت جریان I مطابق شکل می‌گذرد. اگر میدان مغناطیسی عمود بر صفحه و به سمت داخل باشد، نیروی وارد بر سیم به کدام جهت است؟** (M.K.A)



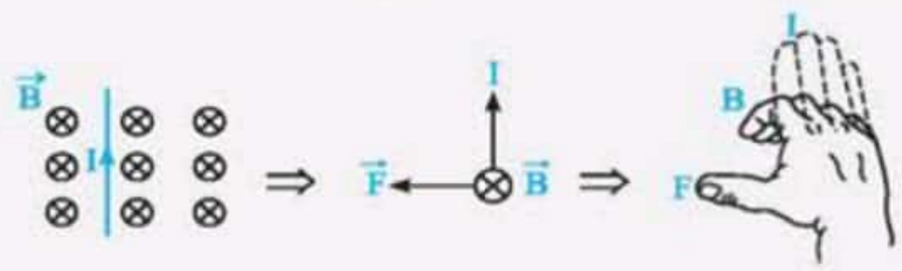
۱) هم‌جهت با محور y

۲) در خلاف جهت محور y

۳) در خلاف جهت محور x

۴) عمود بر صفحهٔ کاغذ به سمت خارج

پاسخ با توجه به قانون دست راست، نیروی وارد بر سیم به سمت چپ، یعنی در خلاف جهت محور x است.



تمرین۲ **اگر در آزمایش شکل روبه‌رو، کلید K را وصل کنیم، نیروی وارد بر قسمت افقی میلهٔ U شکل به‌کدام سمت خواهد بود؟**



۱) بالا

۲) پایین

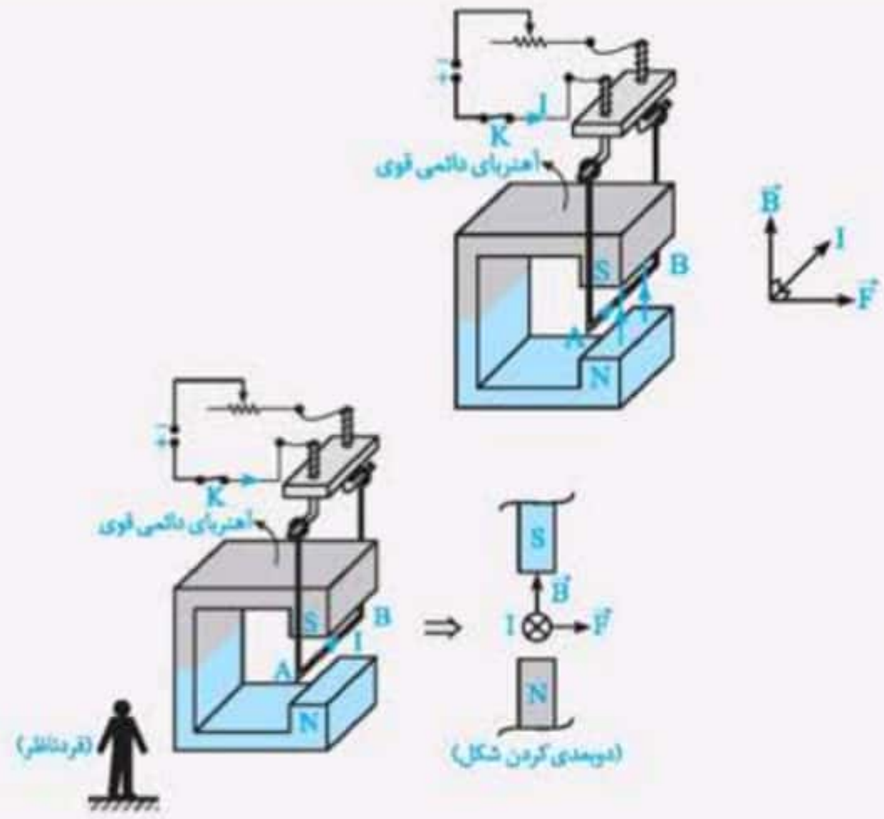
۳) چپ

۴) راست

gajmarket.com

پاسخ جریان الکتریکی از A به سمت B بوده و میدان مغناطیسی که سیم در آن قرار دارد از N به سمت S است. در نهایت با توجه به قانون دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم AB به سمت راست است.

* دقت شود که جریان الکتریکی از قطب مثبت منبع خارج می‌شود.



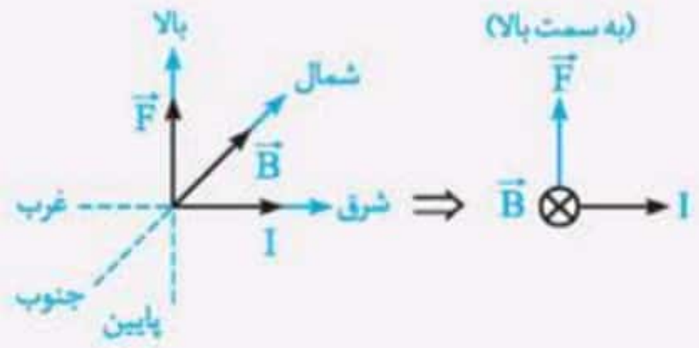
تذکر یک روش نسبتاً ساده‌تر برای شکل‌های سه بعدی، تبدیل شکل سه‌بعدی به شکل دوبعدی است. فرض کنید فردی در محل نشان داده شده در شکل مقابل قرار گرفته و مشاهدات خود را می‌کشد. از دید این فرد، شکل دوبعدی به‌صورت مقابل مشاهده می‌شود (دقت شود جریان از A به B بوده و از دید فرد جریان به داخل صفحه وارد می‌شود.)

با توجه به این شکل، نیروی وارد بر سیم به سمت راست است (گزینهٔ ۴).

تمرین۳ **یک سیم برق به‌طور افقی کشیده شده و جریان الکتریکی ثابتی به سمت مشرق از آن می‌گذرد. نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی زمین بر آن وارد می‌شود، تقریباً در کدام جهت است؟** (تجربی خارج ۸۴)

۱) شمال ۲) جنوب

۳) پایین ۴) بالا



پاسخ در این‌گونه از سؤالات کافی است یک شکل سه بعدی ساده به‌صورت مقابل رسم کنیم و اطلاعات مسأله را روی آن پیاده کنیم. در این تست جریان الکتریکی به سمت مشرق است (به سمت راست) و میدان مغناطیسی زمین مطابق خلاصه نکات (۲) از سمت جنوب به شمال (عمود بر صفحه به سمت داخل صفحه) است و شکل سه‌بعدی این وضعیت به‌صورت مقابل است. با توجه به این شکل، نیروی وارد بر سیم به سمت بالا است (گزینهٔ ۴).

با توجه به رابطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت ($F = BIL\sin\alpha$)، این نیرو به شدت جریان عبوری از سیم و بزرگی میدان مغناطیسی و نحوهٔ قرار گرفتن سیم در میدان (α) بستگی داشته و مستقل از بزرگی شتاب گرانش در محل سیم است.

۳ ۱۹۲۶ در مقایسهٔ دو حالت تنها زاویهٔ سیم با جهت میدان تغییر کرده و می‌توان نوشت:

$$F = BIL\sin\alpha \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow F_2 = \sqrt{2}F_1 \approx 1/4F_1 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 1/4 = \frac{140}{100}$$

این موضوع یعنی نیروی مغناطیسی واردشده بر سیم، نسبت به حالت اول، حدود ۴۰ درصد افزایش می‌یابد.

۴ ۱۹۲۷ با توجه به رابطهٔ $F = BIL\sin\alpha$، دو حالت می‌تواند رخ دهد:

حالت اول: اگر سیم در راستای میدان قرار گرفته باشد، $\sin\alpha = 0$ است. بنابراین با دو برابر کردن جریان عبوری از سیم، همچنان نیروی وارد بر سیم صفر بوده و تغییر نمی‌کند.

$$F = B\underbrace{I}_{\text{۲ برابر}}L\underbrace{\sin\alpha}_{=0} \Rightarrow (F = 0)$$ با دو برابر شدن جریان، نیرو همچنان صفر می‌ماند.

حالت دوم: اگر سیم حامل جریان در راستای میدان قرار نگرفته باشد، $\sin\alpha \neq 0$ است. در این صورت با دو برابر کردن جریان عبوری از سیم، نیروی وارد بر سیم دو برابر می‌شود.

$$F = B\underbrace{I}_{\text{۲ برابر}}L\underbrace{\sin\alpha}_{\neq 0} \Rightarrow$$ نیرو دو برابر می‌شود.

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است. همان‌طور که مشاهده کردید، با سؤال تحلیلی و جالبی روبه‌رو شدیم که بسیاری از دانش‌آموزان در آن نمرهٔ منفی می‌گیرند.

۲ ۱۹۲۸ با توجه به اطلاعات سؤال، برای محاسبهٔ مقدار نیروی وارد بر یک سانتی‌متر از سیم می‌توان نوشت:

$$I = ۵A \ , \ B = ۲۰۰G = ۲۰۰ \times ۱۰^{-۴}T = ۰/۰۲T \ , \ \alpha = ۳۰^\circ \ , \ L = ۱cm = ۱ \times ۱۰^{-۲}m \ , \ F = ?$$

$$F = BIL\sin\alpha = ۰/۰۲ \times ۵ \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) \times \sin ۳۰^\circ = ۵ \times ۱۰^{-۴}N$$

۴ ۱۹۲۹ حداکثر نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت، زمانی رخ می‌دهد که راستای سیم بر جهت میدان مغناطیسی عمود باشد ($\alpha = ۹۰^\circ$) و می‌توان نوشت:

$$L = ۲۵ \times ۱۰^{-۲}m \ , \ B = ۰/۲T \ , \ F_{max} = ۰/۲N \ , \ I = ?$$

$$F = BIL\sin\alpha \xrightarrow{\alpha = ۹۰^\circ} F_{max} = BIL \Rightarrow ۰/۲ = ۰/۲ \times I \times (۲۵ \times ۱۰^{-۲}) \Rightarrow I = \frac{۱}{۲۵ \times ۱۰^{-۲}} = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴A$$

۳ ۱۹۳۰ ابتدا باید دقت شود که با توجه به صورت سؤال، سیم عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد ($\alpha = ۹۰^\circ$) و با محاسبهٔ بزرگی میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{B} = ۰/۴\vec{i} + ۰/۳\vec{j} \Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{(۰/۴)^۲ + (۰/۳)^۲} = ۰/۵T \ , \ I = ۵A \ , \ L = ۱۰cm = ۰/۱m \ , \ F = ?$$

$$F = BIL\sin\alpha = ۰/۵ \times ۵ \times ۰/۱ \times \sin ۹۰^\circ = ۰/۲۵N$$

* راستای سیم باید در جهت محور z باشد تا بر میدان مغناطیسی عمود باشد.

۴ ۱۹۳۱ این میدان مغناطیسی دارای دو مؤلفهٔ افقی و عمودی بوده و سیم منطبق بر محور x است. برای محاسبهٔ اندازهٔ نیرو بر هر متر از سیم، میدان را به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی تجزیه کرده و نیروی هریک را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} \text{شکل ۱} : F_۱ = B_x IL\sin\alpha_۱ \xrightarrow{\text{زاویهٔ } B_x \text{ و } I \text{، صفر است.}} F_۱ = B_x IL\sin ۰ = ۰ \\ \text{شکل ۲} : F_۲ = B_y IL\sin\alpha_۲ \xrightarrow{\text{زاویهٔ } B_y \text{ و } I \text{، } ۹۰^\circ \text{ است.}} F_۲ = B_y IL\sin ۹۰^\circ = ۰/۳ \times ۲۰ \times ۱ \times ۱ = ۶N \end{cases} \Rightarrow F_R = F_۲ = ۶N$$

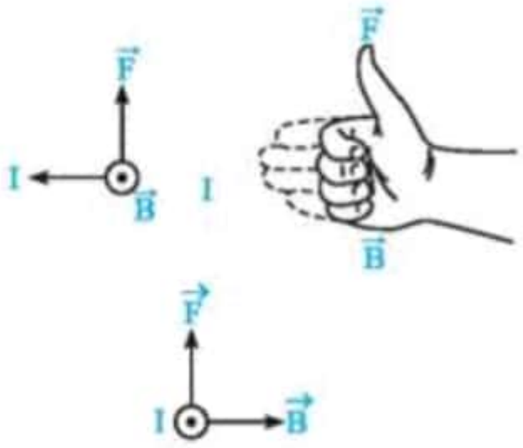
← نیروی وارد بر یک متر سیم پرسیده شده است.

۲ ۱۹۳۲ می‌دانیم که نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم به طول L و حامل جریان I، که در میدان B قرار گرفته است، برابر است با:

$$F = BIL\sin\alpha \Rightarrow (\text{نیوتون}) \equiv (\text{تسلا}) \times (\text{آمپر}) \times (\text{متر}) \Rightarrow \text{تسلا} \equiv \frac{(\text{نیوتون})}{(\text{آمپر})\,(\text{متر})} = \frac{N}{m.A}$$

با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده، یکای میدان مغناطیسی در SI (تسلا) برابر $\frac{N}{m.A}$ می‌باشد.

۲ ۱۹۳۳ با توجه به قانون دست راست، نیروی وارد بر سیم هم بر راستای جریان و هم بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. به‌طور مثال در شکل مقابل، جهت I، B و F وارد بر یک سیم نشان داده شده است.

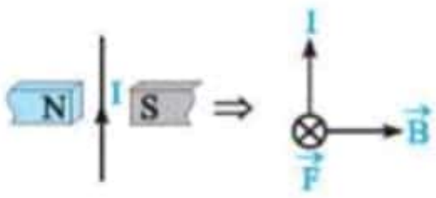


۴ ۱۹۳۴ با توجه به قانون دست راست، تنها شکل رسم شده در گزینهٔ (۴) صحیح است. در این شکل اگر چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار دهیم به گونه‌ای که خم شدن انگشتان دست راست سوی میدان مغناطیسی را نشان دهد، شست، سوی نیروی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.

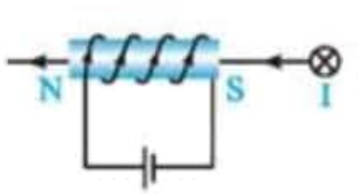
۳ ۱۹۳۵ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱ ۱۹۳۶ با توجه به قانون دست راست، در هریک از شکل‌های داده شده، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار دهیم به گونه‌ای که خم شدن انگشتان دست راست، سوی میدان مغناطیسی را نشان دهد، انگشت شست، سوی نیروی وارد بر هر سیم را نشان می‌دهد.

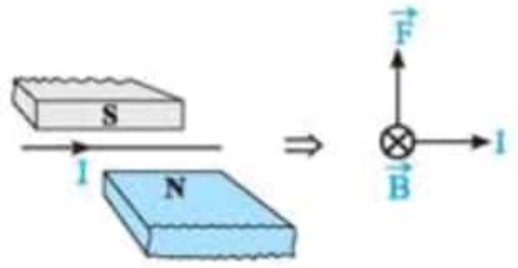
بنابراین جهت نیروی وارد بر هر سیم در شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب درون‌سو، بالا و بالا می‌باشد.



شکل (۱)



شکل (۲)

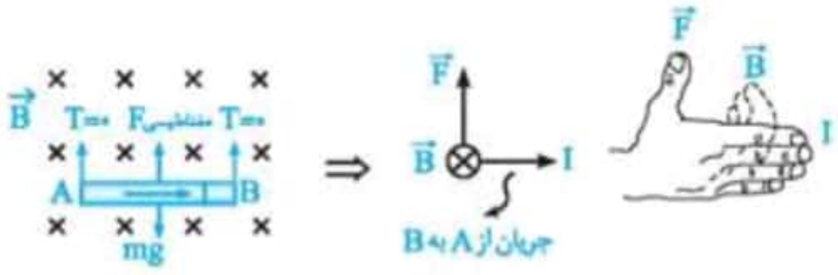


شکل (۳)

* جهت میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا از قطب N به S می‌باشد.

gajmarket.com

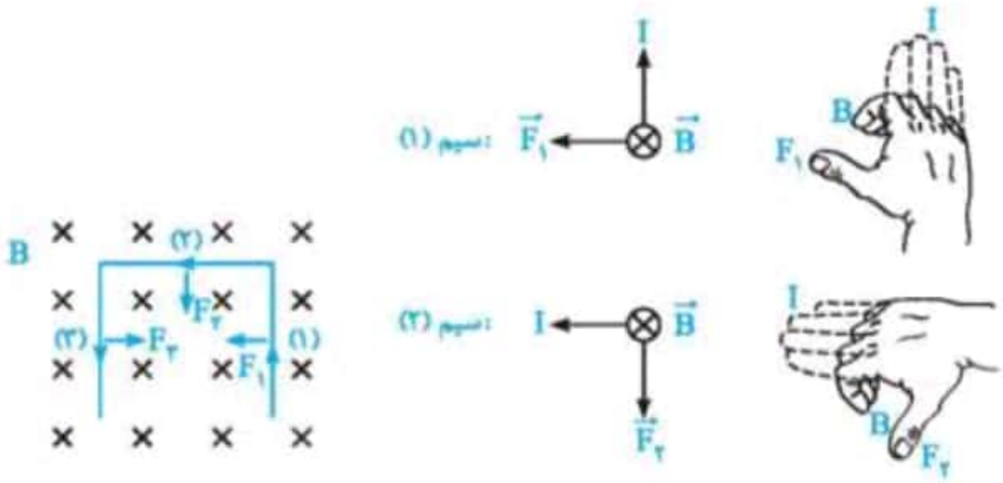
۱ ۱۹۳۷ برای آن‌که بر ریسمان‌ها نیرو وارد نشود، نیروی وزن میله با نیروی ناشی از میدان مغناطیسی بر روی سیم باید خنثی شود. با توجه به قانون دست راست و با توجه به جهت میدان مغناطیسی، جریان سیم باید به سمت راست (یعنی از A به B) باشد.



در ادامه با کمک تعادل در راستای قائم، مقدار جریان الکتریکی سیم را نیز به‌دست می‌آوریم:

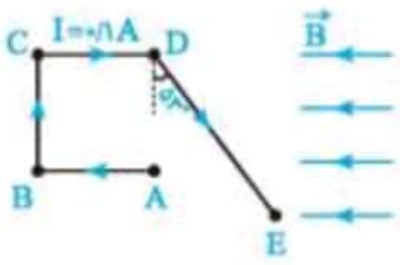
$$\begin{cases}\sum F_y = 0 \Rightarrow F = mg \\ F = BIL\sin\alpha\end{cases} \xrightarrow{\alpha = 90^\circ} mg = BIL\sin 90^\circ \Rightarrow I = \frac{mg}{BL}$$

۲ ۱۹۳۸ برای محاسبهٔ برایند نیروهای وارد بر قاب، ابتدا جهت نیروی وارد بر هریک از قطعات آن را با کمک قانون دست راست به دست می‌آوریم:



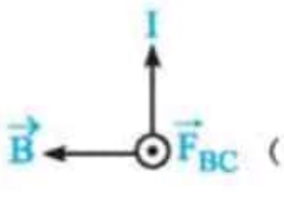
همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نیروی وارد بر سیم (۱) به سمت چپ و نیروی وارد بر سیم (۳) به سمت راست و برابر با آن است $(F_1 = F_3 = BIL\sin 90^\circ)$ و همدیگر را خنثی می‌کنند، بنابراین نیروی وارد بر قاب برابر نیروی وارد بر سیم (۲) بوده و به سمت پایین است.

۱ ۱۹۳۹ نیروی وارد بر سیم‌های AB و CD صفر است (این سیم‌ها در راستای میدان مغناطیسی قرار دارند $\alpha = 0$ یا $\alpha = 180^\circ$). نیروی وارد بر کل قطعه سیم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

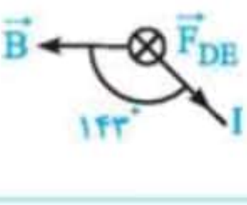


$$F = BIL\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} |F_{AB}| = 10\times 0/1\times 2\times \sin 0^\circ = 0 \\ |F_{BC}| = 10\times 0/1\times 4\times \sin 90^\circ = 4\,N \quad (\text{برون‌سو}) \\ |F_{CD}| = 10\times 0/1\times 2\times \sin 180^\circ = 0 \\ |F_{DE}| = 10\times 0/1\times 8\times \sin 143^\circ = 4/8 \quad (\text{درون‌سو}) \end{cases}$$

(قانون دست راست برای BC)



(قانون دست راست برای DE)



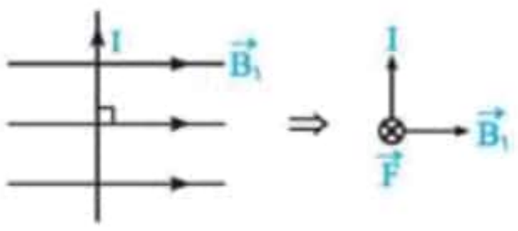
$F_T = |4/8 - 4| = 0/8\,N$ درون‌سو

تذکر

زوایای مکمل، سینوس برابر دارند. $\sin 143^\circ = \sin 37^\circ = 0/6$

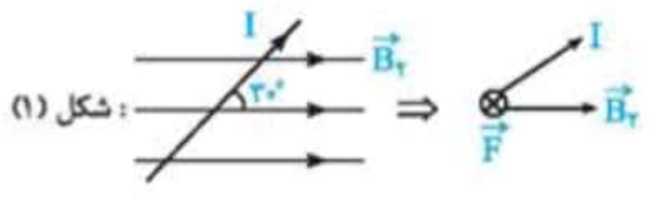
۳ ۱۹۴۰ این سؤال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: در این حالت طبق قانون دست راست، نیروی وارد بر سیم به‌صورت درون‌سو می‌باشد و اندازهٔ آن برابر است با:



$$F = B_1 IL\sin 90^\circ$$

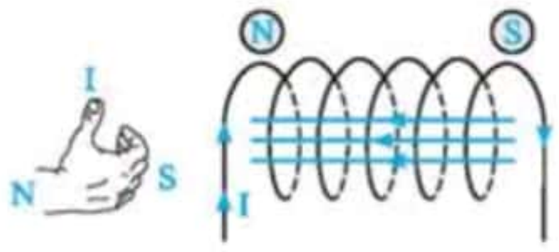
حالت دوم: با دو برابر شدن اندازهٔ میدان $(B_2 = 2B_1)$، برای ثابت ماندن اندازهٔ F باید $\sin\alpha_2 = \frac{1}{2}$ باشد (چرا؟)، یعنی یکی از دو حالت زیر باید رخ دهد:



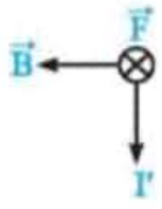
اگر بخواهیم با ثابت ماندن اندازهٔ نیروی F، فقط جهت آن تغییر کند (یعنی برون‌سو شود)، باید سیم به‌صورت شکل (۲) قرار گیرد. در این صورت باید سیم را $(120^\circ = 30^\circ + 90^\circ)$ در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم.

۱ ۱۹۴۱ برای پاسخ به این تست ترکیبی، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

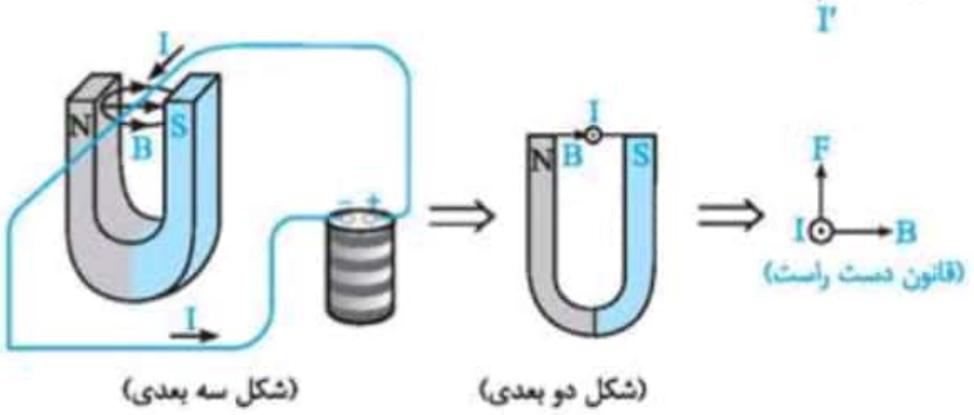
گام اول: این سیم حامل جریان I' در میدان مغناطیسی سیملوله قرار گرفته و ابتدا با کمک قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی درون سیملوله را بررسی می‌کنیم:



گام دوم: این میدان مغناطیسی با توجه به قانون دست راست، یک نیروی درون‌سو (عمود بر صفحهٔ کاغذ و به سمت داخل) بر سیمی که طبق صورت سؤال عمود بر محور سیملوله است، وارد می‌کند.



۱ ۱۹۴۲ با توجه به شکل داده شده، اگر مسیر جریان را به سمت خارج از صفحه (برون‌سو) بگیریم، به کمک قانون دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم به سمت بالا می‌باشد.



I : جهت چهار انگشت دست راست

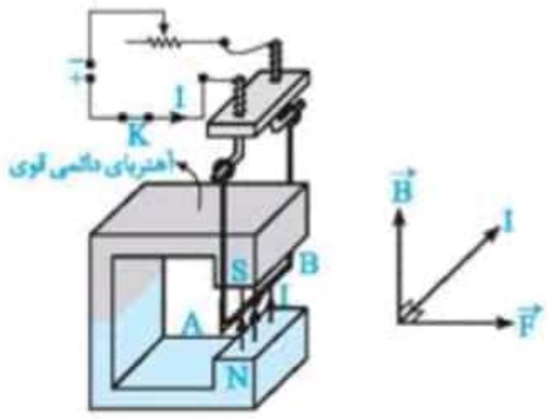
B : جهت خم شدن انگشتان دست راست

F : جهت انگشت شست دست راست

دقت: گزینه‌های (۳) و (۴) قطعاً نادرست می‌باشند، زیرا F بر I و B لزوماً باید عمود باشد.

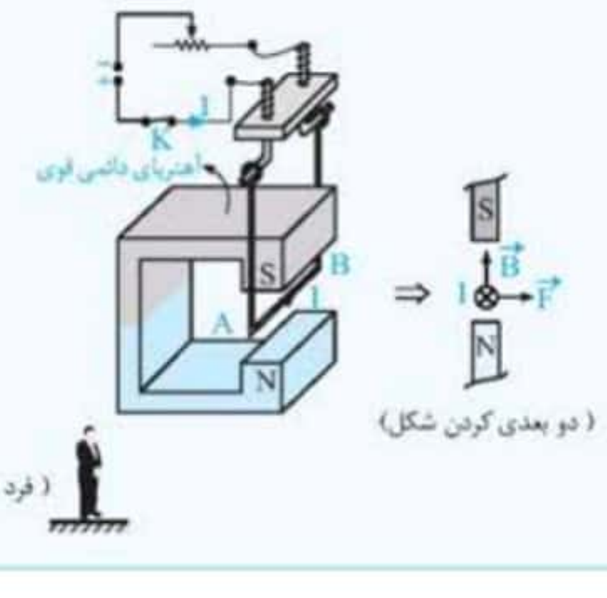
۲ ۱۹۴۳ می‌دانیم جریان الکتریکی از قطب مثبت منبع خارج می‌شود. حال به بررسی گزینهٔ (۲) می‌پردازیم:

در این شکل، جریان الکتریکی از A به سمت B بوده و میدان مغناطیسی که سیم در آن قرار دارد از N به سمت S است. بنابراین با توجه به قانون دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم AB به سمت راست است.



تذکر

یک روش نسبتاً ساده‌تر برای شکل‌های سه‌بعدی، تبدیل شکل سه‌بعدی به شکل دوبعدی است. فرض کنید فردی در محل نشان داده شده در شکل مقابل قرار گرفته و مشاهدات خود را می‌کشد. از دید این فرد، شکل دوبعدی به‌صورت مقابل مشاهده می‌شود (دقت شود جریان از A به B بوده و از دید این فرد، جریان به داخل صفحه وارد می‌شود). با توجه به این شکل، نیروی وارد بر سیم به سمت راست است.

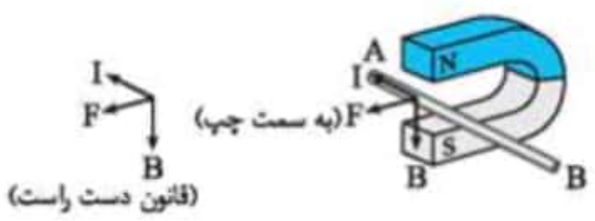


* در هر سه گزینهٔ (۱)، (۳) و (۴) جهت نیروی وارد بر قسمت افقی میله به سمت چپ می‌باشد. این موضوع را بررسی کنید.

۴ ۱۹۴۴ در مورد این سؤال مفهومی، دو موضوع زیر قابل بحث است:

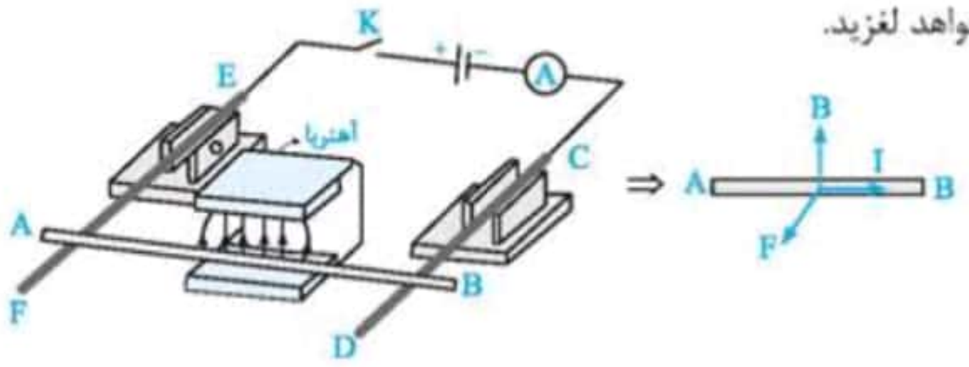
۱) اگر بخواهیم سیم مسی به سمت چپ منحرف شود، جریان الکتریکی با توجه به قانون دست راست باید از سمت B به A باشد. این موضوع از شکل مقابل قابل استخراج است.

۲) اگر بخواهیم میلهٔ AB بیشتر به سمت چپ منحرف شود، باید از ولتاژ بیشتری استفاده کنیم. ولتاژ بیشتر، جریان الکتریکی بیشتری را تولید می‌کند و مقدار نیروی F بزرگ‌تر می‌شود و گزینهٔ (۴) صحیح است.



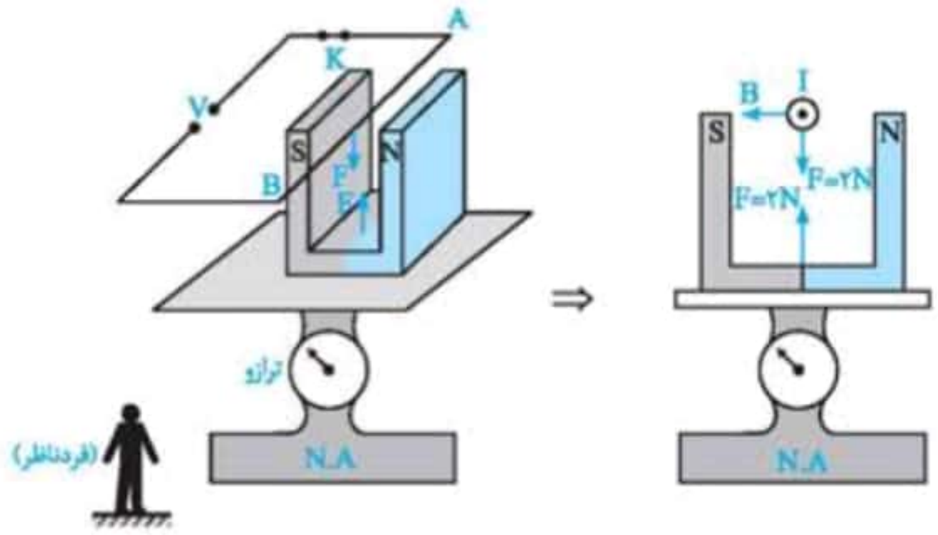
$$\uparrow I = \frac{V\uparrow}{R} \rightarrow \uparrow F = B \uparrow I L \sin\alpha$$

۱ ۱۹۴۵ با توجه به جهت جریان عبوری از میله (که از قطب مثبت باتری خارج می‌شود) و جهت میدان مغناطیسی، نیروی وارد بر میله به سمت بیرون آهنربا خواهد بود و میله به آن سمت خواهد لغزید.



gajmarket.com

۳ ۱۹۴۶ قبل از بسته شدن کلید K، عدد نشان داده شده توسط ترازو، برابر وزن آهنربا است. با بسته شدن کلید K، عدد ترازو برابر ۸ N شده و این موضوع یعنی سیم AB نیروی ۲ N را رو به بالا به آهنربا وارد کرده است. مطابق قانون سوم نیوتون، عکس‌العمل این نیرو رو به پایین از طرف آهنربا به سیم وارد می‌شود. با توجه به جهت نیروی وارد بر سیم، جریان I برون‌سو بوده و از A به سمت B است.



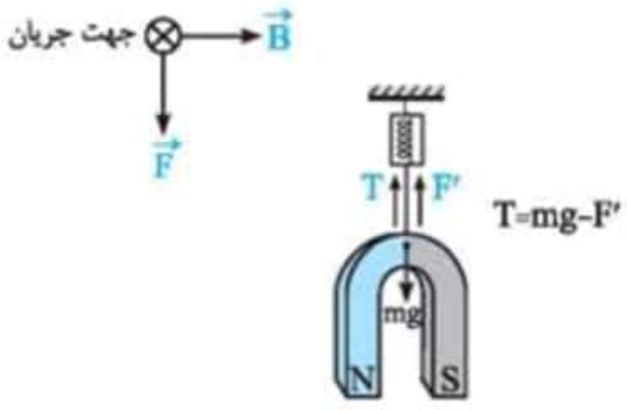
برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی با توجه به مقدار نیروی F که برابر ۲ نیوتون است، داریم:

$$F = BIL\sin\alpha \Rightarrow ۲ = B \times ۲۰ \times \frac{۱۰}{۱۰۰} \times \sin ۹۰^\circ \Rightarrow B = ۱T$$

تذکر

برای درک بهتر این سؤال، تصور کنید که یک خرگوش بر روی ترازو قرار دارد. در این حالت ترازو وزن خرگوش را نشان می‌دهد. اگر گوش خرگوش را گرفته و با نیروی ۲ نیوتون به سمت بالا بکشیم، عددی که ترازو نشان می‌دهد، ۲ نیوتون کم‌تر است.

۲ ۱۹۴۷ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



۱) اگر از سیم جریانی عبور نکند، نیروسنج وزن آهنربا را نشان می‌دهد. برای این که نیروسنج عدد کم‌تری را نشان دهد، باید جهت جریان در سیم به گونه‌ای باشد که بر آهنربا نیرویی (F') به‌سمت بالا وارد شود تا تأثیر وزن آهنربا کم‌تر شده و نیروسنج عدد کم‌تری $(T = mg - F')$ را نشان دهد.

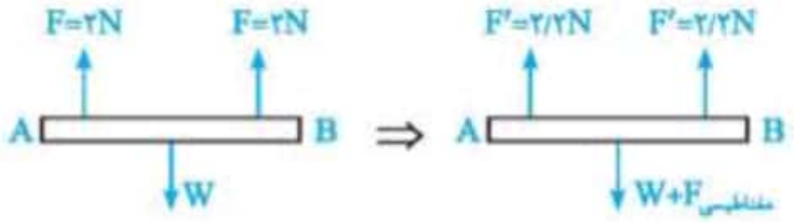
۲) طبق قانون سوم نیوتون، با توجه به این که نیروی وارد شده از طرف سیم به آهنربا، به‌سمت بالا می‌باشد، نیروی وارد شده بر سیم از طرف میدان مغناطیسی آهنربا باید به‌سمت پایین باشد. بنابراین به کمک قانون دست راست، جهت جریان در سیم باید درون‌سو باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست‌اند.

۳) با توجه به رابطهٔ $F = BIL\sin\alpha$، هر چه جریان عبوری از سیم بیشتر باشد، نیروی وارد شده بر سیم بیشتر بوده و در نتیجه نیروی وارد شده از طرف سیم به آهنربا به‌سمت بالا بیشتر می‌شود $(F' \uparrow)$، بنابراین نیروسنج عدد کم‌تری را نشان می‌دهد.

$$\text{عدد نیروسنج} \downarrow = mg - \overset{\uparrow}{F'}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ صحیح این سؤال است.

۱ ۱۹۴۸ قبل از بسته شدن کلید K، هر یک از نیروسنج‌ها نیروی ۲ N را نشان می‌دهند و پس از بسته شدن کلید K هر یک از نیروسنج‌ها نیروی ۲/۲ N را نشان می‌دهند. این موضوع یعنی نیروی وارد بر میلهٔ AB در اثر میدان مغناطیسی به سمت پایین بوده که عدد نیروسنج‌ها افزایش یافته است و مقدار آن برابر ۰/۴ N است.

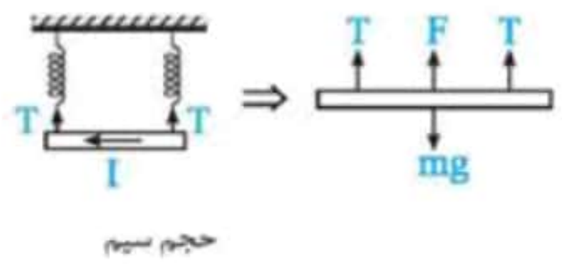


$$\begin{cases} F + F = W & (۱) \\ F' + F' = W + F_{\text{مغناطیسی}} & (۲) \end{cases} \xrightarrow{\text{کم کردن طرفین (۲) از (۱)}} F_{\text{مغناطیسی}} = ۲F' - ۲F = ۲ \times ۲/۲ - ۲ \times ۲ = ۰/۴\,N$$

$$F_{\text{مغناطیسی}} = BIL\sin\alpha \Rightarrow ۰/۴ = B \times ۲۰ \times ۰/۲ \times \sin ۹۰^\circ \Rightarrow B = ۰/۱T$$

از سوی دیگر با توجه به این‌که نیروی مغناطیسی وارد بر سیم ۰/۴ N و به سمت پایین است، عکس‌العمل این نیرو به آهنربا به سمت بالا وارد شده و در نتیجه عدد آهنربا در حالت جدید نسبت به حالت قبل ۰/۴ N کاهش یافته و برابر ۰/۴ − ۱۰ یعنی ۹/۶ N می‌شود.

۱ ۱۹۴۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

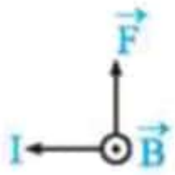


گام اول: ابتدا نیروهای واردشده بر سیم را رسم می‌کنیم. با توجه به مقدار و جهت نیروهای واردشده به سیم، چون $mg > ۲T$ می‌باشد، برای این‌که برایند نیروهای واردشده بر قطعه سیم برابر صفر شود، باید نیروی مغناطیسی F به‌سمت بالا باشد و مقدار آن برابر است با:

$$m = \rho\overbrace{V} = \rho AL = \left(۵ \times ۱۰^۳ \frac{kg}{m^۳}\right) \times ۱۰^{-۶} \times ۱ = ۵ \times ۱۰^{-۳}\,kg$$

$$\text{شرط تعادل}: \sum F = ۰ \Rightarrow ۲T + F = \overbrace{mg}^{m} \Rightarrow F = mg - ۲T = ۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰ - ۲(۲۲/۵ \times ۱۰^{-۳}) = ۵ \times ۱۰^{-۳}\,N$$

گام دوم: با داشتن نیروی مغناطیسی F، به راحتی می‌توانیم اندازهٔ میدان مغناطیسی را به‌دست آوریم:



$$F = BIL\sin\alpha \Rightarrow 5\times10^{-3} = B\times10\times1\times\underbrace{\sin90^\circ}_{1} \Rightarrow B = 5\times10^{-4}\,T = 5G$$

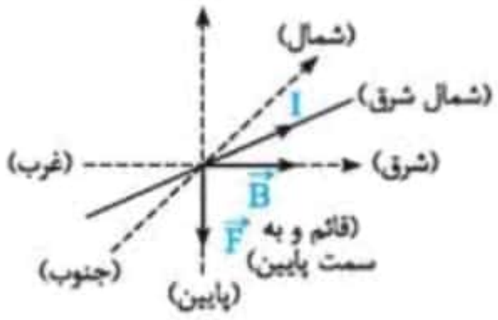
گام سوم: در نهایت به کمک قاعدهٔ دست راست، با توجه به جهت جریان و جهت نیروی واردشده بر سیم مشخص می‌شود که جهت میدان مغناطیسی برون‌سو است.

۱۹۵۰ ۴ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۶)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

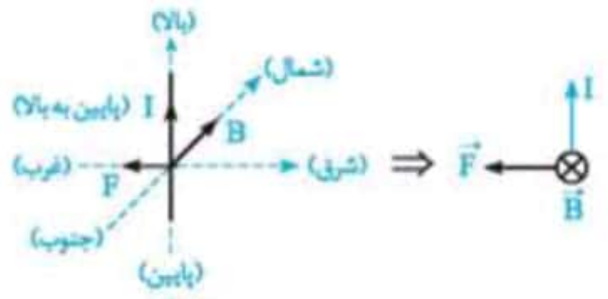
۱۹۵۱ ۲ برای محاسبهٔ اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم می‌توان نوشت:

$$F = BIL\sin\alpha = 500\times\underbrace{10^{-4}}_{\text{تبدیل گاوس به تسلا}}\times25\times\frac{8}{10}\times\sin37^\circ = 0/6N$$

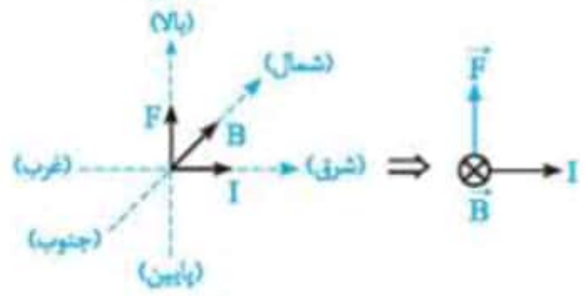
در ادامه با توجه به قانون دست راست در شکل سه‌بعدی مقابل، اگر چهار انگشت خود را در جهت جریان در نظر بگیریم به گونه‌ای که خم شدن آن‌ها جهت میدان مغناطیسی را نشان دهد، جهت انگشت شست دست راست که جهت نیرو است، به صورت قائم و رو به پایین می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.



۱۹۵۲ ۴ سیم در امتداد قائم آویخته شده و جریانی از پایین به بالا از آن عبور می‌کند. از طرفی میدان مغناطیسی زمین از سمت جنوب به شمال است. با توجه به شکل‌های مقابل، نیروی مغناطیس وارد بر این سیم به سمت مغرب است.



۱۹۵۳ ۱ جهت میدان مغناطیسی افقی و رو به شمال بوده و جهت جریان سیم ۲۰ آمپر به سمت مشرق است. با توجه به شکل زیر و با کمک قانون دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم به سمت بالا است.

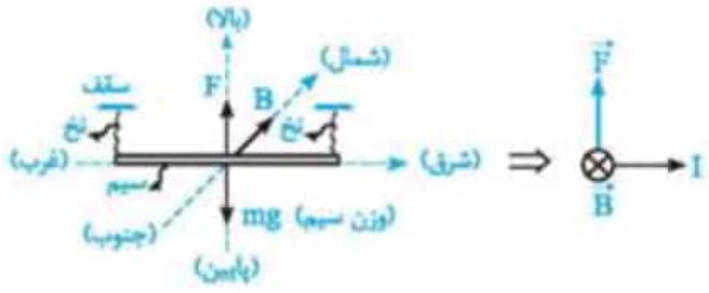


از سوی دیگر مقدار نیروی وارد بر سیم برابر است با: $B = 5\times10^{-3}\,T\ ,\ I = 20A\ ,\ L = 2m$

$\alpha = 90^\circ$ (زاویهٔ بین جریان و میدان) $\ ,\ F = ?$

$$F = BIL\sin90^\circ = 5\times10^{-3}\times20\times2\times1 = 0/2N$$

۱۹۵۴ ۳ سیم در راستای غرب به شرق است و توسط دو نخ از سقف آویزان شده است. اگر بخواهیم نیروی کشش ریسمان‌ها کم‌تر شود، باید نیروی مغناطیسی وارد بر سیم ناشی از میدان مغناطیسی زمین به سمت بالا باشد تا تأثیر وزن سیم کم‌تر شود و نیروی کشش ریسمان‌ها کاهش یابد. به همین منظور جریان سیم باید به سمت شرق باشد.



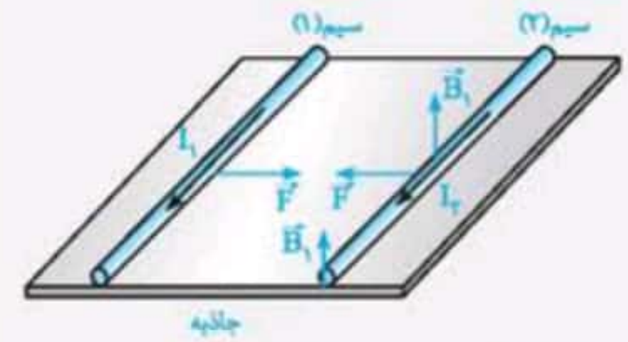
۱۹۵۵ ۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۷ — نیرویی که سیم‌های موازی حامل جریان بر یک‌دیگر وارد می‌کنند (تست‌های ۱۹۵۵ تا ۱۹۶۶)

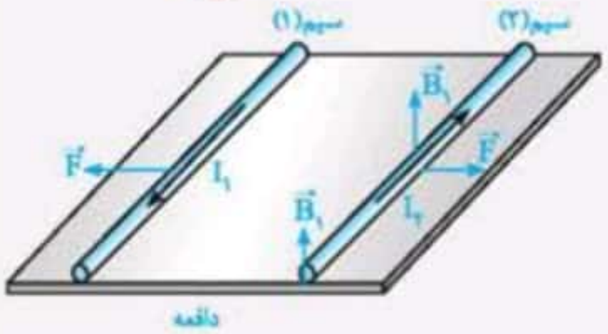
همان‌طور که تا این‌جای کار مشاهده کردیم، بر یک سیم حامل جریان که در داخل یک میدان مغناطیسی قرار گرفته است، نیرو وارد می‌شود. هم‌چنین می‌دانیم که یک سیم حامل جریان، در اطراف خود میدان مغناطیسی تولید می‌کند. بنابراین اگر دو سیم راست موازی حامل جریان را در کنار یک‌دیگر قرار دهیم، هر سیم در داخل میدان مغناطیسی حاصل از سیم دیگر قرار گرفته و به آن نیرو وارد می‌شود. با توجه به جهت جریان در سیم‌ها، دو حالت ممکن است رخ دهد که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم:

حالت ۱ (دو سیم با جریان‌های هم‌جهت):

در شکل مقابل، دو سیم حامل جریان با جریان‌های هم‌جهت در مقابل یک‌دیگر قرار دارند. برای بررسی نیروی وارد بر دو سیم، روند مفهومی زیر را طی می‌کنیم.



جاذبه



دافعه

گام اول: میدان مغناطیسی سیم (۱) با توجه به قاعدهٔ دست راست، در محل سیم (۲) به‌سمت بالا است.

گام دوم: با توجه به قانون دست راست، جهت نیروی وارد بر سیم (۲) به‌سمت چپ است و از رابطهٔ $F_2 = B_1 I_2 L\sin\alpha$ به دست می‌آید که در آن $\alpha = 90^\circ$ است.

گام سوم: با توجه به قانون سوم نیوتون، نیرویی که سیم (۱) بر سیم (۲) وارد می‌کند، با نیرویی که سیم (۲) به سیم (۱) وارد می‌کند مساوی ولی در خلاف جهت یک‌دیگر است، بنابراین به سیم (۱) نیرو به‌سمت راست وارد می‌شود و باعث جاذبهٔ دو سیم می‌شود.

نتیجه سیم‌های حامل جریان‌های هم‌جهت، یک‌دیگر را جذب می‌کنند.

gajmarket.com

حالت ۲ (دو سیم با جریان‌های در خلاف جهت هم):

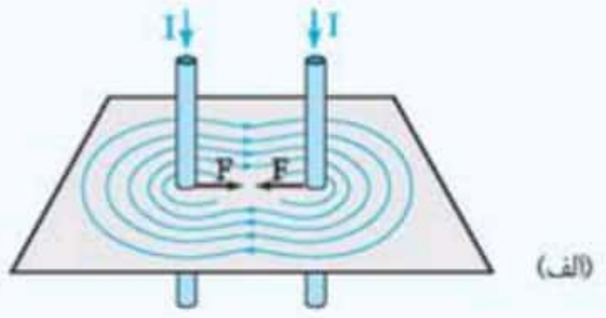
به‌سادگی می‌توان نشان داد که **سیم‌های حامل جریان‌های در خلاف جهت، یک‌دیگر را دفع می‌کنند.**

تذکر مهم: با توجه به رابطهٔ $F_2 = B_1 I_2 L \sin\alpha$ و از طرفی توجه به این موضوع که اندازهٔ B_1 به جریان I_1 و d (فاصلهٔ بین دو سیم) بستگی دارد می‌توان گفت با افزایش I_1 و کاهش d، F_2 افزایش می‌یابد.

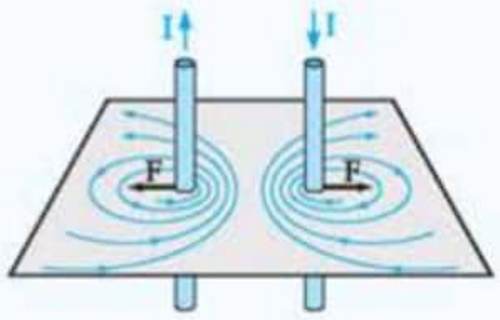
بررسی میدان مغناطیسی برایند در اطراف دو سیم موازی

تو ادامهٔ کار، می‌خوایم بهتون نشون بدیم که میدان مغناطیسی برایند تو اطراف دوتا سیم موازی حامل جریان چه جوری میشه. به خاطر همین، هر دو تا حالت زیر رو بررسی می‌کنیم ...

در شکل‌های (الف) و (ب) به ترتیب میدان مغناطیسی برایند ناشی از دو سیم راست حامل جریان‌های هم‌جهت و خلاف جهت هم نشان داده شده است. همان‌طور که می‌دانیم سیم‌های حامل جریان‌های هم‌جهت (هم‌سو)، یک‌دیگر را جذب (نیروی ربایشی) و سیم‌های حامل جریان‌های خلاف جهت (ناهم‌سو)، یک‌دیگر را دفع می‌کنند (نیروی رانشی).



(الف)



(ب)

تمرین۱ **در شکل زیر، اندازهٔ نیرویی که سیم حامل جریان I_2 به یک متر از سیم حامل جریان I_1 وارد می‌کند، برابر F است. نیرویی که سیم حامل جریان I_1 به یک متر از سیم حامل جریان I_2 وارد می‌کند چقدر بوده و در چه جهتی است؟ (دو سیم حامل جریان‌های I_1 و I_2 مستقیم، بلند، هم‌اندازه، عمود بر صفحه و موازی با یک‌دیگرند.)**



۱) $3F$، به‌سمت راست

۲) $3F$، به‌سمت چپ

۳) F، به‌سمت راست

۴) F، به‌سمت چپ



پاسخ به دلیل این‌که جریان‌های I_1 و I_2 مختلف‌الجهت‌اند، دو سیم یک‌دیگر را دفع می‌کنند. با توجه به این موضوع، نیروی وارد شده از طرف سیم (۱) بر سیم (۲) به‌سمت راست می‌باشد.

از طرفی با توجه به قانون سوم نیوتون، نیرویی که سیم (۱) به سیم (۲) وارد می‌کند، هم‌اندازهٔ نیرویی است که سیم (۲) بر سیم (۱) وارد می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تمرین۲ **دو سیم حامل جریان A و B دارای جریان‌های یکسان و هم‌جهت بوده و هر یک از این سیم‌ها بر یک متر از سیم دیگر نیروی F را وارد می‌کنند. اگر جریان سیم A را ۲۵ درصد کاهش دهیم، نیرویی که از طرف سیم B بر یک متر از سیم A وارد می‌شود، در همان فاصله چند برابر می‌شود؟**

۱) ۱

۲) $\frac{1}{4}$

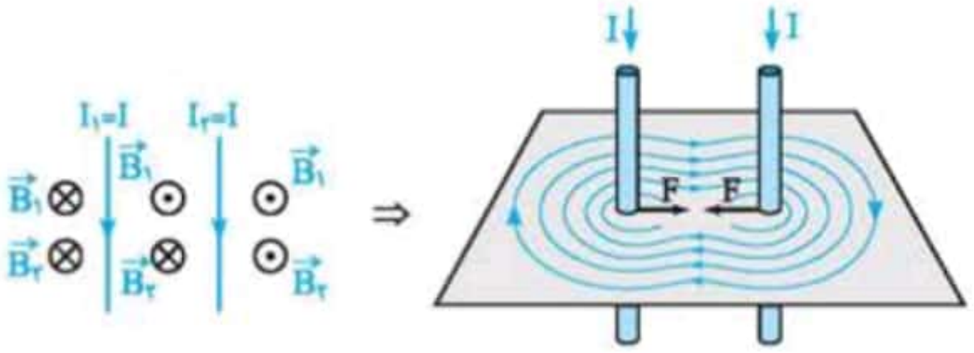
۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی سیم B بر سیم A وارد می‌شود، از رابطهٔ $F = B_B I_A L \sin\alpha$ به دست می‌آید. با توجه به ثابت بودن جریان سیم B و فاصلهٔ بین دو سیم، میدان مغناطیسی سیم B در محل سیم A تغییر نمی‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{F'}{F} = \frac{B_B I'_A}{B_B I_A} = \frac{I'_A}{I_A} = \frac{I_A - \frac{25}{100} I_A}{I_A} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

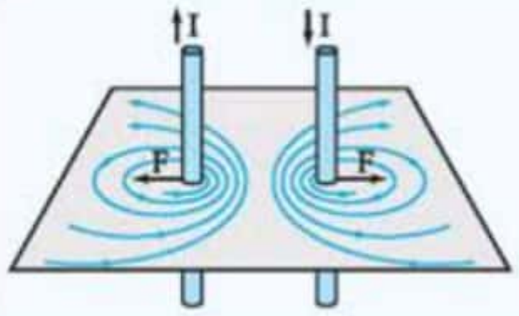
(گزینهٔ ۳) نیروی مغناطیسی وارد بر سیم A، $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود.



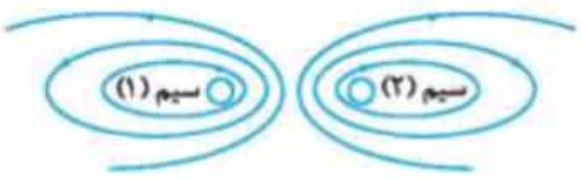
با توجه به هم‌جهت بودن جریان در دو سیم، نیروی بین دو سیم از نوع جاذبه می‌باشد. از طرفی میدان مغناطیسی در طرفین دو سیم هم‌جهت بوده و میدان مغناطیسی در بین دو سیم در خلاف جهت یک‌دیگر است. بنابراین میدان مغناطیسی برایند در وسط فاصلهٔ بین دو سیم صفر می‌شود.

تذکر

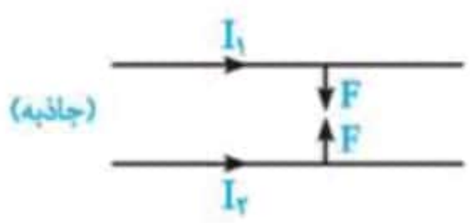
اگر جریان دو سیم در خلاف جهت یک‌دیگر باشد، میدان مغناطیسی در وسط فاصلهٔ بین دو سیم هم‌جهت بوده و نمی‌تواند صفر شود. شکل خطوط میدان مغناطیسی و نیروی بین دو سیم در این حالت مطابق شکل مقابل است:



۱۹۵۶ ۴ با توجه به پاسخ سؤال قبل، اولاً سیم‌ها یک‌دیگر را دفع می‌کنند و جریان در آن‌ها در خلاف جهت است. ثانیاً از جهت خطوط میدان در دور هر دو سیم، می‌فهمیم که جهت جریان سیم (۱) برون‌سو است.



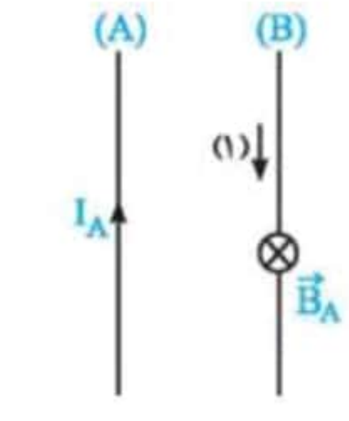
۱۹۵۷ ۱ طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که از طرف سیم (۱) بر یک متر از سیم (۲) وارد می‌شود، برابر با نیرویی است که از طرف سیم (۲) بر یک متر از سیم (۱) وارد می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که $F_1 = F_2$ می‌باشد.



از طرفی می‌دانیم که نیروی بین دو سیم دارای جریان هم‌جهت، جاذبه می‌باشد. بنابراین نیروی وارد بر سیم (۱) به طرف پایین (↓) و نیروی وارد بر سیم (۲) به طرف بالا (↑) می‌باشد و با توجه به این توضیحات، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۹۵۸ ۳ با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

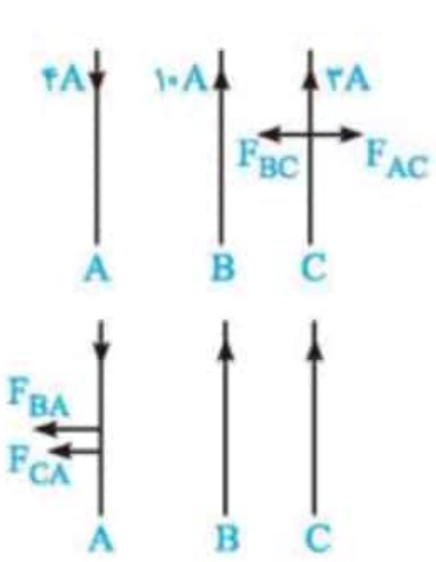
۱۹۵۹ ۳ برای آن‌که دو سیم یک‌دیگر را دفع کنند، باید جهت جریان در آن‌ها در خلاف جهت یک‌دیگر باشد (یادآوری می‌شود که سیم‌های دارای جریان هم‌جهت، یک‌دیگر را جذب می‌کنند)، بنابراین جریان در سیم B در جهت (۱) می‌باشد. از طرفی برای محاسبهٔ مقدار این جریان می‌توان نوشت:



$$F = ۴\times۱۰^{-۶}\,N\ ,\ B = ۲\times۱۰^{-۶}\,T\ ,\ L = ۰/۵m\ ,\ I_B = ?$$

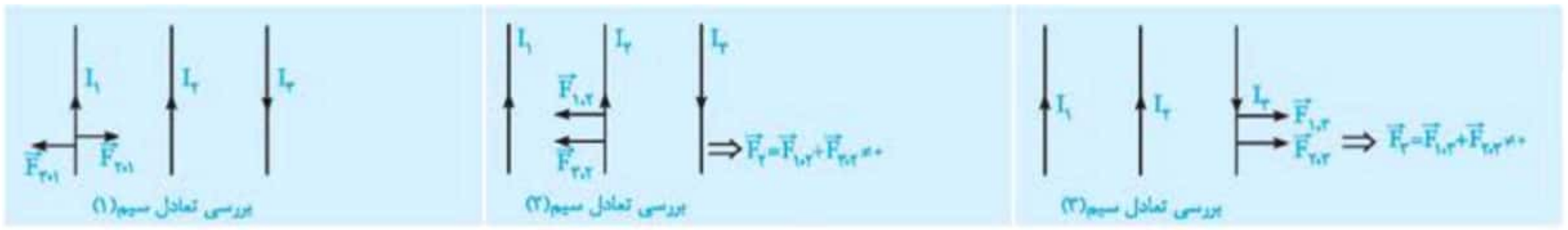
$$F = B_A I_B L\sin\alpha \Rightarrow ۴\times۱۰^{-۶} = ۲\times۱۰^{-۶}\times I_B \times ۰/۵\sin۹۰^\circ \Rightarrow I_B = ۴A$$

۱۹۶۰ ۴ **قسمت اول (بررسی نیروی وارد بر سیم C)**: جریان الکتریکی سیم A با سیم C در خلاف جهت هم بوده و یک‌دیگر را دفع می‌کنند، از سوی دیگر جریان سیم B و C با یک‌دیگر هم‌جهت بوده و یک‌دیگر را جذب می‌کنند. با توجه به این‌که جریان سیم B بیشتر از سیم A بوده و فاصلهٔ سیم B از سیم C کم‌تر از فاصلهٔ سیم A از سیم C است، بنابراین اندازهٔ نیرویی که سیم B بر سیم C وارد می‌کند، بیشتر از اندازهٔ نیرویی است که سیم A بر سیم C وارد می‌کند. بنابراین نیروی برایند وارد بر سیم C به سمت چپ است.



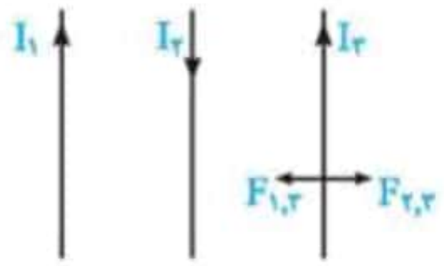
قسمت دوم (بررسی نیروی وارد بر سیم A): هریک از سیم‌های B و C سیم A را دفع می‌کنند (دقت شود که سیم‌های دارای جریان‌های در خلاف جهت، یک‌دیگر را دفع می‌کنند). بنابراین نیروی برایند وارد بر سیم A به سمت چپ می‌باشد.

۱۹۶۱ ۱ سیم‌های حامل جریان‌های هم‌جهت یک‌دیگر را جذب کرده و سیم‌های دارای جریان‌های در خلاف جهت هم، یک‌دیگر را دفع می‌کنند. با توجه به این موضوع، در بررسی تعادل سیم‌های (۱)، (۲) و (۳) مطابق جدول زیر داریم:



سیم (۱) در صورتی که $F_{۳,۱}$ و $F_{۲,۱}$ هم‌اندازه باشند، می‌تواند متعادل باشد.

gajmarket.com

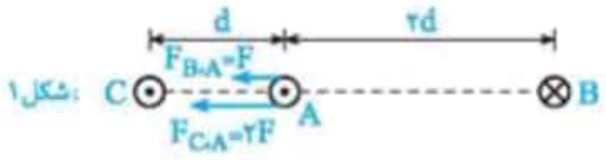


۳ ۱۹۶۲ نیروی وارد شده از طرف سیم (۱) بر سیم (۳) به سمت چپ است (سیم‌های دارای جریان‌های هم‌جهت، یک‌دیگر را جذب می‌کنند). بنابراین برای این‌که برایند نیروهای وارد بر سیم (۳) صفر شود، باید نیروی وارد شده از طرف سیم (۲) بر سیم (۳) به سمت راست باشد. بنابراین باید دو سیم (۲) و (۳) یک‌دیگر را دفع کرده و در نتیجه جریان آن‌ها در خلاف جهت هم باشد. پس جریان سیم (۲) به سمت پایین است (سیم‌های دارای جریان‌های در خلاف جهت، یک‌دیگر را دفع می‌کنند).

با توجه به این‌که جریان سیم‌های (۱) و (۲) در خلاف جهت یک‌دیگر است، بنابراین نیروی بین این دو سیم از نوع دافعه می‌باشد، پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

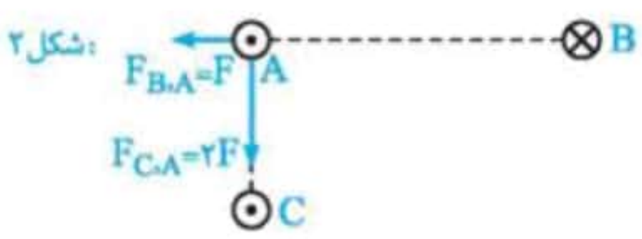
۲ ۱۹۶۳ برای حل، هر یک از دو شکل را بررسی می‌کنیم:

شکل ۱: طبق صورت سؤال، نیروی مغناطیسی واردشده از طرف سیم B بر سیم A برابر F و نیروی واردشده از طرف سیم C بر سیم A برابر ۲F می‌باشد. می‌دانیم دو سیم دارای جریان‌های هم‌جهت، یک‌دیگر را جذب و دو سیم دارای جریان‌های درخلاف جهت هم، یک‌دیگر را دفع می‌کنند.



$$\Rightarrow F_{T_1} = F + 2F = 3F$$

شکل ۲: در این حالت اندازهٔ هر یک از نیروهای $F_{B,A}$ و $F_{C,A}$ برابر حالت قبل است، بنابراین داریم:

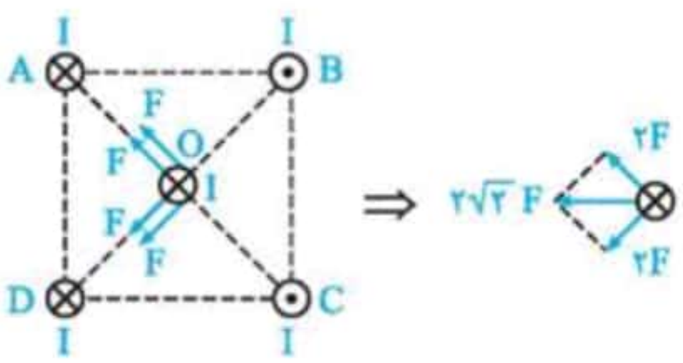


$$F_{T_2} = \sqrt{F^2 + (2F)^2} = F\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{T_2}}{F_{T_1}} = \frac{F\sqrt{5}}{3F} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

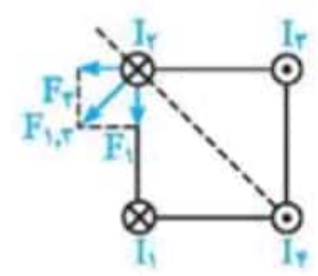
۱ ۱۹۶۴ می‌دانیم که سیم‌های دارای جریان‌های هم‌جهت یک‌دیگر را جذب می‌کنند و سیم‌های دارای جریان‌های در خلاف جهت هم، یک‌دیگر را دفع می‌کنند.

بنابراین سیم‌های A و D سیم O را جذب کرده و سیم‌های B و C، سیم O را دفع می‌کنند و با توجه به این‌که جریان همهٔ سیم‌ها I و فاصله‌شان از مرکز مربع برابر است، اندازهٔ نیروی بین همهٔ آن‌ها F است، بنابراین مطابق شکل مقابل جهت نیروی برایند را می‌یابیم:

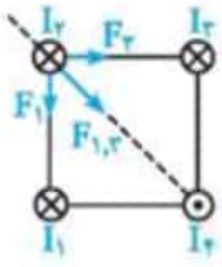


۳ ۱۹۶۵ فرض می‌کنیم جهت جریان در سیم (۲) به‌صورت درون‌سو باشد. حال دو حالت ممکن را برای جریان سیم (۳) بررسی می‌کنیم:

I_3 برون‌سو: برایند دو نیروی F_1 و F_3 وارد بر سیم (۲) را $F_{1,3}$ می‌نامیم. در این حالت با توجه به شکل مقابل نیروی جاذبه یا دافعهٔ بین دو سیم (۲) و (۴) نمی‌تواند نیروی $F_{1,3}$ را خنثی کند (چون در راستای آن نیست). بنابراین در این حالت نیروی وارد بر سیم (۲) نمی‌تواند صفر شود.



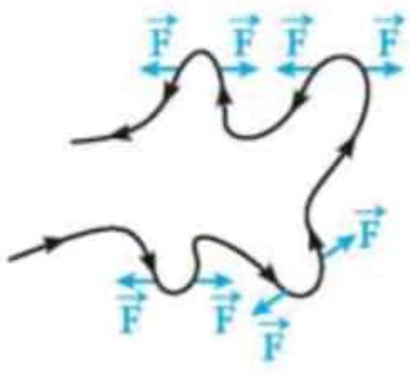
I_3 درون‌سو: در این حالت نیروی دافعهٔ بین دو سیم (۲) و (۴) می‌تواند نیروی $F_{1,3}$ را خنثی کرده و در نتیجه برایند نیروی وارد بر سیم (۲) صفر شود، بنابراین جریان سیم (۴) باید به صورت برون‌سو باشد.



* دقت کنید اگر از ابتدا جهت جریان در سیم (۲) را برون‌سو فرض می‌کردیم نیز دوباره به این نتیجه می‌رسیدیم (امتحان کنید).

از طرفی برای این‌که نیروی $F_{1,3}$ بر روی قطر مربع قرار گیرد، باید $F_1 = F_3$ باشد. بنابراین با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ دو سیم (۱) و (۳) از سیم (۲)، باید جریان دو سیم (۱) و (۳) نیز با هم برابر باشد تا اندازهٔ نیرویی که این دو سیم بر سیم (۲) وارد می‌کنند با یک‌دیگر یکسان شود ($I_1 = I_3$).

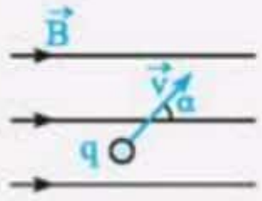
۲ ۱۹۶۶ پس از برقراری جریان، به علت دافعهٔ بین تکه سیم‌های مقابل هم (که جریان آن‌ها در خلاف جهت یک‌دیگر است)، سیم باز شده و سعی می کند تا در دورترین فاصله نسبت به هم قرار گیرند. بنابراین در نهایت تمایل به تبدیل شدن به شکل دایره‌ای را دارد.



۴ ۱۹۶۷ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۸ **نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی** (تست‌های ۱۹۶۷ تا ۲۰۱۳)

۱ تعیین مقدار نیروی وارد بر بار الکتریکی متحرک در یک میدان مغناطیسی:

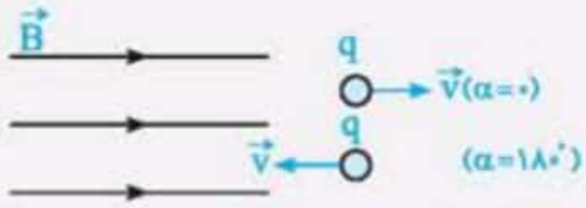


اگر بار الکتریکی q در میدان مغناطیسی یکنواخت با شدت B با سرعت $\vec{v}$ وارد شود و سرعت ذره با خطوط میدان مغناطیسی زاویهٔ α بسازد، نیرویی از طرف میدان مغناطیسی بر این بار متحرک وارد می‌شود که بزرگی آن برابر است با: $F = qvB\sin\alpha$

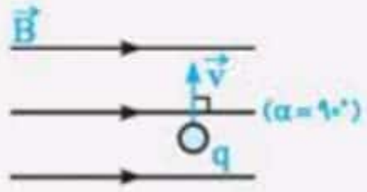
نکات مهم و کاربردی

۱) اگر راستای بردار سرعت و راستای بردار میدان مغناطیسی یکسان باشند، بر بار متحرک نیرویی اعمال نمی‌شود ($\alpha = 180^\circ$ یا $\alpha = 0$).

۲) هنگامی‌که بردار سرعت بر راستای میدان مغناطیسی عمود است، نیروی وارد بر بار متحرک بیشینه است.

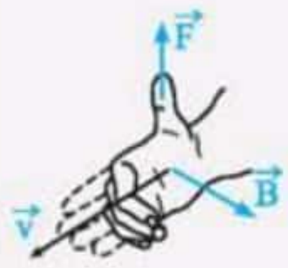


$\Rightarrow F = qvB\sin\alpha = 0$



$\Rightarrow F = F_{max} = qvB\sin 90^\circ = qvB$

۲ تعیین جهت نیروی وارد بر بار الکتریکی متحرک در یک میدان مغناطیسی:



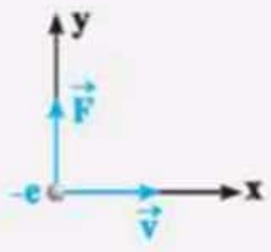
برای تعیین جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار مثبت، از قانون دست راست استفاده می‌کنیم. به همین منظور مراحل زیر طی می‌شود:

چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار می‌دهیم، به‌گونه‌ای که خم شدن انگشتان دست B را نشان دهد (به‌عبارت دیگر B از کف دست خارج شود).

جهت انگشت شست، جهت نیروی وارد بر این ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد.

تذکر مهم: اگر علامت بار الکتریکی ذره منفی باشد، برای یافتن جهت F، به همین صورت عمل کرده و در انتها جهت نیرو را وارون می‌کنیم.

تمرین۱ در شکل روبه‌رو جهت حرکت الکترونی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و جهت نیروی وارد بر آن نشان داده شده است. این میدان ..... قرار دارد.



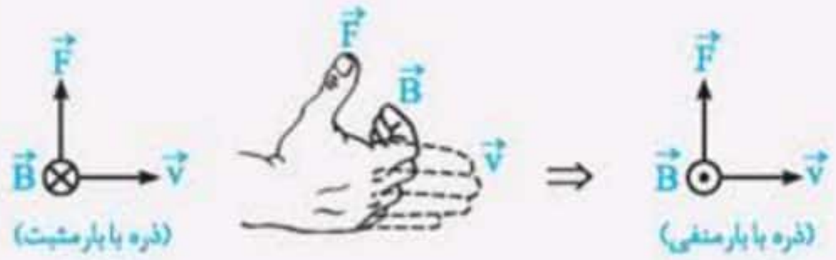
۱) در جهت مخالف حرکت الکترون (منفی x)

۲) با بزرگی $\frac{F}{ev}$ و هم‌جهت با نیروی F

۳) عمود بر صفحهٔ شکل و رو به داخل صفحه

۴) عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف بیرون صفحه

پاسخ با توجه به قانون دست راست، اگر بار الکتریکی مثبت بود، جهت میدان مغناطیسی به سمت داخل صفحه بود، اما ذرهٔ مورد بحث الکترون است و باید جهت میدان به‌دست آمده را برعکس کنیم (نیروی وارد بر ذرهٔ دارای بار منفی در خلاف جهت بار مثبت است): (گزینهٔ ۴)



تمرین۲ در یک لامپ تلویزیون مسیر الکترون‌ها افقی و از جنوب به شمال است. اگر مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی به سمت پایین باشد الکترون‌ها به کدام سمت انحراف پیدا می‌کنند؟ (M.K.A)

۱) پایین ۲) بالا ۳) مغرب ۴) مشرق

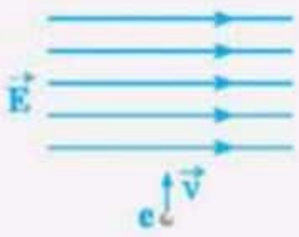
پاسخ در این‌گونه از سؤالات نیز مانند قسمت تعیین جهت نیروی وارد بر سیم، یک دستگاه مختصات به‌صورت زیر رسم کرده و اطلاعات سؤال را در آن پیاده می‌کنیم. با توجه به صورت سؤال، مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی به سمت پایین و جهت الکترون‌ها به سمت شمال است (از جنوب به شمال). با توجه به شکل زیر، جهت نیروی وارد بر الکترون به سمت شرق است.



(گزینهٔ ۴)

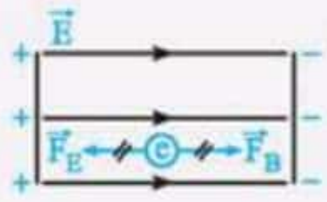
دقت: نیروی وارد بر ذرهٔ دارای بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار مثبت است.

gajmarket.com



تمرین۳ **شکل روبه‌رو الکترونی را هنگام عبور از میدان الکتریکی یکنواخت نشان می‌دهد. برای آن‌که ذره بدون انحراف از این میدان بگذرد از میدان مغناطیسی یکنواخت استفاده شده است، میدان مغناطیسی باید ..... باشد.** (ریاضی داخل ۸۴)

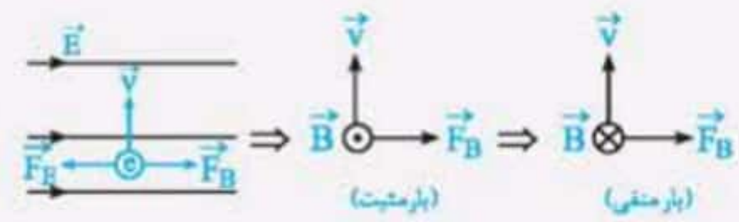
۱) موازی راستای $\vec{v}$ و همسو با آن
۲) موازی راستای $\vec{E}$ و در خلاف جهت آن
۳) عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت بیرون صفحه
۴) عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت داخل صفحه



پاسخ برای حل این‌گونه سؤالات که به نوعی ترکیب میدان الکتریکی و مغناطیسی محسوب می‌شود، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: به بار الکتریکی منفی، در خلاف جهت میدان الکتریکی نیرو وارد می‌شود و برای حفظ مسیر حرکت ذره و عدم انحراف آن، نیروی ناشی از میدان مغناطیسی $(\vec{F}_B)$ باید به سمت راست بر آن وارد شود.

گام دوم: با توجه به این‌که ذره به سمت بالا شلیک شده است و جهت F_B به سمت راست است، با کمک قانون دست راست جهت میدان مغناطیسی عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه است.



(گزینهٔ ۴) $\Rightarrow \vec{B}$، عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه است.

همان‌طور که در خلاصه نکات فوق اشاره کردیم، برای این‌که نیروی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک بیشینه شود، راستای سرعت ذره با راستای میدان مغناطیسی، باید زاویهٔ ۹۰ درجه $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ بسازد.

۳ ۱۹۶۸

تذکر

ذرهٔ α، از جنس هستهٔ اتم هلیوم (He^{2+}) بوده و بار الکتریکی آن، معادل با بار الکتریکی ۲ پروتون است. $q_\alpha = 2\times 1/6\times 10^{-19}\,C$

$$v = 4\times 10^{6}\,m/s\ ,\ B = 50\,mT = 50\times 10^{-3}\,T\ ,\ \alpha = 30^\circ\ ,\ q_\alpha = 2\times 1/6\times 10^{-19}\,C\ ,\ F = ?$$

$$F = qvB\sin\alpha \Rightarrow F = (3/2\times 10^{-19})\times(4\times 10^{6})\times(50\times 10^{-3})\times\sin 30^\circ \Rightarrow F = 3/2\times 10^{-14}\,N$$

۳ ۱۹۶۹ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ اندازهٔ سرعت (تندی) پروتون):

$$F = |q|\,vB\sin\alpha \Rightarrow 1/28\times 10^{-16} = 1/6\times 10^{-19}\times v\times 20\times 10^{-3}\times\sin 90^\circ \Rightarrow v = 4\times 10^{4}\,m/s$$

(تبدیل mT به T)

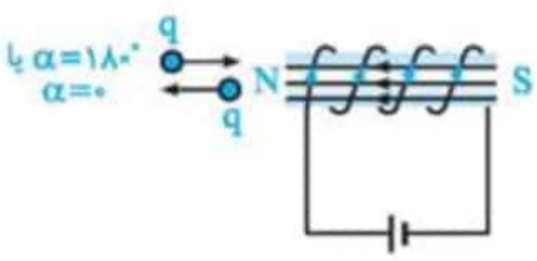
گام دوم: (محاسبهٔ انرژی جنبشی پروتون):

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 1/7\times 10^{-27}\times(4\times 10^{4})^2 = 1/7\times 8\times 10^{-19}\,J = 1/7\times 8\times 10^{-19}\times\frac{1}{1/6\times 10^{-19}}\,eV = 8/5\,eV$$

۱ ۱۹۷۰ با نوشتن نیروی وارد بر ذره از طرف میدان مغناطیسی و استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\begin{cases} F = qvB\sin\alpha \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow qvB\sin\alpha = ma \Rightarrow a = \frac{qvB\sin\alpha}{m} \Rightarrow a = \frac{50\times 10^{-6}\times 10^{3}\times 4\times 10^{-3}\times\sin 90^\circ}{0/5\times 10^{-3}} = 0/4\,m/s^2$$

۱ ۱۹۷۱ در این سؤال باید توجه شود در حالتی که ذره به موازات محور اصلی سیملوله در حال حرکت است، در واقع با میدان ایجاد شده در داخل سیملوله زاویهٔ صفر یا 180° می‌سازد و در هر دو حالت بر ذره نیرویی وارد نمی‌شود.



$$F = qvB\sin\alpha = 0$$

۲ ۱۹۷۲ با توجه به این‌که در این سؤال، جهت میدان و جهت سرعت ذره (راستای حرکت ذره) برهم منطبق است $(\alpha = 0)$، از طرف میدان مغناطیسی بر ذره نیرویی وارد نمی‌شود و تنها نیروی وارد بر ذره وزن آن است و شتاب ذره برابر g است.



$$\sum F_y = ma \Rightarrow mg = ma \Rightarrow a = g$$

۳ ۱۹۷۳ در مقایسهٔ دو حالت، با توجه به این‌که تنها زاویهٔ α تغییر کرده است، می‌توان نوشت:

$$F = \overset{\text{یکسان}}{\overbrace{|q|vB}}\sin\alpha \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow F_2 = \sqrt{2}\,F = 1/4\,F$$

بنابراین نیروی وارد بر ذرهٔ باردار ۴۰ درصد افزایش می‌یابد. $\frac{\Delta F}{F}\times 100 = \frac{F_2 - F_1}{F_1}\times 100 = \frac{1/4F - F}{F}\times 100 = 40\%$

۳ ۱۹۷۴ **حالت اول:** بار الکتریکی q، عمود بر میدان مغناطیسی B حرکت می‌کند:

$$F_1 = qvB\sin\alpha_1 \xrightarrow{\alpha_1 = 90^\circ} F_1 = qvB$$

حالت دوم: در این حالت، جهت میدان به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ نسبت به حالت قبل تغییر کرده و زاویهٔ بین بردار سرعت و بردار میدان به صفر یا 180° رسیده است که در هر دو حالت، بر ذره نیرویی وارد نمی‌شود.

$$F_2 = qvB\sin\alpha_2 \xrightarrow{\sin\alpha_2 = 0} F_2 = 0$$

بنابراین نیروی وارد بر ذره، به اندازهٔ qvB کاهش یافته است.

۲ ۱۹۷۵ هر سه ذره با تندی یکسان به‌صورت عمود وارد میدان مغناطیسی B شده‌اند و ملاک مقایسهٔ اندازهٔ نیروی وارد بر آن‌ها، اندازهٔ بار الکتریکی هر ذره است.

$$F = |q|vB\sin 90^\circ \Rightarrow F = |q|\overset{\text{یکسان}}{\overbrace{vB}} \Rightarrow F \propto |q|$$

با توجه به یکسان بودن اندازهٔ بار الکتریکی پروتون و الکترون، نیروی وارد بر آن‌ها هم‌اندازه است. از طرفی بار الکتریکی ذرهٔ α، دو برابر اندازهٔ بار الکترون و پروتون بوده و نیروی وارد بر آن نیز دو برابر است.

$$|q_e| = |q_p| = 1/6\times 10^{-19}C \ , \ |q_\alpha| = 2\times 1/6\times 10^{-19}C \Rightarrow F_e = F_p < F_\alpha$$

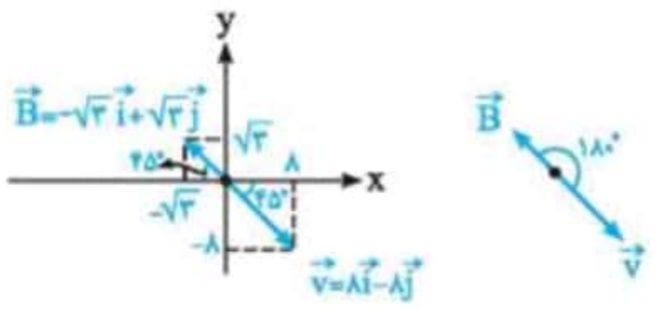
۱ ۱۹۷۶ با توجه به روابط $F = ma$ و $F = |q|vB\sin\alpha$ می‌توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow |q|vB\underbrace{\sin 90^\circ}_{\text{ذرات به طور عمود وارد میدان شده‌اند}} = ma \Rightarrow a = \frac{|q|vB}{m}$$

با توجه به یکسان بودن شتاب حرکت ذرات و تندی حرکت آن‌ها می‌توان نوشت:

$$a = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow \frac{a_\alpha}{a_p} = \frac{|q_\alpha|}{|q_p|}\times\frac{B_1}{B_2}\times\frac{m_p}{m_\alpha} \xrightarrow[m_\alpha = 4m_p]{|q_\alpha| = 2|q_p|} 1 = 2\times\frac{B_1}{B_2}\times\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = 2$$

۳ ۱۹۷۷ با توجه به بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی داده شده، مشخص است حرکت این ذره در راستای میدان و در خلاف جهت آن می‌باشد ($\alpha = 180^\circ$)، بنابراین نیروی مغناطیسی وارد بر آن برابر صفر است.



$$F = |q|vB\sin 180^\circ = 0$$

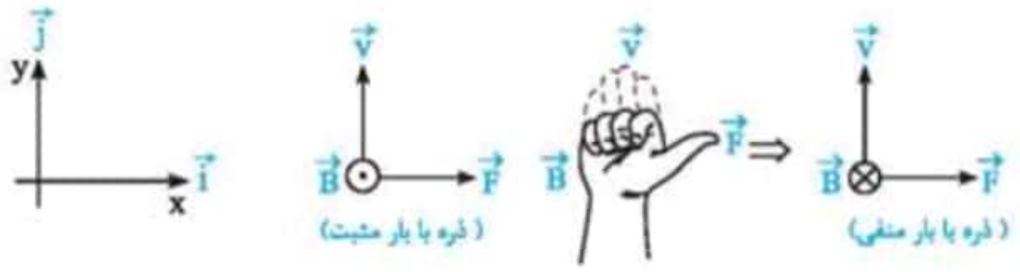
۳ ۱۹۷۸ با توجه به بردارهای داده شده برای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = 10^5\vec{i} + \sqrt{3}\times 10^5\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\times 10^5 m/s$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1T$$

$$F = |q|vB\sin\alpha = 1/6\times 10^{-19}\times 2\times 10^5\times 1\times\sin 90^\circ = 3/2\times 10^{-14}N$$

۳ ۱۹۷۹ **گام اول:** بردار $\vec{v}$ در جهت مثبت محور y و بردار $\vec{F}$ در جهت مثبت محور x است (شکل زیر). حال اگر چهار انگشت دست راستمان را در جهت $\vec{v}$ قرار دهیم، به‌طوری که شست در جهت $\vec{F}$ قرار گیرد، میدان برون‌سو می‌شود و چون بار منفی است، در نهایت میدان باید درون‌سو شود.



گام دوم: برای محاسبهٔ مقدار B، از رابطهٔ $F = qvB\sin\alpha$ کمک می‌گیریم.

$$F = |q|vB\sin\alpha \Rightarrow 0/06 = (10^5\times 10^{-9})\times 300\times B \Rightarrow B = \frac{0/06}{10^{-4}\times 300} \Rightarrow B = 2T$$

gajmarket.com

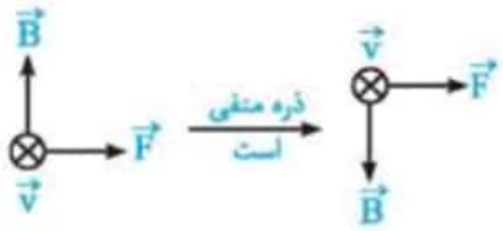
۱ ۱۹۸۰ این ذره در راستای میدان مغناطیسی و در خلاف جهت میدان وارد آن شده است، بنابراین از طرف میدان بر آن نیرویی وارد نمی‌شود. با توجه به این موضوع تندی ذره در اثر میدان تغییر نمی‌کند.

نکته در حالت کلی‌تر می‌توان نشان داد که حتی اگر ذره به صورت غیرموازی نیز وارد میدان می‌شد، نیز سرعت آن تغییر نمی‌کرد.

۱ ۱۹۸۱

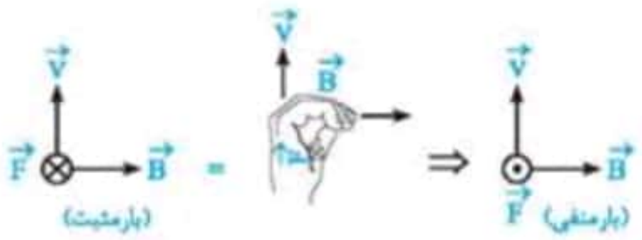
$$F = qvB\sin\alpha \Rightarrow B = \frac{F}{qv\sin\alpha} \Rightarrow \text{تسلا} = \frac{\text{نیوتون}}{\text{کولن} \times \left(\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}\right)} = \frac{\text{ثانیه} \times \text{نیوتون}}{\text{متر} \times \text{کولن}}$$

۳ ۱۹۸۲ با توجه به قانون دست راست، شکل سمت چپ جهت‌های درست $\vec{v}$، $\vec{B}$ و $\vec{F}$ وارد بر ذرهٔ مثبت را نشان می‌دهد (چهار انگشت دست راست در جهت $\vec{v}$، خم شدن انگشتان دست راست در جهت $\vec{B}$، شست سوی $\vec{F}$ را نشان می‌دهد.) و در یک ذره با بار منفی، جهت $\vec{B}$ به سمت پایین است.



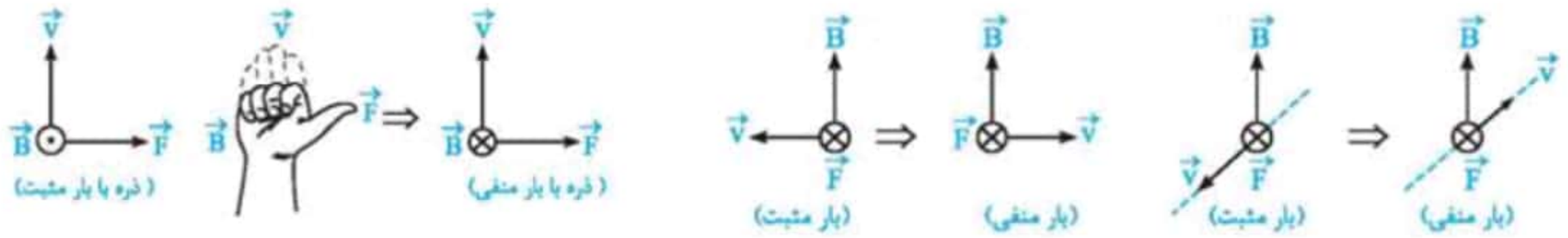
دقت: گزینه‌های (۲) و (۴) هیچ‌گاه صحیح نمی‌باشند، زیرا با توجه به قانون دست راست بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{F}$ همواره بر یک‌دیگر عمودند، ولی در این گزینه‌ها زاویهٔ بین $\vec{B}$ و $\vec{F}$ برابر صفر و ۱۸۰ درجه است.

۳ ۱۹۸۳ با توجه به قانون دست راست و با توجه به منفی بودن بار الکتریکی، تنها در گزینهٔ (۳) جهت سه بردار درست نشان داده شده است.



* جهت تسلط بیشتر، نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

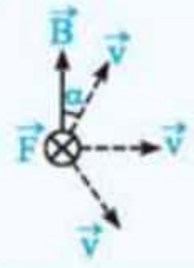
۴ ۱۹۸۴ ابتدا باید دقت شود که نیروی $\vec{F}$ بر بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{v}$ عمود است، اما $\vec{B}$ و $\vec{v}$ می‌توانند با یک‌دیگر هر زاویه‌ای بسازند (البته در حالت صفر و 180°، $F = 0$ است.) و زاویهٔ بین آن‌ها لزوماً 90° نیست. از سوی دیگر با توجه به منفی بودن بار الکتریکی، داریم:



با توجه به شکل‌های فوق، هر یک از گزینه‌های (۲) و (۳) می‌توانند صحیح باشند.

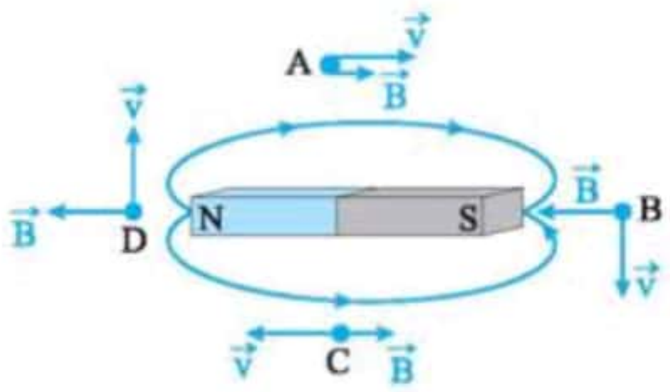
تذکر

در این سؤال، حدود زاویهٔ بین دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برای این‌که نیروی وارد بر الکترون $(\vec{F})$ درون‌سو باشد، آن است که $\vec{v}$ در سمت راست $\vec{B}$ قرار گیرد و از $\alpha = 0^\circ$ تا $\alpha = 180^\circ$ می‌تواند تغییر کند.



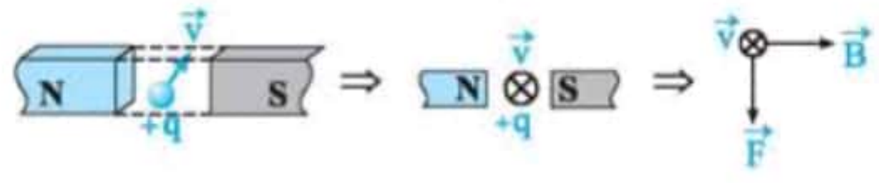
۲ ۱۹۸۵ **گام اول:** سیملوله مانند یک آهنربا به شکل مقابل می‌باشد و جهت میدان مغناطیسی در خارج از آن، از قطب N به S است (به محل چهار ذره توجه کنید).

گام دوم: همان‌طور که در شکل مقابل مشخص است، به ذرات A و C نیرویی در لحظهٔ پرتاب وارد نمی‌شود، زیرا بردارهای میدان مغناطیسی و سرعت موازی یک‌دیگرند. از طرفی نیروی وارد بر D، به سمت داخل صفحه و نیروی وارد بر B، به سمت خارج صفحه است (به منفی بودن بارها توجه کنید).



۳ ۱۹۸۶ برای حل این سؤال، به تحلیل هریک از شکل‌ها می‌پردازیم:

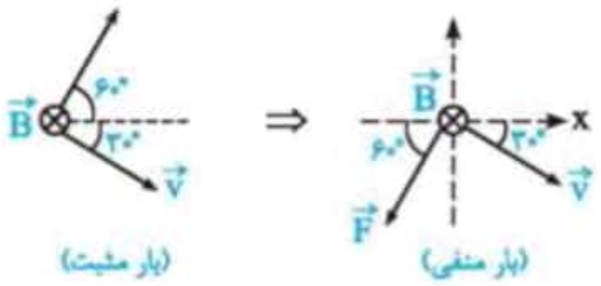
شکل الف: برای سادگی حل می‌توانیم ابتدا با نگاه کردن از روبه‌رو، شکل دو بعدی و ساده‌تری را به‌صورت مقابل رسم کنیم (توجه شود که میدان در بین دو قطب آهنربا، از قطب N به سمت قطب S می‌باشد):



شکل ب: به کمک قانون دست راست و مشابه با شکل (الف)، نیروی وارد بر بار مثبت در شکل (ب) درون‌سو می‌باشد و در مجموع گزینهٔ (۳) صحیح است.



۳ ۱۹۸۷ زاویهٔ بین سرعت ذره و میدان مغناطیسی برابر ۹۰ درجه است (بردار سرعت در صفحه و بردار میدان عمود بر صفحه است) و جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار منفی و به‌صورت مقابل بوده و بزرگی این نیرو برابر است با:



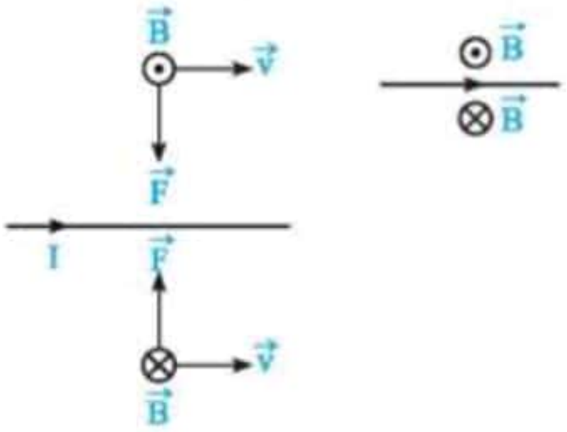
$$F = qvB\sin\alpha = (۱۰۰\times۱۰^{-۶})\times(۱۰^{۶})\times(۰/۱)\times\underbrace{۱}_{\sin۹۰^\circ}=۱۰N$$

حال نیروی $\vec{F}$ را برحسب مؤلفه‌های $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|F_x| = F\cos۶۰^\circ = ۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۵N \ , \ |F_y| = F\sin۶۰^\circ = ۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳}N$$

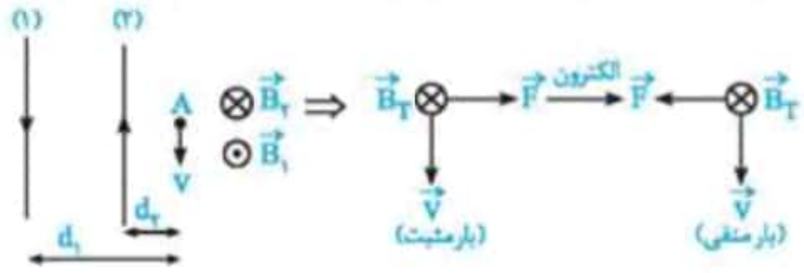
$$\vec{F} = -۵\vec{i} - ۵\sqrt{۳}\,\vec{j}$$

۲ ۱۹۸۸ **گام اول:** ابتدا جهت میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان را (که در واقع نقش تولیدکنندهٔ میدان مغناطیسی را بر عهده دارد) به‌دست می‌آوریم:

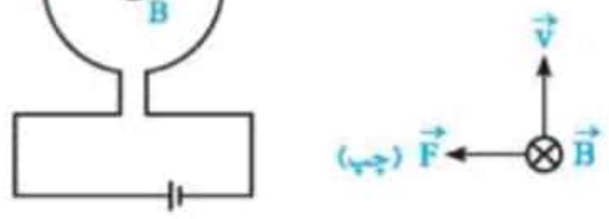


گام دوم: اگر ذرهٔ مثبت در بالا یا پایین سیم به موازات سیم شلیک شود، بنابر قانون دست راست، در هر دو حالت به سمت سیم جذب می‌شود.

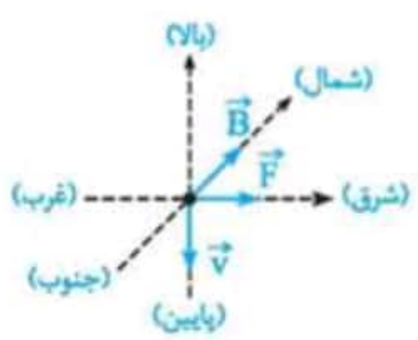
۱ ۱۹۸۹ جریان سیم‌ها با یک‌دیگر برابر است و اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در محل A، بیشتر از اندازهٔ میدان مغناطیسی سیم (۱) در آن نقطه است (زیرا به A نزدیک‌تر است)، از طرفی میدان مغناطیسی سیم (۲) در نقطهٔ A درون‌سو و میدان مغناطیسی سیم (۱)، در نقطهٔ A برون‌سو بوده و میدان برایند در نقطهٔ A، درون‌سو خواهد بود، بنابراین نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون با استفاده از قاعدهٔ دست راست به سمت چپ خواهد بود.



۳ ۱۹۹۰ **گام اول:** ابتدا جهت میدان مغناطیسی حلقه در مرکز آن را به‌دست می‌آوریم (تولیدکنندهٔ میدان مغناطیسی):



گام دوم: با توجه به این‌که ذرهٔ α دارای بار مثبت است و به سمت بالا حرکت می‌کند، جهت نیروی وارد بر آن را به‌دست می‌آوریم:



۳ ۱۹۹۱ با توجه به این‌که بار الکتریکی در خلاف جهت میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، $\alpha = ۱۸۰^\circ$ بوده و نیرویی بر بار الکتریکی وارد نمی‌شود. $F = qvB\sin۱۸۰^\circ = ۰$

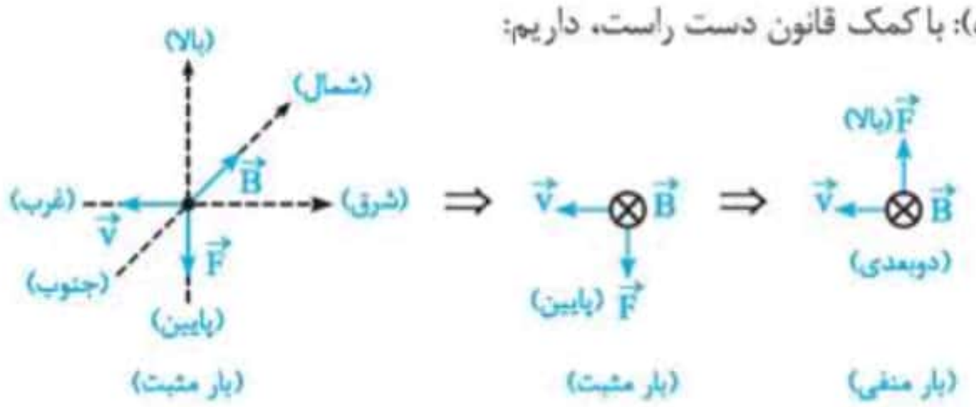
۱ ۱۹۹۲ ذرهٔ کیهانی، به سمت مرکز کرهٔ زمین در حال حرکت است (یعنی به سمت پایین) و در اثر میدان مغناطیسی زمین (که از جنوب به سمت شمال است) بر آن نیرو وارد می‌شود، بنابراین با توجه به شکل مقابل و با کمک قانون دست راست، نیرویی که بر آن وارد می‌شود به سمت شرق است.

۳ ۱۹۹۳ **گام اول:** (محاسبهٔ نیرو): با توجه به این‌که سرعت ذره به سمت غرب و میدان مغناطیسی به سمت شمال است، سرعت و میدان بر یک‌دیگر عمودند و $\alpha = ۹۰^\circ$ است:

$$|q| = ۵۰\mu C \ , \ v = ۲۰۰m/s \ , \ B = ۰/۰۴T \ , \ \alpha = ۹۰^\circ \ , \ F = ?$$

$$F = qvB\sin\alpha = (۵۰\times۱۰^{-۶})\times(۲۰۰)\times(۰/۰۴)\times\sin۹۰^\circ = ۴\times۱۰^{-۴}\,N$$

گام دوم: (یافتن جهت نیروی وارد بر ذره): با کمک قانون دست راست، داریم:



* فقط با به دست آوردن جهت نیرو، گزینهٔ درست به‌دست می‌آمد.

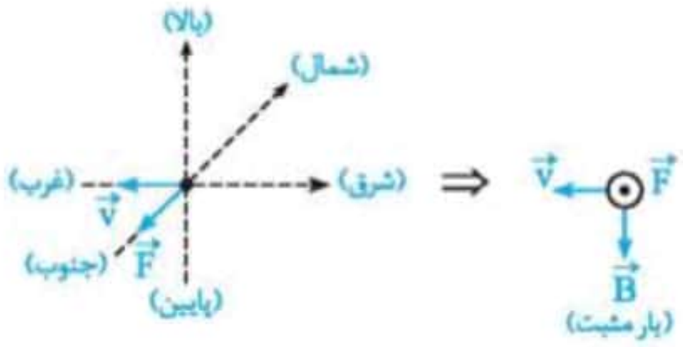
gajmarket.com

۳ ۱۹۹۴ **گام اول:** (محاسبهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی): با توجه به رابطهٔ $F = |q| vB\sin\alpha$، نیروی وارد بر ذرهٔ باردار زمانی بیشینه است که $\alpha = 90^\circ$ باشد.

$$F = |q| vB\sin\alpha \xrightarrow{\alpha=90^\circ} F_{max} = |q| vB$$

$$\Rightarrow 8\times10^{-16} = 1/6\times10^{-19}\times10^{4}\times B \Rightarrow B = 0/5\,T$$

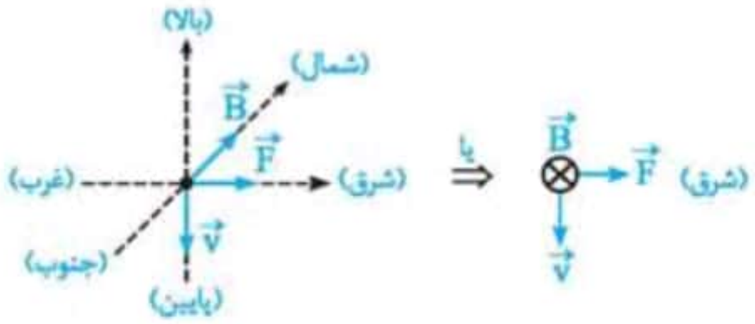
گام دوم: (یافتن جهت میدان مغناطیسی): با کمک قانون دست راست، با توجه به جهت $\vec{v}$ و $\vec{F}$، جهت میدان مغناطیسی به‌سمت پایین می‌باشد.



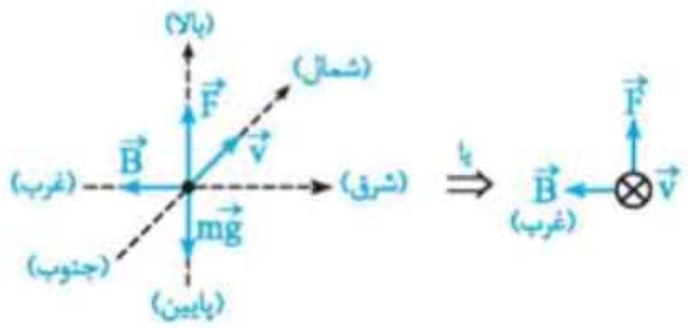
۲ ۱۹۹۵ با توجه به رابطهٔ $F = E|q|$ برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی وارد بر یک ذره، می‌توان نوشت: $F = 8\times10^{-16}\,N\ ,\ q = 1/6\times10^{-19}\,C\ ,\ E = ?$

$$F = E|q| \Rightarrow 8\times10^{-16} = E\times1/6\times10^{-19} \Rightarrow E = 5\times10^{3}\,N/C$$

۴ ۱۹۹۶ با توجه به شکل مقابل، با توجه به این‌که جهت میدان مغناطیسی به سمت شمال و ذره به سمت پایین پرتاب می‌شود، با کمک قانون دست راست، جهت نیروی وارد بر ذرهٔ بار مثبت، به سمت شرق است.



۲ ۱۹۹۷ ذره از سمت جنوب به سمت شمال شلیک شده و نیروی وزن ذره می‌خواهد مسیر حرکت آن را به سمت پایین تغییر دهد. با توجه به این موضوع برای جلوگیری از انحراف ذره با بار مثبت، نیروی مغناطیسی وارد بر آن باید به سمت بالا باشد تا وزن ذره را خنثی کرده و مانع از انحراف آن شود. با توجه به این موضوع یک میدان مغناطیسی به سمت غرب نیاز است.

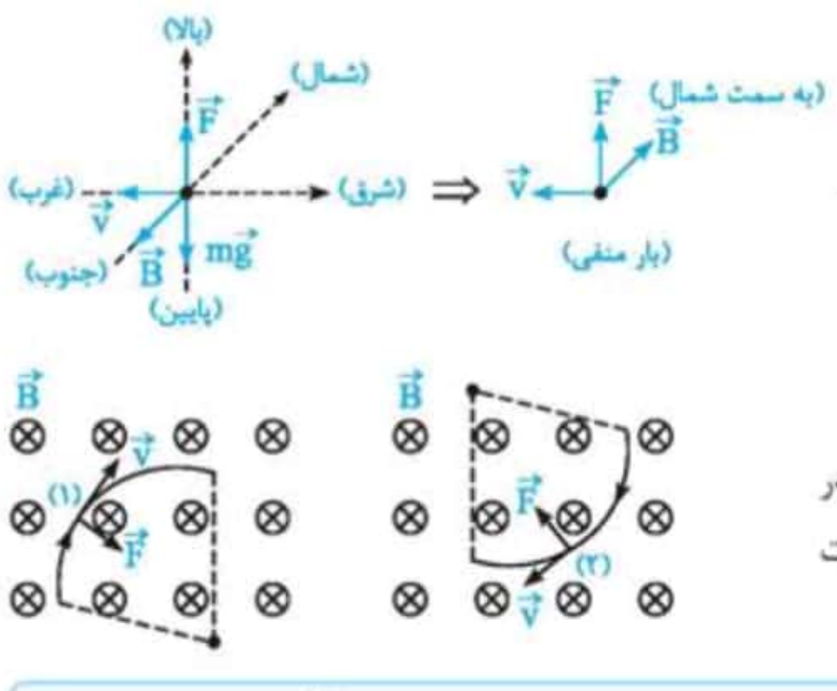


۱ ۱۹۹۸ مشابه با سؤال قبل، برای حفظ مسیر حرکت ذره، باید نیروی ناشی از میدان مغناطیسی، نیروی وزن ذره را خنثی کند. به همین منظور می‌توان نوشت:

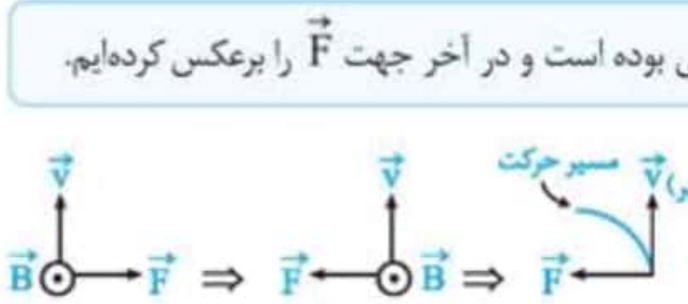
$$\sum F = 0 \Rightarrow F = mg$$

$$qvB\sin90^\circ = mg$$

$$\Rightarrow B = \frac{mg}{qv\sin90^\circ} = \frac{(0/02\times10^{-3})\times10}{4\times10^{-6}\times200\times1} = 0/25\,T$$



۲ ۱۹۹۹ نیرو به سمت مرکز دایره بوده و سرعت بر مسیر حرکت مماس و جهت آن در جهت حرکت ذره است. در ذرات باردار (۱) و (۲)، جهت سرعت، میدان و نیرو با قانون دست راست مطابقت نداشته و بار هر دو ذره منفی است.



تذکر

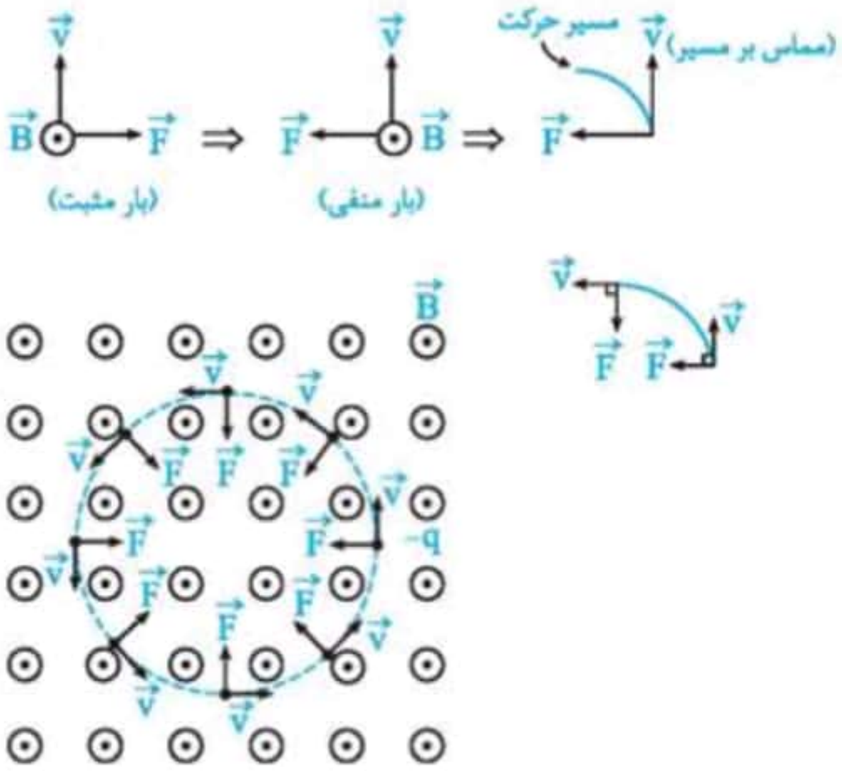
با توجه به قانون دست راست، جهت $\vec{F}$ باید به سمت خارج از دایره باشد و مشخص است که ذره باردار منفی بوده است و در آخر جهت $\vec{F}$ را برعکس کرده‌ایم.

۴ ۲۰۰۰ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

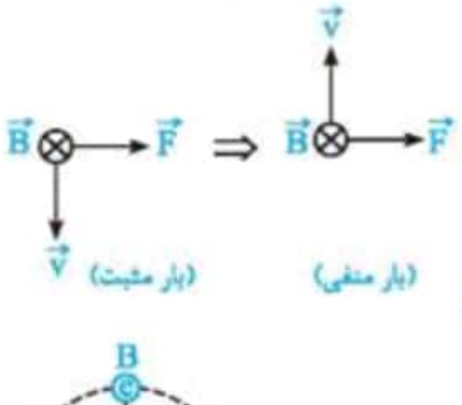
۱) با توجه به قانون دست راست، نیروی وارد بر ذرهٔ باردار منفی در لحظهٔ نشان داده شده به‌سمت چپ است. بنابراین ذره می‌خواهد به‌سمت چپ منحرف شود.

۲) می‌دانیم سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد. بنابراین با انحراف ذره، جهت سرعت ذره نیز تغییر می‌کند. بنابراین جهت نیروی وارد بر ذره نیز عوض می‌شود (به جهت نیروی وارد بر ذره در هر لحظه توجه کنید).

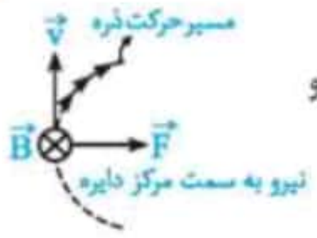
۳) با ادامهٔ حرکت ذره، با توجه به انحراف آن، ذره یک مسیر دایره‌ای به شکل مقابل را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند. بنابراین جهت نیروی وارد بر ذره همواره بر سرعت ذره عمود بوده و به‌سمت مرکز دایره می‌باشد. در نتیجه جهت نیروی وارد بر ذره دائماً در حال تغییر می‌باشد.



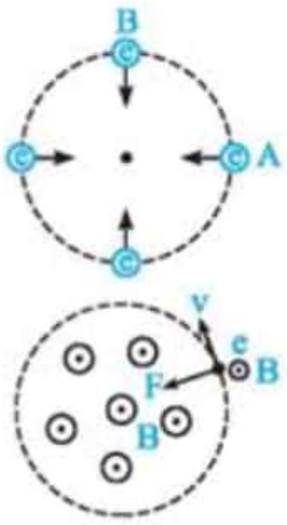
۲۲۰۰۱ با توجه به قانون دست راست، جهت سرعت این ذرهٔ منفی در محل نشان داده شده، به سمت بالا است.



از آن‌جایی که سرعت بر مسیر حرکت ذره مماس بوده و جهت آن در جهت حرکت ذره است و نیرو به سمت مرکز دایره است، مسیر حرکت این ذره به‌صورت مقابل است:

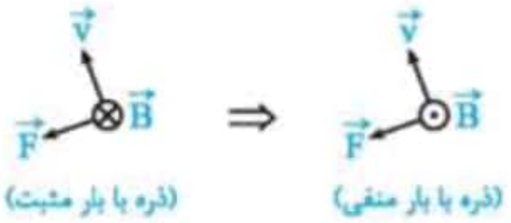


۲۲۰۰۲ می‌دانیم نیرویی که باعث دوران الکترون می‌شود (نیروی مرکزگرا) همواره در جهت شعاع دایره است. در حرکت دایره‌ای یک ذره، با تغییر جهت سرعت ذره، جهت نیروی وارد بر ذره تغییر می‌کند (به‌طور مثال در نقطهٔ A نیرو افقی و در نقطهٔ B نیرو قائم است.) بنابراین میدان الکتریکی نمی‌تواند باعث دوران الکترون شود، چون نیروی وارده از طرف میدان الکتریکی بر یک ذرهٔ باردار، به جهت حرکت ذره بستگی نداشته و همواره در یک جهت است (در جهت یا خلاف جهت میدان الکتریکی). با توجه به این توضیحات می‌توان گفت که میدان مغناطیسی است که می‌تواند باعث دوران این الکترون شود.



برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی به‌وجود آورندهٔ آن، وضعیت الکترون را در یک نقطهٔ دلخواه از مسیر بررسی می‌کنیم.

در نقطهٔ نشان داده شده با توجه به این‌که بار الکتریکی الکترون منفی است و با استفاده از قاعدهٔ دست راست، مشخص می‌شود که میدان مغناطیسی برای بار مثبت درون‌سو و برای الکترون برون‌سو است.

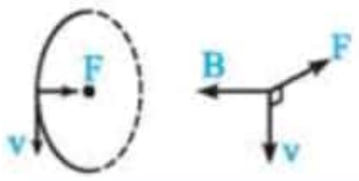


($\vec{v}$ ⇐ چهار انگشت دست راست)

($\vec{B}$ ⇐ خم شدن انگشتان)

($\vec{F}$ ⇐ شست دست راست)

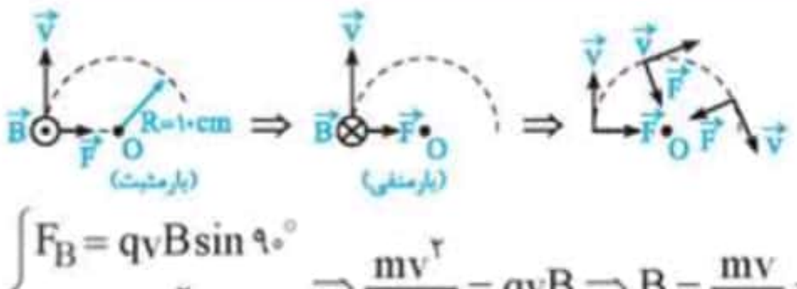
۲۲۰۰۳ می‌دانیم سرعت بر مسیر حرکت مماس است و با توجه به حرکت دایره‌ای این ذره، نیروی مرکزگرا (که همان نیروی مغناطیسی است) به سمت مرکز است و با توجه به قانون دست راست داریم:



تذکر

این پاسخ با صرف‌نظر کردن از وزن ذره و این موضوع که تنها یک میدان مغناطیسی در فضا موجود است، صحیح می‌باشد.

۴۲۰۰۴ نیروی مغناطیسی به سمت مرکز دایره بوده و با توجه به قانون دست راست، میدان مغناطیسی برای این بار منفی درون‌سو است.



در ادامه مشابه با سؤال قبل، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_B = qvB\sin 90^\circ \\ F_c = \dfrac{mv^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow B = \frac{mv}{Rq} = \frac{(9\times10^{-31})\times(1/6\times10^{6})}{(10\times10^{-2})\times(1/6\times10^{-19})} = 9\times10^{-5}\,T$$

۳۲۰۰۵ برای حل این سؤال نسبتاً دشوار، به تحلیل هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با توجه به تساوی انرژی جنبشی پروتون و آلفا می‌نویسیم:

$$\begin{cases} K_\alpha = K_P \Rightarrow \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}m_P v_P^2 \\ m_\alpha = 4m_P \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}m_P v_P^2 = \frac{1}{2}(4m_P)v_\alpha^2 \Rightarrow v_\alpha = \frac{1}{2}v_P$$

(گزینهٔ (۱) نادرست است.)

۲) در مقایسهٔ تکانهٔ پروتون و آلفا می‌نویسیم:

$$\frac{P_\alpha}{P_P} = \frac{m_\alpha}{m_P}\times\frac{v_\alpha}{v_P} = \frac{4\cancel{m_P}}{\cancel{m_P}}\times\frac{\frac{1}{2}\cancel{v_P}}{\cancel{v_P}} = 2 \Rightarrow P_\alpha = 2P_P$$

(گزینهٔ (۲) نادرست است.)

۳) در مقایسهٔ شعاع پروتون و آلفا داریم:

$$\begin{cases} \text{نیروی مغناطیسی}: F_B = qvB\sin 90^\circ \\ \text{نیروی مرکز گرا}: F_c = \dfrac{mv^2}{R} \end{cases} \xrightarrow{F_B = F_c} qvB\sin 90^\circ = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow Bq = m\frac{v}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{Bq}}$$

(شعاع دوران)

$$\frac{R_\alpha}{R_P} = \frac{m_\alpha}{m_P}\times\frac{v_\alpha}{v_P}\times\frac{q_P}{q_\alpha} = 4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow R_\alpha = R_P$$ ⇒ شعاع مسیر ذرهٔ α با شعاع مسیر پروتون برابر است.

گزینهٔ (۳) صحیح است. دقت شود که اندازهٔ بار الکتریکی ذرهٔ α (که معادل He^{2+}) است دو برابر اندازهٔ بار پروتون می‌باشد.

۴) در مقایسهٔ نیروی مغناطیسی α و P می‌توان نوشت:

$$F = qvB\sin 90^\circ \Rightarrow \frac{F_P}{F_\alpha} = \frac{v_P}{v_\alpha}\times\frac{q_P}{q_\alpha} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

gajmarket.com

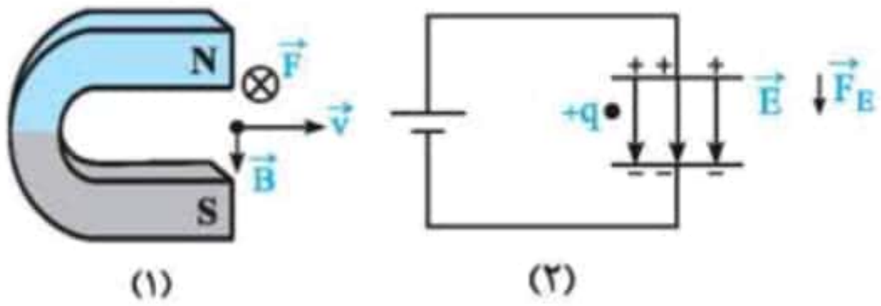
۱ ۲۰۰۶ نیروی الکترومغناطیسی وارد بر ذره در نقش نیروی مرکزگرا می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{F_c r}{m} : (I) \text{ رابطهٔ}$$

از طرفی برای محاسبهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{(I)} K = \frac{1}{2} \times m \times \left(\frac{F_c r}{m}\right) = \frac{1}{2}F_c r = \frac{1}{2} \times \underbrace{1/5 \times 10^{-17}}_{F_c} \times \underbrace{28 \times 10^{-3}}_{r} = 21 \times 10^{-20} J$$

۳ ۲۰۰۷ در شکل (۱) جهت میدان مغناطیسی از قطب N به S است، پس جهت بردار میدان مغناطیسی باید به طرف پایین باشد. حالا چون ذره به سمت داخل صفحه منحرف شده است و جهت‌های $\vec{v}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{F}$ با قانون دست راست مطابقت دارد، بنابراین بار ذره مثبت است. از طرفی در صورتی که بار آن مثبت باشد، در میدان الکتریکی به سمت صفحهٔ منفی (به سمت پایین) منحرف می‌شود.



(۱) (۲)

۱ ۲۰۰۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

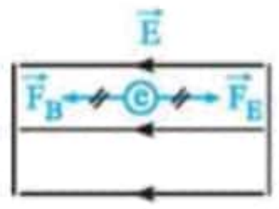
۱) با توجه به این‌که در این میدان به بار الکتریکی ساکن در نقطهٔ M نیرو وارد نمی‌شود ولی به همین بار در حالت متحرک در همین نقطه نیرو وارد می‌شود، نتیجه می‌گیریم که نیروی حاصل می‌تواند حاصل از یک میدان مغناطیسی باشد (چون نیروی الکتریکی در هر دو حالت بار الکتریکی ساکن و یا متحرک بر آن وارد می‌شود).



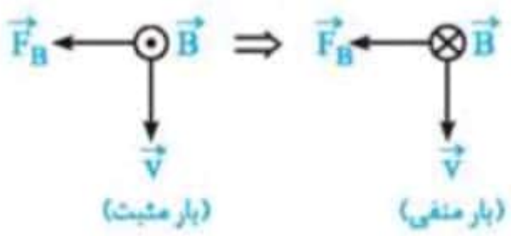
۲) با توجه به قانون دست راست و به کمک شکل‌های فوق، اگر بار الکتریکی مثبت بود، جهت میدان مغناطیسی به طرف بیرون کاغذ (در جهت محور z) بود، اما ذرهٔ مورد بحث در این سؤال دارای بار منفی است و باید جهت میدان به‌دست آمده را برعکس کنیم.

۴ ۲۰۰۹ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۸)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ ۲۰۱۰ برای جلوگیری از انحراف الکترون‌ها، نیروی مغناطیسی و نیروی الکتریکی وارد بر الکترون‌ها باید یک‌دیگر را خنثی کنند، که این موضوع تنها در گزینهٔ (۲) رخ داده است. برای کنترل گزینهٔ (۲) مشابه با سؤال قبل، دو گام زیر را طی می‌کنیم:



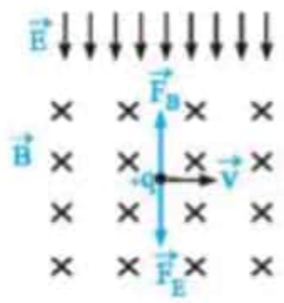
گام اول: اگر میدان الکتریکی به سمت چپ باشد، نیروی الکتریکی وارد بر باریکهٔ الکترون به سمت راست است و برای حفظ تعادل ذره، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون باید به سمت چپ باشد (می‌توان گفت نیروی مغناطیسی برای الکترون به‌منظور حفظ تعادل آن در جهت $\vec{E}$ است (چرا؟)).



گام دوم: اگر F_B به سمت چپ باشد و $\vec{v}$ به سمت پایین باشد، جهت B برای ذرهٔ با بار منفی درون‌سو است.

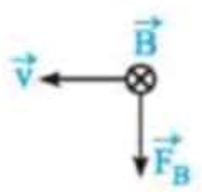
* توصیه می‌شود که نادرستی سایر گزینه‌ها را نیز مشابه با گزینهٔ (۲) بررسی کنید (راهنمایی: برای سادگی در تمام گزینه‌ها ابتدا F_B را در جهت $\vec{E}$ رسم کنید و قانون دست راست را برای الکترون کنترل کنید).

۴ ۲۰۱۱ با توجه به قانون دست راست، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره به‌سمت بالا و با توجه به جهت $\vec{E}$، نیروی الکتریکی وارد بر آن به‌سمت پایین می‌باشد (چرا؟). حال برای این‌که ذره بر روی مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه دهد، باید برایند نیروهای وارد بر آن صفر باشد، پس $F_B = F_E$ است.



$$\sum F = 0 \Rightarrow F_B = F_E \Rightarrow |q| vB\sin 90^\circ = E|q| \Rightarrow v = \frac{E}{B} \Rightarrow v = \frac{2000}{0/5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^6 \, m/s$$

۳ ۲۰۱۲ به این بار الکتریکی متحرک، دو نیروی الکتریکی $(\vec{F}_E)$ و مغناطیسی $(\vec{F}_B)$ وارد می‌شود. بنابراین به محاسبهٔ هریک از آن‌ها می‌پردازیم:



نیروی مغناطیسی: با توجه به قانون دست راست، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره به‌سمت پایین بوده و برابر است با:

$$F_B = |q| vB\sin 90^\circ = 4 \times 10^{-6} \times 10^6 \times 2 \times 1 = 8 \, N \quad \text{(به سمت پایین)}$$

نیروی الکتریکی: با توجه به این‌که جهت میدان الکتریکی در داخل خازن به‌سمت پایین است، بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت q نیز به‌سمت پایین بوده و برابر است با:

$$F_E = |q| E = 4 \times 10^{-6} \times 10^6 = 4 \, N \quad \text{(به‌سمت پایین)}$$

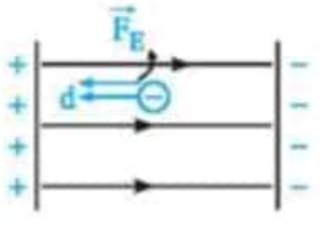
با توجه به هم‌جهت بودن $\vec{F}_B$ و $\vec{F}_E$، برایند نیروهای وارد بر این بار برابر است با:

$$F_T = F_B + F_E = 8 + 4 = 12 N$$

۴۲۰۱۳ سؤال تحلیلی و بسیار جالبی است. برای پاسخ دادن به این سؤال حالت‌های زیر را درنظر بگیرید:

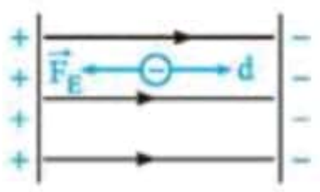
حالت اول: اگر F_B و F_E مانند دو تست قبل یک‌دیگر را خنثی کنند، برایند نیروهای وارد بر بار الکتریکی صفر است و تندی حرکت ذره ثابت می‌ماند (حرکت ذره به‌صورت یکنواخت انجام می‌شود).

حالت دوم: می‌دانیم که کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است (قضیهٔ کار و انرژی). نیروی مغناطیسی همواره بر سرعت بار و مسیر حرکت عمود است و کار آن صفر است ($W_{F_B} = F_B d \cos 90^\circ = 0$) و این میدان تندی ذره را تغییر نمی‌دهد. کار انجام شده توسط میدان الکتریکی نیز به جهت حرکت ذره و بردار جابه‌جایی نسبت به میدان الکتریکی بستگی دارد و داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} W_{F_E} = F_E d \cos\alpha = F_E d \cos 0^\circ > 0 \\ K_2 - K_1 = W_{F_E} > 0 \Rightarrow K_2 > K_1 \Rightarrow \end{cases}$$

تندی حرکت ذره افزایش می‌یابد.



$$\Rightarrow \begin{cases} W_{F_E} = F_E d \cos 180^\circ < 0 \\ K_2 - K_1 = W_{F_E} < 0 \Rightarrow K_2 < K_1 \Rightarrow \end{cases}$$

تندی حرکت ذره کاهش می‌یابد.

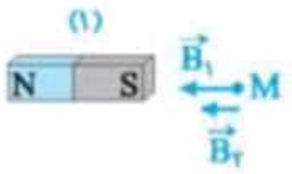
بنابراین تندی حرکت ذره می‌تواند افزایش، کاهش و یا ثابت بماند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

تذکر

اگر ذره عمود بر میدان الکتریکی جابه‌جا شود، W_{F_E} نیز صفر شده و تندی حرکت ذره ثابت می‌ماند.

۲۲۰۱۴ با قرار دادن یک میلهٔ آهنی در محل خط‌چین، با توجه به خاصیت القای مغناطیسی، میلهٔ آهنی تبدیل به یک آهنربای نسبتاً ضعیف می‌شود که قطب‌های آن به صورت مقابل است و در نقطهٔ M میدان آن به سمت چپ است (یک قطب N فرضی در نقطهٔ M قرار دهید).



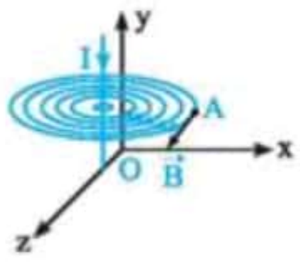


$$B_T = B_1 + B_2 > 100\,G$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این حالت میدان برایند در نقطهٔ M اندکی بیشتر از ۱۰۰ گاوس می‌شود.

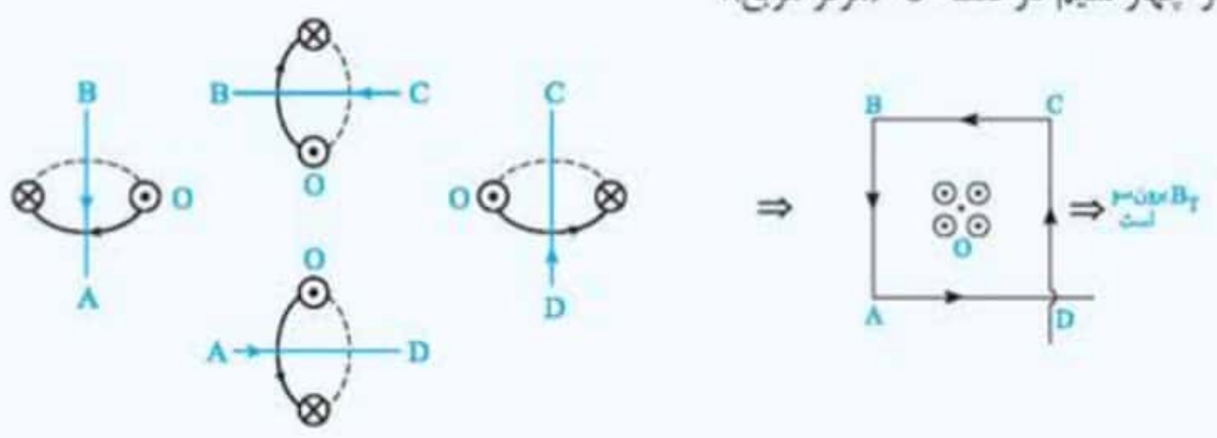
۳۲۰۱۵ با وصل کلید و عبور جریان از سیملوله، به‌علت ایجاد میدان مغناطیسی در داخل سیملوله و القای خاصیت مغناطیسی در تیغه‌ها، هر دو تیغه خاصیت مغناطیسی پیدا کرده و چون قطب‌های همنام در کنار یک‌دیگر به‌وجود می‌آیند پس همدیگر را می‌رانند. از سوی دیگر دو تیغه باید از مواد فرومغناطیس نرم مانند آهن، نیکل و ... باشند تا بلافاصله پس از حذف میدان، خاصیت مغناطیسی آن‌ها از بین رود و عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۲۰۱۶ با توجه به شکل مقابل و با کمک قانون دست راست، با توجه به این‌که نقطهٔ A و سیم مؤلفهٔ z یکسانی دارند، میدان مغناطیسی در نقطهٔ A در جهت محور z است. دقت شود که جهت میدان مغناطیسی در هر نقطه، مماس بر خطوط میدان مغناطیسی در آن نقطه است.



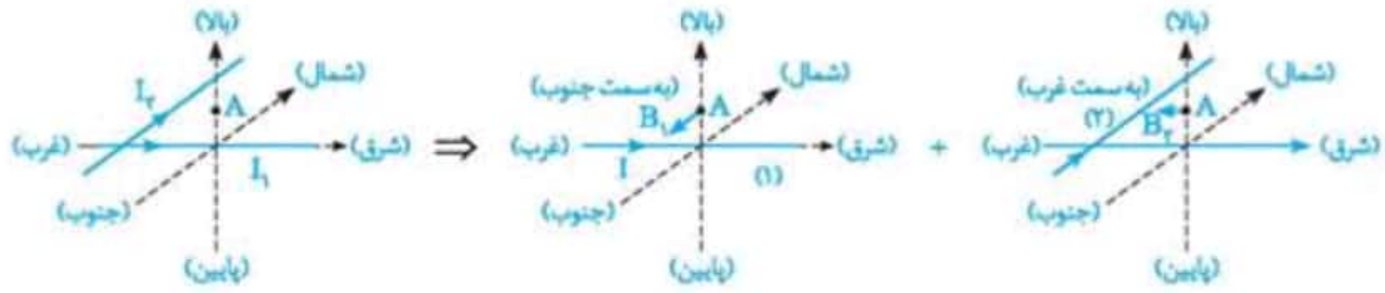
۳۲۰۱۷ میدان مغناطیسی در مرکز مربع، برایند میدان مغناطیسی ناشی از ۴ سیم در مرکز مربع است. با توجه به قانون دست راست، میدان هر چهار سیم در مرکز مربع برون‌سو است و در نتیجه میدان برایند نیز در مرکز مربع برون‌سو است.

نمایش سه‌بعدی میدان ناشی از چهار سیم در نقطهٔ O (مرکز مربع):



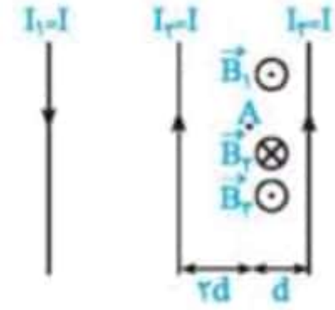
gajmarket.com

۴ ۲۰۱۸ با توجه به شکل زیر که در واقع شکل سه‌بعدی را به دو شکل ساده‌تر تبدیل کرده‌ایم (با این عمل تحلیل شکل ساده‌تر انجام می‌شود)، میدان مغناطیسی برایند حاصل از دو سیم به سمت جنوب غربی است.



با توجه به جهت B_1 و B_2، میدان برایند در جهت جنوب غربی است.

۳ ۲۰۱۹ ابتدا جهت میدان مغناطیسی حاصل از هر یک از سیم‌ها را در نقطهٔ A به کمک قانون دست راست به دست می‌آوریم:



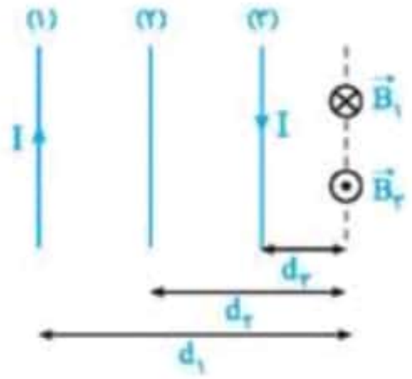
سیم (۱) : B_1 (برون‌سو)

سیم (۲) : B_2 (درون‌سو)

سیم (۳) : B_3 (برون‌سو)

با توجه به این‌که جریان سیم‌های (۲) و (۳) با یک‌دیگر برابر بوده ولی فاصلهٔ سیم (۳) از نقطهٔ A کم‌تر از فاصلهٔ سیم (۲) از نقطهٔ A است، بنابراین $B_2 > B_3$ می‌باشد. پس برایند دو میدان مغناطیسی B_2 و B_3 به‌صورت برون‌سو بوده و از آن‌جایی که میدان B_1 نیز به صورت برون‌سو است، بنابراین میدان مغناطیسی برایند ناشی از سه سیم در نقطهٔ A به‌صورت برون‌سو می‌باشد.

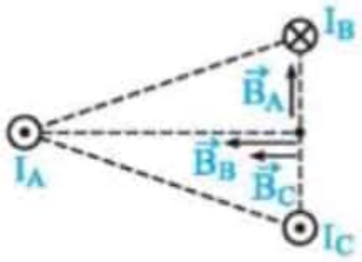
۲ ۲۰۲۰ برای تغییر جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ A (محل خط‌چین)، باید میدان مغناطیسی برایند حاصل از سه سیم در نقطهٔ A صفر شود (چرا؟). در ادامه برای بررسی این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



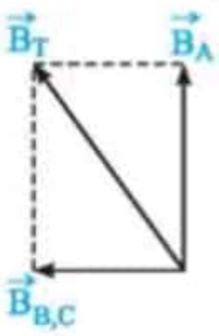
گام اول: با کمک قانون دست راست، در نقطهٔ A میدان مغناطیسی سیم (۱) درون‌سو و میدان مغناطیسی سیم (۳) برون‌سو است. با توجه به این‌که جریان دو سیم (۱) و (۳) با هم برابر ولی فاصلهٔ سیم (۳) از نقطهٔ A (محل خط‌چین) کم‌تر است، بنابراین $B_3 > B_1$ بوده و میدان مغناطیسی برایند ناشی از دو سیم (۱) و (۳) در نقطهٔ A به صورت برون‌سو می‌باشد.

گام دوم: سیم (۲) باید یک میدان مغناطیسی درون‌سو در نقطهٔ A تولید کند تا میدان مغناطیسی‌اش، برایند میدان‌های مغناطیسی سیم‌های (۱) و (۳) را در نقطهٔ A خنثی کند و میدان مغناطیسی برایند ناشی از جریان‌های سه سیم در نقطهٔ A صفر شود. در نتیجه جریان سیم (۲) به سمت بالا است.

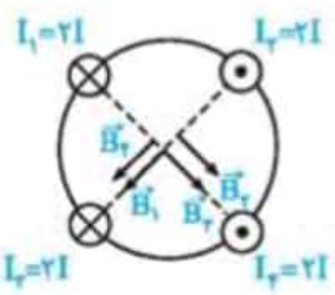
۳ ۲۰۲۱ ابتدا مطابق شکل مقابل، به کمک قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از هریک از سیم‌ها را در نقطهٔ D به‌دست می‌آوریم:



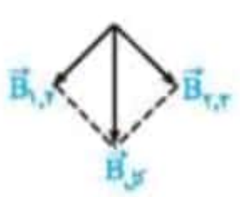
حال برای به دست آوردن جهت میدان مغناطیسی برایند، با توجه به این‌که $\vec{B}_B$ و $\vec{B}_C$ هم‌جهت‌اند، داریم:



۴ ۲۰۲۲ میدان مغناطیسی هر سیم در مرکز دایره، عمود بر راستای اتصال سیم با مرکز بوده و در راستای قطر دیگر قرار می‌گیرد (زیرا دو قطر نشان داده‌شده در شکل بر هم عمود هستند، چرا؟). با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ سیم‌ها تا مرکز، میدان هر سیم متناسب با شدت جریان آن سیم است.



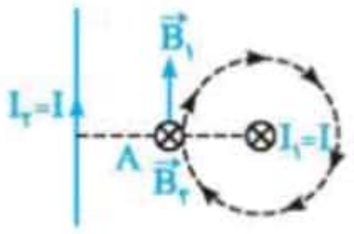
بنابراین میدان‌های B_1 و B_4 برابر و در یک جهت و میدان‌های B_2 و B_3 نیز با یک‌دیگر برابر و در یک جهت هستند، بنابراین برای برایند این بردارها داریم:



تذکر

با توجه به این‌که فاصلهٔ تمامی سیم‌ها از مرکز دایره و اندازهٔ جریان آن‌ها با هم برابر است، اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از تمامی سیم‌ها در مرکز دایره با یک‌دیگر برابر می‌باشد.

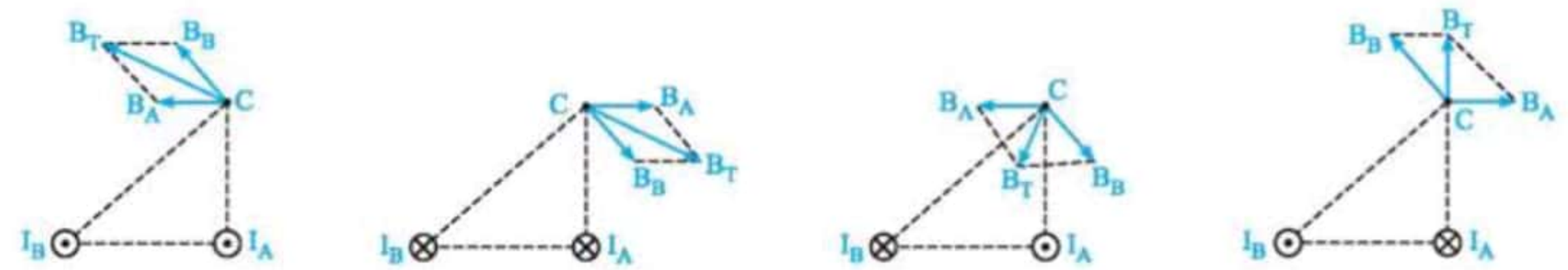
۲۰۲۳ میدان مغناطیسی سیم (۱) در نقطهٔ A به‌سمت بالا و میدان مغناطیسی سیم (۲) در نقطهٔ A، به‌صورت درون‌سو است و در نتیجه این دو میدان بر یک‌دیگر عمودند، از طرفی شدت میدان هر دو سیم نیز با یک‌دیگر برابرند (چون اندازهٔ جریان و فاصلهٔ هر دو سیم تا نقطهٔ A با یک‌دیگر برابر است).



$$B_1 = B_2 = B$$

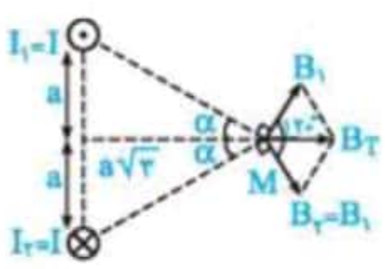
$$B_{T_1} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{B^2 + B^2} = \sqrt{2}B$$

۲۰۲۴ میدان مغناطیسی در رأس C، در حالت‌های مختلف در شکل‌های زیر رسم شده است:



با توجه به این شکل‌ها اگر I_B به‌صورت برون‌سو و I_A به‌صورت درون‌سو باشد، ممکن است B_T در راستای قائم قرار گیرد.

۲۰۲۵ با توجه به یکسان بودن اندازهٔ جریان دو سیم و فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ M، بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از هر دو سیم در نقطهٔ M با یک‌دیگر برابر می‌باشد $(B_1 = B_2)$. از طرفی به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان هر سیم مطابق شکل زیر می‌باشد. دقت کنید که میدان هریک از سیم‌ها در نقطهٔ M، بر خط وصل‌شده از محل سیم به نقطهٔ موردنظر عمود است. حال باید برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی برایند، زاویهٔ بین دو میدان $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ را به‌دست آوریم:



$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

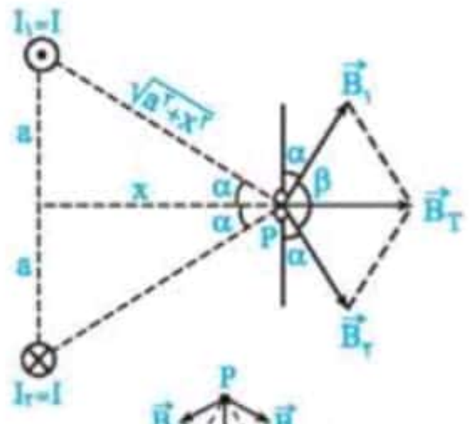
نکته

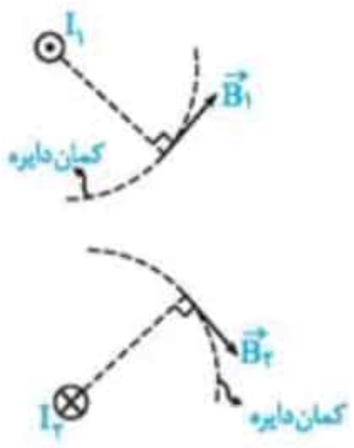
اگر دو بردار با اندازهٔ یکسان B با هم زاویه θ بسازند، اندازهٔ برایند آن دو بردار از رابطهٔ $B_T = 2B\cos\frac{\theta}{2}$ به دست می‌آید.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \vec{B}_2 \text{ و } \vec{B}_1 \text{ زاویهٔ بین دو میدان} : \theta = 120^\circ \Rightarrow B_T = 2B_1\cos\frac{120^\circ}{2} = 2B_1 \times \frac{1}{2} = B_1$$

۲۰۲۶ در این سؤال دشوار، با توجه به برابر بودن جریان دو سیم و فاصلهٔ دو سیم از نقطهٔ P، بزرگی میدان مغناطیسی دو سیم در این نقطه هم‌اندازه است. از طرفی با توجه به شکل زیر، زاویهٔ بین میدان ناشی از دو سیم در نقطهٔ P برابر $(\beta = \pi - 2\alpha)$ است و می‌توان نوشت:



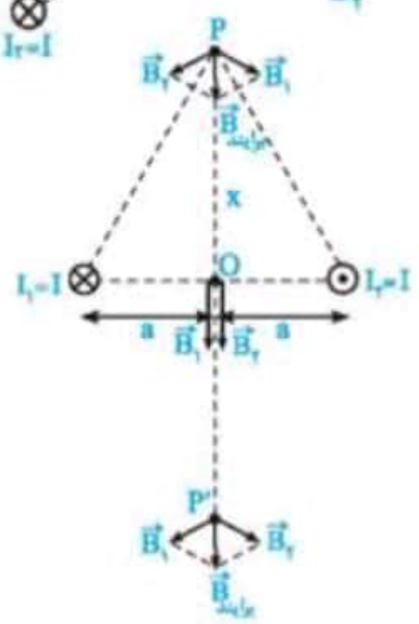


$$B_1 = B_2 = B$$

$$B_T = 2B\cos\frac{\beta}{2} = 2B\cos\left(\frac{\pi - 2\alpha}{2}\right) = 2B\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow B_T = 2B \times \underbrace{\frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}}_{\text{وتر}}^{\text{ضلع مقابل}} = \frac{2a}{\sqrt{x^2 + a^2}}B$$

۲۰۲۷ در شکل مقابل میدان مغناطیسی برایند در نقاط P، O و P' نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است، در نقطهٔ O میدان هر دو سیم در یک جهت قرار دارند. هم‌چنین باید دقت شود که هرچه به نقطهٔ O نزدیک می‌شویم، فاصلهٔ نقطهٔ موردنظر از دو سیم کاهش یافته و در نتیجه میدان ناشی از هر دو سیم بزرگ‌تر می‌شود.



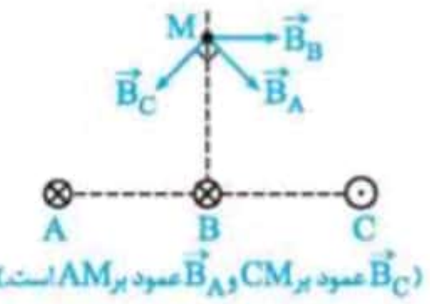
با توجه به این موضوع، با نزدیک شدن به نقطهٔ O، بزرگی میدان مغناطیسی برایند (B_T) افزایش می‌یابد و بزرگ‌ترین میدان مغناطیسی در نقطهٔ O رخ می‌دهد. از P تا P'، ابتدا به نقطهٔ O نزدیک شده و در نتیجه اندازهٔ میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد و سپس از نقطهٔ O دور شده و اندازهٔ میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد.

gajmarket.com

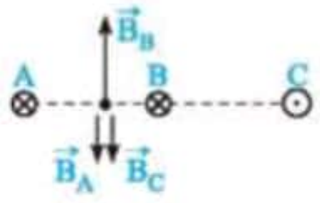
۲۲۰۲۸ برای بررسی این سؤال، به نکات زیر توجه شود:

۱- در فاصلهٔ بین B و C و روی پاره‌خط BC، میدان مغناطیسی هر سه سیم به‌سمت پایین است (چرا؟) و میدان مغناطیسی برایند نمی‌تواند صفر شود.

۲- روی عمودمنصف پاره‌خط AC، میدان مغناطیسی هر یک از سه سیم به شکل مقابل است و میدان مغناطیسی برایند (یعنی برایند سه بردار نشان داده‌شده) نمی‌تواند صفر شود.



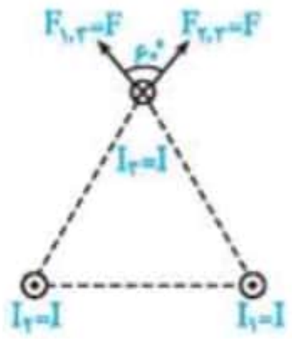
۳- خارج از AC و سمت راست C، میدان مغناطیسی سیم‌های A و B به‌سمت پایین و میدان مغناطیسی سیم C به‌سمت بالاست، اما با توجه به بیشتر بودن جریان سیم C و نزدیک‌تر بودن آن به نقطهٔ موردنظر، میدان مغناطیسی برایند نمی‌تواند صفر باشد.



۴- بنابراین میدان برایند در فاصلهٔ بین A و B و روی پاره‌خط AB می‌تواند صفر شود و گزینهٔ (۲) صحیح است.

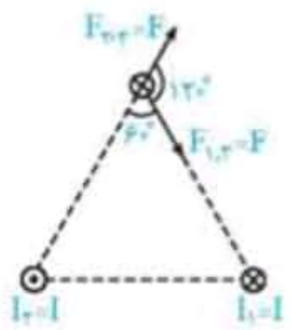
جهت میدان‌های مغناطیسی در این نقطه (M) به صورت مقابل است.

۲۲۰۲۹ با توجه به جهت جریان در سیم‌ها، سیم‌های (۱) و (۲) سیم (۳) را دفع کرده (چرا؟) و اندازهٔ برایند نیروی وارد بر آن برابر است با:



$$F_T = 2F\cos\frac{60^\circ}{2} = \sqrt{3}F$$

حال با عوض شدن جهت جریان I_1، اندازهٔ نیروی بین دو سیم (۱) و (۳) هم‌چنان برابر F باقی می‌ماند ولی جهت این نیرو عوض شده و دو سیم (۱) و (۳) یکدیگر را جذب می‌کنند. در این حالت زاویهٔ بین دو نیروی $\vec{F}_{1,3}$ و $\vec{F}_{2,3}$ برابر ۱۲۰° می‌باشد و می‌توان نوشت:



$$F'_T = 2F\cos\frac{120^\circ}{2} = F$$

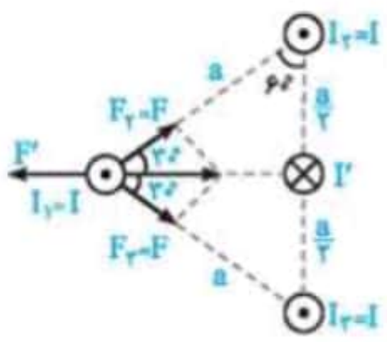
بنابراین در مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{F'_T}{F_T} = \frac{F}{\sqrt{3}F} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۲۰۳۰ می‌دانیم سیم‌های دارای جریان‌های هم‌جهت یکدیگر را جذب می‌کنند. بنابراین دو سیم I_2 و I_3، سیم I_1 را جذب کرده و برایند این دو نیرو برابر است با (دقت شود نیرویی که سیم‌های (۲) و (۳) بر سیم (۱) وارد می‌کنند با هم برابر هستند. چرا؟):

$$F_{1,2} = 2F\cos\frac{60^\circ}{2}$$

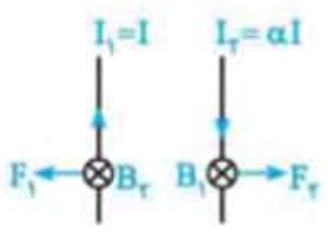
حال از آن‌جایی که طبق صورت سؤال، نیروی وارد بر سیم I_1 صفر است، بنابراین سیم I' باید سیم (۱) را دفع کند تا نیروی F' بتواند برایند F_2 و F_3 را خنثی کند، با توجه به این موضوع داریم:



$$F' = F_{1,2} \Rightarrow F' = 2F\cos\frac{60^\circ}{2} = 2F\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F' = \sqrt{3}F$$

دقت: چون سیم I'، سیم I_1 را دفع می‌کند، بنابراین جریان آن درون‌سو می‌باشد (⊗) [سیم‌های حامل جریان‌های در خلاف جهت، یکدیگر را دفع می‌کنند.]، بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲۲۰۳۱ میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۱) بر روی سیم (۲) را با B_1 و میدان مغناطیسی ناشی از سیم (۲) بر روی سیم (۱) را با B_2 نشان می‌دهیم. B_1 بر سیم (۲) و B_2 بر سیم (۱) عمود است. بنابراین نیروی وارد بر سیم‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{cases} \text{نیروی وارد بر سیم (۲)}: F_2 = B_1 I_2 L\sin 90^\circ \\ \text{نیروی وارد بر سیم (۱)}: F_1 = B_2 I_1 L\sin 90^\circ \end{cases} \xrightarrow[F_1=F_2]{\text{قانون سوم نیوتون}} B_1 I_2 L = B_2 I_1 L \Rightarrow B_1 I_2 = B_2 I_1$$

$$\Rightarrow B_1\times\alpha I = B_2\times I \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{\alpha}$$

۴۲۰۳۲ ۱) محاسبهٔ مقاومت سیملوله:

$$R=\rho\frac{L}{A}=۵\times۱۰^{-۶}\times\frac{۶/۲۸}{۳/۱۴\times(۱۰^{-۳})^{۲}}=۱۰\Omega$$

۲) محاسبهٔ شدت جریان در مدار:

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳A$$

۳) محاسبهٔ اندازهٔ میدان ایجاد شده در سیملوله:

$$B=\mu_{۰}\frac{N}{l}I=\mu_{۰}nI=۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۱۰۰۰\times۳=۱۲\pi G$$

۲۲۰۳۳ اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله از این رابطه به‌دست می‌آید: $B=\mu_{۰}nI$

که $n=\frac{N}{l}$ و معادل تعداد دورهای سیملوله در واحد طول است. با اتصال دو سیملولهٔ کاملاً مشابه با طول و تعداد دور سیم یکسان، N و l برای سیملولهٔ جدید هر دو، دو برابر حالت اول می‌شود و لذا n ثابت می‌ماند و با عبور جریان مشابه I، میدان مغناطیسی ثابت می‌ماند.

۴۲۰۳۴

تذکر

اگر حلقه‌های سیملوله به یک‌دیگر چسبیده باشند و قطر هر حلقه از سیملوله برابر D باشد، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیملوله عبارت است از:



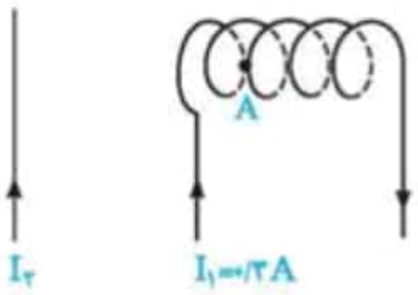
طول سیملوله، تعداد حلقه، قطر سیم

$$I=N\,D$$

$$B=\mu_{۰}\frac{N}{l}I\Rightarrow B=\mu_{۰}\left(\frac{N}{ND}\right)I=\mu_{۰}\frac{I}{D}$$

$$B=\frac{\mu_{۰}I}{D}=\frac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۵}{۴\times۱۰^{-۳}}=۵\pi\times۱۰^{-۴}T$$

۳۲۰۳۵ میدان‌های حاصل از سیملوله و سیم حامل جریان در نقطهٔ A بر یک‌دیگر عمود هستند و داریم:

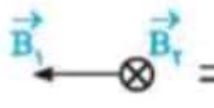


میدان حاصل از سیملوله: $B_{۱}=\mu_{۰}\frac{N}{l}I_{۱}\Rightarrow B_{۱}=۴\pi\times۱۰^{-۷}\times\frac{۱۰۰}{۰/۰۶}\times۰/۳=۶\times۱۰^{-۴}T$

با توجه به جریان الکتریکی سیملوله و قانون دست راست، جهت میدان سیملوله در داخل آن از راست به چپ ($\vec{B_{۱}}\longleftarrow$) است.

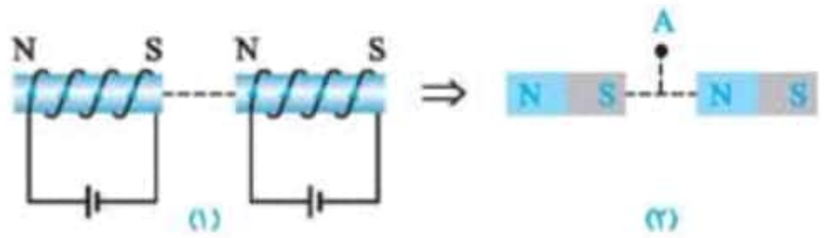
میدان حاصل از سیم راست: $B_{۲}=۸G=۸\times۱۰^{-۴}T$

با توجه به قانون دست راست، میدان حاصل از سیم در نقطهٔ A درون‌سو ($\otimes$) است و اندازهٔ میدان برایند عبارت است از:



$$B_{T}=\sqrt{B_{۱}^{۲}+B_{۲}^{۲}}=\sqrt{(۶\times۱۰^{-۴})^{۲}+(۸\times۱۰^{-۴})^{۲}}=۱۰^{-۳}T$$

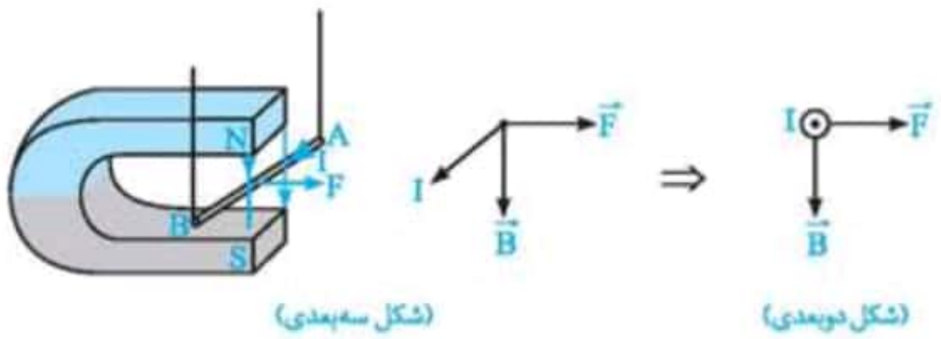
۱۲۰۳۶ دو سیملوله مانند دو آهنربا عمل کرده و قطب‌های آن به سادگی با قانون دست راست مشخص می‌شوند. به جای شکل (۱)، می‌توان جهت میدان در نقطهٔ A را از شکل (۲) تعیین کرد:



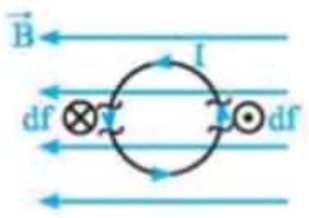
در ادامه برای تعیین جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ A، یک قطب N فرضی در نقطهٔ A قرار می‌دهیم و جهت برایند نیروهای وارد بر آن، ناشی از قطب‌های نزدیک به آن نقطه را می‌یابیم:



۳۲۰۳۷ با توجه به قانون دست راست، نیروی وارد بر سیم AB به سمت راست است.

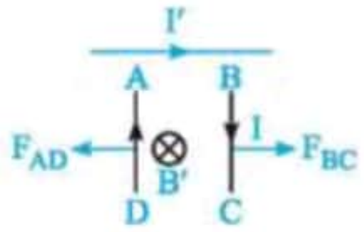


gajmarket.com



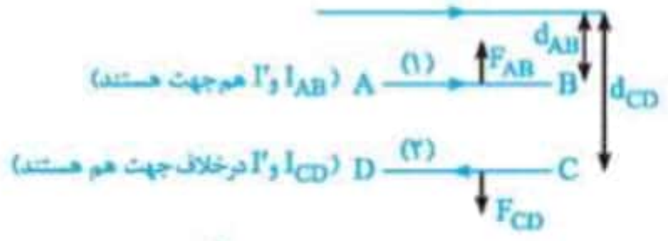
۴ ۲۰۳۸ اگر یک جزء از حلقه مطابق شکل در سمت چپ درنظر گرفته و متناظر با آن جزء دیگری را در سمت راست درنظر بگیریم، نیروی وارد بر این دو جزء به‌صورت مقابل است:

همان‌طور که مشاهده می‌شود، این دو جزء نیرو همدیگر را خنثی می‌کنند. مشابه با همین عمل هر جزء از حلقه که در نظر بگیریم در مقابلش جزء دیگری وجود دارد که نیرویش را خنثی می‌کند و برایند این نیروها صفر است، بنابراین در مجموع برایند نیروهای وارد بر حلقه صفر است.

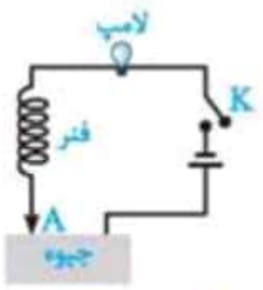


۲ ۲۰۳۹ **گام اول:** ابتدا باید دقت شود که نیروی وارد بر سیم‌های AD و BC با یک‌دیگر مساوی و در خلاف جهت یک‌دیگر بوده و برایند آن‌ها صفر است.

گام دوم: با توجه به گام اول، به بررسی نیروی وارد بر ضلع‌های AB و CD می‌پردازیم، جریان سیم AB با I' هم‌جهت و آن را جذب می‌کند و جریان سیم CD با I'، در خلاف جهت هم بوده و آن‌را دفع می‌کند و با توجه به نزدیک بودن AB به I'، میدان در محل آن بزرگ‌تر بوده و نیروی وارد بر آن بیشتر بوده و برایند نیروهای وارد بر قاب به سمت بالا است.

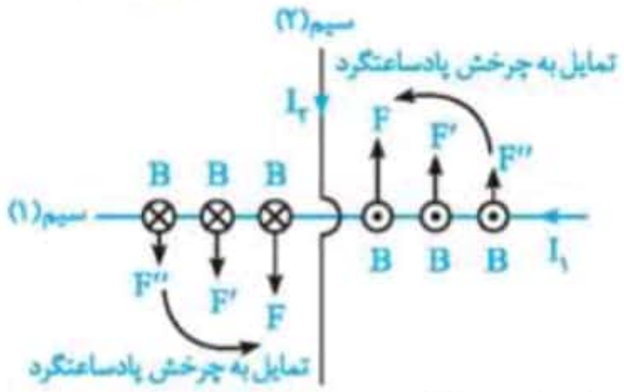


$$d_{AB} < d_{CD} \rightarrow B_1 > B_2 \Rightarrow F_{AB} > F_{CD}$$



۳ ۲۰۴۰ با وصل کلید K و برقراری جریان، حلقه‌های فلزی فنر که دارای جریان هم‌جهت هستند، یک‌دیگر را جذب می‌کنند و با ایجاد جاذبه، سیم از سطح جیوه جدا شده و جریان قطع می‌شود (لامپ خاموش می‌شود). پس از قطع جریان جاذبه از بین رفته و نقطهٔ A مجدداً به محل اولیه باز می‌گردد. با بازگشت مجدد A، لامپ مجدداً روشن می‌شود و اتفاق بیان شده مجدداً رخ می‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

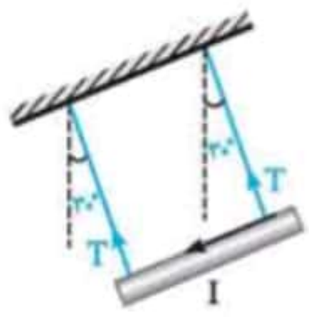
* دقت کنید که جیوه مایعی است که خاصیت رسانایی الکتریکی دارد.



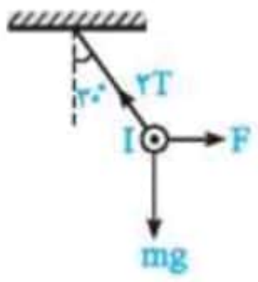
۲ ۲۰۴۱ با توجه به قانون دست راست، میدان سیم (۲) در سمت راست برون‌سو و در سمت چپ درون‌سو است و با دور شدن از سیمِ (۲) میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع نیروی وارد بر سیمِ (۱) در نقاط مختلف نشان داده شده است (در نزدیک سیمِ (۲) نیروی وارد بر سیمِ (۱) بزرگ‌تر است). این نیروها تمایل به چرخش پادساعتگرد سیمِ (۱) دارند.

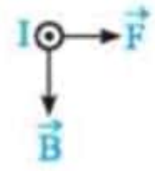
۲ ۲۰۴۲ بر سیم حامل جریان I، سه نیروی کشش نخ، وزن سیم و نیروی مغناطیسی وارد می‌شود. با توجه به جهت انحراف سیم، مشخص است که نیروی مغناطیسی وارد بر سیم آن را به‌سمت راست کشیده است.

دقت: با توجه به جهت میدان مغناطیسی، به کمک قانون دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم به سمت راست می‌باشد.



در ادامه برای برقراری تعادل باید نیروی $2T\sin 30$ را نیروی F و نیروی $2T\cos 30$ را نیروی mg خنثی کند و در مجموع داریم:





$$\begin{cases} 2T\sin 30^\circ = F \\ 2T\cos 30^\circ = mg \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر یک‌دیگر}} \tan 30^\circ = \frac{F}{mg}$$

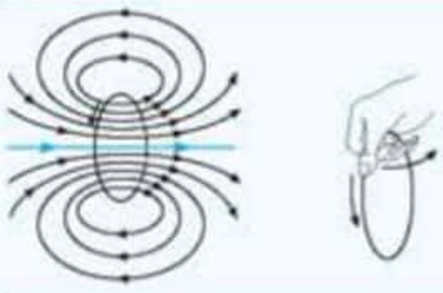
$$\tan 30^\circ = \frac{BIL\sin\alpha}{mg} = \frac{BIL\sin 90^\circ}{mg}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{B\times 2\sqrt{3}\times 1\times 1}{0/1\times 10} \Rightarrow B = \frac{1}{6}T$$

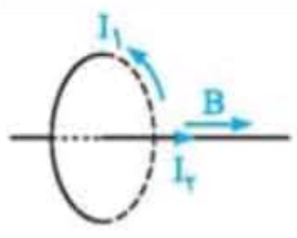
۴ ۲۰۴۳

نکته

بر روی محور اصلی یک حلقه مطابق شکل مقابل، میدان مغناطیسی افقی است.

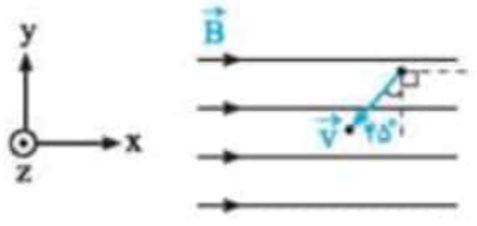


با توجه به این نکته، اگر سیم I_2 از مرکز حلقه بگذرد، زاویهٔ بین I_2 و B صفر بوده و بر سیم نیرویی وارد نمی‌شود.



$$F = BIL\sin\alpha \xrightarrow{\alpha=0} F = 0$$

۴۲۰۴۴ با توجه به شکل، مشخص است که زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برابر $135^\circ (= 90^\circ + 45^\circ)$ می‌باشد.



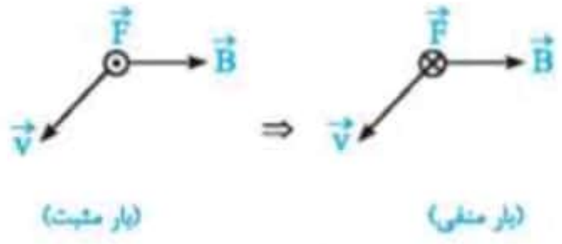
بنابراین برای محاسبهٔ اندازهٔ نیروی وارد بر ذره در این لحظهٔ خاص می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = (-2\vec{i} - 2\vec{j}) \times 10^5 \Rightarrow v = |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \times 10^5 = 2\sqrt{2} \times 10^5 \ m/s$$

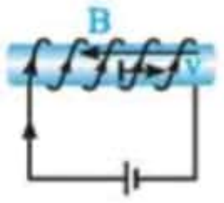
$$B = |\vec{B}| = 10 T$$

$$\Rightarrow F = qvB\sin\theta = 4 \times 10^{-6} \times 2\sqrt{2} \times 10^5 \times 10 \times \underbrace{\sin 135^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 N$$

از طرفی با توجه به قانون دست راست، نیروی وارد بر بار مثبت برون‌سو و در نتیجه نیروی وارد بر بار منفی به‌صورت درون‌سو می‌باشد. بنابراین نیروی وارد شده بر بار منفی در خلاف جهت محور z و برابر $\vec{F} = -8\vec{k}$ می‌باشد.

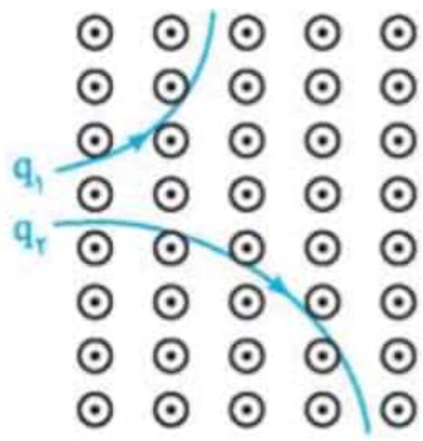


۴۲۰۴۵ با توجه به این‌که پروتون به موازات محور اصلی سیملوله در حال حرکت است، پس از وصل کلید، زاویهٔ بردار سرعت آن با میدان مغناطیسی تولیدی برابر صفر یا ۱۸۰ درجه بوده و در هر دو حالت بر آن نیرویی از طرف میدان مغناطیسی وارد نمی‌شود. با توجه به این موضوع، سرعت آن ثابت باقی می‌ماند.



(به‌طور مثال در شکل روبه‌رو $\alpha = 180^\circ$ است) $\alpha = 180^\circ \Rightarrow F = qvB\sin 180^\circ = 0$

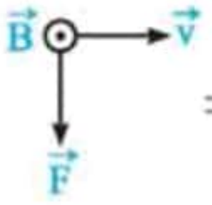
۴۲۰۴۶ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



۱) مطابق شکل مقابل شعاع انحراف ذرهٔ (۲) بزرگ‌تر از ذرهٔ (۱) می‌باشد. با توجه به این‌که نیروی مغناطیسی وارد بر ذره‌ها در نقش نیروی مرکزگرا می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$qvB\sin 90^\circ = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow m = \frac{\overbrace{qB}^{\text{یکسان}} R}{\underbrace{v}_{\text{یکسان}}} \xrightarrow{R_2 > R_1} m_2 > m_1$$

۲) با توجه به جهت انحراف ذرهٔ (۲)، می‌توان فهمید که بار این ذره مثبت است.



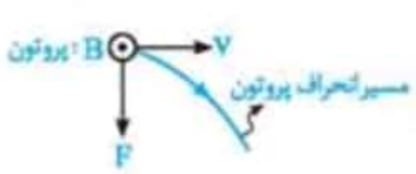
$\Rightarrow$ بار ذرهٔ (۲) مثبت است.

بار ذرهٔ (۱) منفی است، چون جهت انحراف آن عکس جهت انحراف ذرهٔ (۲) است.

۳) با توجه به رابطهٔ $F = qvB\sin\alpha$ و برابر بودن اندازهٔ q، v و B برای دو ذره، نیروی مغناطیسی وارد بر دو ذره برابر است.

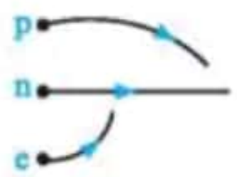
۴) چون نیروی مغناطیسی وارد بر هر کدام از ذره‌ها همواره بر مسیر حرکت ذره عمود است، بنابراین این نیرو اندازهٔ سرعت (تندی) ذره را نمی‌تواند تغییر دهد و فقط جهت سرعت ذره را عوض می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲۲۰۴۷ نوترون در عبور از میدان مغناطیسی منحرف نمی‌شود، زیرا فاقد بار الکتریکی است و گزینهٔ (۴) نادرست است. از طرفی الکترون و پروتون در این سؤال هر دو به سمت داخل منحرف می‌شوند.





اما تفاوت اصلی در بین گزینه‌های (۲) و (۳) تفاوت در مقدار شعاع انحراف الکترون و پروتون است، که به‌صورت زیر مقایسه می‌شود:



$$qvB\sin 90^\circ = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \xrightarrow{m_e < m_p} R_e < R_p$$

یعنی شعاع حرکت پروتون باید از الکترون بزرگ‌تر باشد و مسیر آن به خط صاف (که شعاعش به سمت بی‌نهایت میل می‌کند) نزدیک‌تر است.

۳۲۰۴۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: ابتدا به کمک قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط سیم حامل جریان را در نقطهٔ موردنظر به‌دست می‌آوریم.

گام دوم: (محاسبهٔ اندازهٔ نیروی وارد بر ذرهٔ متحرک با بار مثبت و جهت آن): زاویهٔ بین بردار سرعت و میدان مغناطیسی برابر ۹۰ درجه است (چون بردار سرعت در داخل صفحهٔ کاغذ و بردار میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ کاغذ است) و اندازهٔ نیروی وارد بر ذره برابر است با:



برحسب تسلا

$$F = |q| vB\sin\alpha = (100 \times 10^{-6}) \times (100) \times (10^{-5}) \times \sin 90^\circ = 10^{-7} N$$

gajmarket.com

۴ ۲۰۴۹ با توجه به این‌که نیروی مغناطیسی همواره بر مسیر حرکت عمود است، کار انجام شده توسط آن صفر است.

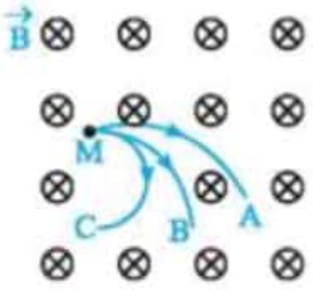
$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow W = Fd\cos 90^\circ \Rightarrow W = 0$$

۳ ۲۰۵۰

تذکر

هر چه تمایل یک کمان دایره به خط راست شدن بیشتر باشد، شعاع آن بزرگتر است. دقت شود که خط راست در واقع کمانی از یک دایره با شعاع بی‌نهایت است.

با توجه به تذکر فوق، شعاع A بزرگتر از B و C است و داریم:



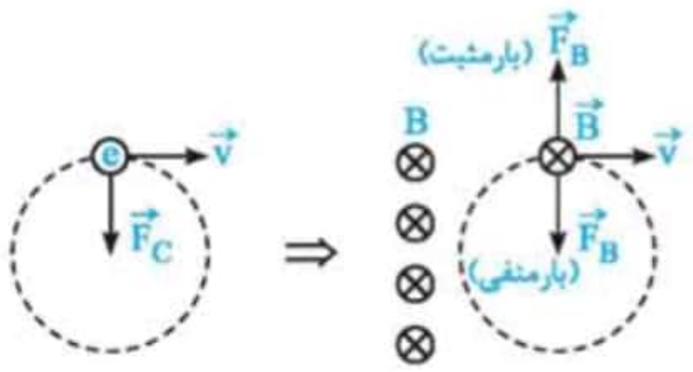
$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \uparrow R = \frac{\overset{\text{یکسان}}{\overbrace{mv}}}{\underset{\text{یکسان}}{\underbrace{\downarrow qB}}}$$

$$R_A > R_B > R_C \Rightarrow q_C > q_B > q_A$$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

می‌دانیم که نوترون ($q = 0$) در یک میدان مغناطیسی منحرف نمی‌شود. می‌توان گفت در شرایط یکسان m، V و B، هر چه مسیر حرکت ذره تمایلش به خط راست بیشتر باشد، گویی اندازهٔ بار الکتریکی‌اش به بار نوترون متمایل می‌شود و اندازهٔ بار الکتریکی‌اش کوچک‌تر است.

۱ ۲۰۵۱ **گام اول:** با برقراری میدان مغناطیسی، یک نیروی مغناطیسی به سمت مرکز دایره بر الکترون وارد می‌شود.

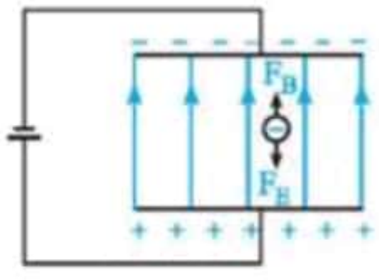


(قبل از برقراری میدان مغناطیسی) (نیروی اضافه شده در اثر میدان مغناطیسی)

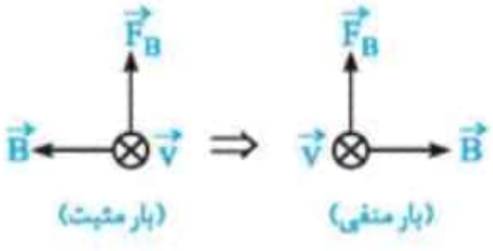
گام دوم: با اضافه‌شدن این نیرو، نیروی مرکزگرای وارد بر ذره افزایش یافته و تندی حرکت الکترون نیز بیشتر می‌شود (در حالت دوم نیروی مرکزگرا برابر $F_{\text{مغناطیسی}} + F_{\text{کولنی}}$ است ولی در حالت اول نیروی مرکزگرا فقط برابر $F_{\text{مرکزگرا}}$ می‌باشد).

$$F_{\text{مرکزگرا}} = \overset{\text{ثابت}}{\overbrace{m}}\frac{v^2}{\underset{\text{ثابت}}{\underbrace{R}}} \Rightarrow F_{\text{مرکزگرا}} \propto v^2 \xrightarrow{F_{\text{مرکزگرا}}\uparrow} v\uparrow$$

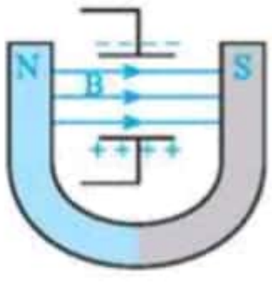
۱ ۲۰۵۲ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:



گام اول: نیروی الکتریکی وارد بر این ذره به سمت پایین بوده و در نتیجه برای جلوگیری از انحراف الکترون نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باید به سمت بالا باشد.



گام دوم: ذرهٔ باردار منفی عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه شلیک شده و با کمک قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی وارد بر آن باید به سمت راست باشد.



گام سوم: برای برقراری یک میدان مغناطیسی به سمت راست، قطب N آهنربا نسبت به مسیر حرکت الکترون باید در سمت چپ قرار گیرد.

۱۲۰۵۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۹ — **مفاهیم شار و تغییر شار** — (تست‌های ۲۰۵۳ تا ۲۰۶۲)

از نظر کیفی، شار مغناطیسی پارامتری است که با خطوط میدان مغناطیسی که به‌طور عمود از یک سطح بسته می‌گذرند، در ارتباط است و مقدار آن در یک میدان مغناطیسی یکنواخت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\Phi = AB\cos\theta$$

A: مساحت سطحی که از آن، میدان مغناطیسی عبور می‌کند (m^2).

B: شدت میدان مغناطیسی یکنواخت عبوری از حلقه (T).

θ: زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی با نیم‌خط عمود بر سطح و یا به عبارت دقیق‌تر بردار نرمال سطح

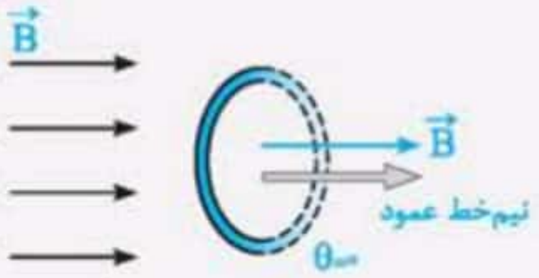


نکات مهم و کاربردی

۱ واحد شار مغناطیسی در سیستم SI، وبر است. $\Phi = AB\cos\theta \Rightarrow$ مترمربع × تسلا ≡ وبر

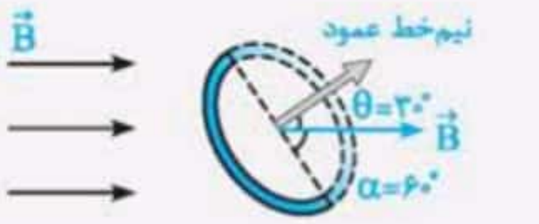
۲ اگر سطحی موازی خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت قرار بگیرد، از آن سطح هیچ خط میدانی عبور نکرده و شار مغناطیسی آن صفر است. در این حالت، زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر سطح (نرمال) با بردار میدان، $\theta = 90^\circ$ است.

۳ اگر سطح حلقه عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت قرار بگیرد، از سطح آن بیشترین شار ممکن عبور می‌کند و $\theta = 0$ است.



$$\Phi = \Phi_{max} = AB\cos 0 = AB$$

۴ در بسیاری از تست‌ها، زاویهٔ بردار میدان مغناطیسی با سطح حلقه داده می‌شود (α). در این حالت زاویه با بردار نرمال برابر $90^\circ - \alpha$ است. به‌طور مثال در شکل مقابل زاویهٔ میدان با سطح حلقه برابر 60° است و زاویهٔ بردار میدان مغناطیسی با نیم‌خط عمود بر سطح (بردار نرمال) برابر 30° است.



۵ اگر یک قاب بسته از N حلقه با مساحت A تشکیل شده باشد، شار عبوری از کل قاب با شار عبوری از یک حلقه از آن برابر است و مجدداً شار برابر $AB\cos\theta$ می‌باشد (در محاسبهٔ شار عبوری، N را درنظر نمی‌گیریم).

۶ دقت شود که همیشه دو جهت برای رسم نیم‌خط عمود بر یک سطح معین وجود دارد (از هریک از دو طرف سطح، می‌توان بر آن عمود کرد). دقت شود که در حل یک مسئله، همواره باید یکی از آن‌ها را انتخاب کرده و تا پایان حل سؤال آن را تغییر ندهیم *(توصیهٔ ما اینه که همواره زاویهٔ کوچک‌تر رو انتخاب کنید).*

محاسبهٔ تغییر شار مغناطیسی در یک مدار بسته

نکته برای محاسبهٔ تغییر شار ($\Delta\Phi$) در دو حالت مختلف، قاعدتاً باید Φ_2 را از Φ_1 کم کنیم. باتوجه به این موضوع ساده و بدیهی، در تست‌ها دو ابتکار زیر برای تغییر شار انجام می‌شود:

۱ اگر در یک سطح بسته، شدت میدان مغناطیسی از B_1 به B_2 برسد، با توجه به تغییر میدان مغناطیسی و ثابت بودن A و θ، تغییر شار عبوری از حلقه برابر است با:

$$\begin{cases}\Phi_1 = AB_1\cos\theta \\ \Phi_2 = AB_2\cos\theta\end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = A(\overbrace{\Delta B}^{B_2-B_1}).\cos\theta$$

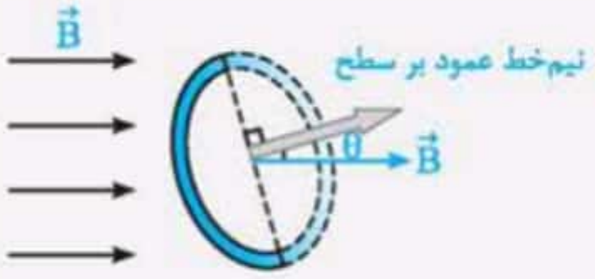
۲ اگر در یک سطح بسته زاویهٔ خط عمود بر سطح حلقه با خطوط میدان مغناطیسی، از θ_1 به θ_2 برسد، میزان تغییر شار ایجاد شده در آن برابر است با:

$$\begin{cases}\Phi_1 = AB\cos\theta_1 \\ \Phi_2 = AB\cos\theta_2\end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

تمرین۱ **حلقه‌ای با مساحت A در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. اگر زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه برابر 30° باشد، شار میدان مغناطیسی یکنواختی که از سطح حلقه می‌گذرد، چند برابر بیشینهٔ شار مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه است؟**

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

gajmarket.com

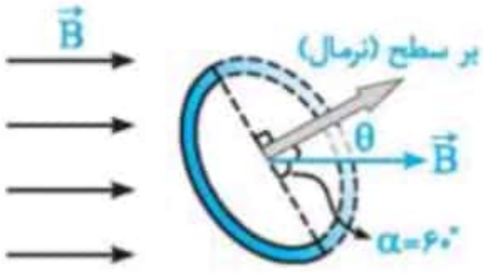


پاسخ همان‌طور که گفتیم، بیشینهٔ شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه برابر $\Phi_{max} = AB$ است.
با توجه به این موضوع، نسبت شار مغناطیسی گذرنده از سطح حلقه به بیشینهٔ شار مغناطیسی عبوری از آن برابر است با:

$$\begin{cases}\Phi = AB\cos\theta \\ \Phi_{max} = AB\end{cases} \Rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_{max}} = \cos\theta$$

با توجه به این‌که زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی یکنواخت با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه برابر ۳۰ درجه است، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Phi}{\Phi_{max}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$



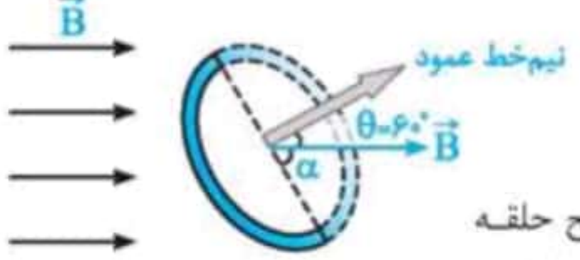
با توجه به شکل مقابل، زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی یکنواخت $(\vec{B})$ با سطح حلقه برابر ۶۰ درجه و در نتیجه زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی یکنواخت با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه برابر ۳۰ درجه است.

$$\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \quad , \quad \Phi = AB\cos\theta = AB\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

۱ ۲۰۵۴ شار عبوری از حلقه در این حالت، نصف شار ماکزیمم عبوری از حلقه است $\left(\frac{\Phi}{\Phi_{max}} = \frac{1}{2}\right)$ و در نتیجه زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه برابر ۶۰ درجه است.

$$\begin{cases}\Phi = AB\cos\theta \\ \Phi_{max} = AB\end{cases} \Rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_{max}} = \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

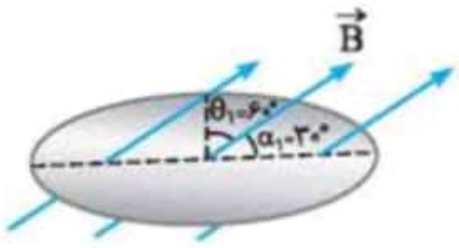
در ادامه با توجه به شکل مقابل، زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و سطح حلقه برابر ۳۰ درجه است.



$$\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \text{ زاویهٔ میدان با سطح حلقه } (\alpha)$$

زاویه با بردار عمود بر سطح

۲ ۲۰۵۵ در حالت اول، با توجه به شکل مقابل، زاویهٔ بین خطوط میدان و خط عمود بر سطح حلقه برابر $\theta_1 = 60^\circ$ می‌باشد. با سه برابر شدن زاویهٔ α، $\alpha_2 = 90^\circ$ و در نتیجه $\theta_2 = 0$ خواهد بود. از طرفی طبق رابطهٔ $\Phi = AB\cos\theta$ داریم:



$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{\cos 0}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

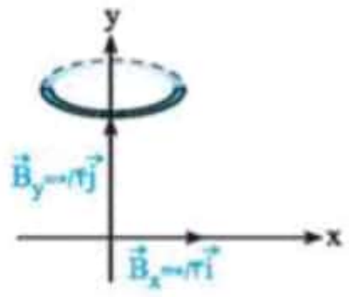
۲ ۲۰۵۶ ابتدا زاویهٔ بین خطوط میدان و نیم‌خط عمود بر حلقه را به دست می‌آوریم:

$$A = 4cm^2 = 4\times10^{-4}m^2, B = 0/5T, \Phi = 100\sqrt{3}\mu Wb = \sqrt{3}\times10^{-4}Wb$$

$$\Rightarrow \Phi = AB\cos\theta \Rightarrow \sqrt{3}\times10^{-4} = 0/5\times4\times10^{-4}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

بنابراین می‌توان گفت زاویهٔ بین خطوط میدان و سطح حلقه برابر $\alpha = 90 - \theta = 60^\circ$ می‌باشد و گزینه (۲) صحیح است.

۴ ۲۰۵۷ برای محاسبهٔ شار مغناطیسی باید خطوط میدان مغناطیسی را که به‌صورت عمود از سطح حلقه عبور می‌کنند، درنظر بگیریم. با توجه به این‌که سطح حلقه عمود بر محور y (موازی محور x) است، فقط مؤلفهٔ قائم میدان $(0/4\vec{j})$ از حلقه عبور کرده و داریم:



شار مغناطیسی عبوری از حلقه: $\Phi = AB_y\cos 0 = 200\times10^{-4}\times0/4 = 8\times10^{-3}\ Wb$

از طرفی بزرگی میدان مغناطیسی برابر است با:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(0/3)^2 + (0/4)^2} = 0/5T$$

۳ ۲۰۵۸

نکته

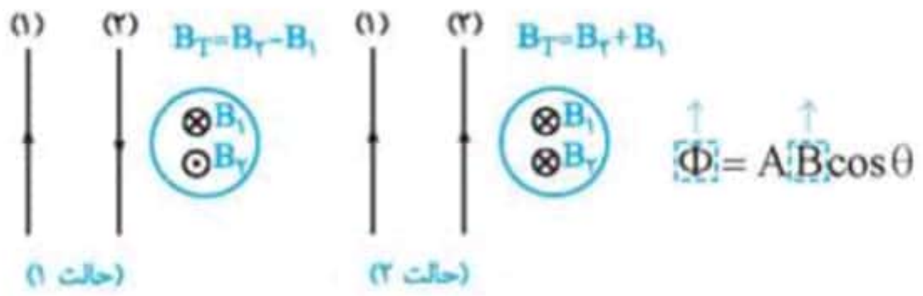
شار عبوری از کل قاب، با شار عبوری از یک دور سیم آن برابر است و تعداد دور سیم قاب در این سؤال بی‌تأثیر می‌باشد.

قاب در صفحهٔ xy و میدان مغناطیسی در جهت z است، بنابراین میدان بر سطح قاب عمود بوده و شار عبوری از قاب بیشینه است. با توجه به این موضوع داریم (تعداد ۱۰۰ دور سیم، در حل مسأله بی‌تأثیر است):

$$A = 30\times40 = 1200cm^2 = 1200\times10^{-4}m^2 \ , \ B = 0/4T \ , \ \theta = 0 \text{ (زاویهٔ خطوط میدان مغناطیسی با خط عمود بر قاب)}$$

$$\Phi = AB\cos\theta = (1200\times10^{-4})\times(0/4)\times\cos 0 = 4/8\times10^{-2}\ Wb$$

۱۲۰۵۹ در این تست، در حالت اول میدان سیم‌های (۱) و (۲) در داخل حلقه مختلف‌الجهت می‌باشد. در ادامه با وارون شدن جریان عبوری از سیم (۲)، میدان‌ها در داخل حلقه هم‌جهت می‌شوند و این موضوع سبب افزایش شار عبوری از حلقه می‌شود.



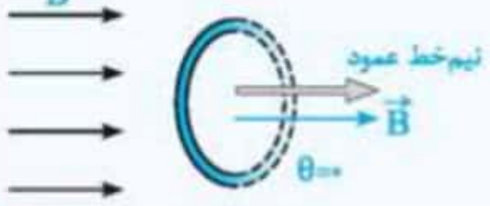
۱۲۰۶۰

نکته

۱) فرض کنید که زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح یک حلقه با خطوط میدان مغناطیسی، از θ_1 به θ_2 برسد. در این صورت میزان تغییر شار ایجاد شده در آن برابر است با:

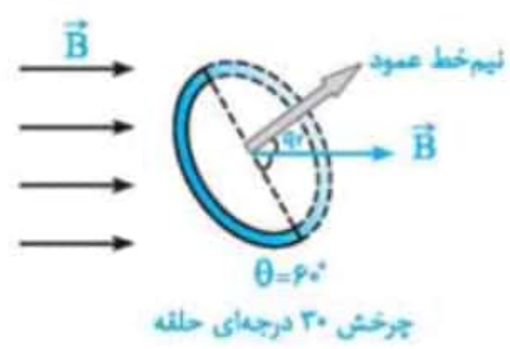
$$\begin{cases}\Phi_1 = AB\cos\theta_1 \\ \Phi_2 = AB\cos\theta_2\end{cases} \Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

۲) شار مغناطیسی عبوری از یک سطح، هنگامی بیشینه است که میدان مغناطیسی بر سطح قاب عمود باشد.



$$\Phi = AB\cos\theta \xrightarrow{\theta=0} \cos\theta = 1 \Rightarrow \Phi_{max} = AB$$

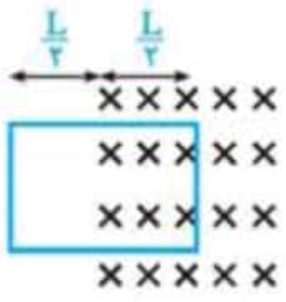
با توجه به نکات فوق، در این تست در حالت اول خطوط میدان مغناطیسی عمود بر سطح حلقه هستند و $\theta_1 = 0$ است. از طرفی اگر سطح حلقه زاویهٔ ۳۰ درجه با میدان بسازد، زاویهٔ بین بردار عمود بر سطح حلقه و خطوط میدان مغناطیسی به $\theta_2 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ می‌رسد و میزان تغییر شار ایجاد شده برابر است با:



$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = \left(\pi \times (0/2)^2\right) \times 0/01 \times (\cos 60^\circ - \cos 0)$$

$$\Delta\Phi = 4\pi \times 10^{-4} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -2\pi \times 10^{-4}\ \text{Wb}$$ (یعنی شار عبوری کاهش می‌یابد)

۴۲۰۶۱ در این سؤال با توجه به شکل، فقط نیمی از قاب در داخل میدان مغناطیسی به‌صورت عمود بر خطوط میدان قرار گرفته است. بنابراین برای محاسبهٔ شار عبوری از قاب باید فقط نیمی از مساحت آن را درنظر بگیریم:



$$A = \frac{\text{مساحت کل قاب}}{2} = \frac{300}{2} = 150\,\text{cm}^2 = 150 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$$

$$B_1 = 80\,\text{mT} = 80 \times 10^{-3}\,\text{T}\ ,\ B_2 = 20\,\text{mT} = 20 \times 10^{-3}\,\text{T}\ ,\ \theta = 0$$

$$\Delta\Phi = A.(\Delta B).\cos\theta = 150 \times 10^{-4} \times (20 - 80) \times \boxed{10^{-3}} \cos 0 = -9 \times 10^{-4}\,\text{Wb} = -0/9\,\text{mWb}$$

↓ تبدیل میلی‌تسلا به تسلا

علامت منفی به‌دست آمده، به معنی کاهش شار عبوری از سطح حلقه است.

دقت: همان‌طور که در خلاصه نکات (۹) اشاره کردیم، برای محاسبهٔ شار، تعداد دور پیچه (N) را لحاظ نمی‌کنیم.

۳۲۰۶۲ به صورت روند مرحله‌ای زیر و با کمک رابطه‌های بیان شده، یکای شار مغناطیسی را برحسب یکاهای اصلی بیان می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱: $\Phi = AB\cos\theta \Rightarrow \text{Wb} \equiv \text{m}^2.\text{T}$ (۱)

مرحلهٔ ۲: $F = BIL\sin\alpha \Rightarrow \text{T} \equiv \frac{\text{N}}{\text{A.m}}$ (۲)

مرحلهٔ ۳: $F = ma \Rightarrow \text{N} \equiv \text{kg}.\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (۳)

مرحلهٔ ۴: $\text{Wb} \equiv \text{m}^2.\left(\frac{\text{kg.m/s}^2}{\text{A.m}}\right) \equiv \frac{\text{kg.m}^2}{\text{A.s}^2}$

۱۲۰۶۳ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۰ — **قانون القای فاراده** — (تست‌های ۲۰۶۳ تا ۲۰۸۸)

مطابق قانون القای فاراده هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک سطح بسته تغییر کند، نیرو محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است. به عبارت بهتر هرچه آهنگ تغییر شار مغناطیسی بیشتر باشد، نیروی محرکهٔ القایی و در نتیجه جریان ایجادشده در مدار بیشتر است.

نکات مهم و کاربردی

۱) نیرو محرکهٔ القایی متوسط در یک قاب با N دور سیم عبارت است از:

$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases}\overline{\varepsilon} \propto N \\ \overline{\varepsilon} \propto \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\end{cases}$$

gajmarket.com

۲ با توجه به قانون القای فارادی، یکای شار مغناطیسی (وبر) معادل است با:

$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \text{وبر} \equiv \text{ولت} \times \text{ثانیه}$$

(ولت: $\overline{\varepsilon}$، وبر: $\Delta\Phi$، ثانیه: Δt)

۳ در حل تست‌های این قسمت گاهی به جای تغییر شار به ما تغییر زاویهٔ θ و یا تغییر میدان مغناطیسی داده می‌شود، در این مواقع از طرفین رابطهٔ $\Phi = AB\cos\theta$، Δ می‌گیریم و اعداد ثابت از Δ خارج می‌شوند:

$$\begin{cases} \text{اگر فقط میدان تغییر کند:} & \Delta\Phi = \Delta(A.B.\cos\theta) = A.\cos\theta.\Delta B \\ \text{اگر } \theta \text{ تغییر کند:} & \Delta\Phi = \Delta(A.B.\cos\theta) = AB\Delta(\cos\theta) = AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \end{cases}$$

۴ برای محاسبهٔ جریان القایی متوسط در قاب، کافیست مقاومت قاب را بدانیم و از قانون اهم استفاده کنیم:

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon} = -N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ \overline{\varepsilon} = R\overline{I} \Rightarrow \overline{I} = \dfrac{\overline{\varepsilon}}{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overline{I} = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$

در ادامه با بررسی چند تمرین، به مرور نکات بیان‌شده می‌پردازیم.

تمرین۱ **شار مغناطیسی عبوری از پیچه‌ای مطابق رابطهٔ $\Phi_B = (4t^2 - 3t + 1)\times 10^{-3}$ (در SI) تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در ۲ ثانیهٔ اول، چند برابر نیروی محرکهٔ القایی متوسط در ثانیهٔ دوم است؟** (ریاضی داخل ۸۷ با تغییر)

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{5}{16}$ ۳) $\frac{9}{13}$ ۴) $\frac{9}{11}$

پاسخ برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول (محاسبهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در ۲ ثانیهٔ اول یا $0 \le t \le 2s$):

$$\Phi_B = (4t^2 - 3t + 1)\times 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = 1\times 10^{-3}\ Wb \\ t_2 = 2s \Rightarrow \Phi_2 = (4\times 2^2 - 3\times 2 + 1)\times 10^{-3}\ Wb = 11\times 10^{-3}\ Wb \end{cases}$$

$$\overline{\varepsilon_1} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1} = -N\times\frac{11\times 10^{-3} - 1\times 10^{-3}}{2 - 0} = -5\times 10^{-3}\ N$$

گام دوم (محاسبهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در ثانیهٔ دوم یا $1s \le t \le 2s$):

$$\Phi_B = (4t^2 - 3t + 1)\times 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow \Phi_1 = (4 - 3 + 1)\times 10^{-3} = 2\times 10^{-3}\ Wb \\ t_2 = 2s \Rightarrow \Phi_2 = 11\times 10^{-3}\ Wb \end{cases}$$

$$\overline{\varepsilon_2} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{11\times 10^{-3} - 2\times 10^{-3}}{2 - 1} = -9\times 10^{-3}\ N$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ مسأله):

$$\frac{\overline{\varepsilon_1}}{\overline{\varepsilon_2}} = \frac{-5\times 10^{-3}\ N}{-9\times 10^{-3}\ N} = \frac{5}{9}$$ (گزینهٔ ۱)

تمرین۲ **حلقه‌ای به مساحت ۲۰۰ سانتی‌مترمربع عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. اگر در مدت ۰/۰۲ ثانیه میدان مغناطیسی بدون تغییر جهت به اندازهٔ ۰/۰۸ تسلا کاهش یابد، نیروی محرکهٔ القایی متوسط در حلقه چند ولت می‌شود؟** (ریاضی خارج ۸۷)

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۸

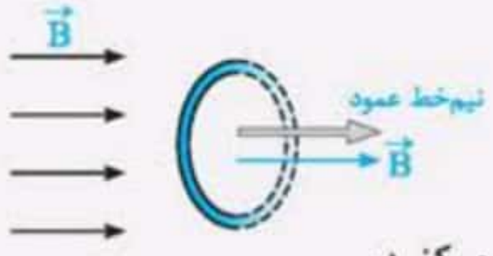
۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۱۶

پاسخ در این سؤال، تغییر شار به دلیل تغییر در شدت میدان مغناطیسی است و می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi = \Delta(AB\cos\theta) \xrightarrow{A,\ \cos\theta \text{ ثابت هستند.}} \Delta\Phi = A\cos\theta\times\Delta B \Rightarrow |\overline{\varepsilon}| = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|-NA\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|$$

$N = 1, A = 200\ cm^2 = 200\times 10^{-4}\ m^2, \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ (حلقه عمود بر میدان قرار دارد.) $, \Delta t = 0/02s$, $\Delta B = -0/08\ T$ (میدان کاهش یافته است.)

$$|\overline{\varepsilon}| = \left|-1\times 200\times 10^{-4}\times 1\times\frac{(-0/08)}{0/02}\right| = 0/08\ V$$ (گزینهٔ ۲)



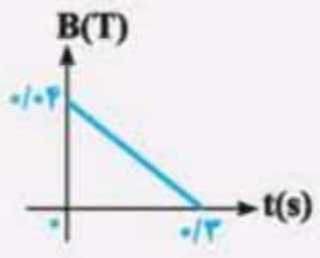
تذکر در این‌گونه از سؤالات، در اکثر موارد حلقه عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد و زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر سطح (بردار نرمال) و خطوط میدان مغناطیسی صفر است.

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \Phi = \Phi_{max}$$

تمرین۳ حلقه‌ای با شعاع ۱۰cm و مقاومت ۵Ω، عمود بر میدان مغناطیسی که اندازهٔ آن مطابق شکل تغییر می‌کند، قرار دارد. جریان القایی متوسط حلقه از لحظهٔ $t_1 = 0/2s$ تا $t_2 = 0/21s$ چند میلی‌آمپر است؟ $(\pi \simeq 3)$

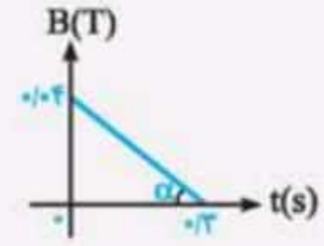
۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ (تجربی داخل ۸۷)

۳) ۱ ۴) ۴



پاسخ در این تمرین به دلیل تغییر در اندازهٔ میدان مغناطیسی، در حلقه جریان القایی ایجاد می‌شود. برای محاسبهٔ جریان القایی متوسط در بازهٔ زمانی موردنظر داریم:

$$\bar{I} = \left|-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \xrightarrow{\Phi = AB\cos\theta} \bar{I} = \left|-\frac{N}{R}A\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \quad (1)$$



از طرفی $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ شیب نمودار بین ۰/۲s و ۰/۲۱s است که در نمودارهای خطی مقدار ثابتی است و کافیست به جای آن $\tan\alpha$ محاسبه شود:

$$|\text{شیب نمودار}| = \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = \tan\alpha = \frac{0/04}{0/3} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{0/04}{0/3} \quad \text{(شیب منفی است)}$$

در نهایت با جای‌گذاری پارامترها در معادلهٔ (۱)، مقدار $\bar{I}$ به‌دست می‌آید:

$$N = 1 , R = 5\Omega , \text{مساحت حلقه: } A = \pi r^2 = \pi(10\times10^{-2})^2 = 10^{-2}\pi\, m^2 , \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$$

(حلقه عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد.)

$$\bar{I} = \left|-\frac{1}{5}\times(10^{-2}\pi)\times1\times\left(-\frac{0/04}{0/3}\right)\right| \simeq 0/8\times10^{-3}\,A = 0/8\,mA \quad \text{(گزینهٔ ۲)}$$

با توجه به قانون القای فاراده، نیروی محرکهٔ القایی با آهنگ تغییرات شار مغناطیسی $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$ و هم‌چنین با تعداد دور سیم موجود در پیچه (N) رابطهٔ مستقیم دارد.

$$\bar{\varepsilon} = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \Rightarrow \begin{cases}\bar{\varepsilon} \propto N \\ \bar{\varepsilon} \propto \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\end{cases}$$

۲۲۰۶۴ با توجه به قانون القای فاراده، آهنگ تغییر شار مغناطیسی $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$ از جنس نیروی محرکهٔ الکتریکی است.

$$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

۲۲۰۶۵ با توجه به قانون القای فاراده، $\frac{Wb}{s}$ معادل با ولت می‌باشد.

$$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \text{ولت} \equiv \frac{\text{وبر}}{\text{ثانیه}}$$

۴۲۰۶۶ اگر مدار را تک‌حلقه در نظر بگیریم $(N = 1)$، نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\Delta t = 0/01s , \Phi_2 = -0/03\,Wb , \Phi_1 = 0/02\,Wb \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \left|-N\frac{\overbrace{\Delta\Phi}^{\Phi_2-\Phi_1}}{\Delta t}\right| = \left|-1\times\frac{(-0/03)-0/02}{0/01}\right| = 5\,V$$

۲۲۰۶۷ آهنگ تغییر شار عبوری از پیچه برابر $0/5\,Wb/s$ است، یعنی $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0/5$ و تعداد دورهای پیچه برابر $N = 200$ است و در نتیجه نیروی محرکهٔ القایی ایجاد شده در پیچه برابر است با:

$$\bar{\varepsilon} = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = |-200\times0/5| = 100\,V$$

نکته

هنگامی‌که آهنگ تغییر شار مغناطیسی مقدار ثابتی باشد، نیرو محرکهٔ القایی در بازه‌های زمانی مختلف و نیرو محرکهٔ القایی در هر لحظه با یک‌دیگر برابر است.

۱۲۰۶۸ با توجه به اطلاعات ارائه شده در صورت سؤال، می‌توان نوشت:

$$N = 40 , A = 8\,cm^2 = 8\times10^{-4}\,m^2 , \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$$

(پیچه عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار دارد.)

$$\Delta t = 0/02s , \Delta B = 0 - 5\times10^3 = -5\times10^3\,G = -5\times10^3\times10^{-4}\,T = -0/5\,T$$

$$|\bar{\varepsilon}| = \left|-NA\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = \left|-(40)\times(8\times10^{-4})\times1\times\frac{(-0/5)}{0/02}\right| = 0/8\,V$$

gajmarket.com

۳ ۲۰۶۹ میدان مغناطیسی از ۰/۲۵ تسلا در یک جهت به ۰/۵ تسلا در **خلاف جهت** اولیه تغییر کرده و ΔB برابر است با:

$$\begin{cases} B_1 = +0/25T \\ B_2 = -0/5T \end{cases} \Rightarrow \Delta B = B_2 - B_1 = -0/5 - (+0/25) = -0/75\,T$$

در ادامه مقدار نیروی محرکهٔ القایی متوسط به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

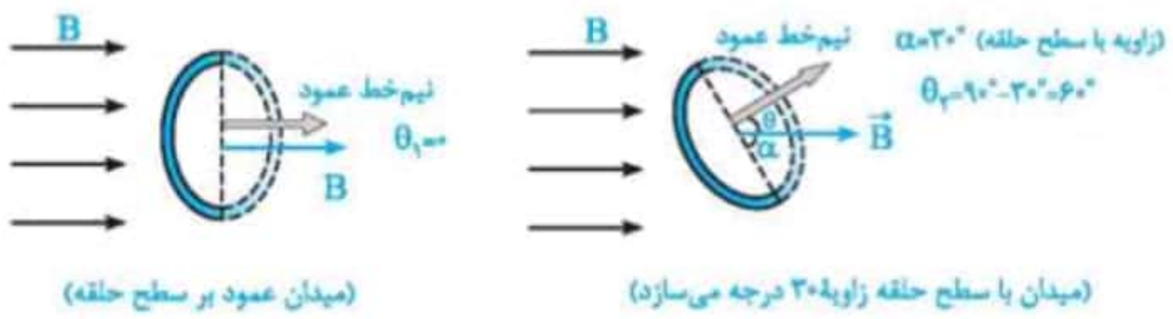
$$N=10\ ,\ A=100\,cm^2=100\times10^{-4}\,m^2\ ,\ \Delta t=0/1s\ ,\ \theta=0 \Rightarrow \cos\theta=1 \text{ (پیچه عمود بر خطوط میدان قرار دارد)}\ ,\ \Delta B=-0/75\,T$$

$$\overline{\varepsilon}=\left|-NA\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \Rightarrow \overline{\varepsilon}=\left|-(10)\times(100\times10^{-4})\times1\times\frac{-0/75}{0/1}\right|=0/75\,V$$

۴ ۲۰۷۰ در این سؤال تغییر شار به دلیل تغییر در زاویهٔ حلقه با میدان مغناطیسی است و می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi=AB(\cos\theta_2-\cos\theta_1) \Rightarrow \overline{\varepsilon}=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|-NAB\frac{\cos\theta_2-\cos\theta_1}{\Delta t}\right|$$

$$A=40\,cm^2=40\times10^{-4}\,m^2\ ,\ N=100\ ,\ B=100\,G=100\times10^{-4}\,T=10^{-2}\,T\ ,\ \Delta t=10^{-4}\,s$$



در حالت اول حلقه عمود بر سطح میدان مغناطیسی است. $\Leftarrow \theta_1=0$

در حالت دوم سطح حلقه با میدان مغناطیسی زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. $\Leftarrow \theta_2=90°-30°=60°$

$$\overline{\varepsilon}=\left|-NAB\frac{\cos\theta_2-\cos\theta_1}{\Delta t}\right|=\left|-(100)\times(40\times10^{-4})\times(10^{-2})\times\frac{\cos60°-\cos0}{10^{-4}}\right|=20\,V$$

۳ ۲۰۷۱ در صورتی‌که مساحت اولیهٔ حلقه را A_1 در نظر بگیریم، تغییر مساحت آن برابر $0/2A_1$ می‌باشد. در ادامه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$N=1\ ,\ \Delta A=-0/2A_1\ ,\ B=0/2T\ ,\ \Delta t=0/1s\ ,\ \theta=0\ ,\ \overline{\varepsilon}=0/4\pi\,V$$

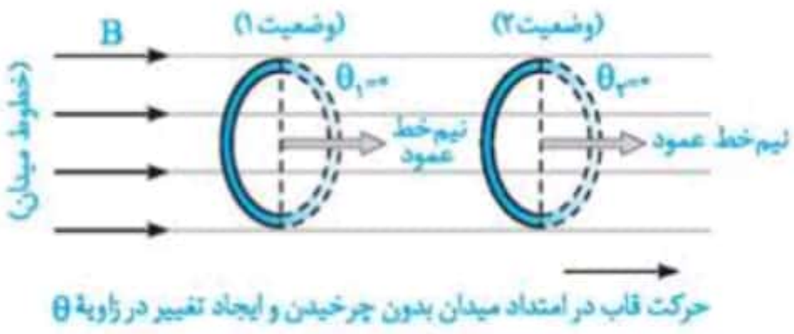
$$\overline{\varepsilon}=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|-N\frac{\Delta A.B.\cos\theta}{\Delta t}\right| \Rightarrow 0/4\pi=\left|-1\times\frac{0/2A_1\times0/2\times\cos0}{0/1}\right| \Rightarrow A_1=\pi\,m^2$$

$$A_1=\pi R^2 \Rightarrow \pi=\pi R^2 \Rightarrow R=1m$$

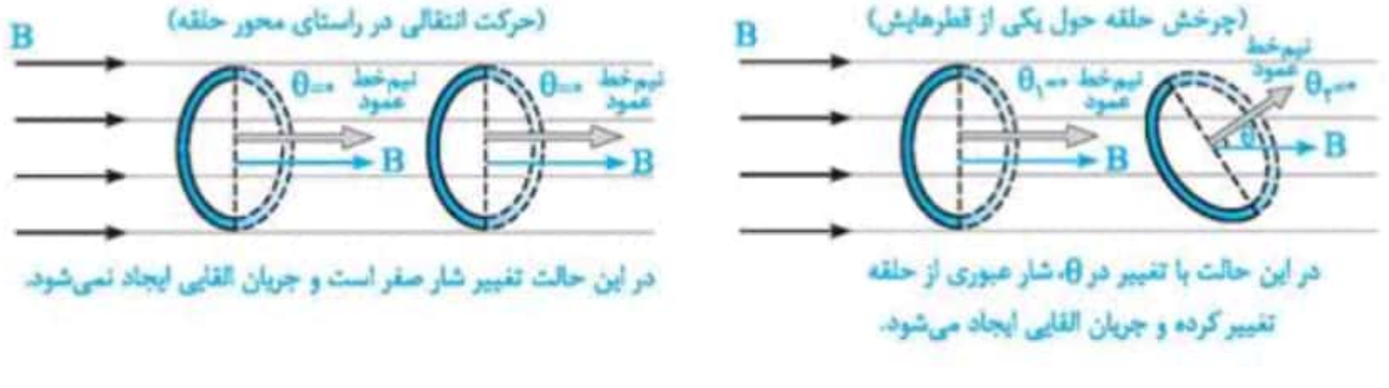
$$\text{طول } L = \text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi\,m$$

۱ ۲۰۷۲ با توجه به این‌که قاب همواره به‌صورت عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد ($\theta=0$)، شار عبوری از آن همواره ثابت و برابر شار ماکزیمم است ($\Phi=\Phi_{max}=AB\cos0=AB$). با توجه به ثابت بودن شار عبوری، نیروی محرکهٔ القایی در حلقه برابر صفر است:

$$\Phi=\text{ثابت} \Rightarrow \Phi_2=\Phi_1 \Rightarrow \Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1=0 \Rightarrow \overline{\varepsilon}=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=0$$



۴ ۲۰۷۳ برای ایجاد جریان القایی در حلقه، باید نیروی محرکهٔ القایی در حلقه به‌وجود آید که برای این منظور باید شار عبوری از حلقه تغییر کند. چون میدان مغناطیسی یکنواخت بوده و مساحت حلقه تغییر نمی‌کند، برای تغییر شار مغناطیسی باید زاویهٔ میان بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه (بردار نرمال) تغییر کند، به‌همین منظور حلقه باید حول یکی از قطرهایش بچرخد. در هیچ‌یک از گزینه‌های (۱) تا (۳)، این زاویه تغییر نمی‌کند.



۱۲۰۷۴ مطابق قانون القای فاراده، علت اصلی ایجاد نیروی محرکهٔ القایی در هر گونه مداری (از جمله سیم‌پیچ)، تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن است و اگر شار عبوری از سیم‌پیچ ثابت بماند، نیروی محرکهٔ القایی در آن صفر است.

$$\overline{\varepsilon} = \left| -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \xrightarrow{\Phi \text{ ثابت باشد}} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \overline{\varepsilon} = 0$$

عبور جریان الکتریسیتهٔ ثابت از یک سیم‌پیچ، در آن نیروی محرکهٔ القایی ایجاد نمی‌کند و برای ایجاد نیروی محرکهٔ القایی، باید از آن جریان الکتریکی متغیر عبور کند. این موضوع سبب می‌شود که میدان مغناطیسی تولیدی سیم‌پیچ تغییر کند و در نهایت سبب ایجاد تغییر شار و تولید نیرو محرکهٔ القایی شود.

۳۲۰۷۵ با توجه به قانون فاراده، با جابه‌جا کردن آهنربا و یا سیملوله نسبت به هم، شار عبوری از سیملوله تغییر کرده و باعث تولید نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی در آن می‌شود. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) صحیح بوده و گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا در این گزینه، در نهایت سیملوله نسبت به آهنربا جابه‌جا شده است. دقت شود که هدف از انجام این آزمایش، بررسی پدیدهٔ القای الکترومغناطیسی است.

۳۲۰۷۶ با توجه به خلاصه نکات (۲)، شدت جریان القایی با تغییر شار رابطهٔ مستقیم و با مقاومت الکتریکی سیم‌پیچ رابطهٔ معکوس دارد.

$$\overline{I} = \left| -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow \begin{cases} \overline{I} \propto \Delta\Phi & \text{(متناسب با تغییر شار)} \\ \overline{I} \propto \frac{1}{R} & \text{(رابطهٔ معکوس با مقاومت سیم‌پیچ)} \end{cases}$$

۱۲۰۷۷ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) هر چه آهنگ تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از یک قاب فلزی $\left(\text{یعنی}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$ بیشتر باشد، در نهایت نیرو محرکه و جریان القایی بیشتری در آن ایجاد می‌شود و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲) مقدار جریان القا شده در یک قاب فلزی، با $\Delta\Phi$ رابطهٔ مستقیم دارد و این عبارت نادرست است. به عبارتی ممکن است Φ_2 و Φ_1 اعداد بزرگی باشند، ولی $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ عدد کمی باشد.

۳) عبور شار مغناطیسی از یک قاب فلزی، شرط القای جریان الکتریکی نمی‌باشد و برای القای جریان الکتریکی، باید مقدار شار مغناطیسی تغییر کند و این عبارت نیز نادرست است.

۴) با کاهش آهنگ تغییر شار $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$، در نهایت جریان القایی کم‌تری از قاب فلزی عبور می‌کند و این عبارت نادرست است.

۱۲۰۷۸ برای پاسخ دادن به این تست خوب، می‌توان نوشت:

$$\overline{I} = \left| -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \xrightarrow{\Delta\Phi = A\cos\theta\Delta B} \overline{I} = \left| -\frac{N}{R}A\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$$

$$N = 400 \,,\, A = 25\times10^{-4}\,m^2 \,,\, \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \text{ (پیچه عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد)} \,,\, \frac{\Delta B}{\Delta t} = 4\times10^{-2}\,T/s$$

$$I = \overline{I} = 2mA = 2\times10^{-3}\,A \,,\, R = ?$$

$$\overline{I} = \left| -\frac{N}{R}A\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t} \right| \Rightarrow 2\times10^{-3} = \left| -\frac{400}{R}\times(25\times10^{-4})\times1\times(4\times10^{-2}) \right| \Rightarrow R = 20\Omega$$

دقت: با توجه به این‌که آهنگ تغییر میدان مغناطیسی مقدار ثابتی است، جریان القایی متوسط و جریان القایی لحظه‌ای با یک‌دیگر برابر است.

۳۲۰۷۹ برای محاسبهٔ جریان القایی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\overline{I} = \left| -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| -\frac{N}{R}\boxed{A}\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t} \right| \quad (A = \pi R^2)$$

$$\overline{I} = 0/2\,A \,,\, N = 1 \,,\, D = 20\,cm \Rightarrow r = 10\,cm = 0/1\,m \,,\, R = 0/3\Omega \,,\, \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \text{ (میدان عمود بر سطح حلقه است)} \,,\, \frac{\Delta B}{\Delta t} = ?$$

$$0/2 = \frac{1}{0/3}\times3\times(0/1)^2\times\cos0\times\frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = 2\frac{T}{s}$$

۱۲۰۸۰ این سؤال، یک تست ترکیبی خوب با فصل دوم کتاب درسی فیزیک یازدهم است. برای پاسخ دادن به این تست گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: (محاسبهٔ مقاومت پیچه): برای این منظور ابتدا باید طول سیم مورد استفاده را محاسبه کنیم:

$$R = \rho\frac{L}{A_1} \quad (A_1: \text{مساحت مقطع سیم})$$

$$\begin{cases} A_1 = \pi R_1^2 \xrightarrow{R_1: \text{شعاع مقطع } 2mm \text{ است.}} A_1 = \pi\times(2\times10^{-3})^2 = 4\pi\times10^{-6}\,m^2 \\ L = 2\pi R' \xrightarrow{R': \text{شعاع حلقه } 2cm \text{ است.}} L = 2\pi\times(2\times10^{-2}) = 4\pi\times10^{-2}\,m \end{cases} \Rightarrow R = 1/7\times10^{-8}\times\frac{4\pi\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-6}} = 1/7\times10^{-4}\,\Omega$$

gajmarket.com

گام دوم: (محاسبهٔ آهنگ تغییر میدان مغناطیسی):

$$N=1\ ,\ R=1/7\times10^{-4}\,\Omega\ ,\ \text{مساحت حلقه}: A=\pi R^2=\pi\times(2\times10^{-2})^2=4\pi\times10^{-4}\,m^2\simeq12\times10^{-4}\,m^2$$

$$\theta=0\Rightarrow[\cos\theta=1\ \text{(پیچه عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد.)}]\ ,\ I=\bar{I}=0/2\,A\ ,\ \frac{\Delta B}{\Delta t}=?$$

$$\bar{I}=\left|-\frac{N}{R}A\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|\Rightarrow 0/2=\left|-\frac{1}{1/7\times10^{-4}}\times(12\times10^{-4})\times1\times\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|\Rightarrow\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|=0/028\,T/s$$

۱۲۰۸۱ در شکل (۲)، آهنربا با تندی بیشتری به سیملوله نزدیک می‌شود (به خط‌چین‌های رسم‌شده در پشت آهنربا توجه کنید)، بنابراین میدان مغناطیسی در سیملوله (۲)، با شدت بیشتری تغییر می‌کند. این موضوع سبب می‌شود که آهنگ تغییر شار در سیملولهٔ (۲) بیشتر از سیملولهٔ (۱) شود و در نتیجه مقدار شدت جریان القایی نیز در آن بیشتر باشد.

تذکر با توجه به رابطهٔ جریان القایی $\bar{I}=\left|-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$، گزینه‌های (۳) و (۴) صحیح می‌باشند (چرا؟).

۱۲۰۸۲ برای محاسبهٔ بزرگی جریان القایی متوسط در ثانیهٔ اول ($t_1=0$ تا $t_2=1s$)، ابتدا مقادیر Φ_1 و Φ_2 در این دو لحظه را محاسبه می‌کنیم:

$$\Phi=3t^2-2t+2\Rightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow\Phi_1=2\,Wb\\ t_2=1s\Rightarrow\Phi_2=3\times1^2-2\times1+2=3\,Wb\end{cases}$$

سپس با کمک رابطهٔ $\bar{I}=-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$، جریان القایی متوسط در حلقه را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{I}=-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\xrightarrow[N=1]{\text{مدار تک‌حلقه‌ای است.}}\bar{I}=-\frac{1}{100}\times\frac{3-2}{1-0}=-0/01A\Rightarrow|\bar{I}|=0/01A$$

۱۲۰۸۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۲۰۸۴ **گام اول:** ابتدا لحظه‌ای که شار مغناطیسی عبوری برای دومین بار صفر می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$\Phi=\underbrace{(2t^2-5t+3)}_{\text{معادلهٔ درجهٔ ۲}}\times10^{-3}$$

$$2t^2-5t+3=0\xrightarrow{\text{جمع ضرایب معادلهٔ درجهٔ ۲ صفر است.}}\begin{cases}t_1=1s\\ t_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}=1/5s\end{cases}$$

(می‌توانید با محاسبهٔ Δ نیز ریشه‌ها را به دست آورید.)

گام دوم: در ادامه به صورت زیر، $\bar{I}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}t_1=0\rightarrow\Phi_1=3\times10^{-3}\,Wb\\ t_2=1/5s\rightarrow\Phi_2=0\end{cases}$$

$$|\bar{I}|=\left|-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|-\frac{1}{5}\times\frac{0-3\times10^{-3}}{1/5}\right|=\frac{2}{5}\times10^{-3}\,A=0/4\,mA$$

۱۲۰۸۵ برای محاسبهٔ جریان القایی متوسط از صفر تا $\frac{\pi}{5}s$ می‌توان نوشت:

$$\Phi=5+0/01\sin\left(500t+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow\Phi_1=5+0/01\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ t_2=\frac{\pi}{5}s\Rightarrow\Phi_2=5+0/01\underbrace{\sin\left(500\times\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=5+0/01\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

پس از محاسبهٔ Φ_1 و Φ_2 و برابر بودن مقدار آن‌ها، به سادگی می‌توان فهمید که $\bar{I}$ در این بازهٔ زمانی برابر صفر است.

$$\bar{I}=-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta\Phi=0}\bar{I}=0$$

۲۲۰۸۶ در این سؤال، تغییر شار به‌دلیل تغییر در میدان مغناطیسی می‌باشد. باتوجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$\Phi=AB\cos\theta\Rightarrow\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\Delta}{\Delta t}(AB\cos\theta)\xrightarrow{A\text{ و }\cos\theta\text{ ثابت هستند.}}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=A\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ زیر، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در ثانیهٔ دوم برابر است با:

$$B=5t^3+2t-7\Rightarrow\begin{cases}t_1=1s\Rightarrow B_1=5\times1^3+2\times1-7=0\\ t_2=2s\Rightarrow B_2=5\times2^3+2\times2-7=37T\end{cases}\Rightarrow\Delta B=B_2-B_1=37T$$

$$|\bar{\varepsilon}|=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\left|-NA\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|=|-50\times(200\times10^{-4})\times1\times37|\Rightarrow|\bar{\varepsilon}|=37V$$

دقت: میدان مغناطیسی داده شده در صورت سؤال $(\vec{B})$، عمود بر سطح پیچه است، بنابراین زاویهٔ θ، صفر در نظر گرفته شده است.

۴۲۰۸۷ با توجه به رابطهٔ $\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

$$|\overline{\varepsilon}| = \left|\frac{-1\times(\Phi(t_2)-\Phi(t_1))}{t_2-t_1}\right| = \frac{2(t_2)^2+t_2-4-[2t_1^2+t_1-4]}{t_2-t_1} = \frac{2(t_2^2-t_1^2)+(t_2-t_1)}{t_2-t_1} = \frac{2(t_2-t_1)(t_2+t_1)+(t_2-t_1)}{(t_2-t_1)} = 2(t_2+t_1)+1$$

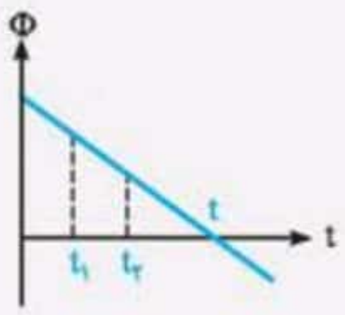
۴۲۰۸۸ در حالت اول معادلهٔ شار عبوری به‌صورت خطی بوده و در نتیجه $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ مقداری ثابت است، بنابراین نیروی محرکهٔ القایی با زمان تغییر نمی‌کند. در حالت دوم نیرو محرکهٔ القایی با گذشت زمان تغییر می‌کند. برای پی بردن به این موضوع، پاسخ تست قبل را عمقی‌تر بررسی کنید.

۴۲۰۸۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۱ **ویژگی‌های نمودار شار ـ زمان و نیرو محرکهٔ القایی ـ زمان** (تست‌های ۲۰۸۹ تا ۲۱۰۳)

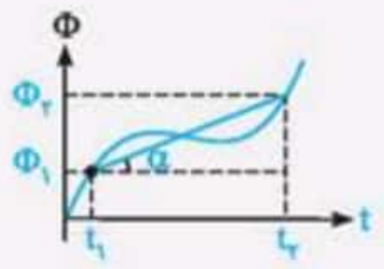
در برخی از تست‌های کنکور در مورد ویژگی‌های نمودارهای شار ـ زمان و نیرو محرکهٔ القایی ـ زمان، سؤال‌هایی پرسیده می‌شود که کافیست به موارد زیر توجه کنید:

۱) هرگاه نمودار شار ـ زمان به‌صورت یک خط راست با شیب ثابت باشد، $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ در بازه‌های زمانی مختلف تغییر نمی‌کند و در نتیجه نیروی محرکهٔ القایی متوسط در بازه‌های زمانی دلخواه ثابت بوده و با نیروی محرکهٔ القایی لحظه‌ای برابر است.



$$\varepsilon(\text{در لحظهٔ } t) = \overline{\varepsilon}(\text{از } t_1 \text{ تا } t_2)$$

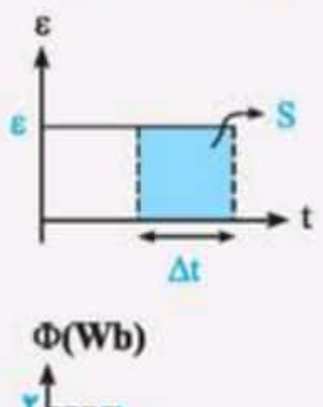
۲) شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار شار ـ زمان در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 معادل با $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ است و با کمک آن می‌توان نیرو محرکهٔ القایی متوسط را در این بازه زمانی به‌دست آورد.



$$\tan\alpha = \frac{\Phi_2-\Phi_1}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

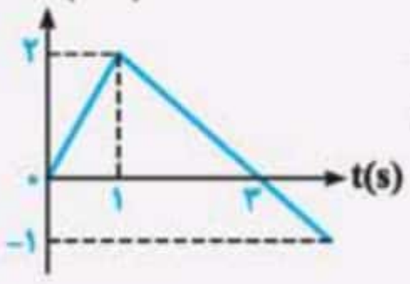
۳) برای رسم نمودار $\varepsilon - t$ از روی $\Phi - t$، باید لزوماً به علامت منفی در رابطهٔ $-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ توجه شود.

۴) مساحت زیر نمودار نیرو محرکه ـ زمان، برابر $|N\Delta\Phi|$ می‌باشد که N تعداد حلقه‌ها و $\Delta\Phi$ تغییر شار عبوری از پیچه است. این شکل که مربوط به یک حالت خاص است، درک این موضوع را ساده‌تر می‌کند:



$$\begin{cases} S = \varepsilon\Delta t \\ \varepsilon = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \Rightarrow \varepsilon\Delta t = |N\Delta\Phi| \end{cases} \Rightarrow S = |N\Delta\Phi|$$

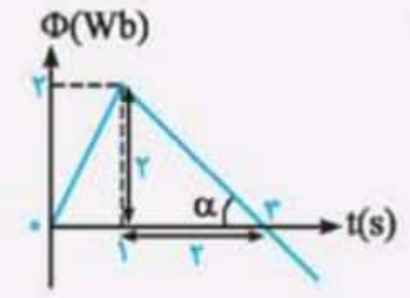
تمرین ۱ **نمودار تغییرات شار مغناطیسی برحسب زمان که از یک حلقه می‌گذرد، به‌صورت شکل مقابل است. نیروی محرکهٔ متوسط القاشده در بازهٔ زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 3/1s$ چند ولت است؟** (تجربی داخل ۹۴ با تغییر)



۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) ۱/۵

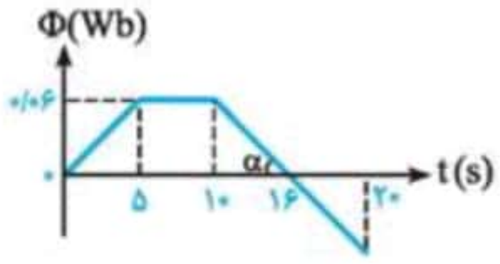
پاسخ برای محاسبهٔ نیرو محرکهٔ القایی متوسط در بازهٔ زمانی موردنظر، شیب نمودار در این بازهٔ زمانی را نیاز داریم که البته با توجه به خطی بودن نمودار ثابت بوده و برابر $\tan\alpha$ می‌باشد:



$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1 \text{ : شیب خط منفی است.} \Rightarrow |\tan\alpha| = \frac{2}{2} = 1$$

$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1\times(-1) = 1V \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی $t_1 = 10s$ تا $t_2 = 20s$ نمودار به صورت یک خط راست با شیب ثابت است، در این بازهٔ زمانی $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ثابت و برابر شیب نمودار است.

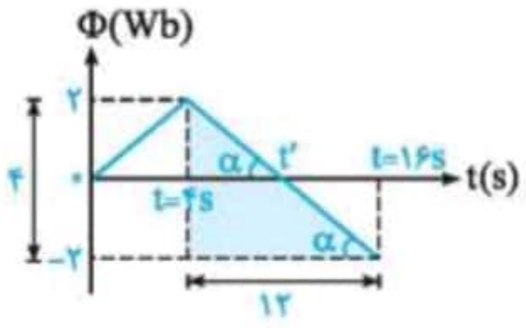


$$10s \le t \le 20s: \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \text{شیب خط} = \tan\alpha = -\frac{0/06}{6} = -0/01 \text{ (شیب خط منفی است)}$$

$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{N=1} \overline{\varepsilon} = -1\times(-0/01) = 0/01V = 10mV$$

gajmarket.com

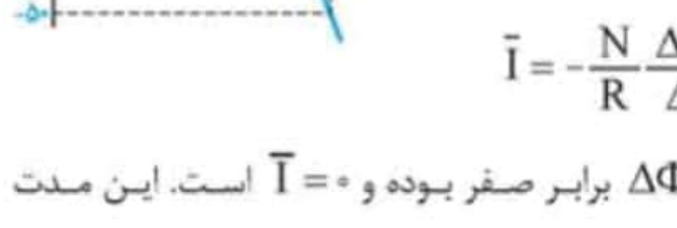
۴۲۰۹۰ در این سؤال، نمودار شار ـ زمان از لحظهٔ ۴s تا ۱۶s یک خط راست با شیب ثابت بوده و نیروی محرکهٔ القایی متوسط در هر قسمت از این بازهٔ زمانی برابر است. بنابراین برای محاسبهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط از t' تا $t'+1$، داریم:



$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \tan\alpha = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\overline{\varepsilon} = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{۱}{۳}V$$

۱۲۰۹۱ **روش اول:** بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط از رابطهٔ $|\overline{\varepsilon}| = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$ به‌دست می‌آید. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در بازه‌ای بزرگ‌تر است که اندازهٔ شیب نمودار $\Phi - t$ در آن بازهٔ زمانی بزرگ‌تر است. دربازهٔ زمانی صفر تا ۵ ثانیه این شیب بزرگ‌تر از سایر بازه‌ها بوده و در نتیجه نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این بازه از سایر بازه‌ها بزرگ‌تر است.



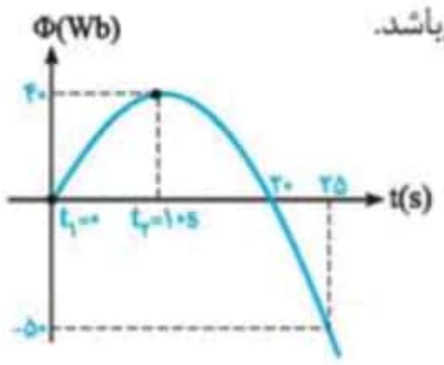
روش دوم: برای مقایسهٔ $\overline{\varepsilon}$، نسبت $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ را در هر بازه به‌دست آورده و مقایسه می‌کنیم:

$$۰ < t < ۵s \Rightarrow \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\Phi_{max} - ۰}{۵} = \frac{\Phi_{max}}{۵} \quad , \quad ۱۰s < t < ۱۸s \Rightarrow \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{۰ - \Phi_{max}}{۸}\right| = \frac{\Phi_{max}}{۸}$$

$$۵s < t < ۲۰s \Rightarrow \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{-\frac{۱}{۴}\Phi_{max} - \Phi_{max}}{۱۵}\right| = \frac{\Phi_{max}}{۱۲} \quad , \quad ۱۰s < t < ۲۰s \Rightarrow \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{-\frac{۱}{۴}\Phi_{max} - \Phi_{max}}{۱۰}\right| = \frac{\Phi_{max}}{۸}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود بیشترین نسبت $\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$ مربوط به بازهٔ صفر تا ۵s است و در این بازهٔ زمانی، $\overline{\varepsilon}$ بیشینه می‌باشد.

۴۲۰۹۲ برای محاسبهٔ شدت جریان القایی متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

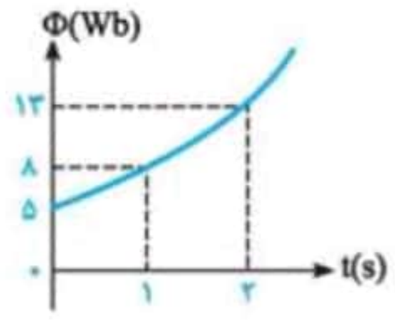


$$\begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow \Phi_۱ = ۰ \\ t_۲ = ۱۰s \Rightarrow \Phi_۲ = ۴۰Wb \end{cases}$$

$$\overline{I} = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{۱۰}{۱۰۰} \times \frac{۴۰ - ۰}{۱۰ - ۰} = -۰/۴A \Rightarrow |\overline{I}| = ۰/۴A$$

۳۲۰۹۳ اگر مفهوم تست قبل را خوب درک کرده باشید، متوجه می‌شوید که از صفر تا ۲۰s مقدار $\Delta\Phi$ برابر صفر بوده و $\overline{I} = ۰$ است. این مدت بزرگ‌ترین بازهٔ زمانی مدنظر سؤال می‌باشد.

۳۲۰۹۴ چون در صورت سؤال بیان شده است که نمودار شار ـ زمان یک سهمی است، بنابراین معادلهٔ آن را به شکل $\Phi = at^۲ + bt + c$ نوشته و سپس مقادیر مجهول a، b و c را با توجه به نمودار به‌دست می‌آوریم:



$$\Phi = at^۲ + bt + c$$

$$\begin{cases} t = ۰ \Rightarrow ۵ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = ۵ \\ t = ۱s \Rightarrow ۸ = a(۱)^۲ + b(۱) + ۵ \Rightarrow a + b = ۳ \\ t = ۲s \Rightarrow ۱۳ = a(۲)^۲ + b(۲) + ۵ \Rightarrow ۸ = ۴a + ۲b \Rightarrow ۲a + b = ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = ۳ \\ ۲a + b = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \Phi = t^۲ + ۲t + ۵$$

پس از یافتن معادلهٔ سهمی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

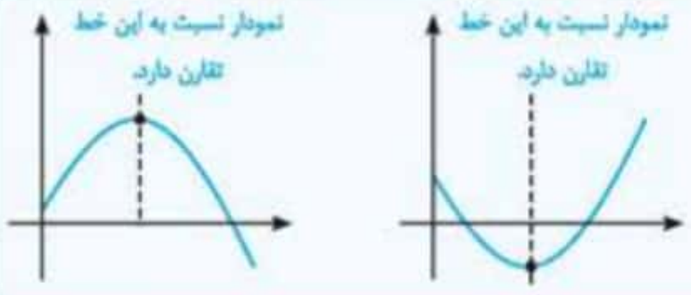
$$\begin{cases} t_۱ = ۲s \Rightarrow \Phi_۱ = ۲^۲ + ۲ \times ۲ + ۵ = ۱۳Wb \\ t_۲ = ۳s \Rightarrow \Phi_۲ = ۳^۲ + ۲ \times ۳ + ۵ = ۲۰Wb \end{cases}$$

$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -۱ \times \frac{۲۰ - ۱۳}{۳ - ۲} \Rightarrow |\overline{\varepsilon}| = ۷V$$

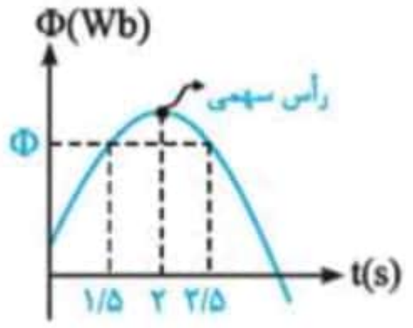
۴۲۰۹۵

نکته

به‌طور کلی سهمی نسبت به خط عمودی عبوری از رأس آن دارای تقارن است.



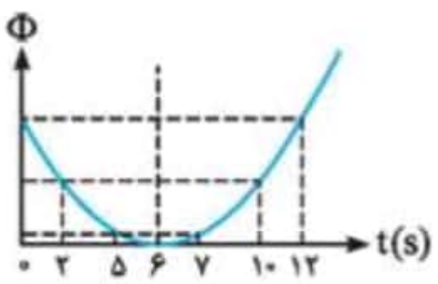
با توجه به نکتهٔ فوق و نمودار داده شده در صورت سؤال، چون لحظات $t_1 = 1/5s$ و $t_2 = 2/5s$ فاصلهٔ یکسانی از رأس سهمی دارند، بنابراین شار عبوری از حلقه در این لحظات با هم برابر بوده و در نتیجه تغییرات شار در این بازهٔ زمانی برابر صفر است.



$$\begin{cases} t_1 = 1/5s \Rightarrow \Phi_1 = \Phi \\ t_2 = 2/5s \Rightarrow \Phi_2 = \Phi \end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = 0$$

$$\overline{I} = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta\Phi=0} \overline{I} = 0$$

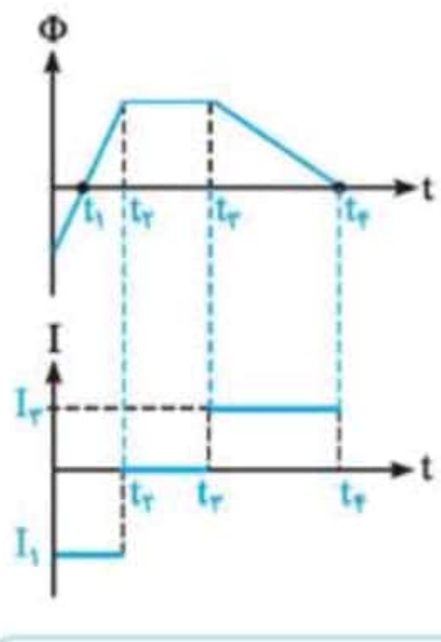
۳۲۰۹۶ با توجه به پاسخ سؤال قبل، سهمی نسبت به رأس آن دارای تقارن است و رأس سهمی در $t = \frac{12+0}{2} = 6s$ رخ می‌دهد. از طرفی اگر لحظات t_1 و t_2 به یک فاصله از رأس سهمی قرار داشته باشند، تغییرات شار در بازهٔ زمانی (t_1, t_2) برابر صفر است.



$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta\Phi=0} \overline{\varepsilon} = 0$$

در این سؤال فقط در گزینهٔ (۳) و در بازهٔ زمانی $(0, 8s)$، تغییرات شار صفر نبوده و نیروی محرکهٔ القایی متوسط صفر نمی‌شود.

۳۲۰۹۷ با توجه به رابطهٔ $\overline{I} = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ داریم:



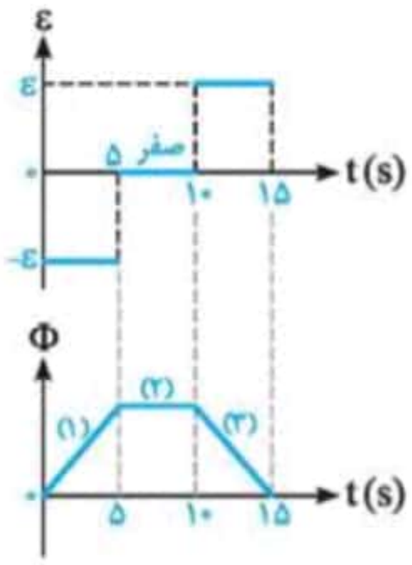
$$\begin{cases} 0 < t < t_2 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0 \Rightarrow \overline{I}_1 < 0 \\ t_2 < t < t_3 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \overline{I}_2 = 0 \\ t_3 < t < t_4 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0 \Rightarrow \overline{I}_3 > 0 \end{cases}$$

تذکر

مقدار $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ در هر قسمت از نمودار شار- زمان داده شده، نشان‌دهندهٔ شیب نمودار است. با توجه به نمودار شار - زمان، مشخص است که اندازهٔ شیب نمودار در بازهٔ زمانی $t_2 > t > 0$، بزرگ‌تر از اندازهٔ شیب نمودار در بازهٔ زمانی $t_4 > t > t_3$ است، بنابراین اندازهٔ جریان القایی متوسط در بازهٔ زمانی $t_2 > t > 0$ بزرگ‌تر است $(|\overline{I}_1| > |\overline{I}_2|)$.

$$\overline{I} = -\frac{N}{R}\underbrace{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}_{\text{شیب نمودار}}$$

۱۲۰۹۸ با توجه به رابطهٔ $\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{dt}$، داریم:



$$\begin{cases} \text{شیب } \Phi - t \text{ مثبت است.} \Rightarrow 0 < t < 5 \Rightarrow \overline{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0 \\ \Phi \text{ عدد ثابتی است.} \Rightarrow 5 < t < 10 \Rightarrow \overline{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0 \\ \text{شیب } \Phi - t \text{ منفی است.} \Rightarrow 10 < t < 15 \Rightarrow \overline{\varepsilon}_3 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0 \end{cases}$$

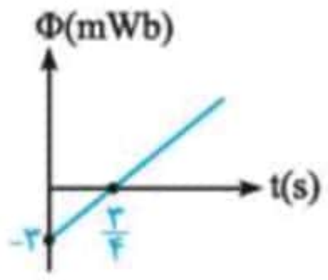
از طرفی با توجه به برابر بودن اندازهٔ شیب در مراحل (۱) و (۳)، نمودار در مرحلهٔ (۳) لزوماً به صفر می‌رسد (چرا؟).

gajmarket.com

۲۲۰۹۹ با توجه به معادلهٔ شار داده شده، هر یک از نمودارهای شار ـ زمان، نیرو محرکهٔ القایی ـ زمان و جریان القایی ـ زمان را رسم می‌کنیم:

نمودار $\Phi - t$: معادلهٔ $\Phi - t$ درجهٔ یک می‌باشد، بنابراین نمودار آن به صورت یک خط راست است.

$$\Phi = (4t - 3)\times 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}: \Phi = -3\times 10^{-3}\,Wb = -3\,mWb \\ \Phi = 0 \Rightarrow (4t-3)\times 10^{-3} = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4}s : \text{محل قطع نمودار با محور زمان} \end{cases}$$

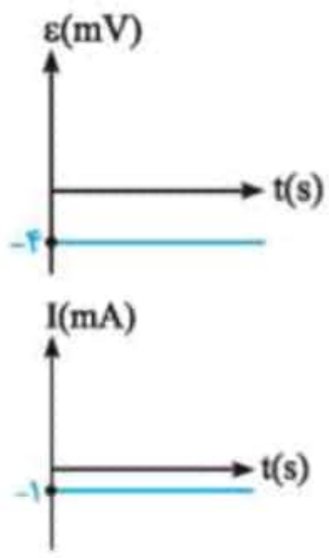


نمودار $\varepsilon - t$: با توجه به رابطهٔ $\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ برای یک حلقه و با توجه به خطی بودن نمودار، داریم:

$$\Phi = (4t-3)\times 10^{-3} \xrightarrow{\text{شیب}} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 4\times 10^{-3}$$

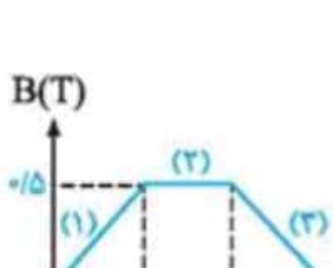
$$\varepsilon = \overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1\times 4\times 10^{-3} = -4\times 10^{-3}\,V = -4\,mV$$

(شیب $\Phi - t$)



نمودار $I - t$: با توجه به رابطهٔ $\overline{I} = \frac{\overline{\varepsilon}}{R}$، داریم:

$$I = \overline{I} = \frac{\overline{\varepsilon}}{R} = \frac{-4\times 10^{-3}}{4} = -10^{-3}\,A = -1\,mA$$



بنابراین گزینهٔ (۲)، نمودار نادرستی می‌باشد.

۱۲۱۰۰ ابتدا با کمک شیب نمودار، مقدار $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ را به‌دست می‌آوریم:

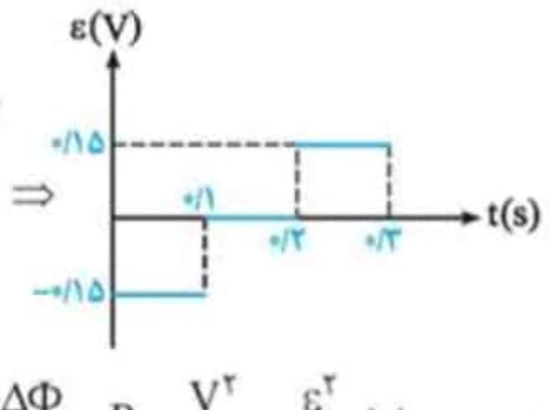
$$\begin{cases} \text{مرحلهٔ ۱}: \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{0/5 - 0}{0/1 - 0} = +5 \\ \text{مرحلهٔ ۲}: \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0 \\ \text{مرحلهٔ ۳}: \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{0 - 0/5}{0/3 - 0/2} = -5 \end{cases}$$

با توجه به این‌که در هر قسمت نمودار، شیب آن ثابت است، مقدار $\overline{\varepsilon}$ با ε برابر بوده و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

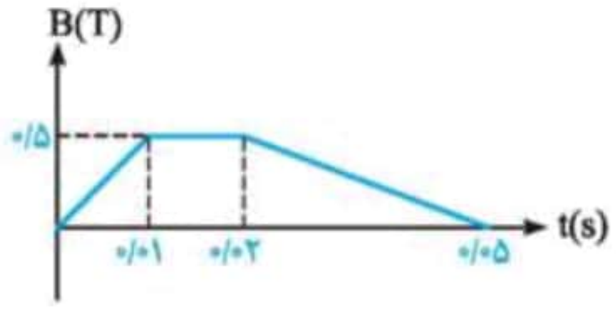
$$\varepsilon = \overline{\varepsilon} = -NA\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \text{مرحلهٔ ۱}: \varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}_1 = -1\times\pi\times(0/1)^2\times\cos 0\times 5 \simeq -0/15\,V \\ \text{مرحلهٔ ۲}: \varepsilon_2 = \overline{\varepsilon}_2 = 0 \\ \text{مرحلهٔ ۳}: \varepsilon_3 = \overline{\varepsilon}_3 \simeq +0/15\,V \end{cases}$$

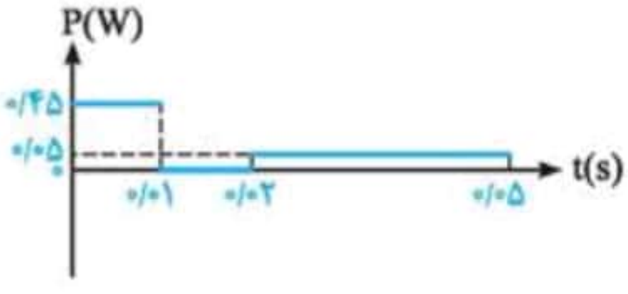
$\Rightarrow$



۴۲۱۰۱ این سؤال، تست جالبی می‌باشد. با توجه به روابط $P = \frac{V^2}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R}$ و $\varepsilon = \overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ در قسمت‌هایی که شیب نمودار عوض نمی‌شود، داریم:



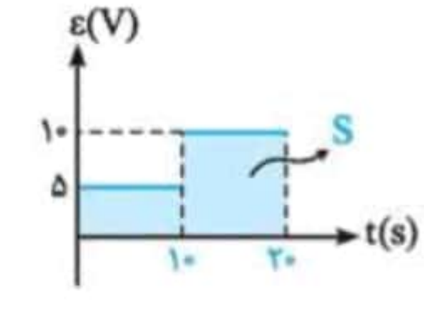
$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\Phi = AB\cos 0^\circ} \overline{\varepsilon} = -NA\frac{\Delta B}{\Delta t} = -1\times(\pi\times(0/1)^2)\frac{\Delta B}{\Delta t} \simeq -0/03\frac{\Delta B}{\Delta t}$$



$$\begin{cases} 0 < t < 0/01s \Rightarrow \varepsilon = \overline{\varepsilon} = -0/03\times\frac{0/5}{0/01} = -1/5\,V \Rightarrow P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{(-1/5)^2}{5} = 0/45\,W \\ 0/01s < t < 0/02s \Rightarrow \varepsilon = \overline{\varepsilon} = -0/03\times 0 = 0 \Rightarrow P = 0 \\ 0/02s < t < 0/05s \Rightarrow \varepsilon = \overline{\varepsilon} = -0/03\times\frac{(0 - 0/5)}{0/05 - 0/02} = 0/5\,V \Rightarrow P = \frac{(0/5)^2}{5} = 0/05\,W \end{cases}$$

۲۲۱۰۲ با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۱۰)، گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳۲۱۰۳ همان‌طور که در خلاصه نکات (۳) اشاره کردیم، مساحت زیر نمودار $\varepsilon - t$ تا $t = 20s$، برابر $|N\Delta\Phi|$ است و می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow S = 5\times 10 + 10\times 10 = 150$$

$$|N\Delta\Phi| = S = 150 \Rightarrow 10\times|\Delta\Phi| = 150 \Rightarrow |\Delta\Phi| = 15\,Wb$$

۲۱۰۴ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۲ **محاسبهٔ بار الکتریکی جاری شده در اثر تغییر شار** (تست‌های ۲۱۰۴ تا ۲۱۰۸)

همان‌طور که مشاهده کردید، در اثر ایجاد تغییر شار در یک مدار بسته، جریان الکتریکی القایی در آن مدار به‌وجود می‌آید و در مدار بار الکتریکی q جاری خواهد شد $\left(I=\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)$. در اینجا می‌خواهیم به محاسبهٔ این بار الکتریکی شارش‌یافته بپردازیم. به همین منظور می‌توان گفت که اگر در یک پیچه با N حلقه، شار عبوری در مدت Δt ثانیه به اندازهٔ $\Delta\Phi$ تغییر کند، بار الکتریکی q جاری‌شده برابر است با:

$$\begin{cases}\overline{I}=\frac{\overline{\varepsilon}}{R}=-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\\ \overline{I}=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{q}{\Delta t}\end{cases}\Rightarrow -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{q}{\Delta t}\Rightarrow \boxed{q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|}$$

با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱) در یک حلقه اگر زمان تغییر شار مغناطیسی تغییر کند، بار جاری‌شده در مدار تغییر نمی‌کند، زیرا در روند اثبات فوق، Δt از طرفین تساوی ساده شده است.

۲) میزان بار جاری‌شده با تعداد دور پیچه و تغییر شار رابطهٔ مستقیم و با مقاومت پیچه رابطهٔ معکوس دارد.

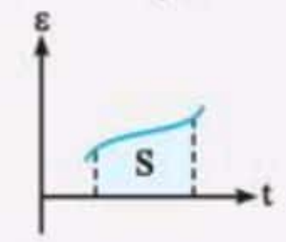
$$q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|\Rightarrow\begin{cases}q\propto N\ ,\ q\propto\Delta\Phi\\ q\propto\frac{1}{R}\end{cases}$$

۳) با توجه به این رابطه، یکای شار مغناطیسی (وبر) معادل است با:

$$q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|\Rightarrow \text{وبر}\equiv\text{اهم}\times\text{کولن}$$

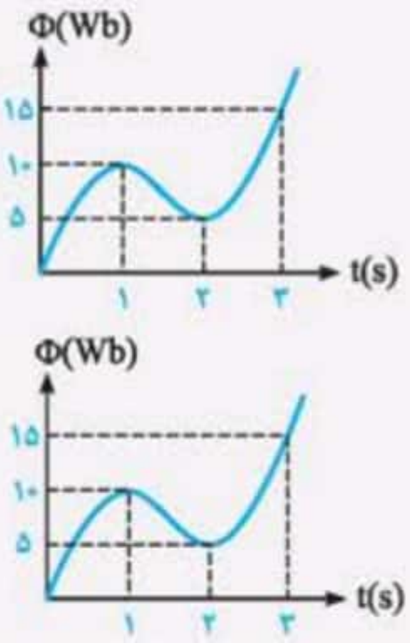
(وبر ↑ $\Delta\Phi$، اهم ↓ R، کولن ↓ q)

۴) با توجه به فرمول محاسبه‌شده برای q، برای محاسبهٔ بار به مقدار $|N\Delta\Phi|$ نیاز داریم. از طرفی می‌دانیم مساحت زیر نمودار $\varepsilon-t$ در یک بازهٔ زمانی برابر $|N\Delta\Phi|$ می‌باشد. بنابراین به کمک نمودار $\varepsilon-t$ نیز می‌توان بار شارش‌یافته در یک مدار را به‌دست آورد:



$$S=|N\Delta\Phi|\Rightarrow q=\left|\overset{S}{\overbrace{N\frac{\Delta\Phi}{R}}}\right|\Rightarrow q=\frac{S}{R}$$

تمرین ۱ **نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ بسته با ۱۰ دور سیم و مقاومت ۲۰ اهم مطابق شکل روبه‌رو است. در بازهٔ زمانی $t_1=1s$ تا $t_2=3s$ به‌طور متوسط چند کولن الکتریسیته در مدار جاری می‌شود؟** (تجربی خارج ۸۰)



۱) ۰/۲

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۰/۲۵

پاسخ برای محاسبهٔ q از $t_1=1s$ تا $t_2=3s$، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|\\ t_1=1s\Rightarrow\Phi_1=10Wb\\ t_2=3s\Rightarrow\Phi_2=15Wb\end{cases}\Rightarrow q=10\times\frac{15-10}{20}=2/5C$$ (گزینهٔ ۳)

با توجه به خلاصه نکات فوق، مقدار الکتریسیتهٔ القایی از رابطهٔ $q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|$ به‌دست می‌آید. حال با توجه به این‌که در این سؤال تغییر شار به‌دلیل تغییر در اندازهٔ میدان مغناطیسی می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1=\Delta\left(AB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=A\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}^{\sin\alpha}\Delta B=A\sin\alpha\,\Delta B$$

$$q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|=\left|NA\sin\alpha\frac{\Delta B}{R}\right|$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، مقدار الکتریسیتهٔ القایی، مستقل از مدت زمان سپری شده بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

دقت کنید که در محاسبهٔ شار، به زاویهٔ بین خطوط عمود بر سطح و بردار میدان نیاز داریم $\left(\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

۲۱۰۵ مقدار الکتریسیتهٔ القایی از رابطهٔ $q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|$ به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که شار مغناطیسی از ۰/۰۴ وبر به صفر رسیده و مقاومت الکتریکی این پیچه با ۵۰ حلقه برابر 5Ω است، می‌توان نوشت:

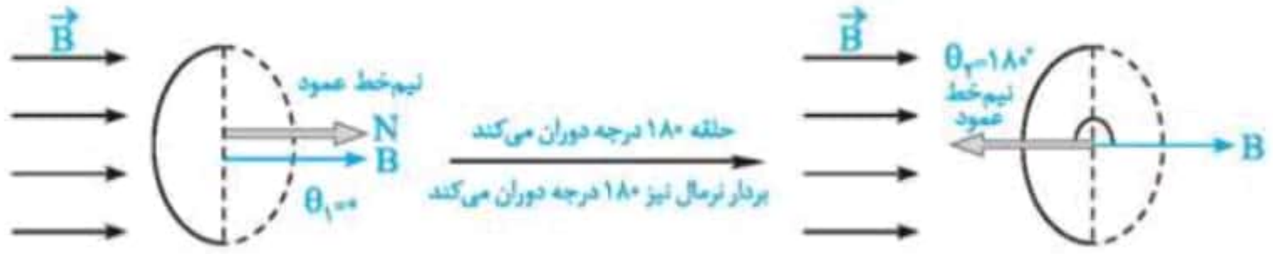
$$q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|=\left|50\times\frac{0-0/04}{5}\right|=0/4C$$

دقت: میزان بار جاری شده برابر $q=\left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|$ بوده و از زمان تغییر شار در حلقه مستقل است.

gajmarket.com

۲۱۰۶ برای محاسبهٔ بار الکتریکی القا شده، ابتدا تغییر شار عبوری از حلقه را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این‌که شار عبوری در اثر چرخیدن قاب تغییر کرده است، می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi = AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$



حالت اول: قاب عمود بر سطح میدان قرار دارد. $\Rightarrow \theta_1 = 0$

حالت دوم: قاب ۱۸۰ درجه دوران کرده است. $\Rightarrow \theta_2 = 180^\circ$

$$\Delta\Phi = AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = AB(\cos 180^\circ - \cos 0) = -2AB$$

$$q = \left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right| = \left|50 \times \frac{-2\times(100\times10^{-4})\times(1\times10^{-4})}{1}\right| = 10^{-4}\,C$$

۳۲۱۰۷ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۲)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۲۱۰۸ با توجه به رابطهٔ زیر، عبارت $\left(\frac{\text{وبر}}{\text{اهم}}\right)$ معادل با کولن می‌باشد:

$$q = \left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right| \Rightarrow \text{کولن} \equiv \frac{\text{وبر}}{\text{اهم}}$$

(N واحد ندارد)

۳۲۱۰۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۳ — قانون لنز (تست‌های ۲۱۰۹ تا ۲۱۳۸)

شکل زیر را درنظر بگیرید. اگر در این شکل آهنربا را به حلقهٔ رسانا نزدیک کنیم، شار ناشی از آهنربا که از داخل حلقه می‌گذرد تغییر می‌کند (زیرا خطوط میدان مغناطیسی بیشتری از داخل حلقه عبور می‌کند). با تغییر شار عبوری از حلقه، طبق قانون القای فاراده، در حلقه نیروی محرکهٔ القایی ایجاد می‌شود که در حلقهٔ بسته جریان القایی نیز به‌وجود می‌آورد. حال این سؤال در ذهن مطرح می‌شود که جهت جریان القایی در حلقه در کدام جهت است؟



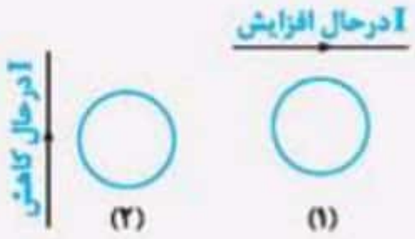
پس از بیان قانون القای الکترومغناطیسی توسط فاراده، هاینریش لنز دانشمند روسی برای تعیین جهت جریان القایی در یک مدار، قاعده‌ای را ارائه کرد. این قاعده که به قانون لنز شهرت دارد، عبارت است از:

> جریان حاصل از نیروی محرکهٔ القایی در یک مدار یا پیچه در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به‌وجود آورندهٔ جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی، مخالفت می‌کند.

دقت: علامت منفی در قانون القای فاراده، برای درنظر گرفتن این موضوع لحاظ شده است $\left(\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$.

دقت: بیان ساده‌تر قانون لنز آن است که در یک مدار اگر شار عبوری از یک حلقه می‌خواهد افزایش یابد، جریان القایی ایجادشده در آن در جهتی است که شار عبوری از حلقه را کم کند (با افزایش شار مخالفت می‌کند). از سوی دیگر اگر شار عبوری از حلقه بخواهد کاهش یابد، جریان القایی در جهتی است که شار عبوری از حلقه را زیاد کند (با کاهش شار مخالفت می‌کند). در ادامه سعی می‌کنیم با ارائهٔ چند تمرین متنوع، مفاهیم این قسمت را بهتر به شما یاد دهیم.

تمرین۱ **در شکل‌های مقابل شدت جریان I در دو سیم مستقیم نشان داده شده است، جهت جریان القایی در حلقهٔ مجاور هر سیم در چه جهتی است؟**



پاسخ در این سؤال هر یک از شکل‌ها را به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

تحلیل و بررسی شکل (۱):

با افزایش جریان عبوری از سیم، میدان مغناطیسی ناشی از آن افزایش می‌یابد. با افزایش میدان مغناطیسی ناشی از سیم، شار عبوری از حلقه افزایش می‌یابد $(\Phi = A\vec{B}\cos\theta)$.

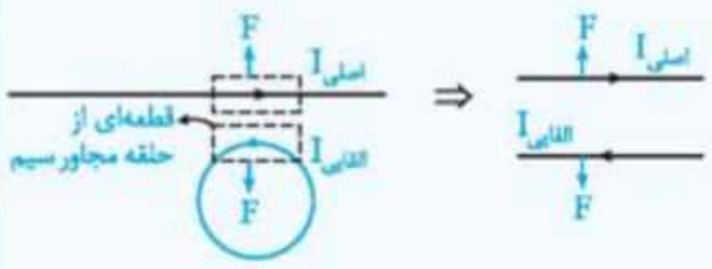
مطابق قانون لنز، میدان ناشی از جریان القایی باید میدان اصلی را تضعیف کند تا مانع از افزایش شار شود و این میدان باید برون‌سو باشد (زیرا میدان اصلی ناشی از جریان سیم در مرکز حلقه درون‌سو است). با توجه به برون‌سو بودن میدان القایی، جریان القایی طبق قانون دست راست باید پادساعتگرد باشد.



میدان القایی برون‌سو است. $\Rightarrow$ میدان القایی باید میدان اصلی را تضعیف کند. $I_{\text{سیم}}\uparrow \Rightarrow B_{\text{سیم}}\uparrow \Rightarrow \Phi_{\text{حلقه}}\uparrow \xrightarrow{\text{لنز}}$

خلاقیت‌های حرفه‌ای

به‌عنوان یک روش ساده‌تر و مفهومی‌تر می‌توان گفت که با توجه به قانون لنز، حلقه باید مانع از افزایش شار شود و به همین دلیل باید سیم حامل جریان را **دفع کند** (سیم‌های دارای **جریان‌های خلاف جهت**، یک‌دیگر را دفع می‌کنند)، بنابراین جریان القایی مطابق شکل مقابل است (جریان القایی I و اصلی I مختلف‌الجهت هستند تا یک‌دیگر را دفع کنند).



تحلیل و بررسی شکل (۲):

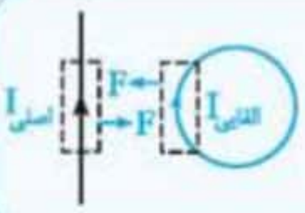
در این شکل با **کاهش** جریان اصلی در سیم، شار عبوری از حلقه در حال کاهش است: $I_{\text{سیم}}\downarrow \Rightarrow B_{\text{سیم}}\downarrow \Rightarrow \Phi_{\text{حلقه}}\downarrow$



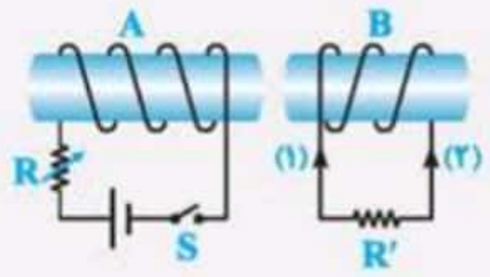
در این حالت مطابق قانون لنز، حلقه باید به‌گونه‌ای عمل کند که مانع از کاهش شار شود و به همین دلیل میدان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند، بنابراین میدان القایی درون‌سو بوده و جریان القایی در حلقه ساعتگرد است.

خلاقیت‌های حرفه‌ای

با توجه به قانون لنز، حلقه باید مانع از کاهش شار شود و به همین دلیل باید جریان القایی را به‌گونه‌ای تولید کند که سیم را جذب کند (سیم‌های دارای جریان‌های هم‌جهت یک‌دیگر را جذب می‌کنند) و جریان القایی مطابق شکل است (جریان القایی و جریان اصلی I هم‌جهت هستند تا یک‌دیگر را جذب کنند):



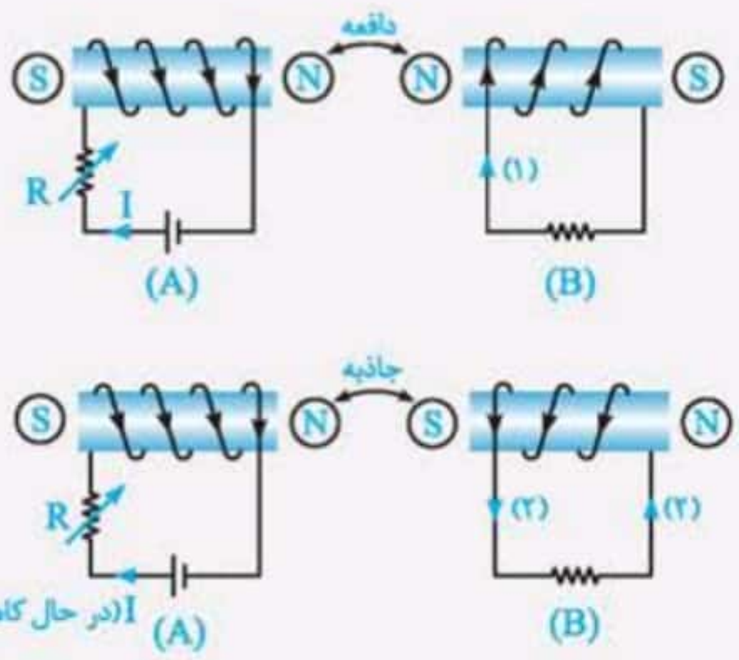
تمرین ۲ **در آزمایش شکل مقابل کلید را وصل می‌کنیم و بعد از چند ثانیه مقاومت R را به‌تدریج افزایش می‌دهیم. در لحظهٔ وصل کلید و در موقع افزایش مقاومت الکتریکی، جریان القایی در سیم‌پیچ B (به‌ترتیب از راست به چپ)، در چه جهتی است؟** (کنکور خارج ۸۴)



۱) ۱ و ۱
۲) ۱ و ۲
۳) ۲ و ۱
۴) ۲ و ۲

پاسخ **روش اول:** این سؤال را در دو مرحله بررسی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: با بستن کلید S، در سیملولهٔ A میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود و خطوط این میدان مغناطیسی از سیملولهٔ B عبور کرده و به عبارتی شار مغناطیسی عبوری از سیملولهٔ B افزایش می‌یابد. با افزایش شار مغناطیسی عبوری از سیملولهٔ B، مطابق قانون لنز، سیملولهٔ B که می‌تواند خود به یک آهنربا تبدیل شود، قطب‌هایش را به گونه‌ای تبدیل می‌کند که نیروی دافعهٔ N - N سیملوله را دفع کند. با توجه به معین شدن قطب‌های N و S در سیملولهٔ B، به کمک قانون دست راست، جریان در جهت (۱) خواهد بود.



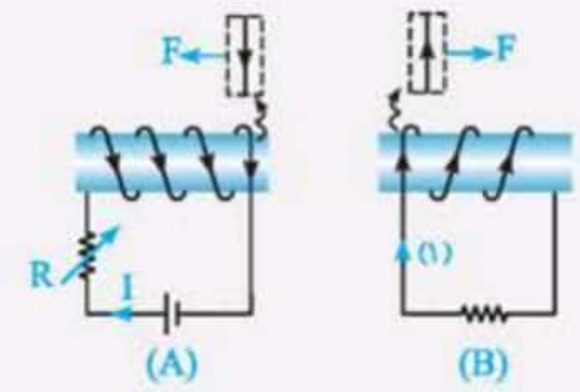
مرحلهٔ دوم: با افزایش مقاومت R در سیملولهٔ A، جریان در این سیملوله کاهش یافته و با کاهش جریان در این سیملوله، میدان مغناطیسی آن نیز کاهش می‌یابد. با کاهش میدان سیملولهٔ A، شار عبوری از سیملولهٔ B نیز کاهش می‌یابد.

$$R\uparrow \xrightarrow{I=\frac{\varepsilon}{R+r}} I_A\downarrow \Rightarrow B_A\downarrow \Rightarrow \Phi\downarrow$$

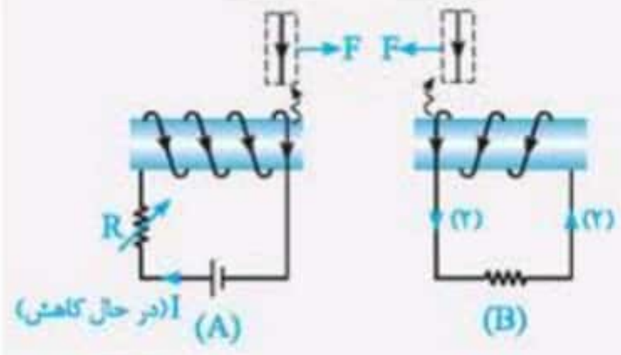
با کاهش شار عبوری از سیملولهٔ B، مطابق قانون لنز این سیملوله باید مانع از کاهش شار شود، بنابراین قطب‌های خود را به گونه‌ای تبدیل می‌کند که نیروی جاذبهٔ N - S سیملولهٔ A را جذب کند. بنابراین جهت جریان در جهت (۲) خواهد بود.

روش دوم: این سؤال را با کمک خلاقیتی که در تمرین (۱) یاد گرفتیم نیز پاسخ می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: با بستن کلید S، با افزایش شار مغناطیسی عبوری از سیملولهٔ B، مطابق قانون لنز، سیملولهٔ B باید سیملولهٔ A را دفع کند. با توجه به این موضوع جریان در روی حلقه‌های آن در خلاف جهت سیملولهٔ A است، زیرا سیم‌های دارای جریان‌های مختلف‌الجهت یک‌دیگر را دفع می‌کنند و جریان القایی در جهت (۱) است.



gajmarket.com



مرحلهٔ دوم: با افزایش مقاومت R، جریان سیملولهٔ A کاهش یافته و در نتیجه شار عبوری از سیملولهٔ B نیز کاهش می‌یابد، مطابق قانون لنز این سیملوله باید مانع از کاهش شار شود و به همین دلیل سیملولهٔ A باید به نوعی سیملولهٔ B را جذب کند، بنابراین جریان بر روی حلقه‌های آن هم‌جهت با سیملولهٔ A است و جریان القایی در جهت (۲) است.

با توجه به خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲ ۲۱۱۰ جهت جریان القایی در هریک از دو شکل را به‌دست می‌آوریم:

شکل الف: در این شکل با افزایش میدان مغناطیسی خارجی، شار عبوری از حلقه افزایش می‌یابد ($\Phi = AB\cos\theta$ ↑ ↑).



مطابق قانون لنز، میدان ناشی از جریان القایی باید میدان اصلی را تضعیف کند تا مانع از افزایش شار شود و این موضوع یعنی میدان القایی باید درون‌سو باشد (زیرا میدان اصلی به‌صورت برون‌سو بوده و در حال افزایش است). با توجه به درون‌سو بودن میدان القایی، جریان القایی طبق قانون دست راست باید ساعتگرد باشد.

$B_{\text{اصلی}} \uparrow \Rightarrow \Phi_{\text{حلقه}} \uparrow \xrightarrow{\text{لنز}}$ میدان القایی باید میدان اصلی را تضعیف کند.

جریان القایی ساعتگرد است. $\xrightarrow{\text{قاعدهٔ دست راست}}$ میدان القایی باید درون‌سو باشد. $\Rightarrow$

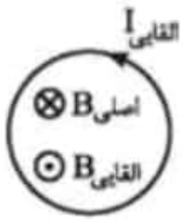
شکل ب: طبق روند استدلال فوق، برای شکل (ب) نیز می‌توان نوشت:



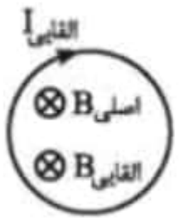
$B_{\text{اصلی}} \downarrow \Rightarrow \Phi_{\text{حلقه}} \downarrow \xrightarrow{\text{لنز}}$ میدان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند.

جریان القایی ساعتگرد است. $\xrightarrow{\text{قاعدهٔ دست راست}}$ میدان القایی باید درون‌سو باشد. $\Rightarrow$

۱ ۲۱۱۱ هر سه موقعیت حلقه را بررسی می‌کنیم:



موقعیت (۱): چون در این موقعیت، با ورود حلقه به میدان مغناطیسی خطوط میدان بیشتری از حلقه عبور می‌کند، بنابراین شار عبوری از حلقه افزایش یافته و میدان مغناطیسی القایی باید برون‌سو باشد تا با افزایش شار مغناطیسی مخالفت کند (دقت شود که میدان اصلی به‌صورت درون‌سو است). با توجه به برون‌سو بودن میدان القایی، بنابر قانون دست راست، در این حالت جریان القایی باید پادساعتگرد باشد.



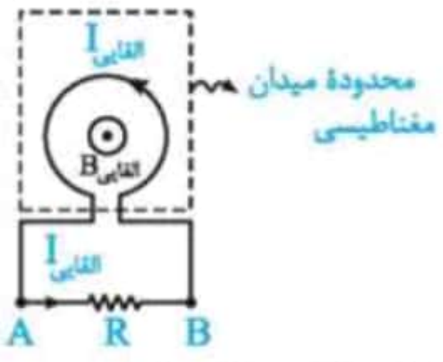
موقعیت (۲): در این حالت شار عبوری از حلقه ثابت بوده و در نتیجه جریان القایی در آن برابر صفر است.

موقعیت (۳): در این حالت شار عبوری از حلقه در حال کاهش است، بنابراین باید میدان القایی نیز درون‌سو باشد تا با کاهش شار مخالفت کند. بنابراین با توجه به قانون دست راست، در این حالت جریان القایی باید ساعتگرد باشد و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳ ۲۱۱۲

نکته

ابتدا باید توجه کنید که با افزایش دما سطح حلقه افزایش یافته و شار عبوری نیز افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، با کاهش دما شار عبوری کاهش می‌یابد.



با توجه به قاعدهٔ دست راست، میدان القایی در داخل حلقه به‌صورت برون‌سو می‌باشد. از طرفی طبق قانون لنز این میدان القایی باید با تغییر شار مغناطیسی اصلی مخالفت کند، یعنی اگر شار اصلی می‌خواهد افزایش یابد، باید آن را کاهش و اگر شار اصلی می‌خواهد کاهش یابد، باید آن را افزایش دهد. بنابراین دو حالت ممکن است ایجاد شود تا میدان مغناطیسی القایی برون‌سو باشد:

۱) میدان مغناطیسی اصلی درون‌سو بوده و اندازهٔ دمای محیط در حال افزایش باشد (با افزایش دمای محیط مساحت حلقه افزایش یافته و شار عبوری از حلقه نیز در حال افزایش است) و میدان القایی میدان اصلی را تضعیف کرده است.

۲) میدان مغناطیسی اصلی برون‌سو بوده و اندازهٔ دمای محیط در حال کاهش باشد، در این حالت میدان القایی میدان اصلی را تقویت کرده است.

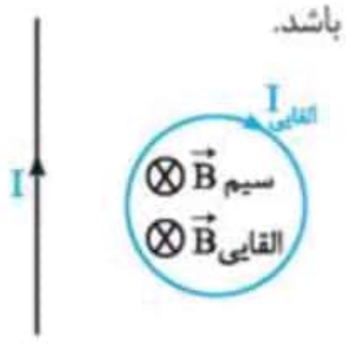
مطابق حالت (۲)، $B_{\text{اصلی}}$ درون‌سو بوده و دمای محیط در حال افزایش است.

$B_{\text{القایی}}$ برون‌سو است. ←

مطابق حالت (۳)، $B_{\text{اصلی}}$ برون‌سو بوده و دمای محیط در حال کاهش است.

بنابراین هر یک از حالت‌های ۲ و ۳ در صورت سؤال می‌تواند اتفاق بیفتد تا جهت جریان القایی در مقاومت R از A به‌سمت B باشد.

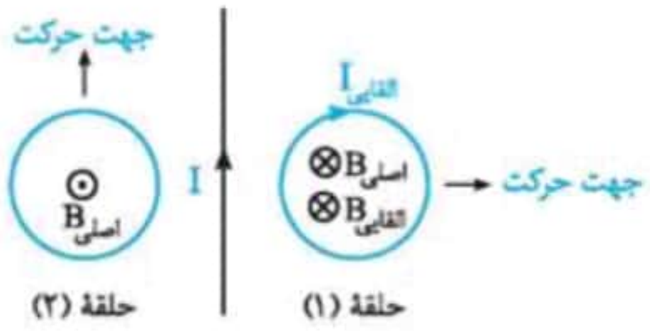
۱ ۲۱۱۳ با استفاده از قانون دست راست، میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست در داخل حلقه درون‌سو می‌باشد. از طرفی طبق صورت سؤال، جریان القایی در حلقه ساعتگرد است و این یعنی میدان ناشی از آن در داخل حلقه درون‌سو است، بنابراین باید شار عبوری از حلقه در حال کاهش باشد تا میدان القایی، میدان اصلی را در داخل حلقه تقویت کند. از طرفی برای کاهش شار عبوری از حلقه، باید حلقه را از سیم دور کنیم و یا شدت جریان I در سیم راست را کاهش دهیم.



۴۲۱۱۴ جریان القایی تولیدشده در هر یک از حلقه‌های (۱) و (۲) را جداگانه بررسی می‌کنیم:

جریان القایی در حلقهٔ (۱): مشابه با تحلیلی که در سؤال قبل انجام دادیم، با توجه به شکل نشان داده شده، جریان القایی در حلقهٔ (۱) ساعتگرد است.

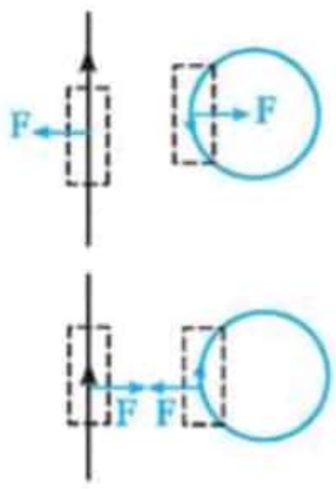
جریان القایی در حلقهٔ (۲): با حرکت دادن حلقهٔ (۲) در راستای قائم، چون فاصلهٔ این حلقه از سیم راست تغییر نمی‌کند، بنابراین میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست در محل حلقهٔ (۲) ثابت است. با توجه به این موضوع شار عبوری از این حلقه تغییر نکرده و ولتاژ القایی و جریان القایی در حلقهٔ (۲) صفر می‌باشد.



$$\overline{\varepsilon} = \left| -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \xrightarrow{\Delta\Phi = 0} \overline{\varepsilon}_{\text{القایی}} = 0 \Rightarrow \overline{I}_{\text{القایی}} = 0$$

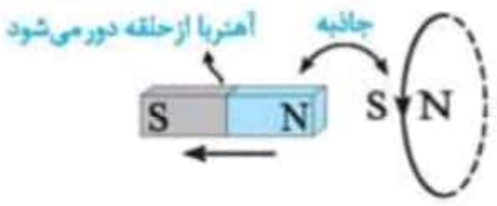
توجه مهم: در حلقهٔ (۱)، هرچه از سیم دورتر می‌شویم، میدان ضعیف‌تر شده و آهنگ تغییر شار عوض می‌شود. باتوجه به این موضوع، در حلقهٔ (۱) جریان القایی مقدار ثابتی نداشته و تغییر می‌کند.

۴۲۱۱۵ با توجه به نحوهٔ تغییر جریان عبوری از سیم، در نیم ثانیهٔ اول جریان به سمت بالا بوده و در حال افزایش است. در این حالت شار عبوری از حلقه در حال افزایش بوده و جهت جریان القایی به گونه‌ای است که با آن مخالفت کند (حلقه سیم را دفع کند). در این حالت جریان القایی پادساعتگرد است.



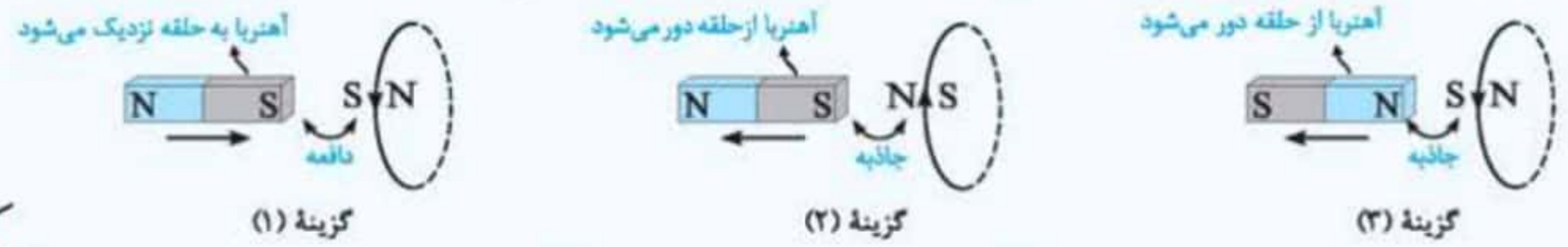
از طرفی در نیم ثانیهٔ دوم، جریان عبوری از سیم در حال کاهش بوده و شار عبوری از حلقه در حال کاهش است. در این حالت، جریان القایی ساعتگرد است.

۴۲۱۱۶ با توجه به قانون لنز، جهت جریان القایی تنها در گزینهٔ (۴) صحیح نشان داده شده است. در گزینهٔ (۴)، آهنربا به سمت چپ در حال حرکت بوده و شار عبوری از حلقه در حال کاهش است. بنابراین جهت جریان القایی باید به گونه‌ای باشد که بین حلقه و آهنربا، نیروی جاذبه‌ای ایجاد کند تا مانع از کاهش شار شود (مانع از دور شدن آهنربا شود). به همین دلیل حلقه که خود می‌تواند به یک آهنربا تبدیل شود، قطب‌هایش را به‌صورت مقابل تبدیل می‌کند تا نیروی جاذبهٔ S – N مانع از دورشدن آهنربا شود و طبق قانون دست راست، جریان آن مطابق شکل است:



تذکر

تحلیل سه شکل دیگر نیز مانند گزینهٔ (۴) بوده و جهت صحیح جریان القایی در آن‌ها به‌صورت زیر است:



گزینهٔ (۳) گزینهٔ (۲) گزینهٔ (۱)

یادآوری می‌شود که با توجه به قانون دست راست، در حلقه شست راست را بر روی جریان حلقه قرار دهیم، خم شدن انگشتان دست راست میدان در داخل حلقه را نشان می‌دهد که از S به N است و با این روش می‌توان قطب‌های ایجاد شده در حلقه را شناسایی کرد.



۳۲۱۱۷ ابتدا با توجه به جهت جریان در پیچه‌ها، قطب‌های آهنرباهای الکتریکی که توسط هر یک از آن‌ها می‌تواند تولید شود را تعیین می‌کنیم.

شکل (الف): با توجه به قانون دست راست و تعیین کردن قطب‌های ناشی از پیچه، مشاهده می‌کنیم که قطب‌های غیرهم‌نام در مجاورت یک‌دیگر قرار گرفته و پیچه، آهنربا را جذب می‌کند. بنابراین پیچه می‌خواهد مانع از دور شدن آهنربا شود، در نتیجه آهنربا در حال دور شدن از پیچه بوده و حرکت آن به سمت پایین باید باشد.

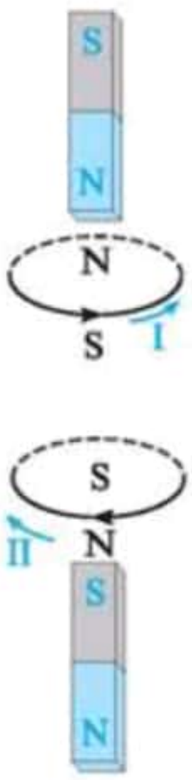
شکل (ب): در این شکل قطب‌های N – N در مقابل یک‌دیگر قرار گرفته‌اند (چرا؟) و در نتیجه پیچه می‌خواهد آهنربا را دفع کند. بنابراین حرکت آهنربا باید به سمت بالا (نزدیک شدن به پیچه) باشد تا پیچه با حرکت آن مخالفت کند.



در حالت کلی با تغییر آهنگ سریع‌تر شار مغناطیسی، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی و در نتیجه جریان القایی ایجادشده بیشتر می‌شود.

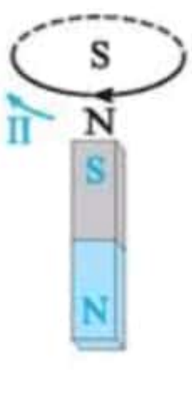
gajmarket.com

۳ ۲۱۱۸ ابتدا به بررسی حرکت آهنربای (۲) در هنگام عبور از حلقهٔ رسانا می‌پردازیم:



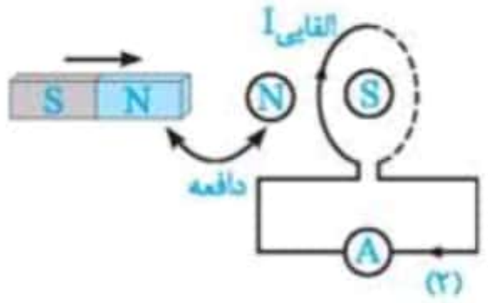
هنگام نزدیک شدن به حلقه: در هنگام نزدیک شدن آهنربا به حلقه، به علت افزایش شار عبوری از حلقه، طبق قانون لنز، حلقه با ورود آهنربا مخالفت می‌کند. بنابراین حلقه قطب‌هایش را به گونه‌ای تبدیل می‌کند که نیروی دافعهٔ N - N، با حرکت آهنربا مخالفت کند. در نتیجه طبق قاعدهٔ دست راست، در هنگام نزدیک شدن آهنربا به حلقه، جریان القایی در حلقه در جهت (I) خواهد بود.

هنگام دور شدن حلقه: در این هنگام حلقه قطب‌های خود را طوری تبدیل می‌کند که مانع از دور شدن آهنربا شود. بنابراین جریان در حلقه در جهت II خواهد بود.



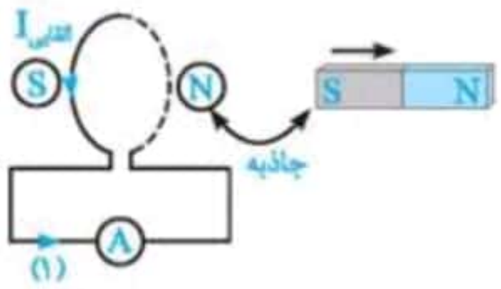
بنابراین با توجه به این‌که با خروج آهنربای (۲) از حلقه مخالفت می‌شود، بنابراین سرعت حرکت آن کم‌تر از آهنربای (۱) است که با حرکت آن مخالفتی نمی‌شود. در نتیجه سرعت برخورد آهنربای (۱) با سطح زمین بیشتر از سرعت برخورد آهنربای (۲) بوده و مقدار فرورفتگی شن در محل برخورد آهنربای (۱) با زمین بیشتر است.

۳ ۲۱۱۹ این سؤال را در دو مرحله بررسی می‌کنیم:



مرحلهٔ اول: در هنگام نزدیک شدن آهنربا به حلقه، خطوط میدان مغناطیسی بیشتری از حلقه عبور می‌کند و شار عبوری از حلقه در حال افزایش است. با توجه به افزایش شار عبوری، مطابق قانون لنز، حلقه که خود می‌تواند تبدیل به یک آهنربا شود، قطب‌هایش را به‌گونه‌ای تبدیل می‌کند که نیروی دافعهٔ N - N، مانع از نزدیک شدن آهنربا شود. در این حالت جریان القایی با کمک قانون دست راست در جهت (۲) است.

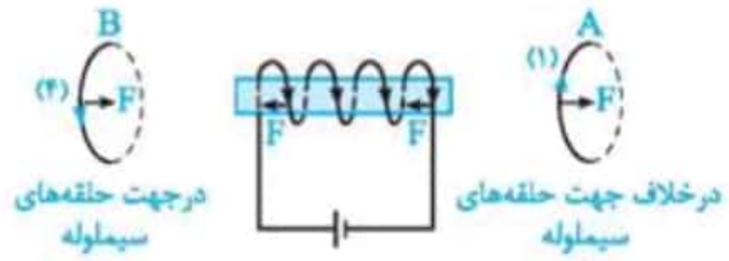
(شست دست راست را بر روی $I_{\text{القایی}}$ قرار دهید، خم‌شدن انگشتان در درون حلقه از S به N است.)



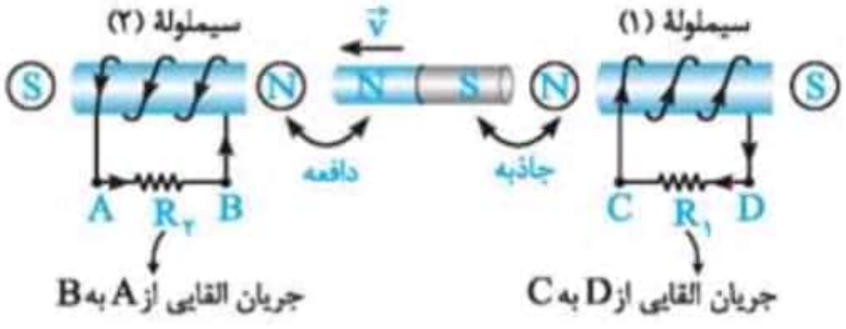
مرحلهٔ دوم: در هنگام خارج شدن آهنربا، خطوط میدان مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد در حال کاهش است و شار عبوری از حلقه در حال کاهش است. با توجه به کاهش شار عبوری، مطابق قانون لنز، حلقه که می‌تواند خود به یک آهنربا تبدیل شود، قطب‌هایش را به‌گونه‌ای تبدیل می‌کند که نیروی جاذبهٔ S - N، مانع از دور شدن آهنربا شود. در این حالت جریان القایی با کمک قانون دست راست در جهت (۱) است.

بنابراین جهت جریان القایی ابتدا در جهت (۲) و سپس در جهت (۱) است.

۱ ۲۱۲۰ با حرکت سیملوله از چپ به راست، شار عبوری از حلقهٔ A افزایش و شار عبوری از حلقهٔ B کاهش می‌یابد. با توجه به قانون لنز، جریان در حلقهٔ A به گونه‌ای است که سیملوله را دفع کند و از طرفی حلقهٔ B به دلیل کاهش شار عبوری، سیملوله را جذب می‌کند و گزینهٔ (۱) صحیح است.

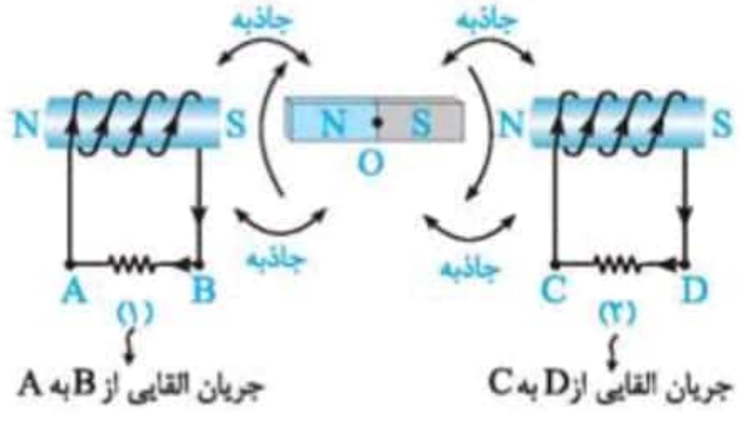


۱ ۲۱۲۱ با حرکت آهنربا به سمت چپ، شار عبوری از سیملولهٔ (۲) افزایش یافته و شار عبوری از سیملولهٔ (۱) کاهش می‌یابد. بنابراین طبق قانون لنز، سیملولهٔ (۲) آهنربا را دفع و سیملولهٔ (۱) آن را جذب می‌کند. در نتیجه سمت راست سیملولهٔ (۲) باید قطب N و سمت چپ سیملولهٔ (۱) باید قطب N باشد تا سیملولهٔ (۲) آهنربا را دفع و سیملولهٔ (۱) آهنربا را جذب کند.

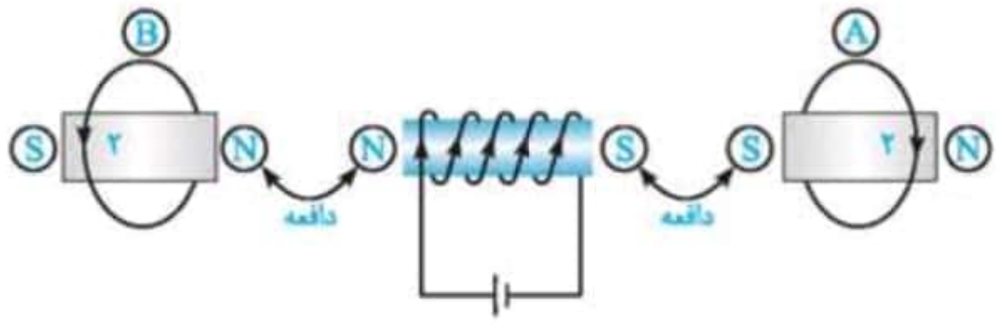


حال با توجه به قطب‌های به‌دست آمده برای هر یک از سیملوله‌ها، به کمک قانون دست راست، مطابق شکل جهت جریان القایی در سیملوله‌ها را مشخص می‌کنیم.

۳ ۲۱۲۲ با چرخیدن آهنربا در جهت نشان داده شده، آهنربا قصد دور شدن از دو سیملوله را داشته و با توجه به قانون لنز، دو سیملوله قطب‌های خود را به گونه‌ای تنظیم می‌کنند که مانع از دور شدن آهنربا شوند. در این حالت پس از تعیین قطب‌ها، با کمک قانون دست راست، جریان القایی در دو سیملوله مطابق شکل به‌دست می‌آید.



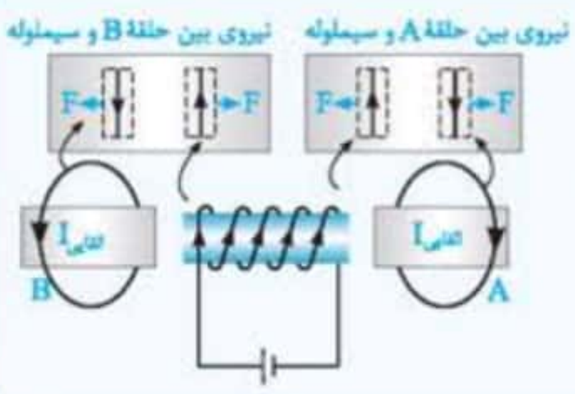
۴ ۲۱۲۳ با بسته شدن کلید، در سیملوله جریان ایجاد می‌شود و سیملوله میدان مغناطیسی تولید می‌کند. با تولید میدان مغناطیسی در سیملوله، از حلقه‌های A و B شار عبور می‌کند و به عبارتی شار عبوری از آن‌ها افزایش می‌یابد (شار عبوری مشخصی). با افزایش شار عبوری، مطابق قانون لنز، هر دو حلقهٔ A و B که می‌توانند خود را به آهنربا تبدیل کنند باید به‌گونه‌ای عمل کنند که سیملوله را دفع کنند. به همین دلیل وضعیت قطب‌های حلقه‌های A و B مطابق شکل زیر است و جریان القایی در هر دو حلقه با کمک قانون دست راست در جهت (۲) است.



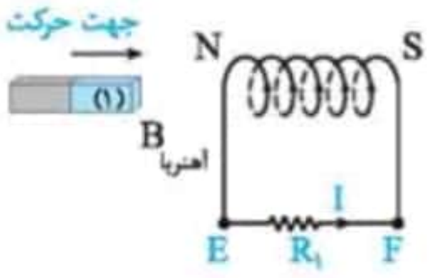
خلاقیت‌های حرفه‌ای

به‌عنوان یک روش بسیار قوی و بسیار ساده، بدون تعیین قطب‌ها نیز به سادگی می‌توان جهت جریان القایی در دو حلقه را به‌دست آورد. با توجه به این‌که شار عبوری از هر دو حلقه در حال افزایش است، پس هر دو حلقه باید سیملوله را دفع کنند، یعنی جریان آن‌ها با جریان بر روی حلقه‌های سیملوله مجاور با آن‌ها مختلف‌الجهت باشند.

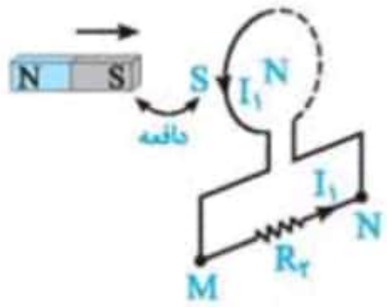
دقت: می‌دانیم که دو سیم با جریان‌های مختلف‌الجهت یک‌دیگر را دفع و با جریان‌های هم‌جهت یک‌دیگر را جذب می‌کنند.



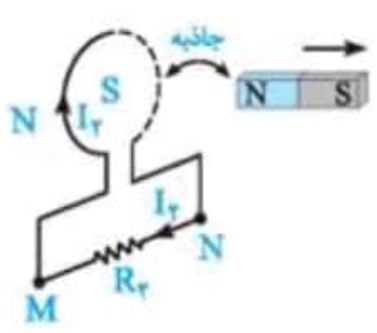
۱ ۲۱۲۴ **گام اول:** با توجه به جهت جریان القا شده در سیملوله، قطب‌های سیملوله به صورت مقابل خواهد بود. از آن‌جایی که آهنربا در حال نزدیک شدن به سیملوله است، بنابراین طبق قانون لنز، قطب‌های سیملوله، قطب‌های آهنربا را دفع می‌کند. بنابراین قطب (۱) در واقع قطب N آهنربا می‌باشد.



گام دوم: آهنربا ابتدا با قطب S وارد حلقه می‌شود. در این حالت شار عبوری از حلقه افزایش می‌یابد و جریان القایی در حلقه به گونه‌ای است که آهنربا را دفع کند و جریان القایی با توجه به قانون دست راست از M به N خواهد بود.

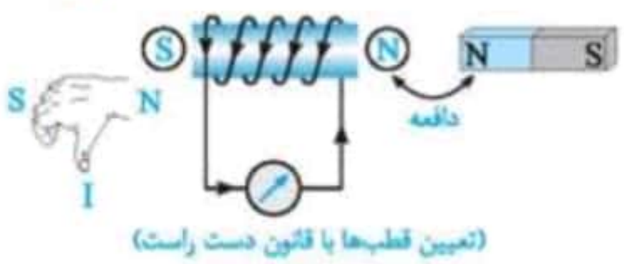


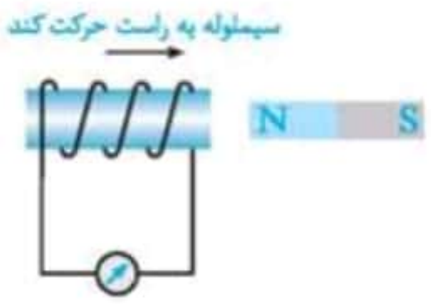
گام سوم: در هنگام خروج آهنربا، شار عبوری از آن در حال کاهش است و جریان القایی در حلقه به گونه‌ای است که آهنربا را جذب کند و جریان القایی با توجه به قانون دست راست، از N به M خواهد بود.

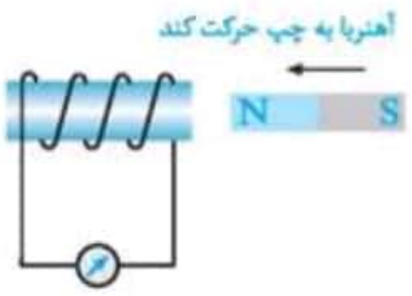


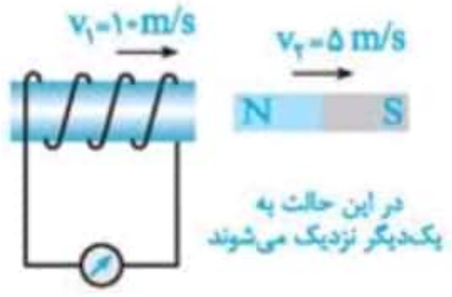
۱ ۲۱۲۵ با توجه به جهت جریان القایی در سیملوله، سیملوله و آهنربا یک‌دیگر را دفع می‌کنند و این موضوع یعنی شار عبوری از سیم‌پیچ در حال افزایش است:

در موارد زیر که سیملوله و آهنربا به یک‌دیگر نزدیک می‌شوند، این اتفاق رخ می‌دهد:





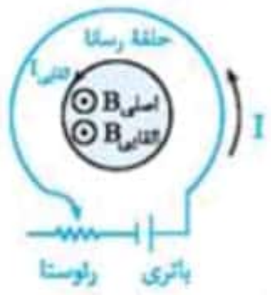




با توجه به این توضیحات گزینهٔ (۱) صحیح است.

* دقت کنیم در گزینه‌های ۳ و ۴ آهنربا و سیم‌پیچ از هم دورتر می‌شوند (چرا؟).

gajmarket.com



۴ ۲۱۲۶ در گام اول باید دقت شود که با جابه‌جایی لغزندهٔ رئوستا به سمت چپ، مقاومت آن افزایش می‌یابد. با افزایش مقاومت رئوستا، جریان گذرنده از حلقهٔ بزرگ کاهش می‌یابد. در ادامه می‌توان گفت که با کاهش I، بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ بزرگ نیز کم می‌شود.

با کاهش I، $B_{اصلی}$ نیز کاهش می‌یابد. $\Rightarrow I \propto B_{اصلی}$

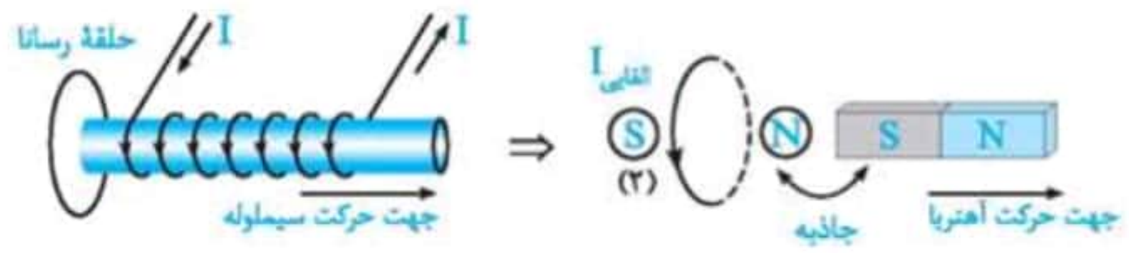
حال با کاهش $B_{اصلی}$ (میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ بزرگ‌تر)، شار گذرنده از حلقهٔ کوچک نیز کاهش می‌یابد. مطابق قانون لنز میدان ناشی از جریان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند تا مانع از کاهش آن شود، بنابراین این میدان القایی باید برون‌سو باشد (زیرا میدان اصلی نیز برون‌سو و در حال کاهش است).

با توجه به برون‌سو بودن میدان القایی، جریان القایی در حلقهٔ کوچک طبق قاعدهٔ دست راست باید در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت باشد، بنابراین جریان اصلی I کاهش‌یافته و جریان القایی در حلقهٔ رسانا، پادساعتگرد است، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳ ۲۱۲۷ این سؤال، سؤال جالب و مفهومی می‌باشد که در آن به بررسی دو حالت می‌پردازیم:

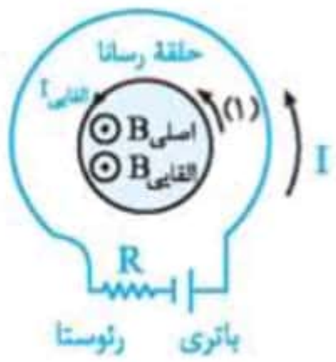
شکل (الف): با عبور جریان از سیملوله، سیملوله تبدیل به آهنربا می‌شود که قطب S و N آن به کمک قانون دست راست تعیین می‌شود.

بنابراین در هنگام دور شدن آهنربای الکتریکی، خطوط میدان مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد در حال کاهش است و شار عبوری از حلقه در حال کاهش است. با توجه به کاهش شار عبوری، مطابق قانون لنز، حلقه که می‌تواند خود به یک آهنربا تبدیل شود، قطب‌هایش را به گونه‌ای تبدیل می‌کند که نیروی جاذبهٔ $N - S$، مانع از دور شدن آهنربا شود. در این حالت جریان القایی با کمک قانون دست راست در جهت (۲) است.



(شست دست راست را در جهت $I_{القایی}$ بر روی حلقه قرار دهید، خم شدن انگشتان در درون حلقه از S به N است.)

دقت: توصیه می‌شود که با توجه به تکنیک دافعه و جاذبهٔ سیم‌ها نیز جهت جریان القایی در حلقه را به دست آورید.

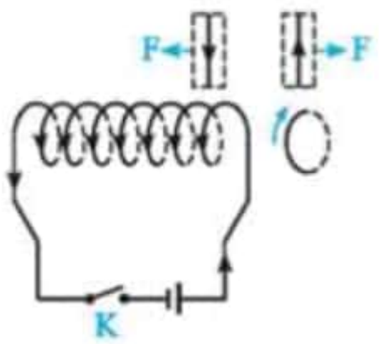


شکل (ب): با افزایش دما، مقاومت R افزایش می‌یابد. با افزایش مقاومت، جریان گذرنده از حلقهٔ بزرگ کاهش می‌یابد و با کاهش I، بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ بزرگ نیز کم می‌شود.

با کاهش I، $B_{اصلی}$ کاهش می‌یابد. $\Rightarrow I \propto B_{اصلی}$

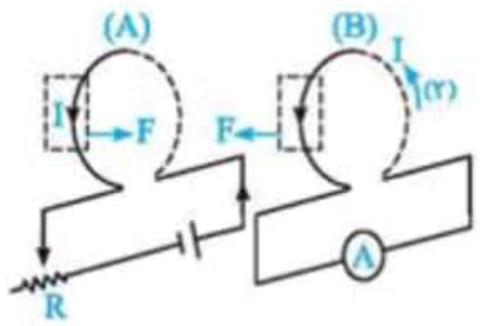
حال با کاهش $B_{اصلی}$ (میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ بزرگ‌تر)، شار گذرنده از حلقهٔ کوچک نیز کاهش می‌یابد. مطابق قانون لنز میدان ناشی از جریان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند تا مانع از کاهش آن شود، بنابراین این میدان القایی باید برون‌سو باشد (زیرا میدان اصلی نیز برون‌سو و در حال کاهش است).

با توجه به برون‌سو بودن میدان القایی، جریان القایی در حلقهٔ کوچک طبق قاعدهٔ دست راست باید در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت باشد، بنابراین جریان در جهت (۱) می‌باشد.



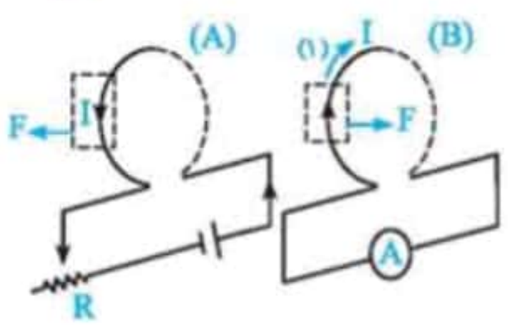
۳ ۲۱۲۸ با توجه به شکل مقابل، جریان القایی حلقه و جریان بر روی حلقه‌های سیملوله در خلاف جهت یکدیگر بوده و یکدیگر را دفع می‌کنند. با توجه به وجود دافعه، نتیجه می‌گیریم شار عبوری از حلقه در حال افزایش بوده است و حلقه مطابق قانون لنز سیملوله را دفع کرده است. افزایش شار در لحظهٔ وصل کلید K رخ داده است.

- دقت کنیم در لحظهٔ قطع کلید شار عبوری از حلقه کم شده و حلقه و سیملوله یکدیگر را جذب می‌کنند. هم‌چنین اگر جریان سیملوله متغیر نباشد، شار عبوری از حلقه تغییر نکرده و ولتاژ و جریانی در آن القا نمی‌شود (حتی اگر شدت جریان ماکزیمم باشد).
- به‌عنوان تمرین، این سؤال را به روش تعیین قطب‌های N و S برای حلقه و سیملوله و بررسی نیروی بین آن‌ها نیز پاسخ دهید.

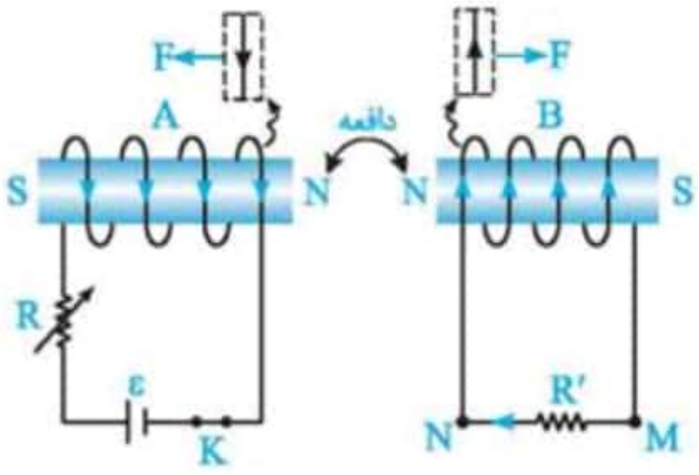


۳ ۲۱۲۹ این سؤال را در دو مرحله بررسی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: با افزایش مقاومت R، جریان در حلقهٔ (A) کاهش می‌یابد و با کاهش جریان در حلقهٔ A، میدان مغناطیسی حلقهٔ A کاهش یافته و با کاهش میدان A، شار عبوری از حلقهٔ B نیز کاهش می‌یابد. در این حالت مطابق قانون لنز، حلقهٔ B حلقهٔ A را جذب می‌کند و جریان القایی در آن در جهت (۲) است (جریان‌های دو حلقه هم‌جهت است).



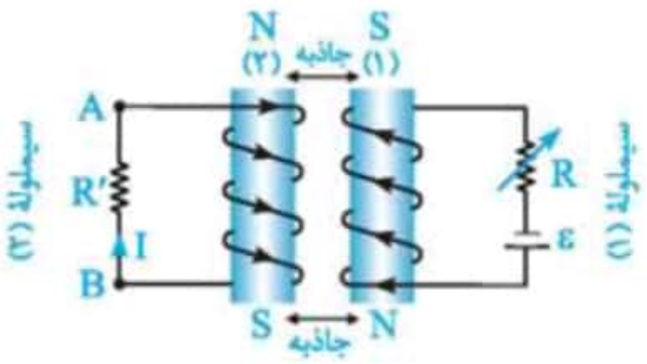
مرحلهٔ دوم: با کاهش مقاومت R، جریان در حلقهٔ (A) افزایش می‌یابد و با افزایش جریان در حلقهٔ A، میدان مغناطیسی حلقهٔ A افزایش یافته و با افزایش میدان A، شار عبوری از حلقهٔ B نیز افزایش می‌یابد. در این حالت مطابق قانون لنز، حلقهٔ B حلقهٔ A را دفع می‌کند و جریان القایی در آن در جهت (۱) است (جریان‌های دو حلقه خلاف جهت هم است).



۳ ۲۱۳۰ اگر جریان القایی در مقاومت R' از M به N باشد، دو سیملوله یک‌دیگر را دفع کرده (تعیین دافعه، از طریق تعیین قطب‌ها و یا نیروی بین سیم‌ها قابل تعیین است که در شکل مقابل از هر دو طریق این عمل انجام شده است.) و این موضوع زمانی رخ می‌دهد که شار عبوری از سیملولهٔ B در حال افزایش باشد.

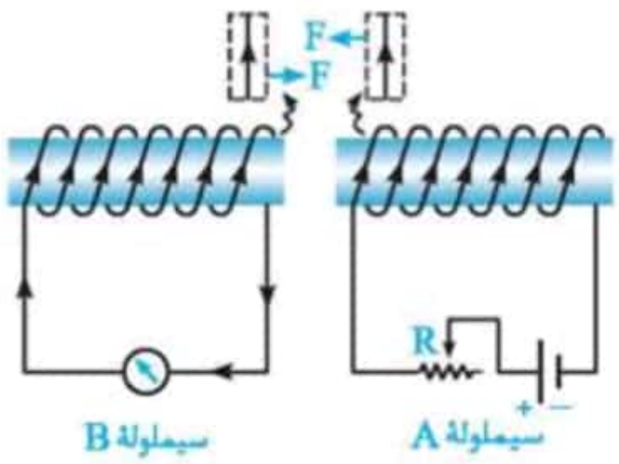
از بین گزینه‌های مطرح شده، تنها در حالتی‌که سیملولهٔ A به B نزدیک می‌شود، شار عبوری از سیملولهٔ B در حال افزایش است و مطابق قانون لنز دو سیملوله یک‌دیگر را دفع می‌کنند.

* سه گزینهٔ دیگر، باعث کاهش شار عبوری از سیملولهٔ B می‌شود.



۲ ۲۱۳۱ با افزایش مقاومت R، جریان در سیملولهٔ (۱) کاهش می‌یابد. با کم شدن جریان عبوری از سیملولهٔ سمت راست، میدان آن کاهش یافته و شار عبوری از سیملولهٔ (۲) نیز کاهش می‌یابد، بنابراین سیملولهٔ (۲) باید سیملولهٔ (۱) را جذب کند تا مانع از کاهش شار شود. در ادامه با توجه به تعیین قطب‌های سیملولهٔ (۱)، قطب‌های سیملولهٔ (۲) را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که سیملولهٔ (۱) را جذب کند و در این حالت مطابق قانون دست راست، جریان القایی در مقاومت R' از B به A است.

$R \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow B \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow \Rightarrow$ باید جلوی کاهش Φ گرفته شود.

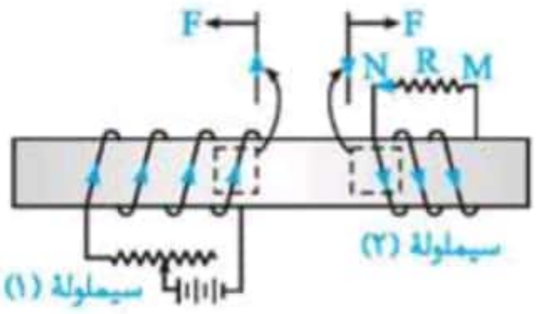


۴ ۲۱۳۲ با توجه به جهت جریان اصلی در سیملولهٔ (A) و جهت جریان القایی در سیملولهٔ (B)، جریان حلقه‌های دو سیملوله هم‌جهت بوده و دو سیملوله یک‌دیگر را جذب می‌کنند. از طرفی جاذبهٔ میان دو سیملوله زمانی رخ می‌دهد که شار عبوری از سیملولهٔ B در حال کاهش باشد. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که مقاومت رئوستا در حال افزایش باشد.

$R \uparrow \Rightarrow I_A \downarrow \Rightarrow B_A \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow \Rightarrow$ دو سیملوله یک‌دیگر را جذب می‌کنند.

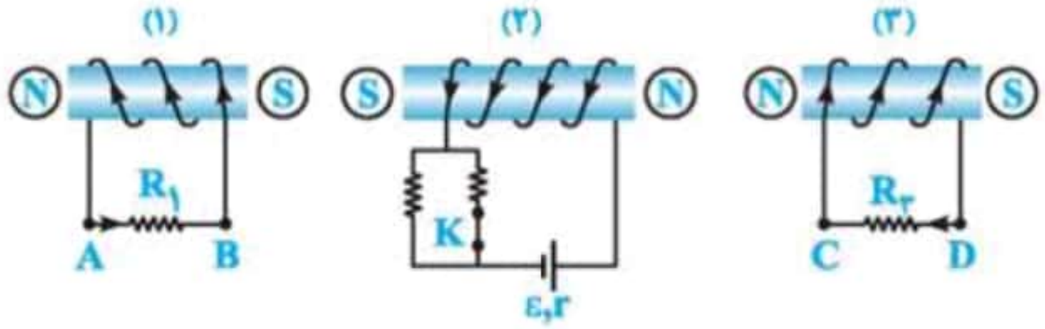
دقت: تلاش کنید تا با تحلیل قطب‌های دو سیملوله نیز، این سؤال را حل کنید.

۲ ۲۱۳۳ در حالت اول که رئوستا در محل خودش ثابت است، شار عبوری از سیملولهٔ سمت راست تغییر نمی‌کند و طبق قانون القای فارادی، به‌دلیل عدم تغییر شار، جریان القایی ایجادشده در سیملولهٔ سمت راست صفر است.



در حالت دوم که لغزنده رئوستا به سمت چپ جابه‌جا می‌شود، مقاومت موجود در سیملولهٔ (۱) کاهش می‌یابد (مقاومت کم‌تری در مسیر جریان قرار می‌گیرد) و این موضوع جریان عبوری از سیملولهٔ (۱) و میدان ناشی از آن را افزایش می‌دهد که سبب افزایش شار عبوری از سیملولهٔ (۲) می‌شود. مطابق قانون لنز، سیملولهٔ (۲) باید مانع از افزایش شار شود و به گونه‌ای عمل می‌کند که سیملولهٔ (۱) را دفع کند و در نتیجه جریان بر روی حلقه‌های آن برخلاف سیملولهٔ (۱) بوده و با توجه به شکل رسم شده، جریان القایی از M به سمت N است.

۴ ۲۱۳۴ با بسته شدن کلید K، مقاومت معادل مدار (۲) کاهش یافته و جریان عبوری از آن افزایش می‌یابد. با افزایش جریان عبوری از سیملولهٔ (۲)، میدان مغناطیسی آن قوی‌تر شده و شار عبوری از سیملوله‌های (۱) و (۳) افزایش می‌یابد. با توجه به قانون لنز، قطب‌های سیملوله‌های (۱) و (۳) باید به‌گونه‌ای باشند که سیملولهٔ (۲) را دفع کنند، بنابراین جریان القایی در مقاومت R_1 از A به B و جریان القایی در مقاومت R_2 از D به C است.



با توجه به این‌که جریان در مقاومت R_1 از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B می‌باشد، می‌توان گفت که پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A بزرگ‌تر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B می‌باشد.

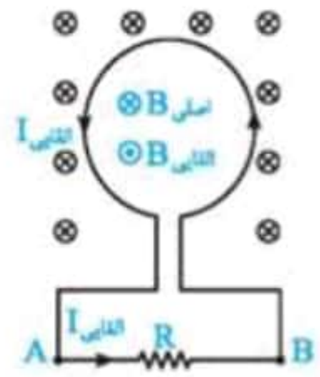
$$V_A - R_1 I = V_B \Rightarrow V_A - V_B = R_1 I > 0 \Rightarrow V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$

به‌طور مشابه نیز می‌توان گفت که $V_D > V_C$ می‌باشد.

دقت: تلاش کنید با تحلیل جاذبه و دافعهٔ بین سیم‌ها نیز این سؤال را بررسی کنید.

gajmarket.com

۱ ۲۱۳۵ با توجه به افزایش شار عبوری از حلقه با گذشت زمان، مطابق قانون لنز، میدان القایی باید در خلاف جهت میدان اصلی باشد تا مانع از افزایش شار شود. بنابراین جریان القایی در این مدار باید در جهت نشان داده شده باشد (از A به B).

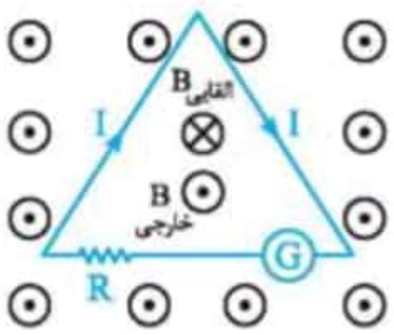


$$|\bar{\varepsilon}| = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$$

$$\Phi = (5t^2 + 6t)\times 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = 0 \\ t_2 = 2s \Rightarrow \Phi_2 = (5\times 2^2 + 6\times 2)\times 10^{-3} = 32\times 10^{-3}\,Wb \end{cases}$$

$$|\bar{\varepsilon}| = \left|-1\times\frac{32\times 10^{-3} - 0}{2-0}\right| = 16\times 10^{-3}\,V = 16\,mV$$

۱ ۲۱۳۶ با توجه به اطلاعات مطرح شده در صورت سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

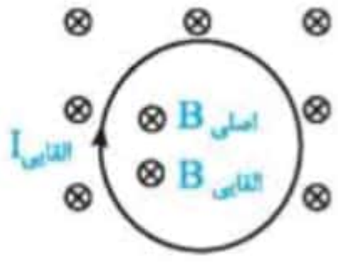


$$\bar{I} = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = t]{N=1} |\Delta\Phi| = R\bar{I}t$$

بنابراین میزان تغییرات شار مغناطیسی برابر $\Delta\Phi = RIt$ می‌باشد. از طرفی با توجه به جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان I در شکل مقابل، می‌توان گفت میدان خارجی در حال افزایش است و شار مغناطیسی افزایش یافته است و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۴ ۲۱۳۷ این سؤال جالب و مهم را در دو مرحله بررسی می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: در مرحلهٔ اول میدان درون‌سو بوده $(+B)$ و کاهش یافته تا به صفر برسد. در این مرحله اندازهٔ شار عبوری از حلقه در حال کاهش بوده و مطابق قانون لنز، میدان القایی باید کمک میدان اصلی کند تا مانع از کاهش شار شود. در این حالت میدان القایی درون‌سو است و جریان القایی مطابق قانون دست راست ساعتگرد است (در جهت (۲)).



$$B\downarrow \Rightarrow \Phi\downarrow \xrightarrow{\text{لنز}}$$ میدان القایی در جهت میدان اصلی است.

مرحلهٔ دوم: در مرحلهٔ دوم میدان از صفر به $-B$ می‌رسد، یعنی میدان برون‌سو شده و اندازهٔ آن $|B|$ در حال افزایش است. در این مرحله اندازهٔ شار عبوری از حلقه در حال افزایش بوده و مطابق قانون لنز، میدان القایی باید در خلاف جهت میدان اصلی باشد تا مانع از افزایش شار شود. در این حالت نیز میدان القایی درون‌سو بوده و جریان القایی مجدداً ساعتگرد است (در جهت (۲)).

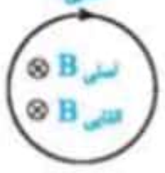


$$|B|\uparrow \Rightarrow \Phi\uparrow \xrightarrow{\text{لنز}}$$ میدان القایی در خلاف جهت میدان اصلی است.

بنابراین جریان القایی همواره در جهت (۲) است.

۱ ۲۱۳۸ با توجه به این‌که جهت مثبت جریان در سیم راست را به سمت چپ گرفتیم، از لحظهٔ صفر تا $t = \frac{1}{2}s$ جریان عبوری از سیم مستقیم به سمت راست و میدان ناشی از آن در مرکز حلقه به‌صورت درون‌سو است. از طرفی با توجه به کاهش جریان I در این بازهٔ زمانی، میدان اصلی در مرکز حلقه کاهش و در نتیجه میدان القایی نیز باید درون‌سو باشد، بنابراین جریان در حلقه باید ساعتگرد باشد.

$0 < t < \frac{1}{2}s$:



$$I\downarrow \Rightarrow B_{\text{اصلی}}\downarrow \Rightarrow \Phi_{\text{حلقه}}\downarrow \xrightarrow{\text{لنز}}$$ میدان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند.

پس از لحظهٔ $t = \frac{1}{2}s$، جریان عبوری از حلقه تغییر جهت داده و به سمت چپ می‌شود. در ضمن اندازهٔ این جریان با گذشت زمان افزایش می‌یابد. بنابراین میدان مغناطیسی اصلی در مرکز حلقه برون‌سو بوده و اندازهٔ آن افزایش می‌یابد، در نتیجه بر طبق قانون لنز، باید جریان القایی در حلقه ساعتگرد باشد تا میدان القایی ناشی از آن میدان اصلی را تضعیف کند.



$t > \frac{1}{2}s$:

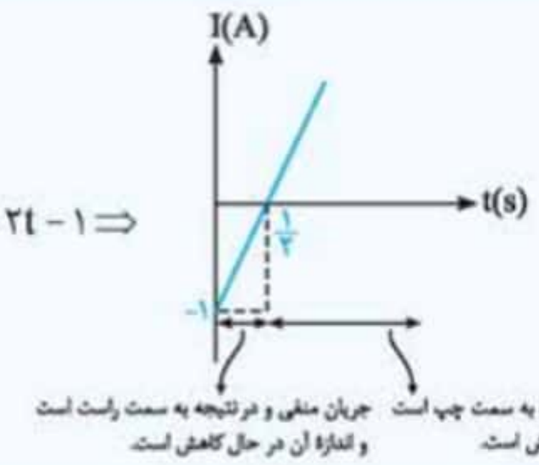


$$I\uparrow \Rightarrow B_{\text{اصلی}}\uparrow \Rightarrow \Phi_{\text{حلقه}}\uparrow \Rightarrow$$ میدان القایی باید میدان اصلی را تضعیف کند.

تذکر

بررسی تغییرات جریان I (جهت جریان مثبت را به سمت چپ فرض کردیم):

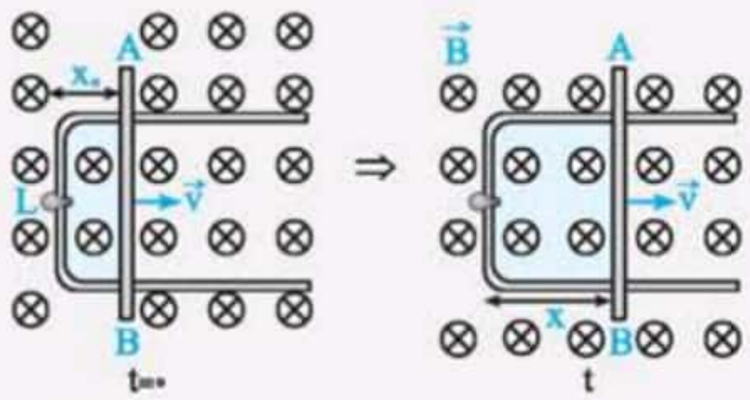
$I = 2t - 1 \Rightarrow$



۴ ۲۱۳۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۴ نیروی محرکهٔ القایی ایجاد شده در یک سیم متحرک در میدان مغناطیسی یکنواخت (تست‌های ۲۱۳۹ تا ۲۱۵۸)

برای شروع این بحث، فرض کنید که قاب مستطیل شکل رسانایی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت درون‌سویی قرار می‌دهیم. درنظر بگیرید که یکی از اضلاع قاب را با تندی v مطابق شکل زیر حرکت می‌دهیم تا شار عبوری از درون قاب تغییر کند. در اثر رخ دادن این موضوع نیرو محرکهٔ القایی در آن ایجاد شود. نیرو محرکهٔ القایی باعث روشن شدن لامپ می‌شود. با توجه به شکل، سطح قاب در لحظهٔ $t = 0$ برابر $A_0 = Lx_0$ و در لحظهٔ t برابر $A = Lx$ است (L عرض قاب، x_0 و x طول قاب در لحظات t_0 و t است). زاویهٔ بین راستای میدان و راستای بردار عمود بر سطح صفر است، بنابراین:



$$\Delta\Phi = \Delta(AB\cos\theta) = B\Delta A\cos\theta = B\Delta A\cos 0$$

$$\Delta\Phi = B\Delta A = B(Lx - Lx_0) = BL(x - x_0) = BL\Delta x$$

از طرفی داریم:

$$\overline{\varepsilon} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{BL\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{\varepsilon} = -BL\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{\varepsilon} = -BLv_{av}$$

که در آن $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، تندی متوسط سیم متحرک است.

هم‌چنین برای محاسبهٔ نیروی محرکهٔ القایی لحظه‌ای نیز کافیست به جای v_{av}، مقدار v را در رابطه قرار دهیم:

$$\varepsilon = -BLv$$

دقت شود که L طول سیم **متحرک** قرار گرفته در میدان مغناطیسی است ($\varepsilon \propto L$).

نکات مهم و کاربردی

۱ اگر میله با تندی ثابت v حرکت کند، نیروی محرکهٔ القایی مقداری ثابت خواهد داشت. ولی اگر حرکت میله شتاب‌دار باشد، چون تندی آن با گذشت زمان تغییر می‌کند، بنابراین نیروی محرکهٔ القایی نیز تغییر خواهد کرد.

۲ به‌طور مشابه ثابت می‌شود که اگر بردار سرعت با راستای میدان زاویهٔ α بسازد، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی از رابطهٔ $\varepsilon = BvL\sin\alpha$ به‌دست می‌آید.

تعیین جهت جریان القایی در سیم متحرک

برای تعیین جهت جریان القایی در قطعهٔ متحرک می‌توان به سادگی از قانون لنز استفاده کرد. در این‌گونه حالت‌ها از روش قانون دست راست نیز به‌عنوان یک روش سریع‌تر می‌توان استفاده کرد که دارای سه مرحله است:

مرحلهٔ اول: چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار می‌دهیم.

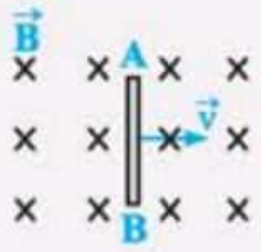
مرحلهٔ دوم: به گونه‌ای که جهت خم شدن انگشتان دست به سوی $\vec{B}$ باشد.

مرحلهٔ سوم: در این حالت جهت انگشت شست، سوی جریان القایی در قطعهٔ متحرک را نشان می‌دهد.

به‌طور مثال در حرکت میلهٔ AB در شکل فوق، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار دهیم به‌طوری‌که خم شدن آن‌ها در جهت $\vec{B}$ باشد، جهت انگشت شست به‌سمت بالا بوده و در نتیجه جهت جریان القایی در میلهٔ متحرک به سمت بالاست.

دقت: اگر فقط یک میلهٔ تنها (در مدار قرار نگرفته است) را در داخل میدان مغناطیسی حرکت دهیم، در دو سر میله اختلاف پتانسیل ایجاد می‌شود ولی چون مسیر بسته‌ای برای عبور جریان وجود ندارد، در میله جریانی به‌وجود نمی‌آید. روش تشخیص این‌که کدام سر میله پتانسیل بیشتری دارد را در تمرین بعد به شما عزیزان آموزش می‌دهیم.

تمرین ۱ **در شکل مقابل میله‌ای را با تندی ثابت، در جهت نشان داده شده در یک میدان مغناطیسی درون‌سو حرکت می‌دهیم. در مقایسهٔ پتانسیل نقاط A و B، کدام گزینه صحیح است؟** (تألیفی)

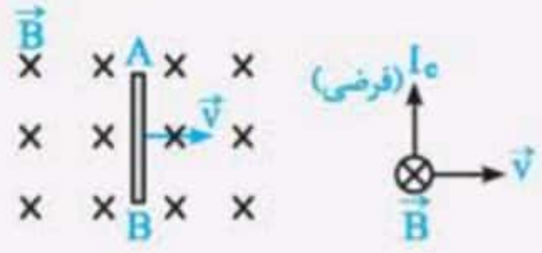


۱) $V_A > V_B$

۲) $V_A < V_B$

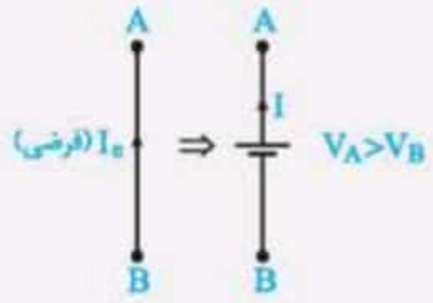
۳) $V_A = V_B$

۴) $V_A = V_B = 0$



پاسخ با توجه به قانون دست راست، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت بردار سرعت قرار دهیم به‌گونه‌ای که خم شدن انگشتان دست راست سوی میدان مغناطیسی را نشان دهد، در این حالت انگشت شست سوی جریان القایی فرضی در میله را نشان می‌دهد.

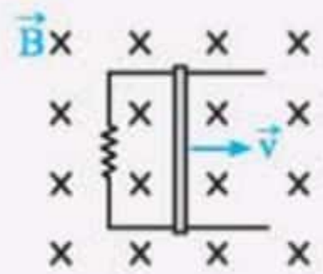
gajmarket.com



در این حالت، میله مانند یک باتری عمل می‌کند که جریان فرضی از قطب مثبت خارج می‌شود و می‌توان گفت پتانسیل نقطهٔ متصل به قطب مثبت (A) بیشتر از پتانسیل نقطهٔ متصل به قطب منفی (B) است و گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

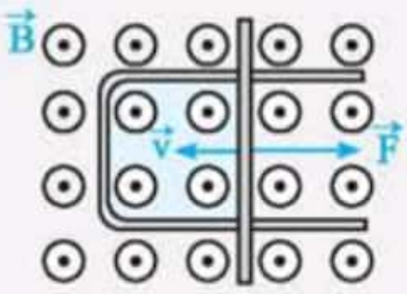
تذکر در تمرینی که بررسی کردیم این تحلیل که جریان فرضی از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کم‌تر حرکت می‌کند، نادرست است. این تحلیل زمانی صحیح است که در قسمت مورد بحث ما، باتری حضور نداشته باشد، اما در این سؤال میله خود شبیه به یک باتری عمل می‌کند.

در این سؤال در دو سر میله اختلاف پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ BvL ایجاد می‌شود ولی به‌علت وجود نداشتن یک مسیر بسته، عملاً جریان نمی‌تواند به‌وجود آید (به همین دلیل فرض می‌کنیم جریان در میله بالا برقرار است تا V_A و V_B را مقایسه کنیم). در حالت مقابل جریان می‌تواند در مدار ایجاد شود، چون یک مسیر بسته وجود دارد.

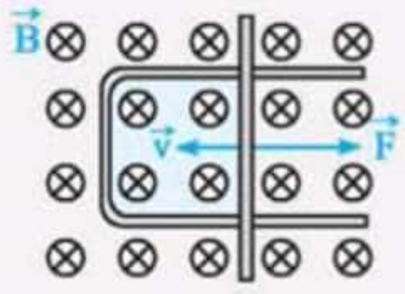


جهت نیروی وارد بر میلهٔ متحرک از طرف میدان مغناطیسی

شکل مقابل را درنظر بگیرید، در این حالت بر جزء متحرک از طرف میدان نیرویی وارد می‌شود که می‌توان گفت این نیرو در خلاف جهت حرکت جزء متحرک است، زیرا قرار است با حرکت آن مخالفت کند و جالب است بدانید که این موضوع از جهت میدان (برون‌سو یا درون‌سو بودن) مستقل است. به‌عبارت دیگر در هر دو شکل مقابل، اگر میله به سمت چپ حرکت کند، برای جلوگیری از تغییر شار در حلقه، نیروی وارد بر میله از سوی میدان مغناطیسی به سمت راست خواهد بود.



(نیروی میدان به راست)



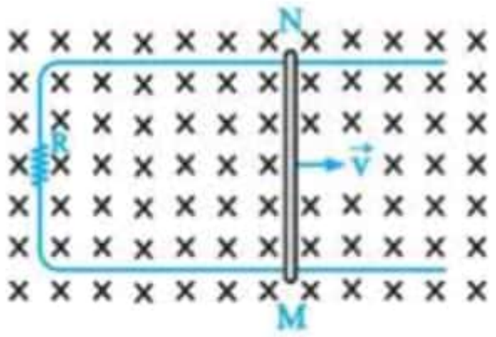
(نیروی میدان به راست)

با توجه به خلاصه نکات ارائه شده، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

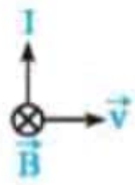
۱) با حرکت میله به سمت راست، سطح قاب افزایش پیدا کرده و در نتیجه مقدار شار عبوری از قاب افزایش می‌یابد.

$$\uparrow \Phi = \uparrow A\, B\cos\circ$$

۲) با توجه به قانون دست راست، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت بردار سرعت قسمت متحرک قرار داده و خم شدن انگشتان دست راست، سوی میدان مغناطیسی را نشان دهد، انگشت شست، جهت جریان القایی در **میلهٔ متحرک** را نشان می‌دهد.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ جریان القایی در میله از M به N است.

۳) بزرگی نیروی محرکهٔ القایی در دو سر یک میلهٔ متحرک که به‌صورت عمود بر خطوط میدان حرکت می‌کند برابر $\varepsilon = BvL\sin 90^\circ$ می‌باشد. بنابراین شدت جریان القایی برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow \uparrow I = \frac{\uparrow BvL}{R} \Rightarrow$$

با قوی‌تر شدن میدان مغناطیسی، جریان القایی در میله افزایش می‌یابد.

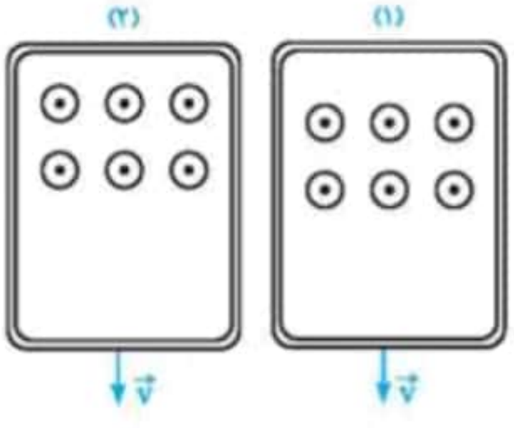
۴) با توجه به رابطهٔ $\varepsilon = BvL\sin\alpha$، می‌توان گفت که با افزایش تندی حرکت میله، نیروی محرکهٔ القایی در دو سر میله، افزایش خواهد یافت.

$$\uparrow \varepsilon = B \uparrow v L\sin\alpha \Rightarrow$$

با افزایش v، ε بیشتر می‌شود.

بنابراین عبارت مطرح‌شده در گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴۲۱۴۰ در قاب (الف) و (ب)، سطح به موازات میدان مغناطیسی قرار دارد و از آن شاری عبور نمی‌کند. در این حالت با جابه‌جایی در حال انجام، $\Delta\Phi = \circ$ بوده و جریان القایی تولید نمی‌شود.



در قاب (ج)، میدان به‌طور کامل درون حلقه است و با جابه‌جایی حلقه، در وضعیت نشان داده شده، سطح قاب در داخل میدان تغییر نمی‌کند و مجدداً $\Delta\Phi = \circ$ بوده و جریان القایی تولید نمی‌شود.

$$\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \Delta\Phi = \circ$$

در قاب (د)، با جابه‌جایی میله سطح قاب در داخل میدان کاهش یافته و $\Delta\Phi \neq \circ$ است. در این حالت در قاب جریان القایی ایجاد می‌شود.

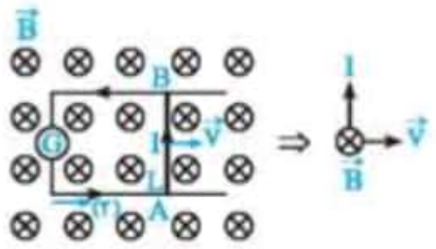
۴ ۲۱۴۱ با نصف شدن طول سیم و شدت میدان مغناطیسی و با توجه به ثابت ماندن تندی حرکت میله، می‌توان نوشت:

$$|\varepsilon| = B\underbrace{v}_{\text{ثابت مانده است.}} L\sin ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱} = \frac{B_۲}{B_۱} \times \frac{L_۲}{L_۱} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۲ ۲۱۴۲ با توجه به اطلاعات سؤال و روابط زیر، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} |\varepsilon| = BvL \\ I = \dfrac{\varepsilon}{R} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{BvL}{R} \Rightarrow ۰/۵ = \frac{۰/۱ \times v \times ۰/۲۵}{۰/۲} \Rightarrow v = ۴\,m/s$$

۴ ۲۱۴۳ با توجه به یکنواخت بودن حرکت میله، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی ایجاد شده در دو سر آن برابر است با:

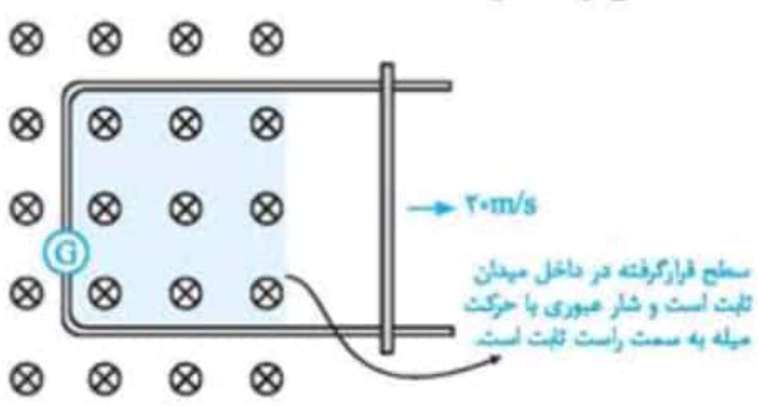


$$\varepsilon = BvL\sin\alpha = ۰/۰۵ \times ۲۰ \times ۰/۴ \times \sin ۹۰^\circ = ۰/۴\,V$$

از طرفی برای تعیین جهت جریان القایی، با توجه به قانون دست راست برای میلهٔ AB، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت بردار سرعت قسمت متحرک قرار داده و خم شدن انگشتان دست راست سوی میدان مغناطیسی را نشان دهد، انگشت شست، جهت جریان القایی در میلهٔ متحرک را نشان می‌دهد.

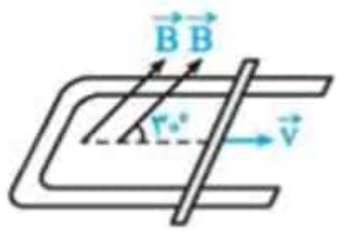
۴ ۲۱۴۴ در تست قبل، اگر با توجه به شکل نشان داده شده، کل قاب در داخل میدان مغناطیسی قرار نگرفته باشد، با جابه‌جا شدن میله به سمت راست، شار عبوری از مدار تغییر نکرده و جریان القایی و نیروی محرکهٔ القایی صفر است.

۳ ۲۱۴۵ با توجه به خلاصه نکات (۱۴)، اگر بردار سرعت میله با راستای میدان مغناطیسی زاویهٔ α بسازد، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی در دو سر میلهٔ متحرک برابر $\varepsilon = BvL\sin\alpha$ می‌باشد.



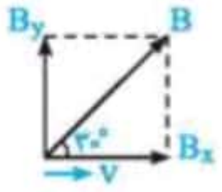
$$\varepsilon = BvL\sin\alpha = ۰/۲ \times ۴۵ \times \underbrace{۰/۲۵}_{\frac{۱}{۴}} \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۹}{۸}\,V$$

از طرفی چون مقاومت کل قرار گرفته در مدار بسته برابر $۰/۵\Omega$ می‌باشد، جریان در سیم راست برابر است با:



$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\frac{۹}{۸}}{\frac{۱}{۲}} = ۲/۲۵\,A$$

دید دیگر: در رابطهٔ $\varepsilon = BvL$، B مؤلفه‌ای از میدان مغناطیسی است که بر راستای سرعت میله عمود است و مؤلفهٔ دیگر میدان مغناطیسی که در راستای سرعت میله است، تأثیری در نیروی محرکهٔ القایی ندارد.



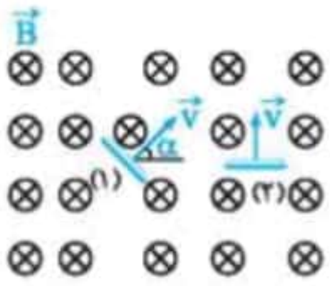
$$B_y = B\sin(۳۰^\circ)$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \left|\frac{-B_y \cdot v \cdot L}{R}\right| = \left|\frac{-(۰/۲ \times \frac{۱}{۲}) \times ۴۵ \times ۲۵ \times ۱۰^{-۲}}{۰/۵}\right| = ۲/۲۵\,A$$

تمرین سیم راستی به طول $۲\,m$ در یک میدان مغناطیسی با شدت ۰/۰۴ تسلا قرار دارد و راستای سیم با جهت میدان زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. سیم را با تندی ثابت $۵\,m/s$ در جهتی که عمود بر سیم بوده و با میدان زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد در مسیر مستقیم حرکت می‌دهیم، نیروی محرکهٔ القایی بین دو سر سیم چند ولت است؟

۱) ۰/۲ ۲) $۰/۲\sqrt{۳}$ ۳) ۰/۴ ۴) $۰/۴\sqrt{۳}$

۱ ۲۱۴۶ با کمی دقت متوجه می‌شویم که حرکت هر دو میله بر راستای خطوط میدان مغناطیسی عمود است (چون میله‌ها در داخل صفحه حرکت می‌کنند ولی راستای خطوط میدان عمود بر صفحه است). بنابراین به کمک رابطهٔ $\varepsilon = BvL\sin\alpha$ می‌توان نوشت:



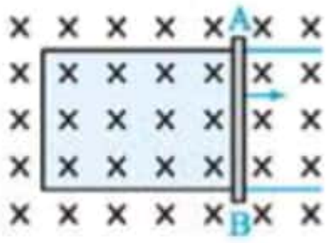
$$\begin{cases} \varepsilon_۱ = BvL\sin ۹۰^\circ \\ \varepsilon_۲ = BvL\sin ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_۱ = \varepsilon_۲$$

gajmarket.com

۳ ۲۱۴۷ اگر جریان القایی ۰/۰۲A در مدار شامل میلهٔ AB القا شود، با توجه به این‌که تنها سیم AB از مدار دارای مقاومت است، می‌توان نوشت:

$$I_e=\frac{\varepsilon}{R}\Rightarrow ۰/۰۲=\frac{\varepsilon}{۴}\Rightarrow \varepsilon=۰/۰۸\,V$$

در ادامه با توجه به این‌که ایجاد نیروی محرکهٔ القایی به دلیل تغییر در مساحت قسمت هاشورخورده است، می‌توان نوشت:



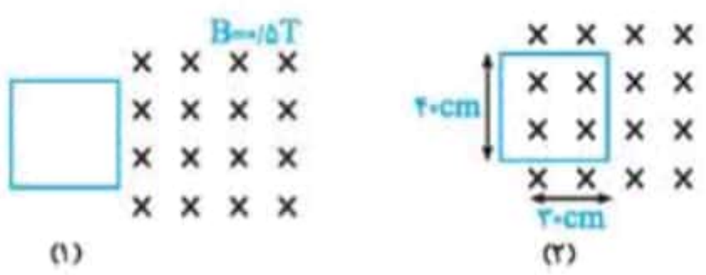
$$\begin{cases}|\overline{\varepsilon}|=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|\\ \Delta\Phi=\Delta(A\,B\cos\theta)=B\cos\theta\,\Delta A\ ,\ N=۱\end{cases}\Rightarrow |\overline{\varepsilon}|=B\cos\theta\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

اعداد ثابت

$$\Rightarrow ۰/۰۸=۵\times۱۰^{-۲}\times\cos۰\times\frac{\Delta A}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\Delta A}{\Delta t}=۱/۶\,m^۲/s$$

دقت: θ زاویهٔ میان بردار عمود برسطح هاشورخورده و میدان مغناطیسی است که در این سؤال صفر است.

۳ ۲۱۴۸ **روش اول:** ابتدا تغییرات شار در سیم‌پیچ را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}\Phi_۲=BA=۰/۵\times(۰/۳\times۰/۴)=۶\times۱۰^{-۲}\ Wb\\ \Phi_۱=۰\end{cases}$$

از سوی دیگر سیم‌پیچ به‌مدت $\frac{۱}{۱۰}s$ طول می‌کشد تا با سرعت $۳\,m/s$ به میزان $۳۰\,cm$ وارد میدان شود:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۰/۳=۳\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۱}{۱۰}s$$

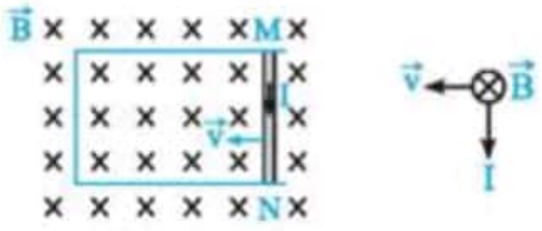
در ادامه با توجه به قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\Rightarrow|\varepsilon|=\left|-۲۰\times\frac{۶\times۱۰^{-۲}-۰}{۱۰^{-۱}}\right|=۱۲\,V$$

روش دوم: با توجه به یکنواخت بودن حرکت سیم‌پیچ می‌توان نوشت:

$$|\varepsilon|=NBLv\Rightarrow|\varepsilon|=۲۰\times۰/۵\times۰/۴\times۳=۱۲\,V$$

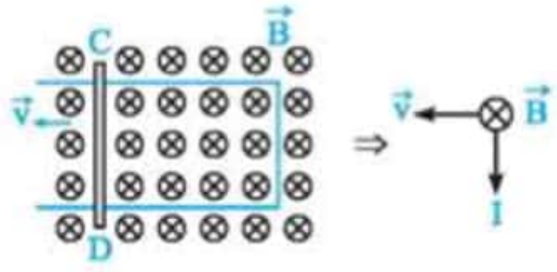
۱ ۲۱۴۹ با توجه به قانون دست راست، جریان القایی در میله از M به N است (چهار انگشت دست راست در جهت v، خم شدن B، شست دست راست، جهت I در میلهٔ متحرک را نشان می‌دهد). حال با توجه به این‌که میله با شتاب ثابت به سمت چپ جابه‌جا شود، می‌دانیم که تندی آن در حال افزایش است ($v_{\text{میله}}=at$) و این موضوع سبب می‌شود که بزرگی نیروی محرکهٔ القایی افزایش یابد ($\varepsilon=Bv_{\text{میله}}\times L$). با بزرگ شدن ε اندازهٔ جریان القایی در میله نیز افزایش می‌یابد $\left(I_e=\frac{\varepsilon}{R}\right)$.



۴ ۲۱۵۰ اندازهٔ ولتاژ القایی ایجاد شده در دو سر میله برابر است با:

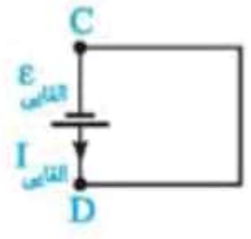
$$|\varepsilon|=Bv\,L\sin\alpha=۲\times۱۰^{-۳}\times۰/۵\times۰/۴\times\sin۹۰^\circ=۴\times۱۰^{-۴}\,V$$

با توجه به قانون دست راست، جهت جریان القایی در میلهٔ CD، از C به‌طرف D می‌باشد.



$\Rightarrow$ جریان القایی در میلهٔ CD، از C به طرف D است.

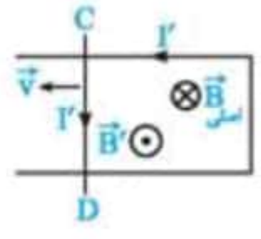
از طرفی می‌دانیم که این میلهٔ متحرک همانند یک مولد عمل کرده و باعث تولید جریان القایی در مدار شده است. بنابراین باید جهت این مولد به‌صورت شکل مقابل باشد.



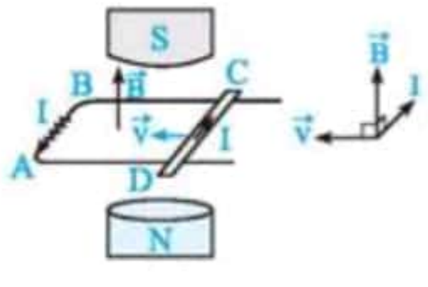
$$V_C+\varepsilon_{\text{القایی}}=V_D\Rightarrow V_C-V_D=-\varepsilon_{\text{القایی}}=-۴\times۱۰^{-۴}\,V$$

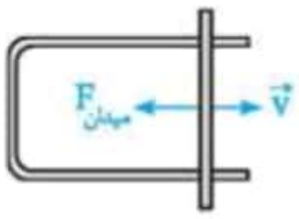
تذکر (دید دیگر برای به‌دست آوردن جهت جریان القایی):

با حرکت میلهٔ CD به‌سمت چپ، شار گذرنده از سطح (به‌دلیل افزایش مساحت مؤثر حلقه) افزایش می‌یابد. در نتیجه جریان القایی به‌گونه‌ای پدید می‌آید که میدان مغناطیسی ناشی از آن $(\vec{B'})$ با میدان اصلی $(\vec{B})$ مخالفت کند. بنابراین جهت جریان القایی در میله از C به طرف D است.



۲ ۲۱۵۱ جریان القایی در میلهٔ متحرک از D به C است (چون در صورت سؤال گفته شده جهت جریان القایی از B به A است.). مطابق قانون دست راست، اگر چهار انگشت در جهت $\vec{v}$ باشد به‌گونه‌ای که خم شدن انگشتان جهت $\vec{B}$ را نشان دهد، در این حالت شست دست راست سوی I را نشان می‌دهد و با توجه به این موضوع جهت $\vec{v}$ به سمت چپ است.

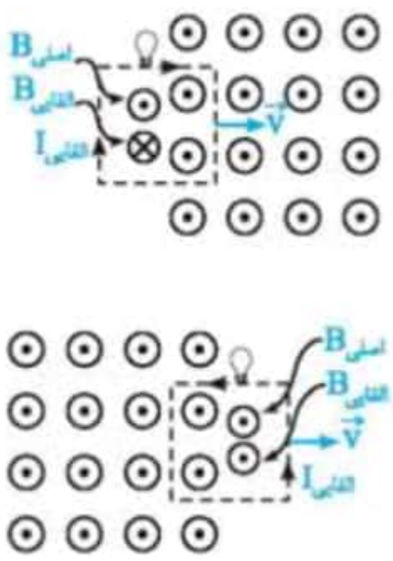




۳ ۲۱۵۲ نیروی وارد بر سیم **از طرف** میدان، مطابق قانون لنز، به‌گونه‌ای است که با حرکت سیم مخالفت کرده و مانع از تغییر شار شود، به عبارتی اگر میله به سمت راست حرکت کند، نیروی وارد شده بر آن **از طرف میدان** به سمت چپ است.

* دقت شود که با توجه به قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی B (منظور درون‌سو یا برون‌سو بودن آن) در جهت F بی‌تأثیر است، چون در هر صورت نیروی وارد شده از طرف میدان باید به سمت چپ باشد تا مانع از افزایش شار شود.

۴ ۲۱۵۳ به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:



۱) از زمان ورود ابتدای قاب به میدان مغناطیسی تا ورود کامل قاب به میدان مغناطیسی مساحتی از آن‌که در داخل میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد در حال افزایش بوده و شار عبوری از قاب نیز در حال افزایش است. مطابق قانون لنز، جهت جریان القایی باید به‌گونه‌ای باشد که میدان ناشی از آن میدان اصلی را تضعیف کند. بنابراین میدان القایی درون‌سو بوده و در نتیجه جریان القایی ساعتگرد است.

۲) از زمان شروع به خارج شدن قاب از میدان مغناطیسی تا لحظهٔ خروج کامل قاب از میدان مغناطیسی، با توجه به کاهش مساحتی از قاب که در داخل میدان مغناطیسی قرار دارد، شار عبوری از قاب در حال کاهش بوده و مطابق قانون لنز، میدان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند تا مانع از کاهش شار شود، یعنی میدان القایی برون‌سو است و جریان القایی پادساعتگرد است.

۳) از زمانی که تمام قاب وارد میدان مغناطیسی شده تا لحظهٔ شروع به خروج آن از میدان مغناطیسی، شار عبوری از قاب ثابت بوده ($\Phi = AB\cos 0 = AB$) و در نتیجه جریان القایی صفر است. بنابراین لامپ خاموش می‌باشد.

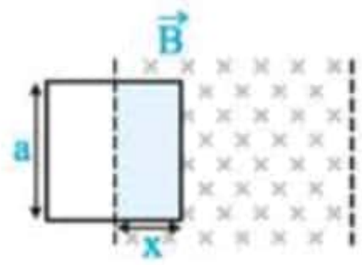
$$I_e = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt} \xrightarrow{\text{ثابت } \Phi} I_e = 0$$

۴) با کاهش طول ضلع قاب مربعی، مساحت قابی که در یک مدت زمان مشخص وارد میدان می‌شود، کاهش می‌یابد. بنابراین مقدار تغییر شار در واحد زمان کم‌تر می‌شود. در نتیجه نیرو محرکهٔ القایی، در لحظات ورود و خروج قاب به میدان کاهش می‌یابد.

$$\downarrow \bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

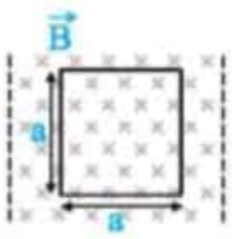
بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲ ۲۱۵۴ در این سؤال ابتدا نمودار شار ـ زمان را رسم کرده و از روی آن نمودار نیروی محرکه ـ زمان را رسم می‌کنیم:



مرحلهٔ اول: (از لحظهٔ ورود قاب به میدان تا ورود کامل به میدان مغناطیسی): در این حالت شار عبوری از صفر به a^2B افزایش می‌یابد:

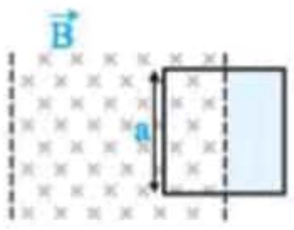
$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi = AB\cos\theta = (ax)\times B\times\cos 0 = aBx \\ \text{لحظهٔ ورود}: x = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \\ \text{لحظهٔ ورود کامل}: x = a \Rightarrow \Phi = a^2B \end{cases}$$



مرحلهٔ دوم: (بازهٔ زمانی که قاب به‌طور کامل در میدان مغناطیسی قرار دارد): در این حالت شار عبوری از حلقه ثابت بوده و برابر a^2B است.

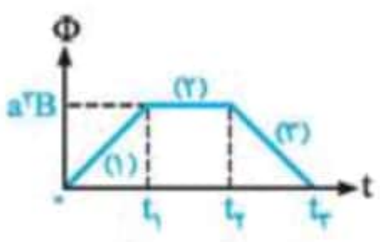
$$\Phi = AB\cos\theta = a^2\times B\times\cos 0 = a^2B$$

مرحلهٔ سوم: (از لحظهٔ خروج قاب از میدان تا خروج کامل قاب از میدان مغناطیسی): در این حالت شار عبوری از a^2B در لحظهٔ خروج به صفر می‌رسد (پس از خروج از میدان مغناطیسی).

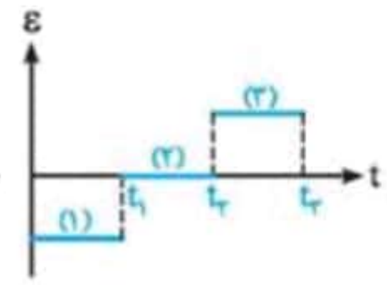


$$\begin{cases} \text{لحظهٔ خروج}: \Phi = AB\cos\theta = a^2B\times\cos 0 = a^2B \\ \text{خروج کامل از قاب}: \Phi = 0 \end{cases}$$

با توجه به این سه مرحله، نمودار شار عبوری از حلقه مطابق شکل زیر است:



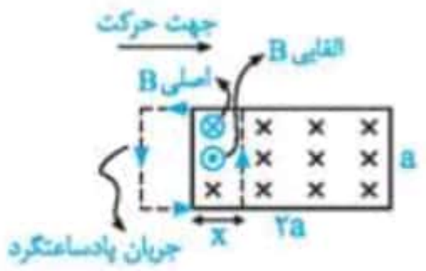
$$\begin{cases} \text{مرحلهٔ (۱)}: \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0 \Rightarrow \varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0 \\ \text{مرحلهٔ (۲)}: \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0 \\ \text{مرحلهٔ (۳)}: \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0 \Rightarrow \varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$



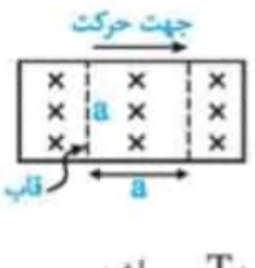
* دقت کنیم که چون نمودار $\Phi - t$ در بازه‌های مختلف به‌صورت خطی است (چرا؟)، بنابراین نمودار $\varepsilon - t$ باید به‌صورت خطوطی افقی باشد.

gajmarket.com

۱ ۲۱۵۵ این سؤال مشابه با تست قبل است و برای حل آن کافیست جهت جریان القایی را در چهار مرحله بررسی کنیم:



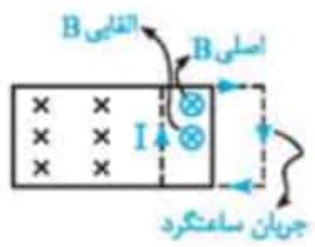
مرحلهٔ اول: (از زمان ورود ابتدای قاب به میدان مغناطیسی تا ورود کامل قاب به میدان مغناطیسی): در این مرحله با ورود قاب به میدان مغناطیسی، مساحتی از آن‌که در میدان قرار می‌گیرد در حال افزایش بوده و شار عبوری از حلقه نیز در حال افزایش است. مطابق قانون لنز، جهت جریان القایی باید به‌گونه‌ای باشد که میدان ناشی از آن میدان اصلی را تضعیف کند و در نتیجه جریان القایی پادساعتگرد (جهت مثبت مثلثاتی) است و با توجه به جهت مثبت قراردادی مسئله برای I، جریان در این مرحله مثبت فرض می‌شود. دقت شود که زمان لازم برای انجام این مرحله T فرض شده است.



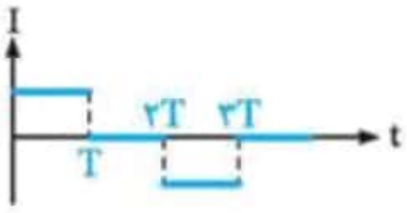
مرحلهٔ دوم: (از زمانی که تمام قاب وارد میدان مغناطیسی شده تا لحظهٔ شروع به خروج آن از میدان مغناطیسی): در این مرحله شار عبوری از حلقه ثابت بوده $(\Phi = ABcos\theta = a^2B)$ و جریان القایی صفر است.

$$I_e = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\text{ثابت }\Phi} I_e = 0$$

دقت: از زمان ورود کامل قاب به میدان تا رسیدن به انتهای میدان، قاب مجدداً به اندازهٔ a جابه‌جاشده (چرا؟) و زمان لازم برای آن نیز T می‌باشد.



مرحلهٔ سوم: (از زمان شروع به خارج شدن قاب از میدان مغناطیسی تا لحظهٔ خروج کامل قاب از میدان مغناطیسی): در این مرحله با توجه به کاهش مساحتی از قاب که در میدان قرار دارد، شار عبوری از قاب در حال کاهش بوده و مطابق قانون لنز میدان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند تا مانع از کاهش شار شود، یعنی میدان القایی درون‌سو است و جریان القایی ساعتگرد (خلاف جهت مثلثاتی) است. با توجه به جهت مثبت قراردادی مسئله برای I، جریان در این مرحله منفی فرض می‌شود. دقت شود که زمان این مرحله نیز T می‌باشد.

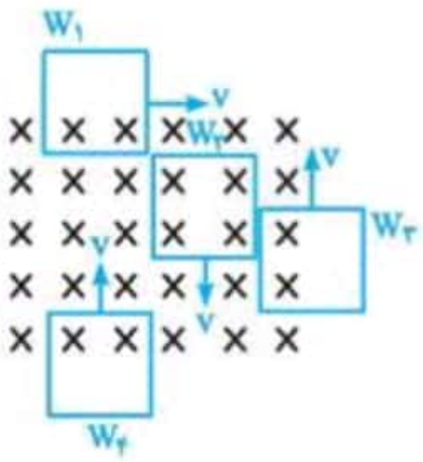


مرحلهٔ چهارم: (پس از خروج کامل قاب از میدان مغناطیسی): در این مرحله چون قاب در میدان مغناطیسی قرار ندارد $(B = 0)$، پس شار عبوری از حلقه صفر و جریان القایی نیز صفر می‌باشد.

با توجه به این توضیحات، گزینهٔ (۱) صحیح است.

* چون افزایش یا کاهش شار با آهنگ ثابتی (یکنواخت) انجام می‌شود پس $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ثابت بوده و در نتیجه نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی در هر مرحله به‌صورت خطوطی افقی (ثابت) است.

۴ ۲۱۵۶ با توجه به قانون لنز، اگر شار مغناطیسی عبوری از یک قاب تغییر کند، نیرویی بر قاب وارد می‌شود تا از تغییر شار ممانعت کند.



در نتیجه در شکل مقابل، چون با حرکت قاب‌های (۱)، (۲) و (۳) در جهت نشان داده شده، شار عبوری از آن‌ها تغییر نمی‌کند، بنابراین نیرویی بر آن‌ها وارد نمی‌شود. ولی چون شار عبوری از قاب (۴) با حرکت آن به سمت بالا افزایش می‌یابد، نیرویی به سمت پایین بر آن وارد می‌شود تا با افزایش شار عبوری از آن مخالفت کند.

۲ ۲۱۵۷ مبنای کار تندی‌سنج دوچرخه، تغییر شار مغناطیسی و تولید جریان القایی در پیچه است. این موضوع در اثر تغییر θ و تغییر B در محل پیچه رخ می‌دهد (چرا؟).

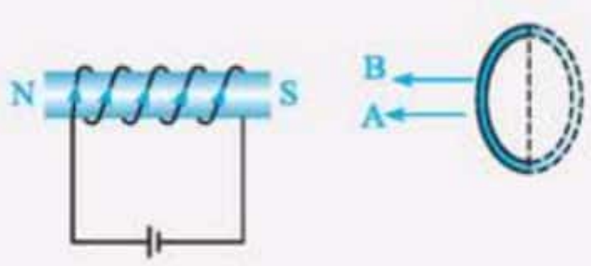
۳ ۲۱۵۸ در دستگاه کارت‌خوان، مبنای کار ایجاد یک جریان القایی متغیر در کارت‌های متفاوت می‌باشد که این جریان القایی، توسط دستگاه دیگری تقویت شده و داده‌های ذخیره شده در نوار مغناطیسی پشت کارت را رمزگشایی می‌کند.

از سوی دیگر دستگاه کروز کنترل در اتومبیل‌ها نیز مشابه با تندی‌سنج دوچرخه عمل می‌کند و با تغییر میدان در محل پیچه، جریان القایی متغیر تولید می‌شود.

۱ ۲۱۵۹ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۵ — سیملوله (محاسبهٔ شار عبوری و انرژی ذخیره شده) — (تست‌های ۲۱۵۹ تا ۲۱۷۹)

در مورد یک سیملوله، می‌توان به نکات مهم و کاربردی زیر اشاره کرد:



۱ هرگاه از سیملوله‌ای با طول l و با N دور سیم جریان I عبور کند، برای محاسبهٔ شار عبوری از یک حلقهٔ آن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Phi = ABcos\alpha \\ B = \mu_0\frac{N}{l}I\end{cases} \xrightarrow{\alpha=0} \Phi = \mu_0 A\frac{N}{l}I$$

اما با توجه به شکل صفحهٔ قبل به‌سادگی مشخص است که شار عبوری از سیملوله، با شار عبوری از هر حلقه برابر است و شار کل عبوری از سیملوله عبارت است از:

$$\Phi = \mu_0 A \frac{N}{l} I$$

۲ ضریب القاوری سیملوله (القاگر) که با L نشان داده می‌شود، از ویژگی‌های ساختمانی آن است و با تغییر جریان ثابت می‌ماند. یکای ضریب القاوری، هانری (H) می‌باشد. دقت شود که منظور از ساختمان هندسی القاگر مغناطیسی پارامترهایی مانند طول سیملوله (l)، مساحت مقطع سیملوله (A) و تعداد دور سیم مورد استفاده در سیملوله (N) است.

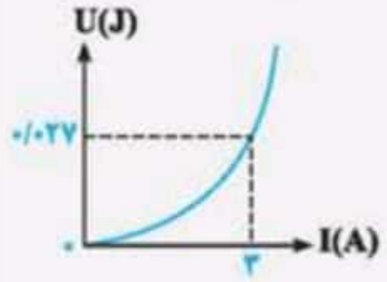
۳ در فضای مغناطیسی درون یک سیملوله انرژی ذخیره می‌شود که میزان این انرژی ذخیره شده برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

در ادامه با حل تمرین بعد، بر روی مفاهیم فوق مسلط‌تر می‌شویم.

تمرین ۱ **شکل مقابل، نمودار انرژی ذخیره شده در سیملوله برحسب جریان گذرنده از آن است. ضریب القاوری سیملوله چند میلی‌هانری است؟** (ریاضی داخل ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹



پاسخ با توجه به نمودار رسم شده در صورت سؤال، در $I = 3A$، انرژی ذخیره شده در سیملوله برابر $0/027J$ است و داریم:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow 0/027 = \frac{1}{2} L \times (3)^2 \Rightarrow L = 6 \times 10^{-3} H = 6mH$$ (گزینهٔ ۳)

ضریب القاوری یک القاگر (سیملوله) به ساختمان هندسی القاگر بستگی دارد و از پارامترهایی مانند شدت جریان و ... مستقل است.

۴ ۲۱۶۰ با توجه به روابط میدان مغناطیسی در داخل سیملوله و شار عبوری از آن، می‌توان نوشت:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow B \propto I \xrightarrow{\text{I دو برابر شود}}$$ B دو برابر می‌شود.

$$\Phi = AB\cos\theta = A \times \left(\mu_0 \frac{N}{l} I\right) \times \cos 0 \Rightarrow \Phi \propto I \xrightarrow{\text{I دو برابر شود}}$$ Φ دو برابر می‌شود.

بنابراین با دو برابر شدن جریان الکتریکی عبوری از سیملوله، میدان مغناطیسی و شار مغناطیسی عبوری از آن نیز دو برابر می‌شود.

از طرفی ضریب القاوری سیملوله از جریان عبوری از آن مستقل بوده و ثابت می‌ماند (یک برابر می‌شود).

۳ ۲۱۶۱ یکای ژول بر مجذور آمپر $\left(\frac{J}{A^2}\right)$، با توجه به رابطهٔ $U = \frac{1}{2} L I^2$ هم ارز با هانری (H) می‌باشد.

$$L = \frac{2U}{I^2} \Rightarrow \text{هانری} \equiv \frac{\text{ژول}}{(\text{آمپر})^2}$$

۳ ۲۱۶۲ با توجه به رابطهٔ شار عبوری از سیملوله $(\Phi = AB\cos\theta)$، به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با قرار دادن باتری با نیروی محرکهٔ بیشتر در مدار، جریان در مدار افزایش یافته و در نتیجه میدان مغناطیسی در داخل سیملوله بیشتر شده و این موضوع سبب می‌شود که شار عبوری از سیملوله افزایش یابد.

۲) با کاهش مقاومت R، جریان عبوری از سیملوله افزایش می‌یابد $\left(I = \frac{\varepsilon}{R}\right)$. بنابراین مشابه بررسی انجام شده در گزینهٔ قبل، شار عبوری از سیملوله افزایش می‌یابد.

۳) با فرض ثابت بودن I، با نصف کردن سیملوله، نسبت $n = \frac{N}{l}$ ثابت می‌ماند، (زیرا هم تعداد دور (N) و هم طول سیملوله (l) نصف می‌شود)، بنابراین میدان مغناطیسی در داخل سیملوله ثابت مانده و با توجه به ثابت بودن سطح مقطع سیملوله، شار عبوری از سیملوله تغییری نمی‌کند.

n: ثابت می‌ماند

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \Rightarrow B \text{ ثابت} \xrightarrow[\Phi = AB\cos\theta]{A \text{ ، } B \text{ و } \theta \text{ ثابت}} \Phi \text{ ثابت}$$

۴) با فرض ثابت بودن I، با افزایش تعداد دور سیملوله در واحد طول $(n \uparrow)$، داریم:

$$B = \mu_0 n I \Rightarrow B \uparrow \Rightarrow \Phi \uparrow$$

۲ ۲۱۶۳ می‌دانیم انرژی ذخیره شده در یک سیملوله از رابطهٔ $U = \frac{1}{2} L I^2$ به‌دست می‌آید. برای این مسأله داریم:

$$I = 4A \text{ ، } U = 200mJ = 0/2J \Rightarrow 0/2 = \frac{1}{2} L \times 4^2 \Rightarrow \text{ضریب القاوری: } L = 2/5 \times 10^{-2} H$$

۲ ۲۱۶۴

$$U = 1kWh = 36 \times 10^5 J = \frac{1}{2} L \times (200)^2 \Rightarrow L = 180H$$

تذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ضریب القاوری لازم برای این تست، صدها هزار برابر بیشتر از ضریب القاوری یک القاگر معمولی است که در آزمایشگاه از آن استفاده می‌کنیم. سیم‌های معمولی که حامل ۲۰۰A جریان‌اند، برای اجتناب از اتلاف ناخواستهٔ انرژی ناشی از گرمای RI^2t باید قطر بزرگی داشته باشند تا مقاومت القاگر پایین بیاید. در نتیجه اندازهٔ یک القاگر 180H که از سیم‌های معمولی ساخته شده باشد، باید خیلی بزرگ (به اندازهٔ یک اتاق بزرگ) باشد. با توجه به فناوری‌های موجود این طرح غیرعملی است و توجیه اقتصادی ندارد.

gajmarket.com

۴ ۲۱۶۵ با توجه به رابطهٔ انرژی ذخیره شده در سیملوله $(U=\frac{1}{2}LI^2)$، در مقایسهٔ دو سیملولهٔ A و B داریم: $(\frac{L_A}{L_B}=2\ ,\ \frac{I_A}{I_B}=2)$

$$U=\frac{1}{2}LI^2\Rightarrow\frac{U_A}{U_B}=\frac{L_A}{L_B}\times\left(\frac{I_A}{I_B}\right)^2=2\times(2)^2=8$$

۲ ۲۱۶۶ با کاهش جریان عبوری از سیملوله، انرژی ذخیره شده در سیملوله ۷۵ درصد کاهش می‌یابد و می‌توان نوشت: $U_2=U_1-\frac{75}{100}U_1=\frac{1}{4}U_1$

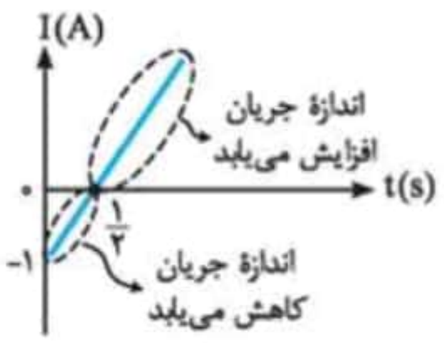
$$U=\frac{1}{2}LI^2\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{4}=\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{2}\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}I_1$$

از طرفی با توجه به‌صورت سؤال، جریان عبوری از سیملوله ۳ آمپر کاهش یافته و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}I_2=I_1-3\\ I_2=\frac{1}{2}I_1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}I_1=I_1-3\Rightarrow I_1=6A$$

۳ ۲۱۶۷ با توجه به معادلهٔ $I=2t-1$، با گذشت زمان، ابتدا اندازهٔ جریان عبوری از سیملوله کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ $t=\frac{1}{2}s$، به صفر برسد.

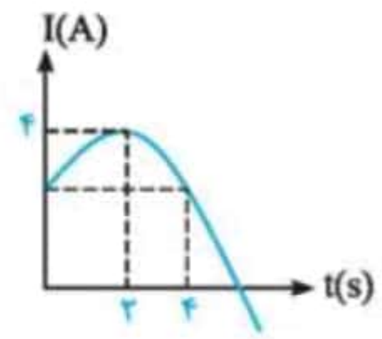
$$I=2t-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}s$$



پس از لحظهٔ $t=\frac{1}{2}s$، اندازهٔ جریان عبوری از سیملوله افزایش می‌یابد. بنابراین با توجه به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}LI^2$، انرژی ذخیره‌شده در القاگر ابتدا کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد.

۳ ۲۱۶۸ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۷)، گزینهٔ (۳) صحیح است.

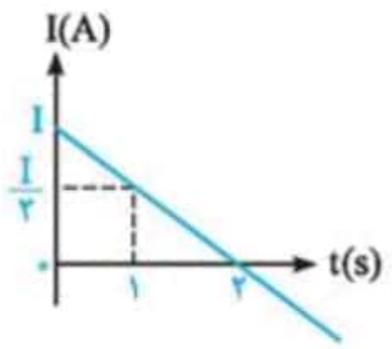
۲ ۲۱۶۹ برای محاسبهٔ انرژی ذخیره شده در سیملوله در لحظهٔ $t=2s$ (پایان ثانیهٔ دوم)، به مقدار جریان در این لحظه نیاز داریم، بنابراین می‌توان نوشت: $t=2s\Rightarrow I=4A$



$$U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\times5\times10^{-3}\times4^2=0/04J$$

از طرفی با توجه به تقارن سهمی نسبت به مرکز آن، می‌دانیم که جریان عبوری از سیملوله در لحظات $t=0$ و $t=4s$ با هم برابر است. بنابراین انرژی ذخیره‌شده در سیملوله در پایان ثانیهٔ چهارم (یعنی $t=4s$)، برابر انرژی ذخیره شده در سیملوله در لحظهٔ $t=0$ است.

۴ ۲۱۷۰ با توجه به نمودار مقابل و اعداد مشخص شده روی آن، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



تغییر انرژی ذخیره شده در ۲ ثانیهٔ اول: $\Delta U=\frac{1}{2}L(I_2^2-I_1^2)=\frac{1}{2}L(0^2-I^2)=-\frac{1}{2}LI^2$

تغییر انرژی ذخیره شده در ثانیهٔ اول: $\Delta'U=\frac{1}{2}L\left(\left(\frac{I}{2}\right)^2-(I)^2\right)=-\frac{3}{8}LI^2$

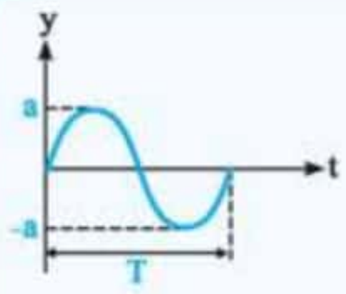
$$\frac{\Delta U}{\Delta'U}=\frac{4}{3}$$

۲ ۲۱۷۱

نکته

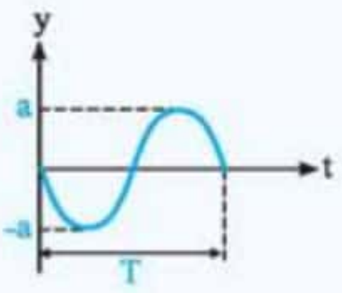
در بسیاری از مواقع در این فصل با توابعی به شکل‌های زیر برخورد می‌کنیم که باید معادلهٔ کلی آن‌ها را بدانیم:

۱) تابعی به‌صورت مقابل به شکل کلی نمودار $\sin x$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



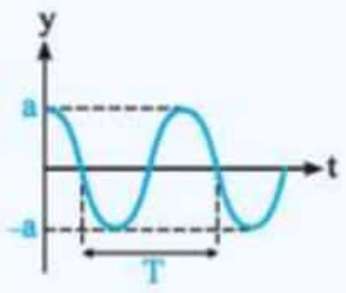
$$y=a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

۲) تابعی به‌صورت مقابل به شکل کلی نمودار $-\sin x$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



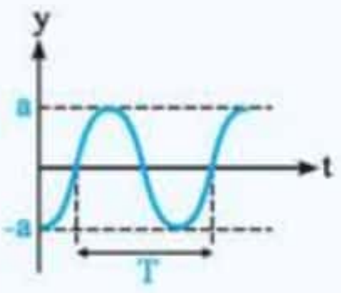
$$y=-a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

۳) تابعی به‌صورت مقابل به شکل کلی نمودار $\cos x$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

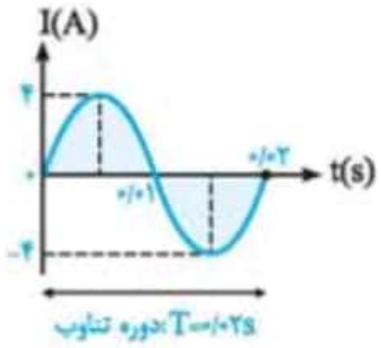


$$y=a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

۴) تابعی به‌صورت مقابل به شکل کلی نمودار $-\cos x$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



$$y=-a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$



برای پاسخ دادن به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

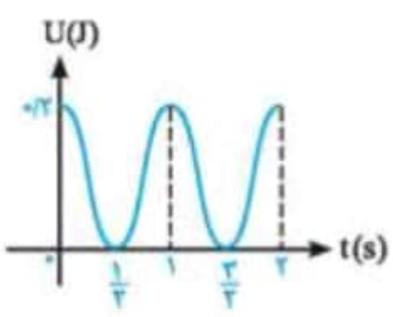
گام اول: (به‌دست آوردن معادلهٔ $I-t$): نمودار $I-t$ به شکل کلی نمودار $\sin x$ است و معادلهٔ آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$I = I_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow I = 4\sin\left(\frac{2\pi}{0/02}t\right) = \overset{I_{max}}{(4)}\sin(100\pi t)$$

گام دوم: با محاسبهٔ I، به‌سادگی بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده در سیملوله و انرژی ذخیره‌شده در سیملوله در لحظهٔ $t=\frac{1}{600}s$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} t=\frac{1}{600}s \Rightarrow I = 4\sin\left(100\pi\times\frac{1}{600}\right) = 4\times\frac{1}{2} = 2A \Rightarrow U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\times 0/02\times 2^2 = 0/04J \\ U_{max} = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}\times 0/02\times(4)^2 = 0/16J \end{cases}$$

۳ ۲۱۷۲ با توجه به معادلهٔ جریان داده شده و رابطهٔ زیر داریم:



$$U = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{I=2\cos\pi t} U = \frac{1}{2}\times 0/1\times(2\cos\pi t)^2 = 0/2\cos^2(\pi t)$$

بنابراین نمودار $U-t$ به صورت مقابل خواهد بود. در نمودار ترسیم شده، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

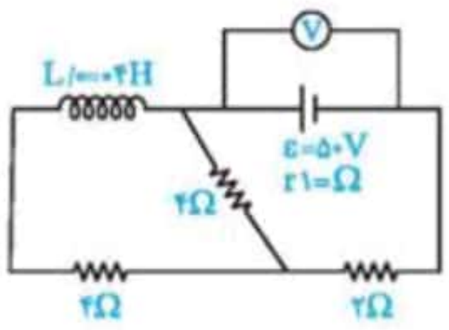
۱- حالت $\cos^2\pi t = 1$، عملاً مربوط به حداکثر انرژی ذخیره شده در سیملوله است.

۲- در لحظات $t=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},...$، $\cos\pi t$ صفر می‌شود و نمودار $U-t$ بر محور افقی مماس شده است.

۳- در لحظات $t=1,2,3,...$، $\cos\pi t=\pm 1$ می‌شود و عملاً نمودار بیشترین مقدار خود را دارد.

۲ ۲۱۷۳ این سؤال یک تست ترکیبی با مدار است که برای حل آن، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

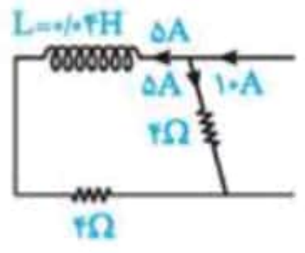
گام اول: با توجه به عدد ولت‌سنج، جریان خروجی از باتری برابر ۱۰ آمپر است.



$$V = \varepsilon - rI$$

$$40 = 50 - 1\times I \Rightarrow I = 10A$$

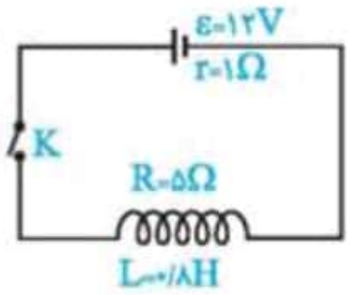
گام دوم: با توجه به ناچیز بودن مقاومت درونی سیملوله، نیمی از جریان به شاخهٔ سیملوله رفته و داریم:



$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\times 0/04\times 5^2 = 0/5J$$

۱ ۲۱۷۴ برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبهٔ جریان در سیملوله:



$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow I = \frac{12}{5+1} = 2A$$

گام دوم: محاسبهٔ انرژی ذخیره شده در سیملوله:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\times 0/8\times(2)^2 = 1/6J$$

۲ ۲۱۷۵ با توجه به رابطهٔ $\Phi = AB\cos\theta$ و $B=\mu_0\frac{N}{l}I$، شار گذرنده از سیملوله برابر است با:

$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\,T.m/A$ ، مساحت مقطع سیملوله : $A=\pi r^2=\pi(0/02)^2=4\pi\times 10^{-4}\,m^2$ ، $N=100$ حلقه، $I=0/5A$ ، $l=20cm=0/2m$ ، $\Phi=?$

$$\Phi = AB\underbrace{\cos\theta}_{\text{میدان بر حلقه‌های سیملوله عمود است}} = AB\cos 0 = A\left(\mu_0\frac{N}{l}I\right)\cos 0 = \mu_0\frac{AN}{l}I$$

$$\Rightarrow \Phi = 4\pi\times 10^{-7}\times 4\pi\times 10^{-4}\times\frac{100}{0/2}\times 0/5 = 4\pi^2\times 10^{-8}\,Wb \xrightarrow{\pi^2=10} \Phi = 4\times 10^{-7}\,Wb$$

هشدار

برای محاسبهٔ شار عبوری از سیملوله، تعداد دور سیم القاگر ضرب نمی‌شود، زیرا شار عبوری از یک حلقه با شار عبوری از کل سیملوله برابر است.



$$\Phi = AB\cos\theta$$

~~$\Phi = NAB\cos\theta$~~ (رابطهٔ نادرست)

gajmarket.com

۲ ۲۱۷۶ با توجه به تست قبل، شار عبوری از سیملوله به صورت زیر محاسبه می‌شود و در مقایسهٔ دو سیملوله داریم:

$$l_A=\alpha l_B, R_A=\alpha R_B \xrightarrow{A=\pi R^2} A_A=\alpha^2 A_B, N_A=N_B, I_A=\beta I_B$$

$$\Phi=\mu_\circ \frac{AN}{l} I \Rightarrow \frac{\Phi_A}{\Phi_B}=\frac{A_A}{A_B}\times\frac{N_A}{N_B}\times\frac{l_B}{l_A}\times\frac{I_A}{I_B}=\alpha\beta$$

۲ ۲۱۷۷ **گام اول:** (محاسبهٔ جریان در لحظهٔ $t=2s$):

$$I=-t^2+2\sin\pi t \xrightarrow{t=2s} I=-(2)^2+2\sin 2\pi=-4A$$

گام دوم: (محاسبهٔ انرژی ذخیره شده در سیملوله در لحظهٔ $t=2s$):

$$U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\times 0/02\times(-4)^2=0/16J$$

۲ ۲۱۷۸ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} I=2\sqrt{2}\sin 300t \Rightarrow I_{max}=2\sqrt{2}A \\ U_{max}=\frac{1}{2}LI_{max}^2 \Rightarrow 0/8=\frac{1}{2}L(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow L=0/2H \end{cases}$$

۲ ۲۱۷۹ برای بررسی این سؤال، ابتدا باید دقت شود که بیشترین انرژی ذخیره شده در سیملوله، هنگامی رخ می‌دهد که $I=0/2A$ باشد. حال برای رسیدن به خواستهٔ مسأله، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{U}{U_{max}}=\left(\frac{I}{I_{max}}\right)^2=\sin^2 500t=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 500t=\pm\frac{1}{2}$$

برای اولین بار در هنگامی‌که $500t=\frac{\pi}{6}$ می‌شود، این اتفاق رخ می‌دهد و داریم:

$$500t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3000}s$$

۱ ۲۱۸۰ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

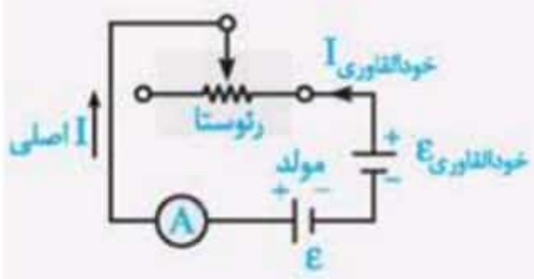
خلاصه نکات ۱۶ — **آشنایی با خود القاوری و القای متقابل** (تست‌های ۲۱۸۰ تا ۲۱۸۴)

همون‌طور که تو فصل الکتریسیتهٔ ساکن دیدیم، تو فضای بین صفحات یه خازن باردار، میدان الکتریکی ایجاد می‌شه و انرژی الکتریکی تو فضای داخل همین میدان الکتریکی ذخیره می‌شه. به همین ترتیب می‌شه از القاگر هم برای تولید یه میدان مغناطیسی دلخواه و هم‌چنین ذخیرهٔ انرژی مغناطیسی توسط میدان مغناطیسی توی اون استفاده کرد. تو شکل مقابل، تصویر چند تا القاگر با اندازه‌های مختلف رو می‌بینید. تو ادامهٔ کار می‌خوایم مفاهیم مربوط به القاگر رو به شما یاد بدیم ...

برای بررسی اثر خود ـ القاوری در یک القاگر، مدار زیر را در نظر بگیرید:

در ابتدا باید توجه شود که با تغییر مقاومت رئوستا، جریان در مدار تغییر می‌کند (چرا؟). تغییر جریان در مدار، سبب تغییر جریان عبوری از القاگر می‌شود و این موضوع سبب می‌شود که میدان مغناطیسی در داخل القاگر (سیملوله) و شار مغناطیسی عبوری از القاگر تغییر کند. این فرایند سبب القای نیروی محرکه‌ای در القاگر می‌شود و با توجه به قانون لنز، این نیرو محرکه با هرگونه تغییر جریان عبوری از آن مخالفت می‌کند. این پدیده که می‌تواند در هر القاگری (از قبیل پیچه یا سیملوله) رخ دهد **اثر خود ـ القاوری** نامیده می‌شود.

تمرین ۱ **در شکل فوق اگر مقاومت رئوستا کاهش یابد، جهت جریان القایی ایجاد شده توسط القاگر کدام است؟**



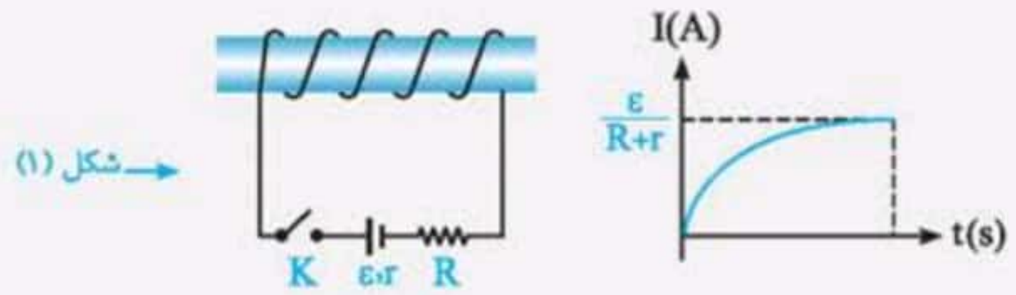
پاسخ اگر مقاومت رئوستا کاهش یابد، جریان در مدار افزایش یافته و باعث افزایش میدان مغناطیسی در داخل القاگر (سیملوله) می‌شود که این موضوع نیز سبب افزایش شار مغناطیسی عبوری از القاگر خواهد شد. در این حالت در اثر پدیدهٔ خود القاوری، نیرو محرکه‌ای ایجاد می‌شود که با افزایش شار مخالفت می‌کند. برای این منظور سیملوله معادل با باتری‌ای عمل می‌کند که در جهت مخالف مولد در مدار قرار گرفته باشد (مطابق شکل مقابل) و جریانش در خلاف جهت جریان اصلی است.

نتیجه‌گیری: با توجه به تمرین ارائه شده در این قسمت، دو نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

۱ اگر شار مغناطیسی عبوری از القاگر افزایش یابد ⟸ نیروی محرکهٔ ایجاد شده در اثر پدیدهٔ خود ـ القاوری در جهت کاهش نیروی محرکهٔ اصلی عمل می‌کند ⟸ جریان القایی در خلاف جهت جریان اصلی است.

۲ اگر شار مغناطیسی عبوری از القاگر کاهش یابد ⟸ نیروی محرکهٔ ایجاد شده در اثر پدیدهٔ خود ـ القاوری در جهت افزایش نیروی محرکهٔ اصلی عمل می‌کند ⟸ جریان القایی در جهت جریان اصلی است.

دقت: در شکل زیر کلید K باز بوده و جریان الکتریکی در مدار صفر است. حال اگر کلید K را ببندیم، نمودار جریان الکتریکی برحسب زمان برای سیملوله به‌صورت زیر است (مقاومت درونی سیملوله ناچیز است):

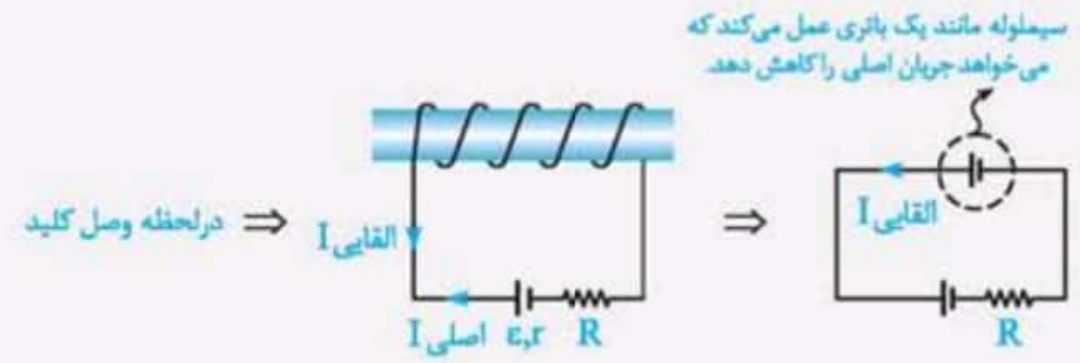


این موضوع به دلیل اثر خود القاوری است.

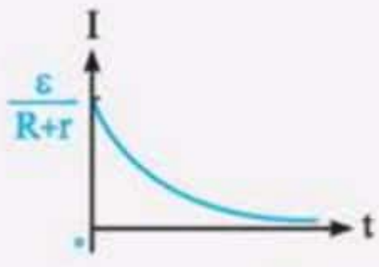
تمرین۲ **تحلیل کنید که در لحظهٔ وصل کلید در شکل (۱)، جریان در مدار چگونه تغییر می‌کند؟**

پاسخ در لحظهٔ وصل کلید، در مدار می‌خواهد جریان الکتریکی ایجاد شود و این موضوع باعث ایجاد میدان مغناطیسی و عبور شار از سیملوله می‌شود، بنابراین مطابق قانون لنز نیرو محرکهٔ خودالقاوری بزرگی در سیملوله ایجاد می‌شود که مانع از ایجاد جریان شود، بنابراین در لحظهٔ وصل کلید، جریان خودالقاوری، جریان اصلی را خنثی کرده و جریان کل مدار صفر است.

تذکر پس از مدتی کوتاه، خاصیت خودالقاوری در سیملوله کم شده و در نهایت جریان به مقدار اصلی یعنی $\frac{\varepsilon}{R+r}$ می‌رسد.



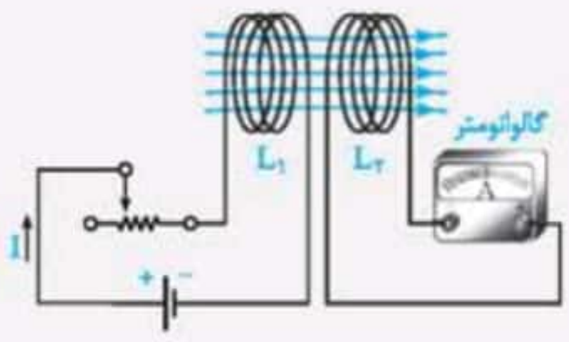
تمرین۳ **اگر پس از مدتی کلید K را در شکل (۱) قطع کنیم، جریان در مدار چگونه به صفر می‌رسد؟**



پاسخ اگر بخواهیم در مدار کلید K را باز کنیم، به خاطر پدیدهٔ خودالقاوری، جریان در مدار بلافاصله پس از باز کردن کلید صفر نمی‌شود، بلکه مدت زمانی طول می‌کشد. با باز کردن کلید K جریان سیملوله می‌خواهد صفر شود و میدان مغناطیسی و شار عبوری از آن نیز می‌خواهد صفر شود. در این حالت جهت نیرو محرکهٔ القایی و جریان القایی به سمتی قرار می‌گیرد که از صفر شدن جریان جلوگیری کند. به‌عبارت دیگر جهت نیرو محرکهٔ القایی با جهت نیرو محرکهٔ باتری یکسان می‌شود. نمودار تغییرات جریان برحسب زمان برای لحظه‌ای که کلید K را باز می‌کنیم، به‌صورت مقابل است:

القای متقابل

دو پیچهٔ مجاور هم را در شکل مقابل درنظر بگیرید. جریان عبوری در پیچهٔ ۱، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را به‌وجود می‌آورد و در نتیجه این میدان یک شار مغناطیسی از پیچهٔ ۲ می‌گذراند. اگر جریان در پیچهٔ ۱ تغییر کند، شار عبوری از پیچهٔ ۲ نیز تغییر می‌کند و بنابر قانون فارادی، این تغییر شار نیروی محرکه‌ای در پیچهٔ ۲ القا می‌کند. این فرایند **القای متقابل** نامیده می‌شود و به کمک آن می‌توان انرژی را از پیچه‌ای به پیچهٔ دیگر منتقل کرد.



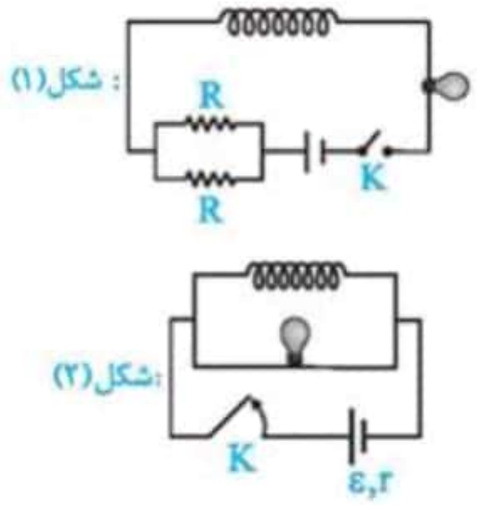
نحوهٔ کاهش اثر القای متقابل

در برخی از مدارهایی که چندین القاگر در آن‌ها وجود دارد، تغییرات جریان در یک القاگر، می‌تواند نیروهای محرکهٔ ناخواسته‌ای در القاگرهای مجاور القا کند. به همین دلیل در برخی از مدارهای الکتریکی، القای متقابل می‌تواند به عنوان عامل مزاحمت باشد. برای هر چه کم کردن این اثر ناخواسته، مطابق شکل مقابل، باید سطح حلقه‌های القاگرهای مجاور را به طور عمود بر یک‌دیگر قرار داد. در این صورت، اثر القای متقابل تا حد امکان کوچک می‌شود.



القای متقابل، کاربردهای مفید بسیاری نیز دارد. مثلاً در مبدل‌ها که در پایان همین فصل با آن‌ها آشنا خواهید شد، القای متقابل، نقش مهمی در مقدار ولتاژ خروجی مبدل ایفا می‌کند.

gajmarket.com

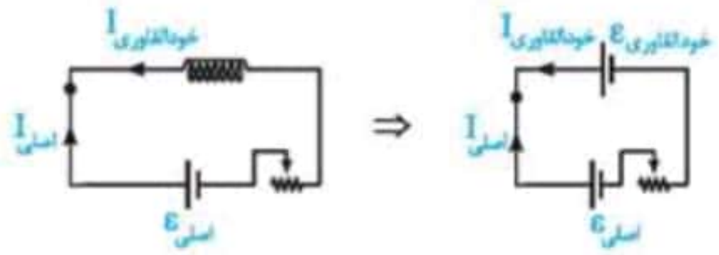


مطابق قانون لنز، سیملوله همواره به گونه‌ای عمل می‌کند که مانع از تغییر شار شود. در شکل (۱)، وقتی کلید K باز است، جریان در مدار صفر است. با بستن کلید K جریان در مدار می‌خواهد افزایش یابد. در نتیجه مطابق قانون لنز، نیروی محرکهٔ ناشی از پدیدهٔ خودالقاوری در خلاف جهت نیروی محرکهٔ اصلی پدید می‌آید و لامپ بلافاصله پس از وصل کردن کلید روشن نمی‌شود، بلکه با گذشت زمان بسیار کوتاهی روشن می‌شود.

در شکل (۲)، لامپ بلافاصله پس از قطع کردن کلید خاموش نمی‌شود، بلکه پس از مدت کوتاهی خاموش می‌شود، زیرا در این حالت سیملوله مانند یک باتری عمل کرده و مانع از خاموش شدن لامپ می‌شود.

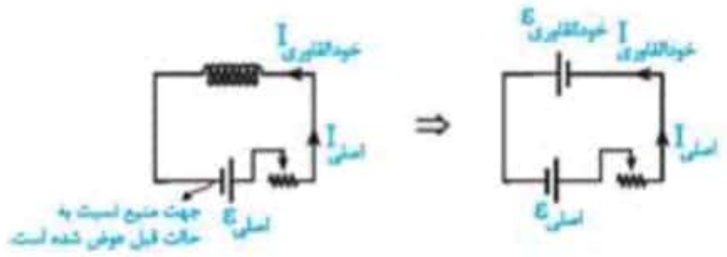
۳ ۲۱۸۱ در حالت کلی در القاگر، جریان به طور بسیار سریع نمی‌تواند تغییر کند، بنابراین از آن می‌توان برای جلوگیری از تغییرات سریع جریان در مدار کمک گرفت. از القاگر برای ذخیرهٔ انرژی توسط میدان مغناطیسی ایجادشده در داخل آن نیز می‌توان استفاده کرد.

۲ ۲۱۸۲ این سؤال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:



حالت اول: با کم کردن مقاومت رئوستا، جریان در مدار افزایش یافته و شار عبوری از سیملوله افزایش می‌یابد. بنابراین طبق قانون لنز، نتیجه می‌گیریم که نیروی محرکهٔ القایی در اثر پدیدهٔ خودالقاوری در سیملوله در خلاف جهت نیروی محرکهٔ اصلی در مدار خواهد بود.

$R \downarrow \Rightarrow I_{\text{اصلی}} \uparrow \Rightarrow B \uparrow \Rightarrow \Phi \uparrow \xRightarrow{\text{لنز}}$ اثر خودالقاوری باید مانع از افزایش جریان اصلی شود.

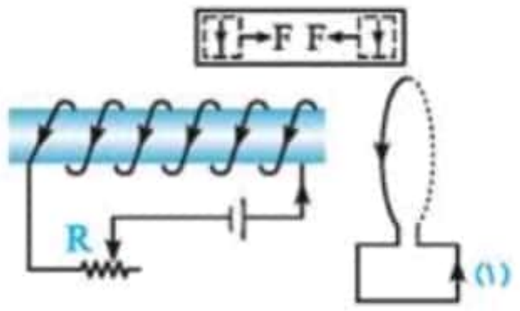


حالت دوم: با توجه به عوض کردن جهت منبع، در این قسمت نیز می‌توان نوشت:

$R \uparrow \Rightarrow I_{\text{اصلی}} \downarrow \Rightarrow B \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow \xRightarrow{\text{لنز}}$ اثر خودالقاوری باید مانع از کاهش جریان اصلی شود.

بنابراین جریان القایی ایجاد شده در اثر پدیدهٔ خودالقاوری در جهت جریان اصلی و در نتیجه نیروی محرکهٔ آن در جهت نیروی محرکهٔ اصلی در مدار عمل می‌کند.

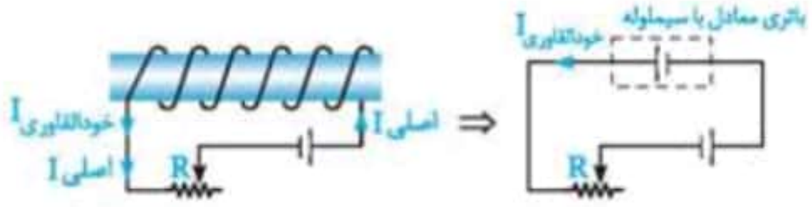
۱ ۲۱۸۳ این سؤال را در دو قسمت پاسخ می‌دهیم:



قسمت اول (بررسی جهت جریان القایی در حلقه): با زیاد شدن مقاومت رئوستا، جریان عبوری از سیملوله کاهش یافته و در نتیجه شار عبوری از حلقه نیز کاهش می‌یابد.

$R \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow B \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow \xrightarrow{\text{لنز}}$ حلقه باید سیملوله را جذب کند.

برای جذب حلقه و سیملوله، جریان القایی در حلقه، باید هم‌جهت با جریان در حلقه‌های سیملوله باشد. بنابراین جریان القایی در حلقه در جهت (۱) است.



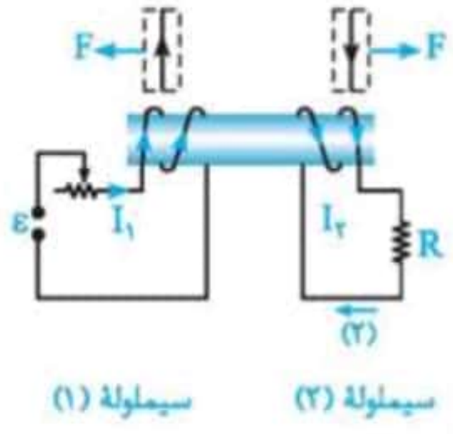
قسمت دوم (بررسی نیروی محرکهٔ ناشی از اثر خودالقاوری در سیملوله): با کاهش جریان I در سیملوله، در مورد اثر خودالقاوری می‌توان گفت:

$R \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow B \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow \Rightarrow$ اثر خودالقاوری باید مانع از کاهش جریان اصلی شود.

$\Rightarrow$ جریان ناشی از اثر خودالقاوری در جهت جریان اصلی است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این حالت نیروی محرکهٔ ناشی از اثر خودالقاوری و جریان حاصل از آن، در جهت نیروی محرکهٔ اصلی است (یکدیگر را تقویت می‌کنند).

۴ ۲۱۸۴ برای پاسخ دادن به این سؤال، به مدار زیر توجه کنید:



۱) با توجه به این‌که جریان I_1 با گذشت زمان در حال افزایش است، میدان مغناطیسی ناشی از سیملولهٔ (۱) نیز در حال افزایش است $\left(\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} \vec{I}\right)$. با افزایش میدان ناشی از سیملولهٔ (۱)، شار عبوری از سیملولهٔ (۲) (که خطوط میدان سیملولهٔ (۱) از آن عبور می‌کند) نیز افزایش یافته و مطابق قانون لنز، جریان القایی در سیملولهٔ (۲) باید به گونه‌ای باشد که با افزایش شار مخالفت کند و به نوعی این جریان بین دو سیملوله نیروی دافعه ایجاد می‌کند. این موضوع یعنی جریان در دو حلقهٔ مجاور مختلف‌الجهت بوده و جریان القایی در سیملولهٔ (۲) در جهت (۲) است.

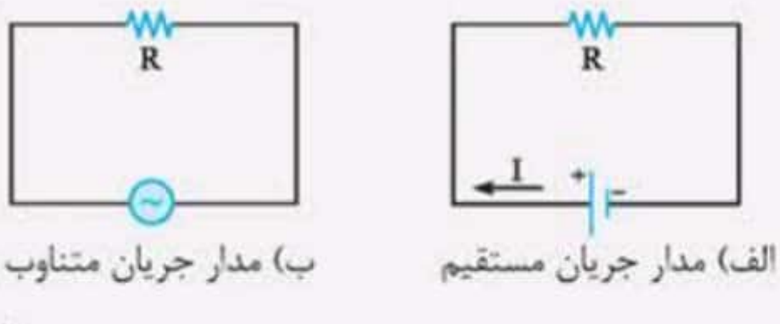
۲) با توجه به تغییرات خطی I_1، میدان مغناطیسی حاصل از سیملولهٔ (۱) نیز متناسب با زمان به‌صورت خطی افزایش می‌یابد $\left(B_1=\mu_0\frac{N}{l}I_1\right)$ و در نتیجه شار عبوری از سیملولهٔ (۲) نیز به‌صورت خطی افزایش می‌یابد $(\Phi=AB\cos\theta)$. هنگامی‌که Φ به‌صورت خطی تغییر می‌کند، جریان القایی متوسط و جریان القایی لحظه‌ای مقدار ثابتی دارد و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

I مقدار ثابتی دارد $\Rightarrow \bar{I}$ مقدار ثابتی است. $\xrightarrow{\Phi \text{ خطی تغییر کند}} \bar{I}=-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

۲۱۸۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۷ — جریان متناوب و معادلات مرتبط با آن (تست‌های ۲۱۸۵ تا ۲۲۰۷)

شکل مقابل دو مدار سادهٔ جریان مستقیم و جریان متناوب را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید، جهت جریان در مدار با جریان مستقیم مشخص است. این در حالی است که در مدار با جریان متناوب، به دلیل تغییر جهت جریان با گذشت زمان، نمی‌توان جهت مشخصی را برای جریان در نظر گرفت.



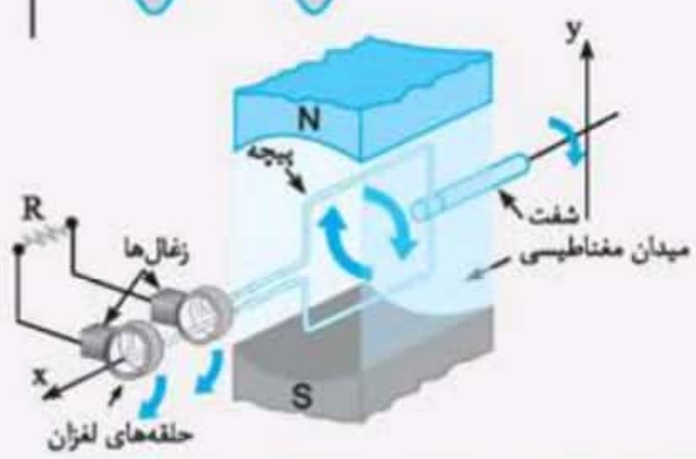
الف) مدار جریان مستقیم — ب) مدار جریان متناوب

تمامی نیروگاه‌های تولید برق در دنیا و از جمله ایران، جریان متناوبی مطابق شکل تولید می‌کنند که تابعی سینوسی از زمان است و به همین دلیل **جریان متناوب سینوسی** نامیده می‌شود.



مکانیزم اصلی تولید جریان متناوب

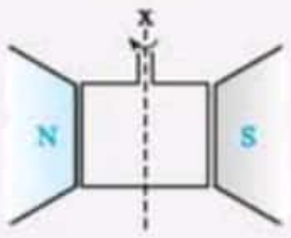
یکی از کاربردهای مهم اثر القای الکترومغناطیسی، تولید جریان متناوب در یک مدار است. با توجه به رابطهٔ $\Phi=AB\cos\theta$، برای تغییر شار مغناطیسی و ایجاد نیروی محرکهٔ القایی، می‌توان پارامترهای B ،A و یا θ را تغییر داد. در عمل تغییرات A و B با محدودیت روبه‌رو بوده و ساده‌ترین راه برای تغییر شار، تغییر زاویهٔ θ است که در صنعت برای تولید جریان متناوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. به همین منظور شکل مقابل را در نظر بگیرید. در شکل مقابل یک قاب فلزی مابین قطب‌های یک آهنربا، حول محور x در حال چرخیدن بوده و در نتیجه شار عبوری از قاب فلزی در حال تغییر است.



جالبه بدونید که تو مولدهای صنعتی برای تولید برق، پیچه‌ها بسیار بزرگ بوده و ساکنن ... حالا فک میکنید برای تولید جریان چه کار میکنن؟! باور کنید راحت‌ترن که آهنربا رو بین پیچه بچرخونن، تا پیچه خیلی بزرگ شده ...

بررسی معادلات جریان متناوب

زمان یک دور کامل چرخیدن قاب نشان داده شده حول محور x را **دوره یا زمان تناوب (T)** می‌نامند. همان‌طور که می‌دانیم، هر دور چرخش قاب، معادل 2π رادیان است. از سوی دیگر اگر زاویه‌ای که بردار عمود بر سطح با خطوط میدان در لحظهٔ صفر می‌سازد برابر صفر باشد، پس از t ثانیه زاویه‌ای که بردار عمود بر سطح با خطوط میدان می‌سازد، با استفاده از یک تناسب برابر است با:



زاویه	زمان
2π	T
θ	t

$$\Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{T}t$$

به این ترتیب شاری که در هر لحظه از سطح عبور می‌کند، برابر است با:

شار عبوری در لحظهٔ t : $\Phi=AB\cos\theta=AB\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\xrightarrow{\cos(\frac{2\pi}{T}t)=1}\boxed{\Phi=\Phi_{max}=AB}$

نکات مهم و کاربردی

۱) با چرخیدن حلقه، شار عبوری از آن نیز تغییر کرده و با توجه به قانون القای فاراده، نیروی محرکهٔ القایی (ولتاژ القایی) در آن به وجود می‌آید که معادلهٔ آن عبارت است از:

نیروی محرکهٔ القایی در لحظهٔ t : $\boxed{\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\xrightarrow{\sin(\frac{2\pi}{T}t)=1}\varepsilon=\varepsilon_{max}}$

* ε_{max} بیشینهٔ نیروی محرکهٔ القایی در قاب است.

۲) با توجه به متناوب بودن نیروی محرکهٔ القایی، در صورت بسته بودن این قاب به مقاومت R، جریان الکتریکی القایی در مقاومت نیز متناوب و سینوسی خواهد بود که مقدار آن برابر است با:

جریان القایی در لحظهٔ t : $I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon_{max}}{R}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ (I_{max})

* $I_{max}=\frac{\varepsilon_{max}}{R}$ بیشینهٔ جریان القاشده در قاب است.

gajmarket.com

۳ با توجه به رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R}$، مشخص است که نحوهٔ تغییرات نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی مشابه یک‌دیگر است. این موضوع یعنی هرگاه نیروی محرکهٔ القایی بیشینه شود، جریان القایی نیز بیشینه و هرگاه نیروی محرکهٔ القایی صفر شود، جریان القایی نیز صفر خواهد شد.

این دو مورد بعدی، باهاش میشه سؤالای سختی طرح کرد ... اوردیم واسه بچه درسخونا ...

۴ با توجه به معادلات مثلثاتی به دست آمده، مشخص است که هرگاه شار مغناطیسی بیشینه شود (یعنی عبارت کسینوسی ماکزیمم شود) نیروی محرکه و جریان القایی صفر است (یعنی عبارت سینوسی صفر است) و هم‌چنین بالعکس هرگاه نیروی محرکه و جریان القایی بیشینه است، شار عبوری صفر است. از طرفی می‌توان گفت هرگاه شار در حال افزایش باشد (عبارت کسینوسی در حال افزایش باشد)، نیروی محرکه و جریان القایی در حال کاهش است (عبارت سینوسی در حال کاهش است) و بالعکس.

۵ با توجه به معادلات فوق می‌توان به دو رابطه‌ای رسید که در برخی تست‌های دشوار کاربرد بسیار خوبی دارد (هدف ما درک شما از روابط است و باید شیوهٔ به دست آوردن آن‌ها را درک کنید تا بهتر بتوانید آن‌ها را به خاطر بسپارید):

$$\Phi=\overset{\Phi_{max}}{AB}\cos\overset{\theta}{(\frac{2\pi}{T}t)}\Rightarrow\frac{\Phi}{\Phi_{max}}=\cos\theta$$

$$\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin\overset{\theta}{(\frac{2\pi}{T}t)}\Rightarrow\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}=\sin\theta$$

$$\xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}\boxed{(\frac{\Phi}{\Phi_{max}})^2+(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}})^2=1}$$

از سوی دیگر چون $\frac{I}{I_{max}}=\sin\theta$ است، می‌توان به صورت مشابه به رابطهٔ زیر نیز رسید:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}=\frac{I}{I_{max}}\Rightarrow\boxed{(\frac{\Phi}{\Phi_{max}})^2+(\frac{I}{I_{max}})^2=1}$$

۶ در صورتی‌که زمان تناوب در جریان متناوب برابر T باشد، با استفاده از یک تناسب ساده، تعداد دور چرخیدن قاب در زمان t برابر است با:

تعداد دور	زمان
T	1
t	n

$$\Rightarrow n=\frac{t}{T}$$

شناخت فرکانس (بسامد)

بسامد تولید جریان برق متناوب، معادل با تعداد چرخش قاب در یک ثانیه است. به طور مثال اگر بسامد جریان متناوب $50\,Hz$ باشد، یعنی قاب در هر ثانیه ۵۰ دور می‌چرخد. در حالت کلی‌تر می‌توان گفت اگر قاب در مدت زمان t تعداد n دور بچرخد، بسامد (فرکانس) برابر است با:

$$\boxed{f=\frac{n}{t}}$$

$$\boxed{f=\frac{1}{T}}$$

تذکر به سادگی می‌توان نشان داد که بسامد، عکس زمان تناوب است.

تمرین۱ **در یک مولد جریان متناوب، معادلهٔ جریان القایی ایجاد شده در حلقه‌ای به مقاومت 2Ω در SI به صورت $I=2\times10^{-2}\sin\pi t$ است. در رابطه با آن، کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟**

۱) بیشینهٔ نیروی محرکهٔ القایی در حلقه برابر ۴۰ میلی‌ولت است.

۲) در لحظهٔ $t=\frac{2}{3}s$، نیروی محرکهٔ القایی برابر $2\sqrt{3}\times10^{-2}$ ولت است.

۳) این حلقه در هر ۱۰ ثانیه، ۲۰ دور می‌زند.

۴) شار گذرنده از حلقه در لحظهٔ $t=\frac{1}{2}s$ برابر صفر است.

پاسخ برای حل این سؤال، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با توجه به معادلهٔ جریان القایی داده شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}I=2\times10^{-2}\sin(\pi t)\\ I=I_{max}\sin(\frac{2\pi}{T}t)\end{cases}\Rightarrow I_{max}=2\times10^{-2}A,\frac{2\pi}{T}=\pi$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $I_{max}=\frac{\varepsilon_{max}}{R}$ بین بیشینهٔ نیروی محرکه و جریان القایی می‌توان نوشت:

$$I_{max}=\frac{\varepsilon_{max}}{R}\Rightarrow\varepsilon_{max}=RI_{max}=2\times2\times10^{-2}=4\times10^{-2}V=40mV$$

۲) حال با نوشتن معادلهٔ نیروی محرکهٔ القایی، برای محاسبهٔ ε در لحظهٔ $t=\frac{2}{3}s$، داریم:

$$\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin(\frac{2\pi}{T}t)=4\times10^{-2}\sin(\pi t)$$

$$t=\frac{2}{3}s\Rightarrow\varepsilon=4\times10^{-2}\sin(\pi\times\frac{2}{3})=4\times10^{-2}\times(\frac{\sqrt{3}}{2})=2\sqrt{3}\times10^{-2}V$$

۳) ابتدا زمان تناوب این حلقه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2\pi}{T}=\pi \Rightarrow T=2s$$

در ادامه با توجه به این‌که دورهٔ تناوب چرخش برابر $T=2s$ می‌باشد، این حلقه در هر ۱۰ ثانیه، ۵ دور می‌زند.

$$n=\frac{t}{T}=\frac{10}{2}=5 \text{ دور}$$

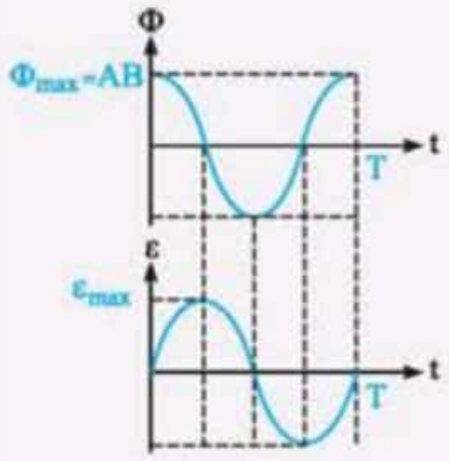
بنابراین گزینهٔ (۳) عبارت نادرستی است.

۴) شار گذرنده از حلقه از رابطهٔ $\Phi=AB\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ به دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Phi=\overbrace{AB}^{\Phi_{max}}\cos(\frac{2\pi}{T}t)=\Phi_{max}\cos(\pi t)$$

بنابراین شار گذرنده از حلقه در لحظهٔ $t=\frac{1}{2}s$ برابر صفر است. $t=\frac{1}{2}s \Rightarrow \Phi=\Phi_{max}\underbrace{\cos(\pi\times\frac{1}{2})}_{=0}=0 \Rightarrow$

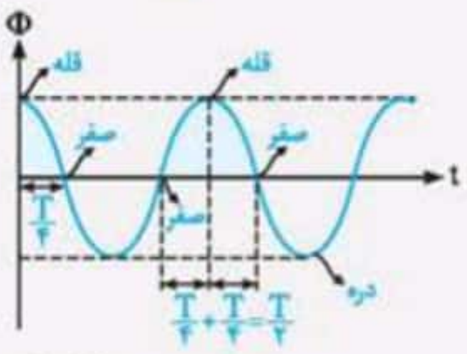
نکته با توجه به معادلات $\Phi-t$ و $\varepsilon-t$، به سادگی می‌توان نمودارهای مربوط به آن‌ها را رسم کرد:



$$\Phi=AB\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

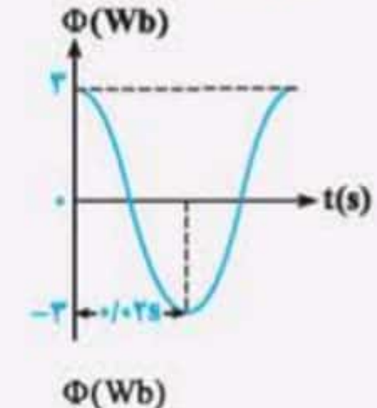
$$\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

دقت شود که شکل کلی نمودار $\Phi-t$ شبیه نمودار $\cos x$ بوده و شکل کلی نمودار $\varepsilon-t$ شبیه نمودار $\sin x$ می‌باشد.

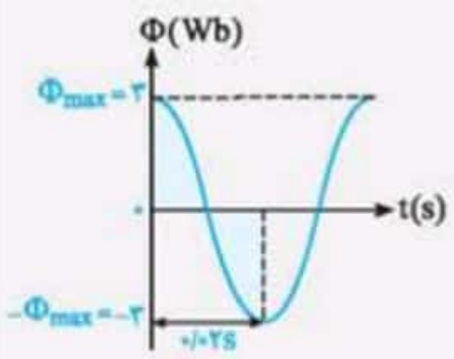


در چنین نمودارهایی، مدت زمان یک بار از قله به صفر رسیدن یا یک بار از دره به صفر رسیدن برابر $\frac{T}{4}$ است.

تمرین۲ نمودار روبه‌رو، شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه می‌باشد. دورهٔ تناوب چرخش این حلقه برابر ..... ثانیه بوده و بزرگی جریان القایی ایجاد شده در حلقه در لحظهٔ $t=0/02s$ برابر ..... است.
(I_{max} نشان‌دهندهٔ بیشینهٔ جریان القایی در حلقه است.)



۱) ۰/۰۴، صفر
۲) ۰/۰۱، صفر
۳) I_{max} ،۰/۰۴
۴) I_{max} ،۰/۰۲



پاسخ با توجه به نمودار $\Phi-t$ داده شده در صورت سؤال می‌دانیم که مدت زمان رنگ‌شده معادل با $\frac{T}{2}$ است و داریم:

$$\frac{T}{2}=0/02 \Rightarrow T=0/04s$$

با توجه به این‌که در لحظهٔ $t=0/02s$ اندازهٔ شار عبوری از حلقه بیشینه است، بنابراین نیروی محرکه و جریان القایی ایجاد شده در حلقه در این لحظه برابر صفر می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با توجه به رابطهٔ $\Phi=AB\cos\theta$، وقتی نیم‌خط عمود بر صفحه در راستای میدان مغناطیسی قرار گیرد، زاویهٔ θ برابر صفر یا ۱۸۰ درجه شده و مقدار شار عبوری از سیم‌پیچ بیشینه خواهد بود. از طرفی می‌دانیم زمانی‌که شار عبوری از سیم‌پیچ بیشینه است، نیروی محرکه و جریان القایی در سیم‌پیچ صفر است.

۲) بیشینهٔ شار عبوری از سیم‌پیچ برابر $\Phi_{max}=AB$ می‌باشد، بنابراین با تغییر دورهٔ تناوب دوران (T) و یا تعداد دورهای سیم‌پیچ، Φ_{max} تغییری نخواهد کرد، چون سطح مقطع سیم‌پیچ و اندازهٔ میدان مغناطیسی تغییر نکرده‌اند. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

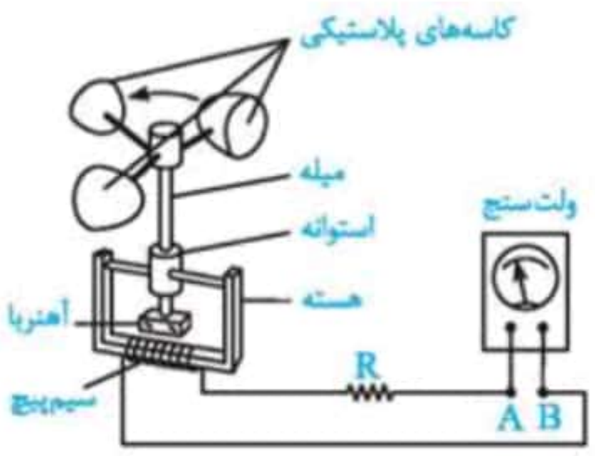
۳) $\downarrow I_{max}=\frac{\varepsilon_{max}}{R\uparrow}$

۴) با چرخش سیم‌پیچ در داخل میدان مغناطیسی یکنواخت، زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر سطح حلقه‌های پیچه و بردار میدان مغناطیسی تغییر کرده و در نتیجه شار عبوری از پیچه تغییر می‌کند $(\Phi=AB\cos\theta)$. بنابراین رایج‌ترین روش برای شار و در نتیجه تولید جریان القایی تغییر زاویهٔ θ است.

gajmarket.com

۴ ۲۱۸۶ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با وزیدن باد و چرخش میله، آهنربای متصل به آن نیز که در بالای سیم‌پیچ قرار دارد، شروع به چرخش می‌کند، بنابراین شار مغناطیسی ناشی از آهنربا که از سیم‌پیچ عبور می‌کند، تغییر می‌کند. به علت قانون القای فاراده، تغییر شار مغناطیسی عبوری از سیم‌پیچ در دو سر آن ولتاژی را القا کرده و در نتیجه ولت‌سنج عددی را نشان می‌دهد.



۲) با چرخش آهنربا شار مغناطیسی عبوری از سیم‌پیچ به صورت متناوب تغییر می‌کند، یعنی از یک مقدار بیشینه به صفر رسیده و سپس به یک مقدار کمینه رسیده و باز هم به صفر و سپس به مقدار بیشینهٔ خود برمی‌گردد و این روال ادامه پیدا می‌کند.

بنابراین ولتاژ القایی ایجاد شده و جریان القایی ناشی از آن نیز به صورت متناوب تغییر می‌کند.

۳) با افزایش تندی باد، چرخش آهنربا سریع‌تر شده و آهنگ تغییر شار عبوری از سیم‌پیچ سریع‌تر می‌شود $(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\uparrow)$. بنابراین ولتاژ القایی ایجادشده افزایش خواهد یافت.

$$\overline{\varepsilon}=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|\Rightarrow \overline{\varepsilon}\uparrow$$

۴) با افزایش تعداد دور سیم‌پیچ، ولتاژ القایی تولید شده افزایش یافته و در نتیجه عدد ولت‌سنج افزایش می‌یابد. بنابراین جریان القایی تولید شده نیز افزایش خواهد یافت:

$$\overline{\varepsilon}=\left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|\xrightarrow{\overline{I}=\frac{\overline{\varepsilon}}{R}}\overline{I}\uparrow \quad \text{یا} \quad \overline{I}=\left|-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|\Rightarrow I\uparrow$$

پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۴ ۲۱۸۷ با توجه به روابط زیر می‌توان نوشت:

$$\text{طول سیم}=\text{محیط یک دور}\times\text{تعداد دور}\Rightarrow 5\times 2\underbrace{\pi}_{\simeq 3}r=3\Rightarrow r=\frac{1}{10}m$$

$$\Phi_{max}=AB=(\pi r^2)\times B\Rightarrow \Phi_{max}\simeq 3\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times 2=0/06\,Wb$$

۳ ۲۱۸۸ با توجه به معادلهٔ شار ـ زمان داده شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Phi=10^{-4}\cos 300t\\ \Phi=\Phi_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\end{cases}\Rightarrow \Phi_{max}=10^{-4}\,Wb=0/1\,mWb\ ,\ \frac{2\pi}{T}=300\Rightarrow T=\frac{2\times 3}{300}=\frac{1}{50}s$$

۲ ۲۱۸۹ این سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با توجه به شکل کلی معادلات مربوط به جریان متناوب، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Phi=5\cos(60t)\\ \Phi=AB\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=60$$

$$\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\Rightarrow\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin(60t)$$

$$t=\frac{\pi}{240}s\Rightarrow\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}=\sin(60t)=\sin\left(60\times\frac{\pi}{240}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم: مقدار شار در لحظهٔ $t=\frac{\pi}{240}s$ برابر است با:

$$\Phi=\overset{\Phi_{max}}{\overbrace{5}}\cos(60t)\xrightarrow{t=\frac{\pi}{240}s}\Phi=5\cos\left(60\times\frac{\pi}{240}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2}\,Wb$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ زیر که در درسنامه به دست آمد، داریم:

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi_{max}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2=1\Rightarrow\left(\frac{\frac{5}{2}\sqrt{2}}{5}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2=1\Rightarrow\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱ ۲۱۹۰ با توجه به رابطهٔ زیر که در درسنامه به‌دست آمده است، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi_{max}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2=1\xrightarrow[\frac{\Phi}{\Phi_{max}}=\frac{\sqrt{3}}{2}]{\text{طبق صورت سؤال}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2=1\Rightarrow\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right|=\frac{1}{2}$$

۴ ۲۱۹۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با توجه به معادلهٔ جریان داده شده، مقدار جریان در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۹۰}s$ برابر است با:

$$I = ۲\sin ۶۰\pi t \xrightarrow{t=\frac{۱}{۹۰}s} I = ۲\sin\Big(\overbrace{۶۰\pi \times \frac{۱}{۹۰}}^{\frac{۲\pi}{۳}}\Big) = ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}A$$

۲) با توجه به رابطهٔ $V = RI$ داریم:

$$V = RI \Rightarrow V = ۳\times ۲\sin ۶۰\pi t = ۶\sin ۶۰\pi t$$

۳)

$$I = ۲\sin ۶۰\pi t \xrightarrow{\sin ۶۰\pi t = ۱} I = I_{max} = ۲A$$

۴) در لحظهٔ $t = \frac{۱}{۱۲۰}s$، جریان و هم‌چنین نیروی محرکهٔ القایی پیچه حداکثر بوده و در نتیجه شار عبوری از آن صفر خواهد بود.

$$I = I_{max} \Rightarrow \sin ۶۰\pi t = ۱ \Rightarrow ۶۰\pi t = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow t = \frac{۱}{۱۲۰}s$$

تذکر

در یک مولد جریان متناوب، هنگامی‌که اندازهٔ جریان و نیروی محرکهٔ القایی حداکثر است، شار عبوری از آن برابر صفر است و هنگامی‌که اندازهٔ شار عبوری از پیچه حداکثر است، جریان و نیروی محرکهٔ القایی در آن صفر است.

۳ ۲۱۹۲ ابتدا معادلهٔ جریان ـ زمان را با توجه به اختلاف پتانسیل دو سر رسانا به دست می‌آوریم:

$$V = RI \Rightarrow ۱۰۰\sqrt{۲}\sin(۱۰۰\pi t) = ۵۰\times I \Rightarrow I = ۲\sqrt{۲}\sin(۱۰۰\pi t)$$

در ادامه برای محاسبهٔ جریان عبوری در $t = \frac{T}{۱۲}$، می‌توان نوشت:

معادلهٔ $(I-t)$: $\frac{۲\pi}{T} = ۱۰۰\pi \Rightarrow T = \frac{۱}{۵۰}s$

$$t = \frac{T}{۱۲} = \frac{\frac{۱}{۵۰}}{۱۲} = \frac{۱}{۶۰۰}s \Rightarrow I = ۲\sqrt{۲}\sin\Big(۱۰۰\pi\times\frac{۱}{۶۰۰}\Big) = \sqrt{۲}A$$

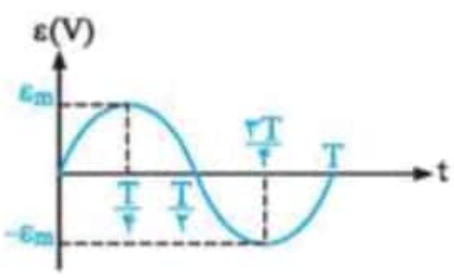
خلاقیت حرفه‌ای ها

اگر معادلهٔ I را به صورت $I = ۲\sqrt{۲}\sin\Big(\frac{۲\pi}{T}t\Big)$ می‌نوشتیم، بدون محاسبهٔ دوره، شدت جریان در $t = \frac{T}{۱۲}$ به دست می‌آمد:

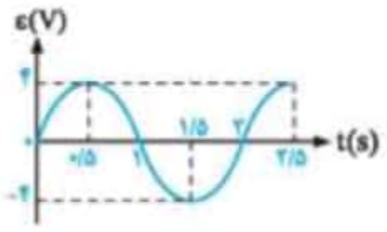
$$I = ۲\sqrt{۲}\sin\Big(\frac{۲\pi}{T}t\Big) \xrightarrow{t=\frac{T}{۱۲}} I = ۲\sqrt{۲}\sin\Big(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{T}{۱۲}\Big) = \sqrt{۲}A$$

۲ ۲۱۹۳ دورهٔ تناوب چرخش پیچه برابر ۲ ثانیه است:

$$\varepsilon = ۴\sin\pi t \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = ۲s$$



بنابراین با توجه به شکل کلی نمودار سینوسی، نمودار تغییرات نیروی محرکهٔ القایی در پیچه برحسب زمان (از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ $t = ۲/۵s$) به صورت شکل مقابل رسم می‌شود. شکل مقابل گویای این واقعیت است که نیروی محرکهٔ القایی در دو لحظه تغییر جهت می‌دهد؛ یک بار در لحظهٔ $t = ۱s$ (از مقادیر مثبت به منفی) و بار دیگر در لحظهٔ $t = ۲s$ (از مقادیر منفی به مثبت).

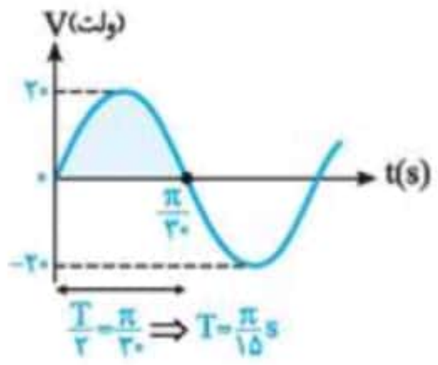


با توجه به رابطهٔ $\varepsilon = RI$، نیروی محرکه و جریان الکتریکی همواره هم‌جهت با هم تغییر می‌کنند. بنابراین، جهت جریان نیز در مدت زمان یادشده ۲ بار تغییر می‌کند، یک بار در لحظهٔ $t = ۱s$ و بار دیگر در لحظهٔ $t = ۲s$.

۲ ۲۱۹۴ چون ربع چرخه $\Big(\frac{T}{۴}\Big)$ در $۵ms$ طی شده است، دورهٔ تناوب برابر $T = ۲۰ms$ است و می‌توان نوشت:

$$I = I_m\sin\frac{۲\pi}{T}t = ۴\sin\Big(\frac{۲\pi}{۲۰\times۱۰^{-۳}}\Big)t = ۴\sin ۱۰۰\pi t$$

۱ ۲۱۹۵ نمودار $V-t$ به صورت شکل کلی یک معادلهٔ سینوسی است و می‌توان نوشت:



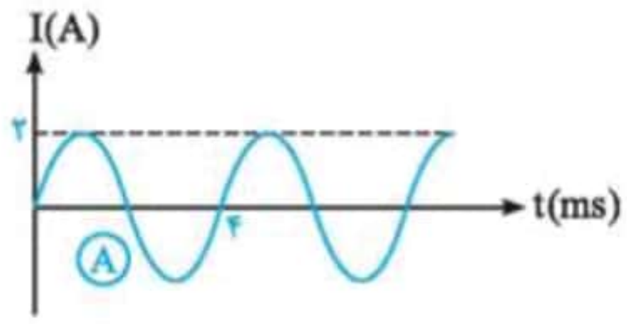
$$\begin{cases} V = V_{max}\sin\Big(\frac{۲\pi}{T}t\Big) \\ V_{max} = ۲۰V\ ,\ T = \frac{\pi}{۱۵}s \end{cases} \Rightarrow V = ۲۰\sin(۳۰t)$$

و معادلهٔ شدت جریان عبوری از مقاومت برابر است با:

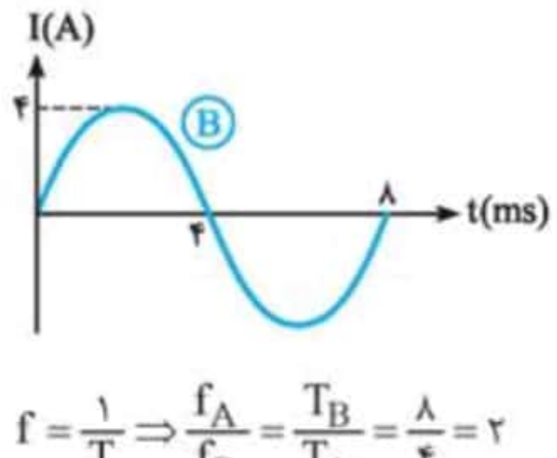
$$V = RI \Rightarrow ۲۰\sin(۳۰t) = ۵\times I \Rightarrow I = ۴\sin(۳۰t)$$

gajmarket.com

۴ ۲۱۹۶ با توجه به دو نمودار نشان داده شده، در مورد مولدهای A و B داریم:



$$T_A = ۴s \Rightarrow I_A = ۲\sin\left(\frac{۲\pi}{۴}t\right)$$



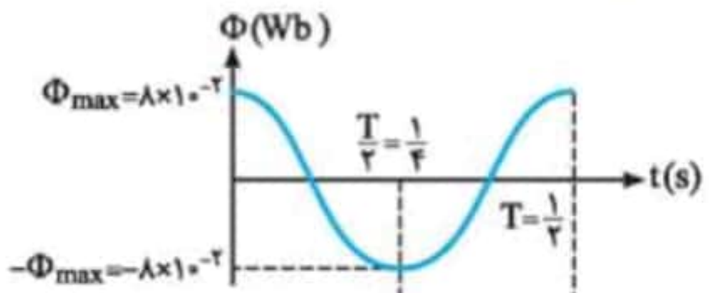
$$T_B = ۸s \Rightarrow I_B = ۴\sin\left(\frac{۲\pi}{۸}t\right)$$

$$f = \frac{۱}{T} \Rightarrow \frac{f_A}{f_B} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

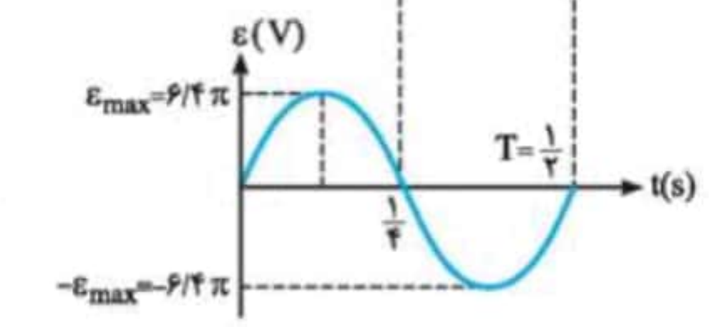
$$t = \frac{۲}{۳}s \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \frac{۲\sin\left(\frac{۲\pi}{۴} \times \frac{۲}{۳}\right)}{۴\sin\left(\frac{۲\pi}{۸} \times \frac{۲}{۳}\right)} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴ ۲۱۹۷ با توجه به معادلهٔ شار داده شده می‌توان نوشت:

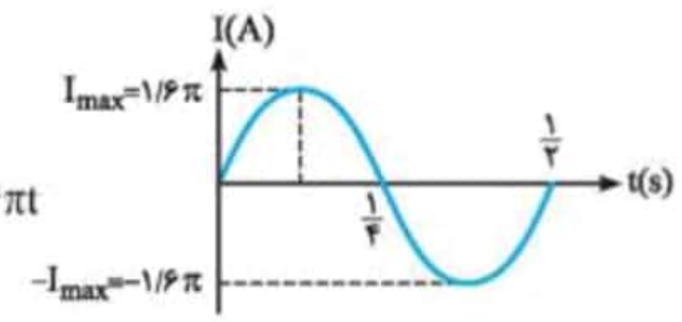
$$\Phi = ۸\times۱۰^{-۲}\cos ۴\pi t \rightarrow \Phi_{max} = ۸\times۱۰^{-۲}\,Wb\ ,\ \frac{۲\pi}{T} = ۴\pi \Rightarrow T = \frac{۱}{۲}s \Rightarrow$$



$$\varepsilon = \varepsilon_{max}\sin\left(\frac{۲\pi}{T}t\right) = ۶/۴\pi\sin(۴\pi t)$$



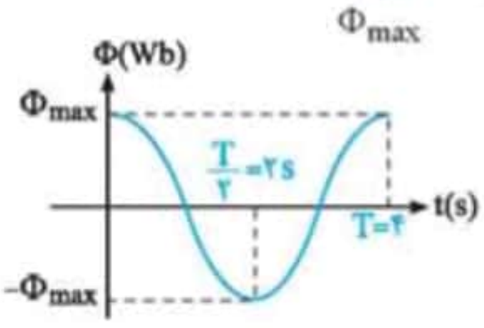
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۶/۴\pi\sin(۴\pi t)}{۴} = \overbrace{۱/۶\pi}^{I_{max}}\sin ۴\pi t$$



۴ ۲۱۹۸ با توجه به فرم کلی معادلهٔ نیروی محرکهٔ القایی در جریان متناوب، می‌توان نوشت:

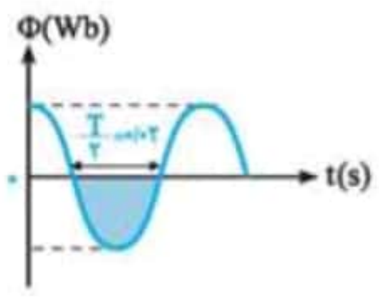
$$\begin{cases} \varepsilon = ۲۰\pi\sin\frac{\pi}{۲}t \\ \varepsilon = \varepsilon_{max}\sin\left(\frac{۲\pi}{T}\right)t \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = ۴s$$

معادلهٔ شار ـ زمان: $\Phi = \underbrace{AB}_{\Phi_{max}}\cos\left(\frac{۲\pi}{T}t\right) = \Phi_{max}\cos\left(\frac{\pi}{۲}t\right)$



در ادامه نمودار متناظر با رابطهٔ به‌دست آمده، به‌صورت مقابل است:

۱ ۲۱۹۹ ابتدا زمان تناوب را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



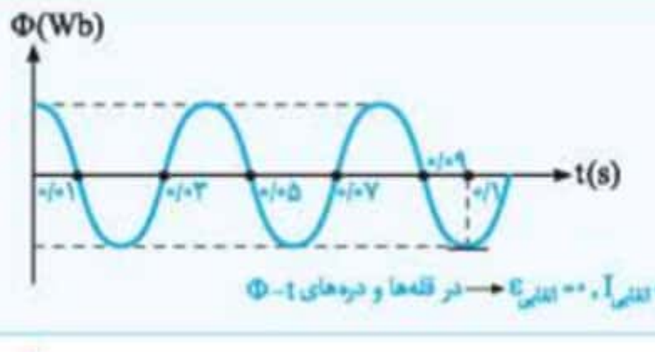
$$\frac{T}{۲} = ۰/۰۲ \Rightarrow T = ۰/۰۴s$$

در ادامه به سادگی جریان القایی در $t=\frac{۱}{۱۰}s$ به‌دست می‌آید:

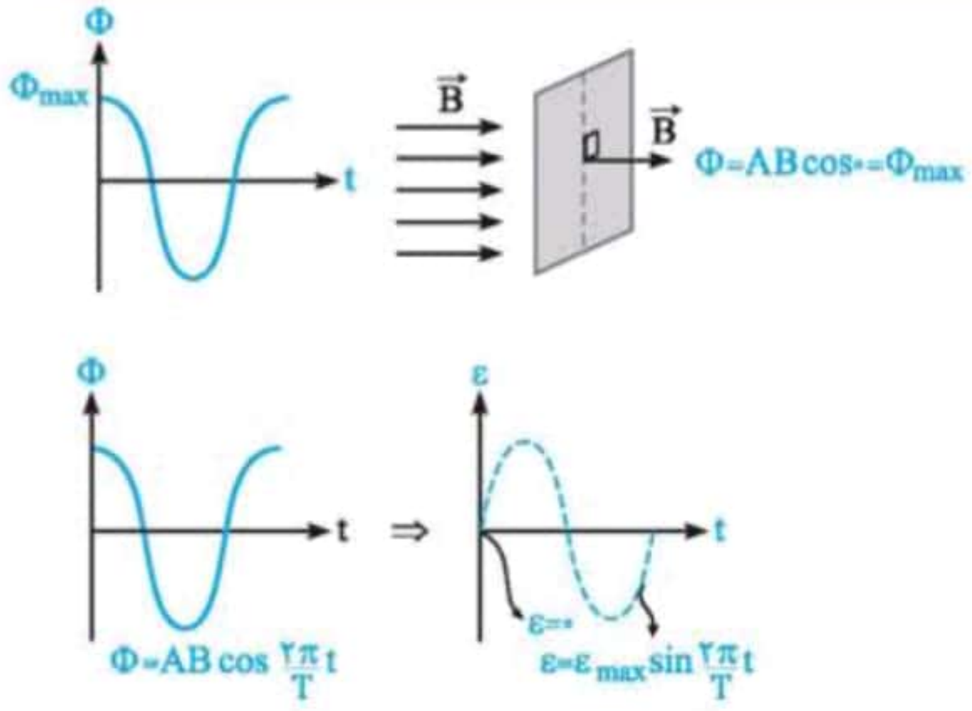
$$\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin(\frac{۲\pi}{T}t)=۴۰\pi\sin(\frac{۲\pi}{T}t)\\ I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{۴۰\pi}{۲\pi}\sin(\frac{۲\pi}{۰/۰۴}t)=۲۰\sin(۵۰\pi t)\\ t=\frac{۱}{۱۰}s\Rightarrow I=۲۰\sin(۵۰\pi\times\frac{۱}{۱۰})=۲۰\overbrace{\sin ۵\pi}^{۰}=۰\end{cases}$$

خلاقیت حرفه‌ای ها

در این نمودار در $t=۰/۱s$، اندازهٔ شار عبوری از حلقه بیشینه است. از طرفی در لحظاتی که اندازهٔ شار عبوری از حلقه بیشینه است، نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی صفر است.



۳ ۲۲۰۰ اگر در مبدأ زمان خطوط میدان بر سطح قاب عمود باشند، یعنی شار عبوری بیشینه است و با توجه به فرم متناوبی، نمودار شار ـ زمان می‌تواند به صورت رسم شده باشد:



از طرفی با توجه به رابطهٔ $\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin\frac{۲\pi}{T}t$، نمودار نیروی محرکه ـ زمان به صورت رسم شده است. دقت شود که در این قاب‌ها، هنگامی که شار بیشینه است، $\varepsilon=۰$ می‌باشد. دو شکل مقابل، در گزینهٔ (۳) درست نشان داده شده است.

دقت شود، هرگاه شار مغناطیسی در حال کاهش باشد، نیروی محرکهٔ القایی در حال افزایش است و بالعکس.

۴ ۲۲۰۱ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) در لحظاتی که شار گذرنده از قاب صفر است، نیروی محرکهٔ القایی در مولد بیشینه و در لحظاتی که شار گذرنده از قاب بیشینه است، نیروی محرکهٔ القایی در مولد صفر است.

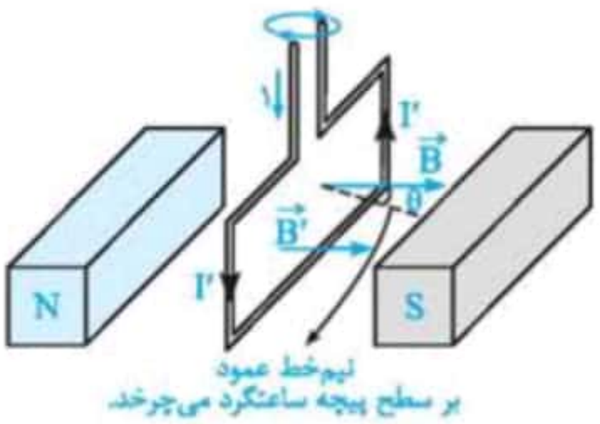
۲) می‌دانیم وقتی سطح قاب عمود بر خطوط میدان است، شار گذرنده از قاب بیشینه است، بنابراین در این لحظات نیروی محرکهٔ القایی صفر است.

۳) با توجه به رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R}$، با صفر شدن نیروی محرکهٔ القایی، I نیز صفر می‌شود.

با توجه به این توضیحات، گزینهٔ (۴) عبارت نادرستی است.

۱ ۲۲۰۲ با چرخش حلقه در جهت نشان داده شده، زاویهٔ θ افزایش یافته و با این افزایش، شار عبوری کاهش و نیروی محرکهٔ القایی افزایش می‌یابد.

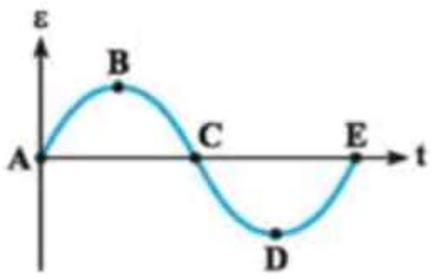
$$\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_{max}\sin\theta\\ \theta\uparrow\Rightarrow\sin\theta\uparrow\Rightarrow\varepsilon\uparrow\end{cases}$$



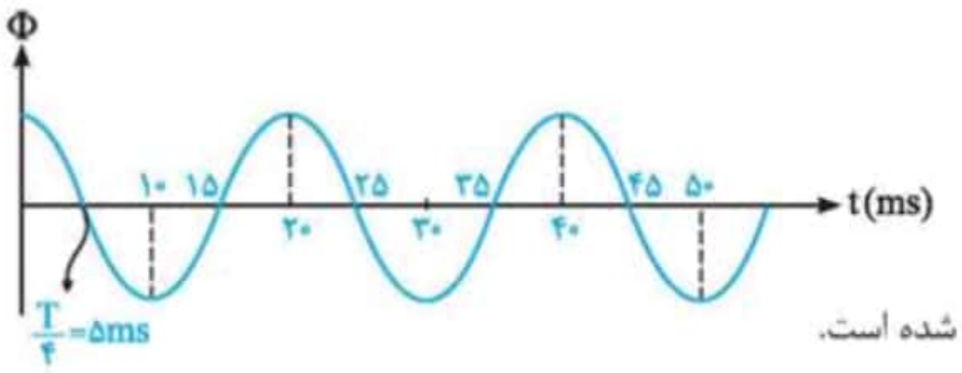
از سوی دیگر در وضعیت نشان داده شده، شار عبوری از قاب در حال کاهش است. (زیرا قاب متمایل به قرار گرفتن به موازات میدان می‌شود) با توجه به قانون لنز، جهت جریان القایی (I') باید به گونه‌ای باشد که میدان ناشی از آن (B') میدان اصلی (B) را تقویت کند و به همین دلیل جریان القایی در جهت نشان داده شده (یعنی جهت (۱)) است. همان‌طور که مشاهده کردید، سؤال دشوار و مفهومی را حل کردیم.

دقت: برای درک بهتر، انگشت شست دست راست را بر روی I' قرار داده و انگشتان دیگر دست راست را خم کنید، مشاهده می‌کنید که جهت میدان ناشی از آن با میدان اصلی یکسان است.

۳ ۲۲۰۳ همان‌طور که می‌دانیم در لحظاتی که نیروی محرکهٔ القایی در مولد صفر است، اندازهٔ شار عبوری از سیم‌پیچ بیشینه و در لحظاتی که اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی در مولد بیشینه است، شار عبوری از سیم‌پیچ صفر است. بنابراین در لحظات A، C و E که نیروی محرکهٔ القایی صفر است، اندازهٔ شار عبوری از سیم‌پیچ بیشینه است.



gajmarket.com



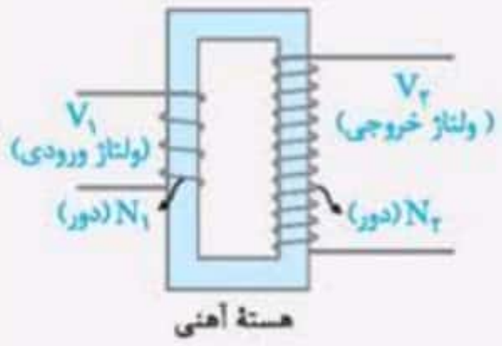
۳ ۲۲۰۴ با توجه به شکل مقابل، در مدت زمان ۵۰ms، ۵ بار شار عبوری از سیم‌پیچ صفر شده است (در لحظات ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵ و ۴۵ میلی‌ثانیه).

از طرفی می‌دانیم در مولد جریان متناوب، هرگاه شار عبوری از سیم‌پیچ صفر شود، اندازهٔ جریان القایی ایجاد شده در آن بیشینه می‌شود.

بنابراین در مدت زمان ۵۰ میلی‌ثانیه، ۵ بار بزرگی جریان القایی در سیم‌پیچ بیشینه شده است.

۲ ۲۲۰۵ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۱۸ — **مبدل‌ها** — (تست‌های ۲۲۰۵ تا ۲۲۰۷)



به‌طور کلی تبدیل ولتاژ از مقداری به مقدار دیگر در یک مدار، توسط مبدل انجام می‌شود. با کمک مبدل، عملاً ولتاژ ورودی $V_۱$ به ولتاژ خروجی $V_۲$ تبدیل می‌شود.

نکات مهم و کاربردی

۱) اگر $V_۲ > V_۱$ باشد، می‌گوییم مبدل از نوع افزاینده است و اگر $V_۲ < V_۱$ باشد و می‌گوییم مبدل از نوع کاهنده است. از طرفی اساس کار مبدل، پدیدهٔ القای متقابل می‌باشد.

۲) از مبدل‌ها برای تبدیل ولتاژ در جریان‌های متناوب (ac) استفاده می‌شود.

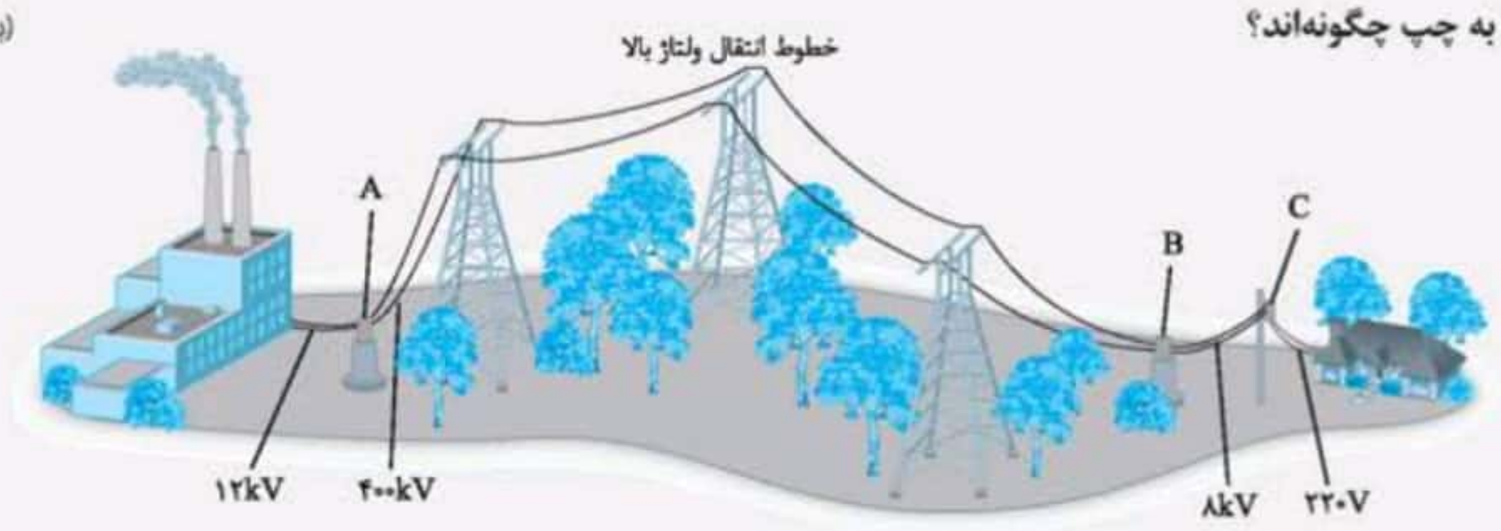
۳) یکی از امتیازهای مهم توزیع توان الکتریکی ac بر dc آن است که افزایش و کاهش ولتاژ در برق ac، بسیار آسان‌تر از dc است.

۴) در انتقال توان در فاصله‌های دور می‌خواهیم تا حد امکان از ولتاژ بالاتر و جریان کم‌تر استفاده کنیم. این کار تلفات $RI^۲$ را در خطوط انتقال کم می‌کند و در نتیجه می‌توان از سیم‌های نازک‌تری استفاده کرد و هزینه ساخت شبکهٔ برق را کاهش داد.

۵) برای افزایش ولتاژ در ابتدای خطوط از مبدل افزاینده و برای کاهش ولتاژ در انتهای مسیر از مبدل کاهنده استفاده می‌شود.

تمرین ۱ **شکل زیر، نمایی از انتقال برق از یک نیروگاه تا محل مصرف خانه‌های یک شهر را نشان می‌دهد. مبدل‌های A، B و C در این تصویر به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟**

(برگرفته از کتاب درسی)



۱) افزاینده، کاهنده، افزاینده ۲) کاهنده، افزاینده، افزاینده ۳) افزاینده، افزاینده، کاهنده ۴) افزاینده، کاهنده، کاهنده

پاسخ با توجه به شکل فوق، مبدل‌های A، B و C به ترتیب افزاینده، کاهنده و کاهنده می‌باشد و گزینهٔ (۴) صحیح است.

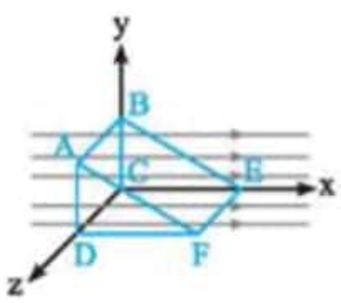
با توجه به خلاصه نکات فوق، گزینهٔ (۲) نادرست بوده و پاسخ این سؤال است.

۴ ۲۲۰۶ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۸)، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴ ۲۲۰۷ برای این روند انتقال، ابتدا از یک مولد افزاینده و سپس از یک مولد کاهنده استفاده می‌شود و $V_A > V_B$ می‌باشد $\left(K = \frac{V_A}{V_B} > ۱\right)$.

نیروگاه برق (۱۰۰۰۰V) $\xrightarrow[\text{(افزاینده)}]{\text{مبدل A}}$ V_A $\xrightarrow[\text{(کاهنده)}]{\text{مبدل B}}$ V_B

۱ ۲۲۰۸ می‌دانیم که شار عبوری از یک سطح با تعداد خطوط میدان مغناطیسی گذرنده از آن رابطهٔ مستقیم دارد.



با توجه به شکل مقابل، تمامی خطوط میدان مغناطیسی که از سطح ABCD عبور می‌کند از سطح ABEF نیز عبور خواهد کرد. بنابراین می‌توان گفت شار مغناطیسی هر دو سطح ABCD و ABEF با یک‌دیگر برابر است و گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱ ۲۲۰۹ تسلا در مترمربع معادل با وبر است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \text{وبر} \equiv \text{ولت} \times \text{ثانیه}$$

(ولت: $\overline{\varepsilon}$، وبر: $\Delta\Phi$، ثانیه: Δt)

تذکر

وبر با تسلا در مترمربع نیز معادل است. $\Phi = AB\cos\theta \Rightarrow \text{وبر} \equiv \text{تسلا} \times \text{مترمربع}$

۳ ۲۲۱۰ مشابه با تست ۲۰۵۷، در این سؤال نیز با توجه به موقعیت حلقه، شار عبوری از آن در اثر مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی می‌باشد و مؤلفهٔ افقی میدان، شاری در حلقه ایجاد نمی‌کند. با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$\overline{I} = -\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{N}{R}A\frac{\Delta B_y}{\Delta t}\cos\theta$$

$$\overline{I} = \left|-\frac{۱۰۰}{۲۰۰}\times ۲۰۰\times ۱۰^{-۴}\times\left(\frac{-۰/۳-۰/۴}{۰/۰۱}\right)\times\cos ۰\right| = ۰/۷\,A$$

۴ ۲۲۱۱ با توجه به مفاهیم انبساط در فیزیک دهم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta\Phi = \Delta A\times B\times\cos\theta \quad , \quad \Delta A = A_۰\times ۲\alpha\times\Delta\theta$$

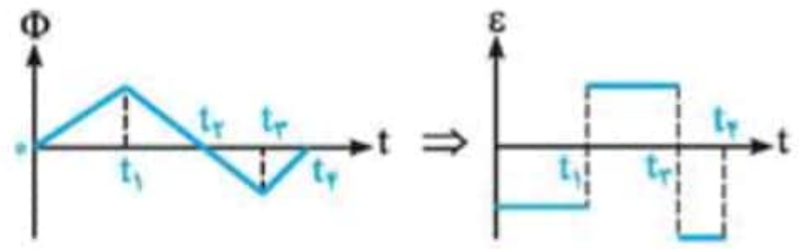
$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_۰} = \frac{\Delta A}{A_۰} = ۰/۲٪ \Rightarrow ۲\alpha\Delta\theta = ۰/۰۰۲ \Rightarrow ۲\times ۲\times ۱۰^{-۵}\times\Delta\theta = ۰/۰۰۲ \Rightarrow \Delta\theta = ۵۰^\circ C$$

۳ ۲۲۱۲ با توجه به این‌که $\varepsilon = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ است، برای رسم شکل کلی نمودار نیروی محرکهٔ القایی برحسب زمان، باید مشتق نمودار شار ـ زمان را نسبت به زمان رسم و حاصل را در یک عدد منفی ضرب کرد:

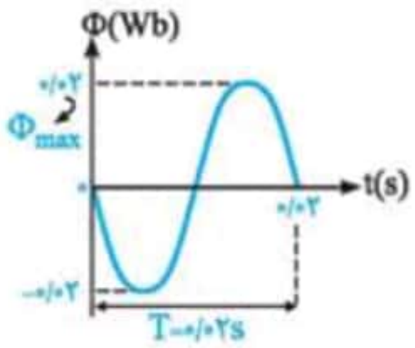
$$\begin{cases} ۰ - t_۱ \Rightarrow \Phi \text{ شیب } > ۰ \Rightarrow \varepsilon < ۰ \\ t_۱ - t_۳ \Rightarrow \Phi \text{ شیب } < ۰ \Rightarrow \varepsilon > ۰ \\ t_۳ - t_۴ \Rightarrow \Phi \text{ شیب } > ۰ \Rightarrow \varepsilon < ۰ \end{cases}$$

این سه وضعیت تنها در گزینهٔ (۳) رعایت شده است. $\Rightarrow$

رسم نمودار $\varepsilon - t$:



۳ ۲۲۱۳ این نمودار به شکل کلی نمودار $-\sin x$ است و معادلهٔ آن عبارت است از:



$$\Phi = -\Phi_{max}\sin\left(\frac{۲\pi}{T}t\right)$$

$$\Phi = -۰/۰۲\sin\left(\frac{۲\pi}{۰/۰۲}t\right) = -۰/۰۲\sin(۱۰۰\pi t)$$

در ادامه برای محاسبهٔ جریان القایی در بازهٔ مورد نظرمان داریم:

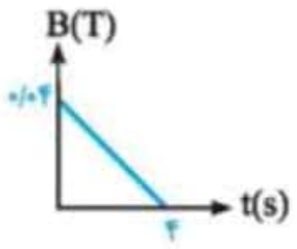
$$\begin{cases} t_۱ = \frac{۱}{۲۰۰}s \rightarrow \Phi_۱ = -۰/۰۲\sin\left(۱۰۰\pi\times\frac{۱}{۲۰۰}\right) = -۰/۰۲\,Wb \\ t_۲ = \frac{۱}{۱۰۰}s \rightarrow \Phi_۲ = -۰/۰۲\sin\left(۱۰۰\pi\times\frac{۱}{۱۰۰}\right) = ۰ \end{cases}$$

$$|\overline{\varepsilon}| = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|-۵۰\times\frac{(۰-(-۰/۰۲))}{\frac{۱}{۱۰۰}-\frac{۱}{۲۰۰}}\right| = ۲۰۰\,V$$

۱ ۲۲۱۴ با توجه به این‌که علت تغییر شار، تغییر میدان مغناطیسی است، مقدار بار جاری شده در مدار عبارت است از:

$$\begin{cases} |q| = \left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right| \\ \Delta\Phi = A(\Delta B)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow q = \left|\frac{NA\cos\theta}{R}\Delta B\right|$$

در ادامه با توجه به نمودار، شیب نمودار منفی بوده و مقدار تغییر میدان در ثانیهٔ اول عبارت است از:



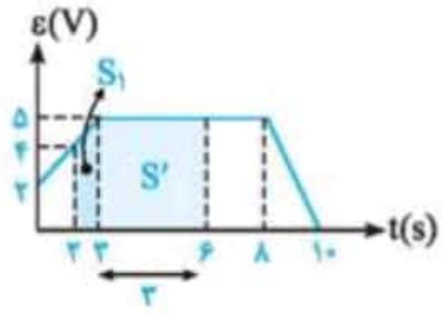
$$\text{مقدار تغییر میدان در ثانیهٔ اول} = \Delta B = -۰/۰۱\,T \text{ , حلقه عمود بر میدان} \Rightarrow \theta = ۰,\ R = ۱۰\,\Omega, A = \pi\times ۰/۱^۲$$

$$q = \left|\frac{۱\times\pi\times ۰/۱^۲\times\cos ۰}{۱۰}\times ۰/۰۱\right| = \pi\times ۱۰^{-۵}\,C = ۱۰\pi\,\mu C$$

دقت: این نمودار به‌صورت یک خط راست بوده که در ۴ ثانیه به اندازهٔ ۰/۰۴ تسلا کاهش یافته و در مدت یک ثانیه، ۰/۰۱ تسلا کاهش می‌یابد.

gajmarket.com

۱ ۲۲۱۵ همان‌طور که در خلاصه نکات (۳) و (۴) بیان شد، مساحت زیر نمودار $\varepsilon - t$ در یک بازهٔ زمانی، برابر $|N\Delta\Phi|$ در آن بازهٔ زمانی است. از سوی دیگر برای محاسبهٔ بار الکتریکی شارش‌یافته از رابطهٔ $q = \left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|$ نیز به محاسبهٔ مقدار $|N\Delta\Phi|$ نیاز داریم. بنابراین با استفاده از نمودار $\varepsilon - t$ می‌توان نوشت:



در ثانیهٔ سوم $(۲s \le t \le ۳s)$:

$$S_{۱\,\text{دوزنقه}} = |N\Delta\Phi_۱| = \frac{(\text{ارتفاع})\times(\text{مجموع دو قاعده})}{۲} = \frac{(۴+۵)\times۱}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۶s$:

$$S_۲ = |N\Delta\Phi_۲| = S_۱ + S' = \frac{۹}{۲} + (۵\times۳) = \frac{۹}{۲} + ۱۵ = \frac{۳۹}{۲}$$

بنابراین نسبت بار الکتریکی شارش‌یافته در ثانیهٔ سوم $(q_۱)$ به بار الکتریکی شارش‌یافته در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۶s$ $(q_۲)$ برابر است با:

$$q = \left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right| \Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = \left|\frac{N\Delta\Phi_۱}{N\Delta\Phi_۲}\right| = \frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۳۹}{۲}} = \frac{۳}{۱۳}$$

۱ ۲۲۱۶ با توجه به این‌که طول سیم در حلقهٔ (۲)، به اندازهٔ ۲ برابر طول سیم در حلقهٔ (۱) است، مقاومت الکتریکی آن نیز به اندازهٔ ۲ برابر سیم (۱) است.

$$L = ۲\pi r\ ,\ r_۲ = ۲r_۱ \Rightarrow L_۲ = ۲L_۱$$

$$L = ۲\pi r\ ,\ r_۲ = ۲r_۱ \Rightarrow L_۲ = ۲L_۱$$

$$R = \rho\frac{L}{A_۱} \xrightarrow[L_۲=۲L_۱]{\rho \text{ و مساحت مقطع } (A_۱) \text{ یکسان است}} R_۲ = ۲R_۱$$

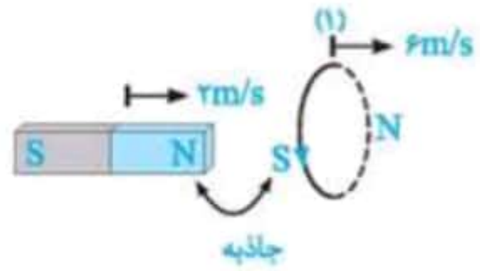
از طرفی با توجه به یکسان بودن ΔB، میزان تغییر شار آن متناسب با مساحت حلقه‌ها بوده و در نتیجه میزان تغییر شار در حلقهٔ (۲)، ۴ برابر حلقهٔ (۱) است.

$$\Delta\Phi = A\,\Delta B \xrightarrow{A_۲=۴A_۱} \Delta\Phi_۲ = ۴\Delta\Phi_۱$$

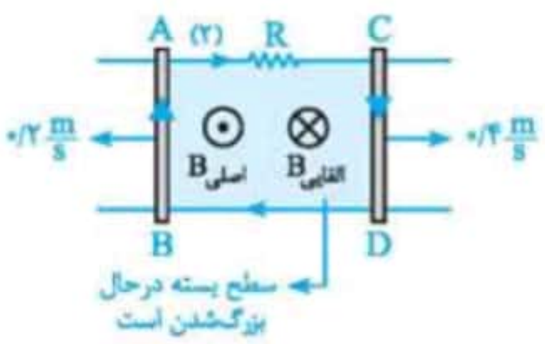
و در نهایت در مقایسهٔ بار الکتریکی جاری شده در دو حلقه، داریم:

$$\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R} \Rightarrow \frac{\Delta q_۲}{\Delta q_۱} = \frac{\Delta\Phi_۲}{\Delta\Phi_۱}\times\frac{R_۱}{R_۲} = ۴\times\frac{۱}{۲} = ۲$$

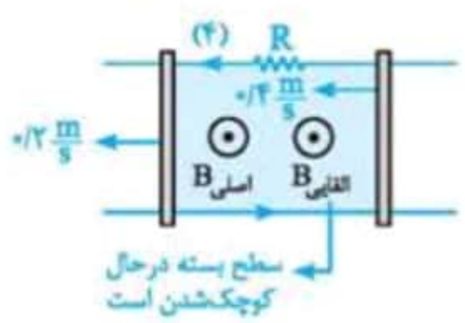
۱ ۲۲۱۷ با توجه به ثابت بودن فاصلهٔ آهنربا و حلقهٔ (۲) به دلیل صفر بودن سرعت نسبی (سرعت هر دو برابر و در یک جهت است)، شار عبوری از آن تغییر نکرده و جریانی در آن القا نمی‌شود. از طرفی با توجه به دور شدن حلقهٔ (۱) و آهنربا از یک‌دیگر، شار عبوری از آن کاهش یافته و مطابق قانون لنز حلقه و آهنربا باید یک‌دیگر را جذب کنند تا مانع از کاهش شار شود. به همین دلیل، جهت جریان القایی باید درجهت $I_۲$ باشد تا با تبدیل شدن حلقهٔ (۱) به یک آهنربا، نیروی جاذبهٔ S - N با تغییر شار مخالفت کند.



۴ ۲۲۱۸ به بررسی هر یک از دو حالت می‌پردازیم:

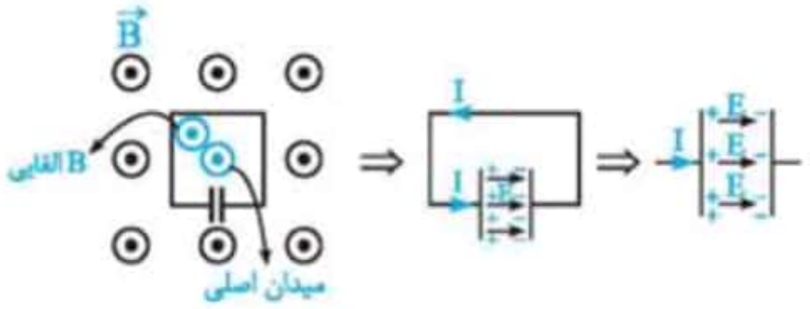


حالت اول: در این حالت، با حرکت میله‌های AB و CD، در نهایت سطح قاب هاشورخوردهٔ بین آن‌ها افزایش می‌یابد و این موضوع سبب افزایش شار عبوری از سطح بسته می‌شود. با رخ دادن این اتفاق، مطابق قانون لنز جریان القایی به گونه‌ای عمل می‌کند که مانع از افزایش شار شود و میدان القایی، میدان اصلی را خنثی کند.



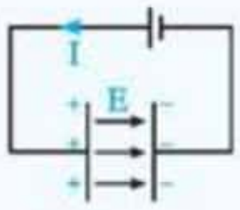
حالت دوم: در این حالت، با حرکت میله‌های AB و CD، در نهایت سطح محصور بین آن‌ها در حال کاهش است و این موضوع سبب کاهش شار عبوری می‌شود. با رخ دادن این اتفاق، میدان القایی و میدان اصلی یک‌دیگر را تقویت می‌کنند.

۳ ۲۲۱۹ با توجه به این‌که میدان مغناطیسی قطع می‌شود، در مدار جریان القایی در جهتی ایجاد می‌شود که با کاهش میدان مخالفت کند و جهت میدان ناشی از جریان القایی برون‌سو شود. با توجه به قانون دست راست، جهت جریان در مدار پادساعتگرد شده و در نتیجه میدان الکتریکی از چپ به راست است.



تذکر

برای درک بهتر فرض کنید یک باتری به‌صورت مقابل این جریان الکتریکی لحظه‌ای را ایجاد کرده است و در این حالت میدان الکتریکی در داخل خازن از سمت چپ به راست (از سمت صفحهٔ مثبت به سمت صفحهٔ منفی) است.



۱ ۲۲۲۰

تذکر

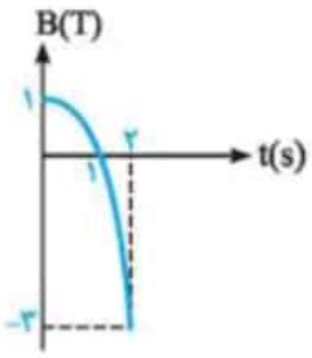
اگر یک سیم با طول ثابت را به شکل‌های مختلف تبدیل کنیم (یعنی محیط ثابت)، بیشترین مساحت در حالت دایره‌ای ایجاد می‌شود.

اگر حلقهٔ دایره‌ای را از دو طرف بکشیم، شکل از حالت دایره‌ای خارج شده و مساحت آن کاهش می‌یابد، با کاهش مساحت، شار عبوری از حلقه کاهش یافته و مطابق قانون لنز، جریان القایی باید به‌گونه‌ای باشد که میدان اصلی را تقویت کند و مانع از کاهش شار شود. به عبارت بهتر جریان القایی باید ساعتگرد باشد.



جریان القایی ساعتگرد است. ⟹ میدان ناشی از جریان القایی باید درون‌سو باشد. ⟹ مدار باید مانع از کاهش شار شود. $A\downarrow \Rightarrow \Phi\downarrow \xrightarrow{\text{لنز}}$

۱ ۲۲۲۱ با توجه به معادلهٔ $B=-t^2+1$، در دو ثانیهٔ اول میدان از $B=+1T$ و درون‌سو کاهش یافته و به صفر رسیده و سپس به $B=-3T$ (یعنی $3T$ و برون‌سو) رسیده است.

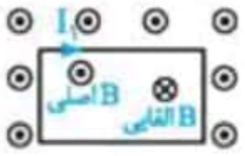


این سؤال را در دو گام بررسی می‌کنیم:

گام اول: (در ثانیهٔ اول): در ثانیهٔ اول، میدان درون‌سو و اندازهٔ آن در حال کاهش بوده و در نتیجه شار عبوری در حال کاهش است. مطابق قانون لنز میدان القایی باید میدان اصلی را تقویت کند و میدان القایی نیز درون‌سو است. در این حالت مطابق قانون دست راست، جریان القایی در جهت I_1 است.

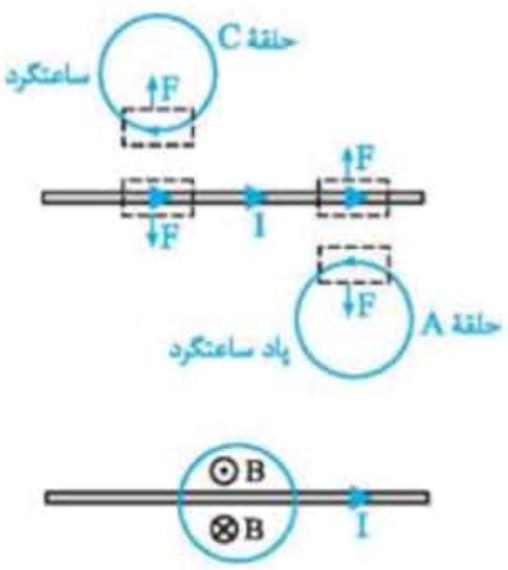


گام دوم: (در ثانیهٔ دوم): در این مرحله میدان برون‌سو بوده و اندازهٔ آن در حال افزایش است. در این حالت شار عبوری در حال افزایش بوده و میدان القایی باید میدان اصلی را تضعیف کند تا مانع از افزایش شار عبوری شود (یعنی میدان القایی درون‌سو است). در این حالت نیز مطابق قانون دست راست، جریان القایی در جهت I_1 است.



بنابراین در ۲ ثانیهٔ اول، جریان القایی همواره در جهت I_1 است.

۱ ۲۲۲۲ با افزایش جریان، شار عبوری از حلقه‌های A و C افزایش یافته و با توجه به قانون لنز، جریان القایی باید مانع از این موضوع شود. در این حالت، دو حلقهٔ A و C به گونه‌ای عمل می‌کنند که نیروی دافعه ایجاد شود.

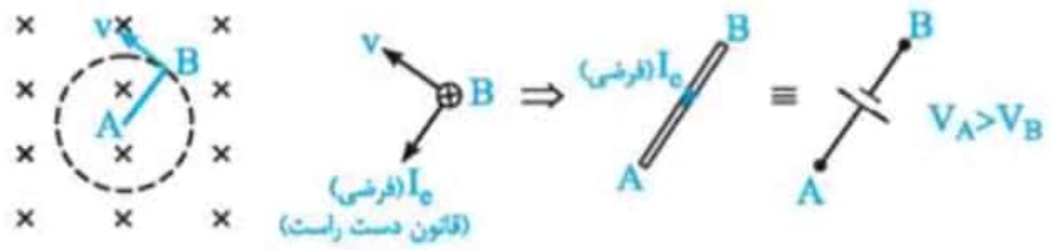


از طرفی در حلقهٔ B، میدان حاصل از سیم در نیمهٔ بالایی حلقه به سمت خارج و در نیمهٔ پایینی به سمت داخل است و با توجه به تقارن موجود، شار کل عبوری از حلقهٔ B صفر است. بنابراین با افزایش I، جریان القایی در آن ایجاد نمی‌شود.

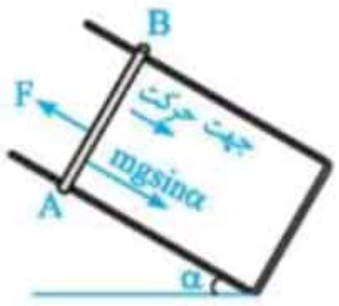
۱ ۲۲۲۳ با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۱۴)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

gajmarket.com

۱ ۲۲۲۴ با توجه به این‌که سرعت بر مسیر حرکت مماس است، جهت جریان القایی فرضی مطابق قانون دست راست و مشابه با سؤال قبل از B به A است. در این حالت مشابه با سؤال قبل، پتانسیل A بزرگ‌تر از پتانسیل B است.



۱ ۲۲۲۵ میله قصد حرکت به سمت پایین سطح شیب‌دار را دارد و جهت نیروی القایی وارد بر میله از طرف میدان مغناطیسی در جهتی است که با حرکت میله مخالفت کرده و مانع از تغییر شار شود (یعنی به سمت بالای سطح شیب‌دار). در ادامه با کمک قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

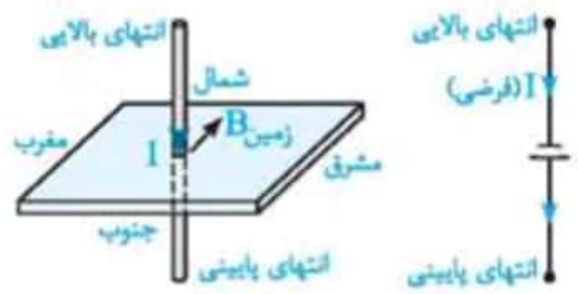


$$\sum F = ma \Rightarrow mg\sin\alpha - F = ma \Rightarrow a = \frac{mg\sin\alpha}{m} - \frac{F}{m} \Rightarrow a = g\sin\alpha - \frac{F}{m} \Rightarrow a < g\sin\alpha$$

به عبارت بهتر شتاب میله در این حالت، از حالتی‌که میله آزادانه حرکت می‌کند کم‌تر است.

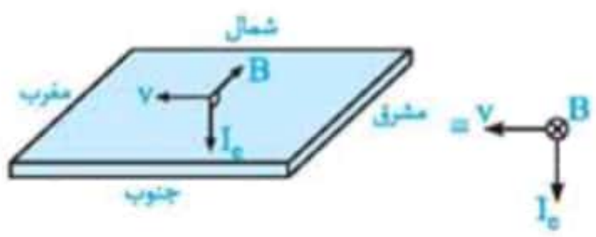
۴ ۲۲۲۶ برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه شود:

۱) با توجه به این‌که بالای میله پتانسیل کم‌تری نسبت به پایین میله دارد، جریان القایی فرضی مشابه با دو تست قبل، از بالا به پایین است. دقت شود که سیم عمود بر میدان زمین، از یک سر آویخته شده است.

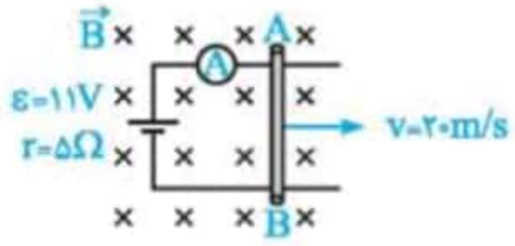


۲) جهت میدان مغناطیسی زمین که سیم در آن قرار دارد از جنوب به سمت شمال است.

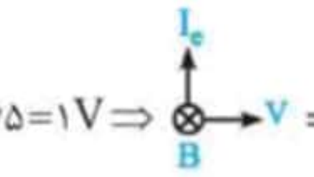
۳) با توجه به قانون دست راست (چهار انگشت در جهت v، خم شدن انگشتان روی B، شست جهت I_e را نشان می‌دهد)، جهت حرکت میله باید به سمت غرب باشد.



۱ ۲۲۲۷ در صورتی‌که میله مطابق شکل نشان داده شده به سمت راست حرکت کند، میله مانند یک باتری با نیروی محرکهٔ $\varepsilon' = BvL$ عمل می‌کند و با کمک قانون دست راست، داریم:

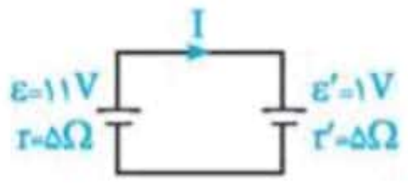


$$\varepsilon' = BvL = ۰/۱ \times ۲۰ \times ۰/۵ = ۱V \Rightarrow \otimes_B \; v \; \uparrow I_e \Rightarrow$$



(باتری معادل با میله)

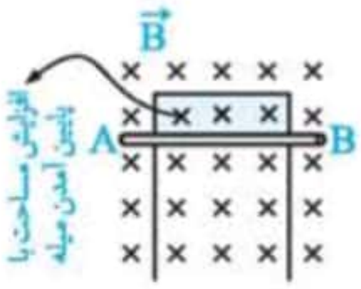
حال به جای میله باتری معادل با آن را جایگذاری می‌کنیم (توجه کنیم که خود میله دارای مقاومت $r' = ۵\Omega$ است):



در مرحلهٔ بعد عدد آمپرسنج برابر است با:

$$\Rightarrow I = \frac{\sum\varepsilon}{\sum r} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{r + r'} = \frac{۱۱ - ۱}{۵ + ۵} = ۱A$$

۲ ۲۲۲۸ با پایین آمدن میلهٔ AB، سطح بستهٔ داخل قاب افزایش می‌یابد، بنابراین شار عبوری از آن نیز افزایش خواهد یافت. مطابق قانون لنز، میدان نیروی F را رو به بالا به میله اعمال می‌کند تا با این عمل مانع از افزایش شار شود و به عبارتی می‌توان نوشت:



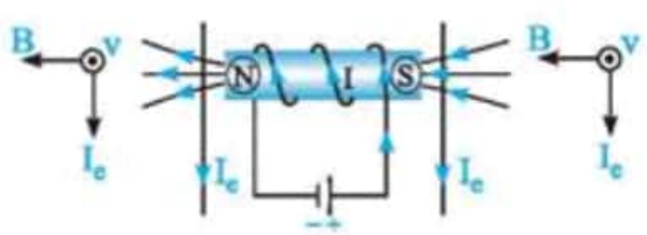
$$mg - F = ma \Rightarrow a < g$$

۲ ۲۲۲۹ برای حل این سؤال با توجه به ایدهٔ طراح آن، به موارد زیر توجه شود:

۱) با توجه به جهت جریان I در سیملوله، جهت میدان مغناطیسی اصلی که از سیملوله خارج می‌شود با توجه به قانون دست راست به‌صورت شکل زیر است:

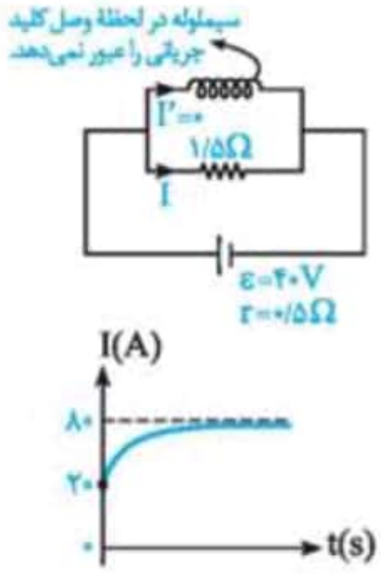
۲) با توجه به این‌که مطابق صورت سؤال سیم‌ها را عمود بر صفحهٔ کاغذ رو به بالا حرکت داده‌ایم، عملاً یعنی سیم‌ها را خارج از صفحه حرکت داده‌ایم (یعنی برون‌سو ⊙ برای درک بهتر خودکار خود را روی صفحهٔ کاغذ قرار دهید و آن را عمود بر صفحهٔ کاغذ رو به بالا حرکت دهید.)

۳) با توجه به جهت‌های v و B، جهت I_e در هر دو سیم به سمت پایین است (چهار انگشت در جهت v، خم شدن انگشتان B و شست دست راست I_e را نشان می‌دهد).



* با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۱۴)، آیا به نظر شما طراح در مورد این سؤال درست فکر کرده است؟

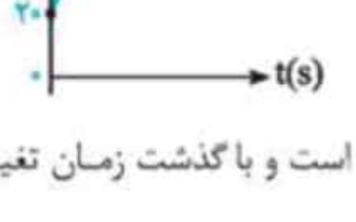
۳ ۲۲۳۰ سیملوله مطابق قانون لنز، با تغییرات ناگهانی جریان مقابله می‌کند. به این صورت که بلافاصله بعد از وصل کردن کلید، با افزایش شدت جریان مقابله کرده و هیچ جریانی را از خود عبور نمی‌دهد، بنابراین در این حالت تمام جریان از مقاومت R عبور می‌کند:



$$t=0 \Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R+r}=\frac{40}{1/5+0/5}=20A$$

با گذشت مدت زمان کمی، جریان سیملوله شروع به افزایش کرده و جریان مدار به حداکثر مقدار خود رسیده و ثابت می‌ماند. در این حالت تمام جریان از سیملولهٔ بدون مقاومت عبور کرده و سیملوله با توجه به این‌که مقاومت درونی‌اش صفر است، مانند سیم، مقاومت را اتصال کوتاه کرده و مقاومت R عملاً از مدار خارج می‌شود. $I=\frac{\varepsilon}{r}=80A$.

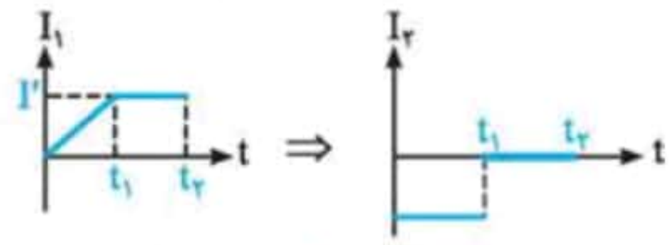
بنابراین نمودار جریان ـ زمان در این مدار به‌صورت شکل مقابل است:



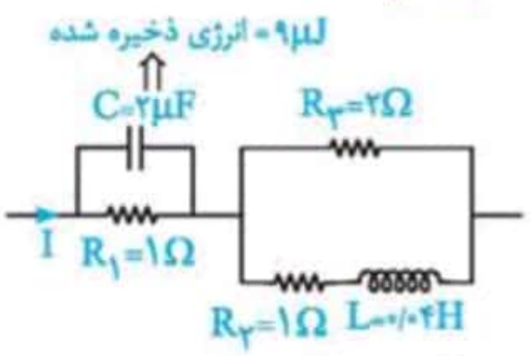
۱ ۲۲۳۱ از لحظهٔ t_1 تا t_2 جریان در سیملولهٔ (۱) ثابت بوده و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از سیملولهٔ(۲) نیز ثابت است و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین در سیملولهٔ (۲) در این بازهٔ زمانی (t_1 تا t_2) جریان القایی ایجاد نمی‌شود.

$$I_2=-\frac{N}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\Phi \text{ ثابت است.}} I_2=0$$

اما از صفر تا t_1، جریان در سیملولهٔ (۱) به‌صورت خطی تغییر کرده و جریان القایی در سیملولهٔ (۲)، مقدار ثابتی است و چون جریان در سیملولهٔ (۱) در حال افزایش است، بنابراین جریان القایی در سیملولهٔ (۲) در جهت مخالف جریان سیملولهٔ (۱) می‌باشد (برای درک بیشتر به توضیحات تست ۲۱۸۴ مراجعه شود.).



۲ ۲۲۳۲ با توجه به انرژی ذخیره شده در خازن، جریان عبوری از مقاومت R_1 عبارت است از:



$$U=\frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 9=\frac{1}{2}\times 2\times V^2 \Rightarrow V=3V$$

$$V=R_1\times I \Rightarrow 3=1\times I \Rightarrow I=3A$$

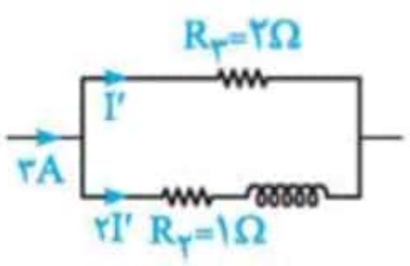
جریان ۳ آمپر، بین مقاومت $R_2=1\Omega$ و $R_3=2\Omega$ تقسیم شده و با توجه به موازی بودن مقاومت‌ها، جریان در مقاومت R_2، دو برابر مقاومت R_3 است (چرا؟).

$$I'+2I'=3A \Rightarrow I'=1A$$

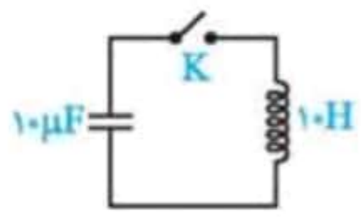
جریان مقاومت یک اهمی $=2I'=2A$

و انرژی ذخیره شده در القاگر برابر است با:

$$U=\frac{1}{2}LI'^2=\frac{1}{2}\times 0/04\times 3^2=0/08J=80mJ$$



۱ ۲۲۳۳ با توجه به این‌که مقاومت مدار صفر است، انرژی در مدار هدر نمی‌رود. با بستن کلید K عملاً بار ذخیره شده در خازن به‌صورت یک جریان در مدار ظاهر می‌شود و بیشترین جریان عبوری از القاگر، با تساوی انرژی ذخیره شده در خازن در لحظهٔ وصل کلید با انرژی القاگر در لحظهٔ عبور بیشترین جریان از آن، به‌سادگی محاسبه می‌شود:



$$U_{max\,\text{خازن}}=U_{max\,\text{القاگر}} \Rightarrow \frac{q_{max}^2}{2C}=\frac{1}{2}LI_{max}^2 \Rightarrow \frac{(5\times10^{-6})^2}{2\times(10\times10^{-6})}=\frac{1}{2}\times10\times I_{max}^2 \Rightarrow I_{max}=5\times10^{-4}A=0/5mA$$

دقت: به عبارت دیگر در این مدار انرژی بین خازن و القاگر مبادله می‌شود، بنابراین بیشینهٔ انرژی خازن برابر بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده در القاگر می‌باشد (در هر لحظه که انرژی یکی بیشینه است، انرژی دیگری صفر است).

۲ ۲۲۳۴ هنگامی‌که شار عبوری از قاب ۰/۶ مقدار بیشینه را دارد، نیروی محرکهٔ القایی ۰/۸ مقدار بیشینه است و با توجه به اطلاعات سؤال ε_{max} برابر است با:

$$\left|\frac{\Phi}{\Phi_{max}}\right|=\cos\theta=0/6$$

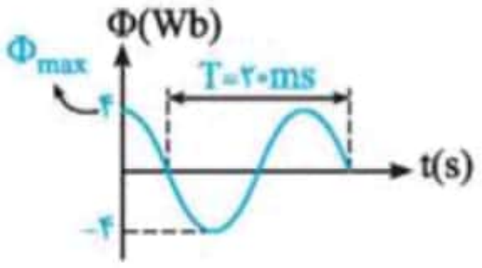
$$\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right|=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=0/8 \Rightarrow \frac{160}{\varepsilon_{max}}=0/8 \Rightarrow \varepsilon_{max}=200V$$

از سوی دیگر با توجه به مقدار ε_{max}، به سادگی I_{max} به‌دست می‌آید:

$$I_{max}=\frac{\varepsilon_{max}}{R}=\frac{200}{10}=20A$$

gajmarket.com

۴ ۲۲۳۵ **روش اول:** با توجه به شکل مقابل، معادلهٔ شار به صورت کلی یک معادلهٔ کسینوسی است. بنابراین در هنگامی‌که شار عبوری برابر ۲ Wb است، داریم:



$$\Phi = \Phi_{max}\cos(\theta) \xrightarrow{\Phi_{max}=|AB|=4\,Wb} 2 = 4\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1} \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

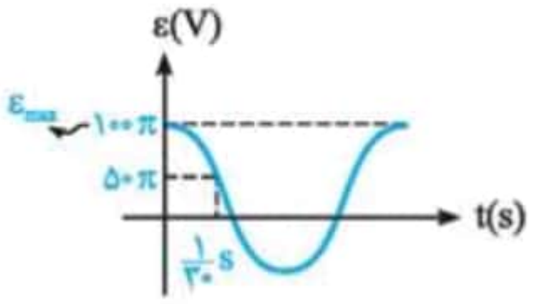
حال برای محاسبهٔ نسبت بزرگی نیروی محرکهٔ القایی به مقدار بیشینهٔ آن می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \varepsilon_{max}\sin(\theta) \xrightarrow{\text{در لحظهٔ موردنظر}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}} = \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

روش دوم: با توجه به رابطهٔ زیر که در درسنامه به دست آمد، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi_{max}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳ ۲۲۳۶ ابتدا با توجه به این‌که مطابق شکل مقابل معادلهٔ نیروی محرکهٔ القایی برحسب زمان به‌صورت شکل کلی یک معادلهٔ کسینوسی است، معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

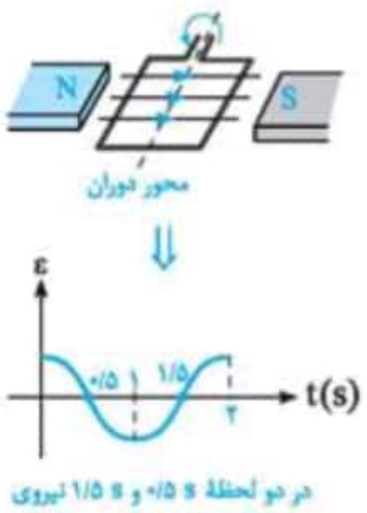


$$\varepsilon = \varepsilon_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 100\pi\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$t = \frac{1}{30}s \Rightarrow 50\pi = 100\pi\cos\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{1}{30}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{1}{30}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}\times\frac{1}{30} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{1}{5}s = 0/2s$$

۲ ۲۲۳۷ در لحظهٔ نشان داده شده، قاب به موازات خطوط میدان مغناطیسی بوده و شار عبوری از آن صفر و نیروی محرکه بیشینه است. در این قاب، نمودار $\varepsilon - t$ مطابق شکل مقابل بوده و در ۲ ثانیهٔ اول، دو بار نیروی محرکهٔ القایی صفر می‌شود.



در دو لحظهٔ ۰/۵ s و ۱/۵ s نیروی محرکهٔ القایی صفر می‌شود.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 2s$$

یادداشت