سرشناسه : موسوی، سید شجاع‌الدین
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی دهم (رشته ریاضی و تجربی) / سید شجاع‌الدین موسوی
شاهد مشهودی
مشخصات نشر : تهران : انتشارات بین‌المللی گاج : ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری : ۲۸۰ ص. مصور.
فروست : این‌کتاب از مجموعه کتاب‌های آس گاج می‌باشد.
بها : ۳۵۰۰۰ تومان
شابک : ۴-۸۶۱-۳۵۹-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر.
شمارهٔ کتابشناسی ملی : ۵۱۵۸۵۱۲

آس
مجموعه کتاب‌های آموزش ساده

[ناشر : انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول : مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی : مهندس محمد جوکار]
[مدیر تألیف : علیرضا مزرعتی]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های : آس]
[عنوان کتاب : ریاضی دهم (رشته ریاضی و تجربی)]
[مؤلفان : سید شجاع‌الدین موسوی ـ شاهد مشهودی]
[نظارت بر تألیف : نیلوفر حاجیلو] • [ویرایش علمی : مهسا چراغعلی ـ سیده زینب صالحی ـ پروانه سعادتخواه]
[مدیر واحد فنی و گرافیک : صغری قربانی] • [نظارت بر تایپ و صفحه‌آرایی : محمد یوسفی]
[صفحه‌آرایی : ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی] • [اجرا : مهسا هوشیار ـ الناز دارائی ـ لیلا فرجی امین]
[طراح شکل : وحیده معینی ـ ملیکا فدایی] • [کارتونیست : مجید باقرزادگان] • [طراح جلد : منصور سماواتی]
[مدیر چاپ : علی مزرعتی] • [لیتوگرافی، چاپخانه و صحافی : گاج]
[نوبت چاپ : اول (۱۳۹۷)] • [شمارگان : ۳۰۰۰ نسخه]
[دفتر مرکزی : تهران، خیابان انقلاب، بین چهار راه ولیعصر (عج)
و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹] • [تلفن : ۶۴۲۰ - ۰۲۱]
[سرویس پیام کوتاه (SMS) : ۱۰۰۰۰۴۲۵]
[صندوق پستی : ۳۷۷ ـ ۱۳۱۴۵]
[پایگاه اینترنتی : www.gaj.ir]
[قیمت : ۳۵۰۰۰ ...]

سخن ناشر

آیا می‌دانید برای تهیه‌ی هر تن کاغذ سفید ۱۷ اصله درخت سبز قطع می‌شود؟ آیا می‌دانید برای تولید یک عنوان کتاب ۲۰۰ صفحه‌ای در قطع رحلی و در شمارگان ۲۰۰۰ نسخه یک تن کاغذ مصرف می‌شود؟ لذا شایسته است پس از مطالعه‌ی کتاب حاضر آن را در وب‌سایت mygaj.com قرار دهید تا از تولید مجدد آن جلوگیری و در مصرف کاغذ صرفه‌جویی شود. باشد که شما دوست خوب نادیده‌ام با این حرکت به ظاهر کوچک، گامی بلند در حفظ منابع طبیعی کره‌ی زمین برداشته باشید.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار

سپاس و قدردانی

www.gajmarket.com

- **شورای برنامه‌ریزی:** مهندس ابوالفضل جوکار ـ مهندس محمد جوکار ـ علیرضا مزرعتی
- **شورای تألیف:** حکیم رجبی ـ حسین رحمانیان ـ نیلوفر حاجیلو ـ زهرا ساسانی ـ زهره شعرباف مقدم
مینا پروین ـ فرزانه فروزانفر ـ فاطمه زارع فخرآبادی
- **گروه گرافیک و فنی:** صغری قربانی ـ محمد یوسفی ـ ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی
مهسا هوشیار ـ الناز دارانی ـ لیلا فرجی امین ـ نیلوفر قربانی ـ محمد آقالاهرودی
نازنین احمدی شفق
- **گروه طراح شکل:** ملیکا فدایی ـ وحیده معینی ـ حمیده میرزایی
- **گروه تصویرگری:** مجید باقرزادگان ـ سید آرام یعقوبی ـ محبوبه مرتضوی ـ سارا نیک‌فروز
- **گروه رسانه و تصویر:** راضیه یادگاری ـ میثم رازبانی

پس از تألیف این کتاب و عرضه آن به شما معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز، کماکان در کنار شما هستیم و شما می‌توانید کاستی‌ها و نقایصی که در کتاب موجود است را با مؤلفین کتاب در میان بگذارید و ما را در جهت بهبود کیفیت کتاب یاری کنید.

سخن مدیر تألیف

به نام آنکه هستی نام از او یافت ...

اندیشه در آفرینش هستی و نگاه به زندگی موجودات کوچک و بزرگ برای انسان درس‌های بزرگی به همراه دارد. باید تلاش کنیم با یادآوری این نعمت‌ها مسیر اندیشیدن، راه و روش درست زندگی کردن و سعادتمند شدن و استفاده درست از موهبت‌های الهی را بیاموزیم. خیلی مهم است که همیشه رویکردی مثبت به زندگی داشته باشیم. موانعی در زندگی وجود دارد که برای عبور از این موانع نباید دست از تلاش برداریم و نا امید شویم بلکه باید به‌دنبال راه‌های جایگزین برای رسیدن به اهدافمان باشیم.

یادگیری حل مسئله از مهم‌ترین موضوعاتی است که نظام آموزشی در کتاب‌های درسی جدید توجه ویژه‌ای به آن داشته است. اما چرا حل مسئله مهم است؟ وقتی صحبت از حل مسئله می‌کنیم لزوماً قرار نیست دربارهٔ ریاضیات صحبت کنیم، ما در زندگی روزانهٔ خود با مسائل متفاوتی مواجه می‌شویم که باید یاد بگیریم چگونه با آن‌ها برخورد کنیم و از همه مهم‌تر بیاموزیم با تکیه بر تحلیل‌های همه‌جانبه از عهده حل آن‌ها برآییم. این هدفی است که ما برای آن برنامه داریم و قصدمان این است که با تألیف کتاب‌هایی مبتنی بر محتوای کتاب‌های درسی جدید در کنار شما باشیم. کتاب‌های جدید انتشارات گاج تحت عنوان آموزش ساده یا به اختصار **آس** قرار است از دریچهٔ تازه‌تری به رشد و ارتقای سطح علمی و همچنین فهم عمیق مفاهیم مختلف به شما کمک کند.

هدف ما در کتاب‌های آس تنها این نیست که به‌صورت کلیشه‌ای سؤال‌ها و مثال‌هایی را در صفحه‌های مختلف همراه نکته‌های فراوان جا دهیم و در واقع با این کار به بمباران ذهن شما بپردازیم. آس می‌خواهد علم را به زبان ساده‌تر و صمیمی‌تری به نسلی که آینده برای آن‌هاست انتقال دهد. کسب مهارت‌های لازم برای حل مسئله از دیگر اولویت‌های مهم کتاب آس است که برای تحقق این هدف در بخش‌های مختلف آموزشی، سؤال‌ها و تست‌هایی از ساده به دشوار برای شما دانش‌آموزان عزیز فراهم شده است. برای خواندن آس این احساس را درخودتان به‌وجود بیاورید که قصد خواندن یک کتاب داستان را دارید، سطر به سطر را با حوصله بخوانید و از آن لذت ببرید. تمام تلاش خود را برای ارائه کتابی متفاوت و بی‌نقص به‌کار برده‌ایم اما علاقمند هستیم که شما نیز در این شیوه آموزشی با ما مشارکت داشته باشید، بنابراین ما را از نظرات و ایده‌هایتان بی‌نصیب نگذارید. منتظر انتقادات و پیشنهادات و راه‌حل‌های خلاقانه شما هستیم.

علیرضا مزرعتی

@mazraati

مقدمـــــه مؤلفـــان

سخن اول

سلام بچه‌ها. ورودتون به مقطع متوسطه دوم را تبریک می‌گیم. احتمالا خودتون هم متوجه یه تحولاتی در شکل و شمایل درسهای پایه دهم نسبت به نهم شدین! مثلا همین که به جای یه کتاب علوم از این به بعد سه کتاب فیزیک و شیمی و زیست‌شناسی دارین! خوب این مژده را بدیم که در درس ریاضی علاوه بر کتاب ریاضی دهم، فقط یه کتاب دیگه دارین به نام هندسه دهم، نه بیشتر! پس وقتی تعداد کتابهاتون کمی بیشتر شده، حتما لازمه روش مطالعه‌تون هم کمی تغییر کنه، همان‌طور که روش تدریس معلماتون هم کمی متفاوت شده و ... که این‌ها همون تحولاتی هستن که از اول اشاره کردیم. اما این چیزا اصلا جای نگرانی نداره چون به قول معروف: مشکلی نیست که آسان نشود! فقط کافیه قبل از هرکاری چند تا سوال جدی از خودتون بپرسید و پاش وایسید تا راز موفقیت را در جوابهایی که به خودتون میدید کشف کنید: «چرا باید درس بخونیم! و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخورن؟» خصوصا سوال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی میخوره؟!» چون به نظر ما هر دانش‌آموزی که بتونه جواب‌هایی منطقی برای این سوالات اساسی پیدا کنه، دیگه درس خوندن براش سخت نیست!

ویژگی‌های بارز کتاب

در تألیف کتب درسی جدید، به کاربردهای علم در زندگی توجه ویژه‌ای شده، طوری که بر روش بیان و مراحل آموزش مفهومی هم تاثیر گذاشته است. اما متأسفانه اکثر کتاب‌های کمک درسی همچنان دارند با همان روش‌های قدیمی و برخلاف اهداف آموزش مفهومی در کتب درسی جدیدالتألیف پیش می‌روند، یعنی با سؤالات و مثال‌های تکراری بیش از حد و نکته‌های حفظی و کلیشه‌ای، به بمباران ذهن خواننده می‌پردازند. در حالی‌که تحولات کتب درسی جدید همسو با پیشرفت‌های آموزشی جهان بوده و نباید در مقابلش ایستادگی کرد! بنابراین ما هم با توجه به خلأ موجود در کتب کمک درسی فعلی کشور و همچنین الگو برداری از روش های کارآمد کتب خودآموز برتر جهان، بر آن شدیم تا نسل جدیدی از کتابهای کمک درسی را منطبق بر آخرین تغییرات محتوای کتب درسی جدید التالیف و رعایت روابط طولی و عرضی در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. این سری کتابها، همان طور که می دانید، در واحد تالیف انتشارات بین المللی گاج، نام «آس» به خود گرفت که مخفف «آموزش ساده» است و تمام قابلیت های نسل های قبلی کتب کمک درسی چه برای مطالعه در منزل و چه برای تمرین در مدرسه، یک‌جا در آن‌ها گنجانده شده است. در سری کتاب‌های آس، سعی بر این بوده تا ضمن مطالعه مطالب درسی، شما بتوانید با کشف کاربردهایشان در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید.

کتاب آموزش ساده «ریاضی دهم (رشته ریاضی و تجربی)» که اکنون پیش روی شماست، هم از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی ریاضی (۱) علوم تجربی و ریاضی فیزیک دارای هفت فصل و در هر فصل دارای تعدادی درس است. در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

◆ **شیوه بهره‌مندی و استفاده مفید از این کتاب**

با توجه به تنوع‌طلبی ذهنی و بصری دانش‌آموزان امروز که ناشی از رشد هوش و افزایش گستره اطلاعات‌شان در عصر ارتباطات می‌باشد، در این کتاب از بخش‌های مختلف خلاق و جذابی برای تفکیک مطالب به کمک گرافیک استفاده شده است. بنابراین یکی دیگر از ویژگی‌های مخصوص کتب آس، بهره‌گیری از این بخش‌های موضوعی ـ گرافیکی متنوع است، از جمله: «ماجرا چیه؟، فکر کن تا کشف کنی، درسنامه، یادت میاد؟، بیشتر بدانیم، کافه سؤال، گزینه چند؟، تمرین دوره‌ای و پیشرفته پایان هر فصل، طنز، معما» و بسیاری موارد دیگر .... که ماهیت کلی و کاربرد هرکدام، هم از روی عنوان آن‌ها مشخص است و هم با چند دقیقه ورق زدن کتاب می‌توانید خودتان آن‌ها را با چشم ببینید. پس دربارهٔ برخی از اصلی‌ترین موارد آنها به ارائه توضیحات کوتاهی می‌پردازیم.

ماجرا چیه؟

در بخش «ماجرا چیه؟»، در ابتدای هر فصل با ارائه دیدگاه‌های کلی درباره موضوعات مورد بحث، تلاش شده تا فضای ذهنی دانش‌آموز برای درک مطالب آماده شود.

فکر کن تا کشف کنی

در بخشی با عنوان «فکر کن تا کشف کنی»، با طرح یک نمونه جالب از مسائل چالشی هدفدار و به ظاهر ساده، در سطح دانسته‌های قبلی دانش‌آموز، سعی کرده‌ایم با ترغیب او برای تعقیب موضوع، زمینه را برای یادگیری اکتشافی مطالب درسی، پیشاپیش فراهم نماییم. واضح است حتی دانش‌آموزانی که در ابتدای درس نتوانند به جواب صحیح دست یابند، پس از مطالعه و تسلط بر مفاهیم می‌توانند به عقب برگشته و به‌سادگی از عهده حل چالش پیشین برآیند.

درسنامه

در نگارش «درسنامه»ها علاوه بر انطباق با محتوا و اهداف کتاب درسی، سعی شده تا سادگی بیان در عین حفظ جامعیت مطالب، همواره مد نظر قرار گیرد. دانش آموزان با مطالعه مثال‌های متنوع و کاربردی در خلال درسنامه‌های مفهومی و خلاق، معمولا به‌سادگی می‌توانند بر ابعاد مختلف درس مسلط شوند. گاهی درسنامه‌ها متناسب با روند تاریخی کشف مطالب پیش رفته‌اند تا ضمن آشنایی دانش‌آموزان با انگیزه‌ها و ضرورت کشف هر مطلب، ماندگاری مطالب در ذهن‌شان بیشتر شود. گاهی نیز برای جذابیت و تاثیرگذاری بیشتر، از داستان‌هایی ساختگی و طنزآمیز درباره کاشفان مطالب یا در قالب گفتگوی معلم و شاگرد و امثالهم استفاده شده، که هرجا چنین بوده غیر تاریخی بودن ماجرای آن به نوعی بارز شده است.

البته در درسنامه‌ها بخش‌های جزئی‌تری هم داریم. مانند مثال ها، تمرین حین تدریس و ... . ضمنا هرجا که نیاز بوده و حس شده ممکن است دانش‌آموز خسته شود یا به دلایل دیگر، سعی کرده‌ایم تغییری مقطعی در لحن بیان‌مان وارد کنیم، یا یک شوخی کوتاه با خواننده بکنیم و سعی‌مان هم این بوده که این مورد نیز در امتداد درس باشد. از بخش‌های جزیی دیگر درسنامه، می‌توان به «بپا اشتباه نکنی» اشاره کرد که با تأکید بر روی برخی اشتباهات و خطاهای رایج، به هشدار برای پیشگیری از بدفهمی مطالب پیچیده در ذهن دانش‌آموزان می‌پردازد.

بیشتر بدانیم

بخش‌هایی با عنوان «بیشتر بدانیم» و امثالهم برای بیان مطالب کاربردی فوق برنامه ولی مرتبط با درس آورده شده اند. سعی ما بر این بوده که متن برخی از «بیشتر بدانیم»ها به‌گونه‌ای تنظیم شود که دانش‌آموزان بتوانند از آنها به عنوان یک پروژهٔ تحقیقی نیز استفاده کنند.

کافه سوال، گزینه چند؟ و تمرین دوره‌ای

در بخش‌های «کافه سؤال»، «گزینه چند؟»، «تمرین دوره‌ای» و ... همان‌طور که از عنوان آنها معلوم است، سعی‌مان بر این بوده که همهٔ انواع سؤالات در ارتباط با موضوع درس را در سطح استاندارد کتاب درسی و امتحانات تشریحی مدارس و آزمون‌های تستی کنکور بدون آوردن سؤالات تکراری و خسته کننده پیش روی شما قرار دهیم تا با حل کردن تعداد محدودی مسئله از ساده به دشوار، بتوانید تقریبا بر تمام انواع سؤالات مرتبط با درس مسلط شوید. از این رو تقریبا هیچ دو سوالی به‌طور کامل مشابه هم نیستند، و هر سؤال هم جنبه‌های علمی جدیدی را می‌سنجد.

تلاش کرده‌ایم راه‌حل‌هایی که برای سؤالات آورده‌ایم، منطقی و طبیعی و خلاق باشند، و ضمنا نحوهٔ تفکر بر روی مسائل برای کشف ایده حل را آموزش دهند تا کم‌کم به مهارت کافی در فنون حل کردن مسئله‌ها برسید. فراموش نکنید که تسلط بر ریاضیات بدون قلم و کاغذ ممکن نیست! پس هر بار که قصد خواندن این کتاب را می‌کنید، همیشه یک مداد یا خودکار و چند کاغذ سفید در کنارتان داشته باشید تا شما نیز مانند ما از حل مسائل لذت کافی ببرید. برای چنین اوقاتی شاید نوشیدن چای یا قهوه نیز در کنار حل مسئله‌های کافه سؤال راهگشا باشد! !

ایستگاه المپیاد

گاهی که نیاز به طرح مسائلی جالب و کمی بالاتر از سطح کتاب درسی بوده، آنها را تحت عنوان «ایستگاه المپیاد» جدا کرده‌ایم، بنابراین مسائل مذکور لزوماً المپیادی و پیچیده نیستند، اما تفکر روی آنها هم خالی از لطف نخواهد بود.

ما سعی کردیم در پاسخنامه‌ها بیشتر به پاسخ‌های خلاقانه توجه کنیم تا به رشد خلاقیت و ایده‌پردازی شما هم کمک کرده باشیم اما این به آن معنا نیست که فقط راه‌حل‌های کتاب ما درست‌اند، بلکه قطعاً روش‌های متفاوتی برای رسیدن به پاسخ هر مسئله وجود دارد و ما مطمئنیم شما می‌توانید ما را در جریان راه‌های پیشنهادی‌تان یا اشتباهات احتمالی‌مان قرار دهید تا در چاپ‌های بعدی کتاب لحاظ شوند.

ارتباط با ما

هرگونه پیشنهاد و انتقاد و همچنین مشاورهٔ درسی و سؤالات علمی خود را با مؤلفان این کتاب در میان بگذارید، برای این منظور می‌توانید همه روزه از ساعت ۱۶ تا ۱۸ با تلفن ثابت ۰۲۱-۶۴۳۴۴۳۶۰ تماس گرفته و یا با ارسال ایمیل به آدرس Acebook@gaj.ir با مؤلفین این کتاب ارتباط برقرار کنید.

فهرست مطالب

CONTENTS

آس | ریاضی دهم (رشته ریاضی و تجربی)

فصل اول
مجموعه، الگو و دنباله
۰۹

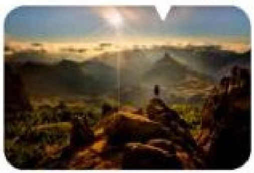
فصل سوم
توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۱۰۱

فصل دوم
مثلثات
۵۷

فصل چهارم
معادله‌ها و نامعادله‌ها
۱۳۷

فصل پنجم
تابع
۱۸۵

فصل ششم
شمارش، بدون شمردن
۲۱۷



فصل هفتم
آمار و احتمال
۲۵۳

The Sets, Pattern and Sequence فصل اول

۱ مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

معرفی مجموعه‌ها	۱۲
بازه‌ها	۱۲
تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۱۳
بخش سؤالات	۱۵

درس دوم: متمم مجموعه

تعریف متمم	۱۸
تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه	۲۱
تعداد اعضای مجموعه	۲۲
مجموعه‌های جدا از هم	۲۲
بخش سؤالات	۲۵

درس سوم: الگو و دنباله

مفهوم الگو و دنباله	۲۸
چند دنباله خاص	۳۲
دنبالهٔ با ضابطهٔ بازگشتی	۳۴
بخش سؤالات	۳۵

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی	۴۰
دنباله هندسی	۴۰
بخش سؤالات	۴۶

خلاصه فصل	۵۱
تمرین دوره‌ای	۵۲

ماجرا چیـه؟!

در این فصل به چند موضوع مهم پرداخته می‌شود: مجموعه، الگو و دنباله‌های حسابی و هندسی.

اصولاً همهٔ اصطلاحات و مفاهیمی که در ریاضیات وجود دارد به مرور زمان طراحی و به ریاضیات وارد شده است. علت اصلی اکثر این طراحی‌ها هم «نیاز» بوده است. یعنی وقتی خیلی جاها با یک موضوع برخورد می‌کنیم و می‌بینیم که ظاهراً این مطلب نقش مهمی در ریاضیات دارد، برای آن یک نام می‌گذاریم و آن را به‌طور جداگانه مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم، تا چه شود!

در خیلی از مباحث ریاضیات دیده می‌شد که نیاز به مفهومی به‌غیر از عدد، جمع، ضرب و ... هست، تا بعضی مطالب ساده‌تر و از لحاظ ریاضی دقیق‌تر گفته شود. برای پاسخ به آن نیاز، مفهوم مجموعه ساخته شد. مجموعه یک مفهوم اولیه و ساده است، سال گذشته با این مفهوم و ویژگی‌های اساسی آن آشنا شدید، امسال هم قدری در این مورد بحث خواهیم کرد و آن مباحث را قدری کامل‌تر مطرح خواهیم کرد.

بحث مجموعه‌ها را به تعداد اعضای آنها می‌کشانیم و مثلاً بررسی می‌کنیم که اگر یکسری اعمال جبری روی مجموعه‌ها انجام دهیم تعداد اعضایشان را چگونه باید محاسبه کنیم. در اینجا مطلب جدیدی که به چشم می‌آید آن است که اعضای برخی مجموعه‌ها ادامه دارد و برخی نه.

مفهوم ادامه‌دار بودن اعضای یک مجموعه را با سه نقطه نمایش می‌دادیم و می‌دانیم اعضای برخی مجموعه‌ها این سه نقطه را ندارد یعنی یک جا تمام می‌شوند که در اینجا مفهوم «مجموعه‌های متناهی» و «نامتناهی» مطرح می‌شود...

در ادامهٔ این فصل با مفهوم الگو آشنا می‌شویم. الگو جایی است که بسیاری از مباحث ریاضیات از آنجا آغاز می‌شود. الگو یک نظم، یک تکرار، یک مشابهت و مانند آن را در یک پدیده نشان می‌دهد، وقتی چنین چیزی یافت شد، ریاضیات وارد صحنه می‌شود و سعی می‌کند با یک رابطه، فرمول، معادله و مانند آن اتفاق رخ داده را نشان دهد و نظم دیده شده را به ساده‌ترین شکل ممکن مطرح کند.

با مفهوم الگو از سال دوم ابتدایی آشنایی داریم. حال در اینجا برخی الگوهای خاص را زیر ذره‌بین می‌بریم مثلاً «الگوهای خطی» و به دنبال آن با دو مفهوم دنبالهٔ حسابی و هندسی که در واقع دو الگوی ساده و مهم هستند، مباحث این فصل را به پایان می‌رسانیم. دنبالهٔ حسابی در واقع مربوط به پدیده‌هایی است که با گام ثابت تغییر می‌کنند مثل ... و ۲۳ و ۱۶ و ۹ و ۲ (۷ تا ۷ تا) و دنبالهٔ هندسی مربوط به پدیده‌هایی است که با نسبت ثابت تغییر می‌کند مثل ... و ۵۴ و ۱۸ و ۶ و ۲ (سه برابر، سه برابر).

شاید پدیده‌ها دقیقاً به شکل دنبالهٔ هندسی یا حسابی تغییر نکنند، اما بعضی پدیده‌ها تغییراتی مشابه به این دنباله‌ها دارند یا به اصطلاح رفتارشان شبیه این دنباله‌هاست، بررسی این دنباله‌ها دیدگاه خوبی راجع به آن پدیده‌ها به ما می‌دهد.

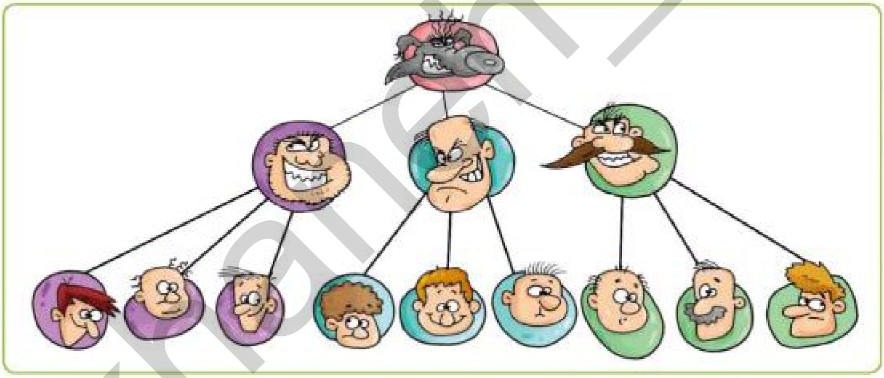
حالا شاید من خوب توضیح ندادم، یه ضرب‌المثل یادم نیست مال کجا بود می‌گفت "حتی خورشید هم لکه‌هایی دارد."

◆ مردی وارد دهکده‌ای شد دید نه درختی نه مزرعه‌ای، خلاصه هیچی. فقط ۵۰، ۶۰ تا خانه کنار هم. یکی از اهالی را دید و از او پرسید اینجا کار مردم چیه؟ من که چیزی نمی‌بینم. او گفت خب کارما دیده نمی‌شه. اجازه بده به صورت یه معما برات مطرح کنم: تو این روستا ۱۰۵ نفر شاغل وجود داره، شغلی به جز دزدی و کلاهبرداری هم وجود نداره، البته بعضی‌ها دو شغله هستند. حال اگر در این روستا ۸۰ نفر دزد و ۴۲ نفر کلاهبردار وجود داشته باشد، چند نفر دو شغله‌اند؟

(دقت کنید که دزد کسی است که اموال مردم را بدون رضایت آنها برمی‌داره اما کلاهبردار کسی است که کاری می‌کند تا طرف (در اثر طمع یا هر چیز دیگر) خودش اموالش را به او بدهد)

◆ یک گولیا با یک روش جدید کلاهبرداری وارد شهر مینگولیا می‌شود. او می‌گوید من نخودسیاه می‌فروشم. هر کس که نخودسیاه خریده باشد، می‌تواند به نمایندگی از من نخودسیاه بفروشد، هیچ کس حق ندارد بیشتر از یک نخودسیاه بخرد، هیچ کس حق ندارد بیشتر از سه نخودسیاه بفروشد، هرکس سر شاخه تمام کسانی است که در خرید نخودسیاه به نوعی با یک یا چند واسطه به او وصل می‌شوند.

هر کس یک بیستم تمام پولی که زیرشاخه‌هایش داده‌اند را مالک می‌شود (این در واقع نقطهٔ طمع است و علت هجوم مردم به سمت گولیا برای خرید نخودسیاه) و بقیه پول‌ها می‌رسد به آقای گولیا.



اگر فرض کنیم آقای گولیا روز اول به سه نفر نخودسیاه بفروشد، هر نخود ۱۰۰ تومان (قیمت واقعی نخود را ۱ تومان در نظر بگیرید) و هرکس که نخود خرید فردا خودش به سه نفر نخودسیاه بفروشد، مشخص کنید به‌ترتیب در روزهای اول، دوم، سوم و ... چند نفر نخودسیاه می‌خرند؟ اگر جمعیت شهر ۱۰۰۰۰ نفر باشد و همه به‌خاطر طمع وارد بازی آقای گولیا شوند چند روز طول می‌کشد تا همهٔ مردم وارد بازی نخود شوند؟ اگر جمعیت شهر ۱۰۰۰۰۰ نفر باشد چند روز طول می‌کشد؟ اگر جمعیت ۱۰۰۰۰۰۰ نفر باشد چه؟

در هر کدام از حالت‌ها سود و زیان افراد را محاسبه کنید. منافع گولیا را هم حساب کنید.

(شاید باور نکنید این مطلبو نوشتم رفتم بیرون برگشتنی دیدم یکی به اون یکی توضیح می‌داد: بله اون سه نفر میشن زیرگروه تو، همونجا خنده‌ام گرفت وایسادم خندیدم.)

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

معرفی مجموعه‌ها

در سال‌های گذشته با برخی از مجموعه‌های اعداد آشنا شدیم:

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱،۲،۳،۴،...\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{۰،۱،۲،۳،۴،...\}$

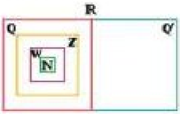
مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{...،-۲،-۱،۰،۱،۲،...\}$

مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m،n\in\mathbb{Z}،n\neq ۰\right\}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=$ مجموعهٔ کل اعداد

مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

معلوم است که $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Q}=\varnothing$ و $\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ این اطلاعات را می‌توانیم به شکل مقابل نمایش دهیم:



بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، بازه می‌نامند. حال بسته به اینکه بازه شامل اعداد انتهایی‌اش باشد یا نه، نام‌های مختلفی به آن می‌دهیم. مثل بازهٔ باز، نیم‌باز، بسته.

به‌عنوان مثال $\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ را بازهٔ باز بین a و b می‌نامیم و آن را با نماد $(a،b)$ نمایش می‌دهیم. بازه‌های دیگر هم به روشی مشابه تعریف می‌شوند و در جدول زیر آورده شده‌اند:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش روی محور
باز	$(a،b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	a b
بسته	$[a،b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$	a b
نیم‌باز	$(a،b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$	a b
نیم‌باز	$[a،b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$	a b

گاهی اوقات در ریاضیات با مجموعه‌هایی مثل $\{x\in\mathbb{R} \mid ۲<x\}$ سروکار داریم، می‌توانیم با گسترش مفهوم بازه برای این قبیل مجموعه‌ها هم یک نمایش بازه‌ای بسازیم.

به‌عنوان مثال می‌توانیم مجموعه فوق را به شکل $(۲،\;\;)$ نمایش دهیم و یا هر نمایش دیگری. البته باید نمادگذاری ما به‌گونه‌ای باشد که بعداً حداقل خودمان، منظور خودمان را درک کنیم. معمولاً در کتاب‌های ریاضی مجموعهٔ فوق را به شکل $(۲،+\infty)$ نمایش می‌دهند، و آن را بازهٔ باز بین ۲ و مثبت بی‌نهایت می‌خوانند.

برای بازه‌های مشابه هم نمایش مشابهی ساخته شده است که در جدول زیر آورده شده است:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش روی محور
باز	$(a،+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$	a
نیم‌باز	$[a،+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\}$	a
باز	$(-\infty،a)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$	a
نیم‌باز	$(-\infty،a]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$	a

آس

۱

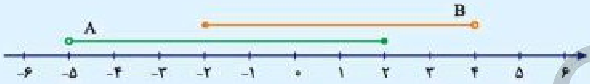
چون بازه‌ها مجموعه‌اند و بین مجموعه‌ها اعمالی همچون $\cap$ و $\cup$ و $-$ تعریف می‌شود پس می‌توان بین بازه‌ها اجتماع یا اشتراک گرفت و ... برای اینکه اجتماع، اشتراک یا تفاضل دو بازه را بیابیم، می‌توانیم به‌صورت ذهنی نتیجه را بیابیم و یا اینکه با استفاده از نمایش بازه‌ها روی محور، نتیجه را به‌دست آوریم.

سـؤال

نمایش هندسی دو بازهٔ $A=(-5,2]$ و $B=[-2,4)$ را روی محور رسم کنید و سپس هرکدام از زیرمجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A\cap B$ ب) $A\cup B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

پاسخ



الف) $A\cap B$ ناحیهٔ مشترک این دو بازه است که برابر بازهٔ $[-2,2]$ است.

دقت کنید که هم -2 و هم 2 عضو هر دو مجموعه A و B هستند.

ب) $A\cup B$ مجموعهٔ اعدادی است که حداقل عضو یکی از دو بازهٔ A و B هستند، که برابر بازهٔ $(-5,4)$ است.

ج) $A-B$ مجموعهٔ اعدادی است که عضو A هستند ولی عضو B نیستند که برابر بازهٔ $(-5,-2)$ است. دقت کنید که -2 هم عضو A است و هم عضو B، پس عضو $A-B$ نیست.

د) $B-A$ مجموعهٔ اعدادی است که عضو B هستند ولی عضو A نیستند که برابر بازهٔ $(2,4)$ است.

تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است را مجموعهٔ متناهی می‌نامیم و مجموعه‌ای که متناهی نیست را مجموعهٔ نامتناهی می‌نامیم.

سـؤال

از بین مجموعه‌های زیر کدام متناهی و کدام نامتناهی است؟

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰   ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی   ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد

د) مجموعهٔ اعداد حقیقی   هـ) مجموعهٔ همهٔ دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات   و) مجموعهٔ تهی

ز) مجموعهٔ سلول‌های بدن انسان.

پاسخ الف) معلوم است که این مجموعه ۹۹ عضو دارد، پس مجموعه‌ای متناهی است.

ب) تعداد اعداد طبیعی از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگتر است، پس این مجموعه نامتناهی است.

ج) تعداد اعداد طبیعی فرد هم از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگتر است، در واقع اعداد فرد با شمردن تمام نمی‌شود، پس مجموعه‌ای نامتناهی است.

د) از آنجا که مجموعهٔ اعداد حقیقی شامل مجموعهٔ اعداد طبیعی است، پس تعداد اعضای آن از تعداد اعضای مجموعهٔ اعداد طبیعی بیشتر است و در نتیجه مجموعهٔ اعداد حقیقی با توجه به نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد طبیعی، نمی‌تواند متناهی باشد، پس نامتناهی است.

هـ) از آنجا که این مجموعه شامل دایره‌های به‌شعاع اعداد طبیعی است، با استدلالی مانند استدلال فوق معلوم می‌شود که این مجموعه هم نامتناهی است.

و) مجموعهٔ تهی عضوی ندارد و در نتیجه تعداد عضوهای آن صفر است و چون صفر عددی حسابی است طبق تعریف، مجموعهٔ تهی مجموعه‌ای متناهی است. البته مشخص است که تعریف حتماً باید به‌شکلی باشد که مجموعهٔ تهی، یک مجموعهٔ متناهی محسوب شود زیرا قطعاً نباید یک مجموعهٔ نامتناهی محسوب شود.

ز) مجموعهٔ سلّول‌های بدن انسان از تعداد اتم‌های تشکیل دهندهٔ بدن او کمتر است و از آنجا که وزن هر اتم از وزن اتم هیدروژن بیشتر است و از آنجا که وزن یک مول هیدروژن (یعنی حدوداً $6/022\times10^{23}$ تا اتم هیدروژن) حدود ۱ گرم است و وزن انسان هم محدود است، معلوم می‌شود که مجموعهٔ گفته شده، مجموعه‌ای متناهی است. *بگذریم از برخی موجودات عظیم‌الجثه معلوم می‌شود که تعداد سلّول‌های بدن انسان محدود است. بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است.*

به طور شهودی حس می‌کنیم که گفته‌های زیر درست‌اند:

الف) اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، آنگاه B نیز نامتناهی است.

ب) اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی است.

با این حساب می‌توانیم بگوییم:

برای اینکه ثابت کنیم یک مجموعه نامتناهی است، کافی است زیر مجموعه‌ای از آن را بیابیم که نامتناهی است.

به عنوان مثال:

- $\mathbb{Q}$ نامتناهی است، زیرا $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}$ نامتناهی است.
- $\mathbb{Q}'$ نامتناهی است، زیرا مجموعهٔ B که به شکل زیر معرفی می‌شود نامتناهی است و $B \subseteq \mathbb{Q}'$

$$B = \{\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}, ۴\sqrt{۲}, \ldots\}$$

- بازهٔ $(۰,۱)$ نامتناهی است، زیرا مجموعهٔ زیر، زیرمجموعهٔ این بازه است و نامتناهی است.

$$C = \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \ldots\right\}$$

- بازهٔ (a,b) نامتناهی است، زیرا مجموعهٔ زیر، یک زیر مجموعهٔ نامتناهی این مجموعه است.

$$D = \left\{a + \frac{b-a}{۲}, a + \frac{b-a}{۳}, a + \frac{b-a}{۴}, a + \frac{b-a}{۵}, \ldots\right\}$$

- بازه‌های $[a,b)$، $[a,b]$ و $(a,b]$ نیز مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند، زیرا بازهٔ (a,b) یک زیرمجموعهٔ نامتناهی آنهاست.

مثال‌های آموزشی

۱) فرض کنید A مجموعهٔ تمام مضرب‌های صحیح ۲۳ باشد.

الف) A را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب) A متناهی است یا نامتناهی؟

ج) یک زیرمجموعهٔ متناهی و یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از A بنویسید.

پاسخ الف)

$$A = \{\ldots, -۴۶, -۲۳, ۰, ۲۳, ۴۶, \ldots\}$$

ب) نامتناهی

ج)

$B = \{-۲۳, ۲۳\}$ $B \subseteq A$

$C = \{۲۳, ۴۶, ۶۹, \ldots\}$ $C \subseteq A$

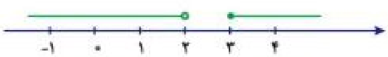
۲) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای نامتناهی باشد.

پاسخ این سؤال پاسخ‌های گوناگونی دارد. برای مثال:

$$\begin{array}{l} A = \{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\} \\ B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \ldots\} \end{array} \Rightarrow A \cap B = \{۶, ۱۲, ۱۸, \ldots\}$$

۳) مجموعهٔ $\mathbb{R} - [۲,۳)$ را به صورت اجتماع دو بازه نشان دهید.

پاسخ از محور کمک می‌گیریم:



$$\mathbb{R} - [۲,۳) = (-\infty, ۲) \cup [۳, +\infty)$$

آس

۱

کافه سؤال

۱ حاصل هریک از مجموعه‌های زیر را با رسم آنها روی محور به‌دست آورید.

الف) $[1,+\infty)-(-\infty,7)$ ب) $(-2,1)\cap[0,4]$ ج) $(2,7]-(3,5)$ د) $(0,1)-[2,3]$

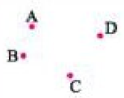
۲ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $\sqrt{2}\in(2,3)$ ب) $[-2,\pi]\cap[1,7]\subseteq[-2,\pi]\cup[1,7]$

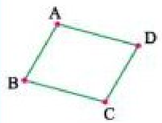
ج) $(2,5)\subseteq[2,5)$ د) $\{1,2,3,4\}\subseteq[-\sqrt{2},2\pi]$

۳ دو بازهٔ A و B را بیابید به‌طوری‌که $[2,3]\cup[-7,-1)$ برابر $A-B$ باشد.

۴ چهار بازهٔ $A=[-4,-1]$ ، $B=[-3,2]$ ، $C=[-2,3]$ و $D=[1,4]$ را در نظر بگیرید. در شکل مقابل هرکدام از بازه‌ها را با یک نقطه نمایش داده‌ایم. درصورتی که اشتراک دو بازه ناتهی باشد نقاط متناظر با آنها را با یک خط به هم وصل کنید.



۵ در سوال قبل آیا می‌توانید بازه‌ها را طوری معرفی کنید که جواب مسأله به شکل داده شده باشد؟



۶ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است و کدام نامتناهی؟

الف) بازهٔ $\left[\frac{1}{1000},\frac{2}{1000}\right]$ ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی که توان دوّم آنها مضربی از ۵ است.

ج) مجموعهٔ اعداد حقیقی که رقم اوّل اعشار آنها ۲ است. د) مجموعه اعداد طبیعی که معکوس آنها بزرگ‌تر از $\frac{1}{100}$ است.

۷ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است و کدام‌یک نامتناهی؟

الف) مجموعهٔ طول ضلع‌های مستطیل‌هایی که محیط آنها ۱ است. ب) مجموعهٔ طول ضلع‌های مربع‌هایی که محیط آنها ۱ است.

ج) مجموعهٔ طول ضلع‌های مثلث‌هایی که محیط آنها ۱ است. د) مجموعهٔ شعاع‌های دایره‌هایی که محیط آنها ۱ است.

۸ اگر A و B دو بازه باشند بررسی کنید که تعداد اعضای $A-B$ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۹ آیا می‌توانید دو مجموعهٔ نامتناهی A و B معرفی کنید به‌طوری که هر سه مجموعهٔ $A-B$ و $B-A$ و $A\cap B$ نامتناهی باشند؟

۱۰ آیا می‌توانید دو مجموعهٔ نامتناهی A و B معرفی کنید به‌طوری که هر سه مجموعهٔ $A-B$ و $B-A$ و $A\cap B$ متناهی باشند؟

گزینـهٔ چنـــد؟!!!!

۱- عدد $\frac{-3}{5}$ عضو چه تعداد از بازه‌های زیر است؟

$(-3,0)\,,\,(-\infty,-5)\,,\,(-3,-1)\,,\,\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)\,,\,[-1,+\infty)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- اشتراک بازهٔ $[-1,2)$ با چه تعداد از بازه‌های زیر تهی است؟

$(0,5)\,,\,(-4,-2)\,,\,(-3,3)\,,\,[2,8]\,,\,[-3,-1)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- عدد $6/07\times10^{-32}$ عضو چه تعداد از بازه‌های زیر است؟

$\left(\frac{1}{1000},\frac{1}{100}\right),\left(-5,\frac{1}{1000}\right),(-4,0),\left(-8,\frac{1}{100}\right),\left(\frac{1}{100},20\right)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- اجتماع کدام‌یک از بازه‌های زیر با بازهٔ $[-2,4)$ می‌شود $[-3,4)$؟

۱) $[-3,4]$ ۲) $[-3,3]$
۳) $[-4,2)$ ۴) $(-3,0)$

۵- بازهٔ $[2,7)$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<7\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{N}\mid 2\le x<7\}$
۳) $\{x\in\mathbb{N}\mid 2<x<7\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}\mid 2\le x<7\}$

۶- مجموعهٔ $[3,6]-[5,8)$ با کدام بازه برابر است؟

۱) $[3,5]$ ۲) $[3,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(6,8)$

۷- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی ۲۰ رقمی
۲) مجموعهٔ اعداد طبیعی که مضرب ۷ هستند.
۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی که هیچ‌کدام از ارقامشان ۵ نیست.
۴) $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$

۸- چندتا از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

$\mathbb{W}-\mathbb{Q}'\,,\,\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{W}-\mathbb{N}\,,\,\mathbb{R}-\mathbb{N}\,,\,\mathbb{W}-\mathbb{Q}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- اشتراک بازهٔ $[-2,5)$ با چندتا از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای نامتناهی است؟

$\mathbb{R}-[-2,5)\,,\,\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'\,,\,\mathbb{Z}\,,\,\mathbb{N}\,,\,\mathbb{R}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه $A\cap B$ مجموعه‌ای متناهی است.
۲) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $B\subseteq A$، آنگاه B متناهی است.
۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $A\subseteq B$، آنگاه B نامتناهی است.
۴) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $A\subseteq B$، آنگاه B نامتناهی است.

آس

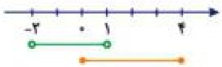
۱

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

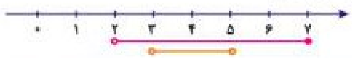
۱

الف) $[1,+\infty)-(-\infty,7)=[7,+\infty)$

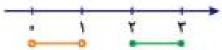
ب) $(-2,1)\cap[0,4]=[0,1)$



ج) $(2,7]-(3,5)=(2,3]\cup[5,7]$



د) $(0,1)-[2,3]=(0,1)$



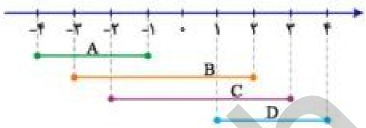
۲

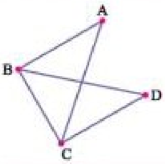
الف) نادرست　　ب) درست　　ج) درست　　د) درست

۳

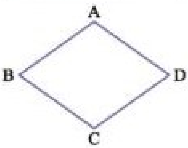
با توجه به محور داریم: $B=[-1,2)$ و $A=[-7,3]$

۴





۵



خیر، ما یک توضیح برای این گفته می‌آوریم، شما می‌توانید اثبات خودتان را داشته باشید. فرض کنید $A=(a_1,b_1)$، $B=(a_2,b_2)$، $C=(a_3,b_3)$ و $D=(a_4,b_4)$ باشد و فرض کنید $a_1<a_2$، حال چون C و A به هم وصل نیستند، باید داشته باشیم $a_2<b_1<a_3$ (چرا؟) و چون D و A به هم وصلند و D و B به هم وصل نیستند، باید داشته باشیم $b_4<a_2$ (چرا؟). حال از $a_2<a_3$ و $b_4<a_2$ نتیجه می‌شود $b_4<a_3$ و در نتیجه بازه‌های C و D نمی‌توانند ارتباط داشته باشند و این تناقض است.

۶

الف) نامتناهی　　ب) نامتناهی　　ج) نامتناهی　　د) متناهی

۷

الف) نامتناهی　　ب) متناهی　　ج) نامتناهی　　د) متناهی

۸

تعداد اعضای $A-B$ می‌تواند ۰، ۱، ۲ یا ∞ باشد. با مثال‌های زیر این مطلب روشن می‌شود:

$[0,1]-[0,\frac{1}{2})=[\frac{1}{2},1]$　　$[0,1]-(0,1)=\{0,1\}$　　$[0,1]-(0,1]=\{1\}$　　$[0,1]-[0,1]=\varnothing$

۹

بله، به‌عنوان مثال می‌توانیم مجموعه‌های A و B را به‌صورت مقابل فرض کنیم: A: مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۴　B: مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۵

۱۰

خیر، زیرا اگر هر دو مجموعهٔ A و B نامتناهی باشند، آنگاه $A\cup B$ نامتناهی است. اما $A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$ و اگر هر سه مجموعهٔ $A-B$ و $B-A$ و $A\cap B$ متناهی باشند، آنگاه اجتماع آنها یعنی مجموعهٔ $A\cup B$ نیز متناهی خواهد بود.

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

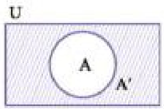
۱	۲
۲	۳
۳	۲
۴	۴
۵	۴
۶	۴
۷	۱
۸	[illegible]
۹	۱
۱۰	۳

درس دوم: متمّم مجموعه

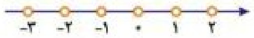
تعریف متمم

تعریف در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند؛ مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

تعریف هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ آنگاه مجموعهٔ $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیست.



به عنوان مثال وقتی بحث حول مجموعهٔ همهٔ اعداد می‌چرخد، $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع است و چون $\mathbb{Q}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ را با $\mathbb{Q}'$ نشان می‌دهیم و چون $\mathbb{Z}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است. می‌توانیم $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ را با $\mathbb{Z}'$ نمایش دهیم که نمایش آن روی محور به‌شکل مقابل خواهد بود:



به‌عنوان مثالی دیگر وقتی بحث حول مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌چرخد، $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع است و مجموعهٔ اعداد زوج یک زیرمجموعهٔ آن است و متمّم آن می‌شود مجموعه اعداد فرد و مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگتر از ۱۰۰ یک زیر مجموعهٔ دیگر آن است و متمّم آن می‌شود مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰. بسته به بحث ما مجموعهٔ مرجع می‌تواند یک مجموعهٔ متناهی و کوچک نیز باشد.

سؤال

فرض کنید مجموعهٔ $U = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{a,c\}$ و $B = \{b,c,e\}$ ، آنگاه مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) A'

ب) B'

ج) $A' \cup B'$

د) $A' \cap B'$

ه) $(A \cup B)'$

و) $(A \cap B)'$

ز) $(A')'$

ح) $(B')'$

پاسخ

الف) $A' = U - A = \{a,b,c,d,e\} - \{a,c\} = \{b,d,e\}$

ب) $B' = U - B = \{a,b,c,d,e\} - \{b,c,e\} = \{a,d\}$

ج) $A' \cup B' = \{b,d,e\} \cup \{a,d\} = \{a,b,d,e\}$

د) $A' \cap B' = \{b,d,e\} \cap \{a,d\} = \{d\}$

ه) $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{a,b,c,d,e\} - \{a,b,c,e\} = \{d\}$

و) $(A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{a,b,c,d,e\} - \{c\} = \{a,b,d,e\}$

ز) $(A')' = U - A' = U - \{b,d,e\} = \{a,c\}$

ح) $(B')' = U - B' = U - \{a,d\} = \{b,c,e\}$

با توجّه به نتایج سؤال قبل می‌بینیم که برخی جواب‌ها با هم برابرند، به‌عنوان مثال $(A')' = A$ و $(A\cap B)' = A'\cup B'$ و $(A\cup B)' = A'\cap B'$.

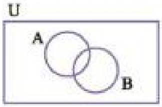
حال این سؤال پیش می‌آید:

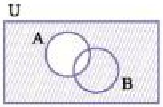
این اتفاق فقط مخصوص به سوال قبل بود و به‌طور اتفاقی رخ داد، و یا اینکه U هرچه باشد و A و B هر زیرمجموعه‌ای از آن باشند، این برابری‌ها را داریم؟

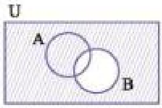
برای پاسخ به این‌گونه سؤالات معمولاً بهترین راه، رسم نمودار است.

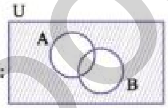
U را مجموعهٔ مرجع و A و B را دو زیرمجموعهٔ آن فرض می‌کنیم.

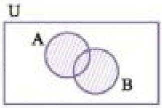
به‌عنوان نمونه با استفاده از نمودار مقابل، ناحیه‌های $(A\cup B)'$ و $A'\cap B'$ را مشخص می‌کنیم تا ببینیم آیا این دو مجموعه برابرند؟

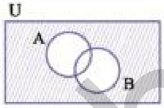


A': 

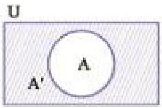
B': 

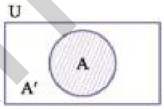
$A'\cap B'$: 

$A\cup B$: 

$(A\cup B)'$: 

نمودارهای فوق نشان می‌دهند که رابطهٔ $(A\cup B)'=A'\cap B'$ یک رابطهٔ همیشگی است و بستگی به چگونگی انتخاب مجموعه‌های U، A یا B ندارد، یک برابری است مثل اتّحادها. البته به طور مشابه می‌توان دید که $(A\cap B)'=A'\cup B'$. تساوی $(A')'=A$ از قبل هم قابل پیش‌بینی بود، این رابطه‌ای است مشابه $-(-x)=x$. البته می‌توان با استفاده از نمودار هم درستی آن را دید.

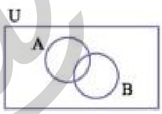
A': 

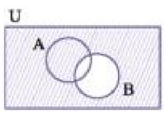
$(A')'$: 

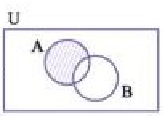
مثال‌های آموزشی

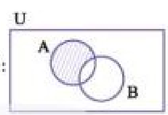
۱) با استفاده از نمودار نشان دهید: $A - B = A\cap B'$

پاسخ



B': 

$A-B$: 

$A\cap B'$: 

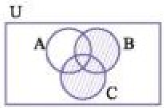
می‌بینیم $A-B=A\cap B'$

۲) **آیا رابطهٔ زیر همیشه برقرار است؟**

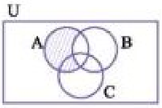
$A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$

پاسخ بررسی این‌گونه ادّعاها با استفاده از نمودار، ساده است.

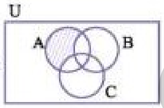
$B\cup C:$



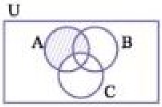
$A-B:$



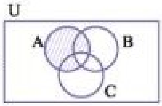
$A-(B\cup C):$



$A-C:$



$(A-B)\cup(A-C):$

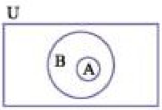


معلوم است که دو مجموعهٔ $A-(B\cup C)$ و $(A-B)\cup(A-C)$ لزوماً برابر نیستند.

۳) **اگر U مجموعهٔ مرجع باشد، با استفاده از نمودار نشان دهید:**

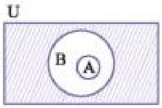
$A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

پاسخ یک نمودار رسم می‌کنیم که در آن $A\subseteq B$ است.

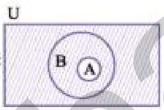


حال B' و A' را در دو نمودار نشان می‌دهیم.

$B':$



$A':$



و با توجه به نمودارها معلوم است که $B'\subseteq A'$.

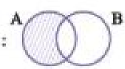
نکته: قبلاً دیدیم که رابطهٔ $(A')'=A$ برقرار بود و این شبیه رابطهٔ $-(-x)=x$ در اعداد حقیقی بود. حال رابطهٔ $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$ هم مشابه رابطهٔ $x<y\Rightarrow -y<-x$ در اعداد حقیقی است.

۴) **با استفاده از نمودار نشان دهید:**

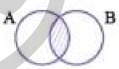
$A-B=A-(A\cap B)$

پاسخ

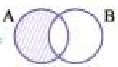
$A-B:$



$A\cap B:$



$A-(A\cap B):$



با توجه به نمودارها معلوم است که $A-B=A-(A\cap B)$.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در این قسمت می‌خواهیم در مورد فرمول کلی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه به نتیجه برسیم و در واقع خودمان به یک فرمول کلی برسیم. البته در مسائل مربوط به تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه راحت‌تریم از نمودار ون استفاده کرده و در واقع از روی تصویر در مورد تعداد اعضای هر قسمت تجزیه و تحلیل کنیم. برای درک این مطلب سؤالات زیر را با هم حل می‌کنیم:

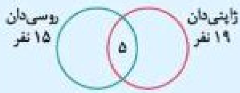
سؤال

در یک کلاس ۱۵ نفر روسی می‌دانند و ۱۹ نفر ژاپنی. اگر در این کلاس ۵ نفر هر دو زبان را بدانند، چند نفر حدّاقل یکی از این دو زبان را می‌دانند؟

پاسخ روش اول: چون ۱۵ نفر روسی می‌دانند، و ۵ نفر هم روسی می‌دانند و هم ژاپنی، پس ۱۰ نفر فقط روسی می‌دانند. چون ۱۹ نفر ژاپنی می‌دانند و ۵ نفر هم روسی می‌دانند و هم ژاپنی، پس ۱۴ نفر فقط ژاپنی می‌دانند. حال تعداد افرادی که حدّاقل یکی از این دو زبان را می‌دانند برابر است با تعداد افرادی که فقط روسی می‌دانند به‌علاوه تعداد افرادی که فقط ژاپنی می‌دانند به‌علاوهٔ تعداد افرادی که هم روسی می‌دانند و هم ژاپنی، یعنی ۱۰+۱۴+۱۵ یعنی ۲۹ نفر.

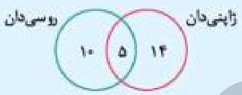
روش دوّم: استفاده از نمودار:

اطّلاعات مسأله را می‌توان در نمودار مقابل نشان داد و سریعاً معلوم می‌شود که تعداد اعضای ناحیه‌های مختلف به شکل روبه‌رو است:



و در نتیجه تعداد افرادی که حدّاقل یکی از این دو زبان را می‌دانند، می‌شود:

$۱۰+۵+۱۴=۲۹$



روش سوّم:

اگر فردی بگوید جواب ۱۹+۱۵ است درواقع آن ۵ نفر مشترک را دوبار شمرده است، پس باید یک بار را کم کند پس جواب می‌شود ۵-۱۹+۱۵ یعنی ۲۹.

سؤال

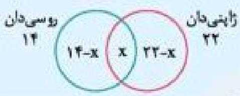
در یک کلاس ۱۴ نفر روسی می‌دانند و ۲۲ نفر ژاپنی . اگر در این کلاس تعداد کسانی که حدّاقل یکی از این دو زبان را می‌دانند ۳۰ نفر باشند، آنگاه چند نفر هر دو زبان را می‌دانند؟

پاسخ تعداد کسانی که هر دو زبان را می‌دانند x فرض می‌کنیم.

چون ۱۴ نفر روسی می‌دانند و x نفر هر دو زبان را می‌دانند پس x - ۱۴ نفر فقط روسی می‌دانند، چون ۲۲ نفر ژاپنی می‌دانند و x نفر هر دو زبان را می‌دانند پس x - ۲۲ نفر فقط ژاپنی می‌دانند. حال تعداد افرادی که حدّاقل یکی از این دو زبان را می‌دانند برابر است با تعداد افرادی که فقط روسی می‌دانند به‌علاوه تعداد افرادی که فقط ژاپنی می‌دانند به‌علاوهٔ تعداد افرادی که هم روسی می‌دانند و هم ژاپنی، در نتیجه:

$$۳۰=(۱۴-x)+(۲۲-x)+x \Rightarrow x=۶$$

از نمودار هم می‌شد استفاده کرد.

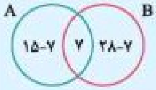


تعداد اعضای مجموعه

یادت میاد اگر G یک مجموعه باشد، آنگاه تعداد اعضای آن را با $n(G)$ نشان دادیم. به‌عنوان مثال اگر $G=\{a,b,c,d\}$، آنگاه $n(G)=۴$.

سؤال

اگر $n(A)=۱۵$ و $n(B)=۲۸$ و $n(A\cap B)=۷$، آنگاه $n(A\cup B)$ را محاسبه کنید.



پاسخ روش اول: از نموداری مشابه نمودارهای رسم شده در سؤال‌های قبل استفاده می‌کنیم و معلوم است که:

$$n(A\cup B)=۱۵-۷+۷+۲۸-۷=۱۵+۲۸-۷=۳۶$$

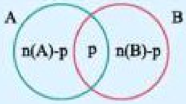
روش دوم: اگر فردی بگوید جواب ۲۸+۱۵ است درواقع آن ۷ عضو مشترک را دوبار شمرده است. پس باید یک بار را کم کند و جواب می‌شود ۷-۲۸+۱۵، یعنی ۳۶.

حال به یک سؤال کلی می‌پردازیم:

سؤال

اگر $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(A\cap B)$ معلوم باشد، آنگاه $n(A\cup B)$ را محاسبه کنید.

پاسخ روش اول: مشابه سوال قبل، از نمودار استفاده می‌کنیم.



برای سادگی نوشتار داخل نمودار به‌جای $n(A\cap B)$ می‌نویسیم p و معلوم است که:

$$n(A\cup B)=(n(A)-p)+p+(n(B)-p)=n(A)+n(B)-p=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

و نتیجهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید:

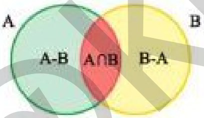
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

روش دوم: اگر فردی بگوید جواب $n(A)+n(B)$ است درواقع $n(A\cap B)$ عضو مشترک را دوبار شمرده است، پس باید یک بار را کم کند و جواب می‌شود: $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

این نتیجه به ما می‌گوید که اگر سه تا از چهار مقدار $n(A)$، $n(B)$، $n(A\cap B)$ و $n(A\cup B)$ معلوم باشد، آنگاه چهارمی هم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

مجموعه‌های جدا از هم



تعریف وقتی دو مجموعه عضو مشترکی ندارند می‌گوییم آن دو مجموعه جدا از هم‌اند. به عنوان مثال وقتی B و A دو مجموعه باشند، آنگاه سه مجموعهٔ زیر جدا از هم‌اند.

$$A-B \quad \text{و} \quad A\cap B \quad \text{و} \quad B-A$$

هنگامی که دو مجموعهٔ B و A هیچ عضو مشترکی ندارند معلوم است که تعداد اعضای اجتماع آنها برابر مجموع تعداد عضوهای آنها است.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\underbrace{n(A\cap B)}_{\text{B و A جدا از هم هستند پس } n(A\cap B)=0}=n(A)+n(B)$$

برای ما از نظر شهودی واضح است که وقتی چند مجموعه جدا از هم باشند یعنی هیچ دوتایی از آنها عضو مشترک نداشته باشند و اشتراک هردو مجموعه و از آنها تهی باشد، آنگاه تعداد اعضای اجتماع آن مجموعه‌ها برابر مجموع تعداد اعضای آنها است.

به‌عنوان مثال می‌توانیم بنویسیم:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

مثال‌های آموزشی

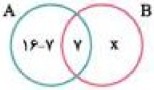
۱) اگر $n(A)=۱۶$ ، $n(A\cap B)=۷$ و $n(A\cup B)=۲۸$ ، آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۲۸=۱۶+n(B)-۷ \Rightarrow n(B)=۱۹$$

البته همیشه می‌توانیم بدون استفاده از فرمول، مستقیماً با استفاده از رسم نمودار مقدار جواب را بیابیم. به عنوان مثال در این مثال می‌توانستیم به‌صورت زیر مسأله را حل کنیم:



$$۲۸=n(A\cup B)=۱۶-۷+۷+x \Rightarrow x=۱۲$$

$$n(B)=x+۷=۱۲+۷=۱۹$$

۲) اگر $n(A)=۱۸$ ، $n(B)=۱۳$ و $n(A\cup B)=۲۵$ ، آنگاه موارد زیر را محاسبه کنید:

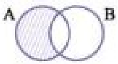
الف) $n(A\cap B)$ ب) $n(A-B)$ ج) $n(B-A)$

پاسخ الف)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۲۵=۱۸+۱۳-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۶$$

ب) از نمودار کمک می‌گیریم.



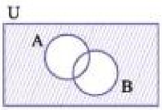
معلوم است که $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ و در نتیجه $n(A-B)=۱۸-۶=۱۲$

ج) با توجه به نمودار مشابه قسمت ب می‌بینیم که

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow n(B-A)=۱۳-۶=۷$$

۳) اگر U مجموعهٔ مرجع باشد و A و B دو زیرمجموعه از آن باشند و $n(U)=۱۱۰$ ، $n(A)=۷۰$ ، $n(B)=۵۷$ و $n(A\cap B)=۳۲$ ، آنگاه $n((A\cup B)')$ را بیابید.

پاسخ یک شکل به‌عنوان راهنما رسم می‌کنیم:



ابتدا $n(A\cup B)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۰+۵۷-۳۲=۹۵$$

با توجه به اینکه اگر G زیرمجموعهٔ U باشد، آنگاه $n(G')=n(U)-n(G)$ (چرا؟) معلوم می‌شود که:

$$n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۱۱۰-۹۵=۱۵$$

۴) فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند به‌طوری که $n(U)=۲۰۰$ ، $n(A)=۱۲۰$ ، $n(B)=۸۰$ و $n(A\cap B)=۴۰$ ، مطلوب است:

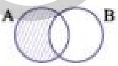
الف) $n(A\cup B)$ ب) $n(A\cap B')$ ج) $n(A'\cap B)$ د) $n(A'\cap B')$

پاسخ برای حل اینگونه مسائل می‌توانیم نمودار رسم کنیم و با کمک آن محاسبات لازم را انجام دهیم. همچنین می‌توانیم به‌نوعی آنچه مسأله از ما خواسته را به $n(A\cup B)$ ، $n(A-B)$ ، $n(B-A)$ و چیزهایی شبیه آن که محاسبهٔ آنها با فرمول، ساده است ربط دهیم.

الف)

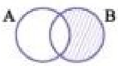
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲۰+۸۰-۴۰=۱۶۰$$

ب)



$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۲۰-۴۰=۸۰$$

ج)



$$n(A'\cap B)=n(B\cap A')=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۸۰-۴۰=۴۰$$

د)

$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U-(A\cup$ … $U)-n(A\cup B)=۲۰۰-$

۵) چه‌موقع $n(A\cup B)$ برابر با $n(A)+n(B)$ می‌شود؟

پاسخ به‌صورت شهودی معلوم است برای اینکه این اتفاق رخ دهد باید A و B عضو مشترکی نداشته باشند.

با استفاده از رابطهٔ مربوط به $n(A\cup B)$ هم می‌توان این را نشان داد:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)\Rightarrow n(A)+n(B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)\Rightarrow n(A\cap B)=۰\Rightarrow A\cap B=\varnothing$$

۶) چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که نه مضربی از ۲ است و نه مضربی از ۳.

پاسخ اگر فرض کنیم $U=\{۱،۲،۳،...،۹۹۹\}$ و $A=\{۲،۴،۶،...،۹۹۸\}$ و $B=\{۳،۶،۹،...،۹۹۹\}$ آنگاه متوجه می‌شویم که جواب مسأله $n(A'\cap B')$ است.

معلوم است که $n(U)=۹۹۹$ ، $n(A)=\frac{۹۹۸}{۲}=۴۹۹$ و $n(B)=\frac{۹۹۹}{۳}=۳۳۳$ ، حال باید $n(A\cap B)$ و $n(A\cup B)$ را بیابیم.

یافتن $n(A\cap B)$ ساده‌تر است، زیرا A مضارب ۲ است و B مضارب ۳ و اگر عددی هم در مجموعهٔ A باشد و هم در مجموعهٔ B باید مضرب ۶ باشد. پس باید تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{۶،۱۲،۱۸،...،۹۹۶\}$ را بیابیم که می‌شود $\frac{۹۹۶}{۶}$ یعنی ۱۶۶ و در نتیجه $n(A\cap B)=۱۶۶$.

حال محاسبات را آغاز می‌کنیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۴۹۹+۳۳۳-۱۶۶=۶۶۶$$

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۹۹۹-۶۶۶=۳۳۳$$

یادداشت

کافه سؤال

۱ اگر U مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ باشد و A مجموعه اعداد اوّل کوچکتر از ۱۰ و B مجموعهٔ اعداد فرد کوچکتر از ۱۰، آنگاه مجموعه‌های زیر را با نمایش اعضای آنها بنویسید.

الف) A' ب) B' ج) $A' \cap B'$ د) $A' \cup B'$

۲ اگر $A \subseteq A'$، آنگاه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳ در چه شرایطی متمم مجموعهٔ $A \cap B$ می‌شود مجموعهٔ $A \cup B$؟ (می‌توانید از نمودار کمک بگیرید.)

۴ در چه شرایطی متمم مجموعهٔ $A - B$ می‌شود مجموعهٔ $B - A$؟

۵ حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین شکلی که می‌توانید بنویسید.

الف) $A - A'$ ب) $A' - A$ ج) $(A - B) \cap A'$ د) $(A - B') \cap (B - A')$

۶ اگر $n(A) = ۲۰$، $n(B) = ۱۷$ و $n(A') = ۱۱$، آنگاه $n(B')$ چند است؟

۷ در چه شرایطی رابطهٔ $n(A - B) = n(A) - n(B)$ برقرار می‌شود؟

۸ اگر $n(A) = ۱۲$ و $n(B) = ۸$، آنگاه حداقل و حداکثر مقدار $n(A \cup B)$ چقدر می‌تواند باشد؟

۹ اگر $n(A - B) = ۹$، $n(B - A) = ۱۰$ و $n(A \cup B) = ۲۸$، آنگاه $n(A \cap B)$ را بیابید.

۱۰ اگر $n(U) = ۱۰۰$، $n(A) = ۲۰$، $n(B) = ۳۵$ و $n(A \cup B) = ۴۰$، آنگاه موارد زیر را بیابید.

الف) $n(A - B)$ ب) $n(A' - B')$ ج) $n(A' \cup B')$

گزینهٔ چند؟!!!!

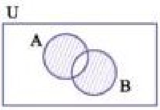
۱- مجموعهٔ $A - A'$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

۱) A' ۲) $\varnothing$ ۳) U ۴) A

۲- متمم مجموعهٔ $A' - B'$ با کدام‌یک از زیرمجموعه‌های زیر برابر است؟

۱) $A \cap B$ ۲) $A \cup B'$
۳) $A \cap B'$ ۴) $A' \cup B'$

۳- ناحیهٔ هاشورخورده در شکل داده شده با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر **نیست**؟



۱) $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ ۲) $(A \cup B) - (A \cap B)$
۳) $(A \cup B') \cap (B \cup A')$ ۴) $(A - B) \cup (B - A)$

۴- اگر $A \subseteq B$ و $A' \subseteq B$، آنگاه کدام‌یک از موارد زیر لزوماً درست است؟

۱) $A = \varnothing$ ۲) $A = U$ ۳) $B = \varnothing$ ۴) $B = U$

۵- اگر $A \subseteq B$ و $A' \subseteq B'$، آنگاه کدام‌یک از موارد زیر لزوماً درست است؟

۱) $(A \cap B)' = A' \cap B'$ ۲) $A - B = B - A$
۳) $A \cup B = A \cap B$ ۴) همهٔ موارد

۶- اگر $n(A) = ۱۴$، $n(B) = ۱۷$ و $n(A \cup B) = ۲۹$، آنگاه $n(A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- اگر $A \subseteq B$، $n(B) = ۲۳$ و $n(B - A) = ۱۸$، آنگاه $n(A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸- اگر $n(U) = ۱۰$، $n(A) = ۳$ و $n(B) = ۶$، آنگاه $n(A' \cup B')$ حداقل چقدر خواهد بود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۹- اگر $n(B) = ۹$، $n(A - B) = ۵$ و $n(B - A) = ۴$، آنگاه $n(A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰- اگر $n(A) = ۱۴$، $n(B) = ۱۷$ و $n(A \cup B) = ۲۶$، آنگاه $n(A \cap B')$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

درس۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

$U = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$ $\quad A = \{۲،۳،۵،۷\}$ $\quad B = \{۱،۳،۵،۷،۹\}$

الف) $A' = U - A = \{۱،۴،۶،۸،۹\}$ $\quad$ ب) $B' = \{۲،۴،۶،۸\}$ $\quad$ ج) $A \cap B' = \{۴،۶،۸\}$ $\quad$ د) $A \cup B' = \{۱،۲،۴،۶،۸،۹\}$

۲

از $A' \subseteq A$ نتیجه می‌شود $A' \cap A = A'$، اما می‌دانیم $A' \cap A = \varnothing$ بنابراین $A' = \varnothing$ و در نتیجه $A = U$.

۳

با الگو گرفتن از سوال قبل می‌توانیم بگوییم: $A \cap B = \varnothing$ و در نتیجه $A \cup B = U$ و اگر قدری دقت کنید این یعنی $B = A'$.

۴

اولین نتیجه این است که $A \cap B = \varnothing$ و در نتیجه $A - B = A$ و $B - A = B$ و با توجه به فرض مسأله این یعنی $B = A'$.

۵

الف) $A - A' = A \cap (A')' = A \cap A = A$

ب) $A' - A = A' \cap A' = A'$

ج) $(A-B) \cap A' = (A \cap B') \cap A' = (A \cap A') \cap B' = \varnothing \cap B' = \varnothing$

د) $(A-B') \cap (B-A') = (A \cap (B')') \cap (B \cap (A')') = (A \cap B) \cap (B \cap A) = A \cap B$

۶

$n(A) = ۲۰ \quad , \quad n(B) = ۱۷ \quad , \quad n(A') = ۱۱ \quad , \quad n(B') = ?$

$n(A') = n(U) - n(A) \Rightarrow ۱۱ = n(U) - ۲۰ \Rightarrow n(U) = ۳۱$

$n(B') = n(U) - n(B) = ۳۱ - ۱۷ = ۱۴$

۷

$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A) - n(B) \Rightarrow n(A \cap B) = n(B)$

در صورتی تساوی برقرار است که $n(A \cap B) = n(B)$ یعنی $B \subseteq A$.

۸

$n(A) = ۱۳ \qquad n(B) = ۸$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{اگر } A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cap B) = ۰ \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۲۱ \\ \text{اگر } B \subseteq A \Rightarrow n(A \cap B) = n(B) = ۸ \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) = ۱۳ \end{array}\right\} \Rightarrow n(A) = ۱۳ \le n(A \cup B) \le n(A) + n(B) = ۲۱$$

۹

$n(A \cup B) = n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A) \Rightarrow ۲۸ = ۹ + n(A \cap B) + ۱۰ \Rightarrow n(A \cap B) = ۹$

۱۰

$n(U) = ۱۰۰ \ ,\ n(A) = ۲۰ \ ,\ n(B) = ۳۵ \ ,\ n(A \cup B) = ۴۰$

$n(A \cap B) = -n(A \cup B) + n(A) + n(B) = -۴۰ + ۲۰ + ۳۵ = ۱۵ \quad (*)$

الف) $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) \xrightarrow{(*)} n(A-B) = ۲۰ - ۱۵ = ۵$

ب) $n(A'-B') = n(A') - n(A' \cap B') = n(A') - [n(A \cup B)'] = n(U) - n(A) - n(U) + n(A \cup B) = n(A \cup B) - n(A) = n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{(*)} ۳۵ - ۱۵ = ۲۰$

ج) $n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) = ۱۰۰ - ۱۵ = ۸۵$

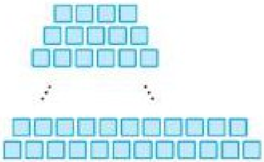
درس۲ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سوال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
پاسخ	۴	۲	۳	۴	۴	۲	۴	۴	۲	۴

درس سوم: الگو و دنباله

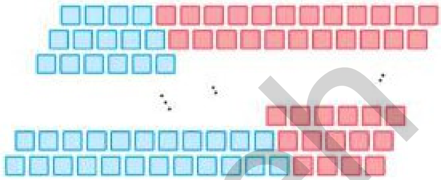
مفهوم الگو و دنباله

با دو اتفاق این درس را مطرح می‌کنیم.



مطلب زیر خاطره‌ای است از یکی از دوستان که در کارخانهٔ قوطی‌سازی کار می‌کرد: یک روز ماشین آمده بود تا قوطی‌ها را بار بزنند و ببرد، کارگران کارخانه، قوطی‌هایی را که قرار بود به او تحویل دهند، به شکلی مشابه شکل مقابل به‌طور منظم چیده بودند.

رانندهٔ ماشین حمل‌بار برای اینکه تعداد قوطی‌هایی را که تحویل می‌گیرد دقیقاً مشخص کند شروع کرد به‌شمردن قوطی‌ها. من به او گفتم برای شمردن قوطی‌ها لازم نیست همهٔ آنها را یکی‌یکی شمارش کند، بلکه می‌توان این کار را به روش ساده‌تری نیز انجام داد و تعداد آنها ۴۷۴ تا است. تعجب کرد و پرسید چگونه این را فهمیدی! گفتم: می‌بینیم که قوطی‌ها در دوازده ردیف چیده شده‌اند که اگر قوطی‌های ردیف بالا را بشماریم می‌بینیم که ۳۴ قوطی در ردیف بالا قرار دارند و چون هر ردیف یک قوطی از ردیف بالاتر بیشتر دارد پس در ردیف پایین ۴۵ قوطی قرار دارد. حال برای اینکه به تعداد قوطی‌ها پی ببریم، تصور می‌کنیم تعدادی قوطی به همین شکل داشته باشیم و آن را بصورت برعکس در کنار قوطی‌های خودمان قرار دهیم.



خواهیم دید که در ردیف بالایی ۳۴+۴۵ قوطی قرار دارد و همچنین در ردیف پایینی هم ۴۵+۳۴ قوطی قرار دارد و از آنجا که در قوطی‌های سمت چپ تعداد قوطی‌ها در هر ردیف یکی کمتر از ردیف پایینی است و در قوطی‌های سمت راست تعداد قوطی‌های هر ردیف یکی بیشتر از ردیف پایینی است، می‌بینیم که مجموع قوطی‌های ردیف دوّم می‌شود ۱-۴۵+۱+۳۴ یعنی ۴۵+۳۴ و به همین ترتیب می‌بینیم که تعداد قوطی‌های همهٔ ردیف‌ها می‌شود ۴۵+۳۴ تا و چون کلاً ۱۲ ردیف قوطی وجود دارد پس تعداد کل قوطی‌ها در شکل فرضی ما می‌شود (۴۵+۳۴)×۱۲ تا و در نتیجه تعداد قوطی‌هایی که الان جلوی چشم ما هست می‌شود $\frac{۱۲\times(۳۴+۴۵)}{۲}$ تا یعنی ۷۹×۶ تا. یعنی ۶ تا از ۸۰×۶ تا کمتر یعنی ۴۷۴ تا. رانندهٔ ماشین خوشش آمد و گفت: بارک‌الله! باقی داستان یادم نیست.

داستان مشهوری دربارهٔ کارل فریدریش گاوس، ریاضیدان آلمانی، وجود دارد: معلم دبستان او برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آنها خواسته بود مجموع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را بیابند. گاوس برخلاف انتظار معلم، این کار را در چند دقیقه انجام داد. او برای اینکار از روشی مشابه روش زیر استفاده کرد:

فرض کنید S مجموع مورد نظر باشد در این صورت:

$$S=1+2+3+...+98+99+100$$

$$S=100+99+98+...+3+2+1$$

پس:

$$2S=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$2S=\underbrace{101+101+101+...+101+101+101}_{\text{۱۰۰ بار}}=100\times 101$$

و در نتیجه:

$$S=\frac{100\times 101}{2}=5050$$

به‌نظر می‌رسد داستان دوّم کاملاً شبیه داستان اوّل است و ایده‌های به‌کار رفته برای حل این دو مسأله یکی است و در واقع این دو اتفاق یک الگو دارند و از یک دیدگاه خاص درواقع یک اتفاق هستند.

یه تمرین

مسألهٔ دوّم را با ساختن یک الگو به صورت مسأله اوّل درآورید.

سعی کنید با استفاده از ایده‌های حل مسأله‌های فوق مجموع‌های زیر را بیابید.

$1+2+3+...+1000$

$37+38+39+...+103$

$1+3+5+...+101$

اصولاً ریاضیات بحث دربارهٔ نظم است و شاید بتوان گفت که هرجا نظمی وجود دارد، ریاضیات وجود دارد. در این مبحث دربارهٔ الگوهایی از اعداد و اشکال که نظم‌های خاصی دارند سخن خواهیم گفت. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$2, 4, 6, 8, 10, ...$

این اعداد آشنا هستند، همان اعداد زوجند و از نظم مشخصی هم برخوردارند (کدام نظم؟) و با توجّه به نظمی که بر اعداد زوج حاکم است، به‌راحتی می‌توان تشخیص داد که یک عدد زوج هست یا نه؟ به عنوان مثال به‌سرعت متوجّه می‌شویم که ۱۳۹۶ عددی است زوج و ۲۳۷۱ عددی زوج نیست و همچنین با توجّه به اینکه ۲ اوّلین عدد زوج طبیعی است به‌سرعت می‌توانیم بفهمیم فرضاً ۱۰۲مین عدد زوج کدام است:

$$2\times 102=204$$

و همچنین با توجه به اینکه ۱ اوّلین عدد فرد است، به سرعت می‌فهمیم که ۱۵مین عدد فرد، کدام است:

$2\times 14+1=29$ (چرا ۱۴؟)

و همچنین به‌سرعت می‌فهمیم که ۲۱۸مین عدد فرد کدام است:

$2\times 217+1=435$ (چرا ۲۱۷؟)

حال به چند سؤال مشابه و حل آنها می‌پردازیم.

گام ۱

سؤال

۱۳مین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌اش ۲ است را بیابید.

پاسخ اوّلاً می‌دانیم که اوّلین این اعداد خود ۲ است زیرا ۲ = ۲ + ۰×۳

و با قدری دقت درمی‌یابیم که ۱۳مین این اعداد می‌شود: ۳۸ = ۲ + ۳×۱۲

سؤال

۲۰مین عدد بزرگتر از ۳۰ که بر ۷ بخش‌پذیر است چه عددی است؟

پاسخ اوّلین عدد بزرگتر از ۳۰ که بر ۷ بخش‌پذیر است ۳۵ است.

و در نتیجه ۲۰مین عدد بزرگتر از ۳۰ که بر ۷ بخش‌پذیر است می‌شود: ۱۶۸ = ۷×۱۹ + ۳۵

سؤال

۸۲مین عدد بزرگ‌تر از ۴۰ که در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌اش ۳ است، چه عددی است؟

پاسخ اولین عددی که این ویژگی را دارد ۴۸ است و در نتیجه ۸۲مین عددی که این ویژگی را دارد می‌شود: ۷۷۷ = ۹×۸۱ + ۴۸

سؤال

آیا به همان سادگی که به سؤالات قبل پاسخ گفتید می‌توانید بگویید که ۸۲مین عدد اوّل، کدام است؟

پاسخ *خیر!*، زیرا که درواقع نظم مشخصّی بر اعداد اوّل حاکم نیست و برای اینکه بفهمیم یک عدد اوّل است یا نه باید از همان روش تجزیهٔ عدد استفاده کنیم به‌عبارت دیگر باید عدد را بر اعداد اوّل کوچکتر از خودش تقسیم کنیم تا ببینیم که آیا باقیمانده صفر می‌شود و یا نه و ... و درواقع فرمول یا روشی وجود ندارد که به ما کمک کند که بطور مستقیم nمین عدد اوّل را مشخّص کنیم و درواقع این اعداد نامنظمند.

"نظم باعث می‌شود بتوانیم محاسبه کنیم".

مثال‌های آموزشی

۱) با توجه به نظم حاکم بر دنباله‌های زیر چندجملهٔ بعدی آنها را بنویسید و سپس مشخص کنید nمین جملهٔ هرکدام چیست؟

الف) ۲،۷،۱۲،۱۷،...　ب) ...،۵-،۱-،۳　ج) ۲،۸،۱۸،۳۲،...　د) ۳،۶،۱۲،۲۴،...

پاسخ الف) در این دنباله دیده می‌شود که هر جملهٔ دنباله ۵ تا بیشتر از جمله قبل است، پس می‌توان گفت که جملات بعدی آن برابرند با:
۲۲،۲۷،۳۲،...

و جملات آن را می‌توان بصورت ...،۵×۴+۲،۵×۳+۲،۵×۲+۲،۵×۱+۲،۲ نوشت و در کل می‌توان گفت جملهٔ n ام آن برابر ۲ + ۵×(n−۱) است، یا به عبارت دیگر ۵n − ۳.

ب) در این دنباله دیده می‌شود که هر جملهٔ دنباله ۴ تا از جملهٔ قبل کمتر است. پس می‌توان گفت که جملات بعدی آن می‌شوند: ...،۱۷-،۱۳-،۹-

و جملات این دنباله را می‌توان به‌صورت ...،۴×۴−۳،۴×۳−۳،۴×۲−۳،۴×۱−۳،۳ نوشت و در کل می‌توان گفت جملهٔ n ام آن ۴×(n−۱) − ۳ می‌شود، یا به‌عبارت دیگر ۴n + ۷−.

ج) جملات این دنباله را می‌توان بصورت ...،۲×۱۶،۲×۹،۲×۴،۲×۱ نوشت و یا به شکل دیگر: ...،$۲×۴^۲$،$۲×۳^۲$،$۲×۲^۲$،$۲×۱^۲$ پس می‌توان حدس زد جملات بعدی آن برابرند با: ...،$۲×۷^۲$،$۲×۶^۲$،$۲×۵^۲$ یعنی ...،۹۸،۷۲،۵۰ و جملهٔ n ام آن برابر $۲n^۲$ است.

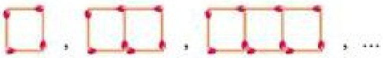
د) جملات این دنباله را می‌توان بصورت ...،۳×۸،۳×۴،۳×۲،۳ نوشت و یا به شکل دیگر: ...،$۳×۲^۳$،$۳×۲^۲$،$۳×۲^۱$،$۳×۲^۰$ پس می‌توان گفت جملات بعدی آن برابرند با: ...،$۳×۲^۶$،$۳×۲^۵$،$۳×۲^۴$ یعنی ...،۹۲...،۴۸ و جملهٔ n ام آن برابر ... ۳× .

۲) اگر امروز سه‌شنبه باشد، ۸۰ روز بعد چه روزی از هفته است؟

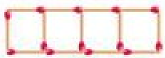
پاسخ روزهای هفته هر هفت روز تکرار می‌شوند، یعنی وقتی که امروز سه‌شنبه است، ۷ روز بعد هم سه‌شنبه است و ۱۴ روز بعد هم سه‌شنبه است و... پس ما باید ابتدا باقیماندهٔ تقسیم ۸۰ بر ۷ را بیابیم، می‌بینیم که $۸۰ = ۱۱ \times ۷ + ۳$ پس باقیماندهٔ ۸۰ در تقسیم بر ۷ برابر ۳ است، و می‌فهمیم که ۸۰ روز بعد ۳ روز بعد از سه‌شنبه است یعنی جمعه.

توضیح بیشتر اینکه می‌دانیم که ۷ روز بعد سه‌شنبه و ۲×۷ روز بعد سه‌شنبه است و به همین ترتیب ۱۱×۷ روز بعد هم سه‌شنبه است و چون $۸۰ = ۱۱ \times ۷ + ۳$ ما باید بدانیم که ۳ روز بعد از روز ۱۱×۷ ام چه روزی از هفته است و چون روز ۱۱×۷ ام سه‌شنبه است، نتیجه می‌شود سه روز بعد از آن جمعه است.

۳) با استفاده از چوب کبریت شکل‌های مقابل را ساخته‌ایم. ابتدا شکل بعدی را رسم کنید و سپس مشخص کنید در شکل دهم چند چوب‌کبریت به‌کار می‌رود؟

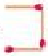


پاسخ نظم حاکم بر این شکل‌ها این است که در هر مرحله یک مربع به شکل قبل اضافه می‌شود، پس شکل چهارم به‌صورت مقابل خواهد بود و تعداد چوب‌کبریت‌های به کار رفته در شکل‌ها هم به‌صورت زیر است:



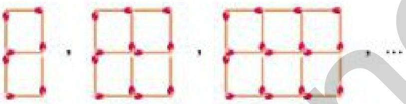
۴،۷،۱۰،...

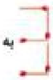
در این دنباله معلوم است که تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته برای ساختن هر شکل، از تعداد چوب‌کبریت‌های لازم برای ساختن شکل قبل ۳ تا بیشتر است.

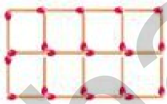
البته این را می‌توانستیم با توجه به اینکه هر شکل با اضافه کردن بخشی به‌صورت  به شکل قبل ساخته می‌شود هم دریابیم.

حال مشخص است که تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل n ام می‌شود $۴ + ۳(n - ۱)$ و به‌عبارت دیگر $۳n + ۱$ و از اینجا می‌توانیم بفهمیم که تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کاررفته در شکل دهم ۳۱ عدد است.

۴) با استفاده از چوب‌کبریت شکل‌های مقابل را می‌سازیم. ابتدا شکل بعدی را رسم کنید و سپس مشخص کنید در شکل ۲۰ ام چند چوب‌کبریت به‌کار می‌رود؟

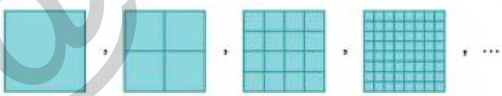


پاسخ می‌بینیم که هر شکل با اضافه کردن بخشی به شکل  به شکل قبل ساخته می‌شود و شکل چهارم به‌صورت مقابل خواهد بود:



و با توجه به بخش اضافه شده در هر مرحله می‌فهمیم که تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته برای ساختن هر شکل، ۵ تا از تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل قبل بیشتر است و با توجه به اینکه در شکل اوّل ۷ چوب‌کبریت به‌کار رفته است، مشخّص می‌شود که تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل n ام برابر $۷ + ۵(n - ۱) = ۲ + ۵n$ است و از اینجا می‌فهمیم که تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل ۲۰ ام $۲ + ۵ \times ۲۰ = ۱۰۲$ است.

۵) شکل‌های زیر را رسم کرده‌ایم، تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام چه رابطه‌ای با n دارد؟



پاسخ می‌بینیم که هر شکل از تقسیم کردن هر مربع کوچک شکل قبل به ۴ قسمت مساوی به‌وجود می‌آید و در نتیجه تعداد کوچک‌ترین مربع‌ها در هر شکل ۴ برابر تعداد کوچک‌ترین مربع‌ها در شکل قبل است و تعداد کوچک‌ترین مربع‌ها در شکل‌های متوالی می‌شود:

$۱، ۴، ۴ \times ۴، ۴ \times ۴ \times ۴، ...$

و تعداد کوچک‌ترین مربع‌ها در شکل n ام می‌شود: $۴^{n-۱}$

در سه تمرین حل شدهٔ قبل دیدیم که بعضی از دنباله‌ها را می ... الگوی تصویری نمایش ... همهٔ دنباله‌ها این‌گونه نیستند.

چند دنبالهٔ خاص

دنبالهٔ مقابل را در نظر بگیرید: ۲،۵،۸،۱۱،...

با توجّه به معرفی دنباله می‌فهمیم که جملهٔ اوّل دنباله برابر است با ۲، جملهٔ دوّم دنباله برابر است با ۵ و جملهٔ n ام دنباله برابر است با $3n-1$.

عموماً در ریاضیات نام‌گذاریها وقتی ظاهر می‌شوند که بتوانند جملات را خلاصه‌تر کنند. در اینجا هم می‌توانیم با نام‌گذاری جملاتمان را کوتاه‌تر کنیم و به‌اصطلاح جمع‌وجورتر بنویسیم. جملهٔ اوّل دنباله فوق را a_1 می‌نامیم، جملهٔ دوم آن را a_2 می‌نامیم و به‌همین ترتیب جملهٔ n ام یا به‌اصطلاح جملهٔ عمومی آن را a_n می‌نامیم.

با این کار به‌جای اینکه مثلاً بگوییم جملهٔ ۱۰ام این دنباله ۲۹ است می‌گوییم $a_{10}=29$ که به‌سرعت منظور ما را مشخص می‌کند. البته به دنبالهٔ فوق می‌توانستیم هرنام دیگری که دوست داشتیم، نسبت دهیم، مثل b_n ، c_n ، t_n و ...

با توجه به اینکه $y=ax+b$ معادلهٔ خط است و $y=ax^2+bx+c$ یک معادله درجه ۲ است:

تعریف دنباله $t_n=an+b$ را که b و a اعداد حقیقی ثابتی هستند دنبالهٔ خطی می‌نامیم و دنبالهٔ $t_n=an^2+bn+c$ را که a ، b و c اعداد حقیقی ثابتی هستند را دنبالهٔ درجهٔ ۲ می‌نامیم.

تعریف الگوی تصویری‌ای را که جملهٔ عمومی آن یک دنبالهٔ خطی است الگوی خطی می‌نامیم و الگوی تصویری‌ای را که جملهٔ عمومی آن یک دنبالهٔ درجه ۲ است الگوی درجه ۲ می‌نامیم.

دنباله با ضابطهٔ بازگشتی

جملهٔ عمومی یک دنباله می‌تواند هر رابطه‌ای بر حسب n باشد و لزومی ندارد خطی، درجه۲، درجه۳، توانی و مانند آن باشد.

برای برخی دنباله‌ها هم به‌راحتی نمی‌توان جملهٔ عمومی یافت و جملات دنباله با نظمی که در خود دنباله وجود دارد مشخّص می‌شوند. به‌عنوان مثال در دنبالهٔ زیر هر جملهٔ دنباله (به‌جز جملهٔ اول و دوم) برابر است با مجموع دو جملهٔ قبل.

۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،...

آیا این یک دنبالهٔ خطی است؟ مشخصاً نه.

آیا یک دنبالهٔ درجهٔ دو است؟ نه.

آیا می‌توانید جملهٔ عمومی آن را بر حسب n بنویسید؟ با قدری دقت می‌بینید که کار سختی است.

در این دنباله بین هر جمله و جملات ماقبل ارتباطی وجود دارد (هر جملهٔ دنباله برابر مجموع دو جملهٔ قبل)، به چنین رابطه‌ای رابطهٔ بازگشتی و به این دنباله دنبالهٔ بازگشتی می‌گوییم.

مثال‌های آموزشی

۱) **در دنبالهٔ بازگشتی a_n ، هر جملهٔ دنباله برابر است با دو برابر جملهٔ قبل به‌علاوهٔ جملهٔ قبل از آن. اگر $a_1=3$ و $a_2=1$ ، ۸ جملهٔ ابتدایی دنباله را بنویسید.**

پاسخ ۳،۱،۵،۱۱،۲۷،۶۵،۱۵۷،۳۷۹

ویژگی این دنباله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

جملهٔ nام = ۲× جملهٔ $(n-1)$ام + جملهٔ $(n-2)$ام

و یا به عبارت دیگر:

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$$

۲) **در دنبالهٔ بازگشتی b_n ، هر جمله دنباله برابر است با جملهٔ قبل منهای دو برابر جملهٔ قبل از آن. اگر $b_1=3$ و $b_2=-2$ ، ۸ جملهٔ ابتدایی دنباله را بنویسید.**

پاسخ یعنی $b_n=b_{n-1}-2b_{n-2}$:

۳،-۲،-۸،-۴،۲۲،۲۰،-۴۰،-۴۴

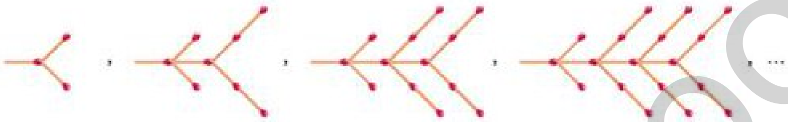
۳) **در دنبالهٔ بازگشتی c_n ، هر جمله دنباله برابر است با مجموع همهٔ جملات قبل. اگر $c_1=1$ ، ۸ جملهٔ ابتدایی دنباله را بنویسید.**

پاسخ ۱،۱،۲،۴،۸،۱۶،۳۲،۶۴

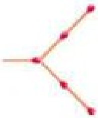
۴) برای دنبالهٔ $c_n = 5n + 3$ یک الگوی تصویری درست کنید.

پاسخ معمولاً به این‌گونه سؤالات با روش‌های بسیار زیادی می‌توان پاسخ گفت و آزادی فراوانی در پاسخ دادن به این‌گونه پرسش‌ها وجود دارد، حال اگر پاسخ قدری زیبایی تصویری هم داشته باشد که چه بهتر.

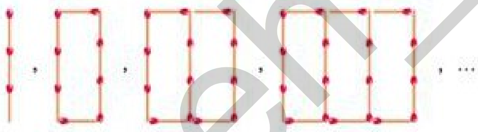
به‌عنوان یک پاسخ برای این سؤال سعی می‌کنیم با استفاده از چوب‌کبریت‌ها یک الگو برای این دنباله بسازیم. با توجّه به اینکه $c_{n+1} = c_n + 5$ سعی می‌کنیم دنباله‌ای از تصاویر بسازیم که در هر مرحله ۵ چوب کبریت به آن اضافه شود. با این ایده می‌توانیم دنباله‌های تصویری زیر را بسازیم.



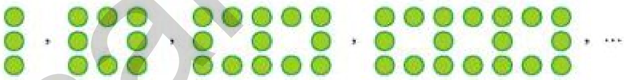
که قسمت اضافه شونده در هر مرحله به شکل مقابل است:



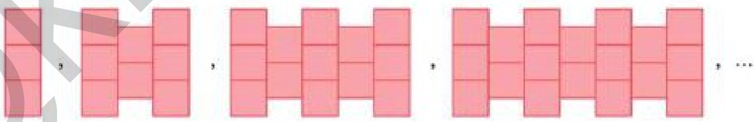
دنبالهٔ تصویری زیر هم یک‌جواب دیگر برای این مسأله است.



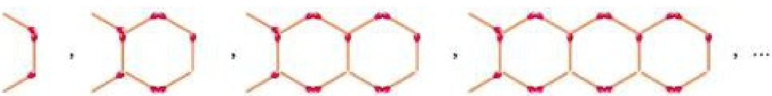
دنبالهٔ تصویری زیر هم یک جواب دیگر است.



دنباله تصویری زیر هم جوابی دیگر است.



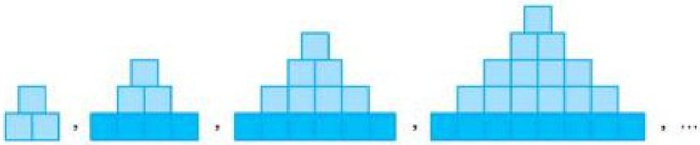
و همچنین دنباله تصویری زیر



و...

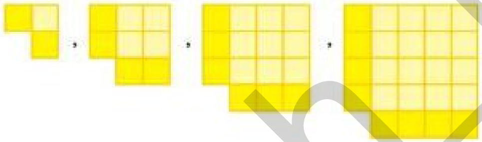
۵) برای دنبالهٔ درجهٔ دو مقابل یک الگوی تصویری درست کنید. ۳,۷,۱۳,۲۱,۳۱,...

پاسخ ساختن الگوی تصویری برای دنبالهٔ درجه دو چندان متنوع نیست، معمولاً با قدری دقت می‌توان الگویی مثلثی، مستطیلی یا مربعی یافت. در این مورد با توجه به اینکه جملات دنباله به ترتیب ۴، ۶، ۸ و ... تا افزایش می‌یابند می‌توان الگوی زیر را ساخت.



۶) برای دنبالهٔ درجهٔ دو $c_n = n^2 + 2n$ یک الگوی تصویری بسازید.

پاسخ n^2 را که می‌توان با یک مربع $n \times n$ نمایش داد، $2n$ را هم می‌توان با دو مستطیل $n \times 1$ که به اضلاع مربع $n \times n$ چسبیده‌اند نمایش داد. با این حساب، می‌توان دنبالهٔ تصویری زیر را به‌عنوان پاسخی برای این مسأله ساخت.



بیشتر بدانیم

چند ثانیه به دنباله‌های زیر نگاه کنید و سپس آن‌ها را از حفظ روی برگهٔ دیگری بنویسید. (برای هر دنباله یک‌بار این کار را انجام دهید.)

۲،۴،۰،۸،۰،۳،۰،۲،۰،۱،۰،۵،۰،۲،۰،۵

۳،۰،۲،۰،۴،۰،۸،۰،۱،۰،۶،۰،۳،۰،۲

توضیح: ذهن انسان‌ها به‌طور متوسط قادر است ۷ الی ۸ رقم نامرتبط را که برایش خوانده می‌شود به مدت کوتاهی به‌خاطر بسپارد. این ویژگی ذهن تقویت‌پذیر است و با تمرین می‌توان آن را به مقدار بسیار زیادی افزایش داد.

از ویژگی‌های عجیب ذهن این است که تصویر را که درواقع بسیار پیچیده‌تر از عدد یا حروف است بسیار بهتر از حروف و یا اعداد حفظ می‌کند. به‌عنوان مثال شاید برایتان پیش آمده باشد با اینکه فردی را می‌شناسید و کاملاً او را در خاطر دارید، نامش را به یاد نمی‌آورید! تحقیق در چگونگی ساختار حافظه از زمینه‌های بسیار مهم تحقیقاتی امروز است.

در بسیاری از مباحث قبل دنباله‌هایی را معرفی کردیم که دارای نظم ساده‌ای بودند. در برخی زمینه‌ها لازم است دنباله‌ای بسازیم که نظم حاکم بر آن به‌قدری پیچیده باشد که دیگران نتوانند از آن سردرآورند. به‌عنوان مثال رمزهای شارژ تلفن همراه را در نظر بگیرید. اگر نحوهٔ تعیین آنها ساده باشد، افراد سود نادرست‌جو از آن سوء استفاده می‌کنند.

فرض کنید شما مسئول کدگذاری کارت‌های شارژ تلفن همراه هستید. چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

اگر رمزگذاری شما به‌گونه‌ای باشد که شکسته شود، خودتان باید خسارت وارده را جبران کنید.

کـــافه ســؤال

۱ در هر یک از دنباله‌های زیر سه جملهٔ بعدی را بنویسید و همچنین در هر مورد سعی کنید جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزنید.

الف) ۱۳,۹,۵,۱,...

ب) ۲,۱۱,۲۰,۲۹,...

ج) $\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶},...$

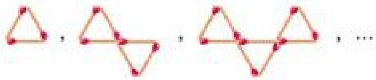
د) ۵,۷,۹,۱۱,...

ه) ۸,۴,۲,۱,...

و) ۱,۸,۲۷,۶۴,...

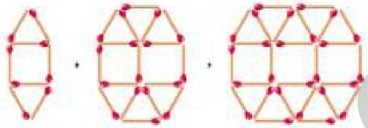
۲ دنباله‌های تصویری زیر با استفاده از چوب‌کبریت ساخته شده است. در هر مورد تصویر بعدی را رسم کنید و همچنین تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در تصویر بیستم را به‌دست آورید.

الف)



ب)

ج)



۳ ۸ جملهٔ اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

الف) $a_n = ۳n - ۳$

ب) $b_n = ۴n + ۱$

ج) $c_n = n^۳ - ۱$

د) $d_n = (-۱)^n + n$

۴ تعداد دایره‌های به کار رفته در تصویر n ام از تصاویر زیر را بیابید.

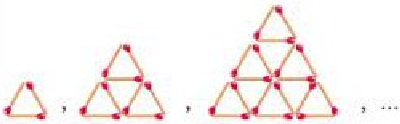
۵ ۴۰مین عدد طبیعی که باقیماندهٔ آن در تقسیم بر ۱۴ برابر ۷ است، کدام عدد است؟

کــافه ســؤال

۶ اگر ۷ فروردین، یکشنبه باشد، آنگاه چهارم دی چه روزی از هفته است؟

۷ عماد در یک کلاس آموزش شنا ثبت‌نام کرده است که بطور منظم هر ۵ روز یک‌بار برگزار می‌شود. اگر جلسهٔ دوازدهم، شنبه سوّم تیر برگزار شده باشد، جلسهٔ ۴۲م در چه روزی برگزار خواهد شد؟

۸ دنبالهٔ تصویری زیر را با استفاده از چوب‌کبریت ساخته‌ایم، تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در تصویر ۷۲م را به‌دست آورید.



۹ اعداد طبیعی را در یک جدول ۴ ستونی، به‌شکل روبه‌رو نوشته‌ایم، عدد ۱۳۹۷ در کدام سطر و کدام ستون این جدول نوشته شده است؟ دقت کنید که در برخی خانه‌های این جدول هیچ عددی نوشته نشده است.

		...	⋮
			⋮
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۰			
۹	۸	۷	۶
			۵
۱	۲	۳	۴

۱۰ مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی را بر حسب n به‌دست آورید. آیا حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟
(راهنمایی: n ضلعی را به تعدادی مثلث جدا از هم که رئوس آن‌ها روی n ضلعی قرار دارند تقسیم کنید.)

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟ $-7,-2,3,8,13,\dots$

۱) $-7+5n$ ☐ ۲) $-2-5n$ ☐

۳) $-7-5n$ ☐ ۴) $-12+5n$ ☐

۲- با توجه به دنبالهٔ تصاویر داده شده، شکل بیست و پنجم شامل چند چوب‌کبریت است؟

۱) ۵۱ ☐ ۲) ۴۳ ☐ ۳) ۵۳ ☐ ۴) ۵۵ ☐

۳- در جملات دنبالهٔ $d_n=\frac{3n-1}{n+1}$ چند عدد فرد وجود دارد؟

۱) ۲ ☐ ۲) ۳ ☐ ۳) ۱ ☐ ۴) ۰ ☐

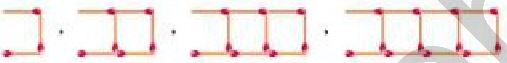
۴- در دنبالهٔ $a_n=11-2n$ چند جملهٔ مثبت وجود دارد؟

۱) ۲ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۳ ☐

۵- در دنبالهٔ $b_n=2n^2-5n$ چند جملهٔ منفی وجود دارد؟

۱) ۲ ☐ ۲) ۴ ☐ ۳) ۵ ☐ ۴) ۳ ☐

۶- با توجه به دنبالهٔ تصاویر مقابل، شکل بیستم شامل چند چوب‌کبریت است؟



۱) ۴۵ ☐ ۲) ۶۰ ☐ ۳) ۶۵ ☐ ۴) ۷۰ ☐

۷- جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟ $5,8,13,20,\dots$

۱) n^2+2n+2 ☐ ۲) $2n^2-3n+6$ ☐

۳) n^2+4 ☐ ۴) $5n^2+3n-3$ ☐

۸- جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟ $3,5,8,12,\dots$

۱) $\frac{2}{3}n^2+\frac{7}{3}$ ☐ ۲) $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+2$ ☐

۳) $\frac{-1}{2}n^2+\frac{7}{2}n$ ☐ ۴) $3n^2+2n-2$ ☐

۹- حداکثر چند روز از ۶۰ روز متوالی سه‌شنبه است؟

۱) ۷ ☐ ۲) ۸ ☐ ۳) ۹ ☐ ۴) ۱۰ ☐

۱۰- چند عدد بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ وجود دارد که بر ۷ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۲۷ ☐ ۲) ۱۲۸ ☐ ۳) ۱۲۹ ☐ ۴) ۱۳۰ ☐

درس ۳ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

الف) ۱۳،۹،۵،۱،-۳،-۷،-۱۱ $\qquad a_n=۱۳-۴(n-۱)=۱۷-۴n$

ب) ۲،۱۱،۲۰،۲۹،۳۸،۴۷،۵۶ $\qquad a_n=۲+۹(n-۱)=-۷+۹n$

ج) $\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶},\frac{۶}{۷},\frac{۷}{۸},\frac{۸}{۹}$ $\qquad a_n=\frac{n+۱}{n+۲}$

د) ۵،۷،۹،۱۱،۱۳،۱۵،۱۷ $\qquad a_n=۵+۲(n-۱)=۳+۲n$

هـ) ۸،۴،۲،۱،$\frac{۱}{۲}$،$\frac{۱}{۴}$،$\frac{۱}{۸}$ $\qquad a_n=۸\div ۲^{n-۱}=۲^{-n+۴}$

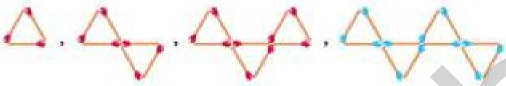
و) ۱،۸،۲۷،۶۴،۱۲۵،۲۱۶،۳۴۳ $\qquad a_n=n^۳$

۲

n: شمارهٔ شکل

a_n: تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل n ام

الف)

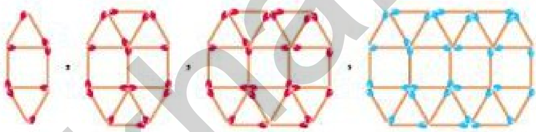


$a_n=۳\times n \qquad a_{۲۰}=۳\times ۲۰=۶۰$

ب)

$a_n=۴n \qquad a_{۲۰}=۸۰$

ج)



$a_n=۹n-۱ \qquad a_{۲۰}=۹\times ۲۰-۱=۱۸۰-۱=۱۷۹$

۳

الف) $a_n=۳n-۳$ ۰،۳،۶،۹،۱۲،۱۵،۱۸،۲۱

ب) $b_n=۴n+۱$ ۵،۹،۱۳،۱۷،۲۱،۲۵،۲۹،۳۳

ج) $c_n=n^۳-۱$ ۰،۷،۲۶،۶۳،۱۲۴،۲۱۵،۳۴۲،۵۱۱

د) $d_n=(-۱)^n+n$ ۰،۳،۲،۵،۴،۷،۶،۹

۴

کافی است تعداد دایره‌های هر سطر را با هم جمع کنیم.

$$a_n=۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۵

اولین این اعداد عدد ۷ است، زیرا ۷+۱۴×۰=۷ پس ۴۰مین این اعداد برابر است با:

$۳۹\times ۱۴+۷=۵۵۳$

آس

۱

[۶]

۴ دی یعنی ۲۷۳ روز بعد از ۷ فروردین، حال باید ببینیم ۲۷۳ روز بعد چه روزی از هفته است. ابتدا باقی‌ماندهٔ ۲۷۳ بر ۷ را پیدا می‌کنیم: $273 = 7 \times 39 + 0$

چون باقی‌ماندهٔ عبارت برابر صفر است یعنی چهارم دی نیز یکشنبه می‌باشد.

[۷]

جلسهٔ ۴۲ام یعنی ۳۰(=۱۲−۴۲) جلسه بعد یعنی ۱۵۰(=۵×۳۰) روز بعد. حال مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم: $150 = 7 \times 21 + 3$

چون باقی‌مانده ۳ شد، یعنی جلسهٔ ۴۲ام سه روز بعد از یکشنبه یعنی چهارشنبه برگزار می‌شود.

[۸]

n: شمارهٔ شکل $\qquad$ a_n: تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل nام

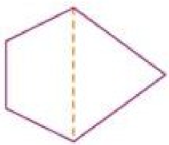
$a_{72} = 3(1+2+\dots+72) = 3(\frac{72 \times 73}{2}) = 7884$ $\qquad$ $a_n = 3(1+2+3+\dots+n)$

[۹]

می‌توان گفت یک الگوی تکرار ۱۰تایی داریم (به نظم ۱۰ تا ۱۰تای موجود در شکل توجه کنید.)

با توجه به اینکه $1397 = 139 \times 10 + 7$ و با دقت در این نکته که هر ۱۰ عدد ۴ سطر اشغال کرده‌اند و ... می‌فهمیم که ۱۳۹۷ در سطر $559 = 3 + 4 \times 139$ قرار دارد و همچنین چون ستون ۱۳۹۷ با ستون ۷ یکی است (چرا؟) معلوم می‌شود ۱۳۹۷ در ستون سوم قرار دارد.

[۱۰]



مجموع زوایای داخلی مثلث و چهارضلعی به ترتیب 180° و 360° است. در مورد ۵ضلعی می‌توانیم مانند شکل مقابل، با جدا کردن یک مثلث از آن ببینیم که مجموع زوایای داخلی آن برابر مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی و یک مثلث است، یعنی $360^\circ + 180^\circ = 3 \times 180^\circ$ و به طور مشابه می‌توان دید که مجموع زوایای داخلی یک $n+1$ ضلعی، 180° بیشتر از مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی است. اعداد به دست آمده را می‌توان به شکل زیر نوشت که نشان می‌دهد مجموع زوایای داخلی nضلعی برابر $(n-2)180^\circ$ است.

تعداد ضلع:	۳	۴	۵	۶	...
مجموع زاویه‌های داخلی:	180°	$2 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$	...

درس ۳ ◄ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

۱	۴
۲	۱
۳	۳
۴	۳
۵	۱
۶	۲
۷	۳
۸	۲
۹	۳
۱۰	۲

یادداشت

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دیدیم که به هر ترتیب که تعدادی عدد را پشت سر هم قرار دهیم یک دنباله تشکیل می‌شود. جملهٔ عمومی یک دنباله هم می‌تواند شکل‌های بسیار گوناگونی داشته باشد. به دلایلی که بعداً قدری به آن اشاره خواهیم کرد دو دسته از دنباله‌ها در مباحث آغازین ریاضیات قدری با دقت مورد بررسی قرار می‌گیرند.

دنباله حسابی

تعریف یکی از دنباله‌هایی که در آنها هر جمله با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خود به‌دست می‌آیند و یا به عبارت دیگر دنباله‌هایی که جملهٔ عمومی آنها خطی است، اصطلاحاً دنبالهٔ حسابی می‌نامند و به آن عدد ثابت هم قدرنسبت دنباله می‌گویند.

اگر a جملهٔ اوّل دنباله و d قدرنسبت آن باشد دنباله حسابی به شکل زیر خواهد بود:

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots \qquad a_n = a+(n-1)d$

دنباله هندسی

تعریف دیگری دنباله‌هایی که در آنها هر جمله از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت به‌دست می‌آید که آنها را اصطلاحاً دنبالهٔ هندسی می‌گویند و به آن عدد ثابت هم قدرنسبت دنباله می‌گویند.

اگر a جملهٔ اوّل دنباله و q قدرنسبت آن باشد، دنباله هندسی به شکل مقابل خواهد بود: $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots \qquad b_n = aq^{n-1}$

به تمرین

با توجه به تعریف دنباله‌های حسابی و هندسی نشان دهید، که اگر a_n یک دنبالهٔ حسابی و b_n یک دنبالهٔ هندسی باشد و s ،r ،q و p اعدادی طبیعی باشند به‌طوری که $p+q=r+s$، آنگاه $b_pb_q=b_rb_s$ و $a_p+a_q=a_r+a_s$.

(راهنمایی: ساده‌س خیلی ساده)

نکته: ۱) در دنبالهٔ حسابی فاصلهٔ جملات متوالی، مقدار ثابتی است. ۲) در دنبالهٔ هندسی نسبت جملات متوالی مقدار ثابتی است.

با درنظرداشتن همین دو نکته می‌توانید به همهٔ سؤالات مربوط به دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی پاسخ دهید.

حتی خیلیاش رو به‌صورت ذهنی!!

مثال‌های آموزشی

۱) **جملات یک دنبالهٔ حسابی را بنویسید که ۱ = a و ۳ = d باشد.**

پاسخ $a_n = 3n-2 \qquad 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

مشخص است که یک دنبالهٔ حسابی با معلوم بودن جملهٔ اول و قدرنسبت آن بطور کامل معین می‌شود.

۲) **جملهٔ اوّل یک دنبالهٔ حسابی ۵ و جملهٔ سوّم آن ۸ است. این دنباله را به‌دست آورید.**

پاسخ اگر جملهٔ اوّل را با a نشان دهیم و قدرنسبت را با d، آنگاه از آنجا که جملهٔ اوّل ۵ است، داریم: $a=5$

و از آنجا که جملهٔ سوّم ۸ است، داریم: $a+2d=8$

از این دو رابطه به‌دست می‌آید: $d=\frac{3}{2}$

و در نتیجه دنباله به شکل زیر خواهد بود:

$$5, 5+\frac{3}{2}, 5+2\times\frac{3}{2}, 5+3\times\frac{3}{2}, \ldots$$

و یا به‌عبارت دیگر:

$$5, \frac{13}{2}, 8, \frac{19}{2}, 11, \frac{25}{2}, 14, \ldots$$

و جمله عمومی آن برابر است با:

$$a_n = 5+(n-1)\frac{3}{2} = \frac{7}{2}+\frac{3}{2}n$$

۳) جملهٔ هشتم یک دنبالهٔ حسابی ۶ و جملهٔ هفدهم آن ۷ است. این دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ جملهٔ اوّل دنباله را a و قدرنسبت دنباله را d می‌نامیم. از آن‌جاکه جمله اوّل دنباله a است و جملهٔ دوّم آن $a+d$ و جملهٔ سوّم آن $a+2d$ است و جملهٔ چهارم آن $a+3d$ است به‌همین ترتیب مشخص است که جملهٔ هشتم آن $a+7d$ است و جملهٔ هفدهم آن $a+16d$.

با توجه به اطّلاعات مسأله به دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a+7d=6 \\ a+16d=7 \end{cases}$$

با حل این دستگاه معادلات به $d=\frac{1}{9}$، $a=6-\frac{7}{9}$ می‌رسیم در نتیجه دنباله به شکل زیر است:

$$6-\frac{7}{9},6-\frac{6}{9},6-\frac{5}{9},6-\frac{4}{9},\dots$$

۴) مجموع دو جملهٔ ابتدایی یک دنبالهٔ حسابی ۷ است و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۱۳ است. این دنباله را مشخص کنید و جملهٔ چهلم آن را بیابید.

پاسخ با توجّه به مباحث قبل می‌توانیم بنویسیم:

$$a+(a+d)=7$$

$$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=13$$

و به دستگاه دو معادله دو مجهولی روبه‌رو می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2a+d=7 \\ 3a+9d=13 \end{cases}$$

با حل این دستگاه معادلات به $d=\frac{1}{3}$ و $a=\frac{10}{3}$ می‌رسیم.

و در نتیجه دنبالهٔ حسابی به شکل مقابل است:

$$\frac{10}{3},\frac{11}{3},\frac{12}{3},\frac{13}{3},\dots$$

و جملهٔ چهلم آن هم می‌شود $\frac{10}{3}+(40-1)\times\frac{1}{3}$ یعنی $\frac{49}{3}$.

توضیح: در حالت کلی از آنجاکه دنبالهٔ حسابی با معلوم بودن a و b به‌طور یکتا مشخص می‌شود، معمولاً با داشتن دو مورد اطّلاعات دربارهٔ آن می‌توان با تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی دنباله را به‌دست آورد. هر چند که در برخی موارد با توجّه به برخی ویژگی‌های دنبالهٔ حسابی برای پاسخ دادن به برخی سؤالات دربارهٔ یک دنبالهٔ حسابی نیازی به محاسبهٔ d و a نیست.

۵) جملهٔ هفتم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳- است و جملهٔ ۲۹ ام آن برابر ۱۶ است. جملهٔ هجدهم آن چند است؟

پاسخ می‌توانیم این مسأله را با همان روش معمول حل کنیم امّا در اینجا می‌توان ساده‌تر به جواب رسید. ابتدا دقت می‌کنیم که میانگین ۷ و ۲۹ برابر ۱۸ است.

مسأله درواقع به ما $a+6d$ و $a+28d$ را داده است و $a+17d$ را از ما می‌خواهد و اگر دقت کنیم می‌بینیم که میانگین $a+6d$ و $a+28d$ می‌شود $a+17d$

$$\frac{a+6d+a+28d}{2}=\frac{2a+34d}{2}=a+17d$$

پس درواقع پاسخ مسأله برابر $\frac{13}{2}=\frac{-3+16}{2}$ است.

نکته: مشخص است که این ویژگی فقط منحصر به این تمرین نبود و می‌توان پیش‌بینی کرد که در هر دنبالهٔ حسابی جملهٔ $\frac{m+n}{2}$ برابر با میانگین جملهٔ m ام و جملهٔ n ام است و یا به شکل دیگر:

$$a_{\frac{m+n}{2}}=\frac{1}{2}(a_m+a_n)$$

و با توجه به اینکه $a_m=a+(m-1)d$ و $a_n=a+(n-1)d$ و $a_{\frac{m+n}{2}}=a+(\frac{m+n}{2}-1)d$ این مطلب راحت به‌دست می‌آید.

۶) جملات یک دنبالهٔ هندسی را بنویسید که جمله اوّل آن $a=2$ و قدرنسبت آن $q=3$ باشد.

پاسخ

$$a_n=2\times3^{n-1} \qquad 2,6,18,54,\dots$$

۷) جملهٔ اوّل یک دنبالهٔ هندسی ۳ است و جملهٔ سوّم آن ۱۲، این دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ اگر جملهٔ اوّل را با a نمایش دهیم و قدرنسبت را با q آنگاه:

از آنجا که جملهٔ اوّل ۳ است، داریم: $a=3$

و از آنجا که جملهٔ سوّم ۱۲ است، داریم: $aq^2=12$

با تقسیم رابطهٔ دوّم بر رابطهٔ اوّل داریم: $\frac{aq^2}{a}=\frac{12}{3}$ در نتیجه: $q^2=4$ و $q=\pm 2$ یعنی اینکه این مسأله دو جواب دارد.

$a=3$ و $q=2$ یعنی دنبالهٔ زیر:

$a_n=3\times 2^2$ $\quad 3,6,12,24,48,\cdots$

$a=3$ و $q=-2$ یعنی دنبالهٔ زیر:

$b_n=3\times(-2)^n$ $\quad 3,-6,12,-24,48,\cdots$

۸) جملهٔ دوازدهم یک دنباله هندسی ۶ است و جملهٔ هفدهم آن ۱۹۲، این دنباله را به‌دست آورید.

پاسخ جملهٔ اوّل دنباله را a و قدرنسبت آن را q می‌نامیم.

از آنجا که جملهٔ اوّل دنباله a است و جملهٔ دوّم آن aq و جملهٔ سوّم آن aq^2 و جملهٔ چهارم آن aq^3، به‌همین ترتیب مشخص است که جملهٔ دوازدهم آن aq^{11} است و جملهٔ هفدهم آن aq^{16} و به‌همین ترتیب در هر دنبالهٔ هندسی اگر جملهٔ اوّل را a بنامیم و قدرنسبت دنباله را q بنامیم، جملهٔ n ام آن می‌شود aq^{n-1}.

بنابراین با توجّه به اطّلاعات مسأله و بحث فوق، به دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} aq^{11}=6 \\ aq^{16}=192 \end{cases}$$

با تقسیم معادلهٔ دوّم بر معادلهٔ اوّل می‌رسیم به $q^5=32$ یعنی $q=2$ و با قراردادن مقدار q در معادلهٔ اوّل داریم:

$$a\times 2^{11}=6 \Rightarrow a=\frac{3}{2^{10}}$$

و در نتیجه دنباله به شکل زیر است:

$a_n=3\times 2^{-11}\times 2^n$ $\quad \frac{3}{2^{10}},\frac{3}{2^9},\frac{3}{2^8},\frac{3}{2^7},\cdots$

۹) قیمت یک اتومبیل هر سال ۲۰٪ کمتر از سال قبل است. پس از ۵ سال، قیمت آن تقریباً چند برابر قیمت اوّلیه است؟

پاسخ قیمت اتومبیل در هر سال $\frac{80}{100}$ قیمت آن در سال قبل است، پس اگر قیمت اوّلیه آن a باشد؛ قیمت آن پس از یک‌سال می‌شود: $a\times\frac{80}{100}$ و به‌همین ترتیب قیمت آن پس از n سال می‌شود: $a\times\left(\frac{80}{100}\right)^n$ و پس از ۵ سال قیمت آن $\left(\frac{80}{100}\right)^5$ برابر می‌شود؛ یعنی حدوداً به $\frac{1}{3}$ قیمت اوّلیه می‌رسد.

۱۰) بین ۲ و ۸، سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند.

پاسخ اگر اوّلین این اعداد $2+d$ باشد باید ۸ برابر با $2+4d$ باشد، یعنی باید داشته باشیم، $d=\frac{3}{2}$ و جملات نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$2,\frac{7}{2},\frac{10}{2},\frac{13}{2},8$$

نکته: با توسعه روش فوق می‌فهمیم که اگر بخواهیم بین x و y، تعداد k عدد را چنان قرار دهیم که $k+2$ عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند باید مقدار هر گام یعنی d را $\frac{y-x}{k+1}$ بگیریم. البته می‌توانیم این سؤال را با همان روش‌های قبل حل کنیم ولی می‌توان با دیدگاه ساده‌تر روش فوق را به کار برد.

و به‌عنوان یک حالت خاص،

اگر بخواهیم بین دو عدد x و y یک عدد را چنان قرار دهیم که سه عدد حاصل تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند آن عدد $\frac{x+y}{2}$ خواهد بود.

$\frac{x+y}{2}$ را واسطهٔ حسابی x و y نیز می‌نامند.

این مسأله نیز گاهاً به این صورت مطرح می‌شود: بین ۸ و ۲، سه واسطهٔ حسابی قرار دهید.

اگر بخواهیم بین دو عدد x و y دو واسطهٔ حسابی قرا... آن دو چه خواهند بود؟

۱۱) بین ۲ و ۱۶۲ سه عدد چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند.

پاسخ اگر اوّلین این اعداد $2q$ باشد باید ۱۶۲ برابر با $2q^4$ باشد، یعنی باید داشته باشیم: $q^4=81$ یعنی $q=3$ یا $q=-3$. پس ۵ عدد، به هرکدام از شکل‌های زیر می‌تواند باشد:

$2, 6, 18, 54, 162$

$2, -6, 18, -54, 162$

نکته: به روشی مشابه روش فوق می‌فهمیم که اگر بخواهیم بین دو عدد ثابت x و y، تعداد k عدد را چنان قرار دهیم که $k+2$ عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند باید q را پیدا کنیم با این شرط که $q^{k+1}=\frac{y}{x}$.

به‌عنوان یک حالت خاص اگر بخواهیم بین دو عدد x و y یک عدد را چنان قرار دهیم که سه عدد حاصل تشکیل یک دنبالهٔ هندسی دهند آن عدد $\sqrt{xy}$ یا $-\sqrt{xy}$ خواهد بود. $\sqrt{xy}$ را واسطهٔ هندسی x و y نیز می‌نامند.

این مسئله گاهی به این صورت مطرح می‌شود: بین ۲ و ۱۶۲، سه واسطهٔ هندسی قرار دهید.

حال سعی کنید به این سؤال پاسخ دهید:

اگر بخواهیم بین دو عدد x و y دو واسطهٔ هندسی قرار دهیم؛ آن دو عدد چه خواهند بود؟

بیشتر بدانیم

گاهی برخی از دانش‌آموزان به نام‌گذاری دنبالهٔ هندسی و دنبالهٔ حسابی اشکال می‌گیرند و می‌پرسند که مثلاً چه ارتباطی بین دنبالهٔ زیر و هندسه وجود دارد که نام آن دنبالهٔ هندسی است؟

$2, 6, 18, 54, \ldots$

و یا چه ارتباطی بین دنبالهٔ زیر و حساب وجود دارد که نام آن دنبالهٔ حسابی است؟

$2, 6, 10, 14, \ldots$

واقعیت این است که این اشکال کاملاً بجاست. باید در ریاضیات و یا هر علم دیگری نام‌گذاری به‌گونه‌ای باشد که اگر کلمات آن نام قبلاً در جای دیگری به‌کار رفته است، ارتباطی بین آن دو وجود داشته باشد و با توجّه به این توضیح باید نام دیگری برای این دنباله‌ها انتخاب می‌شد، مثل دنبالهٔ خطّی و دنبالهٔ توانی و مانند آن. به هرحال از آنجا که این نام‌گذاری صورت گرفته است و در همه جا این دنباله‌ها را با همین نام یعنی دنباله هندسی و دنباله حسابی می‌شناسند، به‌اصطلاح این دیگر یک غلط مصطلح است، ما نیز آن‌را به‌کار می‌بریم.

ایراد دیگری نیز بر نام‌گذاری‌های این بخش وارد است. کلمهٔ قدرنسبت شاید در دنبالهٔ هندسی جایگاهی داشته باشد ولی در دنباله حسابی بی‌معنی است، زیرا نسبت درواقع از تقسیم حرف می‌زند.

یک خاطره از یکی از دوستان

وقتی دانش‌آموز سال اوّل ابتدایی بودم حواسم عجیب پرت بود و خیلی از چیزها برایم گنگ و مبهم بود. به هرحال به طرز عجیب و باورنکردنی آن سال قبول شدم. تابستان آن سال درخانه نشسته بودیم و اخبار گوش می‌کردیم، مجری تلویزیون گفت: امروز شنبه ... به‌شدت عصبانی شدم و به مادرم گفتم مگر ما شنبه داریم؟

مادرم که مدرسه نرفته بود تعجب کرد. من گفتم خُب ما یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه و پنجشنبه داریم و اگر قرار باشد چیز دیگری داشته باشیم که شنبه داشته باشد آن صفرشنبه است و امّا چنین نام‌گذاری‌ای اصولاً غیرمنطقی است و اگر هم نام روزی صفرشنبه باشد نمی‌توان آن را شنبه نامید. پس ما شنبه نداریم در اینجا شروع کردم به شمردن روزهای هفته:

یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، پنجشنبه و جمعه. دیدم که شد ۶ روز ناراحت‌تر شدم و گفتم: این که شد ۶ روز پس چرا نامش را گذاشته‌اند هفته، باید نامش را می‌گذاشتند شیشه «اللّهم اشفِ کُلَّ مریض»

امروز می‌بینم که حرف آن روز من خیلی هم بیراه نبوده، پیشوندی که می‌توان آن را نگفت یک است و شنبه دقیقاً به معنی یک‌شنبه است. در ریاضیات هم زیاد می بینیم یک ایکس برابر است با ایکس و ...

$$1x = x$$

از این خاطره نتیجه می‌گیریم که شنبه هم یک غلط مصطلح است. ولی چون عمومی است ما هم آن را به‌کار می‌بریم.

یک داستان معروف

معروف است که در زمان‌های خیلی قدیم ـ اون قدیما ـ پادشاه هند شطرنج‌بازی را به دربار ایران فرستاد و گفت که اگر خیلی زرنگید این رو در شطرنج شکست دهید، خلاصه ایران هم کم نیاورد یکی آمد و آن را شکست داد. پادشاه به او گفت: آبروداری کردی یک هدیه از مابخواه. یکی گفت: درخانهٔ اوّل صفحهٔ شطرنج یک دانهٔ گندم قرار بده، در خانهٔ دوم، دو برابر گندم خانهٔ اوّل، در خانهٔ سوّم دو برابر خانهٔ دوّم و به‌همین ترتیب تا خانهٔ ۶۴ ام در هر خانه، دو برابر خانهٔ قبل گندم قرار بده و این جایزه من باشد. پادشاه دستور داد تا این جایزه به او پرداخت شود ولی واحد حسابداری متوجّه شد که چنین جایزه‌ای حتّی از گندم‌های کشور هم بیشتر است.

حسابدار اعظم به‌صورت زیر محاسبه را انجام داد:

او گفت فرض کنید من ۱ دانهٔ گندم به خانهٔ اوّل اضافه کنم آنگاه در خانه‌های اوّل و دوّم ۲ دانهٔ گندم خواهیم داشت، آنها را به خانهٔ دوم می‌بریم آنگاه در خانه‌های دوّم و سوّم ۴ دانهٔ گندم خواهیم داشت، آنها را به خانهٔ سوّم می بریم، آنگاه در خانه‌های سوّم و چهارم ۸ دانهٔ گندم خواهیم داشت و ...

با ادامهٔ این روند در نهایت همهٔ گندم موجود روی صفحهٔ شطرنج در خانهٔ ۶۴م قرار می‌گیرد و تعداد آن هم می‌شود 2^{64} تا.

حال اگر آن یک دانهٔ گندم را که خودم به خانهٔ اوّل اضافه کردم بردارم، می‌فهمم که باید به این مرد به تعداد $2^{64}-1$ دانهٔ گندم بدهیم حال اگر فرض کنیم هر ۱۶ دانهٔ گندم بشود یک گرم باید به این مرد حدوداً 2^{60} گرم یا چیزی بیش از 2^{50} کیلوگرم گندم بدهیم.

شما محاسبه کنید:

اگر زمین کرهٔ کامل باشد و شعاع آن ۶۴۰۰ کیلومتر باشد و تمام سطح آن را بشود کشاورزی کرد و فرضاً از هر هکتار (۱۰۰۰۰ متر مربع) زمین کشاورزی بشود در سال ۱۰ تن گندم به‌دست آورد چند سال طول می‌کشد تا این مقدار گندم به‌دست آید؟

(مساحت سطح کره را از رابطهٔ $4\pi r^2$ به‌دست آورید.)

پادشاه وقتی توضیحات حسابدار را شنید گفت: آن مرد را بیاورید، سپس پادشاه به او گفت: آیا می‌توانم جایزهٔ شما را قسطی پرداخت کنم. مرد گفت: البته، صدالبته. هر طور راحتید پادشاه گفت: پس ما سالی یک کیلوگرم به تو گندم می‌دهیم البته تا پایان تاریخ، من هم نبودم به بچه‌ها سپردم تو بیا بگیر. حسابدار گفت: این که بیشتر از حق اوست. او مقداری محدود طلبکار است و شما می‌خواهید تا پایان تاریخ به او جایزه بدهید و ... باقی بحث خیلی پیچیده شد و من در اینجا آن را نیاوردم.

این مثال نشان می‌دهد که رشد دنباله هندسی قدری خارج از تصوّر است و فقط پس از محاسبه می‌توان فهمید که رشد آن چقدر زیاد است.

به همین خاطر در فرآیندهای اجتماعی، اقتصادی و ... معمولاً یک موضوع مهم این است که آیا رشد آن شبیه یک دنبالهٔ هندسی است؟ اگر رشد یک پدیده شبیه یک دنبالهٔ هندسی باشد ضروری است که با دقت تمام مدیریت شود.

اما اگر رشد یک پدیده، شکلی شبیه دنباله حسابی باشد، معمولاً به‌دلیل ضعیف‌بودن این دنباله چیز خیلی خطرناکی رخ نمی‌دهد.

تقریباً یکی از معروف‌ترین بحث‌هایی که در آن دنباله حسابی و هندسی مطرح شد مورد زیر است:

مقاله‌ای معروف دربارهٔ جمعیت از یک کشیش به نام مالتوس

جملهٔ زیر از مالتوس معروف است (البته من نقل به مضمون کرده‌ام).

«از آنجا که رشد جمعیّت به‌شکل دنبالهٔ هندسی است و رشد تولید مواد غذایی به‌صورت یک دنبالهٔ حسابی است، پس در نهایت با وجود رشد جمعیت دائمی قطعاً بشر از تولید غذای خودش عاجز می‌شود و قحطی ظاهر می‌شود.»

او با این دیدگاه به گفته‌های خود ادامه می‌دهد و در نهایت به این نتیجه می‌رسد که "هر کمکی به فقرا در نهایت به ضرر آنان تمام می‌شود."

این مقالهٔ او معروف است ما در اینجا قدری به نقد آن می‌پردازیم:

در زمانی که او این مقاله را نوشت، شاید جمعیت جهان یک دهم جمعیت امروز نبود، اگر او تصوّر می‌کرد که جمعیتی ده برابر جمعیت آن روز، روزگاری بر روی زمین خواهند زیست، حتماً فکر می‌کرد که پس همهٔ مردم شبانه‌روز با رنج فراوان به کشاورزی و تولید غذا خواهند پرداخت و همه‌جا به زیر کشت خواهد رفت و ...

مقالهٔ او دارای چند ایراد اساسی بود:

اوّل: اینکه درست است که بسیاری از پدیده‌های اجتماعی همانند رشد جمعیت ماهیّتی شبیه رشد هندسی دارند ولی معلوم نیست او از کجا به این نتیجه رسیده است که میزان رشد تولید مواد غذایی مانند دنبالهٔ حسابی است.

دوّم: اینکه او هرگز نمی‌توانست نقش بسیار مهّم دانش و تکنولوژی را در تولید غذا برای بشر بفهمد، امروزه بشر می‌تواند کاری کند که حداکثر سه درصد مردم به کار کشاورزی و دامداری مشغول باشند. یعنی کمتر از کشاورزان زمان مالتوس البته با کمک ماشین‌های کشاورزی که هرروز پیشرفته‌تر می‌شوند شاید زمانی برسد که کمتر کسی کشاورزی را دیده باشد.

با استفاده از دانش کشاورزی نوین میزان بازدهی زمین در بعضی موارد حتی تا دهها برابر نیز رسیده است.

خلاصه اینکه امروزه بیشتر از نیاز بشر غذا تولید می‌شود، هرچند که توزیع آن ناعادلانه است.

سوّم: او رشد دانش پزشکی را هم در نظر نگرفته بود.

چهارم: او به اقتضای زمان خود که زمانه‌ای خشن بوده است، امکان ظهور حمایت‌های اجتماعی همچون بیمه و ... را هم در نظر نگرفته است.

پنجم: اینکه گفته است که هر کمکی به فقرا درنهایت به ضرر آنان تمام می‌شود نشانهٔ نوعی بیماری روانی است که فقط آدم‌هایی که نباید به فلسفه و یا اقتصاد می‌پرداختند ولی به آن پرداخته‌اند به آن دچار می‌شوند.

ما در اینجا مقالهٔ مالتوس را نقد کردیم و درستی راهبرد استدلال او را نپذیرفتیم ولیکن خود اصل کنترل جمعیت بحثی است مهم که حتماً باید به آن پرداخته شود. فقر حاکم بر برخی از کشورهای جنوب آسیا و جنوب غرب آفریقا اکثراً یک عامل دارد: جمعیت.

یک نکته جالب این است که با اینکه در برخی کشورها جمعیت در طول تاریخشان بارها به حد انفجار رسیده است مثل ژاپن، چین، هند، یونان و ... برخی کشورها هم بوده‌اند که جمعیت آنها در طول تاریخ هرگز به حد خطرناکی نرسیده است مثل ایران، عراق،روسیه و ... . پس در برخی کشورها هم مسئولین باید مانع کاهش جمعیت شوند و رشد جمعیت را تشویق کنند اما قطعاً این نمی‌تواند یک سیاست همیشگی باشد.

این را نیز باید گفت که بهترین راه در فرآیند کنترل جمعیت این است که آن را به وضعیت اقتصادی خانواده‌ها پیوند بزنند تا یک روند پایدار و متعادل در حرکت اجتماع به‌وجود آید.

گام ۱

کافه سؤال

۱ در دنباله‌های حسابی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و جملهٔ عمومی دنباله را هم بیابید.

الف) $-4, 3, 10, 17, \dots$

ب) $2, 3-\sqrt{2}, 4-2\sqrt{2}, \dots$

ج) $7, 2, -3, -8, \dots$

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و جملهٔ عمومی دنباله را هم بیابید.

الف) $-1, 3, -9, 27, \dots$

ب) $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, \dots$

ج) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \dots$

۳ جمله چهارم یک دنبالهٔ حسابی ۵ است و جملهٔ هشتم آن ۱۴، جملهٔ ششم آن چیست؟

۴ جملهٔ چهارم یک دنبالهٔ هندسی ۶ است و جملهٔ هفتم آن ۱۸، جملهٔ اوّل آن چیست؟

۵ مجموع سه جملهٔ اوّل یک دنبالهٔ حسابی ۸ است و جملهٔ نهم آن نیز ۸ است. این دنباله را بیابید.

۶ جملهٔ پنجم یک دنبالهٔ هندسی برابر ۳ است و حاصل‌ضرب جمله‌های سوّم و هشتم آن برابر ۳۶ است. این دنباله را بیابید.

۷ بین دو عدد ۲ و ۷ سه واسطهٔ حسابی درج کنید.

۸ بین دو عدد ۲ و ۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید.

۹ اگر در یک کشور نرخ تورّم به‌طور مداوم ۲۰ درصد باشد یعنی قیمت کالاها هر سال ۲۰ درصد افزایش یابد، در طی ده‌سال قیمت‌ها چند برابر می‌شود؟

۱۰ یک دنبالهٔ حسابی را که جملهٔ اوّل آن a و قدرنسبت آن d است در نظر بگیرید. آیا می‌توانید مجموع n جملهٔ اوّل آن را بیابید؟

(راهنمایی: قبلاً دیدیم که $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$)

آس

۱

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- جملهٔ دهم دنبالهٔ حسابی مقابل چند است؟ $۲, ۵, ۸, ...$

۱) ۳۱ ۲) ۲۷ ۳) ۲۹ ۴) ۳۲

۲- جملهٔ دوّم یک تصاعد هندسی ۳ است و جملهٔ پنجم آن ۸۱ . جملهٔ چهارم آن کدام است؟

۱) $۲۷\sqrt{۳}$ ۲) ۲۷ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

۳- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اوّل ۵ است و مجموع دو جملهٔ سوّم و پنجم ۱۵. جملهٔ دوّم کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۵}$ ۲) $\frac{۳۶}{۵}$ ۳) $\frac{۳۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳}$

۴- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ چهارم ۳ است و جملهٔ هفتم ۹. جملهٔ اوّل کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

۵- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع دو جملهٔ سوّم و پنجم با مجموع دو جملهٔ ششم و هشتم برابر است و جملهٔ دوّم برابر ۵ است. مجموع ۶ جملهٔ اوّل این دنباله چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۱۹

۶- در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۵}{۲ \times ۳^n}$ جملهٔ سوّم چند برابر جملهٔ هفتم است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸۱}$ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۷- در دنبالهٔ حسابی a_n، روابط $a_{۱۰} - a_۴ = ۱۴$ و $a_۲ + a_۵ = ۸$ برقرار است. $a_۵$ چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸- بین ۲ و ۸ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم، جملهٔ وسط این سه کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹- بین ۳ و ۹ پنج واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم، جملهٔ وسط این پنج جمله کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\pm\sqrt{۳}$ ۲) $\pm۲\sqrt{۳}$ ۳) $\pm۳\sqrt{۳}$ ۴) $\pm۴\sqrt{۳}$

۱۰- یک دنباله هم دنبالهٔ حسابی است و هم دنبالهٔ هندسی. قدرنسبت هندسی و حسابی آن به‌ترتیب کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ و ۰ ۲) ۱ و ۲ ۳) ۱ و ۱ ۴) ۲ و ۲

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- جملهٔ دهم دنبالهٔ حسابی مقابل چند است؟ ۲,۵,۸,...

۱) ۳۱ ۲) ۲۷ ۳) ۲۹ ۴) ۳۲

۲- جملهٔ دوّم یک تصاعد هندسی ۳ است و جملهٔ پنجم آن ۸۱ . جملهٔ چهارم آن کدام است؟

۱) $۲۷\sqrt{۳}$ ۲) ۲۷ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

۳- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اوّل ۵ است و مجموع دو جملهٔ سوّم و پنجم ۱۵. جملهٔ دوّم کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۵}$ ۲) $\frac{۳۶}{۵}$ ۳) $\frac{۳۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳}$

۴- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ چهارم ۳ است و جملهٔ هفتم ۹. جملهٔ اوّل کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

۵- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع دو جملهٔ سوّم و پنجم با مجموع دو جملهٔ ششم و هشتم برابر است و جملهٔ دوّم برابر ۵ است. مجموع ۶ جملهٔ اوّل این دنباله چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۱۹

۶- در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۵}{۲ \times ۳^n}$ جملهٔ سوّم چند برابر جملهٔ هفتم است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸۱}$ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۷- در دنبالهٔ حسابی a_n، روابط $a_{۱۰} - a_۴ = ۱۴$ و $a_۴ + a_۵ = ۸$ برقرار است. $a_۵$ چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸- بین ۲ و ۸ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم، جملهٔ وسط این سه کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹- بین ۳ و ۹ پنج واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم. جملهٔ وسط این پنج جمله کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\pm\sqrt{۳}$ ۲) $\pm۲\sqrt{۳}$ ۳) $\pm۳\sqrt{۳}$ ۴) $\pm۴\sqrt{۳}$

۱۰- یک دنباله هم دنبالهٔ حسابی است و هم دنبالهٔ هندسی. قدرنسبت هندسی و حسابی آن به‌ترتیب کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ و ۰ ۲) ۱ و ۲ ۳) ۱ و ۱ ۴) ۲ و ۲

درس ۴ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

الف) $-۴,۳,۱۰,۱۷,\dots$ $\quad d=۷ \quad a_n=a+(n-۱)d=-۴+(n-۱)۷=۷n-۱۱$

ب) $۲,۳-\sqrt{۲},۴-۲\sqrt{۲},\dots$ $\quad d=۱-\sqrt{۲} \quad a_n=۲+(n-۱)(۱-\sqrt{۲})=n(۱-\sqrt{۲})+۱+\sqrt{۲}$

ج) $۷,۲,-۳,-۸,\dots$ $\quad d=-۵ \quad a_n=۷+(n-۱)-۵=۱۲-۵n$

۲

الف) $-۱,۳,-۹,۲۷,\dots$ $\quad q=-۳ \quad b_n=aq^{n-۱}=-q^{n-۱}=-(-۳)^{n-۱}$

ب) $۳,۳\sqrt{۲},۶,۶\sqrt{۲},\dots$ $\quad q=\sqrt{۲} \quad b_n=۳(\sqrt{۲})^{n-۱}$

ج) $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۳۲},\dots$ $\quad q=\frac{۱}{۴} \quad b_n=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴})^{n-۱}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^{۲n-۲}=(\frac{۱}{۲})^{۲n-۱}$

۳

$$\begin{cases} a_۴=۵\Rightarrow a+۳d=۵ \\ a_۸=۱۴\Rightarrow a+۷d=۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d=\frac{۹}{۴} \\ a=-\frac{۷}{۴} \end{matrix}$$

$$a_۶=a+۵d=-\frac{۷}{۴}+۵\times\frac{۹}{۴}=-\frac{۷}{۴}+\frac{۴۵}{۴}=\frac{۳۸}{۴}=\frac{۱۹}{۲}$$

۴

$$\begin{cases} b_۵=aq^۴=۶ \\ b_۹=aq^۸=۱۸ \end{cases} \Rightarrow \frac{\cancel{a}q^۴}{\cancel{a}q^۸}=\frac{۶}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱}{q^۴}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow q^۴=۳\Rightarrow q=\sqrt[۴]{۳}$$

$$aq^۴=۶\Rightarrow a\times(\sqrt[۴]{۳})^۴=۶\Rightarrow ۳a=۶\Rightarrow a=۲$$

۵

$$a_۱+a_۲+a_۳=۸\Rightarrow a+a+d+a+۲d=۸\Rightarrow ۳a+۳d=۸\Rightarrow a+d=\frac{۸}{۳}\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}-d$$

$$a_۹=a+۸d=۸\Rightarrow\frac{۸}{۳}-d+۸d=۸\Rightarrow ۷d=۸-\frac{۸}{۳}=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow d=\frac{۱۶}{۲۱}$$

$$a=\frac{۸}{۳}-d\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}-\frac{۱۶}{۲۱}=\frac{۴۰}{۲۱}$$

$$a_n=a+(n-۱)d=\frac{۴۰}{۲۱}+(n-۱)\frac{۱۶}{۲۱}=\frac{۱۶}{۲۱}n+\frac{۲۴}{۲۱}$$

۶

$$\begin{cases} a_۵=aq^۴=۳ \\ a_۳\times a_۸=۳۶\Rightarrow aq^۲\times aq^۷=۳۶\Rightarrow a^۲q^۹=۳۶ \end{cases}$$

$$\frac{۳۶}{۳^۲}=\frac{a^۲q^۹}{(aq^۴)^۲}=\frac{a^۲q^۹}{a^۲q^۸}\Rightarrow q=\frac{۳۶}{۹}=۴$$

$$aq^۴=۳\Rightarrow a(۴)^۴=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲۵۶}$$

$$a_n=aq^{n-۱}=\frac{۳}{۲۵۶}\times۴^{n-۱}$$

۷

۲ , ... , ... , ... , ۷

۲ , $۲+d$, $۲+۲d$, $۲+۳d$, $۲+۴d$

$$۲+۴d=۷\Rightarrow ۴d=۵\Rightarrow d=\frac{۵}{۴}$$

$$۲,\frac{۱۳}{۴},\frac{۱۸}{۴},\frac{۲۳}{۴},۷$$

آس

۱

۸

۸ ، ...... ، ...... ، ...... ، ۲

$$۲q\,،\,۲q^۲\,،\,۲q^۳\,،\,۲q^۴$$

$$۲q^۴ = ۸ \Rightarrow q^۴ = ۴ \Rightarrow q = \pm\sqrt[۴]{۴} = \pm\sqrt{۲}$$

$۲\,،\,۲\sqrt{۲}\,،\,۴\,،\,۴\sqrt{۲}\,،\,۸$ یا $۲\,،\,-۲\sqrt{۲}\,،\,۴\,،\,-۴\sqrt{۲}\,،\,۸$

۹

قیمت کالا در هر سال $\frac{۱۲۰}{۱۰۰}$ قیمت آن در سال قبل است، پس اگر قیمت اولیه آن a باشد، قیمت آن پس از یک سال می‌شود: $a \times \frac{۱۲۰}{۱۰۰}$. به‌همین ترتیب قیمت آن پس از ۱۰ سال می‌شود: $a \times (\frac{۱۲۰}{۱۰۰})^{۱۰}$ یعنی پس از ۱۰ سال قیمت آن $۶/۲ = (\frac{۱۲۰}{۱۰۰})^{۱۰}$ برابر می‌شود.

۱۰

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = a + a + d + a + ۲d + a + ۳d + \cdots + a + (n-۱)d = na + d(۱ + ۲ + \cdots + (n-۱)) = na + d(\frac{n(n-۱)}{۲})$$

درس ٤ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

۱	۱ ۲ **۳** ٤
۲	۱ **۲** ۳ ٤
۳	۱ ۲ **۳** ٤
٤	**۱** ۲ ۳ ٤
۵	۱ **۲** ۳ ٤
۶	۱ ۲ ۳ **٤**
۷	۱ **۲** ۳ ٤
۸	**۱** ۲ ۳ ٤
۹	۱ ۲ **۳** ٤
۱۰	**۱** ۲ ۳ ٤

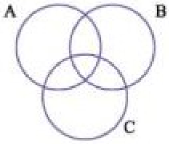
یادداشت

گاج

ایستگاه المپیاد

۱

۱) فرض کنید A و B و C سه مجموعه‌اند و مقادیر زیر مشخص‌اند:

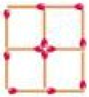


$n(A), n(B), n(C), n(A\cap B), n(A\cap C), n(B\cap C), n(A\cap B\cap C)$

داخل هر کدام از ناحیه‌های شکل مقابل تعداد عضوهای آن را برحسب مقادیر فوق بنویسید، ودر نهایت با استفاده از نتایج حاصل مقدار $n(A\cup B\cup C)$ را برحسب این مقادیر به دست آورید.

با استدلالی به شکل زیر سعی کنید $n(A\cup B\cup C)$ را به‌روشی ساده برحسب مقادیر فوق به‌دست آورید.

اگر فردی بگوید جواب $n(A)+n(B)+n(C)$ است، ...... را دوبار و ...... را سه بار شمرده است.



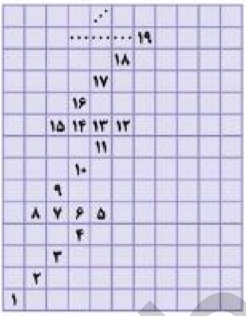
۲) با n چوب‌کبریت به طول واحد در صفحه، حداکثر چند مربع که طول اضلاع آن‌ها واحد است می‌توان ساخت؟

به‌عنوان مثال با ۱۲ چوب‌کبریت در صفحه حداکثر ۴ مربع به طول ضلع واحد می‌توان ساخت.

۳) با n چوب‌کبریت به‌طول واحد در صفحه، حداکثر چند مثلث که طول اضلاع آنها واحد است می‌توان ساخت؟

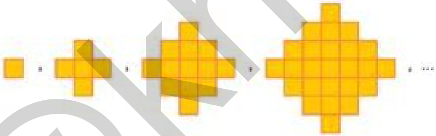
به‌عنوان مثال با ۷ چوب‌کبریت در صفحه حداکثر ۳ مثلث به‌طول ضلع واحد می‌توان ساخت.

۴) با استفاده از n خط صفحه را حداکثر به چند ناحیه می‌توان تقسیم کرد؟

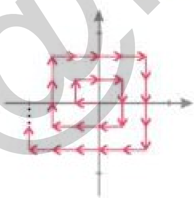


۵) عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... را به شکل مقابل در یک جدول نوشته‌ایم. عدد ۱۳۹۷ در کدام خانه قرار گرفته است؟

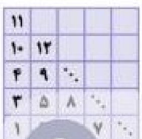
نشانی هرخانه را با شماره سطر و ستون‌هایی که آن خانه در آن‌ها قرار دارد، مشخص کنید.



۶) دنبالهٔ تصویری روبه‌رو را در نظر بگیرید. تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام چند تا است؟ (راهنمایی: ببینید آیا می‌توانید از سؤال ۴ کمک بگیرید.)



۷) یک ذره شروع به‌قدم زدن روی صفحه می‌کند. او از نقطه $\binom{0}{0}$ شروع می‌کند و در هر ثانیه یک واحد از مسیر را طی می‌کند. مسیر حرکت او در شکل روبه‌رو نشان داده شده است، او ۲۴ ساعت پس از شروع سفرش در کجا قرار خواهد داشت؟



۸) عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... به شکل مقابل در یک جدول نوشته‌ایم.

عدد ۱۳۹۷ در کدام خانه قرار گرفته است؟

نشانی هرخانه را با شماره سطر و ستون‌هایی که آن خانه در آن قرار دارد مشخص کنید.

خلاصهٔ فصل ۱

مجموعه متناهی و نامتناهی

- مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم. مجموعه‌ای که متناهی نیست را نامتناهی می‌نامیم.

مجموعه مرجع و متمم

- در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

مجموعهٔ اعداد

- مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$
- مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$
- مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$
- مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$
- مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{Q}'$: مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.
- مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$
- $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

مجموعه‌های جدا از هم

- به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

اگر A و B دو مجموعه مجزا باشند، آن‌گاه: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

بازه‌ها

- زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص هستند بازه می‌نامند. حال با توجه به این‌که بازه شامل اعداد ابتدایی و انتهایی‌اش باشد یا نه، به آن بازه باز یا بسته می‌گوییم.

بازه باز: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ بازه بسته: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$

بازه نیم باز: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$ بازه نیم باز: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$

دنباله حسابی

- الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n=an+b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شوند. دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d به‌صورت $a_n=a+(n-1)d$ است.

دنباله هندسی

- دنبالهٔ هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جمله قبل از خودش درعددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می‌گویند.

جملهٔ n ام دنباله هندسی به‌صورت $a_n=aq^{n-1}$ است که در آن a جمله اول و q قدر نسبت می‌باشد.

در دنباله حسابی، فاصله جملات متوالی، مقدار ثابتی است ولی در دنباله هندسی، نسبت جملات متوالی مقدار ثابتی است.

ردیف	تمرین دوره‌ای

۱. اگر مجموعه اعداد حقیقی، گنگ، گویا و صحیح را به‌ترتیب با $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ نشان دهیم، کدام رابطه درست است؟

۱) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$
۲) $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
۳) $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$
۴) $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

۲. کدام‌یک از اعداد زیر گنگ است؟

۱) $\sqrt{9}$
۲) ۴۵۰۰۰
۳) $2\sqrt{6}$
۴) $\frac{3}{5}$

۳. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

۱) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}$
۲) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}$
۳) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{R}$
۴) $\mathbb{R}\cap\mathbb{N}$

۴. $2\sqrt{6}$ متعلق به کدام بازه است؟

۱) $[1,4)$
۲) $(4,5)$
۳) $[5,\sqrt{6})$
۴) $(1,4]$

۵. $\sqrt{15}$ متعلق به چند تا از بازه‌های زیر است؟

الف) $(\frac{5}{2},4]$
ب) $(1,3]$
ج) $[\sqrt{14},\sqrt{16}]$
د) $[\frac{7}{2},\sqrt{15})$

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

۶. بازهٔ $[2,5)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid 2\leq x\leq 5\}$
۲) $\{x\in\mathbb{Z}\mid 2\leq x<5\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x\leq 5\}$
۴) $\{x\in\mathbb{R}\mid 2\leq x\leq 5\}$

۷. کدام گزینه نمایش مجموعهٔ $\{0,1,2,3,\cdots,100\}$ است؟

۱) $\{x\in\mathbb{N}\mid 0\leq x\leq 100\}$
۲) $\{x\in\mathbb{Z}\mid 0<x<100\}$
۳) $\{x\in\mathbb{W}\mid 0\leq x\leq 100\}$
۴) $\{x\in\mathbb{Q}\mid 0<x<100\}$

۸. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) مجموعه A نامتناهی است، هرگاه تعداد اعضای آن ۱۰۰۰۰۰۰ باشد.
۲) مجموعه A متناهی است، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد.
۳) مجموعه A متناهی است، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد حقیقی باشد.
۴) مجموعه A متناهی است، هرگاه تعداد اعضای آن یک عدد گنگ باشد.

۹. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) $\{\varnothing\}$
۲) $\varnothing$
۳) $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$
۴) $\{x\in\mathbb{Z}\mid 0\leq x<100\}$

۱۰. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $\{x\in\mathbb{N}\mid 0<x<1\}$
۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$
۳) $\{x\in\mathbb{Q}'\mid 0<x<1\}$
۴) هیچ‌کدام

۱۱. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $A\subseteq A'$
۲) $A'\subseteq A$
۳) $A\cap A'\subseteq A$
۴) $A\cup A'\subseteq A$

آس

۱

ردیف	تمرین دوره‌ای

۱۲. اگر $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},۱,۲\}$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $\{\varnothing\}\in A$ ۲) $\{۱,\varnothing\}\in A$

۳) $\{\varnothing\}\not\subset A$ ۴) هیچ‌کدام

۱۳. اگر $\mathbb{W}$ (مجموعه اعداد حسابی) مجموعه مرجع باشد، آن‌گاه متمم مجموعه صفر کدام است؟ (مجموعه صفر: $\{۰\}$)

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N}$

۳) $\{۰,۱,۲,\dots\}$ ۴) هیچ‌کدام

۱۴. اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، کدام‌یک از روابط زیر درست است؟

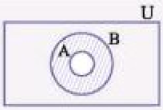
۱) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}'=\varnothing$ ۲) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}'=\varnothing$ ۳) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}=\varnothing$ ۴) همه موارد

۱۵. مجموعهٔ $A-(B\cup C)$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

۱) $(A\cup B)-(A\cup C)$ ۲) $(A-B)\cup(B-C)$

۳) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ۴) هیچ‌کدام

۱۶. قسمت هاشور خورده در نمودار مقابل با کدام گزینه برابر **نیست**؟



۱) $A-B$ ۲) $B-A$

۳) $A'\cap B$ ۴) $B-(A\cap B)$

۱۷. اگر مجموعه مرجع $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و $A=\{a,b,g,c\}$ و $B=\{c,g\}$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $B'\cap A'\subseteq B$ ۲) $A'\cap B'\subseteq A$ ۳) $B'\subseteq A'$ ۴) $A'\subseteq B'$

۱۸. اگر $n(A)=۷$ ، $n(B)=۱۲$ و $n(A\cup B)=۱۷$، آن‌گاه $n(A'\cap B)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۹. اگر $n(U)=۱۰$ ، $n(A)=۳$ ، $n(B)=۶$ و $n(A\cap B)=۲$، آن‌گاه $n(A'\cap B')$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲۰. کدام‌یک از موارد زیر با $n(A-B)$ برابر است؟

۱) $n(A\cup B)-n(B)$ ۲) $n(A\cup B)-n(A)$ ۳) $n(A)-n(B)$ ۴) هیچ‌کدام

۲۱. جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{n^۲}{n+۱}$ ۲) $\frac{n(n+۱)}{۲}$

۳) $\frac{n(n+۱)}{۲n}$ ۴) $\frac{n+۱}{۲n}$

۲۲. ۶۸مین عدد بزرگ‌تر از ۳۵ که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۷ برابر ۳ باشد، چه عددی است؟

۱) ۳۸۸ ۲) ۴۹۳ ۳) ۵۰۷ ۴) ۵۱۴

۲۳. جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۱۷},\dots$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{n+۱}$ ۲) $\frac{۱}{(n+۱)^۲}$ ۳) $\frac{۱}{n^۲}+۱$ ۴) $\frac{۱}{n^۲+۱}$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۲۴.	جملهٔ ۱۷ام دنبالهٔ حسابی مقابل چه عددی است؟ $0, 2, 4, \cdots$ ۱) ۳۰ ۲) ۳۴ ۳) ۳۲ ۴) ۲۸
۲۵.	اگر جملهٔ عمومی دنباله‌ای $a_n = \frac{3n^2+1}{4n+11}$ باشد، a_{3n+2} کدام است؟ ۱) $\frac{27n^2+36n+13}{12n+19}$ ۲) $\frac{30n^2+33n+10}{12n+10}$ ۳) $\frac{28n^2+36n+10}{12n}$ ۴) $\frac{3n^2+3}{3n+13}$
۲۶.	جملهٔ چندم دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{11n+4}{n+2}$ برابر با ۱۰ خواهد بود؟ ۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷
۲۷.	مجموع ۷۰ جملهٔ اول دنباله $a_n = \frac{(-1)^{2n^2-1}+(-1)^{2n^2}+(-1)^{2n^2+1}}{(-1)^{3n}}$ چه عددی می‌شود؟ ۱) صفر ۲) ۷۰ ۳) ۷۰- ۴) ۱-
۲۸.	اگر ۱۸ و ۴۲ به‌ترتیب، جمله‌های ششم و دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی باشند، مجموع جملات نهم و پنجم این دنباله برابر با چه مقداری است؟ ۱) ۴۳ ۲) ۴۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶
۲۹.	در دنبالهٔ $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{17}, \cdots$ جملهٔ ششم کدام است؟ ۱) $\frac{6}{25}$ ۲) $\frac{6}{35}$ ۳) $\frac{6}{55}$ ۴) $\frac{6}{65}$
۳۰.	مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت ۷ برابر ۱۲۳ می‌باشد. جملهٔ هفدهم این دنباله کدام است؟ ۱) ۱۵۳ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۴۶ ۴) ۱۶۴
۳۱.	مقدار x چقدر باشد تا $2x+1$ و $3x+2$ و $5x+1$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۳۲.	در یک دنبالهٔ هندسی نسبت جملهٔ ۱۲ام به جملهٔ ۹م برابر با ۸- می‌باشد. اگر قدر نسبت این دنباله برابر با مجموع دو جملهٔ اول باشد، جملهٔ پنجم این دنباله کدام است؟ ۱) ۳۲ ۲) ۳۲- ۳) ۶۴ ۴) ۶۴-
۳۳.	در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۳ و مجموع ۶ جملهٔ اول برابر با ۳۶۴ می‌باشد. نسبت جملهٔ پنجم به جملهٔ سوم کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵
۳۴.	بین دو عدد ۳ و ۲۷ سه واسطهٔ هندسی به‌گونه‌ای درج کرده‌ایم که این پنج عدد تشکیل یک دنبالهٔ هندسی صعودی دهند. اگر این جملات را جملات یک تصاعد هندسی بدانیم و عدد ۳ جملهٔ اول آن باشد، جملهٔ هشتم این تصاعد کدام است؟ ۱) $27\sqrt{3}$ ۲) $27\sqrt{2}$ ۳) $81\sqrt{3}$ ۴) $81\sqrt{2}$
۳۵.	اگر $4x+4$، $2x+2$ و $x+1$ سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند، کدام گزینه می‌تواند قدر نسبت باشد؟ ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

آس

۱

ردیف	تـــــمـــــریـــــن دوره‌ای
۳۶.	در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات ۳م و ۴م برابر ۱- و مجموع جملات ۷م و ۸م و ۹م برابر با ۳۹ می‌باشد. حاصل عبارت $\frac{a_2+a_5}{a_1+a_6}$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-
۳۷.	در دنباله هندسی a_n با قدر نسبت $-\frac{1}{2}$، اگر $a_2 - a_4 = 1/125$، آنگاه مجموع سه جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ ۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵
۳۸.	مجموع سه جملهٔ اول از یک تصاعد حسابی با جملهٔ عمومی $3+(n-1)d$ با مجموع سه جملهٔ اول از یک تصاعد هندسی با جملهٔ عمومی $5q^{n-1}$ برابر است. اگر نسبت جملهٔ پنجم به جملهٔ دوم تصاعد هندسی برابر با ۸- باشد، جملهٔ هفتم تصاعد حسابی کدام است؟ ۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰
۳۹.	اگر a_n یک دنبالهٔ حسابی باشد و $a_1 = 6$ و $a_5 = 12$، حاصل عبارت $\frac{a_2 a_4}{a_1+a_5}$ کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹
۴۰.	در دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1} = \frac{(n+3)a_n}{2n}$، نسبت جملهٔ ششم به جملهٔ اول برابر است با: ۱) $\frac{11}{7}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{17}{18}$ ۴) $\frac{35}{20}$

فصل ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی تمرین دوره‌ای

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۲	۱۱	۳	۲۱	۲	۳۱	۲
۲	۳	۱۲	۱	۲۲	۳	۳۲	۱
۳	۲	۱۳	۲	۲۳	۴	۳۳	۲
۴	۲	۱۴	۳	۲۴	۳	۳۴	۳
۵	۱	۱۵	۴	۲۵	۱	۳۵	۴
۶	۳	۱۶	۱	۲۶	۳	۳۶	۱
۷	۳	۱۷	۴	۲۷	۳	۳۷	۲
۸	۲	۱۸	۴	۲۸	۲	۳۸	۲
۹	۳	۱۹	۱	۲۹	۴	۳۹	۴
۱۰	۱	۲۰	۱	۳۰	۳	۴۰	۴

یادداشت:

Trigonometry فصل دوم

۲ مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مفهوم نسبت‌های مثلثاتی ۶۰
نام‌گذاری نسبت‌های مثلثاتی ۶۳
محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ... ۶۳
فرمولی برای مساحت مثلث ۶۶
بخش سؤالات ۶۹

درس دوم: دایرهٔ مثلثاتی

معرفی زاویه در صفحه مختصات ۷۳
معرفی نسبت‌های مثلثاتی برای یک ... ۷۴
بخش سؤالات ۷۹

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

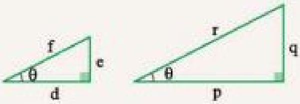
رابطهٔ مهم بین $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ۸۳
محاسبه $\tan\theta$ و $\cot\theta$ ۸۴
روابط مهم بین نسبت‌های مثلثاتی ۸۵
اتحاد مثلثاتی ۸۷
بخش سؤالات ۹۰

خلاصه فصل ۹۴
تمرین دوره‌ای ۹۵

ماجرا چیه؟!

هر آنچه در مثلثات رخ می‌دهد درواقع نتیجهٔ دو چیز است: قضیهٔ فیثاغورس و مبحث تشابه مثلث‌ها، همهٔ قضیه‌هایی که در اینجا مطرح می شوند به‌نوعی صورت دیگر قضیهٔ فیثاغورس هستند.

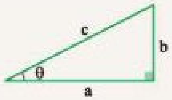
نکته اساسی که در واقع آغاز مثلثات هم هست این است که در هر مثلث قائم‌الزاویه نسبت اضلاع به هم‌دیگر فقط به زاویه‌ها ربط دارد. به‌عنوان مثال دو مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را در نظر بگیرید که یکی از زاویه‌های غیر قائمهٔ آن‌ها θ است، این دو مثلث متشابه‌اند (چون درواقع هر سه زاویهٔ آن‌ها برابر است. چرا؟)، در نتیجه $\frac{p}{d}=\frac{q}{e}=\frac{r}{f}$.



و از این رابطه نتیجه می‌شود: $\frac{q}{p}=\frac{e}{d}$ ، $\frac{q}{r}=\frac{e}{f}$ و $\frac{p}{r}=\frac{d}{f}$. دقت در این روابط ما را به یک مطلب مهم می‌رساند که در مثلث قائم‌الزاویه نسبت ضلع‌ها فقط به زاویه‌ها ربط دارد.

حال چند نمونه از قضایای مربوط به مثلثات را مطرح می کنیم. در مثلث مقابل قضیه فیثاغورس می گوید:

$$a^2+b^2=c^2$$



فرض کنید در مثلث فوق مقادیر $\frac{b}{a}$ ، $\frac{b}{c}$ و $\frac{a}{c}$ را داشته باشیم، معلوم است که این مقادیر با همدیگر مرتبط هستند. به عنوان مثال روابط زیر را داریم:

$$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1 ،\ \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{a} ،\ 1+(\frac{b}{a})^2=\frac{1}{(\frac{a}{c})^2}$$

اثبات این موارد ساده است، دست به قلم شوید و درستی آن‌ها را نشان دهید.

مبحث مثلثات از آن‌جایی آغاز می‌شود که با قدری دقت متوجه می‌شویم که رابطه‌ای قطعی بین اندازهٔ زاویهٔ θ و نسبت‌های $\frac{b}{a}$ ، $\frac{b}{c}$ و $\frac{a}{c}$ وجود دارد، یعنی به عنوان مثال فقط یک زاویهٔ θ در مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که نسبت $\frac{b}{a}$ برای آن $\frac{1}{2}$ است (آیا می‌توانید آن زاویه را رسم کنید؟) و ... .

در مبحث مثلثات با توجه به مثلث فوق نسبت $\frac{b}{c}$ را $\sin\theta$ ، نسبت $\frac{a}{c}$ را $\cos\theta$ و نسبت $\frac{b}{a}$ را $\tan\theta$ می‌نامیم ($\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ را نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ می‌نامند). حال با توجّه به تعریف‌هایی که انجام دادیم سعی می کنیم ببینیم $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ چه ارتباطی با هم دارند، هر کدام از موارد زیر یک رابطه بین $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ را نشان می‌دهد:

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} ،\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 ،\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

حال درستی این روابط را با توجه به تعاریفی که آوردیم نشان می‌دهیم:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{bc}{ac}=\frac{b}{a}=\tan\theta$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\frac{b}{c})^2+(\frac{a}{c})^2=\frac{b^2+a^2}{c^2}\xrightarrow{\text{با استفاده از قضیه فیثاغورس}}\frac{c^2}{c^2}=1$$

$$1+\tan^2\theta=1+(\frac{b}{a})^2=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\xrightarrow{\text{با استفاده از قضیه فیثاغورس}}\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{(\frac{a}{c})^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

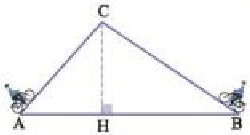
دقت کنید که قضیهٔ فیثاغورس نقش اساسی در به‌وجود آمدن روابط بالا داشت. حال به‌عنوان مثال اگر بدانیم $\sin\theta=\frac{2}{3}$ و $\cos\theta>0$، آنگاه با استفاده از روابط فوق سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ نیز به‌دست می‌آیند.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1\Rightarrow\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\xrightarrow{\cos\theta>0}\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

و همینجا یه چیزیه در همین حدودا

شکل زیر یک تپه واقعاً غیرطبیعی را نشان می‌دهد که ارتفاع آن ۱۵۰۰ متر است، جلال از نقطهٔ A با سرعت $5\frac{m}{s}$ و جمال از نقطهٔ B با سرعت $9\frac{m}{s}$ به سمت نقطهٔ C حرکت می‌کنند و هم‌زمان به نقطهٔ C می‌رسند. (مسیر هر کدام از آن‌ها یک جادهٔ کاملاً صاف است به‌طوری که ABC یک مثلث است.) اگر جلال با هر متر حرکت در مسیر خود، ۴۰ سانتی‌متر ارتفاع بگیرد، آن‌گاه موارد زیر را محاسبه کنید:



۱ مدت زمانی که جلال به رأس تپه می‌رسد.

۲ وقتی که جلال ۱۰ متر از سطح زمین ارتفاع گرفته است، چند متر به سمت راست حرکت کرده است؟

۳ وقتی که جمال ۱۰ متر از سطح زمین ارتفاع گرفته است، چند متر به سمت چپ حرکت کرده است؟

۴ وقتی که جلال ۲۰ متر به سمت راست حرکت کرده است، چند متر ارتفاع گرفته است؟

۵ وقتی که جمال ۳۵۰ متر از سطح زمین ارتفاع گرفته است، چند متر به سمت چپ حرکت کرده است؟

۶ طول‌های AH، BH و AB را بیابید.

۷ آیا در رأس تپه تصادف رخ می‌دهد؟ مقصر کیست؟

گام ۲

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مفهوم نسبت‌های مثلثاتی

شاید گاهی جملاتی مانند جملات زیر را شنیده باشید:

ـ شیب[1] جادهٔ P، ۷ درصد است.

ـ شیب تپهٔ Q، ۵۰ درصد است.

ـ شیب صخرهٔ R، ۹۶ درصد است.

ـ شیب دیوار هم که ۱۰۰ درصد است.

شاید فکر کرده باشید معنی دقیق این جملات چیست؟

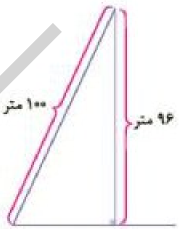
خُب، معنی آن‌ها جملات زیر است:

ـ با طی هر صد متر مسیر در جادهٔ P، ۷ متر ارتفاع می‌گیرید.

ـ با طی هر صد متر مسیر از پای تپهٔ Q به سمت قلّهٔ آن، ۵۰ متر ارتفاع می‌گیرید.

ـ با طی هر صد متر مسیر در صخرهٔ R، ۹۶ متر ارتفاع می‌گیرید.

و این‌ها را می‌توان با شکل‌های زیر نشان داد:



صخرهٔ R

تپهٔ Q

جادهٔ P

البته این اطلاعات را می‌توان باتوجّه به زاویه با محور افقی نیز بیان کرد:

زاویهٔ جاده با افق (محور افقی) تقریباً ۴ درجه است.

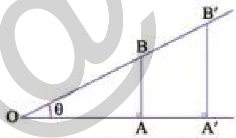
زاویهٔ تپه با افق (محور افقی) دقیقاً ۳۰ درجه است.

زاویهٔ صخره با افق (محور افقی) تقریباً ۷۴ درجه است.

و زاویهٔ دیوار با افق (محور افقی) دقیقاً ۹۰ درجه است.

البته تا حدودی به ذهن می‌رسد که با معلوم بودن زاویهٔ جاده با خط افقی باید بتوان شیب جاده را یافت و هم‌چنین بالعکس با معلوم بودن شیب یک جاده باید بتوان زاویهٔ آن جاده با راستای افقی را یافت. این کارها انجام شده و جداول آن‌ها هم موجود است.

پس به‌نظر یک رابطهٔ متقابل بین شیب یک جاده، تپه یا صخره با زاویهٔ آن با محور افقی وجود دارد.



اگر بخواهیم این ایده را به شکل ریاضی مطرح کنیم باید به‌صورت زیر عمل کنیم:

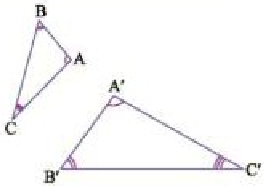
زاویهٔ θ را در نظر بگیرید.

به نظر می‌رسد $\frac{AB}{OB}$ با $\frac{A'B'}{OB'}$ برابر باشد.

اگر بتوانیم این برابری را نشان دهیم از لحاظ ریاضی یک نتیجهٔ خوب به‌دست می‌آوریم و آن این‌که به‌جای اندازه‌گیری یک زاویه می‌توانیم آن را به‌نحوی با یک نسبت نشان دهیم.

اما برابری $\frac{AB}{OB}$ با $\frac{A'B'}{OB'}$ براساس تشابه مثلث‌ها به سادگی به‌دست می‌آید.

۱. در این‌جا کلمهٔ شیب فقط برای نشان دادن این‌که یک سطح چه مقدار سربالا [illegible] ده شده و مفهوم دقیق آن‌که [illegible] در درس فیزیک با آن آشنا می‌شوید، مدنظر نیست.

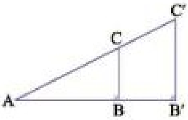


یادت میاد هرگاه سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن‌گاه آن دو مثلث متشابه‌اند و در نتیجه نسبت اضلاع مقابل به زاویه‌های برابر در آن‌ها با همدیگر برابر خواهد بود.

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$
$$\widehat{B} = \widehat{B'}$$
$$\widehat{C} = \widehat{C'}$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

البته از آن‌جا که مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است، می‌توان گفت:

اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث متشابه‌اند، زیرا زاویهٔ سومشان خودبه‌خود با هم برابر می‌شود. حال اگر بخواهیم متشابه بودن دو مثلث قائم‌الزاویه را ثابت کنیم، کافی است ثابت کنیم یک زاویهٔ غیرقائمه‌شان با هم برابر است.



• شکل مقابل را در نظر بگیرید:

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند، زیرا زاویه A در این دو مشترک است. (به‌همین راحتی) حال چون این دو مثلث متشابه‌اند، نسبت اضلاع مقابل به زاویه‌های برابر، برابرند.

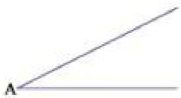
یعنی داریم:

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$$

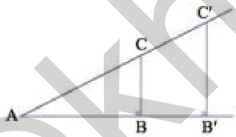
۱ از تساوی $\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ نتیجه می‌شود: $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

۲ از تساوی $\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

۳ از تساوی $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$ نتیجه می‌شود: $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$



می‌خواهیم یک معنی مهم برای این سه نتیجه به‌دست آوریم. زاویهٔ دلخواه A را فرض کنید و در یکی از اضلاع آن دو نقطهٔ دلخواه را در نظر بگیرید و از آن‌ها عمودهایی بر ضلع مقابل رسم کنید.

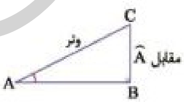


در این‌جا دو نقطهٔ C و C' را در ضلع بالایی در نظر می‌گیریم و نام نقاط پای عمود را هم B و B' می‌گذاریم. حال آن نتایج می‌گویند:

نقاط C و C' را هرگونه انتخاب کنید، آن‌گاه:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$

یعنی این نسبت ربطی به نقطه‌ای که ما انتخاب کرده‌ایم ـ C، C' یا هر نقطهٔ دیگر ـ ندارد بلکه مقدار این نسبت فقط بستگی و ارتباط کاملاً مستقیمی با زاویهٔ A دارد، و در واقع با دانستن این نسبت می‌توانیم خود زاویهٔ A را به‌دست بیاوریم.

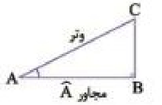


پس شایسته است نامی برای آن انتخاب کنیم که این ارتباط و وابستگی نسبت به زاویهٔ A را نشان دهد. مثلاً نام آن را می‌گذاریم «مقابل بر وتر A». اسم خوبی هم هست و شکل مقابل هم باعث می‌شود تا ما آن را خوب به‌خاطر بسپاریم.

راستی، آن نتایج سه تا بودند، دومی به‌شکل زیر بود:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

با توضیحاتی مشابه توضیحات قبل معلوم می‌شود که این نسبت هم ربطی به این‌که نقاط C و C′ در کجای ضلع زاویهٔ A باشند ندارد و مقداری است که فقط بستگی به زاویهٔ A دارد و در واقع با دانستن آن می‌توانیم مقدار زاویهٔ A را به‌دست آوریم.



برای این نسبت هم نامی انتخاب می‌کنیم با الگو گرفتن از نام‌گذاری قبل نام آن را می‌گذاریم «مجاور بر وتر A» و باز هم باتوجه به شکل مقابل می‌توانیم آن را به‌خاطر بسپاریم. و نتیجهٔ سوم هم به‌شکل زیر بود:

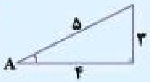
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}$$

با توضیحاتی مشابه، این نسبت هم نسبتی است مرتبط با زاویه، نام آن را هم می‌گذاریم «مقابل بر مجاور زاویهٔ A».

تعریف مقادیر مقابل بر وتر، مجاور بر وتر و مقابل بر مجاور زاویهٔ A را «نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A» می‌نامند.

سؤال

با توجه به شکل مقابل، مقادیر مقابل بر وتر، مجاور بر وتر و مقابل بر مجاور را برای زاویهٔ A به‌دست آورید.



پاسخ

$\frac{3}{4}=$ مقابل بر مجاور $\widehat{A}$ $\frac{4}{5}=$ مجاور بر وتر $\widehat{A}$ $\frac{3}{5}=$ مقابل بر وتر $\widehat{A}$

مثال‌های آموزشی

۱) **باتوجه به شکل مقابل مقادیر مثلثاتی زاویه A را به‌دست آورید.**

پاسخ اگر ضلع مجهول را x بنامیم، بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:

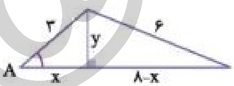
$$x^2+3^2=8^2 \Rightarrow x^2=64-9=55 \Rightarrow x=\sqrt{55}$$

حال نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$\frac{3}{\sqrt{55}}=$ مقابل بر مجاور $\widehat{A}$ $\frac{\sqrt{55}}{8}=$ مجاور بر وتر $\widehat{A}$ $\frac{3}{8}=$ مقابل بر وتر $\widehat{A}$

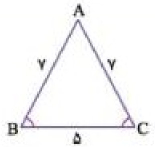
۲) **باتوجه به شکل مقابل مقادیر مثلثاتی زاویه A را به‌دست آورید.**

پاسخ دچار این اشتباه نشوید که بدون توجّه به شکل، به‌سؤال جواب دهید، دقت کنید که مقابل بر وتر زاویهٔ A را وقتی می‌توان به‌دست آورد که $\widehat{A}$ یکی از زوایای یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، در غیر این صورت دچار اشتباه می‌شوید. مثلث فوق هم که یک مثلث قائم‌الزاویه نیست زیرا $8^2 \neq 6^2+3^2$. حال برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A در شکل فوق چه باید کرد؟

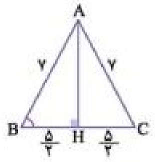


خُب، باید یک مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل روبه‌رو ساخت و طی محاسباتی نتیجه را به‌دست آورد. مشخصاً باید به‌نحوی مقادیر x و y را در شکل فوق به‌دست آورد تا مثلثی قائم‌الزاویه با سه ضلع معلوم داشته باشیم که $\widehat{A}$ هم یکی از زاویه‌های آن است بعد از آن هم دیگر مسیر محاسبات سر راست خواهد بود. البته منظور از این سؤال این بود که نسبت‌های مثلثاتی با کمک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده است و هنگام محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ خاص باید ابتدا دقت کنید که این نسبت‌ها را با کمک مثلث قائم‌الزاویه باید به‌دست آورد. در مثال‌هایی مانند مورد فوق هم بالاخره با قدری محاسبات می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را پیدا کرد. (راهنمایی حل در بیشتر بدانـ

۳) با توجّه به شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ B را به‌دست آورید.



پاسخ چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، ارتفاع وارده از رأس A بر ضلع BC، از وسط BC عبور می‌کند، پس شکل مقابل را رسم می‌کنیم:



حال برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ B از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH استفاده می‌کنیم.

از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2+(AH)^2=7^2 \Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{19}}{2}$$

حال نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ B به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\hat{B}\ \text{مقابل بر وتر} = \frac{AH}{AB}=\frac{\frac{3\sqrt{19}}{2}}{7}=\frac{3\sqrt{19}}{14}$$

$$\hat{B}\ \text{مجاور بر وتر} = \frac{BH}{AB}=\frac{\frac{5}{2}}{7}=\frac{5}{14}$$

$$\hat{B}\ \text{مقابل بر مجاور} = \frac{AH}{BH}=\frac{\frac{3\sqrt{19}}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3\sqrt{19}}{5}$$

نام‌گذاری نسبت‌های مثلثاتی

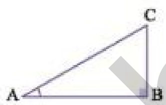
نام‌هایی که قبلاً انتخاب کردیم، درست است که به‌راحتی مفهوم را می‌رساندند ولی قدری طولانی بودند و قدری در نوشتن ریاضی کارآمد نبودند، به‌همین دلیل آن‌ها را تغییر می‌دهیم:

مقابل بر وتر زاویهٔ A را $\sin A$ (سینوس A) می‌نامیم.

مجاور بر وتر زاویهٔ A را $\cos A$ (کسینوس A) می‌نامیم.

مقابل بر مجاور زاویهٔ A را $\tan A$ (تانژانت A) می‌نامیم.

امیدوارم که این نام‌های جدید را پسندیده باشید.



$$\sin A=\frac{BC}{AC} \qquad \cos A=\frac{AB}{AC} \qquad \tan A=\frac{BC}{AB}$$

با استفاده از این نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نسبت‌های مثلثاتی جدیدی تعریف کرد. به‌عنوان مثال می‌توانیم برای $\frac{1}{\tan A}$ یا همان مجاور بر مقابل یک نام انتخاب کنیم و آن را هم جزء نسبت‌های مثلثاتی بدانیم، هر چند که این کار خیلی هم ضروری نیست ولی صورت گرفته است و آن را $\cot A$ نامیده‌اند.

محاسبات با آن هم ساده است. مثلاً وقتی که بدانیم $\tan A=3$، به سادگی درمی‌یابیم که $\cot A=\frac{1}{3}$ و وقتی که بدانیم $\tan B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ به سادگی درمی‌یابیم که $\cot B=\sqrt{3}$.

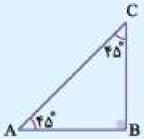
توجه با قدری دقّت درمی‌یابیم که بحث نسبت‌های مثلثاتی، در واقع بحثی است حول قضیهٔ فیثاغورس.

محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های °۳۰، °۴۵ و °۶۰

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های °۳۰، °۴۵ و °۶۰ را می‌توان با رسم شکل مناسب و با استفاده از هندسه به‌طور دقیق به‌دست آورد. البته همهٔ زاویه‌ها این وضعیت را ندارند و نمی‌توان نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن‌ها را به‌طور دقیق مشخص کرد، مانند همان اتفاقی که در جذرگیری افتاد، در آن‌جا دیدیم جذر بعضی اعداد مثل ۹، ۱۶ و ۲۵ به‌طور دقیق به‌دست می‌آمدند ولی همهٔ اعداد این‌گونه نبودند.

سـؤال

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 45° را به‌دست آورید.

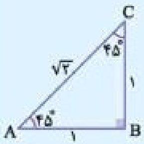


پاسخ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ آن 45° باشد، معلوم است که زاویهٔ سوم آن هم 45° خواهد بود و در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه، متساوی‌السّاقین نیز خواهد بود، یعنی $AB = BC$.

باتوجه به این‌که مقادیر مثلثاتی زاویهٔ A به طول ضلع AB وابسته نیست، می‌توانیم، طول AB را ۱ واحد فرض کنیم. در نتیجه طول BC هم ۱ واحد خواهد بود و بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$1^2+1^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

و در نتیجه:



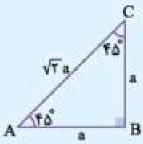
$$\sin 45^\circ = \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{1} = 1$$

اگر طول AB را ۱ واحد فرض نمی‌کردیم هم جواب همین‌ها بود، فقط شاید محاسبات قدری طولانی می‌شد، مثلاً اگر طول AB را **a** فرض می‌کردیم، طول BC هم می‌شد a و در نتیجه AC^2 می‌شد $2a^2$ و در نتیجه $AC = \sqrt{2}a$ و محاسبات به‌صورت زیر انجام می‌شد:



$$\sin 45^\circ = \sin A = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos A = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

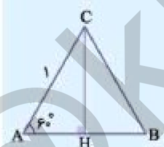
$$\tan A = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{1} = 1$$

می‌بینیم که نتایج محاسبات یکی درآمد و باید هم همین می‌شد، زیرا مقادیر مثلثاتی همان‌طور که قبلاً مورد بحث قرار گرفت به زاویه بستگی دارد و نه به چیز دیگر.

سـؤال

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 60° را به‌دست آورید.



پاسخ خُب، چون بحث زاویهٔ 60° است، احتمالاً مثلث متساوی‌الاضلاع شکلی خواهد بود که در محاسبات به‌درد بخورد. یک مثلث متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع ۱ واحد رسم می‌کنیم.

اگر از رأس C عمودی بر ضلع AB رسم کنیم، ضلع AB را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و در نتیجه $AH = BH = \frac{1}{2}$. حال برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A، از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH استفاده می‌کنیم، طول ضلع‌های AH و AC را داریم، طول CH هم با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس مقادیر مثلثاتی به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\sin 60^\circ = \sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

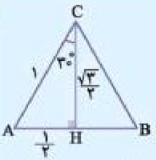
$$\cos 60^\circ = \cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \tan A = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سؤال

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 30° را به‌دست آورید.



پاسخ از همان شکل مسألهٔ قبل استفاده می‌کنیم، در آن‌جا زاویهٔ C به دو قسمت مساوی تقسیم شده است که هر کدام 30° است، مثلث AHC قائم‌الزاویه است و طول اضلاع آن را هم در مسألهٔ قبل به‌دست آوردیم و داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

مقادیر به‌دست آمده را در جدول زیر آورده‌ایم، سعی کنید آن‌ها را به یاد داشته باشید.

نسبت‌های مثلثاتی / A	sinA	cosA	tanA	cotA
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

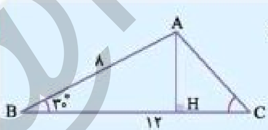
گفتیم که مقادیر مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها را نمی‌توان به‌طور دقیق به‌دست آورد، دیدید که ما با استفاده از شکل‌های خاصی توانستیم مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع معلوم بسازیم، به‌طوری که زاویه‌های 30°، 45° و 60° یکی از زاویه‌های آن‌ها بودند و توانستیم محاسبات لازم را انجام دهیم، حال فرض کنید بخواهیم مقادیر مثلثاتی زاویهٔ 50° را به‌طور دقیق به‌دست آوریم، آیا می‌توانید شکلی رسم کنید که با کمک آن، مقادیر مثلثاتی مربوطه را به‌دست آورید؟

خودتان را به زحمت نیاندازید، نمی‌شود!!

نکته: البته یک موضوع مهم هم این است که در مباحث کاربردی لازم نیست مقدار کاملا دقیق مقادیر مثلثاتی زاویه‌ها را بدانیم، همین که مقدار موردنظر را با تقریب خوبی بدانیم، کافی است. مقادیر مثلثاتی زاویه‌های مختلف را می‌توان با روش‌هایی که در سال‌های بعد آشنا خواهیم شد، هر وقتی که بخواهیم به‌دست آوریم، همین برای ما کافیست.

سؤال

در مثلث مقابل ابتدا طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را پیدا کنید و سپس مساحت مثلث را بیابید.



پاسخ از نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 30° استفاده می‌کنیم، $\sin 30 = \sin B = \frac{AH}{AB}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 4$$

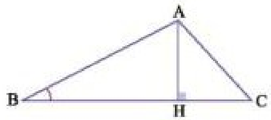
و چون می‌دانیم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

نتیجه می‌شود:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

فرمولی برای مساحت مثلث



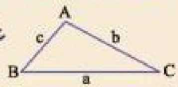
باتوجه به روش حل مسألهٔ فوق می‌توان یک رابطه برای به‌دست آوردن مساحت مثلثی که اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن معلوم است، ساخت.فرض کنید که در مثلث مقابل طول AB و BC و مقدار زاویهٔ B را می‌دانیم. روابط زیر را می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times BC \times AH = \frac{۱}{۲} BC \times AB \times \frac{AH}{AB}$$

و باتوجه به این‌که $\frac{AH}{AB}$ برابر sinB می‌باشد، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B$$

conclusion **جمع‌بندی**

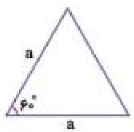


$$S = \frac{۱}{۲} ab \sin C = \frac{۱}{۲} bc \sin A = \frac{۱}{۲} ac \sin B$$

مثال‌های آموزشی

۱) **مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را بیابید.**

پاسخ

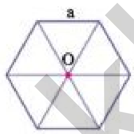


باتوجه به شکل مقابل و رابطه‌ای که برای نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آوردیم، داریم:

$$S = \frac{۱}{۲} a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} a^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$$

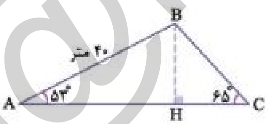
۲) **مساحت ۶ ضلعی منتظم به ضلع ۲ واحد را به‌دست آورید.**

پاسخ



باتوجه به شکل زیر و این‌که ۶ ضلعی منتظم به ضلع a را می‌توان به ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a تقسیم کرد، و باتوجه به این‌که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$، معلوم می‌شود که مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با $۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$ یعنی $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$ و اگر قرار دهیم ۲ = a مساحت شش ضلعی منتظم خواسته شده برابر است با: $۶\sqrt{۳}$.

۳) **در مثلث روبه‌رو طول ضلع BC را به‌طور تقریبی بیابید. $(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸ , \sin ۶۵^\circ = ۰/۹)$**



پاسخ

روش اول: ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم و پای آن را H می‌نامیم حال از نسبت‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم تا BH را به‌دست آوریم.

$$\sin ۵۳^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰} = \frac{BH}{۴۰} \Rightarrow BH = ۳۲$$

حال با داشتن BH و استفاده از sinC مقدار BC به‌دست می‌آید:

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۱۰} = \frac{۳۲}{BC} \Rightarrow BC \simeq \frac{۳۲ \times ۱۰}{۹} \Rightarrow BC \simeq ۳۵/۵$$

روش دوم: هر دو رابطهٔ زیر مساحت مثلث ABC را نشان می‌دهند:

$$\frac{۱}{۲}BC\times AC\times \sin C \ ,\ \frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A$$

این دو برابرند:

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}BC\times AC\times \sin C$$

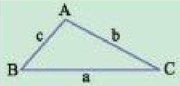
و در نتیجه:

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$$

و از این‌جا مسأله حل می‌شود.

$$\frac{۴۰}{۰/۹}=\frac{BC}{۰/۸}\Rightarrow BC=۳۵/۵$$

نکته: رابطه فوق در واقع می‌گوید در هر مثلث نسبت ضلع‌ها به سینوس زاویهٔ مقابلشان، برابر است.

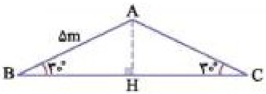


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

این به رابطهٔ sin ها معروف است.

و اگر اندازهٔ زاویه‌های یک مثلث معلوم باشد و طول یک ضلعش را هم بدانیم با این رابطه به‌سادگی طول دو ضلع دیگر به‌دست می‌آید.

۴) مساحت مثلث ABC را بیابید.



پاسخ ابتدا ارتفاع وارده از رأس A را رسم می‌کنیم، با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ B داریم:

$$\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۵}\Rightarrow AH=\frac{۵}{۲}$$

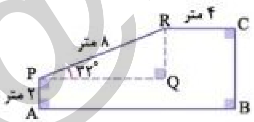
$$\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۵}\Rightarrow BH=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

مشاهده می‌شود که مساحت مثلث ABC، دو برابر مساحت مثلث ABH است و در نتیجه مساحت مثلثABC را می‌توان به روش زیر محاسبه کرد:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times BH\times AH=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۵}{۲}=\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}$$

۵) در شکل زیر مقدار تقریبی AB و BC را بیابید. $(\sin ۳۲^\circ=۰/۵۳ , \cos ۳۲^\circ=۰/۸۴)$

پاسخ با رسم شکل زیر مشخص است که:



$$AB=PQ+۴$$

$$BC=RQ+۲$$

کافی است مقادیر PQ و RQ را بیابیم:

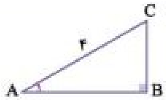
$$\sin ۳۲^\circ=\frac{RQ}{PR}\Rightarrow ۰/۵۳=\frac{RQ}{۸}\Rightarrow RQ=۸\times ۰/۵۳=۴/۲۴$$

$$\cos ۳۲^\circ=\frac{PQ}{PR}\Rightarrow ۰/۸۴=\frac{PQ}{۸}\Rightarrow PQ=۸\times ۰/۸۴=۶/۷۲$$

و در نتیجه:

$$AB=۱۰/۷۲ \ ,\ BC=۶/۲۴$$

۶) در مثلث مقابل، $\tan A = \frac{1}{3}$، اندازهٔ ضلع‌های AB و BC را به‌دست آورید.



پاسخ

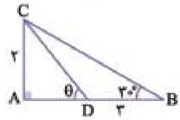
$$\tan A = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow 3BC = AB$$

اما طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \xrightarrow[AC=4]{AB=3BC} (3BC)^2 + (BC)^2 = 4^2 \Rightarrow 10(BC)^2 = 16$$

$$\Rightarrow (BC)^2 = \frac{16}{10} \Rightarrow BC = \frac{4\sqrt{10}}{10} \xrightarrow{AB=3BC} AB = 3 \times \frac{4\sqrt{10}}{10} = 12\frac{\sqrt{10}}{10}$$

۷) در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.



پاسخ ابتدا روندی که باید طی کنیم را پیدا می‌کنیم:

به‌نظر یک راه خوب این است که ابتدا با استفاده از $\tan 30°$، طول AB را پیدا کنیم و سپس طول AD را بیابیم و بعد با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس DC را بیابیم و ... .

$$\tan 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$AD = AB - BD = 2\sqrt{3} - 3$$

$$(DC)^2 = (AC)^2 + (AD)^2 = 2^2 + (-3 + 2\sqrt{3})^2 = 4 + 9 + 12 - 12\sqrt{3} = 25 - 12\sqrt{3} \Rightarrow DC = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$$

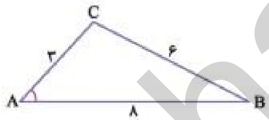
بنابراین:

$$\sin\theta = \frac{AC}{DC} = \frac{2}{\sqrt{25-12\sqrt{3}}}, \quad \cos\theta = \frac{AD}{DC} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{25-12\sqrt{3}}}, \ \ldots$$

بیشتر بدانیم

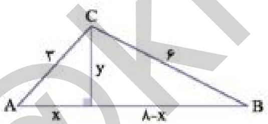
زمانی (در سؤال ۲ مثال آموزشی اول) سؤال زیر را مطرح کردیم:

باتوجّه به شکل مقابل مقادیر مثلثاتی زاویهٔ A را بیابید.



شاید خیلی‌ها بخواهند بدانند که پاسخ چنین سؤالاتی را چگونه باید داد.

ساده است: ابتدا عمود وارده از رأس C را رسم می‌کنیم.



حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به دو معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (8-x)^2 + y^2 = 6^2 \end{cases}$$

با استفاده از اتّحاد مربع دوجمله‌ای این معادلات به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 16x + 64 + y^2 = 36 \end{cases}$$

و با کم کردن دو طرف دو معادله از هم به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$16x = 37$$

و با به‌دست آمدن x باقی مراحل هم به راحتی طی می‌شود.

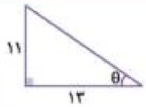
$$x = \frac{37}{16}$$

آس

۲

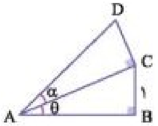
کـــافه سـؤال

۱ در مثلث روبه‌رو نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را بیابید.

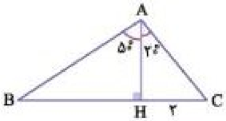


۲ در مثلث روبه‌رو $\sin\theta = \frac{۳}{۴}$ ، طول ضلع‌های مجهول را بیابید.

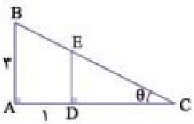
۳ در شکل مقابل $\sin\theta = \frac{\sqrt{۵}}{۴}$ و $\tan\alpha = \frac{۱}{۲}$ ، طول AD را بیابید.



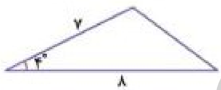
۴ در شکل مقابل طول BH را با دقّت دو رقم اعشار بیابید. ($\tan ۵۰^\circ \approx ۰/۷۶۶$ ، $\tan ۲۰^\circ \approx ۰/۳۶۴$)



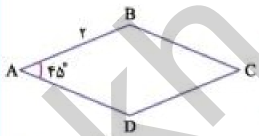
۵ در شکل داده شده $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$ ، طول‌های DC و DE را به‌دست آورید.



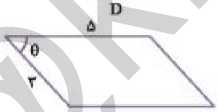
۶ مساحت مثلث مقابل را به‌دست آورید. ($\cos ۴^\circ = ۰/۹۹۸$ ، $\sin ۴^\circ = ۰/۰۷۰$)



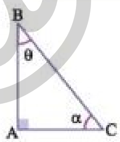
۷ مساحت لوزی داده شده را به‌دست آورید.



۸ مساحت متوازی‌الاضلاع مقابل را به‌دست آورید. ($\sin\theta = ۰/۸۳$)



۹ در مثلث قائم‌الزاویهٔ داده شده می‌دانیم $\sin\alpha = ۲\sin\theta$. مقادیر $\sin\alpha$ و $\sin\theta$ را بیابید.



۱۰ مساحت ۸ ضلعی منتظمی را که نقاط رأسی آن روی دایره‌ای به شعاع ۱ واحد قرار دارند، بیابید. برای ۱۲ ضلعی منتظم هم این کار را بکنید.

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- مقدار $3\sin 30^\circ + 5\cos 60^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{3+5\sqrt{3}}{2}$

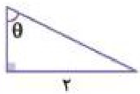
۲- مقدار $(\sin 60^\circ)^2 - (\cos 60^\circ)^2$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) $+\frac{1}{2}$

۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، داریم $\hat{A} = 90^\circ$ و $BC = 3AB$، مقدار $\tan B$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

۴- در مثلث مقابل، داریم $\tan\theta = 4$، طول وتر این مثلث کدام است؟



۱) $\sqrt{65}$ ۲) $2\sqrt{17}$
۳) ۸ ۴) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۵- برای زاویهٔ θ رابطهٔ $\sin\theta = 2\cos\theta$ برقرار است، $\tan\theta + \cot\theta$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

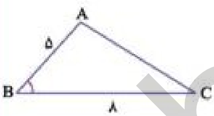
۶- برای زاویهٔ θ رابطهٔ $\tan\theta = 5\sin\theta$ برقرار است، $\tan\theta$ چقدر است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $4\sqrt{6}$

۷- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که طول هر ضلع آن ۱ واحد است، چقدر است؟

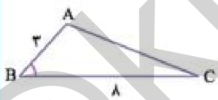
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۸- در مثلث مقابل $\sin B = \frac{3}{4}$، طول ارتفاع وارده از رأس A کدام است؟



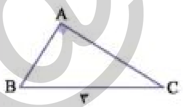
۱) ۳ ۲) ۴
۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{15}{4}$

۹- اگر مساحت مثلث زیر برابر ۶ واحد باشد، $\tan B$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

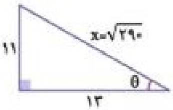
۱۰- در مثلث مقابل $\tan B = 2$، مساحت مثلث کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۲/۱
۳) ۱/۸ ۴) ۱/۶

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

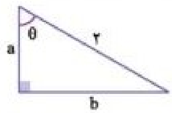
۱



$$x=\sqrt{۱۳^{۲}+۱۱^{۲}}=\sqrt{۱۶۹+۱۲۱}=\sqrt{۲۹۰}$$

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{۱۱}{\sqrt{۲۹۰}}=\dfrac{۱۱\sqrt{۲۹۰}}{۲۹۰}\\[2mm] \cos\theta=\dfrac{۱۳}{\sqrt{۲۹۰}}=\dfrac{۱۳\sqrt{۲۹۰}}{۲۹۰}\\[2mm] \tan\theta=\dfrac{۱۱}{۱۳}\\[2mm] \cot\theta=\dfrac{۱۳}{۱۱}\end{cases}$$

۲

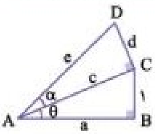


$$\sin\theta=\frac{۳}{۴}=\frac{b}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

مثبت است $\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}=\sqrt{۱-(\frac{۳}{۴})^{۲}}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$.

$$\cos\theta=\frac{a}{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۷}}{۴}=\frac{a}{۲}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

۳

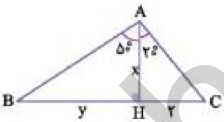


$$\left.\begin{array}{ll}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{۵}}{۴}\Rightarrow\dfrac{۱}{c}=\dfrac{\sqrt{۵}}{۴}\Rightarrow c=\dfrac{۴}{\sqrt{۵}} & (۱)\\[2mm] \tan\alpha=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow\dfrac{d}{c}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow c=۲d & (۲)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۴}{\sqrt{۵}}=۲d\Rightarrow d=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\quad(۳)$$

از قضیه فیثاغورس داریم:

$$e^{۲}=c^{۲}+d^{۲}\overset{(۲)}{=\!=}(۲d)^{۲}+d^{۲}=۴d^{۲}+d^{۲}=۵d^{۲}\overset{(۳)}{=\!=}۵\times\frac{۴}{۵}=۴\Rightarrow e=۲$$

۴

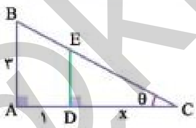


$$\tan ۲۰^{\circ}=\frac{۲}{x}=۰/۳۶۴\Rightarrow x=\frac{۲}{۰/۳۶۴}=۵/۵$$

$$\tan ۵۰^{\circ}=\frac{y}{x}=۰/۷۶۶\Rightarrow y=۰/۷۶۶\times x=۰/۷۶۶\times ۵/۵۰=۴/۲$$

$$BH=y\simeq ۴/۲$$

۵



$$\sin\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow BC=۶$$

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\xrightarrow{\sin\theta=\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۴}+\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow\cos^{۲}\theta=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{AC}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AC=۳\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x+۱=۳\sqrt{۳}\Rightarrow x=۳\sqrt{۳}-۱$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan\theta=\frac{DE}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{DE}{۳\sqrt{۳}-۱}\Rightarrow DE=\frac{(۳\sqrt{۳}-۱)\sqrt{۳}}{۳}=۳-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

گام ۲

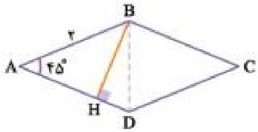
۶

$$\cos 4^\circ = \frac{8-x}{7} \Rightarrow 0/998 = \frac{8-x}{7} \Rightarrow x = 1/014$$

$$\sin 4^\circ = \frac{y}{7} \Rightarrow 0/070 = \frac{y}{7} \Rightarrow y = 0/49$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{8 \times y}{2} = \frac{8 \times 0/49}{2} = 1/96$$

۷

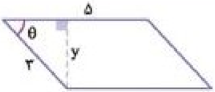


$$\sin 45^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{2}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} BH \times AD \xrightarrow{AB=AD=2} S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = \sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} + S_{\overset{\triangle}{BCD}} \xrightarrow{S_{\overset{\triangle}{ABD}} = S_{\overset{\triangle}{BCD}}} 2S_{\overset{\triangle}{ABD}} = 2\sqrt{2}$$

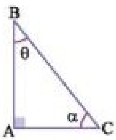
۸



$$\sin\theta = \frac{y}{3} \Rightarrow 0/83 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 2/49$$

$$S = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = 2/49 \times 5 = 12/45$$

۹



$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}, \cos\theta = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\theta$$

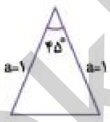
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \xrightarrow[\sin\alpha = \cos\theta]{\sin\alpha = 2\sin\theta} \left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\theta \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۱۰

یک هشت ضلعی منتظم را می‌توان به ۸ مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأسی 45° $\left(\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ\right)$ تقسیم کرد که طول ساق‌های آن برابر با شعاع دایره است.

مساحت یک مثلث متساوی‌الساقین:



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 \xrightarrow{a=1} S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مساحت ۸ ضلعی منتظم:

$$S_{\text{هشت‌ضلعی}} = 8S_{\text{مثلث}} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$$

۱۲ ضلعی منتظم نیز از ۱۲ مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأسی 30° $\left(\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ\right)$ تشکیل شده که طول ساق‌های آن برابر شعاع دایره است.

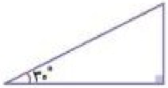
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \times a^2 \Rightarrow S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{4}$$

$$S_{\text{۱۲ضلعی}} = 12S_{\text{مثلث}} = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

۱	۳
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۲
۶	۳
۷	۳
۸	۴
۹	۴
۱۰	۳

درس دوم: دایرهٔ مثلثاتی



در درس قبل برای برخی زاویه‌ها با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آمد. به‌عنوان مثال وقتی می‌خواستیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰ درجه را به‌دست آوریم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کردیم که یکی از زوایای آن ۳۰ درجه بود و با استفاده از آن با قدری محاسبات $\sin 30^\circ$ و... را به‌دست آوردیم.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه این محدودیت را به‌وجود می‌آورد که فقط می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه تعریف کنیم، زیرا به‌عنوان مثال نمی‌توانیم یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنیم که یکی از زاویه‌هایش ۱۲۰ درجه باشد و در نتیجه روش فوق تعریفی برای نسبت‌های مثلثاتی برای زاویهٔ ۱۲۰ درجه ارائه نمی‌دهد.

خب، دستمان باز است، سعی می‌کنیم مفهوم نسبت‌های مثلثاتی را به روشی تعریف کنیم که:

اولاً: نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه همان مقادیر قبلی به‌دست آیند.

یعنی روش جدید تعریف نتایج گذشته را تأیید کند و به‌عنوان مثال نتیجه دهد $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و ...

ثانیاً: نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های غیر از زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه هم تعریف شود.

ثالثاً: تعریف انجام شده برای زاویه‌های جدید هم خیلی متفاوت با تعریف انجام شده برای زوایای قبلی نباشد. یعنی یک ارتباط معناداری بین تعاریف جدید و تعاریف قبلی وجود داشته باشد.

به‌چنین کارهایی اصطلاحاً می‌گویند:

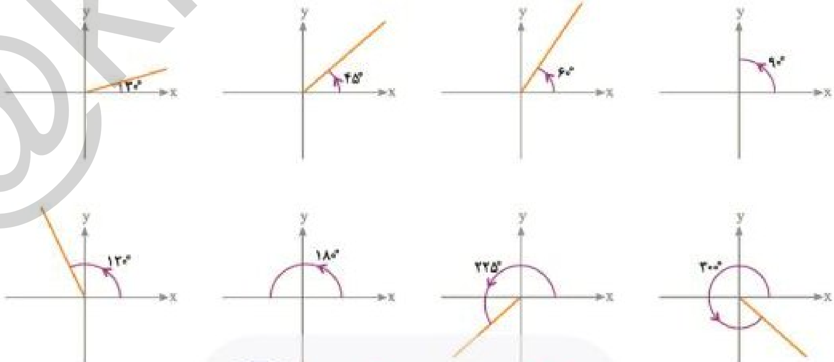
> تعمیم یک مفهوم، عمومیّت بخشیدن به یک مفهوم، توسیع و گسترش یک مفهوم.

به نظر، اولین کار لازم این بود که تعریف را با استفاده از شکل‌های هندسی انجام ندهیم و سعی کنیم تعریف‌ها را با استفاده از صفحهٔ مختصات انجام دهیم.

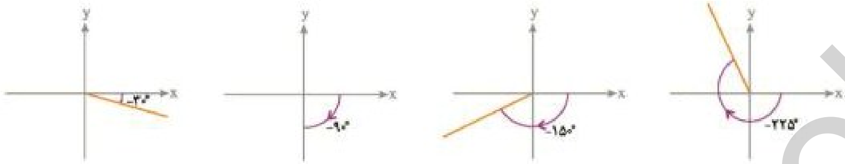
معرفی زاویه در صفحهٔ مختصات

سعی می‌کنیم هر زاویه را به‌نحوی مشخص کنیم تا بعداً راحت بتوانیم برای آن نسبت‌های مثلثاتی را تعریف کنیم:

معلوم است که راحت‌تریم، یک ضلع زاویه را جهت مثبت محور x بگیریم و به‌عنوان مثال زاویه‌های ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۹۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۲۲۵ و ۳۰۰ درجه را به شکل زیر نمایش دهیم:



در ادامه می‌توانیم زاویه‌های منفی را هم تعریف کنیم. به این صورت که وقتی فلش زاویه همانند شکل‌های قبل در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است، زاویه را مثبت بدانیم و وقتی فلش زاویه همانند شکل‌های زیر در جهت عقربه‌های ساعت است، زاویه را منفی بدانیم.



البته نکته‌ای که مهم است این است که در مباحث علمی و همین‌طور ریاضیات تعاریف و نام‌گذاری‌ها به‌گونه‌ای انجام می‌شوند که بعداً محاسبات و نتیجه‌گیری‌ها را ساده کنند و دلیل دیگری ندارد. پس اگر ما در این‌جا زاویهٔ منفی تعریف کردیم و یا چیزهایی مانند آن فقط یک هدف دارد، ساده‌تر شدن مباحث آینده. حال شاید بعضی از این مباحث هم در این‌جا مطرح نشود.

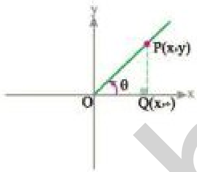
و البته اگر کسی بخواهد، می‌تواند زاویهٔ منفی تعریف نکند و با روش دیگری به مباحث ادامه دهد و نتایج را بگیرد ولیکن، احتمالاً روش او قدری پیچیده‌تر و یا طولانی‌تر خواهد بود.

همان‌طور که مثلاً هر کس می‌تواند بگوید ما هر عددی که در واقعیت می‌بینیم مثبت است، و اعداد منفی ساختگی است و من نمی‌خواهم از آن‌ها در ریاضیات استفاده کنم، خُب، احتمالاً راه طولانی در پیش خواهد داشت.

معرفی نسبت‌های مثلثاتی برای یک زاویه در صفحهٔ مختصات

فرض کنید θ یک زاویه در صفحهٔ مختصات باشد که یک رأس آن نقطه O و یک ضلع آن جهت مثبت محور x باشد.

برای معرفی نسبت‌های مثلثاتی نقطهٔ P به مختصات (x,y) را روی ضلع دوم زاویهٔ θ انتخاب می‌کنیم و با الگو گرفتن از تعاریف قبلی، نسبت‌های مثلثاتی را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.



(مقابل بر وتر سابق) $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(مجاور بر وتر سابق) $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(مقابل بر مجاور سابق) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

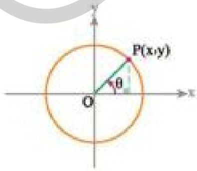
(مجاور بر مقابل سابق) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{x}{y}$

به‌سادگی دیده می‌شود که اندازهٔ وتر در مثلث OPQ برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است. (رابطهٔ فیثاغورس)

حال باز هم سعی می‌کنیم کار را ساده‌تر کنیم اگر یک دایره به شعاع ۱ واحد حول مبدأ مختصات بکشیم و همیشه نقطهٔ P را از نقاط روی آن دایره انتخاب کنیم آن‌گاه خودبه‌خود مقدار عبارت $\sqrt{x^2+y^2}$ می‌شود ۱ و محاسبات ساده‌تر هم می‌شود.

حال با استفاده از دایرهٔ به شعاع واحد، تعاریف را از نو می‌نویسیم.

فرض کنید نقطهٔ P به مختصات $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ فوق باشد و θ زاویه‌ای باشد که نیم‌خط OP با جهت مثبت محور x می‌سازد، آن‌گاه با استفاده از تعاریف قبل داریم:



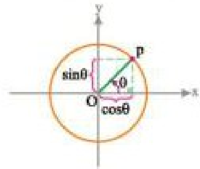
$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{1} = x$$

از آنجا که دایرهٔ به شعاع واحد محاسبات را ساده‌تر کرد، شایستگی اعطای یک نام را دریافت می‌کند. نام معروف او دایرهٔ مثلثاتی است. با توضیحات فوق وقتی P نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی است و θ زاویهٔ OP با جهت مثبت محور x باشد، می‌توانیم $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

◆ باتوجه به شکل مقابل می‌توان محور x را محور کسینوس‌ها و محور y را محور سینوس‌ها تصور کرد:



باتوجه به این شکل متوجه می‌شویم که با تعریف جدید، بسته به θ مقادیر $\sin\theta$، $\cos\theta$ و ... می‌توانند منفی نیز باشند. البته اگر $0^\circ < \theta < 90^\circ$ آن‌گاه همانند گذشته $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ مقادیر مثبتی خواهند داشت.

البته اگر بخواهیم دقیقاً بدانیم که مقادیر نسبت‌های مثلثاتی در کجا مقدار مثبت و در کجا مقدار منفی می‌گیرند، باید دایرهٔ مثلثاتی را مانند شکل روبه‌رو به ۴ قسمت تقسیم کنیم.

و می‌گوییم که یکی از ضلع‌های هر زاویه، جهت مثبت محور x است، باتوجه به ضلع دوم هر زاویه می‌توانیم زاویه‌ها را دسته‌بندی کنیم و بگوییم که هر کدام از زاویه‌ها در کدام ناحیه قرار می‌گیرند.

باتوجه به شکل می‌توانیم بگوییم:

وقتی $0^\circ < \theta < 90^\circ$ آن‌گاه زاویهٔ θ در ربع اول قرار می‌گیرد.

وقتی $90^\circ < \theta < 180^\circ$ آن‌گاه زاویهٔ θ در ربع دوم قرار می‌گیرد.

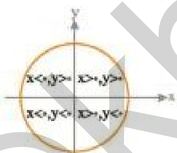
وقتی $180^\circ < \theta < 270^\circ$ آن‌گاه زاویهٔ θ در ربع سوم قرار می‌گیرد.

و وقتی $270^\circ < \theta < 360^\circ$ آن‌گاه زاویهٔ θ در ربع چهارم قرار می‌گیرد.

و البته زوایای 0°، 90°، 180°، 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آن‌ها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌ها در نظر نمی‌گیریم.

البتّه این حادثه چیزی از ارزش‌های این زاویه‌ها کم نمی‌کند و به قول کومولوس یونانی «کاری که زاویهٔ ۱۸۰ درجه کرد، هیچ زاویه‌ای نمی‌تواند بکند.»

به هر حال باتوجّه به شکل روبه‌رو به سادگی می‌توانیم مثبت یا منفی بودن نسبت‌های مثلثاتی را دریابیم.

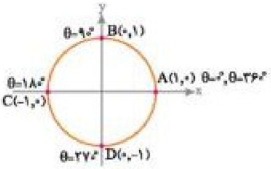


نسبت مثلثاتی	نحوهٔ تعیین علامت	ربع اول $x>0, y>0$	ربع دوم $x<0, y>0$	ربع سوم $x<0, y<0$	ربع چهارم $x>0, y<0$
$\sin\theta$	هم‌علامت با y	+	+	−	−
$\cos\theta$	هم‌علامت با x	+	−	−	+
$\tan\theta$	هم‌علامت با $\frac{y}{x}$ یا xy	+	−	+	−
$\cot\theta$	هم‌علامت با $\frac{y}{x}$ یا xy	+	−	+	−

گـام ۲

مثال‌های آموزشی

۱) **برای زاویه‌های $0°$، $90°$، $180°$، $270°$ و $360°$ نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.**



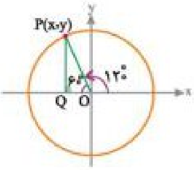
پاسخ نقاط متناظر با این زاویه‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم. دقت کنید که نقطهٔ متناظر با زاویهٔ $0°$ روی دایرهٔ مثلثاتی همان نقطهٔ متناظر با زاویهٔ $360°$ است.

حال باتوجّه به این‌که $\sin\theta = y$ ، $\cos\theta = x$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$ و $\cot\theta = \frac{x}{y}$ نتایج را در جدول زیر می‌نویسیم.

مقدار نسبت مثلثاتی \ θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$	۰	۱	۰	۱-	۰
$\cos\theta$	۱	۰	۱-	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

البته با به‌خاطر سپردن شکل دایره مثلثاتی و این‌که محور x، محور کسینوس‌هاست و محور y محور سینوس‌ها، اطلاعات جدول فوق را به‌راحتی می‌توانید به‌یاد آورید.

۲) **نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۱۲۰ درجه را بیابید.**



پاسخ دایره مثلّثاتی را رسم می‌کنیم و زاویهٔ $120°$ را در آن مشخص می‌کنیم.

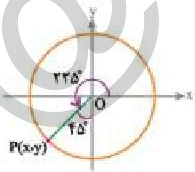
باید مختصات نقطهٔ P را به‌دست آوریم. باتوجّه به مثلّث OPQ و این‌که می‌دانیم زاویهٔ O در این مثلث $180 - 120$ یعنی ۶۰ درجه است، و باتوجّه به این‌که طول OP برابر ۱ واحد است، پس طول QP یعنی $|y|$ برابر $\sin 60°$ یعنی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و طول QO یعنی $|x|$ برابر $\cos 60°$ یعنی $\frac{1}{2}$ است. حال باتوجّه به این‌که می‌دانیم y مثبت است و x منفی، نتیجه می‌گیریم:

$$x = \frac{-1}{2} \ , \ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و در نتیجه:

$$\cos(120°) = \frac{-1}{2} \ , \ \sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \tan(120°) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3} \ , \ \cot(120°) = \frac{1}{\tan(120°)} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

۳) **نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۲۵ درجه را به‌دست آورید.**

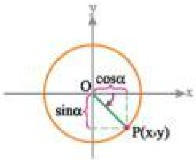


پاسخ دایره مثلّثاتی را رسم می‌کنیم و زاویهٔ ۲۲۵ درجه را در آن مشخص می‌کنیم، باید مختصات نقطهٔ P را بیابیم.

با روشی مشابه آن‌چه در حل مسألهٔ قبل به‌کار بردیم درمی‌یابیم مختصات نقطهٔ P برابر $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ است بنابراین:

$$\sin(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \cos(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \tan(225°) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \ , \ \cot(225°) = \frac{1}{\tan(225°)} = 1$$

۴) اگر α زاویه‌ای در ربع چهارم باشد و $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی آن را به‌دست آورید.



پاسخ می‌دانیم اگر (x,y) مختصات نقطهٔ P باشد آن‌گاه $\cos\alpha = x$ و $\sin\alpha = y$ پس $x = \frac{۳}{۷}$ و چون نقطهٔ (x,y) روی دایره به شعاع واحد قرار دارد $x^۲ + y^۲ = ۱$ و در نتیجه $\left(\frac{۳}{۷}\right)^۲ + y^۲ = ۱$ و در نتیجه $y^۲ = \frac{۴۰}{۴۹}$ و چون می‌دانیم زاویهٔ α در ربع چهارم قرار دارد، پس مقدار y منفی است، یعنی $y = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷}$.

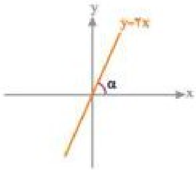
و در نتیجه:

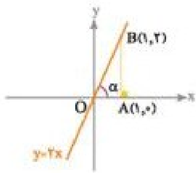
$$\sin\alpha = y = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{۴۰}}{۷}}{\frac{۳}{۷}} = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۳}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{-\frac{\sqrt{۴۰}}{۳}} = -\frac{۳}{\sqrt{۴۰}} = -\frac{۳\sqrt{۴۰}}{۴۰}$$

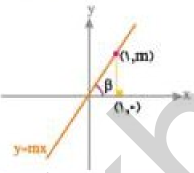
۵) در شکل زیر تانژانت زاویهٔ α را بیابید.





پاسخ یک نقطه روی خط را در نظر می‌گیریم به‌عنوان مثال نقطهٔ $(۱,۲)$، حال از این نقطه عمودی بر محور xها وارد می‌کنیم. محور x را در نقطهٔ $(۱,۰)$ قطع می‌کند حال تانژانت زاویهٔ α برابر است با طول AB تقسیم بر طول OA یعنی $\frac{۲}{۱}$.

بطور مشابه اگر بخواهیم تانژانت زاویهٔ β در شکل زیر را به‌دست آوریم با انتخاب نقطهٔ $\binom{۱}{m}$ روی خط می‌بینیم که:



$$\tan\beta = \frac{m}{۱} = m$$

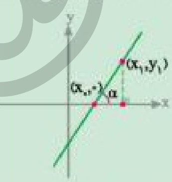
یعنی تانژانت زاویه‌ای که خط $y = mx$ با جهت مثبت محور x تشکیل می‌دهد برابر است با m یعنی شیب این خط.

نکته: البته وجود این رابطه قابل پیش‌بینی هم بود. زیرا شیب خط که با رابطهٔ $\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ به‌دست می‌آید به نوعی «مقابل بر مجاور» است که همان تانژانت است.

توضیح زیر این را روشن‌تر می‌کند.

فرض کنید خط $y = mx + h$ در نقطهٔ $(x_۰ , ۰)$ محور x را قطع کند و نقطهٔ $(x_۱ , y_۱)$ هم بر روی این خط قرار داشته باشد در آن‌صورت شیب این خط برابر خواهد بود با $\frac{y_۱}{x_۱ - x_۰}$.

حال اگر α زاویهٔ بین این خط و جهت مثبت محور x باشد آن‌گاه:



$$\tan\alpha = \frac{y_۱}{x_۱ - x_۰}$$

و این گفته ما را به‌صورت کامل روشن می‌سازد.

البته برای این‌که ببینید که این رابطه کلی است، می‌توانید شکل‌های دیگری بکشید که در آن شیب خط منفی باشد و در آن حالت هم درستی گفته‌های فوق را بررسی کنید.

۶) معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۶۰° است و از نقطهٔ (۳،۱) می‌گذرد.

پاسخ شیب این خط برابر است با $\tan ۶۰^\circ$ یعنی $\sqrt{۳}$.

حال با داشتن یک نقطه از خط و شیب آن می‌توانیم معادلهٔ آن را به‌دست آوریم:

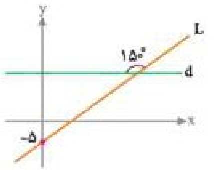
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۱ = \sqrt{۳}(x - ۳) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳\sqrt{۳} + ۱$$

۷) معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° است و از نقطهٔ (۲،۵) می‌گذرد.

پاسخ شیب این خط برابر است با $\tan ۴۵^\circ$ یعنی ۱. حال با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن معادلهٔ خط به‌دست می‌آید:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۵ = ۱(x - ۲) \Rightarrow y = x + ۳$$

۸) باتوجه به شکل زیر معادلهٔ خط L را به‌دست آورید. (خط d موازی محور xها می‌باشد.)



پاسخ باتوجه به شکل معلوم است که زاویهٔ بین خط L و جهت مثبت محور x برابر ۳۰° است.

پس شیب خط L برابر است با $\tan ۳۰^\circ$ یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$. حال چون نقطهٔ (۰،۵-) هم روی خط L قرار دارد، معادلهٔ خط L به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y - (-۵) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۵$$

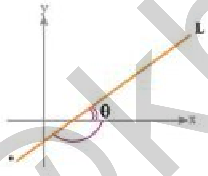
بیشتر بدانیم

در چند مطلب قبل از عبارتی به شکل زیر استفاده کردیم:

«زاویه‌ای که خط L با جهت مثبت محور x می‌سازد.»

اگر دقت کنید این اصطلاح به‌طور دقیق منظور ما را مشخص نمی‌کند.

به‌عنوان مثال در شکل مقابل هر دو زاویه نشان داده شده زاویه‌ای هستند که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

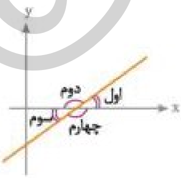


اگر بخواهیم اصطلاح دقیقی بسازیم باید مشابه تقسیم دایره مثلثاتی به ناحیه‌های چهارگانه عمل کنیم.

یعنی زاویه‌های ایجاد شده بین خط و محور x را به‌صورت زیر نام‌گذاری کنیم.

و منظور از زاویهٔ خط با جهت مثبت محور x همان زاویهٔ اول است.

ما نیز با قدری اغماض جهت هماهنگی با کتاب درسی از این اصطلاح استفاده کرده‌ایم.



آس

۲

کـــافه ســؤال

۱ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ -45° را به‌دست آورید.

۲ همهٔ زاویه‌های θ را که $-360^\circ < \theta < 360^\circ$ و $\sin\theta = \frac{1}{2}$ مشخص کنید.

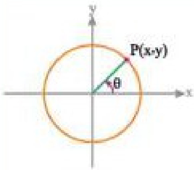
۳ همهٔ زاویه‌های θ را که $-360^\circ < \theta < 360^\circ$ و $\tan\theta = 1$ مشخص کنید.

۴ اگر زاویهٔ θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی باشد، آن‌گاه زاویه‌های $90^\circ + \theta$، $90^\circ - \theta$، $180^\circ + \theta$ و $180^\circ - \theta$ در کدام ناحیه‌های مثلثاتی قرار خواهند داشت؟

۵ اگر زاویهٔ θ در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار داشته باشد، زاویهٔ 3θ در کدام ناحیه قرار خواهد داشت؟ باتوجه به مقادیر مختلف θ، جواب کامل ارائه دهید.

۶ باتوجه به شکل مقابل، اگر نقطه P به مختصات (x,y) روی دایرهٔ مثلثاتی را نشانگر زاویهٔ θ بدانیم، کدام نقاط نشانگر زاویه‌های $180^\circ - \theta$، $180^\circ + \theta$ و $-\theta$ خواهند بود؟

(راهنمایی: ابتدا مسأله را برای حالتی که θ در ناحیهٔ اول قرار دارد حل کنید و سپس مسأله را در حالت‌های دیگر هم بررسی کنید.)



۷ باتوجه به پاسخ تمرین قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) چه ارتباطی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ و زاویهٔ $-\theta$ وجود دارد؟

ب) چه ارتباطی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ و زاویهٔ $180^\circ - \theta$ وجود دارد؟

ج) چه ارتباطی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ و زاویهٔ $180^\circ + \theta$ وجود دارد؟

۸ معادلات خط‌هایی را که با محور x زاویهٔ 60° می‌سازند و از نقطهٔ $(2,1)$ عبور می‌کنند را بیابید.

۹ خط $3y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ با محور x چه زاویه‌هایی می‌سازد؟

۱۰ اگر $\sin\theta = \frac{4}{5}$، سینوس زاویه‌های $-\theta$، $(\theta - 180^\circ)$ و $(\theta + 180^\circ)$ را بیابید. (θ در ربع اول است.)

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- اگر $\sin\theta.\cos\theta < ۰$ ، آن‌گاه θ در کدام یک از ناحیه‌های مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۱) اول و دوم
۲) دوم و چهارم
۳) سوم و چهارم
۴) اول و سوم

۲- مقدار $\sin ۲۱۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

۳- مقدار $\tan(-۲۴۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $-\sqrt{۳}$

۴- اگر $۰ < x < y < ۹۰^\circ$، چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

الف) $\sin x < \sin y$
ب) $\cos x < \cos y$
ج) $\tan x < \tan y$
د) $\cot x < \cot y$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵- اگر $۰ < x < ۴۵^\circ < y < ۹۰^\circ$، چند مورد از موارد زیر درست است؟

الف) $\sin x < \cos y$
ب) $\tan x < \cot x$
ج) $\sin x < \tan x$
د) $\cos x < \cot x$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶- اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\theta = \frac{-۴}{۵}$، آن‌گاه $\sin(۱۸۰^\circ - \theta)$ و $\cos(۱۸۰^\circ - \theta)$ چند خواهند بود؟

۱) $\frac{۴}{۵}, \frac{۳}{۵}$
۲) $-\frac{۴}{۵}, -\frac{۳}{۵}$
۳) $-\frac{۴}{۵}, \frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}, -\frac{۳}{۵}$

۷- چند زاویهٔ θ در بین ۰° و ۳۶۰° با شرط $\sin\theta + \cos\theta = ۲$ وجود دارد؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۸- کدام‌یک نادرست است؟

۱) $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$
۲) $\sin ۳۰^\circ = -\sin ۲۱۰^\circ$
۳) $\sin ۳۰^\circ = \sin ۱۵۰^\circ$
۴) $\sin ۳۰^\circ = \cos ۲۴۰^\circ$

۹- زاویهٔ بزرگ بین دو خط $y = \sqrt{۳}x$ و $y = x + ۲$ چند درجه است؟

۱) ۱۶۰°
۲) ۱۰۵°
۳) ۱۶۵°
۴) ۱۵۵°

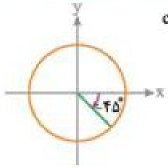
۱۰- مقدار $\sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ + \sin ۳۰^\circ + \cdots + \sin ۳۶۰^\circ$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $۲\sqrt{۳} + ۱$
۴) ۰

درس۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

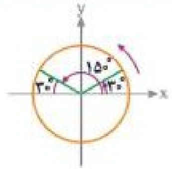
با توجه به دایرهٔ مثلثاتی می‌بینیم که زاویهٔ -45° در ربع چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $\sin(-45)^\circ$ منفی و $\cos(-45)^\circ$ مثبت است. پس:



$$\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \tan(-45^\circ) = -1 \quad , \quad \cot(-45^\circ) = -1$$

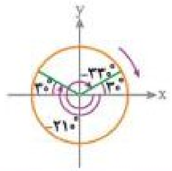
۲

برای حل این سؤال از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم.



در ابتدا فرض می‌کنیم $0^\circ < \theta < 360^\circ$، بنابراین یک دور کامل دایره مثلثاتی به‌صورت پادساعتگرد را در نظر می‌گیریم و زوایایی که $\sin$ آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است را معرفی می‌کنیم:

$\theta = 30^\circ$ و $\theta = 150^\circ$



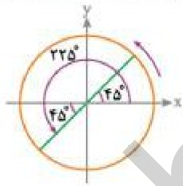
حال فرض می‌کنیم $-360^\circ < \theta < 0^\circ$، بنابراین یک دور کامل دایره مثلثاتی را به‌صورت ساعتگرد در نظر می‌گیریم و زوایایی که $\sin$ آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود را معرفی می‌کنیم:

(در نظر داشته باشید زاویهٔ θ، زاویه‌ای با علامت منفی خواهد بود؛ زیرا جهت ساعتگرد است.)

$\theta = -210^\circ$ و $\theta = -330^\circ$

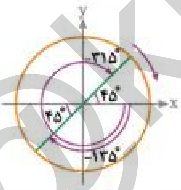
۳

روش حل این سؤال نیز مانند سؤال قبل می‌باشد.



ابتدا θ را زاویه‌ای بین 0° و 360° در نظر می‌گیریم:

$\theta = 45^\circ$ و $\theta = 225^\circ$

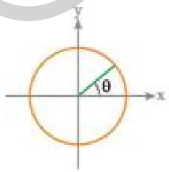


حال فرض می‌کنیم $-360^\circ < \theta < 0^\circ$ (در نظر داشته باشید θ منفی خواهد بود زیرا جهت ساعتگرد است.)

$\theta = -135^\circ$ و $\theta = -315^\circ$

۴

اگر زاویه θ در ناحیه اول مثلثاتی باشد، یعنی $0 < \theta < 90$:



$90+\theta : 0+90 < 90+\theta < 90+90 \Rightarrow 90 < 90+\theta < 180$ ربع‌دوم

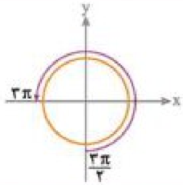
$90-\theta : 0 > -\theta > -90 \Rightarrow +90+0 > 90-\theta > -90+90 \Rightarrow 0 < 90-\theta < 90$ ربع‌اول

$180+\theta : 0+180 < 180+\theta < 90+180 \Rightarrow 180 < 180+\theta < 270$ ربع‌سوم

$180-\theta : 0 > -\theta > -90 \Rightarrow 180+0 > 180-\theta > 180-90 \Rightarrow 180 > 180-\theta > 90 \Rightarrow 90 < 180-\theta < 180$ ربع‌دوم

۵

θ در ناحیه دوم قرار دارد، بنابراین:

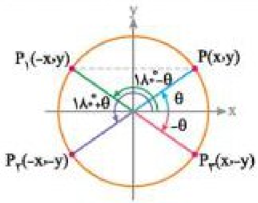


$$\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \pi \xrightarrow{\times ۳} \frac{۳\pi}{۲} \le ۳\theta \le ۳\pi$$

پس ۳θ در ناحیه اول یا دوم یا چهارم قرار دارد.

۶

اگر θ در ناحیه اول باشد:



برای حالت‌هایی که θ در ناحیهٔ دوم، سوم یا چهارم باشد نیز به همین صورت اثبات می‌شود.

خودتان حتما انجام دهید. موفق باشید. ☺

۷

الف)

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

ب)

$\tan(۱۸۰ - \theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\sin(۱۸۰ - \theta) = \sin\theta$

$\cot(۱۸۰ - \theta) = -\cot\theta$ $\qquad$ $\cos(۱۸۰ - \theta) = -\cos\theta$

ج)

$\tan(۱۸۰ + \theta) = \tan\theta$ $\qquad$ $\sin(۱۸۰ + \theta) = -\sin\theta$

$\cot(۱۸۰ + \theta) = \cot\theta$ $\qquad$ $\cos(۱۸۰ + \theta) = -\cos\theta$

۸

حالت اول:

$$\text{شیب خط} = \tan\theta \xrightarrow{\theta = ۶۰^\circ} \text{شیب خط} = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} = m$$

$$y - b = m(x - a) \xrightarrow{(a،b)=(۲،۱)} y - ۱ = \sqrt{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۲\sqrt{۳} + ۱$$

حالت دوم:

$$\text{شیب خط} = \tan\theta \xrightarrow{\theta = -۶۰^\circ} \text{شیب خط} = \tan(-۶۰^\circ) = -\sqrt{۳} = m$$

$$y - b = m(x - a) \Rightarrow y - ۱ = -\sqrt{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = -\sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳} + ۱$$

۹

$$۳y - \sqrt{۳}x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳y = \sqrt{۳}x - ۱ \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{۱}{۳}$$

$$\text{شیب خط} = \tan\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ، -۱۵۰^\circ$$

۱۰

با توجه به سؤال ۷ داریم:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta = -\frac{۴}{۵} \quad ، \quad \sin(۱۸۰^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{۴}{۵} \quad ، \quad \sin(۱۸۰^\circ + \theta) = -\sin\theta = -\frac{۴}{۵}$$

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

سؤال	۱	۲	۳	۴
۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	**۲**	۳	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	**۱**	۲	۳	۴
۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	**۴**
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	۲	۳	**۴**

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

رابطهٔ مهم بین $\sin\theta$ و $\cos\theta$

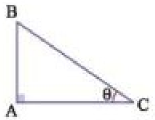
نسبت‌های مثلثاتی مربوط به یک زاویه رابطهٔ محکمی با هم دارند به‌طوری‌که اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی مربوط به یک زاویه را بدانید و هم‌چنین بدانید که آن زاویه در کدام یک از ناحیه‌های چهارگانه قرار دارد، می‌توانید سایر نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه را به‌دست آورید.

در این مبحث چگونگی انجام این محاسبات را خواهیم آموخت.

ذکر یک نکته در ابتدای بحث می‌تواند راهگشا باشد:

در درس قبل توانستیم نسبت‌های مثلثاتی را با استفاده از دایره مثلثاتی معرفی کنیم و اصولاً باید برای بحث دربارهٔ ویژگی‌های نسبت‌های مثلثاتی از دایرهٔ مثلثاتی در صفحهٔ مختصات استفاده کنیم ولی به جهت راحت‌تر بودن بحث دربارهٔ مثلث قائم‌الزاویه، ما در این‌جا از همان تعریف اولیّه دربارهٔ نسبت‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

البته همهٔ رابطه‌هایی که ما در این‌جا، دربارهٔ نسبت‌های مثلثاتی به‌دست می‌آوریم، در حالت کلی هم درستند ولیکن ما وقتی از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم، درستی این روابط را حداکثر برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه ثابت می‌کنیم.



مثلث قائم‌الزاویه مقابل را که θ یک زاویهٔ حادهٔ آن است را در نظر بگیرید:

بنابر قضیه فیثاغورس می‌دانیم که:

$$(AB)^2+(AC)^2=(BC)^2$$

با تقسیم دو طرف تساوی فوق بر $(BC)^2$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=1$$

اما می‌دانیم که $\frac{AB}{BC}=\sin\theta$ و $\frac{AC}{BC}=\cos\theta$، پس رابطهٔ فوق نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1}$$

قرارداد: برای سادگی نوشتار قرار می‌گذاریم که عبارات $(\sin\theta)^2$، $(\cos\theta)^2$، $(\tan\theta)^2$ و $(\cot\theta)^2$ را به‌صورت $\sin^2\theta$، $\cos^2\theta$، $\tan^2\theta$ و $\cot^2\theta$ بنویسیم.

سـؤال

زاویهٔ θ در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد و داریم $\cos\theta=\frac{-1}{5}$، مقدار $\sin\theta$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\sin^2\theta+\frac{1}{25}=1\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\mp\frac{\sqrt{24}}{5}$$

حال، چون θ در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد، پس سینوس آن منفی است.

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{24}}{5}$$

سـؤال

زاویهٔ θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد و داریم $\sin\theta=\frac{3}{5}$، مقدار $\cos\theta$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\cos^2\theta=1\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\mp\frac{4}{5}$$

حال، چون θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد، پس کسینوس آن مثبت است.

$$\cos\theta=\frac{4}{5}$$

سؤال

زاویهٔ θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد و داریم $\sin\theta = \frac{3}{5}$، مقدار $\cos\theta$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \mp\frac{4}{5}$$

حال، چون θ در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد، پس کسینوس آن مثبت است.

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

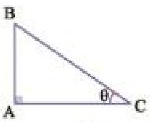
دیدیم که رابطهٔ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ کمک می‌کند تا اگر یکی از دو نسبت مثلثاتی $\sin\theta$ و یا $\cos\theta$ را داشتیم، دیگری را هم به‌دست آوریم. البته دانستن ناحیهٔ مثلثاتی θ هم لازم است.

محاسبه $\tan\theta$ و $\cot\theta$

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم:

فرض کنید مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را داریم، چگونه می‌توانیم $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را محاسبه کنیم؟

پاسخ این سؤال ساده است. در مثلث روبه‌رو می‌بینیم که:



$$\sin\theta = \frac{AB}{BC} \quad , \quad \cos\theta = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \tan\theta = \frac{AB}{AC}$$

با قدری دقت می‌بینیم که:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

زیرا:

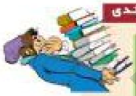
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC} = \tan\theta$$

و چون $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ پس:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

باتوجه به روابط فوق اگر مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را داشته باشیم می‌توانیم مقادیر $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را محاسبه کنیم.

conclusion | جمع‌بندی



اگر یکی از مقادیر $\sin\theta$ و یا $\cos\theta$ معلوم باشد و همچنین بدانیم که θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد، آن‌گاه با استفاده از روابط مقابل می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را محاسبه کنیم.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

سؤال

می‌دانیم $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ 135° را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2 135^\circ + \cos^2 135^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 135^\circ = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos^2 135^\circ = 1 \Rightarrow \cos^2 135^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 135^\circ = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون زاویهٔ 135° در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد، پس $\cos 135^\circ$ منفی است و داریم:

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال می‌توانیم $\tan 135^\circ$ و $\cot 135^\circ$ را به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad , \quad \cot 135^\circ = \frac{1}{\tan 135^\circ} = -1$$

ســـؤال

اگر $\sin\alpha = \frac{۱}{۳}$ و α در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار داشته باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\cos\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha - \tan\alpha}$$

پاسخ

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ + \cos^۲\alpha = ۱$$

کسینوس در ناحیهٔ اول مثبت است، پس:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{۸}}{۳}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{\sqrt{۸}}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۸}} = \frac{\sqrt{۸}}{۸}$$

و در نتیجه:

$$\frac{\cos\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha - \tan\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{۸}}{۳} + \frac{\sqrt{۸}}{۸}}{\frac{\sqrt{۸}}{۳} - \frac{\sqrt{۸}}{۸}} = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۸}} = \frac{\frac{۱۱}{۲۴}}{\frac{۵}{۲۴}} = \frac{۱۱}{۵}$$

روابط مهم بین نسبت‌های مثلثاتی

حال سؤال دیگری را مطرح می‌کنیم:

فرض کنید یکی از مقادیر $\tan\theta$ و یا $\cot\theta$ را داریم و همچنین می‌دانیم θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد. چگونه می‌توانیم $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را محاسبه کنیم؟

پاسخ به این سؤال هم ساده است:

اگر طرفین رابطهٔ $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ را بر $\cos^۲\theta$ تقسیم کنیم، می‌رسیم به:

$$\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$\tan^۲\theta + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

با استفاده از این رابطه و با داشتن $\tan\theta$ می‌توان $\cos\theta$ را یافت. (البته با دانستن ناحیهٔ مثلثاتی θ) و همچنین اگر طرفین رابطهٔ $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ را بر $\sin^۲\theta$ تقسیم کنیم می‌رسیم به:

$$۱ + \frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta} = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

با استفاده از این رابطه و با داشتن $\cot\theta$ می‌توان $\sin\theta$ را یافت (البته با دانستن ناحیهٔ مثلثاتی θ)

conclusion **جمع‌بندی**

اگر یکی از مقادیر $\tan\theta$ و یا $\cot\theta$ معلوم باشد و همچنین بدانیم که θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد، آن‌گاه با استفاده از روابط زیر می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را محاسبه کنیم.

$$\tan\theta . \cot\theta = ۱$$

$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

ســـؤال

می‌دانیم $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ 240° را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\cot 240^\circ = \frac{1}{\tan 240^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1+\tan^2 240^\circ = \frac{1}{\cos^2 240^\circ} \Rightarrow 1+(\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\cos^2 240^\circ} \Rightarrow 4 = \frac{1}{\cos^2 240^\circ} \Rightarrow$$

$$4\cos^2 240^\circ = 1 \Rightarrow \cos^2 240^\circ = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 240^\circ = \mp\frac{1}{2}$$

حال باید ببینیم که علامت $\cos 240^\circ$ کدام است؟

باتوجّه به این که زاویهٔ 240° در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد، $\cos 240^\circ$ منفی است و داریم:

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

حال باتوجه به این که مقادیر $\cos 240^\circ$ ، $\cot 240^\circ$ و $\tan 240^\circ$ را داریم می‌توانیم از هر کدام از روابط زیر برای به‌دست آوردن $\sin 240^\circ$ استفاده کنیم.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ و } 1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \text{ و } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ و } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

به‌عنوان مثال از رابطهٔ سوم داریم:

$$\tan 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ} \Rightarrow \sin 240^\circ = \tan 240^\circ \times \cos 240^\circ = \sqrt{3} \times \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ســـؤال

اگر $\tan\alpha = 7$ و α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار داشته باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید. $\dfrac{\tan\alpha + \sin^2\alpha}{\cot\alpha + \cos^2\alpha}$

پاسخ

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+49 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{50}$$

چون برای یافتن جواب مسأله نیازی به یافتن $\cos\alpha$ نیست آن را نمی‌یابیم.

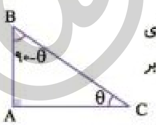
حال مقدار $\sin^2\alpha$ را هم می‌یابیم. $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{49}{50}$

$\cot\alpha$ هم که $\frac{1}{7}$ است، و در نتیجه:

$$\frac{\tan\alpha + \sin^2\alpha}{\cot\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{7+\frac{49}{50}}{\frac{1}{7}+\frac{1}{50}} = \frac{350+49}{\frac{50}{7}+1} = \frac{399\times 7}{57} = \frac{2793}{57} = \frac{931}{19}$$

در مباحث قبل دیدیم که $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ و $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ و مقادیر این نسبت‌های مثلثاتی هم باتوجه به شکل مقابل به‌دست آمد:

با دقت در این شکل می‌بینیم که مقادیر مثلثاتی زاویه‌های θ و $90-\theta$ هم احتمالاً باید رابطهٔ مشابهی داشته باشند. برای توضیح این مطلب مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یکی از زوایای حادهٔ آن معلوم است و زاویهٔ حاده دوم آن برابر $90-\theta$ خواهد بود.



حال نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای θ و $90-\theta$ به‌دست می‌آوریم:

$$\sin\theta = \frac{AB}{BC} \text{ , } \cos\theta = \frac{AC}{BC} \text{ , } \tan\theta = \frac{AB}{AC} \text{ , } \cot\theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin(90-\theta) = \frac{AC}{BC} \text{ , } \cos(90-\theta) = \frac{AB}{BC} \text{ , } \tan(90-\theta) = \frac{AC}{AB} \text{ , } \cot(90-\theta) = \frac{AB}{AC}$$

با مقایسهٔ نسبت‌های مثلثاتی مربوط به زاویه‌های θ و $90-\theta$ برابری‌های زیر مشاهده می‌شود:

$$\tan\theta=\cot(90-\theta) \qquad \cot\theta=\tan(90-\theta)$$
$$\sin\theta=\cos(90-\theta) \qquad \cos\theta=\sin(90-\theta)$$

سؤال

حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}+\frac{\tan 75^\circ}{\cot 15^\circ}$$

پاسخ

$25-90=65$ پس، $\cos 65^\circ=\sin 25^\circ$ (۱)

و $15-90=75$ پس $\tan 75^\circ=\cot 15^\circ$ (۲)

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}+\frac{\tan 75^\circ}{\cot 15^\circ}=\frac{\cancel{\sin 25^\circ}}{\cancel{\sin 25^\circ}}+\frac{\cancel{\cot 15^\circ}}{\cancel{\cot 15^\circ}}=1+1=2$$

اتحاد مثلثاتی

اتحادهای جبری را که به‌خاطر دارید:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$
$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

این‌ها را اتحاد نامیده‌اند چون به‌ازای هر مقداردهی به متغیرهایشان حاصل دو عبارت جبری نوشته شده در دو طرف تساوی برابر است.

در مبحث اتحادهای مثلثاتی هم به‌طور مشابه به هر تساوی‌ای که به‌ازای هر مقداردهی به متغیرها برقرار باشد، اتحاد یا تساوی مثلثاتی می‌گویند.

در مباحث قبل چند اتحاد مثلثاتی را به‌دست آوردیم، مانند:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \text{ و } 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \text{ و } \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

می‌توان برای به‌دست آوردن اتحادهای مثلثاتی، از اتحادهای جبری هم استفاده کرد. مثلاً چون می‌دانیم تساوی $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ به‌ازای هر x و y برقرار است، در این اتحاد، در دو طرف تساوی به‌جای x می‌نویسیم $\sin\theta$ و به‌جای y می‌نویسیم $\cos\theta$.

خُب، مشخص است که حاصل، یک اتحاد به شکل زیر است:

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

این یک اتحاد مثلثاتی است.

حال از آن‌جا که می‌دانیم $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ با جایگزینی آن در طرف راست تساوی فوق به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

این هم یک اتّحاد مثلثاتی است.

برای به‌دست آوردن یک اتحاد مثلثاتی، همانند روش فوق عمل می‌شود، یعنی از دو چیز استفاده می‌شود.

اولی اتّحادهای جبری و دومی روابط بین نسبت‌های مثلثاتی که قبلاً اثبات کرده‌ایم.

گاهی سؤالاتی به این شکل مطرح می‌شود که آیا تساوی داده شده یک اتّحاد مثلثاتی هست یا نه؟

در این‌گونه موارد برای اثبات برابری یکی از روش‌ها این است که از یک طرف تساوی شروع کنید و با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و هم‌چنین بعضاً اتحادهای جبری به طرف دیگر تساوی برسید. روش دیگر این است که از تساوی شروع کنید و با محاسبات گوناگون به یک رابطهٔ معروف برسید و سپس راه رفته را برگردید.

گاج

۲

مثال‌های آموزشی

۱) روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

ب) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

ج) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

د) $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}=\tan\theta$

پاسخ الف)

$$\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ب) فرض می‌کنیم این رابطه صحیح است، قدری محاسبه می‌کنیم تا ببینیم به کجا می‌رسیم:

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta\Rightarrow\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$$

در نتیجه با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌رسیم به $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1$ که رابطهٔ صحیحی است.

باتوجه به محاسباتی که انجام دادیم، برای اثبات درستی رابطهٔ (ب) راه رفته را برمی‌گردیم:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=1\Rightarrow\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta=1\Rightarrow\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

ج)

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

د)

$$\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1+\frac{1}{\tan\theta}}=\frac{1+\tan\theta}{\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta}}=\frac{\frac{1+\tan\theta}{1}}{\frac{1+\tan\theta}{\tan\theta}}=\frac{\tan\theta(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)}=\tan\theta$$

۲) اگر a و b اعدادی حقیقی و $a^2+b^2=1$، آن‌گاه نشان دهید که:

الف) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a^2b^2}$

ب) $a^4+b^4=1-2a^2b^2$

ج) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{1}{ab}$

د) $\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a}{b}$

پاسخ الف)

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\xrightarrow{\text{برای دو کسر مخرج مشترک می‌سازیم}}\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\xrightarrow{a^2+b^2=1}\frac{1}{a^2b^2}$$

ب)

$$a^4+b^4\xrightarrow[\text{اضافه و از آن کم می‌کنیم}]{\text{مقدار } 2a^2b^2 \text{ را به عبارت}}a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2\xrightarrow{\text{اتحاد مربع کامل}}(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=1-2a^2b^2$$

ج)

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a.a}{ab}+\frac{b.b}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{1}{ab}$$

د)

$$\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}}\xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}}\frac{a\cancel{(a+b)}}{b\cancel{(a+b)}}=\frac{a}{b}$$

به تشابه مثال‌های ۱ و ۲ دقت کنید.

۳) درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

ب) $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

ج) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$

پاسخ الف) با فرض صحیح بودن تساوی قدری محاسبه می‌کنیم تا ببینیم چه می‌شود.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow \sin\theta.\sin\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$$

$$\xrightarrow{\text{با استفاده از اتحاد مزدوج}}\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\Rightarrow\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

به یک رابطهٔ کاملاً صحیح رسیدیم، پس برای اثبات درستی (الف) راه رفته را برمی‌گردیم:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\Rightarrow\sin^2\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}=1-\cos\theta\Rightarrow\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

ب)

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

به نظر نمی‌رسد چنین رابطه‌ای درست باشد، پس به‌دنبال مثال نقض می‌گردیم.

می‌بینیم که فرضاً اگر بگیریم $\theta=45°$، سمت چپ تساوی می‌شود صفر ولی سمت راست تساوی صفر نمی‌شود، در نتیجه رابطهٔ (ب) یک اتحاد نیست، مثال نقضش هم $\theta=45°$ است. البته مشخص است که مثال نقض آن فراوان است ولی برای رد آن، یکی کافی است.

ج) بعضی مواقع اگر شک داریم که رابطهٔ تساوی اتّحاد نیست بهتر است ابتدا با جایگذاری چند زاویهٔ معروف که مقادیر مثلثاتی‌اش را می‌دانیم درستی آن را امتحان کنیم. در این‌جا اگر α را $0°$ فرض کنیم می‌بینیم که هم مقدار $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ می‌شود ۱ و هم مقدار $1-2\sin\alpha\cos\alpha$. زاویهٔ دیگری را انتخاب می‌کنیم. مثلاً $45°$، را مقدار $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ می‌شود $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$ یعنی $\frac{1}{2}$ و مقدار $1-2\sin\alpha\cos\alpha$ می‌شود $1-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی ۰ پس این یک اتّحاد نیست.

در کل، در مباحث این کتاب اگر یکی از چند زاویهٔ معروف مثال نقضی برای یک تساوی مثلثاتی نبودند، احتمالاً آن یک اتحاد است.

یادداشت

کافه سؤال

۱ اگر $\sin\alpha = \frac{۲}{۳}$ و α در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار داشته باشد، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ α را به‌دست آورید.

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\sin\theta - \cos\theta)^۲ + (\sin\theta + \cos\theta)^۲$

ب) $(۱ - \sin^۲\theta)(۱ + \tan^۲\theta)$

ج) $\frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{۱}{\tan^۲\theta}$

د) $\frac{۲}{۱+\tan^۲\theta} + \frac{۲}{۱+\cot^۲\theta}$

۳ اگر $\tan\alpha = -۲$ و α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار داشته باشد، مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{۲\sin\alpha - \cos\alpha}$$

۴ اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{۱}{۴}$، آن‌گاه $\sin\alpha\cos\alpha$ چقدر خواهد بود؟

۵ اگر $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۵}$، آن‌گاه $(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲$ و $(\sin\alpha - \cos\alpha)^۲$ چقدر خواهند بود؟

۶ باتوجه به رابطهٔ $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای $\sin\theta$ و $\cos\theta$ چقدر است؟

آیا برای $\tan\theta$ و $\cot\theta$ هم می‌توان بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تعیین کرد؟

۷ آیا می‌توان گفت که به ازای هر θ رابطهٔ $|\tan\theta| \geq |\sin\theta|$ برقرار است؟

۸ تساوی مقابل را اثبات و یا رد کنید.

$$\left(\frac{۱}{\sin^۲ x} - ۱\right)\left(\frac{۱}{\cos^۲ x} - ۱\right) = ۱$$

۹ حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\frac{\sin ۳۵^\circ}{\cos ۵۵^\circ} \times \frac{\sin ۳۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ} \times \frac{\tan ۳۵^\circ}{\cot ۵۵^\circ}$$

۱۰ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰۰° را به‌دست آورید.

گزینــهٔ چنــد؟!!!!

۱- اگر $\sin\theta = \frac{-1}{3}$ و θ در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار داشته باشد، $\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ ۴) $\frac{-\sqrt{8}}{3}$

۲- اگر $\tan\theta = -4$ و θ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار داشته باشد، $\sin\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{\sqrt{17}}$ ۲) $-\frac{4}{\sqrt{17}}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

۳- اگر $\cot\theta + \tan\theta = 3$، حاصل $\cot\theta . \tan\theta$ کدام است؟

۱) 9 ۲) -9 ۳) 1 ۴) -1

۴- اگر $\sin\theta . \cos\theta = 1$ آن‌گاه $\sin\theta + \cos\theta$ چه عددی می‌تواند باشد؟

۱) 3 ۲) $\sqrt{3}$

۳) $-\sqrt{3}$ ۴) ممکن نیست $\sin\theta . \cos\theta$ برابر یک باشد.

۵- عبارت $\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$ ۲) $\frac{1}{1-\sin\theta}$ ۳) $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ۴) $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

۶- اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$، مقدار عبارت $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ چقدر خواهد بود؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $-\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{-5}{9}$

۷- عبارت $\frac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ ۲) $2\cos^2\theta - 1$ ۳) $\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$ ۴) گزینه‌های ۲ و ۱

۸- عبارت $\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta}$ ۲) $\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

۳) $\frac{-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ ۴) $\frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$

۹- عبارت $\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $1-\tan\theta$ ۲) $2+2\tan^2\theta$

۳) $\frac{2}{\sin^2\theta}$ ۴) $2+2\cot\theta$

۱۰- عبارت $\frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\cos^2\theta$ ۲) $\sin^2\theta$

۳) $\cos\theta\sin\theta$ ۴) $\cos\theta$

۱

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\cos^{۲}=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۲

الف) $(\sin\theta-\cos\theta)^{۲}+(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}=\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta-۲\sin\theta\cos\theta+\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta+۲\sin\theta\cos\theta=۲$

ب) $(۱-\sin^{۲}\theta)(۱+\tan^{۲}\theta)=\cos^{۲}\theta\times\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}=۱$

ج) $\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}-\frac{۱}{\tan^{۲}\theta}=\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}-\frac{\cos^{۲}\theta}{\sin^{۲}\theta}=\frac{\sin^{۲}\theta}{\sin^{۲}\theta}=۱$

د) $\frac{۲}{۱+\tan^{۲}\theta}+\frac{۲}{۱+\cot^{۲}\theta}=۲\cos^{۲}\theta+۲\sin^{۲}\theta=۲$

۳

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{۲\sin\alpha-\cos\alpha}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر }\cos\alpha\text{ تقسیم می‌کنیم}}\frac{\tan\alpha+۱}{۲\tan\alpha-۱}=\frac{-۲+۱}{-۴-۱}=\frac{۱}{۵}$$

۴

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{به توان دو}}\underbrace{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}_{۱}+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۱۶}-۱=\frac{-۱۵}{۱۶}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-۱۵}{۳۲}$$

۵

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۵}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^{۲}=\underbrace{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}_{۱}+۲\sin\alpha\cos\alpha=۱+۲\sin\alpha\cos\alpha=۱+\frac{۲}{۵}=\frac{۷}{۵}$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

۶

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\xrightarrow{\cos\theta=۰}\sin^{۲}\theta=۱\Rightarrow\sin\theta=\pm۱\Rightarrow-۱\le\sin\theta\le۱$$

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱\xrightarrow{\sin\theta=۰}\cos^{۲}\theta=۱\Rightarrow\cos\theta=\pm۱\Rightarrow-۱\le\cos\theta\le۱$$

برای tan و cot نمی‌توان بیشترین و کمترین مقدار تعیین کرد زیرا $\tan\theta$ و $\cot\theta$ در بعضی از زوایا تعریف نشده می‌باشند.

۷

بله، می‌دانیم $|\cos\theta|\le۱$ بنابراین داریم:

$$|\cos\theta|\le۱\xrightarrow[\theta\neq\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\ldots]{\text{معکوس کردن}}\frac{۱}{|\cos\theta|}\ge۱\xrightarrow{\times|\sin\theta|}\frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|}\ge|\sin\theta|\Rightarrow\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right|\ge|\sin\theta|\Rightarrow|\tan\theta|\ge|\sin\theta|$$

۸

$$\left(\frac{۱}{\sin^{۲}x}-۱\right)\left(\frac{۱}{\cos^{۲}x}-۱\right)=\frac{۱-\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}\times\frac{۱-\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}=\frac{\cancel{\cos^{۲}x}}{\cancel{\sin^{۲}x}}\times\frac{\cancel{\sin^{۲}x}}{\cancel{\cos^{۲}x}}=۱$$

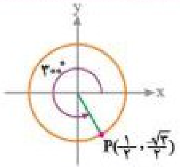
۹

به یاد بیاورید که $\sin(۹۰^\circ-\theta)=\cos\theta$ ، $\cos(۹۰^\circ-\theta)=\sin\theta$ و $\tan(۹۰^\circ-\theta)=\cot\theta$ بنابراین داریم:

$$\frac{\sin۳۵^\circ}{\cos۵۵^\circ}\times\frac{\sin۳۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}\times\frac{\tan۳۵^\circ}{\cot۵۵^\circ}=\frac{\sin۳۵^\circ}{\sin(۹۰^\circ-۵۵^\circ)}\times\frac{\sin۳۰^\circ}{\sin(۹۰^\circ-۶۰^\circ)}\times\frac{\tan۳۵^\circ}{\tan(۹۰^\circ-۵۵^\circ)}=\frac{\cancel{\sin۳۵^\circ}}{\cancel{\sin۳۵^\circ}}\times\frac{\cancel{\sin۳۰^\circ}}{\cancel{\sin۳۰^\circ}}\times\frac{\cancel{\tan۳۵^\circ}}{\cancel{\tan۳۵^\circ}}=۱$$

[۱۰]

$$\cos(۳۰۰^\circ)=\frac{۱}{۲}\quad,\quad \sin(۳۰۰^\circ)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\quad,\quad \tan(۳۰۰^\circ)=-\sqrt{۳}\quad,\quad \cot(۳۰۰^\circ)=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



نکته: مقدار نسبت‌های مثلثاتی فوق را از رابطه‌های زیر به‌دست آوردیم.

$$\sin(۳۶۰^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(۳۶۰^\circ-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۳۶۰^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(۳۶۰^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$$

درس ۳ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

سؤال	پاسخ
۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۲
۶	۴
۷	۴
۸	۴
۹	۳
۱۰	۳

ایستگاه المپیاد

۱) برای یک مثلث وقتی که $۰^\circ<\theta<۹۰^\circ$ بود ثابت کردیم که مساحت آن برابر $\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ است. حال برای حالتی‌که $۹۰\le\theta<۱۸۰$ است نیز این رابطه را ثابت کنید.

۲) وقتی طول اضلاع یک مثلث داده شود، آن مثلث به‌طور کامل مشخص شده است، یعنی دو مثلث مختلف وجود ندارد که هر سه ضلعشان یکی باشد. پس قابل تصوّر است که همهٔ اطلاعات مربوط به یک مثلث را بتوان با استفاده از طول سه ضلع آن به‌دست آورد. حال شما مساحت مثلثی با اضلاع به طول a، b و c را برحسب a و b و c به‌دست آورید.

(راهنمایی: می‌توانید ابتدا برای یک مثلث که اضلاع آن معین است مثلاً ۸، ۶ و ۳، مسأله را حل کنید و سپس به حالت کلی بپردازید.سعی کنید فرمول نهایی را به شکلی زیبا درآورید.)

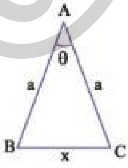
۳) فرمولی برای مساحت n ضلعی منتظمی که نقاط رأسی آن روی دایره‌ای به شعاع R قرار دارد بیابید.باتوجه به این‌که «وقتی n افزایش می‌یابد، n ضلعی هر چه بیشتر شبیه دایره می‌شود و فرمول فوق باید هر چه بیشتر به $\pi R^۲$ نزدیک شود»، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴) الف) مثلث متساوی‌الساقین مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید a و θ معلوم باشند طول ضلع سوم را به‌دست آورید.

(راهنمایی: می‌توانید ابتدا با استفاده از مساحت مثلث طول ارتفاع CH را بیابید، سپس AH و بعد BH را بیابید و ...)

ب) حال با استفاده از رابطهٔ فوق، فرمولی برای مساحت nضلعی منتظمی که طول ضلع‌های آن a است به‌دست آورید.

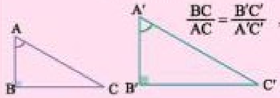
ج) در حالت خاص فرمولی برای مساحت ۸ ضلعی منتظم و ۱۲ ضلعی منتظمی که طول هر ضلع آن a است، به‌دست آورید.



خلاصهٔ فصل ۲

تشابه

- هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



- $\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$ ، $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ ، $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$

نسبت‌های مثلثاتی

$\sin A=\frac{BC}{AC}$ $\quad$ $\cos A=\frac{AB}{AC}$

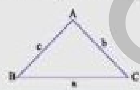
$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{BC}{AB}$ $\quad$ $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{AB}{BC}$

جدول مثلثات زوایای اصلی

مقدار	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan A	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot A	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

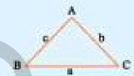
رابطهٔ مساحت مثلث با sin

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

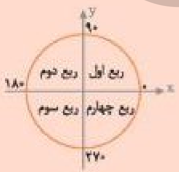


رابطهٔ sinها

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$



تعیین علامت sin و cos



نسبت‌های مثلثاتی	ربع اول $x>0, y>0$	ربع دوم $x<0, y>0$	ربع سوم $x<0, y<0$	ربع چهارم $x>0, y<0$
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

تانژانت و شیب خط

- شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه: شیب خط $=\tan\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ربع اول و چهارم

$\sin\theta=\cos(90-\theta)$ $\quad$ $\sin(360-\theta)=-\sin\theta$

$\cos\theta=\sin(90-\theta)$ $\quad$ $\cos(360-\theta)=\cos\theta$

$\tan\theta=\cot(90-\theta)$ $\quad$ $\tan(360-\theta)=-\tan\theta$

$\cot\theta=\tan(90-\theta)$ $\quad$ $\cot(360-\theta)=-\cot\theta$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ربع دوم و سوم

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\quad$ $\sin(180-\theta)=\sin\theta$ $\quad$ $\sin(180+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\quad$ $\cos(180-\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\cos(180+\theta)=-\cos\theta$

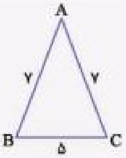
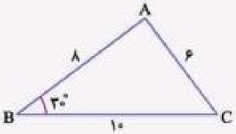
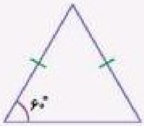
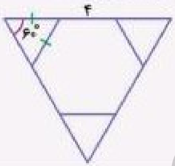
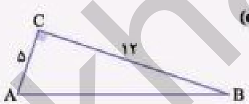
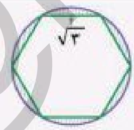
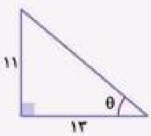
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\quad$ $\tan(180-\theta)=-\tan\theta$ $\quad$ $\tan(180+\theta)=\tan\theta$

$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\quad$ $\cot(180-\theta)=-\cot\theta$ $\quad$ $\cot(180+\theta)=\cot\theta$

برخی اتحادهای مثلثاتی

۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad$ ۲) $\tan\alpha.\cot\alpha=1$

۳) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad$ ۴) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱.	در مثلث ABC مقدار $\tan B + ۲\sin C$ کدام است؟  ۱) $\frac{۵۷\sqrt{۱۹}}{۷۰}$ ۲) $\frac{۶\sqrt{۱۹}}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳۶\sqrt{۱۹}}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۲\sqrt{۱۹}}{۳۵}$
۲.	در شکل زیر نسبت مساحت مثلث به محیط آن کدام است؟  ۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) ۱
۳.	در مثلث داده شده حاصل عبارت زیر کدام است؟  $\frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{محیط مثلث × اندازه یکی از اضلاع}} \times \tan ۳۰$ ۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}a$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}a$
۴.	مساحت کل شکل زیر کدام است؟ (راهنمایی: شکل داخلی یک شش ضلعی منتظم است و سه مثلث، یکسان می‌باشند)  ۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳۶\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲۸\sqrt{۳}$
۵.	در شکل داده شده حاصل عبارت زیر کدام است؟ $(\cos A) + (\cos B) = ?$  ۱) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۲) $\frac{۷}{\sqrt{۱۷}}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}$
۶.	مساحت قسمت هاشورخورده چند است؟ (قطر دایره = $۲\sqrt{۳}$)  ۱) $\frac{۱۱\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۶\pi - ۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲۰\sqrt{۳}}{\pi}$ ۴) $\frac{۲\pi + ۳\sqrt{۵}}{۴}$
۷.	در مثلث داده شده حاصل عبارت زیر کدام است؟ $\frac{۲۹۰(\sin\theta + \cos\theta)}{\sqrt{۲۹۰}}$  ۱) $۲۴\sqrt{۲۹۰}$ ۲) $\frac{۱۳\sqrt{۲۹۰}}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۱\sqrt{۲۹۰}}{۲۹۰}$ ۴) ۲۴

ردیف	تمرین دوره‌ای

۸. حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\tan ۲۲۵^\circ + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos ۲۲۵$

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۹. اگر $\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم باشد حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $(\alpha+\beta=۹۰)$ $\frac{\sin\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\cos\beta}$

۱) $-\frac{۱۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۴) $-\frac{۱۲}{۳۲}$

۱۰. حاصل عبارت مقابل با کدام گزینه برابر است؟ $\frac{\sin^۴\theta+\cos^۴\theta}{۲(۱-\sqrt{۲}\sin\theta\cos\theta)(۱+\sqrt{۲}\sin\theta\cos\theta)}$

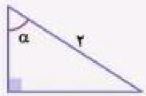
۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱. حاصل عبارت زیر کدام است؟ $(\sin ۴^\circ = ۰/۰۷, \cos ۴^\circ = ۰/۹۹۸)$

$(۰/۹۹۸\tan ۱۷۶ + ۰/۰۷\cot ۱۷۶) + ۰/۰۶۸$

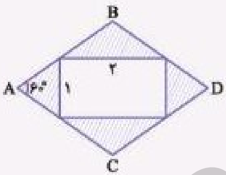
۱) -۱ ۲) $-۱/۰۶۸$ ۳) $۱/۱۳۶$ ۴) $۱/۰۶۸$

۱۲. اگر $\cos\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$، مساحت شکل داده شده کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$

۱۳. در شکل زیر مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟ (ABCD لوزی است.)



۱) $\frac{۱۲+۷\sqrt{۳}}{۶}$

۲) $\frac{۷\sqrt{۳}}{۶}$

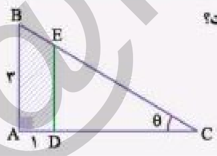
۳) $\frac{۷\sqrt{۳}+۳}{۶}$

۴) $\frac{۷\sqrt{۳}+۹}{۶}$

۱۴. نسبت مساحت متوازی الاضلاعی به اضلاع ۳ و ۵ به مساحت مستطیلی با همین اضلاع چند است، اگر مقدار sin زاویهٔ حاده (کوچک‌تر) برابر ۰/۸۳ باشد؟

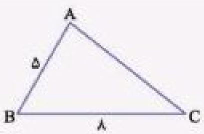
۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۸۳ ۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۰}$ ۴) $\frac{\sqrt{۸۳}}{۱۰}$

۱۵. در شکل مقابل اگر $\cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به قسمت هاشورخورده کدام است؟



۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{-\sqrt{۳}+۱۸}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱۸}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱۸}$ ۴) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱۸}$

۱۶. در شکل مقابل $\sin B = \frac{۳}{۵}$، طول AC کدام است؟



۱) $۷+\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) $۵+\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

ردیف	تمرین دوره‌ای

۱۷. $\frac{\sqrt{3}}{2}\tan 225$ کدام مقدار می‌باشد؟

۱) 1 ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۸. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\left(\frac{\sin 45}{\sin 15}\times\frac{\cos 89}{\cos 14}\times\frac{\sin 86}{\cos 27}\times\frac{\sin 76}{\cos 4}\times\frac{\cos 75}{\sin 1}\times\frac{\sin 63}{\cos 60}\right)^2+1$$

۱) $\sqrt{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) 3

۱۹. اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{4}$، $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$ کدام است؟

۱) $\frac{-7}{16}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{23}{16}$ ۴) 2

۲۰. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\left(\frac{\cos 30}{1+\tan^2\theta}+\frac{\sin 60}{1+\cot^2\theta}\right)+(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)(1+\tan^2\theta)$$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

۲۱. اگر $\tan\alpha=-\frac{1}{4}$ و α در ناحیهٔ چهارم باشد مقدار عبارت زیر کدام است؟ $(\alpha+\beta=90)$

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\times\frac{\sin^2\beta}{1-\tan\alpha}\times(1+\tan\alpha)=?$$

۱) $-\frac{16}{17}$ ۲) $\frac{16}{17}$ ۳) $\frac{17}{16}$ ۴) $-\frac{17}{16}$

۲۲. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\left(\frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta}\right)\times\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\times\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

۱) $\frac{\cos\theta\sin\theta}{1-\sin\theta}$ ۲) $\frac{1}{1-\sin\theta}$ ۳) $\cos\theta\sin\theta$ ۴) $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

۲۳. اگر α در ناحیهٔ دوم باشد و β در ناحیهٔ سوم حاصل عبارت زیر کدام است؟ $\left(\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\beta=\frac{-2}{5}\right)$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\sin\beta+\cos\alpha\right)\left(-\sqrt{21}\cot\beta\right)$$

۱) -2 ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) 2 ۴) $-\frac{6}{5}$

۲۴. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{\sin\theta(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)}{\cos^2\theta-(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $\frac{1}{\sin\theta}$ ۳) $-\sin\theta$ ۴) $\cos\theta\sin\theta$

۲۵. عبارت مقابل با کدام یک از عبارت‌های زیر، برابر است؟

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{-1}{1-\tan^4\theta}$$

۱) $\frac{-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$ ۲) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ ۳) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$ ۴) $\frac{-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

۲۶. حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\tan\theta+\cot\theta)$

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sin\theta\cos\theta$ ۳) 1 ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cos\theta$

ردیف	تمرین دوره‌ای

۲۷. اگر $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$ و α در ناحیهٔ سوم باشد حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$

۱) $\frac{337}{144}$　۲) $\frac{37}{44}$　۳) 7　۴) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

۲۸. اگر $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ و α در ناحیهٔ چهارم باشد حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{+\tan\alpha - \cot\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$$

۱) 1　۲) -1　۳) $-\frac{7}{25}$　۴) $\frac{7}{25}$

۲۹. مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{\sin(-45) - \cos(-45)}{\tan(45) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(-45)}$$

۱) صفر　۲) $2\sqrt{2}$　۳) $-2\sqrt{2}$　۴) 2

۳۰. کدام معادلهٔ خطی است که با محور x ها زاویه ۳۰ درجه می‌سازد و از نقطهٔ $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}$ عبور می‌کند؟

۱) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$　۲) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 6$　۳) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$　۴) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$

۳۱. کدام گزینه درست می‌باشد؟

۱) $\cos 27 < \cos 41$　۲) $\sin 43 < \sin 20$

۳) $\sin 23 > \cos 8$　۴) $\sin 35 < \cos 10$

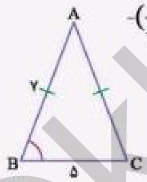
۳۲. کدام گزینه درست است؟

۱) $\sin(-20) = \sin 70$　۲) $\cos(-23) = -\sin 67$

۳) $\tan(-40) = \tan 40$　۴) $\cos(-33) = \sin 57$

۳۳. با توجه به شکل داده شده حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{19}}\sin B + \frac{5\sqrt{19}}{14}\tan B\right)$$



۱) $\frac{-30}{7}$

۲) $\frac{30}{7}$

۳) $\frac{30\sqrt{19}}{7}$

۴) $\frac{-30\sqrt{19}}{7}$

۳۴. در مثلث مقابل حاصل عبارت $3P - 2S$ کدام است؟ (S و P به ترتیب مساحت و محیط مثلث هستند).

۱) -9　۲) -18

۳) -27　۴) -30

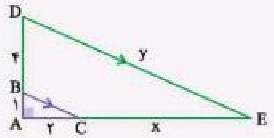
۳۵. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{(\cos 37)^3 - (\sin 37)^3}{\sin 37 - \cos 37}$$

۱) $-1+\sin 37\cos 37$　۲) $1-\sin 37\cos 37$　۳) $1+\cos 37\sin 37$　۴) $-1-\sin 37\cos 37$

ردیف	تمـــریـــن دوره‌ای
۳۶.	با توجه به شکل داده شده حاصل $x+y^2+\frac{1}{\sqrt{5}}xy$ کدام است؟
۳۷.	حاصل عبارت زیر کدام است؟
۳۸.	حاصل عبارت زیر کدام است؟
۳۹.	مقدار عبارت روبه‌رو کدام است؟
۴۰.	با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت مثلث آبی‌رنگ به ضلع مثلث سبزرنگ کدام است؟

۳۶. با توجه به شکل داده شده حاصل $x+y^2+\frac{1}{\sqrt{5}}xy$ کدام است؟



۱) ۱۶۵

۲) ۱۷۳

۳) $8+5\sqrt{5}$

۴) $100+5\sqrt{5}$

۳۷. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(\sin 45^\circ+\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\sin 3^\circ+\sin 4^\circ+\sin 5^\circ-\cos 89^\circ-\cos 85^\circ-\cos 88^\circ-\cos 86^\circ-\cos 87^\circ+\cos 45^\circ)^2$$

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۳۸. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{(\cos 120^\circ)^3-3(\cos 120^\circ)^2\sin 225^\circ+3\cos 120^\circ(\sin 225^\circ)^2-(\sin 225^\circ)^3}{(\cos^2 120^\circ+\sin^2 225^\circ-2\cos 120^\circ\sin 225^\circ)}$$

۱) صفر   ۲) $\cos 120^\circ-\sin 225^\circ$

۳) $(\cos 120^\circ-\sin 225^\circ)^2$ ۴) ۱

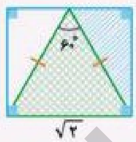
۳۹. مقدار عبارت روبه‌رو کدام است؟

$$\frac{\tan 33^\circ\times\sin 73^\circ\times\cos 15^\circ\times\cos 45^\circ}{\tan 33^\circ+\tan 15^\circ+\tan 73^\circ}$$

$(\sin 33^\circ\simeq 0/545,\cos 73^\circ\simeq 0/2924,\cos 15^\circ\simeq 0/9659)$

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) ۲   ۴) ۳

۴۰. با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت مثلث آبی‌رنگ به ضلع مثلث سبزرنگ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ۲) $\frac{\sqrt{8}}{10}$

۳) $\frac{\sqrt{7}}{9}$ ۴) $\frac{1}{4}$

فصل ۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی تمرین دوره‌ای

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۲	۱۱	۱	۲۱	۱	۳۱	۴
۲	۴	۱۲	۴	۲۲	۲	۳۲	۴
۳	۲	۱۳	۲	۲۳	۳	۳۳	۱
۴	۲	۱۴	۲	۲۴	۳	۳۴	۳
۵	۱	۱۵	۱	۲۵	۱	۳۵	۴
۶	۲	۱۶	۳	۲۶	۴	۳۶	۲
۷	۴	۱۷	۲	۲۷	۱	۳۷	۴
۸	۲	۱۸	۴	۲۸	۴	۳۸	۲
۹	۳	۱۹	۳	۲۹	۳	۳۹	۲
۱۰	۲	۲۰	۳	۳۰	۴	۴۰	۱

یادداشت:

فصل سوم
Rational powers and Algebraic terms

۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اول: توان و ریشه	
مفهوم توان و ریشه	۱۰۴
توان و ریشه سوم	۱۰۶
توان و ریشه چهارم	۱۰۶
توان و ریشه پنجم	۱۰۶
بخش سؤالات	۱۰۹

درس دوم: ریشه nام و توان‌های گویا	
ریشهٔ nام	۱۱۳
چند ویژگی مهم ریشه nام	۱۱۳
توان‌های گویا	۱۱۴
بخش سؤالات	۱۱۷

درس سوم: عبارت‌های جبری	
معرفی عبارت جبری	۱۲۰
عبارت‌های جبری	۱۲۱
چند اتحاد جدید	۱۲۲
تجزیه	۱۲۳
مضرب و شمارنده	۱۲۵
گویا کردن کسرها	۱۲۶
بخش سؤالات	۱۲۸

خلاصه فصل	۱۳۲
تمرین دوره‌ای	۱۳۳

ماجرا چیه؟!

آن‌گونه که ما اطّلاع داریم معرفی مفهوم توان کار بشر اوّلیه است. آن‌ها به‌جای آن که بنویسند $7\times7\times7\times7\times7$ می‌نوشتند 7^5 (این‌ها در اسناد تاریخی موجود است و در جای مطمئن نگه‌داری می‌شوند، نگهبانش هم آدم خوب و قابل اعتمادی است، از آن‌هایی نیست که خودش یک چیزی بنویسد و کاغذ را خاکمالی کند و بگوید کار بشر اولیه بوده. خلاصه این که این اطلاعات دقیق است.)، بعدها توان منفی ساخته شد. گفتند مثلاً 7^{-5} چه باشد؟ یکی گفت بهتر است 7^{-5} به‌گونه‌ای تعریف شود که $7^{-5}\times7^5$ با $1=7^0=7^{5-5}$ برابر باشد، پس باید $1=7^{-5}\times7^5$ می‌شد، یعنی باید $\frac{1}{7^5}=7^{-5}$ می‌شد. پیشنهاد او خوب به‌نظر آمد به اتّفاق آرا تصویب شد و دیگر قرارداد نوشته شد که $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

بعد گفتند اگر بخواهیم چیزی به شکل $7^{\frac{1}{2}}$ داشته باشیم منظور از آن چیست؟ در همان جلسه یکی گفت $7^{\frac{1}{2}}$ را باید به‌گونه‌ای تعریف کنیم که $(7^{\frac{1}{2}})^2=7^{\frac{1}{2}\times2}$ برابر 7 باشد.

باز هم پیشنهاد خوبی بود و نتیجهٔ آن این بود که $7^{\frac{1}{2}}$ همان $\sqrt{7}$ است زیرا $7=(\sqrt{7})^2$ و ... یکی گفت $7^{\frac{1}{3}}$ چه باشد؟ همان دیگری گفت هرچه باشد باید در رابطهٔ $7=7^1=7^{\frac{1}{3}\times3}=(7^{\frac{1}{3}})^3$ صدق کند. پس در واقع $7^{\frac{1}{3}}$ همان جواب معادلهٔ $x^3=7$ است که آن را با $\sqrt[3]{7}$ نشان می‌دهیم همین‌طور برای هر n طبیعی $7^{\frac{1}{n}}$ هم عددی است که توان n اُم آن برابر 7 باشد $(7=7^1=7^{\frac{1}{n}\times n}=(7^{\frac{1}{n}})^n)$.

این عدد را می‌توانیم به‌صورت $\sqrt[n]{7}$ نمایش دهیم. این مطلب هم به این صورت تصویب شد: $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$. بعد هم گفتند $a^{\frac{m}{n}}$ را همان $(a^{\frac{1}{n}})^m$ در نظر بگیریم و با این کار توان‌های گویای یک عدد مثبت تعریف شد.

البته دقت کنید که تعریف به‌گونه‌ای انجام شد که روابط زیر حفظ شوند:

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}\quad,\quad(a^r)^s=a^{rs}$$

سند تاریخی دیگری هست که می‌گوید بشر ثانویه همین‌طور عبارت‌های جبری را در هم ضرب می‌کرد و مواردی که جالب بودند را جدا می‌کرد و نام آن‌ها را اتحاد می‌گذاشت، نمونه‌های زیر هم زمانی دور به‌دست آمدند.

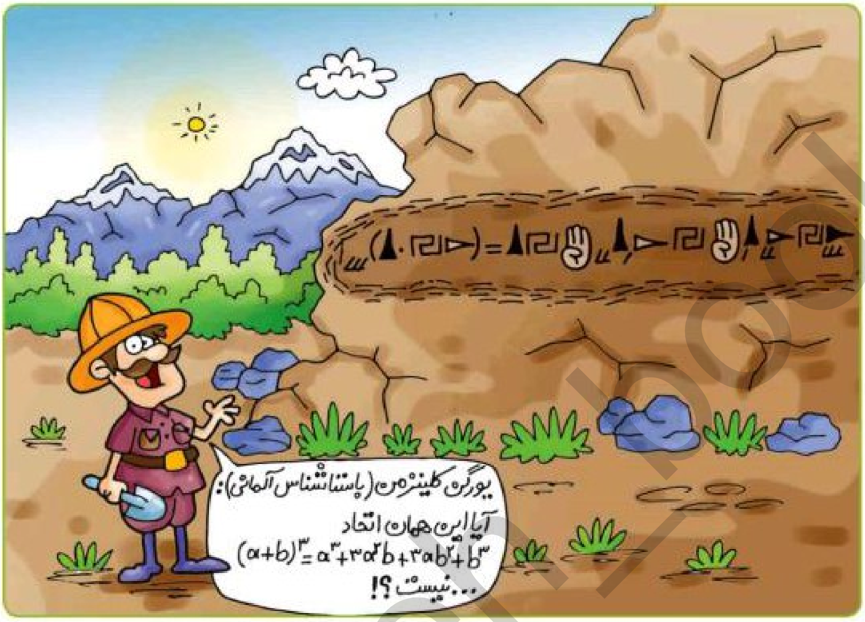
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

البته اسناد تاریخی وجود دارد که نشان می‌دهد این روابط خیلی قدیما کشف شده بود مثلاً سند زیر را ببینید؛ واقعاً چی به ذهن شما می‌رسد؟ من بگم، می‌گن می‌خواد برای گذشتگان خودش افتخار درست کنه.



این سند در کندوکاوهای باستانی در آبادان یافت شده است ظاهراً در آن زمان توان را در گوشهٔ جنوب غربی می‌نوشتند.
اسناد تاریخی که این‌گونه نشان می‌دهند.

◆ طول هر ضلع مکعبی که حجم آن ۱۰ واحد است، چقدر است؟

بدون استفاده از ماشین حساب سعی کنید این مقدار را با دقت یک رقم اعشار به‌دست آورید.

حال اگر حوصله داشته باشید که عدد مورد نظر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید منم تخفیف می‌دم و می‌گویم می‌توانید جمع و ضرب را با استفاده از ماشین حساب به‌دست بیاورید.

◆ ضرب‌های زیر را انجام دهید. چه الگویی به‌دست می‌آورید؟ آیا ایده‌ای به ذهنتان می‌رسد؟ نمی‌رسد؟

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=$

$(a-b)(a^4+a^3b^2+a^2b^3+ab^3+b^4)=$

$(a-b)(a^5+\dots+b^5)=$

$\vdots$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=$

$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=$

$(a+b)(a^5-\cdots-b^5)=$

$\vdots$

درس اول: توان و ریشه

مفهوم توان و ریشه

اگر a یک عدد حقیقی باشد، $a \times a$ را به‌صورت a^2 نمایش می‌دهیم و آن را توان دوم a می‌گوییم. اگر b و a اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $a \times a = b$ باشد، می‌گوییم b توان دوم a است و a ریشهٔ دوم b.

به‌عنوان مثال ۲۵ توان دوم ۵ است و ۵ هم ریشهٔ دوم ۲۵ است، و همچنین ۲۵ توان دوم (۵-) است و (۵-) هم ریشهٔ دوم ۲۵ است.

به‌طور مشابه هر عدد حقیقی، یک توان دوم دارد و هر عدد حقیقی مثبت، دو تا ریشهٔ دوم.

توان دوم عدد حقیقی a را به‌صورت a^2 نمایش دادیم، حال باید برای ریشهٔ دوم هم یک نماد بسازیم؛ اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، دو ریشهٔ دوم حقیقی دارد که اتّفاقاً قرینهٔ هم هستند، پس کافی است برای یکی از آن‌ها یک نماد بسازیم، دیگری قرینهٔ آن است. در کتاب‌های ریاضی از همان قدیم‌ها ریشهٔ دوم مثبت عدد b را به‌صورت $\sqrt[2]{b}$ یا $\sqrt{b}$ نمایش می‌دهند و طبعاً ریشهٔ دوم منفی آن هم $-\sqrt{b}$ می‌شود.

البته بدون معرفی این نماد هم کار ریاضیات پیش می‌رفت اما به‌سختی، مثلاً به‌جای عبارت $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ باید می‌گفتیم: «آن عدد مثبتی که توان دومش می‌شود ۲ به‌علاوهٔ آن عدد مثبتی که توان دومش می‌شود ۳» حالا شما فکر کنید که به‌جای عبارت زیر باید چه می‌گفتیم؟

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

پس این نماد واقعاً به کار می‌آید.

برای یک عدد معمولی، توان دوم آن عدد با یک ضرب ساده به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال با یک محاسبهٔ ساده می‌فهمیم که توان دوم عدد ۱۴ می‌شود ۱۹۶ و توان دوم ۵/۱۲ می‌شود ۲۶/۲۱۴۴.

امّا به‌دست آوردن ریشهٔ دوم اعداد به همان راحتی به‌دست آوردن توان دوم اعداد نیست، علاوه بر آن در خیلی از موارد ریشهٔ دوم اعداد به‌صورت دقیق به شکل یک عدد اعشاری قابل نمایش نیست و ما می‌توانیم مقدار آن‌ها را با یک تقریب محاسبه کنیم. البته در کاربردهای دنیای واقعی هم به محاسبهٔ دقیق آن نیازی نیست و بسته به جایی که محاسبات دربارهٔ آن انجام می‌شود به‌دست آوردن حاصل محاسبه با یک دقت محدود کافی است.

حال شاید بپرسید که آیا همان‌طور که روش کلی و مشخصی برای به‌دست آوردن توان دوم اعداد وجود دارد، روش کلّی برای به‌دست آوردن ریشهٔ دوم اعداد با هر دقت دلخواه وجود دارد یا نه؟ جواب این است که، بله، روش‌های زیادی برای این کار ساخته شده است، که البته بعضی از آن‌ها روش‌های بهتری هستند، به این معنی که برای انجام یک محاسبه با یک دقّت خاص، سرعت عملشان بیشتر است. حال ما در این‌جا یک روش ساده را معرفی می‌کنیم، البته شما در سال‌های بعد با روش‌های قوی‌تری برای انجام این محاسبه آشنا خواهید شد.

ابتدا به این نکته دقت کنید که اگر a و b اعداد مثبتی باشند، آن‌گاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

هر چند که این رابطه واضح به‌نظر می‌رسد، می‌توان به شکل زیر اثباتی هم برای آن آورد:

چون a و b اعدادی مثبت هستند و طرفین نامساوی را می‌توان در یک عدد مثبت ضرب کرد محاسبات زیر را می‌توان انجام داد:

با ضرب طرفین در a داریم: $a < b \Rightarrow a \times a < a \times b \Rightarrow a^2 < ab$

و با ضرب طرفین در b داریم: $a < b \Rightarrow a \times b < b \times b \Rightarrow ab < b^2$

و از دو نامساوی $a^2 < ab$ و $ab < b^2$ نتیجه می‌شود $a^2 < b^2$.

عکس این مطلب یعنی رابطهٔ $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ هم با برهان خلف به‌سادگی اثبات می‌شود:

اگر $a^2 < b^2$ ولی $a \not< b$ آن‌گاه با توجّه به این‌که $a \neq b$ معلوم می‌شود که $b < a$ و از این رابطه با توجّه به مطلبی که قبلاً ثابت کردیم نتیجه می‌شود $b^2 < a^2$ که با فرض ما تناقض دارد.

آس

۳

بیشتر بدانیم

یک روش ساده برای یافتن ریشه دوم اعداد با دقت دلخواه:

از بحث قبل با فرض مثبت بودن a، b و c می‌رسیم به این‌که:

$$a<b<c \Leftrightarrow a^2<b^2<c^2$$

این عبارت می‌گوید که هرگاه توان دوم یک عدد مثبت در بین توان دوم‌های دو عدد مثبت قرار گرفته باشد، آن‌گاه خود این عدد هم در بین آن دو عدد قرار دارد. با دقّت در همین نکته می‌توان روشی برای به‌دست آوردن ریشهٔ دوم اعداد ساخت.

با یک مثال موضوع را توضیح می‌دهیم:

می‌خواهیم $\sqrt{13}$ را با دقّت دو رقم اعشار محاسبه کنیم:

اساس این روش به این صورت است که قدم به قدم سعی می‌کنیم اطلاعاتمان را دربارهٔ محل حضور $\sqrt{13}$ افزایش دهیم؛ چند قدم از این مسیر را در طی مراحل زیر خواهید دید:

چون $3^2<13<4^2$ پس $3<\sqrt{13}<4$.

حال ۳/۵ یعنی $\frac{3+4}{2}$ را در نظر می‌گیریم و توان دوم آن را محاسبه می‌کنیم؛ اگر این مقدار بزرگتر از ۱۳ بود می‌توانیم بگوییم $3<\sqrt{13}<3.5$ (چرا؟) و اگر این مقدار کوچکتر از ۱۳ بود می‌توانیم بگوییم $3.5<\sqrt{13}<4$ (چرا؟).

به‌هرحال با این کار اطلاعات ما دربارهٔ محل حضور $\sqrt{13}$ (و یا به عبارت دیگر مقدار دقیق $\sqrt{13}$) افزایش می‌یابد. با محاسبه می‌بینیم $(3.5)^2=12.25<13$ پس طبق بحث فوق نتیجه می‌گیریم $3.5<\sqrt{13}<4$ و می‌بینیم که اطلاعات ما افزایش یافت و طول بازه‌ای که حدس می‌زنیم $\sqrt{13}$ در آن باشد، نصف شد.

ایدهٔ اصلی روش این است: ***«آن‌قدر قدمی مشابه قدم فوق بردار تا به دقتی که می‌خواهی برسی.»*** حال می‌توانیم $\frac{3.5+4}{2}$ را انتخاب کنیم، البته برای ساده‌تر شدن محاسبه، عددی با یک رقم اعشار مثلاً ۳/۷ را انتخاب می‌کنیم؛ با محاسبه می‌بینیم $(3.7)^2=13.69>13$ پس $3.5<\sqrt{13}<3.7$.

حال $\frac{3.5+3.7}{2}$ یعنی ۳/۶ را انتخاب می‌کنیم، با محاسبه می‌بینیم $(3.6)^2=12.96<13$ پس $3.6<\sqrt{13}<3.7$. تا این‌جای کار رقم اوّل اعشار $\sqrt{13}$ پیدا شد.

حال $\frac{3.6+3.7}{2}$ یعنی ۳/۶۵ را انتخاب می‌کنیم، داریم: $(3.65)^2=13.3225>13$ پس $3.6<\sqrt{13}<3.65$.

حال $\frac{3.6+3.65}{2}$ یعنی ۳/۶۲ را انتخاب می‌کنیم، داریم: $(3.62)^2=13.1044>13$ پس $3.6<\sqrt{13}<3.62$.

حال $\frac{3.6+3.62}{2}$ یعنی ۳/۶۱ را انتخاب می‌کنیم، داریم: $(3.61)^2=13.0321>13$ پس $3.60<\sqrt{13}<3.61$.

پس دو رقم اول اعشار $\sqrt{13}$ می‌شود ۶۰.

و به همین ترتیب می‌توان ارقام اعشار بعدی آن را نیز به‌دست آورد.

این روش قدم‌هایش آهسته است و تقریباً برای افزودن سه رقم بر دقّت محاسبه، ۱۰ گام لازم دارد، ولی روشی است که در خیلی جاها می‌توان از آن استفاده کرد.

توان و ریشه سوم

اگر a و b اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $a^3 = b$ باشد، می‌گوییم b توان سوم a است و می‌گوییم a ریشهٔ سوم b است.

به‌عنوان مثال ۶۴ توان سوم ۴ است و ۴ هم ریشهٔ سوم ۶۴ است و همچنین (۶۴-) توان سوم (۴-) است و (۴-) هم ریشهٔ سوم (۶۴-) است.

هر عددی فقط یک ریشهٔ سوم دارد و ریشهٔ سوم اعداد مثبت، مثبت است و ریشهٔ سوم اعداد منفی، منفی.

در کتاب‌های ریاضی از همان قدیم‌ها ریشهٔ سوم عدد b را به‌صورت $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهند.

البته همان‌طور که گفتیم این نمادها وقتی ساخته شدند که لازم بودند. دیالوگ زیر در یک فیلم هم اشاره به این واقعیت دارد:

A : میشه بگی اینا رو برا چی خریدی؟

B : میدونی هشت‌پا چرا هشت تا پا داره؟

A : نه، نمی‌دونم، چرا؟

B : چون هشت تا پا لازم داره.

نقل‌قول آزاد از یک فیلم که اسمش یادم نمیاد.

همان‌طور که دیدیم ریشهٔ دوم اعداد به‌راحتی به‌دست نمی‌آمد، به‌جز در مورد اعدادی همچون ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ و ... که آن‌ها را اعداد مربعی می‌نامند و کسرهایی که پس از ساده شدن، صورت و مخرجشان هر دو اعداد مربعی‌اند، فقط می‌توانستیم با یک سری محاسبات قدم به قدم رقم‌ها را به‌دست آوریم. وضعیت مشابهی هم در مورد ریشهٔ سوم اعداد وجود دارد و به جز در مورد اعدادی همچون ۱، ۸، ۲۷، ۶۴ و ... که اعداد مکعبی‌اند و کسرهایی که صورت و مخرجشان پس از ساده شدن هر دو اعداد مکعبی‌اند، فقط می‌توانیم با روندی قدم به قدم رقم‌ها را به‌دست آوریم و همیشه نمی‌توانیم مقدار دقیق را به‌صورت اعشاری بنویسیم. البته قابل پیش‌بینی است که روش به‌کار رفته برای یافتن ریشهٔ دوم، این‌جا هم می‌تواند در محاسبات کمک کند. از آن‌جا که $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$، کافی است به طریقی ریشهٔ سوم اعداد مثبت را بیابیم.

با روشی مشابه آن‌چه که قبلاً انجام دادیم می‌توانیم برای a و b ی مثبت رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

(اثبات کنید.)

و از این‌جا با فرض مثبت بودن a، b و c می‌رسیم به این‌که $a < b < c \Leftrightarrow a^3 < b^3 < c^3$ و این زمینهٔ استفاده از روش یادشده را فراهم می‌آورد.

توان و ریشهٔ چهارم

اگر a و b اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $a^4 = b$ باشد، می‌گوییم b توان چهارم a است و می‌گوییم a ریشهٔ چهارم b است. به‌عنوان مثال ۸۱ توان چهارم ۳ است و ۳ هم ریشهٔ چهارم ۸۱ است و همچنین ۸۱ توان چهارم (۳-) است و (۳-) هم ریشهٔ چهارم ۸۱ است و به‌طور مشابه هر عدد حقیقی، یک توان چهارم دارد و هر عدد حقیقی مثبت، دو تا ریشهٔ چهارم.

در کتاب‌های ریاضی از همان قدیم‌ها ریشهٔ چهارم مثبت عدد b $(b > 0)$ را به‌صورت $\sqrt[4]{b}$ نمایش می‌دهند و طبعاً ریشهٔ چهارم منفی آن هم می‌شود $-\sqrt[4]{b}$.

توان و ریشهٔ پنجم

اگر a و b اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $a^5 = b$ باشد، می‌گوییم b توان پنجم a است و می‌گوییم a ریشهٔ پنجم b است. به‌عنوان مثال ۳۲ توان پنجم ۲ است و ۲ هم ریشهٔ پنجم ۳۲ است و همچنین (۳۲-) توان پنجم (۲-) است و (۲-) هم ریشهٔ پنجم (۳۲-) است.

می‌بینیم که هر عددی فقط یک ریشهٔ پنجم دارد و ریشهٔ پنجم اعداد منفی، منفی است و ریشهٔ پنجم اعداد مثبت، مثبت.

بیشتر بدانیم

حجم مکعبی ۲ واحد است. طول هر ضلع آن چقدر است؟ جواب را با تقریب دو رقم اعشار به‌دست آورید.

اگر طول هر ضلع مکعب x باشد آن‌گاه حجم مکعب می‌شود $x^۳$. پس ما باید به‌دنبال جواب معادلهٔ $x^۳ = ۲$ باشیم، که $x = \sqrt[۳]{۲}$ می‌شود. حال با استفاده از روش نقطهٔ میانی آن را با دقّت دو رقم اعشار محاسبه می‌کنیم:

$$۱ < \sqrt[۳]{۲} < ۲ \Rightarrow ۱^۳ < ۲ < ۲^۳$$

$۱/۵ = \frac{۱+۲}{۲}$ را انتخاب می‌کنیم، داریم $(۱/۵)^۳ = ۳/۳۷۵ > ۲$ پس $۱ < \sqrt[۳]{۲} < ۱/۵$.

برای محاسبات ساده‌تر ۱/۲ را انتخاب می‌کنیم، داریم $(۱/۲)^۳ = ۱/۷۲۸ < ۲$ پس $۱/۲ < \sqrt[۳]{۲} < ۱/۵$.

برای محاسبات ساده‌تر ۱/۴ را انتخاب می‌کنیم، داریم $(۱/۴)^۳ = ۲/۷۴۴ > ۲$ پس $۱/۲ < \sqrt[۳]{۲} < ۱/۴$.

برای محاسبات ساده‌تر ۱/۳ را انتخاب می‌کنیم، داریم $(۱/۳)^۳ = ۲/۱۹۷ > ۲$ پس $۱/۲ < \sqrt[۳]{۲} < ۱/۳$.

تا این‌جای محاسبات $\sqrt[۳]{۲}$ با دقّت یک رقم اعشار به‌دست آمد، اگر حوصله داشتید رقم بعدی را بیابید.

نکته مهم این است که بالاخره این روش خیلی هم بد نیست، البته در برنامه‌نویسی ماشین‌حساب‌ها و کامپیوترها برای محاسبهٔ ریشه‌های اعداد از روش‌های بهتری استفاده می‌شود که در دو، سه محاسبه جواب را با دقّت خوبی ارائه می‌کند.

با این روش‌ها در سال‌های بعد آشنا خواهید شد.

مثال‌های آموزشی

۱) محاسبه‌کنید.

$$\sqrt{۰/۱۶} = \sqrt{۱۶ \times \frac{۱}{۱۰۰}} = \sqrt{۴^۲ \times \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۲} = \frac{۴}{۱۰}$$

$$\sqrt{۰/۰۴} = \sqrt{۴ \times \frac{۱}{۱۰۰}} = \sqrt{۲^۲ \times \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۲} = \frac{۲}{۱۰}$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۲۷} = \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۱۰۰۰}} = \sqrt[۳]{۳^۳ \times \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۳} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$\sqrt[۳]{-۸} = \sqrt[۳]{(-۲)^۳} = -۲$$

$$\sqrt[۴]{\frac{۸۱}{۱۶}} = \sqrt[۴]{\frac{۳^۴}{۲^۴}} = \sqrt[۴]{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۴} = \frac{۳}{۲}$$

$$\sqrt[۴]{۲۵۶} = \sqrt[۴]{۴^۴} = ۴$$

$$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۳۲} = \sqrt[۵]{-\frac{۳۲}{۱۰۰۰۰۰}} = \sqrt[۵]{\frac{(-۲)^۵}{۱۰^۵}} = \sqrt[۵]{\left(\frac{-۲}{۱۰}\right)^۵} = \frac{-۲}{۱۰}$$

$$\sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}} = \sqrt[۵]{\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۵} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\sqrt[۵]{۳^{۱۰} \times ۲^{۲۵}} = \sqrt[۵]{(۳^۲)^۵ \times (۲^۵)^۵} = \sqrt[۵]{(۳^۲ \times ۲^۵)^۵} = ۳^۲ \times ۲^۵$$

$$\sqrt[۵]{۲۴۳} = \sqrt[۵]{۳^۵} = ۳$$

۲) مشخص کنید که هر کدام از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند.

الف) $\sqrt{۶۲}$ ب) $\sqrt{۷۴۱}$ ج) $\sqrt[۳]{-۶۲}$ د) $\sqrt[۳]{۷۴۱}$ هـ) $\sqrt[۴]{۶۲}$ و) $\sqrt[۴]{۷۴۱}$ ز) $\sqrt[۵]{۶۲}$ ح) $\sqrt[۵]{-۷۴۱}$

پاسخ با آزمایش و خطا، سعی می‌کنیم دو عدد صحیح بیابیم که به ما در یافتن جواب کمک کند. روش خاصی برای پیدا کردن آن‌ها به‌کار نمی‌بریم و با شروع از یک حدس اوّلیّه و سپس افزودن به آن یا کاستن از آن بالاخره اعداد صحیح مورد نظر را می‌یابیم.

الف) $۷^۲ < ۶۲ < ۸^۲ \Rightarrow ۷ < \sqrt{۶۲} < ۸$

ب) $۲۷^۲ < ۷۴۱ < ۲۸^۲ \Rightarrow ۲۷ < \sqrt{۷۴۱} < ۲۸$

ج) $۳^۳ < ۶۲ < ۴^۳ \Rightarrow (-۴)^۳ < -۶۲ < (-۳)^۳ \Rightarrow -۴ < \sqrt[۳]{-۶۲} < -۳$

د) $۹^۳ < ۷۴۱ < ۱۰^۳ \Rightarrow ۹ < \sqrt[۳]{۷۴۱} < ۱۰$

هـ) $۲^۴ < ۶۲ < ۳^۴ \Rightarrow ۲ < \sqrt[۴]{۶۲} < ۳$

و) $۵^۴ < ۷۴۱ < ۶^۴ \Rightarrow ۵ < \sqrt[۴]{۷۴۱} < ۶$

ز) $۲^۵ < ۶۲ < ۳^۵ \Rightarrow ۲ < \sqrt[۵]{۶۲} < ۳$

ح) $... < ۷۴۱ < ۴^۵ \Rightarrow (-۴)^۵ < -۷۴۱ < (-۳)^۵ \Rightarrow -۴ < \sqrt[۵]{-۷۴۱} < -۳$

۳) فرض کنید a عددی مثبت باشد:

الف) به‌ازای کدام مقادیر a داریم $\sqrt{a}=a$؟

ب) به‌ازای کدام مقادیر a داریم $\sqrt{a}<a$؟

ج) به‌ازای کدام مقادیر a داریم $a<\sqrt{a}$؟

د) اگر مقادیر $\sqrt{a}$، $\sqrt{\sqrt{a}}$، $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$ و ... را محاسبه کنیم، این دنباله کم‌کم به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پاسخ الف) دیده می‌شود اگر $a=0$، آن‌گاه $a=\sqrt{a}$، حال اگر $a\neq 0$ با تقسیم طرفین تساوی $a=\sqrt{a}$ بر $\sqrt{a}$ می‌رسیم به $\sqrt{a}=1$ و در نتیجه $a=1$. پس $a=\sqrt{a}$ دو جواب دارد: $a=0$ و $a=1$.

ب) $a\neq 0$ و a مثبت است پس می‌توانیم طرفین نامساوی $\sqrt{a}<a$ را بر $\sqrt{a}$ تقسیم کنیم و در نتیجه می‌رسیم به $1<\sqrt{a}$ و در نتیجه $1<a$.

با مثال هم تا حدودی می‌شود این را حدس زد مثلاً می‌بینیم که $\sqrt{4}<4$ و $\frac{1}{4}<\sqrt{\frac{1}{4}}$.

ج) $a\neq 0$ و a مثبت است، پس می‌توانیم طرفین نامساوی $a<\sqrt{a}$ را بر $\sqrt{a}$ تقسیم کنیم و در نتیجه می‌رسیم به $\sqrt{a}<1$ و در نتیجه $a<1$.

د) اگر $a=1$ باشد که دنباله می‌شود ۱ و ۱ و ۱ و ...

اگر $a>1$ باشد، مثلاً $a=2^{16}$، دنباله می‌شود 2^8، 2^4، 2^2، 2، $\sqrt{2}$، ... ظاهراً دیده می‌شود که دنباله به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

اگر $a<1$ باشد، مثلاً $a=2^{-16}$، دنباله می‌شود 2^{-8}، 2^{-4}، 2^{-2}، 2^{-1}، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و ... ظاهراً دیده می‌شود که دنباله به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

اگر $a=0$ باشد هم دنباله می‌شود ۰، ۰، ۰، ...

حدس می‌زنیم که با شرط $a>0$ این دنباله به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

۴) فرض کنید a عددی حقیقی باشد:

الف) به‌ازای کدام مقادیر a داریم $a=\sqrt[3]{a}$؟

ب) به‌ازای کدام مقادیر a داریم $|\sqrt[3]{a}|<|a|$؟

ج) به‌ازای کدام مقادیر a داریم $|a|<|\sqrt[3]{a}|$؟

پاسخ الف) دیده می‌شود اگر $a=0$، آن‌گاه $a=\sqrt[3]{a}$، حال اگر $a\neq 0$، آن‌گاه می‌نویسیم:

$$a=\sqrt[3]{a}\Rightarrow(\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a}$$

حال با تقسیم طرفین بر $\sqrt[3]{a}$ خواهیم داشت:

$$(\sqrt[3]{a})^2=1\Rightarrow\sqrt[3]{a}=-1 \text{ یا } \sqrt[3]{a}=1\Rightarrow a=-1 \text{ یا } a=1$$

ب) $a\neq 0$، پس می‌توانیم طرفین نامساوی را بر $|\sqrt[3]{a}|$ تقسیم کنیم و در نتیجه می‌رسیم به $1<|\sqrt[3]{a}|^2$ و با توجه به این‌که اگر توان دوم یک عدد مثبت بزرگ‌تر از ۱ باشد، خود آن عدد بزرگ‌تر از ۱ است می‌رسیم به $1<|\sqrt[3]{a}|$ و چون $|\sqrt[3]{a}|=\sqrt[3]{|a|}$ با رساندن طرفین به توان ۳ نتیجه می‌شود $1<|a|$.

ج) با روشی مشابه بند ب می‌رسیم به $|a|<1$.

نکته: در حالت کلی تا حدودی معلوم است که به‌ازای هر n طبیعی که $n\geq 2$ رابطه‌های زیر برقرار خواهند بود.

$$1<|a|\Leftrightarrow|\sqrt[n]{a}|<|a|$$

$$|a|<1\Leftrightarrow|a|<|\sqrt[n]{a}|$$

کـــافه ســؤال

۱ مشخص کنید که هر کدام از اعداد زیر بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟

الف) $\sqrt[2]{1001}$ ب) $\sqrt[3]{1001}$ ج) $\sqrt[4]{1001}$ د) $\sqrt[5]{1001}$

۲ چند عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری که:

الف) $3 < \sqrt{n} < 4$ ب) $3 < \sqrt[3]{n} < 4$

ج) $3 < \sqrt[4]{n} < 4$ د) $3 < \sqrt[5]{n} < 4$

۳ حاصل عبارات مقابل را محاسبه کنید. $\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} + \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4}$

۴ مقدار هر کدام از اعداد زیر را تا یک رقم اعشار محاسبه کنید.

الف) $\sqrt{0/1}$ ب) $\sqrt[3]{12}$ ج) $\sqrt[5]{2}$

۵ حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sqrt{25} - 3\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{(-8000)}$ ب) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{320}$ ج) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$

۶ کوچک‌ترین عدد طبیعی n که $\sqrt{120n}$ عددی طبیعی باشد، کدام است؟

۷ کوچک‌ترین عدد طبیعی n که $\sqrt[4]{162n}$ عددی طبیعی باشد، کدام است؟

۸ عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\sqrt[3]{2^7 \times (3\times 6)^5 \times 12}$ ب) $\sqrt[4]{2^7 \times (3\times 6)^5 \times 12}$

۹ چند عدد طبیعی n وجود دارد که مقدار $\sqrt{n}$ تا یک رقم اعشار ۸/۱ باشد؟ آن‌ها را مشخص کنید.

۱۰ اگر a عددی مثبت باشد، نشان دهید:

الف) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ ب) $\sqrt[5]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[3]{a}$

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- ریشهٔ چهارم چند عدد با خودش برابر است؟

۱) ۰　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) ۳

۲- ریشهٔ پنجم چند عدد با خودش برابر است؟

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۳- چند عدد فقط یک ریشهٔ چهارم دارد؟

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۴- n عددی طبیعی است، اگر مقدار تقریبی $\sqrt{n}$ تا یک رقم اعشار، ۷/۲ باشد، آن‌گاه در مورد n چه می‌توان گفت؟

۱) $n = 52$　　۲) $n = 51$

۳) $n = 52$ یا $n = 51$　　۴) $n = 53$ یا $n = 52$

۵- $\sqrt[3]{173}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

۱) ۴ و ۳　　۲) ۵ و ۴　　۳) ۶ و ۵　　۴) ۷ و ۶

۶- $\sqrt[5]{1730}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

۱) ۴ و ۳　　۲) ۵ و ۴　　۳) ۶ و ۵　　۴) ۷ و ۶

۷- چند عدد طبیعی وجود دارد که دو رقم اول ریشهٔ سوم آن‌ها ۳/۰ است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۸- حاصل عبارت $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{0/027} + \sqrt[5]{0/00032}$ کدام است؟

۱) ۱/۰۹　　۲) ۲/۰۹　　۳) ۱/۹　　۴) ۱/۷

۹- حاصل عبارت $8\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2000}$ کدام است؟

۱) $30\sqrt[3]{2}$　　۲) $17\sqrt[3]{2}$

۳) $18\sqrt[3]{2}$　　۴) $8+10\sqrt[3]{2}$

۱۰- مقدار $\sqrt[4]{a}$ تا یک رقم اعشار ۲/۰ است، a کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۸　　۲) ۲۱

۳) ۱۷　　۴) گزینه‌های ۱ و ۳

درس ۱ ◀ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

الف) $31^2 < 1001 < 32^2 \Rightarrow 31 < \sqrt{1001} < 32$

ب) $10^3 < 1001 < 11^3 \Rightarrow 10 < \sqrt[3]{1001} < 11$

ج) $5^4 < 1001 < 6^4 \Rightarrow 5 < \sqrt[4]{1001} < 6$

د) $3^5 < 1001 < 4^5 \Rightarrow 3 < \sqrt[5]{1001} < 4$

۲

الف) $3 < \sqrt{n} < 4 \xrightarrow{\text{به‌توان ۲ می‌رسانیم}} 9 < n < 16 \Rightarrow n = 10, 11, 12, 13, 14, 15$

پس ۶ عدد طبیعی وجود دارد که در نامساوی فوق صدق می‌کند.

ب) $3 < \sqrt[3]{n} < 4 \xrightarrow{\text{به‌توان ۳ می‌رسانیم}} 27 < n < 64 \Rightarrow n = 28, 29, \cdots, 63$

پس ۳۶ عدد طبیعی وجود دارد که در نامساوی فوق صدق می‌کند.

ج) $3 < \sqrt[4]{n} < 4 \xrightarrow{\text{به‌توان ۴ می‌رسانیم}} 81 < n < 256 \Rightarrow n = 82, 83, \cdots, 255$

پس ۱۷۴ عدد طبیعی وجود دارد که در نامساوی فوق صدق می‌کند.

د) $3 < \sqrt[5]{n} < 4 \xrightarrow{\text{به‌توان ۵ می‌رسانیم}} 243 < n < 1024 \Rightarrow n = 244, 245, \cdots, 1023$

پس ۷۸۰ عدد طبیعی وجود دارد که در نامساوی فوق صدق می‌کند.

۳

$$\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3} + \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} = (1-\sqrt{3}) + \Big|\underbrace{\underbrace{(1-\sqrt{3})}_{\text{منفی}}}_{\sqrt{3}-1}\Big| = \cancel{1} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{1} = 0$$

۴

سعی می‌کنیم جواب‌ها را با آزمایش و خطا به‌دست آوریم.

الف) باتوجه به این‌که $(0.3)^2 = 0.09 < 0.1 < 0.16 = (0.4)^2$ معلوم می‌شود که $0.3 < \sqrt{0.1} < 0.4$ ، $\sqrt{0.1} = 0.3$

ب) می‌بینیم که $2^3 < 12 < (2.5)^3 = 15.625$ می‌توانیم بگوییم $\sqrt[3]{12}$ بادقت یک رقم اعشار یکی از اعداد ۲، ۲/۱، ۲/۲، ۲/۳ یا ۲/۴ خواهد بود. با کمک ماشین‌حساب می‌بینیم که $(2.4)^3 = 13.824$ ، $(2.3)^3 = 12.167$ ، $(2.2)^3 = 10.648$ ، $(2.1)^3 = 9.261$ ، $2^3 = 8$. از این‌جا معلوم است که $2.2 < \sqrt[3]{12} < 2.3$ و رقم اول اعشار آن ۲ است یعنی: $\sqrt[3]{12} = 2.2$.

ج) باتوجه به این‌که $1^5 < 2 < (1.5)^5$ است و داریم:

$(1.1)^5 = 1.6$ ، $(1.2)^5 = 2.5$ ، $(1.3)^5 = 3.71$ ، $\cdots$

معلوم می‌شود که $\sqrt[5]{2} = 1.1$.

۵

الف) $\sqrt{25} - 3\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{(-8000)} = \sqrt{5^2} - 3\sqrt[3]{5^3} + \sqrt[3]{(-2)^3 \times 10^3} = 5 - 15 - 20 = -30$

ب) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{5 \times 2^3} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^6 \times 5} = 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$

ج) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5 \times 5^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

۶

$120n = 2^3 \times 3 \times 5 \times n$

برای این‌که یک عدد مربع کامل باشد باید توان تک‌تک عامل‌های آن زوج باشد. چون دنبال کوچک‌ترین n هستیم پس n باید $2 \times 3 \times 5$ باشد در غیر این‌صورت n کوچک‌ترین مقدار نخواهد بود.

$n = 2 \times 3 \times 5 = 30 \Rightarrow \sqrt{120n} = \sqrt{120 \times}$ …

۷

$162n = 3^4 \times 2 \times n$

برای این‌که یک عدد مکعب کامل باشد باید توان تک‌تک عامل‌های آن مضربی صحیح از ۳ باشد، از طرفی چون دنبال کوچک‌ترین n هستیم، پس n باید $3^2 \times 2^2$ باشد در غیر این‌صورت n کوچک‌ترین مقدار نخواهد بود.

$n = 3^2 \times 2^2 = 36 \Rightarrow \sqrt[3]{162n} = \sqrt[3]{162 \times 36} = 18$

۸

الف) $\sqrt[3]{2^7 \times (3\times 6)^5 \times 12} = \sqrt[3]{2^7 \times 3^5 \times 2^5 \times 3^5 \times 3 \times 2^2} = \sqrt[3]{2^{14} \times 3^{11}} = 16\sqrt[3]{4} \times 27\sqrt[3]{9} = 16 \times 27 \times \sqrt[3]{36}$

ب) $\sqrt[4]{2^7 \times (3\times 6)^5 \times 12} = \sqrt[4]{2^7 \times 3^5 \times 2^5 \times 3^5 \times 3 \times 2^2} = \sqrt[4]{2^{14} \times 3^{11}} = \sqrt[4]{2^{12} \times 2^2 \times 3^8 \times 3^3} = 8 \times 9\sqrt[4]{4 \times 27} = 72\sqrt[4]{108}$

۹

یعنی ما اعداد طبیعی n را می‌خواهیم که $\sqrt{n}$ بین ۸/۱ و ۸/۲ باشد.

$8/1 < \sqrt{n} < 8/2 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 65/61 < n < 67/24 \xrightarrow{\text{طبیعی } n} n = 66 \text{ یا } n = 67$

۱۰

الف) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{aa^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

ب) $\sqrt[5]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[5]{a\sqrt{aa^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[5]{a\sqrt{a^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt[5]{aa^{\frac{4}{6}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{10}{6}}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سؤال	پاسخ
۱	۳
۲	۴
۳	۲
۴	۴
۵	۳
۶	۲
۷	۲
۸	۳
۹	۱
۱۰	۴

یادداشت

درس دوم: ریشهٔ nام و توان‌های گویا

ریشهٔ n ام

اگر a و b اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $a^n=b$، می‌گوییم b توان nام a است و می‌گوییم a ریشهٔ nام b است و می‌توانیم با توجه به مباحث گذشته بگوییم که اگر n عددی فرد باشد، هر عدد حقیقی a یک ریشهٔ nام دارد که با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم و اگر n عددی زوج باشد، فقط اعداد نامنفی ریشهٔ nام دارند و اعداد مثبت دقیقاً دو ریشهٔ nام دارند که ریشهٔ nام مثبت عدد b را با $\sqrt[n]{b}$ نمایش می‌دهیم.

چند ویژگی مهم ریشهٔ n ام

قبلاً دیده‌ایم که:

برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

و برای هر دو عدد a و b داریم: $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$

پرسشی به ذهن می‌رسد: آیا با این شرط که $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{a}$ تعریف شده باشند و n عددی طبیعی باشد، رابطهٔ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ برقرار است؟

به‌نظر می‌رسد که جواب مثبت باشد.

برای این‌که بحثمان سرراست باشد فرض می‌کنیم a و b مثبت باشند و n عددی طبیعی، می‌خواهیم ثابت کنیم: $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

برای هر کدام از این‌ها یک نام انتخاب می‌کنیم:

$p=\sqrt[n]{a}\ ,\ q=\sqrt[n]{b}\ ,\ r=\sqrt[n]{ab}$

حال باید ثابت کنیم $pq=r$.

از رابطهٔ $p=\sqrt[n]{a}$ نتیجه می‌شود $p^n=a$ و از رابطهٔ $q=\sqrt[n]{b}$ نتیجه می‌شود $q^n=b$ و از رابطهٔ $r=\sqrt[n]{ab}$ نتیجه می‌شود $r^n=ab$.

$r^n=ab\Rightarrow r^n=p^nq^n\Rightarrow r^n=(pq)^n$

و از آن‌جا که اگر توان nاُم دو عدد مثبت با هم برابر باشد، آن‌گاه آن دو برابرند (چرا؟)، نتیجه می‌شود $r=pq$ که همان نتیجهٔ موردنظر است.

نکته: قبلاً دیده‌ایم که $\sqrt{(-4)^2}=4$ و $\sqrt{4^2}=4$ و $\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$ و $\sqrt[3]{4^3}=4$.

با توجه به این‌ها متوجه می‌شویم که رابطهٔ $\sqrt[n]{a^n}=a$ همیشه برقرار نیست. لذا داریم:

اگر n عددی زوج باشد آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

اگر n عددی فرد باشد آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n}=a$.

قبلاً دیده‌ایم که $(\sqrt{5})^2=5$ و $(\sqrt[3]{5})^3=5$ و $(\sqrt[4]{5})^4=5$ و ... . البته طبق تعریف ریشه انتظار این برابری‌ها را هم داشتیم و در حالت کلی می‌توانیم بگوییم $(\sqrt[n]{a})^n=a$. البته واضح است که اگر n زوج باشد، باید a مثبت باشد تا $\sqrt[n]{a}$ معنی داشته باشد. البته اثبات آن هم ساده است، اگر فرض کنیم $p=\sqrt[n]{a}$ طبق تعریف باید داشته باشیم $p^n=a$ و یا به‌عبارت دیگر $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

سؤال

دیدیم که رابطهٔ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ برقرار است، آیا به‌طور مشابه رابطهٔ $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ هم برقرار است؟ (n عددی طبیعی است و $2\le n$)

پاسخ با یک مثال نقض این ادعا را رد می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $a=1$ و $b=1$ اگر رابطهٔ $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ درست باشد، باید داشته باشیم:

$\sqrt[n]{1+1}=\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{1}\Rightarrow\sqrt[n]{2}=1+1=2$

اگر طرفین تساوی $\sqrt[n]{2}=2$ را به توان n برسانیم می‌رسیم به $2^n=2$ و در نتیجه $n=1$. پس به‌ازای $n\ge2$ رابطهٔ فوق برقرار نیست.

گاج

۳

نکته: ۱) اگر $0 < a < 1$ و $n < m$، آن‌گاه $a^m < a^n$ می‌باشد (چرا؟) و اگر $a > 1$ و $n < m$، آن‌گاه $a^n < a^m$ می‌باشد (چرا؟)

۲) اگر a و b اعدادی حقیقی باشند و $a < b$ و n عددی فرد باشد، آن‌گاه $a^n < b^n$ و اگر a و b اعدادی حقیقی باشند و $|a| < |b|$ و n عددی زوج باشد آن‌گاه $|a|^n < |b|^n$.

سؤال

اگر a عددی مثبت باشد، آیا رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ صحیح است؟

پاسخ با توجه به این که به‌ازای هر a و b ی مثبت رابطهٔ $\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{b}$ صحیح است، پس داریم $\sqrt[k]{abc\cdots} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}\sqrt[k]{c}\cdots$ و اگر فرض کنیم $a = b = c = \cdots$ نتیجه می‌شود $\sqrt[k]{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ مرتبه}}} = \underbrace{\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{a}\cdots\sqrt[k]{a}}_{m \text{ مرتبه}}$ و در نتیجه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

توان‌های گویا

در بحث معرفی ریشهٔ nاُم یک اتفاق جالب رخ داد، دیدیم که $a = (\sqrt[n]{a})^n$. به یاد داریم که اگر s و r اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه $(a^r)^s = a^{rs}$.

حال از خودمان می‌پرسیم با توجه به ویژگی فوق اگر بخواهیم $\sqrt[n]{a}$ را با a^x برابر بدانیم، x چیست؟

خُب باید $(a^x)^n = a$ و اگر فرض کنیم که $(a^x)^n$ برابر a^{nx} باشد، باید داشته باشیم $a^{nx} = a^1$ یعنی $nx = 1$ و این یعنی $x = \frac{1}{n}$، پس اگر بخواهیم $\sqrt[n]{a}$ را با توانی از a نشان دهیم، احتمالاً تنها گزینه $a^{\frac{1}{n}}$ است.

خُب، حالا مشکلی نیست، این فرض را انجام می‌دهیم یعنی فرض می‌کنیم $a^{\frac{1}{n}}$ همان $\sqrt[n]{a}$ باشد، سپس به بحث و بررسی می‌پردازیم تا ببینیم که آیا این تعریف جدید ارزش مطرح شدن را دارد یا نه؟ البته حالا که $a^{\frac{1}{n}}$ را مطرح کردیم، بهتر است به‌ازای هر عدد گویا، $a^{\frac{m}{n}}$ را هم مشخص کنیم و اگر توانستیم به‌ازای هر عدد حقیقی x، مقداری برای a^x مشخص کنیم. البته این تعریف‌ها باید به‌گونه‌ای باشد که با مباحث قبل هماهنگ باشد، مثلاً ویژگی‌های معروف زیر باید برقرار باشند:

$a^r.a^s = a^{r+s}$ ، $(a^r)^s = a^{rs}$ ، $(ab)^r = a^r b^r$

با این حساب $a^{\frac{m}{n}}$ باید برابر باشد با $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ یا به‌عبارت دیگر $\sqrt[n]{a^m}$. خُب، همین را مبنای تعریف قرار می‌دهیم:

برای دو عدد طبیعی m و n، توانِ $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

یک نفر می‌پرسد، اگر a منفی باشد هم این تعریف را انجام می‌دهیم؟ با قدری دقت درمی‌یابیم که اگر a منفی باشد، باید فکری کرد، زیرا با این تعریف $(-8)^{\frac{1}{3}}$ می‌شود $\sqrt[3]{-8}$ یعنی -2 ولی $(-8)^{\frac{2}{6}}$ می‌شود $\sqrt[6]{(-8)^2}$ یعنی 2 و این مشکل‌ساز شد، زیرا باید $(-8)^{\frac{1}{3}}$ با $(-8)^{\frac{2}{6}}$ یکی می‌شد، متفاوت بودن این‌ها مثل این است که حاصل‌جمع $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ با حاصل‌جمع $\frac{2}{8} + \frac{4}{6}$ متفاوت باشد. پس اصولاً بی‌خیال اعداد منفی می‌شویم و می‌گوییم $a^{\frac{m}{n}}$ فقط وقتی معنی دارد که a مثبت باشد. حال ببینیم که آیا برای اعداد مثبت با مشکل مشابهی مواجه نمی‌شویم؟

چیزی که در بحث فوق مطرح شد این بود که $a^{\frac{m}{n}}$ باید به‌گونه‌ای تعریف شود که با $a^{\frac{km}{kn}}$ یکی باشد. پس می‌خواهیم ثابت کنیم $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$.

یعنی ثابت می‌کنیم $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$. فرض می‌کنیم $p = \sqrt[n]{a^m}$ لذا داریم:

$$p = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow p^n = a^m \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } k \text{ می‌رسانیم}} p^{kn} = a^{km} \xrightarrow[\text{تعریف توان}]{(p>0)} p = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

و در نتیجه:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

حال با روش‌هایی مشابه می‌توان ثابت کرد که اگر r و s دو عدد گویا باشند و $a > 0$، قواعد توان برای اعداد گویا هم مانند قواعد توان برای اعداد صحیح است و داریم:

$a^r \times a^s = a^{r+s}$، $(a^r)^s = a^{rs}$، $(ab)^r = a^r b^r$

البته یک چیز جالب در این‌جا این است که مفهوم توان گسترده‌تر شد و به عبارت دقیق‌تر تعمیم پیدا کرد، چون قبل از این درس می‌گفتیم a^n یعنی این‌که a را n بار در خودش ضرب می‌کنیم، ولی در این درس اعدادی را معرفی کردیم مثلاً به شکل $2^{\frac{7}{5}}$، حال آیا می‌توانیم بگوییم $2^{\frac{7}{5}}$ یعنی این‌که ۲ را $\frac{7}{5}$ بار در خودش ضرب می‌کنیم؟

سـؤال

هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت رادیکالی بنویسید:

$$17^{\frac{2}{5}}, (-5)^{\frac{4}{3}}, (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{7}}, 15^{-\frac{1}{2}}, (-5)^{\frac{9}{3}}$$

پاسخ

$$17^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{17^2}$$

قبلاً دیدیم که وقتی پایه منفی است، توان کسری تعریف نمی‌شود، پس $(-5)^{\frac{4}{3}}$ تعریف نمی‌شود.

$$(2^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{5}}=2^{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}=2^{\frac{2}{15}}=\sqrt[15]{2^2}$$

$$2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{7}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{7}}=2^{\frac{7+6}{21}}=2^{\frac{13}{21}}=\sqrt[21]{2^{13}}$$

$$15^{\frac{-1}{2}}=(15^{-1})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{\frac{1}{15}}$$

ابتدا به نظر می‌رسد که $(-5)^{\frac{9}{3}}$ با $(-5)^3$ برابر است ولی طبق تعریف این‌گونه نیست و نمی‌توان توان آن را ساده کرد یا آن را به‌صورت رادیکالی نوشت، چون پایه‌اش منفی است.

مثال‌های آموزشی

۱) **هر یک از رادیکال‌های زیر را به‌صورت عبارتی با توان کسری بنویسید. (a مثبت است.)**

$$\sqrt[5]{2^7}, \sqrt[5]{(-3)^4}, \sqrt[5]{a^4}, \sqrt[4]{a^3}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}, \sqrt[3]{2\sqrt{2}}, \sqrt[2]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$$

پاسخ

$$\sqrt[5]{2^7}=2^{\frac{7}{5}}$$

$$\sqrt[5]{(-3)^4}=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}$$

دقت کنید که نباید پایه منفی باشد.

$$\sqrt[5]{a^4}=a^{\frac{4}{5}}$$

$$\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=(\sqrt[4]{5})^{\frac{1}{3}}=(5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=(2\times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[2]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[2]{a\sqrt[3]{a\times a^{\frac{1}{4}}}}=\sqrt[2]{a\times(a\times a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}=\left(a\times(a\times a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a\times(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=(a\times a^{\frac{5}{12}})^{\frac{1}{2}}=(a^{1+\frac{5}{12}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{17}{12}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{17}{24}}$$

۲) **با این فرض که r و s اعدادی گویا باشند، ثابت کنید $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$.**

پاسخ

$$a^{r-s}\times a^s=a^{(r-s)+s}=a^r \Rightarrow a^{r-s}\times a^s=a^r \Rightarrow a^{r-s}=\frac{a^r}{a^s}$$

۳) **از دو عدد $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{5}$ کدام بزرگ‌تر است؟**

پاسخ در حالت کلی می‌توان گفت که اگر a، b و n اعداد مثبتی باشند، آن‌گاه $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n$ و در نتیجه چون $2<5$ پس $2^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{3}}$. البته می‌شود این‌گونه هم پاسخ داد که $1<\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$ و در نتیجه $\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{5}$.

۴) **از دو عدد $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[5]{2}$ کدام بزرگ‌تر است؟**

پاسخ در حالت کلی می‌توان گفت که اگر m، n و a اعداد مثبتی باشند و $n<m$، آن‌گاه:

$$1<a \Rightarrow a^n<a^m$$
$$a<1 \Rightarrow a^m<a^n$$

اثبات این مطالب هم مشابه اثبات‌هایی است که در کتاب برای حالت‌های خاص صورت گرفت. از این‌جا معلوم می‌شود که $2^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{3}}$. البته می‌شود این‌گونه هم پاسخ داد که $1<2^{\frac{2}{15}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{5}}}$ و در نتیجه $2^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{3}}$.

البته اثبات ادعاهای گفته شده، با روشی مشابه آن‌چه گفته شد می‌تواند انجام شود.

۵) **از دو عدد $\sqrt[3]{5}$ و $\sqrt{3}$ کدام بزرگ‌تر است؟**

پاسخ برای پاسخ به این‌گونه سؤالات می‌توان هر دو عدد را به یک توان خاص رساند به‌طوری‌که حاصل هر دو، اعدادی طبیعی باشند تا بتوانیم به‌راحتی پاسخ دهیم.

مثلاً در این‌جا توان ۶ (در واقع مضرب مشترک ۲ و ۳) توان خوبی است.

$$(\sqrt{3})^6=(3^{\frac{1}{2}})^6=3^3=27$$
$$(\sqrt[3]{5})^6=(5^{\frac{1}{3}})^6=5^2=25$$

حال اگر $\sqrt{3}$ را a بنامیم و $\sqrt[3]{5}$ را b، می‌توانیم بگوییم چون $b^6<a^6$ پس $b<a$، یعنی $\sqrt{3}$ بزرگ‌تر است.

یادداشت

آس

۳

کافه سؤال

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt[3]{24 \times 18}$ ب) $\sqrt[5]{(-2)^7 \times 6^3 \times 3^2}$ ج) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ د) $\sqrt[7]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt[5]{(a^2b)^3 \times (ab^2)^4}$ ب) $\sqrt{(ab)^4} \times \sqrt{b^{-4}}$ ج) $\sqrt[3]{a^2b} \times \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{b}$

۳ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $(3^{0/9} \times 2^{0/3} \times 6^{\frac{1}{2}})^5$ ب) $2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ ج) $((32^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{5}}$

۴ اگر $a > 1$ و m و n اعدادی طبیعی باشند، ثابت کنید $a^{\frac{m}{n}} > 1$.

۵ اگر $0 < a < 1$ و m و n اعدادی طبیعی باشند ثابت کنید $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

۶ با استفاده از تمرین ۴ ثابت کنید که اگر b و a اعدادی مثبت باشند که $a < b$ و m و n اعدادی طبیعی باشند، آن‌گاه $a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$.

۷ با استفاده از تمرین‌های ۴ و ۵ ثابت کنید که اگر s و r اعدادی گویا و مثبت باشند که $r < s$ آن‌گاه:

الف) اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه $a^s < a^r$.

ب) اگر $a > 1$، آن‌گاه $a^r < a^s$.

۸ یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ را در $\square$ قرار دهید.

الف) $\sqrt[4]{3} \ \square \ \sqrt[3]{2}$ ب) $2^{\frac{5}{9}} \ \square \ 2^{\frac{7}{11}}$ ج) $(\frac{2}{100})^{\frac{2}{100}} \ \square \ (\frac{3}{100})^{\frac{2}{100}}$

د) $\sqrt[4]{\frac{1}{5}} \ \square \ \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ ه) $3^{\frac{3}{7}} \ \square \ 3^{\frac{4}{5}}$ و) $2^{\frac{7}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \ \square \ 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{8}{3}}$

۹ از دو عدد $\sqrt[7]{5}$ و $2\sqrt[3]{2}$ کدام بزرگ‌تر است؟

۱۰ ثابت کنید اگر $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$، آن‌گاه حداقل یکی از a و b صفر است. آیا می‌توان گفت اگر $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ آن‌گاه حداقل یکی از a و b صفر است؟

گاج

۳

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- اگر $2^x=\sqrt[3]{4\sqrt{4}}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

۲- اگر $4^x=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{2}{12}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۳- اگر $3=\sqrt{a\sqrt{a}}$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $3^{\frac{5}{2}}$ ۲) $3\sqrt[3]{3}$ ۳) $\sqrt[3]{81}$ ۴) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

۴- اگر $4=\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $4^{\frac{3}{2}}$ ۲) $4^{\frac{12}{7}}$ ۳) $4^{\frac{12}{6}}$ ۴) $4^{\frac{24}{19}}$

۵- اگر $2=\sqrt[3]{3\sqrt{x}}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) $\frac{9}{16}$ ۲) $\frac{81}{18}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{64}{9}$

۶- اگر $\sqrt[n]{2}=\left(\left(32^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۵

۷- اگر $x<0$، آن‌گاه حاصل $\frac{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt{x^2}}{2\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[3]{x^3}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) ۳

۸- اگر $a=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$ و $b=\sqrt[5]{-4}$، آن‌گاه کدام‌یک از روابط زیر درست است؟

۱) $a^3b^5=-8$ ۲) $b^5=-a^6$

۳) $b^5=-2a^3$ ۴) همهٔ موارد

۹- اگر $a>1$، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) $\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$ ۲) $a^{\frac{1}{3}}<a^{\frac{1}{5}}$

۳) $a^{\frac{1}{7}}<\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ ۴) $a^{-3}<a^{-2}$

۱۰- کدام‌یک از روابط زیر همیشگی **نیست**؟

۱) $(\sqrt[3]{a})^3=a$ ۲) $\sqrt[n]{a^{2n}}=a^2$

۳) $\sqrt[n]{a^{3n}}=a^3$ ۴) $\sqrt[3]{a^3}=a$

آس

۳

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافهٔ سوال

۱

الف) $\sqrt[3]{24\times18}=\sqrt[3]{3\times2^3\times3^2\times2}=\sqrt[3]{3^3\times2^4}=2\times3\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{2}$

ب) $\sqrt[5]{(-2)^7\times6^3\times3^2}=\sqrt[5]{(-2)^7\times2^3\times3^3\times3^2}=\sqrt[5]{2^{10}\times3^5\times(-1)^7}=-4\times3=-12$

ج) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{5\times5^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

د) $\sqrt[7]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt[7]{2\sqrt{2\times2^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[7]{2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[7]{2\times2^{\frac{3}{4}}}=\sqrt[7]{2^{\frac{7}{4}}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

۲

الف) $\sqrt[5]{(a^2b)^3\times(ab^2)^4}=\sqrt[5]{a^6b^3a^4b^8}=\sqrt[5]{a^{10}b^{11}}=a^2b^2\sqrt[5]{b}$

ب) $\sqrt{(ab)^4}\times\sqrt{b^{-4}}=\sqrt{a^4b^4\times b^{-4}}=\sqrt{a^4}=a^2$

ج) $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[6]{a^2b^3}\times\sqrt{b}=a^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{2}{6}}\times b^{\frac{3}{6}}\times b^{\frac{1}{2}}=a\times b^{\frac{4}{3}}=a\sqrt[3]{b^4}=ab\sqrt[3]{b}$

۳

الف) $(3^{0/9}\times2^{0/3}\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}})^5=(3^{\frac{14}{10}}\times2^{\frac{8}{10}})^5=3^7\times2^4$

ب) $2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{6}}\times3^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{2^3\times3^2}=\sqrt[6]{9\times8}=\sqrt[6]{72}$

ج) $\left((32^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}}=(32^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{15}}=(4\sqrt{2})^{\frac{2}{15}}=(2^2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{15}}=(2^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{15}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

۴

$a>1\Rightarrow a^m>1\Rightarrow\sqrt[n]{a^m}>\sqrt[n]{1}\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}>1$

۵

$0<a<1\Rightarrow0<a^m<1\Rightarrow a^m<1\Rightarrow\sqrt[n]{a^m}<1\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}<1$

۶

$a<b\Rightarrow a^m<b^m\Rightarrow\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[n]{b^m}\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}<b^{\frac{m}{n}}$

۷

قسمت ب را ثابت می‌کنیم، اثبات الف هم مشابه است.

اگر $r=\frac{m}{n}$ و $s=\frac{p}{q}$ باشد آن‌گاه از $r<s$ نتیجه می‌شود $\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$ و در نتیجه $mq<pn$ حال بنابر تمرین ۴ داریم:

$$1<a^{pn-mq}\Rightarrow a^{mq}<a^{pn}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}\ \frac{1}{nq}]{\text{طرفین را به توان}}(a^{mq})^{\frac{1}{nq}}<(a^{pn})^{\frac{1}{nq}}\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}<a^{\frac{p}{q}}\Rightarrow a^r<a^s$$

۸

الف) $2^{\frac{1}{2}}\ \boxed{>}\ 2^{\frac{1}{7}}$ ب) $2^{\frac{5}{9}}\ \boxed{<}\ 2^{\frac{7}{11}}$ ج) $(\frac{2}{100})^{\frac{2}{100}}\ \boxed{<}\ (\frac{3}{100})^{\frac{2}{100}}$

د) $(\frac{1}{5})^{\frac{1}{8}}\ \boxed{<}\ (\frac{1}{3})^{\frac{1}{8}}$ ه) $3^{\frac{3}{7}}\ \boxed{<}\ 3^{\frac{4}{5}}$ و) $2^{\frac{7}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}\ \boxed{<}\ 2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{8}{2}}$

۹

$\sqrt[3]{2}\ \boxed{?}\ \sqrt[7]{5}\Rightarrow(\sqrt[3]{2})^{21}\ \boxed{?}\ (\sqrt[7]{5})^{21}\Rightarrow2^7\ \boxed{?}\ 5^3\Rightarrow128\ \boxed{>}\ 125\Rightarrow\sqrt[3]{2}\ \boxed{>}\ \sqrt[7]{5}$

۱۰

$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}(a+b)=a+b+2\sqrt{ab}\Rightarrow\sqrt{ab}=0\Rightarrow ab=0\Rightarrow$ حداقل یکی از a، b صفر است.

نه، به‌عنوان مثال برای هر عدد حقیقی a داریم: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{-a}=\sqrt[3]{a+(-a)}$

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۳	۳	۳	۵	۴	۷	۳	۹	۴
۲	۴	۴	۴	۶	۳	۸	۴	۱۰	۳

درس سوم: عبارت‌های جبری

معرفی عبارت جبری

شیخ بهایی در جایی در کتاب کشکول خود می‌گوید:

«حاصل‌ضرب هر عددی در خود، از حاصل‌ضرب دو عدد قبل و بعد آن در یک‌دیگر، یک شماره بیشتر است.» و ما این عبارت را در ریاضیات امروزی به شکل مقابل می‌نویسیم: $x^۲=(x-۱)(x+۱)+۱$

که همان عبارت $x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$ است.

بعضاً برای محاسبات سریع و ذهنی هم، برخی افراد از این رابطه‌ها استفاده می‌کنند. مثلاً فردی از شما می‌پرسد ۵۱×۴۹ چند است؟ و خودش به‌سرعت محاسبه می‌کند ۲۴۹۹، زیرا او با توجه به رابطهٔ بالا می‌داند که $۴۹\times۵۱=(۵۰-۱)(۵۰+۱)=۵۰^۲-۱^۲=۲۵۰۰-۱=۲۴۹۹$

فردی می‌گوید خُب یک سؤال دیگر ۷۶×۸۴ و تا شما به‌صورت ذهنی رقم‌ها را ضرب کنید و حاصل آن‌ها را در ذهن نگه دارید و ... خودش پاسخ می‌دهد ۶۳۸۴. او برای این محاسبه از اتحاد مزدوج یعنی $x^۲-y^۲=(x-y)(x+y)$ استفاده می‌کند.

$$۷۶\times۸۴=(۸۰-۴)(۸۰+۴)=۸۰^۲-۴^۲=۶۴۰۰-۱۶=۶۳۸۴$$

خُب، در زمان‌های قدیم که ریاضیات نظم کنونی خود را نیافته بود، فردی به‌طور اتّفاقی به یک برابری عجیب می‌رسید و هرچه محاسبه می‌کرد، می‌دید که گویا این برابری برای همهٔ اعداد برقرار است، پس آن را به‌عنوان یک واقعیت بیان می‌کرد و گاهاً هم با تلاش، اثباتی برای آن فراهم می‌نمود.

این سؤال پیش آمد که آیا ما راهی برای به‌دست آوردن همهٔ این نوع برابری‌ها داریم و یا این‌که این برابری‌ها مثل سنگ‌های کمیاب، به‌طور اتّفاقی و بدون پیش‌بینی توسّط افراد کشف خواهند شد؟ و همین‌طور روند کشف رابطه‌های جدید ادامه خواهد داشت؟ پس از مدّتی متوجّه شدند که گویا همهٔ این‌گونه ویژگی‌ها یک منشأ دارند.

عبارت‌های جبری

همهٔ برابری‌های عبارت‌های جبری را می‌توان با استفاده از چند ویژگی معمولی اعداد حقیقی به‌دست آورد. به‌عنوان نمونه ویژگی‌های زیر را داریم:

$pq = qp$

$p(q+r) = pq + pr$

و دیده شد که با استفاده از عبارت‌های جبری همهٔ این‌گونه رابطه‌ها به صورتی کاملاً سازمان‌یافته و منظم درآمدند و دیگر این گونه واقعیت‌ها چیزهای عجیبی نبودند. مثلاً فرض کنید همان فَرد بیاید و به شما بگوید $(102)^2$ چقدر می‌شود؟

چون 100^2 و 2^2 به‌سادگی محاسبه می‌شود، شما درمی‌یابید که احتمالاً فَرد می‌خواهد با استفاده از رابطه‌ای به شکل $(x+y)^2$ مقدار $(100+2)^2$ را محاسبه کند. خب شما اول شروع به محاسبه می‌کنید و حاصل $(x+y)^2$ را به دست می‌آورید.

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

و در نتیجه:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

حال با استفاده از این رابطه معلوم است که $(102)^2$ برابر است با $2^2 + 2\times(100)\times 2 + (100)^2$ یعنی $4 + 400 + 10000$ یعنی 10404. حال شما از فَردی می‌پرسید $(201)^2$ چه‌قدر می‌شود؟

البته عبارت‌های جبری مبحثی نیست که فقط در محاسبات ذهنی به کار رود، بلکه این بحث در بخش‌های زیادی از ریاضیات، ارزشمند است.

در مبحث عبارت‌های جبری، نتایجی مثل عبارت‌های زیر را اتّحاد جبری می‌نامند:

اتّحاد مربع مجموع	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
اتّحاد مزدوج	$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

البتّه شاید همان نام برابری‌های جبری بهتر بود، زیرا «اتّحاد» رابطه‌ای است که حالت قراردادی دارد و ممکن است روزی از بین برود، درحالی‌که در مبحث عبارت‌های جبری می‌شود گفت این تساوی‌ها همیشگی‌اند، با این دیدگاه شاید کلمهٔ وحدت بهتر از اتّحاد باشد.

به‌هرحال چون این اصطلاح در همهٔ کتاب‌ها به‌کار می‌رود ما هم آن را به‌کار می‌بریم امّا یادتان باشد که ما گفتیم!

با اتّحادهای جبری زیر هم، سال قبل آشنا شدید:

اتّحاد مربع تفاضل	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
اتّحاد جملهٔ مشترک	$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$
	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

شاید در این‌جا سؤالی را مطرح کنید:

ما هر عبارت جبری را که در عبارت جبری دیگری ضرب کنیم پس از انجام محاسبات به یک نتیجه‌ای می‌رسیم، مثلاً با قدری محاسبه، روابط زیر را هم به‌دست می‌آوریم:

$$(x^2+2y^2)(2x-y) = 2x^3 - x^2y + 4xy^2 - 2y^3 \qquad (x-2y+z)(x+3y) = x^2 - 6y^2 + xy + xz + 3zy$$

و ...

و روابط مشابه نیز فراوانند. آیا همهٔ این‌ها اتّحاد هستند؟ و اصولاً چرا ما تعداد کمی از این تساوی‌ها را انتخاب کرده‌ایم و خیلی در مورد بقیّه بحث نمی‌کنیم؟

پاسخ این است که درست است، شما هر عبارت جبری را در هر عبارت جبری دیگر ضرب کنید، بالاخره به یک رابطهٔ تساوی می‌رسید که همیشه برقرار است و می‌توان آن را اتحاد نامید. اما یک نکتهٔ مهم در این‌جا وجود دارد و آن این است که در ریاضیّات از مطرح کردن هر بحث یک هدف وجود دارد و با توجّه به آن هدف تعیین می‌شود که این بحث چگونه مطرح شود.

اتّحادهای جبری هم در خیلی از مباحث ریاضیّات به‌کار می‌روند و با توجّه به آن مباحث می‌دانیم که اتّحادهای مهم انگشت‌شمارند و در این‌جا آن‌ها را بیان می‌کنیم.

چند اتّحاد جدید

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

و با محاسباتی مشابه به‌دست می‌آید: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

این دو رابطه، اتّحادهای مهمّی هستند. نام اوّلی اتّحاد مکعب مجموع است و نام دومی هم بالتبع می‌شود اتحاد مکعب تفاضل.

اتّحاد مکعب مجموع	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
اتّحاد مکعب تفاضل	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

دو اتحاد مشهور دیگر

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$$

و با محاسباتی مشابه به‌دست می‌آید: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

این دو رابطه هم اتّحادهای مهّمی هستند نام اوّلی اتّحاد مجموع مکعب‌ها است و نام دومی هم بالتبع می‌شود اتحاد تفاضل مکعب‌ها.

اتّحاد مجموع مکعب‌ها	$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
اتّحاد تفاضل مکعب‌ها	$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

مثال‌های آموزشی

۱) حاصل‌ضرب‌های زیر را با استفاده از اتّحادها به‌دست آورید.

الف) 95×105 ب) $(91)^2$ ج) $(58)^2$ د) $(201)^3$ هـ) $(198)^3$ و) $(1002)^3$ ز) $(999)^3$

پاسخ با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

الف) $95\times105=(100-5)(100+5)=(100)^2-5^2=9975$

ب) $(91)^2=(90+1)^2=(90)^2+2\times90+1=8100+180+1=8281$

ج) $(58)^2=(60-2)^2=60^2-2\times60\times2+4=3600-240+4=3364$

د) $(201)^3=(200+1)^3=(200)^3+3\times(200)^2\times1+3\times200\times1^2+1^3=8000000+120000+600+1=8120601$

هـ) $(198)^3=(200-2)^3=(200)^3-3\times(200)^2\times2+3\times(200)\times2^2-2^3=8000000-240000+2400-8=7762392$

و) $(1002)^3=(1000+2)^3=(1000)^3+3\times(1000)^2\times2+3\times1000\times2^2+2^3=1000000000+6000000+12000+8=1006012008$

ز) $(999)^3=(1000-1)^3=\cdots$

سعی کنید به‌صورت ذهنی پاسخ را به‌دست آورید.

۲) اگر $x+y=7$ و $xy=5$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) x^2+y^2 ب) $(x-y)^2$ ج) x^3+y^3 د) x^4+y^4

پاسخ

الف) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\times5=39$

ب) $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=x^2+y^2+2xy-4xy=(x+y)^2-4xy=7^2-4\times5=29$

ج) از قسمت الف می‌دانیم $x^2+y^2=39$: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=7\times(39-5)=238$

د) $x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=(39)^2-2\times5^2=147\cdots$

۳) با استفاده از اتّحادها حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}+1^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^3=(\sqrt{2})^3-3\times(\sqrt{2})^2\times1+3\sqrt{2}\times1^2-1=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1=5\sqrt{2}-7$$

$$(\sqrt[3]{x}-2)^3=(\sqrt[3]{x})^3-3(\sqrt[3]{x})^2\times2+3(\sqrt[3]{x})\times2^2-2^3=x-6\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt[3]{x}-8$$

$$(a^2+b^2)^3=(a^2)^3+3(a^2)^2b^2+3(a^2)(b^2)^2+(b^2)^3=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$$

$$(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=(\sqrt[3]{x})^3-2^3=x-8$$

$$(a^2+3)(a^4-3a^2+9)=(a^2+3)((a^2)^2-3\times a^2+3^2)=(a^2)^3+3^3=a^6+27$$

$$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})=(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{a})^3=x-a$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+3a^2\times\frac{1}{a}+3a\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3}$$

بحثی دربارهٔ تجزیه

فرض کنید در محاسبه‌ای پر از ضرب و تقسیم، یکی از اعداد به‌فرض ۹۸۰۱۸۴۲۴ باشد، در آن‌صورت با دانستن این‌که این عدد برابر $7^5\times3^6\times2^3$ است، محاسبات ساده‌تر می‌شود، در مورد چندجمله‌ای‌ها هم وضعیت مشابهی وجود دارد، یعنی اگر در برخی محاسبات بتوانیم یک چندجمله‌ای را به‌صورت حاصل‌ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای دیگر بنویسیم، یا به اصطلاح آن را تجزیه کنیم، محاسبات ساده‌تر می‌شود.

در مورد اعداد، تجزیهٔ آن‌ها یک روش مشخّص دارد، عدد موردنظر بر اعداد اوّل مختلف تقسیم می‌شود تا اعداد اوّلی که آن عدد بر آن‌ها قابل تقسیم است پیدا شوند و ...

اما در مورد چندجمله‌ای‌ها، تجزیه به همان سادگی نیست و اصولاً خیلی از چندجمله‌ای‌ها را نمی‌شود تجزیه کرد. البته برای شکل‌های خاصّی از چندجمله‌ای‌ها مثل چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۲، یعنی چندجمله‌ای‌هایی مثل $2x^2+3x+1$، x^2+7x-9 و x^2+1 و ... روش کاملی وجود دارد که مشخص می‌کند چندجمله‌ای موردنظر را می‌توان تجزیه کرد یا نه و اگر چندجمله‌ای قابل تجزیه است، چگونه این کار صورت می‌گیرد. در کل برای تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها، معمولاً باید به‌نوعی از اتّحادها استفاده کرد.

مثال‌های آموزشی

۱) عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) x^3+1	ب) x^3-125	ج) x^6+1	د) $x^3+6x^2+12x+8$
ه) x^3-3x^2+3x+7	و) x^2-3y^2+2xy	ز) x^2-y^2-4xy	ح) $a^6-2b^6+2a^3b^3$

پاسخ الف) اتّحاد مجموع مکعب‌ها را به‌کار می‌بریم:

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$$

ب) اتّحاد تفاضل مکعب‌ها را به‌کار می‌بریم:

$$x^3-125=x^3-5^3=(x-5)(x^2+5x+25)$$

ج) اگر x^2 را یک جمله ببینیم، آن‌گاه می‌بینیم که باید از اتّحاد مجموع مکعب‌ها استفاده کنیم:

$$x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

د) به‌نظر می‌آید به‌نحوی باید از اتّحاد مکعب مجموع استفاده کنیم:

$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\times2\times x^2+3\times2^2x+2^3=(x+2)^3$$

ه) ظاهر جملات شبیه اتّحاد مکعب تفاضل است، فقط باید برای آن ۷ آخر فکری بکنیم:

$$x^3-3x^2+3x+7=x^3-3x^2+3x-1+8$$
$$=(x-1)^3+8=(x-1)^3+2^3$$

باز می‌توانیم از اتّحاد مجموع مکعب‌ها استفاده کنیم:

$$=(x-1+2)((x-1)^2-2(x-1)+2^2)$$

$$=(x+1)(x^2-2x+1-2x+2+4)=(x+1)(x^2-4x+7)$$

و) ابتدا سعی می‌کنیم از اتّحاد مربع مجموع استفاده کنیم:

$$x^2-3y^2+2xy=x^2+2xy-3y^2$$

گاهی کم و کاستی‌ها را می‌شود این‌طور جبران کرد:

$$=x^2+2xy+y^2-y^2-3y^2$$

$$=(x+y)^2-4y^2=(x+y)^2-(2y)^2=(x+y-2y)(x+y+2y)=(x-y)(x+3y)$$

ز) روشی مشابه روش قبل را در پیش می‌گیریم:

$$x^2-y^2-4xy=x^2-4xy+4y^2-4y^2-y^2=(x-2y)^2-5y^2=(x-2y)^2-(\sqrt{5}y)^2$$

$$=(x-2y-\sqrt{5}y)(x-2y+\sqrt{5}y)=\left(x-(2+\sqrt{5})y\right)\left(x+(-2+\sqrt{5})y\right)$$

ح) با قدری دقّت می‌بینیم که این هم مسأله‌ای مشابه دو مسألهٔ قبل است:

$$(a^4-2b^4+2a^2b^2)=a^4+2a^2b^2-2b^4$$

$$=a^4+2a^2b^2+b^4-3b^4=(a^2+b^2)^2-(\sqrt{3}b^2)^2=(a^2+b^2-\sqrt{3}b^2)(a^2+b^2+\sqrt{3}b^2)$$

$$=\left(a^2+(1-\sqrt{3})b^2\right)\left(a^2+(1+\sqrt{3})b^2\right)=\left(a^2+(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\,b)^2\right)\left(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2\right)$$

حال می‌توان هر کدام از دو عبارت پایانی را هم با استفاده از اتّحاد مجموع مکعب‌ها تجزیه کرد، به عهدهٔ خودتان.

۲) صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید.

الف) $\dfrac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$ ب) $\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$ ج) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ د) $\dfrac{a^7-a}{a^3+a^2+a}$

پاسخ

الف) $$\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}=\frac{(x^2)^3+1}{(x^2)^2+2x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+1)}=\frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$$

ب) $$\frac{x^3-1}{(x-1)^3}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-1)^2}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$$

ج) $$\frac{x^2+1}{x^4-1}=\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{1}{x^2-1}$$

د) $$\frac{a^7-a}{a^3+a^2+a}=\frac{a(a^6-1)}{a(a^2+a+1)}=\frac{a(a^3-1)(a^3+1)}{a(a^2+a+1)}=\frac{a(a-1)(a^2+a+1)(a^3+1)}{a(a^2+a+1)}=(a-1)(a^3+1)$$

۳) هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را تا حد ممکن تجزیه کنید.

الف) x^4-y^4 ب) x^6-y^6 ج) x^4+y^4 د) x^6+y^6 هـ) x^2+y^2

پاسخ الف) با دو بار استفاده از اتّحاد مزدوج عبارت به‌صورت حاصل‌ضرب سه جمله در می‌آید:

$$x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

ب) $$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$$

البته به شکل دیگری هم می‌شد این عبارت را تجزیه کرد:

$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$$

این بار به حاصل‌ضرب ۴ جمله تجزیه شد. با مقایسهٔ این دو نتیجه معلوم می‌شود که می‌شد در روش اوّل عبارت $x^4+x^2y^2+y^4$ را به‌صورت $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ تجزیه کرد. چیزی که ما در نگاه اوّل متوجّه آن نشدیم، ولی حالا با قدری دقّت می‌فهمیم که چگونه باید این کار انجام می‌شد. مثلاً می‌شد به شکل زیر محاسبات را ادامه داد:

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

البته همان‌طور که گفتیم، لزومی ندارد بتوانیم هر نوع چندجمله‌ای را تجزیه کنیم ولی دانستن برخی روش‌ها و تجزیهٔ چند عبارت چندجمله‌ای معمولی خالی از لطف نیست.

ج) برای تجزیهٔ عبارت x^4+y^4 هم شاید روشی مشابه آن‌چه در بحث قبل انجام شد، نتیجه دهد.

$$x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(\sqrt{2}xy)^2=(x^2+y^2-\sqrt{2}xy)(x^2+y^2+\sqrt{2}xy)$$

دقت کنید که $\sqrt{2}xy$ هم یک چندجمله‌ای است برخلاف [illegible] چند جمله‌ای نیست. به عبا[illegible] ضرایب در چندجمله‌ای‌ها می‌توانند هر عددی باشند.

د) $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

در صورت امکان خودتان تجزیه را ادامه دهید.

هـ) برای تجزیهٔ x^2+y^2 ابتدا سعی می‌کنیم همان روش مسأله‌های قبل را به‌کار بریم.

$$x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy=(x+y)^2-2xy$$

می‌بینیم که نتیجه‌بخش نیست زیرا نمی‌توان $2xy$ را به‌صورت توان دوم یک چندجمله‌ای نوشت، زیرا شاید با قدری اغماض بتوان نوشت $2xy=(\sqrt{2xy})^2$ ولی $\sqrt{2xy}$ یک چندجمله‌ای نیست. پس چگونه باید این عبارت را تجزیه کرد؟ به‌نظر می‌رسد که این عبارت را نمی‌شود تجزیه کرد، حالا سعی می‌کنیم به‌نحوی توضیح دهیم که چرا این عبارت تجزیه نمی‌شود. به‌فرض اگر x^2+y^2 را به‌صورت حاصل‌ضرب دو جمله بنویسیم که حداقل یکی خطی باشد، یعنی به شکل $ax+by+c$ باشد، جملهٔ دوم را p می‌نامیم و تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$x^2+y^2=(ax+by+c)p$$

به‌سادگی می‌توان مقادیر x_1 و y_1 غیر صفر را یافت به‌طوری‌که $ax_1+by_1+c=0$ حال می‌بینیم که به‌ازای $y=y_1$ و $x=x_1$ سمت راست تساوی فوق برابر صفر است ولی سمت چپ آن صفر نیست و به تناقض رسیده‌ایم.

آیا اثبات کامل شده است؟ در غیر این صورت حالت‌هایی را که بررسی نکردیم، خودتان بررسی کنید.

در غیر این‌صورت باید بتوانیم x^2+y^2 را به‌صورت حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای بنویسیم که هر کدام حداقل نسبت به یکی از متغیرها درجه‌اش بیشتر از یک است.

$$x^2+y^2=PQ$$

در این‌صورت با ضرب جمله با بزرگ‌ترین توان به‌کار رفته در P در جمله با بزرگ‌ترین توان به‌کار رفته در Q، جمله‌ای به‌دست می‌آید که در حاصل PQ مضربش صفر نیست ولی مشخص است که آن جمله x^2 یا y^2 نیست و به تناقض می‌رسیم.

آیا اثبات کامل شده است؟ در غیر این‌صورت، حالت‌هایی را که بررسی نکردیم، خودتان بررسی کنید.

البته معمولاً اثبات این مطلب که یک چندجمله‌ای قابل تجزیه نیست کار پیچیده‌ای است و همیشه این کار به سادگی مورد x^2+y^2 نیست.

مضرب و شمارنده

عدد ۲۴ را در نظر بگیرید، چون می‌توان نوشت $8\times3=24$ می‌گوییم ۲۴ مضربی از ۸ است و همچنین ۲۴ مضربی از ۳ است و همچنین می‌گوییم هر یک از عددهای ۸ و ۳ یک شمارندهٔ عدد ۲۴ هستند.

مشابه همین تعریف را می‌توان در مورد عبارت‌های جبری انجام داد. به‌عنوان مثال a^3-b^3 را در نظر بگیرید، با توجّه به اتحادها می‌توان نوشت:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

می‌گوییم a^3-b^3 مضربی از $a-b$ است و همچنین a^3-b^3 مضربی از a^2+ab+b^2 است.

و همچنین می‌گوییم هر یک از عبارت‌های $a-b$ و a^2+ab+b^2 یک شمارندهٔ a^3-b^3 هستند.

البته همان‌طور که مضرب و شمارنده در بحث اعداد فقط در مورد اعداد صحیح به‌کار می‌روند، در بحث عبارت‌های جبری هم فقط در مورد چندجمله‌ای‌ها به‌کار می‌روند.

اگر P یک چندجمله‌ای و Q نیز یک چندجمله‌ای دلخواه باشند، آن‌گاه $P\times Q$ یک مضرب P است.

بیشتر بدانیم

می‌توان گفت ایراداتی بر مطالبی که در کتاب درسی در مورد مفهوم مضرب آمده است، وارد است:

۱) مضرب فقط برای چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شود و برای عبارت‌های جبری نمی‌توان این تعریف را به‌کار برد.

زیرا اگر بگوییم حاصل‌ضرب هر عبارت جبری در عبارت جبری دیگر مضرب آن عبارت است، آن‌گاه همهٔ عبارت‌های جبری مضربی از هم‌دیگر می‌شوند و تعریف بی‌ارزش می‌شود، در واقع این کار مثل این است که بگوییم حاصل‌ضرب هر عدد گویا در عدد گویای دیگر مضربی از آن عدد گویاست، مشخص است که در این صورت همهٔ اعداد گویای [illegible]ر، مضربی از هم‌دیگر [illegible] تعریف بی‌ارزش می‌شود.

۲) گفته شده است که فقط مضارب صحیحی از یک چندجمله‌ای، مضرب آن محسوب می‌شوند. این مطلب هم نادرست است، زیرا:
اوّلاً همهٔ اعداد، خود، چندجمله‌ای جبری محسوب می‌شدند. دوماً وقتی می‌گوییم P مضربی از Q است، در واقع منظور این است که باقیماندهٔ تقسیم P بر Q برابر ۰ است.
حال چون باقیماندهٔ تقسیم $\sqrt{3}(a+b)$ بر $(a+b)$ برابر صفر است، مجبوریم مضرب را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که $\sqrt{3}(a+b)$ مضربی از $(a+b)$ محسوب شود.
۳) اگر تعریف کتاب را بپذیریم آن‌گاه برخی از ویژگی‌های مهم مجموعهٔ مضرب‌ها از بین می‌رود. مثلاً دیگر نمی‌توان گفت که اگر P و Q مضاربی از R باشند آن‌گاه $P+Q$ هم مضربی از R است.
زیرا طبق تعریف کتاب درست است که $(\sqrt{2}-x)R$ و $(\sqrt{2}+x)R$ مضاربی از R هستند ولی مجموع آن‌ها یعنی $2\sqrt{2}R$ مضربی از R نیست.
خلاصه این‌که این‌طور تعریف کردن مضرب نه تنها مشکلی را حل نمی‌کند، بلکه مسأله‌ساز نیز هست.
درست مثل پای نهم برای هشت پاست. پس باید گفت: بی‌خیالش!

گویا کردن کسرها

گویا کردن مخرج کسر یعنی این‌که با ضرب صورت و مخرج کسر در یک عدد مناسب، کسر را به‌صورتی درآوریم که در مخرج کسر عدد رادیکالی نداشته باشیم.
برای این‌کار هم معمولاً باید از یکی از اتّحادهای زیر استفاده کنیم:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y) \qquad x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) \qquad x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

به‌طور مشابه در مورد عبارت‌های جبری هم گویا کردن مخرج یک کسر یعنی این‌که با ضرب صورت و مخرج کسر در یک عبارت مناسب، کسر را به‌صورتی درآوریم که در مخرج کسر عبارت رادیکالی نداشته باشیم. در این‌جا هم معمولاً باید از یکی از همان سه اتّحاد استفاده کنیم.

مثال‌های آموزشی

۱) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ج) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+4}$ د) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ هـ) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

و) $\frac{1}{2\sqrt[3]{5}+4}$ ز) $\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$ ح) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ ط) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

پاسخ

الف) $\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5\times(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

ج) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+4}\times\frac{2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}-4}=\frac{(1+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-4)}{(2\sqrt{3}+4)(2\sqrt{3}-4)}=\frac{2\sqrt{3}-4+6-4\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-4^2}=\frac{-2\sqrt{3}+2}{12-16}=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{-4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

د) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\times\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

هـ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}\times\dfrac{(\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}+1}{(\sqrt[3]{4})^2+\sqrt[3]{4}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{(\sqrt[3]{4})^3-1^3}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{4-1}=\dfrac{1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

و) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}+4}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}+4}\times\dfrac{(2\sqrt[3]{5})^2-4(2\sqrt[3]{5})+4^2}{(2\sqrt[3]{5})^2-4\times(2\sqrt[3]{5})+4^2}=\dfrac{4\sqrt[3]{25}-8\sqrt[3]{5}+16}{(2\sqrt[3]{5})^3+4^3}=\dfrac{4(\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+4)}{40+64}=\dfrac{\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+4}{26}$

ز) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}\times\dfrac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{4}}{2}$

ح) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\times\dfrac{(\sqrt[3]{2})^2-(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3})+(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2})^2-(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3})+(\sqrt[3]{3})^2}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5}$

ط) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{-1}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

۲) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)}\times\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}=\sqrt[3]{2}-1$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}-2\sqrt[3]{3}+2^2}\times\dfrac{\sqrt[3]{3}+2}{\sqrt[3]{3}+2}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+2}{(\sqrt[3]{3})^3+2^3}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+2}{3+8}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+2}{11}$

۳) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3x}{x-1}$ ب) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ ج) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$ د) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$ هـ) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$ و) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$

پاسخ

الف) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\times\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}+\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x-1}-\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{3\sqrt{x}-3x-1}{x-1}$

ب) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}\times\dfrac{(\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})+(\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})+(\sqrt[3]{y})^2}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$

ج) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\times\dfrac{(\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})+(\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})+(\sqrt[3]{y})^2}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

د) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-2}\times\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$

هـ) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}\times\dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt[4]{x})^2-1}=\dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}\times\dfrac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

و) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}-1}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}-1}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[8]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[8]{x}+1}{(\sqrt[8]{x})^2-1}=\dfrac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1}$ (*)

و ادامهٔ محاسبات مانند تمرین قبل است:

$(*)=(\sqrt[8]{x}+1)\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}=(\sqrt[8]{x}+1)\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}\times\dfrac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}=(\sqrt[8]{x}+1)\times\dfrac{(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=(\sqrt[8]{x}+1)\dfrac{(\sqrt[4]{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

کـــافه ســؤال

۱ مقدار $(1-\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^3$ را بیابید.

۲ اگر داشته باشیم $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=a$، آن‌گاه مقدار a^2 را محاسبه کنید.

۳ اگر $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$، نشان دهید که $a^2=3a-1$.

۴ اگر $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$، نشان دهید که $a^2=3a-1$.

۵ اگر $a=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$، نشان دهید که $a^3+6a+2=0$.

۶ عبارت‌های کسری زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^6-1}{x^3-1}$ ب) $\frac{x^6+1}{x^4-1}$ ج) $\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{(1-x^8)}$

۷ اگر $a+b=8$ و $ab=-3$، آن‌گاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) a^2+b^2 ب) $(a-b)^2$ ج) a^3+b^3 د) a^4+b^4

۸ اگر $a+b=-3$ و $ab=8$، آن‌گاه حاصل عبارات سؤال ۷ را بیابید.

۹ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-y}$ ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+y}$ د) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$ هـ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+1}$

۱۰ چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $(x+1)^2-9$ ب) $(2x+3)^2-5$ ج) x^2+2x-8 د) x^2+4x+2 هـ) x^2-3x+1

گزینـهٔ چنـــد؟!!!!

۱- حاصل $\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}-\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲- حاصل $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}-\frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}+۱}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

۳- اگر $ab=-۳$ و $a+b=۵$ باشد، آن‌گاه حاصل $a^۳+b^۳$ کدام است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۱۶۸ ۴) ۱۷۰

۴- اگر $a+b=۴$ و $a^۲+b^۲=۲۰$ باشد، آن‌گاه $a^۳+b^۳$ کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۸ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۴۴

۵- عبارت $\frac{(a+b)^۳-(a-b)^۳}{b}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $۲a^۲-۳b^۲$ ۲) $۲a^۲+۳b^۲$

۳) $۳a^۲-۲b^۲$ ۴) $۶a^۲+۲b^۲$

۶- اگر $a=(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})^۴$ و $b=(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})^۴$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\frac{a}{b}=۱۶$ ۲) $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۸}$ ۳) $\sqrt{ab}=۶$ ۴) $\sqrt{ab}=۹$

۷- به ازای چند مقدار k عبارت $a^۴+ka^۲b^۲+b^۴$ مضربی از $a^۲-b^۲$ است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸- حاصل عبارت $x^۳+۶x^۲+۱۲x+۳$ به ازای $x=-۲+\sqrt[۳]{۷}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۹- حاصل عبارت $x^۲+۶x-۴$ به ازای $x=-۳+\sqrt{۱۵}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰- حاصل عبارت $x^۲+۶x-۴$ به ازای کدام مقدار x برابر ۰ است؟

۱) $-۳-\sqrt{۱۳}$ ۲) $-۳+\sqrt{۱۳}$

۳) $-۱+\sqrt{۶}$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

درس ۳ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

$$(1-\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^3=1-3\times1\times\sqrt{2}+3\times1\times2-(\sqrt{2})^3+1+3\sqrt{2}+6+(\sqrt{2})^3=14$$

۲

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\Rightarrow a^2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=4+2\sqrt{4-3}=4+2=6$$

۳

$$a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a^2=\frac{9+5+6\sqrt{5}}{4}=\frac{14+6\sqrt{5}}{4}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\quad(1)$$

$$3a-1=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}-1=\frac{9-2+3\sqrt{5}}{2}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\quad(2)$$

$$(1)=(2)\Rightarrow a^2=3a-1$$

۴

$$a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a^2=\frac{9+5-6\sqrt{5}}{4}=\frac{14-6\sqrt{5}}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\quad(1)\qquad 3a-1=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}-1=\frac{9-2-3\sqrt{5}}{2}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\quad(2)$$

$$(1)=(2)\Rightarrow a^2=3a-1$$

۵

$$a=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\Rightarrow a^3+6a+2=2-3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{16}-4+6\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{4}+2$$

$$=-3\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{32}+6\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{4}=-3\times2\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{4}=0$$

۶

الف) $\dfrac{x^6-1}{x^2-1}=\dfrac{(x^3)^2-1^2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(x^3-1)(x^3+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}=x^4-\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}-\cancel{x^2}+\cancel{x}+x^2-\cancel{x}+1=x^4+x^2+1$

ب) $\dfrac{x^6+1}{x^4-1}=\dfrac{(x^2)^3+1^3}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{x^2(x^2-1)+1}{x^2-1}=x^2+\dfrac{1}{x^2-1}$

ج) $\dfrac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{(1-x^8)}=\dfrac{(1+x)(1+x^2)\cancel{(1+x^4)}}{(1-x^4)\cancel{(1+x^4)}}=\dfrac{(1+x)(1+x^2)}{(1-x^4)}=\dfrac{(1+x)\cancel{(1+x^2)}}{(1-x^2)\cancel{(1+x^2)}}=\dfrac{\cancel{(1+x)}}{(1-x)\cancel{(1+x)}}=\dfrac{1}{1-x}$

۷

الف) $a^2+b^2=a^2+b^2+2ab-2ab=(a+b)^2-2ab=(8)^2-2(-3)=64+6=70$

ب) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\xrightarrow[a^2+b^2=70]{\text{از قسمت الف می‌دانیم}}70-2\times(-3)=70+6=76$

ج) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=8(a^2+b^2-ab)\xrightarrow{a^2+b^2=70}8(70+3)=584$

د) $a^4+b^4=a^4+b^4-2a^2b^2+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\xrightarrow{a^2+b^2=70}4900-2(ab)^2=4900-2(-3)^2=4900-2(9)=4900-18=4882$

۸

چون ab مثبت و $a+b$ منفی است، باید a و b هر دو منفی باشند، چون $a+b=-3$ ، اگر $-1<a<0$ باشد آن‌گاه $-3<b<-2$ و $ab<3$ خواهد بود و اگر $-2<a<-1$ باشد آن‌گاه $-2<b<-1$ و $ab<4$ خواهد بود و ...

به هر حال ab نمی‌تواند ۸ باشد، اگر با روش تمرین ۷ محاسبات را انجام دهید می‌بینید که $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-3)^2-2\times8=-7$ همین‌جا معلوم است که مشکلی وجود دارد زیرا $a^2+b^2\ge 0$.

۹

الف) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\ldots)}=(x+1)(\sqrt{x}+1)$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-y}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-y}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{x}+y^2}{\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{x}+y^2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{x}+y^2}{(\sqrt[3]{x})^3-y^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{x}+y^2}{x-y^3}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+y}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+y}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt[3]{x}+y^2}{\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt[3]{x}+y^2}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt[3]{x}+y^2}{(\sqrt[3]{x})^3+y^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt[3]{x}+y^2}{x+y^3}$

د) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

ه) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\times\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

۱۰

الف) $(x+1)^2-9=(x+1)^2-3^2=(x+1-3)(x+1+3)=(x-2)(x+4)$

ب) $(2x+3)^2-5=(2x+3)^2-(\sqrt{5})^2\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(2x+3-\sqrt{5})(2x+3+\sqrt{5})$

ج) $x^2+2x-8=x^2+2x-9+1=(x^2+2x+1)-9=(x+1)^2-9=(x+1-3)(x+1+3)=(x-2)(x+4)$

د) $x^2+4x+2=x^2+4x+4-2=(x+2)^2-2=(x+2)^2-(\sqrt{2})^2\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$

ه) در این مورد سعی می‌کنیم از موارد قبلی الگو بگیریم: $x^2-3x+1=x^2-2\times\frac{3}{2}\times x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+1=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+1\ \ (*)$

$(*)=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}=(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2})^2=(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})$

درس ۳ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

سؤال	پاسخ
۱	۲
۲	۳
۳	۴
۴	۲
۵	۴
۶	۴
۷	۲
۸	۴
۹	۴
۱۰	۴

ایستگاه المپیاد

۱) فردی چند محاسبه به‌صورت زیر انجام داد و به نظرش رسید که احتمالاً حاصل‌ضرب هر ۴ عدد متوالی به‌علاوهٔ یک، می‌شود یک مربع کامل. آیا حدس او درست بوده است؟

$3\times4\times5\times6+1=361=19^2$ $\qquad 2\times3\times4\times5+1=121=11^2$ $\qquad 1\times2\times3\times4+1=25=5^2$

آیا می‌توانید اثبات کنید؟

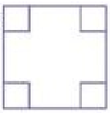
* در مسأله‌های زیر از ماشین‌حساب فقط برای × و ÷ و − و + استفاده کنید.

۲) به ازای کدام مقادیر x، رابطهٔ $x^2=7x+1$ برقرار است؟ دقّت کنید که دو جواب وجود دارد. با استفاده از روش گام‌به‌گام جواب‌ها را با دقّت دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۳) به ازای کدام مقدار x، رابطهٔ $x^3+x=12$ برقرار است؟ جواب را با دقّت دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۴) مقدار $(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n$ را به‌ازای $n=0,1,2,3,4,5$ محاسبه کنید، آیا نظمی در مقادیر حاصل می‌یابید؟ به عبارت دیگر آیا می‌توانید مقدار این عبارت را به ازای ...,$n=6$ پیش‌بینی کنید؟

۵) چهار مربع کوچک را به شکل زیر از گوشه‌های یک مقوّای مربّعی شکل به ضلع ۲ واحد جدا می‌کنیم و با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر بخواهیم حجم این جعبه بیش‌ترین مقدار بشود، طول ضلع مربع‌های کوچک باید چقدر باشد؟ جواب را با دقّت دو رقم اعشار به‌دست آورید.

x


خلاصهٔ فصل ۳

ریشهٔ nام

- اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، a را یک ریشهٔ nام عدد b می‌نامیم؛ هرگاه $b = a^n$. در این صورت b توان nام a است.
- هر عدد حقیقی یک توان دوم دارد و هر عدد حقیقی مثبت دو تا ریشهٔ دوم. اگر a و b اعداد مثبتی باشند، آن‌گاه داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
- هر عدد حقیقی یک توان چهارم دارد و هر عدد حقیقی مثبت دو تا ریشهٔ چهارم.
- هر عددی فقط یک ریشهٔ پنجم دارد و ریشهٔ پنجم اعداد منفی، منفی است و ریشهٔ پنجم اعداد مثبت، مثبت.
- هر عددی فقط یک ریشهٔ سوم دارد و ریشهٔ سوم اعداد مثبت، مثبت است و ریشهٔ سوم اعداد منفی، منفی.
- اگر a و b اعداد مثبتی باشند، آن‌گاه داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ و همچنین با فرض مثبت بودن a، b و c داریم: $a < b < c \Leftrightarrow a^2 < b^2 < c^2$

مقایسهٔ توان‌ها

- اگر $0 < a < 1$ و $n < m$، آن‌گاه $a^m < a^n$ و اگر $1 < a$ و $n < m$، آن‌گاه $a^n < a^m$.
- اگر a و b اعدادی حقیقی باشند و $a < b$ و n عددی فرد باشد، آن‌گاه $a^n < b^n$ و اگر a و b اعدادی حقیقی باشند و $|a| < |b|$ و n عددی زوج باشد، آن‌گاه $|a|^n < |b|^n$.

مقایسهٔ ریشهٔ nام و قدرمطلق

- به ازای هر n طبیعی که $n \geq 2$، داریم:

۱) $1 < |a| \Leftrightarrow |\sqrt[n]{a}| < |a|$

۲) $|a| < 1 \Leftrightarrow |a| < |\sqrt[n]{a}|$

اتحادها

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

توان‌های گویا

- اگر r و s دو عدد گویا باشند و $a > 0$، آن‌گاه داریم:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ ۲) $(a^r)^s = a^{rs}$ ۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

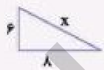
- برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

- اگر a و b مثبت باشد و n عددی طبیعی باشد، داریم: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ردیف	تمـــــــریـــــــن دوره‌ای
۱.	از میان گزینه‌های زیر کدام‌یک بزرگ‌تر است؟ ۱) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$ ۲) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt[5]{-(-2)^4}$ ۴) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}$
۲.	حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt{0/0036}\times\sqrt[3]{27}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}}}\times\sqrt{27\sqrt[3]{27}}}$ کدام است؟ ۱) $0/02$ ۲) $0/02\sqrt{2}$ ۳) $0/02\sqrt{3}$ ۴) $0/02\sqrt{6}$
۳.	حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $(\sqrt{20}-\sqrt{45}-\sqrt{5})\div(\sqrt{80}+\sqrt{180})$ ۱) $0/2$ ۲) $0/4$ ۳) $-0/2$ ۴) $-0/4$
۴.	با توجه به تساوی مقابل، مقدار a کدام است؟ $(0/25)^a=\sqrt{2\sqrt{2^2\sqrt{2^3}}}$ ۱) $-\frac{10}{16}$ ۲) $\frac{10}{16}$ ۳) $\frac{11}{16}$ ۴) $-\frac{11}{16}$
۵.	اگر $\dfrac{25^{\sqrt{32}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{8}}}=5^x$ و $\dfrac{27^{\sqrt{12}}\times 4^{\sqrt{27}}}{6^{\sqrt{3}}}=36^y$، حاصل $x.y$ کدام است؟ ۱) $10\sqrt{2}$ ۲) $10\sqrt{3}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $25\sqrt{10}$
۶.	حاصل $\left(\sqrt[10]{6^{-8}}\right)^{\frac{5}{2}}$ کدام است؟ ۱) ۶ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) ۳۶ ۴) $\frac{1}{36}$
۷.	حاصل $\sqrt{38}-\sqrt{12}+\sqrt{79}$ در چه بازه‌ای قرار دارد؟ ۱) (۸،۹) ۲) (۱۱،۱۲) ۳) (۷،۸) ۴) (۵،۶)
۸.	$\sqrt[4]{598}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟ ۱) ۳و۴ ۲) ۴و۵ ۳) ۵و۶ ۴) ۶و۷
۹.	اگر $0<a<1$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ ۱) $a^{55}>a^{44}$ ۲) $a^{\frac{4}{3}}>a^{\frac{3}{4}}$ ۳) $a^{0/1}>a^{0/01}$ ۴) $a^{-2}>a^{-\frac{1}{2}}$
۱۰.	حاصل $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{5}{6}}$ کدام است؟ ۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{3}{64}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $-\frac{3}{32}$
۱۱.	حاصل $\left(\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2-2(3)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{-0/25}$ کدام است؟ ۱) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0/75}$ ۲) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{0/75}$ ۳) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/75}$ ۴) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/75}$
۱۲.	اگر a بیشتر از صفر باشد، دنبالهٔ زیر رفته رفته به چه عددی نزدیک می‌شود؟ $\sqrt{a},\sqrt{\sqrt{a}},\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}},\dots$ ۱) صفر ۲) یک ۳) عددی بیشتر از یک ۴) عددی بین صفر و یک

ردیف	تمـــــــریـــــــن دوره‌ای
۱۳.	کدام گزینه **نادرست** می‌باشد؟ (برای هر n طبیعی و بزرگ‌تر و مساوی ۲) ۱) $\lvert a\rvert>1\Rightarrow\lvert a\rvert<\lvert\sqrt[n]{a}\rvert$ ۲) $\lvert a\rvert<1\Rightarrow\lvert a\rvert<\lvert\sqrt[n]{a}\rvert$ ۳) $\lvert a\rvert<1\Rightarrow\sqrt[n]{a}<\lvert a\rvert$ ۴) $a=0$ یا $1\Rightarrow\sqrt[n]{a}=a$
۱۴.	کدام گزینه درست می‌باشد؟ ۱) هر عدد حقیقی یک توان چهارم دارد. ۲) هر عدد فقط یک ریشهٔ ۵ام دارد. ۳) هر عدد حقیقی مثبت دو ریشهٔ چهارم دارد. ۴) همه موارد
۱۵.	حاصل عبارت مقابل در کدام شرط صدق می‌کند؟ $\sqrt[3]{184}+\sqrt[3]{123}$ ۱) بین ۱۲ و ۱۱ ۲) بین ۱۱ و ۱۰ ۳) بین ۱۴ و ۱۳ ۴) بین ۱۳ و ۱۲
۱۶.	حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\dfrac{\sqrt{\sqrt{256}}\times\sqrt{\sqrt{6561}}}{\sqrt{20}}$ ۱) $\dfrac{6}{5}$ ۲) $\dfrac{18}{\sqrt{5}}$ ۳) $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\dfrac{30}{25}$
۱۷.	با توجه به عبارت مقابل مقدار a کدام است؟ $\sqrt{15+\sqrt{\sqrt{2401}}\times\sqrt{49}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{a}$ ۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۸ ۴) ۸-
۱۸.	از بین گزینه‌های زیر کدام کوچک‌تر است؟ ۱) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ ۲) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4}}}$ ۳) $2\sqrt{\sqrt[5]{32}}$ ۴) $3\sqrt[3]{64}$
۱۹.	حاصل عبارت داده شده کدام است؟ $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{\sqrt{25}}+6\sqrt{125}}{\sqrt[7]{128}+\sqrt[3]{27}}\times\dfrac{2\sqrt{169}-3\sqrt{121}}{\sqrt[4]{625}+2\sqrt[3]{5}}}$ ۱) $-5^{\frac{1}{18}}\sqrt[3]{\dfrac{31}{7}}$ ۲) $-5^{-\frac{5}{18}}\sqrt[3]{31}$ ۳) $5^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{\dfrac{31}{7}}$ ۴) $-5^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{\dfrac{31}{7}}$
۲۰.	فرض کنید مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌صورت مقابل داشته باشیم و هم‌چنین فرض کنید مکعبی با اضلاع y داشته باشیم و بدانیم حجم مکعب $\sqrt[3]{3x^3\sqrt{81}}$ است. در این صورت y کدام است؟  ۱) ۳۰ ۲) $\sqrt[3]{30}$ ۳) $\sqrt[3]{15}$ ۴) ۱۵
۲۱.	کدام گزینه **نادرست** است؟ ۱) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و n عددی زوج باشد و $a<b$ باشد، در این صورت $a^n<b^n$. ۲) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$ و n زوج باشد، $\lvert a\rvert^n<\lvert b\rvert^n$ می‌باشد. ۳) اگر حداقل یکی از دو مقدار a و b صفر باشند، داریم $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. ۴) اگر $0<a<1$ و $n<m$ باشد، $a^m<a^n$.
۲۲.	اگر $x=5\sqrt[7]{-128\sqrt{2^{14}}}$ و $y=6\sqrt[4]{16}\times\sqrt[3]{27}$، حاصل $\dfrac{x}{\sqrt{y}}+xy^{-1}-y^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟ ۱) $\dfrac{89}{9}$ ۲) $\dfrac{79}{9}$ ۳) $-\dfrac{89}{9}$ ۴) $-\dfrac{79}{9}$

ردیف	تمـــــــــریـــــــــن دوره‌ای
۲۳.	اگر $a=-\frac{5}{3}\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ و $b=\frac{1}{13}\sqrt{\frac{169}{9}}$ باشد، کدام گزینه درست نیست؟ ۱) $\sqrt{\frac{-b}{a}}=\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$ ۲) $\frac{b}{a}=-\frac{1}{10}$ ۳) $a^2=100b^2$ ۴) $\frac{b}{a}=\frac{1}{10}$
۲۴.	اگر $xy=6$ و $x+y=5$ باشند، حاصل عبارت x^4+y^4 چند می‌شود؟ ۱) ۹۵ ۲) ۸ ۳) ۱۳۲ ۴) ۹۷
۲۵.	حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{35}}(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt[3]{x}-2)^3$ کدام است؟ ۱) $x-6\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt[3]{x}-8$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) هیچکدام
۲۶.	حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $a^6-2b^6+2a^3b^3=?$ ۱) $(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2)(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2)$ ۲) $(a^2+(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\,b)^2)(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2)$ ۳) $(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2)(a^2+(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\,b)^2)$ ۴) $(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2)(a^2+(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,b)^2)$
۲۷.	ساده شدهٔ کسر روبه‌رو کدام است؟ $\frac{x^7-x}{x^3+x^2+x}\times\frac{x^2+1}{x^4-1}=?$ ۱) x^2+x+1 ۲) x^2+2x+1 ۳) x^2-x+1 ۴) x^2-2x+1
۲۸.	حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}\times\frac{x^2+1}{3x^2}=?$ ۱) $\frac{x^4+x^2-1}{3x^2}$ ۲) $\frac{x^4-x^2+1}{3x^2}$ ۳) $\frac{x^4+x^2+1}{3x^2}$ ۴) $\frac{x^4-x^2-1}{3x^2}$
۲۹.	ساده شدهٔ عبارت مقابل کدام است؟ $\left[(x^4-y^4)\div\left(\frac{x^3-1}{(x-1)^3}\right)\right]\times\frac{1}{(x-1)^2(x^2+y^2)}$ ۱) $\frac{x^2+y^2}{x^2-x+1}$ ۲) $\frac{x^2+y^2}{x^2-x-1}$ ۳) $\frac{x^2+y^2}{x^2+x+1}$ ۴) $\frac{x^2-y^2}{x^2+x+1}$
۳۰.	حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+4}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ ۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\sqrt{6}-\sqrt{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\sqrt{6}-\sqrt{5}$
۳۱.	حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}\times\frac{11}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4}\right]-\left[\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}-2\right]$ ۱) $\sqrt[3]{4}$ ۲) $-\frac{9}{5}\sqrt[3]{4}$ ۳) صفر ۴) یک
۳۲.	حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\times(x^2-y^2)$ ۱) $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(x+y)$ ۲) $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(x-y)$ ۳) $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(x-y)$ ۴) $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(x+y)$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۳۳.	مقدار عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=?$ ۱) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-4$ ۲) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4$ ۳) $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ ۴) $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-4$
۳۴.	حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}\times\left[(\sqrt[4]{x}+1)(x-1)\right]\times\frac{-1}{\sqrt{x}+1}$ ۱) $-(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt{x}+1)$ ۲) $(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)^2$ ۳) $-(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)^2$ ۴) $-(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)$
۳۵.	حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{b}{\sqrt[4]{a}-1}\times\frac{a-1}{(b-1)(\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}+1)}$ ۱) $\frac{b}{(a-1)(b-1)}$ ۲) $\frac{b}{b-1}$ ۳) $\frac{b(a-1)}{b-1}$ ۴) $\frac{b}{(a+1)(b-1)}$
۳۶.	اگر $a=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ باشد، کدام گزینه درست است؟ ۱) $a^3-6a+2=0$ ۲) $a^3+6a-2=0$ ۳) $a^3+6a+2=0$ ۴) $a^3-6a-2=0$
۳۷.	اگر $b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $c=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ باشد حاصل b^2+c^2 برحسب مقادیر b و c کدام گزینه است؟ ۱) $3b+3c-2$ ۲) $3b+3c+2$ ۳) $3b-3c-2$ ۴) $3b-3c+2$
۳۸.	مقدار عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{(\sqrt[3]{x}+1)(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$ ۱) $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+1$ ۲) 1 ۳) $x-1$ ۴) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$
۳۹.	اگر $ab=24$ و $a+b=10$ باشد، مقدار عبارت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ کدام است؟ ۱) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$ ۲) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ۳) 12 ۴) $\sqrt{3}$
۴۰.	حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $\frac{-(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{(1-x^8)(1-x^2)}$ ۱) $\frac{1}{(1-x^2)(1+x)}$ ۲) $\frac{-1}{(1-x^2)(1+x)}$ ۳) $\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$ ۴) $\frac{-1}{(1-x^2)(1-x)}$

فصل ۳ پاسخ‌نامهٔ کلیدی تمرین دوره‌ای

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۳	۹	۴	۱۷	۲	۲۵	۴	۳۳	۳
۲	۲	۱۰	۳	۱۸	۲	۲۶	۲	۳۴	۳
۳	۳	۱۱	۴	۱۹	۲	۲۷	۳	۳۵	۲
۴	۴	۱۲	۲	۲۰	۲	۲۸	۲	۳۶	۳
۵	۴	۱۳	۳	۲۱	۱	۲۹	۴	۳۷	۱
۶	۴	۱۴	۴	۲۲	۳	۳۰	۱	۳۸	۱
۷	۲	۱۵	۲	۲۳	۴	۳۱	۱	۳۹	۱
۸	۲	۱۶	۲	۲۴	[illegible]	۳۲	[illegible]	۴۰	۴

فصل چهارم Equations and Inequalities

۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول: معادله‌ها و نامعادله‌ها	
معادله درجه دوم و روش‌های مختلف ...	۱۳۹
روش هندسی برای حل معادله درجه دوم	۱۴۲
حل معادله درجه دوم در حالت کلی	۱۴۲
تجزیه سریع بعضی چند جمله‌ای‌های درجه ۲	۱۴۵
برخی معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم	۱۴۶
بخش سؤالات	۱۴۸

درس دوم: سهمی	
مفهوم سهمی	۱۵۳
نقطهٔ رأسی و خط تقارن	۱۵۴
بخش سؤالات	۱۵۷

درس سوم: تعیین علامت	
نامعادله	۱۶۱
نامعادله درجه دوم	۱۶۲
تعیین علامت	۱۶۳
تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول	۱۶۳
تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم	۱۶۴
نامعادله‌های دوگانه	۱۶۹
بخش سؤالات	۱۷۲

خلاصه فصل	۱۷۹
تمرین دوره‌ای	۱۸۰

ماجرا چیـه؟!

بشر اولیه معادلات خطی را حل کرد، مثلاً معادلاتی به شکل $5x-7=0$ توسط آنها حل شد، بشر ثانویه برای اینکه بگوید بالاتر از بشر اوّلیه است، تلاش کرد معادلات پیچیده‌تری را حل کند، به نظرش رسید که خوب است معادلهٔ درجهٔ دوم را حل کند.

خب او تلاش کرد و توانست معادلاتی به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که a و b و c اعدادی حقیقی هستند، حل کند، او ابتدا دید که معادلاتی به شکل $a(x+p)(x+q)=0$ که $q \in \mathbb{R}$ و p و a و $a \neq 0$ به سادگی حل می‌شوند، در واقع برای اینکه عبارت $a(x+p)(x+q)$ برابر صفر شود یا باید $x+p=0$ و یا $x+q=0$، و در نتیجه $x=-p$ یا $x=-q$، همین مطلب ساده به بشر ثانویه گفت سعی کن عبارت ax^2+bx+c را تجزیه کنی، خب او هم هرطوری بود آن را تجزیه کرد و ...

یک مسأله دیگر نامعادله‌ها بود، بشر ثانویه متوجه شد که نامعادلهٔ $A<B$ را می‌توان به شکل $A-B<0$ نوشت و برای به‌دست آوردن مجموعه جواب نامعادلهٔ $A-B<0$ هنگامی که B و A چند جمله‌ای هستند، کافی است جواب‌های معادلهٔ $A-B=0$ را به دست آوریم، بعد از آن حل کردن نامعادله ساده است یعنی درواقع برای حل نامعادلهٔ $A<B$ ابتدا باید معادلهٔ $A=B$ را حل کنیم، بقیهٔ مسیر ساده است.

یک نکته هم متقارن بودن نمودار منحنی $y=ax^2+bx+c$ است، طی بحثی کوتاه این مطلب دیده می‌شود که نمودار سهمی حالتی متقارن دارد مثل نمودار $y=x^2$ که محور تقارن آن خط $x=0$ است. محور تقارن سهمی و نقطهٔ حداکثر و یا حداقل آن هم از بحث‌های مهم این فصل است.

به یاد بیاورید که سال گذشته با کمک گرفتن از رابطهٔ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ بعضی معادلات درجهٔ دوم را تجزیه کردیم یعنی به‌عنوان مثال برای تجزیهٔ عبارت x^2+5x+6 به‌دنبال دو عدد می‌گشتیم که مجموعشان ۵ باشد و حاصلضربشان ۶ و بعد می‌دیدیم که ۳ و ۲ این ویژگی را دارند و می‌نوشتیم:

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

برای تجزیهٔ x^2+px+q هم به‌دنبال b و a می‌گشتیم که $ab=q$ و $a+b=p$ باشد. حال شما ابتدا به روابط زیر دقت کنید:

$(r+\sqrt{s})(r-\sqrt{s})=r^2-s$ ، $(r+\sqrt{s})+(r-\sqrt{s})=2r$

با فرض $a=r+\sqrt{s}$ و $b=r-\sqrt{s}$، سعی کنید r، s و بعد a و b را بیابید و سپس با استفاده از تجزیه جواب‌های معادلات زیر را به دست آورید.

$x^2+x-12=0$

$x^2+5x+5=0$

$x^2+x-3=0$

◆ با خیال راحت مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+2}<0$ را بیابید.

راهنمایی: آسان است.

درس اول: معادله‌ها و نامعادله‌ها

معادلهٔ درجهٔ دوم و روش‌های مختلف حل آن

معمولاً وقتی می‌خواهیم مسأله‌ای را حل کنیم پس از قدری محاسبه به یک معادله می‌رسیم و برای یافتن جواب مسأله باید جواب و یا جواب‌های آن معادله را بیابیم.

در سال‌های گذشته با روش یافتن جواب بعضی از معادلات آشنا شدیم.

به عنوان مثال روش کلّی یافتن جواب معادلات خطی را آموختیم. در این درس می‌خواهیم روش کلّی یافتن جواب معادلات درجهٔ دوم را بیاموزیم.

تعریف یک معادلهٔ درجهٔ دوم، معادله‌ای است که پس از ساده شدن به شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ درمی‌آید که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند.

منظور از حل معادلهٔ درجهٔ دوم این است که x هایی را که به ازای آن‌ها رابطهٔ $ax^2+bx+c=0$ برقرار است، بیابیم.

اولین روشی که برای حل یک معادله به ذهن می‌رسد، روش حدس و گمان است، که گاهی هم نتیجه می‌دهد. از آن‌جا که محاسبهٔ مقدار یک چندجمله‌ای درجهٔ دو با ضرایب کوچک به ازای مقادیر کوچک مثل اعداد صحیح بین ۵- و ۵ ساده است، گاهی با این محاسبات به نتیجه می‌رسیم.

به تمرین

جواب‌های معادلات زیر را حدس بزنید.

(راهنمایی: یکی از معادلات جواب ندارد و یکی از معادلات یک جواب صحیح دارد و ۷ تا از معادلات ۲ جواب صحیح دارند.)

$x^2+5x+6=0$	$x^2+x-6=0$	$x^2+x-2=0$
$x^2+4=0$	$x^2-9=0$	$x^2-2x+1=0$
$x^2+8x+15=0$	$x^2-5x=0$	$x^2+4x-5=0$

اگر می‌شد جواب معادلهٔ درجهٔ دوم را همیشه حدس زد، خیلی خوب می‌شد، خیلی خیلی خوب می‌شد، ولی متأسفانه نمی‌شود.

پس باید یک روش کلّی برای به دست آوردن جواب معادلهٔ درجهٔ دوم طراحی کنیم، تا هرگاه در محاسبات به معادلهٔ درجهٔ دوم رسیدیم سریع آن را حل کنیم.

ابتدا چند سؤال ساده را بررسی می‌کنیم.

سؤال

معادلات درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

الف) $(x-1)(x+4)=0$

ب) $(x+1)(2x+3)=0$

پاسخ الف) ابتدا به این می‌اندیشیم که اگر حاصل‌ضرب ۲ عدد برابر صفر باشد، آن‌گاه حداقل یکی از آن دو عدد برابر صفر است، زیرا در غیر این صورت باید دو عدد غیرصفر وجود داشته باشد که حاصل‌ضرب آن‌ها صفر شود و این غیرممکن است.

از مطلب فوق معلوم می‌شود که اگر $(x-1)(x+4)$ برابر صفر باشد آن‌گاه $(x-1)=0$ یا $(x+4)=0$

و در نتیجه $x=1$ یا $x=-4$ و البته این معادلهٔ درجهٔ دوم جواب دیگری هم ندارد.

ب) به طور مشابه از $(x+1)(2x+3)=0$ نتیجه می‌شود: $(x+1)=0$ یا $(2x+3)=0$

و در نتیجه $x=-1$ یا $x=\frac{-3}{2}$.

از سؤال فوق فهمیدیم که **«تجزیه هم چیز خوبی است»**.

یعنی برای حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم، کافی است چندجمله‌ای درجهٔ دوم آن را تجزیه کنیم.

سؤال

معادلات درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

الف) $x^2-4=0$ ب) $x^2-7=0$ ج) $3x^2-5=0$

پاسخ الف) برای یافتن پاسخ معادلهٔ $x^2-4=0$ می‌توانیم به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

روش اول: ریشهٔ دوم $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp\sqrt{4}=\mp 2$

روش دوم: تجزیه $x^2-4=0 \Rightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x-2=0$ یا $x+2=0 \Rightarrow x=2$ یا $x=-2$

جواب روش اول با استفاده از تعریف مفهوم ریشه و جواب روش دوم با استفاده از تجزیه به کمک اتحاد مزدوج به دست آمد. البته همان‌طور که می‌بینیم هر دو روش حل، جواب یکسانی داشتند. معادلات بعدی را هم به روشی مشابه حل می‌کنیم.

ب)

روش اول: ریشهٔ دوم $x^2-7=0 \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow x=\mp\sqrt{7}$

روش دوم: تجزیه $x^2-7=0 \Rightarrow x^2-(\sqrt{7})^2=0 \Rightarrow (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0 \Rightarrow x-\sqrt{7}=0$ یا $x+\sqrt{7}=0 \Rightarrow x=\sqrt{7}$ یا $x=-\sqrt{7}$

ج)

روش اول: ریشهٔ دوم $3x^2-5=0 \Rightarrow 3x^2=5 \Rightarrow x^2=\frac{5}{3} \Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{5}{3}}=\mp\frac{\sqrt{15}}{3}$

روش دوم: تجزیه $3x^2-5=0 \Rightarrow 3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)=0 \Rightarrow 3\left(x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2\right)=0 \Rightarrow 3\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=0$

$\Rightarrow x-\sqrt{\frac{5}{3}}=0$ یا $x+\sqrt{\frac{5}{3}}=0 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{3}}$ یا $x=-\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{15}}{3}$ یا $x=-\frac{\sqrt{15}}{3}$

سؤال بعدی قدری متفاوت است.

سؤال

معادلات درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

الف) $(x+1)^2-3=0$ ب) $2(x-1)^2=7$

پاسخ باز هم به هر دو روش گفته شده در سؤال قبل، معادلات را حل می‌کنیم:

الف)

روش اول: $(x+1)^2-3=0 \Rightarrow (x+1)^2=3 \Rightarrow (x+1)=\mp\sqrt{3} \Rightarrow x=-1\mp\sqrt{3}$

روش دوم: $(x+1)^2-3=0 \Rightarrow (x+1)^2-(\sqrt{3})^2=0 \Rightarrow (x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow x+1-\sqrt{3}=0$ یا $x+1+\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=-1+\sqrt{3}$ یا $x=-1-\sqrt{3}$

ب)

روش اول: $2(x-1)^2=7 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{7}{2} \Rightarrow (x-1)=\mp\sqrt{\frac{7}{2}}=\mp\frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow x=1\mp\frac{\sqrt{14}}{2}$

روش دوم: $2(x-1)^2=7 \Rightarrow 2(x-1)^2-7=0 \Rightarrow 2\left((x-1)^2-\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2\right)=0 \Rightarrow 2\left(x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(x-1+\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=0$

$\Rightarrow x-1-\sqrt{\frac{7}{2}}=0$ یا $x-1+\sqrt{\frac{7}{2}}=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{\frac{7}{2}}$ یا $x=1-\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow x=1+\frac{\sqrt{14}}{2}$ یا $x=1-\frac{\sqrt{14}}{2}$

راهی که در حل مسأله‌های قبلی طی شد، به ما یک ایده برای حل معادلات درجهٔ دوم ارائه می‌کند:

«اگر بتوانیم ax^2+bx+c را به شکل $a(x+p)^2+q$ بنویسیم که p و q اعدادی حقیقی‌اند، آن‌گاه به راحتی می‌توانیم معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را حل کنیم.»

سؤال

چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم زیر را به شکل $(x+p)^2+q$ بنویسید که p و q اعدادی حقیقی‌اند.

الف) x^2+2x-7 ب) x^2-2x+3 ج) x^2+6x+7 د) $x^2+\frac{3}{7}x+1$

پاسخ از رابطهٔ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ نتیجه می‌شود: $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

با استفاده از این رابطه به راحتی می‌توان چندجمله‌ای‌های گفته شده را به شکل خواسته شده نوشت:

الف) $x^2+2x-7=(x^2+2x)-7=\left(\left(x+\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2\right)-7=(x+1)^2-8$

ب) $x^2-2x+3=(x^2-2x)+3=\left(\left(x+\frac{-2}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{2}\right)^2\right)+3=(x-1)^2+2$

ج) $x^2+6x+7=\left(\left(x+\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2\right)+7=(x+3)^2-2$

د) $x^2+\frac{3}{7}x+1=\left(\left(x+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\right)^2\right)+1=\left(x+\frac{3}{14}\right)^2+1-\left(\frac{3}{14}\right)^2=\left(x+\frac{3}{14}\right)^2+\frac{187}{196}$

سؤال

چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم زیر را به شکل $a(x+p)^2+q$ بنویسید که a و p و q اعدادی حقیقی‌اند.

الف) $2x^2+4x-5$ ب) $4x^2-3x+6$ ج) $-2x^2+x+3$ د) $4x^2+3x-1$

پاسخ اگر از ضریب x^2 فاکتور بگیریم، بقیه مسیر حل مسأله مشابه سؤال قبل خواهد بود.

الف) $2x^2+4x-5=2\left(x^2+\frac{4}{2}x-\frac{5}{2}\right)=2\left(x^2+2x-\frac{5}{2}\right)=2\left(\left(x+\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)^2-7$

ب) $4x^2-3x+6=4\left(x^2-\frac{3}{4}x+\frac{6}{4}\right)=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\times\frac{-3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{4}\right)^2+\frac{6}{4}\right)=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}+6=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{87}{16}$

ج) $-2x^2+x+3=-2\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)=-2\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{-1}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\right)=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$

د) $4x^2+3x-1=4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)=4\left(\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{25}{16}$

حال با توجه به ایده‌ای که در مسأله‌های قبل مطرح شد، در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم هر معادلهٔ درجهٔ دومی را حل کنیم.

سؤال

معادلات زیر را حل کنید. (می‌توانید از نتایج مطرح شده در سؤال‌های قبل استفاده کنید.)

الف) $2x^2+4x-5=0$ ب) $4x^2-3x+6=0$ ج) $-2x^2+x+3=0$ د) $4x^2+3x-1=0$

پاسخ

الف) $2x^2+4x-5=0\Rightarrow 2(x+1)^2-7=0\Rightarrow 2(x+1)^2=7\Rightarrow (x+1)^2=\frac{7}{2}\Rightarrow x+1=\mp\sqrt{\frac{7}{2}}\Rightarrow x=-1\mp\frac{\sqrt{14}}{2}$

ب) $4x^2-3x+6=0\Rightarrow 4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{87}{16}=0$

عبارت $4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{87}{16}$ همیشه مثبت است و هرگز برابر صفر نمی‌شود، هرگز! پس این معادله جواب ندارد.

ج) $-2x^2+x+3=0\Rightarrow -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}=0\Rightarrow -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{-25}{8}\Rightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{25}{16}\Rightarrow x-\frac{1}{4}=\mp\frac{5}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{4}\mp\frac{5}{4}\Rightarrow x=\frac{1+5}{4}$ یا $x=\frac{1-5}{4}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ یا $x=-1$

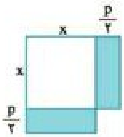
د) $4x^2+3x-1=0\Rightarrow 4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{25}{16}=0\Rightarrow 4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2=\frac{25}{16}\Rightarrow \left(x+\frac{3}{8}\right)^2=\frac{25}{64}\Rightarrow x+\frac{3}{8}=\mp\frac{5}{8}$

$\Rightarrow x=\frac{-3}{8}\mp\frac{5}{8}\Rightarrow x=\frac{-3-5}{8}$ یا $x=\frac{-3+5}{8}\Rightarrow x=-1$ یا $x=\frac{1}{4}$

روشی که برای یافتن جواب معادلهٔ درجهٔ دوم در این سؤال... بردیم، را روش مربع کامل ... ند.

روش هندسی برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم

یک روش تصویری برای معرفی این ایده وجود دارد که جالب است. فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ $x^2+px+q=0$ را حل کنیم. مربعی به ضلع x رسم می‌کنیم و دو مستطیل به عرض $\frac{p}{2}$ و طول x مانند شکل زیر به آن می‌چسبانیم. می‌بینیم که:



اولاً: مساحت کل شکل می‌شود $x\times x+2\times\frac{p}{2}\times x$ یعنی x^2+px و ثانیاً: شکل حاصل در واقع یک مربع به ضلع $x+\frac{p}{2}$ است که مربعی به ضلع $\frac{p}{2}$ از آن برداشته شده است.

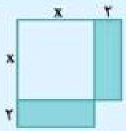
حال برای پاسخگویی به این سؤال که: «x چه باشد تا $x^2+px+q=0$ برقرار باشد؟»، می‌توان به دنبال پاسخ این سؤال بود که: «x چه باشد تا مساحت شکل فوق (x^2+px) برابر $-q$ باشد؟» و یا به عبارت دیگر:

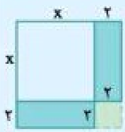
«x چه باشد تا مساحت مربعی به ضلع $x+\frac{p}{2}$ برابر $(\frac{p}{2})^2-q$ باشد؟».

این در واقع شکل هندسی مسألهٔ اولیه است و با استفاده از ساختن یک مربع کامل، جوابی برای مسأله می‌یابد.

سؤال

با استفاده از روش فوق معادلهٔ $x^2+4x-7=0$ را حل کنید.





پاسخ مربعی به ضلع x رسم می‌کنیم و دو مستطیل به عرض و طول ۲ و x به شکل مقابل به آن می‌چسبانیم.
حال مساحت شکل مقابل x^2+4x است و ما می‌خواهیم این مقدار برابر ۷ باشد، با افزودن مربع گوشه‌ای به مساحت ۴ به این شکل، مسأله را به این شکل تغییر می‌دهیم که x چه باشد تا مساحت مربعی به ضلع $x+2$ برابر $7+4=11$ باشد، خب معلوم است طول ضلع این مربع باید $\sqrt{11}$ باشد، یعنی $x+2=\sqrt{11}$ و $x=-2+\sqrt{11}$.
دقت کنید که جواب $-\sqrt{11}-2$ پرید. (چرا؟)

می‌توانیم با استفاده از روش مربع کامل، روشی کلی برای یافتن جواب معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ پیدا کنیم تا هم ببینیم جواب‌های این معادله چه ارتباطی با c و b و a دارند و هم برای حل هر معادلهٔ جدید، لازم نباشد مسیر گفته شده را دوباره طی کنیم.

حل معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right)=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})\right)$$

برای این‌که محاسبات شلوغ دیده نشود قرار می‌دهیم:

$$\Delta=b^2-4ac$$

پس رابطهٔ بالا به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$ax^2+bx+c=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

با توجه به رابطهٔ فوق دربارهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ در سه حالت مختلف می‌توان بحث کرد:

i) اگر $\Delta<0$ باشد آن‌گاه $\frac{-\Delta}{4a^2}>0$ و چون $(x+\frac{b}{2a})^2\geq 0$، در نتیجه عبارت $(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ یک عبارت همیشه مثبت خواهد بود و معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هیچ جوابی نخواهد داشت.

ii) اگر $\Delta > 0$ باشد آن‌گاه می‌توانیم $\frac{\Delta}{4a^2}$ را به شکل $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ بنویسیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)=0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\Rightarrow x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \text{ یا } x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

و معادله دو جواب خواهد داشت: $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

نکته: با دقت در محاسبات این قسمت متوجه می‌شویم که اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند آن‌گاه داریم:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

iii) اگر $\Delta=0$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=0$$

در این حالت معادلهٔ درجهٔ دوم فقط یک جواب خواهد داشت: $x=\frac{-b}{2a}$. به این جواب، ریشهٔ مضاعف (ریشهٔ تکراری) معادله هم می‌گویند.

انگار که قرار بود دو ریشه وجود داشته باشد و این یک ریشه در واقع تکرار شده است.

همان‌طور که دیده شد این روش چندان پیچیده نبود و در واقع ایدهٔ اساسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم رابطهٔ $x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ بود.

ریاضی‌دانان از زمان‌های قدیم از روش حل معادلهٔ درجهٔ دو آگاه بودند و معلوم نیست اولین فردی که این معادله را حل کرده که بوده و چه روزگاری داشته و آیا اصولاً آدم خوش‌مشربی بوده است و یا این‌که نه.

مثال‌های آموزشی

۱) هر یک از معادله‌های زیر را با استفاده از فرمول کلی حل کنید.

الف) $4x^2-13x+3=0$ ب) $b-b^2=3$ ج) $9-6z+z^2=0$

د) $\frac{a^2}{3}-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}=0$ هـ) $t^2+\sqrt{2}t-4=0$

پاسخ الف)

$$4x^2-13x+3=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times4\times3=169-48=121$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{13\pm\sqrt{121}}{2\times4}=\frac{13\pm11}{8} \Rightarrow x=\frac{13+11}{8} \text{ یا } x=\frac{13-11}{8} \Rightarrow x=3 \text{ یا } x=\frac{1}{4}$$

ب) ابتدا معادله را مرتب می‌نویسیم، یعنی اول جمله با توان ۲، بعد جمله با توان ۱ و ...

$$-b^2+b-3=0$$

$$\Delta=1^2-4\times(-3)\times(-1)=1-12=-11$$

چون $\Delta<0$ است، این معادله جواب ندارد.

ج) ابتدا معادله را مرتب می‌نویسیم:

$$z^2-6z+9=0 \Rightarrow \Delta=(-6)^2-4\times1\times9=36-36=0 \Rightarrow z=\frac{6\mp\sqrt{0}}{2} \Rightarrow z=3$$

د) می‌توانیم معادله را به همین شکل $\frac{a^2}{3}-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}=0$ در نظر بگیریم و با استفاده از روش کلی، جواب را بیابیم ولی برای راحتی محاسبات دو طرف معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم تا ضرایب، صحیح شوند:

$$2a^2-3a-9=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\times2\times(-9)=81 \Rightarrow a=\frac{3\mp\sqrt{81}}{4}=\frac{3\mp9}{4} \Rightarrow a=3 \text{ یا } a=\frac{-3}{2}$$

اگر فرمول کلی را برای همان شکل اولیهٔ معادله به کار می‌بردیم، مشخصاً باز هم باید به همان جواب‌های فوق می‌رسیدیم:

$$\frac{a^2}{3}-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \Delta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4} \Rightarrow a=\frac{\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{9}{4}}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}\mp\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow a=3 \text{ یا } a=-\frac{3}{2}$$

هـ)

$$t^2+\sqrt{2}t-4=0 \Rightarrow \Delta=(\sqrt{2})^2-4\times1\times(-4)=2+16=18 \Rightarrow t=\frac{-\sqrt{2}\mp\sqrt{18}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\mp3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=-2\sqrt{2} \text{ یا } t=\sqrt{2}$$

۲) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۰۲ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

پاسخ عدد فرد کوچک‌تر را x می‌نامیم، عدد فرد بعدی x+۲ است. اطلاعات مسأله را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $x^۲+(x+۲)^۲=۲۰۲$

حال سعی می‌کنیم مسأله را حل کنیم: $x^۲+x^۲+۴x+۴=۲۰۲ \Rightarrow ۲x^۲+۴x-۱۹۸=۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۹۹=۰ \Rightarrow \Delta=۲^۲-۴\times۱\times(-۹۹)=۴۰۰$

$$x=\frac{-۲\mp\sqrt{۴۰۰}}{۲}=\frac{-۲\mp۲۰}{۲}=-۱\mp۱۰ \Rightarrow x=-۱۱ \text{ یا } x=۹$$

اگر فرض کنیم اعداد فرد، اعدادی مثبت‌اند، باید بگوییم $x=۹$ قابل قبول است و در نتیجه $x+۲$ می‌شود ۱۱ و با یک محاسبهٔ ساده هم می‌بینیم که $۹^۲+۱۱^۲=۲۰۲$.

۳) در یک مسابقهٔ دوره‌ای تنیس که بین n نفر برگزار شد، هر دو نفر با هم دقیقاً یک بار مسابقه دادند. اگر تعداد کل بازی‌های انجام شده ۷۸ تا باشد، n چند بوده است؟

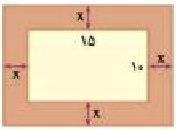
پاسخ اگر این‌گونه فکر کنیم که هر فرد دقیقاً با $n-۱$ نفر بازی کرده است، پس تعداد کل بازی‌ها می‌شود $n(n-۱)$ آن‌گاه با قدری دقت می‌بینیم که هر بازی را دقیقاً دو بار شمرده‌ایم یک بار به حساب اینوری و یک بار هم به حساب آنوری. پس تعداد محاسبه شده توسط ما دقیقاً ۲ برابر تعداد بازی‌هاست و در نتیجه تعداد بازی‌ها می‌شود $\frac{n(n-۱)}{۲}$. می‌توانیم طور دیگری هم بیندیشیم: فرض کنیم در هر بازی به هر کدام از بازیکنان یک توپ هدیه دهیم. با این حساب چون در هر بازی ۲ توپ هدیه داده می‌شود، تعداد توپ‌های هدیه داده شده دو برابر تعداد بازی‌ها خواهد بود و از طرف دیگر تعداد توپ‌های هر کس $n-۱$ تا خواهد بود و مجموع توپ‌های هدیه داده شده می‌شود $n(n-۱)$. از این دو مطلب نتیجه می‌شود $n(n-۱)$ دو برابر تعداد بازی‌هاست و در نتیجه تعداد بازی‌ها می‌شود $\frac{n(n-۱)}{۲}$.

حال برای پاسخگویی به این مسأله می‌گوییم: $\frac{n(n-۱)}{۲}=۷۸ \Rightarrow n(n-۱)=۱۵۶$

می‌توانیم با استفاده از فرمول کلی این معادلهٔ درجهٔ دوم را حل کنیم ولی روش راحت‌تری هم هست، در واقع این مسأله می‌گوید حاصل‌ضرب کدام دو عدد متوالی می‌شود ۱۵۶؟ با توجه به این‌که $۱۲\times۱۳=۱۵۶$ معلوم می‌شود $n=۱۳$.

۴) یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

پاسخ روش اول: طول مستطیل بزرگ‌تر برابر است با $۱۵+۲x$ و عرض مستطیل بزرگ‌تر برابر است با $۱۰+۲x$ و در نتیجه مساحت مستطیل بزرگ‌تر می‌شود $(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)$، طبق اطلاعات مسأله مساحت مستطیل بزرگ‌تر ۳۰۰ سانتی‌متر مربع است، در نتیجه داریم:



$$(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)=۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲+۵۰x+۱۵۰=۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲+۵۰x-۱۵۰=۰$$

$$\Delta=۵۰^۲-۴\times۴\times(-۱۵۰)=۵۰\times(۵۰+۴\times۴\times۳)=۵۰\times۲\times۴۹=۷۰^۲$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۵۰\mp\sqrt{۷۰^۲}}{۸}=\frac{-۵۰\mp۷۰}{۸} \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \text{ یا } x=-۱۵$$

جواب $x=۲/۵$ قابل قبول است. پس ابعاد این قاب عکس ۱۵ و ۲۰ است.

روش دوم: می‌توانستیم از همان معادلهٔ $(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)=۳۰۰$، $۱۰+۲x$ را y بنامیم آن‌گاه معادله می‌گفت $(y+۵)y=۳۰۰$، یعنی ۳۰۰ را به صورت حاصل‌ضرب دو عدد که ۵ تا با هم فاصله دارند بنویسید، با قدری دقت معلوم می‌شد که جواب $۳۰۰=۱۵\times۲۰$ است. یعنی $y=۱۵$ و در نتیجه $۱۰+۲x=۱۵$ یعنی $x=۲/۵$ است.

۵) یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسید که جواب‌های آن ۷- و ۳ باشد.

پاسخ هر معادله‌ای به شکل $a(x-۳)(x-(-۷))=۰$ که a یک عدد حقیقی غیرصفر است، یک جواب این سؤال است.

۶) جواب‌های معادلهٔ $x^۴-۴x^۲+۲=۰$ را بیابید.

پاسخ اگر $x^۲$ را y بنامیم، معادله به شکل مقابل درمی‌آید: $y^۲-۴y+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱۶-۸=۸ \Rightarrow y=\frac{۴\mp\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۴\mp۲\sqrt{۲}}{۲}=۲\mp\sqrt{۲}$

حال با توجه به این‌که $y=x^۲$، جواب‌های معادلهٔ اولیه را می‌توان از رابطهٔ مقابل به دست آورد: $x^۲=۲\mp\sqrt{۲} \Rightarrow x=\mp\sqrt{۲\mp\sqrt{۲}}$

چون $۲\mp\sqrt{۲}$ هر دو اعدادی مثبت‌اند، پس معادله درجهٔ چهارم اولیه، ۴ جواب دارد.

۷) اگر $x=\frac{۲}{۵}$ ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲+(k+۱)x-۲k=۰$ باشد، آن‌گاه مقدار k را بیابید.

پاسخ مقدار $x=\frac{۲}{۵}$ باید در معادله صدق کند در نتیجه باید داشته باشیم:

$$۳\times\left(\frac{۲}{۵}\right)^۲+(k+۱)\times\frac{۲}{۵}-۲k=۰ \Rightarrow ۲k-\frac{۲}{۵}k=\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{۸}{۵}k=\frac{۲۲}{۲۵} \Rightarrow k=\frac{۱۱}{۲۰}$$

تجزیه سریع بعضی چندجمله‌ای‌های درجه ۲

دیدیم که اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند آن‌گاه به راحتی می‌توان چندجمله‌ای ax^2+bx+c را تجزیه کرد و در واقع داریم:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

گاهی اوقات به کمک اتحاد زیر می‌توان فوری یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ را تجزیه کرد:

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

این اتحاد در واقع می‌گوید:

اگر می‌خواهید چندجمله‌ای x^2+px+q را تجزیه کنید، سعی کنید دو عدد بیابید به طوری که مجموع آن‌ها p و حاصل‌ضرب آن‌ها q باشد.

سؤال

چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) x^2+3x+2 ب) x^2-5x+4 ج) x^2-5x+6 د) $4x^2-12x+8$ هـ) x^2+7x+8

پاسخ الف) دنبال دو عدد می‌گردیم که حاصل‌ضربشان ۲ و حاصل جمعشان ۳ باشد، با قدری دقت می‌بینیم که دو عدد ۱ و ۲ این ویژگی را دارند، پس:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

ب) دنبال دو عدد می‌گردیم که حاصل‌ضربشان ۴ و حاصل جمعشان ۵- باشد، می‌بینیم که دو عدد ۴- و ۱- این ویژگی را دارند، پس:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

ج) دنبال دو عدد می‌گردیم که حاصل‌ضربشان ۶ و حاصل جمعشان ۵- باشد، می‌بینیم که دو عدد ۳- و ۲- این ویژگی را دارند، پس:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

د) ابتدا از ۴ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$4x^2-12x+8=4(x^2-3x+2)$$

حال برای تجزیهٔ x^2-3x+2 دنبال دو عدد می‌گردیم که حاصل‌ضربشان ۲ و حاصل جمعشان ۳- باشد، می‌بینیم که دو عدد ۲- و ۱- این ویژگی را دارند، پس:

$$4x^2-12x+8=4(x-1)(x-2)$$

هـ) دنبال دو عدد می‌گردیم که حاصل‌ضربشان ۸ و حاصل جمعشان ۷ باشد، هر چه می‌گردیم، پیدا نمی‌کنیم. حالا چه باید کرد؟ چه‌طور می‌شود آن دو عدد را پیدا کرد؟ یعنی چگونه و از چه طریقی؟ کنفوسیوس می‌گوید: به تاریکی لعنت نفرستید، یک شمع روشن کنید.

خُب، ما هم می‌بینیم که این روش جواب نداد، از روش کلّی استفاده می‌کنیم، ابتدا جواب‌های معادلهٔ داده شده را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+7x+8=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=7^2-4\times1\times8=17 \Rightarrow x=\frac{-7\mp\sqrt{17}}{2}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^2+7x+8=\left(x+\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$$

خوب شد که زیاد دنبال دو عدد که حاصل‌ضربشان ۸ باشد و حاصل جمعشان ۷، نگشتیم زیرا می‌بینیم که آن دو عدد $\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{7-\sqrt{17}}{2}$ بوده‌اند. خوب شد حرف کنفوسیوس یادمان آمد، و إلّا شاید تا پایان تاریخ در این کوچه بن‌بست گیر می‌افتادیم.

بیشتـــر بـــدانیـــم

یک روش دیگر هم برای حل معادلهٔ درجه ۲ مطرح کنیم. دیدیم که برای تجزیهٔ چندجمله‌ای ax^2+bx+c باید دو عدد را با این ویژگی بیابیم که حاصل جمعشان $\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضربشان $\frac{c}{a}$ باشد. از این مطلب می‌توان به طریقی برای تجزیهٔ چندجمله‌ای درجهٔ ۲ استفاده کرد. با یک مثال ایدهٔ مورد نظر را توضیح می‌دهیم: می‌خواهیم چندجمله‌ای درجهٔ دوم $2x^2-7x+1$ را تجزیه کنیم و ریشه‌های آن را به دست آوریم. به دنبال دو عدد q و p هستیم که $pq=\frac{1}{2}$ ، $p+q=\frac{-7}{2}$ باشد. در واقع با دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی $\begin{cases}p+q=\frac{-7}{2}\\ pq=\frac{1}{2}\end{cases}$ مواجهیم. $p+q$ را داریم اگر $p-q$ را هم داشته باشیم به راحتی q و p را به دست خواهیم آورد (چگونه؟) ابتدا سعی می‌کنیم مقدار $(p-q)^2$ را به‌دست آوریم:

$$(p-q)^2=p^2-2pq+q^2=p^2+2pq+q^2-4pq=(p+q)^2-4pq=\left(\frac{-7}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{2}=\frac{41}{4}\Rightarrow(p-q)^2=\frac{41}{4}\Rightarrow p-q=\pm\sqrt{\frac{41}{4}}=\pm\frac{\sqrt{41}}{2}$$

با فرض $p-q=\frac{\sqrt{41}}{2}$ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}p+q=\frac{-7}{2}\\ p-q=\frac{\sqrt{41}}{2}\end{cases}\Rightarrow 2p=\frac{-7}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}\Rightarrow p=\frac{-7+\sqrt{41}}{4}\xrightarrow{p+q=\frac{-7}{2}}\frac{-7+\sqrt{41}}{4}+q=\frac{-7}{2}\Rightarrow q=\frac{-7-\sqrt{41}}{4}$$

بنابراین چون با یافتن q و p می‌توان چندجمله‌ای ax^2+bx+c را به صورت $a(x+p)(x+q)$ نوشت، می‌توان گفت ریشه‌های این چندجمله‌ای $-p$ و $-q$ است و در مثال فوق ریشه‌ها $\frac{7-\sqrt{41}}{4}$ و $\frac{7+\sqrt{41}}{4}$ خواهد بود. حالت $p-q=\frac{-\sqrt{41}}{2}$ را بررسی نکردیم. اگر این کار را انجام دهیم به چه نتیجه‌ای می‌رسیم؟

برخی معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم

گاهی مسأله در نگاه اول یک معادلهٔ درجهٔ دوم نیست ولی در نگاه دوم می‌بینیم که با قدری بحث یا محاسبه، می‌توانیم به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برسیم. با یک مثال این مطلب را روشن می‌کنیم. فرض کنید به دنبال عددی می‌گردیم که با معکوسش به علاوهٔ یک برابر باشد. خب آن عدد را x فرض می‌کنیم، معکوسش $\frac{1}{x}$ می‌شود و می‌خواهیم x را بیابیم به طوری‌که: $x=\frac{1}{x}+1$

با ضرب طرفین معادله در x می‌رسیم به $x^2=x+1$ و با استفاده از روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دو، جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x^2-x-1=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=1-4\times1\times(-1)=5\Rightarrow x=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$$

سـؤال

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-1}{2x-1}=\frac{3x}{x-2}$

ب) $(x+2)^3=x^3-3$

پاسخ

الف) $\frac{x-1}{2x-1}=\frac{3x}{x-2}\Rightarrow(x-1)(x-2)=3x(2x-1)\Rightarrow x^2-3x+2=6x^2-3x\Rightarrow 5x^2-2=0\Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{2}{5}}=\mp\frac{\sqrt{10}}{5}$

ب) $(x+2)^3=x^3-3\Rightarrow x^3+6x^2+12x+8=x^3-3\Rightarrow 6x^2+12x+11=0\Rightarrow\Delta=(12)^2-4\times6\times11=12^2-12\times22<0$

چون $\Delta<0$ است پس این معادله جواب ندارد.

برخی دستگاه‌های دو معادله دومجهولی را هم می‌توان به کمک معادله درجهٔ دوم حل کرد. به عنوان مثال جواب معادلاتی به شکل زیر که در آن b و a اعدادی حقیقی‌اند را، می‌توان به راحتی به دست آورد:

$$\begin{cases}xy=a\\ x+y=b\end{cases}$$

از $x+y=b$ نتیجه می‌گیریم $y=b-x$ و با جای‌گذاری آن در معادلهٔ $xy=a$ به معادلهٔ $x(b-x)=a$ می‌رسیم، که یک معادلهٔ درجهٔ دوم است و سپس مقادیر x و در پی آن مقادیر y را به دست می‌آوریم. دستگاه‌های مشابه را هم می‌توان به روشی مشابه حل کرد.

مثال‌های آموزشی

۱) **معادلات زیر را حل کنید.**

الف) $\begin{cases} xy=6 \\ x+y=5 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} xy=-4 \\ x+2y=7 \end{cases}$

پاسخ الف) از $x+y=5$ نتیجه می‌گیریم که $y=5-x$ و با جای‌گذاری آن در معادلهٔ $xy=6$ به معادلهٔ $x(5-x)=6$ می‌رسیم، یعنی $x^2-5x+6=0$، جواب‌های این معادله $x=2$ و $x=3$ هستند. به ازای $x=2$ به دست می‌آید $y=3$ و به ازای $x=3$ به دست می‌آید $y=2$. پس جواب‌های این دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی می‌شود:

$$(x,y)=(2,3) \;,\; (x,y)=(3,2)$$

ب) از $x+2y=7$ نتیجه می‌گیریم $x=7-2y$ و با جای‌گذاری آن در معادلهٔ $xy=-4$ به معادلهٔ $(7-2y)y=-4$ می‌رسیم، یعنی $2y^2-7y-4=0$.
جواب‌های معادلهٔ بالا را با استفاده از روش کلّی به دست می‌آوریم:

$$\Delta=7^2-4\times2\times(-4)=49+32=81 \Rightarrow y=\frac{7\mp\sqrt{81}}{4} \Rightarrow y=4 \text{ یا } y=\frac{-1}{2}$$

با استفاده از $xy=-4$، به ازای $y=4$ به دست می‌آید $x=-1$ و به ازای $y=\frac{-1}{2}$ به دست می‌آید $x=8$. پس جواب‌های این دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی می‌شود:

$$(x,y)=(-1,4) \;,\; (x,y)=\left(8,\frac{-1}{2}\right)$$

۲) **اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۳ سال است. ۶ سال پیش حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۱۰ بود. سن هر کدام از آن‌ها چه‌قدر است؟**

پاسخ سن برادر بزرگ‌تر را x و سن برادر کوچک‌تر را y فرض می‌کنیم. اطلاعات مسأله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ (x-6)(y-6)=10 \end{cases}$$

از $x-y=3$ نتیجه می‌گیریم $y=x-3$ و با جای‌گذاری آن در معادلهٔ دوم به معادلهٔ مقابل می‌رسیم: $(x-6)((x-3)-6)=10$

یعنی: $(x-6)(x-9)=10 \Rightarrow x^2-15x+44=0$

جواب‌های این معادله را با استفاده از روش کلی به دست می‌آوریم:

$$\Delta=15^2-4\times1\times44=225-176=49 \Rightarrow x=\frac{15\mp\sqrt{49}}{2} \Rightarrow x=11 \text{ یا } x=4$$

با استفاده از $y=x-3$، به ازای $x=11$ به دست می‌آید $y=8$ و به ازای $x=4$ به دست می‌آید $y=1$.
جواب اول یعنی $y=8$ و $x=11$ که قابل قبول است، جواب دوم را خود دانید:
آیا کودک ۴ ساله ۶ سال پیش ۲- ساله بود؟ آیا کودک ۱ ساله ۶ سال پیش ۵- ساله بود؟

مسأله این است، بود یا نبود؟

یادداشت

گاج

٤

کافه سؤال

۱ معادلات درجهٔ دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $3x^2+7x=0$

ب) $x^2-3x-10=0$

ج) $5x^2-6=0$

د) $x^2-2x+1=0$

هـ) $x^2+x-12=0$

و) $x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{12})x+6=0$

۲ معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2+x-1=0$ ب) $x^2-x+1=0$ ج) $x^2-x-1=0$

۳ معادلات زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2+4x-1=0$ ب) $x^2-4x+2=0$ ج) $x^2-4x-3=0$

۴ معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید.

الف) $1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}=0$ ب) $1+\frac{1}{1-x}=1+3x$ ج) $\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{x^2+5}{x-7}$ د) $x^2+(x-1)^2+(x+1)^2=5$

۵ معادلات درجهٔ دومی بسازید که در آن‌ها ضریب x^2، ۱ باشد و ریشه‌های آن جفت اعداد زیر باشند.

الف) $2,-5$ ب) $\frac{3+\sqrt{5}}{7},\frac{3-\sqrt{5}}{7}$ ج) $2-\sqrt{3},\sqrt{6}$

۶ ثابت کنید مجموع جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، $\frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{c}{a}$ است.

۷ الف) ثابت کنید اگر مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ برابر صفر باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌های آن برابر ۱ است.

ب) برای آن‌که -1 یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم باشد، چه شرطی لازم و کافی است؟

۸ میانگین دو عدد برابر ۵ است و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۶. آن دو عدد را بیابید.

۹ دستگاه‌های معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} xy=2 \\ x-3y=-5 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} xy=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \end{cases}$

۱۰ به ازای کدام مقادیر k، هر دو ریشهٔ چندجمله‌ای x^2+x+k منفی هستند؟

گزینهٔ چنـــد؟!!!!

۱- اگر α یک جواب معادلهٔ $2x^2-3x-7=0$ باشد آن‌گاه مقدار $2\alpha^2-3\alpha+1$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲- اگر α یک جواب معادلهٔ $2x^2-4x-1=0$ باشد آن‌گاه مقدار $(1-\alpha)^2$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۳- عددی مثبت را با ۳ جمع کردیم و بر ۳ تقسیم کردیم و به توان ۲ رساندیم و حاصل ۲ شد. آن عدد کدام است؟

۱) $-2+\sqrt{3}$ ۲) $3-\sqrt{2}$ ۳) $3-\sqrt{3}$ ۴) $-3+3\sqrt{2}$

۴- جواب‌های معادلهٔ $3t^2-2+t=4$ کدام‌اند؟

۱) $\frac{-1}{6}\mp\sqrt{2}$ ۲) $\frac{-1\mp\sqrt{73}}{6}$ ۳) $\frac{2\mp\sqrt{35}}{2}$ ۴) $\frac{3\mp\sqrt{2}}{3}$

۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x-1)^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$ کدام است؟

۱) $-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$ ۲) $5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+10$ ۳) ۱ ۴) ۲

۶- جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx-(a+b)=0$ کدام‌اند؟

۱) $1, a+b$ ۲) $-1, a+b$ ۳) $1, -a-b$ ۴) $1, -1-\frac{b}{a}$

۷- جواب‌های کدام‌یک از معادلات زیر $\frac{1\mp\sqrt{2}}{3}$ است؟

۱) $3x^2-2x+1=0$ ۲) $6x^2-4x+3=0$

۳) $9x^2-6x-1=0$ ۴) $9x^2-6x+1=0$

۸- به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ $x(3x+8)=a$ دقیقاً یک جواب دارد؟

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۹- مجموع دو عدد ۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها نیز ۹ است، قدر مطلق تفاضل آن‌ها چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

۱۰- اگر ۱۰ یک جواب معادلهٔ $kx^2-k-x=1$ باشد آن‌گاه جواب دیگر آن چیست؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) -1

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

الف) $3x^2+7x=0 \Rightarrow x(3x+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x+7=0 \Rightarrow x=-\frac{7}{3} \end{cases}$

ب) $x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=5 \end{cases}$

ج) $5x^2-6=0 \Rightarrow (\sqrt{5}x+\sqrt{6})(\sqrt{5}x-\sqrt{6})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{6}{5}} \\ x=\sqrt{\frac{6}{5}} \end{cases}$

د) $x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

هـ) $x^2+x-12=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \end{cases}$

و) $x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{12})x+6=0 \Rightarrow (x+\sqrt{3})(x+\sqrt{12})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{12} \end{cases}$

۲

الف) $x^2+x-1=0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \Rightarrow x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

ب) $x^2-x+1=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$

عبارت $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ همیشه مثبت است و هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود، پس این معادله جواب ندارد.

ج) $x^2-x-1=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \Rightarrow x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

۳

الف) $x^2+4x-1=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(-1)(1)=20 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{20}}{2}=-2-\sqrt{5} \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{20}}{2}=-2+\sqrt{5} \end{cases}$$

ب) $x^2-4x+2=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4(2)(1)=8 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{8}}{2}=2-\sqrt{2} \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{8}}{2}=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

ج) $x^2-4x-3=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4(-3)(1)=28 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{28}}{2}=2-\sqrt{7} \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{28}}{2}=2+\sqrt{7} \end{cases}$$

[۴]

الف) $1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}=0 \xrightarrow{\times x^2} x^2+3x+5=0$ ، $\Delta=b^2-4ac=9-20=-11 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

ب) $1+\frac{1}{1-x}=1+3x \xrightarrow{\times(1-x)} (1-x)+1=(1+3x)(1-x) \Rightarrow 1-x+1=1-x+3x-3x^2 \Rightarrow 3x^2-3x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=9-12=-3<0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

ج) $\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{x^2+5}{x-7} \Rightarrow (x-3)(x^2+5)=(x-7)(x^2-1)$

$\Rightarrow x^3+5x-3x^2-15=x^3-7x^2-x+7 \Rightarrow 4x^2+6x-22=0 \Rightarrow 2x^2+3x-11=0$

$$\Delta=b^2-4ac=9+88=97 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{97}}{4} \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{97}}{4} \end{cases}$$

د) $x^2+(x-1)^2+(x+1)^2=5 \Rightarrow x^2+x^2-2x+1+x^2+2x+1=5 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$

[۵]

الف) $(x-2)(x+5)=x^2+3x-10=0$

ب) $(x-\frac{3+\sqrt{5}}{7})(x-\frac{3-\sqrt{5}}{7})=0 \Rightarrow x^2-x(\frac{3+\sqrt{5}}{7})-x(\frac{3-\sqrt{5}}{7})+(\frac{3+\sqrt{5}}{7})(\frac{3-\sqrt{5}}{7})=0$

$\Rightarrow x^2-x(\frac{6}{7})+\frac{4}{49}=0 \Rightarrow x^2-\frac{6}{7}x+\frac{4}{49}=0$

ج) $(x-(2-\sqrt{3}))(x-\sqrt{6})=0 \Rightarrow x^2-\sqrt{6}x-(2-\sqrt{3})x+\sqrt{6}(2-\sqrt{3})=0 \Rightarrow x^2-(2+\sqrt{6}-\sqrt{3})x+2\sqrt{6}-\sqrt{18}=0$

[۶]

$ax^2+bx+c=0$

$$\Delta=b^2-4ac \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$x_1+x_2=\frac{-2b-\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\times x_2=(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

[۷]

الف) حاصل عبارت ax^2+bx+c به ازای $x=1$ برابر $a+b+c$ است. اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه $x=1$ ریشهٔ این چندجمله‌ای خواهد بود.

ب) اگر -1 یک جواب معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت: $a(-1)^2+b\times(-1)+c=0 \Rightarrow a-b+c=0 \Rightarrow a+c=b$

[۸]

میانگین: $\frac{x+y}{2}=5 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x \; (*)$

حاصل‌ضرب: $x\times y=6 \xrightarrow{(*)} x(10-x)=6 \Rightarrow 10x-x^2=6 \Rightarrow x^2-10x+6=0$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $\Delta=b^2-4ac \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-(4)(6)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{76}}{2}=\frac{10\pm2\sqrt{19}}{2}=5\pm\sqrt{19}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=5+\sqrt{19} \Rightarrow y_1=10-5-\sqrt{19}=5-\sqrt{19} \\ x_2=5-\sqrt{19} \Rightarrow y_2=10-5+\sqrt{19}=5+\sqrt{19} \end{cases}$$

بنابراین، این دو عدد $5+\sqrt{19}$ و $5-\sqrt{19}$ هستند.

۴

الف) $۱+\frac{۳}{x}+\frac{۵}{x^۲}=۰ \xrightarrow{\times x^۲} x^۲+۳x+۵=۰ \,,\, \Delta=b^۲-۴ac=۹-۲۰=-۱۱ \Rightarrow \Delta<۰ \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

ب) $۱+\frac{۱}{۱-x}=۱+۳x \xrightarrow{\times(۱-x)} (۱-x)+۱=(۱+۳x)(۱-x) \Rightarrow ۱-x+۱=۱-x+۳x-۳x^۲ \Rightarrow ۳x^۲-۳x+۱=۰$

$\Delta=b^۲-۴ac=۹-۱۲=-۳<۰ \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

ج) $\frac{x^۲-۱}{x-۳}=\frac{x^۲+۵}{x-۷} \Rightarrow (x-۳)(x^۲+۵)=(x-۷)(x^۲-۱)$

$\Rightarrow x^۳+۵x-۳x^۲-۱۵=x^۳-۷x^۲-x+۷ \Rightarrow ۴x^۲+۶x-۲۲=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۳x-۱۱=۰$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹+۸۸=۹۷ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۳-\sqrt{۹۷}}{۴} \\ x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۳+\sqrt{۹۷}}{۴} \end{cases}$$

د) $x^۲+(x-۱)^۲+(x+۱)^۲=۵ \Rightarrow x^۲+x^۲-۲x+۱+x^۲+۲x+۱=۵ \Rightarrow ۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$

۵

الف) $(x-۲)(x+۵)=x^۲+۳x-۱۰=۰$

ب) $(x-\frac{۳+\sqrt{۵}}{۷})(x-\frac{۳-\sqrt{۵}}{۷})=۰ \Rightarrow x^۲-x(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۷})-x(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۷})+(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۷})(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۷})=۰$

$\Rightarrow x^۲-x(\frac{۶}{۷})+\frac{۴}{۴۹}=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۶}{۷}x+\frac{۴}{۴۹}=۰$

ج) $(x-(۲-\sqrt{۳}))(x-\sqrt{۶})=۰ \Rightarrow x^۲-\sqrt{۶}x-(۲-\sqrt{۳})x+\sqrt{۶}(۲-\sqrt{۳})=۰ \Rightarrow x^۲-(۲+\sqrt{۶}-\sqrt{۳})x+۲\sqrt{۶}-\sqrt{۱۸}=۰$

۶

$ax^۲+bx+c=۰$

$$\Delta=b^۲-۴ac \quad \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$$

$$x_۱+x_۲=\frac{-۲b-\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}}{۲a}=-\frac{۲b}{۲a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_۱\times x_۲=(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a})(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a})=\frac{(-b)^۲-(\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-b^۲+۴ac}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

۷

الف) حاصل عبارت $ax^۲+bx+c$ به ازای $x=۱$ برابر $a+b+c$ است. اگر $a+b+c=۰$، آن‌گاه $x=۱$ ریشهٔ این چندجمله‌ای خواهد بود.

ب) اگر -۱ یک جواب معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشد آن‌گاه خواهیم داشت: $a(-۱)^۲+b\times(-۱)+c=۰ \Rightarrow a-b+c=۰ \Rightarrow a+c=b$

۸

میانگین: $\frac{x+y}{۲}=۵ \Rightarrow x+y=۱۰ \Rightarrow y=۱۰-x \ (*)$

حاصل‌ضرب: $x\times y=۶ \xRightarrow{(*)} x(۱۰-x)=۶ \Rightarrow ۱۰x-x^۲=۶ \Rightarrow x^۲-۱۰x+۶=۰$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \,,\, \Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow x=\frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-(۴)(۶)}}{۲}=\frac{۱۰\pm\sqrt{۷۶}}{۲}=\frac{۱۰\pm ۲\sqrt{۱۹}}{۲}=۵\pm\sqrt{۱۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=۵+\sqrt{۱۹} \Rightarrow y_۱=۱۰-۵-\sqrt{۱۹}=۵-\sqrt{۱۹} \\ x_۲=۵-\sqrt{۱۹} \Rightarrow y_۲=۱۰-۵+\sqrt{۱۹}=۵+\sqrt{۱۹} \end{cases}$$

بنابراین، این دو عدد $۵+\sqrt{۱۹}$ و $۵-\sqrt{۱۹}$ هستند.

۹

الف) $\begin{cases} xy = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x} \\ x - 3y = -5 \xrightarrow{y=\frac{2}{x}} x - \dfrac{6}{x} = -5 \xrightarrow{\times x} x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \Rightarrow y_1 = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y \\ x^2 - y^2 = 8 \xrightarrow{x=1-2y} (1-2y)^2 - y^2 = 8 \Rightarrow 1 + 4y^2 - 4y - y^2 = 8 \end{cases}$

$$\Rightarrow 3y^2 - 4y - 7 = 0 \xrightarrow{\text{حل با استفاده از روش فرمول کلی }(\Delta)} \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \dfrac{7}{3} \Rightarrow x = -\dfrac{11}{3} \end{cases}$$

ج) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3 \xrightarrow{\times xy} y + x = 3xy \Rightarrow x + y = 3 \times 2 = 6 \Rightarrow y = 6 - x \end{cases}$

$$x(6-x) = 2 \Rightarrow 6x - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{حل با استفاده از روش فرمول کلی }(\Delta)} \begin{cases} x = 3 - \sqrt{7} \Rightarrow y = 3 + \sqrt{7} \\ x = 3 + \sqrt{7} \Rightarrow y = 3 - \sqrt{7} \end{cases}$$

۱۰

با توجه به سؤال ۶ کافه سؤال در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$\dfrac{c}{a} =$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها و $\dfrac{-b}{a} =$ مجموع ریشه‌ها

بنابراین در معادله $x^2 + x + k = 0$، مجموع ریشه‌ها برابر -1 و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر k است. اگر بخواهیم دو ریشهٔ این معادله منفی باشد باید مجموع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین:

$$x_1 + x_2 = -1 < 0$$
$$x_1 \times x_2 = k > 0$$

از طرفی شرط وجود دو ریشه، مثبت بودن Δ است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4k > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{4}$$

بنابراین شرط این‌که معادلهٔ $x^2 + x + k = 0$ دو ریشهٔ منفی داشته باشد این است که $0 < k < \dfrac{1}{4}$ باشد.

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سؤال	۱	۲	۳	٤
۱	۱	۲	**۳**	٤
۲	۱	**۲**	۳	٤
۳	۱	۲	۳	**٤**
٤	۱	**۲**	۳	٤
۵	۱	۲	۳	**٤**
۶	۱	۲	۳	**٤**
۷	۱	۲	**۳**	٤
۸	۱	**۲**	۳	٤
۹	۱	۲	**۳**	٤
۱۰	۱	۲	۳	**٤**

درس دوم: سهمی

مفهوم سهمی

در این درس دربارهٔ نمودار معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ به ازای a، b و c های مختلف، صحبت خواهیم کرد.

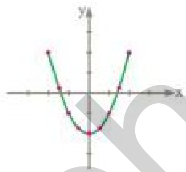
در سال‌های گذشته نمودار معادلهٔ $y = ax + b$ را به ازای a و b های مختلف رسم کردیم و دیدیم درست است که نمودار به ازای a و b های مختلف، متفاوت بود ولی یک شباهت کلی بین این نمودارها وجود داشت و آن این بود که همهٔ آن‌ها خط‌هایی راست بودند.

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که نمودارهای معادلات به شکل $y = ax^2 + bx + c$ چه شکل‌هایی دارند؟ آیا به ازای مقادیر مختلف a،b،c نمودارهای آن‌ها خیلی فرق می‌کند و یا این‌که یک شباهت‌های کلی بین این منحنی‌ها وجود دارد؟

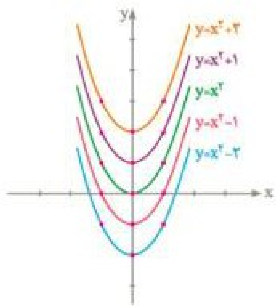
برای نمونه نمودار معادلهٔ درجهٔ دوم $y = x^2 - 2$ را رسم می‌کنیم، ابتدا چند نقطه را که در معادله فوق صدق می‌کند می‌یابیم:

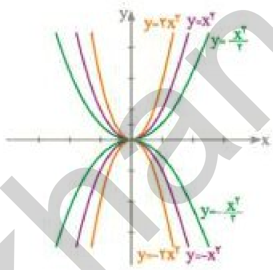
$$(-2,2)\,,\left(\frac{-3}{2},\frac{1}{4}\right)\,,(-1,-1)\,,\left(\frac{-1}{2},\frac{-7}{4}\right)\,,(0,-2)\,,\left(\frac{1}{2},\frac{-7}{4}\right)\,,(1,-1)\,,\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)\,,(2,2)$$

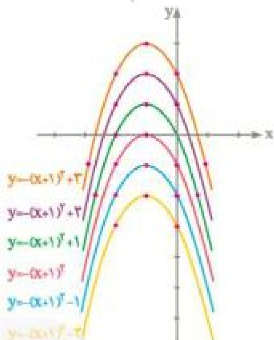
حال این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم، با وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار زیر ظاهر می‌شود:

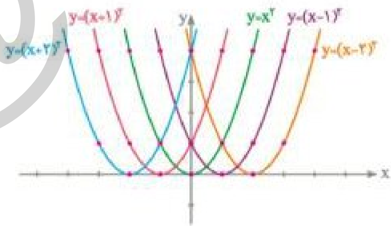


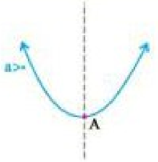
نمودار چندمنحنی درجهٔ دوم دیگر را هم در شکل‌های زیر می‌بینید:











می‌بینیم که شباهت زیادی بین این منحنی‌ها وجود دارد. این منحنی‌ها را سهمی می‌نامیم. در کل این منحنی‌ها در صفحهٔ مختصات به یکی از دو شکل کلّی رسم‌شده هستند:

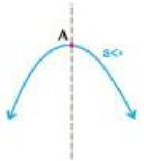
در این شکل‌ها چند ویژگی مهم سهمی‌ها نشان داده شده است:

i) وقتی $a>0$ باشد شکل آن‌ها به صورت کاسه و وقتی $a<0$ باشد شکل آن‌ها به صورت یک تپّه است.

ii) وقتی $a>0$ باشد، سهمی یک پایین‌ترین نقطه دارد و وقتی $a<0$ باشد، سهمی یک بالاترین نقطه دارد.

این نقاط را رأس سهمی می‌نامیم.

iii) سهمی‌ها یک خط تقارن دارند که نسبت به آن متقارن‌اند. این خط را خط تقارن سهمی می‌نامیم.



نقطهٔ رأسی و خط تقارن

می‌خواهیم بدون رسم نمودار $y=ax^2+bx+c$ و فقط با توجه به معادلهٔ آن نقطهٔ رأسی و خط تقارن آن را بیابیم. اگر نقطهٔ رأسی یک سهمی با معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ را بیابیم، به دست آوردن معادلهٔ خط تقارن ساده است. زیرا خط تقارن سهمی از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور y است. در نتیجه اگر نقطهٔ (x_0,y_0) رأس سهمی باشد آن‌گاه خط $x=x_0$ خط تقارن آن خواهد بود. به عنوان مثال می‌خواهیم نقطهٔ رأسی و خط تقارن سهمی $y=x^2+3x-1$ را به‌دست آوریم:

از $a>0$ می‌فهمیم که منحنی کاسه شکل است، پس رأس آن پایین‌ترین نقطهٔ آن است. سعی می‌کنیم پایین‌ترین نقطهٔ این منحنی را به دست آوریم. می‌توانیم با استفاده از روش مربع کامل بنویسیم:

$$y=x^2+3x-1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-1\Rightarrow y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

نوشتن معادله سهمی به این شکل، اطلاعات خوبی به ما می‌دهد.

از آن‌جا که $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$، نتیجه می‌شود $\frac{-13}{4}\leq\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$ یعنی $\frac{-13}{4}\leq y$ و همچنین: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow y=\frac{-13}{4}$

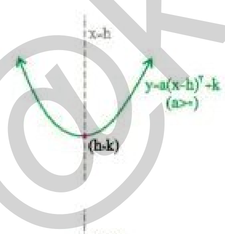
از این‌جا نتیجه می‌شود پایین‌ترین نقطهٔ سهمی، نقطه‌ای است که در آن $y=-\frac{13}{4}$ و $x+\frac{3}{2}=0$ یعنی رأس سهمی نقطهٔ $\left(-\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$ و خط تقارن آن $x=-\frac{3}{2}$ است.

از روش فوق، ایدهٔ لازم برای به دست آوردن نقطهٔ رأسی و خط تقارن به دست می‌آید.

> نقطهٔ رأس سهمی $y=a(x-h)^2+k$ نقطهٔ (h,k) است.

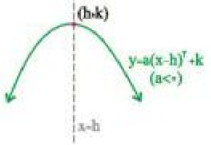
دلیل آن هم مشابه روش گفته شده است.

در دو حالت $a>0$ و $a<0$ درستی ادعای فوق را نشان می‌دهیم:



$$\text{i)}\ a>0\xrightarrow[\text{نامنفی است ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } (x-h)^2 \text{ که عبارتی}}a(x-h)^2\geq 0\xrightarrow{\text{به طرفین } k \text{ را اضافه می‌کنیم}}a(x-h)^2+k\geq k$$

$\Rightarrow y\geq k\xrightarrow{\text{به ازای } x=h \text{ داریم } y=k}$ کم‌ترین مقدار y برابر k است که به ازای $x=h$ به‌دست می‌آید.



$$\text{ii)}\ a<0\xrightarrow[\text{نامنفی است ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } (x-h)^2 \text{ که عبارتی}}a(x-h)^2\leq 0\xrightarrow{\text{به طرفین } k \text{ را اضافه می‌کنیم}}a(x-h)^2+k\leq k$$

$\Rightarrow y\leq k\xrightarrow{\text{به ازای } x=h \text{ داریم } y=k}$ بیش‌ترین مقدار y برابر k است که به ازای $x=h$ به دست می‌آید.

آس

٤

حال با اطلاعات قبلی‌مان می‌توانیم حدس بزنیم که:

خط تقارن سهمی $y=a(x-h)^2+k$ خطی است به معادلهٔ $x=h$.

سعی می‌کنیم دلیلی برای این گفته بیاوریم؛ برای این‌که خط $x=h$، خط تقارن منحنی $y=a(x-h)^2+k$ باشد باید ابتدا به این فکر کنیم که چرا می‌گوییم خط $x=0$ محور تقارن سهمی $y=x^2$ است. دلیل آن این است که اگر t عددی حقیقی باشد مقدار y در $x=t$ برابر است با مقدار y در $x=-t$ زیرا $t^2=(-t)^2$، دقّت کنید که $x=t$ و $x=-t$ نسبت به $x=0$ قرینه‌اند.

با توجه به این مطلب می‌بینیم منطقی است که بگوییم:

خط $x=h$ خط تقارن منحنی y است هرگاه مقدار y در $x=h+t$ با مقدار y در $x=h-t$ برابر باشد. حال این مطلب را در منحنی $y=a(x-h)^2+k$ بررسی می‌کنیم، اگر t عددی حقیقی باشد آن‌گاه:

مقدار y به ازای $x=h+t$ می‌شود $a(h+t-h)^2+k$ یعنی at^2+k

مقدار y به ازای $x=h-t$ می‌شود $a(h-t-h)^2+k$ یعنی at^2+k

و در نتیجه خط $x=h$ خط تقارن منحنی $y=a(x-h)^2+k$ است.

حال با استفاده از روش مربع کامل داریم:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

و می‌توانیم بگوییم:

خط تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ خط $x=\frac{-b}{2a}$ است.

مثال‌های آموزشی

۱) نقطهٔ رأسی و خط تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را پیدا کنید و نمودار آن‌ها را هم رسم کنید.

الف) $y=\frac{x^2}{2}+x-3$ ‌ ‌ ‌ ب) $y=x-x^2$

پاسخ الف) با توجه به روش مربع کامل داریم:

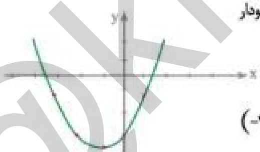
$$y=\frac{x^2}{2}+x-3=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{7}{2}$$

معلوم است که خط $x=-1$ خط تقارن این سهمی و نقطهٔ $\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$ نقطهٔ رأسی آن است. چند نقطهٔ دیگر از سهمی را هم پیدا می‌کنیم.

با توجه به این‌که $x=-1$ خط تقارن سهمی است، ما نقاط را به طور متقارن حول این نقطه انتخاب می‌کنیم، تا نمودار واضح‌تر باشد، یعنی وقتی $x=0$ را انتخاب کردیم، نقطهٔ $x=-2$ را هم انتخاب می‌کنیم و ...

نقاط زیر روی این سهمی هستند.

$$\left(-3,-\frac{3}{2}\right),(-2,-3),\left(-1,-\frac{7}{2}\right),(0,-3),\left(1,-\frac{3}{2}\right)$$



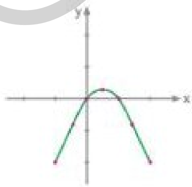
ب) با توجه به روش مربع کامل داریم:

$$y=x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

خط تقارن این سهمی خط $x=\frac{1}{2}$ و نقطهٔ رأسی آن $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ است.

چند نقطه از سهمی را پیدا می‌کنیم، البته برای سادگی کار x ها را به طور متقارن حول $x=\frac{1}{2}$ انتخاب می‌کنیم.

$$(-1,-2),\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right),(0,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),(1,0),\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right),(2,-2)$$



حال این نقاط را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم و نمودار را ... می‌کنیم.

۲) معادلهٔ سهمی را بیابید که نقطهٔ رأسی آن $(-۱,۵)$ است و از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور می‌کند.

پاسخ چون نقطهٔ رأسی سهمی $(-۱،۵)$ است، پس معادلهٔ آن باید به شکل زیر باشد:

$$y=a(x-(-۱))^۲+۵=a(x+۱)^۲+۵$$

حال چون نقطهٔ (۳ و ۲) بر روی این سهمی قرار دارد، خواهیم داشت:

$$۳=a(۲+۱)^۲+۵ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۹}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y=-\frac{۲}{۹}(x+۱)^۲+۵$$

۳) اگر $(۱,۷)$ و $(-۴,۷)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

پاسخ چون این دو نقطه نسبت به خط $x=\frac{-۴+۱}{۲}$ یعنی $x=\frac{-۳}{۲}$ متقارن هستند و خط تقارن سهمی به صورت $x=h$ است، معلوم می‌شود که خط $x=-\frac{۳}{۲}$ خط تقارن این سهمی نیز خواهد بود.

۴) نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌هایی به طول‌های ۵- و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید.

پاسخ اطلاعات فوق به این معناست که نقاط $(۰،۳)$ و $(-۵،۰)$ و $(۲،۰)$ روی این منحنی قرار دارند.

روش اول: چون $x=۲$ و $x=-۵$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ هستند می‌توان گفت:

$$y=ax^۲+bx+c=a(x+۵)(x-۲)$$

و چون نقطهٔ $(۰،۳)$ روی این منحنی قرار دارد داریم:

$$۳=a(۰+۵)(۰-۲) \Rightarrow a=\frac{-۳}{۱۰}$$

و در نتیجه:

$$y=\frac{-۳}{۱۰}(x+۵)(x-۲)=-\frac{۳}{۱۰}x^۲-\frac{۹}{۱۰}x+۳$$

روش دوم: چون $(۰،۳)$ روی منحنی $y=ax^۲+bx+c$ است، می‌توانیم بگوییم:

$$۳=a\times۰+b\times۰+c \Rightarrow c=۳$$

و چون $(-۵،۰)$ و $(۲،۰)$ روی منحنی $y=ax^۲+bx+۳$ قرار دارند، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}۰=۲۵a-۵b+۳\\ ۰=۴a+۲b+۳\end{cases}$$

و از حل دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی بالا، $b=-\frac{۹}{۱۰}$ ، $a=-\frac{۳}{۱۰}$ به دست می‌آید.

بیشتر بدانیم

در حالت کلی هر منحنی به شکل $y=ax^۲$ یک سهمی است و اگر آن را در صفحهٔ مختصات انتقال دهیم و یا آن را دوران دهیم باز هم شکل حاصل سهمی است. با این حساب معادلات سهمی فقط به شکل $y=ax^۲+bx+c$ نیستند و معادلات دیگری هم وجود دارند که نمودار مربوط به آن‌ها سهمی است. به عنوان نمونه معادلهٔ $x=y^۲$ هم یک سهمی را نشان می‌دهد که محور تقارن آن خط $y=۰$ است.

در کتاب درسی برای این‌که بحث طولانی نشود، از این مطلب چشم‌پوشی شده است.

کافه سؤال

۱ خط تقارن و نقطهٔ رأسی سهمی‌های زیر را بیابید.

الف) $y = 3x^2 - x$

ب) $y = -x^2 + 6x - 1$

۲ اگر نقطهٔ رأسی یک سهمی نقطهٔ $(2,2)$ باشد و از نقطهٔ $(3,-1)$ هم بگذرد، معادلهٔ سهمی را بیابید.

۳ اگر یک سهمی محور x ها را در نقاط $x = 5$ و $x = 3$ قطع کند، و از نقطهٔ $(2,3)$ هم بگذرد، معادلهٔ سهمی را بیابید.

۴ اگر رأس یک سهمی نقطهٔ $(4,0)$ باشد و از نقطهٔ $(2,1)$ هم بگذرد، معادلهٔ سهمی را بیابید.

۵ اگر خط تقارن سهمی $y = ax^2 + x - 1$ خط $x = 5$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ رأسی را بیابید.

۶ اگر نقطهٔ رأسی سهمی $y = x^2 + bx + c$ نقطهٔ $(6,5)$ باشد، آن‌گاه b و c را بیابید.

۷ کم‌ترین مقدار عبارت $3x^2 - 5x + 7$ چه‌قدر است و به ازای کدام مقدار x رخ می‌دهد؟

۸ بیش‌ترین مقدار عبارت $-6x^4 + 7x^2 + 8$ چه‌قدر است و به ازای کدام مقادیر x رخ می‌دهد؟

۹ الف) با توجه به نمودار سهمی‌ها توضیح دهید که اگر در سهمی $y = ax^2 + bx + c$، $a > 0$ و $c < 0$ باشد آن‌گاه معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه با علامت‌های مختلف دارد.

(راهنمایی: در واقع c، مقدار y در نقطهٔ $x = 0$ است.)

ب) به غیر از شرط فوق در چه شرایط دیگری، معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه با علامت‌های مختلف دارد؟

۱۰ در بین مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۰ واحد است، کدام‌یک بیش‌ترین مساحت را دارد؟

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- خط تقارن سهمی $y=-3x^2+x-1$ کدام است؟

۱) $x=\frac{-2}{3}$ ۲) $x=\frac{-1}{3}$

۳) $x=\frac{2}{3}$ ۴) $x=\frac{1}{6}$

۲- نقطهٔ رأس سهمی $y=x^2-2x$ کدام است؟

۱) $(2,0)$ ۲) $(1,-1)$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(0,0)$

۳- کم‌ترین مقدار عبارت $3x^2-2x+1$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) -1

۴- اگر کم‌ترین مقدار عبارت $2x^2-ax+1$ برابر -3 باشد، a کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $-4\sqrt{2}$ ۳) 4 ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۵- اگر نقطهٔ رأسی سهمی $y=x^2+ax+b$، نقطهٔ $(4,5)$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۶- اگر نقاط $(6,0)$ و $(4,1)$ دو نقطه روی یک سهمی باشند، کدام نقطه مطمئناً روی این سهمی قرار **ندارد**؟

۱) $(3,5)$ ۲) $(-2,4)$ ۳) $(5,1)$ ۴) $(7,-1)$

۷- اگر خط تقارن منحنی $y=kx^2-k-x+5$ خط $x=7$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ رأسی آن کدام است؟

۱) $(7,\frac{10}{7})$ ۲) $(7,\frac{-25}{7})$ ۳) $(7,\frac{-30}{7})$ ۴) $(7,\frac{45}{7})$

۸- کم‌ترین مقدار عبارت x^4+8x^2-3 چه‌قدر است؟

۱) -7 ۲) -19 ۳) -4 ۴) -3

۹- محور تقارن یک سهمی خط $x=9$ است و نقطهٔ $(5,4)$ روی این سهمی قرار دارد. اگر نقطهٔ $(a,4)$ روی این سهمی قرار داشته باشد و $a\neq 5$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) -5 ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) بستگی به شرایط مسأله دارد.

۱۰- اگر $a>0$ و $c>0$ باشد و معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دو ریشهٔ مختلف داشته باشد، دربارهٔ ریشه‌های آن چه می‌توان گفت؟

۱) مختلف‌العلامت‌اند. ۲) هر دو مثبت‌اند. ۳) هر دو منفی‌اند. ۴) هم‌علامت‌اند.

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

الف) $y=3x^2-x$

خط تقارن: $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-1)}{2\times 3}=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$

رأس سهمی y: $y=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$

$\Rightarrow$ رأس سهمی: $\left(\frac{1}{6},\frac{-1}{12}\right)$

ب) $y=-x^2+6x-1$

خط تقارن: $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-6}{-2}=+3\Rightarrow x=3$

رأس سهمی y: $y=-(3)^2+6(3)-1=8$

$\Rightarrow$ رأس سهمی: $(3,8)$

۲

می‌دانیم اگر (h,k) رأس سهمی باشد معادله سهمی به‌صورت $y=a(x-h)^2+k$ خواهد بود پس: $y=a(x-2)^2+2$

حالا برای پیدا کردن a می‌توانیم از نقطهٔ $(3,-1)$ کمک بگیریم و آن‌را در معادله جای‌گذاری کنیم: $-1=a(3-2)^2+2\Rightarrow a=-3$

معادله سهمی: $y=-3(x-2)^2+2=-3(x^2-4x+4)+2\Rightarrow y=-3x^2+12x-10$

۳

سهمی محور xها را در نقاط $x=5$ و $x=3$ قطع می‌کند بنابراین نقاط $(3,0)$ و $(5,0)$ روی این منحنی قرار دارند. چون $x=3$ و $x=5$ ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ هستند، پس داریم:

$y=a(x-3)(x-5)\Rightarrow 3=a(2-3)(2-5)\Rightarrow 3=3a\Rightarrow a=1$

نقطهٔ $(2,3)$ روی این سهمی قرار دارد بنابراین:

معادله سهمی: $y=1(x-3)(x-5)\Rightarrow y=x^2-3x-5x+15\Rightarrow y=x^2-8x+15$

۴

چون نقطه $(4,0)$ رأس سهمی است پس معادلهٔ سهمی به شکل $y=a(x-4)^2+0$ خواهد بود. سهمی از نقطهٔ $(2,1)$ نیز می‌گذرد پس این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$y=a(x-4)^2\Rightarrow 1=a(2-4)^2\Rightarrow 1=4a\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

معادله سهمی: $y=\frac{1}{4}(x-4)^2\Rightarrow y=\frac{1}{4}(x^2-8x+16)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2-2x+4$

۵

می‌دانیم خط تقارن یک سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$، خط $x=\frac{-b}{2a}$ است. پس داریم: $y=ax^2+x-1$

خط تقارن: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2a}=5\Rightarrow a=-\frac{1}{10}\Rightarrow$ معادله سهمی: $y=-\frac{1}{10}x^2+x-1$

حال نقطهٔ $x=5$ را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری کرده و عرض نقطهٔ رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$y=-\frac{1}{10}(5)^2+(5)-1=-\frac{25}{10}+4=\frac{15}{10}\Rightarrow$ رأس سهمی: $\left(5,\frac{15}{10}\right)$

۶

طول رأس سهمی: $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-b}{2}=6\Rightarrow -b=12\Rightarrow b=-12$

معادله سهمی: $y=x^2-12x+c\xrightarrow{\text{نقطه (6,5) را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم.}}5=(6)^2-12(6)+c\Rightarrow 5=36-72+c\Rightarrow c=41$

۷

در سهمی به معادلهٔ $y=3x^2-5x+7$، $a=3$ مقداری مثبت است، پس سهمی دارای نقطهٔ مینیمم است و این نقطهٔ مینیمم همان رأس سهمی است. بنابراین مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

طول رأس سهمی: $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{-5}{2(3)}=\frac{5}{6}$

$x=\frac{5}{6}$ را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم:

$y=3x^2-5x+7\Rightarrow y=3\left(\frac{5}{6}\right)^2-5\left(\frac{5}{6}\right)+7=3\left(\frac{25}{36}\right)-\frac{25}{6}+7\Rightarrow y=\frac{59}{12}\Rightarrow$ نقطهٔ رأس سهمی: $\left(\frac{5}{6},\frac{59}{12}\right)$

پس به ازای $x=\frac{5}{6}$ کمترین مقدار عبارت $3x^2-5x+7$ به‌دست [illegible] که برابر $\frac{59}{12}$ است.

گاج

۴

۸

برای به‌دست آوردن بیش‌ترین مقدار عبارت $-۶x^۴+۷x^۲+۸$ ،ابتدا معادله را به یک معادلهٔ درجه دو تبدیل می‌کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم $x^۲=t$ ،

بنابراین معادله به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $y=-۶t^۲+۷t+۸$

حال یک معادله درجه دو داریم که در آن $a=-۶$ و مقداری منفی است پس سهمی دارای نقطهٔ ماکزیمم است و این نقطهٔ ماکزیمم، همان رأس سهمی است.

بنابراین مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$t=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۷}{۲(-۶)}=\frac{۷}{۱۲}$$: طول رأس سهمی

$t=\frac{۷}{۱۲}$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y=-۶\left(\frac{۷}{۱۲}\right)^۲+۷\left(\frac{۷}{۱۲}\right)+۸=-۶\left(\frac{۴۹}{۱۴۴}\right)+\frac{۴۹}{۱۲}+۸\Rightarrow y=\frac{۲۴۱}{۲۴}$$

$$x^۲=t\Rightarrow x^۲=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۷}{۱۲}}$$

بنابراین به ازای $x=\pm\sqrt{\frac{۷}{۱۲}}$ بیشترین مقدار عبارت $-۶x^۴+۷x^۲+۸$ به‌دست می‌آید که برابر $\frac{۲۴۱}{۲۴}$ است.

۹

الف) با توجه به این‌که وقتی $a>۰$ است، نمودار سهمی به صورت کاسه است، اگر در نقطهٔ $x=۰$ مقدار سهمی کم‌تر از صفر باشد، از آن‌جا که به ازای مقادیر با قدرمطلق بزرگ، مقدار تابع مثبت است، معلوم می‌شود هم در یک نقطهٔ با طول منفی و هم در نقطه‌ای با طول مثبت، منحنی محور x را قطع می‌کند.

ب) قسمت دوم را هم خودتان زحمت بکشید.

۱۰

$P=۲(x+y)=۱۰\Rightarrow y=۵-x$:محیط مستطیل

$S=xy$:مساحت مستطیل

$S=x(۵-x)=۵x-x^۲$

پس مساحت مستطیل از $S=-x^۲+۵x$ به‌دست می‌آید که در آن $a=-۱$ و مقداری منفی است پس سهمی دارای نقطهٔ ماکزیمم است و این نقطه ماکزیمم همان نقطهٔ رأس سهمی است.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۵}{۲(-۱)}=\frac{۵}{۲}\ ,\ y=۵-x=۵-\frac{۵}{۲}=\frac{۵}{۲}$$: رأس سهمی

$x=\frac{۵}{۲}$ را در معادلهٔ مساحت مستطیل جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S=-\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲+۵\left(\frac{۵}{۲}\right)=-\frac{۲۵}{۴}+\frac{۲۵}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

با توجه به x و y به‌دست آمده بیشترین مساحت مستطیل در حالتی به‌دست می‌آید که x و y آن (طول و عرض) باهم برابر باشند یعنی شکل مربع باشد.

درس۲ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۴
۶	۳
۷	۱
۸	۴
۹	۳
۱۰	۴

آس

٤

درس سوم: تعیین علامت

نامعادله

گاهی اوقات هنگام حل یک مسأله به عباراتی به شکل زیر می‌رسیم:

$I)\ 2x+1<5x-3$ $\quad II)\ -3x+4<7x-8$ $\quad III)\ (x-2)(x-5)>0$

$IV)\ x(x-3)<4$ $\quad V)\ \frac{2(x-1)}{(x+1)^2}\le 0$

چنین عباراتی را نامعادله می‌نامیم. در حل مسأله‌ها هنگامی که به یک نامعادله می‌رسیم، معمولاً مهم است بدانیم این نامعادله به ازای چه مقادیری از متغیرهای آن برقرار است و به عبارت دیگر مجموعه جواب آن چیست؟

به عنوان مثال می‌بینیم که نامعادلهٔ $2x+1<5x-3$ به ازای $x=3$ برقرار است و به ازای $x=1$ برقرار نیست. اگر قدری محاسبه کنیم می‌بینیم که این نامعادله به ازای $x>\frac{4}{3}$ برقرار است و به ازای $x\le\frac{4}{3}$ برقرار نیست. در این درس تلاش خواهیم کرد روشی برای حل نامعادلات بسازیم.

از ویژگی‌های زیر برای حل نامعادله می‌توانیم استفاده کنیم:

i) می‌توان به دو طرف یک نامعادله، یک عبارت جبری را افزود. $A<B\Rightarrow A+C<B+C$

ii) می‌توان در دو طرف یک نامعادله، یک عبارت جبری مثبت را ضرب کرد. یعنی اگر $C>0$ باشد آن‌گاه: $A<B\Rightarrow AC<BC$.

iii) اگر دو طرف یک نامعادله را در یک عبارت جبری منفی ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود. یعنی اگر $C<0$ باشد آن‌گاه: $A<B\Rightarrow AC>BC$.

سعی می‌کنیم با استفاده از این ویژگی‌ها به حل بعضی نامعادلات بپردازیم. برای نمونه مجموعه جواب چند تا از نامعادلاتی که در آغاز این درس مطرح کردیم را می‌یابیم:

$I)\ 2x+1<5x-3$

برای حل نامعادلهٔ فوق ابتدا از دو طرف $2x$ را کم می‌کنیم: $2x+1<5x-3\Rightarrow 2x+1-2x<5x-2x-3\Rightarrow 1<3x-3$

به دو طرف ۳ را اضافه می‌کنیم: $\Rightarrow 1+3<3x-3+3\Rightarrow 4<3x$

دو طرف را بر ۳ تقسیم می‌کنیم: $\Rightarrow \frac{4}{3}<x$

پس مجموعه جواب این نامعادله $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{4}{3}<x\right\}$ است.

$II)\ -3x+4<7x-8$

برای حل این نامعادله ابتدا به دو طرف $3x$ را اضافه می‌کنیم: $-3x+4<7x-8\Rightarrow -3x+4+3x<7x-8+3x\Rightarrow 4<10x-8$

به دو طرف ۸ را اضافه می‌کنیم: $\Rightarrow 4+8<10x-8+8\Rightarrow 12<10x$

دو طرف را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم: $\Rightarrow \frac{12}{10}<x$

پس مجموعه جواب این نامعادله $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{12}{10}<x\right\}$ می‌باشد.

برای این‌که مجموعه جواب‌ها را راحت‌تر بنویسیم یک نماد می‌سازیم.

$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\}$ را با $(a,+\infty)$ و $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<b\}$ را با $(-\infty,b)$ نمایش می‌دهیم. پس با این نمادگذاری جواب مسألهٔ I می‌شود $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ و جواب مسألهٔ II می‌شود $\left(\frac{12}{10},+\infty\right)$. ممکن است یک خوانندهٔ دقیق بگوید که این روش نتیجه‌گیری درست نیست، توضیح این‌که به عنوان مثال در مورد I ما با قدری محاسبه از $2x+1<5x-3$ نتیجه گرفتیم $x>\frac{4}{3}$ و در واقع ثابت کردیم $2x+1<5x-3\Rightarrow\frac{4}{3}<x$. ما در پایان حل I گفتیم که $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{4}{3}<x\right\}$ مجموعه جواب نامعادله I است و معنی آن در واقع این است که $2x+1<5x-3\Leftrightarrow\frac{4}{3}<x$، ولی ما ثابت نکرده‌ایم که $\frac{4}{3}<x\Rightarrow 2x+1<5x-3$.

جواب این است که این انتقاد صحیح است ولی واقعیت این است که همهٔ مراحل طی شده در این محاسبات برگشت‌پذیرند به این معنی که همان‌طور که از $A<B$ نتیجه می‌شود $A+C<B+C$، از $A+C<B+C$ نیز نتیجه می‌شود $A<B$ (با جمع کردن $-C$ با دو طرف) یعنی:

$$A<B \Leftrightarrow A+C<B+C$$

و همچنین اگر C عبارتی مثبت باشد، همانطور که از $A<B$ نتیجه می‌شود $AC<BC$، از $AC<BC$ نیز نتیجه می‌شود $A<B$ (با ضرب کردن $\frac{1}{C}$ که عبارتی مثبت است در دو طرف). یعنی اگر C مثبت باشد آنگاه:

$$A<B \Leftrightarrow AC<BC$$

و چون مراحل طی شده در این محاسبات برگشت‌پذیرند، از همان مسیری که از نامعادله $2x+1<5x-3$ رسیدیم به $\frac{4}{3}<x$، می‌توانیم از $\frac{4}{3}<x$ برگردیم و برسیم به $2x+1<5x-3$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$2x+1<5x-3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}<x$$

برای روشن شدن کامل مطلب با توجه به حل I این کار را انجام می‌دهیم.

دو طرف را در ۳ ضرب می‌کنیم: $\frac{4}{3}<x \Rightarrow 4<3x$

از دو طرف ۳ را کم می‌کنیم: $\Rightarrow 4-3<3x-3 \Rightarrow 1<3x-3$

به دو طرف $2x$ را اضافه می‌کنیم: $\Rightarrow 1+2x<3x-3+2x \Rightarrow 2x+1<5x-3$

نامعادلهٔ درجهٔ دوم

نامعادلهٔ $(x-2)(x-5)>0$ را در نظر بگیرید. می‌بینیم که این مسأله با مسأله‌های قبل متفاوت است. برای حل این مسأله می‌توانیم این‌گونه بیاندیشیم که مسأله می‌گوید: «کی حاصل‌ضرب دو عبارت $(x-2)$ و $(x-5)$ مثبت است؟» خُب جواب این است که برای این‌که حاصل‌ضرب دو عبارت مثبت باشد باید یا هر دو عبارت مثبت و یا هر دو عبارت منفی باشند. پس باید به سؤال‌های زیر پاسخ دهیم:

۱) به ازای کدام مقادیر x داریم: $x-2>0$ و $x-5>0$؟

۲) به ازای کدام مقادیر x داریم: $x-2<0$ و $x-5<0$؟

ابتدا به سؤال ۱ می‌پردازیم:

اگر $x-2>0$، آن‌گاه $x\in(2,+\infty)$ و اگر $x-5>0$، آن‌گاه $x\in(5,+\infty)$. حال این سؤال را می‌پرسیم در کدام نقاط هر دوی این اتفاق‌ها می‌افتد؟ باید مجموعهٔ x هایی را مشخص کنیم که در هر دو مجموعه جواب فوق قرار دارند یعنی x هایی که در اشتراک دو مجموعه جواب قرار دارند. یعنی اشتراک $(2,+\infty)$ و $(5,+\infty)$ که می‌شود $(5,+\infty)$. پس پاسخ سؤال ۱ مشخص شد: $(5,+\infty)$ حال به سؤال ۲ می‌پردازیم:

اگر $x-2<0$، آن‌گاه $x\in(-\infty,2)$ و اگر $x-5<0$، آن‌گاه $x\in(-\infty,5)$. مانند قبل باید مجموعه xهایی را مشخص کنیم که در هر دو مجموعه جواب فوق قرار دارند. یعنی اشتراک $(-\infty,2)$ و $(-\infty,5)$ که می‌شود $(-\infty,2)$. حال معلوم است که پاسخ مسأله اجتماع جواب‌های سؤال‌های ۱ و ۲ است. یعنی $(5,+\infty)\cup(-\infty,2)$ یا به عبارت دیگر $\mathbb{R}-[2,5]$. می‌توانیم روش حل این مسأله را به شکل زیر، مرتب بنویسیم:

$$(x-2)(x-5)>0 \Rightarrow \begin{cases} x-2>0, x-5>0 \Rightarrow x>2, x>5 \Rightarrow x\in(2,+\infty)\cap(5,+\infty) \Rightarrow x\in(5,+\infty) \\ \text{یا} \\ x-2<0, x-5<0 \Rightarrow x<2, x<5 \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cap(-\infty,5) \Rightarrow x\in(-\infty,2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in(5,+\infty)\cup(-\infty,2) \text{ یا } x\in\mathbb{R}-[2,5]$$

راه حل این مسأله نشان داد که در بحث حل نامعادلات ***«تجزیه هم چیز خوبی است.»***

حال با این تجربه سعی می‌کنیم نامعادلهٔ بعدی را حل کنیم. $\text{IV)}\ x(x-3)<4$

یادمان باشد «تجزیه هم چیز خوبی است.»

$$x(x-3)<4 \Rightarrow x(x-3)-4<0 \Rightarrow x^2-3x-4<0 \Rightarrow (x+1)(x-4)<0$$

روشی مشابه حل مسألهٔ قبل را در پیش می‌گیریم، می‌بینیم که باید یکی از $(x+1)$ و $(x-4)$ مثبت و دیگری منفی باشد. باید به دو سؤال زیر پاسخ دهیم، جواب مسأله اجتماع پاسخ‌های این دو سؤال است.

۱) به ازای کدام مقادیر x داریم: $x+1>0$ و $x-4<0$؟

۲) به ازای کدام مقادیر x داریم: $x+1<0$ و $x-4>0$؟

ابتدا به سؤال ۱ پاسخ می‌دهیم: از $x+1>0$ نتیجه می‌شود $x\in(-1,+\infty)$ و از $x-4<0$ نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,4)$. حال مجموعهٔ xهایی که در هر دو مجموعه فوق قرار دارند برابر است با $(-1,+\infty)\cap(-\infty,4)$ که می‌شود $(-1,4)$.

حال به سؤال ۲ می‌پردازیم: از $x+1<0$ نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-1)$ و از $x-4>0$ نتیجه می‌شود $x\in(4,+\infty)$ و مجموعهٔ xهایی که در هر دو مجموعهٔ فوق قرار دارند برابر است با $(-\infty,-1)\cap(4,+\infty)$ که مجموعهٔ تهی است.

حال اجتماع جواب‌های سؤال‌های ۱ و ۲ می‌شود $(-1,4)\cup\varnothing=(-1,4)$. در واقع ما طی این محاسبه دیدیم که $x(x-3)<4 \Leftrightarrow -1<x<4$. می‌توانید با جای‌گذاری اعداد، درستی این مطلب را آزمایش کنید. مطالب گفته شده را می‌توانیم به شکل زیر، بیان کنیم:

$$(x+1)(x-4)<0 \Rightarrow \begin{cases} x+1>0, x-4<0 \Rightarrow x>-1, x<4 \Rightarrow x\in(-1,+\infty)\cap(-\infty,4) \Rightarrow x\in(-1,4) \\ \text{یا} \\ x+1<0, x-4>0 \Rightarrow x<-1, x>4 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cap(4,+\infty)=\varnothing \text{ پس این حالت غیرممکن است.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in(-1,4)\cup\varnothing=(-1,4)$$

تعیین علامت

دیدیم که اگر نامعادله به شکل $A<0$ باشد و A به صورت حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های خطی نوشته شود، با قدری بحث می‌توان جواب نامعادله را پیدا کرد. چون نامعادلهٔ $B<C$ را می‌توان به شکل $B-C<0$ نوشت پس هر نامعادله‌ای را می‌توان به شکل $A<0$ نوشت و در نتیجه می‌توان برای پیدا کردن راه کلی برای حل نامعادلات به بحث دربارهٔ نامعادلاتی به شکل $A<0$ پرداخت. از آن‌جا که هنگام بحث دربارهٔ نامعادلهٔ $A<0$ در واقع می‌خواهیم بدانیم A کجا منفی است و کجا مثبت و در کل می‌خواهیم بدانیم علامت A در نقاط مختلف چیست، به این کار، تعیین علامت A نیز می‌گویند. حال چندجمله‌ای‌های معمولی را، در حالت کلی تعیین علامت می‌کنیم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ اول

چندجمله‌ای $y=x+3$ را در نظر بگیرید، واضح است که مقدار این چندجمله‌ای در نقطهٔ $x=-3$ برابر صفر است و اگر $x<-3$ باشد مقدار چندجمله‌ای منفی است و اگر $-3<x$ باشد مقدار چندجمله‌ای مثبت است. حال چندجمله‌ای $y=x+b$ را در نظر بگیرید که b عددی حقیقی است. می‌بینیم که مقدار این چندجمله‌ای در نقطه $x=-b$ برابر صفر است و اگر $-b<x$ باشد مقدار چندجمله‌ای مثبت است و اگر $x<-b$ باشد مقدار چندجمله‌ای منفی است. این اطلاعات را می‌توانیم در جدولی به شکل زیر به صورت خلاصه بنویسیم:

x	$x<-b$	$x=-b$	$-b<x$
$x+b$	$-$	0	$+$

حال چندجمله‌ای $y=ax+b$ را در نظر بگیرید که a,b اعدادی حقیقی هستند. این عبارت را می‌توان به شکل $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ نوشت. معلوم است که مقدار این عبارت در $x=\frac{-b}{a}$ برابر صفر است.

اگر $\frac{-b}{a}<x$ باشد آن‌گاه $x+\frac{b}{a}>0$ است و در نتیجه عبارت $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ هم‌علامت با a خواهد بود و اگر $x<\frac{-b}{a}$ باشد آن‌گاه $x+\frac{b}{a}<0$ است و در نتیجه علامت عبارت $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ مخالف علامت a خواهد بود.

x	$x<\frac{-b}{a}$	$x=\frac{-b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

می‌توانیم این جدول را با این قرارداد که در ردیف مقابل x اعداد به ترتیب قرار دارند به شکل ساده‌تر زیر رسم کرد.

x		$\frac{-b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

سؤال

عبارت $-3x+2$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ

$$-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

x		$\frac{2}{3}$	
$-3x+2$	$+$	0	$-$

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم

حال با توجه به مباحث سابق یک گام فراتر می‌نهیم و عبارت درجهٔ ۲ را تعیین علامت می‌کنیم. به عنوان مثال عبارت $(-2x+1)(5x+3)$ را تعیین علامت کنید. می‌توانیم ابتدا دو عبارت $-2x+1$ و $5x+3$ را تعیین علامت کنیم و سپس با استفاده از علامت‌های آن‌ها در نقاط مختلف، حاصل‌ضربشان را هم تعیین علامت کنیم. برای ساده‌تر شدن کار هر دو عبارت $-2x+1$ و $5x+3$ را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم.

$$5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{5} \qquad -2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

ترتیب اعداد را در ردیف بالای جدول رعایت می‌کنیم.

x		$-\frac{3}{5}$		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$		$+$	0	$-$
$5x+3$	$-$	0	$+$		$+$

حال اگر قدری در این جدول دقت کنیم می‌بینیم که با استفاده از آن به راحتی می‌توان عبارت $(-2x+1)(5x+3)$ را تعیین علامت کرد.

x		$-\frac{3}{5}$		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$		$+$	0	$-$
$5x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$(-2x+1)(5x+3)$	$-$		$+$		$-$

سؤال

نامعادلهٔ $\frac{x+2}{8x+7} < \frac{-x}{5x+7}$ را حل کنید.

پاسخ ابتدا این مسأله را به یک مسألهٔ تعیین علامت تبدیل می‌کنیم. خُب، دو طرف را در حاصل‌ضرب مخرج‌ها یعنی $(5x+7)(8x+7)$ ضرب می‌کنیم تا مسأله از حالت کسری خارج شود و حل مسأله راحت‌تر شود.

$$\frac{-x}{5x+7}\times(5x+7)(8x+7) < \frac{x+2}{8x+7}(5x+7)(8x+7)$$

(این کار در واقع همان طرفین وسطین است.)

$$\Rightarrow -x(8x+7) < (x+2)(5x+7) \Rightarrow -8x^2-7x < 5x^2+17x+14 \Rightarrow 0 < 13x^2+24x+14$$

برای تجزیهٔ این چندجمله‌ای، Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = 24^2-4\times13\times14=-152$$

چون $\Delta<0$ است، پس این چندجمله‌ای تجزیه نمی‌شود، راه دیگری را در پیش می‌گیریم، با استفاده از روش مربع کامل داریم:

$$13x^2+24x+14=13\left(x+\frac{12}{13}\right)^2+\frac{38}{13}$$

دیده می‌شود که $13x^2+24x+14$ مجموع یک عبارت مثبت و یک عدد مثبت است و در نتیجه همیشه مثبت است، پس رابطهٔ $13x^2+24x+14>0$ به ازای هر x برقرار است، پس جواب این مسأله $\mathbb{R}$ است یعنی به ازای هر عدد حقیقی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{-x}{5x+7} < \frac{x+2}{8x+7}$$

و مسأله حل شد.

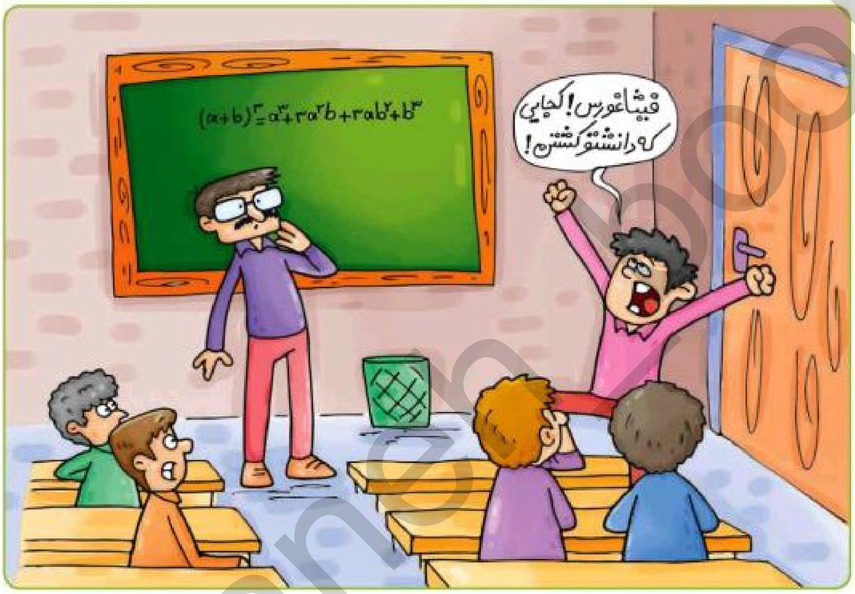
یکی می‌پرسد: آقا ببخشید -1 هم عدده؟

معلم: خُب، معلومه -1 هم عدده.

همان یکی: پس چرا به ازای $x=-1$ رابطهٔ فوق برقرار نیست؟

$$\frac{-(-1)}{5(-1)+7}=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{-1+2}{8(-1)+7}=-1$$

و معلوم است که $\frac{1}{2}>-1$ ولی ادعای شما می‌گه $-1>\frac{1}{2}$.



شورش در شهر

کلاس شلوغ می‌شود.

یکی می‌گوید: آقا یعنی ریاضیات غلطه؟

یکی دیگر: آقا یعنی ما الان موفق شدیم پس از سه هزار سال غلط بودن ریاضیات رو ثابت کنیم؟

دیگری: من از اول می‌دونستم.

یکی از دانش‌آموزان بلند می‌شود و می‌گوید:

«به دلیل فوت ناگهانی مرحوم مغفور ریاضیات باستانی در سن سه هزار سالگی کلاس تعطیل است.»

یکی از دانش‌آموزان فریاد می‌زند: فیثاغورس کجایی که دانشتو کشتن؟

در این‌جا معلم متوجه می‌شود که چه شد و رو به دانش‌آموزان می‌گوید:

دانش‌آموزان محترم، اشکال پیش آمده حاصل یک اشتباه محاسباتی بود. لطفاً تا رفع اشتباه سر جای خودتان بنشینید. متشکرم!

و اما اشتباه این بود که ما در ابتدای حل مسأله دو طرف نامعادله را در $(5x+7)(8x+7)$ ضرب کردیم، در حالی‌که این عبارت یک عبارت مثبت نیست. قواعد محاسبه به ما می‌گوید که اگر $A<B$ باشد و C عبارتی همیشه مثبت باشد آن‌گاه $AC<BC$ ولی عبارت $(5x+7)(8x+7)$ نه یک عبارت همیشه مثبت است و نه یک عبارت همیشه منفی. به عنوان مثال به ازای $x=1$ مقدار این عبارت مثبت است و به ازای $x=-1$ این عبارت منفی است. عبارت مثبت یعنی یک چیزی مثل x^2+1، x^4+2 و مانند آن‌ها.

حال از نو تلاش می‌کنیم مسأله را حل کنیم. البته این بار دقت می‌کنیم قواعد را دقیقاً رعایت کنیم.

$$\frac{-x}{5x+7} < \frac{x+2}{8x+7} \Rightarrow 0 < \frac{x+2}{8x+7} + \frac{x}{5x+7} \Rightarrow 0 < \frac{(x+2)(5x+7)+x(8x+7)}{(8x+7)(5x+7)} \Rightarrow 0 < \frac{13x^2+24x+14}{(8x+7)(5x+7)}$$

حال باید این عبارت را تعیین علامت کنیم.

صورت کسر همان چندجمله‌ای درجهٔ ۲ است که درباره‌اش صحبت کردیم و دیدیم که همیشه مثبت است. پس کافی است علامت مخرج کسر را به دست آوریم و ببینیم کجا مثبت است.

(دقت کنید که عبارت، در ریشه‌های مخرج کسر تعریف نشده است.)

x		$-\frac{7}{5}$		$-\frac{7}{8}$	
$8x+7$	$-$		$-$		$+$
$5x+7$	$-$		$+$		$+$
$13x^2+24x+14$	$+$		$+$		$+$
$\frac{13x^2+24x+14}{(8x+7)(5x+7)}$	$+$		$-$		$+$
		تعریف نشده		تعریف نشده	

پس نتیجه می‌شود مجموعه جواب نامعادله $\mathbb{R}-\left[-\frac{7}{5},-\frac{7}{8}\right]$ است و می‌بینیم که ۱- در مجموعه جواب قرار ندارد، زیرا $-1\in\left[-\frac{7}{5},-\frac{7}{8}\right]$

زود قضاوت نکنیم.

دیدیم که تجزیه راهگشای مبحث تعیین علامت است. با توجه به همین نکته تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوّم را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

۱) حالتی که چندجمله‌ای دو ریشه متمایز دارد. $(\Delta > 0)$

۲) حالتی که چندجمله‌ای یک ریشه مضاعف دارد. $(\Delta = 0)$

۳) حالتی که چندجمله‌ای ریشه ندارد. $(\Delta < 0)$

حالت اول: اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ متمایز x_2 و x_1 باشد با فرض $x_1 < x_2$، آن‌گاه:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

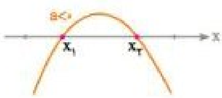
و با استفاده از جدول به راحتی می‌توانیم این عبارت را تعیین علامت کنیم.

x		x_1		x_2	
$x-x_1$	$-$		$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$		$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$		$-$		$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	(a علامت × +) موافق علامت a		(a علامت × −) مخالف علامت a		(a علامت × +) موافق علامت a

اگر بخواهیم نتیجه را ساده بیان کنیم می‌گوییم که:

بین دو ریشه مخالف علامت a و خارج دو ریشه موافق علامت a.

این را با توجه به شکل سهمی‌ها هم می‌توان به خاطر سپرد:



حالت دوم: اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای یک ریشهٔ x_1 باشد آن‌گاه:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

و معلوم است که به جز نقطهٔ x_1 در سایر نقاط این عبارت هم‌علامت با a است.

x		x_1	
$(x-x_1)^2$	$+$		$+$
$a(x-x_1)^2$	موافق علامت a		موافق علامت a

این وضعیت در نمودار هم دیده می‌شود:

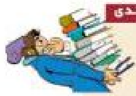
حالت سوم: اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta<0$ باشد آن‌گاه با توجه به رابطهٔ زیر می‌توانیم بگوییم چون $\frac{-\Delta}{4a^2}>0$ و $(x+\frac{b}{2a})^2\geq 0$ پس $(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a^2}$ مثبت است و در نتیجه $a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ هم‌علامت a است.

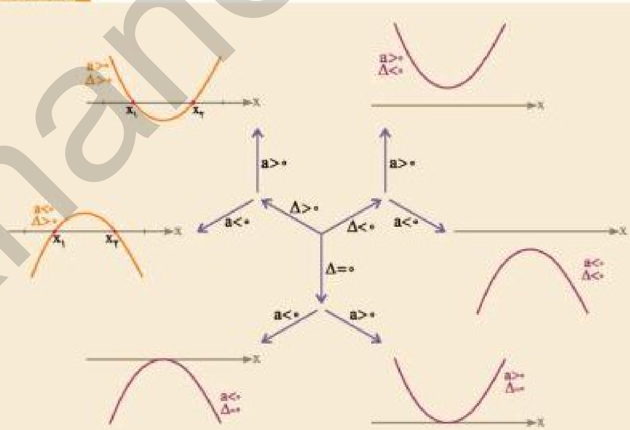
$$ax^2+bx+c=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

x	هر $x\in\mathbb{R}$
ax^2+bx+c $(b^2-4ac<0)$	موافق علامت a

این وضعیت در نمودار هم دیده می‌شود:

conclusion جمع‌بندی





گام ۴

مثال‌های آموزشی

۱) **عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.**

الف) $3x^2-4x+2$ ب) $-x^2+3x+1$ ج) $x^2-8x+16$

پاسخ الف) ابتدا Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=(-4)^2-4\times 3\times 2=-8<0$$

چون Δ منفی است، علامت عبارت همه جا موافق علامت a است. پس این عبارت همیشه مثبت است.

ب) Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=3^2-4\times 1\times(-1)=13$$

ریشه‌ها را هم به دست می‌آوریم:

$$x_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\quad,\quad x_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

بین دو ریشه مخالف علامت a است پس در بازهٔ $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ این عبارت مثبت است و در $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$ عبارت $-x^2+3x+1$ منفی است.

ج) Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=(-8)^2-4\times 16=0$$

ریشهٔ این عبارت $x=4$ است. این عبارت در $\mathbb{R}-\{4\}$ مثبت است.

$$x^2-8x+16=(x-4)^2$$

۲) **به ازای چه مقادیری از k، عبارت x^2+5x+k همواره مثبت است؟**

پاسخ برای این‌که یک چندجمله‌ای درجهٔ دو همواره مثبت باشد، اولاً باید a مثبت و ثانیاً Δ منفی باشد. چون ضریب x^2 برابر ۱ است، شرط اول برقرار است. حال Δ را محاسبه می‌کنیم و شرط منفی بودن Δ را می‌یابیم.

$$\Delta=5^2-4\times 1\times k=25-4k$$

$$\Delta<0\Rightarrow 25-4k<0\Rightarrow 25<4k\Rightarrow \frac{25}{4}<k$$

پس باید k متعلق به بازهٔ $\left(\frac{25}{4},+\infty\right)$ باشد.

۳) **به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y=(m+2)x^2-mx-3$ همواره پایین محور xهاست؟**

پاسخ برای این‌که این اتفاق رخ دهد باید داشته باشیم: $a<0$ ، $\Delta<0$

Δ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta=(-m)^2-4\times(m+2)\times(-3)=m^2+12m+24$$

پس جواب این مسأله مجموعهٔ mهایی است که در هر دو نامعادلهٔ زیر صدق کنند.

$$m+2<0$$

$$m^2+12m+24<0$$

پس باید ابتدا مجموعه جواب هر کدام از این دو نامعادله را بیابیم و سپس اشتراک آن‌ها را پیدا کنیم.

جواب نامعادلهٔ اول $(-\infty,-2)$ است.

برای یافتن جواب نامعادلهٔ دوم، از روش تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم. ابتدا Δ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=12^2-4\times 1\times 24=48$$

حال دو ریشه را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{-12\mp\sqrt{48}}{2}=-6\mp 2\sqrt{3}$$

با توجه به این نکته که «بین دو ریشه مخالف علامت a است»، پس جواب نامعادلهٔ $m^2+12m+24<0$، $(-6-2\sqrt{3}\,,\,-6+2\sqrt{3})$ است.

جواب مسأله اشتراک دو مجموعهٔ به دست آمده است یعنی:

$$(-6-2\sqrt{3}\,,\,-6+2\sqrt{3})\cap(-\infty,-2)$$

با مقایسه -2 و $-6+2\sqrt{3}$ می‌بینیم که $-6+2\sqrt{3}<-2$ و در نتیجه جواب مسأله می‌شود:

$$(-6-2\sqrt{3}\,,\,-6+2\sqrt{3})$$

نامعادله‌های دوگانه

اگر A و B عبارت‌های جبری برحسب x باشند، با روش‌هایی که گفتیم، می‌توان جواب نامعادلهٔ $A<B$ را به دست آورد. گاهی اوقات مسأله از ما می‌خواهد x هایی را بیابیم که هم‌زمان در دو نامعادلهٔ $A<B$ و $C<D$ صدق کنند. برای حل این‌گونه مسائل ابتدا نامعادلهٔ $A<B$ و بعد نامعادلهٔ $C<D$ را حل می‌کنیم. حال جواب مسأله اشتراک مجموعه جواب‌های این دو نامعادله خواهد بود. اگر مسأله از ما بخواهد x هایی را بیابیم که هم‌زمان در سه یا در تعداد بیشتر نامعادله صدق کنند، باز هم می‌توان به روشی مشابه عمل کرد.

گاهی هم سؤال به این صورت است: xهایی را بیابید که به ازای آن‌ها نامعادلهٔ مقابل برقرار باشد. $A<B<C$

معلوم است که جواب این مسأله اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ $B<C$ و $A<B$ است.

آیا اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ $A<B$ و $A<C$ جواب نامعادلهٔ $A<B<C$ است؟

سؤال

نامعادلات داده‌شده را حل کنید.

الف) $۴\le ۵x-۷\le ۶$

ب) $۲x-۱<۷x+۳<۴x-۱$

ج) $۳x+۱<-۲x+۵\le ۷x+۱۱$

پاسخ الف) می‌توانیم این نامعادله را به دو نامعادله تبدیل کنیم و با روشی که گفتیم، مسأله را حل کنیم:

$$۴\le ۵x-۷ \Rightarrow ۴+۷\le ۵x \Rightarrow \frac{۱۱}{۵}\le x \Rightarrow x\in\left[\frac{۱۱}{۵},+\infty\right)$$

$$x-۷\le ۶ \Rightarrow ۵x\le ۶+۷ \Rightarrow x\le\frac{۱۳}{۵} \Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{۱۳}{۵}\right]$$

حال اشتراک این دو مجموعه جواب می‌شود: $\left[\frac{۱۱}{۵},\frac{۱۳}{۵}\right]$

ب) این نامعادله را به دو نامعادله تبدیل می‌کنیم:

$$۲x-۱<۷x+۳ \Rightarrow -۴<۵x \Rightarrow \frac{-۴}{۵}<x \Rightarrow x\in\left(\frac{-۴}{۵},+\infty\right)$$

$$۷x+۳<۴x-۱ \Rightarrow ۳x<-۴ \Rightarrow x<-\frac{۴}{۳} \Rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{۴}{۳}\right)$$

از آن‌جا که $\frac{-۴}{۳}<\frac{-۴}{۵}$، اشتراک این دو مجموعه تهی می‌شود.

ج) این نامعادله را به دو نامعادله تبدیل می‌کنیم:

$$۳x+۱<-۲x+۵ \Rightarrow ۵x<۴ \Rightarrow x<\frac{۴}{۵} \Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{۴}{۵}\right)$$

$$-۲x+۵\le ۷x+۱۱ \Rightarrow -۶\le ۹x \Rightarrow \frac{-۶}{۹}\le x \Rightarrow x\in\left[\frac{-۲}{۳},+\infty\right)$$

و اشتراک این دو مجموعه می‌شود: $\left[\frac{-۲}{۳},\frac{۴}{۵}\right)$

در برخی مسأله‌ها می‌توان مسأله را یک‌جا حل کرد. به عنوان مثال نامعادلهٔ $۴\le ۵x-۷\le ۶$ را به صورت زیر حل می‌کنیم:

به هر سه عبارت $+۷$ را اضافه می‌کنیم: $۱۱\le ۵x\le ۱۳$

هر سه عبارت را در $\frac{۱}{۵}$ ضرب می‌کنیم: $\frac{۱۱}{۵}\le x\le\frac{۱۳}{۵}$

پس مجموعه جواب نامعادلهٔ $۴\le ۵x-۷\le ۶$، بازهٔ $\left[\frac{۱۱}{۵},\frac{۱۳}{۵}\right]$ است.

نامعادله‌های قدر مطلق

نامعادله‌ها می‌توانند شکل‌های مختلفی داشته باشند، در این مبحث ما به بررسی برخی نامعادله‌ها می‌پردازیم که عبارت‌هایی شامل قدر مطلق هستند.

تعریف اگر a عددی نامنفی باشد، آن‌گاه $|a|=a$ و اگر a عددی منفی باشد آن‌گاه $|a|=-a$. به عنوان مثال $\left|\frac{۷}{۵}\right|=\frac{۷}{۵}$ و $\left|-\frac{۲}{۳}\right|=\frac{۲}{۳}$

سـؤال

جواب نامعادلهٔ $|x|<5$ را بیابید.

پاسخ از میان اعداد مثبت، اعداد کوچک‌تر از ۵ این ویژگی را دارند و از میان اعداد منفی، اعداد بزرگ‌تر از ۵- این ویژگی را دارند، صفر هم این ویژگی را دارد و در نتیجه مجموعه جواب این سؤال می‌شود $(-5,5)$ و به عبارت دیگر $|x|<5 \Leftrightarrow -5<x<5$.

سـؤال

جواب نامعادلهٔ $|x|>5$ را بیابید.

پاسخ از میان اعداد مثبت، اعداد بزرگ‌تر از ۵ این ویژگی را دارند و از میان اعداد منفی، اعداد کوچک‌تر از ۵- این ویژگی را دارند، صفر هم این ویژگی را ندارد و در نتیجه جواب این سؤال می‌شود $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$ و به عبارت دیگر $|x|>5 \Leftrightarrow x>5$ یا $x<-5$.

و البته با استدلالی مشابه آن‌چه در سؤال‌های فوق دیدید معلوم است که اگر a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد آن‌گاه:

۱ $|u|<a \Leftrightarrow -a<u<a$

۲ $|u|>a \Leftrightarrow u>a$ یا $u<-a$

مثال‌های آموزشی

۱) نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|8-3x|\le 1$ ب) $\left|\frac{4x-2}{5}+1\right|>3$

پاسخ الف)

$$|8-3x|\le 1 \Rightarrow -1\le 8-3x\le 1$$

از هر سه عبارت ۸ را کم می‌کنیم:

$$-9\le -3x\le -7$$

هر سه عبارت را در $-\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم: (دقت کنید که جهت نامساوی عوض می‌شود)

$$3\ge x\ge \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{7}{3}\le x\le 3$$

پس مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق $\left[\frac{7}{3},3\right]$ است.

ب)

$$\left|\frac{4x-2}{5}+1\right|>3 \Rightarrow \left|\frac{4x+3}{5}\right|>3 \Rightarrow \frac{4x+3}{5}>3 \text{ یا } \frac{4x+3}{5}<-3$$

دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و در نهایت اجتماع جواب‌های آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{4x+3}{5}>3 \Rightarrow 4x+3>15 \Rightarrow 4x>12 \Rightarrow x>3$$

$$\frac{4x+3}{5}<-3 \Rightarrow 4x+3<-15 \Rightarrow 4x<-18 \Rightarrow x<\frac{-9}{2}$$

جواب این مسأله می‌شود $(-\infty,-\frac{9}{2})\cup(3,+\infty)$.

۲) یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ $(2,7)$ باشد.

پاسخ با قدری دقت معلوم می‌شود که مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-a|<b$ بازه‌ای است به مرکز a و طول 2b. حال با توجه به این‌که $(2,7)$ بازه‌ای است به مرکز $\frac{2+7}{2}$ و طول $7-2$ پس با فرض $a=\frac{9}{2}$ و $2b=5$ به جواب می‌رسیم:

$$\left|x-\frac{9}{2}\right|<\frac{5}{2}$$

۳) **یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$ باشد.**

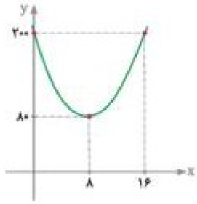
پاسخ از بحثی مشابه بحث قبل معلوم می‌شود که بازهٔ $(2,8)$ مجموعهٔ جواب معادلهٔ زیر است:

$$\left|x-\frac{2+8}{2}\right|<\frac{8-2}{2}\Rightarrow|x-5|<3$$

حال مجموعهٔ $(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$ دقیقاً مجموعه نقاطی است که در آن‌ها نامعادلهٔ فوق برقرار نباشد یعنی $|x-5|\not<3$ یا $|x-5|\geq 3$.

۴) **تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{15}{8}x^2-30x+200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟**

پاسخ بهتر است قبل از جواب به خود سؤال دقت کنیم: با توجه به این‌که نقطهٔ $x=\frac{-b}{2a}$ نقطهٔ رأسی چندجمله‌ای درجهٔ دو است، معلوم می‌شود که این عبارت کم‌ترین مقدار خود را در نقطهٔ $x=8$ به دست می‌آورد (چون ضریب x^2 مثبت است سهمی دارای نقطهٔ مینیمم می‌باشد) و مقدار y در نقطهٔ $x=8$ می‌شود ۸۰. چند نقطهٔ این منحنی را مشخص می‌کنیم تا نمودار آن را رسم کنیم: $(0,200)$، $(8,80)$، $(16,200)$



حال ببینیم این مسأله چه اطلاعاتی به ما می‌دهد؟

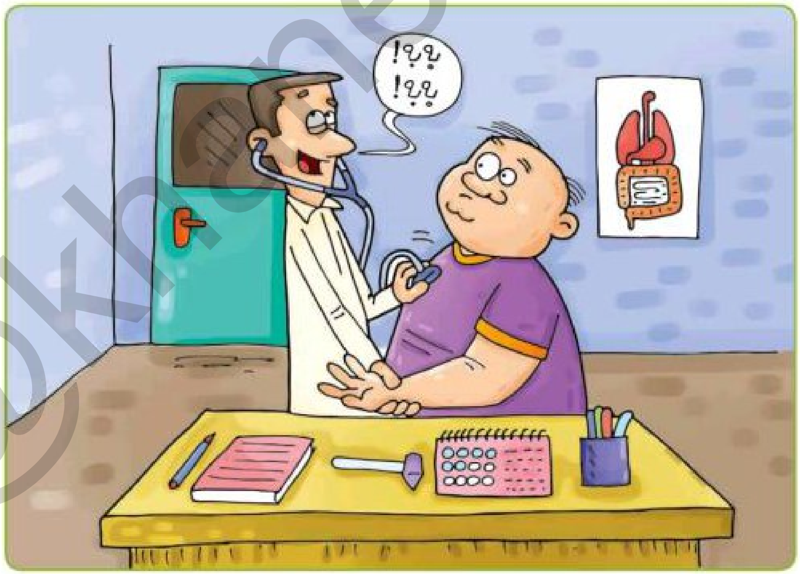
۱- ضربان قلب در لحظهٔ $x=0$ یعنی قبل از شروع به کار سنگین بدنی و به عبارت دیگر در حالت عادی ۲۰۰ تا است!!

۲- با انجام کار سنگین بدنی کم‌کم ضربان قلب کاهش می‌یابد به طوری که پس از ۸ دقیقه ضربان قلب به حدود $\frac{1}{3}$ ضربان اولیه می‌رسد!!

۳- پس از حدود ۱۶ دقیقه فعالیت سنگین بدنی مثل دویدن، ضربان قلب پس از کاهش اولیه دوباره به مقدار عادی خود یعنی ۲۰۰ ضربان در دقیقه باز می‌گردد!؟!

حال به بررسی قسمت دوم سؤال می‌پردازیم. آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

جواب: آیا اصولاً خود سؤال قابل قبول است؟



چند روزی دمای هوا خیلی کم شده بود حدود $-15^\circ C$، یکی پیام فرستاده بود:

این روزا هوا آن‌قدر سرد شده که بخاری‌ها دیگه جواب نمی‌دن... نه تنها جواب نمی‌دن، بعضاً سؤال هم می‌پرسن.

کافه سؤال

۱ عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $3x-1$ ب) $-7x+2$

۲ عبارات درجهٔ دوم زیر را تعیین علامت کنید.

الف) x^2-3x+1 ب) $-3x^2+4x+4$

۳ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{3x-1}{7} \leq \dfrac{2x+1}{-6}$ ب) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{2x-1}{4}<1$

۴ نامعادلات درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

الف) $(3x+5)^2<(7x-1)^2$ ب) $(x-1)^2-3x \leq 2(x+1)^2$

۵ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{1}{2x-1} \leq \dfrac{2}{3x-2}$ ب) $\dfrac{x-1}{3x+1}<4x+1$ ج) $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)} \leq 0$ د) $\dfrac{x^{100}(x+1)^{101}}{(x+2)^{102}(x+3)^{103}}<0$

۶ به ازای مقادیر مختلف a، چندجمله‌ای x^2+ax+1 چند ریشه دارد؟

۷ به ازای کدام مقادیر k، چندجمله‌ای $kx^2-(k-1)x-(k-2)$ همواره منفی است؟

۸ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x-3|<5$ ب) $1 \leq |2x+3|<2$ ج) $|3x+5|<|7x-1|$

۹ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x-1<3x+7<4x-6$ ب) $2x^2+1<-3x^2+7<5x^2$

۱۰ نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$x^2-x+1 \leq 3x+7 \leq -x^2+9$

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- علامت عبارت $-3x+5$ در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر منفی است؟

۱) $(1,4)$ ۲) $(2,6)$ ۳) $(\frac{3}{2},8)$ ۴) $(-3,4)$

۲- علامت عبارت $(2x-1)(-3x+2)$ در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر مثبت است؟

۱) $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$ ۳) $(\frac{4}{7},\frac{5}{8})$ ۴) $(\frac{6}{8},\frac{7}{8})$

۳- مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x-3<\frac{3-4x}{2}-x$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-\infty,3)$ ۳) $(-\infty,\frac{1}{3})$ ۴) $(-\infty,\frac{9}{10})$

٤- مجموعه جواب نامعادلهٔ $3x-1<2x+1<\frac{2-3x}{5}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{7}{18})$ ۲) $(-\infty,2)$ ۳) $(-\infty,-\frac{3}{13})$ ۴) $(-\infty,0)$

۵- مجموعهٔ جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $4<|x+\frac{1}{2}|\le 7$ چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶- عبارت $(a+1)x^2-(a-1)x+2$ به ازای همهٔ مقادیر x منفی است. a در کدام مجموعه قرار دارد؟

۱) $(5-3\sqrt{2}\ ,\ 5+3\sqrt{2})$ ۲) $\mathbb{R}-(5-3\sqrt{2}\ ,\ 5+3\sqrt{2})$
۳) $(-\infty,-1)$ ۴) چنین aیی وجود ندارد.

۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $x(x+2)>x(3x-1)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{3}{2})$ ۲) $(\frac{3}{2},+\infty)$ ۳) $(0,\frac{3}{2})$ ۴) $(\frac{3}{2},5)$

۸- مجموعهٔ a هایی که به ازای آن‌ها معادلهٔ $x^2-ax+a-2=0$ دارای ریشهٔ حقیقی است، کدام است؟

۱) $(2-2\sqrt{3}\ ,\ 2+2\sqrt{3})$ ۲) $\mathbb{R}-(2-2\sqrt{3}\ ,\ 2+2\sqrt{3})$
۳) $\mathbb{R}-(3\ ,\ 3\sqrt{3})$ ۴) $\mathbb{R}$

۹- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-1}{x+1}<\frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,+\infty)-[0,1]$ ۳) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۰- بازهٔ $(-5,11)$ مجموعه جواب کدام‌یک از معادلات زیر است؟

۱) $|x-4|<7$ ۲) $|x+2|<8$ ۳) $|x-7|<7$ ۴) $|x-3|<8$

درس۳ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

الف) $۳x-۱$

$۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

x		$\frac{۱}{۳}$	
$۳x-۱$	$-$	۰	$+$

ب) $-۷x+۲$

$-۷x+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{۷}$

x		$\frac{۲}{۷}$	
$-۷x+۲$	$+$	۰	$-$

۲

الف) $x^۲-۳x+۱$

$x^۲-۳x+۱=۰$

$\Delta=۹-۴=۵$

$x=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$

x		$\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$		$\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$	
$(x-\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲})$	$-$	۰	$+$		$+$
$(x-\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲})$	$-$		$-$	۰	$+$
$x^۲-۳x+۱$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

ب) $-۳x^۲+۴x+۴$

$-۳x^۲+۴x+۴=۰$

$\Delta=۱۶+۴۸=۶۴$

$x=\frac{-۴\pm۸}{-۶} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲ \\ x_۲=\frac{-۲}{۳} \end{cases}$

x		$-\frac{۲}{۳}$		۲	
$-۳x^۲+۴x+۴$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

۳

الف) $\frac{۳x-۱}{۷} \le \frac{۲x+۱}{-۶} \xrightarrow{\times۴۲} ۱۸x-۶ \le -۱۴x-۷ \Rightarrow ۳۲x+۱ \le ۰$

$۳۲x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۳۲}$ جواب: $(-\infty,\frac{-۱}{۳۲}]$

x		$-\frac{۱}{۳۲}$	
$۳۲x+۱$	$-$	۰	$+$

ب) $\frac{x+۱}{۳}-\frac{۲x-۱}{۴}<۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{۳}-\frac{۲x-۱}{۴}-۱<۰ \Rightarrow \frac{۴x+۴-۶x+۳-۱۲}{۱۲}<۰$

$\frac{-۲x-۵}{۱۲}<۰ \xrightarrow{\times۱۲} -۲x-۵<۰ \Rightarrow ۲x+۵>۰$

$۲x+۵=۰ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$ جواب: $(\frac{-۵}{۲},+\infty)$

x		$-\frac{۵}{۲}$	
$۲x+۵$	$-$	۰	$+$

۴

الف) $(۳x+۵)^۲<(۷x-۱)^۲ \Rightarrow$

$۰<(۷x-۱)^۲-(۳x+۵)^۲ \Rightarrow ۰<(۷x-۱-۳x-۵)(۷x-۱+۳x+۵) \Rightarrow$

$۰<(۴x-۶)(۱۰x+۴) \Rightarrow ۰<۴۰(x-\frac{۳}{۲})(x+\frac{۲}{۵})$

جواب: $(-\infty,\frac{-۲}{۵})\cup(\frac{۳}{۲},+\infty)$

x		$-\frac{۲}{۵}$		$\frac{۳}{۲}$	
$۱۰x^۲-۱۱x-۶$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

ب) $(x-۱)^۲-۳x \le ۲(x+۱)^۲ \Rightarrow x^۲-۲x+۱-۳x \le ۲x^۲+۴x+۲ \Rightarrow x^۲+۹x+۱ \ge ۰$

$\Delta=۸۱-۴=۷۷$

$x=\frac{-۹\pm\sqrt{۷۷}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-۹-\sqrt{۷۷}}{۲} \\ x_۲=\frac{-۹+\sqrt{۷۷}}{۲} \end{cases}$

x		$\frac{-۹-\sqrt{۷۷}}{۲}$		$\frac{-۹+\sqrt{۷۷}}{۲}$	
$x^۲+۹x+۱$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

جواب: $(-\infty,\frac{-۹-\sqrt{۷۷}}{۲}]\cup[\frac{-۹+\sqrt{۷۷}}{۲},+\infty)$

[۵]

الف) $\frac{1}{2x-1}\le\frac{2}{3x-2}\Rightarrow\frac{2}{3x-2}-\frac{1}{2x-1}\ge 0\Rightarrow\frac{2(2x-1)-1(3x-2)}{(3x-2)(2x-1)}\ge 0$

$\frac{4x-2-3x+2}{(3x-2)(2x-1)}\ge 0\Rightarrow\frac{x}{(3x-2)(2x-1)}\ge 0$ ریشه صورت: $x=0$

$(3x-2)(2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\\ x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$ ریشه‌های مخرج

x		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x}{(3x-2)(2x-1)}$	$-$	0	$+$		$-$		$+$

جواب: $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{2}{3},+\infty)$

ب) $\frac{x-1}{3x+1}<4x+1\Rightarrow\frac{x-1-(4x+1)(3x+1)}{3x+1}<0$

$\Rightarrow\frac{x-1-12x^2-1-4x-3x}{3x+1}<0$

$\Rightarrow\frac{-12x^2-6x-2}{3x+1}<0\Rightarrow(-2)\left(\frac{6x^2+3x+1}{3x+1}\right)<0\Rightarrow\frac{6x^2+3x+1}{3x+1}>0$

$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{صورت کسر}}6x^2+3x+1=0\\ \Delta=9-24=-15<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ همواره موافق علامت a $\Rightarrow$ همواره مثبت

$3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ ریشه مخرج   جواب: $(\frac{-1}{3},+\infty)$

x		$-\frac{1}{3}$	
$6x^2+3x+1$	$+$		$+$
$3x+1$	$-$	0	$+$
$\frac{6x^2+3x+1}{3x+1}$	$-$		$+$

ج) $\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}\le 0$

$\left.\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right\}$ ریشه‌های صورت $\Rightarrow$

x		0		1		2	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x(x-1)(x-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\left.\begin{array}{l}x=3\\ x=4\\ x=5\end{array}\right\}$ ریشه‌های مخرج $\Rightarrow$

x		3		4		5	
$x-3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-3)(x-4)(x-5)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

x		0		1		2		3		4		5	
$x(x-1)(x-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x-3)(x-4)(x-5)$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

جواب: $[0,+1]\cup[2,3)\cup(4,5)$

د) $\frac{x^{100}(x+1)^{101}}{(x+2)^{102}(x+3)^{103}}<0$

ریشه‌های صورت: $\begin{cases}x=0\\ x=-1\end{cases}$

ریشه‌های مخرج: $\begin{cases}x=-2\\ x=-3\end{cases}$

x		-3		-2		-1		0	
x^{100}	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$
$(x+1)^{101}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+2)^{102}$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$(x+3)^{103}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\frac{x^{100}(x+1)^{101}}{(x+2)^{102}(x+3)^{103}}$	$+$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$

جواب: $(-3,-2)\cup(-2,-1)$

۶

حالت اول: دو ریشه داشته باشد پس Δ باید مثبت باشد:

$$\Delta>0 \Rightarrow a^2-4>0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a=\pm 2$$

a		-2		$+2$	
a^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

بنابراین اگر $2<a$ یا $-2>a$ باشد معادله ۲ ریشه دارد.

حالت دوم: یک ریشه داشته باشد پس Δ باید صفر باشد:

$$\Delta=0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a=\pm 2$$

بنابراین اگر a، ۲ یا ۲- باشد معادله یک ریشه دارد.

حالت سوم: ریشه نداشته باشد پس Δ باید منفی باشد، طبق جدول حالت اول، اگر $-2<a<2$ باشد معادله ریشه ندارد.

۷

اگر بخواهیم یک چند جمله‌ای همواره منفی باشد اولاً باید ریشه نداشته باشد یعنی $\Delta<0$ و ثانیاً باید ضریب x^2 منفی باشد. پس:

$k<0$

$$\Delta=(k-1)^2+4(k-2)(k)<0 \Rightarrow k^2-2k+1+4k^2-8k<0 \Rightarrow 5k^2-10k+1<0$$

$\Delta=100-20=80$ (مربوط به معادلهٔ جدید)

$$k=\frac{10\pm\sqrt{80}}{10}=\frac{10\pm4\sqrt{5}}{10}$$

k		$\frac{10-4\sqrt{5}}{10}$		$\frac{10+4\sqrt{5}}{10}$	
$5k^2-10k+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

برای این‌که $\Delta<0$ باشد k باید عضوی از بازهٔ $\left(\frac{10-4\sqrt{5}}{10},\frac{10+4\sqrt{5}}{10}\right)$ باشد و از طرفی چون k باید کوچک‌تر از صفر باشد بنابراین اشتراک این دو شرط تهی است پس چنین k ای وجود ندارد و این چند جمله‌ای همواره منفی نمی‌شود.

۸

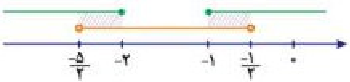
الف) $|x-3|<5$

$$-5<x-3<5 \xrightarrow{+3} -5+3<x-3+3<5+3 \Rightarrow -2<x<8$$

ب) $1\le|2x+3|<2$

$$|2x+3|<2 \Rightarrow -2<2x+3<2 \Rightarrow -5<2x<-1 \Rightarrow -\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}$$

$$|2x+3|\ge1 \Rightarrow \begin{cases}2x+3\ge1 \Rightarrow 2x\ge-2 \Rightarrow x\ge-1\\ 2x+3\le-1 \Rightarrow 2x\le-4 \Rightarrow x\le-2\end{cases}$$



اشتراک تمام بازه‌ها:

مجموعه جواب: $\left(-\frac{5}{2},-2\right]\cup\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$

ج) $|3x+5|<|7x-1|$

$|3x+5|<7x-1$

$$\Rightarrow -7x+1<3x+5<7x-1 \Rightarrow \begin{cases}-7x+1<3x+5 \Rightarrow x>\frac{-4}{10}=\frac{-2}{5}\\ 3x+5<7x-1 \Rightarrow x>\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\end{cases} \xrightarrow{\cap} x>\frac{3}{2}$$

$|3x+5|<-7x+1$

$$7x-1<3x+5<1-7x \Rightarrow \begin{cases}7x-1<3x+5 \Rightarrow x<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\ 3x+5<-7x+1 \Rightarrow x<\frac{-4}{10}=\frac{-2}{5}\end{cases} \xrightarrow{\cap} x<\frac{-2}{5}$$

مجموعه جواب: $\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

۹

الف) $2x-1<3x+5<4x-6$

$2x-1<3x+5 \Rightarrow 2x-3x<5+1 \Rightarrow -x<6 \Rightarrow x>6 \quad (1)$

$3x+5<4x-6 \Rightarrow 3x-4x<-6-5 \Rightarrow -x<-11 \Rightarrow x>11 \quad (2)$

$(1)\cap(2) \Rightarrow x>11$

جواب: $(11,+\infty)$

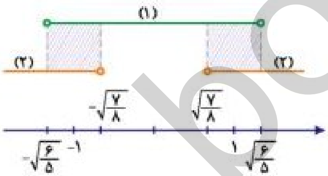
ب) $2x^2+1<-3x^2+7<5x^2$

$2x^2+1<-3x^2+7 \Rightarrow 5x^2-6<0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{6}{5}}<x<\sqrt{\frac{6}{5}} \quad (1)$

$-3x^2+7<5x^2 \Rightarrow 8x^2-7>0 \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{8}}<x$ یا $x<-\sqrt{\frac{7}{8}} \quad (2)$

$(1)\cap(2)$:

مجموعه جواب: $\left(-\sqrt{\frac{6}{5}},-\sqrt{\frac{7}{8}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{7}{8}},\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$



۱۰

$x^2-x+1\le 3x+7\le -x^2+9$

$x^2-x+1\le 3x+7 \Rightarrow x^2-x+1-3x-7\le 0 \Rightarrow x^2-4x-6\le 0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4(1)(-6)=+40$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{4+2\sqrt{10}}{2}=2+\sqrt{10} \\ x_2=\dfrac{4-2\sqrt{10}}{2}=2-\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow 2-\sqrt{10}\le x\le 2+\sqrt{10} \quad (1)$$

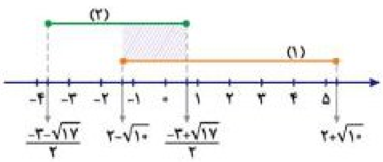
x		$2-\sqrt{10}$		$2+\sqrt{10}$	
x^2-4x-6	+		−		+

$3x+7\le -x^2+9 \Rightarrow -x^2-3x+2\ge 0 \Rightarrow -(x^2+3x-2)\ge 0 \Rightarrow x^2+3x-2\le 0 \Rightarrow \Delta=(3)^2-4(-2)(1)=9+8=17$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ x_2=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\le x\le \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad (2)$$

x		$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$	
x^2+3x-2	+		−		+

مجموعه جواب: $\left[2-\sqrt{10},\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$



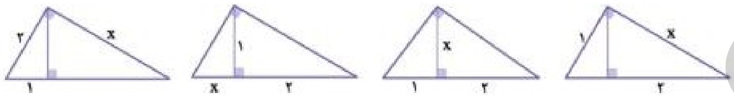
درس ۳ پاسخ‌نامه کلیدی گزینه چند

سؤال	پاسخ
۱	۲
۲	۳
۳	۴
۴	۳
۵	۲
۶	۴
۷	۳
۸	۴
۹	۲
۱۰	۴

گاج

ایستگاه المپیاد

۱) مقدار x را در هر کدام از شکل‌های زیر به دست آورید.



۲) الف) اگر x_2 و x_1 اعدادی حقیقی باشند کم‌ترین مقدار عبارت $(x-x_1)^2+(x-x_n)^2$ در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد؟

ب) اگر $x_1,\dots,x_n$ اعدادی حقیقی باشند کم‌ترین مقدار عبارت $(x-x_1)^2+\dots+(x-x_n)^2$ در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد؟

ج) اگر $x_1,\dots,x_n$ اعدادی حقیقی و $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $\alpha_1(x-x_1)^2+\dots+\alpha_n(x-x_n)^2$ در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد؟

۳) نامعادلهٔ $|3x+1|-|5x-7|<1$ را حل کنید.

۴) مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه ۱ واحد است و طول وتر آن ۱۰، طول اضلاع آن را به دست آورید.

۵) مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه ۱ واحد است و محیط آن ۱۰، طول اضلاع آن را به دست آورید.

۶) شرط لازم و کافی برای این‌که نامعادلهٔ زیر به ازای همهٔ اعداد حقیقی برقرار باشد، چیست؟

(a_1، a_2، b_1، b_2، c_1، c_2، d_1، d_2 اعدادی حقیقی هستند.)

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}<\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$$

۷) شرط لازم و کافی برای این‌که معادلهٔ زیر جواب حقیقی نداشته باشد، چیست؟

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}=\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$$

یادداشت

خلاصهٔ فصل ۴

نامعادله

- عباراتی به شکل $A<B$ که A و B عبارت‌های جبری هستند را نامعادله می‌گوییم.
- خاصیت‌های حاکم بر نامعادله:

۱) جمع $A<B \Leftrightarrow A+C<B+C$

۲) ضرب $A<B\,,\,C>0 \Leftrightarrow AC<BC$

$A<B\,,\,C<0 \Leftrightarrow AC>BC$

- برای حل نامعادلات می‌توان از تعیین علامت هم استفاده کرد.

معادلهٔ درجه دوم

- هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ و $a,b,c\in\mathbb{R}$ را یک معادلهٔ درجه دوم می‌گوییم.
- روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم:

۱) روش تجزیه:

الف) تجزیه به کمک فاکتورگیری:

$$ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0\,,\,x=-\frac{b}{a}$$

ب) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2-a^2=0 \Rightarrow (x-a)(x+a)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=\pm a$$

ج) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2+(a+b)x+ab=0 \Rightarrow (x+a)(x+b)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=-a\,,\,x=-b$$

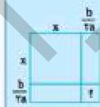
۲) روش ریشه‌گیری:

$$x^2=a\,,\,a\geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=\pm\sqrt{a}$$

۳) روش هندسی (مربع کامل):

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

x^n چه باشد تا مساحت شکل داده شده $(x^2+\frac{b}{a}x)$ برابر $-\frac{c}{a}$ باشد؟



$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

۴) روش کلی:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac$$

الف) $\Delta>0$، معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد: x_1 و $x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

ب) $\Delta=0$، معادله یک ریشهٔ حقیقی مضاعف دارد: $x=-\frac{b}{2a}$

ج) $\Delta<0$، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

نامعادلهٔ قدرمطلقی

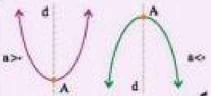
$a\in\mathbb{R}$ و $a\geq 0$، u نیز یک عبارت جبریست:

$$|u|\leq a \Rightarrow -a\leq u\leq a$$

$$|u|\geq a \Rightarrow u\geq a\,,\,u\leq -a$$

سهمی

- نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ که $a\neq 0$ و $a,b,c\in\mathbb{R}$ را سهمی می‌گوییم که بسته به علامت a به یکی از دو شکل مقابل است:



نقطهٔ A را رأس سهمی $\left(x_A=-\frac{b}{2a}\right)$ و خط d به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ را محور تقارن سهمی می‌گوییم.

- اگر معادلهٔ سهمی به شکل $y=a(x-h)^2+k$ باشد که $a\neq 0$، مختصات رأس سهمی (h,k) و معادلهٔ محور تقارن $x=h$ خواهد بود.

تعیین علامت

- چند جمله‌ای درجه ۱:

$$p(x)=ax+b \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=-\frac{b}{a}$$

x		$-\frac{b}{a}$	
$p(x)$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

- چند جمله‌ای درجه ۲:

$$p(x)=ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac$$

الف) $\Delta>0 \xrightarrow{\text{ریشه}} x_1<x_2$

x		x_1		x_2	
$p(x)$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

ب) $\Delta=0 \xrightarrow{\text{ریشه}} x_1$

x		x_1	
$p(x)$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

ج) $\Delta<0 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

x	$x\in\mathbb{R}$
$p(x)$	موافق علامت a

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱.	اگر α یک جواب معادلهٔ $(x+۲)^۲ = (۲x+۳)$ باشد آن‌گاه مقدار $۳\alpha - ۱$ چقدر است؟ ۱) ۴ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) -۴
۲.	جواب‌های معادلهٔ $۴t^۲+۶t+۵=۴$ کدام است؟ ۱) $\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۴}$ ۲) $\frac{-۶\pm۴\sqrt{۵}}{۸}$ ۳) $\frac{۶\pm۲\sqrt{۵}}{۸}$ ۴) $\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۴}$
۳.	معادلهٔ $-۲x^۲-x+۵$ را به‌صورت $a(x+p)^۲+q$ نوشته‌ایم مقدار p و q کدامند؟ ۱) $\frac{۴۱}{۸},\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۴۱}{۸},-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۴۱}{۱۶},\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۴۱}{۱۶},-\frac{۱}{۴}$
۴.	جواب‌های معادلهٔ $x^۶+۶x^۳+۴=۰$ کدامند؟ ۱) $\sqrt{۳\pm\sqrt{۵}}$ ۲) $\sqrt{-۳\pm\sqrt{۵}}$ ۳) $\sqrt[۳]{-۳\pm\sqrt{۵}}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳\pm\sqrt{۵}}$
۵.	جواب‌های کدام‌یک از معادلات زیر $\frac{۲\pm\sqrt{۵}}{۳}$ است؟ ۱) $۹x^۲+۱۲x-۱=۰$ ۲) $۹x^۲+۱۲x+۱=۰$ ۳) $۹x^۲-۱۲x+۱=۰$ ۴) $۹x^۲-۱۲x-۱=۰$
۶.	عددی ۵ برابر عدد دیگر و حاصل‌ضرب آن دو ۵ برابر مجموعشان بوده، اگر هر دو عدد غیرصفر باشند، قدر مطلق تفاضل آن‌ها چقدر است؟ ۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۴ ۴) ۲۲
۷.	به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ $۲x(۴-۲x)=a$ دارای جواب مضاعف است؟ ۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$
۸.	مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۸x^۳+۶x+۲}{(۲x+۱)}=(۲x+۱)^۲$ کدام است؟ ۱) $\frac{\sqrt{۱۲}}{۶}$ ۲) ۰ ۳) $-\frac{\sqrt{۱۲}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۲}}{۱۲}$
۹.	مختصات نقطهٔ رأسی و معادلهٔ محور تقارن $y=۲x^۲+۸x-۲$ کدام است؟ ۱) $x=-۲,(-۲,-۱۰)$ ۲) $x=۲,(۲,-۱۰)$ ۳) $x=-۲,(-۲,۱۰)$ ۴) $x=۲,(۲,۱۰)$
۱۰.	کمترین مقدار عبارت $y=۲x^۲-۳x+۵$ کدام است؟ ۱) $\frac{۳۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۶۷}{۸}$
۱۱.	به ازای کدام a بیشترین مقدار عبارت $ax^۲+۴x+۱$ برابر ۳ است؟ ۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) $+\frac{۱}{۲}$
۱۲.	اگر خط تقارن منحنی $y=kx^۲-k-x+۴$ خط $x=\frac{۱}{۴}$ باشدآن‌گاه نقطهٔ رأسی آن کدام است؟ ۱) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱۷}{۸})$ ۲) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱۵}{۸})$ ۳) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱۵}{۴})$ ۴) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱۷}{۴})$
۱۳.	اگر نقطهٔ رأس $kx^۲-۴x+(k+۳)$ روی محور x باشد، مقدار k کدام است؟ ۱) -۴ یا -۱ ۲) ۴ یا ۱ ۳) ۴ یا -۱ ۴) ۱ یا -۴
۱۴.	مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x+۱)^۲-۳=۰$ چند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۵=۰$ می‌باشد؟ ۱) $\frac{۳}{\sqrt{۱۵}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{\sqrt{۱۵}}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۱۵}}{۳}$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱۵.	حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2(x-1)^2-7$ چند برابر مجموع ریشه‌ها می‌باشد؟ ۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $-\frac{4}{5}$
۱۶.	عبارت $\frac{x^2-2x+3}{2}$ با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟ ۱) $(x-1)^2+2$ ۲) $(x-1)^2-2$ ۳) $\frac{(x-1)^2}{2}-1$ ۴) $\frac{(x-1)^2}{2}+1$
۱۷.	حاصل‌ضرب قدرمطلق ریشه‌های معادلهٔ $4x^2+3x-1=0$ منهای حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ $-2x^2+x+3=0$ برابر کدام مقدار است؟ ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{5}{2}$
۱۸.	اگر α ریشه‌های معادلهٔ $\frac{\alpha^2}{3}-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}=0$ باشد، حاصل $\sqrt[3]{3\alpha-1}$ کدام مقادیر می‌تواند باشد؟ ۱) $2, -\sqrt[3]{\frac{11}{2}}$ ۲) $2, \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$ ۳) $-2, -\sqrt[3]{\frac{11}{2}}$ ۴) $-2, \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$
۱۹.	حاصل‌ضرب قدرمطلق جواب‌های معادلهٔ روبه‌رو کدام است؟ $\frac{x-1}{2x-1}=\frac{3x}{x-2}$ ۱) -2 ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
۲۰.	اختلاف سنی خواهر و برادری ۳ سال است اگر ۶ سال پیش حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۱۰ بود سن هر کدام از آن‌ها ۵ سال بعد چقدر خواهد شد؟ ۱) ۱۱ و ۸ ۲) ۱۶ و ۱۳ ۳) ۱۶ و ۸ ۴) ۵ و ۲
۲۱.	اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ درجه دومی برابر با $\frac{-25}{4}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با $\frac{9}{4}$ باشد در این صورت معادلهٔ مورد نظر کدام است؟ ۱) $x^2-\frac{25}{4}x-\frac{9}{4}=0$ ۲) $x^2-\frac{25}{4}x+\frac{9}{4}=0$ ۳) $x^2+\frac{25}{4}x+\frac{9}{4}=0$ ۴) $x^2+\frac{25}{4}x-\frac{9}{4}=0$
۲۲.	در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ کدام گزینه درست است؟ ۱) اگر $\Delta=0$ باشد در این صورت دو ریشهٔ مثبت داریم. ۲) اگر $\Delta>0$ باشد دو ریشهٔ صحیح داریم. ۳) اگر مجموع ضرایب یک چند جمله‌ای درجه دوم برابر صفر باشد آن‌گاه یکی از ریشه‌های آن برابر یک است. ۴) اگر $a, b, c>0$ آن‌گاه معادله جواب دارد.
۲۳.	به ازای چه مقادیری از a, b معادلهٔ روبه‌رو دارای ریشهٔ مضاعف می‌شود؟ $x(16x-7)=-(a+b)^2$ (فرض کنید $a-b=\frac{9}{8}$ باشد) ۱) $a=1, b=\frac{-1}{8}$ ۲) $a=\frac{1}{8}, b=-1$ ۳) $a=\frac{-1}{8}, b=\frac{-5}{4}$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲
۲۴.	اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $mx^2+m-x=3$ عدد دو باشد حاصل‌ضرب دو جواب کدام است؟ ۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۲۵.	چند مورد از عبارات زیر درست است؟ در نمودار سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ الف) اگر $a>0$ باشد سهمی یک بالاترین نقطه دارد. ب) اگر $a<0$ باشد سهمی یک پایین‌ترین نقطه دارد. ج) اگر $a>0$ باشد سهمی یک پایین‌ترین نقطه دارد. د) اگر $a<0$ باشد سهمی یک بالاترین نقطه دارد. ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۲۶.	در منحنی $y=a(x-h)^2+k$ اگر مقدار y در نقطهٔ $x=5+m$ با مقدار y در نقطهٔ $x=5-m$ برابر باشد در این صورت خط تقارن منحنی y کدام است؟ ۱) $x=m$ ۲) $y=5$ ۳) $x=5$ ۴) $y=m$
۲۷.	معادلهٔ سهمی که نقطهٔ رأسی آن $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ است و از مبدأ می‌گذرد کدام است؟ ۱) $y=x+x^2$ ۲) $y=x^2-x$ ۳) $y=-x^2-x$ ۴) $y=x-x^2$
۲۸.	نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ و محور x ها را در نقاط به طول ۳- و ۲ قطع کرده است. معادله سهمی کدام است؟ ۱) $y=\frac{-5}{6}x^2+\frac{5}{6}x+5$ ۲) $y=\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{6}x+5$ ۳) $y=\frac{-5}{6}x^2-\frac{5}{6}x+5$ ۴) $y=\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{6}x+5$
۲۹.	مقدار چندجمله‌ای $-x^2+3x+1$ در کدام بازه منفی است؟ ۱) $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ ۲) $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$ ۳) $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(0,\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ ۴) $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(0,+\infty)$
۳۰.	به ازای چه مقداری از m سهمی $y=(m+2)x^2-mx-3$ بالای محور x ها می‌باشد؟ ۱) $(-2,+\infty)$ ۲) $\left(-\infty,-6-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-6+2\sqrt{3},+\infty\right)$ ۳) $\left(-\infty,-6-2\sqrt{3}\right)$ ۴) $(-\infty,-2)$
۳۱.	نامعادلهٔ قدر مطلقی که مجموعه جواب آن $(-\infty,5]\cup[7,+\infty)$ باشد، کدام است؟ ۱) $\|x-6\|<1$ ۲) $\|x-6\|\ge 1$ ۳) $\|x-1\|<1$ ۴) $\|x-6\|\ge 2$
۳۲.	مجموعه جواب‌های نامعادله مقابل کدام است؟ $\frac{x-2}{3x+1}\le -2x+1$ ۱) $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left(\frac{-1}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ۲) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-1}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ ۳) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ ۴) $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
۳۳.	مجموعه جواب نامعادلهٔ $\|2x-3\|\le 3x-2$ کدام است؟ ۱) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $[-1,1]$
۳۴.	مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left\|\frac{x-1}{x-2}+2\right\|\ge 3$ کدام است؟ ۱) $\frac{8}{3}\le x\le 3$ ۲) $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right)$ ۳) $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]\cup[3,+\infty)$ ۴) $\left[\frac{8}{3},+\infty\right)-\{3\}$

ردیف	تمـــــــریـــــــن دوره‌ای
۳۵.	مجموعه جواب‌های معادله روبه‌رو کدام است؟ $\dfrac{x^2-5}{(x^2-2x+1)(x^2-9)} \ge 0$ ۱) $[-3,-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5},3]$ ۲) $(-\infty,-3)\cup[-\sqrt{5},\sqrt{5}]\cup(3,+\infty)$ ۳) $(-3,-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5},3)$ ۴) $(-\infty,-3)\cup[-\sqrt{5},1)\cup(1,\sqrt{5}]\cup(3,+\infty)$
۳۶.	عدد صحیحی از ۳ برابر عدد صحیح دیگر یک واحد کمتر است اگر حاصل‌ضرب دو عدد از ۳ برابر مجموع آن‌ها یک واحد کمتر باشد، مجموع دو عدد کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۹ ۴) -4
۳۷.	جواب‌های معادلهٔ مقابل کدام است؟ $x^3-3x^2+3x-6=0$ ۱) $\sqrt[3]{5}-1$ ۲) $-\sqrt[3]{5}+1$ ۳) $\sqrt[3]{5}+1$ ۴) $-\sqrt[3]{5}-1$
۳۸.	ریشه‌های معادلهٔ (*) $x^2+5x-3=0$ و (**) $(x+4)^2+5(x+4)-3=0$ چه ارتباطی با هم دارند؟ ۱) ریشه‌های اولی ۴ واحد از ریشه‌های دومی بیشتر است. ۲) ریشه‌های دومی ۴ واحد از ریشه‌های اولی بیشتر است. ۳) ریشه‌های اولی ۴ برابر ریشه‌های دومی است. ۴) ریشه‌های دومی ۴ برابر ریشه‌های اولی است.
۳۹.	به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $5x(3-2x)=m+7x$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند؟ ۱) $\frac{8}{5}$ ۲) $-\frac{8}{5}$ ۳) $\frac{16}{5}$ ۴) $-\frac{16}{5}$
۴۰.	جواب‌های معادلهٔ $x^2+5x-10=0$ چند برابر جواب‌های معادلهٔ $16x^2+20x-10=0$ می‌باشد؟ ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

فصل ٤ پاسخ‌نامهٔ کلیدی تمرین دوره‌ای

۱	۱ ۲ ۳ **٤**	۱۱	۱ ۲ **۳** ٤	۲۱	۱ ۲ **۳** ٤	۳۱	۱ **۲** ۳ ٤
۲	۱ ۲ ۳ **٤**	۱۲	۱ **۲** ۳ ٤	۲۲	۱ ۲ **۳** ٤	۳۲	**۱** ۲ ۳ ٤
۳	**۱** ۲ ۳ ٤	۱۳	۱ ۲ ۳ **٤**	۲۳	۱ ۲ ۳ **٤**	۳۳	۱ ۲ **۳** ٤
٤	۱ ۲ **۳** ٤	۱٤	۱ ۲ **۳** ٤	۲٤	**۱** ۲ ۳ ٤	۳٤	۱ ۲ ۳ **٤**
۵	۱ ۲ ۳ **٤**	۱۵	۱ **۲** ۳ ٤	۲۵	۱ **۲** ۳ ٤	۳۵	۱ ۲ ۳ **٤**
۶	۱ ۲ **۳** ٤	۱۶	۱ ۲ ۳ **٤**	۲۶	۱ ۲ **۳** ٤	۳۶	۱ **۲** ۳ ٤
۷	**۱** ۲ ۳ ٤	۱۷	۱ ۲ **۳** ٤	۲۷	۱ ۲ ۳ **٤**	۳۷	۱ ۲ **۳** ٤
۸	۱ **۲** ۳ ٤	۱۸	**۱** ۲ ۳ ٤	۲۸	۱ ۲ **۳** ٤	۳۸	**۱** ۲ ۳ ٤
۹	**۱** ۲ ۳ ٤	۱۹	۱ **۲** ۳ ٤	۲۹	۱ **۲** ۳ ٤	۳۹	**۱** ۲ ۳ ٤
۱۰	**۱** ۲ ۳ ٤	۲۰	۱ **۲** ۳ ٤	۳۰	**۱** ۲ ۳ ٤	۴۰	۱ ۲ ۳ **٤**

یادداشت:

فصل پنجم The Function

تابع ۵

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

آشنایی با مفهوم تابع	۱۸۸
تفاوت تابع با سایر رابطه‌ها	۱۹۲
دامنه و برد توابع	۱۹۲
نمایش جبری تابع	۱۹۳
تابع بودن رابطه $y = ax + b$	۱۹۳
بخش سؤالات	۱۹۵

درس دوم: انواع توابع

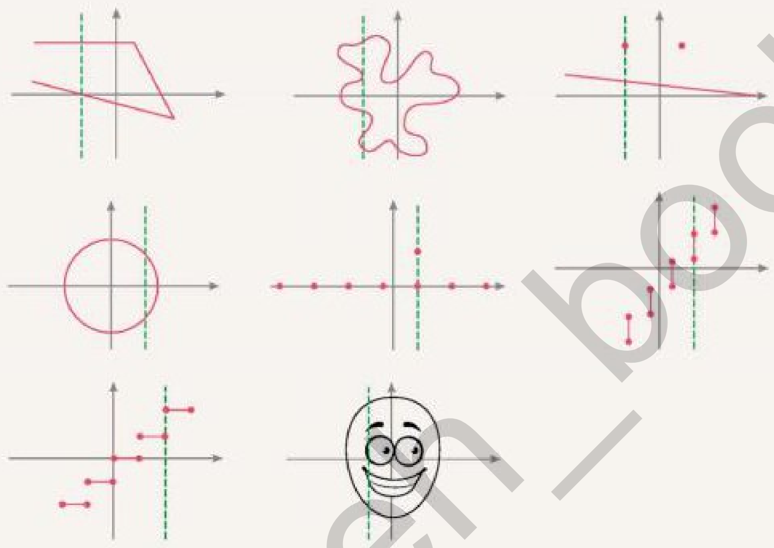
تعریف چند تابع	۲۰۰
رسم توابع به کمک انتقال	۲۰۲
انتقال عمودی	۲۰۲
انتقال افقی	۲۰۲
بخش سؤالات	۲۰۴

خلاصه فصل	۲۱۰
تمرین دوره‌ای	۲۱۱

ماجرا چیه؟!

اجازه بدهید خیالتان را راحت کنم. هر نوع خط خرچنگ قورباغه‌ای که در صفحهٔ مختصات رسم کنید با این شرط که هر خط موازی محور y را حداکثر در یک نقطه قطع کند، شما نمودار یک تابع را رسم کرده‌اید. مثلاً همهٔ موارد زیر نمودار تابع هستند.

و موارد زیر نمودار تابع نیستند. (علت تابع نبودن آن با خطی موازی محور y به صورت خط‌چین مشخص شده است، کافی است یک خط موازی محور y در بیش از یک نقطه نمودار را قطع کند تا نمودار متعلق به یک تابع نباشد.)



اگر بخواهیم به زبان خودمان بگوییم، تابع یعنی چیزی که باتوجه به چیز دیگر به‌طور یکتا مشخص می‌شود، به‌عنوان مثال در هر لحظه قد شما مقدار معینی است، بنابراین طول قد شما باتوجه به زمان به‌طور یکتا مشخص می‌شود. در این‌جا می‌توان گفت قد شما تابعی از زمان است یعنی از زمان تبعیت می‌کند.

اما مثلاً رابطه‌ای که به هر فرد پسر عمویش را نسبت بدهد تابع نیست، چون شاید یک فرد چند تا پسر عمو داشته باشد، در عین حال تابعی که به هر فرد مجموعهٔ پسرعموهایش را نسبت دهد تابع است و ...

در هر کدام از موارد زیر نموداری رسم کنید که هر خط موازی محور Y را دقیقاً در یک نقطه قطع کند و ویژگی گفته شده را هم داشته باشد.

۱) نموداری که هر خط موازی محور x را دقیقاً در یک نقطه قطع کند.

۲) نموداری که هر خط موازی محور x را دقیقاً در دو نقطه قطع کند.

۳) نموداری که هر خط موازی محور x را دقیقاً در سه نقطه قطع کند.

۴) نموداری که هر خط موازی محور x را دقیقاً در چهار نقطه قطع کند.

(کار شبیه نقاشی است، به شبیه‌سازی کامپیوتری است، به قدری باید تلاش کنید جالب خواهد بود، مطمئن باشید که همه سؤال‌ها جواب دارند.)

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

آشنایی با مفهوم تابع

اطلاعات زیر راجع‌به معدل یک دانش‌آموز به نام «عجیب» در طول سال‌های مختلف تحصیل از سال اول تا سال دهم است.

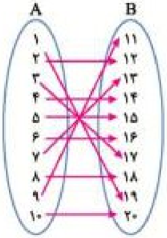
معدل عجیب در سال اول ۱۹ بود. معدل عجیب در سال دوم ۱۲ بود.

معدل عجیب در سال سوم ۱۷ بود. معدل عجیب در سال چهارم ۱۴ بود.

معدل عجیب در سال پنجم ۱۵ بود. معدل عجیب در سال ششم ۱۶ بود.

معدل عجیب در سال هفتم ۱۳ بود. معدل عجیب در سال هشتم ۱۸ بود.

معدل عجیب در سال نهم ۱۱ بود. معدل عجیب در سال دهم ۲۰ بود.



روش‌های مختلفی برای نشان دادن این اطلاعات می‌توان ساخت.

- نمودار مقابل یک روش نمایش این اطلاعات است.

این روش نمایش به کمک دو مجموعه و پیکان‌هایی که اعضای آن‌ها را به هم مربوط می‌کند انجام شد؛ به این روش نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گویند.

- مجموعهٔ زیر هم یک شیوهٔ دیگر نمایش این اطلاعات است.

f = {(۱،۱۹)،(۲،۱۲)،(۳،۱۷)،(۴،۱۴)،(۵،۱۵)،(۶،۱۶)،(۷،۱۳)،(۸،۱۸)،(۹،۱۱)،(۱۰،۲۰)}

در این روش هر اطلاعات به صورت یک زوج نوشته شد که در آن (در هر زوج) ترتیب نوشتن اعداد هم مهم است.

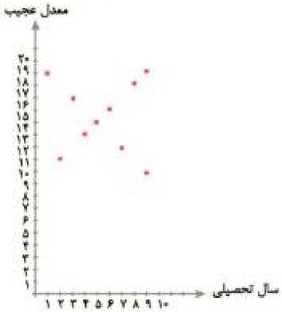
در هر زوج، عضو اول، سال تحصیلی و عضو دوم معدل عجیب در آن سال را نشان می‌دهد. چون ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است، به آن‌ها زوج مرتب می‌گوییم. روش نمایش فوق را نمایش به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب می‌گویند.

تعریف در هر زوج مرتب، عضو اول را مؤلفهٔ اول و عضو دوم را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم.

آس

۵

نمودار زیر هم یک روش دیگر نمایش این اطلاعات است. (این روش هم نمایش به کمک نمودار یا جدول است.)



یک روش دیگر هم این است که اطلاعات فوق را به کمک یک عبارت جبری نشان دهیم. می‌بینیم که نقاط نشان داده شده در نمودار روی دو خط قرار گرفته‌اند. وقتی n عددی زوج است، معدل عجیب $10+n$ است و وقتی n عددی فرد است، معدل عجیب $20-n$ است.

پس می‌توانیم این اطلاعات را به شکل زیر هم بیان کنیم:

$$f(n)=\begin{cases} 20-n & \text{عددی فرد است } n \text{ ،} 1\le n\le 10 \\ 10+n & \text{عددی زوج است } n \text{ ،} 1\le n\le 10 \end{cases}$$

در این مثال رابطهٔ بین سال تحصیلی و معدل عجیب در آن سال تحصیلی را به شکل‌های مختلف نمایش دادیم.

اکنون یک مثال دیگر بیان می‌کنیم:

اطلاعات زیر دربارهٔ این است که هر کدام از ۶ دانش‌آموز به نام‌های جلال، مجید، امیر، جمال، وحید و سعید به کدام‌یک از ۴ زمینهٔ ورزشی والیبال، تنیس، شنا و کوهنوردی علاقه‌مندند.

مجید تنیس را دوست دارد. | امیر والیبال، تنیس و شنا را دوست دارد.

جمال شنا را دوست دارد. | وحید والیبال و کوهنوردی را دوست دارد.

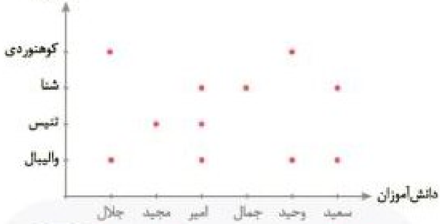
سعید والیبال و شنا را دوست دارد. | جلال والیبال و کوهنوردی را دوست دارد.

این اطلاعات را به کمک نمودار پیکانی به‌صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

نمایش این اطلاعات به کمک زوج‌های مرتب هم به شکل زیر خواهد بود:

h = { (والیبال , جلال) ,(کوهنوردی , جلال) ,(تنیس , مجید) ,(والیبال , امیر) ,(تنیس , امیر) ,(شنا , امیر) ,(شنا , جمال) ,(والیبال , وحید) ,(کوهنوردی، وحید) ,(والیبال، سعید) ,(شنا، سعید) }

نمایش اطلاعات فوق به کمک نمودار به‌صورت زیر می‌باشد:



تعریف به هر مجموعه از زوج‌های مرتب که مؤلفه اول آن‌ها از مجموعهٔ A و مؤلفهٔ دوم آن‌ها از مجموعهٔ B باشد، یک رابطه از A به B می‌گوییم.

به‌عنوان مثال در مثال اول مجموعهٔ f یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B بود و در مثال دوم h یک رابطه از مجموعهٔ C به مجموعهٔ D بود.

یک تفاوت مشخص بین رابطهٔ f و رابطهٔ h این است که رابطهٔ f این ویژگی را دارد که، در آن با معلوم بودن مؤلفهٔ اول یک زوج مرتب، مؤلفهٔ دوم آن نیز معلوم می‌شود، یعنی دو زوج مرتب متمایز، با مؤلفهٔ اول یکسان در f وجود ندارد ولی رابطهٔ h این ویژگی را ندارد، به‌عنوان مثال سه زوج مرتب در h وجود دارد که مؤلفهٔ اول آن‌ها امیر است، یعنی با معلوم بودن مؤلفهٔ اول، مؤلفهٔ دوم به‌طور یکتا مشخص نمی‌شود.

اگر بخواهیم این تفاوت را باتوجّه به نمودار پیکانی توضیح دهیم باید بگوییم که در نمودار پیکانی رابطهٔ f که رابطه‌ای است از A به B، از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است ولی در نمودار پیکانی رابطهٔ h که رابطه‌ای است از C به D، از بعضی عضوهای مجموعهٔ C بیش از یک پیکان خارج شده است.

چون این ویژگی رابطهٔ f مهم است برای آن نام «تابع» را انتخاب می‌کنیم.

تعریف اگر f یک رابطه از A به B باشد، آن‌گاه می‌گوییم f یک تابع است هرگاه به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهد.

به‌عنوان مثال:

۱) رابطه‌ای که به شعاع یک دایره، مساحت آن را نسبت می‌دهد، یک تابع است، زیرا با معلوم بودن شعاع یک دایره، مساحت آن به‌دست می‌آید.

۲) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد، یک تابع است. زیرا گروه خونی یک فرد از آغاز تا پایان عمرش ثابت است و تغییر نمی‌کند.

۳) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه‌های چهارم آن را نسبت می‌دهد، یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ نیست، زیرا هر عدد مثبت، دو ریشهٔ چهارم دارد.

۴) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد، یک تابع است. زیرا هر عدد، دقیقاً یک ریشهٔ سوم دارد.

۵) رابطه‌ای که به هر فرد، فرزندانش را نسبت می‌دهد، یک تابع از مجموعهٔ انسان‌ها به مجموعهٔ انسان‌ها نیست، زیرا یک فرد ممکن است، چند فرزند داشته باشد.

۶) رابطه‌ای که به هر فرد زنده، پدرش را نسبت می‌دهد، یک تابع است.

۷) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد، یک تابع از مجموعهٔ انسان‌ها به مجموعهٔ انسان‌ها نیست، زیرا یک فرد ممکن است، چند دوست داشته باشد.

بیشتـــر بـــدانیـــم

رابطه‌ای که به هر عدد مجموعهٔ ریشه‌های چهارم آن را نسبت می‌دهد یک تابع از A به B است به‌طوری‌که در آن $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\geq ۰\}$ و B مجموعهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{R}$ است.

رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، مجموعهٔ دوستان او را نسبت می‌دهد، یک تابع از A به B است به‌طوری‌که در آن A مجموعهٔ انسان‌ها است و B مجموعهٔ زیرمجموعه‌های انسان‌هاست.

مثال‌های آموزشی

۱) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تابع است؟

$f=\{(۲,۵),(۳,-۶),(۳,۸)\}$

$g=\left\{(۰,۲),(\frac{۳}{۷},۲),(\frac{۶}{۱۱},۲),(\pi,۲)\right\}$

$h=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),...\}$

$k=\{(۳,۷)\}$

پاسخ از آن‌جاکه $(۳,-۶)\in f$ و $(۳,۸)\in f$ معلوم می‌شود که f تابع نیست، بقیّه موارد تابع هستند، زیرا هیچ‌کدام شامل دو زوج مرتب متمایز با مؤلفهٔ اول یکسان، نیستند.

۲) چند تابع از مجموعهٔ $P=\{A,B,C\}$ به مجموعهٔ $Q=\{0,1\}$ وجود دارد؟ همهٔ آن‌ها را به دو شیوهٔ مجموعهٔ زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

پاسخ ابتدا همهٔ آن‌ها را به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب می‌نویسیم:

$f_1=\{(A,0),(B,0),(C,0)\}$

$f_2=\{(A,0),(B,0),(C,1)\}$

$f_3=\{(A,0),(B,1),(C,1)\}$

$f_4=\{(A,0),(B,1),(C,0)\}$

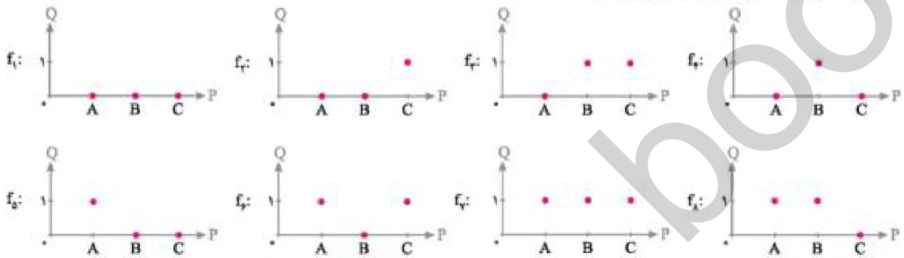
$f_5=\{(A,1),(B,0),(C,0)\}$

$f_6=\{(A,1),(B,0),(C,1)\}$

$f_7=\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$

$f_8=\{(A,1),(B,1),(C,0)\}$

حال همهٔ آن‌ها را به صورت نمودار نمایش می‌دهیم:



۳) مجموعه‌های $P=\{A,B,C,D\}$ و $Q=\{1,2\}$ داده شده‌اند:

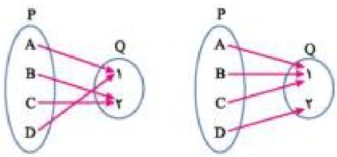
الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از P به Q ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

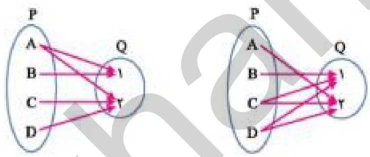
ج) چهار رابطهٔ به‌دست آمده را به کمک نمودار و زوج‌های مرتب نمایش دهید.

پاسخ

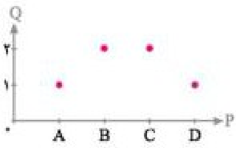
الف)



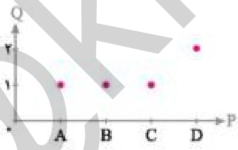
ب)



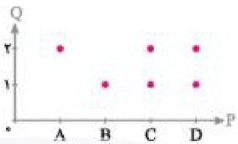
ج)



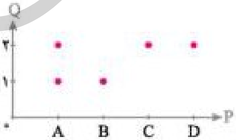
$\{(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)\}$



$\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,2)\}$



$\{(A,2),(B,1),(C,1),(C,2),(D,1),(D,2)\}$



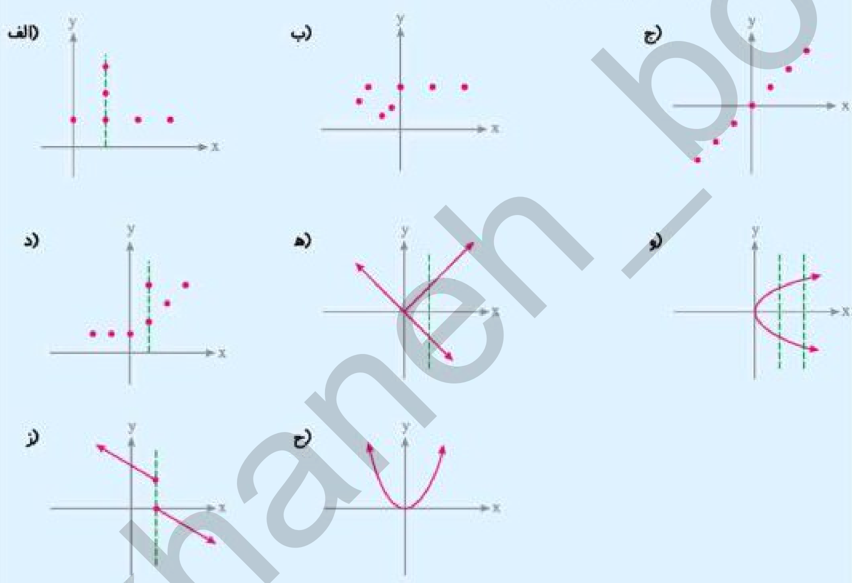
$\{(A,1),(A,2),(B,1),(C,2),(D,2)\}$

تفاوت تابع با سایر رابطه‌ها

با دقّت در نمودارهای مثال آموزشی قبل متوجّه یک تفاوت اساسی بین تابع‌ها و سایر رابطه‌ها می‌شویم، «در نمودار یک تابع هر خط موازی محور عرض‌ها (Q) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند» آیا این ویژگی در همهٔ توابع وجود دارد؟ باتوجّه به این‌که در نمایش یک تابع به‌صورت زوج‌های مرتب، نمی‌توان دو زوج مرتب متمایز با مؤلفهٔ اول یکسان یافت، معلوم می‌شود که اگر نقطهٔ (x, y) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد و $z \neq y$ آن‌گاه مطمئناً (x, z) روی نمودار f قرار ندارد و در نتیجه همیشه هر خط عمود بر محور طول‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

سؤال

کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



پاسخ در موارد الف، د، هـ، و، ز خطی دیده می‌شود، که عمود بر محور طول‌هاست و نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس این موارد، نمودار یک تابع نیستند. در موارد ب، ج و ح نمی‌توانیم خطی عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، پس این موارد، نمودار یک تابع هستند.

دامنه و برد توابع

مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را برد تابع می‌نامیم.

سؤال

دامنه و برد تابع‌های داده‌شده را که نمایش زوج مرتبی آن‌ها داده شده است، بنویسید.

$f = \{(۱,۴),(۲,۴),(۵,۴)\}$

$g = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴),...\}$

پاسخ دامنهٔ f مجموعهٔ $\{۱,۲,۵\}$ و برد f مجموعهٔ $\{۴\}$ است. دامنهٔ g مجموعهٔ $\{۲,۳,۴,۵,...\}$ و برد g مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,...\}$ است.

سؤال

تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنهٔ آن تنها شامل سه عضو باشد.
ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.
ج) دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد.
د) دامنهٔ آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.
هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

پاسخ

الف) به‌عنوان مثال $f = \{(2,1),(3,2),(4,5)\}$

ب) به‌عنوان مثال $g = \{(2,1),(3,1),(4,1)\}$

ج) به‌عنوان مثال $h = \{(3,3)\}$

د) به‌عنوان مثال $k = \{(1,5),(2,5),(3,5),\dots\}$

هـ) به‌عنوان مثال $p = \{(1,1),(2,2),(3,3),\dots\}$

نکته: اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، آن‌گاه دامنهٔ f برابر مجموعهٔ A است، اما لزومی ندارد برد تابع f با مجموعهٔ B برابر باشد.

حال یک پرسش، آیا می‌توان گفت که همیشه تعداد اعضای دامنهٔ f بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد f است؟

برای پاسخ به این پرسش باید گفت که وقتی تعداد اعضای دامنهٔ f متناهی است، اگر دامنهٔ f، دارای m عضو باشد، مثلِ $x_1, x_2, \dots, x_m$ آن‌گاه برد f هم حداکثر m عضو دارد: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)$. (دقت کنید که ممکن است چند تا از $f(x_1), \dots, f(x_m)$ با هم برابر باشند.) در حالتی که دامنهٔ f نامتناهی است، پاسخ به این سؤال قدری دقت می‌خواهد مثلاً تابع $f(n) = n-1$ را که دامنهٔ آن اعداد طبیعی است در نظر بگیرید: دامنهٔ f برابر مجموعهٔ $\{1,2,3,\dots\}$ و برد f برابر مجموعهٔ $\{0,1,2,3,\dots\}$ است، یعنی می‌شود گفت برد f یک عضو بیشتر از دامنهٔ f دارد. این نکته آغاز یک بحث جالب در ریاضیات است که نتایج جالبی هم دارد.

نمایش جبری تابع

همیشه نمی‌توان تابع را به کمک نمودار پیکانی و یا به‌وسیلهٔ مجموعهٔ زوج مرتب‌ها نشان داد، خصوصاً وقتی که دامنهٔ تابع یک مجموعه نامتناهی است. این روش‌ها برای نمایش تابع خیلی کارآمد نیستند. در این‌جا بهتر است تابع را با کمک عبارت‌های جبری نمایش دهیم. نمایشی ساده و مختصر.

سؤال

نمایش زوج مرتبی یک تابع به شکل زیر است، با کمک عبارت‌های جبری نمایشی برای آن بسازید.

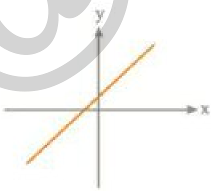
$f = \{(2,7),(3,10),(4,13),(5,16),\dots\}$

پاسخ مؤلفهٔ دوم ۳ برابر مؤلفهٔ اول به علاوهٔ ۱ است، پس می‌توان نوشت: $f(n) = 3n+1 \quad n \in \mathbb{N}, 2 \leq n$

آیا می‌توان نقاط روی خط $y = 3x+1$ را به کمک مجموعهٔ زوج‌های مرتب آن نمایش داد؟ آیا می‌توان آن را به کمک نمودار پیکانی نمایش داد؟ پاسخ این است که چون اعضای دامنه خیلی زیاد است، نمی‌توان به شکلی مشابه مجموعهٔ f در سؤال قبل این رابطه را نمایش داد و هم‌چنین وضعیت در مورد نمودار پیکانی نیز مشابه است. در واقع از این شیوه‌های نمایش، زمانی می‌توان به خوبی استفاده کرد که تعداد عضوها متناهی باشد.

تابع بودن رابطهٔ $y = ax+b$

در شکل زیر نمودار رابطهٔ $y = 3x+1$ را می‌بینیم، چون هر خط موازی محور y، این خط را در یک نقطه قطع می‌کند این نمودار، یک تابع را نشان می‌دهد که می‌توانیم آن را به‌صورت زیر هم بیان کنیم:



$f(x) = 3x+1$

البته به‌سادگی می‌توانیم فقط با استفاده از محاسبات ریاضی تابع بودن رابطهٔ $y = 3x+1$ را نشان دهیم. به برهان خلف فرض می‌کنیم (x_1, y_1) و (x_1, y_2) روی این خط باشند و y_1 و y_2 متمایز باشند، در آن‌صورت $y_1 = 3x_1+1$ و $y_2 = 3x_1+1$ و در نتیجه $y_1 = y_2$ و به تناقض می‌رسیم. با بحثی مشابه آن‌چه دربارهٔ خط $y = 3x+1$ انجام شد، معلوم می‌شود که رابطهٔ $y = ax+b$ هم نمایانگر یک تابع است. هر تابع که معادلهٔ آن به شکل $f(x) = ax+b$ باشد را تابع خطّی می‌نام

مثال‌های آموزشی

۱) **دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن‌ها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشد.**

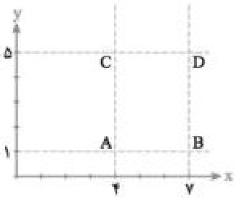
پاسخ شاید ساده‌ترین مثال، مثال زیر باشد:

$$f=\{(0,0),(1,1)\}$$
$$g=\{(0,1),(1,0)\}$$

دامنهٔ هر دو تابع $\{0,1\}$ است و برد هر دو تابع هم $\{0,1\}$ است. ولی این دو هیچ زوج مرتب مشترکی ندارند.

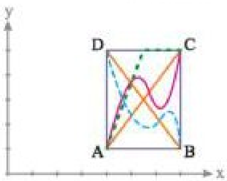
۲) **نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن $[4,7]$ و برد آن $[1,5]$ باشد.**

پاسخ ابتدا محدودهٔ دامنه و برد را در صفحه مختصات مشخص می‌کنیم.



نمودار پاسخ این مسأله، هر نموداری است که داخل یا روی چهار ضلعی ABDC قرار دارد و دارای ویژگی‌های زیر است:

اولاً هر خطی که در ناحیهٔ $4 \le x \le 7$ بر محور x عمود باشد، نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع کند و ثانیاً هر خطی که در ناحیهٔ $1 \le y \le 5$ بر محور y عمود باشد، نمودار را حداقل در یک نقطه قطع کند. نمودارهای زیادی را می‌توان رسم کرد که این ویژگی‌ها را داشته باشد، در واقع بی‌نهایت نمودار.



۳) **نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ را رسم کنید اگر:**

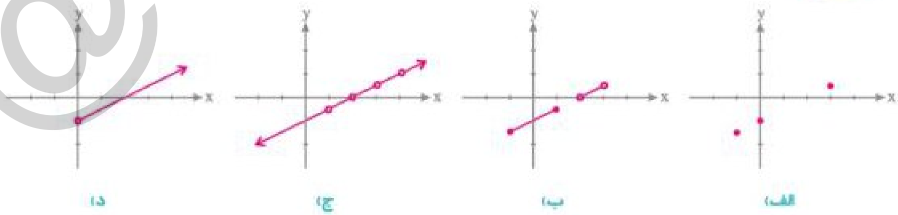
الف) دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $\{-1,0,3\}$ باشد.

ب) دامنهٔ این تابع $[-1,1]\cup(2,3)$ باشد.

ج) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ باشد.

د) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}^+$ باشد یعنی مجموعهٔ اعداد مثبت.

پاسخ



الف) ب) ج) د)

کـــافه ســؤال

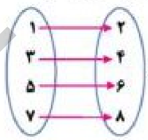
۱ از مجموعهٔ ۲ عضوی A به مجموعهٔ ۲ عضوی B، هر تعداد که می‌توانید نمودار پیکانی متمایز رسم کنید. چند تا از این نمودارها یک تابع را نمایش می‌دهند؟

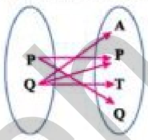
۲ هر کدام از مجموعه‌های زیر یک رابطه را نمایش می‌دهند، نمایش‌های پیکانی و نموداری آن‌ها را رسم کنید.

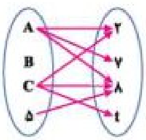
الف) $\{(A,۱),(B,۲),(C,A),(B,A)\}$

ب) $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$

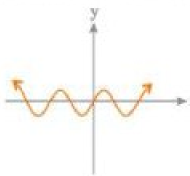
۳ نمایش پیکانی چند رابطه داده شده است. نمایش‌های نموداری و زوج مرتبی آن‌ها را بیان کنید.

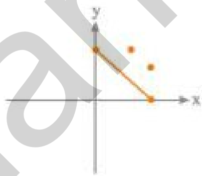
الف) 

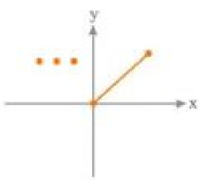
ب) 

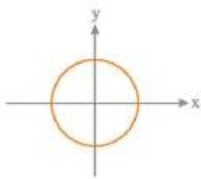
ج) 

۴ مشخص کنید کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش یک تابع است؟

الف) 

ب) 

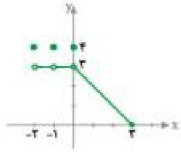
ج) 

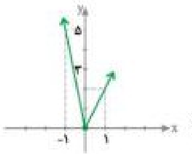
د) 

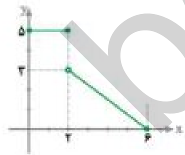
۵ همهٔ توابع از مجموعهٔ دوتایی $\{a,b\}$ به مجموعهٔ سه‌تایی $\{۰,۱,۲\}$ را به روش پیکانی نمایش دهید. (دقت کنید که دامنهٔ همهٔ این توابع $\{a,b\}$ باشد.)

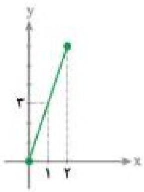
کافه سؤال

۶ دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف)


ب)


ج)


د)


۷ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = -۳x + ۱$ بازهٔ $[۲,۵]$ باشد، برد آن چیست؟

۸ نمایش جبری همهٔ توابع خطی را که دامنهٔ آن‌ها $[-۲,۵]$ و برد آن‌ها $[۱,۸]$ است را بیابید.

۹ تابعی را مثال بزنید که دامنهٔ آن $[۰,۱]$ و برد آن $(۰,۲)$ باشد.

۱۰ دو تابع مثال بزنید که دامنهٔ آن‌ها $[۰,۱]$ و برد آن‌ها هم $[۰,۱]$ باشد و این دو تابع هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

گزینـهٔ چنـــد؟!!!!

۱- اگر A یک مجموعهٔ ۳ عضوی و B یک مجموعهٔ یک عضوی باشد، چند تابع از B به A وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نمایش یک تابع **نیست**؟

۱) $\{(a,a),(b,b)\}$ ۲) $\{(a,a),(b,a)\}$ ۳) $\{(b,b),(b,a)\}$ ۴) $\{(a,b),(b,a)\}$

۳- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک تابع را مشخص **نمی‌کند**؟

۱) $\{(۱,۲),(۳,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۲,۱),(۳,۳),(۴,۵)\}$

۳) $\{(۳,۵),(۵,۳)\}$ ۴) $\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۲),(۲,۳)\}$

۴- کدام‌یک از روابط زیر یک تابع را مشخص **نمی‌کند**؟

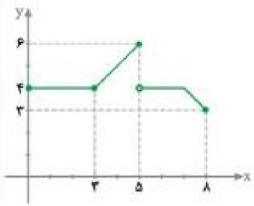
۱) رابطه‌ای که به محیط یک مثلث قائم‌الزاویه مساحت آن را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع محیط آن را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به محیط یک مستطیل مساحت آن را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به مساحت یک مستطیل محیط آن را نسبت می‌دهد.

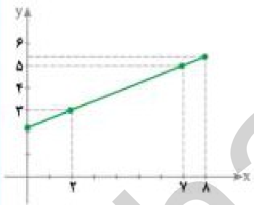
۵- دامنهٔ تابع روبه‌رو کدام است؟



۱) $[۳,۶]$ ۲) $\mathbb{R}$

۳) $(۳,۶]$ ۴) $[۰,۸]$

۶- برد تابع خطی داده شده کدام است؟



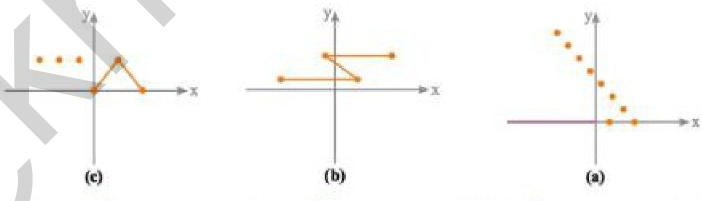
۱) $\left(\frac{۷}{۳},\frac{۱۶}{۳}\right)$

۲) $\left(\frac{۱۱}{۵},\frac{۲۷}{۵}\right)$

۳) $\left(\frac{۱۳}{۵},\frac{۲۷}{۵}\right)$

۴) $\left(\frac{۱۱}{۷},\frac{۱۳}{۲}\right)$

۷- کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش یک تابع است؟



۱) (a)،(c) ۲) (b)،(c) ۳) فقط (a) ۴) فقط (c)

۸- چند تابع خطی وجود دارد که دامنهٔ آن‌ها $[۰,۲)$ و بردشان $(-۱,۵]$ باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹- برد یک تابع که دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است، یک مجموعهٔ تک‌عضوی است. اگر $f(۵) = -۱$، آن‌گاه مقدار $f(-۱) - ۵f(۱)$ کدام است؟

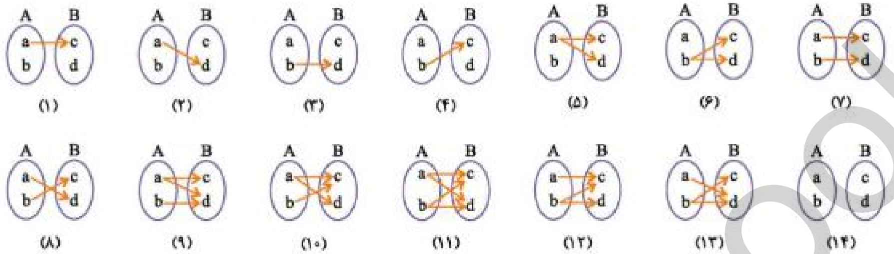
۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰- دامنهٔ یک تابع خطی $[۱,۵]$ و برد آن $[۲,۶]$ است. معادلهٔ این تابع کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟

۱) $f(x)=x+۴$ ۲) $f(x)=۲x-۱$ ۳) $f(x)=-x+۳$ ۴) $f(x)=-x+۷$

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

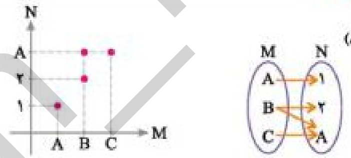
۱



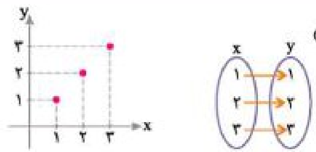
از بین این روابط، رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، (۷)، (۸) و (۱۴) تابع هستند. ۲ مورد را هم رسم نکرده‌ایم شما پیدا کنید.

۲

الف)



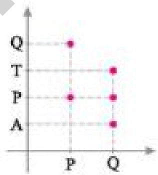
ب)



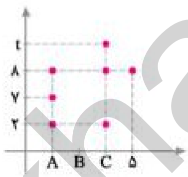
۳

الف) $\{(۱،۲)،(۳،۴)،(۵،۶)،(۷،۸)\}$

ب) $\{(P،P)،(P،Q)،(Q،A)،(Q،P)،(Q،T)\}$



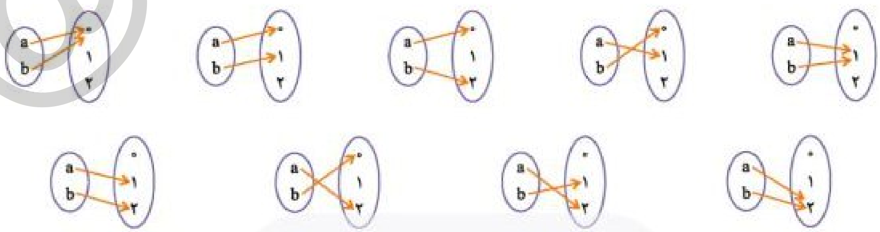
ج) $\{(A،۲)،(A،۷)،(A،۸)،(C،۲)،(C،۸)،(C،t)،(۵،۸)\}$



۴

هر کدام از نمودارهای (الف) و (ج) نمایش یک تابع هستند، چون هر خط موازی محور yها که در نظر بگیریم، آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۵



۶

الف) $D=[-۲،۳]$ ، $R=[۰،۳]\cup\{۴\}$

ب) $D=(-\infty،+\infty)=\mathbb{R}$ ، $R=[۰،+\infty)$

ج) $D=[۰،۶]$ ، $R=[۰،۳)\cup\{۵\}$

د) $D=[۰،۲]$

برای پیدا کردن برد باید عرض نقطه به طول ۲ را پیدا کنیم. برای این منظور ابتدا معادلهٔ خط را به‌دست می‌آوریم و سپس مختصات نقطهٔ $(۲،y)$ را درون آن قرار می‌دهیم تا y به‌دست آید.

معادله خط گذرنده از $(۱،۳)$ و $(۰،۰)$: $y-۰=\underbrace{\frac{۳-۰}{۱-۰}}_{m}(x-۰)\Rightarrow y=۳x$

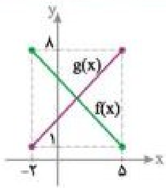
$y=۳\times۲\Rightarrow y=۶\Rightarrow R=[۰،۶]$

۷

از آن‌جا که معادلهٔ داده شده یک خط راست است، می‌توانیم برای به‌دست آوردن حدود برد، ابتدا و انتهای دامنه را درون معادله قرار دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=-۳(۲)+۱=-۵ \\ f(۵)=-۳(۵)+۱=-۱۴ \end{array}\right\}\Rightarrow R=[-۱۴،-۵]$$

۸



تنها توابع خطی در بازهٔ داده شده، توابع f و g هستند.

معادلهٔ آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$m_f=\frac{۸-۱}{-۲-۵}=\frac{۷}{-۷}=-۱\Rightarrow y-۸=-۱(x-(-۲))\Rightarrow y=-x+۶\Rightarrow f(x)=-x+۶$$

$$m_g=\frac{۸-۱}{۵-(-۲)}=\frac{۷}{۷}=۱\Rightarrow y-۸=۱(x-۵)\Rightarrow y=x+۳\Rightarrow g(x)=x+۳$$

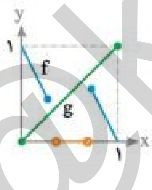
$f(x)=-x+۶$ و $g(x)=x+۳$ تنها توابع خطی با دامنهٔ $[-۲،۵]$ و برد $[۱،۸]$ هستند.

۹

تابع رسم شده در شکل زیر خصوصیت خواسته شده را دارد.(دقت کنید که ۰ و ۱ باید جزء دامنه باشند، اما ۰ و ۲ نمی‌توانند جزء برد باشند.)

۱۰

مثال که زیاده، یکیش هم مورد روبه‌رو:



درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

سؤال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
پاسخ	۲	۳	۴	۲	۴	۲	۴	۲	۳	۴

درس دوم: انواع توابع

تعریف چند تابع

برخی از توابع به این دلیل که در محاسبات مختلف زیاد ظاهر می‌شوند، معروف هستند و به‌همین دلیل برای آن‌ها نام‌هایی انتخاب شده است.

به‌عنوان مثال:

- توابعی که نمایش آن‌ها به شکل $f(x) = ax + b$ است را توابع خطی می‌نامیم.
- توابعی را که نمایش جبری آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، را توابع چندجمله‌ای می‌نامیم به‌عنوان مثال:

$h(x) = x^{12} - \sqrt{12}x^4$ $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x$

$k(m) = m^2 - 3m$ $g(a) = 2a^3 - 1$

- توابعی را که دامنه و برد آن‌ها برابر است و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود را تابع همانی می‌نامیم. به‌عنوان مثال:

$h = \{(x,x),(y,y),(k,k)\}$ $f(x) = x$

$k = \{(+,+),(x,x),(-,-)\}$ $g = \{(2,2),(5,5),(\alpha,\alpha)\}$

- توابعی که برد آن‌ها مجموعه‌ای یک عضوی است را تابع ثابت می‌نامیم. به‌عنوان مثال:

$g = \{(2,3),(5,3),(\alpha,3)\}$ $f(x) = 3$

$k = \{(+,3),(\times,3),(-,3)\}$ $h = \{(x,3),(y,3),(k,3)\}$

- تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهیم.

قرارداد: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد ولی دامنهٔ آن مشخص نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعهٔ ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم.

مثال‌های آموزشی

۱) نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید اگر:

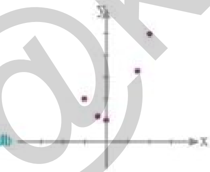
الف) دامنهٔ این تابع $\left\{-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 2\right\}$ باشد.

ب) دامنهٔ این تابع $[-2,0] \cup (1,2)$ باشد.

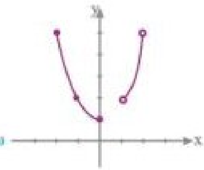
ج) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}^-$ باشد یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی.

د) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد.

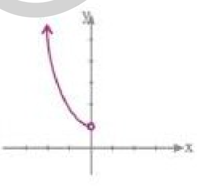
پاسخ



الف



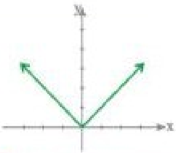
ب



ج

د

۲) نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم کنید.



پاسخ معلوم است که وقتی $x>0$ باشد، آن‌گاه $f(x)=x$ و وقتی $x<0$ باشد، آن‌گاه $f(x)=-x$. پس ما نمودار را در دو قطعه رسم می‌کنیم. ابتدا در ناحیهٔ $x>0$ نمودار $f(x)=x$ را رسم می‌کنیم و سپس در ناحیهٔ $x<0$ نمودار $f(x)=-x$ را رسم می‌کنیم. در نقطه $x=0$ معلوم است که $|x|=0$

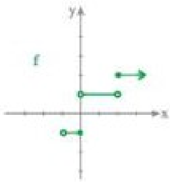
دیدیم که تابع $f(x)=|x|$ را می‌توان به شکل مقابل معرفی کرد: $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

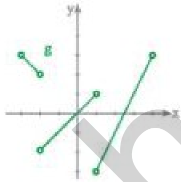
این روش معرفی یک تابع که معرفی تابع با استفاده از چند ضابطه است، گاهی اوقات روش خوبی برای معرفی توابع است. توابعی را که به این شکل معرفی می‌شوند، تابع چندضابطه‌ای می‌گویند.

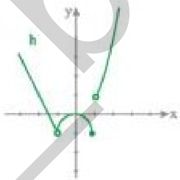
۳) توابع f، g و h داده شده‌اند. نمودار آن‌ها را رسم کنید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 2 & 2\leq x \\ 1 & 0<x<2 \\ -1 & -1<x\leq 0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x-5 & 4>x>1 \\ x & -2<x<1 \\ -x & -3<x<-2 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ -x^2 & -1<x\leq 1 \\ -2x-3 & x<-1 \end{cases}$$

پاسخ







دامنهٔ f برابر $(-1,+\infty)$ و بُرد f برابر مجموعهٔ $\{-1,1,2\}$ است.

دامنهٔ g برابر مجموعهٔ $(-3,4)-\{-2,1\}$ و بُرد g برابر بازهٔ $(-3,3)$ است.

دامنهٔ h برابر مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-1\}$ و برد h برابر بازهٔ $[-1,+\infty)$ است.

۴) در مثال قبل مقادیر $f(\sqrt{5})$، $f(1)$، $g(3)$، $g(-1)$، $h(-10)$ و $h(10)$ را بیابید.

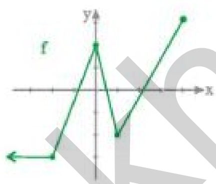
پاسخ چون $2<\sqrt{5}$ پس $f(\sqrt{5})=2$ و چون $0<1<2$ پس $f(1)=1$

چون $1<3<4$ پس $g(3)=2\times 3-5=1$ و چون $-2<-1<1$ پس $g(-1)=-1$

چون $-10<-1$ پس $h(-10)=-2\times(-10)-3=17$ و چون $10>1$ پس $h(10)=10^2=100$.

۵) نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) ، f(2) ، f(6) ، f(-5) \text{ و } f(-\sqrt{2})$$



پاسخ تابع f در $[1,4]$ منطبق بر خط واصل نقاط $(1,-2)$ و $(4,3)$ است و در $[0,1]$ منطبق بر خط واصل نقاط $(1,-2)$ و $(0,2)$ است و در $[-2,0]$ منطبق بر خط واصل نقاط $(-2,-3)$ و $(0,2)$ است و در $(-\infty,-2)$ برابر -3 است.

پس معادلهٔ تابع f به‌صورت مقابل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{5}{3}x-\frac{11}{3} & 1\leq x\leq 4 \\ -4x+2 & 0\leq x<1 \\ \frac{5}{2}x+2 & -2\leq x<0 \\ -3 & x<-2 \end{cases}$$

و باتوجه به ضابطهٔ تابع مقادیر خواسته شده به‌دست می‌آیند.

چون $-2<-\sqrt{2}<0$ پس $f(-\sqrt{2})=\frac{5}{2}(-\sqrt{2})+2$.

چون $-5<-2$ پس $f(-5)=-3$.

چون $6>4$ پس ۶ در دامنهٔ f قرار ندارد و $f(6)$ تعریف نشده است.

چون $1<2<4$ پس $f(2)=\frac{5}{3}\times 2-\frac{11}{3}=-\frac{1}{3}$.

چون $0<\frac{1}{2}<1$ پس $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\times\frac{1}{2}+2=0$.

$(-\infty,+4]$ دامنهٔ f و $[-3,+3]$ برد f می‌شود.

رسم توابع به کمک انتقال

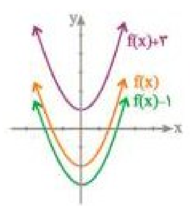
انتقال عمودی

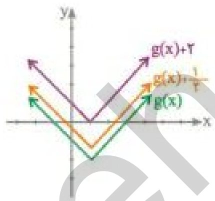
اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم و فرضاً بخواهیم نمودار تابع $p(x)=f(x)+3$ را رسم کنیم، معلوم است که باید نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ ۳ واحد در جهت مثبت محور y انتقال دهیم؛ زیرا مقدار تابع p در هر نقطه، ۳ واحد از مقدار f در آن نقطه بیشتر است. اگر فرضاً بخواهیم نمودار تابع $q(x)=f(x)-2$ را رسم کنیم، معلوم است که باید نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ ۲ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، زیرا مقدار تابع q در هر نقطه، ۲ واحد از مقدار f در آن نقطه کمتر است.

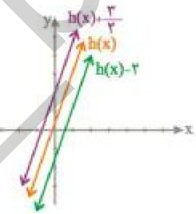
و به‌همین ترتیب می‌توان گفت:

اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور y به‌دست آوریم. اگر $k>0$ باشد انتقال در جهت مثبت محور yها و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی محور yها خواهد بود. در شکل‌های زیر نمودار توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ داده شده است. با استفاده از این نمودارها، نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم.

$f(x)-1$ ، $f(x)+3$ ، $g(x)+2$ ، $g(x)+\frac{1}{2}$ ، $h(x)+\frac{3}{2}$ ، $h(x)-2$

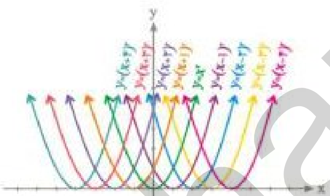


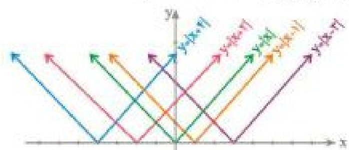




انتقال افقی

به نمودارهای داده شده دقت کنید:





مشاهده می‌کنیم که:

نمودار تابع $(x+4)^2$ از انتقال تابع x^2 به اندازهٔ ۴ واحد در جهت منفی محور xها به‌دست می‌آید و نمودار تابع $(x-3)^2$ از انتقال تابع x^2 به اندازهٔ ۳ واحد در جهت مثبت محور xها به‌دست می‌آید. نمودار تابع $|x+4|$ از انتقال تابع $|x|$ به اندازهٔ ۴ واحد در جهت منفی محور xها به‌دست می‌آید و نمودار تابع $|x-3|$ از انتقال تابع $|x|$ به اندازهٔ ۳ واحد در جهت مثبت محور xها به‌دست می‌آید. با دقت در این مشاهدات، درمی‌یابیم که در حالت کلی: اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم و فرضاً بخواهیم نمودار تابع $p(x)=f(x+4)$ را رسم کنیم، باید نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ ۴ واحد در جهت منفی محور x انتقال دهیم، زیرا مقدار تابع p در نقطهٔ x برابر مقدار تابع f در نقطهٔ $x+4$ است.

یعنی اگر نقطهٔ $\binom{x}{y}$ روی نمودار p باشد آن‌گاه نقطهٔ $\binom{x+4}{y}$ روی نمودار f قرار دارد. یعنی با انتقال نمودار تابع p به اندازهٔ ۴ واحد در جهت مثبت محور xها، نمودار f به‌دست می‌آید. در نتیجه با انتقال نمودار تابع f به اندازهٔ ۴ واحد در جهت منفی محور xها، نمودار p به‌دست می‌آید.

با بحثی مشابه می‌بینیم که می‌توان نمودار تابع $f(x-3)$ را از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ ۳ واحد در جهت مثبت محور x به‌دست آورد.

در حالت کلی می‌توان گفت: اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، می‌توان نمودار تابع $f(x+k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور xها به‌دست آورد. اگر $k>0$ انتقال در جهت منفی محور xها و اگر $k<0$ باشد انتقال در جهت مثبت محور xها خواهد بود.

زیاد اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان بی‌دقتی می‌کنند و به‌عنوان مثال برای رسم نمودار $f(x+1)$ ، نمودار $f(x)$ را یک واحد در جهت مثبت محور x انتقال می‌دهند.

بپا!!

برای این‌که دچار این اشتباه نشوید کافی است یک مثال را به یاد داشته باشید:

به‌عنوان مثال باتوجه به این‌که مقدار تابع $(x+1)^2$ در نقطهٔ $x=-1$ برابر صفر است و مقدار تابع x^2 در نقطهٔ $x=0$ برابر صفر است معلوم می‌شود که نمودار تابع $(x+1)^2$ ، از انتقال x^2 به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ به‌دست می‌آید، و هم‌چنین باتوجه به این‌که مقدار تابع $(x-1)^2$ در نقطهٔ $x=1$ برابر صفر است، معلوم می‌شود که نمودار $(x-1)^2$ از انتقال x^2 به اندازهٔ یک واحد به سمت راست به‌دست می‌آید.

نکتهٔ زیر همهٔ مطالب این درس را یک‌جا شامل می‌شود.

نکته: برای رسم نمودار $g(x)=f(x-a)+b$ باید نمودار تابع f را a واحد به سمت راست و b واحد به سمت بالا انتقال داد یا به‌عبارت دیگر اگر نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ بردار (a,b) انتقال دهیم به نمودار تابع $f(x-a)+b$ می‌رسیم.

البته خودمان قرارداد می‌کنیم که مثلاً ۳- واحد به سمت راست یعنی همان ۳ واحد به سمت چپ و ۶- واحد به سمت بالا یعنی ۶ واحد به سمت پایین.

مثال آموزشی

به کمک انتقال و با استفاده از نمودار توابع $y=x^2$ و $y=|x|$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

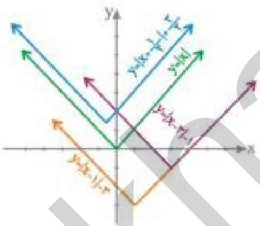
$$|x-1|-3,\ |x-3|-1,\ \left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{2}$$

$$(x-1)^2-3,\ (x-3)^2-1,\ (x+2)^2+3$$

پاسخ برای رسم نمودار $|x-1|-3$ باید نمودار $|x|$ را ۱ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال دهیم.

برای رسم نمودار $|x-3|-1$ باید نمودار $|x|$ را ۳ واحد به راست و ۱ واحد به پایین انتقال دهیم.

و برای رسم نمودار $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{2}$ باید نمودار $|x|$ را $\frac{1}{2}$ واحد به چپ $\frac{3}{2}$ واحد به بالا منتقل کنیم.



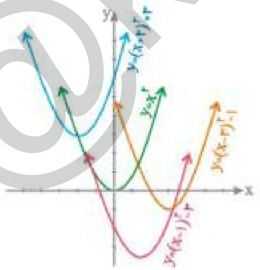
می‌بینیم که قسمتی از نمودار دو تابع $|x-3|-1$ و $|x-1|-3$ مشترک است.

در واقع وقتی $x>3$ باشد، آن‌گاه هر دوی این توابع با $y=x-4$ برابرند.

برای رسم نمودار $(x-1)^2-3$ باید نمودار x^2 را ۱ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال دهیم.

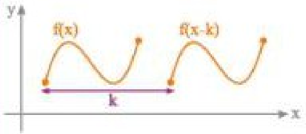
برای رسم نمودار $(x-3)^2-1$ باید نمودار x^2 را ۳ واحد به راست و ۱ واحد به پایین انتقال دهیم.

برای رسم نمودار $(x+2)^2+3$ باید نمودار x^2 را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا منتقل کنیم.



کـــافه ســؤال

۱ در شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ و تابع $f(x-k)$ رسم شده است، نمودار توابع $f(x+k)$ و $f(x)+k$ و $f(x)-k$ را در همان دستگاه مختصات رسم کنید. $(0<k)$



۲ نمودار توابع چندضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>-1 \\ 2x & -1>x>-3 \\ x+4 & -3>x>-5 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & -1<x<2 \\ 1 & 3<x<5 \\ 2 & -4<x<-2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x-1 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

۳ نمودار توابع زیر را با استفاده از انتقال رسم کنید.

الف) $y=x^2-x+1$

ب) $y=x^2+3x+3$

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=|2x+1|+|x-1|$

ب) $y=|x-2|-|x+1|$

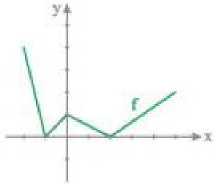
۵ نمودار سهمی به معادلهٔ $y=2x^2-1$ را ۲ واحد به چپ و سپس ۳ واحد به بالا انتقال دادیم، معادلهٔ نمودار حاصل را به‌دست آورید.

۶ نمودار منحنی $y=-x^2+2x$ را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به پایین انتقال دادیم، معادلهٔ نمودار حاصل را به‌دست آورید.

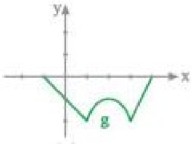
۷ نمودار یک سهمی را ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا انتقال دادیم، معادلهٔ نمودار حاصل عبارت $y=-x^2+2x$ است. معادلهٔ نمودار اولیه چه بوده است؟

کـــافه ســؤال

۸ نمودار توابع f و g داده شده است، معادلهٔ آن‌ها را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.
(قطعات تابع‌ها، قسمت‌هایی از سهمی یا خط هستند.)



(الف)



(ب)

۹ دامنهٔ هر کدام از توابع زیر $\mathbb{R}$ است، برد هر کدام را بیابید.

الف) $|x-2|$ ب) $-(x-1)^2-2$ ج) $|x-1|-|x+3|$ د) x^2-3x-1

۱۰ نرخ برق مصرفی به‌صورت پلّه‌ای محاسبه می‌شود، اگر پلّه‌های مصرف و هزینه آن‌ها به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه نرخ برق مصرفی برحسب میزان برق مصرفی را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

پلّه‌های مصرف ۳۰ روزه (kwh)	قیمت هر kwh برق (برحسب هزار ریال)	پلّه‌های مصرف ۳۰ روزه (kwh)	قیمت هر kwh برق (برحسب هزار ریال)
۰ تا ۱۰۰	۰/۴	۳۰۰ تا ۴۰۰	۲
۱۰۰ تا ۲۰۰	۰/۵	۴۰۰ تا ۵۰۰	۲/۳
۲۰۰ تا ۳۰۰	۱/۱	۵۰۰ تا ۶۰۰	۲/۹
		اضافه بر ۶۰۰	۳/۲

گاج

۵

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- اگر f تابعی باشد که هم همانی باشد و هم ثابت، آن‌گاه دامنهٔ f چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱) چنین تابعی وجود ندارد.　۲) ۱

۳) ۲　۴) ۳

۲- تابع $f(x)=2x^2-1$ را دو واحد به چپ و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم. معادلهٔ نمودار حاصل کدام است؟

۱) $y=2(x-2)^2-2$　۲) $y=2(x+2)^2$

۳) $y=2(x-2)^2-1$　۴) $y=2(x+2)^2-2$

۳- تابع $f(x)=x^3$ را دو واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم. معادلهٔ نمودار حاصل کدام است؟

۱) $y=(x+2)^3+1$　۲) $y=(x-2)^3-1$

۳) $y=(x-2)^3+1$　۴) $y=(x+2)^3-1$

۴- نمودار خط $y=4x-3$ را دو واحد به سمت راست انتقال دادیم و به نمودار یک خط جدید رسیدیم. نمودار خط جدید را چند واحد و در کدام جهت در امتداد محور yها انتقال دهیم تا به خط اولیه برسیم؟

۱) ۸ واحد، بالا　۲) ۸ واحد، پایین　۳) ۴ واحد، بالا　۴) ۴ واحد، پایین

۵- اگر $f(x)=\begin{cases}2x & x\le 5\\ ax^2-5 & 5\le x\end{cases}$ یک تابع باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$　۲) $\frac{2}{5}$　۳) $\frac{3}{5}$　۴) $\frac{4}{5}$

۶- اگر $f(x)=|2x-1|-|x+2|$ و $g(x)=x-3$، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=g(x)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱　۲) ۲

۳) ۳　۴) بیش از ۳ جواب دارد.

۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-3x+1$ برابر $[1,4]$ باشد، آن‌گاه برد آن کدام است؟

۱) $[-1,5]$　۲) $[-2,6]$　۳) $[-2,5]$　۴) $[\frac{-5}{4},5]$

۸- ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر داده شده است. مقدار $f(-1)+2f(1)-3f(2)$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ 2x-1 & 1\le x\le 4\\ x & 4<x\end{cases}$$

۱) -1　۲) -2　۳) -4　۴) 1

۹- نمودار تابع $y=x^2-3x+1$ را چگونه انتقال دهیم تا به نمودار تابع $y=x^2+x+1$ برسیم؟

۱) ۱ واحد به چپ، ۲ واحد به بالا　۲) ۲ واحد به چپ، ۲ واحد به بالا

۳) ۱ واحد به راست، ۲ واحد به بالا　۴) ۲ واحد به راست، ۲ واحد به بالا

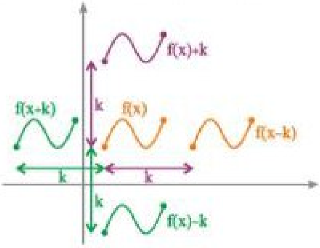
۱۰- اگر نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم معادلهٔ منحنی حاصل x^2-3x+1 می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم معادلهٔ منحنی حاصل کدام خواهد بود؟

۱) $x^2-9x+19$　۲) $x^2-6x+11$

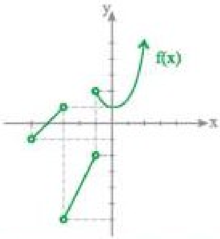
۳) $x^2-8x+10$　۴) $x^2+7x+13$

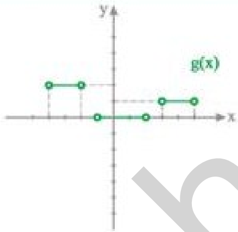
درس۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

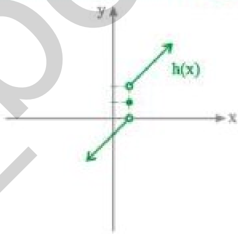
۱



۲



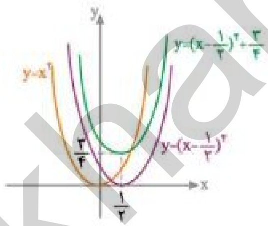


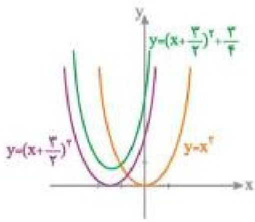


۳

الف) $y=x^2-x+1=x^2-\underbrace{2(\frac{1}{2})(x)}_{x}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}_{1}=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

ب) $y=x^2+3x+3=x^2+\underbrace{2(\frac{3}{2})(x)}_{3x}+\underbrace{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}_{3}=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$





۴

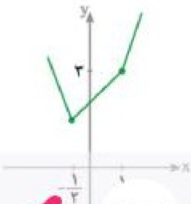
الف) $y=|2x+1|+|x-1|$

$$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x\geq-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x+1\geq 0\\ x<-\frac{1}{2}\Rightarrow 2x+1<0\end{cases}$$

و

$$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1\Rightarrow x-1\geq 0\\ x<1\Rightarrow x-1<0\end{cases}$$

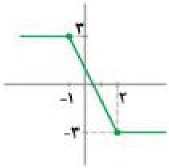
$$y=\begin{cases}-2x-1-x+1=-3x & x<-\frac{1}{2}\\ 2x+1-x+1=x+2 & -\frac{1}{2}\leq x<1\\ 2x+1+x-1=3x & x\geq 1\end{cases}$$



ب) $y=|x-2|-|x+1|$

$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow\begin{cases}x\ge 2\Rightarrow x-2\ge 0\\ x<2\Rightarrow x-2<0\end{cases}$ و $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\Rightarrow x+1\ge 0\\ x<-1\Rightarrow x+1<0\end{cases}$

$$y=\begin{cases}-x+2+x+1=3 & x<-1\\ -x+2-x-1=-2x+1 & -1\le x<2\\ x-2-x-1=-3 & x\ge 2\end{cases}$$



۵

$$y=2x^2-1\xrightarrow{\text{۲ واحد انتقال به سمت چپ}}y=2(x+2)^2-1\xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به سمت بالا}}y=2(x+2)^2-1+3=2(x+2)^2+2$$

$$\Rightarrow y=2(x^2+4x+4)+2\Rightarrow y=2x^2+8x+10$$

۶

$$y=-x^3+2x\xrightarrow{\text{۲ واحد انتقال به سمت راست}}y=-(x-2)^3+2(x-2)\xrightarrow{\text{۱ واحد انتقال به سمت پایین}}y=-(x-2)^3+2(x-2)-1$$

۷

خُب، اگر نمودار $y=-x^2+2x$ را ۳ واحد به پایین و ۲ واحد به چپ انتقال دهیم به نمودار اولیّه می‌رسیم. پس ضابطهٔ نمودار اولیّه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=-(x+2)^2+2(x+2)-3=-x^2-2x-3$$

۸

الف) برای ضابطهٔ قسمت اول با استفاده از دو نقطهٔ $(-1,0)$ و $(-2,4)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{4-0}{-2+1}=-4\Rightarrow y-0=-4(x+1)\Rightarrow y=-4x-4$$

برای ضابطهٔ قسمت دوم با استفاده از دو نقطهٔ $(-1,0)$ و $(0,1)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{1-0}{0+1}=1\Rightarrow y=1(x+1)\Rightarrow y=x+1$$

برای ضابطهٔ قسمت سوم با استفاده از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(2,0)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow y-1=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$$

برای ضابطهٔ قسمت چهارم با استفاده از دو نقطهٔ $(2,0)$ و $(5,2)$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$m=\frac{2-0}{5-2}=\frac{2}{3}\Rightarrow y-0=\frac{2}{3}(x-2)\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به صورت مقابل می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}-4x-4 & x\le -1\\ x+1 & -1<x\le 0\\ -\frac{1}{2}x+1 & 0\le x<2\\ \frac{2}{3}x-\frac{4}{3} & x\ge 2\end{cases}$$

ب) برای ضابطهٔ قسمت اول از دو نقطهٔ $(-1,0)$ و $(0,-1)$ برای نوشتن معادلهٔ خط استفاده می‌کنیم:

$$y-0=\frac{-1-0}{0+1}(x+1)\Rightarrow y=-(x+1)$$

برای ضابطهٔ قسمت سوم از دو نقطهٔ $(3,-2)$ و $(4,0)$ برای نوشتن معادلهٔ خط استفاده می‌کنیم:

$$y+2=\frac{-2-0}{3-4}(x-3)\Rightarrow y+2=2(x-3)\Rightarrow y=2x-8$$

برای ضابطهٔ قسمت دوم یک سهمی داریم که رأس آن $(2,-1)$ است و از نقطهٔ $(1,-2)$ می‌گذرد:

$$y=a(x-2)^2-1,\ x=1\quad,\quad y=-2\Rightarrow a(1-2)^2-1=-2\Rightarrow a=-1$$

پس معادلهٔ سهمی برابر است با:

$$y=-(x-2)^2-1=-x^2+4x-5$$

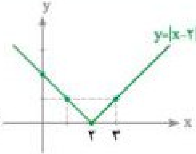
بنابراین ضابطهٔ تابع g به صورت مقابل است:

$$g(x)=\begin{cases}-(x+1) & -1\le x\le 1\\ -x^2+4x-5 & 1\le x\le 3\\ 2x-8 & 3\le x\le 4\end{cases}$$

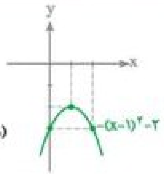
آس

۵

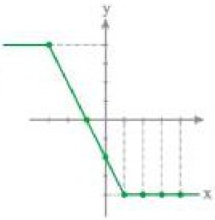
[۹]

الف) 

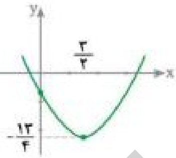
$\Rightarrow R = [0, +\infty)$

ب) 

$\Rightarrow R = (-\infty, -2]$

ج) 

$\Rightarrow R = [-4, +4]$

د) 

$\Rightarrow R = \left[\frac{-13}{4}, +\infty\right)$

[۱۰]

$$\begin{cases} 0/4x & 0 \le x < 100 \\ 0/4 \times 100 + 0/5(x-100) & 100 \le x < 200 \\ 0/4 \times 100 + 0/5 \times 100 + 1/1(x-200) & 200 \le x < 300 \\ 0/4 \times 100 + 0/5 \times 100 + 1/1 \times 100 + 2(x-300) & 300 \le x < 400 \\ 0/4 \times 100 + 0/5 \times 100 + 1/1 \times 100 + 2 \times 100 + 2/3(x-400) & 400 \le x < 500 \\ 0/4 \times 100 + 0/5 \times 100 + 1/1 \times 100 + 2 \times 100 + 2/3 \times 100 + 2/9(x-500) & 500 \le x < 600 \\ 0/4 \times 100 + 0/5 \times 100 + 1/1 \times 100 + 2 \times 100 + 2/3 \times 100 + 2/9 \times 100 + 3/2(x-600) & 600 \le x \end{cases}$$

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۲	۳	۳	۵	۳	۷	٤	۹	۲
۲	۲	٤	۱	۶	٤	۸	۳	۱۰	۱

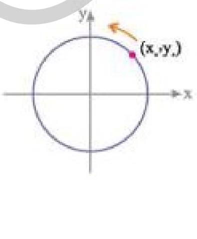
ایستگاه المپیاد

۱) نمودار توابع مقابل را رسم کنید. $|x|-1,\ ||x|-1|-1,\ |||x|-1|-1|-1$

۲) نمودار توابع مقابل را رسم کنید. $||x|-1|-\frac{1}{4},\ \left|||x|-1|-\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{16}$

۳) اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ n عضوی باشد، به نظر شما تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B چند تا است؟

۴) متحرکی روی دایره‌ای به شعاع r حول مبدأ مختصات با سرعت ثابت v_0 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. اگر در لحظهٔ $t=0$ متحرک در نقطهٔ (x_0, y_0) قرار داشته باشد و مکان متحرک در لحظهٔ t نقطهٔ (x, y) باشد:



الف) متحرک در هر ثانیه چند دور حول مبدأ مختصات می‌چرخد؟

ب) y و x را به‌عنوان تابعی از زمان به‌دست آورید.

ج) فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ آغاز حرکت را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

(واحد زمان را ثانیه (s) و واحد سرعت را $\frac{m}{s}$ در نظر بگیرید.)

خلاصهٔ فصل ۵

رابطه

- در هر زوج مرتب، عضو اول را مولفهٔ اول و عضو دوم را مولفهٔ دوم می‌گویند.

به هر مجموعه از زوج‌های مرتب که مولفهٔ اول آن‌ها از مجموعهٔ A و مولفهٔ دوم آن‌ها از مجموعهٔ B باشد، یک رابطه از A به B می‌گوییم

تابع

- اگر f یک رابطه از A به B باشد، آن‌گاه می‌گوییم f یک تابع است هرگاه به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهد.
- در نمودار یک تابع هر خط موازی محور عرض‌ها (y) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
- اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب باشد، زمانی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن مولفهٔ اول تکراری نداشته باشد.

انتقال در راستای محور عمودی

- برای رسم نمودار $g(x)=f(x)+k$، باید نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها انتقال دهیم. اگر $k>0$، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$، انتقال در جهت منفی محور خواهد بود.

انتقال در راستای محور افقی

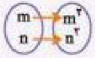
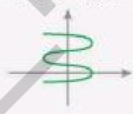
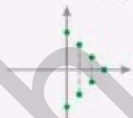
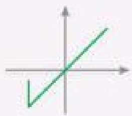
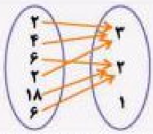
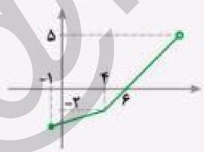
- برای رسم نمودار $g(x)=f(x+k)$، باید نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$، انتقال در جهت مثبت محور خواهد بود.

دامنه و برد تابع

- مجموعهٔ همهٔ مولفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ همهٔ مولفه‌های دوم را برد تابع گوییم.

انواع تابع

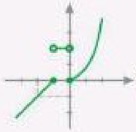
- هر تابع که بتوان آن را به‌صورت $y=ax+b$ نوشت، یک تابع خطی نامیده می‌شود.
- توابعی را که نمایش جبری آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چندجمله‌ای می‌نامیم.
- تابعی که دامنه و برد آن‌ها برابر است و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود را تابع همانی گویند.
- توابعی را که برد آن‌ها مجموعه‌ای یک عضوی است را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت را با $f(x)=k$ نشان می‌دهند.
- تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند. تابع قدرمطلق نامیده می‌شود و تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهیم.

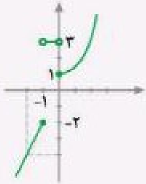
ردیف	تمـــــریـــــن دوره‌ای
۱.	کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمایش یک تابع **نیست**؟
	۱)  ۲)  ۳)  ۴) 
۲.	کدام مجموعه از مجموعهٔ زوج مرتب‌های زیر معرف یک تابع است؟
	۱) $f=\{(۵،۵)،(۵،۵)،(۵،۶)\}$ ۲) $g=\{(۰،x^۲)،(۲،۴)،(۱،۲)\}$
	۳) $h=\{(\{\}،۲)،(۳،\{\})،(۳،۲)\}$ ۴) w = {(من،من)،(تو،من)،(تو،تو)}
۳.	کدام‌یک از جملات زیر درست است؟
	۱) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت،ریشهٔ هشتم آن را نسبت می‌دهد یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ نیست.
	۲) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز پایهٔ دهم مدرسهٔ شما، مدیر مدرسه‌اش را نسبت می‌دهد یک تابع نیست.
	۳) رابطه‌ای که به هر پدر، فرزندانش را نسبت می‌دهد یک تابع از مجموعهٔ انسان‌ها به مجموعهٔ انسان‌ها است.
	۴) رابطه‌ای که به ضلع هر مربع، مساحت آن مربع را نسبت می‌دهد یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ نیست.
۴.	کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟
	۱)  ۲)  ۳)  ۴) 
۵.	اگر A یک مجموعهٔ ۲ عضوی و B یک مجموعهٔ تک عضوی باشد، چند تابع از A به B می‌توان تعریف کرد؟
	۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۰
۶.	اگر تعداد اعضای تابع مقابل را m بنامیم، حاصل $m^۲+۳$ چند است؟ 
	۱) ۱۶ ۲) ۳۹ ۳) ۲۸ ۴) ۱۹
۷.	برای مجموعهٔ زوج مرتب‌های مقابل که نمایشگر یک تابع هستند، ضابطهٔ مناسب کدام است؟ $f=\{(۱,۰),(۲,۳),(۳,۸),\dots\}$
	۱) $f(n)=۲n-۲ \quad n\in\mathbb{N}$ ۲) $f(n)=۳n-۱ \quad n\in\mathbb{N}$
	۳) $f(n)=n^۲-۱ \quad n\in\mathbb{N}$ ۴) $f(n)=۲n^۲-۱ \quad n\in\mathbb{N}$
۸.	از میان خطوط زیر کدام تابع **نیست**؟
	۱) $y=۱۷x+۳۴$ ۲) $۵-x=۵$ ۳) $y-۶=۱۲+۶x$ ۴) $y=۹$
۹.	دامنهٔ تابع داده شده کدام‌یک از موارد زیر است؟ 
	۱) $[-۱،۱۱)$ ۲) $[-۴،۵)$ ۳) $[-۲،۱۰]$ ۴) $[-۱،۵)$
۱۰.	دامنهٔ یک تابع خطی $[۱,۹]$ و برد آن $[-۳,۱۳]$ است، کدام گزینه می‌تواند ضابطهٔ این تابع باشد؟
	۱) $y=-x+۸$ ۲) $y=x-۸$ ۳) $y=-۲x+۱۵$ ۴) $y=۲x+۱۱$
۱۱.	برد کدام‌یک از توابع زیر $\mathbb{R}$ است؟
	۱) $y=۲x^۲+۵$ ۲) $y=\|۲x+۵\|$ ۳) $y=۲x+۵$ ۴) $y=\|۲x\|+۵$

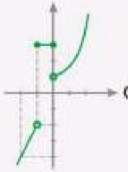
ردیف	تمرین دوره‌ای

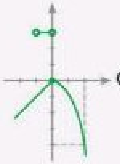
.۱۲ نمودار تابع داده شده کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ 3 & -1<x<0\\ 2x & x\leq -1\end{cases}$$

۱) 

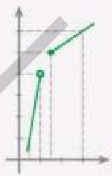
۲) 

۳) 

۴) 

.۱۳ کدام‌یک از نمودارهای زیر معرف تابع g است؟

$$g(x)=\begin{cases}4x-1 & x<\frac{3}{2}\\ 5 & x=\frac{3}{2}\\ 2+x & x>\frac{3}{2}\end{cases}$$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

.۱۴ اگر f تابعی چند ضابطه‌ای به‌صورت داده شده باشد، حاصل $3f(-1)+f(2)-f(-۱/۵)$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}|x|+\frac{1}{2} & x<-1\\ 4 & x=-1\\ x^2 & x>-1\end{cases}$$

۱) ۱۸

۲) ۱۷

۳) ۱۶

۴) ۱۴

.۱۵ اگر ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=6$ و ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر باشد، حاصل $f(2)g(2)+f(3)g(3)$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}|x^2|+1 & x>۲/۵\\ |-x+3| & x<۲/۵\end{cases}$$

۱) ۶۶ ۲) ۵۴ ۳) ۱۳۸ ۴) ۱۰۲

.۱۶ کدام گزینه نشان‌دهندهٔ تابعی چند ضابطه‌ای است که در $[0,2]$ منطبق بر خط واصل نقاط $(1,2)$ و $(0,1)$ و برای $x>2$، تابع ثابت $y=3$ و برای $x<0$ منطبق بر خطی است که از نقاط $(-5,1)$ و $(-3,1)$ می‌گذرد؟

۱) $f(x)=\begin{cases}-4 & x<0\\ x+1 & 0\leq x\leq 2\\ 3 & x>2\end{cases}$

۲) $g(x)=\begin{cases}-5 & x<0\\ x-1 & 0\leq x\leq 2\\ 3 & x>2\end{cases}$

۳) $h(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\leq x<2\\ 3 & x\geq 2\end{cases}$

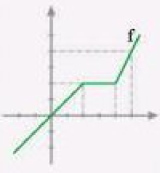
۴) $k(x)=\begin{cases}-3 & x<0\\ -x+1 & 0\leq x\leq 2\\ 3 & x\geq 2\end{cases}$

آس

۵

ردیف	تمـــــــریـــــــن دوره‌ای

۱۷. ضابطهٔ تابع داده شده کدام است؟



۱) $f(x)=\begin{cases}۲x & x<۲\\ ۲ & ۲\le x<۴\\ ۲x-۵ & x\ge ۴\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}x & x\le ۲\\ ۲ & ۲\le x\le ۴\\ ۲x-۶ & x>۴\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\le ۲\\ ۲ & ۲<x<۴\\ ۲x-۵ & x\ge ۴\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}x & x<۲\\ ۲ & ۲<x<۴\\ ۲x-۶ & x>۴\end{cases}$

۱۸. اگر تابع $f(x)$ را سه واحد به سمت راست و ۲ واحد به پایین منتقل کنیم کدام تابع به‌دست می‌آید؟

۱) $-۲+f(x+۳)$
۲) $۲+f(x-۳)$
۳) $f(x-۳)-۲$
۴) $f(x+۳)+۲$

۱۹. تابع دلخواه $g(x)$ پس از انتقال در راستای محورهای مختصات به تابع $g(x)+۶$ تبدیل شده است. کدام گزینه در مورد این انتقال درست است؟

۱) تابع g را ۶ واحد به راست منتقل کرده‌ایم.
۲) تابع g را ۶ واحد به بالا منتقل کرده‌ایم.
۳) تابع g را ۶ واحد به چپ منتقل کرده‌ایم.
۴) تابع g را ۶ واحد به پایین منتقل کرده‌ایم.

۲۰. تابعی را ۳ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کرده‌ایم و تابع $y=|x-۳|+(x-۴)^۲+۲$ به‌دست آمده است، ضابطه این تابع قبل از انتقال در کدام‌یک از گزینه‌های زیر آمده است؟

۱) $y=|x|+(x-۱)^۲+۱$
۲) $y=|x|+(x+۱)^۲+۱$
۳) $y=|x|+(x-۱)^۲+۳$
۴) $y=|x-۶|+(x-۷)^۲+۱$

۲۱. نمودار خط $y=۳x+۲$ را ۳ واحد به راست انتقال دادیم و به نمودار یک خط جدید رسیدیم. نمودار خط جدید را چند واحد و در کدام جهت در راستای محور yها انتقال دهیم تا به خط اولیه برسیم؟

۱) ۹ واحد، پایین
۲) ۷ واحد، پایین
۳) ۷ واحد، بالا
۴) ۹ واحد، بالا

۲۲. تابع $y=x^۲-۴x$، انتقال یافتهٔ کدام تابع و در چه جهتی است؟

۱) $x^۲$، ۲ واحد به راست، ۴ واحد به پایین
۲) $x^۲$، ۲ واحد به راست، ۴ واحد به بالا
۳) $x^۲$، ۲ واحد به چپ، ۴ واحد به بالا
۴) $x^۲$، ۲ واحد به چپ، ۴ واحد به پایین

۲۳. در نمودار تابع $f(x)=|۲x-۴|-|۲x-۸|$ اگر کمترین مقدار تابع را m و بیشترین مقدار تابع را n بنامیم، $m+n$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۴. کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

۱) رابطه‌ای که به هر عدد ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد یک تابع است.
۲) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشه‌های چهارم آن را نسبت می‌دهد یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است.
۳) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز دوستان او را نسبت می‌دهد یک تابع از مجموعهٔ انسان‌ها به مجموعهٔ انسان‌ها نیست.
۴) رابطه‌ای که به هر فرد گروه خونی او را نسبت می‌دهد یک تابع است.

۲۵. $a+b$ را به‌گونه‌ای بیابید که مجموعهٔ مقابل تابع باشد؟ $\{(-۱,b-a),(۲,۵),(-۱,۷),(۲,a),(+۱,۳)\}$

۱) ۵
۲) ۲
۳) ۱۲
۴) ۱۷

۲۶. کدام گزینه درست است؟

۱) می‌توان تابعی مثال زد که دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد.
۲) می‌توان تابعی مثال زد که برد آن تنها یک عضو داشته باشد.
۳) می‌توان تابعی مثال زد که برد و دامنهٔ آن نامتناهی باشد.
۴) همهٔ موارد درست است.

ردیف	تمرین دوره‌ای

۲۷. اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد توابع از A به B برابر است با:

۱) n^m ۲) m^n ۳) $۲m$ ۴) $۲n$

۲۸. برد یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مجموعهٔ تک عضوی $\{-۱\}$ می‌باشد، مقدار $[f(۱۰۰)-۵f(۳)+۷]^۲$ کدام است؟

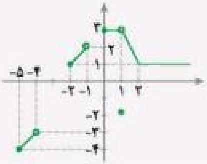
۱) ۱۱ ۲) ۱۲۱ ۳) ۱- ۴) ۱

۲۹. با توجه به ضابطهٔ داده‌شده مقدار عبارت $f(۱۳۹۷)+\left[f\left(\frac{-۱}{۲}\right)\right]^۲+f(-۱۳۹۷)-۳f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x\geq ۴\\ -x^۲-۱ & ۲\leq x\leq ۴\\ -x & -۱\leq x\leq ۰\\ ۱ & x<-۱\end{cases}$$

۱) $\frac{۳۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۹۸}{۹}$ ۴) $\frac{۹۸}{۹}$

۳۰. دامنه و برد تابع داده‌شده کدام است؟



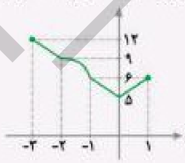
۱) $[-۵,+\infty)\to[-۴,۳]$

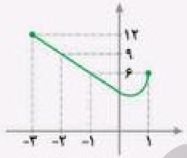
۲) $(-\infty,+\infty)\to(-\infty,۳)$

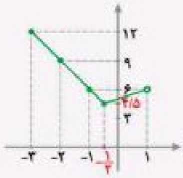
۳) $[-۵,-۴]\cup[-۲,-۱)\cup[۰,+\infty)\to[-۴,-۳)\cup[۱,۳]$

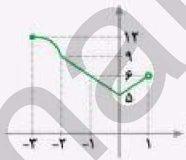
۴) $[-۵,-۴)\cup[-۲,-۱)\cup[۰,+\infty)\to[-۴,-۳)\cup\{-۲\}\cup[۱,۳]$

۳۱. نمودار تابع $f(x)=|۲x+۱|+|x-۱|+۳$ در بازهٔ $[-۳,۱)$ چگونه است؟

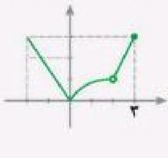
۱) 

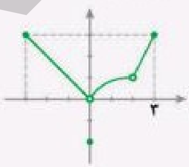
۲) 

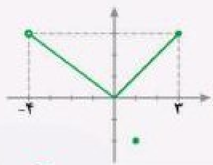
۳) 

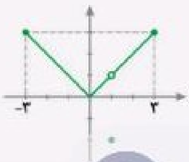
۴) 

۳۲. دامنه تابع f بازهٔ $[-۳,۳]$ و برد آن $\{-۲\}\cup[۰,۳]$ است، کدام شکل می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

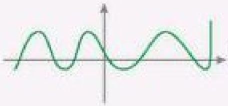
۴) 

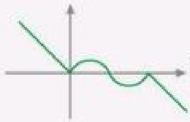
آس

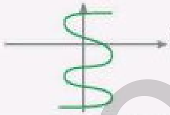
۵

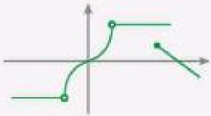
ردیف	تمـــــریـــــــن دوره‌ای

۳۳. کدام‌یک از شکل‌های زیر تابع می‌باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۴. تابع $y=|x|+۳$ را دو واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال داده‌ایم، معادلهٔ نمودار حاصل کدام است؟

۱) $y=|x-۲|+۴$ ۲) $y=|x+۲|-۲$ ۳) $y=|x+۲|+۲$ ۴) $y=|x-۲|+۲$

۳۵. اگر تابع $f(x)=۲x^{۲}-۱$ و $g(x)=۲(x-۲)^{۲}-۲$ باشد، در این صورت نمودار g با چه انتقالی از نمودار f به‌دست می‌آید؟

۱) دو واحد به سمت راست، یک واحد به سمت بالا

۲) دو واحد به سمت چپ، یک واحد به سمت بالا

۳) دو واحد به سمت راست، یک واحد به سمت پایین

۴) دو واحد به سمت چپ، یک واحد به سمت پایین

۳۶. اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۳ & x\geq ۲ \\ nx^{۲}-۱ & x\leq ۲ \end{cases}$ یک تابع باشد مقدار $n^{۲}+۳$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۷. فرض کنید تابع f تابعی ثابت باشد، در این صورت مقدار $-|a|+|b|$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x>۳ \\ b^{۲}+a^{۲} & ۰<x\leq ۳ \\ ۳b^{۲}-۱ & -۳<x\leq ۰ \\ a^{۲}+۲ & x\leq -۳ \end{cases}$$

۱) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

۲) $-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

۳) $-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۴) $-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

۳۸. اگر تابع f همانی باشد، مقدار $a+c$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} a^{۲}+۱ & x=۱ \\ ۴c-۲ & x=۲ \\ ۲b & x=۳ \end{cases}$$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۳۹. اگر تابع g ثابت و تابع f همانی باشد، مقدار عبارت $-[a^{۲}+b]$ کدام است؟ $(a>۰)$

$$g:\begin{cases} ۵ & ۰\leq x\leq ۳ \\ a^{۲}+b & x\geq ۳ \\ ۳a^{۲}-۳c & x\leq ۰ \end{cases} \qquad f:\begin{cases} b^{۲}+۳a & x=۳ \\ ۴c-b & x=۵ \end{cases}$$

۱) ۵ ۲) $-\frac{۲\sqrt{۱۵}+۵}{۴}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۱۵}+۵}{۴}$ ۴) -۵

۴۰. اگر تعداد اعضای دامنهٔ تابع f برابر با m، تعداد اعضای برد تابع f برابر با n، $mn=۸$ ، $m+n=۶$ و $m>n$ باشد در این صورت کدام مجموعه می‌تواند تابع مورد نظر باشد؟

۱) $\{(۱،۲)،(۲،۴)،(۱،۴)،(۲،۴)،(۴،۴)\}$ ۲) $\{(۳،۴)،(۴،۲)،(۲،۲)،(۱،۱)\}$

۳) $\{(۳،۱)،(۴،۲)،(۵،۲)،(۲،۱)،(۵،۱)\}$ ۴) $\{(۳،۱)،(۴،۲)،(۵،۲)،(۲،۱)\}$

فصل ۵ پاسخ‌نامهٔ کلیدی تمرین دوره‌ای

۱	**۱**	۲	۳	٤
۲	۱	**۲**	۳	٤
۳	**۱**	۲	۳	٤
٤	۱	۲	**۳**	٤
۵	**۱**	۲	۳	٤
۶	۱	**۲**	۳	٤
۷	۱	۲	**۳**	٤
۸	۱	**۲**	۳	٤
۹	**۱**	۲	۳	٤
۱۰	۱	۲	**۳**	٤
۱۱	۱	۲	**۳**	٤
۱۲	۱	**۲**	۳	٤
۱۳	۱	**۲**	۳	٤
۱٤	۱	۲	۳	**٤**
۱۵	**۱**	۲	۳	٤
۱۶	۱	۲	**۳**	٤
۱۷	۱	**۲**	۳	٤
۱۸	۱	۲	**۳**	٤
۱۹	۱	**۲**	۳	٤
۲۰	**۱**	۲	۳	٤
۲۱	۱	۲	۳	**٤**
۲۲	**۱**	۲	۳	٤
۲۳	۱	۲	۳	**٤**
۲٤	۱	**۲**	۳	٤
۲۵	۱	۲	۳	**٤**
۲۶	۱	۲	۳	**٤**
۲۷	**۱**	۲	۳	٤
۲۸	۱	**۲**	۳	٤
۲۹	۱	۲	**۳**	٤
۳۰	۱	۲	۳	**٤**
۳۱	۱	۲	**۳**	٤
۳۲	۱	۲	۳	**٤**
۳۳	۱	**۲**	۳	٤
۳٤	۱	۲	۳	**٤**
۳۵	۱	۲	**۳**	٤
۳۶	**۱**	۲	۳	٤
۳۷	۱	**۲**	۳	٤
۳۸	**۱**	۲	۳	٤
۳۹	۱	۲	۳	**٤**
٤۰	۱	۲	۳	**٤**

یادداشت

Counts without Counting فصل ششم

۶ شمارش، بدون شمردن

درس اول: شمارش	
شمارش بدون شمردن	۲۱۹
ایده اساسی جمع	۲۲۰
ایده اساسی ضرب	۲۲۰
تعمیم ایده اساسی جمع	۲۲۱
تعمیم ایده اساسی ضرب	۲۲۱
بخش سؤالات	۲۲۴

درس دوم: جایگشت	
مفهوم جایگشت	۲۲۷
تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء ..	۲۳۰
بخش سؤالات	۲۳۳

درس سوم: ترکیب	
مفهوم ترکیب	۲۳۷
تعریف ترکیب	۲۳۷
بخش سؤالات	۲۴۲

خلاصه فصل	۲۴۸
تمرین دوره‌ای	۲۴۹

بعضی وقت‌ها دانستن تعداد حالت‌های ممکن یک رویداد مهم است. مانند موارد زیر:

چند تابع از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی وجود دارد؟

چند کد با تعداد ارقام خاص با یک ویژگی خاص وجود دارد؟

به‌عنوان مثال چند کد ۱۲ رقمی شارژ تلفن همراه با یک ویژگی خاص می‌توان نوشت؟

می‌دانید که نمی‌توان همهٔ اعداد را به‌عنوان کد شارژ انتخاب کرد، زیرا در آن‌صورت هر کسی همین‌که شارژ تلفنش تمام شد با انتخاب یک شمارهٔ اتفاقی، یک شارژ جدید می‌گیرد، پس کدهای شارژ باید به‌گونه‌ای باشند که به‌راحتی کشف نشوند و از طرفی نباید ویژگی‌های در نظر گرفته شده برای کدها آن‌قدر گسترده باشد که تعداد کدها خیلی کم باشد و ...

ماجرا چیه؟!

خلاصه، در همهٔ شماره‌گذاری‌ها، کدگذاری‌ها و رمزگذاری‌ها، مهم است بدانیم تعداد ممکن شماره‌ها، کدها و رمزها چندتا است. موارد دیگری نیز وجود دارند که شمارش در آن‌ها به‌کار می‌آید. یکی از موارد مهم کاربرد این مطلب، برنامه‌نویسی کامپیوتر است. برنامهٔ کامپیوتری باید به شکلی باشد که جواب در زمان کمی به‌دست آید، به‌همین خاطر باید به‌طور تقریبی از تعداد محاسباتی که کامپیوتر برای به‌دست آوردن جواب انجام می‌دهد، آگاه بود تا برنامه به‌گونه‌ای نوشته نشود که جواب، بعد از یک قرن به‌دست آید، شاید هم بعد از ۱۰ قرن!

دانشجویی برای وعدهٔ شام خود هر روز با استفاده از پیاز، سیب‌زمینی، تخم‌مرغ، گوجه‌فرنگی، فلفل دلمه‌ای، کلم، هویج و پنج ادویهٔ فلفل قرمز، فلفل سیاه، دارچین، زنجبیل و زردچوبه یک غذا درست می‌کند. البته برای این دانشجو اصلاً مهم نیست که غذا چه طعمی دارد.
(خودش در بیانی حکمت آمیز گفته فقط یه چیزی باشه بشه خورد.)

این دانشجو چند غذا می‌تواند درست کند که از ۳ تا از مواد اولیه و ۲ تا از ادویه‌ها برای پختن آن استفاده شده باشد؟

درس اول: شمارش

شمارش بدون شمردن

این مطلب را با یاد یکی از بزرگان سرزمینمان «شیخ بهایی» آغاز می‌کنیم.

بهاءالدّین محمّدبن عزالدّین حسین عاملی معروف به شیخ بهایی، در ناحیهٔ جبل‌عامل لبنان متولّد شد، در کودکی به‌همراه پدر به ایران مهاجرت کرد و یکی از مفاخر علمی ماست، او در فلسفه، منطق، هیئت و ریاضیات تبحّر داشت، فقیهی والامقام بود و از او آثار معماری ارزشمندی هم‌چون مسجد امام اصفهان، حمّام شیخ بهایی، منارجنبان، آرگ شیخ بهایی در شهر نجف‌آباد و ... به‌جا مانده است.

از آثار شگفت‌انگیز او طومار تقسیم آب زاینده‌رود است، این چشمه‌جوشان و مارپیچ سرزمین‌های در امتداد زردکوه بختیاری تا مرداب‌گاوخونی را مشروب می‌ساخت و در این راه هشتاد فرسنگی، همواره جیرهٔ بلوکات و مزارع مختلف را می‌داد.

شیخ بهایی در پی پیدا کردن راه علاجی برای تقسیم عادلانهٔ این آب، به تنظیم طومار تقسیم آب زاینده‌رود پرداخت و کلّ آن را به ۳۳ سهم اصلی و ۲۷۵ سهم جزئی تقسیم نمود و با طراحی ۱۳ نهر آن را بین زمین‌های اطراف رودخانه توزیع نمود.

او تحصیل علوم ریاضی در مدارس دینی اسلامی را از نو زنده کرد و رساله‌هایی در ریاضیات و نجوم نوشت که آن‌ها را از تلخیص آثار گذشتگان فراهم آورده بود، به‌عنوان نمونه «خلاصة‌الحساب و الهندسة» در ریاضی و «تشریح‌الافلاک» در نجوم. متأسفانه پس از او تعلیم ریاضیات در مدارس دینی اسلامی رو به انحطاط نهاد.

از شیخ بهایی آثار مکتوب فراوانی مانده است، چیزی بیش از هشتاد کتاب که اکثر آن‌ها به زبان عربی است. کتاب «کشکول» او در بین عامهٔ مردم معروف است، این کتاب مجموعه‌ای از اشعار و حکایات و معماها و لطایف به زبان فارسی ـ عربی است. شیخ بهایی که حدود ۳۰ سال از عمر خود را با جهانگردی سپری کرد، این کتاب را در مصر نگاشته است، در برخی جاهای این کتاب او معماهای ریاضی و یا برخی ایده‌های ریاضی را مطرح می‌کند، نمونهٔ زیر یکی از آن ایده‌هاست:

کلمات مرکّب از الفبا

اگر سؤال شود که از ترکیب حروف الفبا، چند کلمهٔ دو حرفی ـ بامعنی و بی‌معنی ـ بدون تکرار حرفی در کلمه به‌دست می‌آید، تعداد حروف یعنی «۲۸» را در «۲۷» ضرب کنید، حاصل آن عدد ۷۵۶ است.

اگر سؤال شود که چند کلمهٔ سه حرفی، بدون تکرار حرفی در کلمه به‌دست می‌آید، تعداد حروف یعنی «۲۸» را در «۲۷» ضرب نمایید و حاصل‌ضرب را در «۲۶» ضرب‌کنید که حاصل آن عدد ۱۹۶۵۶ می‌شود.

و اگر از کلمه چهار حرفی پرسیده شود، حاصل‌ضرب پیش‌گفته را در «۲۵» ضرب کن و در مورد کلمات پنج حرفی و بیشتر، به‌همین ترتیب است.[۱]

توضیح: در بحث فوق منظور کلمات در زبان عربی است و در زبان عربی تعداد حروف ۲۸ تا است.

حال برای ورود به مباحث این فصل بیاندیشید که:

چرا محاسبات فوق درست است؟

در یک کلاس ۲۰ نفره، دانش‌آموزان در روز اوّل مهر تصمیم گرفتند برای تنوّع هر روز به‌ترتیب جدیدی روی صندلی‌ها بنشینند به‌گونه‌ای که ترتیب نشستن آن‌ها در هر روز با ترتیب نشستن آن‌ها در همهٔ روزهای قبل متفاوت باشد، یعنی اگر فرضاً هر روز از دانش‌آموزان در حالی‌که در کلاس نشسته‌اند یک عکس بگیریم و آن‌ها را نگه داریم، آن‌گاه هر دو عکس را که کنار هم قرار دهیم متوجّه شویم که تفاوت‌هایی در محل نشستن دانش‌آموزان در دو عکس وجود دارد. مثلاً در تصویر اوّل جواد خلیق روی صندلی ۱۴ نشسته ولی در تصویر دوّم او روی صندلی ۸ نشسته و ...

حال ما باتوجّه به این‌که تعداد دانش‌آموزان محدود است و کلاس هم ۲۰ صندلی دارد، متوجّه می‌شویم که تعداد روش‌های نشستن دانش‌آموزان روی صندلی‌ها محدود است، یعنی بالاخره روزی می‌رسد که دانش‌آموزان روش جدیدی برای نشستن نمی‌یابند و مجبورند روش نشستن در یکی از روزهای قبل را تکرار کنند.

حال سؤال این است: دانش‌آموزان تا چند روز می‌توانند به این تنوّع ادامه دهند؟ آیا می‌توانند تا پایان سال این بازی را ادامه دهند؟

۱. مطالب از کتاب «ترجمه کامل کشکول شیخ بهایی» به ترجمهٔ ... محمد ... گی، انتشارات نگاه آشنا ...

یکی پاسخ می‌دهد، حدوداً ۲۵۰ روش مختلف وجود دارد، حال بستگی به طول سال تحصیلی دارد. دیگری می‌گوید، نه حدوداً ۱۲۵۰ روش مختلف وجود دارد و دیگری می‌گوید! اگر دانش‌آموزان در تمام طول عمر خود به این کار بپردازند و نه هر روز، بلکه هر ثانیه جاهای خود را عوض کنند باز هم ترتیب‌های جدیدی برای نشستن وجود دارد و دیگری می‌گوید هر چه باشد جواب سؤمی غلط است و ...

حال برای این‌که دریابیم واقعاً پاسخ درست کدام است، تلاش می‌کنیم جواب را بیابیم.

مسأله فوق به زبان دیگر به‌صورت زیر است:

به چند طریق ۲۰ نفر می‌توانند روی ۲۰ صندلی بنشینند و یا به‌طور معادل به چند طریق ۲۰ نفر می‌توانند در یک صف بایستند؟

حال ابتدا چند مسألهٔ ساده را خودمان طراحی و حل می‌کنیم تا بعد بیاییم و به مسألهٔ فوق بپردازیم.

سؤال

۱) ریحانه به یک فروشگاه رفته است، او می‌خواهد یک کیف یا یک کلاه بخرد. اگر در فروشگاه ۵ مدل کیف وجود داشته باشد و ۳ مدل کلاه، او چند انتخاب برای خرید دارد؟

پاسخ مشخص است که او ۳+۵ انتخاب دارد.

۲) ریحانه به یک فروشگاه رفته است او می‌خواهد یک کیف و یک کلاه بخرد، اگر در فروشگاه ۵ مدل کیف و ۳ مدل کلاه وجود داشته باشد، او به چند روش می‌تواند خرید خود را انجام دهد؟

پاسخ او در مقابل هر مدل کیفی که از ۵ مدل کیف انتخاب می‌کند، می‌تواند هر مدل کلاهی را از ۳ مدل کلاه انتخاب کند، پس او ۳×۵ انتخاب دارد.

تا حدودی برای ما روشن است که باید در سوال ۲، ضرب و در سوال ۱، جمع صورت گیرد.

ما در سؤال ۱ با کلمهٔ **یا** درک کردیم که باید جمع صورت گیرد و در سؤال ۲ با کلمهٔ **و** درک کردیم که باید ضرب صورت گیرد.

اگر بخواهیم از روش‌های حل مسأله‌های فوق، ایده‌های ریاضی مهتی به‌دست آوریم که در حل مسأله‌های دیگر هم به‌کار رود، می‌توانیم ایده‌های زیر را بیان کنیم:

ایدهٔ اساسی جمع

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری که در روش اوّل m انتخاب و در روش دوّم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ روش وجود دارد.

ایدهٔ اساسی ضرب

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، بطوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m روش وجود داشته باشد و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m\times n$ روش قابل انجام است.

حال سؤال‌های جدیدی را مطرح می‌کنیم:

آس

۶

سؤال

۱) ریحانه به همان فروشگاه رفته است، او می‌خواهد یک کیف یا یک کلاه یا یک مانتو بخرد. اگر در فروشگاه ۵ مدل کیف و ۳ مدل کلاه و ۷ مدل مانتو وجود داشته باشد، او چند انتخاب برای خرید دارد؟

پاسخ چون او می‌خواهد یکی از این کالاها را خریداری کند، مشخص است که او ۳+۵+۷ یعنی ۱۵ انتخاب دارد.

۲) ریحانه به همان فروشگاه رفته است و می‌خواهد یک کیف و یک کلاه و یک مانتو بخرد، با شرایط مسألهٔ قبل او چند انتخاب برای خرید دارد؟

پاسخ باز هم به ذهن می‌رسد که باید این اعداد را درهم ضرب کرد و جواب ۳×۵×۷ است.

برای روشن‌تر شدن مطلب می‌توانیم توضیحات زیر را ارائه دهیم:

در ذهن خودمان فرض می‌کنیم که کیف و کلاه یک کالا و مانتو هم یک کالا است، حال طبق سؤال ۲، ما برای خرید کالای اوّل یعنی کیف و کلاه ۳×۵ انتخاب داریم و طبق داده‌های سؤال برای خرید کالای دوّم یعنی مانتو ۷ انتخاب داریم، حال اگر بخواهیم این دو کالا را با هم بخریم ۷×(۵×۳) انتخاب داریم.

باتوجّه به روش حل دو سؤال فوق به‌نظر می‌رسد که دو ایدهٔ قبل را بشود تعمیم داد:

تعمیم ایدهٔ اساسی جمع

اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به‌طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1+m_2+...+m_k$ روش وجود دارد.

تعمیم ایدهٔ اساسی ضرب

اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اوّل m_1 روش، برای انجام مرحلهٔ دوّم m_2 روش، ... و برای انجام مرحلهٔ k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض این‌که در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times ... \times m_k$ روش قابل انجام است.

در مباحث مربوط به شمارش این ایده‌ها بسیار به‌کار می‌آیند و در بسیاری از مسأله‌ها به‌کار بردن آن‌ها کمک مهمی برای حل مسأله انجام می‌دهد. البته در برخی جاها هم کمکی از آن‌ها بر نمی‌آید.

توجّه در برخی کتاب‌ها از این ایده‌ها با عنوان اصل یاد می‌شود، که با یک دید درست ریاضی اصطلاح دقیقی برای آن‌ها نیست. در اصطلاح ریاضی، اصل چیزی است که اثبات ناپذیر است و ما درستی آن را می‌پذیریم، در حالی‌که این ایده‌ها قابل اثبات‌اند.

به‌عنوان نمونه ایدهٔ اساسی ضرب را در این‌جا اثبات می‌کنیم: فرض کنید انجام کاری شامل دو مرحله باشد، که برای انجام مرحلهٔ اوّل m روش و برای هر کدام از این m انتخاب، برای انجام مرحلهٔ دوّم n روش وجود داشته باشد. برای اثبات از روش زیر استفاده می‌کنیم:

اگر فرد مرحلهٔ اوّل را با روش iاُم و مرحلهٔ دوّم را با روش jاُم انجام دهد، آن را با $(i،j)$ نمایش می‌دهیم، حال با این نمایش می‌توانیم همهٔ روش‌های انجام کل کار را با زوج‌های مرتّب به شکل زیر نمایش دهیم:

$$\begin{matrix} (1،1) & ، & (1،2) & ، ... ، & (1،n) \\ (2،1) & ، & (2،2) & ، ... ، & (2،n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (m،1) & ، & (m،2) & ، ... ، & (m،n) \end{matrix}$$

بنابراین مجموعه روش‌های انجام کل کار شامل m سطر است که در هر سطر n عضو وجود دارد و در نتیجه این مجموعه دارای mn عضو است و نتیجه به‌دست می‌آید. با روش‌هایی مشابه می‌توانیم ایده‌های دیگری را که بیان کردیم اثبات کنیم. البته ما بعد از این به‌جای عبارت ایدهٔ اساسی جمع یا ایدهٔ اساسی ضرب از همان اصطلاح معمول، یعنی اصل جمع یا اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

مثال‌های آموزشی

۱) **با ارقام ۶، ۵، ۴ و ۳ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟**

پاسخ برای هر کدام از ارقام، ۴ انتخاب وجود دارد و انتخاب هر رقم، محدودیتی برای انتخاب رقم‌های بعدی به‌وجود نمی‌آورد. پس می‌توانیم طبق اصل ضرب به‌صورت مقابل عمل کنیم:

۴	۴	۴	۴

$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۴$

۲) **با ارقام ۶، ۵، ۴ و ۳ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت که رقم تکراری نداشته باشد؟**

پاسخ مانند پاسخ مثال قبل، ۴ جایگاه برای ارقام در نظر می‌گیریم:

برای انتخاب رقم اوّل (سمت چپ) ۴ حالت وجود دارد، پس از آن‌که رقم اوّل انتخاب شد، برای انتخاب رقم دوّم فقط یک محدودیت وجود دارد و آن این‌که عدد به‌کار رفته در رقم اوّل را نمی‌توانیم به‌کار ببریم، پس برای رقم دوّم ۳ انتخاب وجود دارد و به‌صورت مشابه برای رقم سوّم ۲ انتخاب وجود دارد و وقتی که سه رقم اوّل و دوّم و سوّم انتخاب شدند، برای رقم چهارم فقط یک انتخاب می‌ماند. پس می‌توانیم طبق اصل ضرب به‌صورت مقابل پاسخ را ارائه دهیم:

۱	۲	۳	۴

یعنی ۲۴ عدد با این ویژگی وجود دارد.

$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

۳) **با ارقام ۶، ۵، ۴ و ۳ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت که زوج باشند؟**

پاسخ شرط لازم و کافی برای این‌که یک عدد زوج باشد آن است که رقم سمت راستش زوج باشد، پس کافی است اعدادی را بشماریم که رقم سمت راستشان ۴ یا ۶ باشد، با این حساب راحت‌تریم برای استفاده از اصل ضرب، ابتدا دربارهٔ خانهٔ سمت راست بحث کنیم:

خُب، خانهٔ سمت راست فقط ۲ انتخاب دارد و خانه‌های دیگر هر کدام ۴ انتخاب، پس طبق اصل ضرب جواب مسأله می‌شود:

۱	۲	۳	۴

$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۲ = ۱۲۸$

۴) **با ارقام ۶، ۵، ۴ و ۳ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان ساخت؟**

پاسخ خُب، خانهٔ سمت راست فقط ۲ انتخاب دارد، حال پس از پر شدن خانهٔ سمت راست می‌توانیم به بررسی هر کدام از خانه‌ها بپردازیم. ما در این‌جا برمی‌گردیم سر همان خانهٔ سمت چپ، که باتوجّه به این‌که یکی از ارقام در خانهٔ سمت راست به‌کار رفته، ۳ انتخاب دارد و به‌همین ترتیب برای رقم دوّم دو انتخاب و برای رقم سوّم یک انتخاب داریم و نتیجه را به شکل مقابل می‌توان نمایش داد:

۲	۱	۲	۳

$۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۱۲$

۵) **چند عدد متقارن ۵ رقمی وجود دارد؟**

پاسخ اعدادی مانند ۲۳۴۳۲ متقارن هستند. خُب رقم اوّل ۹ انتخاب دارد چون نمی‌تواند ۰ باشد، رقم دوّم ۱۰ انتخاب دارد چون می‌تواند همهٔ اعداد ۰ تا ۹ باشد و به‌همین ترتیب رقم سوّم ۱۰ انتخاب دارد. رقم چهارم یک انتخاب دارد زیرا با انتخاب رقم دوّم، رقم چهارم هم انتخاب شده است. و به روش مشابه رقم پنجم هم یک انتخاب دارد. پس جواب مسأله می‌شود:

$۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱ \times ۱ = ۹۰۰$

۶) **از میان ۶ کارمند به چند روش می‌توان یک رئیس، یک معاون و یک خزانه‌دار انتخاب کرد؟**

پاسخ فرض می‌کنیم ابتدا رئیس را انتخاب کنیم ۶ حالت برای انتخاب او وجود دارد، حال برای انتخاب معاون پس از انتخاب رئیس، ۵ انتخاب وجود دارد و پس از انتخاب این دو، برای انتخاب خزانه‌دار ۴ انتخاب وجود دارد و طبق اصل ضرب جواب مسأله می‌شود: $۱۲۰ = ۴ \times ۵ \times ۶$.

۷) **چند پلاک اتومبیل ۷ شماره‌ای که سه شمارهٔ اول آن از حروف لاتین و ۴ شمارهٔ آخر آن از اعداد ۰ تا ۹ تشکیل شده است می‌توان تهیه نمود؟**

پاسخ با استفاده از تعمیم اصل ضرب جواب به صورت مقابل می‌شود:

$۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۷۵۷۶۰۰۰۰$

۸) **رمز یک کیف رمزدار که سه رقمی است را نمی‌دانیم. اگر آزمایش هر رمز ۳ ثانیه به‌طول انجامد، حداکثر چقدر زمان برای بازکردن کیف لازم است؟**

پاسخ چون هر رقم عددی بین ۰ و ۹ می‌باشد، طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$ می‌شود.

پس حداکثر ۳۰۰۰ ثانیه یعنی ۵۰ دقیقه زمان برای آزمودن پی‌درپی رمزها لازم است.

۹) **در یک شهر ۹ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۱ خیا... هر خیابان بین ۹ تا ۱۲ کوچه ... هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ خانه وجود دارد. حداقل و**

حداکثر تعداد خانه‌هایی که ممکن است در این شهر وجود داشته باشد، چه تعداد است؟

پاسخ چیزی که به ذهن می‌رسد این است که با عددهای بزرگ حداکثر تعداد خانه‌های شهر را به‌دست آوریم، یعنی:

$۹\times۱۱\times۱۲\times۳۰=۳۵۶۴۰$

و با عددهای کوچک‌تر حداقل تعداد خانه‌های شهر را به‌دست آوریم، یعنی:

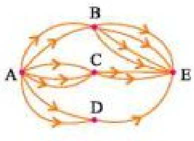
$۹\times۸\times۹\times۲۰=۱۲۹۶۰$

پس تعداد خانه‌های این شهر چیزی است بین ۱۲۹۶۰ و ۳۵۶۴۰.

توجه به‌کار بردن کلمات حداکثر و حداقل در مسأله‌هایی به شکل فوق از لحاظ ریاضی دقیق نیست. زیرا حدّاکثر و حدّاقل در ریاضیات زمانی به‌کار می‌روند که رخ دهند به‌عنوان مثال وقتی می‌گوییم حدّاکثر سرعت یک اتومبیل ۵۰۰ کیلومتر بر ساعت است، یعنی این‌که سرعت این اتومبیل می‌تواند به مقدار فوق برسد و برای اتومبیلی که سرعت آن هرگز به ۳۰۰ کیلومتر بر ساعت نمی‌رسد، نمی‌توان گفت که حدّاکثر سرعتش ۵۰۰ کیلومتر بر ساعت است.

بهتر است سؤالاتی هم‌چون سؤال فوق این‌گونه مطرح شوند که باتوجه به اطلاعات داده شده یک کران پایین و یک کران بالا برای تعداد خانه‌های این شهر بیابید.

۱۰) اگر شکل زیر جاده‌های بین شهرهای A، B، C، D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



پاسخ برای رفتن از A به E سه حالت وجود دارد:

۱) رفتن از A به E با عبور از B: از A به B دو راه و از B به E چهار راه وجود دارد و بنابر اصل ضرب $۸=۴\times۲$ راه برای رفتن از A به E با عبور از B وجود دارد.

۲) رفتن از A به E با عبور از C: باتوجّه به اصل ضرب، $۶=۲\times۳$ راه برای رفتن از A به E با عبور از C وجود دارد.

۳) رفتن از A به E با عبور از D: باتوجّه به اصل ضرب، $۲=۱\times۲$ راه برای رفتن از A به E با عبور از D وجود دارد.

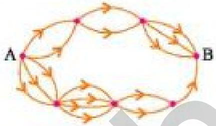
حال بنابر اصل جمع برای رفتن از A به E $۱۶=۱\times۲+۲\times۳+۴\times۲$ راه وجود دارد.

۱۱) مسأله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آن‌ها حل شود و جواب آن به‌صورت زیر باشد:

$۲\times۲\times۳+۳\times۴\times۲\times۱=۳۶$

پاسخ می‌توان به روش‌های مختلفی به این سؤال پاسخ داد، شاید راحت‌ترین راه روش زیر باشد:

در شکل مقابل همهٔ جاده‌ها یک طرفه‌اند، به چند طریق می‌توان از A به B رفت؟ (والا با این ...)



۱۲) با چهار رنگ به چند طریق می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد، به‌طوری‌که هیچ دو خانهٔ مجاوری همرنگ نباشند (دو خانه را مجاور می‌گوییم هرگاه ضلع مشترک داشته باشند.) و در ضمن لزومی ندارد از هر ۴ رنگ استفاده شود.

پاسخ بعضی وقت‌ها برای حل مسأله به‌کار بردن یک ایدهٔ خاص، باعث ساده‌تر شدن آن می‌شود.

در این‌جا ما خانه‌ها را به شکل مقابل نام‌گذاری می‌کنیم:

a	b
c	d

حال مسأله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم: اگر دو خانهٔ a و d همرنگ باشند، آن‌گاه برای رنگ کردن هر کدام از خانه‌های b و c سه رنگ داریم، پس در این وضعیت $۳۶=۱\times۳\times۳\times۴$ حالت وجود دارد که در مربع مقابل نمایش داده شده است.

۴	۳
۳	۱

و اگر خانه‌های a و d همرنگ نباشند، آن‌گاه برای رنگ کردن هر کدام از خانه‌های b و c دو رنگ داریم (چرا؟)، پس در این وضعیت $۲\times۲\times۳\times۴$ حالت وجود دارد که در مربع مقابل نمایش داده شده است.

۴	۲
۲	۳

جواب مسأله $۲\times۲\times۳\times۴+۱\times۳\times۳\times۴$ یعنی ۸۴ می‌شود.

کافه سؤال

۱ کد بین شهری تلفن در کانادا از سه عدد تشکیل شده است که عدد اول آن بین ۲ و ۹ عدد دوم آن ۰ یا ۱ و عدد سوم آن بین ۱ و ۹ است.

الف) چند کد بین شهری تلفن با شرایط فوق می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) چند تا از کدهای فوق با عدد ۵ شروع می‌شوند؟

۲ چند عدد ۵ رقمی با ارقام متفاوت وجود دارد که با ۳ شروع شود و به ۷ ختم شود؟

۳ چند عدد ۳ رقمی با ارقام متفاوت وجود دارد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۴ چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که اختلاف رقم‌های یکان و دهگان آن ۳ است؟

۵ چند عدد ۶ رقمی غیرمتقارن با ارقام متمایز وجود دارد؟

۶ سه تاس آبی، قرمز و زرد را با هم پرتاب می‌کنیم در چند حالت حداقل دو عدد ظاهر شده یکسان هستند؟

۷ با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام با رقم یکان ۳ می‌توان نوشت؟

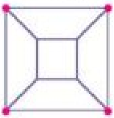
۸ چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۲ و ۰ وجود دارد؟

۹ الف) به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب ریاضی را طوری در یک قفسه چید که کتاب‌های ریاضی کنار هم نباشند، کتاب‌های ادبیات هم همین‌طور؟

ب) قسمت الف را با ۳ کتاب ادبیات و ۳ کتاب ریاضی حل کنید؟

۱۰ شکل زیر را با حداکثر ۵ رنگ می‌خواهیم رنگ‌آمیزی کنیم به‌طوری‌که ناحیه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را کرد؟

(لزومی ندارد از همهٔ رنگ‌ها استفاده شود.)

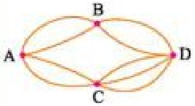


گزینـــهٔ چنـــد؟!!!!

۱- چند عدد ۵ رقمی متقارن با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۲۷۰ ۳) ۵۰۴ ۴) ۶۴۸

۲- در شکل مقابل به چند طریق بدون عبور از نقطهٔ تکراری می‌توان از A به D رسید؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

۳- چند عدد دو رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن فرد است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۴- چند عدد سه رقمی وجود دارد که رقم دهگان آن ۷ **نیست**؟

۱) ۵۰۴ ۲) ۸۱۰ ۳) ۶۴۸ ۴) ۸۰۰

۵- چند عدد ۴ رقمی زوج با ارقام ۶، ۵ و ۳ وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۶- تعداد عددهای چهاررقمی ساخته شده که در آن فقط چهار رقم ۶، ۰، ۰ و ۳ به کار برده شود کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۷- چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که با ۳ آغاز می‌شود و به ۸ ختم می‌شود؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۳۶

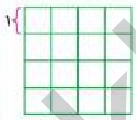
۸- با اعداد ۸، ۹، ۶ و ۲ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۹- اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۵ عضوی باشد، چند تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴۳ ۲) ۶۰ ۳) ۶ ۴) ۱۲۵

۱۰- در شکل مقابل چند مربع ۲×۲ دیده می‌شود؟



۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

الف) $۸۴ = ۶ \times ۲ \times ۷$ ب) $۱۴ = ۱ \times ۲ \times ۷$

۲

$۱ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۱ = ۳۳۶$

۳

اگر یکان صفر باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با: $۷۲ = ۹ \times ۸ \times ۱$ اگر یکان ۵ باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با: $۶۴ = ۸ \times ۸ \times ۱$.

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۱۳۶ = ۶۴ + ۷۲$.

۴

$\{۱۴،۴۱،۲۵،۵۲،۳۶،۶۳،۴۷،۷۴،۵۸،۸۵،۶۹،۹۶،۳۰\}$

اگر حالتی که یکان از دهگان بزرگتر است را بررسی کنیم می‌بینیم که اعداد ۱ تا ۶ می‌توانند به عنوان دهگان قرار بگیرند بنابراین ۶ حالت برای دهگان و ۱ حالت برای یکان داریم و چون با جابه‌جایی یکان و دهگان باز هم اختلاف ۳ است پس تعداد حالت‌ها را در ۲ هم ضرب می‌کنیم. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۱۲ = ۶ \times ۱ \times ۲$، عدد ۳۰ هم جدای از این‌هاست، زیرا ۰۳ عددی دو رقمی نیست. پس تعداد کل اعداد ۱۳ تا می‌شود.

۵

تعداد کل اعداد شش رقمی با ارقام متمایز برابر است با: $۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = ۱۳۶۰۸۰$

تعداد اعداد شش رقمی متقارن با ارقام متمایز برابر است با: $۹ \times ۹ \times ۸ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۶۴۸$

بنابراین تعداد اعداد شش رقمی غیرمتقارن با ارقام متمایز برابر است با: $۱۳۶۰۸۰ - ۶۴۸ = ۱۳۵۴۳۲$

۶

تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۶^۳ = ۲۱۶$

تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده در تاس‌ها یکسان نباشد برابر است با: $۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$

پس تعداد حالت‌هایی که حداقل دو عدد ظاهر شده یکسان هستند می‌شود: $۲۱۶ - ۱۲۰ = ۹۶$

۷

$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹۶$

۸

$۱ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۴ = ۱۶$

۹

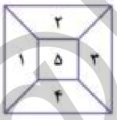
الف) در این حالت کتاب اول حتماً باید ادبیات باشد، بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۱۲$

ب) اگرکتاب ادبیات اول باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۳۶$

اگر کتاب ریاضی اول باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۳۶$

بنابراین به ۷۲ $(۷۲ = ۲ \times ۳۶)$ طریق می‌توان کتاب‌ها را در قفسه چید به‌طوری‌که کتاب‌های ریاضی کنار هم نباشند، کتاب‌های ادبیات هم همین‌طور.

۱۰



ابتدا شکل داده شده را به‌صورت مقابل شماره‌گذاری می‌کنیم. واضح است که با دو رنگ نمی‌توانیم شکل را طوری رنگ کنیم که ناحیه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند (چرا؟) اگر سه رنگ داشته باشیم حتماً باید شماره‌های ۱ و ۳ هم‌رنگ و شماره‌های ۲ و ۴ هم همرنگ باشند که در این صورت تعداد حالات برابر است با: $۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$

اگر چهار رنگ داشته باشیم حتماً باید شماره‌های ۱ و ۳ یا ۲ و ۴ همرنگ باشند. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} ۴ \times ۱ \times ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲۴ \text{ شماره‌های ۱ و ۳ هم‌رنگ باشند.} \\ ۴ \times ۱ \times ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲۴ \text{ شماره‌های ۲ و ۴ هم‌رنگ باشند.} \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۴ \times ۲ = ۴۸$$

اگر ۵ رنگ داشته باشیم، هر ناحیه را با یکی از رنگ‌ها رنگ می‌کنیم بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

پس تعداد کل حالات برای رنگ‌آمیزی ۵ ناحیه با حداکثر ۵ رنگ برابر است با: $۱۲۰ + ۴۸ + ۶ = ۱۷۴$

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۴	۲	۳
۳	۲	۴	۲
۵	۱	۶	[illegible]
۷	۴	۸	۳
۹	۴	۱۰	۲

آس

۶

درس دوم: جایگشت

مفهوم جایگشت

در مبحث شمارش سؤال‌های مختلفی مطرح می‌شود. ما در این درس و درس بعد به بررسی دو نوع خاص و البته مهم از این سؤال‌ها می‌پردازیم. در این درس به پرسش‌های زیر خواهیم پرداخت و فرمول و روشی کلّی برای پاسخ‌گویی به آن‌ها را به‌دست خواهیم آورد. به چند روش می‌توان n شیء متمایز را در یک ردیف کنار هم چید؟ در حالت کلّی به چند روش می‌توان k شیء از n شیء متمایز را در یک ردیف کنار هم چید؟

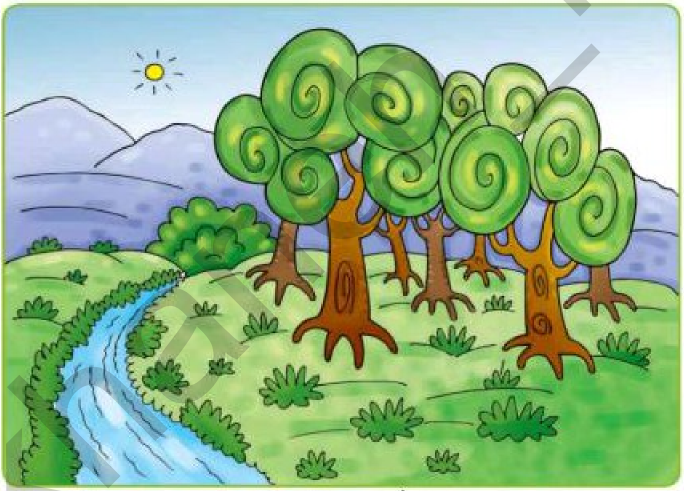
در ابتدای بحث بیاییم برای این‌که از تکرار عبارت‌هایی مثل «۱۰ شیء متمایز داریم به چند طریق می‌توان آن‌ها را کنار هم چید» پرهیز کنیم، یک اصطلاح بسازیم که نشانگر مفهوم فوق باشد.

تعریف اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدن آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

سؤال

همهٔ جایگشت‌های سه حرف a ، b و c را بنویسید.

پاسخ abc, acb, bac, bca, cab, cba



جای‌گشت اثر: میرزا عبد الرحیم

(البته خود من اصطلاح «صف» را خیلی بهتر از اصطلاح «جایگشت» می‌دانم. در مورد فوق هم ما واقعاً همهٔ حالت‌های ممکن صف بستن a ، b و c را می‌بینیم و اصطلاح خیلی روشن‌تری است اما چه کنیم، **همه‌جا میگن جایگشت شمام بگین جایگشت ولی «صف» بهتره**)

سؤال

همهٔ جایگشت‌های چهار حرف a، b، c و d را بنویسید.

پاسخ

abcd	abdc	acbd	acdb	adbc	adcb
bacd	badc	bcad	bcda	bdac	bdca
cabd	cadb	cbad	cbda	cdab	cdba
dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba

ســـؤال

تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز را به‌دست آورید.

پاسخ باتوجه به اصل ضرب برای خانهٔ اوّل ۴ انتخاب، برای هر انتخاب خانهٔ اوّل برای خانهٔ دومّ ۳ انتخاب، برای هر انتخاب خانه دوّم برای خانه سوّم ۲ انتخاب، برای هر انتخاب خانهٔ سوّم برای خانهٔ چهارم ۱ انتخاب وجود دارد

$4 \times 3 \times 2 \times 1$

و بنابر اصل ضرب جواب ۱×۲×۳×۴ می‌باشد.

مشابه بحث فوق مشخص است که تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز می‌شود ۱×۲×۳×۴×۵ و تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز می‌شود ۱×۲×۳×۴×۵×۶ و ...

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز: $n\times(n-1)\times\dots\times2\times1$

چون در محاسبات مربوط به شمارش با عبارت‌هایی به شکل فوق زیاد برخورد می‌کنیم بهتر است یک نام یا یک نماد برای آن بسازیم، البته قبل از ما این کار را کرده‌اند، عبارت فوق را که برابر حاصل‌ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n است به‌صورت !n (n فاکتوریل) نمایش می‌دهند.

به‌عنوان مثال ۱=!۱ و ۱×۲=!۲ و ۱×۲×۳=!۳ و ... .

البته با توجه به تعریف فوق چیزی به‌نام !۰ تعریف نمی‌شود، ولی بعدها تا حدودی خواهیم دید که اگر چیزی به‌نام !۰ تعریف کنیم و مقدار آن را برابر ۱ بگیریم می‌توانیم فرمول‌های مربوط به محاسبات را ساده‌تر بنویسیم ـ به‌موقع به آن اشاره خواهیم کرد ـ به‌همین خاطر خودمان تعریف می‌کنیم ۱=!۰.

در این‌جا برمی‌گردیم به آغاز درس قبل ـ ۲۰ دانش‌آموز در کلاس که هر روز جای خود را عوض می‌کردند ـ اکنون دیگر می‌دانیم که تعداد روش‌های نشستن ۲۰ دانش‌آموز در یک کلاس روی ۲۰ صندلی می‌شود !۲۰ یعنی ۲۰×۱۹×۱۸×...×۳×۲×۱ که مشخصاً عدد بزرگی است.

باتوجّه به این‌که هر روز ۶۰×۶۰×۲۴ یعنی ۸۶۴۰۰ ثانیه است، با یک محاسبهٔ سرانگشتی می‌بینیم که از آن‌جا که ۳ سال کمی بیش از ۱۰۰۰ روز است می‌توانیم بگوییم سه سال کمتر از ۱۰۰٫۰۰۰٫۰۰۰ ثانیه است و باتوجه به محاسبهٔ زیر:

$$20\times19\times18\times\dots\times10>\underbrace{10\times10\times10\times\dots\times10}_{\text{۱۱ بار}}\Rightarrow 20!>10^{11}$$

می‌توانیم بگوییم تعداد راه‌های نشستن دانش‌آموزان روی صندلی‌ها از صدمیلیارد خیلی بیشتر است پس اگر دانش‌آموزان سه هزار سال هم در کلاس می‌نشستند و هر ثانیه به‌ترتیب جدیدی روی صندلی‌ها می‌نشستند باز هم می‌توانستند به‌ترتیب جدیدی روی صندلی‌ها بنشینند.

البته اگر محاسبات را مثلاً با ماشین‌حساب دقیقاً انجام دهیم می‌بینیم که اگر دانش‌آموزان فوق در هر ثانیه جای خود را عوض کنند برای این‌که به همهٔ روش‌های مختلف روی صندلی‌ها بنشینند بیش از پانصد میلیارد سال زمان لازم است!!!

مثال‌های آموزشی

۱) مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\frac{6!}{5!}=\frac{6\times\overbrace{5\times4\times3\times2\times1}^{5!}}{\underbrace{5\times4\times3\times2\times1}_{5!}}=6$

ب) $\frac{7!}{6!}=\frac{7\times\overbrace{6\times5\times4\times3\times2\times1}^{6!}}{\underbrace{6\times5\times4\times3\times2\times1}_{6!}}=7$

ج) $\frac{8!}{5!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!}=8\times7\times6=336$

د) $\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times8!}{8!}=10\times9=90$

هـ) $\frac{9!}{5!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!}=9\times8\times7\times6=3$[illegible]

۲) حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{n!}{(n-1)!}$ ب) $\frac{n!}{(n-2)!}$ ج) $\frac{n!}{(n-3)!}$

د) $\frac{n!}{(n-4)!}$ هـ) $\frac{n!}{(n-k)!}$

پاسخ

الف) $$\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\times\overbrace{(n-1)\times\ldots\times1}^{(n-1)!}}{\underbrace{(n-1)\times\ldots\times1}_{(n-1)!}}=n$$

ب) $$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n\times(n-1)\times\overbrace{(n-2)\times\ldots\times1}^{(n-2)!}}{\underbrace{(n-2)\times\ldots\times1}_{(n-2)!}}=n(n-1)$$

ج) $$\frac{n!}{(n-3)!}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{(n-3)!}=n(n-1)(n-2)$$

د) $$\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)!}{(n-4)!}=n(n-1)(n-2)(n-3)$$

هـ) $$\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{n(n-1)\times\ldots\times(n-(k-1))\overbrace{(n-k)\times(n-(k+1))\times\ldots\times1}^{(n-k)!}}{\underbrace{(n-k)\times(n-k-1)\times\ldots\times1}_{(n-k)!}}=n(n-1)\times\ldots\times\big(n-(k-1)\big)=n(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)$$

۳) کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $6!=2!+4!$ ب) $6!=2!\times3!$ ج) $(3!)^2=9!$

د) $7!=7\times6!$ هـ) $4\times5!=20!$ و) $3!=\frac{6!}{2!}$

پاسخ

الف) عبارت $6!=2!+4!$ نادرست است. یک محاسبهٔ ساده این را نشان می‌دهد. $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ ولی $2!+4!=2+24=26$.

ب) عبارت $6!=2!\times3!$ نادرست است. یک محاسبهٔ ساده این را نشان می‌دهد. $6!=720$ ولی $2!\times3!=2\times6=12$.

ج) عبارت $(3!)^2=9!$ هم نادرست است. $(3!)^2=(6)^2=36$ در حالی‌که $9!=9\times8\times\ldots$ مشخصاً از ۷۲ بزرگ‌تر است.

د) عبارت $7!=7\times6!$ درست است و در واقع برای هر n داریم:

$$n!=n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1=n\times((n-1)\times\ldots\times2\times1)=n(n-1)!$$

هـ) عبارت $4\times5!=20!$ که به‌وضوح نادرست است. $4\times5!=4\times120=480$ ولی $20!=20\times19\times\ldots$ عددی است خیلی بزرگ.

و) عبارت $3!=\frac{6!}{2!}$ هم نادرست است زیرا $6!=3!\times2!$ نادرست است.

پا!!

در کل منظور از این تمرین این است که متوجه باشیم فاکتوریل شبیه جمع یا ضرب نیست و در حالت کلی نمی‌توان گفت $(m+n)!=m!+n!$ و یا $(mn)!=m!n!$ و یا $(m!)^2=(m^2)!$ و یا $m(n!)=(mn)!$ و در واقع مثال‌های گفته شده مثال‌های نقضی برای چنین ادعاهایی است. البته هر جا فکر کردید که رابطهٔ فاکتوریل یک ویژگی خاص را دارد به‌سادگی می‌توانید حدس خود را با یکی، دو مثال آزمایش کنید. البته به غیر از رابطهٔ $n!=n\times(n-1)!$ و روابط مشابه آن به‌راحتی نمی‌توان ویژگی کلّی دیگری برای فاکتوریل یافت.

تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز

فهمیدیم تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $n!$ می‌شود. حال سعی می‌کنیم رابطه‌ای برای تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز یا به‌عبارت دیگر تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم است را بیابیم.

(یا به‌عبارت بهتر تعداد حالت‌های ممکن صف بستن r شیء از n شیء متمایز)

فرض کنید یک مدیر نمونه برای ایجاد روحیه شاد در بین کارمندانش تصمیم گرفته است به دو نفر از کارمندانش مدال‌های نقره و طلا بدهد. او ۱۵ کارمند دارد، با خود می‌اندیشد که خُب به دو نفر مدال می‌دهیم آن‌ها که خوشحال می‌شوند، بقیه هم شیرینی مدال را می‌خورند تشویق و مراسم مربوطه و ... و سرجمع از هیچ، کلی خوشی و سرور پدید می‌آید. حال بیاندیشیم که مدیر چند راه پیش‌رو دارد.

خُب ۱۵ حالت ممکن برای دریافت مدال طلا وجود دارد و دریافت‌کنندهٔ مدال طلا هر که باشد ۱۴ حالت ممکن برای دریافت مدال نقره وجود دارد، حال ایدهٔ اساسی ضرب را به‌یاد می‌آوریم: «اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش وجود داشته باشد و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است».

وضعیت در این مسأله هم طبق توضیحاتی که دادیم دقیقاً به همین شکل است، پس مدیر به 15×14 روش مختلف می‌تواند به کارمندانش مدال طلا و نقره بدهد. حال اگر بخواهد جهت افزایش شادی و امید یک مدال طلا و یک مدال نقره و یک مدال برنز بدهد به چند روش امکان‌پذیر است؟

خب باز هم وضعیت معلوم است، 15×14 حالت ممکن برای توزیع مدال‌های طلا و نقره وجود دارد و با قدری دقت می‌بینیم که به هر صورتی که مدال‌های طلا و نقره توزیع شوند به ۱۳ روش مختلف می‌توان مدال برنز را اعطا کرد، باز هم ایدهٔ اساسی ضرب: $15 \times 14 \times 13$.

ســؤال

۱) تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نُه شیء متمایز را به‌دست آورید.

پاسخ باتوجّه به اصل ضرب مشخص است که جواب می‌شود $9 \times 8 \times 7 \times 6$ یعنی ۳۰۲۴.

$$9 \times 8 \times 7 \times 6$$

۲) عدد به‌دست آمده در پاسخ سؤال قبل را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

پاسخ خُب می‌توانیم به‌صورت مقابل عمل کنیم:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{9!}{5!}$$

۳) تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

پاسخ باتوجّه به اصل ضرب مشخص است که جواب می‌شود $n \times (n-1) \times (n-2)$ حال برای این‌که عبارت فوق را با استفاده از فاکتوریل بنویسیم از روش به‌کار رفته در تمرین قبل الگو می‌گیریم:

$$n \times (n-1) \times (n-2) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-3) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

حال با الگو گرفتن از سوالات قبل سعی می‌کنیم فرمولی برای به‌دست آوردن تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز به‌دست آوریم.

باتوجّه به اصل ضرب تعداد جایگشت‌های فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(n-0) \times (n-1) \times \dots \times (n-(r-1)) \quad \text{یا} \quad n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$$

(دقت کنید که چرا پرانتز آخر $(n-(r-1))$ است؟)

حال اگر بخواهیم با الگو گرفتن از سؤالات قبل عبارت فوق را با استفاده از فاکتوریل بنویسیم، می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم:

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1) = \frac{n \times \dots \times (n-r+1) \times (n-r) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-r) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

البته در هر جا که محاسبه انجام می‌دهیم می‌توانیم از همان رابطهٔ قبلی استفاده کنیم و در واقع مثل همه قسمت‌های ریاضیات جواب حاصل یکی خواهد بود ولیکن عبارت $\frac{n!}{(n-r)!}$ یک عبارت به اصطلاح جمع و جور است و راحت‌تر در ذهن می‌ماند.

معمولاً تعداد جایگشت‌های r شی از n شیء را با $p(n,r)$ نمایش می‌دهند و باتوجّه به مباحث قبل می‌توانیم بگوییم:

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال‌های آموزشی

۱) با حروف کلمهٔ گلستان و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شود؟

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

ج) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن دو حرف «س» و «ت» در کنار هم آمده باشند؟

د) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمهٔ «ستان» کنار هم آمده باشند؟

پاسخ

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۶ حرفی بدون حروف تکراری با این ۶ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز را به‌دست آوریم، لذا جواب برابر !۶ است.

در حالتی‌که آغاز کلمه با «گل» باشد، مشخصاً باید تعداد جایگشت‌های ۴ حرف بعدی را به‌دست آوریم، پس در این حالت جواب می‌شود !۴.

ب) تعداد کلمات چهار حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از ۶ حرف متمایز یعنی P(۶،۴) که می‌شود $\frac{۶!}{(۶-۴)!}$ یعنی $\frac{۶!}{۲!}$ که برابر است با ۳۶۰.

ج) حروف «س» و «ت» به دو حالت می‌توانند در کنار هم بیایند «ست» و «تس» ابتدا حالت «ست» را بررسی می‌کنیم.

از آن‌جا که کلمهٔ چهار حرفی، حروف «ت» و «س» را دارد، ابتدا همهٔ جایگشت‌های ۲ شیء از ۴ حرف باقی‌مانده یعنی «گ»، «ل»، «ا» و «ن» را می‌شماریم که می‌شود P(۴،۲) یعنی $۱۲ = \frac{۴!}{۲!}$.

حال برای ساختن یک کلمهٔ ۴ حرفی که در آن «ست» وجود دارد می‌توانیم «ست» را به اول، وسط یا پایان هر کلمهٔ دو حرفی فوق اضافه کنیم.

به‌عنوان مثال «گل» یک کلمهٔ دو حرفی است با اضافه کردن «ست» به اول، وسط و آخر آن کلمات چهار حرفی ستگل، گستل و گلست به‌دست می‌آید. پس ۱۲×۳ تا کلمهٔ چهار حرفی خواهیم داشت که «ست» دارد و به‌طور مشابه ۱۲×۳ کلمهٔ چهار حرفی خواهیم داشت که «تس» دارد و جواب مسأله می‌شود:

$۲ \times ۳ \times ۱۲ = ۷۲$

د) به‌غیر از حروف کلمهٔ «ستان» فقط دو حرف «گ» و «ل» را داریم پس ما ابتدا باید یک جایگشت از «ستان» را بسازیم و سپس یکی از حروف «گ» و «ل» را به ابتدا یا انتهای آن اضافه کنیم تا کلماتی را که در این بند می‌خواهیم بشماریم به‌دست آوریم.

تعداد جایگشت‌های «ستان» می‌شود !۴، حال این‌که کدام‌یک از حروف «گ» و «ل» را به جایگشت «ستان» اضافه کنیم ۲ حالت دارد و این‌که آن را به اول یا آخر اضافه کنیم نیز ۲ حالت دارد پس جواب مسأله $۹۶ = ۲ \times ۲ \times ۴!$ حالت دارد.

۲) با حروف کلمهٔ «شهمیرزاد نو» بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمهٔ ۱۰ حرفی می‌توان ساخت که در آن حروف کلمهٔ «شهمیر» کنار هم و حروف کلمهٔ «زاد نو» کنار هم قرار داشته باشند؟

ب) چند کلمهٔ ۱۰ حرفی می‌توان ساخت که در آن حروف کلمهٔ «شهمیر» کنار هم و حروف کلمهٔ «زاد» کنار هم و حروف کلمه «نو» کنار هم قرار داشته باشند؟

پاسخ

الف) دو حالت برای ترتیب قرارگرفتن حروف مربوط به دو کلمه وجود دارد یا حروف کلمهٔ «شهمیر» اول می‌آید و یا حروف کلمهٔ «زاد نو». حروف کلمهٔ «شهمیر» به !۵ حالت می‌توانند بیایند و حروف کلمهٔ «زاد نو» هم به !۵ حالت می‌توانند بیایند، پس جواب مسأله می‌شود $۵! \times ۵! \times ۲$.

ب) !۳ حالت برای ترتیب قرارگرفتن «شهمیر»، «زاد» و «نو» وجود دارد.

حروف کلمهٔ «شهمیر» را می‌توان به !۵ حالت چید و حروف کلمهٔ «زاد» را می‌توان به !۳ حالت چید و حروف کلمهٔ «نو» را می‌توان به !۲ حالت چید، پس جواب مسأله $۳! \times ۵! \times ۳! \times ۲!$ می‌شود.

۳) از میان تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم، سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۳۳۶ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

پاسخ اگر تعداد کتاب‌ها را n فرض کنیم، جواب مسأله می‌شود $n\times(n-1)\times(n-2)$. حال باید ببینیم که n چه باشد تا حاصل عبارت فوق ۳۳۶ شود. معلوم است که باید ۳۳۶ را به‌صورت حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی بنویسیم. ابتدا تلاش می‌کنیم که ۳۳۶ را به‌صورت حاصل‌ضرب چند عدد بنویسیم می‌بینیم که $336=3\times112=3\times8\times14=\dots$

و با قدری تلاش می‌رسیم به $8\times7\times6$ و این یعنی $n=8$.

۴) تعدادی دانشمند شامل ۳ سوری، ۴ عراقی، ۲ روس، ۲ ایرانی و ۱ لبنانی می‌خواهند در یک صف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند:

الف) چند حالت برای ایستادن همهٔ آن‌ها در کنار هم وجود دارد؟

ب) اگر دانشمندان عراقی بخواهند کنار هم بایستند چند حالت امکان دارد؟

ج) اگر دانشمندان عراقی کنار هم بایستند و دانشمندان سوری کنار هم، آن‌گاه چند حالت امکان دارد؟

د) اگر دانشمندان مربوط به هر ملّیّت بخواهند کنار هم بایستند، چند حالت امکان دارد؟

پاسخ

الف) چون مجموع دانشمندان $1+2+2+4+3$ یعنی ۱۲ تا است، پس جواب می‌شود تعداد جایگشت‌های ۱۲ شیء متمایز یعنی $12!$.

ب) تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۴ دانشمند عراقی در کنار هم می‌شود $4!$. حال اگر در هر کدام از حالت‌های قرار گرفتن این دانشمندان در کنار هم که دانشمندان عراقی پیش هم ایستاده‌اند دانشمندان عراقی را یک واحد در نظر بگیریم، می‌بینیم که کافی است تعداد جایگشت‌های $1+3+2+2+1$ شیء متمایز را حساب کنیم که می‌شود $9!$، و طبق اصل ضرب جواب این سؤال می‌شود $4!\times9!$.

ج) در این حالت هم مسأله مشابه به بند قبل است.

دانشمندان عراقی به $4!$ حالت می‌توانند کنار هم بایستند و دانشمندان سوری به $3!$ حالت، حال اگر دانشمندان عراقی را یک واحد در نظر بگیریم و دانشمندان سوری را یک واحد، می‌بینیم که کافی است تعداد جایگشت‌های $1+1+2+2+1$ شیء متمایز را حساب کنیم که می‌شود $7!$، و طبق اصل ضرب جواب این سؤال می‌شود $3!\times4!\times7!$.

د) چون دانشمندان از ۵ ملیت مختلف هستند $5!$ روش مختلف برای ترتیب قرارگرفتن ملیت‌های مختلف وجود دارد و در هر کدام از این حالت‌های کنار هم قرارگرفتن ملیت‌ها هم دانشمندان سوری به $3!$ حالت، دانشمندان عراقی به $4!$ حالت، دانشمندان روس به $2!$ حالت، دانشمندان ایرانی به $2!$ حالت و دانشمند لبنانی هم به $1!$ حالت می‌توانند کنار هم بایستند، و بنابر اصل ضرب جواب این مسأله $1!\times2!\times2!\times4!\times3!\times5!$ می‌شود.

نکته: روشی که در حل این مسأله و مسائل مشابه به‌کار می‌رود را می‌توانیم در ذهن خود روش جعبه‌ها بنامیم. یعنی فرض کنیم چند جعبه داریم که درون آن‌ها هم وسایلی هست که به‌طور دلخواه در جاهای مشخصی درون جعبه می‌توان آن‌ها را چید. برای به‌دست آوردن تعداد روش‌های چیدن جعبه‌ها در کنار هم و وسایل داخل آن‌ها به‌طور مرتب «ابتدا باید تعداد جایگشت‌های جعبه‌ها را محاسبه کرد و سپس جایگشت‌های وسایل درون هر کدام از جعبه‌ها را» از اصل ضرب به‌طور مناسب استفاده کرد.

کافه سؤال

۱ مقدار هر کدام از عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{7!}{5!}$ ب) $\frac{14!}{13!+12!}$ ج) $\frac{3\times 3!+4\times 4!+5\times 5!+3!}{6!}$ د) $P(7,2)$ هـ) $\frac{P(7,2)}{P(6,2)+P(6,3)}$

۲ حاصل هر کدام از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{n!}{(n-1)!0!}$ ب) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$ ج) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!}$ د) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$ هـ) $\frac{n!}{(n-1)!+(n-2)!}$

۳ دوازده نفر در انجمنی عضوند. می‌خواهیم از بین آن‌ها یک نفر رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم ـ دو شغله نداریم ـ این کار به چند روش ممکن است؟

۴ n چه مقداری باشد تا رابطهٔ $9P(n+1,2)=11P(n,2)$ برقرار باشد؟

۵ با حروف کلمهٔ «جایگشت» چند کلمهٔ ۵ حرفی با حروف متمایز می‌توان نوشت به‌طوری که:

الف) با حرف «ج» شروع و به حرف «ش» ختم شود.

ب) حروف کلمهٔ «گشت» کنار هم باشند.

۶ ۴ ایرانی و ۵ عراقی می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. آن‌ها به چند طریق می‌توانند در یک صف در کنار هم بایستند در صورتی‌که:

الف) همهٔ ایرانی‌ها کنار هم باشند. ب) همهٔ عراقی‌ها کنار هم باشند.

ج) همهٔ ایرانی‌ها کنار هم و عراقی‌ها هم کنار هم باشند. د) به‌صورت یک در میان بایستند.

۷ تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز ۵۰۴ است، r و n را بیابید.

۸ ۹ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۹ صندلی بنشینند با این شرط که نفرات اوّل تا چهارم روی صندلی‌های اوّل تا چهارم و نفرات پنجم تا نهم روی صندلی‌های پنجم تا نهم بنشینند؟

۹ تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام متمایز را بیابید که مجموع ارقام دهگان و صدگان آن ۱۰ است.

۱۰ الف) با اعداد ۷، ۶، ۵، ۴، ۳ و ۲ چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

ب) چند تا از آن‌ها رقم ۳ ندارد؟

ج) چند تا از آن‌ها حداقل یکی از رقم‌های ۳ یا ۵ را ندارد؟

د) چند تا از آن‌ها حداقل یکی از ارقامشان ۳ است؟

هـ) چند تا از آن‌ها حداقل یکی از ارقامشان ۳ یا ۵ است؟

و) چند تا از آن‌ها هر دو رقم ۳ و ۵ را دارند؟

گزینـهٔ چنــد؟!!!!

۱- عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

۱) $\frac{n+1}{n-1}$ ۲) $n(n-1)$
۳) $n(n+1)$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۲- مقدار عددی $\frac{11!\times10!}{(9!)^2}$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۰۰
۳) ۱۱ ۴) $\frac{110}{9}$

۳- از تساوی $\frac{1}{20}=\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ مقدار n چه عددی به‌دست می‌آید؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۴- از تساوی $4P(n-1,2)=3P(n,2)$ مقدار n چه عددی به‌دست می‌آید؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۸

۵- اگر ۵ نفر از ۸ نفر بخواهند در یک ردیف کنار هم بنشینند، تعداد حالت‌های ممکن این کار چقدر است؟

۱) $\frac{8!}{5!}$ ۲) $5!$
۳) $\frac{8!}{3!}$ ۴) $8!-5!$

۶- با حروف کلمهٔ جهان چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۴
۳) ۶۴ ۴) ۴۸

۷- با حروف کلمهٔ مشاهیر چند کلمهٔ ۳ حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت؟

۱) 6^3 ۲) 3^6
۳) ۲۴۰ ۴) ۱۲۰

۸- ۴ یونانی، ۲ آلمانی و ۳ ایتالیایی می‌خواهند در کنار هم در یک ردیف بنشینند، به‌طوری‌که افراد هر ملیت در کنار هم قرار بگیرند، این کار به چند روش ممکن است؟

۱) ۱۷۲۸ ۲) ۷۲
۳) ۱۲۴۰ ۴) ۸۲۰۴

۹- از بین ۷ کارمند به چند روش می‌توان یک منشی، یک حسابدار و یک رئیس انتخاب کرد؟

۱) $\frac{7!}{3!}$ ۲) ۲۴۰
۳) ۶۴۰ ۴) ۲۱۰

۱۰- ۱۰ نفر وارد یک سالن کنفرانس می‌شوند و می‌بینند ۱۱ صندلی خالی وجود دارد، اگر دو نفر از آن‌ها بخواهند کنار هم بنشینند، چند حالت برای نشستن هر ۱۰ نفر وجود دارد؟

۱) $11\times10!$ ۲) $11\times9!\times2$
۳) $\frac{11\times10!}{2!}$ ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سوال

۱

الف) $\frac{۷!}{۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۵!}=۴۲$

ب) $\frac{۱۴!}{۱۳!+۱۲!}=\frac{۱۴\times۱۳\times\cancel{۱۲!}}{\cancel{۱۲!}(۱۳+۱)}=\frac{\cancel{۱۴}\times۱۳}{\cancel{۱۴}}=۱۳$

ج) $\frac{۳\times۳!+۴\times۴!+۵\times۵!+۳!}{۶!}=\frac{\cancel{۳!}(۳+۱۶+۵\times۵\times۴+۱)}{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}=\frac{۳+۱۶+۱۰۰+۱}{۱۲۰}=\frac{۱۲۰}{۱۲۰}=۱$

د) $P(۷،۲)=\frac{۷!}{۵!}=\frac{۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}}=۴۲$

هـ) $\frac{P(۷،۲)}{P(۶،۲)+P(۶،۳)}=\frac{۴۲}{\frac{۶!}{۴!}+\frac{۶!}{۳!}}=\frac{۴۲}{۳۰+۱۲۰}=\frac{۴۲}{۱۵۰}$

۲

الف) $\frac{n!}{(n-۱)!۰!}=\frac{n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}\times۱}=n$

ب) $\frac{(n+۲)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۲)(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=(n+۲)(n+۱)n$

ج) $\frac{(۲n)!}{(۲n-۱)!}=\frac{۲n\times\cancel{(۲n-۱)!}}{\cancel{(۲n-۱)!}}=۲n$

د) $\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!}=\frac{(n-۲)(n-۳)\cancel{(n-۴)!}}{\cancel{(n-۴)!}}=(n-۲)(n-۳)$

هـ) $\frac{n!}{(n-۱)!+(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۱)(n-۲)!+(n-۲)!}=\frac{\cancel{n}(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}\underbrace{(n-۱+۱)}_{\cancel{n}}}=n-۱$

۳

$۱۲\times۱۱\times۱۰=۱۳۲۰$

۴

$۹P(n+۱،۲)=۱۱P(n،۲)\Rightarrow۹\times\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۱۱\times\frac{n!}{(n-۲)!}\Rightarrow۹\times\frac{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=\frac{۱۱n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}\Rightarrow۹(n+۱)\cancel{n}=۱۱\cancel{n}(n-۱)\Rightarrow$

$۹(n+۱)=۱۱(n-۱)\Rightarrow-۲n=-۲۰\Rightarrow n=۱۰$

۵

الف) $۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

ب) $۴!\times۳!=۱۴۴$

۶

الف) $۶!\times۴!$

ب) $۵!\times۵!$

ج) $۵!\times۴!\times۲!$

د) $۵!\times۴!$

۷

$P(n،r)=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)\cancel{(n-r)!}}{\cancel{(n-r)!}}=۵۰۴$

$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-r+۱)=۵۰۴\xRightarrow[۵۰۴=۹\times۸\times۷]{\text{باید ۵۰۴ را به‌صورت حاصل‌ضرب چند عدد متوالی بنویسیم}}n=۹\ ،\ r=۳$

۸

۴!×۵!

۹

خانه اوّل ۹ انتخاب و خانهٔ دوّم ۸ انتخاب دارد و با انتخاب عدد خانهٔ دوم، عدد خانهٔ سوّم هم تعیین می‌شود، پس ۷(۳ - ۱۰) انتخاب هم برای رقم چهارم خواهیم داشت:

۷	۱	۸	۹

جواب سؤال برابر ۷×۱×۸×۹ یعنی ۵۰۴ است.

۱۰

الف)

۶×۵×۴×۳=۳۶۰

ب) تعداد اعداد متمایز ۴ رقمی بدون عدد ۳ برابر است با:

۵×۴×۳×۲=۱۲۰

ج) تعداد اعداد متمایز ۴ رقمی بدون عدد ۵ برابر است با:

۵×۴×۳×۲=۱۲۰

اعداد متمایز ۴ رقمی که رقم ۳ و ۵ ندارد، برابر است با:

۴×۳×۲×۱=۲۴

بنابراین تعداد اعداد متمایز ۴ رقمی که رقم ۳ یا ۵ ندارند، برابر است با:

=۱۲۰+۱۲۰-۲۴=۲۱۶

د) تعداد اعداد متمایز ۴ رقمی که حداقل یکی از ارقامشان ۳ است، برابر است با:

۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰

هـ) تعداد اعداد متمایز ۴ رقمی که حداقل یکی از ارقامشان ۳ یا ۵ است، برابر است با:

۳۶۰-۲۴=۳۳۶

و) تعداد اعداد متمایز ۴ رقمی که هر دو رقم ۳ و۵ را دارند برابر است با:

۳۶۰-۲۱۶=۱۴۴

درس ۲ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سؤال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
گزینه	۳	۲	۲	۴	۳	۳	۴	۱	۴	۴

یادداشت

درس سوّم: ترکیب

مفهوم ترکیب

در درس قبل به بررسی مسأله‌هایی پرداختیم که در آن‌ها ترتیب قرارگرفتن و یا انتخاب اشیا مهم بود در این درس به بررسی مسأله‌هایی می‌پردازیم که در آن‌ها ترتیب قرارگرفتن و یا انتخاب اشیا مهم نیست. در درس قبل به سؤالاتی مانند سؤال زیر پرداختیم:

به چند طریق می‌توان ۵ کتاب از میان ۸ کتاب را در یک قفسه کتاب کنار هم چید؟

و در این درس به سؤالاتی مانند سؤال زیر می‌پردازیم:

به چند طریق می‌توان ۵ کتاب را از میان ۸ کتاب برای خرید انتخاب کرد؟

در مورد دوّم دیگر ترتیب قرار گرفتن کتاب‌ها مهم نیست.

در این درس به پرسش زیر خواهیم پرداخت و فرمول و روشی کلّی برای پاسخ‌گویی به آن به‌دست خواهیم آورد.

- به چند روش می‌توان r شیء از n شیء متمایز را انتخاب کرد با این شرط که ترتیب انتخاب اشیا مهم نباشد و به‌عبارت دیگر فقط مجموعه انتخاب شده مهم باشد.

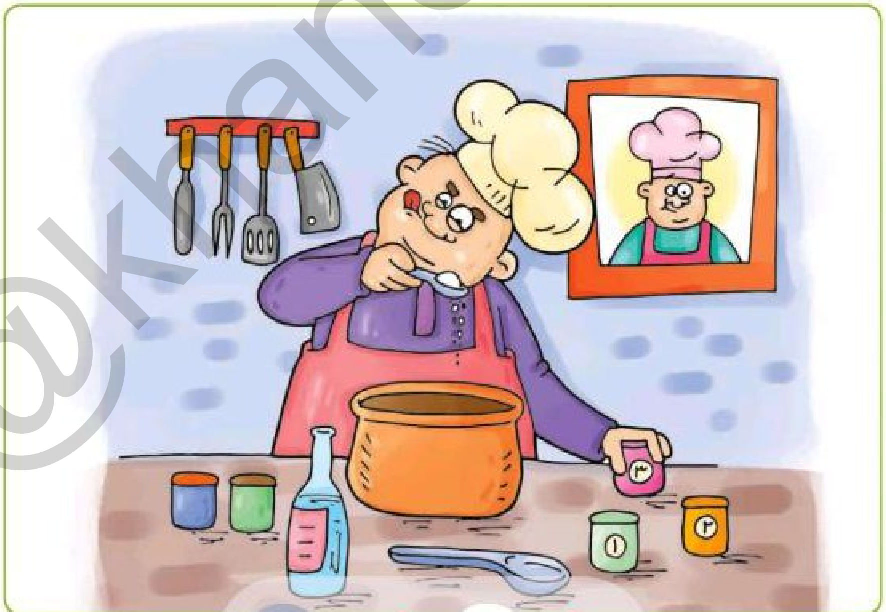
در ابتدای بحث بیاییم برای این‌که از تکرار عبارت‌هایی مثل عبارت: «به چند طریق می‌توان ۵شیء را از میان ۸ شیء متمایز انتخاب کرد با این شرط که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نباشد» بپرهیزیم، یک اصطلاح بسازیم که برای ما یادآور و نشانگر مفهوم فوق باشد.

تعریف ترکیب

تعریف به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به‌عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.

(در این‌جا هم به نظر من کلمهٔ «مجموعه» خیلی بهتر بود انتخاب یک مجموعهٔ r تایی از n شیء اما حیف، ...)

نکته: مشخص است که تعداد ترکیب‌های n تایی از n شیء، می‌شود ۱.



می‌خواهیم همهٔ ترکیب‌های ۴تایی از حروف f و e و d و c و b و a را بنویسیم.

در حقیقت می‌خواهیم همهٔ زیرمجموعه‌های ۴ حرفی این ۶ حرف را بنویسیم.

$\{a,b,c,d\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\},\{a,d,e,f\},\{b,c,e,f\}$

$\{a,b,c,e\},\{a,b,d,f\},\{a,c,d,f\},\{b,c,d,e\},\{b,d,e,f\}$

$\{a,b,c,f\},\{a,b,e,f\},\{a,c,e,f\},\{b,c,d,f\},\{c,d,e,f\}$

همهٔ ترکیب‌های ۴تایی از ۶ شیء را نوشتیم، فرض کنید بخواهیم با استفاده از آن همهٔ جایگشت‌های ۴تایی از این ۶ شیء را بنویسیم، چگونه عمل می‌کنیم؟

با قدری دقّت درمی یابیم که باید به‌جای هر ترکیب جایگشت‌های ممکن از اعضای آن را بنویسیم.

به‌عنوان مثال باید به‌جای $\{a,b,c,d\}$ بنویسیم:

abcd	abdc	acbd	acdb	adbc	adcb
bacd	badc	bcad	bcda	bdac	bdca
cabd	cadb	cbad	cbda	cdab	cdba
dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba

و همین‌طور برای ترکیب‌های دیگر هم باید این کار را بکنیم.

و از آن‌جا که تعداد جایگشت‌های ۴ شیء برابر !۴ است، می‌بینیم که به ازای هر ترکیب، !۴ جایگشت وجود دارد و در نتیجه تعداد جایگشت‌ها، !۴ برابر تعداد ترکیب‌ها است.

و اگر تعداد ترکیب‌های ۴تایی از ۶ شیء متمایز را با $C(۶,۴)$ و تعداد جایگشت‌های ۴تایی از ۶ شیء متمایز را با $P(۶,۴)$ نمایش دهیم باید داشته باشیم:

$$P(۶,۴)=۴!C(۶,۴)$$

و یا به‌عبارت دیگر

$$C(۶,۴)=\frac{P(۶,۴)}{۴!}$$

از آن‌جا که ما همهٔ ترکیب‌های ۴تایی از ۶ حرف را نوشتیم، می‌دانیم که $C(۶,۴)=۱۵$ و باتوجه به درس قبل می‌دانیم که $P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}$

حال ببینیم آیا $C(۶,۴)=\frac{P(۶,۴)}{۴!}$؟

$$\frac{P(۶,۴)}{۴!}=\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶}{۱\times۲\times۳\times۴\times۲}=\frac{۵\times۶}{۲}=۱۵$$

که این محاسبه هم با دیدگاه ما کاملاً جور درآمد.

این ایده کلید محاسبهٔ تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء را ارائه می‌دهد.

فرض کنیم همهٔ ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز را نوشته باشیم برای نوشتن همهٔ جایگشت‌های rتایی از n شیء کافی است به‌جای هر ترکیب، همهٔ جایگشت های ممکن از اعضای آن را بنویسیم، حال از آن‌جا که تعداد جایگشت‌های r شیء برابر !r است، می‌بینیم:

«تعداد جایگشت‌ها !r برابر تعداد ترکیب‌هاست.»

حال اگر تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را با $C(n,r)$ و تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز را با $P(n,r)$ نمایش دهیم، باید داشته باشیم:

$$P(n,r)=r!\times C(n,r)$$

و چون داریم $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$C(n,r)=\frac{۱}{r!}P(n,r)=\frac{۱}{r!}\cdot\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\quad ۰\le r\le n$$

◆ می‌دانیم که $C(n,n)=۱$، حال اگر $C(n,n)$ را با استفاده از رابطهٔ فوق محاسبه کنیم، داریم:

$$C(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!n!}=\frac{۱}{۰!}$$

پس بهتر است تعریف کنیم $۰!=۱$ تا مجبور نباشیم همیشه حالت $r=n$ را جداگانه محاسبه کنیم، البته در مباحث ریاضیات تقریباً اجباری وجود ندارد و اگر کسی بخواهد، راه دوم را انتخاب کند آزاد است.

معرفی یک نماد: به‌جای $C(n,r)$ می‌توانیم از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده کنیم.

آس

۶

سؤال

۱) می‌خواهیم از میان یک گروه ۱۰ نفری یک شورای سه نفره تشکیل دهیم. به چند طریق مختلف این کار امکان‌پذیر است؟

پاسخ تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$C(10,3)=\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 6}=120$$

۲) دانشجویی در یک امتحان بایستی به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد، او به چند طریق می‌تواند سؤال‌ها را انتخاب کند؟

پاسخ تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{10}{7}=\frac{10!}{(10-7)!7!}=\frac{10!}{7!3!}=120$$

در هنگام پاسخ به دو سؤال فوق متوجه شدیم که $\binom{10}{3}=\binom{10}{7}$ حال سؤالی به ذهنمان می‌رسد. آیا همیشه $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$؟

خُب محاسبه انجام می‌دهیم.

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

و این دو برابرند.

به روش دیگری هم می‌شود این نتیجه را به‌دست آورد:

وقتی که شما یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی انتخاب می‌کنید، به‌طور ضمنی یک مجموعهٔ ۷ عضوی نیز به‌طور یکتا مشخص می‌کنید، مجموعهٔ عضوهایی از مجموعهٔ ۱۰ عضوی که در مجموعهٔ ۳ عضوی نیستند.

«به‌عبارت دیگر وقتی تعیین می‌کنید چه کسانی باشند، به‌طور ضمنی تعیین می‌کنید که چه کسانی نباشند.»

به‌عبارت دقیق‌تر اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد و $U_1, \dots, U_k$ همهٔ زیرمجموعه‌های r عضوی آن باشند آن‌گاه $A-U_1$، ...، $A-U_k$ همهٔ زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی آن خواهند بود. (چرا؟)

در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A برابر با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی A خواهد بود. یعنی $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

مثال‌های آموزشی

۱) فردی ۸ دوست دارد که می‌خواهد ۵ نفر آن‌ها را به یک مهمانی دعوت کند. چند انتخاب وجود دارد:

الف) اگر دو نفر از دوستان وی در صورتی‌که با هم دعوت شوند در میهمانی شرکت کنند.

ب) اگر دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم شرکت کنند.

پاسخ الف) مسأله را دو قسمت می‌کنیم:

اگر آن دو رفیق شفیق دعوت شوند، ۳ نفر دیگر هم باید از ۶ نفر باقی‌مانده دعوت شوند، پس تعداد انتخاب‌ها در این حالت $\binom{6}{3}$ است.

و اگر آن دو رفیق شفیق دعوت نشوند، ۵ نفر از ۶ نفر باقی‌مانده دعوت می‌شوند، و تعداد انتخاب ها در این حالت $\binom{6}{5}$ است.

و جواب این سؤال می‌شود:

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{5}=\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{5!1!}=20+6=26$$

ب) مسأله را دو قسمت می‌کنیم:

اگر یکی از آن دو ناجور دعوت شود ـ که این خود دو حالت دارد ـ آن‌گاه ۴ نفر دیگر هم باید از میان آن ۶ نفر انتخاب شود ـ می‌دانید که کدام ۶ نفر ـ و تعداد حالات ممکن در این قسمت می‌شود $\binom{6}{4}\times 2$ و اگر هیچ‌کدام از آن دو ناجور دعوت نشوند، آن‌گاه هر ۵ نفر از میان آن ۶ نفر انتخاب می‌شود و تعداد حالات ممکن می‌شود $\binom{6}{5}$. پس جواب این سؤال می‌شود:

$$2\times\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=\frac{2\times 6!}{4!\times 2!}+\frac{6!}{5!1!}=30+6=36$$

۲) گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته‌گل از ۴ تا ۶ شاخه‌گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته‌گل مختلف می‌تواند درست کند؟

پاسخ تعداد دسته‌گل‌های مختلف با ۴ شاخه‌گل متمایز $\binom{10}{4}$، تعداد دسته‌گل‌های مختلف با ۵ شاخه‌گل متمایز $\binom{10}{5}$ و تعداد دسته‌گل‌های مختلف با ۶ شاخه‌گل متمایز $\binom{10}{6}$ است و در نتیجه جواب سؤال برابر $672 = 210 + 252 + 210 = \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6}$ است.

۳) فرض کنید ۵ نوع رنگ مختلف داریم و با ترکیب هر تعداد از این رنگ‌ها، دقیقاً یک رنگ جدید می‌توانیم به‌دست آوریم. در کل چند نوع رنگ می‌توانیم داشته باشیم.

پاسخ خُب، باید زیرمجموعه‌های مختلف مجموعهٔ این ۵ رنگ را به‌دست آوریم.

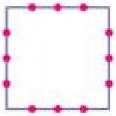
تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی $\binom{5}{1}$، تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $\binom{5}{2}$، تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی $\binom{5}{3}$، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی $\binom{5}{4}$،

و تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی $\binom{5}{5}$ است.

و در نتیجه جواب مسأله برابر است با:

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=5+10+10+5+1=31$$

۴) در روی هر ضلع مربع مقابل ۳ نقطه معین شده است. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این ۱۲ نقطه انتخاب شده باشد؟



پاسخ معلوم است که ترتیب انتخاب این نقاط مهم نیست و هر سه تا از این ۱۲ نقطه را که انتخاب کنیم با استفاده از آن‌ها می‌توانیم یک مثلث رسم کنیم مگر این‌که هر سه نقطه روی یک ضلع مربع قرار داشته باشند که فقط در ۴ حالت ممکن است این اتفاق رخ دهد، پس جواب برابر است با:

$$\binom{12}{3}-4$$

$$\frac{12!}{3!9!}-4=\frac{10\times11\times12}{6}-4=216$$

۵) فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد ($a \in A$)

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A را به‌دست آورید.

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها هست را به‌دست آورید.

ج) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها نیست را به‌دست آورید.

پاسخ

الف) جواب این قسمت $\binom{n}{r}$ است.

ب) از آن‌جا که می‌دانیم a عضو مجموعه است باید $r-1$ عضو از $n-1$ عضو باقی‌مانده را انتخاب کنیم و پاسخ $\binom{n-1}{r-1}$ است.

ج) از آن‌جا که می‌دانیم a عضو مجموعه نیست باید هر r عضو را از $n-1$ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم و پاسخ $\binom{n-1}{r}$ است.

نکته: **در مثال فوق با دقت در این نکته که،**

می‌توان زیرمجموعه‌های r عضوی A را به دو قسمت تقسیم کرد «یکی مجموعه‌هایی که شامل a هستند و یکی مجموعه‌هایی که شامل a نیستند»

به این نتیجه می‌رسیم که «پاسخ قسمت الف مثال فوق برابر است با مجموع پاسخ‌های قسمت‌های ب و ج»

یعنی $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$.

البته می‌توان این رابطه را با محاسبهٔ مستقیم هم به‌دست آورد.

۶) قرار است از گروهی متشکل از ۸ زن و ۶ مرد شورایی مرکب از ۳ زن و ۲ مرد تشکیل شود. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

پاسخ تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب ۳ زن از میان ۸ زن می‌شود $\binom{8}{3}$ و تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب ۲ مرد از میان ۶ مرد می‌شود $\binom{6}{2}$

و طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام کل کار می‌شود $\binom{8}{3}\binom{6}{2}$ یعنی 56×15.

۷) یک گروه تحقیقات استراتژیک شامل ۳ سوری، ۴ عراقی، ۲ روس، ۲ ایرانی، ۱ لبنانی و ۲ افغانستانی است. قرار است ۵ نفر از این افراد در جلسه‌ای که برای بررسی آخرین تحولات برگزار می‌شود شرکت کنند، به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) دقیقاً یک لبنانی و یک روس در جلسه باشند.

ب) دقیقاً یک لبنانی و یک روس و یک افغانستانی در جلسه باشند.

ج) دقیقاً یک لبنانی و یک روس و یک افغانستانی و یک ایرانی در جلسه باشند.

پاسخ الف) برای انتخاب یک لبنانی و یک روس ۲ راه وجود دارد، ۳ نفر دیگر هم باید از بین ۱۱ نفری که لبنانی یا روس نیستند انتخاب شود که این‌کار به $\binom{11}{3}$ روش ممکن است پس تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$2\times\binom{11}{3}=2\times\frac{11!}{3!\times 8!}=\frac{11\times 10\times 9}{3}=330$$

ب) برای انتخاب یک لبنانی، یک روس و یک افغانستانی $1\times2\times2$ راه وجود دارد، ۲ نفر دیگر هم باید از بین ۹ نفری که لبنانی، روس و یا افغانستانی نیستند انتخاب شود که این کار هم به $\binom{9}{2}$ روش ممکن است.

پس طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام کل این کار می‌شود:

$$2\times2\times1\times\binom{9}{2}=4\times\frac{9!}{2!\times 7!}=2\times 9\times 8=144$$

ج) برای انتخاب یک لبنانی، یک روس، یک افغانستانی و یک ایرانی $1\times2\times2\times2$ راه وجود دارد، ۱ نفر دیگر هم باید از بین ۷ نفر عراقی و سوری انتخاب شود که این کار هم به $\binom{7}{1}$ طریق ممکن است.

پس طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام کل کار می‌شود:

$$2\times2\times2\times1\times\binom{7}{1}=8\times7=56$$

۸) ۱۲ نفر می‌خواهند به دو گروه ۶ نفری تقسیم شوند و والیبال بازی کنند، به چند روش می‌توانند این کار را بکنند؟

پاسخ در این‌جا شاید ابتدا فکر کنیم که کافی است یک گروه ۶ نفره از میان ۱۲ نفر انتخاب کنیم، آن‌گاه خودبخود گروه باقی‌مانده هم می‌شود یک گروه ۶ نفره، پس جواب می‌شود $\binom{12}{6}$ ولی جواب صحیح نصف این مقدار است. زیرا وقتی که ما گروه A را انتخاب کردیم و باقی‌مانده شد گروه B، با وقتی که ما گروه B را انتخاب کردیم و باقی‌مانده شد گروه A در واقع یک تقسیم‌بندی انجام داده‌ایم. به‌عبارت دیگر هنگامی که ما نفرات $\{1,\ldots,6\}$ را یکی از تیم‌ها بدانیم با هنگامی که ما نفرات $\{7,\ldots,12\}$ را یکی از تیم‌ها بدانیم در واقع یکی است. پس جواب می‌شود:

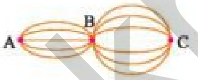
$$\frac{1}{2}\binom{12}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{12!}{6!6!}=462$$

۹) مسأله‌ای طراحی کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{5}{2}\times\binom{6}{3}$ ب) $\binom{5}{2}+\binom{6}{3}$

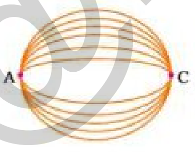
پاسخ

الف) می‌توان به روش‌های مختلفی به این سؤال پاسخ داد، شاید راحت‌ترین راه مورد زیر باشد:



در شکل مقابل همهٔ جاده‌ها خاکی‌اند. دولت تصمیم گرفته است دو تا از جاده‌های واصل بین B و A و ۳ تا از جاده‌های واصل بین C و B را آسفالت کند، به چند روش این کار ممکن است؟

ب) شاید راحت‌ترین راه مورد زیر باشد:



در شکل مقابل بین دو شهر، ۱۱ جاده وجود دارد، ۶ جاده بالا تپه و ۵ جاده پایین تپه، دولت به دلایل دقیق علمی تصمیم گرفته است ۳ جاده بالا تپه یا ۲ جاده پایین تپه را آسفالت کند، به چند روش این کار ممکن است؟

(والا با این سؤالاشون، سؤال اونجوری جواب اینجوری)

۱۰) یک سکه را ۲۰ بار پرتاب می‌کنیم. در چند حالت ممکن است در پرتاب نهم برای سوّمین بار رو بیاید؟

پاسخ در هر پرتاب ۲ حالت برای نتیجه حاصل از پرتاب وجود دارد (پشت و رو) و در نتیجه طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌های ممکن می‌شود 2^{20}.

اما برای شمردن تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها در پرتاب نهم برای سوّمین بار رو بیاید می‌گوییم که باید تعداد حالت‌هایی را بشمریم که دقیقاً ۲ تا از ۸ پرتاب اوّل رو بیاید و بعد پرتاب نهم هم رو بیاید و نتیجه یازده پرتاب بعد هم هر کدام از دو حالت می‌توانند باشند، پس طبق اصل ضرب جواب می‌شود:

$$\binom{8}{2}\times1\times2^{11}$$

کافه سؤال

۱ مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\binom{9}{2}$

ب) $\binom{8}{1}+\binom{7}{2}+\binom{6}{3}+\binom{5}{4}$

ج) $\binom{10}{3}$

د) $\dfrac{\binom{12}{6}}{\binom{12}{4}}$

۲ عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\binom{n}{2}-\binom{n}{n-2}$

ب) $\dfrac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{n-2}}$

ج) $\dfrac{\binom{n}{3}+\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{2}}$

د) $\dfrac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{3}}$

۳ با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که: $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

۴ مطلوب است تعیین n در صورتی که داشته باشیم: $2\binom{2n}{2}=12\binom{n}{2}$

۵ به چند طریق می‌توان ۵ نماینده از میان ۹ نفر انتخاب کرد؟

۶ به چند طریق می‌توان ۶ نماینده از میان ۹ نفر انتخاب کرد، اگر قرار باشد یک نفر خاص حتماً حضور داشته باشد؟

۷ از میان ۱۲ نفر که ۵ مهندس و ۷ ریاضیدان هستند، می‌خواهیم شورایی ۵ نفره انتخاب کنیم با این شرط که در آن حداقل ۲ ریاضیدان، و حداقل ۱ مهندس حضور داشته باشند. فردی به‌صورت زیر به این سؤال جواب داده است:

ابتدا ۲ ریاضیدان از بین ۷ ریاضیدان و ۱ مهندس از بین ۵ مهندس انتخاب می‌کنیم و سپس از میان ۹ نفر باقی‌مانده، ۲ نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم و بدین ترتیب تعداد راه‌های انجام کار می‌شود:

$\binom{7}{2}\times\binom{5}{1}\times\binom{9}{2}$

آیا محاسبات او درست است؟ در صورتی که جواب شما منفی باشد، بگویید که جواب صحیح چیست؟

کافه سؤال

۸ دانشجویی در یک امتحان بایستی به ۸ سؤال از ۱۲ سؤال پاسخ دهد.

الف) او به چند روش می‌تواند سؤال‌ها را انتخاب کند؟

ب) اگر ضمناً لازم باشد حتماً به ۳ سؤال از ۵ سؤال اوّل پاسخ دهد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۹ ۹ توپ داریم که روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا ۹ نوشته شده است.

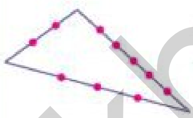
الف) به چند طریق می‌توان دو توپ انتخاب کرد که شماره‌های هر دو فرد باشد.

ب) به چند طریق می‌توان ۴ توپ انتخاب کرد که شمارهٔ دوتایشان بیشتر از ۵ باشد و شمارهٔ ۲ تایشان کمتر از ۶.

ج) به چند طریق می‌توان دو توپ انتخاب کرد که مجموع شماره‌های آن‌ها فرد باشد.

د) به چند طریق می‌توان سه توپ انتخاب کرد که مجموع شماره‌های آن‌ها فرد باشد.

۱۰ بر روی ضلع‌های مثلث زیر ۱۰ نقطه مشخص شده‌اند. چند مثلث وجود دارد که همهٔ رئوس آن از این نقاط باشند.



گزینهٔ چند؟!!!!

۱- حاصل $\binom{5}{4}+\binom{4}{3}+\binom{3}{2}$ با کدام برابر است؟

۱) $\frac{5!}{3!}$ ۲) $2\times 3!$

۳) ۱۸ ۴) $4!$

۲- کدام مورد درست **نیست**؟

۱) $\binom{n}{0}=1$ ۲) $\binom{n}{n}=1$

۳) $\binom{n+1}{n}=n+1$ ۴) $\binom{n}{1}=n!$

۳- اگر $m=\binom{x+y}{x}$ باشد آن‌گاه حاصل $\binom{x+y}{y}$ کدام است؟

۱) m ۲) my

۳) mx ۴) $m(x+y)$

۴- دانش‌آموزی باید به ۸ سؤال از ۱۲ سؤال پاسخ دهد، به چند روش می‌تواند ۸ سؤال را انتخاب کند؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۹۰

۳) ۱۰۰۰ ۴) ۴۹۵

۵- گل‌فروشی ۱۰ نوع گل دارد، او چند دسته گل می‌تواند درست کند که دقیقاً دارای ۵ شاخه گل از ۵ نوع گل مختلف باشد؟

۱) $5!$ ۲) $\frac{10!}{5!}$

۳) ۲۵۲ ۴) ۲۸۴

۶- n چند باشد تا رابطهٔ مقابل برقرار باشد؟ $\binom{n}{2}=\binom{n-1}{2}+6$

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

۷- به چند طریق می‌توان از میان ۹ بازیکن والیبال، یک تیم ۶ نفره انتخاب کرد؟

۱) ۵۴ ۲) $\frac{9!}{6!}$

۳) ۸۴ ۴) ۱۰۴

۸- به چند طریق می‌توان از میان ۸ نفر ۴ نفر را انتخاب کرد، البته با این شرط که ۲ فرد خاص حتماً در گروه ۴ نفره حضور داشته باشند؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۵

۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۹- به چند طریق می‌توان از میان ۹ نفر، دو گروه متمایز ۳ نفره و ۵ نفره انتخاب کرد؟

۱) $\binom{9}{3}\times\binom{9}{5}$ ۲) $\binom{9}{5}\times 4$

۳) $6\times\binom{9}{3}$ ۴) ۲ و ۳

۱۰- ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند، چند چهار ضلعی وجود دارد به‌طوری که همهٔ رئوس آن‌ها از این نقاط انتخاب شده باشد؟

۱) $\frac{10!}{6!}$ ۲) $\frac{10!}{4!}$

۳) ۴۲۰ ۴) ۲۱۰

درس ۳ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافهٔ سؤال

۱

الف) $\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\,7!}=\frac{9\times 8\times 7!}{7!\,2!}=36$

ب) $\binom{8}{1}+\binom{7}{2}+\binom{6}{3}+\binom{5}{4}=8+21+\frac{6!}{3!\,3!}+5=34+20=54$

ج) $\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\,3!}=\frac{10\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}^{4}\times \cancel{7!}}{\cancel{7!}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}=120$

د) $\dfrac{\binom{12}{6}}{\binom{12}{4}}=\dfrac{\frac{12!}{6!\times 6!}}{\frac{12!}{4!\,8!}}=\frac{8!\times 4!}{6!\times 6!}=\frac{\cancel{8}^{4}\times 7\times \cancel{6!}\times \cancel{4!}}{\cancel{6!}\times \cancel{6}_{3}\times 5\times \cancel{4!}}=\frac{28}{15}$

۲

الف) $\binom{n}{2}-\binom{n}{n-2}=\frac{n!}{2!\times(n-2)!}-\frac{n!}{(n-2)!\times 2!}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=0$

ب) $\dfrac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{n-2}}=\dfrac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}}=\dfrac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{n-2}{3}$

ج) $\dfrac{\binom{n}{3}+\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{2}}=\dfrac{\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}}=\dfrac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+1)n}{2}}=\dfrac{\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{3n(n+1)}$

د) $\dfrac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{3}}=\dfrac{\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}}=\dfrac{\frac{(n+1)n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{3!}\cancel{(n-2)!}}}{\frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{3!}\,\cancel{(n-3)!}}}=\frac{(n+1)\cancel{n}\cancel{(n-1)}}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}(n-2)}=\frac{n+1}{n-2}$

۳

$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)(n-r-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{r!}+\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{(r-1)!}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)+r(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)[n-r+r]}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

۴

$$2\binom{2n}{2}=12\binom{n}{2}\Rightarrow \cancel{2}\frac{(2n)!}{\cancel{2!}(2n-2)!}=\cancel{12}^{6}\times\frac{n!}{\cancel{2!}(n-2)!}\Rightarrow \frac{2n(2n-1)\cancel{(2n-2)!}}{\cancel{(2n-2)!}}=\frac{6n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}\Rightarrow 4n^2-2n=6n^2-6n\Rightarrow$$

$$-2n^2=-4n\Rightarrow n^2=2n\Rightarrow n(n-2)=0\Rightarrow\begin{cases}n=0 & \text{غ ق ق}\\ & \text{ق ق}\end{cases}$$

۵

$$\binom{9}{5}=\frac{9!}{5!\,4!}=\frac{9\times \cancel{8}^{\,2}\times 7\times \cancel{6}\times 5!}{5!\times \cancel{4}\times 3!}=126$$

۶

$$1\times\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!\,3!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\,3!}=56$$

۷

خیر؛ محاسبات او غلط است.

$$\binom{5}{3}\binom{7}{2}+\binom{7}{3}\binom{5}{2}+\binom{7}{4}\binom{5}{1}=\binom{5}{3}\binom{7}{2}+\binom{7}{3}\binom{5}{2}+\binom{7}{4}\binom{5}{1}=10\times21+10\times35+5\times35=210+350+175=735$$

۸

الف)

$$\binom{12}{8}=\frac{12!}{8!\,4!}=\frac{\cancel{12}\times 11\times \cancel{10}^{\,5}\times 9\times 8!}{8!\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}=495$$

ب)

$$\binom{5}{3}\binom{7}{5}+\binom{5}{4}\binom{7}{4}+\binom{5}{5}\binom{7}{3}=10\times21+5\times35+1\times35=420$$

۹

الف) $\binom{5}{2}=10$

ب) $\binom{4}{2}\times\binom{5}{2}=6\times10=60$

ج) $\binom{5}{1}\binom{4}{1}=20$

د) $\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\binom{4}{2}=10+30=40$

۱۰

روش اول:

$$\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}+\binom{5}{2}\left(\binom{2}{1}+\binom{3}{1}\right)+\binom{3}{2}\left(\binom{5}{1}+\binom{2}{1}\right)+\binom{2}{2}\left(\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\right)$$

$$=2\times3\times5+10(5)+3(7)+8=30+50+21+8=109$$

روش دوم: چون ترتیب انتخاب نقاط مهم نیست، هر سه تا از این ۱۰ نقطه را که انتخاب کنیم با آن‌ها می‌توانیم یک مثلث رسم کنیم مگر این‌که این سه نقطه روی ضلع AB باشند و یا این سه نقطه روی ضلع BC باشند.

پس جواب برابر است با:

$$\binom{10}{3}-\left[\binom{3}{3}+\binom{5}{3}\right]=\frac{10!}{7!\,3!}-(1+10)=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3\times2\times1}-11=120-11=109$$

درس ۳ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ چند

سؤال	پاسخ
۱	۲
۲	۴
۳	۱
۴	۴
۵	۳
۶	۲
۷	۳
۸	۲
۹	۴
۱۰	۴

یادداشت

آس

۶

ایستگاه المپیـاد

۱) n مثلث حداکثر در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۲) با بکارگیری رقم‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ می‌توان ۱۲۰ عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز ساخت، اگر این اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، عدد ۴۳۱۵ چندمین عدد خواهد بود؟

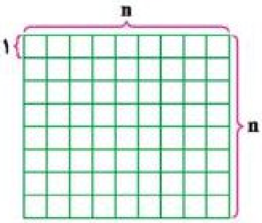
۳) ۱۸ نفر می‌خواهند به سه تیم ۶ نفره والیبال تقسیم شوند و به‌صورت برنده به‌جا بازی کنند، این کار به چند روش ممکن است؟

۴) تعداد مقسوم علیه‌های عدد $5^{9}3^{8}2^{13}$ چندتاست؟

تعداد مقسوم علیه‌های عدد $14^{2}\times 8^{9}\times 6^{17}$ چندتاست؟

۵) عدد !۱۰۰ چند صفر در انتهای خود دارد؟

۶) در یک جدول $n\times n$ چند مربع دیده می‌شود؟



۷) اگر بخواهیم n مهره را در یک جدول $n\times n$ قرار دهیم به‌طوری که هیچ دو مهره‌ای در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

سؤالی برای دانش‌آموزان با حوصله و پرتلاش

* مسؤولین مخابرات یک شهر به این اندیشیدند که وقتی همهٔ شماره‌ها، شماره تلفن هستند، احتمال گرفتن اشتباهی شماره‌ها زیاد است، زیرا هر شماره‌ای که بگیرید، تلفنی زنگ می‌خورد، آن‌ها گفتند بیاییم از نو شماره‌هایی بسازیم که هر دو شماره تلفن حداقل در دو شماره متفاوت باشند، آن‌گاه در هنگام تماس با یک شماره اگر اشتباه کنید، احتمال این‌که با یک شماره واقعی تماس گرفته باشید خیلی پایین می‌آید.

حال سؤال این است: حداکثر چند شماره تلفن ۸ رقمی می‌توان ساخت که هر دو شماره تلفن حداقل در دو رقم متفاوت باشند؟

اگر با محاسبات معمولی به جواب نرسیدید می‌توانید از کامپیوتر برای حل این مسأله استفاده کنید.

خلاصهٔ فصل ۶

شمارش

- اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به‌طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، کار موردنظر را می‌توان در کل به $m+n$ روش انجام داد.
- اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری که مرحلهٔ اول را بتوان به m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، کار موردنظر را در کل به $m \times n$ روش می‌توان انجام داد.
- هر کدام از اصل‌های فوق را می‌توان برای k روش یا k مرحله تعمیم داد.

جایگشت

- اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها، یک جایگشت می‌گوییم.
- تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز (تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء) که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \le r \le n)$$

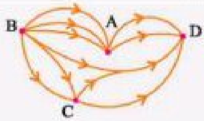
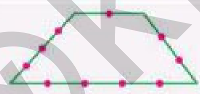
ترکیب

- به هر انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.
(هر زیر مجموعهٔ r عضوی ممکن از یک مجموعهٔ n عضوی)
- تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز (تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی) برابر است با:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (0 \le r \le n)$$

آس

۶

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱.	چند عدد متقارن ۵ رقمی فرد وجود دارد؟ ۱) ۹۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۹×۸×۷×۶×۵ ۴) ۵×۱۰×۱×۱۰×۵
۲.	مهرهٔ رخ در صفحهٔ ۸ × ۸ شطرنجی فقط می‌تواند به‌صورت افقی و عمودی (سطری یا ستونی) حرکت کند. به چند حالت دو مهرهٔ رخ، یکی سفید و دیگری سیاه را می‌توان در یک صفحهٔ شطرنج قرار داد به‌طوری که یکدیگر را تهدید کنند؟ ۱) ۴۵۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۸۵۰ ۴) ۹۶۰
۳.	چند عدد دو رقمی زوج وجود دارد که اختلاف دهگان و یکان آن ۳ باشد؟ ۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴
۴.	اگر تمام راه‌ها در شکل مقابل یک‌طرفه باشد به چند طریق می‌توان از B به D رفت؟  ۱) ۱۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۱
۵.	چند تابع از مجموعهٔ x عضوی به مجموعهٔ y عضوی وجود دارد؟ ۱) $x+y$ ۲) x^y ۳) y^x ۴) $x \times y$
۶.	مجموعهٔ $B=\{۴,۵,...,۱۰\}$ چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی دارد؟ ۱) $۱۰^۴$ ۲) ۷×۵ ۳) !۷ ۴) ۷×۶×۵×۴
۷.	اگر از بین ۸ نفر بخواهیم برای یک شرکت سه منشی (که هر یک امور متفاوتی را عهده‌دار است) انتخاب کنیم چند انتخاب پیشِ رو خواهیم داشت؟ ۱) $\binom{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۸!}{۳!}$ ۳) $\frac{۸!}{۵!}$ ۴) !۳
۸.	در یک جشن عروسی ۱۷ صندلی در یک ردیف برای ۱۶ نفر وجود دارد. اگر دو تا از آن‌ها با هم دوست باشند و قرار باشد کنار یک دیگر بنشینند، چند حالت برای نشستن این ۱۶ نفر روی ۱۷ صندلی وجود دارد؟ (۱۷ صندلی خالی به هم چسبیده و در کنار یکدیگر قرار دارند.) ۱) ۲×!۱۶ ۲) ۱۵×!۱۷ ۳) $\frac{۱۷\times ۱۶!}{۲}$ ۴) ۲×!۱۵×۱۷
۹.	n نوع رنگ متفاوت در اختیار داریم به طوری‌که هر تعداد از این رنگ‌ها را که با هم ترکیب کنیم یک رنگ جدید به وجود می‌آید. با این n رنگ، حداکثر چند نوع رنگ مختلف می‌توانیم بسازیم؟ ۱) ۲^n ۲) $\binom{n}{n-۱}$ ۳) $۲^n-۱$ ۴) $۲^n+۱$
۱۰.	چند مثلث می‌توان ساخت که تمام رئوس آن از نقاط داده شده روی شکل مقابل انتخاب شود؟  ۱) $\binom{۱۰}{۳}$ ۲) $\binom{۱۰}{۳}-۴$ ۳) $\frac{\binom{۱۰}{۳}}{۲}$ ۴) $\binom{۱۰}{۳}-۵$
۱۱.	از بین ۱۹ جفت کفش متفاوت می‌خواهیم ۵ لنگه کفش انتخاب کنیم به طوری‌که هیچ جفت کفشی در میان آنها وجود نداشته باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ ۱) $۲^۵$ ۲) $۵^{۱۹}$ ۳) $\binom{۱۹}{۵}\times ۲^۵$ ۴) $\binom{۱۹}{۵}$
۱۲.	به چند طریق دو عضوِ غیر هموطن از بین ۶ ایرانی، ۴ ژاپنی و ۳ کره‌ای می‌توان انتخاب کرد؟ ۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۵۴

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱۳.	نصفِ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضویِ $\{1,2,\dots,n\}$ شامل عدد ۲ هستند. n کدام است؟ ۱) ۳　　۲) ۶　　۳) ۱۲　　۴) قابل محاسبه نیست.
۱۴.	به چند طریق می‌توان از بین ۱۶ مهرهٔ سبز، ۵ مهرهٔ آبی و ۱۳ مهرهٔ بنفش یک مهره انتخاب کرد؟ ۱) $16\times5\times13$　　۲) $16+5+13$ ۳) $16\times5+16\times13+5\times13$　　۴) $\binom{16+5+13}{3}$
۱۵.	در چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی از $\{1,2,\dots,100\}$ اعداد ۵۰ و ۵۱ وجود دارند و عدد ۱۳ وجود ندارد؟ ۱) $\binom{98}{6}$　　۲) $\binom{97}{8}$　　۳) $\binom{97}{6}$　　۴) $\binom{100}{6}$
۱۶.	یک مجموعهٔ n عضوی ۳۶ زیرمجموعهٔ $n-2$ عضوی دارد. n کدام است؟ ۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۶　　۴) ۹
۱۷.	در یک کلاس درسی معلّم می‌خواهد یک همیار مشاور و یک نماینده از بین دانش‌آموزان و به تصادف انتخاب کند. این دو نفر را به ۲۴۰ روش از بین دانش‌آموزان کلاس می‌تواند انتخاب کند. تعداد کل دانش آموزان کلاس چقدر است؟ ۱) ۲۵　　۲) ۱۴　　۳) ۱۶　　۴) ۱۵
۱۸.	با ترکیب حداقل ۳ نوع از مواد A، B، C، D، E، F می‌توان به یک مادهٔ جدید دست یافت. چند مادهٔ جدید از این مواد می‌توان ساخت؟ ۱) $\binom{6}{3}$　　۲) $\binom{6}{3}+\binom{5}{4}$ ۳) $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$　　۴) $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}$
۱۹.	تعداد اعداد ۵ رقمی فرد که با رقم‌های ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۰ ساخته می‌شود چه‌قدر از تعداد اعداد ۵ رقمی فردی که با کنار هم قرار دادن کارت‌های مقابل ساخته می شود بیش تر است؟ ۲　۵　۴　۱　۰ ۱) ۹۶۴　　۲) ۱۰۲۲　　۳) ۸۳۰　　۴) ۴۶۰
۲۰.	چند پلاک نمره اتومبیل ۷ شماره‌ای که سه شماره اول آن از حروف الفبای لاتین و چهار شمارهٔ آخر آن از اعداد ۰ تا ۹ و متقارن و فرد باشد می‌توان تهیه کرد؟ (تعداد حروف الفبای لاتین ۲۶ تاست). ۱) ۳۳۸۰۰۰۰۰　　۲) ۶۷۶۰۰　　۳) ۳۳۸۰۰۰　　۴) ۷۸۰۰۰۰
۲۱.	رمز یک صندوق عددی ۵ رقمی می‌باشد و این رمز را نمی‌دانیم اگر بدانیم این رمز عددی فرد و بزرگ‌تر از ۵۰۰۰۰ و دارای ارقام غیرتکراری می‌باشد و آزمایش هر رمز $\frac{1}{32}$ ثانیه طول می‌کشد حداکثر زمان لازم برای بازکردن صندوق چند ثانیه می‌باشد؟ ۱) ۲۲۵　　۲) ۲۳۱　　۳) ۲۳۷　　۴) ۲۴۳
۲۲.	چند عدد ۵ رقمی می توان پیدا کرد به گونه‌ای که رقم سوم آن عدد ۷ یا ۹ باشد و این عدد عددی فرد باشد؟ تکرار اعداد مجاز نمی‌باشد. ۱) ۲۶۸۸　　۲) ۲۳۵۲　　۳) ۸۴۰　　۴) ۱۳۴۴
۲۳.	چند عدد زوج دو رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن‌ها فرد است؟ ۱) ۴۵　　۲) ۲۴　　۳) ۲۵　　۴) ۴۴
۲۴.	سارا قصد دارد به دوست خود جهت قبولی در کنکور شیرینی دهد. او تصمیم می‌گیرد که سیما را یا به آب میوه‌فروشی دعوت کند و یا رستوران، چنان‌چه به رستوران برود تنها یکی از سه غذای چلوخورشت قورمه‌سبزی یا قیمه یا مرغ و اگر به آب میوه‌فروشی برود تنها یکی از سه نوع آب میوه هویج، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای سیما وجود دارد؟ ۱) ۹　　۲) ۶　　۳) ۱۲　　۴) ۳

ردیف	تمـــریـــن دوره‌ای
۲۵.	فردی می‌خواهد از تهران به شیراز برود. ابتدا باید به اصفهان برود و سپس به شیراز برود. برای رفتن از تهران به اصفهان یا با قطار می‌رود یا با هواپیما و یا اتومبیل. اگر با اتومبیل برود دو نوع اتومبیل با قطار ۳ نوع قطار و با هواپیما یک نوع هواپیما وجود دارد. برای رفتن از اصفهان به شیراز نیز مانند حالت قبل می‌باشد. این فرد در کل چند انتخاب دارد؟ ۱) ۲۱۶ ۲) ۳۰ ۳) ۶ ۴) ۳۶
۲۶.	با حروف «ی، ب، ن، س، ا، ل، و» چند کلمه‌ی هفت حرفی (بدون تکرار حروف) می‌توان ساخت به‌طوری که سه حرف «ن»، «س» و «ا» در کنار هم باشند و حرف «ل» آخر باشد؟ ۱) ۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۳ ۴) ۷۲
۲۷.	با اعداد ۹، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۱۰ (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟ ۱) ۲۷۳ ۲) ۲۷۲ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۶۴
۲۸.	به چند طریق می‌توان ۵ دختربچه و ۵ پسربچه را در یک ردیف قرار داد به‌طوری که دختربچه‌ها و پسربچه‌ها یک در میان بنشینند؟ ۱) $۵!\times ۶!$ ۲) $۵!\times ۵!$ ۳) $۲\times ۵!$ ۴) $۲\times ۵!\times ۵!$
۲۹.	با حروف aaabbcc چند کلمه ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری‌که هیچ‌کدام از a ها کنار هم نباشند؟ ۱) $\frac{۴!}{۲!۲!}$ ۲) $\binom{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴!}{۲!۲!}\binom{۵}{۳}$ ۴) $\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۴}$
۳۰.	فرض کنید یک جامعهٔ کوچک شامل ۱۰ کلاس باشد به‌طوری‌که ۶ تا از کلاس‌ها ۲۰ دانش‌آموز و ۴ تا از کلاس‌ها دارای ۱۵ دانش‌آموز می‌باشد. در این صورت اگر بخواهیم یک کلاس و یک دانش‌آموز نمونه سال انتخاب کنیم به چند طریق این کار امکان‌پذیر می‌باشد؟ ۱) ۷۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۰۰
۳۱.	به چند طریق می‌توان از بین ۶ کتاب فارسی، ۸ کتاب علوم و ۷ کتاب ریاضی از هر یک ۳ کتاب انتخاب کرد به‌گونه‌ای که فقط تعداد کتاب‌های انتخاب شده از هر یک مهم باشد؟ ۱) $\binom{۸}{۳}+\binom{۶}{۳}+\binom{۷}{۳}$ ۲) $۴^{۳}\times ۳^{۴}\times ۵^{۲}$ ۳) $\binom{۸}{۳}\binom{۶}{۳}\binom{۷}{۳}$ ۴) $\binom{۲۱}{۳}$
۳۲.	به چند طریق می‌توان از بین ۴ معلم ریاضی و ۵ معلم فیزیک یک کمیتهٔ ۵ نفره تشکیل داد که حداقل ۴ نفر از معلمان فیزیک در آن حضور داشته باشند؟ ۱) ۸۰ ۲) ۶ ۳) ۱۷۶ ۴) ۲۱
۳۳.	چند عدد ۳ رقمی وجود دارد به‌طوری‌که حداقل دو رقم متوالی یکسان داشته باشد؟ ۱) ۱۷۱ ۲) ۱۸۲ ۳) ۱۹۳ ۴) ۲۰۸
۳۴.	تعداد اعداد چهار رقمی که حداقل یکی از ارقام آن ۲ است چقدر است؟ ۱) ۳۱۶۸ ۲) ۵۸۳۲ ۳) ۹۰۰۰ ۴) ۴۱۵۸
۳۵.	با ارقام ۹، ۲، ۵، ۳ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت به‌طوری که حداقل یکی از اعداد بیش از یک‌بار تکرار شود؟ ۱) ۶۴ ۲) ۲۱۷ ۳) ۲۱۸ ۴) ۶۵
۳۶.	با ارقام ۹، ۸، ۷، ۵، ۲، ۱ و ۰ چند عدد زوج سه رقمی بدون رقم تکراری می‌توان نوشت؟ ۱) ۲۰۰ ۲) ۸۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۱۲۸
۳۷.	با حروف کلمهٔ جهانی چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها سه حرف «ی» و «ن» و «ج» کنار هم قرار داشته باشند؟ (با معنی بودن کلمه مهم نیست) ۱) $۵!$ ۲) $۵!\times ۳!$ ۳) $۳!\times ۳$ ۴) $۳!\times ۳!$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۳۸.	با حروف کلمهٔ خوش‌صحبت چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری‌که حرف اول نقطه‌دار و حرف آخر بدون نقطه باشد؟ ۱) ۲۸۸۰ ۲) ۱۴۴۰ ۳) ۹۶۰ ۴) ۵۰۴۰
۳۹.	در یک مسابقه اتومبیل‌رانی از بین ۵ داور ایرانی، ۴ داور چینی و ۳ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش این کار انجام می‌شود اگر بخواهیم کمیته ۵ نفره باشد و حداقل شامل ۳ داور ایرانی و حداکثر یک داور چینی باشد؟ ۱) ۱۸۶ ۲) ۱۸۵ ۳) ۲۷۵ ۴) ۲۷۶
۴۰.	تعداد اعداد چهار رقمی فرد که با ارقام ۱،۰،۷،۳،۵،۴ می‌توان ساخت به‌طوری‌که ارقام آن‌ها غیرتکراری و رقم دهگان آن‌ها ۳ باشد کدام است؟ ۱) ۲۷ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

فصل ۶ پاسخ‌نامهٔ تشریحی تمرین دوره‌ای

۱	۱	**۲**	۳	٤
۲	۱	۲	۳	**٤**
۳	۱	**۲**	۳	٤
۴	۱	۲	۳	**٤**
۵	۱	۲	**۳**	٤
۶	۱	**۲**	۳	٤
۷	۱	۲	**۳**	٤
۸	**۱**	۲	۳	٤
۹	۱	۲	**۳**	٤
۱۰	۱	۲	۳	**٤**
۱۱	۱	۲	**۳**	٤
۱۲	۱	۲	۳	**٤**
۱۳	۱	**۲**	۳	٤
۱۴	۱	**۲**	۳	٤
۱۵	۱	۲	**۳**	٤
۱۶	۱	۲	۳	**٤**
۱۷	۱	۲	**۳**	٤
۱۸	۱	۲	**۳**	٤
۱۹	**۱**	۲	۳	٤
۲۰	۱	۲	۳	**٤**
۲۱	۱	**۲**	۳	٤
۲۲	**۱**	۲	۳	٤
۲۳	۱	۲	**۳**	٤
۲۴	۱	**۲**	۳	٤
۲۵	۱	۲	۳	**٤**
۲۶	۱	**۲**	۳	٤
۲۷	۱	**۲**	۳	٤
۲۸	۱	۲	۳	**٤**
۲۹	۱	۲	**۳**	٤
۳۰	۱	**۲**	۳	٤
۳۱	۱	۲	**۳**	٤
۳۲	۱	۲	۳	**٤**
۳۳	**۱**	۲	۳	٤
۳۴	**۱**	۲	۳	٤
۳۵	۱	۲	۳	**٤**
۳۶	۱	**۲**	۳	٤
۳۷	۱	۲	۳	**٤**
۳۸	۱	**۲**	۳	٤
۳۹	**۱**	۲	۳	٤
۴۰	**۱**	۲	۳	٤

یادداشت

فصل هفتم Statistics and Probability

۷ آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

فضای نمونه‌ای و پیشامد	۲۵۵
اعمال روی پیشامدها	۲۵۷
بخش سؤالات	۲۶۳

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و ...

آمار و علم آمار	۲۶۷
تعاریف مهم در علم آمار	۲۶۷
شاخص تودهٔ بدن	۲۶۸
بخش سؤالات	۲۶۹

خلاصه فصل	۲۷۲
تمرین دوره‌ای	۲۷۳

گام ۷

ماجرا چیه؟!

آمار و احتمال علم بررسی و جمع‌بندی اطلاعات بسیار گسترده و سپس پیش‌بینی و برنامه‌ریزی با استفاده از آن اطلاعات است. به‌عبارت دیگر آمار و احتمال علم کار کردن روی اطلاعات و داده‌های اولیه و به اصطلاح خام و به‌دست آوردن اطلاعات پخته است.

در واقع آمار و احتمال هنر آشپزی با داده‌های خام است. مهم است که شما چگونه با استفاده از داده‌های اولیه گسترده به چیزی برسید که بُعد مهمی از موضوع مورد بررسی را نشان می‌دهد.

مثلاً فرض کنید قد و وزن همهٔ افراد یک کشور را داشته باشید (در یک سری کتاب ۳۰۰ جلدی) با خواندن همهٔ این اطلاعات به چه نتایجی می‌رسید؟ حال آمار می‌آید و با تعریف معیارها و دسته‌بندی‌های خاص از این میان اطلاعات ارزشمندی را به‌دست می‌آورد.

به‌عنوان مثال میانگین وزن مردم را به‌دست می‌آورد، شما با همین یک عدد دیدگاه مهمی نسبت به قضیه به‌دست می‌آورید و ...

با یک دیدگاه حساب شده آماری شما می‌بینید که به‌عنوان مثال اطلاعات مهم آماری مربوط به یک کشور که در یک صفحه نشان داده شده، از اطلاعات مدیران آن کشور در مورد آن کشور بیشتر است.

فرض کنید می‌خواهید در مورد نظام آموزشی یک کشور دست به بررسی آماری بزنید، چه کار می‌کنید؟

اطلاعات مورد نیازتان چیست؟ آن‌ها را چگونه به‌دست می‌آورید و چه معیارهایی را به‌عنوان شاخص اصلی در نظر می‌گیرید و ...

درس اوّل: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

فضای نمونه‌ای و پیشامد

گاهی یک پدیده فقط به چند شکل خاص ممکن است رخ بدهد و در عین حال قابل پیش‌بینی هم نیست که کدام حالت رخ خواهد داد، در این وضعیت به مجموعهٔ همهٔ حالت‌هایی که ممکن است پدیده رخ دهد، می‌گوییم فضای نمونه‌ای و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم.

هر زیرمجموعهٔ S را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

به‌عنوان مثال وقتی یک تاس را می‌اندازیم فضای نمونه‌ای می‌شود $S=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ و هر زیر مجموعهٔ این مجموعه هم یک پیشامد تصادفی است.

به‌عنوان مثال $A=\{۲،۴،۶\}$ یک پیشامد تصادفی در S است و $B=\{۳،۶\}$ هم یک پیشامد تصادفی دیگر در S است و $C=\{۳،۴\}$ هم یک پیشامد دیگر است.

گاهی می‌توان یک پیشامد را با یک ویژگی معرفی کرد. به عنوان مثال در مورد فوق می‌توان گفت که A پیشامد زوج آمدن و B پیشامد مضرب ۳ بودن است.

گاهی هم نمی‌توان یک پیشامد را با یک ویژگی خاص معرفی کرد، که در آن‌صورت می‌توانیم خود زیرمجموعه را بنویسیم. به‌عنوان مثال در مورد فوق ویژگی خاصی به‌ذهن نمی‌رسد که مجموعهٔ C را معین کند، در این حالت‌ها راحتیم خود زیرمجموعه را به‌عنوان پیشامد معرفی کنیم.

برای بررسی احتمال وقوع یک پیشامد لازم است که همهٔ حالت‌های ممکن برای رخ دادن یک پدیده را بدانیم و همچنین باید بدانیم که در چند حالت از این حالت‌ها پیشامد موردنظر ما رخ می‌دهد تا بتوانیم با کمک این اطلاعات احتمال رخ‌دادن یک پیشامد را بررسی کنیم.

مثال‌های آموزشی

۱) فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان خانواده‌های دارای سه فرزند را در حالتی که ترتیب و جنسیت فرزندان مهم است مشخص کنید و سپس پیشامد اینکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را تعیین کنید.

پاسخ برای اینکه جواب را هرچه خلاصه‌تر بنویسیم قرار می‌گذاریم به عنوان مثال این را که فرزند اوّل پسر و فرزند دوّم پسر و فرزند سوّم دختر باشد به شکل (د، پ، پ) نمایش دهیم.

با این کار فضای نمونه‌ای را می‌توانیم به شکل زیر معرفی کنیم:

S = {(د، د، پ)، (د، پ، د)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (پ، د، د)، (د، پ، پ)، (د، د، د)، (پ، پ، پ)}

حال پیشامدی که حداقل یکی از فرزندان دختر باشد هم برابر است با: S − {(پ، پ، پ)}

۲) فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان خانواده‌های دارای ۵ فرزند را در حالتی که فقط جنسیت فرزندان مهم است مشخص کنید و سپس پیشامد اینکه حداقل دو تا از فرزندان دختر باشد را به دست آورید.

پاسخ برای اینکه جواب را ساده‌تر بنویسیم، قرار می گذاریم (m،n) یعنی m پسر و n دختر.

$S=\{(۰،۵)،(۱،۴)،(۲،۳)،(۳،۲)،(۴،۱)،(۵،۰)\}$

و اگر این پیشامد را که حداقل دو تا از فرزندان دختر باشد را A بنامیم آنگاه داریم:

$A=\{(۰،۵)،(۱،۴)،(۲،۳)،(۳،۲)\}$

۳) هر یک از ارقام ۱ تا ۷ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم، سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. فضای نمونه‌ای و هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید.

الف) پیشامد A که در آن عدد روی کارت زوج باشد.

ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول نباشد.

پاسخ

$S=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷\}$

الف) $A=\{۲،۴،۶\}$

ب) $B=\{۱،۴،۶\}$

۴) فرض کنید یک تاس و یک سکّه را با هم بیاندازیم؛ همهٔ حالت‌های ممکن را مشخص کنید.

پاسخ نتیجهٔ پرتاب سکّه ۲ حالت دارد: پشت و رو و نتیجه پرتاب تاس ۶ حالت دارد: ۶ و ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱

می‌توانیم S را به شکل زیر بنویسیم:

S = {(۱،پ)،(۲،پ)،(۳،پ)،(۴،پ)،(۵،پ)،(۶،پ)،(۱،ر)،(۲،ر)،(۳،ر)،(۴،ر)،(۵،ر)،(۶،ر)}

می‌توانیم فضای نمونه‌ای را به شکل جدول زیر هم معرفی کنیم:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پ	(۱،پ)	(۲،پ)	(۳،پ)	(۴،پ)	(۵،پ)	(۶،پ)
ر	(۱،ر)	(۲،ر)	(۳،ر)	(۴،ر)	(۵،ر)	(۶،ر)

۵) فرض کنید یک سکّه را سه‌بار می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای و همچنین پیشامد اینکه حداقل دوبار نتیجه رو باشد را مشخص کنید.

پاسخ S = {(ر،ر،ر)،(ر،ر،پ)،(ر،پ،ر)،(ر،پ،پ)،(پ،ر،ر)،(پ،ر،پ)،(پ،پ،ر)،(پ،پ،پ)}

و پیشامد خواسته شده هم می‌شود:

A = {(ر،ر،ر)،(ر،ر،پ)،(ر،پ،ر)،(پ،ر،ر)}

۶) سکّه‌ای را به هوا می‌اندازیم، اگر رو بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر پشت بیاید دو سکّهٔ دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. **ب) پیشامد A که در آن تاس فرد بیاید را مشخص کنید.**

ج) پیشامد B که در آن حداقل ۲ سکه رو بیاید را مشخص کنید.

پاسخ الف) نتیجه پرتاب سکه ۲ حالت دارد: پشت و رو و نتیجهٔ پرتاب تاس، ۶ حالت دارد: ۶ و ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱

می‌توانیم S را به شکل مقابل بنویسیم:

S = {(ر،۱)،(ر،۲)،(ر،۳)،(ر،۴)،(ر،۵)،(ر،۶)،(پ،پ،پ)،(پ،پ،ر)،(پ،ر،پ)،(پ،ر،ر)}

ب) A = {(ر،۱)،(ر،۳)،(ر،۵)}

ج) B = {(پ،ر،ر)}

۷) دو تاس آبی و قرمز را پرتاب می‌کنیم، همهٔ نتایج ممکن برای نتیجه پرتاب را در یک جدول مشخص کنید و سپس پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

A: پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ باشد. **B: پیشامد اینکه نتیجه پرتاب دوتاس برابر باشد.**

C: پیشامد اینکه نتیجهٔ پرتاب تاس آبی، ۲ تا بیشتر از نتیجهٔ پرتاب تاس قرمز باشد. **D: پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ باشد.**

E: پیشامد اینکه نتیجهٔ پرتاب هر دوتاس اعدادی اوّل باشد. **F: پیشامد اینکه نتیجهٔ پرتاب هر تاس قرمز ۲ تا بیشتر از نتیجهٔ پرتاب تاس آبی باشد.**

پاسخ از آنجاکه برای نتیجه پرتاب هر تاس ۶ حالت ممکن وجود دارد و دو تاس با توجّه به رنگ‌هایشان متمایزند، نتیجه پرتاب ۶×۶ حالت مختلف دارد که می‌توانیم در یک جدول آن را مشخص کنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱،۱)	(۱،۲)	(۱،۳)	(۱،۴)	(۱،۵)	(۱،۶)
۲	(۲،۱)	(۲،۲)	(۲،۳)	(۲،۴)	(۲،۵)	(۲،۶)
۳	(۳،۱)	(۳،۲)	(۳،۳)	(۳،۴)	(۳،۵)	(۳،۶)
۴	(۴،۱)	(۴،۲)	(۴،۳)	(۴،۴)	(۴،۵)	(۴،۶)
۵	(۵،۱)	(۵،۲)	(۵،۳)	(۵،۴)	(۵،۵)	(۵،۶)
۶	(۶،۱)	(۶،۲)	(۶،۳)	(۶،۴)	(۶،۵)	(۶،۶)

حال در جدولی دیگر پیشامدهای خواسته شده در مسأله را مشخّص می‌کنیم.

توضیح: هر کدام از خانه‌های جدول جدید نشانگر همان پیشامد گفته شده در جدول قبل است و ما برای اینکه جدول واضح‌تر باشد زوج مرتب‌های مربوطه را در خانه‌ها ننوشته‌ایم و برای پاسخگویی به پرسش، در خانه‌های متعلّق به پیشامد A نوشته‌ایم A و در خانه‌های متعلّق به پیشامد B نوشته‌ایم B و ...

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	B		F			A
۲		E B	E	F	E A	
۳	C	E	E B	A	E F	
۴		C	A	B		D F
۵		E A	E C		D E B	
۶	A			D C		B

می‌توانیم این پیشامدها را به صورت مجموعه نیز مشخص کنیم. به‌عنوان مثال:

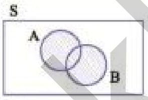
$D=\{(۴،۶)،(۵،۵)،(۶،۴)\}$ $\quad$ $A=\{(۱،۶)،(۲،۵)،(۳،۴)،(۴،۳)،(۵،۲)،(۶،۱)\}$

اعمال روی پیشامدها

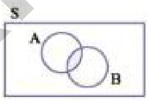
از آنجا که پیشامدها، مجموعه هستند، می‌توان اعمال مربوط به مجموعه‌ها را روی آنها انجام داد، مثلاً اشتراک یا اجتماع دو پیشامد را به‌دست آورد و همچنین با این روش می‌توان پیشامدهای جدیدی را معرفی کرد.

به عنوان مثال وقتی A و B دو پیشامد باشند، آنگاه $A\cup B$ پیشامدی است که عضوهای آن مجموعه $A\cup B$ باشد.

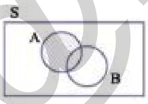
می‌توانیم این گفته را به شکل زیر بیان کنیم:



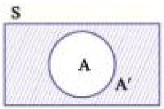
اگر A و B دو پیشامد باشند، آنگاه پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد.



و به طور مشابه می‌توان گفت پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهد.



پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد.



پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. A' را متمم پیشامد A می‌نامیم.

می‌توانیم این مطالب را به صورت خلاصه به شکل زیر بیان کنیم:

$A\cap B$: A و B $\qquad$ $A\cup B$: A یا B

A': نه A $\qquad$ $A-B$: A و نه B

برخی پیشامدها را با ترکیب مطالب قبل می‌توان ساخت، به‌عنوان مثال:

یا A یا B (فقط یکی از A و B رخ دهد): $(A\cup B)-(A\cap B)$

نه A و نه B (هیچکدام از A و B رخ ندهد): $A'\cap B'$

ســـؤال

در مثال ۷ (مثال آموزشی قبل) پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $A\cap E$ ب) $B\cap C$ ج) $E-B$ د) $C\cup D$ هـ) $D'\cap F$ و) $D\cap B\cap E$

پاسخ با توجه به جدولی که در آن اعضای پیشامدهای A و ... و F را نشان دادیم به این سؤال جواب می‌دهیم.

الف) $A\cap E$ مجموعهٔ خانه‌هایی است که در آنها هم A نوشته شده و هم E:

$A\cap E=\{(۲,۵),(۵,۲)\}$

ب) $B\cap C$ مجموعهٔ خانه‌هایی است که در آنها هم B نوشته شده و هم C. (گشتیم نبود، نگردید که نیست.) پس $B\cap C=\varnothing$.

البته با توجه به تعریف B و C هم معلوم بود که $B\cap C=\varnothing$.

B پیشامد برابر بودن نتیجهٔ پرتاب دو تاس بود و C پیشامدی بود که نتیجهٔ پرتاب تاس آبی ۲ تا از نتیجهٔ پرتاب تاس قرمز بیشتر بود. معلوم است که این دو اشتراکی ندارند.

ج) $E-B$ مجموعهٔ خانه‌هایی است که در آنها E نوشته شده و B نوشته نشده:

$E-B=\{(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳)\}$

د) $C\cup D$ مجموعهٔ خانه‌هایی است که در آنها حدّاقل یکی از C یا D یا هر دو نوشته شده:

$C\cup D=\{(۳,۱),(۴,۲),(۵,۳),(۶,۴),(۵,۵),(۴,۶)\}$

هـ) $D'\cap F$ مجموعه خانه‌هایی است که در آنها D نوشته نشده و F نوشته شده:

$D'\cap F=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۵)\}$

و) $D\cap B\cap E$ مجموعهٔ خانه‌هایی است که در آنها هم D نوشته شده هم B و هم E:

$D\cap B\cap E=\{(۵,۵)\}$

حال به این می‌اندیشیم که چگونه احتمال وقوع یک پیشامد یا همان احتمال یک پیشامد را به دست آوریم؟

برای شروع در مورد مثال پرتاب دو تاس آبی و قرمز می‌اندیشیم.

وقتی که یک تاس پرتاب می‌شود احتمال اینکه نتیجه هرکدام از اعداد ۱ تا ۶ باشد برابر است و در پرتاب این دو تاس می‌توانیم بگوییم ۳۶ حالت ممکن برای نتیجه وجود دارد، و احتمال رخ دادن هر کدام از این ۳۶ حالت برابر است.

پس مجموعهٔ مرجع یا همان فضای نمونه‌ای (S) دارای ۳۶ عضو است.

حال اگر یکی بپرسد احتمال پیشامد A چقدر است؟ خُب جواب این است: $\dfrac{\text{تعداد عضوهای } A}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای}}$

و اگر احتمال رخ‌دادن پیشامد A را با $P(A)$ نشان دهیم، می‌توانیم در حالت کلی بگوییم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

حال با توجّه به جدول مربوط به مثال آموزشی ۷ می‌توانیم احتمال پیشامدهای A، B، C، D، E و F را به‌دست آوریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\qquad P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\qquad P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}\qquad P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

حال با استفاده از نتایج مسأله قبل احتمال پیشامدهای $D\cap B\cap E$ ، $D'\cap F$ ، $C\cup D$ ، $E-B$ ، $B\cap C$ و $A\cap E$ را به دست می‌آوریم:

$$P(A\cap E)=\frac{n(A\cap E)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸} \qquad P(C\cup D)=\frac{n(C\cup D)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B\cap C)=\frac{n(B\cap C)}{n(S)}=\frac{۰}{۳۶}=۰ \qquad P(D'\cap F)=\frac{n(D'\cap F)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(E-B)=\frac{n(E-B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶} \qquad P(D\cap B\cap E)=\frac{n(D\cap B\cap E)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

در مبحث مجموعه‌ها اگر $A\cap B=\varnothing$، می‌گفتیم این دو مجموعه جدا از هم هستند. در اینجا هم به طور مشابه وقتی که اشتراک دو پیشامد تهی باشد می‌گوییم این دو پیشامد جدا از هم‌اند یا ناسازگارند. در مثال ۷ (مثال آموزشی قبل) هر دو پیشامد از پیشامدهای F و C و B و A ناسازگارند و به عبارت دیگر این پیشامدها دو به دو ناسازگارند). در مبحث مجموعه‌ها می‌توانستیم تعداد عضوهای برخی مجموعه‌ها را با دانستن تعداد عضوهای برخی مجموعه‌های دیگر به دست آوریم به عنوان مثال، روابط زیر را داشتیم:

$$n(A')=n(U)-n(A) \qquad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

حال این سؤال به ذهن می‌رسد:

آیا می‌توان احتمال برخی پیشامدها را برحسب احتمال برخی پیشامدهای دیگر به دست آورد؟

به نظر می‌رسد که روابط مشابهی دربارهٔ احتمال هم داشته باشیم. خُب، محاسبه می‌کنیم تا ببینیم که آیا این‌گونه است؟ آیا؟

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{n(S)-n(A)}{n(S)}=۱-\frac{n(A)}{n(S)}=۱-P(A)$$

قابل پیش‌بینی هم بود. زیرا به عنوان مثال وقتی احتمال رخ دادن یک پدیده $\frac{۳}{۱۰}$ است، معلوم است که احتمال رخ ندادن آن می‌شود $\frac{۷}{۱۰}$.

به قول یکی می‌گفت: درسته که ما به ۶۷ درصد اهدافمون نرسیدیم ولی از اونطرف به ۸۴ درصد اهدافمون رسیدیم. خدا رو شکر که اهداف ما از صددرصد هم بیشترە!

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

conclusion جمع‌بندی

$$P(A')=۱-P(A)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آنگاه $P(A\cap B)=۰$ و در نتیجه:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال‌های آموزشی

۱) در پرتاب تاس‌های آبی و قرمز احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) حاصل‌ضرب دو تاس فرد باشد. (به جای اینکه بگوییم «حاصل پرتاب تاس» به طور خلاصه می‌گوییم «تاس»)

ب) حاصل‌ضرب دو تاس زوج باشد.

ج) هر دو تاس اوّل باشد یا هر دو تاس یکسان باشد.

پاسخ الف) برای اینکه حاصل‌ضرب دو تاس فرد باشد، باید هر دو تاس فرد باشد و چون هر تاس در ۳ حالت می‌تواند فرد باشد طبق اصل ضرب ۳×۳ حالت برای اینکه هر دو تاس فرد بیاید وجود دارد، در نتیجه اگر پیشامد هر دو تاس فرد را A بنامیم، داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳\times۳}{۶\times۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) روش اوّل: برای اینکه حاصل‌ضرب دو تاس زوج باشد باید یا هر دو زوج باشند یا اولی زوج و دوّمی فرد باشد و یا اوّلی فرد و دوّمی زوج باشد که هر کدام طبق اصل ضرب ۳×۳ حالت دارد و در نتیجه اگر پیشامد هر دو تاس زوج را B بنامیم داریم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳\times۳+۳\times۳+۳\times۳}{۳۶}=\frac{۳}{۴}$$

روش دوّم: در اینجا استفاده از متمّم راحت‌تر است. A پیشامدی باشد که حاصل‌ضرب دو تاس فرد باشد، در نتیجه A' پیشامدی است که حاصل‌ضرب دو تاس زوج باشد پس A' همان B است و داریم:

$$P(B)=P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

ج) C را پیشامد اوّل بودن دو تاس و D را پیشامد یکسان بودن دو تاس فرض می‌کنیم، این بند از مسأله درواقع $P(C\cup D)$ را می‌خواهد.

برای اینکه پیشامد C رخ دهد باید هر تاس اوّل باشد و طبق اصل ضرب ۳×۳ حالت برای اینکه هر دو تاس اوّل باشد وجود دارد و در نتیجه:

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳\times۳}{۶\times۶}=\frac{۱}{۴}$$

برای اینکه پیشامد D رخ دهد، هم به‌وضوح ۶ حالت وجود دارد، و در نتیجه:

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۶\times۶}=\frac{۱}{۶}$$

و پیشامد $C\cap D$ هم برابر مجموعهٔ {(۲،۲)،(۳،۳)،(۵،۵)} است و در نتیجه:

$$P(C\cap D)=\frac{n(C\cap D)}{n(S)}=\frac{۳}{۶\times۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

و داریم:

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

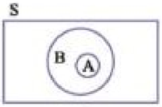
البته می‌توانستیم همان ابتدا $n(C\cup D)$ را محاسبه کنیم و مستقیماً $P(C\cup D)$ را به‌دست آوریم.

۲) یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۰ درصد از مشتریان کارت نوع A و ۴۵ درصد از مشتریان کارت نوع B و ۱۲ درصد هر دو نوع کارت را همراه داشته باشند چقدر احتمال دارد، مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

پاسخ اطلاعات مسأله شامل $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ است و از ما می‌خواهد $P(A\cup B)$ را بیابیم.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۰}{۱۰۰}+\frac{۴۵}{۱۰۰}-\frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{۶۳}{۱۰۰}$$

۳) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید $P(A) \le P(B)$.



پاسخ با توجه به شکل رسم‌شده مجموعهٔ B را به صورت دو مجموعهٔ ناسازگار $B-A$ و A تجزیه می‌کنیم.

$$B = A \cup (B-A) \text{ ، } A \cap (B-A) = \varnothing$$

حالا می‌نویسیم:

$$P(B) = P(A\cup(B-A)) = P(A)+P(B-A)$$

چون $P(B-A)\ge ۰$ پس می‌توانیم بگوییم $P(A)+P(B-A)\ge P(A)$ و در نتیجه $P(B)\ge P(A)$.

۴) اگر ۸ نفر که دو نفر از آنها دوست هستند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) دو دوست کنار یکدیگر نباشند.

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند.

پاسخ الف) بررسی پیشامد A که در آن دو دوست کنار یکدیگر نباشند، قدری چالش برانگیز است.

بررسی متمّم این پیشامد یعنی A' که در آن دو دوست کنار یکدیگر باشند ساده‌تر است. معلوم است که $n(S)$ برابر تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز است یعنی $۸!$ و $n(A')$ با روش‌هایی که در فصل قبل مطرح شد به دست می‌آید $۲\times ۷!$.

و در نتیجه $P(A')$ برابر است با:

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲\times ۷!}{۸!}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

و در نتیجه $P(A)$ برابر است با:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

ب) $۶!$ حالت برای ۶ نفر باقیمانده وجود دارد که در خانه‌های دوّم تا هفتم قرار بگیرند و ۲ حالت هم برای این ۲ نفر وجود دارد که در خانه‌های اوّل و هشتم قرار بگیرند بنابراین طبق اصل ضرب همهٔ حالت‌های ممکن برای اینکه این دو دوست در ابتدا و انتهای صف باشند $۲\times ۶!$ می‌شود و در نتیجه داریم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲\times ۶!}{۸!}=\frac{۲}{۵۶}=\frac{۱}{۲۸}$$

۵) می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و ۵ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر هم رشته باشند.

ج) ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟

پاسخ فضای نمونه، حالت‌های مختلف انتخاب ۲ دانش‌آموز از بین ۹ دانش‌آموز است و در نتیجه داریم:

$$n(S)=\binom{۹}{۲}$$

الف) تعداد عضوهای این پیشامد حالت‌های مختلف انتخاب ۲ نفر از ۴ نفر می‌شود که برابر است با:

$$n(A)=\binom{۴}{۲}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{\frac{۴!}{۲!۲!}}{\frac{۹!}{۷!۲!}}=\frac{۷!\times ۴!\times ۲!}{۹!\times ۲!\times ۲!}=\frac{۴\times ۳}{۹\times ۸}=\frac{۱}{۶}$$

ب) تعداد عضوهای این پیشامد می‌تواند حالت‌های مختلف انتخاب ۲ نفر از ۴ نفر به‌علاوهٔ تعداد حالت‌های مختلف انتخاب ۲ نفر از ۵ نفر شود.

$$n(B)=\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲} \qquad P(B)=\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۶+۱۰}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

ج) می‌توانیم با محاسبه تعداد عضوهای پیشامد به این قسمت پاسخ دهیم، ولی ساده‌تر است از متمّم پیشامد استفاده کنیم. در واقع اگر دو نفر هم رشته نباشند آنگاه یکی ریاضی و دیگری تجربی است پس در این بند مثال می‌توانیم متمّم پیشامد B را محاسبه کنیم.

$$P(C)=P(B')=۱-P(B)=\frac{۵}{۹}$$

۶) یک سکّه را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه در پرتاب نهم برای سوّمین بار نتیجهٔ پرتاب رو بیاید چقدر است؟

پاسخ تعداد عضوهای فضای نمونه 2^{10} است و برای اینکه پیشامد گفته شده روی دهد، باید ۲ پرتاب از ۸ پرتاب اوّل رو بیاید و پرتاب نهم هم رو بیاید و پرتاب دهم هم آزاد است پس طبق اصل ضرب این پیشامد $2\times1\times\binom{8}{2}$ عضو دارد و در نتیجه اگر این پیشامد را A بنامیم داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{8}{2}\times2}{2^{10}}=\frac{4\times7\times2}{2^{10}}=\frac{7}{128}$$

۷) در جعبه‌ای ۷ مهرهٔ سبز، ۴ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ سفید وجود دارد. اگر از این جعبه ۴ مهره انتخاب شود، چقدر احتمال دارد:

الف) هر ۴ مهره سبز باشند. **ب) تعداد مهره‌های آبی انتخاب شده بیشتر از بقیه مهره‌ها باشد.**

پاسخ تعداد کل حالت‌ها می‌شود:

$$n(S)=\binom{1+4+7}{4}$$

الف) تعداد حالت‌هایی که هر ۴ مهره سبز باشد می‌شود:

$$n(A)=\binom{7}{4}$$

و در نتیجه

$$P(A)=\frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}}=\frac{\frac{7!}{4!3!}}{\frac{12!}{4!8!}}=\frac{7!8!}{12!\times3!}=\frac{7}{99}$$

ب) چهار حالت برای این قسمت می‌توان فرض کرد:

حالت ۱: ۲ مهرهٔ آبی، یک مهرهٔ سبز و یک مهرهٔ سفید انتخاب شود که $\binom{1}{1}\times\binom{7}{1}\times\binom{4}{2}$ حالت دارد.

حالت ۲: ۳ مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ سبز انتخاب شود که $\binom{7}{1}\times\binom{4}{3}$ حالت دارد.

حالت ۳: ۳ مهرهٔ آبی و یک مهرهٔ سفید انتخاب شود که $\binom{1}{1}\times\binom{4}{3}$ حالت دارد.

حالت ۴: ۴ مهرهٔ آبی انتخاب شود که $\binom{8}{0}\times\binom{4}{4}$ حالت دارد.

و در نتیجه:

$$P(B)=\frac{\binom{4}{2}\times\binom{7}{1}\times\binom{1}{1}+\binom{4}{3}\times\binom{7}{1}+\binom{4}{3}\times\binom{1}{1}+\binom{4}{4}\times\binom{8}{0}}{\binom{12}{4}}=\frac{75}{495}=\frac{5}{33}$$

یادداشت

کـــافه ســؤال

۱ اگر $P(A)=0/8$ و $P(B)=0/7$ باشد نشان دهید: $P(A\cap B)\geq 0/5$

۲ ثابت کنید: $P(A\cap B)\leq P(A\cup B)$

۳ اگر A_1، A_2 و A_3 پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه نشان دهید: $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

۴ احتمال اینکه دقیقاً یکی از پیشامدهای A یا B اتفاق بیافتد را برحسب $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ بیابید.

۵ اگر A، B و C سه پیشامد باشند، هر یک از پیشامدهای زیر را با نمودار نمایش دهید و برای هرکدام عبارت مناسب برحسب A، B و C بنویسید.

الف) فقط A اتفاق افتد.

ب) A و B اتفاق بیفتد و C اتفاق نیفتد.

ج) حداقل یکی از سه پیشامد اتفاق بیفتد.

د) حداقل دو پیشامد اتفاق بیفتد.

ه) دقیقاً دو تا از پیشامدها اتفاق بیفتد.

و) حداکثر یکی از پیشامدها اتفاق بیفتد.

۶ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا رو ظاهر شود که در این صورت آزمایش متوقف می‌شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش را مشخص کنید.

۷ اگر تاسی را ۴ مرتبه پرتاب کنیم احتمال اینکه حداقل یک مرتبه عدد ۶ ظاهر شود چقدر است؟

۸ در جنگلی ۳۰ گوزن وجود دارد که ۶ تای آنها را پس از به دام انداختن علامت‌گذاری و رها کرده‌اند. مدتی بعد ۵ گوزن را مجدداً به دام می‌اندازند. احتمال اینکه دقیقاً ۲ تا از گوزن‌های به دام افتاده دارای علامت باشند را به دست آورید.

۹ ظرفی شامل m توپ سفید و n توپ سیاه است. اگر یک نمونه تصادفی r تایی از ظرف انتخاب کنیم، احتمال اینکه نمونه دارای دقیقاً k توپ سفید باشد چقدر است؟

۱۰ معلمی به دانش‌آموزان یک کلاس ۱۰ سؤال داده و به آنها اطلاع می‌دهد که امتحان نهایی شامل ۵ سؤال تصادفی از سؤالات داده شده است. اگر دانش آموزی توانسته باشد پاسخ ۷ سؤال را به دست آورد، مطلوب است احتمال اینکه:

الف) در امتحان به هر ۵ سؤال پاسخ صحیح بدهد.

ب) حداقل به ۴ سؤال امتحانی پاسخ صحیح بدهد.

گزینهٔ چند؟!!!!

۱- اگر $P(A\cup B)\le P(A\cap B)$، آنگاه $P(A-B)+P(B-A)$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲- اگر پیشامدهای A_1، A_2 و A_3 دوبه‌دو ناسازگار باشند و $P(A_1)=2P(A_2)=3P(A_3)$ و $A_1\cup A_2\cup A_3=S$ باشد، آنگاه $P(A_2\cup A_3)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳- تعداد ۳۰ اقتصاددان و ۲۰ سیاستمدار در جلسه‌ای حضور دارند، ۳ نفر از آنها را برای حضور در یک میزگرد به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه حداقل یک سیاستمدار انتخاب شود چقدر است؟

۱) $\frac{111}{140}$ ۲) $\frac{119}{150}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۴- اگر $P(A)=5P(B)$، $P(A\cup B)=1$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$، آنگاه $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{15}{16}$

۵- اگر دو تاس را پرتاب کنیم، احتمال اینکه تفاوت دو عدد ظاهر شده برابر ۲ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{2}{11}$

۶- اگر یک سکه را ۶ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه دقیقاً ۳ بار رو بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{7}{16}$

۷- اگر ۷ نفر که ۳ نفر از آنها دوست هستند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد ۳ دوست کنار هم باشند؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۸- اگر یک سکه را ۹ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه بیش از ۴ بار پشت بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۹- در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۳ مهره آبی و ۲ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر دو مهره به تصادف از جعبه انتخاب کنیم احتمال اینکه هر دو قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۰- اگر B و A دو پیشامد باشند، کدام‌یک از عبارات زیر درست است؟

۱) اگر A و B ناسازگار باشند و B و C هم ناسازگار باشند، آنگاه قطعاً A با C ناسازگار است.

۲) اگر $P(A)<P(B)$ باشد آنگاه $A\subseteq B$

۳) اگر $A\subseteq B$ باشد آنگاه $P(A)<P(B)$

۴) اگر $P(A)+P(B)=\frac{4}{3}$ باشد آنگاه $\frac{1}{3}<P(A-B)$

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ تشریحی کافه سؤال

۱

می‌دانیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

از طرفی $P(A\cup B)\le ۱$ در نتیجه:

$$P(A\cup B)=۰/۸+۰/۷-P(A\cap B)\le ۱\Rightarrow ۱/۵-P(A\cap B)\le ۱\Rightarrow P(A\cap B)\ge ۰/۵$$

۲

دیدیم که $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$، حال چون $A\cap B\subseteq A\cup B$ پس $P(A\cap B)\le P(A\cup B)$

۳

برای دو پیشامد ناسازگار A و B همواره داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$A_۱\cup A_۲$ را یک پیشامد در نظر می‌گیریم، $A_۱\cup A_۲$ با $A_۳$ ناسازگار است پس:

$$P((A_۱\cup A_۲)\cup A_۳)=P(A_۱\cup A_۲)+P(A_۳)$$

$A_۱$ با $A_۲$ نیز ناسازگار است. پس:

$$P((A_۱\cup A_۲)\cup A_۳)=P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)$$

۴

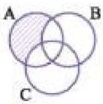
دقیقاً یکی از پیشامدهای A یا B اتفاق بیفتد، یعنی A اتفاق بیفتد و B اتفاق نیفتد یا B اتفاق بیفتد و A اتفاق نیفتد. به‌عبارت دیگر یعنی حاصل $(A-B)\cup(B-A)$.

دو پیشامد $A-B$ و $B-A$ نسبت به هم ناسازگارند، پس:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B))=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

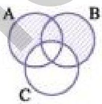
۵

الف)



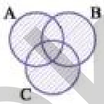
$A-(B\cup C)$

ب)



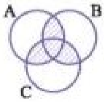
$(A\cup B)-C$

ج)



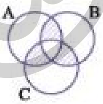
$A\cup B\cup C$

د)



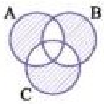
$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$

هـ)



$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)-(A\cap B\cap C)$

و)



$(A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B))$

۶

$S=\{ر,(پ,ر),(پ,پ,ر),...\}$

گاج

۷

(۷)

فضای نمونه این آزمایش 6^4 عضو دارد. اگر A پیشامد این باشد که حداقل یک‌بار عدد ۶ ظاهر شود با استفاده از متمم پیشامد A احتمال خواسته شده را به دست می‌آوریم که به صورت زیر می‌باشد:

متمم پیشامد A به این معنی است که عدد ۶ ظاهر نشود.

$$P(A)=1-P(A')=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

(۸)

$$\binom{24}{3}=\frac{\cancel{24}\times 23\times 22\times \cancel{21!}}{1\times \cancel{2}\times \cancel{3}\times \cancel{21!}} \quad , \quad \binom{6}{2}=\frac{\cancel{6}\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{2}\times \cancel{4!}}=15 \quad , \quad \binom{30}{5}=\frac{\cancel{30}\times 29\times \cancel{28}\times 27\times 26\times \cancel{25!}}{1\times \cancel{2}\times \cancel{3}\times \cancel{4}\times \cancel{5}\times \cancel{25!}}=26\times 27\times 7\times 29$$

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{24}{3}}{\binom{30}{5}}=\frac{15\times 23\times 22\times 4}{29\times 7\times 27\times 26}=\frac{2\times 5\times 23\times 22}{29\times 7\times 13\times 9}=\frac{10\times 23\times 22}{29\times 7\times 13\times 9}=0/31$$

(۹)

$$\frac{\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{n+m}{r}}$$

(۱۰)

ب) $$\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}+\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}}=\frac{35\times 3+21}{252}=\frac{126}{252}=\frac{1}{2}$$

الف) $$\frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}}=\frac{\dfrac{7\times \cancel{6}\times 5!}{5!\times \cancel{2}}}{\dfrac{\cancel{10}\times \cancel{9}\times \cancel{8}\times 7\times 6\times 5!}{1\times \cancel{2}\times \cancel{3}\times \cancel{4}\times \cancel{5}\times 5!}}=\frac{21}{252}=\frac{1}{12}$$

درس ۱ پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینه چند

سؤال	پاسخ
۱	۱
۲	۳
۳	۱
۴	۴
۵	۳
۶	۳
۷	۱
۸	۱
۹	۴
۱۰	۳

یادداشت

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ـ متغیر و انواع آن

آمار و علم آمار

آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

مراحل علم آمار

- جمع‌آوری اعداد و ارقام
- ↓
- سازماندهی و نمایش
- ↓
- تحلیل و تفسیر داده‌ها
- ↓
- نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی

تعاریف مهم در علم آمار

تعریف مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

مثال: افراد ساکن ایران می‌توانند یک جامعه فرض شوند و هر فرد ساکن ایران هم یک عضو این جامعه است.

تعریف تعداد اعضای جامعه را اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه گویند.

تعریف بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود را نمونه می‌گوییم.

مثال: افراد ساکن در شهر زنجان یک نمونه از جامعه افراد ساکن ایران است.

تعریف تعداد اعضای نمونه را اندازهٔ نمونه یا حجم نمونه گویند.

تعریف متغیر، ویژگی‌ای از اعضای جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عدد یا عبارتی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

تعریف متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، متغیرهای کمی گویند.

مثال: تعداد افرادی که در یک روز به یک باشگاه ورزشی مراجعه می‌کنند یک متغیر کمی است.

تعریف متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیرهای کیفی گویند.

مثال: گروه خونی افراد و زبان مادری آن‌ها متغیرهای کیفی هستند.

تعریف متغیر پیوسته، متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.

مثال: قد افراد متغیری پیوسته است.

تعریف متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد.

مثال: جمعیت حاضر در یک شهر در طول زمان، یک متغیر گسسته است.

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند را متغیر کیفی نامیدیم.

متغیرهای کیفی به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند:

1. متغیر ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب وجود داشته باشد. مثل سطح تحصیلات (دیپلم، فوق‌دیپلم و ...)
2. متغیر اسمی (غیرترتیبی): متغیر کیفی است که ترتیبی نیست. مثل نژاد، گروه خونی و ...

انواع متغیر در یک نگاه

نکته: بعضی مواقع می‌توان یک متغیر کیفی را به نوعی به یک متغیر کمی تبدیل کرد و در کل نمی‌توان با یک خط این دو نوع متغیر را به‌طور کامل از هم جدا کرد.

مثال: کیفیت یک میوه به عنوان مثال هلو را با استفاده از متغیرهای کمی زیر می‌توان نشان داد.

۱. میزان فروکتوز در یک گرم از میوه

۲. میزان آب در یک گرم از میوه

۳. نسبت وزن میوه به وزن هستهٔ آن

۴. میزان موادشیمیایی حاصل از کودها در ۱۰۰ گرم از میوه و ...

بعضی جاها متغیر گسسته آنقدر مقدار می‌گیرد که به نظر می‌آید پیوسته است. مانند وزن یک شی.

زیرا مجموع وزن تعداد مشخصی اتم است و نمی‌تواند هر مقداری را بگیرد و برابر با مجموع وزن‌های تعداد مشخصی اتم مختلف با ایزوتوپ‌های معین است و وزن آن‌ها هم مشخص است در نتیجه وزن در واقع یک متغیر گسسته است.

بعضی متغیرها زمانی به نظر می‌رسید که یک متغیر پیوسته هستند ولی بعد ثابت شد که متغیری گسسته هستند.

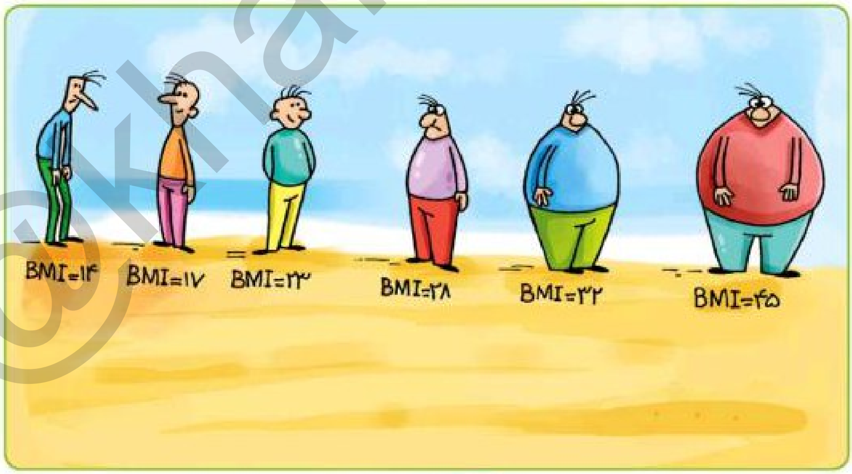
مثال: میزان بارالکتریکی زمانی متغیر پیوسته فرض می‌شد و بعد معلوم شد متغیری گسسته است.

شاخص تودهٔ بدن

یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای این‌که میزان چاقی یک فرد را بسنجیم از معیاری تحت عنوان معیار «شاخص تودهٔ بدن» استفاده می‌کنیم. این معیار از تقسیم وزن افراد برحسب کیلوگرم بر توان دوم قد افراد برحسب متر محاسبه می‌شود. این شاخص را BMI می‌گویند، هرچقدر مقدار این شاخص برای یک فرد بیشتر باشد او را چاق‌تر به‌حساب می‌آورند.

یه تمرین

با بررسی شاخص BMI، نقاط ضعف و قوت آن را بیان کنید. اگر تعیین شاخص به دست شما بود، آیا همان BMI را تعیین می‌کردید؟ اگر پاسخ شما منفی است، توضیح دهید چه شاخصی را معرفی می‌کردید و چرا؟



«BMI»
اثر: ولادیمیر پوتین

کـــافه سـؤال

۱ مدیر یک شرکت دولتی می‌خواهد کارائهٔ کارمندان خود را در طول یک‌ماه تعیین کند. برای این منظور از بین ۵۰۰ کارمند شرکت خود، ۵۰ نفر را انتخاب می‌کند. جامعه، اندازهٔ جامعه، اندازهٔ نمونه و موضوع مورد مطالعه را تعیین کنید.

۲ نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) درجهٔ حرارت بدن ب) سن ج) دوره‌های تحصیلی د) گروه خونی

ه) وضعیت آب و هوا و) جمعیت روستا ز) مراحل زندگی

۳ قد شخصی ۱۸۰ سانتی‌متر و شاخص تودهٔ بدن او ۲۸ است. وزن این شخص را به‌دست آورید.

۴ آیا معیار شاخص تودهٔ بدن ارائه شده در کتاب را منطقی می‌دانید؟ به عنوان نمونه انسانی با قد ۲ متر و وزن ۷۴ کیلوگرم را در نظر بگیرید.

گزینـهٔ چنـــد؟!!!!

۱- اولین مرحلهٔ علم آمار چیست؟

۱) آمارسازی
۲) نتیجه‌گیری و قضاوت
۳) جمع‌آوری اعداد و ارقام
۴) تحلیل و تفسیر داده‌ها

۲- بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود چه نامیده می‌شود؟

۱) منتخب
۲) عضو نمونه
۳) حجم نمونه
۴) نمونه

۳- متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند را چه می‌نامند؟

۱) متغیر کمی
۲) متغیر کیفی
۳) متغیر ناشناس
۴) متغیر گسسته

٤- کدام‌یک متغیر کمی گسسته است؟

۱) دما
۲) زمان
۳) قد
۴) تعداد پرندگان یک جزیره

۵- کدام‌یک متغیر کمی پیوسته است؟

۱) رتبه دانش‌آموز در کلاس
۲) هزینهٔ تلفن
۳) گروه خونی
۴) سطح نمرهٔ ریاضی دانش‌آموز

۶- کدام‌یک متغیر کیفی ترتیبی است؟

۱) رتبهٔ کشور در المپیک
۲) مدرک تحصیلی
۳) تعداد ورزشکاران یک شهر
۴) هیچ‌کدام

۷- کدام‌یک متغیر کیفی اسمی است؟

۱) دمای هوا
۲) رنگ چراغ راهنمایی
۳) ارتفاع از سطح زمین
۴) میزان شدت نور

۸- رتبه علمی یک کشور در میان کشورهای جهان چه نوع متغیری است؟

۱) کمی گسسته
۲) کمی پیوسته
۳) کیفی ترتیبی
۴) کیفی اسمی

۹- رتبهٔ اداری یک کارمند چه نوع متغیری است؟

۱) کمی گسسته
۲) کمی پیوسته
۳) کیفی ترتیبی
۴) کیفی اسمی

۱۰- کدام جمله نادرست است؟

۱) سازماندهی و نمایش مرحله‌ای از علم آمار است.
۲) تعداد اعضای جامعه را اندازهٔ جامعه می‌نامند.
۳) اندازهٔ نمونه کوچک‌تر از اندازهٔ جامعه است.
۴) متغیر گسسته می‌تواند پیوسته هم باشد.

درس ۲ ◄ پاسخ‌نامه تشریحی کافه سوال

۱

جامعه	اندازهٔ جامعه	اندازهٔ نمونه	موضوع مورد مطالعه
کارمندان شرکت	۵۰۰ نفر	۵۰ نفر	میزان کارائهٔ کارمندان در طول یک ماه

۲

الف) کمی پیوسته ب) کمی پیوسته ج) کیفی ترتیبی د) کیفی اسمی

هـ) کیفی اسمی و) کمی گسسته ز) کیفی ترتیبی

۳

$$\text{شاخص تودهٔ بدن} = \frac{\text{وزن به کیلوگرم}}{(\text{قد به متر})^2}$$

وزن شخص را x فرض می‌کنیم.

$$۲۸ = \frac{x}{(۱/۸)^2} \Rightarrow x = ۲۸ \times ۳/۲۴ = ۹۰/۷۲\text{kg}$$

۴

$$\text{شاخص تودهٔ بدن} = \frac{۷۴}{۲^2} = \frac{۷۴}{۴} = ۱۸/۵$$

شاخص تودهٔ بدن این وزن را طبیعی می‌داند، اما می‌دانیم که برای شخصی با قد ۲ متر، وزن ۷۴ کیلوگرم طبیعی نیست.

آدم دومتری با وزن ۷۴ تقریباً یک ریسمان است. قضاوت با شما

درس ۲ ◄ پاسخ‌نامه کلیدی گزینه چند

سؤال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
پاسخ	۳	۴	۲	۴	۲	۲	۲	۱	۳	۴

ایستگاه المپیاد

۱) یک تاس را ۵ بار پرتاب می‌کنیم، به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, 6$ احتمال این‌که بزرگ‌ترین عدد ظاهر شده در این ۵ پرتاب k باشد را محاسبه کنید.

۲) ۴ نفر را به‌طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که دقیقاً دو نفر از آن‌ها در یک روز هفته به دنیا آمده باشند چقدر است؟ ابتدا یک حدس بزنید و سپس محاسبات خود را انجام دهید.

۳) دو عدد کارت داریم، دو روی یکی از آن‌ها قرمز است و دیگری یک روی قرمز و یک روی آبی دارد. یکی از دو کارت را انتخاب و روی میز می‌گذاریم. (احتمال انتخاب دو کارت برابر است) اگر روی کارت انتخاب شده قرمز باشد، احتمال این‌که رنگ پشت آن نیز قرمز باشد چقدر است؟

۴) وحید و سعید و حمید به نوبت تاسی را پرتاب می‌کنند. احتمال این‌که اولین ۶ را وحید بیاورد چقدر است؟

۵) کدام احتمال بزرگ‌تر است؟

الف) احتمال اینکه در ۶ پرتاب یک تاس حداقل یک ۶ بیاید.

ب) احتمال اینکه در ۳۶ پرتاب دوتاس حداقل یک جفت ۶.

خلاصهٔ فصل ۷

فضای نمونه و پیشامد

- به همهٔ حالت‌های ممکن در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه می‌گویند و معمولاً با S نشان می‌دهند و هر زیرمجموعهٔ S را یک پیشامد تصادفی در S می‌گویند.

پیشامد ناسازگار

- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این‌صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم.

اعمال روی پیشامدها

- اگر A و B دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

۱) پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد.

۲) پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد با هم رخ دهد.

۳) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. A' را متمم پیشامد A گویند.

۴) پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد.

احتمال رخ دادن یک پیشامد

- احتمال رخ داد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و داریم: $0\le P(A)\le 1$ و $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

متغیر کیفی

- متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیر کیفی گویند.

۱) متغیر ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد.

۲) متغیر اسمی (غیرترتیبی): متغیر کیفی است که ترتیبی نباشد.

متغیر کمی

- متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، متغیر کمی گویند.

۱) متغیر پیوسته، متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند.

۲) متغیری که پیوسته نباشد، متغیر گسسته است.

جامعه و نمونه

- مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت می‌گویند.
- تعداد اعضای جامعه را اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه گویند.
- بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود را نمونه گویند.
- تعداد اعضای نمونه را اندازهٔ نمونه یا حجم نمونه گویند.

متغیر

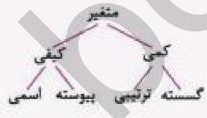
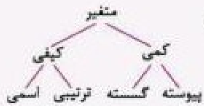
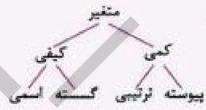
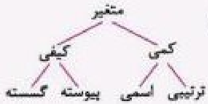
- متغیر، ویژگی‌ای از اعضای جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

احتمال متمم و اجتماع

- $P(A')=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱.	فرض کنید دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد؟ ۱) $\frac{۱۰}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۶}$
۲.	فرض کنید خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. احتمال پیشامد این‌که فرزند دوم دختر باشد و حداقل یک پسر داشته باشد چند است؟ ۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۴}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۸}$
۳.	اعداد طبیعی و فرد کوچک‌تر از ۱۶ را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و یکی از کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم. پیشامد آن‌که عدد روی کارت اول باشد کدام است؟ ۱) {۱،۳،۵،۷،۹،۱۱،۱۳،۱۵} ۲) {۳،۵،۷،۱۱،۱۳} ۳) {۱،۲،۳،۵،۷،۹،۱۱،۱۳} ۴) {۱،۳،۵،۷،۱۱،۱۳}
۴.	فرض کنید یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال پیشامد این‌که تاس عددی غیراول و سکه رو باشد کدام است؟ ۱) $\frac{۸}{۱۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۲}$
۵.	سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، اگر رو بیاید دو سکهٔ دیگر و اگر پشت بیاید یک تاس پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که تاس مضرب ۳ یا حداقل دو سکه رو بیاید چند است؟ ۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۴}$
۶.	یک تاس آبی و یک تاس قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً یکی از تاس‌ها عددی اول و مجموع دو تاس بر ۲ بخش‌پذیر باشد کدام است؟ ۱) $\frac{۸}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۶}$
۷.	در سؤال ۶ احتمال آن‌که نتیجه پرتاب هر دو تاس برابر و عدد روی هر دو تاس اول باشد کدام است؟ ۱) $\frac{۶}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳}{۳۶}$
۸.	در سؤال ۶ احتمال آن‌که اعداد روی دو تاس مضربی از ۳ و مجموع آن‌ها عددی فرد باشد کدام است؟ ۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳۶}$ ۳) $\frac{۳}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۶}$
۹.	فرض کنید دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامد A عبارت است از این‌که دقیقاً یکی از اعداد روی تاس‌ها اول باشد و پیشامد B عبارت است از حاصل جمع دو تاس بیش‌تر از ۷ باشد، احتمال پیشامد $A \cap B'$ کدام است؟ ۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۶}{۳۶}$ ۳) $\frac{۷}{۳۶}$ ۴) $\frac{۸}{۳۶}$
۱۰.	در پرتاب دو تاس فرض کنید C پیشامد اول نبودن هر دو تاس و D پیشامد یکسان بودن دو تاس باشد، حاصل $P(C \cap D)$ کدام است؟ ۱) $\frac{۴}{۳۶}$ ۲) $\frac{۶}{۳۶}$ ۳) $\frac{۹}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳}{۳۶}$
۱۱.	می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز کلاس دهم ریاضی و ۳ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی و ۲ دانش‌آموز کلاس دهم انسانی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد رشتهٔ دو نفر متفاوت باشد؟ ۱) $\frac{۲۰}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳۶}$ ۳) $\frac{۲۶}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۶}$
۱۲.	یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری را می‌پذیرد: B و A. اگر ۳۰ درصد مشتریان کارت اعتباری نوع B و ۵۳ درصد مشتریان کارت نوع A و ۱۰ درصد مشتریان هر دو نوع کارت را داشته باشند، چند درصد مشتریانی که از این فروشگاه خرید می‌کنند هیچ یک از این دو کارت را ندارند؟ ۱) ۲۷ ۲) ۷۳ ۳) ۸۳ ۴) ۳۷

ردیف	تمرین دوره‌ای
۱۳.	اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری‌که $A\cap B=\varnothing$ ، $A\cap C\neq\varnothing$ ، $B\cap C\neq\varnothing$ ، $D\subseteq A$ و $D\cap C=\varnothing$ کدام گزینه درست است؟ ۱) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$ ۲) $P((B\cup C)\cap D)=0$ ۳) $P((B\cup C)-(A\cap C))=0$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح می‌باشد.
۱۴.	اگر ۱۰ نفر که سه نفر از آن‌ها هم رشته هستند در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد سه هم رشته کنار هم نباشند؟ ۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{14}{15}$ ۳) $\frac{1}{90}$ ۴) $\frac{7}{90}$
۱۵.	در سؤال ۱۴ احتمال آنکه یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف، یکی دیگر در جایگاه سوم و دیگری در جایگاه هفتم باشد چقدر است؟ ۱) $\frac{1}{720}$ ۲) $\frac{1}{240}$ ۳) $\frac{1}{120}$ ۴) $\frac{1}{360}$
۱۶.	یک سکه را ۸ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این‌که در پرتاب هفتم برای سومین بار نتیجهٔ پرتاب رو بیاید کدام است؟ ۱) $\frac{15}{2^8}$ ۲) $\frac{30}{2^7}$ ۳) $\frac{35}{2^7}$ ۴) $\frac{15}{2^7}$
۱۷.	در جعبه‌ای ۶ مهره سفید، ۴ مهره آبی، ۲ مهره سبز و ۴ مهره قرمز وجود دارد اگر از این جعبه ۳ مهره انتخاب شود، احتمال آنکه هر سه مهره همرنگ باشند چه‌قدر است؟ ۱) $\frac{10}{560}$ ۲) $\frac{8}{560}$ ۳) $\frac{24}{560}$ ۴) $\frac{28}{560}$
۱۸.	در سؤال ۱۷ احتمال آنکه حداقل ۲ مهره سفید انتخاب شود، چقدر است؟ ۱) $\frac{15}{56}$ ۲) $\frac{17}{56}$ ۳) $\frac{44}{56}$ ۴) $\frac{18}{56}$
۱۹.	در سؤال ۱۷ احتمال آنکه حداکثر ۲ مهره آبی و دقیقاً یک مهره قرمز انتخاب شود، کدام است؟ ۱) $\frac{310}{560}$ ۲) $\frac{306}{560}$ ۳) $\frac{268}{560}$ ۴) $\frac{264}{560}$
۲۰.	معلمی به دانش‌آموزان کلاس ریاضی ۲۰ سوال داده است و به آن‌ها اطلاع داده شده که امتحان نهایی شامل ۱۳ سوال از سوالات داده شده است. اگر دانش‌آموزی پاسخ ۱۱ سوال را به‌دست آورده باشد. احتمال آن‌که در امتحان به حداقل ۹ سوال درست پاسخ دهد، کدام است؟ ۱) $\frac{\binom{13}{9}\binom{7}{4}+\binom{13}{10}\binom{7}{3}+\binom{13}{11}\binom{7}{2}}{\binom{20}{13}}$ ۲) $\frac{\binom{13}{9}\binom{7}{4}+\binom{13}{8}\binom{7}{5}+\binom{13}{10}\binom{7}{3}+\binom{13}{11}\binom{7}{2}}{\binom{20}{13}}$ ۳) $\frac{\binom{11}{9}\binom{9}{4}+\binom{11}{10}\binom{9}{3}+\binom{9}{2}}{\binom{20}{13}}$ ۴) $\frac{\binom{11}{8}\binom{9}{5}+\binom{11}{9}\binom{9}{4}+\binom{11}{10}\binom{9}{3}+\binom{9}{2}}{\binom{20}{13}}$
۲۱.	مرحلهٔ سوم در علم آمار کدام است؟ ۱) سازمان‌دهی و نمایش ۲) تحلیل و تفسیر داده‌ها ۳) جمع‌آوری اعداد و ارقام ۴) نتیجه‌گیری و قضاوت
۲۲.	مجموعه‌ای از افراد یا اشیا که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، چه نام دارد؟ ۱) نمونه ۲) جامعه ۳) عضو جامعه ۴) حجم نمونه

ردیف	تمـــریـــن دوره‌ای
۲۳.	متغیری که می‌تواند هر مقدار بین دو مقدار مشخص را اختیار کند، چه نام دارد؟ ۱) پیوسته ۲) گسسته ۳) ترتیبی ۴) کمی
۲۴.	کدام متغیر گسسته می‌باشد؟ ۱) زمان ۲) قد ۳) دما ۴) تعداد افراد حاضر در کلاس
۲۵.	متغیرهای «گروه خونی، قد، سطح تحصیلات» به ترتیب از راست به چپ از چه نوعی هستند؟ ۱) ترتیبی، پیوسته، غیرترتیبی ۲) ترتیبی، گسسته، غیرترتیبی ۳) غیرترتیبی، پیوسته، ترتیبی ۴) غیرترتیبی، گسسته، ترتیبی
۲۶.	کدام دسته‌بندی برای انواع متغیر درست است؟ ۱)  ۲)  ۳)  ۴) 
۲۷.	کدام گزینه درست می‌باشد؟ ۱) بعضی جاها متغیر گسسته، پیوسته به‌نظر می‌آید. ۲) بعضی متغیرها زمانی به نظر پیوسته هستند ولی بعد ثابت می‌شود که گسسته هستند. ۳) بعضی مواقع می‌توان یک متغیر کیفی را با یک متغیر کمی معادل دانست. ۴) همهٔ موارد
۲۸.	نوع متغیرهای «زبان مادری، نژاد، وزن» به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ۱) کیفی، کیفی، گسسته ۲) کیفی، کیفی، پیوسته ۳) کیفی، کمی، گسسته ۴) کیفی، کمی، پیوسته
۲۹.	تعداد اعضای نمونه را .... و هر یک از افراد یا اشیاء یک جامعه را .... می‌نامند. ۱) حجم نمونه، اندازه جامعه ۲) اندازه نمونه، حجم جامعه ۳) حجم نمونه، عضو جامعه ۴) حجم نمونه، نمونه
۳۰.	اگر $P(A)=0/3$ ، $P(B)=0/7$ و دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آنگاه مقدار $P((A\cup B)')$ برابر کدام گزینه است؟ ۱) ۱ ۲) صفر ۳) $0/7$ ۴) $0/3$
۳۱.	اگر $P(A)=0/8$ و $P(B)=0/7$ ، کدام گزینه درست می‌باشد؟ ۱) $P(A\cap B)\leq 0/2$ ۲) $P(A\cap B)\geq 0/5$ ۳) $P(A\cap B)\leq 0/5$ ۴) $P(A\cap B)\leq 0/4$
۳۲.	فرض کنید ۲۰ میوه داریم که ۶ تای آن‌ها سیب و ۵ تای آن‌ها پرتقال و ۹ تای آن‌ها موز باشد. از بین آن‌ها ۵ میوه را انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه هر ۵ میوه از یک نوع نباشند کدام است؟ ۱) $\frac{133}{\binom{20}{5}}$ ۲) $1-\frac{132}{\binom{20}{5}}$ ۳) $1-\frac{133}{\binom{20}{5}}$ ۴) $\frac{132}{\binom{20}{5}}$

ردیف	تمـــــریـــــن دوره‌ای
۳۳.	در سؤال ۳۲ احتمال آنکه دقیقاً یک موز و حداکثر دو سیب انتخاب شده باشد کدام است؟ ۱) $\dfrac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}\binom{5}{2}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$ ۲) $\dfrac{\binom{9}{1}\binom{5}{4}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$ ۳) $\dfrac{\binom{9}{1}\binom{5}{4}+\binom{9}{1}\binom{6}{2}\binom{5}{2}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$ ۴) $\dfrac{\binom{9}{2}\binom{5}{3}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$
۳۴.	اگر ۵ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک و ۹ کتاب شیمی را کنار یکدیگر در یک ردیف قرار دهیم، احتمال آن‌که هیچ دو کتاب هم موضوعی در کنار هم قرار نگیرند کدام است؟ ۱) $\dfrac{\binom{17}{3}\times\binom{17}{5}\times\binom{17}{9}}{17!}$ ۲) $\dfrac{3!\times 5!\times 9!}{17!}$ ۳) $\dfrac{9!\times\binom{8}{3}}{17!}$ ۴) صفر
۳۵.	تعداد ۲ معلم ریاضی، ۳ معلم فیزیک، ۲ معلم شیمی در یک مدرسه حضور دارند. می‌خواهیم به‌طور تصادفی کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل دهیم، احتمال این‌که حداقل یک معلم فیزیک حضور داشته باشد و از همهٔ معلمان نیز در کمیته حضور داشته باشند چقدر است؟ ۱) $\frac{13}{21}$ ۲) $\frac{19}{21}$ ۳) $\frac{16}{21}$ ۴) $\frac{15}{21}$
۳۶.	اگر پیشامدهای A_1, A_2, A_3 دو به دو ناسازگار باشند و $P(A_1)=3P(A_2)=2P(A_3)$ و $A_1\cup A_2\cup A_3=S$، آن‌گاه $P((A_1\cup A_2)')$ کدام است؟ ۱) $\frac{2}{11}$ ۲) $\frac{3}{11}$ ۳) $\frac{4}{11}$ ۴) $\frac{5}{11}$
۳۷.	اگر $P(A)=2P(B)$ و $P(A\cup B)=1$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{8}$، آن‌گاه $P(A)-P(B')+P(A\cap B)$ کدام است؟ ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{14}{16}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{1}{2}$
۳۸.	اگر یک تاس آبی و یک تاس قرمز را همزمان پرتاب کنیم احتمال این‌که قدرمطلق تفاضل تاس آبی و قرمز بیش‌تر از عدد تاس قرمز باشد کدام است؟ ۱) $\frac{7}{36}$ ۲) $\frac{5}{36}$ ۳) $\frac{6}{36}$ ۴) $\frac{4}{36}$
۳۹.	فرض کنید شخصی با احتمال ۵۰ درصد شلوار، با احتمال ۷۰ درصد پیراهن و با احتمال ۳۰ درصد هر دوی این‌ها را خریداری می‌کند. احتمال این‌که این فرد فقط یک نوع کالا خریداری کند کدام است؟ ۱) ۵۰٪ ۲) ۳۰٪ ۳) ۶۰٪ ۴) ۲۰٪
۴۰.	اگر $U=A\cup B\cup C$ آنگاه کدام دو پیشامد از پیشامدهای زیر متمم یکدیگر می‌باشند؟ الف) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ ب) $((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))-(A\cap B\cap C)$ ج) $(A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B))$ ۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) ج و ب ۴) همهٔ موارد

فصل ۷ پاسخ‌نامهٔ کلیدی تمرین دوره‌ای

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۳	۱۱	۳	۲۱	۲	۳۱	۲
۲	۱	۱۲	۱	۲۲	۲	۳۲	۳
۳	۲	۱۳	۴	۲۳	۱	۳۳	۳
۴	۳	۱۴	۲	۲۴	۴	۳۴	۳
۵	۴	۱۵	۳	۲۵	۳	۳۵	۲
۶	۱	۱۶	۴	۲۶	۲	۳۶	۱
۷	۴	۱۷	۴	۲۷	۴	۳۷	۴
۸	۲	۱۸	۲	۲۸	۲	۳۸	۳
۹	۴	۱۹	۴	۲۹	۳	۳۹	۳
۱۰	۴	۲۰	۳	۳۰	۲	۴۰	۲

یادداشت