



سرشناسه: خوشنویسان، محمد مهدی

عنوان: ریاضی دهم

مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین المللی گاج، ۱۳۹۷.

مشخصات ظاهری: ۱۶۸ صی نمودار.

فروست: مجموعه کتاب های خط ویژه

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۳۵۹-۸۶۵-۲

وضعیت فهرست نویسی: فیبای مختصر.

شناسه افزوده: محسنی، ابراهیم

شماره کتابشناسی ملی: ۵۱۶۱۸۳۷

شناسنامه

[ناشر: انتشارات بین المللی گاج]
[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی: مهندس محمد جوکار]
[وآجد پژوهش و برنامه ریزی کتاب های: خط ویژه]
[مدیر تألیف و نظارت بر محتوا: مهندس علیرضا شعبانی نصر]
[عنوان کتاب: ریاضی دهم]
[مؤلفان: محمد مهدی خوشنویسان - ابراهیم محسنی]
[ویراستاران: محمد حسن دیندارلو - علی عیوضی - سجاد همایون زاده]
[هماهنگی و امور اجرایی: سحر رجعیان]
[ویرایش فنی: نسرین یوسفی قهری]
[مدیر واحد فنی و گرافیک: حسن حاجی محمدی]
[صفحه آرایی: سیده فاطمه دیوبند]
[اجرا: سیما مهجور - نفیسه کنج]
[رسام: گریزه علی پور]
[آماده سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: گاج] + [لایوگرافی: گاج]
[چاپ خانه و صحافی: گاج] + [ناظر چاپ: علی مرزعتی]
[نوبت چاپ: اول (۹۸-۱۳۹۷)]
[شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه]
[قیمت: ۲۵۰۰۰ تومان]



سخن ناشر

بانا خدا

آیامی دانید براتی سیهی برتن کاغذ نمید ۱۷۷ صد و هفتاد و هفت سیهی شود؟ آیامی دانید برای تولید یک کتابت به مغفای وضع جلی در شمارگان... نمیدیک تن کاغذ صرف می شود؟ لذا شاید پس از مطالعہی کتاب حاضر آن را در وب سایت mygaj.com قرار دهید تا از تولید آن آن مجبوری و در مصرف کاغذ صرف جویی شود. باشد که شما دو خواندگار با این حرکت به ظاهر کوچک، گامی بلند در حفظ منابع طبیعی کرہی زمین برداشته باشید.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار



سخن مدیر تألیف

حتماً اسم «خط ویژه» رو بارها و بارها شنیدید و احتمالاً اولین چیزی که از شنیدن این اسم به ذهنتون میاد، اینه که خط ویژه راهیه که مسیر پرپیچ و خم و پراضطراب رو برامون راحت‌تر و هموار می‌کنه. بله، دقیقاً درسته.

کتاب‌های خط ویژه گاج برای جمع‌بندی همه اون چیزیه که در طول سال تحصیلی باید یاد بگیریم. درسنامه‌هایی جامع و کاربردی، خلاصه و مفهومی، تست‌های خلاق از تمارین کتاب درسی و کنکورهای سراسری، پاسخ‌هایی کاملاً تشریحی و آزمون‌های جامع و استاندارد از ویژگی‌های این کتاب کم‌حجم است. خلاصه این‌که هر چیزی رو که شما در طول سال تحصیلی نیاز داشته باشید، به‌طور خیلی مفید در حجمی کم، برای شما گردآوری کردیم. امیدواریم تونسته باشیم کمک کوچیکی برای یادگیری بهتر شما عزیزان کرده باشیم.

به پادتان هستیم، به یادمان باشید!

علیرضا شعبانی نصر



مقدمه مؤلف

سیاس خدای مهربان را که توانایی بخشید تا تفکراتمان را در میدان علم به جولان درآوریم. امید که بتوانیم مصدر حرکت اندیشه برای دیگران باشیم.

درود بر تو دوست خوبم، امیدوارم عالی و پرانرژی باشی.

قبل از هر سخنی، پیشنهاد ما این است که در زندگی کاری را که دوست نداری، انجام ندهی، اما اگر کاری را پذیرفتی، درست و عالی انجام دهی تا از زندگی لذت بیشتری ببری.

آنچه پیش روی شماست، حاصل سال‌ها آموزش دروس ریاضیات همراه با تجربه، تفکر و تدبیر است. در کتاب‌های خطویژه، تمام تلاش مؤلفان بر آن است تا از بیان مطالب اضافی و تست‌های کم‌اهمیت خودداری شود تا شما عزیزان بتوانید با خواندن کتابی جامع و گزیده در مسیری هموار و مطمئن گام بردارید.

با توجه به این که کتاب‌های درسی تغییر کرده‌اند و تا به امروز، کنکوری از کتاب‌های جدیدالتألیف برگزار نشده است، تلاش نموده‌ایم با انتخاب نمونه‌هایی از سؤالات کنکور سال‌های اخیر در مثال‌ها و تمرینات کتاب درسی منطق با اهداف آموزشی جدید، پاسخ‌گوی پرسش‌های شما عزیزان باشیم.

این کتاب را با شور و تلاش شبانه‌روزی نوشته‌ایم، شما هم با شوق و تمرکز فراوان تک‌تک مطالب آن را مطالعه کنید تا تأثیر شگفت‌انگیز این شیوه آموزشی جدید را با کسب نتایج درخشان در کنکورهای سراسری و آزمایشی ببینید.

درا ادامه لازم می‌دانیم از مدیر محترم و فرهیخته انتشارات بین‌المللی گاج جناب آقای مهندس ابوالفضل جوکار، از جناب آقای مهندس محمد جوکار مدیریت محترم واحد تألیف، از جناب آقای مهندس علیرضا شعبانی‌نصر مدیر تألیف واحد خطویژه و سرکار خانم‌ها سحر رجبعلیان، نسرين یوسفی و نیز تمام عزیزانی که در تمامی مراحل تألیف این کتاب لحظه‌به‌لحظه یارمان بوده‌اند از جمله آقایان معتمد حسن دیندارلو، علی عیومنی و سجاد همایون‌زاده که در ویراستاری و بازبینی علمی به ما کمک کردند و جناب آقای حسن حاجی‌محمدی مدیر خوش‌ذوق واحد فنی و تیم زحمتکش ایشان صمیمانه تشکر و قدردانی نماییم. همواره قدردان زحماتان هستیم.

به رسم ادب، این اثر را به پدر و مادر و همسرانمان تقدیم می‌کنیم که همواره مشوق‌مان بوده‌اند و سختی‌های راه دانش را در کنارمان تحمل نموده‌اند.

آرزوهایتان سبز و ایران سربلند

خوشنویسان - محسنی



۷	فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله
۸	درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۱۰	درس دوم: متمم یک مجموعه
۱۵	درس سوم: الگو و دنباله
۲۰	درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی
۳۳	فصل دوم: مثلثات
۳۴	درس اول: نسبت‌های مثلثاتی
۴۳	درس دوم: دایره مثلثاتی
۴۹	درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۵۷	فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۵۸	درس‌های اول و دوم: ریشه و توان - ریشه n ام
۶۰	درس سوم: توان‌های گویا
۶۲	درس چهارم: عبارت‌های جبری
۷۳	فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها
۷۴	درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۸۲	درس دوم: سهمی
۸۵	درس سوم: تعیین علامت
۹۸	فصل پنجم: تابع
۹۹	درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۱۰۲	درس دوم: دامنه و برد توابع
۱۰۷	درس سوم: انواع توابع
۱۱۷	فصل ششم: شمارش بدون شمردن
۱۱۸	درس اول: شمارش
۱۲۲	درس دوم: جایگشت
۱۲۸	درس سوم: ترکیب
۱۳۵	فصل هفتم: آمار و احتمال
۱۳۶	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۴۹	درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۱۵۰	درس سوم: متغیر و انواع آن
۱۵۲	آزمون‌های جامع

« درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
« درس دوم: مّتمم يك مجموعه
« درس سوم: الگو و دنباله
« درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

فصل اوّل:
مجموعه، الگو
و دنباله



درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در سال‌های گذشته با زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$: Real) آشنا شدیم. این مجموعه‌ها عبارت‌اند از:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۱. مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$: Natural)

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۲. مجموعه اعداد مثالی ($\mathbb{W}$: Whole)

توجه همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این دو مجموعه فقط در عضو صفر با هم فرق دارند. یعنی $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ می‌باشد که مجموعه‌ای تک‌عضوی است.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

۳. مجموعه اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$: Zahlen)، این مجموعه شامل اعداد حسابی و **قرینه** آن‌ها می‌باشد.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$$

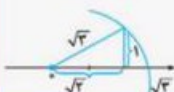
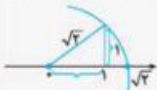
واضح است که $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{-1, -2, \dots\}$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, \dots\}$ همین‌طور داریم:

۴. مجموعه اعداد گویا ($\mathbb{Q}$: Quotient)، اجتماع اعداد صحیح و اعداد کسری به شکل $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ را مجموعه اعداد گویا می‌نامند.

اعداد گویا به دو دسته اعداد اعشاری با پایان مانند $\frac{1}{4} = 0.25$ و اعداد متناوب (اعشار با تکرار) مانند $\frac{2}{3} = 0.666\dots$ دسته‌بندی می‌شوند.

۵. مجموعه اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$)، هر عدد حقیقی که گویا نباشد را گنگ می‌نامند ($\mathbb{Q}$ Complement)، پس $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ مانند اعداد $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$

نکته با توجه به اینکه اعداد گنگ اعشاری بی‌پایان و غیرتکراری دارند مانند $\sqrt{2} = 1.4142\dots$. برای نشان دادن این اعداد روی محور از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم. برای نشان دادن عدد $\sqrt{2}$ روی محور اعداد، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلع قائم ۱ رسم می‌کنیم. بنابراین طول وتر $\sqrt{2}$ می‌شود. حال از مبدأ مختصات دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی کمان رسم شده با محور اعداد بیانگر عدد $\sqrt{2}$ است.



برای نشان دادن $\sqrt{3}$ نیز کافی است از مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه $\sqrt{2}$ و ۱ استفاده کنیم.

کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

☐ ۴. $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

☐ ۳. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

☐ ۲. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

☐ ۱. $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

پاسخ هر عدد حسابی، عددی گویاست و در نتیجه گنگ نیست.

بازه‌ها

به زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی که مشخص‌کننده قسمتی از محور اعداد باشد، فاصله یا بازه می‌گویند.

بازه بسته $[a, b]$ ، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ و بازه باز (a, b) ، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ و بازه نیم‌باز $[a, b)$ ، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ و برای $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ از بازه $(a, +\infty)$ استفاده می‌کنیم.

۲. اگر $A = [-1, 4]$ و $B = (2, 5]$ ، آن‌گاه مجموعه $B - A$ شامل چند عدد صحیح است؟

☐ ۱

☐ ۲

☐ ۳

☐ ۴



$B - A = [4, 5]$

پاسخ مجموعه‌ها را روی محور اعداد نشان می‌دهیم:

بازه $[4, 5]$ شامل دو عدد صحیح $\{4, 5\}$ می‌باشد.

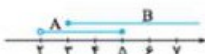
۳. حاصل $[3, +\infty) - (2, 5]$ شامل چند عدد صحیح است؟

☐ ۱ صفر

☐ ۲

☐ ۳

☐ ۴ بی‌شمار



پاسخ بازه‌های $A = (2, 5]$ و $B = [3, +\infty)$ را روی محور نشان می‌دهیم و تقاطع این دو را به دست می‌آوریم:

$(2, 5] - [3, +\infty) = (2, 3)$

بازه $(2, 3)$ هیچ عدد صحیحی ندارد.

اگر $A \cup B = [-5, 3]$ و $A = [-3, 0]$ ، آن گاه کوچک ترین مجموعه B دارای چند عضو است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$B = [-5, 3] - [-3, 0]$$

پاسخ: کوچک ترین مجموعه B ، مجموعه ای است که با A اشتراکی نداشته باشد، به عبارت دیگر:

پس $B = [-5, -3) \cup (0, 3]$ که شامل اعداد صحیح $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ می باشد.

طول بزرگ ترین بازه ای که شامل یک عدد صحیح می باشد، کدام است؟

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: بزرگ ترین بازه ای که شامل یک عدد صحیح مانند a باشد بازه $(a-1, a+1)$ است که دارای طول ۲ می باشد.

اگر $A \cap B = \{-3, 12\}$ و $A \cup B = [-2, a]$ باشد، آن گاه $-2b + a$ برابر با کدام است؟

۱۸ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: با توجه به اینکه $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2 = [-2, a]$ و $A_1 \cap A_2 = \{-3, 12\}$ پس $A_1 \cup A_2 = [-2, a]$ و $A_1 \cap A_2 = \{-3, 12\}$ بنابراین $a = 12$ و $b = -3$ می باشد و در نتیجه

$$-2b + a = -2(-3) + 12 = 18$$

داریم:

اگر $A_B = \left\{ \frac{-2}{n}, \frac{n-2}{n} \right\}$ به صورت بازه باشد، مجموعه $A_B - A_B$ برابر با کدام بازه است؟

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (۴)

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (۳)

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (۲)

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (۱)

پاسخ: ابتدا مجموعه های A_B و A_B را با توجه به A_B تشکیل می دهیم:

$$A_B = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2-2}{3} \right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), A_B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$(A_B \cup A_B) - A_B = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

بنابراین:

مجموعه های متناهی و نامتناهی

اگر مجموعه ای تعداد محدودی عضو داشته باشد آن را متناهی می گویند و اگر تعداد اعضای یک مجموعه بی نهایت باشد آن را نامتناهی می گویند. به عبارت دیگر مجموعه ای که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد متناهی است و در غیر این صورت آن را نامتناهی گویند.

نکات ۱ مجموعه های اعداد Q, W, Z, N نامتناهی می باشند و همچنین در یک بازه با طول محدود تعداد اعداد متعلق به مجموعه های W, Z, N متناهی و تعداد اعداد متعلق به مجموعه های Q, Q^*, R نامتناهی است.

۲ مجموعه تهی $\emptyset = \{\}$ عضو ندارد و متناهی است، پس برای مجموعه دلخواه A داریم:

۳ اگر A و B متناهی باشند، آن گاه $A \cup B, A \cap B, A - B$ متناهی اند.

۴ اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، آن گاه $A \cup B$ نامتناهی است، اما در مورد $A \cap B, A - B, B - A$ نمی توان نظر داد.

۵ اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن گاه $A \cap B$ و $A - A$ متناهی و $A \cup B$ و $B - A$ نامتناهی است.

کدام یک از مجموعه های زیر متناهی است؟

۱ اعداد گویای بازه $(0, 200)$

۲ اعداد گنگ بازه $(-1, 10)$

۳ اعداد گویای بازه $\left(\frac{1}{3}, 1 \right)$

۴ اگر $A = W \cup \{-5\}$ و $B = N \cup \{-5\}$

$$A = W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, B = \{-5, 1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{-5\} \cup \{-5\} = \{-5\}$$

پاسخ:

که مجموعه ای دو عضوی و متناهی است.

کدام مجموعه زیر متناهی است؟

۱ مجموعه اعداد طبیعی فرد

۲ مجموعه اعداد گویا در بازه $(1, 2)$

۳ مجموعه سنگ ریزه های کره زمین

۴ مجموعه اعداد $(N \cup Z) \cap W$

پاسخ: اگر چه سنگ ریزه های کره زمین بسیار زیاد هستند، ولی با داشتن امکانات کافی و صرف وقت می توان تعداد آن ها را به دست آورد.

کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

- (۱) مجموعه انسان‌های روی کره زمین
(۲) مجموعه مولکول‌های کل یک مدرسه
(۳) بازه $(2, 5 \cdot 10^{10}) \cap (-\infty, 2)$
(۴) مجموعه تمام دایره‌ها به مرکز مبدأ مختصات

پاسخ: مجموعه‌های ذکر شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر چند که تعداد اعضای بسیار زیادی دارند، اما متناهی هستند، ولی در گزینه (۴) بی‌شمار دایره به مرکز مبدأ مختصات می‌توان رسم کرد.

اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ متناهی است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $\mathbb{Z} - A$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$
پاسخ: اعضای مجموعه A و B را می‌نویسیم:
 $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ $B = \{-9, -8, -7, \dots, 8, 9\}$

واضح است که A نامتناهی و B متناهی است. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): با توجه به نامتناهی بودن A ، اگر تعدادی عضو (اعضای B) را از آن برداریم، مجموعه باقی‌مانده یعنی $A - B$ نامتناهی می‌باشد.

گزینه (۲): $\mathbb{Z} - A = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

ملاحظه می‌کنید که $\mathbb{Z} - A$ نیز نامتناهی است.

گزینه (۳): اشتراک یک مجموعه نامتناهی (A) با مجموعه متناهی (B) مجموعه‌ای متناهی است.

گزینه (۴): اجتماع یک مجموعه نامتناهی (A) با مجموعه متناهی (B) مجموعه‌ای نامتناهی است.

$$A \cup B = \{-9, -8, -7, \dots, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$$

کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟

- (۱) $\{Z\}$ (۲) مجموعه اعداد اول سه‌رقمی
(۳) $\emptyset$ (۴) مجموعه اعداد حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$

پاسخ: گزینه (۱): مجموعه‌ای تک‌عضوی است. در نتیجه متناهی می‌باشد. گزینه (۲): مجموعه‌ای با تعداد عضوهای محدود و طبیعی می‌باشد، پس متناهی است و گزینه (۳): مجموعه‌ای صفر عضوی است، بنابراین متناهی می‌باشد و فقط مجموعه اعداد حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$ دارای بی‌شمار عضو است.

اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی و C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟

- (۱) $(C - A) \cup B$ (۲) $(A \cup B) \cap C$ (۳) $(A - C) \cup B$ (۴) $(A \cap B) \cap C$

پاسخ: می‌دانیم اجتماع یک مجموعه نامتناهی با یک مجموعه متناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است. از طرفی چون C نامتناهی و A متناهی است، بنابراین $(C - A)$ نامتناهی می‌باشد؛ در نتیجه $(C - A) \cup B$ نامتناهی است. طبق نکات گفته شده، گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) متناهی می‌باشند.

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشد، مجموعه مرجع می‌نامند و آن را با نماد U (Universal Set) نشان می‌دهند و اگر A زیرمجموعه‌ای از U باشد، آن‌گاه

$$U - A \text{ و } A^c \text{ می‌نامند و با } A^c \text{ نشان می‌دهند، پس:}$$

همین‌طور داریم:

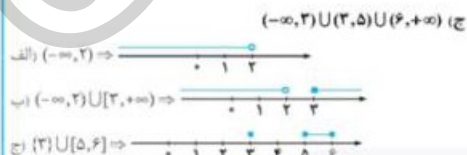


$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

$$(A^c)^c = A, U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$$

مثال آموزشی

متمم بازه‌های زیر را در $\mathbb{R}$ تعیین کنید و روی محور اعداد نشان دهید.



پاسخ

کدام یک نادرست است؟

- (۱) اگر مجموعه مرجع متناهی باشد، تمام مجموعه‌های زیر مجموعه آن متناهی است.
 (۲) اگر مجموعه مرجع متناهی باشد، تمام متمم‌های مجموعه‌ها متناهی است.
 (۳) اگر مجموعه مرجع نامتناهی و A متناهی باشد، آن‌گاه A' نامتناهی است.
 (۴) اگر مجموعه مرجع نامتناهی و A نامتناهی باشد، آن‌گاه A' متناهی است.
 پاسخ: الزاماً A' متناهی نیست. به عنوان مثال اگر $U = (-\infty, +\infty)$ و $A = [1, +\infty)$ ، آن‌گاه $A' = (-\infty, 1)$ است و هر سه مجموعه نامتناهی می‌باشند.

اگر $A \subseteq B$ و $C' \subseteq B'$ باشد، کدام یک همواره درست است؟

- (۱) $A \subseteq C$ (۲) $B \subseteq A$ (۳) $C \subseteq A$ (۴) $C \subseteq B$
 پاسخ: اگر $C' \subseteq B'$ باشد، آن‌گاه $B \subseteq C$ می‌باشد و با توجه به اینکه $A \subseteq B$ است می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$ می‌باشد.

برخی قوانین مربوط به مجموعه‌ها

۱. $A \cup B = B \cup A$ ۲. $A \cap B = B \cap A$
 ۳. $A - B \neq B - A$ ۴. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
 ۵. $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$ ۶. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$
 ۷. $A - B = A \cap B' = B' - A'$ ۸. $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A (A \subseteq (A \cup B) \text{ چون}) \\ A \cup (A \cap B) = A ((A \cap B) \subseteq A \text{ چون}) \end{cases}$
 ۹. قوانین توزیع پذیری: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$ ۱۰. قوانین مورگان: $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$
 ۱۱. قوانین جذب: $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ ۱۲. $A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup U = U, B \cap A \subseteq (A \cup B)$
 ۱۳. $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap U = A, (A \cap B) \subseteq A \cap B$ ۱۴. $A - \emptyset = A, \emptyset - A = \emptyset, A - U = \emptyset$

۱۵. اگر $A - B = A$ باشد، آن‌گاه $A \cap B = \emptyset$ می‌باشد.
 ۱۶. اگر $A - B = \emptyset$ باشد، آن‌گاه $A \subseteq B$ می‌باشد.
 ۱۷. اگر $A \cup B = B$ ، آن‌گاه $A \subseteq B$ می‌باشد و برعکس.
 ۱۸. اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه $A \subseteq B'$ و $B \subseteq A'$ می‌باشد.
 ۱۹. اگر $A \cap B = A$ ، آن‌گاه $A \subseteq B$ می‌باشد و برعکس.
 ۲۰. همواره داریم: $A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \emptyset$ و $A - A' = A$ و $A' - A = A'$ (چون A و A' دو مجموعه جدا از هم می‌باشند).

مجموعه‌های همزاد: دو مجموعه A و B را جدا از هم یا مجزا گویند هرگاه $A \cap B = \emptyset$.

$$\begin{cases} (A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C' \\ (A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C' \end{cases}$$



تعداد عضوهای $A \cup B$: اگر A و B دو مجموعه متناهی و دلخواه باشند، تعداد اعضای $A \cup B$ را با $n(A \cup B)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

حال اگر A و B مجزا باشند، $(A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0)$ ، آن‌گاه:

در حالت کلی برای مجموعه‌های دلخواه و متناهی A ، B و C داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

اگر $A \cup (B - A) = B$ ، آن‌گاه:

$B = \emptyset$ (۴)

$A = \emptyset$ (۳)

$B \subseteq A$ (۲)

$A \subseteq B$ (۱)

پاسخ:

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap U = A \cup B$

طبق صورت سؤال $A \cup B = B$ ، پس $A \subseteq B$ می‌باشد.

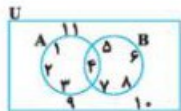
با توجه به نمودار مقابل مجموعه $(A \cup B) \cap (A - B') \cap (A \cup B') \cap (B \cup A')$ چند عضو دارد؟

۵ (۲)

۳ (۴)

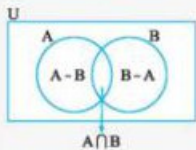
۴ (۱)

۱ (۳)



پاسخ می‌دانیم $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B$ و با توجه به اینکه $(A \cap B)$ یک عضو دارد و اشتراک هر مجموعه‌ای با $(A \cap B)$ بیش از یک عضو نخواهد داشت، پس باید گزینه (۳) صحیح باشد.

پیشنهاد می‌کنیم با نوشتن اعضای مجموعه، سؤال را مجدداً حل کنید.



مجموعه‌های $A \cup B$ دارای ۷ عضو، $A \cap B$ دارای ۳ عضو و $A - B$ نیز دارای ۳ عضو می‌باشند، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

صفر (۴)

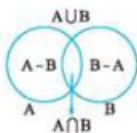
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: می‌دانیم رابطه $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$ برقرار است، داریم:

$7 = 3 + 3 + n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 1$



مجموعه‌های A و B به ترتیب ۱۵ و ۱۰ عضو دارند. اگر $A \cup B$ دارای ۲۰ عضو باشد، مجموعه $(B - A') \cap (A \cup A')$ چند عضو دارد؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: می‌دانیم $A \cup A' = U$ و اشتراک هر مجموعه با خود مجموعه می‌شود، از طرفی $B \cap (A')' = B \cap A$ ، پس کافی است تعداد اعضای $B \cap A$ را به دست آوریم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 20 = 15 + 10 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$

متمم مجموعه $(A - (A - B)) \cup (A \cap B)$ کدام است؟

$\emptyset$ (۴)

$A' \cup B'$ (۳)

B' (۲)

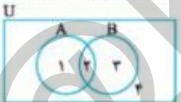
A (۱)

پاسخ: (روش اول)

$A - (A - B) = A \cap (A - B)' = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

$(A - (A - B)) \cup (A \cap B)' = (A \cap B) \cup (A \cap B)' = U \Rightarrow$ متمم مجموعه مرجع $\emptyset$ می‌باشد.

(روش دوم) از نمودار و نمودار منطبق شکل مقابل استفاده می‌کنیم، متمم مجموعه U برابر $\emptyset$ است.



$(A - (A - B)) \cup (A \cap B)' = (\{1, 2\} - \{1\}) \cup (\{3\})' = \{2\} \cup \{3\}' = \{2\} \cup \{1, 2, 3\}' = \{2\} \cup \{3\} = U$

متمم مجموعه $(B - A)' - A$ نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟

B (۴)

$(A \cup B)'$ (۳)

$A \cap B$ (۲)

$A \cup B$ (۱)

پاسخ: (روش اول) ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

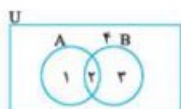
$(B - A)' - A = (B \cap A')' \cap A' = (B' \cup A) \cap A' = (B' \cap A') \cup (A \cap A') = (B' \cap A') \cup \emptyset = B' \cap A' = (B \cup A)'$

متمم مجموعه فوق $A \cup B$ می‌باشد.

$B - A = \{3\} \Rightarrow (B - A)' = (\{3\})' = \{1, 2, 4\}$

$\Rightarrow (B - A)' - A = \{1, 2, 4\} - \{3\} = \{1, 2\} = \{4\}$

(روش دوم) با توجه به نمودار و به صورت مقابل داریم:

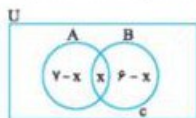


در صورت سؤال متمم مجموعه $\{4\}$ یعنی $\{1, 2, 3\}$ را می‌خواهد که برابر $A \cup B$ می‌باشد.

در یک گروه ۱۰ نفره، ۷ نفر فوتبال و ۶ نفر والیبال بازی می‌کنند. چند نفر هر دو ورزش را انجام می‌دهند؟

- ۱) حداقل سه نفر ☐ ۲) حداقل چهار نفر ☐ ۳) حداکثر سه نفر ☐ ۴) دقیقاً سه نفر ☐

پاسخ: فوتبالیست‌ها را با A و والیبالیست‌ها را با B نشان می‌دهیم. x تعداد افرادی است که هر دو ورزش را انجام می‌دهند. اگر $n(A \cap B) = x$ باشد، با توجه به نمودار زیر واضح است که:



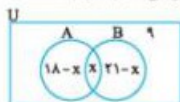
$$10 = (y-x) + x + (p-x) + c \Rightarrow 10 = 13 - x + c \Rightarrow x = 3 + c$$

نکته: چون هیچ اطلاعاتی از تعداد افرادی که هیچ کدام از دو ورزش را انجام نمی‌دهند نداریم، بنابراین آن را c فرض می‌کنیم. با توجه به اینکه $c \geq 0$ می‌باشد، پس حداقل مقدار x برابر ۳ است.

در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامه علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر آن‌ها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر از آن‌ها در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟

- ۱) ۵ ☐ ۲) ۶ ☐ ۳) ۸ ☐ ۴) ۷ ☐

پاسخ: افرادی که در فوق برنامه هنری شرکت کرده‌اند را با A و افرادی که در فوق برنامه علمی شرکت کرده‌اند را با B نمایش می‌دهیم. داریم:



$$n(A \cup B) = 40 - 9 = 31$$

$$\Rightarrow 31 = (18 - x) + x + (21 - x) \Rightarrow 31 = 39 - x \Rightarrow x = 8$$

اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ ، مجموعه $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۲ ☐ ۲) ۳ ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) ۵ ☐

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad A \cap B = \{2, 6\}$$

$$A - (A \cap B) = \{3, 7, 8\} \Rightarrow (A \cup B) - [A - (A \cap B)] = \{2, 4, 5, 6\}$$

پس این مجموعه ۴ عضو دارد.

(رابطی و اتل ۸۸)

مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

- ۱) $B - A$ ☐ ۲) B ☐ ۳) $\emptyset$ ☐ ۴) A' ☐

پاسخ: (روش اول)

$$(A \cap B)' \cap (A \cup B) \cap A' = (A' \cup B') \cap (A \cup B) \cap A' = \underline{A' \cap (A' \cup B)} = A' \cap (A \cup B) = (A' \cap A) \cup (A' \cap B)$$

$$= \emptyset \cup (A' \cap B) = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$



$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' = (\{1\})' \cap (\{1, 2, 3\}) \cap (\{2, 4\}) = \{2, 3, 4\} \cap (\{1, 2, 3\}) \cap (\{2, 4\}) = \{3\} = B - A$$

(رابطی و اتل ۸۹)

متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه جهانی، با کدام مجموعه برابر نیست؟

- ۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$ ☐ ۲) $(A - C) \cup (B - C)$ ☐

- ۳) $A \cap (B - C)$ ☐ ۴) $(A \cap B) - C$ ☐

$$(C \cup A' \cup B')' = C' \cap A \cap B$$

پاسخ: ابتدا متمم مجموعه داده شده را به دست می‌آوریم. سپس تک تک گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$(۱) \text{ گزینه } (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C')$$

$$(۲) \text{ گزینه } (A - C) \cup (B - C) = (A \cap C') \cup (B \cap C') = C' \cap (A \cup B)$$

$$(۳) \text{ گزینه } A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = A \cap B \cap C'$$

$$(۴) \text{ گزینه } (A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C' = A \cap B \cap C'$$

اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، مجموعه $(A \cap (A' \cup B)) - (B \cap (A' \cup B))$ برابر کدام است؟

- ۱) A ☐ ۲) B ☐ ۳) $A \cap B$ ☐ ۴) $A \cup B$ ☐

پاسخ: $(A \cap (A' \cup B)) - (B \cap (A' \cup B)) = [(A \cap A') \cup (A \cap B)] - [(B \cap A') \cup (B \cap B)] = (A \cap B) - (B \cap A') = (A \cap B) \cap (A' \cap B)' = (A \cap B) \cap (A \cup B)' = (A \cap B) \cap (A \cup B)' = (A \cap B) \cap (A \cup B)' = A \cap B$

اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام مجموعه است؟

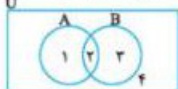
- ۱) A ☐ ۲) B ☐ ۳) $A \cap B$ ☐ ۴) $A \cup B$ ☐

پاسخ: (روش اول: ابتدا عبارت $B - (A \cap B)$ را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$B - (A \cap B) = B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B') = (B \cap B') \cup (B \cap A') = \emptyset \cup (B \cap A') = B \cap A'$$

$$\Rightarrow A - (B - (A \cap B)) = A - (B \cap A') = A \cap (B \cap A')' = A \cap (B' \cup A) = A$$

(روش دوم: از نمودارون مانند شکل مقابل استفاده می‌کنیم:



$$A - (B - (A \cap B)) = \{1, 2\} - (\{2, 3\} - \{2\}) = \{1, 2\} - \{3\} = \{1, 2\} = A$$

اگر A ، B و C سه مجموعه غیرتهی باشند، به طوری که $A \subseteq B$ ، آنگاه مجموعه $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟ (ریاضی دوازدهم)

- ۱) $A \cap C'$ ☐ ۲) $A \cap C$ ☐ ۳) A ☐ ۴) B ☐

پاسخ: $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = (A \cap B \cap C') - (A \cap B \cap C) \xrightarrow{A \subseteq B} A \cap B = A \quad (A \cap C') - (A \cap C) = (A \cap C') \cap (A \cap C)' = (A \cap C') \cap (A' \cup C) = (A \cap C' \cap A') \cup (A \cap C' \cap C) = \emptyset \cup (A \cap C') = A \cap C'$

اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ برابر کدام است؟ (ریاضی دوازدهم)

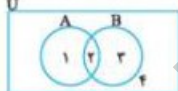
- ۱) $A' - B'$ ☐ ۲) $(A - B)'$ ☐ ۳) A' ☐ ۴) $\emptyset$ ☐

پاسخ: (روش اول: طبق قانون جذب داریم: $A \cup (A \cap B) = A$ و $A \cap (A \cap B) = A \cap B$ ، پس:

$$[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)] = A' \cap [B \cap (A \cup A')]$$

$$= A' \cap [B \cap U] = A' \cap B = B \cap A' = B - A \quad \text{یا} \quad A' \cap B = A' \cap (B')' = A' - B'$$

(روش دوم: از نمودارون مانند شکل استفاده کنیم:



$$([A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]) = (\{1, 2\}' \cap (\{2, 3\} \cup \{3\})) = (\{1, 2\})' \cap (\{2, 3\}) = \{3, 4\} \cap \{2, 3\} = \{3\} = B - A = A' - B'$$

اگر $A = \{2\}$ و $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟ (ریاضی هجدهم)

- ۱) $B \subset C$ ☐ ۲) $A \subset B$ ☐ ۳) $A \in B$ ☐ ۴) $B \in C$ ☐

پاسخ: چون مجموعه A در B نیز وجود دارد، پس می‌توان گفت $A \subset B$ و $A \in B$ و همچنین مجموعه B هم در C دیده می‌شود، پس $B \in C$ نیز درست است. اما اگر زیرمجموعه‌های مجموعه دو عضوی C را بنویسیم، ملاحظه می‌کنیم که $B \subset C$ نمی‌باشد.

$$C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\} \Rightarrow \text{زیرمجموعه‌های } C = \{\emptyset, \{2\}, \{2, \{2\}\}\}$$

اگر n عددی طبیعی و A_n بازه $((-1)^n n, 3n)$ باشد، چند عدد صحیح به مجموعه $A_1 \cup A_2$ تعلق دارد؟

- ۱) ۵ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) ۹ ☐

$$A_1 = ((-1)^1 1, 3(1)) = (-1, 3) \Rightarrow A_1 \cup A_2 = (-1, 6)$$

$$A_2 = ((-1)^2 2, 3(2)) = (2, 6)$$

پس تعداد اعداد صحیح $A_1 \cup A_2$ برابر ۶ یعنی $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ می‌باشد.

نکته

تعداد اعداد صحیح بازه $[a, b]$ برابر با $b - a + 1$ است.

(رابطه دال ۷۳)

اگر $A_1 = [-1, \frac{9-1}{7}]$ و $1 \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آنگاه مجموعه $(A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3)$ کدام است؟

- ۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ ۲) $[-2, -1) \cup [1, 2]$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) $\emptyset$

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1 = [-1, \frac{9-1}{7}] = [-1, 2] \quad A_2 = [-2, 2/5] \quad A_3 = [-5, 2] \quad A_4 = [-7, 1]$$

$$(A_2 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

اگر $A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 8-1\}$ باشد، مجموعه $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8) - (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8)$ چند عضو دارد؟ (رابطه دال ۷۴)

- ۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

$$A_1 = \{-1, 0, 1, \dots, 7\} \text{ و } A_2 = \{-2, -1, 0, 1, \dots, 6\} \text{ و } \dots \text{ و } A_8 = \{-8, \dots, 0\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8 = \{-8, -7, \dots, 6, 7\}, A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8 = \{-1, 0\}$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8) - (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8) = \{-8, -7, \dots, -2, 1, 2, \dots, 7\}$$

تعداد اعضای مجموعه فوق برابر ۱۴ می‌باشد.

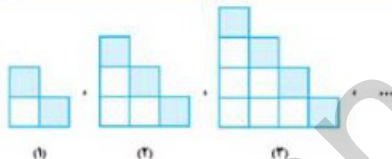
الگو و مفهوم دنباله

درس سوم: الگو و دنباله

الگو: به یک سری قوانین که با استفاده از آن می‌توان هر چیزی را تولید کرد، **الگو** می‌گوییم. در واقع الگو، تولید هر چیزی است که با تکرار عین شده باشد. به عنوان مثال اعداد $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ یک الگو است، به طوری که در آن برای تولید عددی که در مرحله n ام (یا جایگاه n ام) وجود دارد کافی است $(n-1)$ را به توان ۲ برسانیم.

دقت کنید که به هر تعداد عدد که پشت سر هم نوشته شوند یک **دنباله** می‌گوییم و به هر کدام از اعداد یک جمله دنباله گفته می‌شود و معمولاً با کمی دقت در جملات دنباله می‌توان به الگویی که در ساخت این جملات وجود دارد پی برد. البته لازم به ذکر است که بعضی از دنباله‌ها، الگویی دارند که بیان ریاضی آن، آسان نیست.

با توجه به الگوی مقابل، تعداد مربع‌های سفید در شکل چهاردهم کدام است؟



۱) ۱۰۵

۲) ۱۱۰

۳) ۱۱۵

۴) ۱۲۰

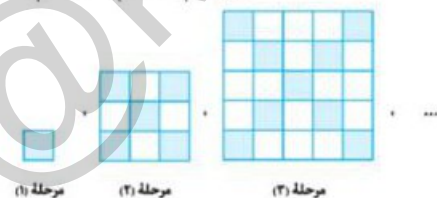
پاسخ: اگر هر یک از شکل‌ها را به صورت یک مربع کامل در نظر بگیریم آنگاه تعداد کل مربع‌های کوچک در شکل n ام برابر است با $(n+1)^2$ ، از این تعداد مربع کوچک که روی قطر قرار دارند را کم می‌کنیم و حاصل را به ۲ تقسیم می‌کنیم. به عنوان مثال در مرحله دوم داریم:



$$\left\{ \begin{aligned} \text{تعداد کل مربع‌ها} &= (2+1)^2 = 9 \\ \text{تعداد مربع‌های سفید در شکل (۲)} &= \frac{9-3}{2} = 3 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{9-3}{2} = 3$$

پس تعداد مربع‌های سفید در شکل n ام برابر با $\frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}$ است، بنابراین تعداد مربع‌های سفید در شکل ۱۴ام برابر است با:

$$\frac{15^2 - 15}{2} = \frac{225 - 15}{2} = \frac{210}{2} = 105$$



با توجه به الگوی مقابل، در کدام مرحله $\frac{21}{121}$ شکل، رنگی است؟

۱) ۶

۲) ۱۱

۳) ۲۰

۴) ۲۱

پاسخ: با کمی دقت در الگوی فوق متوجه می‌شویم که:

$$(2n-1)^2 = \text{تعداد کل مربع‌های کوچک در مرحله } n\text{ام}$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{21}{121} = \frac{4n-3}{(2n-1)^2} = \text{نسبت مربع‌های رنگی به کل مربع‌ها} \Rightarrow 4n-3 = 21 \Rightarrow 4n = 24 \Rightarrow n = 6$$

تعداد مربع‌های رنگی
روی قطر مربع
تعداد مربع‌های سفید

در الگوی ...، $4^2 - 3^2$ ، $2^2 - 1^2$ ، $3^2 - 2^2$ ، $1^2 - 0^2$ مقدار عددی جمله دهم کدام است؟

گزینه ۱: ۵۱۶
گزینه ۲: ۶۱۵
گزینه ۳: ۱۵۶
گزینه ۴: ۱۲۳

پاسخ: با کمی دقت در الگوی داده شده، می‌توان حدس زد که:

در الگوی ...، $4^2 - 3^2$ ، $2^2 - 1^2$ ، $3^2 - 2^2$ ، $1^2 - 0^2$ مقدار x کدام است؟

گزینه ۱: ۸۵
گزینه ۲: ۶۱
گزینه ۳: ۷۴
گزینه ۴: ۷۹

پاسخ: با دقت در جملات الگوی فوق مشاهده می‌شود که از جمله سوم و به بعد رابطه $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ بین جمله‌ها برقرار است، بنابراین:

$$n = 4 \Rightarrow a_6 = 2a_4 + a_5 = 2 \times 21 + 43 = 85$$

در دنباله فیبوناچی، جملات اول و دوم برابر ۱ و جملات بعدی از جمع دو جمله قبل از خود به دست می‌آیند. جمله هشتم کدام است؟

گزینه ۱: ۳۱
گزینه ۲: ۱۳
گزینه ۳: ۲۱
گزینه ۴: ۲۵

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2, a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 1 = 3, a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 2 = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

و به همین ترتیب می‌توان سایر جملات را تولید کرد. در واقع دنباله فیبوناچی به صورت مقابل است:

بنابراین جمله هشتم برابر با ۲۱ می‌باشد.

رابطه $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ بین جملات یک دنباله، همواره برقرار است. اگر $a_1 = a_2 = 1$ باشد، جمله نهم این دنباله کدام است؟

گزینه ۱: ۳۲
گزینه ۲: ۲۳
گزینه ۳: ۲۴
گزینه ۴: ۲۵

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

در نتیجه از جمله سوم و به بعد، هر جمله مجموع دو جمله قبل از خود می‌باشد. از طرفی جملات اول و دوم این دنباله ۱ هستند، پس جملات دنباله به صورت مقابل خواهند بود:

$$1, 1, \underset{a_1+a_2}{2}, \underset{a_2+a_3}{3}, \underset{a_3+a_4}{5}, \dots, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

دنباله لوکا دنباله‌ای است که در آن $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. در این دنباله جمله نهم چند برابر جمله سوم است؟

گزینه ۱: ۱۰
گزینه ۲: ۱۵
گزینه ۳: ۱۹
گزینه ۴: ۲۳

پاسخ: با توجه به الگوی داده شده، از جمله سوم و به بعد، هر جمله از جمع دو جمله قبل به دست می‌آید و جملات اول و دوم به ترتیب ۱ و ۳ هستند.

پس دنباله لوکا به صورت زیر است:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots \Rightarrow a_3 = 4, a_4 = 76 \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = \frac{76}{4} = 19$$

(تقریباً ۹۵)

در یک دنباله $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

گزینه ۱: ۱۲۷
گزینه ۲: ۱۵۹
گزینه ۳: ۲۴۷
گزینه ۴: ۳۵۵

پاسخ: از رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ متوجه می‌شویم که هر جمله از دو برابر جمله قبل، یک واحد بیشتر است و چون $a_1 = 1$ ، پس جملات این دنباله به صورت

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, \dots \Rightarrow a_8 = 255$$

مقابل هستند:

در یک دنباله، $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} - 2$. حاصل $a_8 - a_4$ کدام است؟

گزینه ۱: ۲۲
گزینه ۲: ۴۸
گزینه ۳: ۵۶
گزینه ۴: ۶۴

پاسخ: از رابطه $a_n = 2a_{n-1} - 2$ متوجه می‌شویم که هر جمله از دو برابر جمله قبل، دو واحد کمتر است و چون $a_1 = 3$ ، پس جملات این دنباله به صورت

$$3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130, \dots$$

مقابل خواهند بود:

$$\Rightarrow a_8 = 130, a_4 = 66 \Rightarrow a_8 - a_4 = 130 - 66 = 64$$

چندمین جمله دنباله $a_n = \frac{3n-7}{7n+5}$ برابر با $\frac{1}{3}$ می‌باشد؟

گزینه ۱: یازدهم
گزینه ۲: دوازدهم
گزینه ۳: سیزدهم
گزینه ۴: چهاردهم

پاسخ: کافی است دنباله a_n را برابر $\frac{1}{3}$ قرار دهیم تا n پیدا شود:

$$\frac{3n-7}{7n+5} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وصلین}} 9n-21=7n+5 \Rightarrow 2n=26 \Rightarrow n=13$$

در دنباله با جمله عمومی $a_{2n-1} = n^2 - 3n + 1$ جمله هفتم کدام است؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۲۹ (۲)

۳۱ (۱)

پاسخ: برای تعیین این که به ازای چه مقدار n جمله هفتم به دست می آید، باید معادله $2n-1=7$ را حل کنیم:

$$2n-1=7 \Rightarrow 2n=8 \Rightarrow n=4$$

در هر دو طرف به جای a_{2n-1} عدد n قرار می دهیم $a_7 = 4^2 - 3 \times 4 + 1 \Rightarrow a_7 = 5$

جمله $(2n-2)$ ام یک دنباله به صورت $\frac{4n^2+1}{2n-3}$ است. جمله دهم این دنباله کدام است؟

$\frac{1401}{53}$ (۴)

۱۳ (۳)

۲۸ (۲)

$\frac{401}{17}$ (۱)

پاسخ: برای این که تعیین کنیم به ازای چه مقدار n جمله دهم به دست می آید، ابتدا معادله $2n-2=10$ را حل می کنیم:

$$a_{2n-2} = \frac{4n^2+1}{2n-3} (*) \quad , \quad 2n-2=10 \Rightarrow 2n=12 \Rightarrow n=6$$

$$a_{10} = \frac{4 \times (6)^2 + 1}{2(6) - 3} = \frac{1401}{53}$$

در رابطه (*) به جای n عدد ۴ را قرار می دهیم تا a_4 تعیین شود، در نتیجه:

در دنباله با جمله عمومی $a_{n+1} = (-2)^n + n^2 + k$ اگر جمله دهم برابر با ۶ باشد، k کدام است؟

-۱ (۴)

-۱۱ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$3n+1=10 \Rightarrow 3n=9 \Rightarrow n=3$$

پاسخ: ابتدا معادله $3n+1=10$ را حل می کنیم:

سپس در رابطه $a_{n+1} = (-2)^n + n^2 + k$ به جای n عدد ۳ را قرار می دهیم، پس:

$$a_4 = (-2)^3 + 3^2 + k \Rightarrow 6 = -8 + 9 + k \Rightarrow k = 5$$

در دنباله $a_n = \frac{an+1}{n^2+b}$ جملات سوم و هفتم به ترتیب $\frac{5}{4}$ و $\frac{1}{4}$ می باشند. $a+b$ کدام است؟

۲ (۴)

-۷ (۳)

-۲ (۲)

۷ (۱)

$$a_3 = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3a+1}{9+b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4a+2=45+\delta b \quad (1) \quad , \quad a_7 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7a+1}{49+b} = \frac{1}{4} \Rightarrow 14a+2=49+b \Rightarrow b=14a-47 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 4a+2=45+\delta(14a-47) \Rightarrow 4a+2=45+70a-22\delta \Rightarrow 64a=192$$

$$\Rightarrow a = \frac{192}{64} = 3 \Rightarrow b = 14 \times 3 - 47 = -5 \Rightarrow a+b = 3-5 = -2$$

در دنباله با جمله عمومی $a_0 - a_1, a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots$ جمله a_5 کدام است؟

$-\frac{1}{16}$ (۴)

$-\frac{1}{32}$ (۳)

$\frac{1}{32}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \\ a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \end{cases} \Rightarrow a_0 - a_1 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

جمله n ام الگوی به صورت $t_n = an^2 + bn + 2$ می باشد. اگر جملات چهارم و هفتم این الگو به ترتیب ۶ و ۳۰ باشند، $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۳ (۴)

۵ (۳)

-۵ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: ابتدا با استفاده از جمله عمومی دنباله، جملات چهارم و هفتم را می یابیم:

$$t_4 = 6 \Rightarrow 16a + 4b + 2 = 6 \Rightarrow 16a + 4b = 4 \Rightarrow 4a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 4a \quad (1)$$

$$t_7 = 30 \Rightarrow 49a + 7b + 2 = 30 \Rightarrow 49a + 7b = 28 \xrightarrow{\div 7} 7a + b = 4 \xrightarrow{(1)} 7a + 1 - 4a = 4 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow 3a + 1 = 4 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} b = -2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

جملات اول، دوم و پنجم یک دنباله درجه دو به ترتیب ۸، ۲۹ و ۲۹ می باشند. جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۲۰ ☐ ۲) ۲۲ ☐ ۳) ۱۷ ☐ ۴) ۱۹ ☐

پاسخ: فرض کنیم جمله عمومی این دنباله درجه دو به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ باشد،

$$t_1 = \Delta \Rightarrow a + b + c = \Delta \Rightarrow c = \Delta - a - b \quad (1)$$

$$t_2 = \Delta \Rightarrow 4a + 2b + c = \Delta \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} 4a + 2b + \Delta - a - b = \Delta \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (2)$$

$$t_5 = 29 \Rightarrow 25a + 5b + c = 29 \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} 25a + 5b + \Delta - a - b = 29 \Rightarrow 24a + 4b = 29 - \Delta \Rightarrow 6a + b = \frac{29 - \Delta}{4} \quad (3)$$

$$(2) \text{ و } (3) \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 6a + b = \frac{29 - \Delta}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 1, b = -3 \Rightarrow c = \Delta - 1 - (-3) = \Delta + 2 \Rightarrow t_n = n^2 + 2n + 2$$

در یک دنباله درجه دو جملات اول، دوم و سوم به ترتیب ۱۲، ۲۲ و ۲۲ می باشند. جمله چندم برابر ۵۱ است؟

- ۱) ۴ ☐ ۲) ۵ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) ۷ ☐

پاسخ: فرض کنیم جمله عمومی این دنباله به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ باشد،

$$t_1 = \Delta \Rightarrow a + b + c = \Delta \Rightarrow c = \Delta - a - b \quad (1)$$

$$t_2 = 12 \Rightarrow 4a + 2b + c = 12 \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} 4a + 2b + \Delta - a - b = 12 \Rightarrow 3a + b = 12 - \Delta \quad (2)$$

$$t_3 = 22 \Rightarrow 9a + 3b + c = 22 \xrightarrow{\text{طبق رابطه (1)}} 9a + 3b + \Delta - a - b = 22 \Rightarrow 8a + 2b = 22 - \Delta \Rightarrow 4a + b = \frac{22 - \Delta}{2} \quad (3)$$

$$(2) \text{ و } (3) \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 12 - \Delta \\ 4a + b = \frac{22 - \Delta}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = \frac{\Delta}{4}, b = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow c = 12 - \frac{\Delta}{4} - \frac{\Delta}{4} = 12 - \frac{\Delta}{2}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{\Delta}{4}n^2 + \frac{\Delta}{4}n + 12 - \frac{\Delta}{2} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} n = 5$$

کوچک ترین جمله دنباله $a_n = (-\frac{1}{3})^{n+1}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{27}$ ☐ ۲) -1 ☐ ۳) صفر ☐ ۴) $\frac{1}{9}$ ☐

پاسخ: ابتدا چند جمله اولیه دنباله را می نویسیم:

$$a_1 = (-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}, \quad a_2 = (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}, \quad a_3 = (-\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}, \quad a_4 = (-\frac{1}{3})^5 = -\frac{1}{243}, \dots$$

مشاهده می شود که با افزایش n تمامی جملات مثبت و منفی دنباله به صفر نزدیک می شوند، بنابراین کوچک ترین جمله دنباله، اولین جمله منفی یعنی a_2 است.

اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین جمله دنباله $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{6}$ ☐ ۲) $\frac{7}{3}$ ☐ ۳) $\frac{2}{3}$ ☐ ۴) $\frac{5}{6}$ ☐

پاسخ: ابتدا چند جمله اولیه دنباله را می نویسیم.

$$a_1 = 2 - \frac{1}{3}, \quad a_2 = 2 + \frac{1}{3}, \quad a_3 = 2 - \frac{1}{4}, \quad a_4 = 2 + \frac{1}{5}, \dots$$

مشاهده می شود که با افزایش n (هرچه جملات بیشتری بنویسیم)، جملات ردیف فرد افزایش می یابند و به ۲ نزدیک می شوند و جملات ردیف زوج کاهش می یابند و به ۲ نزدیک می شوند، بنابراین a_1 کوچک ترین جمله و a_2 بزرگ ترین جمله است، پس:

$$a_2 - a_1 = (2 + \frac{1}{3}) - (2 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

دنباله $a_n = \frac{n}{16} + (-\frac{1}{4})^n$ چند جمله منفی دارد؟

- ۱) ۲ ☐ ۲) ۳ ☐ ۳) ۴ ☐ ۴) ۴ ☐

پاسخ: اگر n زوج باشد آن گاه $(-\frac{1}{4})^n = (\frac{1}{4})^n$ ، در نتیجه $a_n = \frac{n}{16} + (\frac{1}{4})^n$ که همواره مثبت است، زیرا n عددی طبیعی است. پس هیچ کدام از جملات ردیف زوج، منفی نیستند، اما اگر n فرد باشد داریم:

$$a_n = \frac{n}{16} + (-\frac{1}{4})^n = \frac{n}{16} - (\frac{1}{4})^n = \frac{n}{16} - \frac{1}{4^n}$$

و برای اینکه a_n منفی باشد باید:

$$a_n < 0 \Rightarrow \frac{n}{16} - \frac{1}{4^n} < 0 \Rightarrow \frac{n}{16} < \frac{1}{4^n} \xrightarrow{\text{طرفین را در } 16 \times 4^n \text{ ضرب کنیم}} n < 16 \times 4^n \xrightarrow{\text{فرد}} n < 16$$

تنها عدد فردی که در رابطه فوق صدق می کند $n = 1$ است.
 'باله' داده شده فقط یک جوابی دارد.

مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله $a_n = (-1)^n$ کدام است؟

۱۰۰ (۴)

۵۰ (۳)

۵۱ (۲)

۴۹ (۱)

پاسخ: با نوشتن چند جمله اول دنباله، به بررسی رفتار دنباله می‌پردازیم.

$$a_1 = (-1)^1 \times 1 = -1, a_2 = (-1)^2 \times 2 = 2, a_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$$

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \dots$$

در واقع جملات این دنباله به صورت مقابل هستند:

اگر جملات را در دسته‌های دوتایی مطابق الگوی زیر دسته‌بندی کنیم، آنگاه مجموع جملات هر دسته ۱ می‌شود و چون ۱۰۰ جمله اولیه تشکیل

$$(-1, 2), (-3, 4), (-5, 6), \dots, (-99, 100)$$

دسته دوتایی می‌دهند.

$$\Rightarrow \text{بنابراین مجموع } 100 \text{ جمله اول برابر با } 50 \times 1 = 50 \text{ است.}$$

الگوی خطی

الگوی خطی، الگوهایی که در آن‌ها، جمله عمومی عبارتی درجه یک بر حسب n است را الگوهای خطی می‌نامیم. در واقع در این الگوها، اختلاف هر دو جمله متوالی، مقداری ثابت است که برابر با ضریب n می‌باشد؛ به عنوان مثال الگویی که جمله عمومی آن به صورت $a_n = 2n + 2$ می‌باشد، خطی است. در این الگو اختلاف هر دو جمله متوالی برابر با ضریب n یعنی ۲ می‌باشد. به جملات این الگو توجه کنید:

$$a_1 = 2 \times 1 + 2 = 4, a_2 = 2 \times 2 + 2 = 6, a_3 = 2 \times 3 + 2 = 8, \dots$$

کدام یک از الگوهای زیر خطی است؟

$$a_n = \frac{2n+3}{n+4} \quad (۴)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \quad (۳)$$

$$a_n = \sqrt{2n+2} \quad (۲)$$

$$a_n = n^2 + 3 \quad (۱)$$

پاسخ: جمله عمومی هر دنباله خطی، عبارتی درجه ۱ بر حسب n است.

کدام یک از الگوهای زیر خطی است؟

$$18, 8, -2, \dots \quad (۴)$$

$$41, 39, 36, \dots \quad (۳)$$

$$2, 6, 18, \dots \quad (۲)$$

$$5, 12, 21, \dots \quad (۱)$$

پاسخ: در الگوهای خطی، اختلاف هر دو جمله متوالی مقدار ثابتی است. در گزینه (۲) هر جمله، از جمله قبل ۱ واحد کم‌تر است، پس خطی است. سایر گزینه‌ها دارای الگوی خطی نمی‌باشند؛ چون اختلاف هر دو طبقه متوالی آن‌ها مقدار ثابتی نیست.

به ازای کدام مقدار a ، دنباله $a_n = (a-1)n^2 + n(3n-2) + 1$ خطی است؟

$$-1 \quad (۴)$$

$$-2 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

پاسخ: ابتدا ضابطه دنباله را ساده کرده و سپس آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$a_n = (a-1)n^2 + n(3n-2) + 1 = an^2 - n^2 + 3n^2 - 2n + 1 = 2n^2 + n - 1 = (2n+1)n - 1$$

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

برای آنکه a_n خطی باشد باید ضریب n^2 صفر باشد تا n^2 از بین برود، پس:

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند، جمله چهاردهم کدام است؟

$$58 \quad (۴)$$

$$57 \quad (۳)$$

$$56 \quad (۲)$$

$$55 \quad (۱)$$

پاسخ: فرض کنیم جمله عمومی این الگوی خطی به صورت $a_n = an + b$ باشد:

$$\begin{cases} a_1 = 17 \Rightarrow a + b = 17 \\ a_{10} = 41 \Rightarrow 10a + b = 41 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} -9a = -24 \Rightarrow a = \frac{8}{3} \\ 10a + b = 41 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = \frac{17}{3} \Rightarrow a_{14} = \frac{8}{3} \times 14 + \frac{17}{3} = 57$$

اعداد $x, y, z, \dots$ چهار جمله اول یک الگوی خطی هستند. جمله پانزدهم این الگو کدام است؟

$$A/5 \quad (۴)$$

$$A \quad (۳)$$

$$Y/5 \quad (۲)$$

$$Y \quad (۱)$$

پاسخ: فرض کنیم جمله عمومی این الگوی خطی به صورت $a_n = an + b$ باشد، پس:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ a_5 = \frac{A}{5} \Rightarrow 5a + b = \frac{A}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} -4a = \frac{A}{5} - 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5}, b = \frac{4}{5} \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{5} \times 15 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$$

در یک الگوی خطی، جمله هفتم، نصف جمله سوم است. جمله یازدهم این الگو کدام است؟

- ۱) ۳ ☐ ۲) -۳ ☐ ۳) ۲ ☐ ۴) ۱ ☐

پاسخ: جمله عمومی این الگو را به صورت $t_n = an + b$ در نظر می‌گیریم؛

$$t_7 = \frac{1}{2} t_3 \Rightarrow 7a + b = \frac{1}{2} (3a + b) \Rightarrow 14a + 2b = 3a + b \Rightarrow 11a + b = 0 \Rightarrow t_{11} = 0$$

در یک دنباله خطی، شش برابر جمله بیستم یا جمله پنجم برابر است. کدام جمله دنباله، صفر است؟

- ۱) بیست و هفتم ☐ ۲) بیست و سوم ☐ ۳) چهل و هفتم ☐ ۴) چهل و سوم ☐

پاسخ: فرض کنیم جمله عمومی این دنباله خطی به صورت $t_n = an + b$ باشد؛

$$6t_{20} = t_5 \Rightarrow 6(20a + b) = 5a + b \Rightarrow 120a + 6b = 5a + b \Rightarrow 115a + 5b = 0 \Rightarrow 23a + b = 0 \Rightarrow t_{23} = 0$$

دنباله حسابی

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی: به دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن مقداری ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، دنباله حسابی می‌گوییم. و آن مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله می‌نامیم.

اگر جمله اول یک دنباله حسابی، a_1 و قدر نسبت آن d باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر هستند:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

جمله دوم جمله سوم جمله چهارم

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

بنابراین جمله عمومی هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d به صورت مقابل می‌باشد.

به عنوان مثال: $a_1 = 1$ ، $d = 1$ با کمی دقت در این تساوی می‌توان دید که مجموع اندیس در a_1 و ضرب d برابر $1 \times 1 = 1$ باشد. بنابراین $a_{14} = 1 + 13 \times 1 = 14$ را می‌توان به صورت‌های زیر هم نوشت:

$$a_{14} = a_1 + 13d \Leftrightarrow 1 + 13 \times 1 = 14 \quad a_{14} = a_7 + 7d \Leftrightarrow 1 + 7 \times 1 = 8 \quad a_{14} = a_{20} - 6d \Leftrightarrow 1 + 6 \times (-1) = -5$$

در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

$n = m + (n-m)$

نکته مهم: جمله عمومی هر دنباله حسابی، عبارتی درجه یک بر حسب n است که در آن ضریب n همان d (قدر نسبت دنباله) می‌باشد. بنابراین هر دنباله حسابی یک دنباله خطی است و بالعکس.

مثال آموزشی

در یک دنباله حسابی، $a_1 = 5$ و $d = 3$ است. a_n را بیابید.

پاسخ: (روش اول)

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \times 3 = 5 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

(روش دوم): می‌دانیم جمله عمومی هر دنباله حسابی عبارتی درجه یک بر حسب n است که در آن ضریب n همان d است. چون $d = 3$ پس: $a_n = 3n + \square$

برای تعیین $\square$ چون $a_1 = 5$ است، به جای n عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم:

$$a_1 = 3 + \square \Rightarrow 5 = 3 + \square \Rightarrow \square = 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی است؟

- ۱) $a_n = n^2 + n$ ☐ ۲) $a_n = n^2 - n$ ☐ ۳) $a_n = 8n - 7$ ☐ ۴) $a_n = 2n^{n+1}$ ☐

پاسخ: هر دنباله حسابی یک دنباله خطی است، بنابراین جمله عمومی آن عبارتی درجه یک می‌باشد، پس دنباله $a_n = 8n - 7$ خطی می‌باشد.

اگر $a_n = \frac{(a+1)n^2 + bn - 1}{(b-2)n + 3a}$ جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، a_0 کدام است؟

- ۱) -۳ ☐ ۲) -۵ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۳ ☐

پاسخ: می‌دانیم جمله عمومی یک دنباله حسابی، عبارتی درجه یک است، پس در دنباله داده شده باید ضریب n^2 در صورت کسر و ضریب n در مخرج

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1, \quad b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

کسر صفر شوند تا a_n عبارتی درجه یک شود.

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n - 1}{-3} \Rightarrow a_0 = \frac{1 - 1}{-3} = 0$$

در یک دنباله حسابی، $a_7 = 5$ و $d = -4$ است. جمله عمومی کدام است؟

$a_n = -2n + 7 \quad (1)$

$a_n = -fn + 17 \quad (2)$

$a_n = -fn + 9 \quad (3)$

$a_n = -2n + 11 \quad (4)$

پاسخ

$d = -4 \Rightarrow a_n = -fn + \square \quad (1)$

روش اول: چون $a_7 = 5$ پس در عبارت (1)، $n = 7$ را قرار می‌دهیم و داریم: $a_7 = -7f + 17 \Rightarrow 5 = -7f + 17 \Rightarrow \square = 17 \Rightarrow a_n = -fn + 17$ با کمی دقت a_n را می‌توانید کاملاً به صورت ذهنی حساب کنید.

په پوری

اینم ری: چون $d = -4$ ، عبارت $-fn$ را بنویسیم، چون $a_7 = 5$ ، حالا به جای n عدد 7 را قرار دهیم، $-fn = -7 \times (-4) = 28$ می‌شود حالا فکر کنید که په عددی باید به $28 - 17 = 11$ اضافه شود تا حاصل 5 شود، واضح است که 17، پس: $a_n = -fn + 17$

روش دوم (سخت): از رابطه $d = a_1 + (n-1)d$ استفاده می‌کنیم: $a_7 = 5 \Rightarrow a_1 + 6d = 5 \Rightarrow a_1 + 6(-4) = 5 \Rightarrow a_1 - 24 = 5 \Rightarrow a_1 = 29$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 29 + (n-1)(-4) \Rightarrow a_n = 29 - 4n + 4 \Rightarrow a_n = -4n + 33$

در یک دنباله حسابی داریم: $2a_1 + a_7 - 3a_4 = 10$. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

$-2 \quad (1)$

$2 \quad (2)$

$-\frac{5}{4} \quad (3)$

$\frac{5}{4} \quad (4)$

پاسخ

$2a_1 + a_7 - 3a_4 = 10 \Rightarrow 2a_1 + a_1 + 6d - 3(a_1 + 3d) = 10 \Rightarrow 2a_1 + a_1 + 6d - 3a_1 - 9d = 10 \Rightarrow -a_1 - 3d = 10 \Rightarrow a_1 = -10 - 3d$

در یک دنباله حسابی جمله اول برابر 1 و مجموع جملات پنجم و ششم برابر 11 می‌باشد. جمله چهارم کدام است؟

$13 \quad (1)$

$8 \quad (2)$

$7 \quad (3)$

$6 \quad (4)$

پاسخ

$a_1 = 10, a_5 + a_6 = 11$

$\Rightarrow a_1 + 4d + a_1 + 5d = 11 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 11 \xrightarrow{a_1=10} 20 + 9d = 11 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d = 10 + 3(-1) = 7$

در یک دنباله حسابی بین جملات، رابطه $2a_1 + 3a_4 - 5a_7 = 8$ برقرار است. حاصل $5a_1 - 3a_4 - 2a_7$ کدام است؟

$8 \quad (1)$

$\frac{8}{5} \quad (2)$

$-\frac{8}{5} \quad (3)$

$-8 \quad (4)$

پاسخ

$2a_1 + 3a_4 - 5a_7 = 8 \Rightarrow 2a_1 + 3(a_1 + 3d) - 5(a_1 + 6d) = 8 \Rightarrow 2a_1 + 3a_1 + 9d - 5a_1 - 30d = 8 \Rightarrow -a_1 - 21d = 8 \Rightarrow a_1 = -8 - 21d$

$5a_1 - 3a_4 - 2a_7 = 5a_1 - 3(a_1 + 3d) - 2(a_1 + 6d) = 5a_1 - 3a_1 - 9d - 2a_1 - 12d = -a_1 - 21d = -(-8 - 21d) - 21d = 8$

در یک دنباله حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_7 = 5 + \sqrt{2}$ می‌باشد. مجموع چهار جمله چهارم چقدر از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است؟

$32 \quad (1)$

$16 \quad (2)$

$64 \quad (3)$

$8 \quad (4)$

پاسخ

چهار جمله اول شامل جملات اول تا چهارم، چهار جمله دوم شامل جملات پنجم تا هشتم و ... و چهار جمله چهارم شامل جملات سیزدهم تا شانزدهم می‌باشد، داریم:

$a_8 + a_7 + a_6 + a_5 = \text{مجموع 4 جمله دوم}$

$a_{16} + a_{15} + a_{14} + a_{13} = \text{مجموع 4 جمله چهارم}$

$\Rightarrow (a_{16} + a_{15} + a_{14} + a_{13}) - (a_8 + a_7 + a_6 + a_5) = (a_{16} - a_8) + (a_{15} - a_7) + (a_{14} - a_6) + (a_{13} - a_5) = 8d + 8d + 8d + 8d = 32d = 32 \times 2 = 64$

در یک دنباله حسابی $a_5 + a_6 = 3$ و $a_8 + a_9 = -2$ حاصل $a_{13} + a_{15}$ کدام است؟

$-\frac{67}{6} \quad (1)$

$-\frac{5}{6} \quad (2)$

$-\frac{37}{6} \quad (3)$

$-\frac{55}{6} \quad (4)$

پاسخ

$$\begin{cases} a_5 + a_6 = 3 \\ a_8 + a_9 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 5d = 3 \\ a_1 + 7d + a_1 + 8d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9d = 3 \\ 2a_1 + 15d = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} d = -\frac{5}{6}, a_1 = \frac{21}{4}$$

$a_{13} + a_{15} = a_1 + 12d + a_1 + 14d = 2a_1 + 26d = 2\left(\frac{21}{4}\right) + 26\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{21}{2} - \frac{65}{3} = -\frac{67}{6}$

بنابراین:



ویژگی ۱: اگر a, b, c سه جمله متوالی یا متساوی الفاصله از یک دنباله حسابی باشند، آن گاه دو برابر جمله وسط برابر است با مجموع دو جمله دیگر یعنی $a + c = 2b$ ، در نتیجه $b = \frac{a+c}{2}$ در این صورت b را واسطه حسابی (یا واسطه عددی) بین a و c می نامیم.

به عنوان مثال: در هر دنباله حسابی داریم:

۱) $a_1, a_3, a_5 \xrightarrow{\text{جملات متوالی}} 2a_3 = a_1 + a_5$

۲) $a_1, a_4, a_7 \xrightarrow{\text{جملات متساوی الفاصله}} 2a_4 = a_1 + a_7$

$d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1}$

ویژگی ۲: اگر a_n و a_m دو جمله از یک دنباله حسابی باشند، آن گاه:

مثال آموزشی

در یک دنباله حسابی $a_7 = 22$ و $a_3 = 7$ می باشد. قدر نسبت این دنباله و هم چنین a_2 را بیابید.

پاسخ

$d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{22 - 7}{4} = \frac{15}{4}$

$a_{2n} = a_n + 12d = 22 + 12 \times \frac{15}{4} = 22 + 36 = 58$

ویژگی ۳ (برابری اندیس ها): مجموع k جمله از یک دنباله حسابی با مجموع k جمله دیگر از همان دنباله حسابی مساوی است. به شرطی که مجموع اندیس ها در دو طرف تساوی با هم برابر باشد. به عنوان مثال:

۱) $a_3 + a_{12} = a_7 + a_{16}$

در هر طرف تساوی، دو جمله داریم و مجموع اندیس های هر طرف ۱۸ می شود:

۲) $a_7 + a_7 + a_{10} = a_1 + a_7 + a_8$

در هر طرف تساوی، سه جمله داریم و مجموع اندیس های هر طرف ۱۶ می شود:

۳) $a_7 + a_{10} + a_{14} = 2a_7 + a_{14} = 2a_9$

در تساوی های فوق اگر $2a_9 = a_7 + a_{14}$ و $2a_9 = a_9 + a_9 + a_9$ در نظر گرفته شود، در نتیجه در هر کدام از طرفین تساوی ها سه جمله داریم و مجموع اندیس ها ۲۷ می شود.

۷۲ اعداد $1 - 5p + 4, 3p + 3$ و $2p + 3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ

$2(2p+3) = 2p+3+5p-1 \Rightarrow 6p+8 = 7p+2 \Rightarrow p=6 \xrightarrow{\text{جملات متوالی}} 15, 22, 29 \Rightarrow d=22-15=7$

۷۳ تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی ۵ و مجموع جمله های دهم و دوازدهم آن ۲۵ می باشد. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟

۳۸/۵ (۴)

۳۷/۵ (۳)

۳۶ (۲)

۳۵ (۱)

پاسخ

$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} 2a_{12} = 30 \Rightarrow a_{12} = 15 \\ 15 - a_{10} = 5 \Rightarrow a_{10} = 10 \end{cases}$

$d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{15 - 10}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a_{11} = a_{12} + 9d = 15 + 9 \times \frac{5}{2} = 15 + 22.5 = 37.5$

۷۴ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ می باشند. جمله پانزدهم کدام است؟

۸۳ (۴)

۱۳۸ (۳)

۱۲۸ (۲)

۸۲ (۱)

پاسخ

$a_7 = 20, a_3 = 56 \Rightarrow d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9$

$\Rightarrow a_{15} = a_7 + 8d \Rightarrow a_{15} = 56 + 8 \times 9 = 56 + 72 = 128$

۷۵ دنباله حسابی $... - 21, x, - 27$ چند جمله منفی دارد؟

۱۶ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ

$a_1 = -27, a_7 = -21 \Rightarrow d = \frac{a_7 - a_1}{7 - 1} = \frac{-21 + 27}{6} = 1$

$a_1 = -27, d = 1 \Rightarrow a_n = 3n - 28$

$a_n < 0 \Rightarrow 3n - 28 < 0 \Rightarrow n < \frac{28}{3} \Rightarrow n < 9.33 \Rightarrow n \leq 9$

پس ۹ جمله منفی دارد.

در یک دنباله حسابی، جمله سیزدهم ۱۱۵ و جمله بیست و هفتم ۴۵ می باشد. این دنباله، چند جمله مثبت دارد؟

۲۶ (۴)

۳۶ (۳)

۳۵ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ

$$a_{17} = 115, \quad a_{27} = 45 \Rightarrow d = \frac{a_{27} - a_{17}}{27 - 17} = \frac{45 - 115}{10} = -7$$

$$a_{17} = 115, \quad d = -7 \Rightarrow a_n = -7n + 182$$

$$a_n > 0 \Rightarrow -7n + 182 > 0 \Rightarrow n < \frac{182}{7} = 26 \Rightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq 25$$

پس این دنباله ۲۵ جمله مثبت دارد.

چند جمله از دنباله حسابی که در آن $a_1 = 170$ و $a_7 = 161$ مثبت است؟

۱۹ (۴)

۲۰ (۳)

۱۷ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ

$$d = a_7 - a_1 = 161 - 170 = -9 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 170 + (n-1)(-9) = -9n + 179$$

$$a_n > 0 \Rightarrow -9n + 179 > 0 \Rightarrow -9n > -179 \Rightarrow n < \frac{179}{9} = 19.88 \Rightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq 19$$

پس ۱۹ جمله مثبت دارد.

در یک دنباله حسابی $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ می باشد، حاصل $a_1 + a_4 + a_7$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۱۴ (۳)

۲۱ (۲)

۷ (۱)

پاسخ

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 3a_1 + 3d = 3(a_1 + d) = 3a_2 = 3 \times 7 = 21$$

روش دوم: عبارت $a_1 + a_2 + a_3$ مجموع سه جمله می باشد و در ضمن مجموع اندیس ها، ۹ می شود، پس:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_2 + a_2 = 3a_2 = 3 \times 7 = 21$$

اگر در یک دنباله حسابی $a_1 + a_2 + a_3 = 30$ باشد، جمله پنجم کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ

در عبارت $a_1 + a_2 + a_3$ سه جمله وجود دارد و مجموع اندیس ها ۱۵ می شود. پس عبارت $a_1 + a_2 + a_3$ با مجموع هر سه جمله ای که مجموع اندیس هایشان ۱۵ شود مساوی است، در نتیجه:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_5 + a_5 + a_5 = 3a_5 \Rightarrow 30 = 3a_5 \Rightarrow a_5 = 10$$

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع ۳ جمله بعدی ۳۹ است. جمله چهارم کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow 3a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 1, \quad a_4 + a_5 + a_6 = 39 \Rightarrow 3a_5 = 39 \Rightarrow a_5 = 13$$

$$d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = \frac{13 - 1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow a_4 = a_5 - d = 13 - 4 = 9$$

هرگاه تعداد اعداد فردی تشکیل دنباله حسابی دهند، معمولاً جمله وسط را a می گیریم و با استفاده از d ، این اعداد را می نویسیم. به عنوان

مثال اگر پنج عدد، تشکیل دنباله حسابی دهند، آن ها را به صورت زیر در نظر می گیریم تا محاسبات آسان تر شود:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

صد هزار تومان را بین ۵ نفر طوری تقسیم می کنیم که سهم های دریافت شده تشکیل دنباله حسابی دهند. اگر ثلث مجموع سه سهم بزرگ تر، مساوی

مجموع دو سهم کوچک تر باشد. کوچک ترین سهم کدام است؟

۲۰۰۰ (۴)

۱۵۰۰ (۳)

۱۲۰۰ (۲)

۱۰۰۰ (۱)

پاسخ

فرض کنیم جمله وسط a و قدر نسبت d باشد، پس این ۵ سهم به صورت زیر خواهند بود:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

$$3(a - 2d) = a - d + a + d + a + 2d \Rightarrow 3a - 6d = 3a \Rightarrow a = 2000$$

$$\frac{1}{3}(a - 2d + a - d + a) = a - d + a + d \Rightarrow \frac{1}{3}(3a - 3d) = 2a - d \Rightarrow a - d = 2a - d \Rightarrow d = a$$

$$\Rightarrow d = a \Rightarrow d = 2000 \Rightarrow d = 2000$$

مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند، ۱۵ و حاصل ضرب آن ها ۱۹۵- می باشد. مربع کوچک ترین آن ها کدام است؟

- ۱ (۱) ☐ ۴ (۲) ☐ ۹ (۳) ☐ ۱۶ (۴) ☐

پاسخ: فرض کنیم جمله وسط این دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد. پس این سه عدد به صورت زیر هستند:

$$a-d, a, a+d$$

$$a-d, a, a+d \Rightarrow (a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

$$a-d, a, a+d \Rightarrow (a-d) \times a \times (a+d) = 195 \Rightarrow (5-d) \times 5 \times (5+d) = 195$$

$$\Rightarrow (5-d) \times (5+d) = -39 \Rightarrow 25 - d^2 = -39 \Rightarrow d^2 = 64 \Rightarrow d = \pm 8$$

$$d = 8 \Rightarrow \text{مربع آن} = (-3)^2 = 9$$

$$d = -8 \Rightarrow \text{مربع آن} = (-3)^2 = 9$$

مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند ۶ و مجموع مربعات آن ها ۳۰ می باشد. اختلاف کوچک ترین و بزرگ ترین این اعداد کدام است؟

- ۶ (۱) ☐ ۱۰ (۲) ☐ ۵ (۳) ☐ ۷ (۴) ☐

پاسخ: فرض کنیم جمله وسط دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد. پس این سه عدد به صورت زیر هستند:

$$a-d, a, a+d$$

$$\text{جمله وسط} \Rightarrow a-d, a, a+d \Rightarrow (a-d) + a + (a+d) = 6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{مجموع مربعات اعداد دنباله} \Rightarrow (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 30 \Rightarrow (2-d)^2 + 2^2 + (2+d)^2 = 30$$

$$\Rightarrow (2-d)^2 + 4 + (2+d)^2 = 30 \Rightarrow 4 - 4d + d^2 + 4 + 4 + 4d + d^2 = 30 \Rightarrow 2d^2 = 18 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

$$a = 2, d = 3 \Rightarrow \text{اعداد: } -1, 2, 5$$

$$a = 2, d = -3 \Rightarrow \text{اعداد: } 5, 2, -1$$

درج ۳ واسطه حسابی

اگر بخواهیم m واسطه حسابی بین دو عدد a و b درج کنیم، به کمک رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ قدر نسبت دنباله را می یابیم. برای درک بهتر، مثال زیر را ببینید.

مثال آموزشی

بین دو عدد -14 و 7 شش واسطه حسابی درج کرده ایم. واسطه چهارم را بیابید. ($d > 0$)

پاسخ:

$$a = -14, b = 7 \Rightarrow d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{7-(-14)}{6+1} = \frac{21}{7} = 3$$

$$a + 4d = -14 + 4 \times 3 = -14 + 12 = -2$$

بین دو عدد 5 و 68 هشت واسطه حسابی درج کرده ایم. مجموع کوچک ترین و بزرگ ترین واسطه کدام است؟

- ۷۳ (۱) ☐ ۷۶ (۲) ☐ ۶۷ (۳) ☐ ۶۳ (۴) ☐

پاسخ: هشت واسطه حسابی با دو عدد 5 و 68 تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. بنابراین دنباله حسابی حاصل 10 جمله دارد. اگر $a_1 = 5$ و $a_9 = 68$

فرض شود. در نتیجه کوچک ترین واسطه a_2 و بزرگ ترین آن ها a_9 است. در دنباله های حسابی داریم: $a_2 + a_9 = a_1 + a_{10} \Rightarrow a_2 + a_9 = 5 + 68 = 73$

در دو دنباله حسابی به صورت های $\{2, 7, 12, \dots\}$ و $\{8, 11, 14, \dots\}$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

- ۵۸ (۱) ☐ ۵۹ (۲) ☐ ۶۰ (۳) ☐ ۶۱ (۴) ☐

$$2, 7, 12, 17, \dots \Rightarrow d_1 = 5$$

$$8, 11, 14, 17, \dots \Rightarrow d_2 = 3$$

اولین جمله مشترک دو دنباله فوق 17 و قدر نسبت دنباله حاصل از جملات مشترک، برابر با کوچک ترین مضرب مشترک 5 و 3 می باشد. یعنی

$$d = [5, 3] = 15$$

$$d = 15, a_1 = 17 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 17 + (n-1) \times 15 \Rightarrow a_n = 15n + 2$$

$$100 \leq a_n \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \Rightarrow \frac{98}{15} \leq n \leq \frac{997}{15}$$

$$\Rightarrow 6 \frac{14}{15} \leq n \leq 66 \frac{7}{15} \Rightarrow 7 \leq n \leq 66$$

اعداد سه رقمی مشترک در این بازه:

(برای فرج ۹۵)

در دنباله‌های حسابی $\{2, 9, 16, 23, \dots\}$ و $\{12, 17, 22, 27, \dots\}$ چند عدد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ وجود دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ

$$\{2, 9, 16, 23, 30, 37, \dots\} \Rightarrow d_1 = 9 - 2 = 7$$

$$\{12, 17, 22, 27, \dots\} \Rightarrow d_2 = 17 - 12 = 5$$

قدر نسبت جملات مشترک دو دنباله فوق، کوچک‌ترین مضرب مشترک ۵ و ۷ می‌باشد، پس:

$$\begin{aligned} d_1 &= [d_1, d_2] = [7, 5] = 35 \\ \Rightarrow a_n &= 35n + 2 \\ a_1 &= 37 \end{aligned}$$

$$300 < a_n < 300 \Rightarrow 100 \leq 35n + 2 < 300 \Rightarrow 98 < 35n < 298 \Rightarrow \frac{98}{35} < n < \frac{298}{35}$$

$$\Rightarrow 2/8 \leq n < 8/5 \xrightarrow{bcN} 3 \leq n \leq 8 \Rightarrow \text{تعدادها} = 8 - 3 + 1 = 6$$

مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه رقمی در دنباله حاصل از جملات مشترک دو دنباله حسابی $b_n = 6n + 5$ و $a_n = 3n - 3$ کدام است؟

۲۶ (۴)

۲۵ (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

پاسخ: قدر نسبت دنباله حاصل از جملات مشترک، کوچک‌ترین مضرب مشترک ۶، ۴ می‌باشد، پس داریم:

$$a_n = 3n - 3 \Rightarrow d_1 = 3$$

$$b_n = 6n + 5 \Rightarrow d_2 = 6$$

$$\begin{aligned} d &= [4, 6] = 12 \\ \Rightarrow c_n &= 12n + 5 \\ c_1 &= 17 \end{aligned}$$

$$100 \leq c_n \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 12n + 5 \leq 999 \Rightarrow \frac{95}{12} \leq n \leq \frac{994}{12} \Rightarrow 7/82 \leq n \leq 82/84 \xrightarrow{bcN} 8 \leq n \leq 82$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 8 + 9 = 26$$

اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته، مربع کامل باشد: $(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$ مجموع جملات اول و آخر دسته پانزدهم کدام است؟

(شماره‌ساز نوبت ۷۳)

۴۲۴ (۴)

۵۲۲ (۳)

۴۳۰ (۲)

۵۳۰ (۱)

پاسخ

$$\begin{aligned} 15^2 &= 225 \\ \Rightarrow \text{مجموع جملات اول و آخر دسته پانزدهم} &= 225 + 197 = 422 \end{aligned}$$

$$14^2 + 1 = 197$$

مجموع‌های زیر را به خاطر بسپارید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته باشد. $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ جمله آخر

(برای فرج ۹۷)

۴۲۳ (۴)

۴۲۱ (۳)

۴۱۹ (۲)

۴۱۵ (۱)

پاسخ: طبق نکته فوق می‌دانیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد در این ۲۰ دسته} = 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

پس جمله آخر دسته بیستم، ۲۱۰امین عدد طبیعی فرد است.

$$210 = a_{210} = 2 \times 210 - 1 = 419$$

می‌دانیم n امین عدد طبیعی فرد برابر است با $a_n = 2n - 1$ ، پس:

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته باشد. ... (۱)، (۳، ۵)، (۷، ۹، ۱۱)، ... مجموع دو

(تیرین داخل ۳)

جمله اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

۱۷۵۰ (۲) ۱۷۰۰ (۱) ۱۸۰۰ (۳) ۱۸۵۰ (۴)

پاسخ:

دسته ۳۰ = $\frac{30 \times 31}{2} = 465$ تعداد کل اعداد در این ۳۰ دسته

جمله آخر دسته سی‌ام، ۴۶۵ آمین عدد طبیعی فرد است و جمله اول دسته سی‌ام ۴۳۶ - ۲۹ = ۴۰۷ آمین عدد طبیعی فرد است. می‌دانیم n آمین عدد

طبیعی فرد برابر است با ۱ - ۲n = a_n پس: $407 = 2 \times 203.5 - 1 = 406$

جمله اول دسته سی‌ام = $a_{203} = 2 \times 203 - 1 = 405$ جمله آخر دسته سی‌ام = $a_{406} = 2 \times 406 - 1 = 811$

اعداد طبیعی زوج را به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته باشد: ... (۲)، (۴، ۶)، (۸، ۱۰، ۱۲)، ... اولین

جمله دسته نوزدهم کدام است؟

۳۴۴ (۲) ۳۴۶ (۳) ۳۴۸ (۴) ۳۴۲ (۱)

پاسخ:

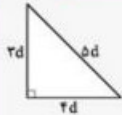
دسته ۱۹ = $\frac{19 \times 20}{2} = 190$ تعداد کل اعداد در این نوزدهم دسته

جمله اول دسته نوزدهم ۱۸ - ۱۹ = ۱۹۰ آمین عدد طبیعی زوج است. می‌دانیم n آمین عدد طبیعی زوج برابر است با ۲n = a_n پس ۱۷۲ آمین عدد

طبیعی زوج برابر است با: $172 = 2 \times 86 = 172$

مثال و دنباله حسابی

۱) اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d دهند، طول اضلاع مثلث ۳d، ۴d، ۵d می‌باشد.



۲) اگر زوایای مثلثی، تشکیل دنباله حسابی دهند، همواره یکی از زاویه‌های آن مثلث ۶۰° خواهد بود.



$(a-d) + a + (a+d) = 180^\circ \Rightarrow 3a = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$

اثبات:

۹۲) اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله عددی می‌دهند. اگر طول ضلع متوسط این مثلث ۵ باشد، طول وتر آن کدام است؟

۶ (۱) ۶/۲۵ (۲) ۶/۵ (۳) ۷ (۴)

پاسخ:

چون اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، پس طول اضلاع این مثلث برابر ۳d، ۴d، ۵d است.

ضلع متوسط = $4d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{4} \Rightarrow 3d = \frac{15}{4} = 3.75$ و وتر = $5d = 5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = 6.25$

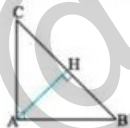
۹۳) اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله عددی می‌دهند. اگر طول وتر این مثلث ۱۰ باشد، ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۴/۸ (۱) ۴/۹ (۲) ۵ (۳) ۵/۲ (۴)

پاسخ:

چون اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله عددی داده‌اند، بنابراین طول اضلاع این مثلث برابر ۳d، ۴d، ۵d می‌باشد، پس داریم:

$5d = 10 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow 3d = 6$ طول ضلع کوچک‌تر $3d = 6$ و طول ضلع متوسط $4d = 8$



۱) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC$
۲) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times AB$
 $\Rightarrow (1) = (2) \Rightarrow AH \times BC = AC \times AB \Rightarrow 10 \times AH = 8 \times 6 \Rightarrow AH = \frac{48}{10} = 4.8$

۹۴) اگر زوایای یک مثلث، تشکیل دنباله حسابی دهند، یکی از زوایای این مثلث همواره چه مقداری دارد؟

۴۵° (۱) ۵۰° (۲) ۶۰° (۳) ۷۵° (۴)

پاسخ:

فرض کنیم زاویه کوچک‌تر x و قدر نسبت d باشد، پس دو زاویه دیگر به ترتیب x+d و x+2d هستند، در نتیجه:

$x + (x+d) + (x+2d) = 180^\circ \Rightarrow 3x + 3d = 180^\circ \Rightarrow x + d = 60^\circ \Rightarrow$ زاویه متوسط = 60°

دنباله هندسی: دنباله‌ای است که هر جمله آن (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. به این عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً با r نمایش می‌دهیم. دقت کنید که جمله اول هم باید غیر صفر باشد. اگر جمله اول یک دنباله هندسی، a_1 و قدر نسبت آن r باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر هستند:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1}$$

جمله اول جمله دوم جمله سوم جمله چهارم

$$a_{1r} = a_1 r^1 r = a_{1r} r^2 = a_{1r} r^3 = a_{1r} r^4$$

در طرف دوم هر یک از تساوی‌های فوق، مجموع اندیس a و توان r برابر با ۱۴ است، به بیان دیگر در هر دنباله هندسی که در آن m و n اعدادی طبیعی هستند، داریم:

$$a_m = a_n r^{m-n}$$

در یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲، حاصل $\frac{a_1 \times a_7}{(a_4)^2}$ کدام است؟

$$\frac{a_1 \times a_7}{(a_4)^2} = \frac{a_1 \times a_1 r^6}{(a_1 r^3)^2} = \frac{a_1^2 r^6}{a_1^2 r^6} = r^0 = 1$$

در یک دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ قدر نسبت دنباله کدام است؟

$$\frac{a_1}{a_8} = \frac{a_1}{a_1 r^7} = \frac{1}{r^7} \Rightarrow r^7 = 1 \Rightarrow r = 1$$

در یک دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = \frac{2}{3^n}$ جمله چهارم چند برابر جمله ششم است؟

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{\frac{2}{3^4}}{\frac{2}{3^6}} = \frac{3^6}{3^4} = 3^2 = 9$$

در یک دنباله هندسی، جملات چهارم و هفتم به ترتیب ۷ و ۵۶ می‌باشد. جمله نهم کدام است؟

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{56}{7} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_9 = a_4 r^5 = 7 \times 2^5 = 224$$

در یک دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ حاصل $a_1 a_8$ کدام است؟

$$a_1 a_8 = a_1 a_1 r^7 = a_1^2 r^7 = (a_1 r^3)^2 r^1 = (a_4)^2 r = 2^2 \times 2 = 8$$

در یک دنباله هندسی، قدر نسبت برابر $\frac{1}{2}$ است. مجموع جملات پنجم و هفتم چند برابر مجموع جملات هشتم و دهم است؟

$$\frac{a_5 + a_7}{a_8 + a_{10}} = \frac{a_1 r^4 + a_1 r^6}{a_1 r^7 + a_1 r^9} = \frac{r^4(1 + r^2)}{r^7(1 + r^2)} = \frac{1}{r^3} = 8$$

در دنباله هندسی $..., 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, ...$ حاصل $\frac{a_9 + a_5}{a_7 + a_3}$ کدام است؟

$$\frac{a_9 + a_5}{a_7 + a_3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = 1$$

ابتدا قدر نسبت هندسی داده شده را می‌یابیم:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \frac{a_9 + a_5}{a_7 + a_3} = \frac{a_1 r^8 + a_1 r^4}{a_1 r^6 + a_1 r^2} = \frac{r^4(r^4 + 1)}{r^2(r^4 + 1)} = r^2 = 1$$

مکزیٹھ (CPI)

$\gamma = 1$ ☐

یاسی

گزارش

F

— **السلامة**

(تقریبی طور پر ۹۷)

$2 + \sqrt{2}$ (1)

چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

اکنون با معلوم بودن r^3 نسبت بزرگترین این سه عدد (یعنی a_1) به کوچکترین آن‌ها یعنی a_9 برابرست یا:

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial_1 r^Y}{\partial_1 r} = r^Y = (Y \pm \sqrt{Y})^Y = Y \pm \sqrt{Y} \xrightarrow{\text{نوع ١}} Y + \sqrt{Y} \text{ في } ١$$

واسطه هندسی



نکته اگر a, b, c سه جمله متوالی یا جملات متساوی الفاصله از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \cdot c = b^2$ و b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامیم.

و به طور کلی حاصل ضرب k جمله از یک دنباله هندسی با حاصل ضرب k جمله دیگر از همان دنباله هندسی برابرند به شرطی که مجموع اندیس‌ها در دو طرف تساوی با هم برابر باشند.

به عنوان مثال، در دنباله هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots$ داریم:

زیرادر هر طرف تساوی ۲ جمله داریم و مجموع اندیس‌ها در دو طرف با هم مساوی است. $(6+8=3+11)$

در رابطه بالا در هر طرف ۳ جمله داریم و مجموع اندیس‌ها در هر دو طرف با هم مساوی است.

تعداد جملات در دو طرف رابطه روبه‌رو یا هم‌مساوی نیستند، بنابراین رابطه مقابل برقرار نمی‌باشد.

例 2.1.1 设 A_1, A_2, A_3, A_4 为 2×2 矩阵, 且 $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$, 证明 $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$.

۱۰۵

9 (1)

١٢

در دنباله هندسی $a_5 \times a_1 \times a_2 = 40$ ، جمله نهم کدام است؟

☐ 3-5 (4)

☐ 2-5 (3)

☐ 3-5 (2)

☐ 5-5 (1)

پاسخ: در عبارت $a_5 \times a_1 \times a_2 = 40$ مجموع اندیس ها برابر $5+1+2=8$ می باشد، پس این عبارت با حاصل ضرب هر سه جمله ای که مجموع اندیس های آن ها 8 شود مساوی است، در نتیجه:

$$a_5 \times a_1 \times a_2 = a_4 \times a_4 \times a_4 \Rightarrow 40 = a_4^3 \Rightarrow a_4 = \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$$

اعداد 2^b و $4\sqrt{2}$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی می باشند. واسطه عددی بین a و b کدام است؟

☐ 2-5 (4)

☐ 1-5 (3)

☐ 2 (2)

☐ 2-5 (1)

پاسخ: 2^b و $4\sqrt{2}$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی می باشند. واسطه عددی بین a و b کدام است؟
 $2^b \times 4\sqrt{2} = a^2 \Rightarrow 2^{b+2} \times 2^{1/2} = a^2 \Rightarrow 2^{b+5/2} = a^2 \Rightarrow b+5/2 = 2a \Rightarrow b = 2a - 5/2$

$$\Rightarrow b = 2a - 5/2 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{a + 2a - 5/2}{2} = \frac{3a - 5/2}{2} = 2/5$$

اعداد $3^a, 3\sqrt{3}, 9, b$ چهار جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه هندسی بین دو عدد a و b کدام است؟

☐ 9 (4)

☐ 3 (3)

☐ 3 (2)

☐ 3-3 (1)

پاسخ: چون $3^a, 3\sqrt{3}, 9, b$ چهار جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه هندسی بین دو عدد a و b کدام است؟
 $3^a \times 9 = (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow 3^{a+2} = 3^3 \Rightarrow a+2 = 3 \Rightarrow a = 1$

$$r = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow b = 9 \times r = 9\sqrt{3}$$

از طرفی می دانیم واسطه هندسی بین دو عدد m و n برابر $\sqrt{mn}$ می باشد، بنابراین:

$$b, a\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{b \times a\sqrt{3}} = \sqrt{9\sqrt{3} \times a\sqrt{3}} = \sqrt{27a} = 3\sqrt{3}$$

با افزودن یک مقدار ثابت به هر یک از اعداد $10, 16, 25$ ، یک دنباله هندسی به وجود می آید، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

☐ 3/4 (4)

☐ 4/3 (3)

☐ 3/2 (2)

☐ 1/4 (1)

پاسخ: فرض کنیم مقدار ثابت x باید به اعداد فوق اضافه شود تا دنباله هندسی تشکیل شود، پس این دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$10+x, 16+x, 25+x$$

$$(16+x)^2 = (10+x)(25+x) \Rightarrow 256 + 32x + x^2 = 250 + 35x + x^2 \Rightarrow 256 - 250 = 35x - 32x$$

$$\Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{جملات دنباله} = 12, 18, 27 \Rightarrow \text{قدر نسبت دنباله} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

اگر $3x, 6x+1, 12x, \dots$ جملات ابتدایی یک دنباله هندسی باشند به جمله سوم چقدر اضافه کنیم تا سه جمله اولیه، تشکیل دنباله حسابی دهند؟

☐ 13/4 (4)

☐ 11/4 (3)

☐ 9/4 (2)

☐ 3/4 (1)

پاسخ: چون جملات، تشکیل دنباله هندسی می دهند، در نتیجه مربع جمله وسط برابر است با حاصل ضرب دو جمله دیگر، بنابراین:

$$(6x+1)^2 = 3x \times 12x \Rightarrow 36x^2 + 12x + 1 = 36x^2 \Rightarrow 12x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \text{سه جمله اولیه دنباله فوق} = -\frac{3}{12}, -\frac{6}{12}, -\frac{12}{12} \Rightarrow -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1$$

فرض کنیم باید مقدار x را به جمله سوم اضافه کنیم تا سه جمله اولیه تشکیل دنباله حسابی دهند، بنابراین داریم:

$$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1+x \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 2 \times (-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4}) + (-1+x) \Rightarrow 1 = -\frac{5}{4} + x \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

هرگاه جملات a_n, a_m, a_p (که $n < m < p$) سه جمله یک دنباله حسابی باشند و تشکیل دنباله هندسی دهند (یعنی سه جمله متوالی یک دنباله هندسی شوند) در این صورت قدر نسبت دنباله هندسی از رابطه $r = \frac{n-m}{m-p}$ به دست می آید.

جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

(تقریباً دافن ۷۳)

☐ 7/4 (4)

☐ 9/4 (3)

☐ 7/2 (2)

☐ 5/4 (1)

پاسخ: روش اول: a_2, a_5, a_{12} جملات متوالی از یک دنباله حسابی هستند. $a_2, a_5, a_{12} \Rightarrow (a_1+d), (a_1+4d), (a_1+11d)$ چون تشکیل دنباله هندسی می دهند.

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 16d^2 \Rightarrow 8d^2 = 12a_1d \Rightarrow 8d = 12a_1 \Rightarrow d = \frac{3}{2}a_1$$

$$r = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{a_1 + 4 \times \frac{3}{2}a_1}{a_1 + \frac{3}{2}a_1} = \frac{\frac{7}{2}a_1}{\frac{5}{2}a_1} = \frac{7}{5}$$

(پاسخ ۵۵): طبق نکته صفحه قبل داریم:

$$a_7, a_9, a_{11} \Rightarrow n = 12, m = 9, p = 7, (n > m > p) \Rightarrow r = \frac{12-9}{9-7} = \frac{3}{2}$$

در یک دنباله حسابی، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی صعودی اند، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(ریاضی قریح ۸۷)

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{6}{5} \quad (1)$$

(پاسخ ۳): طبق نکته صفحه قبل داریم:

$$a_1, a_3, a_5 \Rightarrow r = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

جملات هفتم، k ام و نوزدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۵ هستند. k کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

(پاسخ ۳): طبق نکته صفحه قبل داریم:

$$a_7, a_k, a_{19} \Rightarrow r = \frac{19-k}{k-7} = \frac{19-k}{k-7} = 5 \Rightarrow 5k - 35 = 19 - k \Rightarrow 6k = 54 \Rightarrow k = 9$$

درج واسطه هندسی

اگر بخواهیم m واسطه هندسی بین دو عدد حقیقی a و b درج کنیم، قدرنسبت دنباله حاصل را می توان از رابطه $r^{m+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آورد.

مسئله آموزشی

چهارده عدد، بین اعداد ۵ و ۱۶۰ طوری نوشته ایم که این شانزده عدد، تشکیل دنباله هندسی می دهند. قدرنسبت این دنباله هندسی را بیابید.

$$m = 14, a = 5, b = 160$$

$$\Rightarrow r^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^{15} = \frac{160}{5} \Rightarrow r^{15} = 32 \Rightarrow r = \sqrt[15]{32} = \sqrt[5]{2} = \frac{2}{\sqrt[5]{2}}$$

بین اعداد $\frac{1}{3}$ و ۲۷ سه واسطه هندسی درج کرده ایم، مجموع این سه واسطه کدام است؟ (جملات همگی مثبت هستند.)

$$19 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$13 \quad (2)$$

$$11 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}, a, b, c, 27 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, a_5 = 27$$

$$a_5 = a_1 r^4 \Rightarrow 27 = \frac{1}{3} \times r^4 \Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

چون جملات مثبت هستند، پس $r = 3$ قابل قبول است، در نتیجه جملات این دنباله هندسی به صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27 \Rightarrow \text{مجموع واسطه ها} = 1 + 3 + 9 = 13$$

دنباله ثابت

دنباله ای که تمام جملات آن با هم مساوی باشند، دنباله ثابت نامیده می شود، مانند دنباله $2, 2, 2, 2, \dots$.

نکته هر دنباله ثابت غیر صفر، هم دنباله حسابی (با قدر نسبت صفر) و هم دنباله هندسی (با قدر نسبت ۱) است.

مسئله آموزشی

x و y را طوری بیابید که دنباله $5, 2x+3, x+2, y$ هم حسابی و هم هندسی باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 2x+3 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1 \\ x+2 = y-3 \Rightarrow -3+2 = y-3 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \quad (1)$$

دنباله فوق دنباله ثابت است، در نتیجه تمام جمله های آن با هم مساوی اند.

۱۱۵ کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر دنباله‌ای با حسابی است یا هندسی.
(۲) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی و هم هندسی باشد.
(۳) اگر جملات یک دنباله حسابی را به توان ۲ برسانیم، دنباله‌ای هندسی به وجود می‌آید.
(۴) اگر جملات یک دنباله هندسی را به توان ۲ برسانیم، دنباله‌ای هندسی به وجود می‌آید.

پاسخ بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): دنباله $a_n = n^2$ نه حسابی و نه هندسی است، پس گزینه (۱) نادرست است.
گزینه (۲): دنباله‌های ثابت غیر صفر، هم حسابی و هم هندسی هستند، پس گزینه (۲) نادرست است.
گزینه (۳): اگر جملات یک دنباله حسابی غیر ثابت را به توان ۲ برسانیم، دنباله حاصل نه حسابی و نه هندسی است، پس گزینه (۳) نادرست است.
گزینه (۴): اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت r را به توان k برسانیم، دنباله حاصل، دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت r^k است.

۱۱۶ اگر دنباله $a, b, c, \dots$ هم حسابی و هم هندسی باشد، حاصل $\frac{3a + 5b - c}{2a + b^2 - c^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ چون دنباله فوق هم حسابی و هم هندسی است، پس دنباله ثابت غیر صفر است، در نتیجه $a = b = c$ ، بنابراین:

$$\frac{3a + 5b - c}{2a + b^2 - c^2} = \frac{3a + 5a - a}{2a + a^2 - a^2} = \frac{7a}{2a} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

حاصل ضرب جملات یک دنباله هندسی

۱ اگر تعداد جملات یک دنباله هندسی فرد باشد، آن‌گاه حاصل ضرب جملات دنباله برابر است با جمله وسط به توان تعداد جملات. به عنوان مثال داریم:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{17} = (a_9)^{17}$$

توجه وقتی تعداد جملات فرد است، برای تعیین شماره جمله وسط، می‌توانید یک واحد به تعداد جملات اضافه کنید و حاصل را به $\frac{1}{2}$ تقسیم کنید. مثلاً در دنباله‌ای که ۲۷ جمله دارد، جمله چهاردهم جمله وسط است، زیرا $\frac{27+1}{2} = 14$ می‌باشد.

۲ اگر تعداد یک دنباله هندسی زوج باشد، آن‌گاه حاصل ضرب جملات دنباله برابر است با حاصل ضرب دو جمله وسط به توان نصف تعداد جملات، به عنوان مثال:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{20} = (a_1 \times a_{11})^{\frac{20}{2}} = (a_1 \times a_{11})^{10}$$

۱۱۷ در یک دنباله هندسی، جمله پنجم برابر با -2 می‌باشد. حاصل ضرب نه جمله اول این دنباله، کدام است؟

- (۱) 1024 (۲) 512 (۳) -512 (۴) -1024

پاسخ با توجه به درسامه فوق داریم:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_9 = (\text{جمله وسط})^9 = (a_5)^9 = (-2)^9 = -512$$

۱۱۸ در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب ۷ جمله اول ۱۲۸ می‌باشد، جمله چهارم کدام است؟

- (۱) -3 (۲) ۲ (۳) -2 (۴) ۳

پاسخ با توجه به درسامه فوق داریم:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_7 = (\text{جمله وسط})^7 = (a_4)^7 \Rightarrow 128 = (a_4)^7 \Rightarrow 2^7 = (a_4)^7 \Rightarrow a_4 = 2$$

توجه کنید که جمله چهارم وسط هفت جمله اول است.

۱۱۹ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی $2, 4, 8, \dots$ کدام است؟

- (۱) 2^{100} (۲) 2^{110} (۳) 2^{200} (۴) 2^{210}

$$a_1 = 2, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{20} = (a_1 \times a_{11})^{10} = (a_1 \times a_1 r^{10})^{10} = (a_1^2 \times r^{10})^{10} = (2^2 \times 2^{10})^{10} = (2^{12})^{10} = 2^{120}$$

قیمت یک گوشی تلفن همراه، هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل کاهش می‌یابد. اگر قیمت فعلی این گوشی ۵۰۰۰۰۰ تومان باشد، پس از ۴ سال قیمت آن چقدر است؟

۱) ۱۰۰۰۰۰ (۱) ۲) ۲۴۸۰۰۰ (۲) ۳) ۲۰۴۸۰۰ (۳) ۴) ۳۰۴۸۰۰ (۴)

پاسخ: چون هر سال ۲۰ درصد یعنی $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ از قیمت گوشی کاسته می‌شود، پس قیمت آن بعد از یک سال معادل $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ قیمت فعلی آن است و پس از ۴ سال، قیمت گوشی تلفن همراه برابر است با:

$$P = 500000 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 500000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 500000 \times \left(\frac{16}{625}\right) = 500000 \times \frac{16}{625} = 50 \times 16 = 50 \times 8 \times 2 = 400 \times 2 = 800$$

در کشت نوعی باکتری، تعداد آن‌ها هر دو ساعت ۳ برابر می‌شود. بعد از چند ساعت، تعداد باکتری‌ها، ۸۱ برابر می‌شود؟

۱) ۸ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) ۵۴ (۳) ۴) ۲۷ (۴)

پاسخ: فرض کنیم در ابتدای کشت، تعداد آن‌ها n باشد، پس:

$$n \xrightarrow{\text{۲ ساعت}} 2n \xrightarrow{\text{۲ ساعت}} 4n \xrightarrow{\text{۲ ساعت}} 8n \xrightarrow{\text{۲ ساعت}} 16n$$

پس بعد از $4 \times 2 = 8$ ساعت، تعداد آن‌ها ۸۱ برابر می‌شود.

پس: هر دو ساعت تعداد آن‌ها ۳ برابر می‌شود. می‌خواهیم تعداد آن‌ها ۸۱ برابر شود، پس:

$$81 = 3^n \Rightarrow n = 4$$

در نتیجه ۴ دوره زمانی لازم داریم. هر دوره زمانی دو ساعت است، بنابراین $4 \times 2 = 8$ ساعت زمان لازم است.

جمعیت یک روستا هر ۴ سال نصف می‌شود. اگر جمعیت فعلی روستا ۶۴۰۰۰ نفر باشد، پس از چند سال جمعیت آن به ۲۰۰۰ نفر کاهش می‌یابد؟

۱) ۱۲ (۱) ۲) ۱۶ (۲) ۳) ۲۰ (۳) ۴) ۲۴ (۴)

پاسخ: فرض کنیم n دوره ۴ ساله لازم باشد تا جمعیت روستا به ۲۰۰۰ نفر برسد، پس:

$$64000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2000 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{32} \Rightarrow n = 5$$

پس ۵ دوره ۴ ساله لازم است، در نتیجه $5 \times 4 = 20$ سال دیگر جمعیت روستا به ۲۰۰۰ نفر کاهش می‌یابد.

« درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

« درس دوم: دایره مثلثاتی

« درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

فصل دوم: مثلثات



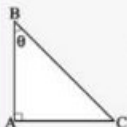
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

تعریف علم مثلثات:

مثلثات شاخه‌ای از علم ریاضی است که به حل مثلث‌های مختلف می‌پردازد. منظور از حل مثلث، پیدا کردن اجزاء مجهول مثلث (مانند زوایا و یا طول اضلاع) به کمک قسمت‌های معلوم آن می‌باشد. اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم نیز از اهداف این علم می‌باشد. این علم در علوم مختلف مهندسی، نقشه‌برداری، جنگ، دریانوردی، نجوم، فیزیک و ... کاربرد فراوانی دارد.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

چهار نسبت مثلثاتی را با توجه به مثلث قائم‌الزاویه ABC ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$\sin \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

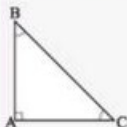
$$\cos \theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } \theta}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } \theta} = \frac{AB}{AC}$$

بنابراین از روابط فوق می‌توان نتایج زیر را گرفت:

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \Rightarrow \tan \theta \cdot \cot \theta = 1, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB} = \tan \theta, \quad \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC} = \cot \theta$$



نکته اگر جمع دو زاویه 90° شود، آن دو زاویه را متمم هم گویند. به عنوان مثال در مثلث قائم‌الزاویه ABC دو زاویه B و C متمم یکدیگرند. ($B + C = 90^\circ$)

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم:

در مثلث فوق برای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin \hat{B} = \cos \hat{C} \quad \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos \hat{B} = \sin \hat{C}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan \hat{B} = \cot \hat{C} \quad \cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot \hat{B} = \tan \hat{C}$$

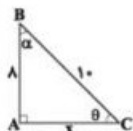
بنابراین اگر $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$ باشد، داریم:

به مثال‌های زیر دقت نمایید:

$$\begin{aligned} 0^\circ + 90^\circ = 90^\circ &\Rightarrow \sin 0^\circ = \cos 90^\circ, \cos 0^\circ = \sin 90^\circ, \tan 0^\circ = \cot 90^\circ, \cot 0^\circ = \tan 90^\circ \\ 1^\circ + 89^\circ = 90^\circ &\Rightarrow \sin 1^\circ = \cos 89^\circ, \cos 1^\circ = \sin 89^\circ, \tan 1^\circ = \cot 89^\circ, \cot 1^\circ = \tan 89^\circ \\ 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ &\Rightarrow \sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \cos 30^\circ = \sin 60^\circ, \tan 30^\circ = \cot 60^\circ, \cot 30^\circ = \tan 60^\circ \\ 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ &\Rightarrow \sin 45^\circ = \cos 45^\circ, \tan 45^\circ = \cot 45^\circ \end{aligned}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60° به کمک نکته مربوط به زوایای متمم، به سادگی می‌توان جدول زیر را به خاطر سپرد:

α	30°	45°	60°
نسبت مثلثاتی			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



با توجه به شکل مقابل، حاصل $\cot \alpha + \frac{1}{\cos \theta}$ کدام است؟

- ۱ (۲) ☐
۳ (۴) ☐

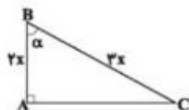
- ۱ (۱) ☐
۲ (۳) ☐

پاسخ: با توجه به رابطه فیثاغورس برای مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$1.0^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{0}, \quad \cos \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{0}{1.0} \Rightarrow \cot \alpha + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = 2$$

معروف ترین اعداد فیثاغورسی عبارتند از: (۳, ۴, ۵), (۶, ۸, ۱۰), (۵, ۱۲, ۱۳) و (۹, ۱۲, ۱۵). دقت کنید که اگر سه عدد فیثاغورسی باشند، مضارب طبیعی آنها

نیز فیثاغورسی است.



با توجه به شکل مقابل، حاصل $(\sin \alpha)^2$ چقدر است؟

- ۱ (۲) ☐
۵ (۴) ☐

- ۱ (۱) ☐
۵ (۳) ☐

پاسخ: می دانیم $\sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$ را به کمک رابطه فیثاغورس پیدا می کنیم:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2 \Rightarrow AC^2 = 5x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{x\sqrt{5}}{5x} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow (\sin \alpha)^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

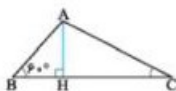
در مثلث ABC، اگر ارتفاع AH = $\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 60^\circ$ ، آن گاه طول ضلع AB چه قدر است؟

- ۱ + $\sqrt{3}$ (۴) ☐

- $\sqrt{3}$ (۳) ☐

- ۲ (۲) ☐

- $\sqrt{2}$ (۱) ☐

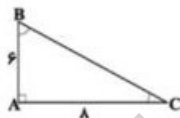


$$\sin \hat{B} = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow AB = 2$$

در شکل مقابل، حاصل $\frac{\sin \hat{B} - \cos \hat{B}}{\tan \hat{C} + \cot \hat{C}}$ برابر با کدام است؟

- ۱۲ (۲) ☐
۲۵ (۴) ☐

- ۱ (۱) ☐
۱۲۵ (۳) ☐



پاسخ: با فرض $BC = x$ به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$(BC)^2 = x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = x = 10$$

حال با داشتن طول هر سه ضلع، نسبت های مثلثاتی خواسته شده را می یابیم:

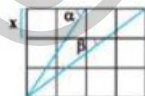
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \tan \hat{C} = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \cot \hat{C} = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \hat{B} - \cos \hat{B}}{\tan \hat{C} + \cot \hat{C}} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}}{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{25}{12}} = \frac{12}{125}$$

در شکل مقابل، مربع های کوچک برابرند. حاصل $2 \tan \alpha + 2 \cos \beta \sin \beta$ کدام است؟

- ۱۲ (۲) ☐
۳۱ (۴) ☐

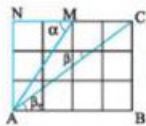
- ۱۵ (۱) ☐
۲۷ (۳) ☐



پاسخ: طول ضلع هر مربع کوچک را x می گیریم، حال در مثلث AMN، مقدار $\tan \alpha$ را می یابیم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب، واضح است که $\beta = \beta_1$. در مثلث قائم الزاویه ABC داریم: $AB = 4x$ ، $BC = 3x$ و طبق رابطه فیثاغورس $AC = 5x$ پس داریم:



$$\left\{ \begin{aligned} \cos \beta &= \cos \beta_1 = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \beta = \frac{4}{5} \\ \sin \beta &= \sin \beta_1 = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} \end{aligned} \right. \Rightarrow 2 \tan \alpha + 2 \sin \beta \cos \beta = 2 + (2 \times 3) = 10$$



اگر نردبانی به طول ۱۲ متر را مطابق شکل مقابل، در لبه پنجره ساختمانی قرار دهیم و نردبان با سطح زمین زاویه 60° بسازد، ارتفاع پایین پنجره تا سطح زمین چقدر است؟

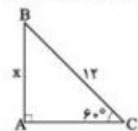
$$6\sqrt{3} \quad (2)$$

$$12\sqrt{3} \quad (1)$$

$$9\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: با توجه به نحوه قرارگیری نردبان در سطح زمین، مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{C} = 60^\circ$) را رسم می‌کنیم. هدف: یافتن طول AB می‌باشد، داریم:

$$\sin \hat{C} = \sin 60^\circ = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$$



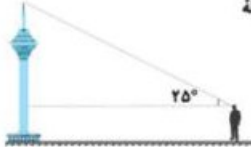
شخصی به فاصله ۳۰ متری از پایین برجی قرار دارد و نوک برج را با زاویه 25° مشاهده می‌کند. اگر فاصله چشم این شخص تا زمین ۲ متر باشد، ارتفاع برج چقدر است؟ ($\tan 25^\circ = 0.46$)

$$34.0 \quad (2)$$

$$32.8 \quad (1)$$

$$14.0 \quad (4)$$

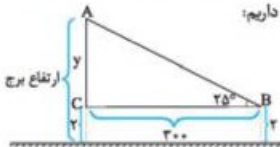
$$13.8 \quad (3)$$



پاسخ: با توجه به فرضیات مسئله، شکل مقابل را رسم می‌کنیم. برای یافتن ارتفاع برج ابتدا باید y را بیابیم، داریم:

$$\tan 25^\circ = \frac{y}{30} \Rightarrow \frac{0.46}{1.00} = \frac{y}{30} \Rightarrow y = 3 \times 0.46 = 1.38$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع برج} = 1.38 + 2 = 3.38 \text{ متر}$$



یک موشک در ارتفاع ۱۰ متری از سطح زمین با زاویه 30° پرتاب می‌شود. پس از طی ۴ کیلومتر تا همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

$$6.10 \quad (4)$$

$$4.10 \quad (3)$$

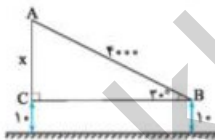
$$8.10 \quad (2)$$

$$8.00 \quad (1)$$

پاسخ: با توجه به فرضیات مسئله، شکل مقابل را رسم می‌کنیم. ارتفاع موشک برابر با $x + 10$ می‌باشد، حال داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{x}{4000} \Rightarrow x = 4000 \sin 30^\circ = 4000 \times \frac{1}{2} = 2000$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع موشک از سطح زمین} = x + 10 = 2010$$



یک هواپیما در ارتفاع ۳ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، مطابق شکل هواپیما تقریباً در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید؟ ($\tan 13^\circ = 0.2$)

$$12000 \text{ m} \quad (2)$$

$$6000 \text{ m} \quad (1)$$

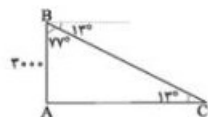
$$18000 \text{ m} \quad (4)$$

$$15000 \text{ m} \quad (3)$$



پاسخ: با توجه به فرضیات مسئله، مثلث ABC را رسم می‌کنیم. حال طبق قضیه خطوط موازی و مورب $\hat{C} = 13^\circ$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\tan 13^\circ = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{3000}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3000}{\tan 13^\circ} = \frac{3000}{0.2} = 15000$$



در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $\tan \hat{B} = \sqrt{2}$ و $a = 3\sqrt{3}$ می‌باشد، اندازه ضلع AB کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{6}$ (۱)

پاسخ: مطابق شکل مقابل، ابتدا $\tan \hat{B}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c \quad (1)$$

مطابق قضیه فیثاغورس داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{(1)} (3\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2 \Rightarrow 27 = 2c^2 + c^2 \Rightarrow 3c^2 = 27 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow AB = 3$$

سینوس یکی از زوایای مثلث قائم الزاویه‌ای برابر $\frac{7}{25}$ و طول ضلع مقابل به همان زاویه برابر ۷ سانتی‌متر است. مساحت مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۱۱۲ (۴)

۱۰۵ (۳)

۸۴ (۲)

۶۳ (۱)

پاسخ: با توجه به شکل مقابل، فرض می‌کنیم $\sin \hat{C} = \frac{7}{25}$ ، پس $AB = 7$ ، بنابراین داریم:

$$\sin \hat{C} = \frac{7}{25} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{7}{25} = \frac{7}{BC} \Rightarrow BC = 25$$

$$\text{طبق رابطه فیثاغورس: } AC^2 = 25^2 - 7^2 \Rightarrow AC = 24 \Rightarrow S = \frac{24 \times 7}{2} = 84$$

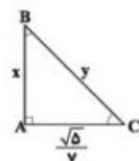
در مثلث قائم الزاویه مقابل، حاصل $\frac{y \cot \hat{B} + y \cot \hat{C}}{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۴ (۴)



پاسخ: با توجه به اینکه فقط طول ضلع AC را داریم، بهتر است از فرمول‌های مربوط به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث استفاده نکنیم. با توجه به این‌که زوایای B و C و $\hat{A}$ متتام هستند ($\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$)، بنابراین داریم:

$$\frac{\tan \hat{C}}{\tan \hat{B}} = \frac{\cot \hat{B}}{\cot \hat{C}} \Rightarrow \frac{y \cot \hat{B} + y \cot \hat{C}}{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}} = \frac{y(\cot \hat{B} + \cot \hat{C})}{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}} = y$$

سعی کنید این سؤال را به روش عددگذاری نیز حل کنید. 😊

در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $\tan \hat{C} = \frac{3}{5}$ و طول تصویر ضلع AB بر روی ضلع BC برابر $\frac{3}{6}$ واحد است. اندازه ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۶ (۴)

$\frac{5}{13}$ (۳)

$\frac{4}{8}$ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: مثلث قائم الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. تصویر ضلع AB بر BC برابر BH می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \tan \hat{C} = \cot \hat{B}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cot \hat{B} = \frac{3}{5} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{3/6}{AH} \Rightarrow AH = \frac{5 \times 3/6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$



تعیین مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی

تصویر مساحت یک مثلث دلخواه، مثلث دلخواه، مقروض است. ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. حال

در مثلث قائم الزاویه AHB داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \sin \hat{B}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (AB \sin \hat{B}) (BC) \Rightarrow S = \frac{1}{2} (AB)(BC) \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

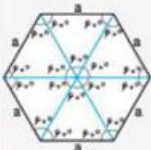
به طور کلی، مساحت هر مثلث دلخواه با داشتن طول دو ضلع و اندازه زاویه بین آن‌ها برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \quad (\text{سینوس زاویه بین آن‌ها حاصل ضرب طول دو ضلع})$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

$$a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$$

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$



نکات ۱ در محاسبه مساحت مثلث دلخواه ABC داریم:

اگر طرفین این رابطه را بر $\frac{1}{2}c$ تقسیم کنیم، داریم:

حال در حالت کلی خواهیم داشت:

رابطه فوق به قضیه سینوس ها معروف می باشد.

۲ برای محاسبه مساحت متوازی الاضلاع، می توان مساحت مثلث را دو برابر کرد، بنابراین در متوازی الاضلاع مقابل داریم:

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times \text{مقابل} \times \text{طول دو ضلع مجاور} \Rightarrow S = \text{مقابل} \times \text{طول دو ضلع مجاور}$$

۳ در هر مثلث متساوی الاضلاع، زاویه بین دو ضلع 60° می باشد، پس مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} aa \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۴ در هر شش ضلعی منتظم، شش مثلث متساوی الاضلاع داریم، پس مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

۵ در یک مثلث قائم الزاویه، اگر وتر و یکی از زوایا را داشته باشیم، می توان سایر اضلاع مثلث را به کمک روابط مثلثاتی به صورت زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} 1) \sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{a} \Rightarrow AC = a \sin \alpha \\ 2) \cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{a} \Rightarrow AB = a \cos \alpha \end{cases}$$

۶ در حل اغلب سوال های کاربردی مثلثات، بهتر است اضلاع مثلث قائم الزاویه را به شکل های فوق بنویسیم.



۱۴ مساحت مثلث مقابل چقدر است؟ ($\cos 15^\circ = 0.96$)

۲/۸۸ (۲)

۵/۷۶ (۱)

۱۰/۵۲ (۴)

۱۱/۵۲ (۳)

پاسخ: می دانیم اگر دو زاویه متمم باشند $(\alpha + \beta = 90^\circ)$ ، آن گاه $\sin \alpha = \cos \beta$ پس $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = 0.96$ حال با توجه به شکل فوق، با داشتن

طول دو ضلع از مثلث و سینوس زاویه بین آن ها، داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin 75^\circ = 6 \times \frac{96}{100} = \frac{576}{100} = 5.76$$



۱۵ مساحت شکل مقابل چقدر است؟

۴۴ (۱)

۲۴ (۲)

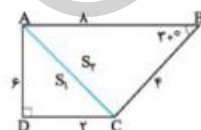
۲۲ (۳)

۱۴ (۴)

پاسخ: با رسم قطر AC، شکل را به دو مثلث مانند شکل مقابل تقسیم می کنیم.

حال از رابطه $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$ مساحت مثلث ABC و از رابطه $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{D}$ مساحت مثلث ACD را به دست می آوریم:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 30^\circ = 6 + 6 = 12$$



(نورین دلال ۷۴)

در متوازی الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه بین دو قطر 135° باشد. مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

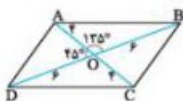
$$(\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

۳۶ (۴)

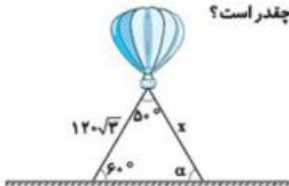
۳۶ (۳)



پاسخ: متوازی الاضلاع ABCD را با مشخصات مسئله رسم می کنیم. چون قطرها در متوازی الاضلاع نصف یکدیگر می باشند، پس $OA = OC = 4$ و $OB = OD = 6$ از طرفی $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$ (چرا؟)، بنابراین ۴ مثلث هم مساحت داریم و مساحت متوازی الاضلاع ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 4S_{AOD} = 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 45^\circ = 48 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$$

با توجه به شکل مقابل، بالی به دو طناب با زاویه های 60° و α وصل شده است. طول طناب دوم چقدر است؟



$$(\sin 70^\circ = 0.95)$$

۱۰۲/۲۲ (۱)

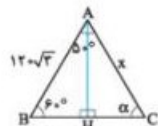
۲۰۲/۴۷ (۲)

۱۸۹/۵ (۳)

۱۲۰/۴۷ (۴)

پاسخ: طبق شرایط مسئله مثلث ABC را رسم می کنیم. مجموع زوایای داخلی هر مثلث، 180° است، بنابراین:

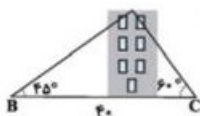
$$60^\circ + 50^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 70^\circ$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{12\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{12\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = 18$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \frac{AH}{x} \Rightarrow \sin 70^\circ = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{18}{\sin 70^\circ} = \frac{18}{0.95} = \frac{1800}{95} = 189.5$$

دو نفر از نقاط B و C مطابق شکل، بالای یک ساختمان را با زاویه های 45° و 60° می بینند. ارتفاع این ساختمان چقدر است؟



۴۰(۳-√۳) (۲)

۴۰(۳+√۳) (۱)

۲۰(۳-√۳) (۴)

۲۰(۳+√۳) (۳)

پاسخ: مثلث ABC و ارتفاع AH را رسم می کنیم:

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{x}{BH} \Rightarrow 1 = \frac{x}{BH} \Rightarrow x = BH$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{x}{CH} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}CH \Rightarrow CH = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\text{فاصله بین دو شخص} = BH + CH = x + \frac{x}{\sqrt{3}} = 40 \Rightarrow \frac{(\sqrt{3}+1)x}{\sqrt{3}} = 40 \Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AH = x = \frac{40\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{40(\sqrt{3}-3)}{1-3} = 20(3-\sqrt{3})$$

اگر $\sin(\frac{x}{y} + y) = \frac{1}{y}$ و $\tan(x-y) = 1$ و زوایای حاده باشند، کدام تساوی زیر درست است؟

$$x+y=75^\circ \quad (۴)$$

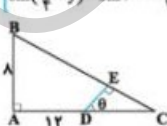
$$x+y=105^\circ \quad (۳)$$

$$x+y=90^\circ \quad (۲)$$

$$x+y=60^\circ \quad (۱)$$

پاسخ: می دانیم $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و $\tan 45^\circ = 1$ بنابراین داریم:

$$\tan(x-y) = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow x-y=45^\circ \Rightarrow \frac{\Delta x}{y} = 45^\circ \Rightarrow x = \frac{45y}{\Delta} = 60^\circ \Rightarrow x-y=45^\circ \xrightarrow{x=60^\circ} 60^\circ - y = 45^\circ \Rightarrow y=15^\circ \Rightarrow x+y=75^\circ$$



در شکل مقابل فرض کنید $\cot \theta = \frac{y}{\Delta}$. در این صورت طول CD چقدر است؟

۱۶ (۲)

۱۰ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

پاسخ: دو مثلث ABC و DEC یک زاویه 90° و یک زاویه مشترک ($\hat{C}$) دارند. پس هر سه زاویه با هم برابر می باشند و در نتیجه دو مثلث متشابه اند، داریم:

$$EDC = \hat{B} \Rightarrow \cot \theta = \cot \hat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{AC} \Rightarrow \frac{y}{\Delta} = \frac{12}{AC} \Rightarrow 12 + DC = 20 \Rightarrow DC = 8$$



15√3 (2) □

15 (4) □

15√3 (1) □

15√3 (3) □

پاسخ: ۲۱

در شکل مقابل

مساحت مثلث متساوی الساقین

۱۸۰° است. پس:

پاسخ: جهت محاسبه مساحت مثلث فوق، به زاویه بین دو ضلع به ابعاد ۵ و ۳ نیازمندیم. می دانیم مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است، پس:

$$72^\circ + 48^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

در شکل مقابل $AH = \sqrt{3}$ ، مساحت شش ضلعی منتظم چقدر است؟

12√3 (2) □

6√3 (4) □

2√3 (1) □

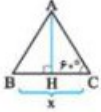
√3 (3) □

پاسخ: ۲۲

در شکل مقابل

مساحت شش ضلعی منتظم

۱۸۰° است. پس:



پاسخ: مثلث ABC متساوی الاضلاع است و طول هر ضلع آن با طول ضلع شش ضلعی منتظم برابر است، داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ می باشد، بنابراین داریم:

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = 6\sqrt{3}$$

مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع $\frac{\sqrt{3}}{4}$ چقدر است؟

2√3 (4) □

9 (3) □

4/5 (2) □

4 (1) □

پاسخ: ۲۳

در شکل مقابل

مساحت شش ضلعی منتظم

۱۸۰° است. پس:



پاسخ: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر با مساحت ۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a می باشد، پس:

$$S_A = \frac{1}{2} a a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_O = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Rightarrow S_O = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} = 4/5$$

شش ضلعی منتظمی در داخل دایره ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{4}$ محاط شده است. مساحت بین شش ضلعی و دایره محیطی چقدر است؟ ($\pi = 3$)

$\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (4) □

$9 - 3\sqrt{3}$ (3) □

$4/5 + 3\sqrt{3}$ (2) □

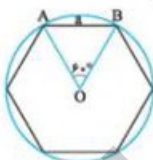
$3\sqrt{3} - 4/5$ (1) □

پاسخ: ۲۴

در شکل مقابل

مساحت شش ضلعی منتظم

۱۸۰° است. پس:



پاسخ: با توجه به شکل، شعاع دایره محیطی برابر OA می باشد، پس طول ضلع شش ضلعی و شعاع دایره محیطی برابر است، داریم:

$$S_O = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{6 \times 3}{16} = \frac{9}{8} \Rightarrow S - S_O = 3\sqrt{3} - \frac{9}{8}$$

$$r = OA = a = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$$

در مثلث مقابل طول ضلع AC چقدر است؟

15√3 + 5√6 (2) □

15√3 - 5√6 (1) □

$\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$ (4) □

$3\sqrt{3} - \sqrt{6}$ (3) □

پاسخ: ۲۵

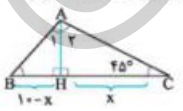
در شکل مقابل

مساحت شش ضلعی منتظم

۱۸۰° است. پس:



پاسخ: مطابق شکل زیر ارتفاع AH را رسم می کنیم و طول CH را برابر x و طول BH را برابر 1-x در نظر می گیریم. حال می دانیم که $\hat{B} = 60^\circ$ ، پس $\hat{A} = 45^\circ$ و $\hat{C} = 75^\circ$ ، پس مثلث ACH قائم الزامه متساوی الساقین می باشد و AH = x است. در مثلث ABH داریم:



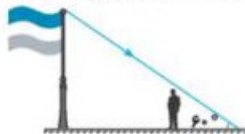
$$\tan \hat{A}_1 = \tan 45^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} + 1 = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{1} = \frac{1-x}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

و در نهایت در مثلث ACH داریم:

$$\sin \hat{A}_2 = \sin 45^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

شخصی با قد ۱/۵ متر برای به دست آوردن طول میله پرچم، طوری مقابل پرچم ایستاده است که سایه خود و سایه میله پرچم روی هم می افتند و انتهای هر دو سایه در یک نقطه است. اگر پرتوهای موازی خورشید با سطح زمین زاویه 60° بسازند و فاصله افقی شخص و میله پرچم ۶ متر باشد، ارتفاع میله پرچم چقدر است؟



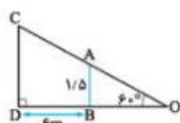
۳+۱۲√۳ (۲)

۳+۶√۳ (۴)

۳+۱۲√۳ (۱)

۳+۶√۳ (۳)

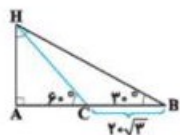
پاسخ با توجه به فرضیات سؤال شکل زیر را رسم می کنیم (CD ارتفاع میله پرچم است):



$$\triangle OAB: \tan 60^\circ = \frac{AB}{OB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1/5}{OB} \Rightarrow OB = \frac{1/5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\triangle OCD: \tan 60^\circ = \frac{CD}{OD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CD}{OD} \Rightarrow CD = \sqrt{3} OD = \sqrt{3} (OB + BD)$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{5} + 6 \right) = \frac{3}{5} + 6\sqrt{3} = \frac{3+12\sqrt{3}}{5}$$



در شکل مقابل، مقدار AH کدام است؟

۳۰ (۱)

۲۰ (۲)

۲۰√۳ (۳)

۲۰√۳ (۴)

$$\triangle AHB: \tan 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AH}{20 + \sqrt{3} + AC} \Rightarrow AH = \frac{(20 + \sqrt{3} + AC)\sqrt{3}}{3} \quad (I)$$

$$\triangle AHC: \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \sqrt{3} AC \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{1}{3} (20 + \sqrt{3} + \frac{AH}{\sqrt{3}}) \sqrt{3} = 20 + \frac{AH}{3}$$

$$\Rightarrow AH - \frac{AH}{3} = 20 \Rightarrow \frac{2AH}{3} = 20 \Rightarrow AH = 30$$



در شکل مقابل y وتر مثلث بزرگ می باشد. حاصل $x + \sqrt{2}y$ کدام است؟

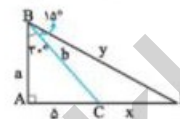
۵√۳-۵ (۲)

۵√۳+۱۰√۳/۲ (۴)

۵√۳ (۱)

۱۵√۳-۵ (۳)

پاسخ با توجه به شکل زیر، در مثلث ABC داریم:



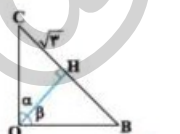
$$\sin 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3} \times 10}{2} = 5\sqrt{3}$$

در مثلث ABD داریم:

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{a}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{y} \Rightarrow y = 10\sqrt{3}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{x+a}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x+5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} \Rightarrow x+5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \Rightarrow x = 0$$



در مثلث قائم الزاویه $\triangle OCB$ ($\hat{O} = 90^\circ$) اگر $CH = \sqrt{3}$ و $BC = 3$ باشد، مقدار $(OC)^2$ چقدر است؟

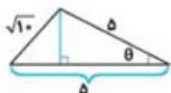
۳√۳ (۲)

۳ (۴)

√۳/۳ (۱)

√۳ (۳)

$$\triangle OBC: \cos \hat{C} = \frac{OC}{BC} \Rightarrow \frac{OC}{3} = \frac{CH}{OC} \Rightarrow (OC)^2 = BC \cdot CH = 3\sqrt{3}$$

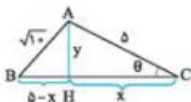


$$\frac{\sqrt{1+\delta^2}}{\delta} \quad (2) \quad \frac{2}{\delta} \quad (4)$$

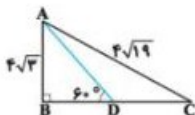
با توجه به شکل مقابل، $\tan \theta$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{1+\delta^2}}{\delta} \quad (1) \quad \frac{2}{\delta} \quad (3)$$

پاسخ: با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث های ABH و ACH داریم:



$$\begin{cases} \Delta ACH: x^2 + y^2 = \delta^2 \Rightarrow y^2 = \delta^2 - x^2 \quad (1) \\ \Delta ABH: (\delta - x)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \delta^2 - x^2 - 1 + x + y^2 = 1 \Rightarrow \delta^2 - x^2 - 1 + x + \delta^2 - x^2 = 1 \Rightarrow 1 + x = 4 \Rightarrow x = 3 \\ y^2 = \delta^2 - x^2 = \delta^2 - 16 = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{\delta} \end{cases}$$



$$16\sqrt{19} \quad (2) \quad 8\sqrt{19} \quad (4)$$

با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث ACD کدام است؟

$$16\sqrt{3} \quad (1) \quad 24\sqrt{3} \quad (3)$$

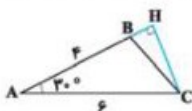
پاسخ: با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$\Delta ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow (4\sqrt{19})^2 = (4\sqrt{3})^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 16(19 - 3) = 16 \times 16 \Rightarrow BC = 16$$

$$\Delta ABD: \tan 60^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{BD} \Rightarrow BD = 4$$

$$CD = BC - BD = 16 - 4 = 12 \Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 24\sqrt{3}$$

سعی کنید به عنوان تمرین بیشتر، مساحت مثلث ACD را با استفاده از رابطه نصف حاصل ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویه بین آن ها محاسبه کنید.



اگر در مثلث ABC، $AB = 4$ و $AC = 6$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، باشد، طول ارتفاع CH کدام است؟

$$2 \quad (2) \quad 4 \quad (4)$$

$$1 \quad (1) \quad 3 \quad (3)$$

پاسخ: برای پیدا کردن CH کافی است مساحت مثلث ABC را از دو روش پیدا کنیم:

$$\begin{cases} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (AB)(AC) \sin \hat{A} = \frac{1}{2} (4)(6) \sin 30^\circ = 6 \\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \times CH = 2CH \end{cases} \Rightarrow 2CH = 6 \Rightarrow CH = 3$$



$$2(2\sqrt{3} + \sqrt{14}) \quad (2) \quad 2\sqrt{3} + \sqrt{14} \quad (4)$$

$$2(2\sqrt{3} + \sqrt{14}) \quad (1) \quad \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{14}) \quad (3)$$

با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

پاسخ: ابتدا ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم می کنیم. در مثلث AHC داریم:

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2 \\ \cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{4} \Rightarrow CH = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

حال رابطه فیثاغورس را در مثلث ABH می نویسیم:

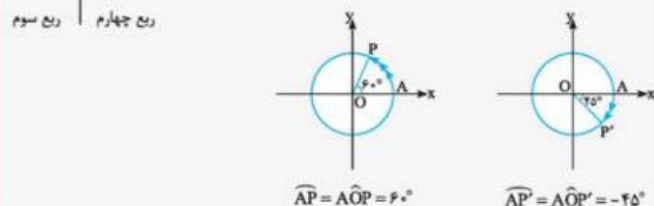
$$AH^2 + BH^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow BH^2 = 72 - 16 = 56 \Rightarrow BH = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$BC = BH + CH = 2\sqrt{14} + 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{14} + 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{14} + \sqrt{3})$$

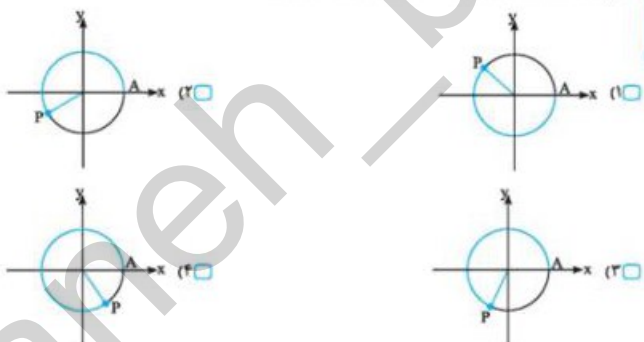


درس دوم: دایرهٔ مثلثاتی

دایرهٔ مثلثاتی: دایره‌ای جهت‌دار به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات (نقطهٔ O) می‌باشد. در دایرهٔ مثلثاتی، نقطهٔ A (۱،۰) را مبدأ حرکت می‌گوییم. اگر از نقطهٔ A در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم و به نقطهٔ P برسیم، کمان AP' و زاویهٔ AOP' منفی و اگر از نقطهٔ A در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم و به نقطهٔ P برسیم، کمان AP و زاویهٔ AOP را مثبت در نظر می‌گیریم. به عنوان نمونه زاویه‌های -۴۵° و $+۶۰^\circ$ را در دایرهٔ مثلثاتی مشاهده می‌کنید:



کدام یک از کمان‌های زیر، زاویهٔ -۱۵۰° را مشخص می‌کند؟



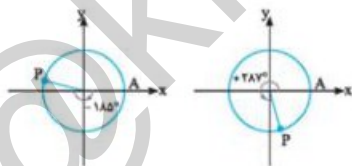
پاسخ: کافی است از نقطهٔ A در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، ۱۵۰° حرکت کنیم.

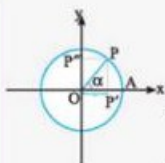
۳۵ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های -۱۸۵° و $+۲۸۷^\circ$ به ترتیب در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند؟

- (۱) سوم - چهارم (۲) دوم - سوم
(۳) سوم - دوم (۴) دوم - چهارم

پاسخ: برای تعیین زاویهٔ -۱۸۵° ، از نقطهٔ A در جهت حرکت عقربه‌های

ساعت، ۱۸۵° حرکت می‌کنیم، بنابراین زاویهٔ -۱۸۵° در ربع دوم می‌باشد و اگر از نقطهٔ A در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، ۲۸۷° حرکت کنیم، انتهای کمان در ربع چهارم قرار می‌گیرد.





فرض کنید P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α باشد، یعنی $\widehat{AP} = \alpha$. در این صورت داریم:

$\sin \alpha$: از نقطه P عمودی بر محور y ها رسم می‌کنیم. $\sin \alpha$ را OP'' می‌گویند.

$\cos \alpha$: از نقطه P عمودی بر محور x ها رسم می‌کنیم. $\cos \alpha$ را OP' می‌گویند.

در واقع در مثلث OPP' داریم:

$$\sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \frac{PP'}{1} = PP' = OP''$$

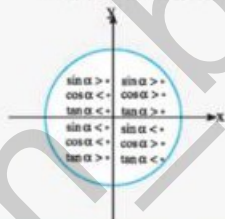
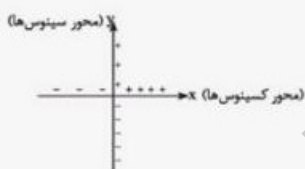
$$\cos \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \frac{OP'}{1} = OP' = OP''$$

بنابراین طول نقطه P در دایره مثلثاتی، همان کسینوس زاویه α و عرض آن سینوس زاویه α است. به همین دلیل محور y ها را محور سینوس ها و محور x ها را محور کسینوس ها می‌نامند. در ضمن داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{PP'}{OP'} \quad , \quad \cot \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}} = \frac{OP'}{PP'}$$

با توجه به اینکه $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ معکوس یکدیگرند، پس هم علامتند، یعنی در ناحیه‌های مختلف دایره مثلثاتی، علامت آن‌ها یکسان است.

علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع به صورت زیر می‌باشد:



اگر $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ و $A \leq \sin \alpha \leq B$ ، مقدار $2A + B$ کدام است؟

۱) ۴

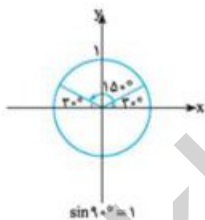
۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

پاسخ: با توجه به شکل واضح است که $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ و $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ در محدوده‌ای که عرض کلیه نقاطی که در محدوده $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ است، برابر $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ می‌باشد، پس $\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$A = \frac{1}{2}, B = 1 \Rightarrow 2A + B = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$



اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$ باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

پاسخ: با توجه به اینکه $\cos \alpha < 0$ است، پس α در ربع دوم یا سوم قرار دارد اما $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ ، یعنی $\sin \alpha < 0$ می‌باشد، پس در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم قرار دارد.

با توجه به دایره مثلثاتی، کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

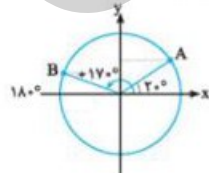
۱) $\sin 20^\circ > \sin 170^\circ$

۲) $\cos 20^\circ < \cos 160^\circ$

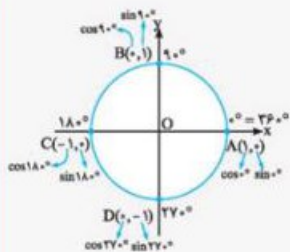
۳) $\tan 20^\circ < \sin 20^\circ$

۴) $\cot 20^\circ < \cos 20^\circ$

پاسخ: می‌دانیم در دایره مثلثاتی، عرض نقطه همان سینوس زاویه مورد نظر است. در گزینه (۱) ابتدا زوایای 20° و 170° را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



انتهای کمان‌ها را A و B می‌نامیم. واضح است که $y_A > y_B$ و در نتیجه $\sin 20^\circ > \sin 170^\circ$ می‌باشد.



دقت کنید که شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است. پس $-1 \leq x = \cos \alpha \leq 1$ و $-1 \leq y = \sin \alpha \leq 1$.
برای پیدا کردن سینوس و کسینوس زوایای $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ می‌توان طول و عرض نقطه انتهایی کمان را به ترتیب کسینوس و سینوس در نظر گرفت.

طول نقطه A برابر ۱ و عرض آن برابر صفر است، پس:

$$\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = \cos 360^\circ = 1$$

طول نقطه B برابر صفر و عرض آن برابر ۱ می‌باشد، پس:

$$\cos 90^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1$$

و برای پیدا کردن سینوس و کسینوس 180° و 270° به روش مشابه از نقاط C و D استفاده می‌کنیم. همچنین برای پیدا کردن $\tan \alpha$ کافی است از رابطه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ استفاده کنیم و برای پیدا کردن $\cot \alpha$ ، از رابطه $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ استفاده می‌کنیم، به عنوان مثال:

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0, \quad \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} = \text{تعریف نشده}$$

با توجه به دایره مثلثاتی فوق و نتایج به دست آمده، جدول زیر را کامل می‌کنیم:

نسبت مثلثاتی \ زاویه (α)	$\alpha = 0^\circ = 360^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 270^\circ$
$\sin \alpha$	۰	۱	۰	-۱
$\cos \alpha$	۱	۰	-۱	۰
$\tan \alpha$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
$\cot \alpha$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰

اگر $\frac{1}{\cos x} = 2$ و $0 < x \leq 2\pi$ باشد، حاصل $A = \sin x + \tan^2 \frac{x}{4} + \cot^2 \frac{x}{4}$ کدام است؟

- ۳ (۲) ☐
۴ (۴) ☐
صفر (۴) ☐

- ۱ (۱) ☐
-۱ (۲) ☐

پاسخ: با توجه به این که همواره $-1 \leq \cos x \leq 1$ با کمی دقت در می‌یابیم که تساوی $\frac{1}{\cos x} = 2$ زمانی برقرار است که $\cos x = 1$ باشد، داریم:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi$$

$$A = \sin 2\pi + \tan^2 \left(\frac{2\pi}{4} \right) + \cot^2 \left(\frac{2\pi}{4} \right) \Rightarrow A = 0 + 0 + 0 = 0$$

اگر $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$ و $\sin 4x = \frac{a+1}{3}$ باشد، در کدام بازه می‌تواند قرار بگیرد؟

- (-۴, ۰) (۲) ☐
(۱, ۴) (۴) ☐
(-۴, -۱) (۳) ☐

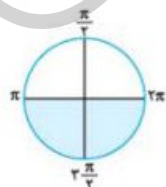
- (۰, ۴) (۱) ☐
(-۴, -۱) (۳) ☐

پاسخ: ابتدا با توجه به حدود x ، حدود $4x$ را تعیین می‌کنیم:

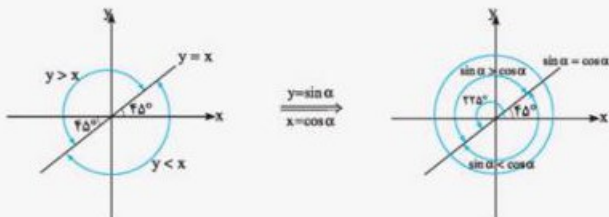
از طرفی با توجه به دایره مثلثاتی داریم:

$$\pi < 4x < 2\pi \Rightarrow -1 < \sin 4x < 0 \Rightarrow -1 < \frac{a+1}{3} < 0$$

$$\Rightarrow -3 < a+1 < 0 \Rightarrow -4 < a < -1$$



$y = x$ نیمساز ربع اول و سوم است. بالای این خط $y > x$ و پایین این خط $y < x$ می باشد. حال با توجه به این که در دایره مثلثاتی $x = \cos \alpha$ و $y = \sin \alpha$ است، در نتیجه داریم:



مثال آموزشی

اگر $0 < \alpha < 45^\circ$ باشد، حاصل $|\tan \alpha - \sin \alpha| + |\cos \alpha - \cot \alpha| + |\cos \alpha - \sin \alpha| + 2 \sin \alpha - \cot \alpha$ برابر با کدام است؟

- ☐ (۱) $\tan \alpha$ ☐ (۲) $\sin \alpha - \cot \alpha$ ☐ (۳) $-\cot \alpha$ ☐ (۴) $\sin \alpha + \cot \alpha$

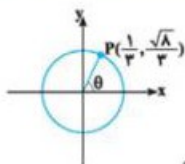
پاسخ

گزینه «۱» برای حل چنین تست هایی باید به خاطر بسپاریم که در ربع اول، اگر $0 < \alpha < 45^\circ$ باشد، $\sin \alpha < \cos \alpha$ و $\tan \alpha > \sin \alpha$ می باشد (این روابط به سادگی از روی دایره مثلثاتی اثبات می شوند)، بنابراین $\sin \alpha - \tan \alpha < 0$ ، $\cos \alpha - \cot \alpha < 0$ ، بنابراین:

$\tan \alpha - \cot \alpha < 0$ و $\tan \alpha - \sin \alpha > 0$ می باشد، بنابراین:

$$(\underbrace{\tan \alpha - \sin \alpha}_{\text{مثبت}}) - (\underbrace{\cos \alpha - \cot \alpha}_{\text{مثبت}}) + (\underbrace{\cos \alpha - \sin \alpha}_{\text{مثبت}}) + 2 \sin \alpha - \cot \alpha = \tan \alpha$$

با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، در نظر گرفتن مختصات نقطه P، حاصل $\sin \theta + \tan \theta$ کدام است؟



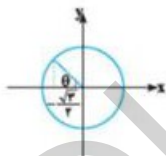
- ☐ (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ☐ (۲) $\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$ ☐ (۳) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ☐ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

گزینه «۲»

پاسخ در دایره مثلثاتی $\sin \theta = y_p = \frac{\sqrt{2}}{3}$ و $\tan \theta = \frac{y_p}{x_p} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{2}$ ، پس داریم: (توجه: $\sqrt{2} = \sqrt{2} \times 1 = 2\sqrt{2}$)

$$\sin \theta + \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، حاصل $\cos \theta + \cot \theta$ برابر با کدام است؟



- ☐ (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ☐ (۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ☐ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ☐ (۴) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

گزینه «۳»

پاسخ با توجه به دایره مثلثاتی، واضح است که $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-1/3}{\sqrt{2}/3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ می باشد، پس:

$$y^2 + \frac{x^2}{3} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-1/3}{1/3} = -1$$

$$\Rightarrow \cos \theta + \cot \theta = -\frac{1}{3} + (-1) = -\frac{4}{3}$$

اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ باشد، آنگاه انتهای کمان روبه رو به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- ☐ (۱) اول ☐ (۲) دوم ☐ (۳) سوم ☐ (۴) چهارم

گزینه «۲»

$$\cos \alpha \cot \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha)^2}{\sin \alpha} < 0$$

$$\sin \alpha \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

با توجه به توان دو در صورت کسر، باید مخرج منفی باشد تا کسر منفی شود. پس $\sin \alpha < 0$ ، حال داریم:

وقتی سینوس و کسینوس هر دو منفی اند، یعنی انتهای کمان در ناحیه سوم قرار دارد.

۴۴ اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{4}$ و $\tan \theta < 0$ ، انتهای کمان θ در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

۴) چهارم

۳) سوم

۲) دوم

۱) اول

پاسخ: ابتدا مقدار $\cos \theta$ را می‌یابیم:

$$1 - \cos \theta = \frac{5}{4} \Rightarrow 1 - \frac{5}{4} = \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

با توجه به اینکه $\cos \theta$ مقداری منفی است، پس θ در ربع دوم یا سوم قرار دارد. اما $\tan \theta < 0$ است، پس θ در ربع دوم یا چهارم می‌باشد. از $\cos \theta < 0$ و $\tan \theta < 0$ متوجه می‌شویم که انتهای کمان θ در ناحیه دوم قرار دارد.

۴۵ اگر $\cos \theta - \sin \theta = \frac{6}{5}$ ، انتهای کمان θ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۴) چهارم

۳) سوم

۲) دوم

۱) اول

پاسخ: می‌دانیم که $1 - \sin \theta \leq 1$ و $1 \leq \cos \theta \leq 1$ می‌باشد. حال با توجه به این که $\cos \theta = \sin \theta + \frac{6}{5}$ است، بنابراین $\cos \theta$ مقداری مثبت است (چرا؟). از طرفی $\sin \theta$ باید منفی شود زیرا اگر $\sin \theta = 0$ یا $\sin \theta > 0$ باشد، مقدار $\cos \theta$ بزرگ‌تر از یک می‌شود که غیرممکن است. تنها ناحیه‌ای که در آن $\cos \theta > 0$ و $\sin \theta < 0$ می‌باشد، ناحیه چهارم است.

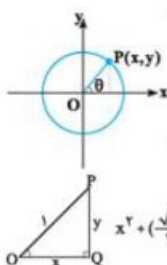
۴۶ اگر زاویه‌ای در ربع اول باشد به طوری که $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{4}$ و مطابق شکل $P(x, y)$ باشد، مقدار $3x + 6y$ کدام است؟

۲) $2(1 + \sqrt{5})$

۱) $2 + 6\sqrt{5}$

۴) $\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{5}}{9}$

۳) $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}$



پاسخ: چون $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ، پس عرض نقطه P برابر $\frac{\sqrt{5}}{4}$ است ($\sin \theta = y = \frac{\sqrt{5}}{4}$). هم‌چنین شعاع دایره مثلثاتی و برابر ۱ می‌باشد، داریم:

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{4} \Rightarrow 3x + 6y = 3\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{11}}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{4}(2\sqrt{5} + \sqrt{11})$$

۴۷ اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم باشد به طوری که $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

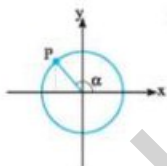
۴) $\frac{\sqrt{45}}{5}$

۳) $-\frac{\sqrt{45}}{5}$

۲) $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

۱) $-\frac{3\sqrt{5}}{4}$

پاسخ: با توجه به شکل $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، پس طول نقطه P برابر $\frac{2}{5}$ می‌باشد. شعاع دایره را ۱ در نظر می‌گیریم. حال در مثلث ایجادشده داریم:



$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

توجه کنید که y در ناحیه دوم مثبت است و در نهایت داریم:

شیب خط و تانژانت زاویه

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه: اگر α زاویه‌ای باشد که خط d با راستای مثبت محور x ها می‌سازد، تانژانت α را شیب خط می‌نامند. داریم:

$$d \text{ شیب خط} = m = \tan \alpha$$

به عنوان نمونه شیب نیمساز ربع اول ($y = x$) برابر ۱ می‌باشد.

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow m = 1$$



تکمه اگر خطی موازی محور x ها باشد، شیب آن برابر صفر است ($m = \tan 0^\circ = 0$) و اگر خطی موازی محور y ها باشد، آن خط با جهت مثبت محور x ها زاویه 90° می‌سازد. پس شیب آن تعریف نشده است (تعریف نشده $m = \tan 90^\circ$). هم‌چنین اگر α حاده باشد، شیب آن خط مثبت است و اگر α منفرجه باشد، شیب آن خط منفی است.

یادآوری اگر شیب خطی m باشد و از نقطه $A(x_1, y_1)$ بگذرد، معادله خط به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ می‌باشد.

تست آموزشی

۱. معادله خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه 45° بسازد و در نقطه‌ای به عرض -5 محور y ها را قطع می‌کند، کدام است؟

- ☐ ۱) $y - x = 5$ ☐ ۲) $y + x = -5$ ☐ ۳) $y + x = 5$ ☐ ۴) $y - x = -5$

پاسخ گزینه «۴» صحیح است.

در محل برخورد با محور y ها مقدار $x_1 = 0$ می‌باشد و $m = \tan 45^\circ = 1$ در نتیجه داریم:

$$y - (-5) = 1(x - 0) \Rightarrow y - x = -5$$

۲. خط به معادله $5x - (2k + 7)y = 1 - 2k$ با راستای مثبت محور x ها زاویه 45° می‌سازد. k کدام است؟

- ☐ ۱) 5 ☐ ۲) 7 ☐ ۳) $\frac{5}{7}$ ☐ ۴) $\frac{7}{5}$

پاسخ گزینه «۲» صحیح است. ابتدا معادله خط را به صورت $y = mx + h$ می‌نویسیم:

$$(2k + 7)y = 5x - 2k - 1 \Rightarrow y = \frac{5x - 2k - 1}{2k + 7} \Rightarrow m = \frac{5}{2k + 7} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow 5 = 2k + 7 \Rightarrow k = -1$$

۳. خط به معادله $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ با راستای مثبت محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

- ☐ ۱) 60° ☐ ۲) 30° ☐ ۳) 45° ☐ ۴) 90°

پاسخ ابتدا معادله خط را به صورت استاندارد $y = mx + h$ می‌نویسیم:

خط به معادله $(5k - 2)x + (4k + 1)y = 9k + 2$ با محور x ها زاویه 45° می‌سازد. مقدار k کدام است؟

- ☐ ۱) 9 ☐ ۲) 18 ☐ ۳) 54 ☐ ۴) 2

پاسخ ابتدا معادله خط را به فرم استاندارد $y = mx + h$ می‌نویسیم:

$$(4k + 1)y = -(5k - 2)x + 9k + 2 \Rightarrow y = \frac{-(5k - 2)x + 9k + 2}{4k + 1} \Rightarrow m = \frac{-(5k - 2)}{4k + 1} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow -5k + 2 = 4k + 1 \Rightarrow 9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9} \Rightarrow 18k = 2$$

اگر شیب خط‌های d_1 و d_2 (مطابق شکل) را m_1 و m_2 بنامیم، حاصل $\frac{\sqrt{3}}{m_1} + m_2$ کدام است؟

- ☐ ۱) 2 ☐ ۲) $\sqrt{3} + 1$ ☐ ۳) $\sqrt{3} - 1$ ☐ ۴) صفر



پاسخ شیب خط یعنی تانژانت زاویه‌ای که خط با راستای مثبت محور x ها می‌سازد. در خط d_1 $120^\circ + \alpha = 180^\circ$ می‌باشد، پس $\alpha = 60^\circ$ و $m_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. در خط d_2 $120^\circ + \beta = 180^\circ$ می‌باشد، پس $\beta = 60^\circ$ و $m_2 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. بنابراین:

با توجه به شکل مقابل، معادله خط L کدام است؟

- ☐ ۱) $y + \sqrt{3}x = 2$ ☐ ۲) $y - \sqrt{3}x = 2$ ☐ ۳) $y + \sqrt{3}x = -2$ ☐ ۴) $y - \sqrt{3}x = -2$

پاسخ خط L از نقطه $(0, -2)$ عبور می‌کند. با توجه به اینکه خط L با جهت منفی محور x ها زاویه 120° ساخته است، پس با جهت مثبت محور x ها زاویه 60° می‌سازد و بنابراین $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ و معادله خط به صورت زیر می‌باشد:

$$y - (-2) = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}x \Rightarrow y - \sqrt{3}x = -2$$

کوچک‌ترین زاویه‌ای که خط d به معادله $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} + 1$ با محور y می‌سازد، چقدر است؟

۹۰° (۱)

۴۵° (۲)

۶۰° (۳)

۳۰° (۴)

پاسخ: ابتدا معادله خط را به صورت $y = mx + h$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{2}y = \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1} = \tan 45^\circ$$

پس خط داده شده با جهت مثبت محور x زاویه 45° و در نتیجه با محور y زاویه 60° می‌سازد.

در شکل زیر، معادله خط d به صورت $\sqrt{3}x + ky + k + 3 = 0$ می‌باشد. مساحت مثلث OAB چقدر است؟

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)

پاسخ: ابتدا معادله خط را به صورت $y = mx + h$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{3}x + ky = -2 - k \Rightarrow ky = -\sqrt{3}x - (k+2) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{k}x - \frac{k+2}{k}$$

$$m = -\frac{\sqrt{3}}{k} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{-1}x - \frac{-1+2}{-1} \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2$$

حال طول اضلاع OA و OB برابر است با:

$$\begin{cases} \text{محل برخورد خط با محور } x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow OB = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \text{محل برخورد خط با محور } y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow OA = 2 \end{cases}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

با توجه به شکل مقابل زاویه θ چند درجه است؟

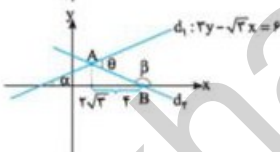
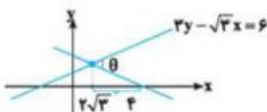
۶۰° (۱)

۸۵° (۲)

۷۵° (۳)

۴۵° (۴)

پاسخ:



$$d_1: 2y - \sqrt{3}x = 6 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 3 \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

در شکل دیده می‌شود که $x_A = 2\sqrt{3}$ برای تعیین y_A کافی است $x = 2\sqrt{3}$ را در معادله خط d_1 قرار

دهیم: $2y - \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 2y - 6 = 6 \Rightarrow y_A = 6 \Rightarrow A(2\sqrt{3}, 6)$ ، $B(4 + 2\sqrt{3}, 0)$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 6}{4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = -1$$

$$\Rightarrow m_2 = -1 \Rightarrow \tan \beta = -1 \Rightarrow \beta = 135^\circ \Rightarrow \theta = \alpha + (180^\circ - \beta) = 30^\circ + (180^\circ - 135^\circ) = 75^\circ$$

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

برخی از فرمول‌های نسبت‌های مثلثاتی

اگر α زاویه دلخواهی باشد به طوری که مخرج کسره‌های زیر مخالف صفر باشد، روابط زیر همواره برقرار است:

۱) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

۲) $\tan^m \alpha = \frac{\sin^m \alpha}{\cos^m \alpha}$

۳) $\cot^m \alpha = \frac{\cos^m \alpha}{\sin^m \alpha}$

۴) $\tan^m \alpha \cot^m \alpha = 1 \Rightarrow \tan^m \alpha = \frac{1}{\cot^m \alpha}, \cot^m \alpha = \frac{1}{\tan^m \alpha}$

۵) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ اثبات: $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۶) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$ اثبات: $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

اگر α در ناحیه اول دایره مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ، حاصل $\cot \alpha - \Delta \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- ۱) ۲ ☐ ۲) ۶ ☐ ۳) ۲ ☐ ۴) ۶ ☐

پاسخ: ۲

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{5}}{5})^2} = 5 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 5 - 1 = 4 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2 \xrightarrow{\text{در ربع اول}} \cot \alpha = 2$$

$$\Rightarrow \cot \alpha - \Delta \cos^2 \alpha = 2 - 5 \times \frac{4}{5} = -2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

اگر $\cot \alpha = \frac{-4}{3}$ و α در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{1}{\sin \alpha} + \tan \alpha$ کدام است؟

- ۱) ۳ ☐ ۲) ۱۲ ☐ ۳) ۱۲ ☐ ۴) ۲ ☐

پاسخ: ۱۲

$$\cot \alpha = \frac{-4}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{-3}{4}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \sin \alpha = \frac{-3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} + \tan \alpha = \frac{-5}{3} + \frac{-3}{4} = \frac{-29}{12}$$

اگر انتهای کمان α در ربع اول باشد، عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ کدام است؟

- ۱) $-\tan \alpha$ ☐ ۲) $-\cot \alpha$ ☐ ۳) $\tan \alpha$ ☐ ۴) $\cot \alpha$ ☐

پاسخ: ۴

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} - \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

توجه کنید که چون $\cos \alpha \leq 1$ ، پس $1 - \cos \alpha \geq 0$ و چون α در ربع اول است، پس $\sin \alpha \geq 0$ می باشد.

اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{-\Delta \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{44 \sin \alpha - 22 \cos \alpha}{\Delta \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$ کدام است؟

- ۱) ۲ ☐ ۲) ۶ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) ۴ ☐

پاسخ: ۶

$$\frac{-\Delta \cos \alpha}{\sin \alpha} = -\Delta \cot \alpha = -\Delta \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{-\Delta}{2} = -4 \quad (I)$$

$$\frac{44 \sin \alpha - 22 \cos \alpha}{\Delta \cos \alpha + 3 \sin \alpha} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر } \cos \alpha \text{ تقسیم می کنیم}} \frac{44 \tan \alpha - 22}{\Delta + 3 \tan \alpha} = \frac{44(2) - 22}{\Delta + 3(2)} = \frac{66}{\Delta + 6} = 6 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)+(II)} -4 + 6 = 2$$

اگر $\sin 21^\circ = \frac{-1}{4}$ باشد، حاصل $\cot^2 21^\circ + 4 \cos^2 21^\circ$ کدام است؟

- ۱) ۹ ☐ ۲) ۹ ☐ ۳) ۲۹ ☐ ۴) ۳۱ ☐

پاسخ: ۹

$$\sin^2 21^\circ + \cos^2 21^\circ = 1 \Rightarrow \frac{1}{16} + \cos^2 21^\circ = 1 \Rightarrow \cos^2 21^\circ = \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow \cot^2 21^\circ + 4 \cos^2 21^\circ = 9 + 4 \times \frac{15}{16} = 12$$

$$1 + \cot^2 21^\circ = \frac{1}{\sin^2 21^\circ} = \frac{1}{(\frac{-1}{4})^2} = 16 \Rightarrow \cot^2 21^\circ = 15 \Rightarrow \cot^2 21^\circ = 9$$

حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت $2 \sin^2 \alpha + \Delta \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- ۱) ۷ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۱۰ ☐

پاسخ: ۷

$$A = 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 3 \cos^2 \alpha = 2 + 3 \cos^2 \alpha$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{Max}\{A\} = 2 + 3 \cos^2 \alpha = 2 + 3(1) = 5 & (I) \\ \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \text{Min}\{A\} = 2 + 3 \cos^2 \alpha = 2 & (II) \end{cases} \xrightarrow{(I)-(II)} 5 - 2 = 3$$

اگر $\sin \alpha = \frac{m}{m+2}$ و $\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{m+2}{m+1}$ حاصل $\tan^2 \alpha \cot^2 \alpha$ کدام است؟ ($m > 0$)

۴ (۴)

۵ (۳)

$\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

پاسخ: مقدار m را از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{m^2}{(m+2)^2} + \frac{(m+1)^2}{(m+2)^2} = \frac{m^2 + m^2 + 2m + 1}{m^2 + 2m + 2} = 1 \Rightarrow 2m^2 + 2m + 1 = m^2 + 2m + 2 \Rightarrow m^2 - 2m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases} \text{ غ ق ک}$$

$$\tan^2 \alpha \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha = 1 \times \cot^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{m+1}{m} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ برقرار باشد، حاصل $2 + 8 \sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

-۴ (۴)

۵ (۳)

-۱ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow -2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow 2 + 8 \sin \alpha \cos \alpha = 2 + 8 \left(\frac{3}{8}\right) = 5$$

اگر α در ناحیه اول و $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: برای حل سریع این سوال، از رابطه زیر که به سادگی قابل اثبات است استفاده می‌کنیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

چون α در ناحیه اول است، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha > 0$ می‌باشد و در نتیجه $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ است.

اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ مقدار $9x^2$ کدام است؟

$36 + 4y^2$ (۴)

$36 - 4y^2$ (۳)

$9 + 4y^2$ (۲)

$9 - 4y^2$ (۱)

پاسخ: با توجه به صورت سؤال، از رابطه بین $\cot \alpha$ و $\sin \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{2}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{x}, \quad y = 3 \cot \alpha \Rightarrow \cot \alpha = \frac{y}{3}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = \frac{1}{\left(\frac{2}{x}\right)^2} \Rightarrow 9x^2 = 36 + 4y^2$$

اگر $0^\circ \leq x \leq 45^\circ$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)}}$ کدام است؟

$\sin^2 x$ (۲)

$\sin x - \cos x$ (۱)

$\sin x + \cos x$ (۴)

$-\sin x - \cos x$ (۳)

پاسخ: اگر $0^\circ \leq x \leq 45^\circ$ باشد، مقادیر سینوس و کسینوس نامنفی می‌باشند، پس در این محدوده $\sin x + \cos x \geq 0$ و $\sin x \cos x \geq 0$ می‌باشد.

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 x}} = \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sin x + \cos x$$

اگر $x = r \sin \theta \cos \alpha$ ، $y = r \sin \theta \sin \alpha$ و $z = r \cos \theta$ باشد، کدام رابطه زیر همواره درست است؟

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (۲)

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (۱)

$x^2 + y^2 - z^2 = r^2$ (۴)

$x^2 + y^2 = z^2$ (۳)

پاسخ: با توجه به گزینه‌ها، مقادیر x ، y و z را به دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + r^2 \cos^2 \theta = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2 (1) = r^2$$

۶۷ با فرض $\tan^2 x = 3$ ، حاصل عبارت $\frac{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}{3 \sin^2 x - 6 \cos^2 x}$ کدام است؟

گزینه ۱: ۱

گزینه ۲: ۲

گزینه ۳: $\frac{1}{3}$

گزینه ۴: ۳

پاسخ: صورت و مخرج کسرها بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم تا به $\tan^2 x = 3$ برسیم:

$$\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - 6 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x + 3}{3 \tan^2 x - 6} = \frac{3+3}{3(3)-6} = \frac{6}{3} = 2$$

گزینه ۴: $\frac{1}{13}$

گزینه ۳: $\frac{1}{16}$

گزینه ۲: $\frac{1}{15}$

گزینه ۱: $\frac{1}{14}$

۶۸ با فرض اینکه $\tan 76^\circ = 4$ باشد، مقدار عددی $\sin^2 14^\circ$ کدام است؟

گزینه ۱: ۱

گزینه ۲: ۲

گزینه ۳: $\frac{1}{16}$

گزینه ۴: $\frac{1}{13}$

پاسخ: می‌دانیم $90^\circ - 76^\circ = 14^\circ$ ، پس این دو زاویه متمم یکدیگرند و در نتیجه:

$$\tan 76^\circ = \cot 14^\circ = 4 \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 14^\circ = \frac{1}{\sin^2 14^\circ} \Rightarrow 1 + 16 = \frac{1}{\sin^2 14^\circ} \Rightarrow \sin^2 14^\circ = \frac{1}{17}$$

۶۹ ساده‌شده عبارت $(\frac{\cos 2^\circ}{1 + \sin 2^\circ} - \frac{\cos 2^\circ}{1 - \sin 2^\circ}) \cot 2^\circ$ کدام است؟

گزینه ۱: صفر

گزینه ۲: ۲

گزینه ۳: ۲

گزینه ۴: -۲

پاسخ: ابتدا عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos 2^\circ}{1 + \sin 2^\circ} - \frac{\cos 2^\circ}{1 - \sin 2^\circ} = \frac{\cos 2^\circ (1 - \sin 2^\circ) - \cos 2^\circ (1 + \sin 2^\circ)}{(1 + \sin 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ)} = \frac{-2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{1 - \sin^2 2^\circ} = \frac{-2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\cos^2 2^\circ} = -2 \tan 2^\circ$$

$$(-2 \tan 2^\circ) \cot 2^\circ = -2 \tan 2^\circ \cot 2^\circ = -2 \times 1 = -2$$

۷۰ حاصل عبارت $\frac{\sin 5^\circ + \sin 27^\circ}{\cos 5^\circ - \cos 27^\circ} + \frac{\cos 5^\circ + \cos 27^\circ}{\sin 5^\circ - \sin 27^\circ}$ کدام است؟

گزینه ۱: صفر

گزینه ۲: ۲

گزینه ۳: $\tan 27^\circ$

گزینه ۴: $\cot 27^\circ$

پاسخ: با مخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{\sin^2 5^\circ - \sin^2 27^\circ + \sin^2 5^\circ \sin 27^\circ - \sin^2 27^\circ \sin 5^\circ + \cos^2 5^\circ - \cos^2 27^\circ + \cos^2 5^\circ \cos 27^\circ - \cos^2 27^\circ \cos 5^\circ}{(\cos 5^\circ - \cos 27^\circ)(\sin 5^\circ - \sin 27^\circ)} = \frac{(\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) - (\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ)}{(\cos 5^\circ - \cos 27^\circ)(\sin 5^\circ - \sin 27^\circ)} = 0$$

۷۱ حاصل عبارت $\frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$ کدام است؟

گزینه ۱: صفر

گزینه ۲: ۱

گزینه ۳: $\sin \theta$

گزینه ۴: $\cos \theta$

پاسخ: با مخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{1 - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta (1 - \cos \theta)} = 0$$

۷۲ حاصل عبارت $\tan^2 \theta + \sin^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ کدام است؟

گزینه ۱: صفر

گزینه ۲: ۱

گزینه ۳: $-\cos^2 \theta$

گزینه ۴: $\cos^2 \theta$

پاسخ: می‌دانیم $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ، پس داریم:

$$\tan^2 \theta + \sin^2 \theta - (1 + \tan^2 \theta) = \tan^2 \theta + \sin^2 \theta - 1 - \tan^2 \theta = (-1 - \sin^2 \theta) = -\cos^2 \theta$$

۷۳ حاصل عبارت $(1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ کدام است؟

گزینه ۱: صفر

گزینه ۲: ۲

گزینه ۳: ۲

گزینه ۴: -۱

پاسخ: ابتدا دو پرانتز را در هم ضرب کرده و سپس از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$(1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 1 + \tan \theta + \cot \theta + \tan \theta \cot \theta - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 + \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2$$

۷۴ ساده‌شده عبارت $(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha})(1 - \cos \alpha)$ کدام است؟

گزینه ۱: صفر

گزینه ۲: $\cos \alpha$

گزینه ۳: $\sin \alpha$

گزینه ۴: $\sin \alpha$

پاسخ: با توجه به رابطه $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ داریم:

$$(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha})(1 - \cos \alpha) = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} (1 - \cos \alpha) = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha$$

۷۵ اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ باشد، حاصل $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

۴۷ (۴)

۴۹ (۳)

۸۱ (۲)

۹ (۱)

پاسخ

$$(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 3^2 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 9 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$$

$$\Rightarrow (\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)^2 = (7)^2 \Rightarrow \tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha + 2 = 49 \Rightarrow \tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha = 47$$

۷۶ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{1+\cos \alpha} + \sqrt{1-\cos \alpha}}{\sqrt{1+\sin \alpha}}$ کدام است؟ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ

صورت را A و منخرج را B در نظر می‌گیریم، داریم:

$$A = \sqrt{1+\cos \alpha} + \sqrt{1-\cos \alpha} \Rightarrow A^2 = 1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha + 2\sqrt{(1+\cos \alpha)(1-\cos \alpha)} \Rightarrow A^2 = 2 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha} = 2 + 2\sin \alpha = 2(1 + \sin \alpha)$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha}} = \sqrt{2}$$

۷۷ اگر $\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

۵ (۱)

پاسخ

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

در ناحیه اول است پس $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

۷۸ اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ باشد، حاصل $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

۷۹ اگر $\sin^2 \alpha = b + \cos^2 \alpha$ ، $\sin^2 \alpha = a + \cos^2 \alpha$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = b \Rightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = b \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = b \Rightarrow \sin^2 \alpha = b + \cos^2 \alpha$$

$$3a + b = 1 \xrightarrow{a=b} 3b + b = 1 \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

در صورت سوال داریم: $\sin^2 \alpha = a + \cos^2 \alpha$ پس $a = b$ می‌باشد، بنابراین داریم:

۸۰ اگر داشته باشیم $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin x}{\sin^2 x - 1}$ ، حاصل $\tan^2 \frac{x}{2} + \cot^2 \frac{x}{2}$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ

ابتدا عبارت سمت چپ را با منخرج مشترک‌گیری و روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ساده می‌کنیم، سپس آن را مساوی با عبارت سمت راست می‌گیریم:

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$= \frac{1+1}{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)} = \frac{2}{2 \sin^2 x - 1} \Rightarrow \frac{2}{2 \sin^2 x - 1} = \frac{2 \sin x}{2 \sin^2 x - 1} \Rightarrow 2 \sin x = 2 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ \Rightarrow \frac{x}{2} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{x}{2} + \cot^2 \frac{x}{2} = \tan^2 45^\circ + \cot^2 45^\circ = 1^2 + 1^2 = 2$$

۸۱ اگر $\cos \alpha = \sqrt{\frac{m}{m+3}}$ و $\tan \alpha = \sqrt{\frac{m+2}{m}}$ مقدار $\cot^2 \alpha$ کدام است؟ ($m > 0$)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۳ (۱)

پاسخ

به کمک رابطه $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ داریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{m+2}{m} = \frac{1}{\frac{m}{m+3}} \Rightarrow \frac{2m+2}{m} = \frac{m+3}{m} \Rightarrow 2m+2 = m+3 \Rightarrow m=1$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{m+2}{m}} = \sqrt{\frac{1+2}{1}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{3}$$

اگر $\sin \alpha = \frac{\sqrt{4}}{m}$ و $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{17-2m}}$ مقدار m کدام است؟

۱۶ (۴)

۴ (۳)

۱۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: ابتدا $\tan \alpha$ را معکوس می‌کنیم تا $\cot \alpha$ به دست آید، سپس از رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cot \alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{17-2m}}} = \sqrt{17-2m} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 17 - 2m = \frac{1}{\frac{4}{m^2}} \Rightarrow 18 - 2m = \frac{m}{4} \Rightarrow 18 = 2m + \frac{m}{4} \Rightarrow 18 = \frac{9m}{4}$$

$$\Rightarrow 9m = 4 \times 18 \Rightarrow m = 8$$

اگر $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ و α در ربع دوم باشد، حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟

$\frac{-1}{5}$ (۴)

$\frac{5}{13}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{-7}{5}$ (۱)

پاسخ: با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه دوم است، پس $\cos \alpha = \frac{-4}{5}$ قابل قبول می‌باشد، حال داریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-1}{5}$$

به‌ازای کدام مقدار A ، عبارت $\tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{A}{\cos^2 x}$ یک اتحاد مثلثاتی است؟

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: روش اول، با منخرج مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{1 + A \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow \frac{1 + A \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + A \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1})$$

$$\Rightarrow 1 + A \cos^2 x = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x \Rightarrow 1 + A \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x \Rightarrow A = -2$$

روش دوم: چون تساوی فوق یک اتحاد است، بنابراین به‌ازای هر مقداری از x برقرار می‌باشد. به‌ازای $x = 0^\circ$ داریم:

$$x = 0^\circ \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{A}{1} = 1 - 1 \Rightarrow 1 + A = -1 \Rightarrow A = -2$$

اگر تساوی $4 - 29 \cos^2 \alpha = (5 \sin \alpha + 3 \cos \alpha)(m \sin \alpha + n \cos \alpha)$ یک اتحاد مثلثاتی باشد، مقدار $m^2 + \frac{1}{5} n^2$ کدام است؟

۲۹ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: روش اول،

$$4 - 29 \cos^2 \alpha = 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 29 \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha - 25 \cos^2 \alpha$$

$$= (5 \sin \alpha + 3 \cos \alpha)(5 \sin \alpha - 3 \cos \alpha) = (5 \sin \alpha + 3 \cos \alpha)(m \sin \alpha + n \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 5 \sin \alpha - 3 \cos \alpha = m \sin \alpha + n \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -3 \end{cases} \Rightarrow m^2 + \frac{1}{5} n^2 = 4 + \frac{1}{5} (9) = 9$$

روش دوم: چون تساوی فوق یک اتحاد است، پس به‌ازای هر مقداری از α برقرار می‌باشد، داریم:

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow 4 - 29(1) = (5 + 3)(m + n) \Rightarrow -25 = 8m + 8n \Rightarrow n = -5$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow 4 - 0 = (5 + 0)(m + 0) \Rightarrow 4 = 5m \Rightarrow m = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow m^2 + \frac{1}{5} n^2 = \frac{16}{25} + \frac{1}{5} (25) = 9$$

مثال: اظهار یعنی تساوی که به‌ازای هر مقدار دلخواهی برقرار است، پس در سوالاتی که تساوی داده شده نشان دهنده یک اتحاد است، می‌توان با دادن عدد دلخواه به‌کمان (α) مقادیر خواسته شده را پیدا کرد.

حاصل عبارت $\tan^2 x - \sin^2 x$ برابر با کدام است؟

$\cot^2 x \cos^2 x$ (۴)

$\cot^2 x \sin^2 x$ (۳)

$\tan^2 x \cos^2 x$ (۲)

$\tan^2 x \sin^2 x$ (۱)

پاسخ: روش اول،

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) = \sin^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \sin^2 x \tan^2 x$$

روش دوم (تست): به x زاویه دلخواه می‌دهیم (طوری که عبارت تعریف شده باشد)، عبارت صورت مسئله برابر است با:

$$x = 60^\circ \Rightarrow \tan^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

حال برای گزینه ها خواهیم داشت:

(۱) گزینه: $x = 60^\circ \Rightarrow \tan^2 60^\circ \sin^2 60^\circ = (\sqrt{3})^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

(۲) گزینه: $x = 60^\circ \Rightarrow \tan^2 60^\circ \cos^2 60^\circ = (\sqrt{3})^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(۳) گزینه: $x = 60^\circ \Rightarrow \cot^2 60^\circ \sin^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(۴) گزینه: $x = 60^\circ \Rightarrow \cot^2 60^\circ \cos^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

حاصل عبارت $1 + \frac{1}{\cos^2 x} + (1 + \tan^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$1 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 + 1 + \tan^2 x + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + 1 + \tan^2 x + 1 - \tan^2 x = 3$

پاسخ: روش اول:

روش دوم: به x زاویه دلخواهی مانند $x = 0^\circ$ می دهیم، داریم:

$x = 0^\circ \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos^2 0^\circ} + (1 + \tan^2 0^\circ)(\cos^2 0^\circ - \sin^2 0^\circ) = 1 + 1 + (1 + 0)(1 - 0) = 3$

حاصل عبارت $\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^2 \theta$ کدام است؟

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

پاسخ:

$\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$

روش اول:

روش دوم: به θ زاویه دلخواه می دهیم، (زاویه ای که به ازای آن عبارت تعریف شده باشد).

گزینه های (۱) و (۳) حذف می باشند. $\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 4 - 1 = 3$ $\Rightarrow$ گزینه (۲) حذف می باشد. $\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 4 - 1 = 3$ $\Rightarrow$ گزینه (۴) حذف می باشد. $\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 4 - 1 = 3$

پس گزینه (۴) صحیح می باشد.

حاصل عبارت $1 + \sin x + \cos x + \tan x$ برابر با کدام است؟

(۲) $(1 + \sin x)(1 + \tan x)$

(۱) $(1 + \cos x)(1 + \cot x)$

(۴) $(1 + \cos x)(1 + \tan x)$

(۳) $(1 + \sin x)(1 + \cot x)$

$1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x) + (\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}) = (1 + \cos x) + \sin x (1 + \frac{1}{\cos x}) = (1 + \cos x) + \sin x (\frac{1 + \cos x}{\cos x})$

پاسخ:

$= (1 + \cos x) (1 + \frac{\sin x}{\cos x}) = (1 + \cos x) (1 + \tan x)$

روش دوم (تستی): به x زاویه دلخواه می دهیم (به طوری که عبارت تعریف شده باشد):

$x = 0^\circ \Rightarrow 1 + \sin 0^\circ + \cos 0^\circ + \tan 0^\circ = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$

با توجه به این که $\cot 0^\circ$ تعریف نشده است، پس گزینه های (۱) و (۳) حذف می باشند، در گزینه (۲) به ازای $x = 0^\circ$ حاصل برابر با ۱ می باشد، پس حذف

$x = 0^\circ \Rightarrow (1 + \cos 0^\circ)(1 + \tan 0^\circ) = (1 + 1)(1 + 0) = 2$

است. در گزینه (۴) داریم:

در سؤالاتی که حاصل ضرب را بر حسب x می خواهند، می توان به x عدد دلخواه داد (عددی که به ازای آن عبارت تعریف شده باشد) و آن را در عبارت اصلی و گزینه ها گذاشت.



$$1) \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$2) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$3) \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$4) \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$5) \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$6) (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \cos x$$

$$7) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$8) \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$$

$$9) \cos^2 x = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$$

اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

$$\frac{-17}{4} \quad (4) \square$$

$$\frac{17}{4} \quad (3) \square$$

$$\frac{-65}{8} \quad (2) \square$$

$$\frac{65}{8} \quad (1) \square$$

پاسخ: ابتدا صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\tan x + 2}{\tan x - 3} = 2 \Rightarrow 2 \tan x - 6 = \tan x + 2 \Rightarrow \tan x = 8 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{8} \Rightarrow \tan x + \cot x = 8 + \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{65}{8}$$

حال، خواهیم داشت:

اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

$$\frac{17}{81} \quad (4) \square$$

$$\frac{17}{27} \quad (3) \square$$

$$\frac{13}{81} \quad (2) \square$$

$$\frac{13}{27} \quad (1) \square$$

پاسخ: می‌دانیم $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$ پس داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-8}{9}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \left(-\frac{8}{9}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{27}$$

اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$$\frac{-25}{22} \quad (4) \square$$

$$\frac{25}{22} \quad (3) \square$$

$$\frac{-25}{12} \quad (2) \square$$

$$\frac{-24}{25} \quad (1) \square$$

پاسخ: برای حل این سؤال کافی است دو طرف فرض سؤال را به توان ۲ برسانیم. داریم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{25} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-24}{25} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-12}{25}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{1}{\frac{-12}{25}} = \frac{-25}{12}$$

بنابراین:

میدانیم در اغلب تست‌ها وقتی $\sin x \pm \cos x$ را می‌دهند، طرفین را به توان دو می‌رسانیم.

حاصل عبارت $A = (\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4) \square$$

$$3 \quad (3) \square$$

$$2 \quad (2) \square$$

$$1 \quad (1) \square$$

پاسخ: با استفاده از روابط ارائه شده داریم:

$$A = (\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x \Rightarrow A = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$$

$$\Rightarrow A = (\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x \Rightarrow A = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \tan^2 x \Rightarrow A = 1 - \tan^2 x + \tan^2 x = 1$$

« درس اوّل و دوم: ریشه و توان – ریشه m ام

« درس سوم: توان‌های گویا

« درس چهارم: عبارت‌های جبری

فصل سوم:

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



۵۷



درس‌های اول و دوم: ریشه و توان- ریشه n ام

ریشه n ام، اگر n عددی طبیعی و مخالف ۱ باشد، ریشه n ام عدد a، عددی مانند b است به شرطی که $b^n = a$ باشد.
به عنوان مثال ریشه سوم ۸ برابر ۲ است، زیرا $2^3 = 8$ ، اما از آن جایی که $(3)^2 = 9$ و $(-2)^2 = 4$ ، در نتیجه ریشه چهارم ۸، ۳ و -۳ می‌باشد.
در واقع اگر n عددی زوج باشد و b ریشه n ام a ($a > 0$) باشد، آن‌گاه -b هم ریشه n ام a است. اما اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه هر عدد حقیقی مانند a فقط یک ریشه n ام دارد.

نکات ۱) اگر n فرد باشد، هر عدد حقیقی فقط یک ریشه n ام دارد.

۲) اگر n زوج باشد، هر عدد حقیقی و مثبت، دو ریشه n ام دارد که قرینه هم هستند. به بیان دیگر، ریشه n ام عدد مثبت a وقتی که n زوج است برابر با $\sqrt[n]{a}$ می‌باشد.

۳) اگر n زوج باشد، برای اعداد منفی، ریشه n ام تعریف نمی‌شود و ریشه n ام مثبت عدد مثبت a را با نماد $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال ریشه‌های چهارم ۸۱ عبارت‌اند از ۳ و -۳، اما $\sqrt[4]{81} = 3$ است.

۴) اگر $a < 1$ ، $0 < \sqrt[n]{a} < a$ ، آن‌گاه:

الف) $a > a^2 > a^3 > \dots$ ب) $a < \sqrt{a} < \sqrt[n]{a} < \dots$

۵) اگر $a > 1$ ، آن‌گاه:

الف) $a < a^2 < a^3 < \dots$ ب) $a > \sqrt{a} > \sqrt[n]{a} > \dots$

۱ کدام مورد نادرست است؟

- ۱) هر عدد مثبت، دارای دو ریشه چهارم است که قرینه هم هستند. ☐
۲) هر عدد مثبت، یک ریشه سوم دارد. ☐
۳) هر عدد منفی، یک ریشه سوم دارد. ☐
۴) هر عدد منفی، دارای دو ریشه چهارم است که قرینه هم هستند. ☐
پاسخ: عددهای منفی ریشه چهارم ندارند. در واقع برای اعداد منفی، ریشه زوج تعریف نمی‌شود.

۲ اگر $\sqrt[n]{a} > a$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

- ۱) $a^2 - a > 0$ ☐ ۲) $a > 1$ ☐ ۳) $a^2 > a^3$ ☐ ۴) $a > \sqrt[n]{a}$ ☐
پاسخ: چون $\sqrt[n]{a} > a$ ، پس $0 < a < 1$ ، در نتیجه $a^2 > a^3$.

۳ اگر $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد، کوچکترین عضو مجموعه $A = \{\sqrt[n]{a}, \sqrt{a}, a, a^2\}$ کدام است؟

- ۱) a ☐ ۲) a^2 ☐ ۳) $\sqrt{a}$ ☐ ۴) $\sqrt[n]{a}$ ☐
پاسخ: چون $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ، عددی بین صفر و یک است، در نتیجه:
بنابراین کوچکترین عضو مجموعه A برابر با a^2 می‌باشد.

قوانین ریشه‌گیری

قوانین زیر در ریشه‌گیری مطرح می‌باشند:

۱) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ متل: $\sqrt[n]{2^6} = |2| = 2$
متل: $\sqrt[n]{(-7)^2} = -7$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \xrightarrow{\text{متل}} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{5}} = \sqrt[n]{5^{\frac{1}{m}}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \xrightarrow{\text{متل}} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{5}} = \sqrt[n]{5^{\frac{1}{m}}}$

$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ متل: $3 \sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$

$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ متل: $-2 \sqrt{4} = \sqrt[4]{(-2)^4 \times 4} = \sqrt[4]{64} = -4$

۲) اگر حداقل یکی از فرجه‌های m یا n زوج باشد و $a > 0$ ، آن‌گاه:

۳) اگر m و n هر دو فرد باشند، آن‌گاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

۴) اگر n زوج و $b > 0$ ، آن‌گاه:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \xrightarrow{\text{مثل}} \sqrt{a^2 \cdot 4} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

۵ اگر n فرد باشد، آن گاه:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \xrightarrow{\text{مثل}} \sqrt[n]{4 \cdot 4} = \sqrt[n]{16} = 2$$

۶ اگر n زوج باشد و a و b هر دو نامنفی باشند ($a \geq 0$ و $b \geq 0$)، آن گاه:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \xrightarrow{\text{مثل}} \sqrt[n]{4 \cdot 4} = \sqrt[n]{16} = 2$$

۷ اگر n فرد باشد، به ازای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \xrightarrow{\text{مثل}} \frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

۸ اگر n زوج باشد و $a \geq 0$ و $b > 0$ ، آن گاه:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \xrightarrow{\text{مثل}} \frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

۹ اگر n فرد باشد و $b \neq 0$ ، آن گاه:

۴ حاصل $3\sqrt[4]{0.625} + \sqrt[4]{-0.64}$ کدام است؟

۱/۹ (۴)

۱/۴ (۳)

۱/۱ (۲)

۰/۹ (۱)

پاسخ

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{0.625} &= \sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{10}\right)^4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \sqrt[4]{-0.64} &= \sqrt[4]{-\frac{64}{100}} = \sqrt[4]{-\left(\frac{4}{10}\right)^4} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{aligned} \Rightarrow 3\sqrt[4]{0.625} + \sqrt[4]{-0.64} = 3 \times \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{15}{10} - \frac{4}{10} = \frac{11}{10} = 1.1$$

۵ اگر $x < 0$ باشد، حاصل $2\sqrt{x^2} + \sqrt{x^4}$ کدام است؟

-۳x (۴)

-x (۳)

x (۲)

۳x (۱)

پاسخ

$$2\sqrt{x^2} + \sqrt{x^4} = 2|x| + |x^2| = 2|x| + |x|^2 = 2|x| + x^2 = x$$

پاسخ چون $x < 0$ پس: $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ ، از طرفی: $\sqrt{x^4} = x^2$ ، بنابراین:

۶ حاصل عبارت $\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2}$ وقتی که $x > 0$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۲x + ۲ (۳)

-۲ (۲)

-۲x - ۲ (۱)

پاسخ

$$\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2} = -x + |x| + |-2| \xrightarrow{x > 0 \Rightarrow |x| = x} -x + x + 2 = 2$$

۷ اگر $x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، مقدار عددی $x^2 + \sqrt{2}x - 3$ کدام است؟

$\sqrt{2} - 1$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ

$$x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + \sqrt{2}x - 3 = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 3 = 2 + 2 - 3 = 1$$

۸ ساده شده عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{\sqrt{54}} + \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{4}{\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ (۲)

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ (۱)

پاسخ

پاسخ می دانیم $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{\sqrt{54}} + \sqrt[3]{2} &= \sqrt[6]{8} - \sqrt{2} + \sqrt[6]{54} + \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3} - \sqrt{2} + \sqrt[6]{2^3 \times 3} + \sqrt[6]{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt[6]{2^3 \times 3} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt[6]{2^3 \times 3} \\ &\Rightarrow \sqrt[6]{2^3 \times 3} + \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3 \times 3} + \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

۹ حاصل عبارت $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4\sqrt{2}})^6$ کدام است؟

۵۱۲ (۴)

۵۱۲ $\sqrt{2}$ (۳)

$1.24\sqrt{2}$ (۲)

1.24 (۱)

پاسخ

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{16} = \sqrt[6]{(\sqrt{2})^6} = \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{4\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(\sqrt{2})^6} = \sqrt{2}$$

پاسخ با استفاده از قواعد رادیکال ها داریم:

$$\Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2})^6 = (\sqrt{2})^6 = (2\sqrt{2})^6 = 2^6 \times (\sqrt{2})^6 = 2^6 \times 2^3 = 2^9 = 512$$

۱۰ حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ

پاسخ با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4}{1-\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{1-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{-(\sqrt{2}-1)} = -4$$

حاصل عبارت $\sqrt{50} - \sqrt{2}\sqrt{6}$ کدام است؟

۶ (۱) ☐

۸ (۲) ☐

۹ (۳) ☐

۱۲ (۴) ☐

پاسخ

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{50} - \sqrt{2}\sqrt{6} = 5\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{2}(5 - \sqrt{6}) \\ &= \sqrt{2}(5 - \sqrt{6}) = 5\sqrt{2} - \sqrt{12} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{2}(5 - \sqrt{6}) = 5\sqrt{2} - \sqrt{12} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = 12\end{aligned}$$

حاصل عبارت $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$ کدام است؟

۱ (۱) ☐

۲ (۲) ☐

۳ (۳) ☐

۴ (۴) ☐

پاسخ

$$\begin{aligned}\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 &= \sqrt{3}(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

درس سوم: توان‌های گویا

تعریف و قواعد توان‌های گویا

تعریف: برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ و هر عدد حقیقی و مثبت مانند a ، $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ و اگر m نیز عددی طبیعی باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}; a > 0, m, n \in \mathbb{N}$$

در ضمن، $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ ، بنابراین:

همچنین توان‌های منفی را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

به عنوان مثال:

الف) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

ب) $8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = (2)^5 = 32$

ج) $16^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{16^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{16})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2^4})^2} = \frac{1}{(2)^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{8}{3}}}$

د) $5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

هـ) $5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = \sqrt{5} \cdot 5$

توجه: اگر a و b اعداد حقیقی مثبت و مخالف صفر و r و s دو عدد گویا باشند، داریم:

۱) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = (a^s)^r = a^{rs}$

۳) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

۴) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

۵) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$

به عنوان مثال:

الف) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

ب) $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

ج) $\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

د) $2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} = (2 \times 4)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{8})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

هـ) $\frac{5^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{12}} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{1}{2}}} = (\frac{5}{12})^{\frac{2}{3}} = (\frac{5}{12})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{12}}$

حاصل عبارت $(-1)^{\frac{5}{3}}$ کدام است؟

۹ (۱) ☐

۹ (۲) ☐

-۳ (۳) ☐

۳ (۴) ☐

پاسخ

$$(-1)^{\frac{5}{3}} = (-1^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = (-1^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = (-1^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = -1^{\frac{5}{3}} = -1$$

$$(-1)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^5} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

توجه کنید که:

حاصل عبارت $3 \times 6^{-\frac{1}{2}} \times 216^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

$$\Gamma \times \rho^{-\frac{1}{2}} \times \Gamma \times \Gamma \times \rho^{\frac{1}{2}} = \Gamma \times \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} \times \Gamma \times \rho^{\frac{1}{2}} = \Gamma \times \frac{1}{\sqrt{\rho}} \times \sqrt{\Gamma \times \rho} = \Gamma \times \sqrt{\frac{\Gamma \times \rho}{\rho}} = \Gamma \times \sqrt{\Gamma \times \rho} = \Gamma \times \rho = 1 \lambda$$

حاصل عبارت $(0.04)^{-\frac{1}{2}} \times (0.0081)^{-\frac{1}{4}}$ کدام است ؟

با استفاده از روابط مربوط به ضرب اعداد توان دار و همچنین رابطه $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ داریم:

[illegible]

$$\Rightarrow (0.5)^{\frac{1}{5}} \times (0.5)^{1.75} = \frac{1}{5} \times \frac{7}{4} = \Delta \times \frac{7}{4} = \frac{175}{1000} = 0.175$$

حاصل عبارت $3\sqrt[3]{3\sqrt{3}} - 5\sqrt[5]{9\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$$

اگر $4^a = (2^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[4]{8}) + \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{4}}}$ باشد، مقدار a^{-1} کدام است؟

$$\begin{aligned} r\sqrt{r^2 + (y^2 + z^2)} &= r\sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}r = r^2\sqrt{2} \\ &= r^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = r^2 \times r^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} = r^{\frac{3}{2}} \Rightarrow r^{\frac{5}{2}} \Rightarrow r^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{3}{2}} \Rightarrow ra = \frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow a = \frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow a^{-1} = \frac{\partial}{\partial a} \end{aligned}$$

اگر $\frac{\sqrt[3]{5}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5^k}$ باشد، $n+k$ کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{\sqrt[3]{\Delta} \sqrt{\Delta} \sqrt[3]{\Delta}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{(\Delta + \Delta^{\frac{1}{3}} + \Delta^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = \frac{(\Delta^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{9}}}{\Delta^{\frac{1}{3}}} = \Delta^{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} = \Delta^{\frac{1}{9} - \frac{3}{9}} = \Delta^{\frac{1-3}{9}} = \Delta^{\frac{-2}{9}} = \Delta^{-\frac{2}{9}} = \frac{1}{\Delta^{\frac{2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\Delta^2}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\Delta^2}}$$

حاصل عبارت $x = \frac{2}{5/\epsilon}$ به ازای $\sqrt{x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x}}$ کدام است؟

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
 $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
 $\sqrt[3]{x^3} = x^1 = x$
 $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$
 $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$
 $\sqrt[3]{x^6} = x^2$
 $\sqrt[3]{x^7} = x^{\frac{7}{3}}$
 $\sqrt[3]{x^8} = x^{\frac{8}{3}}$
 $\sqrt[3]{x^9} = x^3$

حاصل عبارت $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[5]{24\sqrt{6}}$ کدام است؟

$x^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^1 = x$

حاصل عبارت $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{6}$

پاسخ: روش اول: ابتدا عبارت داده شده را مساوی A قرار می‌دهیم و سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = \sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} A^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}-\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow A^2 = 4 + 2\sqrt{6} - 3 = 1 + 2\sqrt{6} \Rightarrow A = \sqrt{6}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3} &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}} + \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} + \frac{|1+\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{2})(3+4\sqrt{2}) \times 3(1-\sqrt{2})}{1\sqrt{32}}$ کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $(\sqrt{2})^{2+2\sqrt{2}}$ ۴) ۴

پاسخ: ابتدا هر یک از عامل‌های صورت را ساده می‌کنیم.

$$(\sqrt{2})(3+4\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times (3+4\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \times 4 = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

$$3(1-\sqrt{2}) = 3 - 3\sqrt{2}$$

$$\frac{11\sqrt{2} \times (3-3\sqrt{2})}{1\sqrt{32}} = \frac{11\sqrt{2} \times 3(1-\sqrt{2})}{\sqrt{32}} = \frac{33\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{\sqrt{32}} = \frac{33(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{32}} = \frac{33(\sqrt{2}-2)}{4\sqrt{2}} = \frac{33}{4} \times \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \frac{33}{4} \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{33}{4} \times \left(1 - \sqrt{2}\right) = \frac{33}{4} - \frac{33\sqrt{2}}{4}$$

نکته: برای مقایسه دو عدد رادیکالی، ابتدا فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم.

کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

- ۱) $\sqrt{2} > \sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3} > \sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{4} > \sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2} > \sqrt{4}$

پاسخ: برای مقایسه $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، فرجه مشترک ۱۵ می‌باشد. داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{\frac{15}{7.5}} = \sqrt{\frac{15}{7.5}} \\ \sqrt{3} &= \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{\frac{15}{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{\frac{15}{7.5}} = \sqrt{\frac{15}{7.5}} \\ \sqrt{4} &= \sqrt{\frac{15}{3.75}} = \sqrt{\frac{15}{3.75}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{\frac{15}{7.5}} = \sqrt{\frac{15}{7.5}} \\ \sqrt{4} &= \sqrt{\frac{15}{3.75}} = \sqrt{\frac{15}{3.75}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{4} &= \sqrt{\frac{15}{3.75}} = \sqrt{\frac{15}{3.75}} \\ \sqrt{3} &= \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{\frac{15}{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{3}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

اتحادها

درس چهارم: عبارت‌های جبری

تعریف اتحاد: به یک تساوی که به ازای هر مقدار قابل قبولی برای متغیرهایش برقرار باشد، اتحاد می‌گوییم.

به عنوان مثال $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ یک اتحاد است زیرا به جای x، هر عدد حقیقی می‌توان قرار داد. اما تساوی $x^2 - 1 = x - 1$ اتحاد نیست، زیرا فقط به ازای $x=0$ و $x=1$ برقرار است. به تساوی $x^2 - 1 = x - 1$ یک معادله می‌گوییم.

بعضی از اتحادهای مهم:

اتحادهای مربع دو جمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اتحادهای مکعب دو جمله‌ای:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

اتحادهای جانی و لانجی:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

توجه: با توجه به اتحادهای فوق، تساوی های زیر همواره برقرار است:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

توجه: اگر $a \times b = c$ و آنگاه a مضربی از هر کدام از عبارت های a ، b ، c ، ab ، ac ، bc و abc است. هم چنین هر یک از عبارت های اشاره شده را یک شمارنده a می نامیم.

یکی از شمارنده های عبارت $6x^3 + 7x^2 + 2x$ کدام است؟

$$2x^2 - x \quad \square$$

$$3x^2 - 2x \quad \square$$

$$2x - 1 \quad \square$$

$$3x + 2 \quad \square$$

پاسخ: عبارت داده شده را با فاکتورگیری از x و به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم:

$$6x^3 + 7x^2 + 2x = x(6x^2 + 7x + 2) = x(2x + 1)(3x + 2)$$

عبارت $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ مضرب کدام یک از عبارت های زیر نیست؟

$$x + 4 \quad \square$$

$$x + 2 \quad \square$$

$$x - 4 \quad \square$$

$$x - 8 \quad \square$$

پاسخ: می دانیم $144 = 12^2$ ، پس عبارت داده شده را به کمک اتحاد مزدوج می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$(x^2 - 6x - 4 - 12)(x^2 - 6x - 4 + 12) = (x^2 - 6x - 16)(x^2 - 6x + 8) = (x + 2)(x - 8)(x - 2)(x - 4)$$

عامل $x + 4$ در بین عامل های تجزیه وجود ندارد، پس عبارت داده شده مضرب $x + 4$ نمی باشد.

کدام یک از عبارت های زیر، شمارنده $x^3 + x - 10$ است؟

$$x^2 - 1 \quad \square$$

$$x + 2 \quad \square$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad \square$$

$$x^2 - 2x + 5 \quad \square$$

پاسخ: عبارت داده شده را تجزیه می کنیم. برای این کار 10 را به صورت $2 - 8$ می نویسیم:

$$x^3 + x - 10 = (x^3 - 8) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x-2} (x - 2)(x^2 + 2x + 5) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$$

اتحاد جانی و لانجی

عبارت $x^4 + x^2 + 1$ مضرب کدام یک از عبارت های زیر است؟

$$x^2 + 2x + 1 \quad \square$$

$$x^2 - x + 1 \quad \square$$

$$x^2 - 1 \quad \square$$

$$x^2 + 1 \quad \square$$

پاسخ: عبارت $x^4 + x^2 + 1$ را تجزیه می کنیم.

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

اگر $a - b = 4$ و $a^2 - b^2 = 12$ باشد، مقدار $(a+b)^2$ کدام است؟

$$16 \quad \square$$

$$4 \quad \square$$

$$3 \quad \square$$

$$9 \quad \square$$

پاسخ: با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت $a^2 - b^2$ را تجزیه می کنیم:

$$a - b = 4, \quad a^2 - b^2 = 12 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 12 \xrightarrow{a-b=4} 4(a + b) = 12 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow (a + b)^2 = 9$$

اگر $a - b = 1$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، مقدار $a^2 - b^2$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ☐ ۹ (۲) ☐ ۷ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

پاسخ: ابتدا طرفین رابطه $a - b = 1$ را به توان دو می‌رسانیم و سپس از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$a - b = 1 \Rightarrow (a - b)^2 = (1)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 1 \Rightarrow 5 - 2ab = 1 \Rightarrow 2ab = 4 \Rightarrow ab = 2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (1)(5 + 2) = 7$$

حاصل عبارت $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 - x^{-1}(x^2 + 1)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ -۱ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۱ (۴) ☐

$$(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 - x^{-1}(x^2 + 1) = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 - \frac{1}{x}(x^2 + 1)$$

$$= x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x} - x - \frac{1}{x} = 2$$

(روش دوم) در عبارت داده شده، عددی دلخواه عضو دامنه عبارت، مثلاً $x = 1$ قرار می‌دهیم ($D = \{0, \infty\}$) و حاصل را می‌یابیم.

$$x = 1 \Rightarrow (\sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}})^2 - (1)^{-1}(1^2 + 1) = (1 + 1)^2 - 1 \times 2 = 4 - 2 = 2$$

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) حذف می‌شوند و پاسخ، گزینه (۳) می‌باشد.

حاصل عبارت $(\frac{50}{99})^2 - (\frac{49}{99})^2$ کدام است؟

- ۲ (۱) ☐ -۰/۲ (۲) ☐ ۲ (۳) ☐ ۲/۰۲ (۴) ☐

پاسخ: به کمک اتحاد مزدوج، عبارت داده شده را تجزیه می‌کنیم:

حاصل عبارت $\frac{1}{9} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{9}$ کدام است؟

- ۱۵/۹۹۹۹ (۱) ☐ ۱۵/۹۹۹۹ (۲) ☐ ۱۴/۹۹۹۹ (۳) ☐ ۱۴/۹۹۹۹ (۴) ☐

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{9} = (\frac{2}{9} \times \frac{4}{9}) \times (\frac{1}{1} \times \frac{1}{1}) = (\frac{8}{81}) \times 1 = \frac{8}{81}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{9} = (\frac{2}{9} \times \frac{4}{9}) \times (\frac{1}{1} \times \frac{1}{1}) = \frac{8}{81} \times 1 = \frac{8}{81}$$

پاسخ: از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. داریم:

حاصل عبارت $A = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{256} + 1)$ کدام است؟

- $2^{256} + 1$ (۱) ☐ $2^{128} + 1$ (۲) ☐ $2^{128} - 1$ (۳) ☐ $2^{256} - 1$ (۴) ☐

پاسخ: طرفین عبارت داده شده را در $(2 - 1)$ ضرب می‌کنیم تا اتحادهای مزدوج ساخته شود:

$$(2 - 1)A = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{256} + 1) \Rightarrow A = \frac{(2^2 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \dots (2^{256} + 1)}{(2^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow A = (2^{256} - 1)(2^{256} + 1) = 2^{512} - 1$$

عبارت A را با کمک اتحاد مزدوج تا جایی ساده می‌کنیم که به $A = (2^{256} - 1)(2^{256} + 1)$ برسیم، داریم:

حاصل عبارت $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ کدام است؟

- $x^2 + y^2$ (۱) ☐ $x^2 - x^2y^2 + y^2$ (۲) ☐ $(x^2 - y^2)^2$ (۳) ☐ $x^2 + x^2y^2 + y^2$ (۴) ☐

پاسخ: (روش اول) با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

(روش دوم) (روش تستی) در عبارت داده شده، مقادیر دلخواه $x = 2$ و $y = 2$ را قرار می‌دهیم (این اعداد دلخواه هستند، شما می‌توانید اعداد دیگری انتخاب کنید) و حاصل را می‌یابیم، سپس حاصل هریک از گزینه‌ها را به ازای این اعداد (یعنی به ازای $x = 2$ و $y = 2$) می‌یابیم و در نهایت گزینه درست را انتخاب می‌کنیم.

$$x = 2, y = 2 \Rightarrow \text{عبارت صورت سوال} = (1 + 2 + 4)(1 - 2 + 4) = 7 \times 3 = 21$$

$$x = 2, y = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه (۱)} = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \\ \text{گزینه (۲)} = 1 - 4 + 4 = 1 \\ \text{گزینه (۳)} = (1 - 4)^2 = (-3)^2 = 9 \\ \text{گزینه (۴)} = 1 + 4 + 4 = 9 \end{cases}$$

نکته اگر حاصل دو یا چند گزینه با هم برابر شدند، باید مقادیر دیگری برای x و y انتخاب کرد.

۳۵ اگر $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7} = 2$ حاصل $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}$ کدام است؟

- ۱) ۳ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۶ ☐

پاسخ طرفین رابطه $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7} = 2$ را در مزدوج عبارت رادیکالی $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7}$ یعنی $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}$ ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7})(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7}) = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7})$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اتحاد مزدوج}} (\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x-7})^2 = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}) \Rightarrow x+3 - (x-7) = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7})$$

$$\Rightarrow x+3-x+7 = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}) \Rightarrow 10 = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}) \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-7} = 5$$

۳۶ با توجه به رابطه $(a-2b)^2 + (b-2c)^2 = 0$ مقدار $\frac{(b+c-a)^2}{abc}$ کدام است؟

- ۱) -۸ ☐ ۲) ۸ ☐ ۳) $\frac{1}{8}$ ☐ ۴) $-\frac{1}{8}$ ☐

پاسخ چون مجموع دو عبارت نامنفی، صفر شده است، پس هر دو باید صفر باشند. حال داریم:

$$(a-2b)^2 + (b-2c)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a-2b)^2 = 0 \Rightarrow a-2b=0 \Rightarrow a=2b \\ (b-2c)^2 = 0 \Rightarrow b-2c=0 \Rightarrow b=2c \end{cases} \Rightarrow a=4c$$

با قرار دادن $a=4c$ و $b=2c$ در عبارت داده شده داریم:

$$\frac{(b+c-a)^2}{abc} = \frac{(2c+c-4c)^2}{2c \times c \times 4c} = \frac{(-c)^2}{8c^2} = \frac{-c^2}{8c^2} = -\frac{1}{8}$$

۳۷ اگر $2a^2 + 4b^2 - 4ab - 2a + 1 = 0$ حاصل $a+b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ☐ ۲) $\frac{3}{2}$ ☐ ۳) $\frac{1}{2}$ ☐ ۴) $\frac{1}{2}$ ☐

پاسخ با نوشتن $2a^2 = a^2 + a^2$ و دسته‌بندی جملات رابطه فوق داریم:

$$2a^2 + 4b^2 - 4ab - 2a + 1 = a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 2a + 1 = (a-2b)^2 + (a-1)^2 = 0$$

چون مجموع دو عبارت نامنفی، صفر شده است، پس باید هر دو عبارت صفر باشند.

$$(a-2b)^2 + (a-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a-2b=0 \Rightarrow a=2b \end{cases} \xrightarrow{a=1} 1=2b \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۳۸ از رابطه $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 3 = 0$ کدام نتیجه می‌شود؟

- ۱) $xyz = \frac{1}{6}$ ☐ ۲) $x+y+z=6$ ☐ ۳) $x+yz = \frac{1}{6}$ ☐ ۴) $x+yz = \frac{17}{6}$ ☐

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 3 = 0 \xrightarrow{\text{دسته‌بندی می‌کنیم}} (4x^2 + 4x + 1) + (9y^2 + 6y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 + (3y+1)^2 + (z-1)^2 = 0$$

چون مجموع سه عبارت نامنفی، صفر شده است، پس باید هر سه عبارت صفر باشند:

$$\begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \\ 3y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{3} \\ z-1=0 \Rightarrow z=1 \end{cases} \Rightarrow xyz = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(1) = \frac{1}{6}$$

۳۹ اگر $x^2 + y^2 = a^2$ و $xy = b$ باشند، حاصل $\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{a^2 - 2b}{a^2 - 2ab}$ ☐ ۲) $\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2ab^2}$ ☐ ۳) $\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2ab^2}$ ☐ ۴) $\frac{a^2 - 2b}{a^2 - 2ab}$ ☐

$$\text{پاسخ} \quad a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow x^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - 2b^2 \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b) \Rightarrow x^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 (x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - 2b^2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - 2ab^2}$$

اگر $a^2 = b^2 + 1$ باشد، حاصل $\frac{b^2 - a^2 + 1}{3a^2b^2}$ کدام است؟

ab (۴)

a^2b^2 (۳)

-1 (۲)

1 (۱)

پاسخ: (روش اول) طرفین رابطه $a^2 = b^2 + 1$ را به توان سه می‌رسانیم و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$a^3 = b^3 + 1 \Rightarrow (a^2)^{\frac{3}{2}} = (b^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \Rightarrow a^3 = b^3 + 3b^2(b^2 + 1) + 1$$

$$\Rightarrow -3b^2(b^2 + 1) = b^3 - a^3 + 1 \xrightarrow{b^2 + 1 = a^2} -3b^2a^2 = b^3 - a^3 + 1 \Rightarrow \frac{b^3 - a^3 + 1}{3a^2b^2} = \frac{-3b^2a^2}{3a^2b^2} = -1$$

(روش دوم) (روش تمثیل) چون $a^2 = b^2 + 1$ ، فرض می‌کنیم $b = 1$ ، پس $b^2 = 1$ و $a^2 = 2$ و $a = \sqrt{2}$ می‌باشند. حال در عبارت $\frac{b^2 - a^2 + 1}{3a^2b^2}$ مقادیر $a = \sqrt{2}$ و $b = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$a = \sqrt{2} \text{ و } b = 1 \Rightarrow \text{عبارت صورت سؤال} = \frac{(1)^2 - (\sqrt{2})^2 + 1}{3(\sqrt{2})^2(1)^2} = \frac{1 - 2 + 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{-2}{6} = -1$$

بمازای $a = \sqrt{2}$ و $b = 1$ گزینه‌های (۳) و (۴) برابر ۱ نمی‌شوند. همچنین گزینه (۱) هم نادرست است. در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

119 (۴)

121 (۳)

241 (۲)

243 (۱)

$$x - \frac{1}{x} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 11 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (11)^2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 121 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$$

اگر $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشد، حاصل عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

16 (۴)

14 (۳)

12 (۲)

10 (۱)

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین را بر ۴ تقسیم می‌کنیم}} \frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (-4)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$$

اگر $x^2 + x + 1 = 0$ باشد، مقدار عبارت $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

-3 (۴)

-2 (۳)

3 (۲)

2 (۱)

پاسخ: طرفین رابطه داده شده را در $(x-1)$ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + x + 1 = 0 \xrightarrow{\times (x-1)} (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

اگر $0 < x < 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

$-\sqrt{x}$ (۴)

$-\sqrt{x}$ (۳)

-1 (۲)

1 (۱)

پاسخ: چون $0 < x < 1$ پس $0 < \sqrt{x} < 1$ ، بنابراین: $\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، در نتیجه $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$. فرض کنیم $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = A$ ، پس:

$$A^2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow A^2 = x + \frac{1}{x} - 2 \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = 2} 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow A = 0 \xrightarrow{A < 0} A = -1$$

اگر $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$ ، آن‌گاه $\frac{x}{x^2 + 1}$ کدام است؟

$\frac{4}{15}$ (۴)

$\frac{16}{4}$ (۳)

$\frac{4}{17}$ (۲)

$\frac{17}{4}$ (۱)

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow 2(x+1) = 5\sqrt{x} \Rightarrow x+1 = \frac{5}{2}\sqrt{x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x+1)^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{25}{4}x$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = \frac{25}{4}x - 2x \Rightarrow x^2 + 1 = \frac{17}{4}x \xrightarrow{\times 4} 4x^2 + 4 = 17x \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{4}{17}$$

۴۶ اگر $x > 0$ و $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{7}$ ، آن گاه مقدار عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

۱۸ (۴ □)

۱۶ (۳ □)

۱۷ (۲ □)

۱۹ (۱ □)

پاسخ: $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = 7 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = 7 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 7 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x + \frac{1}{x} = 3$

می دانیم: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x})$

$\xrightarrow{x+\frac{1}{x}=3} x^2 + \frac{1}{x^2} = (3)^2 - 2 \times 1 \times 3 = 9 - 6 = 3$

۴۷ اگر $x = 1 - \sqrt[3]{2}$ باشد، حاصل عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x$ کدام است؟

۱ + 3\sqrt[3]{2} (۴ □)

۱ (۳ □)

-۱ (۲ □)

۰ (۱ □)

پاسخ: از عبارت داده شده، واحد کم و زیاد می کنیم:

$x^3 - 3x^2 + 3x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1 \xrightarrow{x=1-\sqrt[3]{2}} (1-\sqrt[3]{2}-1)^3 + 1 = (-\sqrt[3]{2})^3 + 1 = -2 + 1 = -1$

اتحاد مکعب دو جمله ای

۴۸ حاصل عبارت $x^3 + 3x^2 + 3x$ به ازای کدام یک از مقادیر زیر، برابر ۱ است؟

۱ - \sqrt[3]{2} (۴ □)

-۱ + \sqrt[3]{2} (۳ □)

۱ + \sqrt[3]{2} (۲ □)

-۱ - \sqrt[3]{2} (۱ □)

پاسخ: می خواهیم معادله $x^3 + 3x^2 + 3x = 1$ را حل کنیم. به طرفین معادله ۱ واحد اضافه می کنیم، داریم:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 1 + 1 \Rightarrow (x+1)^3 = 2 \xrightarrow{\text{از طرفین ریشه سوم می گیریم}} x+1 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = -1 + \sqrt[3]{2}$

اتحاد مکعب دو جمله ای

۴۹ حاصل عبارت $5x - x^3$ به ازای $x = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

۲ (۴ □)

۲\sqrt{2} (۳ □)

\sqrt{2} (۲ □)

۱ (۱ □)

پاسخ: ابتدا مقدار داده شده برای x را ساده می کنیم و سپس آن را در عبارت $5x - x^3$ جایگذاری می کنیم:

$x = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$ (توضیح: در ذهنتان عدد ۲ را به صورت $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ در نظر بگیرید، پس: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$)

$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = (1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 3 \times (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 6 = 5 - 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^3 - 5x = 5 - 2\sqrt{2} - 5(1 - \sqrt{2}) = 5 - 2\sqrt{2} - 5 + 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

۵۰ مجموع ارقام یک عدد دورقمی، ۱۲ و تفاضل ارقام آن ۴ است. حاصل ضرب ارقام این عدد کدام است؟

۳۶ (۴ □)

۳۵ (۳ □)

۳۲ (۲ □)

۲۷ (۱ □)

پاسخ: روش اول: فرض کنیم این عدد دورقمی به صورت $\overline{ab}$ باشد و $a > b$ در نتیجه:

$a + b = 12, a - b = 4$

$12^2 = 4^2 + 4ab \Rightarrow 144 = 16 + 4ab \Rightarrow 4ab = 128 \Rightarrow ab = 32$

می دانیم: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ ، پس:

روش دوم: اگر عدد دورقمی را به صورت $\overline{ab}$ در نظر بگیریم که در آن $a > b$ آن گاه:

$\begin{cases} a+b=12 \\ a-b=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=8, b=4 \Rightarrow ab=8 \times 4 = 32$

۵۱ مربع رقم دهگان به علاوه ۱۶ برابر مربع رقم یکان یک عدد دورقمی، مساوی ۸ برابر حاصل ضرب ارقامش است. این عدد، مضرب کدام یک از اعداد زیر است؟

۱۴ (۴ □)

۴۱ (۳ □)

۳۱ (۲ □)

۱۳ (۱ □)

پاسخ: فرض کنیم عدد مورد نظر $\overline{ab}$ باشد، پس:

$a^2 + 16b^2 = Aab \Rightarrow a^2 - Aab + 16b^2 = 0 \Rightarrow (a - 4b)^2 = 0 \Rightarrow a - 4b = 0 \Rightarrow a = 4b$

با توجه به اینکه a و b رقم هستند، پس $1 \leq a \leq 9$ و $0 \leq b \leq 9$ و چون $a = 4b$ ، پس $b = 1$ یا $b = 2$ می باشد.

$b = 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 41, b = 2 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow \overline{ab} = 82$

که در هر دو حالت، عدد $\overline{ab}$ مضرب ۴۱ است.



۵۲ مقدار $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}$ به ازای $x = 3 - 2\sqrt{2}$ کدام است؟

- ۱) ۲ ☐ ۲) $1 + \sqrt{2}$ ☐ ۳) $1 - \sqrt{2}$ ☐ ۴) $\sqrt{2} - 1$ ☐

پاسخ: چون $x = 3 - 2\sqrt{2}$ ، پس x مثبت است. با استفاده از رابطه $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b}$ داریم:

$$\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}} = \sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow{x=3-2\sqrt{2}} \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

۵۳ حاصل عبارت $\sqrt{28-16\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱) $2 - \sqrt{2}$ ☐ ۲) $\sqrt{3} + 1$ ☐ ۳) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ☐ ۴) $\sqrt{2} - 1$ ☐

پاسخ: می‌دانیم $(4-2\sqrt{3})^2 = 28-16\sqrt{3}$ ، بنابراین داریم:

$$\sqrt{28-16\sqrt{3}} = \sqrt{(4-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$$

۵۴ حاصل عبارت $\sqrt{2-\sqrt{5}} \times \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ کدام است؟

- ۱) $-\sqrt{2}$ ☐ ۲) -1 ☐ ۳) 1 ☐ ۴) $\sqrt{2}$ ☐

پاسخ: می‌دانیم $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = \sqrt{2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ عبارت داده شده $= \sqrt{2-\sqrt{5}} \times \sqrt{2+\sqrt{5}} = \sqrt{(2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1} = -1$

۵۵ حاصل عبارت $\sqrt{7-4\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ☐ ۲) 1 ☐ ۳) $\frac{2}{3}$ ☐ ۴) 2 ☐

پاسخ: می‌دانیم $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ عبارت داده شده $= \sqrt{2-\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$

۵۶ حاصل عبارت $\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ☐ ۲) $\sqrt{2}$ ☐ ۳) $\sqrt{2}$ ☐ ۴) $\sqrt{2}$ ☐

پاسخ: می‌دانیم $(2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$ ، در نتیجه:

$$\begin{aligned} \text{عبارت داده شده} &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{4-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2} = \sqrt{2+2\sqrt{2}} = \sqrt{2(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۵۷ حاصل عبارت $\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-1\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱) 1 ☐ ۲) 2 ☐ ۳) 3 ☐ ۴) 4 ☐

پاسخ: می‌دانیم $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ عبارت داده شده $= \sqrt{1+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-1\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})(3-1\sqrt{3})} = \sqrt{(3-1)(3+1)} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2$

(مسئله ریاضی ۹۳)

۵۸ حاصل عبارت $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$ ☐ ۲) 2 ☐ ۳) $1+\sqrt{3}$ ☐ ۴) $2\sqrt{3}$ ☐

پاسخ: $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ عبارت داده شده $= (\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2}+\sqrt{3}) \times \sqrt{2}$

$= \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = |\sqrt{2}-1| + |\sqrt{2}+1| = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2}+1 = 2\sqrt{2}$

۵۹ ساده شده عبارت $(1+\sqrt{3x} + \frac{3x}{1-\sqrt{3x}}) \times \frac{2-6x}{1+\sqrt{3x}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ☐ ۲) $\frac{1-2x}{1+\sqrt{3x}}$ ☐ ۳) $\frac{1+\sqrt{3x}}{1-2x}$ ☐ ۴) 2 ☐

پاسخ: روش اول: با مخارج مشترک‌گیری از عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\text{عبارت داده شده} = \frac{(1+\sqrt{3x})(1-\sqrt{3x}) + 3x}{1-\sqrt{3x}} \times \frac{2-6x}{1+\sqrt{3x}} = \frac{1-3x+3x}{1-\sqrt{3x}} \times \frac{2(1-3x)}{1+\sqrt{3x}} = \frac{2(1-3x)}{1-3x} = 2$$

(روش دوم) (روش تستی): در عبارت داده شده به جای x ، عددی دلخواه مثلاً $x = 0$ قرار می‌دهیم و حاصل را می‌یابیم:

$$x = 0 \Rightarrow (1 + \sqrt{0} + \frac{0}{1 - \sqrt{0}}) \times \frac{0 - 0}{1 + \sqrt{0}} = 1 \times 0 = 0$$

پس گزینه (۱) نادرست است. حال $x = 0$ را در عبارت گزینه‌های (۲) و (۳) جایگذاری می‌کنیم. به ازای $x = 0$ ، مقادیر گزینه‌های (۲) و (۳) برابر ۱ می‌شوند. پس نادرستی می‌باشند. در نتیجه گزینه (۴) جواب است.

حاصل عبارت $(1 + \sqrt{x} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}})(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x})$ به ازای $x = \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

☐ ۱ (۴)

☐ ۳ (۳)

☐ ۱ (۲)

☐ صفر

$$(1 + \sqrt{x} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}})(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}) = (\frac{1 - x - 1}{1 - \sqrt{x}})(\frac{\sqrt{x} - 1}{x}) = \frac{-x}{1 - \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{-x\sqrt{x} + x}{x - x\sqrt{x}} = 1$$

در نتیجه عبارت داده شده همواره (به ازای هر x مثبت و مخالف ۱) برابر ۱ است. پس به ازای $x = \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ نیز برابر با ۱ می‌شود.

حاصل عبارت $(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}})(\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{4} - \sqrt{x})$ کدام است؟

☐ ۴ (۴)

☐ ۳ (۳)

☐ ۲ (۲)

☐ ۱ (۱)

پاسخ: (روش اول) با مخرج مشترک‌گیری از عبارت‌های داخل پرانتزها داریم:

$$(\frac{(1 + \sqrt{x})^2 - (1 - \sqrt{x})^2}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})})(\frac{3 + x\sqrt{x} - 1 - x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{4\sqrt{x}}) = \frac{1 + x + 2\sqrt{x} - 1 - x + 2\sqrt{x}}{1 - x} \times \frac{2 + x - 4x}{4\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}}{1 - x} \times \frac{2(1 - x)}{4\sqrt{x}} = 2$$

(روش دوم) (روش تستی): به جای x ، عددی دلخواه قرار می‌دهیم. این عدد باید طوری انتخاب شود که عبارت داده شده با معنی باشد. مثلاً $x = 4$ ، پس:

$$x = 4 \Rightarrow (\frac{1 + 2}{1 - 2} - \frac{1 - 2}{1 + 2})(\frac{3}{4\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4}}{4} - \sqrt{4}) = (-3 + \frac{1}{3})(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2) = (-\frac{8}{3}) \times (-\frac{4}{3}) = \frac{32}{9} \neq 2$$

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نادرست هستند و گزینه (۳) پاسخ صحیح است.

تذکره: اگر در ضرب چند عبارت رادیکالی، دو عبارت مزدوج وجود داشته باشد، بهتر است ابتدا آن‌ها را در هم ضرب کنید. معمولاً حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱ می‌شود که نتیجه می‌گیریم آن دو عبارت، معکوس هم هستند.

اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، A کدام است؟

☐ ۳ (۴)

☐ ۲ (۳)

☐ ۳ (۲)

☐ ۳ (۱)

$$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow \text{عبارت داده شده} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt[3]{2}$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^0 \times (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}} = ((\sqrt{3} - 1)^2)^{\frac{1}{6}} = (\sqrt{3} - 1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow A = \sqrt{3} - 1$$

اگر $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ باشد، مقدار $x^3 - 3x$ کدام است؟

☐ ۲ (۴)

☐ ۲ (۳)

☐ ۲ (۲)

☐ ۱ (۱)

پاسخ: فرض کنیم $a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$ و $b = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ در نتیجه $x = a - b$ ، بنابراین:

$$x^3 - 3x = (a - b)^3 - 3(a - b) = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) - 3(a - b)$$

از طرفی $a, b = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{1 - 2} = -1$ پس:

$$x^3 - 3x = a^3 - b^3 - 3(-1)(a - b) - 3(a - b) = a^3 - b^3 + 3(a - b) - 3(a - b) = a^3 - b^3 = (\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^3 - (\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}})^3 = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

حاصل عبارت $\frac{y^5 - 11y^3 + 28y}{8y^2 + 16y}$ به ازای $y = \sqrt{3} + 2$ کدام است؟

☐ ۳ (۴)

☐ ۳ (۳)

☐ ۳ (۲)

☐ ۳ (۱)

پاسخ: در این گونه سوالات، ابتدا عبارت داده شده را تا جایی که امکان دارد، ساده می‌کنیم:

$$\frac{y^5 - 11y^3 + 28y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - 11y^2 + 28)}{8y(y + 2)} = \frac{y(y^2 - 4)(y^2 - 7)}{8y(y + 2)} = \frac{y(y + 2)(y - 2)(y^2 - 7)}{8y(y + 2)}$$

$$= \frac{(y - 2)(y^2 - 7)}{8} = \frac{\sqrt{3} - 2}{8} \times (\sqrt{3} + 2) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2) - 2(\sqrt{3} + 2)}{8} = \frac{3 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4}{8} = \frac{-1}{8}$$

۶۵ حاصل عبارت $(xy-1)(x^2y+xy+1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ و $y = \sqrt[3]{4}$ کدام است؟

۷ (۴)

۹ (۳)

۱۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: ابتدا بین x و y رابطه‌ای می‌یابیم:

$$x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = (\sqrt[3]{2})^2 \Rightarrow y = x^2$$

$$(xy-1)(x^2y+xy+1) \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (x^3-1)(x^3+x^3+1) \xrightarrow{x=\sqrt[3]{2}} (2^3-1)(2^3+2^3+1) = 7$$

۶۶ اگر $y = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$ و $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ باشد، حاصل عبارت $(xy-1)(x^2y+xy+1)$ کدام است؟

۲۷ (۴)

۷ (۳)

۳+۲۷ (۲)

۱+۷ (۱)

پاسخ: ابتدا بین x و y در صورت امکان، رابطه‌ای پیدا می‌کنیم:

$$(xy-1)(x^2y+xy+1) \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (x^3-1)(x^3+x^3+1) \xrightarrow{x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}} (2-1)(2+2+1) = 7$$

$$(a-1)(a^2+a+1) = a^3-1, (a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$$

پاسخ: اتحادهای چاق و لاغر به صورت‌های روبه‌روی می‌باشند.

(رابطه دافلی ۶۵)

۶۷ اگر $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$ کدام است؟

۷۷ (۴)

۶۷ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

$$(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta) = (\alpha^2+\beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } \alpha, \beta} (\sqrt[3]{3\sqrt{2}-4})^4 + (\sqrt[3]{3\sqrt{2}+4})^4 + \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4} \times \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4} = 3\sqrt{2}-4 + 3\sqrt{2}+4 + \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (4)^2} = 6\sqrt{2} + \sqrt{18-16} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل عبارت‌های رادیکالی هستند، باید کسرها را در یک عبارت رادیکالی مناسب، ضرب و تقسیم کنیم. به چنین عملیاتی، گویا کردن مخرج کسری می‌گوییم. این عبارت رادیکالی مناسب، گاهی مزدوج مخرج است، گاهی به کمک اتحادهای چاق و لاغر تعیین می‌شود و گاهی از عبارت‌ها و اتحادهای دیگر استفاده می‌کنیم که با توجه به مخرج کسر داده شده، انتخاب می‌گردند. برخی از اتحادهایی که در گویا کردن مخرج کسرها بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، عبارتند از:

۱) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

۲) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$

۳) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$

مثال آموزشی

مخرج هر یک از کسره‌های زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{3}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{4\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4 \times 5} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$

۲) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x}}{x}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$

۴) $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$

۵) $\frac{12}{\sqrt{3}-1} = \frac{12}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 6(\sqrt{3}+1)$

۶) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} \times \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}{3-1} = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$

۷) $\frac{21}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \frac{21}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{21(\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{4})}{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{4})^2} = \frac{21(\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{4})}{5+2}$

۶۸ حاصل عبارت $(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)^{-1}$ کدام است؟

-۲+√۲ (۴)

-(۱+√۲) (۳)

-۲+√۲ (۲)

-۱+√۲ (۱)

پاسخ: ابتدا از عبارت داده شده داخل پرانتز مخرج مشترک گرفته، سپس آن را معکوس کرده و مخرج کسر به دست آمده را گویا می‌کنیم:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)^{-1} = (\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1-2} = -\sqrt{2}-2$$

۶۹ حاصل عبارت $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ کدام است؟

۴ صفر

۳ -۱

۲ -۲

۱ -۳

پاسخ ابتدا منخرج هریک از کسرها را گویا می‌کنیم و سپس حاصل عبارت فوق را می‌یابیم:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2} = \frac{1-2\sqrt{2}+2}{-1} = 2\sqrt{2}-3$$

$$\Rightarrow \text{عبارت صورت سؤال} = 2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2} = -3$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = 4\sqrt{\frac{6}{12}} = 4\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

۴ صفر

۳ -۱

۲ -۲

۱ -۳

۷۰ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

پاسخ ابتدا منخرج کسرها را گویا می‌کنیم و سپس حاصل عبارت فوق را می‌یابیم:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{6}}{3-2} + \frac{2\sqrt{6}}{2} = 3-\sqrt{6}+\sqrt{6} = 3$$

۷۱ حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{25}}$ کدام است؟

۴ $\frac{2}{3}$

۳ $\frac{1}{3}$

۲ $\frac{3}{4}$

۱ $\frac{2}{5}$

پاسخ ابتدا منخرج هریک از کسرها را گویا می‌کنیم. برای این کار، صورت و منخرج هر کدام را در مزدوج ضرب می‌کنیم، پس:

$$\begin{aligned} \text{عبارت داده شده} &= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{11}}{4-11} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{18}}{11-18} + \frac{\sqrt{18}-\sqrt{25}}{18-25} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{11}}{-7} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{18}}{-7} + \frac{\sqrt{18}-\sqrt{25}}{-7} \\ &= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{11}+\sqrt{11}-\sqrt{18}+\sqrt{18}-\sqrt{25}}{-7} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{25}}{-7} = \frac{2-5}{-7} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

۷۲ اگر $x = 1-\sqrt{2}$ باشد، حاصل عبارت $(x+x^{-1})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۴ ۱

۳ $\sqrt{2}$

۲ -۱

۱ $-\sqrt{2}$

پاسخ ابتدا x^{-1} را می‌یابیم و سپس در عبارت فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = -1-\sqrt{2}$$

$$(x+x^{-1})^{\frac{1}{2}} = (1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = (-2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = -(2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = -(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = -2^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{2}$$

۴ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

۳ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

۷۳ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کدام است؟

۲ $\frac{1}{2}$

۱ ۱

پاسخ چون منخرج هیچ کدام از گزینه‌ها، رادیکالی نیست، پس منخرج کسر داده شده را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{4}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{2})-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}-3} = \frac{2+\sqrt{3}-(1+\sqrt{2})}{2} = \frac{2+\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

۷۴ حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}}{x-1}$ به ازای $x = 1+\sqrt{2}$ کدام است؟

۴ $-\frac{1}{2}$

۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ $\frac{1}{2}$

پاسخ ابتدا منخرج دو کسر اول را گویا می‌کنیم و پس از ساده کردن، x را در عبارت حاصل جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}}{x-1} &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{3\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{3\sqrt{x}}{x-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-3\sqrt{x}}{x-1} = \frac{-1}{x-1} \times \frac{x-1}{x-1} = \frac{-1}{1+\sqrt{2}-1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

۷۵ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{42}}{7\sqrt{6}+6\sqrt{7}}$ کدام است؟

۲۷ (۱) ☐ $2\sqrt{7}$ (۲) ☐ $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ (۳) ☐ $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (۴) ☐ $2\sqrt{6}$

پاسخ:

$$\frac{\sqrt{42}}{7\sqrt{6}+6\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} (\sqrt{7} + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{42} (\sqrt{7} + \sqrt{6})} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}} \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{7 - 6} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

۷۶ حاصل عبارت $\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

$\sqrt{3}-1$ (۱) ☐ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۲) ☐ $\sqrt{3}+1$ (۳) ☐ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (۴) ☐

پاسخ:

ابتدا عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم و سپس مخرج آن را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2^3}-\sqrt{5 \cdot 2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۷۷ خلاصه شده عبارت $\frac{(9)^{0.75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{(9)^{0.25}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

$\sqrt{3}-1$ (۱) ☐ $1+\sqrt{2}$ (۲) ☐ $\sqrt{2}$ (۳) ☐ $1+\sqrt{2}$ (۴) ☐

پاسخ:

ابتدا به کمک قواعد توان‌های گویا، عبارت داده شده را تا جایی که ممکن است ساده می‌کنیم:

$$9^{0.75} = (3^2)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3} \quad , \quad 9^{0.25} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت داده شده} = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{3} \xrightarrow{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}} \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$$

$$= 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{2}$$

۷۸ اگر $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ باشد، کمترین مقدار از بین مقادیر a, b و c کدام است؟

۱۸ (۱) ☐ ۲ (۲) ☐ ۱۲ (۳) ☐ ۶ (۴) ☐

پاسخ:

ابتدا مخرج کسر را گویا می‌کنیم. صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2+3+2\sqrt{6}-5} = \frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$$

حال صورت و مخرج کسر فوق را در $\sqrt{6}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{6}}{2 \times 6} = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{6} = \sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{30}$$

پس کمترین مقدار از بین a, b و c برابر با ۱۲ می‌باشد.



« درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

« درس دوم: سهمی

« درس سوم: تعیین علامت

فصل چهارم:

معادله‌ها و

نامعادله‌ها



۷۳



درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

معادله درجه دوم، شکل کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد که در آن ضرایب a ، b و c اعداد حقیقی اند ($a \neq 0$) و x را متغیر یا مجهول معادله می‌نامند. برای حل معادله درجه دوم روش‌های مختلفی وجود دارند که آن‌ها را در ادامه مطرح می‌کنیم:

(۱) روش تجزیه: در این روش ابتدا عبارت درجه دوم را تجزیه می‌کنیم، سپس تک‌تک پرانتزها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال آموزشی

معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

(۲) روش مربع کامل: ابتدا به کمک رابطه $x^2 \pm bx = (x \pm \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$ عبارت را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، سپس کلیه اعداد را به سمت راست تساوی می‌بریم و از طرفین رابطه جذر می‌گیریم (در صورتی که عدد سمت راست تساوی منفی نباشد). دقت کنید اگر $A^2 = B^2$ باشد، آن‌گاه $A = \pm B$ می‌شود.

مثال آموزشی

(۱) معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ را به صورت $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ می‌نویسیم و در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 - 16 + 15 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 1 \Rightarrow x - 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5 \\ x - 4 = -1 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

(۲) معادله $x^2 + 2x + 17 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ: عبارت $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ را به صورت $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ می‌نویسیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 2x + 17 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 - 1 + 17 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -16$$

معادله ریشه حقیقی ندارد، چون $\sqrt{-16}$ در اعداد حقیقی وجود ندارد.

(۳) در حل معادله $2x^2 + 9x - 5 = 0$ به روش مربع کامل، از چه عددی جذر می‌گیریم؟

پاسخ: در عبارت $2x^2 + 9x$ از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم تا بتوانیم از رابطه مربع کامل استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x &= 2(x^2 + \frac{9}{2}x) = 2[(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16}] \\ \Rightarrow 2x^2 + 9x - 5 &= 0 \Rightarrow 2[(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16}] - 5 = 0 \Rightarrow 2(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{2 \times 81}{16} - 5 = 0 \Rightarrow 2(x + \frac{9}{4})^2 = \frac{121}{8} \Rightarrow (x + \frac{9}{4})^2 = \frac{121}{16} \end{aligned}$$

در ادامه حل کافی است از عدد $\frac{121}{16}$ جذر بگیریم.

۱ در حل معادله $2x^2 - 5x - 3 = 0$ به روش تجزیه به $A(x - 3) = 0$ می‌رسیم، A کدام است؟

گزینه د) $2x^2 + 4x + 1$ (۱) ☐ $2x^2 + 4x + 1$ (۲) ☐ $2x^2 + 4x + 4$ (۳) ☐ $2x^2 + 4x + 4$ (۴) ☐

پاسخ: ابتدا معادله را تجزیه می‌کنیم تا A به دست آید، سپس A را پیدا می‌کنیم.

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3) = A(x - 3) \Rightarrow A = 2x + 1 \Rightarrow A^2 = (2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

۲ طول یک مستطیل دو واحد بیشتر از دو برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل 24cm^2 باشد، نصف عرض مستطیل برابر با کدام است؟

گزینه د) $1/5$ (۱) ☐ $3/2$ (۲) ☐ $4/3$ (۳) ☐ $8/4$ (۴) ☐

پاسخ: اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن $2x + 2$ می‌باشد، داریم:

$2x + 2$
x

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \text{طول} \times \text{عرض} = x(2x + 2) = 24 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1.5 \\ x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

غنی

در یک لیگ فوتبال ۵۵ بازی انجام شده است، اگر هر تیم با تیم دیگر فقط یک بار بازی کند، در لیگ چند تیم وجود دارد؟

۲۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: فرض کنیم x تیم در لیگ بازی می‌کند، هر تیم $x-1$ بازی با دیگر تیم‌ها انجام می‌دهد. اما تعداد کل بازی‌ها $x(x-1)$ نمی‌باشد، چون اگر دو تیم A و B با هم بازی کنند، این بازی هم برای تیم A و هم برای تیم B محسوب می‌شود. پس داریم:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 55 \Rightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 11, x = -10$$

می‌خواهیم با سیمی به طول ۱۰ متر مستطیلی با مساحت $6m^2$ بسازیم. نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \text{محیط} = 2(x+y) = 10 \Rightarrow x+y=5 \Rightarrow y=5-x \\ \text{مساحت} = xy = 6 \Rightarrow x(5-x) = 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x=2, x=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=3, y=2$$

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

با توجه به این که طول مستطیل از عرض آن بیشتر است، طول ۳ و عرض ۲ می‌باشد.

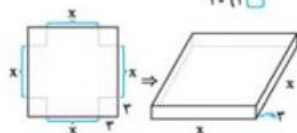
می‌خواهیم از چهار گوشه ورقه فلزی مربع شکل، مربع هایی به ضلع ۳ جدا کنیم تا یک جمیع دریا به حجم ۳۰۰ بسازیم. طول ضلع قاعده مکعب مستطیل حاصل چقدر است؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)



پاسخ: با توجه به این که شکل مقابل، با جدا کردن مربع ها از چهار گوشه ورق، مکعب مستطیلی به طول و عرض x و ارتفاع ۳ واحد تشکیل می‌شود. داریم:

$$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow 2x^2 = 400 \Rightarrow (x)(x)(3) = 400 \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = V = \text{حجم جمیع}$$

اختلاف سنی دو خواهر با هم ۵ سال است. اگر پنج سال دیگر حاصل ضرب سن دو خواهر ۱۵۰ سال شود، سن خواهر بزرگتر در حال حاضر چقدر است؟

۱۷ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: اگر سن خواهر کوچکتر را در حال حاضر x فرض کنیم، سن خواهر بزرگتر $x+5$ می‌باشد و ۵ سال بعد سن خواهر کوچکتر $x+5$ و سن خواهر بزرگتر $x+5+5 = x+10$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} x+5 = 10 \Rightarrow \text{سن خواهر بزرگتر} = x+5 = 10 \\ \text{غ ق } x = -20 \end{cases}$$

مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۲۰۲ می‌باشد، مجموع این دو عدد چقدر است؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: اگر عدد طبیعی فرد کوچکتر را x فرض کنیم، عدد فرد بعدی $x+2$ می‌باشد و مربع این اعداد x^2 و $(x+2)^2$ است، بنابراین داریم:

$$x^2 + (x+2)^2 = 202 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 202 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 198 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 99 = 0$$

$$\Rightarrow (x+11)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{عدد بزرگتر } x+2 = 11 \Rightarrow \text{عدد کوچکتر } x = 9 \\ \text{غ ق } x = -11 \end{cases}$$

حال مجموع اعداد x و $(x+2)$ برابر $9+11=20$ می‌باشد.

از یک رشته سیم به طول ۳۰ متر، یک مستطیل به مساحت ۵۰ متر مربع می‌سازیم. طول مستطیل کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: با نوشتن روابط مربوط به مساحت و محیط مستطیل داریم:

$$xy = 50 \Rightarrow \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت}$$

$$2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y=15 \Rightarrow y=15-x$$

$$xy = 50 \Rightarrow x(15-x) = 50 \Rightarrow -x^2 + 15x = 50 \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow (x-10)(x-5) = 0 \Rightarrow x=10 \text{ یا } x=5$$

$$x=10 \Rightarrow x \times y = 50 \Rightarrow 10 \times y = 50 \Rightarrow y=5$$

$$x=5 \Rightarrow xy = 50 \Rightarrow 5y = 50 \Rightarrow y=10$$

بنابراین طول مستطیل ۱۰ و عرض آن ۵ می‌باشد.

۳) روش کلز حل معادله درجه دوم (یا روش A یا دستور b) در این روش با مشخص کردن ضرایب a، b و c در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست می آوریم و در صورتی که $\Delta \geq 0$ باشد، ریشه ها از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می آیند. با توجه به وجود Δ در زیر رادیکال حالت های مختلف زیر پیش می آید:

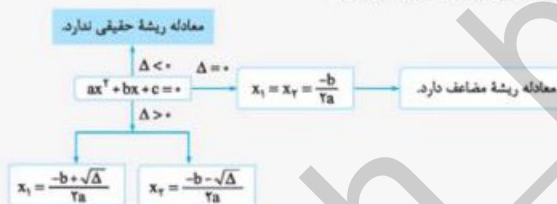
۱) اگر $\Delta < 0$ باشد، زیر رادیکال منفی می شود، پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

۲) اگر $\Delta \geq 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی دارد و دو حالت زیر ممکن است پیش آید:

حالت اول، اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ می باشد.

حالت دوم، اگر $\Delta = 0$ باشد، آن گاه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$ ، پس هر دو ریشه معادله برابر $x = \frac{-b}{2a}$ می باشند که به آن، ریشه مضاعف می گویند.

توضیحات فوق را می توانیم به صورت خلاصه در قالب نمودار زیر ببینیم:



مثال آموزشی

۱) معادله $2x^2 + 9x - 5 = 0$ را به روش کلی (دستور b یا روش A) حل کنید.

پاسخ ابتدا ضرایب a، b، c و سپس Δ را تعیین می کنیم و در رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 9 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(-5) = 81 + 40 = 121 \\ c &= -5 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2(2)} = \frac{-9 \pm 11}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9 + 11}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-9 - 11}{4} = \frac{-20}{4} = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

۲) m را چنان بیابید که معادله $mx^2 - 2(m+1)x + (m+3) = 0$ (m ≠ 0)

الف) دارای دو ریشه متمایز باشد.

ب) دارای ریشه مضاعف باشد.

ج) ریشه حقیقی نداشته باشد.

د) دارای ریشه حقیقی باشد.

پاسخ ابتدا ضرایب a، b، c و سپس Δ را تعیین می کنیم:

$$\begin{aligned} a &= m \\ b &= -2(m+1) \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2(m+1))^2 - 4(m)(m+3) = 4(m^2 + 2m + 1) - 4(m^2 + 3m) = 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 12m = -4m + 4 \\ c &= m+3 \end{aligned}$$

الف) دارای دو ریشه متمایز باشد: $\Delta > 0 \Rightarrow -4m + 4 > 0 \Rightarrow -4m > -4 \Rightarrow m < 1$, $m \neq 0$

ب) ریشه مضاعف باشد: $\Delta = 0 \Rightarrow -4m + 4 = 0 \Rightarrow -4m = -4 \Rightarrow m = 1$

ج) ریشه حقیقی نداشته باشد: $\Delta < 0 \Rightarrow -4m + 4 < 0 \Rightarrow -4m < -4 \Rightarrow m > 1$

د) دارای ریشه حقیقی باشد: $\Delta \geq 0 \Rightarrow -4m + 4 \geq 0 \Rightarrow -4m \geq -4 \Rightarrow m \leq 1$, $m \neq 0$

۴) روش A' (یا دستور b') این روش در مواردی که ضریب b، عددی زوج و بزرگ باشد، برای سرعت بیشتر و سادگی در حل معادله، قابل استفاده است. در

این روش $b' = \frac{b}{2}$ را در نظر می گیریم و $\Delta' = (b')^2 - ac$ می باشد. بنابراین ریشه های معادله از رابطه $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$ به دست می آیند.

مسئله آموزشی

معادله $3x^2 + 16x + 5 = 0$ را از دستور b' حل کنید.

پاسخ

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 16 \Rightarrow b' = \frac{b}{2} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow \Delta' = (b')^2 - ac = (8)^2 - (3)(5) = 49 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-8 \pm \sqrt{49}}{3} = \frac{-8 \pm 7}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8+7}{3} = \frac{-1}{3} \\ x_2 = \frac{-8-7}{3} = \frac{-15}{3} = -5 \end{cases}$$

به ازای کدام مقدار m معادله $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + m - 4 = 0$ دارای ریشه مضاعف است؟

۱۵ (۴)

۵ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: کافی است Δ را صفر قرار دهیم تا معادله ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = b'^2 - 4ac = (2(m-1))^2 - 4(m+1)(m-4) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 4 - 4m^2 + 12m + 16 = 0 \Rightarrow 4m + 20 = 0 \Rightarrow m = -5$$

معادله $x^2 = (x-1)(x-3) + 2 + k^2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۲ (۲) دو ریشه منفی دارد.

۱ (۱) دو ریشه مثبت دارد.

۴ (۴) ریشه حقیقی ندارد.

۳ (۳) ریشه مضاعف دارد.

پاسخ: معادله را ساده می‌کنیم تا به شکل استاندارد تبدیل شود:

$$x^2 - 2x - x + 3 + 2 + k^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + k^2 + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b'^2 - 4ac = 9 - 4k^2 - 20 = -4k^2 - 11$$

به ازای هر k دلخواه، مقدار Δ منفی می‌شود، پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

یک عکس مستطیل شکل با طول ۱۸ و عرض ۱۳ را در قاب مستطیل شکل با مساحت 300 قرار می‌دهیم. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، طول قاب چقدر است؟

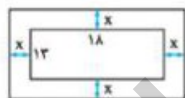
۱۴ (۴)

۱۹ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: مطابق شکل، فاصله لبه‌های عکس تا قاب را x فرض می‌کنیم. داریم:



$$\text{مساحت قاب} = (18 + 2x)(13 + 2x) = 300$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 62x + 234 = 300 \Rightarrow 4x^2 + 62x - 66 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 31x - 33 = 0 \Rightarrow \Delta = 961 + 2664 = 1225$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-31 \pm 35}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \text{طول قاب} = 18 + 2x = 18 + 2(1) = 20 \\ x_2 = \frac{-66}{4} = -16.5 \text{ غلط} \end{cases}$$

اگر $-1 = x$ ریشه مضاعف معادله $5x^2 + mx + n = 0$ باشد، $m + n$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: چون $-1 = x$ ریشه مضاعف است، پس می‌توان معادله را به صورت $(x+1)^2$ نوشت و چون در صورت سوال $5x^2$ داریم، در نتیجه ضریب ۵ در معادله ضرب می‌شود:

$$5(x+1)^2 = 5(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 10x + 5 = 5x^2 + mx + n \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow m + n = 15$$

۱ اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جمع ضرایب صفر شود، یعنی $a + b + c = 0$ باشد، آن گاه یکی از ریشه های معادله برابر ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می باشد.

تست آموزشی

یکی از ریشه های معادله $(\sin^2 \frac{\pi}{19})x^2 - x + \cos^2 \frac{\pi}{19} = 0$ کدام است؟

$\cot^2 \frac{\pi}{19}$ (۴)

$\tan^2 \frac{\pi}{19}$ (۳)

$\cos^2 \frac{\pi}{19}$ (۲)

$\sin^2 \frac{\pi}{19}$ (۱)

پاسخ گزینه ۴ صحیح است. می دانیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می باشد، حال داریم:

$$\begin{cases} a = \sin^2 \frac{\pi}{19} \\ b = -1 \\ c = \cos^2 \frac{\pi}{19} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = \sin^2 \frac{\pi}{19} - 1 + \cos^2 \frac{\pi}{19} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{19}}{\sin^2 \frac{\pi}{19}} = \cot^2 \frac{\pi}{19}$$

۲ اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $a + c = b$ برقرار باشد، یکی از ریشه های معادله ۱- و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ می باشد.

تست آموزشی

یکی از ریشه های معادله $(\gamma m + 1)x^2 + \delta m x + \gamma m - 1 = 0$ کدام است؟ ($m \neq -\frac{1}{\gamma}$)

$\frac{\gamma m + 1}{1 - \gamma m}$ (۴)

$\frac{1 - \gamma m}{\gamma m + 1}$ (۳)

$\frac{\gamma m + 1}{\gamma m - 1}$ (۲)

$\frac{\gamma m - 1}{\gamma m + 1}$ (۱)

پاسخ گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} a = \gamma m + 1 \\ b = \delta m \\ c = \gamma m - 1 \end{cases} \Rightarrow a + c = \gamma m + 1 + \gamma m - 1 = \delta m = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{\gamma m - 1}{\gamma m + 1} \end{cases}$$

۱۳ اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ باشند، حاصل $x_1^2 + x_2^2$ کدام است؟

۲۷ (۴)

۹ (۳)

۲۸ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ چون $a + b + c = 1 + (-\sqrt{3} - 1) + \sqrt{3} = 0$ پس ریشه های معادله برابر ۱ و $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ می باشد، حال داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$$

۱۴ اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 - (3x + 5)(x + 2) - (3x + 1)(x + 4) - 3x + 5 = 0$ باشند و $x_1 < x_2$ ، حاصل $\frac{x_1}{x_2}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ ابتدا پرانتزها را در یکدیگر ضرب می کنیم و عبارت را ساده می کنیم تا به شکل استاندارد معادله درجه دوم برسیم:

$$\delta x^2 + 1 \cdot x + x + 2 - (3x^2 + 12x + x + 4) - 3x + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 - \delta x + 3 = 0 \Rightarrow a + b + c = 2 + (-\delta) + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

حال خواهیم داشت:

۱۵ اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $(\sqrt{3} + 2)x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3} - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2)$ (۴)

$\frac{2}{3}(2 + \sqrt{3})$ (۳)

$\frac{\delta}{2}(1 + 2\sqrt{3})$ (۲)

$\frac{1}{2}(\delta + 3\sqrt{3})$ (۱)

پاسخ چون $a + b + c = 0$ پس ریشه ها برابر ۱ و $x_1 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2}$ می باشد. در کسر $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2}$ صورت کسر از مخرج کوچکتر است، پس کسرها را

عدد ۱ کوچکتر است و چون $x_1 < x_2$ ، بنابراین $x_2 = 1$ و $x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2}$ می باشد، در نتیجه:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2}} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\delta + 3\sqrt{3})$$

۱۶ اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $mx^2 + (\gamma m + \delta)x + (m + 4) = 0$ باشند به طوری که $x_1 x_2 - m = 1$ ، مقدار طبیعی m کدام است؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

پاسخ حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم فوق، برابر $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m + 4}{m}$ می باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a = m \\ b = \gamma m + \delta \\ c = m + 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m + 4}{m} \Rightarrow x_1 x_2 - m = \frac{m + 4}{m} - m = 1 \Rightarrow \frac{m + 4 - m^2}{m} = 1 \Rightarrow m + 4 - m^2 = m \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

در صورت سوال مقدار طبیعی m مورد نیاز است، پس $m = 2$ قبول می شود.

۳) هر معادله درجه دومی که در آن علامت a و c مخالف هم باشند، معادله دارای دو ریشه متمایز است (چون $ac < 0$ و $-4ac > 0$ و در نتیجه $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ می شود).

۴) اگر در معادله درجه دوم $\Delta > 0$ باشد و a ، b و c نیز هم علامت باشند، معادله دو ریشه منفی دارد. (چرا؟)

تست آموزشی

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله $(m+6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دو ریشه منفی دارد؟

هیچ مقدار m (۴)

$-6 < m < 0$ (۳)

$m < 0$ (۲)

$m > -6$ (۱)

گزینه «۴» صحیح است. می خواهیم معادله دو ریشه منفی داشته باشد، پس باید اولاً a ، b و c هم علامت باشند و ثانیاً $\Delta > 0$ باشد. از طرفی c عددی منفی است، پس باید a و b نیز منفی باشند؛

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow m+6 < 0 \Rightarrow m < -6 & (I) \\ b < 0 \Rightarrow -2m < 0 \Rightarrow m > 0 & (II) \end{cases}$$

اما اشتراک (I) و (II) برابر با تهی می باشد. بنابراین شرط $\Delta > 0$ را دیگر بررسی نمی کنیم.

۵) اگر در معادله درجه دوم $\Delta > 0$ ، a و c هم علامت باشند و علامت b با این دو فرق کند، معادله دو ریشه مثبت دارد. (چرا؟)

۶) ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ باشد، می توان عبارت درجه دوم را به صورت مقابل تجزیه کرد:

۷) اگر در معادله درجه دوم $x_1 = x_2$ باشد، یعنی معادله ریشه مضاعف داشته باشد، می توان عبارت $ax^2 + bx + c$ را به صورت زیر نوشت:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2$$

۸) حالت های ناقص معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

الف) اگر در معادله درجه دوم $c = 0$ باشد، یکی از ریشه ها صفر و ریشه دیگر $x = -\frac{b}{a}$ می باشد.

ب) اگر $b = 0$ باشد و علامت a و c مخالف هم باشد، معادله دو ریشه قرینه دارد و در صورتی که a و b هم علامت باشند، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال آموزشی

معادلات $x^2 - 4 = 0$ و $x^2 + 4 = 0$ را حل کنید.

دو ریشه قرینه دارد. $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

معادله ریشه حقیقی ندارد. $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

در هر دو معادله $b = 0$ می باشد!

تست آموزشی

به ازای کدام مقدار m معادله $x^2 + (m^2 - 9)x + m - 2 = 0$ دو ریشه قرینه دارد؟

$m = -3$ (۴)

$m = 3$ (۳)

$m = -2$ (۲)

$m = 2$ (۱)

گزینه «۴» صحیح است. کافی است $b = 0$ و علامت a و c متفاوت باشد.

a و c هم علامت اند پس معادله ریشه حقیقی ندارد. $\Rightarrow m^2 - 9 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow a = 1, c = m - 2 = 3 - 2 = 1$
علامت a و c متفاوت است و در نتیجه $m = -3$ قابل قبول می باشد. $\Rightarrow m^2 - 9 = -3 - 2 = -5 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow a = 1, c = m - 2 = -3 - 2 = -5$

دقت کنید وقتی $m = 3$ باشد، معادله به صورت $x^2 + 1 = 0$ یا $x^2 = -1$ تبدیل می شود که ریشه حقیقی ندارد.

ج) اگر $b = 0$ و $c = 0$ باشد، معادله به شکل $ax^2 = 0$ تبدیل می شود که ریشه مضاعف صفر دارد.

۹) حل معادله درجه دوم جدید، برای حل معادله درجه دومی که ریشه های آن ارتباط معینی با ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارند، ریشه معادله را x و ریشه معادله جدید را X فرض می کنیم و رابطه بین این دو را می نویسیم و در معادله اولیه می گذاریم.

مثال آموزشی

معادله درجه دوم $2x^2 + 7x - 1 = 0$ مفروض است. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن سه واحد کمتر از ریشه های این معادله باشند.

ریشه معادله $2x^2 + 7x - 1 = 0$ را $2x^2 + 7x - 1 = 0$ فرض می کنیم. داریم:

$$X = x - 3 \Rightarrow x = X + 3 \Rightarrow 2(X+3)^2 + 7(X+3) - 1 = 0 \Rightarrow 2(X^2 + 6X + 9) + 7X + 21 - 1 = 0 \Rightarrow 2X^2 + 19X + 38 = 0$$

۱۷ اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + x + k^2 - 7k + 12 = 0$ صفر باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

-۴ (۲)

-۱ (۱)

$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 + k^2 - 7k + 12 = 0 \Rightarrow (k-3)(k-4) = 0 \Rightarrow k = 3$ یا $k = 4$

پاسخ: ریشه هر معادله در آن صدق می‌کند، پس:

$k = 3 \Rightarrow x^2 + x + 0 = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$

نوعه اگر $k = 4$ را قرار دهیم، به همین جواب‌ها می‌رسیم.

۱۸ به ازای چه مقدار m ، معادله $(m^2 + 2)x^2 + (m^2 - 1)x + m^2 + 5m - 4 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی قرینه هم است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

$b = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

پاسخ: باید $b = 0$ و a و c مختلف‌العلامه باشند:

a و c هم علامت‌اند، پس $m = 1$ غیر قابل قبول است.

$$m = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = m^2 + 2 = 3 \\ c = m^2 + 5m - 4 = 1 + 5 - 4 = 2 \end{cases}$$

$$m = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = m^2 + 2 = 3 \\ c = m^2 + 5m - 4 = 1 - 5 - 4 = -8 \end{cases}$$

a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس $m = -1$ قابل قبول است. در نتیجه به ازای $m = -1$ ، معادله دو ریشه حقیقی قرینه دارد.

روابط بین ریشه‌ها و حل معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

۱۹ اگر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را x_1 و x_2 نشان دهیم، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها به صورت زیر است:

مجموع ریشه‌ها: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ، حاصل ضرب ریشه‌ها: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ و $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

پس به خاطر بسپاریم:

این دست روابط را، روابط بین ضرایب (a, b, c) و ریشه‌ها (x_1, x_2) می‌نامند، که در سال آینده به طور کامل، به این روابط می‌پردازیم.

حل معادلاتی که قابل تبدیل به معادله درجه دوم می‌باشد (با استفاده از تغییر متغیر).

معادلاتی داریم که خودشان درجه دوم نیستند، اما با تغییر متغیر می‌توان این معادلات را به معادله درجه دوم تبدیل کرد (این روش را مجهول معاون نیز می‌گویند). به عنوان مثال معادله $x^2 - 7x^2 + 12 = 0$ یا فرض $x^2 = t$ به معادله درجه دوم $t^2 - 7t + 12 = 0$ تبدیل و به سادگی حل می‌شود.

مثال آموزشی

معادلات زیر را با تبدیل به معادله درجه دوم حل کنید.

الف) $x^2 - 2x^2 - 8 = 0$

ب) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

ج) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$

پاسخ

الف) با تغییر متغیر $x^2 = t$ خواهیم داشت:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

ب) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \\ t = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = -1 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

ج) می‌دانیم $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ پس $3^x = t$ را در نظر می‌گیریم:

$$3^{2x} - 4(3^x) + 3 = 0 \xrightarrow{3^x = t} t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

[تقریبی و دقیق]

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

۲ (۴ □)

۴ (۳ □)

-۲ (۲ □)

-۴ (۱ □)

پاسخ: با تغییر متغیر $x^2 + x = t$ داریم:

$$x^2 + x = t \Rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-12) = 0 \Rightarrow (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 12) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+4)(x-2)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + (-4) + (-2) + 2 = -1$$

[تقریبی و دقیق]

حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

۴ (۴ □)

۲ (۳ □)

۱ (۲ □)

-۲ (۱ □)

پاسخ: با تغییر متغیر $x^2 + 4x + 3 = t$ داریم:

$$x^2 + 4x + 3 = t \Rightarrow t = \sqrt{t+2} \xrightarrow{(t+2)} t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{1} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 x_2 = (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ شود، آن‌گاه $a = -1$ و $x_1 = -\frac{c}{a}$ است.

[تقریبی و دقیق]

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب کدام معادله $\left\{ \frac{1}{x_1} + 1, \frac{1}{x_2} + 1 \right\}$ می‌باشد؟

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ (۴ □)

$2x^2 - 5x - 1 = 0$ (۳ □)

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲ □)

$2x^2 - 5x + 1 = 0$ (۱ □)

پاسخ: ریشه معادله اولیه را x و ریشه معادله جدید را X فرض می‌کنیم، داریم:

$$X = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow X - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X-1}$$

$$2\left(\frac{1}{X-1}\right)^2 - 3\frac{1}{X-1} - 4 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } (X-1)^2} 2 - 3(X-1) - 4(X-1)^2 = 0 \Rightarrow -4X^2 + 5X + 1 = 0 \Rightarrow 4X^2 - 5X - 1 = 0$$

اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر یک از ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشند، a کدام است؟

-۶ (۴ □)

-۸ (۳ □)

-۱۲ (۲ □)

-۱۴ (۱ □)

پاسخ: ریشه معادله اول را X و ریشه معادله دوم را x در نظر می‌گیریم، داریم:

$$X = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{X} \xrightarrow{\text{جایگزینی در معادله دوم}} 4\left(\frac{2}{X}\right)^2 - 7\left(\frac{2}{X}\right) + 3 = 0 \Rightarrow \frac{16}{X^2} - \frac{14}{X} + 3 = 0 \Rightarrow 16 - 14X + 3X^2 = 0 \Rightarrow 3X^2 - 14X + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -14 \\ b = 16 \end{cases}$$

به ازای هر $0 < m < 1$ ، معادله $mx^2 + (2m-1)x + m - \sqrt{m} = 0$ چگونه است؟

(۲ □) یک ریشه مضاعف منفی دارد.

(۱ □) دو ریشه مثبت دارد.

(۴ □) ریشه حقیقی ندارد.

(۳ □) دو ریشه با علامت‌های متفاوت دارد.

پاسخ: ابتدا $\frac{c}{a}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{c}{a} = \frac{m - \sqrt{m}}{m} \quad 0 < m < 1 \Rightarrow \frac{a}{m} > 0 \Rightarrow \sqrt{m} > m \Rightarrow m - \sqrt{m} < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$$

در نتیجه $\frac{c}{a} < 0$ می‌باشد و معادله دو ریشه با علامت‌های متفاوت دارد.

هر یک از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ (که $a \neq 0$)

ابتدا $\frac{c}{a}$ را تشکیل می‌دهیم. سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱) $\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه با علامت‌های متفاوت دارد.

۲) $\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$ (است). $-\frac{b}{a}$ دیگر ریشه دیگر است.

۳) $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

معادله دو ریشه برابر (ریشه مضاعف) $x = -\frac{b}{2a}$ دارد. $\Delta = 0 \Rightarrow$

دو ریشه منفی اند. $\Delta > 0 \Rightarrow$ و b هم علامت باشند.

دو ریشه مثبت اند. $\Delta > 0 \Rightarrow$ و b هم علامت نباشند.

موارد گفته شده به جمع بندی قبلی جمع و هج بود.

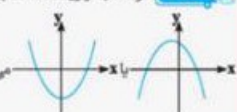
درس دوم: سهمی

شکل کلی توابع درجه دوم به صورت $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد که در آن a ، b و c اعداد حقیقی اند ($a \neq 0$) و نمودار این توابع به صورت  می باشند، که به آن سهمی می گویند. نقطه A را رأس سهمی می نامند.



نکات حال نکات زیر را در مورد سهمی به خاطر بسپارید.
 ۱. اگر $a > 0$ باشد، نمودار تابع به صورت مقابل (دهانه سهمی رو به بالا) می باشد و خط $x = k$ را محور تقارن می نامند. رأس سهمی در این حالت در پایین ترین نقطه و سهمی دارای کمترین مقدار ($\min$) می باشد.
 ۲. اگر $a < 0$ باشد، نمودار تابع به صورت مقابل (دهانه سهمی رو به پایین) می باشد و خط $x = k$ را محور تقارن می نامند. رأس سهمی در این حالت در بالاترین نقطه و سهمی دارای بیشترین مقدار ($\max$) می باشد.
 ۳. طول نقطه رأس سهمی ($\max$ یا $\min$) از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید و برای پیدا کردن عرض این نقطه، کافی است طول آن را در معادله تابع قرار دهیم و یا از رابطه $y = \frac{-b}{2a}$ استفاده کنیم.
 ۴. معادله محور تقارن یا خط تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، خط $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد.

توجه محور تقارن سهمی، نمودار را در رأس آن قطع می کند.
 ۵. اگر معادله سهمی به صورت $y = a(x-b)^2 + c$ باشد ($b > 0$ و $a \neq 0$)، مختصات رأس به صورت (b, c) و معادله محور تقارن $x = b$ است.
 ۶. اگر معادله سهمی به صورت $y = a(x+b)^2 + c$ باشد ($b > 0$ و $a \neq 0$)، مختصات رأس به صورت $(-b, c)$ و معادله محور تقارن $x = -b$ است.
 ۷. اگر دو نقطه از سهمی دارای عرض های برابر باشند، برای پیدا کردن محور تقارن، کافی است وسط طول ها را پیدا کنیم. به عنوان مثال اگر (x_1, y) و (x_2, y) تقابلی از سهمی باشند، معادله محور تقارن سهمی به صورت $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ می باشد.
 ۸. برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور y ها کافی است در معادله، $x = 0$ قرار دهیم.
 ۹. به محل برخورد هر منحنی با محور x ها، صفر تابع یا ریشه معادله می گویند.
 ۱۰. برای پیدا کردن محل برخورد هر سهمی با محور x ها، کافی است در معادله، $y = 0$ قرار دهیم.

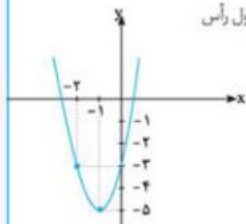
توجه اگر $y = 0$ دو ریشه داشته باشد، سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. حال اگر یکی از ریشه ها مثبت و دیگری منفی باشد نمودار به صورت های  می باشد و در نتیجه سهمی از چهار ناحیه محورهای مختصات می گذرد. برای این منظور کافی است a و c هم علامت نباشند (چرا؟)

۱۱. اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta > 0$ باشد، آن گاه سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. (دو ریشه دارد)
 ۱۲. اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta = 0$ باشد، آن گاه سهمی بر محور x ها مماس است. (ریشه مضاعف دارد).
 ۱۳. اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta < 0$ باشد، آن گاه سهمی محور x ها را قطع نمی کند. (ریشه ندارد)
 ۱۴. برای رسم نمودار تابع درجه دوم (سهمی) ابتدا مختصات رأس ($x = -\frac{b}{2a}$) را پیدا می کنیم. سپس یک نقطه دلخواه در سمت راست رأس و یک نقطه دلخواه در سمت چپ رأس می دهیم، با وصل کردن این نقاط به هم، سهمی رسم می شود.
 ۱۵. مختصات تمام نقاط یک سهمی، در معادله سهمی صدق می کنند.

مسائل آموزشی

۱. مختصات رأس سهمی $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ را بیابید.
پاسخ طول رأس $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد، بنابراین:
 $x = -\frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(4)^2 - 2(4) + 5 = 1 \Rightarrow$ مختصات رأس $(4, 1)$
 ۲. مختصات رأس و محور تقارن $y = 4(x-3)^2 + 1$ را بیابید.
پاسخ با توجه به نکته ۵ در درسنامه، معادله محور تقارن $x = 3$ و مختصات رأس $(3, 1)$ می باشد.
 ۳. اگر $(2, 3)$ و $(8, 3)$ دو نقطه از سهمی باشند، معادله خط یا محور تقارن آن را بنویسید.
پاسخ با توجه به درسنامه، چون دو نقطه داده شده هم عرض هستند بنابراین معادله خط تقارن سهمی برابر $x = \frac{2+8}{2} = 5$ می باشد.

۴) سهمی به معادله $y = 2x^2 + 4x - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید از کدام نواحی محورهای مختصات می‌گذرد. **پاسخ:** طول رأس سهمی برابر با $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(2)} = -1$ می‌باشد. برای پیدا کردن عرض رأس کافی است طول رأس را در معادله قرار دهیم:



$$x = -1 \Rightarrow y = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$$

حال دو نقطهٔ کمکی در سمت راست و چپ $x = -1$ می‌دهیم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -3 & -1 & 0 \\ y & -3 & -5 & -3 \end{array}$$

بنابراین منحنی از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد.

توجه: چون $ac < 0$ است، بدون رسم می‌توان گفت سهمی از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد.

۵) معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که محور y را در نقطه‌ای به عرض -3 و محور x ها را در نقطه‌ای به طول -2 قطع کند و از نقطهٔ $(2, 5)$ بگذرد.

پاسخ: کافی است نقاط $(-2, 0)$ ، $(0, -3)$ ، $(2, 5)$ را در معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ قرار دهیم:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow -3 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -3$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 4a - 2b - 3 \Rightarrow 4a - 2b = 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 5 = 4a + 2b - 3 \Rightarrow 4a + 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a - 6b = 6 \\ 12a + 6b = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30a = 30 \Rightarrow a = 1 \\ 12 + 6b = 24 \Rightarrow 6b = 12 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر $a = 1$ ، $b = 2$ و $c = -3$ معادلهٔ سهمی به صورت $y = x^2 + 2x - 3$ می‌باشد.

۶) خط $2x - 6 = 0$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = (m+1)x^2 - (m-14)x + 7m + 9$ می‌باشد. m کدام است؟

☐ ۴) ۴

☐ ۳) ۳

☐ ۲) ۲

☐ ۱) ۱

پاسخ: معادلهٔ محور تقارن $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد. از طرفی خط $x = 3$ محور تقارن سهمی است، بنابراین داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{m-14}{2(m+1)} = 3 \Rightarrow 6m + 6 = m - 14 \Rightarrow 5m = -20 \Rightarrow m = -4$$

۷) محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = a(2x-1)^2 + k$ به صورت $x + h = 0$ می‌باشد. h کدام است؟

☐ ۴) ۴

☐ ۳) ۳

☐ ۲) ۲

☐ ۱) ۱

پاسخ: محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = a(bx - c)^2 + d$ برابر ریشهٔ عبارت داخل پرانتز یعنی $x = \frac{c}{b}$ است. داریم:

$$\begin{cases} x + h = 0 \Rightarrow x = -h \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -h = \frac{1}{2} \Rightarrow h = -\frac{1}{2}$$

۸) نمودار سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 30 و محور x ها را در نقاطی به طول‌های 3 و 5 قطع می‌کند. حاصل

$a + 2b + c$ کدام است؟

☐ ۴) ۴

☐ ۳) ۳

☐ ۲) ۲

☐ ۱) صفر

پاسخ: نقاط $(-3, 0)$ ، $(5, 0)$ و $(0, 30)$ در معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 30 \end{cases} \Rightarrow 30 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 30$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 9a + 3b + 30 \Rightarrow 3a + b = -10 \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 25a + 5b + 30 \Rightarrow 5a + b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 10 \\ 5a + b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 10 \\ 7a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{7}, b = -\frac{16}{7}, c = 30 \end{cases}$$

بنابراین $a + 2b + c = \frac{4}{7} + 2(-\frac{16}{7}) + 30 = 0$ می‌باشد.

نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده است و از نقطه $(-۲, -۶)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ کدام است؟

(نمرین: ۸۹)

گزینه (۱) ☐ -۸ (۱) ☐ -۷ (۲) ☐ -۵ (۳) ☐ -۴ (۴) ☐

پاسخ: نقاط $(۰, ۰)$ ، $(-۲, -۶)$ و $(-۱, -۶)$ در تابع به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند، بنابراین:

$$\begin{aligned} (۰, ۰) \in f &\Rightarrow a(۰)^2 + b(۰) + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \\ (-۲, -۶) \in f &\Rightarrow a(-۲)^2 + b(-۲) + c = -۶ \Rightarrow 4a - 2b + c = -۶ \\ (-۱, -۶) \in f &\Rightarrow a(-۱)^2 + b(-۱) + c = -۶ \Rightarrow a - b + c = -۶ \end{aligned}$$

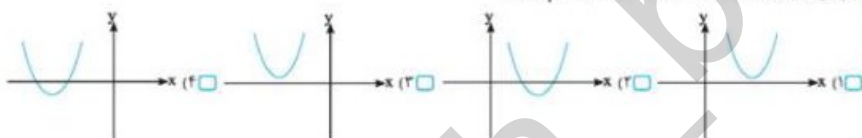
$$(۱), (۲) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 4a - 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2, 2 + b = 6 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-۱) = 2 - 4 - 6 = -8$$

سهمی به معادله $y = 2x^2 + 4x - 13$ از کدام نواحی محورهای مختصات می‌گذرد؟

گزینه (۱) ☐ اول و دوم (۱) ☐ اول و سوم (۲) ☐ چهار ناحیه (۳) ☐ اول و دوم و چهارم (۴) ☐

پاسخ: با توجه به اینکه $a = 2$ و $c = -13$ می‌باشد، پس سهمی از چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد.

نمودار سهمی به معادله $y = x^2 - 8x + 15$ کدام است؟



پاسخ: ابتدا طول رأس سهمی را از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ پیدا می‌کنیم، مختصات رأس سهمی به صورت $(4, -1)$ می‌باشد، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

معادله سهمی شکل مقابل کدام است؟

گزینه (۱) ☐ $y = -x^2 + 2x + 4$ (۱) ☐ $y = 2x^2 - 2x - 4$ (۲) ☐ $y = -2x^2 + 2x + 4$ (۳) ☐ $y = 2x^2 - 2x + 4$ (۴) ☐

پاسخ: سهمی محور y ها را در نقطه $(۰, ۴)$ قطع کرده است، پس $(۰, ۴)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند. در گزینه (۲) به ازای $x = ۰$ ، $y = -۴$ می‌شود و در نتیجه حذف است. از طرفی طول نقاط برخورد سهمی با محور x ها برابر -۱ و ۲ می‌باشد، یعنی باید $a + c = b$ باشد که فقط در گزینه «۴» صدق می‌کند. اگر متوجه این نکته نشدید، می‌توانیم نقاط $(-۱, ۰)$ و $(۲, ۰)$ را در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) جایگذاری کنیم.

معادله سهمی شکل مقابل کدام است؟

گزینه (۱) ☐ $y = x^2 - 2x + 3$ (۱) ☐ $y = x^2 - 2x + 1$ (۲) ☐ $y = -x^2 + 2x + 3$ (۳) ☐ $y = -x^2 + 2x + 1$ (۴) ☐

پاسخ: چون سهمی رو به بالا است متوجه می‌شویم باید ضریب x^2 عددی مثبت باشد، در نتیجه گزینه (۴) حذف می‌شود.

از طرفی نقطه $(۰, ۳)$ در تابع صدق می‌کند و در گزینه (۲) به ازای $x = ۰$ مقدار $y = ۱$ می‌شود و در نتیجه گزینه (۲) هم حذف می‌شود.

مختصات نقطه رأس برابر $(۱, ۱)$ می‌باشد. کافی است این نقطه را برای گزینه‌های (۱) و (۳) بیابیم.

گزینه (۱) ☐ غلط (۱, ۲) مختصات رأس $\Rightarrow y = 1 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

گزینه (۳) ☐ قق (۱, ۱) مختصات رأس $\Rightarrow y = 2 - 4 + 3 = 1 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(2)} = 1$

در نتیجه شکل داده شده، مربوط به معادله $y = 2x^2 - 4x + 3$ می‌باشد.

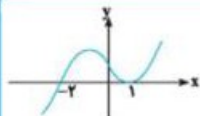
درس سوم: تعیین علامت

منظور از تعیین علامت یک عبارت این است که مشخص کنیم عبارت داده شده به ازای چه مقادیری از x ، مقدارش مثبت و به ازای چه مقادیری صفر است.

تعیین علامت توابع از دید نموداری: وقتی می‌گوییم مقدار تابعی مثبت است، یعنی نمودار تابع، بالای محور x ها قرار دارد، وقتی می‌گوییم مقدار تابعی منفی است، یعنی نمودار تابع، پایین محور x ها قرار دارد و در محل برخورد تابع با محور x ها، مقدار تابع برابر با صفر می‌باشد.

مثال آموزشی

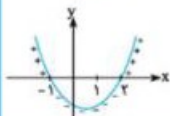
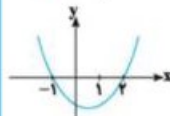
۱) نمودار یک متحنی به صورت روبه‌رو می‌باشد. مقادیر y در چه بازه‌ای مثبت، منفی یا صفر است؟



پاسخ: با توجه به نمودار واضح است که برای $x < -1$ مقادیر y منفی، برای $-1 < x < 2$ و $x > 2$ مقادیر y مثبت است و در $x = -1$ و $x = 2$ مقدار y برابر با صفر می‌باشد.



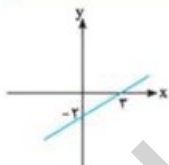
۲) جدول x را با توجه به نمودار روبه‌رو کامل کنید.



پاسخ: با توجه به نمودار مقابل، در قسمت‌های بالای محور x ها مقدار y مثبت، در قسمت‌های پایین محور x ها مقدار y منفی است و در محل برخورد با محور x ها مقدار y صفر می‌باشد، در نتیجه داریم:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	0	+	0	-

نمودار $y = ax + b$ به صورت مقابل می‌باشد. جدول تعیین علامت آن کدام است؟



x	-1	
y	+	-

(۲)

x	-1	
y	+	+

(۴)

x	-1	
y	$-$	$+$

(۱)

x	1	
y	$-$	$+$

(۳)

پاسخ: همان‌طور که مشاهده می‌شود، به ازای $x < -1$ نمودار زیر محور x هاست، یعنی مقدار y منفی و به ازای $x > -1$ نمودار بالای محور x هاست، یعنی مقدار y مثبت است، بنابراین گزینه (۲) جدول تعیین علامت نمودار داده شده می‌باشد.

تعیین علامت عبارت درجه اول

برای تعیین علامت عبارت درجه اول به شکل $y = ax + b$ ($a \neq 0$)، ابتدا ریشه معادله $ax + b = 0$ را پیدا می‌کنیم، سپس طبق جدول زیر، علامت عبارت را مشخص می‌نماییم.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y = ax + b$	-	0	+

موافق علامت a مخالف علامت a

مثال آموزشی

عبارت $y = (3x + 5)(x - 1) - 2x^2 - 1$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت فوق را ساده می‌کنیم و سپس برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 3x^2 - 2x + 5x - 5 - 2x^2 - 1 = x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \text{ or } x = 2$$

عبارت $y = (-5x + 4)(x + 3) + (2x + 1)(x + 1) + 3x^2 + 3$ در کدام محدوده مثبت است؟

$x > 3$ (۴)

$x < 3$ (۳)

$x < 2$ (۲)

$x > 2$ (۱)

پاسخ: ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم و سپس تعیین علامت می‌کنیم:

$$y = -5x^2 - 15x + 12 + 2x^2 + 3x + 1 + 3x^2 + 3 = -8x^2 + 16 = -8x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$x < 2$	$x > 2$
y	+	-

با توجه به جدول مقابل واضح است که برای $x < 2$ عبارت مثبت است.

جدول تعیین علامت عبارت درجه اول $y = mx^2 + x(2x - 1) + n$ به صورت

x	۲ (۳)	۱ (۲)	صفر (۱)
y	+	-	+

می‌باشد، $m + n$ کدام است؟

-۲ (۴)

$$y = mx^2 + 2x^2 - x + n = (m + 2)x^2 - x + n$$

$$m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$-x + n = 0 \Rightarrow -x = -n \Rightarrow x = n$$

بنابراین برای تعیین علامت عبارت درجه اول، $y = -x + n$ ابتدا ریشه آن را پیدا می‌کنیم:

اما با توجه به جدول داده شده، ریشه معادله $x = 2$ است، پس $n = 1$ و $m + n = 1$ می‌باشد.

تعیین علامت عبارت درجه دوم

برای تعیین علامت عبارت $y = ax^2 + bx + c$ ، کافی است آن را مساوی صفر قرار دهیم، با توجه به Δ سه حالت خواهیم داشت:

الف اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه x_1 و x_2 دارد (یا فرض $x_1 < x_2$) و تعیین علامت آن را مطابق با جدول زیر انجام می‌دهیم:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y	+	-	+	+

ب اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله ریشه مضاعف $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ دارد و داریم:

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	+	+	+

ج اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد و علامت عبارت، همواره موافق علامت a می‌باشد.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	+	+

مثال آموزشی

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف $P_1 = x^2 - 8x + 15$

ب $P_2 = x^2 - 4x + 4$

ج $P_3 = -x^2 + x - 2$

پاسخ: برای تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم، ابتدا دلتای معادله را می‌یابیم و سپس ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم.

الف $P_1 = x^2 - 8x + 15 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 60 = 4 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

x	۳	۵
P_1	+	-

ب $P_2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$

x	۲
P_2	+

ج $P_3 = -x^2 + x - 2 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-2) = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد.

x	
P_3	-

جدول تعیین علامت عبارت $y = 4mx^2 + (m^2 + 4)x + m$ به صورت

x	۴ (۴)	۲ (۳)	-۲ (۲)	۱ (۱)
y	+	+	+	+

پاسخ: عبارت درجه دوم و علامت هر دو طرف ریشه مثبت می‌باشد، پس عبارت ریشه مضاعف دارد ($\Delta = 0$) و ضریب x^2 مثبت است ($4m > 0 \Rightarrow m > 0$).

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m^2 + 4)^2 - 4(4m)(m) = m^4 + 8m^2 + 16 - 16m^2 = m^4 - 8m^2 + 16 = (m^2 - 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (m^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

از طرفی ریشه مضاعف معادله از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید:

$$m = 2 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(m^2 + 4)}{2(4m)} = -\frac{-(2^2 + 4)}{2(8)} = -\frac{-8}{16} = \frac{1}{2}$$

عبارت همواره مثبت یا همواره منفی: اگر بخواهیم عبارت درجه دوم همواره مثبت یا همواره منفی باشد، باید $\Delta < 0$ باشد. در این حالت علامت عبارت درجه دوم، مطابق علامت a است. حال اگر $a > 0$ در نظر بگیریم، عبارت همواره مثبت و اگر $a < 0$ باشد، عبارت همواره منفی می‌شود. پس برای $y = ax^2 + bx + c$ داریم:



برای اینکه در عبارت $y = ax^2 + bx + c$ داشته باشیم $y \geq 0$ کافی است $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ باشد و برای اینکه $y \leq 0$ باشد، کافی است $\Delta \leq 0$ و $a < 0$ باشد.

نمونه آموزشی

اگر عبارت $y = mx^2 + (2m+1)x + m + 2$ همواره مثبت باشد، حدود m کدام است؟

☐ $m > \frac{1}{4}$

☐ $m < \frac{1}{4}$

☐ $m < 0$

☐ $m > 0$

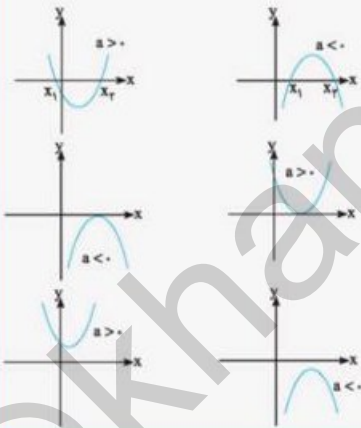
گزینه «۴» صحیح است؛ چون عبارت همواره مثبت است، پس باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد، داریم:

(I) $a = m > 0$

(II) $\Delta = b^2 - 4ac = (2m+1)^2 - 4m(m+2) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8m = -4m + 1 < 0 \Rightarrow -4m < -1 \Rightarrow m > \frac{1}{4}$

از اشتراک روابط (I) و (II) حدود m برابر با $m > \frac{1}{4}$ می‌باشد.

تعیین علامت عبارت درجه دوم از دید نموداری:

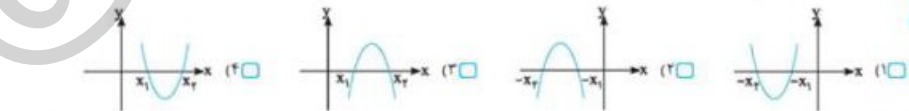


۱. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه (دو محل برخورد با محور x) دارد.

۲. اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله ریشه مضاعف دارد و سهمی بر محور x مماس است.

۳. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد و منحنی بالا یا پایین محور x هاست.

اگر جدول تعیین علامت چند جمله‌ای عبارت درجه دوم $P(x)$ به صورت $\begin{matrix} x & x_1 & x_2 \\ P(x) & - & + & - \end{matrix}$ باشد، نمودار $y = -P(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ ($0 < x_1 < x_2$)



پاسخ: با توجه به تعیین علامت عبارت درجه دوم داده شده، ابتدا $-P(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	x_1	x_T
$-P(x)$	+	-

ریشه‌های معادله $-P(x) = 0$ همان x_1 و x_2 می‌باشد و در فاصله بین ریشه عبارت باید زیر محور x باشد. در نتیجه نمودار گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

اگر بخواهیم حاصل ضرب یا تقسیم چند عبارت درجه اول یا دوم را تعیین علامت کنیم، کافی است تک‌تک ریشه‌ها را پیدا کنیم و در جدول تعیین علامت از کوچک به بزرگ قرار دهیم. پس از تعیین علامت تمامی عبارت‌ها، علامت‌های مثبت یا منفی را ستون ستون، در هم ضرب می‌کنیم تا تعیین علامت نهایی انجام شود.

مثال آموزشی

عبارت $P = \frac{(x-1)(2x-6)^2}{x^2 - 8x + 15}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا ریشه تک‌تک عبارت‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1, \quad 2x-6=0 \Rightarrow x=3, \quad x^2-8x+15=(x-3)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$$

عبارت $(2x-6)^2$ با توجه به توان دو، عبارتی نامنفی است، در نتیجه داریم:

x	1	3	5
$x-1$	-	+	+
$(2x-6)^2$	+	+	+
$x^2-8x+15$	+	+	-
P	-	+	+

نکته برای تعیین علامت چند جمله‌ای‌ها در حالت کلی، تک‌تک ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم و جدول را رسم می‌کنیم. سپس خانه آخر سمت راست را مطابق با علامت ضرب پرتوان قرار می‌دهیم و با رسیدن به ریشه‌های ساده، علامت عوض می‌شود (در ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم).

مثال آموزشی

عبارت $P = (x-1)(x-2)^2(x-4)$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا ریشه‌ها را می‌یابیم و سپس حاصل ضرب علامت‌های ضرایب مجهولات را پیدا می‌کنیم و در خانه آخر قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} x-1=0 &\Rightarrow x=1 \text{ ریشه ساده} \\ (x-2)^2=0 &\Rightarrow (x-2)(x-2)=0 \Rightarrow x=2 \text{ مضاعف} \\ x-4=0 &\Rightarrow x=4 \text{ ریشه ساده} \end{aligned}$$

x	1	2	4
P	+	-	+

ریشه مضاعف ساده

تعیین علامت عبارت $A = 2x^2 + mx + n$ به صورت مقابل است، m و n کدام است؟

x	-2	1
A	-	+

-2 (2)

2 (1)

-4 (4)

6 (3)

پاسخ با توجه به این که در دو طرف $x = -2$ تغییر علامت داریم، پس $x = -2$ ریشه ساده است. در دوطرف $x = 1$ تغییر علامت نداریم، یعنی $x = 1$ ریشه مضاعف معادله می‌باشد، بنابراین عبارت به صورت $(x-1)^2(x+2)$ می‌باشد.

از طرفی ضرب x^2 برابر 2 می‌باشد، یعنی:

$$A = 2(x+2)(x-1)^2 = 2x^2 + mx + n$$

$$A = (2x+4)(x^2-2x+1) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 4x^2 - 8x + 4 = 2x^3 - 6x + 4$$

$$m + 2n = -6 + 2(4) = 2$$

در مقایسه با عبارت $2x^2 + mx + n$ ، واضح است که $m = -6$ و $n = 4$ می‌باشد، در نتیجه:

در نامساوی ها خاصیت هایی وجود دارد که توضیحات مربوط به آن ها همراه با مثال ها در زیر آمده است که برای حل نامعادلات مختلف باید بر آن ها تسلط داشته باشیم.

نکته	مثال
۱) اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض نمی شود. (خاصیت ضرب)	$a < b, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc & \text{مثال} \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{مثال} \end{cases} \begin{matrix} 2 < 5 \xrightarrow{\times 2} 4 < 10 \\ 4 < 6 \xrightarrow{\div 2} 2 < 3 \end{matrix}$
۲) اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود. (خاصیت ضرب)	$a < b, c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{مثال} \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{مثال} \end{cases} \begin{matrix} 2 < 5 \xrightarrow{\times (-2)} -4 > -10 \\ 4 < 6 \xrightarrow{\div (-2)} -2 > -3 \end{matrix}$
۳) می توان به طرفین نامساوی عددی یا مقداری را اضافه کرد. (خاصیت جمع)	$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \text{مثال} \quad 2 < 5 \Rightarrow 2 + 1 < 5 + 1 \Rightarrow 3 < 6$
۴) می توان از طرفین یک نامساوی عددی یا مقداری را کم کرد.	$a < b \Rightarrow a - c < b - c \quad \text{مثال} \quad 2 < 5 \Rightarrow 2 - 1 < 5 - 1 \Rightarrow 1 < 4$
۵) اگر جملات طرفین یک نامساوی هم علامت را معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.	$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \text{مثال} \quad 1 < 10 \Rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{10}$
۶) اگر جملات طرفین یک نامساوی غیر هم علامت را معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض نمی شود.	$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \text{مثال} \quad -2 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} > \frac{1}{1}$
۷) همواره می توان طرفین یک نامساوی را به توان یک عدد فرد و طبیعی رساند.	$a < b \Rightarrow a^{2k+1} < b^{2k+1}; k \in \mathbb{N} \quad \text{مثال} \quad \begin{cases} 2 < 5 \Rightarrow 2^3 < 5^3 \\ -2 < -5 \Rightarrow (-2)^3 < (-5)^3 \\ -5 < -2 \Rightarrow (-5)^3 < (-2)^3 \end{cases}$
۸) همواره می توان از طرفین یک نامساوی، رادیکال با فرجه فرد گرفت.	$a < b \Rightarrow \sqrt[2k+1]{a} < \sqrt[2k+1]{b}; k \in \mathbb{N} \quad \text{مثال} \quad \begin{cases} 1 < 1000 \Rightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{1000} \\ -1 < 1000 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} < \sqrt[3]{1000} \\ -1000 < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-1000} < \sqrt[3]{-1} \end{cases}$
۹) اگر طرفین یک نامساوی مثبت باشند و آن ها را به توان عدد زوج و طبیعی برسانیم، جهت نامساوی عوض نمی شود.	$a < b \Rightarrow a^{2k} < b^{2k} \quad \text{مثال} \quad \begin{matrix} 3 < 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 < 25 \\ -5 < -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25 > 1 \end{matrix}$
۱۰) اگر طرفین یک نامساوی منفی را به توان عدد زوج و طبیعی برسانیم، جهت نامساوی عوض می شود.	$a < b \Rightarrow a^{2k} > b^{2k} \quad \text{مثال} \quad \begin{matrix} -5 < -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25 > 1 \end{matrix}$
۱۱) جملات طرفین دو نامساوی هم جهت را می توان با هم جمع کرد، یعنی:	$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c < b + d \\ \end{cases} \quad \text{مثال} \quad \begin{cases} 2 < 5 \\ 1 < 10 \end{cases} \Rightarrow 2 + 1 < 5 + 10$
۱۲) اگر جملات طرفین دو نامساوی هم جهت، مثبت باشند، آن ها را می توان در هم ضرب کرد.	$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac < bd \\ \end{cases} \quad \text{مثال} \quad \begin{cases} 2 < 5 \\ 1 < 10 \end{cases} \Rightarrow 2 < 50$
۱۳) اگر جملات طرفین دو نامساوی هم جهت، منفی باشند و آن ها را در هم ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.	$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac > bd \\ \end{cases} \quad \text{مثال} \quad \begin{cases} -5 < -2 \\ -1 < -1 \end{cases} \Rightarrow 5 > 2$
۱۴) اعداد بین صفر و یک هر چه به توان برسند، کوچک تر می شوند.	$0 < a < 1 \Rightarrow a^n > a^m \text{ به شرط } n > m$ $a > 1 \Rightarrow a^n < a^m \text{ به شرط } n > m$
۱۵) اگر a عددی مثبت باشد، همواره $a + \frac{1}{a} \geq 2$ می باشد.	$a = 2 > 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2} \geq 2$
۱۶) اگر a عددی منفی باشد، همواره $a + \frac{1}{a} \leq -2$ می باشد.	$a = -2 < 0 \Rightarrow -2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \leq -2$

با حل نامعادله‌های درجه اول به شکل $ax + b < c$ در سال‌های گذشته آشنا شدید. برای حل نامعادلات درجه دوم، کسری و یا ... می‌توانیم از تعیین علامت، روش هندسی و خواص نامساوی‌ها استفاده کنیم. منظور از حل نامعادله، پیدا کردن بازه‌هایی است که نامعادله به ازای آن‌ها برقرار باشد. در مواردی که چند نامعادله داریم، تک تک آن‌ها را حل می‌کنیم و در نهایت اشتراک جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

مثال آموزشی

مجموعه جواب نامعادله $3x^2 + 27 < 2x^2 + (x+5)(3x+1)$ را به کمک خواص نامساوی‌ها به دست آورید.

$$3x^2 + 15x + x + 5 - 2x^2 + 27 < 0 \Rightarrow 16x + 32 < 0 \Rightarrow 16x < -32 \Rightarrow x < -2$$

پاسخ

مثال آموزشی

مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 7x + 12 < 0$ را به کمک تعیین علامت بیابید.

پاسخ ابتدا نامعادله فوق را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Rightarrow x=3 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$	+	+	-	+

با توجه به اینکه می‌خواهیم عبارت $x^2 - 7x + 12$ منفی باشد، پس مجموعه جواب نامعادله بازه $(3, 4)$ می‌باشد.

روش هندس در حل نامعادلات: برای حل نامعادلات به شکل $f_1(x) < f_2(x)$ ابتدا نمودار توابع $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی قابل قبول است که f_2 بالاتر از f_1 قرار گیرد.

مثال آموزشی

مجموعه جواب نامعادله $x^2 < 1$ را به روش‌های زیر به دست آورید:

ج هندسی

الف) استفاده از خواص نامساوی‌ها

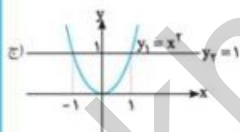
پاسخ می‌دانیم اگر $A^T < B^T$ باشد، $A < B$ (یا $B > A$) می‌شود، پس داریم:

الف) $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow$ مجموعه جواب نامعادله $(-1, 1)$

ب) $x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x=1 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	+	-	+

$x \in (-1, 1)$: مجموعه جواب نامعادله $\Rightarrow$



ابتدا نمودار توابع $y_1 = x^2$ و $y_2 = 1$ را رسم می‌کنیم:

در بازه $(-1, 1)$ نمودار $y_1 = x^2$ پایین‌تر از نمودار $y_2 = 1$ می‌باشد، بنابراین مجموعه جواب نامعادله بازه $(-1, 1)$ می‌باشد.

چند عدد صحیح در نامعادله $1 - \frac{3x}{x-2} \geq x$ صدق می‌کنند؟

۲ (۲)

۴ (۴) بی‌شمار

۱ (۱) صفر

۳ (۳)

$$1 - \frac{3x}{x-2} \geq x \Rightarrow \frac{x-2-3x-x(x-2)}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-2-3x-x^2+2x}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x}{x-2} \geq 0$$

پاسخ

صورت همواره منفی است، پس باید مخرج هم منفی باشد تا عبارت مثبت شود، داریم:

$$x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, 2)$$

این بازه شامل بی‌شمار عدد صحیح می‌باشد.

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} > \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -4) \cup (\frac{17}{8}, 3)$ (۲) $(-\infty, -5) \cup (\frac{17}{8}, 3)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) $(\frac{7}{8}, \frac{17}{8})$

پاسخ: روش اول، ابتدا عبارت را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+4)} > \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow \frac{x-3}{x+4} > \frac{x-2}{x-2} \Rightarrow \frac{(x-3)(x-2) - (x-2)(x+4)}{(x-2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{-8x + 17}{(x-2)(x+4)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -8x + 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{17}{8} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -4 & -\frac{17}{8} & 2 \\ \hline P & + & - & + \end{array}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $(-\infty, -4) \cup (\frac{17}{8}, 3)$ می‌باشد.

روش دوم (تست): به x عدد دلخواهی مانند $x = -5$ می‌دهیم به طوری که مشترک یا همه گزینه‌ها نباشد، داریم:

$$x = -5 \Rightarrow \frac{25 + 25 + 6}{25 - 10 - 8} > \frac{25 + 5 - 2}{25 + 10 - 2} \Rightarrow \frac{56}{7} > \frac{28}{32} \Rightarrow \frac{56}{7} > \frac{7}{8} \text{ قبول است.} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

نامعادلات توأم (چندگانه) و قدر مطلق

نامعادلات توأم (چندگانه) و دستگاه نامعادله:

اگر چند نامعادله داشته باشیم، برای حل، ابتدا تک نامعادلات را به روش دلخواه حل می‌کنیم، سپس اشتراک نامعادله‌ها را به عنوان جواب نهایی در نظر می‌گیریم.

مثال آموزشی

(۱) مجموعه جواب نامعادله دوگانه $5 \leq 2x - 3 \leq 27$ را مشخص کنید.

پاسخ: روش اول، ابتدا دو نامعادله $2x - 3 \leq 27$ و $2x - 3 \geq 5$ را حل می‌کنیم و سپس اشتراک جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 27 \Rightarrow 2x \leq 30 \Rightarrow x \leq 15 & (I) \\ 2x - 3 \geq 5 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4 & (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) = 4 \leq x \leq 15$$

روش دوم، ابتدا طرفین نامعادله را با ۳ جمع می‌کنیم و سپس طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$5 \leq 2x - 3 \leq 27 \Rightarrow 5 + 3 \leq 2x \leq 27 + 3 \Rightarrow 8 \leq 2x \leq 30 \Rightarrow 4 \leq x \leq 15$$

$$(2) \text{ مجموعه جواب نامعادلات } \begin{cases} 2x - 3 > 5 \\ x^2 - 1 < 25 \end{cases} \text{ را مشخص کنید.}$$

پاسخ: تک تک نامعادله‌ها را حل می‌کنیم، سپس اشتراک جواب‌ها را به عنوان جواب نهایی در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 5 \Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow x > 4 & (I) \\ x^2 - 1 < 25 \Rightarrow x^2 < 26 \Rightarrow -\sqrt{26} < x < \sqrt{26} & (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) = 4 < x < \sqrt{26} \Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله: } x \in (4, \sqrt{26})$$

نامعادله‌های قدر مطلق

ابتدا تعریف قدر مطلق و برخی ویژگی‌های آن را یادآوری می‌کنیم، سپس به حل نامعادلات شامل قدر مطلق می‌پردازیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

اگر $x > 1$ باشد، جواب معادله $|2x - 1| + |x| = 5$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

پاسخ: به ازای $x > 1$ مقدار $2x - 1$ و x مثبت می‌شود، پس نیازی به قدر مطلق ندارد $|x| = x$ ، $|2x - 1| = 2x - 1$ ، بنابراین داریم:

$$2x - 1 + x = 5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

اگر $\alpha < x < \beta$ باشد، عبارت $|2x - 1| - |x - 2|$ منفی است، $\alpha + \beta$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۲

$$|2x - 1| - |x - 2| < 0 \Rightarrow |2x - 1| < |x - 2| \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 < x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2 < 0 \Rightarrow 3x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

چند ویژگی قدر مطلق:

$$1) |-a| = |a|, |a+b| = |-a-b|, |a-b| = |b-a|$$

$$2) |a^n| = |a|^n, |a|^n = a^n \quad n \in \mathbb{N}, 3) |a \times b| = |a| \times |b|, 4) \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right| \quad b \neq 0$$

$$5) |a+b| = |a| + |b|$$

$$6) |a+b| < |a| + |b|$$

اگر a و b هم علامت یا $ab \geq 0$ باشد، داریم:اگر a و b مختلف‌العلامه باشند، داریم:از ترکیب نامساوی‌های (۵) و (۶) رابطه $|a+b| \leq |a| + |b|$ به دست می‌آید که به آن نامساوی مثلث می‌گویند.

حل نامعادله‌های قدر مطلق: برای حل این نامعادلات، علاوه بر ویژگی‌های فوق و تعیین علامت، از ویژگی‌های زیر نیز استفاده می‌کنیم:

$$7) |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, 8) |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, 9) |a| = b \Rightarrow a = \pm b, 10) -|a| \leq a \leq |a|$$

$$11) |a| < b \Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله} = \{ \}, 12) |a| > b \Rightarrow a < -b \text{ یا } a > b$$

$$13) |a| > b \Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله} = \mathbb{R}, 14) |a| > b \Rightarrow a < -b \text{ یا } a > b$$

مثال آموزشی

مجموعه جواب نامعادلات زیر را به دست آورید.

الف) $\left| \frac{x}{y} - 1 \right| < 3$

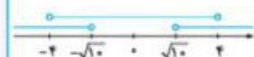
ب) $|x^2 - 13| < 3$

ج) $\left| \frac{x-3}{y} - 1 \right| > 5$

د) $2x - |x-1| > 13$

$$\text{الف) } \left| \frac{x}{y} - 1 \right| < 3 \Rightarrow -3 < \frac{x}{y} - 1 < 3 \Rightarrow -2 < \frac{x}{y} < 4 \Rightarrow -2 < x < 4$$

$$\text{ب) } |x^2 - 13| < 3 \Rightarrow -3 < x^2 - 13 < 3 \Rightarrow 10 < x^2 < 16 \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4 & (I) \\ x^2 > 10 \Rightarrow x < -\sqrt{10} \text{ یا } x > \sqrt{10} & (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) = (-4, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, 4)$$



$$\text{ج) } \left| \frac{x-3}{y} - 1 \right| > 5 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{y} - 1 > 5 \Rightarrow \frac{x-3}{y} > 6 \Rightarrow x-3 > 6y \Rightarrow x > 15 & (I) \\ \frac{x-3}{y} - 1 < -5 \Rightarrow \frac{x-3}{y} < -4 \Rightarrow x-3 < -4y \Rightarrow x < -5 & (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله} = \{x < -5\} \text{ یا } \{x > 15\} = (-\infty, -5) \cup (15, +\infty)$$

$$\text{د) } 2x - |x-1| > 13 \Rightarrow |x-1| < 2x-13 \Rightarrow -(2x-13) < x-1 < 2x-13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+13 < x-1 \Rightarrow -3x < -14 \Rightarrow x > \frac{14}{3} & (I) \\ x-1 < 2x-13 \Rightarrow x > 12 & (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) \Rightarrow x \in (12, +\infty)$$

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-x}{x^2-6x+1} < 0$ شامل چند عدد طبیعی است؟

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

گزینه صحیح

پاسخ: با ساده کردن عبارت‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{x^2-x}{x^2-6x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x-3)^2+1} < 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

با توجه به اینکه مخرج عبارتی همواره مثبت است (چرا؟) کافی است، صورت منفی باشد تا عبارت صورت سؤال منفی شود:

$$x(x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$\frac{x}{P} \begin{matrix} -\infty & -1 & 0 & 1 & +\infty \\ P & - & + & - & + \end{matrix} \Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله} = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

ملاحظه می‌کنید که در این بازه عدد طبیعی نداریم!

کمترین و بیشترین دمای امروز سمتان ۱۰ و ۲۰ درجه سانتیگراد است و با رابطه $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ می‌توان فارنهایت را به سانتیگراد تبدیل کرد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- مجموع کمترین و بیشترین دمای هوای امروز شهر سمتان (بر حسب فارنهایت) چقدر است؟
- ۵۴ (۱) ☐ ۱۸ (۲) ☐ ۱۰۸ (۳) ☐ ۳۰ (۴) ☐

پاسخ: کمترین و بیشترین مقدار تابع C برابر ۱۰ و ۲۰ می‌باشد، داریم:

$$10 \leq C \leq 20 \Rightarrow 10 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 20 \Rightarrow 18 \leq F - 32 \leq 36 \Rightarrow 50 \leq F \leq 68 \Rightarrow 50 + 68 = 118$$

پس از x دقیقه کار سنگین، تعداد ضربان قلب از رابطه $y = x^2 - 21x + 120$ محاسبه می‌شود. پس از گذشت چه زمانی از کار سنگین تعداد ضربان

(مشابه تمرین کتاب درسی)

- قلب از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟
- ۵ (۱) ☐ ۱۰ (۲) ☐ ۱۵ (۳) ☐ ۲۰ (۴) ☐

پاسخ: باید تعداد ضربان یا y بزرگتر از ۱۰۰ قرار داده شود:

$$y > 100 \Rightarrow x^2 - 21x + 120 > 100 \Rightarrow x^2 - 21x + 20 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-20) > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 1 & 20 & +\infty \\ \hline (x-1)(x-20) & + & - & + & \end{array} \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 20$$

واضح است که $x < 1$ قابل قبول نیست، یعنی بعد از گذشت ۲۰ دقیقه تعداد ضربان قلب از ۱۰۰ بیشتر می‌شود.

یک توپ از بالای یک ساختمان که ۲۰ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این توپ از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -3t^2 + 18t + 20$

محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیش از ۲۰ متر خواهد شد؟

- ۱ (۱) ☐ (۰, ۲۰) (۲) ☐ (۰, ۶) (۳) ☐ (۰, ۶) (۴) ☐

پاسخ: ارتفاع از سطح زمین بیش از ۲۰ متر است، پس $h > 20$ را در نظر می‌گیریم:

$$-3t^2 + 18t + 20 > 20 \Rightarrow -3t^2 + 18t > 0 \Rightarrow 3t(-t + 6) > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} t & -\infty & 0 & 6 & +\infty \\ \hline -3t^2 + 18t & - & + & - & \end{array} \Rightarrow 0 < t < 6$$

نکته: برای تبدیل یک نامساوی به نامعادله قدرمطلق، از دو فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\text{۱) } a < x < b \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \quad \text{۲) } \begin{cases} x > b \\ x < a \end{cases} \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| > \frac{b-a}{2}$$

بازه باز (۲, ۸) را به صورت $|x - \alpha| < \beta$ می‌نویسیم، $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ☐ ۵ (۲) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۸ (۴) ☐

پاسخ: برای حل این سؤال، برای این که نامساوی $2 < x < 8$ را به نامعادله قدر مطلق تبدیل کنیم، داریم:

$$\frac{2}{2} < x < \frac{8}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{2+8}{2} \right| < \frac{8-2}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{10}{2} \right| < \frac{6}{2} \Rightarrow |x - 5| < 3$$

پس $\alpha = 5$ و $\beta = 3$ می‌شود، در نتیجه $\alpha + \beta = 8$ می‌باشد.

مجموعه جواب کدام نامعادله زیر بازه $(-1, 5)$ می‌باشد؟

- ۱ (۱) ☐ $|x-1| < 5$ (۲) ☐ $|x-2| < 3$ (۳) ☐ $|x+1| < 5$ (۴) ☐ $|x+2| < 3$

پاسخ: با استفاده از نکته فوق، داریم:

$$\frac{-1}{2} < x < \frac{5}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{-1+5}{2} \right| < \frac{5-(-1)}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{4}{2} \right| < \frac{6}{2} \Rightarrow |x - 2| < 3$$

مجموعه جواب کدام نامعادله زیر بازه $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ می‌باشد؟

- ۱ (۱) ☐ $|2x-5| \geq 3$ (۲) ☐ $|2x-5| \leq 3$ (۳) ☐ $|x-1| \leq 4$ (۴) ☐ $|x-1| \geq 4$

$$\frac{-\infty}{2} < x < \frac{1}{2} \cup \left[\frac{4}{2}, +\infty \right) \Rightarrow \left| x - \frac{-\infty+1}{2} \right| \geq \frac{1-(-\infty)}{2} \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1+\infty}{2} \Rightarrow |2x-1| \geq 1$$

جواب مشترک دو نامعادله $\frac{x}{4} - \frac{x-1}{3} > 1$ و $\frac{x}{4} + 2 > 2x - 3$ به کدام صورت است؟

- گزینه ۴۱: ☐ (۱) $2 < x < 5$ ☐ (۲) $2 < x < 10$ ☐ (۳) $4 < x < 7$ ☐ (۴) $4 < x < 10$

پاسخ: هر نامعادله را تک تک حل می کنیم، سپس اشتراک جواب ها را به عنوان جواب نهایی در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + 2 > 2x - 3 &\Rightarrow 2x - 3 < \frac{x}{4} + 2 \Rightarrow -x < -10 \Rightarrow x < 10 \quad (I) \\ \frac{x}{4} - \frac{x-1}{3} > 1 &\Rightarrow 3x - 2(x-1) > 6 \Rightarrow x + 2 > 6 \Rightarrow x > 4 \quad (II) \end{aligned}$$

در کدام بازه، منحنی $f(x) = x^2 - x$ ، زیر منحنی $g(x) = x^2 + 2$ می باشد؟

- گزینه ۴۲: ☐ (۱) $x < 2$ ☐ (۲) $x > 2$ ☐ (۳) $x < 2$ ☐ (۴) $x > 2$

$$x^2 - x < x^2 + 2 \Rightarrow x^2 - x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + x + 1) < 0$$

چون $x^2 + x + 1$ همواره مثبت است، بنابراین کافی است $x - 2$ منفی باشد تا حاصل عبارت منفی شود.

مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟

- گزینه ۴۳: ☐ (۱) $(-1, 1)$ ☐ (۲) $(1, 3)$ ☐ (۳) $(1, 2)$ ☐ (۴) $(\frac{1}{2}, 3)$

پاسخ: روش اول: می دانیم اگر $a > 0$ ، رابطه $a < x < a \Leftrightarrow x \in (a, a)$ برقرار می باشد، پس:

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2x < x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < x \\ x^2 - 2x > -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x-3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3 \quad (I) \\ x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \quad (II) \end{cases}$$

برای درک بهتر خودتان جدول تعیین علامت رسم کنید.

روش دوم (عددگذاری): به x عدد دلخواهی می دهیم که باعث تفاوت در گزینه ها شود. توجه کنید که جواب نامعادله در آن صدق می کند.

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow |4 - 4| < 2 \Rightarrow \text{گزینه های (۲) و (۴) قابل قبول است.} \\ x = 1 \Rightarrow |1 - 2| < 1 \Rightarrow \text{گزینه (۲) نادرست است.} \end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x - 2$ به صورت کدام بازه است؟

- گزینه ۴۴: ☐ (۱) $(-1, 1)$ ☐ (۲) $(-1, 2)$ ☐ (۳) $(1, 2)$ ☐ (۴) $(1, 2)$

روش اول: با تعیین علامت $(x-2)$ داریم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

با توجه به اینکه باید $x \geq 2$ باشد، جواب نامعادله قابل قبول نمی باشد و برای $x \leq 2$ خواهیم داشت:

$$x \leq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < -(x-2) \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow \text{مجموعه جواب نامعادله } -1 < x < 2$$

روش دوم (عددگذاری): به x عدد دلخواه می دهیم و بررسی می کنیم که در نامعادله صدق می کند یا نه، داریم:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow 0 - 0 < 0 - 2 \Rightarrow \text{گزینه های (۳) و (۴) نادرست است.} \\ x = 1 &\Rightarrow 1 - 2 < 1 - 2 \Rightarrow \text{گزینه (۱) نادرست است.} \end{aligned}$$

مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 1 - 2x$ به صورت کدام بازه است؟

- گزینه ۴۵: ☐ (۱) $(-2, 1)$ ☐ (۲) $(-1, 1)$ ☐ (۳) $(-1, 2)$ ☐ (۴) $(1, 2)$

روش اول: می دانیم $x^2 + 1$ همواره مقداری مثبت است $(x^2 + 1 = |x^2 + 1|)$ ، پس سراغ تعیین علامت $(x-2)$ می رویم:

$$\begin{aligned} x \geq 2 &\Rightarrow 2x + 1 - (x-2) > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \\ x \leq 2 &\Rightarrow 2x + 1 + (x-2) > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \end{aligned}$$

$x \geq 2$ می باشد، پس جواب به دست آمده در قسمت مشخص شده غیرقابل قبول است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله $\{1 < x < 2\}$ می باشد.

روش دوم (عددگذاری): می توانیم به x عدد دلخواه بدهیم و چک کنیم که در نامعادله صدق می کند یا نه، داریم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 1 > 0 - 2 + 1 \Rightarrow -1 > -1 \Rightarrow \text{غیق}$$

گزینه های (۱)، (۲) و (۳) که شامل عدد صفر می باشند، حذف می شوند.

هرگاه $|4x + \frac{1}{x}| + |4x - \frac{1}{x}| = 8x$ باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{4}, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $(-\infty, +\infty)$

پاسخ: باید هر دو عبارت نامنفی باشند تا بتوانیم قدرمطلق ها را برداریم و حاصل قدر مطلق ها برابر $8x$ شود، پس داریم:

$$4x + \frac{1}{x} + 4x - \frac{1}{x} = 8x$$

$$4x + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 1}{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$4x - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} \geq 0 \xrightarrow{x \geq 0} 4x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ یا } x \leq -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \geq 0} x \geq \frac{1}{2}$$

(تقریبی رانگ ۹۵)

مجموعه جواب نامعادله $|\frac{y-x}{y-x-3}| > 1$ به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ (۳) $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ (۴) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

پاسخ: با توجه به اینکه عبارت کسری است، پس $x \neq \frac{3}{4}$ می باشد، در نتیجه:

$$|\frac{y-x}{y-x-3}| > 1 \Rightarrow |y-x| > |y-x-3| \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y-x)^2 > (y-x-3)^2 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 > y^2 - 2y(x-3) + (x-3)^2 \Rightarrow -2xy + x^2 > -2y(x-3) + x^2 - 6x + 9 \Rightarrow -2xy + x^2 > -2xy + 6y + x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 0 > 6y - 6x + 9 \Rightarrow 0 > 2y - 2x + 3 \Rightarrow 0 > 2(y-x) + 3 \Rightarrow -\frac{3}{2} > y-x \Rightarrow x < \frac{5}{4}$$

اما $x = \frac{3}{4}$ در بازه $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ می باشد و باید از بازه برداشته شود، بنابراین مجموعه جواب نامعادله $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}) - \{\frac{3}{4}\}$ می باشد که در گزینه ها نیست! 😊

(تقریبی رانگ ۸۹)

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

- (۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-3 < m < 4$ (۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

پاسخ: کافی است $\Delta < 0$ باشد، پس داریم:

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m + 2) = m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

به ازای کدام مقادیر a معادله $2x^2 + ax + a - \frac{3}{4} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱) $a < 2$ یا $a > 6$ (۲) $a < 2$ یا $a > 4$ (۳) $2 < a < 6$ (۴) $2 < a < 4$

پاسخ: وقتی معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد که $\Delta > 0$ باشد، پس داریم:

$$\Delta = a^2 - 4(2)(a - \frac{3}{4}) = a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a-6) > 0 \Rightarrow a < 2 \text{ یا } a > 6$$

(تقریبی رانگ ۹۰)

به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 7m + 1$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $m > 2/5$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2/5$

پاسخ: باید ضریب x^2 مقدار مثبت و $\Delta < 0$ باشد تا عبارت همواره مثبت شود، بنابراین:

$$\begin{cases} m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I) \\ \Delta < 0 \Rightarrow 36 - 4(m-1)(7m+1) < 0 \Rightarrow -2m^2 + m + 10 < 0 \Rightarrow (2m-5)(m+2) > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > \frac{5}{2} \quad (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) = m > \frac{5}{2}$$

توضیح: برای حل نامعادله $-2m^2 + m + 10 < 0$ می توان از روش تجزیه یا روش کلی ریشه ها را پیدا کرد، سپس از تعیین علامت استفاده می کنیم:

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)(10)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 9}{-4} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -\infty & -2 & \frac{5}{2} & +\infty \\ - & + & - & + \end{matrix} \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > \frac{5}{2}$$

(تقریبی رانگ ۸۹)

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار سهمی $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{a}x + a$ بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a > 2$ (۴) $1 < a < 2$

پاسخ: زمانی نمودار بالای محور x است که عبارت همواره مثبت باشد. برای این منظور کافی است $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد:

$$\begin{cases} a-1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (I) \\ \Delta = (2\sqrt{a})^2 - 4(a-1)a < 0 \Rightarrow 4a - 4a^2 < 0 \Rightarrow 4(-a^2 + a) < 0 \Rightarrow -a^2 + a > 0 \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 2 \quad (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) = a > 2$$

توضیح: برای حل نامعادله $-a^2 + a > 0$ یا $-x^2 + x > 0$ ، چون $a+c=b$ است، پس یکی از ریشه ها -1 و ریشه دیگر $\frac{-c}{a}$ می باشد.

$$\begin{matrix} a & -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ -a^2 + a & - & + & - & + \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\infty & -1 & 2 & +\infty \\ - & + & - & + \end{matrix} \Rightarrow -1 < a < 2 \text{ یا } a > 2$$

(ریاضی پایه ۹)

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x هاست؟

- گزینه ۱: $a < 1$ (۱) ☐ گزینه ۲: $a < -2$ (۲) ☐ گزینه ۳: $a > 2$ (۳) ☐ گزینه ۴: $-2 < a < 1$ (۴) ☐

پاسخ: نمودار همواره بالای محور x هاست، یعنی سهمی رو به بالاست، پس باید ضریب x^2 عددی مثبت و $\Delta < 0$ باشد:

$$\begin{aligned} 1-a > 0 &\Rightarrow a < 1 \quad (I) \\ \Delta = (2\sqrt{6})^2 - 4a(1-a) < 0 &\Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (II) \\ \Rightarrow (I) \cap (II) &= a < -2 \end{aligned}$$

(ریاضی پایه ۹)

اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- گزینه ۱: R (۱) ☐ گزینه ۲: $\{a : a < 1\}$ (۲) ☐ گزینه ۳: $\emptyset$ (۳) ☐ گزینه ۴: $\{a : 1 < a < 5\}$ (۴) ☐

پاسخ: باید $\Delta < 0$ و ضریب x^2 هم منفی باشد، تا عبارت درجه دوم همواره منفی باشد:

$$\begin{aligned} a-1 < 0 &\Rightarrow a < 1 \quad (I) \\ \Delta < 0 &\Rightarrow (a-1)^2 - 4(a-1) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-1-4) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5 \quad (II) \\ \Rightarrow (I) \cap (II) &= \emptyset \end{aligned}$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

- گزینه ۱: $m > 2$ (۱) ☐ گزینه ۲: $-1 < m < 2$ (۲) ☐ گزینه ۳: هر مقدار m (۳) ☐ گزینه ۴: هیچ مقدار m (۴) ☐

پاسخ: محل برخورد منحنی با محور x ها ریشه معادله است، یعنی معادله دو ریشه منفی دارد. برای این منظور کافی است ضرایب a ، b و c (در معادله $ax^2 + bx + c = 0$) هم علامت باشند:

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I) \\ b < 0 &\Rightarrow -2(m+1) > 0 \Rightarrow m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (II) \\ \Rightarrow (I) \cap (II) &= \emptyset \end{aligned}$$

نوعه ۱: با به دست آوردن Δ ی معادله بالا در می یابیم چون $\Delta = 4(m-5)^2 \geq 0$ ، بنابراین (به جز $m=5$) معادله به طور قطع ۲ ریشه دارد.

(ریاضی پایه ۹)

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

- گزینه ۱: $a < -9$ (۱) ☐ گزینه ۲: $a < -3$ (۲) ☐ گزینه ۳: $a > -1$ (۳) ☐ گزینه ۴: $-3 < a < 0$ (۴) ☐

پاسخ: برای اینکه معادله دو ریشه منفی داشته باشد باید ضرایب معادله هم علامت باشند. چون c عددی منفی است ($c = -1$)، بنابراین:

$$\begin{aligned} a &< 0 \quad (I) \\ a+3 &< 0 \Rightarrow a < -3 \quad (II) \end{aligned}$$

از طرفی باید مطمئن شویم که معادله دو ریشه دارد یعنی $\Delta > 0$ می باشد، پس:

$$\Delta = (a+3)^2 - 4(-1)(a) > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0 \Rightarrow (a+1)(a+9) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \quad (III)$$

اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر با $a < -9$ است.

(ریاضی پایه ۹)

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟

- گزینه ۱: $-2 < a < 2$ (۱) ☐ گزینه ۲: $2 < a < 5$ (۲) ☐ گزینه ۳: $2 < a < 14$ (۳) ☐ گزینه ۴: $5 < a < 14$ (۴) ☐

پاسخ: برای اینکه معادله دو ریشه متفاوت داشته باشد باید $\Delta > 0$ باشد، در نتیجه:

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) = 4a^2 - 16a + 16 - 56 + 4a \Rightarrow \Delta = 4a^2 - 12a - 40 = 4(a^2 - 3a - 10)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (I)$$

برای اینکه دو ریشه مثبت باشند علامت b متفاوت با a و c باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} 14-a > 0 &\Rightarrow a < 14 \quad (II) \\ -2(a-2) < 0 &\Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (III) \end{aligned}$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، فقط از ناحیه اول محورهای مختصات می گذرد؟

- گزینه ۱: $a \leq 2$ (۱) ☐ گزینه ۲: $0 < a \leq 2$ (۲) ☐ گزینه ۳: $a < -6$ (۳) ☐ گزینه ۴: $0 < a < 3$ (۴) ☐

پاسخ: الف) باید سهمی رو به پایین () باشد، یعنی ضریب x^2 منفی است، پس:

$$a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (I)$$

(ب) باید معادله دو ریشه منفی داشته باشد $(\Delta < 0)$ ، یعنی $a > 0$ و b و c هم علامت باشند:

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = a^2 + 4(a-2) = a^2 + 4a - 8 = (a+6)(a-2) > 0 \Rightarrow a < -6 \text{ یا } a > 2 \quad (2)$$

و برای اینکه ضرایب معادله هم علامت باشند، با توجه به اینکه $c = -1$ می باشد، بنابراین سایر ضرایب هم منفی اند، در نتیجه $a < 0$ می باشد. (۲)

از اشتراک روابط (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت:

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند؟

(رایجی طرح ۹۵)

$$-2 < m < 1 \quad (2)$$

$$m < -2 \text{ یا } m > 1 \quad (1)$$

$$m > 1 \text{ فقط } (4)$$

$$m < -2 \text{ فقط } (3)$$

پاسخ: منحنی محور x ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند، پس یکی از ریشه ها مثبت و ریشه دیگر منفی است. به عبارت دیگر $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$

یعنی علامت a و c فرق می کند.

$$\frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \Rightarrow m > 1 \\ m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases} \Rightarrow m > 1 \cup m > -2 \Rightarrow m < -2 \cup m > 1$$

m	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\frac{1-m}{m+2}$	$+$	$-$	$+$	$-$
جواب				

(نهمین رانل ۸۹)

عرض نقاط سهمی $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{4}{3}$ می باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$5/5 \quad (3)$$

پاسخ: طبق صورت سؤال چون $f(x)$ در بازه مشخص شده بزرگتر از $\frac{4}{3}$ است، بنابراین $f(x) > \frac{4}{3}$ ، حال داریم:

$$f(x) > \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 6 > \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 - 4x - 12 < -4 \Rightarrow x^2 - 4x - 8 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max(b-a) = 5 - (-1) = 6$$



« درس اوّل: مفهوم تابع و بازتابی‌های آن

« درس دوم: دامنه و برد توابع

« درس سوم: انواع توابع

فصل پنجم:

تابع



درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

تابع یکی از مفاهیم اصلی در ریاضیات است، بنابراین آن را از دیدگاه‌های مختلف بررسی می‌کنیم. قبل از اینکه مفهوم تابع را بیان کنیم ابتدا با زوج مرتب آشنا می‌شویم. **زوج مرتب**: به دسته‌دوتایی (x, y) که ترتیب قرار گرفتن x و y در کنار هم مهم باشد، زوج مرتب می‌گویند. x را مؤلفه اول و y را مؤلفه دوم می‌نامند، پس $(y, x) \neq (x, y)$ (به شرطی که $x \neq y$ باشد). به عنوان نمونه $(3, 5) \neq (5, 3)$ ، همچنین برای اینکه $(x, y) = (z, t)$ ، باید $x = z$ و $y = t$ باشد.

نست آموزشی

اگر زوج مرتب‌های $(2x + y, 3)$ و $(y, 2x - y)$ برابر باشند، $x - y$ کدام است؟

☐ صفر ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳
پاسخ: گزینه ۲ صحیح است. $(2x + y, 3) = (y, 2x - y) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = y \\ 3 = 2x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3 = 2x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow x - y = 0 - (-3) = 3$

چون دو زوج مرتب با هم برابرند، بنابراین هر یک از مؤلفه‌های دو زوج مرتب نیز با یکدیگر برابر هستند.

تصریف تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود. بنابراین مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را یک تابع می‌نامیم هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن عضو اول یکسان نداشته باشند و اگر عضو اول آن یکسان باشد، عضو دوم نیز باید یکسان شود، بنابراین اگر (x, y_1) و (x, y_2) هر دو عضو یک تابع باشند، باید $y_1 = y_2$ باشد.

به عنوان مثال رابطه $f = \{(1, 2), (3, 2), (2, 1)\}$ تابع هست ولی رابطه $g = \{(1, 2), (1, 1)\}$ تابع نیست. (چرا؟)

نمایش تابع: یک تابع را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار مختصاتی، نمودار پیکانی (ون) و یا جدول، نمایش داد. به عنوان نمونه تابع f که در مثال بالا ذکر شده است را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:



نمودار پیکانی

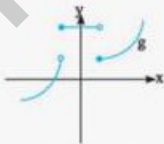


نمودار مختصاتی

x	۱	۲	۳
y	۲	۱	۲

جدول

تابع از دید نمودار مختصاتی (دکارتی): نموداری نشان دهنده یک تابع است که هر خط موازی با محور y ها (عرض‌ها)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. به عنوان مثال f ، g و h را ببینید:

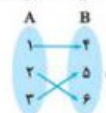
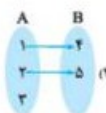
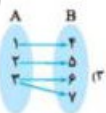


نمودارهای f و g تابع هستند، چون هر خط موازی با محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، اما در نمودار h خط $x = 2$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس h تابع نیست.

تابع از دید نمودار پیکانی (ون): رابطه‌ای تابع است که به هر عضو از مجموعه A ، دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده شود. بنابراین باید از هر عضو A ، دقیقاً یک پیکان به اعضای مجموعه B رسم شوند.

مثال آموزشی

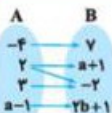
کدام رابطه نمایش یک تابع است؟



پاسخ: با توجه به تعریف بالا، فقط رابطه نشان داده شده در مورد (۱) تابع هست. در مورد (۲) از عدد ۳ فلش یا پیکانی خارج نشده است، پس تابع نمی‌باشد (باید از تمام اعضای مجموعه A فلش یا پیکان خارج شود). در مورد (۳) از عدد ۳ دو پیکان خارج شده است، پس تابع نمی‌باشد، یعنی دو زوج مرتب متفاوت، با مؤلفه اول یکسان داریم: $(3, 6)$ و $(3, 2)$.

تست آموزشی

اگر نمودار بیگانه‌ی مقابل مربوط به یک تابع باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟



-1 ☐

صفر ☐

-2 ☐

1 ☐

گزینه «ا» صحیح است.

پاسخ

چون از عدد ۲، دو فلش خارج شده است، باید $a+1 = -2$ باشد که در نتیجه $a = -3$ می‌شود. حال $a-1 = -4$ است، پس از عدد ۴- نیز دو فلش خارج شده است (چرا؟) یعنی باید $2b+1 = 7$ و از آن جا $b = 3$ باشد، بنابراین $a+b = 0$ می‌باشد.

مثال آموزشی

نمودار بیگانه‌ی مقابل مربوط به تابع f است. مقدار $f(f(3))$ چقدر است؟



با توجه به نمودار $f(3) = 5$ و $f(5) = 3$ می‌باشد.

پاسخ

تابع از دید جدول، شرط آن که یک رابطه جدولی بیانگر تابع باشد، آن است که هیچ عضوی در سطر اول جدول به بیش از یک عضو در سطر دوم آن، نسبت داده نشود و اگر دو x یکسان در سطر اول داشته باشیم، باید y های متناظر با آن در سطر دوم نیز یکسان باشند.

مثال آموزشی

کدام رابطه زیر تابع نیست؟

t $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 4 & 4 & 4 \end{array}$ ☐

h $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 5 & 6 & 7 \end{array}$ ☐

g $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 5 & 5 & 5 \end{array}$ ☐

f $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 5 & 5 & 5 \end{array}$ ☐

گزینه «۳» تابع نیست. برای درک بهتر می‌توانید جدول را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید:

$f = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5)\}$

$g = \{(1,5), (2,5), (3,5), (1,5)\} = \{(1,5), (2,5), (3,5)\}$

$h = \{(1,5), (2,6), (3,7), (1,8)\}$

$t = \{(1,4), (2,4), (3,4), (3,4)\} = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$

شما بگویید چرا گزینه ۳ تابع نیست؟ 😊

تابع از دید ضابطه:

(الف) **تابع تک قاعده‌ای (ضابطه‌ای):** ضابطه‌ای نشان دهنده یک تابع است که در آن به ازای هر x بیش از یک y به دست نیاید. به محبت تابع از دید ضابطه، در سال‌های آینده به طور کامل می‌پردازیم.

(ب) **تابع هلد ضابطه‌ای (هلد نقطه‌ای):** رابطه f به صورت $f(x) = \begin{cases} f_1(x) : x \in D_1 \\ f_2(x) : x \in D_2 \\ f_3(x) : x \in D_3 \end{cases}$ را یک تابع می‌نامند اگر (الف) هر ضابطه آن، تابع باشد، (ب) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ، $D_2 \cap D_3 = \emptyset$ و $D_1 \cap D_3 = \emptyset$

اگر اشتراک دامنه دو ضابطه یک نقطه مانند a باشد، کافی است a را در هر دو ضابطه قرار دهیم. اگر $f_1(a) = f_2(a)$ باشد، رابطه f معرف یک تابع است و در غیر این صورت، تابع نیست.

مثال آموزشی

کدام یک از روابط زیر معرف یک تابع است؟

(الف) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & x < 2 \\ x^2 + 5x & x \geq 2 \end{cases}$

(ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & x \geq 0 \\ x^2 + 5x & x \leq 2 \end{cases}$

(ج) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & x \leq 2 \\ x^2 + 5x & x \geq 2 \end{cases}$

در هر مورد ضابطه‌ها یک تابع می‌باشند، حال داریم:

$[0, +\infty) \cap (-\infty, 2] = [0, 2]$

(الف) چون $f \cap [2, +\infty) = \emptyset$ ، پس f تابع است.

(ب) چون اشتراک دامنه‌ها یک بازه است، f تابع نیست.

(ج) اشتراک دامنه‌ها عدد $\{2\}$ می‌باشد. $x = 2$ را در هر دو ضابطه قرار می‌دهیم:

$x = 2 \Rightarrow f_1(x) = x^2 + 6 = 2^2 + 6 = 10$

$x = 2 \Rightarrow f_2(x) = x^2 + 5x = 2^2 + 5(2) = 14$

به ازای $x = 2$ داریم: $f_1(2) = f_2(2)$ ، پس f معرف یک تابع است.

تابع از دید توصیف رابطه، وقتی یک رابطه توصیفی داده می شود و از ما خواسته می شود که تابع بودن این رابطه را بررسی کنیم، بهتر است برخی اعضای رابطه را (به کمک زوج های مرتب یا نمودار پیکانی یا جدول یا نمودار) مشخص کنیم. بعد از مشخص شدن اعضا، تشخیص تابع کار ساده ای است.

مثال آموزشی

کدام یک از روابط زیر معرف یک تابع می باشد؟

الف) رابطه ای که به هر عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۳، مقسوم علیه های آن را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر عدد طبیعی، مربع آن را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر عدد صحیح، ریشه پنجم آن را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به هر دانش آموز کلاس دهم، تاریخ تولدش را اختصاص می دهد.

پاسخ

الف) رابطه را به صورت زوج های مرتب می نویسیم: $\{(1,1), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ ، ملاحظه می کنیم که این رابطه، یک تابع نیست چون به ازای هر x یک y نداریم.

ب) هر عدد طبیعی فقط یک مربع دارد: $\{(1,1), (2,4), (3,9), \dots\}$ ، پس این رابطه معرف یک تابع است.

ج) هر عدد صحیح، فقط یک ریشه پنجم دارد. پس این رابطه یک تابع است.

د) هر دانش آموز فقط یک تاریخ تولد دارد. پس این رابطه، یک تابع است.

x	1	-1	2	-2	...
y	1	-1	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{-2}$	...

x	پیرام محمدی	علی ایمانی
y	۱۳ شهریور ۸۰	۲۰ فروردین ۸۰

اگر دو زوج مرتب $(\sqrt{4x-15}, yx)$ و $(\lambda y - 3, x^2 + 12)$ برابر باشند، مقدار $2y + x$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: دو زوج مرتب وقتی برابرند که مؤلفه های اول و مؤلفه های دوم نظیر به نظیر برابر باشند؛

$$\sqrt{4x-15} = \lambda y - 3$$

$$x^2 + 12 = yx \Rightarrow x^2 - yx + 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 3, 4$$

$$\begin{aligned} \text{تحقق } x=3 &\Rightarrow \sqrt{4(3)-15} = \sqrt{-3} \\ x=4 &\Rightarrow \sqrt{4(4)-15} = \lambda y - 3 \Rightarrow \lambda y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{\lambda} \Rightarrow 2y + x = 2\left(\frac{4}{\lambda}\right) + 4 = 5 \end{aligned}$$

رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m معرف یک تابع است؟

هیچ مقدار m (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

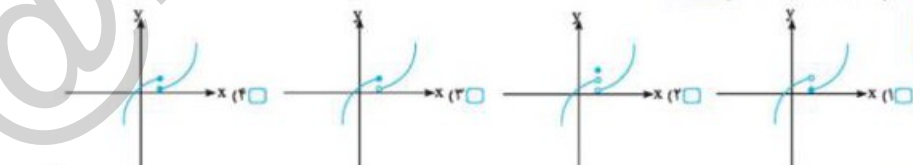
پاسخ: باید مؤلفه اول زوج های مرتب برابر نباشند و اگر دو زوج مرتب مؤلفه های اول برابر داشتند، مؤلفه های دوم نیز برابر شوند تا رابطه داده شده معرف یک تابع باشد، پس:

$$(3, m^2), (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, 2$$

$$m=2 \Rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

$$m=-1 \Rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

کدام نمودار زیر معرف یک تابع نیست؟



پاسخ: نموداری معرف یک تابع است که هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. فقط در گزینه (۴)

است که خط، نمودار را در دو نقطه قطع می کند؛ پس تابع نیست.

کدام گزینه نمایش یک تابع است؟



پاسخ: رابطه‌ای معرف تابع است که به هر عضو مجموعه اول، دقیقاً یک عضو از مجموعه دوم نسبت داده شود.

کدام یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟

(1) $\frac{x}{y} \mid \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} & 1 \end{matrix}$ (2) $\frac{x}{y} \mid \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} & 1 \end{matrix}$

(3) $\frac{x}{y} \mid \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} & 1 \end{matrix}$ (4) $\frac{x}{y} \mid \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} & 1 \end{matrix}$

پاسخ: در گزینه (3) داریم: $\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2), (\frac{3}{\sqrt{5}}, 3), (\frac{4}{\sqrt{5}}, 4), (\frac{5}{\sqrt{5}}, 5)\}$ که دارای دوزوج مرتب با مؤلفه اول $\frac{2}{\sqrt{5}}$ و مؤلفه‌های دوم متفاوت می‌باشد، پس تابع نیست.

کدام یک از رابطه‌های زیر معرف یک تابع نیست؟

- (1) رابطه‌ای که به طول ضلع مربع، مساحت مربع را نسبت می‌دهد.
(2) رابطه‌ای که به هر دانش آموز، نام معاونین مدرسه را نسبت می‌دهد.
(3) رابطه‌ای که به هر دانش آموز، روز تولدش را نسبت می‌دهد.
(4) رابطه‌ای که به هر عدد، مکعبش را نسبت می‌دهد.

پاسخ: در گزینه (2) فرض کنید مدرسه دو معاون به نام‌های محمدی و حسینی داشته باشد، پس برای دانش آموز بهرامی داریم: (محمدی، بهرامی)، (حسینی، بهرامی) و در نتیجه تابع نیست.

به ازای کدام مقدار n ، نمودار پیکانی مقابل معرف یک تابع است؟



پاسخ: باید هر سه عضو مجموعه دوم برابر باشند تا نمودار معرف تابع باشد، داریم:

$$n^2 + 12 = 7n \Rightarrow n^2 - 7n + 12 = 0 \Rightarrow (n-3)(n-4) = 0 \Rightarrow n = 3, 4$$

غ ق 1 $n = 3 \Rightarrow \sqrt{2n} + \sqrt{n} + 24 = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 24 \neq 7n = 21$

ق ق 2 $n = 4 \Rightarrow \sqrt{2n} + \sqrt{n} + 24 = \sqrt{8} + \sqrt{4} + 24 = 28 = 7n = 4 \times 7 = 28$

در نتیجه به ازای $n = 4$ ، سه عضو مجموعه دوم برابر می‌شوند و رابطه معرف یک تابع است.

دامنه و برد توابع از دیدگاه‌های مختلف، تابع خطی

تلف دامنه و برد از دید (جه‌های مرتب)، به مجموعه‌ای که شامل تمام مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب باشند، دامنه (Domain) و به مجموعه‌ای که شامل تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب باشند، برد (Range) می‌گویند. دامنه تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهند.

مثال آموزشی

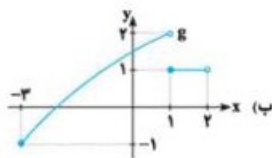
تابعی بنویسید که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی و برد آن فقط یک عضو داشته باشد.

$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), \dots\} \Rightarrow D_f = \mathbb{N}, R_f = \{5\}$$

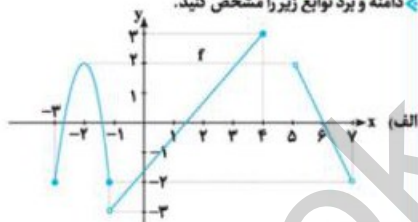
ب دامنه و برد از دید نمودار مفصلی (دکارتی)، به تصویر نمودار تابع روی محور x ها، دامنه تابع و به تصویر نمودار روی محور y ها، برد تابع می‌گویند.

مثال آموزشی

دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.



(ب) $R_f = [-3, 2]$ و $D_f = [-3, 2]$



(الف) $R_f = (-3, 3]$ و $D_f = [-3, 4] \cup (5, 7]$

دامنه و برد از دید نمودار (نقطه) به عضوهای مجموعه اول، دامنه و اعضای مجموعه دوم را هم دامنه می‌گویند. به اعضای مجموعه دوم که به آن‌ها پیکان (فلش) وارد شده است، برد می‌گویند.

مثال آموزشی

دامنه و برد تابع مقابل را مشخص کنید.



اعضای مجموعه A بیانگر دامنه تابع و اعضای B که به آن‌ها پیکان وارد شده است، بیانگر برد تابع می‌باشند:
 $D_f = \{1, 2, 3\}$ $R_f = \{4, 5, 6\}$

دامنه و برد از دید جدول، مجموعه تمام مقادیری که در قسمت بالایی جدول قرار دارند را دامنه تابع و مجموعه تمام مقادیری که در قسمت پایینی جدول قرار گرفته‌اند را برد تابع می‌گویند.

مثال آموزشی

دامنه و برد تابع مقابل را مشخص کنید.

x	1	2
y	-3	4

$D_f = \{1, 2\}$ $R_f = \{-3, 4\}$

نکته: برد یک تابع (y ها)، مقدار تابع به ازای مولفه‌های اول (x ها) است.

مثال آموزشی

در هر قسمت $f(0)$ ، $f(1)$ و $f(f(1))$ را مشخص کنید.



(الف) $f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

(ج) $f: \frac{x}{y} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -1$

پاسخ: (الف) با توجه به زوج مرتب $(0, 1)$ می‌گوییم $f(0) = 1$ و با توجه به زوج مرتب $(1, 4)$ می‌گوییم $f(1) = 4$ و با توجه به زوج مرتب $(4, -9)$ داریم:

$f(f(1)) = f(4) = -9$

$f(0) = 1$ ، $f(1) = 4$ ، $f(f(1)) = f(4) = -9$

(ب) از روی نمودار متوجه می‌شویم تابع به صورت $f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ می‌باشد، پس:

(ج) برای درک بهتر می‌توانیم جدول را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم:

$f = \{(-1, 1), (1, \sqrt{5}), (\sqrt{5}, -1)\} \Rightarrow f(0) = -4, f(1) = \sqrt{5}, f(f(1)) = f(\sqrt{5}) = -1$

دامنه و برد تابع با استفاده از رابطه آن، این بحث مفصل است و در سال‌های آینده به آن می‌پردازیم.

تابع خطی: به هر تابعی که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نشان داد، یک تابع خطی با شیب a و عرض از مبدأ b می‌گویند. نمودار این تابع، خطی راست است که با محور y موازی نیست (خطوط $x = k$ که موازی با محور y می‌باشند، اصلاً معرف یک تابع نیستند). در نتیجه تابع خطی یک رابطه درجه اول به صورت $y = ax + b$ یا $y = k$ می‌باشد.

طراز تشلیفون تابع خطی به شکلی جدول یا (زوج های مرتب)، باید نقاطی که داریم همگی بر روی یک خط راست باشند، به عبارت دیگر برای نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) شیب خط را از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ محاسبه می‌کنیم و برای سایر نقاط نیز به همین شکل به دست می‌آوریم و شیب‌های به دست آمده باید برابر با هم شوند. به عنوان نمونه برای نقاط (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) باید داشته باشیم:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

مثال آموزشی

آیا جدول مقابل نشان‌دهنده یک تابع خطی است؟

x	-1	1	2
y	1	5	7

$$\{(-1, 1), (1, 5), (2, 7)\} \Rightarrow \frac{5-1}{1-(-1)} = \frac{7-1}{2-(-1)} \Rightarrow 2 = 2$$

جدول معرف یک تابع خطی است، چون:

طراز نوشتن تابع خطی با داشتن شیب و یک نقطه از آن، اگر شیب خط، m و یک نقطه از آن $A(x_1, y_1)$ باشد، برای نوشتن معادله خط کافی است از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ استفاده کنیم. سپس معادله خط را ساده می‌کنیم تا به شکل $y = f(x) = ax + b$ درآید.

مثال آموزشی

ضابطه یک تابع خطی را بنویسید که شیب آن 2 باشد و از نقطه $(6, -1)$ بگذرد.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = 2(x - 6) \Rightarrow y = f(x) = 2x - 13$$

با توجه به رابطه فوق داریم:

طراز نوشتن تابع خطی با داشتن دو نقطه از آن، اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه از خط باشند، ابتدا شیب خط را از رابطه $m = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پیدا می‌کنیم، سپس معادله خط را از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم تا رابطه به صورت $y = f(x) = ax + b$ درآید.

مثال آموزشی

1) نمایش هندسی تابعی خطی است که از نقاط $(2, 5)$ و $(3, -1)$ می‌گذرد. $f(5)$ چقدر است؟

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 5}{3 - 2} = \frac{-6}{1} = -6 \Rightarrow y - 5 = -6(x - 2) \Rightarrow y = -6x + 12 + 5 \Rightarrow y = -6x + 17$$

$$f(x) = -6x + 17 \Rightarrow f(5) = -6(5) + 17 = -13$$

2) یک شمع 100 میلی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت 5 میلی متری می‌سوزد. با توجه به جدول زیر معادله تابع را بنویسید و مشخص کنید آیا تابع خطی است؟

x (زمان)	0	1	2
y (ارتفاع شمع)	100	95	90

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \Rightarrow \frac{95 - 100}{1 - 0} = \frac{90 - 95}{2 - 1} \Rightarrow -5 = -5$$

شیب‌ها برابرند، پس جدول فوق معرف یک تابع خطی است. برای نوشتن معادله تابع از دو روش می‌توان استفاده کرد:

روش اول، به ازای $x = 0$ مقدار $y = 100$ می‌باشد، پس عرض از مبدأ برابر 100 می‌باشد.

$$b = 100 \Rightarrow f(x) = y = ax + b \Rightarrow f(x) = -5x + 100$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 100 = -5(x - 0) \Rightarrow y = -5x + 100 \Rightarrow f(x) = -5x + 100$$

روش دوم:

3) سرعت یک پراید 100 km/h است و پس از 200 متر، سرعت آن از یک تابع خطی پیروی می‌کند. اگر بعد از 2 ثانیه، سرعت پراید به 70 km/h برسد، این پراید بعد از چند ثانیه به طور کامل متوقف می‌شود؟

$$(0, 100), (2, 70) \Rightarrow m = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{70 - 100}{2 - 0} = -15$$

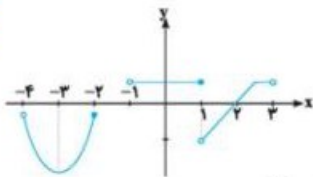
ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = V_{(سرعت)} = -15t + 100$$

با توجه به نقطه $(0, 100)$ واضح است، عرض از مبدأ 100 می‌باشد، پس:

$$-15t + 100 = 0 \Rightarrow t = \frac{100}{15} = 6\frac{2}{3}$$

سرعت اتومبیل در توقف کامل، برابر صفر می‌شود، پس:



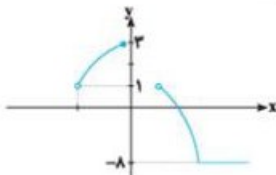
اگر شکل مقابل نمودار تابع f باشد، دامنه تابع شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

پاسخ: با توجه به نمودار داریم: $D_f = (-4, -2] \cup (-1, 2]$ که شامل اعداد صحیح $\{-3, -2, -1, 2\}$ می باشد.

اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، برد تابع شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)



پاسخ: همانطور که ملاحظه می کنید، در بالای محور x ها برد تابع شامل دو عدد طبیعی $\{2, 3\}$ می باشد.

با توجه به تابع مقابل، مقدار $\frac{2f(2)}{f(1)}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

x	۳	۴	۵
$f(x)$	۱۰	۱۷	۲۶

۳ (۴)

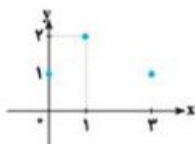
۳ (۳)

۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: ملاحظه می کنیم که $f(3) = 3^2 + 1 = 10$ ، $f(4) = 4^2 + 1 = 17$ و $f(5) = 5^2 + 1 = 26$ می باشد، پس $f(x) = x^2 + 1$ می شود و داریم:

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 \text{ و } f(1) = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow \frac{2f(2)}{f(1)} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$



اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\frac{\Delta f(0) + 2f(1)}{3f(2)}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

$$\frac{\Delta f(0) + 2f(1)}{3f(2)} = \frac{\Delta(0) + 2f(1)}{3f(2)} = \frac{0 + 2(1)}{3(2)} = \frac{2}{3}$$

۳ (۴)

۷ (۳)

۲ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: با توجه به نمودار تابع، $f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ و $f(2) = 1$ می باشد و داریم:

در یک تابع خطی $f(x) = ax + b$ می باشد، $f(0) = 2$ و $f(1) = 1$ و $f(2) = 1$ کدام است؟

پاسخ: تابع خطی را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم:

$$f(0) = a(0) + b = b \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = ax + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + 2 \\ f(2) = 2a + 2 \end{cases}$$

$$f(1) = a + 2 \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 2 \Rightarrow f(-2) = -(-2) + 2 = 4$$

۱۰ (۴)

۵ (۳)

۵ (۲)

صفر (۱)

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(0) = a(0) + b = b \Rightarrow b = 5$$

پاسخ: f را تابعی خطی به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم و داریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(5) = 5a + b \\ f(-5) = -5a + b \end{cases} \Rightarrow f(5) + f(-5) = 5a + b - 5a + b = 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

طول یک مستطیل ۵ واحد بیشتر از عرض آن است. کدام رابطه زیر محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان می کند؟

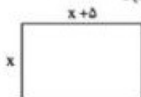
$f(x) = 4x + 10$ (۴)

$f(x) = 2x + 10$ (۳)

$f(x) = 4x + 5$ (۲)

$f(x) = 2x + 5$ (۱)

پاسخ:



$$f(x) = 4x + 10 \Rightarrow \text{محیط مستطیل} = 2(x + 5) = 2x + 10 \Rightarrow f(x) = 4x + 10$$

در تابع با ضابطه $f(x) = \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{\Delta} + \cos^2 \frac{\sqrt{x}}{\Delta}$ ، حاصل $f(135^\circ) + f(30^\circ)$ کدام است؟

- گزینه ۱: ۱ ☐ گزینه ۲: ۲ ☐ گزینه ۳: $\frac{3\sqrt{5}}{12}$ ☐ گزینه ۴: $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ ☐

پاسخ: می‌دانیم $\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{\Delta} + \cos^2 \frac{\sqrt{x}}{\Delta} = 1$ می‌باشد، پس:

$$f(135^\circ) + f(30^\circ) = 1 + 1 = 2$$

(ریاضی قریب ۹۵)

اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ باشد، ضابطه $f(f(x))$ کدام است؟

- گزینه ۱: x ☐ گزینه ۲: $4 - x$ ☐ گزینه ۳: $f(x)$ ☐ گزینه ۴: $2 - f(x)$ ☐

$$f(f(x)) = 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - |x - 2|| = 2 - |2 - x| = 2 - |x - 2| = f(x)$$

در تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx - 2$ ، با شرط $f(1) = -3$ و $f(3) = 7$ ، مقدار b کدام است؟

- گزینه ۱: -3 ☐ گزینه ۲: -2 ☐ گزینه ۳: -1 ☐ گزینه ۴: 1 ☐

$$\begin{aligned} f(1) = -3 &\Rightarrow a(1)^2 + b(1) - 2 = -3 \Rightarrow a + b = -1 \\ f(3) = 7 &\Rightarrow a(3)^2 + b(3) - 2 = 7 \Rightarrow 9a + 3b = 9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a - 9b = 9 \\ 9a + 3b = 9 \end{cases} \Rightarrow -6b = 18 \Rightarrow b = -3$$

(توربین قریب ۸۹)

اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- گزینه ۱: $\frac{1}{1-x^2}$ ☐ گزینه ۲: $\frac{2x}{x^2-1}$ ☐ گزینه ۳: $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ☐ گزینه ۴: $\frac{2x-1}{x^2-1}$ ☐

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + (x^2-1)}{x^2-1} = \frac{-2x-1}{x^2-1} = \frac{-(2x+1)}{-(x^2+1)} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

(توربین دلف ۸۹)

اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & ; x > 0 \\ \sqrt{-x} & ; x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $f(f(f(-81)))$ کدام است؟

- گزینه ۱: $-\frac{1}{3}$ ☐ گزینه ۲: $\frac{1}{3}$ ☐ گزینه ۳: $\frac{1}{9}$ ☐ گزینه ۴: $-\frac{1}{9}$ ☐

$$f(-81) = \sqrt{-(-81)} = 9 \Rightarrow f(f(-81)) = f(9) = -\frac{1}{9} \Rightarrow f(f(f(-81))) = f(-\frac{1}{9}) = \sqrt{-(-\frac{1}{9})} = \frac{1}{3}$$

(توربین دلف ۸۹)

در تابع $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x+3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ ، مقدار $f(f(1)) + f(f(5))$ کدام است؟

- گزینه ۱: ۶ ☐ گزینه ۲: ۷ ☐ گزینه ۳: ۸ ☐ گزینه ۴: ۹ ☐

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2 \\ f(5) &= 5 - \sqrt{5+4} = 2 \Rightarrow f(f(5)) = f(2) = 2(2) + 3 = 7 \end{aligned} \Rightarrow f(f(1)) + f(f(5)) = 2 + 7 = 9$$

اگر $f(x) = \begin{cases} 3 & ; x > 1 \\ -3 & ; x \leq 1 \end{cases}$ حاصل $f(1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}) + f(1 - \cos^2 x)$ کدام است؟ $(\sin x \neq 0)$

- گزینه ۱: صفر ☐ گزینه ۲: 1 ☐ گزینه ۳: -1 ☐ گزینه ۴: 2 ☐

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} &= \frac{1}{\sin^2 x} + 1 > 1 \Rightarrow f\left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right) = 3 \quad (I) \\ 1 - \cos^2 x &\leq 1 \Rightarrow f(1 - \cos^2 x) = -3 \quad (II) \end{aligned} \right. \Rightarrow (I) + (II) = 3 + (-3) = 0 \end{aligned}$$

اگر $xf(2) + 2f(x) = x + 10$ باشد، $f(4)$ کدام است؟

- گزینه ۱: صفر ☐ گزینه ۲: 1 ☐ گزینه ۳: 2 ☐ گزینه ۴: 4 ☐

پاسخ: ابتدا $f(2)$ و سپس $f(x)$ را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم به کمک آن $f(4)$ را بیابیم:

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow 2f(2) + 2f(2) = 2 + 10 \Rightarrow 4f(2) = 12 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow x(2) + 2f(x) = x + 10 \Rightarrow 2f(x) = -2x + 10 \Rightarrow f(x) = -x + 5 \\ &\Rightarrow f(2) = -2 + 5 = 3 \end{aligned}$$

اگر $f(x-3) + f(2) = x^2 - 3x + 4$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

- گزینه ۱: 3 ☐ گزینه ۲: -2 ☐ گزینه ۳: 4 ☐ گزینه ۴: 2 ☐

پاسخ: برای حل کافی است $x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$ را در رابطه فوق قرار دهیم:

$$x = 5 \Rightarrow f(5-3) + f(2) = 5^2 - 3(5) + 4 \Rightarrow f(2) + f(2) = 14 \Rightarrow 2f(2) = 14 \Rightarrow f(2) = 7$$

۲۴ اگر $f(x) = 10 - f(x+a) + 2f(x+a)$ و تابع از مبدأ مختصات بگذرد، حاصل $f(2a)$ کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۷/۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: تابع از مبدأ می‌گذرد، پس $f(0) = 0$ است، داریم:

$$x = 0 \Rightarrow 2f(0+a) - f(0) = 10 \Rightarrow 2f(a) = 10 \Rightarrow f(a) = 5$$

$$x = a \Rightarrow 2f(a+a) - f(a) = 10 \Rightarrow 2f(2a) - 5 = 10 \Rightarrow 2f(2a) = 15 \Rightarrow f(2a) = \frac{15}{2} = 7.5$$

تابع چند جمله‌ای

۱. تابع چند جمله‌ای، توابع با ضابطه $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$ و $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ (ن ∈ N) مانند $f(x) = ax + b$ (تابع خطی)، $f(x) = ax^2 + bx + c$ (تابع درجه دوم) و ...

۲۵ کدام یک می‌تواند ضابطه یک تابع چند جمله‌ای باشد؟

$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4}$ (۴)

$f(x) = (3x - \sqrt{x})^2$ (۳)

$f(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)^2$ (۲)

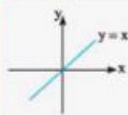
$f(x) = x^2 + x^{-2} + 5x$ (۱)

پاسخ: در گزینه (۱) با توجه به توان -2 ، تابع چند جمله‌ای نیست. در گزینه‌های (۲) و (۳) وقتی عبارت را به توان برسانیم، x با توان کسری خواهیم داشت، پس این توابع، چندجمله‌ای نیستند. اما در گزینه (۴) ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)} = x^2 - 4$$

بنابراین گزینه (۴) ضابطه یک تابع چند جمله‌ای می‌باشد.

تابع همانی



۲. تابع همانی، اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و به هر عضو دامنه، دقیقاً همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی گویند و آن را با $y = f(x) = x$ نشان می‌دهند. اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن نیمساز ناحیه اول و سوم است.

۲۶ اگر تابع $f(x) = 3x + kx - m$ یک تابع همانی باشد، $m + k$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۲ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: ضابطه تابع همانی $f(x) = x$ می‌باشد، پس کافی است $k = -2$ و $m = 0$ باشد،

$$f(x) = 3x - 2x - 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow m + k = 0 + (-2) = -2$$

۲۷ اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^2 + 2x + 4} + 2k - 16$ یک تابع همانی باشد، k کدام است؟

-۹ (۴)

-۸ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم $(D_f = \mathbb{R})$:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)} + 2k - 16 = x - 2 + 2k - 16 = x + 2k - 18$$

$$2k - 18 = 0 \Rightarrow k = 9$$

ضابطه تابع همانی $f(x) = x$ می‌باشد، پس:

تابع ثابت

۳. تابع ثابت، تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو ثابت مانند k ($k \in \mathbb{R}$) است، یعنی به ازای تمامی مقادیر x فقط یک مقدار برای y داریم مانند توابع $f(x) = 2$ و $f(x) = \{(1,5), (2,5), (-1,5)\}$ که تابع ثابت‌اند.

۲۸ کدام یک ضابطه تابعی ثابت را نشان نمی‌دهد؟

$f(x) = \frac{x-2}{x-2}$ (۴)

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ (۳)

$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x}}$ (۲)

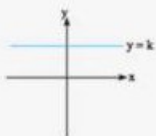
$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ (۱)

پاسخ: می‌دانیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می‌باشد، پس در گزینه (۱) داریم: $f(x) = 1$ و در نتیجه تابعی ثابت است، اما در گزینه (۲) $\sqrt{x} = |x|$ است، پس

$$f(x) = \frac{|x|}{|x|} = 1 \text{ تابعی ثابت است و در گزینه (۳) داریم } f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2 \text{ که یک تابع خطی را نشان می‌دهد و در گزینه (۴) نیز مقدار}$$

$f(x)$ و $(x \neq 2)$ می‌باشد که تابعی ثابت است.

نکته $y = k (k \in \mathbb{R})$ تابعی ثابت است اما $x = k$ تابع نیست. (چرا؟)



۴. تابع هلد ضابطه‌ای (پلد قطعه‌ای) در درس قبل در مورد این تابع صحبت کردیم. اجتماع دامنه هریک از ضابطه‌ها، دامنه تابع را تشکیل می‌دهد.

مثال آموزشی

دامنه تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 5x & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ دامنه ضابطه اول $[0, 2)$ و دامنه ضابطه دوم $[2, 5)$ می‌باشد و اجتماع این دو بازه $[0, 5)$ است.

۵. تابع قدر مطلق، تابعی که به ازای هر عدد مثبت، برابر با خودش باشد و به ازای اعداد منفی، قرینه آن عدد شود را تابع قدر مطلق گویند. پس تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر کند، تابع قدر مطلق است. این تابع به صورت $f(x) = y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ تعریف می‌شود.

$$|-5| = 5 \quad |2| = 2 \quad |0| = 0$$



پس این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) می‌باشد و نمودار آن به صورت مقابل است:

x	a	b	Δ
f(x)	$4b+1$	$3c^2-18$	$\sqrt{a}$

جدول مقابل مربوط به یک تابع همانی است. حاصل $\frac{a+b+1}{c}$ کدام است؟

$$15/5 \quad (2)$$

$$16/5 \quad (4)$$

$$15 \quad (1)$$

$$16 \quad (3)$$

پاسخ در تابع همانی $f(x) = y = x$ می‌باشد، پس:

$$\sqrt{a} = \Delta \Rightarrow a = 25$$

$$4b+1 = a \Rightarrow 4b+1 = 25 \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6$$

$$3c^2-18 = 6 \Rightarrow 3c^2 = 24 \Rightarrow c^2 = 8 \Rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2-3}{x^2+x+1} + mx + n$ یک تابع همانی باشد، $n-m$ کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

پاسخ باید ضابطه داده شده را ساده کنیم تا به شکل تابع همانی $f(x) = x$ درآید:

$$f(x) = \frac{3(x^2-1)}{x^2+x+1} + mx + n = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} + mx + n = 3(x-1) + mx + n = (m+3)x + (n-3)$$

$$\begin{aligned} m &= -2 \\ n &= 3 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = 3x - 3 - 2x + 3 = x \Rightarrow n-m = 5$$

باید $n = -2$ و $m = 3$ باشد تا به تابع $f(x) = x$ برسیم:

کدام یک تابعی ثابت است؟



پاسخ گزینه (2) تابع نیست و گزینه (3) تابعی ثابت است - برد آن فقط یک عضو دارد

اگر $f = \{(-3, a+2), (4, b^2+1), (\sqrt{3}, 9)\}$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $a-2b$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱۱

پاسخ: برد تابع ثابت فقط یک عضو دارد، پس عضوهای دوم تمام زوج‌های مرتب باید برابر ۹ شوند،

$$\begin{cases} a+2=9 \Rightarrow a=7 \\ b^2+1=9 \Rightarrow b^2=8 \Rightarrow b=\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow a-2b=7-2(\sqrt{8})=7$$

فرض کنید $|x| = f(x)$ و $D_f = \{-1, -2, -3\}$ ، $f(x) = \{(3c, b^2+d^2-14), (4a, 2), (-1, b^2-26)\}$ باشد، مقدار $2a+b+c+d$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: با توجه به اینکه $|x| = f(x)$ می‌باشد، پس عضو دوم زوج‌های مرتب، مقدار مثبت عضو اول است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (-2, 2) = (4a, 2) \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ (-1, 1) = (-1, b^2-26) \Rightarrow b^2-26=1 \Rightarrow b^2=27 \Rightarrow b=3 \\ (-3, 3) = (3c, d^2+b^2-14) \Rightarrow \begin{cases} 3c = -3 \Rightarrow c = -1 \\ b^2+d^2-14=3 \Rightarrow 9+d^2-14=3 \Rightarrow d^2=8 \Rightarrow d=2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2a+b+c+d = -1+3-1+2=3$$

(ریاضی دوازدهم)

اگر $|x| = f(x)$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، حاصل $f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2}))$ کدام است؟

- ۱) $4(1-\sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2}-1)$ ۳) ۳ ۴) $4\sqrt{2}$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \Rightarrow g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = 6-4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} f(g(1-\sqrt{2})) &= f(6-4\sqrt{2}) = |6-4\sqrt{2}| = 6-4\sqrt{2} \quad (I) \\ f(1-\sqrt{2}) &= |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \Rightarrow g(f(1-\sqrt{2})) = g(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1+1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \quad (II) \end{aligned}$$

نتیجه

نکاتی در تعیین دامنه انواع توابع

۱) دامنه تابع خطی و توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۲) دامنه توابع کسری به شکل $f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{g(x)}$ برابر با $\mathbb{R} - \{x | g(x) = 0\}$ است.

تذکره: قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن کسری را نداریم.

مثال آموزشی

دامنه توابع با ضابطه‌های $f_1(x) = \frac{1}{x^2+4}$ ، $f_2(x) = \frac{1}{x^2-4}$ ، $f_3(x) = \frac{x-1}{x-4}$ و $f_4(x) = \frac{x-1}{x-4}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} f_1: x^2+4=0 &\Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\pm 2i \Rightarrow D_{f_1} = \mathbb{R} - \{\pm 2i\} \\ f_2: x^2-4=0 &\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow D_{f_2} = \mathbb{R} \\ f_3: x-4=0 &\Rightarrow x=4 \Rightarrow D_{f_3} = \mathbb{R} - \{4\} \\ f_4: x-4=0 &\Rightarrow x=4 \Rightarrow D_{f_4} = \mathbb{R} - \{4\} \end{aligned}$$

$$f_4: x-2=0, x-3=0, x-4=0 \Rightarrow x=2, 3, 4 \Rightarrow D_{f_4} = \mathbb{R} - \{2, 3, 4\}$$

توجه: ابتدا دامنه را پیدا می‌کنیم و بعد تابع را ساده می‌کنیم، پس:

توجه کنید که: ابتدا مخرج کسرها ساده شده در صورت که $x-2$ است و مخرج کسرها ساده شده در مخرج که $x-4$ است، و مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس مخرج f_4 یعنی $\frac{x-3}{x-4}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و این کسروقتی صفر است که صورت آن یعنی $x-3$ صفر باشد.

اگر دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+9}{(m+3)x^2+2(m+1)x+m}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

- ۱) $m > 1$ ۲) $m < 1$ ۳) $m < 0$ ۴) $m > 0$

پاسخ: چون تابع، کسری و دامنه برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس مخرج نباید ریشه داشته باشد. مخرج، عبارت درجه دوم است، در نتیجه باید $\Delta < 0$ باشد،

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m+3) = 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 12m - 12 = -4m - 8 < 0 \Rightarrow m > -2$$

۳۶ اگر دامنه تابع با مضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ باشد، حاصل $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟ $(a^2 \geq 4b)$

۶ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: با توجه به دامنه تابع، مخرج کسر دوم یا ریشه مضاعف $x=1$ دارد یا دلنای آن منفی است. با توجه به شرط $a^2 \geq 4b$ ، دلنای مخرج کسر دوم، همواره بزرگتر یا مساوی صفر است:

بنابراین باید ریشه مخرج در کسر اول عدد ۱ و مخرج کسر دوم $(x-1)^2$ باشد:

$$\begin{aligned} x=1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 4x + 3} &\Rightarrow \frac{1+5}{1-4+3} + \frac{1}{1-4+3} = \frac{6}{-2} + \frac{1}{-2} = -\frac{7}{2} \\ \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{-7}{1} = -7 \end{aligned}$$

نکات تکمیلی در تعیین دامنه توابع

۳۷ برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد به شکل $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ، $(n \in \mathbb{N})$ ، اصلاً رادیکال را در نظر نمی‌گیریم، یعنی:

$$D_f = D_g$$

مثال آموزشی

دامنه توابع $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-1}}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را بیابید.

توضیح: چون رادیکال با فرجه فرد داریم، فرض می‌کنیم رادیکال‌ها وجود ندارند و دامنه توابع f و g را تعیین می‌کنیم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = \mathbb{R}$$

۳۸ برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج به شکل $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ، $(n \in \mathbb{N})$ باید $g(x) \geq 0$ قرار دهیم و مجموعه جواب این نامعادله، برابر دامنه f می‌باشد.

مثال آموزشی

دامنه توابع زیر را بیابید.

الف $f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$

ب $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$

ج $f_3(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$

الف $f_1: 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{f_1} = [-2, 2]$

ب $f_2: x^2 - 7x + 12 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} x & 3 & 4 \\ f_2 & + & - \end{matrix} \Rightarrow x \leq 3 \text{ یا } x \geq 4$

ج $f_3: \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \Rightarrow x < 3 \text{ یا } x > 4 \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) = [-2, 2] \Rightarrow$

۳۹ کدام گزینه در دامنه تابع با مضابطه $f(x) = \sqrt{-2x-5}$ قرار دارد؟

۲ (۱) -2 (۲) -5 (۳) 5 (۴) -5

$$-2x-5 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq 5 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{2} \Rightarrow x \leq -2.5$$

پاسخ: (۱) اول، دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

در نتیجه $x = -5$ در دامنه تابع وجود دارد.

(۲) می‌توان اعداد موجود در گزینه‌ها را در تابع قرار دهیم، فقط به ازای $x = -5$ زیر رادیکال مقداری مثبت می‌شود. (سایر گزینه‌ها را بررسی نکنید.)

$$x = -5 \Rightarrow f(-5) = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}$$

۴۰ برای توابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{x-2} \sqrt{x+2}$ کدام گزینه درست است؟

$D_f = D_g$ (۱) $D_f \subset D_g$ (۲) $D_g \subset D_f$ (۳) $D_f \cup D_g = \mathbb{R}$ (۴)

$$D_f: x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

پاسخ: دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$D_g: \begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II): x \geq 2$$

بنابراین $D_g \subset D_f$ می‌باشد و گزینه (۳) صحیح است.

۴۱ دامنه تابع با مضابطه $f(x) = \sqrt{4-x-1}$ کدام است؟

$x \leq 3$ یا $x \geq 4$ (۱) $-1 \leq x \leq 4$ (۲) $-3 \leq x \leq 5$ (۳) $x \leq -3$ یا $x \geq 5$ (۴)

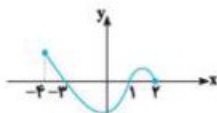
$$4-x-1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow$$

(۴) (۳) (۲) (۱)

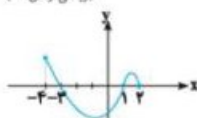
$$f(-x) = \sqrt{-x+|x+2|}$$

$$-x+2 \geq 0 \Rightarrow -x+(-x+2) \geq 0 \Rightarrow -2x+2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$-x+2 \leq 0 \Rightarrow -x-(-x+2) \geq 0 \Rightarrow -x+x-2 \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0$$
 غیرممکن



(۴) (۳) (۲) (۱)



$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 & \Rightarrow xf(x) < 0 \text{ منفی} \\ f(x) > 0 & \Rightarrow \text{مثبت} \\ 0 < x < 1 & \Rightarrow xf(x) < 0 \text{ منفی} \\ f(x) < 0 & \Rightarrow \text{مثبت} \end{aligned}$$

اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $x \leq -1$ (۲) $x \geq -1$ (۳) $x \leq 1$ (۴) $x \geq 1$

پاسخ: ابتدا ضابطه تابع $f(-x)$ را پیدا می‌کنیم:

با توجه به اینکه باید $x \leq 2$ باشد، پس $x \leq 1$ قابل قبول می‌باشد.

شکل مقابل نمودار $y_1 = f(x)$ است. تمام دامنه تابع $y_2 = \sqrt{f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-4, 0] \cup [0, 2]$ (۳) $[-4, -2] \cup [0, 2]$ (۴) $[-4, -2] \cup [1, 2]$

پاسخ: برای تعیین دامنه y_2 باید $f(x) \geq 0$ قرار دهیم که با توجه به نمودار، جاهایی قابل قبول است که نمودار پایین محور x ها نباشد:

$$\Rightarrow D_{y_2} = [-4, -2] \cup [0, 2]$$

شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

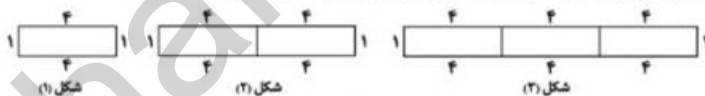
- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[-3, 2]$ (۳) $[-4, -2] \cup [0, 2]$ (۴) $[-3, 0] \cup [0, 2]$

پاسخ: باید $xf(x) \geq 0$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 0 & \Rightarrow xf(x) \geq 0 \text{ مثبت} \\ f(x) \leq 0 & \Rightarrow \text{منفی} \\ 1 \leq x \leq 2 & \Rightarrow xf(x) \geq 0 \text{ مثبت} \\ f(x) \geq 0 & \Rightarrow \text{منفی} \end{aligned}$$

پس دامنه تابع برابر $[-3, 0] \cup [0, 2]$ می‌باشد.

با توجه به مستطیل‌های زیر، برد تابعی که ورودی آن شماره شکل و خروجی آن محیط شکل باشد، کدام است؟



$$R = \{2(fn+2) | n \in \mathbb{N}\} \quad (۲)$$

$$R = \{An+1 | n \in \mathbb{N}\} \quad (۴)$$

$$R = \{An+2 | n \in \mathbb{N}\} \quad (۱)$$

$$R = \{fn+1 | n \in \mathbb{N}\} \quad (۳)$$

$$\text{محیط شکل اول} = 2(f+1), \quad \text{محیط شکل دوم} = 2(2(f)+1)$$

$$\text{محیط شکل سوم} = 2(2(2(f)+1)) \Rightarrow \text{محیط شکل } n\text{ام} = f(n) = 2(fn+1) = An+2$$

- (۱, ۳) (۴) (۲, ۳) (۳) (۴)

$$\begin{aligned} f-x^2 \geq 0 & \Rightarrow x^2 \leq f \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad (I) \\ x^2-1 > 0 & \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \vee x < -1 \quad (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \leq k^2 & \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \\ x^2 \geq k^2 & \Leftrightarrow x \leq -k \vee x \geq k \end{aligned}$$

دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ (۲) $(0, 1)$

پاسخ: اگر k عددی مثبت باشد، داریم:

دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x-7}{\sqrt{x^2-7x+12}}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 3) \cup [3/5, 4)$ (۲) $(3, 2/5) \cup (4, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 4)$ (۴) $(4, +\infty)$

پاسخ زیر ادیکال با فرجه زوج یک عبارت کسری داریم که باید عبارت داده شده بزرگتر مساوی صفر باشد، داریم:

$$\frac{2x-7}{(x-3)(x-4)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

x	-∞	3	7/2	4	+∞
2x-7	-	-	+	+	+
x-3	-	+	+	+	+
2x-7	-	-	+	+	+
x-3	-	+	+	+	+
x-4	-	-	-	+	+

بنابراین دامنه تابع برابر با $(3, 7/2] \cup (4, +\infty)$ می باشد.

پرسش ۴۶: برد تابع $f(x) = (3x-1)(x+1) - (2x+5)(x-3) - 3x - 12$ کدام است؟

☐ (۱) $(-\infty, +\infty)$
☐ (۲) $(1, +\infty)$
☐ (۳) $(1, +\infty)$
☐ (۴) $(2, +\infty)$

پاسخ ابتدا عبارت را ساده می کنیم:

$$f(x) = 3x^2 + 3x - x - 1 - 2x^2 + 6x - 5x + 15 - 3x - 12 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

با توجه به اینکه x^2 هیچ وقت منفی نمی شود و کمترین مقدار آن صفر است، پس کمترین مقدار تابع $2 = 0 + 2$ می باشد و در نتیجه:

$$R_f = [2, +\infty)$$

پرسش ۴۷: اگر برد تابع $f(x) = (2a-5)x^2 + (4a-b-1)x + a-b+c$ مجموعه تک عضوی $\{\frac{1}{4}\}$ و دامنه تابع R باشد، حاصل $2a+b-c$ کدام است؟

☐ (۱) 1
☐ (۲) $\frac{1}{4}$
☐ (۳) $\frac{3}{4}$
☐ (۴) 4

پاسخ برد تابع مجموعه ای تک عضوی است، پس تابع ثابت می باشد و ضرایب x و x^2 باید صفر باشند:

$$2a-5=0 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

$$4a-b-1=0 \Rightarrow 10-b-1=0 \Rightarrow b=9$$

$$a-b+c=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{2}-9+c=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-13}{2}+c=\frac{1}{4} \Rightarrow c=\frac{1}{4}+\frac{13}{2}=\frac{27}{4}$$

پرسش ۴۸: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x}$ شامل چند عدد حقیقی است؟

☐ (۱) صفر
 ☐ (۲) 1
☐ (۳) 2
☐ (۴) بی شمار

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

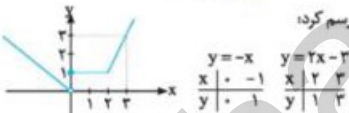
پاسخ با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

بنابراین $R_f = \{1, -1\}$ و در نتیجه برد تابع شامل ۲ عدد حقیقی می باشد.

پرسش ۴۹: برد تابع چند قطعه ای $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-3 & x > 2 \end{cases}$ کدام است؟

☐ (۱) R
☐ (۲) $[0, +\infty)$
☐ (۳) $(-\infty, +\infty)$
☐ (۴) $R - \{1\}$

پاسخ برای تعیین برد، بهتر است تابع را رسم کنیم. تک تک ضابطه ها را می توان با عددگذاری رسم کرد:



واضح است که برد تابع $(-\infty, +\infty)$ می باشد.

پرسش ۵۰: فرض کنید $f(x) = |x^2 - 2| - 1$ و $D_f = \{-1, 1, -2, 2\}$ باشد. برد تابع f شامل چند عضو است؟

☐ (۱) 5
☐ (۲) 4
☐ (۳) 3
☐ (۴) 2

پاسخ با توجه به این که دامنه تابع معلوم است، برد را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} x = \pm 1 &\Rightarrow f(\pm 1) = |1-2| - 1 = 0 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow f(\pm 2) = |4-2| - 1 = 1 \\ x = 0 &\Rightarrow f(0) = |0-2| - 1 = 1 \end{aligned}$$

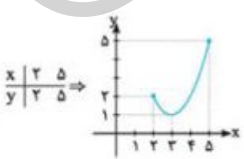
بنابراین $R_f = \{0, 1\}$ می باشد که شامل دو عضو است.

پرسش ۵۱: اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 - 6x + 10$ بازه $[2, 5]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

☐ (۱) $[1, 5]$
☐ (۲) $[0, 1]$
☐ (۳) $[0, 5]$
☐ (۴) $[1, 10]$

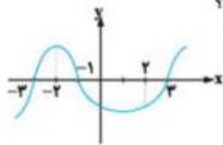
$$f(x) = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$$

پاسخ ابتدا عبارت را ساده می کنیم:



برای رسم کافی است نمودار $y = x^2$ را سه واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم. حال مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه به دست می آوریم و نمودار را به طور دقیق تر رسم می کنیم و برد تابع را مشخص می کنیم:

با توجه به شکل، واضح است که برد تابع بازه $[1, 5]$ می باشد.



نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. دامنه تابع با ضابطه $y = \frac{x+3}{\sqrt{(x+2)f(x)}}$ چند عضو صحیح ندارد؟

- ۱) ۳
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۷

$$(x+2)f(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0, f(x) > 0 \Rightarrow x > -2, -2 < x < -1 \cup x > 3 \Rightarrow -2 < x < -1 \cup x > 3 \text{ (I)} \\ x+2 < 0, f(x) < 0 \Rightarrow x < -2, x < -3 \Rightarrow x < -3 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (I) \cup (II) = D_f = (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (3, \infty)$$

بنابراین دامنه تابع شامل ۷ عدد صحیح $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ نمی باشد.

دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{2 - x}$ کدام است؟

- ۱) $\{2\}$ ۲) $[-1, 2]$ ۳) $[-\infty, 2]$ ۴) $(-\infty, -1] \cup \{2\}$

پاسخ به ازای عدد دلخواه $x=0$ زیررادیکال منفی می شود، پس گزینه های (۲) و (۳) که شامل عدد صفر می باشند، حذف می شوند. به ازای $x=-1$

$$f(-1) = \sqrt{1+1-2} - \sqrt{2+1} = -\sqrt{3}$$

پس $x=-1$ در دامنه تابع هست و گزینه (۴) صحیح می باشد.

مذکر: در تست هایی که دامنه یا پرر را می خواهند و بازه می دهند، می توانیم به x عددی دلخواه از بازه ها بدهیم و ببینیم که عبارت به ازای آن با معنی یا بی معنی است و برای پرر هم کافی است مقدار y را به ازای x داده شده پیدا کنیم.

رسم و انتقال نمودار توابع

نکاتی در رسم نمودار توابع:

- برای رسم نمودار توابع خطی به شکل $y = ax + b$ کافی است مختصات دو نقطه دلخواه از تابع را پیدا کنیم و به هم وصل نماییم.
- برای رسم نمودار توابع درجه دوم به شکل $y = ax^2 + bx + c$ که نمودار آن سهمی است، ابتدا مختصات نقطه رأس سهمی (نقطه $\max$ یا $\min$) را از رابطه $H(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ پیدا می کنیم، سپس دو نقطه کمکی در سمت راست و چپ نقطه رأس می دهیم و تابع را رسم می کنیم.
- برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق به فرم $y = |ax + b| \pm k$ ، ابتدا ریشه داخل قدرمطلق را پیدا می کنیم ($ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$)، سپس دو نقطه کمکی در سمت چپ و راست این نقطه می دهیم و تابع را رسم می کنیم.

نست آموزشی

نمودار توابع با ضابطه های $f(x) = |x-2|+1$ و $g(x) = x^2 - 6x + 10$ را در R رسم کنید.

پاسخ: با توجه به نکات ذکر شده داریم:

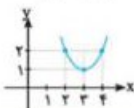
$$f(x) = |x-2|+1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 2 & 1 & 2 \end{array}$$



$$g(x) = x^2 - 6x + 10$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{+6}{2 \times 1} = 3 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 2 & 1 & 2 \end{array}$$



انتقال نمودارها:

اگر k عددی مثبت باشد و نمودار $y_1 = f(x)$ را داشته باشیم، آن گاه برای رسم حالت های مختلف $f(x)$ به موارد زیر توجه کنید:

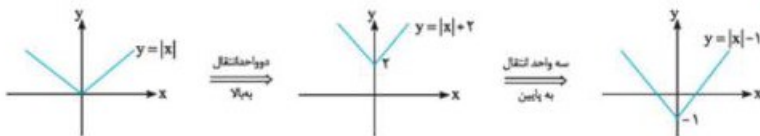
۱) $y = f(x) + k$: کافی است نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت بالا (در راستای محور y) انتقال دهیم.

۲) $y = f(x) - k$: کافی است نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد به (در راستای محور y) پایین دهیم.

مثال آموزشی

با توجه به نمودار $f(x) = |x|$ ، نمودارهای $y = |x| + 2$ و $y = |x| - 1$ را رسم کنید.

پایان



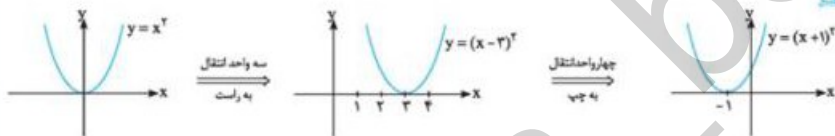
۳. کافی است نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت راست (در راستای محور x) انتقال دهیم.

۴. کافی است نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت چپ (در راستای محور x) انتقال دهیم.

مثال آموزشی

۱. با توجه به نمودار $f(x) = x^2$ ، نمودارهای $y = (x-3)^2$ و $y = (x+1)^2$ را رسم کنید.

پایان



۲. نمودار $f(x) = |x-3| + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

ابتدا نمودار $y = |x|$ را سه واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

پایان

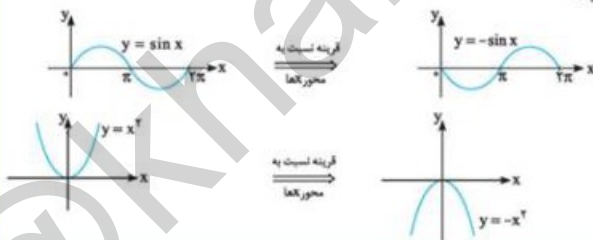


۵. کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

مثال آموزشی

نمودار توابع $y = -x^2$ و $y = -\sin x$ را رسم کنید.

پایان

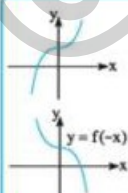


۶. کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور y قرینه کنیم.

مثال آموزشی

اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار $y = f(-x)$ را رسم کنید.

پایان





اگر شکل مقابل نمودار $f(x)$ باشد، نمودار $f(x-2)+1$ کدام است؟



پاسخ: کافی است نمودار را دو واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، بنابراین نمودار رسم شده در گزینه (۱) صحیح می باشد.

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ را دو واحد به سمت راست و سه واحد به سمت پایین انتقال می دهیم. معادله منحنی جدید کدام است؟

(۱) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$

(۱) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$

(۲) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

(۲) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

پاسخ: برای این که نمودار را دو واحد به راست انتقال دهیم، کافی است x را به $x-2$ تبدیل کنیم که به $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2$ می رسیم و برای اینکه نمودار را سه واحد به سمت پایین انتقال دهیم، کافی است کل عبارت را منهای ۳ کنیم، پس:

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 3 = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$$

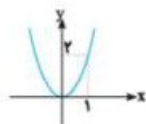
اگر رأس سهمی مقابل را به نقطه $(1, -3)$ انتقال دهیم، معادله سهمی جدید کدام است؟

(۱) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$

(۱) $y = -2x^2 + 4x + 5$

(۲) $y = 2x^2 - 4x - 1$

(۲) $y = x^2 - 2x - 2$



پاسخ: ابتدا ضابطه نمودار داده شده را می نویسیم. معادله سهمی که از مبدأ مختصات می گذرد، $y = f(x) = ax^2$ می باشد.

$$y = a(1)^2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = f(x) = 2x^2$$

مطابق شکل، تابع از نقطه $(1, 2)$ می گذرد، پس مختصات این نقطه در تابع صدق می کند:

سپس نمودار را یک واحد به سمت راست و سه واحد به سمت پایین انتقال می دهیم:

$$f(x-1) - 3 = 2(x-1)^2 - 3 = 2x^2 - 4x + 2 - 3 = 2x^2 - 4x - 1$$

نمودار تابع $y = |x|$ را دو واحد به طرف های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

(۱) -2

(۲) 2

(۳) -1

(۴) 1

پاسخ: با انتقال $y_1 = |x|$ به میزان دو واحد به سمت چپ، نمودار $y_2 = |x+2|$ به دست می آید. برای پیدا کردن محل تلاقی دو تابع کافی است $y_1 = y_2$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| = |x+2|$$

را قرار می دهیم:

حال کافی است از گزینه ها کمک بگیریم.

ق ق $1 = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 \Rightarrow -1 = -1$: گزینه (۲)

غ ق $1 \neq 1 \Rightarrow 1 + 2 \neq 1$: گزینه (۱)

غ ق $2 \neq 2 \Rightarrow 2 + 2 \neq 2$: گزینه (۴)

ق ق $2 \neq 2 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \neq 2$: گزینه (۳)

با استفاده از رسم دقیق نمودار دو تابع نیز می توان این سوال را حل کرد.

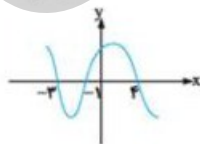
شکل مقابل نمودار $y = f(x-2)$ است. دامنه $\sqrt{x}f(x)$ کدام است؟

(۱) $[-1, -\frac{1}{4}] \cup [0, 6]$

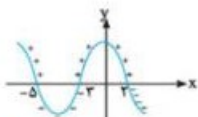
(۲) $[-3, -1] \cup [0, 7]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$



پاسخ برای رسم نمودار $y = f(x)$ باید نمودار $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم:



برای تعیین دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

$x < -5$ منفی $\Rightarrow xf(x) < 0$ ق. ق. $\Rightarrow f(x) > 0$ مثبت

$-5 \leq x \leq -3$ منفی $\Rightarrow xf(x) \geq 0$ ق. ق. $\Rightarrow f(x) \leq 0$ منفی

$-3 < x < -1$ منفی $\Rightarrow xf(x) < 0$ ق. ق. $\Rightarrow f(x) > 0$ مثبت

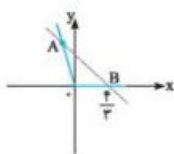
$-1 \leq x \leq 2$ مثبت $\Rightarrow xf(x) \geq 0$ ق. ق. $\Rightarrow f(x) > 0$ مثبت

$x > 2$ مثبت $\Rightarrow xf(x) < 0$ ق. ق. $\Rightarrow f(x) < 0$ منفی

بنابراین دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ به صورت $D = [-5, -3] \cup [0, 2]$ می باشد.

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 2 - \frac{x}{3}$ و $y = |x| - x$ کدام است؟

(تقریبی ۹۵)



6 (۴)

$\frac{16}{3} \text{ (۳)}$

4 (۲)

$\frac{8}{3} \text{ (۱)}$

پاسخ ابتدا نمودارهای دو تابع را رسم می کنیم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = 2 - \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x}{3} = 2 - y \Rightarrow x = 6 - 3y$$

سیس برای پیدا کردن ارتفاع مثلث، باید محل برخورد دو تابع $y_1 = 2 - \frac{x}{3}$ و $y_2 = -2x$ را پیدا کنیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 2 - \frac{x}{3} = -2x \Rightarrow \frac{1}{3}x = -2 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow y = 4$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

پس مثلثی با قاعده $\frac{4}{3}$ و ارتفاع ۸ داریم و مساحت آن برابر است با:

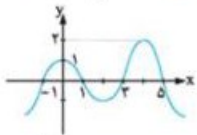
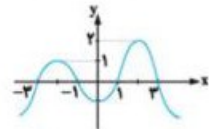
اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، معادله $f(x-2) = 0$ دارای چند ریشه مثبت است؟

1 (۱)

2 (۲)

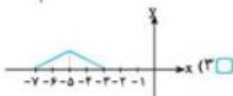
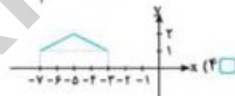
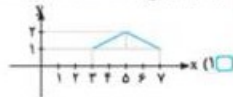
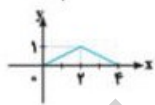
3 (۳)

4 (۴)



پاسخ برای رسم نمودار $f(x-2)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، بنابراین معادله دارای ریشه های مثبت ۱، ۳، ۵ و ۷ می باشد.

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار $y = f(x-3) + 1$ کدام است؟



پاسخ کافی است نمودار را سه واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، می بینیم که نمودار گزینه (۱) صحیح می باشد.

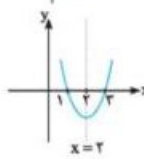
نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. معادله محور تقارن $y = f(x-1)$ کدام است؟

$x = 2 \text{ (۲)}$

$x = 1 \text{ (۱)}$

$x = 4 \text{ (۴)}$

$x = 3 \text{ (۳)}$



پاسخ از روی نمودار واضح است که $x = 1$ محور تقارن تابع f می باشد. حال نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال می دهیم، پس محور تقارن نمودار جدید $x = 2$ می باشد.

« درس اوّل: شمارش
« درس دوم: جایگشت
« درس سوم: ترکیب

فصل ششم:

شمارش بدون شمردن



اصل جمع و تعمیم آن

درس اول: شمارش

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش مختلف انجام داد به طوری که در روش اول m و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، آن‌گاه برای انجام آن کار $m+n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش مختلف انجام داد به طوری که در روش اول n_1 انتخاب، در روش دوم n_2 انتخاب، ... و در روش k ام n_k انتخاب وجود داشته باشد، آن‌گاه برای انجام این کار $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ روش (انتخاب) وجود دارد.
به عنوان مثال اگر برای پوشاندن سطح یک میز بتوان از سه روش پارچه (در ۵ رنگ)، پلاستیک (در ۷ طرح) یا نوعی پلیمر ضد باکتری (در ۳ رنگ مختلف) استفاده کرد، آن‌گاه برای پوشاندن سطح این میز، $5 + 7 + 3 = 15$ روش مختلف وجود دارد.

شخصی ۴ شلوار چین مختلف و ۵ شلوار پارچه‌ای متمایز دارد. به چند طریق می‌تواند یکی از شلوارهایش را بپوشد؟

۴۵ (۴)

۵۴ (۳)

۲۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: این شخص برای پوشیدن شلوار دو روش مختلف دارد، یا یکی از شلوارهای چین را بپوشد (۴ حالت) یا یکی از شلوارهای پارچه‌ای اش را بپوشد (۵ حالت)، پس طبق اصل جمع این شخص $4 + 5 = 9$ انتخاب دارد.

اصل ضرب و تعمیم آن

اصل ضرب: اگر انجام کاری دو مرحله داشته باشد به طوری که مرحله اول را به m طریق و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را به n طریق مختلف بتوان انجام داد، آن‌گاه برای انجام کل آن کار، $m \times n$ روش مختلف وجود دارد.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری، k مرحله داشته باشد به طوری که مرحله اول را بتوان به n_1 روش مختلف، مرحله دوم را بتوان به n_2 روش مختلف، ... و مرحله k ام را بتوان به n_k روش مختلف انجام داد، آن‌گاه کل کار به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ روش، قابل انجام است.
به عنوان مثال اگر پرسی ۵ پیراهن مختلف، ۳ شلوار متمایز و ۲ جفت جوراب مختلف داشته باشد، آن‌گاه می‌تواند به $5 \times 3 \times 2 = 30$ روش مختلف لباس بپوشد.

مثال آموزشی

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری که:

(الف) تکرار ارقام مجاز باشد. (ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ: (الف) برای یک عدد سه رقمی، سه جایگاه (یکان، دهگان و صدگان) در نظر می‌گیریم و برای هر جایگاه، تعداد انتخاب‌ها را به دست می‌آوریم و در هم ضرب می‌کنیم. برای جایگاه یکان، شش انتخاب داریم. چون تکرار ارقام مجاز است، برای هر یک از جایگاه‌های دهگان و صدگان هم شش انتخاب داریم. پس: $6 \times 6 \times 6 = 216$ = تعداد کل اعداد سه رقمی با تکرار ارقام

(ب) جایگاه صدگان را به ۶ طریق مختلف می‌توان پر کرد اما چون تکرار ارقام مجاز نیست، برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب داریم. زیرا یکی از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ را در جایگاه صدگان استفاده کرده‌ایم و فقط ۵ انتخاب باقی مانده است. به همین ترتیب واضح است که برای جایگاه یکان، فقط ۴ انتخاب داریم. پس: $4 \times 5 \times 6 = 120$ = تعداد کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام

در یک شهرک، ۳ بلوار اصلی و در هر بلوار ۷ خیابان و در هر خیابان ۸ کوچه و در هر کوچه ۵ تیر برق وجود دارد. در این شهرک حداکثر چند تیر برق وجود دارد؟

۸۴۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

۱۳۰ (۲)

۲۳ (۱)

پاسخ: با توجه به تعمیم اصل ضرب داریم:

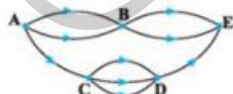
در شکل مقابل چند مسیر برای رفتن از شهر A به شهر E وجود دارد؟ (تمام مسیرها یک طرفه‌اند).

۹ (۲)

۷ (۱)

۳۶ (۴)

۱۲ (۳)



پاسخ: برای رفتن از شهر A به شهر E از طریق شهر B، $2 \times 2 = 4$ مسیر مختلف وجود دارد. ولی اگر از طریق شهرهای C و D بخواهیم به E برویم، تعداد مسیرها برابر با $1 \times 3 \times 1 = 3$ می‌باشد. پس طبق اصل جمع، برای رفتن از شهر A به شهر E، $4 + 3 = 7$ مسیر وجود دارد.

چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که با رقم زوج شروع می شود و به رقم فرد ختم می شود؟

۱۸۲۰ (۴)

۱۴۰۰ (۳)

۱۶۲۰ (۲)

۱۱۲۰ (۱)

پاسخ: می دانیم ارقامی که برای نوشتن هر عدد به کار می رود از مجموعه $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ انتخاب می شوند. چون می خواهیم عدد چهار رقمی با رقم زوج شروع شود و سمت چپ نمی تواند صفر باشد، پس برای پر کردن جایگاه سمت چپ ۴ انتخاب وجود دارد (از بین ارقام $\{2, 4, 6, 8\}$) و چون می خواهیم به رقم فرد ختم شود، پس برای جایگاه سمت راست ۵ انتخاب وجود دارد و چون می خواهیم ارقام متمایز باشند، در نتیجه برای دو جایگاه وسط به ترتیب ۸ و ۷ انتخاب وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم: $4 \times 8 \times 7 \times 5 = 1120$ تعداد کل اعداد مورد نظر

با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد سه رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۰ (۲)

۴۸ (۱)

یکان دهگان صدگان

پاسخ: ارقام داده شده را باید در سه جایگاه قرار دهیم:

می دانیم عددی فرد است که یکانش فرد باشد. در نتیجه برای جایگاه یکان، ۳ انتخاب وجود دارد (یکی از ارقام ۳، ۱ یا ۵ را می توان نوشت). چون صفر را نمی توان در جایگاه صدگان قرار داد و تکرار ارقام مجاز نیست، پس برای جایگاه صدگان، ۴ انتخاب وجود دارد. همچنین برای جایگاه دهگان نیز ۴ انتخاب وجود دارد چون از رقم داده شده دو تا را برای جایگاه های یکان و صدگان استفاده کرده ایم، پس طبق اصل ضرب داریم: $4 \times 4 \times 3 = 48$ تعداد کل اعداد خواسته شده

با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد چهار رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۶۴۸ (۴)

۱۴۴ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۵۶ (۱)

پاسخ: چون تعداد اعداد زوج را می خواهیم و رقم صفر در بین ارقام داده شده است، پس مسئله را در دو حالت بررسی می کنیم:

حالت اول: اگر یکان صفر باشد، در نتیجه برای پر کردن جایگاه یکان یک انتخاب بیشتر نداریم و چون تکرار ارقام مجاز نیست و صفر را در جایگاه یکان نوشته ایم، پس برای جایگاه های دهگان، صدگان و هزارگان انتخاب های روبه رو وجود دارد.



$5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

پس تعداد اعداد در این حالت برابر است با:

حالت دوم: اگر یکان رقم زوج و غیر صفر باشد، برای پر کردن آن ۲ انتخاب داریم (۲ یا ۴). از طرفی چون هزارگان نمی تواند صفر باشد و تکرار هم مجاز نیست، پس برای نوشتن هزارگان ۴ انتخاب داریم. واضح است که برای جایگاه های صدگان و دهگان به ترتیب ۳ و ۲ انتخاب داریم، پس:



$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ تعداد اعداد در این حالت

$60 + 96 = 156$

در نتیجه تعداد کل اعداد چهار رقمی منطبق با شرایط مسئله، طبق اصل جمع برابر است با:

با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ و ۷ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام و مضرب ۵ می توان نوشت؟

۲۰ (۴)

۲۱ (۳)

۲۲ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: می دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکانش صفر یا ۵ باشد و چون رقم صفر بین ارقام داده شده است، پس دو حالت در نظر می گیریم.

حالت اول: رقم یکان صفر باشد، پس برای جایگاه یکان یک انتخاب داریم و چون تکرار مجاز نیست، پس برای جایگاه صدگان ۴ انتخاب و برای جایگاه دهگان ۳ انتخاب داریم. در نتیجه:

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد، پس برای جایگاه یکان یک انتخاب داریم و چون تکرار مجاز نیست و صدگان هم نمی تواند صفر باشد، پس برای جایگاه صدگان ۳ انتخاب داریم و در نتیجه برای جایگاه دهگان هم ۳ انتخاب باقی می ماند. در نتیجه:

$12 + 9 = 21$

بنابراین تعداد کل اعداد منطبق با شرایط مسئله طبق اصل جمع برابر است با:

نکته: مجاز بودن تکرار ارقام به معنی حتمی بودن تکرار ارقام نیست. در واقع اگر تکرار ارقام مجاز باشد، آن گاه هم اعداد با ارقام تکراری و هم اعداد با ارقام غیر تکراری داریم.

با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که رقم تکراری وجود داشته باشد؟

- ۴۸ (۱) ☐ ۵۲ (۲) ☐ ۶۶ (۳) ☐ ۱۰۰ (۴) ☐

پاسخ: ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی را که با ارقام داده شده می توان تولید کرد را در حالتی که تکرار مجاز است می یابیم، سپس تعداد اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام را یافته و از آن کم می کنیم.

$$100 = 4 \times 4 \times 4 = \text{تعداد کل اعداد سه رقمی (تکرار مجاز است)} \\ 52 = 48 - 100 = \text{تعداد اعداد سه رقمی با داشتن ارقام تکراری} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد سه رقمی (تکرار مجاز نباشد)} = 48 - 4 = 44$$

چند عدد سه رقمی شامل رقم ۲ وجود دارد؟

- ۶۴۸ (۱) ☐ ۲۵۲ (۲) ☐ ۴۸۶ (۳) ☐ ۹۰۰ (۴) ☐

$$252 = 648 - 900 = \text{تعداد اعداد سه رقمی شامل رقم ۲} \Rightarrow 900 = 9 \times 10 \times 10 = \text{تعداد کل اعداد سه رقمی} \\ 648 = 9 \times 8 \times 9 = \text{تعداد اعداد سه رقمی فاقد رقم ۲}$$

چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

- ۷۲ (۱) ☐ ۸۴ (۲) ☐ ۹۶ (۳) ☐ ۱۰۸ (۴) ☐

پاسخ: ارقام فرد عبارتند از ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹. چون می خواهیم عدد نوشته شده بزرگتر از ۳۰۰۰ باشد، پس اولین رقم سمت چپ نمی تواند ۱ باشد، در نتیجه برای نوشتن رقم هزارگان فقط ۴ انتخاب وجود دارد و چون می خواهیم که ارقام متمایز باشند، بنابراین:

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۳۰ با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

- ۳۶ (۱) ☐ ۴۸ (۲) ☐ ۴۲ (۳) ☐ ۳۲ (۴) ☐

پاسخ: دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: رقم صدگان ۱ یا ۲ باشد، پس رقم دهگان هر کدام از ارقام فوق می تواند باشد به جز رقمی که در صدگان نوشته ایم. در نتیجه:

$$36 = 3 \times 4 \times 3 = \text{تعداد اعداد در این حالت}$$

حالت دوم: رقم صدگان ۴ باشد، در نتیجه رقم دهگان نمی تواند ارقام ۴، ۳ باشد (چون می خواهیم عدد مورد نظر کوچکتر از ۴۳۰ باشد). در واقع رقم دهگان باید از بین اعداد ۱ یا ۲ انتخاب شود ولی برای رقم یکان تنها شرطی که داریم این است که با ارقام دهگان و صدگان متمایز باشد که برای آن ۳ انتخاب داریم. پس:

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = \text{تعداد اعداد در این حالت}$$

بنابراین تعداد کل اعداد سه رقمی مورد نظر برابر با $36 + 6 = 42$ می باشد.

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۹ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۵۰ با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

- ۳۶ (۱) ☐ ۴۸ (۲) ☐ ۴۲ (۳) ☐ ۳۲ (۴) ☐

پاسخ: دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: رقم صدگان ۹ یا ۵ باشد، در نتیجه رقم دهگان می تواند هر کدام از ارقام داده شده به جز رقمی که در صدگان قرار می دهیم باشد (۵ حالت) و رقم یکان هم می تواند به ۴ طریق انتخاب شود. پس:

$$40 = 4 \times 5 \times 2 = \text{تعداد اعداد سه رقمی در این حالت}$$

حالت دوم: اگر رقم صدگان ۵ باشد، آن گاه رقم دهگان فقط می تواند از بین ارقام ۹ یا ۷ انتخاب شود (دو حالت) (چرا؟ ولی رقم یکان همین که با ارقام دهگان و صدگان یکی نباشد کافی است، پس برای رقم یکان ۴ انتخاب داریم، در نتیجه:

$$8 = 4 \times 2 \times 1 = \text{تعداد اعداد سه رقمی در این حالت}$$

بنابراین تعداد کل اعداد سه رقمی مورد نظر برابر با $40 + 8 = 48$ می باشد.

در کارخانه ای ۴ مدل خودرو هر کدام در ۱۲ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۴ نوع سقف (کروک، سان روف و معمولی) تولید می شود. چند نوع مختلف از این خودروها دارای سقف معمولی نیستند؟

- ۱۴۴ (۱) ☐ ۲۸۸ (۲) ☐ ۳۵۶ (۳) ☐ ۴۳۲ (۴) ☐

پاسخ: اگر سقف معمولی نباشد، آن گاه کروک یا سان روف است، پس برای انتخاب سقف ۲ روش وجود دارد، در نتیجه تعداد کل حالت ها عبارتند از:

$$288 = 2 \times 3 \times 4 \times 12$$

سقف حجم موتور رنگ مدل

چند پلاک خودرو به صورت ایران **** ب ** که هر ۰ نمایش یک رقم غیر صفر است، وجود دارد به طوری که با رقم فرد از سمت چپ شروع و به رقم زوج ختم شود؟

- ۱۴۸۰ (۱) ۱۴۸۰ (۲) ۱۴۸۰ (۳) ۱۴۸۰ (۴)

پاسخ: ارقام غیر صفر عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ که ۴ تای آن‌ها زوج و ۵ تای دیگر فرد هستند. اولین ستاره سمت چپ را به ۵ طریق و آخرین ستاره سمت راست را به ۴ طریق می‌توان به ترتیب توسط اعداد فرد و زوج، پُر کرد و هر کدام از سه ستاره دیگر را به ۹ طریق می‌توان پُر کرد، پس: $9 \times 4 \times 5 = 180$ = تعداد کل پلاک‌های خواسته شده

۷ میله در یک ردیف قرار دارند. می‌خواهیم آن‌ها را با ۴ رنگ مختلف، طوری رنگ کنیم که میله‌های مجاور هم‌رنگ نباشند. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

- ۳۷ (۱) ۳۷ (۲) ۳۷ (۳) ۳۷ (۴)

پاسخ: میله‌ها را به ترتیب از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای رنگ کردن میله شماره یک، ۴ انتخاب داریم و برای رنگ کردن میله شماره دو، ۳ انتخاب رنگ داریم. زیرا رنگ میله دوم نباید شبیه رنگ میله اول باشد. برای رنگ کردن میله سوم هم ۳ انتخاب رنگ داریم، زیرا میله سوم نمی‌تواند هم‌رنگ میله دوم باشد ولی می‌تواند با میله شماره یک هم‌رنگ باشد. به همین ترتیب واضح است که برای رنگ کردن میله‌های بعدی هم برای هر میله ۳ انتخاب رنگ داریم، پس: $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 4 \times 3^6$ = تعداد کل حالت‌ها

یک آزمون تستی شامل ۱۰ تست ۴ گزینه‌ای است. اگر شخصی بخواهد به طور تصادفی به سؤالات پاسخ دهد و بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

- ۴۱۰ (۱) ۴۱۰ (۲) ۴۱۰ (۳) ۴۱۰ (۴)

پاسخ: برای پاسخ‌گویی به هر تست، پنج انتخاب وجود دارد زیرا ممکن است یکی از ۴ گزینه (۱)، (۲)، (۳)، (۴) انتخاب شود یا اصلاً به تست پاسخ داده نشود، پس تعداد کل روش‌های پاسخ‌گویی برابر است با: $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10}$

یک آزمون تستی شامل ۱۰ تست ۴ گزینه‌ای است. اگر شخصی بخواهد به طور تصادفی به سؤالات پاسخ دهد به طوری که پاسخ هر دو تست متوالی، یکسان نباشد و مجبور باشد که به همه تست‌ها پاسخ دهد این کار را به چند روش مختلف می‌تواند انجام دهد؟

- ۴۱۰ (۱) ۴۱۰ (۲) ۴۱۰ (۳) ۴۱۰ (۴)

پاسخ: برای پاسخ‌گویی به سؤال اول ۴ انتخاب وجود دارد ولی برای پاسخ‌گویی به سؤال دوم ۳ انتخاب وجود دارد، زیرا دو سؤال متوالی، نباید گزینه‌های یکسان داشته باشند (به عنوان مثال اگر شخص در سؤال اول، گزینه (۱) را انتخاب کرده باشد، برای سؤال دوم فقط می‌تواند از بین گزینه‌های (۲)، (۳)، (۴) یکی را انتخاب کند، پس ۳ انتخاب دارد). همین‌طور برای پاسخ‌گویی به سؤال‌های بعدی هم ۳ انتخاب وجود دارد، در نتیجه:

$$4 \times 3^9 = 4 \times 3^9$$

عدد ۱۸۰۰ چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

- ۳۶ (۱) ۳۶ (۲) ۳۶ (۳) ۳۶ (۴)

پاسخ: ابتدا ۱۸۰۰ را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم $1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$. هر مقسوم‌علیه طبیعی ۱۸۰۰ از ضرب تعدادی ۲، تعدادی ۳ و تعدادی ۵ تشکیل شده است. در واقع مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۸۰۰ به شکل $2^x \times 3^y \times 5^z$ هستند که در آن x می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد و y و z هر کدام می‌توانند ۰ یا ۱ یا ۲ باشند، پس تعداد اعداد به صورت $2^x \times 3^y \times 5^z$ با شرایط فوق برابر است با:

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

تعداد انتخاب‌ها برای x تعداد انتخاب‌ها برای y تعداد انتخاب‌ها برای z

از مجموعه n عضو A به مجموعه m عضو B ، m^B تابع می‌توان تعریف کرد.

از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه $B = \{4, 5, 6, 7\}$ چند تابع، می‌توان نوشت؟

- ۱۲ (۱) ۱۲ (۲) ۱۲ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ: هر تابع از مجموعه A به مجموعه B به صورت $\{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ می‌باشد که در آن x, y, z می‌توانند ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ باشند، یعنی برای تعیین عددی که جای x می‌توان قرار داد، ۴ انتخاب داریم. هم‌چنین برای تعیین عددی که جای y یا z می‌توان قرار داد، ۴ انتخاب داریم. پس:

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c\}$ چند تابع می‌توان تعریف کرد؟

۱) 4^3 ۲) 3^4 ۳) 4^2 ۴) 3^3

پاسخ: هرتابع از مجموعه A به مجموعه B به صورت $(1, x), (2, y), (3, z), (4, t)$ می‌باشد که در آن هر کدام از حروف x, y, z, t می‌توانند به سه روش انتخاب شوند (یا a یا b یا c باشند)، در نتیجه:

$$B \text{ به } A \text{ تعداد تابع‌ها از } 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c\}$ چند تابع وجود دارد که شامل زوج مرتب $(1, a)$ باشد؟

۱) 9 ۲) 27 ۳) 64 ۴) 8

پاسخ: توابعی که از A به B وجود دارند و شامل زوج مرتب $(1, a)$ هستند به صورت $(1, a), (2, x), (3, y), (4, z)$ می‌باشند که در آن برای هریک از حروف x, y, z می‌توان سه انتخاب از بین a, b, c داشت، پس:

$$B \text{ به } A \text{ تعداد تابع‌های مورد نظر } 3 \times 3 \times 3 = 27$$

میدان: ۱- در عدد یا کلمه سازی، اگر بعضی از خانه‌ها، شرط داشته باشند، از آن خانه‌ها شروع می‌کنیم. مثلاً برای تعیین تعداد اعداد سه رقمی زوج که با ارقام $1, 2, 3, 4, 5$ می‌توان نوشت، ابتدا حالت‌های خانه سمت راست (چایگاه یکان) را می‌نویسیم.
۲- اگر شمارش مستقیم حالت‌ها سخت باشد، تعداد کل حالت‌ها را به دست می‌آوریم و حالت‌هایی که مورد قبول نیستند را از آن‌ها کم می‌کنیم. مثلاً برای تعیین تعداد اعداد چهار رقمی که با ارقام $1, 2, 3, 4, 5$ می‌توان نوشت، به شرطی که رقم تکراری داشته باشند، باید از تعداد کل، حالت‌هایی که تکرار ارقام مجاز نیست را کم کنیم.

فکتوریل و جایگشت

فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه $n!$ (فکتوریل) را به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی از 1 تا n تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120, \quad 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

واضح است که $n! = (n-1)! \times n$ یا $n! = (n+1) \times n!$ ، توجه کنید که طبق قرارداد $0! = 1$ می‌باشد.

جایگشت: به هر کدام از حالت‌های قرار گرفتن n شیء متمایز کنار هم، یک جایگشت از این n شیء می‌گوییم.

به عنوان مثال سه حرف a, b, c را می‌توان به 6 حالت به صورت‌های $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ کنار هم نوشت. به هر کدام از این حالت‌ها یک جایگشت از حروف a, b, c می‌گوییم.

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

اگر $n = 6$ باشد، حاصل $n + 3!$ کدام است؟

۱) 10 ۲) 24 ۳) 720 ۴) 5040

پاسخ: با توجه به تعریف فاکتوریل داریم:

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \Rightarrow (n+1) \times n \times (n-1)! = (n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2)! \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = (n+1) \times n \times (n-1)$$

برای حل این معادله، ابتدا عدد 6 را به صورت حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی $6 = 3 \times 2 \times 1$ می‌نویسیم، پس:

$$(n+1) \times n \times (n-1) = 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow n+1 = 5 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow n+3! = 4+24 = 28$$

دقت کنید که $n+3!$ با $(n+3)!$ فرق دارد.

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «DALIR» کدام است؟

۱) 120 ۲) 240 ۳) 60 ۴) 180

پاسخ: چون حروف کلمه «DALIR» متمایز هستند، پس تعداد جایگشت‌های این پنج حرف برابر است با:

$$5! = 120$$

با حروف کلمه «NAHID» چند کلمه پنج حرفی بدون تکرار حروف، با معنی یا بدون معنی می‌توان نوشت که با حرف N شروع شود؟

۱) 120 ۲) 24 ۳) 24 ۴) 520

پاسخ: اگر N را در ابتدا قرار دهیم، چهار حرف دیگر با $4!$ تعداد جایگشت‌های این چهار حرف برابر است با:

$$4! = 24$$

با ارقام عدد ۱۳۹۶۴ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم ۹ در تمام آن‌ها وسط باشد؟

- ۱۲۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

پاسخ: عدد ۹ را وسط قرار می‌دهیم، داریم:

چهار رقم دیگر متمایز هستند و به ۴! طریق می‌توانند در دو طرف عدد ۹ قرار گیرند، پس تعداد اعداد مطلوب برابر است با:

$$4! = 24$$

سه برادر و دو خواهر به چند طریق می‌توانند روی پنج صندلی که در یک ردیف قرار گرفته‌اند، بنشینند به طوری که برادرها پیش هم و خواهرها پیش هم باشند؟

- ۱۲۰ (۱) ۲۴۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

پاسخ: برادرها را در یک دسته و خواهرها را در دسته دیگر قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های برادرها ۳! و تعداد جایگشت‌های خواهرها ۲! می‌باشد. از طرفی این دو دسته را به ۲! طریق می‌توان جابه‌جا کرد، پس:

$$24 = 3! \times 2! \times 2! = \text{تعداد روش‌های مطلوب} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \text{خواهرها} & \text{برادرها} \\ \hline \end{array}$$

جابه‌جایی دسته‌ها
جابه‌جایی خواهرها

شخصی با ۵ نفر از دوستانش وارد اتاقی می‌شوند. اگر خودش بنشیند، بقیه به چند طریق می‌توانند در کنار او و در یک ردیف بنشینند؟

- ۷۲۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۸۲۵ (۳) ۶۰۰ (۴)

پاسخ: چون برای شخص مورد نظر جای خاصی مشخص نشده است، پس این شش نفر در یک ردیف می‌نشینند، بنابراین تعداد جایگشت‌های این ۶ نفر برابر است با:

$$6! = 720$$

حروف کلمه «LAGRANGE» را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۳۶۰ (۱) ۵۴۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴)

پاسخ: دو حرف A و دو حرف G را کنار هم قرار می‌دهیم. چون A ها یکسان هستند، پس ترتیب قرار گرفتن آن‌ها مهم نیست. هم چنین جابه‌جایی دو حرف G با هم، جایگشت جدیدی ایجاد نمی‌کند.

L A A R N E G G

بنابراین مطابق الگوی فوق، ۶ شیء متمایز داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $6! = 720$ می‌باشد.

ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ و ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی حاصل کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

پاسخ: ارقام فرد را در یک دسته قرار می‌دهیم. چون سه رقم فرد داریم، تعداد جایگشت‌های ارقام فرد ۳! می‌باشد. از طرفی مطابق الگوی زیر، سه شیء متمایز داریم که به ۳! طریق می‌توانند جابه‌جا شوند، پس تعداد کل حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر با $3! \times 3! = 36$ می‌باشد.

۱, ۳, ۵ ۲ ۴

به چند طریق می‌توان ۶ مهره متمایز را درون ۱۰ جعبه قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

- ۶! (۱) ۱۰! (۲) ۱۰! (۳) ۱۰! (۴)

پاسخ: ابتدا جعبه‌ها را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مهره اول را در هر کدام از ۱۰ جعبه می‌توان قرار داد، پس برای مهره اول ۱۰ انتخاب داریم. مهره دوم را در یکی از ۹ جعبه باقی‌مانده می‌توان قرار داد چون فرض بر این است که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد، در نتیجه برای مهره دوم ۹ انتخاب وجود دارد. به همین ترتیب برای مهره سوم ۸ انتخاب و الی‌آخره در نتیجه:

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \text{تعداد روش‌های ممکن}$$

ترتیب

تصریف: تعداد جایگشت‌های ۲ شیء از n شیء متمایز را با $P(n, 2)$ نمایش می‌دهیم و آن را رابطه $P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!}$ به دست می‌آوریم. در واقع $P(n, 2)$ تعداد انتخاب‌های ۲ شیء از n شیء متمایز است به طوری که ترتیب انتخاب‌ها مهم باشد.

به عنوان مثال اگر بخواهیم با ارقام عدد ۱۲۳۴۵، یک عدد سه رقمی بنویسیم، در واقع باید سه رقم از پنج رقم انتخاب کنیم. واضح است که ترتیب انتخاب مهم است زیرا عدد ۱۲۳ با ۲۳۱ متفاوت است، در نتیجه تعداد اعداد سه رقمی که بدون تکرار ارقام با رقم‌های عدد ۱۲۳۴۵ می‌توان نوشت برابر است با:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

با حروف کلمه «WORKING» چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

- ۱) ۸۴۰ ☐ ۲) ۱۴۰ ☐ ۳) ۴۲۰ ☐ ۴) ۲۸۰ ☐

پاسخ: باید ۴ حرف از ۷ حرف داده شده را انتخاب کنیم که می‌دانیم ترتیب انتخاب ما مهم است، پس:

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

اگر تعداد تبدیل‌های ۲ شیء از ۵ شیء متمایز، ۲ برابر تعداد تبدیل‌های (۲-۱) شیء از این ۵ شیء باشد، ۲ کدام است؟

- ۱) ۳ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۶ ☐

$$P(5, r) = r \times P(5, r-1) \Rightarrow \frac{5!}{(5-r)!} = r \times \frac{5!}{(5-(r-1))!} \Rightarrow \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{r \times 5!}{(5-r+1)!} \Rightarrow \frac{1}{(5-r)!} = \frac{r}{(6-r)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(5-r)!} = \frac{r}{(6-r) \times (5-r)!} \Rightarrow 1 = \frac{r}{6-r} \Rightarrow r = 6-r \Rightarrow 2r = 6 \Rightarrow r = 3$$

یک لیگ فوتبال با ۱۰ تیم را در نظر بگیرید. در پایان این لیگ، تیم‌های اول تا سوم به چند طریق مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

- ۱) ۳! ☐ ۲) ۴! ☐ ۳) ۵! ☐ ۴) ۶! ☐

پاسخ: در این تست با انتخاب ۳ تیم از ۱۰ تیم مواجه هستیم که در آن ترتیب انتخاب مهم است، پس:

$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720 = 6!$$

برای انتخاب تیم‌های اول تا سوم مسابقات رباتیک، ۲۱۰ امکان وجود دارد. در این مسابقات چند تیم شرکت کرده‌اند؟

- ۱) ۴ ☐ ۲) ۵ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) ۷ ☐

پاسخ: فرض کنیم در این مسابقات n تیم شرکت کرده‌اند، پس برای انتخاب سه تیم اول، P(n, 3) حالت وجود دارد. در نتیجه:

$$P(n, 3) = 210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 210$$

کافی است ۲۱۰ را به صورت حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بنویسیم. می‌دانیم $7 \times 6 \times 5 = 210$ ، پس: $n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$

در چند جایگشت از حروف کلمه «درستنامه»، کلمه «درس» سه حرف اول می‌باشد؟

- ۱) ۶ ☐ ۲) ۲۴ ☐ ۳) ۳۰ ☐ ۴) ۱۲۰ ☐

پاسخ: کلمه «درس» را به عنوان سه حرف اول می‌نویسیم و هیچ جایگاه‌جایی بین حروف آن نمی‌توانیم انجام دهیم ولی ۴ حرف بعدی را به ۴! طریق

می‌توانیم جایگاه‌جا کنیم، پس: تعداد جایگشت‌های مطلوب $1 \times 4! = 24$

در چند جایگشت از حروف کلمه «درستنامه»، عبارت «درس» دیده می‌شود؟

- ۱) ۵! ☐ ۲) ۳! ☐ ۳) ۵! ☐ ۴) ۷! ☐

پاسخ: عبارت «درس» و چهار حرف «ن، ا، م، ه» پنج شیء متمایز هستند که به ۵! طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. دقت کنید که در این تست، حروف

کلمه «درس» را نمی‌توان جایگاه‌جا کرد.

با حروف کلمه «درستنامه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه هفت حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «درس» کنار هم باشند؟

- ۱) ۵! ☐ ۲) ۳! ☐ ۳) ۵! ☐ ۴) ۷! ☐

پاسخ: حروف کلمه «درس» در کنار هم به ۳! طریق می‌توانند جایگاه‌جا شوند. در ضمن کلمه «درس» و چهار حرف «ن، ا، م، ه» را به عنوان پنج شیء متمایز

می‌توان به ۵! طریق جایگاه‌جا کرد، پس: $3! \times 5! = 360$ تعداد جایگشت‌های مطلوب

دقت کنید که در این تست لازم نیست که کلمه «درس» دیده شود بلکه فقط می‌خواهیم حروف آن کنار هم باشند، پس حروف آن را می‌توانیم جایگاه‌جا کنیم.

با حروف کلمه «درستنامه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه هفت حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «درس» کنار هم و در وسط قرار گیرند؟

- ۱) ۵! ☐ ۲) ۳! ☐ ۳) ۴! ☐ ۴) ۴! ☐

پاسخ: حروف کلمه «درس» را به ۳! طریق می‌توان جایگاه‌جا کرد. از طرفی چون می‌خواهیم حروف کلمه «درس» وسط باشد، حالتی به صورت

داریم:

	درس			
--	-----	--	--	--

 اولین مربع را به ۴ حالت، دومین مربع را به ۳ حالت و دو مربع آخر را به ترتیب به ۲ و ۱ روش می‌توان توسط ۴ حرف

باقی‌مانده پر کرد، پس:

$$4 \times 3! = 24 \text{ تعداد کل جایگشت‌های خواسته شده}$$



با حروف کلمه «درسانمه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه هفت حرفی می توان نوشت که در آن ها کلمه «درس» در وسط قرار گیرد؟

۵! (۱) ۳! × ۵! (۲) ۳! × ۴! (۳) ۴! (۴)

پاسخ: کلمه «درس» را وسط قرار می دهیم. واضح است که حروف کلمه «درس» را نمی توانیم جابه جا کنیم ولی ۴ حرف باقی مانده را به ۴! طریق می توان جابه جا کرد.

با حروف کلمه «درسانمه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

۷! (۱) ۶! (۲) ۵! (۳) ۴! (۴)

پاسخ: باید ۶ حرف از ۷ حرف انتخاب کنیم و می دانیم که ترتیب انتخاب ها مهم است، پس:

$$P(7, 6) = \frac{7!}{(7-6)!} = \frac{7!}{1!} = 7!$$

با حروف کلمه «درسانمه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه شش حرفی می توان نوشت که به کلمه «نامه» ختم شوند؟

۶! (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۷۲ (۴)

پاسخ: چون کلمه شش حرفی می خواهیم بنویسیم که به کلمه «نامه» ختم شود، پس فقط ۲ حرف ابتدایی را باید از بین ۳ حرف باقی مانده یعنی از بین حروف «د»، «ر» و «س» انتخاب کنیم. حرف اول را به ۳ حالت و حرف دوم را به ۲ حالت می توان انتخاب کرد، پس: $3 \times 2 = 6$ تعداد کلمات شش حرفی خواسته شده

با حروف کلمه «درسانمه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت که در آن ها حروف کلمه «نامه» کنار هم آمده باشند؟

۵! (۱) ۲ × ۴! (۲) ۳ × ۴! (۳) ۴ × ۴! (۴)

پاسخ: برای نوشتن کلمه پنج حرفی وقتی که قرار است شامل حروف کلمه «نامه» باشد، ابتدا باید یک حرف از سه حرف «د»، «ر» یا «س» انتخاب کرد که این کار به ۳ حالت امکان پذیر است، از طرفی حروف کلمه «نامه» به ۴! حالت می توانند جابه جا شوند. هم چنین حروف کلمه «نامه» و یک حرف انتخاب شده را به ۲! حالت می توان جابه جا کرد، پس طبق اصل ضرب، این عمل به $4! \times 3 \times 2! = 4! \times 3 \times 2!$ روش مختلف امکان پذیر است.

با حروف کلمه «درسانمه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت که در آن ها کلمه «نامه» دیده شود؟

۱۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: از ۵ حرف خواسته شده ۴ حرف آن مشخص است. ابتدا یک حرف از بین سه حرف باقی مانده انتخاب می کنیم، این عمل به ۳ روش مختلف قابل انجام است. از طرفی کلمه «نامه» و یک حرف انتخاب شده را به عنوان دو شیء متمایز می توان به ۲! روش جابه جا کرد، پس تعداد کل حالت ها برابر است با: $3 \times 2! = 6$

(دقت کنید که حروف کلمه «نامه» را نمی توان جابه جا کرد، چون می خواهیم کلمه «نامه» دیده شود.)

نکته جایگشت های یک در میان:

در دو حالت زیر، اعضای دو مجموعه A و B را می توان یک در میان در یک ردیف کنار هم قرار داد:

حالت اول: اگر هر دو مجموعه دارای n عضو باشند (تعداد اعضای دو مجموعه با هم برابر باشد)، آن گاه در ابتدای ردیف هم می توانیم با یکی از اعضای A شروع کنیم و هم می توانیم با یکی از اعضای B شروع کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد جایگشت های B شروع با A} + \text{تعداد جایگشت های A شروع با B} = 2 \times n \times n!$$

حالت دوم: اگر یکی از مجموعه ها یک عضو بیشتر از دیگری داشته باشد، مثلاً A دارای n عضو و B دارای (n-1) عضو باشد. در نتیجه باید با یکی از اعضای A شروع کنیم، پس در این حالت:

$$n! \times (n-1)!$$

سه تهرانی و سه شیرازی به چند طریق می توانند در یک صف و یک در میان بایستند؟

۷۲ (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۸۸ (۳) ۷۲۰ (۴)

پاسخ: چون تعداد شیرازی ها و تهرانی ها با هم مساوی است، پس نفر اول صف می تواند تهرانی (T) یا شیرازی (S) باشد.

$$TSTSTS \Rightarrow \text{تعداد} = 3! \times 3! = 36 \quad \text{نفر اول تهرانی باشد}$$

$$TSTSTS \Rightarrow \text{تعداد} = 3! \times 3! = 36 \quad \text{نفر اول شیرازی باشد}$$

چهار کتاب ریاضی غیر یکسان و سه کتاب فیزیک غیر یکسان را به چند طریق می توان یک در میان در یک قفسه چید؟

۲! × ۴! × ۳! (۱) ۷! (۲) ۴! × ۳! (۳) ۴! × ۳! (۴)

پاسخ: چون تعداد کتاب های ریاضی یکی بیشتر از تعداد کتاب های فیزیک است، پس باید با یکی از کتاب های ریاضی شروع کنیم، در نتیجه:

$$4! \times 3! = 72$$

چهار کتاب ریاضی مختلف و سه کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید به طوری که هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم نباشند؟

- ۱۴۴ (۱) ☐ ۲۸۸ (۲) ☐ ۵۷۶ (۳) ☐ ۱۴۴۰ (۴) ☐

پاسخ: چهار کتاب ریاضی مختلف را به ۴! روش مختلف می‌توان در یک ردیف چید، بین این ۴ کتاب و دو طرف آن‌ها، ۵ جای خالی وجود دارد که کتاب‌های فیزیک را می‌توان در این جاهای خالی قرار داد. برای قرار دادن اولین کتاب فیزیک، ۵ انتخاب از بین ۵ جای خالی وجود دارد. پس از قرار دادن آن، برای کتاب فیزیک دوم، ۴ انتخاب و برای کتاب فیزیک سوم، ۳ انتخاب وجود دارد، پس تعداد کل روش‌ها برابر است با: $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1440$
دقت کنید که در این تست، کتاب‌های ریاضی ممکن است کنار هم باشند که این با یک در میان قرار گرفتن کتاب‌ها فرق دارد. هم‌چنین در شکل زیر می‌توانید وجود ۵ جای خالی در بین ۴ کتاب ریاضی و دو طرف آن‌ها را ببینید.

☐ ریاضی ☐ ریاضی ☐ ریاضی ☐ ریاضی ☐ ریاضی

با ارقام عدد ۸۵۴۳۹۶، چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که هیچ دو رقم فردی کنار هم نباشند؟

- ۳۶ (۱) ☐ ۷۲ (۲) ☐ ۱۴۴ (۳) ☐ ۲۸۸ (۴) ☐

پاسخ: سه رقم زوج در میان ارقام عدد ۸۵۴۳۹۶ وجود دارد. این سه رقم به $3! = 6$ طریق می‌توانند جابه‌جا شوند. در میان این سه رقم و هم‌چنین در دو طرف ابتدا و انتهای آن‌ها، ۴ جای خالی وجود دارد.

اولین رقم فرد می‌تواند در یکی از ۴ خانه خالی قرار گیرد، پس برای اولین رقم فرد ۴ انتخاب وجود دارد. پس از آن، برای دومین رقم فرد، ۳ انتخاب و برای آخرین رقم فرد ۲ انتخاب (خانه خالی) وجود دارد، پس:

با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۳۳۳، چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت که رقم‌های ۳ یک در میان قرار گیرند؟

- ۹ (۱) ☐ ۱۲ (۲) ☐ ۱۸ (۳) ☐ ۲۴ (۴) ☐

پاسخ: چون تعداد ارقام ۳ با تعداد ارقام دیگر مساوی است، پس عدد شش رقمی خواسته شده می‌تواند ۳ و یا با هر کدام از اعداد غیر از ۳ شروع شود، از طرفی با جابه‌جایی ۳‌ها، جایگشت جدیدی ایجاد نمی‌شود، پس:

$12 \times 3! = 12 \times 6 = 72$
تعداد جایگشت‌های ۳ با شروع شود یا نشود.

تعداد جایگشت‌های ۵، ۶ و ۷

حروف کلمه «ASSIST» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم آن، کنار هم قرار داد به طوری که Sها یک در میان باشند؟

- ۸ (۱) ☐ ۹ (۲) ☐ ۱۰ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

پاسخ: چون تعداد Sها با تعداد حروف دیگر مساوی است، پس برای یک در میان نوشتن حروف S، اولین حرف می‌تواند S یا حرفی غیر از S باشد. از طرفی جابه‌جایی Sها با هم حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند، پس:

$12 \times 2 \times 3! = 12 \times 2 \times 6 = 144$
تعداد کل کلمات خواسته شده جابه‌جایی Sها با شروع شود یا نشود.

جابه‌جایی حروف T و I, A

سه کتاب ریاضی مختلف و چهار کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان در یک قفسه قرار داد به طوری که کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

- ۱۸۰ (۱) ☐ ۳۶۰ (۲) ☐ ۵۴۰ (۳) ☐ ۷۲۰ (۴) ☐

پاسخ: کتاب‌های ریاضی را در یک بسته قرار می‌دهیم، پس:

$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}$

$3! \times 5! = 6 \times 120 = 720$
تعداد جایگشت‌ها

تعداد جایگشت‌های دسته جابه‌جایی کتاب‌های ریاضی

در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند روش ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

- ۲۰ (۱) ☐ ۲۴ (۲) ☐ ۳۶ (۳) ☐ ۴۰ (۴) ☐

پاسخ: (روش اول) حالت‌های کلی را به سه شکل $a \square b \square \square$ ، $a \square \square b \square$ و $\square a \square \square b$ می‌توان تقسیم کرد که در آن، $\square$ ها جایگاه افراد غیر از a و b هستند. در ضمن در هر حالت فوق، جای a و b را می‌توان عوض کرد. دقت کنید که در هر یک از حالت‌های فوق، اولین مربع را به ۳ روش، دومین مربع را به ۲ روش و سوم را به ۱ روش می‌توان توسط سه نفر تر کرد، پس:

$3 \times 2 \times 3! = 36$
تعداد کل جایگشت‌ها

جابه‌جایی سه نفر دیگر
تعداد حالت‌ها
جابه‌جایی a و b

روش دوم: چون قرار است بین دو فرد a و b ، یک نفر سخنرانی کند، بنابراین این افراد (یعنی a و b و شخص بین آن‌ها) را یکی می‌گیریم. واضح است که شخص بین a و b را به ۳ روش مختلف می‌توان انتخاب کرد، پس:

$$b, a, \text{نفر} \Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = 2! \times 3 \times 2! = 24$$

تعداد جایگشت‌های ۳ دسته
↓
جابه‌جایی a و b
روش انتخاب یک نفر بین a و b

جایگشت‌های دوری

نکته: n نفر به $(n-1)!$ حالت مختلف می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند.

مثال آموزشی

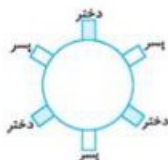
شش نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند؟

$$6! = 720 = 5! \times 6$$

پاسخ: با توجه به نکته فوق، تعداد روش‌ها برابر است با:

۵۲ سه پسر و سه دختر به چند طریق می‌توانند یک در میان دور یک میز بنشینند؟

$$120 \quad (1) \quad 36 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

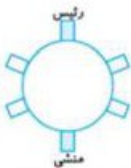


پاسخ: ابتدا دختری را دور میز می‌نشانیم. این کار به $2! = 2$ (۳-۱) روش امکان پذیر است. حال بین هر دوتایی از آن‌ها، یک صندلی خالی قرار می‌دهیم. اولین پسر در یکی از سه صندلی خالی می‌تواند بنشیند، در نتیجه ۳ انتخاب دارد. پسر دوم ۲ انتخاب و پسر آخر ۱ انتخاب دارد، پس پسرها به $3 \times 2 \times 1 = 6$ حالت می‌توانند بین دخترها بنشینند، در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$2! \times 6 = 12$$

رئیس و منشی و ۴ کارمند دور یک میز گرد می‌نشینند. به چند طریق مختلف، منشی مقابل رئیس قرار می‌گیرد؟

$$24 \quad (1) \quad 120 \quad (2) \quad 720 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$



پاسخ: فقط به یک طریق، رئیس و منشی مقابل هم می‌توانند بنشینند. جای آن‌ها را ثابت می‌کنیم. ۴ کارمند دیگر به $4! = 24$ طریق مختلف می‌توانند در ۴ جایگاه باقی‌مانده قرار گیرند.

۵۴ سه پدر، سه مادر و سه کودک به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که پدرها پیش هم، مادرها پیش هم و کودکان نیز پیش هم باشند؟

$$144 \quad (1) \quad 216 \quad (2) \quad 432 \quad (3) \quad 1296 \quad (4)$$

پاسخ: پدرها را گروه ۱، مادرها را گروه ۲ و کودکان را گروه ۳ در نظر بگیرید. هر کدام از گروه‌ها دارای ۳! جایه‌جایی در خود هستند. اما این سه گروه به عنوان سه شیء متمایز به $(3-1)!$ روش می‌توانند دور یک میز گرد قرار گیرند، پس:

$$3! \times 3! \times 3! \times 2! = 6 \times 6 \times 6 \times 2 = 432 = \text{تعداد کل روش‌ها}$$

جایگشت با تکرار

اگر در بین n شیء، r_1 شیء از نوع اول و یکسان، r_2 شیء از نوع دوم، و ... و r_k شیء از نوع k ام باشد، آن‌گاه تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!}$$

به عنوان مثال، تعداد اعداد هفت رقمی که با ارقام عدد ۱۱۱۱۲۳۳ می‌توان نوشت، برابر است با:

۵۵ چند عدد هفت رقمی با ارقام عدد ۳۳۴۴۴۵۵ می‌توان نوشت؟

$$210 \quad (4) \quad 2010 \quad (3) \quad 5040 \quad (2) \quad 540 \quad (1)$$

پاسخ: چون ارقام مشابه داریم، پس با استفاده از رابطه مربوط به جایگشت با تکرار داریم:

$$\text{تعداد اعداد هفت رقمی} = \frac{7!}{3! \times 3! \times 2!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

چند عدد پنج رقمی با ارقام عدد ۲۲۳۰۰ می توان نوشت؟

۲۴ (۱)

۱۸ (۲)

۱۲ (۳)

۹ (۴)

پاسخ:

جاه جای ۴ رقم باقی مانده سمت چپ نمی تواند صفر باشد

$$\frac{3 \times 4!}{3! \times 2!} = \frac{3 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 18$$

 تعداد ارقام ۲
 تعداد صفرها

حروف کلمه «EARNEST» را به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد به طوری که حرف «N» همواره در وسط قرار گیرد؟

۱۸۰ (۱)

۲۱۶ (۲)

۲۴۰ (۳)

۳۶۰ (۴)

پاسخ:

پاسخ: اگر N وسط قرار گیرد، آنگاه ۶ مکان در دو طرف آن باقی می ماند (□□□N□□□) که این ۶ خانه را به ۶! روش مختلف می توان با ۶ حرف باقی مانده پر کرد اما چون حرف E دوبار تکرار شده است، باید حاصل را به ۲! تقسیم کرد، پس:

$$\frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 360$$

 تعداد کلمات مطلوب

تعداد جایگشت های حروف کلمه «SYSTEM» به طوری که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱۲۰ (۱)

۱۸۰ (۲)

۲۴۰ (۳)

۳۶۰ (۴)

پاسخ:

پاسخ: برای به دست آوردن تعداد حالاتی که S ها کنار هم نباشند، از تعداد کل جایگشت ها، تعداد جایگشت هایی که S ها کنار هم باشند را کم می کنیم، داریم:

$$240 - 120 = 120$$

 تعداد حالاتی که S ها کنار هم نباشند، $\Rightarrow 120$

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

 تعداد کل جایگشت ها
 S ها کنار هم باشند $\Rightarrow$ SS Y T E M $\Rightarrow 5! = 120$

درس سوم: ترکیب

ترکیب و قواعد آن

تعریف: ترکیب r شیء از n شیء متمایز در واقع، انتخاب r شیء از n شیء متمایز است به شرطی که ترتیب انتخاب مهم نباشد. مثلاً هر زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء است.

تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز را با نماد $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهیم و آن را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}; \quad (0 \leq r \leq n)$$

مثال آموزشی

یک مجموعه هفت عضوی چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

پاسخ:

تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{2}$ می باشد، پس:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 7 \times 5 = 35$$

نکته:

روابط مقابل را به خاطر بسپارید:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{5} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{4} = 5$$

به عنوان مثال داریم:

نکته:

اگر $r + k = n$ ، آنگاه $\binom{n}{r} = \binom{n}{k}$ ، به عنوان مثال $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ چون $3 + 7 = 10$ یا $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$ زیرا $5 + 2 = 7$ می باشد.

برای سرعت بیشتر در محاسبه ترکیب ها به مثال های زیر توجه کنید:

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8}{2!} \Rightarrow$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

در واقع برای محاسبه $\binom{n}{2}$ کافی است در صورت کسر حاصل ضرب دو عدد متوالی نزولی، شروع از n را بنویسیم و در مخرج ۲! را قرار دهیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \Rightarrow$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

بنابراین برای محاسبه $\binom{n}{3}$ کافی است حاصل ضرب سه عدد متوالی و نزولی، شروع از n را به ۳! تقسیم کنیم. به همین ترتیب داریم:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} \Rightarrow$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

مثال آموزشی

از میان ۷ نفر به چند طریق می‌توان:

الف) یک تیم سه نفره شامل رئیس، معاون و منشی انتخاب کرد؟

ب) یک تیم سه نفره انتخاب کرد؟

ج) یک تیم پنج نفره انتخاب کرد؟

پاسخ

الف) چون ترتیب انتخاب مهم است، پس:

ب) چون ترتیب انتخاب مهم نیست، پس:

ج) چون ترتیب انتخاب مهم نیست، پس:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 7 \times 5 = 35$$

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2!} = 7 \times 3 = 21$$

تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های هشت عضوی همان مجموعه برابر است. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی این مجموعه کدام است؟

۱۲ (۱)

۶۶ (۲)

۷۲ (۳)

۳۲ (۴)

پاسخ: فرض کنیم این مجموعه n عضو داشته باشد، پس:

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{8} \Rightarrow 2n = 4 + 8 = 12$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

دانش‌آموزی باید به ۱۸ سؤال از ۲۰ سؤال امتحان پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سؤال را انتخاب کند؟

۱۸ (۱)

۲۰ (۲)

۱۹۰ (۳)

۳۸۰ (۴)

پاسخ: چون ترتیب انتخاب سؤال‌ها برای پاسخ‌دهی مهم نیست، پس:

$$\text{تعداد روش‌های انتخاب ۱۸ سؤال از ۲۰ سؤال} = \binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که شامل a نیست؟

۴ (۱)

۶ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

پاسخ: ابتدا a را از مجموعه داده شده کنار می‌گذاریم، سپس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $\{b, c, d, e\}$ را می‌نویسیم که برابر است با:

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$$

مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که شامل a هستند؟

۴ (۱)

۶ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

پاسخ: ابتدا a را از مجموعه داده شده کنار می‌گذاریم، سپس زیرمجموعه‌های دو عضوی از مجموعه $\{b, c, d, e\}$ را می‌نویسیم و در نهایت به هر کدام از این زیرمجموعه‌های دو عضوی، a را اضافه می‌کنیم. در نهایت به زیرمجموعه‌های سه عضوی که شامل a هستند می‌رسیم. پس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی شامل a با تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه $\{b, c, d, e\}$ مساوی بوده و برابر است با:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ چند زیرمجموعه چهار عضوی دارد که شامل a هستند ولی شامل b نیستند؟

۷۰ (۱)

۵۶ (۲)

۳۵ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: a و b را از مجموعه A کنار می‌گذاریم، سپس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $\{c, d, e, f, g, h\}$ را می‌یابیم. این تعداد برابر با

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

شامل a هستند ولی شامل b نیستند.

میدان: اگر A مجموعه‌ای n عضو باشد، آن‌گاه:

(الف) تعداد کل زیر مجموعه‌های A برابر با 2^n است.

(ب) تعداد کل زیر مجموعه‌های 3 عضوی مجموعه A برابر با $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ است.

(ج) تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی A مساوی تعداد زیر مجموعه‌های فرد عضوی A و برابر با 2^{n-1} است.

نتیجه:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

با پنج نقطه متمایز روی محیط یک دایره، چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: با انتخاب هر سه نقطه از این پنج نقطه، می‌توان یک مثلث ساخت. چون ترتیب انتخاب نقطه‌ها مهم نیست، پس:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

با ۸ نقطه متمایز روی محیط یک دایره، چند چهارضلعی می‌توان رسم کرد؟

۷۲ (۴)

۷۰ (۳)

۶۸ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: با هر ۴ نقطه از این ۸ نقطه که انتخاب کنیم، می‌توانیم یک چهارضلعی رسم کنیم. چون ترتیب انتخاب مهم نیست، پس:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$$

به چند طریق می‌توان ۷ مهره یکسان را درون ۱۰ جعبه خالی قرار داد، به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

۷۲۰ (۴)

۵۴۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ: برای این کار، کافی است ۷ جعبه را از ۱۰ جعبه انتخاب کنیم و در هر کدام از این جعبه‌ها یک مهره قرار دهیم. چون ترتیب انتخاب جعبه‌ها مهم نیست، پس تعداد روش‌ها برابر است با:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

با ترکیب لافال ۲ رنگ از ۴ رنگ مختلف، چند رنگ جدید می‌توان ساخت به شرطی که میزان هر رنگ استفاده شده در هر کدام از ترکیب‌ها، یکسان باشد؟

۶ (۴)

۱۱ (۳)

۱۲ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: لافال ۲ رنگ از ۴ رنگ یعنی ۲ رنگ یا ۳ رنگ یا ۴ رنگ، پس تعداد کل رنگ‌های ترکیبی (جدید ساخته شده) برابر است با:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

با استفاده از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌توان دسته گل‌هایی شامل ۷ تا ۴ شاخه گل متمایز تولید کرد؟

۲۱۶ (۴)

۲۶۱ (۳)

۱۲۶ (۲)

۱۶۲ (۱)

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} = \binom{8}{4} + \binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} + \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} + \frac{8 \times 7}{2!} + 8 = 70 + 56 + 28 + 8 = 162$$

در ظرف A، ۵ مهره متمایز قرمز و در ظرف B، ۳ مهره متمایز آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این دو ظرف خارج کرد؟

۳۶ (۴)

۴۵ (۳)

۶۳ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: چون تعداد مهره‌هایی که از ظرف A یا ظرف B خارج می‌شود، مهم نیست ابتدا مهره‌ها را روی هم می‌ریزیم، پس $5 + 3 = 8$ مهره متمایز داریم که می‌خواهیم ۳ مهره از بین آن‌ها انتخاب کنیم. این کار به $56 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!}$ روش مختلف امکان پذیر است.

در ظرف A، ۵ مهره متمایز قرمز و در ظرف B، ۳ مهره متمایز آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد که لافال ۲ تا از آن‌ها قرمز باشد؟

۵۶ (۴)

۴۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: لافال ۲ مهره قرمز باشد، یعنی یا ۲ مهره قرمز باشد و یکی آبی یا ۳ مهره قرمز باشد و هیچ مهره‌ای آبی نباشد، پس:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \binom{3}{0} = 10 \times 3 + 10 = 40$$



از بین ۶ دانش آموز دهم و ۵ دانش آموز نهم، می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش آموز دهم و ۲ دانش آموز نهم تشکیل دهیم. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

۴۲۰ (۴)

۳۳۰ (۳)

۱۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: انتخاب ۴ دانش آموز از ۶ دانش آموز دهم به $\binom{6}{4}$ روش و انتخاب ۲ دانش آموز از ۵ دانش آموز نهم به $\binom{5}{2}$ روش مختلف امکان پذیر است، پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{4} \times \binom{5}{2} = \binom{6}{2} \times \binom{5}{2} = \frac{6 \times 5}{2!} \times \frac{5 \times 4}{2!} = 15 \times 10 = 150$$

از بین ۵ مرد و ۵ زن، به چند طریق می‌توان یک تیم ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که اعضای تیم هم جنس باشند؟

۱۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

پاسخ: چون اعضای تیم هم جنس هستند، پس هر سه باید زن یا هر سه باید مرد باشند، بنابراین تعداد روش‌های انتخاب اعضا برابر است با:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

از ۱۰ نفر که محمد، امیر و عماد بین آن‌ها هستند، به چند طریق می‌توان یک تیم سه نفره تشکیل داد به طوری که هر سه نفر این افراد با هم در تیم نباشند؟

۱۱۹ (۴)

۱۰۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۱ (۱)

پاسخ: برای پاسخ، کافی است از تعداد کل حالت‌های انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر، حالت‌هایی که هر سه نفر فوق با هم در تیم هستند را کم کنیم، پس:

$$\binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

از ۱۰ نفر که ناهید و الهام هم بین آن‌ها هستند، به چند طریق می‌توان یک تیم سه نفره انتخاب کرد به طوری که این دو نفر با هم نتوانند در تیم باشند؟

۱۳۶ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۱۲ (۲)

۱۱۰ (۱)

پاسخ: روش اول: سه حالت می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: ناهید و الهام هر دو در تیم نباشند که در این صورت باید تعداد روش‌های انتخاب ۳ نفر از ۸ نفر را بیابیم که برابر است با: $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$

حالت دوم: ناهید در تیم باشد و الهام نباشد. در این صورت کافی است تعداد روش‌های انتخاب ۲ نفر از ۸ نفر را یافت که برابر است با: $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

حالت سوم: الهام در تیم باشد و ناهید نباشد که مثل حالت دوم به ۲۸ روش مختلف امکان پذیر است، پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$56 + 28 + 28 = 112$$

روش دوم: اگر ناهید و الهام هر دو در تیم باشند، آن‌گاه نفر سوم تیم را به $\binom{8}{1} = 8$ طریق می‌توان انتخاب کرد. پس تیم سه نفره‌ای که شامل ناهید و الهام باشد را به ۸ روش می‌توان انتخاب کرد، بنابراین:

$$\binom{10}{3} - 8 = 120 - 8 = 112$$

تعداد روش‌های انتخاب تیم ۳ نفره‌ای که ناهید و الهام هم در آن باشند. تعداد کل روش‌های انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر

(برای مثال: ناهید و الهام)

با ارقام ۱، ۵، ۳، ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان» می‌توان نوشت؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: در هر ترکیب سه تایی از پنج عدد داده شده، فقط یک حالت صحیح است. مثلاً با انتخاب ارقام ۹، ۷ و ۳ فقط عدد ۹۷۳ صحیح است، پس:

$$= \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟

(برای مثال: دماوند و لاریجانات)

۷۶۵۰۰ (۴)

۷۵۶۰۰ (۳)

۶۷۵۰۰ (۲)

۵۷۶۰۰ (۱)

پاسخ: ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب می‌کنیم. سپس از هر یک از این ۳ منطقه، یک دانش آموز انتخاب می‌کنیم. در نتیجه تعداد حالت‌های انتخاب برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} = 20 \times 15 \times 15 \times 15 = 67500$$

از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفره انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی می‌تواند انجام شود به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟

(ریاضی، طرح ۹۷)

پاسخ: برای انجام بازی تنیس ۴ نفره، دو تیم دو نفره لازم است. ابتدا ۲ مدرسه از ۸ مدرسه را انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{8}{2}$ روش مختلف امکان‌پذیر است. سپس از هر کدام از مدرسه‌هایی که انتخاب کرده‌ایم، ۲ نفر از ۶ نفری که از آن مدرسه آمده‌اند، به عنوان همیار هم انتخاب می‌کنیم، پس:

$$\text{حالت‌های ممکن برای انجام بازی} = \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 28 \times 15 \times 15 = 6300$$

از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر آنان دانش‌آموز تجربی باشند؟

(تجربی، طرح ۹۰)

پاسخ: انتخاب لااقل ۲ دانش‌آموز تجربی یعنی یا ۲ دانش‌آموز تجربی و یک دانش‌آموز ریاضی یا ۳ دانش‌آموز تجربی و هیچ دانش‌آموز ریاضی. پس تعداد روش‌های انتخاب سه نفر برابر است با:

$$\binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \binom{3}{0} = 10 \times 3 + 10 \times 1 = 30 + 10 = 40$$

به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب مختلف سال دهم و ۲ کتاب از ۴ کتاب مختلف سال نهم را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

پاسخ: ابتدا ۳ کتاب از ۵ کتاب مختلف سال دهم و ۲ کتاب از ۴ کتاب مختلف سال نهم را انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{5}{3} \times \binom{4}{2}$ روش مختلف امکان‌پذیر است. سپس آن‌ها را یک در میان می‌چینیم. این کار را به $3! \times 2!$ روش مختلف می‌توان انجام داد. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} \times 3! \times 2! = 10 \times 6 \times 6 \times 2 = 720$$

با حروف کلمه «درسنامه» و بدون تکرار حروف، چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت که کلمه «نامه» در آن‌ها دیده شود؟

پاسخ: کلمه «نامه» ۴ حرف دارد که چون می‌خواهیم کلمه «نامه» دیده شود، نمی‌توانیم حروف آن را جابه‌جا کنیم. اما برای نوشتن کلمات ۶ حرفی ابتدا باید ۲ حرف از بین حروف «د»، «ر» و «س» انتخاب کنیم. این کار به $\binom{3}{2} = 3$ روش امکان‌پذیر است. حال سه شیء $\square$ ، $\square$ ، $\square$ را به $3!$ طریق می‌توانیم جابه‌جا کنیم. پس:

از بین ۶ زوج زن و شوهر، به چند طریق می‌توان یک کمیته ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که یک زوج، در میان آن‌ها باشد؟

پاسخ: ابتدا یک زوج از میان ۶ زوج انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{6}{1}$ روش مختلف امکان‌پذیر است. ۵ زوج دیگر یعنی ۱۰ نفر باقی می‌مانند. از میان آن‌ها ۱ نفر انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{10}{1}$ روش مختلف امکان‌پذیر است، در نتیجه تعداد کل روش‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{1} \times \binom{10}{1} = 6 \times 10 = 60$$

از بین ۶ جفت کفش متمایز، به چند طریق می‌توان ۳ لنگه کفش متمایز انتخاب کرد؟

پاسخ: ابتدا ۳ جفت کفش از ۶ جفت انتخاب می‌کنیم. سپس از هر کدام از جفت‌های انتخاب شده، یک لنگه انتخاب می‌کنیم. در نتیجه ۳ لنگه کفش متمایز داریم. پس تعداد روش‌های انتخاب سه لنگه کفش متمایز برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 20 \times 2 \times 2 \times 2 = 160$$

از میان ۲ مهره آبی، ۲ مهره قرمز و ۲ مهره سفید به چند طریق می‌توان ۲ مهره انتخاب کرد به طوری که هم‌رنگ نباشد؟

پاسخ: ابتدا ۲ گروه رنگ از ۳ گروه رنگ آبی، قرمز یا سفید انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{3}{2} = 3$ روش مختلف امکان‌پذیر است. سپس از هر کدام از این دو گروه انتخاب شده، یک مهره انتخاب می‌کنیم. واضح است از گروه اول به $\binom{2}{1} = 2$ روش و از گروه دوم نیز به $\binom{2}{1} = 2$ روش مختلف می‌توان یک مهره را

انتخاب کرد، پس:

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \times 2 \times 2 = 12$$

۸۶ پنج اسباب بازی متمایز را به چند طریق می توان بین ۴ کودک توزیع کرد به طوری که به هر کدام لافل یک اسباب بازی برسد؟

- ۵۱ (۱) ☐ ۴۰ (۲) ☐ ۱۲۰ (۳) ☐ ۲۴۰ (۴) ☐

پاسخ: چون تعداد اسباب بازی ها یکی بیشتر از تعداد کودکان است و می خواهیم به هر کدام لافل یک اسباب بازی برسد، در نتیجه به یکی از آن ها دو اسباب بازی می رسد، ابتدا یک کودک از ۴ کودک را انتخاب می کنیم، سپس از بین ۵ اسباب بازی، ۲۰ اسباب بازی انتخاب می کنیم و به او می دهیم و در نهایت ۳ اسباب بازی باقی مانده را بین ۳ کودک توزیع می کنیم، پس:

$$= \binom{4}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 4 \times 10 \times 6 = 240$$

توزیع ۳ اسباب بازی بین ۳ کودک
انتخاب ۲ اسباب بازی از ۵ اسباب بازی
انتخاب یک کودک از ۴ کودک

۸۷ به چند روش می توان از میان ۱۰ سؤال به ۸ سؤال پاسخ داد به طوری که پاسخ لافل ۵ سؤال از ۶ سؤال اول اجباری باشد؟

- ۲۴ (۱) ☐ ۳۰ (۲) ☐ ۴۵ (۳) ☐ ۵۱ (۴) ☐

پاسخ: برای پاسخ به ۸ سؤال از ۱۰ سؤال با شرایط فوق، دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: ۵ سؤال از ۶ سؤال اول و ۳ سؤال از ۴ سؤال بعدی انتخاب شود که در این صورت تعداد حالت های انتخاب برابر $\binom{6}{5} \binom{4}{3}$ است.

حالت دوم: ۶ سؤال از ۶ سؤال اول و ۲ سؤال از ۴ سؤال بعدی انتخاب شود که در این حالت تعداد روش ها برابر با $\binom{6}{6} \binom{4}{2}$ است.

پس:

$$= \binom{6}{5} \binom{4}{3} + \binom{6}{6} \binom{4}{2} = 6 \times 4 + 1 \times 6 = 30$$

(ریاضی، دالان ۷۳)

۸۸ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ به چند طریق می توان یک عدد پنج رقمی ساخت به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

- ۶۴۰۰ (۱) ☐ ۷۲۰۰ (۲) ☐ ۸۴۰۰ (۳) ☐ ۹۶۰۰ (۴) ☐

پاسخ: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ زوج اند که باید ۲ رقم از بین آن ها انتخاب کرد، هم چنین باید ۳ رقم باقی مانده را از بین ۵ رقم فرد انتخاب کنیم و در نهایت این ۵ رقم انتخاب شده را کنار هم بچینیم، پس جواب سؤال به صورت مقابل است:

$$= \binom{5}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

تعداد جایگشت های ۵ رقم
انتخاب ۳ رقم فرد از ۵ رقم فرد
انتخاب ۲ رقم زوج از ۲ رقم زوج

۸۹ از بین ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز، به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد به طوری که فقط ۲ مهره، همرنگ باشند؟

- ۴۱ (۱) ☐ ۷۲ (۲) ☐ ۷۹ (۳) ☐ ۶۲ (۴) ☐

پاسخ: برای آن که فقط دو مهره همرنگ باشند، باید ۲ تا از ۵ مهره سفید و یکی از ۵ مهره دیگر یا ۲ تا از ۳ مهره سیاه و یکی از ۲ مهره دیگر و یا ۲ تا از ۲ مهره قرمز و یکی از ۸ مهره دیگر را انتخاب کرد، پس:

$$= \binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \binom{5}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1} = 10 + 15 + 8 = 33$$

۹۰ از بین ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز، به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد به طوری که دو به دو رنگ های متفاوتی داشته باشند؟

- ۳۰ (۱) ☐ ۱۲۰ (۲) ☐ ۷۲ (۳) ☐ ۱۸ (۴) ☐

پاسخ: برای آن که مهره های انتخابی دو به دو رنگ های متفاوتی داشته باشند باید یکی از ۵ مهره سفید، یکی از ۳ مهره سیاه و یکی از ۲ مهره قرمز انتخاب کرد، پس:

$$= \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

۹۱ از بین ۱۲ دانش آموز، می خواهیم یک تیم ۴ نفره انتخاب کنیم به طوری که بهترین دانش آموز حتماً انتخاب شود و بدترین دانش آموز انتخاب نشود. این کار به چند روش قابل انجام است؟

- ۱۰ (۱) ☐ ۱۳ (۲) ☐ ۱۴ (۳) ☐ ۱۱ (۴) ☐

پاسخ: چون می خواهیم بدترین دانش آموز حتماً انتخاب نشود، پس او را کنار می گذاریم، بنابراین ۴ نفر باید از ۱۱ نفر باقی مانده انتخاب شوند. از طرفی چون می خواهیم بهترین دانش آموز حتماً انتخاب شود، در نتیجه او را به $\binom{11}{3}$ روش می توان انتخاب کرد و سه دانش آموز دیگر را از بین ۱۰ دانش آموز باقی مانده به $\binom{10}{3}$ روش می توان انتخاب کرد، در نتیجه:

$$= \binom{10}{3} \times \binom{11}{3} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

از بین ۴ دانش‌آموز دهم، ۳ دانش‌آموز نهم و ۲ دانش‌آموز یازدهم، به چند روش می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل داد، به طوری که حداقل ۳ دانش‌آموز دهم انتخاب شوند؟

- ۴۰ (۱) ☐ ۴۲ (۲) ☐ ۴۵ (۳) ☐ ۵۲ (۴) ☐

پاسخ: می‌دانیم حداقل ۳ یعنی ۳ یا بیشتر در این تست تعداد دانش‌آموزان دهم می‌تواند ۳ یا ۴ نفر باشد، پس برای تشکیل کمیته‌ای ۵ نفره، یا ۳ دانش‌آموز دهم و ۲ دانش‌آموز غیر دهم باید انتخاب شود یا ۴ دانش‌آموز دهم و ۱ دانش‌آموز غیر دهم باید انتخاب شود، در نتیجه تعداد کل روش‌های انتخاب اعضای کمیته برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{5}{1} = 4 \times 10 + 1 \times 5 = 45$$

از بین ۴ دانش‌آموز دهم، ۳ دانش‌آموز نهم و ۲ دانش‌آموز یازدهم، به چند روش می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل داد به طوری که حداقل یک دانش‌آموز دهم عضو کمیته باشد؟

- ۱۲۰ (۱) ☐ ۱۲۵ (۲) ☐ ۱۲۶ (۳) ☐ ۱۳۰ (۴) ☐

پاسخ: حداقل یک دانش‌آموز دهم عضو کمیته باشد، مساوی است با تمام حالت‌های انتخاب یک کمیته ۵ نفره منهای حالت‌هایی که هیچ دانش‌آموز دهمی در کمیته عضو نباشد، پس:

$$= \binom{9}{5} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5!} = 126$$

اگر بخواهیم هیچ دانش‌آموز دهم در کمیته ۵ نفره نباشد، باید تمام ۵ نفر را از دانش‌آموزان غیر دهمی انتخاب کنیم؛

$$\binom{5}{5} = 1$$

بنابراین جواب تست برابر است با:

از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دو به دو

(تقریباً ۱۷)

غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

- ۱۶۰ (۱) ☐ ۳۲۰ (۲) ☐ ۴۸۰ (۳) ☐ ۶۴۰ (۴) ☐

پاسخ: ابتدا ۵ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب کنیم، سپس از هر کدام از این ۳ مدرسه انتخابی، ۱ دانش‌آموز از ۴ دانش‌آموز آن مدرسه را انتخاب می‌کنیم، پس:

$$= \binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

رابطه‌ای کاربردی

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

نکته: رابطه معادل را به خاطر بسپارید:

مثال آموزشی

تعداد حالتی که در ۷ بار پرتاب یک سکه، ۳ یا ۴ بار «رو» بیاید، برابر با چند بار «رو» آمدن سکه در ۸ بار پرتاب آن است؟

پاسخ: می‌دانیم تعداد حالتی که در n بار پرتاب سکه، r بار «رو» بیاید برابر است با $\binom{n}{r}$ ، پس:

$$= \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$$

حاصل $\binom{12}{7} + 2 \times \binom{12}{8} + \binom{12}{9}$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ☐ ۱۶ (۲) ☐ ۱۳ (۳) ☐ ۱۲ (۴) ☐

پاسخ: با توجه به نکته فوق داریم:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \Rightarrow \binom{12}{7} + 2 \times \binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{12}{7} + \binom{12}{8} + \binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{13}{8} + \binom{13}{9} = \binom{14}{9} = \binom{14}{5}$$

اگر تعداد روش‌های انتخاب ۸ یا ۹ مهره از بین ۲۰ مهره متمایز، برابر با تعداد حالت‌های انتخاب ۹ مهره از n مهره متمایز باشد، آن‌گاه $P(n, 2)$ کدام است؟

- ۲۸۰ (۱) ☐ ۳۶۰ (۲) ☐ ۴۲۰ (۳) ☐ ۵۱۲ (۴) ☐

پاسخ: تعداد روش‌های انتخاب ۸ یا ۹ مهره از بین ۲۰ مهره متمایز برابر با $\binom{20}{8} + \binom{20}{9}$ است که طبق نکته قبل، این مجموع برابر با $\binom{21}{9}$ می‌باشد، از

طرفی تعداد حالت‌های انتخاب ۹ مهره از n مهره متمایز برابر با $\binom{n}{9}$ است، پس اگر $\binom{n}{9} = \binom{21}{9}$ ، آن‌گاه $n = 21$ می‌باشد. بنابراین:

$$P(n, 2) = P(21, 2) = \frac{21!}{(21-2)!} = \frac{21!}{19!} = 21 \times 20$$

« درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس
« درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
« درس سوم: متغیر و انواع آن

فصل هفتم: آمار و احتمال



درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

آزمایش تصادفی، آزمایشی است که همهٔ حالت‌ها یا نتیجه‌های آن را می‌دانیم اما نتیجهٔ قطعی آن را قبل از پایان آزمایش نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم.

فضای نمونه‌ای، مجموعهٔ تمام حالت‌ها یا نتیجه‌های ممکن یک آزمایش تصادفی است. فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهیم و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

پیشامد تصادفی، به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. اگر A یک پیشامد تصادفی باشد آن‌گاه تعداد اعضای A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: پیشامد A زمانی رخ می‌دهد که نتیجهٔ آزمایش، عضوی از A باشد. به عنوان مثال اگر در پرتاب یک تاس، پیشامد A را رو شدن عددی زوج در نظر بگیریم، آن‌گاه $A = \{2, 4, 6\}$ ، پس $n(A) = 3$ و در صورتی که پس از پرتاب تاس هر کدام از اعداد زوج ۲ یا ۴ یا ۶ ظاهر شوند، آن‌گاه A رخ داده است.

مثال ۲: می‌دانیم اگر مجموعه‌ای دارای ۵ عضو باشد، آن‌گاه ۳۱ زیرمجموعه دارد. پس اگر یک آزمایش تصادفی دارای ۵ نتیجه ممکن باشد، آن‌گاه $n(S) = 31$ و در نتیجهٔ این آزمایش تصادفی دارای ۳۱ پیشامد مختلف است.

مثال آموزشی

در آزمایش پرتاب یک تاس، چند پیشامد وجود دارد؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس دارای ۶ عضو است پس $3^6 = 64$ (زیرمجموعه (پیشامد) دارد.

پیشامدهای نشدنی (غیرمحتمل) و پیشامدهای حتمی (قطعی)

هر فضای نمونه‌ای مانند S دارای دو زیرمجموعهٔ بدهی‌ی تهی ($\emptyset$) و S می‌باشد. پیشامد تهی ($\emptyset$) که شانس رخ دادن آن صفر است را پیشامد نشدنی و پیشامد S را پیشامد حتمی می‌نامیم.

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و دو سکه چند عضو دارد؟

۲۴ (۱) ۱۲ (۲) ۷۲ (۳) ۱۰ (۴)

پاسخ: هر سکه دو حالت و هر تاس ۶ حالت مختلف دارد، پس: $n(S) = 2 \times 2 \times 6 = 24$ = تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید یک تاس می‌اندازیم و اگر «پشت» بیاید دو سکه و یک تاس با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این

آزمایش چند عضو دارد؟

۱۸ (۱) ۳۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

پاسخ: سکه «پشت» بیاید. $n(S) = 1 \times 6 + 1 \times 2 \times 2 \times 6 = 6 + 24 = 30$

تعداد حالت‌های پرتاب دو سکه و یک تاس

تعداد حالت‌های پرتاب یک تاس

تاس می‌اندازیم. اگر عددی زوج بیاید، دو سکه پرتاب می‌کنیم و اگر عددی فرد بیاید یک تاس می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش، چند عضو دارد؟

۱۰ (۱) ۳۰ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۱۶ (۴)

پاسخ: $n(S) = 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 6 = 12 + 18 = 30$

پرتاب تاس دوم

تاس فرد بیاید. تاس زوج بیاید.

یک آزمایش تصادفی دارای ۲۵۵ پیشامد ناتهی است. این آزمایش، چند نتیجه ممکن دارد؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: چون آزمایش تصادفی ۲۵۵ پیشامد ناتهی دارد، پس کلاً $255 + 1 = 256$ زیرمجموعه دارد. اگر فضای نمونه‌ای این آزمایش، n عضو داشته باشد،

آن‌گاه: $2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$

پس این آزمایش، ۸ نتیجه ممکن دارد.

پیشامد $A = \{2, 5\}$ از پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید. اگر نتیجهٔ آزمایش $\{5\}$ باشد آن‌گاه:

(۱) پیشامد A رخ داده است. (۲) پیشامد A رخ نداده است.

(۳) پیشامد $B = \{1, 3, 5\}$ رخ نداده است. (۴) پیشامد $\{\emptyset\}$ رخ داده است.

پاسخ: چون عدد ۵ ظاهر شده است، پس تمام پیشامدها شامل عدد ۵ هستند، رخ می‌دهند.

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم «رو» می‌آید. چه تعداد از پیشامدهای این آزمایش تصادفی، رخ داده‌اند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: در آزمایش پرتاب یک سکه، فضای نمونه‌ای به صورت $S = \{ر, پ\}$ است. تمام زیرمجموعه‌های S ، پیشامدهای این آزمایش تصادفی هستند. این پیشامدها عبارت‌اند از:

چون سکه «رو» آمده است، پس تمام پیشامدهایی که شامل «رو» هستند، رخ داده‌اند. در نتیجه از ۴ پیشامد فوق، ۲ تای آن‌ها، رخ داده است.

در پرتاب دو سکه با هم، می‌دانیم حداقل یکی از آن‌ها «پشت» آمده است. چه تعداد از پیشامدهای این آزمایش تصادفی رخ داده‌اند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه به صورت $S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$ است که ۴ عضو دارد. پس این آزمایش تصادفی دارای $2^4 = 16$ زیرمجموعه (پیشامد) است. چون حداقل یکی از سکه‌ها «پشت» آمده است، پس تمام زیرمجموعه‌های S که شامل حداقل یکی از حالت‌های $(پ, پ)$ یا $(ر, پ)$ یا $(پ, ر)$ باشند، رخ داده‌اند. در واقع فقط دو پیشامد $\emptyset = \{\}$ و $A = \{(ر, ر)\}$ رخ ندادند. در نتیجه:

$$16 - 2 = 14 \quad 2^4 - 2 = 14$$

تعداد کل پیشامدها

در پرتاب یک تاس، اگر عدد ۶ ظاهر شود، چند پیشامد از این آزمایش تصادفی رخ داده است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس به صورت $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ است، در نتیجه $n(S) = 6$. بنابراین در پرتاب یک تاس، $2^6 = 64$ زیرمجموعه (پیشامد) مختلف وجود دارد. چون عدد ۶ ظاهر شده است، پس تمام پیشامدهایی که شامل عدد ۶ هستند، رخ داده‌اند. در واقع باید تعداد کل زیرمجموعه‌های S که شامل ۶ هستند را بیابیم. برای این منظور، کافی است از تعداد کل زیرمجموعه‌های S ، زیرمجموعه‌هایی که شامل ۶ نیستند را حذف کنیم. واضح است که تمام زیرمجموعه‌های $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ شامل ۶ نیستند، بنابراین:

$$64 - 32 = 32 \quad 2^6 - 2^5 = 32$$

تعداد کل زیرمجموعه‌های M تعداد کل زیرمجموعه‌های S

۱- تعداد پیشامدها برابر با $2^{n(S)}$ است.

۲- در این فصل، هرگاه صحبت از پرتاب دو یا چند تاس یا سکه باشد، آن‌گاه تاس‌ها یا سکه‌ها را متمایز در نظر می‌گیریم.

۳- در پرتاب دو تاس، در شش حالت، اعداد رو شده یکسان هستند، در پانزده حالت، عدد تاس اول بیشتر از عدد تاس دوم است و در پانزده حالت، عدد تاس اول کمتر از عدد تاس دوم می‌باشد.

پیشامدها و برخی اعمال روی آن‌ها

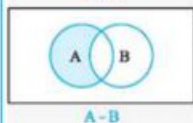
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه $(A \cup B)$ ، $(A \cap B)$ و $(A - B)$ پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S هستند که به صورت زیر توصیف می‌شوند.



الف) اجتماع دو پیشامد: $(A \cup B)$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. (یعنی با A یا B رخ دهد یا B رخ دهد یا هر دو رخ دهند.)



ب) اشتراک دو پیشامد: $(A \cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B با هم رخ دهند.



ج) تفاضل دو پیشامد: $(A - B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد ولی پیشامد B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد.)

$$A - B = A - (A \cap B) \quad \text{فقط } A \text{ رخ دهد.}$$

مثال آموزشی

در پرتاب یک تاس، اگر A پیشامد روشن شدن عددی زوج و B پیشامد روشن شدن عددی اول باشد، آنگاه حاصل هریک از پیشامدها را مشخص کنید:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{2, 3, 5\}$$

الف) پیشامدهای A و B.

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

ب) پیشامد آنکه حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

$$A \cap B = \{2\}$$

ج) پیشامد آنکه A و B با هم رخ دهند.

$$A - B = \{4, 6\}$$

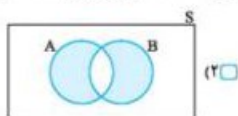
د) پیشامد آنکه فقط A رخ دهد.

ه) پیشامد آنکه فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.

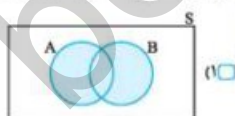
$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 4, 5, 6\}$$

فقط A رخ دهد فقط B رخ دهد

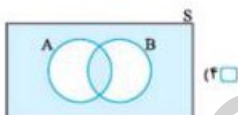
اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه در کدام نمودار، پیشامد «فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد» نمایش داده شده است؟



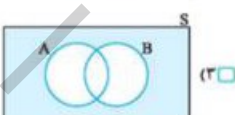
(۲) ☐



(۱) ☐



(۴) ☐



(۳) ☐

پاسخ: فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، یعنی فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه پیشامد $(A - B) \cup (B - A)$ معادل کدام توصیف زیر است؟

(۱) پیشامد آن که A یا B رخ دهد. ☐

(۲) پیشامد آن که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند. ☐

(۳) پیشامد آن که فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد. ☐

(۴) پیشامد آنکه فقط A یا B رخ دهند. ☐

پاسخ: می‌دانیم پیشامد $A - B$ یعنی فقط A رخ دهد و پیشامد $B - A$ یعنی فقط B رخ دهد، پس $(A - B) \cup (B - A)$ یعنی پیشامد آن که فقط

A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.

دو تاس متمایز را با هم می‌اندازیم. اگر A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد رو شده، کمتر از ۵ باشد و B پیشامد آن باشد که حداقل یکی از دو

تاس ۲ بیاید، آنگاه پیشامد آن که فقط B رخ دهد، چند عضو دارد؟

۸ (۲) ☐

۳ (۱) ☐

۲۲ (۴) ☐

۱۱ (۳) ☐

پاسخ: می‌دانیم پیشامد آن که فقط B رخ دهد معادل پیشامد $B - A$ است. حال داریم:

$$A = \{(0, 1), (1, 2), (0, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$$

$$\Rightarrow B - A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\} \Rightarrow n(B - A) = 8$$



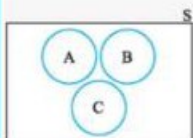
پیشامدهای ناسازگار (ک): دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌نامیم، هرگاه:



دو پیشامد A و B ناسازگارند.

$$A \cap B = \emptyset$$

همچنین سه پیشامد A، B و C از فضای نمونه‌ای S را دوبه‌دو ناسازگار می‌نامیم، هرگاه:



سه پیشامد A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند.

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$$

متمم یک پیشامد: متمم پیشامد A را با A^c (یا A^c) نمایش می‌دهیم. دقت کنید که A^c وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد، در نتیجه:



$$A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset \quad (\text{یعنی } A \text{ و } A^c \text{ ناسازگارند.})$$

مثال آموزشی

در پرتاب یک تاس، چند پیشامد ناسازگار با پیشامد «آمدن عددی اول» وجود دارد؟

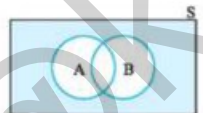
پاسخ: می‌دانیم پیشامد «آمدن عددی اول» در پرتاب یک تاس به صورت $A = \{2, 3, 5\}$ می‌باشد. پس هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ که با پیشامد A اشتراک نداشته باشد با A ناسازگار است. بدیهی است این پیشامدها، زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 4, 6\}$ هستند که تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با $2^3 = 8$.

در پرتاب دو تاس، چند پیشامد ناسازگار با پیشامد «آمدن عددهای مختلف» وجود دارد؟

پاسخ: پیشامد «آمدن عددهای یکسان»، زیرمجموعه‌های مجموعه $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ هستند که تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با $2^6 = 64$.

دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را در نظر بگیرید، پیشامد آن‌که فقط A^c رخ دهد، معادل کدام است؟

پاسخ: فقط A^c رخ دهد یعنی A^c رخ دهد و B رخ ندهد.

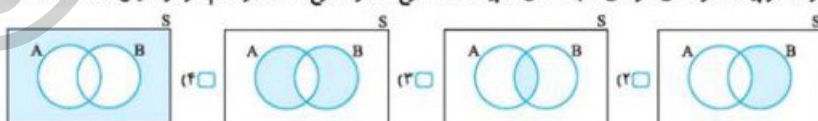


$$A^c : A^c - B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \Rightarrow$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه پیشامد « A^c رخ دهد و B^c رخ ندهد» در کدام نمودار نمایش داده شده است؟



$$A^c : A^c - B^c = A^c \cap B = B - A$$

یعنی ناحیه‌ای که خارج A است و با B اشتراک دارد

۱۵ اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه پیشامد $A \cap B$ رخ دهد یا C' رخ ندهد. در کدام نمودار نمایش داده شده است؟



پاسخ اگر C' رخ ندهد، آن‌گاه C رخ می‌دهد، پس $A \cap B$ رخ دهد یا C' رخ ندهد معادل آن است که $A \cap B$ رخ دهد یا C رخ دهد که به صورت $(A \cap B) \cup C$ می‌باشد، بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

احتمال (Probability)

اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم و از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ به دست می‌آید. در واقع $P(A)$ مقدار اطمینانی است که نسبت به وقوع پیشامد A داریم. در مسائل احتمال با محاسبه $P(A)$ ، شانس رخ دادن پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم. بدیهی است که $0 \leq P(A) \leq 1$ ، اگر $P(A) = 1$ ، آن‌گاه پیشامد A را پیشامد حتمی یا قطعی می‌نامیم و اگر $P(A) = 0$ ، آن‌گاه پیشامد A را پیشامد غیرممکن یا نشدنی می‌گوییم.

مثال آموزشی

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که عدد رو شده:

- (الف) زوج باشد. (ب) مضرب ۳ باشد. (ج) کوچک‌تر از ۱۰ باشد. (د) بزرگ‌تر از ۶ باشد.

پاسخ

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{3, 6\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(C) = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{6}{6} = 1$$

$$D = \{\} = \emptyset \Rightarrow n(D) = 0 \Rightarrow P(D) = \frac{0}{6} = 0$$

۱۶ دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده در دو تاس ۶ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{36}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{7}{36}$

پاسخ فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس $n(S) = 6^2 = 36$ عضو دارد، بنابراین داریم:

$$A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} \Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

۱۷ عددی به تصادف از فضای نمونه‌ای $\{1, 2, \dots, 9\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{5}{9}$

$$A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۱۸ خانواده‌ای دارای سه فرزند است. احتمال آن‌که این خانواده حداکثر یک فرزند پسر داشته باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده سه فرزندی، $n(S) = 2^3 = 8$ عضو دارد. حداکثر یک فرزند پسر، یعنی اینکه خانواده دارای یک فرزند پسر باشد یا فرزند پسر نداشته باشد، بنابراین پیشامد A برابر است با:

$$A = \{(d, d, d), (d, d, p), (d, p, d), (p, d, d)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

در پرتاب دو تاس، احتمال آن که اعداد رو شده هر دو تاس بین ۲ و ۵ باشند، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: واضح است که فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس، $n(S) = 6 \times 6 = 36$ عضو دارد. اگر A پیشامد آن باشد که هر دو تاس بین ۲ و ۵ بیایند، آن‌گاه هر دو باید ۲ یا ۴ باشند، پس:

$$A = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

چهار رقم ۴، ۲، ۱ و ۶ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی زوج حاصل می‌شود؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: چون چهار رقم داده شده را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم، پس تکرار ارقام مجاز نیست. در نتیجه تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با تعداد اعداد چهار رقمی و بدون تکرار ارقام که با اعداد ۴، ۲، ۱ و ۶ می‌توان نوشت، پس:

$$n(S) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$n(A) = 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 18$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

اگر A پیشامد ساخته شدن عدد چهار رقمی زوج با ارقام ۴، ۲، ۱ و ۶ باشد، آن‌گاه: بنابراین احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

در پرتاب دو تاس، چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس مضرب شش باشد؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

$$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

پاسخ: در حالت‌های مقابل، مجموع دو تاس مضرب ۶ است.

از طرفی تعداد کل حالت‌های ممکن در پرتاب دو تاس (تعداد اعضای فضای نمونه‌ای)، $n(S) = 6^2 = 36$ می‌باشد، بنابراین احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

لشکته: در پرتاب دو تاس، تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده در دو تاس کمتر از ۷ باشد، با تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده در دو تاس بیشتر از ۷ باشد، مساوی است و برابر با ۱۵ می‌باشد.

در پرتاب دو تاس متمایز، احتمال این که مجموع اعداد رو شده در دو تاس کمتر از ۷ باشد، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

پاسخ: می‌دانیم فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس، $n(S) = 6^2 = 36$ عضو دارد. برای آنکه مجموع دو تاس، کمتر از ۷ باشد باید مجموع دو تاس، ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. طبق نکته قبل، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$n(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

لشکته: واضح است که در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد رو شده حداقل ۲ و حداکثر ۱۲ می‌باشد. بنابراین اگر مجموع ارقام رو شده در پرتاب دو تاس متمایز

را k در نظر بگیریم، آن‌گاه: $2 \leq k \leq 12$ داریم: $k-1$; $2 \leq k \leq 12$ $13-k$; $1 \leq k \leq 12$ تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده در دو تاس k می‌شود.

به عنوان مثال در پرتاب دو تاس متمایز، پیشامد آن که مجموع دو تاس ۷ شود، دارای $7-1=6$ عضو است. این پیشامد به صورت زیر است:

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

و یا پیشامد آن که مجموع ارقام رو شده ۱۰ باشد، دارای $13-10=3$ عضو است. این پیشامد به صورت زیر است:

$$B = \{(4,6), (6,4), (5,5)\}$$

دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۹ باشد، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: چون مجموع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۹ است پس این مجموع برابر، ۱۰، ۱۱ یا ۱۲ می‌باشد. بنابراین:

$$n(A) = (13-10) + (13-11) + (13-12) = 3 + 2 + 1 = 6, \quad n(S) = 6^2 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ناسی را سه بار می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده سه ناسی، کوچک‌تر از ۵ باشد، کدام است؟

- پاسخ می‌دانیم $A \cap B = A \cap B$ ، پس:
- ۱) $\frac{1}{36}$ (۱) ☐ ۲) $\frac{1}{12}$ (۲) ☐ ۳) $\frac{1}{54}$ (۳) ☐ ۴) $\frac{1}{27}$ (۴) ☐

$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

قوانین احتمال

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، همواره داریم:

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

۱. احتمال آن‌که پیشامد A رخ ندهد (احتمال پیشامد متمم A)، برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۲. احتمال آن‌که لاف‌ل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد برابر است با:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

۳. احتمال آن‌که A و B با هم رخ دهند برابر است با:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

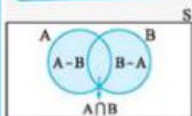
۴. احتمال آن‌که فقط پیشامد A رخ دهد (یعنی A رخ دهد ولی B رخ ندهد) برابر است با:

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

۵. احتمال آن‌که فقط یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

۶. احتمال آن‌که هیچ‌کدام از پیشامدهای A و B رخ ندهند برابر است با:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad \text{یا} \quad P(A \cup B) = P(B) + P(A - B) \quad \text{یا} \quad P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

نکته اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه:

همچنین اگر A ، B و C سه پیشامد دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

اگر $P(A - B) = \frac{3}{5}$ و $P(A - B') = \frac{1}{5}$ باشد، $P(A')$ کدام است؟

- پاسخ می‌دانیم $A - B' = A \cap B$ ، پس:
- ۱) $\frac{1}{5}$ (۱) ☐ ۲) $\frac{2}{5}$ (۲) ☐ ۳) $\frac{3}{5}$ (۳) ☐ ۴) $\frac{4}{5}$ (۴) ☐

$$P(A - B') = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} \quad (*)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow{(*)} \frac{3}{5} = P(A) - \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

از طرفی داریم:

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و $2P(A - B) = 3P(B - A) = 1$ ، مقدار $P(A' \cap B')$ کدام است؟

- پاسخ می‌دانیم $A - B' = A \cap B$ ، پس:
- ۱) $\frac{1}{6}$ (۱) ☐ ۲) $\frac{2}{3}$ (۲) ☐ ۳) $\frac{1}{3}$ (۳) ☐ ۴) $\frac{5}{6}$ (۴) ☐

$$2P(A - B) = 3P(B - A) = 1 \Rightarrow P(A - B) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(B - A) = \frac{1}{3}$$

چون A و B ناسازگارند، پس $A \cap B = \emptyset$ و در نتیجه $P(A \cap B) = 0$ ، بنابراین:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(A) - 0 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{3} = P(B) - 0 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0) = \frac{1}{6}$$

در پرتاب دو تاس متمایز، احتمال آن که مجموع دو تاس کم‌تر از ۱۰ باشد، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ: مجموع دو تاس کم‌تر از ۱۰ باشد، متمم حالتی است که مجموع دو تاس بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰ باشد، پس:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (13 - 1) + (13 - 1) + (13 - 1) = 16$$

$$P(10) = \frac{1}{36} \Rightarrow P(\text{مجموع دو تاس کوچک‌تر از } 10) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

۳۴ درصد دانش‌آموزان یک دبیرستان به والیبال و ۶۲ درصد به فوتبال علاقه دارند. اگر ۱۵ درصد به هر دو رشته علاقه داشته باشند، با کدام احتمال فردی که در این دبیرستان درس می‌خواند، حداقل به یکی از این دو رشته علاقه دارد؟

- ۱) $\frac{81}{100}$ ۲) $\frac{96}{100}$ ۳) $\frac{33}{100}$ ۴) $\frac{85}{100}$

پاسخ: اگر پیشامد علاقه‌مند بودن دانش‌آموزان به والیبال را با V و پیشامد علاقه‌مند بودن آنها به فوتبال را با F نشان دهیم، باید $P(V \cup F)$ را محاسبه کنیم:

$$P(V) = \frac{34}{100}, P(F) = \frac{62}{100}, P(V \cap F) = \frac{15}{100} \Rightarrow P(V \cup F) = P(V) + P(F) - P(V \cap F) = \frac{34}{100} + \frac{62}{100} - \frac{15}{100} = \frac{81}{100}$$

احتمال آن که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، ۵۵٪ و در درس شیمی قبول شود، ۱۶٪ است. اگر احتمال آن که لااقل در یکی از دو درس قبول شود ۷۵٪ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟

- ۱) $0/35$ ۲) $0/40$ ۳) $0/45$ ۴) $0/50$

پاسخ: پیشامد قبول شدن در درس فیزیک را با A و پیشامد قبول شدن در درس شیمی را با B نشان می‌دهیم، $P(A \cap B)$ را حساب کنیم:

$$P(A) = 0/55, P(B) = 0/16, P(A \cup B) = 0/75 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0/75 = 0/55 + 0/16 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/4$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $1 - P(A') - P(A \cap B)$ کدام است؟

- ۱) $P(B)$ ۲) $P(B')$ ۳) $P(A \cap B')$ ۴) $P(A' \cap B)$

پاسخ: می‌دانیم $1 - P(A') = P(A)$ ، پس:

$$1 - P(A') - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A - B) = P(A \cap B')$$

یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که سکه «پشت» یا تاس ۶ بیاید کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{7}{12}$

پاسخ: اگر پیشامد «پشت» آمدن سکه را با A و پیشامد «۶ آمدن تاس را با B نمایش دهیم، آن‌گاه باید $P(A \cup B)$ را بیابیم:

$$P(A) = \frac{1}{2} = \text{احتمال آن که سکه «پشت» بیاید}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} = \text{احتمال آن که تاس ۶ بیاید}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{12}, \text{ در نتیجه: } A \cap B = \{(6, \text{پ})\}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

اگر در کیسه‌ای، n مهره وجود داشته باشد و بخواهیم r مهره به تصادف از آن خارج کنیم، این کار را می‌توانیم به سه روش مختلف انجام دهیم که در هر روش تعداد حالت‌های انتخاب این r مهره، متفاوت است:

الف) اگر مهره‌ها را با هم (بدون جایگذاری و یک‌دفعه) خارج کنیم، آن‌گاه تعداد حالت‌های انتخاب r مهره برابر است با:

ب) اگر مهره‌ها را یکی پس از دیگری (پی در پی) و بدون جایگذاری خارج کنیم، آن‌گاه تعداد حالت‌های انتخاب r مهره برابر است با:

ج) اگر مهره‌ها را یکی پس از دیگری (پی در پی) و با جایگذاری خارج کنیم، آن‌گاه تعداد حالت‌های انتخاب r مهره برابر است با:

$$n \times n \times \dots \times n = n^r$$

۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ هم زمان و به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم، احتمال آن‌که هر سه لامپ سالم باشند، کدام است؟

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۳ لامپ از ۱۰ لامپ موجود است:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

$$n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

اگر پیشامد A، انتخاب ۳ لامپ سالم از ۶ لامپ سالم باشد، آنگاه:

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد. ۳ مهره به تصادف و هم زمان از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که مهره‌ها، هم رنگ باشند، چقدر است؟

پاسخ: باید هر سه سفید و یا هر سه سیاه باشند، پس:

$$n(A) = \binom{6}{3} + \binom{4}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} + 4 = 24$$

هر سه سیاه

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، برابر با تعداد انتخاب‌های ۳ مهره از ۱۰ مهره است:

در کیسه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره هم زمان و به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه دقیقاً ۲ مهره هم رنگ باشند، کدام است؟

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۳ مهره از ۹ مهره می‌باشد، اگر پیشامد A، انتخاب دو مهره آبی و یک مهره قرمز یا دو مهره قرمز و یک مهره آبی باشد، آن‌گاه:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 \times 4 + 6 \times 5}{84} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}$$

لوحه اگر در صورت سوال، عبارت‌های «بی در بی» یا «یکی پس از دیگری» نیامده باشد، به این معنی است که اشیاء را هم زمان و یک دفعه انتخاب می‌کنیم.

از کیسه‌ای که شامل ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره آبی است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره سیاه از کیسه خارج می‌شود؟

پاسخ:

$$n(A) = \binom{3}{2} \times \binom{6}{1} = 3 \times 6 = 18$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$$

انتخاب ۱ مهره از ۶ مهره

انتخاب ۲ مهره از ۳ مهره

سیاه از ۳ مهره

در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ قرار دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، مجموع شماره‌های این دو مهره، عدد فرد است؟

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۲ مهره از ۵ مهره می‌باشد:

$$n(S) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

برای آن‌که مجموع شماره‌های مهره‌های خارج شده، فرد باشد، باید یکی زوج و دیگری فرد باشد، پس:

یکی زوج

یکی فرد

اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ را روی ۶ مهره یکسان نوشته‌ایم و در کیسه‌ای قرار داده‌ایم. دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری و با جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مجموع اعداد این دو مهره، مضرب ۳ می‌باشد؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{5}{36}$ (۴)

$n(S) = 6 \times 6 = 36$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۲ مهره از ۶ مهره با جایگذاری می‌باشد، پس:

پیشامد A، مضرب ۳ بودن مجموع اعداد دو مهره انتخابی می‌باشد، بنابراین داریم:

$\Rightarrow A = \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (4,5), (5,4), (3,6), (6,3), (3,3), (6,6)\}$

$\Rightarrow n(A) = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ روی ۶ مهره یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره با هم بیرون آوریم، با کدام احتمال، مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟

(رایتی طرح ۸۸)

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴)

$n(S) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۲ مهره از ۶ مهره موجود است:

چون مجموع دو مهره مضرب ۳ است، پس مجموع آن‌ها باید ۳ یا ۶ باشد (دقت کنید که مجموع آن‌ها نمی‌تواند ۱۲ باشد چون دو مهره با شماره ۶ نداریم):

$A = \{(1,2), (1,5), (2,4), (4,5), (3,6)\} \Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

توجه کنید که چون دو مهره با هم انتخاب می‌کنیم، پس زوج‌های (۱، ۲) و (۲، ۱) نداریم و به جای این دو حالت، مجموعه (۱، ۲) را داریم. در واقع تمایزی به صورت مهره اول و مهره دوم نداریم.

شش مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ در ظرفی قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم و بدون جایگذاری، دو مهره دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره با شماره ۳ خارج شده است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ: (روش اول): با توجه به این که آزمایش تصادفی در دو مرحله صورت می‌گیرد، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابرست با:

$n(S) = \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 15 \times 6 = 90$

اگر A را پیشامد خارج شدن مهره شماره ۳ در نظر بگیریم، این مهره ممکن است در بار اول و یا در بار دوم که دو مهره را خارج می‌کنیم، انتخاب شود.

بنابراین داریم:

$$n(A) = \underbrace{\binom{1}{1} \times \binom{5}{1}}_{\text{انتخاب مهره شماره ۳ در مرحله اول انتخاب شود}} + \underbrace{\binom{5}{2} \times \binom{1}{1}}_{\text{انتخاب مهره شماره ۳ در مرحله دوم انتخاب شود}}$$

$= 1 \times 5 + \frac{5 \times 4}{2} \times 1 = 5 + 10 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

(روش دوم): از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم. فرض کنیم A' پیشامد آن باشد که در مرحله اول و مرحله دوم، مهره شماره ۳ خارج نشود. واضح است که:

$n(S) = \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$

برای آن که در مرحله اول مهره شماره ۳ خارج نشود، باید دو مهره انتخابی از پنج مهره دیگر باشد که این کار به $\binom{5}{2}$ روش مختلف قابل انجام است و چون در مرحله اول دو مهره با شماره غیر از ۳ خارج شده است، پس چهار مهره باقی مانده‌اند که مهره شماره ۳ بین آن‌هاست. برای آن که در این مرحله، مهره شماره ۳ خارج نشود، باید دو مهره انتخابی از سه مهره دیگر باشد که به $\binom{3}{2}$ روش مختلف، این کار انجام پذیر است، پس طبق اصل ضرب داریم:

$n(A') = \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 10 \times 3 = 30 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

یک عدد سه رقمی و بدون تکرار ارقام با رقم‌های ۳، ۴، ۵، ۷، ۹ می‌نویسیم. احتمال آن که این عدد، بزرگ‌تر از ۵۷۰ باشد، کدام است؟

☐ (۱) $\frac{1}{3}$
☐ (۲) $\frac{1}{2}$
☐ (۳) $\frac{2}{3}$
☐ (۴) $\frac{1}{4}$

$n(S) = 6 \times 4 \times 3 = 72$ = تعداد اعداد سه رقمی با ارقام داده شده

اعداد سه رقمی بزرگ‌تر از ۵۷۰ را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) اگر صدگان ۵ باشد، آن‌گاه دهگان می‌تواند ۷ یا ۹ باشد ولی یکان محدودیتی نداریم، پس در این حالت: $1 \times 2 \times 3 = 6$ = تعداد اعداد سه رقمی

ب) اگر صدگان ۷ یا ۹ باشد، آن‌گاه برای دهگان و یکان محدودیتی نداریم، پس:

$2 \times 4 \times 3 = 24 \Rightarrow n(A) = 6 + 24 = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$

چهار رقم ۲، ۳ و ۴ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا یک عدد چهاررقمی ساخته شود. با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

☐ (۱) $\frac{1}{3}$
☐ (۲) $\frac{5}{12}$
☐ (۳) $\frac{4}{9}$
☐ (۴) $\frac{5}{9}$

پاسخ: می‌دانیم عددی مضرب ۶ است که هم زوج و هم مضرب ۳ باشد. همچنین عددی مضرب ۳ است که مجموع ارقامش به ۳ بخش پذیر باشد. مجموع

چهار رقم ۲، ۳ و ۴ برابر ۶ است و همواره بر ۳ بخش پذیر است، پس کافی است عدد چهاررقمی موردنظر، زوج باشد تا مضرب ۶ شود.

$n(A) = 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ اگر رقم یکان صفر باشد. $n(A) = 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ اگر رقم یکان ۲ باشد. $\Rightarrow n(A) = 4 + 4 = 8$

$n(S) = 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{8} = 1$

توجه کنید که چون ارقام را کنار هم قرار می‌دهیم، پس تکرار ارقام مجاز نیست.

با جابه‌جایی تصادفی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ تولید اعداد ۶ رقمی، احتمال آن که در عدد حاصل، رقم‌های ۲ یک‌درمیان قرار گیرند، کدام است؟

☐ (۱) $\frac{1}{10}$
☐ (۲) $\frac{1}{5}$
☐ (۳) $\frac{2}{3}$
☐ (۴) $\frac{2}{8}$

پاسخ: برای آنکه ارقام ۲ یک‌درمیان باشند، می‌توانیم با ۲ یا رقمی غیر از ۲ شروع کنیم. پس تعداد اعداد ۶ رقمی که در آن‌ها رقم‌های ۲ یک‌درمیان قرار

دارند، برابر است با:

جابه‌جایی ۵ و ۶ و ۲ جابه‌جایی رقم‌های ۲

$n(A) = 2 \times 4 \times 3! = 2 \times 6 \times 12 = 144$

با ۲ شروع شود یا نه

$n(S) = 6! = 720 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$

توجه کنید که چون سه رقم تکراری ۲ داریم، در تعیین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، ۶! را بر ۳! تقسیم کردیم.

سه کتاب ریاضی مختلف و چهار کتاب فیزیک مختلف را به تصادف در یک قفسه قرار می‌دهیم. احتمال آن که کتاب‌های ریاضی و فیزیک یک‌درمیان

قرار گرفته باشند، چقدر است؟

☐ (۱) $\frac{1}{30}$
☐ (۲) $\frac{1}{25}$
☐ (۳) $\frac{1}{30}$
☐ (۴) $\frac{1}{35}$

پاسخ: چون تعداد کتاب‌های فیزیک، یکی بیشتر است، بنابراین باید با کتاب فیزیک شروع کنیم، پس:

جابه‌جایی کتاب‌های ریاضی جابه‌جایی کتاب‌های فیزیک

$n(A) = 4! \times 3!$

$\Rightarrow P(A) = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{24 \times 6}{5040} = \frac{1}{35}$

اگر حروف کلمه «جمهوری» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، با کدام احتمال، کلمه‌ای که ساخته می‌شود با حرف «ج» شروع می‌شود و به حرف

«ی» ختم می‌شود؟

☐ (۱) $\frac{1}{6}$
☐ (۲) $\frac{1}{10}$
☐ (۳) $\frac{1}{15}$
☐ (۴) $\frac{1}{30}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای، تمامی جایگشت‌های حروف «جمهوری» می‌باشد. $n(S) = 7! = 5040$

$n(A) = 1! \Rightarrow P(A) = \frac{1}{5040}$

اگر حروف کلمه «جمهوری» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، با کدام احتمال دو حرف «ج» و «ه» کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ☐ ۱) $\frac{1}{6}$
 ☐ ۲) $\frac{1}{3}$
 ☐ ۳) $\frac{1}{2}$
 ☐ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای، تمامی جایگشت‌های حروف کلمه «جمهوری» می‌باشد، پس:

حروف «ج» و «ه» کنار هم به ۲! طریق می‌توانند جایجا شوند. از طرفی اگر «ج» و «ه» را در یک بسته قرار دهیم و ۴ حرف دیگر را جداگانه در نظر بگیریم، این

۵ شیء به ۵! طریق می‌توانند جایجا شوند، پس:

$$n(A) = 2 \times 5! \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 5!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

اگر حروف کلمه «جمهوری» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد، حرف «ی» آخر باشد؟

- ☐ ۱) $\frac{1}{6}$
 ☐ ۲) $\frac{5}{6}$
 ☐ ۳) $\frac{2}{3}$
 ☐ ۴) $\frac{5}{30}$

پاسخ: کلمه «جمهوری» دارای ۶ حرف است، پس به ۶! طریق می‌توان حروف آن را جایجا کرد، در نتیجه:

اگر حرف «ی» آخر باشد، آن‌گاه ۵ حرف دیگر را می‌توان به ۵! روش جایجا کرد، پس تعداد کلمات ۶ حرفی که حرف «ی» آخرین حرف آن باشد برابر با

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$$

حروف کلمه «ATAXIA» را بریده و به‌طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، هر سه حرف «A» کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ☐ ۱) $\frac{1}{5}$
 ☐ ۲) $\frac{1}{5}$
 ☐ ۳) $\frac{1}{4}$
 ☐ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای، تمامی جایگشت‌های حروف کلمه «ATAXIA» می‌باشد که با توجه به اینکه سه حرف یکسان در این کلمه وجود دارد، تعداد

$$n(S) = \frac{6!}{3!} = 120$$

سه حرف «A» را کنار هم قرار می‌دهیم و یک شیء در نظر می‌گیریم. این یک شیء با سه شیء دیگر یعنی حروف X، T و I چهار شیء تشکیل می‌دهند

$$n(A) = 4! = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

از بین اعداد سه رقمی، به تصادف یک عدد انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

- ☐ ۱) $\frac{1}{24}$
 ☐ ۲) $\frac{1}{25}$
 ☐ ۳) $\frac{1}{26}$
 ☐ ۴) $\frac{1}{28}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای، تمامی اعداد سه رقمی می‌باشد:

$$n(S) = 9 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^2 = 900$$

همه ارقام به جز صفر

اگر پیشامد A، تمامی اعدادی باشد که حداقل یک رقم ۲ دارند، در نتیجه A'، تمامی اعدادی است که رقم ۲ ندارند، حال داریم:

$$n(A') = 8 \times 9 \times 9 = 8 \times 9^2 = 648$$

همه ارقام به جز ۲
همه ارقام به جز صفر و ۲

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{8 \times 9 \times 9}{9 \times 10 \times 10} = 1 - \frac{8 \times 9}{10 \times 10} = 1 - \frac{72}{100} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، فقط دو مهره

خارج شده، هم رنگ هستند؟

- ☐ ۱) $\frac{41}{120}$
 ☐ ۲) $\frac{37}{60}$
 ☐ ۳) $\frac{79}{120}$
 ☐ ۴) $\frac{31}{60}$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۳ مهره از ۱۰ مهره می‌باشد:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

برای آن‌که فقط دو مهره از سه مهره خارج شده، هم رنگ باشند، سه حالت وجود دارد:

حالت اول: یا دو مهره سفید و یک مهره از ۵ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

حالت دوم: یا دو مهره سیاه و یک مهره از ۷ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

حالت سوم: یا دو مهره قرمز و یک مهره از ۸ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

حالت سوم: یا دو مهره قرمز و یک مهره از ۸ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

حالت سوم: یا دو مهره قرمز و یک مهره از ۸ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

حالت سوم: یا دو مهره قرمز و یک مهره از ۸ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

حالت سوم: یا دو مهره قرمز و یک مهره از ۸ مهره دیگر انتخاب می‌شود.

بنابراین طبق اصل‌های ضرب و جمع داریم:

$$n(A) = \binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{2}{2}\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\binom{8}{1} = 10 \times 5 + 3 \times 7 + 1 \times 8 = 79 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{79}{120}$$

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

$$\frac{4}{11} \quad (4) \quad \frac{7}{22} \quad (3) \quad \frac{3}{11} \quad (2) \quad \frac{5}{22} \quad (1)$$

پاسخ: در این کیسه، در مجموع ۱۲ مهره وجود دارد، بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$ عضو دارد. از طرفی برای آنکه رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت باشد باید یک مهره سفید، یک مهره سیاه و یک مهره آبی انتخاب شود، در نتیجه تعداد اعضای پیشامد فوق برابر است با:

$$n(A) = \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال، این دو مهره همرنگ نیستند؟

$$\frac{31}{45} \quad (3) \quad \frac{31}{45} \quad (2) \quad \frac{28}{45} \quad (1) \quad \frac{22}{45} \quad (4)$$

پاسخ: در این جعبه در مجموع ۱۰ مهره وجود دارد، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد انتخاب‌های ۲ مهره از ۱۰ مهره می‌باشد:

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2!} = 45$$

روش اول: برای آن‌که دو مهره هم رنگ نباشند، باید یکی سفید و یکی سیاه یا یکی سفید و یکی قرمز یا یکی سیاه و یکی قرمز باشد. بنابراین تعداد اعضای این پیشامد برابر است با:

$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1} = 2 \times 3 + 2 \times 5 + 2 \times 5 = 6 + 10 + 10 = 26$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{45}$$

روش دوم: می‌توانیم از روش پیشامد متمم استفاده کنیم. در واقع پیشامد هم رنگ نبودن دو مهره، متمم پیشامد هم رنگ بودن هر دو مهره است. برای آن‌که هر دو مهره هم رنگ باشند، باید هر دو سفید یا هر دو سیاه یا هر دو قرمز باشند، پس تعداد اعضای پیشامد متمم برابر است با:

$$n(A^c) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{5}{2} = 1 + 3 + 10 = 14$$

$$\Rightarrow P = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$

در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

$$\frac{50}{143} \quad (4) \quad \frac{40}{143} \quad (3) \quad \frac{25}{77} \quad (2) \quad \frac{30}{91} \quad (1)$$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش، برابر با تعداد روش‌های انتخاب ۴ مهره از ۱۴ مهره درون جعبه می‌باشد:

$$n(S) = \binom{14}{4} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4!} = 7 \times 13 \times 11$$

برای آن‌که یک مهره قرمز و حداقل دو مهره سفید انتخاب شود، دو حالت وجود دارد. یا یک مهره قرمز و دو مهره سفید و یک مهره سیاه انتخاب شود یا یک مهره قرمز و سه مهره سفید انتخاب شود. در نتیجه:

$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{7}{2} + \binom{2}{1}\binom{5}{2} = 2 \times 21 \times 5 + 2 \times 10 = 280$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{280}{7 \times 13 \times 11} = \frac{40}{143}$$

مثلاً: اگر احتمال درآفل یکی، پرسیده شده باشد، از متمم استفاده می‌کنیم. مثلاً:

۱- هیچ کدام سفید نباشند $1 - P(\text{درآفل یکی سفید باشد})$

۲- در مقایسه $P(A)$ به تعداد کل مهره‌هایی که خارج می‌کنیم دقت کنید. مثلاً اگر چهار مهره بیرون بیاوریم و بخواهیم سه‌تای آن‌ها سفید باشند، آن یک مهره هم از بین رنگ‌های دیگر حذف خارج شود.

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

آمار، به مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، آمار گفته می‌شود.

علم آمار، علم آمار، مجموعه‌ای از روش‌ها برای جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی، تحلیل و تفسیر آن‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است.

مراحل علم آمار:



نتیجه استفاده از علم آمار، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده است.

جامعه (یا جمعیت): مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره ویژگی خاصی از آن‌ها تحقیق می‌کنیم، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و به هر کدام از این افراد یا اشیاء، عضو جامعه می‌گوییم.

اندازه (یا حجم): تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه می‌گویند.

نمونه: به قسمتی از یک جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود، نمونه می‌گویند و به هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده، یک عضو نمونه می‌گوییم.

اندازه (یا حجم) نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌گویند.

به عنوان مثال از دبیرستانی که ۵۰۰ دانش‌آموز دارد، ۵۰ دانش‌آموز، انتخاب می‌کنیم و شاخص توده بدن آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. در این صورت اندازه جامعه، ۵۰۰ و اندازه نمونه ۵۰ می‌باشد و ویژگی مورد بررسی، شاخص توده بدن آن‌ها می‌باشد.

سردشمار: اگر تمام افراد یا اعضای جامعه مورد بررسی قرار گیرند، می‌گوییم سرشماری انجام داده‌ایم. به عنوان مثال، اگر برای تحقیق در تأثیر آلودگی صوتی بر سلامت روانی افراد ساکن شیراز، تمام شهروندان شیراز، مورد مطالعه قرار گیرند، آن‌گاه سرشماری انجام شده است.

سومین مرحله از مراحل علم آمار کدام است؟

- ۱) نتیجه‌گیری ☐ ۲) سازماندهی داده‌ها ☐ ۳) پیش‌بینی ☐ ۴) تحلیل و تفسیر داده‌ها ☐
- پاسخ: مراحل علم آمار به ترتیب: ۱- جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش داده‌ها ۳- تحلیل و تفسیر داده‌ها و ۴- نتیجه‌گیری می‌باشد.

نتیجه استفاده از علم آمار کدام است؟

- ۱) جمع‌آوری اعداد و ارقام ☐ ۲) تحلیل و تفسیر داده‌ها ☐ ۳) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری ☐ ۴) سازماندهی و نمایش داده‌ها ☐
- پاسخ: نتیجه استفاده از علم آمار، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده است.

چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

- الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع‌آوری داده‌هاست. ☐ ب) «علم آمار» همان مجموعه اعداد و ارقام است. ☐
- ج) نتیجه استفاده از علم آمار، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری است. ☐ د) دومین مرحله از مراحل علم آمار، تحلیل و تفسیر داده‌هاست. ☐

- ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴ ☐

پاسخ: قسمت (ب) نادرست است. مجموعه اعداد و ارقام، تعریف «آمار» است نه «علم آمار».

قسمت (د) هم نادرست است، زیرا دومین مرحله از مراحل «علم آمار»، سازماندهی و نمایش داده‌ها می‌باشد.

برای بررسی آفت‌های درختان یک باغ در استان اصفهان، ۱۰ درخت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. «جامعه» کدام است؟

- ۱) تمام درختان همان باغ ☐ ۲) درختان باغ‌های استان اصفهان ☐

- ۳) همان ۱۰ درخت مورد بررسی ☐ ۴) تمام درخت‌های در دسترس ☐

پاسخ: با توجه به تعاریف گفته شده، واضح است که ۱۰ درخت مورد بررسی، «نمونه» می‌باشد و تمام درختان آن باغ، «جامعه» را تشکیل می‌دهند.

از ۲۰۰۰۰ لامپ تولیدی توسط کارخانه‌ای، ۲۰۰ لامپ مورد بررسی قرار گرفته‌اند و ۵ لامپ معیوب مشاهده شده است. حجم نمونه کدام است؟

- ۱) ۲۰۰۰۰ ☐ ۲) ۲۰۰ ☐ ۳) ۱۹۵ ☐ ۴) ۵ ☐

پاسخ: با توجه به تعاریف درسنامه، حجم نمونه برابر با تعداد اعضای نمونه است. در این سوال دقت کنید که حجم یا اندازه جامعه برابر با ۲۰۰۰۰ و حجم یا اندازه نمونه برابر با ۲۰۰ می‌باشد.

سرشماری وقتی انجام گرفته است که:

- ۱) حجم نمونه با حجم جامعه برابر باشد. ☐
- ۲) حجم نمونه از نصف حجم جامعه، یک واحد بیشتر باشد. ☐
- ۳) اعضای جامعه در دسترس نباشند. ☐
- ۴) تمام اعضای نمونه مورد بررسی دقیق قرار گرفته باشند. ☐

پاسخ: اگر تعداد اعضای نمونه با تعداد اعضای جامعه برابر باشد، آن گاه نمونه، همان جامعه است، در نتیجه روی تمام اعضای جامعه مطالعه صورت گرفته است و سرشماری انجام شده است.

برای بررسی میزان چاقی دانش‌آموزان پسر دبیرستانی یک شهرستان، دبیرستان پسرانه دهخدا در این شهرستان را انتخاب می‌کنیم و شاخص توده بدنی دانش‌آموزانی از این مدرسه که رقم پیکان کد ملی آن‌ها مضرب ۳ می‌باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بررسی موضوع مورد بررسی جامعه و نمونه است.

- ۱) میزان چاقی - کل دانش‌آموزان پسر این شهرستان - دانش‌آموزانی که رقم پیکان کد ملی آن‌ها مضرب ۳ است. ☐
- ۲) میزان چاقی - کل دانش‌آموزان دبیرستانی پسر این شهرستان - دانش‌آموزان دبیرستان دهخدا ☐
- ۳) میزان چاقی - کل دانش‌آموزان دبیرستانی پسر این شهرستان - دانش‌آموزانی از دبیرستان دهخدا که رقم پیکان کد ملی آن‌ها مضرب ۳ است. ☐
- ۴) شاخص توده بدنی - کل دانش‌آموزان دبیرستانی پسر این شهرستان - دانش‌آموزان دبیرستان دهخدا ☐
- پاسخ: با توجه به تعاریف بیان شده، موضوع مورد بررسی، میزان چاقی دانش‌آموزان می‌باشد و محاسبه توده بدنی آن‌ها، وسیله‌ای برای اندازه‌گیری چاقی است نه موضوع مورد بررسی.

دسته‌بندی متغیرها

درس سوم: متغیر و انواع آن

متغیر: ویژگی یا صفتی از اعضای جامعه که مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد را متغیر می‌نامیم. معمولاً این ویژگی از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند. به عنوان مثال قد یا وزن دانش‌آموزان یک کلاس را می‌توان به عنوان متغیر، مورد بررسی قرار داد.

مقدار متغیر: عددی که به متغیر مورد بررسی نسبت می‌دهیم را مقدار متغیر می‌نامیم.

انواع متغیر: متغیرها به دو دسته کتبی و کیفی تقسیم می‌شوند.

متغیر کتبی: متغیری که قابل اندازه‌گیری است. مانند قد، وزن، تعداد درختان یک باغ و یا تعداد صفحات یک کتاب.

متغیر کیفی: متغیری که قابل اندازه‌گیری نیست. مانند گروه خونی یا، رنگ انومبیل و یا میزان لذت بردن از یک موسیقی.

انواع متغیرهای کتبی:

متغیرهای کتبی به دو دسته متغیرهای پیوسته و متغیرهای گسسته تقسیم می‌شوند.

متغیرهای پیوسته: متغیرهایی هستند که اگر دو مقدار a و b را بتوانند اختیار کنند، آن گاه هر مقدار بین آنها را نیز می‌توانند اختیار کنند. مانند قد، وزن یا فاصله دو نقطه روی محور x ها.

متغیرهای گسسته: متغیرهایی هستند که پیوسته نباشند. مقدار این متغیرها با شمارش به دست می‌آید. مثل تعداد دانش‌آموزان یک کلاس، یا تعداد درختان یک باغ.

انواع متغیرهای کیفی:

متغیرهای کیفی به دو دسته متغیرهای اسمی و متغیرهای ترتیبی تقسیم می‌شوند.

متغیرهای ترتیبی: متغیرهایی هستند که نوعی ترتیب طبیعی در آن‌ها وجود دارد مثل حروف الفبا یا سطح تحصیلات (دیپلم - فوق دیپلم - کارشناسی ...).

متغیرهای اسمی: متغیرهایی کیفی هستند که ترتیب خاصی ندارند مانند گروه خونی یا جنسیت افراد (زن و مرد).

مطالب فوق، در نمودار زیر خلاصه شده است.



شاخص توده بدن چه متغیری است؟

- ۱) کتبی - گسسته ۲) کتبی - پیوسته ۳) کیفی - ترتیبی ۴) کیفی - اسمی

پاسخ: می دانیم شاخص توده بدن از تقسیم وزن شخصی به توان دوم قد او به دست می آید که معمولاً عددی اعشاری است.

$$\text{وزن (بر حسب کیلوگرم)} \\ \text{شاخص توده بدن} = \frac{\text{قد (بر حسب متر)}}{2}$$

تعداد خودروهای خرید و فروش شده چه نوع متغیری است؟

- ۱) پیوسته ۲) اسمی ۳) گسسته ۴) ترتیبی

پاسخ: متغیرهایی که از نوع تعداد می باشند، قابل اندازه گیری هستند و مقادیرشان با شمارش به دست می آید، پس متغیرهایی کتبی و گسسته هستند.

مراحل تحصیل، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

- ۱) کتبی گسسته ۲) کتبی پیوسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

پاسخ: مراحل تحصیلی مانند دبیرم - فوق دبیرم - کارشناسی و متغیر کیفی ترتیبی است.

گروه خونی افراد، چه متغیری است؟

- ۱) کتبی پیوسته ۲) کیفی اسمی ۳) کیفی ترتیبی ۴) کتبی گسسته

پاسخ: چون به گروه خونی نمی توان عددی نسبت داد، پس کیفی است و واضح است که ترتیب خاصی در آن وجود ندارد، در نتیجه اسمی است.

نوع آلودگی هوا، چگونه متغیری است؟

- ۱) کتبی گسسته ۲) کتبی پیوسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

پاسخ: چون نوع آلوده ها بر حسب نام آلوده بیان می شود، پس کیفی اسمی است.

قطر تنه درختان یک باغ کدام نوع متغیر است؟

- ۱) کتبی پیوسته ۲) کتبی گسسته ۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

پاسخ: قطر درختان باغ، قابل اندازه گیری است، پس «کتبی» است و اعداد اعشاری هم می تواند باشد، بنابراین پیوسته است.

کدام یک از متغیرهای زیر کمی گسسته است؟

- ۱) شماره شناسنامه ۲) قد ۳) رنگ چشم ۴) زمان مطالعه

پاسخ: شماره شناسنامه عددی طبیعی است، پس متغیر کتبی گسسته است. دقت کنید که قد و زمان مطالعه متغیرهای کتبی پیوسته اند و رنگ چشم، متغیر کیفی اسمی است.

کدام یک از متغیرهای زیر کیفی اسمی است؟

- ۱) وزن یک سیب ۲) کیفیت یک سیب ۳) اقوام ایرانی ۴) شماره دانش آموزی

پاسخ: وزن یک سیب متغیر کتبی پیوسته است، کیفیت یک سیب متغیر کیفی ترتیبی است (درجه ۱، ۲ و ...) و شماره دانش آموزی متغیر کتبی گسسته است. اما اقوام ایرانی متغیری غیر قابل اندازه گیری و بدون ترتیبی طبیعی است، پس کیفی اسمی است.

خطای اندازه گیری در کدام نوع متغیرها وجود دارد؟

- ۱) کتبی گسسته ۲) کتبی پیوسته ۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

پاسخ: چون «اندازه گیری» بیان شده پس متغیرهای کیفی حذف می شوند. از طرفی مقدار متغیرهای گسسته از طریق شمارش به دست می آید و خطای وسایل اندازه گیری در آن ها وجود ندارد. پس خطای اندازه گیری در آن ها وجود ندارد. اما مقدار متغیرهای کمی پیوسته با استفاده از دستگاه های اندازه گیری تعیین می شوند، بنابراین خطای اندازه گیری در متغیرهای کتبی پیوسته وجود دارد.

چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی ترتیبی هستند؟

الف) میزان هوش (بالا - متوسط - پایین)

ب) میزان رضایت مشتری (زیاد - متوسط - کم)

ج) شاخص آلودگی هوا

د) نوع آلودگی هوا

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: میزان هوش و میزان رضایت مشتری متغیرهای کیفی ترتیبی هستند اما نوع آلودگی هوا متغیر کیفی اسمی است. در ضمن، شاخص آلودگی هوا متغیری کتبی است.

« آزمون جامع ۱
« آزمون جامع ۲
« آزمون جامع ۳
« آزمون جامع ۴
« پاسخنامه تشریحی

آزمون‌های جامع



۱۵۲



۱. متمم مجموعه $(B - A) \cup (B - A')$ نسبت به مجموعه مرجع U کدام است؟

- ۱) B (۱) ۲) B' (۲) ۳) A (۳) ۴) A' (۴)

۲. اگر A مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳ و $B = \{a \in \mathbb{Z}_+ | a < 20\}$ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ نامتناهی است؟

- ۱) B (۱) ۲) $A \cap B$ (۲) ۳) $B - A$ (۳) ۴) B' (۴)

۳. اگر $n(A) = 40$ ، $n(B) = 15$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، تعداد اعضای $A \cap B'$ کدام است؟

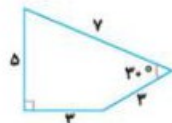
- ۱) ۱۰ (۱) ۲) ۲۰ (۲) ۳) ۲۵ (۳) ۴) ۳۰ (۴)

۴. حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ \cos 39^\circ \cos 27^\circ + \sin 27^\circ}{\cos 16^\circ \cot 27^\circ + \tan 6^\circ \tan 45^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$ (۱) ۲) $-\sqrt{3}$ (۲) ۳) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴)

۵. مساحت مثلث مقابل با مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۲ برابر است. مقدار x چقدر است؟

- ۱) ۲ (۱) ۲) ۳ (۲) ۳) ۴ (۳) ۴) ۵ (۴)



۶. مساحت شکل مقابل کدام است؟

- ۱) ۹ (۱) ۲) ۱۸ (۲) ۳) $\frac{51}{4}$ (۳) ۴) ۳۶ (۴)

۷. اگر $3^{2n+1} = \sqrt{5}$ باشد، مقدار 9^{2n-1} کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{9}$ (۱) ۲) ۵ (۲) ۳) $\frac{5}{81}$ (۳) ۴) $\frac{5}{81}$ (۴)

۸. اگر $A = \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{54} \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{6}$ باشد، مقدار $\sqrt[3]{A^2 - 9}$ کدام است؟

- ۱) ۳ (۱) ۲) $\sqrt[3]{46}$ (۲) ۳) $\sqrt[3]{6\sqrt{6}}$ (۳) ۴) $\sqrt[3]{42}$ (۴)

۹. مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x^2 - 16)(x^2 + 5)}{(x^2 + x + 1)(2x + 1)} > 0$ به صورت $(a, \frac{-1}{2}) \cup (b, +\infty)$ می باشد. $a + b$ کدام است؟

- ۱) صفر (۱) ۲) ۸ (۲) ۳) -۸ (۳) ۴) -۴ (۴)

۱۰. محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۷۰ مترو ۱۶ متر مربع می باشد. نسبت طول به عرض مستطیل برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{4}$ (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) $\frac{4}{5}$ (۳) ۴) ۴ (۴)

۱۱. اگر رابطه $\{(3, m^2 + 2m + 2), (m^2 + 1, 4), (2, 5), (3, 6m - 1)\}$ یک تابع باشد، آنگاه معادله $x^2 - (m^2 + 1)x + 25x = 0$ چند ریشه

متمايز دارد؟

- ۱) صفر (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) ۲ (۳) ۴) ۳ (۴)

۱۲. هشت نقطه مطابق شکل روی محیط یک دایره قرار دارند. چند چهارضلعی به رئوس این نقاط می توان رسم کرد. طوری که

حتماً این چهارضلعی ها شامل رأس A باشند؟

- ۱) $\binom{8}{3}$ (۱) ۲) ۳۵ (۲) ۳) ۱۴۰ (۳) ۴) ۳۶ (۴)

۱۳. حاصل $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6}$ برابر با کدام است؟

- ۱) ۲۱۶ (۱) ۲) ۳۶ (۲) ۳) ۳۲ (۳) ۴) ۶۴ (۴)

۱۴. تعداد جایگشت های حروف کلمه «GREEN» به طوری که E ها کنار هم نباشند، کدام است؟

- ۱) ۲۴ (۱) ۲) ۶۰ (۲) ۳) ۸۴ (۳) ۴) ۳۶ (۴)

۱۵. دو تاس را با هم می اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده متوالی هستند؟

- ۱) $\frac{2}{9}$ (۱) ۲) $\frac{5}{18}$ (۲) ۳) $\frac{1}{3}$ (۳) ۴) $\frac{4}{9}$ (۴)

(تورن رانل ۹۵)

۱۶ گروه خونی افراد یک جامعه چه نوع متغیر تصادفی است؟

- (۱) کمی - پیوسته (۲) کیفی - پیوسته (۳) کیفی - اسمی (۴) کیفی - ترتیبی

آزمون جامع (۲)

۱ اگر بازه $(1, 2a + 5)$ شامل سه عدد صحیح باشد، محدوده a کدام است؟

- (۱) $2/5 < a \leq 3$ (۲) $3/5 < a \leq 4$ (۳) $4 < a \leq 4/5$ (۴) $4/5 < a \leq 5$

۲ در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} + 1$. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵

۳ در یک دنباله هندسی صعودی، مجموع جملات پنجم و ششم ۴۸ و تفاضل جمله پنجم از هفتم برابر ۴۸ می باشد. قدرنسبت کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) $\frac{1}{5}$

۴ اگر $\sin \alpha - \sqrt{3} = 0$ و $\tan \alpha = \sqrt{\frac{47}{22}}$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{3}$

۵ اگر خط به معادله $(m-1)y - mx + 5m + 7 = 0$ با جهت مثبت محور h زاویه 45° بسازد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

(تقریب ۹۵)

۶ مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ واحد مربع است. اندازه قطر کوچک آن، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۷ حاصل $(\sqrt{50} + \sqrt[3]{64} - \sqrt{32} - \sqrt[3]{32})^4$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

(ریاضی دهم)

۸ اگر $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 4}$ و $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{3} + 4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $7\sqrt{2}$

۹ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + |x + 1|$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(1, 2)$

(تقریب دهم)

۱۰ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{x+1}{x-3} < -1$ کدام است؟

- (۱) $x < \frac{1}{2}$ (۲) $x < 3$ (۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ (۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

(ریاضی دهم)

۱۱ معادله $2 = (x^2 - 2x) - (x^2 - 2x)^2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲ اگر نمودار $f(x)$ شکل مقابل باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 2] \cup [2, 3]$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $[-2, 3] \cup [2, 3]$ (۴) $[-2, 3]$

ریاضی دهم

۱۳ حاصل $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{8}$ کدام است؟

- (۱) ۲۵۵ (۲) ۲۵۶ (۳) ۲۴۸ (۴) ۲۴۷

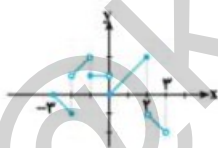
۱۴ با حروف کلمه «talk» چند کلمه سه حرفی (با معنی یا بی معنی) می توان نوشت که حتماً شامل حرف «t» باشد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۶ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۱۵ در جعبه ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون بیاوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟

(تقریب دهم)

- (۱) $\frac{28}{45}$ (۲) $\frac{29}{45}$ (۳) $\frac{31}{45}$ (۴) $\frac{32}{45}$



۱۶ کدام تعریف نادرست است؟

- (۱) متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری باشند، را متغیرهای کمی گویند.
 (۲) متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نباشند را متغیرهای کیفی گویند.
 (۳) متغیر کیفی اسمی متغیری غیرقابل اندازه‌گیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد.
 (۴) تعداد اعضای نمونه را حجم نمونه می‌گویند.

آزمون جامع (۳)

۱ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم و U مجموعه مرجع باشد، مجموعه $[(A-B) \cup (B-A)] \cap A$ برابر با کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cap B$

۲ اگر دنباله با جمله عمومی $a_n = 6n^2 + 2n + 10(3 - 2n)$ یک دنباله خطی باشد، جمله پنجم دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۳ در یک دنباله حسابی $a_1 = 14$ و $a_7 + a_8 = 20$ می‌باشد. جمله چهارم دنباله کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۴ اگر $\sin x$ و انتهای کمان x در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، $\frac{\cos x + \cot x}{1 + \sin x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵ شش ضلعی منتظمی در داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{2}{3}$ واحد محاط شده است (مطابق شکل). مساحت ناحیه سایه‌زده کدام است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) $3\sqrt{3} + \frac{9}{4}$ (۲) $3(\sqrt{3} - \frac{9}{4})$ (۳) $2\sqrt{3} - \frac{9}{4}$ (۴) $2(\sqrt{3} + \frac{9}{4})$

۶ اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha}(1 - \sin^2 \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (۲) $\cos \alpha - \sin \alpha$ (۳) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (۴) $-\sin \alpha - \cos \alpha$

۷ حاصل عبارت $\frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2}\sqrt{3})}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۴

۸ اگر عبارت $\sqrt{\frac{y}{x^2} - \frac{9}{y}} + \sqrt{yx - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- (۱) $[\frac{2}{3}, 2]$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

(رابطی دالزی ۷۷)

۹ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 5 - |x - 1|$ و $y = |x|$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۰ در معادله درجه دوم $6 = x^2 - 2x + 1 + 2\sqrt{3}(x - 1)$ ، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

- (۱) $4 - \sqrt{3}$ (۲) $3 - \sqrt{3}$ (۳) $-3 - \sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۱ اگر $f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 20}{x^2 - 6x + 7}$ مقدار $f(3 - \sqrt{5})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲ اگر بخواهیم یک کد ۶ حرفی شامل چهار حرف از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ و ۲ حرف از مجموعه $\{A, B, C, D\}$ انتخاب کنیم و در یک ردیف قرار

دهیم چند حالت امکان‌پذیر است؟

- (۱) $2! \times \binom{4}{2} \times \binom{6}{4}$ (۲) $\binom{6}{4} \times \binom{4}{2}$ (۳) $120 \times 6!$ (۴) $90 \times 6!$

۱۳ به چند طریق می‌توان ۸ ماشین متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار داد، به طوری که ۳ ماشین مخصوص هرگز کنار هم نباشند؟

- (۱) $8! - 3!$ (۲) $8! - 6!$ (۳) $8! - \frac{6!}{3!}$ (۴) $8! - (6 \times 3!)$

۱۴ در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج

شده متفاوت است؟

- (۱) $\frac{5}{22}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{4}{11}$

(تقریب دالزی ۷۶)

۱۵ کدام یک از گزینه‌ها متغیر کمی پیوسته می‌باشد؟

- (۱) تعداد دانش‌آموزان یک کلاس (۲) مراحل رشد انسان (۳) RH خون افراد (۴) میزان آلودگی هوای تهران

آزمون جامع (۳)

۱ اگر $A = [-5, a]$ ، $B = [a - 4, 2a]$ ، $C = [-b, 1]$ و $A \cap B = C$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲ در یک دنباله اعداد $a_1 = 3$ و برای $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_4$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۳ در یک دنباله هندسی a_1 ، a_2 و a_3 می‌توانند سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد، چند برابر کوچک‌ترین آن‌هاست؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $5 + 2\sqrt{3}$ (۳) $5 + 4\sqrt{3}$ (۴) $7 + 4\sqrt{3}$

۴ در مثلثی یکی از زاویه‌ها 60° درجه و ضلع مقابل به این زاویه $3\sqrt{3}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازه ضلع سوم کدام است؟

- (۱) ۶ و ۳ (۲) ۷ و ۴ (۳) $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$ (تقریبی دقت ۹۶)

۵ مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{9}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{2}$

۶ ساده شده عبارت $\frac{\cos \alpha \cot \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha + \cot \alpha \sin \alpha + \cot^2 \alpha \sin \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \alpha$ (۲) $\cos \alpha$ (۳) $\tan \alpha$ (۴) $\cot \alpha$

۷ اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^2} \times \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^4} \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، مقدار $A^2 + 2A + 1$ کدام است؟

- (۱) $(\sqrt{3} + 1)^2$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) $(\sqrt{3} - 1)^2$

۸ در بازه (a, b) نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ به بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟ (تقریبی دقت ۹۷)

- (۱) -۲ (۲) $-1/5$ (۳) -۱ (۴) $-1/5$

۹ مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 8x + 16} + |x - 4|}{\sqrt{x^2 + 1}} < 16\sqrt{x^2 + 2x^2 + 1}$ بازه (a, b) می‌باشد. بیشترین مقدار $b + a$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) صفر

۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 + x + 3$ ، به ازای چند مقدار x معادله $x^2 = f(g(x)) - f(\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}) + 9$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۱ اگر $3x^2 - 14x + 13 = f(2x - 3)$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (تقریبی دقت ۹۷)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۱۲ تعداد زیرمجموعه‌های شش عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ که شامل اعضای ۹ و ۱۰ باشند ولی شامل عضوهای ۸ و ۷ نباشند، کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۸ (۳) ۱۵ (۴) ۵۶

۱۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموع ارقام آن‌ها ۶ باشد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۶۱ (۳) ۳۶ (۴) ۴۶

۱۴ با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ عددی سه رقمی می‌سازیم. احتمال آن‌که این عدد فرد و بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشد، کدام است؟

- (۱) $1/2$ (۲) $1/4$ (۳) $1/24$ (۴) $1/6$

۱۵ دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟ (تقریبی دقت ۹۷)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{5}{18}$



$$(B-A) \cup (B-A') = (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$$

متمم مجموعه B همان B' می باشد.

ابتدا مجموعه A و B را تشکیل می دهیم. سپس تک تک مجموعه های ذکر شده در گزینه ها را تشکیل می دهیم.

$$A = \{3, 6, 9, \dots\} \Rightarrow \text{مناهای} \quad B = \{1, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm 19\} \Rightarrow \text{مناهای}$$

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow \text{مناهای} \quad B' = Z - B = \{\pm 20, \pm 21, \pm 22, \dots\} \Rightarrow \text{مناهای}$$

طبق قوانین مطرح شده بین مجموعه ها داریم:

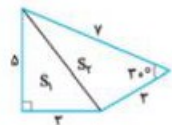
$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{(\sin 25^\circ)(\cos 39^\circ)(-1)}{(\cos 16^\circ)(-1) + \sqrt{2} \times 1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 2^2}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 60^\circ = 4x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$



$$S_1 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

ابتدا شکل را به دو قسمت مطابق شکل مقابل تقسیم می کنیم:

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{15}{2} + \frac{3}{4} = \frac{30 + 3}{4} = \frac{33}{4}$$

سعی می کنیم فرض مسأله را طوری تغییر دهیم که به 9^{a-1} برسیم، داریم:

$$3^a \times 3^1 = \sqrt{5} \Rightarrow 3^a = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow (3^a)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \Rightarrow 9^a = \frac{5}{9} \Rightarrow 9^a \times 9^{-1} = \frac{5}{9} \times 9^{-1} \Rightarrow 9^{a-1} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{81}$$

$$A = \sqrt[6]{12^2} \times \sqrt[4]{54^2} \times \sqrt[3]{2^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)^2 = \sqrt[12]{(2^2 \times 3^2) \times (2^2 \times 3^3) \times (2^2 \times 3^2) \times (2^2 \times 3^2)} = \sqrt[12]{2^{12} \times 3^{12}} = 2 \times 3 = 6$$

$$\sqrt[3]{A^2 - 9} = \sqrt[3]{6^2 - 9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

چون $x^2 + 5$ و $x^2 + x + 1$ همواره مثبت می باشند، کافیت نامعادله $\frac{x^2 - 16}{x + 1} > 0$ را حل کنیم:

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4, \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$x^2 - 16$	+	-	-	+	+
$x + 1$	-	-	+	+	+
$\frac{x^2 - 16}{x + 1}$	-	+	-	+	+

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $(-\frac{1}{2}, -4) \cup (4, +\infty)$ می باشد. یعنی $a = -4$ و $b = 4$ است و در نتیجه $a + b = 0$ می باشد.

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:



$$x \times y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}$$

$$2(x + y) = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow x + \frac{16}{x} = 10$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 = 1 \cdot x \Rightarrow x^2 - 1 \cdot x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=8 \end{cases}$$

توجه کنید که چون طول بزرگتر از عرض است، $x=8$ را در نظر گرفتیم.

$$x=8 \Rightarrow y = \frac{16}{x} = \frac{16}{8} = 2 \Rightarrow \frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{8}{2} = 4$$

$$m^2 + 2m + 2 = 6m - 1 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}$$

$$m=1 \Rightarrow m^2 + 1 = 2 \Rightarrow (m^2 + 1, 2, f), (2, 5) \in f \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

پس $m=1$ غیر قابل قبول می باشد.

$$m=3 \Rightarrow x^2 - 1 \cdot x^2 + 25x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1 \cdot x + 25) = 0 \Rightarrow x(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x=0, x=5$$

با توجه به اینکه حتماً رأس A را دارند، پس می خواهیم از Y نقطه باقیمانده، سه نقطه انتخاب کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

می دانیم یک مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است. $\binom{6}{0}$ تعداد زیرمجموعه های صفر عضوی یک مجموعه 6 عضوی، $\binom{6}{1}$ تعداد زیرمجموعه های یک

عضوی یک مجموعه شش عضوی و ... و $\binom{6}{6}$ تعداد زیرمجموعه های 6 عضوی این مجموعه می باشد. پس مجموع آن ها $2^6 = 64$ می باشد. به خاطر بسپاریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تعداد کل کلمات را حساب می کنیم. سپس تعداد کلماتی که E ها کنار هم باشند را بدست می آوریم و از آن کسر می کنیم:

$$\text{تعداد کل کلمات} = \frac{5!}{1!} = \frac{120}{1} = 120$$

$$24 - 60 = 36 \Rightarrow \text{تعداد کلماتی که } E \text{ ها کنار هم نباشند} = 4! = 24 \Rightarrow \text{تعداد کلماتی که دو حرف } E \text{ کنار هم باشند.}$$

اگر A پیشامد مورد نظر باشد، داریم:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3), (4,3), (3,4), (5,4), (4,5), (5,5), (6,5)\} \Rightarrow n(A) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

گروه خونی افراد یک متغیر قابل شمارش نیست، بنابراین از نوع کیفی است. همچنین ترتیب خاصی ندارد، بنابراین کیفی اسمی می باشد.

پاسخنامه آزمون جامع (۲)



$$A < 2a + 1 \leq 9 \Rightarrow 7 < 2a \leq 8 \Rightarrow 3.5 < a \leq 4$$

روش دوم:

$$a_7 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 \Rightarrow a_7 = 2^2 - 1$$

$$a_7 = 2a_2 + 1 = 2(2) + 1 = 5 \Rightarrow a_7 = 2^3 - 1$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow a_n = 2^n - 1 \Rightarrow a_8 = 2^4 - 1 = 15$$

روش اول:

$$a_7 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_7 = 2a_2 + 1 = 2(2) + 1 = 5$$

$$\vdots$$

$$a_8 = 2a_7 + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

طبق تعریف و دنباله هندسی داریم:

$$\begin{cases} a_5 + a_9 = 48 \\ a_7 - a_5 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 + a_5q = 48 \\ a_5q^2 - a_5 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5(1+q) = 48 \\ a_5(q^2-1) = 28 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow \frac{a_5(q+1)(q-1)}{(q-1)} = \frac{28}{(q-1)} \Rightarrow 48(q-1) = 28 \Rightarrow q-1 = \frac{7}{12} \Rightarrow q = \frac{19}{12}$$

طبق (I)

$$\Delta \sin \alpha = \sqrt{r} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{r}}{\Delta}$$

$$\cos^r \alpha = 1 - \sin^r \alpha \Rightarrow \cos^r \alpha = 1 - \frac{r}{r-1} \Rightarrow \cos^r \alpha = \frac{r-1}{r-1}$$

$$1 + \tan^r \alpha = \frac{1}{\cos^r \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{r}{r-1} - x = \frac{r-1}{r-1} \Rightarrow x = \frac{r}{r-1} + \frac{r}{r-1} - \frac{r-1}{r-1} \Rightarrow x = \frac{r}{r-1}$$

$$(fm-1)y = mx - (\Delta m + r)$$

$$y = \frac{m}{fm-1}x - \frac{\Delta m + r}{fm-1} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{m}{fm-1}$$

از طرفی خط با جهت مثبت محور x ها زاویه 45° ساخته است، پس شیب آن برابر $\tan 45^\circ = 1$ می باشد.

$$\frac{m}{fm-1} = 1 \Rightarrow fm-1 = m \Rightarrow fm = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{f}$$

$$S = \frac{r\sqrt{ra^r}}{r}$$

$$\frac{r\sqrt{ra^r}}{r} a^r = r\sqrt{r} \Rightarrow ra^r = r \times r \Rightarrow a^r = r \Rightarrow a = \sqrt[r]{r}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = a\sqrt{r} = \sqrt[r]{r} \times \sqrt{r} = \sqrt[r]{r} \times \sqrt[r]{r} = \sqrt[r]{r^2} = \sqrt[r]{r}$$

$$(\sqrt{r} \times \sqrt{r} + \sqrt[r]{r^2} - \sqrt[r]{r} \times \sqrt{r} - \sqrt[r]{r^2})^r = (\sqrt{r} \times \sqrt{r} - \sqrt[r]{r} \times \sqrt{r})^r = (\sqrt{r})^r = ((\sqrt{r})^r)^r = r^r = r$$

$$(\alpha^r + \beta^r - \alpha\beta)(\alpha^r + \beta^r + \alpha\beta) = (\alpha^r + \beta^r)^r - (\alpha\beta)^r = \alpha^r + \beta^r + r\alpha^r\beta^r - \alpha^r\beta^r = \alpha^r + \beta^r + (\alpha\beta)^r$$

$$= (r\sqrt{r} - r) + (r\sqrt{r} + r) + \sqrt{(r\sqrt{r} - r)(r\sqrt{r} + r)} = r\sqrt{r} + \sqrt{r^2 - r^2} = r\sqrt{r} + \sqrt{r} = r\sqrt{r}$$

می دانیم $x^r + 1$ همواره مثبت است و در نتیجه $|x^r + 1| = x^r + 1$ می باشد.

$$\begin{cases} x \geq r \Rightarrow rx + 1 - (x-r) > x^r + 1 \Rightarrow x + r > x^r + 1 \Rightarrow x^r - x - r < 0 \Rightarrow (x+1)(x-r) < 0 \Rightarrow -1 < x < r \\ x < r \Rightarrow rx + 1 + x - r > x^r + 1 \Rightarrow x^r - rx + r < 0 \Rightarrow (x-1)(x-r) < 0 \Rightarrow 1 < x < r \end{cases} \Rightarrow -1 < x < r$$

$$\begin{cases} \frac{rx+1}{x-r} < r \Rightarrow \frac{rx+1}{x-r} - r < 0 \Rightarrow \frac{1-r}{x-r} < 0 \Rightarrow x-r < 0 \Rightarrow x < r \\ \frac{rx+1}{x-r} > -1 \Rightarrow \frac{rx+1}{x-r} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{rx-r}{x-r} > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{r} \text{ یا } x > r \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) \Rightarrow x < \frac{1}{r}$$

(روش ۹۰ تستی) جواب نامعادله در آن صدق می کند، بنابراین با توجه به گزینه ها به x عدد دلخواهی می دهیم، که در برخی گزینه ها باشد.

$$x = 1 \Rightarrow -1 < \frac{r+1}{1-r} < r \Rightarrow -1 < -2 < r \Rightarrow r > -1$$

بنابراین هر گزینه ای که شامل $x = 1$ باشد، نادرست است. یعنی گزینه های (۲)، (۳) و (۴) نادرست می باشند و گزینه (۱) پاسخ صحیح تست است.

با تغییر متغیر $x^r - 2x = t$ داریم:

$$\begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^r - 2x = -1 \Rightarrow x = 1 \\ t = r \Rightarrow x^r - 2x = r \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه دارد} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشه حقیقی دارد.

عبارت زیر رادیکال نمی تواند منفی باشد، داریم:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq -2, f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2, f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, -2] \cup [0, 2]$$

$$\text{می دانیم: } \binom{A}{0} + \binom{A}{1} + \binom{A}{2} + \dots + \binom{A}{A} = 2^A \Rightarrow \binom{A}{2} + \binom{A}{3} + \dots + \binom{A}{A} = 2^A - \binom{A}{0} - \binom{A}{1} = 2^{25} - 1 - A = 2^{24}$$

ابتدا تعداد کل کلمات ۳ حرفی و تعداد کلمات ۳ حرفی که شامل حرف t نیستند را بدست می آوریم.

$$\text{حرفی } 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3 \times 2 \times 1 = 6 = \text{تعداد کلماتی که با a و k می توان نوشت.} = \text{تعداد کلماتی که شامل t نیستند.}$$

$$27 - 6 = 21 = \text{تعداد کلماتی که شامل t باشند.}$$

روش اول: ابتدا احتمال اینکه دو مهره هم رنگ باشند را بدست می آوریم:

$$P(\text{۲ مهره هم رنگ باشند}) = P(\text{۲ قرمز یا ۲ سیاه یا ۲ سفید}) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 + 1 + 10}{45} = \frac{14}{45}$$

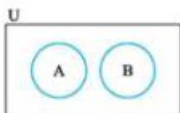
$$\Rightarrow P(\text{۲ مهره غیر هم رنگ باشند}) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$

روش دوم:

$$P(\text{یک سیاه و یک قرمز یا یک سفید و یک قرمز یا یک سفید و یک سیاه}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{1}\binom{1}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45}$$

اگر در یک متغیر کیفی، نوعی ترتیب طبیعی مشاهده شود، این متغیر ترتیبی و در غیر این صورت متغیر اسمی است.

پاسخنامه آزمون جامع (۳)



چون A و B دو مجموعه جدا از هم می باشند، پس $A - B = A$ و $B - A = B$ و در نتیجه:

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B \Rightarrow (A \cup B) \cap A = A$$

در دنباله خطی، درجه n برابر یک می باشد.

$$a_n = 6n^2 + 7a + 7an - 7an^2 = (6 - 7a)n^2 + 7an + 7a \Rightarrow 6 - 7a = 0 \Rightarrow 6 = 7a \Rightarrow a = \frac{6}{7}$$

$$a = \frac{6}{7} \Rightarrow a_n = (\frac{6}{7})(n^2) + 6n + \frac{6}{7} \Rightarrow a_n = 6n + \frac{6}{7}$$

$$a_5 = 6(5) + \frac{6}{7} = 31\frac{6}{7}$$

می دانیم در دنباله حسابی اگر $m + n = p + q$ آن گاه $a_m + a_n = a_p + a_q$ می باشد و چون $7 + 8 = 11 + 4$ است، پس داریم:

$$a_7 + a_8 = a_{11} + a_4 \Rightarrow 20 = 14 + a_4 \Rightarrow a_4 = 6$$

$$\frac{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \sin x} = \frac{\frac{\cos x \sin x + \cos x}{\sin x}}{1 + \sin x} = \frac{\cos x (\sin x + 1)}{\sin x (1 + \sin x)} = \cot x$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(\frac{-2\sqrt{7}}{9})^2} = \frac{1}{\frac{28}{81}} = \frac{9}{28} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{9}{28} - 1 = \frac{9}{28} - \frac{28}{28} = \frac{-19}{28} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cot x = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\cot x = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \times \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \frac{-2\sqrt{7}}{\lambda} = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

چون انتهای کمان در ربع چهارم است، پس $\cot x$ مقداری منفی است.

واضح است که شعاع دایره با اندازه ضلع شش ضلعی برابر است.

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi (\sqrt[3]{3})^2 = 3\sqrt{3}\pi$$



$$a \text{ ضلع به منتظم به ضلعی} = \frac{ra^2\sqrt{3}}{2} = \frac{r(\sqrt{3})^2(\sqrt{3})}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{2} - 3\sqrt{3} = \text{مساحت بین دایره و شش ضلعی}$$

$$\sqrt{1+\Upsilon\sqrt{\sin^T\alpha\cos^T\alpha}} = \sqrt{1+\Upsilon|\sin\alpha\cos\alpha|} = \sqrt{\sin^T\alpha+\cos^T\alpha+\Upsilon|\sin\alpha||\cos\alpha|}$$

اکنون α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$ می باشد و در نتیجه داریم:

$$|\sin \alpha| = \sin \alpha, \quad |\cos \alpha| = -\cos \alpha$$

$$= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sin \alpha - \cos \alpha$$

۷ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3} \times 2} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

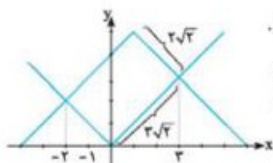
$$\Rightarrow \text{ج. مضرب} = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2}) = \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4} + 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{r}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{r}+1)^2} = \underbrace{|\sqrt{r}-1|}_{\geq 0} + \underbrace{|\sqrt{r}+1|}_{\geq 0} = \sqrt{r}-1 + \sqrt{r}+1 = 2\sqrt{r} \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{r}}{2\sqrt{r}} = 2$$

عبارت $\sqrt[3]{2x-x^2}$ به ازای تمام x های حقیقی با معنی است و عبارت زیر را دیکال با فرجه زوج باید نامفی باشد:

$$\frac{f}{x} - \frac{q}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{f - qx}{x^2} \geq 0 \xrightarrow{x \geq 0, (I)} f - qx \geq 0 \Rightarrow -qx \geq -f \Rightarrow qx \leq f \Rightarrow x \leq \frac{f}{q} \Rightarrow -\frac{f}{q} \leq x \leq \frac{f}{q} \quad (II)$$

بنابراین از اشتراک (I) و (II) مجموعه مقادیر x برابر $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \cup (0, \frac{2}{3}]$ می باشد.



ابتدا دو نمودار را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه دو خط بر هم عمودند پس ناحیه ایجاد شده مستطیل است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{محله بر خورد: } 5 - (x - 1) = x \Rightarrow x = 3 \\ \text{محله بر خورد: } 5 + (x - 1) = -x \Rightarrow x = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow S = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6 \times 2 = 12$$

محل برخورد: $5 + (x - 1) = -x \Rightarrow x = -2$

($x-1$) را برابر ۱ فرض می‌کنیم. در ضمن داریم:

$$(x-1)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{F}(x-1)^{\frac{1}{2}} - \delta = 0 \Rightarrow t_1^{\frac{1}{2}} + \sqrt{F}t_1^{\frac{1}{2}} - \delta = 0 \Rightarrow t_1^{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{F} \pm \delta}{F} = \frac{\sqrt{F}(-\sqrt{F} \pm \delta)}{F} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\sqrt{F} + \delta \\ t_1 = -\sqrt{F} - \delta \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + 2\sqrt{2}(x-1) - 6 = 0 \Rightarrow t^2 + 2\sqrt{2}t - 6 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 6}{2} = \frac{2(-\sqrt{2} \pm 3)}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\sqrt{2} + 3 \\ t_2 = -\sqrt{2} - 3 \end{cases}$$

واضح است که جواب بزرگ‌تر، $3 + \sqrt{3}$ می‌باشد.

$$x-1=-\sqrt{r}+r \Rightarrow x=r-\sqrt{r}$$

$$f(x) = \frac{\gamma(x^\top - \beta x + 1)}{x^\top - \beta x + \delta - \gamma} = \frac{\gamma((x - \tau)^\top + 1)}{(x - \tau)^\top - \gamma} \Rightarrow f(\tau - \sqrt{\delta}) = \frac{\gamma((\tau - \sqrt{\delta} - \tau)^\top + 1)}{(\tau - \sqrt{\delta} - \tau)^\top - \gamma} = \frac{\gamma(\delta)}{\delta - \gamma} = \tau$$

تعداد انتخاب ۴ حرف از مجموعه اول و دو حرف از مجموعه دوم $\binom{6}{4} \times \binom{4}{2}$ می‌باشد. اما جایگشت حروف برابر ۶! می‌باشد. پس تعداد کل حالات $\binom{6}{4} \times \binom{4}{2} \times 6! = 90 \times 6!$ می‌باشد.

تعداد کل حالات ۸! است. حال اگر ۳ ماشین را یک ماشین فرض کنیم، ۶ ماشین خواهیم داشت و تعداد

حالت‌های $3! \times 6$ و تعداد کل حالت‌های $3!$ که کنار هم قرار می‌گیرند برابر است با

۱) $(3 \times 6) - 8!$ است.



۱۴ برای اینکه رنگ سه مهره خارج شده متفاوت باشند، باید یک مهره سفید، یکی سیاه و مهره دیگری آبی باشد.

$$P(\text{یکی آبی و یکی سیاه و یکی سفید}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

۱۵ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس متغیر کمی گسسته، مراحل رشد انسان متغیر کیفی ترتیبی، RH خون افراد متغیر کیفی اسمی و میزان آلودگی هوای تهران متغیر کمی پیوسته می‌باشد.

پاسخنامه آزمون جامع (۴)

$$\left. \begin{aligned} [-5, a] \cap [a - 4, 2a] &= [\gamma, a] \Rightarrow a = 1 \\ a = 1 &\Rightarrow [-5, 1] \cap [1 - 4, 2] = [-3, 1] = [-b, 1] \Rightarrow b = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 3$$

$$3, 4, 6, 10, 18, 24, 66, 120, \dots$$

$$a_8 - a_7 = 120 - 66 = 54$$

$$aq, 2aq^2, aq^3 \Rightarrow 2(2aq^2) = aq + aq^3 \Rightarrow a(4q^2) = a(q + q^3) \Rightarrow q^2 - 4q + q = 0$$

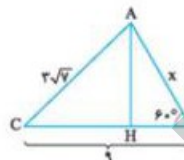
$$q(q^2 - 4q + 1) = 0 \xrightarrow{q \neq 0} q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow t = t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^2 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$q^2 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a_7 < 2a_8 < a_9 \Rightarrow \frac{a_9}{a_7} = \frac{aq^3}{aq} = q^2 = (q^2)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

اگر $q^2 = 2 - \sqrt{3}$ باشد، a_7 بزرگترین جمله و a_8 کوچکترین جمله می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{a_7}{a_8} = \frac{aq}{aq^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2} = \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} \times \frac{7 + 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3}$$

در نهایت مقدار q هر چه باشد، نسبت بزرگترین جمله به کوچکترین جمله، مقدار $7 + 4\sqrt{3}$ می‌باشد.



$$\cos 60^\circ = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \frac{BH}{x} \Rightarrow BH = x \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x$$

در مثلث AHB داریم:

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های AHC و AHB داریم:

$$\begin{cases} x^2 = BH^2 + AH^2 & (I) \\ (3\sqrt{3})^2 = CH^2 + AH^2 & (II) \end{cases}$$

$$(II) - (I) = 9 \times 3 - x^2 = CH^2 - BH^2 \Rightarrow 27 - x^2 = (CH + BH)(CH - BH) \Rightarrow 27 - x^2 = 9(1 - BH - BH) \Rightarrow 27 - x^2 = 9(1 - 2 \times \frac{1}{2}x)$$

$$27 - x^2 = 9 - 9x \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 6$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \times c \times \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 18 \times 5 \times \sin \alpha = 45 \sin \alpha$$

طبق صورت سوال مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ می‌باشد. پس: $45 \sin \alpha = 16 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{16}{45} = \frac{4}{9}$

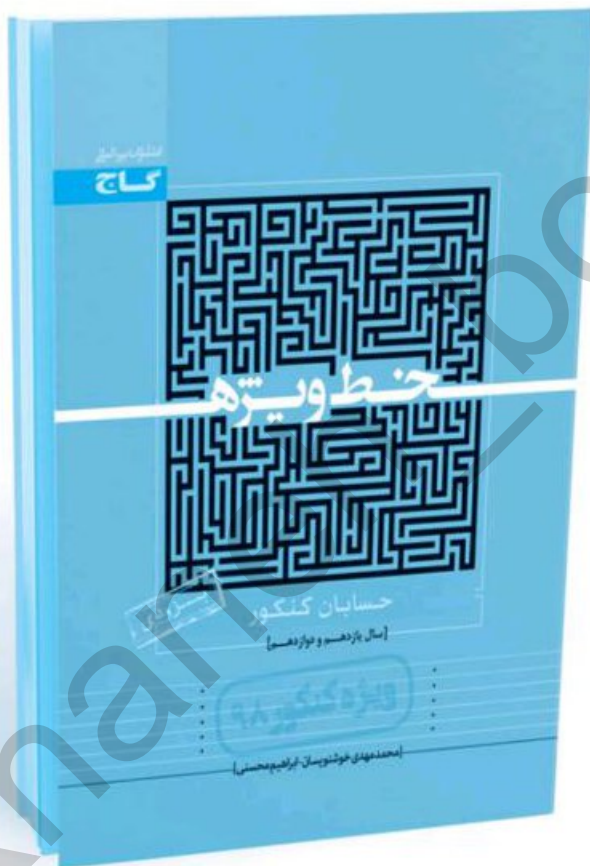
$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{c} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{5}{c} \Rightarrow BH = 4$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم:

$$(AB)^2 = (BH)^2 + (AH)^2 \Rightarrow 25 = 16 + (AH)^2 \Rightarrow (AH)^2 = 9 \Rightarrow AH = 3 \Rightarrow CH = 5$$

و در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$$(BC)^2 = (CH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41}$$



حسابان کنگور

از سری کتاب های خط ویژه

با سری کتابهای جمع بندی خط ویژه در رشته و دانشگاه دلخواهتان قبول شوید.

خرید سریع کتاب ۳۰ ساعت ویژه شهر تهران

۰۲۱

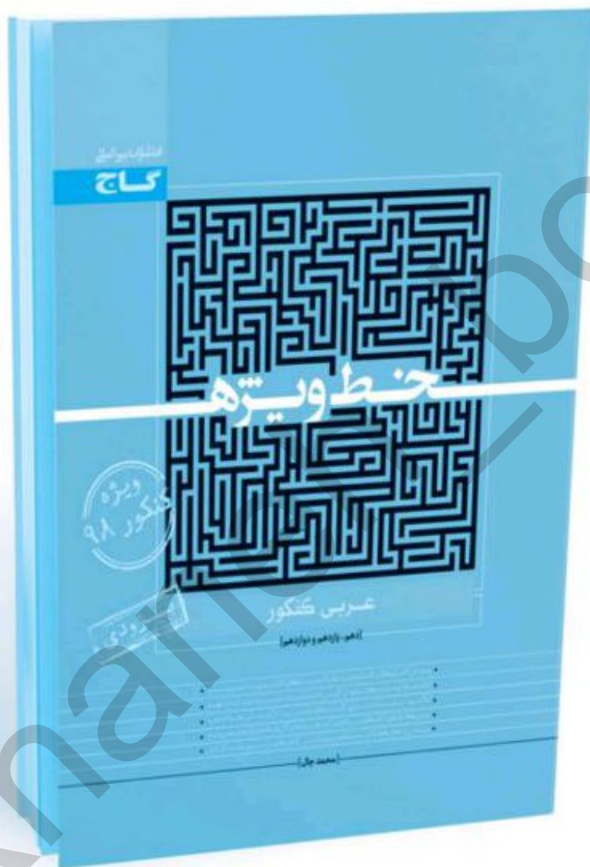


کاج

۱۶۴

www.kajmarket.com

خرید آنلاین در:



عربی کنگور

از سری کتاب های خط ویژه

با سری کتابهای جمع بندی خط ویژه و دانشگاه دلخواهتان قبول شوید.

خرید سریع کتاب ۳۰ ساعت ویژه شهر تهران

خرید آنلاین در:

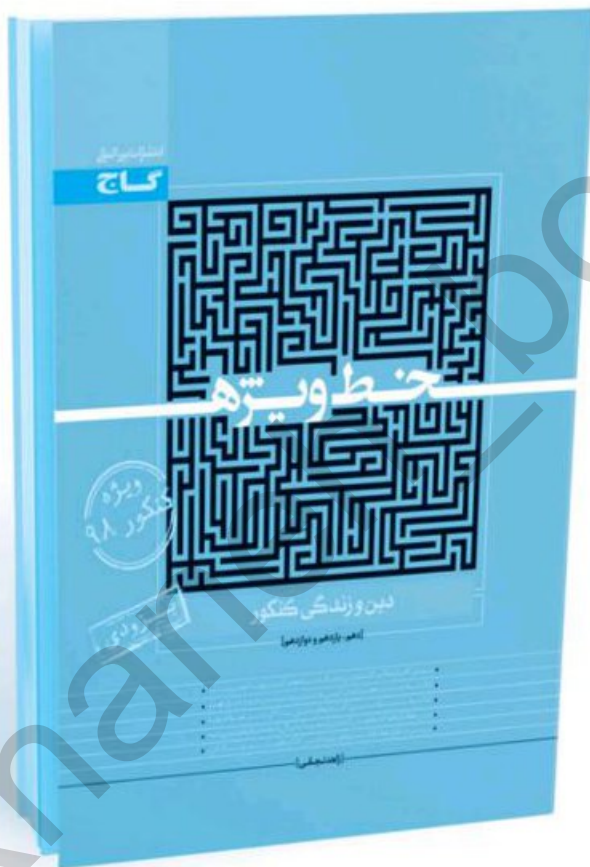
۵۲۱



کاج

۱۶۵

www.jajmarket.com



دین و زندگی کتکور

از سری کتاب های خط ویژه

با سری کتابهای جمع بندی خط ویژه در رشته و دانشگاه دلخواهتان قبول شوید.

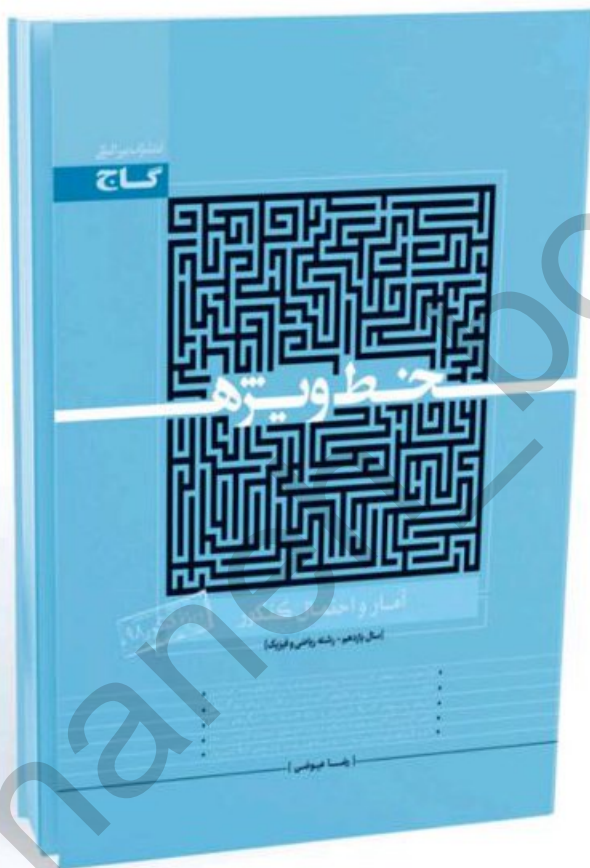
خرید سریع کتاب ۳۰ ساعت ویژه شهر تهران

خرید آنلاین در:



۱۶۶

www.kajmarket.com



امار واحتمال کنگور

از سری کتاب های خط ویژه

با سری کتابهای جمع بندی خط ویژه و دانشگاه دلخواهتان قبول شوید.

خرید سریع کتاب در ۳ ساعت ویژه شهر تهران

خرید آنلاین در:

۰۲۱

گاج

www.gajmarket.com

۱۶۷

با کتاب های میکرو و آی کیو گاج
از هم اکنون برای کنکور آماده شوید.

گاج



فیزیک یازدهم

از سری کتاب های میکرو طبقه بندی