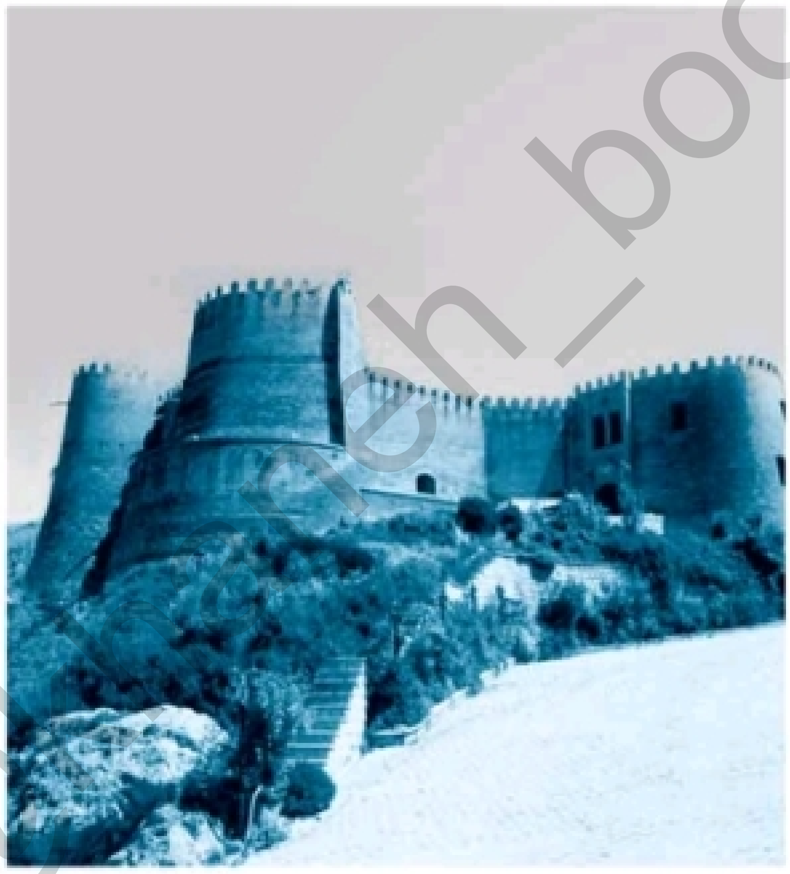
فصل ۱

هندسه یازدهم

Geometry 11

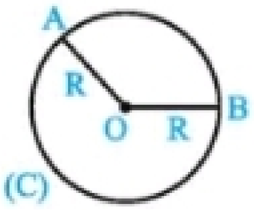


دایره

فصل ۱

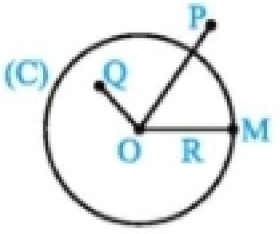
قسمت اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره



مجموعه نقاطی از یک صفحه که از یک نقطهٔ ثابت در آن صفحه به فاصلهٔ معلومی قرار داشته باشند، دایره نامیده می‌شود.
نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و فاصلهٔ معلوم را شعاع دایره می‌نامند.
معمولاً دایره را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. مثلاً دایرهٔ (C) به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نمایش می‌دهیم.

وضعیت یک نقطه نسبت به دایره



آ) نقطهٔ M روی دایرهٔ $C(O,R)$ است، اگر و تنها اگر $OM = R$ باشد.

ب) نقطهٔ P بیرون دایرهٔ $C(O,R)$ است، اگر و تنها اگر $OP > R$ باشد.

پ) نقطهٔ Q درون دایرهٔ $C(O,R)$ است، اگر و تنها اگر $OQ < R$ باشد.

مثال

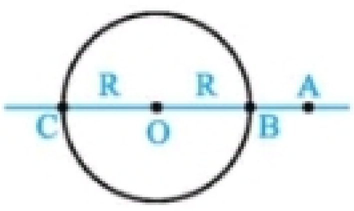
اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ ریشهٔ معادلهٔ $(x-R)^۲ - (x-۲R)^۲ = ۰$ باشد، آن‌گاه وضعیت نقطهٔ M را نسبت به دایره تعیین کنید.

پاسخ: $(x-R)^۲ - (x-۲R)^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲Rx + R^۲ - x^۲ + ۴Rx - ۴R^۲ = ۰ \Rightarrow ۲Rx = ۴R^۲ - R^۲ = ۳R^۲ \Rightarrow x = \frac{۳R^۲}{۲R} = \frac{۳R}{۲}$

پس فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است، لذا M خارج دایره قرار دارد.

دورترین و نزدیک‌ترین نقاط یک دایره از یک نقطهٔ معلوم

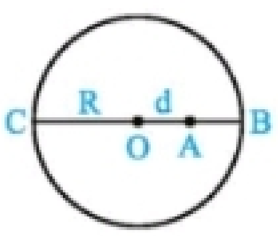
نقطهٔ A و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ A بر O منطبق نباشد، خط شامل پاره‌خط OA را رسم می‌کنیم، آن‌گاه این خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. یکی از این نقاط دورترین نقطهٔ دایره از A و دیگری نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره از A می‌باشد. مطابق شکل زیر، نقطهٔ C دورترین نقطهٔ دایره از A و نقطهٔ B نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره از A است. با فرض $OA = d$ اگر نقطهٔ A خارج از دایره باشد، داریم:



$AB = d - R$ ، $AC = d + R$

اگر A بر O منطبق باشد، همهٔ نقاط دایره از نقطهٔ A به فاصلهٔ R هستند.

و اگر نقطهٔ A داخل دایره و غیر از مرکز باشد، داریم:

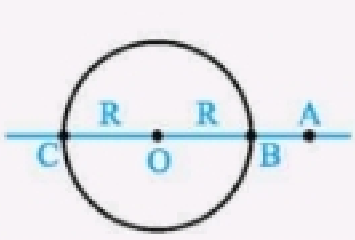


$AC = R + d$ و $AB = R - d$

مثال

دورترین و نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقاط یک دایره از یک نقطهٔ ثابت خارج از آن، به ترتیب ۱۹ و ۹ می‌باشد. شعاع دایره و فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره را بیابید.

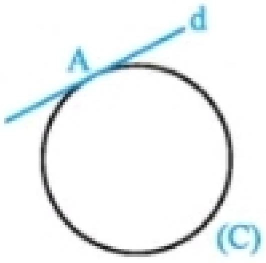
پاسخ: چون نقطه خارج دایره قرار دارد، مطابق شکل داریم:



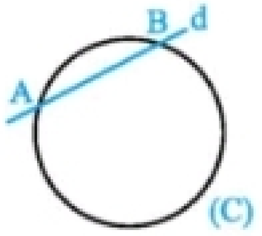
$$\begin{cases} AC = ۱۹ \\ AB = ۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + R = ۱۹ \\ d - R = ۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲d = ۱۹ + ۹ = ۲۸ \Rightarrow d = ۱۴$$

$$d + R = ۱۹ \Rightarrow ۱۴ + R = ۱۹ \Rightarrow R = ۱۹ - ۱۴ = ۵$$

خط مماس بر دایره و خط متقاطع با دایره

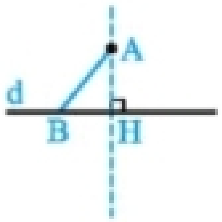


خط مماس بر دایره: اگر خط و دایره فقط در یک نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است. در شکل مقابل خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است.



خط متقاطع با دایره: اگر خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط و دایره متقاطع‌اند. در شکل مقابل، خط d دایرهٔ (C) را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است.

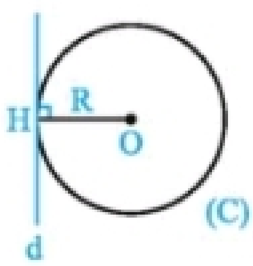
فاصلهٔ یک نقطه از یک خط



اگر از یک نقطه خارج یک خط، عمودی بر آن رسم کنیم، فاصلهٔ آن نقطه تا پای عمود، کوتاه‌ترین فاصله بین نقطهٔ A و نقاط خط می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل، AH کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط خط d است $(AB > AH)$ و به آن فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط d گفته می‌شود. اگر A روی خط d باشد، فاصلهٔ A تا خط d صفر است.

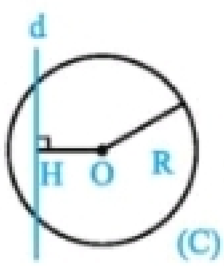
اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

یک خط و یک دایره در صفحه، دارای سه وضعیت زیر هستند:



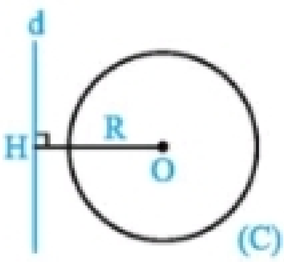
آ) خط بر دایره مماس است، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، برابر شعاع دایره باشد.

$OH = R \Leftrightarrow$ خط d بر دایرهٔ (C) مماس است.



ب) خط با دایره متقاطع است، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، کم‌تر از شعاع دایره باشد.

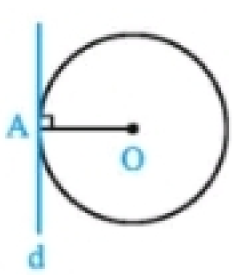
$OH < R \Leftrightarrow$ خط d و دایرهٔ (C) متقاطع‌اند.



پ) خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد.

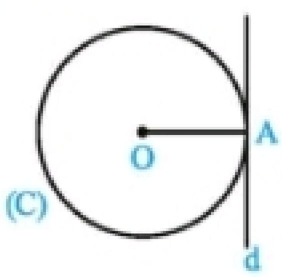
$OH > R \Leftrightarrow$ خط d و دایرهٔ (C) نقطهٔ اشتراکی ندارند.

خاصیت مهم خط مماس



آ) خط مماس بر یک دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است. $(d \perp OA)$

(فعالیت صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی قسمت اول)



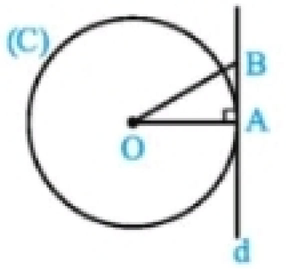
اثبات: فرض کنیم خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس باشد. از نقطهٔ O عمود OH را بر خط d رسم می‌کنیم.

آ) اگر $OH > R$ باشد، خط d و دایرهٔ (C) متقاطع نیستند که با فرض مماس بودن خط d و دایرهٔ (C) تناقض دارد.

ب) اگر $OH < R$ باشد، خط d و دایرهٔ (C) در دو نقطه متقاطع می‌شوند که با فرض مماس بودن آن‌ها تناقض دارد.

پ) اگر $OH = R$ باشد، در این صورت H روی دایرهٔ (C) قرار دارد و چون H روی خط d نیز هست پس به جهت مماس بودن خط و دایره نتیجه می‌شود H همان A است. بنابراین OA بر خط d عمود است.

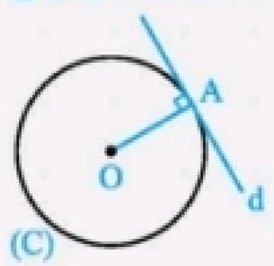
ب) اگر خطی بر انتهای یک شعاع از دایره عمود باشد، آن‌گاه آن خط بر دایره مماس است. (مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)



اثبات: فرض کنیم خط d در نقطهٔ A و در انتهای شعاع OA، بر آن عمود باشد. نقطهٔ دلخواه دیگری مانند B روی خط d در نظر می‌گیریم، چون OA کوتاه‌ترین فاصلهٔ O از خط d است، پس $OB > OA = R$. لذا نقطهٔ B بیرون دایره قرار می‌گیرد. بنابراین خط d و دایرهٔ (C) فقط در نقطهٔ A مشترک‌اند و در نتیجه خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است.

مثال

نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. خط مماس بر دایره را در نقطهٔ A رسم کنید. (مشابه فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)



پاسخ: مرکز دایره را به نقطهٔ A وصل می‌کنیم، سپس در نقطهٔ A خط d را عمود بر OA رسم می‌کنیم. خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است.

تست

فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ از خط d، ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲ + ۵Rx - ۶R^۲ = ۰$ است. خط و دایره چگونه‌اند؟

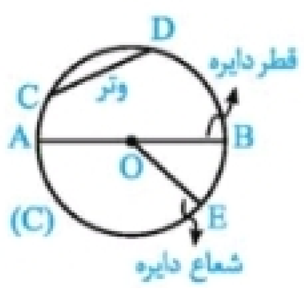
۱) خط بر دایره مماس است.
۲) خط و دایره متقاطع‌اند.
۳) خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.
۴) اطلاعات مسئله برای تعیین وضعیت خط و دایره کافی نیست.

پاسخ: $۴x^۲ + ۵Rx - ۶R^۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۲R)(۴x - ۳R) = ۰ \Rightarrow x = -۲R$ یا $x = \frac{۳R}{۴}$

پس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر $\frac{۳R}{۴}$ است که از شعاع دایره کم‌تر است، بنابراین خط و دایره متقاطع‌اند. پس گزینهٔ (۲) درست است.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

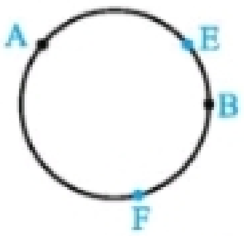
تعاریف



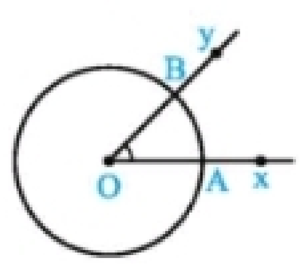
۱) شعاع دایره: پاره‌خطی است که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲) وتر دایره: پاره‌خطی است که دو سر آن روی دایره باشد.

۳) قطر دایره: وتری از دایره است که از مرکز دایره می‌گذرد.

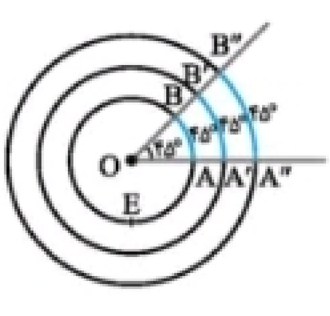


۴) کمان: دو نقطهٔ A و B را روی دایره در نظر می‌گیریم. قسمتی از دایرهٔ بین این دو نقطه را کمان دایره می‌گویند. دو نقطهٔ A و B دقیقاً دو کمان را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از کمان AB، کمان کوچک‌تر است. با توجه به شکل، دو نقطهٔ A و B دو کمان AEB و AFB را مشخص می‌کنند.



۵) زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره باشد.

در شکل مقابل xOy یک زاویهٔ مرکزی است که دایره را در نقاط A و B قطع کرده است و کمان AB روبه‌رو به آن می‌باشد.

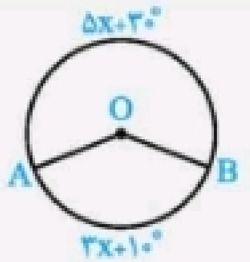


۶) اندازهٔ زاویهٔ مرکزی: اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر است با اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن زاویه بر حسب درجه و به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد. مثلاً در شکل مقابل همهٔ کمان‌های AB، $A'B'$ و $A''B''$ به اندازهٔ ۴۵° می‌باشند. بنابر قرارداد، اندازهٔ کمان نیم‌دایره ۱۸۰° می‌باشد و اندازهٔ کمان بزرگ‌تر بر حسب درجه برابر است با ۳۶۰° منهای اندازهٔ کمان کوچک‌تر متناظر آن:

$$\widehat{AEB} = ۳۶۰^\circ - \widehat{AB}$$

مثال

در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازهٔ دو کمان AB بر حسب x مشخص شده است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB را به‌دست آورید.



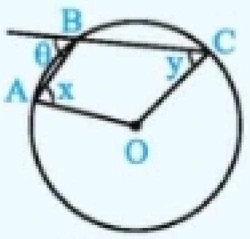
پاسخ:

$$۵x+۳۰^\circ+۳x+۱۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۸x=۳۲۰^\circ \Rightarrow x=۴۰^\circ$$

$$A\hat{O}B=\widehat{AB}=۳x+۱۰^\circ=۳\times۴۰^\circ+۱۰^\circ=۱۳۰^\circ$$

تست

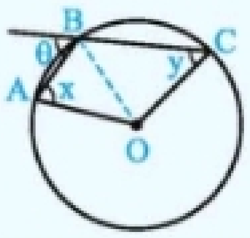
در شکل مقابل O مرکز دایره است. حاصل $x+y$ کدام است؟



۱) ۲θ ۲) $۹۰^\circ+\theta$

۳) $۱۸۰^\circ-۲\theta$ ۴) $۱۸۰^\circ-\theta$

پاسخ: O را به B وصل می‌کنیم. داریم:

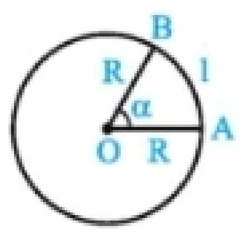


$$OA=OB \Rightarrow A\hat{B}O=\hat{A}=x$$

$$OB=OC \Rightarrow O\hat{B}C=\hat{C}=y$$

$$\theta+A\hat{B}O+O\hat{B}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow \theta+x+y=۱۸۰^\circ \Rightarrow x+y=۱۸۰^\circ-\theta \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

۷) **طول کمان:** طول کمان با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر آن، رابطهٔ مستقیم دارد.



$$\frac{\text{طول } \widehat{AB}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازهٔ کمان بر حسب درجه}}{\text{اندازهٔ کمان دایره بر حسب درجه}} \Rightarrow \text{طول } \widehat{AB}=\frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R)=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}$$

معمولاً طول کمان را با l نمایش می‌دهند، پس $l=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}$

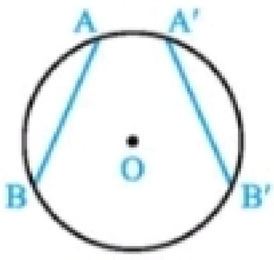
مثال

اندازهٔ کمانی بر حسب درجه در یک دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر، ۱۲۰° است. طول این کمان چند سانتی‌متر است؟

پاسخ: $\text{طول } \widehat{AB}=\frac{۱۲۰}{۳۶۰}(۲\pi\times۵)=\frac{۱۰\pi}{۳}\simeq۱۰/۵cm$

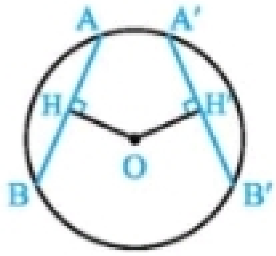
خواص وترهای مساوی در دایره

۱) در یک دایره (یا دو دایره به شعاع‌های مساوی)، دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.



$$AB=A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB}=\widehat{A'B'}$$

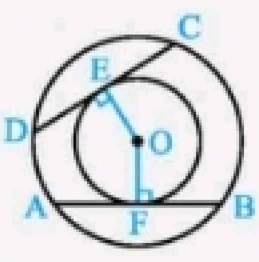
۲) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.



$$AB=A'B' \Leftrightarrow OH=OH'$$

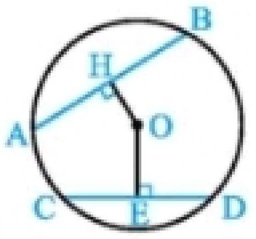
مثال

دو دایره هم‌مرکز هستند، هم‌چنین دو وتر از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. ثابت کنید اندازه‌های دو وتر برابرند.



پاسخ: در شکل مقابل دو وتر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس هستند. می‌خواهیم ثابت کنیم $AB=CD$، به همین جهت O را به نقاط تماس دو وتر وصل می‌کنیم. شعاع گذرنده بر نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس $OE\perp CD$ و $OF\perp AB$. از طرفی $OE=OF$ شعاع دایرهٔ کوچک هستند. پس فاصلهٔ مرکز دایرهٔ بزرگ از دو وتر AB و CD برابر است. در نتیجه $AB=CD$ می‌شود.

خواص وترهای نامساوی در دایره

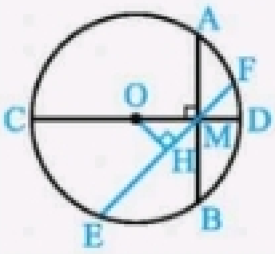


در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی)، وتر اول از وتر دوم بزرگ‌تر است، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر اول، کوچک‌تر از فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر دوم باشد.

$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OE$$

مثال

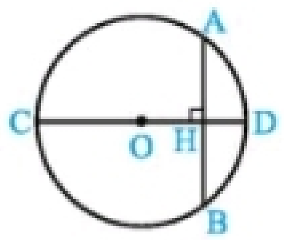
ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از یک نقطهٔ (M) واقع در درون دایرهٔ $C(O,R)$ می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.



پاسخ: نقطهٔ ثابت M را درون دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم و وتر AB گذرنده از این نقطه و عمود بر قطر CD را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم EF وتری دیگر و گذرنده از M باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM داریم $OM > OH$ و این یعنی مرکز دایره از وتر AB نسبت به وتر EF دورتر است، پس $EF > AB$ است.

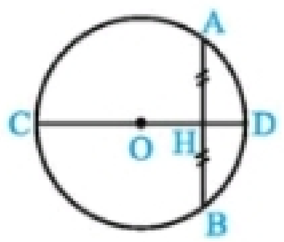
چگونگی نصف شدن وتر به وسیلهٔ قطر دایره

۱) در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



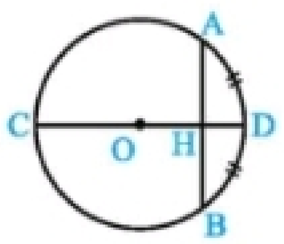
قطر CD عمود بر وتر AB $\Rightarrow AH = BH \ , \ \begin{cases} \widehat{AD} = \widehat{BD} \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{cases}$

۲) در هر دایره، اگر قطری از آن، یک وتر را که قطر نیست نصف کند، آن‌گاه بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$AH = BH \Rightarrow CD \perp AB \ , \ \begin{cases} \widehat{AD} = \widehat{BD} \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{cases}$$

۳) در هر دایره، قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.

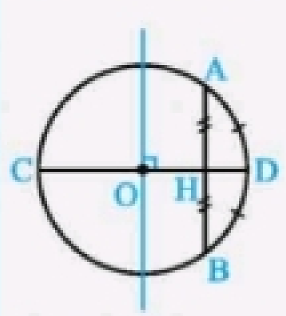


$\widehat{AD} = \widehat{BD}$ یا $\widehat{AC} = \widehat{BC} \Rightarrow CD \perp AB \ , \ AH = BH$

مثال

وسط وتری از دایره و وسط یکی از کمان‌های نظیر آن معلوم است. طریقهٔ یافتن مرکز دایره را شرح دهید.

(مشابه فعالیت ۶ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

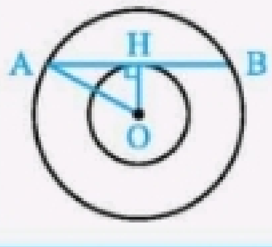


پاسخ: وسط وتر AB و وسط کمان AB روی قطری از دایره واقع‌اند که بر AB عمود است، پس D را به H وصل می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی امتداد آن با دایره را C می‌نامیم. CD قطر دایره است. عمودمنصف CD را رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با CD یعنی نقطهٔ O مرکز دایره است.

مثال

شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز، ۳ و ۵ سانتی‌متر هستند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر را که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، محاسبه کنید.

پاسخ: مطابق شکل وتر AB بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، پس شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است؛ یعنی $OH \perp AB$ در نتیجه OH وتر AB را نصف می‌کند $(AH = BH)$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:



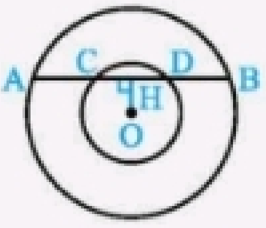
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

$$AB = ۲AH = ۲ \times ۴ = ۸$$

مثال

دو دایره هم‌مرکزند و وتر AB از دایرهٔ بزرگ، دایرهٔ کوچک‌تر را در نقاط C و D قطع می‌کند؛ ثابت کنید $AC = BD$

پاسخ: مطابق شکل وتر AB دایرهٔ کوچک‌تر را در نقاط C و D قطع کرده است. می‌خواهیم ثابت کنیم $AC = BD$ به همین جهت از O عمود OH را بر AB رسم می‌کنیم.



OH وترهای AB و CD را در دو دایره نصف می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$AC = AH - CH = BH - DH = BD$$

تست

در یک دایره نسبت طول دو وتر، برابر ۲ به ۳ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره از وترها ۴ و ۹ باشد، مساحت دایره کدام است؟

۱) ۱۴۴π ۲) ۱۲۸π ۳) ۱۳۳π ۴) ۱۲۱π

پاسخ: بنابه فرض $\frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۲}$، پس می‌توان گفت $AB = ۶k$ و $CD = ۴k$ است. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ODF و OAE، بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

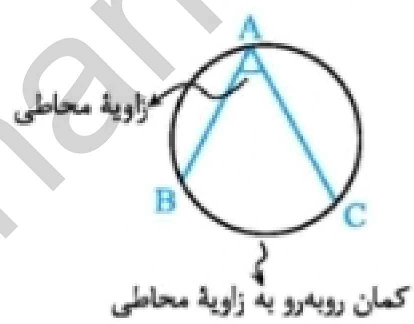
$$\begin{cases} R^۲ = ۹^۲ + (۲k)^۲ \\ R^۲ = ۴^۲ + (۳k)^۲ \end{cases} \Rightarrow ۸۱ + ۴k^۲ = ۱۶ + ۹k^۲ \Rightarrow ۵k^۲ = ۶۵ \Rightarrow k^۲ = ۱۳$$

$$R^۲ = ۸۱ + ۴k^۲ = ۸۱ + ۴ \times ۱۳ = ۱۳۳$$

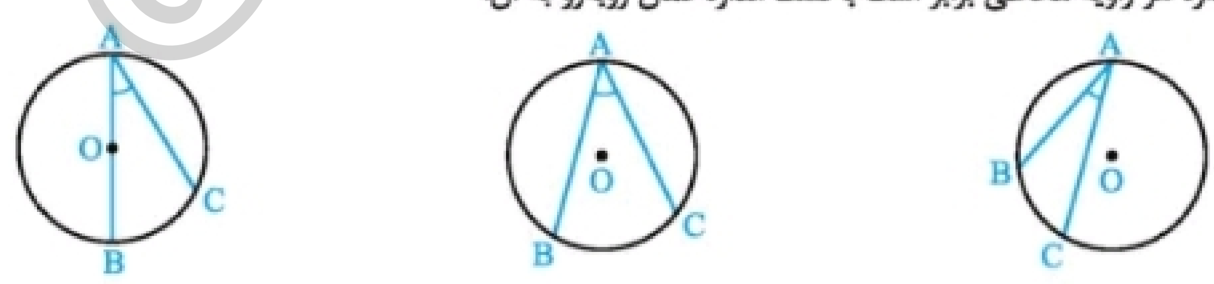
$$S_{\text{دایره}} = \pi R^۲ = ۱۳۳\pi \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

زاویهٔ محاطی و اندازهٔ آن

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. شکل زیر زاویهٔ محاطی BAC را نشان می‌دهد.



اندازهٔ زاویهٔ محاطی: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن.

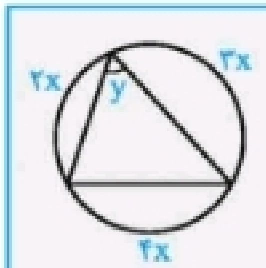


در هر یک از شکل‌های فوق داریم: $\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{۲}$

نکته اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر دایره، ۹۰° است.

مثال

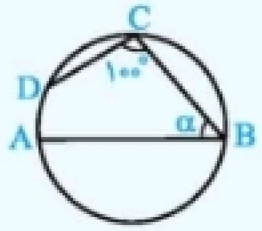
در شکل مقابل x و y را محاسبه کنید.



پاسخ: $۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ \;,\; y = \frac{۴x}{۲} = ۲x = ۸۰^\circ$

تست

در دایرهٔ مقابل AB قطر و CD = BC است. مقدار α چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۶۵

۳) ۶۰ ۴) ۵۵

پاسخ:

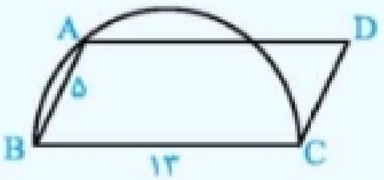
زاویهٔ محاطی $B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}\Rightarrow 100^\circ=\frac{\overset{\frown}{AD}+180^\circ}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=200^\circ-180^\circ=20^\circ$

$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}=180^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}} 20+2\overset{\frown}{CD}=180^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\frac{160^\circ}{2}=80^\circ$

زاویهٔ محاطی $\alpha=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{20^\circ+80^\circ}{2}=50^\circ\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.

تست

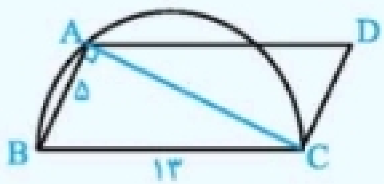
در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع و BC قطر نیم‌دایره است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



۱) ۵۲ ۲) ۴۸

۳) ۶۰ ۴) ۶۵

پاسخ: قطر AC در متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم. زاویهٔ BAC محاطی و روبه‌رو به قطر نیم‌دایره است، پس قائمه است. در نتیجه بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

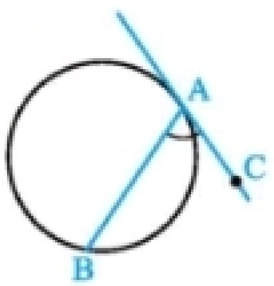


$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 5^2+AC^2=13^2\Rightarrow AC^2=169-25=144\Rightarrow AC=12$

AC ارتفاع متوازی‌الاضلاع است، زیرا بر اضلاع AB و CD عمود است، پس داریم:

$S(ABCD)=AB\times AC=5\times 12=60\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

زاویهٔ ظلی و اندازهٔ آن

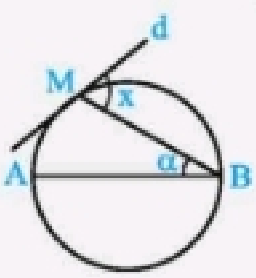


زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن شامل وتری از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است، زاویهٔ ظلی نامیده می‌شود. اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن:

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

مثال

در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ M بر دایره‌ای به قطر AB مماس است. مقدار x را بر حسب α به‌دست آورید.



پاسخ:

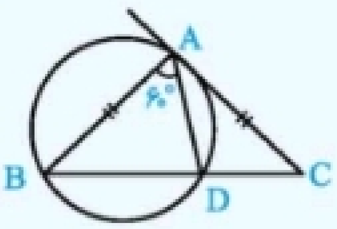
زاویهٔ محاطی $A\hat{B}M=\frac{\overset{\frown}{MA}}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\overset{\frown}{MA}}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=2\alpha$

$\overset{\frown}{MA}+\overset{\frown}{MB}=180^\circ\Rightarrow 2\alpha+\overset{\frown}{MB}=180^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{MB}=180^\circ-2\alpha$

زاویهٔ ظلی $x=\frac{\overset{\frown}{MB}}{2}=\frac{180^\circ-2\alpha}{2}=90-\alpha\Rightarrow x=90-\alpha$

تست

در شکل مقابل، AC در نقطهٔ A بر دایره مماس، AB = AC و $B\hat{A}D=60^\circ$ است. اندازهٔ $D\hat{A}C$ کدام است؟



۱) 30° ۲) 40°

۳) 35° ۴) 45°

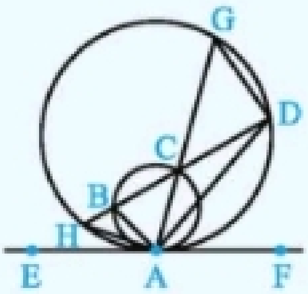
پاسخ: اندازهٔ زاویهٔ DAC را x می‌نامیم؛ این زاویه ظلی است پس کمان روبه‌رو به آن یعنی $\overset{\frown}{AD}$ برابر 2x است.

زاویهٔ محاطی $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}=\frac{2x}{2}=x$ ، $AB=AC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\Rightarrow \hat{C}=x$

در مثلث ACD بنابه زاویهٔ خارجی داریم: $A\hat{D}B=D\hat{A}C+\hat{C}=x+x=2x$

$\overset{\Delta}{ABD}: B\hat{A}D+\hat{B}+A\hat{D}B=180^\circ\Rightarrow 60^\circ+x+2x=180^\circ\Rightarrow 3x=120^\circ\Rightarrow x=40^\circ\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست در شکل مقابل دو دایره در نقطهٔ A مماس و خط EF در این نقطه بر هر دو دایره مماس است. چند تا از تساوی‌های زیر درست است؟



$$B\hat{A}E = A\hat{D}B \ ,\ A\hat{B}D = A\hat{G}D \ ,\ A\hat{D}G = E\hat{A}G$$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

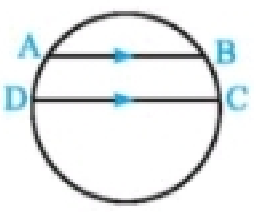
پاسخ: زاویهٔ ADG در دایرهٔ بزرگ، محاطی است و اندازهٔ آن برابر $\frac{\overset{\frown}{AG}}{۲}$ است. همچنین زاویهٔ EAG در دایرهٔ بزرگ، ظلی است و اندازهٔ آن برابر $\frac{\overset{\frown}{AG}}{۲}$ می‌باشد، پس $A\hat{D}G = E\hat{A}G$

زاویهٔ ABD از زاویهٔ AGD بزرگ‌تر است، زیرا اگر امتداد BD، دایرهٔ بزرگ را در H قطع کند، داریم $A\hat{H}D = A\hat{G}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$ و از طرفی بنابه زاویهٔ خارجی در مثلث ABH نتیجه می‌شود $A\hat{B}D > A\hat{H}D$ و در نتیجه $A\hat{B}D > A\hat{G}D$

همچنین در دایرهٔ کوچک، زاویهٔ ACB محاطی است و داریم $A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و در همین دایره، زاویهٔ BAE ظلی است، پس $B\hat{A}E = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$، در نتیجه $B\hat{A}E = A\hat{C}B$ و چون بنابه زاویهٔ خارجی در مثلث ACD داریم $A\hat{C}B > A\hat{D}B$، لذا $B\hat{A}E > A\hat{D}B$ است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

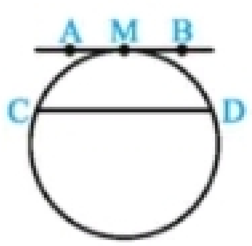
کمان‌های محصور بین دو وتر موازی

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.

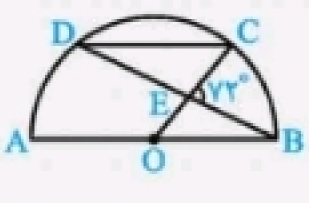


$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

نکته اگر خط AB در نقطهٔ M بر دایره مماس باشد و $AB \parallel CD$ آن‌گاه $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{DM}$



مثال در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره و O مرکز آن است. اگر CD موازی AB باشد. اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید.



پاسخ: فرض کنیم $\overset{\frown}{AD} = ۲x$ در این صورت داریم:

$$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = ۲x$$

زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} = ۲x$

زاویهٔ محاطی $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۲x}{۲} = x$

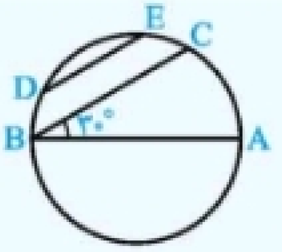
اما $B\hat{E}C$ زاویهٔ خارجی مثلث BOE است، پس می‌توان نوشت:

$$B\hat{E}C = E\hat{O}B + O\hat{B}E = B\hat{O}C + \hat{B} \Rightarrow ۷۲^\circ = ۲x + x \Rightarrow ۳x = ۷۲^\circ \Rightarrow x = ۲۴^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - ۲x - ۲x = ۱۸۰^\circ - ۴x = ۱۸۰^\circ - ۴ \times ۲۴^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۹۶^\circ = ۸۴^\circ$$

تست

در شکل مقابل $BC \parallel DE$ ، AB قطر دایره و نسبت اندازهٔ کمان‌های CE و AC برابر ۵ به ۶ است. اندازهٔ کمان DE چند درجه است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۳۰

پاسخ: زاویهٔ محاطی $\widehat{B}=30^\circ \Rightarrow \dfrac{\overparen{AC}}{2}=30^\circ \Rightarrow \overparen{AC}=60^\circ$

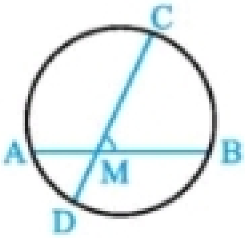
(فرض) $\overparen{CE}=\dfrac{5}{6}\overparen{AC}=\dfrac{5}{6}\times 60^\circ=50^\circ$ ، $DE \parallel BC \Rightarrow \overparen{BD}=\overparen{CE}=50^\circ$

قطر دایره است. $AB \Rightarrow \overparen{AC}+\overparen{CE}+\overparen{DE}+\overparen{BD}=180^\circ \Rightarrow 60^\circ+50^\circ+\overparen{DE}+50^\circ=180^\circ \Rightarrow \overparen{DE}=180^\circ-160^\circ=20^\circ$

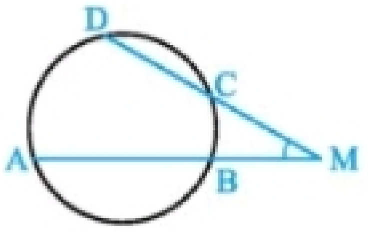
بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

زاویهٔ بین دو وتر در دایره

۱) اگر مطابق شکل دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $\widehat{M}=\dfrac{\overparen{AD}+\overparen{BC}}{2}$

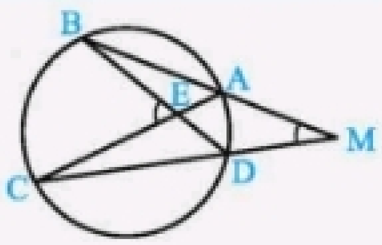


۲) اگر مطابق شکل امتداد دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، آن‌گاه $\widehat{M}=\dfrac{\overparen{AD}-\overparen{BC}}{2}$



مثال

در شکل مقابل $B\widehat{E}C=4\widehat{M}$ می‌باشد. نسبت اندازه‌های کمان‌های AD و BC را به‌دست آورید.



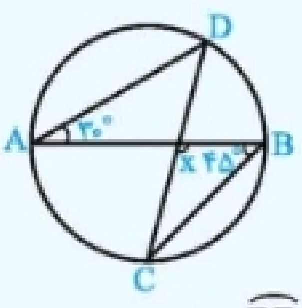
پاسخ: فرض کنیم $\widehat{M}=\alpha$ پس $B\widehat{E}C=4\alpha$. همچنین با فرض $\overparen{BC}=x$ و $\overparen{AD}=y$ داریم:

$$\begin{cases}\widehat{M}=\dfrac{\overparen{BC}-\overparen{AD}}{2}\\ B\widehat{E}C=\dfrac{\overparen{BC}+\overparen{AD}}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=2\alpha\\ x+y=2\times 4\alpha=8\alpha\end{cases} \xrightarrow{+} 2x=10\alpha \Rightarrow x=5\alpha \quad , \quad y=8\alpha-5\alpha=3\alpha$$

$$\dfrac{\overparen{BC}}{\overparen{AD}}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{5\alpha}{3\alpha}=\dfrac{5}{3}$$

تست

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



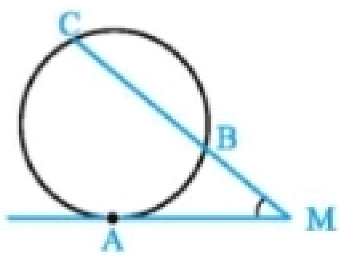
۱) ۹۵
۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۵
۴) ۱۱۰

پاسخ: زاویهٔ محاطی $\widehat{B}=\dfrac{\overparen{AC}}{2} \Rightarrow \overparen{AC}=2\times 45^\circ=90^\circ$ ، زاویهٔ محاطی $\widehat{A}=\dfrac{\overparen{BD}}{2} \Rightarrow \overparen{BD}=2\times 30^\circ=60^\circ$

$\overparen{AD}+\overparen{BC}+\overparen{AC}+\overparen{BD}=360^\circ \Rightarrow \overparen{AD}+\overparen{BC}+90^\circ+60^\circ=360^\circ \Rightarrow \overparen{AD}+\overparen{BC}=210^\circ$

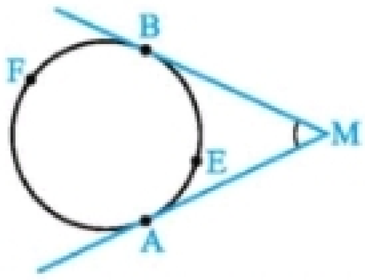
$x=\dfrac{\overparen{AD}+\overparen{BC}}{2}=\dfrac{210^\circ}{2}=105^\circ \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

زاویهٔ بین مماس و امتداد یک وتر



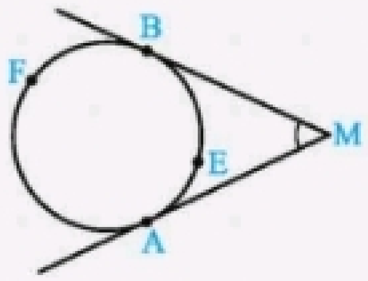
اگر مطابق شکل، امتداد وتر BC و خط مماس بر دایره در نقطهٔ A یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، آن‌گاه داریم $\widehat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$

زاویهٔ بین دو مماس



اگر مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس بر دایره رسم شود، آن‌گاه زاویهٔ بین دو مماس برابر است با $\widehat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}}{۲}$

مثال

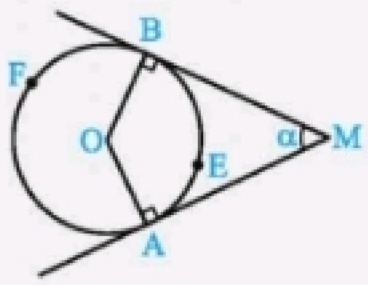


در شکل مقابل با فرض $\widehat{M}=\alpha$ ثابت کنید $\overset{\frown}{AEB}=۱۸۰^\circ-\alpha$ و $\overset{\frown}{AFB}=۱۸۰^\circ+\alpha$

پاسخ: روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} M=\dfrac{\overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AFB}-\overset{\frown}{AEB}=۲\alpha \\ \overset{\frown}{AFB}+\overset{\frown}{AEB}=۳۶۰^\circ \end{array}\right\}\xrightarrow{+}۲\overset{\frown}{AFB}=۳۶۰^\circ+۲\alpha\Rightarrow \overset{\frown}{AFB}=۱۸۰^\circ+\alpha$$

$$\overset{\frown}{AEB}=۳۶۰^\circ-(۱۸۰^\circ+\alpha)=۱۸۰^\circ-\alpha$$

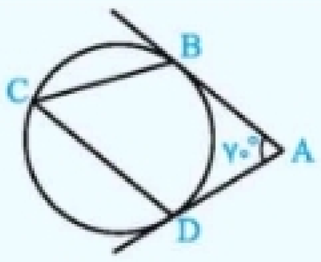


روش دوم: در چهارضلعی OAMB داریم:

$$A\widehat{O}B+\widehat{A}+\widehat{M}+\widehat{B}=۳۶۰^\circ\Rightarrow A\widehat{O}B+۹۰^\circ+\alpha+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\widehat{O}B=\overset{\frown}{AEB}=۱۸۰^\circ-\alpha\Rightarrow \overset{\frown}{AFB}=۳۶۰^\circ-(۱۸۰^\circ-\alpha)=۱۸۰^\circ+\alpha$$

تست



در شکل مقابل AB و AD بر دایره مماس‌اند و $\widehat{A}=۷۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟

۱) ۵۰° ۲) ۵۵°

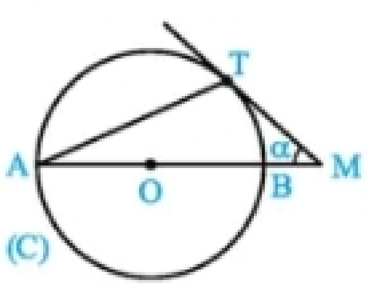
۳) ۶۰° ۴) ۶۵°

پاسخ:

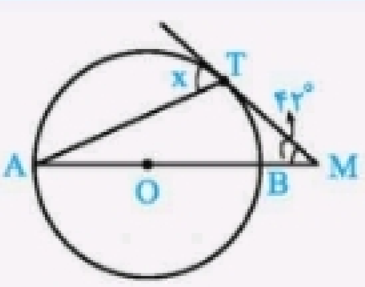
$$\widehat{A}=۷۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ-\widehat{A}=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$

زاویهٔ محاطی $B\widehat{C}D=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\dfrac{۱۱۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

نکته اگر از نقطهٔ M روی امتداد قطر دایرهٔ C(O،R)، مماس MT را بر آن رسم کنیم، آن‌گاه با فرض $\widehat{M}=\alpha$ داریم $\overset{\frown}{BT}=۹۰^\circ-\alpha$ و $\overset{\frown}{AT}=۹۰^\circ+\alpha$



مثال



در شکل مقابل، AB قطر دایره و MT بر دایره مماس است. اگر $\widehat{M}=۴۲^\circ$ باشد، آن‌گاه مقدار x را به‌دست آورید.

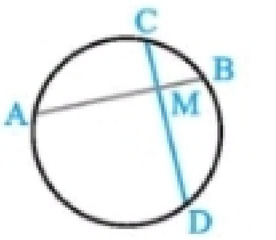
پاسخ:

$$\overset{\frown}{AT}=۹۰^\circ+\widehat{M}=۹۰^\circ+۴۲^\circ=۱۳۲^\circ\Rightarrow \text{زاویهٔ ظلی } x=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\dfrac{۱۳۲^\circ}{۲}=۶۶^\circ$$

فصل ۱

قسمت دوم

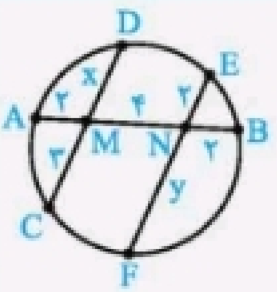
رابطه‌های طولی در دایره



آ) **وترهای متقاطع:** اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر است.

حکم : $MA \times MB = MC \times MD$

مثال



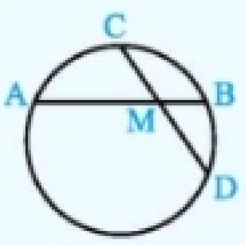
در شکل مقابل مقادیر x و y را محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA \times MB = MD \times MC \Rightarrow ۲ \times (۴+۲) = x \times ۳ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

$$NA \times NB = NF \times NE \Rightarrow (۲+۴) \times ۲ = y \times ۲ \Rightarrow y = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

تست



مطابق شکل طول وتر AB در دایرهٔ $C(O,R)$، ۱۴ سانتی‌متر می‌باشد. این وتر، وتر CD را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کرده است. اگر $CD = ۱۰$ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه تفاضل طول پاره‌خط‌های MA و MB کدام است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۱) ۱۰   ۲) ۸   ۳) ۱۱   ۴) ۹

پاسخ: بنابه فرض، وتر CD به نسبت ۲ به ۳ تقسیم شده است. پس می‌توانیم فرض کنیم $MC = ۲k$ و $MD = ۳k$ و داریم:

$$CD = ۱۰ \Rightarrow ۲k + ۳k = ۱۰ \Rightarrow ۵k = ۱۰ \Rightarrow k = ۲ \Rightarrow \begin{cases} MC = ۴ \\ MD = ۶ \end{cases}$$

$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow[MA=۱۴-x]{MB=x} (۱۴-x) \times x = ۴ \times ۶ \Rightarrow x^۲ - ۱۴x + ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \text{ یا } x = ۱۲$$

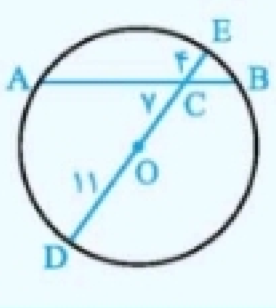
بنابراین با فرض $MA > MB$ نتیجه می‌شود $MA = ۱۲$ و $MB = ۲$ و تفاضل این دو مقدار برابر ۱۰ است. پس گزینهٔ (۱) درست است.

تست

وتری به طول ۱۸ در یک دایره به شعاع ۱۱ مفروض است. نقطه‌ای روی این وتر، از مرکز دایره به فاصلهٔ ۷ می‌باشد. این نقطه، وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: بنابه فرض $AB = ۱۸$، $OC = ۷$ و $OE = OD = ۱۱$، پس $CE = ۴$. فرض کنیم $BC = x$ بنابراین داریم:



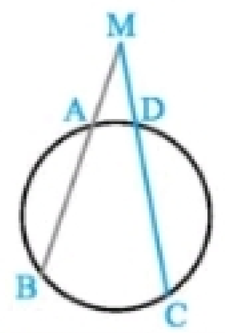
$$AC \cdot BC = CD \cdot CE \Rightarrow (۱۸-x)x = (۱۱+۷) \times ۴ \Rightarrow x^۲ - ۱۸x + ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x-۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۶ \text{ یا } x = ۱۲$$

و با فرض $AC > BC$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{۱۸-x}{x} = \frac{۱۸-۶}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

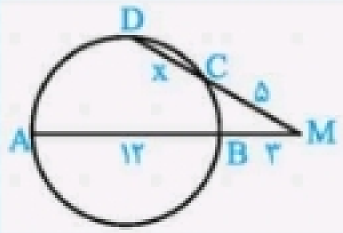
ب) رابطهٔ طولی وترهایی با امتداد متقاطع: اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB = MD.MC$



حکم : $MA \times MB = MD \times MC$

مثال

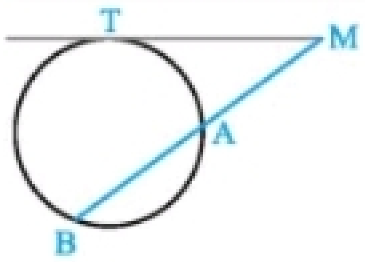
با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.



پاسخ: $MB \times MA = MC \times MD \Rightarrow ۳ \times (۳+۱۲) = ۵ \times (۵+x) \Rightarrow ۳ \times ۱۵ = ۵ \times (۵+x)$

$\Rightarrow ۳ \times ۳ = ۵ + x \Rightarrow x + ۵ = ۹ \Rightarrow x = ۴$

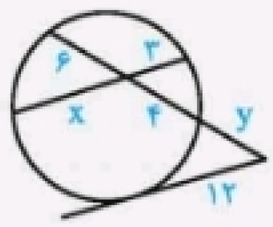
پ) رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع: اگر از نقطهٔ M یک خط مماس و یک خط قاطع بر دایرهٔ مفروض رسم کنیم، آن‌گاه طول پاره‌خط مماس (MT) واسطهٔ هندسی قطعات قاطع (MA و MB قطعات قاطع هستند) می‌باشد.



حکم : $MT^۲ = MA \times MB$

مثال

در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.



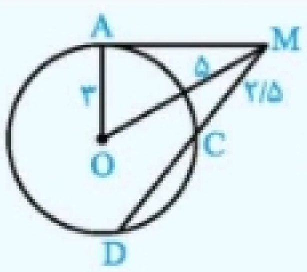
پاسخ: $۳ \times x = ۶ \times ۴ \Rightarrow ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$

$۱۲^۲ = y \times (y + ۶ + ۴) \Rightarrow y(y+۱۰) = ۱۴۴ \Rightarrow y^۲ + ۱۰y = ۱۴۴ \Rightarrow y^۲ + ۱۰y - ۱۴۴ = ۰$

$\Rightarrow (y+۱۸)(y-۸) = ۰ \Rightarrow y = -۱۸$ یا $y = ۸ \xrightarrow{y>۰} y = ۸$

تست

در شکل مقابل MA در نقطهٔ A بر دایره مماس و شعاع دایره برابر ۳ است. اگر فاصلهٔ M تا مرکز دایره برابر ۵ باشد و $MC = ۲/۵$، آن‌گاه طول وتر CD کدام است؟



۱) ۴/۲　　۲) ۳/۹　　۳) ۳/۶　　۴) ۴/۵

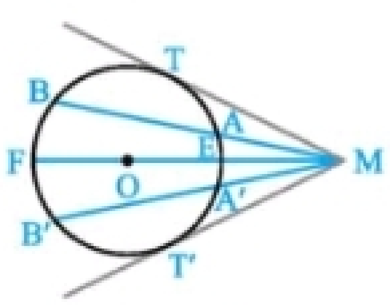
پاسخ: خط مماس، بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. پس مثلث MAO در رأس A قائمه است و داریم:

$MA^۲ = OM^۲ - OA^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow MA = ۴$

حال بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم: $MA^۲ = MC \times MD \Rightarrow ۴^۲ = ۲/۵ \times (۲/۵ + CD) \Rightarrow ۱۶ = ۲/۵ \times (۲/۵ + CD)$

$\Rightarrow CD + ۲/۵ = \frac{۱۶}{۲/۵} = \frac{۶۴}{۱۰} = ۶/۴ \Rightarrow CD = ۶/۴ - ۲/۵ = ۳/۹ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

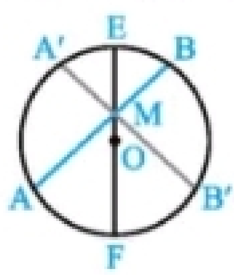
نتیجهٔ روابط طولی وترهای متقاطع و مماس



۱) اگر نقطهٔ معلوم M خارج دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب همهٔ قطعات قاطع و مربع طولِ دو مماسی که بر دایره رسم می‌شود برابر مقدار ثابت $OM^۲ - R^۲$ می‌باشد و با فرض $OM = d$ این مقدار ثابت به‌صورت $d^۲ - R^۲$ نوشته می‌شود، زیرا: $MT^۲ = MT'^۲ = MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = ME \times MF$

از طرفی داریم: $ME \times MF = (OM - OE)(OM + OF) = (d - R)(d + R) = d^۲ - R^۲$

بنابراین: $MT^۲ = MT'^۲ = MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = d^۲ - R^۲$



۲) اگر نقطهٔ M درون دایره باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی هر وتر گذرنده از نقطهٔ M برابر مقدار ثابت $R^۲ - d^۲$ است. اثبات همانند حالت قبل می‌باشد.

$MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = ME \times MF = R^۲ - d^۲$

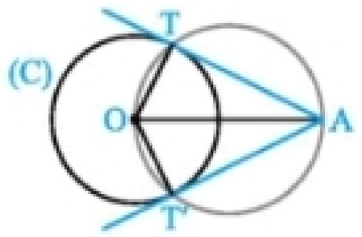
۳) اگر نقطهٔ M روی دایره باشد، حاصل‌ضرب‌های فوق برابر صفر است.

مثال

شعاع یک دایره ۵ و فاصلهٔ یک نقطهٔ معلوم از مرکز آن ۸ است. حاصل‌ضرب همهٔ قطعات قاطعی را که از این نقطه بر دایره رسم می‌شود، محاسبه کنید.

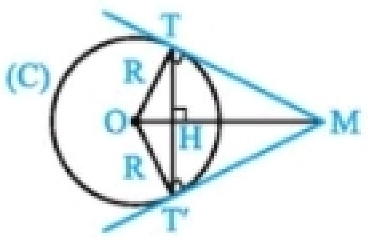
پاسخ: با توجه به مطلب قبل داریم: $MA \times MB = MA' \times MB' = \cdots = ME \times MF = d^۲ - R^۲ = ۸^۲ - ۵^۲ = ۶۴ - ۲۵ = ۳۹$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره



نقطهٔ A را خارج دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم. O را به A وصل می‌کنیم، دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایرهٔ (C) را T و T' می‌نامیم. زوایای OTA و $OT'A$ روبه‌رو به قطرند، پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT' بر دایرهٔ (C) مماس‌اند.

خواص دو مماس رسم‌شده بر یک دایرهٔ معلوم از یک نقطه خارج آن



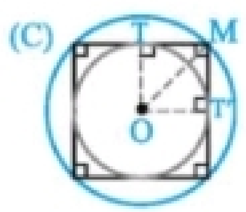
فرض کنید مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شود و H نقطهٔ برخورد وتر TT' با پاره‌خط OM باشد. بنابراین داریم:

۱) طول مماس‌های MT و MT' برابر است ($MT = MT'$).

۲) OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است.

۳) OM عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های تماس می‌باشد، یعنی OM عمودمنصف TT' است.

۴) اگر $\widehat{M} \neq ۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی $MTOT'$ کایت (شبه‌لوزی) است.



۵) اگر $\widehat{M} = ۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی $MTOT'$ مربع است. در این حالت از هر نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $OM = R\sqrt{۲}$ می‌توان ۲ مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد و بر عکس اگر از نقطه‌ای دو مماس عمود بر هم، بر دایرهٔ (C) رسم شود، آن‌گاه آن نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $R\sqrt{۲}$ قرار دارد.

۶) طول پاره‌خط واصل نقاط تماس برابر است با: $TT' = \dfrac{۲R.MT}{OM}$

اثبات: مساحت چهارضلعی $MTOT'$ را به دو روش می‌نویسیم:

$$۱) S(MTOT') = \frac{۱}{۲} OM \times TT' \;,\; ۲) S(MTOT') = ۲S(MTO) = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times OT \times MT \Rightarrow \frac{۱}{۲} OM \times TT' = OT \times MT \Rightarrow TT' = \frac{۲R \times MT}{OM}$$

۷) مثلث‌های MTO، MHT و THO متشابه هستند.

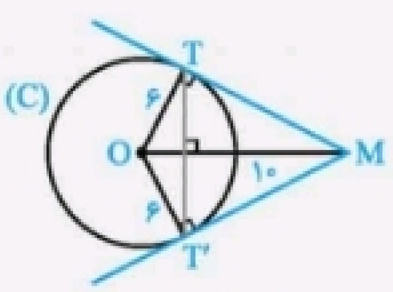
مثال

از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' را بر دایرهٔ $C(O,۶)$ رسم می‌کنیم. اگر $OM = ۱۰$ باشد، آن‌گاه:

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) طول پاره‌خط TT' را بیابید.

پاسخ: آ) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:



$$OM^۲ = OT^۲ + MT^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۶^۲ + MT^۲ \Rightarrow MT^۲ = ۱۰۰ - ۳۶$$

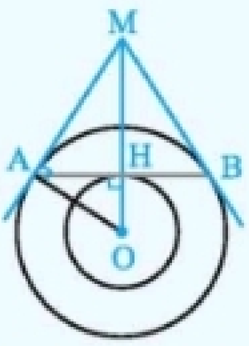
$$\Rightarrow MT^۲ = ۶۴ \Rightarrow MT = MT' = ۸$$

ب) برای محاسبهٔ TT' می‌گوییم، مساحت چهارضلعی $MTOT'$ برابر $\frac{۱}{۲} OM \times TT'$ است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند. از طرفی مساحت همین چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث OMT است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲} TT' \times OM = ۲ \times \frac{۱}{۲} MT \times OT \Rightarrow TT' \times ۱۰ = ۲ \times ۸ \times ۶ \Rightarrow TT' = \frac{۹۶}{۱۰} = ۹/۶$$

تست

دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایرهٔ بزرگ‌تر در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصلهٔ M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟



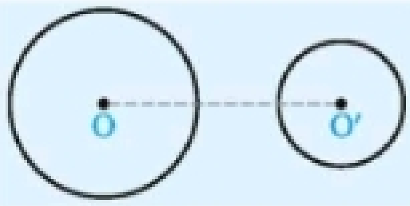
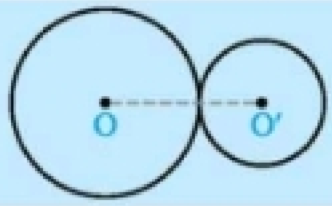
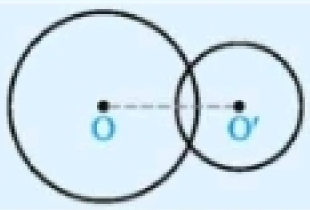
۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ : در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM بنابه رابطهٔ طولی داریم:

$OA^2 = OH \times OM \Rightarrow 12^2 = 8 \times OM \Rightarrow OM = \frac{144}{8} = 18 \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است:

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایرهٔ مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < R - R'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

نکته در حالتی‌که دو دایره مماس برون و مماس داخل هستند، مراکز دو دایره و نقطهٔ تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند.

مثال

طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل ۵ و مساحت ناحیهٔ بین دو دایره 85π است. محیط هر یک از دایره‌ها را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

پاسخ : طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل برابر $R - R'$، $(R > R')$ است. داریم:

مساحت بین دو دایره $= \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow 85\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 85$

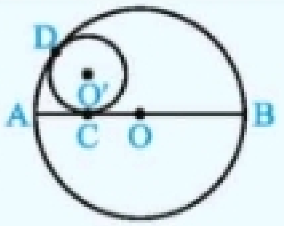
$\Rightarrow (R - R')(R + R') = 85 \xrightarrow{\text{بنابه فرض } R-R'=5} R + R' = \frac{85}{5} = 17$

$\begin{cases} R + R' = 17 \\ R - R' = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R = 22 \Rightarrow R = 11 , R' = 6$

پس محیط دایره‌ها برابر 22π و 12π است.

تست

در شکل مقابل، دایرهٔ کوچک بر قطر AB و دایرهٔ بزرگ مماس است. اگر $BC = 12$ و $AC = 6$، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: در دو دایرهٔ مماس داخل، مراکز دو دایره و نقطهٔ تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند. داریم:

$$AB = 2R \Rightarrow AC + BC = 2R \Rightarrow 6 + 12 = 2R \Rightarrow R = 9$$

$$OD = OO' + O'D \Rightarrow 9 = OO' + r \Rightarrow OO' = 9 - r$$

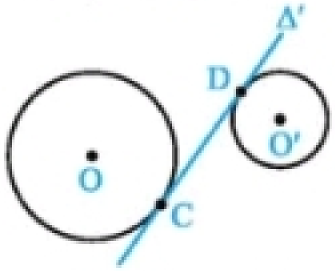
$$OA = OC + AC \Rightarrow 9 = OC + 6 \Rightarrow OC = 3$$

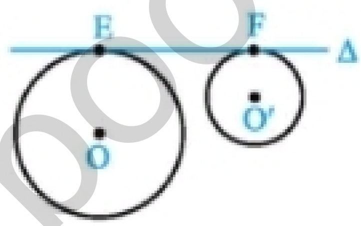
$$OO'^2 = O'C^2 + OC^2 \Rightarrow (9-r)^2 = r^2 + 3^2 \Rightarrow 81 + r^2 - 18r = r^2 + 9 \Rightarrow 18r = 72 \Rightarrow r = \frac{72}{18} = 4 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

مماس مشترک‌های دو دایره

آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند، آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)

ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند. (خط Δ')

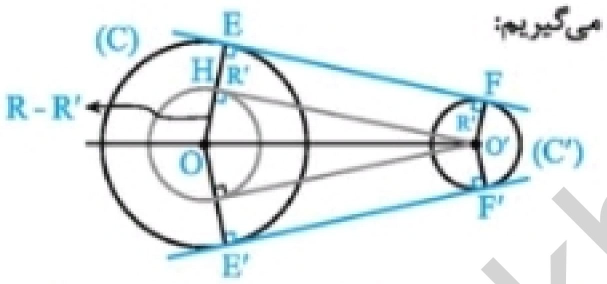




بنابه قرارداد اندازهٔ EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازهٔ CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره

آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:



۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

۲) از نقطهٔ O' مماس $O'H$ را بر دایرهٔ روبه‌رو رسم می‌کنیم.

۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ E قطع کند.

۴) مطابق شکل از نقطهٔ O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C' را در نقطهٔ F قطع کند. EF مماس مشترک خارجی دو دایره است. زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($O'F = R' \overset{\parallel}{=} EH$ و $\widehat{H} = 90^\circ$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = (R - R')^2 + EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

با فرض این‌که طول خط‌المرکزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

مثال

دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۹ و طول خط‌المرکزین ۲۱ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 9$، $R' = 6$ و $d = 21$ است، در نتیجه داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{21^2 - (9-6)^2} = \sqrt{21^2 - 3^2} = \sqrt{18 \times 24} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$$

مثال

شعاع‌های دو دایره ۲ و ۱۰ و طول خط‌المرکزین و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها به ترتیب $4x + 1$ و $3x + 3$ است. مقدار x و طول خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

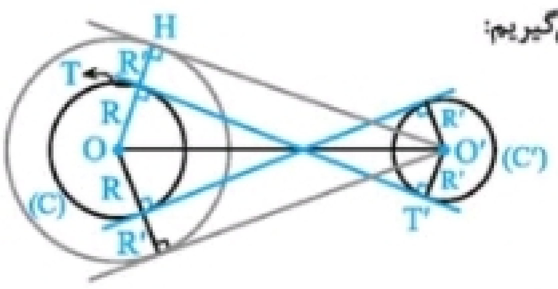
پاسخ:

$$(3x + 3)^2 = (4x + 1)^2 - (10 - 2)^2 \Rightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 16x^2 + 8x + 1 - 64$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 10x - 72 = 0 \Rightarrow (x - 4)(7x + 18) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -\frac{18}{7}$$

جواب منفی قابل قبول نیست، پس $x = 4$ و در نتیجه طول خط‌المرکزین دو دایره $4x + 1 = 17$ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $3x + 3 = 15$ است.

ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:



۱) به مرکز O و شعاع $R+R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

۲) از نقطهٔ O' مماس $O'H$ را بر دایرهٔ روبه‌رو رسم می‌کنیم.

۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایرهٔ (C) نقطهٔ T می‌نامیم.

۴) از نقطهٔ O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C') را در نقطهٔ T' قطع کند، خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است، زیرا $\widehat{T} = \widehat{T'} = ۹۰^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است، چون $O'T' = R'$ و $TH \overset{\parallel}{=\!=} O'T'$ و $\widehat{H} = ۹۰^\circ$). اگر O' خارج دایرهٔ به مرکز O و شعاع $R+R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبهٔ طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل فوق و با فرض $OO' = d$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$ داریم:

$$OO'^{۲} = OH^{۲} + O'H^{۲} \Rightarrow d^{۲} = (R+R')^{۲} + TT'^{۲} \Rightarrow TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}$$

نتیجه طول مماس مشترک داخلی دو دایره همواره از طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کوچک‌تر است.

مثال

دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۹ مفروض است. اندازهٔ مماس مشترک‌های داخلی آن را به‌دست آورید.

پاسخ: بنابه فرض $R = ۳$، $R' = ۴$ و $d = ۹$ است. بنابراین داریم:

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}} = \sqrt{۹^{۲} - ۷^{۲}} = \sqrt{۲ \times ۱۶} = ۴\sqrt{۲}$$

تست

اندازه‌های مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{۲۴}$ و $\sqrt{۴۸}$ است. حاصل‌ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۶

پاسخ: فرض کنیم $EF = \sqrt{۲۴}$ و $CD = \sqrt{۴۸}$، بنابراین داریم:

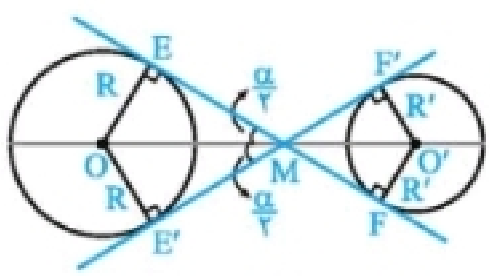
$$\begin{cases} EF^{۲} = d^{۲} - (R+R')^{۲} \\ CD^{۲} = d^{۲} - (R-R')^{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} CD^{۲} - EF^{۲} = (R+R')^{۲} - (R-R')^{۲}$$

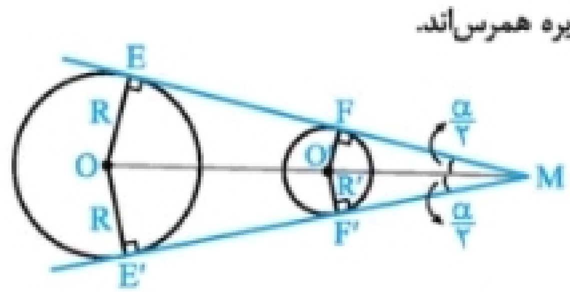
$$\Rightarrow CD^{۲} - EF^{۲} = R^{۲} + ۲RR' + R'^{۲} - R^{۲} - R'^{۲} + ۲RR' = ۴RR' \Rightarrow RR' = \frac{CD^{۲} - EF^{۲}}{۴} \Rightarrow RR' = \frac{۴۸ - ۲۴}{۴} = \frac{۲۴}{۴} = ۶$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المرکزین

اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند. همچنین مماس‌مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند.





نکتهٔ ۱ نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌ها و خط‌المرکزین، خط‌المرکزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند $\frac{OM}{O'M} = \frac{R}{R'}$

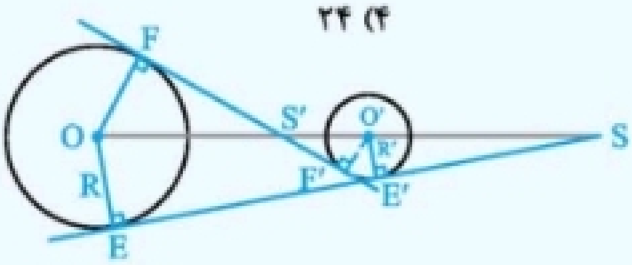
نکتهٔ ۲ اگر α زاویهٔ بین مماس مشترک‌ها باشد، با فرض $(R > R')$ داریم:

زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی $\alpha \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R - R'}{OO'}$

زاویهٔ بین دو مماس مشترک داخلی $\alpha \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R + R'}{OO'}$

تست **دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ و خط‌المرکزین ۱۵ مفروض‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های داخلی از نقطهٔ تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره کدام است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴



پاسخ: بنابه فرض $R=8$، $R'=4$ و $OO'=15$. بنابراین داریم:

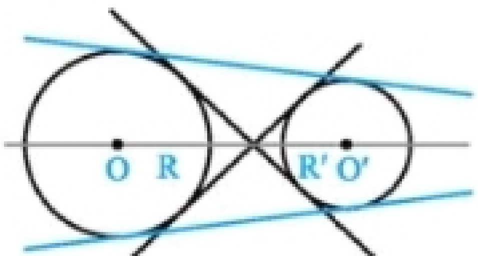
$$\overset{\Delta}{OFS'} \sim \overset{\Delta}{O'F'S'} \Rightarrow \frac{O'S'}{OS'} = \frac{O'F'}{OF} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{O'S'}{OO'} = \frac{R'}{R+R'}$$

$$\Rightarrow O'S' = 15 \times \frac{4}{8+4} = 5$$

$$\overset{\Delta}{O'SE'} \sim \overset{\Delta}{OSE} \Rightarrow \frac{O'S}{OS} = \frac{O'E'}{OE} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{O'S}{OO'} = \frac{R'}{R-R'} \Rightarrow O'S = 15 \times \frac{4}{8-4} = 15$$

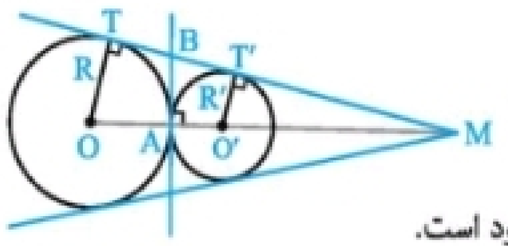
$SS' = O'S' + O'S = 5 + 15 = 20 \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌های دو دایره



۱) دو دایره را متخارج گویند، هرگاه همهٔ نقاط دو دایره بیرون یکدیگر باشند و در این حالت همواره داریم $OO' > R + R'$. دو دایرهٔ متخارج دارای ۴ مماس مشترک می‌باشند.

$OO' > R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.



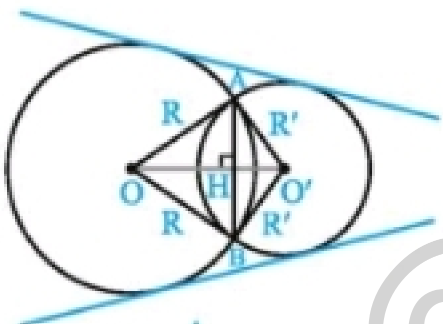
۲) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط آن‌ها بیرون یکدیگر باشند، مماس خارج نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = R + R'$. دو دایرهٔ مماس خارج دارای ۳ مماس مشترک هستند که دو تای آن‌ها خارجی و سومی داخلی است.

$OO' = R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره مماس خارج‌اند.

نکته آ) مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ مماس خارج، همواره بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطهٔ تماس عمود است.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، برابر $TT' = 2\sqrt{RR'}$ است.

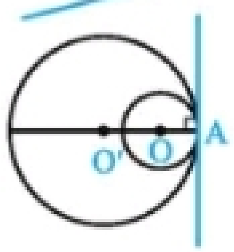
پ) مماس مشترک داخلی دو دایره، پاره‌خط مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند. $(BT = BT')$



۳) دو دایره که فقط در دو نقطه مشترک باشند، متقاطع نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $|R - R'| < OO' < R + R'$. دو دایرهٔ متقاطع همواره دارای دو مماس مشترک خارجی هستند و مماس مشترک داخلی ندارند.

$|R - R'| < OO' < R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

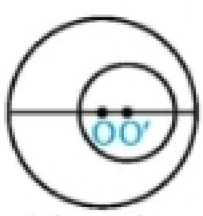
نکته در دو دایرهٔ متقاطع، خط‌المرکزین دو دایره همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است.



۴) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط یکی از آن‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد، مماس درون نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = |R - R'|$

$OO' = |R - R'| \Leftrightarrow$ دو دایره مماس داخل هستند.

نکته دو دایرهٔ مماس درون فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطهٔ تماس عمود است.



دو دایرهٔ متداخل

۵) دو دایره را متداخل گویند، هرگاه همهٔ نقاط یکی از آن‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد. در این حالت داریم $OO' < |R - R'|$. دو دایرهٔ متداخل مماس مشترک ندارند.

دو دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع‌های متفاوت یکی از حالات دو دایرهٔ متداخل است.

مثال **اندازهٔ شعاع‌های دو دایره ۴ و ۱۱ و طول مماس مشترک خارجی دو دایره $7\sqrt{3}$ است.**

آ) طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست آورید. **ب) وضعیت دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.**

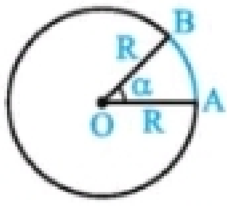
پاسخ: بنابه فرض $R=11$، $R'=4$ و $TT' = 7\sqrt{3}$. داریم:

آ) $TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 7\sqrt{3} = \sqrt{d^2 - (11-4)^2} \Rightarrow 49 \times 3 = d^2 - 7^2$

$\Rightarrow d^2 - 49 = 3 \times 49 \Rightarrow d^2 = 4 \times 49 \Rightarrow d = 2 \times 7 = 14$

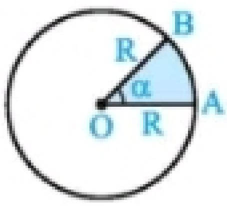
ب) از $R=11$، $R'=4$ و $d=14$ نتیجه می‌شود $R - R' < d < R + R'$. پس دو دایره متقاطع هستند.

طول کمان و مساحت قطاع



طول کمان AB (l) که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن α درجه است، برابر است با:

$$l=\frac{\alpha}{۳۶۰}(\text{محیط دایره})=\frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R)=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}$$

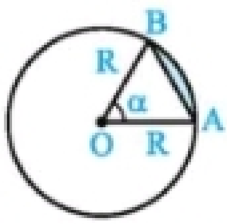


قطاع دایره: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، قطاع دایره می‌نامند.

ناحیهٔ بین کمان AB و شعاع‌های OA و OB، قطاع دایره با زاویهٔ مرکزی α درجه نامیده می‌شود و مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{\alpha}{۳۶۰}S_{\text{دایره}}=\frac{\alpha}{۳۶۰}\pi R^۲=\frac{lR}{۲}$$

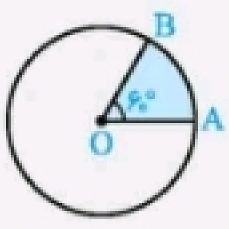
این دستور، مانند دستور محاسبهٔ مساحت مثلث است.



مساحت قطعه: ناحیهٔ بین کمان AB و وتر AB قطعه نامیده می‌شود و مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{قطعه}}=S_{\text{قطاع}}-S(ABO)=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}-\frac{۱}{۲}R^۲\sin\alpha=\frac{R^۲}{۲}(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}-\sin\alpha)$$

مثال



شعاع دایرهٔ مقابل ۶ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۶۰° است. طول کمان AB و مساحت قطاع AOB را به‌دست آورید.

پاسخ: $l=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha=\frac{\pi\times۶}{۱۸۰}\times۶۰=۲\pi cm$ ، $S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}=\frac{\pi\times۶^۲\times۶۰}{۳۶۰}=۶\pi cm^۲$

مثال

اندازهٔ یک زاویهٔ محاطی در یک دایره ۳۰° و طول کمان روبه‌رو به آن ۴ سانتی‌متر است. محیط دایره را به‌دست آورید.

پاسخ: چون اندازهٔ زاویهٔ محاطی داده‌شده ۳۰° است، پس اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن ۶۰° می‌باشد. بنابه فرض طول کمان برابر $l=۴$ سانتی‌متر است، لذا داریم:

$$l=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}\Rightarrow ۴=\frac{\pi R\times۶۰}{۱۸۰}\Rightarrow R=\frac{۱۲}{\pi}$$

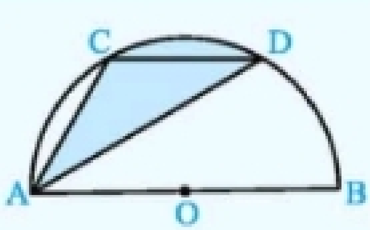
$$\text{محیط دایره}=۲\pi R=۲\pi\times\frac{۱۲}{\pi}=۲۴cm$$

مثال

شعاع دایرهٔ مقابل ۶ و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۱۵۰° است. مساحت قسمت رنگی را به‌دست آورید.

پاسخ: $S=\frac{۱}{۲}\times R^۲\times(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}-\sin\alpha)=\frac{۱}{۲}\times۶^۲\times(\frac{\pi\times۱۵۰}{۱۸۰}-\sin۱۵۰^\circ)\Rightarrow S=۱۸(\frac{۵\pi}{۶}-\frac{۱}{۲})=۱۵\pi-۹$

تست

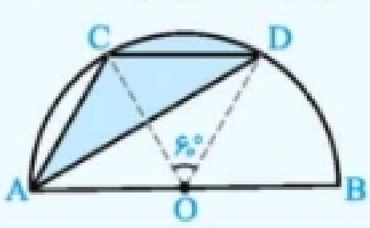


در نیم‌دایره به مرکز O و قطر $AB=۱۲$، وتر CD موازی AB و $CD=۶$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

۱) ۳π ۲) ۸π

۳) ۴π ۴) ۶π

پاسخ: چون طول وتر CD با شعاع دایره برابر است، پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ است. در نتیجه زاویهٔ COD به اندازهٔ ۶۰° می‌باشد. دو مثلث ACD و OCD دارای قاعدهٔ مشترک CD هستند و چون $AB \parallel CD$، پس ارتفاع وارد بر این قاعده در دو مثلث برابر است. لذا مساحت این دو مثلث برابر و در نتیجه مساحت ناحیهٔ رنگی با مساحت قطاع OCD برابر است و داریم:



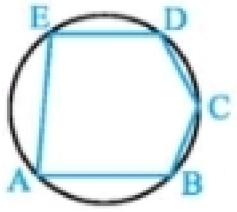
$$\text{مساحت مطلوب}=\text{مساحت قطاع } OCD=\frac{\pi\times۶^۲\times۶۰}{۳۶۰}=۶\pi\Rightarrow$$

گزینهٔ (۴) درست است.

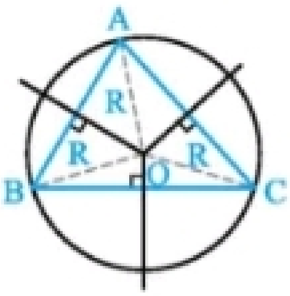
فصل ۱

قسمت سوم

چندضلعی‌های محاطی و محیطی



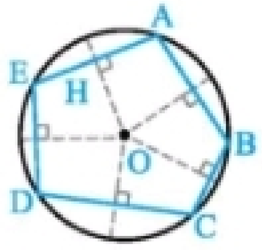
یک چندضلعی را محاطی گوییم اگر و تنها اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که از همهٔ رئوس آن بگذرد. در این صورت دایره را دایرهٔ محیطی آن چندضلعی می‌نامیم. مثلاً شکل روبه‌رو یک پنج‌ضلعی محاطی را نشان می‌دهد.



پرسش: آیا مثلث، یک چندضلعی محاطی است؟ چرا؟

پاسخ: بله، در هندسهٔ (۱) ثابت کردیم عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، همرسند و فاصلهٔ این نقطهٔ همرسی از رأس‌ها برابر است، پس دایره‌ای به مرکز این نقطه و شعاع فاصلهٔ این نقطه تا یکی از رأس‌ها وجود دارد که از رأس‌های مثلث می‌گذرد. این دایره را دایرهٔ محیطی مثلث می‌نامند و معمولاً شعاع آن را با R نمایش می‌دهند.

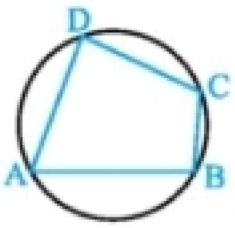
ویژگی مشترک چندضلعی‌های محاطی



یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس باشند، مثلاً پنج‌ضلعی ABCDE مطابق شکل محاطی است.

از جمله چندضلعی‌های محاطی، n ضلعی‌های منتظم، مستطیل و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند.

ویژگی چهارضلعی‌های محاطی



یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند.

$\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$ یا $\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ \Leftrightarrow$ چهارضلعی ABCD محاطی است.

مثال

ثابت کنید مستطیل یک چهارضلعی محاطی است.

پاسخ: می‌دانیم زوایای مستطیل قائمه‌اند، پس مجموع هر دو زاویهٔ مقابل آن برابر 180° است، یعنی مکمل‌اند، پس مستطیل یک چهارضلعی محاطی است.

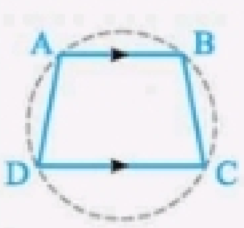
مثال

آیا متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی محاطی است؟ چرا؟

پاسخ: خیر، زیرا در متوازی‌الاضلاع زوایای روبه‌رو برابرند و لزوماً مکمل نیستند.

مثال

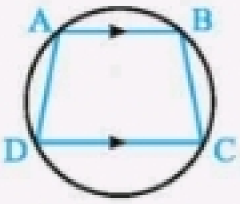
ثابت کنید هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی محاطی است. (تمرین ۱ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)



پاسخ: در هر ذوزنقه زوایای مجاور به ساق مکمل‌اند، یعنی $\widehat{A}+\widehat{D}=180^\circ$ (خطوط موازی و مورب). از طرفی در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زوایای مجاور به قاعده برابرند $(\widehat{D}=\widehat{C})$، در نتیجه $\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ$ و این یعنی ذوزنقهٔ ABCD یک چهارضلعی محاطی است.

مثال

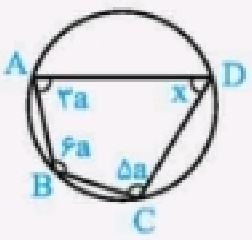
ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی ذوزنقه باشد، آن‌گاه آن ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



پاسخ: مطابق شکل، ذوزنقهٔ محاطی ABCD مفروض است. می‌دانیم که اگر دو وتر در یک دایره موازی باشند کمان‌های دایرهٔ محصور بین این دو وتر برابرند، پس $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ و در نتیجه $AD = BC$ و این یعنی ذوزنقهٔ ABCD متساوی‌الساقین است.

مثال

در شکل مقابل مقادیر a و x را محاسبه کنید.



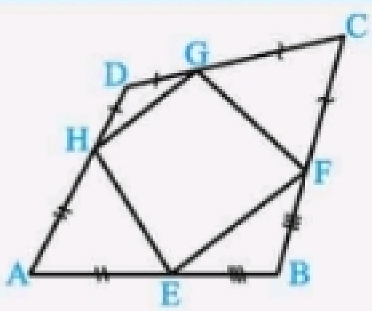
پاسخ: چهارضلعی ABCD محاطی است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳a+۵a=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸a=۱۸۰^\circ \Rightarrow a=\frac{۱۸۰^\circ}{۸}=\frac{۴۵^\circ}{۲}=۲۲/۵^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶a+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۸۰^\circ-۶\times ۲۲/۵^\circ=۱۸۰^\circ-۱۳۵^\circ=۴۵^\circ$$

مثال

در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محدب و مثلث‌های کناری متساوی‌الساقین هستند. ثابت کنید چهارضلعی EFGH محاطی است.



پاسخ: با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین، داریم:

$$A\hat{E}H=A\hat{H}E \text{ ، } B\hat{E}F=B\hat{F}E \text{ ، } C\hat{F}G=C\hat{G}F \text{ ، } D\hat{G}H=D\hat{H}G$$

$$\begin{cases} H\hat{E}F=۱۸۰^\circ-A\hat{E}H-B\hat{E}F=۱۸۰^\circ-A\hat{H}E-B\hat{F}E \\ H\hat{G}F=۱۸۰^\circ-D\hat{G}H-C\hat{G}F=۱۸۰^\circ-D\hat{H}G-C\hat{F}G \end{cases}$$

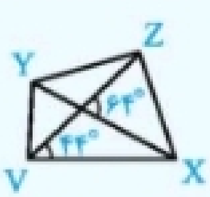
$$\Rightarrow H\hat{E}F+H\hat{G}F=(۱۸۰^\circ-A\hat{H}E-D\hat{H}G)+(۱۸۰^\circ-B\hat{F}E-C\hat{F}G)=E\hat{H}G+E\hat{F}G \quad (۱)$$

$$H\hat{E}F+H\hat{G}F+E\hat{H}G+E\hat{F}G=۳۶۰^\circ \xrightarrow{(۱)} H\hat{E}F+H\hat{G}F=E\hat{H}G+E\hat{F}G=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

پس چهارضلعی EFGH محاطی است.

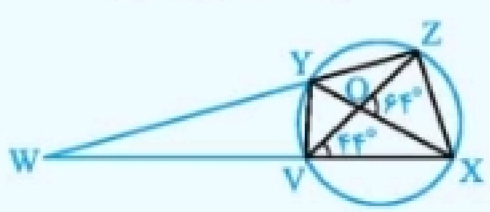
تست

در شکل مقابل، XZYV چهارضلعی محاطی است. اندازهٔ زاویهٔ برخورد امتداد اضلاع YZ و VX چند درجه است؟



۱) ۲۶
۲) ۲۲
۳) ۲۰
۴) ۲۴

پاسخ: چون چهارضلعی XZYV محاطی است، پس دایره‌ای از رأس‌های آن می‌گذرد و $Z\hat{Y}X$ و $Z\hat{V}X$ محاطی و هر دو روبه‌رو به $\overset{\frown}{ZX}$ هستند، پس با یکدیگر برابرند:



$$Z\hat{Y}X=Z\hat{V}X=۴۴^\circ$$

$\overset{\Delta}{OVX}$ زاویهٔ خارجی $Z\hat{O}X=Z\hat{V}X+Y\hat{X}V \Rightarrow Y\hat{X}V=۶۴^\circ-۴۴^\circ=۲۰^\circ$

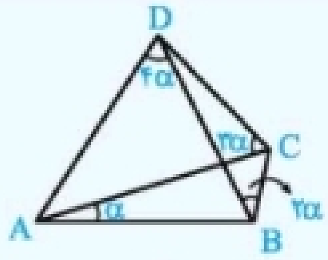
$\overset{\Delta}{YWX}$ زاویهٔ خارجی $Z\hat{Y}X=\hat{W}+Y\hat{X}V \Rightarrow ۴۴^\circ=\hat{W}+۲۰^\circ \Rightarrow \hat{W}=۲۴^\circ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ مطابق شکل، اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰

۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰



پاسخ: به کمک زاویهٔ محاطی داریم:

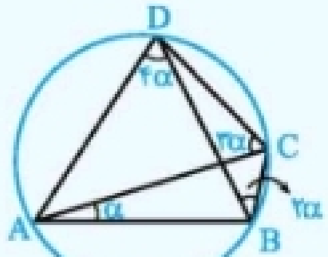
$$B\hat{A}C = B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow B\hat{D}C = \alpha$$

$$A\hat{B}D = A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow A\hat{B}D = ۳\alpha$$

اما چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس:

$$A\hat{B}C + A\hat{D}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۳\alpha + ۴\alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۸^\circ$$

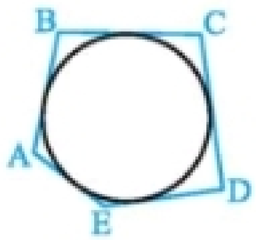
$A\hat{B}C = ۲\alpha + ۳\alpha = ۵\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.



چندضلعی‌های محیطی

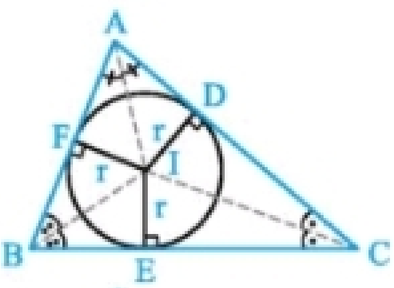
یک چندضلعی را محیطی گوییم اگر و تنها اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همهٔ ضلع‌های آن مماس باشد، در این صورت دایره را دایرهٔ محاطی این چندضلعی می‌نامیم.

شکل مقابل یک پنج‌ضلعی محیطی را نشان می‌دهد.



پرسش: آیا مثلث یک چندضلعی محیطی است؟ چرا؟

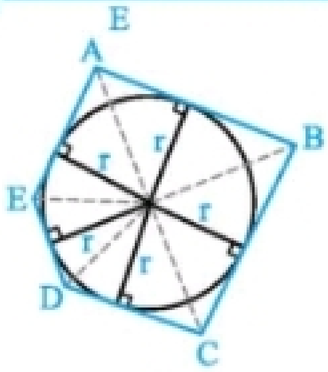
پاسخ: بله، زیرا در هندسهٔ (۱) ثابت کردیم نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، همرسند و این نقطهٔ همرسی از اضلاع مثلث به یک فاصله است. پس دایره‌ای به مرکز این نقطه و شعاع فاصلهٔ این نقطه تا اضلاع وجود دارد که بر اضلاع مثلث مماس است، بنابه قرارداد آن را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌نامند و شعاع آن را با r نمایش می‌دهند.



ویژگی مشترک چندضلعی‌های محیطی

آ) یک چندضلعی، محیطی است، اگر و تنها اگر نیمسازهای زاویه‌های آن همرس باشند.

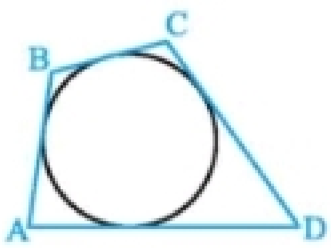
ب) مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با نصف محیط آن در شعاع دایرهٔ محاطی آن یعنی $S = P.r$ (P نصف محیط است.)



ویژگی چهارضلعی‌های محیطی

یک چهارضلعی، محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

$ABCD$ چهارضلعی محیطی است. $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$

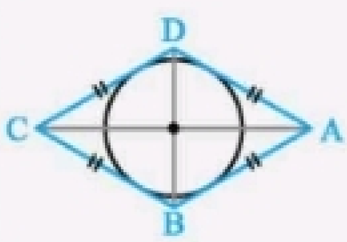


مثال

ثابت کنید لوزی یک چهارضلعی محیطی است.

پاسخ: می‌دانیم اندازه‌های چهار ضلع یک لوزی برابرند، پس مجموع دو ضلع مقابل آن با مجموع دو ضلع مقابل دیگر آن برابر است، پس لوزی یک چهارضلعی محیطی است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که بر اضلاع آن مماس است. مرکز این دایره همان نقطهٔ تلاقی قطرهای آن است.

لوزی $ABCD$ چهارضلعی محیطی است. $AB + CD = AD + BC \Rightarrow$



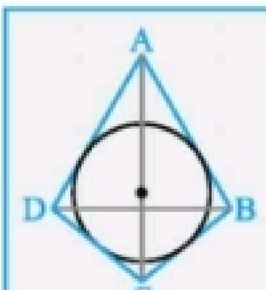
مثال

ثابت کنید کایت یک چهارضلعی محیطی است.

پاسخ: کایت از دو مثلث متساوی‌الساقین غیرهم‌نهشت تشکیل شده است که قاعدهٔ مشترکشان، یک قطر این چهارضلعی محدب است. داریم:

$$AD = AB \ , \ BC = CD \xrightarrow{+} AD + BC = AB + CD$$

بنابراین کایت $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است و دایره‌ای وجود دارد که بر اضلاع این چهارضلعی مماس است.



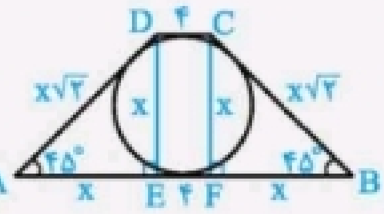
مثال

آیا متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی محیطی است؟ چرا؟

پاسخ: خیر، زیرا در متوازی‌الاضلاع الزاماً مجموع اندازه‌های اضلاع مقابل با مجموع اندازه‌های اضلاع مقابل دیگر برابر نیست.

مثال

اندازهٔ یک زاویهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی برابر 45° است. اگر طول قاعدهٔ کوچک آن ۴ باشد، طول قاعدهٔ بزرگ آن را به‌دست آورید.



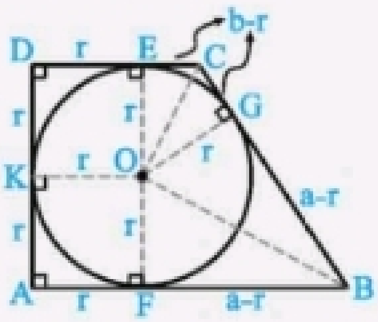
پاسخ: ارتفاع‌های ذوزنقه را رسم می‌کنیم. دو مثلث ADE و BCF قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند، پس اندازهٔ اضلاع آن‌ها مطابق شکل می‌شود و چون ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مفروض، چهارضلعی محیطی است، داریم:

$$AD + BC = CD + AB \Rightarrow x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4 + 4 + 2x \Rightarrow x = \frac{8}{2\sqrt{2} - 2} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2} - 1} = 4(\sqrt{2} + 1) = 4\sqrt{2} + 4$$

$$AB = AE + EF + BF = x + 4 + x = 2x + 4 = 8\sqrt{2} + 8 + 4 = 8\sqrt{2} + 12$$

مثال

اندازه‌های قاعده‌های یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی برابر a و b، $(a > b)$ و شعاع دایرهٔ محاطی آن r است. ثابت کنید $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$



پاسخ: OE و OF بر CD و AB عمودند و چون $AB \parallel CD$ است، پس OE و OF بر یک امتدادند و در نتیجه $AD = EF = 2r$. چهارضلعی‌های AKOF و DKOE مربع هستند، زیرا مستطیلی هستند که دو ضلع مجاورشان $(OE = OK = OF = r)$ برابر است، در نتیجه $BF = a - r$ و $CE = b - r$ و بنابه خاصیت برابری دو مماس رسم‌شده بر دایره، نتیجه می‌شود $BG = BF = a - r$ و $CG = CE = b - r$

OB و OC نیمسازهای زوایای B و C در ذوزنقه هستند و چون $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ است، پس $B\hat{O}C = 90^\circ$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOC، بنابه رابطهٔ طولی داریم:

$$OG^2 = CG \times BG \Rightarrow \cancel{r^2} = (b - r)(a - r) = ab - ar - br + \cancel{r^2} \Rightarrow ab = ar + br \Rightarrow ab = (a + b)r \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{a + b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

نتیجه مساحت هر ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی برابر است با حاصل‌ضرب دو قاعدهٔ آن:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}h(a + b) = \frac{1}{2} \times 2r(a + b) = r(a + b) = ab$$

تست

در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، اندازهٔ قاعده‌ها ۲ و ۸ است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ: **روش اول:** OA و OD به ترتیب نیمسازهای زوایای A و D هستند (زیرا O از اضلاع این زوایا به یک فاصله است)، پس $O\hat{A}D + O\hat{D}A = \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. در نتیجه مثلث AOD قائم‌الزاویه است و OG ارتفاع وارد بر وتر است و بنابه رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$OG^2 = GD \times GA \Rightarrow r^2 = x.y$$

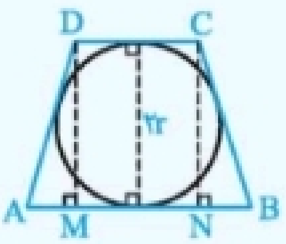
از طرفی مثلث‌های ODC و AOB متساوی‌الساقین هستند (زیرا $O\hat{D}C = O\hat{C}D$ و $O\hat{A}B = O\hat{B}A$) و OF و OE در آن‌ها ارتفاع و میانهٔ وارد بر قاعده است، پس $AE = BE = y$ و $DF = CF = x$ و بنابه برابری مماس‌های مرسوم بر یک دایره نتیجه می‌شود $GD = DF = CF = CH = x$ و $AG = AE = BE = BH = y$. داریم:

$$r^2 = x.y \Rightarrow r^2 = \frac{CD}{2} \times \frac{AB}{2} \Rightarrow (2r)^2 = CD.AB$$

یعنی در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، قطر دایرهٔ محاطی (ارتفاع ذوزنقه) واسطهٔ هندسی دو قاعدهٔ آن است.

$$(2r)^2 = 2 \times 8 \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow h = 4 \quad , \quad S = \frac{h(AB + CD)}{2} = \frac{4(2 + 8)}{2} = 20$$

روش دوم: با فرض $AB = a$ و $CD = b$ داریم $AM = BN = \frac{AB - CD}{۲} = \frac{a-b}{۲}$ و از طرفی $AB + CD = AD + BC$ نتیجه می‌دهد $AD = BC = \frac{a+b}{۲}$ و داریم:



$$AD^۲ = AM^۲ + MD^۲ \Rightarrow (\frac{a+b}{۲})^۲ = (\frac{a-b}{۲})^۲ + (۲r)^۲$$

$$\Rightarrow (۲r)^۲ = \frac{a^۲ + ۲ab + b^۲ - a^۲ + ۲ab - b^۲}{۴} = ab$$

سایر محاسبات مانند روش اول است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

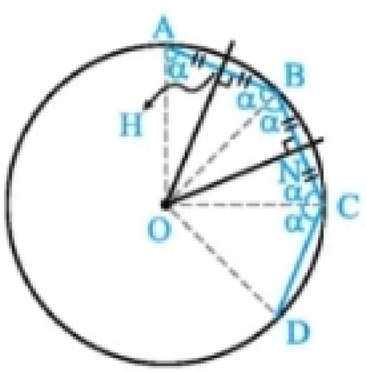
چندضلعی‌های منتظم

یک چندضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زوایای آن نیز هم‌اندازه باشند. مثلاً مثلث متساوی‌الاضلاع، سه‌ضلعی منتظم و مربع، چهارضلعی منتظم است.

وضعیت محاطی و محیطی بودن چندضلعی‌های منتظم

(فعالیت صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

هر چندضلعی منتظم هم محاطی و هم محیطی است.



اثبات: آ) عمودمنصف دو ضلع AB و BC از nضلعی منتظم را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم (دایره هنوز وجود ندارد)، پس $OA = OB = OC$، از همنهشتی دو مثلث OBH و OBN (به حالت برابری یک ضلع و وتر) نتیجه می‌شود $A\hat{B}O = O\hat{B}N = \alpha$ در نتیجه $O\hat{A}B = O\hat{C}B = \alpha$، پس اندازهٔ زاویهٔ nضلعی منتظم برابر $A\hat{B}C = ۲\alpha$ است، در نتیجه $O\hat{C}D = \alpha$. حال O را به D وصل می‌کنیم و داریم:

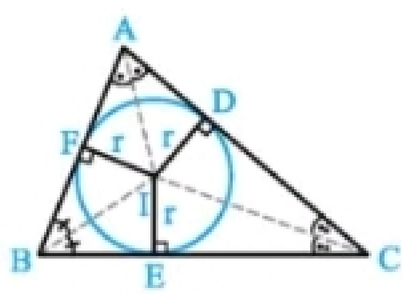
$$(OC = OC \ ,\ O\hat{C}B = O\hat{C}D = \alpha \ ,\ BC = CD) \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{OCB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow OD = OB$$

بنابراین $OA = OB = OC = OD$ و با استدلال مشابه با وصل O به رأس‌های دیگر نتیجه می‌شود $OA = OB = OC = OD = \cdots$ و این یعنی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA از رأس‌های nضلعی منتظم می‌گذرد پس nضلعی منتظم محاطی است.

ب) در ادامهٔ اثبات فوق می‌گوییم همهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین OAB، OBC، OCD و ... همنهشت‌اند پس ارتفاع نظیر قاعدهٔ آن‌ها برابر است، یعنی $OH = ON = \cdots$ و این یعنی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH بر همهٔ اضلاع nضلعی منتظم مماس است لذا nضلعی منتظم محیطی است.

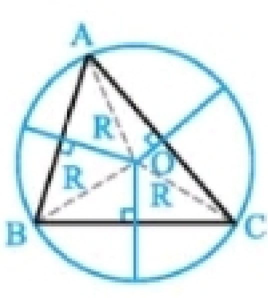
دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

مشاهده کردیم که مثلث همواره یک چندضلعی محاطی و یک چندضلعی محیطی است.



دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC

I مرکز آن، نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی

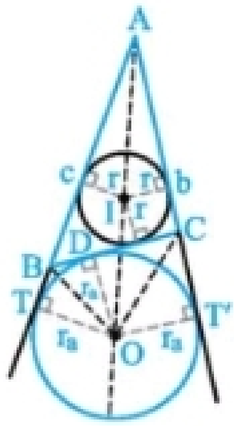


دایرهٔ محیطی مثلث ABC

O مرکز آن، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها

نکته چون مثلث یک چندضلعی محیطی است، پس شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن برابر $r = \frac{S}{P}$ است (P نصف محیط مثلث است).

دایره‌های محاطی خارجی مثلث



می‌دانیم در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ درونی آن با نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی دیگر همرس‌اند و این نقطه از خط‌های شامل ضلع‌ها به یک فاصله است. بنابراین مطابق شکل، دایره‌ای به مرکز O وجود دارد که بر ضلع BC و امتداد دو ضلع دیگر مماس است و بنابه قرارداد، شعاع آن را با r_a نشان می‌دهند و آن را دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

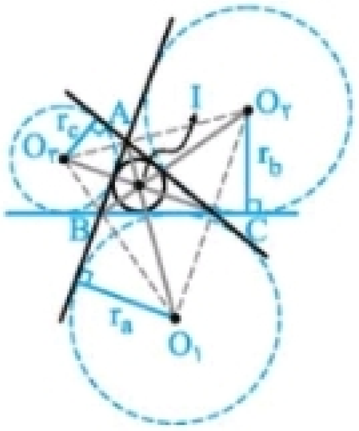
محاسبهٔ شعاع دایره‌های محاطی خارجی

$$S(ABC)=S(ABOC)-S(BOC)=S(ABO)+S(ACO)-S(BOC)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}OT\times AB+\frac{1}{2}OT'\times AC-\frac{1}{2}OD\times BC=\frac{1}{2}r_a\times c+\frac{1}{2}r_a\times b-\frac{1}{2}r_a\times a$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}r_a(c+b-a)=\frac{1}{2}r_a(a+b+c-2a)=\frac{1}{2}r_a(2P-2a)\Rightarrow r_a=\frac{S}{P-a}$$

و به طور مشابه برای دایره‌های محاطی نظیر رأس‌های B و C داریم $r_b=\frac{S}{P-b}$ و $r_c=\frac{S}{P-c}$



نکته هر مثلث دارای سه دایرهٔ محاطی خارجی است، نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC، ارتفاع‌های مثلث $O_1O_2O_3$ می‌باشند.

مثال

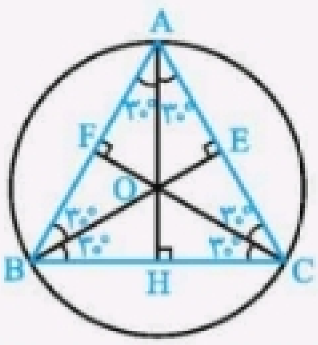
شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع‌های دوایر محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است و نصف محیط مثلث برابر $P=\frac{3a}{2}$ می‌باشد، در این صورت داریم:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\ ,\ r_a=r_b=r_c=\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}-a}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

مثال

در مثال قبل، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را بر حسب طول ضلع مثلث به‌دست آورید.



پاسخ: در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقاط همرسی نیمسازها، ارتفاع‌ها، میانه‌ها و عمودمنصف‌ها بر هم منطبق هستند، پس O نقطهٔ همرسی میانه‌ها نیز می‌باشد که هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند، لذا:

$$OA=2OH\Rightarrow R=2r=2\times\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

مثال

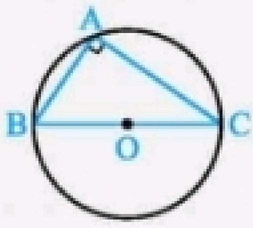
اندازهٔ اضلاع مثلثی ۳، ۴ و ۵ است. طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث را به‌دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $b=4$، $c=3$ و $a=5$، پس $a^2=b^2+c^2$ و این یعنی مثلث قائم‌الزاویه است، پس مساحت آن برابر است با $S=\frac{bc}{2}=6$ و نصف محیط مثلث برابر $P=\frac{5+3+4}{2}=6$ می‌باشد. داریم:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{6}{6}=1\ ,\ r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{6}{6-5}=\frac{6}{1}=6\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}=\frac{6}{6-4}=\frac{6}{2}=3\ ,\ r_c=\frac{S}{P-c}=\frac{6}{6-3}=2$$

مثال

در مثال قبل، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را به‌دست آورید.



پاسخ: چون مثلث قائم‌الزاویه است پس نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث (مرکز دایرهٔ محیطی مثلث) وسط وتر می‌باشد، لذا شعاع دایرهٔ محیطی مثلث همان نصف وتر مثلث است.

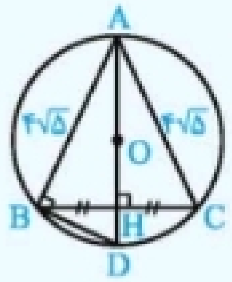
$$۲R = BC = a \Rightarrow R = \frac{a}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

تست

در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ ساق‌ها $۴\sqrt{۵}$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر ۵ است. طول قاعدهٔ مثلث کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ: در مثلث متساوی‌الساقین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث (نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها) روی ارتفاع وارد بر قاعده قرار دارد. پس AD قطر دایرهٔ محیطی مثلث است. مثلث ABD قائم‌الزاویه است، زیرا زاویهٔ محاطی ABD روبه‌رو به قطر است. بنابه رابطهٔ طولی در مثلث ABD داریم:



$$AB^۲ = AH \times AD \Rightarrow (۴\sqrt{۵})^۲ = AH \times ۱۰ \Rightarrow ۱۶ \times ۵ = AH \times ۱۰ \Rightarrow AH = ۸$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow (۴\sqrt{۵})^۲ = ۸^۲ + BH^۲ \Rightarrow BH^۲ = ۸۰ - ۶۴ = ۱۶ \Rightarrow BH = ۴$$

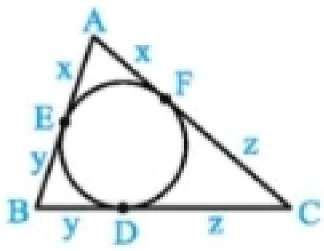
$BC = ۲BH = ۲ \times ۴ = ۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تذکر اگر O را خارج مثلث هم در نظر بگیریم، استدلال فوق برقرار است.

محاسبهٔ طول پاره‌خط‌هایی که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بر اضلاع آن پدید می‌آورد

(تمرین ۶ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

می‌خواهیم طول پاره‌خط‌های $BD = BE$ ، $AE = AF$ و $CD = CF$ را بر حسب طول اضلاع مثلث یعنی $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ به‌دست آوریم. مطابق شکل داریم:



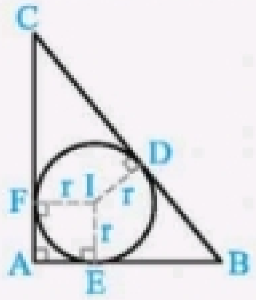
$$a = y + z \,,\, b = x + z \,,\, c = x + y \xrightarrow{+} a + b + c = ۲x + ۲y + ۲z$$

$$\Rightarrow x + y + z = \frac{a + b + c}{۲} = \frac{۲P}{۲} = P$$

با قرار دادن $y + z = a$ در تساوی فوق $x = P - a$ نتیجه می‌شود. به همین ترتیب با قرار دادن $x + z = b$ مقدار $y = P - b$ و با قرار دادن $x + y = c$ مقدار $z = P - c$ نتیجه می‌شوند. پس طول پاره‌خط‌های خواسته‌شده $\begin{cases} x = P - a \\ y = P - b \\ z = P - c \end{cases}$ است. (P نصف محیط مثلث است.)

مثال

ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر است با مجموع دو ضلع قائمهٔ مثلث منهای وتر، تقسیم بر دو.



پاسخ: **روش اول:** چون زاویهٔ A قائمه است، پس چهارضلعی AEIF مستطیل است. از طرفی $IE = IF = r$ می‌باشد، لذا چهارضلعی AEIF مربع می‌شود پس $AE = AF = r$ ، اما بنابه مطلب فوق $AE = AF = P - a$ است، پس می‌توان نوشت:

$$r = P - a = \frac{a + b + c}{۲} - a = \frac{b + c - a}{۲}$$

روش دوم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{b \times c}{۲}}{\frac{a + b + c}{۲}} = \frac{bc}{a + b + c}$$

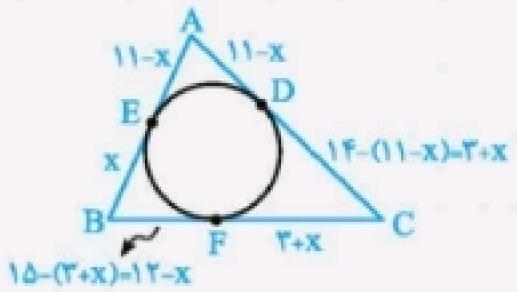
صورت و مخرج کسر فوق را در $b + c - a$ ضرب می‌کنیم داریم:

$$r = \frac{bc(b + c - a)}{(b + c + a)(b + c - a)} = \frac{bc(b + c - a)}{(b + c)^۲ - a^۲} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} r = \frac{bc(b + c - a)}{b^۲ + c^۲ + ۲bc - b^۲ - c^۲} = \frac{bc(b + c - a)}{۲bc} \Rightarrow r = \frac{b + c - a}{۲}$$

مثال

اندازهٔ اضلاع مثلثی $AB=۱۱$ ، $AC=۱۴$ و $BC=۱۵$ است. طول پاره‌خط‌هایی را که دایرهٔ محاطی داخلی، بر اضلاع مثلث پدید می‌آورد به‌دست آورید.

پاسخ: روش اول: بدون استفاده از فرمول‌های یادشده در قبل، با فرض $BE=x$ و برابری طول مماس‌ها، اندازهٔ پاره‌خط‌ها $AD=AE=۱۱-x$ ، $CF=CD=۳+x$ و $BF=۱۲-x$ می‌شود و داریم:



$$BF=BE \Rightarrow x=۱۲-x \Rightarrow x=۶ \Rightarrow \begin{cases} BE=BF=۶ \\ AE=AD=۵ \\ CF=CD=۹ \end{cases}$$

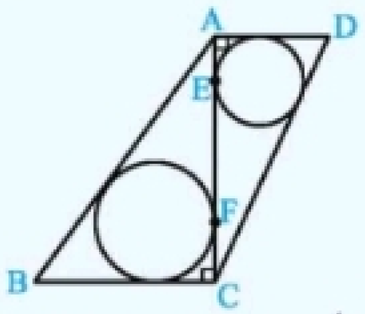
روش دوم: با استفاده از دستورهای محاسبهٔ طول پاره‌خط‌هایی که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بر اضلاع مثلث پدید می‌آورد، داریم:

$$\text{(نصف محیط)}\ P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۱۵+۱۴+۱۱}{۲}=۲۰$$

$$BF=BE=P-b=۲۰-۱۴=۶\ ,\ AE=AD=P-a=۲۰-۱۵=۵\ ,\ CF=CD=P-c=۲۰-۱۱=۹$$

تست

در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل، قطر AC بر قاعده‌ها عمود است. اگر $AC=۱۵$ ، $BC=۲۰$ و $AD=۸$ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط EF کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۷/۵
۴) ۸

پاسخ: CF شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و AE شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ACD است، پس داریم:

$$CF=\frac{AC+BC-AB}{۲}\ ,\ AE=\frac{AC+AD-CD}{۲}$$

$$EF=AC-CF-AE=AC-\frac{AC+BC-AB}{۲}-\frac{AC+AD-CD}{۲}$$

$$\Rightarrow EF=\frac{AB-BC+CD-AD}{۲}=\frac{(AB+CD)-(BC+AD)}{۲}$$

AB و CD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲=۱۵^۲+۲۰^۲=۶۲۵ \Rightarrow AB=۲۵$$

$$CD^۲=AC^۲+AD^۲=۱۵^۲+۸^۲=۲۸۹ \Rightarrow CD=۱۷$$

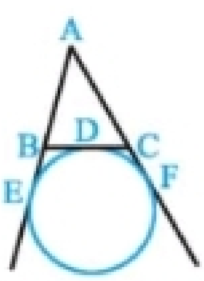
و نهایتاً داریم:

$$EF=\frac{۲۵+۱۷-(۲۰+۸)}{۲}=\frac{۴۲-۲۸}{۲}=\frac{۱۴}{۲}=۷$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

محاسبهٔ طول دو پاره‌خطی که دایرهٔ محاطی خارجی روی یک ضلع مثلث پدید می‌آورد

می‌خواهیم طول پاره‌خط‌های BD و CD را بر حسب طول اضلاع مثلث $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ به‌دست آوریم. با توجه به خاصیت مماس داریم $BE=BD$ ، $CF=CD$ و $AE=AF$. با توجه به $BC=BD+CD$ داریم:



$$AB+AC+BC=۲P \Rightarrow AB+BD+AC+CD=۲P$$

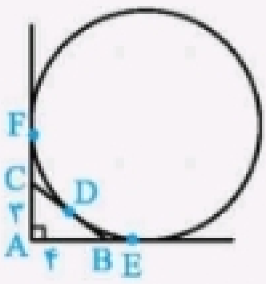
$$\Rightarrow \underbrace{AB+BE}_{AE}+\underbrace{AC+CF}_{AF}=۲P \Rightarrow AE+AF=۲P \Rightarrow ۲AE=۲AF=۲P$$

$$\Rightarrow AE=AF=P \Rightarrow \begin{cases} BD=BE=AE-AB=P-c \\ CD=CF=AF-AC=P-b \end{cases}$$

نتیجه محیط مثلث ABC همواره برابر ۲AE یا ۲AF است.

مثال

در شکل روبه‌رو طول پاره‌خط‌های BD و CD را بیابید.

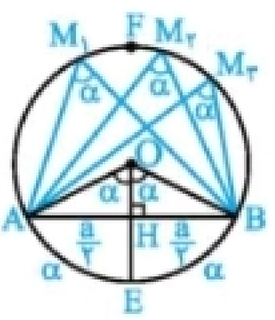


پاسخ: ابتدا طول پاره‌خط‌های AE و AF را به‌دست می‌آوریم. چون مثلث قائم‌الزاویه است، طول وتر مثلث $a = ۵$ است و داریم:

$$AE = AF = P = \frac{a+b+c}{۲} = \frac{۵+۳+۴}{۲} = ۶ \ ,\ BE = AE - AB = ۶ - ۴ = ۲ \Rightarrow BD = BE = ۲$$

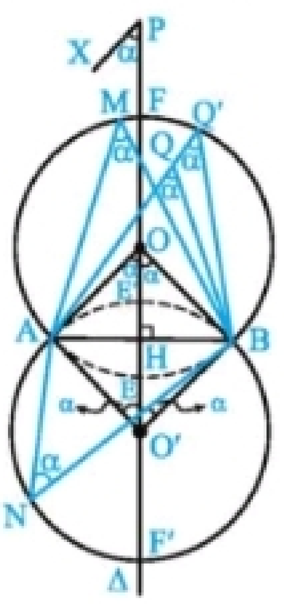
$$CD = BC - BD = ۵ - ۲ = ۳$$

زاویه‌های دید و کمان حاوی | ویژهٔ علاقمندان



دایرهٔ معلوم $C(O,R)$ و وتر ثابت $AB = a$ را در آن در نظر می‌گیریم. اندازهٔ کمان AEB معلوم است و آن را برابر ۲α فرض می‌کنیم. همهٔ زوایای محاطی که رأس آن‌ها روی کمان AFB قرار دارد و اضلاعشان از دو نقطهٔ ثابت A و B عبور می‌کند، هم‌اندازه‌اند $(\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{M_3} = \cdots = \alpha)$. بنابه قرارداد، $\widehat{AFB}$ را کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB می‌نامند.

حال سؤال این است؛ آیا با معلوم بودن پاره‌خط $AB = a$ و زاویهٔ α می‌توان کمان AFB را به‌دست آورد؟ پاسخ این پرسش مثبت است و باید O مرکز دایره و R شعاع دایره را به‌دست آوریم. به همین جهت می‌گوییم مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH با معلوم بودن یک زاویهٔ حاده و ضلع روبه‌رو به آن زاویه، قابل رسم است. طریقهٔ ترسیم کمان AFB به شرح زیر است:



آ) عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم.

ب) نقطهٔ دلخواه P را روی Δ در نظر می‌گیریم و $X\hat{P}H$ را برابر α می‌سازیم.

پ) از A و B خط‌هایی موازی نیم‌خط PX رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن‌ها با خط Δ را، O و O′ می‌نامیم.

ت) به مرکز O و شعاع OA و به مرکز O′ و شعاع O′B دو دایره رسم می‌کنیم. این دایره‌ها از نقطهٔ B می‌گذرند و شعاعشان برابر است، زیرا چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH، BOH، BO′H و AO′H همنهشت‌اند. در واقع چهارضلعی AOBO′ لوزی است.

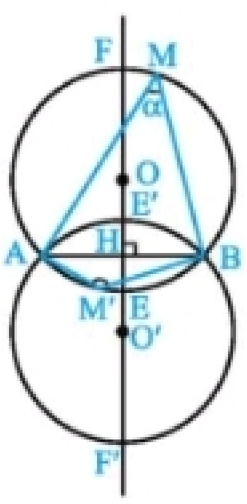
ث) هر نقطه مانند M روی کمان AFB یا مانند N روی کمان AF′B در نظر بگیریم، اندازهٔ زوایای محاطی AMB و ANB برابر α است، زیرا کمان‌های AEB و AE′B با زوایای مرکزیشان یعنی ۲α برابر هستند.

ج) حال نشان می‌دهیم اگر نقطهٔ Q چنان باشد که $A\hat{Q}B = \alpha$، آن‌گاه Q روی $\widehat{AFB}$ یا $\widehat{AF'B}$ قرار می‌گیرد، زیرا اگر Q روی کمان مثلاً $\widehat{AFB}$ قرار نگیرد، خط AQ دایره را در نقطه‌ای مانند Q′ قطع می‌کند و نتیجه می‌شود $A\hat{Q'}B = \alpha$، اما بنابه زاویهٔ خارجی داریم $A\hat{Q}B > A\hat{Q'}B$ و $\alpha > \alpha$ که تناقض است.

بنابراین می‌توان گفت:

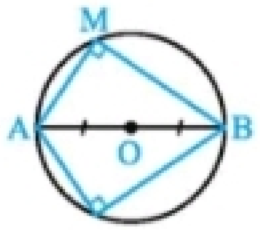
مجموعه نقاطی از صفحه که از آن‌ها پاره‌خط AB با زاویهٔ α دیده می‌شود. دو کمان هم‌اندازه از دو دایرهٔ قابل انطباق می‌باشند، به‌جز نقاط انتهایی کمان‌ها، این کمان‌ها همان کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB هستند.

نتایج:

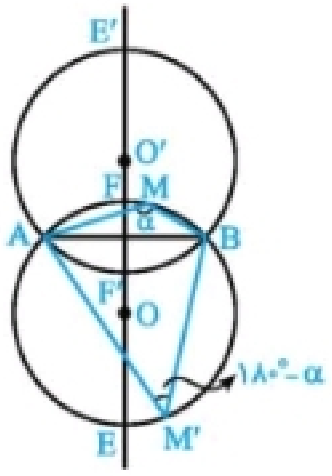


۱) کمان‌های $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AE'B}$ از دو دایرهٔ O و O'، کمان حاوی زاویهٔ $180^\circ - \alpha$ وابسته بـه پـارخط AB می‌باشـند، زیرا در چهارضلعی محاطی $AMBM'$ داریم $A\widehat{M'}B = 180^\circ - A\widehat{M}B = 180^\circ - \alpha$

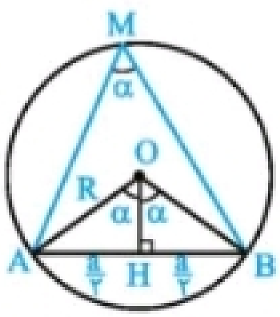
نکته اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ کمان حاوی زاویهٔ α از کمان حاوی زاویهٔ $180^\circ - \alpha$ وابسته به پـاره‌خط AB بزرگ‌تـر می‌باشد (کمان AFB از کمان AEB بزرگ‌تر است).



۲) کمان حاوی زاویهٔ 90° $(\alpha = 90^\circ)$ وابسته به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB به‌جز نقاط A و B می‌باشـد. در واقع دو دایرهٔ فوق بر هم منطبق می‌شوند.



۳) کمان حاوی زاویهٔ α $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ وابسته به پـاره‌خط AB، از کمـان حـاوی زاویـهٔ $180^\circ - \alpha$ وابسـته بـه پاره‌خط AB کوچک‌تر است.



۴) محاسبهٔ شعاع دایره‌ای که کمان حاوی بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز دایره از پاره‌خط AB:

$$\overset{\Delta}{AOH}: \sin\alpha = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$\overset{\Delta}{AOH}: \cos\alpha = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OH = R\,|\cos\alpha| = \frac{a}{2\,|\tan\alpha|}$$

مثال

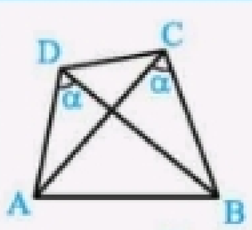
پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتی‌متر و کمان حاوی زاویهٔ 30° وابسته به این پاره‌خط مفروض است. شعاع دایره‌ای که این کمان حاوی بخشی از آن است را محاسبه کنید.

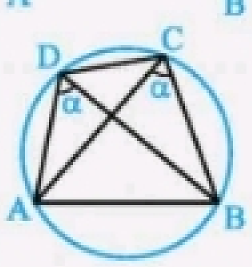
پاسخ: بنابه فرض $\alpha = 30^\circ$ و $a = 12$ است و داریم:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{12}{2\sin 30^\circ} = \frac{12}{2 \times \frac{1}{2}} = 12$$

مثال

در چهارضلعی $ABCD$ داریم $A\widehat{D}B = A\widehat{C}B = \alpha$، ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.



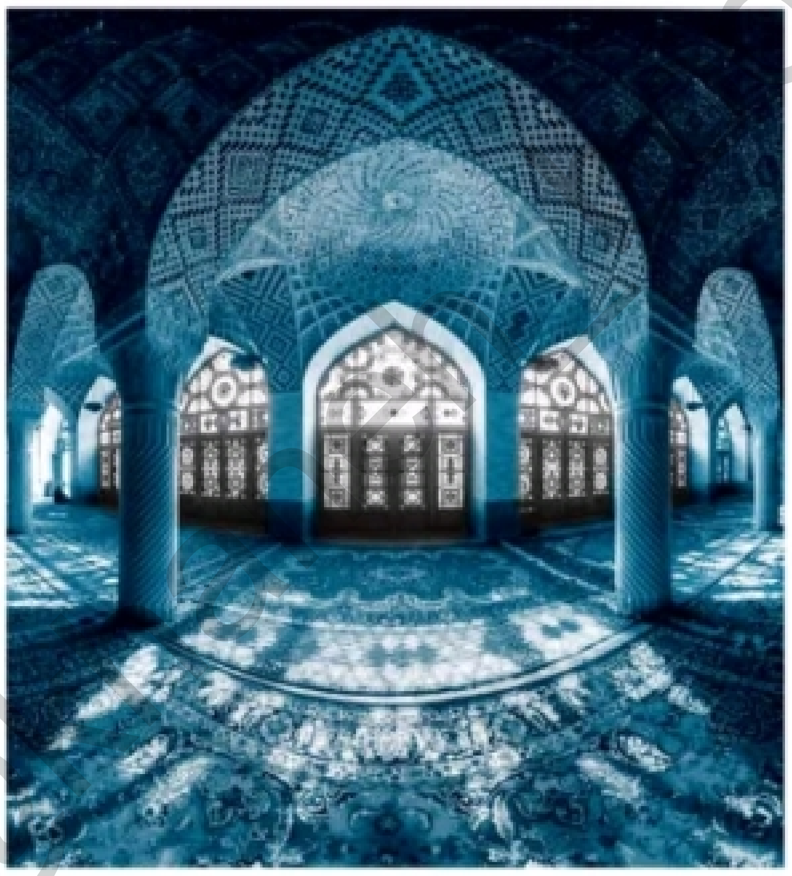


پاسخ: نقطهٔ D روی کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB قرار دارد. چون $A\widehat{C}B = \alpha$، پس نقطهٔ C نیز روی این کمان حاوی، واقع است. در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ محاطی می‌باشد.

هندسه یازدهم

Geometry 11

فصل ۲



تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل ۲

قسمت اوّل
تبدیل‌های هندسی (بازتاب، انتقال، دوران و تجانس)

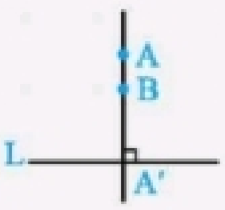
تبدیل: تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مثل A' را از صفحهٔ P نظیر می‌کند و بالعکس، هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، دقیقاً تصویر یک نقطهٔ A از صفحهٔ P است.

اگر تبدیل را با حرف T نشان دهیم، آن را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$T: P \to P$$
$$T(A) = A'$$

مثال: از هر نقطهٔ A در صفحه، خطی عمود بر خط معلوم L رسم می‌کنیم و پای عمود را A' می‌نامیم. آیا این عمل، یک تبدیل است؟ چرا؟

پاسخ: خیر، زیرا دو نقطهٔ متمایز A و B که خط گذرنده از آن‌ها بر L عمود است، تصویرشان نقطهٔ A' می‌باشد و این یعنی A' تصویر دو نقطه از صفحه است، پس عمل داده‌شده نمی‌تواند تبدیل باشد.



تبدیل همانی: تبدیل I را یک تبدیل همانی گوییم، هرگاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم $I(A) = A$

یافتن تبدیل‌یافتهٔ یک خط

در تبدیل‌هایی که می‌خواهیم معرفی کنیم یعنی بازتاب، انتقال، دوران و تجانس، تبدیل‌یافتهٔ هر خط، یک خط است؛ بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافتهٔ یک خط کافی است تبدیل‌یافتهٔ دو نقطهٔ دلخواه از آن را پیدا کرده و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

تعریف: تبدیل‌ها می‌توانند موقعیت و اندازهٔ پاره‌خط یا شکل را تغییر دهند. تبدیل‌یافتهٔ یک شکل اولیه را **تصویر** آن می‌نامیم.

نقطهٔ ثابت تبدیل

در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، **نقطهٔ ثابت تبدیل** می‌نامند.

تبدیل‌های طولپا (ایزومتری)

تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند، مثلاً اگر پاره‌خط $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB تحت یک تبدیل ایزومتری باشد، آن‌گاه $AB = A'B'$ است.

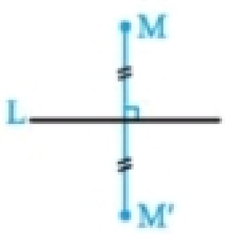
قضیه: در هر تبدیل طولپا (ایزومتری)، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.

اکنون تبدیل‌های بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را معرفی می‌کنیم.

۱) بازتاب

بازتاب نسبت به خط (تقارن محوری) تبدیلی است که با یک خط معلوم مانند L به نام محور بازتاب یا محور تقارن مشخص می‌شود و نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M در بازتاب نسبت به خط L است، هرگاه L عمودمنصف پاره‌خط MM' باشد. معمولاً بازتاب نسبت به خط L را با نماد S_L نشان می‌دهند:

$S_L(M) = M' \Leftrightarrow$ باشد MM' عمودمنصف L



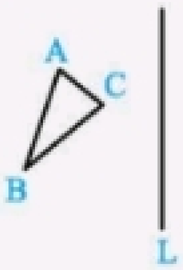
و اگر نقطهٔ M روی خط L باشد، تصویرش خودش است.

مثال

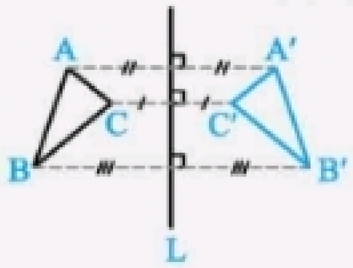
بازتاب مثلث روبه‌رو را نسبت به خط L رسم کنید. (فعالیت ۲ صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

آ) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه و اندازهٔ پاره‌خط‌ها را تغییر می‌دهد؟

ب) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط مثلث ABC با شیب پاره‌خط تصویر برابر است؟



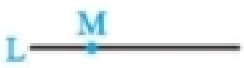
پاسخ: آ) بازتاب موقعیت شکل را به طور کلی حفظ نمی‌کند که در این‌جا این مطلب دیده می‌شود، اما اندازهٔ پاره‌خط‌ها را تغییر نمی‌دهد. پس بازتاب یک تبدیل ایزومتری است.



ب) تبدیل بازتاب لزوماً شیب خط را حفظ نمی‌کند که در این مثال این موضوع دیده می‌شود که شیب دو پاره‌خط AB و A′B′ برابر نیستند.

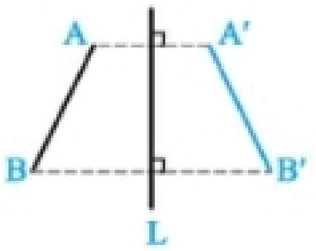
ویژگی‌های بازتاب

۱) تصویر هر نقطه روی محور بازتاب بر خودش منطبق است. پس بازتاب دارای بی‌شمار نقطهٔ ثابت است که روی محور آن قرار دارند.



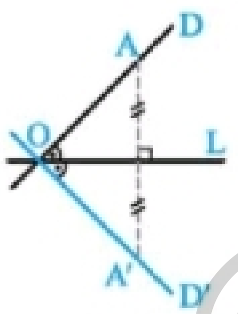
$$M \in L \Rightarrow S_L(M) = M$$

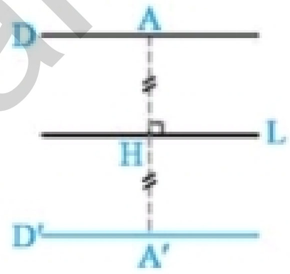
۲) در هر بازتاب، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند. به عبارتی دیگر بازتاب یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است. پس تصویر هر چندضلعی در یک بازتاب با آن چندضلعی همنهشت است.

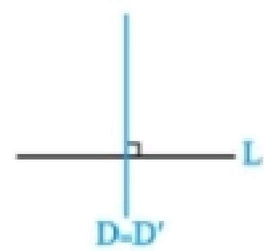


$$S_L(AB) = A'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

۳) بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند. مگر این‌که خط و محور بازتاب موازی باشند یا این‌که خط بر محور بازتاب عمود باشد.

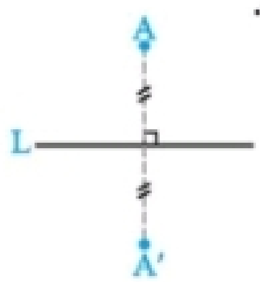






نکته در حالتی که خط D با محور بازتاب متقاطع باشد، آن‌گاه محور بازتاب یعنی خط L نیمساز زاویهٔ بین D و D′ است.

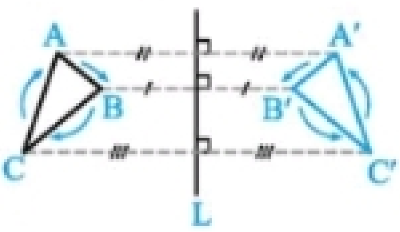
۴) در هر بازتاب، تصویرِ تصویر هر نقطه، بر آن نقطه منطبق است.



$$S_L o S_L(A) = S_L(S_L(A)) = S_L(A') = A$$

یعنی ترکیب هر بازتاب با خودش یک تبدیل همانی است $(S_L o S_L(A) = I(A))$.

۵) بازتاب نسبت به خط، اندازهٔ زاویه را تغییر نمی‌دهد اما جهت شکل را تغییر می‌دهد.



مثال

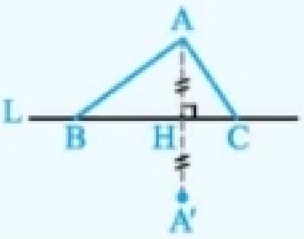
خط D و L در نقطهٔ O متقاطع‌اند و نقطهٔ A روی D قرار دارد. اگر نقطهٔ A′ روی تصویر D در بازتاب به محور L باشد به طوری‌که OA = OA′، آیا A و A′ الزاماً تصویر یکدیگر در این بازتاب هستند؟

پاسخ: خیر، مطابق شکل $OA = OA'$ است اما A و A′ تصویر یکدیگر در بازتاب نسبت به محور L نمی‌باشند.

تست

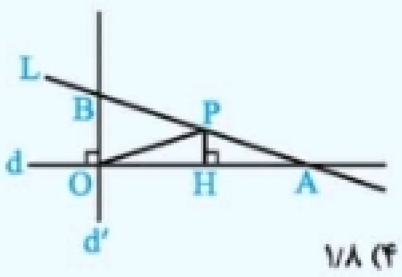
تصویر نقطهٔ A در بازتاب به محور L، نقطهٔ A' است. اگر B و C نقاط دلخواهی روی خط L باشند، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $AB+AC$ کدام است؟

۱) AA' ۲) $۲AA'$ ۳) $\frac{AA'}{۲}$ ۴) $\frac{۳AA'}{۲}$



پاسخ: مطابق شکل A' تصویر بازتاب A تحت بازتاب نسبت به محور L است. پس داریم $AA'=۲AH$. کم‌ترین مقدار $AB+AC$ هنگامی اتفاق می‌افتد که B و C بر H منطبق شوند و اندازهٔ آن برابر $AH+AH=۲AH$ یا به عبارتی AA' است. پس گزینهٔ (۱) درست است.

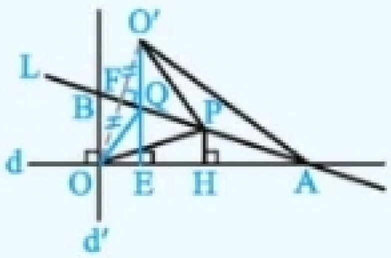
تست



در شکل مقابل دو خط d و d' بر هم عمودند و خط L آن‌ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع کرده است به طوری‌که $OA=۳$ و $OB=۱$. اگر P نقطهٔ دلخواهی روی L باشد آن‌گاه کم‌ترین مقدار $OP+PH$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

پاسخ: تصویر نقطهٔ O را در بازتاب نسبت به محور L به‌دست می‌آوریم و آن را O' می‌نامیم. سپس از O' عمود $O'E$ را بر OA وارد می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L را Q می‌نامیم. خط L عمودمنصف OO' است، پس $OP=O'P$ و $OQ=O'Q$



در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $O'PHE$ مطابق شکل نامساوی $O'P+PH>O'E$ برقرار است و چون P می‌تواند بر Q منطبق شود پس $O'P+PH\geq O'E$ و می‌توان نوشت:

$$O'P+PH\geq O'Q+QE \xrightarrow[O'Q=OQ]{O'P=OP} OP+PH\geq OQ+QE$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $OP+PH$ برابر $OQ+QE=O'E$ است و مقدار آن به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$S(OO'A)=\frac{۱}{۲}O'E\times OA=\frac{۱}{۲}AF\times OO'\Rightarrow O'E=\frac{OO'\times AF}{OA}$$

$$S(AOB)=\frac{۱}{۲}OF\times AB=\frac{۱}{۲}OA\times OB\Rightarrow OF=\frac{OA\times OB}{AB}=\frac{۳\times ۱}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow OO'=۲OF=\frac{۶}{\sqrt{۱۰}}$$

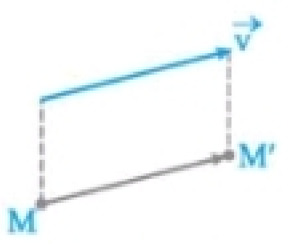
$$\overset{\Delta}{AOB}: OA^۲=AF\times AB\Rightarrow ۳^۲=AF\times\sqrt{۳^۲+۱^۲}\Rightarrow AF=\frac{۹}{\sqrt{۱۰}}$$

$$O'E=\frac{OO'\times AF}{OA}=\frac{\frac{۶}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۹}{\sqrt{۱۰}}}{۳}=\frac{۱۸}{۱۰}=۱/۸\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

۲) انتقال

تبدیلی است که با یک بردار معلوم مانند $\vec{v}$ مشخص می‌شود و نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ است، هرگاه $\vec{v}=\overrightarrow{MM'}$ باشد.

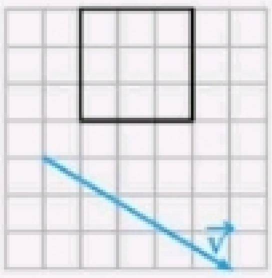
اگر نقطهٔ M روی امتداد بردار $\vec{v}$ نباشد، M' با رسم متوازی‌الاضلاع برداری به‌دست می‌آید و اگر نقطهٔ M روی امتداد $\vec{v}$ باشد، دیگر متوازی‌الاضلاع برداری نخواهیم داشت و تصویر نقطهٔ M مطابق شکل به‌دست می‌آید.



انتقال با بردار $\vec{v}$ را با نماد $T_{\vec{v}}$ نشان می‌دهیم و M' تصویر M در انتقال با بردار $\vec{v}$ را به‌صورت $T_{\vec{v}}(M)=M'$ می‌نویسیم.

مثال

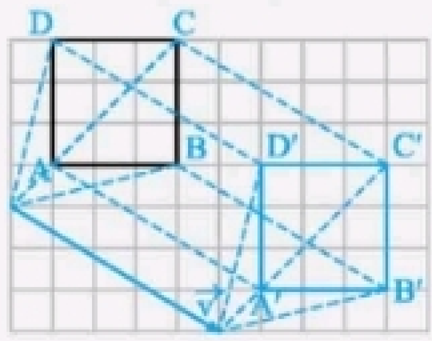
آ) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ رسم کنید. (فعالیت ۳ صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)



ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

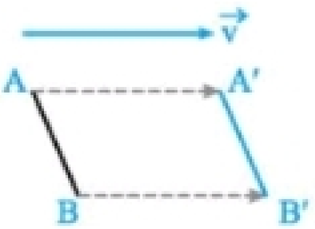
پاسخ: آ)



ب) این تبدیل یعنی انتقال به بردار $\vec{v}$ موقعیت اولیهٔ شکل را حفظ نمی‌کند. اما اندازهٔ پاره‌خط‌ها را تغییر نمی‌دهد، مثلاً در این‌جا داریم: $AB = A'B'$

پ) این تبدیل یعنی انتقال به بردار $\vec{v}$ همواره شیب خط را حفظ می‌کند، مثلاً در این‌جا دو پاره‌خط AB و $A'B'$ موازیند.

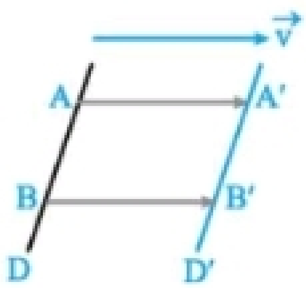
خواص انتقال



۱) در هر انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند، به عبارت دیگر انتقال، یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است.

$$T_{\vec{v}}(AB) = A'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

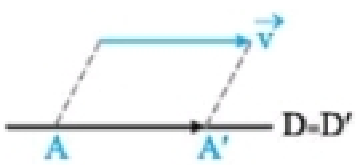
بنابراین تصویر هر چندضلعی در یک انتقال، با آن چندضلعی همنهشت یا قابل انطباق است.



۲) تصویر یک خط تحت یک انتقال، با آن خط موازی است. یعنی انتقال شیب خط را تغییر نمی‌دهد. زیرا با توجه به شکل، چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است.

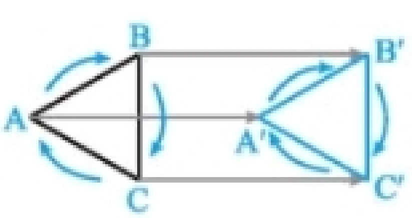
$$T_{\vec{v}}(D) = D' \Rightarrow D \parallel D'$$

نکته اگر بردار انتقال با خط مفروض موازی باشد، آن‌گاه تصویر خط بر خودش منطبق است.

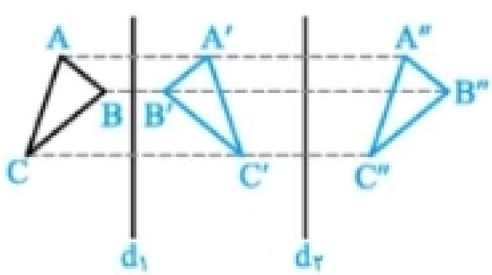


۳) انتقال با بردار غیرصفر، نقطهٔ ثابت ندارد، یعنی تصویر هیچ نقطه‌ای بر خودش منطبق نیست.

۴) انتقال، اندازهٔ زاویه و جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.



۵) ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است. یعنی برای هر نقطهٔ دلخواه M داریم:



$$S_{d_2} \circ S_{d_1}(M) = T_{\vec{v}}(M)$$

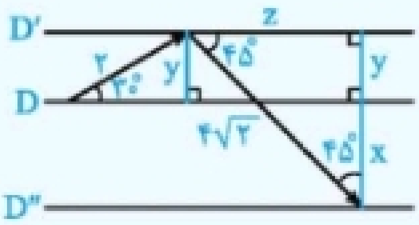
بردار انتقال، عمود بر راستای محورهای بازتاب است. جهت آن از خط d_1 به d_2 است و اندازهٔ آن دو برابر فاصلهٔ دو محور بازتاب می‌باشد.

تست

مطابق شکل، خط D را با برداری به طول ۲ که راستایش با خط D زاویهٔ °۳۰ می‌سازد، انتقال داده‌ایم، خط D' به‌دست آمده است. سپس خط D' را با برداری به طول $۴\sqrt{۲}$ که راستایش با خط D' زاویه °۴۵ می‌سازد، انتقال داده‌ایم. خط D'' حاصل شده است. فاصلهٔ دو خط D و D'' کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: مطابق شکل می‌خواهیم x را محاسبه کنیم. داریم:



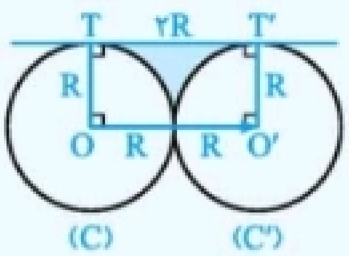
$$\left.\begin{array}{l} y = ۲\sin ۳۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱ \\ z = y + x = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ + x = ۴ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست

دایرهٔ $C(O,R)$ را تحت انتقال با بردار به طول ۲R تصویر می‌کنیم، دایرهٔ C' به‌دست می‌آید. مساحت ناحیهٔ بین دو دایره و مماس مشترک آن‌ها چه کسری از مساحت هر یک از دایره‌هاست؟

۱) $\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۲}{\pi} - \frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{\pi} - \frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{\pi} - \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

پاسخ: مطابق شکل تصویر دایرهٔ $C(O,R)$ تحت انتقال با بردار به طول ۲R دایرهٔ C' به مرکز O' و شعاع R است (انتقال ایزومتری است، پس شعاع دایرهٔ تصویر، همان شعاع دایرهٔ مفروض است).



$$\text{مساحت ناحیهٔ رنگی} = (\text{۲R و R مساحت مستطیل به ابعاد}) - \underbrace{(\text{R مساحت دو ربع دایره به شعاع})}_{\text{R مساحت نیم‌دایره به شعاع}} = ۲R^۲ - \frac{\pi R^۲}{۲}$$

$$\frac{\text{مساحت ناحیهٔ رنگی}}{\text{مساحت یک دایره}} = \frac{۲R^۲ - \frac{\pi R^۲}{۲}}{\pi R^۲} = \frac{۲}{\pi} - \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

تست

نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به محور d تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A' به‌دست می‌آید، سپس A' را در انتقال با بردار به طول a و راستای عمود بر d تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A'' حاصل می‌شود. کدام عبارت درست است؟

۱) A'' تصویر A در بازتاب به محوری است که با خط d موازی است و به فاصلهٔ a از آن است.

۲) A'' تصویر A در بازتاب به محوری است که با خط d موازی است و به فاصلهٔ $\frac{a}{۲}$ از آن است.

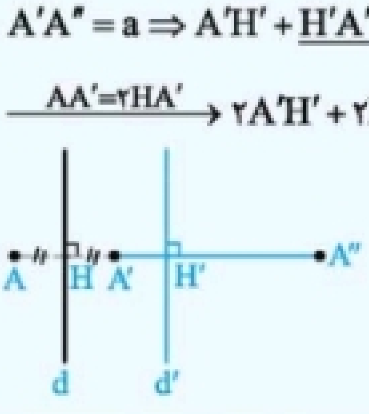
۳) A'' تصویر A در انتقال با برداری است که طول آن ۲a و راستای آن عمود بر خط d است.

۴) A'' تصویر A در انتقال با برداری است که طول $\frac{۳a}{۲}$ و راستای آن عمود بر خط d است.

پاسخ: عمودمنصف پاره‌خط AA'' را رسم می‌کنیم. آن را خط d' می‌نامیم. داریم:

$$A'A'' = a \Rightarrow A'H' + \underline{H'A''} = a \Rightarrow A'H' + \underline{AH'} = a \Rightarrow A'H' + AA' + A'H' = a$$

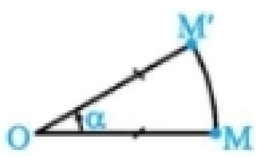
$$\xrightarrow{AA' = ۲HA'} ۲A'H' + ۲HA' = a \Rightarrow A'H' + HA' = \frac{a}{۲} \Rightarrow HH' = \frac{a}{۲}$$



بنابراین خط d' از انتقال خط d با بردار به طول $\frac{a}{۲}$ که راستایش بر d عمود و با بردار مفروض هم‌جهت است، به‌دست می‌آید. لذا d' یک خط معلوم و ثابتی است؛ پس A'' همواره تصویر A در بازتاب نسبت به محور معلوم d' است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳) دوران

دوران تبدیلی است که با یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز دوران و یک زاویهٔ معلوم جهت‌دار به نام زاویهٔ دوران مشخص می‌شود و نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M در دوران به مرکز O و زاویه α است، هرگاه داشته باشیم:



آ) $OM = OM'$

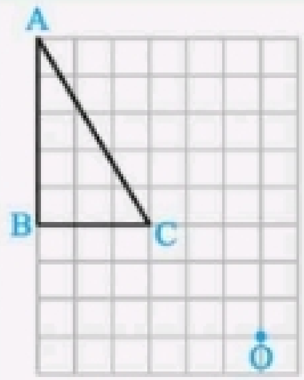
ب) $M\hat{O}M' = \alpha$

یعنی برای یافتن M'، M را به O وصل می‌کنیم، سپس در جهت خواسته‌شده روی OM زاویه‌ای برابر α رسم کرده و روی ضلع دیگر آن پاره‌خطی به اندازهٔ OM جدا می‌کنیم تا M' به‌دست آید.

معمولاً دوران به مرکز O و زاویهٔ α را با نماد R_O^α نشان می‌دهند و داریم:

$$R_O^\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ M\hat{O}M' = \alpha \end{cases}$$

مثال



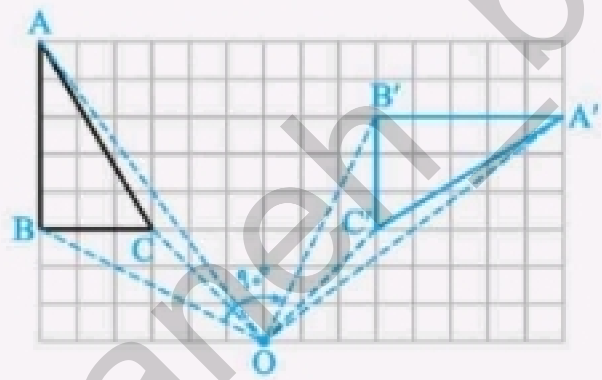
می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و زاویهٔ ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم.

آ) دوران یافتهٔ مثلث ABC را رسم کنید. (مثال صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر است؟

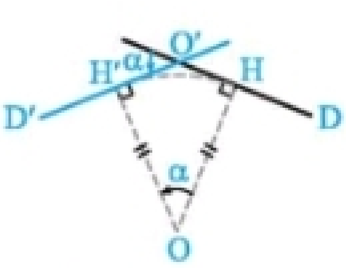
پاسخ: آ)



ب) دوران، موقعیت شکل را تغییر می‌دهد، اما اندازهٔ پاره‌خط‌ها را تغییر نمی‌دهد، مثلاً در این‌جا $AB = A'B'$ است.

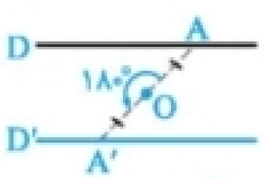
پ) دوران، شیب خط را به طور کلی حفظ نمی‌کند، مگر در موارد خاص. در این‌جا ملاحظه می‌کنیم شیب خط AB با شیب خط $A'B'$ یکسان نیست بلکه این دو خط بر هم عمودند.

خواص دوران

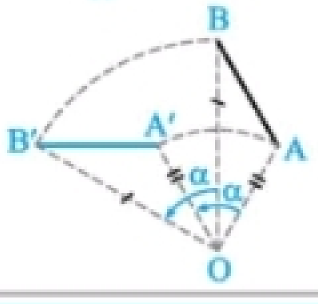


۱) دوران‌یافتهٔ یک خط، خطی است که یکی از زوایایی که با خط مفروض می‌سازد برابر و هم‌جهت با زاویهٔ دوران است. برای دوران دادن خط D می‌توان دو نقطهٔ دلخواه از آن را دوران داد. خط گذرنده از نقاط تصویر جواب است، اما راه ساده‌تر این است که از مرکز دوران بر خط D عمود کنیم و پای عمود (H) را به اندازهٔ زاویهٔ α دوران دهیم نقطهٔ H' به‌دست می‌آید، سپس در نقطهٔ H' خط D' را عمود بر OH' رسم می‌کنیم.

نکته چهارضلعی $OHO'H'$ شبه‌لوزی (کایت) است، مگر این‌که $\alpha = 90^\circ$ باشد که مربع می‌شود. ضمناً O (مرکز دوران) روی نیمساز یکی از زوایای بین خط و تصویرش واقع است.



نتیجه دوران، شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این‌که زاویهٔ دوران مضرب صحیحی از 180° باشد.

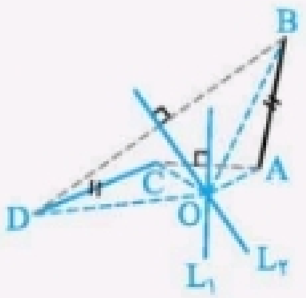


۲) در هر دوران اندازهٔ هر پاره‌خط و تصویر آن با هم برابرند، یعنی دوران یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است.

$$R_O^\alpha(AB) = A'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

مثال

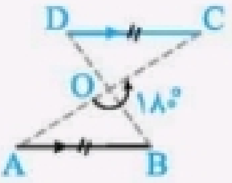
ثابت کنید هر دو پاره‌خط به طول‌های مساوی در صفحه، تصویر هم در یک دوران هستند.



پاسخ: دو پاره‌خط AB و CD با طول‌های برابر را در صفحه در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های AC و BD را رسم می‌کنیم (خط‌های L_1 و L_2) نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم. داریم:

$$(OA=OC\ ,\ OB=OD\ ,\ AB=CD)\xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})}\overset{\Delta}{AOB}\cong\overset{\Delta}{COD}$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B=C\hat{O}D\Rightarrow A\hat{O}B+B\hat{O}C=C\hat{O}D+B\hat{O}C\Rightarrow A\hat{O}C=B\hat{O}D=\alpha$$



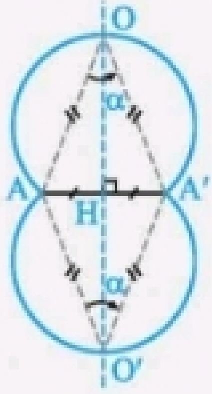
پس می‌توان گفت C تصویر A در دوران به مرکز O و زاویهٔ α و D تصویر B در همین دوران است. لذا پاره‌خط CD تصویر AB در دوران به مرکز O و زاویهٔ α است.

اگر AB و CD موزای باشند، زاویهٔ دوران ۱۸۰° است.

مثال

اگر دو نقطهٔ A و A' در دوران به زاویهٔ α تصویر هم باشند، مرکز دوران را تعیین کنید.

(ویژهٔ علاقه‌مندان)

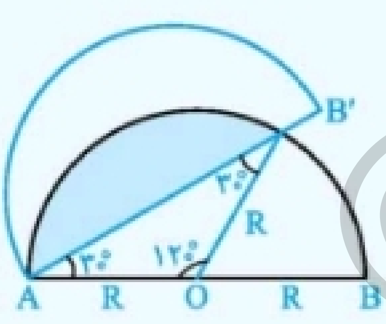


پاسخ: کمان‌های حاوی زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AA' را رسم می‌کنیم. نقطه‌های O و O' محل تلاقی عمودمنصف پاره‌خط AA' با کمان‌های حاوی رسم‌شده، مراکز دورانی به زاویهٔ α هستند که در آن‌ها A' تصویر A است.

تست

یک نیم‌دایره به قطر AB را به مرکز A و زاویهٔ ۳۰° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ بین نیم‌دایره و تصویرش چه کسری از مساحت هر یک از نیم‌دایره‌ها است؟

۱) $\frac{۱}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$ ۲) $\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۴\pi}$ ۴) $\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$



پاسخ: مطابق شکل تصویر نیم‌دایره به قطر AB در دوران به مرکز A و زاویهٔ ۳۰°، نیم‌دایره به قطر AB' است. ناحیهٔ مشترک بین نیم‌دایره و تصویرش قطعه‌ای در نیم‌دایره به قطر AB است که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن ۱۲۰° است. پس داریم:

$$\frac{\text{مساحت ناحیهٔ مشترک دو نیم‌دایره}}{\text{مساحت یک نیم‌دایره}}=\frac{\frac{۱}{۲}R^۲\left(\frac{۱۲۰\pi}{۱۸۰}-\sin ۱۲۰^\circ\right)}{\frac{۱}{۲}\pi R^۲}=\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$$

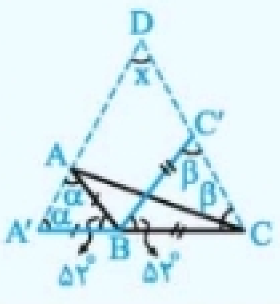
پس گزینهٔ (۴) درست است.

تست

در مثلث ABC، $\hat{B}=۱۲۸^\circ$ است. این مثلث را حول نقطهٔ B و با زاویهٔ ۵۲° دوران می‌دهیم و تصویر رأس‌های A و C را به ترتیب A' و C' می‌نامیم. زاویهٔ برخورد خط‌های AA' و CC' چند درجه است؟

۱) ۵۲ ۲) ۶۴ ۳) ۴۸ ۴) ۷۶

پاسخ: چون زاویهٔ دوران حول نقطهٔ B (۵۲°) مکمل زاویهٔ $\hat{B}=۱۲۸^\circ$ در مثلث ABC است، بنابراین تصویر AB در امتداد BC قرار می‌گیرد و مثلث‌های BAA' و BCC' متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۵۲° هستند و داریم:



$$\overset{\Delta}{BAA'}:\alpha+\alpha+۵۲^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۶۴^\circ$$

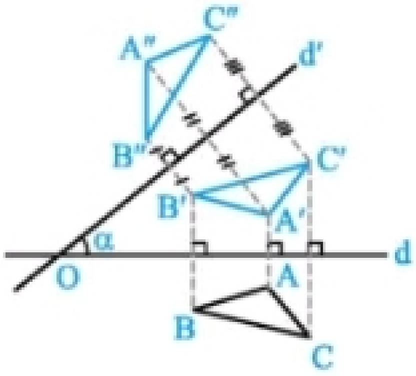
$$\overset{\Delta}{BCC'}:\beta+\beta+۵۲^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\beta=۶۴^\circ$$

$$\overset{\Delta}{DA'C}:x=۱۸۰^\circ-\alpha-\beta=۱۸۰^\circ-۱۲۸^\circ=۵۲^\circ\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

۳) مرکز دوران، نقطهٔ ثابت آن است.

۴) دوران، اندازهٔ زاویه و جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۵) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، دورانی است که مرکز آن محل تلاقی محورهای بازتاب‌ها و زاویـهٔ آن دو برابر زاویهٔ بین دو محور بازتاب است.



$$S_{d'} o\, S_d(A) = R_O^{2\alpha}(A)$$

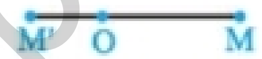
۴) تجانس

تجانس تبدیلی است که با یک نقطهٔ ثابت O به نام مرکز تجانس و یک عدد حقیقی k مخالف صفر به نام نسبت تجانس مشخص می‌شود و M' تصویر نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

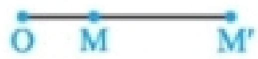
آ) سه نقطهٔ O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) فاصلهٔ M' تا O، $|k|$ برابر فاصلهٔ M تا O باشد. $(OM' = |k|OM)$

پ) اگر k مثبت باشد، M' روی نیم‌خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند و اگر k منفی باشد، نقطهٔ O بـین نقـاط M و M' قرار می‌گیرد.



اگر $k<0$ تجانس معکوس نامیده می‌شود.



اگر $k>0$ تجانس مستقیم نامیده می‌شود.

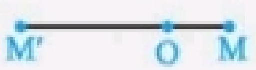
M' تصویر M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k را مجانس نقطهٔ M می‌نامند.

مثال تصویر نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس ۲ را به‌دست آورید.

پاسخ: O را به M وصل می‌کنیم. روی نیم‌خط OM به اندازهٔ MM' مساوی OM جدا می‌کنیم، در ایـن صـورت داریـم $OM' = 2OM$. یعنـی M' تصـویر M در تجـانس بـه مرکـز O و نسـبت تجانس $k = 2$ است.

مثال تصویر نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس -2 را به‌دست آورید.

پاسخ: M را به O وصل می‌کنیم. روی نیم‌خط OM و سمت چـپ نقطـهٔ O، نقطـهٔ M' را چنان می‌یابیم که $OM' = 2OM$ باشد. در این صورت M' تصویر نقطهٔ M در تجـانس بـه مرکـز O و نسـبت تجانس -2 است.



نکتهٔ ۱ اگر $k = 1$ باشد، تجانس تبدیل همانی است. یعنی هر نقطه را به خودش تصویر می‌کند.

نکتهٔ ۲ اگر $k = -1$ باشد، تجانس دوران به زاویهٔ 180° است.

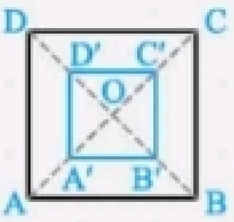
معمولاً تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k را با نماد H_O^k نشان می‌دهند.

تجانس انبساطی: اگر در یک تجانس، نسبت تجانس بزرگ‌تر از یـک $(k > 1)$ یـا کوچـک‌تر از -1 باشـد $(k < -1)$، در ایـن صـورت تجـانس را انبسـاطی می‌گویند. در این حالت تصویر نقطه از مرکز تجانس دور می‌شود.

تجانس انقباضی: اگر در یک تجانس، نسبت تجانس بین ۱ و -1 باشد $(-1 < k < 1, k \neq 0)$، در این‌صورت تجانس را انقباضـی می‌گوینـد. در ایـن حالـت تصویر نقطه به مرکز تجانس نزدیک می‌شود.

مثال

تصویر یک مربع را در تجانسی که مرکز آن، مرکز مربع و نسبت تجانس آن برابر $\frac{1}{2}$ است، رسم کنید.

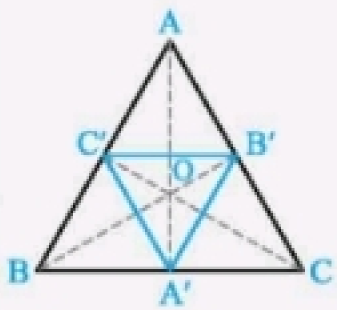


پاسخ: قطرهای مربع را رسم می‌کنیم. O نقطهٔ تلاقی آن‌ها، مرکز تجانس است. چون نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است، پس تجانس مستقیم و انقباضی است و مطابق شکل مربع $A'B'C'D'$ جواب است.

$$H_O^{\frac{1}{2}}(ABCD) = A'B'C'D'$$

مثال

تصویر یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در تجانسی که مرکز آن، مرکز مثلث و نسبت تجانس آن $k = -\frac{1}{2}$ است، رسم کنید.



پاسخ: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکز مثلث نقطهٔ همرسی میانه‌ها (ارتفاع‌ها، نیمسازها و عمودمنصف‌ها) است، پس این نقطه هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

پس $OA' = \frac{OA}{2}$ و چون A و A' دو طرف O قرار دارند، پس A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است. با استدلال مشابه B' تصویر B و C' تصویر C است. پس مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است.

$$H_O^{-\frac{1}{2}}(ABC) = A'B'C'$$

مثال

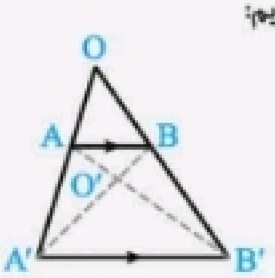
تجانس به چه شرطی یک تبدیل ایزومتری است؟

پاسخ: اگر نسبت تجانس برابر یک باشد $(k = 1)$، آن‌گاه تجانس یک تبدیل همانی است و در این حالت یک تبدیل ایزومتری است. همچنین اگر $k = -1$ باشد، آن‌گاه تجانس دوران به زاویهٔ 180° است که باز هم ایزومتری است.

مثال

ثابت کنید دو پاره‌خط موازی AB و $A'B'$ در صفحه همواره تصویر یکدیگر در یک تجانس هستند.

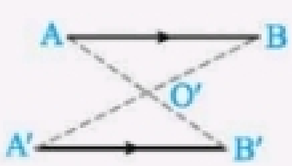
پاسخ: فرض کنیم دو پاره‌خط موازی AB و $A'B'$ طولشان برابر نباشد. به کمک تشابه مثلث‌های AOB و $A'OB'$ داریم:



$OA' = \frac{A'B'}{AB} \times OA \Rightarrow$ A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{A'B'}{AB}$ است.

$OB' = \frac{A'B'}{AB} \times OB \Rightarrow$ B' تصویر B در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{A'B'}{AB}$ است.

پس پاره‌خط $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{A'B'}{AB}$ است. با استدلال مشابه به کمک تشابه مثلث‌های $AO'B$ و $B'O'A'$ می‌توان گفت $A'B'$ تصویر AB در تجانس به مرکز O' و نسبت تجانس $-\frac{A'B'}{AB}$ است. پس دو پاره‌خط موازی با طول‌های نامساوی همواره در دو تجانس مستقیم و معکوس تصویر یکدیگرند.

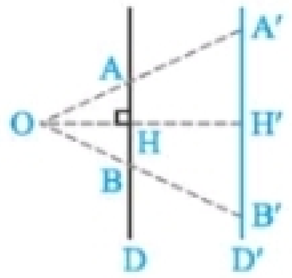


اگر AB و $A'B'$ طولشان برابر باشد، فقط در تجانس معکوس به مرکز O' و نسبت تجانس -1 تصویر یکدیگرند.

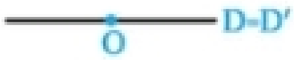
خواص تجانس

۱) تصویر یک خط در یک تجانس، خطی موازی با آن است. یعنی تجانس شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

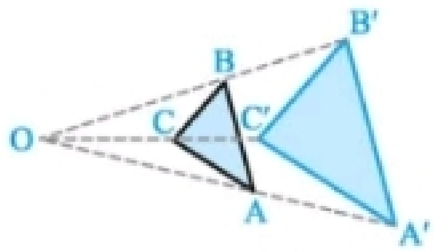
$$H_O^k(D) = D' \Rightarrow D \parallel D'$$



نکته اگر مرکز تجانس روی خط مفروض واقع باشد، آن‌گاه تصویر آن خط بر خودش منطبق است.



۲) تجانس، طول را $|k|$ برابر و مساحت را $k^۲$ برابر می‌کند. زیرا تصویر هر شکل در یک تجانس، با خود شکل متشابه است. پس تجانس طولپا (ایزومتری) نیست مگر این‌که $k = \pm۱$ باشد.



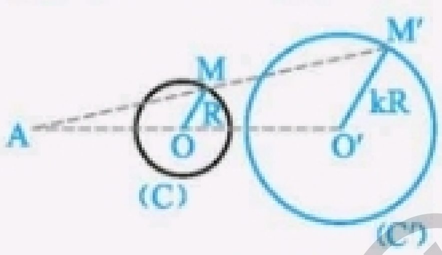
۳) تجانس، اندازهٔ زاویه و جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۴) اگر نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، آن‌گاه نقطهٔ M تصویر نقطهٔ M' در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۱}{k}$ است.

۵) تجانس، دارای یک نقطهٔ ثابت است که همان مرکز آن می‌باشد.

تصویر یک دایره در تجانس

مثال ثابت کنید تصویر هر دایره در یک تجانس، یک دایره است. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی)



پاسخ: تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $k > ۰$ را در نظر می‌گیریم. تصویر مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ در این تجانس نقطه O' است به طوری‌که نقاط O، A و O' روی یک امتدادند و $AO' = kAO$

اگر M نقطه‌ای از دایره باشد و M' تصویر M در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس k باشد، آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AM' = k\,AM \\ AO' = k\,AO \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AO'}{AO} = \frac{AM'}{AM} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} OM \parallel O'M' \Rightarrow \frac{O'M'}{OM} = k$$

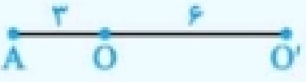
بنابراین $O'M' = kOM = kR$ و این یعنی نقطهٔ M' از نقطهٔ معلوم O' به فاصلهٔ ثابت kR است، پس همهٔ نقاط M' روی دایره‌ای به مرکز O' و شعاع kR قرار دارند.

نتیجه برای یافتن تصویر دایره در یک تجانس، ابتدا تصویر مرکز دایره را می‌یابیم، سپس دایره‌ای به مرکز این نقطه و شعاع $R\,|k|$ رسم می‌کنیم.

تست دایرهٔ $C(O,۴)$ و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از مرکز آن مفروض است. تصویر دایرهٔ (C) را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۳ دایرهٔ (C') می‌نامیم. دو دایرهٔ (C) و (C') چگونه‌اند؟

۱) متخارج ۲) متقاطع ۳) مماس خارج ۴) متداخل

پاسخ: مطابق شکل O' تصویر O در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $k = ۳$ می‌باشد. بنابراین $O'A = ۳OA = ۹$ پس طول خط‌المرکزین دو دایره برابر $OO' = ۶$ است. از طرفی شعاع دایرهٔ (C') برابر $R' = ۳R = ۳ \times ۴ = ۱۲$ است، در نتیجه داریم $\underbrace{OO'}_{۶} < \underbrace{R' - R}_{۱۲-۴=۸}$ و این یعنی دو دایرهٔ (C) و (C') متداخل هستند. پس گزینهٔ (۴) درست است.

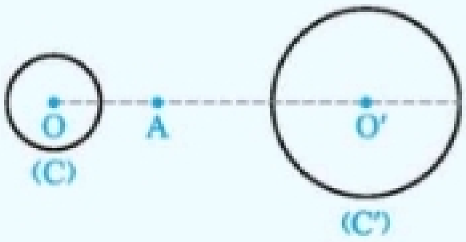


تست

دایرهٔ $C(O،۵)$ و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۷ از مرکز آن مفروض است. تصویر دایرهٔ (C) را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۲- دایرهٔ (C') می‌نامیم. طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۵}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۶}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

پاسخ: A خارج دایرهٔ (C) است و طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:



$$OO' = OA + O'A = OA + ۲OA = ۳OA = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

$$R' = ۲R = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

پس شعاع‌های دو دایره، ۵ و ۱۰ و طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر ۲۱ است. در نتیجه طول مماس مشترک داخلی آن‌ها برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R + R')^{۲}} = \sqrt{۲۱^{۲} - (۵ + ۱۰)^{۲}} = \sqrt{۲۱^{۲} - ۱۵^{۲}} = \sqrt{۶ \times ۳۶} = ۶\sqrt{۶} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

تذکر می‌توان ثابت کرد هر دو دایره با شعاع‌های مختلف در صفحه، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس می‌باشند که نسبت تجانس آن‌ها، نسبت شعاع‌های دو دایره است.

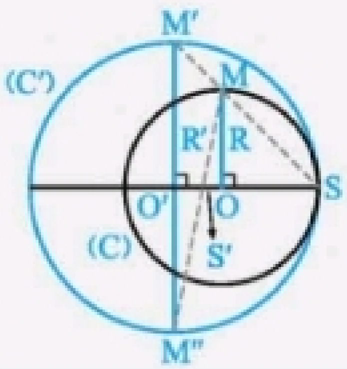
نکته به طور کلی برای پیدا کردن مرکزهای تجانس دو دایره، یک شعاع در یکی از آن‌ها را با یک قطر موازی آن در دیگری در نظر می‌گیریم. انتهای پاره‌خط‌ها را به هم وصل می‌کنیم. محل تلاقی خط‌های ایجادشده با خط‌المرکزین، مراکز تجانس دایره‌ها است.

مثال

مراکز تجانس دو دایرهٔ مماس داخل را تعیین کنید.

پاسخ: شعاع OM موازی با قطر $M'M''$ را در نظر می‌گیریم. بنابه قضیهٔ تالس نقطهٔ تلاقی MM' با خط‌المرکزین OO' چنان است که نسبت فاصله‌های آن از O و O' برابر $\frac{R}{R'}$ است. پس این نقطه همان نقطهٔ تماس دو دایره یعنی S می‌باشد. بنابراین دایرهٔ (C') تصویر دایرهٔ (C) در تجانس (مستقیم) به مرکز S و نسبت تجانس $\frac{R'}{R}$ است.

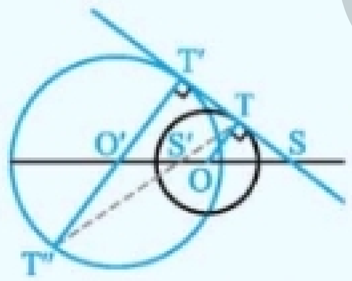
هم‌چنین دایرهٔ (C') تصویر دایرهٔ (C) در تجانس (معکوس) به مرکز S' و نسبت تجانس $-\frac{R'}{R}$ است.



تست

دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ تصویر یکدیگر در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. اگر فاصلهٔ مراکز دو دایره برابر ۵ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ مراکز تجانس‌ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴



پاسخ: بنابه فرض $R = ۴$، $R' = ۶$ و $OO' = ۵$ است، پس دو دایره متقاطع هستند زیرا $|R - R'| < OO' < R + R'$، پس مماس مشترک خارجی دو دایره را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط‌المرکزین دو دایره را S می‌نامیم. شعاع‌های OT و $O'T'$ موازیند، پس S مرکز تجانس مستقیم دو دایره است (زیرا مرکز تجانس مستقیم دو پاره‌خط موازی OT و $O'T'$، S می‌باشد).

از طرفی OT و $T'T''$ موازیند و نقطهٔ تلاقی TT'' با خط‌المرکزین دو دایره یعنی نقطهٔ S'، مرکز تجانس معکوس دو دایره است. در نتیجه:

در دو دایره با شعاع‌های متفاوت، مراکز تجانس‌هایی که دایره‌ها در آن‌ها تصویر یکدیگرند، خط‌المرکزین دو دایره (OO') را به نسبت شعاع‌های دو دایره تقسیم می‌کنند $\frac{OS}{O'S} = \frac{OS'}{O'S'} = \frac{R}{R'}$

در این پرسش داریم:

$$\frac{OS}{O'S} = \frac{R}{R'} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{OS}{OO'} = \frac{۲}{۳-۲} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow OS = ۲OO' = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

$$\frac{OS'}{O'S'} = \frac{R}{R'} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OS'}{OO'} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow OS' = \frac{۲ \times ۵}{۵} = ۲$$

$$SS' = OS + OS' = ۱۰ + ۲ = ۱۲ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

فصل ۲

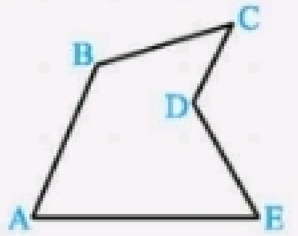
قسمت دوم

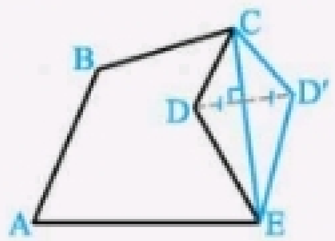
کاربرد تبدیل‌ها

۱) کاربرد بازتاب در حل مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی: می‌خواهیم بدون این‌که محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

مثال

فرض کنید زمینی به شکل چندضلعی $ABCDE$ داریم که دور آن حصار کشیده‌ایم. بدون آن‌که محیط چندضلعی تغییر کند، مساحت آن را افزایش دهید. (مثال صفحهٔ ۵۲ کتاب درسی)

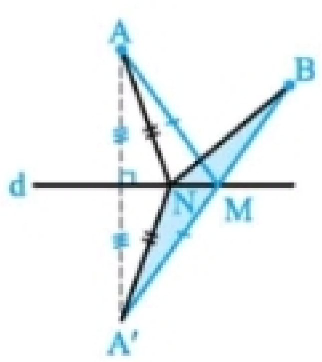




پاسخ: C را به E وصل می‌کنیم و تصویر پاره‌خط‌های CD و DE را تحت بازتاب به محور خط شامل CE رسم می‌کنیم. چون بازتاب طولپا (ایزومتری) است، پس $CD = CD'$ و $DE = D'E$. بنابراین محیط پنج‌ضلعی $ABCD'E$ با محیط پنج‌ضلعی $ABCDE$ برابر و مساحت آن بیش‌تر است.

۲) پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

آ) **مسئلهٔ هرون:** خط d و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروض‌اند. نقطه‌ای مانند M را روی d چنان بیابید که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ A و B $(MA+MB)$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.



پاسخ: بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را A' می‌نامیم. A' را به B وصل می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی خط d و پاره‌خط $A'B$ را M می‌نامیم و فرض می‌کنیم N نقطهٔ دلخواهی روی خط d باشد، چون خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است، پس $NA = NA'$ و $MA = MA'$ و بنابه نامساوی مثلث، در مثلث $A'NB$ داریم:

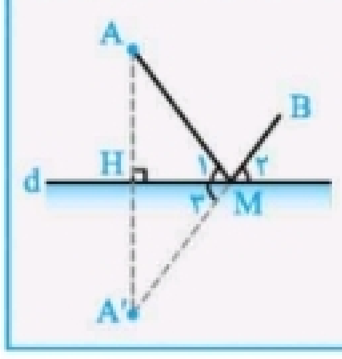
$$NA + NB = NA' + NB > A'B \Rightarrow NA + NB > MA' + MB$$

$$\Rightarrow NA + NB > MA + MB \xrightarrow{\text{N می‌تواند نقطهٔ M باشد.}} NA + NB \geq MA + MB$$

بنابراین $MA + MB$ کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع فواصل نقطهٔ دلخواه روی خط d از نقاط A و B است.

مثال

اگر d یک آینهٔ تخت و A یک نقطهٔ نورانی باشد، ثابت کنید زاویهٔ بین شعاع تابش و آینه، برابر زاویهٔ بین شعاع بازتاب و آینه است. (سؤال صفحهٔ ۵۳ کتاب درسی)



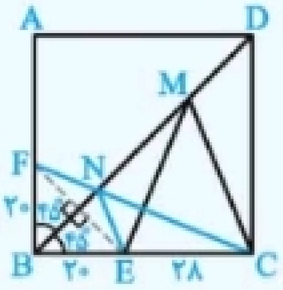
پاسخ: بنابه قوانین فیزیک، شعاع تابش و بازتابش نور به سطح آینه کم‌ترین مسیر را طی می‌کند. پس شعاع نوری که از A به سطح آینه می‌تابد و از نقطهٔ B می‌گذرد، چنان‌اند که $MA + MB$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد، پس بنابه مسئلهٔ هرون و این‌که خط d عمودمنصف AA' است. در نتیجه $\widehat{M_1} = \widehat{M_3}$ و $\widehat{M_3} = \widehat{M_2}$ (زوایای متقابل به رأس)، پس $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

تست

نقطهٔ E روی ضلع BC از مربع ABCD چنان قرار دارد که $BE = 20$ و $CE = 28$. اگر M نقطه‌ای دلخواه روی قطر BD باشد آن‌گاه کم‌ترین مقدار ممکن برای $ME + MC$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

پاسخ: نقاط ثابت C و E در یک طرف خط شامل BD قرار دارند. نقطهٔ F تصویر E تحت بازتاب به محور خط شامل BD روی ضلع AB قرار می‌گیرد، زیرا BD محور تقارن مربع است. نقطهٔ تلاقی CF و BD را N می‌نامیم. بنابه مسئلهٔ هرون کم‌ترین مقدار $ME + MC$ برابر اندازهٔ $NE + NC$ است. چون $NE = NF$ و $BF = BE = 20$ پس داریم:



$$NE + NC = NF + NC = CF$$

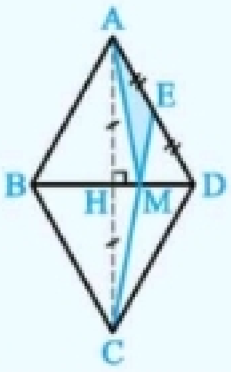
$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = 20^2 + (20 + 28)^2 = 20^2 + 48^2 = 4^2(5^2 + 12^2) = 4^2 \times 13^2$$

$\Rightarrow CF = 4 \times 13 = 52 \Rightarrow NE + NC = 52 \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

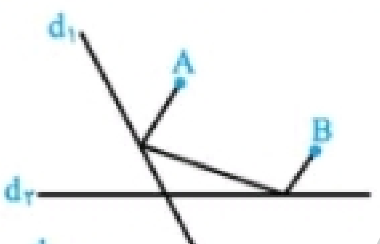
تست

درلوزی ABCD، E وسط ضلع AD و M نقطه‌ای روی قطر BD است. اگر محیط مثلث MAE کم‌ترین مقدار ممکن باشد، آن‌گاه مساحت آن چه کسری از مساحت لوزی است؟

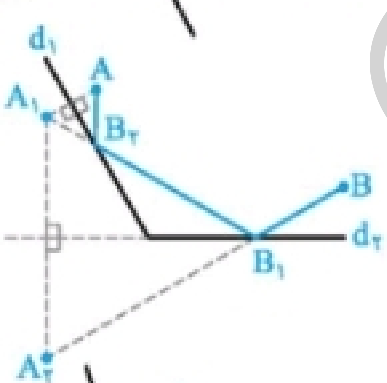
۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{15}$



پاسخ: نقاط ثابت A و E یک طرف BD قرار دارند. تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب به محور BD (قطر لوزی)، رأس C می‌شود، زیرا در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. نقطهٔ تلاقی CE و قطر BD را M می‌نامیم. بنابه مسئلهٔ هرون $MA + ME$ کم‌ترین مقدار را دارد پس محیط مثلث MAE کم‌ترین است. در این حالت در مثلث ACD، M نقطهٔ همرسی میانه‌ها است پس مساحت مثلث AME، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ACD و در نتیجه $\frac{1}{12}$ مساحت لوزی است. پس گزینهٔ (۱) درست است.



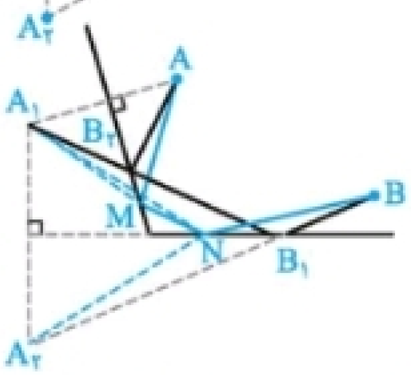
ب) دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند. (A و B درون یکی از زوایای بین دو خط واقع‌اند) کوتاه‌ترین مسیری را تعیین کنید که از نقطهٔ A آغاز شود و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطهٔ B بگذرد.



پاسخ: آ) قرینهٔ A را نسبت به خط d_1، نقطهٔ A_1 می‌نامیم.

ب) A_1 را نسبت به خط d_2 قرینه می‌کنیم و نقطهٔ حاصل را A_2 می‌نامیم.

پ) A_2 را به B وصل می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی خط d_2 و پاره‌خط A_2B را B_1 می‌نامیم.



ت) B_1 را به A_1 وصل می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی خط d_1 و پاره‌خط A_1B_1 را نقطهٔ B_2 می‌نامیم. مسیر AB_2B_1B کوتاه‌ترین است، زیرا برای مسیر دلخواهی دیگر مانند AMNB داریم:

$$AM + MN + BN = \underbrace{MA_1 + MN}_{>NA_1} + BN > \underbrace{NA_1}_{NA_2} + BN \Rightarrow AM + MN + BN > \underbrace{NA_2 + BN}_{>BA_2} \Rightarrow AM + MN + BN > BA_2$$

$$\Rightarrow AM + MN + BN > A_2B_1 + BB_1 = A_1B_1 + BB_1 \Rightarrow AM + MN + BN > A_1B_2 + B_2B_1 + BB_1$$

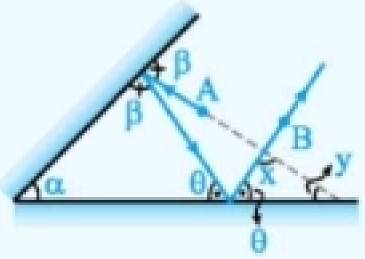
$$\Rightarrow AM + MN + BN > AB_2 + B_2B_1 + BB_1$$

تست

در شکل مقابل زاویهٔ بین دو آینهٔ تخت برابر α است. از نقطهٔ A شعاع نوری بر آینهٔ بالایی می‌تابد و بعد از بازتابش بر آینهٔ پایینی از نقطهٔ B می‌گذرد. زاویهٔ بین شعاع تابش و بازتابش نهایی کدام است؟

۱) α ۲) $۹۰+\alpha$

۳) $۹۰+\frac{\alpha}{۲}$ ۴) ۲α



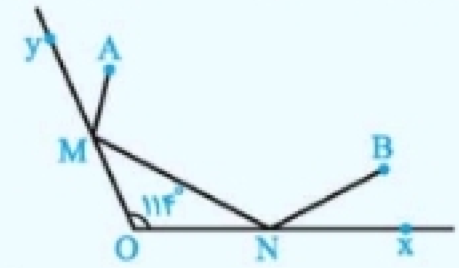
پاسخ: ثابت کردیم زاویهٔ شعاع تابش با آینه، برابر زاویهٔ شعاع بازتاب و آینه است، پس شعاعی که از نقطهٔ A بر آینهٔ بالایی تابیده می‌شود، به‌صورت روبه‌رو به آینهٔ پایینی برخورد کرده و از نقطهٔ B می‌گذرد. می‌خواهیم x را بر حسب α به‌دست آوریم، داریم:

بنابه زاویهٔ خارجی در بزرگ‌ترین مثلث $\Rightarrow \beta=\alpha+y$

$$\begin{cases} x+y+\theta=۱۸۰^\circ \\ \alpha+\beta+\theta=۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x+y+\cancel{\theta}=\alpha+\beta+\cancel{\theta} \Rightarrow x+\cancel{y}=\alpha+\alpha+\cancel{y} \Rightarrow x=۲\alpha \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

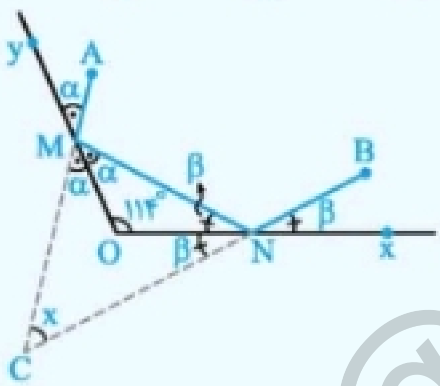
تست

مطابق شکل مقابل اگر اندازهٔ زاویهٔ O برابر ۱۱۴° باشد و نقاط ثابت A و B درون آن باشند، در صورتی‌که مسیر AMNB کوتاه‌ترین باشد، آن‌گاه زاویهٔ برخورد خط‌های شامل MA و NB کدام است؟



۱) ۵۲° ۲) ۴۶°

۳) ۴۸° ۴) ۵۴°

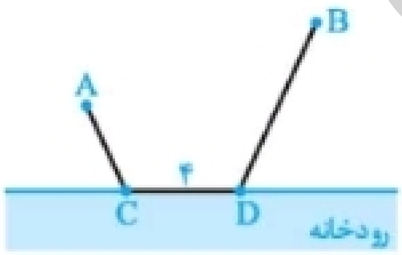


پاسخ: مسیر AMNB وقتی کوتاه‌ترین است که MA و MN با نیم‌خط Oy زاویه‌های مساوی بسازند، همچنین MN و NB با نیم‌خط Ox زاویه‌های مساوی بسازند. داریم:

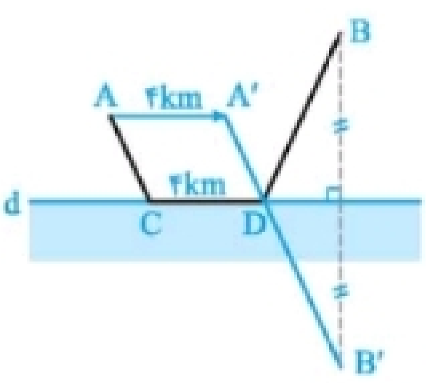
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{MNC}: ۲\alpha+۲\beta+x=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{OMN}: \alpha+\beta+۱۱۴^\circ=۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲(۱۸۰^\circ-۱۱۴^\circ)+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۳۲^\circ+x=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow x=۱۸۰^\circ-۱۳۲^\circ=۴۸^\circ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

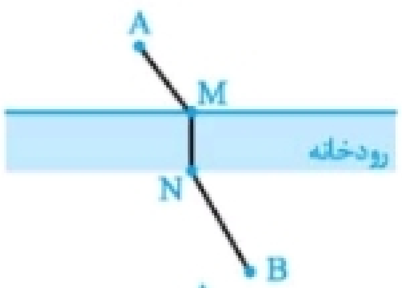
پ) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری‌که ۴ کیلومتر از این جاده، در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟



پاسخ: ابتدا در انتقال با بردار $\vec{v}$ که موازی خط d و به اندازهٔ ۴ کیلومتر و جهت آن از A به سمت راست است. نقطهٔ A را تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A' به‌دست می‌آید. بازتاب نقطهٔ B را نسبت به خط d می‌یابیم و آن را B' می‌نامیم، نقطهٔ تلاقی خط d و پاره‌خط $A'B'$ را D می‌نامیم.

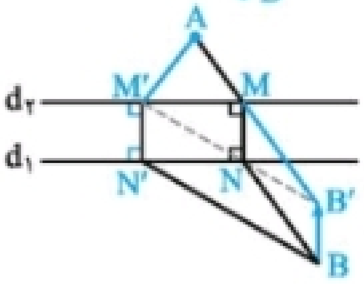


پاره‌خط CD را برابر ۴ کیلومتر روی خط d جدا می‌کنیم، بنابه مسئلهٔ هرون $A'D+B'D=AC+BD$ کم‌ترین مقدار را دارد پس مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر است.



ت) اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به طوری‌که پل MN عمود بر راستای رودخانه باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟ (کار در کلاس صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی)

پاسخ: انتقال با بردار $\vec{v}$ که راستای آن بر خط‌های d_1 و d_2 عمود و اندازهٔ آن فاصلهٔ دو خط d_1 و d_2 و جهت آن از خط d_1 به d_2 است را در نظر می‌گیریم. تصویر نقطهٔ B را در این انتقال به‌دست می‌آوریم آن را B' می‌نامیم.



A را به B' وصل می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی خط d_2 و پاره‌خط AB' را M می‌نامیم. از M به خط d_1 عمود می‌کنیم و پای عمود را N می نامیم. مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر است. زیرا اگر هر مسیر دیگری مانند $AM'N'B$ را در نظر بگیریم، داریم:

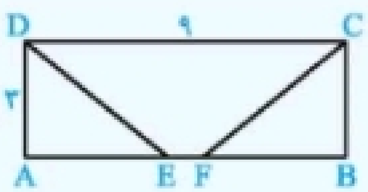
$$AM'+M'N'+BN' \xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع است.}]{\text{چهارضلعی } BN'M'B'} AM'+M'N'+M'B' \xrightarrow[AM'B' \text{ را می‌نویسیم.}]{\text{نامساوی مثلث در مثلث}} AM'+M'B'+M'N' > AB'+M'N'$$

$$\Rightarrow AM'+M'N'+BN' > AM+MB'+M'N' \xrightarrow[MB'=BN]{MN=M'N'} AM'+M'N'+BN' > AM+MN+BN$$

$$\xrightarrow[\text{M و N منطبق شوند.}]{M' \text{ و } N' \text{ به ترتیب می‌توانند بر}} AM'+M'N'+BN' \geq AM+MN+BN$$

پس مسیر $AM'N'B$ از مسیر AMNB طولانی‌تر است.

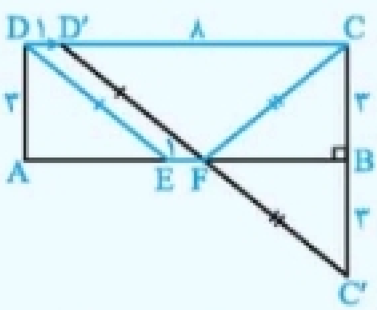
تست



مطابق شکل ابعاد مستطیل ABCD برابر ۳ و ۹ سانتی‌متر است. اگر قاعدهٔ کوچک ذوزنقه CDEF برابر EF = ۱ باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار محیط این ذوزنقه کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۱ ۴) ۱۶



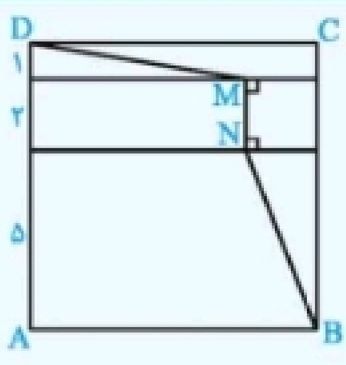
پاسخ: ابتدا در انتقال با بردار به طول ۱ موازی AB و در جهت راست، نقطهٔ D را تصویر می‌کنیم؛ نقطهٔ D' به‌دست می‌آید، سپس تصویر C تحت بازتاب به محور AB را C' می‌نامیم و نقطهٔ تلاقی $C'D'$ و ضلع AB را F می‌نامیم. EF را به اندازهٔ ۱ جدا می‌کنیم. بنابه مسئلهٔ هرون $CF+D'F=CF+DE$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد و در نتیجه محیط ذوزنقهٔ CDEF کم‌ترین است و مقدار آن برابر است با:

$$\text{کم‌ترین محیط ذوزنقهٔ CDEF} = CD+EF+DE+CF = ۹+۱+D'F+CF \xrightarrow{CF=C'F} ۱۰+D'F+C'F = ۱۰+C'D'$$

$$\overset{\Delta}{CC'D'}: C'D'^{۲}=CC'^{۲}+CD'^{۲}=۶^{۲}+۸^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow C'D'=۱۰$$

$$\text{کم‌ترین محیط ذوزنقهٔ CDEF} = ۱۰+۱۰ = ۲۰ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

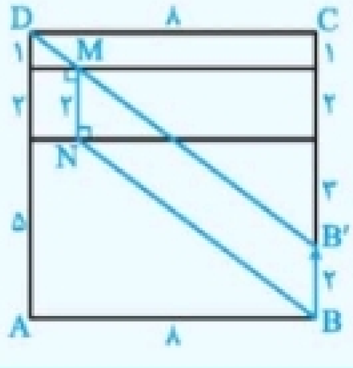
تست



چهارضلعی ABCD مربع است که از سه مستطیل با عرض‌های ۱، ۲ و ۵ تشکیل شده است. طول کوتاه‌ترین مسیر DMNB مطابق شکل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰

۳) ۱۴ ۴) ۹



پاسخ: تصویر B تحت انتقال با بردار به طول ۲ و راستای عمود بر AB و در جهت رو به بالا را B' می‌نامیم. از نقطهٔ تلاقی پاره‌خط $B'D$ با طول مستطیل بالایی یعنی M، عمودی بر طول مستطیل وسطی رسم می‌کنیم، نقطهٔ N به‌دست می‌آید. N را به B وصل می‌کنیم. DMNB مسیر مطلوب است و طول آن برابر است با:

$$DM+MN+BN = DM+MN+MB' = \underbrace{DM+MB'}_{B'D}+MN = B'D+MN$$

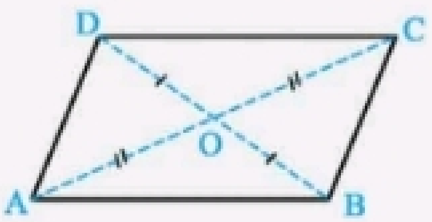
$$B'CD: B'D^{۲}=CD^{۲}+B'C^{۲}=۸^{۲}+(۱+۲+۳)^{۲}=۸^{۲}+۶^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow B'D=۱۰$$

$$\text{کوتاه‌ترین طول مسیر DMNB} = B'D+MN = ۱۰+۲ = ۱۲ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

تقارن یک شکل | ویژهٔ علاقمندان

تبدیل طولپای (ایزومتری) T را تبدیل تقارنی شکل F می‌نامیم، به شرط آن‌که تبدیل‌یافتهٔ شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود. یعنی داشته باشیم $T(F) = F$

مثال یک تقارن برای متوازی‌الاضلاع با ذکر دلیل و رسم شکل نام ببرید.



پاسخ: می‌دانیم قطرهای یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، پس می‌توان گفت A تصویر C در دوران به مرکز O و زاویهٔ 180° و B تصویر D در همین دوران است. هم‌چنین C تصویر A و D تصویر B است. پس در این دوران تصویر متوازی‌الاضلاع ABCD بر خودش منطبق است. لذا دوران به مرکز محل تلاقی قطرها و زاویهٔ 180° یک تقارن برای متوازی‌الاضلاع است.

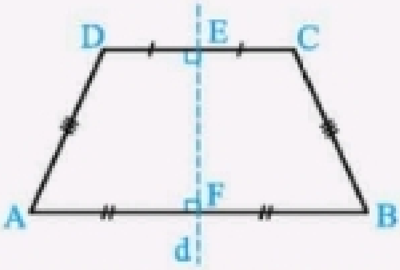
تقارن مرکزی

تبدیل دوران به مرکز O با زاویهٔ 180° را تقارن مرکزی می‌نامند. در این حالت مرکز دوران را مرکز تقارن می‌گویند. پس هر متوازی‌الاضلاع دارای یک مرکز تقارن است.

تقارن بازتابی (خطی)

اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل تقارن بازتابی (خطی) دارد.

مثال یک تقارن بازتابی (خطی) با ذکر دلیل برای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با رسم شکل نام ببرید.



پاسخ: خطی که وسط‌های قاعده‌های یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را به هم وصل می‌کند، محور بازتابی است که در آن A و B تصویر یکدیگرند، هم‌چنین C و D.

بنابراین در بازتاب به محور d تصویر ذوزنقهٔ ABCD بر خودش منطبق است، لذا ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دارای یک تقارن بازتابی (خطی) یا تقارن محوری است.

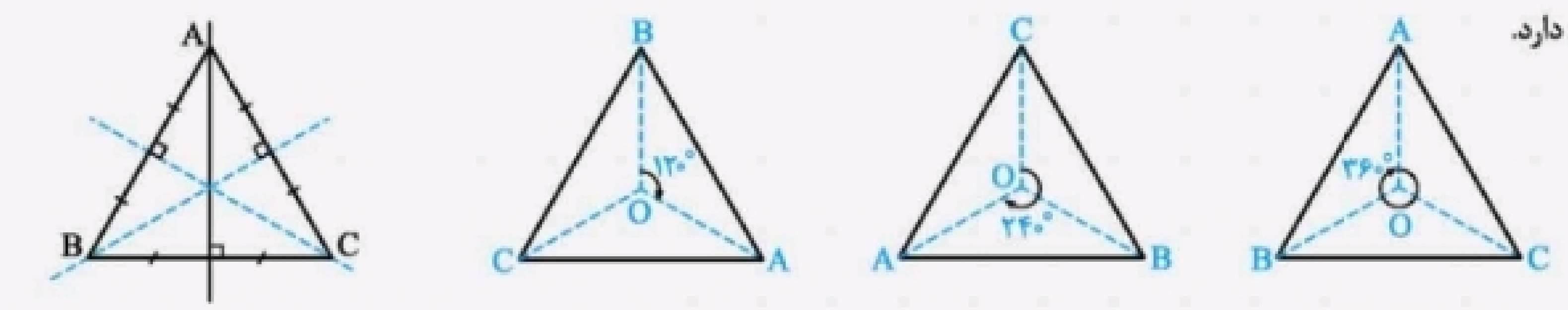
تقارن دورانی (چرخشی)

اگر شکلی تحت دورانی با زاویهٔ α ($0 < \alpha \leq 360^\circ$) بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل تقارن دورانی (چرخشی) دارد. در نتیجه تقارن مرکزی یک تقارن دورانی است ($\alpha = 180^\circ$).

نکته دوران صفر درجه، دوران 360°، تبدیل انتقال با بردار صفر، تبدیل و تجانس با نسبت تجانس $k = 1$ هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. تبدیل‌های فوق تبدیل همانی هستند. بنابراین در شمارش تقارن‌های یک شکل، تمام تبدیل‌های فوق، یک تقارن محسوب می‌شوند.

مثال تعداد تقارن‌های خطی و دورانی یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تعیین کنید.

پاسخ: هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه تقارن خطی است که محورهای تقارن خط‌های شامل ارتفاعات مثلث است و هم‌چنین با دوران‌های به مرکزِ مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع و زوایای دوران 120°، 240° و 360° تصویر مثلث بر خودش منطبق می‌شود، پس هر مثلث متساوی‌الاضلاع ۳ تقارن دورانی دارد.

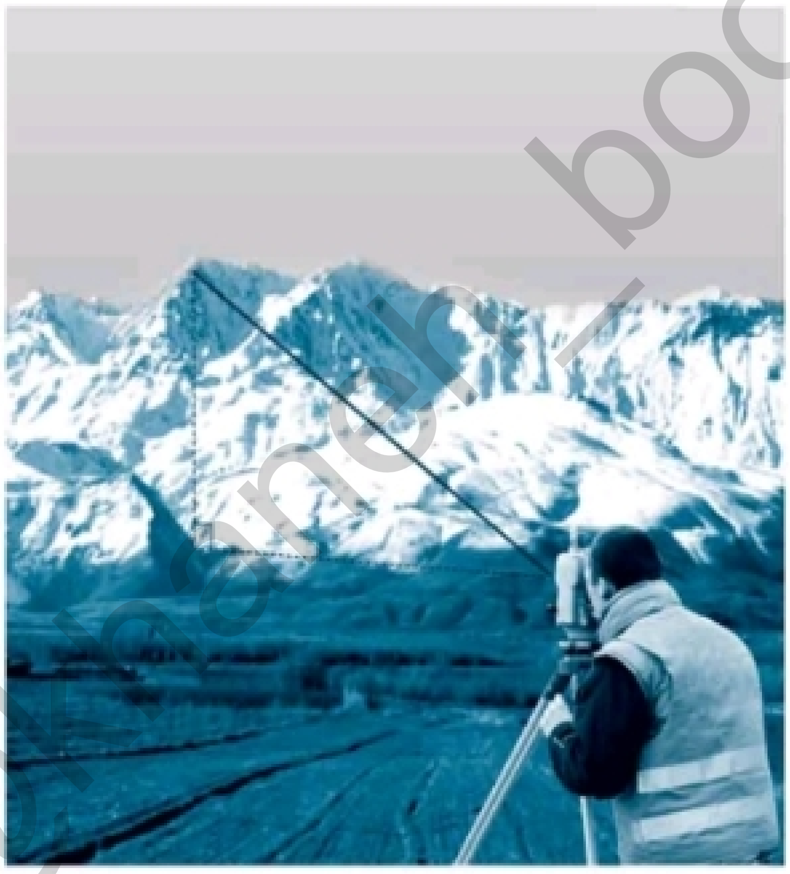


سه تقارن محوری مثلث متساوی‌الاضلاع — تقارن دورانی 120° — تقارن دورانی 240° — تقارن دورانی 360°

هندسه یازدهم

Geometry 11

فصل ۳



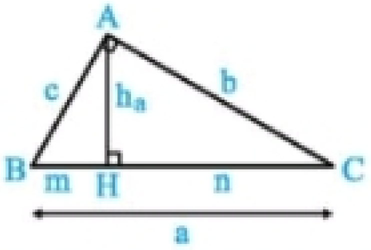
روابط طولی در مثلث

فصل ۳

قسمت اوّل

قضیهٔ سینوس‌ها

یادآوری روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه



۱) $a^2=b^2+c^2$ (قضیهٔ فیثاغورس) ۲) $b^2=n\times a$ ۳) $c^2=m\times a$

۴) $h_a^2=m\times n$ ۵) $b\times c=a\times h_a$

مثال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A}=90^\circ)$، مطابق شکل فوق: (مشابه تمرین ۱ صفحه ۶۵ کتاب درسی)

آ) ثابت کنید $b\times c=a\times h_a$ ب) ثابت کنید $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

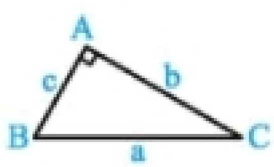
پاسخ: آ) مساحت مثلث ABC را به دو طریق می‌نویسیم:

$$S(ABC)=\frac{1}{2}a\times h_a=\frac{1}{2}b\times c\Rightarrow a\times h_a=b\times c$$

ب) تساوی ثابت‌شده در قسمت (آ) را به توان ۲ می‌رسانیم و داریم:

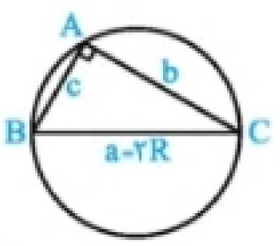
$$a^2\times h_a^2=b^2\times c^2\Rightarrow\frac{1}{h_a^2}=\frac{a^2}{b^2\times c^2}\xrightarrow{a^2=b^2+c^2}\frac{1}{h_a^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\Rightarrow\frac{1}{h_a^2}=\frac{b^2}{b^2c^2}+\frac{c^2}{b^2c^2}\Rightarrow\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$$

۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه نسبت اندازهٔ هر ضلع به **سینوس زاویهٔ مقابل به آن ضلع** برابر است با وتر مثلث.



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad(\sin A=\sin 90^\circ=1)$$

۲) در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ **هر ضلع** به **سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع** برابر است با **قطر دایرهٔ محیطی** مثلث.



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

مثال اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A}=90^\circ)$، R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد، ثابت کنید $\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=4$

پاسخ: با توجه به این‌که در مثلث قائم‌الزاویه، قطر دایرهٔ محیطی برابر وتر مثلث است $(a=2R)$، داریم:

$$\frac{b^2}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}=\frac{b^2+c^2}{R^2}=\frac{a^2}{R^2}=\frac{4R^2}{R^2}=4$$

مثال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A}=90^\circ)$، ثابت کنید $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$

پاسخ: **روش اول:** در مثلث قائم‌الزاویه داریم $a=2R$، $b=2R\sin B$ و $c=2R\sin C$، در نتیجه می‌توان نوشت:

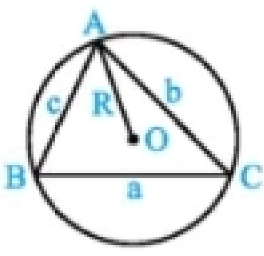
$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\sin^2 90^\circ+\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=1+\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}=1+\frac{b^2+c^2}{4R^2}$$

$$\Rightarrow\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1+\frac{a^2}{4R^2}=1+\frac{4R^2}{4R^2}=1+1=2$$

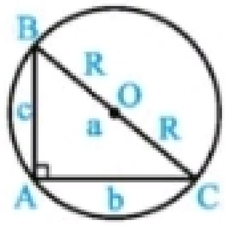
روش دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$ زوایای B و C متمم هستند $(\widehat{B}+\widehat{C}=۹۰^\circ)$. پس سینوس یکی از آن‌ها با کسینوس زاویهٔ دیگر برابر است، یعنی $\sin B=\cos C$ و $\sin C=\cos B$ و می‌توان نوشت:

$$\sin^۲ A+\sin^۲ B+\sin^۲ C=۱+\underbrace{\sin^۲ B+\cos^۲ B}_{۱}=۱+۱=۲$$

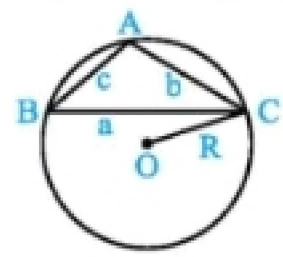
۳) **قضیهٔ سینوس‌ها:** در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر **ضلع** به **سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع**، برابر است با **قطر دایرهٔ محیطی** مثلث.



مثلث حاده‌الزوایا



مثلث قائم‌الزاویه



مثلث منفرجه‌الزاویه

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R \Leftrightarrow \begin{cases} a=۲R\sin A \\ b=۲R\sin B \\ c=۲R\sin C \end{cases}$$

مثال

در مثلث ABC، $BC=۶$ و $\widehat{A}=۶۰^\circ$. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را بیابید.

پاسخ:

$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow a=۲R\sin A \Rightarrow ۶=۲R\times\sin ۶۰^\circ \Rightarrow ۶=۲R\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow R=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$

مثال

در مثلث ABC داریم $\widehat{A}=\widehat{B}=۳۰^\circ$. حاصل $\frac{a+b}{c}$ را به‌دست آورید.

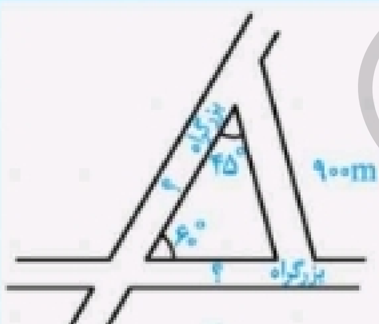
پاسخ:

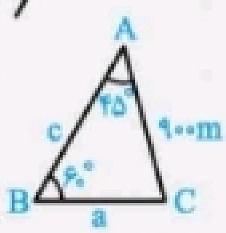
$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳۰^\circ+۳۰^\circ+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{C}=۱۲۰^\circ$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{۲R\sin A+۲R\sin B}{۲R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\sin ۳۰^\circ+\sin ۳۰^\circ}{\sin ۱۲۰^\circ} \Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال

می‌خواهیم دو بزرگراه که با یکدیگر زاویهٔ ۶۰° ساخته‌اند را با یک خیابان فرعی به یکدیگر وصل کنیم. به طوری‌که طول این خیابان فرعی ۹۰۰ متر است و با یکی از بزرگراه زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. فاصلهٔ تقاطع خیابان فرعی را با تقاطع هر دو بزرگراه تعیین کنید و زاویه‌ای که خیابان فرعی با بزرگراه دیگر می‌سازد را بیابید. (از مثلثات می‌دانیم $\sin ۷۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$) (مشابه مثال صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)





پاسخ:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴۵^\circ+۶۰^\circ+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{C}=۷۵^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{۹۰۰}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow a=۹۰۰\times\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۶۰^\circ}$$

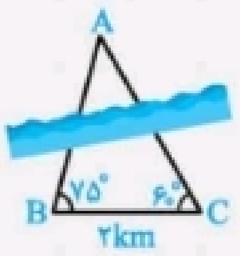
$$\Rightarrow a=۹۰۰\times\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۹۰۰\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۹۰۰\times\sqrt{۶}}{۳}=۳۰۰\sqrt{۶}\simeq ۷۳۵\,m$$

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{c}{\sin ۷۵^\circ}=\frac{۹۰۰}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow c=۹۰۰\times\frac{\sin ۷۵^\circ}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow c=۹۰۰\times\frac{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$=۴۵۰\times\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=۱۵۰\times\sqrt{۳}\times(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})=۴۵۰\sqrt{۲}+۱۵۰\sqrt{۶}\simeq ۱۰۰۴\,m$$

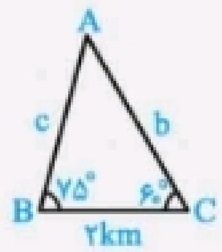
مثال

در شکل مقابل نقطه‌های A و B غیرقابل دسترس هستند، یعنی مانعی مانند رودخانه بین آن‌ها قرار دارد. نقطهٔ C را در سمت راست B در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ B تا C را اندازه‌گیری می‌کنیم $BC = ۲km$ و به کمک دستگاه زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AB از نقطهٔ C برابر ۶۰° و زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B برابر ۷۵° می‌شود. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B یعنی AB را محاسبه کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۶۵ کتاب درسی)



پاسخ:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۷۵^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۴۵^\circ$$



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۲}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{c}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow c=۲\times\frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow c=۲\times\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}\,km=۲۴۴۹/۵\,m$$

یکی از کاربردهای مهم قضیهٔ سینوس‌ها یافتن ضلع و زوایای مجهول در مثلثی است که دو ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به یکی از ضلع‌ها معلوم باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال

در مثلث ABC، $BC=۲۰\sqrt{۳}$، $\hat{A}=۱۳۵^\circ$ و $AC=۱۰\sqrt{۶}$. اندازهٔ زوایای B و C و طول ضلع سوم مثلث را بیابید.

(از مثلثات می‌دانیم $\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$ است.) (مشابه مثال صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

پاسخ: در این‌جا چون $a=۲۰\sqrt{۳}$، $b=۱۰\sqrt{۶}$ و $\hat{A}=۱۳۵^\circ$ معلوم‌اند، تناسب $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ از قضیهٔ سینوس‌ها، زاویهٔ B را مشخص می‌کند.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۲۰\sqrt{۳}}{\sin ۱۳۵^\circ}=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{\sin B} \Rightarrow \frac{۲۰\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \frac{۴۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{B}=۳۰^\circ \text{ یا } ۱۵۰^\circ$$

جواب $\hat{B}=۱۵۰^\circ$ قابل قبول نیست، زیرا $\hat{A}+\hat{B}$ از ۱۸۰° بیش‌تر می‌شود و داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۳۵^\circ+۳۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۶۵^\circ=۱۵^\circ$$

برای محاسبهٔ طول ضلع AB مجدداً از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۲۰\sqrt{۳}}{\sin ۱۳۵^\circ}=\frac{c}{\sin ۱۵^\circ} \Rightarrow \frac{۲۰\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{c}{\sin ۱۵^\circ}$$

$$\Rightarrow c=\frac{۴۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\sin ۱۵^\circ=\frac{۴۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۱۰\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۲}}=۱۰\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)=۳۰-۱۰\sqrt{۳}$$

بنابراین اندازهٔ اضلاع مثلث $a=۲۰\sqrt{۳}$، $b=۱۰\sqrt{۶}$ و $c=۳۰-۱۰\sqrt{۳}$ و اندازهٔ زوایای آن $\hat{A}=۱۳۵^\circ$، $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۱۵^\circ$ می‌باشد.

مثال

در مثلث ABC، $a=\sqrt{۲}$، $b=\sqrt{۶}$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$ است. اندازهٔ زوایای B و C و طول ضلع سوم مثلث را محاسبه کنید.

(مشابه مثال صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)

پاسخ: مانند مثال قبل چون a، b و زاویهٔ A معلوم هستند، پس برای محاسبهٔ زاویهٔ B تناسب $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ از قضیهٔ سینوس‌ها را لازم داریم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۶}}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{\sin B} \Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\frac{\sqrt{۶}}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ \text{ یا } \hat{B}=۱۲۰^\circ$$

آ) اگر $\hat{B}=60^\circ$ داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 30^\circ+60^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=90^\circ$$

و برای محاسبهٔ c مجدداً قضیهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{1} \Rightarrow c=2\sqrt{2}$$

ب) اگر $\hat{B}=120^\circ$ داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 30^\circ+120^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 30^\circ} \Rightarrow c=\sqrt{2}$$

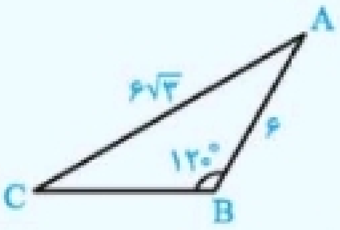
پس مسئله دارای دو جواب است:

$$a=\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, c=2\sqrt{2}, \hat{A}=30^\circ, \hat{B}=60^\circ, \hat{C}=90^\circ$$

$$a=\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{2}, \hat{A}=30^\circ, \hat{B}=120^\circ, \hat{C}=30^\circ$$

تست

در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۴۵

۳) ۶۰ ۴) ۱۵

پاسخ: برای محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ A ابتدا به کمک قضیهٔ سینوس‌ها اندازهٔ زاویهٔ C را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{6}{\sin C} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sin C} \Rightarrow \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sin C} \Rightarrow \sin C=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C}=30^\circ \text{ یا } \hat{C}=150^\circ$$

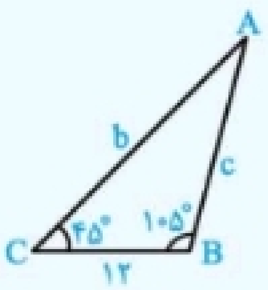
جواب $\hat{C}=150^\circ$ قابل قبول نیست. داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+120^\circ+30^\circ=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=180^\circ-150^\circ=30^\circ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

تست

در مثلثی اندازهٔ یک ضلع ۱۲ و دو زاویهٔ مجاور این ضلع 45° و 105° هستند. طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 45° کدام است؟

۱) $12\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) ۹ ۴) $4\sqrt{6}$



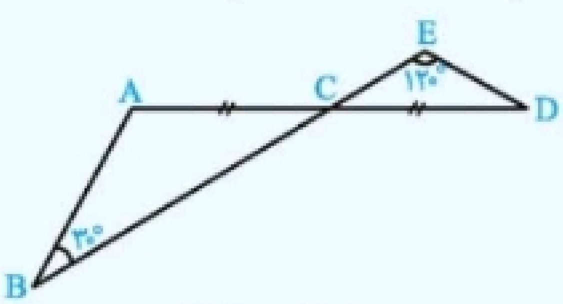
پاسخ: فرض کنیم $a=12$، $\hat{B}=105^\circ$ و $\hat{C}=45^\circ$، می‌خواهیم c را محاسبه کنیم. چون ضلع $BC=a$ معلوم است، پس اگر اندازهٔ زاویهٔ A نیز معلوم باشد، آن‌گاه به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توانیم b و c را محاسبه کنیم.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+105^\circ+45^\circ=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{12}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ} \Rightarrow c=\frac{12\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow c=\frac{12\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=12\sqrt{2} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

تست

در شکل مقابل پاره‌خط AD و پاره‌خط BE در نقطهٔ C متقاطع‌اند. به طوری که C وسط AD، $\hat{B}=30^\circ$ و $\hat{E}=120^\circ$ است. حاصل $\frac{AB}{DE}$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: فرض کنیم $A\hat{C}B=\alpha$، بنابه زوایای متقابل به رأس داریم $D\hat{C}E=\alpha$. حال قضیهٔ سینوس‌ها را در دو مثلث ABC و CDE می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{AC}{\sin 30^\circ}&=\frac{AB}{\sin\alpha}\\ \frac{CD}{\sin 120^\circ}&=\frac{DE}{\sin\alpha}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{AC}{CD}\times\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{DE}\times\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \xrightarrow{AC=CD} \frac{AB}{DE}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.

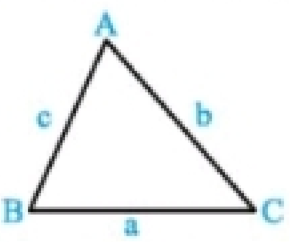
فصل ۳

قسمت دوم

قضیهٔ کسینوس‌ها

قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$



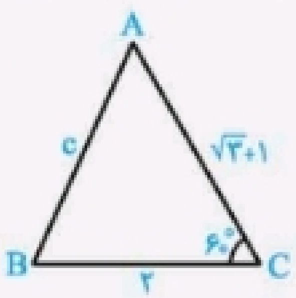
تذکر معمولاً قضیهٔ کسینوس‌ها وقتی که دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها معلوم است برای محاسبهٔ ضلع سوم به کار می‌رود.

مثال

اگر در مثلث ABC، $a = 2$، $b = \sqrt{3} + 1$ و $\widehat{C} = 60^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلع AB و اندازهٔ زوایای A و B و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را محاسبه کنید.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی)

پاسخ:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\times 2\times(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow c^2 = 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\times 2\times(\sqrt{3}+1)\times\frac{1}{2} = 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$$

$$\Rightarrow c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

حال اندازهٔ زوایای A و B را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ \text{ یا } \widehat{A} = 135^\circ$$

جواب $\widehat{A} = 135^\circ$ قابل قبول نیست، زیرا $\widehat{A} + \widehat{C}$ از 180° بیش‌تر می‌شود. در نتیجه:

$$\widehat{C} = 60^\circ, \widehat{A} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$$

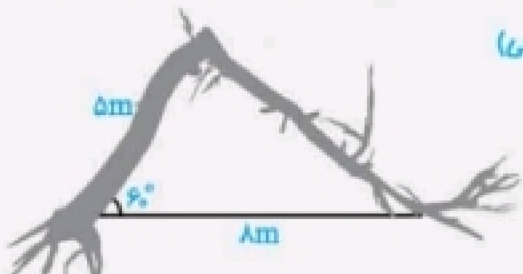
و نهایتاً شعاع دایرهٔ محیطی را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌یابیم:

$$a = 2R\sin A \Rightarrow 2 = 2R\times\sin 45^\circ \Rightarrow 1 = R\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

مثال

یک درخت مطابق شکل بر اثر طوفان شکسته شده است. به طوری‌که تنهٔ درخت با زمین زاویهٔ 60° می‌سازد و طول آن ۵ متر و فاصلهٔ سر درخت تا پای آن روی زمین ۸ متر است.

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی)

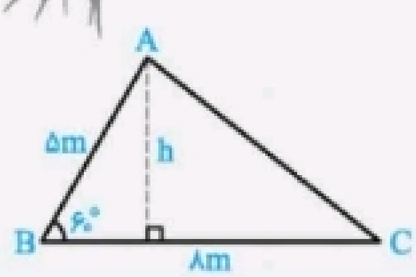


آ) طول درخت را محاسبه کنید.

ب) زاویه‌ای که قسمت شکسته‌شدهٔ درخت با سطح زمین می‌سازد را بیابید.

پ) فاصلهٔ محل شکستگی از زمین را محاسبه کنید.

پاسخ: آ) طول درخت برابر $AB + AC$ است. داریم:



$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 5\times 8\times\cos 60^\circ = 25 + 64 - 80\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 25 + 64 - 40 = 49 \Rightarrow AC = 7$$

$$\text{طول درخت} = AB + AC = 5 + 7 = 12\text{m}$$

ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد زاویهٔ C می‌باشد، بنابه قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۵}{\sin C}=\frac{۷}{\sin ۶۰^\circ}\Rightarrow \sin C=\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۴}$$

این زاویه به طور تقریبی به کمک یک ماشین حساب برابر ۳۸° است.

پ) مطابق شکل فاصلهٔ محل شکستگی درخت تا سطح زمین h می‌باشد و داریم:

$$\sin B=\frac{h}{AB}\Rightarrow \sin ۶۰^\circ=\frac{h}{۵}\Rightarrow h=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\simeq ۴/۳\text{m}$$

تست

اگر در مثلث ABC، $b=\sqrt{۳}$ ، $c=۲\sqrt{۲}$ و $\widehat{A}=۳۰^\circ$ باشد، حاصل $\frac{۲a+c}{b}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، ضلع سوم مثلث یعنی a را محاسبه می‌کنیم:

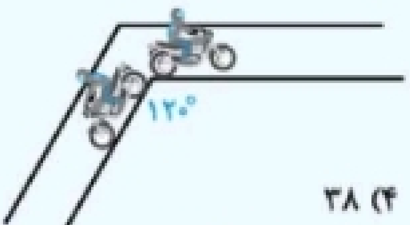
$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos ۳۰^\circ=(\sqrt{۳})^۲+(۲\sqrt{۲})^۲-۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۳})\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow a^۲=۳+۸-۶\sqrt{۲}=۱۱-۶\sqrt{۲}=(۳-\sqrt{۲})^۲\Rightarrow a=۳-\sqrt{۲}$$

$$\frac{۲a+c}{b}=\frac{۶-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

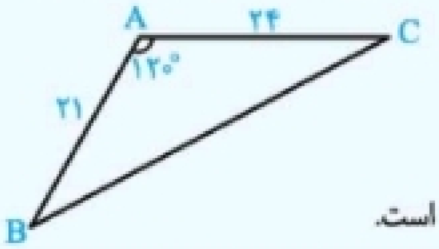
تست

دو موتورسوار مطابق شکل از یک نقطه در دو جادهٔ متفاوت که زاویهٔ بین آن‌ها ۱۲۰° است با سرعت‌های ۲۴ و ۲۱ کیلومتر در ساعت از هم دور می‌شوند. بعد از یک ساعت دو موتور سوار در چه فاصله از یکدیگر هستند؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی)



۱) ۴۰
۲) ۴۲
۳) ۳۹
۴) ۳۸

پاسخ: دو موتور سوار بعد از یک ساعت به فاصله‌های $AC=۲۴$ کیلومتر و $AB=۲۱$ کیلومتر از نقطهٔ شروع یعنی A قرار دارند. داریم:



$$BC^۲=۲۴^۲+۲۱^۲-۲\times۲۴\times۲۱\times\cos ۱۲۰^\circ=۲۴^۲+۲۱^۲-۲\times۲۴\times۲۱\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow BC^۲=۳^۲\times۸^۲+۳^۲\times۷^۲+۳\times۸\times۳\times۷=۹(۶۴+۴۹+۵۶)=۹\times۱۶۹\Rightarrow BC=۳\times۱۳=۳۹$$

پس بعد از گذشت یک ساعت دو موتور سوار به فاصلهٔ ۳۹ کیلومتر از یکدیگر قرار دارند، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

برخی از نتایج قضیهٔ کسینوس‌ها

۱) تعیین نوع مثلث: با معلوم بودن سه ضلع مثلث می‌توان اندازهٔ زوایای مثلث و نوع مثلث به لحاظ حاده الزوایا، قائم‌الزاویه و منفرجه‌الزاویه بودن را مشخص کرد. (تمرین ۹ صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی)

آ) اگر در مثلث ABC، زاویهٔ A حاده باشد $(۰<\widehat{A}<۹۰^\circ)$، آن‌گاه $\cos A>۰$ است، در نتیجه داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A\Rightarrow \cos A=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\xrightarrow{\cos A>۰}\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}>۰\Rightarrow b^۲+c^۲-a^۲>۰\Rightarrow b^۲+c^۲>a^۲$$

و بالعکس اگر $b^۲+c^۲>a^۲$ باشد، تمام روابط فوق برگشت‌پذیر هستند و نتیجه می‌شود $\cos A>۰$ که این یعنی زاویهٔ A حاده است. پس به طور خلاصه داریم:

$$۰<\widehat{A}<۹۰^\circ\Leftrightarrow a^۲<b^۲+c^۲$$

ب) با استدلال مشابه داریم:

$$۹۰^\circ<\widehat{A}<۱۸۰^\circ\Leftrightarrow a^۲>b^۲+c^۲$$

پ) و برای مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\widehat{A}=۹۰^\circ\Leftrightarrow a^۲=b^۲+c^۲$$

مثال

نوع مثلثی را که اندازهٔ اضلاع آن ۴، ۵ و ۸ است تعیین کنید.

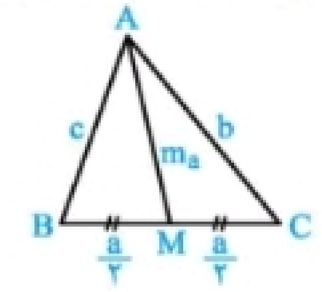
پاسخ: بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث، روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع آن است، پس با فرض $a=۸$ ، $b=۵$ و $c=۴$، کافی است نوع زاویهٔ A را مشخص کنیم، در این صورت نوع مثلث معلوم می‌شود:

$$a^۲=۸^۲=۶۴\ ,\ b^۲+c^۲=۵^۲+۴^۲=۲۵+۱۶=۴۱\Rightarrow a^۲>b^۲+c^۲\Rightarrow ۹۰^\circ<\widehat{A}<۱۸۰^\circ$$

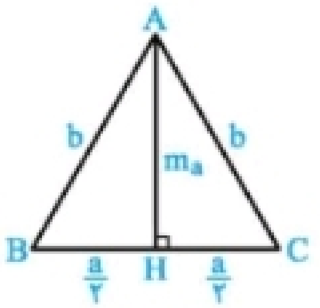
پس بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث، منفرجه است، لذا مثلث منفرجه‌الزاویه است.

۲) قضیهٔ میانه‌ها: در هر مثلث، مجموع مربعات دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانهٔ نظیر ضلع سوم به علاوهٔ نصف مربع ضلع سوم.

(تمرین ۴ صفحهٔ ۶۹ کتاب درسی)

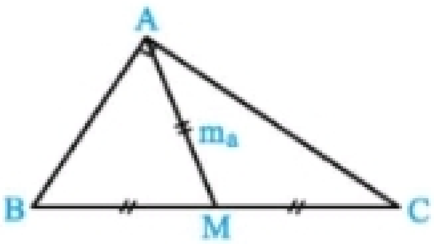


$$\begin{cases} b^۲+c^۲=۲{m_a}^۲+\dfrac{a^۲}{۲} \\ a^۲+c^۲=۲{m_b}^۲+\dfrac{b^۲}{۲} \\ a^۲+b^۲=۲{m_c}^۲+\dfrac{c^۲}{۲} \end{cases}$$



نکتهٔ ۱ در مثلث متساوی‌الساقین طول میانهٔ نظیر قاعده را هم می‌توان به کمک دستورهای فوق به‌دست آورد و هم‌چنین می‌توان از روی شکل به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورد.

$${m_a}^۲ = b^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$



نکتهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ نظیر وتر نصف وتر می‌باشد که این مطلب با قضیهٔ میانه‌ها هم قابل اثبات است.

$$m_a = \frac{a}{۲}$$

مثال

اندازهٔ میانه‌های مثلثی به اضلاع ۶، ۷ و ۸ را محاسبه کنید.

پاسخ: فرض کنیم $a=۶$، $b=۷$ و $c=۸$ داریم:

$$b^۲+c^۲=۲{m_a}^۲+\frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۷^۲+۸^۲=۲{m_a}^۲+\frac{۶^۲}{۲} \Rightarrow ۴۹+۶۴=۲{m_a}^۲+\frac{۳۶}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۱۳=۲{m_a}^۲+۱۸ \Rightarrow ۲{m_a}^۲=۹۵ \Rightarrow m_a=\sqrt{\frac{۹۵}{۲}}\simeq ۶/۹$$

$$a^۲+c^۲=۲{m_b}^۲+\frac{b^۲}{۲} \Rightarrow ۶^۲+۸^۲=۲{m_b}^۲+\frac{۷^۲}{۲} \Rightarrow ۳۶+۶۴=۲{m_b}^۲+\frac{۴۹}{۲}$$

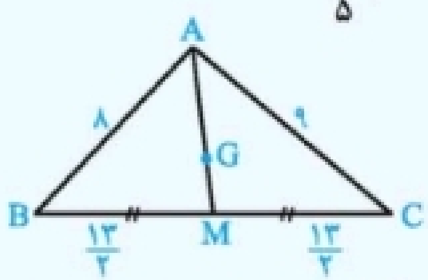
$$\Rightarrow ۲{m_b}^۲=۱۰۰-\frac{۴۹}{۲}=\frac{۲۰۰-۴۹}{۲} \Rightarrow {m_b}^۲=\frac{۱۵۱}{۴} \Rightarrow m_b=\frac{\sqrt{۱۵۱}}{۲}\simeq ۶/۱$$

$$a^۲+b^۲=۲{m_c}^۲+\frac{c^۲}{۲} \Rightarrow ۶^۲+۷^۲=۲{m_c}^۲+\frac{۸^۲}{۲} \Rightarrow ۳۶+۴۹=۲{m_c}^۲+۳۲ \Rightarrow ۲{m_c}^۲=۸۵-۳۲=۵۳ \Rightarrow m_c=\frac{\sqrt{۱۰۶}}{۲}\simeq ۵/۱$$

تست

در مثلث به اضلاع ۸، ۹ و ۱۳ فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها تا وسط بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۵}$



پاسخ: مطابق شکل، G نقطهٔ همرسی میانه‌ها می‌باشد. می‌خواهیم GM را محاسبه کنیم.

می‌دانیم $GM=\frac{AM}{۳}$. پس کافی است طول میانهٔ AM را بیابیم.

$$AB^۲+AC^۲=۲AM^۲+\frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow ۸^۲+۹^۲=۲AM^۲+\frac{۱۳^۲}{۲} \Rightarrow ۶۴+۸۱=۲AM^۲+\frac{۱۶۹}{۲}$$

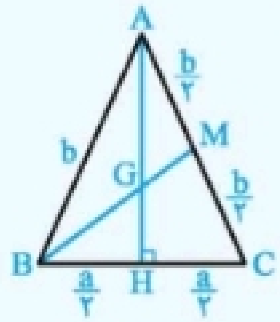
$$\Rightarrow ۲AM^۲=۱۴۵-\frac{۱۶۹}{۲}=\frac{۲۹۰-۱۶۹}{۲} \Rightarrow ۲AM^۲=\frac{۱۲۱}{۲} \Rightarrow AM^۲=\frac{۱۲۱}{۴} \Rightarrow AM=\frac{۱۱}{۲}$$

$GM=\frac{AM}{۳}=\frac{۱۱}{۶} \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست

در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، اندازهٔ میانهٔ نظیر ساق‌ها برابر $\sqrt{3}$ و اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده برابر $\sqrt{6}$ است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{2}$



پاسخ: روش اول: بنابه فرض $AH = h_a = \sqrt{6}$ و $BM = m_b = \sqrt{3}$، با استفاده از قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow b^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow b^2 + a^2 = 2(\sqrt{3})^2 + \frac{b^2}{2} \Rightarrow b^2 + 2a^2 = 12 \qquad (1)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH داریم:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow b^2 = h_a^2 + (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow b^2 = (\sqrt{6})^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow 4b^2 - a^2 = 24 \qquad (2)$$

از تساوی (۱)، b^2 را بر حسب a به‌دست آورده آن را در تساوی (۲) قرار می‌دهیم:

$$4(12 - 2a^2) - a^2 = 24 \Rightarrow 48 - 8a^2 - a^2 = 24 \Rightarrow 9a^2 = 24 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2}h_a \times a = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

روش دوم: مطابق شکل فوق، G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس $GH = \frac{1}{3}AH$ و $BG = \frac{2}{3}BM$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BGH داریم:

$$BG^2 = GH^2 + BH^2 \Rightarrow (\frac{2}{3}m_b)^2 = (\frac{1}{3}h_a)^2 + (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow \frac{4}{9} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{9} \times (\sqrt{6})^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{12}{9} - \frac{6}{9} = \frac{6}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{24}{9} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \times a \times h_a = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{6} = \frac{6}{3} = 2$$

صورت دیگر قضیهٔ میانه‌ها

ثابت کنید در هر مثلث ABC، داریم:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc\cos A) \\ m_b^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 2ac\cos B) \\ m_c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab\cos C) \end{cases}$$

اثبات: بنابه قضیهٔ میانه‌ها داریم $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$، اما به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها یعنی $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ می‌توان نوشت:

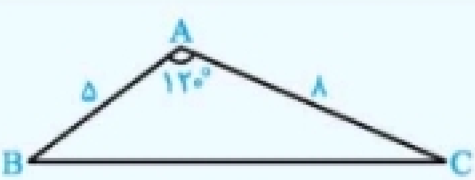
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{2} \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 = 4m_a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow 4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc\cos A)$$

دو تساوی دیگر نیز به طریق مشابه اثبات می‌شوند.

تست

در مثلث روبه‌رو طول میانهٔ وارد بر ضلع BC کدام است؟



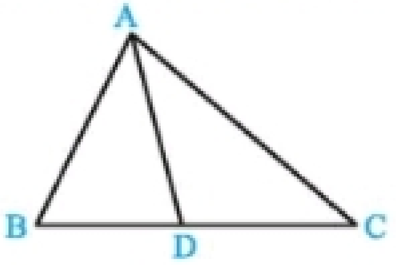
۱) ۳   ۲) ۴/۵   ۳) ۴   ۴) ۳/۵

پاسخ:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc\cos A) = \frac{1}{4}(8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \times \cos 120^\circ)$$

$$\Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(64 + 25 + 2 \times 40 \times (-\frac{1}{2})) = \frac{1}{4}(89 - 40) = \frac{49}{4} \Rightarrow m_a = \frac{7}{2} = 3/5 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

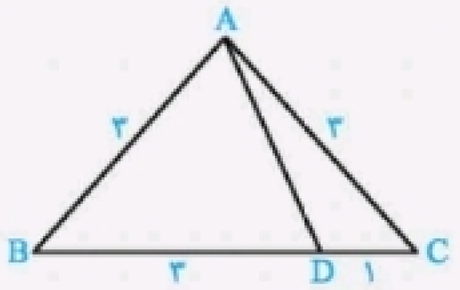
۳) **قضیهٔ استوارت:** در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی ضلع BC قرار دارد، در این صورت داریم: (تمرین ۵ صفحهٔ ۶۹ کتاب درسی)



$$AB^۲ \times CD + AC^۲ \times BD = AD^۲ \times BC + BD \times CD \times BC$$

تذکر صورت کاربردی قضیهٔ استوارت به شکل $AD^۲ = \frac{BD \times AC^۲ + CD \times AB^۲}{BD + CD} - BD \times CD$ است.

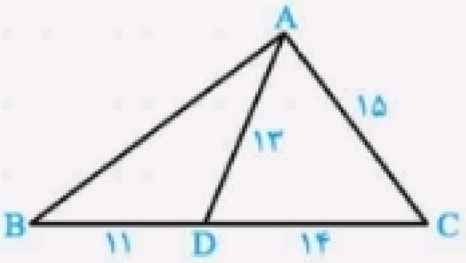
مثال در شکل مقابل طول پاره‌خط AD را به‌دست آورید.



پاسخ: با توجه به قضیهٔ استوارت داریم:

$$AD^۲ = \frac{BD \times AC^۲ + CD \times AB^۲}{BD + CD} - BD \times CD = \frac{۳ \times ۳^۲ + ۱ \times ۳^۲}{۳ + ۱} - ۳ \times ۱ = \frac{۴ \times ۳^۲}{۴} - ۳ = ۹ - ۳ = ۶ \Rightarrow AD = \sqrt{۶}$$

مثال در شکل مقابل طول ضلع AB را به‌دست آورید.

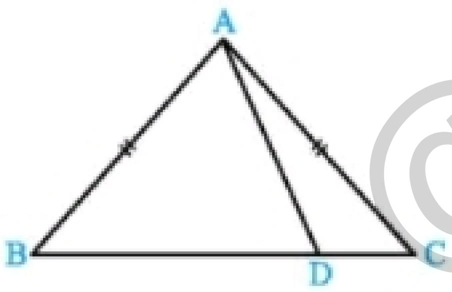


پاسخ:

$$AD^۲ = \frac{BD \times AC^۲ + CD \times AB^۲}{BD + CD} - BD \times CD \Rightarrow ۱۳^۲ = \frac{۱۱ \times ۱۵^۲ + ۱۴ \times AB^۲}{۱۱ + ۱۴} - ۱۱ \times ۱۴ \Rightarrow ۱۶۹ = \frac{۱۱ \times ۹ \times ۲۵ + ۱۴AB^۲}{۲۵} - ۱۱ \times ۱۴$$

$$\Rightarrow ۱۶۹ = ۹۹ - ۱۵۴ + \frac{۱۴AB^۲}{۲۵} \Rightarrow \frac{۱۴AB^۲}{۲۵} = ۲۲۴ \Rightarrow AB^۲ = ۲۵ \times ۱۶ \Rightarrow AB = ۵ \times ۴ = ۲۰$$

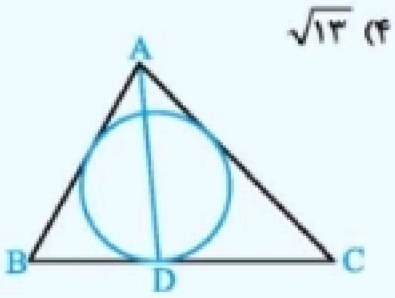
نکته در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ اگر D روی قاعدهٔ BC باشد، قضیهٔ استوارت به‌صورت روبه‌رو نوشته می‌شود:



$$AD^۲ = AB^۲ - BD \times CD$$

تست در مثلث ABC، $AB = ۴$، $AC = ۵$ و $BC = ۶$. اگر D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلع BC باشد، طول AD کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$



پاسخ: در فصل اول دیدیم که $BD = P - b$ است پس داریم:

$$BD = \frac{۴ + ۵ + ۶}{۲} - ۵ = \frac{۵}{۲} \quad , \quad CD = ۶ - \frac{۵}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

و با توجه به قضیهٔ استوارت طول پاره‌خط AD به‌دست می‌آید:

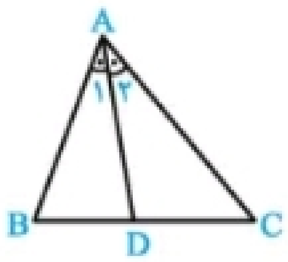
$$AD^۲ = \frac{BD \times AC^۲ + CD \times AB^۲}{BD + CD} - BD \times CD = \frac{\frac{۵}{۲} \times ۵^۲ + \frac{۷}{۲} \times ۴^۲}{\frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲}} - \frac{۵}{۲} \times \frac{۷}{۲}$$

$\Rightarrow AD^۲ = \frac{۱۲۵}{۱۲} + \frac{۱۱۲}{۱۲} - \frac{۳۵}{۴} = \frac{۲۳۷ - ۱۰۵}{۱۲} = \frac{۱۳۲}{۱۲} = ۱۱ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۱} \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

فصل ۳

قسمت سوم
قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی



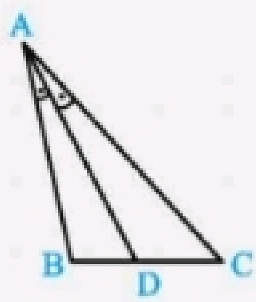
قضیهٔ ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، حکم: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

مثال

اندازهٔ اضلاع مثلثی ۹، ۷ و ۱۲ است. طول پاره‌خط‌هایی را که نیمساز کوچک‌ترین زاویه بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، به‌دست آورید.

(مشابه مثال صفحهٔ ۷۰ کتاب درسی)



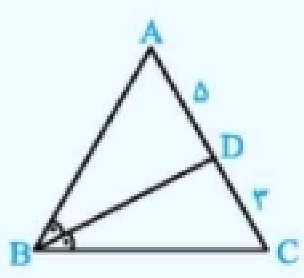
پاسخ: فرض کنیم $AB = ۹$، $AC = ۱۲$ و $BC = ۷$، می‌دانیم کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث، روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع آن است. بنابه قضیهٔ نیمسازها داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{۹}{۱۲} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BD+CD} = \frac{۳}{۳+۴}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow \frac{BD}{۷} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow BD = ۳$$

$$CD = BC - BD = ۷ - ۳ = ۴$$

تست



در مثلث متساوی‌الساقین روبه‌رو $(AB = AC)$، BD نیمساز زاویهٔ B است. محیط مثلث کدام است؟

۱) ۲۰/۲ ۲) ۱۹/۶

۳) ۲۰/۸ ۴) ۱۹/۸

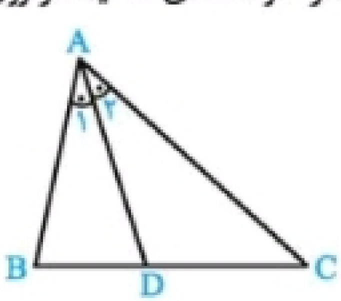
پاسخ: چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC = ۵ + ۳ = ۸$. از طرفی بنابه قضیهٔ نیمسازها داریم:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{۸} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow BC = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

محیط مثلث $ABC = AB + AC + BC = ۸ + ۸ + ۴/۸ = ۲۰/۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

محاسبهٔ طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

قضیهٔ ۲: در هر مثلث مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

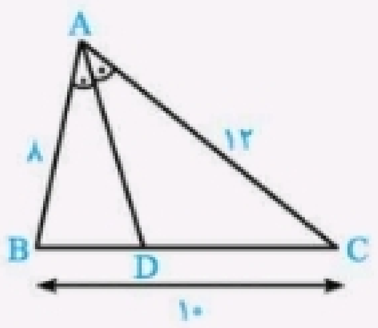


فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، حکم: $AD^2 = AB.AC - BD.CD$

مثال

در مثلث ABC، $AB=۸$، $AC=۱۲$ و $BC=۱۰$ است. طول نیمساز زاویهٔ A را به‌دست آورید. (مشابه مثال صفحهٔ ۷۱ کتاب درسی)

پاسخ: ابتدا باید طول پاره‌خط‌های BD و CD را به‌دست آوریم:



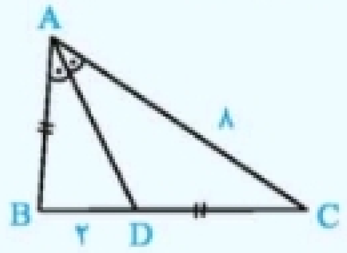
$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{۱۰}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BD=۴\ ,\ CD=۱۰-۴=۶$$

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times CD=۸\times۱۲-۴\times۶=۸\times۹\Rightarrow AD=۲\sqrt{۲}\times۳=۶\sqrt{۲}$$

تست

در مثلث ABC مطابق شکل، AD نیمساز زاویهٔ A است به طوری‌که $AB=CD$، $BD=۲$ و $AC=۸$ می‌باشد. اندازهٔ AD کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: AD نیمساز $\hat{A}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{۸}=\frac{۲}{AB}\Rightarrow AB^۲=۱۶\Rightarrow AB=CD=۴$

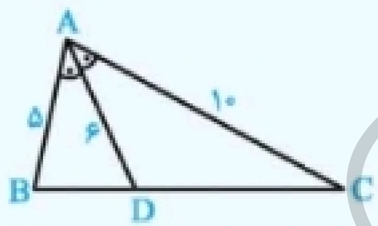
$AD^۲=AB.AC-BD.CD=۴\times۸-۲\times۴=۳۲-۸=۲۴\Rightarrow AD=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست

در یک مثلث اندازهٔ دو ضلع ۵ و ۱۰ و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع ۶ است. اندازهٔ ضلع سوم مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۳\sqrt{۷}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: فرض کنیم $AB=۵$، $AC=۱۰$ و $AD=۶$ باشد. داریم:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}BD=k\\CD=۲k\end{cases}$$

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times CD\Rightarrow ۶^۲=۵\times۱۰-k\times۲k\Rightarrow ۲k^۲=۵۰-۳۶=۱۴$$

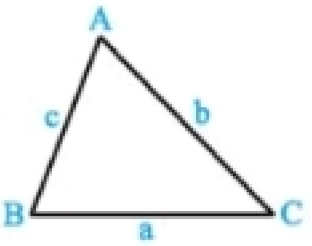
$$\Rightarrow k^۲=۷\Rightarrow k=\sqrt{۷}\Rightarrow\begin{cases}BD=\sqrt{۷}\\CD=۲\sqrt{۷}\end{cases}\Rightarrow BC=BD+CD=۳\sqrt{۷}$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

فصل ۳

قسمت چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)



قضیهٔ هرون: در مثلث ABC، با فرض $BC=a$ ، $AC=b$ ، $AB=c$ و $P=\frac{a+b+c}{۲}$ (نصف محیط مثلث)

مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال

مساحت مثلث با اضلاع ۴ ، ۱۳ و ۱۵ را به‌دست آورید. (مشابه مثال صفحهٔ ۷۳ کتاب درسی)

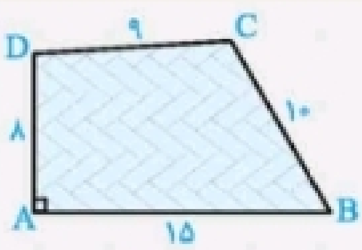
پاسخ: فرض کنیم $a=۱۵$ ، $b=۱۳$ و $c=۴$. داریم:

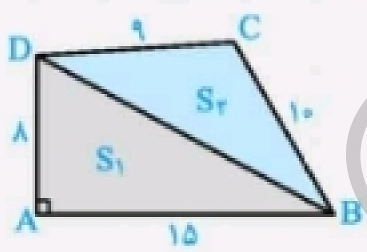
$$P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۱۵+۱۳+۴}{۲}=\frac{۱۵+۱۷}{۲}=\frac{۳۲}{۲}=۱۶$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۱۶(۱۶-۱۵)(۱۶-۱۳)(۱۶-۴)}=\sqrt{۱۶\times۱\times۳\times۱۲}\Rightarrow S=\sqrt{۱۶\times۳۶}=۴\times۶=۲۴$$

مثال

شکل مقابل یک زمین کشاورزی است که ابعاد آن بر حسب کیلومتر می‌باشد. مساحت این زمین چند کیلومتر مربع است؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۷۴ کتاب درسی)





پاسخ: قطر BD را رسم می‌کنیم مثلث ABD قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر $S_۱=\frac{۸\times۱۵}{۲}=۶۰$ می‌باشد. برای محاسبهٔ مساحت $S_۲$ داریم:

$$BD^۲=AB^۲+AD^۲=۱۵^۲+۸^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹\Rightarrow BD=۱۷$$

پس اندازهٔ سه ضلع مثلث BCD معلوم است. مساحت آن را می‌توان به کمک دستور هرون محاسبه کرد:

$$P=\frac{۹+۱۰+۱۷}{۲}=۱۸\ ,\ S_۲=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۱۸\times(۱۸-۹)(۱۸-۱۰)(۱۸-۱۷)}$$

$$\Rightarrow S_۲=\sqrt{۱۸\times۹\times۸\times۱}=\sqrt{۳۶\times۹\times۴}=۶\times۳\times۲=۳۶$$

پس مساحت زمین برابر است با:

$$S(ABCD)=S_۱+S_۲=\frac{۱۵\times۸}{۲}+۳۶=۶۰+۳۶=۹۶km^۲$$

تست

اندازهٔ اضلاع مثلثی ۷، ۱۵ و ۲۰ است. طول بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ: فرض کنیم $a=۲۰$ ، $b=۱۵$ و $c=۷$. بزرگ‌ترین ارتفاع، نظیر کوچک‌ترین ضلع است پس باید h_c را محاسبه کنیم. داریم:

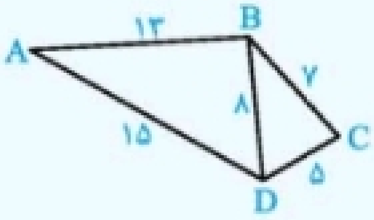
$$P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۲۰+۱۵+۷}{۲}=۲۱\ ,\ S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{۲۱(۲۱-۲۰)(۲۱-۱۵)(۲۱-۷)}=\sqrt{۲۱\times۱\times۶\times۱۴}=\sqrt{۴۹\times۳۶}=۷\times۶=۴۲$$

$$S=\frac{۱}{۲}c\times h_c\Rightarrow ۴۲=\frac{۱}{۲}\times۷\times h_c\Rightarrow h_c=\frac{۲\times۴۲}{۷}=۲\times۶=۱۲\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

تست

مساحت چهارضلعی مقابل کدام است؟



۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۳۰\sqrt{۳}$ ۴) $۴۰\sqrt{۳}$

پاسخ : مساحت چهارضلعی ABCD برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و BCD است.

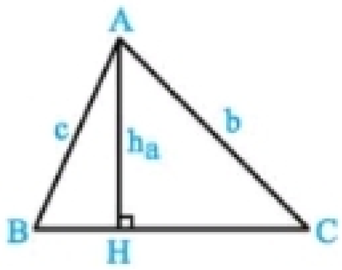
$$P_۱=\frac{۵+۸+۷}{۲}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰\ ,\ S_۱=\sqrt{۱۰(۱۰-۸)(۱۰-۷)(۱۰-۵)}=\sqrt{۱۰\times۲\times۳\times۵}=۱۰\sqrt{۳}$$

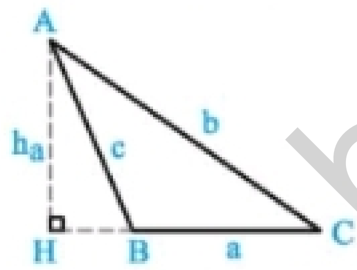
$$P_۲=\frac{۱۳+۸+۱۵}{۲}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸\ ,\ S_۲=\sqrt{۱۸(۱۸-۸)(۱۸-۱۳)(۱۸-۱۵)}=\sqrt{۱۸\times۱۰\times۵\times۳}=۳۰\sqrt{۳}$$

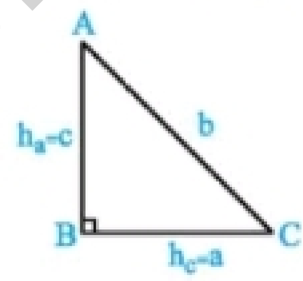
$S(ABCD)=S_۱+S_۲=۱۰\sqrt{۳}+۳۰\sqrt{۳}=۴۰\sqrt{۳}\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

دستوری دیگر برای محاسبهٔ مساحت مثلث

ارتفاع هر مثلث بر حسب اضلاع و سینوس زوایای مثلث به‌صورت زیر است:







در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH در دو شکل بالا سمت چپ داریم:

$$\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{h_a}{b}\Rightarrow h_a=b\sin C \qquad \sin B=\frac{AH}{AB}=\frac{h_a}{c}\Rightarrow h_a=c\sin B$$

و به طور کلی می‌توان نوشت:

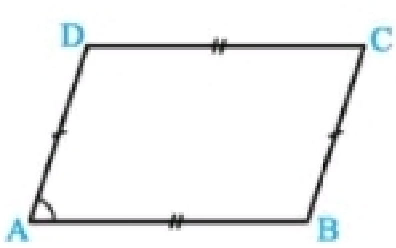
$$\begin{cases} h_a=c\sin B=b\sin C \\ h_b=a\sin C=c\sin A \\ h_c=b\sin A=a\sin B \end{cases}$$

و با توجه به این‌که $S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bh_b=\frac{۱}{۲}ch_c$ است، نتیجه می‌شود:

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

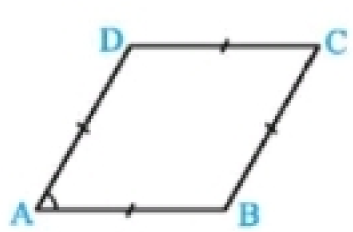
یعنی مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

نتیجه۱ مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.



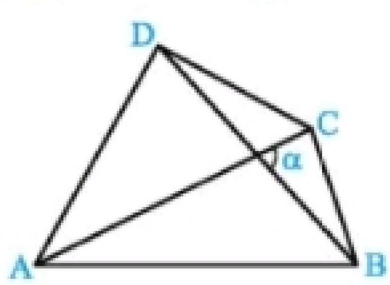
$$S(ABCD)=AB\times AD\times\sin A$$

نتیجه۲ مساحت هر لوزی برابر است با مربع یک ضلع در سینوس یکی از زوایای آن.



$$S(ABCD)=AB^۲.\sin A$$

نتیجه۳ مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر.

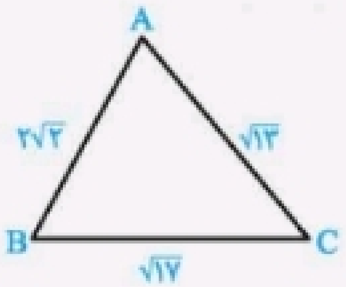


$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\alpha$$

مثال

مساحت مثلثی را که اندازهٔ اضلاع آن $\sqrt{13}$، $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{17}$ است، محاسبه کنید.

پاسخ: در این‌جا استفاده از دستور هرون مفید نیست، زیرا عبارت‌های زیر رادیکال شامل اعداد گنگی می‌شود که محاسبهٔ حاصل‌ضرب آن‌ها بسیار دشوار است. در این حالت ابتدا به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، کسینوس یکی از زوایا را به‌دست می‌آوریم (مثلاً $\cos A$)، سپس با محاسبهٔ $\sin A$ مساحت مثلث را از دستور $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$ می‌یابیم:



$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{13})^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{17})^2}{2\times\sqrt{13}\times 2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos A=\frac{13+8-17}{4\times\sqrt{2}\times\sqrt{13}}=\frac{4}{4\times\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{26}}=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{13}\times\frac{5}{\sqrt{26}}=\frac{10}{2}=5$$

مثال

اندازهٔ اضلاع مثلثی ۸، ۲۹ و ۳۵ است. سینوس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث را به‌دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۷۵ کتاب درسی)

پاسخ: فرض کنیم $a=35$، $b=29$ و $c=8$ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث A است. ابتدا مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{35+29+8}{2}=\frac{72}{2}=36\Rightarrow S=\sqrt{36\times(36-35)(36-29)(36-8)}=\sqrt{36\times1\times7\times28}=\sqrt{36\times49\times4}=6\times7\times2=84$$

حال از دستور $S=\frac{1}{2}bc\times\sin A$ استفاده می‌کنیم:

$$84=\frac{1}{2}\times29\times8\times\sin A\Rightarrow \sin A=\frac{21}{29}$$

تست

در مثلث ABC زاویهٔ A منفرجه است. اگر $h_b=b$ و $ac=2b^2$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) 75° ۲) 45° ۳) 30° ۴) 60°

پاسخ:

$$S=\frac{1}{2}b\times h_b=\frac{1}{2}ac\sin B\Rightarrow b\times b=2b^2\sin B\Rightarrow \sin B=\frac{1}{2}\Rightarrow B=30^\circ \text{ یا } B=150^\circ$$

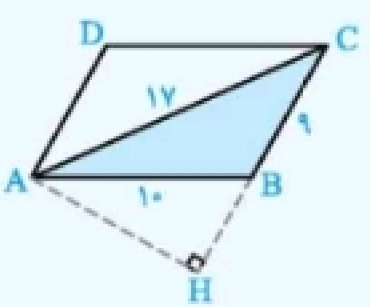
چون زاویهٔ A نیز منفرجه است، جواب $B=150^\circ$ قابل قبول نیست پس $B=30^\circ$ جواب است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

تست

اندازهٔ اضلاع یک متوازی‌الاضلاع ۹ و ۱۰ و طول یک قطر آن ۱۷ می‌باشد. اندازهٔ بزرگ‌ترین ارتفاع این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: چون $9^2+10^2<17^2$ است، پس زاویهٔ روبه‌رو به قطر، منفرجه است و شکل مسئله به‌صورت زیر می‌باشد. هر متوازی‌الاضلاع دو ارتفاع دارد، ارتفاع بزرگ آن نظیر ضلع کوچکش می‌باشد یعنی باید AH را محاسبه کنیم، AH ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث ABC است، پس کافی است مساحت مثلث ABC را بیابیم:



$$P=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{10+17+9}{2}=\frac{36}{2}=18$$

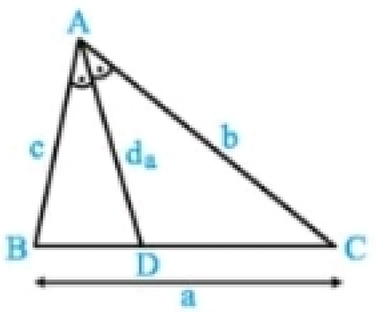
$$S(ABC)=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{18(18-10)(18-9)(18-17)}=\sqrt{18\times8\times9\times1}$$

$$\Rightarrow S(ABC)=\sqrt{81\times16}=9\times4=36$$

$$S(ABC)=\frac{1}{2}BC\times AH\Rightarrow 36=\frac{1}{2}\times9\times AH\Rightarrow AH=4\times2=8\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

محاسبهٔ طول نیمساز یک زاویه بر حسب اندازهٔ زاویه و اندازهٔ اضلاع آن

(تمرین ۵ صفحهٔ ۷۵ کتاب درسی)



$$S(ABC)=S(ABD)+S(ACD)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times b\times c\times \sin A=\frac{1}{2}c\times d_a\times \sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\times b\times d_a\times \sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow bc\sin A=d_a\times \sin\frac{A}{2}(c+b)$$

حال از اتحاد مثلثاتی $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$2bc\,\cancel{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}=d_a\times \cancel{\sin\frac{A}{2}}(b+c)\Rightarrow 2bc\cos\frac{A}{2}=d_a\times(b+c)\Rightarrow d_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

به طریق مشابه برای اندازه‌های نیمسازهای زوایای دیگر داریم:

$$d_c=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}\ ,\ d_b=\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$$

مثال

اندازهٔ اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و زاویهٔ بین این دو ضلع 120° است. طول نیمساز این زاویه را محاسبه کنید.

پاسخ: فرض کنیم $b=6$ ، $c=4$ و $\widehat{A}=60^\circ$، در نتیجه:

$$d_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{2\times4\times6\times\cos60^\circ}{6+4}=\frac{48}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{24}{10}=2/4$$

تست

در مثلث ABC، $\widehat{B}=60^\circ$ و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ B، d_b است. حاصل عبارت $\frac{(a+c)d_b}{ac}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) ۲

پاسخ:

$$d_b=\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}\Rightarrow d_b=\frac{2ac\cos30^\circ}{a+c}\Rightarrow\frac{(a+c)d_b}{ac}=2\cos30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

محاسبهٔ مساحت و ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع بر حسب ضلعش

(تمرین ۳ صفحهٔ ۷۵ کتاب درسی)

$$P=\frac{a+a+a}{2}=\frac{3a}{2}$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-a)(P-a)}=\sqrt{\frac{3a}{2}(\frac{3a}{2}-a)^3}=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a^3}{8}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع با یکدیگر برابرند و طول آن‌ها به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}a\times h_a\Rightarrow\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\times a\times h_a\Rightarrow h_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h_a=h_b=h_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

مثال

اگر اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی $4\sqrt{3}$ باشد، مساحت و طول ارتفاع‌های آن را بیابید.

پاسخ:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(4\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}}{4}=\frac{16\times3\times\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}$$

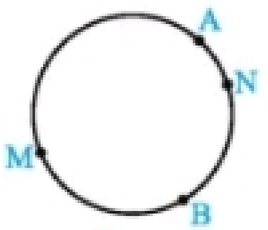
$$h_a=h_b=h_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{12}{2}=6$$


گاج
مجموعه کتاب‌های
پُرسِمان
برای
بیست
پُرسِمان
کافیست!
درسنامه‌های کاربردی
سؤالات امتحانی
پاسخ‌های تشریحی
برای بیست، پرسمان کافیست
The English Language
انگلیسی یازدهم
مشترک کلیهٔ رشته‌ها
درسنامه‌های کاربردی + سؤالات امتحانی + پاسخ‌های تشریحی
مجموعه کتاب‌های پرسمان
۰۲۱-۶۴۲۰
www.gaj.ir
اطلاع‌رسانی و فروش

فصل ۱ دایره

قسمت اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

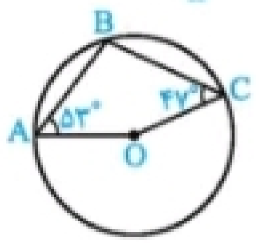
☆۱. در شکل مقابل $\widehat{AMB}=۴\widehat{ANB}$ است. کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

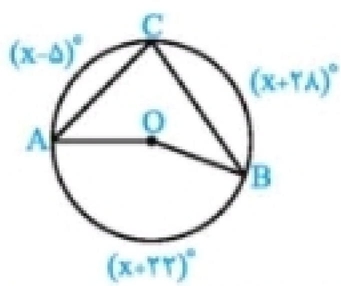
☆۲. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{C}=۴۷^\circ$ و $\hat{A}=۵۳^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ AOC چند درجه است؟



۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۰

☆۳. اگر در شکل روبه‌رو O مرکز دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ چند درجه است؟



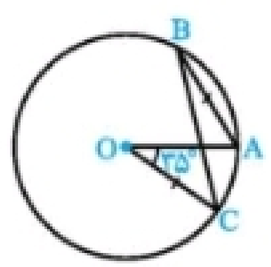
۱) ۱۳۵ ۲) ۱۲۱

۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۷

☆۴. دو نقطهٔ یک دایره، یک کمان کوچک‌تر و یک کمان بزرگ‌تر را مشخص می‌کنند. اگر اندازهٔ کمان بزرگ‌تر، از ۴ برابر کمان کوچک‌تر ۴۰ درجه کم‌تر باشد، تفاضل اندازهٔ کمان‌ها کدام است؟

۱) ۲۵۰° ۲) ۲۰۰° ۳) ۱۸۰° ۴) ۲۴۰°

☆۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره، $AB=OC$ و $A\hat{O}C=۳۵^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCO چند درجه است؟



۱) ۴۰

۲) ۳۷/۵

۳) ۴۵

۴) ۴۲/۵

۶. در ربع دایره‌ای به مرکز O و شعاع‌های عمود بر هم OA و OB، نقطهٔ C روی کمان ربع دایره چنان قرار دارد که $O\hat{A}C=۸۰^\circ$. اندازهٔ $O\hat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۸۵ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۵۵

۷. دو دایره با شعاع‌های مساوی ۳ و فاصلهٔ خط‌المرکزین ۸ داده شده‌اند. از وسط خط‌المرکزین قاطعی رسم می‌کنیم، اگر طول وتر جداشده در دایرهٔ اول $\sqrt{۲}$ باشد، طول وتر جداشده در دایرهٔ دوم کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $۳-\sqrt{۲}$

☆۸. دو دایره هم‌مرکزند. دایرهٔ کوچک‌تر، وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر را که قطر نیست، به سه پاره‌خط به طول‌های ۵، ۱۸ و ۵ تقسیم کرده است. مساحت بین دو دایره کدام است؟

۱) ۱۰۰π ۲) ۱۳۰π ۳) ۹۰π ۴) ۱۱۵π

۹. دو دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، ۳۲ می‌باشد. اگر کم‌ترین فاصلهٔ نقاط بین دو دایره ۸ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۴

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت تست‌های دارای علامت ☆ را در اولویت قرار دهید. تست‌های دارای علامت ★ مربوط به تست‌های دشوار است.

☆۱۰. در یک دایره، نقطهٔ C روی وتر AB آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متر تقسیم کرده است. اگر فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت دایره کدام است؟

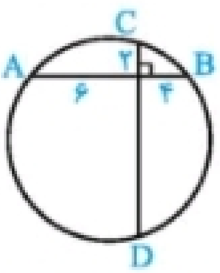
۱) 72π ۲) 128π ۳) 64π ۴) 108π

۱۱. اندازهٔ دو وتر در یک دایره $4 + 4x$ و $9 + 3x$ سانتی‌متر است. اگر کمان‌های نظیر دو وتر برابر باشد، در صورتی که فاصلهٔ مرکز دایره تا وسط یکی از وترها برابر ۵ باشد، آن‌گاه طول شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۲. دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد، به طوری‌که طول آن‌ها برابر ۲ سانتی‌متر باشد و از M بگذرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

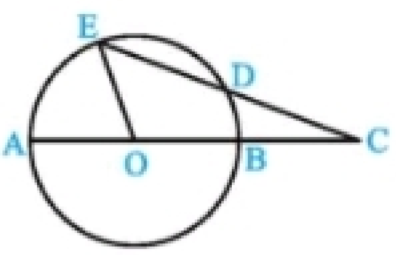


★۱۳. در شکل مقابل دو وتر بر هم عمودند. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۷ ۲) $5\sqrt{2}$
۳) ۸ ۴) $6\sqrt{2}$

☆۱۴. در دایرهٔ $C(O,R)$، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 12$. فاصلهٔ O از وتر AB کدام است؟ (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱) $6\sqrt{3}$ ۲) ۶ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{3}$



☆۱۵. از نقطهٔ C روی امتداد قطر AB قاطعی بر دایره به مرکز O چنان رسم شده است که طول پاره‌خط CD برابر شعاع دایره است. اگر $\hat{C} = 18^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{O}E$ چند درجه است؟ (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱) ۴۸ ۲) ۵۴
۳) ۶۰ ۴) ۵۰

☆۱۶. در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

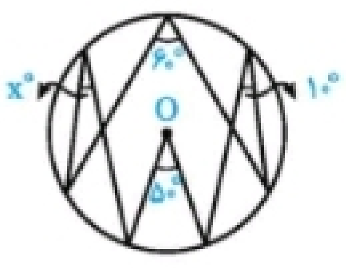
۱۷. مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

۱۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$ نقطهٔ O در امتداد AC، مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

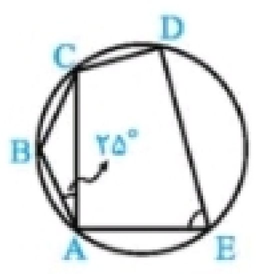
۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیر مشخص

زاویهٔ محاطی - زاویهٔ ظلی - زاویهٔ برخورد وترها و مماس‌ها



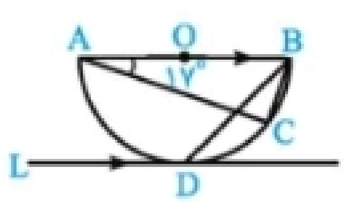
☆۱۹. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مقدار x چند درجه است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۱۵
۴) ۳۰



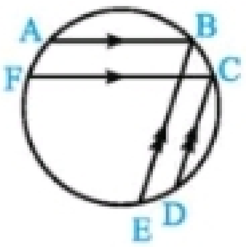
☆۲۰. در شکل مقابل وترهای AB، BC و CD برابرند و $B\hat{A}C = 25^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۵
۳) ۷۵ ۴) ۹۰



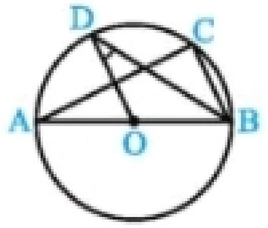
☆۲۱. در شکل مقابل، خط L در نقطهٔ D بر نیم‌دایره‌ای به مرکز O مماس است و موازی قطر AB است. اگر $\hat{A} = 17^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{B}D$ چند درجه است؟

۱) ۳۴ ۲) ۱۷
۳) ۲۸ ۴) ۲۶



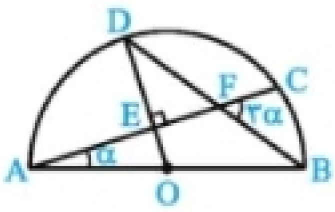
★۲۲. اگر در شکل مقابل FC || AB ، BE || CD ، $\widehat{AB}=۶۰^\circ$ ، $\widehat{CD}=۴۰^\circ$ و $\widehat{EF}=۱۱۰^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ FCD چند درجه است؟

۱) ۹۰
۲) ۵۵
۳) ۷۰
۴) ۸۰



۲۳. شکل مقابل، دایرهٔ به قطر AB که O مرکز آن است را نشان می‌دهد. اگر OD || BC و $\widehat{A}=۴۰^\circ$ ، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{D}$ چند درجه است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

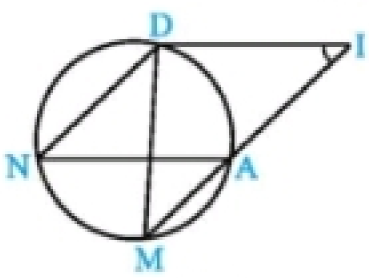


☆۲۴. در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره و شعاع OD بر وتر AC عمود است. اگر $\widehat{A}=\alpha$ و $B\widehat{F}C=۳\alpha$ باشد، مقدار α کدام است؟

۱) ۱۵°
۲) ۲۰°
۳) ۲۷°
۴) ۱۸°

۲۵. در نیم‌دایره‌ای به قطر AB ، نقاط D و C روی آن چنان‌اند که $B\widehat{A}D=۷۰^\circ$ و BC = CD . اندازهٔ $A\widehat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۵۵
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۵۰



۲۶. در شکل مقابل، چهارضلعی DIAN متوازی‌الاضلاع است و امتداد ضلع IA دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است. اگر $\widehat{I}=۲۹^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ برخورد دو وتر AN و DM چند درجه است؟

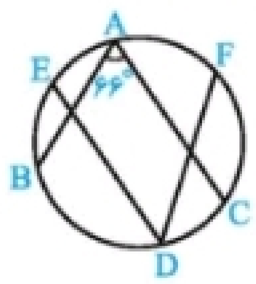
۱) ۴۴
۲) ۴۸
۳) ۵۸
۴) ۵۴

☆۲۷. در مثلثی اندازهٔ دو زاویه ۵۰° و ۶۰° است. قطری از دایرهٔ محیطی مثلث که از رأس زاویهٔ سوم می‌گذرد، ضلع روبه‌رو به آن رأس را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

۱) ۱۰۰°
۲) ۱۰۵°
۳) ۱۱۰°
۴) ۱۱۵°

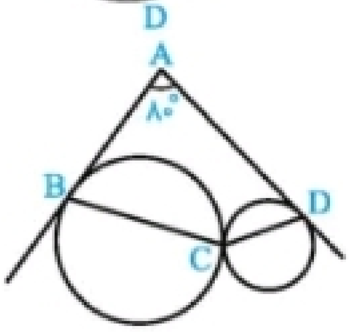
☆۲۸. دایره‌ای دو ضلع زاویه‌ای به اندازهٔ ۴۰° را قطع می‌کند و اندازهٔ کمان‌هایی که بیرون زاویه قرار می‌گیرند ۶۰° و ۷۰° است. اندازهٔ بزرگ‌ترین کمانی از دایره که داخل زاویه قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) ۱۵۵°
۲) ۱۴۰°
۳) ۱۶۵°
۴) ۱۵۰°



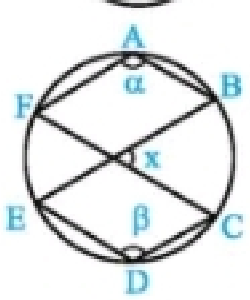
☆۲۹. در شکل مقابل $\widehat{A}=۶۶^\circ$ و E و F وسط‌های کمان‌های AB و AC قرار دارند. اندازهٔ زاویهٔ D چند درجه است؟

۱) ۵۸
۲) ۶۴
۳) ۵۷
۴) ۶۰



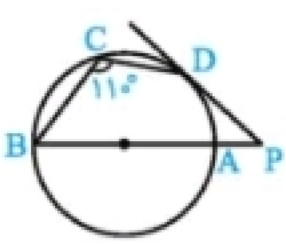
۳۰. در شکل مقابل دو دایره در نقطهٔ C مماس و AB و AD نیز بر دایره‌ها مماس هستند. اگر $\widehat{A}=۸۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ BCD چند درجه است؟

۱) ۱۵۰
۲) ۱۴۰
۳) ۱۶۰
۴) ۱۳۰



۳۱. در شکل مقابل، x کدام است؟

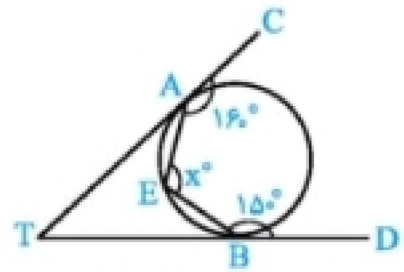
۱) $\frac{\alpha+\beta}{۲}$
۲) $\alpha+\beta-۱۸۰^\circ$
۳) $۳۶۰^\circ-\alpha-\beta$
۴) $\alpha+\beta$



☆۳۲. در شکل داده‌شده، اگر AB قطر دایره، $\widehat{C}=۱۱۰^\circ$ و PD بر دایره مماس باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{P}$ چقدر است؟

۱) ۵۰°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۵۵°

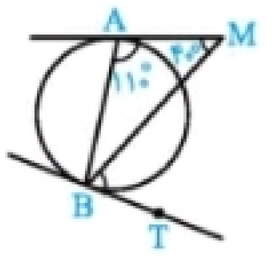
☆**۳۳.** در شکل مقابل، TC در نقطهٔ A و TD در نقطهٔ B بر دایـره مماس‌انـد و $E\hat{A}C = ۱۶۰^\circ$ و $E\hat{B}D = ۱۵۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ AEB چند درجه است؟



۱) ۱۰۰   ۲) ۱۱۰

۳) ۱۲۰   ۴) ۱۳۰

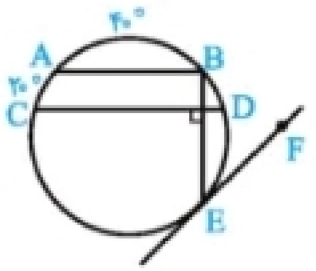
۳۴. در شکل روبه‌رو، $\hat{M} = ۴۰^\circ$ ، $M\hat{A}B = ۱۱۰^\circ$ و MA و TB بر دایره مماس‌اند. انـدازهٔ زاویـهٔ TBM کـدام است؟



۱) ۱۰۰° ۲) ۹۰°

۳) ۸۰° ۴) ۷۰°

۳۵. در شکل مقابل، AB || CD ، CD ⊥ BE ، $\widehat{AB} = ۴۰^\circ$ و $\widehat{AC} = ۲۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ ظلی BEF چند درجه است؟



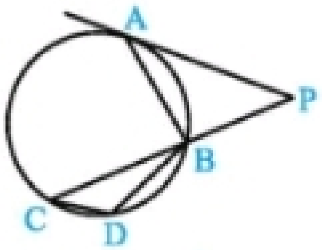
۱) ۸۰

۲) ۶۰

۳) ۸۵

۴) ۷۰

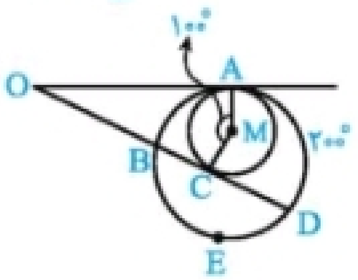
۳۶. در شکل روبه‌رو، از نقطهٔ P یک مماس و یـک قـاطع بـر دایـره رسـم شـده اسـت. اگـر $B\hat{A}P = ۴۲^\circ$ و $C\hat{D}B = ۱۳۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\hat{P}$ چند درجه است؟



۱) ۴۴   ۲) ۴۸

۳) ۵۰   ۴) ۴۶

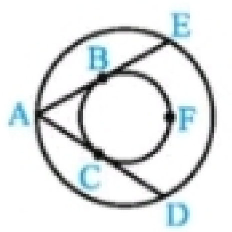
★**۳۷.** در شکل مقابل، M مرکز دایرهٔ کوچک و دو دایره در نقطهٔ A مماس داخل‌انـد و OC بـر دایـرهٔ کوچـک و OA بر هر دو دایره در نقطهٔ A مماس است. اگـر $A\hat{M}C = ۱۰۰^\circ$ و $\widehat{AD} = ۲۰۰^\circ$ باشـد، آن‌گـاه انـدازهٔ کمان $\widehat{BED}$ چند درجه است؟



۱) ۸۰   ۲) ۱۲۰

۳) ۱۰۰   ۴) ۹۰

☆**۳۸.** دو دایرهٔ روبه‌رو، هم‌مرکز و AE و AD بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس‌انـد. اگـر $\widehat{BC} = \frac{۲}{۵}\widehat{BFC}$ باشـد، آن‌گـاه اندازهٔ کمان DE چند درجه است؟

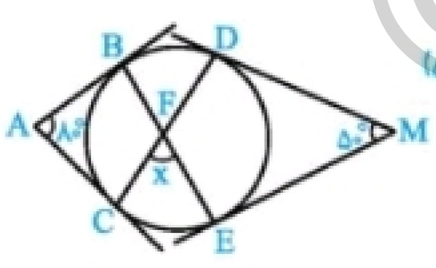


۱) ۶۰   ۲) ۴۵

۳) ۵۰   ۴) ۴۰

☆**۳۹.** در شکل مقابل از نقاط A و M بر دایره مماس رسم شده است. مقدار x کدام است؟

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)



۱) ۶۰°

۲) ۶۵°

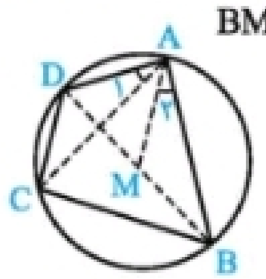
۳) ۷۰°

۴) ۷۵°

★**۴۰.** دو دایرهٔ متقاطع در نقطهٔ A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایرهٔ مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌هـا بـر هـر دایـره در B و C در نقطهٔ M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع کدام جزء ثابت می‌ماند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) MA   ۲) محیط   ۳) مساحت   ۴) زاویهٔ BMC

★**۴۱.** در شکل مقابل، $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ ، حاصل AD.BC برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

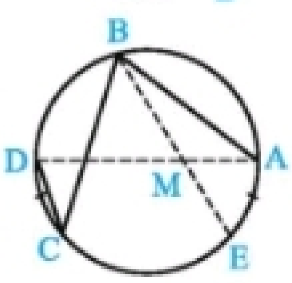


۱) DM.AC   ۲) BM.AC

۳) AB.CD   ۴) BD.BM

★**۴۲.** در شکل مقابل AB = ۶ ، BC = ۸ ، CD = ۳ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$. اندازهٔ AM کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)



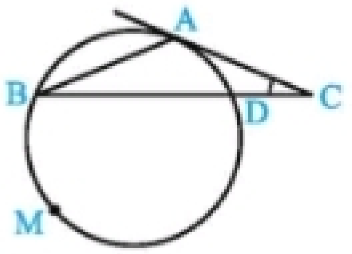
۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

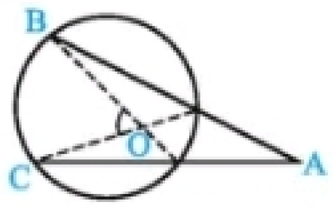
۴) ۲/۷۵

☆۴۳. در شکل مقابل، مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابر است، اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)



۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴

☆۴۴. در شکل مقابل، $\hat{A}=27^\circ$ و $\hat{O}=71^\circ$، کمان $\widehat{BC}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

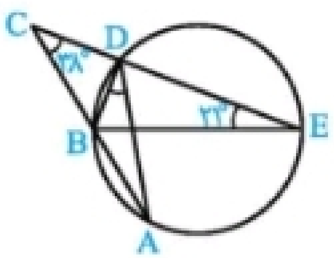


۱) ۹۸
۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۲
۴) ۱۰۴

★۴۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD، دایرهٔ محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. مثلث ABM کدام نوع است؟

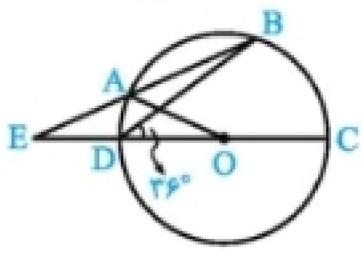
۱) متشابه ACD
۲) متساوی‌الساقین
۳) متساوی‌الاضلاع
۴) قائم‌الزاویه

☆۴۶. در شکل مقابل، BE قطر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ADB چند درجه است؟



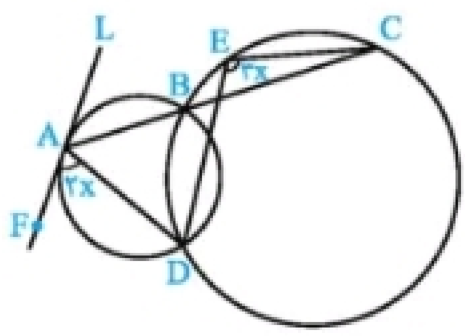
۱) ۲۸
۲) ۳۰
۳) ۳۱
۴) ۳۲

☆۴۷. در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است. امتداد قطر CD و وتر AB در نقطهٔ E متقاطع‌اند. اگر $\hat{D}=36^\circ$ و AE = AO باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۰

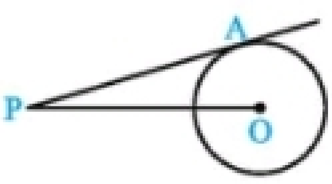
★۴۸. در شکل روبه‌رو دو دایره در نقاط B و D متقاطع‌اند. از نقطهٔ B خطی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با دایره‌ها را A و C می‌نامیم. خط L در نقطهٔ A بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس و نقطهٔ E روی دایرهٔ بزرگ‌تر است. اندازهٔ زاویهٔ DEC چند درجه است؟



۱) ۱۲۰
۲) ۱۰۸
۳) ۱۳۵
۴) ۱۰۰

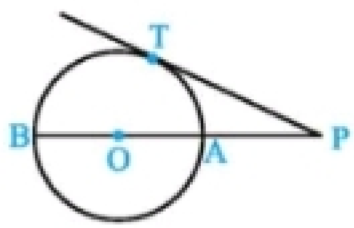
قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

☆۴۹. در شکل روبه‌رو، PO برابر ۵ و شعاع دایره واحد است. طول PA کدام است؟



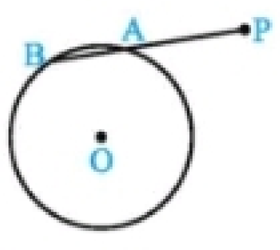
۱) $6\sqrt{2}$
۲) $5\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{5}$
۴) $2\sqrt{6}$

☆۵۰. در شکل مقابل، شعاع دایره ۶، AB قطر و PA = ۴ می‌باشد. طول مماس PT کدام است؟



۱) $4\sqrt{3}$
۲) $5\sqrt{2}$
۳) ۱۴
۴) ۸

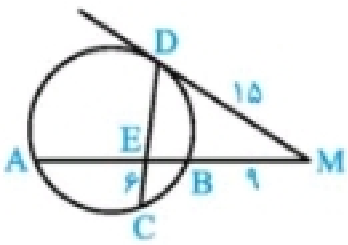
☆۵۱. در شکل مقابل، PA = ۵ ، AB = ۳ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره کدام است؟



۱) $2\sqrt{21}$
۲) $2\sqrt{14}$
۳) $4\sqrt{7}$
۴) $3\sqrt{7}$

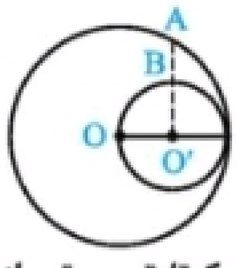
☆۵۲. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد مماس درونی‌اند. اندازهٔ بزرگ‌ترین قطعهٔ مماس که یک سر آن بر روی دایرهٔ بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطهٔ تماس) بر روی دایرهٔ کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

۱) ۹
۲) $8\sqrt{2}$
۳) ۱۲
۴) $8\sqrt{3}$



☆۵۳. در شکل مقابل MD بر دایره مماس است و وتر CD وتر AB را به نسبت ۳ به ۱ قطع کرده است $\left(\frac{AE}{BE}=۳\right)$. با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌های داده‌شده، طول پاره‌خط DE کدام است؟
$(CE=۶ ,\ MB=۹ ,\ MD=۱۵)$

۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

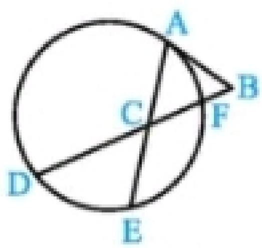


☆۵۴. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایرهٔ بزرگ، O′ مرکز دایرهٔ کوچک، امتداد AB عمود بر OO′ و طول AB برابر $۳(۳-\sqrt{۳})$ سانتی‌متر است. شعاع دایرهٔ بزرگ چند سانتی‌متر است؟

۱) $۳\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$
۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

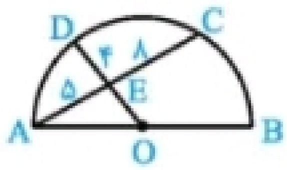
☆۵۵. نقطهٔ C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، که از نقطهٔ C می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$



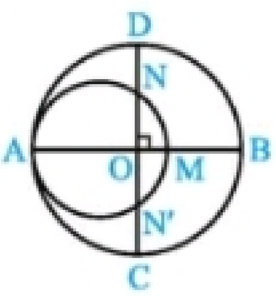
☆۵۶. در شکل مقابل، AB در نقطهٔ A بر دایره مماس است و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر BF = ۱ و DF = ۸ آن‌گاه اندازهٔ CE کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۴/۵ ۴) ۳/۵



☆۵۷. در شکل روبه‌رو، O مرکز نیم‌دایره، AE = ۵، CE = ۸ و DE = ۴ است. اندازهٔ OE کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷
۳) ۵ ۴) ۶



☆۵۸. در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر MB = ۱۶ و ND = ۱۰ باشد، مساحت بین دو دایره کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۱) ۳۲۴π ۲) ۶۲۵π
۳) ۵۷۶π ۴) ۳۳۶π

☆۵۹. در یک دایره نقطهٔ M روی وتر AB چنان قرار دارد که MA = ۱۲ و MB = ۳. طول کوتاه‌ترین وتری که در نقطهٔ M رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

۶۰. در مثلث به اضلاع ۶، ۵ و ۵، دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بزرگ‌ترین ضلع از وسط کمان نظیر آن کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۲

☆۶۱. از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم. طول مماس ۱۶ و طول بزرگ‌ترین قطعهٔ قاطع ۳۲ است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط قاطع ۵ باشد، شعاع دایره کدام است؟

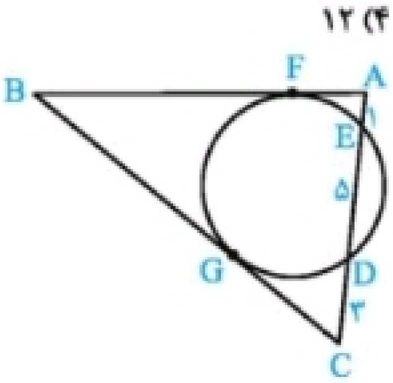
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

☆۶۲. از نقطهٔ M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر آن رسم شده است. اگر طول مماس ۸ و فاصلهٔ نقاط تقاطع قاطع با دایره تا نقطهٔ تماس به ترتیب ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین نقطهٔ تقاطع کدام است؟

۱) $\frac{۲۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

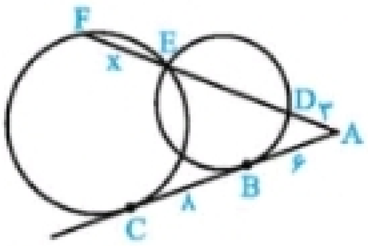
۶۳. اندازهٔ اضلاع مثلث ABC برابر AB = ۸، AC = ۶ و BC = ۷ است. مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در نقطهٔ A امتداد ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اندازهٔ AD کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲



☆۶۴. مطابق شکل یک دایره بر اضلاع AB و BC در نقاط F و G مماس است. اگر دایره ضلع AC را قطع کند و سه پاره‌خط به طول‌های ۱، ۵ و ۳ روی آن ایجاد کند، آن‌گاه |BC − AB| کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۶-\sqrt{۶}$ ۴) $۳-\sqrt{۳}$



★۶۵. در شکل مقابل، خط شامل BC بر دو دایره مماس است و قاطع گذرنده از نقطهٔ E آن را در نقطهٔ A قطع کرده است. اگر $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ و $AD = ۳$ ، آن‌گاه اندازهٔ وتر EF کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) ۴
۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) ۵

☆۶۶. در شکل مقابل y کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

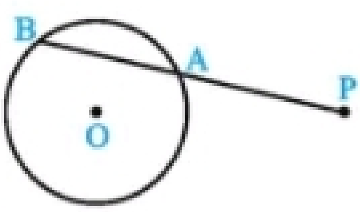
۱) ۶ ۲) ۷/۵
۳) ۸ ۴) ۹

☆۶۷. در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطهٔ C در امتداد AB به فاصلهٔ $CB = ۲\sqrt{۲}$ انتخاب شده است، طول قطعهٔ مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) $۵\sqrt{۲}$

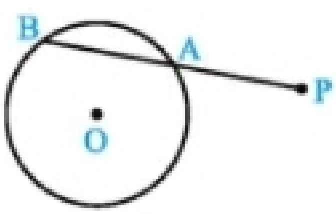
☆۶۸. در شکل مقابل اندازهٔ x چند واحد است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۵



۶۹. نزدیک‌ترین نقطه از دایرهٔ به شعاع ۵ واحد تا نقطهٔ مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$ ، اندازهٔ AB چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) ۹ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۵

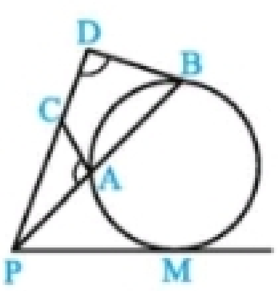


۷۰. فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازهٔ PA چند برابر شعاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱}-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$
۳) $\sqrt{۱۱}-۲$ ۴) $\sqrt{۱۳}-۲$

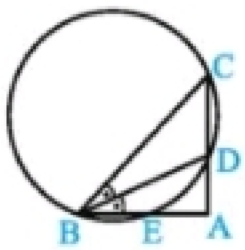
۷۱. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، مماس بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعهٔ مماس چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰



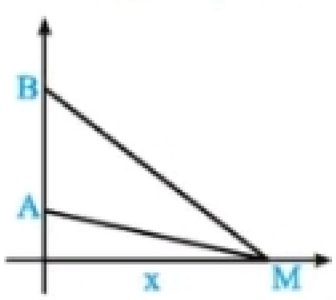
★۷۲. در شکل مقابل، $P\hat{A}C = P\hat{D}B$ ، $PC = ۹$ و $CD = ۷$ ، اندازهٔ مماس PM چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۸
۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) ۱۰
۴) ۱۲



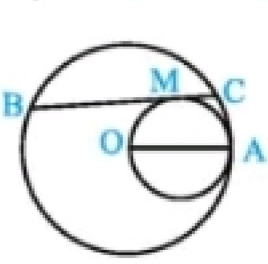
★۷۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ مطابق شکل BD نیمساز زاویهٔ B است. دایرهٔ محیطی مثلث BCD ضلع AB را در E قطع می‌کند. اگر $AC = ۶$ و $AE = ۱$ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) ۱۷/۵ ۲) ۱۷
۳) ۱۶/۵ ۴) ۱۶



★۷۴. دو نقطهٔ A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطهٔ M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود، تا زاویهٔ AMB بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

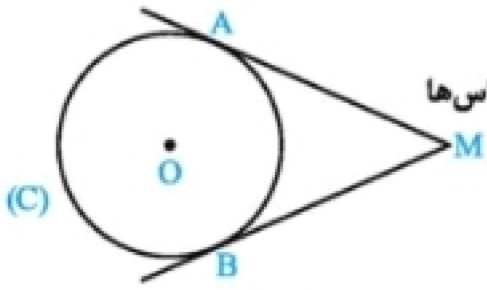
۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) ۷



★۷۵. در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $MO^۲$ ۲) $MA^۲$
۳) $OA^۲$ ۴) $MA.MO$

مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه خارج دایره بر آن



☆۷۶. در شکل مقابل از نقطهٔ M دو مماس MA و MB بر دایرهٔ C(O،۶) رسم شده است. اگر طول مماس‌ها برابر ۸ باشد، دورترین فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقاط دایره کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۴　　۳) ۱۶　　۴) ۱۸

۷۷. از نقطهٔ A دو مماس به طول ۱ بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شود که زاویهٔ بین آن‌ها 120° است. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقاط دایره کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $\sqrt{3}-1$　　۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۸. از نقطهٔ M خارج دایره به شعاع $2\sqrt{3}$ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره ۶ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نقاط تماس کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$　　۲) $3\sqrt{3}$　　۳) $4\sqrt{2}$　　۴) $2\sqrt{6}$

☆۷۹. از نقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2}-1)$ باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

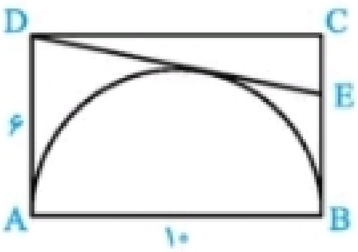
۱) $2\sqrt{2}$　　۲) ۳　　۳) $\sqrt{10}$　　۴) $3\sqrt{2}$

☆۸۰. در مثلث ABC ‏(AB = AC)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر BC = ۶ و ارتفاع AH = ۴ باشد، شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۳/۲۵　　۲) ۳/۵　　۳) ۳/۷۵　　۴) ۴/۵

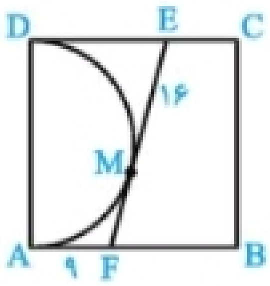
☆۸۱. از نقطهٔ A خارج دایره به شعاع ۱ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویهٔ بین دو مماس 60° باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ بین دایره و مماس‌ها کدام است؟

۱) $2-\frac{\pi}{6}$　　۲) $2-\frac{\pi}{3}$　　۳) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$　　۴) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$



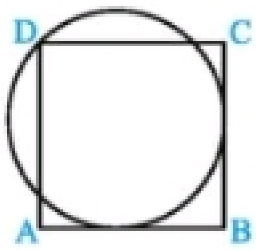
★۸۲. در مستطیل ABCD مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. نقطهٔ E روی ضلع BC چنان است که DE بر نیم‌دایره مماس است. طول پاره‌خط CE کدام است؟

۱) $\frac{9}{5}$　　۲) $\frac{8}{3}$　　۳) $\frac{13}{5}$　　۴) $\frac{11}{6}$



★۸۳. مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و EF در نقطهٔ M بر نیم‌دایره به قطر AD مماس است. اگر ME = ۱۶ و AF = ۹، آن‌گاه مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴۸۴　　۲) ۶۲۵　　۳) ۵۲۹　　۴) ۵۷۶



★۸۴. در شکل مقابل، ABCD مستطیل است و دایره‌ای از رأس D می‌گذرد و بر دو ضلع AB و BC مماس است. اگر AB = ۱۶ و BC = ۱۸ باشد، آن‌گاه شعاع دایره کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۰　　۴) ۱۱

مماس مشترک‌های داخلی و خارجی

☆۸۵. طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، برابر $\sqrt{5}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

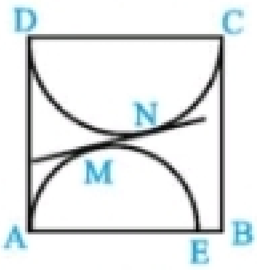
۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

☆۸۶. دو دایرهٔ مماس خارج به شعاع‌های $R_1 = 8$ و $R_2 = 2$ مفروض‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی و O و O' مراکز دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

۱) ۵۰　　۲) ۴۰　　۳) ۳۰　　۴) ۲۰

☆۸۷. دو دایره مماس خارج‌اند. اگر یک زاویهٔ چهارضلعی حاصل از وصل مراکز دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو دایره برابر 60° باشد، آن‌گاه نسبت شعاع‌های دو دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$　　۲) $\sqrt{3}$　　۳) $\frac{3}{2}$　　۴) ۳



☆۸۸. در شکل مقابل مربع به ضلع ۱۴ مفروض است و نیم‌دایره‌ها به قطر CD و به قطر $AE = 12$ می‌باشند. اندازهٔ طول مماس مشترک دو نیم‌دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $4\sqrt{2}$

۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{30}$

☆۸۹. در دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المرکزین d، روابط $3R_1 + 4R_2 = 4d$ و $R_1 + 2R_2 = \frac{11d}{6}$ برقرار است. چند خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

☆۹۰. طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس، $2\sqrt{}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

☆۹۱. اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $12\sqrt{2}$ ۲) $7\sqrt{6}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ (سراسری ریاضی - ۹۱)

☆۹۲. زاویهٔ بین خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۷/۵ و ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ درجه است. طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

۱) ۴۲/۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷/۵ ۴) ۵۰

۹۳. شعاع دو دایرهٔ خارج هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویهٔ بین مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی - ۸۴)

۱) ۵۵ ۲) ۵۷/۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۲/۵

۹۴. طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $3\sqrt{33}$ سانتی‌متر است. کم‌ترین فاصلهٔ نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۵. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۹۶. در دو دایرهٔ متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{OO'}{2}$ می‌باشد. اندازهٔ مماس مشترک محدود به دو نقطهٔ تماس این دو دایره چند واحد است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

۱) ۵ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۴

☆۹۷. دو دایرهٔ $C(O,9)$ و $C'(O',3)$ متقاطع‌اند. اگر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل نقاط تماس مماس مشترک خارجی و مراکز دایره‌ها برابر ۴۸ باشد، طول قسمتی از خط‌المرکزین که بین دو دایره قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

★۹۸. دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ مماس داخل‌اند. چند وتر به طول $4\sqrt{10}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

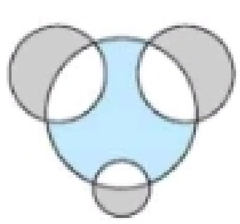
★۹۹. دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۱۳ مماس خارج‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ تماس دو دایره از مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

۱) ۸/۶ ۲) ۹/۱ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۸

★۱۰۰. دو دایرهٔ نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO'، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

۱) متقاطع ۲) مماس ۳) متخارج ۴) نامشخص (سراسری ریاضی - ۹۴)

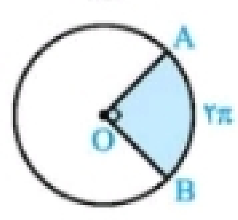
طول کمان، مساحت قطاع



۱۰۱. در شکل مقابل قطرهای دو دایرهٔ مساوی برابر ۴ و قطر دایرهٔ کوچک ۲ است. اگر مجموع مساحت نواحی طوسی با مساحت ناحیهٔ رنگی برابر باشد، آن‌گاه قطر دایرهٔ بزرگ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۶ ۴) ۸

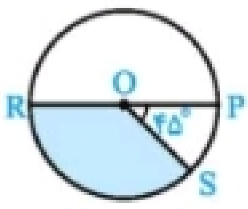


☆۱۰۲. در شکل مقابل، طول کمان AB برابر 2π است. مساحت قطاع AOB کدام است؟

۱) 4π ۲) 16π

۳) 6π ۴) 24π

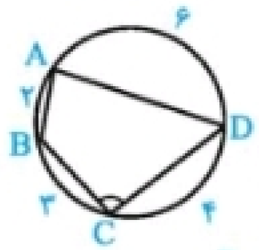
☆۱۰۳. مساحت ناحیهٔ رنگی در دایرهٔ مقابل که اندازهٔ قطرش $RP = ۸$ است، کدام است؟



۱) $۱/۵\pi$ ۲) ۶π

۳) ۴π ۴) ۳π

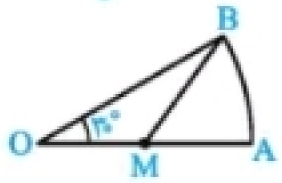
☆۱۰۴. در چهارضلعی محاطی ABCD مطابق شکل طول کمان‌ها بر حسب سانتی‌متر نوشته شده است. اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۹۸ ۲) ۸۴

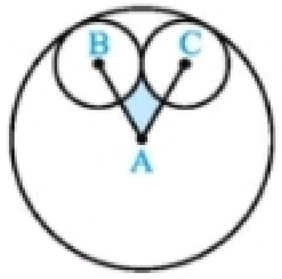
۳) ۹۰ ۴) ۹۶

☆۱۰۵. در شکل مقابل OAB قطاعی از یک دایره با زاویهٔ مرکزی °۳۰ است. اگر M وسط OA باشد، نسبت مساحت مثلث OMB به مساحت قطاع AOB کدام است؟



۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}\pi}$ ۲) $\frac{۲}{۳\pi}$ ۳) $\frac{۳}{۲\pi}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$

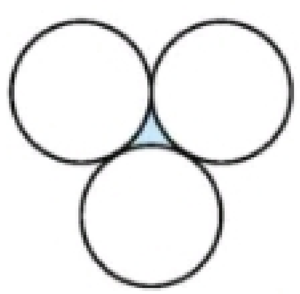
۱۰۶. سه دایره مطابق شکل دوبه‌دو بر هم مماس هستند و A، B و C مرکز دایره‌ها می‌باشند. اگر شعاع دایرهٔ بزرگ ۳ و شعاع‌های دایره‌های کوچک برابر ۱ باشند، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

۳) $۲\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

☆۱۰۷. در شکل مقابل سه دایره به شعاع‌های مساوی، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. اگر محیط هر دایره ۳۶ باشد، محیط ناحیهٔ رنگی کدام است؟



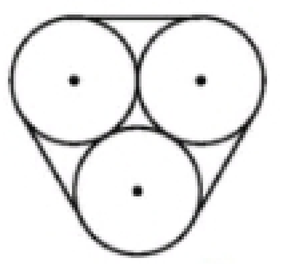
۱) ۱۸ ۲) ۶

۳) ۳۶ ۴) ۱۲

☆۱۰۸. در پرسش قبل، اگر شعاع دایره‌ها برابر یک باشد، مساحت ناحیهٔ بین آن‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۳) $\pi - \sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳} - \pi$

☆۱۰۹. سه دایره مطابق شکل با یک طناب بسته شده‌اند. اگر شعاع دایره‌ها یک باشد، طول طناب کدام است؟



۱) $۲\pi + ۲$ ۲) $۳\pi + ۴$

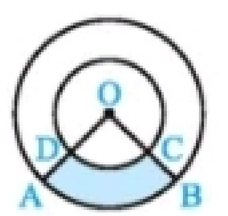
۳) $۶ + ۲\pi$ ۴) $۶\pi + ۲$

۱۱۰. در شکل مقابل، نیم‌دایره به قطر AB می‌باشد. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟

۱) $۲\pi - ۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\pi - ۲\sqrt{۳}$

۳) $۴\pi - ۳\sqrt{۳}$ ۴) $۳\pi - ۳\sqrt{۳}$

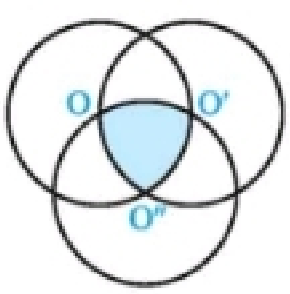
۱۱۱. دو دایره به مرکز O مطابق شکل چنان‌اند که $۲OC = ۳BC$. اگر مساحت ناحیهٔ رنگی ۳۲ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت قطاع OCD چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) ۲۴ ۲) ۲۰

۳) ۱۸ ۴) ۱۶

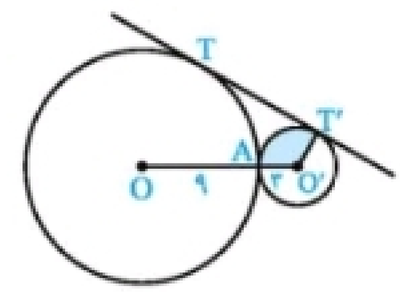
☆۱۱۲. در شکل مقابل سه دایرهٔ مساوی به شعاع واحد از مرکز یکدیگر می‌گذرند، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\pi - \sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\pi - \sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۱۳. در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ رنگی چند برابر π است؟



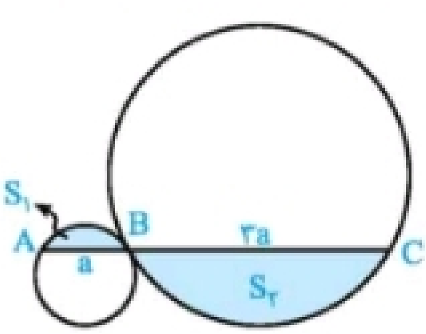
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۶

۱۱۴. در شکل مقابل دو دایره مماس خارج هستند. اگر $S_1 + S_2 = 40\pi$ آن‌گاه S_1 کدام است؟



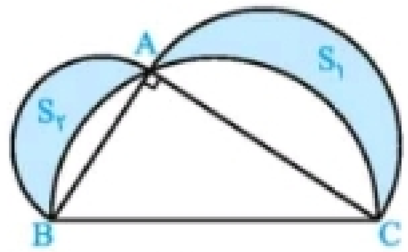
۱) 5π

۲) 4π

۳) 6π

۴) 8π

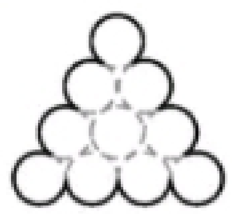
★۱۱۵. در شکل روبه‌رو، ABC مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع $AB = 5$ و $AC = 12$ است. سه نیم‌دایره به قطرهای AC، BC و AB رسم شده‌اند. حاصل $S_1 + S_2$ کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)



۱) ۶۰ ۲) ۳۰

۳) 20π ۴) 10π

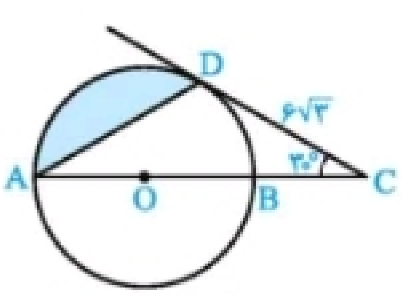
★۱۱۶. در شکل روبه‌رو، ۱۰ دایره به شعاع یک، مماس بر هم قرار گرفته‌اند. محیط شکل بدون احتساب کمان‌های نقطه‌چین کدام است؟



۱) 8π ۲) 9π

۳) 10π ۴) 11π

★۱۱۷. مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل مقابل کدام است؟



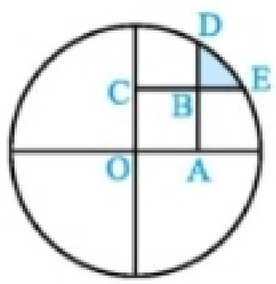
۱) $12\pi - 18$

۲) $6\pi - 12\sqrt{3}$

۳) $18\pi - 6\sqrt{3}$

۴) $12\pi - 9\sqrt{3}$

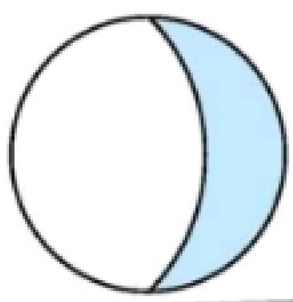
★۱۱۸. دایرهٔ روبه‌رو، به شعاع ۲ و مربع OABC به ضلع واحد است. امتداد AB و BC به ترتیب دایره را در نقاط D و E قطع می‌کنند. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}(2 - \sqrt{3})$

۳) $\pi(2 - \sqrt{3})$ ۴) $\frac{\pi}{3} - 1 + \sqrt{3}$

★۱۱۹. در شکل مقابل کمانی از یک دایرهٔ دیگر رسم شده است که مرکز آن روی دایره مفروض است و از دو سر قطری از آن می‌گذرد. نسبت مساحت غیررنگی به مساحت رنگی کدام است؟



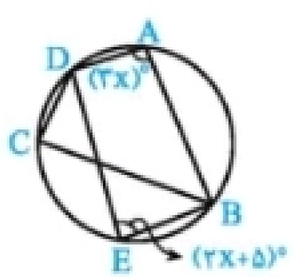
۱) $\pi - 1$ ۲) π

۳) $\sqrt{2}\pi - 1$ ۴) $\pi - \sqrt{2}$

قسمت سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

چهارضلعی‌های محاطی

☆۱۲۰. در دایرهٔ مقابل، $\hat{A} = (3x)^\circ$ و $\hat{E} = (2x+5)^\circ$. اندازهٔ $D\hat{C}B$ چند درجه است؟



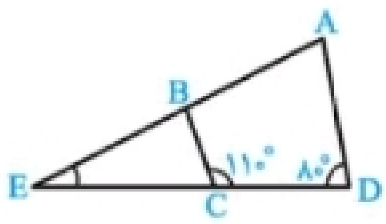
۱) ۵۵

۲) ۶۰

۳) ۷۵

۴) ۷۰

☆۱۲۱. در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محاطی است و اندازهٔ دو زاویهٔ آن داده شده است. زاویهٔ برخورد امتداد ضلع‌های AB و CD چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۴۰

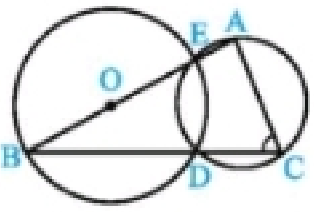
☆۱۲۲. در چهارضلعی محاطی ABCD، $A\hat{B}D = A\hat{D}B = C\hat{A}D$ و $B\hat{A}C = 30^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ ACD چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

☆۱۲۳. طول دو ضلع مجاور یک چهارضلعی محاطی ۴ و ۸ می‌باشد. اگر قطرهای این چهارضلعی بزرگ‌ترین مقدار خود را داشته باشند، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محیطی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۵

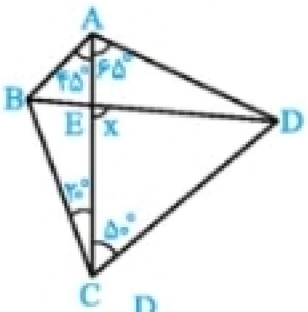
☆۱۲۴. در شکل مقابل، دو دایره متقاطع‌اند و امتداد قطر BE از دایرهٔ بزرگ، دایرهٔ کوچک را در A و امتداد وتر BD آن را در C قطع کرده است. با فرض $\widehat{C}=۶۸^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟



۱) ۲۳ ۲) ۲۲

۳) ۲۱ ۴) ۲۴

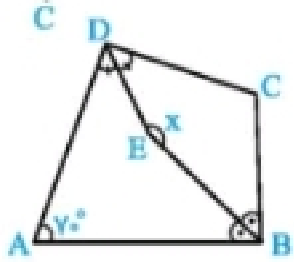
☆۱۲۵. در چهارضلعی ABCD مطابق شکل مقدار x کدام ست؟



۱) ۸۵° ۲) ۷۰°

۳) ۷۵° ۴) ۸۰°

☆۱۲۶. در چهارضلعی محاطی ABCD، زاویهٔ برخورد نیمسازهای زوایای B و D چند درجه است؟



۱) ۱۶۰

۲) ۱۵۰

۳) ۱۴۵

۴) ۱۳۵

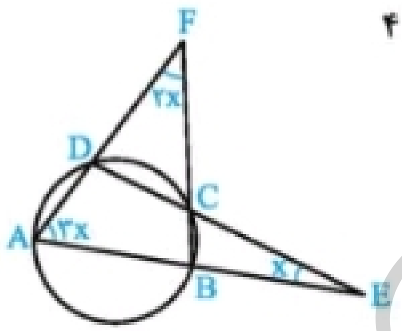
۱۲۷. چهارضلعی ABCD محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیک‌ترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $\widehat{D}>\widehat{C}$ ۲) $\widehat{B}>\widehat{C}$ ۳) $\widehat{A}>\widehat{B}$ ۴) $\widehat{B}>\widehat{D}$

☆۱۲۸. در یک چهارضلعی محاطی، اندازهٔ یک قطر ۱۵ می‌باشد که قطر دیگر چهارضلعی را به دو پاره‌خط به اندازه‌های ۴ و ۹ تقسیم کرده است. نسبت پاره‌خط‌های ایجادشده روی قطر بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۴

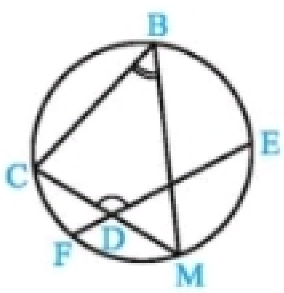
☆۱۲۹. در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



۱) ۱۰° ۲) ۱۵°

۳) ۲۰° ۴) ۱۸°

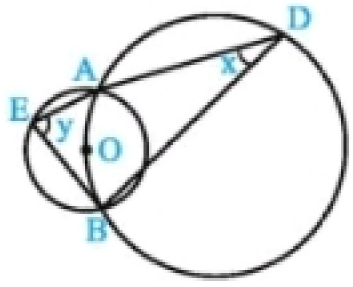
★۱۳۰. در شکل روبه‌رو، M وسط $\widehat{EF}$ و $\widehat{BC}=۵۰^\circ$ می‌باشد، اندازهٔ $\widehat{B}+\widehat{D}$ چند درجه است؟



۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۵

۳) ۱۸۰ ۴) ۲۳۰

۱۳۱. در شکل مقابل، دایرهٔ بزرگ‌تر از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر می‌گذرد. مقدار y کدام است؟



۱) ۲x

۲) ۱۸۰ − ۲x

۳) ۱۸۰ − x

۴) $۹۰-\frac{x}{۲}$

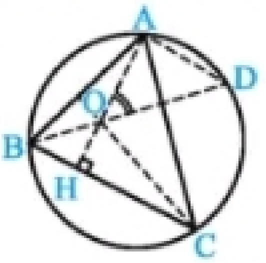
★۱۳۲. در مثلث ABC، داریم $\widehat{B}=۵۰^\circ$ و $\widehat{C}=۶۰^\circ$، نیمساز داخلی زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ M متقاطع‌اند. زاویهٔ $M\widehat{B}C$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

★۱۳۳. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) مستطیل ۲) محاطی ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) لوزی

★۱۳۴. در شکل روبه‌رو، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است، زاویهٔ AOD برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)



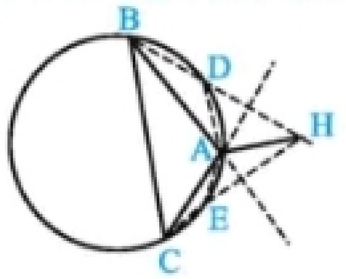
۱) $O\hat{B}C$

۲) $C\hat{A}D$

۳) $O\hat{A}C$

۴) $A\hat{D}O$

★۱۳۵. در شکل روبه‌رو، H محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است، زاویهٔ AHD، با کدام زاویه برابر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)



۱) $C\hat{A}E$

۲) $A\hat{B}C$

۳) $A\hat{D}H$

۴) $A\hat{H}C$

★۱۳۶. ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و اندازهٔ یک ساق برابر ۵ واحد مفروض است. اگر این ذوزنقه قابل محاط در دایره باشد، طول قطعهٔ مماس که از نقطهٔ تلاقی دو ساق بر دایرهٔ محیطی آن رسم شود، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

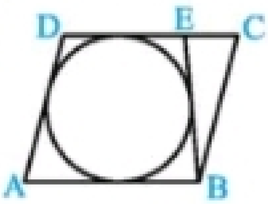
۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۵\sqrt{۶}$ ۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

★۱۳۷. در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ B بر مماس دلخواه دایره، عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $A\hat{D}B = ۳۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OAD چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

چندضلعی‌های محیطی و منتظم

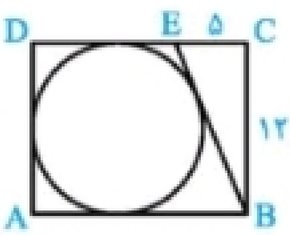
☆۱۳۸. در شکل زیر، ABCD متوازی‌الاضلاع است و دایره بر اضلاع ذوزنقه مماس است. اگر AB = ۸ و DE = ۵، آن‌گاه محیط مثلث BEC کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

☆۱۳۹. در شکل مقابل، ABCD مستطیل و دایره بر اضلاع ذوزنقه مماس است. طول ضلع AB کدام است؟



۱) ۱۳

۲) ۱۵

۳) ۱۴

۴) ۱۶

☆۱۴۰. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی و یک ساق ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی به ترتیب ۷ و ۱۶ است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۲۰

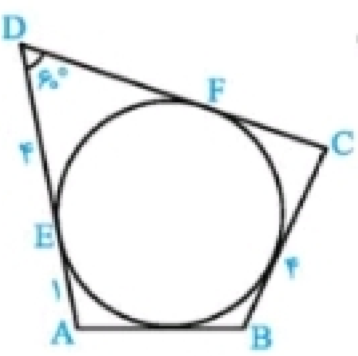
☆۱۴۱. در یک ذوزنقهٔ محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط ذوزنقه کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) ۳۶ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

☆۱۴۲. چهارضلعی ABCD محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچک‌ترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری همواره درست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\hat{C} > \hat{A}$ ۲) $\hat{B} < \hat{A}$ ۳) $\hat{D} < \hat{C}$ ۴) $\hat{D} < \hat{B}$

☆۱۴۳. در چهارضلعی محیطی مقابل $\hat{D} = ۶۰^\circ$، DE = ۴، AE = ۱ و BC = ۴ است. مساحت چهارضلعی کدام است؟



۱) $۹\sqrt{۳}$

۲) $۱۵\sqrt{۳}$

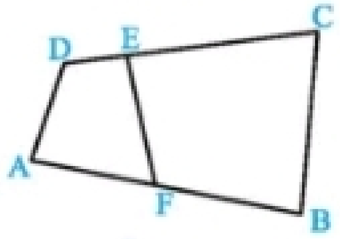
۳) $۶\sqrt{۳}$

۴) $۱۲\sqrt{۳}$

☆۱۴۴. یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R = ۳ محیط است. اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد، طول ساق آن کدام است؟

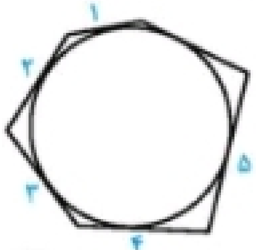
۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۸/۵

۱۴۵. اندازهٔ اضلاع چهارضلعی ABCD، $AB = ۲۰$، $BC = ۱۴$، $CD = ۱۸$ و $AD = ۱۰$ است. اگر پاره‌خط EF مطابق شکل آن را به دو چهارضلعی محیطی تقسیم کند، اندازهٔ EF کدام است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) ۷
۴) ۶

۱۴۶. اندازهٔ ۵ ضلع یک شش‌ضلعی محیطی به‌صورت مقابل است. اندازهٔ ضلع ششم کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

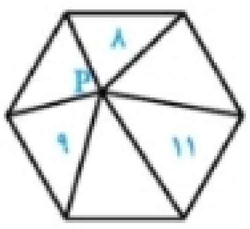
۱۴۷. اگر بدانیم مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۲}$ است، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محاطی شش‌ضلعی منتظم به ضلع $۶\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۴۸. اگر بدانیم مساحت یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $۲a^{۲}(\sqrt{۲}+۱)$ و شعاع دایرهٔ محاطی آن برابر $۲\sqrt{۲}$ است، آن‌گاه مساحت هشت‌ضلعی منتظم کدام است؟

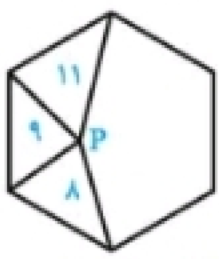
۱) $۳۲\sqrt{۲} - ۳۲$
۲) $۴۸\sqrt{۲} - ۴۸$
۳) $۱۶\sqrt{۲} - ۱۶$
۴) $۶۴\sqrt{۲} - ۶۴$

☆**۱۴۹.** در شش‌ضلعی منتظم مقابل نقطهٔ P داخل آن چنان است که مساحت ۳ مثلث، مشخص شده است. مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟



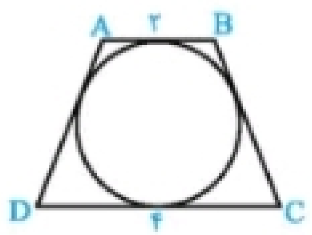
۱) ۵۶
۲) ۸۴
۳) ۷۲
۴) ۶۰

★**۱۵۰.** در شش‌ضلعی منتظم مقابل، نقطهٔ P داخل آن چنان است که مساحت ۳ مثلث مشخص شده است. مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟



۱) ۵۶
۲) ۶۰
۳) ۷۲
۴) ۸۴

☆**۱۵۱.** در شکل مقابل، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD بر دایره محیط شده است، مساحت آن کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۲}$
۲) ۶
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) ۸

☆**۱۵۲.** ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{۳۲}{۳}$ واحد بر دایره‌ای محیط است. کوتاه‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$

(سراسری ریاضی- ۸۷)

☆**۱۵۳.** ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این ذوزنقه $\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) $۸\sqrt{۳}$

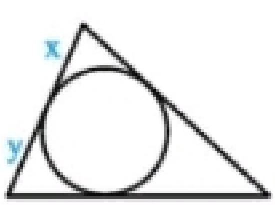
۱۵۴. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای به طول قاعده‌های $\frac{۲۱}{۲}$ و ۱۴ واحد بر دایره‌ای محیط است. بزرگ‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۲

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

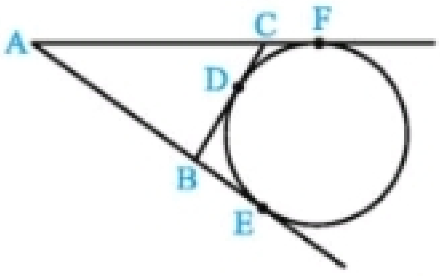
☆**۱۵۵.** دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸، در نقطهٔ مماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

☆۱۵۶. در شکل مقابل، با تغییر نقطهٔ تماس D بر روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت E و F، مساحت و محیط مثلث ABC کدام وضع را دارند؟



۱) محیط متغیر، مساحت متغیر
۲) محیط متغیر، مساحت ثابت
۳) محیط ثابت، مساحت ثابت
۴) محیط ثابت، مساحت متغیر

☆۱۵۷. شعاع دایرهٔ محاطی بیرونی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۸\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☆۱۵۸. طول ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایره برابر $۷\sqrt{۳}$ است. شعاع این دایره چند است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۴

☆۱۵۹. اگر r و R به ترتیب شعاع‌های دوایر محاطی و محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، کدام تساوی درست است؟

۱) $R = r\sqrt{۳}$ ۲) $R = r\sqrt{۲}$ ۳) $R = ۲r$ ۴) $R = r\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۶۰. مساحت دایرهٔ محاطی داخلی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ۹π است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

☆۱۶۱. اگر شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع را R و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی آن را r_a بنامیم، $\frac{R}{r_a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☆۱۶۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه، دایرهٔ محاطی داخلی، وتر را به دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۶ تقسیم کرده است. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۳۰

☆۱۶۳. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $ABC(\hat{C} = ۹۰^\circ)$ برابر ۳ می‌باشد. اگر $AC = ۸$ باشد، آن‌گاه محیط مثلث ABC کدام است؟ (مشابه سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۰

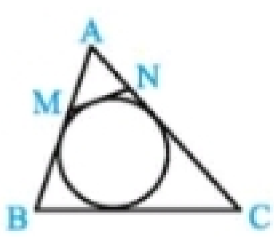
☆۱۶۴. در مثلث ABC اندازهٔ اضلاع $AC = ۴$، $BC = ۳$ و $AB = ۵$ است. نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی با بزرگ‌ترین ضلع مثلث به چه فاصله از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث واقع است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۶۵. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۱۵ و ۱۱ است و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع سوم، آن را به نسبت ۲ به ۳ قطع می‌کند. محیط مثلث کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۵۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۵

۱۶۶. در شکل روبه‌رو، اضلاع مثلث ABC برابر $BC = ۶$، $AB = ۵$ و $AC = ۷$ است و دایره بر اضلاع چهارضلعی BMNC مماس است، محیط مثلث AMN کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۶۷. در مثلث ABC که طول اضلاع آن $a = ۵$، $b = ۱۲$ و $c = ۱۳$ می‌باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع BC کدام است؟

۱) $r_a = \frac{۳}{۲}$ ۲) $r_a = \frac{۶}{۵}$ ۳) $r_a = ۳$ ۴) $r_a = ۶$

☆۱۶۸. مساحت مثلثی ۸۴ و محیط آن ۴۲ است. حاصل $\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$ کدام است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☆۱۶۹. اندازه‌های ارتفاع‌های مثلثی ۳، ۴ و ۵ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث کدام است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

۱) $\frac{۶۰}{۴۸}$ ۲) $\frac{۶۰}{۴۹}$ ۳) $\frac{۶۰}{۴۷}$ ۴) $\frac{۶۰}{۴۶}$

☆۱۷۰. اگر در مثلثی $b + c = ۲a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{h_a}{r}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆ **۱۷۱.** شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث به اضلاع ۵، ۵ و ۶ کدام است؟

۱) ۵/۵ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

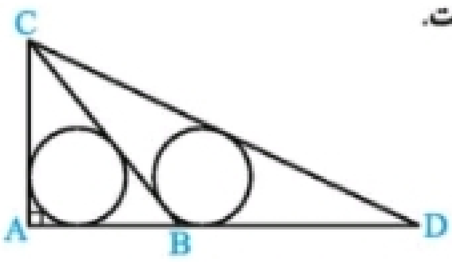
۱۷۲. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث به اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۲۴ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

★ **۱۷۳.** در مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۳ واحد است. طول قاعدهٔ این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

★ **۱۷۴.** مطابق شکل طول شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABC و BCD برابر است. اگر $AB=۳$ و $AC=۴$ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط BD کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

کمان حاوی یا زاویهٔ دید — ویژهٔ علاقمندان

۱۷۵. در مثلث ABC، $BC=۸$ و $\widehat{A}=۳۰^\circ$، شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۱۷۶. در مثلث ABC، $BC=۸\sqrt{۳}$ و $\widehat{A}=۳۰^\circ$، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث از ضلع BC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۷۷. مثلث ABC با شرایط $\widehat{A}=۴۵^\circ$ و $BC=۸$ مفروض است. فاصلهٔ BC تا دورترین رأس زاویهٔ $B\widehat{M}C=۱۳۵^\circ$، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}-۴$ ۲) $۴\sqrt{۲}-۲$ ۳) $۲\sqrt{۲}-۱$ ۴) $۲\sqrt{۲}-۲$

۱۷۸. در مثلث ABC، $BC=۸$ و $\widehat{A}=۶۰^\circ$، طول میانهٔ AM کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۷۹. در مثلث ABC، $BC=۴$ و $\widehat{A}=۶۰^\circ$. ماکزیمم مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۸ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۸۰. با فرض $AB=۲\sqrt{۲}$ و $A\widehat{M}B=۴۵^\circ$، چند نقطهٔ M در صفحه یافت می‌شود که از خط شامل پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۳ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۸۱. با فرض $AB=۴$ و $A\widehat{M}B=۶۰^\circ$. چند نقطهٔ M در صفحه یافت می‌شود که از وسط پاره‌خط AB به فاصلهٔ $۲\sqrt{۳}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۸۲. مثلثی با معلومات $a=۴\sqrt{۳}$، $\widehat{A}=۱۲۰^\circ$ و h_a قابل رسم است. h_a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۳. در مثلث ABC، $BC=۶$ و $\widehat{A}=۳۰^\circ$. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن از ضلع BC کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۴. دو نقطهٔ ثابت B و C و نقطهٔ متحرک A، سه رأس مثلث‌اند. اگر $BC=۶$، $\widehat{A}=۶۰^\circ$ و نیمساز زاویهٔ A همواره از نقطهٔ ثابتی مانند D، بگذرد، فاصلهٔ D از نقطهٔ B چقدر است؟ (سراسری ریاضی- ۸۶)

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۱۸۵. مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC=۸$ و ارتفاع $AH=h$ و زاویهٔ $\widehat{A}=۸۰^\circ$، قابل رسم است. بیش‌ترین مقدار h، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $۴\sin ۴۰^\circ$ ۲) $۴\cos ۴۰^\circ$ ۳) $۴\tan ۴۰^\circ$ ۴) $۴\cot ۴۰^\circ$

۱۸۶. در رسم مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC=۱۲$، میانهٔ $AM=۸$ و زاویهٔ $\widehat{A}=۶۰^\circ$ ، فاصلهٔ مرکزهای دو دایرهٔ تعیین‌کنندهٔ رأس A، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

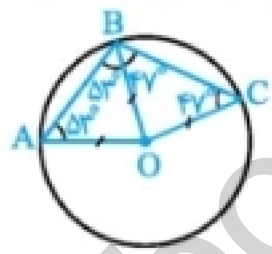
پاسخ فصل ۱
دایره

۱

$$\widehat{AMB}=۴\widehat{ANB}\Rightarrow \widehat{AMB}+\widehat{ANB}=۵\widehat{ANB}$$

$$\Rightarrow ۵\widehat{ANB}=\text{محیط دایره}\Rightarrow \widehat{ANB}=\frac{\text{محیط دایره}}{۵}$$

۲



نقطهٔ O را به B وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOB و BOC متساوی‌الساقین‌اند، زیرا $OA=OB=OC$، پس:

$$A\hat{O}C=A\hat{O}B+B\hat{O}C=۱۸۰^\circ-۲\times۵۳^\circ+۱۸۰^\circ-۲\times۴۷^\circ$$

$$=۳۶۰^\circ-۱۰۶^\circ-۹۴^\circ=۱۶۰^\circ$$

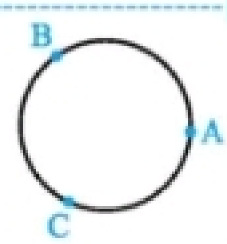
۳

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{AC}=۳۶۰^\circ\Rightarrow x+۲۲^\circ+x+۲۸^\circ+x-۵^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x=۳۱۵^\circ\Rightarrow x=۱۰۵^\circ$$

$$\widehat{AB}=x+۲۲^\circ=۱۰۵^\circ+۲۲^\circ=۱۲۷^\circ$$

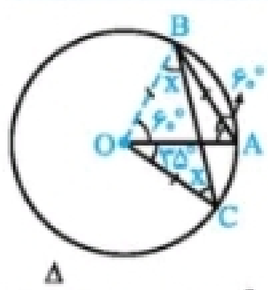
۴



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ACB}=۴\widehat{AB}-۴۰^\circ\\ \widehat{ACB}=۳۶۰^\circ-\widehat{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow ۵\widehat{AB}=۴۰۰^\circ\Rightarrow\widehat{AB}=۸۰^\circ\ ,\ \widehat{ACB}=۲۸۰^\circ$$

$$\widehat{ACB}-\widehat{AB}=۲۸۰^\circ-۸۰^\circ=۲۰۰^\circ$$

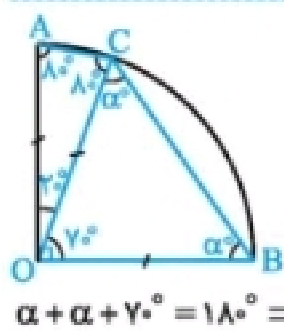
۵



O را به B وصل می‌کنیم، مثلث AOB متساوی‌الاضلاع و مثلث BOC متساوی‌الساقین است. داریم:

$$\overset{\Delta}{BOC}:x+x+۶۰^\circ+۳۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲x=۸۵^\circ\Rightarrow x=۴۲/۵^\circ$$

۶

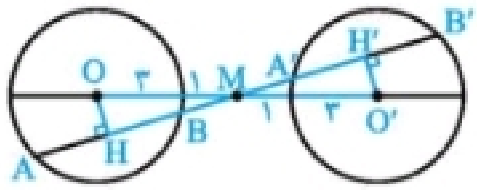


O را به C وصل می‌کنیم، دو مثلث متساوی‌الساقین OAC و OBC پدید می‌آیند. مطابق شکل داریم:

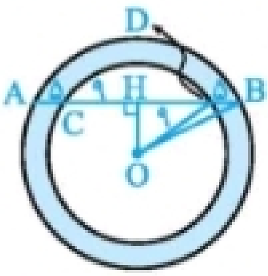
$$\alpha+\alpha+۷۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۱۱۰^\circ\Rightarrow\alpha=۵۵^\circ$$

۷

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و O′MH′ به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت‌اند، پس $OH=O'H'$، یعنی مرکز دایره‌ها از وترها به یک فاصله‌اند، پس دو وتر برابرند. $AB=A'B'=\sqrt{۲}$



۸



از مرکز دایره بر وتر داده‌شده عمود می‌کنیم، داریم:

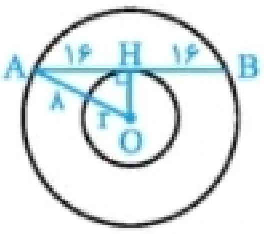
$$\left.\begin{array}{l}OB^۲=OH^۲+BH^۲\\ OD^۲=OH^۲+DH^۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow OB^۲-OD^۲=BH^۲-DH^۲$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ بین دو دایره}=\pi OB^۲-\pi OD^۲=\pi(BH^۲-DH^۲)$$

$$=\pi((۹+۵)^۲-۹^۲)=۱۱۵\pi$$

۹



مفروضات پرسش روی شکل مشخص است. داریم:

$$(r+۸)^۲=r^۲+۱۶^۲$$

$$\Rightarrow r^۲+۱۶r+۶۴=r^۲+۲۵۶$$

$$\Rightarrow ۱۶r=۲۵۶-۶۴\Rightarrow r=۱۶-۴=۱۲$$

۱۰

عمود OH وتر AB را نصف می‌کند و چون $AB=AC+BC=۱۴+۲=۱۶$ است، پس نتیجه می‌شود $AH=BH=۸$ و $CH=۸-۲=۶$.

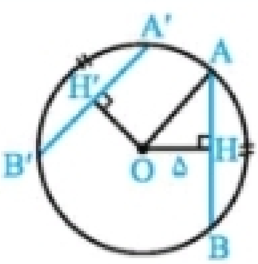
حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH داریم:

$$OH^۲=OC^۲-CH^۲=۱۰^۲-۶^۲=۸^۲\Rightarrow OH=۸$$

$$\overset{\Delta}{AOH}:R^۲=OH^۲+AH^۲=۸^۲+۸^۲=۱۲۸$$

$$\Rightarrow\text{مساحت دایره}=\pi R^۲=۱۲۸\pi$$

۱۱



با توجه به شکل، چون کمان‌های نظیر دو وتر برابرند، پس دو وتر مساوی‌اند و طبق فرض $OH=۵$ است، داریم:

$$۳x+۹=۴x+۴\Rightarrow x=۵$$

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲=۵^۲+(\frac{۴\times۵+۴}{۲})^۲$$

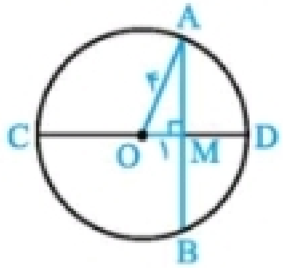
$$=۵^۲+۱۲^۲=۱۳^۲\Rightarrow OA=۱۳$$

۱۲

وتر AB عمود بر قطر CD در نقطهٔ M، کوچک‌ترین وتر گذرنده از M است. داریم:

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \Rightarrow 4^2 = 1^2 + AM^2$$

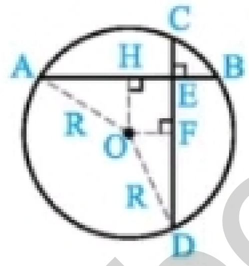
$$\Rightarrow AM^2 = 15 \Rightarrow AM = \sqrt{15}$$



پس $AB = 2AM = 2\sqrt{15}$، چون $2 < 2\sqrt{15}$ است پس نمی‌توان وتری به طول ۲ رسم کرد که از نقطهٔ M بگذرد.

۱۳

از O مرکز دایره بر وترها عمود می‌کنیم، وترها نصف می‌شوند. داریم:



$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$$

$$\Rightarrow HE = AE - AH = 6 - 5 = 1$$

$$\Rightarrow OF = HE = 1$$

با فرض $DE = 2x$، داریم:

$$CF = DF = \frac{CD}{2} = \frac{CE+DE}{2} = \frac{2+2x}{2} = x+1$$

$$OH = EF = DE - DF = 2x - x - 1 = x - 1$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AOH و DOF، مقدار x و سپس R را می‌یابیم:

$$\begin{cases} OA^2 = AH^2 + OH^2 \\ OD^2 = DF^2 + OF^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = 5^2 + (x-1)^2 \\ R^2 = (x+1)^2 + 1^2 \end{cases}$$

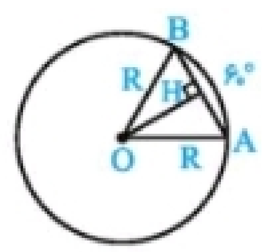
$$\Rightarrow 25 + (x-1)^2 = (x+1)^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow 25 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$$

$$R^2 = 5^2 + (x-1)^2 = 5^2 + (6-1)^2 = 2 \times 5^2 \Rightarrow R = 5\sqrt{2}$$

۱۴

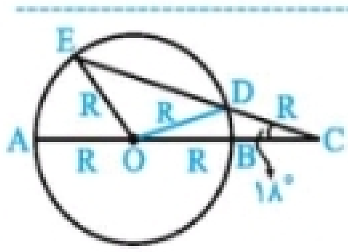
بنابه فرض $\widehat{AB} = 60^\circ$ است پس اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن نیز برابر 60° است، یعنی $A\hat{O}B = 60^\circ$. از طرفی مثلث AOB متساوی‌الساقین است. زیرا $OA = OB = R$ در نتیجه مثلث AOB متساوی‌الاضلاع می‌شود و شعاع دایره برابر $R = AB = 12$ است و نهایتاً OH ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع AOB می‌باشد، پس داریم:



$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

۱۵

شعاع OD را رسم می‌کنیم. داریم:



$$CD = OD = R \Rightarrow B\hat{O}D = \hat{C} = 18^\circ$$

$\overset{\Delta}{OCD}$ زاویهٔ خارجی $O\hat{D}E = B\hat{O}D + \hat{C} = 18^\circ + 18^\circ = 36^\circ$

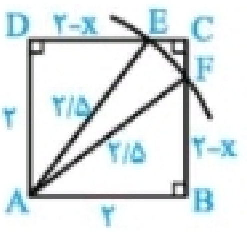
$$OD = OE = R \Rightarrow \hat{E} = O\hat{D}E = 36^\circ$$

و نهایتاً بنابه زاویهٔ خارجی در مثلث OEC داریم:

$$A\hat{O}E = \hat{E} + \hat{C} = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$$

۱۶

فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع دایره و مربع، $CE = CF$ می‌باشد که مقدار آن را x می‌نامیم؛ در نتیجه $DE = BF = 2 - x$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF داریم:



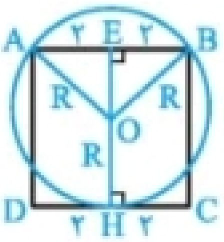
$$AF^2 = AB^2 + BF^2 \Rightarrow 2.5^2 = 2^2 + BF^2$$

$$\Rightarrow BF^2 = 6.25 - 4 = 2.25 \Rightarrow BF = 1.5$$

$$\Rightarrow 2 - x = 1.5 \Rightarrow x = 2 - 1.5 = 0.5$$

۱۷

مرکز دایره روی عمودمنصف‌های اضلاع AB و CD قرار دارد و $OH = OA = OB = R$ است. داریم:



$$OE = EH - OH = 4 - R$$

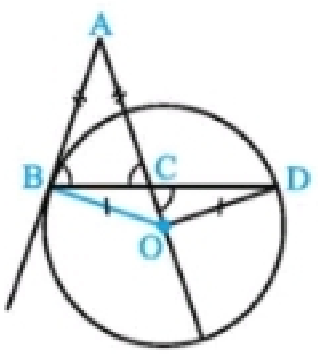
$$OA^2 = OE^2 + AE^2 \Rightarrow R^2 = (4-R)^2 + 2^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 16 - 8R + R^2 + 4$$

$$\Rightarrow 8R = 20 \Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2.5$$

۱۸

O را به B وصل می‌کنیم. شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، پس:



$$O\hat{B}D = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$$

$$OB = OD \Rightarrow \hat{D} = O\hat{B}D = 90^\circ - \hat{C}$$

$$O\hat{C}D + \hat{D} = \hat{C} + 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ$$

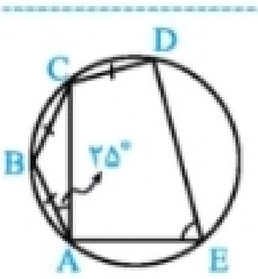
$$\Rightarrow C\hat{O}D = 90^\circ$$

یعنی مثلث OCD قائم‌الزاویه است.

۱۹

$$60^\circ = \frac{2x + 50^\circ + 20^\circ}{2} \Rightarrow 2x + 70^\circ = 120^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$

۲۰



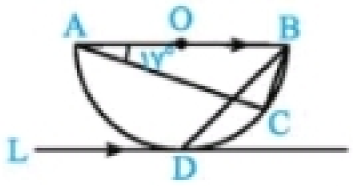
چون وترهای AB، BC و CD برابرند، پس کمان‌های آن‌ها نیز برابر است. یعنی $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$. داریم:

محاطی $B\hat{A}C = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 25^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ$

زاویهٔ محاطی $\hat{E} = \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD}}{2}$

$$= \frac{50^\circ + 50^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

۲۱ — ۱ ۲ **۳** ۴

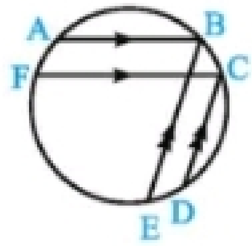


دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ برابر ۹۰° هستند و $\widehat{BC}=۲\hat{A}=۳۴^\circ$، در نتیجه:

$$C\hat{B}D=\frac{\widehat{CD}}{۲}=\frac{\widehat{BD}-\widehat{BC}}{۲}=\frac{۹۰^\circ-۳۴^\circ}{۲}=۴۵^\circ-۱۷^\circ=۲۸^\circ$$ محاطی

۲۲ — ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر فرض کنیم $\widehat{AF}=\alpha$ نتیجه می‌شود $\widehat{BC}=\widehat{DE}=\alpha$ و داریم:



$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DE}+\widehat{EF}+\widehat{AF}=۳۶۰^\circ$$

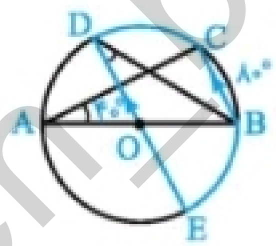
$$\Rightarrow ۶۰^\circ+\alpha+۴۰^\circ+\alpha+۱۱۰^\circ+\alpha=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\alpha=۱۵۰^\circ \Rightarrow \alpha=۵۰^\circ$$

زاویهٔ محاطی $F\hat{C}D=\frac{\widehat{DF}}{۲}=\frac{\widehat{EF}+\widehat{DE}}{۲}=\frac{۱۱۰^\circ+۵۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$

۲۳ — ۱ **۲** ۳ ۴

قطر DE را رسم می‌کنیم. بنابه فرض $DE \parallel BC$ پس $\widehat{CD}=\widehat{BE}$ و داریم:

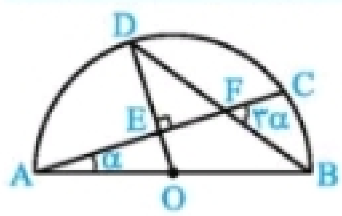


$$\widehat{CD}+\widehat{BC}+\widehat{BE}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\widehat{BE}+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{BE}=۵۰^\circ$$

$$\hat{D}=\frac{\widehat{BE}}{۲}=\frac{۵۰^\circ}{۲}=۲۵^\circ$$

۲۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**



مطابق شکل $B\hat{F}C$ زاویهٔ خارجی مثلث ABF است، پس داریم:

$$B\hat{F}C=\hat{A}+\hat{B}\Rightarrow ۳\alpha=\alpha+\hat{B}\Rightarrow \hat{B}=۲\alpha$$

زاویهٔ محاطی $\hat{B}=\frac{\widehat{AD}}{۲}\Rightarrow ۲\alpha=\frac{\widehat{AD}}{۲}\Rightarrow \widehat{AD}=۴\alpha$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}D=\widehat{AD}=۴\alpha$

و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOE داریم:

$$\alpha+۴\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow ۵\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow \alpha=\frac{۹۰^\circ}{۵}=۱۸^\circ$$

۲۵ — **۱** ۲ ۳ ۴

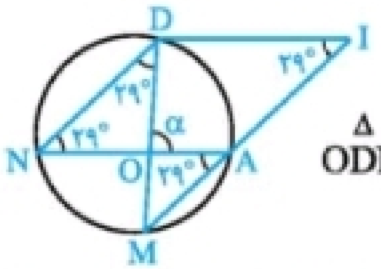
$$\hat{A}=\frac{\widehat{BCD}}{۲}\Rightarrow ۷۰^\circ=\frac{\widehat{BC}+\widehat{CD}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\widehat{BC}=\widehat{CD}} ۲\widehat{BC}=۲\times ۷۰^\circ\Rightarrow \widehat{BC}=۷۰^\circ$$

$$\hat{B}=\frac{\widehat{ADC}}{۲}=\frac{\widehat{AD}+\widehat{CD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲\widehat{CD}+\widehat{CD}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۷۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ$$

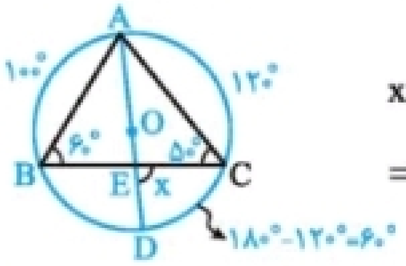
۲۶ — ۱ ۲ **۳** ۴

در متوازی‌الاضلاع زوایای مقابل برابرند، پس $\hat{N}=\hat{I}=۲۹^\circ$ و بنابه قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم $M\hat{A}N=۲۹^\circ$ و در نتیجه $N\hat{D}M=۲۹^\circ$ (هر دو زاویهٔ $M\hat{A}N$ و $N\hat{D}M$ محاطی و روبه‌رو به کمان $\widehat{MN}$ هستند) و نهایتاً:



$\alpha=۲۹^\circ+۲۹^\circ=۵۸^\circ$ زاویه خارجی $\overset{\Delta}{ODN}$

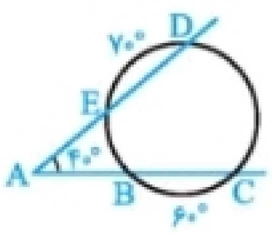
۲۷ — **۱** ۲ ۳ ۴



$$x=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ+۶۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{E}D=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۲۸ — **۱** ۲ ۳ ۴



$$\widehat{BE}+\widehat{DE}+\widehat{CD}+\widehat{BC}=۳۶۰^\circ$$

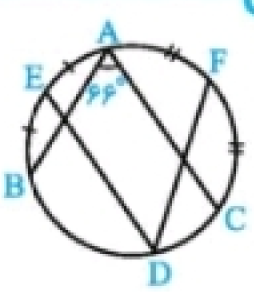
$$\Rightarrow \widehat{BE}+\widehat{CD}=۳۶۰^\circ-۷۰^\circ-۶۰^\circ=۲۳۰^\circ$$

$$\hat{A}=\frac{\widehat{CD}-\widehat{BE}}{۲}\Rightarrow \widehat{CD}-\widehat{BE}=۸۰^\circ$$

از جمع دو تساوی اخیر، $\widehat{CD}$ به‌دست می‌آید:

$$۲\widehat{CD}=۲۳۰^\circ+۸۰^\circ=۳۱۰^\circ\Rightarrow \widehat{CD}=۱۵۵^\circ$$

۲۹ — ۱ ۲ **۳** ۴



$$\hat{A}=\frac{\widehat{BDC}}{۲}\Rightarrow ۶۶^\circ=\frac{\widehat{BDC}}{۲}\Rightarrow \widehat{BDC}=۱۳۲^\circ$$

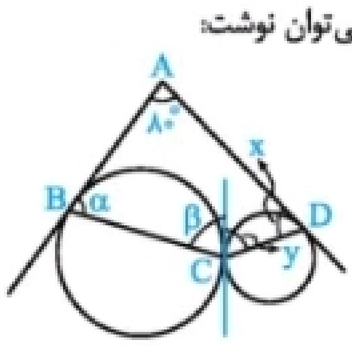
$$\widehat{AB}+\widehat{AC}=۳۶۰^\circ-\widehat{BDC}=۳۶۰^\circ-۱۳۲^\circ=۲۲۸^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\widehat{AE}+۲\widehat{AF}=۲۲۸^\circ\Rightarrow \widehat{AE}+\widehat{AF}=۱۱۴^\circ\Rightarrow \widehat{EAF}=۱۱۴^\circ$$

زاویهٔ محاطی $\hat{D}=\frac{\widehat{EAF}}{۲}=\frac{۱۱۴^\circ}{۲}=۵۷^\circ$

۳۰ — ۱ **۲** ۳ ۴

در نقطهٔ C مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. در دایرهٔ بزرگ دو زاویهٔ α و β هر دو ظلی‌اند و کمان روبه‌رو به آن‌ها $\widehat{BC}$ است، پس $\alpha=\beta=\frac{\widehat{BC}}{۲}$. با استدلال مشابه داریم $x=y=\frac{\widehat{CD}}{۲}$ و نهایتاً در چهارضلعی ABCD می‌توان نوشت:

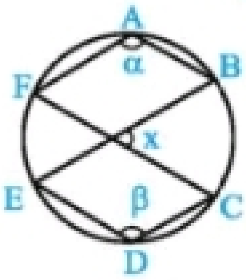


$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۸۰^\circ+\alpha+\beta+y+x=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۸۰^\circ+\beta+\beta+y+y=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۲\beta+۲y=۲۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \beta+y=۱۴۰^\circ\Rightarrow B\hat{C}D=۱۴۰^\circ$$

۳۱



زاویهٔ محاطی $\hat{A}=\dfrac{\widehat{BDF}}{۲}\Rightarrow \widehat{BDF}=۲\alpha \Rightarrow \widehat{BAF}=۳۶۰^\circ-۲\alpha$

زاویهٔ محاطی $\hat{D}=\dfrac{\widehat{CAE}}{۲}\Rightarrow \widehat{CAE}=۲\beta \Rightarrow \widehat{CDE}=۳۶۰^\circ-۲\beta$

$\widehat{EF}+\widehat{BC}=۳۶۰^\circ-(\widehat{BAF}+\widehat{CDE})$

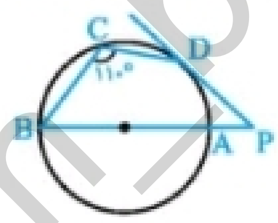
$=۳۶۰^\circ-(۳۶۰^\circ-۲\alpha+۳۶۰^\circ-۲\beta)\Rightarrow \widehat{EF}+\widehat{BC}=۲\alpha+۲\beta-۳۶۰^\circ$

و نهایتاً x زاویهٔ برخورد دو وتر BE و CF است در نتیجه می‌توان نوشت:

$x=\dfrac{\widehat{EF}+\widehat{BC}}{۲}=\dfrac{۲\alpha+۲\beta-۳۶۰^\circ}{۲}=\alpha+\beta-۱۸۰^\circ$

۳۲

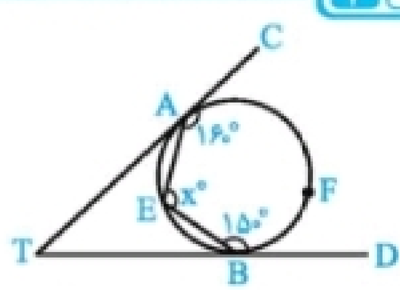
زاویهٔ P نصف زاویهٔ بین دو مماسی است که از P بر دایره رسم می‌شود، پس اندازهٔ کمان $\widehat{AD}$ برابر $۹۰^\circ-\hat{P}$ است.



$B\hat{C}D=\dfrac{\widehat{BAD}}{۲}\Rightarrow ۱۱۰^\circ=\dfrac{\widehat{BA}+\widehat{AD}}{۲}$

$\Rightarrow ۱۸۰^\circ+۹۰^\circ-\hat{P}=۲۲۰^\circ \Rightarrow \hat{P}=۲۷۰^\circ-۲۲۰^\circ=۵۰^\circ$

۳۳



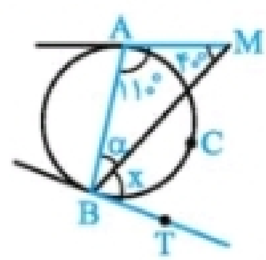
ظلی $T\hat{A}E=\dfrac{\widehat{AE}}{۲}\Rightarrow ۱۸۰^\circ-۱۶۰^\circ=\dfrac{\widehat{AE}}{۲}\Rightarrow \widehat{AE}=۴۰^\circ$

ظلی $T\hat{B}E=\dfrac{\widehat{BE}}{۲}\Rightarrow ۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=\dfrac{\widehat{BE}}{۲}\Rightarrow \widehat{BE}=۶۰^\circ$

$x=\dfrac{\widehat{AFB}}{۲}=\dfrac{۳۶۰^\circ-\widehat{AE}-\widehat{BE}}{۲}=\dfrac{۳۶۰^\circ-۴۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۳۰^\circ$

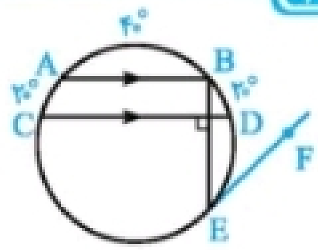
۳۴

$B\hat{A}M$ و $A\hat{B}T$ هر دو زاویهٔ ظلی‌اند و کمان روبه‌رو به آن‌ها $\widehat{ACB}$ است، پس این دو زاویه برابرند.



$$\left.\begin{array}{l}A\hat{B}T=B\hat{A}M\Rightarrow ۱۱۰^\circ=\alpha+x\\ \alpha+۴۰^\circ+۱۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow x=۱۱۰^\circ-۳۰^\circ=۸۰^\circ$$

۳۵



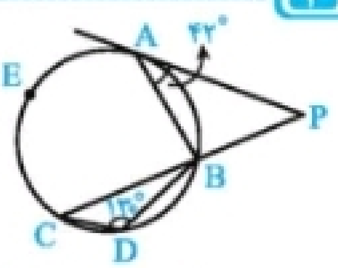
$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BD}=\widehat{AC}=۲۰^\circ$

زاویهٔ بین دو وتر CD و BE $\Rightarrow \dfrac{\widehat{BAC}+\widehat{DE}}{۲}=۹۰^\circ$

$\Rightarrow \dfrac{۲۰^\circ+۴۰^\circ+\widehat{DE}}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{DE}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$

ظلی $B\hat{E}F=\dfrac{\widehat{BDE}}{۲}=\dfrac{\widehat{DE}+\widehat{BD}}{۲}=\dfrac{۱۲۰^\circ+۲۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$

۳۶



ظلی $\hat{A}=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}\Rightarrow \widehat{AB}=۲\times ۴۲^\circ=۸۴^\circ$

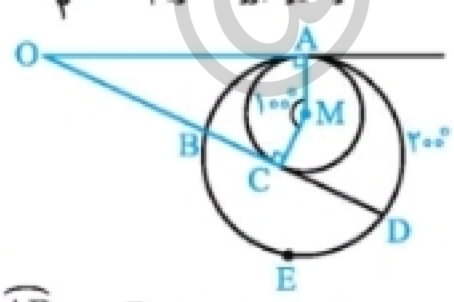
محاطی $C\hat{D}B=\dfrac{\widehat{CAB}}{۲}\Rightarrow \widehat{CAB}=۲\times ۱۳۰^\circ=۲۶۰^\circ$

$\widehat{AEC}=\widehat{CAB}-\widehat{AB}=۲۶۰^\circ-۸۴^\circ=۱۷۶^\circ$

$\hat{P}=\dfrac{\widehat{AEC}-\widehat{AB}}{۲}=\dfrac{۱۷۶^\circ-۸۴^\circ}{۲}=\dfrac{۹۲^\circ}{۲}=۴۶^\circ$

۳۷

در چهارضلعی AMCO اندازهٔ هر دو زاویهٔ A و C قائمه است (خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است). پس $\hat{O}=۱۸۰^\circ-A\hat{M}C=۸۰^\circ$، در دایرهٔ بزرگ داریم $\hat{O}=\dfrac{\widehat{AD}-\widehat{AB}}{۲}$، در نتیجه:



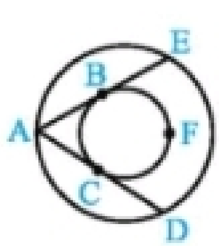
$۸۰^\circ=\dfrac{۲۰۰^\circ-\widehat{AB}}{۲}\Rightarrow \widehat{AB}=۲۰۰^\circ-۱۶۰^\circ=۴۰^\circ$

$\widehat{BED}=۳۶۰^\circ-\widehat{AB}-\widehat{AD}=۳۶۰^\circ-۴۰^\circ-۲۰۰^\circ=۱۲۰^\circ$

۳۸

بنابه فرض $\widehat{BC}=\dfrac{۴}{۵}\widehat{BFC}$، پس $\widehat{BFC}=۵x$ و $\widehat{BC}=۴x$. از طرفی:

$\widehat{BC}+\widehat{BFC}=۳۶۰^\circ$

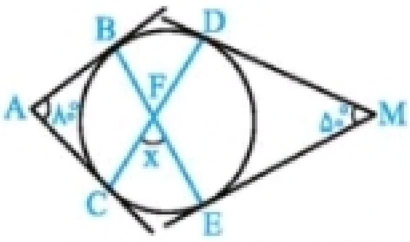


$\Rightarrow ۴x+۵x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=\dfrac{۳۶۰^\circ}{۹}=۴۰^\circ$

$\hat{A}=\dfrac{\widehat{BFC}-\widehat{BC}}{۲}=\dfrac{۵x-۴x}{۲}=\dfrac{۴۰^\circ}{۲}=۲۰^\circ$

$\hat{A}=\dfrac{\widehat{DE}}{۲}\Rightarrow \widehat{DE}=۲۰^\circ\times ۲=۴۰^\circ$

۳۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



$\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ-\hat{A}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$

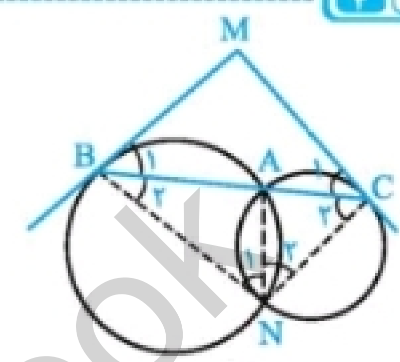
$\overset{\frown}{DE}=۱۸۰^\circ-\hat{M}=۱۸۰^\circ-۵۰^\circ=۱۳۰^\circ$

$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{BD}=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۰۰^\circ+۱۳۰^\circ+\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{BD}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{BD}=۱۳۰^\circ$

$x=\frac{\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$

۴۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**



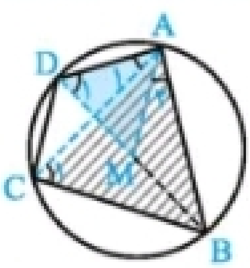
$\left.\begin{array}{l}(\text{ظلی } \hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \text{ ، محاطی } \hat{N}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}) \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{N}_1 \\ (\text{ظلی } \hat{C}_1=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \text{ ، محاطی } \hat{N}_۲=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}) \Rightarrow \hat{C}_1=\hat{N}_۲\end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\text{جمع رابطه‌ها}} \hat{B}_1+\hat{C}_1=\hat{N}_1+\hat{N}_۲$

$\Rightarrow ۱۸۰^\circ-B\hat{M}C=۱۸۰^\circ-(\hat{B}_۲+\hat{C}_۲) \Rightarrow B\hat{M}C=\hat{B}_۲+\hat{C}_۲$

اما زوایای $\hat{B}_۲$ و $\hat{C}_۲$ محاطی‌اند و برابر نصف کمان‌های $\overset{\frown}{AN}$ در دو دایره می‌باشند و چون این کمان‌ها ثابت و معلوم‌اند، پس دو زاویهٔ $B_۲$ و $C_۲$ معلوم و در نتیجه $B\hat{M}C$ ثابت است.

۴۱ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

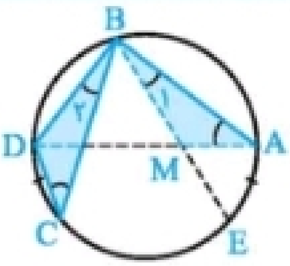


بنابه فرض $\hat{A}_۲=\hat{A}_1$، با اضافه کردن $C\hat{A}M$ به این تساوی نتیجه می‌شود $D\hat{A}M=C\hat{A}B$ از طرفی $\hat{D}_1$ و $\hat{C}_1$ هر دو محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$اند پس $\hat{D}_1=\hat{C}_1$ و در نتیجه:

$\left.\begin{array}{l}D\hat{A}M=C\hat{A}B \\ \hat{D}_1=\hat{C}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{DM}{BC}$

$\Rightarrow AD.BC=AC.DM$

۴۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

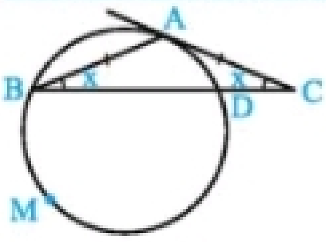


B را به D وصل می‌کنیم $\hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ و $\hat{B}_۲=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$، چون $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$ پس $\hat{B}_1=\hat{B}_۲$ از طرفی $\hat{A}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$ پس دو مثلث ABM و CBD متشابه‌اند. لذا:

$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{CD}=\frac{BM}{BD} \xrightarrow[CD=۳]{AB=۶ ، BC=۸} \frac{۶}{۸}=\frac{AM}{۳}$

$\Rightarrow AM=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$

۴۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)



بنابه فرض مماس AC با وتر AB برابر است، پس با فرض $\hat{C}=x$ داریم:

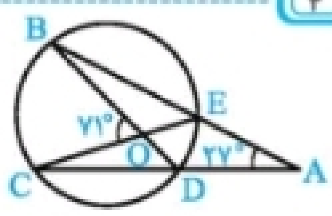
$\hat{B}=x \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۲x$

$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AB}-۲x}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۴x$

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DMB}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۴x+۲x+۲۲۲^\circ=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۶x=۱۳۸^\circ \Rightarrow x=\frac{۱۳۸^\circ}{۶}=۲۳^\circ$

۴۴ **(۱)** (۲) (۳) (۴)



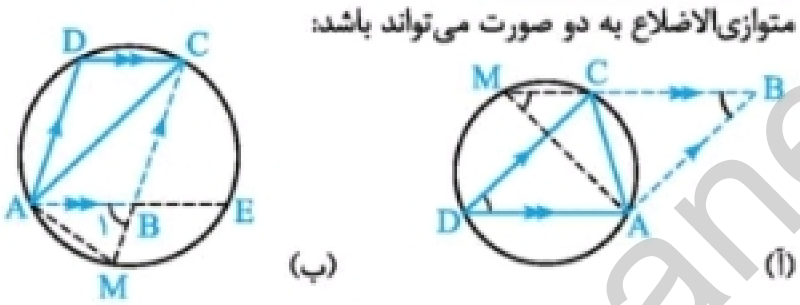
$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}=۲\times ۲۷^\circ=۵۴^\circ$

$\hat{O}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}=۲\times ۷۱^\circ=۱۴۲^\circ$

از جمع دو تساوی اخیر داریم: $۲\overset{\frown}{BC}=۱۹۶^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۹۸^\circ$

۴۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

متوازی‌الاضلاع به دو صورت می‌تواند باشد:



برای شکل (آ):

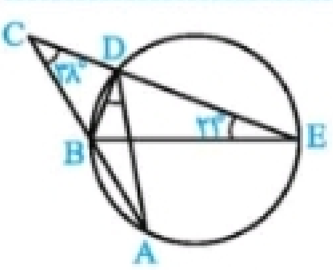
$\left.\begin{array}{l}\text{متوازی‌الاضلاع } ABCD \Rightarrow \hat{B}=\hat{D} \\ \text{محاطی } \hat{M}=\text{محاطی } \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{M}$

پس $\overset{\Delta}{ABM}$ متساوی‌الساقین است. برای شکل (ب):

$\left.\begin{array}{l}CD \parallel AE \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE} \\ D\hat{A}E=\frac{\overset{\frown}{DCE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{CE}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}$

از طرفی $\hat{M}$ محاطی است و $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}$ پس $D\hat{A}E=\hat{M}$. از طرفی در متوازی‌الاضلاع ABCD بنابه خطوط موازی و مورب $D\hat{A}E=\hat{B}_1$ است، در نتیجه $\hat{M}=\hat{B}_1$ یعنی مثلث ABM متساوی‌الساقین است.

۴۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)



$\text{محاطی } \hat{E}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۲۱^\circ=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۲\times ۲۱^\circ=۴۲^\circ$

$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BD}}{۲}$

$\Rightarrow ۳۸^\circ=\frac{\overset{\frown}{AE}-۴۲^\circ}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AE}=۷۶^\circ+۴۲^\circ=۱۱۸^\circ$

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AE}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ-۱۱۸^\circ=۶۲^\circ$

$\text{محاطی } A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۶۲^\circ}{۲}=۳۱^\circ$

۴۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض $AE = AO$

پس $A\hat{O}E = \hat{E} = \alpha$

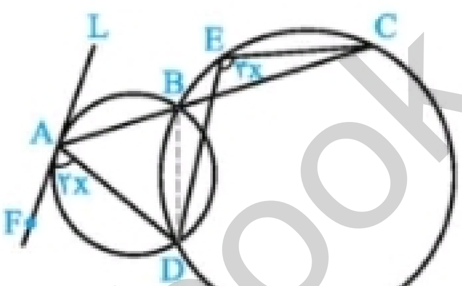
چون $A\hat{O}D$ زاویهٔ مرکزی است، لذا $\overset{\frown}{AD} = \alpha$. داریم:

$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{BC} - \alpha}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳\alpha$$

محاطی $B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۳۶^\circ = \frac{۳\alpha}{۲}$

$$\Rightarrow ۳\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ$$

۴۸ (۱) (۲) (۳) (۴)



BD وتر مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. در دایرهٔ بزرگ دو زاویهٔ DBC و DEC محاطی و روبه‌رو به کمان CD هستند.

پس $D\hat{B}C = D\hat{E}C = ۳x$

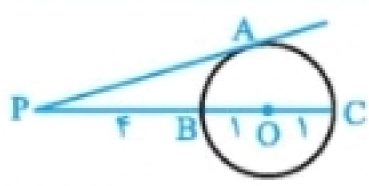
از طرفی در دایرهٔ کوچک، زاویهٔ ABD محاطی و روبه‌رو به کمان AD است، هم‌چنین زاویهٔ DAF ظلی روبه‌رو به کمان AD می‌باشد، پس این دو زاویه برابرند $A\hat{B}D = D\hat{A}F = ۲x$ و نهایتاً داریم:

$$A\hat{B}D + D\hat{B}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۳x = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۳۶^\circ$$

$$D\hat{E}C = ۳x = ۳ \times ۳۶^\circ = ۱۰۸^\circ$$

۴۹ (۱) (۲) (۳) (۴)



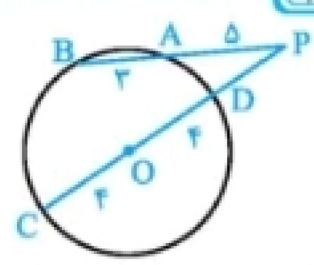
$$PA^۲ = PB.PC$$

$$\Rightarrow PA^۲ = ۴ \times ۶ \Rightarrow PA = ۲\sqrt{۶}$$

۵۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$PT^۲ = PA.PB = ۴ \times (۴+۶+۶) = ۴ \times ۱۶ \Rightarrow PT = ۲ \times ۴ = ۸$$

۵۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$PA.PB = PD.PC \Rightarrow ۵ \times (۵+۳) = PD.(PD+۸)$$

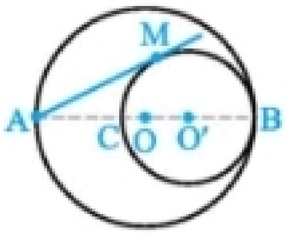
$$\Rightarrow PD^۲ + ۸PD - ۴۰ = ۰ \Rightarrow PD = -۴ \pm \sqrt{۱۶+۴۰}$$

$$\xrightarrow{PD>۰} PD = -۴ + \sqrt{۵۶} = -۴ + ۲\sqrt{۱۴}$$

$$PO = PD + OD = -۴ + ۲\sqrt{۱۴} + ۴ = ۲\sqrt{۱۴}$$

۵۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض دو دایره مماس داخل‌اند و $O'B = O'C = ۹$ و $OA = OB = ۱۲$. دورترین نقطهٔ دایرهٔ بزرگ از نقاط دایرهٔ کوچک نقطهٔ A است. بزرگ‌ترین مماس از این نقطه بر دایرهٔ کوچک رسم می‌شود و داریم:

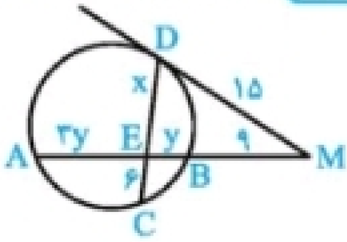


$$AM^۲ = AC.AB = (AB - BC).AB$$

$$\Rightarrow AM^۲ = (۲۴ - ۱۸) \times ۲۴$$

$$= ۶ \times ۲۴ = ۶^۲ \times ۴ \Rightarrow AM = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

۵۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

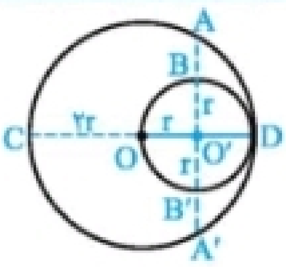


$$MD^۲ = MB \times MA \Rightarrow ۱۵^۲ = ۹ \times (۹ + y + ۳y)$$

$$\Rightarrow ۴y + ۹ = \frac{۲۲۵}{۹} = ۲۵ \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$$DE \times CE = BE \times AE \Rightarrow x \times ۶ = ۴ \times ۳ \times ۴ \Rightarrow x = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

۵۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $AB = ۳(۳ - \sqrt{۳})$ داریم:

$$O'A \times O'A' = O'C \times O'D$$

$$\Rightarrow O'A^۲ = ۳r \times r$$

$$\Rightarrow (O'B + AB)^۲ = ۳r^۲ \Rightarrow r + ۳(۳ - \sqrt{۳}) = \sqrt{۳}r$$

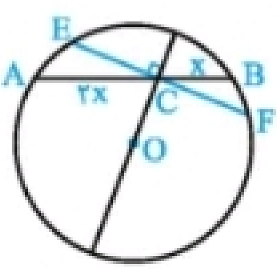
$$\Rightarrow r(\sqrt{۳} - ۱) = ۳(۳ - \sqrt{۳}) \Rightarrow r = \frac{۳\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۱)}{\sqrt{۳} - ۱} = ۳\sqrt{۳}$$

شعاع دایرهٔ بزرگ $= ۲r = ۶\sqrt{۳}$

۵۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض نقطهٔ C وتر $AB = ۹$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس $BC = x$ و $AC = ۲x$ و در نتیجه:

$$AB = ۹ \Rightarrow ۳x = ۹ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow BC = ۳ \quad , \quad AC = ۶$$

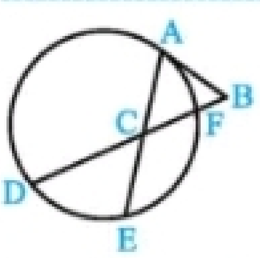


کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ C رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از نقطهٔ C عمود است، یعنی وتر EF. داریم:

$$CE.CF = AC.BC \Rightarrow CE^۲ = CF^۲ = ۶ \times ۳ = ۱۸$$

$$\Rightarrow CE = CF = ۳\sqrt{۲} \quad , \quad EF = ۲CE = ۲CF = ۶\sqrt{۲}$$

۵۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $BF = ۱$ و $DF = ۸$ است، پس می‌توان طول مماس AB را حساب کرد.

$$AB^۲ = BF \times BD = ۱ \times ۹ \Rightarrow AB = ۳$$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس نتیجه می‌شود $AC = BC = ۳$. لذا داریم:

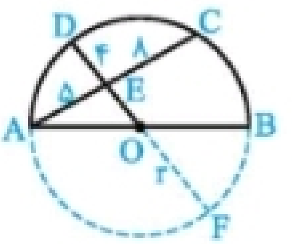
$$CF = BC - BF = ۳ - ۱ = ۲ \text{ ، } CD = DF - CF = ۸ - ۲ = ۶$$

و نهایتاً بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$$AC \times CE = CD \times CF \Rightarrow ۳ \times CE = ۶ \times ۲ \Rightarrow CE = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

۵۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

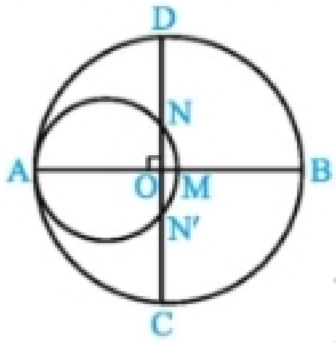
مطابق شکل اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، $OE = r - ۴$ می‌شود و داریم:



$$EF.DE = AE.CE$$
$$\Rightarrow ۴(r-۴+r) = ۵\times ۸$$
$$\Rightarrow ۲r-۴ = ۱۰ \Rightarrow r = ۷$$
$$OE = r-۴ = ۷-۴ = ۳$$

۵۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

شعاع دایرهٔ بزرگ را R فرض می‌کنیم. داریم:



$$ON = ON' = R-۱۰$$
$$OM = R-۱۶$$
$$OA = R$$

بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ کوچک داریم:

$$OA\times OM = ON\times ON' \Rightarrow R(R-۱۶) = (R-۱۰)(R-۱۰)$$
$$\Rightarrow R^۲-۱۶R = R^۲-۲۰R+۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

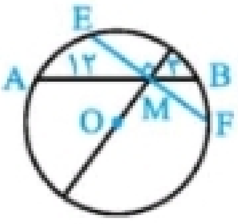
قطر دایرهٔ کوچک $AM = ۲r$ است. پس می‌توان نوشت:

$$AM = AB-BM \Rightarrow ۲r = ۲R-۱۶$$
$$= ۲\times ۲۵-۱۶ = ۵۰-۱۶ = ۳۴ \Rightarrow r = ۱۷$$

مساحت ناحیهٔ بین دو دایره $= \pi R^۲-\pi r^۲ = \pi(۲۵^۲-۱۷^۲)$

$$= \pi(۶۲۵-۲۸۹) = ۳۳۶\pi$$

۵۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

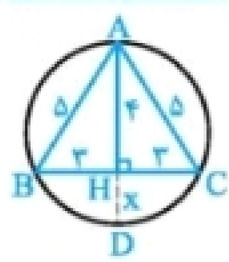


کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وتری است که بر قطر شامل OM در نقطهٔ M عمود است، یعنی وتر EF.

بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA.MB = ME.MF \Rightarrow ۱۲\times ۳ = ME\times ME \Rightarrow ME^۲ = ۳۶$$
$$\Rightarrow ME = ۶ \Rightarrow EF = ۲ME = ۱۲$$

۶۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

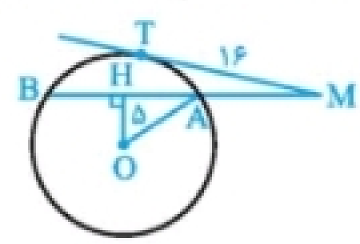


مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ارتفاع AH میانه، نیمساز و عمودمنصف است؛ امتداد آن از وسط کمان نظیر BC می‌گذرد و داریم:

$$AH\times DH = BH\times CH \Rightarrow x = \frac{۳\times ۳}{۴} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۶۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

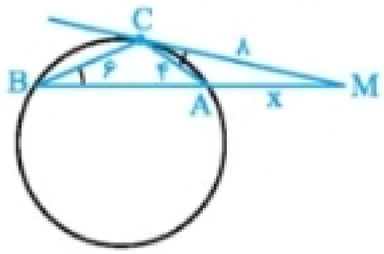
بنابه فرض $MT = ۱۶$، $MB = ۳۲$ و $OH = ۵$. داریم:



$$MT^۲ = MA.MB \Rightarrow ۱۶^۲ = MA\times ۳۲ \Rightarrow MA = ۸$$
$$AB = MB-MA = ۳۲-۸ = ۲۴ \Rightarrow AH = BH = ۱۲$$
$$OA^۲ = OH^۲+AH^۲ = ۵^۲+۱۲^۲ = ۱۳^۲ \Rightarrow OA = ۱۳$$

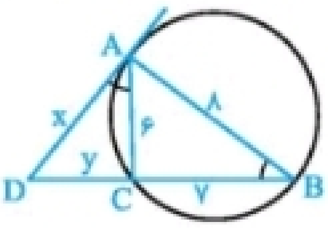
۶۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

دو مثلث MAC و MCB به حالت (زز) متشابه‌اند، در نتیجه:



$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{MB} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow MB = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲ \\ MC^۲ = MA.MB \end{cases}$$
$$۱۲\times x = ۸^۲ \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۱۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

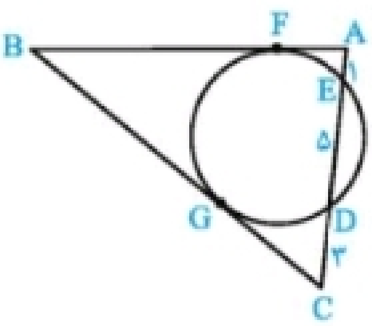
۶۳ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{BDA} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y+۷} = \frac{۶}{۸} = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۴y \\ ۴x = ۳y+۲۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶x = ۹x+۸۴ \Rightarrow x = \frac{۸۴}{۷} = ۱۲$$

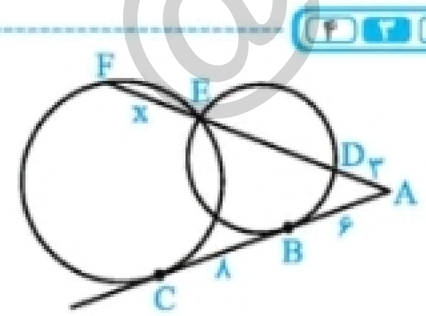
۶۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

طول دو مماس BF و BG برابرند $(BF = BG)$ و داریم:



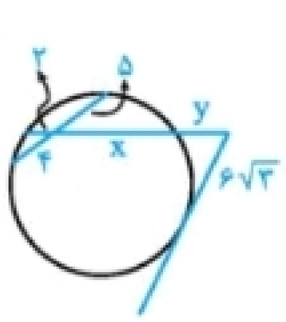
$$AF^۲ = AE.AD$$
$$\Rightarrow AF^۲ = ۱\times ۶ \Rightarrow AF = \sqrt{۶}$$
$$CG^۲ = CD.CE = ۳\times ۸$$
$$\Rightarrow CG = ۲\sqrt{۶}$$
$$|BC-AB| = |BG+CG-BF-AF| = |CG-AF|$$
$$= |۲\sqrt{۶}-\sqrt{۶}| = \sqrt{۶}$$

۶۵ (۱) (۲) (۳) (۴)



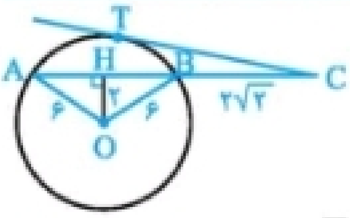
$$AB^۲ = AD.AE \Rightarrow ۳۶ = ۳\times AE \Rightarrow AE = ۱۲$$
$$AC^۲ = AE.AF \Rightarrow (۶+۸)^۲ = ۱۲\times(۱۲+x) \Rightarrow ۱۲+x = \frac{۱۹۶}{۱۲}$$
$$\Rightarrow x = \frac{۴۹}{۳}-۱۲ = \frac{۴۹-۳۶}{۳} = \frac{۱۳}{۳}$$

۶۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$۲\times x = ۵\times ۴ \Rightarrow x = ۱۰$$
$$(۶\sqrt{۳})^۲ = y(y+x+۲)$$
$$\Rightarrow ۱۰۸ = y(y+۱۲)$$
$$\Rightarrow y^۲+۱۲y-۱۰۸ = ۰$$
$$\Rightarrow (y+۱۸)(y-۶) = ۰ \Rightarrow y = ۶$$

۶۷ — (۱) (۲) (۳) (۴)



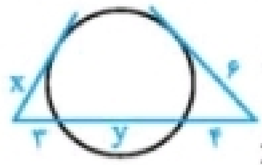
$AH^۲ = BH^۲ = OA^۲ - OH^۲$

$= ۶^۲ - ۲^۲ = ۳۲ \Rightarrow AH = BH = ۴\sqrt{۲}$

$AC = AB + BC = ۸\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$

$CT^۲ = BC.AC = ۲\sqrt{۲} \times ۱۰\sqrt{۲} = ۴۰ \Rightarrow CT = ۲\sqrt{۱۰}$

۶۸ — (۱) (۲) (۳) (۴)

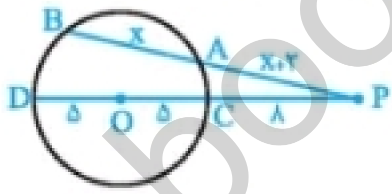


$۶^۲ = ۴(۴+y) \Rightarrow ۴+y = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \Rightarrow y = ۵$

$x^۲ = ۳(۳+y) = ۳(۳+۵) = ۲۴ \Rightarrow x = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$

۶۹ — (۱) (۲) (۳) (۴)

نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا نقطهٔ P، تقاطع خط شامل OP با دایره است، یعنی PC. بنابه فرض $PC = ۸$، $OC = OD = ۵$ و $PA = ۲ + AB$ داریم:



$PA.PB = PC.PD$

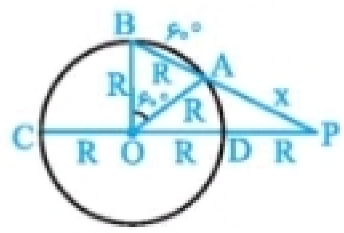
$\Rightarrow (x+۲)(x+۲+x) = ۸(۸+۱۰)$

$\Rightarrow ۲(x+۲)(x+۱) = ۸ \times ۱۸ \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۲ = ۷۲$

$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۷۰ = ۰ \Rightarrow (x+۱۰)(x-۷) = ۰ \Rightarrow x = ۷ \Rightarrow AB = ۷$

۷۰ — (۱) (۲) (۳) (۴)

فاصلهٔ نقطهٔ P تا دورترین نقاط دایره، PC می‌باشد. بنابه فرض $PC = ۳R$، در نتیجه $PD = R$. چون کمان AB برابر ۶۰° است،

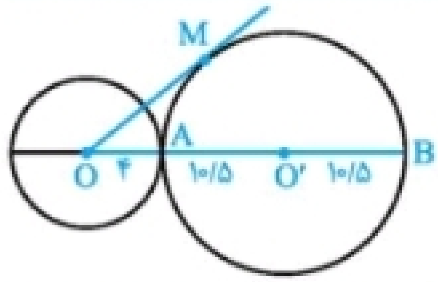


پس زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$ است و مثلث AOB متساوی‌الاضلاع می‌شود لذا $AB = R$ و داریم:

$PA.PB = PD.PC \Rightarrow x(x+R) = R \times ۳R \Rightarrow x^۲ + Rx - ۳R^۲ = ۰$

$\Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^۲ + ۱۲R^۲}}{۲} \xrightarrow{x>۰} x = \frac{\sqrt{۱۳}R - R}{۲} = \frac{\sqrt{۱۳} - ۱}{۲}R$

۷۱ — (۱) (۲) (۳) (۴)



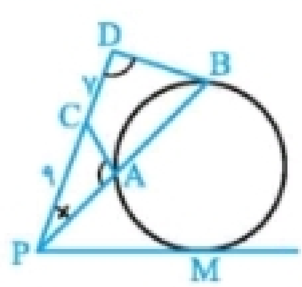
$OM^۲ = OA.OB$

$= ۴(۴ + ۱۰/۵ + ۱۰/۵)$

$\Rightarrow OM^۲ = ۴ \times ۲۵ = ۱۰۰$

$\Rightarrow OM = ۱۰$

۷۲ — (۱) (۲) (۳) (۴)



$(\hat{P} = \hat{P} \quad , \quad P\hat{A}C = P\hat{D}B)$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{APC} \sim \overset{\Delta}{DPB}$

$\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$

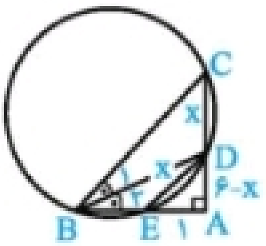
$\Rightarrow PA.PB = PC.PD$

از طرفی بنابه رابطهٔ طولی مماس و قاطع داریم $PM^۲ = PA.PB$ پس:

$PM^۲ = PC.PD = ۹ \times (۹+۷) = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow PM = ۳ \times ۴ = ۱۲$

۷۳ — (۱) (۲) (۳) (۴)

دو زاویهٔ $\hat{B}_۱$ و $\hat{B}_۲$ در دایره محاطی هستند و چون BD نیمساز است داریم:



$\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{DE}}{۲}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$

$\Rightarrow CD = DE$

با فرض $CD = x$ داریم $DE = x$ و $AD = AC - CD = ۶ - x$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$DE^۲ = AD^۲ + AE^۲ \Rightarrow x^۲ = (۶-x)^۲ + ۱^۲$

$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - ۱۲x + x^۲ + ۱ \Rightarrow ۱۲x = ۳۷ \Rightarrow x = \frac{۳۷}{۱۲}$

و نهایتاً بنابه رابطهٔ طولی امتداد وترهای متقاطع در دایره داریم:

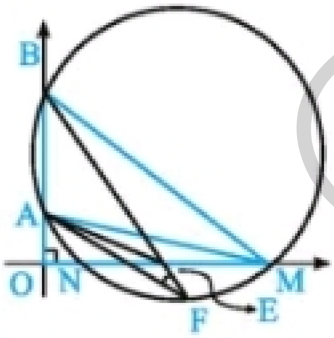
$AD \times AC = AE \times AB \Rightarrow (۶-x) \times ۶ = ۱ \times AB$

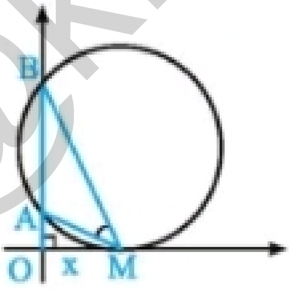
$\Rightarrow AB = ۳۶ - ۶x \Rightarrow AB = ۳۶ - ۶ \times \frac{۳۷}{۱۲} = ۳۶ - \frac{۳۷}{۲}$

$= \frac{۷۲ - ۳۷}{۲} = \frac{۳۵}{۲} = ۱۷/۵$

۷۴ — (۱) (۲) (۳) (۴)

نقطهٔ دلخواه M را روی محور افقی در نظر می‌گیریم. دایرهٔ گذرنده از نقاط M، A و B را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی دیگر آن با محور افقی را N می‌نامیم. هر نقطه مانند E روی پاره‌خط MN داخل دایره، رأس زاویه‌ای است که از زاویهٔ AMB بزرگ‌تر است. زیرا دو زاویهٔ محاطی M و F برابرند و بنابه زاویهٔ خارجی، زاویهٔ AEB بزرگ‌تر از زاویهٔ F است. بنابراین زاویهٔ AMB وقتی ماکزیمم است که دایرهٔ گذرنده از نقاط A و B بر محور افقی مماس باشد و بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم:

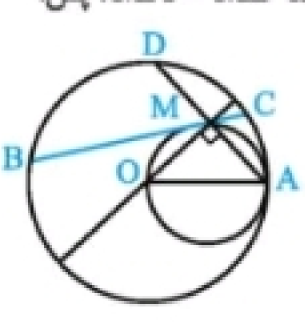




$OM^۲ = OA \times OB \Rightarrow x^۲ = ۵ \times ۸ = ۴ \times ۱۰ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۱۰}$

۷۵ — (۱) (۲) (۳) (۴)

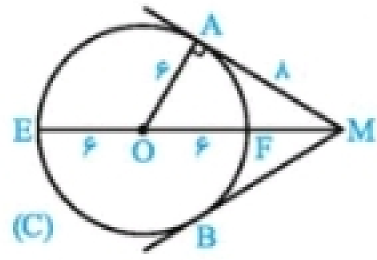
$\overset{\frown}{OMA}$ روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است $(O\hat{M}A = ۹۰^\circ)$. بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایرهٔ بزرگ داریم $MB \times MC = MA \times MD$ از طرفی قطر شامل OM عمود بر وتر AD در دایرهٔ بزرگ، وتر AD را نصف می‌کند $MA = MD$. پس:



$MB \times MC = MA \times MA = MA^۲$

۷۶ ۱ ۲ ۳ ۴

جهت یافتن دورترین نقاط دایره از نقطهٔ M، نقطهٔ M را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و نقاط تقاطع خط OM با دایره را پیدا می‌کنیم. مطابق شکل، ME جواب است. برای یافتن طول آن، طول OM را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:



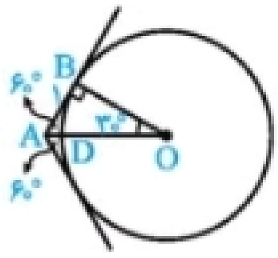
$$OM^2=OA^2+MA^2=6^2+8^2=100$$

$$\Rightarrow OM=10$$

$$ME=OM+OE=10+6=16$$

۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌خواهیم طول پاره‌خط AD را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABO اندازهٔ زوایای حاده 30° و 60° است. پس داریم:



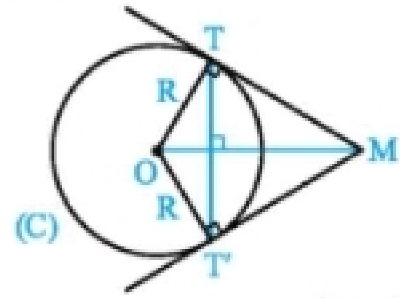
$$AB=\frac{OA}{2}\Rightarrow OA=2AB=2\times1=2$$

$$OB=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}\Rightarrow OD=OB=\sqrt{3}$$

$$AD=OA-OD=2-\sqrt{3}$$

۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده‌اند. می‌دانیم OM عمودمنصف TT' است. با فرض $OM=6$ و $R=2\sqrt{3}$ می‌خواهیم طول پاره‌خط TT' را به‌دست آوریم. چون قطرهای چهارضلعی $MTOT'$ بر هم عمودند، پس مساحت آن برابر $\frac{OM\times TT'}{2}$ است. از طرفی مساحت همین چهارضلعی برابر $2S(OTM)=OT\times MT$ است، پس می‌توان نوشت:



$$\frac{OM\times TT'}{2}=OT\times MT\Rightarrow TT'=\frac{2OT\times MT}{OM}$$

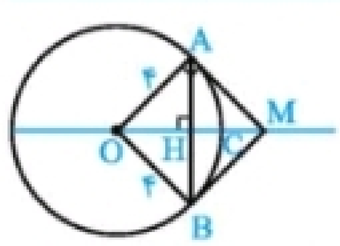
$$=\frac{2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{OM^2-OT^2}}{6}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}}{3}$$

$$\Rightarrow TT'=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{36-12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{24}}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{2}$$

۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطهٔ M برابر MC است. بنابه فرض $MC=4(\sqrt{2}-1)$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM داریم:



$$OA^2=OH.OM\Rightarrow4^2=OH(OC+MC)$$

$$\Rightarrow16=OH(4+4\sqrt{2}-4)\Rightarrow OH=\frac{16}{4\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

روش دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AMO و BMO بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MA^2=MB^2=OM^2-OA^2=(4+4\sqrt{2}-4)^2-4^2$$

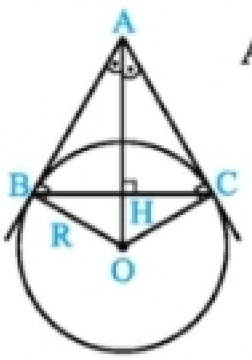
$$=32-16=16\Rightarrow MA=MB=4$$

بنابراین چهارضلعی AMBO مربع است، در نتیجه:

$$OH=\frac{OM}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض، دایره به مرکز O و شعاع R در نقاط B و C بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. پس OA عمودمنصف BC می‌باشد. بنابه فرض $AH=4$ و $BC=6$، در نتیجه $BH=CH=3$ و



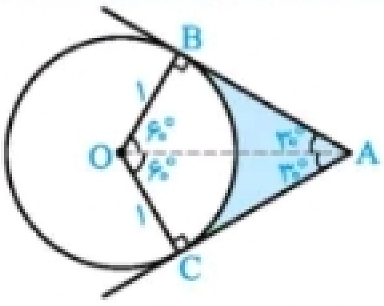
$$AB=AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{AOB}\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{BH}{OB}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{3}{R}\Rightarrow R=\frac{15}{4}=3/75$$

۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴

در چهارضلعی ABOC جمع زوایا 360° است. پس با فرض $\hat{A}=60^\circ$ داریم $B\hat{O}C=120^\circ$ و OA نیمساز این دو زاویه است. داریم:



$$OB=\frac{OA}{2}\Rightarrow1=\frac{OA}{2}\Rightarrow OA=2$$

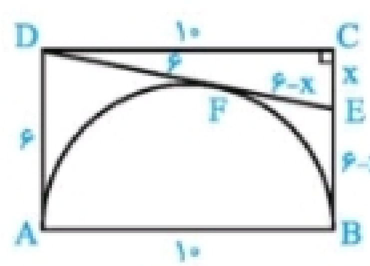
$$AB=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$$

$$S(ABOC)=2S(ABO)=2\times\frac{1}{2}OB\times AB=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

مساحت قطاع BOC برابر است با $\frac{\pi\times1^2\times120}{360}=\frac{\pi}{3}$، در نتیجه مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ می‌باشد.

۸۲ ۱ ۲ ۳ ۴

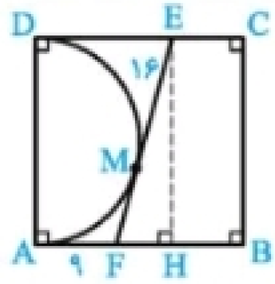
فرض کنیم CE=x، در این صورت BE=BC-x=6-x و با توجه به خاصیت مماس‌های مرسوم بر دایره نتیجه می‌شود EF=BE=6-x و DF=AD=6. حال قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC می‌نویسیم:



$$DE^2=CD^2+CE^2\Rightarrow(6+6-x)^2=10^2+x^2$$

$$\Rightarrow144+x^2-24x=100+x^2\Rightarrow x=\frac{44}{24}=\frac{11}{6}$$

۸۳



بنابه خاصیت برابری دو مماس مرسوم بر دایره، داریم $DE = ME = ۱۶$ و $MF = AF = ۹$. عمود EH را رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ADEH$ مستطیل است، پس داریم:

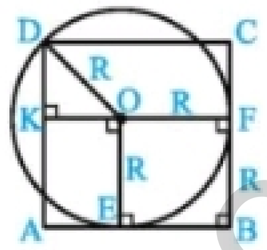
$$AH = DE = ۱۶ \Rightarrow AF + FH = ۱۶ \Rightarrow ۹ + FH = ۱۶ \Rightarrow FH = ۷$$

$$\overset{\Delta}{EFH}: EF^۲ = FH^۲ + EH^۲ \Rightarrow (۹+۱۶)^۲ = ۷^۲ + EH^۲$$

$$\Rightarrow EH^۲ = ۶۲۵ - ۴۹ \Rightarrow EH^۲ = ۵۷۶$$

$$\Rightarrow AD^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow S_{\text{مربع}} = ۵۷۶$$

۸۴



بنابه فرض چهارضلعی $ABCD$ مستطیل به اضلاع $AB = ۱۶$ و $BC = ۱۸$ است. دو مماس BE و BF بر هم عمودند، پس $BEOF$ مربع است. داریم:

$$DK = CF = BC - BF = ۱۸ - R$$

$$OK = AE = AB - BE = ۱۶ - R$$

$$\overset{\Delta}{ODK}: OD^۲ = DK^۲ + OK^۲ \Rightarrow R^۲ = (۱۸ - R)^۲ + (۱۶ - R)^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۲R^۲ - ۶۸R + ۳۲۴ + ۲۵۶ \Rightarrow R^۲ - ۶۸R + ۵۸۰ = ۰$$

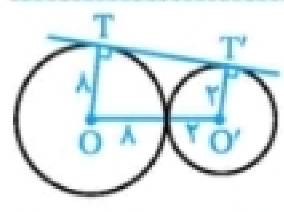
$$\Rightarrow (R-۱۰)(R-۵۸) = ۰ \Rightarrow R = ۱۰ \text{ یا } R = ۵۸$$

جواب $R = ۱۰$ قابل قبول است.

۸۵

بنابه فرض $R=۳$، $R'=۲$ و $d=\sqrt{۵}$، در نتیجه $R - R' < d < R + R'$. یعنی دو دایره متقاطع‌اند و دو دایرهٔ متقاطع دو مماس مشترک خارجی دارند.

۸۶



چهارضلعی $OO'T'T$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است.

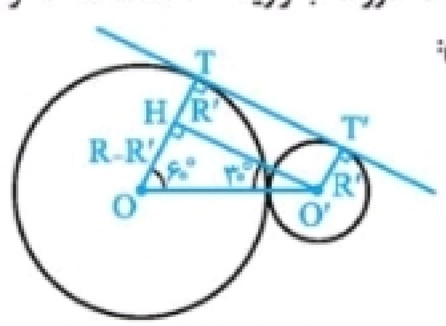
$$S(OO'T'T) = \frac{۱}{۲} T'T(OT + O'T')$$

TT' طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج است. پس برابر است با $TT' = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۲ \times ۸} = ۸$ و داریم:

$$S(OO'T'T) = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times (۸+۲) = \frac{۸۰}{۲} = ۴۰$$

۸۷

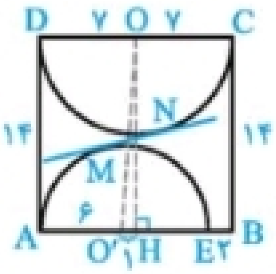
چهارضلعی $OTT'O'$ ذوزنقه با زاویهٔ ۶۰° است. $O'H$ را عمود بر OT رسم می‌کنیم. داریم:



$$OH = \frac{OO'}{۲} \Rightarrow R - R' = \frac{R + R'}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R - ۲R' = R + R' \Rightarrow R = ۳R' \Rightarrow \frac{R}{R'} = ۳$$

۸۸



شعاع دو نیم‌دایره ۷ و ۶ است و طول خط‌المرکزین آن‌ها از مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' به‌دست می‌آید:

$$OO'^۲ = O'H^۲ + OH^۲$$

$$= ۱^۲ + ۱۴^۲ = ۱ + ۱۹۶ = ۱۹۷$$

MN طول مماس مشترک داخلی است:

$$MN^۲ = OO'^۲ - (R + R')^۲ \Rightarrow MN^۲ = ۱۹۷ - (۶+۷)^۲$$

$$\Rightarrow MN^۲ = ۱۹۷ - ۱۶۹ = ۲۸ \Rightarrow MN = ۲\sqrt{۷}$$

۸۹

$$\begin{cases} ۳R_۱ + ۴R_۲ = ۴d \\ R_۱ + ۲R_۲ = \dfrac{۱۱d}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳R_۱ + ۴R_۲ = ۴d \\ -۲R_۱ - ۴R_۲ = -\dfrac{۱۱}{۳}d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} R_۱ = ۴d - \frac{۱۱d}{۳} = \frac{d}{۳} \quad , \quad R_۲ = \frac{۳d}{۴}$$

$$R_۲ + R_۱ = \frac{۳d}{۴} + \frac{d}{۳} = \frac{۱۳d}{۱۲} \quad , \quad R_۲ - R_۱ = \frac{۳d}{۴} - \frac{d}{۳} = \frac{۵d}{۱۲}$$

$$\Rightarrow R_۲ - R_۱ < d < R_۲ + R_۱$$

پس دو دایره متقاطع‌اند و فقط دارای دو مماس مشترک خارجی‌اند.

۹۰

بنابه فرض $TT' = \sqrt{۲}R$ $(R > R')$ و $OO' = R + R'$ (دو دایره مماس خارج‌اند)، در نتیجه:

$$TT'^۲ = OO'^۲ - (R - R')^۲ \Rightarrow ۲R^۲ = (R + R')^۲ - (R - R')^۲$$

$$\Rightarrow ۲R^۲ = ۴RR' \Rightarrow R = ۲R'$$

تذکر می‌توانستیم مستقیماً از دستور $TT' = ۲\sqrt{RR'}$ در دو دایرهٔ مماس خارج هم استفاده کنیم:

$$TT' = \sqrt{۲}R \Rightarrow ۲\sqrt{RR'} = \sqrt{۲}R \Rightarrow ۴RR' = ۲R^۲ \Rightarrow R = ۲R'$$

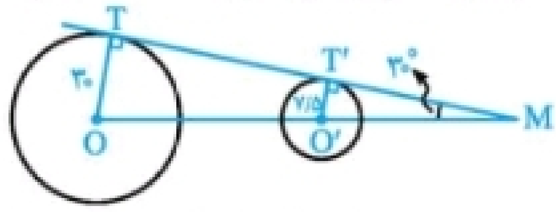
۹۱

$$TT'^۲ = OO'^۲ - (R - R')^۲ \Rightarrow ۱۵^۲ = OO'^۲ - (۱۴ - ۶)^۲$$

$$\Rightarrow ۱۵^۲ = OO'^۲ - ۸^۲ \Rightarrow OO'^۲ = ۱۵^۲ + ۸^۲ = ۱۷^۲ \Rightarrow OO' = ۱۷$$

۹۲

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است، پس:

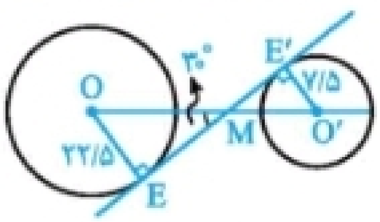


$$OO' = OM - O'M = ۲OT - ۲O'T' = ۲ \times ۳۰ - ۲ \times ۷/۵$$

$$\Rightarrow OO' = ۶۰ - ۱۵ = ۴۵$$

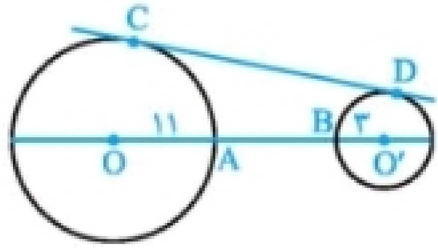
۹۳

در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است پس:



$$OO' = OM + O'M = ۲OE + ۲O'E' = ۴۵ + ۱۵ = ۶۰$$

۹۴



بنابه فرض $R = ۱۱$، $R' = ۳$ و $CD = ۳\sqrt{۳۳}$ است، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط این دو دایره، پاره‌خط AB روی خط‌المرکزین است.

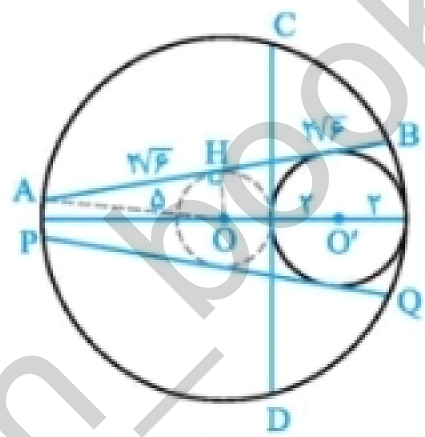
$$CD^۲ = OO'^۲ - (R - R')^۲ \Rightarrow ۹ \times ۳۳ = OO'^۲ - (۱۱ - ۳)^۲$$

$$\Rightarrow OO'^۲ = ۹ \times ۳۳ + ۸^۲ = ۲۹۷ + ۶۴ = ۳۶۱ \Rightarrow OO' = ۱۹$$

$$\Rightarrow OO' = OA + AB + O'B \Rightarrow ۱۹ = ۱۱ + AB + ۳ \Rightarrow AB = ۵$$

۹۵

فرض کنید $AB = ۴\sqrt{۶}$ وتری از دایرهٔ بزرگ باشد که بر دایرهٔ کوچک مماس است. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:



$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow ۵^۲ = OH^۲ + (۲\sqrt{۶})^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵ = OH^۲ + ۲۴$$

$$\Rightarrow OH^۲ = ۱ \Rightarrow OH = ۱$$

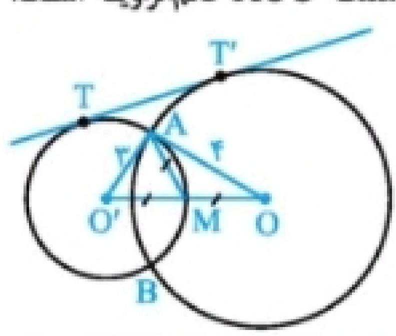
بنابراین در دایرهٔ بزرگ همهٔ وترهایی که بر دایرهٔ به مرکز O و شعاع یک مماس‌اند، به طول $۴\sqrt{۶}$ می‌باشند.

دو دایرهٔ $(O،۱)$ و $(O'،۲)$ مماس خارج‌اند پس همهٔ مماس مشترک‌های این دو دایره در دایرهٔ بزرگ وترهایی به طول $۴\sqrt{۶}$ پدید می‌آورند و دو دایرهٔ مماس خارج، ۳ مماس مشترک دارند، پس مسئله ۳ جواب دارد.

۹۶

بنابه فرض $AM = \frac{OO'}{۲}$، یعنی در مثلث AOO' میانهٔ نظیر ضلع OO' نصف همان ضلع است، پس مثلث AOO' قائم‌الزاویه است.

در نتیجه $OO' = ۵$ و داریم:



$$TT'^۲ = OO'^۲ - (R - R')^۲$$

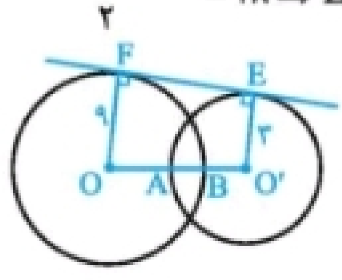
$$= ۵^۲ - (۴ - ۳)^۲ = ۲۵ - ۱ = ۲۴$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$

۹۷

چهارضلعی $OO'EF$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است و بنابه فرض، مساحت آن ۴۸ است. قاعده‌های این ذوزنقه $OF = ۹$ و $O'E = ۳$ و ارتفاع آن EF است. داریم:

$$\frac{EF \times (۹ + ۳)}{۲} = ۴۸ \Rightarrow EF = \frac{۴۸}{۶} = ۸ \Rightarrow \sqrt{OO'^۲ - (۹ - ۳)^۲} = ۸$$



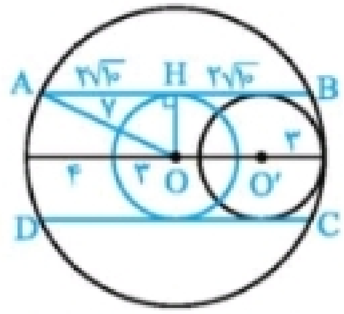
$$\Rightarrow OO'^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow OO' = ۱۰$$

$$OA = OO' - O'A = ۱۰ - ۳ = ۷$$

$$AB = OB - OA = ۹ - ۷ = ۲$$

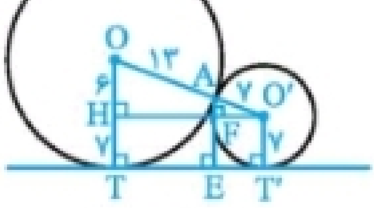
۹۸

مکان هندسی وسط وترهای به طول $۴\sqrt{۱۰}$ در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۷، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $۳ = \sqrt{۷^۲ - (۲\sqrt{۱۰})^۲} = OH$ است. یعنی هر وتری از دایرهٔ بزرگ بر این دایره مماس شود، طول آن $۴\sqrt{۱۰}$ است. تعداد مماس مشترک‌های دو دایرهٔ $(O،۳)$ و $(O'،۳)$ جواب است و این دو دایره متقاطع‌اند و دو مماس مشترک خارجی دارند.



۹۹

از O' بر OT عمود می‌کنیم. داریم:



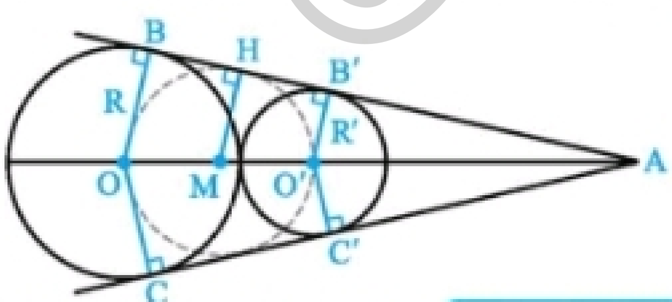
$$\overset{\Delta}{O'AF} \sim \overset{\Delta}{O'OH}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{OH} = \frac{O'A}{OO'} \Rightarrow \frac{AF}{۶} = \frac{۷}{۲۰}$$

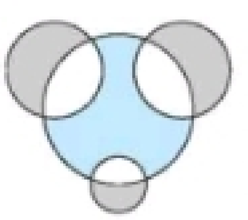
$$\Rightarrow AF = \frac{۴۲}{۲۰} = ۲/۱ \text{ ، } AE = AF + FE = ۲/۱ + ۷ = ۹/۱$$

۱۰۰

فرض کنیم H وسط BB' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد. اگر M، وسط OO' را به H وصل کنیم، MH پاره‌خط میانگین ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $OO'B'B$ است، پس با قاعده‌ها موازی است، در نتیجه MH بر BB' عمود است و اندازهٔ آن برابر نصف مجموع دو قاعده است یعنی $MH = \frac{OB + O'B'}{۲} = \frac{R + R'}{۲}$ و چون $OM = O'M = \frac{R + R'}{۲}$ است، پس دایره به قطر OO' از نقطهٔ H می‌گذرد و بر BB' مماس است.



۱۰۱



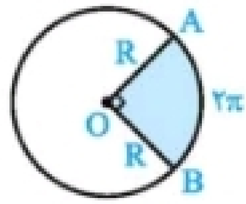
فرض کنیم A مجموع مساحت‌های نواحی سفیدرنگ، B مجموع مساحت‌های نواحی طوسی و C مساحت ناحیهٔ رنگی باشد، بنابه فرض $B = C$ است. با فرض این‌که شعاع دایرهٔ بزرگ x باشد، داریم:

$$\begin{cases} \pi x^۲ - C = A \\ B + A = \pi \times ۲^۲ + \pi \times ۲^۲ + \pi \times ۱^۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \pi x^۲ = ۹\pi \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

پس قطر دایرهٔ بزرگ $۲x = ۶$ است.

۱۰۲ — **۱** ۲ ۳ ۴



$\widehat{AB}$ طول $= \frac{۱}{۴}$ (محیط دایره)

$$\Rightarrow ۲\pi = \frac{۱}{۴}(۲\pi R) \Rightarrow R = ۴$$

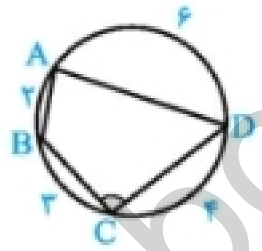
مساحت قطاع AOB $= \frac{۱}{۴}$ (مساحت دایره) $= \frac{۱}{۴}(\pi R^۲) = \frac{۱}{۴}(۱۶\pi) = ۴\pi$

۱۰۳ — ۱ **۲** ۳ ۴

ناحیهٔ رنگی در شکل پرسش، قطاع به زاویهٔ مرکزی $۱۳۵°$ است. لذا مساحت آن برابر است با:

$S = \frac{۱۳۵°}{۳۶۰°}$ (مساحت دایره) $= \frac{۳}{۸} \times \pi \times (\frac{۸}{۲})^۲ = ۶\pi$

۱۰۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**



مطابق شکل محیط دایره برابر $۱۵ = ۶ + ۴ + ۳ + ۲$ سانتی‌متر است. پس شعاع آن به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$۲\pi R = ۱۵ \Rightarrow R = \frac{۱۵}{۲\pi} \quad (۱)$$

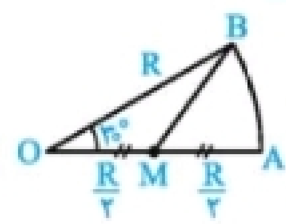
با فرض این‌که اندازهٔ کمان BAD بر حسب درجه برابر α باشد، داریم:

$\widehat{BAD}$ طول $= ۲ + ۶ = ۸cm \Rightarrow \frac{\pi R\alpha}{۱۸۰} = ۸ \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۱۸۰} \times \frac{۱۵}{۲\pi} \times \alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۶ \times ۱۸۰}{۱۵} = ۱۹۲°$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{۲} = \frac{\alpha}{۲} = \frac{۱۹۲°}{۲} = ۹۶°$$

۱۰۵ — ۱ ۲ **۳** ۴

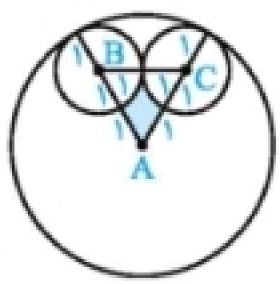


$$\frac{\text{مساحت مثلث } OMB}{\text{مساحت قطاع } AOB} = \frac{\frac{۱}{۲} OB \times OM \times \sin ۳۰°}{\frac{\pi \times OA^۲ \times ۳۰}{۳۶۰}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲} R \times \frac{R}{۲} \times \frac{۱}{۲}}{\frac{\pi \times R^۲ \times ۳۰}{۳۶۰}} = \frac{۱۲R^۲}{۸\pi R^۲} = \frac{۱۲}{۸\pi} = \frac{۳}{۲\pi}$$

۱۰۶ — **۱** ۲ ۳ ۴

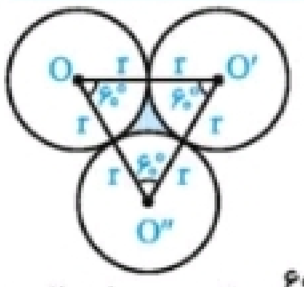
مطابق شکل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ است پس $\hat{B} = \hat{C} = ۶۰°$. مساحت ناحیهٔ مطلوب برابر مساحت مثلث ABC منهای مساحت‌های دو قطاع با زاویهٔ مرکزی $۶۰°$ در دایره‌های کوچک می‌باشد، لذا داریم:



$$S = \frac{AC^۲\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۶۰}{۳۶۰}\pi \times ۱^۲ - \frac{۶۰}{۳۶۰} \times \pi \times ۱^۲$$

$$= \frac{۲^۲\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۲ \times \pi}{۶} = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$$

۱۰۷ — **۱** ۲ ۳ ۴



مثلث $OO'O''$ متساوی‌الاضلاع است، زیرا هر ضلع آن $۲r$ است. محیط ناحیهٔ رنگی از سه کمان به طول‌های مساوی تشکیل شده است؛ پس می‌توان نوشت:

محیط مطلوب $= ۳ \times \frac{۶۰}{۳۶۰}$ (محیط دایره) $= ۳ \times \frac{۱}{۶} \times ۳۶ = ۱۸$

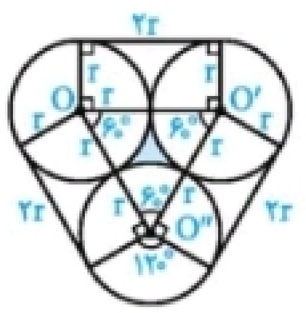
۱۰۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل و با فرض $r = ۱$ مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع $OO'O''$ منهای مساحت‌های سه قطاع همنهشت با زاویهٔ مرکزی $۶۰°$. مجموع مساحت‌های این سه قطاع یک نیم‌دایره می‌باشد. داریم:

$$S = S(OO'O'') - \frac{\pi r^۲}{۲} = \frac{(۲r)^۲\sqrt{۳}}{۴} - \frac{\pi r^۲}{۲} = r^۲\sqrt{۳} - \frac{\pi r^۲}{۲}$$

$$\xrightarrow{r=۱} S = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}$$

۱۰۹ — ۱ ۲ **۳** ۴

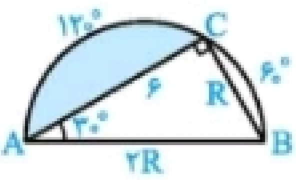


طول طنابی که دور سه دایره بسته شده است، برابر طول سه مستطیل همنهشت به ابعاد $۲r$ و r، به علاوهٔ طول سه کمان همنهشت با زاویهٔ مرکزی $۱۲۰°$ می‌باشد.

طول طناب $= ۳ \times ۲r + ۳ \times \frac{۱۲۰}{۳۶۰} \times ۲\pi r = ۶r + ۲\pi r$

طول طناب $\xrightarrow{r=۱} = ۶ + ۲\pi$

۱۱۰ — ۱ ۲ **۳** ۴



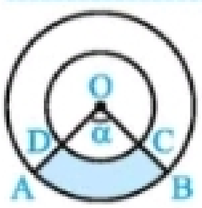
ناحیهٔ رنگی یک قطعه است که کمان آن $۱۲۰°$ می‌باشد. شعاع دایره از مثلث قائم‌الزاویهٔ روی شکل به‌دست می‌آید:

$$۴R^۲ = R^۲ + ۶^۲ \Rightarrow ۳R^۲ = ۳۶ \Rightarrow R^۲ = ۱۲ \Rightarrow R = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{۱}{۲}R^۲(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\alpha) = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times (\frac{\pi \times ۱۲۰}{۱۸۰} - \sin ۱۲۰°)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = ۶(\frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۴\pi - ۳\sqrt{۳}$$

۱۱۱ — ۱ ۲ **۳** ۴



بنابه فرض $۲OC = ۳BC$ پس $BC = ۲r$، $OC = ۳r$ و شعاع دایرهٔ بزرگ برابر $۵r$ می‌شود. داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{\pi \times OB^۲ \times \alpha}{۳۶۰} - \frac{\pi \times OC^۲ \times \alpha}{۳۶۰}$$

$$\Rightarrow ۳۲ = \frac{\pi \times (۵r)^۲ \times \alpha - \pi \times (۳r)^۲\alpha}{۳۶۰}$$

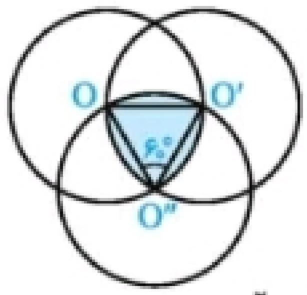
$$\Rightarrow ۳۲ = \frac{۱۶\pi r^۲\alpha}{۳۶۰} \Rightarrow \pi r^۲\alpha = \frac{۳۲ \times ۳۶۰}{۱۶} = ۷۲۰$$

و نهایتاً مساحت قطاع OCD برابر است با:

$$S = \frac{\pi \times (OC)^۲ \times \alpha}{۳۶۰} = \frac{\pi \times ۹r^۲ \times \alpha}{۳۶۰} = \frac{۱}{۴۰} \times \pi r^۲\alpha = \frac{۱}{۴۰} \times ۷۲۰ = ۱۸$$

۱۱۲

ناحیهٔ مطلوب اجتماع مثلث متساوی‌الاضلاع $OO'O''$ به ضلع واحد با سه قطعه به زاویهٔ مرکزی 60° می‌باشد. داریم:

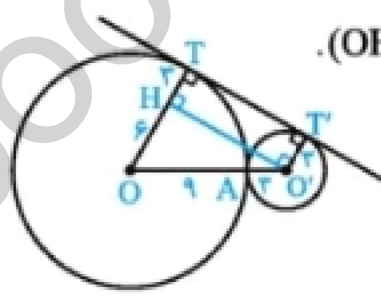


$$\text{مساحت مطلوب} = \frac{1^2\times\sqrt{3}}{4} + 3\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\left(\frac{\pi\times 60}{180}-\sin 60^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مطلوب} = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱۳

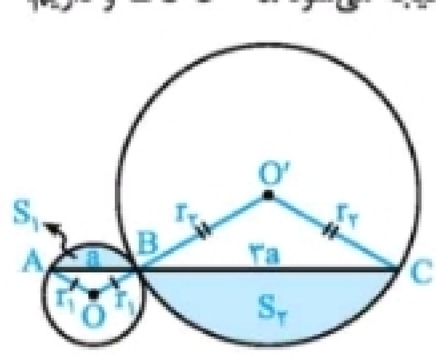
با رسم عمود $O'H$، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $OTT'O'$ به یک مستطیل و یک مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌شود. در این مثلث قائم‌الزاویه یک ضلع نصف وتر است ($OH=\frac{OO'}{2}$).



پس $A\hat{O'}H=30^\circ$ و در نتیجه $A\hat{O'}T'=120^\circ$ و نهایتاً مساحت قطاع $AO'T'$ برابر است با: $S=\frac{\pi(O'T')^2\times\alpha}{360}=\frac{\pi\times 3^2\times 120}{360}=3\pi$

۱۱۴

در دو دایرهٔ مماس خارج مراکز دایره‌ها و نقطهٔ تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند، پس زوایای متقابل به رأس $O'BC$ و OBA برابرند، در نتیجه دو مثلث متساوی‌الساقین OAB و $O'BC$ متشابه‌اند و با فرض $A\hat{O}B=\alpha$ نتیجه می‌شود $B\hat{O'}C=\alpha$ و داریم:



$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}r_1^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)\\ S_2 &= \frac{1}{2}r_2^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{S_1}{S_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

اما از تشابه دو مثلث متساوی‌الساقین ذکرشده نتیجه می‌شود $\frac{r_1}{r_2}=\frac{AB}{BC}$. داریم:

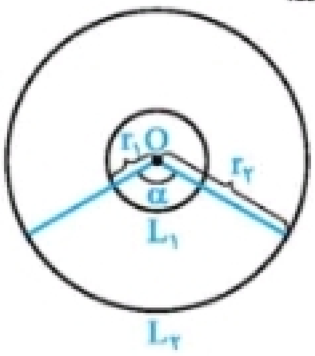
$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\left(\frac{a}{3a}\right)^2=\frac{1}{9}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{S_1}{S_1+S_2}=\frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow{S_1+S_2=40\pi}\frac{S_1}{40\pi}=\frac{1}{10}\Rightarrow S_1=4\pi$$

نکته به طور کلی داریم:

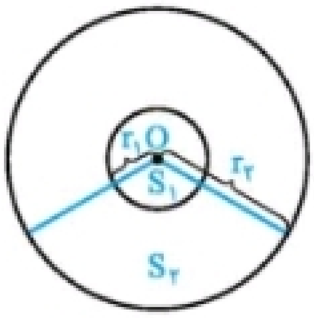
۱- دو قطاع با زاویه‌های مساوی همواره متشابه‌اند.

در شکل روبه‌رو در دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های r_1 و r_2 دو قطاع با طول‌های L_1 و L_2 وجود دارند که متشابه‌اند، لذا داریم: $\frac{L_1}{L_2}=\frac{r_1}{r_2}$



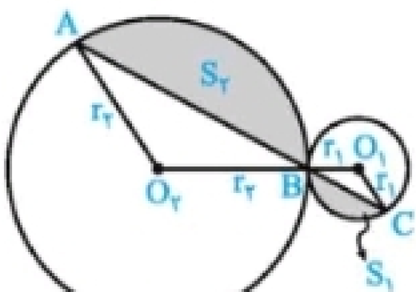
۲- نسبت مساحت قطاع‌های متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه آن‌ها.

$$\frac{S_1}{S_1+S_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2$$



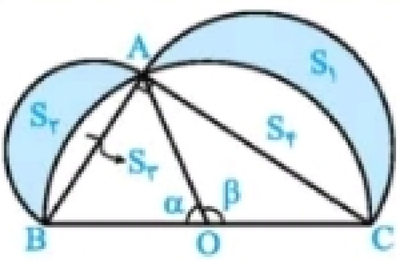
۳- دو قطعه که زاویه‌های قطاع آن‌ها مساوی باشند، متشابه‌اند.

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2=\left(\frac{BC}{AB}\right)^2$$



۱۱۵

روش اول: فرض کنیم O مرکز نیم‌دایره به قطر $BC=a$ باشد. در این صورت مساحت قطعه‌های S_3 و S_4 برابر است با:



$$S_3=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)=\frac{a^2}{8}\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)$$

$$S_4=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{\pi\beta}{180}-\sin\beta\right)=\frac{a^2}{8}\left(\frac{\pi\beta}{180}-\sin\beta\right)$$

$$S_1+S_4=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{\pi b^2}{8}$$

$$S_2+S_3=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi c^2}{8}$$

$$\xrightarrow{+} S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{\pi}{8}(b^2+c^2)=\frac{\pi a^2}{8}$$

$$\Rightarrow S_1+S_2+\frac{\pi a^2}{8}\times\frac{\overset{180}{\cancel{\alpha+\beta}}}{180}-\frac{a^2}{8}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{\pi a^2}{8}$$

$$\Rightarrow S_1+S_2+\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{8}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{\pi a^2}{8}$$

$$\Rightarrow S_1+S_2=\frac{a^2}{8}(\sin\alpha+\sin\beta)\qquad (1)$$

از طرفی داریم: $S(ABC)=S(AOB)+S(AOC)$

$$=\frac{1}{2}OA\times OB\times\sin\alpha+\frac{1}{2}OA\times OC\times\sin\beta$$

$$=\frac{a^2}{8}(\sin\alpha+\sin\beta)\qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow S_1+S_2=S(ABC)=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{5\times 12}{2}=30$$

روش دوم:

مساحت نیم‌دایره به قطر $BC = S(ABC) +$ مساحت نیم‌دایره به قطر $AB - S_۱ +$ مساحت نیم‌دایره به قطر $AC - S_۲$

$$\Rightarrow \frac{\pi BC^۲}{۸} = S(ABC) + \frac{\pi AB^۲}{۸} - S_۲ + \frac{\pi AC^۲}{۸} - S_۱$$

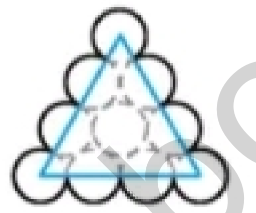
$$\Rightarrow \frac{\pi BC^۲}{۸} = S(ABC) + \frac{\pi(AB^۲ + AC^۲)}{۸} - S_۱ - S_۲$$

اما بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم: $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$

در نتیجه: $\frac{\pi BC^۲}{۸} = S(ABC) + \frac{\pi BC^۲}{۸} - S_۱ - S_۲$

$$\Rightarrow S_۱ + S_۲ = S(ABC) = \frac{AB \times AC}{۲} \Rightarrow S_۱ + S_۲ = \frac{۵ \times ۱۲}{۲} = ۳۰$$

۱۱۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



محیط مطلوب از ۶ نیم‌دایره و ۳ قطاع که $\frac{۵}{۶}$ دایره‌اند، تشکیل شده است؛ زیرا مثلث مقابل متساوی‌الاضلاع و به ضلع ۶ می‌باشد، بنابراین داریم:

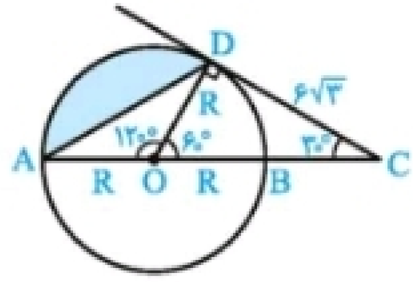
محیط مطلوب $= ۶ \times \frac{۱}{۲} \times ۲\pi r + ۳ \times \frac{۵}{۶} \times (۲\pi r) = ۶\pi r + ۵\pi r = ۱۱\pi r$

محیط مطلوب $= ۱۱\pi \times ۱ = ۱۱\pi$

۱۱۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD به زوایای ۹۰°، ۶۰° و ۳۰° داریم $OC = ۲R$

در نتیجه:



$$R^۲ + (۶\sqrt{۳})^۲ = ۴R^۲$$

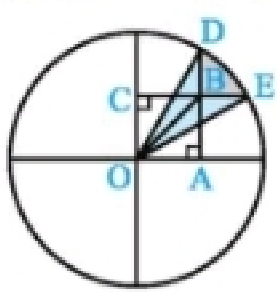
$$\Rightarrow ۳R^۲ = ۳ \times ۳۶ \Rightarrow R = ۶$$

ناحیهٔ رنگی قطعه‌ای است که زاویهٔ مرکزی آن $A\hat{O}D = ۱۲۰°$ است. بنابراین داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}R^۲\left(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\alpha\right) = \frac{۱}{۲} \times ۶^۲ \times \left(\frac{\pi \times ۱۲۰}{۱۸۰} - \sin ۱۲۰°\right)$$

$$= ۱۸\left(\frac{۱۲\pi}{۱۸} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۱۲\pi - ۹\sqrt{۳}$$

۱۱۸ (۱) (۲) (۳) (۴)



در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OCE و OAD اندازه‌های وترها $OD = OE = ۲$ و یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه $OA = OC = ۱$ است. پس اندازهٔ زوایای مثلث‌ها ۹۰°، ۶۰° و ۳۰° است.

در نتیجه:

$$CE = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OE = \sqrt{۳} \ ,\ AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OD = \sqrt{۳}$$

$$BD = BE = AD - AB = \sqrt{۳} - ۱$$

$$B\hat{O}D = A\hat{O}D - A\hat{O}B = ۶۰° - ۴۵° = ۱۵°$$

$$B\hat{O}E = C\hat{O}E - B\hat{O}C = ۶۰° - ۴۵° = ۱۵°$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی DOE برابر ۳۰° است.

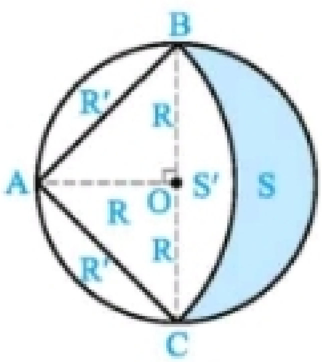
مساحت مطلوب = مساحت قطاع DOE − مساحت مثلث OBE − مساحت مثلث OBD

$$\Rightarrow \text{مساحت مطلوب} = \frac{\pi \times OE^۲ \times ۳۰}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}OC \times BE - \frac{۱}{۲}OA \times BD$$

$$= \frac{۴\pi}{۱۲} - \frac{۱ \times (\sqrt{۳} - ۱)}{۲} - \frac{۱ \times (\sqrt{۳} - ۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مطلوب} = \frac{\pi}{۳} - \sqrt{۳} + ۱ = \frac{\pi}{۳} + ۱ - \sqrt{۳}$$

۱۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴)



A مرکز دایره‌ای است که از دو سر قطر BC می‌گذرد، پس شعاع آن برابر است با $R' = \sqrt{۲}R$

S' مساحت قطعه به وتر BC و زاویهٔ مرکزی ۹۰° در دایره به مرکز A و شعاع R' است، پس داریم:

$$S' = \frac{۱}{۲}R'^۲\left(\frac{\pi \times ۹۰}{۱۸۰} - \sin ۹۰°\right) = \frac{۱}{۲}(R\sqrt{۲})^۲\left(\frac{\pi}{۲} - ۱\right)$$

$$S' = R^۲\left(\frac{\pi}{۲} - ۱\right) = \frac{(\pi - ۲)R^۲}{۲}$$

$S =$ مساحت نیم‌دایره به قطر $BC - S' = \frac{\pi R^۲}{۲} - \frac{(\pi - ۲)R^۲}{۲}$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi R^۲ - \pi R^۲ + ۲R^۲}{۲} = R^۲$$

بنابراین نسبت مساحت قسمت غیررنگی به ناحیهٔ رنگی در دایره برابر است با:

$$\frac{\pi R^۲ - S}{S} = \frac{\pi R^۲ - R^۲}{R^۲} = \pi - ۱$$

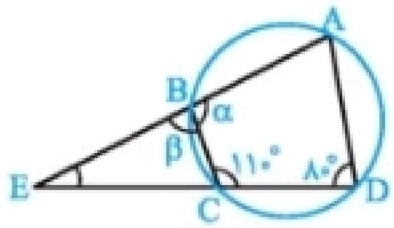
۱۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

چهارضلعی $ABED$ محاطی است، بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{E} = ۱۸۰° \Rightarrow ۳x + ۲x + ۵ = ۱۸۰° \Rightarrow ۵x = ۱۷۵° \Rightarrow x = ۳۵°$$

$D\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲} = \hat{E} = ۲ \times ۳۵ + ۵ = ۷۵°$ محاطی است.

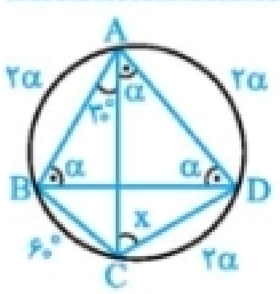
۱۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$\alpha + ۸۰° = ۱۸۰° \Rightarrow \alpha = ۱۰۰° \Rightarrow \beta = ۱۸۰° - \alpha = ۸۰°$$

زاویهٔ خارجی $B\hat{C}D = \beta + \hat{E} \Rightarrow ۱۱۰° = ۸۰° + \hat{E} \Rightarrow \hat{E} = ۳۰°$

۱۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$۲\alpha + ۲\alpha + ۲\alpha + ۶۰° = ۳۶۰°$$

$$\Rightarrow ۶\alpha = ۳۰۰° \Rightarrow \alpha = ۵۰°$$

$$A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲\alpha}{۲} = \alpha = ۵۰°$$

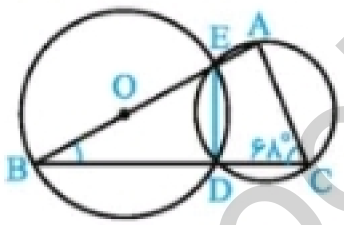
۱۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

قطرهای یک چهارضلعی محاطی وقتی بزرگ‌ترین است که از مرکز دایره بگذرند. در این صورت چهارضلعی مستطیل می‌شود، زیرا قطرهای چهارضلعی یکدیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند.

$$(2R)^2=4^2+8^2 \Rightarrow 4R^2=16+64=80 \Rightarrow R^2=20 \Rightarrow R=2\sqrt{5}$$

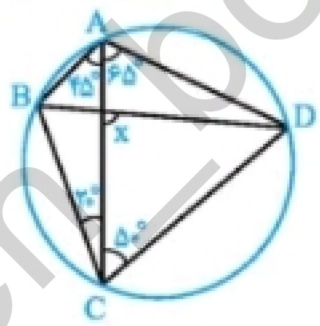
۱۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

وتر مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم و BE قطر دایرهٔ بزرگ‌تر است، پس $B\hat{D}E$ قائمه است. در دایرهٔ کوچک، چهارضلعی ACDE محاطی است، پس $B\hat{E}D$ با $\hat{C}$ برابر است، زیرا هر دو مکمل $A\hat{E}D$ هستند و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BED داریم:



$$\hat{B}=90^\circ-B\hat{E}D=90^\circ-\hat{C}=90^\circ-68^\circ=22^\circ$$

۱۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴



چون $B\hat{A}D+B\hat{C}D=110^\circ+70^\circ=180^\circ$، پس چهارضلعی ABCD محاطی است و دایره‌ای از رأس‌های آن می‌گذرد و داریم:

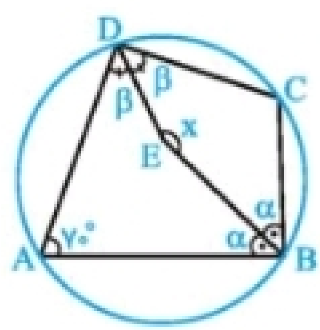
$$C\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=2\times 65^\circ=130^\circ$$

$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=2\times 20^\circ=40^\circ$$

x زاویهٔ بین دو وتر AC و BD است، در نتیجه داریم:

$$x=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{40^\circ+130^\circ}{2}=\frac{170^\circ}{2}=85^\circ$$

۱۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴



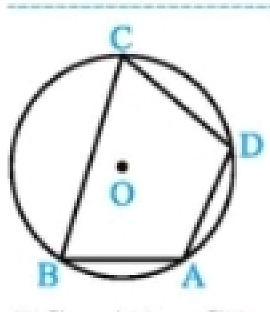
در هندسهٔ (۱) ثابت کردیم اندازهٔ زاویه‌ای که بیرون چهارضلعی مقعر قرار می‌گیرد برابر مجموع اندازه‌های زوایای داخلی آن است. پس در چهارضلعی مقعر ABED داریم:

$$x=\beta+\alpha+70^\circ$$

از طرفی $2\alpha+2\beta=180^\circ$، پس $\alpha+\beta=90^\circ$ و نهایتاً:

$$x=90^\circ+70^\circ=160^\circ$$

۱۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴



چون AB دورترین و BC نزدیک‌ترین وتر به مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی ABCD است، پس می‌توان نوشت:

$BC>AD>CD>AB$ یا $BC>CD>AD>AB$

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2}>\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}\Rightarrow \hat{D}>\hat{C}$$

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{2}>\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}\Rightarrow \hat{B}>\hat{C}$$

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{2}>\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}\Rightarrow \hat{A}>\hat{B}$$

اما نامساوی $\hat{B}>\hat{D}$ همواره نمی‌تواند صحیح باشد، زیرا اگر $\overset{\frown}{BC}=200^\circ$، $\overset{\frown}{AB}=20^\circ$، $\overset{\frown}{AD}=60^\circ$ و $\overset{\frown}{CD}=80^\circ$ باشند، نتیجه می‌شود $\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}}{2}>\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{2}$ و $\hat{D}>\hat{B}$

۱۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

طول قطر بزرگ ۱۵ است که به دو قسمت x و x − ۱۵ تقسیم می‌شود. بنابه وترهای متقاطع داریم:

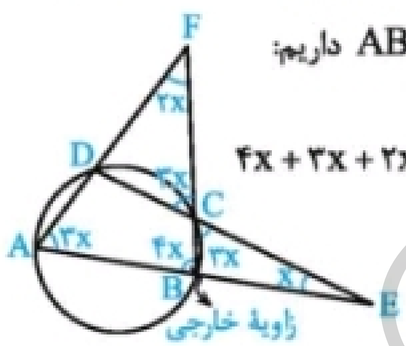
$$x(15-x)=9\times 4 \Rightarrow x^2-15x+36=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-12)=0 \Rightarrow x=3 \text{ یا } x=12$$

بنابراین: $\frac{x}{15-x}=\frac{12}{3}=4$ یا $\frac{1}{4}$

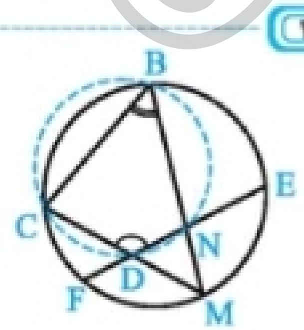
۱۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که هر زاویهٔ داخلی یک چهارضلعی محاطی با زاویهٔ خارجی مقابل آن برابر است، نتیجه می‌شود $F\hat{C}D=\hat{A}=3x$، پس $B\hat{C}E=3x$ و بنابه زاویهٔ خارجی در مثلث BCE نتیجه می‌شود $A\hat{B}C=4x$. پس در مثلث ABF داریم:



$$4x+3x+2x=180^\circ \Rightarrow 9x=180^\circ \Rightarrow x=20^\circ$$

۱۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\left.\begin{aligned}&\text{محاطی}\quad \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CFM}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{MF}}{2}\\ &\text{زاویهٔ بین دو وتر}\quad \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{MF}}{2}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+}\hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{CF}+2\overset{\frown}{MF}}{2}$$

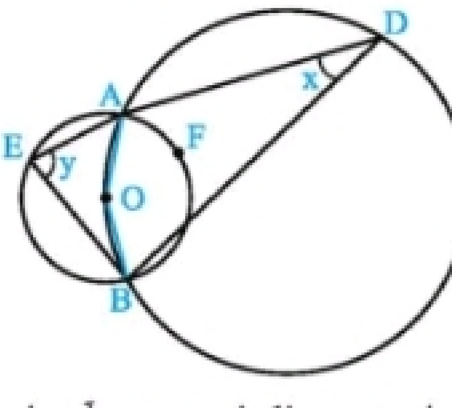
اما $\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{EBF}$ و چون M وسط $\overset{\frown}{EF}$ است، پس $\overset{\frown}{EF}=2\overset{\frown}{MF}$ و در نتیجه:

$$\hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{EBF}+\overset{\frown}{EF}}{2}=\frac{\text{کل دایره}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

یعنی چهارضلعی BCDN محاطی است و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}=50^\circ$ تأثیری در محاسبات ندارد.

۱۳۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

O را به A و B وصل می‌کنیم در دایرهٔ بزرگ، چهارضلعی AOBD محاطی است، پس نتیجه می‌شود:



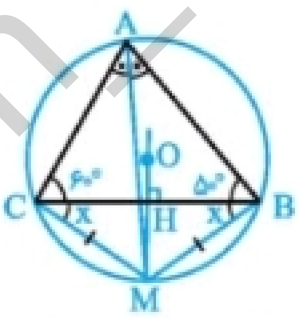
$$A\hat{O}B+\hat{D}=180^\circ$$
$$\Rightarrow A\hat{O}B=180^\circ-x$$

در دایرهٔ کوچک $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است، پس با کمان روبه‌رو به آن برابر است، $\widehat{AFB}=A\hat{O}B=180^\circ-x$ و نهایتاً زاویهٔ E در دایرهٔ کوچک محاطی است و می‌توان نوشت:

$$\hat{E}=\frac{\widehat{AFB}}{2}=\frac{180^\circ-x}{2}\Rightarrow y=90^\circ-\frac{x}{2}$$

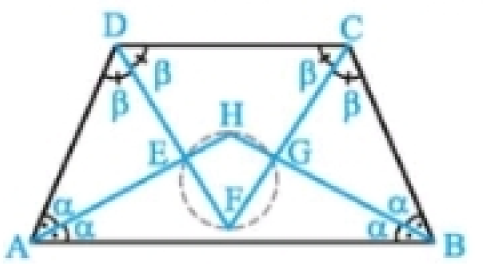
۱۳۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. عمودمنصف ضلع BC کمان نظیر BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند و آن را نصف می‌کند، پس AM نیمساز زاویهٔ A است. یعنی عمودمنصف یک ضلع و نیمساز زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع همواره روی دایرهٔ محیطی مثلث متقاطع‌اند. چهارضلعی ABMC محاطی است، پس:



$$B\hat{M}C=180^\circ-\hat{A}$$
$$=180^\circ-(180^\circ-60^\circ-50^\circ)=110^\circ$$
$$\overset{\Delta}{BMC}: x+x+110^\circ=180^\circ$$
$$\Rightarrow 2x=70^\circ\Rightarrow x=35^\circ$$

۱۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)



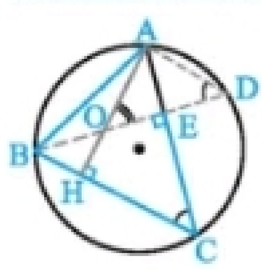
$AB \parallel CD$ ، مورب AD

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$$
$$\Rightarrow 2\alpha+2\beta=180^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$$

$$H\hat{E}F=A\hat{E}D=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$
$$F\hat{G}H=B\hat{G}C=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

و $H\hat{E}F+F\hat{G}H=180^\circ$ و این یعنی چهارضلعی EFGH محاطی است.

۱۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



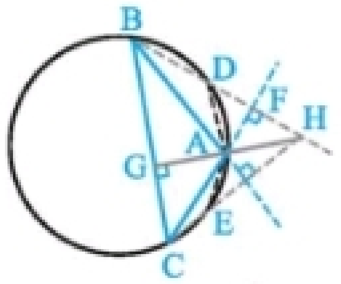
$$\left.\begin{array}{l} A\hat{D}O=A\hat{D}B\ (\text{محاطی})=\dfrac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{C}=\dfrac{\widehat{AB}}{2}\ (\text{محاطی}) \end{array}\right\}\Rightarrow A\hat{D}O=\hat{C}$$

چهارضلعی CEOH محاطی است، زیرا $\hat{E}+\hat{H}=180^\circ$، در نتیجه $\hat{C}+E\hat{O}H=180^\circ$ و چون $A\hat{O}D+E\hat{O}H=180^\circ$، بنابراین $A\hat{O}D=\hat{C}$. (این نتیجه را می‌توانستیم مستقیم از خواص چهارضلعی محاطی بنویسیم) و نهایتاً $A\hat{O}D=A\hat{D}O$

نکته قرینهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های هر مثلث نسبت به اضلاع آن همواره روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد و مثلث AOD متساوی‌الساقین است.

۱۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها است، پس امتداد AH بر BC عمود است.

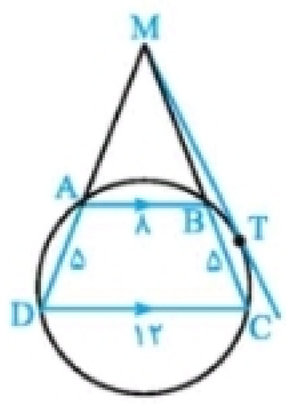


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BFC}: B\hat{C}F=90^\circ-C\hat{B}H \\ \overset{\Delta}{BGH}: A\hat{H}D=90^\circ-C\hat{B}H \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow B\hat{C}F=A\hat{H}D$$

چهارضلعی ADBC محاطی است، پس اندازهٔ $B\hat{C}F$ در آن با اندازهٔ زاویهٔ خارجی BDA یعنی $A\hat{D}H$ برابر است $(B\hat{C}F=A\hat{D}H)$، بنابراین $A\hat{H}D=A\hat{D}H$

۱۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

یک ذوزنقه در یک دایره محاط است، اگر و تنها اگر ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد. پس طول ساق‌های ذوزنقهٔ مطلوب ۵ است و مطابق شکل امتداد آن‌ها در M متقاطع‌اند. داریم:



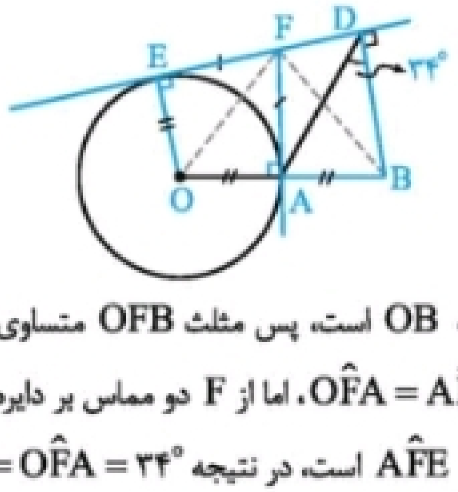
$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AB}{CD}=\frac{MB}{MC}$$
$$\Rightarrow \frac{8}{12}=\frac{MB}{MB+5}$$
$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{MB}{5}=\frac{8}{4}\Rightarrow MB=10$$

حال بنابه رابطهٔ طولی مماس و قطعات قاطع داریم:

$$MT^2=MB\times MC=10\times(10+5)=10\times 15$$
$$\Rightarrow MT^2=5^2\times 6\Rightarrow MT=5\sqrt{6}$$

۱۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: در نقطهٔ A خطی عمود بر OB رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با DE را F می‌نامیم. خط مماس بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. پس $B\hat{A}F=B\hat{D}F=90^\circ$، لذا چهارضلعی ABDF محاطی است و در نتیجه $A\hat{F}B=A\hat{D}B=34^\circ$



AF عمودمنصف OB است، پس مثلث OFB متساوی‌الساقین است در نتیجه $O\hat{F}A=A\hat{F}B=34^\circ$، اما از F دو مماس بر دایره رسم شده است، پس OF نیمساز $A\hat{F}E$ است، در نتیجه $O\hat{F}E=O\hat{F}A=34^\circ$ داریم:

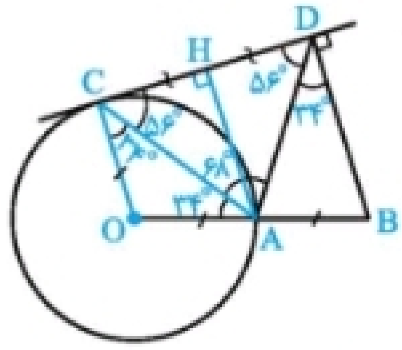
چهارضلعی محاطی $ABDF\Rightarrow A\hat{B}D=A\hat{F}E=O\hat{F}A+O\hat{F}E$

$$=34^\circ+34^\circ=68^\circ$$

$\overset{\Delta}{ABD}$ زاویهٔ خارجی $O\hat{A}D\Rightarrow O\hat{A}D=A\hat{D}B+A\hat{B}D$

$$=34^\circ+68^\circ=102^\circ$$

روش دوم: A را به وسط CD وصل می‌کنیم، AH پاره‌خط میانگین ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ OBDC است. پس AH موازی قاعده‌هاست. لذا AH بر CD عمود است.



در نتیجه $\overset{\Delta}{AHD} \cong \overset{\Delta}{AHC}$ لذا $A\hat{C}D = A\hat{D}C = 56^\circ$. داریم:

$$O\hat{C}A = 90^\circ - A\hat{C}D = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$$

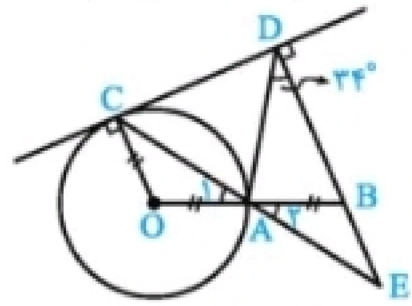
$$OA = OC \Rightarrow O\hat{A}C = O\hat{C}A = 34^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: C\hat{A}D + 56^\circ + 56^\circ = 180^\circ \Rightarrow C\hat{A}D = 68^\circ$$

و نهایتاً:

$$O\hat{A}D = 34^\circ + 68^\circ = 102^\circ$$

روش سوم: وتر AC را از سمت A امتداد می‌دهیم و نقطهٔ تلاقی آن با امتداد BD را E می‌نامیم. چون DE و OC هر دو بر CD عمود هستند پس موازی‌اند. از طرفی بنابه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $A\hat{O}C = A\hat{B}E$، در نتیجه می‌توان نوشت:



$$(A\hat{O}C = A\hat{B}E,\ OA = AB,\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2)$$

$$\xrightarrow{(\text{زضز})} \overset{\Delta}{AOC} \cong \overset{\Delta}{ABE} \Rightarrow \begin{cases} AC = AE \\ BE = OC = AB \end{cases}$$

مثلث CDE در رأس D قائم‌الزاویه است و با توجه به $AC = AE$، AD میانهٔ نظیر وتر است پس نصف وتر می‌باشد و داریم: $(AD = AC = AE)$

$$AE = AD \Rightarrow \hat{E} = A\hat{D}E = 34^\circ,\ AB = BE \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{E} = 34^\circ$$

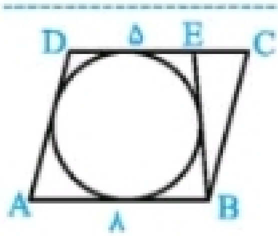
$$O\hat{A}D = \hat{A}_1 + C\hat{A}D \xrightarrow[\text{مثلث ADE}]{\text{زاویهٔ خارجی } C\hat{A}D} O\hat{A}D = \hat{A}_2 + A\hat{D}E + \hat{E}$$

$$\Rightarrow O\hat{A}D = 34^\circ + 34^\circ + 34^\circ = 102^\circ$$

تذکر صورت پرسش اشکال دارد. مماس رسم‌شده بر دایره، دلخواه نیست.

۱۳۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

ضلع‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع برابرند، پس:



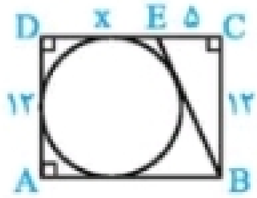
$$CD = AB \Rightarrow DE + CE = AB \Rightarrow 5 + CE = 8 \Rightarrow CE = 3$$

اما ذوزنقهٔ ABED محیطی است، پس:

$$AD + BE = AB + DE \xrightarrow{AD=BC} BC + BE = 8 + 5 = 13$$

$$\text{محیط مثلث } BCE = BE + BC + CE = 13 + 3 = 16$$

۱۳۹ (۱) (۲) (۳) (۴)



فرض کنیم $DE = x$، چون ABCD مستطیل است، پس $AB = CD = x + 5$. از طرفی ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABED محیطی است، پس:

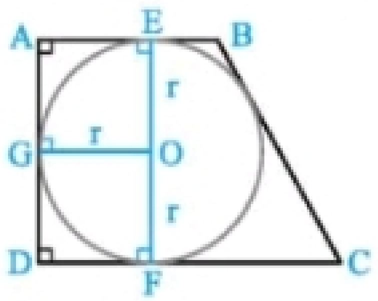
$$AD + BE = AB + DE \Rightarrow 12 + \sqrt{12^2 + 5^2} = x + 5 + x$$

$$\Rightarrow 12 + \sqrt{169} = 2x + 5 \Rightarrow 12 + 13 = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

$$AB = x + 5 = 10 + 5 = 15$$

۱۴۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

چهارضلعی AEOG مربع است، زیرا مستطیلی است (سه زاویهٔ قائمه دارد، پس مستطیل است.) که دو ضلع مجاورش برابرند $(OE = OG = r)$. با استدلال مشابه DFOG مربع است و ارتفاع ذوزنقه همان قطر دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی است $(AD = EF = 2r)$. بنابه فرض $EF = 14$ و $BC = 16$ است.



چون ذوزنقه محیطی است، پس:

$$AB + CD = AD + BC = EF + BC$$

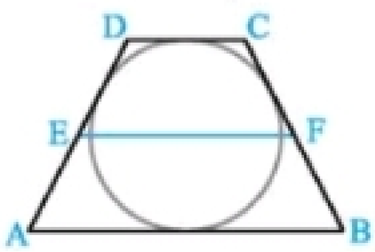
و داریم:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}AD(AB+CD) = \frac{1}{2}EF(EF+BC)$$

$$= \frac{1}{2}\times 14 \times (14+16) = 210$$

۱۴۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، پاره‌خط میانگین ذوزنقه نامیده می‌شود و موازی قاعده‌ها است و اندازهٔ آن میانگین حسابی دو قاعده می‌باشد. $EF = \frac{AB+CD}{2}$



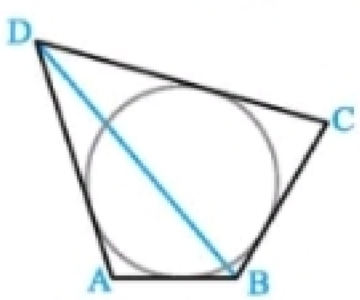
بنابه فرض $EF = 12$، پس $AB + CD = 24$ و چون چهارضلعی ABCD محیطی است، داریم:

$$AD + BC = AB + CD = 24$$

$$\text{محیط چهارضلعی } ABCD = AB + BC + CD + AD$$

$$= (AD+BC) + (AB+CD) = 24 + 24 = 48$$

۱۴۲ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $AD > AB$، $BC > AB$ و $CD > AB$ و چون چهارضلعی ABCD محیطی است، پس $AB + CD = AD + BC$ و می‌توان نوشت:

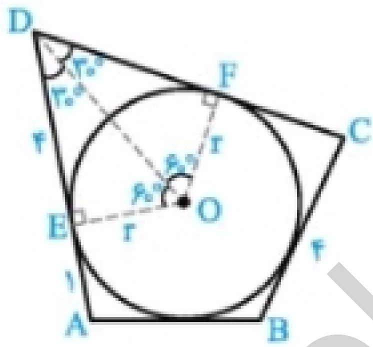
$CD - AD = BC - AB > ۰ \Rightarrow CD > AD$

$CD - BC = AD - AB > ۰ \Rightarrow CD > BC$

پس CD بزرگ‌ترین ضلع چهارضلعی است و با رسم قطر BD داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}: AD > AB \Rightarrow A\hat{B}D > A\hat{D}B \\ \overset{\Delta}{BDC}: CD > BC \Rightarrow C\hat{B}D > C\hat{D}B\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{B} > \hat{D}$$

۱۴۳ (۱) (۲) (۳) (۴)



برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی محیطی ABCD، شعاع دایرهٔ محاطی و نصف محیط آن را باید داشته باشیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OED به جهت وجود زوایای ۳۰° و ۶۰° داریم:

$OE = \frac{OD}{۲} \Rightarrow OD = ۲r$

$DE = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OD \Rightarrow ۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲r \Rightarrow r = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$

$۲P = AB + CD + BC + AD$

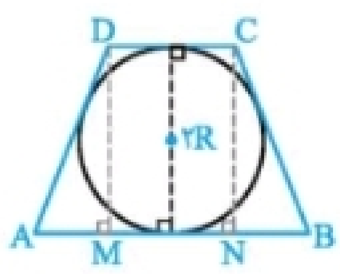
$\xrightarrow{AB+CD=AD+BC} ۲P = ۲AD + ۲BC$

$\Rightarrow P = AD + BC = ۴ + ۱ + ۴ = ۹$

$S(ABCD) = P.r = ۹ \times \frac{۴}{\sqrt{۳}} = ۱۲\sqrt{۳}$

۱۴۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض $S(ABCD)=۴۵$ و $R=۳$ است. ارتفاع ذوزنقه، قطر دایرهٔ محاطی آن است.



$S(ABCD)=\frac{۱}{۲}DM.(AB+CD)$

$\Rightarrow ۴۵=\frac{۱}{۲}\times ۲\times R(AB+CD)$

$\Rightarrow AB+CD=\frac{۴۵}{۳}=۱۵$

چهارضلعی ABCD محیطی است. $\Rightarrow AB+CD=AD+BC$

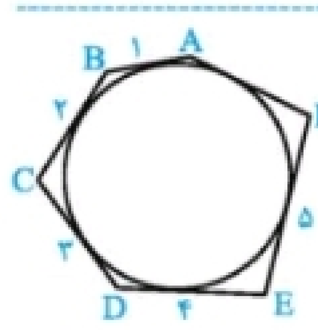
$\xrightarrow{AD=BC} ۱۵=۲AD=۲BC \Rightarrow AD=BC=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$

۱۴۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\left.\begin{array}{l}AD+EF=AF+DE \\ BC+EF=BF+EC\end{array}\right\} \xrightarrow{+} AD+BC+۲EF=AB+CD$$

$\Rightarrow EF=\frac{۲۰+۱۸-۱۰-۱۴}{۲}=۷$

۱۴۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



مطابق شکل به کمک خاصیت برابری دو مماس مرسوم بر دایره می‌توان ثابت کرد در هر شش‌ضلعی محیطی مجموع اندازه‌های اضلاع به طور یک‌درمیان برابرند.

$AB+CD+EF=BC+DE+AF$

$\Rightarrow ۱+۳+۵=۲+۴+AF \Rightarrow AF=۹-۶=۳$

۱۴۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

شش‌ضلعی منتظم همواره یک چندضلعی محیطی است و دایره‌ای بر اضلاع آن مماس است (دایرهٔ محاطی) و شعاع این دایره از دستور $r=\frac{S}{P}$ به‌دست می‌آید. بنابه فرض، مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $S=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$ و $a=۶\sqrt{۳}$ است. داریم:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۶a}{۲}}=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۶a}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۶\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۲}=۹$$

۱۴۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

هشت‌ضلعی منتظم همواره یک چندضلعی محیطی است و دایره‌ای بر اضلاع آن مماس است (دایرهٔ محاطی) و مانند پرسش قبل با توجه به فرض $S=۲a^۲(\sqrt{۲}+۱)$ و $r=۲\sqrt{۲}$ داریم:

$r=\frac{S}{P}\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\frac{۲a^۲(\sqrt{۲}+۱)}{\frac{۸a}{۲}}\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\frac{a(\sqrt{۲}+۱)}{۲}$

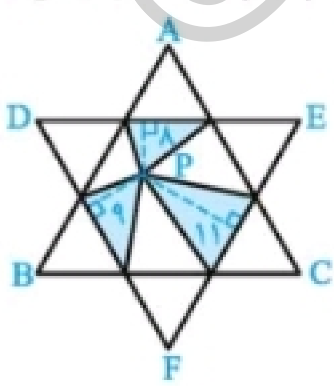
$\Rightarrow a=\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

$S=۲a^۲(\sqrt{۲}+۱)=۲\times\frac{۱۶\times ۲}{(\sqrt{۲}+۱)^۲}(\sqrt{۲}+۱)$

$=۶۴(\sqrt{۲}-۱)=۶۴\sqrt{۲}-۶۴$

۱۴۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

دو مثلث ABC و DEF متساوی‌الاضلاع و همنهشت هستند و اندازهٔ هر ضلع آن‌ها سه برابر ضلع شش‌ضلعی منتظم است. مطابق شکل ارتفاع‌های مثلث‌های رنگی را $h_۱$، $h_۲$ و $h_۳$ فرض می‌کنیم و ارتفاع و ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را h و a می‌نامیم. از هندسهٔ (۱) می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه مانند P داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع، برابر ارتفاع مثلث است $(h=h_۱+h_۲+h_۳)$. پس می‌توان نوشت:



مجموع مساحت‌های مثلث‌های رنگی $=\frac{۱}{۲}h_۱\times\frac{a}{۳}+\frac{۱}{۲}h_۲\times\frac{a}{۳}+\frac{۱}{۲}h_۳\times\frac{a}{۳}$

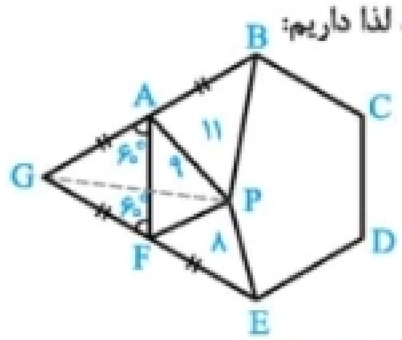
$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}(h_۱+h_۲+h_۳)\times a=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}h\times a=\frac{۱}{۳}S(DEF)$

با استدلال مشابه مجموع مساحت‌های مثلث‌های غیر رنگی در شش‌ضلعی منتظم برابر $\frac{۱}{۳}S(ABC)$ است. پس نتیجه می‌گیریم مجموع مساحت‌های مثلث‌های رنگی با مجموع مساحت‌های مثلث‌های غیر رنگی برابر است و مقدار آن‌ها برابر نصف مساحت شش‌ضلعی منتظم است، پس:

مساحت شش‌ضلعی منتظم $=۲(۸+۹+۱۱)=۵۶$

۱۵۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

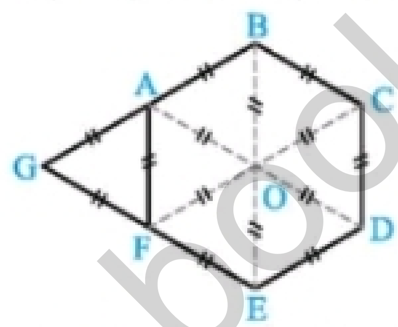
نقطهٔ تلاقی امتداد اضلاع AB و EF در شش‌ضلعی منتظم ABCDEF را G می‌نامیم. مثلث AGF متساوی‌الاضلاع است که ضلع آن با ضلع شش‌ضلعی منتظم برابر است، پس PA و PF در مثلث‌های PGB و PGE میانه هستند، لذا داریم:



$$S(PGA)=S(PAB)=11$$

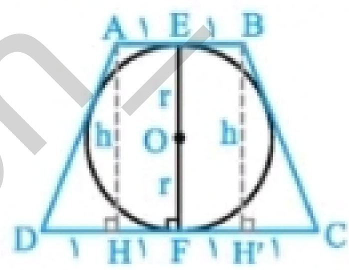
$$S(PGF)=S(PFE)=8$$

$$S(AGF)=S(PGA)+S(PGF)-S(PAF)=11+8-9=10$$



اما مساحت مثلث AGF، $\frac{1}{6}$ مساحت شش‌ضلعی منتظم است (شکل مقابل)، در نتیجه مساحت شش‌ضلعی برابر ۶۰ است.

۱۵۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



روش اول: در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی، قاعده‌ها را نصف می‌کند و داریم:

$$AB+CD=BC+AD$$

$$\Rightarrow AD=BC=\frac{AB+CD}{2}=\frac{4+2}{2}=3$$

$$\overset{\Delta}{ADH}: AD^2=AH^2+DH^2 \Rightarrow 3^2=h^2+1^2 \Rightarrow h^2=8 \Rightarrow h=2\sqrt{2}$$

$$S(ABCD)=\frac{1}{2}AH.(AB+CD)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}(2+4)=6\sqrt{2}$$

روش دوم: فرض کنیم دایرهٔ O بر اضلاع ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD مماس باشد، OA و OD به ترتیب نیمسازهای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ هستند (زیرا O از اضلاع این زوایا به یک فاصله است).

پس $O\widehat{A}D+O\widehat{D}A=\frac{\widehat{A}+\widehat{D}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$، در نتیجه مثلث AOD قائم‌الزاویه است و OG ارتفاع وارد بر وتر است. و بنابه رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $OG^2=GD.GA \Rightarrow r^2=1\times 2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$

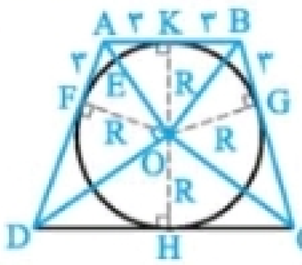
$$S(ABCD)=\frac{1}{2}EF.(AB+CD)=\frac{1}{2}\times 2r(2+4)=6\sqrt{2}$$

روش سوم: قبلاً ثابت کردیم در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، ارتفاع (قطر دایرهٔ محاطی) واسطهٔ هندسی دو قاعدهٔ ذوزنقه است، پس داریم:

$$h^2=AB\times CD=2\times 4=8 \Rightarrow h=2\sqrt{2}$$

$$S(ABCD)=\frac{1}{2}h\times(2+4)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 6=6\sqrt{2}$$

۱۵۲ (۱) (۲) (۳) (۴)



قبلاً ثابت کردیم ارتفاع (قطر دایرهٔ محاطی) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، واسطهٔ هندسی دو قاعدهٔ آن است، پس می‌توان نوشت:

$$(2R)^2=AB\times CD \Rightarrow 4R^2=6\times\frac{32}{3} \Rightarrow R^2=16 \Rightarrow R=4$$

کوتاه‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا محیط دایره، AE است و به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$OA^2=AF^2+OF^2=3^2+4^2=5^2 \Rightarrow OA=5$$

$$AE=OA-OE=5-4=1$$

۱۵۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم a و b قاعده‌ها $(a>b)$، h ارتفاع و r شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی داده‌شده باشند. بنابه فرض $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$ و $r=\sqrt{3}$. داریم:

$$(2r)^2=a\times b \Rightarrow (2\sqrt{3})^2=a\times b$$

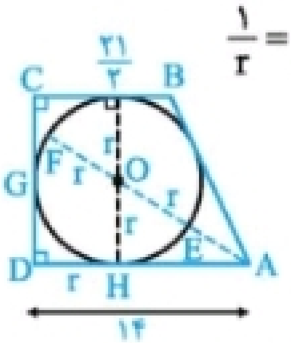
$$\Rightarrow a\times b=12 \xrightarrow{a=3b} 3b\times b=12$$

$$\Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=3b=6$$

$$S=\frac{1}{2}h(a+b)=\frac{1}{2}\times 2r(6+2)=\sqrt{3}\times 8=8\sqrt{3}$$

۱۵۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

قبلاً ثابت کردیم در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی اگر اندازهٔ قاعده‌ها a و b و شعاع دایرهٔ محاطی r باشد داریم $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ بیش‌ترین فاصلهٔ رأس ذوزنقه تا نقاط دایره، AF است و برای محاسبهٔ آن کافی است $OF=r$ و OA را محاسبه کنیم.



$$\frac{1}{r}=\frac{1}{14}+\frac{1}{\frac{21}{2}}=\frac{1}{14}+\frac{2}{21}=\frac{3+4}{42} \Rightarrow r=\frac{42}{7}=6$$

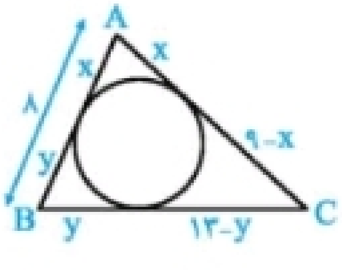
$$AH=AD-DH=14-6=8$$

$$OA^2=OH^2+AH^2=6^2+8^2=10^2 \Rightarrow OA=10$$

$$AF=OF+OA=6+10=16$$

۱۵۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم شود، طولشان برابر است، پس:



$$\begin{cases}13-y=9-x\\ x+y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y-x=4\\ x+y=8\end{cases}$$

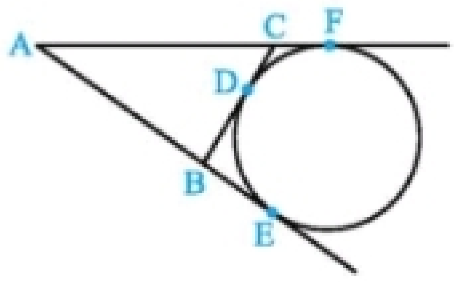
$$\xrightarrow{+} 2y=12 \Rightarrow y=6\ ,\ x=2$$

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

۱۵۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

دو مماس AE و AF معلوم‌اند و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط} = AB+BC+AC = AB+BD+CD+AC$$



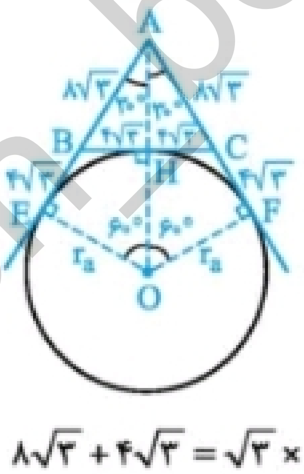
بنابه خواص مماس $BD=BE$، $CD=CF$ و $AE=AF$، داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط} = AB+BE+CF+AC = AE+AF = ۲AE = ۲AF$$

بنابراین محیط مثلث ABC ثابت است از طرفی مساحت مثلث $S=r_a(P-a)$ است و چون P و r_a ثابت هستند و a متغیر است، پس مساحت مثلث تغییر می‌کند.

۱۵۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: در مثلث متساوی‌الاضلاع، شعاع‌های دایره‌های محاطی بیرونی برابرند $r_a=r_b=r_c$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOE داریم:

$$AE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \quad , \quad OE=\frac{OA}{۲}$$

$$\Rightarrow AE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲OE)=\sqrt{۳}OE$$

$$۸\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}=\sqrt{۳}\times r_a \Rightarrow r_a=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۱۲$$

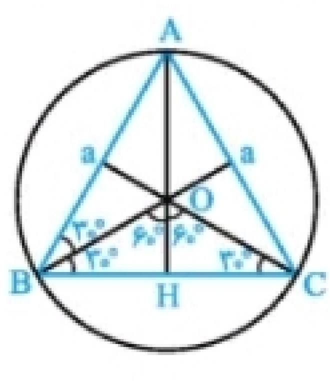
روش دوم: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است و نصف محیط آن $P=\frac{۳a}{۲}$ است، پس داریم:

$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۳a}{۲}-a}=\frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{a}{۲}}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابه فرض $a=۸\sqrt{۳}$، پس: $r_a=\frac{۸\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$

۱۵۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطه‌های همرسی ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و عمودمنصف‌ها بر هم منطبق‌اند، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH داریم:



$$BH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OB \Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R \Rightarrow a=R\sqrt{۳}$$

بنابه فرض $a=۷\sqrt{۳}$ در نتیجه $R=۷$

۱۵۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به شکل سؤال قبل می‌گوییم $OH=r$، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و $OA=R$ شعاع دایرهٔ محیطی است و چون O نقطهٔ همرسی میانه‌ها است، پس $OA=۲OH$ و در نتیجه $R=۲r$

۱۶۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

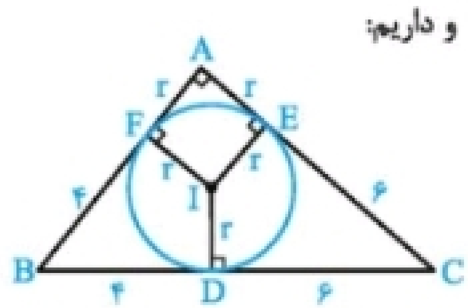
$$\pi r^۲=۹\pi \Rightarrow r^۲=۹ \Rightarrow r=۳ \Rightarrow R=۲r=۶$$

۱۶۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\frac{R}{r_a}=\frac{۲r}{r_a}=\frac{۲\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-a}}=\frac{۲(P-a)}{P}=\frac{۲(\frac{۳a}{۲}-a)}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

۱۶۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: چون $\widehat{A}=۹۰^\circ$ است، چهارضلعی AEIF مستطیل است و با توجه به این‌که $IE=IF=r$ نتیجه می‌شود این چهارضلعی مربع است (همواره این چهارضلعی در مثلث قائم‌الزاویه مربع است)، پس $AE=AF=r$ و داریم:



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=(r+۴)^۲+(r+۶)^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰۰=۲r^۲+۲۰r+۵۲ \Rightarrow r^۲+۱۰r=۲۴$$

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}(r+۴)(r+۶)=\frac{۱}{۲}(r^۲+۱۰r+۲۴)$$

$$=\frac{۱}{۲}(۲۴+۲۴)=۲۴$$

روش دوم:

$$BD=P-b=۴\ ,\ CD=P-c=۶ \Rightarrow CD-BD=۲$$

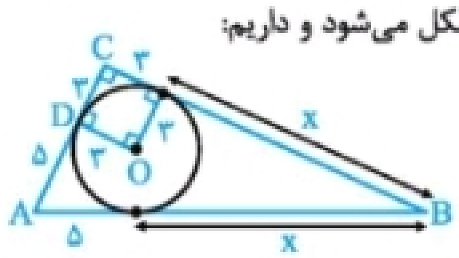
$$\Rightarrow P-c-P+b=۲ \Rightarrow b-c=۲$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.}} \underbrace{b^۲+c^۲}_{a^۲}-۲bc=۴$$

$$\Rightarrow ۱۰^۲-۴\times\frac{۱}{۲}bc=۴ \Rightarrow ۱۰۰-۴S=۴ \Rightarrow S=\frac{۱۰۰-۴}{۴}=\frac{۹۶}{۴}=۲۴$$

۱۶۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: بنابه فرض شعاع دایرهٔ محاطی داخلی ۳ و $AC=۸$ است، در نتیجه اندازهٔ پاره‌خط‌ها مطابق شکل می‌شود و داریم:



$$(x+۵)^۲=۸^۲+(x+۳)^۲$$

$$\Rightarrow ۴x=۴۸ \Rightarrow x=۱۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط}=AC+BC+AB=۸+۳+۱۲+۵+۱۲=۴۰$$

روش دوم: بنابه فرض $r = P - c = 3$ و $AC = b = 8$ در نتیجه داریم:

$$2P - 2c = 6 \Rightarrow a+b+c-2c = 6 \Rightarrow a - c + 8 = 6$$

$$\Rightarrow c = a+2 \Rightarrow c^2 = a^2+4a+4 \Rightarrow a^2+b^2 = a^2+4a+4$$

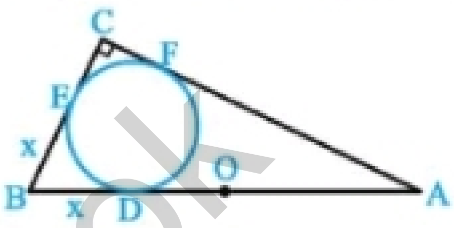
$$\Rightarrow 64 = 4a+4 \Rightarrow a = \frac{60}{4} = 15$$

$$c = a+2 = 15+2 = 17$$

محیط $\overset{\Delta}{ABC} = a+b+c = 15+8+17 = 40$

۱۶۴ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: مثلث به اضلاع $AC = 4$ ، $BC = 3$ و $AB = 5$ قائم‌الزاویه است و داریم:



$$CE = BC - BE = 3 - x \Rightarrow CF = 3 - x$$

$$AF = AC - CF = 4 - (3-x) = 1+x \quad \Rightarrow AD = 1+x$$

$$AB = 5 \Rightarrow x+1+x = 5 \Rightarrow x = 2$$

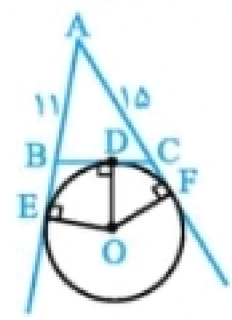
در مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر مرکز دایرهٔ محیطی است، پس $OB = OA = \frac{5}{2}$ و نهایتاً: $OD = OB - BD = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

روش دوم: برای محاسبهٔ BD می‌توانیم از دستور زیر استفاده کنیم:

$$BD = P - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{3+4+5}{2} - 4 = 2$$

$$OD = OB - BD = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۱۶۵ ۱ ۲ ۳ ۴



روش اول: فرض کنیم $AB = 11$ ، $AC = 15$ ، $BD = 3x$ و $CD = 2x$ ، حال داریم:

$$AE = AF \Rightarrow AB + BE = AC + CF$$

$$\Rightarrow AB + BD = AC + CD$$

$$\Rightarrow 11 + 3x = 15 + 2x \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow BC = BD + CD = 12 + 8 = 20$$

محیط $\overset{\Delta}{ABC} = AB + AC + BC = 11 + 15 + 20 = 46$

روش دوم: می‌دانیم $BD = P - c$ و $CD = P - b$ ، بنابه فرض داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{P-11}{P-15} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2P - 22 = 3P - 45$$

$$\Rightarrow P = 45 - 22 = 23 \Rightarrow 2P = 46$$

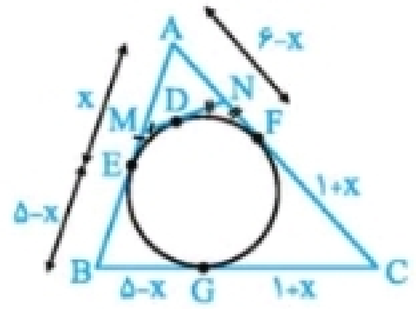
۱۶۶ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم $AE = x$ ، در این صورت داریم:

$$BG = BE = AB - AE = 5 - x$$

$$CF = CG = BC - BG = 6 - (5-x) = 1+x$$

$$AF = AC - CF = 7 - (1+x) = 6 - x$$



در نتیجه:

$$AE = AF \Rightarrow x = 6 - x \Rightarrow x = 3$$

محیط $AMN = AM + MN + AN = AM + MD + DN + AN$

$$= AM + ME + NF + AN = AE + AF = 2AE = 2 \times 3 = 6$$

تذکر می‌توانستیم مستقیماً از دستور (محیط مثلث $AMN = 2AE$) هم استفاده کنیم.

۱۶۷ ۱ ۲ ۳ ۴

چون $c^2 = a^2 + b^2$ $(13^2 = 5^2 + 12^2)$ پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است $(\hat{C} = 90^\circ)$ و داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{5\times 12}{2}}{\frac{5+12+13}{2} - 5} \Rightarrow r_a = \frac{60}{30-10} = \frac{60}{20} = 3$$

۱۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S}$$

$$= \frac{3P - (a+b+c)}{S} = \frac{3P - 2P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$

۱۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60} \Rightarrow r = \frac{60}{47}$$

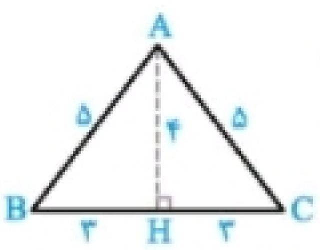
۱۷۰ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که $r = \frac{S}{P}$ داریم:

$$\frac{h_a}{r} = \frac{\frac{2S}{a}}{r} = \frac{2S}{ar} = \frac{2P}{a} \Rightarrow \frac{h_a}{r} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+2a}{a} = 3$$

۱۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴

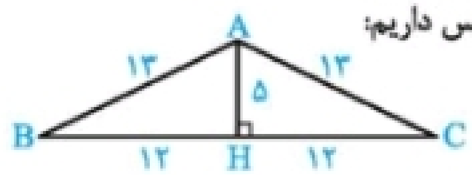
چون مثلث متساوی‌الساقین است، ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث $AH = 4$ به‌دست می‌آید، پس:



$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{4\times 6}{2}}{\frac{5+5+6}{2} - 6} = \frac{12}{8-6} = \frac{12}{2} = 6$$

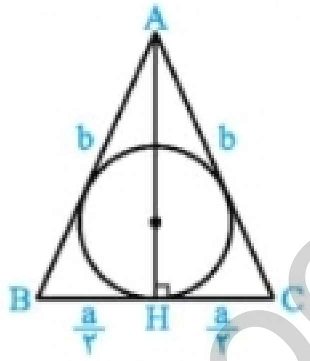
۱۷۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

چون مثلث متساوی‌الساقین است، ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث $AH = ۵$ به‌دست می‌آید، پس داریم:



$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{۵ \times ۲۴}{۲}}{\frac{۱۳+۱۳+۲۴}{۲} - ۲۴} = \frac{۶۰}{۲۵-۲۴} = ۶۰$$

۱۷۳ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $AH = ۸$ و $r = ۳$، می‌خواهیم a را محاسبه کنیم. داریم:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۳ = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{a+b+b}{۲}} \Rightarrow ۳ = \frac{۸a}{a+۲b}$$

$$\Rightarrow ۳a + ۶b = ۸a \Rightarrow ۶b = ۵a \Rightarrow b = \frac{۵a}{۶}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : b^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + h_a^۲ \Rightarrow \left(\frac{۵a}{۶}\right)^۲ = \frac{a^۲}{۴} + ۸^۲$$

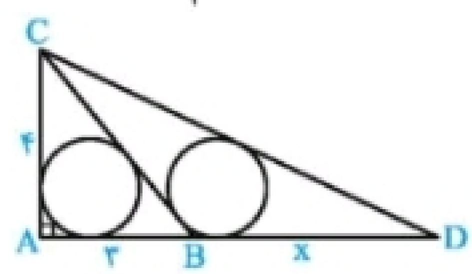
$$\Rightarrow ۲۵a^۲ = ۹a^۲ + ۶^۲ \times ۸^۲ \Rightarrow ۱۶a^۲ = ۶^۲ \times ۸^۲$$

$$\Rightarrow ۴a = ۶ \times ۸ = ۴۸ \Rightarrow a = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲$$

۱۷۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $BC = ۵$ است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث برابر است با:

$$r = \frac{AB + AC - BC}{۲} = \frac{۳+۴-۵}{۲} = ۱$$



فرض کنیم $BD = x$، در این صورت ضلع CD در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD برابر است با:

$$CD^۲ = AD^۲ + AC^۲ = (x+۳)^۲ + ۴^۲ = x^۲ + ۶x + ۲۵$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{x^۲ + ۶x + ۲۵}$$

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث BCD بنابه فرض با شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC برابر است و مساحت این مثلث برابر $S(BCD) = \frac{۱}{۲} AC \times BD = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times x = ۲x$ می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$S(BCD) = P \times r \Rightarrow ۲x = \frac{BD + BC + CD}{۲} \times ۱$$

$$\Rightarrow ۴x = x + ۵ + \sqrt{x^۲ + ۶x + ۲۵} \Rightarrow ۳x - ۵ = \sqrt{x^۲ + ۶x + ۲۵}$$

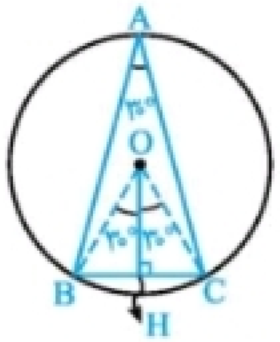
$$\Rightarrow ۹x^۲ - ۳۰x + ۲۵ = x^۲ + ۶x + ۲۵ \Rightarrow ۸x^۲ - ۳۶x = ۰$$

$$\xrightarrow{x \neq ۰} x = \frac{۳۶}{۸} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

۱۷۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$BC = ۲R \sin A \Rightarrow ۸ = ۲R \sin ۳۰^\circ \Rightarrow ۸ = ۲R \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow R = ۸$$

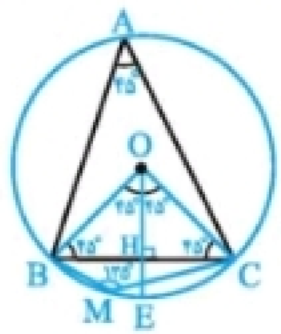
۱۷۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



دایرهٔ محیطی مثلث ABC با شرایط $\widehat{A} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۸\sqrt{۳}$ همان دایره‌ای است که کمان حاوی زاویهٔ ۳۰° روبه‌رو به پاره‌خط BC روی آن قرار دارد. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث از BC برابر است با:

$$OH = \frac{BC}{۲|\tan\alpha|} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۲\tan ۳۰^\circ} = \frac{۴\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = ۱۲$$

۱۷۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

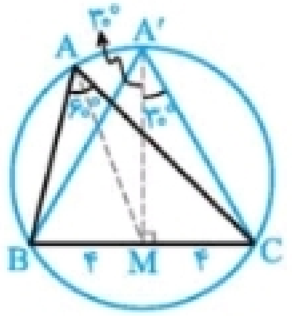


مطابق شکل، کمان حاوی زاویهٔ ۱۳۵° $\widehat{BEC}$ روبه‌رو به پاره‌خط $BC = ۸$ است. نقطهٔ E وسط کمان مذکور، دورترین نقطه از پاره‌خط BC است و داریم: $OH = \frac{BC}{۲} = ۴$

$$OB = OC = OE = \frac{BC}{۲\sin\alpha} = \frac{۸}{۲\sin ۴۵^\circ} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

$$EH = OE - OH = ۴\sqrt{۲} - ۴$$

۱۷۸ (۱) (۲) (۳) (۴)



رأس A روی کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره‌خط $BC = ۸$ قرار دارد. مطابق شکل حداکثر طول میانهٔ AM، اندازهٔ $A'M$ است که میانهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع $A'BC$ است. پس:

$$A'M = \frac{BC\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

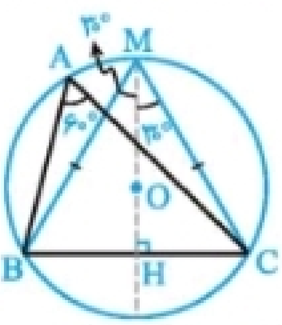
از آن‌جایی که $\widehat{A}$ حاده است بنابراین طول میانهٔ AM از نصف ضلع BC بزرگ‌تر است، پس داریم:

$$\frac{BC}{۲} < AM \le A'M \Rightarrow ۴ < AM \le ۴\sqrt{۳} \simeq ۶/۹$$

و از میان گزینه‌ها عدد ۶ در نامساوی فوق صدق می‌کند.

۱۷۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

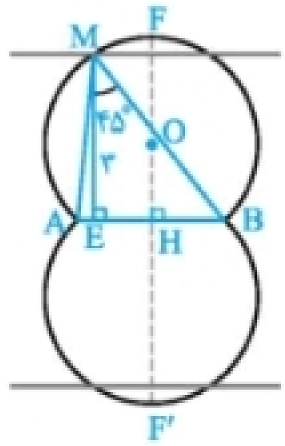
با فرض $\widehat{A} = ۶۰^\circ$ و $BC = ۴$، مکان هندسی رأس A، کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره‌خط BC است وقتی مساحت مثلث ABC ماکزیمم است که ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC بزرگ‌ترین باشد یعنی برابر MH (M وسط $\widehat{BAC}$ است.) باشد در این حالت مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و داریم:



$$S(\overset{\Delta}{BMC}) = \frac{BC^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴^۲ \times \sqrt{۳}}{۴} = ۴\sqrt{۳}$$

۱۸۰

با توجه به $AB=۲\sqrt{۲}$ و $A\widehat{M}B=۴۵^\circ$، جای M، کمان حاوی زاویهٔ ۴۵° روبه‌رو به پاره‌خط AB است و بیش‌ترین فاصلهٔ M از خط شامل پاره‌خط AB برابر است با:



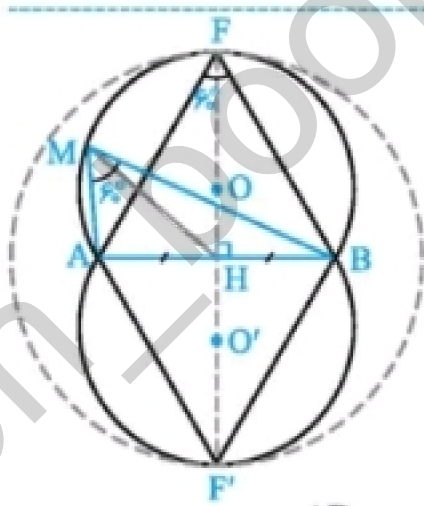
$$FH=OH+OF=\frac{AB}{۲\tan\alpha}+\frac{AB}{۲\sin\alpha}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\tan ۴۵^\circ}+\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sin ۴۵^\circ}=\sqrt{۲}+۲$$

از طرف دیگر M روی دو خط موازی و به فاصلهٔ ۳ از خط شامل AB قرار دارد. چون $\sqrt{۲}+۲>۳$، این دو خط کمان حاوی‌ها را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

۱۸۱

چون $AB=۴$ و $A\widehat{M}B=۶۰^\circ$، پس یک جای M کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره‌خط AB است. بیش‌ترین فاصلهٔ M از وسط AB برابر است با:



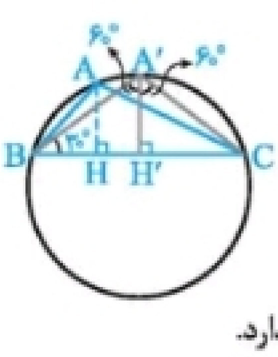
$$FH=OH+OF=\frac{AB}{۲\tan\alpha}+\frac{AB}{۲\sin\alpha}=\frac{۴}{۲\tan ۶۰^\circ}+\frac{۴}{۲\sin ۶۰^\circ}$$

$$\Rightarrow FH=\frac{۲}{\sqrt{۳}}+\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر $MH=۲\sqrt{۳}$ است پس جای دیگر M دایره‌ای به مرکز H و شعاع $۲\sqrt{۳}$ است. بنابراین این دایره بر کمان حاوی‌ها در نقاط F و F' مماس می‌شود و دو نقطهٔ F و F' وسط کمان حاوی‌ها جواب‌اند.

۱۸۲

مفروضات $a=۴\sqrt{۳}$ و $\widehat{A}=۱۲۰^\circ$ نتیجه می‌دهند رأس A روی کمان حاوی زاویهٔ ۱۲۰° روبه‌رو به پاره‌خط BC به طول $۴\sqrt{۳}$ قرار دارد. با معلوم بودن $AH=h_a$ مثلث ABC قابل رسم است. مقدار h_a وقتی حداکثر است که A وسط کمان کوچک BC قرار گیرد. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'BH'$، دو زاویهٔ حاده ۳۰° و ۶۰° است و داریم:



$$BH'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A'B \quad , \quad A'H'=\frac{A'B}{۲}$$

$$\Rightarrow BH'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲A'H')\Rightarrow BH'=\sqrt{۳}A'H'$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}A'H'\Rightarrow A'H'=۲$$

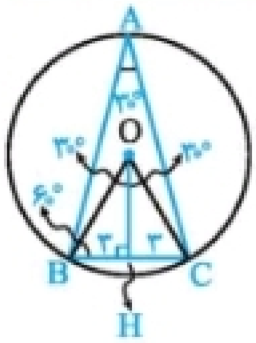
بنابراین $۰<h_a\leq ۲$ و عدد ۳ در این فاصله قرار ندارد.

تذکر $A'H'$ را به کمک مثلثات هم می‌توان محاسبه کرد:

$$\tan ۶۰^\circ=\frac{BH'}{A'H'}\Rightarrow A'H'=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۲$$

۱۸۳

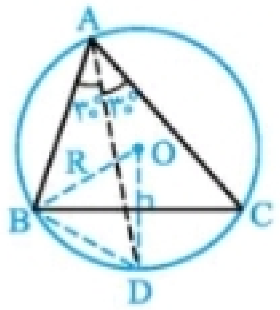
جای رأس A با فرض $BC=۶$ و $\widehat{A}=۳۰^\circ$ کمان حاوی زاویهٔ ۳۰° روبه‌رو به پاره‌خط BC است در مثلث متساوی‌الاضلاع OBC ارتفاع OH، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر ضلع BC است. داریم:



$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

۱۸۴

چون $BC=۶$ و $\widehat{A}=۶۰^\circ$ است، پس جای رأس A کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره‌خط BC است. نیمساز زاویهٔ A از وسط $\widehat{BC}$ می‌گذرد و با تغییر نقطهٔ A روی کمان حاوی، این مطلب برقرار است. پس نیمساز همهٔ زوایای A از نقطهٔ ثابت D وسط $\widehat{BC}$ می‌گذرند و داریم: $B\widehat{O}D=\widehat{BD}=۶۰^\circ$

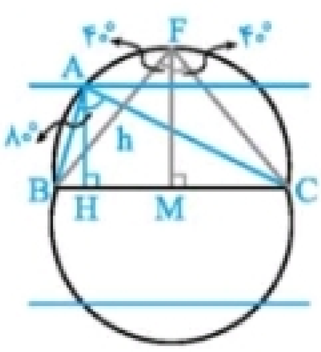


مثلث OBD متساوی‌الاضلاع است. $OB=OD=R\Rightarrow$

$$BD=R=\frac{BC}{۲\sin ۶۰^\circ}=\frac{۶}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

۱۸۵

رأس A روی کمان حاوی زاویهٔ ۸۰° وابسته به پاره‌خط BC به طول ۸ قرار دارد و از طرفی روی دو خط موازی خط شامل BC و به فاصلهٔ h از آن قرار دارد. اگر این خط‌ها بر کمان حاوی‌ها مماس شوند مقدار AH ماکزیمم می‌شود که ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی‌الساقین BFC می‌باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BFM داریم:

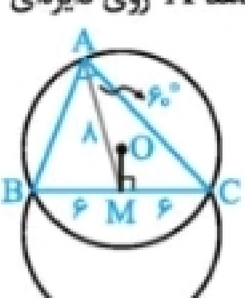


$$\tan ۴۰^\circ=\frac{BM}{MF}\Rightarrow MF=\cot ۴۰^\circ\times BM$$

$$\Rightarrow MF=\frac{۸}{۲}\times\cot ۴۰^\circ=۴\cot ۴۰^\circ$$

۱۸۶

چون $BC=۱۲$ و $\widehat{A}=۶۰^\circ$، پس A روی کمان حاوی زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره‌خط BC قرار دارد. از طرفی $AM=۸$ نتیجه می‌دهد A روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۸ قرار دارد و محل تلاقی کمان حاوی‌ها و دایرهٔ روبه‌رو جای رأس A است. مرکزهای دو دایرهٔ تعیین‌کنندهٔ جای A مطابق شکل O و M می‌باشند. پس:



$$OM=\frac{a}{۲|\tan\alpha|}=\frac{۱۲}{۲\tan ۶۰^\circ}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

فصل ۲ تبدیل‌های هندسی و کاربردها

قسمت اول: تبدیل‌های هندسی (بازتاب، انتقال، دوران و تجانس)

بازتاب

☆۱۸۷. خط D محور یک بازتاب را با زاویهٔ ۶۰° قطع می‌کند. نقطهٔ A روی D از نقطهٔ تقاطع به فاصلهٔ $۴\sqrt{۳}$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ تصویرش در این بازتاب کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۹\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) ۱۵

☆۱۸۸. نقطهٔ M درون زاویهٔ ۴۵° قرار دارد. اگر فاصلهٔ آن تا رأس زاویه برابر $۲\sqrt{۶}$ و M' و M'' تصاویر M در بازتاب نسبت به اضلاع زاویه باشند آن‌گاه طول پاره‌خط $M'M''$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۸

☆۱۸۹. دو بازتاب با محورهای عمود بر هم را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ای، از نقطهٔ تقاطع دو محور به فاصلهٔ $۲\sqrt{۲}$ است. اگر تصاویر قائم این نقطه روی محورهای بازتاب را B و C بنامیم، آن‌گاه طول پاره‌خط BC کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۸

☆۱۹۰. A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به محور L می‌باشد، اگر $AA' = ۱۶$ و O نقطه‌ای روی خط L باشد، به طوری‌که $OA = ۱۰$، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط شامل پاره‌خط OA' کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۱۲/۸ ۳) ۷/۲ ۴) ۹/۶

★۱۹۱. دو خط L و L' تصویر یکدیگر در یک بازتاب هستند. اگر تانژانت زاویهٔ بین این دو خط برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، آن‌گاه تانژانت زاویهٔ بین محور بازتاب و خط L کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☆۱۹۲. کدام تبدیل بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد؟

۱) انتقال ۲) دوران ۳) بازتاب ۴) تجانس

☆۱۹۳. تحت یک تبدیل، خط مفروض، با تبدیل‌یافتهٔ آن موازی است. در کدام حالت، نوع تبدیل کاملاً مشخص است؟

۱) تجانس ۲) دوران ۱۸۰° ۳) انتقال ۴) بازتاب

انتقال

☆۱۹۴. خط D را تحت انتقالی که بردار آن به طول ۱۲ سانتی‌متر است و زاویهٔ راستای خط و بردار برابر ۶۰° است. انتقال می‌دهیم فاصلهٔ خط D و تصویر آن کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۶ ۴) $۸\sqrt{۳}$

☆۱۹۵. یک مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت ۱۰۸ را تحت برداری که ابتدای آن یک رأس مثلث و انتهای آن مرکز مثلث است، انتقال می‌دهیم، مساحت ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویرش کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

☆۱۹۶. در مثلث ABC، $AB = AC = ۱۰$ و $BC = ۱۲$ است. اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد و مثلث را تحت بردار $\overrightarrow{AH}$ انتقال دهیم. مساحت مثلث تصویر کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

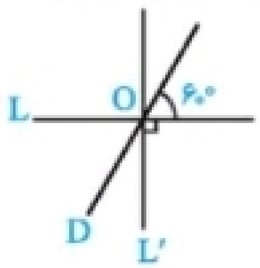
۱۹۷. دایرهٔ $C(O,R)$ را در انتقال با بردار به طول $R\sqrt{۲}$ تصویر می‌کنیم، دایرهٔ C' به‌دست می‌آید. مساحت بین دو دایره چه کسری از مساحت هر یک از آن‌ها است؟

۱) $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\pi}$ ۲) $۱-\frac{۱}{\pi}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}-\frac{۱}{\pi}$ ۴) $۱-\frac{۲}{\pi}$

۱۹۸. دایرهٔ $C(O,۳)$ را با بردار به طول ۱۰ انتقال می‌دهیم، دایرهٔ C' به‌دست می‌آید. نسبت طول مماس مشترک داخلی دو دایره به طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

☆۱۹۹. دو خط L و L' بر هم عمودند و خط D از نقطهٔ تقاطع آن‌ها می‌گذرد و با خط L زاویهٔ ۶۰° می‌سازد. خط D را با انتقالی که بردار آن بر D عمود است و اندازه‌اش $۶\sqrt{۳}$ است انتقال می‌دهیم، مساحت ناحیهٔ بین خط تصویر و خط‌های L و L' کدام است؟



۱) $۵۴\sqrt{۳}$ ۲) $۹۶\sqrt{۳}$

۳) $۶۴\sqrt{۳}$ ۴) $۷۲\sqrt{۳}$

☆۲۰۰. نتیجهٔ ترکیب چند انتقال کدام است؟

۱) یک دوران ۲) یک بازتاب ۳) یک انتقال ۴) یک تجانس

☆۲۰۱. کدام تبدیل زیر نقطهٔ ثابت ندارد؟

۱) دوران ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) بازتاب

دوران

☆۲۰۲. نقطهٔ A را حول نقطهٔ O و زاویهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم. اگر $OA=\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز دوران تا خط گذرنده از A و تصویرش کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

☆۲۰۳. در دوران به مرکز O و زاویهٔ ۶۰°، خط d و تصویرش در نقطهٔ A متقاطع‌اند. اگر $OA=۶$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز دوران از خط تصویر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۲۰۴. نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر A تحت بازتاب نسبت به محور d را A' می‌نامیم و A را حول نقطهٔ A' به زاویهٔ ۱۲۰° دوران می‌دهیم، نقطهٔ A'' به‌دست می‌آید. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟

۱) $۹\sqrt{۲}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱۵\sqrt{۲}$ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

☆۲۰۵. مرکز دوران را کجا اختیار کنیم که مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بعد از دوران بر خودش منطبق شود؟

۱) وسط ضلع BC ۲) مرکز دایرهٔ محاطی خارجی ۳) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ۴) رأس A

☆۲۰۶. دو خط D و D' مفروض است. چند نقطه وجود دارد که اگر D را حول آن نقطه‌ها دوران دهیم بر D' منطبق گردد؟

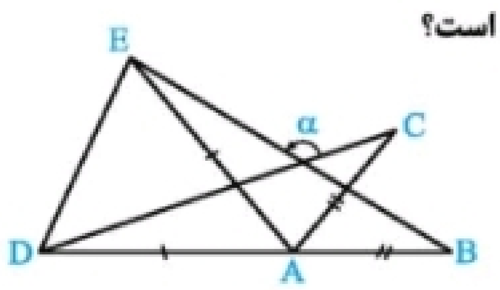
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۴

☆۲۰۷. ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع (α زاویهٔ بین دو محور) کدام است؟

۱) دوران به زاویهٔ α ۲) انتقال ۳) بازتاب ۴) دوران به زاویهٔ ۲α

★۲۰۸. در شکل مقابل، $AB=AC$، $AD=AE$، $C\hat{A}B=۵۰^\circ$ و $A\hat{E}D=۶۵^\circ$ است. زاویهٔ α چند درجه است؟

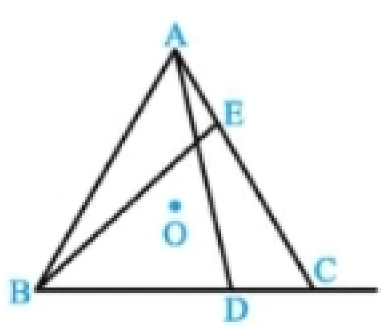
(سراسری ریاضی- ۸۷)



۱) ۱۱۵
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۵
۴) ۱۳۰

★۲۰۹. نقطهٔ O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و $BD=CE$. کدام بیان نادرست است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)



۱) $OE=OD$
۲) $OD\perp BE$
۳) $E\hat{O}D=۱۲۰^\circ$
۴) $A\hat{O}C=۱۲۰^\circ$

۲۱۰. دایرهٔ $C(O,4)$ را در دوران به مرکز A و زاویهٔ 90° تصویر می‌کنیم، دایرهٔ (C') به‌دست می‌آید. اگر $OA = 9$ باشد، آن‌گاه طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

۱) 10 ۲) $7\sqrt{2}$ ۳) 9 ۴) $8\sqrt{2}$

۲۱۱. مثلث ABC با $\widehat{B} = 114^\circ$ مفروض است. رأس‌های A و C را حول B به اندازهٔ 34° دوران می‌دهیم، نقاط A' و C' پدید می‌آیند. زاویهٔ برخورد خط‌های AA' و CC' چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۸ ۴) ۶۶

☆۲۱۲. کدام تبدیل طول پاره‌خط را تغییر نمی‌دهد، ولی ممکن است زاویهٔ آن را با خط مفروض تغییر دهد؟

۱) دوران ۲) تجانس ۳) انتقال ۴) هر سه

☆۲۱۳. کدام تبدیل طولپا است و شیب خط را حفظ نمی‌کند؟

۱) دوران و تجانس ۲) تجانس و بازتاب ۳) انتقال و بازتاب ۴) بازتاب و دوران

تجانس

☆۲۱۴. تبدیل‌یافتهٔ یک خط را تحت تبدیل‌های انتقال، دوران، تجانس و بازتاب نسبت به خط پیدا می‌کنیم. در چه تعداد از آن‌ها ممکن است تبدیل‌یافتهٔ خط بر خود خط عمود باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

☆۲۱۵. ترکیب دو تقارن محوری، که محورهای آن بر هم عمود باشند، کدام نوع تبدیل نمی‌تواند باشد؟

۱) انتقال و بازتاب ۲) تجانس ۳) دوران ۴) تجانس و دوران

☆۲۱۶. شیب خط بعد از کدام تبدیل‌های زیر تغییر نمی‌کند؟

۱) تجانس و دوران ۲) تجانس و انتقال ۳) بازتاب و دوران ۴) انتقال و بازتاب

☆۲۱۷. پاره‌خط AB به طول a را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $-\frac{3}{2}$ تصویر می‌کنیم. طول پاره‌خط تصویر کدام است؟

۱) $\frac{3a}{2}$ ۲) $\frac{2a}{3}$ ۳) $3a$ ۴) $2a$

☆۲۱۸. مساحت یک مثلث ۱۲۸ و مساحت تصویر آن در یک تجانس ۵۰ است. اندازهٔ تصویر پاره‌خطی به طول ۱۲ در این تجانس کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۷

☆۲۱۹. تجانس‌های یک شکل نسبت به یک مرکز و دو نسبت مختلف k و k' خود مجانس یکدیگرند. نسبت تجانس این دو شکل کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{k}{k'}$ ۲) kk' ۳) $k+k'$ ۴) $2kk'$

☆۲۲۰. یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در تجانسی که مرکز آن نقطهٔ همرسی میانه‌ها و نسبت تجانس آن $\frac{1}{2}$ است تصویر می‌کنیم، اگر مساحت ناحیهٔ بین مثلث و تصویرش برابر $3\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه محیط مثلث کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

★۲۲۱. دو نقطهٔ O و O' به فاصلهٔ $6\sqrt{3}$ از یکدیگر قرار دارند. نقطهٔ A را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس ۳ تصویر می‌کنیم نقطهٔ A' به‌دست می‌آید، سپس نقطهٔ A' را در تجانس به مرکز O' و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A'' حاصل می‌شود. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $5\sqrt{3}$

☆۲۲۲. دو خط موازی به فاصلهٔ ۴ واحد از یکدیگر قرار دارند و نقطهٔ A به فاصله‌های ۱ و ۳ واحد از این دو خط واقع است. این دو خط در کدام تجانس تصویر یکدیگرند؟

۱) تجانس به مرکز A و نسبت ۳
۲) تجانس به مرکز A و نسبت -3
۳) تجانس به مرکز A و نسبت ۴
۴) تجانس به مرکز A و نسبت -4

★۲۲۳. تصویر دایرهٔ $C(O,1)$ تحت تجانس با نسبت تجانس ۳، دایرهٔ (C') به مرکز O' است. اگر $OO' = 2\sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) $3\sqrt{2}$

۲۲۴. دایرهٔ $C(O,12)$ و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲۴ از مرکز آن مفروض‌اند. تصویر دایرهٔ (C) را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ به‌دست می‌آوریم. تعداد مماس مشترک‌های دایره و تصویرش کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

۲۲۵. دو دایرهٔ مماس داخل و به شعاع‌های ۴ و ۶ تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصلهٔ مراکز تجانس‌ها کدام است؟

۱) ۴/۴   ۲) ۴/۶   ۳) ۴/۸   ۴) ۴/۹

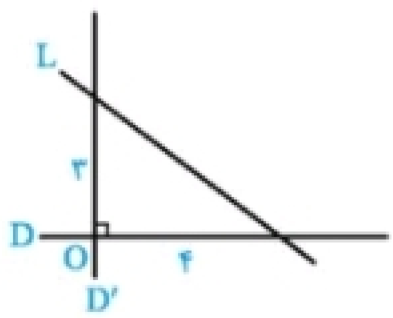
★۲۲۶. دو پاره‌خط موازی به طول‌های ۲ و ۳ که فاصله‌شان از یکدیگر ۴ است، مجانس یکدیگرند. بیش‌ترین فاصلهٔ مرکز تجانس از پاره‌خط بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۱۵   ۲) ۱۲   ۳) ۱۰   ۴) ۹

★۲۲۷. دو پاره‌خط موازی به طول‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. اگر فاصلهٔ بین وسط‌های آن‌ها برابر ۴ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ بین مراکز دو تجانسی که این دو پاره‌خط در آن‌ها تصویر یکدیگرند، کدام است؟

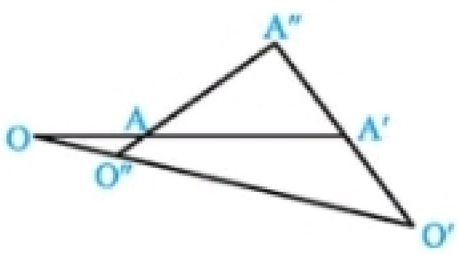
۱) ۹/۶   ۲) ۱۰/۸   ۳) ۱۲/۸   ۴) ۸/۴

★۲۲۸. در شکل مقابل خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{8}{5}$ تصویر می‌کنیم. مساحت بین خط L و تصویرش و خط‌های D و D' کدام است؟



۱) ۹/۵   ۲) ۸/۴۵
۳) ۸/۸۶   ۴) ۹/۳۶

★۲۲۹. در شکل مقابل $\frac{OA}{AA'}=\frac{1}{2}$ و $O'A' = A'A''$ است. اگر A'' تصویر A در تجانس به مرکز O'' و نسبت تجانس k باشد، آن‌گاه مقدار k کدام است؟



۱) ۳   ۲) ۴
۳) ۵   ۴) ۶

۲۳۰. نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $-\frac{5}{2}$ دایره را تصویر می‌کنیم، دایرهٔ C' به‌دست می‌آید. بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره کدام است؟

۱) $8R$ ۲) $\frac{5R}{2}$ ۳) $\frac{7R}{2}$ ۴) $7R$

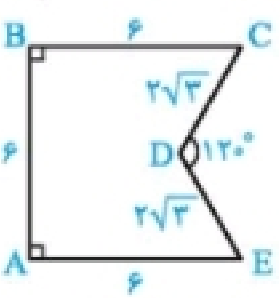
☆۲۳۱. تحت یک تبدیل، خط مفروض بر تبدیل‌یافتهٔ آن منطبق است، به ازای چندتا از حالت‌های زیر نوع تبدیل کاملاً مشخص است؟

«انتقال، دوران، تجانس، بازتاب»

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) صفر

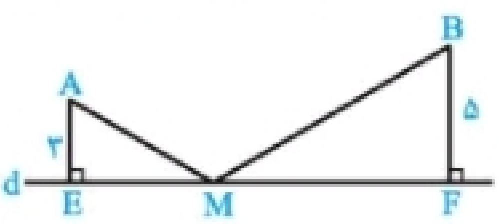
قسمت دوم: کاربرد تبدیل‌ها

☆۲۳۲. دور زمینی مطابق شکل حصارکشی شده است. بدون کم و زیاد کردن حصارها و با جابه‌جایی حصارهای CD و DE، مساحت زمین را افزایش می‌دهیم. مساحت زمین ایجادشده کدام است؟



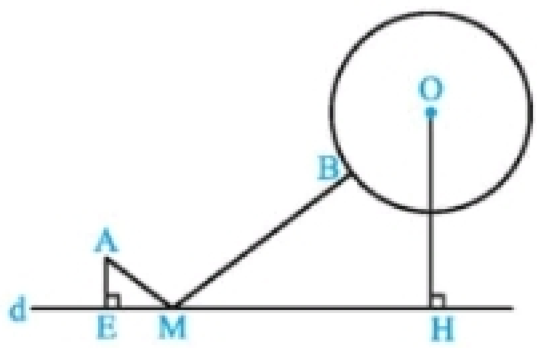
۱) $36+4\sqrt{3}$ ۲) $36+3\sqrt{3}$
۳) $36+2\sqrt{3}$ ۴) $36+6\sqrt{3}$

☆۲۳۳. در شکل مقابل فواصل نقطه‌های A و B از خط d به ترتیب ۳ و ۵ است. اگر $EF = 6$ و M نقطه‌ای روی خط d باشد، کم‌ترین مقدار $MA + MB$ کدام است؟



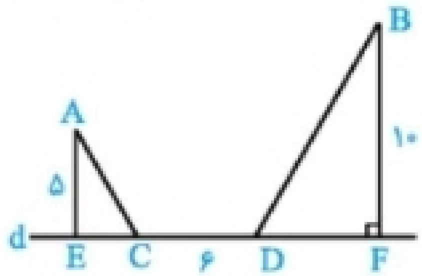
۱) ۹   ۲) ۱۰
۳) ۱۲   ۴) ۸

۲۳۴. در شکل مقابل شعاع دایره ۶، $AE = ۳$، $OH = ۱۲$ و $EH = ۸$ است. کم‌ترین طول $AM + MB$ کدام است؟



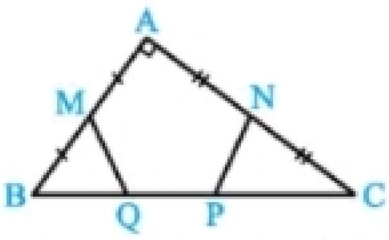
۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

☆۲۳۵. در شکل مقابل، نقاط A و B از خط d به فاصله‌های ۵ و ۱۰ قرار دارند و طول پاره‌خط CD برابر ۶ است. اگر $EF = ۱۴$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $AC + CD + BD$ کدام است؟



۱) ۲۲
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۲۳

۲۳۶. در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه ($\widehat{A} = ۹۰^\circ$) و M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AC هستند و نقاط P و Q روی ضلع BC چنان قرار دارند که $PQ = ۱/۸$ می‌باشد. اگر $AB = ۳$ و $AC = ۴$ باشد آن‌گاه کم‌ترین مقدار محیط به پنج‌ضلعی AMQPN کدام است؟

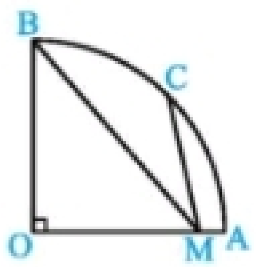


۱) ۹/۶
۲) ۸/۴
۳) ۷/۸
۴) ۶/۴

۲۳۷. در لوزی ABCD، $\widehat{A} = ۱۲۰^\circ$ و $AB = ۲\sqrt{۳}$ است. اگر E وسط ضلع AB و P نقطه‌ای دلخواه روی قطر BD باشد، آن‌گاه کم‌ترین محیط مثلث APE کدام است؟

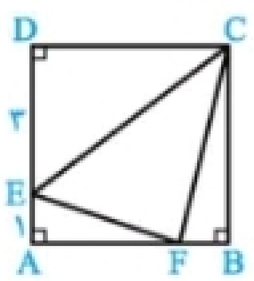
۱) $\sqrt{۳} + ۱$
۲) $۲ + \sqrt{۳}$
۳) $۳ + \sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۳۸. در ربع دایره‌ای به شعاع R مطابق شکل نقطهٔ C وسط کمان AB است و M نقطه‌ای روی شعاع OA می‌باشد. کم‌ترین طول $MB + MC$ چند برابر R است؟



۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$
۴) $\sqrt{۴ - \sqrt{۲}}$

۲۳۹. در مربع ABCD، مطابق شکل، F نقطه‌ای روی ضلع AB است. اگر مثلث CEF کم‌ترین محیط را داشته باشد، آن‌گاه مساحت آن کدام است؟

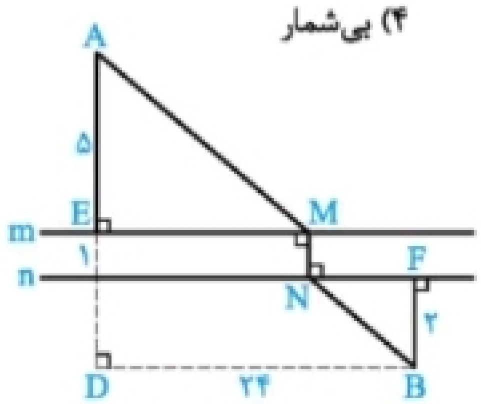


۱) ۳/۲
۲) ۲/۵
۳) ۳/۴
۴) ۴/۲

۲۴۰. نقطهٔ A و دایرهٔ C(O،R) یک طرف خط d قرار دارند به طوری‌که دایره، خط را قطع نمی‌کند. چند نقطه مانند M روی خط d وجود دارد که مماس MT بر دایره و خط MA، با خط d زاویهٔ مساوی بسازند؟

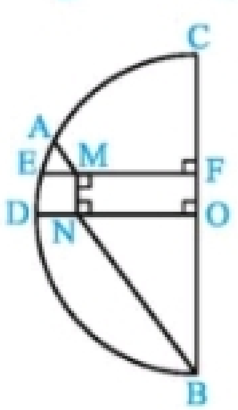
۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار

☆۲۴۱. دو خط موازی m و n به فاصلهٔ یک از هم قرار دارند و نقاط A و B مطابق شکل، دو طرف آن‌ها قرار دارند. اگر $AE = ۵$، $BF = ۲$ و $BD = ۲۴$، طول کوتاه‌ترین مسیر AMNB کدام است؟



۱) ۲۵
۲) ۲۸
۳) ۲۶
۴) ۲۷

۲۴۲. در شکل مقابل نیم‌دایره به مرکز O و قطر $BC = ۸$ مفروض است. وتر EF با شعاع OD موازی می‌باشد و اندازهٔ کمان AC برابر ۶۰° است. اگر اندازهٔ OF یک چهارم شعاع دایره باشد، آن‌گاه کم‌ترین طول مسیر AMNB کدام است؟



۱) ۷
۲) $\sqrt{۳۸} + ۱$
۳) $\sqrt{۳۹} + ۱$
۴) $\sqrt{۳۷} + ۱$

☆۲۴۳. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A بیرون آن مفروض است. به کمک تبدیل تجانس می‌توان از A خطی رسم کرد که اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند و داشته باشیم BC = ۲AB. مرکز و نسبت این تجانس کدام است؟

۱) O، $\frac{۱}{۲}$ ۲) O، $\frac{۱}{۳}$ ۳) A، $\frac{۱}{۳}$ ۴) A، $\frac{۱}{۲}$

☆۲۴۴. چهارضلعی ABCD مفروض است. به کمک تبدیل انتقال می‌توان نشان داد چهارضلعی حاصل از وصل پی‌درپی وسط‌های اضلاع ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. بردار انتقال کدام است؟

۱) $\frac{\overrightarrow{AB}}{۲}$ ۲) $\overrightarrow{AC}$ ۳) $\frac{\overrightarrow{AC}}{۲}$ ۴) $\overrightarrow{BD}$

☆۲۴۵. نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود به طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ A(۱،۵) و B(۷،-۲)، بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۴۶. دو نقطهٔ A(۲،۳) و B(۴،۷) و خط به معادلهٔ y = x - ۱، در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطهٔ M بر روی خط مفروض، با کدام طول انتخاب شود به طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ مفروض، بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

☆۲۴۷. در صفحه‌ای خط d و دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) بازتاب ۲) تجانس ۳) دوران ۴) انتقال

★۲۴۸. دو خط متقاطع d و d′ و پاره‌خط AB غیرموازی با d و d′، در صفحهٔ آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

★۲۴۹. دو خط متمایز Δ و Δ′ و نقطهٔ A خارج آن دو خط مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین با رأس A که دو سر قاعدهٔ آن بر روی هر دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب ۴) انتقال

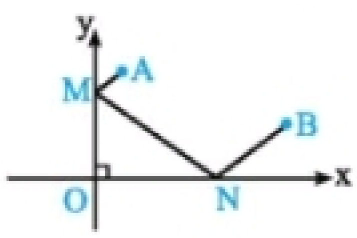
★۲۵۰. با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

۲۵۱. نقطهٔ A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هر یک از دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) دوران

★۲۵۲. در دستگاه مختصات روبه‌رو A(۱،۴) و B(۷،۲) است. کم‌ترین مقدار مسیر AMNB کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۹

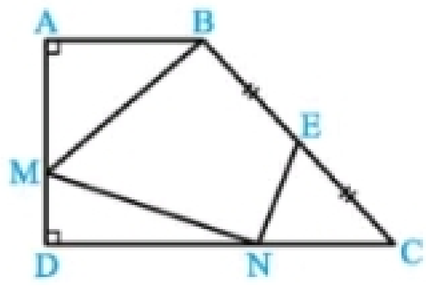
★۲۵۳. در یک صفحه دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطهٔ A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطهٔ A خطی گذراند که در این دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶، با کمی تغییر)

۱) دوران °۹۰ ۲) دوران °۱۸۰ ۳) دوران °۲۷۰ ۴) تجانس مستقیم

★۲۵۴. در یک صفحه دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطهٔ A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطهٔ A خطی گذراند که در این دو دایره دو وتر ایجاد کند که یکی دو برابر دیگری باشد؟

۱) تجانس ۲) بازتاب ۳) دوران °۹۰ ۴) دوران °۱۸۰

۲۵۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD مطابق شکل اندازهٔ قاعده‌ها ۳ و ۷ و اندازهٔ ساق قائم آن ۴ می‌باشد. اگر E وسط ساق BC و M و N نقاط دلخواهی روی AD و CD باشند، آن‌گاه کم‌ترین محیط چهارضلعی BMNE کدام است؟ $(DC = ۷ ، AD = ۴ ، AB = ۳)$



۱) $۸+۲\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۵+۴\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲+۲\sqrt{۲}$

۲۵۶. سه خط دوبه‌دو ناموازی d، ′d و ″d در صفحه مفروض‌اند. می‌خواهیم پاره‌خطی به طول $a > ۰$ رسم کنیم که دو سر آن روی d و ′d بوده و موازی ″d باشد. تعداد جواب کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۵۶ کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) فاقد جواب ۴) بی‌شمار جواب

۲۵۷. در صفحه دو زاویهٔ حاده xOy و yOz در رأس O و ضلع Oy مشترک هستند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که ضلع‌های دو زاویه را قطع کند و پاره‌خط‌های محدود به آن‌ها برابر باشند. تعداد جواب کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) فاقد جواب ۴) بی‌شمار جواب

تقارن ویژهٔ علاقمندان

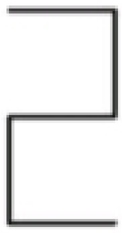
۲۵۸. در بین چندضلعی‌های زیر، کدام فقط یک محور تقارن دارد؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ۴) مستطیل

۲۵۹. کدام‌یک از اشکال زیر مرکز تقارن ندارد؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) پانزده‌ضلعی منتظم ۴) چهارده‌ضلعی منتظم

۲۶۰. در شکل مقابل، کدام گزینه درست است؟



۱) محور تقارن دارد. ۲) یک محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد.
۳) نه محور تقارن و نه مرکز تقارن دارد. ۴) مرکز تقارن دارد و محور تقارن ندارد.

۲۶۱. مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم ۱۰۸۰ درجه است. این چندضلعی چند محور تقارن دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۲۶۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین چند تقارن خطی و تقارن دورانی غیرهمانی دارد؟

۱) ۱، ۱ ۲) ۱، صفر ۳) صفر، ۱ ۴) صفر، صفر

۲۶۳. لوزی چند تقارن خطی و تقارن دورانی غیرهمانی دارد؟

۱) ۲، ۲ ۲) ۲، صفر ۳) ۲، ۱ ۴) ۱، ۱

۲۶۴. کدام شکل تقارن دورانی با زاویهٔ ۴۵° دارد؟

۱) مربع ۲) دایره ۳) مثلث متساوی‌الاضلاع ۴) شش‌ضلعی منتظم

۲۶۵. نیم‌دایره چند تقارن خطی و تقارن دورانی غیرهمانی دارد؟

۱) ۱، ۱ ۲) صفر، صفر ۳) ۱، صفر ۴) بی‌شمار، بی‌شمار

۲۶۶. در یک ۲n ضلعی منتظم تعداد محورهای تقارنی که قطر هستند، کدام است؟

۱) ۲n ۲) n ۳) n − ۱ ۴) n + ۱

۲۶۷. در یک n ضلعی منتظم تعداد قطرها از ده برابر تعداد ضلع‌ها ۱۲ تا بیش‌تر است. کوچک‌ترین زاویهٔ تقارن دورانی آن کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۱۰° ۳) ۱۲° ۴) ۱۸°

۲۶۸. اختلاف کوچک‌ترین زاویه‌های تقارن دورانی یک n ضلعی منتظم و یک $(n+۳)$ ضلعی منتظم ۲۷° است. n ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟

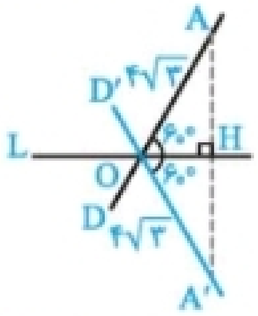
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۶۹. در یک n ضلعی منتظم هیچ‌یک از محورهای تقارن آن قطر چندضلعی نمی‌باشد و داریم $n^۲ - ۱۹n + ۸۴ = ۰$. تعداد تقارن‌های این چندضلعی کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۱۴

پاسخ فصل ۲ تبدیل‌های هندسی و کاربردها

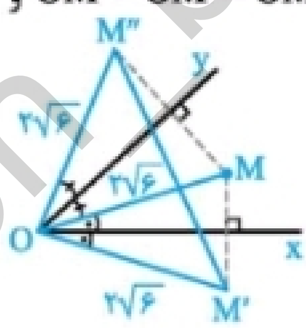
۱۸۷ (۱) (۲) (۳) (۴)



$$AA' = ۲AH = ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA = \sqrt{۳}\times ۴\sqrt{۳} = ۱۲$$

۱۸۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به اضلاع زاویهٔ $x\hat{O}y = ۴۵^\circ$ رسم شده است. چون Ox و Oy به‌ترتیب عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های MM' و MM'' هستند، پس $OM'' = OM' = OM = ۲\sqrt{۶}$ و

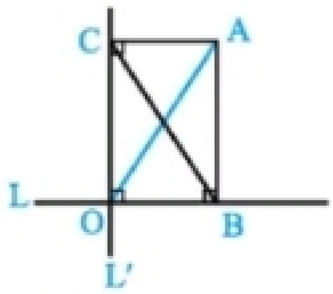


$M'\hat{O}M'' = ۲x\hat{O}y = ۲\times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$

است، پس مثلث $M'OM''$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین، است لذا بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$M'M''^{۲} = (۲\sqrt{۶})^{۲} + (۲\sqrt{۶})^{۲} = ۲\times ۴\times ۶ = ۱۶\times ۳ \Rightarrow M'M'' = ۴\sqrt{۳}$$

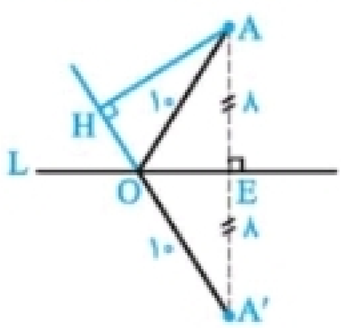
۱۸۹ (۱) (۲) (۳) (۴)



مطابق شکل چهارضلعی ABOC مستطیل است. پس قطرهای آن با هم برابرند و نتیجه می‌شود:

$$BC = OA = ۲\sqrt{۲}$$

۱۹۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

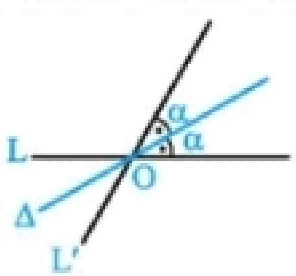


بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم $OE = ۶$. برای محاسبهٔ AH کافی است مساحت مثلث AOA' را بنویسیم:

$$S(AOA') = \frac{۱}{۲}OE\times AA' = \frac{۱}{۲}AH\times OA'$$

$$\Rightarrow ۶\times ۱۶ = AH\times ۱۰ \Rightarrow AH = \frac{۹۶}{۱۰} = ۹/۶$$

۱۹۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



مطابق شکل خط Δ محور بازتابی است که دو خط L و L' در آن تصویر یکدیگرند. بنابه فرض $\tan ۲\alpha = \frac{۴}{۳}$ می‌باشد. داریم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

$$\Rightarrow ۲\tan^{۲}\alpha + ۳\tan\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{۴}$$

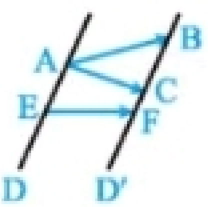
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{-۳\pm ۵}{۴} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{۲} \text{ یا } \tan\alpha = -۲$$

هر دو جواب قبول است، زیرا هر دو خط متقاطع دارای دو محور تقارن هستند و جواب $\tan\alpha = \frac{۱}{۲}$ در گزینهٔ (۲) آمده است.

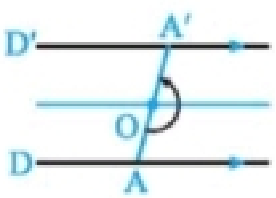
۱۹۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

انتقال نقطهٔ ثابت ندارد، دوران و تجانس یک نقطهٔ ثابت دارند که همان مرکز آن‌ها است و بازتاب، بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد.

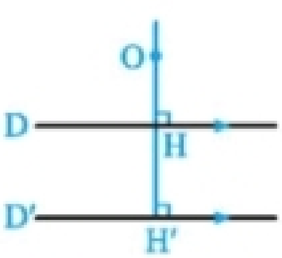
۱۹۳ (۱) (۲) (۳) (۴)



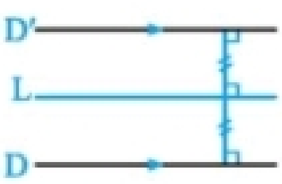
دو خط موازی در بی‌شمار انتقال تصویر یکدیگرند، کافی است ابتدا و انتهای بردارها را دو نقطهٔ دلخواه روی خط‌ها در نظر بگیریم (شکل مقابل)



دو خط موازی در بی‌شمار دوران به زاویهٔ ۱۸۰° تصویر یکدیگرند، کافی است مرکز دوران‌ها را روی خطی موازی و متساوی‌الفاصله با خط‌ها در نظر بگیریم.



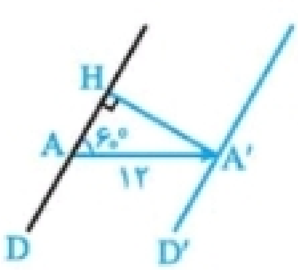
دو خط موازی در بی‌شمار تجانس تصویر یکدیگرند، کافی است خطی بر آن‌ها عمود کنیم. هر نقطه روی این خط‌ها را می‌توان مرکز تجانس‌ها در نظر گرفت و نسبت تجانس برابر نسبت فاصله‌های نقطه از خط‌ها می‌باشد.



اما دو خط موازی فقط در یک بازتاب تصویر یکدیگرند و محور این بازتاب خطی موازی و متساوی‌الفاصله از آن‌ها است.

۱۹۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

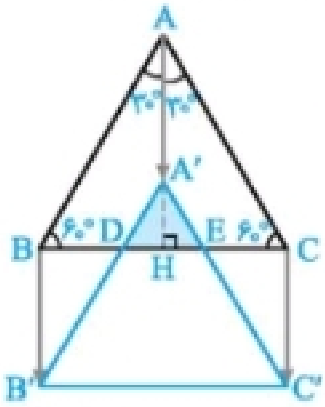
مطابق شکل خط D' تصویر خط D تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ است که اندازهٔ آن ۱۲ است و راستایش با راستای خط D زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، فاصلهٔ D و D' برابر $A'H$ است که به کمک رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه با زوایای ۳۰° و ۶۰° داریم:



$$A'H = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AA' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۲ = ۶\sqrt{۳}$$

۱۹۵

مطابق شکل تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'}$ ($A'=G$ نقطهٔ همرسی میانه‌ها است.) مثلث $A'B'C'$ می‌باشد. اشتراک دو مثلث، مثلث متساوی‌الاضلاع $A'DE$ است که با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه آن‌ها ۱ به ۳ است (زیرا $AH=۳A'H$ است)، پس می‌توان نوشت:

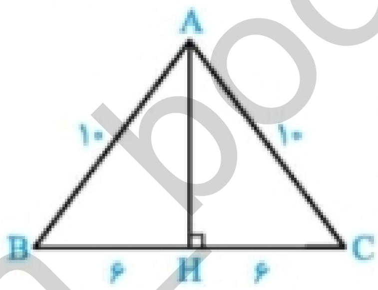


$$\frac{S(A'DE)}{S(ABC)}=\left(\frac{A'H}{AH}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲=\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow S(A'DE)=\frac{S(ABC)}{۹}=\frac{۱۰۸}{۹}=۱۲$$

۱۹۶

انتقال یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است، پس مساحت مثلث تصویر با مساحت مثلث مفروض برابر است لذا کافی است مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم.

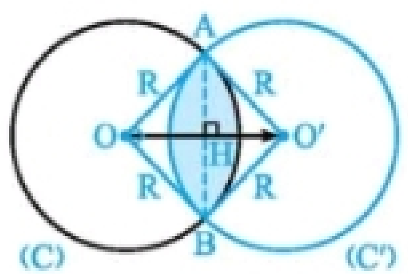


$$AH^۲=AB^۲-BH^۲=۱۰^۲-۶^۲=۸^۲\Rightarrow AH=۸$$

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۲=۴۸$$

۱۹۷

مطابق شکل دایرهٔ (C') تصویر دایرهٔ (C) در انتقال به بردار $\overrightarrow{OO'}$ به طول $R\sqrt{۲}$ است. نقاط تلاقی دو دایره را A و B می‌نامیم.



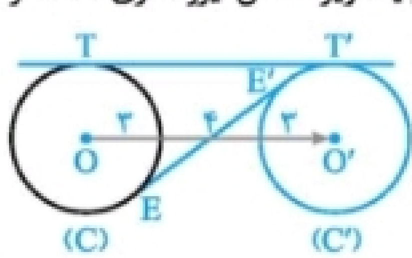
چهارضلعی $OAO'B$ مربع است زیرا $O\hat{A}O'=۹۰^\circ$ $(OA^۲+O'A^۲=OO'^۲)$ و این‌که چهار ضلع آن برابرند. ناحیهٔ بین دو دایره اجتماع دو قطعهٔ همنهشت در دایره‌ها است که زاویهٔ مرکزی این قطعه‌ها ۹۰° است. داریم:

$$\frac{\text{مساحت ناحیهٔ بین دو دایره}}{\text{مساحت یک دایره}}=\frac{۲\times\frac{۱}{۲}R^۲\left(\frac{\pi\times۹۰}{۱۸۰}-\sin۹۰^\circ\right)}{\pi R^۲}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{۲}-۱}{\pi}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\pi}$$

۱۹۸

مطابق شکل دایرهٔ $C(O,۳)$ را با بردار $\vec{v}=\overrightarrow{OO'}$ به طول ۱۰ انتقال می‌دهیم، دایرهٔ $C'(O',۳)$ به‌دست می‌آید؛ زیرا انتقال ایزومتری است و شعاع دایره‌ها تغییر نمی‌کند. داریم:



طول مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲}$

$$=\sqrt{۱۰^۲-۰^۲}=۱۰$$

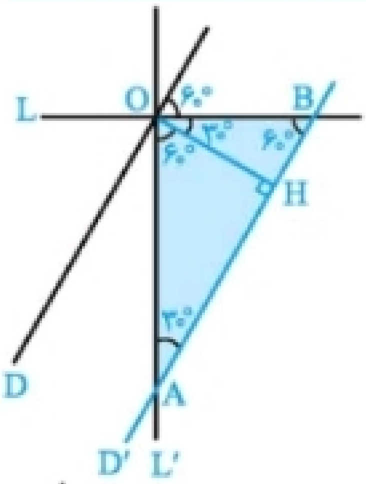
طول مماس مشترک داخلی $EE'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}$

$$=\sqrt{۱۰^۲-۶^۲}=۸$$

پس نسبت طول مماس مشترک داخلی دو دایره به طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر ۰/۸ است.

۱۹۹

مطابق شکل خط D' تصویر خط D تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{OH}$ است که اندازهٔ آن $۶\sqrt{۳}$ و راستای آن بر خط D عمود است.



$$O\overset{\Delta}{B}H:(۹۰^\circ-۶۰^\circ-۳۰^\circ)\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OB$$

$$\Rightarrow OB=\frac{۲\times۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۱۲$$

$$O\overset{\Delta}{A}H:(۹۰^\circ-۶۰^\circ-۳۰^\circ)\Rightarrow OH=\frac{OA}{۲}$$

$$\Rightarrow OA=۲\times۶\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S(AOB)=\frac{۱}{۲}OA\times OB=\frac{۱}{۲}\times۱۲\sqrt{۳}\times۱۲=۷۲\sqrt{۳}$$

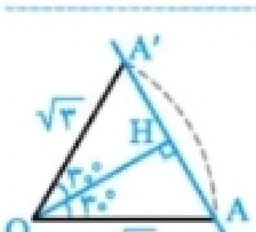
۲۰۰

ترکیب چند انتقال، انتقالی است که بردار آن برابر مجموع بردارهای انتقال‌ها است.

۲۰۱

۲۰۲

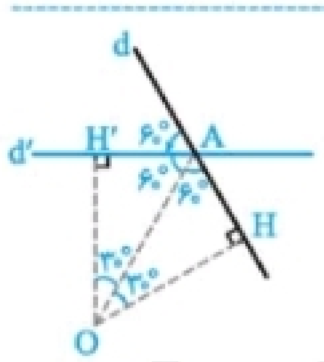
مطابق شکل A' دوران‌یافتهٔ A در دوران به مرکز O و زاویهٔ ۶۰° است. پس $OA'=OA=\sqrt{۳}$ و چون مثلث OAA' متساوی‌الاضلاع است، داریم:



$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AA'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۳}=\frac{۳}{۲}$$

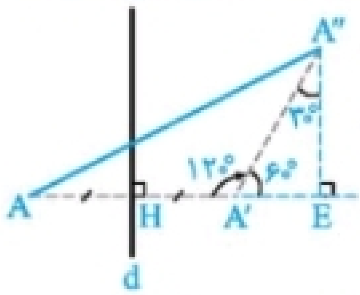
۲۰۳

مطابق شکل خط d' تصویر خط d در دوران به مرکز O و زاویهٔ ۶۰° است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH' ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، پس:



$$OH'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۶=۳\sqrt{۳}$$

۲۰۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



مطابق شکل A' تصویر A تحت بازتاب نسبت به محور d و A'' تصویر A در دوران به مرکز A' و زاویهٔ ۱۲۰° است. بنابه فرض $AH = ۲\sqrt{۶}$ پس $AA' = A'A'' = ۴\sqrt{۶}$

$$A''E = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A'A'' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\sqrt{۶} = ۶\sqrt{۲}$$

$$A'E = \frac{A'A''}{۲} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۲} = ۲\sqrt{۶}$$

$$AA''^{۲} = AE^{۲} + A''E^{۲} = (AA' + A'E)^{۲} + A''E^{۲}$$

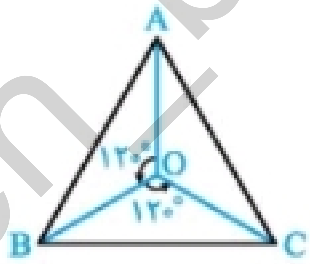
$$\Rightarrow AA''^{۲} = (۴\sqrt{۶} + ۲\sqrt{۶})^{۲} + (۶\sqrt{۲})^{۲} = ۲۸۸ \Rightarrow AA'' = ۱۲\sqrt{۲}$$

تذکر در مثلث به زوایای ۳۰°، ۳۰° و ۱۲۰° همواره اندازهٔ اضلاع برابر a، a و $a\sqrt{۳}$ است، پس بدون محاسبات فوق بلافاصله می‌توان نوشت:

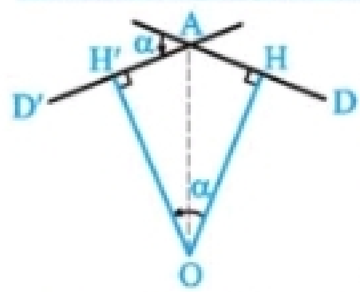
$$AA' = ۴\sqrt{۶} \times \sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۲}$$

۲۰۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

در مثلث متساوی‌الاضلاع اگر مرکز دوران را نقطهٔ همرسی نیمسازها (میانه‌ها، ارتفاع‌ها، عمودمنصف‌ها) در نظر بگیریم، در دوران‌های ۱۲۰°، ۲۴۰° و ۳۶۰° تصویر مثلث بر خودش منطبق می‌شود و نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی همان مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است.



۲۰۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



دو خط D و D' همواره در بی‌شمار دوران تصویر یکدیگرند که مرکز دوران‌ها روی نیمسازهای زوایای دو خط است و زاویهٔ دوران‌ها یکی از دو زاویهٔ بین دو خط می‌باشد.

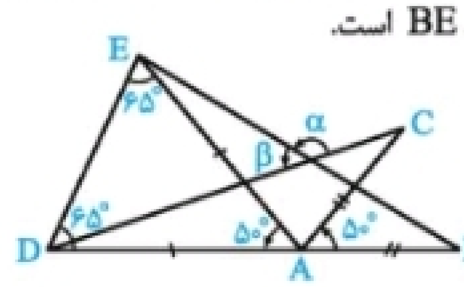
اگر دو خط D و D' موازی باشند، آن‌گاه دو خط D و D' در بی‌شمار دوران به زاویهٔ ۱۸۰° تصویر یکدیگرند و مرکز این دوران‌ها روی خطی موازی و متساوی‌الفاصله از خطوط D و D' قرار دارند.

۲۰۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران است که زاویهٔ آن، دو برابر زاویهٔ بین دو محور بازتاب است.

۲۰۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

چون $AB = AC$ و $B\hat{A}C = ۵۰^\circ$، پس نقطهٔ C تصویر B در دوران به مرکز A و زاویهٔ ۵۰° است. همچنین $AE = AD$ و $D\hat{A}E = ۱۸۰^\circ - A\hat{D}E - A\hat{E}D = ۱۸۰^\circ - ۶۵^\circ - ۶۵^\circ = ۵۰^\circ$ نتیجه می‌دهد D تصویر E در همین دوران است. بنابراین پاره‌خط CD دوران‌یافتهٔ پاره‌خط BE است.

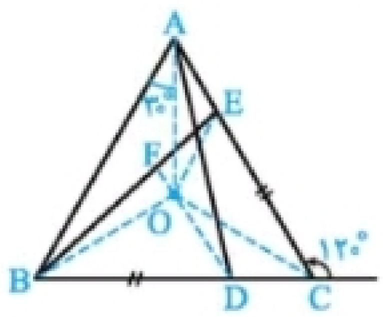


می‌دانیم زاویهٔ خط و تصویرش در یک دوران برابر است با زاویهٔ دوران، لذا $\beta = ۵۰^\circ$ و در نتیجه $\alpha = ۱۸۰^\circ - \beta = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ$

۲۰۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

نیمسازهای زوایای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نقطهٔ O متقاطع‌اند. در مثلث AOC نتیجه می‌شود $A\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$

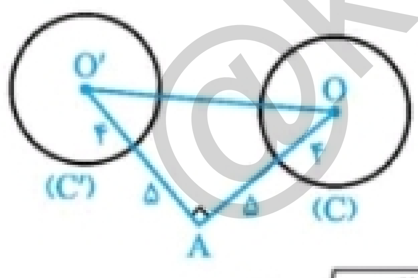
اما خط شامل ضلع AC دوران‌یافتهٔ خط شامل BC در دوران به مرکز O و زاویهٔ ۱۲۰° است، در همین دوران A تصویر C می‌باشد، از طرفی چون $BD = CE$ است، لذا نقطهٔ E هم تصویر نقطهٔ D در این دوران است. بنابراین نتیجه می‌شود $OE = OD$ و $E\hat{O}D = ۱۲۰^\circ$



اما OD نمی‌تواند بر BE عمود باشد، اگر این‌طور باشد در این صورت $B\hat{E}O = ۹۰^\circ - E\hat{O}F = ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \underbrace{E\hat{O}D}_{۱۲۰^\circ}) = ۳۰^\circ$ و چون $B\hat{A}O = ۳۰^\circ$ است، در نتیجه چهارضلعی $BAEO$ محاطی می‌شود که نتیجه می‌دهد $O\hat{B}E = O\hat{A}E = ۳۰^\circ$ که تناقض است. زیرا اندازهٔ زاویهٔ OBE عددی بین صفر و ۳۰° است.

۲۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل (C') تصویر دایرهٔ (C) به مرکز O و شعاع ۴ است و چون دوران طولپا (ایزومتری) است پس $R' = R = ۴$ می‌باشد. بنابه فرض $OA = ۹$ می‌باشد، پس $O'A = ۹$ است و داریم:



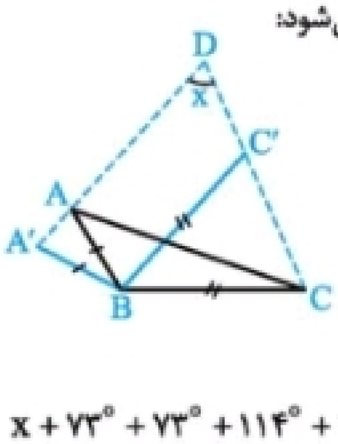
طول مماس مشترک داخلی دو دایره $TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R+R')^{۲}}$

$$= \sqrt{OA^{۲} + O'A^{۲} - ۴R^{۲}} \Rightarrow TT' = \sqrt{۹^{۲} + ۹^{۲} - ۴\times ۴^{۲}}$$

$$= \sqrt{۱۶۲ - ۶۴} = \sqrt{۹۸} = ۷\sqrt{۲}$$

۲۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض $A\hat{B}C = ۱۱۴^\circ$ و $C\hat{B}C' = A\hat{B}A' = ۳۴^\circ$. در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABA' و BCC' نتیجه می‌شود:



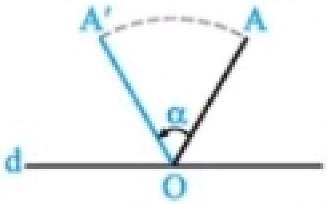
$$\hat{A'} = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۴^\circ}{۲} = ۷۳^\circ$$

$$B\hat{C}C' = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۴^\circ}{۲} = ۷۳^\circ$$

و نهایتاً در چهارضلعی $BCDA'$ داریم:

$$x + ۷۳^\circ + ۷۳^\circ + ۱۱۴^\circ + ۳۴^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۶۶^\circ$$

۲۱۲ (**۱**) (۲) (۳) (۴)



دوران تبدیلی طولپا (ایزومتری) است که طول پاره‌خط را تغییر نمی‌دهد، اما زاویهٔ پاره‌خط با خط مفروض را ممکن است تغییر دهد.

۲۱۳ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

۲۱۴ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

در انتقال و تجانس، تبدیل‌یافتهٔ خط با آن موازی است. اما در دوران با زاویهٔ 90° خط و تصویرش بر هم عمود هستند. هم‌چنین در بازتاب نسبت به خط وقتی که خط مفروض با محور بازتاب زاویهٔ 45° بسازد، تصویر خط بر خود خط عمود است.

۲۱۵ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

ترکیب دو تقارن محوری با محورهای متقاطع همواره یک دوران است که زاویهٔ دوران دو برابر زاویهٔ بین دو محور است. پس ترکیب دو تقارن محوری با محورهای عمود بر هم یک دوران 180° است که تجانس با نسبت $k=-1$ هم می‌باشد.

۲۱۶ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

تجانس و انتقال شیب خط را حفظ می‌کنند.

۲۱۷ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A'B'=|k|AB=\left|-\frac{3}{2}\right|a=\frac{3a}{2}$$

۲۱۸ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

تصویر مثلث در یک تجانس با آن مثلث متشابه است و نسبت تجانس، نسبت تشابه دو مثلث است. پس داریم:

$$\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)}=k^2 \Rightarrow \frac{50}{128}=k^2 \Rightarrow k^2=\frac{25}{64} \Rightarrow k=\pm\frac{5}{8}$$

$$\text{اندازهٔ تصویر پاره‌خط در تجانس}=|k|\times\text{طول پاره‌خط}=\frac{5}{8}\times 12=\frac{15}{2}=7/5$$

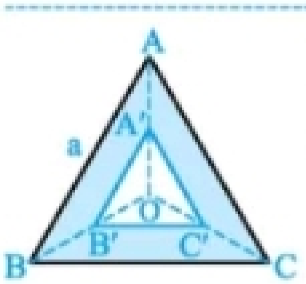
۲۱۹ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم M' تصویر M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، در این صورت داریم $OM'=kOM$ و اگر M'' تصویر M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k' باشد، داریم $OM''=k'OM$. از تقسیم این دو تساوی داریم:

$$\frac{OM'}{OM''}=\frac{k}{k'} \Rightarrow OM'=\frac{k}{k'}OM''$$

بنابراین M'' تصویر M' در تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{k}{k'}$ است.

۲۲۰ (۱) (۲) (۳) (**۴**)



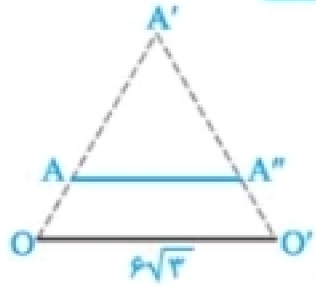
اگر مساحت مثلث ABC را S فرض کنیم مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر $\frac{S}{4}$ است. پس مساحت ناحیهٔ بین مثلث و تصویرش برابر $S-\frac{S}{4}=\frac{3S}{4}$ می‌شود و داریم:

$$\frac{3S}{4}=3\sqrt{3} \Rightarrow S=4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4$$

$$\text{محیط مثلث } ABC=3a=3\times 4=12$$

۲۲۱ (۱) (**۲**) (۳) (۴)



تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس ۳ نقطهٔ A' است به طوری‌که $OA'=3OA$ و تصویر نقطهٔ A' در تجانس به مرکز O' و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ نقطهٔ A'' است، به طوری‌که $O'A''=\frac{1}{3}O'A'$.

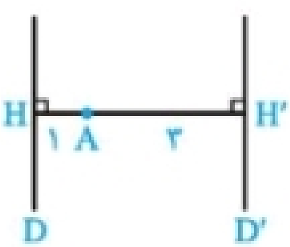
بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{1}{3}\ ,\ \frac{O'A''}{O'A'}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{O'A''}{O'A'}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} AA''\parallel OO' \Rightarrow \frac{AA''}{OO'}=\frac{AA'}{OA'}=\frac{OA'-OA}{OA'}$$

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow AA''=\frac{2}{3}OO'=\frac{2}{3}\times 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

۲۲۲ (۱) (**۲**) (۳) (۴)



نقطهٔ A بین دو خط موازی D و D' قرار دارد، پس می‌توانیم بگوییم D و D' تصویر هم در یک تجانس به مرکز A و نسبت تجانس -3 یا $-\frac{1}{3}$ هستند.

۲۲۳ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

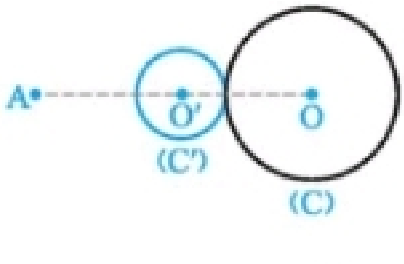
تصویر دایرهٔ $C(O,1)$ در تجانس با نسبت تجانس ۳، دایرهٔ C' به مرکز O' و شعاع $R'=3R=3$ است. بنابه فرض، طول خط‌المرکزین دو دایره $OO'=2\sqrt{5}$ است، پس طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$TT'=\sqrt{OO'^2-(R'-R)^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(3-1)^2}$$

$$=\sqrt{20-4}=\sqrt{16}=4$$

۲۲۴ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

بنابه فرض $AO=24$ است. اگر O' تصویر O در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ باشد، در این صورت



داریم $AO'=\frac{1}{3}AO=\frac{24}{3}=8$

در نتیجه $OO'=24-8=16$

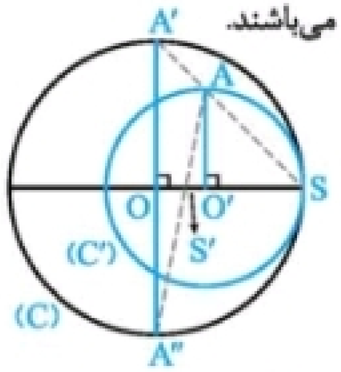
از طرفی شعاع دایرهٔ تصویر، برابر $R'=\frac{R}{3}=\frac{12}{3}=4$ است، پس:

$$(R+R'=12+4=16\ ,\ OO'=16) \Rightarrow OO'=R+R'$$

یعنی دو دایرهٔ (C) و (C') مماس خارج‌اند، لذا دارای ۳ مماس مشترک می‌باشند.

۲۲۵

مطابق شکل S و S' به ترتیب مراکز تجانس‌های مستقیم و معکوسی هستند که دو دایرهٔ (C) و (C') در آن‌ها تصویر یکدیگرند، نسبت تجانس‌ها $\frac{R}{R'}$ و $-\frac{R}{R'}$ (یا $\frac{R'}{R}$ و $-\frac{R'}{R}$) می‌باشند.



بنابه فرض شعاع دایره‌ها برابر $R=۶$ و $R'=۴$ است و چون دو دایره مماس داخل هستند، پس طول خط‌المرکزین آن‌ها $OO'=R-R'=۲$ است. داریم:

$$\frac{O'S}{OS}=\frac{O'A}{OA'}=\frac{R'}{R}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{O'S}{OO'}=\frac{۲}{۱}$$

$$\Rightarrow O'S=۲\times۲=۴$$

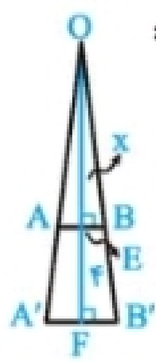
$$\frac{O'S'}{OS'}=\frac{O'A}{OA''}=\frac{R'}{R}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{O'S'}{OO'}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow O'S'=\frac{۲\times۲}{۵}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

$$SS'=O'S+O'S'=۴+۰/۸=۴/۸$$

۲۲۶

دو پاره‌خط موازی $AB=۲$ و $A'B'=۳$ در دو تجانس تصویر یکدیگرند. یکی به مرکز محل تلاقی قطرهای ذوزنقهٔ $AA'B'B$ و دیگری به مرکز نقطهٔ تلاقی امتداد ساق‌های AA' و BB'. بیش‌ترین فاصلهٔ مرکز تجانس از پاره‌خط بزرگ‌تر، پاره‌خط OF است و به کمک تشابه داریم:

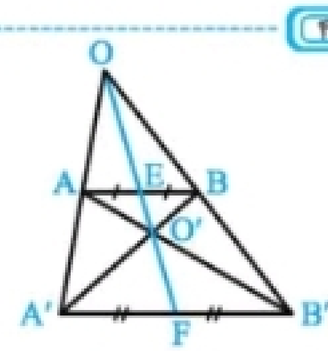


$$\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OA'B'}\Rightarrow\frac{OE}{OF}=\frac{AB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow x=۸$$

$$OF=x+۴=۸+۴=۱۲$$

۲۲۷



$$O'\overset{\Delta}{A}B\sim O'\overset{\Delta}{A'}B'\Rightarrow\frac{O'E}{O'F}=\frac{AB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow\frac{O'E}{O'F}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{O'E}{EF}=\frac{۲}{۵}$$

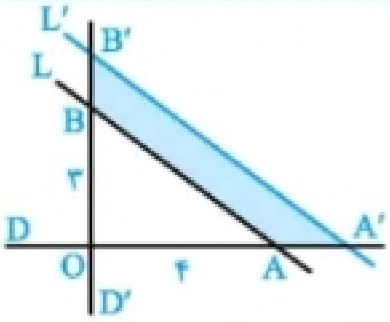
$$\Rightarrow O'E=۴\times\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

$$O\overset{\Delta}{A}B\sim O\overset{\Delta}{A'}B'\Rightarrow\frac{OE}{OF}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{OE}{EF}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow OE=۲EF=۲\times۴=۸$$

$$OO'=OE+O'E=۸+۱/۶=۹/۶$$

۲۲۸



برای یافتن تصویر خط L در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۸}{۵}$ کافی است نقاط A و B را تصویر کنیم:

$$OA'=kOA=\frac{۸}{۵}\times۴=\frac{۳۲}{۵}=۶/۴$$

$$OB'=kOB=\frac{۸}{۵}\times۳=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

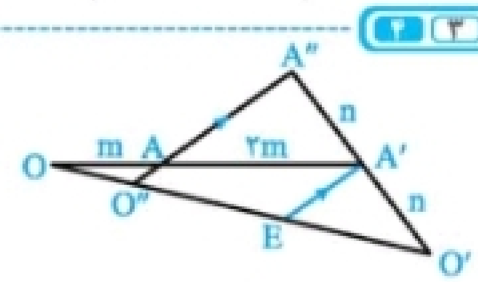
بنابراین مساحت ذوزنقهٔ $ABB'A'$ به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$S(ABB'A')=S(OA'B')-S(OAB)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times OA'\times OB'-\frac{۱}{۲}OA\times OB$$

$$\Rightarrow S(ABB'A')=\frac{۱}{۲}\times۶/۴\times۴/۸-\frac{۱}{۲}\times۴\times۳=۹/۳۶$$

۲۲۹



از A' خطی موازی $O''A''$ رسم می‌کنیم، بنا به قضیهٔ تالس داریم:

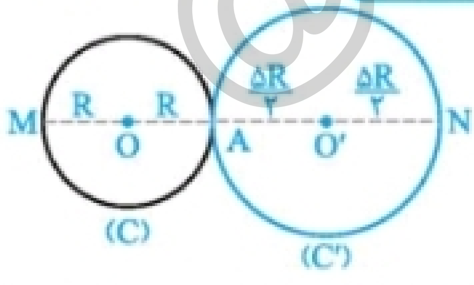
$$\frac{A'E}{O''A''}=\frac{O'A'}{O'A''}\Rightarrow\frac{A'E}{O''A''}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow O''A''=۲A'E\quad(۱)$$

$$\frac{O''A}{A'E}=\frac{OA}{OA'}=\frac{m}{۳m}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow A'E=۳O''A\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow O''A''=۲\times۳\times O''A=۶O''A$$

پس A'' تصویر A در تجانس به مرکز O'' و نسبت تجانس ۶ است.

۲۳۰



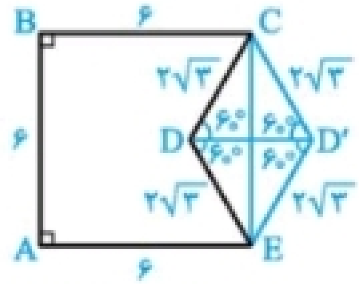
مطابق شکل تصویر دایرهٔ (C) در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $-\frac{۵}{۲}$ دایرهٔ (C') به مرکز O' و شعاع $\frac{۵R}{۲}$ است و دو دایره در نقطهٔ A مماس خارج هستند و بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط آن‌ها برابر $MN=۲R+۵R=۷R$ است.

۲۳۱

یک خط تحت بی‌شمار انتقال می‌تواند بر خودش منطبق شود، کافی است بردار انتقال موازی خط باشد. یک خط در بی‌شمار بازتاب می‌تواند بر خودش منطبق شود، کافی است محور بازتاب عمود بر خط مفروض در نظر گرفته شود. یک خط در بی‌شمار تجانس می‌تواند بر خودش منطبق شود کافی است مرکز تجانس روی خود خط فرض شود و نهایتاً یک خط در بی‌شمار دوران می‌تواند بر خودش منطبق شود کافی است مرکز دوران روی خط و زاویهٔ دوران ۱۸۰° فرض شود.

۲۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

پاره‌خط‌های CD و DE را تحت بازتاب نسبت به محور CE تصویر می‌کنیم. پاره‌خط‌های CD′ و D′E به‌دست می‌آیند. محیط پنج‌ضلعی ABCD′E با محیط پنج‌ضلعی ABCDE برابر است و مساحت آن برابر است با:



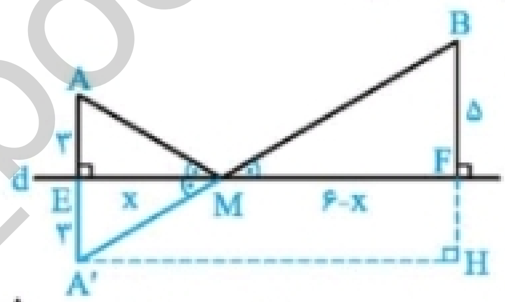
$$S(ABCD'E)=S(ABCE)+S(CD'E)=۶^۲+S(CDD')$$

$$=۶^۲+\frac{(۲\sqrt{۳})^۲\sqrt{۳}}{۴}=۳۶+۳\sqrt{۳}$$

۲۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

قرینهٔ A را نسبت به خط d نقطهٔ A′ می‌نامیم، نقطهٔ تلاقی d و A′B را M می‌نامیم. MA + MB کم‌ترین مقدار ممکن را دارد و مقدار آن به دو روش به شرح زیر به‌دست می‌آید:

روش اول:



$$A\overset{\Delta}{M}E \sim B\overset{\Delta}{M}F \Rightarrow \frac{ME}{MF}=\frac{AE}{BF}\Rightarrow \frac{x}{۶-x}=\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{x}{۶}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow x=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}$$

$$MA+MB=\sqrt{۳^۲+x^۲}+\sqrt{۵^۲+(۶-x)^۲}$$

$$=\sqrt{۹+\frac{۸۱}{۱۶}}+\sqrt{۲۵+(۶-\frac{۹}{۴})^۲}$$

$$\Rightarrow MA+MB=\frac{\sqrt{۹\times۲۵}}{۴}+\frac{\sqrt{۴۰۰+۲۲۵}}{۴}=\frac{۱۵}{۴}+\frac{۲۵}{۴}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰$$

روش دوم: بدون محاسبهٔ طول MA و MB می‌توانیم بنویسیم:

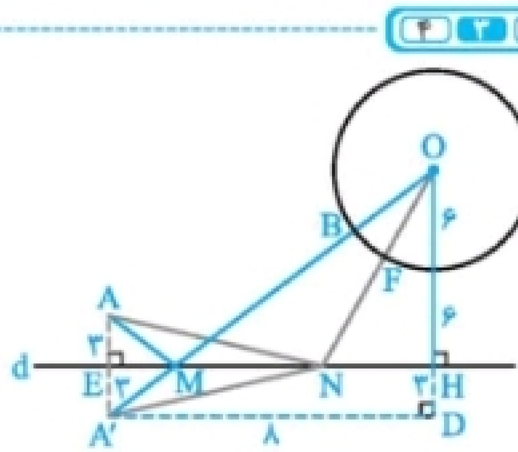
$$MA+MB=MA'+MB=A'B$$

$$A'B^۲=A'H^۲+BH^۲=EF^۲+(BF+FH)^۲$$

$$\Rightarrow A'B^۲=۶^۲+(۵+۳)^۲=۶^۲+۸^۲=۱۰۰\Rightarrow A'B=۱۰$$

$$\Rightarrow MA+MB=۱۰$$

۲۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴



تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به محور d را A′ می‌نامیم. نقطه‌های تلاقی OA′ با خط d و دایره را به ترتیب M و B می‌نامیم. اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، امتداد OF خط d را در N قطع می‌کند. داریم:

$$NA+NF+OF=NA'+ON\ge OA'$$

$$\Rightarrow NA+NF+\underbrace{OF}_{R}\ge\underbrace{MA'}_{MA}+MB+\underbrace{OB}_{R}$$

$$\Rightarrow NA+NF\ge MA+MB$$

پس MA + MB کم‌ترین مقدار NA + NF است و مقدار آن به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$OA'^۲=OD^۲+A'D^۲=(OH+DH)^۲+EH^۲$$

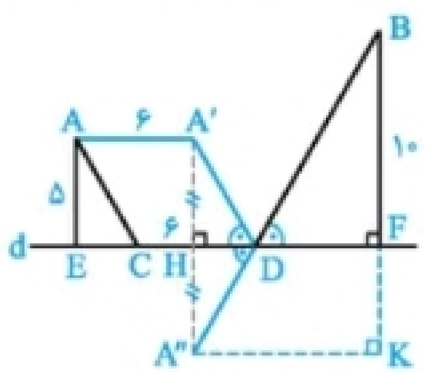
$$=(۱۲+۳)^۲+۸^۲=۲۸۹\Rightarrow OA'=۱۷$$

$$OA'=MA'+MB+OB=MA+MB+OB$$

$$\Rightarrow ۱۷=MA+MB+۶\Rightarrow MA+MB=۱۱$$

۲۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴

A را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ موازی خط d و به طول ۶ و جهت به سمت B تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A′ به‌دست می‌آید، قرینهٔ A′ را نسبت به خط d، A″ می‌نامیم و نقطهٔ تلاقی خط d و پاره‌خط A″B را D می‌نامیم، سپس CD را برابر ۶ روی d جدا می‌کنیم. مسیر ACDB کوتاه‌ترین است و مقدار آن به شرح زیر به‌دست می‌آید:



$$AC+CD+BD=A'D+CD+BD$$

$$=A''D+BD+CD=A''B+CD$$

$$A''B^۲=A''K^۲+BK^۲=HF^۲+(BF+FK)^۲$$

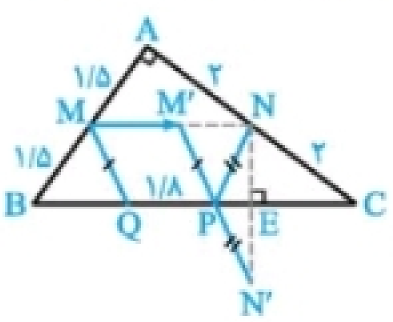
$$=(EF-EH)^۲+(BF+FK)^۲=(۱۴-۶)^۲+(۵+۱۰)^۲$$

$$=۸^۲+۱۵^۲=۲۸۹\Rightarrow A''B=۱۷$$

$$AC+CD+BD=A''B+CD=۱۷+۶=۲۳$$

۲۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

M را تحت انتقال با بردار موازی BC و به طول ۱/۸ و جهت طرف N تصویر می‌کنیم، نقطهٔ M′ به‌دست می‌آید. M′ روی MN قرار دارد. تصویر N تحت بازتاب نسبت به محور BC را نقطهٔ N′ می‌نامیم و N′ را به M′ وصل می‌کنیم.



نقطهٔ تلاقی BC و M′N′ را P می‌نامیم و PQ را روی BC به اندازهٔ ۱/۸ جدا می‌کنیم. پنج‌ضلعی AMQPN دارای کم‌ترین محیط است. چون MN موازی BC است پس $MN \perp NN'$ و مثلث M′N′N قائم‌الزاویه است. داریم:

$$M'N=MN-MM'=\frac{BC}{۲}-PQ=\frac{۵}{۲}-۱/۸=۲/۵-۱/۸=۰/۷$$

اما NE نصف ارتفاع وارد بر وتر است، پس طول NN' با طول ارتفاع وارد بر وتر یکی است و مقدار آن برابر است با:

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}h\times BC=\frac{۱}{۲}AB\times AC$$

$$\Rightarrow h=\frac{۳\times ۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴\Rightarrow NN'=۲/۴$$

$$M'N'=M'P+PN'=MQ+PN \qquad (۱)$$

$$M'N'^۲=M'N^۲+NN'^۲=۰/۷^۲+۲/۴^۲=۰/۴۹+۵/۷۶=۶/۲۵$$

$$\Rightarrow M'N'=۲/۵ \qquad (۲)$$

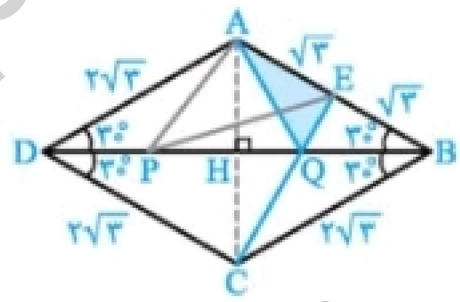
$$(۱),(۲)\Rightarrow MQ+PN=۲/۵$$

$$\text{محیط پنج‌ضلعی } AMQPN=AM+AN+MQ+PN+PQ$$

$$=۱/۵+۲+۲/۵+۱/۸=۷/۸$$

۲۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

تصویر A تحت بازتاب نسبت به محور BD نقطهٔ C می‌باشد، زیرا در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگر هستند. نقطهٔ تلاقی BD و CE را Q می‌نامیم. در بین مثلث‌های APE، مثلث AQE کم‌ترین محیط ممکن را دارد.



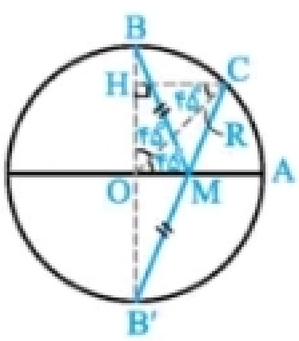
چون زاویهٔ لوزی $\widehat{A}=۱۲۰^\circ$ است، پس مثلث‌های ABC و ACD متساوی‌الاضلاع هستند. CE در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ارتفاع می‌باشد، پس اندازهٔ آن برابر $۳=\frac{\sqrt{۳}\times ۲\sqrt{۳}}{۲}=CE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB$ است و داریم:

$$\text{محیط } AQE=AQ+QE+AE=CQ+QE+AE$$

$$=CE+AE=۳+\sqrt{۳}$$

۲۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

تصویر نقطهٔ B تحت بازتاب نسبت به محور OA نقطهٔ B' سر دیگر قطر BB' است. نقطهٔ تلاقی $B'C$ و شعاع OA را M می‌نامیم. بنابه مسئلهٔ هرون $MB+MC$ کم‌ترین مقدار را دارد و مقدار آن به شرح زیر محاسبه می‌گردد:



$$MB+MC=MB'+MC=B'C$$

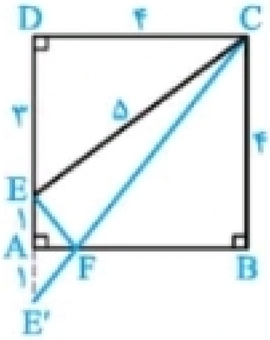
$$OH^۲+CH^۲=OC^۲\Rightarrow OH=CH=\frac{OC}{\sqrt{۲}}=\frac{R}{\sqrt{۲}}$$

$$B'C^۲=CH^۲+B'H^۲=\left(\frac{R}{\sqrt{۲}}\right)^۲+\left(R+\frac{R}{\sqrt{۲}}\right)^۲$$

$$\Rightarrow B'C^۲=\frac{R^۲}{۲}+R^۲+\frac{R^۲}{۲}+\frac{۲R^۲}{\sqrt{۲}}=۲R^۲+R^۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow B'C=R\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$$

۲۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴



تصویر نقطهٔ E در بازتاب نسبت به محور AB نقطهٔ E' است. نقطهٔ تلاقی CE' و AB را F می‌نامیم. بنابه مسئلهٔ هرون $EF+CF$ کم‌ترین مقدار را دارد، در نتیجه محیط مثلث CEF کم‌ترین مقدار را دارد.

در این حالت می‌خواهیم مساحت مثلث CEF را محاسبه کنیم. داریم:

$$AF\parallel CD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AF}{CD}=\frac{AE'}{DE'}\Rightarrow\frac{AF}{۴}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow AF=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

$$BF=AB-AF=۴-۰/۸=۳/۲$$

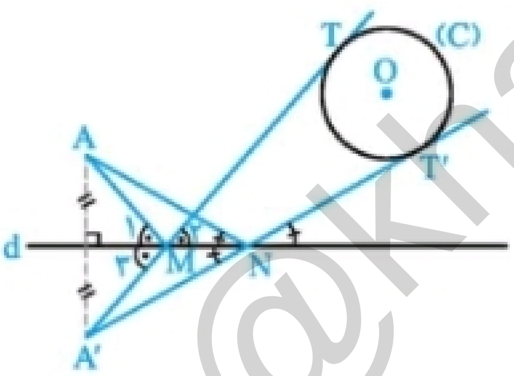
$$S(CEF)=S_{\text{مربع}}-S(AEF)-S(BCF)-S(CDE)$$

$$=۴^۲-\frac{۱\times ۰/۸}{۲}-\frac{۴\times ۳/۲}{۲}-\frac{۴\times ۳}{۲}$$

$$\Rightarrow S(CEF)=۱۶-۰/۴-۶/۴-۶=۱۰-۶/۸=۳/۲$$

۲۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

قرینهٔ A را نسبت به محور d، A' می‌نامیم. از نقطهٔ A' مماس‌های AT و $A'T'$ را بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن‌ها را با خط d، M و N می‌نامیم. داریم $\widehat{M}_۱=\widehat{M}_۳$ و $\widehat{M}_۲=\widehat{M}_۳$ (متقابل به رأس هستند.)

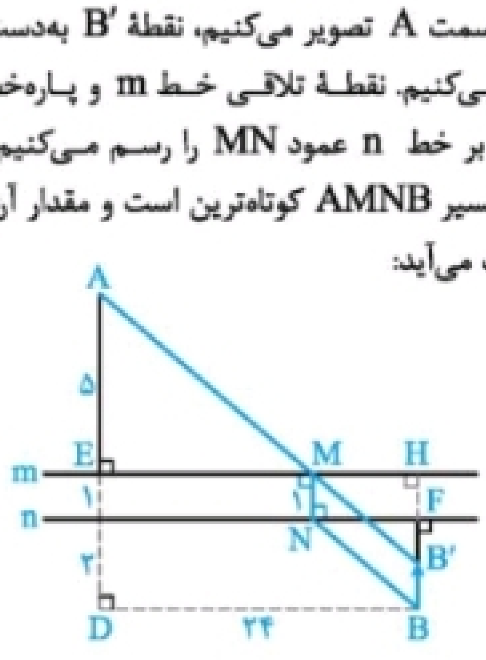


پس $\widehat{M}_۱=\widehat{M}_۲$ و این یعنی مماس MT و پاره‌خط MA با خط d زاویهٔ برابر می‌سازند. با استدلال مشابه مماس NT' و پاره‌خط NA با خط d زاویهٔ برابر می‌سازند و مسئله دو جواب دارد.

۲۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

نقطهٔ B را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ عمود بر خط‌های m و n، به طول ۱ و در جهت B به سمت A تصویر می‌کنیم، نقطهٔ B' به‌دست می‌آید. آن را به A وصل می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی خط m و پاره‌خط AB' را M می‌نامیم. از M بر خط n عمود MN را رسم می‌کنیم و N را به B وصل می‌کنیم. مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین است و مقدار آن به دو روش به شرح زیر به‌دست می‌آید:

روش اول:



$\overset{\Delta}{AME} \sim \overset{\Delta}{B'MH} \Rightarrow \frac{ME}{MH}=\frac{AE}{B'H} \Rightarrow \frac{ME}{EH}=\frac{AE}{AE+B'H}$

$\Rightarrow \frac{ME}{24}=\frac{5}{5+3-1} \Rightarrow ME=24\times\frac{5}{7}=\frac{120}{7}$

$\Rightarrow MH=24-\frac{120}{7}=\frac{48}{7}$

$AM=\sqrt{5^2+(\frac{120}{7})^2}=\frac{5\sqrt{7^2+24^2}}{7}=\frac{5\times 25}{7}=\frac{125}{7}$

$MB'=\sqrt{2^2+(\frac{48}{7})^2}=\frac{2\sqrt{7^2+24^2}}{7}=\frac{2\times 25}{7}=\frac{50}{7}$

$\Rightarrow BN=MB'=\frac{50}{7}$

$AM+MN+BN=\frac{125}{7}+1+\frac{50}{7}=\frac{175}{7}+1=25+1=26$

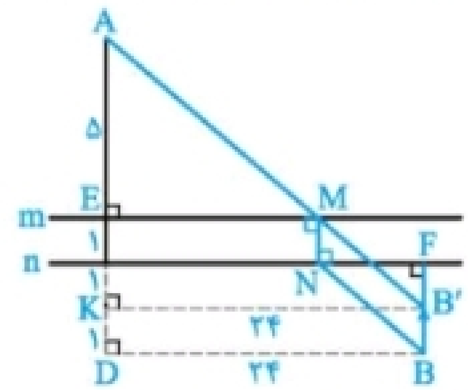
روش دوم: بدون محاسبهٔ طول پاره‌خط‌های AM و BN داریم:

$AM+MN+BN \xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع است } BN=MB']{\text{چهارضلعی } BNMB'}$

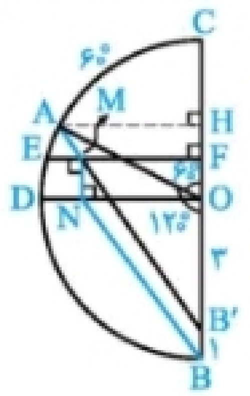
$AM+MN+BN=AM+MN+MB'=AM+MB'+MN$
$=AB'+MN$

$AB'^2=AK^2+B'K^2=7^2+24^2=49+576=625 \Rightarrow AB'=25$

$AM+MN+BN=AB'+MN=25+1=26$



۲۴۲ (۱) (۲) (۳) (۴)



نقطهٔ B را تحت انتقال با بردار به طول یک و راستای عمود بر OD و رو به بالا تصویر می‌کنیم، نقطهٔ B' به‌دست می‌آید. B' را به A وصل می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی AB' و EF را M می‌نامیم. عمود MN را رسم کرده و N را به B وصل می‌کنیم، مسیر AMNB کوتاه‌ترین است.

چهارضلعی BB'MN متوازی‌الاضلاع است پس MB' = BN و BB' = MN = OF = ۱، داریم:

$AM+MN+BN=AM+MN+MB'=AB'+MN=AB'+1$

پس کافی است AB' را محاسبه کنیم:

$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$ ، $OH=\frac{OA}{2}=\frac{4}{2}=2$

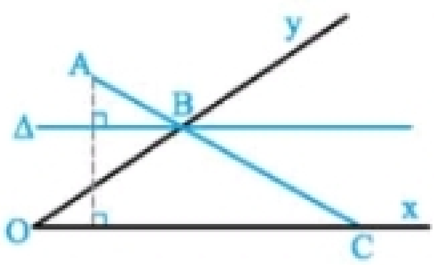
$AB'^2=AH^2+B'H^2=AH^2+(OH+OB')^2$

$=(2\sqrt{3})^2+(2+3)^2=12+25=37 \Rightarrow AB'=\sqrt{37}$

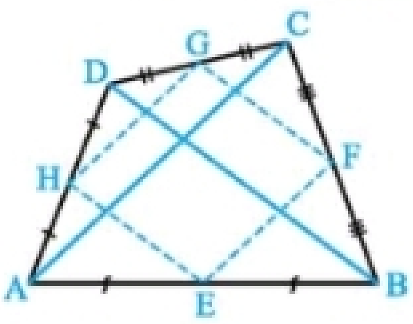
$AM+MN+BN=AB'+1=\sqrt{37}+1$

۲۴۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

اگر قاطع ABC جواب باشد، در این صورت $BC=2AB$، $AB=\frac{1}{3}AC$ و این یعنی نقطهٔ B تصویر نقطهٔ C در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ است. برای به‌دست آوردن نقطهٔ B، نیم‌خط Ox را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ تصویر می‌کنیم، خط Δ به‌دست می‌آید که Oy را در نقطهٔ B قطع می‌کند و امتداد AB نقطهٔ C را ایجاد می‌کند به طوری‌که $BC=2AB$



۲۴۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{DH}{AD}=\frac{DG}{CD}=\frac{1}{2} \Rightarrow GH \parallel AC \;,\; GH=\frac{AC}{2}$

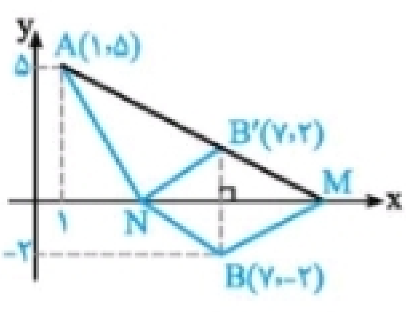
$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{BE}{AB}=\frac{BF}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow EF \parallel AC \;,\; EF=\frac{AC}{2}$

$\Rightarrow GH \parallel EF \;,\; GH=EF \Rightarrow$ چهارضلعی EFGH متوازی‌الاضلاع است.

پس می‌توان گفت پاره‌خط GF تصویر پاره‌خط EH تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{HG}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ است و در نتیجه چهارضلعی EFGH متوازی‌الاضلاع است.

۲۴۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

دو نقطهٔ $A(1,5)$ و $B(7,-2)$ دو طرف محور xها قرار دارند، B را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، نقطهٔ B' به‌دست می‌آید. امتداد AB' محور xها را در نقطهٔ M قطع می‌کند. MA - MB بیش‌ترین است، زیرا برای هر نقطهٔ N روی محور xها داریم:



$|NA-NB|=|NA-NB'|\le AB' \xrightarrow{AB'=MA-MB'}$

$|NA-NB|\le MA-MB' \Rightarrow |NA-NB|\le MA-MB$

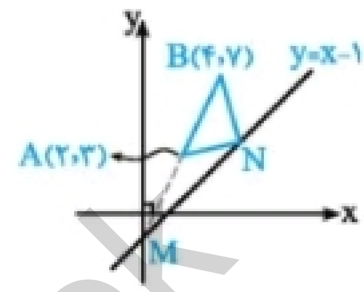
تساوی وقتی برقرار است که N بر M منطبق باشد. برای یافتن مختصات نقطهٔ M کافی است معادلهٔ خط AB' را با محور xها قطع دهیم:

$AB': y-2=\frac{5-2}{1-7}(x-7)$

$\Rightarrow y-2=-\frac{1}{2}(x-7) \xrightarrow{y=0} -4=-x+7 \Rightarrow x=11$

۲۴۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

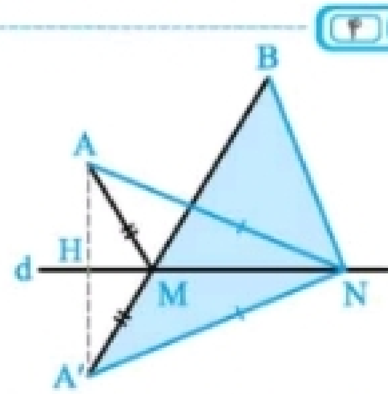
فرض کنیم N نقطهٔ دلخواهی روی خط $y = x - 1$ باشد در این صورت در مثلث ANB داریم $|NB - NA| < AB$. اگر نقطهٔ تلاقی امتداد AB با خط $y = x - 1$ را M بنامیم، N می‌تواند بر M منطبق شود پس $|NB - NA| \le AB$ و $|NB - NA| \le MB - MA$ و این یعنی بیش‌ترین مقدار $|NB - NA|$ در نقطهٔ M اتفاق می‌افتد و مختصات M از تلاقی خط AB با خط $y = x - 1$ به‌دست می‌آید:



$$AB: y - 3 = \frac{7-3}{4-2}(x-2) \Rightarrow y - 3 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0$$

۲۴۷ (۱) (۲) (۳) (۴)



قرینهٔ A را نسبت به خط d نقطهٔ A' می‌نامیم. پاره‌خط $A'B$ خط d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر N نقطهٔ دلخواهی به‌جز M روی d باشد، نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$AN + NB = A'N + NB > A'B \ ,\ A'B = A'M + MB$$

$$\Rightarrow AN + NB > \underbrace{A'M}_{AM} + MB \Rightarrow AN + NB > AM + MB$$

پس به ازای هر نقطهٔ N روی خط d داریم $AN + NB \ge AM + MB$ یعنی نقطهٔ M روی خط d نقطه‌ای است که مجموع فواصل آن از A و B کم‌ترین مقدار را دارد.

تذکر برای رسیدن به نقطهٔ A' علاوه‌بر بازتاب نسبت به خط، هر یک از تبدیل‌های انتقال، دوران و تجانس را نیز می‌توان به کار برد.

انتقال: اگر نقطهٔ A را تحت انتقال با بردار $2\overrightarrow{AH}$ تصویر کنیم نقطهٔ A' به‌دست می‌آید.

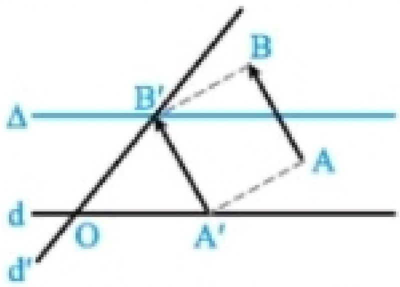
دوران: اگر نقطهٔ A را تحت دوران به مرکز نقطهٔ H و زاویهٔ 180° تصویر کنیم، نقطهٔ A' به‌دست می‌آید.

تجانس: اگر نقطهٔ H را تحت تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۲ تصویر کنیم نقطهٔ A' به‌دست می‌آید.

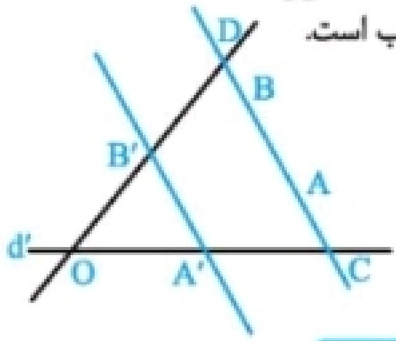
پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نیز صحیح‌اند.

۲۴۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل فرض کنیم $A'B'$ پاره‌خطی باشد که دو سر آن روی خط‌های متقاطع d و d' باشد و $A'B'$ موازی و مساوی AB باشد، در این صورت $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. اگر از B' خطی موازی خط d رسم کنیم و آن را Δ بنامیم، تصویر خط d تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌شود. پس برای ترسیم $A'B'$ کافی است خط d را در انتقال با بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم کنیم (خط Δ). محل تلاقی Δ و d' را B' می‌نامیم و از آن خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ A' قطع کند. پاره‌خط $A'B'$ جواب است.

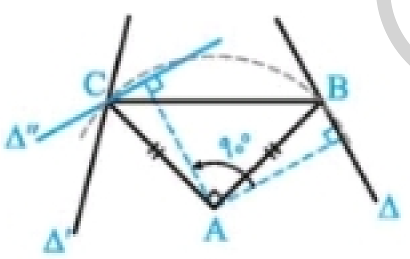


گزینهٔ (۴) هم صحیح است. چون پاره‌خط AB و دو خط متقاطع d و d' معلوم‌اند. پس نقاط تلاقی خط شامل AB و خط‌های d و d' یعنی نقاط C و D معلوم‌اند. تصویر خط شامل AB را تحت تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{AB}{CD}$ به‌دست می‌آوریم، محل تلاقی این خط با دو خط d و d' جواب است.



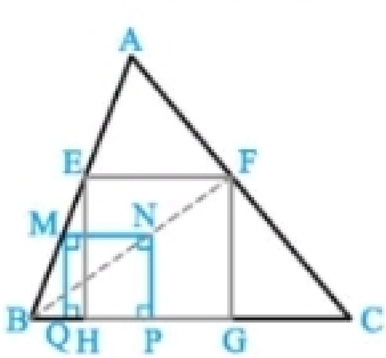
۲۴۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض دو رأس B و C از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC روی دو خط Δ و Δ' قرار دارند. چون $AB = AC$ و $\widehat{A} = 90^\circ$، پس رأس C تصویر رأس B در دوران به مرکز A و زاویهٔ 90° است. به همین جهت خط Δ را به مرکز A و زاویهٔ 90° دوران می‌دهیم، خط Δ'' به‌دست می‌آید. محل تلاقی Δ'' و Δ'، رأس C است، سپس به مرکز A و شعاع AC کمانی رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ B قطع کند. مثلث ABC جواب است.



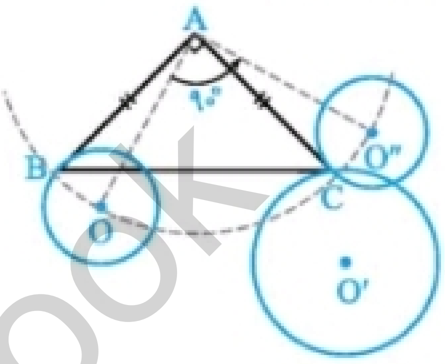
۲۵۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

مربع $MNPQ$ را داخل مثلث ABC مطابق شکل می‌سازیم. رأس B را به نقطهٔ N وصل می‌کنیم و پاره‌خط BN را امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ F به‌دست آید. از F خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن را با ضلع AB، E می‌نامیم و از E عمود EH را بر BC رسم می‌کنیم، هم‌چنین عمود FG را رسم می‌کنیم. چهارضلعی $EFGH$ مربع است و مجانس مربع $MNPQ$ در تجانس به مرکز B است.



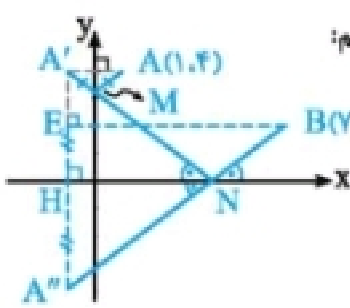
۲۵۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض دو رأس B و C از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC روی دو دایرهٔ (O) و (O′) قرار دارند. چون $AB=AC$ و $\hat{A}=۹۰^\circ$، پس رأس C تصویر رأس B در دوران به مرکز A و زاویهٔ ۹۰° است. به همین جهت دایره (O) را به مرکز A و زاویهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم دایره (O″) به‌دست می‌آید. محل تلاقی دایره (O″) و دایره (O′) رأس C است. سپس به مرکز A و شعاع AC کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با دایرهٔ (O) جای رأس B است و ABC مثلث مطلوب است.



۲۵۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

قرینهٔ A نسبت به محور yها را A′ و قرینهٔ A′ نسبت به محور xها را A″ می‌نامیم. نقطهٔ تلاقی محور xها و پاره‌خط A″B را N می‌نامیم و نقطهٔ تلاقی محور yها و پاره‌خط NA′ را M می‌نامیم. مسیر AMNB کوتاه‌ترین است و طول آن برابر طول پاره‌خط A″B است، زیرا $MA=MA'$ و $NA'=NA''$ می‌باشد و در مثلث قائم‌الزاویهٔ A″BE داریم:

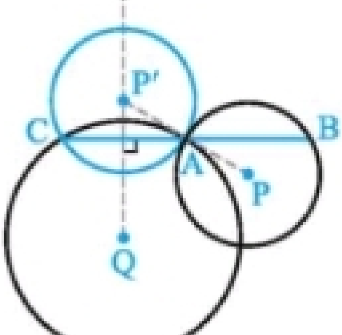


$$A''B=\sqrt{A''E^2+BE^2}=\sqrt{(۴+۲)^2+(۷+۱)^2}$$

$$=\sqrt{۶^2+۸^2}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

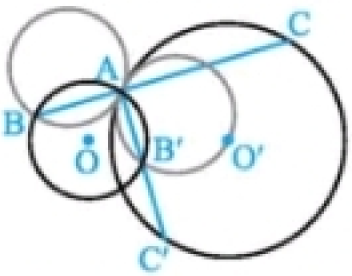
۲۵۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل زیر با فرض $AB=AC$، عمودمنصف وتر AC را رسم می‌کنیم. P را به A وصل می‌کنیم. آن را امتداد می‌دهیم تا این عمودمنصف را در نقطهٔ P′ قطع کند. P′ قرینهٔ P نسبت به نقطهٔ A است. بنابراین اگر قرینهٔ دایرهٔ P را نسبت به A رسم کنیم، دایرهٔ حاصل، از نقطهٔ A می‌گذرد و دایرهٔ به مرکز Q را در نقطه‌ای دیگر مانند C قطع می‌کند. C را به A وصل می‌کنیم، پاره‌خط AC را امتداد می‌دهیم تا دایره به مرکز P را در نقطهٔ B قطع کند. داریم $AB=AC$



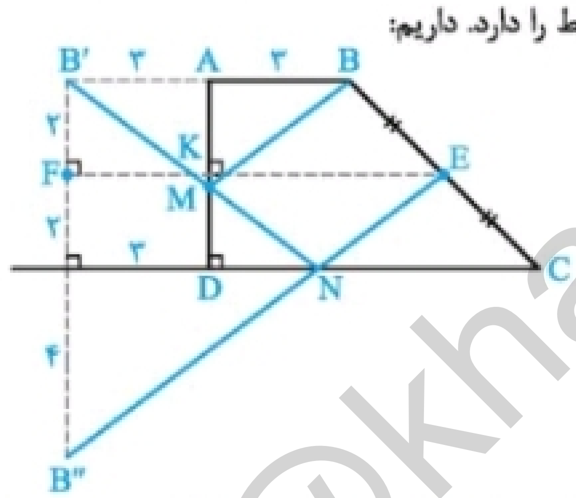
۲۵۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

مطابق شکل دو دایره به مراکز O و O′ و شعاع‌های متفاوت در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فرض کنید خطی از A گذشته و دو دایره را در نقاط B و C قطع کرده است به طوری‌که $AC=۲AB$. در این صورت می‌توان گفت B تصویر C در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است. پس مجانس دایرهٔ O′ را در تجانس‌های به مرکز A و نسبت تجانس $\pm\frac{۱}{۲}$ رسم می‌کنیم. دو دایره به شعاع‌های $\frac{R'}{۲}$ که بر دایرهٔ O′ مماس داخل و خارج هستند، به‌دست می‌آید. نقطهٔ تلاقی این دایره‌ها را با دایرهٔ O، B و B′ می‌نامیم. از B و B′ به A وصل می‌کنیم، خط حاصل را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ O′ را در نقاط C و C′ قطع کنند. داریم $AC=۲AB$ و $AC'=۲AB'$



۲۵۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

تصویر B تحت بازتاب نسبت به خط AD، B′ و تصویر B′ تحت بازتاب نسبت به خط CD از B″ می‌نامیم. نقطهٔ تلاقی CD و B″E را N و نقطهٔ تلاقی B′N و AD را M می‌نامیم. چهارضلعی BMNE کم‌ترین محیط را دارد. داریم:



$$BM+MN+NE=B'M+MN+NE=B'N+NE$$

$$B''N+NE=B''E$$

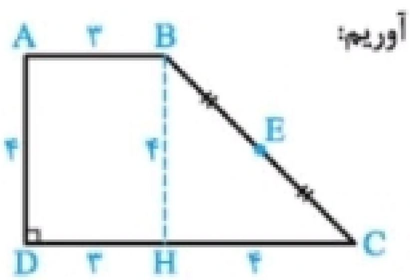
برای محاسبهٔ B″E از E عمود EF را بر B′B″ رسم می‌کنیم. داریم:

$$EF=EK+KE=\frac{AB+CD}{۲}+KF=\frac{۳+۷}{۲}+۳=۸$$

$$\overset{\Delta}{B''EF}: B''E^2=B''F^2+EF^2=(۴+۲)^2+۸^2=۶^2+۸^2=۱۰^2$$

$$\Rightarrow B''E=۱۰$$

حال باید طول پاره‌خط BE را به‌دست آوریم:

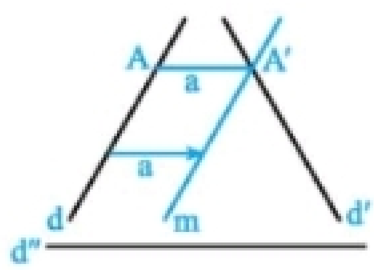


$$\overset{\Delta}{BHC}: BC^2=BH^2+CH^2=۴^2+۴^2=۲\times۴^2\Rightarrow BC=۴\sqrt{۲}$$

$$BE=\frac{BC}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین محیط چهارضلعی BMNE برابر $B''E+BE$ یا $۱۰+۲\sqrt{۲}$ است.

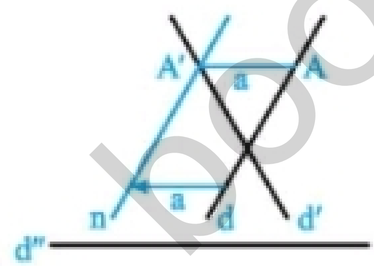
۲۵۶
۱ **۲** ۳ ۴



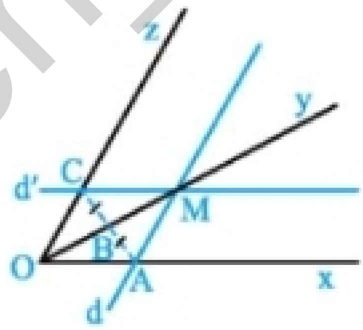
مطابق شکل سه خط دوبه‌دو ناموازی d، d' و d'' را در نظر می‌گیریم. خط d را تحت انتقال با بردار به طول a و موازی خط d'' در جهت راست تصویر می‌کنیم، خط m به‌دست می‌آید. نقطهٔ تلاقی خط d' و خط m را A' می‌نامیم.

از A' خطی موازی d'' رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط d را A می‌نامیم. پاره‌خط AA' جواب است.

مسئله دارای جواب دیگر نیز می‌باشد. اگر خط d را تحت انتقال با بردار به طول a و موازی خط d'' در جهت چپ تصویر کنیم، خط n به‌دست می‌آید. نقطهٔ تلاقی خط d' و خط n را A' می‌نامیم و از A' خطی موازی d'' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط d را A می‌نامیم. پاره‌خط AA' جواب است (شکل مقابل).



۲۵۷
۱ ۲ ۳ **۴**



نقطهٔ دلخواه A را روی محور Ox در نظر می‌گیریم. خط شامل نیم‌خط Oz را تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{OA}$ تصویر می‌کنیم، خط d به‌دست می‌آید. محل تلاقی آن با نیم‌خط Oy را M می‌نامیم.

حال خط شامل نیم‌خط Ox را تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AM}$ تصویر می‌کنیم، خط d' به‌دست می‌آید. نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Oz را C می‌نامیم.

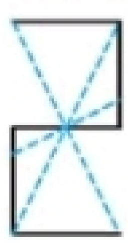
AC نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع می‌کند و داریم $AB = BC$، زیرا چهارضلعی $AMCO$ متوازی‌الاضلاع است و در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و چون بردار $\overrightarrow{OA}$ دلخواه است، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۲۵۸
۱ ۲ **۳** ۴

۲۵۹
۱ ۲ **۳** ۴

nضلعی‌های منتظم اگر n فرد باشد مرکز تقارن ندارند.

۲۶۰
۱ ۲ ۳ **۴**



شکل داده‌شده قسمتی از یک مستطیل است که دو پاره‌خط آن برداشته شده، لذا محور تقارن ندارد اما مرکز تقارن آن تغییری نمی‌کند. پس شکل فقط مرکز تقارن دارد.

۲۶۱
۱ ۲ ۳ ۴

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۱۰۸۰^\circ \Rightarrow n-۲ = \frac{۱۰۸}{۱۸} = ۶ \Rightarrow n = ۸$$

پس چندضلعی منتظم داده‌شده هشت ضلع دارد، لذا دارای ۸ محور تقارن است.

۲۶۲
۱ **۲** ۳ ۴

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین یک محور تقارن دارد و تقارن دورانی ندارد.

۲۶۳
۱ ۲ **۳** ۴

لوزی ۲ تقارن محوری و یک تقارن دورانی ($\alpha = ۱۸۰^\circ$) دارد.

۲۶۴
۱ **۲** ۳ ۴

دایره بی‌شمار تقارن دورانی به زاویهٔ دوران ($۰ < \alpha \le ۳۶۰^\circ$) دارد، پس دارای تقارن دورانی به زاویهٔ ۴۵° هم است. مربع دارای تقارن دورانی به زاویهٔ ۹۰°، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای تقارن دورانی ۱۲۰° و شش‌ضلعی منتظم دارای تقارن دورانی ۶۰° است.

۲۶۵
۱ ۲ **۳** ۴

نیم‌دایره یک تقارن خطی دارد و تقارن دورانی ندارد.

۲۶۶
۱ **۲** ۳ ۴

در زوج‌ضلعی‌های منتظم تعداد محورهای تقارنی که قطر هستند، نصف تعداد اضلاع است.

۲۶۷
۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۱۰n + ۱۲ \Rightarrow n^۲ - ۳n = ۲۰n + ۲۴$$

$$\Rightarrow n^۲ - ۲۳n - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (n+۱)(n-۲۴) = ۰$$

$$\Rightarrow n = -۱ \text{ یا } n = ۲۴ \xrightarrow{n \ge ۳} n = ۲۴$$

پس چندضلعی منتظم مفروض دارای ۲۴ ضلع است و کوچک‌ترین زاویهٔ تقارن دورانی آن $\frac{۳۶۰^\circ}{۲۴} = ۱۵^\circ$ است.

۲۶۸
۱ **۲** ۳ ۴

کوچک‌ترین زاویهٔ تقارن دورانی یک n ضلعی منتظم $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ و کوچک‌ترین زاویهٔ تقارن دورانی یک $(n+۳)$ ضلعی منتظم برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n+۳}$ است. بنابه فرض داریم:

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n} - \frac{۳۶۰^\circ}{n+۳} = ۲۷^\circ \Rightarrow \frac{۳ \times ۳۶۰^\circ}{n(n+۳)} = ۲۷^\circ$$

$$\Rightarrow n(n+۳) = ۴۰ \Rightarrow n^۲ + ۳n - ۴۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (n-۵)(n+۸) = ۰ \Rightarrow n = ۵$$

و پنج‌ضلعی منتظم، ۵ محور تقارن دارد.

۲۶۹
۱ ۲ ۳ **۴**

چون هیچ‌یک از محورهای تقارن nضلعی منتظم قطر آن نیستند، پس n فرد است و داریم:

$$n^۲ - ۱۹n + ۸۴ = ۰ \Rightarrow (n-۷)(n-۱۲) = ۰ \Rightarrow n = ۷ \text{ یا } n = ۱۲$$

چون n فرد است، لذا $n = ۷$ قابل قبول است و تعداد کل تقارن‌های هفت‌ضلعی منتظم ۱۴ است.

فصل ۳ روابط طولی در مثلث

قسمت اول: قضیهٔ سینوس‌ها

قضیهٔ سینوس‌ها

☆۲۷۰. در هر مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ساق a، اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $a\sqrt{۳}$ ۲) $a\sqrt{۲}$ ۳) a ۴) $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$

☆۲۷۱. در هر مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محیطی برابر کدام است؟

۱) نصف محیط ۲) نصف وتر ۳) نصف مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه ۴) ارتفاع وارد بر وتر

☆۲۷۲. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a\sin A = ۲R$، آن‌گاه مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) متساوی‌الساقین ۴) دارای سه زاویهٔ حاده است.

☆۲۷۳. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a\sin A + b\sin B + c\sin C = a^۲ + b^۲ + c^۲$، آن‌گاه R چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

☆۲۷۴. در مثلث ABC داریم $\hat{A} = ۹۰^\circ$، $\tan B = \sqrt{۲}$ و $a = ۳\sqrt{۳}$، اندازهٔ ضلع c کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

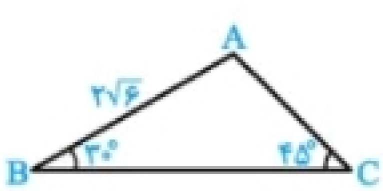
☆۲۷۵. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۶}$ واحد را به ۳ مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر از یک مثلث همنهشت چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$ (سراسری ریاضی- ۸۶)

☆۲۷۶. در مثلث ABC، $b = ۱۲$ و $R = ۶\sqrt{۲}$ می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ B کدام است؟

۱) ۴۵° یا ۱۳۵° ۲) فقط ۳۰° ۳) ۳۰° یا ۱۵۰° ۴) فقط ۴۵°

☆۲۷۷. در شکل مقابل اندازهٔ ضلع AC کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۴

☆۲۷۸. در یک مثلث، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی با یک ضلع آن برابر است، اندازهٔ یک زاویهٔ این مثلث کدام است؟

۱) ۳۰° یا ۱۵۰° ۲) ۴۵° یا ۱۳۵° ۳) ۶۰° یا ۱۲۰° ۴) ۹۰°

☆۲۷۹. اگر در مثلثی $\hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ$ باشد، آن‌گاه کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $b = ۲R\sin C$ ۲) $b = ۲R\cos A$ ۳) $b = ۲R\sin A$ ۴) $b = ۲R\cos C$

☆۲۸۰. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C} = \frac{۳}{۲}$، آن‌گاه حاصل $\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) $\frac{۵}{۲}$

★۲۸۱. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $c = (b^۲ - ۲)\frac{\sin C}{\sin B}$، آن‌گاه مقدار b کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) ۴

★۲۸۲. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\sin^2 B + \cos^2 C = 1$، آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) متساوی‌الساقین ۳) قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

☆۲۸۳. در مثلث ABC، $BC = 3$، $\hat{B} = 45^\circ$ و $\hat{C} = 105^\circ$ است. طول ضلع AC کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

۲۸۴. در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

★۲۸۵. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ نقطهٔ M بر قاعدهٔ BC اختیار شده است. اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث‌های AMB و AMC را به ترتیب R_1 و R_2 فرض کنیم، حاصل $\frac{R_1}{R_2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{MB}{MC}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{MC}{MB}$

★۲۸۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مقدار $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲۸۷. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $b = R\tan B$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ B کدام است؟

۱) 30° ۲) 60° ۳) 45° ۴) 75°

★۲۸۸. در مثلث ABC، $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{B} = 105^\circ$ است. اگر $a + c = 2 + \sqrt{2}$ باشد، c کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) ۱

☆۲۸۹. در مثلث ABC، $\hat{A} = 30^\circ$، $\hat{B} = 120^\circ$ و $c = 2$ است. محیط مثلث کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $2+4\sqrt{3}$ ۳) $4+\sqrt{3}$ ۴) $4+2\sqrt{3}$

★۲۹۰. در مثلث ABC داریم $a^2\cos^2 B + b^2\sin^2 A = 8$. اندازهٔ ضلع a کدام است؟

۱) $\sqrt{7}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۳

☆۲۹۱. برای تعیین فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند. نقطهٔ C را در طرف A طوری اختیار می‌کنیم که $AC = 30$، $B\hat{A}C = 15^\circ$ و $A\hat{C}B = 45^\circ$. طول AB کدام است؟

۱) $10\sqrt{3}$ ۲) $10\sqrt{6}$ ۳) $20\sqrt{3}$ ۴) $20\sqrt{6}$

۲۹۲. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{a}{b} = \frac{\cos A}{\cos B}$، آن‌گاه کدام تساوی درست است؟

۱) $\hat{A} = \hat{B}$ ۲) $\hat{A} = \hat{C}$ ۳) $\hat{B} = \hat{C}$ ۴) $\hat{A} = 90^\circ$

۲۹۳. در کدام مثلث رابطهٔ $\sin A + \sin B = \sin C$ برقرار است؟

۱) مثلث قائم‌الزاویه ۲) مثلث متساوی‌الاضلاع ۳) مثلث متساوی‌الساقین ۴) چنین مثلثی وجود ندارد.

۲۹۴. در مثلث ABC، $\hat{B} = 72^\circ$ و $c = b\tan C$ است، زاویهٔ بزرگ‌تر مثلث چند برابر زاویهٔ کوچک‌تر آن است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

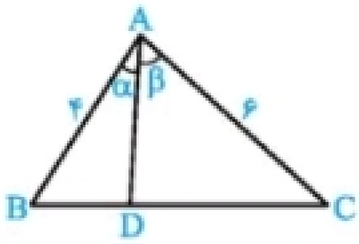
۲۹۵. در مثلث ABC، $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ است. حاصل $b^2 + c^2$ کدام است؟

۱) $2R^2$ ۲) $R.a$ ۳) $R.b.c$ ۴) $4R^2$

۲۹۶. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $b\tan C = c\tan B$، آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

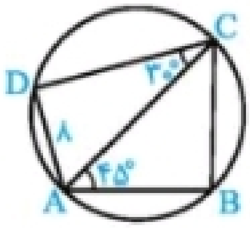
★۲۹۷. در مثلث روبه‌رو نقطهٔ D روی ضلع BC است به طوری‌که $\frac{CD}{BD} = ۲$. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

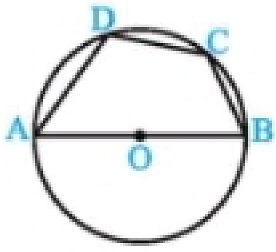
★۲۹۸. در چهارضلعی محاطی مقابل، AC با اضلاع AB و CD زاویهٔ °۴۵ و °۳۰ می‌سازد و AD = ۸ است. اندازهٔ ضلع BC کدام است؟



۱) ۹√۵ ۲) ۴√۲

۳) ۸√۲ ۴) ۴√۳

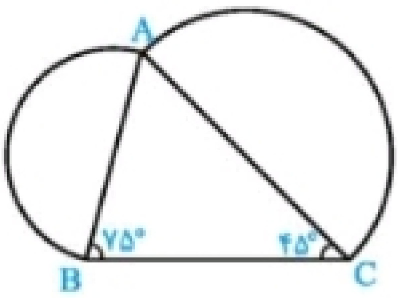
★۲۹۹. در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و طول وتر BC برابر ۴ است. tan D کدام است؟



۱) -√۲ ۲) -۲√۳

۳) -√۳ ۴) -۲√۲

★۳۰۰. در شکل مقابل دو نیم‌دایره به قطرهای AB و AC رسم شده است. نسبت مساحت نیم‌دایره‌ها کدام است؟



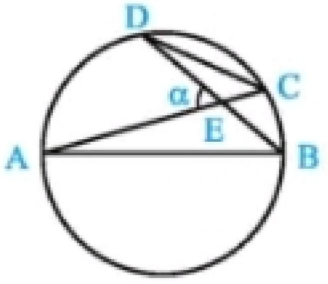
۱) ۲ - √۳

۲) ۴ - ۲√۳

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

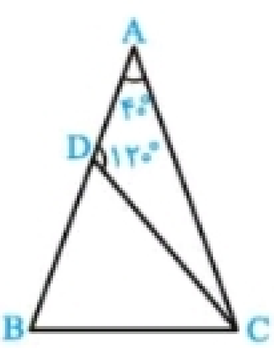
★۳۰۱. در شکل مقابل AB قطر دایره است و دو وتر AC و BD در نقطهٔ E متقاطع هستند. اگر اندازهٔ زاویهٔ AED برابر α باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{AB}$ کدام است؟



۱) sin α ۲) cos α

۳) tanα ۴) $\frac{۱}{\tan\alpha}$

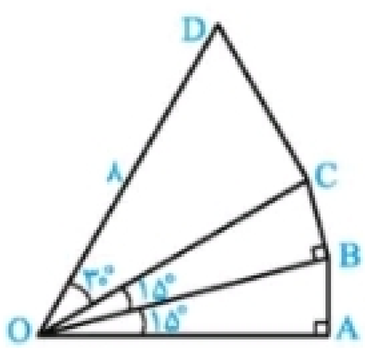
★۳۰۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC)، $\hat{A} = ۴۰°$ و نقطهٔ D روی ساق AB چنان قرار دارد که $A\hat{D}C = ۱۲۰°$ است. نسبت $\frac{AD}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

★۳۰۳. در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط AB کدام است؟



۱) ۲

۲) √۶ - √۲

۳) √۷ - ۱

۴) √۳

★۳۰۴. در مثلثی a + b = ۲c و زاویهٔ C = ۴۵°. مقدار cos A + cos B چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲√۲ - ۲ ۳) ۲ - √۲ ۴) √۲ - ۱

قسمت دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها

قضیهٔ کسینوس‌ها

☆۳۰۵. در هر مثلث کدام تساوی درست است؟

۱) $\cos A=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$
۲) $\cos A=\frac{a^۲-b^۲-c^۲}{۲bc}$
۳) $\cos B=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$
۴) $\cos B=\frac{b^۲-a^۲-c^۲}{۲ac}$

☆۳۰۶. در مثلث ABC، $\widehat{A}=۶۰^\circ$. کدام تساوی درست است؟

۱) $a^۲=b^۲+c^۲+bc$
۲) $a^۲=b^۲+c^۲-bc$
۳) $a^۲=b^۲+c^۲+\sqrt{۳}bc$
۴) $a^۲=b^۲+c^۲-\sqrt{۳}bc$

☆۳۰۷. اگر در مثلث ABC، $\widehat{A}=۳۰^\circ$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{bc}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

☆۳۰۸. اگر در مثلث ABC، رابطهٔ $b^۲-a^۲-c^۲=ac\sqrt{۲}$ بین اضلاع برقرار باشد، آن‌گاه کدام تساوی درست است؟

۱) $\widehat{A}=۴۵^\circ$ ۲) $\widehat{B}=۴۵^\circ$ ۳) $\widehat{A}=۱۳۵^\circ$ ۴) $\widehat{B}=۱۳۵^\circ$

☆۳۰۹. محیط مثلث مقابل کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۹ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

☆۳۱۰. اگر بین اضلاع مثلث غیرمتساوی‌الساقین ABC، رابطهٔ $b^۳-c^۳=a^۲(b-c)$ برقرار باشد، یکی از زوایای مثلث الزاماً کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۲۰°

☆۳۱۱. اگر در مثلثی $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۶}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\cos C$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۱۱}{۲۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

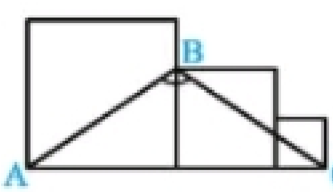
☆۳۱۲. اندازه‌های دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ و اندازهٔ زوایای مقابل آن‌ها ۲۰° و ۴۰° است. اندازهٔ ضلع سوم مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۷}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۱۱}$ ۴) $۲\sqrt{۱۹}$

☆۳۱۳. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\cos B=\frac{c}{a}$، آن‌گاه نوع مثلث کدام است؟

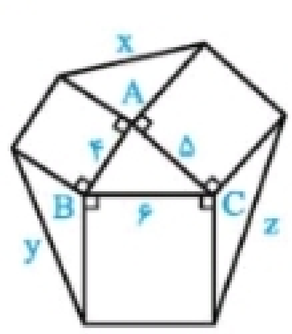
۱) متساوی‌الساقین است. ۲) قائم‌الزاویه است. ۳) متساوی‌الاضلاع است. ۴) حاده‌الزوایا است.

☆۳۱۴. سه مربع مطابق شکل با اضلاع ۱، ۲ و ۳ کنار هم قرار گرفته‌اند. حاصل $\cos A\widehat{B}C$ کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۱۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $-\frac{۴}{۱۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۳۱۵. سه مربع روی اضلاع مثلث ABC مطابق شکل می‌سازیم. حاصل $x^۲+y^۲+z^۲$ کدام است؟



۱) ۲۴۱
۲) ۲۲۵
۳) ۲۵۶
۴) ۲۳۱

۳۱۶. اندازهٔ اضلاع مثلث غیرمتساوی‌الساقینی اعداد اول یک‌رقمی است. بزرگ‌ترین زاویهٔ این مثلث کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۵۰° ۴) ۹۰°

۳۱۷. در مثلث ABC داریم $AB = ۴$ ، $BC = ۱۰$ و $\cos B = \frac{۴}{۵}$. طول ضلع AC کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

☆۳۱۸. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۳ و ۶ و زاویهٔ بین آن‌ها ۶۰° است. اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع به طول ۳ کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۳۰° ۳) ۴۵° ۴) ۶۰°

☆۳۱۹. در مثلث ABC ، $AB = AC = ۱$ و $BC = \cos A$. اندازهٔ ضلع BC کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

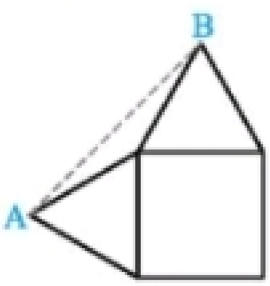
☆۳۲۰. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۴ و $\sqrt{۶۱}$ و زاویهٔ روبه‌رو به ضلع به طول $\sqrt{۶۱}$ برابر ۱۲۰° است. طول ضلع سوم مثلث کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

☆۳۲۱. مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض است. یک مثلث متساوی‌الاضلاع روی یک ضلع آن در خارج مربع می‌سازیم. دورترین فاصلهٔ رأس‌های مثلث و مربع کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}+\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}$

☆۳۲۲. بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصلهٔ AB چند واحد است؟ (سراسری تجربی - ۹۷)

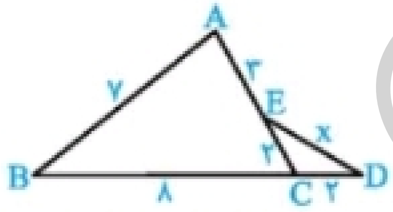


۱) $۱+۲\sqrt{۳}$
۲) $۳+\sqrt{۳}$
۳) $۳+\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$

☆۳۲۳. در مثلثی یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و اندازهٔ ضلع مقابل به این زاویه $۳\sqrt{۷}$ واحد است. اگر طول ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۶)

۱) ۶ ، ۳ ۲) ۷ ، ۴ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ، $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$ ، $۳\sqrt{۲}$

۳۲۴. در شکل مقابل x کدام است؟

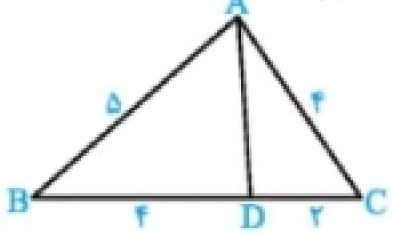


۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

★۳۲۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین، کسینوس زاویهٔ منفرجه بین دو میانهٔ هم‌طول، کدام است؟

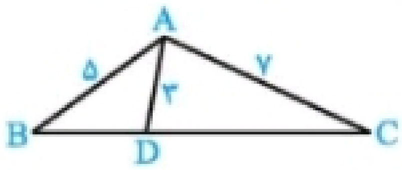
۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $-\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

★۳۲۶. در مثلث ABC مطابق شکل، طول پاره‌خط AD کدام است؟



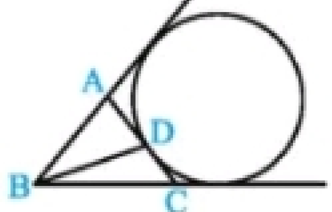
۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$
۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۱}$

۳۲۷. در شکل مقابل $CD = ۲BD$ است. طول پاره‌خط BD کدام است؟



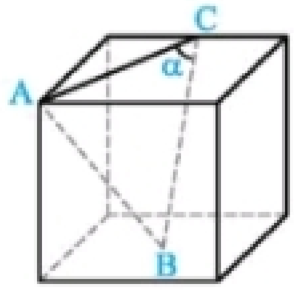
۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۳

★۳۲۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، مطابق شکل دایرهٔ محاطی خارجی نظیر زاویهٔ B رسم شده است. اگر $AB = AC = ۱۰$ و $BC = ۱۲$ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط BD چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



۱) ۳/۲ ۲) ۲/۴
۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲

۳۲۹. در مکعب مقابل، B مرکز وجه و C وسط یال است. $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

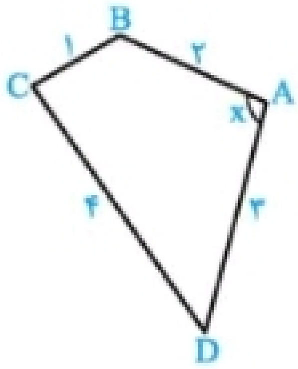
★۳۳۰. در مثلث ABC، $\hat{A}=۶۰^\circ$، $AB=۵$ و $AC=۴$ است. طول شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲۱}$ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۳۳۱. اندازه‌های اضلاع مثلثی ۶، ۱۰ و ۱۴ است. شعاع دایرهٔ محیطی آن چند برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۳۳۲. چهارضلعی مقابل محاطی است. مقدار $\cos x$ کدام است؟

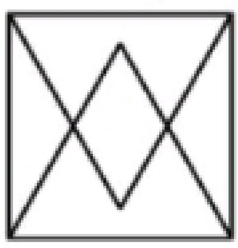


۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۳۳۳. در مثلث ABC، $\hat{A}=۶۰^\circ$ حاصل $\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$ کدام است؟

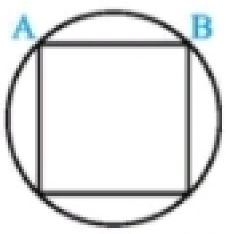
۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۳۴. در شکل زیر بر روی دو ضلع مقابل مربع، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. قطر بزرگ‌تر لوزی حاصل چند برابر ضلع مربع اصلی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)



۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}-۱$

۳۳۵. در شکل مقابل ضلع مربع، برابر ۲ واحد است. فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)



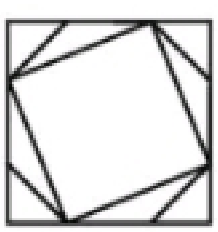
۱) $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

۲) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$

۳۳۶. در شکل مقابل طول اضلاع هشت‌ضلعی منتظم، ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)



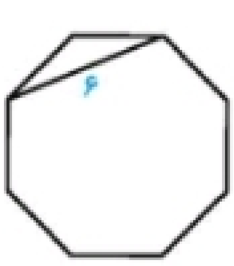
۱) $۴(۱+\sqrt{۲})$

۲) $۴(۲+\sqrt{۲})$

۳) $۸(۱+\sqrt{۲})$

۴) $۸(۲+\sqrt{۲})$

۳۳۷. طول قطر کوچک یک هشت‌ضلعی منتظم مطابق شکل برابر ۶ است. مساحت هشت‌ضلعی کدام است؟



۱) $۳۶\sqrt{۲}$ ۲) $۳۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳۴\sqrt{۲}$

۳۳۸. وسط‌های اضلاع یک شش‌ضلعی منتظم را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. مساحت شکل حاصل چه کسری از مساحت شش‌ضلعی منتظم است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۳۳۹. در یک هشت‌ضلعی منتظم وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. مساحت شکل جدید چند برابر مساحت هشت‌ضلعی اولیه است؟

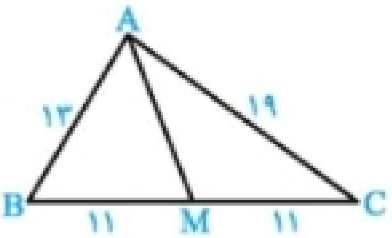
۱) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

قضیهٔ میانه‌ها

☆۳۴۰. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۵، ۷ و ۸ است. طول کوچک‌ترین میانهٔ مثلث کدام است؟

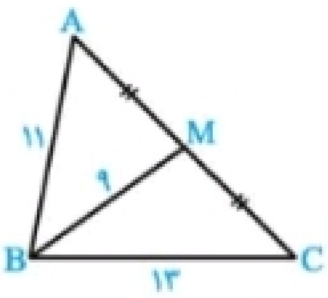
۱) $\sqrt{۲۰}$ ۲) $\sqrt{۲۱}$ ۳) $\sqrt{۲۲}$ ۴) $\sqrt{۲۳}$

☆۳۴۱. در شکل مقابل طول میانهٔ AM چه کسری از محیط مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

☆۳۴۲. در شکل مقابل طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

☆۳۴۳. در مثلث ABC داریم $AB=۶$، $AC=۴$ و $BC=۵$. حاصل $m_b^۲-m_c^۲$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

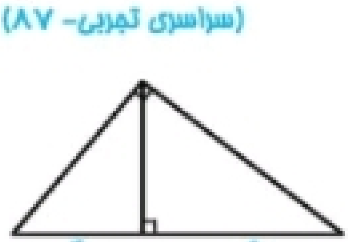
☆۳۴۴. در یک مثلث اندازهٔ اضلاع ۴، ۶ و ۸ است. مجموع مربع‌های میانه‌های این مثلث کدام است؟

۱) ۸۸ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۸۶

☆۳۴۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات میانه‌ها برابر ۵۴ است. طول وتر مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

★۳۴۶. در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اندازهٔ بزرگ‌ترین میانه کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)



۱) $\sqrt{۵۰}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$ ۳) $\sqrt{۷۰}$ ۴) $\sqrt{۷۵}$

☆۳۴۷. طول قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ و طول ساق آن ۱۲ است. طول میانهٔ وارد بر ساق مثلث کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۳۴۸. اگر اندازهٔ دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع $۳\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۳}$ باشد. مجموع مربعات دو قطر آن کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۳۴۹. در مثلث ABC داریم $c^۲-b^۲=\frac{a^۲}{۲}$. طول میانهٔ نظیر ضلع BC کدام است؟

۱) b ۲) $\frac{b}{۲}$ ۳) c ۴) $\frac{c}{۲}$

۳۵۰. در مثلث ABC اگر طول میانهٔ نظیر ضلع BC واسطهٔ هندسی اضلاع AC و AB باشد، آن‌گاه $|b-c|$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{۲}$ ۲) $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $a\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$

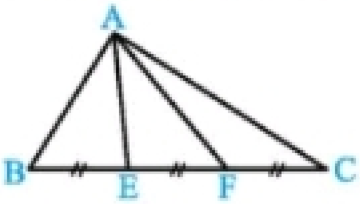
۳۵۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ یک زاویهٔ ۳۰° و طول ضلع مقابل آن ۴ است. فاصلهٔ رأس این زاویه از وسط میانهٔ نظیر وتر این مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۵۲. فاصله‌های نقطهٔ همرسی میانه‌های یک مثلث از رئوس آن $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۷}$ و $۲\sqrt{۲}$ است. طول کوچک‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

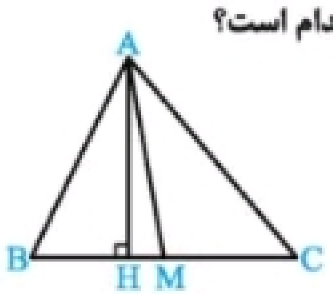
۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

★۳۵۳. در شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\widehat{A} = ۹۰^\circ$). نقاط E و F وتر را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر طول وتر ۴/۵ باشد، حاصل $AE^۲ + AF^۲$ کدام است؟



۱) ۱۱/۲۵
۲) ۱۱/۵
۳) ۱۱/۷۵
۴) ۱۲/۲۵

★۳۵۴. در شکل زیر AH ارتفاع و AM میانه است. اگر AB = ۱۳ ، AC = ۱۴ و BC = ۱۵ است. طول پاره‌خط MH کدام است؟



۱) ۰/۸
۲) ۰/۷
۳) ۰/۹
۴) ۱

قسمت سوم: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

قضیهٔ نیمسازها

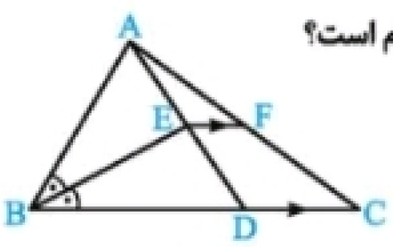
☆۳۵۵. در مثلثی به اضلاع ۱۲، ۸ و ۷ نیمساز داخلی زاویهٔ بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ D از وسط ضلع بزرگ‌تر چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

۳۵۶. نقطه‌ای روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای از دو ضلع دیگر به یک فاصله است. اگر این نقطه، وتر را به دو پاره‌خط به طول‌های ۳ و ۴ تقسیم کند طول ضلع کوچک مثلث کدام است؟

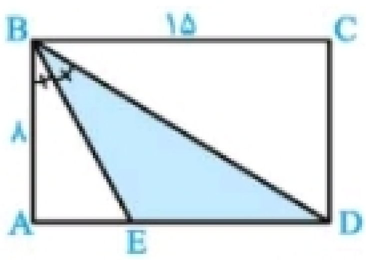
۱) ۵
۲) ۴/۲
۳) ۲/۸
۴) ۲/۱

۳۵۷. در شکل مقابل EF || BC و BE نیمساز زاویهٔ B است. اگر EF = ۴ و CD = ۷ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{BD}{AB}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۷}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۳۵۸. در شکل روبه‌رو ABCD مستطیل به ابعاد ۸ و ۱۵ است. اگر BE نیمساز زاویهٔ ABD باشد، مساحت مثلث BED کدام است؟



۱) ۴۰/۸
۲) ۳۸
۳) ۴۱/۲
۴) ۳۶

☆۳۵۹. در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کنند. اندازهٔ MN چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

☆۳۶۰. در مثلث ABC، میانهٔ AM و نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMC را رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کنند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{AD}{AB}$
۲) $\frac{ME}{MC}$
۳) $\frac{ME}{CE}$
۴) $\frac{AM}{BC}$

☆۳۶۱. در مثلث ABC، ضلع AC = ۶ و میانهٔ BM = ۵ می‌باشند. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می‌کند، اندازهٔ PQ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) ۳/۲۵
۲) ۳/۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۴

★۳۶۲. در مثلث ABC، ضلع AC = ۶ و میانهٔ BM = ۵ می‌باشند. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نسبت مساحت مثلث PMQ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۱۶}$
۳) $\frac{۱۵}{۶۴}$
۴) $\frac{۵}{۱۶}$

☆۳۶۳. اضلاع مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویهٔ متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

☆۳۶۴. در مثلث ABC ($\widehat{A} = ۹۰^\circ$ و $AB = ۳$، $AC = ۴$)، ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازهٔ DH کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

☆۳۶۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه نیمساز یک زاویهٔ حاده، ضلع مقابل به آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۵ و ۱۰ تقسیم کرده است. طول این نیمساز کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) ۱۰ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) ۱۲

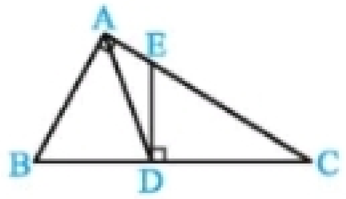
☆۳۶۶. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. فاصلهٔ دورترین رأس این مثلث از نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی آن، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۳۶۷. در مثلث به اضلاع ۶، ۷ و ۸، نقطهٔ همرسی نیمسازها، نیمساز بزرگ‌ترین زاویه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

★۳۶۸. در شکل مقابل، مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\widehat{A} = ۹۰^\circ$). اگر $AB = ۴$، $AC = ۱۲$ و AD نیمساز زاویهٔ A باشد، آن‌گاه مساحت مثلث DEC کدام است؟

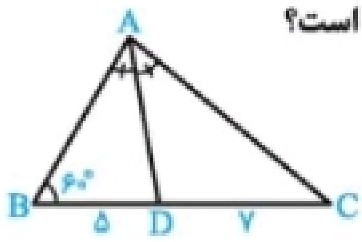


۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

★۳۶۹. در مثلث ABC ($\widehat{A}=۹۰^\circ$)، نیمساز یک زاویهٔ حاده، ارتفاع وارد بر وتر را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۴ تقسیم می‌کند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

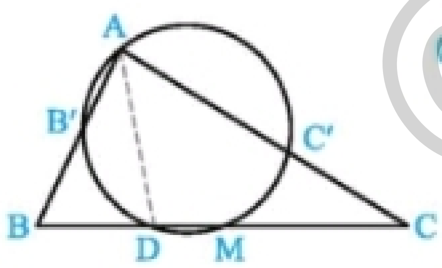
۱) $۱۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱۸\sqrt{۳}$ ۴) $۲۴\sqrt{۳}$

★۳۷۰. در مثلث ABC مطابق شکل، AD نیمساز زاویهٔ A، $BD = ۵$، $CD = ۷$ و $\widehat{B} = ۶۰^\circ$ است. $AB + AC$ کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

★۳۷۱. در مثلث ABC نقطهٔ M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویهٔ A است. دایرهٔ محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)



۱) ۱ ۲) $\frac{AB}{AC}$ ۳) $\frac{AB'}{AC'}$ ۴) $\frac{DB}{DM}$

محاسبهٔ طول نیمساز

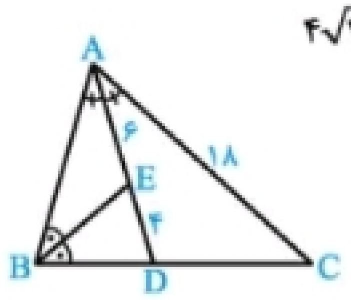
☆۳۷۲. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۶، ۷ و ۸ است. نیمساز زاویهٔ متوسط مثلث را رسم می‌کنیم، دو مثلث داخل مثلث اصلی ایجاد می‌شود. مجموع محیط‌های این دو مثلث کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۳ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

☆۳۷۳. در مثلث ABC، AD نیمساز است به طوری‌که $AB = AD$، $BD = ۲$ و $CD = ۳$ است. طول AD کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

★۳۷۴. در شکل مقابل E نقطهٔ همرسی نیمسازها، $ED = ۴$، $AE = ۶$ و $AC = ۱۸$ است. طول ضلع AB کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۸

☆۳۷۵. اندازهٔ اضلاع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ و ۴۰ است. طول نیمساز زاویهٔ قائمه این مثلث کدام است؟

۱) $۷\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۲}$

★۳۷۶. در مثلث ABC، $AB = ۱۰$ ، $AC = ۱۲$ و $BC = ۱۱$ است. نیمساز زاویهٔ A (یعنی AD) را امتداد می‌دهیم و نقطهٔ تلاقی آن با دایرهٔ محیطی مثلث را E می‌نامیم. طول DE کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

★۳۷۷. در مثلث ABC، طول نیمساز زاویهٔ A برابر $AD = \sqrt{۶}$ ، $AB = ۴$ و $AC = ۶$ است. اگر M وسط ضلع AC باشد، اندازهٔ DM کدام است؟

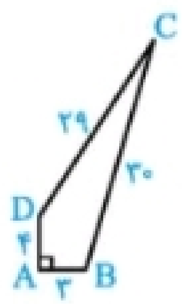
۱) $\frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳۰}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲۸}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳۱}}{۲}$

★۳۷۸. اندازهٔ اضلاع مثلث ABC، $AB = ۲۲$ ، $AC = ۳۲$ و $BC = ۲۶$ است. میانهٔ BM و نیمساز زاویهٔ BMC را رسم می‌کنیم. این نیمساز ضلع BC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۱۰}$ ۳) $\frac{۸}{۱۲}$ ۴) $\frac{۸}{۱۱}$

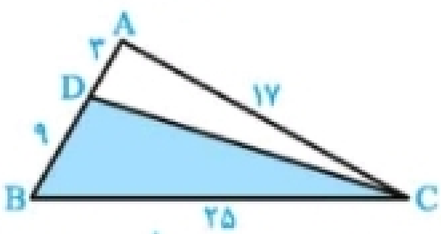
قسمت چهارم: قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

مساحت مثلث، قضیهٔ هرون



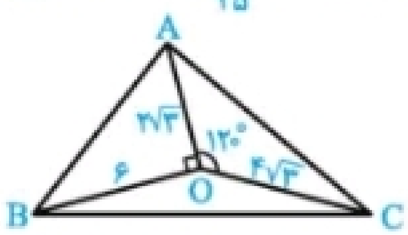
☆۳۷۹. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۷۸ ۲) ۸۰
۳) ۷۶ ۴) ۸۲



☆۳۸۰. مساحت مثلث BDC کدام است؟

۱) ۶۷/۵ ۲) ۷۰
۳) ۶۹/۵ ۴) ۷۲

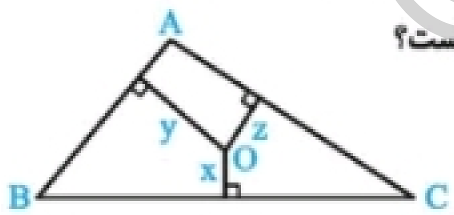


☆۳۸۱. در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۳}$ ۲) $۱۸\sqrt{۳}$
۳) $۲۰\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$

۳۸۲. مساحت مثلثی به اضلاع ۱۲، ۹ و ۷ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۱۴\sqrt{۵}$



☆۳۸۳. در مثلث ABC مطابق شکل $AB = ۱۱$ ، $AC = ۱۳$ و $BC = ۲۰$ است. حاصل $۲۰x + ۱۱y + ۱۳z$ کدام است؟

۱) ۱۳۴ ۲) ۱۳۰
۳) ۱۲۸ ۴) ۱۳۲

۳۸۴. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۴، ۷ و ۹ است. بزرگ‌ترین ارتفاع این مثلث کدام است؟

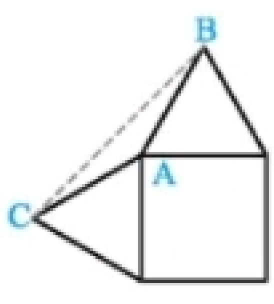
۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۶}$

☆۳۸۵. در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟ (سراسری تجربی- ۹۲)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

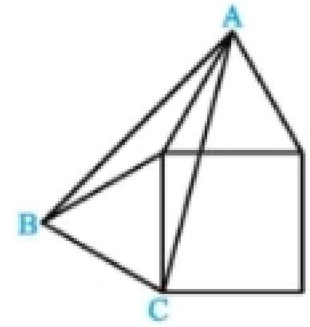
☆۳۸۶. اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲



☆۳۸۷. بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

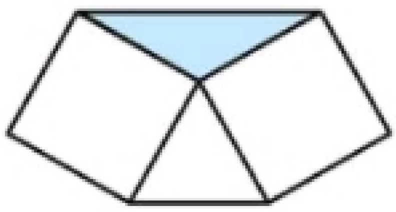
۱) $\sqrt{۳} - ۱$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$
۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$



☆۳۸۸. در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور ساخته شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲ و مشابه سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۱+\sqrt{۳}$

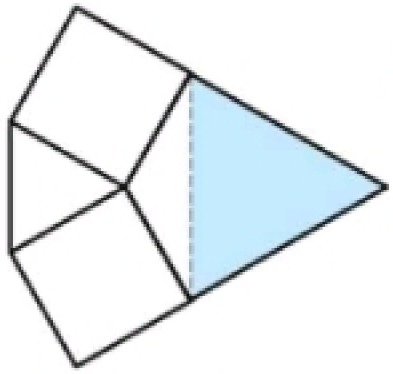
۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) ۴



☆۳۸۹. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث رنگی چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$



☆۳۹۰. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث رنگی چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)

۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۳

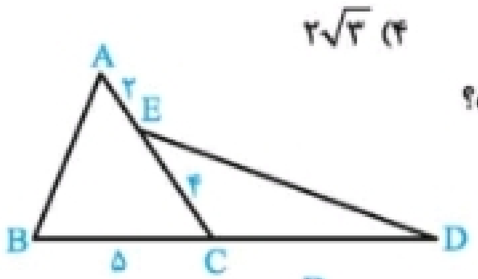
۴) ۴

☆۳۹۱. مساحت هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) $۴(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۴(۲+\sqrt{۲})$

۳۹۲. در مثلث ABC، $\widehat{A}=۶۰^\circ$ و I نقطهٔ همرسی نیمسازها می‌باشد. اگر $\frac{S(ABC)}{S(BIC)}=k\frac{AB\times AC}{BI\times CI}$، آن‌گاه k کدام است؟

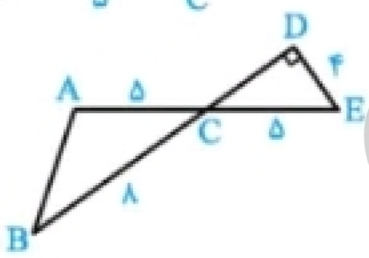
۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۳}$



۳۹۳. در شکل مقابل مساحت مثلث ABC نصف مساحت مثلث ECD است. طول پاره‌خط CD کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۴ ۴) ۱۵



۳۹۴. در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶

۳) ۱۸ ۴) ۱۴

★۳۹۵. اندازهٔ اضلاع مثلثی، جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ می‌باشند. اگر بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ۱۲۰° باشد. آن‌گاه مساحت مثلث کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۳}$ ۲) $۱۵\sqrt{۳}$ ۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$

☆۳۹۶. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۶، ۵ و ۹ است. نیمساز کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث کوچک‌تر ایجادشده کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۹۷. مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\widehat{A}=۹۰^\circ$) و رابطهٔ $P(P-a)=۶۰$ در آن برقرار است (P نصف محیط مثلث است). مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۳۹۸. در شکل روبه‌رو مساحت چهارضلعی BCDE چند برابر $\sqrt{۱۵}$ است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴

۳) ۲۰ ۴) ۲۷

☆۳۹۹. در مثلث ABC، $P-a=۳$، $P-b=۴$ و $P-c=۵$ است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۵}$ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۴۰۰. در مثلث ABC، $a=۶$، $b=۵$ و $h_c=۴$. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث کدام است؟

۱) ۳/۲۵ ۲) ۴ ۳) ۳/۵ ۴) ۳/۷۵

۴۰۱. در مثلث ABC، $b=13$، $c=11$ و $R=\frac{65}{6}$. طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۶/۶ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

★۴۰۲. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۴، ۱۳ و ۱۵ است. طول شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) $8\frac{3}{8}$ ۲) $8\frac{1}{4}$ ۳) $8\frac{1}{8}$ ۴) $8\frac{5}{8}$

☆۴۰۳. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a کدام است؟

۱) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ ۴) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

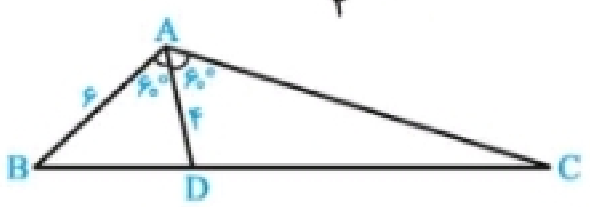
☆۴۰۴. اندازه‌های دوضلع مثلثی ۴ و $2\sqrt{7}$ و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع $2\sqrt{7}$، برابر 120° است، مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) ۴

☆۴۰۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\widehat{A}=90^\circ)$ اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه ۳ و $\sqrt{3}$ است. نقطهٔ D روی وتر مثلث چنان است که پاره‌خط AD زاویهٔ A را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. بزرگ‌ترین طول پاره‌خط AD کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

☆۴۰۶. در شکل روبه‌رو طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

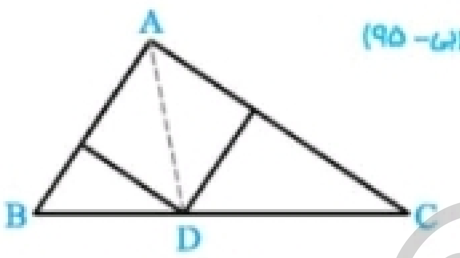
۴۰۷. اگر d_a نیمساز زاویهٔ درونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد $(\widehat{A}=90^\circ)$، آن‌گاه مقدار $\frac{(b+c)d_a}{bc}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

★۴۰۸. در مثلث ABC، اگر $\widehat{A}=60^\circ$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{(b+c)d_a}{S}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) ۲

☆۴۰۹. در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۵)



۱) $1/4\sqrt{2}$ ۲) ۲/۱ ۳) ۲/۸ ۴) $2/1\sqrt{2}$

★۴۱۰. مساحت مثلثی با دو ضلع ۹ و ۱۶ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

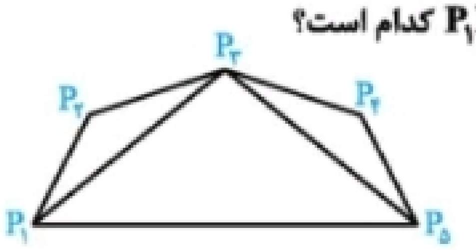
★۴۱۱. مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b=8$ و $c=5$ باشد، اندازهٔ ضلع متوسط a کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $\sqrt{39}$ ۲) $\sqrt{41}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{2}$

★۴۱۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر یک متوازی‌الاضلاع برابر 30° و اندازهٔ اضلاع آن ۶ و ۹ است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $7\sqrt{3}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) $7/5\sqrt{3}$ ۴) $8/5\sqrt{3}$

★۴۱۳. در شکل روبه‌رو $P_1P_2P_3P_4P_5$ بخشی از یک ۱۲ ضلعی منتظم، به ضلع ۲ است. مساحت مثلث $P_1P_3P_5$ کدام است؟



۱) $3+2\sqrt{3}$ ۲) $5+4\sqrt{3}$ ۳) $8+2\sqrt{3}$ ۴) $8+4\sqrt{3}$

★۴۱۴. در مثلث ABC، $A=60^\circ$ و AD نیمساز زاویهٔ A است به طوری‌که $BD=2$ و $CD=4$. مساحت مثلث ABC کدام است؟

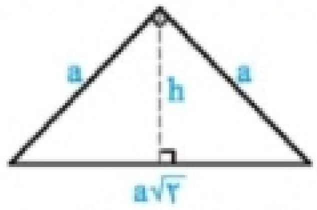
۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

★۴۱۵. در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC، $\widehat{A}=60^\circ$ می‌باشد. نیمساز زاویهٔ A، دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع می‌کند به طوری‌که $AE=4$. اگر محیط مثلث $6+4\sqrt{3}$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ فصل ۳ روابط طولی در مثلث

۲۷۰



وتر مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ساق a برابر $a\sqrt{۲}$ است و داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}h\times a\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}a\times a\Rightarrow h=\frac{a^۲}{a\sqrt{۲}}=\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۷۱

در هر مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایرهٔ محیطی، برابر نصف وتر است.

۲۷۲

$$a\sin A=۲R\xrightarrow{a=۲R\sin A}۲R\sin^۲A=۲R\Rightarrow\sin^۲A=۱$$

$$\Rightarrow\sin A=\pm۱\xrightarrow{\sin A>۰}\sin A=۱\Rightarrow\widehat{A}=۹۰^\circ$$

پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

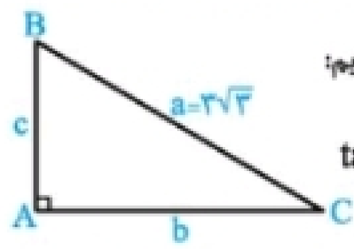
۲۷۳

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C=a^۲+b^۲+c^۲$$

$$\Rightarrow a\times\frac{a}{۲R}+b\times\frac{b}{۲R}+c\times\frac{c}{۲R}=a^۲+b^۲+c^۲$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲R}(a^۲+b^۲+c^۲)=a^۲+b^۲+c^۲\Rightarrow۲R=۱\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}$$

۲۷۴



بنابه فرض $a=۳\sqrt{۳}$ و $\tan B=\sqrt{۲}$، داریم:

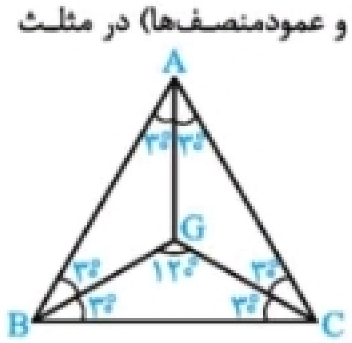
$$\tan B=\frac{b}{c}\Rightarrow\sqrt{۲}=\frac{b}{c}\Rightarrow b=c\sqrt{۲}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow(۳\sqrt{۳})^۲=(c\sqrt{۲})^۲+c^۲$$

$$\Rightarrow۲c^۲+c^۲=۲۷\Rightarrow۳c^۲=۲۷\Rightarrow c^۲=۹\Rightarrow c=۳$$

۲۷۵

نقطهٔ همرسی میانه‌ها (نیمسازها، ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها) در مثلث متساوی‌الاضلاع آن را به سه مثلث همنهشت متساوی‌الساقین با زوایای ۳۰°، ۳۰° و ۱۲۰° تقسیم می‌کند. بنابه فرض $BC=\sqrt{۶}$، در مثلث BGC قضیهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$\frac{BC}{\sin۱۲۰^\circ}=\frac{GB}{\sin۳۰^\circ}$$

$$\Rightarrow GB=\sqrt{۶}\times\frac{\sin۳۰^\circ}{\sin۱۲۰^\circ}=\sqrt{۶}\times\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۲}$$

۲۷۶

$$b=۲R\sin B\Rightarrow۱۲=۲\times۶\sqrt{۲}\times\sin B\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\widehat{B}=۴۵^\circ \text{ یا } \widehat{B}=۱۳۵^\circ$$

۲۷۷

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{AC}{\sin۳۰^\circ}=\frac{۲\sqrt{۶}}{\sin۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}\times\frac{\sin۳۰^\circ}{\sin۴۵^\circ}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}\times\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

۲۷۸

$$a=۲R\sin A\xrightarrow{a=R}R=۲R\sin A\Rightarrow\sin A=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\widehat{A}=۳۰^\circ \text{ یا } \widehat{A}=۱۵۰^\circ$$

۲۷۹

$$b=۲R\sin B\,،\,\widehat{B}-\widehat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow b=۲R\sin(۹۰^\circ+C)=۲R\cos C$$

۲۸۰

$$\frac{\sin A+\sin C}{\sin A-\sin C}=\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج}}\frac{۲\sin A}{۲\sin C}=\frac{۳+۲}{۳-۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin C}=۵\Rightarrow\sin A=۵\sin C\Rightarrow\frac{a}{۲R}=۵\times\frac{c}{۲R}\Rightarrow a=۵c$$

۲۸۱

در تساوی داده‌شده از قضیهٔ سینوس‌ها قرار می‌دهیم $\sin C=\frac{c}{۲R}$ و $\sin B=\frac{b}{۲R}$، داریم:

$$c=(b^۲-۲)\frac{\sin C}{\sin B}\Rightarrow c=(b^۲-۲)\frac{\frac{c}{۲R}}{\frac{b}{۲R}}\Rightarrow\cancel{c}=(b^۲-۲)\frac{\cancel{c}}{b}$$

$$\Rightarrow b=b^۲-۲\Rightarrow b^۲-b-۲=۰\Rightarrow(b+۱)(b-۲)=۰\Rightarrow b=۲$$

۲۸۲

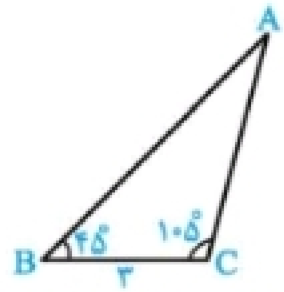
$$\sin^۲B+\cos^۲C=۱\Rightarrow\sin^۲B=۱-\cos^۲C=\sin^۲C$$

$$\Rightarrow\left(\frac{b}{۲R}\right)^۲=\left(\frac{c}{۲R}\right)^۲\Rightarrow b^۲=c^۲\Rightarrow b=c$$

$\Rightarrow$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۸۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$\hat A = 180° - \hat B - \hat C = 180° - 45° - 105° = 30°$



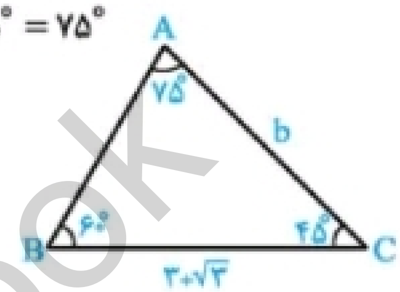
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \frac{3}{\sin 30°}=\frac{b}{\sin 45°}$

$\Rightarrow b = 3\frac{\sin 45°}{\sin 30°}=3\times\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac12}=3\sqrt2$

۲۸۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: $\hat A+\hat B+\hat C=180° \Rightarrow \hat A+60°+45°=180°$

$\Rightarrow \hat A = 180°-105°=75°$



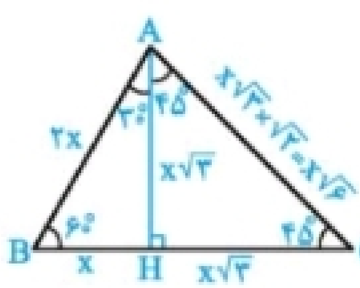
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{3+\sqrt3}{\sin 75°}=\frac{b}{\sin 60°}$

اما از مثلثات می‌دانیم $\sin 75° = \frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$، در نتیجه داریم:

$b=\frac{\sin 60°}{\sin 75°}(3+\sqrt3)=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}(3+\sqrt3)$

$=\frac{2\sqrt3\times\sqrt3(\sqrt3+1)}{\sqrt2\times(\sqrt3+1)}=\frac{6}{\sqrt2}=3\sqrt2$

روش دوم: ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، زاویهٔ A به دو زاویهٔ ۳۰° و ۴۵° تقسیم می‌شود. اگر فرض کنیم $BH = x$، در این صورت اندازهٔ پاره‌خط‌ها مطابق شکل می‌شود و داریم:

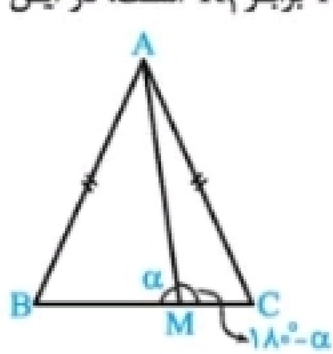


$x+x\sqrt3=3+\sqrt3\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt3}{\sqrt3+1}=\frac{\sqrt3(\sqrt3+1)}{\sqrt3+1}=\sqrt3$

$AC=x\sqrt6=\sqrt3\times\sqrt6=3\sqrt2$

۲۸۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABM برابر R_1 است، در این مثلث بنابه قضیهٔ سینوس‌ها داریم:



$AB=2R_1\sin A\hat MB=2R_1\sin\alpha$

همچنین در مثلث AMC شعاع دایرهٔ محیطی مثلث، R_2 است و بنابه قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$AC=2R_2\sin A\hat MC\Rightarrow AC=2R_2\sin(180°-\alpha)=2R_2\sin\alpha$

و چون $AB = AC$، پس $2R_1\sin\alpha=2R_2\sin\alpha$ و در نتیجه:

$R_1=R_2$

۲۸۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه باشد ($\hat A=90°$)، داریم:

$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\cos^2 90°+1-\sin^2B+1-\sin^2C$

$=2-\frac{b^2}{4R^2}-\frac{c^2}{4R^2}$

$\Rightarrow \cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=2-\frac{\overbrace{b^2+c^2}^{a^2}}{4R^2}$

$=2-\frac{(2R)^2}{4R^2}=2-1=1$

۲۸۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$b=R\tan B\Rightarrow 2R\sin B=R\times\frac{\sin B}{\cos B}\Rightarrow 2\cos B=1$

$\Rightarrow\cos B=\frac12\Rightarrow\hat B=60°$

۲۸۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$\hat A+\hat B+\hat C=180°\Rightarrow 30°+105°+\hat C=180°\Rightarrow\hat C=180°-135°=45°$

$a+c=2+\sqrt2\Rightarrow 2R\sin A+2R\sin C=2+\sqrt2$

$\Rightarrow 2R\sin 30°+2R\sin 45°=2+\sqrt2$

$\Rightarrow 2R\times\frac12+2R\times\frac{\sqrt2}{2}=2+\sqrt2$

$\Rightarrow R(1+\sqrt2)=\sqrt2(\sqrt2+1)\Rightarrow R=\sqrt2$

$c=2R\sin C=2\times\sqrt2\times\sin 45°=2\sqrt2\times\frac{\sqrt2}{2}=2$

۲۸۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$\hat A+\hat B+\hat C=180°\Rightarrow 30°+120°+\hat C=180°$

$\Rightarrow\hat C=180°-150°=30°$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin 30°}=\frac{b}{\sin 120°}=\frac{2}{\sin 30°}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\sin 30°}=\frac{2}{\sin 30°}\Rightarrow a=2\\ \frac{b}{\sin 120°}=\frac{2}{\sin 30°}\Rightarrow\frac{b}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{2}{\frac12}\Rightarrow b=2\sqrt3\end{cases}$$

محیط مثلث ABC $=a+b+c=2+2\sqrt3+2=4+2\sqrt3$

۲۹۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$a^2\cos^2B+b^2\sin^2A=8$

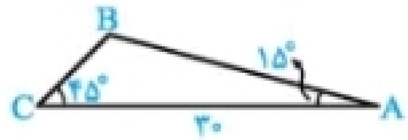
$\Rightarrow(2R\sin A)^2\cos^2B+(2R\sin B)^2\sin^2A=8$

$\Rightarrow 4R^2\sin^2A\cos^2B+4R^2\sin^2B\sin^2A=8$

$\Rightarrow 4R^2\sin^2A\underbrace{(\cos^2B+\sin^2B)}_{1}=8$

$\Rightarrow 4R^2\sin^2A=8\Rightarrow(2R\sin A)^2=8\Rightarrow a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt2$

۲۹۱
(۴) (۳) **(۲)** (۱)



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۱۵^\circ+\hat{B}+۴۵^\circ=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}=۱۲۰^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{۳۰}{\sin ۱۲۰^\circ}=\frac{AB}{\sin ۴۵^\circ}$$
$$\Rightarrow AB=۳۰\times\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۱۲۰^\circ}=۳۰\times\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۳۰\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=۱۰\sqrt{۶}$$

۲۹۲
(۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$\frac{a}{b}=\frac{\cos A}{\cos B}\Rightarrow\frac{۲R\sin A}{۲R\sin B}=\frac{\cos A}{\cos B}\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos A}{\cos B}$$
$$\Rightarrow\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}\Rightarrow\tan A=\tan B\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}$$

۲۹۳
(۴) (۳) (۲) (۱)

$$\sin A+\sin B=\sin C\Rightarrow\frac{a}{۲R}+\frac{b}{۲R}=\frac{c}{۲R}\Rightarrow a+b=c$$

در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است، پس مثلثی با شرایط فوق وجود ندارد.

۲۹۴
(۴) (۳) **(۲)** (۱)

$$c=b\tan C\Rightarrow\cancel{۲R}\,\cancel{\sin C}=\cancel{۲R}\sin B\times\frac{\cancel{\sin C}}{\cos C}$$
$$\Rightarrow\sin B=\cos C\Rightarrow\sin B=\sin(۹۰^\circ-C)\Rightarrow\hat{B}=۹۰^\circ-\hat{C}$$
$$\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۹۰^\circ$$

از طرفی بنابه فرض $\hat{B}=۷۲^\circ$، در نتیجه $\hat{C}=۱۸^\circ$ می‌شود و نهایتاً:

$$A=۵C$$

۲۹۵
(۴) (۳) (۲) (۱)

بنابه فرض $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$، پس $\hat{B}=۹۰^\circ+\hat{C}$ و داریم:

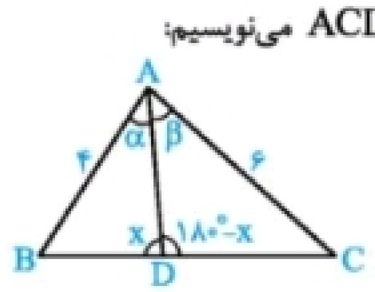
$$b^۲+c^۲=۴R^۲\sin^۲B+۴R^۲\sin^۲C$$
$$=۴R^۲\sin^۲(۹۰^\circ+C)+۴R^۲\sin^۲C$$
$$\Rightarrow b^۲+c^۲=۴R^۲\underbrace{(\cos^۲C+\sin^۲C)}_{۱}=۴R^۲\times۱=۴R^۲$$

۲۹۶
(۴) (۳) **(۲)** (۱)

$$b\tan C=c\tan B\Rightarrow ۲R\cancel{\sin B}\times\frac{\cancel{\sin C}}{\cos C}=۲R\cancel{\sin C}\,\frac{\cancel{\sin B}}{\cos B}$$
$$\Rightarrow\cos B=\cos C\Rightarrow B=C\Rightarrow$$ مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۹۷
(۴) (۳) **(۲)** (۱)

قضیهٔ سینوس‌ها را در دو مثلث ABD و ACD می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}:\dfrac{AB}{\sin x}=\dfrac{BD}{\sin\alpha}\\[2mm]\overset{\Delta}{ACD}:\dfrac{AC}{\sin(۱۸۰^\circ-x)}=\dfrac{CD}{\sin\beta}\end{array}\right\}$$

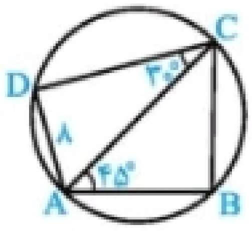
$$\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{\sin(۱۸۰^\circ-x)}{\sin x}\times\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\times\frac{BD}{CD}$$

بنابه فرض $\frac{CD}{BD}=۲$ و می‌دانیم $\sin(۱۸۰^\circ-x)=\sin x$، پس:

$$\frac{\sin x}{\sin x}\times\frac{۴}{۶}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

۲۹۸
(۴) **(۳)** (۲) (۱)

شعاع دایره را R می‌نامیم که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث‌های ACD و ABC است، پس بنابه قضیهٔ سینوس‌ها در این دو مثلث داریم:

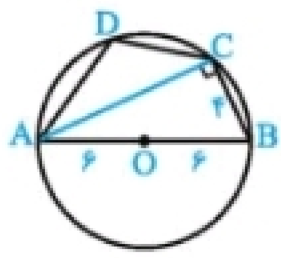


$$\left.\begin{array}{l}AD=۲R\sin ۳۰^\circ\\BC=۲R\sin ۴۵^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{AD}{BC}=\frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow\frac{۸}{BC}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow BC=۸\sqrt{۲}$$

۲۹۹
(۴) (۳) (۲) (۱)

قطر AC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا زاویهٔ محاطی ACB روبه‌رو به قطر است، پس:



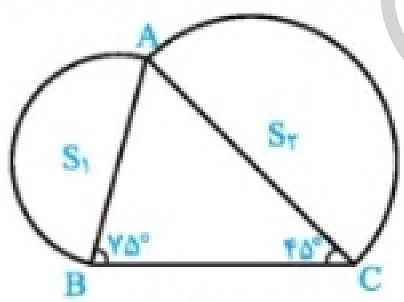
$$\cos B=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\cos B=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow\sin B=\sqrt{۱-(\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۳}$$

$$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\frac{\sqrt{۸}}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

اما چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس زوایای B و D مکمل یکدیگرند، در نتیجه داریم:

$$\tan D=\tan(۱۸۰^\circ-B)=-\tan B=-۲\sqrt{۲}$$

۳۰۰
(۴) (۳) **(۲)** (۱)



فرض کنیم مساحت نیم‌دایره‌ها $S_۱$ و $S_۲$ باشد. مساحت هر نیم‌دایره به قطر d برابر $\frac{\pi d^۲}{۸}$ است پس داریم:

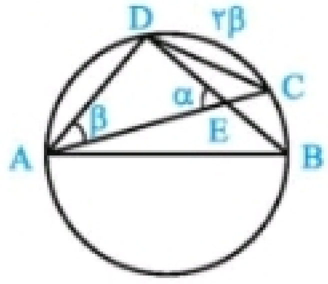
$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{\pi AB^۲}{۸}}{\frac{\pi AC^۲}{۸}}=\frac{AB^۲}{AC^۲}$$

از طرفی بنا به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم $AB=۲R\sin ۴۵^\circ$ و $AC=۲R\sin ۷۵^\circ$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۴R^۲\sin^۲ ۴۵}{۴R^۲\sin^۲ ۷۵}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱-\cos ۱۵۰^\circ}{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۱-(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۲}{۲+\sqrt{۳}}=۴-۲\sqrt{۳}$$

۳۰۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



وتر AD را رسم می‌کنیم. دایره به قطر $AB = 2R$، دایرهٔ محیطی مثلث ACD است پس بنابه قضیهٔ سینوس‌ها داریم $CD = 2R\sin\beta$.

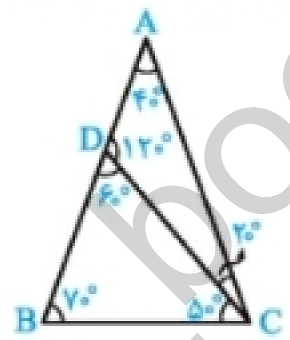
اما بنابه زاویهٔ وترهای متقاطع می‌توان نوشت:

$$\alpha = \frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$$

زاویهٔ ADB روبه‌رو به قطر دایره و در نتیجه قائمه است، پس در مثلث ADE نتیجه می‌شود $\alpha + \beta = 90^\circ$ و نهایتاً داریم:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{2R\sin\beta}{2R} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

۳۰۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴)



اندازهٔ زوایای مثلث‌ها مطابق شکل می‌باشد. قضیهٔ سینوس‌ها را در مثلث‌های ADC و BDC می‌نویسیم:

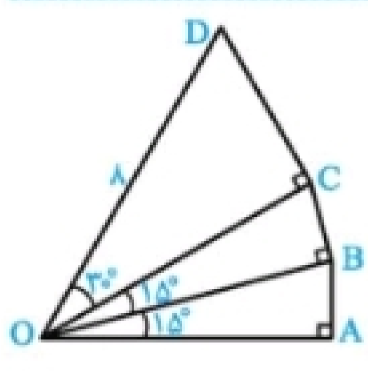
$$\frac{AD}{\sin 20^\circ} = \frac{CD}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AD = \frac{CD \times \sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ \times \cos 20^\circ} = \frac{CD}{2\cos 20^\circ}$$

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{CD}{\sin 70^\circ} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{3} \times CD}{2\sin 70^\circ} = \frac{\sqrt{3}CD}{2\cos 20^\circ}$$

از تقسیم دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{CD \times 2\cos 20^\circ}{2\cos 20^\circ \times \sqrt{3}CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۳۰۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**



به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث قائم‌الزاویه و با توجه به این‌که در هر مثلث قائم‌الزاویه وتر همان قطر دایرهٔ محیطی است، داریم:

$$\overset{\Delta}{AOB}: AB = 2R_1 \sin A\hat{O}B \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{2}OB} OB \sin 15^\circ \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{BOC}: OB = 2R_2 \sin O\hat{C}B \xrightarrow{R_2 = \frac{1}{2}OC} OC \sin 75^\circ \quad (2)$$

$$\overset{\Delta}{COD}: OC = 2R_3 \sin \hat{D} \xrightarrow{R_3 = \frac{1}{2}OD = 4} 8\sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow AB = OC \sin 75^\circ \times \sin 15^\circ$$

$$= 4\sqrt{3} \sin 75^\circ \times \sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow AB = 4\sqrt{3}\cos 15^\circ \times \sin 15^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sin 30^\circ}{2}$$

$$= 4\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \sqrt{3}$$

۳۰۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a + b = 2c \Rightarrow 2R\sin A + 2R\sin B = 4R\sin C$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B = 2\sin C$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2 \times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{180^\circ - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(90^\circ - \frac{C}{2})\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}$$

حال حکم مسئله را ساده‌تر می‌کنیم و تساوی فوق را در آن قرار می‌دهیم:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 2\cos\frac{180^\circ - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\cos(90^\circ - \frac{C}{2})\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} \times 2\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{C}{2} = 4(\frac{1-\cos C}{2}) = 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 - \sqrt{2}$$

۳۰۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

از رابطهٔ کسینوس‌ها $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ نتیجه می‌شود

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

۳۰۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ = b^2 + c^2 - 2bc \times \frac{1}{2} = b^2 + c^2 - bc$$

۳۰۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 30^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3} \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \sqrt{3}$$

۳۰۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$b^2 - a^2 - c^2 = ac\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + c^2 - 2ac\cos B - a^2 - c^2 = ac\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -2ac\cos B = ac\sqrt{2} \Rightarrow \cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 135^\circ$$

۳۰۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^\circ$$

$$= 5^2 + 16^2 - 2 \times 5 \times 16 \times (-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow BC^2 = 25 + 256 + 80 = 361 \Rightarrow BC = 19$$

محیط مثلث ABC $= AB + AC + BC = 5 + 16 + 19 = 40$

۳۱۰

$b^۳-c^۳=a^۲(b-c)\Rightarrow (b-c)(b^۲+bc+c^۲)=a^۲(b-c)$

$\xrightarrow{b\neq c} b^۲+bc+c^۲=a^۲\Rightarrow b^۲+bc+c^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$

$\Rightarrow \cos A=\frac{bc}{-۲bc}\Rightarrow \cos A=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \hat{A}=۱۲۰^\circ$

۳۱۱

بنابه فرض $a=۳k$، $b=۴k$ و $c=۶k$ است. داریم:

$\cos C=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}=\frac{۹k^۲+۱۶k^۲-۳۶k^۲}{۲\times ۳k\times ۴k}=\frac{۲۵-۳۶}{۲۴}=-\frac{۱۱}{۲۴}$

۳۱۲

فرض کنیم $b=۴$ و $c=۶$، در این صورت مطابق فرض مسئله $\hat{B}=۲۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۰^\circ$ است و در نتیجه:

$\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{B}-\hat{C}=۱۸۰^\circ-۲۰^\circ-۴۰^\circ=۱۲۰^\circ$

$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos ۱۲۰^\circ=۱۶+۳۶-۲\times۴\times۶\times(-\frac{۱}{۲})$

$=۵۲+۲۴=۷۶\Rightarrow a^۲=۴\times۱۹\Rightarrow a=۲\sqrt{۱۹}$

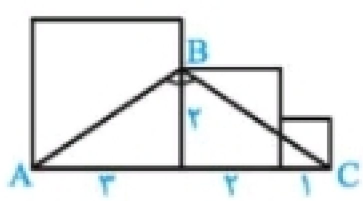
۳۱۳

$\cos B=\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac}=\frac{c}{a}$

$\Rightarrow a^۲+c^۲-b^۲=۲c^۲\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲$

پس مثلث ABC در رأس A قائمه است.

۳۱۴



$AB^۲=۲^۲+۳^۲=۴+۹=۱۳$ ،

$BC^۲=۲^۲+۳^۲=۱۳$

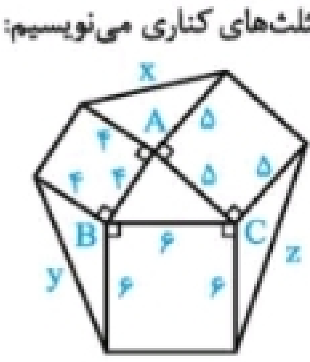
بنا به قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$\cos A\hat{B}C=\frac{AB^۲+BC^۲-AC^۲}{۲AB\times BC}=\frac{۱۳+۱۳-۶^۲}{۲\times\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۳}}$

$=\frac{۲۶-۳۶}{۲\times۱۳}=\frac{-۱۰}{۲\times۱۳}=\frac{-۵}{۱۳}$

۳۱۵

قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث‌های کناری می‌نویسیم:



$x^۲=۴^۲+۵^۲-۲\times۴\times۵\times\cos(۱۸۰^\circ-A)=۴۱+۴۰\cos A$

$y^۲=۴^۲+۶^۲-۲\times۴\times۶\times\cos(۱۸۰^\circ-B)=۵۲+۴۸\cos B$

$z^۲=۵^۲+۶^۲-۲\times۵\times۶\times\cos(۱۸۰^\circ-C)=۶۱+۶۰\cos C$

تساوی‌های فوق را جمع می‌کنیم و قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABC می‌نویسیم:

$x^۲+y^۲+z^۲=۱۵۴+۴۰\cos A+۴۸\cos B+۶۰\cos C$

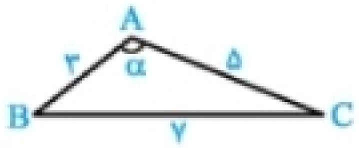
$=۱۵۴+۴۰\times\frac{۵^۲+۴^۲-۶^۲}{۲\times۵\times۴}+۴۸\times\frac{۴^۲+۶^۲-۵^۲}{۲\times۴\times۶}+۶۰\times\frac{۵^۲+۶^۲-۴^۲}{۲\times۵\times۶}$

$x^۲+y^۲+z^۲=۱۵۴+۲۵+۱۶-۳۶+۱۶+۳۶-۲۵+۲۵+۳۶-۱۶$

$=۱۵۴+۲۵+۱۶+۳۶=۲۳۱$

۳۱۶

اعداد اول یک رقمی ۲، ۳، ۵ و ۷ است، که فقط ۳، ۵ و ۷ می‌توانند اضلاع یک مثلث مختلف‌الاضلاع باشند و بزرگ‌ترین زاویهٔ آن روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع است و به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها محاسبه می‌شود:



$\cos\alpha=\frac{۵^۲+۳^۲-۷^۲}{۲\times۵\times۳}=\frac{۲۵+۹-۴۹}{۳۰}=\frac{-۱۵}{۳۰}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۱۲۰^\circ$

۳۱۷

$AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲AB.BC.\cos B$

$\Rightarrow AC^۲=۴^۲+۱۰^۲-۲\times۴\times۱۰\times\frac{۴}{۵}\Rightarrow AC^۲=۱۶+۱۰۰-۶۴$

$=۱۶+۳۶=۵۲=۴\times۱۳\Rightarrow AC=۲\sqrt{۱۳}$

۳۱۸

فرض کنیم $b=۳$، $c=۶$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. می‌خواهیم اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A=۹+۳۶-۲\times۳\times۶\times\frac{۱}{۲}$

$=۴۵-۱۸=۲۷\Rightarrow a=۳\sqrt{۳}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۳}}{\sin۶۰^\circ}=\frac{۳}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{۳\sin۶۰^\circ}{۳\sqrt{۳}}$

$\Rightarrow\sin B=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{B}=۳۰^\circ$ یا $\hat{B}=۱۵۰^\circ$

جواب $\hat{B}=۱۵۰^\circ$ قابل قبول نیست، زیرا $\hat{A}+\hat{B}=۲۱۰^\circ$ بیش‌تر از ۱۸۰° می‌شود.

۳۱۹

$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\times AC\times\cos A$

$\Rightarrow(\cos A)^۲=۱+۱-۲\cos A\Rightarrow\cos^۲A+۲\cos A-۲=۰$

با استفاده از دستور Δ' در حل معادلهٔ درجه دوم داریم:

$\Rightarrow\cos A=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۲}}{۱}=-۱\pm\sqrt{۳}$

چون جواب منفی قابل قبول نیست، پس $BC=\cos A=\sqrt{۳}-۱$

۳۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

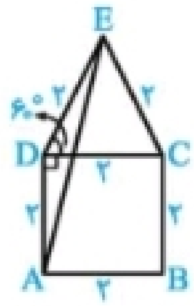
فرض کنیم $a=4$، $b=\sqrt{61}$ و $\hat{B}=120^\circ$، می‌خواهیم c را محاسبه کنیم.

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow(\sqrt{61})^2=4^2+c^2-2\times4\times c\times\cos120^\circ$$

$$\Rightarrow 61=16+c^2-8\times c\times(-\frac{1}{2})\Rightarrow c^2+4c+16-61=0$$

$$\Rightarrow c^2+4c-45=0\Rightarrow(c+9)(c-5)=0\xrightarrow{c>0}c=5$$

۳۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



فاصلهٔ دورترین رأس مثلث DEC از رأس‌های مربع، پاره‌خط AE است. در مثلث ADE بنابه قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AE^2=AD^2+DE^2-2AD\times DE\times\cos A\hat{D}E$$

$$\Rightarrow AE^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos150^\circ$$

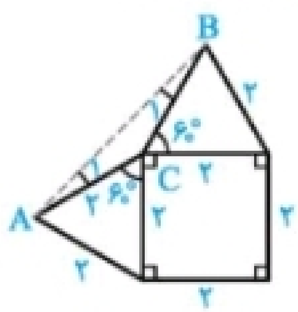
$$=8-8(-\frac{\sqrt{3}}{2})=8+4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AE^2=2(4+2\sqrt{3})=2(\sqrt{3}+1)^2$$

$$\Rightarrow AE=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

۳۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

مثلث ABC متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن برابر است با:



$$A\hat{C}B=360^\circ-60^\circ-90^\circ-60^\circ=150^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{B}_1=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$$

برای محاسبهٔ پاره‌خط AB دو روش زیر را به کار می‌بریم:

روش اول: با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos150^\circ$$

$$=2^2+2^2-2\times2\times2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=8+4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2\Rightarrow AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

روش دوم: قضیهٔ سینوس‌ها را در مثلث ABC می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin A\hat{C}B}=\frac{BC}{\sin A_1}\Rightarrow\frac{AB}{\sin150^\circ}=\frac{2}{\sin15^\circ}\Rightarrow AB=\frac{2\sin150^\circ}{\sin15^\circ}$$

اما از مثلثات می‌دانیم:

$\sin150^\circ=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$ و $\sin15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$، در نتیجه:

$$AB=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

۳۲۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم $\hat{A}=60^\circ$، $a=3\sqrt{7}$ و $b=9$، می‌خواهیم c را محاسبه کنیم. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\Rightarrow(3\sqrt{7})^2=9^2+c^2-2\times9\times c\times\cos60^\circ$$

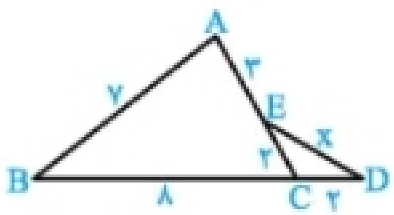
$$\Rightarrow63=81+c^2-9c\Rightarrow c^2-9c+18=0\Rightarrow(c-6)(c-3)=0$$

$\Rightarrow c=6$ یا $c=3$

هر دو جواب به‌دست‌آمده قابل قبول هستند.

۳۲۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

در مثلث ABC بنابه قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$\cos A\hat{C}B=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\times8\times5}=\frac{64-24}{10\times8}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

$$\cos E\hat{C}D=\cos(180^\circ-A\hat{C}B)=-\cos A\hat{C}B=-\frac{1}{2}$$

$$DE^2=CE^2+CD^2-2CE\times CD\times\cos E\hat{C}D$$

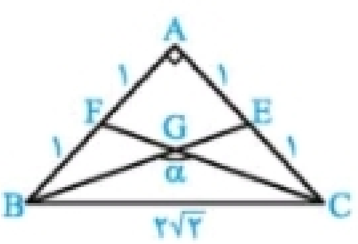
$$=2^2+2^2-2\times2\times2\times(-\frac{1}{2})=8+4=12$$

$$\Rightarrow DE^2=12\Rightarrow DE=2\sqrt{3}\Rightarrow x=2\sqrt{3}$$

۳۲۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم اندازهٔ ساق‌های مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC برابر ۲ باشد.

مطابق شکل اندازهٔ میانه‌های نظیر ساق‌های مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC برابر است با:



$$BE=CF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

G نقطهٔ همرسی میانه‌ها است پس $BG=GC=\frac{2}{3}CF=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

حال در مثلث BGC قضیهٔ کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$BC^2=BG^2+CG^2-2CG\times BG\times\cos\alpha$$

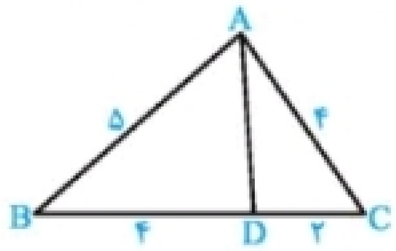
$$\Rightarrow(2\sqrt{2})^2=(\frac{2\sqrt{5}}{3})^2+(\frac{2\sqrt{5}}{3})^2-2(\frac{2\sqrt{5}}{3})^2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow8=\frac{20}{9}+\frac{20}{9}-\frac{40}{9}\times\cos\alpha\Rightarrow72=40-40\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{40-72}{40}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{32}{40}=-\frac{4}{5}$$

۳۲۶

روش اول: در مثلث ABC ، $\cos B$ را می‌یابیم:



$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\times BC}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\frac{45}{2\times5\times6}=\frac{3}{4}$$

حال قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\times BD\times\cos B=5^2+4^2-2\times5\times4\times\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AD^2=25+16-30=11\Rightarrow AD=\sqrt{11}$$

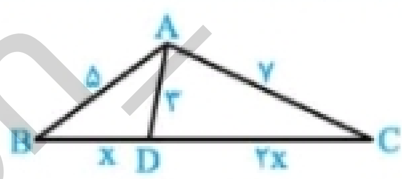
روش دوم: به کمک قضیهٔ استوارت داریم:

$$AD^2=\frac{BD\times AC^2+CD\times AB^2}{BD+CD}-BD\times CD$$

$$=\frac{4\times4^2+2\times5^2}{4+2}-4\times2=\frac{57}{3}-8=19-8=11\Rightarrow AD=\sqrt{11}$$

۳۲۷

با توجه به قضیهٔ استوارت داریم:



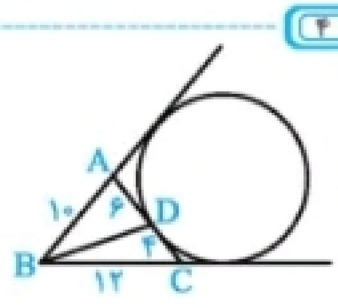
$$AD^2=\frac{BD\times AC^2+CD\times AB^2}{BD+CD}-BD\times CD$$

$$\Rightarrow 3^2=\frac{x\times7^2+2x\times5^2}{x+2x}-x\times2x$$

$$\Rightarrow 9=\frac{49+50}{3}-2x^2\Rightarrow 2x^2=\frac{99}{3}-9=33-9=24$$

$$\Rightarrow x^2=12\Rightarrow x=2\sqrt{3}$$

۳۲۸



در فصل اول ثابت کردیم $CD=P-a$ است. داریم:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{12+10+10}{2}=16$$

$$CD=P-a=16-12=4\Rightarrow AD=AC-CD=10-4=6$$

حال بنابه قضیهٔ استوارت داریم:

$$BD^2=\frac{CD\times AB^2+AD\times BC^2}{CD+AD}-CD\times AD$$

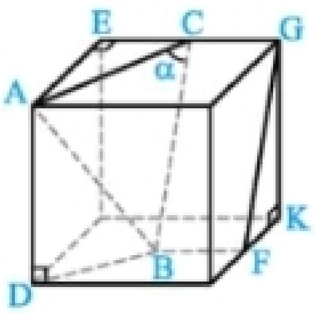
$$=\frac{4\times10^2+6\times12^2}{10}-4\times6$$

$$\Rightarrow BD^2=\frac{400+864-240}{10}=\frac{1024}{10}$$

$$\Rightarrow BD=\frac{32}{\sqrt{10}}=\frac{32}{10}\sqrt{10}=3.2\sqrt{10}$$

۳۲۹

فرض کنیم اندازهٔ یال‌های مکعب برابر ۲ باشد، داریم:



$$AC^2=AE^2+CE^2=2^2+1^2=5\Rightarrow AC=\sqrt{5}$$

$$AB^2=AD^2+BD^2=2^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2=6\Rightarrow AB=\sqrt{6}$$

$$BC^2=GF^2=GK^2+KF^2=2^2+1^2=5\Rightarrow BC=\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\times BC}=\frac{5+5-6}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{2\times10}=\frac{2}{5}$$

۳۳۰

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A$$

$$=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos60^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2=25+16-40\times\frac{1}{2}=21\Rightarrow BC=\sqrt{21}$$

$$BC=2R\sin A\Rightarrow\sqrt{21}=2R\times\sin60^\circ$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}\times\sqrt{7}=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow R=\sqrt{7}$$

۳۳۱

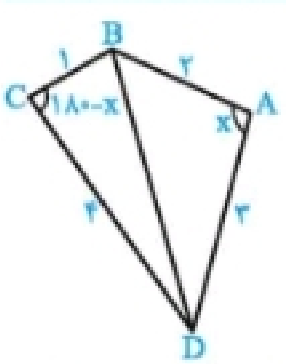
فرض کنیم $a=6$ ، $b=10$ و $c=14$. در این‌صورت داریم:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{10^2+14^2-6^2}{2\times10\times14}=\frac{260}{2\times10\times14}=\frac{13}{14}$$

$$\Rightarrow\sin A=\sqrt{1-\frac{13^2}{14^2}}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{14^2-13^2}}{14}=\frac{\sqrt{27}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$a=2R\sin A\Rightarrow 6=2R\times\frac{3\sqrt{3}}{14}\Rightarrow R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$$

۳۳۲



چون چهارضلعی ABCD محاطی است، پس دو زاویهٔ A و C مکمل یکدیگرند. قطر BD را رسم می‌کنیم، داریم:

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\times CD\times\cos(180^\circ-x)$$

$$=1+16+2\times1\times4\times\cos x=17+8\cos x$$

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos x$$

$$=4+9-2\times2\times3\times\cos x=13-12\cos x$$

$$\Rightarrow 17+8\cos x=13-12\cos x\Rightarrow 20\cos x=-4$$

$$\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{5}$$

۳۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}=b^2+c^2-bc$$

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{ac+c^2+ab+b^2}{(a+b)(a+c)}=\frac{b^2+c^2+ab+ac}{a^2+bc+ab+ac}$$

$$=\frac{b^2+c^2+ab+ac}{b^2+c^2-bc+bc+ab+ac}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{b^2+c^2+ab+ac}{b^2+c^2+ab+ac}=1$$

۳۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

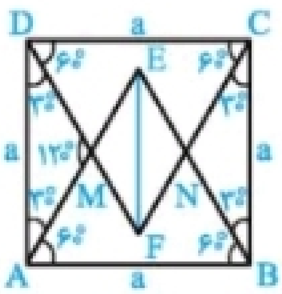
به طور کلی در مثلث متساوی‌الساقین به زاویهٔ رأس ۱۲۰° داریم:

$$a^2=b^2+b^2-2b^2\cos120^\circ$$

$$=2b^2-2b^2(-\frac{1}{2})=3b^2$$

$$\Rightarrow b^2=\frac{a^2}{3}\Rightarrow b=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

با توجه به مطلب فوق در مثلث متساوی‌الساقین AMD نتیجه می‌شود $AM=DM=\frac{a}{\sqrt{3}}$ و چون مثلث‌های AEB و DFC متساوی‌الاضلاع هستند، پس اندازهٔ ضلع آن‌ها a است و داریم



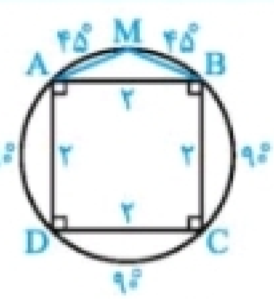
$$ME=MF=a-\frac{a}{\sqrt{3}}=a(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

و نهایتاً در مثلث متساوی‌الساقین MEF با زاویهٔ رأس ۱۲۰° می‌توان نوشت:

$$EF=\sqrt{3}ME=\sqrt{3}\times a(1-\frac{1}{\sqrt{3}})=a(\sqrt{3}-1)$$

۳۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

مثلث AMB متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۳۵° است زیرا:



زاویهٔ محاطی $A\hat{M}B=\frac{\widehat{ADB}}{2}=\frac{3\times90^\circ}{2}=135^\circ$

با فرض $MA=x$ نتیجه می‌شود $MB=x$ و به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AB^2=MA^2+MB^2-2MA\times MB\times\cos A\hat{M}B$$

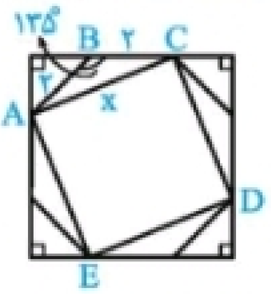
$$\Rightarrow 2^2=x^2+x^2-2x^2\times\cos135^\circ$$

$$\Rightarrow 4=2x^2-2x^2(-\frac{\sqrt{2}}{2})\Rightarrow 4=2x^2+x^2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=2(2-\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

۳۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ داخلی هر هشت‌ضلعی منتظم ۱۳۵° است. مطابق شکل در مثلث متساوی‌الساقین ABC قضیهٔ کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos135^\circ$$

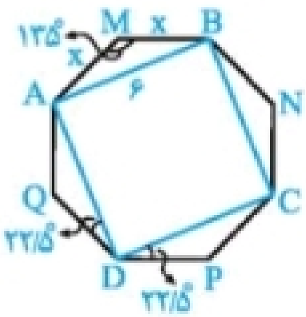
$$x^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\Rightarrow x^2=4+4+4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$$

مساحت مربع ACDE $=x^2=8+4\sqrt{2}=4(2+\sqrt{2})$

۳۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

چهارضلعی ABCD مربع است، زیرا چهار مثلث کناری همنهشت و متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۳۵° هستند، پس یک لوزی است که اندازهٔ زاویه‌های آن قائمه است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$x^2+x^2-2x\times x\times\cos135^\circ=6^2\Rightarrow 2x^2-2x^2(-\frac{\sqrt{2}}{2})=36$$

$$\Rightarrow x^2(2+\sqrt{2})=36\Rightarrow x^2=\frac{36}{2+\sqrt{2}}=18(2-\sqrt{2})$$

مساحت هشت‌ضلعی منتظم برابر است با مساحت مربع به علاوهٔ مساحت چهار مثلث کناری:

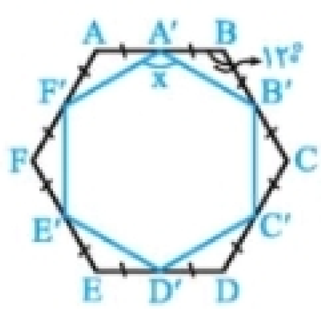
$$S=6^2+4\times\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin135^\circ=36+2x^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=36+\sqrt{2}\times18\times(2-\sqrt{2})\Rightarrow S=18(2+2\sqrt{2}-2)=36\sqrt{2}$$

نکته به طور کلی مساحت هشت‌ضلعی منتظم به قطر کوچک a، برابر $a^2\sqrt{2}$ است.

۳۳۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

همهٔ مثلث‌های کناری متساوی‌الساقین با زاویهٔ ۱۲۰° و همنهشت هستند. پس همهٔ ضلع‌های شش‌ضلعی ایجادشده برابرند و هر زاویهٔ آن برابر است با:



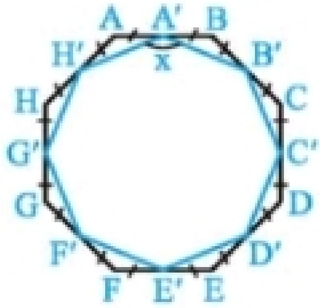
$$x+30^\circ+30^\circ=180^\circ\Rightarrow x=120^\circ$$

پس شش‌ضلعی A'B'C'D'E'F' منتظم است. اما هر دو شش‌ضلعی منتظم متشابه هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه دو شش‌ضلعی است. داریم:

$$\frac{S'}{S}=(\frac{A'B'}{AB})^2=(\frac{A'B\sqrt{3}}{AB})^2=(\frac{\frac{AB}{2}\sqrt{3}}{AB})^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$$

تذکر در مثلث متساوی‌الساقین به زاویهٔ رأس ۱۲۰° اندازهٔ اضلاع a، a و $a\sqrt{3}$ است.

۳۳۹ (۱) (۲) (۳) (۴)



مثلث‌های کناری متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 135° و همنهشت هستند پس ضلع‌های هشت‌ضلعی ایجادشده برابرند و هر زاویهٔ آن‌ها برابر است با:

$$x + 22/5^\circ + 22/5^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 135^\circ$$

پس هشت‌ضلعی $A'B'C'D'E'F'H'$ منتظم است و هر دو هشت‌ضلعی منتظم متشابه‌اند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \frac{A'B'^2}{AB^2} \quad (1)$$

اما به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث $A'BB'$ داریم:

$$A'B'^2 = A'B^2 + BB'^2 - 2A'B \times BB' \times \cos A'\hat{B}B'$$

$$= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{AB}{2}\right)\left(\frac{AB}{2}\right)\cos 135^\circ$$

$$\Rightarrow A'B'^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} - \frac{AB^2}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A'B'^2 = AB^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

تذکر به طور کلی چندضلعی حاصل از وصل متوالی وسط‌های یک n ضلعی منتظم، یک n ضلعی است که با n ضلعی مفروض متشابه است و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\cos\frac{180^\circ}{n}$ و نسبت مساحت آن‌ها برابر $\frac{S'}{S} = \cos^2\frac{180^\circ}{n}$ می‌باشد و در این پرسش می‌توان نوشت:

$$\frac{S'}{S} = \cos^2\frac{180^\circ}{8} = \cos^2 22/5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۳۴۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

طول کوچک‌ترین میانهٔ مثلث نظیر بزرگ‌ترین ضلع است. با فرض $a=5$، $b=7$ و $c=8$ داریم:

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \Rightarrow 5^2 + 7^2 = 2m_c^2 + \frac{8^2}{2}$$

$$\Rightarrow 25 + 49 = 2m_c^2 + 32 \Rightarrow 2m_c^2 = 42$$

$$\Rightarrow m_c^2 = 21 \Rightarrow m_c = \sqrt{21}$$

۳۴۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 13^2 + 19^2 = 2AM^2 + \frac{22^2}{2}$$

$$\Rightarrow 530 = 2AM^2 + 242 \Rightarrow 2AM^2 = 288$$

$$\Rightarrow AM^2 = 144 \Rightarrow AM = 12$$

$$\frac{AM}{\text{محیط مثلث } ABC} = \frac{12}{13+19+22} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$$

۳۴۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow 11^2 + 13^2 = 2 \times 9^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 121 + 169 = 162 + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow \frac{AC^2}{2} = 290 - 162 = 128$$

$$\Rightarrow AC^2 = 256 \Rightarrow AC = 16$$

۳۴۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض $c=6$، $b=4$ و $a=5$ است. داریم:

$$b^2 + a^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}\ ,\ a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} b^2 - c^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} - 2m_b^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2(m_b^2 - m_c^2) = \frac{3}{2}(c^2 - b^2) \Rightarrow m_b^2 - m_c^2 = \frac{3}{4}(c^2 - b^2)$$

$$= \frac{3}{4}(6^2 - 4^2) = \frac{3}{4} \times 2 \times 10 = 15$$

۳۴۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

با فرض $a=4$، $b=6$ و $c=8$ داریم:

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \qquad a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

از جمع این سه رابطه نتیجه می‌شود:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3}{4}(16 + 36 + 64) = 87$$

۳۴۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

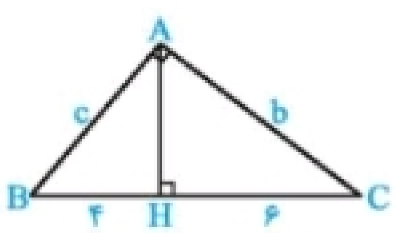
در پرسش قبل دیدیم در هر مثلث داریم:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

اما در این‌جا مثلث قائم‌الزاویه است. با فرض $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

$$\Rightarrow 54 = \frac{3}{4}(a^2 + a^2) = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

۳۴۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



بزرگ‌ترین میانهٔ مثلث ABC نظیر کوچک‌ترین ضلع آن یعنی AB است، پس m_c بزرگ‌ترین میانهٔ مثلث می‌باشد و داریم:

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

برای محاسبهٔ b و c از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow c^2 = 4 \times 10 = 40 \Rightarrow c = \sqrt{40}$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow b^2 = 6 \times 10 = 60 \Rightarrow b = \sqrt{60}$$

و نهایتاً داریم:

$$10^2 + 60 = 2m_c^2 + \frac{40}{2} \Rightarrow 160 = 2m_c^2 + 20$$

$$\Rightarrow m_c^2 = 70 \Rightarrow m_c = \sqrt{70}$$

۳۴۷ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

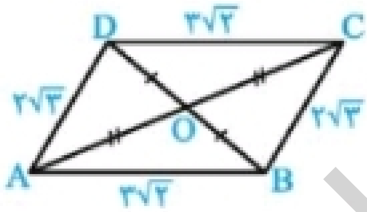
فرض کنیم $a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ و $b=c=12$. داریم:

$$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}\Rightarrow \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+12^2=2m_c^2+\frac{12^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2}+144=2m_c^2+72\Rightarrow 2m_c^2=72+\frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow m_c^2=\frac{169}{4}\Rightarrow m_c=\frac{13}{2}=6.5$$

۳۴۸ (۱) (۲) (**۳**) (۴)



می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس بنابه قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABD داریم:

$$AB^2+AD^2=2OA^2+\frac{BD^2}{2}$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2=2OA^2+\frac{BD^2}{2}$$

$$\xrightarrow{OA=\frac{AC}{2}} 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{BD^2}{2}=18+12$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{2}+\frac{BD^2}{2}=30\Rightarrow AC^2+BD^2=60$$

نکته همواره در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات اضلاع با مجموع مربعات قطرها برابر است، پس با دانستن این نکته می‌توانستیم سریع‌تر پرسش را پاسخ دهیم:

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)=2((3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2)=60$$

۳۴۹ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

با توجه به قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}\xrightarrow{(\text{فرض})\ c^2-b^2=\frac{a^2}{2}} b^2+c^2=2m_a^2+c^2-b^2$$

$$\Rightarrow 2b^2=2m_a^2\Rightarrow m_a^2=b^2\Rightarrow m_a=b$$

۳۵۰ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

بنابه فرض $AM^2=AB\times AC$ یا $m_a^2=c\times b$. داریم:

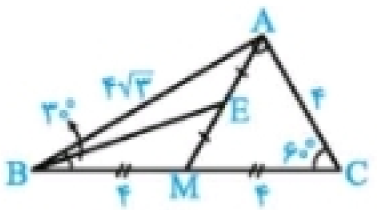
$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}\Rightarrow b^2+c^2=2bc+\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow b^2-2bc+c^2=\frac{a^2}{2}\Rightarrow (b-c)^2=\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow |b-c|=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

۳۵۱ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه به زوایای 30° و 60°، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° نصف وتر است، پس $BC=2AC=8$. از طرفی میانهٔ نظیر وتر نصف وتر است پس $AM=BM=CM=4$. همچنین ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 60°، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر می‌باشد، لذا $AB=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. حال در مثلث ABM قضیهٔ میانه‌ها را می‌نویسیم:



$$AB^2+BM^2=2BE^2+\frac{AM^2}{2}$$

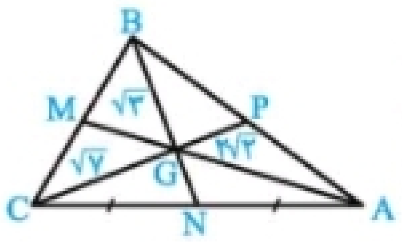
$$\Rightarrow (4\sqrt{3})^2+4^2=2\times BE^2+\frac{4^2}{2}\Rightarrow 48+16=2BE^2+8$$

$$\Rightarrow BE^2=28\Rightarrow BE=2\sqrt{7}$$

۳۵۲ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

چون $2\sqrt{2}>\sqrt{7}>\sqrt{3}$، داریم:

$$AM>CP>BN\ ,\ GA>GC>GB$$



پس میانهٔ AM بزرگ‌ترین است و ضلع BC کوچک‌ترین می‌شود. برای محاسبهٔ طول BC کافی است قضیهٔ میانه‌ها را در مثلث BGC بنویسیم:

$$AG=2GM\Rightarrow 2\sqrt{2}=2GM\Rightarrow GM=\sqrt{2}$$

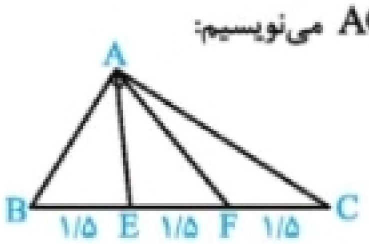
$$BG^2+GC^2=2GM^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2=2\times(\sqrt{2})^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 3+7=4+\frac{BC^2}{2}\Rightarrow \frac{BC^2}{2}=6\Rightarrow BC^2=12\Rightarrow BC=\sqrt{12}$$

۳۵۳ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

قضیهٔ میانه‌ها را در دو مثلث ABF و ACE می‌نویسیم:



$$AB^2+AF^2=2AE^2+\frac{BF^2}{2}$$

$$\Rightarrow AB^2+AF^2=2AE^2+\frac{9}{2}$$

$$AC^2+AE^2=2AF^2+\frac{CE^2}{2}\Rightarrow AC^2+AE^2=2AF^2+\frac{9}{2}$$

از جمع دو رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود:

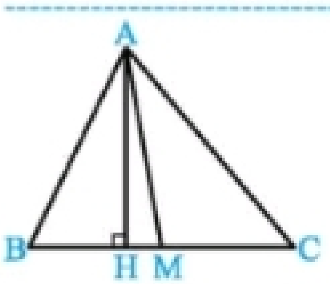
$$AB^2+AC^2+AF^2+AE^2=2AE^2+2AF^2+9$$

$$\Rightarrow AB^2+AC^2=AE^2+AF^2+9$$

از طرفی بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم $AB^2+AC^2=BC^2=4.5^2$،

در نتیجه: $AE^2+AF^2=4.5^2-9=20.25-9=11.25$

۳۵۴ (۱) (۲) (**۳**) (۴)



فرض کنیم $A\hat{M}B=\alpha$، در این صورت $A\hat{M}C=180^\circ-\alpha$ و بنابه قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AC^2=AM^2+CM^2-2AM\times CM\times\cos A\hat{M}C$$

$$=m_a^2+\frac{a^2}{4}-2\times m_a\times\frac{a}{2}\times\underbrace{\cos(180^\circ-\alpha)}_{-\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow b^۲ = m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} + m_a \times a \times \cos\alpha \quad (۱)$$

$$AB^۲ = AM^۲ + BM^۲ - ۲AM \times BM \times \cos A\widehat{M}B$$

$$= m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} - ۲ \times m_a \times \frac{a}{۲} \times \cos\alpha$$

$$\Rightarrow c^۲ = m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} - m_a \times a \times \cos\alpha \quad (۲)$$

از تفاضل (۱) و (۲) داریم $b^۲ - c^۲ = ۲m_a \times a \times \cos\alpha$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه AMH داریم:

$$\cos A\widehat{M}H = \frac{MH}{AM} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{MH}{m_a} \Rightarrow MH = m_a \times \cos\alpha$$

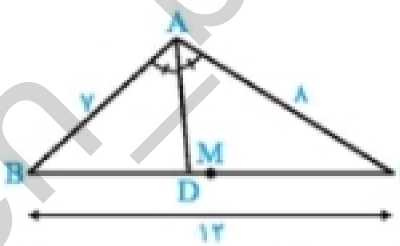
بنابراین می‌توان نوشت:

$$b^۲ - c^۲ = ۲a \times \underbrace{m_a \times \cos\alpha}_{MH} \Rightarrow b^۲ - c^۲ = ۲a \times MH$$

$$\Rightarrow ۱۴^۲ - ۱۳^۲ = ۲ \times ۱۵ \times MH$$

$$\Rightarrow MH = \frac{(۱۴-۱۳)(۱۴+۱۳)}{۳۰} = \frac{۲۷}{۳۰} = \frac{۹}{۱۰} = ۰/۹$$

۳۵۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



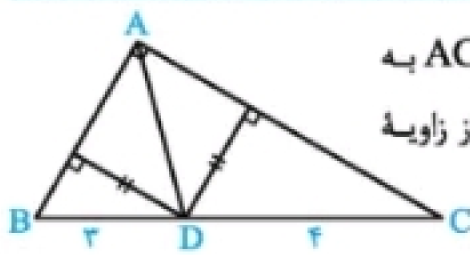
زاویهٔ بزرگ‌تر، روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است. مطابق شکل نیمساز آن رسم شده است و M وسط ضلع BC است.

$$\hat{A} \text{ نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۷}{۸} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{۱۲} = \frac{۷}{۱۵}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{۲۸}{۵} = ۵/۶$$

$$DM = BM - BD = ۶ - ۵/۶ = ۰/۴$$

۳۵۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



چون نقطهٔ D از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. در نتیجه:

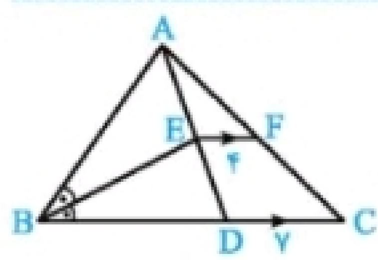
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} AB = ۳k \\ AC = ۴k \end{cases}$$

و بنابه قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC = ۵k$ و داریم:

$$BC = ۷ \Rightarrow ۵k = ۷ \Rightarrow k = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

$$AB = ۳k = ۳ \times ۱/۴ = ۴/۲$$

۳۵۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

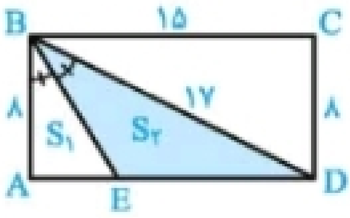


$$\hat{B} \text{ نیمساز } BE \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE}$$

$$EF \parallel CD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EF}{CD} = \frac{۴}{۷} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AE}{DE} = \frac{۴}{۳}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{۳}{۴}$$

۳۵۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

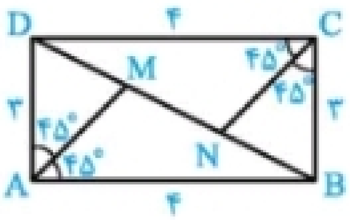


بنابه اعداد فیثاغورسی، قطر مستطیل $BD = ۱۷$ است. نیمساز یک زاویهٔ مثلث آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها به نسبت اضلاع آن زاویه است.

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{BD}{AB} = \frac{۱۷}{۸} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_۲}{S(ABD)} = \frac{۱۷}{۲۵}$$

$$\Rightarrow S_۲ = \frac{۸ \times ۱۵}{۲} \times \frac{۱۷}{۲۵} = \frac{۴۰۸}{۱۰} = ۴۰/۸$$

۳۵۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



دو مثلث BNC و AMD به حالت (زض‌ز) همنهشت‌اند، در نتیجه:

$$MN = BM - BN = BM - DM$$

$$BD = \sqrt{AB^۲ + AD^۲} = ۵$$

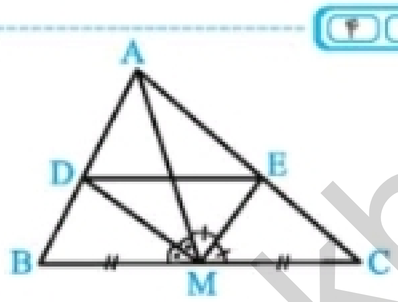
$$\hat{A} \text{ نیمساز } AM \Rightarrow \frac{DM}{BM} = \frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{DM}{BD} = \frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow DM = ۵ \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱۵}{۷}$$

$$MN = BM - DM = (BD - DM) - DM$$

$$= ۵ - \frac{۲ \times ۱۵}{۷} = \frac{۳۵ - ۳۰}{۷} = \frac{۵}{۷}$$

۳۶۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)



$$\overset{\Delta}{AMB} : A\widehat{M}B \text{ نیمساز } MD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{MB}$$

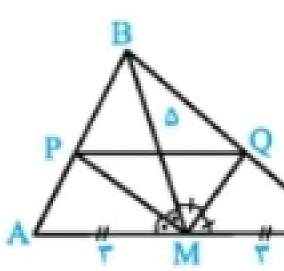
$$\overset{\Delta}{AMC} : A\widehat{M}C \text{ نیمساز } ME \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AM}{MC} = \frac{AM}{MB}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

در نتیجه بنابه عکس قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود $DE \parallel BC$ که نتیجه می‌دهد $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

۳۶۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

بنابه فرض $AC = ۶$ و $BM = ۵$ داریم:



$$A\widehat{M}B \text{ نیمساز } PM \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BM}{AM} = \frac{۵}{۳}$$

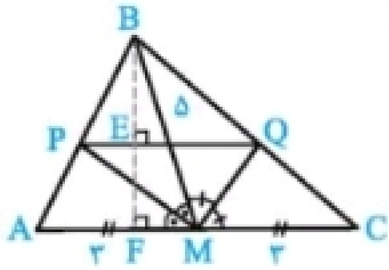
$$B\widehat{M}C \text{ نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{BQ}{CQ} = \frac{BM}{CM} = \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow PQ \parallel AC$$

از تناسب فوق نتیجه می‌شود $AP = ۳k$ و $BP = ۵k$ و به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{AB} \Rightarrow \frac{PQ}{۶} = \frac{۵k}{۸k} \Rightarrow PQ = \frac{۳۰}{۸} = ۳/۷۵$$

۳۶۲ (۱) (۲) (۳) (۴)



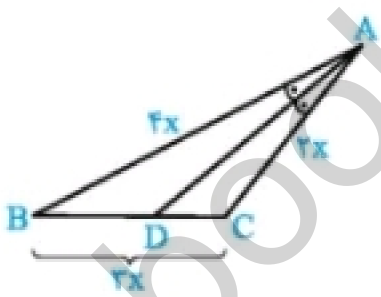
در مسئلهٔ قبل نشان دادیم $PQ \parallel AC$، $\frac{BP}{AP}=\frac{5}{3}$ و $\frac{PQ}{AC}=\frac{5}{8}$. بنابه قضیهٔ تالس $\frac{BE}{EF}=\frac{BP}{AP}=\frac{5}{3}$

در نتیجه $BE=5m$ و $EF=3m$ و داریم:

$$\frac{S(PMQ)}{S(ABC)}=\frac{\frac{1}{2}EF\times PQ}{\frac{1}{2}BF\times AC}=\frac{EF}{BF}\times\frac{PQ}{AC}=\frac{3m}{8m}\times\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$$

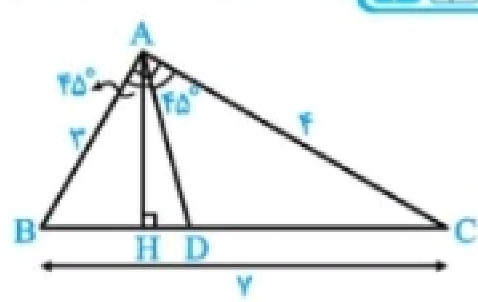
۳۶۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض طول اضلاع مثلث $AB=4x$، $BC=3x$ و $AC=2x$ می‌باشد. زاویهٔ $\hat{A}$ زاویهٔ متوسط است. نیمساز داخلی آن را AD می‌نامیم، AD مساحت مثلث را به نسبت اضلاع زاویهٔ A تقسیم می‌کند، پس:



$$\frac{S(ACD)}{S(ABD)}=\frac{AC}{AB}=\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{S(ACD)}{S(ABC)}=\frac{1}{3}$$

۳۶۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



$\hat{A}$ نیمساز $AD \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

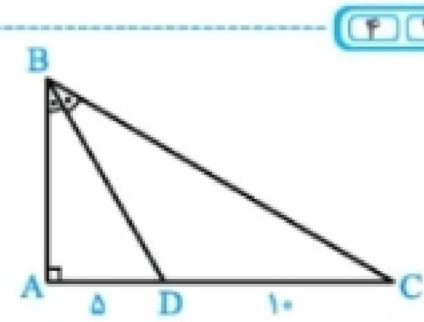
$$\Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BC}=\frac{3}{7}\Rightarrow BD=\frac{15}{7}$$

بنابه رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^2=BH.BC\Rightarrow 3^2=BH\times 5\Rightarrow BH=\frac{9}{5}$$

$$DH=BD-BH=\frac{15}{7}-\frac{9}{5}=\frac{75-63}{35}=\frac{12}{35}$$

۳۶۵ (۱) (۲) (۳) (۴)



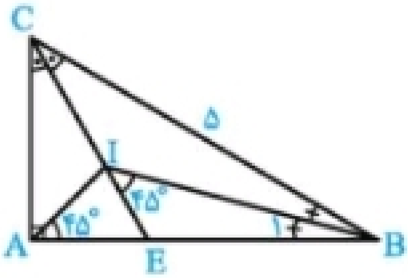
$\hat{B}$ نیمساز $BD\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}AB=k\\BC=2k\end{cases}$

$$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow 4k^2=k^2+15^2\Rightarrow 3k^2=15\times15$$

$$\Rightarrow k^2=5\times5\times3\Rightarrow k=5\sqrt{3}\Rightarrow AB=k=5\sqrt{3}$$

$$BD^2=AD^2+AB^2=5^2+(5\sqrt{3})^2=25+75=100\Rightarrow BD=10$$

۳۶۶ (۱) (۲) (۳) (۴)



از هندسهٔ (۱) می‌دانیم زاویهٔ بین دو نیمساز BI و CI برابر است با:

$$B\hat{I}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}=90^\circ+\frac{90^\circ}{2}=90^\circ+45^\circ=135^\circ$$

پس $B\hat{I}E=45^\circ$ است.

$$\hat{B}_1=\hat{B}_1\ ,\ B\hat{I}E=B\hat{A}I=45^\circ\Rightarrow \overset{\Delta}{BIE}\sim\overset{\Delta}{BAI}$$

$$\Rightarrow\frac{BI}{AB}=\frac{BE}{BI}\Rightarrow BI^2=BE.AB=4BE$$

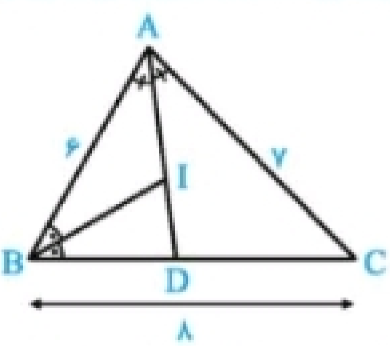
$\hat{C}$ نیمساز $CE\Rightarrow\frac{BE}{AE}=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{3}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BE}{AB}=\frac{5}{8}$

$$\Rightarrow BE=4\times\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$$

$$BI^2=4\times\frac{5}{2}=10\Rightarrow BI=\sqrt{10}$$

تذکر دورترین فاصلهٔ I تا رأس‌ها، BI است، زیرا در مثلث BIC داریم $\frac{\hat{B}}{2}>\frac{\hat{C}}{2}$، پس $BI>CI$ و در مثلث AIC داریم $\frac{\hat{A}}{2}>\frac{\hat{C}}{2}$، پس $CI>AI$ و نهایتاً $BI>CI>AI$

۳۶۷ (۱) (۲) (۳) (۴)



$\hat{B}$ نیمساز $BI\Rightarrow\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}$

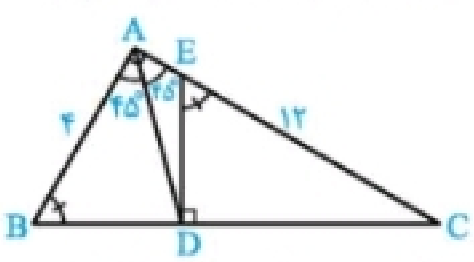
$\hat{A}$ نیمساز $AD\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}\Rightarrow BD=\frac{8\times6}{6+7}=\frac{48}{13}$$

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{6}{\frac{48}{13}}=\frac{13}{8}$$

۳۶۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض $AB=4$ و $AC=12$، با استفاده از قضیهٔ نیمسازها داریم:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}BD=k\\CD=3k\end{cases}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC و ABC متشابه‌اند. زیرا دارای زاویهٔ مشترک $\hat{C}$ هستند، پس: $\frac{S(DEC)}{S(ABC)}=(\frac{CD}{AC})^2=(\frac{3k}{12})^2=\frac{k^2}{16}$

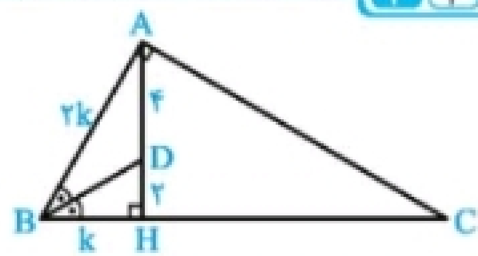
از طرفی داریم: $BC=4k\Rightarrow BC^2=16k^2\Rightarrow AB^2+AC^2=16k^2$

$$\Rightarrow 4^2+12^2=16k^2\Rightarrow 16k^2=160\Rightarrow k^2=10$$

$$S(DEC)=S(ABC)\times\frac{k^2}{16}=\frac{AB\times AC}{2}\times\frac{10}{16}$$

$$=\frac{4\times12}{2}\times\frac{10}{16}=15$$

۳۶۹



$\overset{\Delta}{ABH}: (\hat{B}$ نیمساز $BD) \Rightarrow \frac{BH}{AB}=\frac{DH}{AD}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \begin{cases} BH=k \\ AB=۲k\end{cases}$

$\overset{\Delta}{ABH}: AB^{۲}=AH^{۲}+BH^{۲} \Rightarrow ۴k^{۲}=۶^{۲}+k^{۲}\Rightarrow ۳k^{۲}=۳۶$

$k^{۲}=۱۲\Rightarrow k=۲\sqrt{۳}$ ، $AB^{۲}=BH.BC$

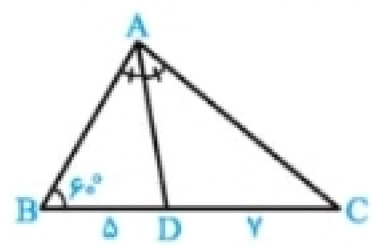
$\Rightarrow (۲k)^{۲}=k.BC\Rightarrow BC=۴k=۸\sqrt{۳}$

$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AH.BC=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸\sqrt{۳}=۲۴\sqrt{۳}$

۳۷۰

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۵}{۷}=\frac{AB}{AC}=\begin{cases}AB=۵k\\AC=۷k\end{cases}$

حال قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABC می‌نویسیم:



$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}-۲AB\times BC\times\cos۶۰^\circ$

$\Rightarrow (۷k)^{۲}=(۵k)^{۲}+۱۲^{۲}-۲\times۵k\times۱۲\times\frac{۱}{۲}$

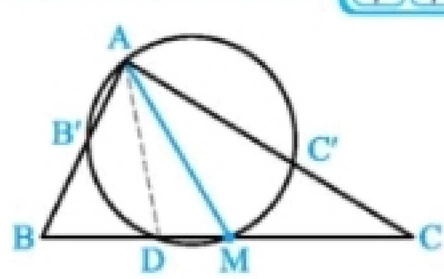
$\Rightarrow ۴۹k^{۲}=۲۵k^{۲}+۱۴۴-۶۰k\Rightarrow ۲۴k^{۲}+۶۰k-۱۴۴=۰$

$\Rightarrow ۲k^{۲}+۵k-۱۲=۰\Rightarrow(۲k-۳)(k+۴)=۰\Rightarrow k=\frac{۳}{۲}$

$AB=۵k=\frac{۱۵}{۲}$ ، $AC=۷k=\frac{۲۱}{۲}$

$\Rightarrow AB+AC=\frac{۱۵}{۲}+\frac{۲۱}{۲}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$

۳۷۱



امتداد وترهای DM و AC′ در خارج دایره یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کرده‌اند، پس:

$CM\times CD=CC'\times AC \quad (۱)$

همچنین وترهای DM و AB′ یکدیگر را بیرون دایره در نقطهٔ B قطع کرده‌اند، پس:

$BD\times BM=BB'\times AB \quad (۲)$

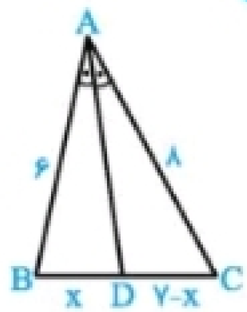
$(۲)\div(۱)\Rightarrow \frac{BB'\times AB}{CC'\times AC}=\frac{BD\times BM}{CD\times CM}$

$\xrightarrow{BM=CM}\frac{BB'}{CC'}\times\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

از طرفی بنابر قضیهٔ نیمسازها داریم $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$، در نتیجه:

$\frac{BB'}{CC'}\times\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BB'}{CC'}=۱$

۳۷۲



$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{x}{۷-x}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{x}{۷}=\frac{۳}{۷}$

$\Rightarrow x=۳\Rightarrow\begin{cases}BD=۳\\CD=۴\end{cases}$

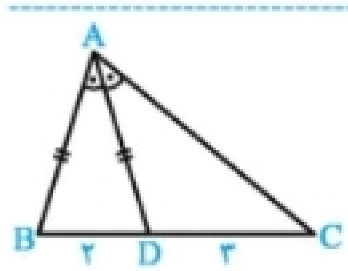
$AD^{۲}=AB\times AC-BD\times CD=۶\times۸-۳\times۴=۴۸-۱۲=۳۶$

$\Rightarrow AD=۶$

و مجموع محیط‌های دو مثلث ACD و ABD برابر است با:

$AB+BD+AD+AD+AC+CD=۶+۳+۶+۶+۸+۴=۳۳$

۳۷۳



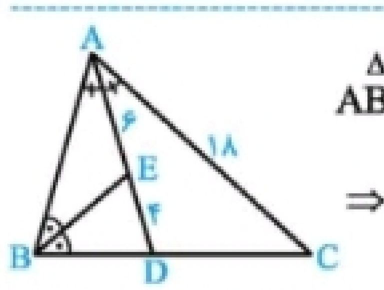
بنابه فرض AB = AD است، مقدار مشترک آن‌ها را x می‌گیریم. داریم:

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{x}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۳x}{۲}$

$AD^{۲}=AB\times AC-BD\times CD\Rightarrow x^{۲}=x\times\frac{۳x}{۲}-۳\times۲$

$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۳x^{۲}}{۲}-۶\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۲}=۶\Rightarrow x^{۲}=۱۲\Rightarrow x=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$

۳۷۴



$\overset{\Delta}{ABD}$ در $\hat{B}$ نیمساز $BE\Rightarrow\frac{DE}{AE}=\frac{BD}{AB}$

$\Rightarrow\frac{۴}{۶}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{۲}{۳}$

در نتیجه می‌توان نوشت BD = ۲k و AB = ۳k حال قضیهٔ نیمسازها را در مثلث ABC می‌نویسیم:

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{۲k}{CD}=\frac{۳k}{۱۸}\Rightarrow CD=\frac{۲\times۱۸}{۳}=۱۲$

طول نیمساز AD بنابه فرض برابر ۱۰ است و رابطهٔ طولی آن در مثلث ABC به شرح زیر است:

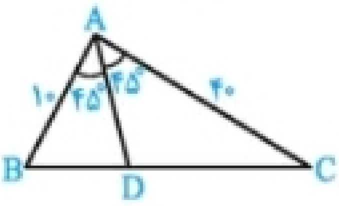
$AD^{۲}=AB\times AC-BD\times CD\Rightarrow(۶+۴)^{۲}=۳k\times۱۸-۲k\times۱۲$

$\Rightarrow ۱۰۰=۵۴k-۲۴k\Rightarrow۱۰۰=۳۰k\Rightarrow k=\frac{۱۰}{۳}$

$\Rightarrow AB=۳k=۳\times\frac{۱۰}{۳}=۱۰$

۳۷۵ ۱ ۲ **۳** ۴

بنابه قضیهٔ نیمسازها داریم:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}BD=k\\CD=4k\end{cases}$$

$$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 10^2+40^2=(k+4k)^2$$

$$\Rightarrow 25k^2=1700\Rightarrow k^2=4\times17\Rightarrow k=2\sqrt{17}$$

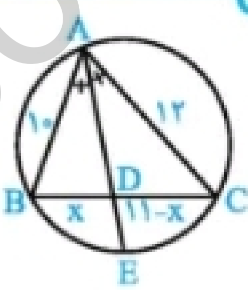
پس $BD=2\sqrt{17}$ و $CD=8\sqrt{17}$، در نتیجه داریم:

$$AD^2=AB\times AC-BD\times CD=10\times40-2\sqrt{17}\times8\sqrt{17}$$

$$=400-16\times17=16(25-17)$$

$$\Rightarrow AD^2=16\times8\Rightarrow AD=4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

۳۷۶ ۱ **۲** ۳ ۴



$\hat{A}$ نیمساز $AD\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{x}{11-x}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

$$\Rightarrow\frac{x}{11-x+x}=\frac{5}{5+6}\Rightarrow\frac{x}{11}=\frac{5}{11}\Rightarrow x=5$$

در نتیجه $BD=5$ و $CD=6$ و داریم:

$$AD^2=AB\times AC-BD\times CD=10\times12-6\times5=120-30=90$$

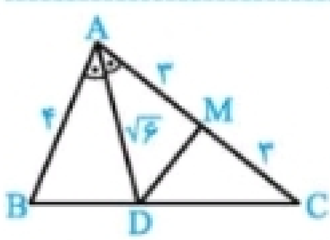
$$\Rightarrow AD=3\sqrt{10}$$

حال بنابه وترهای متقاطع در دایره می‌توان نوشت:

$$AD\times DE=BD\times CD\Rightarrow 3\sqrt{10}\times DE=5\times6$$

$$\Rightarrow DE=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

۳۷۷ ۱ **۲** ۳ ۴



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}BD=2k\\CD=3k\end{cases}$$

$$AD^2=AB\times AC-BD\times CD\Rightarrow(\sqrt{6})^2=4\times6-2k\times3k$$

$$\Rightarrow 6=24-6k^2\Rightarrow k^2=3\Rightarrow k=\sqrt{3}\Rightarrow CD=3\sqrt{3}$$

حال قضیهٔ میانه‌ها را در مثلث ACD می‌نویسیم:

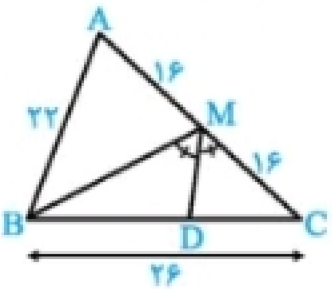
$$AD^2+CD^2=2DM^2+\frac{AC^2}{2}$$

$$\Rightarrow(\sqrt{6})^2+(3\sqrt{3})^2=2DM^2+\frac{6^2}{2}\Rightarrow 6+27=2DM^2+18$$

$$\Rightarrow 2DM^2=15\Rightarrow DM^2=\frac{30}{4}\Rightarrow DM=\frac{\sqrt{30}}{2}$$

۳۷۸ **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا طول میانهٔ BM را می‌یابیم:



$$AB^2+BC^2=2BM^2+\frac{AC^2}{2}$$

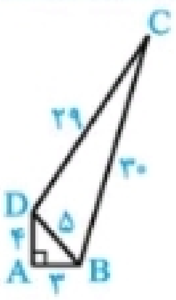
$$\Rightarrow 22^2+26^2=2BM^2+\frac{32^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴}}11^2+13^2=\frac{BM^2}{2}+\frac{16^2}{2}\Rightarrow121+169=\frac{BM^2}{2}+128$$

$$\Rightarrow\frac{BM^2}{2}=162\Rightarrow BM^2=324\Rightarrow BM=18$$

$B\widehat{M}C$ نیمساز $MD\Rightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{MC}{MB}\Rightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

۳۷۹ **۱** ۲ ۳ ۴



$$P=\frac{5+30+29}{2}=\frac{64}{2}=32$$

$$S(BDC)=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

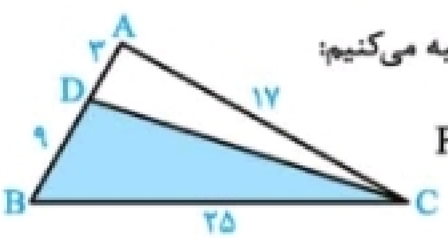
$$=\sqrt{32(32-30)(32-29)(32-5)}$$

$$\Rightarrow S(BDC)=\sqrt{32\times2\times3\times27}=9\times8=72$$

$$S(ABCD)=S(ABD)+S(BDC)=\frac{3\times4}{2}+72=6+72=78$$

۳۸۰ **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم:



$$P=\frac{12+17+25}{2}=\frac{54}{2}=27$$

$$S(ABC)=\sqrt{27(27-12)(27-17)(27-25)}$$

$$\Rightarrow S(ABC)=\sqrt{27\times15\times10\times2}=\sqrt{81\times25\times4}=9\times5\times2=90$$

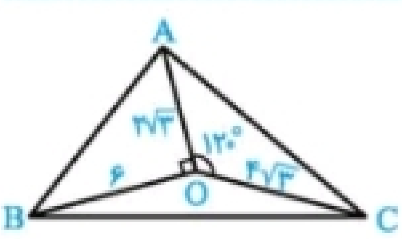
مثلث‌های ABC و BDC در رأس C هم‌ارتفاع هستند، پس:

$$\frac{S(BDC)}{S(ABC)}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{S(BDC)}{90}=\frac{9}{12}$$

$$\Rightarrow S(BDC)=90\times\frac{3}{4}=67/5$$

۳۸۱ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به شکل داریم:



$$B\widehat{O}C=360^\circ-90^\circ-120^\circ=150^\circ$$

$$S(ABC)=S(AOB)+S(AOC)+S(BOC)$$

$$\Rightarrow S(ABC)=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\times\sin90^\circ$$

$$+\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{3}\times\sin150^\circ$$

$$\Rightarrow S(ABC)=6\sqrt{3}+12\times\frac{\sqrt{3}}{2}+12\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$$

۳۸۲ ۱ ۲ ۳ ۴

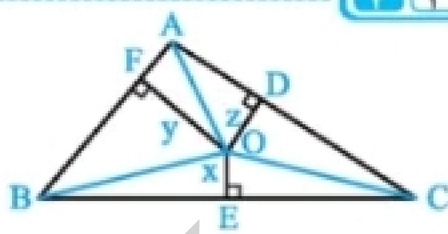
فرض کنیم $a=۱۲$، $b=۹$ و $c=۷$ بنابه دستور هرون داریم:

$$P=\frac{۷+۹+۱۲}{۲}=\frac{۲۸}{۲}=۱۴$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۱۴(۱۴-۱۲)(۱۴-۹)(۱۴-۷)}$$

$$=\sqrt{۱۴\times۲\times۵\times۷}=\sqrt{۷\times۴\times۵\times۷}=۷\times۲\times\sqrt{۵}=۱۴\sqrt{۵}$$

۳۸۳ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه فرض $AB=۱۱$، $AC=۱۳$ و $BC=۲۰$ است. O را به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم، داریم:

$$S(ABC)=S(AOB)+S(AOC)+S(BOC)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}OF\times AB+\frac{۱}{۲}OD\times AC+\frac{۱}{۲}OE\times BC=S(ABC)$$

$$\Rightarrow ۱۱y+z\times۱۳+x\times۲۰=۲S(ABC)$$

$$\Rightarrow ۲۰x+۱۱y+۱۳z=۲S(ABC)$$

حال مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم:

$$P=\frac{AB+AC+BC}{۲}=\frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=\frac{۴۴}{۲}=۲۲$$

$$S(ABC)=\sqrt{۲۲(۲۲-۲۰)(۲۲-۱۳)(۲۲-۱۱)}=\sqrt{۲۲\times۲\times۹\times۱۱}$$

$$=\sqrt{۱۱^۲\times۳^۲\times۲^۲}=۶۶$$

بنابراین $۲۰x+۱۱y+۱۳z=۱۳۲$

۳۸۴ ۱ ۲ ۳ ۴

بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث نظیر کوچک‌ترین ضلع آن است، پس با فرض $a=۴$، $b=۷$ و $c=۹$ باید h_a را محاسبه کنیم.

$$P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۴+۷+۹}{۲}=۱۰$$

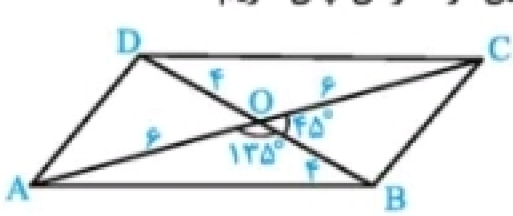
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۱۰(۱۰-۴)(۱۰-۷)(۱۰-۹)}$$

$$=\sqrt{۱۰\times۶\times۳}=۶\sqrt{۵}$$

$$S=\frac{۱}{۲}ah_a\Rightarrow ۶\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\times۴\times h_a\Rightarrow h_a=۳\sqrt{۵}$$

۳۸۵ ۱ ۲ ۳ ۴

مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر آن در سینوس زاویهٔ بین دو قطر آن. پس داریم:

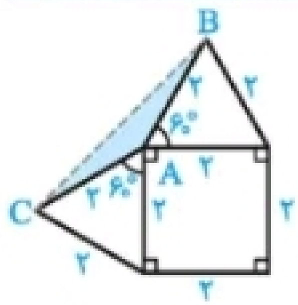


$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin۱۳۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۸\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲۴\sqrt{۲}$$

۳۸۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۸\sqrt{۳}\times۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲۴\times۳=۷۲$$

۳۸۷ ۱ ۲ ۳ ۴



مثلث ABC متساوی‌الساقین است و اندازهٔ زاویهٔ رأس آن برابر است با:

$$C\hat{A}B=۳۶۰^\circ-۶۰^\circ-۹۰^\circ-۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

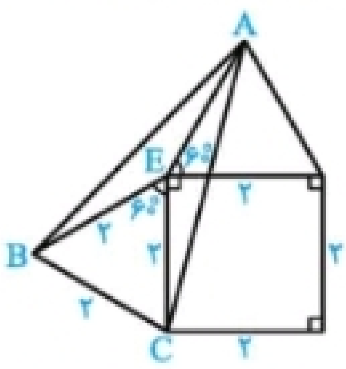
$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AC\times AB\times\sin C\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\sin۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow S(ABC)=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

نکته مساحت مثلث ABC همواره $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع است.

۳۸۸ ۱ ۲ ۳ ۴

هر دو مثلث ABE و ACE متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۵۰° هستند که همنهشت‌اند. با توجه به نکتهٔ پرسش قبل، مساحت هر یک از آن‌ها $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع است و مثلث BEC متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ است، لذا داریم:

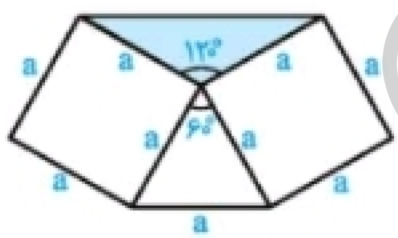


$$S(ABC)=S(ABE)+S(ACE)+S(BEC)$$

$$\Rightarrow S(ABC)=\frac{۲^۲}{۴}+\frac{۲^۲}{۴}+\frac{۲^۲\sqrt{۳}}{۴}=۱+۱+\sqrt{۳}=۲+\sqrt{۳}$$

۳۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل، مثلث رنگی متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° است و مساحت آن برابر است با:



$$S'=\frac{۱}{۲}\times a\times a\times\sin۱۲۰^\circ$$

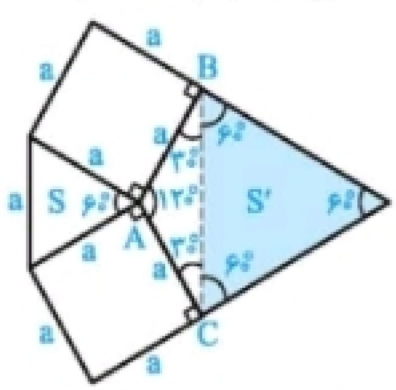
$$=\frac{۱}{۲}a\times a\times\sin۶۰^\circ$$

و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با $S=\frac{۱}{۲}a\times a\times\sin۶۰^\circ$

پس $S=S'$

۳۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴

در مثلث متساوی‌الساقین ABC به زاویهٔ رأس ۱۲۰° داریم $BC=a\sqrt{۳}$ (قبلاً این مطلب را با قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کردیم) پس مثلث رنگی، متساوی‌الاضلاع به ضلع $a\sqrt{۳}$ است و می‌توان نوشت:



$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{۱}{۲}(a\sqrt{۳})(a\sqrt{۳})\sin۶۰^\circ}{\frac{۱}{۲}a\times a\times\sin۶۰^\circ}=\frac{۳a^۲}{a^۲}=۳$$

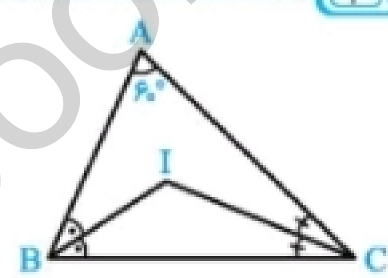
۳۹۱

مطابق شکل هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره، از هشت مثلث متساوی‌الساقین همنهشت با زاویهٔ رأس 45° تشکیل می‌شود که ساق‌های آن‌ها شعاع دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی است پس داریم:

$$S = 8\times\frac{1}{2}\times R\times R\times\sin 45^\circ = 4R^2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = 2\times 2^2\times\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

۳۹۲



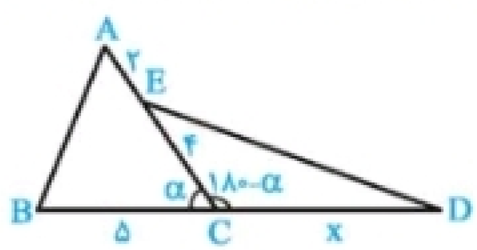
می‌دانیم در مثلث ABC، I نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی باشد، آن‌گاه $B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ است، پس:

$$B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\frac{S(ABC)}{S(BIC)} = \frac{\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A}{\frac{1}{2}BI\times CI\times\sin B\hat{I}C} = \frac{AB\times AC\times\sin 60^\circ}{BI\times CI\times\sin 120^\circ}$$

$$= \frac{AB\times AC}{BI\times CI} \Rightarrow k = 1$$

۳۹۳

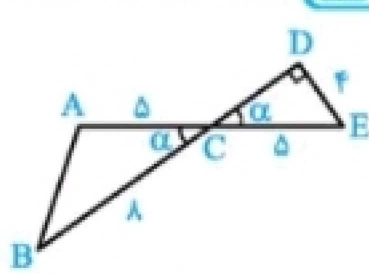


$$S(ABC) = \frac{1}{2}S(ECD)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AC\times BC\times\sin\alpha = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times CE\times CD\times\sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow 6\times 5\times\sin\alpha = \frac{4}{2}\times x\times\sin\alpha \Rightarrow 30 = 2x \Rightarrow x = 15$$

۳۹۴



$$S(ABC) = \frac{1}{2}AC\times BC\times\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{DE}{CE} = \frac{4}{5}\ ،\ S(ABC) = \frac{1}{2}\times 5\times 8\times\frac{4}{5} = 16$$

۳۹۵

چون اندازهٔ اضلاع مثلث دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ تشکیل می‌دهند، پس فرض می‌کنیم $x+4$ ،x ،$x-4$ طول اضلاع باشد. بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث 120° و روبه‌رو به ضلع $x+4$ است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$(x+4)^2 = x^2 + (x-4)^2 - 2x(x-4)\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2 + x^2 - 8x + 16 - 2x(x-4)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x$$

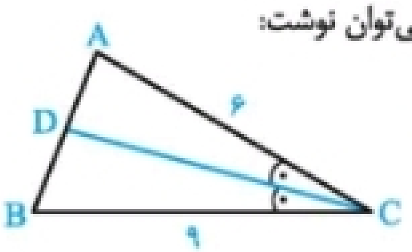
$$\Rightarrow 2x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 2x(x-10) = 0 \Rightarrow x = 10$$

بنابراین اندازهٔ اضلاع مثلث ۶، ۱۰ و ۱۴ است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}x\times(x-4)\times\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\times 10\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

۳۹۶

بنابه فرض $AB=5$ ،$AC=6$ و $BC=9$. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث، C است، نیمساز آن را رسم می‌کنیم. مثلث‌های ACD و ABD در رأس C هم ارتفاع هستند، در نتیجه می‌توان نوشت:



$$\frac{S(ACD)}{S(BCD)} = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S(ACD)}{S(BCD)} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S(ACD)}{S(ABC)} = \frac{2}{5} \Rightarrow S(ACD) = \frac{2}{5}S(ABC)$$

حال مساحت مثلث ABC را از دستور هرون محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{5+6+9}{2} = 10$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{10\times(10-9)\times(10-6)\times(10-5)}$$

$$= \sqrt{10\times 1\times 4\times 5} = 10\sqrt{2}$$

$$S(ACD) = \frac{2}{5}\times 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

۳۹۷

بنابه فرض مثلث BAC قائم‌الزاویه است $(\hat{A} = 90^\circ)$، در نتیجه $a^2 = b^2 + c^2$. داریم:

$$P(P-a) = 60 \Rightarrow \frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) = 60$$

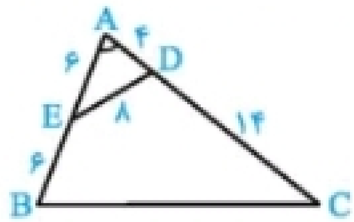
$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b+c-2a}{2} = 60$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a) = 240 \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 240$$

$$\xrightarrow{a^2=b^2+c^2} b^2 + c^2 + 2bc - b^2 - c^2 = 240 \Rightarrow 2bc = 240$$

$$\Rightarrow bc = 120 \Rightarrow \frac{1}{2}bc = 60 \Rightarrow S = 60$$

۳۹۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



$$\hat{A}=\hat{A}\ ,\ \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AED}\sim\overset{\Delta}{ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{S(AED)}{S(ABC)}=\left(\frac{AE}{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow S(ABC)=9S(AED)$$

حال مساحت مثلث AED را به کمک دستور هرون محاسبه می‌کنیم:

$$P=\frac{AE+AD+DE}{2}=\frac{6+4+8}{2}=9$$

$$S(AED)=\sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)}=\sqrt{9\times1\times3\times5}=3\sqrt{15}$$

$$S(BCDE)=S(ABC)-S(AED)=9S(AED)-S(AED)$$

$$=8S(AED)=8\times3\times\sqrt{15}\Rightarrow S(BCDE)=24\sqrt{15}$$

۳۹۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$P-a=3\ ,\ P-b=4\ ,\ P-c=5\xrightarrow{+}3P-(a+b+c)=12$$

$$\Rightarrow 3P-2P=12\Rightarrow P=12$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{12\times3\times4\times5}$$

$$=4\times3\times\sqrt{5}=12\sqrt{5}$$

۴۰۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$S=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin C=\frac{1}{2}c\times h_c\Rightarrow a\times b\times\sin C=c\times h_c$$

$$\xrightarrow{c=2R\sin C} ab\sin C=2R\sin C\times h_c$$

$$\Rightarrow ab=2Rh_c\xrightarrow{a=6,\ b=5,\ h_c=4}6\times5=2R\times4$$

$$\Rightarrow R=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}=3/75$$

نکته در هر مثلث حاصل‌ضرب دو ضلع برابر است با حاصل‌ضرب قطر دایرهٔ محیطی مثلث در ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن.

$$bc=2Rh_a\ ,\ ab=2Rh_c\ ,\ ac=2Rh_b$$

۴۰۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

با توجه به نکتهٔ پرسش قبل داریم:

$$bc=2Rh_a\Rightarrow 13\times11=2\times\frac{65}{6}\times h_a$$

$$\Rightarrow h_a=\frac{3\times13\times11}{5\times13}=\frac{33}{5}=6/6$$

۴۰۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a=4\ ,\ b=13\ ,\ c=15\Rightarrow P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{4+13+15}{2}=\frac{32}{2}=16$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)}$$

$$=\sqrt{16\times12\times3\times1}=4\times6=24$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C\ ,\ c=2R\sin C\Rightarrow S=\frac{1}{2}ab\times\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}$$

$$R=\frac{4\times13\times15}{4\times24}=\frac{13\times5}{8}=\frac{65}{8}=8\frac{1}{8}$$

نکته در هر مثلث اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ اضلاع مثلث تقسیم بر چهار برابر مساحت مثلث $R=\frac{abc}{4S}$

۴۰۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم:

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

حال به کمک نکتهٔ پرسش قبل داریم:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{a\times a\times a}{4\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

۴۰۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$a=4\ ,\ b=2\sqrt{7}\ ,\ \hat{B}=120^\circ$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

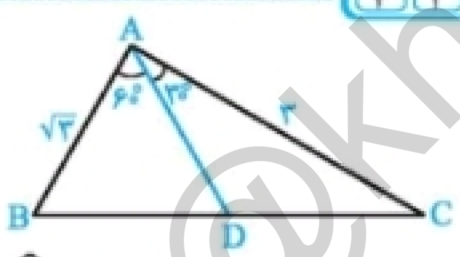
$$\Rightarrow(2\sqrt{7})^2=4^2+c^2-2\times4\times c\times\cos120^\circ$$

$$\Rightarrow 28=16+c^2-8\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow c^2+4c-12=0$$

$$\Rightarrow(c+6)(c-2)=0\Rightarrow c=2$$

$$S=\frac{1}{2}a.c\sin B=\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin120^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

۴۰۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



دو تا پاره‌خط AD می‌توان رسم کرد که زاویهٔ $\hat{A}=90^\circ$ را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کند، آن‌که با ضلع AC زاویهٔ 30° می‌سازد بزرگ‌ترین است و طول آن به کمک مساحت به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$S(ABC)=S(ABD)+S(ACD)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}AB\times AD\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}AC\times AD\times\sin30^\circ$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}=\sqrt{3}\times AD\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times AD\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}=\frac{3AD}{2}+\frac{3AD}{2}=3AD\Rightarrow AD=\sqrt{3}$$

۴۰۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$d_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\Rightarrow 4=\frac{2\times b\times6\times\cos\frac{120^\circ}{2}}{b+6}$$

$$\Rightarrow 4(b+6)=12b\times\cos60^\circ$$

$$\Rightarrow 4b+24=12b\times\frac{1}{2}=6b\Rightarrow 2b=24\Rightarrow b=12$$

۴۰۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$d_a=\frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}\Rightarrow d_a=\frac{۲bc}{b+c}\times\cos\frac{۹۰^\circ}{۲}$$

$$=\frac{۲bc}{b+c}\times\cos۴۵^\circ=\frac{۲bc}{b+c}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow d_a=\frac{bc\sqrt{۲}}{b+c}$$

$$\Rightarrow\frac{(b+c)d_a}{bc}=\sqrt{۲}$$

۴۰۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$d_a=\frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}\Rightarrow d_a=\frac{۲bc}{b+c}\times\cos\frac{۶۰^\circ}{۲}=\frac{۲bc}{b+c}\times\cos۳۰^\circ$$

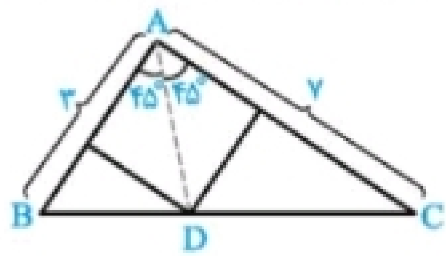
$$\Rightarrow d_a=\frac{۲bc}{b+c}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{bc\sqrt{۳}}{b+c}\qquad(۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}bc\times\sin۶۰^\circ=\frac{bc\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow bc=\frac{۴S}{\sqrt{۳}}\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow d_a=\frac{\frac{۴S}{\sqrt{۳}}\times\sqrt{۳}}{b+c}=\frac{۴S}{b+c}\Rightarrow\frac{(b+c)d_a}{S}=۴$$

۴۰۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه دستور طول نیمساز زاویه بر حسب اضلاع و اندازهٔ آن زاویه داریم:



$$AD=\frac{۲AB\times AC}{AB+AC}\times\cos\frac{A}{۲}=\frac{۲\times۳\times۷}{۳+۷}\times\cos\frac{۹۰^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{۴۲}{۱۰}\times\cos۴۵^\circ=۴/۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲/۱\sqrt{۲}$$

۴۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: فرض کنیم ۹ = a، ۱۶ = b و ضلع سوم c باشد، داریم:

$$P=\frac{۱۶+۹+c}{۲}=\frac{۲۵+c}{۲}$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$=\sqrt{(\frac{۲۵+c}{۲})(\frac{۲۵+c}{۲}-۹)(\frac{۲۵+c}{۲}-۱۶)(\frac{۲۵+c}{۲}-c)}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{(\frac{۲۵+c}{۲})(\frac{۲۵-c}{۲})(\frac{c+۷}{۲})(\frac{c-۷}{۲})}$$

بنابه فرض $S=۲۴\sqrt{۵}$ است و در نتیجه:

$$(\frac{۲۵+c}{۲})(\frac{۲۵-c}{۲})(\frac{c+۷}{۲})(\frac{c-۷}{۲})=۲۴^۲\times۵$$

از میان گزینه‌های داده‌شده، فقط $c=۲۳$ قابل قبول است، زیرا $c+۷$ مضرب ۵ ایجاد می‌کند.

روش دوم:

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C\Rightarrow۲۴\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\times۹\times۱۶\times\sin C\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

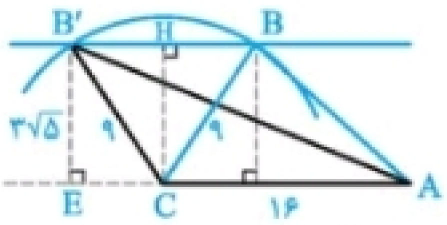
بنابراین C یا زاویهٔ حاده یا منفرجه است، پس کسینوس آن مثبت یا منفی است، یعنی مسئله دارای دو جواب است.

$$\cos C=\pm\sqrt{۱-\sin^۲C}=\pm\sqrt{۱-\frac{۵}{۹}}=\pm\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\pm\frac{۲}{۳}$$

$$\begin{cases}c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C=۹^۲+۱۶^۲-۲\times۹\times۱۶\times\frac{۲}{۳}\\=۸۱+۲۵۶-۱۹۲=۱۴۵\Rightarrow c=\sqrt{۱۴۵}\\\text{یا}\\c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C=۹^۲+۱۶^۲-۲\times۹\times۱۶\times(-\frac{۲}{۳})\\=۸۱+۲۵۶+۱۹۲=۵۲۹\Rightarrow c=۲۳\end{cases}$$

پس بزرگ‌ترین مقدار c برابر ۲۳ است.

روش سوم:



$$S=\frac{۱}{۲}bh_b\Rightarrow۲۴\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\times۱۶\times h_b\Rightarrow h_b=۳\sqrt{۵}$$

بنابراین رأس B روی خطی موازی AC و به فاصلهٔ $۳\sqrt{۵}$ از آن قرار دارد. از طرفی $BC=۹$ است و این یعنی B روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۹ واقع است، پس محل تلاقی این خط و دایره، جای رأس B است. چون شعاع دایره از فاصلهٔ دو خط موازی بزرگ‌تر است، پس دایره خط را در دو نقطهٔ B و B′ قطع می‌کند و مسئله دارای دو جواب AB و AB′ است که به‌کمک قضیهٔ فیثاغورس قابل محاسبه هستند.

$$B'C^۲=CE^۲+B'E^۲\Rightarrow۹^۲=CE^۲+(۳\sqrt{۵})^۲$$

$$\Rightarrow CE^۲=۸۱-۴۵=۳۶\Rightarrow CE=۶$$

$$AB'^۲=B'E^۲+AE^۲\Rightarrow AB'^۲=(۳\sqrt{۵})^۲+(۶+۱۶)^۲$$

$$=۴۵+۴۸۴=۵۲۹\Rightarrow AB'=\sqrt{۵۲۹}=۲۳$$

۴۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

مانند پرسش قبل است و با هر یک از سه روش فوق حل می‌شود و معمولاً روش دوم مناسب‌تر است. داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A\Rightarrow۱۶=\frac{۱}{۲}\times۸\times۵\times\sin A\Rightarrow\sin A=\frac{۴}{۵}$$

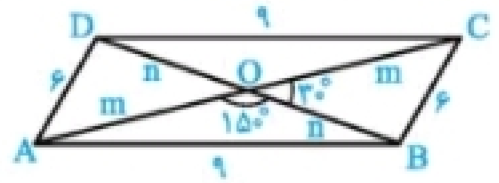
$$\cos A=\pm\sqrt{۱-\sin^۲A}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\pm\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\pm\frac{۳}{۵}$$

و به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A=۸^۲+۵^۲-۲\times۸\times۵\times\frac{۳}{۵}\\=۶۴+۲۵-۴۸=۴۱\Rightarrow a=\sqrt{۴۱}\\\text{یا}\\a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A=۸^۲+۵^۲-۲\times۸\times۵\times(-\frac{۳}{۵})\\=۶۴+۲۵+۴۸=۱۳۷\Rightarrow a=\sqrt{۱۳۷}\end{cases}$$

بنابه فرض چون a ضلع متوسط مثلث است پس جواب $a=\sqrt{۴۱}$ قابل قبول است.

۴۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴)



به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$\begin{cases}6^2=m^2+n^2-2mn\cos 30^\circ\\ 9^2=m^2+n^2-2mn\cos 150^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2+n^2-mn\sqrt{3}=36\\ m^2+n^2+mn\sqrt{3}=81\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2mn\sqrt{3}=81-36=45\Rightarrow mn=\frac{15\sqrt{3}}{2}$$

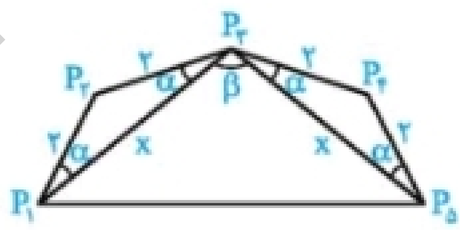
$$S=\frac{1}{2}AC\times BD\times \sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 2m\times 2n\times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S=mn=\frac{15\sqrt{3}}{2}=7.5\sqrt{3}$$

۴۱۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

هر یک از زوایای ۱۲ضلعی منتظم ۱۵۰° است ($\hat{P}_2=\hat{P}_4=150^\circ$)

در نتیجه در مثلث‌های متساوی‌الساقین $P_1P_2P_3$ و $P_3P_4P_5$ داریم:



$$\alpha+\alpha+150^\circ=180^\circ\Rightarrow 2\alpha=30^\circ\Rightarrow \alpha=15^\circ$$

$$\beta+\alpha+\alpha=150^\circ\Rightarrow \beta+15^\circ+15^\circ=150^\circ\Rightarrow \beta=120^\circ$$

بنابه قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث $P_1P_2P_3$ داریم:

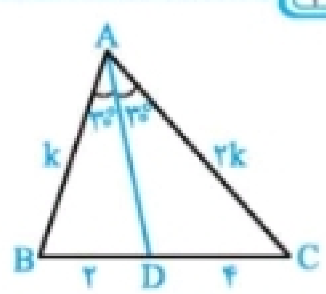
$$x^2=2^2+2^2-2\times 2\times 2\times \cos 150^\circ=8-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8+4\sqrt{3}$$

$$S(P_1P_3P_5)=\frac{1}{2}x\times x\times \sin\beta=\frac{1}{2}x^2\times \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow S(P_1P_3P_5)=\frac{1}{2}\times(8+4\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=(2+\sqrt{3})\sqrt{3}=2\sqrt{3}+3$$

۴۱۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



$\hat{A}$ نیمساز AD $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}AB=k\\ AC=2k\end{cases}$

با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A$$

$$\Rightarrow 6^2=k^2+4k^2-2k\times 2k\times\cos 60^\circ$$

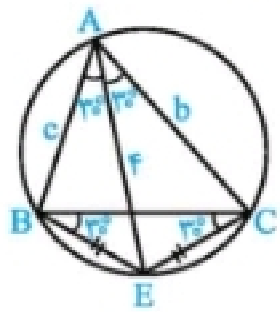
$$\Rightarrow 36=5k^2-4k^2\times\frac{1}{2}=5k^2-2k^2=3k^2$$

$$\Rightarrow k^2=12\Rightarrow k=2\sqrt{3}$$

$$S(ABC)=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times k\times 2k\times\sin 60^\circ=k^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

۴۱۵ (۱) (۲) (۳) (۴)



نیمساز زاویهٔ A دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E وسط کمان کوچک $\overset{\frown}{BC}$ قطع می‌کند و مثلث BEC متساوی‌الساقین است. فرض کنیم $BE=CE=x$، بنابه قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های ABE و ACE داریم:

$$x^2=c^2+4^2-2\times 4\times c\times\cos 30^\circ$$

$$x^2=b^2+4^2-2\times 4\times b\times\cos 30^\circ$$

در نتیجه:

$$c^2+4^2-8c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=b^2+4^2-8b\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow b^2-c^2=4\sqrt{3}(b-c)$$

$$\Rightarrow (b-c)(b+c)=4\sqrt{3}(b-c)\xrightarrow{\div(b-c)} b+c=4\sqrt{3}\quad (1)$$

بنابه فرض محیط مثلث برابر $6+4\sqrt{3}$ است، پس داریم:

$$a+b+c=6+4\sqrt{3}\xrightarrow{(1)} a+4\sqrt{3}=6+4\sqrt{3}\Rightarrow a=6$$

حال قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABC می‌نویسیم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow 6^2=(b+c)^2-2bc-2bc\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 36=(4\sqrt{3})^2-2bc-bc\Rightarrow 3bc=48-36$$

$$\Rightarrow bc=\frac{12}{3}=4$$

و نهایتاً مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A=\frac{1}{2}bc\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

فصل ۱
دایره

قسمت اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

۱. ثابت کنید اگر در یک دایره دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر این وترها برابرند. (نهایی- شهریور ۹۵)

۲. ثابت کنید اگر دو کمان از یک دایره برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها با هم برابرند.

۳. ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. (نهایی- شهریور ۹۴)

۴. ثابت کنید در هر دایره اگر قطری از آن، یک وتر را که قطر نیست نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

۵. ثابت کنید در هر دایره قطری از دایره که سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶. در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB = A'B'$ اگر و تنها اگر $OH = OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و $A'B'$ هستند.)

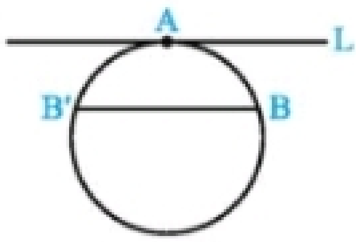
۷. در دایرهٔ $C(O,R)$ ثابت کنید $AB > A'B'$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و $A'B'$ هستند.)

(تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی، نهایی- دی ۹۵ و دی ۹۴)

۸. ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن.

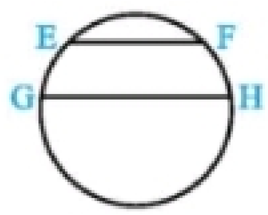
۹. ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن. (نهایی- خرداد ۹۵ و شهریور ۹۲)

۱۰. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های محصور بین دو وتر موازی همواره با هم برابرند.

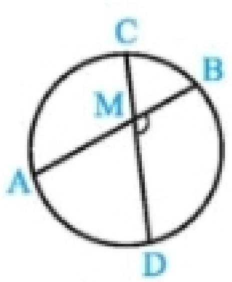


۱۱. در شکل مقابل خط L در نقطهٔ A بر دایره مماس است و $L \parallel BB'$ ثابت کنید $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$

(نهایی- شهریور ۹۳)

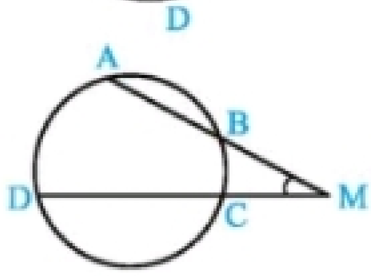


۱۲. در شکل مقابل $EF \parallel GH$ ثابت کنید $\widehat{GE} = \widehat{HF}$



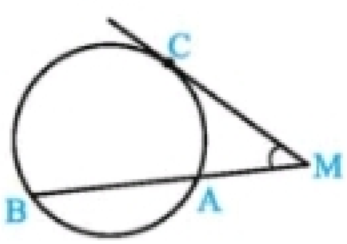
۱۳. در شکل مقابل دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع‌اند. ثابت کنید $\widehat{M} = \dfrac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{۲}$

(نهایی- دی ۹۴ و شهریور ۹۳)

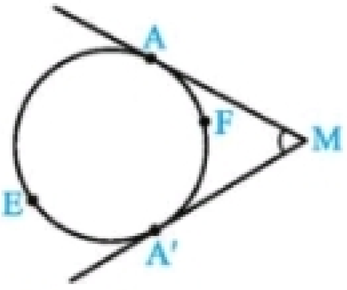


۱۴. در شکل مقابل امتداد دو وتر AB و CD در نقطهٔ M متقاطع‌اند. ثابت کنید $\widehat{M} = \dfrac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{۲}$

(نهایی- شهریور ۹۵)



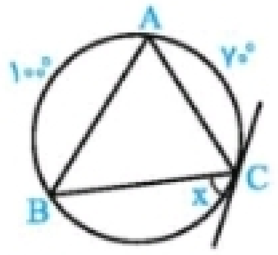
۱۵. در شکل مقابل امتداد وتر AB و خط مماس، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. ثابت کنید $\widehat{M} = \dfrac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{۲}$



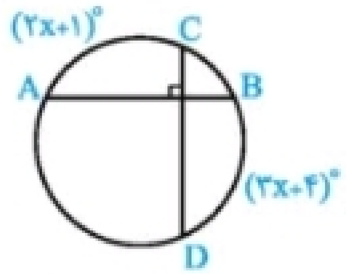
۱۶. اگر مطابق شکل از نقطهٔ M دو مماس بر دایره رسم شود، ثابت کنید $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AEA'} - \overset{\frown}{AFA'}}{۲}$

۱۷. شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۶ و ۱۰ سانتی‌متر هستند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر را که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید. (نهایی- خرداد ۹۴)

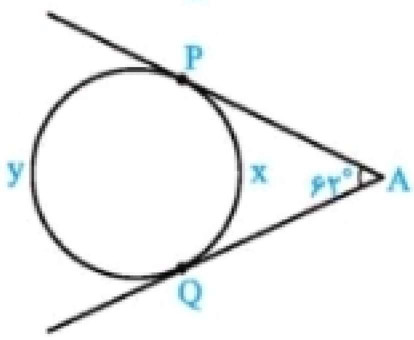
۱۸. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید. وتر AB را به طول ۲/۴ سانتی‌متر در این دایره رسم کرده وسط وتر را H نامیده و طول OH را به‌دست آورید.



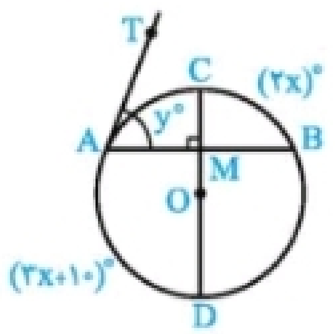
۱۹. مقدار x را در شکل مقابل به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۰)



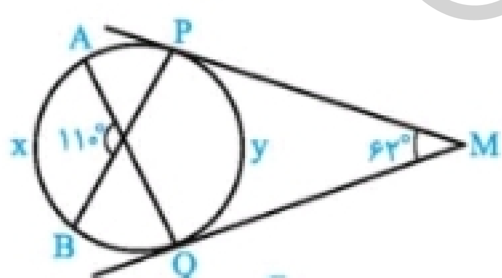
۲۰. مقدار x را در شکل مقابل به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۰)



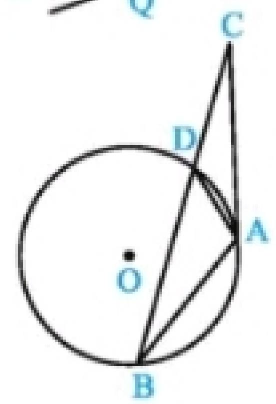
۲۱. با توجه به شکل روبه‌رو، مقدار x و y را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۲ و دی ۸۹)



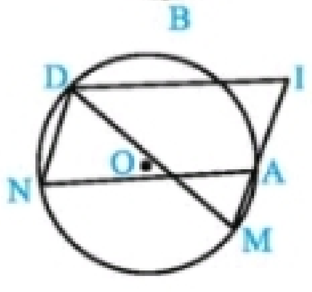
۲۲. در شکل مقابل، قطر CD بر وتر AB عمود و AT مماس بر دایره است. اگر $\overset{\frown}{CB} = (۲x)^\circ$ و $\overset{\frown}{AD} = (۳x+۱۰)^\circ$ و $T\widehat{A}B = y^\circ$ آن‌گاه x و y را محاسبه کنید. (نهایی- شهریور ۸۹)



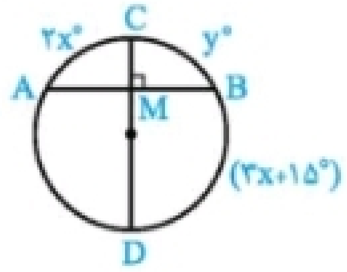
۲۳. در شکل مقابل مقادیر x و y را به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۸۷)



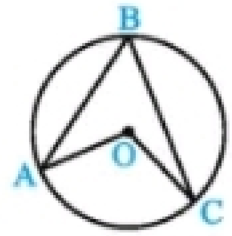
۲۴. در دایرهٔ (O) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است، ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است. (نهایی- خرداد ۹۱ و شهریور ۸۷)



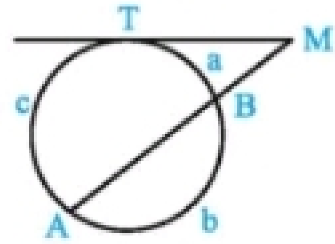
۲۵. در شکل روبه‌رو، چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I ، A و M روی یک خط راست قرار دارند، ثابت کنید DM = DI (نهایی- خرداد ۸۷)



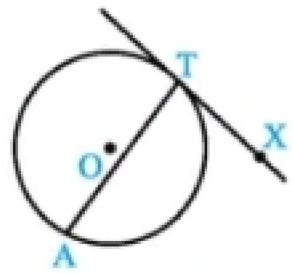
۲۶. در شکل مقابل، قطر CD در نقطهٔ M بر وتر AB عمود است. اگـر $\widehat{AC}=2x^\circ$ و $\widehat{BC}=y^\circ$ و $\widehat{BD}=(3x+15)^\circ$ آن‌گاه x و y را محاسبه کنید. (نهایی- شهریور ۹۵)



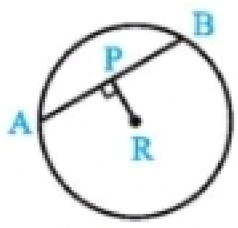
۲۷. در دایرهٔ به مرکز O، اگر $A\hat{O}C=(3\alpha+12)^\circ$ و $A\hat{B}C=(\alpha+16)^\circ$ باشد، مقدار α و انـدازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC و زاویهٔ محاطی ABC را محاسبه کنید. (نهایی- خرداد ۹۵)



۲۸. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. بـا فـرض $\widehat{TB}=a$، $\widehat{BA}=b$، $\widehat{AT}=c$ و $\frac{a}{1}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید. (نهایی- خرداد ۹۴)



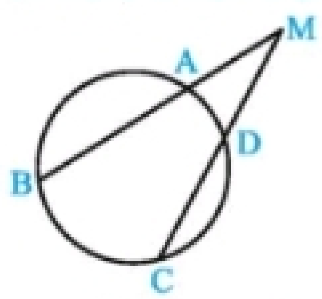
۲۹. اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی ATX مساوی $(2\alpha-6)^\circ$ و اندازهٔ کمـان $\widehat{AT}$ برابـر $(3\alpha+33)^\circ$ باشـد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATX را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۴)



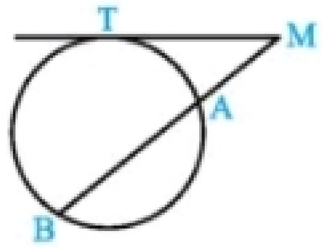
۳۰. با توجه به شکل روبه‌رو، اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=6$، آن‌گاه طول AP و AB را به‌دست آورید. (R مرکز دایره است.) (نهایی- دی ۹۳)

قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

۳۱. ثابت کنید هرگاه وترهای AB و CD در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB=MD.MC$ (نهایی- دی ۹۵، خرداد ۹۵ و خرداد ۹۲)

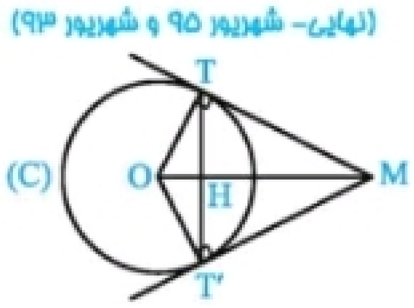


۳۲. ثابت کنید اگر امتداد دو وتر AB و CD مطابق شکل در نقطهٔ M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA.MB=MD.MC$ (نهایی- خرداد ۹۴)



۳۳. ثابت کنید اگر مطابق شکل از نقطهٔ M یک خط مماس و یک قاطع بر دایرهٔ مفروض رسم کنیم، آن‌گاه $MT^2=MA\times MB$ (نهایی- دی ۹۱ و خرداد ۹۳)

۳۴. ثابت کنید اندازهٔ دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، با هم برابر است. (نهایی- شهریور ۹۵ و شهریور ۹۳)



۳۵. در شکل مقابل از نقطهٔ M دو مماس MT و MT′ بر دایرهٔ C(O،R) رسم شده است.

آ) ثابت کنید OM نیمساز زوایای TMT′ و TOT′ است.

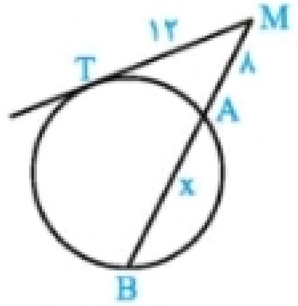
ب) ثابت کنید OM عمودمنصف TT′ است.

۳۶. ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، دو برابر واسطهٔ هندسی شعاع‌های دو دایره است.

۳۷. ثابت کنید خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست.

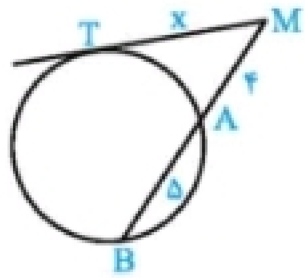
۳۸. دایرهٔ C(O،R) و نقطهٔ M در خارج این دایره داده شده‌اند. از نقطهٔ M بر این دایره دو مماس رسم کنید (مراحل رسم را توضیح دهید). (نهایی- خرداد ۹۴)

۳۹. **با توجه به شکل مقابل، مقدار x را تعیین کنید.** (نهایی- دی ۹۵)



۴۰. **دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید.** (نهایی- دی ۹۵)

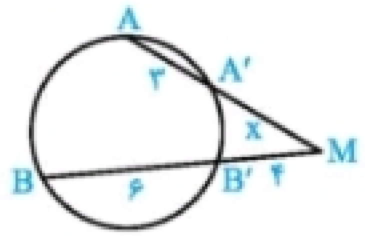
۴۱. **در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید.** (نهایی- شهریور ۹۵)



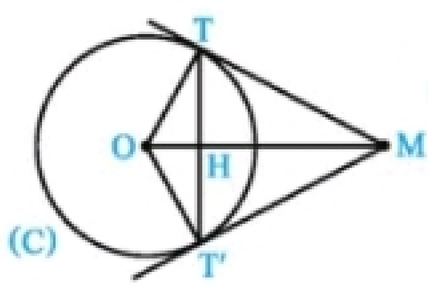
۴۲. **مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین $d=۱۳$ برابر $۸-۵x$ باشد.** (نهایی- خرداد ۹۵)

۴۳. **مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المرکزین $d=۱۳$ برابر $۳-۵a$ باشد.** (نهایی- شهریور ۹۴)

۴۴. **در شکل مقابل مقدار x را محاسبه کنید.** (نهایی- دی ۹۴)



۴۵. **دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ سانتی‌متر مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۳x+۱$ باشد.** (نهایی- دی ۹۴)



۴۶. **دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس‌اند. H نقطهٔ برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:** (نهایی- شهریور ۸۶)

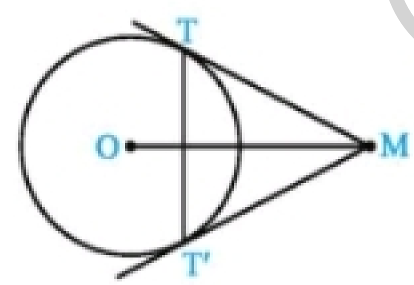
آ) خط OM نیمساز زاویه‌های $T\widehat{M}T'$ و $T\widehat{O}T'$ است.

ب) $TT'.OM=۲R.MT$

۴۷. **دایرهٔ $C(O,۵)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ $۵\sqrt{۲}$ از مرکز دایرهٔ C داده شده‌اند. MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماس‌اند.** (نهایی- خرداد ۹۳)

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) نوع چهارضلعی $OTMT'$ را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۴۸. **دایرهٔ $C(O,۴)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌اند (T و T' نقطه‌های تماس‌اند).** (نهایی- شهریور ۸۸)

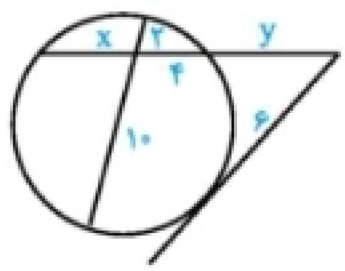
آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) طول وتر TT' را به‌دست آورید.

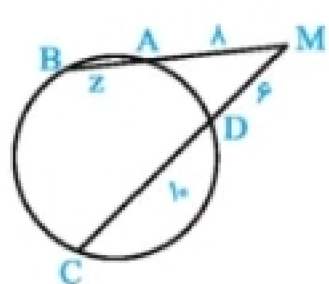
پ) اندازهٔ زاویهٔ TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

۴۹. **دو دایره به شعاع ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲+۵x$ باشد.** (نهایی- خرداد ۹۳)

۵۰. **در شکل مقابل مقدارهای x و y را به‌دست آورید.** (نهایی- شهریور ۹۳)



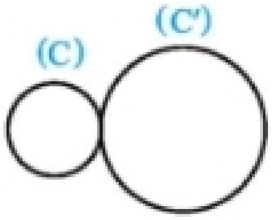
۵۱. **با توجه به شکل، مقدار z را بیابید.** (نهایی- شهریور ۹۲)



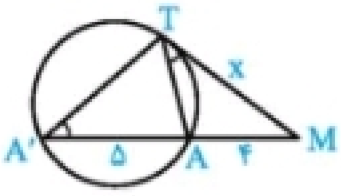
۵۲. شکل مقابل نشان‌دهندهٔ دو دایرهٔ مماس برون است. (نهایی- خرداد ۹۱)

آ) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟

ب) اگر $R = ۴$ و $R' = ۹$، آن‌گاه اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید.



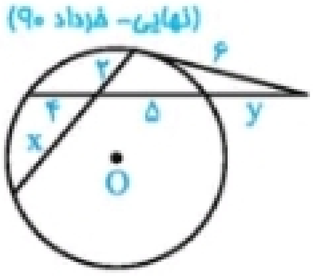
۵۳. مقدار x را در شکل روبه‌رو به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۰)



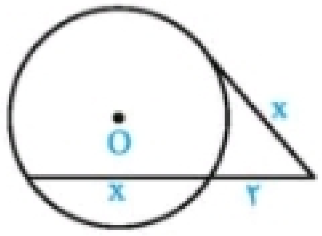
۵۴. مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط‌المرکزین $d = ۱۰$، برابر $۳a - ۱$ باشد. سپس تعیین کنید، این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند. (نهایی- شهریور ۹۰)

۵۵. طول خط‌المرکزین در دو دایرهٔ متقاطع به شعاع ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۹۰)

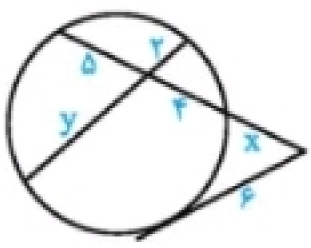
۵۶. با توجه به شکل، مقدار x و y را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۸۹)



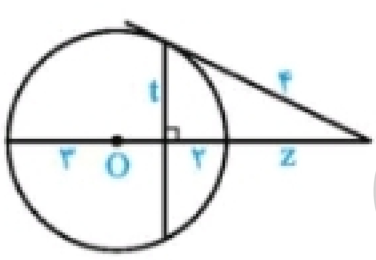
۵۷. در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۸۸)



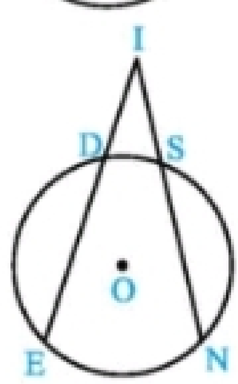
۵۸. در شکل مقابل x و y را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۸۶)



۵۹. در شکل مقابل مقدار z و t را به‌دست آورید (O مرکز دایره است). (نهایی- شهریور ۸۵)



۶۰. در شکل روبه‌رو دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید $IS = ID$ (نهایی- دی ۸۴)



۶۱. دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (نهایی- شهریور ۸۶)

۶۲. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار x را چنان تعیین کنید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $(۲ - ۲x)$ باشد. (نهایی- خرداد ۸۷)

۶۳. دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط‌المرکزین برابر $۲x + ۱$ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲x$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید. (نهایی- خرداد ۸۸)

۶۴. اگر شعاع‌های دو دایره نامساوی باشند، ثابت کنید مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین آن‌ها همرس‌اند.

۶۵. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند.

قسمت سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

۶۶. **در سؤالات زیر گزینهٔ درست را انتخاب کنید.** (نهایی- خرداد ۹۵)

آ) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمودمنصف‌های اضلاع ۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

ب) مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمودمنصف‌های اضلاع ۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

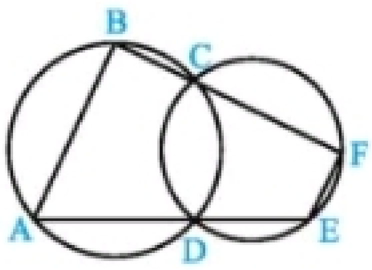
۶۷. **ثابت کنید یک چندضلعی محاطی، است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس باشند.**

۶۸. **ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.** (نهایی- شهریور ۹۱)

۶۹. **ثابت کنید در هر شش‌ضلعی محاطی مجموع زوایا به طور یک‌درمیان برابر 360° است.**

۷۰. **ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی برابر اندازهٔ زاویهٔ خارجی مقابل به آن است.**

۷۱. **در شکل مقابل، از نقاط تقاطع دو دایره دو قاطع AE و BF رسم شده‌اند. ثابت کنید $AB \parallel EF$**



۷۲. **ثابت کنید یک چندضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر نیمسازهای زوایای آن همرس باشند.**

۷۳. **ثابت کنید مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با نصف محیط آن در شعاع دایرهٔ محاطی آن.**

۷۴. **مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را بر حسب R شعاع دایرهٔ محیطی‌اش محاسبه کنید.**

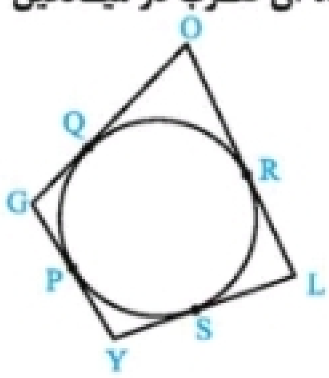
۷۵. **ثابت کنید در یک مثلث اگر دو ضلع یک زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه عمودمنصف ضلع مقابل به آن زاویه و نیمساز آن زاویه، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.**

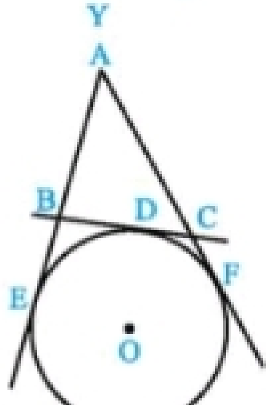
۷۶. **ثابت کنید یک چهارضلعی محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد.**

۷۷. **یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.**

۷۸. **ضلع‌های چهارضلعی محیطی $GOLY$ بر دایره مماس‌اند. ثابت کنید $GO + LY = OL + GY$**

(نهایی- خرداد ۹۲، ۸۸ و ۸۴)



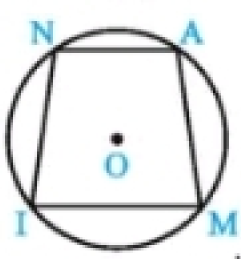


۷۹. **خط‌های AF ، AE و BC به ترتیب در نقطه‌های F ، E و D بر دایرهٔ (O) مماس هستند. مماس BC خط‌های AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت E و F ، محیط مثلث ABC ، ثابت می‌ماند.**

(نهایی- دی ۹۲، خرداد ۹۰، دی ۸۶ و خرداد ۸۵)

۸۰. **در دایرهٔ به مرکز O ، چهارضلعی $AMIN$ محاط شده است و داریم $NI = AM$ ، نشان دهید $AN \parallel MI$**

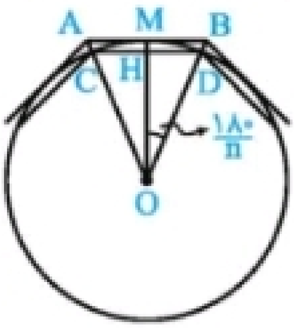
(نهایی- شهریور ۹۲ و خرداد ۸۸)



۸۱. **در مثلث ABC اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و r_a ، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی باشند، ثابت کنید:**

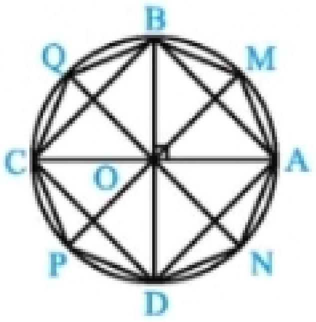
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

۸۲. در مثلث ABC اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و h_a، h_b و h_c ارتفاع‌های مثلث باشند آن‌گاه ثابت کنید: $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$

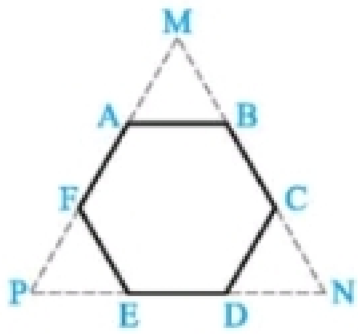


۸۳. مطابق شکل اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}\ ,\ \ CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$



۸۴. در یک دایره مطابق شکل، دو قطر عمود بر هم AC و BD را رسم می‌کنیم، چهارضلعی ABCD مربع است (چرا؟). عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت‌ضلعی AMBQCPDN، منتظم است.



۸۵. شش‌ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

آ) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

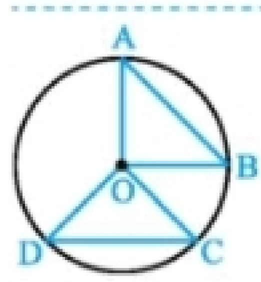
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آن‌چه از هندسهٔ (۱) می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S(TBC)+S(TDE)+S(TAF)=S(TAB)+S(TEF)+S(TCD)$$

پاسخ فصل ۱ دایره

۱



اثبات: با فرض $AB = CD$ می‌خواهیم ثابت کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ AB = CD \\ OB = OD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D \xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

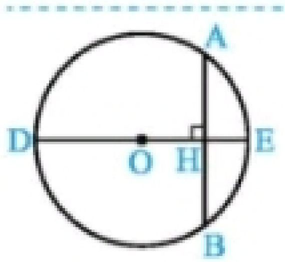
۲

در شکل سؤال قبل با فرض $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ می‌خواهیم ثابت کنیم $AB = CD$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D \\ OB = OD \end{array}\right\}$$

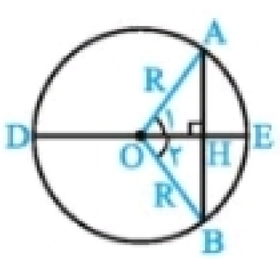
$$\xrightarrow{\text{(ض‌ز‌ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD} \Rightarrow AB = CD$$

۳



$$DE \perp AB \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH = BH \\ \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE} \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{array}\right.$$

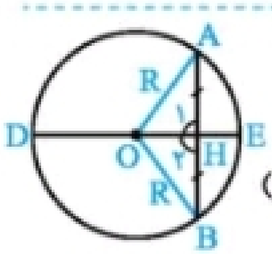
اثبات: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH و BOH به حالت برابری وتر $(OA = OB)$ و یک ضلع $(OH = OH)$ همنهشت‌اند، در نتیجه $AH = BH$ و داریم:



$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE}$$

$$\overset{\frown}{AD} = ۱۸۰ - \overset{\frown}{AE} = ۱۸۰ - \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD}$$

۴



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OH = OH \\ \text{(فرض)}\, AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{BOH}$$

$$\Rightarrow \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ \xrightarrow{\text{دو زاویه مجانب‌اند، پس مکمل‌اند.}} \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$$

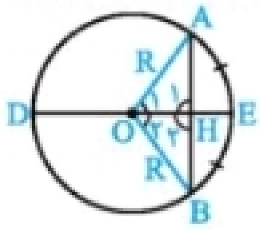
بنابراین $DE \perp AB$

همچنین از همنهشتی دو مثلث، نتیجه می‌شود:

$$A\hat{O}E = B\hat{O}E \xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE}$$

$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AE} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{BE} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$$

۵



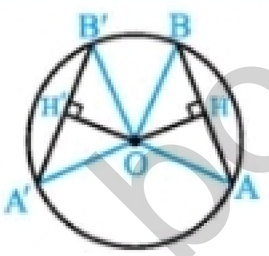
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{(فرض)} \\ OH = OH \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{BOH} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

و چون $\hat{H}_1$ و $\hat{H}_2$ مکمل‌اند، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = ۹۰^\circ$ و در نتیجه $DE \perp AB$

همچنین همنهشتی فوق نتیجه می‌دهد $AH = BH$

۶



اثبات: آ) با فرض $AB = A'B'$ ثابت می‌کنیم $OH = OH'$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'OB'}$$

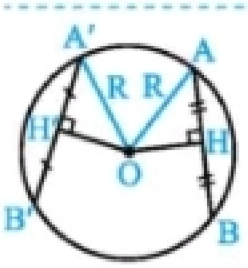
$$\xrightarrow{\text{ارتفاع‌های نظیر برابرند.}} OH = OH'$$

ب) با فرض $OH = OH'$ ثابت می‌کنیم $AB = A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} OH = OH' \\ OA = OA' \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{A'OH'}$$

$$\Rightarrow AH = A'H' \Rightarrow \frac{AB}{۲} = \frac{A'B'}{۲} \Rightarrow AB = A'B'$$

۷



اثبات: روش اول (روش کتاب درسی):

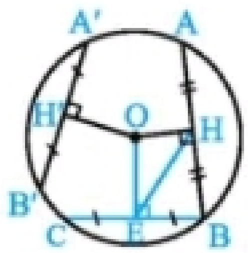
می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AB > A'B' \Leftrightarrow OH < OH'$$

$$AB > A'B' \Leftrightarrow \frac{AB^2}{۴} > \frac{A'B'^2}{۴} \Leftrightarrow R^2 - \frac{AB^2}{۴} < R^2 - \frac{A'B'^2}{۴}$$

$$\Leftrightarrow OA^2 - AH^2 < OA'^2 - A'H'^2$$

$$\xleftrightarrow{\text{قضیهٔ فیثاغورس}} OH^2 < OH'^2 \Leftrightarrow OH < OH'$$



روش دوم: وتر BC را مساوی $A'B'$ رسم می‌کنیم، پس فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر است یعنی $OE = OH'$، داریم:

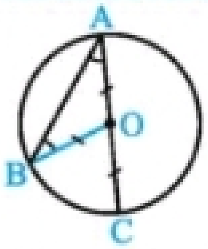
$$A'B' < AB \Leftrightarrow \frac{BC}{۲} < \frac{AB}{۲} \Leftrightarrow BE < BH$$

$$\xleftrightarrow{\overset{\Delta}{BEH}} H\hat{E}B > B\hat{H}E$$

$$\Leftrightarrow ۹۰^\circ - H\hat{E}B < ۹۰^\circ - B\hat{H}E \Leftrightarrow O\hat{E}H < O\hat{H}E$$

$$\xleftrightarrow{\overset{\Delta}{OEH}} OE > OH \Leftrightarrow OH' > OH$$

۸

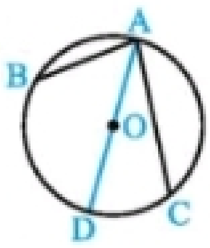


اثبات: آ) فرض کنیم یک ضلع زاویه، قطر دایره باشد.

$$\left.\begin{array}{l} OB = OA \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \text{زاویهٔ خارجی} \quad B\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{O}C = ۲\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{B\hat{O}C}{۲}$$

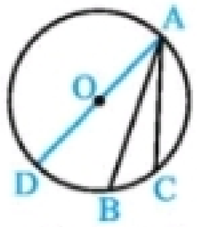
اما $B\hat{O}C$ زاویهٔ مرکزی است، پس با کمان $\overset{\frown}{BC}$ برابر است

لذا $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



ب) فرض کنیم مرکز دایره بین دو ضلع زاویهٔ محاطی باشد، قطر AD را رسم می‌کنیم، بنابه قسمت (آ) داریم:

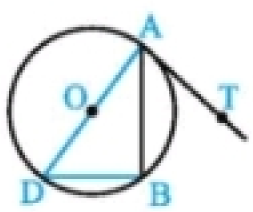
$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



پ) فرض کنیم دو ضلع زاویهٔ محاطی یک طرف مرکز دایره باشند، قطر AD را رسم می‌کنیم طبق قسمت (آ) داریم:

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

۹

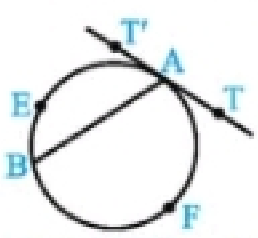


اثبات: زاویهٔ ظلی TAB را در دایره به مرکز O در نظر می‌گیریم. قطر AD را رسم می‌کنیم. زاویهٔ B محاطی روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است. همچنین خط مماس، بر شعاع دایره در نقطهٔ تماس عمود است، پس $D\hat{A}T = ۹۰^\circ$ و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D} + D\hat{A}B = ۹۰^\circ \\ D\hat{A}B + T\hat{A}B = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} = T\hat{A}B$$

اما زاویهٔ $\hat{D}$ محاطی و اندازهٔ آن برابر $\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ است، پس $T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

تذکر اگر زاویهٔ ظلی $T\hat{A}B$ منفرجه باشد، در این صورت داریم:



$$T\hat{A}B = ۱۸۰^\circ - T'\hat{A}B = ۱۸۰^\circ - \frac{\overset{\frown}{AEB}}{۲}$$

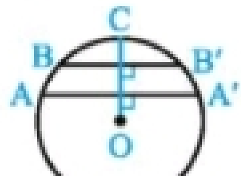
$$= \frac{۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{AEB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AFB}}{۲}$$

۱۰

اثبات: روش اول: از A به B' وصل می‌کنیم.

$$AA' \parallel BB' \text{ ، مورب } AB' \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}'$$

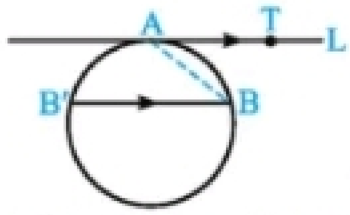
$$\xrightarrow{\text{دو زاویهٔ محاطی‌اند.}} \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{AB}$$



روش دوم: از مرکز دایره بر وتر AA' عمودی رسم می‌کنیم. در نتیجه این خط بر وتر BB' عمود است. می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند، پس:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'C}\\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}}\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{A'C}-\overset{\frown}{B'C}\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$$

۱۱



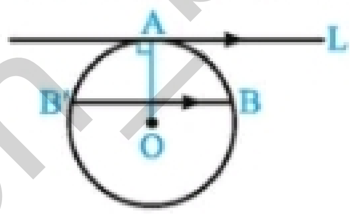
اثبات: در شکل مقابل می‌خواهیم ثابت کنیم $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB'}$

روش اول: A را به B وصل می‌کنیم، داریم:

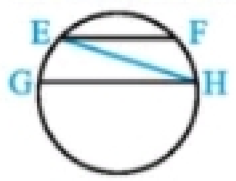
$$L\parallel BB' \text{ ، مورب } AB\Rightarrow \underset{\text{محاطی}}{\hat{B}}=\underset{\text{ظلی}}{\widehat{BAT}}$$

$$\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{AB'}=\overset{\frown}{AB}$$

روش دوم: مرکز دایره را به نقطهٔ A یعنی نقطهٔ تماس وصل می‌کنیم، شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. BB' موازی L است، پس OA بر وتر BB' هم عمود است. لذا OA کمان‌های نظیر وتر BB' را نصف می‌کند، یعنی $\overset{\frown}{AB'}=\overset{\frown}{AB}$



۱۲



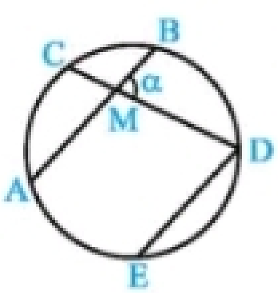
E را به H وصل می‌کنیم. دو زاویهٔ E و H محاطی هستند و داریم:

$$(\text{فرض})\ \overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{HF}\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{GE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{HF}}{۲}\xrightarrow{\text{زوایای محاطی}}\hat{H}=\hat{E}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابه عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب}}EF\parallel GH$$

۱۳

روش اول (روش کتاب درسی): از نقطهٔ D خطی موازی وتر AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند. داریم:



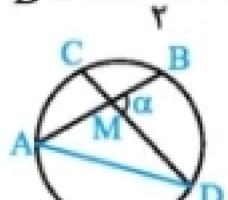
$$AB\parallel DE \text{ ، مورب } CD\Rightarrow\hat{D}=\widehat{DMB}=\alpha$$

$$AB\parallel DE\Rightarrow\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}$$

$$\text{زاویهٔ محاطی }\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CAE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AE}}{۲}$$

و از آن‌جایی که $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}$ است، داریم:

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

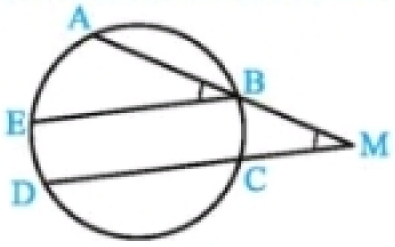


روش دوم: A را به D وصل می‌کنیم. داریم:

$$\overset{\triangle}{AMD}\text{ زاویهٔ خارجی }\alpha\Rightarrow\alpha=\hat{A}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

۱۴



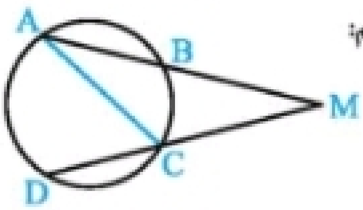
روش اول (روش کتاب درسی): وتر BE را موازی وتر CD رسم می‌کنیم. داریم:

$$BE\parallel MD \text{ ، مورب } MA\Rightarrow\widehat{ABE}=\hat{M}$$

$$BE\parallel CD\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$$

$$\text{محاطی }\widehat{ABE}=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{DE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

$$\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

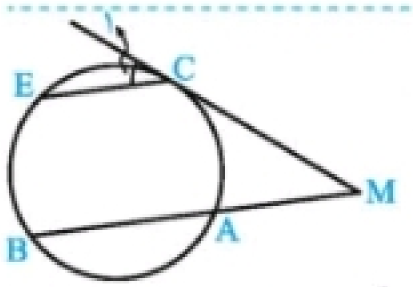


روش دوم: A را به C وصل می‌کنیم. داریم:

$$\overset{\triangle}{ACM}\text{ زاویهٔ خارجی }\widehat{ACD}\Rightarrow\widehat{ACD}=\hat{A}+\hat{M}$$

$$\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

۱۵

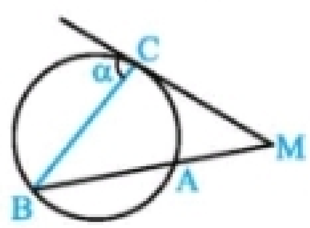


روش اول: از نقطهٔ C خطی موازی وتر AB رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با دایره را E می‌نامیم. داریم:

$$CE\parallel MB \text{ ، مورب } MC\Rightarrow\hat{C}_1=\hat{M}$$

$$CE\parallel AB\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AC}$$

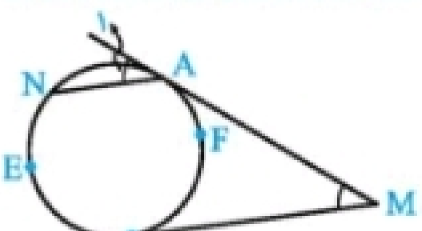
$$\text{زاویهٔ ظلی }\hat{C}_1=\frac{\overset{\frown}{CE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC}}{۲}$$



روش دوم: B را به C وصل می‌کنیم. α، زاویه‌ای ظلی است، که کمان مقابل آن $\overset{\frown}{BC}$ است همچنین زاویهٔ خارجی مثلث MBC است، پس:

$$\alpha=\underset{\text{محاطی}}{\hat{B}}+\hat{M}\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

۱۶



روش اول: وتر AN را موازی MA' رسم می‌کنیم. داریم:

$$NA\parallel MA' \text{ ، مورب } MA\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{M}$$

$$NA\parallel MA'\Rightarrow\overset{\frown}{NEA'}=\overset{\frown}{AFA'}$$

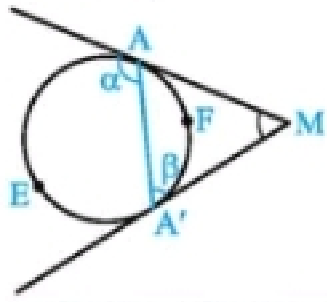
$$\text{زاویهٔ ظلی }\hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{NA}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AEA'}-\overset{\frown}{NEA'}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AEA'}-\overset{\frown}{AFA'}}{۲}$$

$$\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AEA'}-\overset{\frown}{AFA'}}{۲}$$

روش دوم: A را به A' وصل می‌کنیم، بنابه زاویهٔ خارجی داریم:

$$\alpha=\beta+\widehat{M}$$

اما α و β زوایای ظلی هستند، پس $\alpha=\frac{\overset{\frown}{AEA'}}{۲}$ ، $\beta=\frac{\overset{\frown}{AFA'}}{۲}$ و نهایتاً داریم:

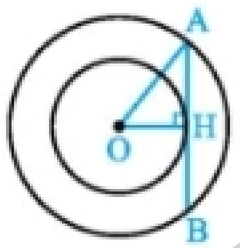


$$\frac{\overset{\frown}{AEA'}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AFA'}}{۲}+\widehat{M}$$

$$\Rightarrow \widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{AEA'}-\overset{\frown}{AFA'}}{۲}$$

۱۷

با فرض $OA=۱۰$ و $OH=۶$ داریم:



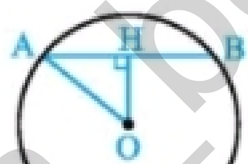
$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow ۱۰^۲=۶^۲+AH^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲=۶۴\Rightarrow AH=۸$$

$$AB=۲AH=۲\times ۸=۱۶$$

۱۸

بنابه فرض $AB=۲/۴$ و $OA=۲$ داریم:



$$OH\perp AB\Rightarrow AH=BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲/۴}{۲}=۱/۲$$

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow ۲^۲=OH^۲+۱/۲^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲=۴-۱/۴۴=۲/۵۶\Rightarrow OH=۱/۶$$

۱۹

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BC}+۱۰۰^\circ+۷۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۹۰^\circ$$

(زاویهٔ ظلی) $x=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۹۰^\circ}{۲}=۹۵^\circ$

۲۰

$$\frac{(۲x+۱)+(۳x+۴)}{۲}=۹۰^\circ\Rightarrow ۵x+۵=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵x=۱۷۵^\circ\Rightarrow x=۳۵^\circ$$

۲۱

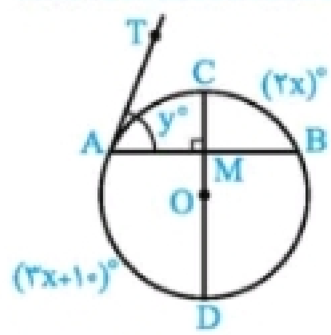
$$\begin{cases}\frac{y-x}{۲}=۶۲^\circ\\ x+y=۳۶۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-x=۱۲۴^\circ\\ x+y=۳۶۰^\circ\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}۲y=۴۸۴^\circ\Rightarrow y=۲۴۲^\circ$$

$$x+۲۴۲^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow x=۱۱۸^\circ$$

۲۲

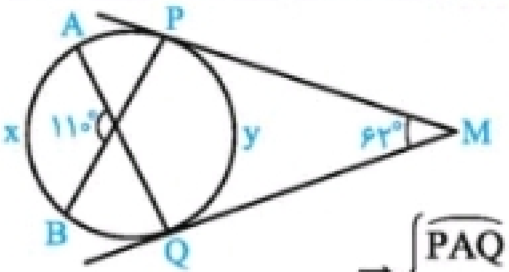
چون قطر CD بر وتر AB عمود است پس $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}=۲x$ و از طرفی داریم:



$$\frac{۲x+(۳x+۱۰)}{۲}=۹۰^\circ\Rightarrow ۵x+۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=\frac{۱۷۰^\circ}{۵}=۳۴^\circ$$

(زاویهٔ ظلی) $y=\frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲}=\frac{۲x+۲x}{۲}=۲x=۲\times ۳۴^\circ=۶۸^\circ$

۲۳



$$\begin{cases}\widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{PAQ}-\overset{\frown}{PQ}}{۲}\\ \overset{\frown}{PAQ}+\overset{\frown}{PQ}=۳۶۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{PAQ}-\overset{\frown}{PQ}=۲\times ۶۲^\circ=۱۲۴^\circ\\ \overset{\frown}{PAQ}+\overset{\frown}{PQ}=۳۶۰^\circ\end{cases}$$

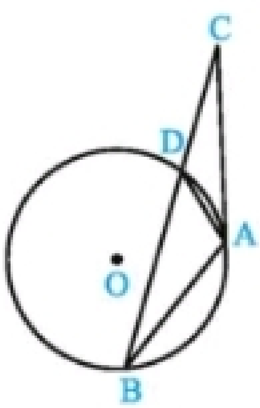
$$\xrightarrow{+}۲\overset{\frown}{PAQ}=۴۸۴^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{PAQ}=۲۴۲^\circ$$

$$\overset{\frown}{PQ}=y=۳۶۰^\circ-۲۴۲^\circ=۱۱۸^\circ$$

$$A\widehat{N}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{PQ}}{۲}\Rightarrow ۱۱۰^\circ=\frac{x+y}{۲}\Rightarrow x+۱۱۸^\circ=۲۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow x=۲۲۰^\circ-۱۱۸^\circ=۱۰۲^\circ$$

۲۴



(فرض) $AC=AB\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C}$ (۱)

محاطی $\widehat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$

ظلی $D\widehat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$

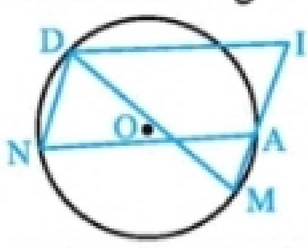
$\Rightarrow \widehat{B}=D\widehat{A}C$ (۲)

$(۱),(۲)\Rightarrow D\widehat{A}C=\widehat{C}\Rightarrow AD=CD$

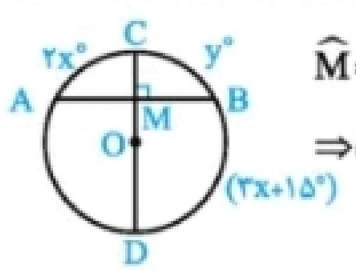
$\Rightarrow$ $\overset{\Delta}{ACD}$ متساوی‌الساقین است.

۲۵

در متوازی‌الاضلاع $DIAN$ زوایای روبه‌رو برابرند پس $\widehat{N}=\widehat{I}$. از طرفی دو زاویهٔ M و N محاطی و کمان روبه‌رو به آن‌ها $\overset{\frown}{AD}$ است، پس $\widehat{M}=\widehat{N}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$. در نتیجه $\widehat{M}=\widehat{I}$ پس مثلث MDI متساوی‌الساقین است، لذا $DM=DI$



۲۶



$$\widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}\Rightarrow ۹۰^\circ=\frac{۲x+۳x+۱۵^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵x+۱۵=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۵x=۱۶۵^\circ\Rightarrow x=۳۳^\circ$$

CD قطر دایره است پس می‌توان نوشت:

$$y+۳x+۱۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow y+۹۹^\circ+۱۵^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow y=۱۸۰^\circ-۱۵^\circ-۹۹^\circ=۶۶^\circ$$

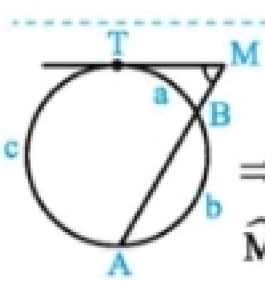
۲۷

زاویهٔ محاطی $A\widehat{B}C=\frac{A\widehat{O}C}{۲}\Rightarrow ۲(\alpha+۱۶)=۳\alpha+۱۲$

$$\Rightarrow ۲\alpha+۳۲=۳\alpha+۱۲\Rightarrow \alpha=۲۰$$

$$A\widehat{O}C=۳\times ۲۰+۱۲=۷۲^\circ\ ,\ A\widehat{B}C=۲۰^\circ+۱۶^\circ=۳۶^\circ$$

۲۸



$$\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۵}=\frac{a+b+c}{۱+۴+۵}=\frac{۳۶۰^\circ}{۱۰}=۳۶^\circ$$

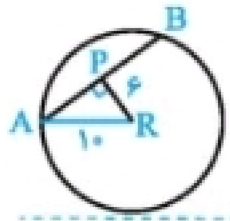
$$\Rightarrow a=۳۶^\circ, b=۴\times ۳۶^\circ=۱۴۴^\circ, c=۵\times ۳۶^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\widehat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۳۶^\circ}{۲}=\frac{۱۴۴^\circ}{۲}=۷۲^\circ$$

۲۹

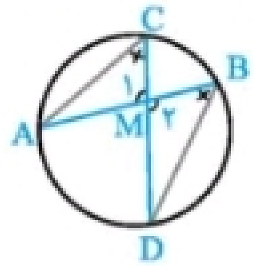
$$A\hat{T}X=\frac{\overset{\frown}{AT}}{2}\Rightarrow 2\alpha-6=\frac{3\alpha+33}{2}\Rightarrow 4\alpha-12=3\alpha+33$$
$$\Rightarrow \alpha=45^\circ$$
$$A\hat{T}X=(2\alpha-6)^\circ=(2\times45-6)^\circ=90^\circ-6^\circ=84^\circ$$

۳۰



$$AR^2=AP^2+PR^2\Rightarrow 10^2=AP^2+6^2$$
$$\Rightarrow AP^2=100-36=64\Rightarrow AP=8$$
$$AB=2AP=2\times8=16$$

۳۱



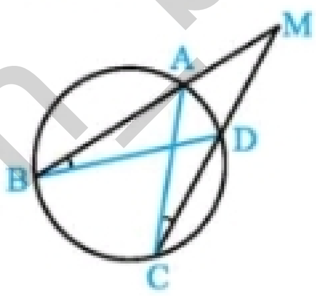
وترهای BD و AC را رسم می‌کنیم، داریم:

(محاطی $\hat{B}=\frac{\widehat{AD}}{2}$ ، محاطی $\hat{C}=\frac{\widehat{AD}}{2}$)

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\\ \widehat{M}_1=\widehat{M}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMC}\sim\overset{\Delta}{DMB}$ متقابل به رأس هستند.

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MB}\Rightarrow MA\times MB=MD\times MC$$

۳۲



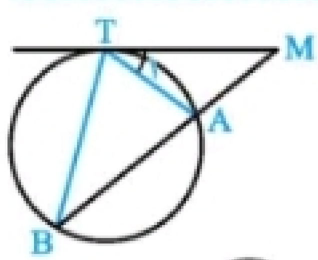
وترهای AC و BD را رسم می‌کنیم. داریم:

(محاطی $\hat{B}=\frac{\widehat{AD}}{2}$ ، محاطی $\hat{C}=\frac{\widehat{AD}}{2}$)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\\ \widehat{M}=\widehat{M}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{BMD}\sim\overset{\Delta}{CMA}$$

$$\frac{MB}{MC}=\frac{MD}{MA}\Rightarrow MA\times MB=MD\times MC$$

۳۳



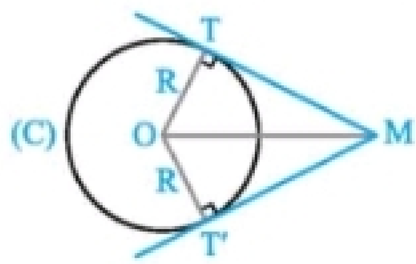
وترهای TA و TB را رسم می‌کنیم. داریم:

(زاویهٔ ظلی $\hat{T}_1=\frac{\widehat{AT}}{2}$ ، زاویهٔ محاطی $\hat{B}=\frac{\widehat{AT}}{2}$) $\Rightarrow \hat{T}_1=\hat{B}$

$$(\hat{T}_1=\hat{B}\ ،\ \widehat{M}=\widehat{M})\Rightarrow \overset{\Delta}{MAT}\sim\overset{\Delta}{MTB}\Rightarrow\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB}$$
$$\Rightarrow MT^2=MA\times MB$$

۳۴

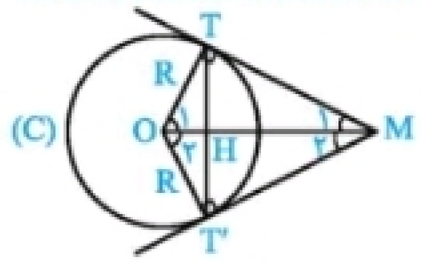
مرکز دایره را به نقطهٔ M و نقاط تماس وصل می‌کنیم. شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث‌های MOT و MOT' قائم‌الزاویه‌اند و داریم:



$$(OT=OT'=R\ ،\ OM=OM\ ،\ \hat{T}=\hat{T}'=90^\circ)$$
$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}\overset{\Delta}{MOT}\cong\overset{\Delta}{MOT'}\Rightarrow MT=MT'$$

۳۵

آ) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MOT و MOT' همنهشت‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}OT=OT'=R\\ OM=OM\\ \hat{T}=\hat{T}'=90^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}\overset{\Delta}{OMT}\cong\overset{\Delta}{OMT'}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{M}_1=\widehat{M}_2\\ \widehat{O}_1=\widehat{O}_2\end{cases}$$

پس OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است.

ب) چون $MT=MT'$ و $OT=OT'=R$ است، پس نقاط M و O از دو سر پاره‌خط TT' به یک فاصله‌اند، لذا روی عمودمنصف پاره‌خط TT' قرار دارند، بنابراین OM عمودمنصف TT' است.

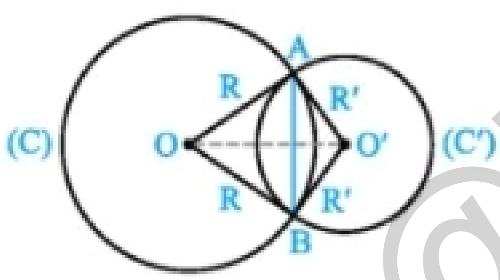
۳۶

دو دایره با شعاع‌های R و R' مماس خارج هستند، هرگاه $d=R+R'$ باشد، در این صورت داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی}\ TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$
$$=\sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}=\sqrt{4RR'}=2\sqrt{RR'}$$

۳۷

مطابق شکل دو دایرهٔ (C) و (C') در نقاط A و B متقاطع‌اند.



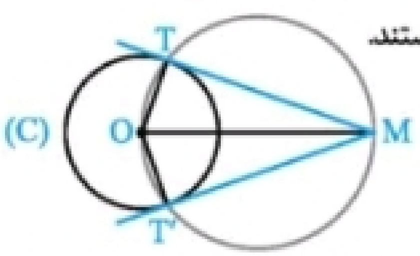
$OA=OB=R\Rightarrow$ O روی عمودمنصف AB قرار دارد.

$O'A=O'B=R'\Rightarrow$ O' روی عمودمنصف AB قرار دارد.

بنابراین OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است.

۳۸

O را به M وصل می‌کنیم، دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایرهٔ (C) را T و T' می‌نامیم. زوایای OTM و $OT'M$ قائمه هستند، زیرا در دایرهٔ به قطر OM روبه‌رو به قطر هستند. پس MT و MT' در نقاط T و T' بر دایرهٔ (C) مماس هستند.



۳۹

با توجه به شکل پرسش داریم:

$$MT^2=MA\times MB\Rightarrow 12^2=8\times(8+x)$$
$$\Rightarrow x+8=\frac{144}{8}=18\Rightarrow x=18-8=10$$

۴۰

دو دایره مماس برون هستند، پس $d = R + R'$ می‌توان نوشت:

$R = 9 \,,\, R' = 4 \Rightarrow d = 9 + 4 = 13$

طول مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

$= \sqrt{13^2 - (9-4)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

۴۱

با توجه به شکل پرسش داریم:

$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow x^2 = 4 \times (4+5) = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow x = 6$

۴۲

طول مماس مشترک داخلی $TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$

$\Rightarrow 5x - 8 = \sqrt{13^2 - (3+2)^2} \Rightarrow 5x - 8 = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

$\Rightarrow 5x = 12 + 8 = 20 \Rightarrow x = 4$

۴۳

طول مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

$\Rightarrow 5a - 3 = \sqrt{13^2 - (8-3)^2} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$

۴۴

با توجه به شکل پرسش داریم:

$MA' \times MA = MB' \times MB$

$\Rightarrow x \times (x+3) = 4 \times (4+6) \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x+8)(x-5) = 0 \Rightarrow x = -8$ یا $x = 5 \xrightarrow{x>0} x = 5$

۴۵

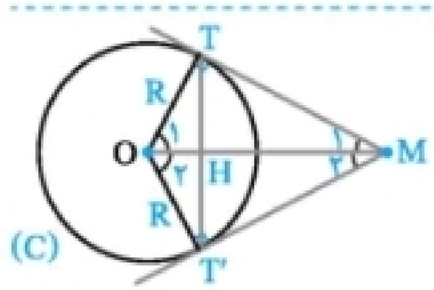
بنابه فرض $R = 4$ و $R' = 1$ و دو دایره مماس برون‌اند، پس $d = R + R' = 5$ و داریم:

$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3x + 1 = \sqrt{5^2 - (4-1)^2}$

$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow x = \frac{4-1}{3} = 1$

۴۶

آ)



$$\left.\begin{array}{l} \hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ \\ OT = OT' = R \\ OM = OM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OMT} \cong \overset{\Delta}{OMT'} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \end{cases}$$

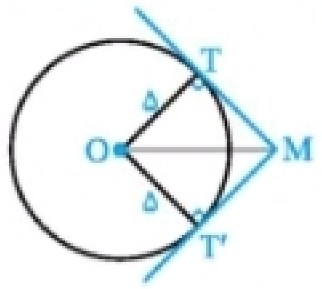
پس OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب) OM عمودمنصف TT' است، پس $T'H = TH = \frac{TT'}{2}$ و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_1 \\ \hat{H} = \hat{T} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OTH} \sim \overset{\Delta}{OMT} \Rightarrow \frac{OT}{OM} = \frac{TH}{MT}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{OM} = \frac{\frac{TT'}{2}}{MT} \Rightarrow \frac{R}{OM} = \frac{TT'}{2MT} \Rightarrow TT'.OM = 2R.MT$$

۴۷



آ) بنابه فرض $OT' = OT = 5$ و $OM = 5\sqrt{2}$، بنابراین داریم:

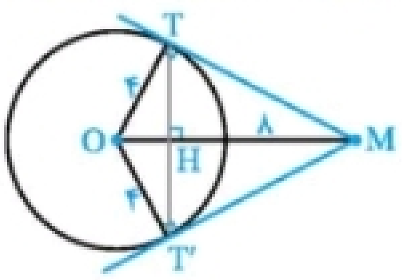
$MT^2 + OT^2 = OM^2$

$\Rightarrow MT^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow MT^2 + 25 = 50 \Rightarrow MT^2 = 25 \Rightarrow MT = 5 \Rightarrow MT' = 5$

ب) چون $OT = MT = MT' = OT' = 5$ پس چهارضلعی $OTMT'$ لوزی است و چون زاویهٔ آن قائمه است، پس مربع می‌باشد.

۴۸



آ) بنابه فرض $OT = OT' = 4$ و $OM = 8$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT داریم:

$MT^2 + OT^2 = OM^2$

$\Rightarrow MT^2 + 4^2 = 8^2$

$\Rightarrow MT^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow MT = 4\sqrt{3} \Rightarrow MT' = MT = 4\sqrt{3}$

ب) $S(OMT) = \frac{1}{2} TH.OM = \frac{1}{2} OT.MT$

$\Rightarrow TH = \frac{4 \times 4\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3} \,,\, TT' = 2TH \Rightarrow TT' = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

پ) بنابراین $MT = MT' = TT' = 4\sqrt{3}$، یعنی مثلث MTT' متساوی‌الاضلاع است و $T\widehat{M}T' = 60^\circ$

۴۹

چون دو دایره مماس برون هستند، پس $d = R + R' = 9 + 4 = 13$ و بنابه فرض، طول مماس مشترک خارجی دو دایره $5x + 2$ است. لذا:

$TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \Rightarrow (5x+2)^2 = 13^2 - (9-4)^2$

$\Rightarrow (5x+2)^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow 5x + 2 = 12 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$

۵۰

$x \times 4 = 2 \times 10 \Rightarrow x = 5$

$6^2 = y(y + 4 + x) \Rightarrow 36 = y(y + 4 + 5) \Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0$

$\Rightarrow (y+12)(y-3) = 0 \Rightarrow y = 3$ یا $y = -12$ غق‌ق

۵۱

$MA.MB = MD.MC \Rightarrow 8(8 + z) = 6(6 + 10)$

$\Rightarrow 64 + 8z = 96 \Rightarrow 8z = 32 \Rightarrow z = 4$

۵۲

آ) چون دایره‌ها مماس برون هستند، پس دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.

ب) چون دو دایره مماس برون‌اند، پس $d = R + R' = 4 + 9 = 13$ و در نتیجه:

$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - (9-4)^2} = \sqrt{169 - 25}$

$= \sqrt{144} = 12$

۵۳

$MT^2 = MA.MA' \Rightarrow x^2 = 4\times(4+5)=36 \Rightarrow x=6$

۵۴

$TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}=\sqrt{10^2-(8-2)^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$

$TT'=3a-1 \Rightarrow 8=3a-1\Rightarrow a=3$

چون $d=R+R'=10$، پس دو دایره مماس برون هستند و دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.

۵۵

$TT'^2 = d^2-(R-R')^2 = 6^2-(4-3)^2 = 36-1=35$

$\Rightarrow TT'=\sqrt{35}$

۵۶

$2\times x = 4\times 5 \Rightarrow x=10 \quad , \quad 6^2 = y(y+5+4)$

$\Rightarrow y^2+9y-36=0 \Rightarrow (y+12)(y-3)=0$

$\Rightarrow y=3$ یا $y=-12$ غقق

۵۷

$x^2=2(2+x)\Rightarrow x^2-2x-4=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{1+4}=1\pm\sqrt{5}$

جواب منفی قابل قبول نیست و $x=\sqrt{5}+1$ جواب است.

۵۸

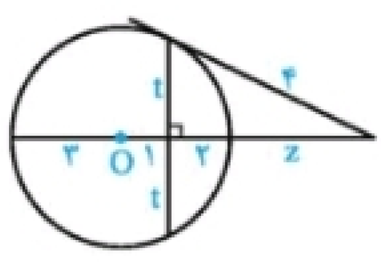
$5\times 4=2\times y\Rightarrow y=\frac{20}{2}=10$

$6^2=x(x+4+5)\Rightarrow x^2+9x-36=0\Rightarrow (x-3)(x+12)=0$

$\Rightarrow x=3$ یا $x=-12$

جواب $x=-12$ قابل قبول نیست و $x=3$ جواب است.

۵۹



$4^2=z(z+6)\Rightarrow z^2+6z-16=0$

$\Rightarrow (z-2)(z+8)=0$

$\Rightarrow z=2$ یا $z=-8$ غقق

$t\times t=2(3+1)\Rightarrow t^2=8$

$\Rightarrow t=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

۶۰

با توجه به رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در دایره داریم:

$ID\times IE = IS\times IN \xrightarrow{IE=IN} ID=IS$

۶۱

بنابه فرض $R=9$، $R'=4$ و $TT'=12$ (طول مماس مشترک خارجی)

$TT'^2=d^2-(R-R')^2\Rightarrow 12^2=d^2-(9-4)^2$

$\Rightarrow 144=d^2-25\Rightarrow d^2=169\Rightarrow d=13$

چون $d=R+R'=13$، پس دو دایره مماس برون هستند.

۶۲

بنابه فرض $R=4$ و $R'=9$ و دو دایره مماس برون هستند، پس $d=R+R'=13$ است.

بنابه فرض طول مماس مشترک خارجی دو دایره $TT'=2x-2$ است.

داریم: $TT'^2=d^2-(R-R')^2\Rightarrow(2x-2)^2=13^2-(9-4)^2$

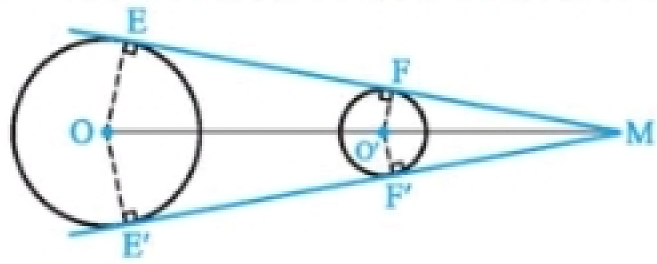
$\Rightarrow(2x-2)^2=169-25=144\Rightarrow 2x-2=12\Rightarrow x=\frac{14}{2}=7$

۶۳

$TT'^2=d^2-(R-R')^2\Rightarrow(2x)^2=(2x+1)^2-(7-2)^2$

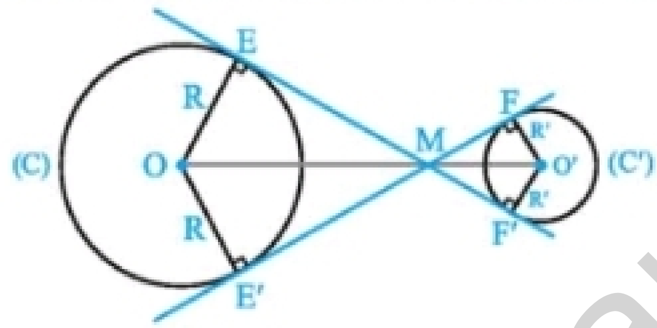
$\Rightarrow 4x^2=4x^2+4x+1-25\Rightarrow 4x=24\Rightarrow x=6$

۶۴



دو مماس مشترک خارجی دو دایره به مراکز O و O' و شعاع‌های R و R'، ($R\neq R'$) را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را M می‌نامیم. M را به O و O' وصل می‌کنیم. چون O از دو ضلع زاویهٔ $\widehat{M}$ به یک فاصله است ($OE=OE'=R$)، پس OM نیمساز $\widehat{M}$ است، همچنین $O'F=O'F'=R'$ پس O'M هم نیمساز $\widehat{M}$ است اما نیمساز یک زاویهٔ یکتاست لذا OM و O'M بر هم منطبق‌اند، یعنی خط‌المرکزین دو دایره و مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها در نقطهٔ M همرس‌اند.

۶۵



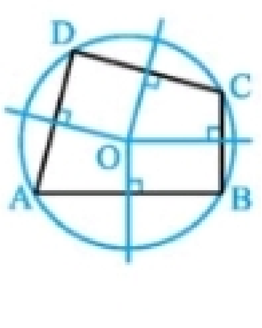
دو مماس مشترک داخلی دایره‌های C(O،R) و C'(O'،R') را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را M می‌نامیم. M را به O و O' وصل می‌کنیم. چون O از دو ضلع زاویهٔ EME' به یک فاصله است ($OE=OE'=R$)، پس OM نیمساز زاویهٔ EME' است. همچنین $O'F=O'F'=R'$، پس O'M نیمساز زاویهٔ FMF' است اما نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس بر یک امتدادند، لذا OM و O'M بر هم منطبق‌اند؛ یعنی خط‌المرکزین دو دایره و مماس مشترک‌های داخلی آن‌ها در نقطهٔ M همرس‌اند.

۶۶

آ) نیمسازهای زاویه‌های درونی (گزینهٔ (۳))

ب) عمودمنصف‌های اضلاع (گزینهٔ (۲))

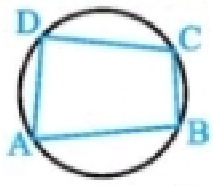
۶۷



مطابق شکل اگر چندضلعی محاطی باشد، عمودمنصف‌های اضلاع آن یعنی وترهای دایره، از مرکز دایره می‌گذرند و بالعکس اگر عمودمنصف اضلاع چندضلعی، همرس باشند در این صورت نقطهٔ همرسی از رأس‌های چندضلعی به یک فاصله است، یعنی دایره‌ای وجود دارد که از رأس‌های چندضلعی می‌گذرد، پس چندضلعی محاطی است.

۶۸

آ) اگر چهارضلعی محاطی باشد، آن‌گاه زوایای مقابل آن مکمل‌اند. زیرا:



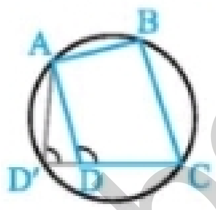
$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲}=\frac{\text{کل دایره}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۳۶۰^\circ-(\hat{A}+\hat{C})=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

ب) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.

روش اول (روش کتاب درسی):

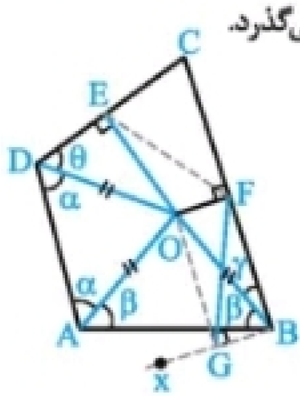
فرض کنیم در چهارضلعی ABCD، $\hat{B}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ در این صورت از سه نقطهٔ A، B و C یک دایره می‌گذرد (دایرهٔ محیطی مثلث ABC). حال ثابت می‌کنیم این دایره از نقطهٔ D می‌گذرد، به همین جهت از برهان خلف استفاده می‌کنیم.



اگر این دایره از رأس D نگذرد نقطهٔ برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{چهارضلعی محاطی } ABCD'\Rightarrow \hat{B}+\hat{D'}=۱۸۰^\circ\\ \text{(فرض)}\quad \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{D}=\hat{D'}$$

از طرفی $\hat{D}$ زاویهٔ خارجی $\overset{\triangle}{ADD'}$ است پس $\hat{D}>\hat{D'}$. این دو نتیجه با یکدیگر تناقض دارند، بنابراین دایره از رأس D می‌گذرد.



روش دوم: نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB و AD را O می‌نامیم. داریم $OA=OB=OD$. مثلث‌های AOB و AOD متساوی‌الساقین هستند پس زوایا مطابق شکل می‌شود و با توجه به فرض قضیه داریم:

$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}\Rightarrow \alpha+\beta+\hat{C}=\beta+\gamma+\alpha+\theta\Rightarrow \hat{C}=\theta+\gamma$$

نیم‌خط Bx را چنان رسم می‌کنیم که $x\hat{B}F=\hat{C}$ باشد و از O عمود OG را بر این نیم‌خط رسم می‌کنیم. داریم:

$$G\hat{B}F=\hat{C}\Rightarrow G\hat{B}O+\gamma=\theta+\gamma\Rightarrow G\hat{B}O=\theta$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ODE و OBG به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند پس $OE=OG$ و $DE=BG$. در چهارضلعی‌های OECF و OGBF مجموع اندازهٔ زوایا برابر ۳۶۰° است، پس می‌توان نوشت:

$$E\hat{O}F=۱۸۰^\circ-\hat{C}\,،\,G\hat{O}F=۱۸۰^\circ-G\hat{B}F=۱۸۰^\circ-\hat{C}$$

$$\Rightarrow E\hat{O}F=G\hat{O}F$$

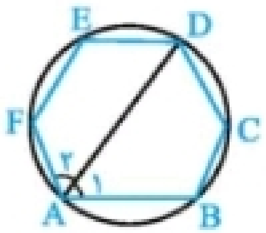
$$(OE=OG\,،\,E\hat{O}F=G\hat{O}F\,،\,OF=OF)\xrightarrow{\text{(ضزض)}}\overset{\triangle}{EOF}\cong\overset{\triangle}{GOF}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}EF=GF\\ O\hat{E}F=O\hat{G}F\\ O\hat{F}E=O\hat{F}G\end{cases}$$

متمم زاویه‌های ذکرشده، نیز برابرند، پس $C\hat{F}E=B\hat{F}G$ و $C\hat{E}F=B\hat{G}F$ و در نتیجه دو مثلث CEF و BGF به حالت (زض‌ز) همنهشت‌اند پس $CE=BG$ و با توجه به $DE=BG$ نتیجه می‌شود $DE=CE$ و این یعنی OE عمودمنصف CD است لذا $OC=OD=OA=OB$ بنابراین دایره به مرکز O از رأس‌های A، B، C و D می‌گذرد.

۶۹

در شش‌ضلعی محاطی ABCDEF مطابق شکل می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{A}+\hat{C}+\hat{E}=۳۶۰^\circ$، A را به D وصل می‌کنیم، دو چهارضلعی محاطی ABCD و AFED پدید می‌آید و داریم:

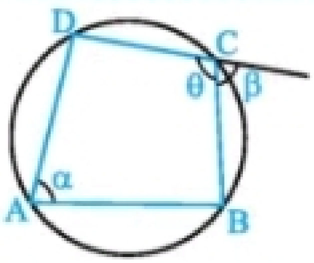


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ\\ \hat{A}_۲+\hat{E}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{C}+\hat{E}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}+\hat{E}=۳۶۰^\circ$$

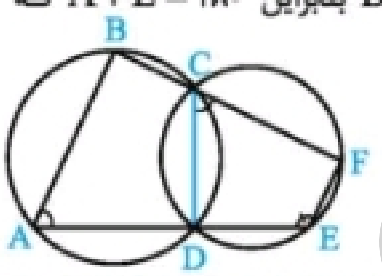
۷۰



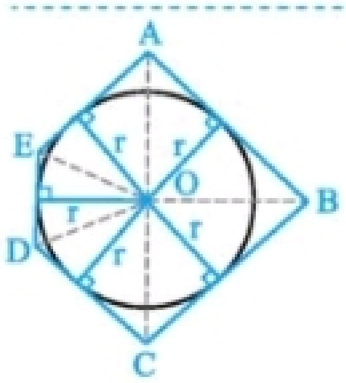
مطابق شکل α و β هر دو مکمل θ اند، پس با هم برابرند $(\alpha=\beta)$.

۷۱

وتر مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. با توجه به پرسش قبل در چهارضلعی محاطی ABCD داریم $\hat{A}=D\hat{C}F$. هم‌چنین در چهارضلعی محاطی CDEF داریم $D\hat{C}F+\hat{E}=۱۸۰^\circ$ بنابراین $\hat{A}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$ که نتیجه می‌دهد $AB\parallel EF$



۷۲



اگر چندضلعی، محیطی باشد، نقطهٔ O از اضلاع آن به یک فاصله است، پس مرکز دایره روی نیمساز زوایای چندضلعی قرار دارد.

اگر O نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای چندضلعی باشد در این صورت O از اضلاع زوایا به یک فاصله است، پس دایره‌ای به مرکز O وجود دارد که بر اضلاع چندضلعی مماس است و این یعنی چندضلعی محیطی است.

۷۳

از شکل سؤال قبل استفاده می‌کنیم:

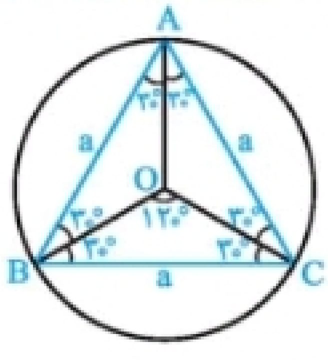
$$S(ABCDE)=S(AOB)+S(BOC)+S(COD)+S(DOE)+S(AOE)$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}r(\underbrace{AB+BC+CD+DE+AE}_{۲P})\Rightarrow S=P.r$$

دقت کنید که P نصف محیط مثلث است.

۷۴

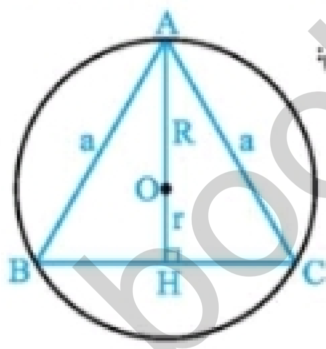
روش اول: مطابق شکل O نقطهٔ همرسی نیمسازها، عمودمنصف‌ها، میانه‌ها و ارتفاع‌ها است. پس سه مثلث AOB، AOC و BOC همنهشت می‌باشند و $OA = OB = OC = R$ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است و داریم:



$$S = 3S(BOC) = 3\times\frac{1}{2}\times OB\times OC\times \sin 120^\circ$$

$$=\frac{3}{2} R\times R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

روش دوم: O نقطهٔ همرسی میانه‌ها است، پس $R = 2r$. از طرفی AH ارتفاع مثلث و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ضلعش است، پس داریم:

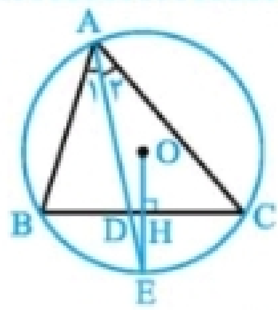


$$AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow R+\frac{R}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 3R=a\sqrt{3}\Rightarrow a=R\sqrt{3}$$

$$S(ABC)=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}\times\frac{3R}{2}\times R\sqrt{3}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

۷۵

فرض کنیم $AB < AC$، عمودمنصف ضلع BC کمان نظیر وتر BC را در دایرهٔ محیطی مثلث نصف می‌کند، یعنی E وسط کمان BC قرار دارد. اگر A را به E وصل کنیم، داریم:



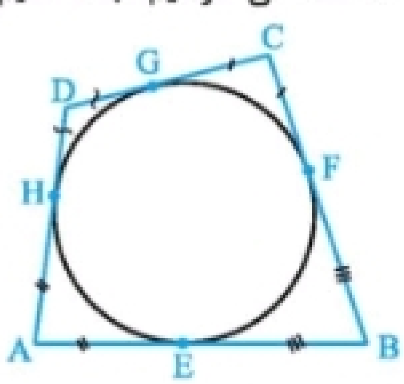
$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویهٔ محاطی } \hat{A}_1=\dfrac{\overset{\frown}{BE}}{2} \\ \text{زاویهٔ محاطی } \hat{A}_2=\dfrac{\overset{\frown}{CE}}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}} \hat{A}_1=\hat{A}_2$$

بنابراین AD نیمساز زاویهٔ A است.

پس عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ A در نقطهٔ E روی دایرهٔ محیطی مثلث متقاطع‌اند.

۷۶

آ) با فرض محیطی بودن چهارضلعی ABCD می‌خواهیم ثابت کنیم $AB + CD = AD + BC$ داریم:

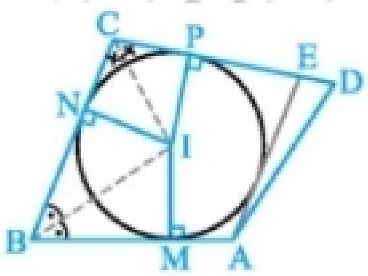


$$AB+CD=\underline{AE}+\underline{\underline{BE}}+DG+CG=\underline{AH}+\underline{\underline{BF}}+DH+CF$$

$$\Rightarrow AB+CD=(AH+DH)+(BF+CF)=AD+BC$$

ب) با فرض $AB + CD = AD + BC$ می‌خواهیم ثابت کنیم چهارضلعی ABCD محیطی است.

روش اول (روش کتاب درسی): نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای B و C را I می‌نامیم. این نقطه از ضلع‌های AB، BC و CD به یک فاصله است، پس دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر سه ضلع AB، BC و CD مماس است. اگر این دایره بر ضلع AD مماس نباشد از A مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود. داریم:

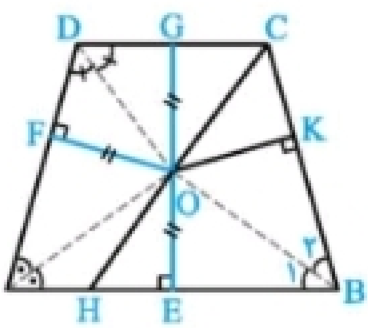


$$\left.\begin{array}{l} ABCE\Rightarrow AB+CE=BC+AE \quad \text{چهارضلعی محیطی} \\ AB+CD=AD+BC \quad (\text{فرض}) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow CD-CE=AD-AE\Rightarrow DE=AD-AE$$

اما نتیجهٔ اخیر امکان ندارد، زیرا در مثلث ADE تفاضل دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است $(DE > AD - AE)$، پس E همان نقطهٔ D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

روش دوم: نیمسازهای زوایای A و D را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم. داریم $OE = OF = OG$، $AE = AF$، $DG = DF$ و با توجه به فرض قضیه می‌توان نوشت:



$$AB+CD=BC+AD$$

$$\Rightarrow AE+BE+DG+CG=BC+AF+DF$$

$$\Rightarrow BC=BE+CG$$

حال پاره‌خط EH را برابر CG رسم می‌کنیم در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OEH و OGC به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند پس نتیجه می‌شود $OH = OC$. داریم:

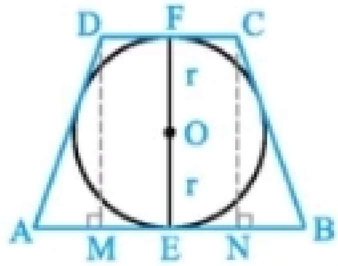
$$(BC=BE+CG=BE+EH=BH\ ،\ OB=OB\ ،\ OH=OC)$$

$$\xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})} \overset{\Delta}{BOH}\cong\overset{\Delta}{BOC}$$

پس $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و در نتیجه O روی نیمساز زاویهٔ B است که نتیجه می‌دهد $OK = OE$. بنابراین نقطهٔ O از همهٔ اضلاع چهارضلعی ABCD به یک فاصله است، پس دایره به مرکز O و شعاع OE بر اضلاع چهارضلعی ABCD مماس است و این یعنی چهارضلعی ABCD محیطی است.

۷۷

اگر ذوزنقه محاطی باشد، آن‌گاه ذوزنقه متساوی‌الساقین است. پس فرض کنیم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، محیطی باشد. چون $AB \parallel CD$ است، پس شعاع‌های OE و OF که بر قاعده‌ها عمودند، موازیند و چون در نقطهٔ O مشترکند، پس OE و OF بر یک امتدادند و EF قطر دایرهٔ محاطی ذوزنقه و همان ارتفاع ذوزنقه است. فرض کنیم $AB=a$، $CD=b$، $AD=BC=c$ و $EF=۲r$. داریم:



$$AM=BN=\frac{AB-MN}{۲}=\frac{AB-CD}{۲}=\frac{a-b}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ADM}: AD^۲=AM^۲+DM^۲ \Rightarrow c^۲=\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲+(۲r)^۲$$

اما محیطی بودن ذوزنقه نتیجه می‌دهد $a+b=۲c$ و با قرار دادن c در تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲=\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲+(۲r)^۲ \Rightarrow \frac{ab}{۲}=-\frac{ab}{۲}+۴r^۲$$

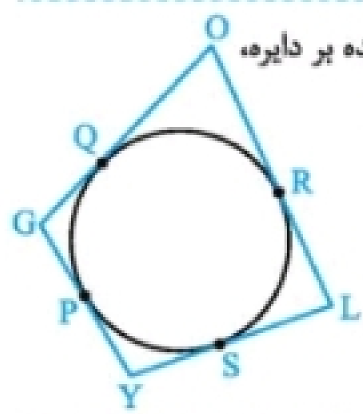
$$\Rightarrow ۴r^۲=ab \Rightarrow r=\frac{\sqrt{ab}}{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}EF(AB+CD)=\frac{۱}{۲}\times ۲r(a+b)$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{۲}(a+b)=\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

۷۸

بنابه خاصیت برابری طول مماس‌های رسم‌شده بر دایره، $OR=OQ$ ، $GQ=GP$ ، $RL=SL$ و $YS=YP$ داریم:

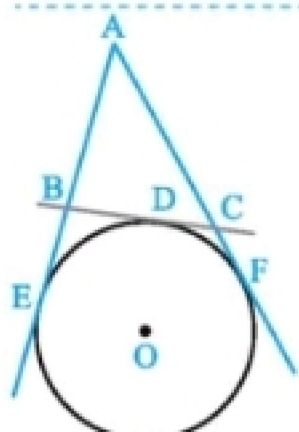


$$GO+LY=GQ+OQ+SL+YS=GP+OR+RL+YP$$

$$\Rightarrow GO+LY=(GP+YP)+(OR+RL)=GY+OL$$

۷۹

طبق خاصیت مماس بر دایره $AE=AF$ ، $BD=BE$ و $CD=CF$ داریم:



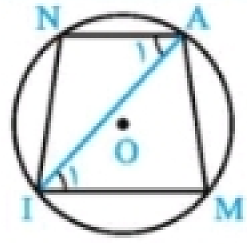
$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}=AB+BC+AC=AB+BD+CD+AC$$

$$=\underbrace{AB+BE}_{AE}+\underbrace{CF+AC}_{AF}$$

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}=AE+AF=۲AE=۲AF$$

چون نقطهٔ A ثابت و دایره معلوم است، پس مماس‌های AE و AF ثابت هستند و در نتیجه محیط مثلث ABC ثابت است.

۸۰



از A به I وصل می‌کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} NI=AM \Rightarrow \widehat{NI}=\widehat{AM} \ \text{(فرض)} \\ \hat{A}_۱=\frac{\widehat{NI}}{۲}\ \text{محاطی} ,\ \hat{I}_۱=\frac{\widehat{AM}}{۲}\ \text{محاطی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{I}_۱$$

پس بنابه عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $AN \parallel MI$

۸۱

می‌دانیم $r_a=\frac{S}{P-a}$ ، $r_b=\frac{S}{P-b}$ ، $r_c=\frac{S}{P-c}$ و $r=\frac{S}{P}$ داریم:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{\frac{S}{P-a}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-b}}+\frac{۱}{\frac{S}{P-c}}$$

$$=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۳P-(a+b+c)}{S}=\frac{۳P-۲P}{S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}$$

۸۲

می‌دانیم $S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bh_b=\frac{۱}{۲}ch_c$ ، در نتیجه می‌توان نوشت:

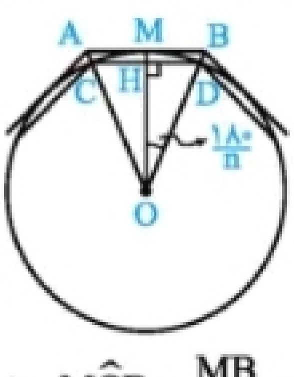
$$h_a=\frac{۲S}{a} \text{ و } h_b=\frac{۲S}{b} \text{ و } h_c=\frac{۲S}{c}$$

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}$$

$$=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۲P}{۲S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}$$

۸۳

رأس‌های n ضلعی محاطی دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، لذا اندازهٔ $\widehat{CD}$ و در نتیجه زاویهٔ مرکزی COD، برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است. در مثلث متساوی‌الساقین AOB ، OM ارتفاع، نیمساز و عمودمنصف هم است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMB داریم:



$$\tan M\hat{O}B=\frac{MB}{OM} \Rightarrow \tan\left(\frac{\frac{۳۶۰^\circ}{n}}{۲}\right)=\frac{\frac{AB}{۲}}{r}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}=\frac{AB}{۲r} \Rightarrow AB=۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

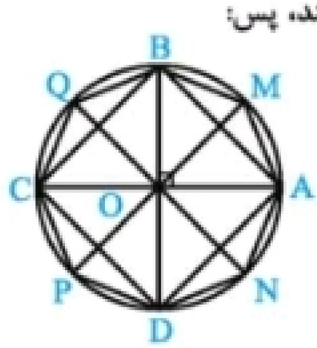
و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHD داریم:

$$\sin H\hat{O}D=\frac{DH}{OD} \Rightarrow \sin\left(\frac{\frac{۳۶۰^\circ}{n}}{۲}\right)=\frac{\frac{CD}{۲}}{r}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}=\frac{CD}{۲r} \Rightarrow CD=۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

۸۴

چهارضلعی ABCD مربع است، زیرا قطرهای AC و BD در آن یکدیگر را نصف می‌کنند، با هم برابرند و بر هم عمودند. اندازهٔ کمان‌های AB، BC، CD و AD برابر ۹۰° است و عمودمنصف‌های اضلاع مربع ABCD این کمان‌ها را نصف می‌کند، پس:



$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{CQ}=\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{DP}=\overset{\frown}{DN}=\overset{\frown}{NA}=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow AM=BM=BQ=CQ=CP=DP=DN=NA$$

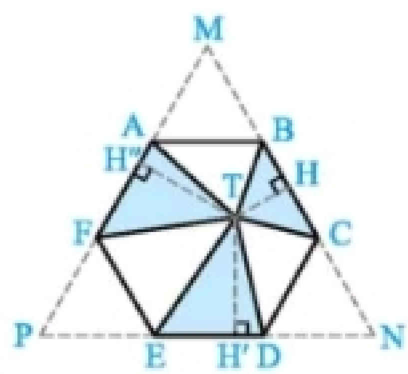
زاویهٔ محاطی $M\hat{A}N=\dfrac{\overset{\frown}{MBN}}{۲}=\dfrac{\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{BQ}+\cdots+\overset{\frown}{DN}}{۲}$

$$=\frac{۶\times ۴۵^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ$$

با استدلال مشابه، اندازهٔ سایر زوایای هشت‌ضلعی AMBQCPDN نیز برابر ۱۳۵° است، پس در این هشت‌ضلعی همهٔ اضلاع با هم و همهٔ زوایا نیز با هم برابرند. لذا این هشت‌ضلعی منتظم است.

۸۵

آ) اندازهٔ هر یک از زوایای داخلی شش‌ضلعی منتظم ABCDEF برابر ۱۲۰° و اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی آن ۶۰° است. بنابراین $P\hat{F}E=P\hat{E}F=۶۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{P}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۶۰^\circ=۶۰^\circ$. با استدلال مشابه $\hat{M}=\hat{N}=۶۰^\circ$ می‌شود، لذا مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.



ب) هر یک از مثلث‌های DNC، PEF و AMB متساوی‌الاضلاع هستند و ضلع آن‌ها با ضلع شش‌ضلعی منتظم ABCDEF برابر است لذا ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع MPN، سه برابر ضلع این مثلث‌ها است هر یک از مثلث‌های فوق با مثلث MNP متشابه با نسبت تشابه $\frac{۱}{۳}$ هستند، بنابراین داریم:

$$S(PEF)=S(DNC)=S(AMB)$$
$$=(\tfrac{۱}{۳})^۲S(MNP)=\tfrac{۱}{۹}S(MNP)$$
$$S(ABCDEF)=S(MNP)-۳S(PEF)$$
$$=S(MNP)-\tfrac{۳}{۹}S(MNP)=\tfrac{۶}{۹}S(MNP)=\tfrac{۲}{۳}S(MNP)$$

پ) مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاع آن برابر ارتفاع مثلث است، بنابراین حاصل $TH+TH'+TH''$ برابر ارتفاع مثلث MNP است.

ت) ارتفاع مثلث MNP را h و ضلع آن را a فرض می‌کنیم، داریم:

$$S(TBC)+S(TDE)+S(TAF)$$
$$=\tfrac{۱}{۲}TH\times BC+\tfrac{۱}{۲}TH'\times DE+\tfrac{۱}{۲}TH''\times AF$$

چون $BC=DE=AF=\frac{a}{۳}$ و $TH+TH'+TH''=h$ می‌باشد، پس داریم:

$$S(TBC)+S(TDE)+S(TAF)=\tfrac{۱}{۲}\times\tfrac{a}{۳}(TH+TH'+TH'')$$
$$=\tfrac{۱}{۳}\times\tfrac{۱}{۲}a\times h=\tfrac{۱}{۳}S(MNP)$$

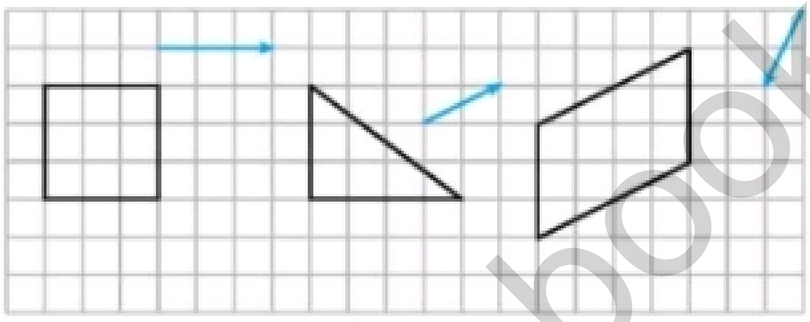
و نهایتاً با استفاده از تساوی فوق و نتیجهٔ قسمت (ب) داریم:

$$S(TAB)+S(TEF)+S(TCD)$$
$$=S(ABCDEF)-S(TBC)-S(TDE)-S(TAF)$$
$$=\tfrac{۲}{۳}S(MNP)-\tfrac{۱}{۳}S(MNP)$$
$$\Rightarrow S(TAB)+S(TEF)+S(TCD)=\tfrac{۱}{۳}S(MNP)$$
$$=S(TBC)+S(TDE)+S(TAF)$$

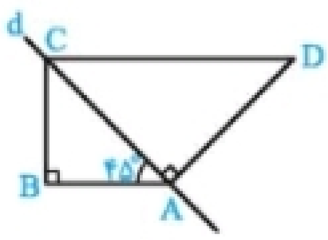
فصل ۲ تبدیل‌های هندسی و کاربردها

قسمت اول: تبدیل‌های هندسی (بازتاب، انتقال، دوران و تجانس)

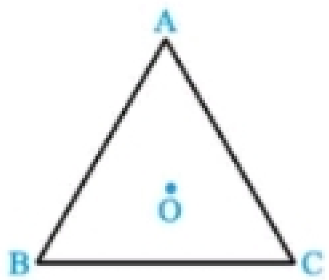
۸۶. تصویر انتقال‌یافتهٔ هر یک از شکل‌های زیر را در امتداد بردار داده‌شده رسم کنید.



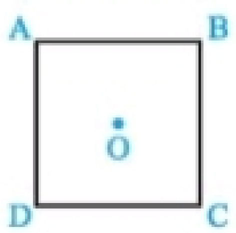
۸۷. تصویر ذوزنقهٔ مقابل را تحت بازتاب نسبت به محور d رسم کنید.



۸۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مطابق شکل مفروض است. اگر O مرکز مثلث باشد، آن‌گاه تصویر مثلث ABC را تحت دوران به مرکز O و زاویهٔ دوران 60° رسم کنید.

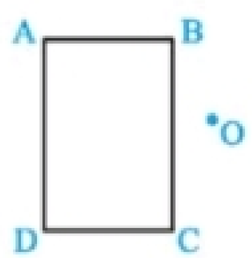


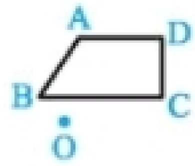
۸۹. مربع ABCD را مطابق شکل روبه‌رو حول مرکز آن و به زاویهٔ 45° دوران دهید و شکل تصویر را رسم کنید.

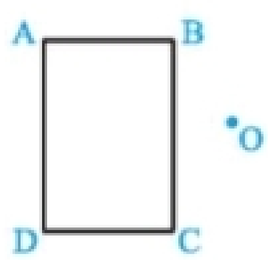


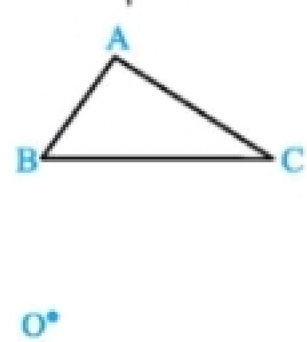
۹۰. در شکل‌های زیر، تصویر شکل را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k رسم کنید.

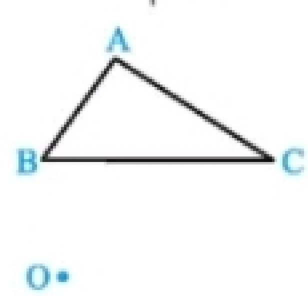
آ) $k=-\frac{1}{3}$ ب) $k=\frac{1}{2}$ پ) $k=1$ ت) $k=-2$ ث) $k=-1$





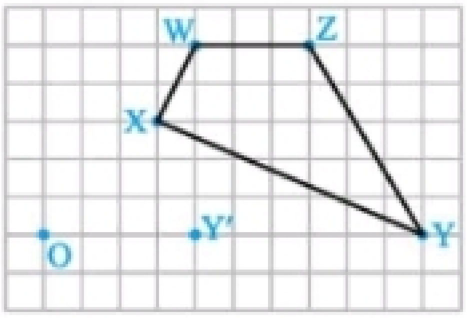






۹۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب					
انتقال					
دوران					
تجانس					



۹۲. در شکل روبه‌رو اگر Y' مجانس Y در تجانس نسبت به مرکز O باشد، تصویر شکل داده‌شده را در این تجانس، کامل کنید.

۹۳. درستی یا نادرستی هر عبارت را در داخل جدول مشخص کنید.

		طولپاست.	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k>1$					
	$k=1$					
	$0<k<1$					
	$-1<k<0$					
	$k=-1$					
	$k<-1$					

۹۴. قضیه: ثابت کنید در هر تبدیل طولپا (ایزومتری)، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه با آن است.

۹۵. ثابت کنید ترکیب هر دو تبدیل طولپا، یک تبدیل طولپا است.

۹۶. قضیه: ثابت کنید هر بازتاب یک تبدیل طولپا است.

۹۷. قضیه: ثابت کنید هر انتقال یک تبدیل طولپا است.

۹۸. قضیه: ثابت کنید هر دوران یک تبدیل طولپا است.

۹۹. قضیه: ثابت کنید تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

۱۰۰. قضیه: ثابت کنید تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

۱۰۱. قضیه: ثابت کنید تجانس هر n ضلعی، یک n ضلعی است که با آن متشابه است. به عبارتی هر دو شکل متجانس، متشابه‌اند.

۱۰۲. با مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

۱۰۳. ثابت کنید ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است.

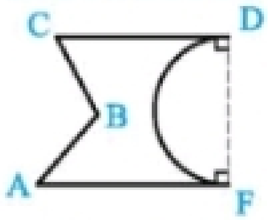
۱۰۴. ثابت کنید ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است.

۱۰۵. دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

آ) $k=2$ ب) $k=-2$ پ) $k=\frac{1}{2}$

۱۰۶. دو دایرهٔ متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، $(R>R')$ داریم. مراکز تجانس دو دایره را به‌دست آورید.

قسمت دوم: کاربرد تبدیل‌ها



۱۰۷. دور زمین مقابل مطابق شکل حصارکشی شده است، چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟ (کمان DF نیم‌دایره به قطر DF می‌باشد.)

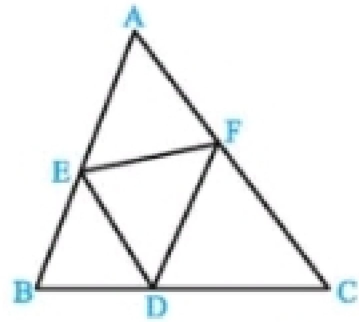
۱۰۸. خط d و دو نقطهٔ A و B در دو طرف آن مفروضند. نقطهٔ M را روی d چنان تعیین کنید که $MA+MB$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۰۹. خط d و دو نقطهٔ A و B یک طرف آن مفروضند. نقطهٔ M را روی d چنان تعیین کنید که $|MA-MB|$ بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

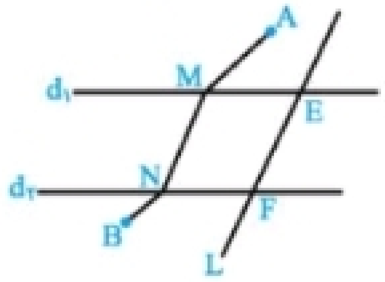
۱۱۰. خط d و دو نقطهٔ A و B دو طرف آن مفروضند. نقطهٔ M را روی d چنان تعیین کنید که $|MA-MB|$ بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۱۱. نقاط ثابت A و B روی خط n و نقطهٔ M روی خط m قرار دارند. به طوری‌که $m \parallel n$. نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $MA+MB$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

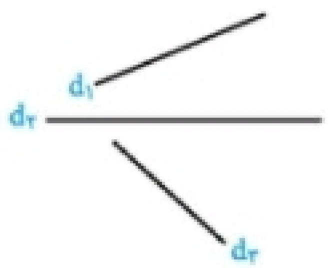
۱۱۲. مثلث ABC مطابق شکل مفروض است. نقطهٔ معلوم D را روی ضلع BC در نظر می‌گیریم. مثلث DEF را چنان رسم کنید که محیط آن کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.



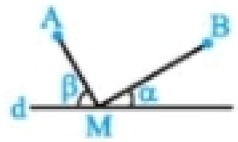
۱۱۳. دو خط موازی d_1 و d_2 مفروضند. خط معلوم L آن‌ها را در نقاط E و F قطع کرده است. نقاط A و B در طرفین خط‌های d_1 و d_2 قرار دارند. نقاط M و N را روی این خط‌ها چنان تعیین کنید که $MN \parallel L$ باشد و مسیر $AMNB$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.



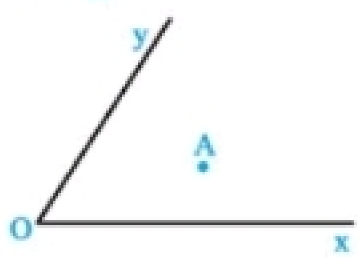
۱۱۴. سه خط d_1، d_2 و d_3 مطابق شکل مفروضند. خطی عمود بر d_2 رسم کنید که خط‌ها را به ترتیب در نقاط A، B و C قطع کند و داشته باشیم $AB = BC$



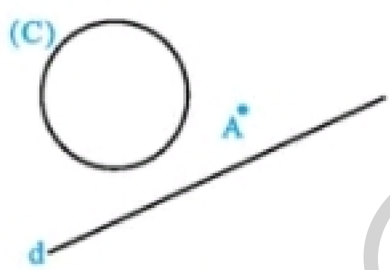
۱۱۵. دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d مفروضند. روی این خط نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $\beta = 2\alpha$



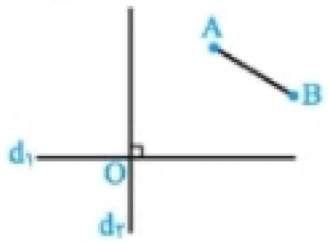
۱۱۶. نقطهٔ A داخل زاویهٔ xOy داده شده است. به کمک دوران، پاره‌خطی چنان رسم کنید که A وسط آن، یک سر آن روی Ox و سر دیگرش روی Oy باشد.



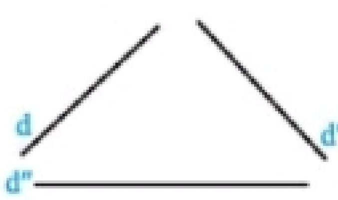
۱۱۷. دایرهٔ (C)، نقطهٔ A و خط d مطابق شکل مفروضند. به کمک دوران، پاره‌خطی چنان رسم کنید که A وسط آن، یک سر آن روی دایره و سر دیگرش روی خط d واقع باشد.



۱۱۸. مطابق شکل دو خط d_1 و d_2 بر هم عمودند. به کمک تبدیل انتقال پاره‌خطی رسم کنید که دو سر آن روی خط‌های d_1 و d_2 و اندازهٔ آن برابر طول پاره‌خط معلوم AB باشد.



۱۱۹. سه خط دوبه‌دو ناموازی d، d' و d'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول $a > 0$ رسم کنید که دو سر آن روی d و d' بوده و موازی d'' باشد.



۱۲۰. مطابق شکل دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ A یک طرف خط d قرار دارند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که مجموع فواصل آن از نقطهٔ A و نقاط دایره، کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

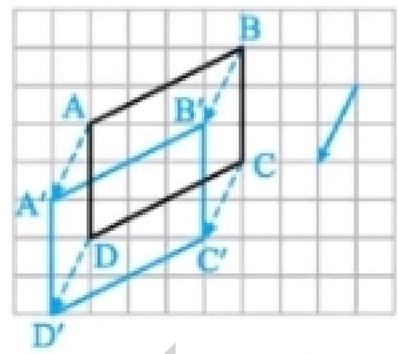
۱۲۱. فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت تجانس $k = -\frac{1}{2}$ باشد.

آ) وضعیت رأس‌های A'، B' و C' را نسبت به مثلث ABC تعیین کنید. ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

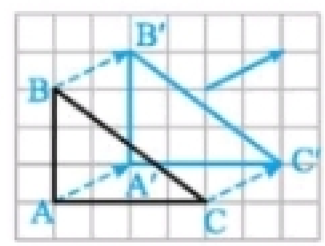
پاسخ فصل ۲ تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۸۶

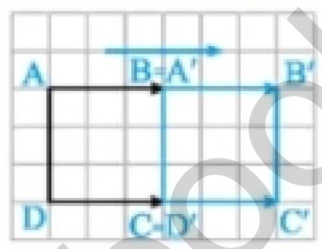
آ)



ب)

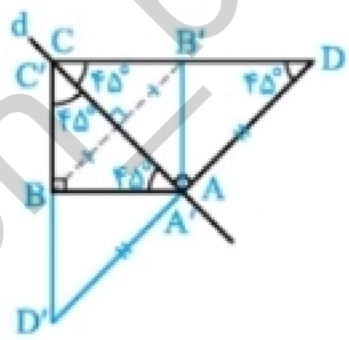


پ)



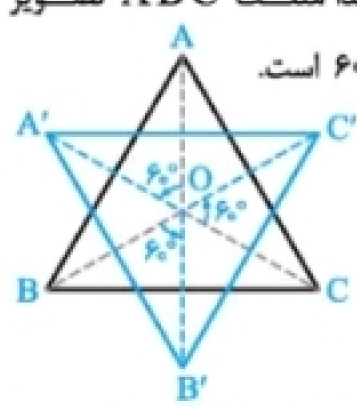
۸۷

با توجه به زاویه‌های داده‌شده تصویر B روی CD قرار می‌گیرد و تصویر D روی امتداد BC. پس تصویر ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ است.



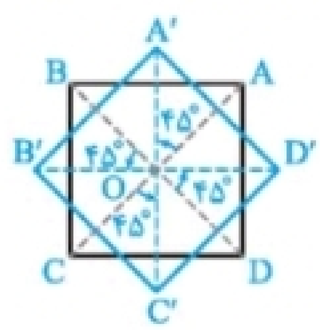
۸۸

اندازهٔ زاویهٔ AOB برابر 120° است و امتداد OC این زاویه را نصف می‌کند. اگر OC را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم نتیجه می‌شود $OA=OA'$ و $A\hat{O}A'=60^\circ$، پس A' تصویر A در دوران به مرکز O و زاویهٔ 60° است. با استدلال مشابه B' تصویر B و C' تصویر C در این دوران می‌باشند، لذا مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC در دوران به مرکز O و زاویهٔ 60° است.



۸۹

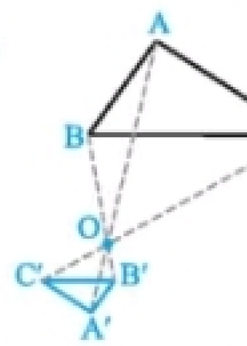
اگر OA' را عمود بر AB رسم کنیم و طول آن را برابر OA جدا کنیم در این صورت A' تصویر A در دوران به مرکز O و زاویهٔ 45° است. با انجام عمل مشابه، B'، C' و D' تصاویر رأس‌های B، C و D به‌دست می‌آیند.



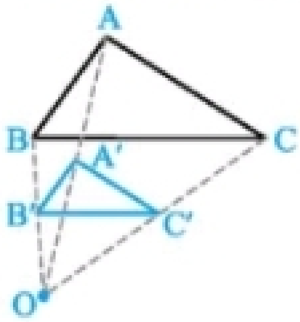
پس مربع $A'B'C'D'$ تصویر مربع ABCD در دوران به مرکز O و زاویهٔ 45° است.

۹۰

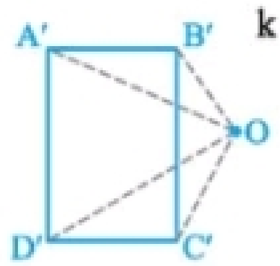
آ) $k=-\frac{1}{3}$



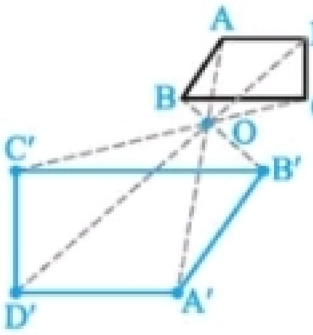
ب) $k=\frac{1}{2}$



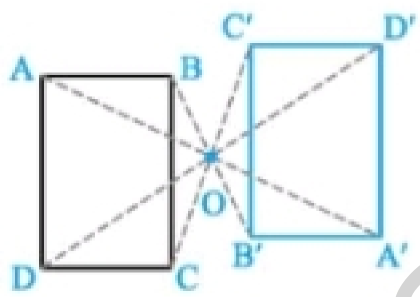
پ) $k=1$



ت) $k=-2$



ث) $k=-1$

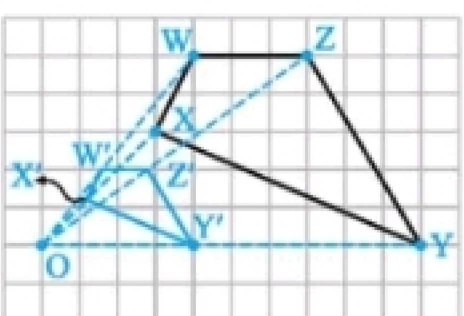


۹۱

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب	درست	درست	نادرست	نادرست	درست
انتقال	درست	درست	درست	درست	درست
دوران	درست	درست	نادرست	درست	درست
تجانس	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

۹۲

O را به X وصل می‌کنیم از Y' به موازات YX رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی این خط با OX جای تصویر X یعنی X' است، به طریق مشابه تصویر رأس‌های Z و W به‌دست می‌آید و چهارضلعی $X'Y'Z'W'$ تصویر چهارضلعی XYZW در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{OY'}{OY}=\frac{4}{10}$ است.

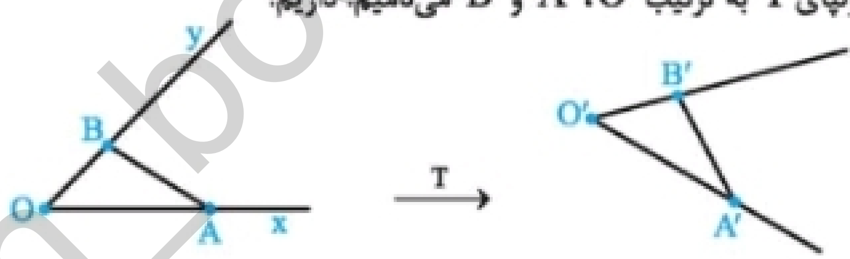


۹۳

		طولپاست.	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k>1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
	$k=1$	درست	درست	درست	درست	درست
	$0<k<1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
	$-1<k<0$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
	$k=-1$	درست	درست	درست	درست	درست
	$k<-1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

۹۴

زاویهٔ xOy و نقاط دلخواه A و B را به ترتیب روی نیم‌خط‌های Ox و Oy در نظر می‌گیریم. تصاویر نقاط O، A و B را تحت تبدیل طولپای T به ترتیب O'، A' و B' می‌نامیم. داریم:



$T(OB)=O'B' \Rightarrow OB=O'B'$

$T(OA)=O'A' \Rightarrow OA=O'A'$

$T(AB)=A'B' \Rightarrow AB=A'B'$

$(OB=O'B'\,,\,OA=O'A'\,,\,AB=A'B')$

$\xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'O'B'} \Rightarrow \widehat{O}=\widehat{O'}$

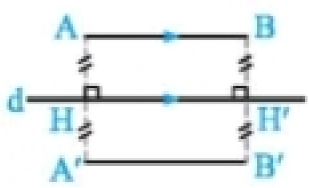
۹۵

دو تبدیل طولپای T و F را در نظر می‌گیریم. اگر $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB تحت تبدیل F باشد، در این صورت $AB=A'B'$ است. تصویر پاره‌خط $A'B'$ را تحت تبدیل T، $A''B''$ می‌نامیم. در نتیجه $A'B'=A''B''$، بنابراین $AB=A''B''$ و این یعنی تصویر پاره‌خط AB تحت تبدیل TOF با آن هم‌اندازه است. پس تبدیل TOF طولپا است.

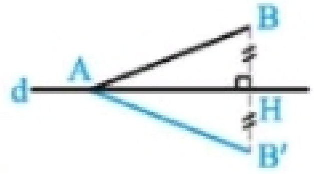
۹۶

بازتاب به محور d و پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. اگر AB بر خط d منطبق باشد، تصویر AB بر خودش منطبق می‌شود و حکم برقرار است.

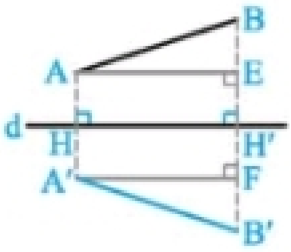
آ) فرض کنیم $AB \parallel d$ باشد، در این صورت چهارضلعی $ABB'A'$ یک مستطیل است و در نتیجه اضلاع مقابل آن برابرند $(AB=A'B')$.



ب) فرض کنیم یک سر پاره‌خط AB روی d باشد. در این صورت خط d عمودمنصف پاره‌خط BB' است، لذا $AB=A'B'$.



پ) فرض کنیم پاره‌خط AB با خط d نه موازی و نه متقاطع باشد. عمودهای AE و $A'F$ را رسم می‌کنیم. چهارضلعی‌های $AEH'H$، $A'HH'F$ و $AEFA'$ مستطیل هستند، پس می‌توان نوشت:

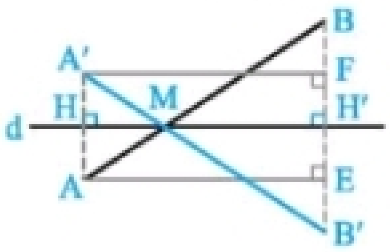


$AH=A'H \Rightarrow EH'=FH'$

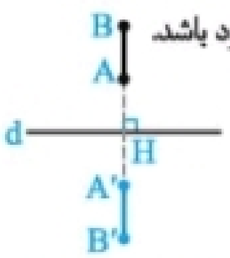
$BH'=B'H' \Rightarrow BH'-EH'=B'H'-FH' \Rightarrow BE=B'F$

از طرفی $AE=A'F$ لذا دو مثلث قائم‌الزاویه AEB و $A'FB'$ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند و در نتیجه $AB=A'B'$ می‌شود.

ت) فرض کنیم پاره‌خط AB و خط d در نقطه‌ای مانند M متقاطع باشند. استدلال همانند قسمت (پ) می‌باشد. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و $A'B'F$ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند، پس $AB=A'B'$



ث) و نهایتاً فرض کنیم راستای پاره‌خط AB بر خط d عمود باشد.



$BH=B'H \quad , \quad AH=A'H$

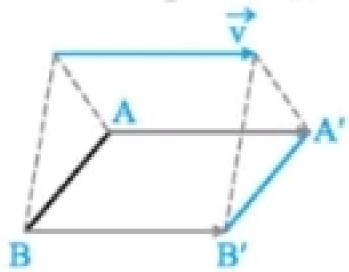
$\xrightarrow{\text{تفاضل}} BH-AH=B'H-A'H$

$\Rightarrow AB=A'B'$

۹۷

انتقال با بردار $\vec{v}$ را در نظر می‌گیریم:

آ) فرض کنیم پاره‌خط AB و بردار $\vec{v}$ موازی نباشند. تصویر پاره‌خط AB در این انتقال پاره‌خط $A'B'$ می‌باشد. چون AA' و BB' موازی و مساوی‌اند، پس چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است. لذا $AB=A'B'$ می‌باشد.



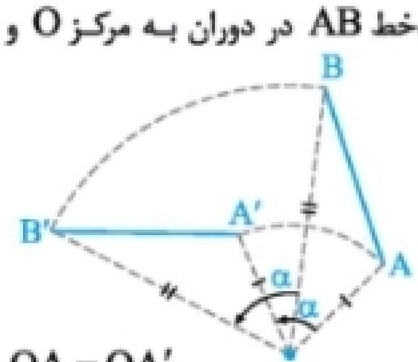
ب) فرض کنیم پاره‌خط AB و بردار $\vec{v}$ هم‌راستا باشند. تصویر پاره‌خط AB در این مثال پاره‌خط $A'B'$ است و داریم:

$AA'=BB' \Rightarrow AB+BA'=BA'+A'B' \Rightarrow AB=A'B'$

۹۸

فرض کنیم پاره‌خط $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB در دوران به مرکز O و زاویهٔ دوران α باشد.

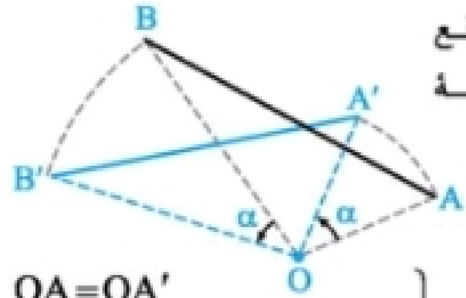
آ) اگر O مرکز دوران بر پاره‌خط AB واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $A\widehat{O}B$ بیش‌تر باشد:



$$\left.\begin{array}{l} OA=OA' \\ A\widehat{O}B=A'\widehat{O}B'=\alpha-A'\widehat{O}B \\ OB=OB' \end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'OB'} \Rightarrow AB=A'B'$

ب) اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویهٔ دوران از زاویهٔ $A\hat{O}B$ کم‌تر باشد، داریم:

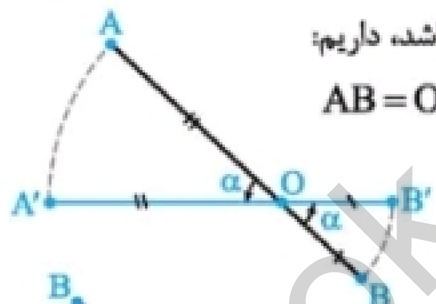


$$\left.\begin{array}{l}OA=OA'\\ A\hat{O}B=A'\hat{O}B'=\alpha+A'\hat{O}B\\ OB=OB'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض‌زض)}}\overset{\Delta}{AOB}\cong\overset{\Delta}{A'OB'}$$

$$\Rightarrow AB=A'B'$$

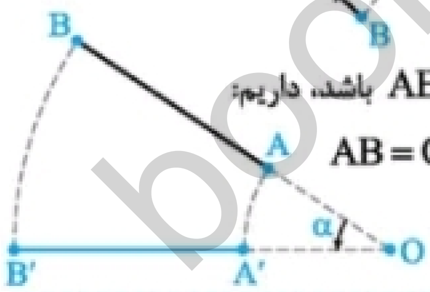
پ) اگر نقطهٔ O روی پاره‌خط AB باشد، داریم:

$$AB=OA+OB=OA'+OB'=A'B'$$



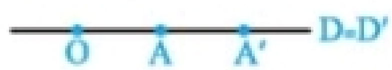
ت) اگر نقطهٔ O روی امتداد پاره‌خط AB باشد، داریم:

$$AB=OB-OA=OB'-OA'=A'B'$$

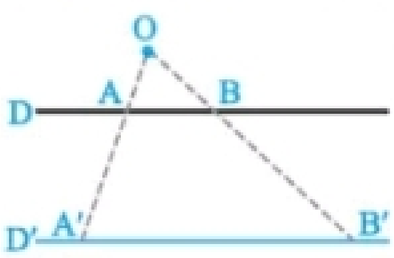


۹۹

آ) اگر مرکز تجانس یعنی نقطهٔ O روی خط D باشد، در این صورت تصویر خط D در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k بر خودش منطبق است، پس شیب خط تغییر نمی‌کند.



ب) اگر مرکز تجانس غیرواقع بر خط D باشد آن‌گاه A' و B' تصاویر دو نقطهٔ دلخواه از خط D در این تجانس را به‌دست می‌آوریم و خط شامل A' و B' را رسم می‌کنیم. داریم:



$$OA'=kOA\ ,\ OB'=kOB\Rightarrow\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$$

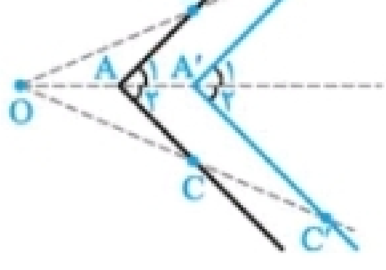
پس بنابه عکس قضیهٔ تالس در مثلث $OA'B'$ نتیجه می‌شود:

$$AB\parallel A'B'$$

بنابراین دو خط D و D' موازیند و تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

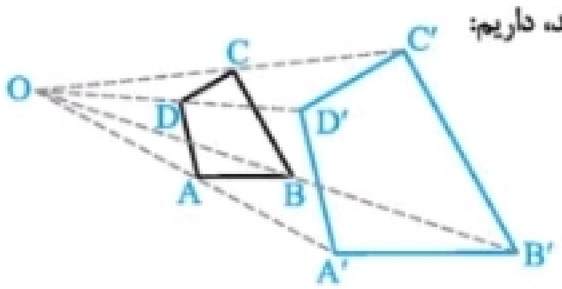
۱۰۰

برای رسم تصویر زاویهٔ $B\hat{A}C$ در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k، رأس زاویه و دو ضلع آن را تصویر می‌کنیم، زاویهٔ $B'\hat{A'}C'$ به‌دست می‌آید. اما تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. پس بنابه قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{A}_1=\hat{A'}_1$ و $\hat{A}_2=\hat{A'}_2$ و با جمع این دو تساوی داریم $B\hat{A}C=B'\hat{A'}C'$



۱۰۱

فرض کنیم $A'B'C'D'...$ تصویر n ضلعی $ABCD...$ در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، داریم:



$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}}AB\parallel A'B'$$

$$\Rightarrow\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=k$$

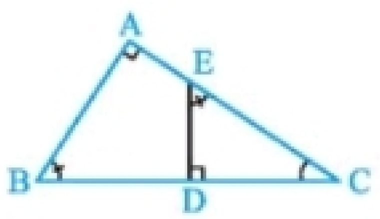
و با استدلال مشابه داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\dots=k$$

از طرفی هر زاویه مانند $A\hat{B}C$ از n ضلعی اول با زاویهٔ مجانس خود $A'\hat{B'}C'$ در n ضلعی تصویر، برابر است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\dots=k\\ \hat{A}=\hat{A'}\ ,\ \hat{B}=\hat{B'}\ ,\ \hat{C}=\hat{C'}\ ,\dots\end{array}\right\}\Rightarrow ABCD\dots\sim A'B'C'D'\dots$$

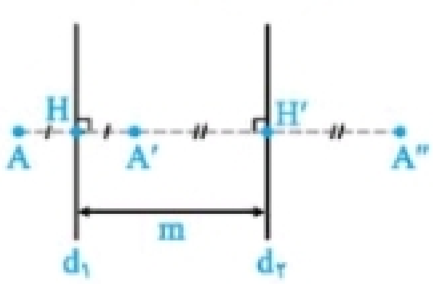
۱۰۲



در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و DEC متشابه هستند، اما مجانس یکدیگر نیستند. زیرا اضلاع نظیر در آن‌ها موازی نمی‌باشد.

۱۰۳

دو بازتاب با محورهای موازی d_1 و d_2 را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه A را ابتدا تحت بازتاب نسبت به بازتاب با محور d_1 تصویر می‌کنیم. نقطهٔ A' به‌دست می‌آید، سپس A' را تحت بازتاب نسبت به محور d_2 تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A'' به‌دست می‌آید. اگر فاصلهٔ دو خط d_1 و d_2 برابر m باشد، داریم:



$$AA''=AA'+A'A''=2A'H+2A'H'$$

$$=2(A'H+A'H')=2HH'=2m$$

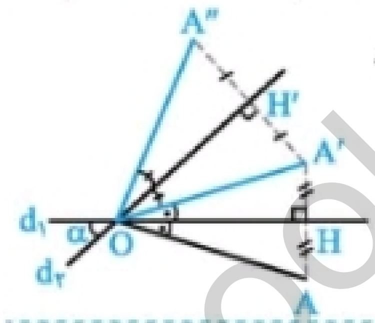
بنابراین می‌توان گفت A'' تصویر نقطهٔ A در انتقال به بردار $\vec{v}$ است که این بردار طولش مقدار معلوم 2m و راستای آن عمود بر راستای خط‌های معلوم d_1 و d_2 است و جهت آن از خط d_1 به d_2 می‌باشد.

۱۰۴

دو بازتاب با محورهای متقاطع d_1 و d_2 را در نظر می‌گیریم، نقطهٔ دلخواه A را ابتدا تحت بازتاب نسبت به محور d_1 تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A' به‌دست می‌آید. سپس A' را تحت بازتاب نسبت به محور d_2 تصویر می‌کنیم، نقطهٔ A'' حاصل می‌شود. چون d_1 عمودمنصف AA' و d_2 عمودمنصف $A'A''$ است، پس $OA = OA' = OA''$، از طرفی اگر زاویهٔ بین دو خط d_1 و d_2 را α فرض کنیم، داریم:

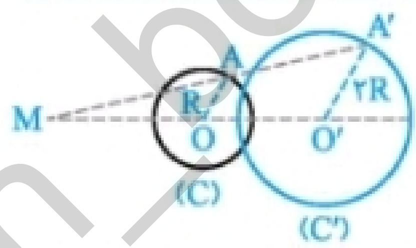
$$A\hat{O}A'' = A\hat{O}A' + A'\hat{O}A'' = 2H\hat{O}A' + 2A'\hat{O}H'$$
$$= 2(H\hat{O}A' + A'\hat{O}H') = 2H\hat{O}H' = 2\alpha$$

بنابراین می‌توان گفت A'' تصویر A در دوران به مرکز O و زاویهٔ 2α است.



۱۰۵

آ) ابتدا تصویر مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس ۲ به‌دست می‌آوریم و آن را O' می‌نامیم.

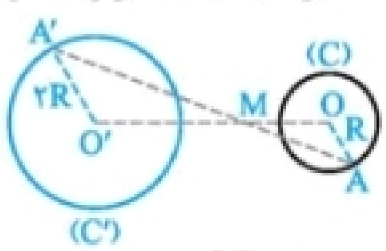


نقطهٔ دلخواه A را روی دایرهٔ (C) در نظر می‌گیریم، تصویر آن در این تجانس را A' می‌نامیم. داریم:

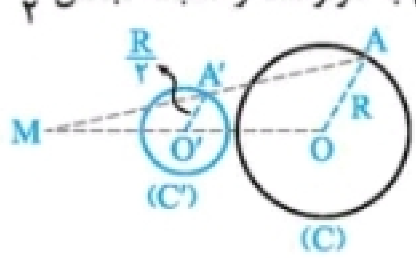
$$\frac{MO'}{MO} = \frac{MA'}{MA} = 2 \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} OA \parallel O'A'$$
$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{O'A'}{OA} = 2 \Rightarrow O'A' = 2R$$

بنابراین نقطهٔ A' از نقطهٔ معلوم O' به فاصلهٔ ثابت $2R$ قرار دارد، لذا تصویر دایرهٔ $C(O,R)$ در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس ۲ دایرهٔ (C') به مرکز O' و شعاع $2R$ است.

ب) ابتدا تصویر مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس ۲- می‌یابیم و آن را O' می‌نامیم. تصویر نقطهٔ دلخواه A از دایرهٔ (C) را در این تجانس A' می‌نامیم مانند قسمت قبل نتیجه می‌شود $OA \parallel O'A'$ و $O'A' = 2R$. پس تصویر دایرهٔ $C(O,R)$ در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس ۲- دایرهٔ (C') به مرکز O' و شعاع $2R$ است.

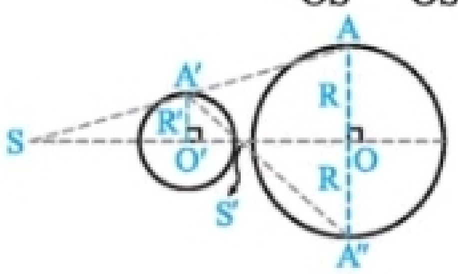


پ) مطابق شکل تصویر نقطهٔ O در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $k = \frac{1}{2}$ نقطهٔ O' است. مطابق آن‌چه در دو قسمت قبل گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت که اگر دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $\frac{R}{2}$ رسم کنیم، این دایره تصویر دایرهٔ (C) در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ خواهد بود.



۱۰۶

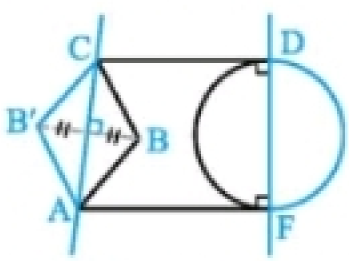
مطابق شکل شعاع $O'A'$ را موازی قطر AA'' رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی امتداد AA' با خط‌المرکزین دو دایره را S و نقطهٔ تلاقی پاره‌خط $A'A''$ با خط‌المرکزین را S' می‌نامیم. S و S' به ترتیب مراکز تجانس‌های مستقیم و معکوس دو دایره هستند که طول پاره‌خط OO' را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کنند $\left(\frac{O'S}{OS} = \frac{O'S'}{OS'} = \frac{R'}{R}\right)$.



اما در فصل یک ثابت کردیم نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین و هم‌چنین نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین همرسند و OO' را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کنند. پس S و S' همان نقاط همرسی مذکور می‌باشند.

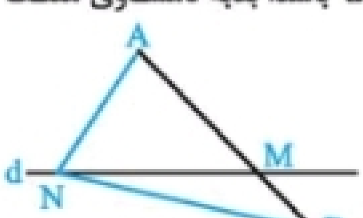
۱۰۷

پاره‌خط‌های AB و BC را تحت بازتاب نسبت به محور خط AC تصویر می‌کنیم. هم‌چنین نیم‌دایرهٔ DF را تحت بازتاب نسبت به محور DF تصویر می‌کنیم، شکل حاصل محیطش با محیط شکل داده‌شده برابر است، اما مساحت آن زیاد شده است.



۱۰۸

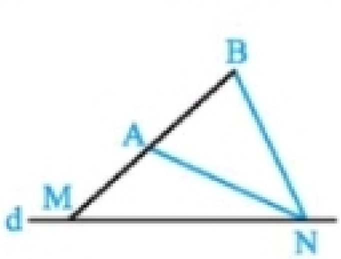
نقطهٔ تلاقی پاره‌خط AB و خط d را M می‌نامیم، $MA + MB$ جواب است. زیرا اگر N نقطه‌ای دلخواه روی خط d باشد. بنابه نامساوی مثلث در مثلث ANB داریم:



$$NA + NB > AB \Rightarrow NA + NB > MA + MB$$
$$\xrightarrow{\text{N می‌تواند بر M منطبق شود.}} NA + NB \geq MA + MB$$

۱۰۹

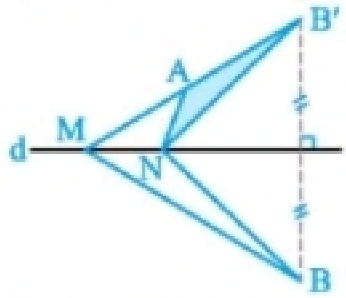
نقطهٔ تلاقی امتداد پاره‌خط AB و خط d را M می‌نامیم، $|MA - MB|$ بیش‌ترین مقدار خود را دارد، زیرا اگر N نقطه‌ای دلخواه روی خط d باشد، بنابه نامساوی مثلث در مثلث ABN داریم:



$$|NA - NB| < AB \Rightarrow |NA - NB| < MB - MA$$
$$\xrightarrow{\text{N می‌تواند بر M منطبق شود.}} |NA - NB| \leq MB - MA$$

۱۱۰

قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به خط d به‌دست می‌آوریم و آن را B' می‌نامیم. نقطهٔ تلاقی امتداد AB' با خط d را M می‌نامیم، داریم $MB = MB'$، اگر N نقطه‌ای دلخواه روی خط d باشد، آن‌گاه $NB = NB'$. بنابه نامساوی مثلث در مثلث NAB' داریم:



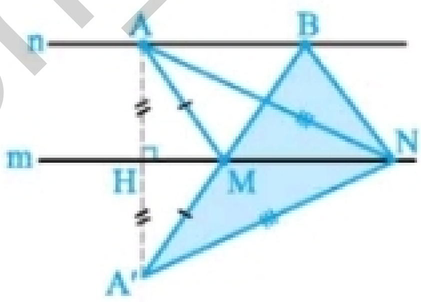
$$|NA - NB| = |NA - NB'| < AB'$$

$$\xrightarrow{AB'=MB'-MA=MB-MA} |NA - NB| < MB - MA$$

اگر N بر M منطبق شود در این‌صورت $NA = MA$ و $NB = MB$، در نتیجه $|NA - NB| = MB - MA$ می‌شود. پس برای هر نقطهٔ دلخواه N روی خط d داریم $|NA - NB| \le MB - MA$ و این یعنی ماکزیمم مقدار $|NA - NB|$ در نقطهٔ M اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر $MB' - MA = AB'$ است.

۱۱۱

A' تصویر A تحت بازتاب نسبت به محور m می‌باشد. نقطهٔ تلاقی خط m و پاره‌خط $A'B$ را M می‌نامیم. برای هر نقطهٔ دلخواه N روی خط m داریم:



$$NA + NB = NA' + NB > A'B$$

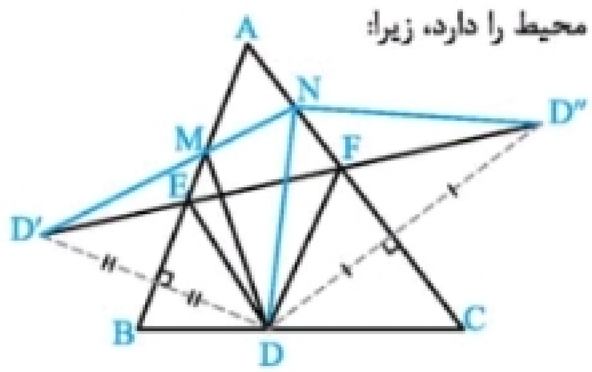
$$\Rightarrow NA + NB > MA' + MB$$

$$\Rightarrow NA + NB > MA + MB$$

چون N می‌تواند بر M منطبق شود پس می‌توان نوشت $NA + NB \ge MA + MB$ و این یعنی کم‌ترین مقدار $NA + NB$ برابر $MA + MB$ است. در این‌جا چون $AB \parallel m$ است نتیجه می‌شود $MB = MA'$ و $MB = MA$، یعنی نقطهٔ M محل تلاقی عمودمنصف پاره‌خط AB با خط m است.

۱۱۲

تصاویر نقطهٔ D را تحت بازتاب‌های به محورهای AB و AC به ترتیب D' و D'' می‌نامیم، خط $D'D''$ اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. مثلث DEF از میان همهٔ مثلث‌های دلخواه DMN کم‌ترین محیط را دارد، زیرا:

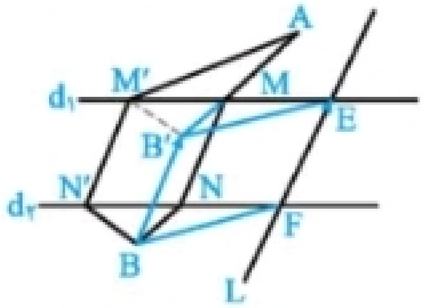


$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط مثلث } DMN = MD + MN + ND \\ = MD' + MN + ND'' > D'D'' \\ D'D'' = D'E + EF + D''F = DE + EF + DF = \text{محیط مثلث } DEF \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } DMN > \text{محیط مثلث } DEF$$

۱۱۳

انتقال با بردار $\vec{v}$ که طول آن برابر طول پاره‌خط EF و راستای آن موازی خط L و جهت آن از F به E است را در نظر می‌گیریم.



در این انتقال نقطهٔ B را تصویر می‌کنیم، نقطهٔ B' به‌دست می‌آید، B' را به A وصل می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی خط d_1 و AB' را M می‌نامیم از M خطی موازی L رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن با خط d_2 را N می‌نامیم. N را به B وصل می‌کنیم. مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین است. زیرا اگر مسیر دیگری مانند $AM'N'B$ را در نظر بگیریم به کمک متوازی‌الاضلاع‌های $BB'M'N'$ و $BNMB'$ داریم:

$$AM' + M'N' + BN' = AM' + M'B' + M'N' > AB' + M'N'$$

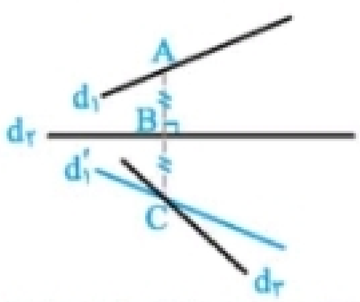
$$\Rightarrow AM' + M'N' + BN' > AM + MB' + M'N'$$

$$\Rightarrow AM' + M'N' + BN' > AM + BN + MN$$

$$\Rightarrow \text{مسیر } AM'N'B > \text{مسیر } AMNB$$

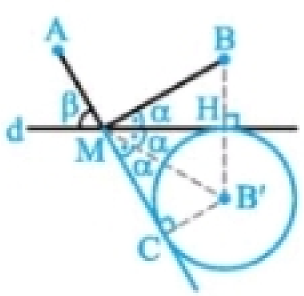
۱۱۴

بازتاب خط d_1 را نسبت به خط d_2 رسم می‌کنیم و آن را خط d_1' می‌نامیم. نقطهٔ تلاقی دو خط d_1' و d_3 را C می‌نامیم و از C خطی بر d_2 عمود می‌کنیم نقطهٔ تلاقی آن با خط d_2 را B و نقطهٔ تلاقی آن با خط d_1 را A می‌نامیم. داریم $AB = BC$



۱۱۵

قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به خط d رسم می‌کنیم آن را B' می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز B' و شعاع $B'H$ رسم می‌کنیم که در نقطهٔ H بر خط d مماس است. از نقطهٔ A خط مماس AC را بر دایرهٔ مذکور رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی خط d و مماس فوق را M می‌نامیم. داریم:

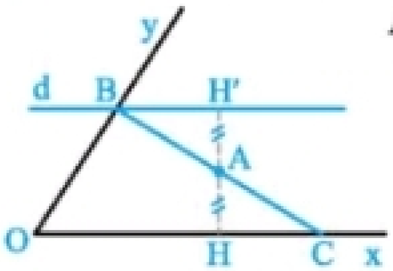


$$B\widehat{M}H = B'\widehat{M}H = B'\widehat{M}C = \alpha$$

و بنابه زاویه‌های متقابل به رأس در نقطهٔ M نتیجه می‌شود $\beta = 2\alpha$

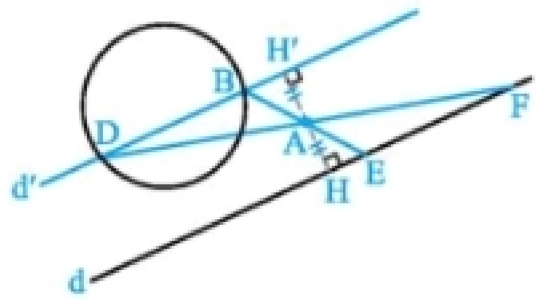
۱۱۶

خط شامل نیم‌خط Ox را در دوران به مرکز A و زاویهٔ 180° تصویر می‌کنیم، خط d به‌دست می‌آید. نقطهٔ تلاقی خط d و نیم‌خط Oy را B می‌نامیم. B را به A وصل کرده، آن را امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ C قطع کند، داریم $AB = AC$



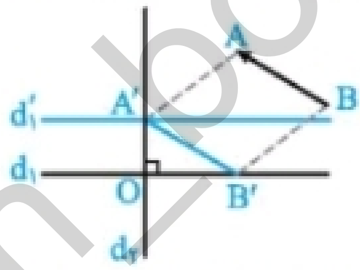
۱۱۷

خط d را به مرکز A و زاویهٔ °۱۸۰ دوران می‌دهیم، خط d' به‌دست می‌آید. نقطه یا نقاط تلاقی خط d' با دایرهٔ (C) را B و D می‌نامیم از B و D به نقطهٔ A وصل می‌کنیم، پاره‌خط‌های حاصل را امتداد می‌دهیم تا خط d را در نقاط E و F قطع کنند، داریم $AB = AE$ و $AD = AF$



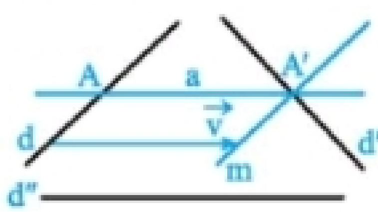
۱۱۸

خط d_1 را تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{BA}$ تصویر می‌کنیم خط d_1' به‌دست می‌آید، نقطهٔ تلاقی این خط و خط d_2 را A' می‌نامیم و از A' خطی موازی AB رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط d_1 را B' می‌نامیم، پاره‌خط $A'B'$ جواب است.



۱۱۹

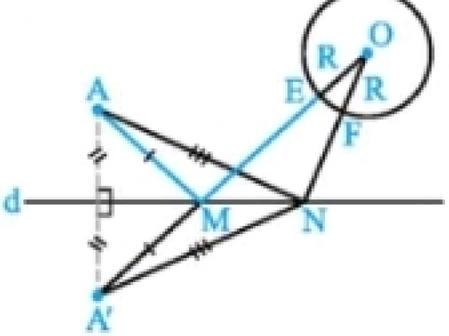
خط d را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ که طول آن a و موازی خط d'' است، تصویر می‌کنیم، خط m به‌دست می‌آید. چون d و d' موازی نیستند دو خط m و d' یکدیگر را در نقطهٔ A' قطع می‌کنند. از A' خطی موازی d'' رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با خط d را A می‌نامیم. پاره‌خط AA' جواب است.



تذکر اگر جهت بردار خلاف حالت فوق باشد باز هم مسئله دارای جواب است.

۱۲۰

تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به محور d را A' می‌نامیم. نقطه‌های تلاقی OA' با خط d و دایرهٔ (C) را به ترتیب M و E می‌نامیم. اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، امتداد OF خط d را در N قطع می‌کند. داریم:



$$NA + NF + OF = NA' + ON \geq OA'$$

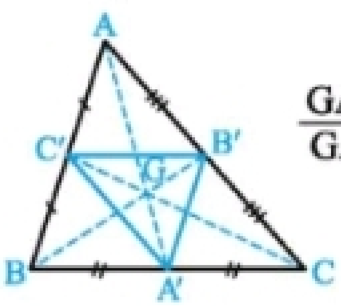
$$\Rightarrow NA + NF + \underbrace{OF}_{R} \geq \underbrace{MA'}_{MA} + ME + \underbrace{OE}_{R}$$

$$\Rightarrow NA + NF \geq MA + ME$$

پس $MA + ME$ کم‌ترین مقدار $NA + NF$ است.

۱۲۱

آ) می‌دانیم G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC، میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



$$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{GC'}{GC} = \frac{1}{2}$$

چون نقاط A، G و A' روی یک امتدادند و A و A' دو طرف G قرار دارند و $GA' = \frac{1}{2}GA$ است، پس می‌توان گفت A' تصویر A در تجانس به مرکز G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است. با استدلال مشابه B' تصویر B و C' تصویر C و مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC در این تجانس است. پس رأس‌های A'، B' و C' وسط اضلاع مثلث ABC قرار دارند.

ب) $S(A'B'C') = k^2 S(ABC) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 S(ABC) = \frac{1}{4} S(ABC)$

فصل ۳ روابط طولی در مثلث

قسمت اول: قضیهٔ سینوس‌ها

۱۲۲. جای خالی را با عبارت مناسب، پر کنید.

آ) اگر در مثلث ABC، $\widehat{A}=۶۰$ و $R=۲\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع BC، .... است.

ب) اگر در مثلث ABC، $\widehat{A}=۴۵^\circ$ و $BC=۵$ باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محیطی مثلث .... است.

پ) در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایرهٔ محیطی .... وتر است.

ت) در مثلث ABC، اگر $\sin B=۴\sin C$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{b}{c}$ برابر .... است.

۱۲۳. تعیین کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) در هر مثلث نسبت هر ضلع به سینوس زاویهٔ آن ضلع برابر شعاع دایرهٔ محیطی است.

ب) در مثلث به اضلاع ۱، ۱ و $\sqrt{۲}$ اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

پ) در مثلثی که اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ۲ است، نسبت هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ت) اگر در مثلثی $\widehat{A}=۴۵^\circ$ و $\widehat{B}=۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ است.

۱۲۴. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابل به آن ضلع، برابر است با وتر.

۱۲۵. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی.

۱۲۶. قضیهٔ سینوس‌ها را ثابت کنید.

«در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی.»

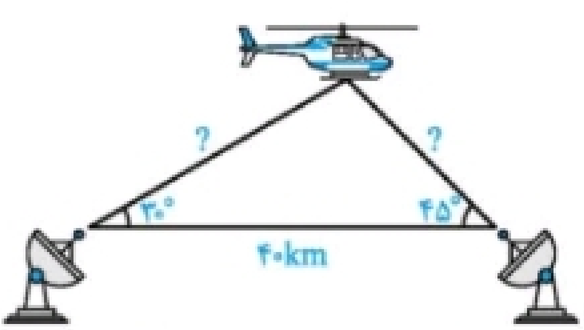
۱۲۷. اگر در مثلث ABC، $b=۶\sqrt{۲}$، $c=۴\sqrt{۳}$ و $\widehat{C}=۴۵^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید.

۱۲۸. در مثلث ABC، $BC=۱۸$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر $\frac{۴۵}{۴}$ است، مقدار $\sin A$ را محاسبه کنید.

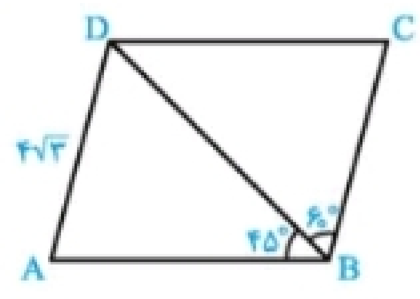
۱۲۹. اگر در مثلثی $\widehat{A}=۶۰^\circ$، $\widehat{B}=۷۵^\circ$ و $a=۲\sqrt{۲}$، آن‌گاه اندازهٔ اضلاع b و c را به‌دست آورید. (از مثلثات می‌دانیم $\sin ۷۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$)

۱۳۰. یک بالگرد به وسیلهٔ دو ایستگاه رادار که ۴۰ کیلومتر از هم فاصله دارند، با زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° رصد شده است. فاصلهٔ بالگرد را از دو ایستگاه رادار به‌دست آورید.

(از مثلثات می‌دانیم $\sin ۱۰۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$)



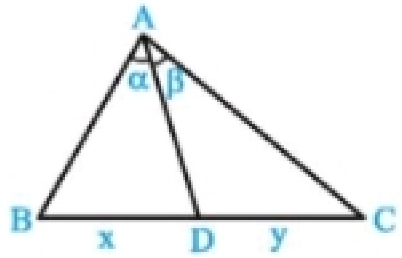
۱۳۱. محیط متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را مطابق شکل بیابید.



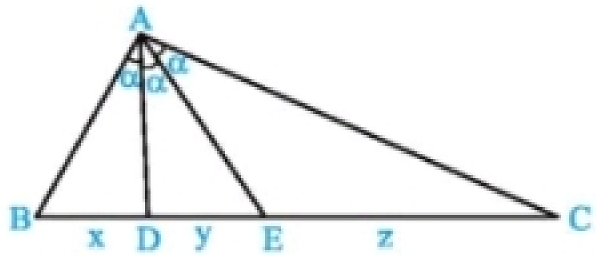
۱۳۲. ثابت کنید در هر مثلث ABC، تساوی $a\sin A + b\sin B + c\sin C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$ برقرار است.

۱۳۳. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$، آن‌گاه ثابت کنید مثلث، قائم‌الزاویه است.

۱۳۴. در مثلث ABC مطابق شکل روبه‌رو ثابت کنید $\frac{y}{x} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \times \frac{\sin B}{\sin C}$



۱۳۵. در مثلث مقابل ثابت کنید $\cos^2\alpha = \frac{(y+x)(y+z)}{4xz}$



قسمت دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها

۱۳۶. جای خالی را با عبارت مناسب، پر کنید.

آ) در مثلث ABC، مقدار $\cos A$ بر حسب اندازهٔ اضلاع برابر .... است.

ب) در مثلث ABC، $a = 3$، $c = 4$ و $\cos B = \frac{1}{4}$ است. اندازهٔ b برابر .... می‌باشد.

پ) در مثلث به اضلاع $a = 4$، $b = 6$ و $c = 8$، طول میانهٔ نظیر ضلع کوچک‌تر برابر .... است.

ت) مثلث به اضلاع ۹، ۶ و ۷ .... است.

۱۳۷. تعیین کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

آ) اگر در مثلث ABC، $\widehat{A} = 135^\circ$، آن‌گاه $a^2 + bc = b^2 + c^2$ است.

ب) اگر در مثلث ABC، $\widehat{A} = 30^\circ$، آن‌گاه $a^2 + \sqrt{3}\,bc = b^2 + c^2$ است.

پ) مثلث به اضلاع ۷، ۲۴ و ۲۵ حاده‌الزوایا است.

ت) در مثلث ABC، مقدار $a^2 + c^2$ برابر $2m_a^2 + \frac{b^2}{2}$ است.

۱۳۸. قضیهٔ کسینوس‌ها را ثابت کنید: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

۱۳۹. قضیهٔ میانه‌ها را ثابت کنید: در هر مثلث، مجموع مربعات دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانهٔ نظیر ضلع سوم به علاوهٔ نصف مربع ضلع سوم.

۱۴۰. در مثلث ABC، AM میانه و AH ارتفاع است. با فرض $AC > AB$ ثابت کنید $AC^2 - AB^2 = 2BC \times MH$ یا $b^2 - c^2 = 2a \times MH$

۱۴۱. قضیهٔ استوارت را ثابت کنید. اگر در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع BC باشد، آن‌گاه:

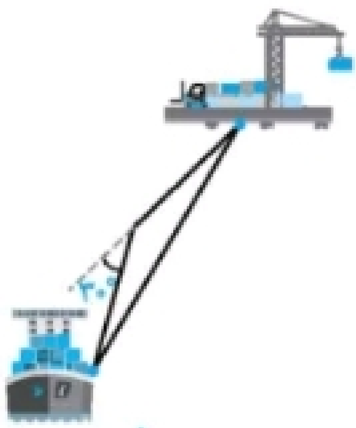
$$\left[AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC \quad \text{یا} \quad AD^2 = \frac{BD \times AC^2 + CD \times AB^2}{BD + CD} - BD \times CD\right]$$

۱۴۲. به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

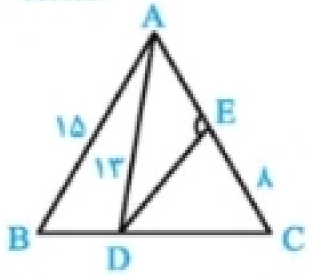
۱۴۳. در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$، $AC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ و $\widehat{A} = 120^\circ$ است.

آ) طول ضلع BC را محاسبه کنید.

ب) اندازهٔ زاویهٔ C را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آن‌جا اندازهٔ زاویهٔ B را هم بیابید.



۱۴۴. یک کشتی از بندرگاه با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت، دور می‌شود و نیم ساعت بعد با 30° انحراف به چپ با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد. یک ساعت بعد از تغییر مسیر، کشتی در چه فاصله‌ای از بندرگاه قرار دارد؟ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی)

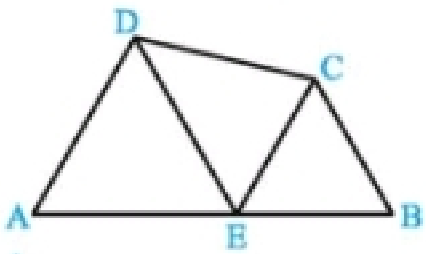


۱۴۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۵ واحد، نقطهٔ D روی ضلع BC نزدیک به رأس B از رأس A به فاصلهٔ ۱۳ واحد قرار دارد.

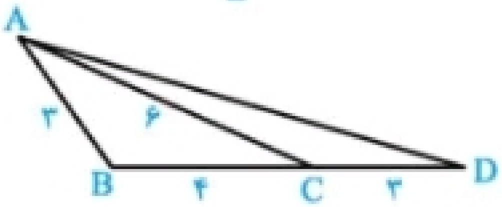
آ) اندازهٔ پاره خط CD را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها بیابید.

ب) اگر نقطهٔ E روی ضلع AC به فاصلهٔ ۸ از C باشد، آن‌گاه DE و اندازهٔ زاویهٔ AED را بیابید.

۱۴۶. اندازهٔ پاره‌خط CD را در پرسش قبل به کمک قضیهٔ استوارت به‌دست آورید.



۱۴۷. مطابق شکل چهارضلعی ABCD از سه مثلث تشکیل شده است. مثلث‌های ADE و BCE متساوی‌الاضلاع هستند و اندازهٔ ضلع آن‌ها به ترتیب ۴۲ و ۱۰ می‌باشد. محیط چهارضلعی را محاسبه کنید.

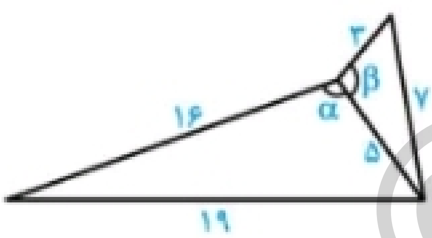


۱۴۸. در شکل مقابل طول پاره‌خط AD را بیابید.

۱۴۹. در مثلث ABC داریم $b = a + 1$، $c = a + 2$ و $\cos A = \frac{3}{5}$. طول ضلع BC را محاسبه کنید.

۱۵۰. در مثلثی $a = \sqrt{6}$، $b = \sqrt{3} - 1$ و $c = \sqrt{3} + 1$. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را تعیین کنید.

۱۵۱. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a = 2\sqrt{6}$، $c = 6 - 2\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 75^\circ$ باشد، b و اندازهٔ زوایای A و C را تعیین کنید.



۱۵۲. در شکل مقابل ثابت کنید $\alpha = \beta$

۱۵۳. در مثلثی بین اندازه‌های اضلاع رابطه‌های $b\sqrt{2} = c\sqrt{3}$ و $b^2 + ac = a^2 + c^2$ برقرار است. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را تعیین کنید.

۱۵۴. اندازهٔ سه ضلع مثلثی به ترتیب ۱۰، ۱۴ و ۲۲ سانتی‌متر است. اندازه‌های سه میانهٔ مثلث را حساب کنید.

۱۵۵. اندازه‌های قاعده و هر یک از دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی به ترتیب ۱۰ و ۱۳ سانتی‌مترند. اندازه‌های میانه‌های مثلث را بیابید.

۱۵۶. ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات اضلاع برابر است با مجموع مربعات قطرها.

۱۵۷. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها و قضیهٔ میانه‌ها ثابت کنید زاویهٔ A در مثلث ABC، حاده است اگر و تنها اگر $m_a > \frac{a}{2}$

قسمت سوم: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

۱۵۸. جای خالی را با عبارت مناسب، پر کنید.

آ) در هر مثلث، مربع طول نیمساز یک زاویه، برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع زاویه منهای حاصل‌ضرب .... پدید می‌آورد.

ب) اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ مثلثی ۶ و ۸ است. نیمساز این زاویه ضلع مقابل به آن را به نسبت .... تقسیم می‌کند.

پ) طول نیمساز در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲، .... است.

ت) در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ رأس، ضلع مقابل به آن را .... می‌کند.

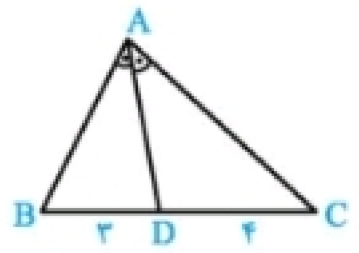
۱۵۹. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

آ) طول نیمساز هر زاویهٔ مثلث، واسطهٔ هندسی دو پاره‌خطی است که نیمساز روی ضلع مقابل به آن زاویه پدید می‌آورد.

ب) در مثلث متساوی‌الاضلاع طول نیمساز، همواره $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ضلع مثلث است.

پ) در مثلث به اضلاع ۵، ۵ و ۶، طول نیمساز بزرگ‌ترین زاویه ۴ است.

ت) در مثلث مقابل $\frac{\sin B}{\sin C}$ برابر $\frac{4}{3}$ است.

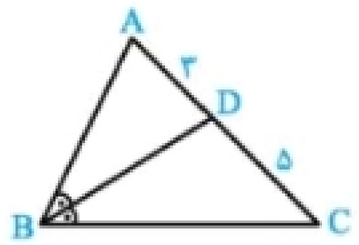


۱۶۰. قضیهٔ نیمسازها را ثابت کنید. (نهایی- خرداد ۹۵ و خرداد ۹۲)

«در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.»

۱۶۱. ثابت کنید هر مثلث مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه منهای حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

۱۶۲. در مثلث ABC، $AB = 12$ و $AC = 10$. نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. به طوری‌که $CD = 5$. محیط مثلث ABC را بیابید.



۱۶۳. محیط مثلث روبه‌رو ۲۴ و BD نیمساز زاویهٔ B است. اندازهٔ اضلاع مثلث را بیابید.

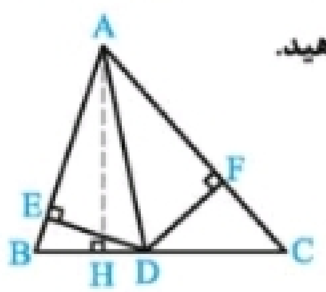
۱۶۴. سه ضلع مثلثی ۷، ۱۲ و ۱۶ سانتی‌مترند. اندازهٔ پاره‌خط‌هایی را که نیمساز درونی زاویهٔ کوچک‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد تعیین کنید. (نهایی- خرداد ۹۳)

۱۶۵. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۴، ۶ و ۸ است. طول نیمساز زاویهٔ متوسط مثلث را حساب کنید.

۱۶۶. در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید $PQ \parallel BC$ (نهایی- دی ۹۲)

۱۶۷. در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ A است. با اثبات مراحل زیر اثبات دیگری برای قضیهٔ نیمسازهای داخلی ارائه دهید.

آ) $DE = DF$ ب) $\frac{S(ABD)}{S(ACD)} = \frac{AB}{AC}$ پ) $\frac{S(ABD)}{S(ACD)} = \frac{BD}{CD}$



قسمت چهارم: قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

۱۶۸. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

آ) اگر اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۸ و زاویهٔ بین آن‌ها 30° باشد، مساحت مثلث ۲۴ است.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازهٔ دو ضلع آن $4\sqrt{2}$ و ۵ و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها 45° است برابر ۲۰ می‌باشد.

پ) مساحت مثلث به اضلاع ۵، ۶ و ۷ برابر $6\sqrt{6}$ است.

ت) در مثلث ABC، $h_a = b\sin C$ است.

۱۶۹. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۱۰، ۱۷ و ۲۱ است. مساحت مثلث و طول ارتفاع‌های آن را بیابید.

۱۷۰. اندازهٔ اضلاع مثلثی ۵، $\sqrt{17}$ و $\sqrt{26}$ است. مساحت مثلث را حساب کنید.

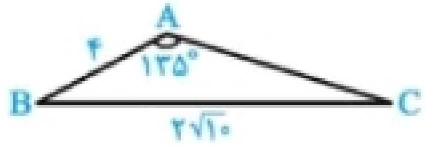
۱۷۱. در مثلث ABC، $AB = 12$، $AC = 8$ و $\widehat{A} = 60^\circ$ است.

آ) طول ضلع BC را به‌دست آورید.

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

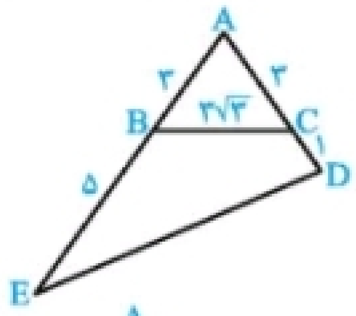
۱۷۲. در شکل مقابل:



آ) طول ضلع AC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها بیابید.

ب) مساحت مثلث ABC را بیابید.

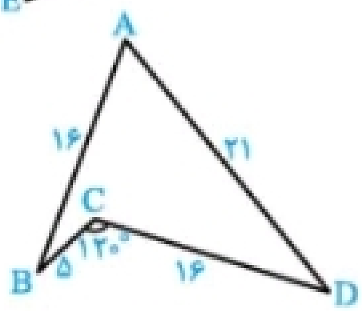
۱۷۳. در شکل مقابل:



آ) طول ضلع DE را به‌دست آورید.

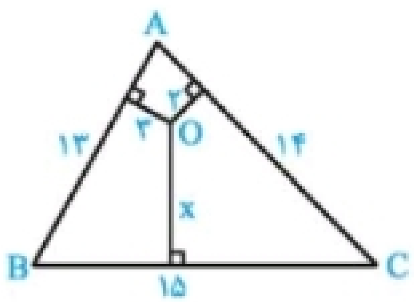
ب) مساحت چهارضلعی BCDE را محاسبه کنید.

۱۷۴. در شکل مقابل ابتدا اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید، سپس مساحت چهارضلعی را محاسبه کنید.



۱۷۵. اندازهٔ دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع ۱۲ و ۱۷ و طول یک قطر آن ۲۵ است. مساحت متوازی‌الاضلاع و طول ارتفاع‌های آن را بیابید.

۱۷۶. در مثلث ABC به اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۱۳ و ۱۴ به ترتیب به فاصلهٔ ۳ و ۲ سانتی‌متر است، از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟



۱۷۷. مساحت مثلث ABC برابر $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ است. با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها $(a=2R\sin A)$، ثابت کنید $R=\frac{abc}{4S}$ و با فرض این‌که اندازهٔ اضلاع مثلث ۷، ۱۵ و ۲۰ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را بیابید.

۱۷۸. در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع BC چنان است که $B\hat{A}D=\alpha$ و $C\hat{A}D=\beta$ ثابت کنید $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$

پاسخ فصل ۳ روابط طولی در مثلث

۱۲۲

آ) $BC=2R\sin A=2\times 2\sqrt{3}\times\sin 60^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

ب) $\frac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow\frac{5}{\sin 45^\circ}=2R\Rightarrow R=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

پ) نصف

ت) $\sin B=4\sin C\Rightarrow\frac{b}{2R}=4\times\frac{c}{2R}\Rightarrow b=4c\Rightarrow\frac{b}{c}=4$

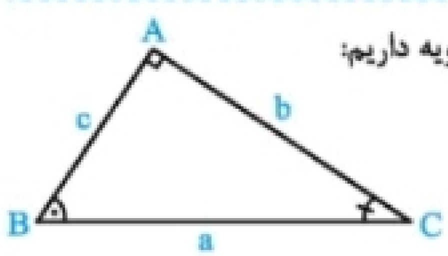
۱۲۳

آ) نادرست ب) درست

پ) نادرست ت) درست

۱۲۴

بنابه روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



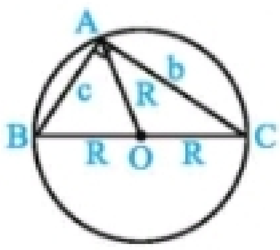
$$\left.\begin{aligned}\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=a\\ \sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\sin C}=a\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin A=\sin 90^\circ=1$، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

۱۲۵

در هندسهٔ (۱) ثابت کردیم نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر قرار دارد و فاصلهٔ این نقطه از رأس‌های مثلث یکسان است، پس مطابق شکل دایره‌ای به مرکز O و قطر BC از رأس‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌گذرد که آن را دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌نامند. قطر این دایره همواره برابر وتر مثلث است $(a=۲R)$ و با توجه به پرسش قبل می‌توان نوشت:

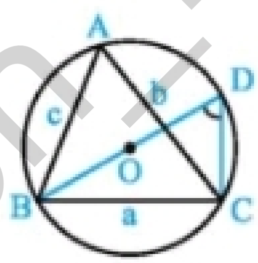


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

۱۲۶

این قضیه برای مثلث قائم‌الزاویه در پرسش قبل ثابت شد، حال می‌خواهیم آن را برای مثلث‌های حاده‌الزوایا و منفرجه الزاویه ثابت کنیم.

آ) می‌دانیم در مثلث حاده‌الزوایا نقطهٔ همرسی عمود منصف‌ها داخل مثلث قرار دارد، پس مرکز دایرهٔ محیطی مثلث داخل آن واقع است (شکل مقابل). قطر دایره شامل رأس B را رسم می‌کنیم. زاویهٔ BCD محاطی روبه‌رو به قطر است، پس $B\hat{C}D=۹۰^\circ$ و مثلث BCD قائم‌الزاویه است. پس می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l}\sin D=\dfrac{\text{ضلع روبه‌رو به }\hat{D}}{\text{وتر}}\Rightarrow \sin D=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{a}{۲R}\\ \text{زاویهٔ محاطی}: \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\ ,\ \hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow \hat A=\hat D\end{array}\right\}$$

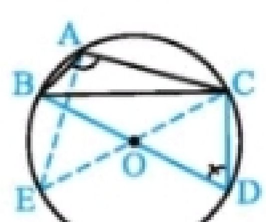
$$\Rightarrow \sin A=\frac{a}{۲R}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=۲R$$

با استدلال مشابه یعنی رسم قطرهای دیگر دایره که شامل رأس‌های A و C هستند، نتیجه می‌شود:

$$\frac{c}{\sin C}=۲R\ ,\ \frac{b}{\sin B}=۲R$$

بنابراین داریم $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$

ب) در مثلث منفرجه‌الزاویهٔ ABC $(۹۰^\circ<\hat A<۱۸۰^\circ)$، مرکز دایرهٔ محیطی خارج مثلث قرار دارد. قطر BD را رسم می‌کنیم، چهارضلعی ABDC محاطی است، پس $\hat D=۱۸۰^\circ-\hat A$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD داریم:



$$\sin D=\frac{BC}{BD}\Rightarrow \sin(۱۸۰^\circ-A)=\frac{a}{۲R}$$

$$\Rightarrow\sin A=\frac{a}{۲R}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=۲R$$

برای اثبات $\frac{b}{\sin B}=۲R$، قطر CE را رسم می‌کنیم. مثلث ACE قائم‌الزاویه است و دو زاویهٔ محاطی $A\hat{B}C$ و $\hat E$ روبه‌رو به یک کمان هستند (کمان $\overset{\frown}{AC}$)، پس برابرند و داریم:

$$\sin E=\frac{AC}{CE}\Rightarrow\sin B=\frac{b}{۲R}\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=۲R$$

با استدلال مشابه داریم (قطر شامل A رسم و سر دیگر آن به B وصل شود.) $\frac{c}{\sin C}=۲R$، در نتیجه:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R\Leftrightarrow\begin{cases}a=۲R\sin A\\ b=۲R\sin B\\ c=۲R\sin C\end{cases}$$

۱۲۷

با توجه به فرض $b=۶\sqrt{۲}$، $c=۴\sqrt{۳}$ و $\hat C=۴۵^\circ$، برای محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ B از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{۶\sqrt{۲}}{\sin B}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{۳}\times\sin B=۶\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۴\sqrt{۳}\sin B=۶$$

$$\Rightarrow\sin B=\frac{۶}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۶\times\sqrt{۳}}{۴\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow B=۶۰^\circ\ \text{یا}\ B=۱۲۰^\circ$$

هر دو جواب به‌دست آمده قابل قبول هستند، زیرا به ازای آن‌ها $B+C$ کم‌تر از ۱۸۰° می‌شود.

۱۲۸

$$\frac{a}{\sin A}=۲R\Rightarrow\frac{۱۸}{\sin A}=۲\times\frac{۴۵}{۴}$$

$$\Rightarrow ۹۰\times\sin A=۴\times۱۸\Rightarrow\sin A=\frac{۴}{۵}$$

۱۲۹

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{b}{\sin ۷۵^\circ}$$

$$\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}\times\frac{\sin ۷۵^\circ}{\sin ۶۰^\circ}\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}\times\frac{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}\,(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}}=\frac{(\sqrt{۱۲}+۲)\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۶+۲\sqrt{۳}}{۳}=۲+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\hat A+\hat B+\hat C=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۶۰^\circ+۷۵^\circ+\hat C=۱۸۰^\circ$$

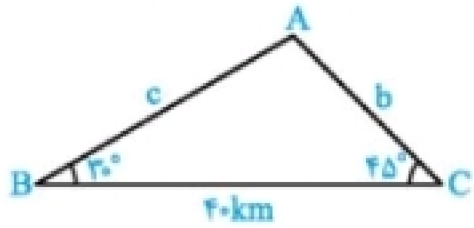
$$\Rightarrow\hat C=۱۸۰^\circ-۱۳۵^\circ=۴۵^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{c}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow c=۲\sqrt{۲}\times\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۶۰^\circ}\Rightarrow c=۲\sqrt{۲}\times\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۳۰



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-30°-45°=105°$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{40}{\sin 105°}=\frac{b}{\sin 30°}\Rightarrow b=40\times\frac{\sin 30°}{\sin 105°}$$

$$\Rightarrow b=40\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{80}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

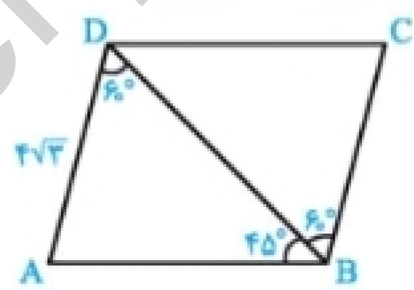
$$=\frac{80}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=20\sqrt{6}-20\sqrt{2}\simeq 20.7\,km$$

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{c}{\sin 45°}=\frac{20\sqrt{6}-20\sqrt{2}}{\sin 30°}$$

$$\Rightarrow c=(20\sqrt{6}-20\sqrt{2})\frac{\sin 45°}{\sin 30°}=(20\sqrt{6}-20\sqrt{2})\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow c=(20\sqrt{6}-20\sqrt{2})\sqrt{2}=40\sqrt{3}-40\simeq 29.3\,km$$

۱۳۱



در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو موازیند، پس بنابه قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم $\hat{ADB}=60°$ و در مثلث ABD بنابه قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin 60°}=\frac{AD}{\sin 45°}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$$

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع}=2(AB+AD)=2(6\sqrt{2}+4\sqrt{3})=12\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

۱۳۲

بنابه قضیهٔ سینوس‌ها در هر مثلث ABC داریم $a=2R\sin A$، $b=2R\sin B$ و $c=2R\sin C$ داریم:

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C\Rightarrow a\times\frac{a}{2R}+b\times\frac{b}{2R}+c\times\frac{c}{2R}$$

$$=\frac{a^2}{2R}+\frac{b^2}{2R}+\frac{c^2}{2R}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$$

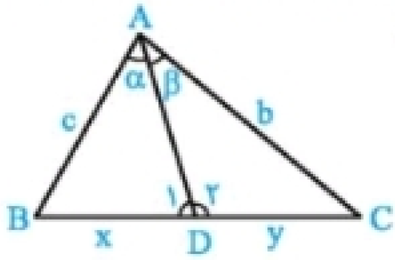
۱۳۳

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C\Rightarrow\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{4R^2}=\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}\Rightarrow\frac{a^2}{4R^2}=\frac{b^2+c^2}{4R^2}$$

$\Rightarrow a^2=b^2+c^2\Rightarrow$ مثلث ABC در رأس A قائمه است.

۱۳۴



قضیهٔ سینوس‌ها را در مثلث‌های ABD و ACD می‌نویسیم:

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin D_1}\ ،\ \frac{y}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin D_2}$$

با تقسیم دو تساوی فوق داریم:

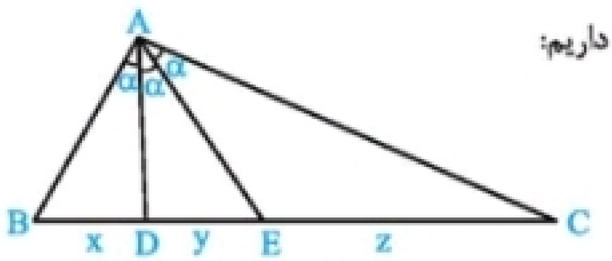
$$\frac{y}{\sin\beta}\times\frac{\sin\alpha}{x}=\frac{b}{\sin D_2}\times\frac{\sin D_1}{c}$$

چون $\hat{D}_2=180°-\hat{D}_1$ پس $\sin D_2=\sin D_1$ و بنا به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$ در نتیجه:

$$\frac{y}{x}\times\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{b}{c}\times\frac{\sin D_1}{\sin D_1}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\times\frac{\sin B}{\sin C}$$

۱۳۵



با توجه به پرسش قبل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y+z}{x}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{\sin B}{\sin C}\\[2mm]\frac{z}{x+y}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\times\frac{\sin B}{\sin C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم}}$$

$$\frac{y+z}{x}\times\frac{x+y}{z}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{y+z}{x}\times\frac{x+y}{z}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\alpha=\frac{(y+x)(y+z)}{xz}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{(y+x)(y+z)}{4xz}$$

۱۳۶

آ) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ب) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{4}=19\Rightarrow b=\sqrt{19}$$

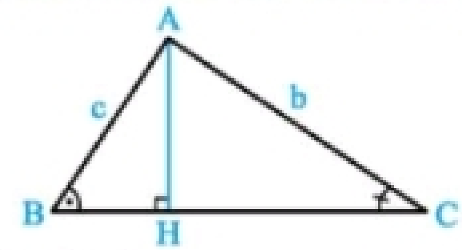
پ) $8^2+6^2=2m_a^2+\frac{4^2}{2}\Rightarrow m_a^2=46\Rightarrow m_a=\sqrt{46}$

ت) $7^2+6^2>9^2\Rightarrow$ مثلث حاده‌الزوایا است.

۱۳۷

آ) نادرست
ب) درست
پ) نادرست
ت) نادرست

۱۳۸



مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. فرض کنیم زاویهٔ B حاده باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=c\cos B$$

$$\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=c\sin B$$

$$BC=BH+CH\Rightarrow a=c\cos B+CH\Rightarrow CH=a-c\cos B$$

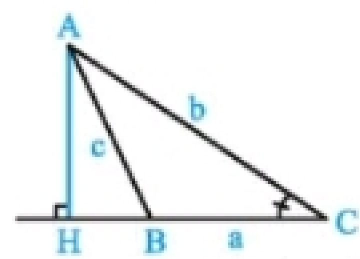
حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم و در آن قرار می‌دهیم $AH=c\sin B$ و $CH=a-c\cos B$

$$AC^2=AH^2+CH^2\Rightarrow b^2=c^2\sin^2 B+(a-c\cos B)^2$$

$$\Rightarrow b^2=c^2\sin^2 B+a^2+c^2\cos^2 B-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2=c^2\underbrace{(\sin^2 B+\cos^2 B)}_{1}+a^2-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$



اگر زاویهٔ B منفرجه باشد، داریم:

$$\cos(A\hat{B}H)=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\cos(180^\circ-B)=\frac{BH}{c}$$

$$\Rightarrow BH=c\cos(180^\circ-B)=-c\cos B$$

$$\sin(A\hat{B}H)=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin(180^\circ-B)=\frac{AH}{c}$$

$$\Rightarrow AH=c\sin(180^\circ-B)=c\sin B$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH داریم:

$$AC^2=AH^2+CH^2\Rightarrow b^2=(c\sin B)^2+(BH+BC)^2$$

$$\Rightarrow b^2=c^2\sin^2 B+(-c\cos B+a)^2$$

$$\Rightarrow b^2=c^2\sin^2 B+c^2\cos^2 B-2ac\cos B+a^2$$

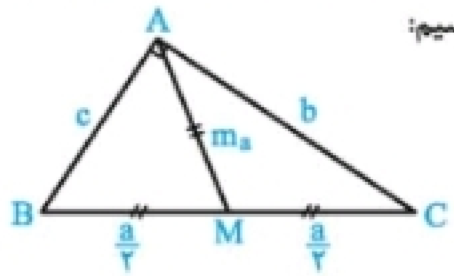
$$=a^2+c^2\underbrace{(\sin^2 B+\cos^2 B)}_{1}-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

و نهایتاً اگر زاویهٔ B قائمه باشد، در این صورت بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم $b^2=a^2+c^2$ و چون $\cos B=0$ است، پس می‌توان آن را به‌صورت $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ نوشت.

۱۳۹

با توجه به شکل زیر فرض کنیم $A\hat{M}B=\alpha$، در این صورت $A\hat{M}C=180^\circ-\alpha$. حال قضیهٔ کسینوس‌ها را در دو مثلث ABM و ACM می‌نویسیم:



$$\begin{cases}c^2=m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)\times m_a\times\cos\alpha\\ b^2=m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)\times m_a\times\underbrace{\cos(180^\circ-\alpha)}_{-\cos\alpha}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}-a\times m_a\times\cos\alpha\\ b^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}+a\times m_a\times\cos\alpha\end{cases}$$

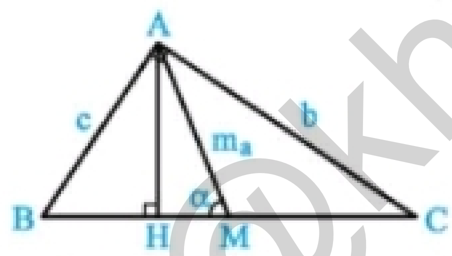
حال این دو رابطه را جمع می‌کنیم، حکم قضیه حاصل می‌شود:

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

اثبات برای میانه‌های دیگر به طریق مشابه انجام می‌شود.

۱۴۰

با توجه به پرسش قبل $b^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}+am_a\cos\alpha$، $c^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}-am_a\cos\alpha$. این دو تساوی را از هم کم می‌کنیم:

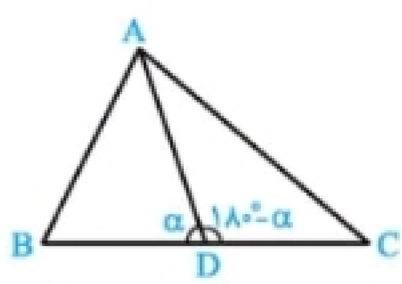


$$b^2-c^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}+am_a\cos\alpha-m_a^2-\frac{a^2}{4}+am_a\cos\alpha$$

$$=2am_a\cos\alpha\xrightarrow{\cos\alpha=\frac{MH}{m_a}}b^2-c^2=2aMH$$

۱۴۱

قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث‌های ABD و ACD می‌نویسیم:



$$\begin{cases}AB^2=AD^2+BD^2-2AD\times BD\times\cos\alpha\\ AC^2=AD^2+CD^2-2AD\times CD\times\underbrace{\cos(180^\circ-\alpha)}_{-\cos\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}CD\\ BD\end{matrix}\begin{cases}AB^2=AD^2+BD^2-2AD\times BD\times\cos\alpha\\ AC^2=AD^2+CD^2+2AD\times CD\times\cos\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases} CD\times AB^2=CD\times AD^2+CD\times BD^2-2AD\times CD\times BD\times\cos\alpha \\ BD\times AC^2=BD\times AD^2+BD\times CD^2+2AD\times BD\times CD\times\cos\alpha \end{cases}$$

از جمع دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$CD\times AB^2+BD\times AC^2=AD^2\times\underbrace{(BD+CD)}_{BC}$$

$$+BD\times CD\times\underbrace{(BD+CD)}_{BC}=AD^2\times BC+BD\times CD\times BC$$

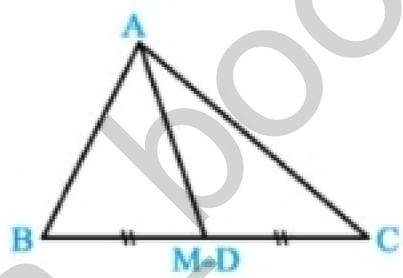
با تقسیم این تساوی بر $BD+CD$ نتیجه می‌شود:

$$AD^2+BD\times CD=\frac{BD\times AC^2+CD\times AB^2}{BD+CD}$$

$$\Rightarrow AD^2=\frac{BD\times AC^2+CD\times AB^2}{BD+CD}-BD\times CD$$

۱۴۲

اگر در مثلث ABC نقطهٔ D وسط BC باشد $(D=M)$، در این صورت AD (AM) میانهٔ نظیر ضلع BC است، پس بنابه قضیهٔ استوارت نتیجه می‌شود:



$$AM^2=\frac{BM\times AC^2+CM\times AB^2}{BM+CM}-BM\times CM$$

$$\Rightarrow AM^2=\frac{\frac{BC}{2}\times AC^2+\frac{BC}{2}\times AB^2}{BC}-\frac{BC}{2}\times\frac{BC}{2}$$

$$\Rightarrow AM^2=\frac{AC^2+AB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow AC^2+AB^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

۱۴۳

آ) $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos120^\circ$

$$=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2(2\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos120^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2=8+6+2-2\sqrt{12}-4\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=16-2\sqrt{12}+2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow BC^2=16-2\sqrt{12}+2\sqrt{12}-4=12\Rightarrow BC=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

ب) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{\sin120^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$

$$\Rightarrow\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\times\sin120^\circ\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

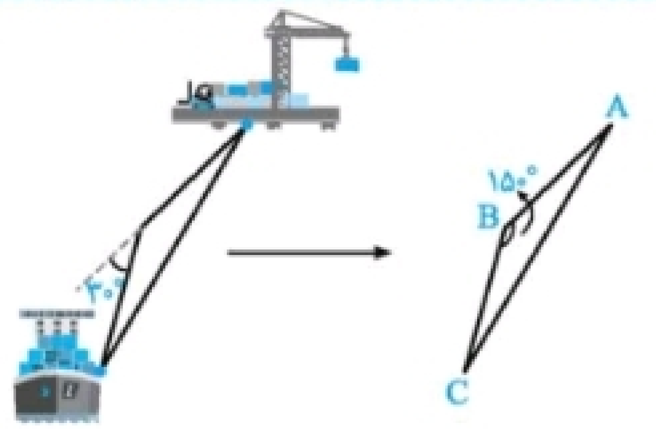
$$\Rightarrow\hat{C}=45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

جواب $\hat{C}=135^\circ$ قبول نیست، زیرا $\hat{A}+\hat{C}$ از 180° بیش‌تر می‌شود، پس داریم:

$$\hat{C}=45^\circ,\ \hat{A}=120^\circ\Rightarrow\hat{B}=180^\circ-\hat{A}-\hat{C}$$

$$=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$$

۱۴۴



فاصلهٔ کشتی از بندرگاه بعد از گذشت نیم‌ساعت: $AB=40\times\frac{1}{2}=20km$

فاصلهٔ کشتی از نقطهٔ تغییر مسیر بعد از گذشت یک ساعت:

$$BC=20\times1=20km$$

$$\text{فاصلهٔ کشتی از بندرگاه}=AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos B}$$

$$=\sqrt{20^2+20^2-2\times20^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

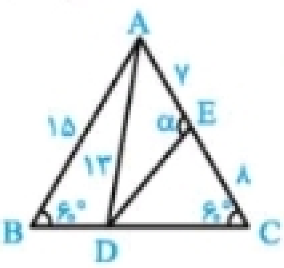
$$\Rightarrow AC=\sqrt{20^2(2+\sqrt{3})}=20\times\sqrt{2+\sqrt{3}}=20\times\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$

$$=20\times\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow AC=10\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)$$

$$=10(\sqrt{6}+\sqrt{2})\simeq28.6km$$

۱۴۵

آ) برای محاسبهٔ CD از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ACD استفاده می‌کنیم:



$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\times\cos60^\circ$$

$$\Rightarrow13^2=15^2+CD^2-2\times15\times CD\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow CD^2-15CD+15^2-13^2=0$$

$$\Rightarrow CD^2-15CD+56=0\Rightarrow(CD-7)(CD-8)=0$$

$$\Rightarrow CD=7 \text{ یا } CD=8$$

بنابه فرض $BD<CD$ است، پس جواب $CD=8$ قابل قبول است.

ب) بنابر فرض $CE=8$ و در قسمت (آ) نشان دادیم $CD=8$ و با توجه به $\hat{C}=60^\circ$ نتیجه می‌شود مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است، پس $DE=8$ و $A\hat{E}D=180^\circ-D\hat{E}C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

۱۴۶

با توجه به شکل پرسش قبل به کمک قضیهٔ استوارت داریم:

$$AD^2=\frac{BD\times AC^2+CD\times AB^2}{BD+CD}-BD\times CD$$

$$\Rightarrow13^2=\frac{(15-CD)\times15^2+CD\times15^2}{15}-(15-CD)\times CD$$

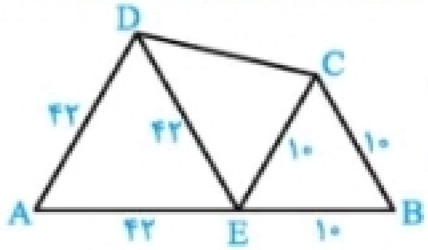
$$\Rightarrow169=15(15-CD+CD)-15CD+CD^2$$

$$\Rightarrow CD^2-15CD+225-169=0\Rightarrow CD^2-15CD+56=0$$

$$\Rightarrow(CD-7)(CD-8)=0\Rightarrow CD=7 \text{ یا } CD=8$$

چون بنابه فرض $CD>BD$ است پس جواب $CD=8$ قابل قبول است.

۱۴۷



$$C\hat{E}D = 180^\circ - C\hat{E}B - D\hat{E}A = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2CE \times DE \times \cos C\hat{E}D$$

$$\Rightarrow CD^2 = 10^2 + 42^2 - 2 \times 10 \times 42 \times \cos 60^\circ$$

$$= 4(5^2 + 21^2 - 5 \times 21) \Rightarrow CD^2 = 4(25 + 441 - 105)$$

$$= 4 \times 361 \Rightarrow CD = 2 \times 19 = 38$$

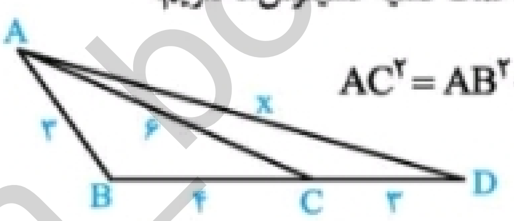
محیط چهارضلعی $ABCD = AB + BC + CD + AD$

$$= 52 + 10 + 38 + 42 = 142$$

۱۴۸

روش اول: در مثلث ABC به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B$$



$$\Rightarrow 6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{9+16-36}{2 \times 3 \times 4}$$

$$\cos B = -\frac{11}{24}$$

حال قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos B$$

$$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \left(-\frac{11}{24}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 + 49 + \frac{77}{4} = \frac{309}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{309}}{2} \simeq 8/8$$

روش دوم: به کمک قضیهٔ استوارت داریم:

$$AC^2 = \frac{BC \times AD^2 + CD \times AB^2}{BC + CD} - BC \times CD$$

$$\Rightarrow 6^2 = \frac{4x^2 + 3 \times 9}{4+3} - 4 \times 3 \Rightarrow 4x^2 + 27 = 48 \times 7 = 336$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 336 - 27 = 309 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{309}}{2}$$

۱۴۹

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2) \times \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5a^2 = 5a^2 + 10a + 5 + 5a^2 + 20a + 20 - 6(a^2 + 3a + 2)$$

$$\Rightarrow 5a^2 = 10a^2 + 30a + 25 - 6a^2 - 18a - 12$$

$$\Rightarrow a^2 - 12a - 13 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = 13$$

جواب منفی قبول نیست، پس $a = 13$ است.

۱۵۰

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) \times \cos A$$

$$6 = 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} - 2 \times 2 \times \cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{8-6}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

اما از مثلثات می‌دانیم $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$، در نتیجه $\hat{B} = 15^\circ$ و

نهایتاً: $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ$

۱۵۱

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$= (2\sqrt{6})^2 + (6 - 2\sqrt{3})^2 - 2(2\sqrt{6})(6 - 2\sqrt{3})\cos 75^\circ$$

$$\Rightarrow b^2 = 24 + 36 + 12 - 24\sqrt{3} - 4\sqrt{6}(6 - 2\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 = 72 - 24\sqrt{3} - \sqrt{6}(6 - 2\sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow b^2 = 72 - 24\sqrt{3} - \sqrt{6}(6\sqrt{6} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$$

$$= 72 - 24\sqrt{3} - 48 + 12\sqrt{12}$$

$$\Rightarrow b^2 = 24 - 24\sqrt{3} + 24\sqrt{3} = 24 \Rightarrow b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin B}$$

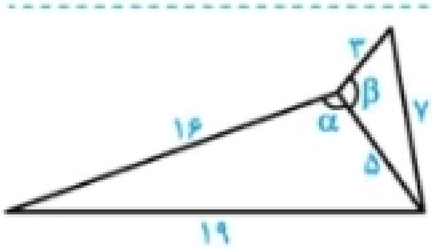
$$\Rightarrow \sin A = \sin 75^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ \text{ یا } 105^\circ$$

جواب $\hat{A} = 105^\circ$ قبول نیست، زیرا $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ می‌شود، پس:

$$\hat{A} = \hat{B} = 75^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

۱۵۲

با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$\cos\alpha = \frac{16^2 + 5^2 - 19^2}{2 \times 5 \times 16} = \frac{256 + 25 - 361}{10 \times 16} = -\frac{80}{160} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 120^\circ$$

بنابراین $\alpha = \beta$

۱۵۳

$$b^2+ac=a^2+c^2 \quad , \quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow a^2+c^2-2ac\cos B+ac=a^2+c^2$$

$$\Rightarrow \cos B=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}\Rightarrow \hat{B}=60^\circ$$

$$b\sqrt{2}=c\sqrt{3}\Rightarrow 2R\sin B\times\sqrt{2}=2R\times\sin C\times\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin 60^\circ\times\sqrt{2}=\sqrt{3}\times\sin C$$

$$\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \hat{C}=45^\circ \text{ یا } \hat{C}=135^\circ$$

جواب $\hat{C}=135^\circ$ قابل قبول نیست، زیرا $\hat{B}+\hat{C}$ از 180° بیش‌تر می‌شود:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow \hat{A}+60^\circ+45^\circ=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}=180^\circ-105^\circ=75^\circ$$

۱۵۴

فرض کنیم $a=22$، $b=10$ و $c=14$ داریم:

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}\Rightarrow 10^2+14^2=2m_a^2+\frac{22^2}{2}$$

$$\Rightarrow 100+196=2m_a^2+242$$

$$\Rightarrow 2m_a^2=296-242=54\Rightarrow m_a=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$a^2+c^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}\Rightarrow 22^2+14^2=2m_b^2+\frac{10^2}{2}$$

$$\Rightarrow 484+196=2m_b^2+50\Rightarrow 2m_b^2=630$$

$$\Rightarrow m_b^2=315\Rightarrow m_b=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

$$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}\Rightarrow 22^2+10^2=2m_c^2+\frac{14^2}{2}$$

$$\Rightarrow 484+100=2m_c^2+98\Rightarrow 2m_c^2=584-98=486$$

$$\Rightarrow m_c^2=243=81\times 3\Rightarrow m_c=9\sqrt{3}$$

۱۵۵

بنابر فرض $a=10$ (قاعده) و $b=c=13$ ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین داده‌شده هستند. داریم:

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}\Rightarrow 13^2+13^2=2m_a^2+\frac{10^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2\times 169=2m_a^2+50\Rightarrow m_a^2=169-25=144\Rightarrow m_a=12$$

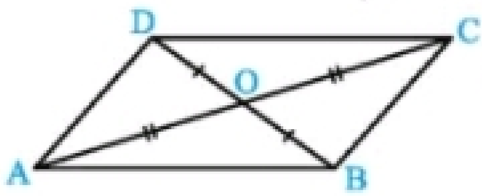
$$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}\Rightarrow 10^2+13^2=2m_c^2+\frac{13^2}{2}$$

$$\Rightarrow 100+169=2m_c^2+\frac{169}{2}\Rightarrow m_c^2=\frac{369}{4}$$

$$\Rightarrow m_c^2=\frac{9\times 41}{4}\Rightarrow m_c=\frac{3\sqrt{41}}{2}\Rightarrow m_b=m_c=\frac{3\sqrt{41}}{2}$$

۱۵۶

در متوازی‌الاضلاع زیر می‌خواهیم ثابت کنیم:



$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$$

می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، پس در مثلث ABD بنابه قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$AB^2+AD^2=2OA^2+\frac{BD^2}{2}$$

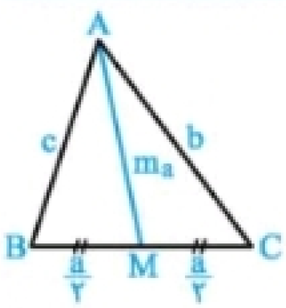
$$\Rightarrow AB^2+AD^2=2\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{BD^2}{2}$$

$$\Rightarrow AB^2+AD^2=\frac{AC^2}{2}+\frac{BD^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2AB^2+2AD^2=AC^2+BD^2$$

اما اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع برابرند، پس تساوی اخیر را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت: $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$

۱۵۷



در مثلث ABC، قضیهٔ کسینوس‌ها و میانه‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}\end{cases}\Rightarrow a^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}-2bc\cos A$$

$$\Rightarrow 2m_a^2-\frac{a^2}{2}=2bc\cos A\Rightarrow m_a^2-\frac{a^2}{4}=bc\cos A$$

اگر زاویهٔ A حاده باشد در این صورت $\cos A>0$ و در نتیجه داریم:

$$m_a^2-\frac{a^2}{4}=bc\cos A>0\Rightarrow m_a^2-\frac{a^2}{4}>0$$

$$\Rightarrow m_a^2>\frac{a^2}{4}\Rightarrow m_a>\frac{a}{2}$$

و بر عکس اگر $m_a>\frac{a}{2}$، آن‌گاه نتیجه می‌شود $m_a^2-\frac{a^2}{4}>0$ و داریم:

$$bc\cos A=m_a^2-\frac{a^2}{4}>0\Rightarrow bc\cos A>0$$

$$\Rightarrow \cos A>0\Rightarrow 0<\hat{A}<90^\circ$$

به طور کلی می‌توان نوشت:

$$m_a>\frac{a}{2}\Leftrightarrow 0<A<90^\circ$$

$$m_a=\frac{a}{2}\Leftrightarrow \hat{A}=90^\circ$$

$$m_a<\frac{a}{2}\Leftrightarrow 90^\circ<\hat{A}<180^\circ$$

۱۵۸

آ) دو پاره‌خطی که نیمساز روی ضلع مقابل   ب) $\frac{3}{4}$ یا $\frac{4}{3}$

پ) $\sqrt{3}$ ت) نصف

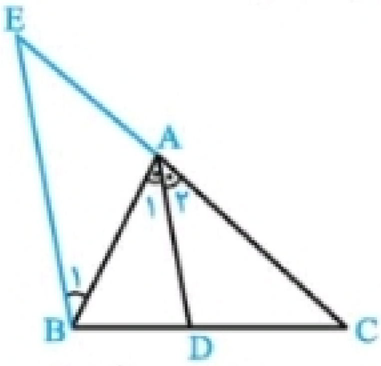
۱۵۹

آ) نادرست   ب) نادرست

پ) درست   ت) درست

۱۶۰

در مثلث ABC می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$. به همین جهت از رأس B خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با امتداد AC را E می‌نامیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel AD \text{ ، مورب } AB \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{A}_۱ \\ BE \parallel AD \text{ ، مورب } CE \Rightarrow \hat{E}=\hat{A}_۲ \end{array}\right\}$$

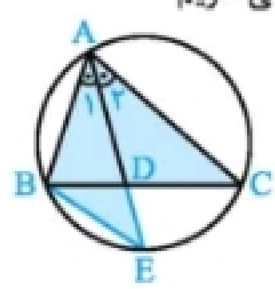
$$\xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{B}_۱=\hat{E} \Rightarrow AB=AE$$

حال قضیهٔ تالس را در مثلث BCE می‌نویسیم:

$$AD \parallel BE \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AE}{AC} \xrightarrow{AE=AB} \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$$

۱۶۱

در مثلث ABC مطابق شکل می‌خواهیم ثابت کنیم $AD^۲=AB.AC-BD.CD$. به همین جهت دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم، نیمساز AD را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ E قطع کند. بنابه زاویهٔ محاطی داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} ,\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \hat{E}=\hat{C} \\ \hat{A} \text{ نیمساز } AD \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AD} \Rightarrow AD.AE=AB.AC$$

$$\Rightarrow AD\times(AD+DE)=AB\times AC$$

$$\Rightarrow AD^۲+AD\times DE=AB\times AC \qquad (۱)$$

حال می‌گوییم دو وتر AE و BC در نقطهٔ D متقاطع‌اند، پس بنابه رابطهٔ طولی وترهای متقاطع داریم:

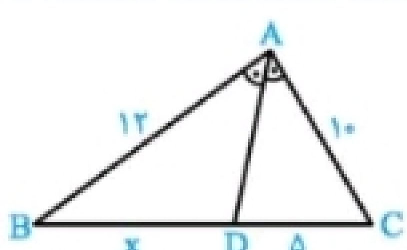
$$BD\times CD=AD\times DE \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AD^۲+BD\times CD=AB\times AC$$

$$\Rightarrow AD^۲=AB\times AC-BD\times CD$$

۱۶۲

بنابه قضیهٔ نیمسازها داریم:

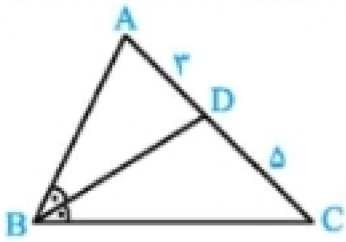


$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۵}=\frac{۱۲}{۱۰}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۰}=۶$$

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}=AB+AC+BC=۱۲+۱۰+۶+۵=۳۳$$

۱۶۳



$$AB+AC+BC=۲۴$$

$$\Rightarrow AB+۸+BC=۲۴$$

$$\Rightarrow AB+BC=۱۶$$

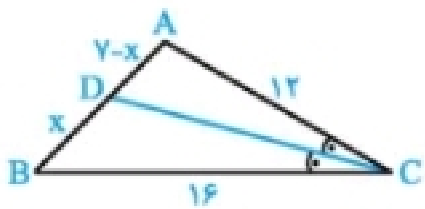
$$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CD}{AD+CD}=\frac{BC}{AB+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۳+۵}=\frac{BC}{۱۶} \Rightarrow \frac{۵}{۸}=\frac{BC}{۱۶} \Rightarrow BC=۱۰$$

$$AB+BC=۱۶ \Rightarrow AB+۱۰=۱۶ \Rightarrow AB=۶$$

۱۶۴

کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع آن است، پس با فرض $AB=۷$ ، $AC=۱۲$ و $BC=۱۶$، زاویهٔ C کوچک‌ترین است و CD نیمساز آن است. بنابه قضیهٔ نیمسازها داریم:

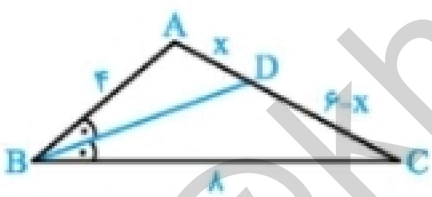


$$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۷-x}=\frac{۱۶}{۱۲} \Rightarrow \frac{x}{۷-x}=\frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{x}{۷}=\frac{۴}{۷} \Rightarrow x=۴ \Rightarrow BD=۴ \text{ ، } AD=۷-۴=۳$$

۱۶۵

BD نیمساز زاویهٔ متوسط مثلث ABC است، پس داریم:



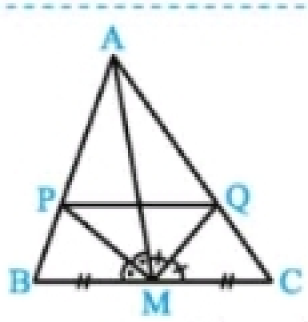
$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۶-x}=\frac{۴}{۸} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{x}{۶}=\frac{۴}{۱۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۲}=۲ \Rightarrow AD=۲ \text{ ، } CD=۶-۲=۴$$

$$BD^۲=AB\times BC-AD\times CD=۴\times۸-۲\times۴$$

$$=۳۲-۸=۲۴ \Rightarrow BD=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

۱۶۶

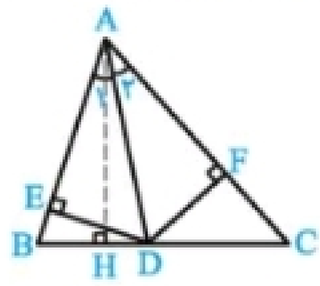


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABM} : A\widehat{M}B \text{ نیمساز } MP \Rightarrow \frac{PA}{PB}=\frac{AM}{BM} \\ \overset{\Delta}{ACM} : A\widehat{M}C \text{ نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{QA}{QC}=\frac{AM}{CM}=\frac{AM}{BM} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس در مثلث } ABC} PQ \parallel BC$$

۱۶۷

آ) چون AD نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC است، پس $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE و ADF به حالت برابری وتر $(AD=AD)$ و برابری یک زاویهٔ حاده $(\widehat{A}_1=\widehat{A}_2)$ همنهشت‌اند، لذا $DE=DF$



ب)

$$\frac{S(ABD)}{S(ACD)}=\frac{\frac{1}{2}DE\times AB}{\frac{1}{2}DF\times AC}\xrightarrow{DE=DF}\frac{S(ABD)}{S(ACD)}=\frac{AB}{AC}$$

پ)

$$\frac{S(ABD)}{S(ACD)}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BD}{\frac{1}{2}AH\times CD}=\frac{BD}{CD}$$

از مقایسهٔ (ب) و (پ) نتیجه می‌شود $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

۱۶۸

آ) نادرست ب) درست

پ) درست ت) درست

۱۶۹

فرض کنیم $a=10$، $b=17$ و $c=21$، داریم:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{48}{2}=24$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$$

$$=\sqrt{6\times 4\times 7\times 7\times 6}=6\times 2\times 7=84$$

$$S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow 84=\frac{1}{2}\times 10\times h_a\Rightarrow h_a=\frac{168}{10}=16.8$$

$$S=\frac{1}{2}bh_b\Rightarrow 84=\frac{1}{2}\times 17\times h_b\Rightarrow h_b=\frac{168}{17}$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c\Rightarrow 84=\frac{1}{2}\times 21\times h_c\Rightarrow h_c=8$$

۱۷۰

فرض کنیم $a=5$، $b=\sqrt{17}$ و $c=\sqrt{26}$ داریم:

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25+17-26}{2\times 5\times\sqrt{17}}=\frac{16}{10\times\sqrt{17}}=\frac{8}{5\sqrt{17}}$$

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{64}{425}}=\sqrt{\frac{425-64}{425}}$$

$$=\sqrt{\frac{361}{425}}=\frac{19}{5\sqrt{17}}$$

$$S=\frac{1}{2}a\times b\times\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times\sqrt{17}\times\frac{19}{5\sqrt{17}}=9.5$$

۱۷۱

آ)

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A$$

$$=12^2+8^2-2\times 12\times 8\times\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2=144+64-24\times 8\times\frac{1}{2}=208-96=112\Rightarrow BC=4\sqrt{7}$$

ب)

$$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A=\frac{1}{2}\times 12\times 8\times\sin 60^\circ$$

$$=48\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$$

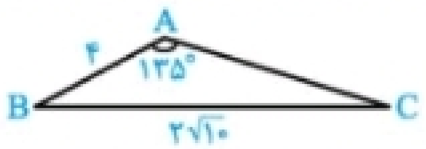
پ)

$$S=\frac{1}{2}BC\times AB\times\sin B$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{7}\times 12\times\sin B\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

۱۷۲

آ)



$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos 135^\circ$$

$$\Rightarrow 40=16+AC^2-2\times 4\times AC\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AC^2+4\sqrt{2}AC-24=0$$

معادلهٔ درجه دوم فوق را به کمک دستور Δ' حل می‌کنیم:

$$AC=-2\sqrt{2}\pm\sqrt{8+24}\xrightarrow{AC>0}AC=-2\sqrt{2}+\sqrt{32}$$

$$=-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

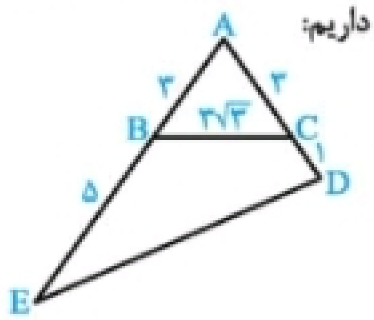
ب)

$$S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}\times\sin 135^\circ$$

$$=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

۱۷۳

آ) در مثلث ABC بنابه قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A$$

$$\Rightarrow(3\sqrt{3})^2=3^2+3^2-2\times 3\times 3\times\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{18-27}{18}$$

$$\cos A=\frac{-9}{18}=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=120^\circ$$

حال قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ADE می‌نویسیم:

$$DE^2=AE^2+AD^2-2AE\times AD\times\cos A$$

$$=8^2+4^2-2\times 8\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=64+16+32$$

$$\Rightarrow DE^2=112\Rightarrow DE=4\sqrt{7}$$

ب)

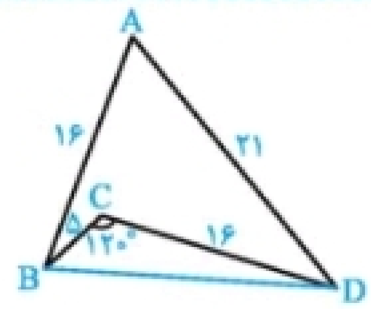
$$S(BCDE)=S(ADE)-S(ABC)$$

$$=\frac{1}{2}AE\times AD\times\sin A-\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A$$

$$\Rightarrow S(BCDE)=\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\sin 120^\circ-\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin 120^\circ$$

$$=16\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S(BCDE)=8\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{23\sqrt{3}}{4}$$

۱۷۴



ابتدا در مثلث BCD، طول ضلع BD را محاسبه می‌کنیم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos C$$

$$\Rightarrow BD^2 = 5^2 + 16^2 - 2 \times 5 \times 16 \times \cos 120^\circ$$

$$= 25 + 256 - 10 \times 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow BD^2 = 281 + 80 = 361 \Rightarrow BD = 19$$

حال در مثلث ABD به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \times AD} = \frac{16^2 + 21^2 - 19^2}{2 \times 16 \times 21}$$

$$= \frac{256 + 80}{2 \times 16 \times 21} = \frac{336}{2 \times 16 \times 21} = \frac{16 \times 21}{2 \times 16 \times 21}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$

در قسمت دوم پرسش می‌خواهیم مساحت چهارضلعی ABCD را محاسبه کنیم:

$$S(ABCD) = S(ABD) - S(BCD)$$

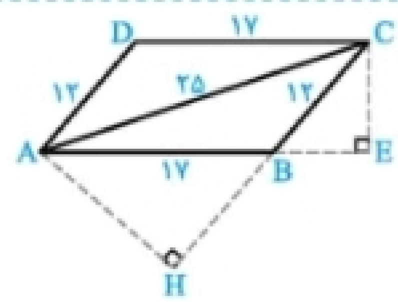
$$= \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin A - \frac{1}{2} BC \times CD \times \sin C$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} \times 16 \times 21 \times \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times 5 \times 16 \times \sin 120^\circ$$

$$= 168 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = 84\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$$

۱۷۵



مطابق شکل ارتفاع‌های متوازی‌الاضلاع AH و CE می‌باشد. برای یافتن مساحت متوازی‌الاضلاع کافی است مساحت مثلث ABC را محاسبه و دو برابر کنیم:

$$P = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{17 + 12 + 25}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

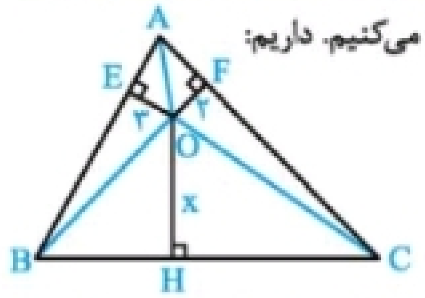
$$S = \sqrt{27(27-25)(27-17)(27-12)} = \sqrt{27 \times 2 \times 10 \times 15}$$

$$= 5 \times 3 \times 3 \times 2 = 90$$

$$S(ABCD) = AH \times BC \Rightarrow 180 = AH \times 12 \Rightarrow AH = \frac{180}{12} = 15$$

$$S(ABCD) = CE \times AB \Rightarrow 180 = CE \times 17 \Rightarrow CE = \frac{180}{17}$$

۱۷۶



O را به رأس‌های مثلث ABC وصل می‌کنیم. داریم:

$$S(ABC) = S(AOB) + S(AOC) + S(BOC) \quad (1)$$

بنابه فرض $AB = 13$، $AC = 14$ و $BC = 15$ است، داریم:

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S(ABC) = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$$

$$S(ABC) = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7 \times 9 \times 7 \times 16} = 7 \times 3 \times 4 = 84$$

حال با توجه به رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} OE \times AB + \frac{1}{2} OF \times AC + \frac{1}{2} OH \times BC = 84$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 13 + \frac{1}{2} \times 2 \times 14 + \frac{1}{2} \times x \times 15 = 84$$

$$\Rightarrow \frac{39}{2} + \frac{28}{2} + \frac{15x}{2} = 84 \Rightarrow 67 + 15x = 168$$

$$\Rightarrow 15x = 101 \Rightarrow x = \frac{101}{15} \Rightarrow x \simeq 6.7$$

۱۷۷

از رابطهٔ سینوس‌ها داریم $\sin A = \frac{a}{2R}$، آن را در دستور مساحت مثلث قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{1}{2} bc \times \sin A = \frac{1}{2} bc \times \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

با فرض $a = 7$، $b = 15$ و $c = 20$ داریم:

$$P = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 15 + 20}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

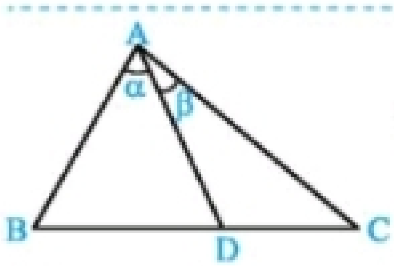
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)}$$

$$= \sqrt{21 \times 14 \times 6 \times 1} = \sqrt{7 \times 7 \times 6 \times 6} = 7 \times 6 = 42$$

و نهایتاً شعاع دایرهٔ محیطی مثلث به‌دست می‌آید:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \times 15 \times 20}{4 \times 42} = \frac{15 \times 5}{6} = \frac{25}{2} = 12.5$$

۱۷۸



$$S(ABC) = S(ABD) + S(ACD)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin\alpha + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin\beta$$

با تقسیم تساوی فوق به $\frac{1}{2} AB \times AC \times AD$ داریم:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{AD} = \frac{\sin\alpha}{AC} + \frac{\sin\beta}{AB}$$