درسنامه

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی دهم

قابل استفاده برای

- دانش آموزان پایه دهم دوره دوم متوسطه و
داوطلبان آزمون سراسری دانشگاه‌ها

مؤلفان: کاظم اجلالی
ارشک حمیدی
نوید صفایی

سرشناسه : اجلالی، کاظم، ۱۳۵۶-
عنوان و نام پدیدآور : ریاضی دهم: قابل استفاده برای دانش‌آموزان پایه دهم دوره دوم متوسطه و داوطلبان آزمون سراسری دانشگاه‌ها/ درسنامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های تشریحی / کاظم اجلالی، ارشک حمیدی و نوید صفایی
مشخصات نشر : تهران: نشر الگو.
مشخصات ظاهری : ۳۶۸ ص.۲۲×۲۹س.م.
شابک : ۹-۵۷-۷۹۵۰-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا
یادداشت : فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
یادداشت : بالای عنوان: درسنامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های تشریحی
شناسه افزوده : حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲-
شناسه افزوده : صفایی، نوید، ۱۳۶۵-
شماره کتابخانه ملی : ۳۵۲۹۳۵۱

ریاضی دهم

نشرالگو

www.olgoobooks.ir

ناشر : الگو
مدیر مسئول : محمد حسین متولی
مؤلفان : کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی : الگو
مدیر تولید : مرتضی فخری
نوبت چاپ : سوم - ۱۳۹۶
تیراژ : ۲۵۰۰ نسخه
قیمت : ۲۶۰۰۰ تومان
شابک : ۹-۵۷-۷۹۵۰-۶۰۰-۹۷۸

آدرس انتشارات: تهران، میدان فاطمی، خیابان بیستون، کوچه‌ی دوم الف، پلاک ۹
تلفن: ۸۸۹۹۳۰۳۰

مقدمه‌ی مؤلفان

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضیات سال دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای فصل گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه‌ی این کتاب، تقریبا هر آن‌چه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه‌ی هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «ریاضی دهم سه بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفه‌ی خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد ویراستاری خانم‌ها مریم موحدی‌مهر و عاطفه ربیعی و واحد حروف‌چینی به سرپرستی خانم سکینه مختار که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند و همچنین آقای سجاد حمزه‌پور تشکر و قدردانی کنیم.

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های زیر از مهم‌ترین مجموعه‌های اعداد هستند که با آن‌ها سر و کار داریم:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}$

مجموعه‌ی اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

مجموعه‌ی اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$

مجموعه‌ی اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\}$

مجموعه‌ی اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=\{a|a\notin\mathbb{Q}\}$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته **رابطه‌های زیر بین مجموعه‌های بالا برقرار است:**

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

تست ۱ **کدام‌یک درست نیست؟**

۱) $\mathbb{W}=\mathbb{N}\cup\{۰\}$ ۲) $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$ ۴) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

پاسخ: واضح است که اجتماع اعداد صحیح با اعداد گنگ شامل بعضی از اعداد گویا مانند $\frac{۲}{۳}$ نمی‌شود. بنابراین $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}'\neq\mathbb{R}$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست نیست، بقیه‌ی گزینه‌ها درست‌اند.

تست ۲ **چندتا از اعداد مجموعه‌ی $\{-\frac{۳}{۵},\sqrt{۱/۴۴},\frac{\pi}{۳/۱۴},\frac{\sqrt[۳]{۸۱}}{\sqrt[۳]{۳}},۲\}$ گویا هستند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: اعداد ۲ و $-\frac{۳}{۵}$ به وضوح گویا هستند. اعداد $\sqrt{۱/۴۴}$ و $\frac{\sqrt[۳]{۸۱}}{\sqrt[۳]{۳}}$ هم گویا هستند، زیرا

$$\sqrt{۱/۴۴}=\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰۰}}=\frac{۱۲}{۱۰}=\frac{۶}{۵}\quad,\quad\frac{\sqrt[۳]{۸۱}}{\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{۸۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$$

حاصل تقسیم عددی گنگ بر عددی گویا، عددی گنگ است، بنابراین $\frac{\pi}{۳/۱۴}$ گویا نیست. در نتیجه، چهار تا از عددهای مجموعه‌ی مورد نظر گویا هستند.

توجه: نمادهای $\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Z}^-$، $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^-$، $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^-$ و ... را نیز می‌توان به کار برد. مثلاً $\mathbb{Z}^-$ یعنی مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی. همچنین $\mathbb{Q}^+$ یعنی مجموعه‌ی اعداد گویای مثبت و ... .

بازه‌ها

برخی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی که بسیار کاربرد دارند، بازه‌ها هستند. اگر $a<b$، انواع بازه‌ها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

(a , b) بازه‌ی باز $=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$

$[a , b]$ بازه‌ی بسته‌ی $=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$

$[a , b)$ بازه‌ی نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}|a\le x<b\}$

$(a, b]$ بازه‌ی نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}|a<x\le b\}$

$[a , +\infty)$ بازه‌ی نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}|x\ge a\}$

$(-\infty , a]$ بازه‌ی نیم‌باز $=\{x\in\mathbb{R}|x\le a\}$

$(a , +\infty)$ بازه‌ی باز $=\{x\in\mathbb{R}|x>a\}$

$(-\infty , a)$ بازه‌ی باز $=\{x\in\mathbb{R}|x<a\}$

توجه: کل اعداد حقیقی را با بازه‌ی $(-\infty , +\infty)$ نشان می‌دهیم.

تست ۳ **اگر عدد ۲ در بازه‌ی $[۲a , ۳+a)$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a کدام است؟**

۱) $[-۱,۱)$ **۲)** $(-۱,۱]$ **۳)** $(-۱,۰]$ **۴)** $[۰,۱]$

پاسخ: عدد ۲ باید در نامساوی‌های $۲a\le ۲<۳+a$ صدق کند، پس

$$۲a\le ۲\Rightarrow a\le ۱$$

$$۲<۳+a\Rightarrow a>-۱$$

بنابراین

$$-۱<a\le ۱$$

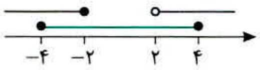
و در نتیجه

$$a\in(-۱,۱]$$

تست ۴ **چند عدد صحیح در مجموعه‌ی $A=[-۴,۴]\cap((-\infty,-۲]\cup(۲,+\infty))$ قرار دارد؟**

۱) ۴ **۲)** ۵ **۳)** ۶ **۴)** ۷

پاسخ: به کمک شکل زیر، مجموعه‌ی داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم:



$$A=[-۴ , -۲]\cup(۲ , ۴]$$

بنابراین اعداد صحیح ۴-، ۳-، ۲-، ۳ و ۴ در مجموعه‌ی A قرار دارند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضایش عددی حسابی باشد، **مجموعه‌ای متناهی** است و مجموعه‌ای که متناهی نباشد، **مجموعه‌ای نامتناهی** است.

نکته هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای متناهی، خودش متناهی است. پس اگر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، خودش هم نامتناهی است. هر مجموعه یا متناهی است یا نامتناهی.

مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی‌اند. همچنین بازه‌ها، مجموعه‌هایی نامتناهی هستند.

تست ۵ **کدام مجموعه متناهی است؟**

۱) مجموعه‌ی اعداد گویای بین صفر و یک
۲) مجموعه‌ی اعداد گنگ بین صفر و یک
۳) مجموعه‌ی مضارب صحیح عدد ۱۱
۴) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد $۱۱^{۱۱}$

پاسخ: مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صحیح هر عدد صحیح، متناهی است.

تست ۶ **از نامتناهی بودن کدام مجموعه نمی‌توان نامتناهی بودن بازه‌ی $[۰,۱]$ را نتیجه گرفت؟**

۱) $\{\frac{k-۱}{k}|k\in\mathbb{N}\}$
۲) $\{\frac{۱}{\sqrt{k}}|k\in\mathbb{N}\}$
۳) $\{\frac{k+۱}{k}|k\in\mathbb{N}\}$
۴) $\{\frac{۱}{\sqrt{k+۱}}|k\in\mathbb{N}\}$

پاسخ: اعضای مجموعه‌ی گزینه‌ی (۱) اعدادی به صورت زیر هستند که زیرمجموعه‌ای نامتناهی از بازه‌ی $[۰,۱]$ تشکیل می‌دهند:

$$۱-\frac{۱}{۱},\quad ۱-\frac{۱}{۲},\quad ۱-\frac{۱}{۳},\quad ۱-\frac{۱}{۴},\quad \dots$$

به همین ترتیب مجموعه‌های گزینه‌های (۲) و (۴) زیرمجموعه‌هایی نامتناهی از بازه‌ی $[۰,۱]$ هستند. بنابراین از نامتناهی بودن این مجموعه‌ها، نامتناهی بودن $[۰,۱]$ نتیجه می‌شود. ولی در گزینه‌ی (۳) اعضای مجموعه عضو بازه‌ی $[۰,۱]$ نیستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس اول:

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱- مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\,,-۲<x\leq ۴\}$ با کدام بازه نمایش داده می‌شود؟

۱) $[-۲,۴]$
۲) $(-۲,۴)$
۳) $[-۲,۴]$
۴) $(-۲,۴]$

۲- حاصل کدام گزینه یک بازه است؟

۱) $(-۲,۲)-(۰,۱)$
۲) $[-۱,۱]-\{۰\}$
۳) $(-۲,-۱)\cup(۱,۲)$
۴) $(-۳,۱)\cap(-۱,۳)$

۳- اگر $A=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$ و $B=(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$، حاصل $A\cap B$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$
۲) $(-۱,۱)$
۳) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$
۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$

۴- حاصل $[-۲,۱)\cup(۰,۲)\cup[۲,۳)$ کدام است؟

۱) $[-۲,۳)$
۲) $[-۲,۳)-[۰,۱]$
۳) $[-۲,۳)-\{۲\}$
۴) $[-۲,۳)-\{۱\}$

۵- اگر $A=(-\infty,۳)$، $B=(-۲,۵]$ و $C=[۳,۴]$، آن‌گاه $(A\cap B)\cup C$ کدام است؟

۱) $(-۲,۵]$
۲) $(۳,۵)$
۳) $(-\infty,۴)$
۴) $(-۲,۴]$

۶- مجموعه‌ی $[-۴,۴)-[-۱,۳]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۷- مجموعه‌ی $((-\infty,۳)\cup[۲,+\infty))-(۱,۴]$ برابر کدام است؟

۱) $\varnothing$
۲) $(-\infty,۱]\cup(۴,+\infty)$
۳) $(۴,+\infty)$
۴) $(-\infty,۱)\cup[۵,+\infty)$

۸- اگر اجتماع دو بازه‌ی $[۰,a)$ و $[۱,۲]$ بازه‌ای بسته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a\leq ۲$
۲) $۰<a\leq ۲$
۳) $a<۲$
۴) $۰<a<۲$

۹- اگر $(b,۴)\cap[-۲,a)=(-\frac{۲}{۳},۱)$، حاصل $(b,a)\cup(-۲a-۱,b)$ کدام است؟

۱) $(-۳,۱)$
۲) $(-۱,\frac{۲}{۳})$
۳) $(۱,۴)$
۴) $(-۳,۱)-\{-\frac{۲}{۳}\}$

۱۰- فرض کنید $S=(۰,۱)$، $A=S-\mathbb{Q}$ و $B=S-\mathbb{Q}'$. اگر $A\cup B=(a,b)$، $b-a$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۱- اگر $A_n=[۱-\frac{۱}{n},۱+\frac{۱}{n}]$، حاصل $A_۲\cup A_۳\cup\ldots\cup A_{۲۰}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱۹}{۲۰},\frac{۲۱}{۲۰}]$
۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$
۳) $[\frac{۱}{۲},\frac{۲۱}{۲۰}]$
۴) $[\frac{۱۹}{۲۰},\frac{۳}{۲}]$

۱۲- اگر $۰<a<۱$، مجموعه‌ی $(-a,a)\cap(-a^۲,a^۲)$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$
۲) $(-a,a)$
۳) $(-a^۲,a^۲)$
۴) $(-a,-a^۲)$

۱۳- هرگاه $۰<a<۱$ یا $a<-۱$ اشتراک دو بازه‌ی $I_۲=[a^{-۱},+\infty)$ و $I_۱=(-\infty,a]$ به ترتیب کدام است؟

۱) $\varnothing,\varnothing$
۲) $\varnothing,[a^{-۱},a]$
۳) $[a^{-۱},a],\varnothing$
۴) $[a^{-۱},a],[a^{-۱},a]$

۱۴- اگر a عددی طبیعی باشد، اشتراک دو بازه‌ی $[-\frac{۲}{a},۳]$ و $(--\frac{۳}{a},۲)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{۲}{a},۳]$
۲) $[-\frac{۲}{a},۲)$
۳) $(-\frac{۳}{a},-\frac{۲}{a}]$
۴) $[-\frac{۳}{a},۰)$

۱۵- اگر اجتماع دو بازه‌ی $(-\infty,۲]$ و $(۲a+۴,+\infty)$ برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی شود، کدام‌یک درست است؟

۱) $a=۱$
۲) $a=-۱$
۳) $a\leq-۱$
۴) $a<-۱$

۱۶- اگر ۲ دربازه‌ی $(a-۲,۳)$ باشد، مجموعه‌ی $(۱,a)\cup(a,۶)$ حداکثر شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۱۷- به ازای چند عدد طبیعی مانند n عدد $\frac{۱}{۴}$ در بازه‌ی $[\frac{۱}{n+۲},\frac{۱}{n+۳})$ قرار دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۸- در باره‌ی بازه‌ی $I=(a,b)$ می‌دانیم $۰,۱\notin I$ و $\sqrt{۳}\in I$. در این صورت چند تا از عبارت‌های زیر درست هستند؟

۱) همه‌ی عضوهای I مثبت هستند.
۲) همه‌ی عضوهای I از یک بزرگ‌تر هستند.
۳) حاصل‌ضرب هر دو عضو از I مثبت است

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۹- اگر عدد a در بازه‌ی $(۲a-۱,۳a+۱)$ قرار داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-۲,۱)$
۲) $(-\frac{۱}{۲},۱)$
۳) $(-\frac{۱}{۲},۲)$
۴) $(-۲,-\frac{۱}{۲})$

۲۰- نمایش بازه‌ی $[-a^۲,۲a^۲+۱]$ روی محور اعداد حقیقی، پاره‌خطی به طول ۲۸ است. نقطه‌ی وسط این پاره‌خط متناظر با کدام عدد است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۱- اگر $S=\{۲a-۱\,|\,(۱-۲a,a-\frac{۱}{۲})\subseteq(-۱,۱)\}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $S=(\frac{۱}{۲},۱)$
۲) $S\subseteq(۰,۱]$
۳) $S=(۰,۱)$
۴) $S\subseteq(-\frac{۱}{۲},۱]$

۲۲- اگر $n\in\mathbb{N}$، مجموعه‌ی $[-\frac{۲}{n},۳]\cap\mathbb{Z}$ حداقل و حداکثر چند عضو دارد؟

۱) حداقل ۲ و حداکثر ۳
۲) حداقل ۳ و حداکثر ۵
۳) حداقل ۴ و حداکثر ۵
۴) حداقل ۴ و حداکثر ۶

۲۳- اگر $[-۴,a+۳]\cap[a-۱,b]=[-۲,a+۲]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۴- اگر $A=(-۱,۱]$، $B=[a,b)$، $A\cap B=[۰,۱]$ و $A\cup B=(-۱,۴)$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۵- اگر $[-۱,۵)\cap[a,۶)=[۲a-۱,۵)$، در بازه‌ی $[-a,a]$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۶- اگر $[a,b]\cap[\frac{a+۳}{۲},\frac{b+۴}{۲}]=[۱,۳]$، مقدار ab کدام است؟

۱) -۶
۲) ۳
۳) -۳
۴) ۶

۲۷- اگر اشتراک دو بازه‌ی $(-\infty,\frac{-m+۱}{۳}]$ و $[m-۳,+\infty)$ مجموعه‌ای تک عضوی باشد، $۲m+۱$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۸
۴) -۱

۲۸- اگر بازه‌ی $[a,۱۰۰]$ شامل فقط ۶ مربع کامل باشد، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(۱۶,۲۵]$
۲) $(۹,۱۶]$
۳) $(۹,۲۵)$
۴) $(۱۶,۲۵)$

۲۹- اگر اشتراک دو بازه‌ی $[-۲,۴)$ و $(a,۲a)$ تهی نباشد، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-۱,۴)$
۲) $(۰,۴)$
۳) $(۰,۲)$
۴) $(۴,+\infty)$

۳۰- اگر اشتراک دو بازه‌ی $[۲a,۲a+۱]$ و $[-۱,۴]$ یک مجموعه‌ی تک عضوی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۳
۴) -۳

۳۱- به ازای چند عدد طبیعی مانند n ، بازه‌ی $[-\frac{۱}{n+۱},\frac{۶}{n}]$ شامل فقط دو عدد صحیح زوج است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

۳۲- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که بازه‌ی $(\frac{۱}{n},\frac{n+۳}{۳})$ فقط شامل یک عدد طبیعی باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۳- اگر $A_n=(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ و n عددی طبیعی باشد، چند عدد در تمام بازه‌های به این شکل قرار دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) صفر

۳۴- فرض کنید $A=(۰,a+۲]$، $B=(۲a-۱,+\infty)$ و می‌دانیم $A\cap B\subset(۱,۳]$. کدام گزینه درست است؟

۱) $a\in(۱,۲)$
۲) $a\in(۳,+\infty)$
۳) $a\in\{۰,۱,۲\}$
۴) $a\in(۰,۱)$

۳۵- اگر $۰<a<b$ و $[a,b]\cap[a^۲,b^۲]=\{\frac{۱}{۱۰۰}\}$، حاصل $\frac{b^۲}{a}$ چند است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰۰}$
۲) $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۶- اگر اعداد صفر و $۳a+۲$ عضو $(a,+\infty)$ باشند، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)$
۲) $(-۱,۱)$
۳) $[۰,۱)$
۴) $(-۱,۰)$

۳۷- کدام‌یک نادرست است؟

۱) بین هر دو عدد گویا، به تعداد دلخواه عدد گویا وجود دارد.
۲) بین هر دو عدد گویا، به تعداد دلخواه عدد گنگ وجود دارد.
۳) بین هر دو عدد گنگ، به تعداد دلخواه عدد گنگ وجود دارد.
۴) بین هر دو عدد گنگ، به تعداد دلخواه عدد صحیح وجود دارد.

۳۸- به کمک کدام مجموعه می‌توان نشان داد بازه‌ی $[۱,۲)$ نامتناهی است؟

۱) $\{\frac{۱}{k}\mid k\in\mathbb{N}\}$
۲) $\{\frac{۱}{\sqrt{k}}\mid k\in\mathbb{N}\}$
۳) $\{۱+\frac{۱}{k}\mid k\in\mathbb{N}\}$
۴) $\{۱-\frac{۱}{k}\mid k\in\mathbb{N}\}$

۳۹- سارا می‌خواهد فهرست تمامی کتاب‌های منتشر شده‌ی ایرانی را به‌دست آورد، ولی فهمیده است این کار بیش از ۹۰ هزار ساعت وقت می‌برد! در نتیجه مجموعه‌ی کتاب‌های منتشره‌ی فارسی .... و مجموعه‌ی کلمات به‌کار رفته در این کتاب‌ها .... است.

۱) متناهی- متناهی
۲) متناهی- نامتناهی
۳) نامتناهی- متناهی
۴) نامتناهی- نامتناهی

۴۰- چند تا از مجموعه‌های زیر متناهی هستند؟

الف) مجموعه‌ی کالاهای تولیدی کارخانه‌های ایران

ب) مجموعه‌ی کلمه‌های (با معنی یا بی‌معنی) که با حروف زبان فارسی می‌توان نوشت.

پ) مجموعه‌ی مربع‌ها به مرکز مبدأ مختصات

ت) مجموعه‌ی کسرهای مثبت با صورت ۱

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۱- کدام‌یک درست است؟

۱) اگر $A\cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی‌اند.
۲) اگر $A\cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.
۳) اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.
۴) اگر $A\cap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یا B می‌توانند متناهی باشند.

۴۲- کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر تمام زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی A متناهی باشند، مجموعه‌ی A متناهی است.
۲) اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.
۳) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی حتماً نامتناهی است.
۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

۴۳- درباره‌ی مجموعه‌ی A از عددهای طبیعی می‌دانیم $۱\in A$ و اگر $n\in A$، آن‌گاه $۳n+۲\in A$، کدام گزینه حتماً درست است؟

۱) $۴۸۵\notin A$
۲) مجموعه‌ی A متناهی است
۳) مجموعه‌ی A نامتناهی است.
۴) $۱۰\notin A$

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه‌ی مرجع

در هر موضوع، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث در آن موضوع زیرمجموعه‌ی آن باشند، **مجموعه‌ی مرجع** نامیده می‌شود.

متمم مجموعه

اگر A زیرمجموعه‌ی دلخواهی از مجموعه‌ی مرجع U باشد، مجموعه‌ی $U-A$ را **متمم** A در U می‌نامند و با A' نشان می‌دهند. پس مجموعه‌ی A' از همه‌ی عضوهایی از U تشکیل شده است که عضو A نیستند.

تست ۱ اگر مجموعه‌ی مرجع $\mathbb{R}$ باشد، کدام‌یک درست است؟

۱) $\mathbb{N}'=\mathbb{Z}^-$
۲) $(۰,+\infty)'=(-\infty,۰]$
۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}=\mathbb{Z}'$
۴) $\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Z}=\mathbb{R}$

پاسخ: متمم اعداد حقیقی مثبت، اعداد حقیقی نامثبت است، بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است. بقیه‌ی گزینه‌ها نادرست هستند.

تست ۲ اگر مجموعه‌ی مرجع $\mathbb{R}$ باشد، مجموع اعداد صحیح عضو متمم مجموعه‌ی $A=(-\infty,-۲]\cup(۲,+\infty)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) −۲
۳) ۲
۴) صفر

پاسخ: با توجه به شکل زیر،

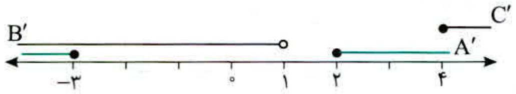
$$A'=(-۲,۲]$$

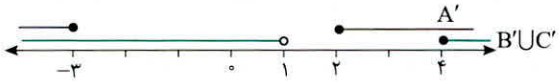
بنابراین اعداد صحیح −۱، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.

تست ۳ اگر مجموعه‌ی مرجع $\mathbb{R}$ باشد، $A=(-۳,۲)$، $B=[۱,+\infty)$ و $C=(-\infty,۴)$، مجموعه‌ی $A'\cap(B'\cup C')$ کدام است؟

۱) $(-۳,۴)$
۲) $(-\infty,۲]$
۳) $[۲,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۳]\cup[۴,+\infty)$

پاسخ: به نمودارهای شکل‌های زیر توجه کنید.





بنابراین

$$A'\cap(B'\cup C')=(-\infty,-۳]\cup[۴,+\infty)$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را با n(A) نشان می‌دهیم.

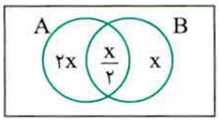
تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

تست ۴

در یک کارخانه، نقایص ۷۰ محصول معیوب بررسـی شـد و معلوم شد تعداد محصولاتی که فقط نقص A را دارند دو برابر تعداد محصولاتی است که فقط نقص B را دارند. هم‌چنین تعداد محصولاتی که هر دو نقص را دارند، نصف تعداد محصولاتی است که فقط نقص B را دارند. چند محصول فقط نقص A را دارند؟

۱) ۱۰　　۲) ۲۰　　۳) ۴۰　　۴) ۵۰



پاسخ: اگر تعداد محصولاتی که فقط نقص B را دارند با x نشان دهیم،

$$x+۲x+\frac{x}{۲}=۷۰\Rightarrow x=۲۰$$

پس تعداد محصولاتی که فقط نقص A را دارند ۴۰ عدد است.

نکته

اگر A و B و C سه مجموعه‌ی متناهی باشند، تعداد اعضای اجتماع آن‌ها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

تست ۵

در یک کلاس ۴۰ نفری تعداد علاقه‌مندان به رشته‌های ورزشی به شکل زیر است:

والیبال و بسکتبال	فوتبال و بسکتبال	فوتبال و والیبال	بسکتبال	والیبال	فوتبال	ورزش
۷	۱۳	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	تعداد علاقه‌مندان

با فرض این‌که همه‌ی دانش‌آموزان حداقل به یکی از رشـته‌های ورزشـی علاقه‌مند هستند، چند نفر فقط به فوتبال علاقه دارند؟

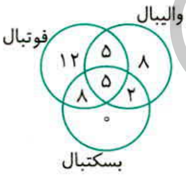
۱) ۱۲　　۲) ۸　　۳) ۵　　۴) صفر

پاسخ: ابتدا تعداد علاقه‌مندان هر ۳ رشته را حساب می‌کنیم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$۴۰=۳۰+۲۰+۱۵-۱۰-۱۳-۷+n(A\cap B\cap C)\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۵$$

با توجه به شکل مقابل، تعداد کسانی که فقط به فوتبال علاقه دارند ۱۲ نفر است.



دو مجموعه‌ی جدا از هم

اگر A و B دو مجموعه باشند که عضو مشترک ندارند، گوییم A و B جدا از هم (مجزا) هستند. در این‌صورت،

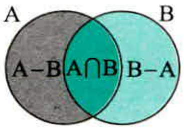
$$n(A\cap B)=۰$$

تست ۶

کدام دو مجموعه جدا از هم نیستند؟

۱) $A\cup B$ و $A\cap B$　　۲) $A-B$ و $B-A$　　۳) $A-B$ و $A\cap B$　　۴) $B-A$ و $A\cap B$

پاسخ: با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس دوم:
متمم یک مجموعه

۴۴- اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی، مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی چند عضو دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۴۵- اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی باشد و $A=\{۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{۳,۵,۷\}$ و $C'=\{۱,۴,۵,۷\}$، مجموعه‌ی $(A\cap B')\cup C$ چند عضو دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۴۶- اگر $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $(-\infty,۲]\cup(۳,+\infty)$ کدام است؟

۱) $(۲,۳]$
۲) $[۲,۳)$
۳) $\varnothing$
۴) $(۲,۳)$

۴۷- اگر $U=(-\infty,۴]$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A=(۱,۲]$، $B=(-۱,۱]$ و $C=(-\infty,۰)$، حاصل $(A'-B')-C'$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱]$
۲) $(۰,۲)$
۳) $(-۱,۲)$
۴) $(-۱,۰)$

۴۸- اگر مجموعه‌ی مرجع $\mathbb{R}$ باشد و $A=\{x|۳x-۲\leq ۲x+۱<۳x+۲\}$ و $B=(-\infty,۰]\cup(۱,+\infty)$ حاصل $A\cap B'$ کدام است؟

۱) $(-۱,۳)$
۲) $(۰,۱]$
۳) $(۰,۱)$
۴) $[-۱,۳]$

۴۹- اگر $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $\mathbb{Q}'\cup(\mathbb{N}\cap(\mathbb{Z}\cup\mathbb{R}))'$ کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$
۲) $\mathbb{Z}$
۳) $\mathbb{Q}$
۴) $\mathbb{R}$

۵۰- کدام عبارت لزوماً درست نیست؟

۱) مجموعه‌ی عددهای گنگ بازه‌ی (۱ , ۱/۰۰۰۱) نامتناهی هستند.
۲) مجموعه‌ی مولکول‌های کلر در محلول NaCl یک مولار، متناهی است.
۳) همواره یکی از مجموعه‌های A یا A' نامتناهی است.
۴) اجتماع $۱۰^۹$ مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

۵۱- اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) A'
۲) B'
۳) $A\cap B'$
۴) $A'\cup B$

۵۲- اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه قطعاً متناهی است؟

۱) $A\cap B'$
۲) $A\cup B$
۳) $A'\cup B$
۴) $A'\cap B$

۵۳- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر همواره جدا از هم هستند؟

۱) $A\cap B$ و $A\cup B$
۲) $B-A$ و $A-B$
۳) $A\cup B$ و A'
۴) $B'-A'$ و A

۵۴- اگر $A=[n-۱,۲n]$ و $B=[۳,۴]$ دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، n چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۵- در نظرسنجی از ۱۰۰ نفر، ۶۵ نفر اعلام کردند که برنامه‌های شبکه‌ی ۱ را می‌بینند و ۴۵ نفر اعلام کردند که برنامه‌های شبکه‌ی ۲ را می‌بینند. اگر ۲۰ نفر برنامه‌های هر دو شبکه را تماشا کنند، چند نفر برنامه‌های هیچ‌یک از دو شبکه را تماشا نمی‌کنند؟

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

۵۶- در بررسی ۴۵ محصول معیوب یک کارخانه که عیوب A و B را دارند، مشخص شد ۳۰ عدد از محصولات، عیب A را دارند و ۲۰ عدد از آن‌ها فقط عیب A را دارند. چند محصول این شرکت فقط عیب B را دارند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲۰

۵۷- اگر $n(A\cup B)=n(A\cap B)+۲۰$ و $n(A)=۲n(B)=۳n(A\cap B)$، مقدار $\frac{n(A-B)}{n(B-A)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸- اگر A و B زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی مرجع U باشند و $n(U)=n(B)+۳۰=۲n(A)+۱۰=۱۰۰$ و $n(B-A)=۵۰$، مقدار $n((A\cup B)')$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۵

۵۹- اگر $n(A)=۲x+۴$، $n(B)=x$ و $n(A\cup B)-n(A\cap B)=x+۲۰$، مقدار $n(B-A)$ کدام است؟

۱) x ۲) ۸ ۳) $x+۱۲$ ۴) ۴

۶۰- از ۱۲۰ دانش‌آموز پایه‌ی دهم ۱۰۵ نفر به ریاضیات و ۹۵ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵

۶۱- در کلاسی که ۲۵ دانش‌آموز دارد، ۱۸ نفر چای دوست دارند و ۱۲ نفر قهوه. حداکثر چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس نه چای دوست دارند نه قهوه؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

۶۲- اگر $n(A)=n(B)=۲n(C)=۲۰$، $n(A\cap B)=n(A\cap C)=۳n(B\cap C)=۶$ و $n(A\cup B\cup C)=۷۰$، مقدار $n(A\cap B\cap C)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

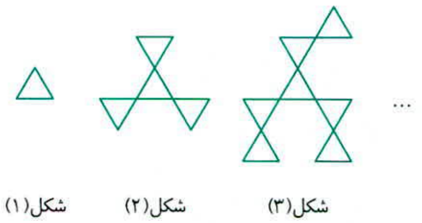
۶۳- در مدرسه‌ای که ۵۰۰ دانش‌آموز دارد، هر دانش‌آموز به فوتبال، والیبال یا بسکتبال علاقه دارد. ۲۶۰ نفر به فوتبال، ۲۶۰ نفر به والیبال، ۷۵ نفر به فوتبال و بسکتبال، ۱۱۵ نفر به والیبال و بسکتبال، ۱۳۰ نفر به فوتبال و والیبال و ۴۵ نفر به هر سه ورزش علاقه دارند. چند دانش‌آموز فقط به بسکتبال علاقه دارند؟

۱) ۴۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۹۰ ۴) ۲۵۵

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس سوم: الگو و دنباله

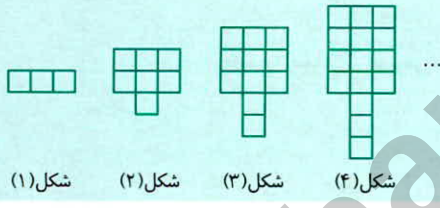
الگو



به شـکل‌های روبه‌رو توجه کنید: شکل (۱) با یک مثلث ساخته شده است. شکل (۲) با اضافه کردن سه مثلث به شکل (۱) ساخته شده است. به همین ترتیب، شکل (۳) با اضافه شدن سه مثلث دیگر به شکل (۲) ساخته شده است. پس می‌توان حدس زد که در شـکل n ام، $۱+۳(n-۱)$ مثلث وجود دارد. در اصطلاح می‌گوییم شـکل‌ها براسـاس یک **الگو** ساخته شده‌اند و اگر a_n تعداد مثلث‌های شکل n ام باشد، $a_n=۱+۳(n-۱)$ را **جمله‌ی عمومی الگو** می‌نامیم. بنابراین $a_۱=۱$، $a_۲=۴$، $a_۳=۷$ و ... به ترتیب تعداد مثلث‌ها در شکل‌های اول، دوم، سوم و ... هستند.

تست ۱

در الگوی مقابل در شکل بیستم چند مربع کوچک وجود دارد؟



۱) ۷۸
۲) ۷۹
۳) ۸۰
۴) ۸۱

پاسخ: شـکل اول از ۳ مربع کوچک تشـکیل شده و هر شکل از اضافه کردن ۴ مربع کوچک به شکل قبلی ساخته می‌شود. یعنی اگر a_n تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام باشد، آن‌گاه

$$a_۲=۳+۴,\quad a_۳=۳+۲\times۴,\quad a_۴=۳+۳\times۴,\quad a_۵=۳+۴\times۴$$

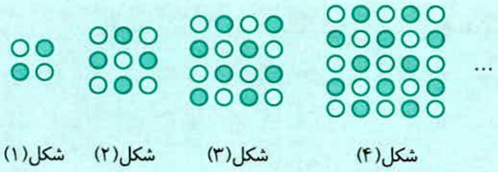
بنابراین

$$a_n=۳+(n-۱)\times۴$$

و در نتیجه شکل n ام، $۴n-۱$ مربع کوچک دارد. پس شکل بیستم از ۷۹ مربع کوچک تشکیل شده است.

تست ۲

در الگوی مقابل در شـکلی که ۷۲ دایره‌ی سفید دارد، چند دایره وجود دارد؟



۱) ۱۲۵
۲) ۱۴۴
۳) ۱۶۹
۴) ۲۲۵

پاسخ: به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	...
تعداد دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵	...
تعداد دایره‌های سفید	۲	۵	۸	۱۳	...

در شکل n ام، $(n+۱)^۲$ دایره وجود دارد. اگر n فرد باشد، $\frac{(n+۱)^۲}{۲}$ دایره‌ی سفید و اگر n زوج باشد، $\frac{(n+۱)^۲+۱}{۲}$ دایره‌ی سفید وجود دارد. هیچ عددی طبیعی مانند n وجود ندارد که

$$\frac{(n+۱)^۲+۱}{۲}=۷۲$$

و اگر

$$\frac{(n+۱)^۲}{۲}=۷۲$$

آن‌گاه $n=۱۱$. بنابراین شکل ۱۱ام است که ۷۲ دایره‌ی سفید دارد و در این شکل $(۱۱+۱)^۲$ یعنی ۱۴۴ دایره وجود دارد.

الگوی خطی

الگوهایی که در آن‌ها اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی باشد، **الگوهای خطی** نامیده می‌شوند. در این الگوها جمله‌ی عمومی به شکل $t_n=an+b$ است.

تست ۳ **در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهارم و شانزدهم به ترتیب برابر ۱۶ و ۲۸ هستند. جمله‌ی دوم این الگو کدام است؟**

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۰

پاسخ: جمله‌ی عمومی الگو $t_n=an+b$ است، پس

$$\begin{cases} t_۴=۱۶ \\ t_{۱۶}=۲۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+b=۱۶ \\ ۱۶a+b=۲۸ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید

$$a=۱ \ , \ b=۱۲$$

بنابراین

$$t_n=n+۱۲ \Rightarrow t_۲=۱۴$$

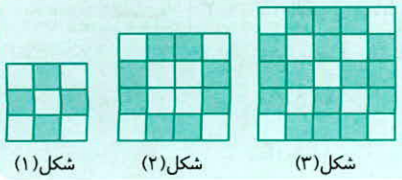
تذکر جمله‌ی عمومی هر الگویی لزوماً خطی نیست.

مثلاً الگوهایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها $t_n=n^۲+n$ یا $t_n=۲^n$ باشد، خطی نیستند.

تست ۴ **در الگوی مقابل، چند مربع رنگی کوچک در شکل هجدهم وجود دارد؟**

۱) ۳۶۱ ۲) ۳۶۰

۳) ۲۸۷ ۴) ۲۸۸



شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳) ...

پاسخ: شکل n ام از $(n+۲)^۲$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $۲(n+۲)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $۲n+۳$ مربع کوچک سفید در این شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(۲۰)^۲$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰ تای آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

نکته به کمک الگوی زیر می‌توان مجموع اعداد ۱ تا n را حساب کرد:

در شکل nام الگوی مقابل، $n(n+۱)$ دایره وجود دارد که نصف آن‌ها رنگ شده‌اند. پس تعداد دایره‌های رنگ شده $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. از طرف دیگر، تعداد دایره‌های رنگی برابر $۱+۲+۳+\cdots+n$ است، پس

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

تست ۵ حاصل $A=\frac{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}{۲+۴+۶+\cdots+۲n}$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{n+۱}$ ۲) $\frac{n+۱}{n}$ ۳) $\frac{۲n-۱}{۲n}$ ۴) $\frac{۳n-۲}{۳n}$

پاسخ: ابتدا مجموع اعداد زوج را حساب می‌کنیم:

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=۲(۱+۲+۳+\cdots+n)=۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}=n(n+۱)$$

حالا مجموع اعداد فرد را به کمک مجموع فوق به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=(۲-۱)+(۴-۱)+(۶-۱)+\cdots+(۲n-۱)$$

$$=۲+۴+۶+\cdots+۲n-(\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{n\text{ تا}})$$

$$=n(n+۱)-n=n^۲$$

بنابراین

$$A=\frac{n^۲}{n(n+۱)}=\frac{n}{n+۱}$$

دنباله

ردیفی از عددها که دارای ترتیب باشند، **دنباله** نامیده می‌شود. عدد اول را جمله‌ی اول دنباله $(a_۱)$، عدد دوم را جمله‌ی دوم دنباله $(a_۲)$، ... و عدد n ام را جمله‌ی n ام دنباله (a_n) می‌نامند. در دنباله‌ی

$$a_۱, a_۲, \dots, a_n, \dots$$

a_n را **جمله‌ی عمومی دنباله** می‌نامند.

تست ۶ در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=n^۲+kn$، جمله‌ی دهم برابر صفر است. جمله‌ی هفتم کدام است؟

۱) -۲۱ ۲) -۲۳ ۳) -۱۹ ۴) -۱۷

پاسخ: چون $a_{۱۰}=۰$ پس

$$۱۰۰+۱۰k=۰\Rightarrow k=-۱۰$$

$$\Rightarrow a_n=n^۲-۱۰n$$

بنابراین

$$a_۷=۷^۲-۱۰\times۷=-۲۱$$

تست ۷ **اعداد طبیعی را طوری دســته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد دو برابر شماره‌ی آن دسته، عدد وجود داشته باشد. عدد اول دسته‌ی یازدهم کدام است؟**

$\{۱,۲\}$: دسته‌ی اول
$\{۳,۴,۵,۶\}$: دسته‌ی دوم
$\{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$: دسته‌ی سوم
$\vdots$

۱) ۱۰۱ ۲) ۱۰۳
۳) ۱۱۱ ۴) ۱۱۳

پاسخ: تعداد اعداد در ده دسته‌ی اول برابر است با

$$۲+۴+۶+\cdots+۲۰=۲(۱+۲+\cdots+۱۰)$$

$$=۲\times\frac{۱۰\times۱۱}{۲}=۱۱۰$$

پس اولین عدد دسته‌ی یازدهم، صد و یازدهمین عدد طبیعی است که همان ۱۱۱ است.

تست ۸ **در یک دنباله، $a_۱=۴$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+۱}=۹-a_n$ برقرار اســت. مجموع بیســت جمله‌ی اول دنباله کدام است؟**

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: به چند جمله‌ی اول دنباله توجه کنید:

$$a_۱=۴\ ,\ a_۲=۹-۴=۵\ ,\ a_۳=۹-۵=۴\ ,\ a_۴=۹-۴=۵$$

بنابراین جملات شــماره‌ی فرد این دنباله برابر ۴ و جملات شــماره‌ی زوج دنباله برابر ۵ هستند. در نتیجه مجموع هر دو جمله‌ی متوالی برابر ۹ است و مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله برابر ۹۰ می‌شود.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس سوم:
الگو و دنباله

۶۴- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل دهم الگوی زیر کدام است؟

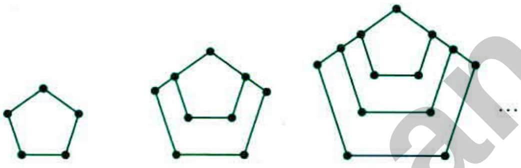
۱) ۳۰
۲) ۳۲
۳) ۳۴
۴) ۳۶

۶۵- شکل‌های زیر به کمک تعدادی چوب کبریت درست شده‌اند. تعداد چوب کبریت‌ها در شکل n ام کدام است؟

۱) ۲n+۱
۲) n+۲
۳) ۳n
۴) ۴n−۱

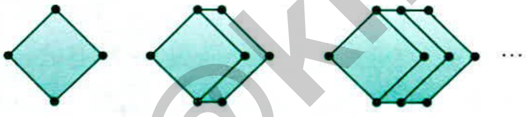
۶۶- تعداد نقاط رنگی روی شکل دهم از الگوی مقابل کدام است؟

۱) ۴۰
۲) ۴۱
۳) ۵۰
۴) ۵۱



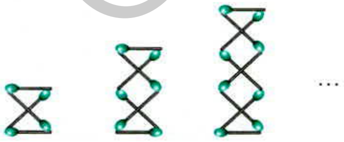
۶۷- تعداد نقاط رنگی روی شکل n ام در الگوی زیر چندتا است؟

۱) ۳n
۲) ۳n+۱
۳) ۳n+۲
۴) ۳n+۳



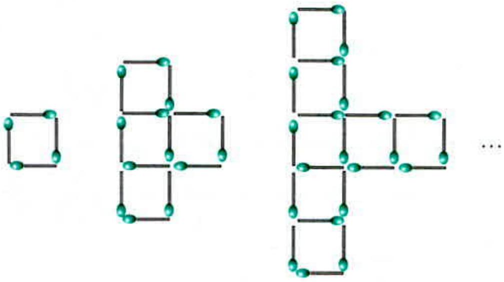
۶۸- در الگوی زیر، در شکل ۲۱ ام چندتا چوب کبریت به کار رفته است؟

۱) ۴۲
۲) ۴۴
۳) ۴۶
۴) ۴۰

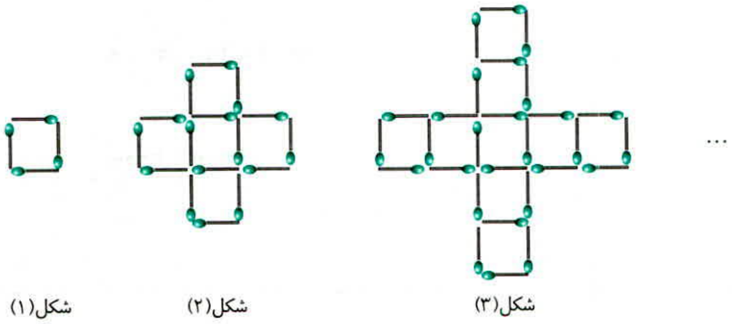


۶۹- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل یازدهم در الگوی زیر چندتا است؟

۱) ۸۴
۲) ۹۲
۳) ۹۴
۴) ۹۶

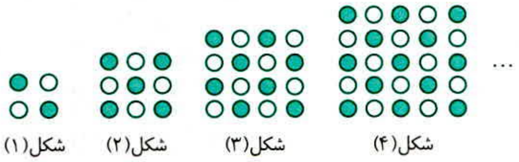


۷۰- در الگوی زیر، در کدام شکل تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۱۰۷ می‌شود؟



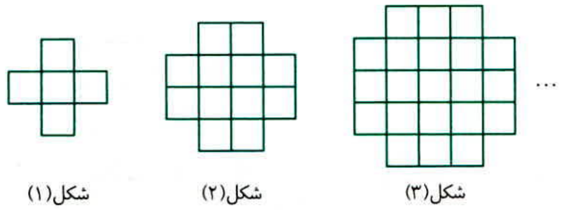
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۷۱- در الگوی زیر، تعداد دایره‌های رنگ شده در شکل سیزدهم چندتاست؟



۱) ۹۸
۲) ۹۹
۳) ۱۱۲
۴) ۱۱۳

۷۲- الگوی زیر از مربع‌های ۱×۱ ساخته شده است. مساحت شکل n ام کدام است؟



۱) $n^{۲}$
۲) $n^{۲}-۴$
۳) $n^{۲}+۴n$
۴) $(n+۲)^{۲}$

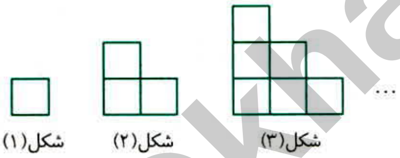
۷۳- حاصل مجموع $۲+۴+۶+...+۲n$ کدام است؟

۱) $n^{۲}+n$
۲) $n^{۲}+۲$
۳) $۲n^{۲}$
۴) $۲n^{۲}-n$

۷۴- حاصل مجموع $۱+۳+۵+...+(۲n-۱)$ کدام است؟

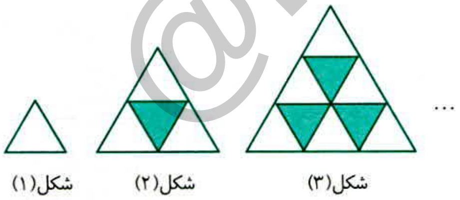
۱) $n^{۲}$
۲) $۲n^{۲}-۱$
۳) $\frac{n^{۲}+n}{۲}$
۴) $\frac{n^{۲}+۱}{۲}$

۷۵- الگوی زیر از مربع‌های ۱×۱ تشکیل شده است. تعداد این مربع‌ها در شکل یازدهم چندتا از تعداد آن‌ها در شکل دهم بیش‌تر است؟



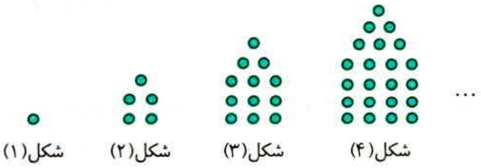
۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۷۶- در الگوی زیر، شکل چندم شامل ۵۵ مثلث رنگ شده است؟



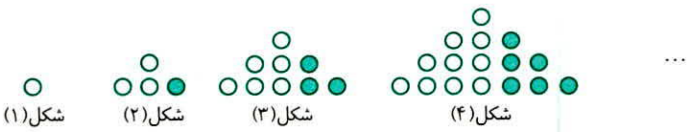
۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۷۷- تعداد نقاط در شکل دهم از الگوی زیر چندتاست؟



۱) ۱۴۵
۲) ۱۵۰
۳) ۱۵۵
۴) ۱۶۰

۷۸- در الگوی روبه‌رو، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با $\frac{۹}{۱۹}$ است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

۸۹- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=۲n-۵۰$، چند جمله‌ی منفی وجود دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۹۰- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=۱۰۰n-n^۲$، چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۹۰ ۴) ۸۹

۹۱- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{۳n-۱}{n+۶}$، چند جمله‌ی کوچک‌تر از ۲/۹ وجود دارد؟

۱) ۱۸۲ ۲) ۱۸۳ ۳) ۱۸۴ ۴) ۱۸۵

۹۲- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد شماره‌ی آن دسته، عدد متوالی وجود داشته باشد. عدد اول دسته‌ی بیستم کدام است؟

$$\underset{\text{دسته‌ی اول}}{\{۱\}}\ ,\ \underset{\text{دسته‌ی دوم}}{\{۲,۳\}}\ ,\ \underset{\text{دسته‌ی سوم}}{\{۴,۵,۶\}},\dots$$

۱) ۱۹۰ ۲) ۱۹۱ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰۱

۹۳- اعداد فرد طبیعی را طوری دسته‌بندی کرده‌ایم که در هر دسته به تعداد دو برابر شماره‌ی آن دسته عدد وجود دارد:

$$\underset{\text{دسته‌ی اول}}{\{۱,۳\}}\ ,\ \underset{\text{دسته‌ی دوم}}{\{۵,۷,۹,۱۱\}}\ ,\ \underset{\text{دسته‌ی سوم}}{\{۱۳,۱۵,۱۷,۱۹,۲۱,۲۳\}},\dots$$

عدد اول دسته‌ی سی و یکم کدام است؟

۱) ۱۸۵۹ ۲) ۱۸۶۱ ۳) ۱۸۶۳ ۴) ۱۸۶۵

۹۴- عددهای طبیعی فرد را به شکل زیر دسته‌بندی کرده‌ایم:

$$(۱),(۳,۵),(۷,۹,۱۱),\dots$$

مجموع جملات اول و آخر دسته‌ی ۲۰ ام کدام است؟

۱) ۱۲۱۹ ۲) ۸۰۰ ۳) ۸۰۲ ۴) ۷۹۸

۹۵- مجموع اعداد سه رقمی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر ۲ است، کدام است؟

۱) ۱۵۴۷۵۰ ۲) ۱۵۴۹۰۰ ۳) ۱۶۵۵۰ ۴) ۱۶۴۸۵۰

۹۶- دنباله‌ای از عدد ۷۷۷ شروع می‌شود و هر جمله‌ی بعدی، ۷ واحد از جمله‌ی قبل از آن کم‌تر است. چند جمله‌ی نخست این دنباله ۷۷۷ , ۷۷۰ , ۷۶۳ , ... هستند. کدام عدد جمله‌ای از این دنباله است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۴ ۳) ۴۳ ۴) ۴۲

۹۷- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n، $a_۱=۳$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+۱}a_n=۲$ برقرار است. حاصل‌ضرب بیست و یک جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۳۰۷۲ ۳) ۱۵۳۶ ۴) ۶۱۴۴

۹۸- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n، $a_۱=۳$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+۱}=a_n+۲$ برقرار است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۱۲۲ ۴) ۱۲۳

۹۹- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n، $a_۱=۱$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطه‌ی $a_{n+۱}=\frac{n+۱}{n}a_n$ برقرار است. مقدار $a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۲

۱۰۰- در یک دنباله با جمله‌ی عمومی a_n، $a_۱=۱$ و به ازای هر $n\ge۲$،

$$a_n=(۱-\tfrac{۱}{۴})(۱-\tfrac{۱}{۹})(۱-\tfrac{۱}{۱۶})\cdots(۱-\tfrac{۱}{n^۲})$$

جمله‌ی دهم دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱۰}{۲۱}$

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و دنباله‌های هندسی

دنباله‌ی حسابی

دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که در آن هر جمله، به‌جز جمله‌ی اول، با اضافه کردن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از آن به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت** دنباله‌ی حسابی می‌نامند.

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ای حسابی $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد، جمله‌ی n اُم یا همان جمله‌ی عمومی دنباله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

تست ۱

اگر در یک دنباله‌ی حسابی $a_۲ = ۷$ و $a_۵ + a_{۱۳} = ۴۰$، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۱}$

پاسخ: اگر جمله‌ی عمومی $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ باشد، آن‌گاه

$$a_۲ = a_۱ + d \Rightarrow a_۱ + d = ۷ \quad (۱)$$

همچنین

$$\begin{cases} a_۵ = a_۱ + ۴d \\ a_{۱۳} = a_۱ + ۱۲d \end{cases} \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۶d = ۴۰ \Rightarrow a_۱ + ۸d = ۲۰ \quad (۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، به دست می‌آید

$$۷d = ۱۳ \Rightarrow d = \frac{۱۳}{۷}$$

نکته

اگر دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n, \ldots$ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی مانند n رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_{n+۱} = a_n + d$$

تذکر

بنابر نکته‌ی فوق، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی را می‌توان از تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی دنباله به‌دست آورد:

$$d = a_۲ - a_۱ = a_۳ - a_۲ = \ldots = a_{n+۱} - a_n$$

تست ۲

در یک دنباله $a_۱ = ۵$ و به ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_{n+۱} = a_n - ۴$. جمله‌ی عمومی این دنباله کدام است؟

۱) $۲n - ۵$ ۲) $n + ۴$ ۳) $-۴n + ۹$ ۴) $-۳n + ۸$

پاسخ: این دنباله دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۴− است. پس جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۵ + (n-۱)(-۴) = -۴n + ۹$$

تذکر الگوی هر دنباله‌ی حسابی، خطی بوده و جمله‌ی عمومی آن به شکل $a_n=An+B$ است که در آن A برابر قدرنسبت است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d=a_۱+nd-d=dn+a_۱-d\Rightarrow a_n=dn+(a_۱-d)$$

تست ۳ جمله‌ی عمومی دنباله‌ای حسابی به شکل $a_n=(k-۲)n^۲-۳kn+۱$ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۶ ۴) ۶

پاسخ: چون جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی باید خطی باشد، پس $k-۲=۰$ و در نتیجه $k=۲$ و $a_n=-۶n+۱$ پس قدرنسبت دنباله -۶ است.

نکته تعداد جملات دنباله‌ای حسابی که جمله‌ی اول آن $a_۱$ و جمله‌ی آخر آن a_n و قدرنسبت آن d باشد، برابر است با

$$\frac{a_n-a_۱}{d}+۱$$

تست ۴ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۷ وجود دارد؟

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۹ ۴) ۱۳۰

پاسخ: این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۹۴ است. پس تعداد این اعداد $\frac{۹۹۴-۱۰۵}{۷}+۱$ است که برابر است با ۱۲۸.

نکته اگر a_m و a_n دو جمله‌ی متمایز از دنباله‌ای حسابی باشند، قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

تست ۵ در یک دنباله‌ی حسابی $a_۳=۷$ و $a_{۱۰}=۲۸$. مقدار $a_۴$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: قدرنسبت دنباله برابر است با

$$d=\frac{۲۸-۷}{۱۰-۳}=۳$$

پس

$$a_۴=a_۳+d=۷+۳=۱۰$$

نکته اگر a_m، a_n، a_r و a_s جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند و $m+n=r+s$، آن‌گاه $a_m+a_n=a_r+a_s$.

تست ۶ در یک دنباله‌ی حسابی $a_۷+a_{۱۳}=۱۴$. مقدار $a_۵+۲a_{۱۰}+a_{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

پاسخ: چون $۲\times۱۰=۵+۱۵=۷+۱۳$، پس

$$a_۷+a_{۱۳}=a_۵+a_{۱۵}=a_{۱۰}+a_{۱۰}=۱۴$$

بنابراین

$$a_۵+a_{۱۵}+۲a_{۱۰}=۱۴+۱۴=۲۸$$

توجه کنید که بدون استفاده از نکته‌ی فوق هم می‌توان مسئله را حل کرد، چون

$$a_۷+a_{۱۳}=۱۴\Rightarrow ۲a_۱+۱۸d=۱۴\Rightarrow a_۱+۹d=۷$$

پس

$$a_۵+a_{۱۵}+۲a_{۱۰}=۴a_۱+۳۶d=۴(a_۱+۹d)=۴\times۷=۲۸$$

واسطه‌ی حسابی

اگر a ، c و b جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، c **واسطه‌ی حسابی** a و b است و

$$c=\frac{a+b}{۲}$$

تست ۷ اگر $x\,,x+۳\,,۳x+۴,\dots$ دنباله‌ای حسابی باشد، واسطه‌ی حسابی x و $x+۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

پاسخ: چون $x+۳$ واسطه‌ی حسابی x و $۳x+۴$ است، پس

$$x+۳=\frac{x+۳x+۴}{۲}\Rightarrow x=۱$$

در نتیجه باید واسطه‌ی حسابی ۱ و ۴ را حساب کنیم که $\frac{۴+۱}{۲}$ است.

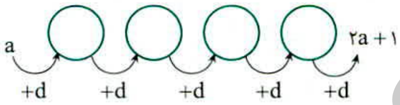
درج واسطه‌ی حسابی

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b>a$. اگر k عدد بین a و b بنویسیم به طوری که حاصل دنباله‌ای حسابی باشد، گوییم بین a و b به تعداد k واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطه‌ی $d=\frac{b-a}{k+۱}$ به‌دست می‌آید، زیرا b جمله‌ی $(k+۲)$اُم دنباله و a جمله‌ی اول آن است.

تست ۸ بین دو عدد a و $۲a+۱$ چهار واسطه‌ی حسابی درج می‌کنیم. اگر اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این عددهای اضافه شده برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟ $(a>۰)$

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم:



$$d=\frac{۲a+۱-a}{۴+۱}=\frac{a+۱}{۵}$$

اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهایی که درج کرده‌ایم برابر ۳d است و در نتیجه

$$\frac{۳(a+۱)}{۵}=۹\Rightarrow ۳a+۳=۴۵\Rightarrow ۳a=۴۲\Rightarrow a=۱۴$$

نکته اگر چند عدد دنباله‌ای حسابی متناهی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به شکل‌های زیر در نظر بگیریم:

سه عدد : $a-d\,,a\,,a+d$ قدرنسبت $=d$

چهار عدد : $a-۳d\,,a-d\,,a+d\,,a+۳d$ قدرنسبت $=۲d$

پنج عدد : $a-۲d\,,a-d\,,a\,,a+d\,,a+۲d$ قدرنسبت $=d$

تست ۹ اگر مجموع سه عدد که دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند برابر ۲۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۶۸ باشد، نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: اعداد را به صورت $a-d\,,a\,,a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها ۳a است. پس $۳a=۲۱$ و در نتیجه $a=۷$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d)=۱۶۸\Rightarrow ۷(۴۹-d^۲)=۱۶۸\Rightarrow ۴۹-d^۲=۲۴\Rightarrow d^۲=۲۵\Rightarrow d=۵\Rightarrow ۲\,,۷\,,۱۲$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

دنباله‌ی هندسی

دنباله‌ی هندسی دنباله‌ای است که جمله‌ی اول آن صفر نیست و در آن هر جمله به‌جز جمله‌ی اول از ضرب کردن عددی ثابت و غیر صفر در جمله‌ی قبل از آن به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت** این دنباله‌ی هندسی می‌نامند.

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدرنسبت r برابر است با

$$a_n=a_۱r^{n-۱}$$

تست ۱۰ در یک دنباله‌ی هندسی $a_۲=۶$ و $a_۵=\frac{۳}{۴}$. جمله‌ی هشتم دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳۲}$

پاسخ: اگر طرفین روابط $a_۲=a_۱r=۶$ و $a_۵=a_۱r^۴=\frac{۳}{۴}$ را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{a_۱r^۴}{a_۱r}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۶}\Rightarrow r^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین از $a_۱r=۶$ نتیجه می‌گیریم

$$a_۱=۱۲, \quad \frac{۱}{۲}a_۱=۶$$

پس جمله‌ی عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱r^{n-۱}=۱۲\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

جمله‌ی هشتم دنباله با قرار دادن $n=۸$ به‌دست می‌آید:

$$a_۸=۱۲\times(\frac{۱}{۲})^۷=۳\times۴\times\frac{۱}{۲^۷}=\frac{۳}{۲^۵}=\frac{۳}{۳۲}$$

نکته **اگر دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_n, \dots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی مانند n، رابطه‌ی زیر برقرار است:**

$$a_{n+۱}=a_nr$$

تذکر بنابر نکته‌ی فوق، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را می‌توان از تقسیم هر دو جمله‌ی متوالی به‌دست آورد:

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\dots=\frac{a_{n+۱}}{a_n}$$

تست ۱۱ در دنباله‌ای $a_۱=۴$ و به ازای هر عدد طبیعی مانند n، $\frac{a_n}{a_{n+۱}}=-۲$. جمله‌ی صدم این دنباله کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲^{۹۷}}$ ۲) $\frac{۱}{۲^{۹۸}}$ ۳) $-\frac{۱}{۲^{۹۹}}$ ۴) $\frac{۱}{۲^{۹۹}}$

پاسخ: در این دنباله $\frac{a_{n+۱}}{a_n}=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین با یک دنباله‌ی هندسی که قدرنسبت آن $-\frac{۱}{۲}$ و جمله‌ی اول آن ۴ است روبه‌رو هستیم. پس جمله‌ی صدم آن برابر است با

$$a_{۱۰۰}=a_۱r^{۹۹}=۴\times(-\frac{۱}{۲})^{۹۹}=-\frac{۱}{۲^{۹۷}}$$

نکته در دنباله‌ی هندسی $\dots, a_۱, a_۲, a_۳$ اگر $m+n=s+t$ ، آن‌گاه
$$a_ma_n=a_sa_t$$

۱۲ تست در یک دنباله‌ی هندسی $a_۳a_{۱۲}=۴$. حاصل عبارت $a_۲a_۵a_{۱۰}a_{۱۳}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

پاسخ: چون $۳+۱۲=۲+۱۳=۵+۱۰$ ، پس
$$a_۲a_۵a_{۱۰}a_{۱۳}=(a_۲a_{۱۳})(a_۵a_{۱۰})=(a_۳a_{۱۲})^۲=۱۶$$

واسطه‌ی هندسی

اگر a ، c و b سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، c را **واسطه‌ی هندسی** a و b می‌نامند و
$$c^۲=ab$$

۱۳ تست اگر $۳^x, ۳^{x^۲-x}, ۳^{x^۲+x}, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی غیر ثابت باشد، کدام عدد واسطه‌ی هندسی x و $x^۲-x$ است؟

۱) $\sqrt{۱۲}$ ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) $\sqrt{۳۲}$ ۴) $\sqrt{۴۸}$

پاسخ: چون $۳^{x^۲-x}$ واسطه‌ی هندسی ۳^x و $۳^{x^۲+x}$ است، پس
$$(۳^{x^۲-x})^۲=۳^x\times۳^{x^۲+x}\Rightarrow ۳^{۲x^۲-۲x}=۳^{x^۲+۲x}$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۲x=x^۲+۲x$$
$$\Rightarrow x^۲=۴x$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=۴\end{cases}$$

پس واسطه‌ی هندسی ۴ و ۱۲ را می‌خواهیم که می‌تواند عدد $\sqrt{۴۸}$ باشد.

درج واسطه‌ی هندسی

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b>a$. اگر k عدد بین a و b را طوری بنویسیم که حاصل، دنباله‌ای هندسی باشد، گوییم بین a و b به تعداد k واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطه‌ی $r^{k+۱}=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید، زیرا b جمله‌ی $(k+۲)$اُم دنباله و a جمله‌ی اول آن است.

۱۴ تست اگر بین ۸ و $x^۳$ دو واسطه‌ی هندسی درج کنیم و مجموع این عددهای اضافه شده برابر ۳۰ باشد، مقدار $x^۲+۲x$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ: قدرنسبت از رابطه‌ی $r^۳=\frac{x^۳}{۸}$ به‌دست می‌آید: $r=\frac{x}{۲}$. دنباله‌ی حاصل به صورت زیر است:
$$۸, ۴x, ۲x^۲, x^۳$$

چون مجموع عددهای اضافه شده برابر ۳۰ است، پس
$$۲x^۲+۴x=۳۰\Rightarrow x^۲+۲x=۱۵$$

تست ۱۵ جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی حسابی، واسطه‌ی هندسی جملات دوم و نهم آن است. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی چند برابر جمله‌ی اول آن است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، جملات دوم، چهارم و نهم اعداد a+d، a+۳d و a+۸d هستند. پس a+۳d واسطه‌ی هندسی a+d و a+۸d است و درنتیجه

$$(a+۳d)^{۲}=(a+d)(a+۸d)\Rightarrow a^{۲}+۶ad+۹d^{۲}=a^{۲}+۹ad+۸d^{۲}\Rightarrow d^{۲}=۳ad\Rightarrow d=۳a$$

نکته اگر چند عدد دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

سه عدد: $\frac{a}{r}, a, ar$ قدرنسبت $=r$

چهار عدد: $\frac{a}{r^{۳}}, \frac{a}{r}, ar, ar^{۳}$ قدرنسبت $=r^{۲}$

پنج عدد: $\frac{a}{r^{۲}}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^{۲}$ قدرنسبت $=r$

تست ۱۶ اگر حاصل‌ضرب پنج عدد که دنباله‌ای هندسی تشکیل می‌دهند برابر $۲\sqrt[۳]{۴}$ باشد، عدد وسطی کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

پاسخ: اگر اعداد را به صورت $\frac{a}{r^{۲}}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^{۲}$ در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{a}{r^{۲}}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^{۲}=۲\sqrt[۳]{۴}\Rightarrow a^{۵}=\sqrt[۳]{۳۲}\Rightarrow a^{۵}=(\sqrt[۳]{۲})^{۵}\Rightarrow a=\sqrt[۳]{۲}$$

نکته اگر دنباله‌ای هم حسابی باشد و هم هندسی، آن‌گاه تمام جملات آن برابرند (دنباله‌ای ثابت است).

تست ۱۷ اگر $a+۱, ۲a-۳, ۳a-b, \ldots$ هم دنباله‌ای هندسی باشد و هم دنباله‌ای حسابی، آن‌گاه حاصل $a^{۲}+b^{۲}$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۵۲ ۴) ۶۵

پاسخ: باید تمام جملات دنباله مساوی یک‌دیگر باشند، پس

$$a+۱=۲a-۳\Rightarrow a=۴$$

$$۳a-b=۲a-۳\Rightarrow b=a+۳\xrightarrow{a=۴}b=۷$$

در نتیجه

$$a^{۲}+b^{۲}=۱۶+۴۹=۶۵$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس چهارم:
دنباله‌های حسابی و دنباله‌های هندسی

۱۰۱- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول برابر ۳ و جمله‌ی بیست و یکم برابر -۳۷، مقدار قدرنسبت کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۵

۱۰۲- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول برابر -۳ و قدرنسبت ۴ است. جمله‌ی سی‌ام دنباله کدام است؟

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۴ ۴) ۱۱۳

۱۰۳- اگر عددهای $x-۲$ و $۲x+۳$ و $x+۴$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، $|x|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۳

۱۰۴- اگر $۳x, ۵x-۲y, ۸x+۳, ۵x-۱۰y$ جملات متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، حاصل $x^۲+y^۲$ چند است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

۱۰۵- در دنباله‌ی حسابی $..., ۲x-۴, ۲x-۱, ۶x$ جمله‌ی چهارم کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۶

۱۰۶- در دنباله‌ی حسابی $..., ۲^{x+y}, ۱۱\times۲^y, ۳\times۲^{x+۱}, ۲^x$، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

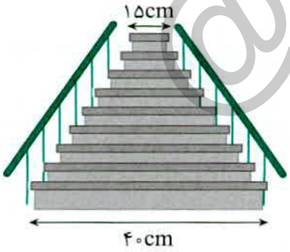
۱۰۷- در یک دنباله، $a_۱=۲$ و برای هر $n\geq۱$، $a_n-a_{n+۱}=۳$. در این دنباله مقدار $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

۱۰۸- اگر در یک دنباله‌ی حسابی $۲a_۲+۳a_۳-۵a_۵=۱۲۰$، مقدار قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۲ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۱۰۹- مطابق شکل، در پلکانی طول پله‌ها به طور یکنواخت $۲/۵$ cm کوتاه می‌شود. اگر طول پله‌ی انتهایی ۱۵cm باشد، این نردبان چند پله دارد؟



۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۱۰
۴) ۹

۱۱۰- در دنباله‌ی حسابی a_n با قدر نسبت ۲۱ می‌دانیم $a_۲+a_۵+a_۸+a_{۱۱}=۳۵$ حاصل $a_۴+a_۷+a_{۱۰}+a_{۱۳}$ چند است؟

۱) ۱۸۲ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۰۳ ۴) ۲۴۵

۱۱۱- جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n=\frac{۴-۳n}{۵}$ است. قدرنسبت دنباله چقدر از جمله‌ی اول کم‌تر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۱۲- در دنباله‌ای حسابی قدرنسبت ۱۲ است و $a_{۱۹}=۱۹$. مقدار $a_۴$ چقدر است؟

۱) -۱۶۰ ۲) -۱۶۱ ۳) -۱۶۵ ۴) -۱۶۷

۱۱۳- در دنباله‌ای حسابی $a_{۶}=۱۶$ و $a_{۱۶}=۶$. قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی چقدر است؟

۱) -۲
۲) -۴
۳) -۳
۴) -۱

۱۱۴- چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی $-۱, ۲, ۵, \dots$ برابر ۱۳۴ است؟

۱) چهل و چهارم
۲) چهل و پنجم
۳) چهل و ششم
۴) چهل و هفتم

۱۱۵- در دنباله‌ی حسابی $a_{۱}, a_{۲}, \dots$ می‌دانیم $a_{۸}=۲۰۰۱$. اگر قدرنسبت این دنباله عددی طبیعی باشد، حداقل مقدار آن چند باشد تا $a_{۱۷}>۱۰^{۴}$؟

۱) ۸۸۷
۲) ۸۸۸
۳) ۸۸۹
۴) ۸۹۰

۱۱۶- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی دهم ۶۳ واحد بیش‌تر از اولین جمله است. اگر جمله‌ی ششم دنباله برابر ۹ باشد، چند جمله از دنباله منفی هستند؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۵

۱۱۷- در یک دنباله‌ی حسابی $a_{۱}=-۳$ و $a_{۵}=۱۷$، نخستین جمله‌ای که از ۲۲۰ بزرگ‌تر می‌شود کدام است؟

۱) ۴۴
۲) ۴۵
۳) ۴۶
۴) ۴۷

۱۱۸- کدام جمله از دنباله‌ی حسابی $x-۲, x+۲, x+۶, \dots$ برابر $x+۲۹۸$ است؟

۱) $a_{۱۰۰}$
۲) $a_{۱۰۱}$
۳) $a_{۱۰۲}$
۴) $a_{۱۰۳}$

۱۱۹- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ می‌دانیم $a_{۱}=۱۵$ و $a_{m}=۱۷\frac{۲}{۳}$ مقدار m چند است؟

۱) ۹
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۹

۱۲۰- در دنباله‌ای حسابی $a_{۲۰}+a_{m}=a_{۱۹}$، حاصل $\frac{a_{۱}}{d}$ چند است؟

۱) $-m+۱$
۲) $-m-۱$
۳) $-m$
۴) m

۱۲۱- اگر به قدرنسبت دنباله‌ای حسابی ۱۰ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی ۷ اُم آن چند واحد اضافه می‌شود؟

۱) ۴۰
۲) ۶۰
۳) ۵۰
۴) ۳۰

۱۲۲- کدام‌یک جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی است؟

۱) $a_{n}=n^{۲}-n$
۲) $a_{n}=۳-۴n$
۳) $a_{n}=n+\frac{۱}{n}$
۴) $a_{n}=n^{۲}-۱$

۱۲۳- کدام‌یک جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی است؟

۱) $a_{n}=\frac{n^{۲}-۲}{n+۱}$
۲) $a_{n}=\frac{n^{۲}-۳n-۴}{n+۱}$
۳) $a_{n}=n(n+۱)$
۴) $a_{n}=n(n-۱)$

۱۲۴- جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت $a_{n}=۲kn(n-۱)-۳n^{۲}+k^{۲}$ است. جمله‌ی سوم این دنباله چقدر است؟

۱) $-\frac{۲۷}{۴}$
۲) $\frac{۲۷}{۲}$
۳) $-\frac{۹}{۴}$
۴) $\frac{۹}{۲}$

۱۲۵- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی $a, ۱-۲a, ۳a-۱, \dots$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}n+\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}n-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۸}n+\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۸}n-\frac{۱}{۲}$

۱۲۶- در دنباله‌ی حسابی $a_{۱}, a_{۲}, \dots$ حاصل کسر زیر چند است؟

$$\frac{a_{۳}}{a_{۲}+a_{۴}}+\frac{a_{۴}}{a_{۳}+a_{۵}}+\dots+\frac{a_{۱۶}}{a_{۱۵}+a_{۱۷}}$$

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) $\frac{۱۳}{۲}$
۳) ۷
۴) ۷/۵

۱۲۷- در دنباله‌ای حسابی می‌دانیم $\begin{cases} a_{۶}-a_{۱}+۲a_{۳}=۱۲ \\ a_{۷}-۲a_{۴}=۳ \end{cases}$ حاصل $a_{۲}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۳

۱۲۸- در دنباله‌ای حسابی می‌دانیم $a_۱+a_۲+a_۳=۲۱$, $a_۱+a_۳+a_۵=۱۰۵$ حاصل $a_۳-a_۲+a_۱$ چند برابر $a_۱$ است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) -۷ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۲۹- در یک دنباله‌ی حسابی $a_۱+a_۳=۱۴$ و $a_۲+a_۶+a_۸=۶۱$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۰- در یک دنباله‌ی حسابی $a_۳+a_۷=۲۰$. حاصل عبارت $a_۲+a_۴+a_۶+a_۸$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۱۳۱- در دنباله‌ی حسابی $۴a_۵^۲-a_۲^۲=۲۱$ و $۲a_۵+a_۲=۷$ قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۲- در یک دنباله‌ی حسابی $\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۳}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_۳}=-\frac{۳}{۲}$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۳- سه زاویه‌ی مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. میانگین زاویه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر این مثلث کدام است؟

۱) ۴۵° ۲) ۶۰° ۳) ۷۵° ۴) ۹۰°

۱۳۴- زاویه‌های یک پنج ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر ۱۲۰° باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۸۴° ۳) ۹۰° ۴) ۹۶°

۱۳۵- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت وتر به ضلع کوچک‌تر این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۳۶- چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۴ وجود دارد؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۲۲۵ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۵۵

۱۳۷- چند عدد سه رقمی وجود دارد که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ی ۳ دارند؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۱

۱۳۸- اگر $\frac{۱}{۲}$ واسطه‌ی حسابی دو عدد $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{x+۲}$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ±۲ ۲) $\pm\sqrt{۲}$ ۳) $\pm\sqrt{۳}$ ۴) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳۹- در جدول زیر، بین دو عدد $\sqrt{۲}-۵$ و $\sqrt{۲}+۵$، چهار واسطه‌ی حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟

$\sqrt{۲}+۵$					$\sqrt{۲}-۵$

۱) $\sqrt{۲}-۴$ ۲) $\sqrt{۲}-۳$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}-۱$

۱۴۰- بین دو عدد a و b تعداد ۸ واسطه‌ی حسابی درج می‌کنیم و قدرنسبت دنباله‌ی به وجود آمده d می‌شود. چند واسطه درج می‌کردیم تا قدرنسبت $\frac{۳d}{۲}$ می‌شد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۱- اگر $a_۱, a_۲, a_۳$ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d تشکیل دهند، آن‌گاه $۲a_۱-۱, ۲a_۲-۱, ۲a_۳-۱$:

۱) دنباله‌ای حسابی تشکیل نمی‌دهند.

۲) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $۲d-۱$ هستند.

۳) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $۲d$ هستند.

۴) دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d-۱$ هستند.

۱۴۲- در دنباله‌ی حسابی $\cdots ,\frac{۷}{۳},\frac{۵}{۳},۱$ جمله‌ی نخست را با $\frac{۸}{۳}$ ، جمله‌ی دوم را با $\frac{۷}{۳}$، جمله‌ی سوم را با $\frac{۶}{۳}$ و ... جمع می‌کنیم. جمله‌ی ۶۵اُم دنباله‌ی جدید چند است؟

۱) $\frac{۱۳۹}{۳}$ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۱۴۳- اگر a_n و b_n جمله‌های عمومی دو دنباله‌ی حسابی باشند، کدام‌یک جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی است؟

۱) $a_n^۲$ ۲) a_n-b_n ۳) a_nb_n ۴) $\frac{۱}{a_n}$

۱۴۴- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای که جملات مشترک دو دنباله‌ی حسابی زیر را تولید می‌کند، کدام است؟

$-۲,۲,۶,\dots$

$۱,۴,۷,\dots$

۱) $۱۲n+۲$ ۲) $۱۲n-۲$ ۳) $۶n-۱$ ۴) $۶n+۵$

۱۴۵- دنباله‌های حسابی زیر را در نظر بگیرید:

$۳,۵,۷,\cdots$

$۲,۵,۸,\cdots$

در میان ۲۰ جمله‌ی نخست این دو دنباله، چند جمله‌ی مساوی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۴۶- دنباله‌های حسابی زیر چند جمله‌ی مشترک سه رقمی دارند؟

$۲,۵,۸,\dots$

$-۱,۵,۱۱,\dots$

۱) ۱۴۵ ۲) ۱۴۹ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۵۲

۱۴۷- دو دنباله‌ی $a_n=۴n-۱$ و $b_n=۵n+۱$ چند جمله‌ی مشترک کم‌تر از ۴۰۰ دارند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۴۸- مجموع سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۸ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۲) ±۲ ۳) ±۳ ۴) ±۴

۱۴۹- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت مثبت، جمله‌های هفتم و نهم معکوس یک‌دیگر هستند. اگر مجموع مربعات قدرنسبت و جمله‌ی هشتم برابر ۳۱ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{۱۵}$ ۳) ۷ ۴) $\sqrt{۵۰}$

۱۵۰- مجموع چهار جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۲۵۰ است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{۱۵}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۱۴}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱۲}{\sqrt{۲}}$

۱۵۱- اگر در دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی عمومی a_n بدانیم $a_{n+۱}+a_{n+۲}+a_{n+۳}=-۶n+۱۲$ حاصل $a_۸+a_{۱۷}$ چند است؟

۱) -۳۸ ۲) -۴۴ ۳) -۳۴ ۴) -۴۰

۱۵۲- درباره‌ی دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی عمومی a_n می‌دانیم

$$a_{m+۴}=۱۸,\quad a_{m+۸}=۲۶$$

حاصل $a_{m+۵}+a_{m+۷}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۴

۱۵۳- اگر a_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ای حسابی باشد، حاصل عبارت $\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\dots+\frac{۱}{a_na_{n+۱}}$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{a_۱a_n}$ ۲) $\frac{n}{a_۱a_{n+۱}}$ ۳) $\frac{n+۱}{a_۱a_n}$ ۴) $\frac{n+۱}{a_۱a_{n+۱}}$

۱۵۴- اگر a_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ای حسابی باشد، مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$A=\frac{d}{\sqrt{a_۱}+\sqrt{a_۲}}+\frac{d}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۳}}+\dots+\frac{d}{\sqrt{a_{n-۱}}+\sqrt{a_n}}$$

۱) $\sqrt{a_n}$
۲) $n\sqrt{a_n}$
۳) $\sqrt{a_n}-\sqrt{a_۱}$
۴) $\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱}$

۱۵۵- جمله‌ی یازدهم دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۹}$ و جمله‌ی اول -۳ کدام است؟

۱) $-۳^{-۱۹}$
۲) $-۳^{-۲۰}$
۳) $-۳^{-۲۱}$
۴) $-۳^{-۲۲}$

۱۵۶- در دنباله‌ی هندسی $a\,,۲a\,,۴a\,,\dots$ نسبت جمله‌ی هفتم به جمله‌ی سوم کدام است؟

۱) $a^۲$
۲) $a^۴$
۳) ۸
۴) ۱۶

۱۵۷- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی a_n می‌دانیم $a_{n+۱}=\frac{۳}{۴}a_n$ ، اگر $a_۳=۲$ حاصل $a_{۲۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۵۲}}$
۲) $\frac{۳^{۲۵}}{۲^{۴۹}}$
۳) $\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۵۳}}$
۴) $\frac{۳^{۲۶}}{۲^{۵۱}}$

۱۵۸- در یک دنباله، جمله‌ی اول برابر ۴ و برای هر $n>۱$، $\frac{a_n}{a_{n+۱}}=۲$. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۸}$
۲) $\frac{۱}{۶۴}$
۳) ۱۰۲۴
۴) ۲۰۴۸

۱۵۹- کدام‌یک از دنباله‌های زیر نمی‌تواند دنباله‌ای هندسی باشد؟

۱) $۲^۳, ۴^۴, ۲\times۱۶^۳$
۲) $\sqrt{۲}-۱, \sqrt{۲}+۱, (\sqrt{۲}+۱)^۳$
۳) $\sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۶}$
۴) $\sqrt{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{\sqrt{۳}}{۲۷}$

۱۶۰- جمعیت یک روستا ۵۰۰۰ نفر است. اگر هر سال به اندازه‌ی $\frac{۱}{۵}$ جمعیت سال قبل از جمعیت این روستا کم شود، پس از ۴ سال چند نفر ساکن روستا هستند؟

۱) ۱۰۲۴
۲) ۲۰۴۸
۳) ۱۲۸۰
۴) ۲۵۶۰

۱۶۱- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت با جمله‌های مثبت، اگر جمله‌ی چهارم برابر با مجذور جمله‌ی اول باشد چندمین جمله‌ی دنباله با مکعب جمله‌ی اول برابر است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۱۶۲- در دنباله‌های هندسی زیر اگر $\frac{m}{n}=۲$، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

$x, xy, m, \dots$

$y, yx, n, \dots$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۶۳- اگر عددهای $\frac{۵+۲\sqrt{۶}}{۱۶}, x, ۵-۲\sqrt{۶}$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{-۱}{۴}$
۴) گزینه‌های (۱) و (۳)

۱۶۴- اگر $۲^{۲x-۱}, ۴^{۴x}, ۸^{۸x+۱},\dots$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $-\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $-\frac{۱}{۵}$

۱۶۵- اگر قدرنسبت دنباله‌ی هندسی $a_۱, a_۲, a_۳,\dots$ برابر ۹ باشد، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی $۳\sqrt{a_۱}, ۳\sqrt{a_۲}, ۳\sqrt{a_۳},\dots$ کدام است؟ $(a_n>۰)$

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۹
۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۶۶- اگر $x\,,\,y\,,\,۲\,,\,z\,,\,t$ جمله‌های دنباله‌ای هندسی باشند، حاصل $\frac{x^{۲}t^{۲}}{yz}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۶۷- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم $a_{۱}a_{۶}=۱۸$ و $a_{۲}a_{۴}=۹$. مقدار $a_{۷}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

۱۶۸- در دنباله‌ای هندسی $a_{۱۲}a_{۱۳}=۵۴$. اگر $a_{۵}=\frac{۱}{۲}$، مقدار $a_{۲۰}$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۸ ۴) ۹۸

۱۶۹- در دنباله‌ای هندسی اگر $a_{۴}a_{۸}=۳$، حاصل عبارت $a_{۳}a_{۵}a_{۷}a_{۹}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۲۷

۱۷۰- در دنباله‌ای هندسی می‌دانیم $a_{m}a_{m-۱}a_{m+۴}=۸^{m+۲}$ حاصل $a_{۲}-a_{۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۷۱- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $-\frac{۱}{۲}$، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات نهم و دهم است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۸

۱۷۲- حاصل‌ضرب ۲۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $\frac{۱}{۳},۱,۳,...$ کدام است؟

۱) $۳^{۱۸۰}$ ۲) $۳^{۱۷۰}$ ۳) $۳^{۱۶۰}$ ۴) $۳^{۱۸۵}$

۱۷۳- حاصل‌ضرب هفت جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۱۲۸ است. جمله‌ی وسطی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۷۴- در دنباله‌ای هندسی $t_{۱}t_{۲}\cdots t_{۹}=۸$. حاصل $t_{۲}t_{۴}t_{۶}t_{۸}$ چند است؟

۱) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۴\sqrt[۳]{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt[۳]{۴}$

۱۷۵- اگر عددهای جدول زیر، جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، حاصل $\frac{xy}{z}$ چند است؟

۱۰۸	z	y	۴	x

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۱۷۶- بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و $۱۶\sqrt{۲}$، هفت واسطه‌ی هندسی درج می‌کنیم. مربع قدرنسبت دنباله‌ی حاصل کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۷۷- بین اعداد مثبت a و b تعداد ۸ واسطه‌ی هندسی درج می‌کنیم. اگر ۱۰ واسطه درج می‌کردیم، قدرنسبت نصف حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالتی که ۸ واسطه درج می‌کنیم، کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) $۳۲\sqrt{۲}$ ۴) ۱۶

۱۷۸- در دنباله‌ای هندسی مجموع جملات اول و سوم سه برابر دومین جمله است. مجموع جملات پنجم و اول چند برابر جمله‌ی سوم است؟

۱) ۷ ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۱۷۹- در دنباله‌ای هندسی با جمله‌ی عمومی a_{n}، قدرنسبت $۱۰^{-۱۲}$ و جمله‌ی اول $۱۰^{-۲۶}$ ، حاصل عبارت $\frac{a_{۲۰۱۷}^{۲}}{a_{۳۰۳۰}a_{۱۰۰۴}}$ چند است؟

۱) $۱۰^{-۳۸}$ ۲) $۱۰^{-۱۴}$ ۳) $۱۰^{-۵۲}$ ۴) ۱

۱۸۰- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جمله‌ی متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

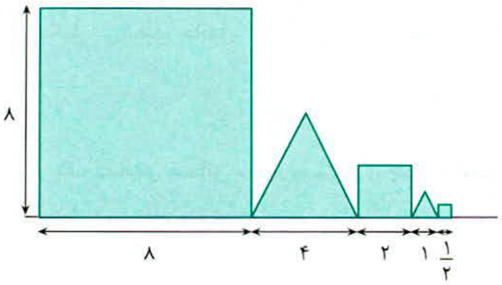
۱۸۱- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت بزرگ‌تر از یک تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله از کدام معادله به‌دست می‌آید؟

۱) $r^۴+r^۲-۱=۰$ ۲) $r^۴-r^۲-۱=۰$ ۳) $r^۴-r-۱=۰$ ۴) $r^۴+r-۱=۰$

۱۸۲- جمله‌ی اول دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت ۶۲۵ برابر جمله‌ی پنجم آن است. مجموع ۴ جمله‌ی نخست دنباله ، چند برابر جمله‌ی پنجم آن است؟

۱) ۷۸۱ ۲) ۷۷۵ ۳) ۷۸۰ ۴) ۷۶۵

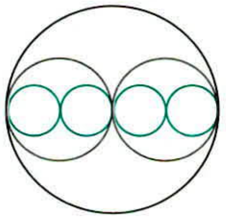
۱۸۳- در شکل روبه‌رو محیط مربع و محیط مثلث در مرحله‌ی n اُم برابر است با



۱) $\frac{۱}{۲^{۲n-۷}}, \frac{۳}{۴^{n-۲}}$ ۲) $\frac{۱}{۲^{۲n-۵}}, \frac{۳}{۴^{n-۱}}$

۳) $\frac{۱}{۲^{۳n-۷}}, \frac{۲}{۴^{n-۱}}$ ۴) $\frac{۱}{۲^{۳n-۵}}, \frac{۳}{۴^{n-۲}}$

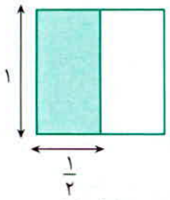
۱۸۴- در شکل مقابل دایره‌ای به مساحت $S_۱$ دیده می‌شود. داخل این دایره، دو دایره رسم شده است که مجموع مساحت آن‌ها $S_۲$ است. اگر این کار را مطابق شکل ادامه دهیم و مجموع مساحت‌های n دایره‌ی رسم شده در مرحله‌ی n اُم را S_n در نظر بگیریم، حاصل $\frac{S_۱}{S_۷}$ کدام است؟



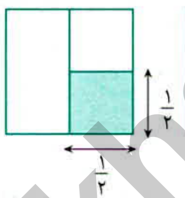
۱) ۱۶ ۲) ۳۲

۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

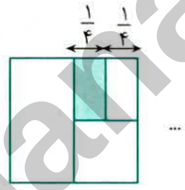
۱۸۵- در الگوی زیر، برش شکل رنگی در گام دهم .... و مساحت آن برابر .... است.



شکل (۱)



شکل (۲)

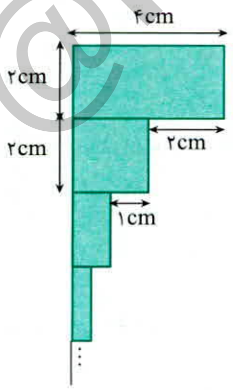


شکل (۳)

۱) افقی، $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ ۲) افقی، $\frac{۱}{۲^۹}$

۳) عمودی، $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ ۴) عمودی، $\frac{۱}{۲^۹}$

۱۸۶- در شکل روبه‌رو در هر گام، طول مقطع نصف می‌شود. مساحت مقطع درگام چندم برابر با $۲^{-۱۰۰}\text{cm}^۲$ است؟



۱) ۱۰۴

۲) ۱۰۵

۳) ۱۰۶

۴) ۱۰۷

۱۸۷- اعداد $a\,,\,۶\,,\,b$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر ۸ واحد به b اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ی هندسی می‌سازند. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ یا ۱۸ ۲) ۲- یا ۱۸ ۳) ۲ یا ۱۲ ۴) ۳ یا ۱۲

۱۸۸- اگر $a\,,b\,,c\,,\ldots$ هم دنباله‌ای حسابی باشد و هم دنباله‌ای هندسی، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۳]{abc}}{a+b+c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

۱۸۹- اگر اعداد $x+۴$، $۲x+y$ و $۲y+x$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۹۰- اعداد a, b, c سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی‌اند. عدد k را به هر سه عدد اضافه می‌کنیم و اعداد جدید هم دنباله‌ای هندسی تشکیل می‌دهند. حاصل $\frac{a-b+c}{a+b+c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۹۱- در یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲۷، جملات هفتم، پانزدهم، بیست و سوم، سی و یکم و ... دنباله‌ای .... با قدرنسبت .... تشکیل می‌دهند.

۱) هندسی، ۲۱۶ ۲) حسابی، ۲۱۶ ۳) هندسی، ۲۷ ۴) حسابی، ۲۷

۱۹۲- جملات سوم، هفتم و دهم دنباله‌ی حسابی $a_n=۲n+a$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جمله‌ی نخست دنباله‌ی حسابی کدام است؟

۱) -۳۸ ۲) -۳۶ ۳) -۳۲ ۴) -۲۶

۱۹۳- در یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت، جملات دوم، ششم و چهاردهم به ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله‌ی هندسی‌اند. جمله‌ی پنجم دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی چندم دنباله‌ی حسابی برابر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۶۲ ۴) ۶۴

۱۹۴- جملات دوم، پنجم و دوازدهم دنباله‌ای حسابی، سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۹۵- جمله‌ی ۱۰۱اُم دنباله‌ی حسابی $-۲۴, -\frac{۹۵}{۴}, \dots$ با جمله‌ی هشتم دنباله‌ی هندسی $۱۲۸, \dots$ برابر است. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی چند است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۲

۱۹۶- چند تا از جملات زیر درست است؟

- اگر تمام جملات دنباله‌ی حسابی را با عددی ثابت جمع کنیم، دنباله حسابی می‌ماند.
- اگر تمام جملات دنباله‌ی حسابی را در عددی غیر صفر ضرب کنیم، دنباله حسابی می‌ماند.
- اگر تمام جملات دنباله‌ی هندسی را در عددی غیر صفر ضرب کنیم، دنباله هندسی می‌ماند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۷- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی اضلاع، دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند و مساحت مثلث واسطه‌ی هندسی طول وتر و محیط مثلث است. طول وتر کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶}$ ۲) $۵\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ ۳) $۳\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۹۸- نسبت واسطه‌ی حسابی دو عدد مثبت به واسطه‌ی هندسی آن‌ها برابر $\frac{۳}{\sqrt{۸}}$ است. نسبت دو عدد کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

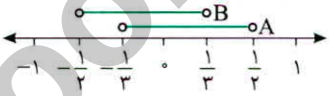
۱- گزینه‌ی ۴

۲- گزینه‌ی ۴ در گزینه‌ی (۴):

$$(-۳, ۱)\cap(-۱, ۳)=(-۱, ۱)$$

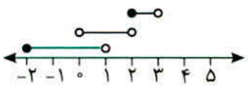
بنابراین حاصل یک بازه است.

۳- گزینه‌ی ۳ بازه‌های A و B را روی محور نشان می‌دهیم:

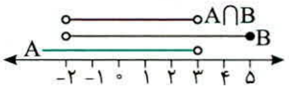


از روی شکل معلوم است که $A\cap B=(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$.

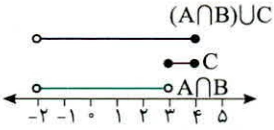
۴- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل زیر، اجتماع سه بازه برابر $[-۲, ۳)$ است.



۵- گزینه‌ی ۴ مجموعه‌ی $A\cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:



پس $A\cap B=(-۲, ۳)$. اکنون اجتماع دو مجموعه‌ی $A\cap B$ و C به شکل زیر است:

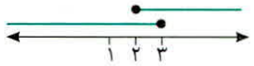


یعنی

$$(A\cap B)\cup C=(-۲, ۴]$$

۶- گزینه‌ی ۲ این مجموعه شامل اعداد صحیح ۴−، ۳− و ۲− است.

۷- گزینه‌ی ۲ به شکل زیر توجه کنید:



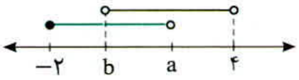
پس

$$(-\infty, ۳)\cup[۲, +\infty)=\mathbb{R}$$

بنابراین می‌خواهیم $\mathbb{R}-(۱, ۴]$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty, ۱]\cup(۴, +\infty)$ است.

۸- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $a>۰$. اگر $a>۲$، اجتماع دو بازه برابر $[۰, a)$ می‌شود که بازه‌ای نیم باز است. در نتیجه $a\leq ۲$. در این صورت اجتماع دو بازه‌ی مورد نظر $[۰, ۲]$ است، که بازه‌ای بسته است.

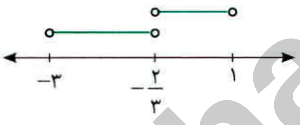
۹- گزینه‌ی ۴ با توجه فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود $(b, ۴)\cap[-۲, a)=(b, a)$



بنابراین $a=۱$, $b=-\frac{۲}{۳}$، اکنون می‌توان نوشت

$$(b, a)\cup(-۲a-۱, b)=(-\frac{۲}{۳}, ۱)\cup(-۳, -\frac{۲}{۳})$$

$$=(-۳, ۱)-\{-\frac{۲}{۳}\}$$



۱۰- گزینه‌ی ۳ مجموعه‌ی A، مجموعه‌ی عددهای گنگ در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است و مجموعه‌ی B، مجموعه‌ی عددهای گویا در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است. بنابراین $A\cup B$ مجموعه‌ی همه‌ی عددهای حقیقی در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است، یعنی $A\cup B=(۰, ۱)$.

بنابراین $a=۰$ و $b=۱$ و $b-a=۱$.

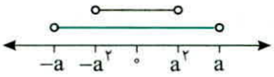
۱۱- گزینه‌ی ۲ این بازه‌ها به شکل زیر هستند:

$$A_۲=[\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}], \quad A_۳=[\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳}], \quad \dots, \quad A_{۲۰}=[\frac{۱۹}{۲۰}, \frac{۲۱}{۲۰}]$$

واضح است که بازه‌ی $A_۲$ شامل تمام بازه‌های دیگر است. پس اجتماع تمام این بازه‌ها همان $A_۲$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۳ چون $۰<a<۱$، پس $a^۲<a$ و $-a<-a^۲$، بنابراین

$$(-a, a)\cap(-a^۲, a^۲)=(-a^۲, a^۲)$$



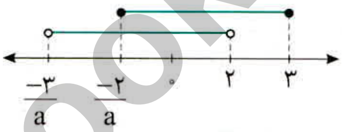
۱۳- گزینه‌ی ۱ در هر مورد باید عددهای a و $\frac{۱}{a}$ را باهم مقایسه کنیم:

حالت اول اگر $۰<a<۱$ آن‌گاه $۰<a<۱<\frac{۱}{a}$. در نتیجه اشتراک دو بازه تهی است.

حالت دوم اگر $a<-۱$، آن‌گاه $a<\frac{۱}{a}<۰$. در نتیجه باز هم اشتراک دو بازه تهی است.

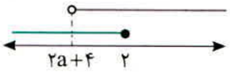
۱۴- گزینه‌ی ۲ چون a عددی طبیعی است، پس $a\geq ۱$.

بنابراین $-\frac{۳}{a}<-\frac{۲}{a}<۰$. در نتیجه، دو بازه به شکل زیر هستند:



بنابراین اشتراک دو بازه $[-\frac{۲}{a},۲)$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ اگر $۲a+۴\leq ۲$، مطابق شکل زیر اجتماع دو بازه برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود.



بنابراین $a\leq -۱$.

۱۶- گزینه‌ی ۲ چون $a-۲<۲<۳$، پس $a<۴$. هم‌چنین

$$(۱,a)\cup(a,۶)=(۱,۶)-\{a\}$$

در نتیجه، در مجموعه‌ی بالا حداکثر عددهای صحیح ۲, ۳, ۴, ۵ وجود دارند (به شرطی که a یکی از این عددهای صحیح نباشد).

۱۷- گزینه‌ی ۱ عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۳}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۳}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۳>۴\Rightarrow n>۱$$

عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۲}$ بیش‌تر نباشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۲}\geq\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۲\leq ۴\Rightarrow n\leq ۲$$

بنابراین n فقط می‌تواند برابر ۲ باشد.

۱۸- گزینه‌ی ۴ اگر عددی منفی عضو I باشد، با توجه به این‌که $\sqrt{۳}\in I$ نتیجه می‌گیریم که صفر باید عضوی از I باشد که نادرست است. در نتیجه عضوهای I مثبت هستند. هم‌چنین اگر عددی کم‌تر از ۱ عضو I باشد، با توجه به این‌که $\sqrt{۳}\in I$، نتیجه می‌گیریم ۱ عضوی از I است، که نادرست است.
اکنون با توجه به این‌که هر عضو I مثبت است، ضرب هر دو عضو I نیز مثبت است.

۱۹- گزینه‌ی ۲ چون a عضو بازه است، پس

$$۲a-۱<a<۳a+۱$$

از نامعادله‌ی $۲a-۱<a$ نتیجه می‌شود $a<۱$ و از نامعادله‌ی $a<۳a+۱$ نتیجه می‌شود $a>-\frac{۱}{۲}$. بنابراین $-\frac{۱}{۲}<a<۱$ و در نتیجه $a\in(-\frac{۱}{۲},۱)$.

۲۰- گزینه‌ی ۳ طول پاره‌خط برابر $(۲a^۲+۱)-(-a^۲)$ است، پس

$$۳a^۲+۱=۲۸\Rightarrow a^۲=۹$$

نقطه‌ی وسط پاره‌خط متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{۲a^۲+۱+(-a^۲)}{۲}=\frac{a^۲+۱}{۲}=۵$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ برای این‌که بازه‌ی $(۱-۲a,a-\frac{۱}{۲})$ زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $(-۱,۱)$ باشد، باید

$$-۱\leq ۱-۲a<a-\frac{۱}{۲}\leq ۱$$

از نابرابری سمت چپ به‌دست می‌آید $a\leq ۱$ و از نابرابری وسط معلوم می‌شود $a>\frac{۱}{۲}$. پس $a\in(\frac{۱}{۲},۱]$. به ازای این مقادیر a، نابرابری سمت راست درست است و $۲a-۱\in(۰,۱]$. پس

$$S\subseteq(۰,۱]$$

۲۲- گزینه‌ی ۴ در واقع می‌خواهیم بدانیم به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n چند عدد صحیح در بازه‌ی $I=[-\frac{۲}{n},۳]$ قرار می‌گیرد.
اگر $n=۱$، آن‌گاه $I=[-۲,۳]$. پس ۶ عدد صحیح در I قرار دارد.
اگر $n=۲$، آن‌گاه $I=[-۱,۳]$. پس ۵ عدد صحیح در I قرار دارد.
اگر $n\geq ۳$ ، آن‌گاه ۴ عدد صحیح در I قرار دارد.
پس حداقل ۴ و حداکثر ۶ عدد صحیح در I قرار دارد.

۲۳- گزینه‌ی ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد ۲− شروع می‌شود، پس باید $a-۱=-۲$ و در نتیجه $a=-۱$. پس تساوی به صورت زیر است:

$$[-۴,۲]\cap[-۲,b]=[-۲,۱]$$

چون حاصل اشتراک به عدد ۱ ختم شده است، پس $b=۱$ و در نتیجه

$$a-b=-۲$$

۲۴- گزینه‌ی ۴ از تساوی $(-۱,۱]\cap[a,b)=[۰,۱]$ معلوم می‌شود $a=۰$. از تساوی $(-۱,۱]\cup[a,b)=(-۱,۴)$ معلوم می‌شود $b=۴$. بنابراین $a+b=۴$.

۲۵- گزینه‌ی ۳ سه حالت ممکن است وجود داشته باشد:

حالت اول $a=۲a-۱=-۱$ که غیر ممکن است.

حالت دوم $۲a-۱=-۱$ که در نتیجه $a=۰$. پس

$$[-۱,۵)\cap[۰,۶)=[-۱,۵)$$

که تساوی فوق درست نیست.

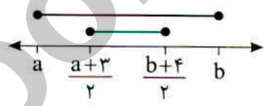
حالت سوم $۲a-۱=a$ که در نتیجه $a=۱$ و

$$[-۱,۵)\cap[۱,۶)=[۱,۵)$$

که تساوی فوق درست است. بنابراین بازه‌ی $[-a,a]$ با بازه‌ی $[-۱,۱]$ برابر و شامل سه عدد صحیح است.

۲۶- گزینه‌ی ۳ چهار حالت ممکن است وجود داشته باشد:

حالت اول

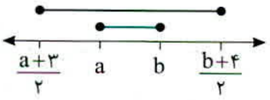


$$\frac{a+۳}{۲}=۱\Rightarrow a=-۱\ ,\ \frac{b+۴}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow b=۲\Rightarrow[-۱,۲]\cap[۱,۳]=[۱,۲]$$

که طبق صورت مسئله صحیح نیست.

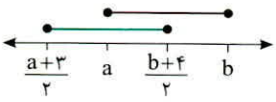
حالت دوم



$$a=۱, b=۳\Rightarrow[۱,۳]\cap[۲,۳/۵]=[۲,۳]$$

باز هم طبق صورت مسئله صحیح نیست.

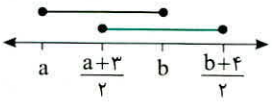
حالت سوم



$$a=۱,\frac{b+۴}{۲}=۳\Rightarrow b=۲\Rightarrow[۱,۲]\cap[۲,۳]=\{۲\}$$

طبق صورت مسئله صحیح نیست.

حالت چهارم



$$\frac{a+۳}{۲}=۱\Rightarrow a=-۱, b=۳\Rightarrow[-۱,۳]\cap[۱,۳/۵]=[۱,۳]$$

مطابق صورت مسئله است.

بنابراین، تنها حالت چهارم امکان‌پذیر است. در نتیجه

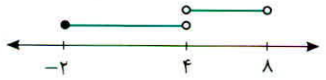
$$ab=-۳$$

۲۷- گزینه‌ی ۱ اشتراک این دو بازه تنها زمانی تک عضوی است که ابتدای بازه‌ی $[m-۳,+\infty)$ بر انتهای بازه‌ی $(-\infty,\frac{۱-m}{۳}]$ منطبق باشد. درنتیجه

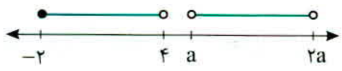
$$m-۳=\frac{۱-m}{۳}\Rightarrow m=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۲m+۱=۶$$

۲۸- گزینه‌ی ۱ این بازه باید شامل اعداد مربع کامل ۱۰۰، ۸۱، ۶۴، ۴۹، ۳۶ و ۲۵ باشد، پس $a\le ۲۵$. همچنین این بازه نباید شامل ۱۶ باشد، پس $a>۱۶$. بنابراین $۱۶<a\le ۲۵$ و در نتیجه $a\in(۱۶,۲۵]$.

۲۹- گزینه‌ی ۲ چون $(a,۲a)$ یک بازه است، پس $a<۲a$ و در نتیجه $a>۰$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a\ge ۴$، اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(a,۲a)$ تهی است.

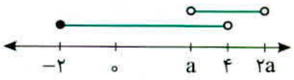


a = ۴



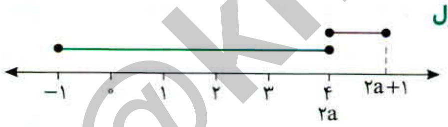
a > ۴

بنابراین $a<۴$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $۰<a<۴$، اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(a,۲a)$ تهی نیست.



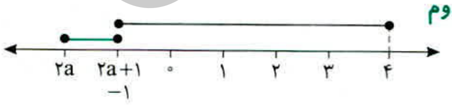
۳۰- گزینه‌ی ۱ در دو حالت زیر، اجتماع دو بازه تک عضوی خواهد بود:

حالت اول



$$۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۲a+۱=-۱\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر یک است.

۳۱- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم $I=[-\frac{۱}{n+۱},\frac{۶}{n}]$.

اگر $n=۱$، آن‌گاه $I=[-\frac{۱}{۲},۶]$ که شامل ۴ عدد صحیح زوج است.

اگر $n=۲$، آن‌گاه $I=[-\frac{۱}{۳},۳]$ که شامل ۲ عدد صحیح زوج است.

اگر $n=۳$، آن‌گاه $I=[-\frac{۱}{۴},۲]$ که شامل ۲ عدد صحیح زوج است.

اگر $n=۴$، آن‌گاه $I=[-\frac{۱}{۵},\frac{۳}{۲}]$ که فقط شامل عدد صحیح زوج صفر است.

اگر $n>۴$ آن‌گاه، تنها عدد صحیح زوجی که در بازه‌ی مورد نظر قرار دارد، عدد صفر است.

پس به ازای دو مقدار $n=۲$ و $n=۳$ بازه شامل فقط ۲ عدد صحیح زوج است.

۳۲- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم $I=(\frac{۱}{n},\frac{n+۳}{۳})$.

به ازای $n=۱$،

$$I=(۱,\frac{۴}{۳})\Rightarrow$$ عدد طبیعی در I وجود ندارد.

به ازای $n=۲$،

$$I=(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۳})\Rightarrow ۱\in I$$

به ازای $n=۳$،

$$I=(\frac{۱}{۳},۲)\Rightarrow ۱\in I$$

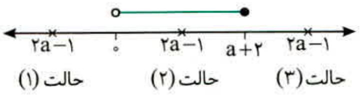
بـه ازای $n>۳$ بازه‌ی I حداقل شـامل اعـداد طبیعی ۱ و ۲ می‌باشـد. پس به ازای ۲ عدد طبیعی، بازه‌ی I فقط شامل یک عدد طبیعی است.

۳۳- گزینه‌ی ۱ این بازه‌ها به شکل زیر هستند:

$$A_۱=(-۱,۱)\,,\,A_۲=(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),\ldots,A_{۱۰۰}=(-\frac{۱}{۱۰۰},\frac{۱}{۱۰۰}),\ldots$$

واضح اسـت که دو عدد ابتدا و انتهای بازه‌ها با بزرگ‌شدن n به یک‌دیگر نزدیک می‌شـوند و طول بازه‌ها کوچک‌تر می‌شود. ولـی به هر حال عدد صفر همواره عضو بازه اسـت، زیرا اعداد ابتدا و انتهای بازه، مختلف‌العلامت هسـتند. همچنین هیچ عدد دیگـری وجود نـدارد که عضو تمام بازه‌ها باشـد، چون بازه‌ها همواره کوچک و کوچک‌تر می‌شوند.

۳۴- گزینه‌ی ۲ اگر به بازه‌ی A دقت کنید معلوم می‌شـود که $a+۲>۰$، پس $a>-۲$. از روی محور زیر، برحسب این‌که $۲a-۱$ در کـدام ناحیـه باشـد، حاصل $A\cap B$ را به‌دسـت آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



حالت (۳)	حالت (۲)	حالت (۱)	
$\varnothing$ یا $\{۲a-۱\}$	$[۲a-۱,a+۲]$	$(۰,a+۲]$	$A\cap B$

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A\cap B\not\subseteq(۱,۳]$.

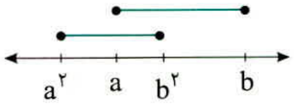
در حالت (۲) باید $۱<۲a-۱\ ,\ a+۲\leq ۳$.

از نابرابـری اول به‌دسـت می‌آیـد $a>۱$ و از نابرابـری دوم به‌دست می‌آید $a\leq ۱$ که ممکن نیست.

در حالت (۳) باید $۲a-۱\geq a+۲$ و در نتیجه $a\geq ۳$. اگر $a=۳$، آن‌گاه $A\cap B=\{۵\}$ که درسـت نیسـت. اگـر $a>۳$، آن‌گاه اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعه‌ی $(۱,۳]$ است.

۳۵- گزینه‌ی ۳ تنها زمانی اشـتراک دو بـازه تک عضوی اسـت که ابتدای یکی بر انتهای دیگری منطبق باشد. هم‌چنین با توجه به این که، عضو مشـترک $\frac{۱}{۱۰۰}$ اسـت و $\frac{۱}{۱۰۰}<۱$، پس عضوهای یکی از بازه‌ها کمتر از ۱ هستند. بنابراین $۰<a<b<۱$ (زیرا اگـر $۰<a^۲<b^۲<۱$، آن‌گاه $۰<a<b<۱$) به این ترتیب $a>a^۲$ و $b>b^۲$. بنابرایـن انتهای بازه‌ی $[a^۲,b^۲]$ بر ابتدای بازه‌ی $[a\,,b]$ منطبق شده است. در نتیجه

$$b^۲=a=\frac{۱}{۱۰۰}$$



۳۶- گزینه‌ی ۴ صفر عضو بازه اسـت، پس $a<۰$. همچنین $۳a+۲$ عضـو بـازه اسـت، پـس $۳a+۲>a$، یعنی $a>-۱$. بنابراین $-۱<a<۰$ و در نتیجه $a\in(-۱,۰)$.

۳۷- گزینه‌ی ۴ بیـن دو عـدد گنـگ ممکن اسـت عدد صحیحـی وجود نداشـته باشـد. مثلاً بیـن $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ عدد صحیحی وجود ندارد.

۳۸- گزینه‌ی ۳ اعضـای مجموعـه‌ی $\{۱+\frac{۱}{k}|k\in\mathbb{N}\}$ به صورت زیر هستند:

$$۱+\frac{۱}{۱}\ ,\ ۱+\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱+\frac{۱}{۳}\ ,\ \ldots$$

ایـن مجموعه نامتناهی اسـت و زیرمجموعـه‌ی بازه‌ی $(۱,۲]$ است. پس بازه‌ی $(۱,۲]$ هم نامتناهی است.

۳۹- گزینه‌ی ۱ تعـداد کتاب‌های منتشـر شـده‌ی ایرانی متناهی است. در نتیجه مجموعه‌ی آن‌ها متناهی خواهد بود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموعه‌ی کلمات به کار رفته در این کتاب‌ها نیز متناهی است.

۴۰- گزینه‌ی ۲ مجموعـه‌ی کالاهـای تولیـدی کشـور، مجموعه‌ای متناهی است. تعداد عضوهای مجموعه‌ی کلمه‌هایی (با معنی یا بی‌معنی) که با حروف زبان فارسـی می‌توان نوشت عددی حسابی نیست. در نتیجه این مجموعه نامتناهی است. هم‌چنیـن مجموعه‌ی مربع‌هـای به مرکز مبـدأ و مجموعه‌ی کسرهای مثبت با صورت ۱ نامتناهی هستند.

۴۱- گزینه‌ی ۳ اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B قطعاً متناهی هستند. چون اگر یکی از آن‌ها هم نامتناهی باشند، اجتماع آن با هر مجموعه‌ی دیگری نامتناهی خواهد بود.

۴۲- گزینه‌ی ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): صحیح است، زیرا خود مجموعه‌ی A نیز زیر مجموعه‌ی A است. بنابراین A نیز متناهی است.

گزینه‌ی (۲): صحیح است. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، عددی حسابی است، در نتیجه این مجموعه متناهی است.

گزینه‌ی (۳): این گزینه ممکن است نادرست باشد. به طور مثال، $A=(۰,۱], B=[۱,۲)$ نامتناهی هستند، اما $A\cap B=\{۱\}$ متناهی است.

۴۳- گزینه‌ی ۳ از فرض مسئله معلوم می‌شود که

$$\{۱,۵,۱۷,۵۳,۱۶۱,۴۸۵,\ldots\}\subset A$$

مجموعه‌ی $\{\ldots,۵۳,۱۷,۵,۱\}$ نامتناهی است. درنتیجه مجموعه‌ی A نیز نامتناهی است.

چون در مورد سایر عضوهای مجموعه‌ی A اطلاعی نداریم، نمی‌توانیم درباره‌ی گزینه‌ی ۴ اظهار نظر قطعی کنیم. اما می‌دانیم گزینه‌های ۱ و ۲ قطعاً نادرست هستند.

۴۴- گزینه‌ی ۲ مجموعه‌ی مرجع $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ است و مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی $\{۲,۳,۵,۷\}$ است. پس متمم این مجموعه یعنی $\{۱,۴,۶,۸,۹\}$، ۵ عضو دارد.

۴۵- گزینه‌ی ۳ مجموعه‌ی مرجع $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ است.

پس

$$B'=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\},\quad C=\{۲,۳,۶,۸,۹\}$$

در نتیجه

$$A\cap B'=\{۲,۴\}$$

$$(A\cap B')\cup C=\{۲,۳,۴,۶,۸,۹\}$$

۴۶- گزینه‌ی ۱

۴۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا A' و B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,۱]\cup(۲,۴]$$

$$B'=(-\infty,-۱]\cup(۱,۴]$$

$$C'=[۰,۴]$$

بنابراین

$$A'-B'=(-۱,۱]$$

و در نتیجه

$$(A'-B')-C'=(-۱,۰)$$

۴۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا $-۳x$ را با سه طرف نابرابری جمع می‌کنیم:

$$-۲\leq -x+۱<۲\Rightarrow -۱<x\leq ۳$$

بنابراین $A=(-۱,۳]$. همچنین $B'=(۰,۱]$ بنابراین

$$A\cap B'=(-۱,۳]\cap(۰,۱]=(۰,۱]$$

۴۹- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $\mathbb{Z}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$، پس

$$(\mathbb{N}\cap(\mathbb{Z}\cup\mathbb{R}))'=(\mathbb{N}\cap\mathbb{R})'=\mathbb{N}'$$

بنابراین

$$\mathbb{Q}'\cup(\mathbb{N}\cap(\mathbb{Z}\cup\mathbb{R}))'=\mathbb{Q}'\cup\mathbb{N}'$$

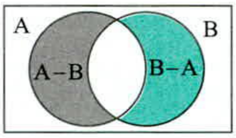
پس باید $(\mathbb{Q}'\cup\mathbb{N}')'$ را پیدا کنیم که با $\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}$ برابر است که همان $\mathbb{N}$ است.

۵۰- گزینه‌ی ۳ گزینه‌ی (۳) لزوماً درست نیست، متناهی بودن A یا A' وابسته به مجموعه‌ی مرجع است. به طور مثال اگر $U=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $A=\{۱\}$، آن‌گاه $A'=\{۲,۳,۴\}$. بنابراین A و A' هر دو متناهی هستند. سایر گزینه‌ها صحیح هستند.

۵۱- گزینه‌ی ۴ چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه‌ی دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ نامتناهی است.

۵۲- گزینه‌ی ۱ B نامتناهی است پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\cap B'$ متناهی است. توجه کنید که چون A متناهی است، A' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\cap B$ مشخص نیست. هم‌چنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ و $A\cup B$ نامتناهی هستند.

۵۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار ون زیر، مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ عضو مشترک ندارند و جدا از هم هستند.



۵۴- گزینه‌ی ۴ اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول

$$۲n<۳\Rightarrow n<\frac{۳}{۲}$$

حالت دوم

$$n-۱>۴\Rightarrow n>۵$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۲ و ۳ و ۴ و ۵ نمی‌تواند باشد.

۵۵- گزینه‌ی ۱ مجموعه‌ی علاقه‌مندان شبکه‌ی ۱ را با A و مجموعه‌ی علاقه‌مندان شبکه‌ی ۲ را با B نشان می‌دهیم:

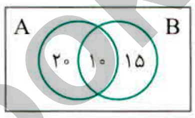
$$n(A)=۶۵,\quad n(B)=۴۵,\quad n(A\cap B)=۲۰$$

در نتیجه

$$n(A\cup B)=۶۵+۴۵-۲۰=۹۰$$

یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند و ۱۰ نفر هیچ‌یک از دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۵۶- گزینه‌ی ۱ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با ۲۰-۳۰ یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر $۲۵=۲۰-۴۵$ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند.



۵۷- گزینه‌ی ۴ اگر فرض کنیم $n(A\cap B)=x$، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=x+۲۰,\quad n(A)=۳x,\quad n(B)=\frac{۳}{۲}x$$

بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$x+۲۰=۳x+\frac{۳}{۲}x-x$$

$$\frac{۵}{۲}x=۲۰\Rightarrow x=۸$$

در نتیجه

$$n(A)=۲۴,\quad n(B)=۱۲,\quad n(A\cap B)=۸$$

پس

$$\frac{n(A-B)}{n(B-A)}=\frac{n(A)-n(A\cap B)}{n(B)-n(A\cap B)}=\frac{۲۴-۸}{۱۲-۸}=۴$$

۵۸- گزینه‌ی ۱

چون $n(B)=۷۰$, $n(A)=۴۵$ پس

$$۵۰=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۷۰-n(A\cap B)$$

بنابراین $n(A\cap B)=۲۰$. اکنون $n(A\cup B)$ برابر است با

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۰+۴۵-۲۰=۹۵$$

در نتیجه

$$n((A\cup B)')=\underbrace{n(U)}_{۱۰۰}-n(A\cup B)=۵$$

۵۹- گزینه‌ی ۲ چون

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

پس

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲x+۴+x=۳x+۴$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=x+۲۰$$

اگر دو طرف تساوی‌ها را از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$۲n(A\cap B)=۲x-۱۶\Rightarrow n(A\cap B)=x-۸$$

بنابراین

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=x-(x-۸)=۸$$

۶۰- گزینه‌ی ۳ فرض کنید A مجموعه‌ی علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعه‌ی علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۲۰-x=۱۰۵+۹۵-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۸۰+x$. برای این‌که $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$؛ پس حداقل مقدار $n(A\cap B)$ برابر با ۸۰ است.

۶۱- گزینه‌ی ۲ فرض کنید A مجموعه‌ی دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعه‌ی دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=۷+۱۳-n(A\cup B)=۲۰-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\geq n(B)=۱۳$ ، بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۰-n(A\cup B)\leq ۲۰-۱۳=۷$$

بنابراین حداکثر ۷ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه. (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۶۲- گزینه‌ی ۲ با جای‌گذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

به‌دست می‌آید

$$۷۰=۲۰+۲۰+۱۰-۶-۶-۲+n(A\cap B\cap C)$$
$$\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۳۴$$

۶۳- گزینه‌ی ۲ فرض کنید A مجموعه‌ی دانش‌آموزانی باشد که به فوتبال علاقه دارند، B مجموعه‌ی دانش‌آموزانی باشد که به والیبال علاقه دارند و C مجموعه‌ی دانش‌آموزانی باشد که به بسکتبال علاقه دارند. در این صورت، تعداد دانش‌آموزانی که فقط به بسکتبال علاقه دارند برابر است با

$$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B\cup C)=۵۰۰$ و

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=۲۶۰+۲۶۰-۱۳۰=۳۹۰$$

بنابراین تعداد دانش‌آموزان موردنظر برابر است با

$$۵۰۰-۳۹۰=۱۱۰$$

۶۴- گزینه‌ی ۲ در شکل اول ۵ چوب کبریت وجود دارد و در هر شکل ۳ چوب کبریت بیش از شکل قبلی وجود دارد. پس شکل nام $۵+۳(n-۱)$ چوب کبریت، یعنی $۳n+۲$ چوب کبریت دارد. پس شکل دهم ۳۲ چوب کبریت دارد.

۶۵- گزینه‌ی ۱ شکل اول ۳ چوب کبریت دارد و با اضافه کردن ۲ چوب کبریت به هر شکل، شکل بعدی ساخته می‌شود. پس شکل n ام $۳+۲(n-۱)$، یعنی $۲n+۱$ چوب کبریت دارد.

۶۶- گزینه‌ی ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n ام به تعداد $(n-۱)\times۴$ نقطه به ۵ نقطه‌ی شکل (۱) اضافه شده است: $۴(n-۱)+۵=۴n+۱$، یعنی شکل n ام $۴n+۱$ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۶۷- گزینه‌ی ۲ در شکل اول ۴ نقطه وجود دارد و در شکل‌های بعدی در هر مرحله ۳ نقطه به شکل اضافه می‌شود. پس در مرحله‌ی n ام $(n-۱)\times۳$ تا نقطه به ۴ نقطه‌ی اولیه اضافه شده است. یعنی تعداد نقاط شکل n ام برابر است با

$$۳(n-۱)+۴=۳n+۱$$

۶۸- گزینه‌ی ۲ در هر گام ۳ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه و یک چوب کبریت از آن کم می‌شود، در نتیجه در هر گام ۲ چوب کبریت به شکل افزوده می‌شود. بنابراین تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی n ام برابر است با

$$۴+۲(n-۱)=۲n+۲$$

در نتیجه در شکل ۲۱ ام ۴۴ چوب کبریت به کار رفته است.

۶۹- گزینه‌ی ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل n ام، $۴+۹(n-۱)$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل یازدهم ۹۴ چوب کبریت وجود دارد.

۷۰- گزینه‌ی ۴ تعداد مربع‌ها در شکل n ام برابر $۴n-۳$ است. هم‌چنین، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل n ام برابر $۱۲n-۸$ است. (در هر گام، ۱۲ چوب کبریت به شکل قبلی افزوده می‌شود). بنابراین تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر است با

$$۱۲n-۸-(۴n-۳)=۸n-۵$$

اگر معادله‌ی $۸n-۵=۱۰۷$ را حل کنیم معلوم می‌شود $n=۱۴$. بنابراین در شکل چهاردهم تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر با ۱۰۷ است.

۷۱- گزینه‌ی ۱ تعداد دایره‌های رنگی در شکل‌ها، مطابق جدول زیر است:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد کل دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵
تعداد دایره‌های رنگی	۲	۵	۸	۱۳

تعداد کل دایره‌ها در شکل n ام برابر $(n+۱)^۲$ است و اگر n عددی فرد باشد، تعداد دایره‌های رنگی $\frac{(n+۱)^۲}{۲}$ است. پس در شکل سیزدهم $\frac{۱۴^۲}{۲}$ یعنی ۹۸ دایره‌ی رنگی وجود دارد.

۷۲- گزینه‌ی ۳ اگر ۴ مربع ۱×۱ را که در چهار گوشه‌ی شکل‌ها حذف شده است به شکل‌ها اضافه کنیم، در مرحله‌ی n ام یک مربع بزرگ داریم که $(n+۲)$ مربع ۱×۱ در هر سطر و $(n+۲)$ مربع ۱×۱ در هر ستون آن وجود دارد. پس مساحت آن $(n+۲)^۲$ است. بنابراین مساحت شکل n ام برابر است با

$$(n+۲)^۲-۴=n^۲+۴n$$

۷۳- گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم: $A=۲+۴+۶+\cdots+۲n$. از ۲ فاکتور می‌گیریم: $A=۲(۱+۲+۳+\cdots+n)$. بنابراین

$$A=۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}=n^۲+n$$

۷۴- گزینه‌ی ۱ مجموع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$S=۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)$$
$$=(۲-۱)+(۴-۱)+(۶-۱)+\cdots+(۲n-۱)$$
$$=۲+۴+۶+\cdots+۲n-(\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{\text{n تا}})$$
$$=۲(۱+۲+۳+\cdots+n)-n$$

چون $۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$، پس

$$S=۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}-n=n^۲+n-n=n^۲$$

۷۵- گزینه‌ی ۳ تعداد مربع‌ها در شکل n ام برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ بنابراین

تعداد مربع‌ها در شکل دهم $=\frac{۱۰\times۱۱}{۲}=۵۵$

تعداد مربع‌ها در شکل یازدهم $=\frac{۱۱\times۱۲}{۲}=۶۶$

پس در شکل یازدهم، یازده مربع بیش‌تر از شکل دهم وجود دارد.

توجه: واضح است که در هر شکل به تعداد شماره‌ی شکل، مربع به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل یازدهم، یازده مربع به شکل دهم اضافه می‌شود.

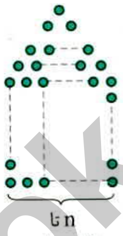
۷۶- گزینه‌ی ۳ در شکل n ام تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر $(n-۱)+\cdots+۲+۱+۰$ است. پس تعداد این مثلث‌ها $(\frac{n-۱}{۲})(۱+n-۱)$ است. برای این‌که بدانیم در کدام شکل ۵۵ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$(\frac{n-۱}{۲})n=۵۵\Rightarrow n(n-۱)=۱۱۰$$

واضح است که اگر $n=۱۱$، آن‌گاه $n(n-۱)=۱۱\times۱۰=۱۱۰$.
پس در شکل یازدهم، ۵۵ مثلث رنگ شده داریم.

۷۷- گزینه‌ی ۱ هر شکل یک مربع دارد که تعداد نقاط آن با مربع شماره‌ی شکل برابر است. هم‌چنین یک مثلث دارد که تعداد نقاط آن برابر $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$ است، که n شماره‌ی شکل است. پس شکل دهم به تعداد $۱۰^۲$ نقطه در قسمت مربع دارد و در مثلث بالای آن به تعداد $۰+۱+۲+\cdots+۹$ نقطه وجود دارد.

$$\text{تعداد نقاط}=۱۰^۲+۱+۲+\cdots+۹=۱۰۰+\frac{۹\times۱۰}{۲}=۱۴۵$$



شکل nام

۷۸- گزینه‌ی ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل nام برابر است با

$$۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱=n^۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nام برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+n-۱=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nام برابر است با

$$\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$$

به این ترتیب

$$\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۹}{۱۹}\Rightarrow n=۱۹$$

۷۹- گزینه‌ی ۳ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=۱+\frac{۱}{۱۰۰}+۱+\frac{۲}{۱۰۰}+\cdots+۱+\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$A=\underbrace{(۱+۱+۱+\cdots+۱)}_{۹۹\text{ تا}}+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۹۹}{۱۰۰}$$

چون $۱+۲+۳+\cdots+۹۹=\frac{۹۹\times۱۰۰}{۲}$ پس

$$A=۹۹+\frac{۹۹\times\frac{۱۰۰}{۲}}{۱۰۰}=۹۹+\frac{۹۹}{۲}=۱۴۸/۵$$

۸۰- گزینه‌ی ۲ مساحت رنگی اضافه شده در هر مرحله را در جدول زیر می‌بینید:

مرحله	۱	۲	۳	...	n
مساحت رنگی اضافه شده در مرحله	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$		$\frac{۱}{۲^n}$

بنابراین در مرحله‌ی nام، مقدار مساحت رنگی اضافه شده برابر $\frac{۱}{۲^n}$ و در مرحله‌ی $(n-۱)$ام مقدار مساحت رنگی اضافه شده برابر $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ است. اختلاف این دو مقدار را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۲^{n-۱}}-\frac{۱}{۲^n}=\frac{۱}{۲^{n-۱}}(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲^n}$$

۸۱- گزینه‌ی ۳ جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به شکل $t_n=an+b$ است. پس

$$t_۲=۲a+b=۴,\quad t_۵=۵a+b=-۴$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۲a+b=۴\\۵a+b=-۴\end{cases}$ به‌دست می‌آید

$a=-\frac{۸}{۳}$ و $b=\frac{۲۸}{۳}$، پس $t_n=-\frac{۸}{۳}n+\frac{۲۸}{۳}$. بنابراین

$$t_۷=-\frac{۸}{۳}\times۷+\frac{۲۸}{۳}=-\frac{۲۸}{۳}$$

۸۲- گزینه‌ی ۳

از روی شکل معلوم است که $a_۱=۱\ ,\ a_۲=۳$.

در نتیجه $d=۲$. بنابراین $\frac{a_۱}{d}=\frac{۱}{۲}$.

۸۳- گزینه‌ی ۲ ارتفاع بالن، الگوی خطی به‌صورت زیر را می‌سازد:

$$h_n=a+bn$$

اکنون می‌توان گفت

$$h_۱=a+b=۲۰\ ,\ h_۲=a+۲b=۴۲$$

بنابراین

$$b=۲۲\ ,\ a=-۲$$

در نتیجه $h_n=۲۲n-۲$.

۸۴- گزینه‌ی ۴ فرض کنید $a_n=a+bn$. در این صورت $a_{۱۷}=a+۱۷n$. اکنون هر گزینه را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۵a_۵-۴a_۲=۵(a+۵n)-۴(a+۲n)=a+۱۷n=a_{۱۷}$$

$$\frac{a_۹+a_{۲۵}}{۲}=\frac{۱}{۲}(۲a+۳۴n)=a+۱۷n=a_{۱۷}$$

$$\frac{۵a_{۲۰}-a_{۳۲}}{۴}=\frac{۱}{۴}(۵(a+۲۰n)-a-۳۲n)$$

$$=\frac{۴a+۶۸n}{۴}=a+۱۷n=a_{۱۷}$$

$$\frac{۵a_۸+a_{۳۸}}{۶}=\frac{۵a+۴۰n+a+۳۸n}{۶}$$

$$=\frac{۶a+۷۸n}{۶}=a+۱۳n\neq a_{۱۷}$$

۹۶- گزینه‌ی ۴ جمله‌ی عمومی این دنباله $a_n=۷۷۷-۷(n-۱)$ است، یعنی $a_n=۷۸۴-۷n$. ۷۸۴ مضرب ۷ است، پس هر مضرب ۷ کوچک‌تر از ۷۷۷ در این دنباله ظاهر می‌شود و هیچ عدد دیگری هم ظاهر نمی‌شود. بنابراین ۴۲ جمله‌ای از دنباله‌ی مورد نظر است.

۹۷- گزینه‌ی ۲ مقدار عبارت زیر مورد نظر است:

$$P=a_۱a_۲a_۳\cdots a_{۲۱}=a_۱(a_۲a_۳)(a_۴a_۵)\cdots(a_{۲۰}a_{۲۱})$$

بنابراین با توجه به روابط $a_۲a_۳=۲$، $a_۳a_۴=۲$ و $a_{۲۰}a_{۲۱}=۲,\ldots$،

$$P=۳\times\underbrace{۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲}_{\text{۱۰ تا}}=۳\times۲^{۱۰}=۳\times۱۰۲۴=۳۰۷۲$$

۹۸- گزینه‌ی ۱ به جملات دنباله توجه کنید:

$$a_۲=a_۱+۲=۳+۲=۵$$

$$a_۳=a_۲+۲=۵+۲=۷=۳+۲\times۲$$

$$\vdots$$

$$a_{۱۰}=۳+۹\times۲=۲۱$$

بنابراین مجموع $S=۳+۵+۷+\cdots+۲۱$ مورد نظر است. می‌توان نوشت

$$S+۱=۱+۳+۵+\cdots+۲۱$$

$$=(۲-۱)+(۴-۱)+(۶-۱)+\cdots+(۲۲-۱)=$$

$$۲(۱+۲+۳+\cdots+۱۱)-(\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{\text{۱۱ تا}})=۲\times\frac{۱۱\times۱۲}{۲}-۱۱=۱۲۱$$

پس $S=۱۲۰$.

۹۹- گزینه‌ی ۲ به چند جمله‌ی اول دنباله توجه کنید:

$$a_۲=\frac{۲}{۱}a_۱=\frac{۲}{۱}\times۱=۲$$

$$a_۳=\frac{۳}{۲}a_۲=\frac{۳}{۲}\times۲=۳$$

$$a_۴=\frac{۴}{۳}a_۳=\frac{۴}{۳}\times۳=۴$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_{۱۰۰}=۱۰۰$.

۱۰۰- گزینه‌ی ۳ جمله‌ی دهم دنباله برابر است با

$$a_{۱۰}=(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})(۱-\frac{۱}{۱۶})\cdots(۱-\frac{۱}{۱۰۰})$$

$$=(۱-\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۴})(۱+\frac{۱}{۴})\cdots(۱-\frac{۱}{۱۰})(۱+\frac{۱}{۱۰})$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۴}\times\cdots\times\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۱۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۱}{۱۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

۱۰۱- گزینه‌ی ۱ از $a_۱=۳$ و $a_{۲۱}=-۳۷$ نتیجه می‌شود

$$a_{۲۱}=a_۱+۲۰d\Rightarrow-۳۷=۳+۲۰d\Rightarrow d=-۲$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۴ چون $a_۱=-۳$ و $d=۴$، پس

$$a_n=-۳+۴(n-۱)$$

بنابراین $a_n=۴n-۷$ و در نتیجه

$$a_{۳۰}=۴\times۳۰-۷=۱۱۳$$

۱۰۳- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۲(۲x+۳)=x-۲+x+۴$$

بنابراین

$$۴x+۶=۲x+۲$$

در نتیجه $x=-۲$، بنابراین $|x|=۲$.

۱۰۴- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$۲d=۵x-۱۰y-(۵x-۲y)=-۸y$$

در نتیجه $d=-۴y$. از طرف دیگر،

$$-۴y=d=۵x-۲y-۳x=۲x-۲y$$

$$-۸y=۲d=۸x+۳-۳x=۵x+۳$$

بنابراین

$$\begin{cases}x=-y\\ ۵x=-۸y-۳\end{cases}$$

پس $x=۱$ و $y=-۱$ و در نتیجه $x^۲+y^۲=۲$.

۱۰۵- گزینه‌ی ۴ عدد $۲x-۱$ واسطه‌ی حسابی دو عدد $۳x$ و $x-۲$ است، پس

$$۲x-۱=\frac{۶x+۲x-۴}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین دنباله به صورت $-۳,۰,۳,\ldots$ است. بنابراین قدرنسبت ۳ است و جمله‌ی چهارم برابر است با

$$۳+۳=۶$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۳ چون $۳\times۲^{x+۱}$ واسطه‌ی حسابی ۲^x و ۱۱×۲^y است، پس

$$۳\times۲^{x+۱}=\frac{۲^x+۱۱\times۲^y}{۲}\Rightarrow۱۲\times۲^x=۲^x+۱۱\times۲^y$$

در نتیجه

$$۱۱\times۲^x=۱۱\times۲^y\Rightarrow۲^x=۲^y\Rightarrow x=y$$

همچنین ۱۱×۲^y واسطه‌ی حسابی $۳\times۲^{x+۱}$ و ۲^{x+y} است. پس

$$۱۱\times۲^y=\frac{۲^{x+y}+۳\times۲^{x+۱}}{۲}$$

چون $x=y$، پس

$$۱۱\times۲^x=\frac{۲^{۲x}+۳\times۲^{x+۱}}{۲}\Rightarrow۲۲\times۲^x=۲^{۲x}+۶\times۲^x$$

$$\Rightarrow۱۶\times۲^x=۲^{۲x}\Rightarrow۲^{x+۴}=۲^{۲x}\Rightarrow x+۴=۲x\Rightarrow\begin{cases}x=۴\\ y=۴\end{cases}$$

بنابراین

$$x+y=۸$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۳ چون $a_{n+۱}-a_n=-۳$، پس با یک دنباله‌ی حسابی مواجه هستیم که قدرنسبت آن ۳- است. چون جمله‌ی اول برابر ۲ است، پس

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d=۲+۹(-۳)=-۲۵$$

$$a_۵=a_۱+۴d=۲+۴(-۳)=-۱۰$$

بنابراین

$$\frac{a_{۱۰}}{a_۵}=\frac{-۲۵}{-۱۰}=۲/۵$$

۱۰۸- گزینه‌ی ۴ از رابطه‌ی داده شده به‌دست می‌آید

$$۲(a_۱+d)+۳(a_۱+۲d)-۵(a_۱+۴d)=۱۲۰$$

پس $-۱۲d=۱۲۰$ و در نتیجه $d=-۱۰$.

۱۰۹- گزینه‌ی ۲ طول پله‌ها دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست $۴۰cm$ و قدرنسبت $-۲/۵cm$ تشکیل می‌دهند. در نتیجه طول پله‌ی شماره n برابر است با

$$L_n=۴۰-۲/۵(n-۱)=۴۲/۵-۲/۵n$$

به این ترتیب

$$۴۲/۵-۲/۵n=۱۵\Rightarrow n=۱۱$$

بنابراین، نردبان ۱۱ پله دارد.

۱۱۰- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$a_۴-a_۲=a_۷-a_۵=a_{۱۰}-a_۸=a_{۱۳}-a_{۱۱}=۲d=۴۲$$

در نتیجه

$$a_۴+a_۷+a_{۱۰}+a_{۱۳}=a_۲+a_۵+a_۸+a_{۱۱}+۸d$$

$$=۳۵+۱۶۸=۲۰۳$$

۱۱۱- گزینه‌ی ۴ **راه حل اول** با قرار دادن $n=۱$ در جمله‌ی عمومی نتیجه می‌شود $a_۱=\frac{۱}{۵}$. با قرار دادن $n=۲$ در جمله‌ی عمومی به‌دست می‌آید $a_۲=-\frac{۲}{۵}$. بنابراین

$$d=a_۲-a_۱=-\frac{۳}{۵}$$

پس

$$a_۱-d=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

راه حل دوم با توجه به جمله‌ی عمومی که به صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است، معلوم می‌شود

$$a_n=dn+(a_۱-d)=-\frac{۳}{۵}n+\frac{۴}{۵}$$

پس

$$a_۱-d=\frac{۴}{۵}$$

۱۱۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}\Rightarrow d=\frac{a_{۱۹}-a_۴}{۱۹-۴}\Rightarrow ۱۲=\frac{۱۹-a_۴}{۱۵}\Rightarrow a_۴=-۱۶۱$$

۱۱۳- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$d=\frac{a_{۱۶}-a_۶}{۱۶-۶}=\frac{۶-۱۶}{۱۶-۶}=-۱$$

۱۱۴- گزینه‌ی ۳ چون $a_۱=-۱$ و $d=۳$، پس

$$a_n=-۱+۳(n-۱)$$

یعنی $a_n=۳n-۴$. بنابراین باید $۳n-۴=۱۳۴$ که در نتیجه $n=۴۶$.

۱۱۵- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $a_۸=a+۷d=۲۰۰۱$ در نتیجه

$$a_{۱۷}=a_۸+۹d=۲۰۰۱+۹d>۱۰^۴$$

$$\Rightarrow d>\frac{۱۰۰۰۰-۲۰۰۱}{۹}\simeq ۸۸۸/۷$$

بنابراین حداقل مقدار d برابر با ۸۸۹ است.

۱۱۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{a_{۱۰}-a_۱}{۱۰-۱}=\frac{۶۳}{۹}=۷$$

بنابراین $a_۶=a_۱+۵d=a_۱+۳۵=۹$ و در نتیجه $a_۱=-۲۶$.

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله می‌شود

$$a_n=-۲۶+۷(n-۱)=-۳۳+۷n$$

درنتیجه ۴ جمله‌ی نخست دنباله منفی هستند.

۱۱۷- گزینه‌ی ۳ ابتدا قدرنسبت دنباله را حساب می‌کنیم:

$$d=\frac{۱۷-(-۳)}{۵-۱}=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله می‌شود

$$a_n=-۳+۵(n-۱)=۵n-۸$$

اکنون توجه کنید که

$$a_{۴۵}=۲۱۷, a_{۴۶}=۲۲۲$$

بنابراین ۴۶ اُمین جمله‌ی دنباله از ۲۲۰ بزرگ‌تر است.

۱۱۸- گزینه‌ی ۲ چون دنباله حسابی است، پس

$$d=(x+۲)-(x-۲)=۴$$

بنابراین جمله‌ی عمومی آن به شکل زیر است

$$a_n=x-۲+۴(n-۱)=x+۴n-۶$$

برای این که بدانیم کدام جمله $x+۳۹۸$ است، قرار می‌دهیم

$$a_n=x+۳۹۸\Rightarrow ۴n-۶=۳۹۸\Rightarrow n=۱۰۱$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۱ جمله‌ی عمومی دنباله می‌شود

$$a_n=۱۵+\frac{n-۱}{۳}=\frac{n+۴۴}{۳}$$

بنابراین

$$a_m=\frac{m+۴۴}{۳}=\frac{۵۳}{۳}$$

پس $m=۹$.

۱۲۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $a_m=a_۱+(m-۱)d$ و $a_{۱۹}-a_{۲۰}=-d$. در نتیجه

$$a_m=a_{۱۹}-a_{۲۰}\Rightarrow a_۱+(m-۱)d=-d$$

بنابراین $\frac{a_۱}{d}=-m$.

۱۲۱- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی نخست دنباله را با a و قدرنسبت آن را با d نشان می‌دهیم. جمله‌ی هفتم دنباله برابر است با $a_۷=a+۶d$. با افزایش ۱۰ واحدی d، این جمله به‌صورت $a+۶d+۶۰$ در می‌آید. بنابراین، ۶۰ واحد به دنباله افزوده می‌شود.

۱۲۲- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n=An+B$ است، یعنی الگوی آن خطی است. پس $a_n=۳-۴n$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی است.

همچنین می‌توان نوشت

$$a_{n+۱}-a_n=۳-۴(n+۱)-(۳-۴n)=۳-۴n-۴-۳+۴n=-۴$$

۱۲۳- گزینه‌ی ۲ در دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی عمومی خطی است: $a_n=An+B$. در گزینه‌ی (۲) داریم

$$a_n=\frac{n^۲-۳n-۴}{n+۱}=\frac{(n+۱)(n-۴)}{n+۱}=n-۴$$

پس جمله‌ی عمومی خطی است و مربوط به دنباله‌ای حسابی است.

۱۲۴- گزینه‌ی ۱ جمله‌ی عمومی دنباله $a_n=(۲k-۳)n^۲-۲kn+k^۲$ است که چون باید خطی باشد، پس $۲k-۳=۰$. بنابراین $k=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه جمله‌ی عمومی $a_n=-۳n+\frac{۹}{۴}$ است. پس جمله‌ی سوم دنباله برابر است با

$$a_۳=-۹+\frac{۹}{۴}=-\frac{۲۷}{۴}$$

۱۲۵- گزینه‌ی ۳ چون دنباله حسابی است، پس

$$۱-۲a=\frac{a+۳a-۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۸}$$

بنابراین

$$d=(۱-۲a)-a=۱-۳a$$

در نتیجه

$$d=-\frac{۱}{۸}$$

پس جمله‌ی عمومی به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=\frac{۳}{۸}+(-\frac{۱}{۸})(n-۱)$$

بنابراین جمله‌ی عمومی می‌شود $a_n=-\frac{۱}{۸}n+\frac{۱}{۲}$.

۱۲۶- گزینه‌ی ۳ دقت کنید که در هر دنباله‌ی حسابی $a_{n+۱}+a_{n-۱}=۲a_n$. بنابراین $\frac{a_n}{a_{n+۱}+a_{n-۱}}=\frac{۱}{۲}$ در نتیجه حاصل هر کسر برابر $\frac{۱}{۲}$ است. در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۱۴\times\frac{۱}{۲}=۷$.

۱۲۷- گزینه‌ی ۲ قدرنسبت دنباله را با d نشان می‌دهیم. در این صورت

$$a_۶+۲a_۳-a_۱=a_۱+۵d+۲(a_۱+۲d)-a_۱=۲a_۱+۹d=۱۲$$

$$a_۷-۲a_۴=a_۱+۶d-۲(a_۱+۳d)=-a_۱=۳$$

در نتیجه $a_۱=-۳$. بنابراین

$$۲a_۱+۹d=۹d-۶=۱۲\Rightarrow d=۲$$

پس $a_۲=a_۱+d=-۱$.

۱۲۸- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$a_۱+a_۵=۲a_۳\ ,\quad a_۱+a_۳=۲a_۲$$

در نتیجه

$$a_۱+a_۳+a_۵=۳a_۳=۱۰۵\Rightarrow a_۳=۳۵$$

$$a_۱+a_۲+a_۳=۳a_۲=۲۱\Rightarrow a_۲=۷$$

پس

$$d=a_۳-a_۲=۲۸$$

بنابراین $a_۱=-۲۱$. اکنون توجه کنید که

$$a_۳-a_۲+a_۱=\underbrace{a_۳+a_۱}_{۲a_۲}-a_۲=a_۲=۷$$

بنابراین

$$\frac{a_۳-a_۲+a_۱}{a_۱}=-\frac{۱}{۳}$$

۱۲۹- گزینه‌ی ۳ از $a_۱+a_۳=۱۴$ نتیجه می‌شود

$$a_۱+a_۱+۲d=۱۴\Rightarrow a_۱+d=۷$$

چون $a_۲+a_۶+a_۸=۶۱$ پس

$$a_۱+d+a_۱+۵d+a_۱+۷d=۶۱\Rightarrow ۳a_۱+۱۳d=۶۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a_۱+d=۷\\ ۳a_۱+۱۳d=۶۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=۴$.

۱۳۰- گزینه‌ی ۲ چون $۳+۷=۲+۸=۴+۶$، پس

$$a_۳+a_۷=a_۲+a_۸=a_۴+a_۶$$

بنابراین

$$a_۲+a_۴+a_۶+a_۸=(a_۲+a_۸)+(a_۴+a_۶)$$

$$=۲(a_۳+a_۷)=۲\times۲۰=۴۰$$

۱۳۱- گزینه‌ی ۳ چون

$$۲۱=۴a_۵^۲-a_۲^۲=(۲a_۵-a_۲)\underbrace{(۲a_۵+a_۲)}_{۷}$$

پس $۲a_۵-a_۲=۳$. در نتیجه از حل دستگاه $\begin{cases}۲a_۵-a_۲=۳\\ ۲a_۵+a_۲=۷\end{cases}$ به‌دست می‌آید

$$a_۵=\frac{۵}{۲},\quad a_۲=۲$$

بنابراین $d=\dfrac{a_۵-a_۲}{۵-۲}=\dfrac{\frac{۵}{۲}-۲}{۳}=\dfrac{۱}{۶}$.

۱۳۲- گزینه‌ی ۳ از جمع کردن دو رابطه‌ی داده شده به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۳}+\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_۳}=-۱\Rightarrow\frac{۲}{a_۱}=-۱\Rightarrow a_۱=-۲$$

از قرار دادن مقدار $a_۱$ در رابطه‌ی $\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۳}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود

$$-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{a_۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{a_۳}=۱\Rightarrow a_۳=۱$$

بنابراین از $a_۳=a_۱+۲d$ به‌دست می‌آید

$$۱=-۲+۲d\Rightarrow d=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۳- گزینه‌ی ۲ اندازه‌ی زاویه‌ها را به صورت $a-d\,,a\,,a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع زاویه‌ها برابر ۱۸۰° است. پس

$$a-d+a+a+d=۱۸۰^\circ\Rightarrow a=۶۰^\circ$$

میانگین زاویه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر همان a است که برابر ۶۰° است.

۱۳۴- گزینه‌ی ۴ زاویه‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-۲d\,,a-d\,,a\,,a+d\,,a+۲d$$

در نتیجه، چون که مجموع زاویه‌های پنج ضلعی برابر ۵۴۰° است، پس

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۵۴۰^\circ$$

بنابراین $۵a=۵۴۰^\circ$ و در نتیجه $a=۱۰۸^\circ$. زاویه‌ی بزرگ‌تر ۱۲۰° است، پس $a+۲d=۱۲۰^\circ$ و در نتیجه $d=۶$. پس زاویه‌ی کوچک‌تر یعنی $a-۲d$ برابر است با

$$۱۰۸-۲\times۶=۹۶^\circ$$

۱۳۵- گزینه‌ی ۲ اضلاع مثلث را $a-d\,,a\,,a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$\Rightarrow a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

بنابراین نسبت وتر به ضلع کوچک‌تر به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+d}{a-d}=\frac{۴d+d}{۴d-d}=\frac{۵d}{۳d}=\frac{۵}{۳}$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۲ این اعداد، دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست ۱۰۰ و قدر نسبت ۴ تشکیل می‌دهند. بنابراین

$$a_n=۱۰۰+۴(n-۱)=۴n+۹۶$$

با توجه به سه رقمی بودن اعداد، $۴n+۹۶<۱۰۰۰$ بنابراین $n<۲۲۶$ یعنی $n\le۲۲۵$ پس ۲۲۵ عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۴ وجود دارد.

۱۳۷- گزینه‌ی ۲ اعدادی که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ی ۳ دارند، به شکل $۷n-۴$ هستند. کوچک‌ترین عدد سه رقمی به این شکل را پیدا می‌کنیم:

$$۷n-۴\ge۱۰۰\Rightarrow۷n\ge۱۰۴\Rightarrow n\ge\frac{۱۰۴}{۷}\Rightarrow n\ge۱۵$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی به این شکل را هم پیدا می‌کنیم:

$$۷n-۴<۱۰۰۰\Rightarrow۷n=۱۰۰۴\Rightarrow n<\frac{۱۰۰۴}{۷}\Rightarrow n\le۱۴۳$$

بنابراین

$$۱۵\le n\le۱۴۳$$

یعنی $۱۴۳-۱۴$ عدد سه رقمی وجود دارد که باقی‌مانده‌ی آن‌ها در تقسیم بر ۷، برابر ۳ است.

۱۳۸- گزینه‌ی ۲ $\frac{۱}{۲}$ واسطه‌ی حسابی $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{x+۲}$ است، پس

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۲}\right)\Rightarrow۱=\frac{x+۲+x}{x(x+۲)}$$

در نتیجه

$$x^۲+۲x=۲x+۲\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

۱۳۹- گزینه‌ی ۲ چون $a_۱=\sqrt{۲}-۵$ و $a_۶=\sqrt{۲}+۵$، پس

$$a_۶=a_۱+۵d\Rightarrow\sqrt{۲}+۵=\sqrt{۲}-۵+۵d\Rightarrow d=۲$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $۲+\sqrt{۲}-۵$ یا همان $\sqrt{۲}-۳$ است.

۱۴۰- گزینه‌ی ۳ در حالت اول ۸ واسطه داریم، پس

$$d=\frac{b-a}{۸+۱}$$

اگر در حالت دوم m واسطه داشته باشیم، آن‌گاه

$$\frac{۳d}{۲}=\frac{b-a}{m+۱}$$

طرفین این دو تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۳d}{۲}}{d}=\frac{\frac{b-a}{m+۱}}{\frac{b-a}{۹}}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{m+۱}\Rightarrow m+۱=۶\Rightarrow m=۵$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۳ اگر جملات دنباله‌ای حسابی را در عدد k ضرب کنیم، قدرنسبت دنباله نیز در k ضرب می‌شود. ولی اگر عدد k را به جملات دنباله اضافه کنیم، قدرنسبت تغییر نمی‌کند. پس اعداد جدید دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۲d تشکیل می‌دهند. توجه کنید که

$$a_۱ , a_۲ , a_۳ \Rightarrow \text{قدر نسبت} = d$$

$$۲a_۱-۱, ۲a_۲-۱, ۲a_۳-۱ \Rightarrow \text{قدر نسبت} = ۲d'$$

$$d' = (۲a_۲-۱)-(۲a_۱-۱) = ۲(a_۲-a_۱) = ۲d$$

$$d' = (۲a_۳-۱)-(۲a_۲-۱) = ۲(a_۳-a_۲) = ۲d$$

همچنین

$$b_n = ۲a_n - ۱$$

$$d' = b_{n+۱} - b_n = (۲a_{n+۱}-۱)-(۲a_n-۱) = ۲(a_{n+۱}-a_n) = ۲d$$

۱۴۲- گزینه‌ی ۳ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی اصلی به‌صورت $a_n = ۱+\frac{۲}{۳}(n-۱)$ است. هم‌چنین دنباله‌ی $\frac{۸}{۳},\frac{۷}{۳},\frac{۶}{۳},\ldots$ دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست $\frac{۸}{۳}$ و قدرنسبت $-\frac{۱}{۳}$ است. در نتیجه جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $b_n = \frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳}(n-۱)$ است. اکنون با جمع کردن این دو دنباله به دنباله‌ی C_n می‌رسیم، که

$$C_n = a_n + b_n = \frac{۱۰+n}{۳}$$

بنابراین جمله‌ی ۶۵ اُم دنباله‌ی جدید برابر با ۲۵ است.

۱۴۳- گزینه‌ی ۲ به دنباله‌های زیر توجه کنید:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots \quad \text{قدر نسبت} = d$$

$$b_۱, b_۲, b_۳, \ldots \quad \text{قدر نسبت} = d'$$

$$(a_۲-b_۲)-(a_۱-b_۱) = (a_۲-a_۱)-(b_۲-b_۱) = d-d'$$

$$(a_۳-b_۳)-(a_۲-b_۲) = (a_۳-a_۲)-(b_۳-b_۲) = d-d'$$

بنابراین دنباله‌ی زیر دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d-d'$ است:

$$a_۱-b_۱ , a_۲-b_۲ , a_۳-b_۳ , \ldots$$

همچنین در حالت کلی می‌توان نوشت

$$c_n = a_n - b_n$$

$$c_{n+۱}-c_n = (a_{n+۱}-b_{n+۱})-(a_n-b_n)$$

$$= (a_{n+۱}-a_n)-(b_{n+۱}-b_n) = d-d' = d''$$

۱۴۴- گزینه‌ی ۲ جملات دو دنباله را می‌نویسیم تا به اولین جمله‌ی مشترک برسیم:

$$-۲ , ۲ , ۶ , ۱۰ , \ldots \; d = ۴$$

$$۱ , ۴ , ۷ , ۱۰ , \ldots \; d' = ۳$$

اولین جمله‌ی مشترک ۱۰ است و قدرنسبت دنباله‌ی جملات مشترک ک.م.م قدرنسبت دو دنباله یعنی ۱۲ است. پس جمله‌ی عمومی دنباله‌ای که جملات مشترک را تولید می‌کند به صورت $a_n = ۱۰+۱۲(n-۱)$ است، یعنی

$$a_n = ۱۲n - ۲$$

۱۴۵- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی اول به صورت $a_n = ۲n+۱$ و جمله‌ی عمومی دنباله‌ی دوم به صورت $b_m = ۳m-۱$ است. اگر

$$a_n = b_m \Rightarrow ۲n+۱ = ۳m-۱ \Rightarrow ۲(n-۲) = ۳(m-۲)$$

در نتیجه $n-۲$ مضرب ۳ و $m-۲$ مضرب ۲ است. بنابراین جملات ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰اُم دنباله‌ی a_n به ترتیب با جملات ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴اُم دنباله‌ی b_n برابر هستند.

۱۴۶- گزینه‌ی ۳ اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله عدد ۵ است. قدرنسبت دنباله‌ی اول ۳ و قدرنسبت دنباله‌ی دوم ۶ است. پس قدرنسبت دنباله‌ای که جملات مشترک دو دنباله را تولید می‌کند، کوچک‌ترین مضرب مشترک ۳ و ۶ است که همان ۶ است. پس دنباله‌ای با قدرنسبت ۶ و جمله‌ی اول ۵ جملات مشترک دو دنباله را تولید می‌کند که جمله‌ی عمومی آن $a_n = ۵+۶(n-۱)$ است. برای این که تعداد اعداد ۳ رقمی این دنباله را مشخص کنیم، کافی است نامعادله‌های $۱۰۰ \le a_n < ۱۰۰۰$ را حل کنیم:

$$۱۰۰ \le ۶n-۱ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۱ \le ۶n < ۱۰۰۱ \Rightarrow ۱۶/۸ \le n < ۱۶۶/۸$$

چون n طبیعی است، پس

$$۱۷ \le n \le ۱۶۶$$

بنابراین ۱۵۰ جمله‌ی مشترک سه رقمی وجود دارد.

۱۴۷- گزینه‌ی ۳ چند جمله‌ی اول دو دنباله به شکل زیر است:

$$a_n : ۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۵ , \ldots \Rightarrow d = ۴$$

$$b_n : ۶ , ۱۱ , ۱۶ , \ldots \Rightarrow d' = ۵$$

بنابراین اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله عدد ۱۱ است. جملات مشترک دو دنباله، دنباله‌ای حسابی می‌سازند که جمله‌ی اول آن ۱۱ و قدرنسبت آن کوچک‌ترین مضرب مشترک قدرنسبت دو دنباله است. یعنی قدرنسبت ۲۰ است. پس جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $t_n = ۱۱+۲۰(n-۱)$ است. برای پیدا کردن تعداد جملات مشترک کم‌تر از ۴۰۰ باید نامعادله‌ی $t_n < ۴۰۰$ را حل کنیم:

$$۲۰n - ۹ < ۴۰۰ \Rightarrow ۲۰n < ۴۰۹ \Rightarrow n < ۲۰/۴۵$$

چون n طبیعی است، پس

$$۱ \le n \le ۲۰$$

بنابراین ۲۰ جمله‌ی مشترک کم‌تر از ۴۰۰ وجود دارد.

۱۴۸- گزینه‌ی ۳ جملات را به صورت $a-d , a , a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=۱۲\Rightarrow ۳a=۱۲\Rightarrow a=۴$$

از طرف دیگر،

$$(a-d)\times a\times(a+d)=۲۸\Rightarrow a(a^۲-d^۲)=۲۸$$

$$\xrightarrow{a=۴} ۴(۱۶-d^۲)=۲۸\Rightarrow d^۲=۹\Rightarrow d=\pm ۳$$

۱۴۹- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی هشتم را با s نشان می‌دهیم. در این صورت جمله‌ی هفتم برابر $s-d$ و جمله‌ی نهم برابر $s+d$ است. اکنون توجه کنید که

$$a_۷.a_۹=(s+d)(s-d)=s^۲-d^۲=۱$$

$$a_۸^۲+d^۲=s^۲+d^۲=۳۱$$

در نتیجه $d^۲=۱۵$، بنابراین

$$d=\sqrt{۱۵}$$

۱۵۰- گزینه‌ی ۲ جملات را به صورت

$$a-۳d , a-d , a+d , a+۳d$$

در نظر می‌گیریم که قدرنسبت دنباله ۲d می‌شود. بنابراین

$$a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$$

پس دنباله به صورت $-۳d , -d , +d , ۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۲۵۰\Rightarrow ۲d^۲=۲۵\Rightarrow d=\frac{\pm ۵}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین بزرگ‌ترین عدد $۳d$ یا $-۳d$ خواهد بود که برابر $\frac{۱۵}{\sqrt{۲}}$ است.

۱۵۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$a_{n+۱}+a_{n+۳}=۲a_{n+۲}$$

در نتیجه

$$a_{n+۱}+a_{n+۲}+a_{n+۳}=۳a_{n+۲}=-۶n+۱۲$$

بنابراین

$$a_{n+۲}=-۲n+۴$$

در نتیجه $a_{۱۷}=-۲۶$ و $a_۸=-۸$. بنابراین

$$a_۸+a_{۱۷}=-۳۴$$

۱۵۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$a_{m+۴}+a_{m+۸}=۲a_{m+۶}$$

هم‌چنین

$$a_{m+۵}+a_{m+۷}=۲a_{m+۶}$$

در نتیجه

$$a_{m+۵}+a_{m+۷}=a_{m+۴}+a_{m+۸}=۴۴$$

۱۵۳- گزینه‌ی ۲ به تساوی $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}=\frac{y-x}{xy}$ توجه کنید. پس $\frac{۱}{y-x}(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y})=\frac{۱}{xy}$. به کمک این تساوی کسرهای داده شده را به صورت تفاضل دو کسر می‌نویسیم:

$$A=\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\frac{۱}{a_۳a_۴}+...+\frac{۱}{a_na_{n+۱}}$$

$$=(\frac{۱}{a_۲-a_۱})(\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_۲})+(\frac{۱}{a_۳-a_۲})(\frac{۱}{a_۲}-\frac{۱}{a_۳})+...+$$

$$(\frac{۱}{a_{n+۱}-a_n})(\frac{۱}{a_n}-\frac{۱}{a_{n+۱}})$$

چون تفاضل دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی d است، پس

$$A=\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_۲})+\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۲}-\frac{۱}{a_۳})+...+\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_n}-\frac{۱}{a_{n+۱}})$$

$$=\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_۲}+\frac{۱}{a_۲}-\frac{۱}{a_۳}+\frac{۱}{a_۳}+...+\frac{۱}{a_n}-\frac{۱}{a_{n+۱}})$$

$$=\frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_{n+۱}})=\frac{۱}{d}\times\frac{a_{n+۱}-a_۱}{a_۱a_{n+۱}}=\frac{۱}{d}\times\frac{a_۱+nd-a_۱}{a_۱a_{n+۱}}=\frac{n}{a_۱a_{n+۱}}$$

۱۵۴- گزینه‌ی ۳ مخرج کسرها را گویا می‌کنیم:

$$A=\frac{d(\sqrt{a_۲}-\sqrt{a_۱})}{a_۲-a_۱}+\frac{d(\sqrt{a_۳}-\sqrt{a_۲})}{a_۳-a_۲}+...+\frac{d(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-۱}})}{a_n-a_{n-۱}}$$

مخرج تمام کسرها تفاضل دو جمله‌ی متوالی از دنباله است. پس مخرج‌ها همگی برابر d هستند و می‌توان نوشت

$$A=\frac{d(\sqrt{a_۲}-\sqrt{a_۱})}{d}+\frac{d(\sqrt{a_۳}-\sqrt{a_۲})}{d}+...+\frac{d(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-۱}})}{d}$$

$$A=\sqrt{a_۲}-\sqrt{a_۱}+\sqrt{a_۳}-\sqrt{a_۲}+...+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-۱}}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{a_n}-\sqrt{a_۱}$$

۱۵۵- گزینه‌ی ۱ جمله‌ی یازدهم از رابطه‌ی $a_{۱۱}=a_۱r^{۱۰}$ به‌دست می‌آید که چون $a_۱=-۳$ و $r=\frac{۱}{۹}$، پس

$$a_{۱۱}=-۳\times(\frac{۱}{۹})^{۱۰}=-۳\times ۳^{-۲۰}=-۳^{-۱۹}$$

۱۵۶- گزینه‌ی ۴ قدرنسبت دنباله برابر است با

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۲a}{a}=۲$$

پس نسبت جمله‌ی هفتم به جمله‌ی سوم برابر است با

$$\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_۱r^۶}{a_۱r^۲}=r^۴=۲^۴=۱۶$$

۱۵۷- گزینه‌ی ۴ دنباله‌ی a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۴}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱(\frac{۳}{۴})^۲=۲\Rightarrow a_۱=\frac{۳۲}{۹}$$

بنابراین

$$a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۴})^{۲۸}=\frac{۳۲}{۹}\times(\frac{۳}{۴})^{۲۸}=\frac{۲^۵\times ۳^{۲۸}}{۳^۲\times ۲^{۵۶}}=\frac{۳^{۲۶}}{۲^{۵۱}}$$

۱۵۸- گزینه‌ی ۱ چون $\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{۱}{۲}$، بنابراین دنباله هندسی است و قدرنسبت آن $\frac{۱}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_{۱۰}=a_۱r^۹=۴\times(\frac{۱}{۲})^۹=\frac{۱}{۱۲۸}$$

۱۵۹- گزینه‌ی ۳ نسبت جملات متوالی در هر گزینه را حساب می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):

$$\frac{۴^۴}{۲^۳}=\frac{۲\times۱۶^۳}{۴^۴}=۲^۵$$

گزینه‌ی (۲):

$$\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{(\sqrt{۲}+۱)^۳}{\sqrt{۲}+۱}=(\sqrt{۲}+۱)^۲$$

گزینه‌ی (۳):

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\neq\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}}$$

گزینه‌ی (۴):

$$\frac{\frac{۱}{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲۷}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

پس دنباله‌ی گزینه‌ی (۳) نمی‌تواند هندسی باشد.

۱۶۰- گزینه‌ی ۲ اگر جمعیت در یک سال a باشد، در سال بعد $\frac{۱}{۵}$ آن کم می‌شود و $\frac{۴}{۵}$ آن باقی می‌ماند پس جمعیت سال بعد $\frac{۴}{۵}a$ خواهد بود یعنی جمعیت در سال‌های متوالی، دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت $\frac{۴}{۵}$ تشکیل می‌دهد. پس از ۴ سال، جمعیت $(\frac{۴}{۵})^۴a$ خواهد بود یعنی $(\frac{۴}{۵})^۴\times۵۰۰۰$ که برابر است با ۲۰۴۸ نفر.

۱۶۱- گزینه‌ی ۲ قدرنسبت دنباله را با r نشان می‌دهیم. در نتیجه

$$a_۴=a_۱r^۳=a_۱{}^۲\Rightarrow a_۱=r^۳$$

بنابراین

$$a_۱{}^۳=r^۹=r^۳.r^۶=a_۱r^۶=a_۷$$

۱۶۲- گزینه‌ی ۲ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$m=xy^۲, n=yx^۲$$

بنابراین

$$\frac{m}{n}=\frac{xy^۲}{yx^۲}=\frac{y}{x}=۲$$

پس $\frac{y}{x}=۲$.

۱۶۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$x^۲=\frac{(۵-۲\sqrt{۶})(۵+۲\sqrt{۶})}{۱۶}=\frac{۱}{۱۶}$$

در نتیجه $x=\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۴}$.

۱۶۴- گزینه‌ی ۴ چون $۴^{۴x}$ واسطه‌ی هندسی $۸^{۸x+۱}$ و $۲^{۲x-۱}$ است، پس

$$(۴^{۴x})^۲=۲^{۲x-۱}\times۸^{۸x+۱}\Rightarrow ۲^{۱۶x}=۲^{۲x-۱}\times۲^{۲۴x+۳}$$

$$\Rightarrow ۲^{۱۶x}=۲^{۲۶x+۲}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$۱۶x=۲۶x+۲$$

پس

$$x=-\frac{۱}{۵}$$

۱۶۵- گزینه‌ی ۲ چون $a_۱,a_۲,a_۳,\dots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۹ است، پس

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\dots=۹$$

در دنباله‌ی $۳\sqrt{a_۱},۳\sqrt{a_۲},۳\sqrt{a_۳},\dots$ داریم:

$$\frac{۳\sqrt{a_۲}}{۳\sqrt{a_۱}}=\sqrt{\frac{a_۲}{a_۱}}=\sqrt{۹}=۳$$

$$\frac{۳\sqrt{a_۳}}{۳\sqrt{a_۲}}=\sqrt{\frac{a_۳}{a_۲}}=\sqrt{۹}=۳$$

$$\vdots$$

$$b_n=۳\sqrt{a_n}\Rightarrow\frac{b_{n+۱}}{b_n}=\frac{۳\sqrt{a_{n+۱}}}{۳\sqrt{a_n}}=\sqrt{\frac{a_{n+۱}}{a_n}}=\sqrt{۹}=۳$$

پس این دنباله دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۳ است.

۱۶۶- گزینه‌ی ۳ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$yz=۴$$

هم‌چنین

$$xt=(\text{جمله ی اول})\times(\text{جمله ی پنجم})=(\text{جمله ی سوم})^۲=۲^۲=۴$$

بنابراین

$$\frac{x^۲t^۲}{yz}=\frac{(xt)^۲}{yz}=\frac{۴^۲}{۴}=۴$$

۱۶۷- گزینه‌ی ۴ از تساوی $a_۱a_۶=۱۸$ نتیجه می‌شود

$$a_۱\times a_۱r^۵=۱۸\Rightarrow a_۱^۲r^۵=۱۸$$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید

$$a_۱r\times a_۱r^۳=۹\Rightarrow a_۱^۲r^۴=۹$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_۱^۲r^۵}{a_۱^۲r^۴}=\frac{۱۸}{۹}\Rightarrow r=۲$$

با جای‌گذاری $r=۲$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_۱=\pm\frac{۳}{۴}$.

چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_۱=\frac{۳}{۴}$ و در نتیجه

$$a_۷=a_۱r^۶=\frac{۳}{۴}\times ۲^۶=۴۸$$

۱۶۸- گزینه‌ی ۳ از $a_۵=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $a_۱r^۴=\frac{۱}{۲}$، پس $a_۱^۲r^۸=\frac{۱}{۴}$. از $a_{۱۲}a_{۱۳}=۵۴$ نتیجه می‌شود

$$a_۱r^{۱۱}\times a_۱r^{۱۲}=۵۴\Rightarrow a_۱^۲r^{۲۳}=۵۴$$

از تقسیم طرفین دو رابطه بر هم به‌دست می‌آید

$$\frac{a_۱^۲r^۸}{a_۱^۲r^{۲۳}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۵۴}=\frac{۱}{۲۱۶}\Rightarrow r^{۱۵}=۲۱۶=۶^۳\Rightarrow r^۵=۶\Rightarrow r=\sqrt[۵]{۶}$$

با جای‌گذاری مقدار r در $a_۱r^۴=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید

$$a_۱(\sqrt[۵]{۶})^۴=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{(\sqrt[۵]{۶})^۴}$$

بنابراین مقدار $a_{۲۰}$ به شکل زیر حساب می‌شود:

$$a_{۲۰}=a_۱r^{۱۹}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{(\sqrt[۵]{۶})^۴}\times(\sqrt[۵]{۶})^{۱۹}=\frac{۱}{۲}\times(\sqrt[۵]{۶})^{۱۵}=\frac{۱}{۲}\times ۶^۳=۱۰۸$$

۱۶۹- گزینه‌ی ۲ چون $۴+۸=۳+۹=۵+۷$ پس

$$a_۴a_۸=a_۳a_۹=a_۵a_۷$$

در نتیجه

$$a_۳a_۵a_۷a_۹=(a_۴a_۸)^۲=۹$$

۱۷۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$a_ma_{m-۱}a_{m+۴}=a_۱r^{m-۱}\times a_۱r^{m-۲}\times a_۱r^{m+۳}$$

$$=a_۱^۳r^{۳m}=(a_۱r^m)^۳=۸^{m+۲}$$

در نتیجه

$$a_{m+۱}=a_۱r^m=۲^{m+۲}$$

بنابراین

$$a_۲=۲^۳, a_۱=۲^۲$$

درنتیجه

$$a_۲-a_۱=۸-۴=۴$$

۱۷۱- گزینه‌ی ۴ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_۵+a_۸=a_۱r^۴+a_۱r^۷=a_۱r^۴(r^۳+۱)$$

مجموع جملات نهم و دهم برابر است با

$$a_۹+a_{۱۰}=a_۱r^۸+a_۱r^۹=a_۱r^۸(r+۱)$$

بنابراین نسبت دو عدد فوق را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a_۵+a_۸}{a_۹+a_{۱۰}}=\frac{a_۱r^۴(r^۳+۱)}{a_۱r^۸(r+۱)}=\frac{r^۳+۱}{r^۴(r+۱)}=\frac{-\frac{۱}{۸}+۱}{\frac{۱}{۱۶}(-\frac{۱}{۲}+۱)}=۲۸$$

۱۷۲- گزینه‌ی ۲ حاصل‌ضرب ۲۰ جمله‌ی اول به شکل زیر است:

$$P=a\times ar\times ar^۲\times\ldots\times ar^{۱۹}\Rightarrow P=a^{۲۰}\times r^{۱+۲+\ldots+۱۹}$$

چون $۱+۲+\ldots+۱۹=\frac{۱۹}{۲}(۱+۱۹)=۱۹۰$، پس

$$P=a^{۲۰}r^{۱۹۰}=(\frac{۱}{۳})^{۲۰}\times ۳^{۱۹۰}=۳^{۱۷۰}$$

۱۷۳- گزینه‌ی ۲ این جملات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{r^۳},\frac{a}{r^۲},\frac{a}{r},a\ ,ar,ar^۲,ar^۳$$

بنابراین

$$\frac{a}{r^۳}\times\frac{a}{r^۲}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^۲\times ar^۳=۱۲۸\Rightarrow a^۷=۲^۷\Rightarrow a=۲$$

در نتیجه جمله‌ی وسطی برابر ۲ است.

۱۷۴- گزینه‌ی ۱ قدرنسبت دنباله را با r نشان می‌دهیم. در نتیجه

$$t_۱\cdots t_۹=t_۱^۹r^{۱+۲+\cdots+۸}=t_۱^۹r^{۳۶}=۸\Rightarrow t_۱r^۴=\sqrt[۳]{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$t_۲t_۴t_۶t_۸=t_۱^۴r^{۱+۳+۵+۷}=t_۱^۴r^{۱۶}=(t_۱r^۴)^۴=(\sqrt[۳]{۲})^۴=۲\sqrt[۳]{۲}$$

۱۷۵- گزینه‌ی ۲ اگر قدرنسبت دنباله را با r نشان دهیم، آن‌گاه

$$r^۳=\frac{۱۰۸}{۴}=۲۷\Rightarrow r=۳$$

در نتیجه

$$x=\frac{۴}{۳}, y=۱۲, z=۳۶$$

بنابراین

$$\frac{xy}{z}=\frac{\frac{۴}{۳}\times ۱۲}{۳۶}=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

۱۷۶- گزینه‌ی ۳ این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{۲},○,○,○,○,○,○,○,۱۶\sqrt{۲}$$

پس $a_۱=\sqrt{۲}$ و $a_۹=۱۶\sqrt{۲}$. بنابراین

$$a_۱r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}r^۸=۱۶\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow r^۸=۱۶\Rightarrow(r^۲)^۴=۲^۴\Rightarrow r^۲=۲$$

۱۷۷- گزینه‌ی ۳ در حالتی که ۸ واسطه درج می‌کنیم، $r^۹=\frac{b}{a}$

در حالتی که ۱۰ واسطه درج می‌کنیم،

$$(\frac{r}{۲})^{۱۱}=\frac{b}{a}\Rightarrow r^{۱۱}=۲^{۱۱}\times(\frac{b}{a})$$

از تقسیم طرفین دو رابطه‌ی فوق بر یک‌دیگر نتیجه می‌شود

$$\frac{r^{۱۱}}{r^۹}=۲^{۱۱}\Rightarrow r^۲=۲^{۱۱}\Rightarrow r=\sqrt{۲^{۱۱}}=۳۲\sqrt{۲}$$

۱۷۸- گزینه‌ی ۱ قدرنسبت دنباله را با r نشان می‌دهیم. در این صورت

$$a_۱+a_۳=a_۱+a_۱r^۲=۳a_۱r\Rightarrow r^۲+۱=۳r\Rightarrow r+\frac{۱}{r}=۳$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_۵+a_۱}{a_۳}=\frac{a_۱(r^۴+۱)}{a_۱r^۲}=r^۲+\frac{۱}{r^۲}$$

بنابراین

$$r^۲+\frac{۱}{r^۲}=(r+\frac{۱}{r})^۲-۲=۷$$

۱۷۹- گزینه‌ی ۴ چون در هر دنباله‌ی هندسی $a_{n-k}\cdot a_{n+k}=a_n^{\ ۲}$، پس

$$a_{۲۰۱۷+۱۰۱۳}.a_{۲۰۱۷-۱۰۱۳}=a^۲_{۲۰۱۷}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۱۸۰- گزینه‌ی ۲ این سه عدد را به صورت $\frac{a}{r},a,ar$ در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=۲۱۶\Rightarrow a^۳=۲۱۶\Rightarrow a=۶$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=۱۹\Rightarrow a(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۹\xrightarrow{a=۶}۶(۱+r+r^۲)$$

$$=۱۹r\Rightarrow ۶r^۲-۱۳r+۶=۰\Rightarrow(۳r-۲)(۲r-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{۲}{۳}\\ r=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

بنابراین جملات دنباله به صورت‌های زیر هستند:

۴, ۶, ۹

۹, ۶, ۴

در هر صورت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد برابر ۵ است.

۱۸۱- گزینه‌ی ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و $ar^۲$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس،

$$a^۲+(ar)^۲=(ar^۲)^۲$$

بنابراین

$$a^۲(۱+r^۲)=a^۲r^۴\Rightarrow r^۴-r^۲-۱=۰$$

پس قدرنسبت از معادله بالا به‌دست می‌آید.

۱۸۲- گزینه‌ی ۳ قدرنسبت دنباله را با r نشان می‌دهیم. درنتیجه

$$a_۱=۶۲۵\times a_۱r^۴\Rightarrow r^۴=\frac{۱}{۶۲۵}=\frac{۱}{۵^۴}\Rightarrow r=\frac{۱}{۵}$$

چون

$$\frac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}{a_۵}=\frac{۱+r+r^۲+r^۳}{r^۴}$$

پس

$$\frac{۱+r+r^۲+r^۳}{r^۴}=\frac{۱}{r^۴}+\frac{۱}{r^۳}+\frac{۱}{r^۲}+\frac{۱}{r}$$

$$=۵+۵^۲+۵^۳+۵^۴$$

$$=۵+۲۵+۱۲۵+۶۲۵=۷۸۰$$

۱۸۳- گزینه‌ی ۱ طول ضلع مربع‌ها دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ و طول ضلع مثلث‌ها نیز دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ می‌سازند. بنابراین محیط مربع و مثلث در مرحله‌ی n ام برابر است با

$$S_n=۴\times۸\times(\frac{۱}{۴})^{n-۱}=\frac{۱}{۲^{۲n-۷}}$$

$$T_n=۳\times۴\times(\frac{۱}{۴})^{n-۱}=\frac{۳}{۴^{n-۲}}$$

۱۸۴- گزینه‌ی ۳ اگر شعاع دایره‌ی بزرگ را R فرض کنیم، مساحت آن $S_۱=\pi R^۲$ است. شعاع دو دایره‌ی کوچک‌تر $\frac{R}{۲}$ و مجموع مساحت آن‌ها برابر است با

$$S_۲=۲\times\pi(\frac{R}{۲})^۲=\frac{\pi R^۲}{۲}$$

شعاع چهار دایره‌ی کوچک‌تر $\frac{R}{۴}$ و مجموع مساحت آن‌ها برابر است با

$$S_۳=۴\times\pi\times(\frac{R}{۴})^۲=\frac{\pi R^۲}{۴}$$

بنابراین $S_۱,S_۲,S_۳,\ldots$ دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه

$$\frac{S_۷}{S_۱}=\frac{S_۱r^۶}{S_۱}=r^۶=(\frac{۱}{۲})^۶=\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\frac{S_۱}{S_۷}=۶۴$$

۱۸۵- گزینه‌ی ۱ در گام‌های زوج، برش افقی است. هم‌چنین در گام n ام مساحت شکل برابر با $\frac{۱}{۲^n}$ است.

۱۸۶- گزینه‌ی ۱ عرض مقطع همواره برابر ۲cm است. اما طول مقطع در گام nاُم برابر است با $۴\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$. بنابراین مساحت مقطع برابر است با

$$\frac{۲\times۴}{۲^{n-۱}}=\frac{۱}{۲^{n-۴}}=۲^{۴-n}$$

در نتیجه اگر $۲^{۴-n}=۲^{-۱۰۰}$، آن‌گاه $n=۱۰۴$.

۱۸۷- گزینه‌ی ۱ چون ۶ واسطه‌ی حسابی بین a و b است، پس

$$a+b=۱۲$$

اگر ۸ واحد به b اضافه کنیم، ۶ واسطه‌ی هندسی بین a و $b+۸$ می‌شود. پس

$$۳۶=a(b+۸)$$

از قرار دادن $b=۱۲-a$ در معادله‌ی فوق به‌دست می‌آید.

$$۳۶=a(۱۲-a+۸)\Rightarrow a^۲-۲۰a+۳۶=۰$$

اعداد ۲ و ۱۸ در معادله‌ی فوق صدق می‌کنند. پس $a=۲$ یا

$$a=۱۸$$

۱۸۸- گزینه‌ی ۲ اگر چند عدد هم دنباله‌ی حسابی باشند و هم هندسی، این اعداد با هم برابر هستند، یعنی،

$$a=b=c$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt[۳]{abc}}{a+b+c}=\frac{\sqrt[۳]{a^۳}}{۳a}=\frac{a}{۳a}=\frac{۱}{۳}$$

۱۸۹- گزینه‌ی ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله‌ی ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases} ۲y+x=۲x+y \\ ۲y+x=x+۴ \end{cases}$$

از دستگاه فوق به‌دست می‌آید $x=y=۲$، پس $\frac{x}{y}=۱$.

۱۹۰- گزینه‌ی ۳ چون a, b, c سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی هستند، پس

$$b^۲=ac$$

چون $a+k, b+k, c+k$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی هستند، پس

$$(b+k)^۲=(a+k)(c+k)\Rightarrow b^۲+k^۲+۲bk=ac+(a+c)k+k^۲$$

$$\Rightarrow ۲bk=(a+c)k\Rightarrow a+c=۲b$$

بنابراین a, b, c دنباله‌ای حسابی هم تشکیل می‌دهند. بنابراین $a=b=c$ و در نتیجه

$$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{a-a+a}{a+a+a}=\frac{a}{۳a}=\frac{۱}{۳}$$

۱۹۱- گزینه‌ی ۲ جمله‌ی نخست دنباله را با a نشان می‌دهیم. بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله به صورت زیر است

$$a_n=a+۲۷(n-۱)=a-۲۷+۲۷n$$

اکنون جملات هفتم، پانزدهم و ... دنباله‌ای به شکل زیر می‌سازند:

$$a-۲۷+۲۷\times۷, a-۲۷+۲۷\times۱۵ , a-۲۷+۲۷\times۲۳, \ldots$$

این دنباله، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $۸\times۲۷=۲۱۶$ است.

۱۹۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$a_۳=a+۶, a_۷=a+۱۴, a_{۱۰}=a+۲۰$$

همچنین

$$(a+۱۴)^۲=(a+۲۰)(a+۶)$$

در نتیجه

$$a^۲+۲۸a+۱۹۶=a^۲+۲۶a+۱۲۰\Rightarrow ۲a+۷۶=۰$$

بنابراین $a=-۳۸$. در نتیجه

$$a_۱=۲+a=-۳۶$$

۱۹۳- گزینه‌ی ۳ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ی حسابی را به ترتیب $a+d$، $a+۵d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۵d)^۲=(a+d)(a+۱۳d)\Rightarrow ۱۲d^۲=۴ad\Rightarrow a=۳d$$

بنابراین دنباله‌ی هندسی به صورت $۴d, ۸d, ۱۶d, \ldots$ است که جمله‌ی پنجم آن $۶۴d$ است. همچنین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت زیر است:

$$a_n=a+(n-۱)d=۳d+(n-۱)d=(n+۲)d$$

اگر $a_n=۶۴d$، آن‌گاه

$$(n+۲)d=۶۴d\Rightarrow n=۶۲$$

پس جمله‌ی پنجم دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی شصت و دوم دنباله‌ی حسابی برابر است.

۱۹۴- گزینه‌ی ۴ این جملات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$a+d , a+۴d , a+۱۱d$$

چون این اعداد دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۴d)^۲=(a+d)(a+۱۱d)$$

$$\Rightarrow a^۲+۱۶d^۲+۸ad=a^۲+۱۲ad+۱۱d^۲$$

$$\Rightarrow ۵d^۲=۴ad\Rightarrow d=\frac{۴}{۵}a$$

بنابراین قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر است با

$$r=\frac{a+۴d}{a+d}=\frac{a+۴(\frac{۴}{۵}a)}{a+(\frac{۴}{۵}a)}=\frac{\frac{۲۱}{۵}a}{\frac{۹}{۵}a}=\frac{۷}{۳}$$

۱۹۵- گزینه‌ی ② جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n=-۲۴+\frac{۱}{۴}(n-۱)$ است. در نتیجه جمله‌ی ۱۰۱اُم این دنباله برابر است با

$$a_{۱۰۱}=-۲۴+\frac{۱}{۴}\times ۱۰۰=+۱$$

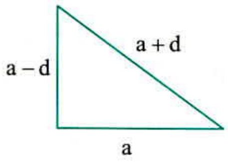
اگر قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را با r نشان دهیم، می‌توان نوشت

جمله‌ی هشتم دنباله‌ی هندسی $=۱۲۸r^۷=(۲r)^۷=۱\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$

۱۹۶- گزینه‌ی ④ جمله‌ی اول صحیح است. اگر دنباله‌ی نخست را با $a_۱, a_۲, \dots$ نشان دهیم و جملات آن را با عدد c جمع کنیم، دنباله‌ی $c+a_۱, c+a_۲, c+a_۳, \dots$ به‌دست می‌آید که دنباله‌ای حسابی با همان قدرنسبت و جمله‌ی نخست $c+a_۱$ است. جمله‌ی دوم نیز صحیح است. دنباله‌ی $ba_۱, ba_۲, \dots$ دنباله‌ای حسابی با جمله‌ی نخست $ba_۱$ و قدرنسبت bd به‌دست می‌آید. جمله‌ی سوم نیز صحیح است. اگر دنباله‌ی هندسی را با $x_۱, x_۲, \dots$ نشان دهیم، دنباله‌ی $bx_۱, bx_۲, \dots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r و جمله‌ی نخست $bx_۱$ است.

۱۹۷- گزینه‌ی ② طول ضلع‌های مثلث را مطابق شکل $a-d$, a, $a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

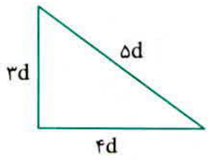
$$(a+d)^۲=a^۲+(a-d)^۲\Rightarrow a=۴d$$



بنابراین طول ضلع‌های مثلث $۳d$, $۴d$, $۵d$ هستند. پس مساحت مثلث

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۳d\times ۴d=۶d^۲$$

و محیط آن $P=۱۲d$ است.



مساحت مثلث، واسطه‌ی هندسی بین وتر و محیط است. پس

$$S^۲=P(۵d)\Rightarrow ۳۶d^۴=۱۲d\times ۵d$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

بنابراین طول وتر برابر $۵\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ است.

۱۹۸- گزینه‌ی ① اگر دو عدد را a و b بنامیم، واسطه‌ی حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{۲}$ و واسطه‌ی هندسی آن‌ها $\pm\sqrt{ab}$ است.

چون دو عدد مثبت هستند، پس

$$\frac{a+b}{۲\sqrt{ab}}=\frac{۳}{\sqrt{۸}}\Rightarrow ۸(a+b)^۲=۳۶ab$$

$$\Rightarrow ۲a^۲+۲b^۲-۵ab=۰$$

$$\Rightarrow (۲a-b)(a-۲b)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=۲b\Rightarrow \frac{a}{b}=۲ \\ b=۲a\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین نسبت دو عدد ۲ یا $\frac{۱}{۲}$ است.

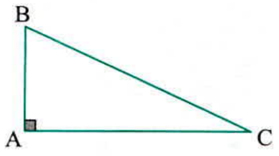
فصل دوم

مثلثات

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه‌ی حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC},\quad \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه‌ی حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC},\quad \cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه‌ی حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB},\quad \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}$$

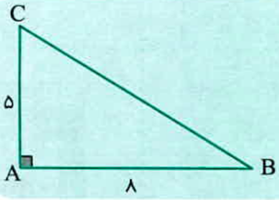
و عکس این نسبت را **کتانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\cot\hat{B}=\frac{AB}{AC},\quad \cot\hat{C}=\frac{AC}{AB}$$

نکته **رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی برقرارند:**

$$\tan\hat{B}\times\cot\hat{B}=۱\ ,\ \cot\hat{B}=\frac{۱}{\tan\hat{B}}\ ,\ \cot\hat{B}=\frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}}\ ,\ \tan\hat{B}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$

تست ۱ **در شکل مقابل مقدار** $\sin\hat{B}+\cos\hat{B}$ **کدام است؟**

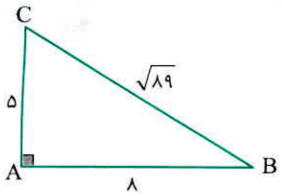


۱) $\frac{۸۹}{۴۰}$

۲) $\frac{۴۰}{۸۹}$

۳) $\frac{۱۳}{\sqrt{۸۹}}$

۴) $\frac{\sqrt{۸۹}}{۱۳}$



پاسخ: از قضیه‌ی فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به‌دست آوریم:

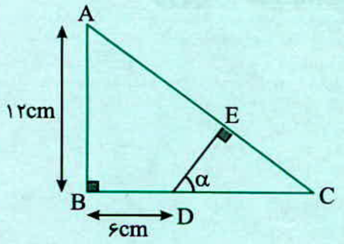
$$BC=\sqrt{۵^{۲}+۸^{۲}}=\sqrt{۸۹}$$

بنابراین

$$\sin\hat{B}+\cos\hat{B}=\frac{۵}{\sqrt{۸۹}}+\frac{۸}{\sqrt{۸۹}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۸۹}}$$

تست ۲

در شکل روبه‌رو $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$. طول DC چند است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۰

۳) ۸

۴) ۶

پاسخ: مثلث‌های ABC و DEC یک زاویه‌ی ۹۰° و یک زاویه‌ی مشترک دارند (زاویه‌ی C)، پس $\hat{A}=\alpha$.

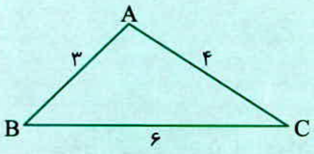
در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{DC+۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}$$

پس $DC=۱۰$.

تست ۳

در شکل مقابل مقدار $\cos\hat{B}+\frac{۴}{۳}\cos\hat{C}$ چقدر است؟



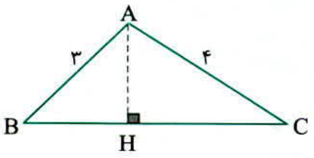
۱) ۲

۲) ۳

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: مطابق شـکل مقابل، ارتفاع AH را رسـم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH،



$$\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}=\frac{BH}{۳}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHC،

$$\cos\hat{C}=\frac{HC}{AC}=\frac{HC}{۴}$$

بنابراین

$$\cos\hat{B}+\frac{۴}{۳}\cos\hat{C}=\frac{BH}{۳}+\frac{۴}{۳}(\frac{HC}{۴})=\frac{BH+HC}{۳}=\frac{BC}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲$$

تست ۴

حاصل عبارت $\frac{۱}{۱+\tan^۳\alpha}+\frac{۱}{۱+\cot^۳\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: چون $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$، پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۱+\tan^۳\alpha}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\tan^۳\alpha}}=\frac{۱}{۱+\tan^۳\alpha}+\frac{\tan^۳\alpha}{۱+\tan^۳\alpha}=۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

۶۰°	۴۵°	۳۰°	مقدار زاویه‌ی A مقدار نسبت مثلثاتی
$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sin \hat{A}$
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\cos \hat{A}$
$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\tan \hat{A}$
$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$\cot \hat{A}$

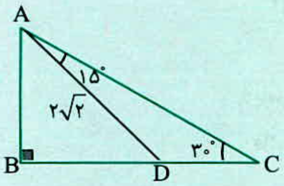
تست ۵ در شکل مقابل طول CD چقدر است؟

۱) $۲(\sqrt{۳}-۱)$

۲) $۲(\sqrt{۳}+۱)$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $۳\sqrt{۳}$



پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$B\hat{A}C=۹۰^\circ-\hat{C}=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ$$

پس

$$B\hat{A}D=B\hat{A}C-D\hat{A}C=۶۰^\circ-۱۵^\circ=۴۵^\circ$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD نتیجه می‌شود

$$\cos B\hat{A}D=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AB}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین $AB=۲$. همچنین، در همین مثلث،

$$\sin B\hat{A}D=\frac{BD}{AD}\Rightarrow\sin ۴۵^\circ=\frac{BD}{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{BD}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین $BD=۲$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ،

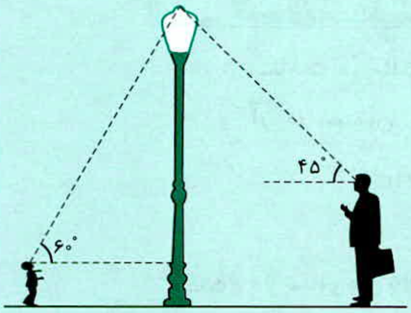
$$\tan ۳۰^\circ=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲}{BC}\Rightarrow BC=۲\sqrt{۳}$$

به این ترتیب

$$CD=BC-BD=۲\sqrt{۳}-۲=۲(\sqrt{۳}-۱)$$

تست ۶

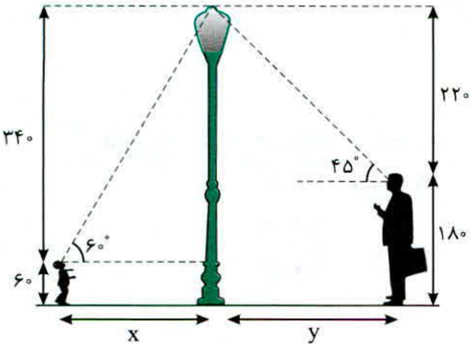
مطابق شکل مقابل دو شخص که قد آن‌ها برابر ۶۰ و ۱۸۰ سانتی‌متر است، بالاترین نقطه‌ی یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۴۰۰ سانتی‌متر را به‌ترتیب با زاویه‌های ۶۰° و ۴۵° می‌بینند. فاصله‌ی دو شخص از یک‌دیگر چقدر است؟ $(\sqrt{۳}=۱/۷)$



۱) ۲۰۰ ۲) ۲۲۰

۳) ۴۲۰ ۴) ۴۴۰

پاسخ: مطابق شکل مقابل،



$$\tan ۶۰^\circ = \frac{۳۴۰}{x} = \sqrt{۳} \Rightarrow x = \frac{۳۴۰}{\sqrt{۳}} \simeq \frac{۳۴۰}{۱/۷} = ۲۰۰$$

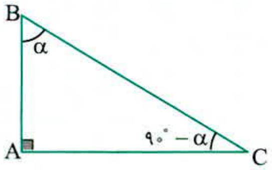
$$\tan ۴۵^\circ = \frac{۲۲۰}{y} = ۱ \Rightarrow y = ۲۲۰$$

بنابراین فاصله‌ی دو شخص برابر است با

$$x+y=۲۰۰+۲۲۰=۴۲۰$$

رابطه‌های نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، زاویه‌های B و C متمم‌اند. رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه برقرار است:



$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \cos(۹۰^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \sin(۹۰^\circ - \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \cot(۹۰^\circ - \alpha)$$

$$\cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \tan(۹۰^\circ - \alpha)$$

تست ۷

حاصل عبارت $A=\tan^{۲} ۱^\circ \tan^{۲} ۲^\circ \tan^{۲} ۳^\circ \ldots \tan^{۲} ۸۹^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲^{۴۵}$ ۴) صفر

پاسخ: می‌دانیم اگر α و β دو زاویه‌ی متمم باشند، آن‌گاه $\tan \alpha = \cot \beta$. همچنین می‌دانیم $\tan \alpha \cot \alpha = ۱$.

بنابراین تساوی‌های زیر درست هستند:

$$\tan^{۲} ۱^\circ \tan^{۲} ۸۹^\circ = \tan^{۲} ۱^\circ \cot^{۲} ۱^\circ = ۱$$

$$\tan^{۲} ۲^\circ \tan^{۲} ۸۸^\circ = \tan^{۲} ۲^\circ \cot^{۲} ۲^\circ = ۱$$

$$\vdots$$

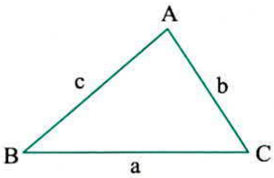
$$\tan^{۲} ۴۴^\circ \tan^{۲} ۴۶^\circ = \tan^{۲} ۴۴^\circ \cot^{۲} ۴۴^\circ = ۱$$

$$\tan^{۲} ۴۵^\circ = ۱$$

بنابراین $A=۱$.

محاسبه‌ی مساحت مثلث

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویه‌ی میان این دو ضلع.



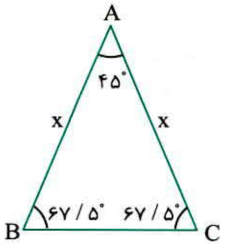
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$$

نکته **از تساوی‌های بالا نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید، که به قضیه‌ی سینوس‌ها معروف است.**

$$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$$

تست ۸ **در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $AB=AC$، $\hat{B}=۶۷/۵^\circ$ و مساحت مثلث $۹\sqrt{۲}$ است. طول ساق مثلث کدام است؟**

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

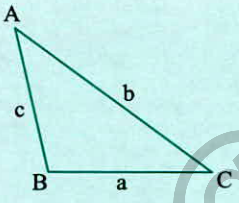


پاسخ: مطابق شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر ۴۵° است و اگر طول ساق مثلث را x فرض کنیم، مساحت مثلث برابر $S=\frac{۱}{۲}x^۲\sin\hat{A}$ خواهد بود. پس

$$۹\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}x^۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x^۲=۳۶$$

بنابراین $x=۶$.

تست ۹ **در مثلث ABC می‌دانیم $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$. مقدار $\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}$ کدام است؟**



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۳

پاسخ: در مثلث ABC می‌دانیم رابطه‌ی $\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}$ برقرار است. این رابطه را می‌توان به‌صورت $\frac{a}{b}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}$ نوشت. بنابراین

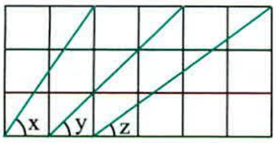
$$\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{۲}{۳}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل دوم

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

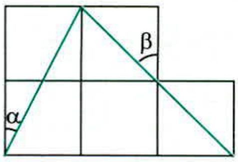
۱- در شکل مقابل مربع‌های کوچک برابرند. مقدار $\tan x \tan y \tan z$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$

۳) $\frac{۲۷}{۸}$ ۴) ۱

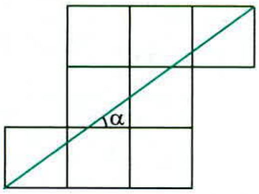
۲- در شکل مقابل مربع‌های کوچک برابرند. مقدار $\sin\alpha+\cos\beta$ چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}$

۳) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۰}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۰}}$

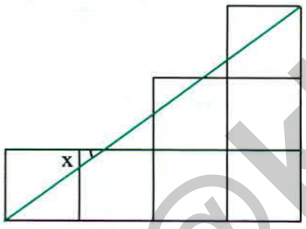
۳- در شکل روبه‌رو مربع‌های کوچک برابرند. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

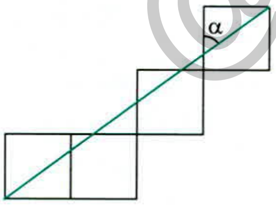
۴- در شکل مقابل مربع‌های کوچک برابرند. مقدار $\sin x$ چقدر است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

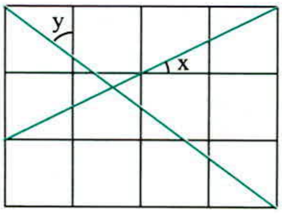
۵- در شکل روبه‌رو مربع‌های کوچک برابرند. مقدار $\sin\alpha+\tan\alpha$ چقدر است؟



۱) $\frac{۳۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۵}$

۳) $\frac{۳۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۵}$

۶- در شکل روبه‌رو مربع‌های کوچک برابرند. مقدار $\sin^{۲} x+\cos y$ چقدر است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۷- حاصل $\cos ۶۰^\circ \cot ۳۰^\circ$ با مقدار کدام عبارت برابر نیست؟

۱) $\sqrt{۳}\sin^{۲} ۴۵^\circ$ ۲) $\cos ۳۰^\circ$ ۳) $\sin ۳۰^\circ \tan ۶۰^\circ$ ۴) $\sqrt{۳}\sin^{۲} ۳۰^\circ$

۸- مقدار عبارت $(\tan ۳۰^\circ+\cot ۳۰^\circ)\cot ۶۰^\circ$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۹- اگر $a=۲\sin ۳۰^\circ+\tan^{۲} ۶۰^\circ$ و $b=۲\cos ۶۰^\circ+\cot^{۲} ۳۰^\circ$، حاصل $(a-b)^{۲۰}$ چند است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۰- مقدار $A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\sin^{۲} ۴۵^\circ}{\cos ۶۰^\circ+\cos^{۲} ۴۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۲}$

۱۱- کدام تساوی درست نیست؟

۱) $\cos^{۲} ۳۰^\circ-\sin^{۲} ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ$
۲) $۴\cos^{۳} ۳۰^\circ-۳\cos ۳۰^\circ=۰$
۳) $\frac{۱-\cos ۶۰^\circ}{۱+\cos ۶۰^\circ}=\tan^{۲} ۳۰^\circ$
۴) $\frac{۱+\cos ۶۰^\circ}{\sin ۶۰^\circ}=\tan ۳۰^\circ$

۱۲- کدام تساوی درست است؟

۱) $\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ=\sin ۶۰^\circ$
۲) $\sin ۶۰^\circ=\frac{\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan^{۲} ۳۰^\circ}$
۳) $\cos ۶۰^\circ=\frac{۱-\tan^{۲} ۳۰^\circ}{۱+\tan^{۲} ۳۰^\circ}$
۴) $\tan ۶۰^\circ=\frac{\tan ۳۰^\circ}{۱-\tan^{۲} ۳۰^\circ}$

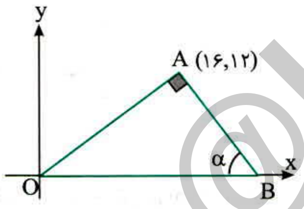
۱۳- مقدار عبارت $A=\frac{\tan^{۲} ۳۰^\circ+\tan^{۲} ۴۵^\circ+\tan^{۲} ۶۰^\circ}{\cot ۶۰^\circ-\cot ۳۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۶}$
۲) $-\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۶}$
۳) $-۲\sqrt{۳}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۴- مقدار عبارت $A=(\tan ۱^\circ-\cot ۱^\circ)(\tan ۲^\circ-\cot ۲^\circ)\ldots(\tan ۶۰^\circ-\cot ۶۰^\circ)$ کدام است؟

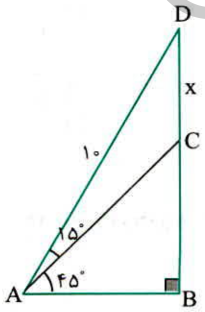
۱) ۱
۲) $۳۰\sqrt{۳}$
۳) $۱۵\sqrt{۳}$
۴) صفر

۱۵- در شکل روبه‌رو، حاصل $\tan\alpha$ چند است؟



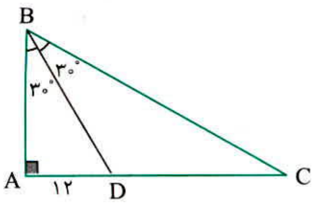
۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۷}$
۴) $\frac{۳}{۸}$

۱۶- در شکل مقابل طول DC کدام است؟



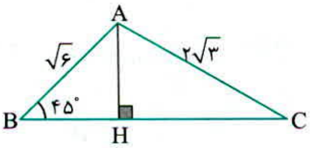
۱) $۵(\sqrt{۲}-۱)$
۲) $۵(\sqrt{۳}-۱)$
۳) $۵\sqrt{۳}-۳$
۴) $۵\sqrt{۳}-۲$

۱۷- در شکل مقابل $\hat{A}=۹۰^\circ$، $A\hat{B}D=D\hat{B}C=۳۰^\circ$ و $AD=۱۲$. طول DC چقدر است؟



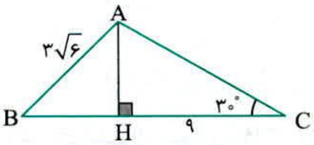
۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۱۸- در شکل مقابل طول ضلع HC چقدر است؟



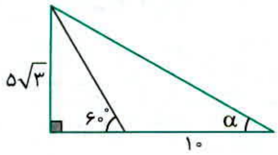
۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\sqrt{۵}$

۱۹- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی B کدام است؟



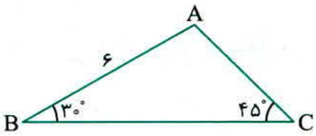
۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۲۰- در شکل مقابل مقدار α چقدر است؟



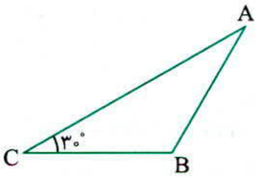
۱) ۱۵°
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۵۰°

۲۱- در شکل مقابل طول ضلع BC چقدر است؟



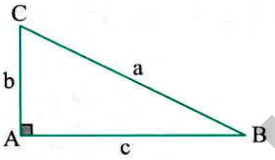
۱) $۳(\sqrt{۳}-۱)$
۲) $۳(\sqrt{۳}+۱)$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۲- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل، $AB=BC$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر $۴\sqrt{۳}$ است. طول ضلع BC کدام است؟



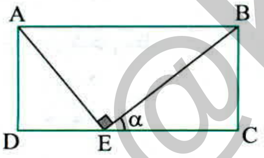
۱) ۴
۲) ۸
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۳}$

۲۳- در شکل مقابل $\tan\hat{B}=\frac{۱}{۲}$ و $c-b=۴$. مقدار a کدام است؟



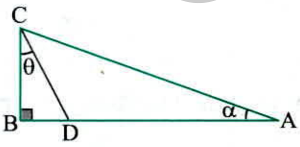
۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۵}$
۴) $۵\sqrt{۵}$

۲۴- در شکل مقابل ABCD مستطیل است، $DE=۴$ و $BC=۵$. مقدار $\cot\alpha$ چقدر است؟



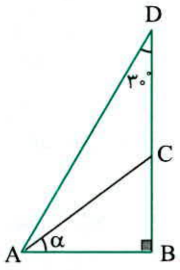
۱) $\frac{۵}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۵- در شکل روبه‌رو $AD=۸BD$. حاصل $\cot\theta\cot\alpha$ چقدر است؟

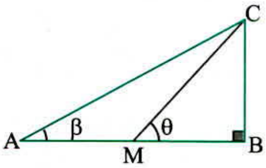


۱) ۳
۲) ۱
۳) ۵
۴) ۹

۲۶- در شکل روبه‌رو $BC=۳$ و $AD=۸$. حاصل $\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$ چند است؟



۱) $\frac{۲۵}{۲}$
۲) $\frac{۲۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۱۷}{۴}$



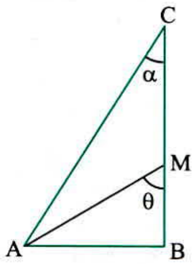
۲۷- در شکل روبه‌رو $AM=x$ و $BM=۲y$. حاصل عبارت $\frac{\tan\theta-\tan\beta}{\tan\beta}$ چقدر است؟

۱) $\frac{x}{y}$

۲) $\frac{x}{۲y}$

۳) $\frac{۲x}{y}$

۴) $\frac{y}{x}$



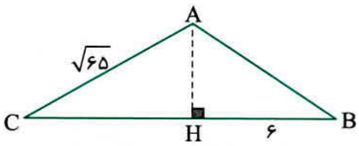
۲۸- در شکل روبه‌رو $CM=AB$ و $\tan\theta=۳\tan\alpha$. حاصل عبارت $\cot\alpha+\cot\theta$ چند است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۷



۲۹- در شکل مقابل $HB=۶$ و $\tan\hat{B}=\frac{۲}{۳}$. طول CH کدام است؟

۱) ۷

۲) ۸

۳) $\sqrt{۸۵}$

۴) $\sqrt{۸۰}$

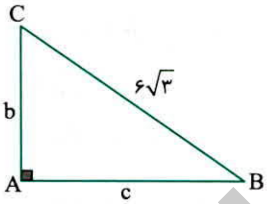
۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC می‌دانیم $\hat{A}=۹۰^\circ$، $\cos\hat{B}=\frac{۱}{۳}$ و $AB=۴$. مقدار $\cot\hat{C}$ چقدر است؟

۱) $۶\sqrt{۲}$

۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $۲\sqrt{۲}$



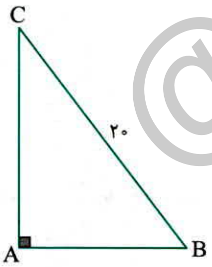
۳۱- در شکل مقابل $\cot\hat{B}=\sqrt{۲}$. مقدار bc چقدر است؟

۱) $۳۶\sqrt{۲}$

۲) ۷۲

۳) $۳۶\sqrt{۳}$

۴) ۳۶



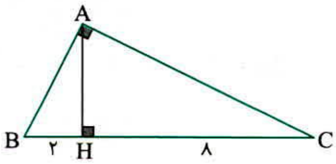
۳۲- در شکل مقابل $\cos\hat{B}=۰/۶$. مقدار $AB+AC$ کدام است؟

۱) ۲۶

۲) ۲۸

۳) ۳۰

۴) ۳۲



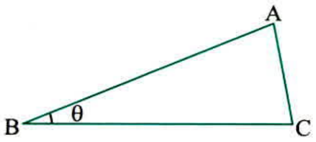
۳۳- در شکل مقابل مقدار $\tan\hat{B}+\tan\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۲}$



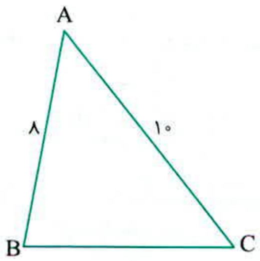
۳۴- در شکل روبه‌رو $AB=BC$ و $\tan\theta=\frac{۵}{۱۲}$. حاصل $\frac{AB}{AC}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲۶}$

۲) $\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$

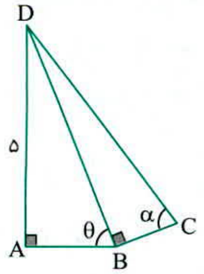
۳) $\frac{\sqrt{۲۶}}{۳}$

۴) $\sqrt{۱۳}$



۳۵- در شکل مقابل $\sin \hat{A}=\frac{۳}{۴}$. مقدار $\cot \hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۶}$
۲) $\frac{۶}{\sqrt{۷}}$
۳) $\frac{۵-\sqrt{۷}}{۳}$
۴) $\frac{۵+\sqrt{۷}}{۳}$



۳۶- در شکل مقابل اگر $\tan \theta=\frac{۵}{۲}$ و $\tan \alpha=\frac{۹\sqrt{۲۹}}{۱۳}$، طول ضلع BC چقدر است؟

۱) $\frac{۱۰}{۹}$
۲) $\frac{۱۱}{۹}$
۳) $\frac{۱۴}{۹}$
۴) $\frac{۱۳}{۹}$

۳۷- ساده شده‌ی عبارت $A=\frac{۱}{۱-\tan^{۲} \alpha}+\frac{۱}{۱-\cot^{۲} \alpha}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\cos \alpha$
۳) $\sin \alpha$
۴) صفر

۳۸- ساده شده‌ی عبارت $\frac{\cot \alpha+\cot \beta}{\tan \alpha+\tan \beta}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\tan \alpha \tan \beta$
۳) $\cot \alpha \cot \beta$
۴) $\cot \alpha+\cot \beta$

۳۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\hat{A}=۹۰^{\circ}$. حاصل عبارت $\frac{\sin \hat{B} \cos \hat{B}}{\sin^{۲} \hat{C}}$ کدام است؟

۱) $\tan \hat{B}$
۲) $\tan \hat{C}$
۳) $\sin^{۲} \hat{B}$
۴) $\sin^{۲} \hat{C}$

۴۰- مقدار $\tan ۹^{\circ} \times \tan ۱۸^{\circ} \times \ldots \times \tan ۸۱^{\circ}$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\tan ۸۱^{\circ}$
۴) $\tan ۹^{\circ}$

۴۱- مقدار عبارت $\frac{۱}{۱+\tan^{۲} ۱^{\circ}}+\frac{۱}{۱+\tan^{۲} ۲^{\circ}}+\cdots+\frac{۱}{۱+\tan^{۲} ۸۹^{\circ}}$ چقدر است؟

۱) ۴۴
۲) ۴۴/۵
۳) ۴۵
۴) ۸۹

۴۲- اگر $\frac{۳ \sin x}{۲ \sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) ۴

۴۳- اگر $\tan x=\frac{۱}{۳}$، مقدار $A=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) ۳
۴) -۳

۴۴- اگر $\tan \alpha=\frac{۴}{۳}$، حاصل عبارت $\frac{۳}{\cos \alpha}-\frac{۴}{\sin \alpha}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) -۱
۴) صفر

۴۵- اگر x حاده باشد و $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۳}$، حاصل $\sin x+\cos x$ چند است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

۴۶- اگر α حاده باشد و $\tan \alpha=\frac{۳}{۲}$، مقدار $\sin \alpha+\cos \alpha$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۱۳}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}$
۳) $\frac{۴\sqrt{۱۳}}{۱۳}$
۴) $\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۱۳}$

۴۷- اگر α و β حاده باشند و $\cot\beta = \sin\alpha$ و $\tan\alpha = \frac{۴}{۵}$ ، $\cos\beta$ چقدر است؟

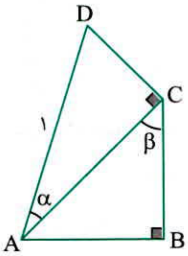
۱) $\sqrt{\frac{۴۱}{۵۷}}$

۲) $\sqrt{\frac{۵}{۴۱}}$

۳) $\frac{۴}{\sqrt{۵۷}}$

۴) $\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$

۴۸- در شکل مقابل طول ضلع AB برابر کدام عبارت است؟



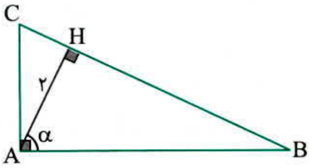
۱) $\sin\alpha\cos\beta$

۲) $\tan\alpha\cot\beta$

۳) $\sin\beta\cos\alpha$

۴) $\tan\beta\cot\alpha$

۴۹- در شکل مقابل، $\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{AC}$ با کدام عبارت برابر است؟



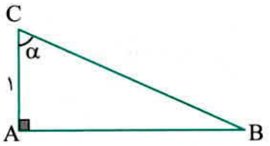
۱) $۲(\sin\alpha+\cos\alpha)$

۲) $\frac{۱}{۲}\tan^{۲}\alpha$

۳) $۲\tan^{۲}\alpha$

۴) $\frac{۱}{۲}(\sin\alpha+\cos\alpha)$

۵۰- در شکل مقابل محیط مثلث برابر کدام عبارت است؟



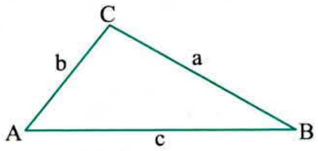
۱) $\cos\alpha+\cot\alpha$

۲) $\frac{۱+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}$

۳) $\frac{۱+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴) $\sin\alpha+\tan\alpha$

۵۱- در شکل مقابل مقدار $b^{۲}\sin^{۲}\hat{A}+a^{۲}\cos^{۲}\hat{B}$ کدام است؟



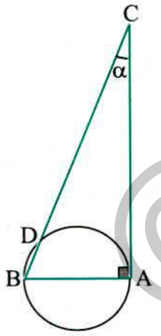
۱) $a^{۲}$

۲) $b^{۲}$

۳) $c^{۲}$

۴) abc

۵۲- در شکل روبه‌رو AB قطر دایره است و $\frac{DC}{BD}=۶$. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



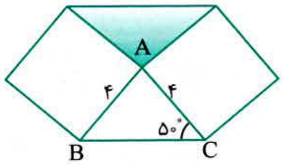
۱) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۶}$

۵۳- در شکل مقابل روی دو ساق مثلث متساوی‌الساقین ABC دو مربع رسم شده است. مساحت مثلث رنگی چقدر است؟ $(\sin ۱۰۰^\circ = ۰/۹۸)$



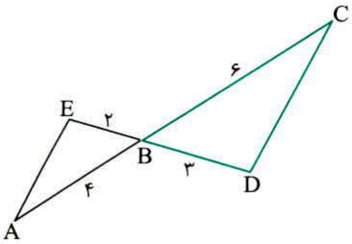
۱) ۷/۸۴

۲) ۷/۸۵

۳) ۱۵/۶۸

۴) ۱۵/۶۵

۵۴- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟



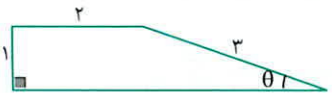
۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) ۳

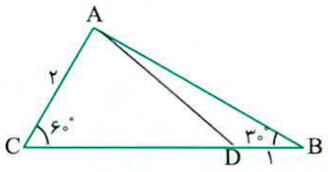
۵۵- اگر مساحت ذوزنقه‌ی مقابل برابر $۲+\sqrt{۲}$ واحد باشد، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۵۶- در شکل روبه‌رو مساحت مثلث ABC برابر $۲\sqrt{۳}$ است. مساحت مثلث ABD چقدر است؟



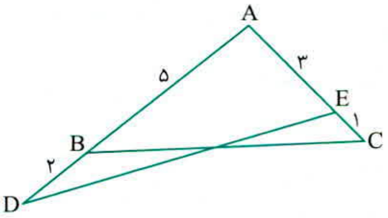
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۵۷- مساحت متوازی‌الاضلاعی با اضلاع ۶ و ۸ و یک زاویه‌ی ۱۳۵° چقدر است؟

۱) $۲۴\sqrt{۲}$ ۲) $۴۸\sqrt{۲}$ ۳) ۴۸ ۴) ۳۶

۵۸- در شکل روبه‌رو مقدار $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ چقدر است؟



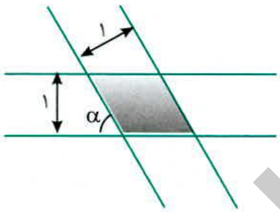
۱) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲۰}$

۳) $\frac{۲۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۰}$

۵۹- در مثلث ABC می‌دانیم $\frac{\sin\hat{A}}{a}=۲$. مقدار $\frac{b}{\sin\hat{B}}+\frac{\sin\hat{C}}{c}$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۶۰- مانند شکل روبه‌رو دو نوار به عرض ۱ روی هم قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار چقدر است؟



۱) $\sin\alpha$ ۲) $\frac{۱}{\sin\alpha}$

۳) $\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$ ۴) $\sin^{۲}\alpha$

۶۱- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه‌ی A و B روی زمین که ۱۲ متر فاصله دارند، یک ساختمان با زاویه‌های ۶۰° و ۳۰° دیده می‌شود. ارتفاع ساختمان کدام است؟

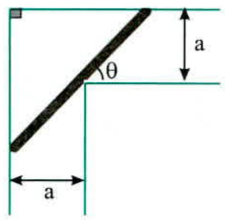
۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$

۶۲- از بالای یک فانوس دریایی به ارتفاع ۲۰۰ متر، یک قایق با زاویه‌ی ۳۵° و قایق دیگری با زاویه‌ی ۲۷° دیده می‌شود. فاصله‌ی دو قایق از یکدیگر چقدر است؟ $(\tan ۳۵^\circ=۰/۷$ و $\tan ۲۷^\circ=۰/۵)$

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

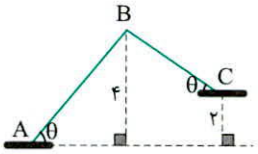
۶۳- در شکل روبه‌رو میله‌ای در دریچه‌ای قرار گرفته است. کدام گزینه طول میله را بر حسب θ و a درست نشان می‌دهد؟



۱) $a(\sin\theta+\frac{۱}{\cos\theta})$ ۲) $a(\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{۱}{\sin\theta})$

۳) $a(\tan\theta+\cot\theta)$ ۴) $a(\sin\theta+\frac{۱}{\sin\theta})$

۶۴- در شکل مقابل، طول طناب ABC بر حسب θ، کدام است؟



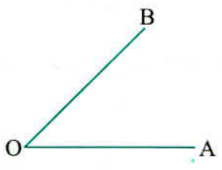
۱) $\frac{۲}{\cos\theta}$ ۲) $\frac{۶}{\sin\theta}$

۳) $\frac{۸}{\cos\theta}$ ۴) $\frac{۳}{\sin\theta}$

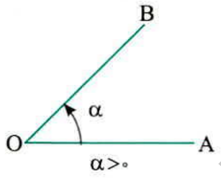
فصل دوم: مثلثات

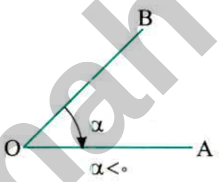
درس دوم: دایره‌ی مثلثاتی

زاویه‌ی مثلثاتی



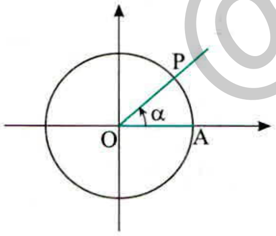
دو نیم‌خط OA و OB را در نظر بگیرید که در نقطه‌ی O مشترک‌اند. اگر نیم‌خط OA حول نقطه‌ی O دوران کند و بر نیم‌خط OB منطبق شود، **زاویه‌ی مثلثاتی** ایجاد می‌شود. OA را ضلع ابتدایی، OB را ضلع انتهایی و مقدار دوران را **مقدار زاویه‌ی مثلثاتی** می‌نامند. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، اندازه‌ی زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه‌ی زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند.



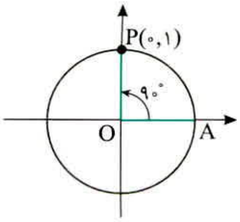


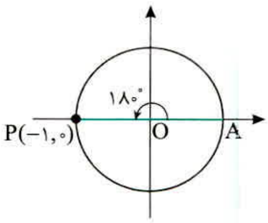
اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در **موقعیت استاندارد** است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

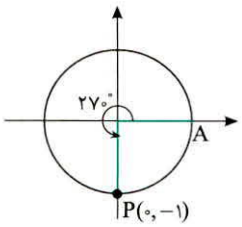
دایره‌ی مثلثاتی



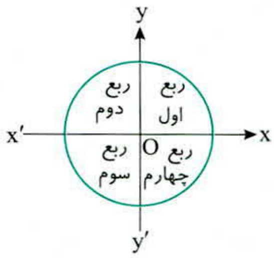
دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، **دایره‌ی مثلثاتی** می‌نامند. نقطه‌ی تقاطع دایره با محور طول‌ها A(۱,۰) و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازه‌ی α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازه‌ی زاویه‌ی مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کردیم، پس با معلوم بودن نقطه‌ی P روی دایره و جهت دوران، زاویه‌ی α مشخص می‌شود. مثلاً وقتی P در نقطه‌های (۰,۱)، (−۱,۰) و (۰,−۱) قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:







ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه‌ی مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیه‌ی بین Ox و Oy را **ناحیه‌ی اول** یا **ربع اول** مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیه‌ی بین Oy و Ox' را **ربع دوم**، ناحیه‌ی بین Ox' و Oy' را **ربع سوم** و ناحیه‌ی بین Oy' و Ox را **ربع چهارم** مثلثاتی می‌نامند.

تذکر اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در نقطه‌های $(1,0),(0,-1),(-1,0),(0,1)$ قرار داشته باشد، زاویه‌ی α در هیچ‌یک از چهار ناحیه‌ی مثلثاتی قرار ندارد.

نکته **ناحیه‌ای که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در آن قرار می‌گیرد، برای زاویه‌های مختلف از ۰° تا ۳۶۰° مطابق جدول زیر است:**

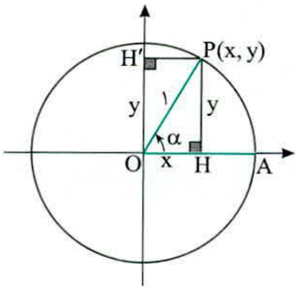
ناحیه‌ای که P قرار دارد	حدود α
اول	$0^\circ<\alpha<90^\circ$
دوم	$90^\circ<\alpha<180^\circ$
سوم	$180^\circ<\alpha<270^\circ$
چهارم	$270^\circ<\alpha<360^\circ$

تست ۱ **انتهای کمانِ روبه‌رو به کدام زاویه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد؟**

۱) ۱۷۰° ۲) ۲۲۰° ۳) ۲۶۰° ۴) ۲۸۰°

پاسخ: می‌دانیم اگر $270^\circ<\alpha<360^\circ$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.
بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۲۸۰° در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

نسبت‌های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی



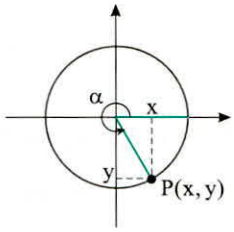
مطابق شکل مقابل، فرض می‌کنیم $P(x, y)$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α باشد. نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sin\alpha=\frac{PH}{OP}=\frac{y}{1}=y \qquad \tan\alpha=\frac{PH}{OH}=\frac{y}{x}$$

$$\cos\alpha=\frac{OH}{OP}=\frac{x}{1}=x \qquad \cot\alpha=\frac{OH}{PH}=\frac{x}{y}$$

اگر P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α، در ناحیه‌ی اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند.
اگر P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطه‌ی P در این ناحیه‌ها می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

به شکل‌های زیر دقت کنید:

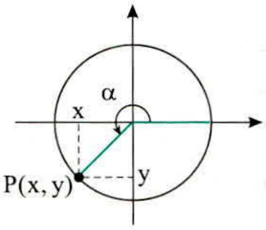


$\sin\alpha=y<۰$

$\cos\alpha=x>۰$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}<۰$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}<۰$

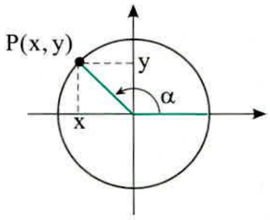


$\sin\alpha=y<۰$

$\cos\alpha=x<۰$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}>۰$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}>۰$



$\sin\alpha=y>۰$

$\cos\alpha=x<۰$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}<۰$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}<۰$

نکته علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

ناحیه نسبت	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

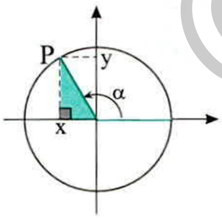
تست ۲ اگر $\tan\alpha=-۳$ و P، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α، در ربع دوم مثلثاتی قرار داشته باشد، مختصات P کدام است؟

۱) $(\frac{-۳}{\sqrt{۱۰}},\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})$ ۲) $(-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}},\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})$ ۳) $(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}},-\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})$ ۴) $(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}},\frac{-۱}{\sqrt{۱۰}})$

پاسخ: توجه کنید که $\tan\alpha=\frac{y}{x}=-۳$. بنابراین $y=-۳x$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی رنگی در شکل مقابل، طبق قضیه‌ی فیثاغورس،

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow x^۲+۹x^۲=۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

پس $y=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α نقطه‌ی $P(\frac{-۱}{\sqrt{۱۰}},\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})$ است.



تست ۳ اگر $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ و $\sin\alpha\tan\alpha>۰$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

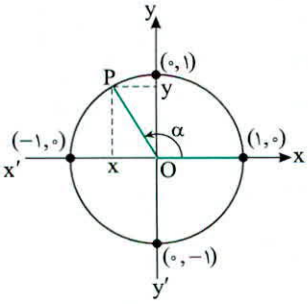
پاسخ: با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به $\sin\alpha\tan\alpha>۰$ واضح است که $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه‌ی معروف

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های پرکاربرد به شرح زیر است:

$\alpha=۳۶۰^\circ$	$\alpha=۲۷۰^\circ$	$\alpha=۱۸۰^\circ$	$\alpha=۹۰^\circ$	$\alpha=۰^\circ$	زاویه / نسبت
۰	−۱	۰	۱	۰	$\sin\alpha$
۱	۰	−۱	۰	۱	$\cos\alpha$
۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	$\tan\alpha$
تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	$\cot\alpha$

محور سینوس و محور کسینوس



در دایره‌ی مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α، $\sin\alpha$ برابر عرض نقطه‌ی P یعنی y است. پس $\sin\alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را **محور سینوس** می‌نامند و چون $-۱\leq y\leq ۱$، پس $-۱\leq\sin\alpha\leq ۱$.

همچنین $\cos\alpha$ برابر طول نقطه‌ی P یعنی x است. پس $\cos\alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را **محور کسینوس** می‌نامند و چون $-۱\leq x\leq ۱$، پس $-۱\leq\cos\alpha\leq ۱$.

نکته **برای هر زاویه‌ی دلخواه مانند α،**

$$-۱\leq\sin\alpha\leq ۱,\quad -۱\leq\cos\alpha\leq ۱$$

تست ۴ **حداکثر مقدار عبارت $۴\cos\alpha-۱$ کدام است؟**

۱) ۲ **۲)** ۳ **۳)** ۴ **۴)** ۵

پاسخ: طرفین نابرابری $-۱\leq\cos\alpha\leq ۱$ را در ۴ ضرب می‌کنیم

$$-۴\leq ۴\cos\alpha\leq ۴$$

یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم

$$-۵\leq ۴\cos\alpha-۱\leq ۳$$

بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست ۵ **اگر $۱۸۰^\circ\leq\alpha\leq ۲۷۰^\circ$، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت $A=۳-۲\sin x$ چقدر است؟**

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴)** ۴

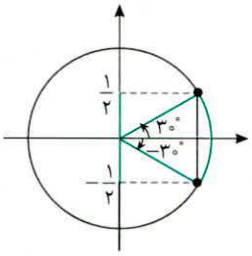
پاسخ: با توجه به $۱۸۰^\circ\leq\alpha\leq ۲۷۰^\circ$، α در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت $-۱\leq\sin\alpha\leq ۰$ بنابراین $۰\leq -۲\sin\alpha\leq ۲$ و در نتیجه $۳\leq ۳-۲\sin\alpha\leq ۵$.

پس حداقل مقدار A برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

تست ۶ اگر $-۳۰^\circ \le \alpha \le ۳۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{m-۱}{۲}$، حدود m کدام است؟ $(\sin(-۳۰^\circ) = -\sin ۳۰^\circ)$

۱) $۰ \le m \le ۲$
۲) $-۱ \le m \le ۱$
۳) $-۱ \le m \le ۲$
۴) $-۲ \le m \le ۰$

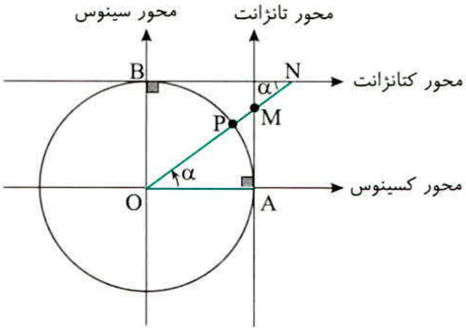
پاسخ: با توجه به $-۳۰^\circ \le \alpha \le ۳۰^\circ$ از شکل مقابل نتیجه می‌گیریم $\frac{-۱}{۲} \le \sin\alpha \le \frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\frac{-۱}{۲} \le \frac{m-۱}{۲} \le \frac{۱}{۲}$، یعنی $-۱ \le m-۱ \le ۱$ که با افزودن یک واحد به طرفین نابرابری اخیر، نتیجه می‌شود $۰ \le m \le ۲$.



محور تانژانت و محور کتانژانت

در نقطه‌ی $A(۱,۰)$ محوری عمود بر محور کسینوس رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور سینوس انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. نشان خواهیم داد که مقدار تانژانت هر زاویه‌ی دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است.

همچنین در نقطه‌ی $B(۰,۱)$ محوری عمود بر محور سینوس رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور کسینوس انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور کتانژانت** می‌نامیم. نشان خواهیم داد که مقدار کتانژانت هر زاویه‌ی دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است.



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM در شکل بالا می‌توان نوشت

$$\tan\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{۱} = AM$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBN نیز می‌توان نوشت

$$\cot\alpha = \frac{BN}{OB} = \frac{BN}{۱} = BN$$

نکته **برای مشخص کردن تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی α، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویه‌ی α، را امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را در نقطه‌های $M(۱, y_۱)$ و $N(x_۱, ۱)$ قطع کند. در این‌صورت $y_۱ = \tan\alpha$ و $x_۱ = \cot\alpha$.**

نکته **با افزایش مقادیر α از ۰° به ۳۶۰°،**

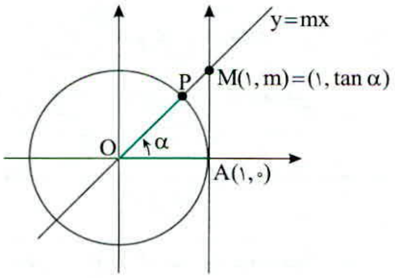
مقادیر $\sin\alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند.

مقادیر $\cos\alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند.

مقادیر $\tan\alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

مقادیر $\cot\alpha$ در هر چهار ناحیه در حال کاهش هستند.

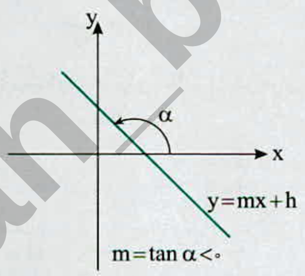
رابطه‌ی شیب خط با تانژانت زاویه

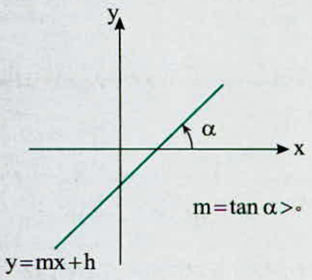


با توجــه به مطالب قبل می‌دانیم مقدار $\tan\alpha$ برابر عرض نقطه‌ی M، محل برخورد شعاع OP با محور تانژانت است. از طرف دیگر، طول نقطه‌ی M برابر ۱ اســت و این نقطه روی خــط $y=mx$ قرار دارد، پــس عرض آن برابر m اســت. بنابراین $m=\tan\alpha$.

حــالا توجه کنید که هر خط مــوازی با خط $y=mx$ دارای شــیب یکسان با این خط است و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه‌ی α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان $\tan\alpha$ است.

نکته **اگــر جهت مثبت محــور طول‌ها و خط $y=mx+h$ یک زاویــه‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی α تشــکیل دهند، آن‌گاه** $m=\tan\alpha$.





تست ۷ **معادلــه‌ی خطــی که از نقطــه‌ی $(\sqrt{۱۲},-۲)$ می‌گذرد و با محــور طول‌ها روبه جهت مثبــت زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد، کدام است؟**

۱) $y=\sqrt{۳}x+۸$

۲) $y=\sqrt{۳}x-۸$

۳) $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-۴$

۴) $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۲$

پاسخ: با توجه به زاویه‌ی خط با محور طول‌ها که ۶۰° است، شیب خط برابر $\tan ۶۰^\circ$ یا همان $\sqrt{۳}$ است. پــس معادله‌ی خط به‌صورت $y=\sqrt{۳}x+b$ اســت و چــون خط از نقطــه‌ی $(\sqrt{۱۲},-۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی خط صدق می‌کند:

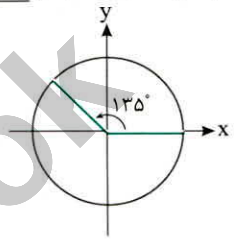
$$-۲=\sqrt{۳}\sqrt{۱۲}+b\Rightarrow b=-۸$$

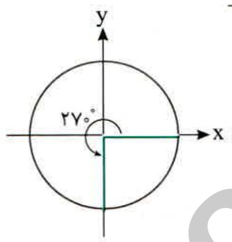
پس معادله‌ی خط $y=\sqrt{۳}x-۸$ است.

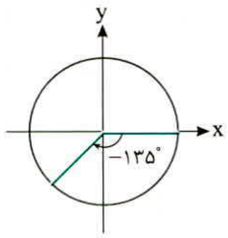
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

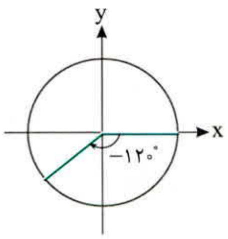
درس دوم:
دایره‌ی مثلثاتی

۶۵- کدام گزینه درست رسم نشده است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۶۶- انتهای کمان روبه‌رو به کدام‌یک از زاویه‌های زیر در ناحیه‌ی سوم قرار دارد؟

۱) ۱۷۰° ۲) ۲۶۰° ۳) ۲۸۰° ۴) ۳۳۰°

۶۷- انتهای کمان روبه‌رو به کدام‌یک از زاویه‌های زیر در ناحیه‌ای متفاوت از زاویه‌های دیگر قرار دارد؟

۱) ۲۶۰° ۲) ۲۸۰° ۳) ۲۹۰° ۴) ۳۰۰°

۶۸- کدام تساوی درست است؟

۱) $\sin(-۴۰^\circ)=\sin ۱۴۰^\circ$ ۲) $\cos(-۱۴۰^\circ)=\cos ۲۲۰^\circ$ ۳) $\tan(-۲۱۰^\circ)=\tan ۳۰^\circ$ ۴) $\cot(-۱۰۰^\circ)=\cot ۱۰^\circ$

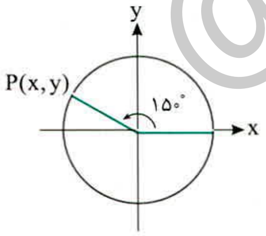
۶۹- اگر α زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی $\alpha+۱۸۰^\circ$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۷۰- اگر نقطه‌ی $P(a,\frac{۱}{۳})$ روی دایره‌ی مثلثاتی و در ربع دوم باشد و θ زاویه‌ی منفرجه‌ی میان OP و محور x باشد، حاصل عبارت $\sin\theta+\tan^۲\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۴}$ ۲) $\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۴}$

۷۱- در دایره‌ی مثلثاتی مقابل حاصل‌ضرب طول و عرض نقطه‌ی P کدام است؟



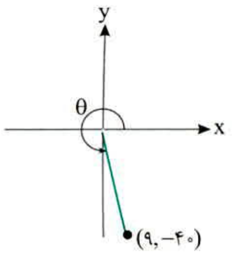
۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۷۲- اگر $\tan\alpha=۲$ و P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع سوم مثلثاتی قرار داشته باشد، مختصات P کدام است؟

۱) $(\frac{۲}{\sqrt{۵}},\frac{۱}{\sqrt{۵}})$ ۲) $(\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}})$ ۳) $(-\frac{۲}{\sqrt{۵}},-\frac{۱}{\sqrt{۵}})$ ۴) $(-\frac{۱}{\sqrt{۵}},-\frac{۲}{\sqrt{۵}})$

۷۳- در شکل مقابل حاصل $۴۱(\sin\theta-\cos\theta)$ کدام است؟



۱) ۴۹

۲) ۵۰

۳) −۵۰

۴) −۴۹

۷۴- کدام‌یک عددی مثبت است؟

۱) $\sin ۲۰۰^\circ$
۲) $\cos ۲۰۰^\circ$
۳) $\sin ۳۰۰^\circ$
۴) $\cos ۳۰۰^\circ$

۷۵- کدام‌یک عددی منفی است؟

۱) $\tan ۱۷۰^\circ$
۲) $\tan ۱۹۰^\circ$
۳) $\cot ۷۰^\circ$
۴) $\cot ۲۶۰^\circ$

۷۶- فرض کنید

$$a=\sin ۱۲۰^\circ,\quad b=\tan ۳۰۰^\circ,\quad c=\cot ۲۴۰^\circ,\quad d=\cos ۲۱۰^\circ$$

علامت عددهای a، b، c و d در کدام گزینه به ترتیب از چپ به راست درست است؟

۱) $+,-,-,+$
۲) $-,+,-,+$
۳) $+,+,-,-$
۴) $+,-,+,-$

۷۷- کدام گزینه به ترتیب از چپ به راست علامت عبارت‌های زیر را درست نشان می‌دهد:

$$\frac{۱}{\sin ۳۰۲^\circ \cos ۳۰۰^\circ},\quad \tan(-۲۲۰^\circ)\tan(-۲۲۲^\circ),\quad \sin ۱۵۰^\circ \cos ۱۵۲^\circ$$

۱) $+,+,+$
۲) $-,-,+$
۳) $-,+,+$
۴) $-,+,-$

۷۸- مقدار عبارت $A=\dfrac{\sin ۰^\circ+\sin ۹۰^\circ-\sin ۱۸۰^\circ-\sin ۲۷۰^\circ}{\cos ۰^\circ+\cos ۹۰^\circ-\cos ۱۸۰^\circ-\cos ۲۷۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱−
۳) ۲
۴) صفر

۷۹- اگر $\sin\alpha\cos\alpha<۰$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول یا دوم
۲) اول یا سوم
۳) دوم یا چهارم
۴) دوم یا سوم

۸۰- اگر $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$ و $|\sin\alpha|=\sin\alpha$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در کدام ربع مثلثاتی می‌تواند قرار داشته باشد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۸۱- اگر $\sin\alpha\cos\alpha>۰$ و $\cos\alpha\cot\alpha<۰$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۸۲- اگر $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}=۱$ و $\tan x=-\dfrac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\cos x}$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۸۳- اگر $\sin x\tan x>\dfrac{۱}{\cos x}$ و $\sin x+\tan x<۰$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی واقع است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۸۴- اگر $\cot\alpha+\cos\alpha<۰$ و $\cos\alpha\cot\alpha>۰$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

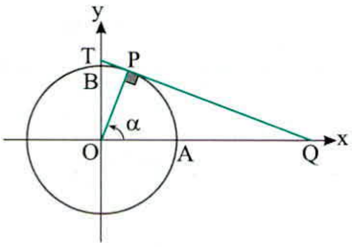
۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۸۵- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در نقاط مرزی ناحیه‌ها نباشد، در مورد علامت عبارت زیر چه می‌توان گفت؟

$$T=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$$

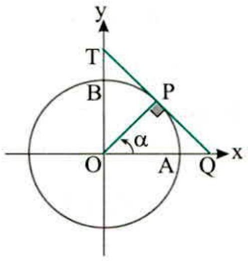
۱) T تنها زمانی مثبت است که α در ربع‌های اول و سوم باشد.
۲) T تنها زمانی مثبت است که α در ربع اول باشد.
۳) اگر α در ربع چهارم باشد، T منفی است.
۴) T همواره مثبت است.

۸۶- در شکل مقابل اگر P بر نقطه‌ی $(\frac{\sqrt{۱۴}}{۴},\frac{\sqrt{۲}}{۴})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار گیرد، طول پاره‌خط AQ کدام است؟



۱) $\dfrac{۴\sqrt{۱۴}-۲}{۷}$
۲) $\dfrac{۴\sqrt{۱۴}-۱}{۷}$
۳) $۲\sqrt{۲}-۱$
۴) $۲\sqrt{۲}-۲$

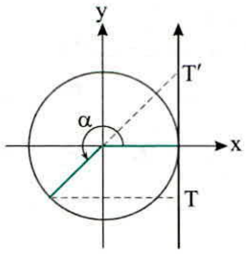
۸۷- در دایره‌ی مثلثاتی مقابل، طول پاره‌خط BT کدام است؟



۱) $\frac{۱}{\cos \alpha}$ ۲) $\frac{۱}{\sin \alpha}$

۳) $\frac{۱}{\cos \alpha}-۱$ ۴) $\frac{۱}{\sin \alpha}-۱$

۸۸- در دایره‌ی مثلثاتی مقابل، طول پاره‌خط TT' برابر کدام عبارت است؟



۱) $\tan \alpha-\sin \alpha$

۲) $\tan \alpha+\sin \alpha$

۳) $\sin \alpha-\cos \alpha$

۴) $\sin \alpha+\cos \alpha$

۸۹- کدام‌یک عددی کوچک‌تر است؟

۱) $\tan ۸۰^\circ$ ۲) $\tan ۱۴۰^\circ$ ۳) $\tan ۱۷۰^\circ$ ۴) $\tan ۱۹۰^\circ$

۹۰- اگر α و β دو زاویه باشند که انتهای کمان روبه‌رو به آن‌ها در ربع دوم باشد و $\cos \alpha=-\frac{۱}{۵}$ و $\cos \beta=-\frac{۳}{۵}$، آن‌گاه کدام‌یک درست است؟

۱) $\beta=۳\alpha$ ۲) $\alpha=۳\beta$ ۳) $\alpha>\beta$ ۴) $\beta>\alpha$

۹۱- اگر $۰^\circ<\alpha , \beta , \gamma<۹۰^\circ$، $\tan \alpha=\frac{۱}{۲}$، $\tan \beta=\frac{۲}{۳}$ و $\tan \gamma=\frac{۳}{۴}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $\cot \gamma>\cot \alpha$ ۲) $\cos \alpha<\cos \beta$ ۳) $\alpha<\beta<\gamma$ ۴) $\alpha>\beta>\gamma$

۹۲- کدام‌یک عددی بزرگ‌تر است؟

۱) $\cos ۲۰^\circ$ ۲) $\cos ۷۰^\circ$ ۳) $\cos ۱۲۰^\circ$ ۴) $\cos ۳۲۰^\circ$

۹۳- اگر $۹۰^\circ<x<y<۱۸۰^\circ$، کدام گزینه حتماً درست است؟

۱) $\tan x \cot y<۰$ ۲) $\sin x>\cos y$ ۳) $\sin x<\cos y$ ۴) $\cos x<\cos y$

۹۴- اگر $x=۲۸۰^\circ$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\cos x<\sin x$ ۲) $\tan x<\sin x$ ۳) $\cos x<\tan x$ ۴) $\cot x<\tan x$

۹۵- اگر α و β زاویه‌هایی حاده باشند که $\alpha<\beta$ و بدانیم $\{\cos \beta , \cos \alpha\}=\{\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}\}$، حاصل عبارت $\tan \beta-\tan \alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۷}{۱۲}$

۹۶- اگر $۰^\circ<x\leq y<۹۰^\circ$ و $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{x}{y}$، مقدار $\frac{\tan x}{\tan y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{y}{x}$ ۳) $\frac{۱+x^۲}{۱+y^۲}$ ۴) $\frac{۱+y^۲}{۱+x^۲}$

۹۷- اگر $a=\tan ۴۰^\circ$ و $b=\sin ۳۵^\circ$، کدام گزینه درست است؟

۱) $b>a$ ۲) $a>b$ ۳) $a=b$ ۴) $a>۱>b$

۹۸- اگر $۰>\sin x>\cos x$، مقدار x چه می‌تواند باشد؟

۱) ۲۵۲° ۲) ۲۴۰° ۳) $۲۰۲/۵^\circ$ ۴) ۱۳۵°

۹۹- اگر $\cot \alpha>\cos \alpha>\sin \alpha$، زاویه‌ی α کدام‌یک از زاویه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۵۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۲۰۰° ۴) ۲۵۰°

۱۰۰- اگر $\cos x=\frac{۲a+۱}{۵}$، حدود a کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۳,۳]$ ۳) $[-۳,۲]$ ۴) $[-۲,۲]$

۱۰۱- اگر $۹۰^\circ \le \alpha \le ۱۸۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{m}{۲} - ۱$، حدود m کدام است؟

۱) $۲ \le m \le ۴$ ۲) $-۲ \le m \le ۰$ ۳) $-۲ \le m \le ۲$ ۴) $۱ \le m \le ۳$

۱۰۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع سوم و $\cos\alpha = ۲m + ۱$، حدود m کدام است؟

۱) $-۱ < m < ۰$ ۲) $-۱ \le m \le ۰$ ۳) $-۱ \le m \le -\frac{۱}{۲}$ ۴) $-۱ < m < -\frac{۱}{۲}$

۱۰۳- اگر $۱۸۰^\circ \le \alpha < ۲۷۰^\circ$ و $\tan\alpha = m^۳ + m^۲$، حدود m کدام است؟

۱) $m \ge ۰$ ۲) $m \le ۰$ ۳) $m \ge -۱$ ۴) $m \le -۱$

۱۰۴- اگر $-۶۰^\circ \le \alpha \le ۶۰^\circ$ و $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{m}{۴}$، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟ $(\sin(-۳۰^\circ) = -\sin ۳۰^\circ)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۵- اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{m}{۴}$، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟ $(\cos(-۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ)$

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۰۶- اگر $۳۰^\circ < \alpha < ۱۳۰^\circ$، $\sin\alpha$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(\frac{۱}{۲}, \sin ۱۳۰^\circ)$ ۲) $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, ۱]$ ۴) $(\sin ۱۳۰^\circ, ۱]$

۱۰۷- اگر $۴۵^\circ \le \alpha \le ۱۳۵^\circ$، $\tan\alpha$ در کدام محدوده قرار دارد؟ $(\tan ۱۳۵^\circ = -۱)$

۱) $[-۱, ۱]$ ۲) $[-۱, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۱]$ ۴) $\mathbb{R} - (-۱, ۱)$

۱۰۸- اختلاف کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $۳ + ۲\sin x$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۹- مجموع کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $A = ۲ - ۳\cos x$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۰- بیش‌ترین مقدار عبارت $-۵\sin x + ۱۲\cos y$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

۱۱۱- عبارت $(\sin x + ۵)(۳ - \cos y)$ با کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۱۲- حاصل‌ضرب کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار عبارت $A = ۲ + ۳\sin^۲ x$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۱۳- اگر بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت $A = ۴ - ۳\cos^۳ x$ به ترتیب برابر M و m باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $B = m\sin^۳ x - M$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۸ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۱۴- ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{|۱+\cos\alpha| - |۱-\cos\alpha|}{|۱+\sin\alpha| + |۱-\sin\alpha|}$ کدام است؟

۱) $\cot\alpha$ ۲) $\tan\alpha$ ۳) $\cos\alpha$ ۴) $\sin\alpha$

۱۱۵- اگر $۳\sin\alpha + ۴\cos\beta = ۷$، مقدار $۳\sin\alpha - ۴\cos\beta$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۷

۱۱۶- اگر $(۱-\sin x)^۲ + (۱-\cos y)^۲ = ۸$، حاصل عبارت $(۱-\cos y)^۲ - (۱-\sin x)^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) صفر ۴) ۱

۱۱۷- اگر $۱۸۰^\circ \le \alpha \le ۳۶۰^\circ$، حداکثر مقدار عبارت $\frac{۱}{۲\sin\alpha - ۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) -۱

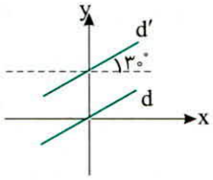
۱۱۸- مقدار عبارت $A=\frac{۳\cos\alpha}{۳\cos\alpha-۱}$ با کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۱۹- خطی که از نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ می‌گذرد و عرض از مبدأ آن -۱ است، با محور طول‌ها رو به جهت مثبت کدام زاویه را می‌سازد؟

۱) ۶۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۴۵° ۴) ۱۳۵°

۱۲۰- در شکل مقابل دو خط d و d' موازی‌اند. معادله‌ی خط d کدام است؟



۱) $y=\sqrt{۳}x$ ۲) $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$

۳) $y=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ ۴) $y=\sqrt{۳}x+۱$

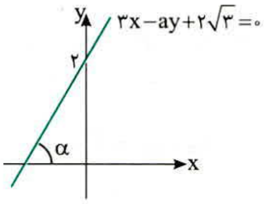
۱۲۱- اگر خط $(۳m-۲)x+my=۳$ با محور x رو به جهت مثبت زاویه‌ی ۴۵° بسازد، مقدار m چند است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲۲- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $(\sqrt{۳},۶)$ می‌گذرد و با محور طول‌ها رو به جهت مثبت زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، کدام است؟

۱) $x-\sqrt{۳}y-۳=۰$ ۲) $x+\sqrt{۳}y-۹=۰$ ۳) $۲x-\sqrt{۳}y-۹=۰$ ۴) $x-۲\sqrt{۳}y=۰$

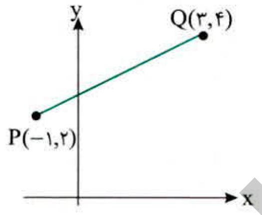
۱۲۳- در شکل مقابل مقدار $\sin\alpha$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

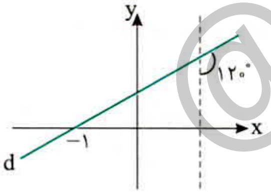
۱۲۴- اگر خط گذرا از نقاط P و Q با محور xها رو به جهت مثبت زاویه‌ی θ بسازد، مقدار $\cos\theta$ چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

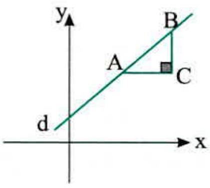
۱۲۵- در شکل مقابل خط d از کدام‌یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟



۱) $(۰,۱)$ ۲) $(-۳,-\sqrt{۳})$

۳) $(-۲,-\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ ۴) $(-۶,-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳})$

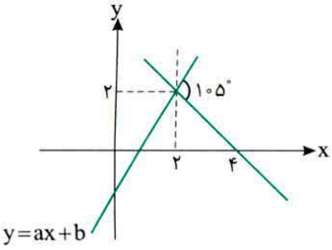
۱۲۶- در شکل روبه‌رو معادله‌ی خط d به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x+\frac{۲}{۵}$ است. حاصل عبارت $\frac{AB}{BC}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۱۲۷- در شکل مقابل مقدار $a+b$ چقدر است؟



۱) $۲-۲\sqrt{۳}$

۲) $۲-\sqrt{۳}$

۳) $۱-\sqrt{۳}$

۴) $۲+۳\sqrt{۳}$

فصل دوم: مثلثات

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

نکته **اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر، صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:**

۱) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۲) $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۳) $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$

۴) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$

۵) $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

۶) $۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود

$$\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha\,,\quad \cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha$$

تست ۱ **اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع سوم باشد و $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$، حاصل $\sin\alpha-\cos\alpha$ کدام است؟**

۱) $-\frac{۷}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: انتهای کمان روبه‌رو به α در ربع سوم است، در نتیجه $\sin\alpha\,,\cos\alpha<۰$. بنابراین

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

از طرف دیگر

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{\sin\alpha}{-\frac{۴}{۵}}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

بنابراین

$$\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

تست ۲ **حاصل عبارت $\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha}{۱-\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha}$ کدام است؟**

۱) $۲\cot\alpha$ ۲) $۲\tan\alpha$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $\cot\alpha$

پاسخ: ابتدا مخرج کسر را به‌صورت $۱-\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha=۲\sin^{۲}\alpha$ می‌نویسیم. در نتیجه

$$\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha}{۲\sin^{۲}\alpha}=\frac{۲\cos\alpha}{\sin\alpha}=۲\cot\alpha$$

تست ۳

عبارت $\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

۱) $\cos^۲\alpha-\cos^۲\beta$ ۲) $\sin^۲\alpha-\cos^۲\beta$

۳) $\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta$ ۴) $\cos^۲\alpha-\sin^۲\beta$

پاسخ: در عبارت داده شـده به جای $\cos^۲\beta$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲\beta$ و به جای $\cos^۲\alpha$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲\alpha$. عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta=\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\beta)-(۱-\sin^۲\alpha)\sin^۲\beta$$

$$=\sin^۲\alpha-\sin^۲\alpha\sin^۲\beta-\sin^۲\beta+\sin^۲\alpha\sin^۲\beta$$

$$=\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta$$

تست ۴

اگر $\sin\alpha=\sqrt{m}$ و $\cos\alpha=\sqrt{۲m-۱}$، مقدار $\tan^۲\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: با توجه به رابطه‌ی $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$، مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^۲+(\sqrt{۲m-۱})^۲=۱$$

$$m+۲m-۱=۱\Rightarrow m=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\cos\alpha=\sqrt{۲m-۱}=\sqrt{۲(\frac{۲}{۳})-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

با توجه به رابطه‌ی $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ مقدار $\tan^۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲}=۳\Rightarrow\tan^۲\alpha=۲$$

تست ۵

اگـر انتهای کمـان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ربع اول باشـد و $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۳}$، حاصل $\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱۷}{۹}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$

پاسخ: چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ربع اول قرار دارد، پس $\sin x , \cos x>۰$. اکنون توجه کنید

$$(\sin x-\cos x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲$$

بنابراین

$$(\sin x+\cos x)^۲=۲-(\frac{۱}{۳})^۲=۲-\frac{۱}{۹}=\frac{۱۷}{۹}$$

در نتیجه

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$$

اتحاد مثلثاتی

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آن‌ها با معنی‌اند) برقرار باشد، یک **اتحاد مثلثاتی** است. تمام تساوی‌هایی که در بند قبل برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

تست ۶ ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\tan x$ کدام است؟

۱) $\cos x$ ۲) $\sin x$ ۳) $\frac{۱}{\cos x}$ ۴) $\frac{۱}{\sin x}$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^۲ x+\sin x(۱+\sin x)}{(۱+\sin x)\cos x}$$

$$=\frac{\cos^۲ x+\sin x+\sin^۲ x}{(۱+\sin x)\cos x}=\frac{۱+\sin x}{(۱+\sin x)\cos x}=\frac{۱}{\cos x}$$

تست ۷ ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\cos ۱۰^\circ}{۱+\sin ۱۰^\circ}-\frac{\cos ۱۰^\circ}{۱-\sin ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $-۲\tan ۱۰^\circ$ ۲) $۲\tan ۱۰^\circ$ ۳) $\frac{۲}{\cos^۲ ۱۰^\circ}$ ۴) $\frac{۲}{\cos ۱۰^\circ}$

پاسخ: به کمک مخرج مشترک گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۱۰^\circ(\frac{۱}{۱+\sin ۱۰^\circ}-\frac{۱}{۱-\sin ۱۰^\circ})=(\frac{۱-\sin ۱۰^\circ-(۱+\sin ۱۰^\circ)}{(۱+\sin ۱۰^\circ)(۱-\sin ۱۰^\circ)})\cos ۱۰^\circ$$

$$=\frac{-۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{۱-\sin^۲ ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{-۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\cos^۲ ۱۰^\circ}=\frac{-۲\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=-۲\tan ۱۰^\circ$$

تست ۸ ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\tan^۲ ۱۰^\circ}{۱+\tan^۲ ۱۰^\circ}+\frac{\cot^۲ ۱۰^\circ}{۱+\cot^۲ ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\cos ۲۰^\circ$ ۳) $\sin ۲۰^\circ$ ۴) ۲

پاسخ: از اتحادهـای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$، $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan^۲ ۱۰^\circ}{۱+\tan^۲ ۱۰^\circ}+\frac{\cot^۲ ۱۰^\circ}{۱+\cot^۲ ۱۰^\circ}=\frac{\frac{\sin^۲ ۱۰^\circ}{\cos^۲ ۱۰^\circ}}{\frac{۱}{\cos^۲ ۱۰^\circ}}+\frac{\frac{\cos^۲ ۱۰^\circ}{\sin^۲ ۱۰^\circ}}{\frac{۱}{\sin^۲ ۱۰^\circ}}$$

$$=\sin^۲ ۱۰^\circ+\cos^۲ ۱۰^\circ=۱$$

تست ۹ ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۴\theta$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

پاسخ: **راه‌حل اول:** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$$

$$=\frac{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\sin^۴\theta}$$

$$=\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\cot^۲\theta$$

راه‌حل دوم: اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار ۳۰° قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با

$$\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}-۹=۱۶-۴-۹=۳$$

اگر در گزینه‌ها به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، فقط $\cot^۲\theta$ برابر ۳ می‌شود. پس ساده‌شده‌ی عبارت همان $\cot^۲\theta$ است.

تست ۱۰

اگر $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$**، مقدار** $\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha$ **کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۱۳

پاسخ: طرفین تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲\tan\alpha\cot\alpha=۹$$

چون $\tan\alpha\cot\alpha=۱$، پس

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲=۹$$

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=۷$$

تست ۱۱

هرگاه $\tan^۲\theta+\tan\theta-۱=۰$**، حاصل** $\tan^۴\theta+\cot^۴\theta$ **چند است؟**

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ: توجه کنید که $\tan\theta\neq۰$. بنابراین تساوی داده‌شده را می‌توان این طور نوشت:

$$\tan\theta-\frac{۱}{\tan\theta}=-۱$$

اکنون توجه کنید که

$$\tan^۲\theta+\frac{۱}{\tan^۲\theta}=(\tan\theta-\frac{۱}{\tan\theta})^۲+۲=۳$$

در نتیجه

$$\tan^۴\theta+\cot^۴\theta=\tan^۴\theta+\frac{۱}{\tan^۴\theta}=(\tan^۲\theta+\frac{۱}{\tan^۲\theta})^۲-۲=۹-۲=۷$$

تست ۱۲

اگر تساوی $\frac{۹\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha-۸}{\sin\alpha+۳\cos\alpha}=A\sin\alpha+B\cos\alpha$ **یک اتحاد باشد، حاصل** $A^۲-B^۲$ **چقدر است؟**

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) -۷ ۴) -۸

پاسخ: ابتدا صورت کسر سمت چپ را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۹\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha-۸(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)=\sin^۲\alpha-۹\cos^۲\alpha$$

$$=(\sin\alpha-۳\cos\alpha)(\sin\alpha+۳\cos\alpha)$$

بنابراین طرف چپ تساوی به صورت $\sin\alpha-۳\cos\alpha$ درمی‌آید. در نتیجه $A=۱$ و $B=-۳$. پس

$$A^۲-B^۲=۱-۹=-۸$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل دوم

درس سوم:
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱۲۸- اگر $\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم باشد، مقدار $\tan\alpha+\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۱۲۹- اگر $\cot x=\frac{۱}{۲}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ناحیه‌ی سوم باشد، مقدار عبارت $\sin x-۲\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۴) صفر

۱۳۰- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ در ربع دوم باشد و

$$\tan^{۲}\theta+\cos^{۲}۶۰^\circ=۱$$

حاصل $\frac{\sqrt{۷}}{\cos\theta}+۲$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) ۴

۱۳۱- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع چهارم باشد و بدانیم $\cos\alpha=\frac{۲}{۳}$، حاصل عبارت $\frac{\sin\alpha-\cot\alpha}{\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $-\sqrt{۱۵}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۱۳۲- اگر $\tan\alpha=\frac{۱}{۲m}$ و $\cot\alpha=m+۲$، مقدار $\sin^{۲}\alpha$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱}{۱۷}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۳۳- اگر $\tan x=\sqrt{\frac{m-۲}{۲m-۵}}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{m-۲}{۳m-۷}}$، مقدار $\cot x$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۴- اگر $\sin x=m$ و $\cot x=\frac{\sqrt{۳}(m-۱)}{m}$، مقدار $۲m^{۲}-۳m$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۳۵- اگر $\frac{۱}{\sin\alpha}-\cot\alpha=m$ و $\frac{۱}{\sin\alpha}+\cot\alpha=n$، چه رابطه‌ای بین m و n برقرار است؟

۱) $m+n=\frac{۱}{۲}$ ۲) $mn=۱$ ۳) $\frac{m}{n}=۲$ ۴) $m-n=۱$

۱۳۶- اگر $\sin^{۲}x-\cos^{۲}x=m$ و $\sin^{۴}x-\cos^{۴}x=n$، کدام رابطه بین m و n برقرار است؟

۱) $m-n=۰$ ۲) $m+n=۰$ ۳) $m^{۲}-n=۰$ ۴) $m^{۲}+n=۰$

۱۳۷- حاصل $A=\frac{\sin ۱۵^\circ-\sin^۳ ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ-\cos^۳ ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan^۲ ۱۵^\circ$
۲) $\tan ۱۵^\circ$
۳) $\cot ۱۵^\circ$
۴) $\cot^۲ ۱۵^\circ$

۱۳۸- ساده‌شده‌ی عبارت $A=\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ(\frac{۱}{۱-\cos ۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\cos ۱۰^\circ})$ کدام است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$
۲) $\cot ۱۰^\circ$
۳) $۲\tan ۱۰^\circ$
۴) $۲\cot ۱۰^\circ$

۱۳۹- اگر $A=\sin\alpha\cos\beta$، $B=\sin\alpha\sin\beta$ و $C=\cos\alpha$، حاصل $A^۲+B^۲+C^۲$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\cos\alpha\cos\beta$
۴) $۱+\cos\alpha$

۱۴۰- ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{۷+۵\sin^۲ x-\cos^۲ x}{۳\sin^۲ x+۲\cos^۲ x-۱}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۱۴۱- اگر $\cos\theta\neq -۱$، حاصل عبارت $\frac{\sin^۳\theta}{۱+\cos\theta}+\sin\theta\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\sin\theta$
۲) $\cos\theta$
۳) $\frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta}$
۴) $\frac{\cos\theta}{۱+\cos\theta}$

۱۴۲- حاصل عبارت $\frac{۱}{\sin\alpha(۱-\cos\alpha)}-\frac{۱+\cos\alpha}{\sin^۳\alpha}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\sin\alpha$
۴) $\cos\alpha$

۱۴۳- ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos x}-\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x}+\cos x$ کدام است؟

۱) $-\cos x$
۲) $-\sin x$
۳) $\cos x$
۴) $\sin x$

۱۴۴- ساده‌شده‌ی عبارت $۲\sin^۲ x+\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$
۲) $\cos x$
۳) -۱
۴) ۱

۱۴۵- ساده‌شده‌ی عبارت $\cos^۴ x-\sin^۴ x+۲\cos^۲ x-\sin^۲ x+۲$ کدام است؟

۱) $۵\cos x$
۲) $۵\cos^۲ x$
۳) $۵\sin x$
۴) $۵\sin^۲ x$

۱۴۶- ساده‌شده‌ی عبارت $A=\sin^۲ x(۱+\sin^۲ x)+\cos^۲ x(۱+\cos^۲ x)$ کدام است؟

۱) $۲+۲\sin x\cos x$
۲) $۲-۲\sin x\cos x$
۳) $۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$
۴) $۲+۲\sin^۲ x\cos^۲ x$

۱۴۷- عبارت $\frac{\cot^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\tan^۲\alpha-\sin^۲\alpha}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

۱) $\tan^۶\alpha$
۲) $\cot^۶\alpha$
۳) $۱+\tan^۶\alpha$
۴) $۱+\cot^۶\alpha$

۱۴۸- ساده‌شده‌ی عبارت $(\frac{۱}{\cos x}+\tan x)(۱-\sin x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$
۲) $\cos x$
۳) $\tan x$
۴) $\cot x$

۱۴۹- حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{۴-\sin^۲ x\cos^۲ x}{(\sin x-\cos x)^۲+۳}-\frac{۱}{۲}\sin x\cos x$$

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) -۱

۱۵۰- ساده‌شده‌ی عبارت $A=۱-\frac{\cos\alpha\cot\alpha}{۱-\sin\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۲) $-\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $-\sin\alpha$

۱۵۱- ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\cos x}{۱-\cot x}+\frac{\sin x}{۱-\tan x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۵۲- حاصل عبارت $\frac{\cos a+\cos b}{\sin a-\sin b}+\frac{\sin a+\sin b}{\cos a-\cos b}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۱۵۳- حاصل عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟

$$\frac{(۱-\cos x)(\frac{۱}{\cos x}+۱)}{(۱-\sin x)(\frac{۱+\sin x}{\cos x})}$$

۱) $\tan^۲ x$ ۲) $\cot^۲ x$ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\sin^۲ x$

۱۵۴- ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos\alpha}$ ۲) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $\cos\alpha$

۱۵۵- عبارت $\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟ $(\sin\alpha\neq ۰)$

۱) $\frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ۲) $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$ ۳) $\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ۴) $\frac{۱-\sin\alpha}{\sin\alpha}$

۱۵۶- اگر α زاویه‌ای حاده باشد، کدام گزینه می‌تواند واسطه‌ی هندسی میان ۲ عدد $\sqrt{۱+\sin\alpha}$ و $\sqrt{۱-\sin\alpha}$ باشد؟

۱) ۱ ۲) $-\sqrt{\cos\alpha}$ ۳) $\cos\alpha$ ۴) $\sqrt{۲+۲\cos\alpha}$

۱۵۷- حاصل عبارت $\frac{۱-۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x(۱-\tan^۲ x)}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\cot x}{۱-\cot x}$ ۲) $\frac{۲\cos x}{\sin x+\cos x}$ ۳) $\frac{۲\tan x}{\tan x-۱}$ ۴) $\frac{۲\sin x}{\sin x+\cos x}$

۱۵۸- حاصل عبارت $\frac{۱}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+۱}{\sin\alpha+\cos\alpha-۱}$ کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $\cot\alpha$ ۳) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۴) $\sin\alpha$

۱۵۹- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۱+\cos ۲۴^\circ}+\sqrt{۱-\cos ۲۴^\circ}}{\sqrt{۱+\sin ۲۴^\circ}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۱۶۰- مقدار عبارت $A=\frac{(۱+\cot ۴۰^\circ)(۱-\tan ۴۰^\circ)}{(۱-\cot ۴۰^\circ)(۱+\tan ۴۰^\circ)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۱۶۱- ساده‌شده‌ی عبارت $\frac{(\sin x+\cos x)^{۲}+(\sin x-\cos x)^{۲}}{(\tan x+\cot x)^{۲}-(\tan x-\cot x)^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\tan^{۴} x$

۱۶۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ناحیه‌ی دوم باشد و $A=\cot^{۲} x(۱+\tan^{۲} x)+\tan^{۲} x(۱+\cot^{۲} x)$، حاصل $\sqrt{A}$ کدام است؟

۱) $\tan x-\cot x$ ۲) $-\tan x-\cot x$ ۳) $\tan x+\cot x$ ۴) $\cot x-\tan x$

۱۶۳- حاصل عبارت $(\frac{۳}{۱+\cot^{۲} x}+\frac{۴}{۱+\tan^{۲} x})\frac{۱}{۸-۲\sin^{۲} x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۶۴- ساده‌شده‌ی عبارت $A=(\cos^{۴} x-\sin^{۴} x)(۱+\tan^{۲} x)+\tan^{۲} x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۵- ساده‌شده‌ی عبارت $(\frac{۱}{\cos\alpha}-۱)(\frac{۱}{\sin\alpha}-۱)(\frac{۱}{\cos\alpha}+۱)(\frac{۱}{\sin\alpha}+۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\tan^{۴}\alpha$ ۴) $\cot^{۴}\alpha$

۱۶۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^{۲} x(۱+\tan^{۲} x)-\cos^{۲} x(۱+\cot^{۲} x)}{\tan x-\cot x}$ به ازای $x=۳۰^\circ$ چند است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۶۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مقدار $\frac{\sin^{۲}\hat{A}+\sin^{۲}\hat{B}+\sin^{۲}\hat{C}}{\cos^{۲}\hat{A}+\cos^{۲}\hat{B}+\cos^{۲}\hat{C}}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۶۸- اگر $\tan^{۲} ۱۰^\circ+\tan^{۲} ۸۰^\circ=m$، حاصل عبارت زیر چند است؟

$$\frac{۱}{\sin^{۲} ۱۰^\circ}+\frac{۱}{\cos^{۲} ۱۰^\circ}$$

۱) $m-۲$ ۲) $m+۲$ ۳) m ۴) $۲-m$

۱۶۹- مقدار $A=\cos^{۲} ۱^\circ+\cos^{۲} ۲^\circ+\cos^{۲} ۳^\circ+\cdots+\cos^{۲} ۹۰^\circ$ کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۴/۵ ۳) ۴۵ ۴) ۴۵/۵

۱۷۰- مقدار $(\cos ۴۰^\circ+\cos ۵۰^\circ)^{۲}+(\sin ۴۰^\circ-\sin ۵۰^\circ)^{۲}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱- مقدار $\frac{-\sin^{۲} ۴۰^\circ-\sin^{۲} ۵۰^\circ+۱-\sin ۷۰^\circ}{\tan ۴۰^\circ\times\tan ۵۰^\circ-۱-۲\cos ۲۰^\circ}$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۷۲- اگر $\tan x-۳\cot x=۲$، حاصل $\tan^{۲} x+۹\cot^{۲} x$ چند است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۷۳- اگر $\sin x(۱+\tan^{۲} x)+\tan^{۲} x=۱$، حاصل عبارت $۲\sin^{۲} x+\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۷۴- اگر $\tan x+\cot x=\sqrt{۵}$، مقدار $\tan^۴ x+\cot^۴ x$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۱۷۵- اگر $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\tan\alpha+\cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۶- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\sin\alpha\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۷۷- اگر $\frac{۴\sin x-\cos x}{۴\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۳}$، حاصل عبارت زیر چند است؟

$$\frac{\cos x}{۱-\sin x}-\frac{\cos x}{۱+\sin x}$$

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۷۸- اگر $\frac{۱+۲\sin x\cos x}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}=۳$، مقدار $\cot x$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۷۹- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ در ربع اول باشد و

$$\tan\theta=\frac{\sin^۲\alpha-\sin^۴\alpha}{\cos^۲\alpha-\cos^۴\alpha}$$

مقدار $\frac{۱}{\cos\theta}$ چند است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۱۸۰- اگر $۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ و $۲\sin\alpha-\cos\alpha=۱$، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۸۱- اگر $۲\sin x=۵\cos x$، مقدار $\sin x\cos x$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱۰}{۲۹}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲۹}$

۱۸۲- اگر $\sin^۲ x-\sin^۴ x=\frac{۱}{۸}$، حاصل عبارت $\tan^۲ x+\cot^۲ x$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۸۳- اگر $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۱}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی دوم باشد، مقدار $\sin\alpha\cos\alpha$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۸۴- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی دوم باشد و $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\cos\alpha-\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $-\frac{۸}{۹}$

۱۸۵- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ربع سوم باشد و $\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۲}{۹}$، حاصل عبارت $|\sin x-\cos x|$ چند است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مثلثات

۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل، $\tan x=\frac{۳}{۲}$، $\tan y=\frac{۳}{۳}$ و $\tan z=\frac{۳}{۴}$. بنابراین $\tan x \tan y \tan z=\frac{۹}{۸}$.

۲- گزینه‌ی ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل،

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$AC=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$$

بنابراین $\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$. همچنین

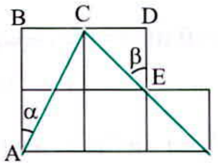
$$\cos\beta=\frac{DE}{CE}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$CE=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$

بنابراین $\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. به این ترتیب

$$\sin\alpha+\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}}$$

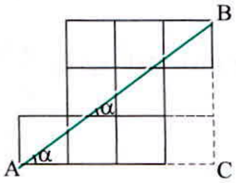


۳- گزینه‌ی ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب،

$$\alpha=B\hat{A}C$$

در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan B\hat{A}C=\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۴}$$



۴- گزینه‌ی ۲ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب،

$$x=A\hat{B}C$$

در نتیجه

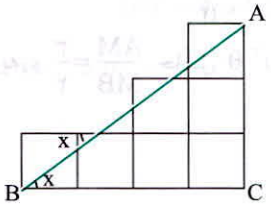
$$\sin x=\sin A\hat{B}C=\frac{AC}{AB}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$AB=\sqrt{AC^۲+BC^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

به این ترتیب،

$$\sin x=\frac{AC}{AB}=\frac{۳}{۵}$$



۵- گزینه‌ی ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب،

$$\alpha=B\hat{A}C$$

در نتیجه

$$\sin\alpha=\sin B\hat{A}C=\frac{BC}{AB}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$AB=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

بنابراین

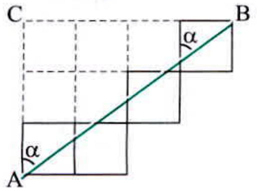
$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{۴}{۵}$$

همچنین،

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$\sin\alpha+\tan\alpha=\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۳}=\frac{۳۲}{۱۵}$$

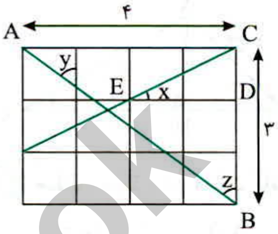


۶- گزینه‌ی ۱ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $\hat{y}=\hat{z}$، $AB=۵$ و $EC=\sqrt{۵}$.

در نتیجه $\cos y=\cos z=\frac{BC}{AB}=\frac{۳}{۵}$. همچنین

$$\sin x=\frac{DC}{EC}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر $\frac{۴}{۵}$ است.



۷- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$ و $\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین

$$\cos ۶۰^\circ \cot ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱):

$$(\sqrt{۳})\sin^۲ ۴۵^\circ=\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گزینه‌ی (۲):

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گزینه‌ی (۳):

$$\sin ۳۰^\circ \tan ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گزینه‌ی (۴):

$$\sqrt{۳}\sin^۲ ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

۸- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $\cot ۶۰^\circ=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$(\tan ۳۰^\circ+\cot ۳۰^\circ)\cot ۶۰^\circ=(\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳})\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۴}{۳}$$

۹- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$a=۲(\frac{۱}{۲})+(\sqrt{۳})^۲=۱+۳=۴$$

$$b=۲(\frac{۱}{۲})+(\sqrt{۳})^۲=۱+۳=۴$$

بنابراین $a-b=۴-۴=۰$، پس $(a-b)^{۲۰}=۰$.

۱۰- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $\sin ۴۵^\circ=\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$،

$\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\sin^۲ ۴۵^\circ}{\cos ۶۰^\circ+\cos^۲ ۴۵^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$$

۱۱- گزینه‌ی ۴ تساوی گزینه‌ی (۴) نادرست است:

$$\text{سمت چپ}=\frac{۱+\cos ۶۰^\circ}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

$$\text{سمت راست}=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ تساوی گزینه‌ی (۳) درست است:

$$\text{سمت چپ}=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{سمت راست}=\frac{۱-\tan^۲ ۳۰^\circ}{۱+\tan^۲ ۳۰^\circ}=\frac{۱-(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲}{۱+(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲}=\frac{۱-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

بقیه‌ی گزینه‌ها نادرست هستند.

۱۳- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $\cot ۶۰^\circ=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$،

$\cot ۳۰^\circ=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$ و $\tan ۴۵^\circ=۱$. بنابراین

$$A=\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲+۱^۲+(\sqrt{۳})^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\sqrt{۳}}=-\frac{۱۳}{۲\sqrt{۳}}=-\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۶}$$

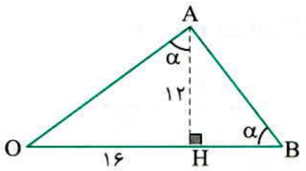
۱۴- گزینه‌ی ۴ یکی از پرانتزها به‌صورت $\tan ۴۵^\circ-\cot ۴۵^\circ$ است که برابر صفر است. بنابراین $A=۰$.

۱۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت

$$O\hat{A}H=\hat{B}=\alpha$$

بنابراین

$$\tan\alpha=\frac{OH}{AH}=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}$$

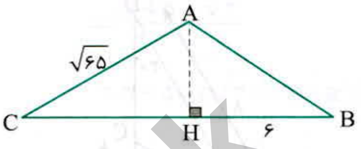


۲۹- گزینه‌ی ۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHB، در مورد زاویه‌ی B می‌دانیم

$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{HB}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۶}\Rightarrow AH=۴$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACH با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:

$$AC^۲=CH^۲+AH^۲\Rightarrow ۶۵=CH^۲+۱۶\Rightarrow CH=۷$$



۳۰- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل زیر، $\cos\hat{B}=\frac{۴}{a}=\frac{۱}{۳}$،

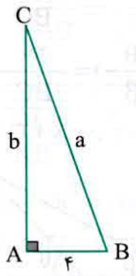
بنابراین a=۱۲.

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس می‌توانیم b را هم حساب کنیم:

$$b^۲+۴^۲=۱۲^۲\Rightarrow b^۲=۱۲۸\Rightarrow b=۸\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\cot\hat{C}=\frac{b}{۴}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۴}=۲\sqrt{۲}$$



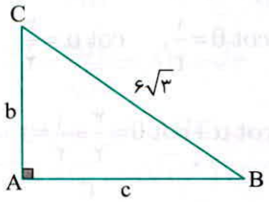
۳۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل $\cot\hat{B}=\frac{c}{b}=\sqrt{۲}$.

بنابراین $c=b\sqrt{۲}$. از طرف دیگر طبق قضیه‌ی فیثاغورس،

$$b^۲+c^۲=(۶\sqrt{۳})^۲\Rightarrow b^۲+(b\sqrt{۲})^۲=(۶\sqrt{۳})^۲$$

$$b^۲+۲b^۲=۳۶\times۳\Rightarrow b^۲=۳۶\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $c=۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه $bc=۳۶\sqrt{۲}$.

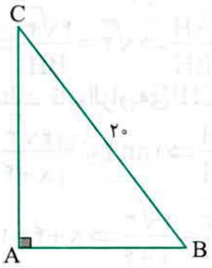


۳۲- گزینه‌ی ۲ چون $\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$، پس $\frac{AB}{۲۰}=\frac{۶}{۱۰}$.

بنابراین AB=۱۲. همچنین به کمک قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان طول ضلع AC را حساب کرد:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow ۲۰^۲=۱۲^۲+AC^۲\Rightarrow AC=۱۶$$

بنابراین AB+AC=۱۲+۱۶=۲۸.



۳۳- گزینه‌ی ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$x^۲+y^۲=۱۰۰$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$x^۲=h^۲+۴$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACH، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$y^۲=h^۲+۶۴$$

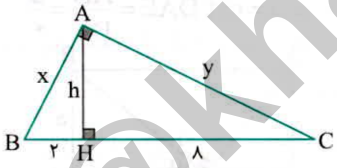
اگر طرفین دو تساوی بالا را جمع کنیم، تساوی $x^۲+y^۲=۲h^۲+۶۸$ به‌دست می‌آید، پس $۱۰۰=۲h^۲+۶۸$ و در نتیجه h=۴.

از طرف دیگر در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH می‌توانیم مقدار $\tan\hat{B}$ و $\tan\hat{C}$ را حساب کنیم:

$$\tan\hat{B}=\frac{h}{BH}=\frac{۴}{۲}=۲,\quad \tan\hat{C}=\frac{h}{CH}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\hat{B}+\tan\hat{C}=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$



۳۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم

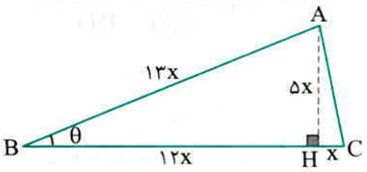
$$\tan\theta=\frac{AH}{BH}=\frac{۵}{۱۲}$$

در نتیجه، عددی مانند x وجود دارد که

$$AH=۵x,\quad BH=۱۲x$$

در این صورت، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABH، AB=۱۳x. در نتیجه HC=x. بنابراین $AC=\sqrt{۲۶}x$. در نتیجه

$$\frac{AB}{AC}=\frac{۱۳}{\sqrt{۲۶}}=\frac{۱۳\sqrt{۲۶}}{۲۶}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$



۳۵- گزینه‌ی ۳ ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH،

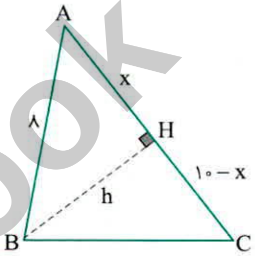
$$\sin\hat{A}=\frac{h}{۸}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow h=۶$$

در همین مثلث قضیه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم تا مقدار x به‌دست آید

$$h^۲+x^۲=۸^۲\Rightarrow ۳۶+x^۲=۶۴\Rightarrow x=\sqrt{۲۸}$$

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی CBH،

$$\cot\hat{C}=\frac{HC}{BH}=\frac{۱۰-x}{h}=\frac{۱۰-\sqrt{۲۸}}{۶}=\frac{۵-\sqrt{۷}}{۳}$$



۳۶- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD،

$$\tan\hat{B}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۵}{AB}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow AB=۲$$

به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در این مثلث، طول BD را به‌دست می‌آوریم:

$$AD^۲+AB^۲=BD^۲\Rightarrow ۲۵+۴=BD^۲\Rightarrow BD=\sqrt{۲۹}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCD،

$$\tan\hat{C}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲۹}}{BC}=\frac{۹\sqrt{۲۹}}{۱۳}\Rightarrow BC=\frac{۱۳}{۹}$$

۳۷- گزینه‌ی ۱ اگر مخرج مشترک بگیریم، عبارت به شکل زیر درمی‌آید

$$A=\frac{۱-\cot^۲\alpha+۱-\tan^۲\alpha}{(۱-\tan^۲\alpha)(۱-\cot^۲\alpha)}$$

$$=\frac{۲-\cot^۲\alpha-\tan^۲\alpha}{۱-\cot^۲\alpha-\tan^۲\alpha+\tan^۲\alpha\cot^۲\alpha}$$

چون $\tan\alpha\cot\alpha=۱$، پس $\tan^۲\alpha\cot^۲\alpha=۱$. در نتیجه

$$A=\frac{۲-\cot^۲\alpha-\tan^۲\alpha}{۱-\cot^۲\alpha-\tan^۲\alpha+۱}=\frac{۲-\cot^۲\alpha-\tan^۲\alpha}{۲-\cot^۲\alpha-\tan^۲\alpha}=۱$$

۳۸- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{\cot\beta}$.

بنابراین

$$\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\frac{۱}{\cot\alpha}+\frac{۱}{\cot\beta}}$$

$$=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\frac{\cot\beta+\cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta}}=\cot\alpha\cot\beta$$

۳۹- گزینه‌ی ۱ چون $\hat{B}$ و $\hat{C}$ دو زاویه‌ی متمم هستند، پس $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ و در نتیجه

$$\frac{\sin\hat{B}\cos\hat{B}}{\sin^۲\hat{C}}=\frac{\sin\hat{B}\cos\hat{B}}{\cos^۲\hat{B}}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}=\tan\hat{B}$$

۴۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که زاویه‌های ۹° و ۸۱° متمم یک‌دیگرند، پس $\tan ۹^\circ=\cot ۸۱^\circ$ و

$$\tan ۹^\circ\times\tan ۸۱^\circ=\cot ۸۱^\circ\times\tan ۸۱^\circ=۱$$

اگر در مورد زاویه‌های دیگر هم همین کار را انجام دهیم به‌دست می‌آید

$$\underbrace{\tan ۹^\circ\times\overbrace{\tan ۱۸^\circ\times\ldots\times\tan ۴۵^\circ\times\ldots\times\tan ۷۲^\circ}^{۱}\times\tan ۸۱^\circ}_{۱}$$

$$=۱\times۱\times\ldots\times۱\times\tan ۴۵^\circ=۱$$

۴۱- گزینه‌ی ۲ فرض کنید α و β دو زاویه‌ی متمم باشند، در این صورت $\tan\beta=\cot\alpha$، پس

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\tan^۲\beta}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}$$

$$=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\tan^۲\alpha}}$$

$$=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{\tan^۲\alpha}{\tan^۲\alpha+۱}$$

$$=\frac{۱+\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=۱$$

اگر قرار دهیم $\alpha=۱^\circ$ و $\beta=۸۹^\circ$ به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۱^\circ}+\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۸۹^\circ}=۱$$

به همین ترتیب تساوی‌های زیر درست هستند:

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۲^\circ}+\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۸۸^\circ}=۱,$$

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۳^\circ}+\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۸۷^\circ}=۱,\quad\ldots$$

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۴۴^\circ}+\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۴۶^\circ}=۱$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\frac{۱}{۱+\tan^۲ ۴۵^\circ}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$A=۴۴\times۱+\frac{۱}{۲}=۴۴/۵$$

۴۲- گزینه‌ی ۳ از تساوی $\frac{۳\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $۶\sin x=۲\sin x+\cos x$. بنابراین $۴\sin x=\cos x$ و در نتیجه $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۴}$، پس $\tan x=\frac{۱}{۴}$.

۴۳- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول** از تساوی $\tan x=\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۳}$، یعنی $\cos x=۳\sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار می‌دهیم $۳\sin x$. در این صورت

$$A=\frac{\sin x+۳\sin x}{\sin x-۳\sin x}=\frac{۴\sin x}{-۲\sin x}=-۲$$

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا A بر حسب $\tan x$ نوشته شود:

$$A=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}=\frac{\tan x+۱}{\tan x-۱}$$

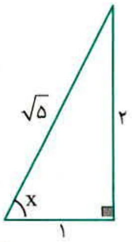
حال با قرار دادن $\frac{۱}{۳}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق مقدار A به‌دست می‌آید

$$A=\frac{\frac{۱}{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}-۱}=\frac{\frac{۴}{۳}}{-\frac{۲}{۳}}=-۲$$

۴۴- گزینه‌ی ۴ چون $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$، پس $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $\sin\alpha=\frac{۴}{۳}\cos\alpha$. با جایگذاری $\frac{۴}{۳}\cos\alpha$ به جای $\sin\alpha$ در عبارت $\frac{۳}{\cos\alpha}-\frac{۴}{\sin\alpha}$ مقدار آن به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳}{\cos\alpha}-\frac{۴}{\sin\alpha}=\frac{۳}{\cos\alpha}-\frac{۴}{\frac{۴}{۳}\cos\alpha}=\frac{۳}{\cos\alpha}-\frac{۳}{\cos\alpha}=۰$$

۴۵- گزینه‌ی ۲ با طرفین وسطین کردن تساوی داده شده و ساده نمودن آن معلوم می‌شود $\tan x=۲$. چون x حاده است، مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر با زاویه‌ی x را در نظر بگیرید:



در این صورت طول وتر مثلث برابر $\sqrt{۵}$ است. در نتیجه

$$\sin x=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\quad \cos x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین

$$\sin x+\cos x=\frac{۳}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

۴۶- گزینه‌ی ۴ مانند شکل زیر مثلثی قائم‌الزاویه در نظر بگیرید که یکی از زاویه‌های حاده‌اش α باشد، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه ۳ باشد و طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) ۲ باشد. در این صورت، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

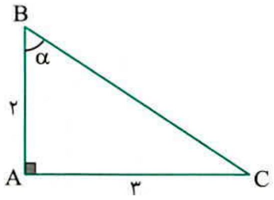
$$BC=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}$$

بنابراین

$$\sin\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}},\quad \cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

در نتیجه

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}+\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

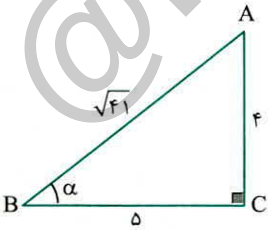


۴۷- گزینه‌ی ۳ چون α و β حاده هستند، مثلثی قائم‌الزاویه با زاویه‌ی α رسم می‌کنیم که طول ضلع روبه‌رو به آن ۴ و طول ضلع مجاور به آن (به‌جز وتر) برابر با ۵ باشد. در نتیجه

$$\sin\alpha=\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}$$

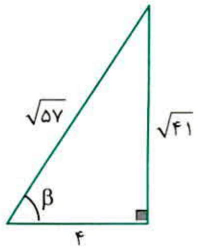
بنابراین

$$\cot\beta=\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}\Rightarrow\tan\beta=\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$$



با روشی مشابه و ترسیم مثلث زیر، معلوم می‌شود که

$$\cos\beta=\frac{۴}{\sqrt{۵۷}}$$



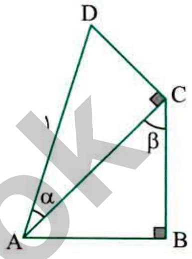
۴۸- گزینه‌ی ۳ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADC،

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AD}=\frac{AC}{۱}\Rightarrow AC=\cos\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC،

$$\sin\beta=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow AB=\sin\beta\cos\alpha$$



۴۹- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH،

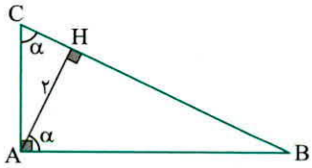
$$\cos\alpha=\frac{۲}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{AB}=\frac{۱}{۲}\cos\alpha$$

با توجه به شکل $\hat{C}=\alpha$، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACH،

$$\sin\alpha=\frac{۲}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{AC}=\frac{۱}{۲}\sin\alpha$$

بنابراین

$$\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{AC}=\frac{۱}{۲}\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\sin\alpha=\frac{۱}{۲}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$



۵۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل زیر، می‌توان x و y را برحسب α نوشت:

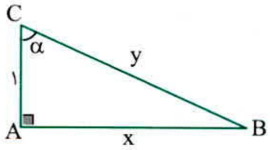
$$\tan\alpha=\frac{x}{۱}\Rightarrow x=\tan\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{۱}{y}\Rightarrow y=\frac{۱}{\cos\alpha}$$

پس محیط مثلث برابر است با

$$P=۱+x+y=۱+\tan\alpha+\frac{۱}{\cos\alpha}$$

$$P=۱+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{۱}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+۱}{\cos\alpha}$$



۵۱- گزینه‌ی ۱ مطابق شکل زیر، ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACH،

$$\sin\hat{A}=\frac{h}{b}\Rightarrow\sin^{۲}\hat{A}=\frac{h^{۲}}{b^{۲}}$$

$$\Rightarrow h^{۲}=b^{۲}\sin^{۲}\hat{A}\qquad(۱)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCH،

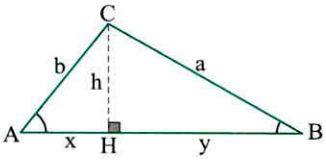
$$\cos\hat{B}=\frac{y}{a}\Rightarrow\cos^{۲}\hat{B}=\frac{y^{۲}}{a^{۲}}\Rightarrow y^{۲}=a^{۲}\cos^{۲}\hat{B}\qquad(۲)$$

طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم:

$$h^{۲}+y^{۲}=b^{۲}\sin^{۲}\hat{A}+a^{۲}\cos^{۲}\hat{B}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCH طبق رابطه‌ی فیثاغورس $h^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$، پس

$$a^{۲}=b^{۲}\sin^{۲}\hat{A}+a^{۲}\cos^{۲}\hat{B}$$



۵۲- گزینه‌ی ۲ اگر فرض کنیم $BD=x$، از تساوی $\frac{DC}{BD}=۶$ به‌دست می‌آید

$$DC=۶x\Rightarrow BC=۷x$$

پس مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD،

$$\cos\beta=\frac{BD}{AB}=\frac{x}{AB}$$

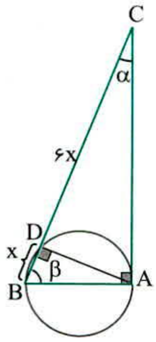
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC،

$$\cos\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۷x}$$

با توجه به دو تساوی اخیر باید $\frac{x}{AB}=\frac{AB}{۷x}$ و در نتیجه $AB=\sqrt{۷}x$. بنابراین $\cos\beta=\frac{x}{AB}=\frac{x}{\sqrt{۷}x}=\frac{۱}{\sqrt{۷}}$.

از طرف دیگر چون α و β دو زاویه‌ی متمم هستند، پس

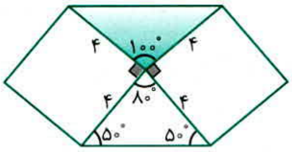
$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۷}}$$



۵۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل، مساحت مثلث متساوی‌الساقین رنگ شده برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}\times۴\times۴\times\sin ۱۰۰^\circ$$

$$=۸\times\frac{۹۸}{۱۰۰}=۷/۸۴$$



۵۴- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

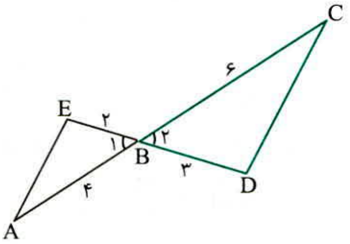
$$S_{ABE}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۴\times\sin \hat{B}_۱$$

$$S_{BCD}=\frac{۱}{۲}\times۳\times۶\times\sin \hat{B}_۲$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}=\frac{۴}{۹}$$

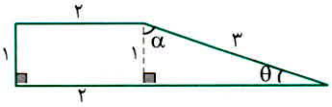
(دقت کنید که $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$)



۵۵- گزینه‌ی ۲ مطابق شکل، مساحت ذوزنقه برابر است با مساحت مستطیل به اضافه‌ی مساحت مثلث. چون مساحت مستطیل ۲ واحد است، پس مساحت مثلث $\sqrt{۲}$ واحد است. از طرف دیگر مساحت مثلث با $\frac{۱}{۲}\times۱\times۳\sin\alpha$ برابر است. پس

$$\frac{۳}{۲}\sin\alpha=\sqrt{۲}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

چون θ و α متمم‌اند، پس $\cos\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.



۵۶- گزینه‌ی ۲ چون مساحت مثلث ABC برابر با $۲\sqrt{۳}$، می‌توان طول CD را پیدا کرد:

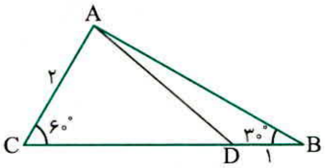
$$\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}(۲)(۱+CD)\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow CD=۳$$

در نتیجه مساحت مثلث ACD برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AC\times CD\times\sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}(۲)(۳)\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

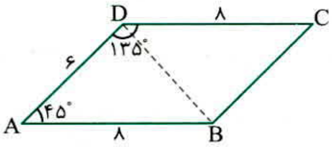
بنابراین مساحت مثلث ABD برابر است با $۲\sqrt{۳}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.



۵۷- گزینه‌ی ۱ مطابق شکل، مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABD است.

$$S_{ABCD}=۲S_{ABD}=۲\times\frac{۱}{۲}\times۶\times۸\sin ۴۵^\circ=۶\times۸\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $۲۴\sqrt{۲}$ است.



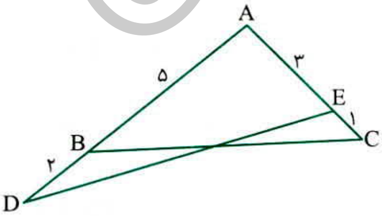
۵۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}AD\times AE\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۷\times۳\times\sin\hat{A}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۴\times\sin\hat{A}$$

بنابراین

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{۲۱}{۲۰}$$



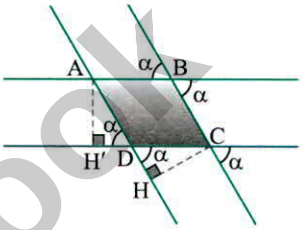
۵۹- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم در مثلث ABC رابطه‌ی $\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$ برقرار است. بنابراین از تساوی $\frac{\sin\hat{A}}{a}=۲$ نتیجه می‌شود $\frac{\sin\hat{B}}{b}=۲$ و $\frac{\sin\hat{C}}{c}=۲$. بنابراین

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}+\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{۱}{۲}+۲=۲/۵$$

۶۰- گزینه‌ی ۲ با نمادگذاری شکل زیر، در مثلث DCH،

$$\sin\alpha=\frac{CH}{DC}=\frac{۱}{DC}$$

در نتیجه $DC=\frac{۱}{\sin\alpha}$. بنابراین ناحیه‌ی سایه‌دار متوازی‌الاضلاعی است که طول یک ضلعش $\frac{۱}{\sin\alpha}$ است و طول ارتفاع وارد بر این ضلع، ۱ است $(AH'=۱)$. در نتیجه مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با $۱\times\frac{۱}{\sin\alpha}=\frac{۱}{\sin\alpha}$.



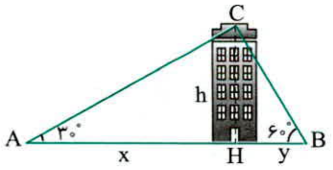
۶۱- گزینه‌ی ۲ مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ACH و BCH،

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=\sqrt{۳}h$$

$$\tan ۶۰^\circ=\frac{h}{y}=\sqrt{۳}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h$$

بنابراین $x+y=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h$. از طرف دیگر $x+y=۱۲$، بنابراین

$$۱۲=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h\Rightarrow h=۳\sqrt{۳}$$



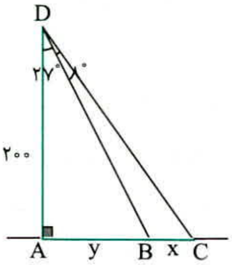
۶۲- گزینه‌ی ۳ مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD،

$$\tan ۲۷^\circ=\frac{y}{۲۰۰}=\frac{۵}{۱۰}\Rightarrow y=۱۰۰$$

و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACD،

$$\tan(۲۷^\circ+۸^\circ)=\frac{x+y}{۲۰۰}\Rightarrow \tan ۳۵^\circ=\frac{x+۱۰۰}{۲۰۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

$$\Rightarrow x+۱۰۰=۱۴۰\Rightarrow x=۴۰$$



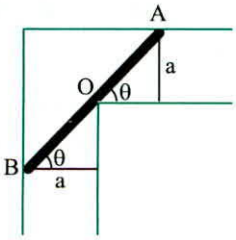
۶۳- گزینه‌ی ۲ طول میله را به ۲ قطعه‌ی AO و OB تقسیم می‌کنیم. در این صورت

$$\sin\theta=\frac{a}{AO},\quad \cos\theta=\frac{a}{OB}$$

بنابراین $AO=\frac{a}{\sin\theta},\quad OB=\frac{a}{\cos\theta}$

در نتیجه

$$\text{طول میله}=AO+OB=a(\frac{۱}{\sin\theta}+\frac{۱}{\cos\theta})$$



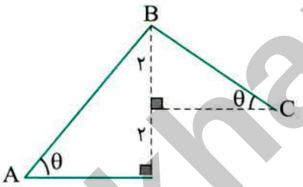
۶۴- گزینه‌ی ۲ مانند شکل زیر می‌توان دو مثلث قائم‌الزاویه تشکیل داد.

بنابراین

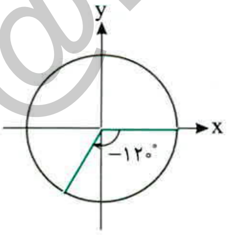
$$AB=\frac{۴}{\sin\theta},\quad BC=\frac{۲}{\sin\theta}$$

در نتیجه طول طناب برابر است با

$$AB+BC=\frac{۶}{\sin\theta}$$



۶۵- گزینه‌ی ۴ زاویه‌ی -۱۲۰° باید به شکل زیر رسم شود.



۶۶- گزینه‌ی ۲ اگر $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم قرار دارد.

۶۷- گزینه‌ی ۱ اگر $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم قرار دارد و اگر $۲۷۰^\circ<\alpha<۳۶۰^\circ$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۲۶۰° در ناحیه‌ی سوم و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۲۸۰°، ۲۹۰° و ۳۰۰° در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

۷۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$۹۰^\circ < ۱۲۰^\circ < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۲۰^\circ > ۰$$

$$۲۷۰^\circ < ۳۰۰^\circ < ۳۶۰^\circ \Rightarrow \tan ۳۰۰^\circ < ۰$$

$$۱۸۰^\circ < ۲۴۰^\circ < ۲۷۰^\circ \Rightarrow \cot ۲۴۰^\circ > ۰$$

$$۱۸۰^\circ < ۲۱۰^\circ < ۲۷۰^\circ \Rightarrow \cos ۲۱۰^\circ < ۰$$

۷۷- گزینه‌ی ۴ زاویه‌های ۱۵۰° و ۱۵۲° در ربع دوم قرار دارند، در نتیجه $\cos ۱۵۲^\circ < ۰$ و $\sin ۱۵۰^\circ > ۰$. بنابراین

$$\sin ۱۵۰^\circ \cos ۱۵۲^\circ < ۰$$

زاویه‌های -۲۲۰° و -۲۲۲° در ربع دوم قرار دارند، بنابراین

$$\tan(-۲۲۰^\circ) < ۰, \quad \tan(-۲۲۲^\circ) < ۰$$

و در نتیجه $\tan(-۲۲۰^\circ)\tan(-۲۲۲^\circ) > ۰$. زاویه‌های ۳۰۲° و ۳۰۰° در ربع چهارم قرار می‌گیرند، بنابراین

$$\sin ۳۰۲^\circ < ۰, \quad \cos ۳۰۰^\circ > ۰$$

در نتیجه $\frac{۱}{\sin ۳۰۲^\circ \cos ۳۰۰^\circ} < ۰$.

۷۸- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$A = \frac{۰+۱-۰-(-۱)}{۱+۰-(-۱)-۰} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۷۹- گزینه‌ی ۳ چون $\sin\alpha\cos\alpha < ۰$، پس علامت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ فرق می‌کند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع دوم یا چهارم قرار دارد.

۸۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به تساوی $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$، معلوم است که $\cos\alpha \leq ۰$.

با توجه به تساوی $|\sin\alpha| = \sin\alpha$، معلوم است که $\sin\alpha \geq ۰$.

بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α می‌تواند در ربع دوم مثلثاتی قرار داشته باشد.

۸۱- گزینه‌ی ۳ با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$، مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos\alpha\cot\alpha < ۰$، مشخص است که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin\alpha < ۰, \quad \cos\alpha < ۰, \quad \cot\alpha > ۰$$

۸۲- گزینه‌ی ۴ از تساوی $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x} = ۱$ واضح است که باید $\cos x > ۰$. بنابراین از تساوی $\tan x = -\frac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\cos x}$، نتیجه می‌شود که $\tan x < ۰$. بنابراین انتهای کمان زاویه‌ی x در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

۸۳- گزینه‌ی ۲ نابرابری $\sin x + \tan x < ۰$ را به‌صورت $\tan x(\cos x + ۱) < ۰$ می‌نویسیم. چون $۱+\cos x \geq ۰$، پس $\tan x < ۰$. بنابراین انتهای کمان زاویه‌ی x در ناحیه‌ی دوم یا چهارم واقع است. نابرابری $\sin x \tan x > \frac{۱}{\cos x}$ را به‌صورت $\frac{\sin^۲ x}{\cos x} > \frac{۱}{\cos x}$ می‌نویسیم. چون $\sin^۲ x \leq ۱$، باید $\cos x < ۰$. بنابراین انتهای کمان زاویه‌ی x در ناحیه‌ی دوم است.

۸۴- گزینه‌ی ۲ مجموع دو عدد، منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است. پس هر دو عدد منفی هستند. یعنی $\cos\alpha < ۰$ و $\cot\alpha < ۰$. بنابراین α در ربع دوم قرار دارد.

۸۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\sin\alpha + \tan\alpha = \sin\alpha(۱+\frac{۱}{\cos\alpha}) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(۱+\cos\alpha)$$
$$= \tan\alpha(۱+\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha + \cot\alpha = \cos\alpha(۱+\frac{۱}{\sin\alpha}) = \cot\alpha(۱+\sin\alpha)$$

در نتیجه

$$T = \frac{\tan^۲\alpha(۱+\cos\alpha)}{۱+\sin\alpha}$$

چون α در نقاط مرزی نیست، پس

$$\tan^۲\alpha > ۰, \quad ۱+\cos\alpha > ۰, \quad ۱+\sin\alpha > ۰$$

بنابراین T همواره مثبت است.

۸۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPQ،

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{۱}{OA+AQ} = \frac{۱}{۱+AQ}$$

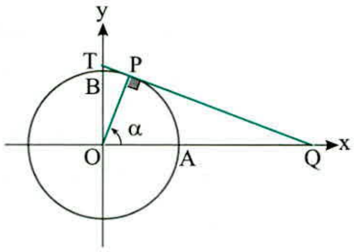
$$۱+AQ = \frac{۱}{\cos\alpha} \Rightarrow AQ = \frac{۱}{\cos\alpha} - ۱$$

چون $P(\frac{\sqrt{۲}}{۴}, \frac{\sqrt{۱۴}}{۴})$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α است، پس

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

بنابراین

$$AQ = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۴}} - ۱ = \frac{۴}{\sqrt{۲}} - ۱ = ۲\sqrt{۲} - ۱$$

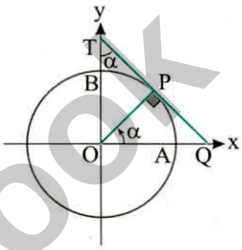


۸۷- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPQ و OTQ در زاویه‌ی حاده‌ی رأس Q مشترک‌اند، پس زاویه‌ی حاده‌ی دیگر آن‌ها نیز برابر است. یعنی، $O\hat{T}Q=P\hat{O}Q=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPT ،

$$\sin\alpha=\frac{OP}{OT}=\frac{۱}{OB+BT}=\frac{۱}{۱+BT}$$

$$۱+BT=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

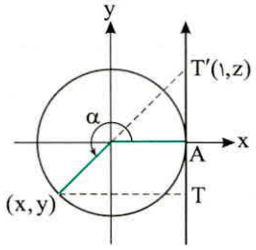
$$BT=\frac{۱}{\sin\alpha}-۱$$



۸۸- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل زیر واضح است که $\sin\alpha=y$ و $\tan\alpha=z$.

بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با

$$TT'=AT+AT'=-y+z=-\sin\alpha+\tan\alpha$$



۸۹- گزینه‌ی ۲ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۸۰° و ۱۹۰° به ترتیب در ناحیه‌های اول و سوم قرار دارد، پس $\tan ۸۰^\circ$ و $\tan ۱۹۰^\circ$ اعداد مثبتی هستند.

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۱۴۰° و ۱۷۰° در ناحیه‌ی دوم قرار دارد. پس $\tan ۱۴۰^\circ$ و $\tan ۱۷۰^\circ$ اعدادی منفی هستند. چون در تمام نواحی مثلثاتی با بزرگ‌تر شدن زاویه مقدار تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود، $\tan ۱۴۰^\circ$ نسبت به $\tan ۱۷۰^\circ$ عددی کوچک‌تر است.

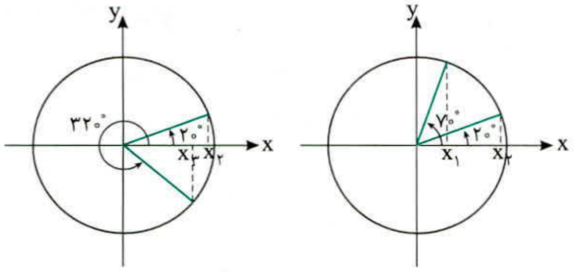
۹۰- گزینه‌ی ۴ در ربع دوم وقتی زاویه افزایش می‌یابد کسینوس آن کاهش می‌یابد و بالعکس. بنابراین از $\cos\beta<\cos\alpha$ نتیجه می‌شود $\beta>\alpha$.

۹۱- گزینه‌ی ۳ چون $\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$ و α، β و γ حاده هستند، پس $\alpha<\beta<\gamma$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است. همچنین گزینه‌های (۱) و (۲) نیز نادرست‌اند، زیرا $\cot\gamma=\frac{۴}{۳}<\cot\alpha=۲$ و $\cos\alpha>\cos\beta$.

۹۲- گزینه‌ی ۱ $\cos ۱۲۰^\circ$ عددی منفی است، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۱۲۰° در ربع دوم قرار دارد. با توجه به شکل‌های زیر، $\cos ۲۰^\circ$ عددی بزرگ‌تر است.

$$\cos ۲۰^\circ=x_۲,\quad \cos ۷۰^\circ=x_۱,\quad \cos ۳۲۰^\circ=x_۳$$

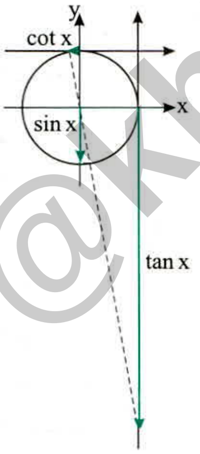
$$x_۲>x_۱\,,\quad x_۲>x_۳$$



۹۳- گزینه‌ی ۲ انتهای کمان‌های متناظر زاویه‌های x و y در ربع دوم است و در این ناحیه سینوس مثبت و سایر نسبت‌های مثلثاتی منفی هستند بنابراین $\sin x>\cos y$.

همچنین با توجه به منفی بودن تانژانت و کتانژانت $\tan x\cot y>۰$ و چون $x<y$، پس $\cos x>\cos y$.

۹۴- گزینه‌ی ۲ انتهای کمان زاویه‌ی ۲۸۰° در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد. در این ناحیه $\cos x$ مثبت و بقیه‌ی نسبت‌ها منفی هستند. پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.
با توجه به شکل زیر $\tan x<\cot x$ و گزینه‌ی (۴) نیز نادرست است. واضح است که $\tan x<\sin x$ درست است.



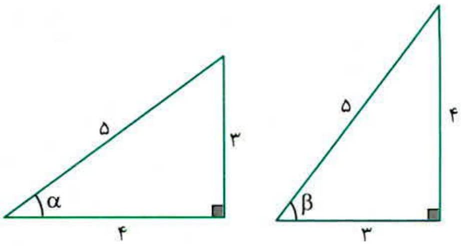
۹۵- گزینه‌ی ۳ چون α و β حاده هستند و $\alpha<\beta$، پس

$$\cos\alpha>\cos\beta$$

در نتیجه $\cos\beta=\frac{۳}{۵}$ و $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$. بنابراین با توجه به شکل نتیجه می‌شود

$$\tan\beta=\frac{۴}{۳},\quad \tan\alpha=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $\tan\beta-\tan\alpha=\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۱۲}$.



۹۶- گزینه‌ی ۱ از نابرابری $۰^\circ < x \le y < ۹۰^\circ$ نتیجه می‌شود $۱ > \cos x \ge \cos y > ۰$. بنابراین $\frac{\cos x}{\cos y} \ge ۱$ و با توجه به تساوی $\frac{x}{y} = \frac{\cos x}{\cos y}$ نتیجه می‌شود $\frac{x}{y} \ge ۱$ و در نتیجه $x \ge y$. بنابراین $x = y$ و در نتیجه $\frac{\tan x}{\tan y} = ۱$.

۹۷- گزینه‌ی ۲ در ربع دایره‌ی زیر $T\hat{O}A = ۴۰^\circ$ و $T'\hat{O}A = ۳۵^\circ$. در نتیجه

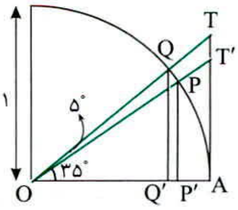
$$\sin ۳۵^\circ = \frac{PP'}{OP} = \frac{PP'}{۱} = PP'$$

$$\tan ۴۰^\circ = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{۱} = AT$$

با توجه به شکل معلوم می‌شود $AT > PP'$.

در نتیجه $\underbrace{\tan ۴۰^\circ}_{a} > \underbrace{\sin ۳۵^\circ}_{b}$.

دقت کنید که $a = \tan ۴۰^\circ < \tan ۴۵^\circ = ۱$ بنابراین گزینه‌ی (۴) نیز نادرست است.

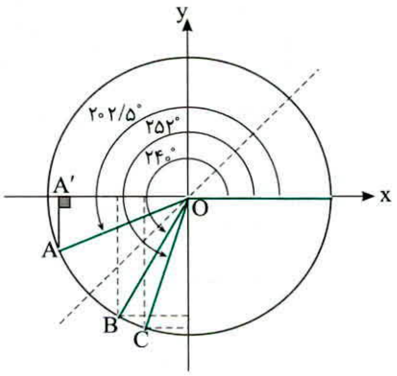


۹۸- گزینه‌ی ۳ چون $\sin x$ و $\cos x$ منفی هستند، انتهای کمان x در ربع سوم است. بنابراین باید گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) را بررسی کنیم. در شکل زیر زاویه‌های $۲۰۲/۵^\circ$، ۲۴۰° و ۲۵۲° رسم شده‌اند. از روی شکل معلوم می‌شود که

$$۰ > \sin ۲۰۲/۵^\circ = -A'A > -OA' = \cos ۲۰۲/۵^\circ$$

همچنین،

$$\sin ۲۴۰^\circ < \cos ۲۴۰^\circ < ۰, \quad \sin ۲۵۲^\circ < \cos ۲۵۲^\circ < ۰$$



۹۹- گزینه‌ی ۴ چون $۵۰^\circ > ۴۵^\circ$، پس

$$\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۵^\circ = ۱$$

درنتیجه $\frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ} > ۱$، یعنی $\sin ۵۰^\circ > \cos ۵۰^\circ$. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست نیست.

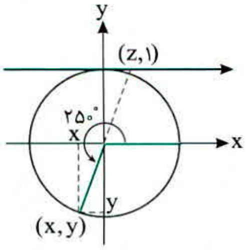
چون $\cot ۱۰۰^\circ < ۰$ و $\sin ۱۰۰^\circ > ۰$، پس گزینه‌ی (۲) درست نیست.

چون $\cos ۲۰۰^\circ < \sin ۲۰۰^\circ$، پس گزینه‌ی (۳) درست نیست.

گزینه‌ی (۴) درست است. به شکل زیر توجه کنید:

$$z > x > y$$

$$\cot \alpha > \cos \alpha > \sin \alpha$$



۱۰۰- گزینه‌ی ۳ چون $-۱ \le \cos x \le ۱$، پس $-۱ \le \frac{۲a+۱}{۵} \le ۱$، در نتیجه

$$-۵ \le ۲a+۱ \le ۵$$

$$-۶ \le ۲a \le ۴$$

$$-۳ \le a \le ۲$$

۱۰۱- گزینه‌ی ۱ چون $۹۰^\circ \le \alpha \le ۱۸۰^\circ$، پس $۰ \le \sin \alpha \le ۱$ و در نتیجه $۰ \le \frac{m}{۲} - ۱ \le ۱$. بنابراین

$$۱ \le \frac{m}{۲} \le ۲ \Rightarrow ۲ \le m \le ۴$$

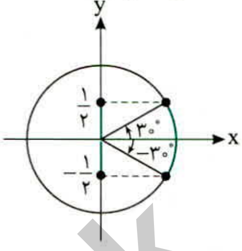
۱۰۲- گزینه‌ی ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع سوم است، پس $-۱ < \cos \alpha < ۰$. در نتیجه $-۱ < ۲m+۱ < ۰$، پس

$$-۲ < ۲m < -۱ \Rightarrow -۱ < m < -\frac{۱}{۲}$$

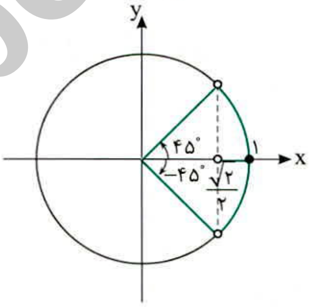
۱۰۳- گزینه‌ی ۳ از $۱۸۰^\circ \le \alpha < ۲۷۰^\circ$ نتیجه می‌شود $\tan \alpha \ge ۰$ و در نتیجه $m^۳ + m^۲ \ge ۰$ یعنی $m^۲(m+۱) \ge ۰$.

چون $m^۲ \ge ۰$ همواره درست است، پس کافی است که $m+۱ \ge ۰$ در نتیجه $m \ge -۱$.

۱۰۴- گزینه‌ی ۴ از $-۶۰^\circ \leq \alpha \leq ۶۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-۳۰^\circ \leq \frac{\alpha}{۲} \leq ۳۰^\circ$. با توجه به شکل زیر $-\frac{۱}{۲} \leq \sin(\frac{\alpha}{۲}) \leq \frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $-\frac{۱}{۲} \leq \frac{m}{۴} \leq \frac{۱}{۲}$، یعنی $-۲ \leq m \leq ۲$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۲±، ۱± و صفر باشد.

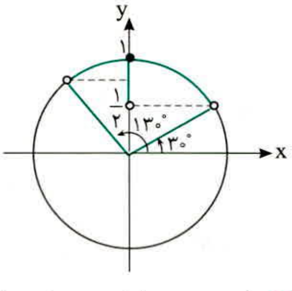


۱۰۵- گزینه‌ی ۳ وقتی $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$، مطابق شکل زیر، $\frac{\sqrt{۲}}{۲} < \cos\alpha \leq ۱$ و در نتیجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{m}{۴} \leq ۱$، یعنی $۲\sqrt{۲} < m \leq ۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.

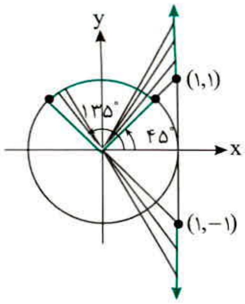


۱۰۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل زیر واضح است که وقتی $۳۰^\circ < \alpha < ۱۳۰^\circ$ مقدار $\sin\alpha$ در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲}, ۱]$ قرار دارد.

$$(\sin ۹۰^\circ = ۱, \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲})$$



۱۰۷- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل زیر، وقتی $۴۵^\circ \leq \alpha \leq ۱۳۵^\circ$، $\tan\alpha \geq ۱$ یا $\tan\alpha \leq -۱$. یعنی مقدار $\tan\alpha$ در $\mathbb{R} - (-۱, ۱)$ قرار دارد.



۱۰۸- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $-۱ \leq \sin x \leq ۱$، بنابراین

$$-۲ \leq ۲\sin x \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq ۳ + ۲\sin x \leq ۵$$

یعنی بیش‌ترین مقدار عبارت ۵ و کم‌ترین مقدار آن ۱ است که اختلاف آن‌ها ۴ واحد است.

۱۰۹- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $-۱ \leq \cos x \leq ۱$. بنابراین

$$-۳ \leq -۳\cos x \leq ۳ \Rightarrow -۱ \leq ۲ - ۳\cos x \leq ۵$$

بنابراین $-۱ \leq A \leq ۵$، پس کم‌ترین مقدار A برابر ۱− و بیش‌ترین مقدار آن ۵ است که مجموع آن‌ها ۴ است.

۱۱۰- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \Rightarrow -۵ \leq -۵\sin x \leq ۵$$

$$-۱ \leq \cos y \leq ۱ \Rightarrow -۱۲ \leq ۱۲\cos y \leq ۱۲$$

بنابراین

$$-۱۷ \leq -۵\sin x + ۱۲\cos y \leq ۱۷$$

در نتیجه بیش‌ترین مقدار عبارت مورد نظر ۱۷ است.

۱۱۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \Rightarrow ۴ \leq \sin x + ۵ \leq ۶$$

$$-۱ \leq -\cos y \leq ۱ \Rightarrow ۲ \leq ۳ - \cos y \leq ۴$$

بنابراین

$$۸ \leq (\sin x + ۵)(۳ - \cos y) \leq ۲۴$$

پس عبارت مورد نظر هیچ‌گاه برابر با ۷ نیست.

۱۱۲- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $-۱ \leq \sin x \leq ۱$، بنابراین $۰ \leq \sin^۲ x \leq ۱$، پس $۰ \leq ۳\sin^۲ x \leq ۳$ و در نتیجه $۲ \leq ۲ + ۳\sin^۲ x \leq ۵$.

بنابراین کم‌ترین مقدار عبارت ۲ و بیش‌ترین مقدار آن ۵ است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۱۱۳- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم $-۱ \leq \cos x \leq ۱$، بنابراین

$$-۱ \leq \cos^۳ x \leq ۱ \Rightarrow -۳ \leq -۳\cos^۳ x \leq ۳ \Rightarrow ۱ \leq ۴ - ۳\cos^۳ x \leq ۷$$

پس $M = ۷$ و $m = ۱$. بنابراین می‌خواهیم کم‌ترین مقدار عبارت $B = \sin^۳ x - ۷$ را به‌دست آوریم:

$$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq \sin^۳ x \leq ۱ \Rightarrow -۸ \leq \sin^۳ x - ۷ \leq -۶$$

بنابراین کم‌ترین مقدار B برابر ۸− است.

۱۱۴- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $-۱ \leq \sin\alpha \leq ۱$، بنابراین

$$۰ \leq ۱ + \sin\alpha \leq ۲ \Rightarrow |۱ + \sin\alpha| = ۱ + \sin\alpha$$

$$-۱ \leq -\sin\alpha \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۱ - \sin\alpha \leq ۲ \Rightarrow |۱ - \sin\alpha| = ۱ - \sin\alpha$$

به همین ترتیب از $-۱ \leq \cos\alpha \leq ۱$ نتیجه می‌شود

$$|۱ + \cos\alpha| = ۱ + \cos\alpha, \quad |۱ - \cos\alpha| = ۱ - \cos\alpha$$

بنابراین عبارت A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A = \frac{۱ + \cos\alpha - (۱ - \cos\alpha)}{۱ + \sin\alpha + (۱ - \sin\alpha)} = \frac{۲\cos\alpha}{۲} = \cos\alpha$$

۱۱۵- گزینه‌ی ① می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ برابر یک است. بنابراین از تساوی $۳\sin\alpha+۴\cos\beta=۷$ نتیجه می‌شود $\sin\alpha=۱$ و $\cos\beta=۱$. بنابراین

$$۳\sin\alpha-۴\cos\beta=۳-۴=-۱$$

۱۱۶- گزینه‌ی ③ توجه کنید که

$$۰\le ۱-\cos y\le ۲,\qquad ۰\le ۱-\sin x\le ۲$$

$$۰\le(۱-\cos y)^۲\le ۴,\qquad ۰\le(۱-\sin x)^۲\le ۴$$

با توجه به رابطه‌ی $(۱-\sin x)^۲+(۱-\cos y)^۲=۸$ نتیجه می‌شود

$$(۱-\cos y)^۲=(۱-\sin x)^۲=۴$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$۴-۴=۰$$

۱۱۷- گزینه‌ی ③ از $۱۸۰^\circ\le\alpha\le۳۶۰^\circ$ نتیجه می‌شود $-۱\le\sin\alpha\le۰$. بنابراین

$$-۲\le۲\sin\alpha\le۰\Rightarrow-۳\le۲\sin\alpha-۱\le-۱$$

$$\Rightarrow-۱\le\frac{۱}{۲\sin\alpha-۱}\le-\frac{۱}{۳}$$

پس حداکثر مقدار عبارت برابر $-\frac{۱}{۳}$ است.

۱۱۸- گزینه‌ی ② **راه‌حل اول** عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{۳\cos\alpha}{۳\cos\alpha-۱}=\frac{۳\cos\alpha-۱}{۳\cos\alpha-۱}+\frac{۱}{۳\cos\alpha-۱}=۱+\frac{۱}{۳\cos\alpha-۱}$$

چون $-۱\le\cos\alpha\le۱$، پس

$$-۳\le۳\cos\alpha\le۳\Rightarrow-۴\le۳\cos\alpha-۱\le۲$$

اگر $۰<۳\cos\alpha-۱\le۲$، آن‌گاه $\frac{۱}{۳\cos\alpha-۱}\ge\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $A\ge\frac{۳}{۲}$.

اگر $-۴\le۳\cos\alpha-۱<۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{۳\cos\alpha-۱}\le-\frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $A\le\frac{۳}{۴}$.

پس مقدار عبارت $A=\frac{۳\cos\alpha}{۳\cos\alpha-۱}$ در بازه‌ی $(\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۲})$ قرار ندارد.

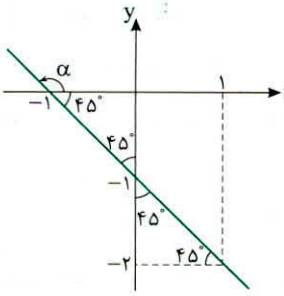
راه‌حل دوم اگر قرار دهیم $A=\frac{۵}{۴}$، آن‌گاه

$$\frac{۳\cos\alpha}{۳\cos\alpha-۱}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow۱۲\cos\alpha=۱۵\cos\alpha-۵$$

$$\Rightarrow۳\cos\alpha=۵\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۵}{۳}$$

با توجه به این که $\cos\alpha$ نمی‌تواند $\frac{۵}{۳}$ باشد، پس A نمی‌تواند $\frac{۵}{۴}$ باشد.

۱۱۹- گزینه‌ی ④ با توجه به شکل زیر واضح است که $\alpha=۱۳۵^\circ$.



۱۲۰- گزینه‌ی ② زاویه‌ای که خط d' با محور x رو به جهت مثبت می‌سازد برابر ۳۰° است، پس

$$\text{شیب خط } d'=\tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

از طرفی خط d با خط d' موازی است، پس شیب خط d نیز برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. با توجه به این که خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد معادله‌ی آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ است.

۱۲۱- گزینه‌ی ④ ابتدا معادله‌ی خط را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{۲-۳m}{m}x+\frac{۳}{m}$$

از فرض مسأله نتیجه می‌شود تانژانت زاویه‌ای که این خط با محور x می‌سازد برابر است با $\tan۴۵^\circ=۱$. در نتیجه شیب این خط برابر ۱ است. بنابراین

$$\frac{۲-۳m}{m}=۱\Rightarrow۴m=۲\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۲- گزینه‌ی ① با توجه به زاویه‌ی خط با محور طول‌ها که ۳۰° است، شیب خط برابر $\tan۳۰^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. پس معادله‌ی آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$ است و چون خط از نقطه‌ی $(۶,\sqrt{۳})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی خط صدق می‌کند:

$$\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times۶+b\Rightarrow b=-\sqrt{۳}$$

پس معادله‌ی خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\sqrt{۳}$ یا همان $x-\sqrt{۳}y-۳=۰$ است.

۱۲۳- گزینه‌ی ۳ چون خط از نقطه‌ی $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی خط صدق می‌کند:

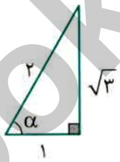
$$۳\times ۰-a\times ۲+۲\sqrt{۳}=۰\Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

بنابراین معادله‌ی خط به‌صورت $۳x-\sqrt{۳}y+۲\sqrt{۳}=۰$ یا همان $y=\sqrt{۳}x+۲$ است که شیب آن $\sqrt{۳}$ است. پس

$$\tan\alpha=\sqrt{۳}$$

با توجه به شکل زیر واضح است که

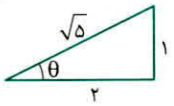
$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



۱۲۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا شیب خط را حساب می‌کنیم:

$$\text{شیب خط}=\frac{۴-۲}{۳-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

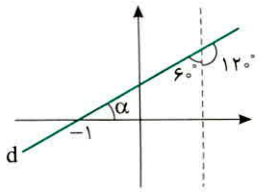
در نتیجه $\tan\theta=\frac{۱}{۲}$. همچنین θ زاویه‌ای حاده است. از این رو می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر را تشکیل داد؛ بنابراین طول وتر برابر $\sqrt{۵}$ است. در نتیجه $\cos\theta=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$.



۱۲۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل زیر واضح است که $\alpha=۳۰^\circ$ و شیب خط برابر $\tan ۳۰^\circ$ یا $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. پس معادله‌ی خط به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$ است و از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ عبور می‌کند. پس

$$۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(-۱)+b\Rightarrow b=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس معادله‌ی خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است و از نقطه‌ی $(-۲,-\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ عبور می‌کند.

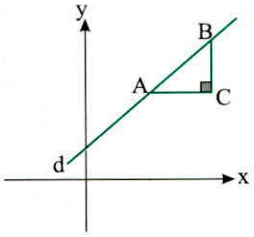


۱۲۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا زاویه‌ی A از مثلث ABC را در نظر بگیرید. می‌دانیم شیب خط d برابر با تانژانت زاویه‌ی A است. در نتیجه می‌توان نوشت $\tan\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. همچنین در مثلث ABC، مقدار $\tan\hat{A}$ برابر $\frac{BC}{AC}$ است. پس

$$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

اکنون دو طرف تساوی اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم تا به رابطه‌ی $\frac{AC^۲}{BC^۲}=\frac{۴}{۳}$ برسیم. حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان نوشت $AC^۲=AB^۲-BC^۲$. بنابراین

$$\frac{AB^۲-BC^۲}{BC^۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{AB^۲}{BC^۲}-۱=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{AB^۲}{BC^۲}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\sqrt{\frac{۷}{۳}}$$



۱۲۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha=۶۰^\circ$ و در نتیجه

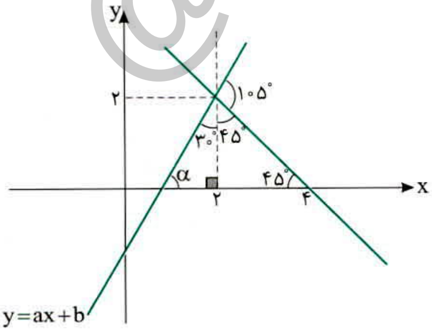
$$a=\tan\alpha=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

یعنی معادله‌ی خط $y=\sqrt{۳}x+b$ است و چون نقطه‌ی $(۲,۲)$ روی خط قرار دارد، پس

$$۲=\sqrt{۳}\times ۲+b\Rightarrow b=۲-۲\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$a+b=\sqrt{۳}+۲-۲\sqrt{۳}=۲-\sqrt{۳}$$



۱۲۸- گزینه‌ی ۲ با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۳\Rightarrow\tan^۲\alpha=۲\Rightarrow\tan\alpha=\pm\sqrt{۲}$$

چـون انتهای کمان روبه‌رو به زاویـه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم است، پس $\tan\alpha<۰$، بنابراین

$$\tan\alpha=-\sqrt{۲}$$

بنابراین $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=-\sqrt{۲}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲۹- گزینه‌ی ۴ بـه کمـک اتحـاد $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ مقدار $\sin x$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ناحیه‌ی سوم است، پس $\sin x<۰$. بنابراین

$$\sin x=\frac{-۲}{\sqrt{۵}}$$

حـالا با اسـتفاده از اتحاد $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ مقـدار $\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{\cos x}{-\frac{۲}{\sqrt{۵}}}\Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین

$$\sin x-۲\cos x=-\frac{۲}{\sqrt{۵}}-۲(-\frac{۱}{\sqrt{۵}})=۰$$

۱۳۰- گزینه‌ی ۱ دقـت کنیـد $\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$، در نتیجـه از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$\tan^۲\theta+\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۳}{۴}$$

در نتیجه

$$\cos^۲\theta=\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}=\frac{۱}{۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{۲}{\sqrt{۷}}$$

چـون انتهـای کمـان θ در ربع دوم اسـت، پس $\cos\theta<۰$. بنابراین

$$\cos\theta=\frac{-۲}{\sqrt{۷}}\Rightarrow ۲+\frac{\sqrt{۷}}{\cos\theta}=۲-\frac{۷}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۱۳۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا با استفاده از اتحاد $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ مقدار $\sin\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^۲\alpha=۱-(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۵}{۹}\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

چـون انتهای کمان روبه‌رو به زاویـه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم است و $\sin\alpha$ در این ناحیه منفی است، پس

$$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

از طـرف دیگر، از اتحـاد $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابرایـن $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۲}{\sqrt{۵}}$. حالا مقـدار عبارت داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha-\cot\alpha}{\tan\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}+\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}=-\frac{۲}{۱۵}$$

۱۳۲- گزینه‌ی ۳ با استفاده از اتحاد $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲m}(m+۲)=۱\Rightarrow m+۲=۲m\Rightarrow m=۲$$

بنابراین $\cot\alpha=۴$ و بـه کمک اتحاد $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ مقدار $\sin^۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۴^۲=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow \sin^۲\alpha=\frac{۱}{۱۷}$$

۱۳۳- گزینه‌ی ۱ از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ نتیجه می‌شود

$$۱+(\sqrt{\frac{m-۲}{۲m-۵}})^۲=\frac{۱}{(\sqrt{\frac{m-۲}{۳m-۷}})^۲}$$

$$۱+\frac{m-۲}{۲m-۵}=\frac{۳m-۷}{m-۲}$$

$$\frac{۲m-۵+m-۲}{۲m-۵}=\frac{۳m-۷}{m-۲}$$

$$\frac{۳m-۷}{۲m-۵}=\frac{۳m-۷}{m-۲}\Rightarrow ۲m-۵=m-۲\Rightarrow m=۳$$

(توجه کنید که $۳m-۷$ نمی‌تواند صفر باشد.)

بنابراین $\tan x=\sqrt{\frac{۳-۲}{۲\times۳-۵}}=۱$ و در نتیجه $\cot x=۱$.

۱۳۴- گزینه‌ی ۳ با توجه به اتحاد $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$،

$$۱+(\frac{\sqrt{۳}(m-۱)}{m})^۲=\frac{۱}{m^۲}$$

$$۱+\frac{۳(m-۱)^۲}{m^۲}=\frac{۱}{m^۲}$$

$$m^۲+۳(m-۱)^۲=۱$$

$$۴m^۲-۶m+۲=۰$$

$$۲m^۲-۳m+۱=۰$$

بنابراین $۲m^۲-۳m=-۱$.

۱۳۵- گزینه‌ی ۲ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(\frac{۱}{\sin\alpha}+\cot\alpha)(\frac{۱}{\sin\alpha}-\cot\alpha)=mn$$

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha}-\cot^۲\alpha=mn$$

با توجه به اتحاد $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$، تساوی فوق به شکل زیر ساده می‌شود:

$$۱+\cot^۲\alpha-\cot^۲\alpha=mn\Rightarrow mn=۱$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۱ تساوی $\sin^۴ x-\cos^۴ x=n$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=n$$

و چون $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ پس

$$\sin^۲ x-\cos^۲ x=n$$

بنابراین $m=n$ و در نتیجه $m-n=۰$.

۱۳۷- گزینه‌ی ۳ در صورت کسر از $\sin ۱۵^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos ۱۵^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin ۱۵^\circ(۱-\sin^۲ ۱۵^\circ)}{\cos ۱۵^\circ(۱-\cos^۲ ۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ\times\cos^۲ ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ\times\sin^۲ ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ}=\cot ۱۵^\circ$$

۱۳۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱-\cos ۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱+\cos ۱۰^\circ+۱-\cos ۱۰^\circ}{(۱-\cos ۱۰^\circ)(۱+\cos ۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲}{۱-\cos^۲ ۱۰^\circ}=\frac{۲}{\sin^۲ ۱۰^\circ}$$

بنابراین ساده شده‌ی A به شکل زیر است:

$$A=\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ\times\frac{۲}{\sin^۲ ۱۰^\circ}=\frac{۲\cos ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ}=۲\cot ۱۰^\circ$$

۱۳۹- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$، بنابراین

$$A^۲+B^۲+C^۲=\sin^۲\alpha\cos^۲\beta+\sin^۲\alpha\sin^۲\beta+\cos^۲\alpha$$

$$=\sin^۲\alpha\underbrace{(\cos^۲\beta+\sin^۲\beta)}_{۱}+\cos^۲\alpha$$

$$=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۳ اگر در صورت و مخرج به جای $\cos^۲ x$ قرار دهیم $۱-\sin^۲ x$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۷+۵\sin^۲ x-\cos^۲ x}{۳\sin^۲ x+۲\cos^۲ x-۱}=\frac{۷+۵\sin^۲ x-(۱-\sin^۲ x)}{۳\sin^۲ x+۲(۱-\sin^۲ x)-۱}$$

$$=\frac{۶+۶\sin^۲ x}{\sin^۲ x+۱}=\frac{۶(۱+\sin^۲ x)}{۱+\sin^۲ x}=۶$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا کسر $\frac{\sin^۳\theta}{۱+\cos\theta}$ را ساده‌تر می‌کنیم.

برای این کار، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin^۳\theta}{۱+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(\sin^۲\theta)}{۱+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(۱-\cos^۲\theta)}{۱+\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(۱-\cos\theta)(۱+\cos\theta)}{۱+\cos\theta}=\sin\theta(۱-\cos\theta)$$

و در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\sin\theta$ است.

۱۴۲- گزینه‌ی ۱ کسر $\frac{۱+\cos\alpha}{\sin^۳\alpha}$ را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha(\sin^۲\alpha)}=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}$$

$$=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱-\cos\alpha)(۱+\cos\alpha)}=\frac{۱}{\sin\alpha(۱-\cos\alpha)}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر صفر است.

۱۴۳- گزینه‌ی ۴ چون $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos x}-\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x}+\cos x$$

$$=\frac{۱-\cos^۲ x}{۱+\cos x}-\frac{۱-\sin^۲ x}{۱+\sin x}+\cos x$$

$$=\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱+\cos x}-\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱+\sin x}+\cos x$$

$$=۱-\cos x-(۱-\sin x)+\cos x=\sin x$$

۱۴۴- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$۲\sin^۲ x+\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=۲\sin^۲ x+\frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{۱+\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}$$

$$=۲\sin^۲ x+\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x+\sin^۲ x}$$

$$=۲\sin^۲ x+\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

$$=\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$$

۱۴۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos^۴ x-\sin^۴ x=(\cos^۲ x-\sin^۲ x)(\cos^۲ x+\sin^۲ x)$$

$$=\cos^۲ x-\sin^۲ x$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\cos^۴ x-\sin^۴ x+۲\cos^۲ x-\sin^۲ x+۲$$

$$=\cos^۲ x-\sin^۲ x+۲\cos^۲ x-\sin^۲ x+۲$$

$$=۳\cos^۲ x-۲\sin^۲ x+۲=۳\cos^۲ x+۲(۱-\sin^۲ x)$$

$$=۳\cos^۲ x+۲\cos^۲ x=۵\cos^۲ x$$

۱۴۶- گزینه‌ی ۳ عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$A=\sin^۲ x+\sin^۴ x+\cos^۲ x+\cos^۴ x$$

$$=\sin^۲ x+\cos^۲ x+\sin^۴ x+\cos^۴ x$$

$$=۱+(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$=۱+۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

۱۴۷- گزینه‌ی ۲ در صورت کسر از $\cot^۲\alpha$ و در مخرج کسر از $\tan^۲\alpha$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\cot^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\tan^۲\alpha-\sin^۲\alpha}=\frac{\cot^۲\alpha(۱-\sin^۲\alpha)}{\tan^۲\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}$$

$$=\frac{\cot^۲\alpha(\cos^۲\alpha)}{\frac{۱}{\cot^۲\alpha}(\sin^۲\alpha)}=\cot^۴\alpha(\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha})$$

$$=\cot^۴\alpha\cot^۲\alpha=\cot^۶\alpha$$

۱۴۸- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$(\frac{۱}{\cos x}+\tan x)(۱-\sin x)=(\frac{۱}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x})(۱-\sin x)$$

$$=\frac{۱}{\cos x}(۱+\sin x)(۱-\sin x)$$

$$=\frac{۱}{\cos x}(۱-\sin^۲ x)$$

$$=\frac{۱}{\cos x}(\cos^۲ x)=\cos x$$

۱۴۹- گزینه‌ی ۳ دقت کنید که مخرج کسر برابر است با

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x+۳=۱-۲\sin x\cos x+۳$$

$$=۴-۲\sin x\cos x=۲(۲-\sin x\cos x)$$

بنابراین کسر مورد نظر به‌صورت

$$\frac{(۲-\sin x\cos x)(۲+\sin x\cos x)}{۲(۲-\sin x\cos x)}=\frac{۲+\sin x\cos x}{۲}$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}\sin x\cos x$$

در می‌آید. در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۱۵۰- گزینه‌ی ۲ با استفاده از اتحاد $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=۱-\frac{\cos\alpha\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{۱-\sin\alpha}=۱-\frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha(۱-\sin\alpha)}$$

حالا از اتحاد $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$ نتیجه می‌شود

$$A=۱-\frac{۱-\sin^۲\alpha}{\sin\alpha(۱-\sin\alpha)}=۱-\frac{(۱-\sin\alpha)(۱+\sin\alpha)}{\sin\alpha(۱-\sin\alpha)}$$

$$=۱-\frac{۱+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha-۱-\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=-\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۱۵۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin x}{۱-\tan x}+\frac{\cos x}{۱-\cot x}=\frac{\sin x}{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}+\frac{\cos x}{۱-\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$=\frac{\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos x\sin x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}-\frac{\cos x\sin x}{\cos x-\sin x}=۰$$

۱۵۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا با مخرج مشترک‌گیری، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)+(\cos a-\cos b)(\cos a+\cos b)}{(\cos a-\cos b)(\sin a-\sin b)}$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج می‌توان فهمید صورت کسر بالا برابر است با

$$\sin^۲ a-\sin^۲ b+\cos^۲ a-\cos^۲ b$$

$$=\sin^۲ a+\cos^۲ a-(\sin^۲ b+\cos^۲ b)$$

$$=۱-۱=۰$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر صفر است.

۱۵۳- گزینه‌ی ۱ دقت کنید که صورت کسر به شکل

$$(۱-\cos x)(\frac{۱+\cos x}{\cos x})=\frac{۱-\cos^{۲} x}{\cos x}=\frac{\sin^{۲} x}{\cos x}$$

و مخرج کسر به‌صورت

$$\frac{۱-\sin^{۲} x}{\cos x}=\frac{\cos^{۲} x}{\cos x}=\cos x$$

درمی‌آیند. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\frac{\sin^{۲} x}{\cos x}}{\cos x}=\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}=\tan^{۲} x$$

۱۵۴- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^{۲}\alpha-\cos\alpha(۱-\cos\alpha)}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^{۲}\alpha-\cos\alpha+\cos^{۲}\alpha}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$=\frac{۱-\cos\alpha}{(۱-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۱۵۵- گزینه‌ی ۳ صورت و مخرج کسر $\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}$ را در $۱+\cos\alpha$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}\times\frac{۱+\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}{(۱-\cos\alpha)(۱+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}{۱-\cos^{۲}\alpha}=\frac{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

۱۵۶- گزینه‌ی ۲ اگر واسطه‌ی هندسی میان این دو عدد را با x نشان دهیم، آن‌گاه

$$x^{۲}=\sqrt{۱-\sin\alpha}\sqrt{۱+\sin\alpha}=\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}=\cos\alpha$$

بنابراین $x=\pm\sqrt{\cos\alpha}$.

۱۵۷- گزینه‌ی ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۱-۲\sin^{۲} x=\sin^{۲} x+\cos^{۲} x-۲\sin^{۲} x=\cos^{۲} x-\sin^{۲} x$$

$$\cos^{۲} x(۱-\tan^{۲} x)=\cos^{۲} x(۱-\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x})=\cos^{۲} x-\sin^{۲} x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت، برابر است با

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+۱=\frac{۲\sin x}{\sin x-\cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر است با $\frac{۲\tan x}{\tan x-۱}$.

۱۵۸- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+۱}{\sin\alpha+\cos\alpha-۱}-\frac{۱}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha+۱)-(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\cos^{۲}\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha+۱}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+۱-\cos^{۲}\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+\sin^{۲}\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}$$

$$=\frac{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)}=\tan\alpha$$

راه‌حل دوم عبارت داده شده به ازای $\alpha=۹۰^\circ$ تعریف نشده است، زیرا مخرج کسر $\frac{۱}{\cos ۹۰^\circ}$ برابر صفر می‌شود. در گزینه‌ها فقط $\tan\alpha$ به ازای $\alpha=۹۰^\circ$ تعریف نشده است.

۱۵۹- گزینه‌ی ۳ فرض کنید

$$B=\sqrt{۱+\cos ۲۴^\circ}+\sqrt{۱-\cos ۲۴^\circ}$$

در نتیجه

$$B^{۲}=۱+\cos ۲۴^\circ+۱-\cos ۲۴^\circ+۲\sqrt{(۱-\cos ۲۴^\circ)(۱+\cos ۲۴^\circ)}$$

$$=۲+۲\sqrt{۱-\cos^{۲} ۲۴^\circ}=۲+۲\sqrt{\sin^{۲} ۲۴^\circ}=۲+۲\sin ۲۴^\circ$$

چون $B>۰$، پس

$$B=\sqrt{۲(۱+\sin ۲۴^\circ)}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{۲}$ است.

۱۶۰- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $\tan\alpha\cot\alpha=۱$. بنابراین

$$A=\frac{۱-\tan ۴۰^\circ+\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ\cot ۴۰^\circ}{۱+\tan ۴۰^\circ-\cot ۴۰^\circ-\tan ۴۰^\circ\cot ۴۰^\circ}$$

$$=\frac{۱-\tan ۴۰^\circ+\cot ۴۰^\circ-۱}{۱+\tan ۴۰^\circ-\cot ۴۰^\circ-۱}=\frac{-(\tan ۴۰^\circ-\cot ۴۰^\circ)}{\tan ۴۰^\circ-\cot ۴۰^\circ}=-۱$$

۱۶۱- گزینه‌ی ۲ ساده شده‌ی صورت کسر به شکل زیر است:

$$(\sin x+\cos x)^{۲}+(\sin x-\cos x)^{۲}$$

$$=\sin^{۲} x+\cos^{۲} x+۲\sin x\cos x$$

$$+\sin^{۲} x+\cos^{۲} x-۲\sin x\cos x$$

$$=۱+۱+۲\sin x\cos x-۲\sin x\cos x=۲$$

ساده شده‌ی مخرج کسر به شکل زیر است:

$$(\tan x+\cot x)^{۲}-(\tan x-\cot x)^{۲}$$
$$=\tan^{۲}x+\cot^{۲}x+۲\tan x\cot x$$
$$-(\tan^{۲}x+\cot^{۲}x-۲\tan x\cot x)$$
$$=\tan^{۲}x+\cot^{۲}x+۲-\tan^{۲}x-\cot^{۲}x+۲=۴$$

بنابراین ساده شده‌ی کسر برابر است با $\frac{۲}{۴}$ یا $\frac{۱}{۲}$.

۱۶۲- گزینه‌ی ۲ عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\cot^{۲}x+\underbrace{\cot^{۲}x\tan^{۲}x}_{۱}+\tan^{۲}x+\underbrace{\tan^{۲}x\cot^{۲}x}_{۱}$$
$$=\tan^{۲}x+\cot^{۲}x+۲=(\tan x+\cot x)^{۲}$$

بنابراین

$$\sqrt{A}=\sqrt{(\tan x+\cot x)^{۲}}=|\tan x+\cot x|$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، پس $\tan x<۰$ و $\cot x<۰$. در نتیجه $\tan x+\cot x<۰$

بنابراین

$$\sqrt{A}=-\tan x-\cot x$$

۱۶۳- گزینه‌ی ۲ چون $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ و $۱+\cot^{۲}x=\frac{۱}{\sin^{۲}x}$، پس عبارت داخل پرانتز برابر است با

$$۴\cos^{۲}x+۳\sin^{۲}x=\cos^{۲}x+۳(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)$$
$$=۳+\cos^{۲}x$$

اکنون توجه کنید که

$$۸-۲\sin^{۲}x=۶+۲(۱-\sin^{۲}x)=۶+۲\cos^{۲}x$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۶۴- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول** به کمک اتحاد مزدوج و اتحادهای مثلثاتی عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=(\cos^{۴}x-\sin^{۴}x)(۱+\tan^{۲}x)+\tan^{۲}x$$
$$=(\cos^{۲}x-\sin^{۲}x)(\cos^{۲}x+\sin^{۲}x)(\frac{۱}{\cos^{۲}x})+\tan^{۲}x$$
$$=(\cos^{۲}x-\sin^{۲}x)\frac{۱}{\cos^{۲}x}+\tan^{۲}x$$
$$=۱-\tan^{۲}x+\tan^{۲}x=۱$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها،حاصل عبارت به ازای هر مقدار x یک عدد ثابت است. پس کافی است مثلاً به ازای $x=۰^\circ$ مقدار عبارت را حساب کنیم:

$$x=۰^\circ\Rightarrow A=(\cos^{۴}۰^\circ-\sin^{۴}۰^\circ)(۱+\tan^{۲}۰^\circ)+\tan^{۲}۰^\circ$$
$$=(۱-۰)(۱+۰)+۰=۱$$

۱۶۵- گزینه‌ی ۱ به تساوی زیر توجه کنید:

$$(\frac{۱}{\sin\alpha}+۱)(\frac{۱}{\sin\alpha}-۱)=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}-۱=۱+\cot^{۲}\alpha-۱=\cot^{۲}\alpha$$

همچنین به تساوی زیر توجه کنید:

$$(\frac{۱}{\cos\alpha}+۱)(\frac{۱}{\cos\alpha}-۱)=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}-۱=۱+\tan^{۲}\alpha-۱=\tan^{۲}\alpha$$

بنابراین

$$(\frac{۱}{\sin\alpha}+۱)(\frac{۱}{\cos\alpha}+۱)(\frac{۱}{\sin\alpha}-۱)(\frac{۱}{\cos\alpha}-۱)$$
$$=\tan^{۲}\alpha\cot^{۲}\alpha=(\tan\alpha\cot\alpha)^{۲}=۱^{۲}=۱$$

۱۶۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sin^{۲}x(۱+\tan^{۲}x)-\cos^{۲}x(۱+\cot^{۲}x)$$
$$=\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}-\frac{\cos^{۲}x}{\sin^{۲}x}=\tan^{۲}x-\cot^{۲}x$$
$$=(\tan x-\cot x)(\tan x+\cot x)$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با $\tan x+\cot x$ که به‌ازای $x=۳۰^\circ$ برابر است با

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۶۷- گزینه‌ی ۳ در مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی یکی از زوایا ۹۰° است. مثلاً فرض کنید $\hat{A}=۹۰^\circ$. پس $\sin\hat{A}=۱$ و $\cos\hat{A}=۰$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یک‌دیگرند، پس

$$\sin^{۲}\hat{C}=\cos^{۲}\hat{B}$$

بنابراین ساده شده‌ی عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\sin^{۲}\hat{A}+\sin^{۲}\hat{B}+\sin^{۲}\hat{C}}{\cos^{۲}\hat{A}+\cos^{۲}\hat{B}+\cos^{۲}\hat{C}}=\frac{۱+\sin^{۲}\hat{B}+\cos^{۲}\hat{B}}{۰+\sin^{۲}\hat{C}+\cos^{۲}\hat{C}}=\frac{۱+۱}{۰+۱}=۲$$

۱۶۸- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $\tan ۸۰^\circ=\cot ۱۰^\circ$، در نتیجه بنابر فرض $\tan^{۲}۱۰^\circ+\cot^{۲}۱۰^\circ=m$. اکنون می‌توان نوشت

$$m+۲=۱+\tan^{۲}۱۰^\circ+۱+\cot^{۲}۱۰^\circ=\frac{۱}{\cos^{۲}۱۰^\circ}+\frac{۱}{\sin^{۲}۱۰^\circ}$$

۱۶۹- گزینه‌ی ۲ زاویه‌های ۱° و ۸۹° متمم یک‌دیگرند. پس $\cos^{۲}۸۹^\circ=\sin^{۲}۱^\circ$ و در نتیجه $\cos^{۲}۱^\circ+\cos^{۲}۸۹^\circ=۱$. به همین ترتیب $\cos^{۲}۲^\circ+\cos^{۲}۸۸^\circ=۱$، $\cos^{۲}۳^\circ+\cos^{۲}۸۷^\circ=۱$، ... و $\cos^{۲}۴۴^\circ+\cos^{۲}۴۶^\circ=۱$.

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos^{۲}۹۰^\circ=۰$ و $\cos^{۲}۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}$،

بنابراین مقدار A برابر است با

$$A=\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{۴۴\text{تا}}+\frac{۱}{۲}+۰=۴۴/۵$$

۱۷۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\cos ۴۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۵۰^\circ) = \sin ۵۰^\circ$$

$$\cos ۵۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۴۰^\circ) = \sin ۴۰^\circ$$

بنابراین

$$(\cos ۴۰^\circ + \cos ۵۰^\circ)^۲ + (\sin ۴۰^\circ - \sin ۵۰^\circ)^۲$$

$$= (\sin ۵۰^\circ + \sin ۴۰^\circ)^۲ + (\sin ۴۰^\circ - \sin ۵۰^\circ)^۲$$

$$= ۲(\sin^۲ ۵۰^\circ + \sin^۲ ۴۰^\circ) = ۲(\sin^۲ ۵۰^\circ + \cos^۲ ۵۰^\circ) = ۲$$

۱۷۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\sin ۴۰^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۵۰^\circ) = \cos ۵۰^\circ$$

$$\tan ۴۰^\circ = \tan(۹۰^\circ - ۵۰^\circ) = \cot ۵۰^\circ$$

به این ترتیب

$$\sin^۲ ۴۰^\circ + \sin^۲ ۵۰^\circ = \cos^۲ ۵۰^\circ + \sin^۲ ۵۰^\circ = ۱$$

$$\tan ۴۰^\circ \times \tan ۵۰^\circ = \cot ۵۰^\circ \times \tan ۵۰^\circ = ۱$$

بنابراین

$$\frac{-\sin^۲ ۴۰ - \sin^۲ ۵۰^\circ + ۱ - \sin ۷۰^\circ}{\tan ۴۰^\circ \times \tan ۵۰^\circ - ۱ - ۲\cos ۲۰^\circ} = \frac{-۱ + ۱ - \sin ۷۰^\circ}{۱ - ۱ - ۲\cos ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۷۰^\circ}{۲\cos ۲۰^\circ}$$

از طرف دیگر، $\sin ۷۰^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۲۰^\circ) = \cos ۲۰^\circ$، پس مقدار عبارت مورد نظر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۷۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\tan^۲ x + ۹\cot^۲ x = (\tan x - ۳\cot x)^۲ + ۶$$

در نتیجه $\tan^۲ x + ۹\cot^۲ x = (۲)^۲ + ۶ = ۱۰$.

۱۷۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به اتحادهای $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $\tan^۲ x = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}$ تساوی داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin x(\frac{۱}{\cos^۲ x}) + \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = ۱$$

$$\frac{\sin x + \sin^۲ x}{\cos^۲ x} = ۱ \Rightarrow \sin^۲ x + \sin x = \cos^۲ x$$

حالا به کمک اتحاد $\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$ تساوی اخیر را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin^۲ x + \sin x = ۱ - \sin^۲ x$$

بنابراین $۲\sin^۲ x + \sin x = ۱$.

۱۷۴- گزینه‌ی ۳ دوطرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x + \cot x)^۲ = (\sqrt{۵})^۲$$

$$\tan^۲ x + \cot^۲ x + ۲\tan x \cot x = ۵$$

$$\tan^۲ x + \cot^۲ x + ۲ = ۵ \qquad (\tan x \cot x = ۱)$$

پس $\tan^۲ x + \cot^۲ x = ۳$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^۲ x + \cot^۲ x)^۲ = ۳^۲$$

$$\tan^۴ x + \cot^۴ x + ۲\tan^۲ x \cot^۲ x = ۹$$

$$\tan^۴ x + \cot^۴ x + ۲ = ۹ \qquad (\tan^۲ x \cot^۲ x = ۱)$$

پس $\tan^۴ x + \cot^۴ x = ۷$.

۱۷۵- گزینه‌ی ۲ از اتحادهای $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ نتیجه می‌شود

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

حالا با توجه به $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ می‌توانیم مقدار خواسته شده را به‌دست آوریم:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

۱۷۶- گزینه‌ی ۲ طرفین تساوی $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۲}{۳}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ = (\frac{۲}{۳})^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{۵}{۱۸}$$

۱۷۷- گزینه‌ی ۳ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$۳(۴\sin x - \cos x) = ۴\sin x + \cos x$$

$$۸\sin x = ۴\cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\tan x = \frac{۱}{۲}$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{\cos x}{۱ - \sin x} - \frac{\cos x}{۱ + \sin x} = \cos x(\frac{۱}{۱ - \sin x} - \frac{۱}{۱ + \sin x})$$

$$= \cos x(\frac{۲\sin x}{۱ - \sin^۲ x}) = \frac{۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x} = ۲\tan x = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$$

۱۷۸- گزینه‌ی ۲ در صورت کسر داده شده به جای ۱ قرار می‌دهیم $\sin^۲ x+\cos^۲ x$. در این صورت

$$\frac{۱+۲\sin x\cos x}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}=۳$$

$$\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x}{\sin^۲ x-\cos^۲ x}=۳$$

$$\frac{(\sin x+\cos x)^۲}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}=۳$$

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=۳$$

اگر این تناسب را طرفین-وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$\sin x+\cos x=۳\sin x-۳\cos x$$

$$۴\cos x=۲\sin x\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\cot x=\frac{۱}{۲}$.

۱۷۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\frac{\sin^۲\alpha-\sin^۴\alpha}{\cos^۲\alpha-\cos^۴\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha\overbrace{(۱-\sin^۲\alpha)}^{\cos^۲\alpha}}{\cos^۲\alpha\underbrace{(۱-\cos^۲\alpha)}_{\sin^۲\alpha}}=۱$$

بنابراین $\tan\theta=۱$، در نتیجه

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۲=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\xrightarrow[\text{اول است}]{\theta\text{ در ربع}}\frac{۱}{\cos\theta}=\sqrt{۲}$$

۱۸۰- گزینه‌ی ۴ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(۲\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=۱\Rightarrow ۴\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۴\sin\alpha\cos\alpha=۱$$

$$\Rightarrow ۳\sin^۲\alpha+۱-۴\sin\alpha\cos\alpha=۱\quad(\text{چون }\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱)$$

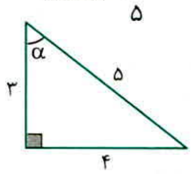
$$\Rightarrow ۳\sin^۲\alpha=۴\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۳\sin\alpha=۴\cos\alpha\quad(\text{چون }\sin\alpha\neq۰)$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$$

اکنون مانند شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیرید که یک زاویه‌ی حاده‌اش α باشد، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه ۴ باشد و طول ضلع مجاورش (به‌جز وتر) برابر ۳ باشد. در این صورت، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس طول وتر این مثلث ۵ است و در نتیجه

$$\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$$



۱۸۱- گزینه‌ی ۲ بنابر فرض $\sin x=\frac{۵}{۲}\cos x$. دو طرف این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^۲ x=\frac{۵}{۲}\cos x\sin x\quad(۱)$$

همچنین، بنابر فرض $\cos x=\frac{۲}{۵}\sin x$. دو طرف این تساوی را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\cos^۲ x=\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\quad(۲)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۱=\frac{۵}{۲}\sin x\cos x+\frac{۲}{۵}\sin x\cos x$$

$$۱=\frac{۲۹}{۱۰}\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}$.

۱۸۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\sin^۲ x-\sin^۴ x=\sin^۲ x(۱-\sin^۲ x)=\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین

$$\tan^۲ x+\cot^۲ x=\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}=\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}$$

صورت کسر بالا را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x+۲\sin^۲ x\cos^۲ x-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$=\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲}_{۱}-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

در نتیجه

$$\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}=\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}=\frac{۱-\frac{۲}{۸}}{\frac{۱}{۸}}=۶$$

۱۸۳- گزینه‌ی ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۱}{۳}$$

$$(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۳}$$

$$۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۳}$$

$$(\sin\alpha\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع دوم است، پس $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<۰$. پس

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸۴- گزینه‌ی ۱ طرفین تساوی $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۹}$$

$$۱+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۹}\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۸}{۹}$$

اگر فرض کنیم $A=\cos\alpha-\sin\alpha$، می‌توانیم با توان‌رسانی مقدار A را به‌دست آوریم:

$$A^{۲}=(\cos\alpha-\sin\alpha)^{۲}=\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$A^{۲}=۱-(-\frac{۸}{۹})=\frac{۱۷}{۹}\Rightarrow A=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$. پس مقدار $\cos\alpha-\sin\alpha$ منفی است و در نتیجه

$$A=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$$

۱۸۵- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم در ربع سوم $\cos x<۰$ و $\sin x<۰$، در نتیجه

$$\sin x\cos x>۰\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

در نتیجه

$$(\sin x-\cos x)^{۲}=۱-۲\sin x\cos x=۱-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$=\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۳}=\frac{۹-۶\sqrt{۲}}{۹}=\frac{(\sqrt{۶}-\sqrt{۳})^{۲}}{۹}$$

بنابراین

$$|\sin x-\cos x|=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا از تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=۴$ مقدار $\sin\alpha\cos\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۴\Rightarrow\frac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=۴$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=۴\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

حالا اگر فرض کنیم $A=\sin\alpha+\cos\alpha$، به کمک توان‌رسانی می‌توانیم مقدار A را به‌دست آوریم:

$$A^{۲}=(\sin\alpha+\cos\alpha)^{۲}=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$A^{۲}=۱+۲(\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۲}\Rightarrow A=\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

با توجه به این‌که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم قرار دارد، مقدار $\sin\alpha+\cos\alpha$ منفی است. یعنی

$$A=-\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

۱۸۷- گزینه‌ی ۱ تساوی داده شده را به‌صورت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\cos\alpha=\sin^{۲}\alpha$$

با استفاده از اتحاد $\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$ تساوی داده شده به‌صورت $\cos\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$ یا $\cos^{۲}\alpha+\cos\alpha=۱$ در می‌آید.

۱۸۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\frac{\sin^{۴}x+\cos^{۵}x}{\sin^{۲}x}=\frac{\sin^{۴}x}{\sin^{۲}x}+\frac{\cos^{۵}x}{\sin^{۲}x}$$

$$=\sin^{۲}x+\frac{\cos^{۳}x}{\underbrace{\sin^{۲}x}_{۱}}\times\cos^{۲}x$$

$$=\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$$

۱۸۹- گزینه‌ی ۱ در تساوی $۳\sin^{۲}x=۱+۲\cos^{۲}x$ به جای $\sin^{۲}x$ قرار می‌دهیم $۱-\cos^{۲}x$ و مقدار $\cos^{۲}x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۳(۱-\cos^{۲}x)=۱+۲\cos^{۲}x\Rightarrow ۳-۳\cos^{۲}x=۱+۲\cos^{۲}x$$

$$۵\cos^{۲}x=۲\Rightarrow\cos^{۲}x=\frac{۲}{۵}$$

حالا به کمک اتحاد $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$ مقدار $\tan^{۲}x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\frac{۲}{۵}}\Rightarrow\tan^{۲}x=\frac{۳}{۲}$$

۱۹۰- گزینه‌ی ۴ از تساوی $۲\sin^{۲}x-۳\cos^{۲}x=۱$ مقدار $\sin^{۲}x$ و $\cos^{۲}x$ را به‌دست می‌آوریم. کافی است به‌جای $\cos^{۲}x$ قرار دهیم $۱-\sin^{۲}x$:

$$۲\sin^{۲}x-۳(۱-\sin^{۲}x)=۱$$

$$۵\sin^{۲}x=۴\Rightarrow\sin^{۲}x=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

پس مقدار عبارت $A=۲\sin^{۴}x-۳\cos^{۴}x$ به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$A=۲(\sin^{۲}x)^{۲}-۳(\cos^{۲}x)^{۲}=۲(\frac{۴}{۵})^{۲}-۳(\frac{۱}{۵})^{۲}$$

$$=\frac{۳۲}{۲۵}-\frac{۳}{۲۵}=\frac{۲۹}{۲۵}$$

۱۹۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که بنابر فرض،

$$۵\sin^۲ x=۳(۱-\cos^۴ x)=۳\underbrace{(۱-\cos^۲ x)}_{\sin^۲ x}(۱+\cos^۲ x)$$

در نتیجه چون $\sin x\neq ۰$، بنابراین $۱+\cos^۲ x=\frac{۵}{۳}$ یعنی $\cos^۲ x=\frac{۲}{۳}$. در نتیجه $\sin^۲ x=\frac{۱}{۳}$. از این رو حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$۳(\frac{۲}{۳})^۲+۵(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱۷}{۹}$$

۱۹۲- گزینه‌ی ۲ تساوی فرض مسئله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^۲ x+۲\cos x=\frac{۱}{۲}+۱-\cos^۲ x$$

$$۲\cos^۲ x+۲\cos x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \cos^۲ x+\cos x=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین

$$\cos^۲ x+\cos x+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}$$

$$(\cos x+\frac{۱}{۲})^۲=۱\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۲}$$

می‌دانیم $-۱\leq \cos x\leq ۱$، در نتیجه $\cos x=\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x=۱-(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۴}$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\frac{۱}{۴}+۲(\frac{۱}{۲})}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۵}{۳}$$

۱۹۳- گزینه‌ی ۱ طرفین تساوی داده شده را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم: $(\cos x\neq ۰)$

$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{۳\cos^۲ x}{\cos^۲ x}-\frac{۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x}=\frac{۲}{\cos^۲ x}$$

با توجه به اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$، تساوی فوق را طوری می‌نویسیم که فقط در آن $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^۲ x+۳-۲\tan x=۲(۱+\tan^۲ x)$$

$$\tan^۲ x+۲\tan x=۱$$

۱۹۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$(۲\sin\theta+\cos\theta)^۲=۳$$

در نتیجه

$$۴\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۴\sin\theta\cos\theta=۳$$

بنابراین

$$۴\sin^۲\theta+۱-\sin^۲\theta+۴\sin\theta\cos\theta=۳$$

$$۳\sin^۲\theta+۴\sin\theta\cos\theta=۲$$

با تقسیم دو طرف تساوی اخیر بر $\cos^۲\theta$، به‌دست می‌آید

$$۳\tan^۲\theta+۴\tan\theta=\frac{۲}{\cos^۲\theta}=۲(۱+\tan^۲\theta)$$

بنابراین $\tan^۲\theta+۴\tan\theta=۲$.

۱۹۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا دو طرف تساوی فرض مسئله را بر $\tan^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan^۲ x-۱=\frac{۱}{\tan^۲ x}$$

$$\tan^۲ x=۱+\frac{۱}{\tan^۲ x}=۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$$

در نتیجه

$$\tan^۴ x=\frac{۱}{\sin^۴ x}\Rightarrow \tan^۴ x-\frac{۱}{\sin^۴ x}=۰$$

۱۹۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا تساوی داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan^۳\theta-۱=\frac{۱}{\cos\theta}$$

اکنون اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$(\tan^۳\theta-۱)^۲=\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta$$

$$\tan^۶\theta-۲\tan^۳\theta=\tan^۲\theta$$

در نتیجه چون $\tan\theta\neq ۰$،

$$\tan^۴\theta-۲\tan\theta=۱\Rightarrow\frac{\tan^۴\theta-۱}{\tan\theta}=۲$$

اکنون عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tan\theta(۱+\tan^۲\theta-(۱+\cot^۲\theta))$$

$$=\tan\theta(\tan^۲\theta-\frac{۱}{\tan^۲\theta})=\frac{\tan^۴\theta-۱}{\tan\theta}=۲$$

۱۹۷- گزینه‌ی ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^۳ x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم

$$A=\frac{\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}-۲\frac{\cos x}{\cos^۳ x}}{\frac{۳\sin x}{\cos^۳ x}-\frac{\cos^۳ x}{\cos^۳ x}}=\frac{\tan^۳ x-\frac{۲}{\cos^۲ x}}{۳\frac{\tan x}{\cos^۲ x}-۱}$$

$$=\frac{\tan^۳ x-۲(۱+\tan^۲ x)}{۳\tan x(۱+\tan^۲ x)-۱}=\frac{۲^۳-۲(۱+۲^۲)}{۳\times ۲(۱+۲^۲)-۱}=-\frac{۲}{۲۹}$$

۱۹۸- گزینه‌ی ② اگر در عبارت به جای $\cos^۲ x$ قرار دهیم $۱-\sin^۲ x$، عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$A=\sin^۲ x-۲\cos^۲ x=\sin^۲ x-۲(۱-\sin^۲ x)$$

$$=۳\sin^۲ x-۲$$

با توجه به این‌که $۰\le\sin^۲ x\le۱$ حدود مقادیر A را تعیین می‌کنیم:

$$۰\le۳\sin^۲ x\le۳\Rightarrow-۲\le۳\sin^۲ x-۲\le۱$$

بنابراین $-۲\le A\le۱$ و در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت A برابر ۱- است.

۱۹۹- گزینه‌ی ③ به جای $\cos^۲ x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲ x$. عبارت به شکل زیر است:

$$A=۱-\sin^۲ x-۲\sin x=۱-(\sin^۲ x+۲\sin x+۱-۱)$$

$$=۱-(\sin x+۱)^۲+۱=۲-(\sin x+۱)^۲$$

چون $-۱\le\sin x\le۱$، پس

$$۰\le\sin x+۱\le۲\Rightarrow۰\le(\sin x+۱)^۲\le۴$$

$$-۴\le-(\sin x+۱)^۲\le۰$$

$$-۲\le۲-(\sin x+۱)^۲\le۲$$

$$-۲\le A\le۲$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.

۲۰۰- گزینه‌ی ③ از اتحادهای $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم. سمت چپ تساوی به شکل زیر در می‌آید:

$$\sqrt{۱+\cot^۲ x}-\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ x}}-\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}$$

$$=\frac{۱}{|\sin x|}-\frac{۱}{|\cos x|}$$

برای این‌که تساوی $\frac{۱}{|\sin x|}-\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{\cos x}-\frac{۱}{\sin x}$ اتحاد باشد، باید $\sin x<۰$ و $\cos x<۰$ باشد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی x باید در ناحیه‌ی سوم باشد.

۲۰۱- گزینه‌ی ② به کمک رابطه‌ی $\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta$ عبارت طرف چپ را تغییر می‌دهیم، در این صورت

$$۳+۴\cos^۲\theta+۵\cos^۴\theta=۳+۴(۱-\sin^۲\theta)+۵(۱-\sin^۲\theta)^۲$$

$$=۳+۴-۴\sin^۲\theta+۵(۱-۲\sin^۲\theta+\sin^۴\theta)$$

$$=۵\sin^۴\theta-۱۴\sin^۲\theta+۱۲$$

بنابراین

$$a=۱۲,\quad b=-۱۴,\quad c=۵$$

و در نتیجه

$$a+b-c=۱۲-۱۴-۵=-۷$$

۲۰۲- گزینه‌ی ① **راه‌حل اول** تساوی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{a\cos^۲ x-b}{\cos^۴ x}=\frac{\sin^۲ x\cos^۲ x+\sin^۴ x}{\cos^۴ x}$$

$$a\cos^۲ x-b=\sin^۲ x\cos^۲ x+\sin^۴ x$$

$$=\sin^۲ x(\underbrace{\cos^۲ x+\sin^۲ x}_{۱})=\sin^۲ x$$

بنابراین تساوی به‌صورت زیر است:

$$a\cos^۲ x-b=۱-\cos^۲ x$$

کافی است $a=-۱$ و $b=-۱$ باشد تا تساوی به اتحاد تبدیل شود. بنابراین $a+b=-۲$.

راه‌حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس می‌توانیم به جای x هر مقدار دلخواه قرار دهیم:

$$\begin{cases}x=۰\Rightarrow a-b=۰+۰\\ x=۴۵^\circ\Rightarrow۲a-۴b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b\\ a=۲b+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=-۱\end{cases}\Rightarrow a+b=-۲$$

۲۰۳- گزینه‌ی ③ تساوی را به‌صورت

$$a=\sin^۴ x+\cos^۴ x+b\sin^۲ x\cos^۲ x$$

می‌نویسیم. می‌دانیم

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

بنابراین تساوی بالا به‌صورت زیر در می‌آید:

$$a=۱+(b-۲)\sin^۲ x\cos^۲ x$$

حالا اگر قرار دهیم $x=۰$، نتیجه می‌شود $a=۱$. بنابراین

$$(b-۲)\sin^۲ x\cos^۲ x=۰\Rightarrow b=۲$$

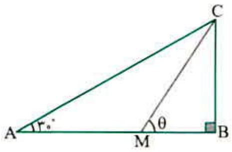
۲۰۴- گزینه‌ی ④ چون $\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۲}$، عددی مانند x وجود دارد که $AM=۳x$ و $MB=۲x$. در نتیجه $AB=۵x$، پس

$$\tan\hat{A}=\tan۳۰^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{۵x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

بنابراین $BC=\frac{۵x}{\sqrt{۳}}$. همچنین $\tan\theta=\frac{BC}{MB}=\frac{\frac{۵x}{\sqrt{۳}}}{۲x}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}$

بنابراین

$$\cos^۲\theta=\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}=\frac{۱۲}{۳۷}\Rightarrow\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta=\frac{۲۵}{۳۷}$$



۲۰۵- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم $AB=c$ و $BC=a$. با توجه به فرض مسأله $a+c=۲۱$. در نتیجه

$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{۱۵},\quad \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{۱۵}$$

بنابراین

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{a+c}{۱۵}=\frac{۲۱}{۱۵}=\frac{۷}{۵}$$

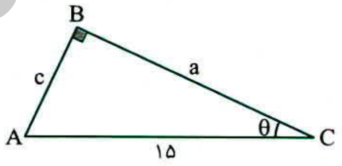
دو طرف تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\theta+\cos\theta)^۲=(\frac{۷}{۵})^۲$$

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۴۹}{۲۵}$$

$$۱+۲\sin\cos\theta=\frac{۴۹}{۲۵}$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{\frac{۴۹}{۲۵}-۱}{۲}=\frac{۱۲}{۲۵}$$



فصل سوم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس‌های اول و دوم: ریشه و توان – ریشه‌ی nاُم

ریشه و توان

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۲$. عدد b را **ریشه‌ی nاُم** عدد a می‌نامیم، به شرطی که $b^n = a$. اگر n زوج باشد، b^n عددی نامنفی است، بنابراین عددهای منفی ریشه‌ی nاُم ندارند. اگر n زوج باشد و $b^n = a$، آن‌گاه $(-b)^n = a$، پس $-b$ هم ریشه‌ی nاُم a است. ریشه‌ی nاُم مثبت عدد مثبت a را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم. همچنین، $\sqrt[n]{۰} = ۰$. در جدول زیر وضعیت وجود و تعداد ریشه‌های nاُم را آورده‌ایم.

$a > ۰$	n زوج باشد	a دو ریشه‌ی nاُم قرینه دارد: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	a یک ریشه‌ی nاُم دارد: $\sqrt[n]{a}$
$a < ۰$	n زوج باشد	a ریشه‌ی nاُم ندارد
	n فرد باشد	a یک ریشه‌ی nاُم دارد: $\sqrt[n]{a}$

هر جا با $\sqrt[n]{a}$ سر و کار داریم که n زوج است، فرض می‌کنیم a عددی حقیقی و نامنفی است. به این ترتیب، طبق تعریف، چه n زوج باشد چه فرد،

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

تست **۱**

مقدار $\sqrt[۳]{-۰/۱۲۵} - ۵\sqrt[۳]{۰/۲۱۶}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۷}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{۰/۲۱۶} = \sqrt[۳]{\frac{۲۱۶}{۱۰۰۰}} = \sqrt[۳]{(\frac{۶}{۱۰})^۳} = \frac{۶}{۱۰}, \quad \sqrt[۳]{-۰/۱۲۵} = \sqrt[۳]{-(\frac{۵}{۱۰})^۳} = -\frac{۵}{۱۰}$$

بنابراین عدد مورد نظر برابر است با

$$-\frac{۵}{۱۰} - ۵(\frac{۶}{۱۰}) = -\frac{۱}{۲} - ۳ = -\frac{۷}{۲}$$

ویژگی‌های ریشه‌گیری

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و m و n عددهایی طبیعی باشند که $m, n \geq ۲$. در این صورت (اگر n زوج باشد، a و b نامنفی‌اند).

۱- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

۲- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq ۰)$

۳- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

۴- اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

۵- اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه

$$\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه

$$\sqrt[n]{a^nb}=|a|\sqrt[n]{b}$$

۶- اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، آن‌گاه

$$a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^nb}$$

۷- $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

۸- $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

۹- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

تست ۲ اگر $x<۰$، حاصل $۳\sqrt[۳]{x^۳}+۲\sqrt[۴]{x^۴}$ کدام است؟

۱) $۳x$
۲) x
۳) $-x$
۴) $۲x$

پاسخ: چون $x<۰$، پس $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|=-x$. در نتیجه

$$۳\sqrt[۳]{x^۳}+۲\sqrt[۴]{x^۴}=۳x+۲(-x)=x$$

تست ۳ حاصل عبارت $\sqrt{-a}+\frac{\sqrt[۳]{a^۳}+۲a}{\sqrt[۴]{a^۴}-۲a}$ کدام است؟ $(a\neq ۰)$

۱) $\sqrt{-a}+\frac{۱}{۳}$
۲) $\sqrt{-a}+۱$
۳) $\sqrt{-a}+۳$
۴) $\sqrt{-a}-۱$

پاسخ: با توجه به وجود $\sqrt{-a}$ در عبارت، واضح است که a مثبت نیست. بنابراین $\sqrt[۳]{a^۳}=a$ و $\sqrt[۴]{a^۴}=-a$ و در نتیجه

$$\sqrt{-a}+\frac{\sqrt[۳]{a^۳}+۲a}{\sqrt[۴]{a^۴}-۲a}=\sqrt{-a}+\frac{a+۲a}{-a-۲a}=\sqrt{-a}-۱$$

تست ۴ اگر $a<۰<b$، حاصل عبارت $\sqrt[۴]{a^۴}-\sqrt{(a-b)^۲}+\sqrt{b^۲}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $۲a$
۳) $۲b$
۴) $۲a+۲b$

پاسخ: توجه کنید که

$\sqrt[۴]{a^۴}=|a|=-a$ (چون $a<۰$)

$\sqrt{(a-b)^۲}=|a-b|=-(a-b)=b-a$ (چون $a-b<۰$)

$\sqrt{b^۲}=|b|=b$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$-a-(b-a)+b=۰$$

تست ۵ مقدار $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۲}$
۲) $\sqrt[۶]{۲}$
۳) $\sqrt[۸]{۲}$
۴) $\sqrt[۲۴]{۲}$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۲^۲\times ۲}}}=\sqrt[۴\times۳\times۲]{۲^۳}=\sqrt[۴\times۲]{۲}=\sqrt[۸]{۲}$$

تست ۶

اگر $\sqrt[۴]{\sqrt{\sqrt{۲^n}}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۸}}}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\sqrt[۴]{\sqrt{\sqrt{۲^n}}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۸}}}$$
$$\sqrt[۴\times۲\times۲]{۲^n}=\sqrt[۳\times۴\times۲]{۸}$$
$$\sqrt[۴\times۲]{\sqrt{۲^n}}=\sqrt[۴\times۲]{\sqrt[۳]{۸}}$$
$$\sqrt{۲^n}=۲\Rightarrow ۲^n=۴\Rightarrow n=۲$$

تست ۷

حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۴]{۲۰}-\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۴}-۱}{\sqrt[۴]{۴}-۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۴}-۱$ ۲) $\sqrt[۴]{۵}-۱$ ۳) $\sqrt[۴]{۴}+۱$ ۴) $\sqrt[۴]{۵}+۱$

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{\sqrt[۴]{۲۰}-\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۴}-۱}{\sqrt[۴]{۴}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۵\times۴}-\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۴}-۱}{\sqrt[۴]{۴}-۱}$$
$$=\frac{\sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۴]{۴}-\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۴}-۱}{\sqrt[۴]{۴}-۱}$$
$$=\frac{\sqrt[۴]{۵}(\sqrt[۴]{۴}-۱)+\sqrt[۴]{۴}-۱}{\sqrt[۴]{۴}-۱}$$
$$=\frac{(\sqrt[۴]{۴}-۱)(\sqrt[۴]{۵}+۱)}{\sqrt[۴]{۴}-۱}=\sqrt[۴]{۵}+۱$$

نکته

۱. اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی و فرد باشد،

$$a<b\Leftrightarrow a^n<b^n$$

و در نتیجه

$$a<b\Leftrightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$$

۲. اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و n عددی طبیعی و زوج باشد،

$$a<b\Leftrightarrow a^n<b^n$$

و در نتیجه

$$a<b\Leftrightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$$

تست ۸

اگر $a=\sqrt{۲}$، $b=\sqrt[۳]{۳}$ و $c=\sqrt[۶]{۶}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a<b<c$ ۲) $b<c<a$ ۳) $c<a<b$ ۴) $c<b<a$

پاسخ: فرجه‌ی ریشه‌ها را یکی می‌کنیم:

$$a=\sqrt{۲}=\sqrt[۳\times۲]{۲^۳}=\sqrt[۶]{۸}$$
$$b=\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۳\times۲]{۳^۲}=\sqrt[۶]{۹}$$
$$c=\sqrt[۶]{۶}$$

اکنون توجه کنید که

$$\sqrt[۶]{۶}<\sqrt[۶]{۸}<\sqrt[۶]{۹}\Rightarrow c<a<b$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل سوم

درس‌های اول و دوم:
ریشه و توان – ریشه‌ی nاُم

۱- مقدار $\frac{۲}{۱۰۰}\sqrt[۴]{(۰/۰۰۱۶)^{-۱}}$ چقدر است؟

۱) $۰/۱$ ۲) $۰/۲$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴$

۲- حاصل $(\sqrt{۰/۹۸}+\sqrt{۰/۱۸})\frac{۱}{\sqrt{۸}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۳- حاصل $\frac{\sqrt[۳]{۰/۱۲۵}+\sqrt[۴]{۰/۰۲۵۶}}{\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۴- حاصل $\frac{۱}{\sqrt[۵]{(۰/۳۲)^{-۵}}}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۰/۲۷)^{-۳}}}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۲۰}$

۵- مقدار عبارت $\sqrt[۵]{-۳۲}-\sqrt{۵^۲}+\sqrt[۳]{-۶۴}+\sqrt[۴]{(-۳)^۴}$ چقدر است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- اگر $۰/۰۶۴=(\frac{۲}{x})^۳$، حاصل $\sqrt[۳]{۶x-۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- اگر ریشه‌ی دوم مثبت $x-\sqrt{x}$ برابر ۳ باشد، حاصل عبارت $\frac{۹+\sqrt{x}}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸- اگر $a=\sqrt[۵]{\frac{۳}{۸}}$، مقدار $\sqrt[۵]{۱۲}$ برابر کدام است؟

۱) $۸a$ ۲) $۶a$ ۳) $۴a$ ۴) $۲a$

۹- حاصل عبارت $\sqrt[۱۰]{\frac{۲^{۲۰}+۳^{۲۰}+۱}{۲^{-۲۰}+۳^{-۲۰}+۶^{-۲۰}}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۱۰- حاصل $\sqrt[۴]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^۴}+\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴}-\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۲})^۴}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ۴) صفر

۱۱- حاصل عبارت $\sqrt[۴]{(\sqrt{۵}-۲)^۴}+\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^۳}+\sqrt{(\sqrt{۵}-۳)^۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}-۱$

۱۲- اگر $x=2-\sqrt{7}$، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sqrt{x^2}+\sqrt[5]{(-x)^5}-\sqrt[4]{(-x)^4}$$

۱) $-3x$ ۲) $-x$ ۳) $3x$ ۴) $-2x$

۱۳- حاصل عبارت $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{(2--\sqrt{2})^3}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-1$

۱۴- اگر $x<0$، عبارت $\sqrt[4]{-x^9}$ با کدام عبارت برابر است؟

۱) $-x^2\sqrt[4]{x}$ ۲) $x^2\sqrt[4]{x}$ ۳) $-x^2\sqrt[4]{-x}$ ۴) $x^2\sqrt[4]{-x}$

۱۵- اگر $x<0$، حاصل عبارت $\sqrt{x^6}+\sqrt[3]{x^9}+\sqrt[4]{x^{12}}$ کدام است؟

۱) $2x^3$ ۲) x^3 ۳) $-x^3$ ۴) $-2x^3$

۱۶- اگر $a<0$، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt{a^2}}+\frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[4]{a^4}}$ کدام است؟

۱) $-2a$ ۲) -2 ۳) صفر ۴) $2a$

۱۷- اگر $a\,,b<0$، حاصل $\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{\sqrt[5]{(a+b)^5}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{-a-b}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{-a-b}}$ ۴) -1

۱۸- اگر $\frac{(\sqrt[4]{-x})^4-2\sqrt[3]{x^3}-\sqrt{x^2}}{x^2}=10$ مقدار x کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) -5

۱۹- اگر $\sqrt{a^2}=\frac{1}{2}+a$، حاصل عبارت $(2a+\frac{1}{2})^5$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{32}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{32}$ ۴) -1

۲۰- اگر $-1<x<0$، حاصل عبارت $\sqrt{1+\sqrt{x^2}}\times\sqrt{|x-1|}$ کدام است؟

۱) $-x-1$ ۲) $1-x$ ۳) $x+1$ ۴) $-x$

۲۱- اگر $x<0<y$، حاصل عبارت $A=\sqrt[3]{x^3y^3}+\sqrt[4]{16x^4y^4}-\sqrt{(xy-1)^2}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $3xy$ ۴) $-3xy$

۲۲- اگر $a<0<b$، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sqrt[3]{a^3b^3}-\sqrt[5]{(-a)^5b^5}+b\sqrt{a^2}+a\sqrt[4]{(-b)^4}$$

۱) $2ab$ ۲) ab ۳) $3ab$ ۴) $4ab$

۲۳- اگر $0<a<-b$، حاصل عبارت $\sqrt[3]{-a^3}+\sqrt[4]{b^4}-\sqrt{(a+b)^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $a+b$ ۳) $-a-b$ ۴) $-2a$

۲۴- هرگاه $a<0$، حاصل عبارت $\sqrt{a^2-7a+16+\sqrt{a^2}}$ کدام است؟

۱) $-a$ ۲) $4-a$ ۳) $a-4$ ۴) a

۲۵- حاصل $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{72}$ ۲) $\sqrt[3]{48}$ ۳) $\sqrt[3]{54}$ ۴) $\sqrt[3]{32}$

۲۶- حاصل $\sqrt{\sqrt[۳]{۸۱}-۲\sqrt[۳]{۳}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $-\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $\sqrt[۶]{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۷- حاصل کسر $\frac{۱}{\sqrt{\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt[۳]{۲۵۰}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt[۶]{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt[۶]{۴}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۴}$

۲۸- اگر $\sqrt[m-n]{۵}=a$ ، حاصل عبارت زیر چند است؟ m و n عددهایی طبیعی‌اند و $m>n$.

$$\frac{a^m-a^n}{a^m+a^n}$$

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲۹- اگر $x=\sqrt{\sqrt{۵}}$ ، حاصل $x^۴+x^۸$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۳۵

۳۰- حاصل $۲۷^{n-۱}$ چند برابر $\sqrt[۵]{۲۴۳^{۳n}}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۸۱}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۳۱- حاصل $\sqrt[۵]{۲\sqrt[۴]{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) $\sqrt{۸}$ ۴) $\sqrt[۴]{۸}$

۳۲- مقدار $\sqrt[۳]{۳^۲\sqrt[۴]{۳}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt[۱۲]{۲۷}$ ۳) $\sqrt[۴]{۹}$ ۴) $\sqrt[۴]{۲۷}$

۳۳- اگر $m=\sqrt[۵]{۴\sqrt{۲}}$ ، حاصل $m^۲-m\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) $\sqrt{۲}$

۳۴- اگر $x(\sqrt[۵]{\frac{۱}{x^۴}-\frac{۱}{x^۵}})=\frac{۱}{۲}$ ، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳۲}{۳۱}$ ۳) $\frac{۳۳}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۲}{۳۳}$

۳۵- اگر $a\,,b>۰$ ، حاصل $\sqrt{\frac{a^۲}{b}}\times\sqrt[۴]{\frac{b}{a^۵}}\times\sqrt[۱۲]{a^۳b^۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۱۲]{a}$ ۳) $\sqrt[۱۲]{b}$ ۴) $\sqrt[۱۲]{ab}$

۳۶- حاصل عبارت $(xy^۴-۱)(x^۴y+xy+۱)$ به ازای $x=\sqrt[۳]{۲}$ و $y=\sqrt[۳]{۴}$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۴۹ ۴) ۷

۳۷- حاصل $\frac{\sqrt[۵]{۴}}{\sqrt[۳]{۲}}-\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۵]{۸}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) صفر

۳۸- اگر $x, y<۰$ ، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{y^۳}{x}}\div\sqrt{\frac{x^۳}{y}}$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{y^۲}$ ۲) $-\frac{x^۲}{y^۲}$ ۳) $-\frac{x}{y}$ ۴) $\frac{x}{y}$

۳۹- حاصل $\sqrt[۵]{y-۲}\times\sqrt{۲-y}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۱۰]{(۲-y)^{۷}}$
۲) $-\sqrt[۱۰]{۴-y^{۲}}$
۳) $-\sqrt[۱۰]{(۲-y)^{۷}}$
۴) $\sqrt[۱۰]{(y-۲)^{۷}}$

۴۰- حاصل عبارت $\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۱۶}}-\sqrt[۵]{۹۶}-\frac{۲}{\sqrt[۵]{۱۶}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۵]{۳}$
۲) $۳\sqrt[۵]{۲}$
۳) $-۲\sqrt[۵]{۳}$
۴) $-۳\sqrt[۵]{۲}$

۴۱- چندتا از تساوی‌های زیر درست هستند؟

الف) $\sqrt[۴]{\sqrt{\sqrt[۳]{۲}}}=\sqrt[۲۴]{۲}$, ب) $\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}}=۳\sqrt{۳}$, پ) $\sqrt{۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt[۴]{۲}$

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۲- اگر $\sqrt[۵]{۲}+\sqrt[۵]{۳}+\sqrt[۵]{۴}+...+\sqrt[۵]{۲۵}=a-۱$، مقدار $\sqrt[۵]{۴}+\sqrt[۵]{۸}+\sqrt[۵]{۱۲}+...+\sqrt[۵]{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۵]{۲}a$
۲) $\sqrt[۵]{۴}a$
۳) $(\sqrt[۵]{۲}-۱)a$
۴) $(\sqrt[۵]{۴}-۱)a$

۴۳- اگر $\sqrt[n]{۴}\times\sqrt[۲n]{۲}=\sqrt{۲}$، مقدار $\sqrt[n]{n+۲۷}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt[۳]{۲}$
۴) $\sqrt[۴]{۲}$

۴۴- اگر $\sqrt[n]{۹}=\sqrt{۳}\times\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۶]{۳}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۵- اگر $\sqrt[n]{۳}\times\sqrt[۲n]{۳}\times\sqrt[۳n]{۳}=\sqrt[۶n]{۳^{a}}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۴۶- اگر $a=\sqrt{۲}$ و $b=\sqrt[۳]{۳}$، کدام گزینه $\sqrt[۶]{۱۸}$ را بر حسب a و b درست نشان می‌دهد؟

۱) $b\sqrt{a}$
۲) $b\sqrt[۳]{a}$
۳) $a\sqrt{b}$
۴) $a\sqrt[۳]{b}$

۴۷- حاصل $A=\sqrt[۵]{(\sqrt{۳}-۲)^{۳}}\times\sqrt[۴]{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۲$
۲) $۲-\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$
۴) $\sqrt[۴]{۲-\sqrt{۳}}$

۴۸- اگر $\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}=۲$ مقدار $\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt[۳]{۲}$

۴۹- اگر $\sqrt{a\sqrt{\frac{۱}{a}}}=۵$، حاصل $\sqrt[۳]{a\sqrt{\frac{۱}{a}\sqrt{a}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) ۵
۳) ۲۵
۴) $۵\sqrt{۵}$

۵۰- عبارت $\sqrt[۳]{a\sqrt[۴]{a}}$ چند برابر عبارت $\sqrt[۱۲]{a^{۶}\sqrt{a^{-۲}}}$ است؟ $(a>۰)$

۱) ۱
۲) ۲
۳) a
۴) $a^{۲}$

۵۱- اگر $\sqrt[۳]{۲\sqrt[۵]{x}}=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۵]{۳}$، مقدار x کدام است؟

۱) $۳^{۳}$
۲) $۳^{۴}$
۳) $۲^{۷}$
۴) $۲^{۸}$

۵۲- اگر $\sqrt{\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{x}}$، مقدار x چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۵۳- اگر $\sqrt{\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{a+۲}}}=\sqrt[۴]{۲}$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱۴
۲) ۳۰
۳) ۶۲
۴) ۱۲۶

۵۴- اگر $x>۰$ و $\sqrt{۳}\times\sqrt{\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{x}}\times\sqrt[۶]{x}$، مقدار x چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۲۷}{۴}$
۴) $\frac{۲۷}{۸}$

۵۵- کدام عدد بزرگ‌تر است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt[۳]{۵}$
۳) $\frac{\sqrt[۴]{۲۰}}{\sqrt[۳]{۲}}$
۴) $\frac{\sqrt[۳]{۳۰}}{\sqrt[۴]{۱۰}}$

۵۶- اگر $a=\sqrt{۳}$، $b=\sqrt[۳]{۹}$ و $c=\sqrt[۵]{۲۷}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $b<a<c$
۲) $b<c<a$
۳) $a<b<c$
۴) $a<c<b$

۵۷- اگر $۰<a<۱$، حاصل عبارت زیر کدام است؟

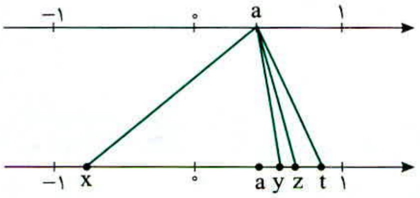
$$\sqrt{(a-\sqrt{a})^۲}+\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt[۳]{a})^۲}-\sqrt{(a-\sqrt[۳]{a})^۲}$$

۱) $۲a$
۲) $۲\sqrt[۳]{a}$
۳) $۲\sqrt{a}$
۴) صفر

۵۸- اگر $\sqrt[۳]{a}>\sqrt{a}$، کدام‌یک درست نیست؟

۱) $\sqrt[۴]{a}>\sqrt{a}$
۲) $\sqrt{a}>a$
۳) $\sqrt{a^۳}>\sqrt[۳]{a^۲}$
۴) $\sqrt[۳]{a^۲}>\sqrt[۴]{a^۳}$

۵۹- مطابق شکل، پاره‌خط‌های زیر نشان‌گر ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم عدد a هستند. کدام پاره‌خط نشان‌گر ریشه‌ی سوم و کدام پاره‌خط نشان‌گر ریشه‌ی چهارم عدد a است؟



۱) ax , ay
۲) at , az
۳) ax , at
۴) ax , az

۶۰- چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد که $\sqrt[۳]{a}<\sqrt{۶}$؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۶۱- چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشه‌ی سوم آن در بازه‌ی $(۲,۳)$ قرار دارد؟

۱) ۱۷
۲) ۱۸
۳) ۱۹
۴) ۲۰

۶۲- چند عدد صحیح وجود دارد که حداقل یک ریشه‌ی چهارم آن در بازه‌ی $(-۴,۳)$ قرار داشته باشد؟

۱) ۶۳
۲) ۶۴
۳) ۲۵۵
۴) ۲۵۶

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس سوم: توان‌های گویا

توان‌های گویا

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۲$. توان $\frac{۱}{n}$ اُم عدد حقیقی و مثبت a را با $a^{\frac{۱}{n}}$ نشان می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

همچنین، اگر a عددی حقیقی و مثبت، m عددی صحیح و n عددی طبیعی باشد، توان $\frac{m}{n}$ اُم a را با $a^{\frac{m}{n}}$ نشان می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تست ۱

حاصل عبارت $\frac{(۰/۰۴)^{\frac{۱}{۲}}}{(۰/۰۰۱۶)^{\frac{۳}{۴}}}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۵

پاسخ: توجه کنید که

$$(۰/۰۴)^{\frac{۱}{۲}} = ((۰/۲)^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۰/۲$$

$$(۰/۰۰۱۶)^{\frac{۳}{۴}} = (\frac{۱۶}{۱۰^۴})^{\frac{۳}{۴}} = ((\frac{۲}{۱۰})^۴)^{\frac{۳}{۴}} = (\frac{۲}{۱۰})^۳$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\frac{۲}{۱۰}}{(\frac{۲}{۱۰})^۳} = \frac{۱}{(\frac{۲}{۱۰})^۲} = ۲۵$$

ویژگی‌های توان‌های گویا

فرض کنید a عددی حقیقی و مثبت و r و s عددهایی گویا باشند. در این صورت

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

۴) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$

۵) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

تست ۲

اگر $a>۰$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۶]{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt[۴]{a^۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{a}}$ ۲) $\sqrt[۱۲]{a}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt[۶]{a}}$ ۴) $\sqrt[۶]{a}$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt[۶]{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt[۴]{a^۳}}=\frac{a^{\frac{۱}{۶}}\times a^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۳}{۴}}}=\frac{a^{\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۳}{۴}}}=a^{\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}}$$

$$=a^{-\frac{۱}{۱۲}}=\frac{۱}{a^{\frac{۱}{۱۲}}}=\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{a}}$$

تست ۳

اگر $\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۴]{۳}}=۳^a$ ،مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۴}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۴}$

پاسخ: با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به‌دست می‌آید

$$\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}\sqrt[۴]{۳}}=\sqrt{۳\times۳^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۴}}}=\sqrt{۳^{\frac{۱۹}{۱۲}}}=۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}$$

بنابراین $a=\frac{۱۹}{۲۴}$.

تست ۴

اگر $\frac{\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲}}=\sqrt[۸]{a}$ ، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}=\sqrt[۴]{۲\times۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}}=\sqrt[۴]{۲^{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}}}=(۲^{\frac{۹}{۶}})^{\frac{۱}{۴}}=۲^{\frac{۳}{۸}}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲^{\frac{۳}{۸}}}{۲^{\frac{۱}{۲}}}=۲^{\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۲}}=۲^{-\frac{۱}{۸}}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۸}}$$

در نتیجه $a^{\frac{۱}{۸}}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۸}}$، پس $a=\frac{۱}{۲}$.

مقایسه‌ی توان‌های با نمای گویا

فرض کنید a عددی حقیقی باشد و $a>۱$. در این صورت،

- اگر r عددی گویا و مثبت باشد، آن‌گاه $a^r>۱$.
- اگر r و s عددهایی گویا و مثبت باشند و $r>s$،آن‌گاه $a^r>a^s$.

همچنین، اگر a عددی حقیقی باشد و $۰<a<۱$، آن‌گاه

- اگر r عددی گویا و مثبت باشد، آن‌گاه $۰<a^r<۱$.
- اگر r و s عددهایی گویا و مثبت باشند و $r>s$، آن‌گاه $a^r<a^s$.

تست ۵

اگر $۰<x<۱$ و $c=\sqrt[۳]{x}$ و $b=\sqrt[۵]{x^{۴}}$ و $a=\sqrt{x}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $c<b<a$

۲) $c<a<b$

۳) $b<c<a$

۴) $b<a<c$

پاسخ: توجه کنید که

$$a=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}},\quad b=\sqrt[۵]{x^{۴}}=x^{\frac{۴}{۵}},\quad c=\sqrt[۳]{x}=x^{\frac{۱}{۳}}$$

از طرف دیگر

$$\frac{۴}{۵}>\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۳}$$

و چون $۰<x<۱$، پس

$$x^{\frac{۱}{۳}}>x^{\frac{۱}{۲}}>x^{\frac{۴}{۵}}\Rightarrow c>a>b$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل سوم

درس سوم
توان‌های گویا

۶۳- حاصل کسر $\frac{(۰/۰۴)^{\frac{۱}{۲}}\times(۶۲۵)^{-\frac{۱}{۴}}}{(۰/۰۰۸)^{-\frac{۱}{۳}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۱}{۲۵}$
۳) $\frac{۱}{۱۲۵}$
۴) $\frac{۲}{۲۵}$

۶۴- حاصل $\frac{(۰/۰۰۰۳۲)^{۰/۲}}{(۰/۲۵)^{۰/۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۲۵}$
۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۶۵- حاصل $\frac{۸^{\frac{۳}{۴}}\times۱۲^{\frac{۱}{۳}}\times۹^{\frac{۳}{۵}}}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۲}}\times(\frac{۱}{۳})^{\frac{۷}{۱۵}}}$ کدام است؟

۱) ۴۸
۲) ۵۴
۳) ۷۲
۴) ۱۴۴

۶۶- حاصل $۳^{-\frac{۱}{۲}}\sqrt{۲۷}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) ۳
۴) ۹

۶۷- مقدار $(\frac{۱}{۶۴})^{\frac{۵}{۶}}-(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۴}{۵}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۶}$
۲) $\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{۱}{۳۲}$
۴) $-\frac{۱}{۳۲}$

۶۸- مقدار $۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}}+۲۷^{-\frac{۲}{۳}}+۳۲^{-\frac{۲}{۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰۱}{۳۰}$
۲) $\frac{۱۰۱}{۶۰}$
۳) $\frac{۱۰۱}{۱۲۰}$
۴) $\frac{۱۰۱}{۱۸۰}$

۶۹- حاصل عبارت $\frac{۶۴^{\frac{۱}{۶}}\times۱۲۵^{\frac{۴}{۳}}}{۹^{\frac{۳}{۲}}-۸^{\frac{۱}{۳}}}$ کدام است؟

۱) ۲۵
۲) ۵۰
۳) ۱۰
۴) ۵

۷۰- حاصل عبارت $\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}-۲^{-\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۱}{۲}}+۲^{-\frac{۱}{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

۷۱- مقدار $۹^{\frac{۱}{۳}}+(۲۴^{-\frac{۱}{۳}})۶-۲۴^{\frac{۱}{۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $۲\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $۳\sqrt[۳]{۳}$ ۴) ۳

۷۲- اگر $a>۰$، حاصل عبارت $(\frac{\sqrt[۳]{a^۴}}{\sqrt[۴]{a^۳}})^{\frac{۶}{۷}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{a}$ ۲) $\sqrt[۳]{a}$ ۳) $\sqrt[۴]{a}$ ۴) $\sqrt[۶]{a}$

۷۳- حاصل عبارت $\sqrt{۵\sqrt{۵\sqrt{۵\sqrt{۵}}}}\times\sqrt[۸]{\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲۵}$ ۴) $\sqrt[۸]{۵}$

۷۴- ساده شده‌ی عبارت $A=\frac{۲\sqrt{۳\sqrt{۲\sqrt{۳}}}}{۳\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۲}}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۸]{۶^۵}$ ۲) $\sqrt[۴]{(\frac{۳}{۲})^۵}$ ۳) $\sqrt[۸]{(\frac{۲}{۳})^۵}$ ۴) $\sqrt[۴]{(\frac{۲}{۳})^۳}$

۷۵- اگر $a>۰$، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{a\sqrt[۴]{a}}}{\sqrt[۳]{a\sqrt{a\sqrt[۴]{a}}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{a}$ ۲) $\sqrt[۳]{a}$ ۳) $\sqrt[۶]{a}$ ۴) $\sqrt[۱۲]{a}$

۷۶- حاصل $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt[۳]{۳}}{۱+\sqrt[۶]{۳}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۹]{۳}$ ۲) $\sqrt[۶]{۳}$ ۳) $\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۷۷- اگر $۲^a=\frac{\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۴}}}{۲\sqrt[۳]{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۷۸- اگر $\sqrt[۱۰۵]{۲^a}=\sqrt[۷]{۲^۶\sqrt[۵]{۲^۴\sqrt[۳]{۲^۲}}}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۱۵۴ ۳) ۱۰۴ ۴) ۲۰۸

۷۹- اگر $۲=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۶]{a}}{\sqrt[۴]{a}\times\sqrt[۵]{a}\times\sqrt[۲۰]{a}}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۱۶

۸۰- اگر $a^{۰/۲}=b^{۰/۵}$، مقدار $a^{۰/۵}$ کدام است؟ $(a,b>۰)$

۱) $b^{۰/۷۵}$ ۲) $b^{۱/۲۵}$ ۳) $b^{۱/۵}$ ۴) $b^{۱/۷۵}$

۸۱- اگر $(\frac{۱}{۱۲۵})^{-۱}=\sqrt[۵]{۵^{\frac{n-۱}{۲}}}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۷ ۳) ۲۱ ۴) ۳۱

۸۲- اگر $((۱۲۵)^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[n]{۵}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۸۳- اگر $\frac{\sqrt[۳]{۳^n}\times\sqrt[۴]{۹}}{\sqrt[۶]{۳}}=(\frac{۱}{۸۱})^{-۲}$، مقدار n چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

۸۴- اگر $x=\sqrt[۱۳]{۲^{۱۵}}$ حاصل $x\times\sqrt[۳]{x}\times\sqrt[۵]{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\sqrt[۱۳]{۲^۶}$

۸۵- اگر $\sqrt[۴]{۹\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}\sqrt{۴۸}}}=۳^{\frac{n}{۲۴}}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۸۶- اگر $\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۳۲^k}}$، مقدار k چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۷- اگر $۲^{\frac{۱}{۱۰}}\times۲^{\frac{۲}{۱۰}}\times۲^{\frac{۳}{۱۰}}\times\ldots\times۲^{\frac{۹}{۱۰}}=۳۲^{\frac{۹}{a}}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۸۸- اگر $x>۰$ و $\sqrt[۳]{\frac{x^۲}{\sqrt{x}}}=۴$، مقدار x کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۸۹- اگر $x>۰$ و $x\times\sqrt{x^۳}\times\sqrt[۳]{x^۴}=۳^{۱۷}\times۳^۶$، حاصل $\sqrt[۶]{x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt[۳]{۳^۲}$ ۳) ۳ ۴) $۳^۲$

۹۰- اگر $\sqrt{a\sqrt[۳]{a}}=۴$، مقدار $\sqrt{a+\sqrt[۳]{a}}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۸}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

۹۱- اگر $\sqrt[۴]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{۵\sqrt[۳]{۵\sqrt[۴]{۵^۲}}}$، مقدار x چقدر است؟

۱) $\sqrt[۳]{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۵ ۴) ۲۵

۹۲- اگر $\sqrt{x\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}\sqrt{x}}}=۳^۵$، مقدار x چقدر است؟

۱) $۳^{-۱۲}$ ۲) $۳^{۱۲}$ ۳) $۳^۸$ ۴) $۳^{-۸}$

۹۳- اگر $\sqrt[۳]{x\sqrt[۴]{۴}}=\sqrt[۱۰]{x\sqrt{۲}}$، مقدار x کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۹۴- اگر $a=۵^{\frac{۱۲}{۵}}$ و $b=۷^{\frac{۲۷}{۵}}$، حاصل $۳۵^{\frac{۲۲}{۵}}$ بر حسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{۵a}{۷b}$ ۲) $\frac{۷ab}{۲۵}$ ۳) $\frac{۲۵ab}{۷}$ ۴) $\frac{a+۱}{b+۱}$

۹۵- اگر $a^۴b^۳=۱۶$، مقدار $\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}\times\sqrt[۳]{b\sqrt{a}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $\sqrt{۸}$

۹۶- کدام عدد از بقیه کوچک‌تر است؟

۱) $۶۴^{\frac{۱}{۵}}$ ۲) $۳۲^{\frac{۱}{۴}}$ ۳) $۱۶^{\frac{۱}{۳}}$ ۴) $۸^{\frac{۱}{۲}}$

۹۷- اگر $x=(۹)^{\frac{۳}{۲}}$، $y=(۸۱)^{\frac{۳}{۲}}$ و $z=(۲۴۳)^{\frac{۳}{۵}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $x>y>z$

۲) $y>x>z$

۳) $y>x=z$

۴) $x=z>y$

۹۸- اگر $a=\sqrt[۳]{۴}$، $b=\sqrt[۷]{۶۴}$ و $c=\sqrt[۹]{۲۵۶}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $a<b<c$

۲) $b<c<a$

۳) $b<a<c$

۴) $c<a<b$

۹۹- اگر $x>۱$ و $a=\sqrt[۴]{x^{۳}}$، $b=\sqrt[۵]{x^{۲}}$ و $c=\sqrt[۶]{x^{۹}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a>b>c$

۲) $b<a<c$

۳) $c<a<b$

۴) $a>c>b$

۱۰۰- اگر $۰<a<۱$ و $x=\sqrt{a^{۳}}$، $y=\sqrt[۳]{a^{۴}}$ و $z=\sqrt[۱۲]{a^{۱۰}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $z<y<x$

۲) $z<x<y$

۳) $x<y<z$

۴) $x<z<y$

۱۰۱- اگر $a=\sqrt{۲}-۱$، کدام عدد بزرگ‌تر است؟

۱) $\sqrt[۳]{a^{۲}}$

۲) $\sqrt[۴]{a^{۳}}$

۳) $\sqrt[۵]{a^{۴}}$

۴) $\sqrt[۶]{a^{۵}}$

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس چهارم: عبارت‌های جبری

اتحادهای معروف

۱ــ اتحاد مربع مجموع دو جمله

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

۲ــ اتحاد مربع تفاضل دو جمله

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$$

از اتحادهای بالا نتیجه می‌شود که

$$a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$$

$$a^{۲}+b^{۲}=(a-b)^{۲}+۲ab$$

۳ــ اتحاد مربع مجموع سه جمله

اگر a ، b و c عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(ab+bc+ca)$$

از اتحاد بالا نتیجه می‌شود

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=(a+b+c)^{۲}-۲(ab+bc+ca)$$

$$ab+bc+ca=\frac{۱}{۲}((a+b+c)^{۲}-a^{۲}-b^{۲}-c^{۲})$$

۴ــ اتحاد مزدوج

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند آن‌گاه

$$(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$$

۵ــ اتحاد جمله‌ی مشترک

اگر a ، b و c عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a+b)(a+c)=a^{۲}+(b+c)a+bc$$

۶ــ اتحاد مکعب مجموع دو جمله

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$

اتحاد بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳ab(a+b)+b^{۳}$$

۷- اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$$

اتحاد بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(a-b)^۳=a^۳-۳ab(a-b)-b^۳$$

۸- اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها (چاق و لاغر)

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$$

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$$

اتحادهای بالا را می‌توان به شکل زیر هم نوشت:

$$(a+b)((a+b)^۲-۳ab)=a^۳+b^۳$$

$$(a-b)((a-b)^۲+۳ab)=a^۳-b^۳$$

تست ۱ اگر $a+\frac{۳}{۲a}=۴$، مقدار $۴a^۲+\frac{۹}{a^۲}$ چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۵۲ ۴) ۷۶

پاسخ: توجه کنید که

$$۴a^۲+\frac{۹}{a^۲}=(۲a+\frac{۳}{a})^۲-۱۲$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $a+\frac{۳}{۲a}=۴$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$۲a+\frac{۳}{a}=۸$$

بنابراین، حاصل عبارت موردنظر برابر است با

$$۸^۲-۱۲=۵۲$$

تست ۲ اگر $a+b=۳$ و $a^۲b+ab^۲=-۳۰$ حاصل $a^۲-ab+b^۲+۱۱$ چقدر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۸ ۴) ۱۸

پاسخ: توجه کنید که

$$a^۲b+ab^۲=ab(a+b)=-۳۰\xrightarrow{a+b=۳}ab=-۱۰$$

بنابراین

$$a^۲-ab+b^۲=(a+b)^۲-۳ab=۹-۳(-۱۰)=۳۹$$

در نتیجه حاصل عبارت موردنظر برابر ۵۰ است.

تست ۳ اگر $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۴-x}=۳$، حاصل $۵x-x^۲$ چقدر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵ ۳) ۱۳ ۴) ۳۶

پاسخ: ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$۹=x-۱+۴-x+۲\sqrt{(x-۱)(۴-x)}=۳+۲\sqrt{-x^۲+۵x-۴}$$

بنابراین $\sqrt{۵x-x^۲-۴}=۳$. در نتیجه

$$۵x-x^۲-۴=۳^۲=۹\Rightarrow ۵x-x^۲=۱۳$$

تست ۴

مقدار $\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}} \div \sqrt{\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۳-۲\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}} \div \sqrt{\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۳-۲\sqrt{۲}}} = \sqrt{\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۶-۲\sqrt{۵}}} \times \sqrt{\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۶+۲\sqrt{۵}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})}{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}}$$

$$= \sqrt{\frac{۳^۲-(۲\sqrt{۲})^۲}{۶^۲-(۲\sqrt{۵})^۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{۹-۸}{۳۶-۲۰}} = \sqrt{\frac{۱}{۱۶}} = \frac{۱}{۴}$$

تست ۵

مقدار $\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: راه‌حل اول: توجه کنید که

$$۵-۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲}^۲+\sqrt{۳}^۲-۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲$$

$$۵+۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲}^۲+\sqrt{۳}^۲+۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲$$

در نتیجه

$$\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}+\sqrt{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}$$

$$=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم: فرض کنید $x=\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$. در این صورت

$$x^۲=(\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}})^۲+(\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}})^۲+۲\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}\times\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$$

$$=۵-۲\sqrt{۶}+۵+۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{(۵-۲\sqrt{۶})(۵+۲\sqrt{۶})}$$

$$=۱۰+۲\sqrt{۵^۲-(۲\sqrt{۶})^۲}=۱۰+۲\sqrt{۲۵-۲۴}=۱۰+۲=۱۲$$

بنابراین $x=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$.

تست ۶

اگر $a=۷-۴\sqrt{۳}$ و $b=(۲+\sqrt{۳})^۲$، حاصل $a^۸b^۸$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: توجه کنید که $a=۷-۴\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^۲$. در نتیجه

$$ab=(۲-\sqrt{۳})^۲\times(۲+\sqrt{۳})^۲=((۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}))^۲=۱$$

بنابراین

$$a^۸b^۸=(ab)^۸=۱^۸=۱$$

تست ۷ حاصل عبارت $(۳+\sqrt{۵}-\sqrt{۱۴})(۳+\sqrt{۱۴}+\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۵}$
۲) $۶\sqrt{۵}$
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ: بنابر اتحاد مزدوج،

$$(۳+\sqrt{۵}+\sqrt{۱۴})(۳+\sqrt{۵}-\sqrt{۱۴})$$
$$=(۳+\sqrt{۵})^۲-(\sqrt{۱۴})^۲$$
$$=۱۴+۶\sqrt{۵}-۱۴=۶\sqrt{۵}$$

تست ۸ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲+۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۶-۴\sqrt{۲}}$ چند است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt[۳]{۲}$
۳) $\sqrt[۳]{۴}$
۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: چون $۶-۴\sqrt{۲}=(۲-\sqrt{۲})^۲$، پس

$$\sqrt[۶]{۶-۴\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{(۲-\sqrt{۲})^۲}=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۲}}$$

در نتیجه عبارت موردنظر برابر است با

$$\sqrt[۳]{(۲+۲\sqrt{۲})(۲-\sqrt{۲})}=\sqrt[۳]{۲(۱+\sqrt{۲})\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}\underbrace{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}_{۱}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

تست ۹ اگر $\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۳}=-\frac{۱}{۱۲}$، مقدار $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۴۸

پاسخ: فرض می‌کنیم مقدار عبارت خواسته شده برابر a باشد. یعنی

$$a=\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}$$

طرفین تساوی بالا و تساوی $\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۳}=-\frac{۱}{۱۲}$ را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$-\frac{۱}{۱۲}a=(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳})(\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۳})\Rightarrow-\frac{a}{۱۲}=x-۱-(x+۳)$$
$$\Rightarrow-\frac{a}{۱۲}=-۴\Rightarrow a=۴۸$$

تست ۱۰ اگر $a+b=۴-c$ و $ab+ac+bc=۳$، مقدار $a^۲+b^۲+c^۲$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

پاسخ: تساوی $a+b=۴-c$ را به شکل $a+b+c=۴$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(a+b+c)^۲=۱۶\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc=۱۶$$
$$\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۲(\underbrace{ab+ac+bc}_{۳})=۱۶$$
$$\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۶=۱۶$$

بنابراین $a^۲+b^۲+c^۲=۱۰$.

تست ۱۱

اگر $a-b=۶$ و $b-c=۲$، مقدار $a^{۲}+bc-ab-ac$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

پاسخ: با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}a^{۲}+bc-ab-ac&=a^{۲}-a(b+c)+bc\\&=(a-b)(a-c)\end{aligned}$$

از طرف دیگر، $a-b=۶$ و

$$a-c=(a-b)+(b-c)=۶+۲=۸$$

بنابراین عبارت موردنظر برابر است با $۴۸=۸\times۶$.

تست ۱۲

اگر $a+\frac{۳}{a}=۵$، مقدار عبارت $a^{۳}+\frac{۲۷}{a^{۳}}$ چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۷۰

پاسخ: طرفین تساوی $a+\frac{۳}{a}=۵$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(a+\frac{۳}{a})^{۳}=۱۲۵\Rightarrow a^{۳}+۳a^{۲}(\frac{۳}{a})+۳(\frac{۹}{a^{۲}})a+\frac{۲۷}{a^{۳}}=۱۲۵$$

$$a^{۳}+\frac{۲۷}{a^{۳}}+۹a+\frac{۲۷}{a}=۱۲۵$$

$$a^{۳}+\frac{۲۷}{a^{۳}}+۹(a+\frac{۳}{a})=۱۲۵$$

اگر به جای $a+\frac{۳}{a}$ مقدار آن یعنی ۵ را قرار دهیم، مقدار عبارت $a^{۳}+\frac{۲۷}{a^{۳}}$ به‌دست می‌آید:

$$a^{۳}+\frac{۲۷}{a^{۳}}+۹(۵)=۱۲۵$$

بنابراین

$$a^{۳}+\frac{۲۷}{a^{۳}}=۸۰$$

تست ۱۳

حاصل $\frac{\sqrt[۳]{۷+۵\sqrt{۲}}}{۱+\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{\sqrt[۳]{۷+۵\sqrt{۲}}}{۱+\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۷+۵\sqrt{۲}}{(۱+\sqrt{۲})^{۳}}}$$

از طرف دیگر،

$$(۱+\sqrt{۲})^{۳}=(\sqrt{۲})^{۳}+۳(\sqrt{۲})^{۲}+۳\sqrt{۲}+۱=۷+۵\sqrt{۲}$$

بنابراین صورت و مخرج کسر موردنظر برابر است، یعنی مقدار آن برابر ۱ است.

تست ۱۴ مقدار عبارت $A=\frac{\sin^۶ x+\cos^۶ x-۱}{\sin^۴ x+\cos^۴ x-۱}$ به ازای $x=۴۰^\circ$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: به کمک اتحادهای $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ و $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ صورت و مخرج عبارت A را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\sin^۴ x+\cos^۴ x&=(\sin^۲ x)^۲+(\cos^۲ x)^۲\\&=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x\\&=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^۶ x+\cos^۶ x&=(\sin^۲ x)^۳+(\cos^۲ x)^۳\\&=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۳-۳\sin^۲ x\cos^۲ x(\sin^۲ x+\cos^۲ x)\\&=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x\end{aligned}$$

بنابراین

$$A=\frac{۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x-۱}{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x-۱}=\frac{۳\sin^۲ x\cos^۲ x}{۲\sin^۲ x\cos^۲ x}=\frac{۳}{۲}$$

پس مقدار عبارت A به ازای هر مقدار x برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

تست ۱۵ مقدار $\frac{۹۹۹^۳+۱}{۹۹۹^۲-۹۹۸}$ چقدر است؟

۱) ۹۹۸ ۲) ۹۹۹ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۰۰۱

پاسخ: بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\begin{aligned}۹۹۹^۳+۱&=(۹۹۹+۱)(۹۹۹^۲-۹۹۹+۱)\\&=۱۰۰۰(۹۹۹^۲-۹۹۸)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{۹۹۹^۳+۱}{۹۹۹^۲-۹۹۸}=۱۰۰۰$$

تجزیه

اگر یک چندجمله‌ای را به شکل حاصل‌ضرب چند چندجمله‌ای دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن را **تجزیه** کرده‌ایم. **مضرب‌های** هر چندجمله‌ای با ضریب‌های صحیح، از ضرب کردن این چندجمله‌ای در چندجمله‌ای‌هایی دیگر که ضریب‌هایشان عددهایی صحیح‌اند، به‌دست می‌آیند.

تست ۱۶ اگر $a-\frac{۱}{a}=\sqrt{۵}$، مقدار $\frac{a^۶-۱}{a^۴-a^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{a^۶-۱}{a^۴-a^۲}&=\frac{(a^۲)^۳-۱}{a^۲(a^۲-۱)}=\frac{(a^۲--۱)((a^۲)^۲+a^۲+۱)}{a^۲(a^۲-۱)}\\&=\frac{a^۴+a^۲+۱}{a^۲}=\frac{a^۴}{a^۲}+\frac{a^۲}{a^۲}+\frac{۱}{a^۲}=a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱\\&=(a-\frac{۱}{a})^۲+۲+۱=\sqrt{۵}^۲+۲+۱=۸\end{aligned}$$

تست ۱۷

اگر $\alpha=\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}$ و $\beta=\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}$، حاصل عبارت $(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲)(\alpha^۲-\alpha\beta+\beta^۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۸ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $-۶\sqrt{۲}$

پاسخ: ابتدا به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲)(\alpha^۲-\alpha\beta+\beta^۲)&=(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲)(\alpha+\beta)(\alpha^۲-\alpha\beta+\beta^۲)\\&=(\alpha^۳-\beta^۳)(\alpha^۳+\beta^۳)=\alpha^۶-\beta^۶\end{aligned}$$

واضح است که مقدار این عبارت برابر است با

$$۳\sqrt{۲}-۴-(۳\sqrt{۲}+۴)=-۸$$

تست ۱۸

حاصل عبارت $\frac{۳x^۲+۲x-۱}{x^۲-۱}\div\frac{۳x-۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $۳x$ ۲) x ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}۳x^۲+۲x-۱&=(x^۲-۱)+(۲x^۲+۲x)\\&=(x-۱)(x+۱)+۲x(x+۱)\\&=(x+۱)(x-۱+۲x)\\&=(x+۱)(۳x-۱)\end{aligned}$$

بنابراین، عبارت موردنظر برابر است با

$$\frac{۳x^۲+۲x-۱}{x^۲-۱}\div\frac{۳x-۱}{x-۱}=\frac{(x+۱)(۳x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}\times\frac{x-۱}{۳x-۱}=۱$$

تست ۱۹

کدام‌یک از عبارت‌های زیر عامل $x^۴-۵x^۲+۴$ نیست؟

۱) $x-۳$ ۲) $x-۲$ ۳) $x-۱$ ۴) $x+۱$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}x^۴-۵x^۲+۴&=(x^۲-۴)(x^۲-۱)\\&=(x-۲)(x+۲)(x-۱)(x+۱)\end{aligned}$$

بنابراین $x-۳$، عامل $x^۴-۵x^۲+۴$ نیست.

تست ۲۰

هر گاه $a+b=۳$ و $b+۲=c$ حاصل عبارت $a^۲+ab+bc+ca$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: با توجه به اتحاد جمله‌ی مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^۲+ab+ac+bc=a^۲+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

توجه کنید که

$$a+c=a+b+c-b=۳+۲=۵$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۳\times۵=۱۵$.

گویا کردن مخرج‌های گنگ

تغییر مخرج کسر از عددی گنگ به عددی گویا را **گویا کردن مخرج کسر** می‌نامند. برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج کسر را در عاملی مناسب ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود.

تست ۲۱ حاصل $\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}-۵$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۱۰
۴) ۵

پاسخ: مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}-۵=\frac{(۴+۲\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}-۵=\frac{۴\sqrt{۳}+۴+۶+۲\sqrt{۳}}{۳-۱}-۵$$

$$=\frac{۱۰+۶\sqrt{۳}}{۲}-۵=۵+۳\sqrt{۳}-۵=۳\sqrt{۳}$$

تست ۲۲ کدام گزینه گویا شده‌ی کسر $\frac{۴}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}$ است؟

۱) $۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$
۲) $۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$
۳) $۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۶}$
۴) $۱-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

پاسخ: صورت و مخرج کسر داده شده را در $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۴(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{۴(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$$

تست ۲۳ حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt{۳+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳-\sqrt{۲}}}\times\frac{\sqrt{۱۱-۶\sqrt{۲}}}{\sqrt{۷}}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۷}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۷

پاسخ: کسر $\frac{\sqrt{۳+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳-\sqrt{۲}}}$ را به‌صورت $\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}}$ می‌نویسیم و مخرج آن را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}}=\sqrt{\frac{(۳+\sqrt{۲})^{۲}}{(۳-\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})}}=\sqrt{\frac{۹+۲+۶\sqrt{۲}}{۹-۲}}=\sqrt{\frac{۱۱+۶\sqrt{۲}}{۷}}$$

بنابراین عبارت A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A=\sqrt{\frac{۱۱+۶\sqrt{۲}}{۷}}\times\frac{\sqrt{۱۱-۶\sqrt{۲}}}{\sqrt{۷}}=\frac{\sqrt{(۱۱+۶\sqrt{۲})(۱۱-۶\sqrt{۲})}}{\sqrt{۷}\times\sqrt{۷}}=\frac{\sqrt{۱۲۱-۳۶\times۲}}{۷}=\frac{\sqrt{۴۹}}{۷}=۱$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل سوم

درس چهارم:
عبارت‌های جبری

۱۰۲- مقدار عبارت $x^{۲}+۴x$ به ازای $x=\sqrt{۳}-۲$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۳- اگر $a-b=۳$ و $ab=۲$، حاصل $a^{۴}+b^{۴}$ کدام است؟

۱) ۱۷۷ ۲) ۱۶۱ ۳) ۳۷ ۴) ۱۷

۱۰۴- اگر $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=۶$، حاصل $\frac{a^{۴}+b^{۴}}{a^{۲}b^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۲ ۳) ۶۴ ۴) ۳۸

۱۰۵- اگر $x+\frac{۳}{۲x}=۳$، حاصل عبارت $۴x^{۲}+\frac{۹}{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۱۰۶- اگر $a^{۲}+b^{۲}=۵ab$ و $a>b>۰$، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۱۰۷- اگر $xy=۲$ و $x^{۲}+y^{۲}=۵$، حاصل $x^{۴}-۱۴x^{۲}y^{۲}+y^{۴}$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۳ ۳) -۱۳ ۴) -۳۹

۱۰۸- اگر $\frac{۱}{a}-|a|=۱$، حاصل $\frac{۱}{a}+|a|$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $-\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۰۹- اگر $\frac{(x-۷)(y-۸)}{(x-۷)^{۲}+(y-۸)^{۲}}=-\frac{۱}{۲}$، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۵ ۳) ۱ ۴) ۲۲

۱۱۰- اگر $y^{۲}-۴x=۴\ ,\ x^{۲}-۲y=-۹$ مقدار $x+y$ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۱۱- حاصل $\sqrt{\frac{۴۹}{۹}+\frac{۱}{۴}-\frac{۷}{۳}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۱۱۲- مقدار $\frac{۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})}{۳\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۱۳- اگر $a+۲b=\sqrt{۱۲}$ و $\frac{۱}{a}+b=\sqrt{۴۸}$، مقدار $a^۲+\frac{۴}{a^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲۲ ۲) ۱۱۶ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۰۸

۱۱۴- اگر $\frac{۱}{۳}=\frac{x}{x^۲+۱}$، حاصل $\frac{x^۲}{x^۴+۱}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۱}$

۱۱۵- اگر $a+\frac{۱}{a+۲}=۴$، مقدار عبارت $(a+۲)^۲+\frac{۱}{(a+۲)^۲}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

۱۱۶- اگر $x-\frac{۱}{x-۲}=۴$، حاصل $\frac{(x-۲)^۲}{(x-۲)^۴+۱}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۱۷- اگر $\frac{۱}{۲}=\frac{x}{x^۲-۳x+۴}$، حاصل $\frac{x^۲}{x^۴-x^۲+۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۷}$

۱۱۸- اگر $a^۲-۴a+۲=۰$، مقدار $a^۲+\frac{۴}{a^۲}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۱۹- اگر $a+۲\sqrt{a}=۱$، حاصل $a^۲-۶a$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۲۰- اگر $x^۲-۳x-۱=۰$، مقدار $x^۴-۳۳x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۲۱- اگر $a-b=۱+\sqrt{۲}$ و $b-c=۱-\sqrt{۲}$، مقدار عبارت $a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲۲- عبارت $\left(\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}\right)^۴$ با کدام عدد زیر برابر است؟

۱) $۹+۴\sqrt{۲}$ ۲) ۸ ۳) ۶۴ ۴) $۳۳+۸\sqrt{۲}$

۱۲۳- عدد $۲\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}$ با کدام عدد زیر برابر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۱۴}-۳$

۱۲۴- حاصل عبارت $\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}$ ۲) $۱-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}$

۱۲۵- اگر $\sqrt{۱۱+\sqrt{۷۲}}=x+\sqrt{۲}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۹

۱۲۶- ساده شده‌ی عبارت $\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۱۴ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۲۸

۱۲۷- مقدار عبارت $۲x^۳-۴x^۲-۸x+۳$ به ازای $x=۱-\sqrt{۵}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۸- مقدار عبارت $۲a^۳+۷a^۲-۲a-۱۲$ به ازای $a=\sqrt{۵}-۱$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $۱۶a$ ۳) $۸a$ ۴) ۲۴

۱۲۹- اگر $a=\sqrt{۷}+\sqrt{۲۱}\,,\,b=\sqrt{۱۰}+۳\sqrt{۲}\,,\,c=\sqrt{۱۳}+\sqrt{۱۵}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $c<b<a$ ۲) $b<c<a$ ۳) $a<c<b$ ۴) $a<b<c$

۱۳۰- کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $۳-\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۶}-۲$ ۳) $۳\sqrt{۶}-۷$ ۴) $\sqrt{۸}-\sqrt{۶}$

۱۳۱- کم‌ترین مقدار ممکن عبارت $x^۲+y^۲+z^۲-۶x+۴y-۸z+۱۰$ چقدر است؟

۱) -۲۱ ۲) -۲۰ ۳) -۱۹ ۴) -۱۸

۱۳۲- ساده شده‌ی عبارت $\sqrt{۲-۲\cos\alpha-\sin^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) $۱-\cos\alpha$ ۲) $\cos\alpha-۱$ ۳) $\sin\alpha-۱$ ۴) $۱-\sin\alpha$

۱۳۳- ساده شده‌ی عبارت $\dfrac{\sqrt{\sin^۴ ۱۵^\circ+۴\cos^۲ ۱۵^\circ-۲}}{\sqrt{\cos^۴ ۱۵^\circ+۴\sin^۲ ۱۵^\circ-۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\tan^۲ ۱۵^\circ$ ۳) $\cot^۲ ۱۵^\circ$ ۴) $\sin^۲ ۱۵^\circ$

۱۳۴- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع سوم باشد، ساده شده‌ی عبارت $۱+\cot\alpha\sqrt{\dfrac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{-۱}{\cos\alpha}$ ۲) $\dfrac{۱}{\cos\alpha}$ ۳) $\dfrac{-۱}{\sin\alpha}$ ۴) $\dfrac{۱}{\sin\alpha}$

۱۳۵- حاصل عبارت $\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha-\sin^۴\alpha}}$ به ازای $\alpha=۱۰۰^\circ$ کدام است؟

۱) $-\sin ۱۰۰^\circ-\cos ۱۰۰^\circ$ ۲) $\sin ۱۰۰^\circ-\cos ۱۰۰^\circ$ ۳) $-\sin ۱۰۰^\circ+\cos ۱۰۰^\circ$ ۴) $\sin ۱۰۰^\circ+\cos ۱۰۰^\circ$

۱۳۶- مقدار عبارت $A=\dfrac{۱}{x-۳}-\dfrac{۱}{x+۳}$ به ازای $x=\sqrt{۲}+\sqrt{۷}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ ۲) $\dfrac{۲}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\dfrac{۳}{\sqrt{۱۴}}$ ۴) $\dfrac{۶}{\sqrt{۱۴}}$

۱۳۷- اگر $a=\sqrt{۲}+۱$، حاصل عبارت $a(a-۱)(a-۲)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $۳-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳+۲\sqrt{۲}$

۱۳۸- اگر $a=\dfrac{۲+\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}-۱}$، حاصل $\dfrac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۶}-۲}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲a}$ ۲) $\dfrac{۲}{a}$ ۳) $\dfrac{a}{۲}$ ۴) $a^۲$

۱۳۹- اگر $a=\sqrt{۶}+۱$ و $b=\sqrt{۶}-۱$، مقدار عبارت $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\dfrac{۱۴}{۵}$

۱۴۰- حاصل عبارت $\sqrt{\dfrac{\sqrt{۲۴}+۴}{\sqrt{۲۴}-۴}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{۲۴}-۴}{\sqrt{۲۴}+۴}}$ کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۶}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) -۲

۱۴۱- اگر $a-b=b-c=۵$، مقدار عبارت $a^۲-۲b^۲+c^۲$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۷۵

۱۴۲- اگر $a^۷=\sqrt{۵}+۲$ و $b^۸=\sqrt{۵}-۲$، مقدار $(ab)^{۵۶}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}+۲$ ۲) $\sqrt{۵}-۲$ ۳) $۹-۴\sqrt{۵}$ ۴) $۹+۴\sqrt{۵}$

۱۴۳- اگر $a=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ و $b=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$، مقدار $(a+b)^{۶}$ چقدر است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۱۶ ۳) ۷۲۹ ۴) ۵۱۲

۱۴۴- حاصل عبارت $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}-\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۶}{\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) $-۶\sqrt{۳}$ ۲) $-۴\sqrt{۳}$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۱۴۵- واسطه‌ی هندسی عددهای $\sqrt[۴]{۶-۲\sqrt{۵}}$ و $\sqrt[۴]{۶+۲\sqrt{۵}}$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۱۴۶- اگر $۳^{\frac{۱}{۸}}-۱=a$، مقدار عبارت $(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{a}$ ۲) $\frac{۲}{a}$ ۳) $\frac{۱}{a+۱}$ ۴) $\frac{۲}{a+۱}$

۱۴۷- a، b و c عددهای حقیقی و مثبت‌اند، $a+b+c=۱۶$ و b واسطه‌ی هندسی a و c است. مقدار $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۴۸- ساده شده‌ی عبارت $(\sqrt{۲۲}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۰})(\sqrt{۳۳}-\sqrt{۱۸}+\sqrt{۱۵})$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) $۱۰\sqrt{۱۱}$ ۳) $۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲۲\sqrt{۶}$

۱۴۹- ساده شده‌ی عبارت $(۱-\sqrt{۲})\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۱۵۰- اگر $a=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}$ و $b=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$، مقدار ba کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۱۵۱- اگر $A=(۲-\sqrt{۳})(۷+۴\sqrt{۳})$ و $B=۵+\sqrt{۲۷}$، حاصل $\frac{۲A}{B}+۱$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱-\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۱۵۲- مقدار $\sqrt[۴]{۱۱+۴\sqrt{۷}}\times\sqrt{\sqrt{۷}-۲}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۴

۱۵۳- حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(۱۲-۲\sqrt{۳۵})}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۷}$

۱۵۴- حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۵۵- مقدار $\sqrt[۳]{۳+\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۱۱-۶\sqrt{۲}}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۶]{۲}$ ۳) $\sqrt[۶]{۵}$ ۴) $\sqrt[۳]{۷}$

۱۵۶- حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{۶}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۶}-۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۶}-۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۶]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۵۷- حاصل عبارت $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\times\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۵۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۱۷-۶\sqrt{۸}}}{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) $\sqrt{۲}+۱$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۱۵۹- اگر $x(x+۱)=a-۱$ و $x-۱=b$، حاصل $x^۳$ برابر کدام است؟

۱) $ab-۱$ ۲) $۱-ab$ ۳) $ab+۱$ ۴) $ab-a$

۱۶۰- اگر $a=b+\sqrt{b^۲-۱}$، حاصل عبارت $b-\sqrt{b^۲-۱}$ بر حسب a کدام است؟

۱) $۱-\frac{۱}{a}$ ۲) $\frac{۱}{a}$ ۳) $۱+\frac{۱}{a}$ ۴) $-\frac{۱}{a}$

۱۶۱- اگر $\frac{a-\sqrt{a^۲+۴b^۲}}{۲b}=\frac{۱}{۳}$، حاصل عبارت $\frac{a+\sqrt{a^۲+۴b^۲}}{۲b}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۳   ۴) ۱

۱۶۲- اگر $a-۱=\sqrt{۵}$، حاصل عبارت $(\sqrt[۴]{۵}+۱)(\sqrt[۴]{۵}-۱)$ بر حسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{a-۱}$ ۲) $\frac{۱}{a+۱}$ ۳) $\frac{۴}{a}$ ۴) $a+۲$

۱۶۳- اگر $\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}=\sqrt[۴]{x}+۱$، مقدار x چقدر است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

۱۶۴- اگر $x, y>۰$ و $x-\frac{۱}{y}=۱۲$ و $\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{y}}=۶$، مقدار yx کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۶

۱۶۵- مقدار عبارت $\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}}-\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۶۶- اگر $x=\sqrt{۱+\sqrt{۶}}$، حاصل عبارت زیر بر حسب x کدام است؟

$$\sqrt{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}}+\sqrt{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}$$

۱) $۲x^۲$ ۲) x ۳) $x\sqrt{۲}$ ۴) $x^۲$

۱۶۷- اگر $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=a$، حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{۳}+۱}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{a}$ ۲) $a۲$ ۳) $\sqrt{۲}a$ ۴) $\sqrt{۲a}$

۱۶۸- حاصل عبارت $(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}})\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴   ۴) ۱۶

۱۶۹- اگر $x^۲=۵x+۲$، حاصل عبارت $(x-۴)(x-۳)(x-۲)(x-۱)$ کدام است؟

۱) ۳۶   ۲) ۴۲   ۳) ۴۸   ۴) ۵۶

۱۷۰- اگر $x=۲^{\frac{۱}{۴}}-۱$، حاصل عبارت $x(\sqrt{۲}+۱)(x+۲)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۱+\sqrt{۲}$ ۴) $۱+۲\sqrt{۲}$

۱۷۱- مقدار عددی عبارت $x(x+۴)(x+۸)$ به ازای $x=\sqrt{۵}-۶$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}-۶$ ۲) $۲\sqrt{۵}-۱۲$ ۳) $۳\sqrt{۵}-۱۸$ ۴) $۶-\sqrt{۵}$

۱۷۲- اگر $a-۴\sqrt{a}+۱=۰$، مقدار $a^۲-۱۴a+۱$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

۱۸۹- اگر $a=\sqrt[۳]{۵}+۲$، مقدار $a^۳-۶a^۲+۱۲a+۱۸$ چقدر است؟

۱) ۱۵　　۲) ۲۵　　۳) ۳۱　　۴) ۳۷

۱۹۰- حاصل $۲(\sin^۶ ۲۵^\circ+\cos^۶ ۲۵^\circ)-۳(\sin^۴ ۲۵^\circ+\cos^۴ ۲۵^\circ)$ کدام است؟

۱) -۱　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) -۲

۱۹۱- اگر $x^۳-y^۳=۴۵$ و $x^۲y=۶+xy^۲$، حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) ۲

۱۹۲- اگر $a^۳+۳ab^۲=۶۳, b^۳+۳a^۲b=۶۲$ مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

۱) -۵　　۲) ۵　　۳) $-\frac{۵}{۳}$　　۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۹۳- حاصل $(۱۱-۴\sqrt{۷})^{\frac{۳}{۲}}+(۱۱+۴\sqrt{۷})^{\frac{۳}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۵۸　　۲) $۳۸\sqrt{۷}$　　۳) $۲۴\sqrt{۷}$　　۴) $۳۲\sqrt{۷}$

۱۹۴- اگر $x^۲(x-y)=۹۸-۲xy^۲, y^۲(y-x)=۳۴-۲x^۲y$، حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) -۴　　۲) ۴　　۳) -۳　　۴) ۳

۱۹۵- حاصل $(۲x-۳y)(۴x^۲+۶xy+۹y^۲)+۲۷y^۳$ کدام است؟

۱) $۸x^۳$　　۲) $۸x^۳-x^۲y$　　۳) $۸x^۳-y^۳$　　۴) $۸x^۳-xy^۲$

۱۹۶- اگر $(x-\sqrt{۳})(x^۲+x\sqrt{۳}+۳)=۲۷-۳\sqrt{۳}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۳　　۲) -۳　　۳) $\sqrt{۳}$　　۴) $-\sqrt{۳}$

۱۹۷- مقدار عبارت $\frac{۵(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})^{-۱}}{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}$ چقدر است؟

۱) ۱۶　　۲) ۹　　۳) ۴　　۴) ۱

۱۹۸- عبارت $۳۷۸^۳+۱۲۲^۳$ چند برابر $۳۷۸^۲+۱۲۲^۲-۳۷۸\times۱۲۲$ است؟

۱) ۵۰۰　　۲) ۶۰۰　　۳) ۷۵۶　　۴) ۱۴۴

۱۹۹- حاصل عبارت $\frac{۵^{۱۲}-۱}{۲۵^۴+۲۵^۲+۱}$ کدام است؟

۱) ۶۲۶　　۲) ۶۲۵　　۳) ۱۲۶　　۴) ۶۲۴

۲۰۰- حاصل عبارت $\frac{n^۳-۱}{(n+۱)^۲-(n+۱)+۱}$ به ازای $n=۲۹$ کدام است؟

۱) ۲۷　　۲) ۲۸　　۳) ۲۹　　۴) ۳۰

۲۰۱- حاصل عبارت $A=\frac{۱-a^۶}{(a-\frac{۱}{a})(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱)}$ به ازای $a=\sqrt[۶]{۲}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$　　۲) $-\sqrt[۳]{۲}$　　۳) $\sqrt{۲}$　　۴) $-\sqrt{۲}$

۲۰۲- اگر $a^۲=۲+b^۲$، مقدار عبارت زیر چند است؟

$$\frac{a^۶-b^۶}{(a^۲+b^۲)^۲-a^۲b^۲}$$

۱) ۲　　۲) -۴　　۳) ۴　　۴) -۲

۲۰۳- اگر $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۳$ و $ab=۹$، مقدار $\frac{۱}{b^۳}-\frac{۱}{a^۳}$ چقدر است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۲۰۴- a و b عددهایی مثبت‌اند و $a^۳+b^۳=۲ab(a+b)$. مقدار $a^۲b^{-۲}+a^{-۲}b^۲$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۰۵- اگر $\frac{a-۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۳}$، مقدار $a^۳+\frac{۱}{a^۳}$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۱۵

۲۰۶- اگر $a^۳-۲=۰$، حاصل $\frac{۱}{a^۲+a+۱}$ کدام است؟

۱) $a-۱$ ۲) $a-۲$ ۳) $a+۱$ ۴) $a+۲$

۲۰۷- اگر $a>۱$, $a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۱۸$، مقدار $a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ چقدر است؟

۱) ۷۲ ۲) ۷۴ ۳) ۷۶ ۴) ۷۸

۲۰۸- اگر $a^۲-۶a+۱=۰$، مقدار $a^۳+\frac{۱}{a^۳}$ چقدر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۹۸ ۴) ۲۱۶

۲۰۹- a و b عددهایی حقیقی و متمایزند و $\frac{a^۲}{b}-\frac{b^۲}{a}=b-a$. مقدار $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۱۰- اگر $a^۲-a-۱=۰$، مقدار $\frac{a^۴-۲}{a^۳-۱}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱۱- اگر $\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۱۵}=a$، حاصل $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{a}$ ۲) $\frac{a}{۴}$ ۳) $\frac{۸}{a}$ ۴) $\frac{a}{۸}$

۲۱۲- اگر $x+۱=a$ و $x^۲-x+۱=b$، مقدار $x^۳-ab+۱۰$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۱۳- اگر $x+\sqrt[۳]{y}=۱$، حاصل عبارت $\frac{x^۲+۳\sqrt[۳]{y}}{۱-y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x}$ ۲) x ۳) ۱ ۴) -۱

۲۱۴- اگر $\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x-۲}=\frac{۳}{۲}$ مقدار $\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x^۲-۲x}+\sqrt[۳]{x^۲-۴x+۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۲۱۵- حاصل عبارت $\frac{\sin^۳\alpha+\cos^۳\alpha}{\cos\alpha-\cos^۲\alpha\sin\alpha}-\tan\alpha$، کدام است؟

۱) $\sin\alpha$ ۲) $\cos\alpha$ ۳) $\tan\alpha$ ۴) ۱

۲۱۶- اگر $\frac{\tan^۳x-\cot^۳x}{\tan x-\cot x}=۵$، حاصل عبارت $\frac{۱}{\sin^۲x}+\frac{۱}{\cos^۲x}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۱۷- اگر $\sin x+\cos x=\frac{۲}{۳}$، حاصل $\sin^{۳} x+\cos^{۳} x$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲۲}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲۳}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲۴}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۷}$

۲۱۸- ساده شده‌ی عبارت $\frac{\sin^{۳} x-\cos^{۳} x}{\cos x-\sin x}+\sin x\cos x$ کدام است؟

۱) $(\sin x+\cos x)^{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۱۹- ساده شده‌ی عبارت $\frac{(x-۳)(x^{۲}-۱)}{x^{۲}-۳x+۹}\times\frac{x^{۳}+۲۷}{x^{۲}-۲x-۳}$ کدام است؟

۱) $(x+۱)(x-۳)$ ۲) $(x-۱)(x+۳)$ ۳) $(x-۱)(x-۳)$ ۴) $(x-۲)(x-۳)$

۲۲۰- ساده شده‌ی عبارت $\frac{x-x^{۲}}{x}\div\frac{x^{۳}+x^{۲}-۲x}{x^{۲}+۲x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-x$ ۳) $-\frac{۱}{x}$ ۴) x

۲۲۱- حاصل عبارت $\frac{x^{۲}-۷x+۶}{x^{۲}-۶x+۵}\times\frac{x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۵x-۶}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{x+۱}{x-۵}$ ۳) $\frac{x-۶}{x-۱}$ ۴) $\frac{x+۵}{x-۶}$

۲۲۲- حاصل عبارت $\frac{a(b+c)+c(b-a)}{a^{۲}+ab+bc+ca}$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{a+b}$ ۲) $\frac{b}{a+b}$ ۳) $\frac{b}{a+c}$ ۴) $\frac{b}{b+c}$

۲۲۳- اگر $a+b=۴$ و $b+c=۶$، مقدار عبارت $\frac{b^{۲}+ab+bc+ca}{c^{۲}+bc-ab-ac}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۴- اگر $x-y=۲$ و $y-z=۴$، حاصل عبارت $xy-y^{۲}-xz+yz+x-z$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۲۵- در تجزیه‌ی عبارت $۶x^{۳}-x^{۲}-۵x+۲$ کدام عبارت وجود ندارد؟

۱) $x-۲$ ۲) $۲x-۱$ ۳) $۳x-۲$ ۴) $x+۱$

۲۲۶- عدد $۱۷۱^{۴}-۱۶۹^{۴}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۲۲۷- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $۲x^{۲}+۸xy+۸y^{۲}+x+۲y-۱$ وجود دارد؟

۱) $x+۲y-۱$ ۲) $x+۲y+۱$ ۳) $۲x+y+۱$ ۴) $۲x+y-۱$

۲۲۸- حاصل عبارت $\frac{ab^{۳}+a^{۲}b^{۲}}{a^{۳}b-ab^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{b}{a-b}$ ۲) $\frac{a}{a-b}$ ۳) $\frac{۱}{a-b}$ ۴) $\frac{b}{a+b}$

۲۲۹- ساده شده‌ی عبارت $A=\frac{x^{۲}+۲xz+۴yz-۴y^{۲}}{x-۲y+۲z}$ کدام است؟

۱) $x-z$ ۲) $x-۲y$ ۳) $x+z$ ۴) $x+۲y$

۲۳۰- در تجزیه‌ی عبارت $۲a^۳-۲ab^۲-۳a^۲b+۳b^۳$ کدام عبارت وجود دارد؟

۱) $۳a-۲b$
۲) $a-۲b$
۳) $۲a-b$
۴) $۲a-۳b$

۲۳۱- حاصل عبارت $\frac{x^۲-y^۲-x+y}{x+y-۱}$ کدام است؟

۱) $x-y$
۲) $x-y-۱$
۳) $x-y+۱$
۴) $y-x$

۲۳۲- در تجزیه‌ی عبارت $A=x^۴+y^۴+x^۲y^۲$ کدام عبارت وجود دارد؟

۱) $x^۲-y^۲+xy$
۲) $x^۲-y^۲-xy$
۳) $x^۲+y^۲-xy$
۴) $x^۲+y^۲$

۲۳۳- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $x^۴-۷x^۲y^۲+۹y^۴$ وجود دارد؟

۱) $x^۲-xy+y^۲$
۲) $x^۲+۲xy+۳y^۲$
۳) $x^۲+۳xy+۳y^۲$
۴) $x^۲-xy-۳y^۲$

۲۳۴- اگر $a+b=\sqrt{۵}$، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{a^۴+a^۲b^۲+b^۴}{a^۲+ab+b^۲}+۳ab$$

۱) ۵
۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

۲۳۵- اگر $x+y=۴$، حاصل عبارت $\frac{x^۲-y^۲+۴x+۴}{x^۲+۲x+۲y-y^۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۳۶- کدام گزینه عاملی از عبارت $a^۴-۸a^۲b^۲+۹b^۲$ است؟

۱) $a^۲+ab\sqrt{۲}+b^۲$
۲) $a^۲+۳\sqrt{۲}ab+۳b^۲$
۳) $a^۲-ab\sqrt{۲}-۳b^۲$
۴) $a^۲+۳b^۲+ab\sqrt{۲}$

۲۳۷- حاصل عبارت $\frac{a^۶-a^۴-a^۲+۱}{a^۳-a^۲-a+۱}$ به ازای $a=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}+۲$
۲) $۳\sqrt{۲}+۳$
۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$
۴) $۳\sqrt{۲}-۳$

۲۳۸- اگر $ab=۲$، حاصل عبارت $a^۲+b^۲+\frac{۷a^۲b^۲-a^۴-b^۴}{a^۲+b^۲+۳ab}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱

۲۳۹- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $x^۲-y^۲-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲}y-\frac{۳}{۶۴}$ وجود دارد؟

۱) $x+y+\frac{۳}{۸}$
۲) $x-y+\frac{۱}{۸}$
۳) $x-y-\frac{۱}{۴}$
۴) $x+y-\frac{۳}{۱۶}$

۲۴۰- ساده شده‌ی عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{x^۳+x+۱۳۰}{x^۲-۲۵}\div\frac{x^۲-۵x+۲۶}{x-۵}$$

۱) ۱
۲) x
۳) $\frac{x+۵}{x-۵}$
۴) $\frac{x}{x+۵}$

۲۴۱- ساده شده‌ی عبارت $\frac{x^۲+x+۱}{۲x^۲+۵x}\div\frac{x^۳-۱}{۲x^۲+۳x-۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x}$
۲) x
۳) $\frac{۱}{۲-x}$
۴) $\frac{۲}{۱+x}$

۲۴۲- کدام‌یک از عبارت‌های زیر عامل $(x^۲-x)^۲-۸(x^۲-x)+۱۲$ نیست؟

۱) $x+۳$
۲) $x-۳$
۳) $x+۲$
۴) $x-۲$

۲۴۳- عبارت $x^۵-x^۴+x^۳-x^۲+x-۱$ را به‌صورت $(x+a)(x^۲+bx+۱)(x^۲-bx+c)$ تجزیه کرده‌ایم. مقدار $۲a-b^۲+c$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۲۴۴- کدام گزینه مضربی از $m-۳$ نیست؟

۱) $m^۲-۲m-۳$
۲) $m^۳-۲۷$
۳) $\frac{۳m-۹}{۴}$
۴) $m^۲-۹$

۲۴۵- برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt[۷]{۸}}$، کوچک‌ترین عددی که باید در صورت و مخرج این کسر ضرب کنیم، کدام است؟

۱) $\sqrt[۷]{۲}$
۲) $\sqrt[۷]{۴}$
۳) $\sqrt[۷]{۸}$
۴) $\sqrt[۷]{۱۶}$

۲۴۶- حاصل عبارت $\frac{۳^{\frac{۳}{۲}}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $-۴/۵$
۳) $۴/۵$
۴) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$

۲۴۷- مقدار $\frac{\sqrt{۲}(۲-\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}-۱}-\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}+۱}$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

۲۴۸- اگر $y=۳-\sqrt{۳}$، حاصل $-\sqrt{۳}+۶y^{-۱}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) $۳+۲\sqrt{۳}$
۴) $۳-۲\sqrt{۳}$

۲۴۹- اگر $a=۲-\sqrt{۵}$، حاصل عبارت $\frac{۲a+۱}{a}$ چقدر است؟

۱) $-\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲+\sqrt{۵}$

۲۵۰- اگر $a=\sqrt[۴]{۵}$، مقدار $(a^۲-۲)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۵}$
۲) $۲+\sqrt{۵}$
۳) $۱+۲\sqrt{۵}$
۴) $۱+\sqrt[۴]{۵}$

۲۵۱- عبارت $\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}$
۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$
۳) $\frac{۱}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$

۲۵۲- معکوس عدد $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۴-\sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$
۳) $\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$
۴) $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$

۲۵۳- عبارت $\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}-\frac{۶}{\sqrt{۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۳}-۱$
۴) $\sqrt{۳}+۱$

۲۵۴- حاصل $\frac{۷}{۳+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) ۴

۲۵۵- حاصل عبارت $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}-\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$
۲) $\sqrt{۲}+۱$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۲

۲۵۶- حاصل $\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) $۱۰-\sqrt{۲}$
۴) ۱۱

۲۵۷- اگر $a=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۳}+۱}$ و $b=۱+\sqrt{۲}$، حاصل $\frac{ab-۱}{b}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

۲۵۸- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}-\frac{۸\sqrt{۵}-۸}{\sqrt{۵}+۱}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۹- اگر $x=\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+۳^{\frac{۱}{۲}}$، حاصل $(x-۱)^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۰- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۶}-\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۲}$

۲۶۱- حاصل عبارت $\frac{۱}{۳\sqrt{۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$

۲۶۲- اگر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۹}+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۳}+a$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱-\sqrt[۳]{۳}}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱+\sqrt[۳]{۳}}{۴}$

۲۶۳- حاصل $A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳\sqrt[۳]{۲}}{۲-\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) ۴

۲۶۴- حاصل عبارت $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}+\frac{۲}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۵}$ ۲) $\sqrt[۳]{۶}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}$

۲۶۵- اگر $x=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$ و $y=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}$، حاصل عبارت $x^۳+۱۲xy+y^۳$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۵ ۴) ۵۵

۲۶۶- اگر $x=\frac{۴^{\frac{۳}{۴}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$، حاصل $(x+\sqrt{۳})^۲-۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶۷- اگر $a=\sqrt{۲}-۱$، $b=\sqrt{۵}-۲$ و $c=\sqrt{۱۰}-۳$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a<b<c$ ۲) $a<c<b$ ۳) $c<b<a$ ۴) $b<c<a$

۲۶۸- حاصل عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}}+\frac{۱}{\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}}+\frac{۱}{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}$ چند است؟

۱) ۱ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $-۱+\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل سوم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۱- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{(۰/۰۰۱۶)^{-۱}}=\sqrt[۴]{(\frac{۱۶}{۱۰^{۴}})^{-۱}}=\sqrt[۴]{\frac{۱۰^{۴}}{۱۶}}=\sqrt[۴]{(\frac{۱۰}{۲})^{۴}}=۵$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۲}{۱۰۰}\times۵=۰/۱$$

۲- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$\sqrt{۰/۱۸}=\sqrt{\frac{۱۸}{۱۰۰}}=\frac{\sqrt{۱۸}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$$

$$\sqrt{۰/۹۸}=\sqrt{\frac{۹۸}{۱۰۰}}=\frac{\sqrt{۹۸}}{۱۰}=\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۸}}(\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}+\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰})=\frac{۱}{\sqrt{۸}}\times\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۸}}=\frac{۱}{۲}$$

۳- گزینه‌ی ④ توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{۰/۱۲۵}=\sqrt[۳]{\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}}=\frac{\sqrt[۳]{۵^{۳}}}{\sqrt[۳]{۱۰^{۳}}}=\frac{۵}{۱۰}$$

$$\sqrt[۴]{۰/۰۲۵۶}=\sqrt[۴]{\frac{۲۵۶}{۱۰۰۰۰}}=\frac{\sqrt[۴]{۴^{۴}}}{\sqrt[۴]{۱۰^{۴}}}=\frac{۴}{۱۰}$$

$$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}=\sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}}=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۱۰^{۵}}}=\frac{۱}{۱۰}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\frac{۵}{۱۰}+\frac{۴}{۱۰}}{\frac{۱}{۱۰}}=۹$$

۴- گزینه‌ی ④ توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{(۰/۲۷)^{-۳}}=(۰/۲۷)^{-۱}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۰/۲۷)^{-۳}}}=\frac{۱}{(۰/۲۷)^{-۱}}=۰/۲۷$$

$$\sqrt[۵]{(۰/۳۲)^{-۵}}=(۰/۳۲)^{-۱}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt[۵]{(۰/۳۲)^{-۵}}}=\frac{۱}{(۰/۳۲)^{-۱}}=۰/۳۲$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۰/۲۷-۰/۳۲=-۰/۰۵=\frac{-۱}{۲۰}$$

۵- گزینه‌ی ④ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{(-۳)^{۴}}=|-۳|=۳$$

$$\sqrt[۳]{-۶۴}=\sqrt[۳]{-۴^{۳}}=\sqrt[۳]{(-۴)^{۳}}=-۴$$

$$\sqrt{۵^{۲}}=۵$$

$$\sqrt[۵]{-۳۲}=\sqrt[۵]{-۲^{۵}}=\sqrt[۵]{(-۲)^{۵}}=-۲$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۳-۴+۵-(-۲)=۶$$

۶- گزینه‌ی ③ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$\frac{۲}{x}=\sqrt[۳]{۰/۰۶۴}$$

یعنی

$$\frac{۲}{x}=\sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۱۰۰۰}}=\frac{\sqrt[۳]{۴^{۳}}}{\sqrt[۳]{۱۰^{۳}}}=\frac{۴}{۱۰}$$

بنابراین $\frac{x}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$ و در نتیجه $x=۵$.

پس $\sqrt[۳]{۶x-۳}=\sqrt[۳]{۳۰-۳}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$.

۷- گزینه‌ی ② با توجه به تعریف ریشه‌ی دوم،

$$x-\sqrt{x}=۳^{۲}=۹\Rightarrow x=۹+\sqrt{x}$$

بنابراین

$$\frac{۹+\sqrt{x}}{x}=۱$$

۸- گزینه‌ی ④ توجه کنید که

$$a=\sqrt[۵]{\frac{۳}{۸}}\Rightarrow a^{۵}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow ۸a^{۵}=۳$$

$$\Rightarrow ۴\times۸a^{۵}=۳\times۴=۱۲$$

$$\Rightarrow\sqrt[۵]{۳۲a^{۵}}=\sqrt[۵]{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۲a=\sqrt[۵]{۱۲}$$

۹- گزینه‌ی ④ ابتدا مخرج کسر زیر ریشه‌ی دهم را ساده می‌کنیم:

$$۲^{-۲۰}+۳^{-۲۰}+۶^{-۲۰}=\frac{۱}{۲^{۲۰}}+\frac{۱}{۳^{۲۰}}+\frac{۱}{۶^{۲۰}}=\frac{۳^{۲۰}+۲^{۲۰}+۱}{۶^{۲۰}}$$

بنابراین

$$\sqrt[۱۰]{\frac{۲^{۲۰}+۳^{۲۰}+۱}{۲^{-۲۰}+۳^{-۲۰}+۶^{-۲۰}}}=\sqrt[۱۰]{\frac{۲^{۲۰}+۳^{۲۰}+۱}{\frac{۲^{۲۰}+۳^{۲۰}+۱}{۶^{۲۰}}}}=\sqrt[۱۰]{۶^{۲۰}}=۶^{۲}=۳۶$$

۳۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$x\left(\sqrt[۵]{\frac{۱}{x^۴}-\frac{۱}{x^۵}}\right)=\sqrt[۵]{x^۵\left(\frac{۱}{x^۴}-\frac{۱}{x^۵}\right)}$$

$$=\sqrt[۵]{\frac{x^۵}{x^۴}-\frac{x^۵}{x^۵}}=\sqrt[۵]{x-۱}$$

در نتیجه $\sqrt[۵]{x-۱}=\frac{۱}{۲}$، پس $x-۱=\frac{۱}{۲^۵}=\frac{۱}{۳۲}$. بنابراین $x=\frac{۳۳}{۳۲}$.

۳۵- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\sqrt{\frac{a^۲}{b}}=\sqrt[۱۲]{\frac{a^{۱۲}}{b^۶}}$$

$$\sqrt[۴]{\frac{b}{a^۵}}=\sqrt[۱۲]{\frac{b^۳}{a^{۱۵}}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[۱۲]{\frac{a^{۱۲}}{b^۶}}\times\sqrt[۱۲]{\frac{b^۳}{a^{۱۵}}}\times\sqrt[۱۲]{a^۳b^۳}=\sqrt[۱۲]{\frac{a^{۱۲}}{b^۶}\times\frac{b^۳}{a^{۱۵}}\times a^۳b^۳}$$

$$=\sqrt[۱۲]{\frac{a^{۱۵}b^۶}{a^{۱۵}b^۶}}=۱$$

۳۶- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $xy=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۸}=۲$.

همچنین $x^۳=۲$ و $y^۳=۴$.

در نتیجه

$$xy^۴=(xy)y^۳=۲(۴)=۸$$

$$x^۴y=(xy)x^۳=۲(۲)=۴$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با

$$(۸-۱)(۴+۲+۱)=۴۹$$

۳۷- گزینه‌ی ۴ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۵]{۸}}-\frac{\sqrt[۵]{۴}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۵]{۸}}{\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۸}-\sqrt[۵]{۳۲}}{\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲-۲}{\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۲}}=۰$$

۳۸- گزینه‌ی ۱ دقت کنید که $\frac{x^۳}{y},\frac{y^۳}{x}>۰$. در نتیجه

$$\sqrt{\frac{x^۳}{y}}\div\sqrt{\frac{y^۳}{x}}=\sqrt{\frac{x^۳}{y}}\times\sqrt{\frac{x}{y^۳}}=\sqrt{\frac{x^۴}{y^۴}}=\frac{x^۲}{y^۲}$$

۳۹- گزینه‌ی ۳ چون $\sqrt{۲-y}$ عددی حقیقی است، پس

$$۲-y\geq ۰$$

در نتیجه

$$\sqrt[۵]{y-۲}=\sqrt[۵]{-(۲-y)}=-\sqrt[۵]{۲-y}=-\sqrt[۱۰]{(۲-y)^۲}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\sqrt[۱۰]{(۲-y)^۲}\times\sqrt[۱۰]{(۲-y)^۵}=-\sqrt[۱۰]{(۲-y)^۷}$$

۴۰- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۱۶}}=\sqrt[۴\times۵]{۱۶}=\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{۱۶}}=\sqrt[۵]{۲}$$

$$\sqrt[۵]{۹۶}=\sqrt[۵]{۲^۵\times۳}=\sqrt[۵]{۲^۵}\times\sqrt[۵]{۳}=۲\times\sqrt[۵]{۳}$$

$$\frac{۲}{\sqrt[۵]{۱۶}}=\frac{۲}{\sqrt[۵]{۲^۴}}\times\frac{\sqrt[۵]{۲}}{\sqrt[۵]{۲}}=\frac{۲\times\sqrt[۵]{۲}}{\sqrt[۵]{۲^۵}}=\frac{۲\sqrt[۵]{۲}}{۲}=\sqrt[۵]{۲}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[۵]{۲}-۲\sqrt[۵]{۳}-\sqrt[۵]{۲}=-۲\sqrt[۵]{۳}$$

۴۱- گزینه‌ی ۳ سمت چپ تساوی‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۴]{\sqrt{\sqrt[۳]{۲}}}=\sqrt[۴\times۲\times۳]{۲}=\sqrt[۲۴]{۲}$$

$$\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۳^۳\times۳}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۳^۴}}=\sqrt[۶]{۳^۴}=\sqrt[۳]{۳^۲}$$

$$\sqrt{۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{\sqrt{۲^۲\times\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{\sqrt{۲}}=\sqrt[۴]{۲}$$

بنابراین تساوی‌های (الف) و (پ) درست هستند.

۴۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[۵]{۸}=\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۵]{۲},\ \sqrt[۵]{۱۲}=\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۵]{۳},\ldots,\ \sqrt[۵]{۱۰۰}=\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۵]{۲۵}$$

بنابراین

$$\sqrt[۵]{۴}+\sqrt[۵]{۸}+\sqrt[۵]{۱۲}+\ldots+\sqrt[۵]{۱۰۰}=\sqrt[۵]{۴}(۱+\underbrace{\sqrt[۵]{۲}+\sqrt[۵]{۳}+\ldots+\sqrt[۵]{۲۵}}_{a-۱})$$

$$=\sqrt[۵]{۴a}$$

۴۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به $\sqrt[n]{۴}=\sqrt[۲n]{۴^۲}$ و $\sqrt{۲}=\sqrt[۲n]{۲^n}$، تساوی داده شده به شکل زیر درمی‌آید

$$\sqrt[۲n]{۴^۲\times۲}=\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt[۲n]{۲^۵}=\sqrt[۲n]{۲^n}$$

بنابراین $n=۵$ و در نتیجه

$$\sqrt[n]{n+۲۷}=\sqrt[۵]{۵+۲۷}=\sqrt[۵]{۳۲}=\sqrt[۵]{۲^۵}=۲$$

۴۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{۳}\times\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۶]{۳}=\sqrt[۶]{۳^۳}\times\sqrt[۶]{۳^۲}\times\sqrt[۶]{۳}=\sqrt[۶]{۳^{۱+۲+۳}}=۳$$

در نتیجه

$$\sqrt[n]{۹}=۳\Rightarrow n=۲$$

۴۵- گزینه‌ی ۲ عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{۳}=\sqrt[۶n]{۳^۶},\quad \sqrt[۲n]{۳}=\sqrt[۶n]{۳^۳},\quad \sqrt[۳n]{۳}=\sqrt[۶n]{۳^۲}$$

بنابراین

$$\sqrt[n]{۳}\times\sqrt[۲n]{۳}\times\sqrt[۳n]{۳}=\sqrt[۶n]{۳^۶\times۳^۳\times۳^۲}=\sqrt[۶n]{۳^{۱۱}}$$

پس تساوی داده شده به‌صورت $\sqrt[۶n]{۳^{۱۱}}=\sqrt[۶n]{۳^a}$ است و در نتیجه $a=۱۱$.

۴۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[۶]{۱۸}=\sqrt[۶]{۳^۲\times۲}=\sqrt[۶]{۳^۲}\times\sqrt[۶]{۲}=\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۶]{۲}$$

از طرف دیگر

$$\sqrt[۶]{۲}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{a}$$

بنابراین

$$\sqrt[۶]{۱۸}=b\sqrt[۳]{a}$$

۴۷- گزینه‌ی ۱ عبارت‌ها را با فرجه‌ی ۲۰ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۵]{(\sqrt{۳}-۲)^۳}=-\sqrt[۵]{(۲-\sqrt{۳})^۳}=-\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^{۱۲}}$$
$$\sqrt[۴]{۲-\sqrt{۳}}=\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^۵}$$

بنابراین

$$A=-\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^{۱۲}}\times\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^۵}\times\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^۳}$$
$$=-\sqrt[۲۰]{(۲-\sqrt{۳})^{۲۰}}=-(۲-\sqrt{۳})=\sqrt{۳}-۲$$

۴۸- گزینه‌ی ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}=۲\Rightarrow\sqrt[۳]{\sqrt{x^۲\times x}}=۲$$
$$\Rightarrow\sqrt[۶]{x^۳}=۲\Rightarrow\sqrt{x}=۲$$

بنابراین $x=۴$ و در نتیجه

$$\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}=\sqrt{۴\sqrt[۳]{۴}}=\sqrt{۴}\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}=۲\sqrt[۶]{۲^۲}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

۴۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt{\frac{۱}{a}}}=\sqrt{\sqrt{a^۲\times\frac{۱}{a}}}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[۴]{a}=۵$$

بنابراین $a=۵^۴$. اکنون می‌توان نوشت

$$\sqrt[۳]{a\sqrt{\frac{۱}{a}\sqrt{a}}}=\sqrt[۳]{a\sqrt{\sqrt{\frac{a}{a^۲}}}}=\sqrt[۳]{a\sqrt{\sqrt{\frac{۱}{a}}}}=\sqrt[۳]{a\sqrt[۴]{\frac{۱}{a}}}$$
$$=\sqrt[۳]{۵^۴\times\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۳]{۵^۳}=۵$$

۵۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا عبارت‌ها را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{a\sqrt[۴]{a}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{a^۴\times a}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{a^۵}}=\sqrt[۱۲]{a^۵}$$
$$\sqrt[۱۲]{a^۶\sqrt{a^{-۲}}}=\sqrt[۱۲]{a^۶\times a^{-۱}}=\sqrt[۱۲]{a^۵}$$

بنابراین عبارت‌های مورد نظر برابرند.

۵۱- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۵]{x}}=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۵]{۳}\Rightarrow\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{x}}=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۵]{۳}$$
$$\Rightarrow\sqrt[۳\times۵]{x}=\sqrt[۵]{۳}\Rightarrow\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۵]{۳}$$
$$\Rightarrow\sqrt[۳]{x}=۳\Rightarrow x=۳^۳$$

۵۲- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[۴]{۳}=\sqrt[۳]{\sqrt{۴x}}=\sqrt[۶]{۴x}\Rightarrow(\sqrt[۴]{۳})^{۱۲}=(\sqrt[۶]{۴x})^{۱۲}$$
$$\Rightarrow۳^۳=(۴x)^۲\Rightarrow۳\sqrt{۳}=۴x\Rightarrow x=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

۵۳- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{a+۲}}}=\sqrt[۴]{۲}\Rightarrow\sqrt[۲\times۳\times۴]{a+۲}=\sqrt[۴]{۲}\Rightarrow\sqrt[۲\times۳]{a+۲}=۲$$
$$\Rightarrow a+۲=۲^۶\Rightarrow a=۶۲$$

۵۴- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\sqrt{۳}\times\sqrt{\sqrt[۳]{x}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{x}}\times\sqrt[۶]{x}\Rightarrow\sqrt{۳}\times\sqrt[۶]{x}=\sqrt[۳]{\sqrt{۴x}}\times\sqrt[۶]{x}$$
$$\Rightarrow\sqrt{۳}=\sqrt[۶]{۴x}\Rightarrow۳^۳=۴x\Rightarrow x=\frac{۲۷}{۴}$$

۵۵- گزینه‌ی ۴ تمام اعداد را به صورت ریشه‌ی ۱۲ام می‌نویسیم و مقایسه می‌کنیم:

$$\sqrt{۳}=\sqrt[۱۲]{۳^۶}=\sqrt[۱۲]{۷۲۹}$$
$$\sqrt[۳]{۵}=\sqrt[۱۲]{۵^۴}=\sqrt[۱۲]{۶۲۵}$$
$$\frac{\sqrt[۴]{۲۰}}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۱۲]{\frac{۲۰^۳}{۲^۴}}=\sqrt[۱۲]{۵۰۰}$$
$$\frac{\sqrt[۳]{۳۰}}{\sqrt[۴]{۱۰}}=\sqrt[۱۲]{\frac{۳۰^۴}{۱۰^۳}}=\sqrt[۱۲]{۸۱۰}$$

واضح است که $\sqrt[۱۲]{۸۱۰}$ عدد بزرگ‌تری است.

۵۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا a ، b و c را به‌صورت ریشه‌ی ۳۰ ام بازنویسی می‌کنیم:

$$a=\sqrt{۳}=\sqrt[۳۰]{۳^{۱۵}}=(\sqrt[۳۰]{۳})^{۱۵}$$
$$b=\sqrt[۳]{۹}=\sqrt[۳۰]{۹^{۱۰}}=\sqrt[۳۰]{۳^{۲۰}}=(\sqrt[۳۰]{۳})^{۲۰}$$
$$c=\sqrt[۵]{۲۷}=\sqrt[۳۰]{(۲۷)^۶}=\sqrt[۳۰]{۳^{۱۸}}=(\sqrt[۳۰]{۳})^{۱۸}$$

چون $\sqrt[۳۰]{۳}>۱$ ، پس

$$\underbrace{(\sqrt[۳۰]{۳})^{۲۰}}_{b}>\underbrace{(\sqrt[۳۰]{۳})^{۱۸}}_{c}>\underbrace{(\sqrt[۳۰]{۳})^{۱۵}}_{a}$$

۵۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا عبارت مورد نظر را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|a-\sqrt{a}|+|\sqrt{a}-\sqrt[۳]{a}|-|a-\sqrt[۳]{a}|$$

اکنون توجه کنید که چون $۰<a<۱$، پس $a<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}$. بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{a}-a+\sqrt[۳]{a}-\sqrt{a}-(\sqrt[۳]{a}-a)=۰$$

۵۸- گزینه‌ی ۳ چون $\sqrt[۳]{a}>\sqrt{a}$، پس $۰<a<۱$ و در نتیجه واضح است که $\sqrt[۴]{a}>\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}>a$. همچنین از فرض $۰<a<۱$ نتیجه می‌شود $a^۸>a^۹$ و در نتیجه $\sqrt[۱۲]{a^۸}>\sqrt[۱۲]{a^۹}$ ، یعنی $\sqrt[۳]{a^۲}>\sqrt[۴]{a^۳}$.

ولی $\sqrt{a^۳}>\sqrt[۳]{a^۲}$ درست نیست، زیرا

$$۰<a<۱\Rightarrow a^۹<a^۴\Rightarrow\sqrt[۶]{a^۹}<\sqrt[۶]{a^۴}\Rightarrow\sqrt{a^۳}<\sqrt[۳]{a^۲}$$

۵۹- گزینه‌ی ۴ چون $۰<a<۱$، پس

$$a<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt[۴]{a}<\sqrt[۵]{a}<\ldots$$

می‌دانیم a دو ریشه‌ی چهارم و دو ریشه‌ی دوم دارد که قرینه‌ی یک‌دیگر هستند. در نتیجه پاره‌خط ax مربوط به ریشه‌ی چهارم a است. بنابراین می‌توان نوشت

پاره‌خط	ay	az	ax	at
ریشه	دوم	سوم	چهارم	پنجم

۶۰- گزینه‌ی ۳ دو طرف نابرابری $\sqrt[۳]{a}<\sqrt{۶}$ را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[۳]{a})^{۶}<(\sqrt{۶})^{۶}\Leftrightarrow a^{\frac{۶}{۳}}<۶^{\frac{۶}{۲}}\Leftrightarrow a^{۲}<۶^{۳}=۲۱۶$$

بنابراین همه‌ی عددهای طبیعی مانند a که $a^{۲}<۲۱۶$ ویژگی مورد نظر را دارند. چون $۱۴^{۲}$ بزرگ‌ترین مربع کاملی است که از ۲۱۶ کوچک‌تر است، پس ۱۴ عدد طبیعی ویژگی مورد نظر را دارند.

۶۱- گزینه‌ی ۲ اگر ریشه‌ی سوم عدد a در بازه‌ی $(۲,۳)$ قرار داشته باشد، می‌توان نوشت $۲<\sqrt[۳]{a}<۳$ یعنی $۲^{۳}<(\sqrt[۳]{a})^{۳}<۳^{۳}$ و در نتیجه $۸<a<۲۷$.

اعداد طبیعی ۹، ۱۰، ... و ۲۶ را می‌توان در نابرابری فوق به جای a قرار داد. پس ۱۸ عدد طبیعی مانند a می‌توان یافت که ریشه‌ی سوم آن‌ها در بازه‌ی $(۲,۳)$ قرار دارد.

۶۲- گزینه‌ی ۴ اولاً واضح است که $\sqrt[۴]{۰}=۰$ و ریشه‌ی چهارم عدد صفر در بازه‌ی مورد نظر قرار دارد. حالا فرض می‌کنیم a عددی مثبت است که ریشه‌ی چهارم مثبت آن در بازه‌ی $(۰,۳)$ قرار دارد. یعنی

$$۰<\sqrt[۴]{a}<۳\Rightarrow ۰<(\sqrt[۴]{a})^{۴}<۳^{۴}\Rightarrow ۰<a<۸۱$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت است که ریشه‌ی چهارم منفی آن در بازه‌ی $(-۴,۰)$ قرار دارد. یعنی

$$-۴<-\sqrt[۴]{b}<۰\Rightarrow ۰<\sqrt[۴]{b}<۴$$

$$\Rightarrow ۰<(\sqrt{b})^{۴}<۴^{۴}\Rightarrow ۰<b<۲۵۶$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل دارای یک ریشه‌ی چهارم در بازه‌ی $(-۴,۳)$ هستند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

۶۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$(۰/۰۴)^{\frac{۱}{۲}}=(\frac{۴}{۱۰۰})^{\frac{۱}{۲}}=((\frac{۲}{۱۰})^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=۰/۲=\frac{۱}{۵}$$

$$(۶۲۵)^{-\frac{۱}{۴}}=(۵^{۴})^{-\frac{۱}{۴}}=۵^{-۱}=\frac{۱}{۵}$$

$$(۰/۰۰۸)^{-\frac{۱}{۳}}=(\frac{۸}{۱۰۰۰})^{-\frac{۱}{۳}}=((\frac{۲}{۱۰})^{۳})^{-\frac{۱}{۳}}=(\frac{۲}{۱۰})^{-۱}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}}{۵}=\frac{۱}{۱۲۵}$$

۶۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴},\quad ۰/۰۰۰۳۲=\frac{۳۲}{۱۰۰۰۰۰}=\frac{۲^{۵}}{۱۰^{۵}}=\frac{۱}{۵^{۵}}$$

بنابراین

$$\frac{(۰/۰۰۰۳۲)^{۰/۲}}{(۰/۲۵)^{۰/۵}}=\frac{(\frac{۱}{۵^{۵}})^{\frac{۲}{۱۰}}}{(\frac{۱}{۴})^{\frac{۵}{۱۰}}}=\frac{(\frac{۱}{۵^{۵}})^{\frac{۱}{۵}}}{(\frac{۱}{۲^{۲}})^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۵}$$

۶۵- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{۸^{\frac{۳}{۴}}\times ۱۲^{\frac{۱}{۳}}\times ۹^{\frac{۳}{۵}}}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۲}}\times(\frac{۱}{۳})^{\frac{۷}{۱۵}}}=\frac{(۲^{۳})^{\frac{۳}{۴}}\times(۲^{۲}\times ۳)^{\frac{۱}{۳}}\times(۳^{۲})^{\frac{۳}{۵}}}{(۲^{-۱})^{\frac{۱}{۱۲}}\times(۳^{-۱})^{\frac{۷}{۱۵}}}=\frac{۲^{\frac{۹}{۴}}\times ۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۶}{۵}}}{۲^{-\frac{۱}{۱۲}}\times ۳^{-\frac{۷}{۱۵}}}$$

$$=۲^{\frac{۳۵}{۱۲}}\times ۳^{\frac{۲۳}{۱۵}}\times ۲^{\frac{۱}{۱۲}}\times ۳^{\frac{۷}{۱۵}}=۲^{\frac{۳۶}{۱۲}}\times ۳^{\frac{۳۰}{۱۵}}=۲^{۳}\times ۳^{۲}=۷۲$$

۶۶- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$۳^{-\frac{۱}{۲}}\sqrt{۲۷}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲۷}=\sqrt{\frac{۲۷}{۳}}=\sqrt{۹}=۳$$

۶۷- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$(\frac{۱}{۶۴})^{\frac{۵}{۶}}=(\frac{۱}{۲^{۶}})^{\frac{۵}{۶}}=(۲^{-۶})^{\frac{۵}{۶}}=۲^{-۵}=\frac{۱}{۳۲}$$

$$(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۴}{۵}}=(\frac{۱}{۲^{۵}})^{\frac{۴}{۵}}=(۲^{-۵})^{\frac{۴}{۵}}=۲^{-۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۳۲}-\frac{۱}{۱۶}=-\frac{۱}{۳۲}$.

۶۸- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$۳۲^{-\frac{۲}{۵}}=(۲^۵)^{-\frac{۲}{۵}}=۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$۲۷^{-\frac{۲}{۳}}=(۳^۳)^{-\frac{۲}{۳}}=۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$$

$$۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}}=(۵^۳)^{-\frac{۱}{۳}}=۵^{-۱}=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۵}=\frac{۱۰۱}{۱۸۰}$$

۶۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۶۴^{\frac{۱}{۶}}=(۲^۶)^{\frac{۱}{۶}}=۲,\quad (۱۲۵)^{\frac{۴}{۳}}=(۵^۳)^{\frac{۴}{۳}}=۵^۴$$

همچنین

$$۹^{\frac{۳}{۲}}-۸^{\frac{۱}{۳}}=(۳^۲)^{\frac{۳}{۲}}-(۲^۳)^{\frac{۱}{۳}}=۳^۳-۲=۲۵$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۲\times ۵^۴}{۲۵}=\frac{۲\times ۵^۴}{۵^۲}=۲\times ۵^۲=۵۰$$

۷۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}-۲^{-\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۱}{۲}}+۲^{-\frac{۱}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\frac{\sqrt{۲}^۲-۱}{\sqrt{۲}}}{\frac{\sqrt{۲}^۲+۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{۲-۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۷۱- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۲۴^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲۴}=\sqrt[۳]{۳\times ۸}=۲\sqrt[۳]{۳}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$۲۴^{\frac{۱}{۳}}-۶(۲۴^{-\frac{۱}{۳}})+۹^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲۴}-\frac{۶}{\sqrt[۳]{۲۴}}+\sqrt[۳]{۹}=۲\sqrt[۳]{۳}-\frac{۶}{۲\sqrt[۳]{۳}}+\sqrt[۳]{۹}$$

$$=۲\sqrt[۳]{۳}-\frac{۳}{\sqrt[۳]{۳}}+\sqrt[۳]{۹}=\frac{۲\sqrt[۳]{۳}^۲-۳+\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۳}}$$

$$=\frac{۲\sqrt[۳]{۳}^۲-۳+\sqrt[۳]{۲۷}}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۳}^۲}{\sqrt[۳]{۳}}=۲\sqrt[۳]{۳}$$

۷۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[۳]{a^۴}=a^{\frac{۴}{۳}},\quad \sqrt[۴]{a^۳}=a^{\frac{۳}{۴}}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt[۳]{a^۴}}{\sqrt[۴]{a^۳}}=\frac{a^{\frac{۴}{۳}}}{a^{\frac{۳}{۴}}}=a^{\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}}=a^{\frac{۷}{۱۲}}$$

در نتیجه حاصل عبارت برابر است با

$$(a^{\frac{۷}{۱۲}})^{\frac{۶}{۷}}=a^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{a}$$

۷۳- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt{۵\sqrt{۵\sqrt{۵\sqrt{۵}}}}\times\sqrt[۸]{\sqrt{۵}}=(۵^{\frac{۱}{۲}}\times ۵^{\frac{۱}{۴}}\times ۵^{\frac{۱}{۸}}\times ۵^{\frac{۱}{۱۶}})(۵^{\frac{۱}{۱۶}})$$

$$=۵^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}}=۵$$

۷۴- گزینه‌ی ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل توان‌هایی با نمای گویا می‌نویسیم:

$$۲\sqrt{۳\sqrt{۲\sqrt{۳}}}=۲^۱\times ۳^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۴}}\times ۳^{\frac{۱}{۸}}=۲^{\frac{۵}{۴}}\times ۳^{\frac{۵}{۸}}$$

$$۳\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۲}}}=۳^۱\times ۲^{\frac{۱}{۲}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}\times ۲^{\frac{۱}{۸}}=۳^{\frac{۵}{۴}}\times ۲^{\frac{۵}{۸}}$$

بنابراین

$$A=\frac{۲^{\frac{۵}{۴}}\times ۳^{\frac{۵}{۸}}}{۳^{\frac{۵}{۴}}\times ۲^{\frac{۵}{۸}}}=\frac{۲^{\frac{۵}{۸}}}{۳^{\frac{۵}{۸}}}=(\frac{۲}{۳})^{\frac{۵}{۸}}=\sqrt[۸]{(\frac{۲}{۳})^۵}$$

۷۵- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{a\sqrt[۴]{a}}}{\sqrt[۳]{a\sqrt{a\sqrt[۴]{a}}}}=\frac{a^{\frac{۱}{۲}}\,a^{\frac{۱}{۸}}}{a^{\frac{۱}{۳}}\,a^{\frac{۱}{۶}}\,a^{\frac{۱}{۲۴}}}=\frac{a^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}}}{a^{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲۴}}}=\frac{a^{\frac{۵}{۸}}}{a^{\frac{۱۳}{۲۴}}}$$

$$=a^{\frac{۵}{۸}-\frac{۱۳}{۲۴}}=a^{\frac{۱}{۱۲}}=\sqrt[۱۲]{a}$$

۷۶- گزینه‌ی ۳ فرض کنید $\sqrt[۶]{۳}=a$، در این صورت

$$\sqrt[۶]{۳}=a\Rightarrow ۳^{\frac{۱}{۶}}=a\Rightarrow(۳^{\frac{۱}{۶}})^۳=a^۳\Rightarrow ۳^{\frac{۱}{۲}}=a^۳\Rightarrow\sqrt{۳}=a^۳$$

و

$$\sqrt[۶]{۳}=a\Rightarrow ۳^{\frac{۱}{۶}}=a\Rightarrow(۳^{\frac{۱}{۶}})^۲=a^۲\Rightarrow ۳^{\frac{۱}{۳}}=a^۲\Rightarrow\sqrt[۳]{۳}=a^۲$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۳}+\sqrt[۳]{۳}}{۱+\sqrt[۶]{۳}}=\frac{a^۳+a^۲}{۱+a}=\frac{a^۲(۱+a)}{۱+a}=a^۲=\sqrt[۳]{۳}$$

۷۷- گزینه‌ی ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل توان‌هایی با نمای گویا بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{صورت کسر}=\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۴}}=\sqrt[۴]{۲\times ۲^{\frac{۲}{۳}}}=\sqrt[۴]{۲^{\frac{۵}{۳}}}=۲^{\frac{۵}{۱۲}}$$

$$\text{مخرج کسر}=۲\sqrt[۳]{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲\sqrt[۳]{\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲}}=۲\sqrt[۳]{۲^{-\frac{۱}{۲}}}=۲\times ۲^{-\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۵}{۶}}$$

بنابراین

$$\frac{۲^{\frac{۵}{۱۲}}}{۲^{\frac{۵}{۶}}}=۲^{\frac{۵}{۱۲}-\frac{۵}{۶}}=۲^{-\frac{۵}{۱۲}}=۲^a$$

در نتیجه $a=-\frac{۵}{۱۲}$.

۷۸- گزینه‌ی ۳ به کمک نمایش اعداد با نمای گویا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$۲^{\frac{۶}{۷}}\times ۲^{\frac{۴}{۵\times۷}}\times ۲^{\frac{۲}{۳\times۵\times۷}}=۲^{\frac{a}{۱۰۵}}$$

$$۲^{\frac{۶\times۵\times۳+۴\times۳+۲}{۳\times۵\times۷}}=۲^{\frac{a}{۱۰۵}}$$

$$۲^{\frac{۱۰۴}{۱۰۵}}=۲^{\frac{a}{۱۰۵}}$$

بنابراین $a=۱۰۴$.

۷۹- گزینه‌ی ۲ در تساوی داده شده اعداد را با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^{\frac{۱}{۲}}\times a^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}}{a^{\frac{۱}{۴}}\times a^{\frac{۱}{۵}}\times a^{\frac{۱}{۲۰}}}=۲\Rightarrow\frac{a^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}}}{a^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰}}}=۲$$

$$\frac{a^{۱}}{a^{\frac{۱}{۲}}}=۲\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}}=۲\Rightarrow(a^{\frac{۱}{۲}})^{۲}=۲^{۲}$$

بنابراین $a=۴$.

۸۰- گزینه‌ی ۲ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a^{۰/۲}=b^{۰/۵}\Rightarrow a^{\frac{۱}{۵}}=b^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow(a^{\frac{۱}{۵}})^{۵}=(b^{\frac{۱}{۲}})^{۵}$$

$$\Rightarrow a=b^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow a=b^{۲/۵}$$

حالا طرفین تساوی را به توان ۰/۵ می‌رسانیم:

$$a^{۰/۵}=(b^{۲/۵})^{۰/۵}=b^{۱/۲۵}$$

۸۱- گزینه‌ی ۴ چون $(\frac{۱}{۱۲۵})^{-۱}=۱۲۵$ و $۱۲۵=۵^{۳}$، پس

$$\sqrt[۵]{۵^{\frac{n-۱}{۲}}}=۵^{۳}\Rightarrow(\sqrt[۵]{۵^{\frac{n-۱}{۲}}})^{۵}=(۵^{۳})^{۵}\Rightarrow ۵^{\frac{n-۱}{۲}}=۵^{۱۵}$$

$$\Rightarrow\frac{n-۱}{۲}=۱۵\Rightarrow n=۳۱$$

۸۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$((۱۲۵)^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=((۵^{۳})^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=۵^{۳\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}=۵^{\frac{۱}{۲}}$$

در نتیجه $n=۲$.

۸۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا سمت چپ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[۳]{۳^{n}}\times\sqrt[۴]{۹}}{\sqrt[۶]{۳}}=\frac{۳^{\frac{n}{۳}}\times(۳^{۲})^{\frac{۱}{۴}}}{۳^{\frac{۱}{۶}}}=\frac{۳^{\frac{n}{۳}+\frac{۱}{۲}}}{۳^{\frac{۱}{۶}}}=۳^{\frac{n}{۳}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}}$$

$$=۳^{\frac{n}{۳}+\frac{۱}{۳}}=۳^{\frac{n+۱}{۳}}$$

از طرف دیگر، $(\frac{۱}{۸۱})^{-۲}=۸۱^{۲}=(۳^{۴})^{۲}=۳^{۸}$. بنابراین

$$۳^{\frac{n+۱}{۳}}=۳^{۸}\Rightarrow\frac{n+۱}{۳}=۸\Rightarrow n=۲۳$$

۸۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا عبارت مورد نظر را به شکل عددی با نمای گویا می‌نویسیم:

$$x\times\sqrt[۳]{x}\times\sqrt[۵]{x^{۲}}=x\times x^{\frac{۱}{۳}}\times x^{\frac{۲}{۵}}=x^{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}}=x^{\frac{۲۶}{۱۵}}$$

اکنون توجه کنید که

$$x=\sqrt[۱۳]{۲^{۱۵}}=۲^{\frac{۱۵}{۱۳}}$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$(۲^{\frac{۱۵}{۱۳}})^{\frac{۲۶}{۱۵}}=۲^{\frac{۱۵}{۱۳}\times\frac{۲۶}{۱۵}}=۲^{۲}=۴$$

۸۵- گزینه‌ی ۱ از رادیکال داخلی شروع به ساده کردن عبارت سمت چپ تساوی داده شده می‌کنیم:

$$\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}\sqrt{۴۸}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۳}}=\sqrt[۶]{۳}$$

در نتیجه

$$\sqrt[۴]{۹\sqrt[۶]{۳}}=۹^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۲۴}}=(۳^{۲})^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۲۴}}$$

$$=۳^{\frac{۱}{۲}}\times۳^{\frac{۱}{۲۴}}=۳^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲۴}}=۳^{\frac{۱۳}{۲۴}}$$

در نتیجه $n=۱۳$.

۸۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲^{۳}\times\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲^{۲}\sqrt{۲}}}=\sqrt[۱۲]{۲^{۲}\sqrt{۲}}$$

همچنین

$$\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۳۲^{k}}}=\sqrt[۱۲]{۳۲^{k}}$$

بنابراین

$$۳۲^{k}=۲^{۲}\sqrt{۲}=۲^{۲+\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۵}{۲}}$$

پس

$$(۲^{۵})^{k}=۲^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow ۲^{۵k}=۲^{\frac{۵}{۲}}$$

$$۵k=\frac{۵}{۲}\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

۸۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا سمت چپ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$۲^{\frac{۱}{۱۰}}\times۲^{\frac{۲}{۱۰}}\times۲^{\frac{۳}{۱۰}}\times\cdots\times۲^{\frac{۹}{۱۰}}=۲^{\frac{۱}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}+\cdots+\frac{۹}{۱۰}}$$

$$=۲^{\frac{۱+۲+۳+\cdots+۹}{۱۰}}$$

$$=۲^{\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۹}{۲}(۱+۹)}=۲^{\frac{۹}{۲}}$$

سمت راست تساوی برابر است با $(۲^{۵})^{\frac{۹}{a}}$، یعنی $۲^{\frac{۴۵}{a}}$. بنابراین تساوی به‌صورت $۲^{\frac{۹}{۲}}=۲^{\frac{۴۵}{a}}$ است. به این ترتیب

$$\frac{۹}{۲}=\frac{۴۵}{a}\Rightarrow ۹a=۹۰\Rightarrow a=۱۰$$

۸۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^{۲}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{۲}}{x^{\frac{۱}{۲}}}=x^{۲-\frac{۱}{۲}}=x^{\frac{۳}{۲}}$$

در نتیجه

$$\sqrt[۳]{\frac{x^{۲}}{\sqrt{x}}}=۴\Rightarrow(x^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=۴\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}}=۴$$

$$\Rightarrow(x^{\frac{۱}{۲}})^{۲}=۴^{۲}\Rightarrow x=۱۶$$

۸۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا طرف چپ را ســاده‌تر می‌کنیم. برای این کار تمامی عبارات را بر حسب ریشه‌ی ششم می‌نویسیم:

$$x\times\sqrt{x^{۳}}\times\sqrt[۳]{x^{۴}}=\sqrt[۶]{x^{۶}}\times\sqrt[۶]{x^{۹}}\times\sqrt[۶]{x^{۸}}=\sqrt[۶]{x^{۶}\times x^{۹}\times x^{۸}}$$

$$=\sqrt[۶]{x^{۲۳}}=(\sqrt[۶]{x})^{۲۳}$$

در نتیجه

$$(\sqrt[۶]{x})^{۲۳}=۳^{۱۷}\times۳^{۶}=۳^{۲۳}\Rightarrow((\sqrt[۶]{x})^{۲۳})^{\frac{۱}{۲۳}}=(۳^{۲۳})^{\frac{۱}{۲۳}}$$

بنابراین $\sqrt[۶]{x}=۳$.

۹۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{a}}=۴\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}}a^{\frac{۱}{۶}}=۴\Rightarrow a^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}}=۴\Rightarrow a^{\frac{۲}{۳}}=۴=۲^{۲}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{۱}{۳}}=۲\Rightarrow a=۲^{۳}=۸$$

بنابراین

$$\sqrt{a+\sqrt[۳]{a}}=\sqrt{۸+\sqrt[۳]{۸}}=\sqrt{۸+۲}=\sqrt{۱۰}$$

۹۱- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt[۴]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{۵\sqrt[۳]{۵\sqrt[۴]{۵^{۲}}}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۴}}\times x^{\frac{۱}{۱۲}}\times x^{\frac{۱}{۲۴}}=۵^{\frac{۱}{۲}}\times۵^{\frac{۱}{۶}}\times(۵^{۲})^{\frac{۱}{۲۴}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}}=۵^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow x^{\frac{۹}{۲۴}}=۵^{\frac{۹}{۱۲}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲۴}}=۵^{\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow(x^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۱۲}}=۵^{\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}}=۵\Rightarrow x=۲۵$$

۹۲- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$\sqrt{x\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}\sqrt{x}}}=۳^{۵}\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{x})^{\frac{۱}{۶}}x^{\frac{۱}{۱۲}}=۳^{۵}\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}}x^{-\frac{۱}{۶}}x^{\frac{۱}{۱۲}}=۳^{۵}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}}=۳^{۵}\Rightarrow x^{\frac{۵}{۱۲}}=۳^{۵}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۱۲}}=۳\Rightarrow x=۳^{۱۲}$$

۹۳- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt[۳]{x\sqrt[۴]{۴}}=\sqrt[۱۰]{x\sqrt{۲}}\Rightarrow\sqrt[۳]{x}\times\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۴}}=\sqrt[۱۰]{x}\times\sqrt[۱۰]{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۳}}\times۴^{\frac{۱}{۱۲}}=x^{\frac{۱}{۱۰}}\times۲^{\frac{۱}{۲۰}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}=x^{\frac{۱}{۱۰}}\times۲^{\frac{۱}{۲۰}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰}}=۲^{\frac{۱}{۲۰}-\frac{۱}{۶}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۷}{۳۰}}=۲^{-\frac{۷}{۶۰}}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{۱}{۳۰}}=۲^{-\frac{۱}{۶۰}}$$

$$\Rightarrow x=۲^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$۵^{\frac{۲۲}{۵}}=۵^{۲}\times۵^{\frac{۱۲}{۵}}=۲۵a$$

$$۷^{\frac{۲۲}{۵}}=\frac{۷^{\frac{۲۷}{۵}}}{۷}=\frac{b}{۷}$$

بنابراین

$$۳۵^{\frac{۲۲}{۵}}=۵^{\frac{۲۲}{۵}}\times۷^{\frac{۲۲}{۵}}=۲۵a(\frac{b}{۷})=\frac{۲۵ab}{۷}$$

۹۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}=a^{\frac{۱}{۲}}\times b^{\frac{۱}{۶}},\quad\sqrt[۳]{b\sqrt{a}}=b^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}$$

بنابراین

$$\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}\times\sqrt[۳]{b\sqrt{a}}=a^{\frac{۱}{۲}}\times b^{\frac{۱}{۶}}\times b^{\frac{۱}{۳}}\times a^{\frac{۱}{۶}}=a^{\frac{۴}{۶}}\times b^{\frac{۳}{۶}}$$

$$=(a^{۴})^{\frac{۱}{۶}}\times(b^{۳})^{\frac{۱}{۶}}=(a^{۴}b^{۳})^{\frac{۱}{۶}}=(۱۶)^{\frac{۱}{۶}}$$

$$=۲^{\frac{۴}{۶}}=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}$$

۹۶- گزینه‌ی ۱ اعداد را به‌صورت توانی از ۲ می‌نویسیم و مقایسه می‌کنیم:

$$۶۴^{\frac{۱}{۵}}=(۲^{۶})^{\frac{۱}{۵}}=۲^{\frac{۶}{۵}}$$

$$۳۲^{\frac{۱}{۴}}=(۲^{۵})^{\frac{۱}{۴}}=۲^{\frac{۵}{۴}}$$

$$۱۶^{\frac{۱}{۳}}=(۲^{۴})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$۸^{\frac{۱}{۲}}=(۲^{۳})^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}$$

چون $\frac{۶}{۵}<\frac{۵}{۴}<\frac{۴}{۳}<\frac{۳}{۲}$، پس

$$۲^{\frac{۶}{۵}}<۲^{\frac{۵}{۴}}<۲^{\frac{۴}{۳}}<۲^{\frac{۳}{۲}}$$

یعنی $۶۴^{\frac{۱}{۵}}$ عدد کوچک‌تری است.

۹۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$x=(۳^۲)^{\frac{۳}{۲}}=۳^۳=۲۷,\quad y=(۳^۴)^{\frac{۳}{۲}}=۳^۶=۷۲۹$$

$$z=(۳^۵)^{\frac{۳}{۵}}=۳^۳=۲۷$$

بنابراین

$$y>z=x$$

۹۸- گزینه‌ی ۱ اعداد a، b و c را با نمای گویا می‌نویسیم:

$$a=\sqrt[۳]{۲^۲}=۲^{\frac{۲}{۳}},\quad b=\sqrt[۷]{۲^۶}=۲^{\frac{۶}{۷}},\quad c=\sqrt[۹]{۲^۸}=۲^{\frac{۸}{۹}}$$

چون $\frac{۲}{۳}<\frac{۶}{۷}<\frac{۸}{۹}$، پس $a<b<c$.

۹۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$a=x^{\frac{۳}{۴}},\quad b=x^{\frac{۲}{۵}},\quad c=x^{\frac{۹}{۶}}=x^{\frac{۳}{۲}}$$

از طرف دیگر،

$$\frac{۳}{۲}>\frac{۳}{۴}>\frac{۲}{۵}$$

و چون $x>۱$، پس

$$x^{\frac{۳}{۲}}>x^{\frac{۳}{۴}}>x^{\frac{۲}{۵}}\Rightarrow c>a>b$$

۱۰۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا x، y و z را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x=a^{\frac{۳}{۲}},\quad y=a^{\frac{۴}{۳}},\quad z=a^{\frac{۱۰}{۱۲}}=a^{\frac{۵}{۶}}$$

از طرف دیگر

$$\frac{۳}{۲}>\frac{۴}{۳}>\frac{۵}{۶}$$

و چون $۰<a<۱$، پس

$$a^{\frac{۳}{۲}}<a^{\frac{۴}{۳}}<a^{\frac{۵}{۶}}\Rightarrow x<y<z$$

۱۰۱- گزینه‌ی ۱ چون $۰<a<۱$، پس توانی از a که نمای آن کوچک‌تر باشد، عدد بزرگ‌تری است. از طرف دیگر می‌دانیم

$$\sqrt[۳]{a^۲}=a^{\frac{۲}{۳}},\quad \sqrt[۴]{a^۳}=a^{\frac{۳}{۴}}$$

$$\sqrt[۵]{a^۴}=a^{\frac{۴}{۵}},\quad \sqrt[۶]{a^۵}=a^{\frac{۵}{۶}}$$

و

$$\frac{۲}{۳}<\frac{۳}{۴}<\frac{۴}{۵}<\frac{۵}{۶}$$

در نتیجه

$$a^{\frac{۲}{۳}}>a^{\frac{۳}{۴}}>a^{\frac{۴}{۵}}>a^{\frac{۵}{۶}}$$

یعنی $\sqrt[۳]{a^۲}$ عدد بزرگ‌تر است.

۱۰۲- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول** طرفین تساوی $x=\sqrt{۳}-۲$ را به توان ۲ می‌رسانیم تا مقدار $x^۲$ به‌دست آید:

$$x^۲=۳+۴-۴\sqrt{۳}=۷-۴\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$x^۲+۴x=۷-۴\sqrt{۳}+۴(\sqrt{۳}-۲)=۷-۴\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}-۸=-۱$$

راه‌حل دوم تساوی $x=\sqrt{۳}-۲$ را به شکل $x+۲=\sqrt{۳}$ می‌نویسیم و طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲+۴x+۴=۳$$

بنابراین

$$x^۲+۴x=-۱$$

۱۰۳- گزینه‌ی ۲ طرفین تساوی $a-b=۳$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a-b)^۲=۹\Rightarrow a^۲+b^۲-۲ab=۹$$

با توجه به این‌که $ab=۲$، نتیجه می‌شود $a^۲+b^۲=۱۳$.

اکنون طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a^۲+b^۲)^۲=۱۶۹\Rightarrow a^۴+b^۴+۲(ab)^۲=۱۶۹$$

و چون $ab=۲$، پس $a^۴+b^۴=۱۶۱$.

۱۰۴- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^۴+b^۴}{a^۲b^۲}=\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^۲+۲\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$$

$$=۶^۲+۲=۳۸$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$x^۲+\frac{۹}{۴x^۲}=(x+\frac{۳}{۲x})^۲-۲(x)(\frac{۳}{۲x})$$

$$=(x+\frac{۳}{۲x})^۲-۳=۳^۲-۳=۶$$

بنابراین

$$۴x^۲+\frac{۹}{x^۲}=۴(x^۲+\frac{۹}{۴x^۲})=۴\times۶=۲۴$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را می‌توان به‌صورت $\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}$ نوشت.

به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲-۲ab}}=\sqrt{\frac{۵ab+۲ab}{۵ab-۲ab}}$$

$$=\sqrt{\frac{۷ab}{۳ab}}=\sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned}x^۴-۱۴x^۲y^۲+y^۴&=x^۴+y^۴-۱۴x^۲y^۲\\&=(x^۲+y^۲)^۲-۲x^۲y^۲-۱۴x^۲y^۲\\&=(x^۲+y^۲)^۲-۱۶x^۲y^۲\\&=۲۵-۱۶(۴)=۲۵-۶۴=-۳۹\end{aligned}$$

۱۰۸- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $\frac{۱}{a}=۱+|a|>۰$، در نتیجه $a>۰$. بنابراین، فرض مسئله به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{۱}{a}-a=۱$$

اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{a}+|a|=\frac{۱}{a}+a>۰$. از طرف دیگر،

$$(a+\frac{۱}{a})^۲-(a-\frac{۱}{a})^۲=۴$$

بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a})^۲=۴+۱=۵\xrightarrow{a+\frac{۱}{a}>۰}a+\frac{۱}{a}=\sqrt{۵}$$

۱۰۹- گزینه‌ی ۲ فرض کنید $x-۷=a$, $y-۸=b$. در این‌صورت، از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{ab}{a^۲+b^۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a^۲+b^۲=-۲ab$$

در نتیجه $(a+b)^۲=۰$، بنابراین $a+b=۰$. به این ترتیب

$$۰=a+b=x-۷+y-۸=x+y-۱۵$$

بنابراین $x+y=۱۵$.

۱۱۰- گزینه‌ی ۱ اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}&x^۲-۲y+y^۲-۴x=-۹+۴=-۵\\&(x^۲-۴x+۴)+(y^۲-۲y+۱)=۰\\&(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۰\end{aligned}$$

بنابراین $x-۲=۰$ و $y-۱=۰$ در نتیجه $x=۲$، $y=۱$ و $x+y=۳$.

۱۱۱- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{۴۹}{۹}+\frac{۱}{۴}-\frac{۷}{۳}&=(\frac{۷}{۳})^۲-۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۳}+(\frac{۱}{۲})^۲\\&=(\frac{۷}{۳}-\frac{۱}{۲})^۲\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sqrt{\frac{۴۹}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۷}{۳}}=\sqrt{(\frac{۷}{۳}-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{۷}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱۱}{۶}$$

۱۱۲- گزینه‌ی ۳ عبارت مورد نظر را A بنامید. در این صورت

$$\begin{aligned}A^۲&=\frac{(۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۶}))^۲}{(۳\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^۲}=\frac{۴(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})^۲}{۹(۲+\sqrt{۳})}\\&=\frac{۴(۲+۶+۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۶})}{۹(۲+\sqrt{۳})}\\&=\frac{۴(۸+۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۳})}{۹(۲+\sqrt{۳})}\\&=\frac{۴(۸+۴\sqrt{۳})}{۹(۲+\sqrt{۳})}\\&=\frac{۴\times۴(۲+\sqrt{۳})}{۹(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۱۶}{۹}\end{aligned}$$

پس (چون A مثبت است)، $A=\frac{۴}{۳}$.

۱۱۳- گزینه‌ی ۳ طرفین تساوی $\frac{۱}{a}+b=\sqrt{۴۸}$ را در -۲ ضرب می‌کنیم تا تساوی $-\frac{۲}{a}-۲b=-۲\sqrt{۴۸}$ حاصل شود.

طرفین تساوی اخیر و تساوی $a+۲b=\sqrt{۱۲}$ را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&-\frac{۲}{a}-۲b+a+۲b=-۲\sqrt{۴۸}+\sqrt{۱۲}\\&a-\frac{۲}{a}=\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۴۸}\end{aligned}$$

حالا طرفین تساوی بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^۲+\frac{۴}{a^۲}-۴=۱۲+۱۹۲-۴\sqrt{۵۷۶}$$

بنابراین $a^۲+\frac{۴}{a^۲}=۱۱۲$.

۱۱۴- گزینه‌ی ۲ طرفین تساوی $\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۳}$ را معکوس می‌کنیم و مقدار $x+\frac{۱}{x}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲+۱}{x}=۳\Rightarrow\frac{x^۲}{x}+\frac{۱}{x}=۳\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۳$$

برای محاسبه‌ی مقدار $\frac{x^۲}{x^۴+۱}$، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{x^۴+۱}{x^۲}&=\frac{x^۴}{x^۲}+\frac{۱}{x^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\\&=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲=۳^۲-۲=۷\end{aligned}$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۱}{۷}$.

۱۱۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۲ جمع می‌کنیم:

$$a+\frac{۱}{a+۲}=۴\Rightarrow a+۲+\frac{۱}{a+۲}=۶$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a+۲+\frac{۱}{a+۲})^۲=۶^۲$$

$$(a+۲)^۲+\frac{۱}{(a+۲)^۲}+۲(a+۲)\frac{۱}{a+۲}=۳۶$$

$$(a+۲)^۲+\frac{۱}{(a+۲)^۲}+۲=۳۶$$

$$(a+۲)^۲+\frac{۱}{(a+۲)^۲}=۳۶-۲=۳۴$$

۱۱۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که از فرض مسئله نتیجه می‌شود $x-۲-\frac{۱}{x-۲}=۲$. اکنون فرض کنید $x-۲=t$. در این‌صورت $t-\frac{۱}{t}=۲$، در نتیجه

$$A=\frac{(x-۲)^۲}{(x-۲)^۴+۱}=\frac{t^۲}{t^۴+۱}\Rightarrow\frac{۱}{A}=\frac{t^۴+۱}{t^۲}=t^۲+\frac{۱}{t^۲}$$

از طرف دیگر،

$$t^۲+\frac{۱}{t^۲}=(t-\frac{۱}{t})^۲+۲=۲^۲+۲=۶$$

بنابراین $A=\frac{۱}{۶}$.

۱۱۷- گزینه‌ی ۳ طرفین تساوی $\frac{x}{x^۲-۳x+۴}=\frac{۱}{۲}$ را معکوس می‌کنیم:

$$\frac{x^۲-۳x+۴}{x}=۲\Rightarrow\frac{x^۲}{x}-\frac{۳x}{x}+\frac{۴}{x}=۲$$

$$\Rightarrow x-۳+\frac{۴}{x}=۲\Rightarrow x+\frac{۴}{x}=۵$$

طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(x+\frac{۴}{x})^۲=۲۵\Rightarrow x^۲+\frac{۱۶}{x^۲}+۸=۲۵\Rightarrow x^۲+\frac{۱۶}{x^۲}=۱۷$$

حالا برای محاسبه‌ی مقدار $\frac{x^۲}{x^۴-x^۲+۱۶}$، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^۴-x^۲+۱۶}{x^۲}=\frac{x^۴}{x^۲}-\frac{x^۲}{x^۲}+\frac{۱۶}{x^۲}=x^۲+\frac{۱۶}{x^۲}-۱=۱۷-۱=۱۶$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده، برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است.

۱۱۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$a^۲+\frac{۴}{a^۲}=(a+\frac{۲}{a})^۲-۴\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، بنابر فرض،

$$a^۲-۴a+۲=۰$$

$$a^۲+۲=۴a$$

$$a+\frac{۲}{a}=۴$$

(دو طرف تساوی بالا را بر a تقسیم کرده‌ایم)

بنابراین، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$a^۲+\frac{۴}{a^۲}=(a+\frac{۲}{a})^۲-۴=۴^۲-۴=۱۲$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۲ اگر دو طرف تساوی $a+۲\sqrt{a}=۱$ را بر $\sqrt{a}$ تقسیم کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{a}{\sqrt{a}}+۲=\frac{۱}{\sqrt{a}}\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=-۲$$

بنابراین

$$a+\frac{۱}{a}=(\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}})^۲+۲=(-۲)^۲+۲=۶$$

در نتیجه

$$\frac{a^۲+۱}{a}=۶\Rightarrow a^۲-۶a=-۱$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۴ تساوی $x^۲-۳x-۱=۰$ را به‌صورت $x^۲=۳x+۱$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۴=۹x^۲+۶x+۱$$

در تساوی بالا به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۳x+۱$ و نتیجه می‌شود:

$$x^۴=۹(۳x+۱)+۶x+۱\Rightarrow x^۴=۳۳x+۱۰$$

بنابراین $x^۴-۳۳x=۱۰$.

۱۲۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca$$
$$=\frac{۱}{۲}((a-b)^۲+(b-c)^۲+(a-c)^۲)$$

مقدار $a-b$ و $b-c$ را می‌دانیم و هم‌چنین

$$a-c=(a-b)+(b-c)=۱+\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}=۲$$

بنابراین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}((۱+\sqrt{۲})^۲+(۱-\sqrt{۲})^۲+(۲)^۲)$$
$$=\frac{۱}{۲}(۱+۲+۲\sqrt{۲}+۱+۲-۲\sqrt{۲}+۴)=۵$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا $(\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^۲$ را حساب می‌کنیم، سپس آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^۴=((\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}})^۲)^۲$$
$$=(۳+۲\sqrt{۲}+۳-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})})^۲$$
$$=(۶+۲\sqrt{۹-۸})^۲=(۸)^۲=۶۴$$

۱۲۳- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول** عدد داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم و با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$۲\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=\sqrt{۴(۴-\sqrt{۱۵})}=\sqrt{۱۶-۴\sqrt{۱۵}}=\sqrt{۱۰+۶-۲\sqrt{۶۰}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۱۰})^۲+(\sqrt{۶})^۲-۲\sqrt{۶}\sqrt{۱۰}}=\sqrt{(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶})^۲}=\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶}$$

راه‌حل دوم توان دوم عدد داده شده و اعداد موجود در گزینه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$x=۲\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}\Rightarrow x^۲=۴(۴-\sqrt{۱۵})=۱۶-۴\sqrt{۱۵}$$
$$a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۲}$$
$$b=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\Rightarrow b^۲=\frac{۵}{۹}$$
$$c=\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶}\Rightarrow c^۲=۱۰+۶-۲\sqrt{۶۰}=۱۶-۴\sqrt{۱۵}$$
$$d=\sqrt{۱۴}-۳\Rightarrow d^۲=۱۴+۹-۶\sqrt{۱۴}=۲۳-۶\sqrt{۱۴}$$

با توجه به مثبت بودن x و c و این‌که $x^۲=c^۲$ می‌توان نتیجه گرفت $x=c$. یعنی $۲\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶}$.

۱۲۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $۳-۲\sqrt{۲}=(۱-\sqrt{۲})^۲$.

بنابراین

$$(۱-\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})^۲=(۱-\sqrt{۲})^۳$$

و در نتیجه $\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})}=۱-\sqrt{۲}$.

۱۲۵- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۱۱+\sqrt{۷۲}=۱۱+۶\sqrt{۲}=(۳+\sqrt{۲})^۲$$

بنابراین

$$\sqrt{۱۱+\sqrt{۷۲}}=\sqrt{(۳+\sqrt{۲})^۲}=۳+\sqrt{۲}$$

در نتیجه $x=۳$.

۱۲۶- گزینه‌ی ۳ اعداد $۱۴+۶\sqrt{۵}$ و $۱۴-۶\sqrt{۵}$ مربع کامل هستند. زیرا

$$۱۴+۶\sqrt{۵}=۹+۵+۲\times۳\sqrt{۵}=۳^۲+\sqrt{۵}^۲+۲(۳\sqrt{۵})=(۳+\sqrt{۵})^۲$$

به همین ترتیب $۱۴-۶\sqrt{۵}=(۳-\sqrt{۵})^۲$. بنابراین

$$\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}=۳+\sqrt{۵}-(۳-\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵}$$

۱۲۷- گزینه‌ی ۳ تساوی $x=۱-\sqrt{۵}$ را به شکل $x-۱=-\sqrt{۵}$ می‌نویسیم و طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x-۱)^۲=(-\sqrt{۵})^۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۵\Rightarrow x^۲-۲x-۴=۰$$

حالا می‌توانیم مقدار عبارت خواسته شده را به‌دست آوریم:

$$۲x^۳-۴x^۲-۸x+۳=۲x(\underbrace{x^۲-۲x-۴}_{۰})+۳=۰+۳=۳$$

۱۲۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که $a+۱=\sqrt{۵}$. در نتیجه اگر طرفین این تساوی را به توان دو برسانیم به‌دست می‌آید

$$a^۲+۲a+۱=۵\Rightarrow a^۲+۲a=۴$$

بنابراین

$$۲a^۳+۴a^۲=۲a(a^۲+۲a)=۸a\ ,\ ۳a^۲+۶a=۳(a^۲+۲a)=۱۲$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\underbrace{۲a^۳+۴a^۲}_{۸a}+\underbrace{۳a^۲+۶a}_{۱۲}-۸a-۱۲=۰$$

۱۲۹- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$a^۲=(\sqrt{۷}+\sqrt{۲۱})^۲=۷+۲۱+۲\sqrt{۷\times۲۱}=۲۸+۲\sqrt{۱۴۷}$$
$$b^۲=(\sqrt{۱۰}+۳\sqrt{۲})^۲=(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۸})^۲=۱۰+۱۸+۲\sqrt{۱۰\times۱۸}$$
$$=۲۸+۲\sqrt{۱۸۰}$$
$$c^۲=(\sqrt{۱۳}+\sqrt{۱۵})^۲=۱۳+۱۵+۲\sqrt{۱۳\times۱۵}=۲۸+۲\sqrt{۱۹۵}$$

از طرف دیگر

$$\sqrt{۱۴۷}<\sqrt{۱۸۰}<\sqrt{۱۹۵}$$

پس $a^۲<b^۲<c^۲$ و در نتیجه (چون a، b و c مثبت‌اند)،

$$a<b<c$$

۱۳۰- گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم $x=۳-\sqrt{۶}$، $y=\sqrt{۶}-۲$، $z=۳\sqrt{۶}-۷$ و $t=\sqrt{۸}-\sqrt{۶}$. واضح است که $x=\sqrt{۹}-\sqrt{۶}$ از $t=\sqrt{۸}-\sqrt{۶}$ بزرگتر است. پس x را با y و z مقایسه می‌کنیم. بدین منظور، توان دوم آن‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$x^۲-y^۲=(۳-\sqrt{۶})^۲-(\sqrt{۶}-۲)^۲$$
$$=(۱۵-۶\sqrt{۶})-(۱۰-۴\sqrt{۶})=۵-۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲۵}-\sqrt{۲۴}>۰$$

بنابراین چون x و y بزرگ‌تر از صفراند، $x>y$.

از طرف دیگر،

$$x^۲-z^۲=(۳-\sqrt{۶})^۲-(۳\sqrt{۶}-۷)^۲$$
$$=(۱۵-۶\sqrt{۶})-(۱۰۳-۴۲\sqrt{۶})=۳۶\sqrt{۶}-۸۸$$
$$=\sqrt{۷۷۷۶}-\sqrt{۷۷۴۴}>۰$$

بنابراین $x>z$.

پس $x=۳-\sqrt{۶}$ از بقیه بزرگ‌تر است.

۱۳۱- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$x^۲+y^۲+z^۲-۶x+۴y-۸z+۱۰$$
$$=(x^۲-۶x+۹)+(y^۲+۴y+۴)+(z^۲-۸z+۱۶)-۱۹$$
$$=(x-۳)^۲+(y+۲)^۲+(z-۴)^۲-۱۹\geq-۱۹$$

تساوی وقتی به‌دست می‌آید که $x=۳$، $y=-۲$ و $z=۴$.

۱۳۲- گزینه‌ی ۱ اگر به جای $\sin^۲\alpha$ قرار دهیم $۱-\cos^۲\alpha$ عبارت به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\sqrt{۲-۲\cos\alpha-\sin^۲\alpha}=\sqrt{۲-۲\cos\alpha-۱+\cos^۲\alpha}$$
$$=\sqrt{\cos^۲\alpha-۲\cos\alpha+۱}$$
$$=\sqrt{(\cos\alpha-۱)^۲}=|\cos\alpha-۱|=۱-\cos\alpha$$

توجه کنید که عبارت $\cos\alpha-۱$ نامثبت است، زیرا $-۱\leq\cos\alpha\leq۱$.

۱۳۳- گزینه‌ی ۲ عبارت $\sin^۴ ۱۵^\circ+۴\cos^۲ ۱۵^\circ$ به شکل زیر است:

$$\sin^۴ ۱۵^\circ+۴\cos^۲ ۱۵^\circ=\sin^۴ ۱۵^\circ+۴(۱-\sin^۲ ۱۵^\circ)$$

$$=\sin^۴ ۱۵^\circ-۴\sin^۲ ۱۵^\circ+۴$$

$$=(\sin^۲ ۱۵^\circ-۲)^۲$$

به همین ترتیب $\cos^۴ ۱۵^\circ+۴\sin^۲ ۱۵^\circ=(\cos^۲ ۱۵^\circ-۲)^۲$

بنابراین عبارت داده شده به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt{\sin^۴ ۱۵^\circ+۴\cos^۲ ۱۵^\circ}-۲}{\sqrt{\cos^۴ ۱۵^\circ+۴\sin^۲ ۱۵^\circ}-۲}=\frac{\sqrt{(\sin^۲ ۱۵^\circ-۲)^۲}-۲}{\sqrt{(\cos^۲ ۱۵^\circ-۲)^۲}-۲}$$

$$=\frac{|\sin^۲ ۱۵^\circ-۲|-۲}{|\cos^۲ ۱۵^\circ-۲|-۲}=\frac{۲-\sin^۲ ۱۵^\circ-۲}{۲-\cos^۲ ۱۵^\circ-۲}=\tan^۲ ۱۵^\circ$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا عبارت زیر رادیکال را در $\frac{۱+\sin\alpha}{۱+\sin\alpha}$ ضرب می‌کنیم:

$$A=۱+\cot\alpha\sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}\times\frac{۱+\sin\alpha}{۱+\sin\alpha}}$$

$$=۱+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{(۱+\sin\alpha)^۲}{۱-\sin^۲\alpha}}=۱+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{(۱+\sin\alpha)^۲}{\cos^۲\alpha}}$$

$$=۱+(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})\frac{|۱+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}$$

چون نابرابری $۱+\sin\alpha>۰$ همواره درست است، پس $|۱+\sin\alpha|=۱+\sin\alpha$.

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع سوم است پس $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$. بنابراین

$$A=۱+(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})(\frac{۱+\sin\alpha}{-\cos\alpha})=۱-\frac{(۱+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{-۱}{\sin\alpha}$$

۱۳۵- گزینه‌ی ۴ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\alpha)}}=\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}}$$

$$=\sqrt{۱-۲\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^۲}}=\sqrt{۱-۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $\alpha=۱۰۰^\circ$ پس $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<۰$. پس عبارت A به شکل زیر در می‌آید:

$$A=\sqrt{۱+۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲}$$

$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|=|\sin ۱۰۰^\circ+\cos ۱۰۰^\circ|$$

توجه کنید که $\sin ۱۰۰^\circ+\cos ۱۰۰^\circ>۰$. بنابراین

$$A=\sin ۱۰۰^\circ+\cos ۱۰۰^\circ$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۳ عبارت را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{۱}{x-۳}-\frac{۱}{x+۳}=\frac{x+۳-(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۶}{x^۲-۹}$$

اگر به جای x، مقدار آن، یعنی $\sqrt{۲}+\sqrt{۷}$ را قرار دهیم، مقدار A به‌دست می‌آید.

$$x=\sqrt{۲}+\sqrt{۷}\Rightarrow A=\frac{۶}{(\sqrt{۲}+\sqrt{۷})^۲-۹}=\frac{۶}{۲+۷+۲\sqrt{۱۴}-۹}$$

$$=\frac{۶}{۲\sqrt{۱۴}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$$

۱۳۷- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt{۲}+۱$$

$$a-۱=\sqrt{۲}+۱-۱=\sqrt{۲}$$

$$a-۲=\sqrt{۲}+۱-۲=\sqrt{۲}-۱$$

بنابراین

$$a(a-۱)(a-۲)=(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-۱)$$

$$=(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲})$$

$$=(\sqrt{۲}^۲-۱^۲)\sqrt{۲}=(۲-۱)\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۱۳۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $\frac{۱}{a}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲+\sqrt{۶}}$. از طرف دیگر،

$$\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۶}-۲}\times\underbrace{\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۶}+۲}}_{\frac{۱}{a}}=\frac{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}{(\sqrt{۶}-۲)(\sqrt{۶}+۲)}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۶}-۲}\times\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۶}-۲}=\frac{a}{۲}$$

۱۳۹- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^۲+b^۲}{ab}=\frac{(a-b)^۲+۲ab}{ab}$$

از طرف دیگر،

$$a-b=\sqrt{۶}+۱-(\sqrt{۶}-۱)=۲$$

$$ab=(\sqrt{۶}+۱)(\sqrt{۶}-۱)=\sqrt{۶}^۲-۱=۵$$

بنابراین

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{۲^۲+۲\times۵}{۵}=\frac{۱۴}{۵}$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۱ با مخرج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{۲۴}-۴)-(\sqrt{۲۴}+۴)}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}\times\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}=\frac{-۸}{\sqrt{(\sqrt{۲۴})^۲-۴^۲}}$$

$$=\frac{-۸}{\sqrt{۸}}=-\sqrt{۸}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$a^{۲}-۲b^{۲}+c^{۲}=(a^{۲}-b^{۲})-(b^{۲}-c^{۲})$$
$$=(a-b)(a+b)-(b-c)(b+c)$$
$$=۵(a+b)-۵(b+c)$$
$$=۵a+۵b-۵b-۵c$$
$$=۵a-۵c=۵(a-c)$$

از طرفی

$$a-b=b-c$$

بنابراین می‌توان $a-c$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$a-c-b=b-c-c$$
$$a-c=۲b-۲c$$
$$a-c=۲(b-c)=۲(۵)=۱۰$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $۵\times۱۰=۵۰$.

۱۴۲- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$a^{۷}b^{۸}=(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)=\sqrt{۵}^{۲}-۲^{۲}=۱$$

دو طرف تساوی $a^{۷}b^{۸}=۱$ را در a ضرب می‌کنیم:

$$a^{۸}b^{۸}=a$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان ۷ می‌رسانیم:

$$(a^{۸}b^{۸})^{۷}=a^{۷}$$
$$(ab)^{۵۶}=a^{۷}=\sqrt{۵}+۲$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقدار $(a+b)^{۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a+b)^{۲}=(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^{۲}$$
$$=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}+۲\underbrace{\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}}_{۱}$$
$$=۴+۲=۶$$

بنابراین

$$(a+b)^{۶}=((a+b)^{۲})^{۳}=۶^{۳}=۲۱۶$$

۱۴۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}-\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{(۲-\sqrt{۳})^{۲}-(۲+\sqrt{۳})^{۲}}{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}$$
$$=\frac{۴+۳-۴\sqrt{۳}-(۴+۳+۴\sqrt{۳})}{۲^{۲}-\sqrt{۳}^{۲}}$$
$$=\frac{-۸\sqrt{۳}}{۴-۳}=-۸\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر، $\frac{۶}{\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}^{۲}}=۲\sqrt{۳}$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲\sqrt{۳}-۸\sqrt{۳}=-۶\sqrt{۳}$$

۱۴۵- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که اگر a و b هم علامت باشند، $\sqrt{ab}$ و $-\sqrt{ab}$ واسطه‌های هندسی هستند. اکنون توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{۶+۲\sqrt{۵}}\times\sqrt[۴]{۶-۲\sqrt{۵}}=\sqrt[۴]{(۶+۲\sqrt{۵})(۶-۲\sqrt{۵})}$$
$$=\sqrt[۴]{۶^{۲}-(۲\sqrt{۵})^{۲}}=\sqrt[۴]{۳۶-۴\times۵}$$
$$=\sqrt[۴]{۱۶}=۲$$

بنابراین $-\sqrt{۲}$ یکی از واسطه‌های هندسی دو عدد مورد نظر است.

۱۴۶- گزینه‌ی ۲ فرض کنید

$$A=(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$

دو طرف این تساوی را در $۳^{\frac{۱}{۸}}-۱$، که همان a است، ضرب می‌کنیم:

$$(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)A=(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$
$$=((۳^{\frac{۱}{۸}})^{۲}-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$
$$=(۳^{\frac{۱}{۴}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$
$$=(۳^{\frac{۱}{۲}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$
$$=۳-۱=۲$$

بنابراین

$$A=\frac{۲}{۳^{\frac{۱}{۸}}-۱}=\frac{۲}{a}$$

۱۴۷- گزینه‌ی ۳ چون b واسطه‌ی هندسی a و c است، پس $ac=b^{۲}$. از طرف دیگر

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$$
$$=((\sqrt{a}+\sqrt{c})+\sqrt{b})((\sqrt{a}+\sqrt{c})-\sqrt{b})$$
$$=(\sqrt{a}+\sqrt{c})^{۲}-(\sqrt{b})^{۲}=a+۲\sqrt{ac}+c-b$$
$$=a+۲\sqrt{b^{۲}}+c-b$$
$$=a+۲b+c-b=a+b+c=۱۶$$

۱۴۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۲۲}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۰}=\sqrt{۲}(\sqrt{۱۱}+\sqrt{۶}-\sqrt{۵})$$

و

$$\sqrt{۳۳}-\sqrt{۱۸}+\sqrt{۱۵}=\sqrt{۳}(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۶}+\sqrt{۵})$$

بنابراین

$$(\sqrt{۲۲}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۰})(\sqrt{۳۳}-\sqrt{۱۸}+\sqrt{۱۵})$$
$$=\sqrt{۲}\sqrt{۳}(\sqrt{۱۱}+\sqrt{۶}-\sqrt{۵})(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۶}+\sqrt{۵})$$
$$=\sqrt{۶}(\sqrt{۱۱}+(\sqrt{۶}-\sqrt{۵}))(\sqrt{۱۱}-(\sqrt{۶}-\sqrt{۵}))$$
$$=\sqrt{۶}((\sqrt{۱۱})^{۲}-(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^{۲})$$
$$=\sqrt{۶}(۱۱-(۶+۵-۲\sqrt{۶}\sqrt{۵}))$$
$$=\sqrt{۶}(۲\sqrt{۶}\sqrt{۵})=۱۲\sqrt{۵}$$

۱۴۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۲}-۱$ عددی منفی است. بنابراین

$$\begin{aligned}(۱-\sqrt{۲})\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}&=-(\sqrt{۲}-۱)\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}\\&=-\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲(۳+۲\sqrt{۲})}\\&=-\sqrt{(۲+۱-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}\\&=-\sqrt{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}\\&=-\sqrt{۳^۲-(۲\sqrt{۲})^۲}=-\sqrt{۹-۸}=-۱\end{aligned}$$

۱۵۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که

$$b=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}=\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$$

بنابراین

$$\begin{aligned}ab&=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})\\&=\frac{\sqrt{۲}((۱+\sqrt{۲})^۲-\sqrt{۳}^۲)}{۲}=\frac{\sqrt{۲}(۱+۲+۲\sqrt{۲}-۳)}{۲}\\&=\frac{۴}{۲}=۲\end{aligned}$$

۱۵۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۷+۴\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^۲$$

بنابراین

$$\begin{aligned}A&=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})^۲\\&=\underbrace{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}_{۱}(۲+\sqrt{۳})=۲+\sqrt{۳}\end{aligned}$$

همچنین $B=۵+۳\sqrt{۳}$. در نتیجه

$$\frac{۲A}{B}+۱=\frac{۲A+B}{B}=\frac{۹+۵\sqrt{۳}}{۵+۳\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}(۳\sqrt{۳}+۵)}{۳\sqrt{۳}+۵}=\sqrt{۳}$$

۱۵۲- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}۱۱+۴\sqrt{۷}&=\sqrt{۷}^۲+۲^۲+۲\times۲\times\sqrt{۷}\\&=(\sqrt{۷}+۲)^۲\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sqrt[۴]{۱۱+۴\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{(\sqrt{۷}+۲)^۲}=\sqrt{\sqrt{۷}+۲}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\sqrt[۴]{۱۱+۴\sqrt{۷}}\times\sqrt{\sqrt{۷}-۲}&=\sqrt{\sqrt{۷}+۲}\times\sqrt{\sqrt{۷}-۲}\\&=\sqrt{(\sqrt{۷}+۲)(\sqrt{۷}-۲)}\\&=\sqrt{\sqrt{۷}^۲-۲^۲}\\&=\sqrt{۷-۴}=\sqrt{۳}\end{aligned}$$

۱۵۳- گزینه‌ی ۲ چون $۱۲-۲\sqrt{۳۵}=(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})^۲$، پس

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(۱۲-۲\sqrt{۳۵})}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}&=\frac{(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})^۲}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}\\&=(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})=۷-۵=۲\end{aligned}$$

۱۵۴- گزینه‌ی ۲ چون $۳+۲\sqrt{۲}=(۱+\sqrt{۲})^۲$، پس

$$\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{(۱+\sqrt{۲})^۲}=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}$$

بنابراین، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}\times\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})}=-۱$$

۱۵۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$۱۱-۶\sqrt{۲}=۳^۲+\sqrt{۲}^۲-۲\times۳\times\sqrt{۲}=(۳-\sqrt{۲})^۲$$

بنابراین

$$\sqrt[۶]{۱۱-۶\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{(۳-\sqrt{۲})^۲}=\sqrt[۳]{۳-\sqrt{۲}}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\sqrt[۳]{۳+\sqrt{۲}}\times\sqrt[۶]{۱۱-۶\sqrt{۲}}&=\sqrt[۳]{۳+\sqrt{۲}}\times\sqrt[۳]{۳-\sqrt{۲}}\\&=\sqrt[۳]{(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})}\\&=\sqrt[۳]{۳^۲-\sqrt{۲}^۲}\\&=\sqrt[۳]{۹-۲}=\sqrt[۳]{۷}\end{aligned}$$

۱۵۶- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}&\sqrt{\sqrt{۶}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۶}-۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۶}-۲}\\&=\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}+۲)^۳}\times\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}-۲)^۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۶}-۲}\\&=\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}+۲)^۳(\sqrt{۶}-۲)^۲(\sqrt{۶}-۲)}\\&=\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}+۲)^۳(\sqrt{۶}-۲)^۳}\\&=\sqrt{(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲)}\\&=\sqrt{\sqrt{۶}^۲-۲^۲}=\sqrt{۶-۴}=\sqrt{۲}\end{aligned}$$

۱۵۷- گزینه‌ی ۱ ابتدا حاصل‌ضرب دو عبارت رادیکالی انتهایی را به کمک اتحاد مزدوج حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\times\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\\&=\sqrt{(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})(۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳}})}\\&=\sqrt{۲^۲-(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^۲}\\&=\sqrt{۴-(۲+\sqrt{۳})}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\end{aligned}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}=۱$$

۱۵۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۱۷-۶\sqrt{۸}=۱۷-۱۲\sqrt{۲}=(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}$$

هم‌چنین

$$۳-۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}-۱)^{۲}$$

در نتیجه

$$۱۷-۶\sqrt{۸}=((\sqrt{۲}-۱)^{۲})^{۲}=(\sqrt{۲}-۱)^{۴}$$

بنابراین

$$\sqrt[۴]{۱۷-۶\sqrt{۸}}=\sqrt[۴]{(\sqrt{۲}-۱)^{۴}}=\sqrt{۲}-۱$$

به این ترتیب

$$\sqrt{۲}-۱=\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\times\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۲}}\times\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\times\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=۱$$

۱۵۹- گزینهٔ ۳ اگر طرفین تساوی‌های $x(x+۱)=a-۱$ و $x-۱=b$ را در هم ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$x(x+۱)(x-۱)=(a-۱)b$$

$$x(x^{۲}-۱)=ab-b$$

$$x^{۳}-x=ab-b \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، از تساوی $x-۱=b$ به‌دست می‌آید $x=b+۱$ و در نتیجه، از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$x^{۳}-(b+۱)=ab-b$$

$$x^{۳}=ab-b+b+۱=ab+۱$$

۱۶۰- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی $a=b+\sqrt{b^{۲}-۱}$ را در مزدوج سمت راست، که برابر $b-\sqrt{b^{۲}-۱}$ است ضرب می‌کنیم:

$$a(b-\sqrt{b^{۲}-۱})=(b+\sqrt{b^{۲}-۱})(b-\sqrt{b^{۲}-۱})$$

$$=b^{۲}-(\sqrt{b^{۲}-۱})^{۲}$$

$$=b^{۲}-(b^{۲}-۱)=b^{۲}-b^{۲}+۱=۱$$

بنابراین

$$b-\sqrt{b^{۲}-۱}=\frac{۱}{a}$$

۱۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{(a-\sqrt{a^{۲}+۴b^{۲}})}{۲b}\times\frac{(a+\sqrt{a^{۲}+۴b^{۲}})}{۲b}=\frac{a^{۲}-(a^{۲}+۴b^{۲})}{۴b^{۲}}$$

$$=-۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با ۳- است.

۱۶۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(\sqrt[۴]{۵}-۱)(\sqrt[۴]{۵}+۱)=(\sqrt[۴]{۵})^{۲}-۱=\sqrt{۵}-۱$$

در نتیجه بنابر اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$a=\sqrt{۵}+۱\Rightarrow(\sqrt{۵}-۱)(\underbrace{\sqrt{۵}+۱}_{a})=۴$$

بنابراین $\sqrt{۵}-۱=\frac{۴}{a}$.

۱۶۳- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی داده شده را در $\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}+۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}+۱}=(\sqrt[۴]{x}+۱)\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}+۱}$$

$$\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}\times\frac{۱}{(\sqrt[۴]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}+۱)}=۱$$

$$\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}\times\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}=۱$$

$$\frac{۲}{(\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}-۱)}=۱$$

$$\frac{۲}{x-۱}=۱\Rightarrow ۲=x-۱\Rightarrow x=۳$$

۱۶۴- گزینهٔ ۲ با توجه به اتحاد مزدوج می‌توان تساوی $x-\frac{۱}{y}=(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{y}})(\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{y}})$ را نوشت.

بنابراین

$$۱۲=۶(\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{y}})\Rightarrow\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{y}}=۲$$

اگر طرفین تساوی‌های $\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{y}}=۲$ و $\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{y}}=۶$ را جمع بزنیم، تساوی $۲\sqrt{x}=۸$ به‌دست می‌آید،که در نتیجه $x=۱۶$.

در تساوی $x-\frac{۱}{y}=۱۲$ مقدار $x=۱۶$ را قرار می‌دهیم:

$$۱۶-\frac{۱}{y}=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{y}=۴\Rightarrow y=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین مقدار xy برابر است با ۴.

۱۶۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید $x=\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}}-\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}}$.

در این صورت

$$x^{۲}=(\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}}-\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}})^{۲}$$

$$=(\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}})^{۲}+(\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}})^{۲}-۲(\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}})(\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}})$$

$$=۶-\sqrt{۱۱}+۶+\sqrt{۱۱}-۲\sqrt{(۶-\sqrt{۱۱})(۶+\sqrt{۱۱})}$$

$$=۱۲-۲\sqrt{۶^{۲}-\sqrt{۱۱}^{۲}}=۱۲-۲\sqrt{۳۶-۱۱}$$

$$=۱۲-۲\sqrt{۲۵}=۱۲-۲\times۵=۲$$

اکنون توجه کنید که چون $۶-\sqrt{۱۱}<۶+\sqrt{۱۱}$. پس

$$\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}}-\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}}<۰$$

یعنی x منفی است و در نتیجه $x=-\sqrt{۲}$.

۱۶۶- گزینه‌ی ۳ فرض کنید

$$a=\sqrt{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}}+\sqrt{\sqrt{۶}-\sqrt{۵}}$$

توجه کنید که $a>۰$. اکنون از اتحاد مربع دو جمله و اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$a^{۲}=\sqrt{۶}+\sqrt{۵}+\sqrt{۶}-\sqrt{۵}+۲\underbrace{\sqrt{(\sqrt{۶}+\sqrt{۵})(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})}}_{۱}$$

$$=۲\sqrt{۶}+۲=۲(۱+\sqrt{۶})$$

توجه کنید که $x^{۲}=۱+\sqrt{۶}$. در نتیجه

$$a^{۲}=۲x^{۲}\Rightarrow a=x\sqrt{۲}$$

۱۶۷- گزینه‌ی ۴ فرض کنید

$$x=\sqrt{\sqrt{۳}+۱}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}$$

در این صورت،

$$x^{۲}=(\sqrt{\sqrt{۳}+۱}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱})^{۲}$$
$$=(\sqrt{\sqrt{۳}+۱})^{۲}+(\sqrt{\sqrt{۳}-۱})^{۲}+۲(\sqrt{\sqrt{۳}+۱})(\sqrt{\sqrt{۳}-۱})$$
$$=\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}-۱+۲\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)}$$
$$=۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}-۱^{۲}}=۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}=۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۲a$$

و چون x مثبت است، پس $x=\sqrt{۲a}$.

۱۶۸- گزینه‌ی ۳ فرض کنید $a=\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}}$.

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^{۲}=۳+\sqrt{۸}+۳-\sqrt{۸}+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۸})(۳-\sqrt{۸})}$$
$$a^{۲}=۶+۲\sqrt{۹-۸}=۸$$

بنابراین $a=\sqrt{۸}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۲^{۳}}=\sqrt{۲}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}$ یا همان ۴ است.

۱۶۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر فرض،

$$x^{۲}-۵x=۲$$

از طرف دیگر،

$$(x-۴)(x-۱)=x^{۲}-۵x+۴=۲+۴=۶$$
$$(x-۳)(x-۲)=x^{۲}-۵x+۶=۲+۶=۸$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر $۶\times۸=۴۸$ است.

۱۷۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$x+۱=۲^{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow(x+۱)^{۲}=(۲^{\frac{۱}{۴}})^{۲}=۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

در نتیجه

$$x^{۲}+۲x+۱=\sqrt{۲}\Rightarrow x^{۲}+۲x=\sqrt{۲}-۱$$

بنابراین

$$x(\sqrt{۲}+۱)(x+۲)=x(x+۲)(\sqrt{۲}+۱)=\underbrace{(x^{۲}+۲x)}_{\sqrt{۲}-۱}(\sqrt{۲}+۱)$$
$$=(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)=۱$$

۱۷۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که $x+۶=\sqrt{۵}$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم و آن را به کمک اتحاد مربع دو جمله ساده می‌کنیم:

$$(x+۶)^{۲}=x^{۲}+۱۲x+۳۶=(\sqrt{۵})^{۲}=۵$$

بنابراین $x^{۲}+۱۲x+۳۱=۰$. حالا به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر در می‌آوریم:

$$x(x+۴)(x+۸)=x(x^{۲}+۱۲x+۳۲)$$
$$=x(x^{۲}+۱۲x+۳۱+۱)$$
$$=x(۰+۱)=x=\sqrt{۵}-۶$$

۱۷۲- گزینه‌ی ۲ بنابر فرض $a-۴\sqrt{a}+۱=۰$، پس

$$a-۴\sqrt{a}=-۱$$

دو طرف این تساوی را در $a+۴\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم:

$$(a-۴\sqrt{a})(a+۴\sqrt{a})=-(a+۴\sqrt{a})$$
$$a^{۲}-(۴\sqrt{a})^{۲}=-(a+۴\sqrt{a})$$
$$a^{۲}-۱۶a=-a-۴\sqrt{a}$$

اکنون دو طرف این تساوی را با $۲a+۱$ جمع می‌کنیم:

$$a^{۲}-۱۶a+۲a+۱=-a-۴\sqrt{a}+۲a+۱$$
$$a^{۲}-۱۴a+۱=a-۴\sqrt{a}+۱=۰$$

۱۷۳- گزینه‌ی ۴ با استفاده از اتحاد مربع سه جمله‌ای می‌توان نوشت

$$۴۹=(a+b-c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab-۲ac-۲bc$$
$$=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(ab-ac-bc)$$
$$=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(۱۸)$$

بنابراین $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=۱۳$.

۱۷۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$(a-b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-۲ab-۲bc+۲ac$$

بنابراین

$$۷^{۲}=۱۵-۲(ab+bc-ca)$$
$$۳۴=-۲(ab+bc-ca)$$

پس $ab+bc-ca=-۱۷$.

۱۷۵- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$(a-b-c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(bc-ab-ac)$$

پس $(a-b-c)^{۲}=۱۹+۲(۳)=۲۵$. بنابراین

$$a-b-c=\pm۵$$

۱۷۶- گزینه‌ی ۳ اگر دو طرف تساوی $a+2b=\frac{100}{a}$ را در a ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$a^2+2ab=100 \qquad (1)$$

به همین ترتیب، اگر دو طرف دو تساوی دیگر را به‌ترتیب در b و c ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$b^2+2bc=96 \qquad (2)$$

$$c^2+2ac=93 \qquad (3)$$

اگر تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=289$$

$$(a+b+c)^2=17^2$$

و چون $a+b+c$ مثبت است، پس $a+b+c=17$.

۱۷۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$a+b+c=(2a+3b+4c)-(a+2b+3c)=0-0=0$$

بنابراین از اتحاد مربع سه جمله‌ای نتیجه می‌شود

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$0=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

در نتیجه

$$2(ab+bc+ca)=-(a^2+b^2+c^2)$$

پس

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=-\frac{1}{2}$$

۱۷۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$6+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

$$=1+2+3+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

$$=1^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

$$=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$

هم‌چنین

$$5+2\sqrt{6}=3+2+2\sqrt{6}=\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}$$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$

بنابراین عبارت داده شده به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A=\sqrt{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$$

$$=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}=1$$

۱۷۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2}+1=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt[3]{(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$$

بنابراین

$$(\sqrt{2}+1)\sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}(5\sqrt{2}-7)}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{2}(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{2}(50-49)}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$$

۱۸۰- گزینه‌ی ۲ از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^3 x+\cot^3 x$$

$$=(\tan x+\cot x)^3-3\tan x\cot x(\tan x+\cot x)$$

چون $\tan x\cot x=1$ و $\tan x+\cot x=3$، پس

$$\tan^3 x+\cot^3 x=3^3-3\times1\times3=18$$

۱۸۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا به کمک اتحاد $(a-\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$ مقدار $a-\frac{1}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-\frac{1}{a})^2=27-2=25\Rightarrow a-\frac{1}{a}=\pm5$$

از $0<a<1$ نتیجه می‌شود $a<\frac{1}{a}$. بنابراین $a-\frac{1}{a}=-5$ درست است.

حالا با توجه به اتحاد $(a-\frac{1}{a})^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3(a-\frac{1}{a})$ مقدار $a^3-\frac{1}{a^3}$ را حساب می‌کنیم:

$$(-5)^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3(-5)$$

$$a^3-\frac{1}{a^3}=-140$$

۱۸۲- گزینه‌ی ۱ از تساوی $a^2b-ab^2=30$ نتیجه می‌شود

$$ab(a-b)=30$$

با توجه به اتحاد $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ می‌توان مقدار $a-b$ را حساب کرد:

$$(a-b)^3=26-3\times30=-64\Rightarrow a-b=-4$$

حالا با توجه به تساوی $ab(a-b)=30$ مقدار ab به‌دست می‌آید

$$ab(-4)=30\Rightarrow ab=-7/5$$

۱۸۳- گزینه‌ی ۳ به کمک اتحاد مکعب دو جمله می‌توان نوشت

$$a^3=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})^3=3+9+3\underbrace{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}}_{3}\,(\underbrace{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}_{a})=12+9a$$

در نتیجه $a^3-9a=12$.

۱۸۴- گزینه‌ی ۴ طرفین تساوی داده شده را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^3=(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})^3+(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3$$

$$+3\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}(\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})$$

$$x^3=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1+3\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\,x$$

$$x^3=2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2-1}\,x$$

بنابراین $x^3-3x=2\sqrt{2}$.

۱۸۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم و از اتحاد مکعب دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$۱=(\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵})^{۳}$$

$$=a+۵-(a-۵)-۳\sqrt[۳]{a^{۲}-۲۵}(\underbrace{\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵}}_{۱})$$

در نتیجه $۱=۱۰-۳\sqrt[۳]{a^{۲}-۲۵}$. بنابراین $\sqrt[۳]{a^{۲}-۲۵}=۳$ و در نتیجه $a^{۲}-۲۵=۲۷$.

۱۸۶- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳b^{۲}a-b^{۳}=۷a^{۲}b-۷b^{۲}a$$

در نتیجه

$$a^{۳}-b^{۳}=۱۰a^{۲}b-۱۰b^{۲}a=۱۰ab(a-b)$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a^{۲}}{b}-\frac{b^{۲}}{a}=\frac{a^{۳}-b^{۳}}{ab}=\frac{۱۰ab(a-b)}{ab}=۱۰(a-b)$$

۱۸۷- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول** تساوی $x=y+۱$ را به‌صورت $x-y=۱$ نوشته و طرفین آن را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(x-y)^{۳}=۱\Rightarrow x^{۳}-۳x^{۲}y+۳xy^{۲}-y^{۳}=۱$$

$$\Rightarrow x^{۳}-y^{۳}-۳xy\underbrace{(x-y)}_{۱}=۱$$

$$\Rightarrow x^{۳}-y^{۳}-۳xy=۱$$

راه‌حل دوم کافی است به جای x و y دو عدد در نظر بگیریم که اختلاف آن‌ها یک واحد باشد. مثلاً اگر $y=۰, x=۱$، آن‌گاه

$$x^{۳}-y^{۳}-۳xy=۱-۰-۰=۱$$

۱۸۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به اتحاد مکعب دو جمله، عبارت مورد نظر برابر است با

$$(x-۵+۱)^{۳}=(x-۴)^{۳}$$

در نتیجه مقدار عبارت مورد نظر به‌ازای $x=\frac{۱۰}{۳}$ برابر است با

$$(\frac{۱۰}{۳}-۴)^{۳}=(-\frac{۲}{۳})^{۳}=-\frac{۸}{۲۷}$$

۱۸۹- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$a^{۳}-۶a^{۲}+۱۲a+۱۸=a^{۳}-۶a^{۲}+۱۲a-۸+۲۶$$

$$=(a-۲)^{۳}+۲۶$$

$$=(\sqrt[۳]{۵}+۲-۲)^{۳}+۲۶$$

$$=(\sqrt[۳]{۵})^{۳}+۲۶$$

$$=۵+۲۶=۳۱$$

۱۹۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\sin^{۶}۲۵^{\circ}+\cos^{۶}۲۵^{\circ}=(\underbrace{\sin^{۲}۲۵^{\circ}+\cos^{۲}۲۵^{\circ}}_{۱})^{۳}$$

$$-۳\sin^{۲}۲۵^{\circ}\cos^{۲}۲۵^{\circ}(\underbrace{\sin^{۲}۲۵^{\circ}+\cos^{۲}۲۵^{\circ}}_{۱})$$

$$=۱-۳\sin^{۲}۲۵^{\circ}\cos^{۲}۲۵^{\circ}$$

همچنین

$$\sin^{۴}۲۵^{\circ}+\cos^{۴}۲۵^{\circ}$$

$$=(\sin^{۲}۲۵^{\circ}+\cos^{۲}۲۵^{\circ})^{۲}-۲\sin^{۲}۲۵^{\circ}\cos^{۲}۲۵^{\circ}$$

$$=۱-۲\sin^{۲}۲۵^{\circ}\cos^{۲}۲۵^{\circ}$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲(۱-۳\sin^{۲}۲۵^{\circ}\cos^{۲}۲۵^{\circ})-۳(۱-۲\sin^{۲}۲۵^{\circ}\cos^{۲}۲۵^{\circ})=-۱$$

۱۹۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x^{۲}y-xy^{۲}=۶$. در نتیجه

$$(x-y)^{۳}=x^{۳}-y^{۳}--۳(x^{۲}y-xy^{۲})=۴۵-۳(۶)=۲۷$$

بنابراین $x-y=۳$.

۱۹۲- گزینه‌ی ۲ اگر تساوی‌های

$$a^{۳}+۳ab^{۲}=۶۳\ ,\ \ b^{۳}+۳a^{۲}b=۶۲$$

را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$a^{۳}+۳ab^{۲}+b^{۳}+۳a^{۲}b=۱۲۵$$

$$(a+b)^{۳}=۱۲۵$$

پس $a+b=۵$. هم‌چنین، اگر تساوی دوم را از تساوی اول کم کنیم به‌دست می‌آید

$$a^{۳}+۳ab^{۲}-b^{۳}-۳a^{۲}b=۶۳-۶۲$$

$$(a-b)^{۳}=۱$$

پس $a-b=۱$. به این ترتیب،

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{۵}{۱}=۵$$

۱۹۳- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۱۱+۴\sqrt{۷}=(۲+\sqrt{۷})^{۲}\ ,\ ۱۱-۴\sqrt{۷}=(-۲+\sqrt{۷})^{۲}$$

بنابراین

$$(۱۱+۴\sqrt{۷})^{\frac{۳}{۲}}=((۲+\sqrt{۷})^{۲})^{\frac{۳}{۲}}=(۲+\sqrt{۷})^{۳}$$

$$(۱۱-۴\sqrt{۷})^{\frac{۳}{۲}}=((-۲+\sqrt{۷})^{۲})^{\frac{۳}{۲}}=(\sqrt{۷}-۲)^{۳}$$

اکنون به کمک اتحاد $(a+b)^{۳}+(a-b)^{۳}=۲a^{۳}+۶ab^{۲}$ حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$(\sqrt{۷}+۲)^{۳}+(\sqrt{۷}-۲)^{۳}=۲(\sqrt{۷})^{۳}+۶(\sqrt{۷})(۲^{۲})=۳۸\sqrt{۷}$$

۱۹۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا تساوی‌ها را به شکل زیر در می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^{۳}-x^{۲}y+۲xy^{۲}=۹۸ \\ y^{۳}+۲x^{۲}y-y^{۲}x=۳۴ \end{cases}$$

اگر تساوی دوم را از تساوی نخست کم کنیم به‌دست می‌آید

$$x^{۳}-۳x^{۲}y+۳xy^{۲}-y^{۳}=۹۸-۳۴=۶۴$$

در نتیجه $(x-y)^{۳}=۶۴$، بنابراین $x-y=۴$.

۱۹۵- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که بنابر اتحاد تفاضل مکعب‌ها،

$$(۲x-۳y)(۴x^۲+۶xy+۹y^۲)=(۲x)^۳-(۳y)^۳$$
$$=۸x^۳-۲۷y^۳$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۸x^۳$.

۱۹۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا طرف چپ تساوی را به کمک اتحاد تفاضل مکعب‌ها ساده می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{۳})(x^۲+x\sqrt{۳}+۳)=x^۳-(\sqrt{۳})^۳=x^۳-۳\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$x^۳-۳\sqrt{۳}=۲۷-۳\sqrt{۳}\Rightarrow x^۳=۲۷\Rightarrow x=۳$$

۱۹۷- گزینه‌ی ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵}{(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۳}^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲}^۲)}=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳}^۳+\sqrt[۳]{۲}^۳}$$
$$=\frac{۵}{۳+۲}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۱۹۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که بنابر اتحاد مجموع مکعب دو جمله،

$$۳۷۸^۳+۱۲۲^۳=(۳۷۸+۱۲۲)(۳۷۸^۲-۱۲۲\times۳۷۸+۱۲۲^۲)$$
$$=۵۰۰\times(۳۷۸^۲-۱۲۲\times۳۷۸+۱۲۲^۲)$$

۱۹۹- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$۵^{۱۲}-۱=(۵^۴)^۳-۱^۳=(۵^۴-۱)(۵^۸+۵^۴+۱)$$

هم‌چنین

$$۲۵^۴+۲۵^۲+۱=۵^۸+۵^۴+۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۵^۴-۱=۶۲۴$.

۲۰۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$(n+۱)^۲-(n+۱)+۱=n^۲+n+۱$. بنابراین نتیجه می‌شود

$$\frac{n^۳-۱}{(n+۱)^۲-(n+۱)+۱}=\frac{n^۳-۱}{n^۲+n+۱}=\frac{(n-۱)(n^۲+n+۱)}{n^۲+n+۱}=n-۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $n=۲۹$ برابر با ۲۸ است.

۲۰۱- گزینه‌ی ۴ مخرج کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب‌ها (چاق و لاغر) ساده می‌کنیم:

$$(a-\frac{۱}{a})(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱)=a^۳-\frac{۱}{a^۳}=\frac{a^۶-۱}{a^۳}$$

بنابراین عبارت A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A=\frac{۱-a^۶}{\frac{a^۶-۱}{a^۳}}=-a^۳$$

به ازای $a=\sqrt[۶]{۲}$ به‌دست می‌آید $A=-\sqrt{۲}$.

۲۰۲- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$a^۶-b^۶=(a^۲-b^۲)(a^۴+a^۲b^۲+b^۴)$$

هم‌چنین

$$(a^۲+b^۲)^۲-a^۲b^۲=a^۴+a^۲b^۲+b^۴$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^۲-b^۲=۲$$

۲۰۳- گزینه‌ی ۴ بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{b^۲})$$
$$=۳(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{b^۲})\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۲+۲\frac{۱}{ab}=۳^۲+\frac{۲}{۹}=\frac{۸۳}{۹}$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۳(\frac{۸۳}{۹}+\frac{۱}{۹})=۳\times\frac{۸۴}{۹}=۲۸$$

۲۰۴- گزینه‌ی ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^۳+b^۳=۲ab(a+b)$$
$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=۲ab(a+b)$$
$$a^۲-ab+b^۲=۲ab\qquad(a+b\neq۰)$$
$$a^۲+b^۲=۳ab$$

اگر دو طرف این تساوی را بر ab تقسیم کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=۳$$

در نتیجه

$$a^۲b^{-۲}+a^{-۲}b^۲=\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^۲-۲\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=۳^۲-۲=۷$$

۲۰۵- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳}=(a+\frac{۱}{a})(a^۲-۱+\frac{۱}{a^۲})$$

از طرف دیگر، بنابر فرض،

$$\frac{a-۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۳}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم به‌دست می‌آید

$$a+\frac{۱}{a}-۲=۳$$

پس $a+\frac{۱}{a}=۵$. اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم به‌دست می‌آید

$$a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}+۲=۲۵$$

پس $a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=۲۳$. به‌این‌ترتیب عبارت موردنظر برابر است با $۵(۲۳-۱)=۱۱۰$.

۲۰۶- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$a^{۳}-۲=۰$$
$$a^{۳}-۱-۱=۰$$
$$a^{۳}-۱=۱$$
$$(a-۱)(a^{۲}+a+۱)=۱$$

اگر دو طرف این تساوی را بر $a^{۲}+a+۱$ تقسیم کنیم به‌دست می‌آید

$$a-۱=\frac{۱}{a^{۲}+a+۱}$$

۲۰۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^{۳}-\frac{۱}{a^{۳}}=(a-\frac{۱}{a})(a^{۲}+۱+\frac{۱}{a^{۲}})$$
$$=(a-\frac{۱}{a})(۱۸+۱)=۱۹(a-\frac{۱}{a})$$

اکنون $a-\frac{۱}{a}$ را حساب می‌کنیم. توجه کنید که بنابر فرض، $a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}=۱۸$ و در نتیجه

$$(a-\frac{۱}{a})^{۲}+۲=۱۸$$
$$(a-\frac{۱}{a})^{۲}=۱۶$$

از طرف دیگر، $a>۱$، پس $a-\frac{۱}{a}>۰$ و در نتیجه $a-\frac{۱}{a}=۴$.

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با

$$۱۹(a-\frac{۱}{a})=۱۹\times۴=۷۶$$

۲۰۸- گزینه‌ی ۳ چون $a^{۲}-۶a+۱=۰$، پس $a^{۲}+۱=۶a$.
اگر دو طرف این تساوی را بر a تقسیم کنیم (توجه کنید که $a\neq۰$)، به‌دست می‌آید

$$a+\frac{۱}{a}=۶$$

بنابراین

$$a^{۳}+\frac{۱}{a^{۳}}=(a+\frac{۱}{a})(a^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}-۱)$$
$$=۶((a+\frac{۱}{a})^{۲}-۲-۱)$$
$$=۶(۳۶-۳)=۶\times۳۳=۱۹۸$$

۲۰۹- گزینه‌ی ۱ تساوی داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{a^{۲}}{b}-\frac{b^{۲}}{a}=b-a$$
$$\frac{a^{۳}-b^{۳}}{ab}=b-a$$
$$\frac{(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})}{ab}=b-a$$

در نتیجه، چون $a-b\neq۰$،

$$\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{ab}=-۱$$
$$a^{۲}+ab+b^{۲}=-ab$$
$$a^{۲}+۲ab+b^{۲}=۰$$
$$(a+b)^{۲}=۰$$
$$a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

بنابراین

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{-b}{b}+\frac{b}{-b}=-۱-۱=-۲$$

۲۱۰- گزینه‌ی ۴ از $a^{۲}-a-۱=۰$ نتیجه می‌شود $a^{۲}=a+۱$.
اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم نتیجه می‌شود

$$a^{۴}=(a+۱)^{۲}=a^{۲}+۲a+۱$$

به جای $a^{۲}$ قرار می‌دهیم $a+۱$، در نتیجه

$$a^{۴}=(a+۱)+۲a+۱=۳a+۲$$

بنابراین $a^{۴}-۲=۳a$.
از طرف دیگر،

$$a^{۳}-۱=(a-۱)(a^{۲}+a+۱)$$
$$=(a-۱)(a+۱+a+۱)$$
$$=(a-۱)(۲(a+۱))=۲(a-۱)(a+۱)$$
$$=۲(a^{۲}-۱)=۲(a+۱-۱)=۲a$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{۳a}{۲a}=\frac{۳}{۲}$.

۲۱۱- گزینه‌ی ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳})\underbrace{((\sqrt[۳]{۵})^{۲}-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۳})^{۲})}_{a}$$
$$=(\sqrt[۳]{۵})^{۳}+(\sqrt[۳]{۳})^{۳}=۵+۳=۸$$

بنابراین $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}=\frac{۸}{a}$.

۲۱۲- گزینه‌ی ۲ تساوی‌های $x^{۲}-x+۱=b$ و $x+۱=a$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(x+۱)(x^{۲}-x+۱)=ab$$
$$x^{۳}+۱=ab\Rightarrow x^{۳}=ab-۱$$

بنابراین

$$x^{۳}-ab+۱۰=ab-۱-ab+۱۰=۹$$

۲۱۳- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که $x=۱-\sqrt[۳]{y}$. در نتیجه

$$x^۲=(۱-\sqrt[۳]{y})^۲=۱+\sqrt[۳]{y^۲}-۲\sqrt[۳]{y}$$

بنابراین

$$x^۲+۳\sqrt[۳]{y}=۱+\sqrt[۳]{y^۲}+\sqrt[۳]{y}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱+\sqrt[۳]{y}+\sqrt[۳]{y^۲}}{۱-y}$$

اکنون توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$۱-y=(۱-\sqrt[۳]{y})(۱+\sqrt[۳]{y}+\sqrt[۳]{y^۲})$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر می‌شود با

$$\frac{۱}{۱-\sqrt[۳]{y}}=\frac{۱}{x}$$

۲۱۴- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم

$$a=\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x^۲-۲x}+\sqrt[۳]{x^۲-۴x+۴}$$

طرفین این تساوی و تساوی داده شده در مسئله را در یک‌دیگر ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۳a}{۲}=(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x-۲})(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x^۲-۲x}+\sqrt[۳]{x^۲-۴x+۴})$$

$$\frac{۳a}{۲}=(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x-۲})((\sqrt[۳]{x})^۲+\sqrt[۳]{x}\times\sqrt[۳]{x-۲}+(\sqrt[۳]{x-۲})^۲)$$

حالا به کمک اتحاد تفاضل مکعبات (چاق و لاغر) می‌توانیم عبارت سمت راست تساوی اخیر را ساده کنیم:

$$\frac{۳a}{۲}=(\sqrt[۳]{x})^۳-(\sqrt[۳]{x-۲})^۳$$

$$\frac{۳a}{۲}=x-(x-۲)$$

$$\frac{۳a}{۲}=۲\Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

۲۱۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر:

$$\begin{aligned}&\sin^۳\alpha+\cos^۳\alpha\\&=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^۲\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^۲\alpha)\\&=(\sin\alpha+\cos\alpha)(۱-\sin\alpha\cos\alpha)\end{aligned}$$

مخرج کسر:

$$\cos\alpha-\cos^۲\alpha\sin\alpha=\cos\alpha(۱-\cos\alpha\sin\alpha)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=۱+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=۱+\tan\alpha$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۲۱۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\begin{aligned}&\frac{\tan^۳x-\cot^۳x}{\tan x-\cot x}\\&=\frac{(\tan x-\cot x)(\tan^۲x+\cot^۲x+\tan x\cot x)}{(\tan x-\cot x)}\\&=\tan^۲x+\cot^۲x+۱=۵\end{aligned}$$

بنابراین $\tan^۲x+\cot^۲x=۴$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\sin^۲x}+\frac{۱}{\cos^۲x}&=۱+\tan^۲x+۱+\cot^۲x\\&=۲+\tan^۲x+\cot^۲x\\&=۲+۴=۶\end{aligned}$$

۲۱۷- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}&\sin^۳x+\cos^۳x\\&=(\sin x+\cos x)(\sin^۲x-\sin x\cos x+\cos^۲x)\\&=(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)\end{aligned}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x+\cos x)^۲=۱+۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $\sin x\cos x=-\frac{۵}{۱۸}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin^۳x+\cos^۳x=(\frac{۲}{۳})(۱+\frac{۵}{۱۸})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳}{۱۸}=\frac{۲۳}{۲۷}$$

۲۱۸- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned}&\frac{\sin^۳x-\cos^۳x}{\cos x-\sin x}\\&=\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^۲x+\sin x\cos x+\cos^۲x)}{-(\sin x-\cos x)}\\&=-(\sin^۲x+\sin x\cos x+\cos^۲x)\\&=-(۱+\sin x\cos x)=-۱-\sin x\cos x\end{aligned}$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر ۱- است.

۲۱۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$x^۳+۲۷=x^۳+۳^۳=(x+۳)(x^۲-۳x+۹)$$

$$x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+۳)(x^۲-۳x+۹)}{(x-۳)(x+۱)}\times\frac{(x-۳)(x-۱)(x+۱)}{x^۲-۳x+۹}=(x+۳)(x-۱)$$

۲۲۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}x^۳+x^۲-۲x&=x(x^۲+x-۲)\\&=x(x-۱)(x+۲)\end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{x(x-۱)(x+۲)}{x(x+۲)}\times\frac{x}{x(۱-x)}=-۱$$

۲۲۱- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$x^۲-۴x-۵=(x-۵)(x+۱)$$
$$x^۲-۵x-۶=(x-۶)(x+۱)$$
$$x^۲-۷x+۶=(x-۶)(x-۱)$$
$$x^۲-۶x+۵=(x-۵)(x-۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x-۵)(x+۱)}{(x-۶)(x+۱)}\times\frac{(x-۶)(x-۱)}{(x-۵)(x-۱)}=۱$$

۲۲۲- گزینه‌ی ② ابتدا صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$a(b+c)+c(b-a)=ab+ac+cb-ca$$
$$=ab+cb=(a+c)b$$

اکنون مخرج کسر را به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک ساده می‌کنیم:

$$a^۲+ab+bc+ca=a^۲+(b+c)a+bc=(a+b)(a+c)$$

بنابراین کسر مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a+c)b}{(a+b)(a+c)}=\frac{b}{a+b}$$

۲۲۳- گزینه‌ی ② بنابر اتحاد جمله‌ی مشترک،

$$b^۲+ab+bc+ca=b^۲+b(a+c)+ca$$
$$=(b+a)(b+c)$$
$$=۴\times۶=۲۴$$

هم‌چنین

$$c^۲+bc-ab-ac=c(c+b)-a(b+c)$$
$$=(b+c)(c-a)$$

از طرف دیگر

$$c-a=(c+b)-(a+b)=۶-۴=۲$$

بنابراین

$$c^۲+bc-ab-ac=۶\times۲=۱۲$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۲۴}{۱۲}=۲$$

۲۲۴- گزینه‌ی ③ عبارت مورد نظر برابر است با

$$y(x-y)-z(x-y)+x-z=(x-y)(y-z)+x-z$$

اکنون توجه کنید که

$$x-z=(x-y)+(y-z)=۲+۴=۶$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲\times۴+۶=۱۴$$

۲۲۵- گزینه‌ی ① **راه‌حل اول** عبارت را به شکل زیر تجزیه می‌کنیم:

$$۶x^۳-x^۲-۵x+۲=۶x^۳+۶x^۲-۷x^۲-۷x+۲x+۲$$
$$=۶x^۲(x+۱)-۷x(x+۱)+۲(x+۱)$$
$$=(x+۱)(۶x^۲-۷x+۲)$$
$$=(x+۱)(۶x^۲-۳x-۴x+۲)$$
$$=(x+۱)(۳x(۲x-۱)-۲(۲x-۱))$$
$$=(x+۱)(۲x-۱)(۳x-۲)$$

پس در تجزیه‌ی عبارت، $x-۲$ وجود ندارد.

راه‌حل دوم اگر در تجزیه‌ی یک چند جمله‌ای، عبارت $x-a$ وجود داشته باشد، با قراردادن a به جای x در چند جمله‌ای، باید حاصل آن صفر شود.

پس در چند جمله‌ای به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$۶\times۲^۳-۲^۲-۵\times۲+۲=۳۶\neq۰$$

پس در تجزیه‌ی عبارت، $x-۲$ وجود ندارد.

۲۲۶- گزینه‌ی ④ به کمک اتحاد مزدوج عدد داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$۱۷۱^۴-۱۶۹^۴=(۱۷۱^۲-۱۶۹^۲)(۱۷۱^۲+۱۶۹^۲)$$
$$=(۱۷۱-۱۶۹)(۱۷۱+۱۶۹)(۱۷۱^۲+۱۶۹^۲)$$
$$=۲\times۳۴۰(۱۷۱^۲+۱۶۹^۲)$$
$$=۵\times۸\times۱۷(۱۷۱^۲+۱۶۹^۲)$$

بنابراین این عدد بر ۵، ۸ و ۱۷ بخش‌پذیر است، پس بر ۱۹ بخش‌پذیر نیست.

۲۲۷- گزینه‌ی ② ابتدا عبارت را به شکل زیر در می‌آوریم:

$$۲(x^۲+۴xy+۴y^۲)+x+۲y-۱$$
$$=۲(x+۲y)^۲+x+۲y-۱$$

فرض کنید $x+۲y=t$. در نتیجه باید عبارت $۲t^۲+t-۱$ را تجزیه کنیم:

$$۲t^۲+t-۱=t^۲+t+t^۲-۱=t(t+۱)+(t-۱)(t+۱)$$
$$=(t+۱)(۲t-۱)=(x+۲y+۱)(۲x+۴y-۱)$$

بنابراین $x+۲y+۱$ در تجزیه‌ی عبارت مورد نظر وجود دارد.

۲۲۸- گزینه‌ی ① با تجزیه کردن صورت و مخرج کسر معلوم می‌شود که

$$ab^۳+a^۲b^۲=ab^۲(b+a)$$
$$a^۳b-ab^۳=ab(a^۲-b^۲)=ab(a+b)(a-b)$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر، برابر است با

$$\frac{ab^۲(a+b)}{ab(a+b)(a-b)}=\frac{b}{a-b}$$

۲۲۹- گزینه‌ی ④ با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{(x^۲-۴y^۲)+(۲xz+۴yz)}{x-۲y+۲z}$$
$$=\frac{(x+۲y)(x-۲y)+۲z(x+۲y)}{x-۲y+۲z}$$
$$=\frac{(x+۲y)(x-۲y+۲z)}{x-۲y+۲z}=x+۲y$$

۲۳۰- گزینه‌ی ④ عبارت را به کمک فاکتورگیری و اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$۲a^۳-۲ab^۲-۳a^۲b+۳b^۳=۲a(a^۲-b^۲)-۳b(a^۲-b^۲)$$
$$=(a^۲-b^۲)(۲a-۳b)$$
$$=(a-b)(a+b)(۲a-۳b)$$

بنابراین در تجزیه‌ی عبارت، عامل $۲a-۳b$ وجود دارد.

۲۳۱- گزینه‌ی ① ابتدا صورت عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$x^۲-y^۲-x+y=(x^۲-y^۲)-(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y)-(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x-y)(x+y-۱)}{x+y-۱}=x-y$$

۲۳۲- گزینه‌ی ③ ابتدا به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=x^۴+y^۴+x^۲y^۲=(x^۲+y^۲)^۲-۲x^۲y^۲+x^۲y^۲$$
$$=(x^۲+y^۲)^۲-x^۲y^۲$$

حالا به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A=(x^۲+y^۲-xy)(x^۲+y^۲+xy)$$

۲۳۳- گزینه‌ی ④ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع دو جمله می‌توان نوشت

$$x^۴-۷x^۲y^۲+۹y^۴=x^۴-۶x^۲y^۲+۹y^۴-x^۲y^۲$$
$$=(x^۲-۳y^۲)^۲-x^۲y^۲$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(x^۲-xy-۳y^۲)(x^۲+xy-۳y^۲)$$

۲۳۴- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$a^۴+a^۲b^۲+b^۴=(a^۲+b^۲)^۲-a^۲b^۲$$
$$=(a^۲-ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a^۲-ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)}{a^۲+ab+b^۲}+۳ab=a^۲+۲ab+b^۲$$
$$=(a+b)^۲=۵$$

۲۳۵- گزینه‌ی ② ابتدا صورت و مخرج کسر مورد نظر را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲-y^۲+۴x+۴=x^۲+۴x+۴-y^۲$$
$$=(x+۲)^۲-y^۲$$
$$=(x-y+۲)(x+y+۲)$$
$$x^۲+۲x+۲y-y^۲=x^۲-y^۲+۲(x+y)$$
$$=(x+y)(x-y+۲)$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x-y+۲)(x+y+۲)}{(x-y+۲)(x+y)}=\frac{x+y+۲}{x+y}=\frac{۴+۲}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۲۳۶- گزینه‌ی ③ ابتدا عبارت داده شده را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$a^۴-۶a^۲b^۲+۹b^۴-۲a^۲b^۲$$

در نتیجه، به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، عبارت مورد نظر به شکل $(a^۲-۳b^۲)^۲-۲(ab)^۲$ در می‌آید. اکنون طبق اتحاد مزدوج این عبارت تجزیه می‌شود:

$$(a^۲-۳b^۲-\sqrt{۲}ab)(a^۲-۳b^۲+\sqrt{۲}ab)$$

۲۳۷- گزینه‌ی ② ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^۶-a^۴-a^۲+۱=a^۴(a^۲-۱)-(a^۲-۱)=(a^۲-۱)(a^۴-۱)$$
$$a^۳-a^۲-a+۱=\underbrace{a^۳-a}_{a(a^۲-۱)}-(a^۲-۱)=(a^۲-۱)(a-۱)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a^۴-۱)(a^۲-۱)}{(a-۱)(a^۲-۱)}=\frac{a^۴-۱}{a-۱}$$

چون $a^۴=(\sqrt{۲})^۴=۴$، پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۳}{\sqrt{۲}-۱}=۳\sqrt{۲}+۳$$

۲۳۸- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$۷a^۲b^۲-a^۴-b^۴=۹a^۲b^۲-a^۴-b^۴-۲a^۲b^۲$$
$$=(۳ab)^۲-(a^۲+b^۲)^۲$$
$$=(۳ab-a^۲-b^۲)(۳ab+a^۲+b^۲)$$

بنابراین

$$\frac{۷a^۲b^۲-a^۴-b^۴}{a^۲+b^۲+۳ab}=۳ab-a^۲-b^۲$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۳ab=۶$.

۲۳۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا عبارت داده شده را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$x^{۲}-\frac{x}{۴}+\frac{۱}{۶۴}-y^{۲}+\frac{۱}{۲}y-\frac{۱}{۱۶}$$

در نتیجه به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان این عبارت را به شکل زیر درآورد:

$$(x-\frac{۱}{۸})^{۲}-(y-\frac{۱}{۴})^{۲}$$

بنابراین طبق اتحاد مزدوج، عبارت داده شده به شکل زیر تجزیه می‌شود:

$$(x-\frac{۱}{۸}+y-\frac{۱}{۴})(x-\frac{۱}{۸}-y+\frac{۱}{۴})=(x+y-\frac{۳}{۸})(x-y+\frac{۱}{۸})$$

۲۴۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}x^{۳}+x+۱۳۰&=x^{۳}+۱۲۵+x+۵\\&=(x^{۳}+۵^{۳})+x+۵\\&=(x+۵)(x^{۲}-۵x+۵^{۲})+(x+۵)\\&=(x+۵)(x^{۲}-۵x+۵^{۲}+۱)\\&=(x+۵)(x^{۲}-۵x+۲۶)\end{aligned}$$

هم‌چنین، $x^{۲}-۲۵=(x-۵)(x+۵)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned}&\frac{(x+۵)(x^{۲}-۵x+۲۶)}{(x-۵)(x+۵)}\div\frac{x^{۲}-۵x+۲۶}{x-۵}\\&=\frac{x^{۲}-۵x+۲۶}{x-۵}\times\frac{x-۵}{x^{۲}-۵x+۲۶}=۱\end{aligned}$$

۲۴۱- گزینه‌ی ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^{۳}-۱=(x-۱)(x^{۲}+x+۱)$$

$$\begin{aligned}۲x^{۲}+۳x-۵&=۲x^{۲}+۵x-۲x-۵\\&=x(۲x+۵)-(۲x+۵)\\&=(۲x+۵)(x-۱)\end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{x^{۲}+x+۱}{x(۲x+۵)}\times\frac{(۲x+۵)(x-۱)}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}=\frac{۱}{x}$$

۲۴۲- گزینه‌ی ۱ فرض کنید $x^{۲}-x=A$.

در این صورت

$$\begin{aligned}(x^{۲}-x)^{۲}-۸(x^{۲}-x)+۱۲&=A^{۲}-۸A+۱۲\\&=(A-۲)(A-۶)\end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که

$$A-۲=x^{۲}-x-۲=(x+۱)(x-۲)$$

و

$$A-۶=x^{۲}-x-۶=(x-۳)(x+۲)$$

بنابراین $x+۱$، $x-۲$، $x-۳$ و $x+۲$ تنها عامل‌های عبارت موردنظرند و $x+۳$ عامل آن نیست.

۲۴۳- گزینه‌ی ۴ عبارت را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$A=x^{۵}-x^{۴}+x^{۳}-x^{۲}+x-۱=(x^{۵}-x^{۴}+x^{۳})-(x^{۲}-x+۱)$$

اگر در پرانتز اولی از $x^{۳}$ فاکتور بگیریم، عبارت تجزیه خواهد شد:

$$\begin{aligned}A&=x^{۳}(x^{۲}-x+۱)-(x^{۲}-x+۱)\\&=(x^{۲}-x+۱)(x^{۳}-۱)\end{aligned}$$

حالا از اتحاد تفاضل مکعبات (چاق و لاغر) استفاده می‌کنیم:

$$A=(x^{۲}-x+۱)(x-۱)(x^{۲}+x+۱)$$

بنابراین $a=-۱$، $b=\pm۱$ و $c=۱$ و در نتیجه

$$۲a-b^{۲}+c=-۲-۱+۱=-۲$$

۲۴۴- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن عبارت جبری در یک عدد صحیح یا عبارت‌های جبری دیگر به‌دست می‌آید. بنابراین عبارت‌های زیر، مضارب $m-۳$ هستند:

$$m^{۳}-۲۷=(m-۳)(m^{۲}+۳m+۹)$$

$$m^{۲}-۲m-۳=(m-۳)(m+۱)$$

$$m^{۲}-۹=(m-۳)(m+۳)$$

اما عبارت $\frac{۳m-۹}{۴}=\frac{۳}{۴}(m-۳)$ مضربی از $m-۳$ نیست.

۲۴۵- گزینه‌ی ۴ چون $\sqrt[۷]{۸}=\sqrt[۷]{۲^{۳}}$، پس باید صورت و مخرج کسر مورد نظر را در $\sqrt[۷]{۲^{۴}}$ ضرب کنیم، که برابر است با $\sqrt[۷]{۱۶}$:

$$\frac{۲}{\sqrt[۷]{۸}}=\frac{۲}{\sqrt[۷]{۸}}\times\frac{\sqrt[۷]{۱۶}}{\sqrt[۷]{۱۶}}=\frac{۲\sqrt[۷]{۱۶}}{\sqrt[۷]{۲^{۳}\times۲^{۴}}}=\frac{۲\sqrt[۷]{۱۶}}{\sqrt[۷]{۲^{۷}}}=\frac{۲\sqrt[۷]{۱۶}}{۲}=\sqrt[۷]{۱۶}$$

۲۴۶- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۹+۳\sqrt{۳}}{-۲}$$

نتیجه می‌گیریم حاصل عبارت مورد نظر، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۳}-\frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۳}=-\frac{۹}{۲}=-۴/۵$$

۲۴۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}+۱}&=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}\\&=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}{۲-۱}=(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۲}-۱)\end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{۲}(۲-\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}-۱}&=\frac{۲\sqrt{۲}-۲}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۲}-۱)}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۲}-۱)}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}\\&=\frac{۲(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}=\frac{۲(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱}\\&=(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۳}+۱)\end{aligned}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر با صفر است.

۲۴۸- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$۶y^{-۱}=\frac{۶}{y}=\frac{۶}{۳-\sqrt{۳}}$$

اکنون مخرج کسر بالایی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۶}{۳-\sqrt{۳}}\times\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}=\frac{۶(۳+\sqrt{۳})}{\underbrace{۳^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}}_{۶}}=۳+\sqrt{۳}$$

بنابراین $۶y^{-۱}-\sqrt{۳}=۳$.

۲۴۹- گزینه‌ی ۱ دقت کنید که

$$\frac{۲a+۱}{a}=۲+\frac{۱}{a}=۲+\frac{۱}{۲-\sqrt{۵}}=۲+\frac{\sqrt{۵}+۲}{(\sqrt{۵}+۲)(۲-\sqrt{۵})}$$
$$=۲+\frac{\sqrt{۵}+۲}{-۱}=۲-(\sqrt{۵}+۲)=-\sqrt{۵}$$

۲۵۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که

$$a^{۲}=(\sqrt[۴]{۵})^{۲}=۵^{\frac{۲}{۴}}=۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین

$$(a^{۲}-۲)^{-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۵}-۲}=\frac{۱}{\sqrt{۵}-۲}\times\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}+۲}$$
$$=\frac{\sqrt{۵}+۲}{(\sqrt{۵}-۲)(\sqrt{۵}+۲)}=\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}^{۲}-۲^{۲}}=\sqrt{۵}+۲$$

۲۵۱- گزینه‌ی ۱ $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ را در مزدوجش که $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ است، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{\sqrt{۳}^{۲}-\sqrt{۲}^{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{۳-۲}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}$$

۲۵۲- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$۲+\sqrt{۲}=(۲+\sqrt{۲})\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{(۲+\sqrt{۲})(۲-\sqrt{۲})}{۲-\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{۲^{۲}-\sqrt{۲}^{۲}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۲-\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۲}{۲-\sqrt{۲}}}}=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۲۵۳- گزینه‌ی ۴ مخرج کسرها را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۶}{\sqrt{۳}}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$
$$\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}^{۲}-۱}=\sqrt{۳}-۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲\sqrt{۳}-(\sqrt{۳}-۱)=\sqrt{۳}+۱$$

۲۵۴- گزینه‌ی ۲ مخرج کسرها را گویا می‌کنیم. سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۷}{۳+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}+\frac{۷(۳-\sqrt{۲})}{(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}+\frac{۷(۳-\sqrt{۲})}{۹-۲}=\sqrt{۲}-۱+۳-\sqrt{۲}=۲$$

۲۵۵- گزینه‌ی ۲ صورت و مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}$ را در $\sqrt[۴]{۲}-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۴]{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$$
$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}+۱$$

۲۵۶- گزینه‌ی ۱ به کمک اتحاد مزدوج، مخرج کسرها را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}-۱$$

به همین ترتیب

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲},\ \frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}=\sqrt{۴}-\sqrt{۳}$$
$$,\dots,\ \frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}=\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹}$$

بنابراین عبارت داده شده برابر است با

$$\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۴}-\sqrt{۳}+\cdots+\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹}$$
$$=\sqrt{۱۰۰}-۱=۱۰-۱=۹$$

۲۵۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$a=\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+۱)+\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۳}+۱)}{\sqrt{۳}+۱}=۱+\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\frac{ab-۱}{b}=a-\frac{۱}{b}=\sqrt{۲}+۱-\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$$
$$=\sqrt{۲}+۱-\frac{(\sqrt{۲}-۱)}{۲-۱}=۲$$

۲۵۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\frac{۸\sqrt{۵}-۸}{\sqrt{۵}+۱}=۸\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}+۱}=۸\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}+۱}\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}-۱}$$

$$=\frac{۸(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۴}=۲(\sqrt{۵}-۱)^۲$$

$$\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}=\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}\times\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}-۲}=\frac{(\sqrt{۵}-۲)^۲}{۵-۴}=(\sqrt{۵}-۲)^۲$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$۲(\sqrt{۵}-۱)^۲-(\sqrt{۵}-۲)^۲=۲(۶-۲\sqrt{۵})-(۹-۴\sqrt{۵})=۳$$

۲۵۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$ را گویا می‌کنیم. برای این کار صورت و مخرج آن را در $۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۸}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۳})^۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۸}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}$$

$$=۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$$

بنابراین $x=۱+\sqrt{۲}$ و در نتیجه $(x-۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$.

۲۶۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا مخرج کسر را به صورت زیر در می‌آوریم و با کمک اتحاد جمله‌ی مشترک آن را ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt{۳})^۲-\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\times\sqrt{۵}-\sqrt{۲}\times\sqrt{۵}$$

$$=(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۳-۲}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

۲۶۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم. توجه کنید که $\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$. در نتیجه

$$۳\sqrt{۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۳}=۶\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

$$=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۳-۲}$$

$$=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

۲۶۲- گزینه‌ی ۱ نخست مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{(\sqrt[۳]{۳})^۳-۱}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۹}+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۳}+\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$.

۲۶۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$۲-\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)$$

بنابراین

$$A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}$$

حالا با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسرها را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)(\sqrt[۳]{۲}+۱)}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲})^۳-۱}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۲})^۳+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲-۱}-\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}$$

$$=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱-\sqrt[۳]{۲}-۱=\sqrt[۳]{۴}$$

۲۶۴- گزینه‌ی ۳ چون

$$\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱=\sqrt[۳]{۳}^۲+۱\times\sqrt[۳]{۳}+۱^۲$$

برای این‌که مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج آن را در $\sqrt[۳]{۳}-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}^۲+\sqrt[۳]{۳}+۱^۲}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}-۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{\sqrt[۳]{۳}^۳-۱^۳}$$

$$=\frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{۳-۱}=\sqrt[۳]{۳}-۱$$

به همین ترتیب،

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}^۲-\sqrt[۳]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{\sqrt[۳]{۲}^۳+۱^۳}$$

$$=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}=\sqrt[۳]{۲}+۱$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[۳]{۳}-۱+\sqrt[۳]{۲}+۱=\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}$$

۲۶۵- گزینه‌ی ② توجه کنید که

$$y=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=۲+\sqrt{۳}$$

$$x=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$

در نتیجه $xy=۱$ و $x+y=۴$. از طرفی از اتحاد مجموع مکعب‌ها نتیجه می‌شود

$$x^۳+y^۳=(x+y)(x^۲-xy+y^۲)$$
$$=(x+y)((x+y)^۲-۳xy)$$
$$=۴(۱۶-۳)=۵۲$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $۶۴=۱۲+۵۲$.

۲۶۶- گزینه‌ی ④ ابتدا عبارت x را ساده می‌کنیم. برای این کار، صورت و مخرج x را در $۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\overset{۳}{۶۴}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۳})^۲}$$
$$=\frac{۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}}$$

در نتیجه $x=۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$. بنابراین

$$x+\sqrt{۳}=۱+\sqrt{۲}\Rightarrow(x+\sqrt{۳})^۲=(۱+\sqrt{۲})^۲=۳+۲\sqrt{۲}$$

در نتیجه $(x+\sqrt{۳})^۲-۲\sqrt{۲}=۳$.

۲۶۷- گزینه‌ی ③ توجه کنید که $a-b=\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۵}$

اکنون ثابت می‌کنیم عبارت بالایی مثبت است، چون

$$(\sqrt{۲}+۱)^۲-۵=۲\sqrt{۲}-۲=۲(\sqrt{۲}-۱)>۰$$

بنابراین $\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۵}>۰$، یعنی $a>b$. همچنین،

$$b=\frac{۱}{\sqrt{۵}+۲},c=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}+۳}$$

در نتیجه

$$\begin{matrix}\sqrt{۱۰}>\sqrt{۵}\\ ۳>۲\end{matrix}\Rightarrow\sqrt{۱۰}+۳>۲+\sqrt{۵}\Rightarrow\frac{۱}{۲+\sqrt{۵}}>\frac{۱}{۳+\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین $b>c$.

۲۶۸- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}=۱+\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^۲}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین باید حاصل عبارت زیر را حساب کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

اکنون مخرج هر یک از سه کسر اخیر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{۲}-۱$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

$$\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$

در نتیجه حاصل عبارت موردنظر برابر با ۱ است.

فصل چهارم

معادلات و نامعادلات

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

درس اول: معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های مختلف حل آن

معادله‌ی درجه‌ی دوم

معادله‌ی درجه‌ی دوم، معادله‌ای به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ است، که در آن a، b و c عددهایی حقیقی‌اند و $a\neq ۰$.

اگر $\Delta=b^۲-۴ac\geq ۰$، جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ عبارت‌اند از

$$x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a},\quad x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta<۰$، معادله جواب حقیقی ندارد.

تست ۱ اگر ۲− ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-(m-۱)x-۳m=۰$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱− ۴) ۳−

پاسخ: چون ۲− ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس در این معادله صدق می‌کند:

$$x^۲-(m-۱)x-۳m=۰\Rightarrow(-۲)^۲-(m-۱)(-۲)-۳m=۰$$

$$\Rightarrow ۴+۲(m-۱)-۳m=۰$$

$$\Rightarrow ۴+۲m-۲-۳m=۰\Rightarrow m=۲$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^۲-(۲-۱)x-۳\times۲=۰\Rightarrow x^۲-x-۶=۰$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۲}=\frac{۱\pm۵}{۲}$$

پس ریشه‌ی دیگر معادله‌ی مورد نظر ۳ است.

تست ۲ اگر $\sin^۲\alpha-۳\sin\alpha-۳=۰$ مقدار $۲\cos^۲\alpha+۱۳$ کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۲۱}$ ۳) $۵\sqrt{۷}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

پاسخ: فرض می‌کنیم $t=\sin\alpha$. پس معادله به شکل $t^۲-۳t-۳=۰$ در می‌آید. بنابراین

$$t=\frac{۳\pm\sqrt{۲۱}}{۲}$$

واضح است که $\sin\alpha=\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}>۱$ قابل قبول نیست. بنابراین $\sin\alpha=\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$ و در نتیجه

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\left(\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^۲=۱-\frac{۳۰-۶\sqrt{۲۱}}{۴}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۴-۳۰+۶\sqrt{۲۱}}{۴}=\frac{۳\sqrt{۲۱}-۱۳}{۲}$$

بنابراین $۲\cos^۲\alpha+۱۳=۳\sqrt{۲۱}$.

نکته اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه

$$ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

تست ۳ **مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله‌ی زیر $\{\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴}\}$ است؟**

۱) $۱۲x^۲+۱۷x-۶=۰$ ۲) $۱۲x^۲-۱۷x+۶=۰$ ۳) $۶x^۲-۷x+۲=۰$ ۴) $۶x^۲+۷x-۲=۰$

پاسخ: برای نوشتن این معادله می‌توان به شکل زیر عمل کرد:

$$(x-\frac{۲}{۳})(x-\frac{۳}{۴})=۰$$

حالا طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$۳(x-\frac{۲}{۳})۴(x-\frac{۳}{۴})=۰\Rightarrow(۳x-۲)(۴x-۳)=۰$$

بنابراین معادله به شکل $۱۲x^۲-۱۷x+۶=۰$ است.

نکته **اگر مجموع ضرایب معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر صفر باشد، یکی از ریشه‌های این معادله برابر با ۱ و ریشه‌ی دیگر آن برابر با $\frac{c}{a}$ است.**

تست ۴ **اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲-(۳-۲\sqrt{۲})x-\sqrt{۸}=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، مقدار $۳x_۱+x_۲$ کدام است؟**

۱) $۱-\sqrt{۸}$ ۲) $۱+\sqrt{۸}$ ۳) $۳-\sqrt{۸}$ ۴) $۳+\sqrt{۸}$

پاسخ: چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌های معادله برابر یک است و دیگری $\frac{-\sqrt{۸}}{۳}$. بنابراین

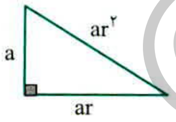
$$x_۱=-\frac{\sqrt{۸}}{۳},\quad x_۲=۱$$

$$۳x_۱+x_۲=۱-\sqrt{۸}$$

تست ۵ **اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، نسبت طول بزرگ‌ترین ضلع به طول کوچک‌ترین ضلع مثلث کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$

پاسخ: اگر اضلاع مثلث را به شکل زیر در نظر بگیریم، طبق قضیه‌ی فیثاغورس می‌توانیم تساوی $a^۲+(ar)^۲=(ar^۲)^۲$ را بنویسیم.



بنابراین

$$a^۲+a^۲r^۲=a^۲r^۴\Rightarrow ۱+r^۲=r^۴$$

اگر فرض کنیم $x=r^۲$، آن‌گاه معادله‌ی بالا به‌صورت $x^۲-x-۱=۰$ در می‌آید. پس

$$x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

واضح است که $r^۲=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<۰$ قابل قبول نیست، پس

$$r^۲=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

بنابراین نسبت طول بزرگ‌ترین ضلع به کوچک‌ترین ضلع برابر است با

$$\frac{ar^۲}{a}=r^۲=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

نکته وضعیت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در جدول زیر آورده‌ایم:

وضعیت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$	$\Delta=b^۲-۴ac$
معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد: $x_۱, x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$	$\Delta>۰$
معادله یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد: $x_۱=-\frac{b}{۲a}$	$\Delta=۰$
معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.	$\Delta<۰$

تست ۶ معادله‌ی $x^۲+۱۲x-۴m=۰$ ریشه‌ی مضاعف دارد. مقدار m کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) -۹ ۴) ۱۲

پاسخ: چون معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، پس دلتای آن صفر است:

$$\Delta=۱۲^۲-۴(-۴m)=۰\Rightarrow m=-۹$$

تست ۷ اگر معادله‌ی $x^۲-x-m+۱=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{۳}{۴}$ ۲) $m<\frac{۳}{۴}$ ۳) $m>\frac{۴}{۳}$ ۴) $m<\frac{۴}{۳}$

پاسخ: چون معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد، پس $\Delta>۰$. بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac>۰$$

$$(-۱)^۲-۴\times۱\times(-m+۱)>۰\Rightarrow ۱-۴(-m+۱)>۰\Rightarrow ۱+۴m-۴>۰\Rightarrow ۴m>۳\Rightarrow m>\frac{۳}{۴}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل چهارم

درس اول:
معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های مختلف حل آن

۱- مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^۲-۶x-۱۲=۰$ کدام است؟

۱) $\{۳+\sqrt{۱۲}, ۳-\sqrt{۱۲}\}$
۲) $\{۶+\sqrt{۲۱}, ۶-\sqrt{۲۱}\}$
۳) $\{۳+\sqrt{۲۱}, ۳-\sqrt{۲۱}\}$
۴) $\{۶+\sqrt{۱۲}, ۶-\sqrt{۱۲}\}$

۲- اعداد $\sqrt{۳}-۲$ و $\sqrt{۳}+۱$ جواب‌های کدام یک از معادلات زیر هستند؟

۱) $x^۲-\sqrt{۳}x-۱=۰$
۲) $x^۲+\sqrt{۳}x-۲=۰$
۳) $x^۲+۳x-\sqrt{۳}+۱=۰$
۴) $x^۲-۳x+\sqrt{۳}-۱=۰$

۳- کدام معادله جواب حقیقی ندارد؟

۱) $x^۲-\sqrt{۲}x-\sqrt{۳}=۰$
۲) $\sqrt{۲}x^۲-۲\sqrt{۳}x+۱=۰$
۳) $\sqrt{۳}x^۲-۳\sqrt{۲}x+۱=۰$
۴) $x^۲-\sqrt{۳}x+\sqrt{۲}=۰$

۴- کدام معادله ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۱) $۳x^۲-۲\sqrt{۳}x+۱=۰$
۲) $۲x^۲-۲\sqrt{۲}x-۱=۰$
۳) $۳x^۲-\sqrt{۶}x-۲=۰$
۴) $x^۲+\sqrt{۶}x-۲=۰$

۵- کدام معادله دو جواب متمایز دارد؟

۱) $۴x^۲-۵x+۳=۰$
۲) $\frac{۱}{۲}x^۲-x+۱=۰$
۳) $۵x^۲-۴x-۲=۰$
۴) $۹x^۲-۶x+۱=۰$

۶- اگر $x>۰$ و $x^۲-۴x=۲۱$، حاصل $(x-۵)^۲+\frac{۶۰}{x+۳}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۷- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(x^۲-۱)^۲=(۴x+۲)^۲$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) -۳

۸- مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $۲x^۲-۲(\sin\alpha+\cos\alpha)x+\sin\alpha\cos\alpha=۰$ کدام است؟

۱) $\{\sin\alpha+\cos\alpha , \sin\alpha-\cos\alpha\}$
۲) $\{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+۱}{۲}, \frac{\sin\alpha+\cos\alpha-۱}{۲}\}$
۳) $\{۱+\sin\alpha+\cos\alpha , \sin\alpha+\cos\alpha-۱\}$
۴) $\{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{۲}, \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{۲}\}$

۹- ریشه‌ی منفی معادله‌ی $۷۵x^۲+۶x-۸۱=۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۸}{۱۷}$
۲) $-\frac{۱۷}{۱۸}$
۳) $-\frac{۲۷}{۲۵}$
۴) $-\frac{۲۵}{۲۷}$

۱۰- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})x+\sqrt{۱۵}=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، مقدار $x_۱^۲+x_۲^۴$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۲۸
۳) ۱۴
۴) ۳۴

۱۱- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $(\cos^۲\alpha)x^۲+x+\sin^۲\alpha=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، حاصل $x_۲^۲-x_۱$ کدام است؟ $(۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ)$

۱) $\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$
۲) $\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$
۳) $\frac{۱}{\sin\alpha}$
۴) $\frac{۱}{\cos\alpha}$

۱۲- اگر $a\neq۰$، کدام یک از اعداد زیر همواره یکی از جواب‌های معادله‌ی $a^۲x^۲-a^۲x+ab-b^۲=۰$ است؟

۱) $\frac{a-b}{a}$
۲) $\frac{a+b}{a}$
۳) $\frac{b+۱}{a}$
۴) $\frac{b-۱}{a}$

۱۳- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^۲+(۸-m)x-۸m=۰$ مکعب جواب دیگر باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) ۲۵۶
۲) ۵۱۲
۳) ۱۰۲۴
۴) ۲۰۴۸

۱۴- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^۲+(m-۱)x+m-۲m^۲=۰$ منفی و جواب دیگر بزرگ‌تر از ۲ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>-\frac{۱}{۲}$ ۲) $m<۲$ ۳) $m<-\frac{۱}{۲}$ یا $m>۲$ ۴) $-\frac{۱}{۲}<m<۲$

۱۵- اگر $x=\frac{۱}{۲}$ جواب معادله‌ی $x^۲+۲kx+۵=۰$ باشد، مقدار k چقدر است؟

۱) $-\frac{۱۹}{۴}$ ۲) $-\frac{۲۰}{۴}$ ۳) $-\frac{۲۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۲۲}{۴}$

۱۶- اگر a و b جواب‌های معادله‌ی $x^۲-x-۵=۰$ باشند، مقدار عبارت $(a^۲-a-۲)(b^۲-b+۲)$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۱ ۴) ۲۵

۱۷- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^۲-kx+k+۱=۰$ برابر با k باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۳

۱۸- اگر $x=\sqrt{۲}+۱$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-mx+m-۱=۰$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}-۱$ ۳) $-\sqrt{۲}+۱$ ۴) $-\sqrt{۲}-۱$

۱۹- اگر $x=-m$ یک جواب معادله‌ی $۲x^۲-mx-۲m-۱=۰$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) m ۲) $\frac{m}{۲}$ ۳) $\frac{۳m}{۲}$ ۴) $-\frac{m}{۲}$

۲۰- اگر در معادله‌ی $ax^۲+bx-۱=۰$ رابطه‌ی $۴a+۲b=۱$ بین ضرایب a و b برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $-۲a$ ۳) $-\frac{۱}{۲a}$ ۴) $\frac{۱}{۲a}$

۲۱- اگر a و b اعدادی صحیح باشند و $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ریشه‌ی معادله‌ی $۴x^۲-ax+b=۰$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) -۵

۲۲- اگر معادله‌ی $x^۲+۲x+k-۲=۰$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳- به ازای چند مقدار m معادله‌ی $mx^۲-۲x+m=۰$ یک جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴- اگر معادله‌ی $mx^۲-۲(m+۱)x+m-۱=۰$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۲۵- معادله‌ی $۲x^۲-x-m=۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. حدود m کدام است؟

۱) $m<\frac{۱}{۸}$ ۲) $m<-\frac{۱}{۸}$ ۳) $m>\frac{۱}{۸}$ ۴) $m>-\frac{۱}{۸}$

۲۶- اگر معادله‌ی $۳x^۲-۴x+m=۰$ جواب حقیقی داشته باشد، حداکثر مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۲۷- اگر معادله‌ی $۴x^۲-۶x+k-۱=۰$ حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد،حداقل مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۲۸- اگر معادله‌ی $a^۲x^۲+۲x+c=۰$ دو جواب حقیقی داشته باشد، معادله‌ی $a^۲x^۲-۲x+c=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱ یا ۲

۲۹- اگر معادله‌ی $x^۲-۲x+b=۰$ دو جواب حقیقی داشته باشد، معادله‌ی $x^۲-۴x+b+۳=۰$ چند جواب دارد؟

۱) حداکثر یک ۲) دقیقاً دو ۳) صفر ۴) یک یا دو

۳۰- اگر معادله‌ی $x^۲+ax+b^۲=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، کدام گزینه درباره‌ی معادله‌ی $x^۲+bx+a^۲=۰$ درست است؟

۱) دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
۲) یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد.
۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد.
۴) ممکن است ریشه‌ی حقیقی داشته باشد یا نداشته باشد.

۳۱- اگر معادله‌ی $kx^۲+(۴k-۸)x+۴k-۷=۰$ یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، معادله‌ی $x^۲-kx+۱=۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

۳۲- اگر معادله‌ی $x^۲+۴x+k-۱=۰$ جواب حقیقی نداشته باشد، معادله‌ی $x^۲-۲x-k+۶=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) نامتناهی

۳۳- اگر $x=k$ جواب مشترک معادلات $x^۲-ax+۱=۰$ و $x^۲-۳x-k+۳=۰$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) -۲ یا $\frac{۱۰}{۳}$
۲) ۲ یا $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) ۲ یا $\frac{۱۰}{۳}$
۴) -۲ یا $-\frac{۱۰}{۳}$

۳۴- اگر معادله‌های $x^۲-kx+۳=۰$ و $x^۲-۳x+k=۰$ دقیقاً یک ریشه‌ی مشترک داشته باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) -۳
۴) -۴

۳۵- به ازای چند مقدار a یکی از جواب‌های معادلات $x^۲-ax+a-۱=۰$ و $۲x^۲-۴x+a-۱=۰$ مشترک است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۶- اگر $a^۲+ab+a=۱۴$ و $b^۲+ab+b=۲۸$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ یا -۶
۲) ۶ یا -۷
۳) -۱ یا ۱۳
۴) -۱۳ یا ۱

۳۷- اگر $۳\sin^۲\alpha-۴\cos\alpha+۴=۰$، مقدار $\cos^۴\alpha$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) صفر

۳۸- اگر $\tan^۲\alpha-۳\tan\alpha+۱=۰$، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $۲\pm\sqrt{۵}$
۳) $۳\pm\sqrt{۵}$
۴) $\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$

۳۹- اگر $\tan\alpha-۲\cot\alpha=\sqrt{۲}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع اول باشد، مقدار $\sqrt{۲}\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}-۱$
۳) $۱+\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۵}-۱$

۴۰- اگر $۱+\sin x\cos x=\sin x+\cos x$، حاصل $\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) -۱

۴۱- در یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت مثبت، هر جمله برابر با مجموع ۲ جمله‌ی پیش از آن است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$
۴) ۲

۴۲- اگر $x, x+۲, ۲x+۶$ سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت باشند، قدرنسبت دنباله کدام است؟

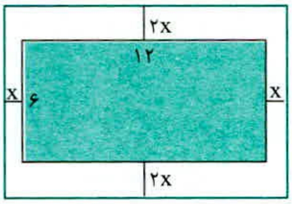
۱) $\sqrt{۵}-۱$
۲) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$
۴) $\sqrt{۵}+۱$

۴۳- a، b، c و d چهار عدد طبیعی زوج متوالی‌اند. مجموع a و c برابر با یک پنجم حاصل‌ضرب b و d است. مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۶
۳) ۲۸
۴) ۳۰

۴۴- مطابق شکل مقابل، قاب عکسی به طول ۱۲ و عرض ۶ سانتی‌متر درون قابی به مساحت ۱۰۴ سانتی‌متر مربع قرار گرفته است. محیط قاب چقدر است؟

۱) ۴۰
۲) ۴۲
۳) ۴۴
۴) ۴۶



۴۵- اندازه‌ی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه اعداد x، $۲x$ و $۲x+۱$ هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $۶+۲\sqrt{۵}$　۲) $۱۸+۸\sqrt{۵}$　۳) $۹+۲\sqrt{۵}$　۴) $۹+۴\sqrt{۵}$

۴۶- طول مستطیلی چهار واحد از عرض آن بیش‌تر است. اگر اندازه‌ی قطر مستطیل برابر $\sqrt{۲۰}$ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۶　۴) ۸

۴۷- تفاضل مکعبات دو عدد فرد طبیعی متوالی برابر ۳۸۶ است. تفاضل مربعات این اعداد کدام است؟

۱) ۲۴　۲) ۳۲　۳) ۴۰　۴) ۴۸

۴۸- مجموع اندازه‌ی مساحت و طول دو قطر یک مربع برابر ۱۶ است. محیط این مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$　۲) $۴\sqrt{۲}$　۳) $۸\sqrt{۲}$　۴) $۱۶\sqrt{۲}$

۴۹- نسبت دو عدد طبیعی برابر $\frac{۳}{۲}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۴ واحد بیش‌تر از مجموع آن‌هاست. اختلاف این دو عدد کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۵۰- مجموع دو عدد برابر ۶ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴ است. نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر کدام است؟

۱) $-۷-۴\sqrt{۳}$　۲) $۷+۴\sqrt{۳}$　۳) $\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$　۴) $\frac{۷-۳\sqrt{۵}}{۲}$

۵۱- دو سال پیش سن مریم ۷ برابر سن برادرش بوده است. اکنون سن مریم، مربع سن برادرش است. مجموع سن مریم و برادرش در حال حاضر چقدر می‌تواند باشد؟

۱) ۲۰　۲) ۱۸　۳) ۱۶　۴) ۱۴

۵۲- سیمی به طول ۳۲ سانتی‌متر را به دو تکه تقسیم کرده‌ایم و با هر تکه یک مربع ساخته‌ایم. مجموع مساحت‌های این دو مربع ۳۴ سانتی‌متر مربع شده است. طول هر تکه از سیم کدام است؟

۱) ۱۴ و ۱۸　۲) ۱۵ و ۱۷　۳) ۱۲ و ۲۰　۴) ۱۰ و ۲۲

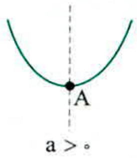
فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

درس دوم: سهمی

سهمی

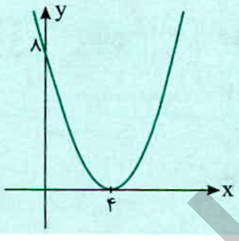
به نمودار $y=ax^{۲}+bx+c$، که در آن a، b و c عددهایی حقیقی‌اند و $a\neq۰$، **سهمی** می‌گویند. سهمی برحسب علامت a به یکی از دو شکل روبه‌رو است.

اگر $a>۰$، A پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی است، و اگر $a<۰$، A بالاترین نقطه‌ی سهمی است. در هر دو نمودار، A را **رأس** سهمی می‌نامند. همچنین، خط‌چینی که از رأس سهمی گذشته و موازی محور y است، **محور تقارن** سهمی است.



نکته **معادله‌ی هر سهمی را می‌توان به شکل $y=a(x-h)^{۲}+k$ نوشت، که در این جا $a\neq۰$. رأس این سهمی نقطه‌ی (h , k) است و خط $x=h$ محور تقارن این سهمی است.**

تست ۱ **عرض نقطه‌ی برخورد سهمی شکل روبه‌رو با خط $x=۸$ کدام است؟**



۱) ۳

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۶

پاسخ: چون نقطه‌ی $(۴, ۰)$ رأس سهمی است، معادله‌ی سهمی به صورت زیر درمی‌آید

$$y=a(x-۴)^{۲}+۰=a(x-۴)^{۲}$$

چون سهمی از نقطه‌ی $(۰ , ۸)$ می‌گذرد، پس

$$۸=a(۰-۴)^{۲}=۱۶a\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین معادله‌ی سهمی به صورت زیر درمی‌آید

$$y=\frac{(x-۴)^{۲}}{۲}$$

در نتیجه عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با خط $x=۸$ برابر است با

$$y=\frac{(۸-۴)^{۲}}{۲}=۸$$

نکته رأس سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a})$ است و خط $x=-\frac{b}{۲a}$ خط تقارن این سهمی است.

تست ۲ رأس سهمی $y=x^۲-۴x+۲$ کدام نقطه است؟

۱) $(۲,-۲)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(۲,۲)$ ۴) $(-۲,-۲)$

پاسخ: رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ است. در این سهمی $a=۱$، $b=-۴$ و $c=۲$. بنابراین

$$-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲\times۱}=۲,\quad \frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times۱\times۲-(-۴)^۲}{۴\times۱}=\frac{۸-۱۶}{۴}=-۲$$

پس رأس سهمی موردنظر نقطه‌ی $(۲,-۲)$ است.

تست ۳ اگر رأس سهمی $y=۲mx^۲-mx+۲$ روی خط $y=۱$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: رأس سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ است. بنابراین

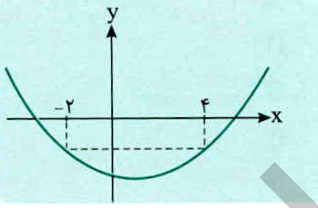
$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times(۲m)\times۲-(-m)^۲}{۴\times(۲m)}=۱$$

در نتیجه

$$\frac{۱۶m-m^۲}{۸m}=۱\Rightarrow m^۲=۸m$$

پس $m=۰$ یا $m=۸$. اگر $m=۰$، ضریب $x^۲$ صفر می‌شود که ممکن نیست، پس $m=۸$.

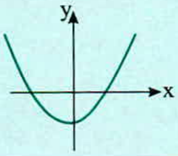
تست ۴ معادله‌ی محور تقارن سهمی مقابل کدام است؟

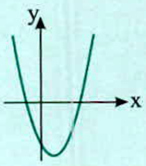


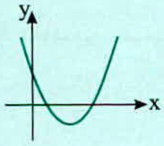
۱) $x=۱$ ۲) $x=\frac{۱}{۲}$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=\frac{۳}{۲}$

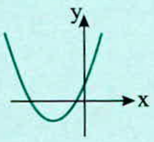
پاسخ: چون نقاط ۴ و -۲ نسبت به هم متقارن هستند (هر دو دارای یک عرض هستند)، محور تقارن سهمی از وسط پاره‌خطی که دو سر آن نقطه‌های -۲ و ۴ روی محور x هستند، می‌گذرد. مختص وسط این پاره‌خط برابر است با $\frac{۴-۲}{۲}=۱$. بنابراین محور تقارن سهمی مورد نظر خط $x=۱$ است.

تست ۵ کدام یک سهمی به معادله‌ی $y=۳x^۲--۲x-۱$ است؟

۱)


۲)


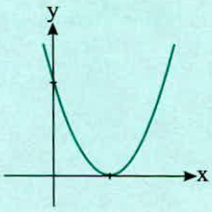
۳)


۴)


پاسخ: اگر در معادله‌ی سهمی قراردهیم $x=۰$ به‌دست می‌آید $y=-۱$. یعنی سهمی از نقطه‌ی $(۰,-۱)$ عبور می‌کند. طول رأس سهمی $x=-\frac{-۲}{۳\times۲}=\frac{۱}{۳}$ است. پس طول رأس مثبت است و رأس سهمی باید درناحیه‌ی اول یا چهارم باشد.

با توجه به اطلاعات بالا سهمی گزینه‌ی (۲) مورد نظر است.

تست ۶ **معادله‌ی سهمی مقابل به کدام شکل می‌تواند باشد؟**



۱) $y=x^۲-\sqrt{۸}x+۱$

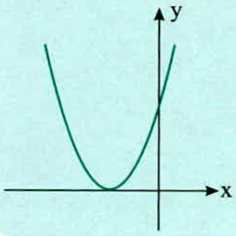
۲) $y=x^۲+\sqrt{۱۲}x+۳$

۳) $y=x^۲-\sqrt{۱۲}x+۳$

۴) $y=x^۲+\sqrt{۸}x-۲$

پاسخ: طول رأس سهمی عددی مثبت و عرض آن صفر است. در سهمی به معادله‌ی $y=x^۲-\sqrt{۱۲}x+۳$ طول رأس سهمی $x=-\frac{-\sqrt{۱۲}}{۲\times۱}=\sqrt{۳}$ و عرض آن $y=(\sqrt{۳})^۲-\sqrt{۱۲}\sqrt{۳}+۳=۰$ است.

تست ۷ **اگر نمودار سهمی $y=x^۲+kx-k$ به صورت مقابل باشد، مقدار k چقدر است؟**



۱) ۴

۲) صفر

۳) -۴

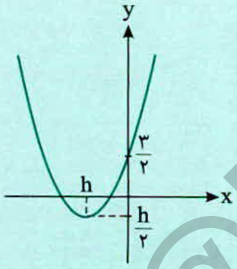
۴) هیچ کدام

پاسخ: از روی شکل می‌توان فهمید طول رأس سهمی عددی منفی و عرض آن صفر است:

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۰\Rightarrow k^۲+۴k=۰\Rightarrow k=-۴,\quad k=۰$$

به ازای $k=۰$، طول رأس سهمی برابر صفر است و به ازای $k=-۴$ طول رأس سهمی مثبت است. پس هر دو غیرقابل قبول هستند.

تست ۸ **سهمی $y=x^۲-bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار b کدام است؟**



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) -۳

۴) ۳

پاسخ: سهمی از نقطه‌ی $(۰,\frac{۳}{۲})$ عبور کرده است. پس

$$\frac{۳}{۲}=۰+۰+c\Rightarrow c=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y=x^۲-bx+\frac{۳}{۲}$ است. همچنین طول رأس سهمی $\frac{b}{۲}$ است. پس

$$h=\frac{b}{۲}\Rightarrow b=۲h$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y=x^۲-۲hx+\frac{۳}{۲}$ است.

از طرف دیگر سهمی از نقطه‌ی $(h,\frac{h}{۲})$ عبور کرده است. بنابراین

$$\frac{h}{۲}=h^۲-۲h^۲+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲h^۲+h-۳=۰\Rightarrow h=۱,\quad h=-\frac{۳}{۲}$$

واضح است که h عددی منفی است و $h=۱$ قابل قبول نیست. بنابراین $h=-\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $b=-۳$.

تست ۹ اگر کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲-۴x+k-۲$ برابر ۶ باشد، مقدار k کدام است؟

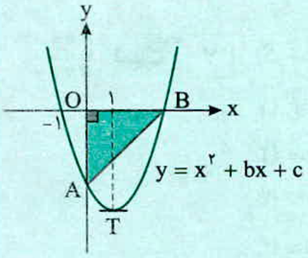
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

پاسخ: کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲-۴x+k-۲$، مختص y در رأس سهمی به معادله‌ی $y=x^۲-۴x+k-۲$ است. مختص y در رأس این سهمی برابر است با

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times۱\times(k-۲)-(-۴)^۲}{۴\times۱}=\frac{۴(k-۲)-۱۶}{۴}=k-۶$$

بنابراین $k-۶=۶$ ، پس $k=۱۲$.

تست ۱۰ در شکل زیر، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۹}{۲}$

۳) ۴

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: از روی شکل معلوم است که طول رأس سهمی برابر با ۱ است. در نتیجه

$$\frac{-b}{۲}=۱\Rightarrow b=-۲$$

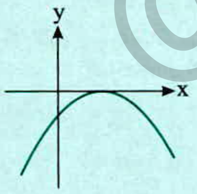
همچنین سهمی از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ گذشته است. بنابراین

$$۱+(-۱)(-۲)+c=۰\Rightarrow c=-۳$$

در نتیجه معادله‌ی سهمی به شکل $y=x^۲-۲x-۳$ است. بنابراین طول نقطه‌ی B برابر ۳ و عرض نقطه‌ی A برابر -۳ است. در نتیجه مساحت مثلث AOB برابر است با

$$\frac{۱}{۲}OA\times OB=\frac{۱}{۲}\times۳\times۳=\frac{۹}{۲}$$

تست ۱۱ سهمی $y=ax^۲+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



۱) $c<۰, b<۰, a>۰$

۲) $c<۰, b=۰, a>۰$

۳) $c<۰, b>۰, a<۰$

۴) $c>۰, b>۰, a<۰$

پاسخ: چون سهمی دارای بالاترین نقطه است، پس $a<۰$.

چون عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها منفی است، پس $c<۰$.

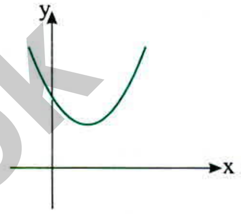
چون طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس $\frac{-b}{۲a}>۰$ و چون $a<۰$ پس $b>۰$.

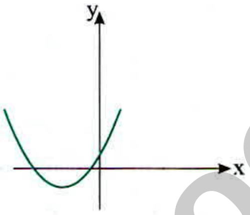
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

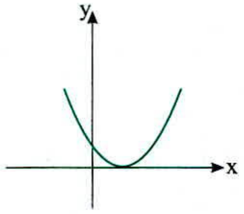
فصل چهارم

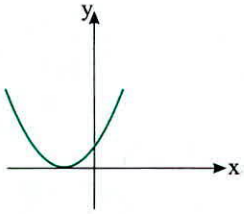
درس دوم:
سهمی

۵۳- کدام گزینه سهمی به معادلهٔ $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}$ است؟

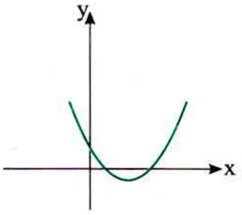
۱)


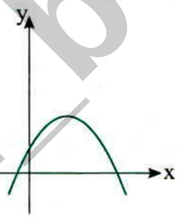
۲)


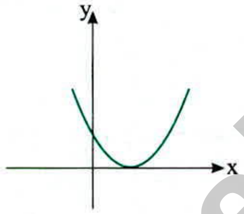
۳)


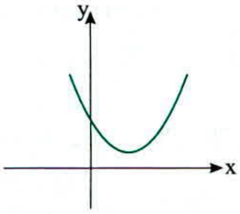
۴)


۵۴- سهمی به معادلهٔ $y=3x^2-2x+1$ کدام است؟

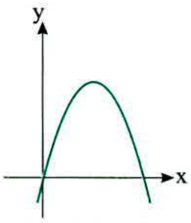
۱)


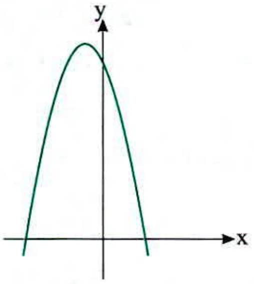
۲)


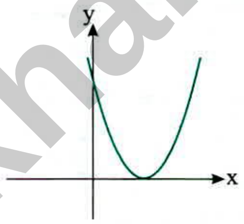
۳)


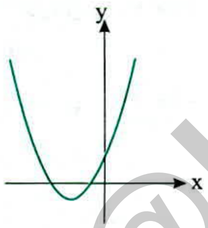
۴)


۵۵- کدام گزینه، سهمی به معادلهٔ $y=-x^2-2x+10$ را نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


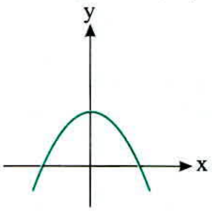
۳)


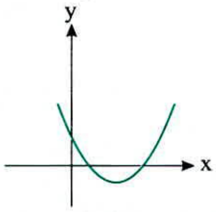
۴)


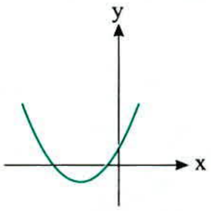
۵۶- سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+6x-1$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات <u>نمی‌گذرد</u>؟

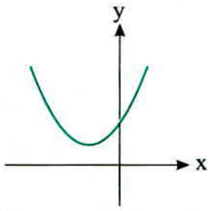
۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۵۷- کدام گزینه سهمی $y=ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهد که در آن $a, \Delta>0$ و $b<0$؟

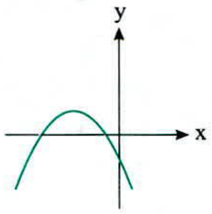
۱)


۲)


۳)


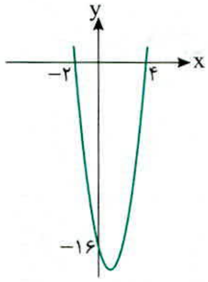
۴)


۵۸- معادلهٔ سهمی مقابل به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱) $y=x^2+3x-1$
۲) $y=2x^2+5x-2$
۳) $y=-x^2+3x-2$
۴) $y=-x^2-3x-1$

۵۹- معادله‌ی سهمی مقابل به کدام صورت است؟



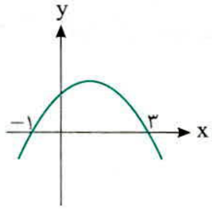
۱) $y=۲x^{۲}-۴x-۱۶$

۲) $y=۲x^{۲}-x-۱۶$

۳) $y=۲x^{۲}-۴x+۱۶$

۴) $y=۲x^{۲}+۴x-۱۶$

۶۰- معادله‌ی سهمی مقابل به‌صورت $y=ax^{۲}-bx+c$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۳

۳) ۲

۴) صفر

۶۱- نقطه‌ی $(۳,۹)$ روی سهمی به معادله‌ی $y=x^{۲}-ax+b$ قرار دارد. کدام نقطه‌ی دیگر حتماً روی این سهمی قرار دارد؟

۱) (a,a) ۲) $(a,a^{۲})$ ۳) $(a,۳a)$ ۴) $(-a,a^{۲})$

۶۲- رأس سهمی $y=۲x^{۲}-۵x-۱$ کدام است؟

۱) $(\frac{۵}{۲},-۲)$ ۲) $(-\frac{۵}{۲},۲۳)$ ۳) $(\frac{۵}{۴},-\frac{۳۳}{۸})$ ۴) $(-\frac{۵}{۴},\frac{۶۷}{۸})$

۶۳- رأس سهمی $y=x^{۲}-۴mx+n$ نقطه‌ی $(-۲,۳)$ است. این سهمی محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۶۴- رأس سهمی $y=x^{۲}-(۳m-۵)x+۲$ روی خط $x=-۱$ است. رأس این سهمی روی کدام یک از خط‌های زیر قرار دارد؟

۱) $y=-۱$ ۲) $y=-۲$ ۳) $y=۱$ ۴) $y=۲$

۶۵- رأس سهمی $y=kx^{۲}-۲x+۱$ روی خط $y=۲x$ است. مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

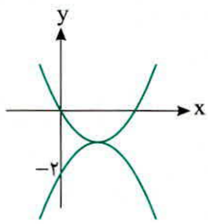
۶۶- رأس سهمی $y=x^{۲}-kx-۱$ روی سهمی $y=x-x^{۲}+k$ قرار دارد. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۶۷- اگر هر یک از سهمی‌های $y=ax^{۲}-۲ax+۲$ و $y=bx^{۲}+۲bx+۱$ از رأس سهمی دیگر عبور کند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۶۸- رأس سهمی‌های $y=x^{۲}-۲x$ و $y=ax^{۲}+bx+c$ مطابق شکل بر هم منطبق است. مقدار abc کدام است؟



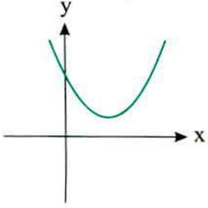
۱) ۴

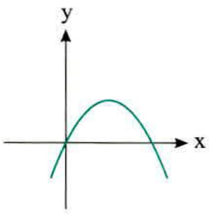
۲) ۶

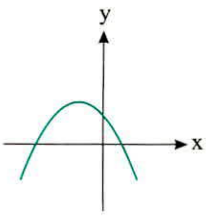
۳) −۶

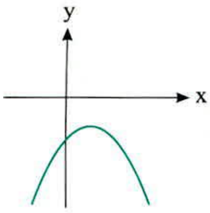
۴) −۴

۶۹- اگر $\frac{b^{۲}}{۴a}>c$، کدام گزینه سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+bx+c$ را درست نشان می‌دهد؟

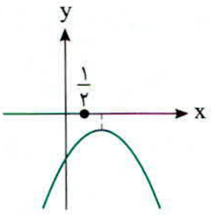
۱)


۲)


۳)


۴)


۷۰- اگر سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟



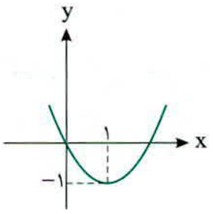
۱) $\frac{a+b}{c}<۰$

۲) $ac<۰$

۳) $abc<۰$

۴) $bc>۰$

۷۱- سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a-c$ کدام است؟



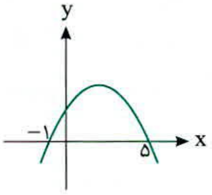
۱) b

۲) ۱

۳) $-b$

۴) -۱

۷۲- معادله‌ی محور تقارن سهمی مقابل کدام است؟



۱) $x=۲$

۲) $y=۲$

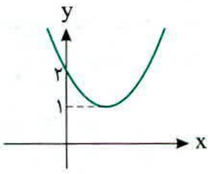
۳) $x=۳$

۴) $y=۳$

۷۳- اگر خط $x=\frac{۲}{۳}$ محور تقارن سهمی $y=(۳m-۴)x^{۲}+(۴m-۲)x+m^{۲}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۷۴- سهمی $y=x^{۲}+ax+b$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. معادله‌ی محور تقارن سهمی کدام است؟



۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$

۳) $x=\frac{۳}{۲}$ ۴) $x=\frac{۵}{۲}$

۷۵- اگر محل‌های تلاقی سهمی‌های مقابل با محور x یکسان باشند، مقدار m کدام است؟

$y=x^{۲}-(m-۲)x+۳n-۱$

$y=۲x^{۲}+(۳m+۱)x+n+۲$

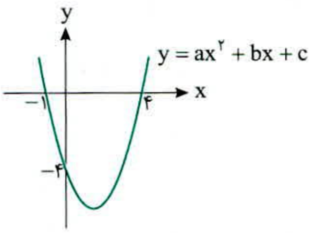
۱) $۰/۴$ ۲) $۰/۵$

۳) $۰/۶$ ۴) $۰/۷$

۷۶- اگر یک سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ و محور طول‌ها را در نقاطی به طول ۱- و ۳ قطع کند، عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) -۴ ۴) ۴

۷۷- با توجه به شکل روبه‌رو حاصل $۴a+۲b$ چند است؟



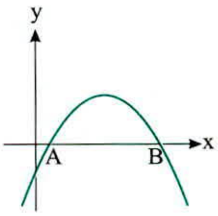
۱) ۲

۲) -۴

۳) ۴

۴) -۲

۷۸- سهمی به معادله‌ی $y=-x^{۲}+bx-۲$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر طول پاره‌خط AB برابر با ۴ باشد، مقدار b چقدر است؟



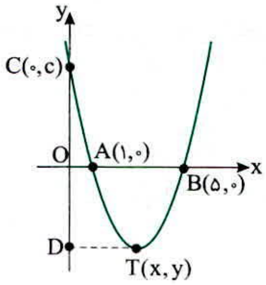
۱) $\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۶}$

۴) $۲\sqrt{۶}$

۷۹- در شکل روبه‌رو یک سهمی رسم شده است و $AB=OD$. مقدار c چقدر است؟



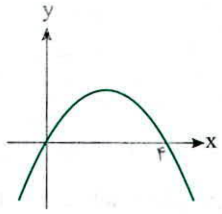
۱) ۱

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۵

۸۰- شکل روبه‌رو سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+۲x+c$ است. عرض بالاترین نقطه‌ی سهمی کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

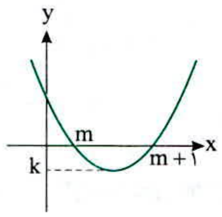
۸۱- سهمی‌ای که از نقاط $(-۱,۰)$، $(۱,۲)$ و $(۲,۹)$ می‌گذرد، از کدام نقطه‌ی دیگر عبور می‌کند؟

۱) $(۳,-۳)$ ۲) $(-۳,۳)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(-۲,۵)$

۸۲- نقطه‌ی $A(۱,۰)$ رأس سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ است. اگر این سهمی از نقطه‌ی $B(۲,۲)$ بگذرد، عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با خط $x=۳$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۸۳- سهمی به معادله‌ی $y=x^{۲}-۵x+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\sqrt{-۴k}$ کدام است؟



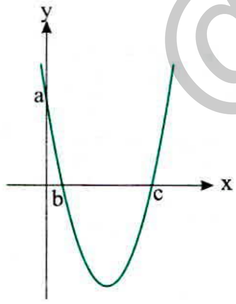
۱) ۲

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) ۱

۴) $\frac{۲}{۵}$

۸۴- سهمی به معادله‌ی $y=x^{۲}-۲۲x+۴۰$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $b+c-a$ کدام است؟



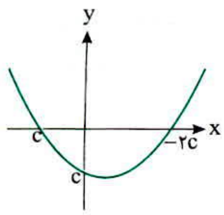
۱) ۱۸

۲) -۱۸

۳) ۱۴

۴) -۱۴

۸۵- سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار b کدام است؟



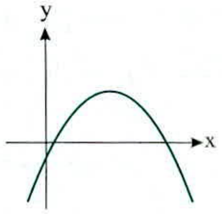
۱) -۱

۲) -۲

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۴}$

۸۶- سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام عبارت می‌تواند برابر صفر باشد؟



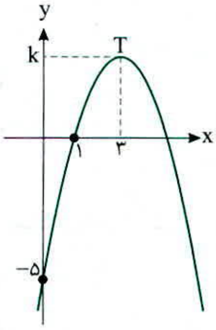
۱) $a-b+c$

۲) abc

۳) $\frac{b-c}{a}$

۴) $a+b+c$

۸۷- در سهمی شکل روبه‌رو عرض نقطه‌ی T کدام است؟



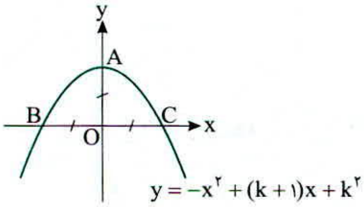
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) -۱

۸۸- در شکل روبه‌رو $AO=CO=BO$، حاصل $AO+CO+BO$ کدام است؟



۱) ۶

۲) ۳

۳) ۹

۴) ۱۲

۸۹- کدام سهمی محور طول‌ها را قطع نمی‌کند؟

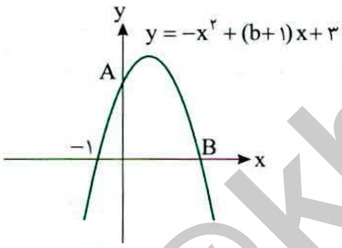
۱) $y=x^۲-۳x-۱$

۲) $y=-x^۲+۳x-۱$

۳) $y=x^۲-۲x+۳$

۴) $y=-x^۲+x+۲$

۹۰- در شکل مقابل طول نقطه‌ی B چقدر است؟



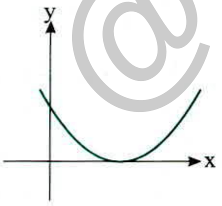
۱) ۵

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۴

۹۱- به ازای کدام مقدار k نمودار $y=۲x^۲-۳x+k$ مانند شکل مقابل است؟



۱) $\frac{۸}{۹}$

۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) $\frac{۹}{۸}$

۴) $\frac{۹}{۴}$

۹۲- اگر بخشی از سهمی به معادله‌ی $y=(m-۱)x^۲+(۲m-۲)x+m-۲$ به شکل روبه‌رو باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$

۲) $(۱,+\infty)$

۳) $(۱,۲)$

۴) $(-\infty,۲)$

۹۳- اگر سهمی به معادله‌ی $y=x^۲+ax+b$ از نقاط $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ بگذرد، عرض نقطه‌ی تقاطع سهمی با خط $x=۴$ کدام است؟

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۱۰

۴) ۱۲

۹۴- اگر کم‌ترین مقدار عبارت $y=x^۲-۶x+m-۱$ برابر با ۵ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۵

۲) ۱۰

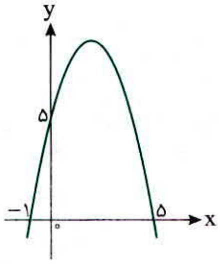
۳) ۱۲

۴) ۱۵

۹۵- بیش‌ترین مقدار عبارت $y=a(x-۲)^{۲}+k$ برابر با -۲ است و این سهمی از نقطه‌ی $(۱,-۳)$ می‌گذرد. عرض نقطه‌ی تقاطع این سهمی با محور y کدام است؟

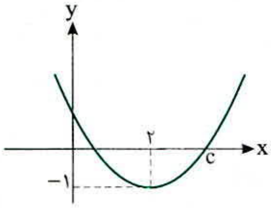
۱) -۸ ۲) -۶ ۳) -۴ ۴) -۲

۹۶- مجموع مختصات رأس سهمی شکل روبه‌رو چقدر است؟



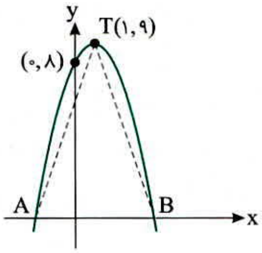
۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۹۷- در شکل مقابل که نمودار سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+bx+۱$ است، مقدار c کدام است؟



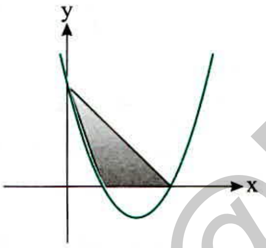
۱) $۱+\sqrt{۲}$
۲) $۴-\sqrt{۲}$
۳) $۲+\sqrt{۲}$
۴) $۳+\sqrt{۲}$

۹۸- در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی $T(۱,۹)$ رأس سهمی است. مساحت مثلث TAB چقدر است؟



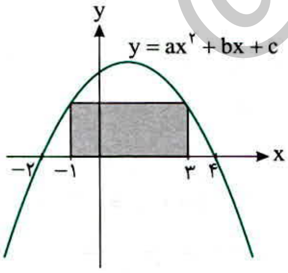
۱) ۷۲
۲) ۲۷
۳) ۵۴
۴) ۳۶

۹۹- سهمی $y=x^{۲}-۴x+۳$ در شکل مقابل رسم شده است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۰- در شکل روبه‌رو، مساحت مستطیل رنگی برابر ۷/۵ است. مقدار c چقدر است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

درس سوم: تعیین علامت

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی اول

برای تعیین علامت مقدار y که از رابطه‌ی $y=ax+b$ $(a\neq ۰)$ به‌دست می‌آید، ابتدا ریشه‌ی معادله‌ی $ax+b=۰$ را پیدا می‌کنیم، که $-\frac{b}{a}$ است. سپس جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$y=ax+b$		علامت y مخالف علامت a	۰	علامت y موافق علامت a	

تست ۱

جدول تعیین علامت عبارت $y=a^{۲}(-۲-x)-۲-x$ **به کدام شکل است؟**

۱)

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	

۲)

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	

۳)

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	

۴)

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	

پاسخ: عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=a^{۲}(-x-۲)+(-x-۲)=(a^{۲}+۱)(-x-۲)$$

چون $a^{۲}+۱$ عددی مثبت است، کافی است عبارت $-x-۲$ را تعیین علامت کنیم که به شکل زیر تعیین علامت می‌شود:

x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	

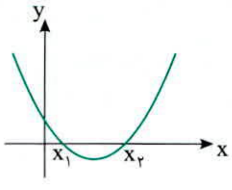
تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم

چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^{۲}+bx+c$ را در نظر بگیرید $(a\neq ۰)$. هنگام تعیین علامت این چندجمله‌ای سه حالت ممکن است پیش بیاید. فرض کنید $\Delta=b^{۲}-۴ac$.

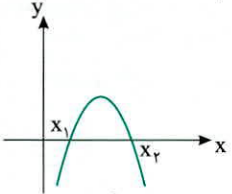
حالت اول $\Delta>۰$. در این حالت معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ دو ریشه‌ی متمایز دارد. این ریشه‌ها را $x_{۱}$ و $x_{۲}$ بنامید و فرض کنید $x_{۱}<x_{۲}$. در این صورت جدول تعیین علامت $ax^{۲}+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$x_{۱}$		$x_{۲}$		$+\infty$
$ax^{۲}+bx+c$		موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی برد.



$a>۰$

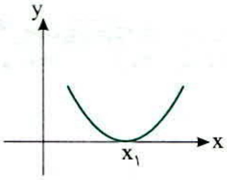


$a<۰$

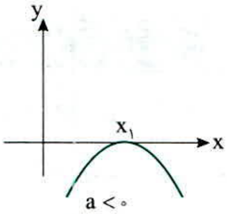
حالت دوم $\Delta=۰$. در این حالت معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد. این ریشه را $x_۱$ بنامید. در این صورت جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$x_۱$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$		موافق علامت a	۰	موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی برد.



$a>۰$

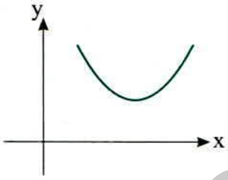


$a<۰$

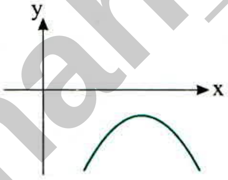
حالت سوم $\Delta<۰$. در این صورت معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$		موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی برد.



$a>۰$



$a<۰$

تست ۲ جدول تعیین علامت عبارت $y=۲x^۲-\sqrt{۳۲}x+۴$ کدام است؟

۱)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		$-$	۰	$-$	

۲)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		$+$	۰	$+$	

۳)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۴)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		$+$	

پاسخ: چون $\Delta=(-\sqrt{۳۲})^۲-۴\times۲\times۴=۰$ و ضریب $x^۲$ برابر ۲ و عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$				$+\infty$
y		$+$	۰	$+$	

تست ۳ عبارت $y=-x^۴+۴x^۲+۵$ در بازه‌ی (a,b) مثبت است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=-x^۴+۴x^۲+۵=-(x^۲+۱)(x^۲-۵)$$

چون عبارت $-(x^۲+۱)$ همواره منفی اســت، کافی است عبارت $x^۲-۵$ را تعیین علامت کرده و علامت آن را قرینه کنیم تا علامت y به‌دست آید:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۵}$		$\sqrt{۵}$		$+\infty$
$x^۲-۵$		$+$	⋮	$-$	⋮	$+$	
y		$-$	⋮	$+$	⋮	$-$	

بنابراین عبارت y در بازه‌ی $(-\sqrt{۵}\,,\sqrt{۵})$ مثبت است. پس $a=-\sqrt{۵}$ و $b=\sqrt{۵}$. در نتیجه $b-a=۲\sqrt{۵}$.

نامعادله

برای حل نامعادله‌های دوگانه می‌توانیم هر یک از آن‌ها را جداگانه حل کنیم و سپس اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها را پیدا کنیم.

تست ۴

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $۴x-۱<۳x-۲<۵x+۶$ بازه‌ی $(a\,,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵− ۳) ۳ ۴) ۳−

پاسخ: دو نامعادله‌ی $۳x-۲<۵x+۶$ و $۴x-۱<۳x-۲$ را حل می‌کنیم:

$$۳x-۲<۵x+۶\Rightarrow-۲x<۸\Rightarrow x>-۴$$

$$۴x-۱<۳x-۲\Rightarrow x<-۱$$

اشتراک جواب‌های فوق یعنی $-۴<x<-۱$ جواب مسئله است. پس $a=-۴$ و $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۵$

تست ۵

مجموعــه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $۰<x^۲-۳x<۴$ به صورت $(a\,,a+۵)-[b-۳,b]$ اســت. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۳ ۳) ۴− ۴) ۴

پاسخ: نامعادلات $x^۲-۳x<۴$ و $x^۲-۳x>۰$ را حل می‌کنیم و بین مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$x^۲-۳x<۴\Rightarrow x^۲-۳x-۴<۰\Rightarrow(x+۱)(x-۴)<۰\Rightarrow-۱<x<۴ \quad (۱)$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
$x^۲-۳x-۴$		$+$	⋮	$-$	⋮	$+$	

$$x^۲-۳x>۰\Rightarrow x(x-۳)>۰\Rightarrow x>۳ \text{ یا } x<۰ \quad (۲)$$

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
$x^۲-۳x$		$+$	⋮	$-$	⋮	$+$	

پــس از اشــتراک‌گیری (۱) و (۲) مجموعــه‌ی جواب نامعادله به صورت $(-۱,۴)-[۰\,,۳]$ می‌شــود، پس $a=-۱$ و $b=۳$. در نتیجه $a-b=-۴$.

نکته

عبارت $ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید.

اگر $\Delta<۰$ و $a>۰$، عبارت همواره مثبت است.

اگر $\Delta<۰$ و $a<۰$، عبارت همواره منفی است.

اگر $\Delta\leq۰$ و $a>۰$، عبارت همواره نامنفی است.

اگر $\Delta\leq۰$ و $a<۰$، عبارت همواره نامثبت است.

تست ۶ اگر مقدار عبارت $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۸}x+m$ به ازای هر مقدار x مثبت باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $-۱<m<۱$

پاسخ: باید شرایط $\Delta<۰$ و $a>۰$ برقرار باشد. پس

$$m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \quad (۱)$$

$$\Delta=۸-۴m(m-۱)<۰ \Rightarrow m^۲-m-۲>۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m-۲)>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$$m<-۱ \text{ یا } m>۲ \quad (۲)$$

m	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$m^۲-m-۲$		+	۰	−	۰	+	

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m>۲$.

روش سریع‌تر برای تعیین علامت عبارت‌ها

برای تعیین علامت یک عبارت، ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج عبارت را پیدا می‌کنیم و در جدول قرار می‌دهیم. سپس علامت ستون سمت راست جدول (یا هر ستون دیگر) را به کمک عددگذاری تعیین می‌کنیم. سپس علامت عبارت را در ریشه‌ها تغییر می‌دهیم. توجه کنید که علامت عبارت در ریشه‌های عبارت‌هایی که به صورت $A^{۲k}$ یا $|A|$ هستند تغییر نمی‌کند و علامت عبارت در دو طرف این ریشه‌ها یکسان است.

تست ۷ مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{(۱-x)^۲(x+۲)^۳}{x|x|(۲-x)^۵}\geq ۰$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $(-\infty,-۲]\cup\{۱\}\cup(۲,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۲)\cup[۱,۲)$ ۴) $(-\infty,-۲]\cup(۰,۲)$

پاسخ: ابتدا جدول تعیین علامت عبارت سمت چپ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	ت ن	+	۰	+	ت ن	−	

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مورد نظر $(-\infty,-۲]\cup(۰,۲)$ است.

تست ۸ مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x-\frac{۱}{x-۱}>۵$ به صورت $(a,۱)\cup(b,+\infty)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x-۵-\frac{۱}{x-۱}>۰ \Rightarrow \frac{(x-۵)(x-۱)-۱}{x-۱}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-۶x+۴}{x-۱}>۰$$

تعیین علامت عبارت $y=\frac{x^۲-۶x+۴}{x-۱}$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$۳-\sqrt{۵}$		۱		$۳+\sqrt{۵}$		$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله $(۳-\sqrt{۵},۱)\cup(۳+\sqrt{۵},+\infty)$ است. در نتیجه $a=۳-\sqrt{۵}$ و $b=۳+\sqrt{۵}$ و $ab=۴$.

تست ۹

اگر $-۱<a<۰$، ساده شده‌ی عبارت $\frac{a^۲}{|a|}-|a^۲+a|$ کدام است؟

۱) a　۲) $-a$　۳) $a^۲$　۴) $-a^۲$

پاسخ: از $-۱<a<۰$ نتیجه می‌شود $|a|=-a$. همچنین $a<۰$ و $a+۱>۰$، پس $a(a+۱)<۰$، یعنی $a^۲+a<۰$. بنابراین

$$|a^۲+a|=-a^۲-a$$

بنابراین

$$\frac{a^۲}{|a|}-|a^۲+a|=\frac{a^۲}{-a}+a^۲+a=-a+a^۲+a=a^۲$$

تست ۱۰

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $x-|۲x-۴|=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　۲) $\frac{۵}{۳}$　۳) ۳　۴) ۵

پاسخ: اگر $x\geq ۲$، مقدار عبارت $۲x-۴$ نامنفی است و در نتیجه معادله به شکل زیر حل می‌شود:

$$x-(۲x-۴)=۱\Rightarrow -x+۴=۱\Rightarrow x=۳$$

اگر $x<۲$ مقدار عبارت $۲x-۴$ منفی است و در نتیجه معادله به شکل زیر حل می‌شود:

$$x+(۲x-۴)=۱\Rightarrow ۳x-۴=۱\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۵ است.

نکته

برای حل کردن نابرابری‌های قدرمطلقی ویژگی‌های زیر به کارمان می‌آیند.

فرض کنید a عددی حقیقی و نامنفی و A عبارتی جبری باشد. در این صورت

الف) اگر $|A|\leq a$، آن‌گاه $-a\leq A\leq a$؛ اگر $|A|<a$، آن‌گاه $-a<A<a$.

ب) اگر $|A|\geq a$، آن‌گاه $A\geq a$ یا $A\leq -a$؛ اگر $|A|>a$، آن‌گاه $A>a$ یا $A<-a$.

تست ۱۱

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $||x|-۲|<۶$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۴　۲) ۱۵　۳) ۱۶　۴) ۱۷

پاسخ: نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$||x|-۲|<۶\Rightarrow -۶<|x|-۲<۶\Rightarrow -۴<|x|<۸$$

نابرابری $-۴<|x|$ همواره برقرار است، پس کافی است نامعادله‌ی $|x|<۸$ را حل کنیم:

$$|x|<۸\Rightarrow -۸<x<۸$$

بنابراین اعداد صحیح -۷ تا ۷ در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

تست ۱۲

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $|۲x-۱|\geq ۴$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

پاسخ: باید

$$۲x-۱\geq ۴\Rightarrow x\geq \frac{۵}{۲}\quad \text{یا}\quad ۲x-۱\leq -۴\Rightarrow x\leq -\frac{۳}{۲}$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله $(-\infty,-\frac{۳}{۲}]\cup[\frac{۵}{۲},+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$ است. پس $a=-\frac{۳}{۲}$ و $b=\frac{۵}{۲}$ و در نتیجه $a+b=۱$.

تست ۱۳ **جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-۲}{x}\right|<۱$ کدام است؟**

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(۱,+\infty)$

پاسخ: راه‌حل اول: ابتدا نامعادله را به‌صورت $\left|۱-\frac{۲}{x}\right|<۱$ درمی‌آوریم. اکنون نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$-۱<۱-\frac{۲}{x}<۱\Rightarrow -۲<-\frac{۲}{x}<۰\Rightarrow ۰<\frac{۲}{x}<۲$$

از نابرابری $\frac{۲}{x}>۰$ نتیجه می‌شود $x>۰$. هم‌چنین از نابرابری $\frac{۲}{x}<۲$ نتیجه می‌شود $x>۱$. بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر به‌صورت $x>۱$ است.

راه‌حل دوم: نابرابری $\left|۱-\frac{۲}{x}\right|<۱$ را به‌صورت $-۱<۱-\frac{۲}{x}<۱$ درمی‌آوریم. در نتیجه

$$۱-\frac{۲}{x}-۱=-\frac{۲}{x}<۰,\quad ۱-\frac{۲}{x}+۱=۲-\frac{۲}{x}>۰$$

از این دو نابرابری نتیجه می‌شود

$$\left(-\frac{۲}{x}\right)\left(۲-\frac{۲}{x}\right)=-۴\frac{(x-۱)}{x^۲}<۰\Rightarrow x-۱>۰\Rightarrow x>۱$$

راه‌حل سوم: می‌دانیم $x=۰$ در مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله نیست. در نتیجه نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{|x-۲|}{|x|}<۱\Rightarrow |x-۲|<|x|$$

اکنون دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۲-۴x+۴<x^۲\Rightarrow ۴-۴x<۰\Rightarrow x>۱$$

تست ۱۴ **مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^۲<۴x-|x|$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: اگر $x\geq ۰$، نامعادله به شکل $x^۲<۴x-x$ درمی‌آید. پس

$$x^۲-۳x<۰\Rightarrow x(x-۳)<۰\xrightarrow{x\geq ۰} x-۳<۰\Rightarrow ۰<x<۳$$

اگر $x<۰$، نامعادله به شکل $x^۲<۴x+x$ درمی‌آید. پس

$$x^۲-۵x<۰\Rightarrow x(x-۵)<۰$$

نامعادله‌ی $x(x-۵)<۰$ به شرط $x<۰$ جواب ندارد. زیرا عبارت با این شرط همواره مثبت است. پس مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله، بازه‌ی $(۰,۳)$ است که شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل چهارم

درس سوم:
تعیین علامت

۱۰۱- جدول تعیین علامت عبارت $y=-۲x+۳$ کدام است؟

۱)

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y		+	۰	−	

۲)

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y		−	۰	+	

۳)

x	$-\infty$		$-\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y		+	۰	−	

۴)

x	$-\infty$		$-\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y		−	۰	+	

۱۰۲- جدول تعیین علامت عبارت $y=(a-۲b)x-۲a+۴b$ به شکل زیر است. a چند عدد طبیعی می‌تواند باشد؟

x	$-\infty$		b		$+\infty$
y		+	۰	−	

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۱۰۳- جدول تعیین علامت عبارت $y=m^۲x+|m|$، که در آن $m\neq ۰$، کدام است؟

۱)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	+	

۲)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		+	۰	−	

۳)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	

۴)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۱۰۴- اگر $a<b$، جدول تعیین علامت عبارت $y=a^۳x+ab-a^۲bx-b^۲$ به کدام صورت است؟ $(a\neq ۰)$

۱)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	+	

۲)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		+	۰	−	

۳)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	

۴) بستگی به مقدار a دارد.

۱۰۵- در کدام گزینه جدول تعیین علامت عبارت $y=۲x^۲-۳x+۴$ درست رسم شده است؟

۱)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		+	۰	−	

۲)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۳)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	+	

۴)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		+	

۱۰۶- جدول تعیین علامت عبارت $y=-x^۲+۴x-۳$ در کدام گزینه درست رسم شده است؟

۱)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		−	

۲)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	−	

۳)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۴)

x	$-\infty$						$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	

۱۰۷- جدول تعیین علامت عبارت $y=-۳x^{۲}+\sqrt{۱۲}x-۱$ کدام است؟

۱)

x	−∞				+∞
y		−	۰	−	

۲)

x	−∞				+∞
y		+	۰	+	

۳)

x	−∞						+∞
y		−	۰	+	۰	−	

۴)

x	−∞						+∞
y		+	۰	−	۰	+	

۱۰۸- جدول تعیین علامت عبارت $y=(m-۲)x^{۲}+mnx+m$ به شکل زیر است. مقدار mn کدام است؟

x	−∞		۴		+∞
y		−	۰	+	

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) −۲

۱۰۹- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y=(m^{۲}-۹)x^{۲}+mx-n$ به شکل زیر باشد، مقدار n کدام است؟

x	−∞		۲		+∞
y		+	۰	−	

۱) ۳

۲) −۳

۳) ۶

۴) −۶

۱۱۰- جدول تعیین علامت عبارت $y=(m+۱)x^{۲}-(m+۱)^{۲}x+n$ به شکل زیر است. مقدار n کدام است؟

x	−∞		۱		۲		+∞
y		+	۰	−	۰	+	

۱) ۶

۲) ۳

۳) ۲

۴) صفر

۱۱۱- می‌دانیم معادله‌ی $x^{۲}-mx+n=۰$ دو ریشه دارد: $x_{۱}<۰<x_{۲}$. کدام گزینه تعیین علامت عبارت $y=-x^{۳}+mx^{۲}-nx$ را درست نشان می‌دهد؟

۱)

x	−∞						+∞
y		+	۰	−	۰	+	

۲)

x	−∞								+∞
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	

۳)

x	−∞								+∞
y		+	۰	−	۰	+	۰	−	

۴)

x	−∞								+∞
y		−	۰	+	۰	+	۰	−	

۱۱۲- جدول تعیین علامت عبارت $y=x^{۳}-۳x+۲$ کدام است؟

۱)

x	−∞						+∞
y		−	۰	−	۰	+	

۲)

x	−∞						+∞
y		−	۰	+	۰	+	

۳)

x	−∞				+∞
y		−	۰	+	

۴)

x	−∞								+∞
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	

۱۱۳- جدول تعیین علامت عبارت $y=x^{۴}-۳x^{۲}-۴$ به کدام شکل است؟

۱)

x	−∞						+∞
y		+	۰	−	۰	+	

۲)

x	−∞								+∞
y		+	۰	−	۰	−	۰	+	

۳)

x	−∞										+∞
y		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	

۴)

x	−∞				+∞
y		+	۰	+	

۱۱۴- جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(x^۲-۳x+۲)(x^۲-۱)}{(x-۲)^۳}$ کدام است؟

۱)

x	−∞					+∞
y		−	۰	−	ت ن	+

۲)

x	−∞					+∞
y		−	۰	+	ت ن	+

۳)

x	−∞							+∞
y		−	۰	+	۰	+	ت ن	+

۴)

x	−∞							+∞
y		−	۰	+	ت ن	−	۰	+

۱۱۵- کدام گزینه جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{x^۲-۳x-۱۰}{|۳-x|}$ را نشان می‌دهد؟

۱)

x	−∞		−۲		۳		۵		+∞
y		−	۰	+	۰	+	۰	−	

۲)

x	−∞		−۲		۳		۵		+∞
y		+	۰	−	۰	−	۰	+	

۳)

x	−∞		−۲		۳		۵		+∞
y		−	۰	+	ت ن	+	۰	−	

۴)

x	−∞		−۲		۳		۵		+∞
y		+	۰	−	ت ن	−	۰	+	

۱۱۶- جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(x-۱)^۲(x^۲+bx+c)}{x^۲+x-۲}$ به شکل زیر است. حاصل $b+c$ چند است؟

x	−∞		−۲		۰		۱		+∞
y		+	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

۱۱۷- جدول تعیین علامت عبارت‌های A و B به شکل زیر است، مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $AB>۰$ در کدام گزینه آمده است؟

	−∞		−۶		−۴		۲		۸		+∞
A		+		+	۰	+		+	۰	−	
B		−	۰	+		+	۰	+		+	

۱) $(-۶,+\infty)$ ۲) $(-۶,۸)$ ۳) $(-۶,۸)-\{-۴\}$ ۴) $(-۶,۸)-\{-۴,۲\}$

۱۱۸- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌های هم‌زمان $۵x-۱\leq ۲x-۴<۳x+۵$ کدام است؟

۱) $۱\leq x<۹$ ۲) $-۹<x\leq -۱$ ۳) $-۱\leq x<۹$ ۴) $-۹<x<۱$

۱۱۹- اگر مجموعه‌ی جواب‌های دستگاه نامعادلات $\begin{cases}x-۱>a^۲\\x-۴<۲a\end{cases}$ ناتهی باشد، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۳,۱)$

۳) $(-\infty,-۱)\cup(۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳)\cup(۱,+\infty)$

۱۲۰- اگر $a<۰$، $۰<b<۱$ و $abx+ab<a+ax$، کدام گزینه درست است؟

۱) $x>۱$ ۲) $x<۱$ ۳) $x<-۱$ ۴) $x>-۱$

۱۲۱- اگر $a>۱$، مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x-a}{ax-۱}<۰$ کدام است؟

۱) $(۰,a)$ ۲) $(\frac{۱}{a},a)$ ۳) $(\frac{۱}{a},۱)$ ۴) $(۰,\frac{۱}{a})$

۱۴۷- معادله‌ی $x^۲-mx+۲(m-۱)(۲-m)=۰$ دو جواب دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m>۰$

۲) $m\neq\frac{۴}{۳}$

۳) $m>\frac{۴}{۳}$

۴) $m\in\mathbb{R}$

۱۴۸- اگر به ازای هر x نابرابری $(x^۲-۲x-۳)(x^۲-ax+b)\geq۰$ برقرار باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{-۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{-۳}{۲}$

۱۴۹- اگر به ازای هر x داشته باشیم $\frac{x^۲+mx+m}{x^۲-x+۱}\leq۲$، حداکثر مقدار m کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲۰}-۴$

۲) $\sqrt{۵}-۲$

۳) $-\sqrt{۵}-۲$

۴) $\sqrt{۲۰}-۴$

۱۵۰- اگر $\frac{x^۲+ax-۵}{x^۲-۲x+۳}<۱$ همواره برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $a>-۱$

۲) $a<-۲$

۳) $-۱<a<۱$

۴) $a=-۲$

۱۵۱- اگر معادله‌ی $x^۲+(a-۱)x+۲a=۱۴$ دو ریشه مانند $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد که $x_۱<۲<x_۲$ ، حدود a کدام است؟

۱) $a>۳$

۲) $a<۳$

۳) $a<-۳$

۴) $a>-۳$

۱۵۲- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-۲x+m=۰$ باشند و $x_۱<-۱<x_۲<۱$ ، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$

۲) $[-۲,۲)$

۳) $(-\infty,-۶)$

۴) $(-۲,\frac{۱}{۴})$

۱۵۳- رأس سهمی $y=mx^۲-۲\sqrt{۳}x+m+۲$ در ناحیه‌ی سوم قرار دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m<-۳$

۲) $-۳<m<۰$

۳) $۰<m<۳$

۴) $m>-۳$

۱۵۴- به ازای چه مقدارهایی از a ، رأس سهمی $۴x^۲-۴(a+۱)x+a$ در ربع دوم است؟

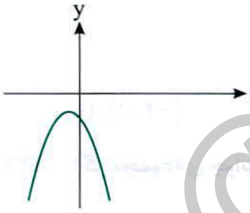
۱) $a<-۱$

۲) $۰<a<۱$

۳) $-۱<a<۰$

۴) امکان پذیر نیست.

۱۵۵- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار سهمی $y=(m-۱)x^۲+(m-۱)x-۴$ به شکل مقابل است؟



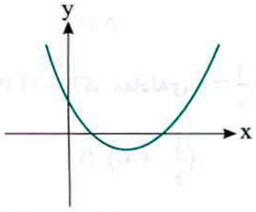
۱) $(-۱۵,۱)$

۲) $(-۱۵,۲)$

۳) $(-۱,۱۵)$

۴) $(۱,۱۵)$

۱۵۶- اگر نمودار سهمی $(m-۱)x^۲-۲(m+۱)x+m+۳=۰$ به‌صورت مقابل باشد، حدود m کدام است؟



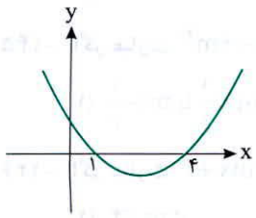
۱) $(-۳,۱)$

۲) $(-\infty,-۳)\cup(۱,+\infty)$

۳) $(-۳,۰)\cup(۱,۳)$

۴) $(۱,+\infty)$

۱۵۷- نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{ax^۲+bx+c}{x-x^۲}>۰$ کدام است؟



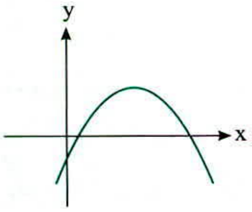
۱) $(۱,۴)$

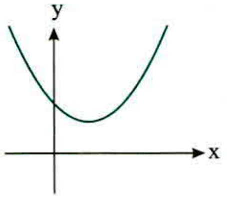
۲) $(۰,۴)$

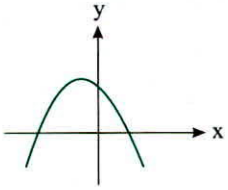
۳) $(۰,۴)-\{۱\}$

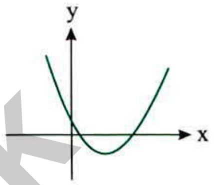
۴) $(۴,+\infty)$

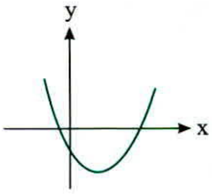
۱۵۸- اگر نمودار سهمی به معادله‌ی $y=bx^۲-۲x+b$ به شکل مقابل باشد، نمودار سهمی به معادله‌ی $y=(b+۱)x^۲-۲x+b-۱$ کدام است؟



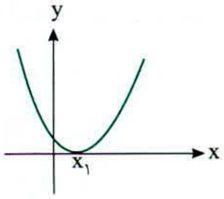
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۵۹- سهمی $y=x^۲+ax-b$ در شکل مقابل رسم شده است. جدول تعیین علامت عبارت $P=-x^۴-ax^۳+bx^۲$ به کدام شکل است؟



۱)

x	$-\infty$	$+\infty$
P	−	

۲)

x	$-\infty$				$+\infty$
P	−	۰	+	۰	−

۳)

x	$-\infty$				$+\infty$
P	−	۰	−	۰	−

۴)

x	$-\infty$				$+\infty$
P	+	۰	−	۰	+

۱۶۰- اگر $-۲<x<۰$ ، ساده شده‌ی عبارت $y=|۲x+۴|+|-۳x-۶|-۵x$ کدام است؟

۱) $-۱۰x-۱۰$
۲) $۴x+۲$
۳) $-۶x-۲$
۴) ۱۰

۱۶۱- حاصل عبارت $y=\frac{|x-۱|}{x-۱}+\frac{x-۲}{|x-۲|}$ به ازای مقادیر مختلف x چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۲- ساده شده‌ی عبارت $y=\frac{|a^۲+۲a+۳|+|-a^۲+۲a-۳|}{۲}$ کدام است؟

۱) $a^۲+۳$
۲) $a^۲+۲a$
۳) $a^۲-۲a$
۴) $a^۲-۳$

۱۶۳- اگر $۰<x<۲$ ، ساده شده‌ی عبارت $y=|x+\frac{۴}{x}|+|x-\frac{۴}{x}|$ کدام است؟

۱) $-۲x+\frac{۸}{x}$
۲) $۲x-\frac{۸}{x}$
۳) $۲x$
۴) $\frac{۸}{x}$

۱۶۴- اگر $|x|\neq۱$ ، ساده شده‌ی عبارت $\frac{|x|-۱}{x^۲-۱}-\frac{x^۲-|x|}{x^۲-۲|x|+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱-|x|}{۱+x^۲}$
۲) $\frac{۱-x^۲}{۱+|x|}$
۳) $\frac{۱-|x|}{۱+|x|}$
۴) $\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$

۱۶۵- مجموع جواب‌های معادله‌ی $|x-۲|-۳|=۰$ کدام است؟

۱) ۶
۲) -۶
۳) -۴
۴) ۴

۱۶۶- معادله‌ی $||x-۴|-۱|=۳$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۷- اگر معادله‌ی $||x|-k|=۳$ چهار جواب داشته باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>۳$
۲) $k>-۳$
۳) $۰<k<۳$
۴) $-۳<k<۳$

۱۶۸- به ازای چند مقدار از k معادله‌ی $||x|-۲|=k$، سه جواب متمایز دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۹- معادله‌ی $||x|-۲k|=۳k-۱$، چهار جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}<k<۱$
۲) $\frac{۱}{۵}<k<\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}<k<۱$
۴) $\frac{۱}{۳}<k<\frac{۲}{۳}$

۱۷۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی $|۲x-۱|=|x-۳|$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{-۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۱۷۱- مجموع جواب‌های معادله‌ی $|x^۲-x-۱۲|=|۲x+۶|$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۷

۱۷۲- اختلاف دو عدد منفی که معکوس یکدیگرند، $\frac{۳}{۲}$ است. مجموع آن‌ها کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{-۷}{۲}$
۴) $\frac{-۹}{۲}$

۱۷۳- معادله‌ی $x|x|=۳x-۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۱۷۴- معادله‌ی $x|x+۲|=۲۴$ چند جواب دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۱۷۵- تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $|۲x^۲-۹x|=۹x-۲x^۲$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) نامتناهی

۱۷۶- معادله‌ی $x^۲=x-|x-۲|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) نامتناهی
۴) صفر

۱۷۷- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۸=|x-۲|$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) $\frac{۵-\sqrt{۴۱}}{۲}$
۴) $\frac{۱۵-\sqrt{۴۱}}{۲}$

۱۷۸- مجموع جواب‌های معادله‌ی $|x^۲-۳|=۲x$ کدام است؟

۱) -۸
۲) ۸
۳) ۴
۴) صفر

۱۷۹- معادله‌ی $|x|+|x-۲|=x+۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۸۰- معادله‌ی $|x+۱|+|x+۲|+|x+۳|=۶x$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۸۱- چند عدد طبیعی در نابرابری $|\sqrt{n}-۷|<۱$ صدق می‌کنند؟

۱) ۲۹
۲) ۲۸
۳) ۲۷
۴) ۲۶

۱۸۲- اگر $A=\{x\,||x-۳|\geq ۲\}$ و $B=\{x\,||۲x+۱|\leq ۵\}$، حاصل $A\cap B$ کدام است؟

۱) $[-۳,۵]$
۲) $[-۳,۵)$
۳) $[۱,۳]$
۴) $[-۳,۱]$

۱۸۳- چند عدد صحیح در مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\left||x|-3\right|<5$ قرار دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۸۴- مجموع اعداد صحیح که در نامعادله‌ی $\left||x-1|-2\right|<1$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۸۵- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\left||x|-3\right|>1$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۸۶- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x^2-4}{|x|-1}<0$ کدام است؟

۱) $(-2,-1)$ ۲) $(-2,-1)\cup(1,2)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-1,0)\cup(1,2)$

۱۸۷- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{|3x-5|-2}{2x^2+x+7}\le 0$ کدام است؟

۱) $[1,3]$ ۲) $[1,\frac{7}{3}]$ ۳) $[-\frac{7}{3},-1]$ ۴) $[2,\frac{7}{3}]$

۱۸۸- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $|a-5|\le|a+5|$ کدام است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[10,+\infty)$ ۴) $(-\infty,10]$

۱۸۹- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x-1|\ge|2x-1|$ بازه‌ی $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۹۰- چند عدد صحیح در نامعادله‌ی $\left|\frac{x-10}{x-2}\right|>2$ صدق می‌کنند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۹۱- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $-1\le\frac{x-3}{2-x}\le 1$ به صورت $[\frac{a}{b},+\infty)$ است ($\frac{a}{b}$ ساده شدنی نیست). مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۹۲- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $|x^2-6x+8|<|x^2-5x+6|$ کدام است؟

۱) $x>\frac{7}{2}$ ۲) $x>\frac{11}{3}$ ۳) $\frac{7}{2}<x<\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{7}{2}<x<\frac{15}{4}$

۱۹۳- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2+|x|<2$ کدام است؟

۱) $(-1,2)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-2,-1)\cup(1,2)$

۱۹۴- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $|x^2-x|+x^2\le 1$ بازه‌ی $[a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۹۵- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $|x+1|\le 1-\frac{x}{2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۶- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $(x-1)|x|<x|x-1|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[0,1]$ ۲) $(0,1)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۱۹۷- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2-5|x|+4\le 0$ با مجموعه‌ی جواب‌های کدام نامعادله برابر است؟

۱) $|x|\le 4$ ۲) $|x|\ge 1$ ۳) $1\le|x|\le 4$ ۴) $|x|\ge 4$

۱۹۸- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2-2x<1+|x-1|$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل چهارم

معادلات و نامعادلات

۱- گزینه‌ی ۳ دلتای معادله برابر است با

$$\Delta=۳۶+۴۸=۸۴$$

بنابراین جواب‌های معادله به شکل زیر هستند:

$$x_۱=\frac{۶+\sqrt{۸۴}}{۲}=۳+\sqrt{۲۱}$$

$$x_۲=\frac{۶-\sqrt{۸۴}}{۲}=۳-\sqrt{۲۱}$$

۲- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی درجه‌ی دومی که $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های آن باشند به شکل $k(x-x_۱)(x-x_۲)=۰$ است، که در آن k مقداری ثابت است. با توجه به گزینه‌ها که ضریب $x^۲$ در آن‌ها برابر یک است، معادله‌ای که ریشه‌های آن $x_۱=۲-\sqrt{۳}$ و $x_۲=۱+\sqrt{۳}$ باشند به شکل $(x-(۲-\sqrt{۳}))(x-(۱+\sqrt{۳}))=۰$ نوشته می‌شود. بنابراین

$$x^۲-(۲-\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳})x+(۲-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})=۰$$

پس معادله به شکل $x^۲-۳x+\sqrt{۳}-۱=۰$ است.

۳- گزینه‌ی ۴ در معادله‌ی $x^۲-\sqrt{۳}x+\sqrt{۲}=۰$ مقدار Δ عددی منفی است:

$$\Delta=(-\sqrt{۳})^۲-۴\times۱\times\sqrt{۲}=۳-۴\sqrt{۲}<۰$$

بنابراین معادله جواب حقیقی ندارد. در بقیه‌ی معادلات مقدار Δ عددی مثبت است.

۴- گزینه‌ی ۱ در معادله‌ی $۳x^۲-۲\sqrt{۳}x+۱=۰$ مقدار Δ برابر صفر است:

$$\Delta=(-۲\sqrt{۳})^۲-۴\times۳\times۱=۱۲-۱۲=۰$$

پس این معادله، ریشه‌ی مضاعف دارد. در بقیه‌ی معادلات چنین نیست.

۵- گزینه‌ی ۳ در معادله‌ی $۵x^۲-۴x-۲=۰$ مقدار Δ مثبت است، پس معادله دو جواب متمایز دارد:

$$\Delta=(-۴)^۲-۴\times۵\times(-۲)=۵۶$$

۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۴ جمع می‌کنیم و به روش مربع کامل کردن به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$(x-۲)^۲=۲۵\Rightarrow x-۲=\pm۵\Rightarrow x=۷, x=-۳$$

در نتیجه، چون x مثبت است، پس $x=۷$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$(۷-۵)^۲+\frac{۶۰}{۷+۳}=۴+\frac{۶۰}{۱۰}=۱۰$$

۷- گزینه‌ی ۴ از معادله‌ی $(x^۲-۱)^۲=(۴x+۲)^۲$ دو معادله‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$x^۲-۱=۴x+۲,\quad x^۲-۱=-۴x-۲$$

بنابراین

$$x^۲-۴x-۳=۰\Rightarrow x_۱=۲+\sqrt{۷},\quad x_۲=۲-\sqrt{۷}$$

$$x^۲+۴x+۱=۰\Rightarrow x_۳=-۲+\sqrt{۳},\quad x_۴=-۲-\sqrt{۳}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله برابر است با

$$x_۱x_۲x_۳x_۴=(۲+\sqrt{۷})(۲-\sqrt{۷})(-۲+\sqrt{۳})(-۲-\sqrt{۳})$$

$$=(۴-۷)(۴-۳)=-۳$$

۸- گزینه‌ی ۲ ابتدا دلتای معادله را حساب می‌کنیم

$$\Delta=۴(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲-۸\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=۴((\sin\alpha+\cos\alpha)^۲-۲\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=۴(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)=۴$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر عبارت‌اند از

$$x_۱=\frac{۲(\sin\alpha+\cos\alpha)+۲}{۲\times۲}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+۱}{۲}$$

$$x_۲=\frac{۲(\sin\alpha+\cos\alpha)-۲}{۲\times۲}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-۱}{۲}$$

۹- گزینه‌ی ۳ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $-\frac{۸۱}{۷۵}$ است که همان $-\frac{۲۷}{۲۵}$ است.

۱۰- گزینه‌ی ۲ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{۳})(x-\sqrt{۵})=۰\Rightarrow x_۱=\sqrt{۳},\quad x_۲=\sqrt{۵}$$

بنابراین

$$x_۱^۲+x_۲^۴=(\sqrt{۳})^۲+(\sqrt{۵})^۴=۳+۲۵=۲۸$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$ آن‌گاه ریشه‌های معادله $x=-۱$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند. در معادله‌ی $(\cos^۲\alpha)x^۲+x+\sin^۲\alpha=۰$،

$$a=\cos^۲\alpha\,,\quad b=۱\,,\quad c=\sin^۲\alpha$$

$$a+c=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱=b$$

بنابراین

$$x_۱=-\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=-\tan^۲\alpha\,,\quad x_۲=-۱$$

توجه کنید که چون $۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ پس $\tan\alpha>۱$ و درنتیجه $-\tan^۲\alpha<-۱$. بنابراین

$$x_۲^۲-x_۱=(-۱)^۲-(-\tan^۲\alpha)=۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ اگر معادله را به شکل زیر بنویسیم،

$$a^۲x^۲-a^۲x-b(b-a)=۰$$

می‌توانیم آن را به کمک تجزیه حل کنیم:

$$(ax-b)(ax+b-a)=۰$$

بنابراین $x_۱=\frac{b}{a}$ و $x_۲=\frac{a-b}{a}$ همواره جواب‌های معادله هستند.

۱۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا معادله را به شکل $(x+۸)(x-m)=۰$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های معادله $x_۱=-۸$ و $x_۲=m$ هستند. دو حالت زیر پیش می‌آید:

اگر $x_۱=x_۲^۳$، آن‌گاه $-۸=m^۳$، بنابراین $m=-۲$.

اگر $x_۲=x_۱^۳$، آن‌گاه $m=(-۸)^۳$.

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای m، برابر ۱۰۲۴ است.

۱۴- گزینه‌ی ۳ اگر معادله را به‌صورت زیر بنویسیم،

$$x^۲+(m-۱)x-m(۲m-۱)=۰$$

به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم:

$$(x-m)(x+۲m-۱)=۰$$

پس جواب‌های معادله $x_۱=۱-۲m$ و $x_۲=m$ هستند.

دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول

$$x_۱=۱-۲m<۰\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}$$

$$x_۲=m>۲$$

پس کافی است $m>۲$.

حالت دوم

$$x_۱=۱-۲m>۲\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}$$

$$x_۲=m<۰$$

پس کافی است $m<-\frac{۱}{۲}$. بنابراین $m\in(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(۲,+\infty)$.

۱۵- گزینه‌ی ۳ چون $x=\frac{۱}{۲}$ ریشه‌ی معادله‌ی موردنظر است، مقدار عبارت $x^۲+۲kx+۵$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ برابر صفر می‌شود. در نتیجه

$$(\frac{۱}{۲})^۲+۲k(\frac{۱}{۲})+۵=۰\Rightarrow k+\frac{۲۱}{۴}=۰$$

$$\Rightarrow k=-\frac{۲۱}{۴}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ چون a ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-x-۵=۰$ است، پس در این معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^۲-a-۵=۰\Rightarrow a^۲-a=۵$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $b^۲-b=۵$. بنابراین

$$(a^۲-a-۲)(b^۲-b+۲)=(۵-۲)(۵+۲)=۲۱$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ چون k ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس در این معادله صدق می‌کند. بنابراین

$$k^۲-k\times k+k+۱=۰\Rightarrow k+۱=۰\Rightarrow k=-۱$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^۲-(-۱)x+(-۱)+۱=۰\Rightarrow x^۲+x=۰$$

ریشه‌های این معادله $x=۰$ و $x=-۱$ هستند. پس جواب دیگر معادله‌ی مورد نظر صفر است.

۱۸- گزینه‌ی ۱ چون $x=\sqrt{۲}+۱$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(\sqrt{۲}+۱)^۲-m(\sqrt{۲}+۱)+m-۱=۰$$

$$۳+۲\sqrt{۲}-m\sqrt{۲}-m+m-۱=۰$$

$$m\sqrt{۲}=۲+۲\sqrt{۲}\Rightarrow m=\sqrt{۲}+۲$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲-(\sqrt{۲}+۲)x+\sqrt{۲}+۱=۰$$

چون مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است، پس ریشه‌ی دیگر آن $x=۱$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول** چون $x=-m$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند. یعنی

$$۲m^۲+m^۲-۲m-۱=۰\Rightarrow ۳m^۲-۲m-۱=۰$$

$$\Rightarrow(m-۱)(۳m+۱)=۰$$

$$\Rightarrow m=۱ \text{ یا } m=-\frac{۱}{۳}$$

اگر $m=۱$، معادله به شکل $۲x^۲-x-۳=۰$ در می‌آید که $x=-۱=-m$ و $x=\frac{۳}{۲}=\frac{۳m}{۲}$ ریشه‌های آن هستند.

اگر $m=-\frac{۱}{۳}$، معادله به شکل $۲x^۲+\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}=۰$ در می‌آید که $x=\frac{۱}{۳}=-m$ و $x=\frac{-۱}{۲}=\frac{۳m}{۲}$ ریشه‌های آن هستند.

در هر دو حالت $x=\frac{۳m}{۲}$ ریشه‌ی دیگر معادله است.

راه‌حل دوم $x=-m$ یکی از ریشه‌های معادله است. اگر $x=n$ ریشه‌ی دیگر معادله باشد، معادله به‌صورت $۲(x+m)(x-n)$ تجزیه می‌شود. پس تساوی زیر یک اتحاد است:

$$۲x^۲-mx-۲m-۱=۲(x+m)(x-n)$$

بنابراین

$$۲x^۲-mx-۲m-۱=۲x^۲+۲(m-n)x-۲mn$$

پس تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$\begin{cases}-m=۲(m-n)\\ -۲m-۱=-۲mn\end{cases}$$

از تساوی اول نتیجه می‌شود $n=\frac{۳m}{۲}$. یعنی $x=\frac{۳m}{۲}$ ریشه‌ی دیگر معادله است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به رابطه‌ی $a\times ۲^۲+b\times ۲-۱=۰$ واضح است که یکی از ریشه‌های معادله $x=۲$ است. فرض می‌کنیم ریشه‌ی دیگر معادله $x=m$ باشد. بنابراین

$$ax^۲+bx-۱=a(x-۲)(x-m)$$

$$ax^۲+bx-۱=ax^۲+a(-۲-m)x+۲am$$

با توجه به اتحاد فوق، واضح است که $۲am=-۱$ و در نتیجه $m=-\frac{۱}{۲a}$، یعنی $x=-\frac{۱}{۲a}$ ریشه‌ی دیگر معادله است.

۲۱- گزینه‌ی ۲ $x=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ریشه‌ی معادله است. پس

$$۲x=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow ۲x+۱=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow (۲x+۱)^۲=\sqrt{۲}^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۴x-۱=۰$$

پس $a=-۴$ و $b=-۱$ و در نتیجه $a-b=-۳$.

۲۲- گزینه‌ی ۳ چون معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، پس $\Delta=۰$. در نتیجه

$$\Delta=b^۲-۴ac=۰\Rightarrow ۲^۲-۴\times ۱\times(k-۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۴-۴(k-۲)=۰\Rightarrow k=۳$$

۲۳- گزینه‌ی ۳ اگر $m=۰$، معادله به‌صورت $-۲x=۰$ در می‌آید که یک جواب دارد.

اگر $m\neq ۰$، باید مقدار دلتای آن برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta=۴-۴m^۲=۰\Rightarrow m^۲=۱\Rightarrow m=\pm ۱$$

بنابراین به ازای ۳ مقدار m، معادله یک جواب دارد.

۲۴- گزینه‌ی ۲ باید دلتای معادله برابر با صفر باشد، در نتیجه

$$\Delta=۴(m+۱)^۲-۴m(m-۱)$$

$$=۴((m+۱)^۲-m(m-۱))$$

$$=۴(۳m+۱)=۰$$

بنابراین $m=-\frac{۱}{۳}$.

۲۵- گزینه‌ی ۲ چون معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد، پس دلتای آن منفی است:

$$\Delta=۱-۴\times ۲(-m)<۰\Rightarrow ۱+۸m<۰\Rightarrow m<-\frac{۱}{۸}$$

۲۶- گزینه‌ی ۲ چون معادله جواب حقیقی دارد، پس دلتای آن منفی نیست. یعنی

$$\Delta\geq ۰\Rightarrow ۱۶-۱۲m\geq ۰\Rightarrow m\leq\frac{۴}{۳}$$

۲۷- گزینه‌ی ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد باید $\Delta\leq ۰$. پس

$$\Delta=۳۶-۴\times ۴(k-۱)\leq ۰\Rightarrow ۵۲-۱۶k\leq ۰\Rightarrow k\geq\frac{۱۳}{۴}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{۱۳}{۴}$ است.

۲۸- گزینه‌ی ۳ اگر در معادله‌ی $a^۲x^۲-۲x+c=۰$ به جای x قرار دهیم $-x$ به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$a^۲x^۲+۲x+c=۰$$

بنابراین، معادله‌ی اخیر دو جواب حقیقی دارد.

۲۹- گزینه‌ی ۲ چون معادله‌ی $x^۲-۲x+b=۰$ دو جواب حقیقی دارد، پس

$$\Delta=۴-۴b>۰$$

اکنون دلتای معادله‌ی $x^۲-۴x+b+۳=۰$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=۱۶-۴(b+۳)=۴-۴b>۰$$

بنابراین، معادله‌ی اخیر نیز دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

۳۰- گزینه‌ی ۳ چون معادله‌ی $x^۲+ax+b^۲=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد، پس دلتای آن مثبت است:

$$\Delta=a^۲-۴b^۲>۰$$

پس $a^۲>۴b^۲$. اکنون دلتای معادله‌ی $x^۲+bx+a^۲=۰$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴a^۲$$

چون $a^۲>۴b^۲$ پس $b^۲<\frac{۱}{۴}a^۲$، در نتیجه

$$b^۲-۴a^۲<\frac{۱}{۴}a^۲-۴a^۲=-\frac{۱۵}{۴}a^۲<۰$$

بنابراین، معادله‌ی $x^۲+bx+a^۲=۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۳۱- گزینه‌ی ۱ برای این‌که معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، باید دلتای آن صفر باشد:

$$\Delta=(۴k-۸)^۲-۴k(۴k-۷)=۰$$

$$۱۶k^۲-۶۴k+۶۴-۱۶k^۲+۲۸k=۰$$

$$k=\frac{۱۶}{۹}$$

بنابراین تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-\frac{۱۶}{۹}x+۱=۰$ را می‌خواهیم که چون $\Delta=\frac{۲۵۶}{۸۱}-۴=\frac{-۶۸}{۸۱}<۰$ این معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۳۲- گزینه‌ی ۳ چون معادله‌ی $x^۲+۴x+k-۱=۰$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta=۱۶-۴(k-۱)<۰\Rightarrow k-۱>۴\Rightarrow k>۵$$

در معادله‌ی $x^۲-۲x-k+۶=۰$ مقدار Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=۴-۴(-k+۶)=۴k-۲۰=۴(k-۵)$$

چون $k>۵$ پس $۴(k-۵)>۰$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۳۳- گزینه‌ی ۳ چون $x=k$ جواب معادله‌ی $x^۲-۳x-k+۳=۰$ است، پس در آن صدق می‌کند. یعنی

$$k^۲-۳k-k+۳=۰\Rightarrow k^۲-۴k+۳=۰$$

$$\Rightarrow k=۱,\quad k=۳$$

اگر $x=۱$ جواب معادله‌ی $x^۲-ax+۱=۰$ باشد، آن‌گاه

$$۱-a+۱=۰\Rightarrow a=۲$$

اگر $x=۳$ جواب معادله‌ی $x^۲-ax+۱=۰$ باشد، آن‌گاه

$$۹-۳a+۱=۰\Rightarrow a=\frac{۱۰}{۳}$$

۳۴- گزینه‌ی ۴ فرض کنید $x=a$ ریشه‌ی مشترک این دو معادله باشد. در این صورت a در هر دو معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^۲-ka+۳=۰,\quad a^۲-۳a+k=۰$$

اگر این تساوی‌ها را از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^۲-ka+۳-(a^۲-۳a+k)=۰$$

$$\Rightarrow a^۲-ka+۳-a^۲+۳a-k=۰$$

$$\Rightarrow a(۳-k)+۳-k=۰$$

$$\Rightarrow (۳-k)(a+۱)=۰$$

توجه کنید که $k\neq ۳$، زیرا اگر $k=۳$، معادله‌ها یکسان می‌شوند. بنابراین $a=-۱$، یعنی -۱ ریشه‌ی مشترک معادله‌هاست. چون -۱ در معادله‌ی اول صدق می‌کند، پس

$$x^۲-kx+۳=۰\Rightarrow (-۱)^۲-k(-۱)+۳=۰$$

$$\Rightarrow k=-۴$$

۳۵- گزینه‌ی ۳ در معادله‌ی $x^۲-ax+a-۱=۰$ مجموع ضرایب برابر صفر است، پس یکی از جواب‌ها $x=۱$ و جواب دیگر $x=\frac{a-۱}{۱}$ است.

اگر $x=۱$ جواب معادله‌ی $۲x^۲-۴x+a-۱=۰$ باشد، آن‌گاه

$$۲-۴+a-۱=۰\Rightarrow a=۳$$

اگر $x=a-۱$ جواب معادله‌ی $۲x^۲-۴x+a-۱=۰$ باشد، آن‌گاه

$$۲(a-۱)^۲-۴(a-۱)+a-۱=۰\Rightarrow ۲a^۲-۷a+۵=۰$$

$$\Rightarrow a=۱, a=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین به ازای ۳ مقدار a، دو معادله یک جواب مشترک دارند.

۳۶- گزینه‌ی ۲ اگر تساوی‌های

$$a^۲+ab+a=۱۴$$

$$b^۲+ab+b=۲۸$$

را جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$(a^۲+b^۲+۲ab)+(a+b)=۴۲$$

$$(a+b)^۲+(a+b)-۴۲=۰$$

بنابراین

$$a+b=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴\times ۴۲}}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۶۹}}{۲}=\frac{-۱\pm ۱۳}{۲}$$

یعنی $a+b=۶$ یا $a+b=-۷$.

۳۷- گزینه‌ی ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳(۱-\cos^۲\alpha)-۴\cos\alpha+۴=۰\Rightarrow ۳\cos^۲\alpha+۴\cos\alpha-۷=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\cos\alpha$، می‌توانیم معادله را به شکل $۳t^۲+۴t-۷=۰$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $t=۱$ و دیگری $t=\frac{-۷}{۳}$ است. چون $\cos\alpha=-\frac{۷}{۳}$ قابل قبول نیست، پس $\cos\alpha=۱$ و در نتیجه $\cos^۴\alpha=۱$.

۳۸- گزینه‌ی ۴ اگر فرض کنیم $t=\tan\alpha$ معادله به‌صورت $t^۲-۳t+۱=۰$ در می‌آید. بنابراین

$$t=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

یعنی $\tan\alpha=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$، پس $\cot\alpha=\frac{۲}{۳\pm\sqrt{۵}}$. مخرج این کسرها را گویا می‌کنیم

$$\cot\alpha=\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}=\frac{۲(۳-\sqrt{۵})}{۹-۵}=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\cot\alpha=\frac{۲}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{۲(۳+\sqrt{۵})}{۹-۵}=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$

پس $\cot\alpha=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$.

۳۹- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan\alpha$، آن‌گاه $\cot\alpha=\frac{۱}{t}$ و معادله‌ی داده شده به‌صورت $t-\frac{۲}{t}=\sqrt{۲}$ درمی‌آید. طرفین را در t ضرب کرده و معادله را حل می‌کنیم:

$$t^۲-۲=\sqrt{۲}t\Rightarrow t^۲-\sqrt{۲}t-۲=۰\Rightarrow t=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ربع اول است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}}{۲}<۰$ قابل قبول نیست. درنتیجه $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}}{۲}$. بنابراین

$$\tan\alpha=\sqrt{۲}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۱+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$$

در نتیجه

$$\sqrt{۲}\tan\alpha=۱+\sqrt{۵}$$

۴۰- گزینه‌ی ③ فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=y$. در نتیجه

$$y^۲=(\sin x+\cos x)^۲\Rightarrow y^۲=۱+۲\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{y^۲-۱}{۲}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$۱+\frac{y^۲-۱}{۲}=y\Rightarrow y^۲+۱=۲y$$

در نتیجه $(y-۱)^۲=۰$. بنابراین $y=۱$. در نتیجه

$$\sin x+\cos x=۱$$

۴۱- گزینه‌ی ① سه جمله‌ی متوالی دنباله را با $a, ar, ar^۲$ نشان می‌دهیم. بنابراین طبق فرض،

$$ar^۲=a+ar\Rightarrow r^۲=۱+r$$

بنابراین $r^۲-r-۱=۰$. در نتیجه $r=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ یا $r=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$.

توجه کنید که $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<۰$. پس قدر نسبت این دنباله $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.

۴۲- گزینه‌ی ③ چون $x+۲$ واسطه‌ی هندسی بین x و $۲x+۶$ است، پس

$$(x+۲)^۲=x(۲x+۶)\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۲x^۲+۶x$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۴=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱\pm\sqrt{۵}$$

چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $x=-۱-\sqrt{۵}$ قابل قبول نیست. بنابراین

$$r=\frac{x+۲}{x}=\frac{\sqrt{۵}-۱+۲}{\sqrt{۵}-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}-۱}=\frac{(\sqrt{۵}+۱)^۲}{(\sqrt{۵}-۱)(\sqrt{۵}+۱)}$$

$$=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۵-۱}=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$

۴۳- گزینه‌ی ③ توجه کنید که

$$b=a+۲,\quad c=b+۲=a+۴,\quad d=c+۲=a+۶$$

بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$a+c=\frac{۱}{۵}bd$$

$$a+(a+۴)=\frac{۱}{۵}(a+۲)(a+۶)$$

$$۲a+۴=\frac{۱}{۵}(a^۲+۸a+۱۲)$$

$$۱۰a+۲۰=a^۲+۸a+۱۲$$

$$a^۲-۲a-۸=۰$$

$$a=\frac{۲\pm\sqrt{۴-۴\times۱\times(-۸)}}{۲\times۱}=\frac{۲\pm۶}{۲}$$

بنابراین $a=-۲$ و $a=۴$، که چون a عددی طبیعی است، پس $a=۴$. به این ترتیب، عددهای موردنظر ۴، ۶، ۸ و ۱۰ هستند. پس

$$a+b+c+d=۲۸$$

۴۴- گزینه‌ی ② با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $۱۲+۲x$ و $۶+۴x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(۶+۴x)(۱۲+۲x)$. پس

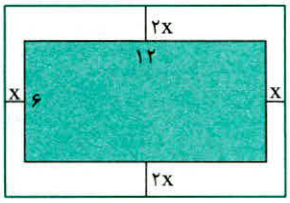
$$(۶+۴x)(۱۲+۲x)=۱۰۴\Rightarrow ۲x^۲+۱۵x-۸=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},\quad x=-۸$$

$x=-۸$ قابل قبول نیست.

پس $x=\frac{۱}{۲}$ و محیط قاب برابر است با

$$P=۲(۶+۴x+۱۲+۲x)=۲(۶x+۱۸)=۴۲$$



۴۵- گزینه‌ی ④ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیه‌ی فیثاغورس، معادله‌ی $(۲x+۱)^۲=x^۲+(۲x)^۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین

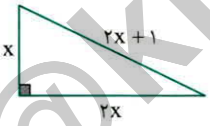
$$۴x^۲+۴x+۱=x^۲+۴x^۲\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰$$

$$\Rightarrow x=۲+\sqrt{۵},\quad x=۲-\sqrt{۵}$$

چون $۲-\sqrt{۵}<۰$ بنابراین قابل قبول نیست و در نتیجه $x=۲+\sqrt{۵}$.

از طرف دیگر مساحت مثلث برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}\times x\times ۲x=x^۲=(۲+\sqrt{۵})^۲=۹+۴\sqrt{۵}$$



۴۶- گزینه‌ی ① اگر اندازه‌ی طول مستطیل را y و اندازه‌ی عرض آن را x فرض کنیم، اندازه‌ی قطر آن می‌شود $\sqrt{x^۲+y^۲}$. پس

$$y=۴+x,\quad x^۲+y^۲=۲۰$$

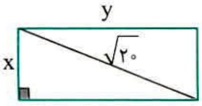
در نتیجه

$$x^۲+(۴+x)^۲=۲۰\Rightarrow x^۲+۱۶+۸x+x^۲=۲۰\Rightarrow x^۲+۴x-۲=۰$$

$$\Rightarrow x=-۲+\sqrt{۶},\quad x=-۲-\sqrt{۶}$$

$x=-۲-\sqrt{۶}$ قابل قبول نیست. پس $x=-۲+\sqrt{۶}$ و درنتیجه $y=۲+\sqrt{۶}$. پس مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{۶}-۲)(\sqrt{۶}+۲)=۶-۴=۲$$



۴۷- گزینه‌ی ② این دو عدد را x و x+۲ در نظر می‌گیریم. بنابراین تساوی $(x+۲)^۳-x^۳=۳۸۶$ برقرار است. پس

$$x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸-x^۳=۳۸۶\Rightarrow ۶x^۲+۱۲x-۳۷۸=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۶۳=۰$$

$$\Rightarrow (x-۷)(x+۹)=۰$$

$$\Rightarrow x=۷,\quad x=-۹$$

چون عددها طبیعی و فرد هستند، پس $x=-۹$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=۷$ و دو عدد مورد نظر ۷ و ۹ هستند و تفاضل مربعات آن‌ها ۴۹-۸۱ یعنی ۳۲ است.

۴۸- گزینه‌ی ③ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازه‌ی مساحت آن $x^۲$ و طول قطرهای آن $\sqrt{۲}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+۲\sqrt{۲}x=۱۶\Rightarrow x^۲+۲\sqrt{۲}x-۱۶=۰$$

$$\Delta=۸+۶۴=۷۲$$

$$x=\frac{-۲\sqrt{۲}\pm\sqrt{۷۲}}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۲}\pm۶\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=۲\sqrt{۲},\quad x=-۴\sqrt{۲}\ \text{غ ق ق}$$

محیط مربع ۴x است که می‌شود $۸\sqrt{۲}$.

۴۹- گزینه‌ی ① دو عدد را x و y می‌نامیم. پس $\frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}$ و $xy=x+y+۱۴$. در تساوی دوم به جای y قرار می‌دهیم $\frac{۳}{۲}x$ و نتیجه می‌شود:

$$x(\frac{۳}{۲}x)=x+\frac{۳}{۲}x+۱۴\Rightarrow\frac{۳}{۲}x^۲=\frac{۵}{۲}x+۱۴$$

$$\Rightarrow ۳x^۲-۵x-۲۸=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۵^۲+۴\times۳\times۲۸}}{۲\times۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۴\\ x=-\frac{۷}{۳}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین $x=۴$ و $y=۶$ اعداد مورد نظر هستند و اختلاف آن‌ها ۲ واحد است.

۵۰- گزینه‌ی ③ اگر این دو عدد را x و y فرض کنیم، معلوم می‌شود که $x+y=۶$ و $xy=۴$. از معادله‌ی $x+y=۶$ نتیجه می‌شود $y=۶-x$. اگر در معادله‌ی $xy=۴$ به جای y مقدار $۶-x$ را قرار دهیم، به معادله‌ی $x(۶-x)=۴$ می‌رسیم. بنابراین

$$۶x-x^۲=۴\Rightarrow x^۲-۶x+۴=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۶\pm\sqrt{۳۶-۱۶}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=۳\pm\sqrt{۵}$$

اگر $x=۳+\sqrt{۵}$، آن‌گاه $y=۳-\sqrt{۵}$ و اگر $x=۳-\sqrt{۵}$، آن‌گاه $y=۳+\sqrt{۵}$. در هر صورت نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر برابر است با

$$\frac{۳+\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{(۳+\sqrt{۵})^۲}{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}=\frac{۱۴+۶\sqrt{۵}}{۹-۵}=\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۵۱- گزینه‌ی ① سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$x-۲=۷(y-۲)$$

$$x=y^۲$$

اگر در معادله‌ی اول به جای x قرار دهیم $y^۲$، به‌دست می‌آید:

$$y^۲-۲=۷(y-۲)\Rightarrow y^۲-۷y+۱۲=۰$$

$$\Rightarrow(y-۳)(y-۴)=۰$$

$$\Rightarrow y=۳,۴$$

اگر $y=۳$، آن‌گاه $x=۹$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y=۴$، آن‌گاه $x=۱۶$. یعنی مریم و برادرش در مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینه‌ی (۱) آمده است.

۵۲- گزینه‌ی ③ طول یک تکه را x بگیرید. در این صورت طول تکه‌ی دیگر $۳۲-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکه‌ی اول $\frac{x}{۴}$ و طول هر ضلع مربع نظیر تکه‌ی دوم $\frac{۳۲-x}{۴}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{۴})^۲$ و $(\frac{۳۲-x}{۴})^۲$ است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{۴})^۲+(\frac{۳۲-x}{۴})^۲=۳۴$$

$$x^۲+(۳۲-x)^۲=۳۴\times۱۶$$

$$x^۲+۳۲^۲+x^۲-۶۴x=۳۴\times۱۶$$

$$x^۲-۳۲x+۲۴۰=۰$$

$$x=\frac{۳۲\pm\sqrt{۳۲^۲-۴\times۱\times۲۴۰}}{۲\times۱}=\frac{۳۲\pm\sqrt{۶۴}}{۲}=\frac{۳۲\pm۸}{۲}$$

بنابراین $x=۲۰$ و $x=۱۲$. چون $۳۲=۱۲+۲۰$، در هر صورت، طول یکی از تکه‌ها ۲۰ سانتی‌متر و طول تکه‌ی دیگر ۱۲ سانتی‌متر است.

۵۳- گزینه‌ی ۴ طول رأس سهمی $x=-\frac{\frac{۳}{۲}}{۲\times\frac{۱}{۲}}=-\frac{۳}{۲}$ است.

پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند. عرض رأس سهمی را با جای‌گذاری $x=-\frac{۳}{۲}$ در معادله‌ی سهمی به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۱}{۲}(-\frac{۳}{۲})^۲+\frac{۳}{۲}(-\frac{۳}{۲})+\frac{۹}{۸}=۰$$

پس رأس سهمی $(-\frac{۳}{۲},۰)$ است و گزینه‌ی (۴) درست است.

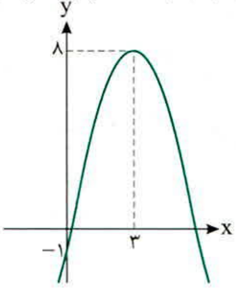
۵۴- گزینه‌ی ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{-۲}{۲\times۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۳(\frac{۱}{۳})^۲-۲(\frac{۱}{۳})+۱=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین رأس سهمی نقطه‌ی $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ است و چون ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینه‌ی (۴) درست است.

۵۵- گزینه‌ی ۲ مختصات رأس سهمی نقطه‌ی $(-۱,۱۱)$ و محل تلاقی آن با محور y نقطه‌ی $(۰,۱۰)$ است. بنابراین سهمی مورد نظر گزینه‌ی (۲) است.

۵۶- گزینه‌ی ۲ سهمی از نقطه‌ی $(۰,-۱)$ عبور می‌کند. رأس سهمی نقطه‌ی $(۳,۸)$ است. پس نمودار به شکل زیر است.



بنابراین نمودار از ناحیه‌ی دوم نمی‌گذرد.

۵۷- گزینه‌ی ۲ چون $a,\Delta>۰$، سهمی پایین‌ترین نقطه دارد و محور x را در دو نقطه قطع می‌کند. در نتیجه تنها گزینه‌های (۲) و (۳) باقی می‌مانند. چون $b<۰$ و $a>۰$، پس $\frac{-b}{۲a}>۰$. بنابراین طول رأس سهمی مثبت است. در نتیجه گزینه‌ی (۲) درست است.

۵۸- گزینه‌ی ۴ چون سهمی دارای بالاترین نقطه است، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. طول رأس سهمی عددی منفی است. در گزینه‌ی (۳) طول رأس سهمی $x=-\frac{۳}{۲(-۱)}=\frac{۳}{۲}$ و در گزینه‌ی (۴) طول رأس سهمی $x=-\frac{۳}{۲}$ است. پس گزینه‌ی (۴) درست است.

۵۹- گزینه‌ی ۱ محل تلاقی سهمی با محور y نقطه‌ی $(۰,-۱۶)$ و طول رأس سهمی $x=\frac{۴-۲}{۲}=۱$ است. در نتیجه گزینه‌ی (۱) درست است.

۶۰- گزینه‌ی ۴ سهمی از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ عبور کرده است. پس مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند. بنابراین

$$۰=a(-۱)^۲-b(-۱)+c\Rightarrow a+b+c=۰$$

۶۱- گزینه‌ی ۳ چون $(۳,۹)$ روی سهمی قرار دارد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند:

$$۹=۹-۳a+b\Rightarrow b=۳a$$

یعنی معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=x^۲-ax+۳a$ است. پس نقطه‌ی $(a,۳a)$ روی سهمی است، زیرا

$$x=a\Rightarrow y=a^۲-a^۲+۳a=۳a$$

۶۲- گزینه‌ی ۳ طول رأس سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ برابر $x=-\frac{b}{۲a}$ است. پس در این‌جا $x=-\frac{-۵}{۲\times۲}=\frac{۵}{۴}$ طول رأس سهمی است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

۶۳- گزینه‌ی ۱ رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ است و این سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض c قطع می‌کند. بنابراین

$$\frac{۴m}{۲}=-۲,\quad \frac{۴n-۱۶m^۲}{۴}=۳$$

از تساوی اول به‌دست می‌آید $m=-۱$. در نتیجه، از تساوی دوم به‌دست می‌آید

$$\frac{۴n-۱۶}{۴}=۳\Rightarrow n=۷$$

۶۴- گزینه‌ی ۳ رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ است. بنابراین

$$\frac{۳m-۵}{۲}=-۱\Rightarrow m=۱$$

بنابراین مختص y رأس سهمی مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴\times۱\times۲-(۳m-۵)^۲}{۴\times۱}=\frac{۸-(۳\times۱-۵)^۲}{۴}=۱$$

به‌این‌ترتیب رأس سهمی موردنظر روی خط $y=۱$ قرار دارد.

۶۵- گزینه‌ی ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{-۲}{۲k}=\frac{۱}{k}$ است.

عرض رأس سهمی را حساب می‌کنیم:

$$y=k(\frac{۱}{k})^۲-۲(\frac{۱}{k})+۱=۱-\frac{۱}{k}$$

چون رأس سهمی روی خط $y=۲x$ است، پس

$$۱-\frac{۱}{k}=۲(\frac{۱}{k})\Rightarrow\frac{۳}{k}=۱\Rightarrow k=۳$$

۶۶- گزینه‌ی ۲ طول رأس سهمی $y=x^۲-kx-۱$ برابر است با $x=\frac{k}{۲}$. بنابراین عرض آن برابر است با

$$y=\frac{k^۲}{۴}-\frac{k^۲}{۲}-۱=\frac{-k^۲}{۴}-۱$$

چون رأس سهمی فوق یعنی $(\frac{k}{۲},-۱-\frac{k^۲}{۴})$ روی سهمی $y=x-x^۲+k$ قرار دارد، پس

$$-۱-\frac{k^۲}{۴}=\frac{k}{۲}-\frac{k^۲}{۴}+k$$

$$\frac{۳k}{۲}=-۱\Rightarrow k=-\frac{۲}{۳}$$

۶۷- گزینه‌ی ۳ رأس سهمی $y=ax^۲-۲ax+۲$ نقطه‌ی $(۱,۲-a)$ است که روی سهمی $y=bx^۲+۲bx+۱$ قرار دارد. پس

$$۲-a=b+۲b+۱\Rightarrow a+۳b-۱=۰ \quad (۱)$$

رأس سهمی $y=bx^۲+۲bx+۱$ نقطه‌ی $(-۱,۱-b)$ است که روی سهمی $y=ax^۲-۲ax+۲$ قرار دارد. پس

$$۱-b=a+۲a+۲\Rightarrow b=-۳a-۱ \quad (۲)$$

اگر در معادله‌ی (۱) مقدار b را از معادله‌ی (۲) قرار دهیم، آن‌گاه

$$a+۳(-۳a-۱)-۱=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $b=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b=۰$.

۶۸- گزینه‌ی ۱ سهمی $y=x^۲-۲x$ دارای پایین‌ترین نقطه به مختصات $x=۱$ و $y=-۱$ است. پس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ از نقطه‌ی $(۰,-۲)$ عبور می‌کند و رأس آن $(۱,-۱)$ است.

بنابراین

$$-۲=۰+۰+c\Rightarrow c=-۲$$

$$y=ax^۲+bx-۲$$

$$\text{طول رأس سهمی}: x=-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow b=-۲a$$

$$\text{عرض رأس سهمی}: y=a(۱)^۲+b(۱)-۲=-۱\Rightarrow a+b=۱$$

$$\Rightarrow a-۲a=۱\Rightarrow a=-۱,\quad b=۲$$

بنابراین

$$abc=(-۱)(۲)(-۲)=۴$$

۶۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا نابرابری $\frac{b^۲}{۴a}>c$ را به‌صورت $\frac{b^۲-۴ac}{۴a}>۰$ می‌نویسیم. می‌دانیم عرض رأس سهمی موردنظر برابر $-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$ است، که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد، بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

۷۰- گزینه‌ی ۱ چون نمودار سهمی داده شده، بالاترین نقطه دارد، پس $a<۰$. چون طول رأس سهمی مثبت است، پس $-\frac{b}{۲a}>۰$ در نتیجه با توجه به منفی بودن a ، $b>۰$ و چون عرض محل تلاقی سهمی با محور y منفی است، پس $c<۰$. در نتیجه،

$$ac>۰,\quad abc>۰,\quad bc<۰$$

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نادرست هستند. اکنون از این‌که طول رأس سهمی از $\frac{۱}{۲}$ بزرگ‌تر است، نتیجه می‌شود

$$-\frac{b}{۲a}>\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{b}{a}>۱\Rightarrow۱+\frac{b}{a}=\frac{a+b}{a}<۰$$

چون $a<۰$، پس $a+b>۰$. بنابراین $\frac{a+b}{c}<۰$ (زیرا $c<۰$).

۷۱- گزینه‌ی ۲ طول رأس سهمی برابر یک است. پس

$$-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow b=-۲a$$

عرض رأس سهمی برابر است با ۱-. بنابراین

$$a\times۱^۲+b\times۱+c=-۱\Rightarrow a-۲a+c=-۱$$

$$c-a=-۱\Rightarrow a-c=۱$$

۷۲- گزینه‌ی ۱ چون سهمی در نقاطی به طول ۱- و ۵ محور طول‌ها را قطع کرده است، این نقاط دارای عرض یکسان هستند. پس معادله‌ی محور تقارن به‌صورت $x=\frac{۵-۱}{۲}=۲$ است که نقاط $(-۱,۰)$ و $(۵,۰)$ نسبت به آن قرینه‌ی یک‌دیگرند.

۷۳- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی محور تقارن سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت $x=\frac{-b}{۲a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{۴m-۲}{۲(۳m-۴)}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow m=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۷۴- گزینه‌ی ① سهمی از نقطه‌ی $(۰,۲)$ عبور کرده است، پس

$$۲=۰+۰+b\Rightarrow b=۲$$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $y=x^۲+ax+۲$ است. عرض رأس این سهمی برابر است با

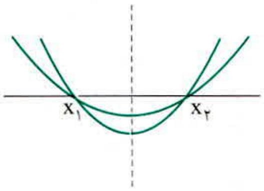
$$y=\frac{۴\times۱\times b-a^۲}{۴\times۱}=\frac{۸-a^۲}{۴}=۱$$

بنابراین $a^۲=۴$ و در نتیجه $a=۲$ یا $a=-۲$.

چون طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس $-\frac{a}{۲}$ باید مثبت باشد و در نتیجه $a=۲$ قابل قبول نیست. یعنی $a=-۲$ و معادله‌ی سهمی به صورت $y=x^۲-۲x+۲$ است. معادله‌ی محور تقارن این سهمی $x=۱$ است.

۷۵- گزینه‌ی ③ با توجه به فرض مسئله، نمودار تقریبی سهمی‌ها به شکل زیر است. بنابراین محور تقارن دو سهمی یکسان است. در نتیجه

$$\frac{m-۲}{۲}=-\frac{۳m+۱}{۴}\Rightarrow m=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$



۷۶- گزینه‌ی ② چون سهمی محور طول‌ها را در ۱- و ۳ قطع می‌کند، پس معادله‌ی سهمی به شکل $y=a(x+۱)(x-۳)$ است. چون سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند، پس مختصات نقطه‌ی $(۰,۶)$ در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند. بنابراین

$$۶=a(۰+۱)(۰-۳)\Rightarrow a=-۲$$

یعنی معادله‌ی سهمی $y=-۲x^۲+۴x+۶$ است. پس عرض رأس سهمی برابر است با

$$y=\frac{۴(-۲)(۶)-۴^۲}{۴(-۲)}=۸$$

۷۷- گزینه‌ی ④ از روی شکل معلوم می‌شود $c=-۴$. چون سهمی از نقاط $(۴,۰)$ و $(-۱,۰)$ گذشته است، پس

$$a-b-۴=۰,\quad ۱۶a+۴b-۴=۰$$

بنابراین $b=-۳$ و $a=۱$. به این ترتیب،

$$۴a+۲b=۴(۱)+۲(-۳)=-۲$$

۷۸- گزینه‌ی ④ ریشه‌های معادله‌ی $-x^۲+bx-۲=۰$ مختصات نقطه‌های A و B هستند.

بنابراین

$$B=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۸}}{-۲},\quad A=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۸}}{-۲}$$

در نتیجه، طول پاره‌خط AB برابر است با

$$\frac{-b-\sqrt{b^۲-۸}}{-۲}-\frac{-b+\sqrt{b^۲-۸}}{-۲}=\frac{-۲\sqrt{b^۲-۸}}{-۲}=\sqrt{b^۲-۸}$$

بنابراین $\sqrt{b^۲-۸}=۴$، در نتیجه

$$b^۲-۸=۱۶\Rightarrow b^۲=۲۴\Rightarrow b=۲\sqrt{۶}$$

۷۹- گزینه‌ی ④ توجه کنید که $AB=۴$، در نتیجه $OD=۴$. بنابراین، $D=(۰,-۴)$. از طرف دیگر، چون نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۵,۰)$ روی سهمی، دارای عرض یکسان هستند، طول رأس سهمی برابر است با $x=\frac{۵+۱}{۲}=۳$. بنابراین رأس سهمی نقطه‌ی $T(۳,-۴)$ است. در نتیجه معادله‌ی سهمی به شکل زیر است:

$$y=a(x-۳)^۲-۴$$

چون نقطه‌ی $A(۱,۰)$ روی سهمی است، پس $۴a-۴=۰$ و در نتیجه $a=۱$. بنابراین معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=(x-۳)^۲-۴$ است. در نتیجه،

$$c=۹-۴=۵$$

۸۰- گزینه‌ی ② سهمی از نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,۰)$ عبور می‌کند.

پس

$$۰=۰+۰+c\Rightarrow c=۰$$

$$۰=۱۶a+۸+۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین معادله‌ی سهمی به‌شکل $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x$ است. طول رأس سهمی $x=-\frac{۲}{۲(-\frac{۱}{۲})}=۲$ است. پس عرض آن برابر است با

$$y=-\frac{۱}{۲}\times۲^۲+۲\times۲=۲$$

۸۱- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ است. مختصات نقاط داده شده را در معادله‌ی سهمی قرار می‌دهیم:

$$x=-۱\,,y=۰\Rightarrow ۰=a-b+c \quad (۱)$$

$$x=۱\,,y=۲\Rightarrow ۲=a+b+c \quad (۲)$$

$$x=۲\,,y=۹\Rightarrow ۹=۴a+۲b+c \quad (۳)$$

اگر طرفین معادله‌های (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$۲-۰=a+b+c-(a-b+c)\Rightarrow ۲=۲b\Rightarrow b=۱$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار یک را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}a-۱+c=۰\\ ۴a+۲+c=۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=۱\\ ۴a+c=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ c=-۱\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y=۲x^{۲}+x-۱$ است. این سهمی از نقطه‌ی $(-۲,۵)$ عبور می‌کند.

۸۲- گزینه‌ی ۱ چون $A(۱,۰)$ رأس سهمی است، پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=a(x-۱)^{۲}+۰=a(x-۱)^{۲}$ است. چون سهمی از نقطه‌ی $B(۲,۲)$ می‌گذرد، پس

$$۲=a(۲-۱)^{۲}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=۲(x-۱)^{۲}$ در می‌آید. در نتیجه، عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با خط $x=۳$ برابر است با

$$y=۲(۳-۱)^{۲}=۸$$

۸۳- گزینه‌ی ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{-۵}{۲\times۱}=\frac{۵}{۲}$ است.

بنابراین

$$\frac{۵}{۲}=\frac{m+m+۱}{۲}\Rightarrow ۲m+۱=۵\Rightarrow m=۲$$

$x=m=۲$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۲}-۵x+c=۰$ است. پس

$$۲^{۲}-۵\times۲+c=۰\Rightarrow c=۶$$

بنابراین عرض پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی $y=x^{۲}-۵x+۶$ را می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$k=(\frac{۵}{۲})^{۲}-۵\times\frac{۵}{۲}+۶=-\frac{۱}{۴}$$

پس $\sqrt{-۴k}=۱$.

۸۴- گزینه‌ی ۲ از روی شکل معلوم می‌شود که $a=۴۰$. برای پیدا کردن b و c باید ریشه‌های معادله‌ی زیر را پیدا کنیم:

$$x^{۲}-۲۲x+۴۰=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۲۰)=۰$$

$$\Rightarrow x=۲,۲۰$$

بنابراین $b=۲$ و $c=۲۰$. در نتیجه

$$b+c-a=۲+۲۰-۴۰=-۱۸$$

۸۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار، c و $-۲c$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ هستند. بنابراین

$$ac^{۲}+bc+c=۰\Rightarrow c(ac+b+۱)=۰$$

$$a(-۲c)^{۲}+b(-۲c)+c=۰\Rightarrow c(۴ac-۲b+۱)=۰$$

با توجه به این‌که $c\neq۰$ معادلات بالا به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases}ac+b+۱=۰\\ ۴ac-۲b+۱=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۴ac-۴b-۴=۰\\ ۴ac-۲b+۱=۰\end{cases}$$

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، مقدار b به‌دست می‌آید:

$$-۶b-۳=۰\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

۸۶- گزینه‌ی ۴ دقت کنید که عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با خط $x=-۱$ منفی است، در نتیجه $a-b+c<۰$. هم‌چنین سهمی بالاترین نقطه دارد پس $a<۰$، عرض نقطه‌ی تقاطع سهمی با محور y منفی است پس $c<۰$ و طول رأس سهمی مثبت است یعنی $-\frac{b}{۲a}>۰$. در نتیجه با توجه به منفی بودن a ، $b>۰$. بنابراین $abc>۰$. هم‌چنین

$$\frac{b}{a}<۰,\quad \frac{-c}{a}<۰$$

در نتیجه

$$\frac{b-c}{a}=\frac{b}{a}+(-\frac{c}{a})<۰$$

اما $a+b+c$، عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با خط $x=۱$ است که می‌تواند صفر باشد.

۸۷- گزینه‌ی ۳ طول رأس سهمی برابر ۳ و عرض آن برابر k است. در نتیجه معادله‌ی آن به‌صورت $y=a(x-۳)^{۲}+k$ است. چون نقطه‌های $(۱,۰)$ و $(۰,-۵)$ روی سهمی هستند، پس

$$۰=۴a+k\,,\quad -۵=۹a+k$$

در نتیجه $k=۴$ و $a=-۱$.

۸۸- گزینه‌ی ۲ مختصات نقطه‌ی A به‌صورت $(۰,k^۲)$ است. در نتیجه $OA=k^۲$. چون $OB=OC$ نتیجه می‌شود نقطه‌های $(x_B,۰)$ و $(-x_B,۰)$ روی سهمی، دارای عرض یکسان هستند. در نتیجه طول رأس سهمی برابر با $\frac{x_B-x_B}{۲}=۰$ است. بنابراین

$$-\frac{k+۱}{-۲}=\frac{k+۱}{۲}=۰\Rightarrow k=-۱$$

در نتیجه $OA=OB=OC=(-۱)^۲=۱$، پس

$$OA+OB+OC=۳$$

۸۹- گزینه‌ی ۳ اگر سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ محور طول‌ها را قطع نکند، آن‌گاه $\Delta=b^۲-۴ac<۰$. بنابراین سهمی به معادله‌ی $y=x^۲-۲x+۳$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند، زیرا $\Delta=۴-۱۲=-۸<۰$.

۹۰- گزینه‌ی ۲ برای پیدا کردن عرض نقطه‌ی A کافی است در معادله‌ی سهمی قرار دهیم $x=۰$:

$$y_A=۰+۰+۳\Rightarrow y_A=۳$$

چون $x=-۱$ طول نقطه‌ی برخورد سهمی با محور طول‌هاست، پس $x=-۱$ در معادله‌ی $-x^۲+(b+۱)x+۳=۰$ صدق می‌کند:

$$-۱-(b+۱)+۳=۰\Rightarrow b=۱$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y=-x^۲+۲x+۳$ است و طول نقطه‌ی B ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $-x^۲+۲x+۳=۰$ است:

$$-x^۲+۲x+۳=۰\Rightarrow x=-۱\,,x=۳\Rightarrow x_B=۳$$

۹۱- گزینه‌ی ۳ چون سهمی بر محور طول‌ها مماس است، (رأس سهمی روی محور طول‌هاست.): معادله‌ی $۲x^۲-۳x+k=۰$ ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$\Delta=۹-۸k=۰\Rightarrow k=\frac{۹}{۸}$$

۹۲- گزینه‌ی ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که سهمی پایین‌ترین نقطه دارد. در نتیجه ضریب $x^۲$ مثبت است:

$$m-۱>۰\Rightarrow m>۱ \quad (۱)$$

هم‌چنین معادله‌ی $(m-۱)x^۲+(۲m-۲)x+m-۲=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد، در نتیجه

$$\Delta=(۲m-۲)^۲-۴(m-۱)(m-۲)$$
$$=۴(m-۱)(m-۱-m+۲)=۴(m-۱)>۰$$

که با توجه به شرط قبلی درست است.

از طرف دیگر، عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با خط $x=-۲$ مثبت است. بنابراین

$$(m-۱)(-۲)^۲+(۲m-۲)(-۲)+m-۲=m-۲>۰$$
$$\Rightarrow m>۲ \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$m\in(۲,+\infty)$$

۹۳- گزینه‌ی ۳ از فرض مسئله نتیجه می‌گیریم نقاط $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ در معادله‌ی سهمی صدق می‌کنند. بنابراین اگر به جای x، مقادیر ۱ و ۲ را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\begin{matrix} x=۱\Rightarrow ۱=۱+a+b\Rightarrow a+b=۰ \\ x=۲\Rightarrow ۲=۴+۲a+b\Rightarrow ۲a+b=-۲ \end{matrix}\Rightarrow a=-۲,\quad b=۲$$

بنابراین معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=x^۲-۲x+۲$ است. در نتیجه عرض نقطه‌ی تقاطع سهمی با خط $x=۴$ برابر است با

$$y=۴^۲-۲\times۴+۲=۱۰$$

۹۴- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۵\Rightarrow\frac{۴(m-۱)-۳۶}{۴}=۵$$
$$\Rightarrow m-۱-۹=۵\Rightarrow m=۱۵$$

۹۵- گزینه‌ی ۲ رأس سهمی $y=a(x-۲)^۲+k$ نقطه‌ی $(۲,k)$ است. چون بیش‌ترین مقدار عبارت $y=a(x-۲)^۲+k$ برابر با ۲− است، پس عرض رأس سهمی برابر ۲− است، یعنی $k=-۲$. به این ترتیب معادله‌ی سهمی موردنظر به‌صورت $y=a(x-۲)^۲-۲$ است. چون این سهمی از نقطه‌ی $(۱,-۳)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند:

$$-۳=a(۱-۲)^۲-۲\Rightarrow -۳=a-۲$$

پس $a=-۱$.

بنابراین معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=-(x-۲)^۲-۲$ است و این سهمی محور y را در نقطه‌ی

$$y=-(۰-۲)^۲-۲=-۶$$

قطع می‌کند.

۹۶- گزینه‌ی ۲ اگر معادله‌ی سهمی $y=ax^۲+bx+c$ باشد، چون ۱− و ۵ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ هستند، پس

$$y=a(x-(-۱))(x-۵)=a(x+۱)(x-۵)$$

چون نقطه‌ی $(۰,۵)$ روی این سهمی است، پس

$$۵=a(۰+۱)(۰-۵)$$

$$۵=-۵a$$

پس $a=-۱$. بنابراین معادله‌ی سهمی به صورت زیر است:

$$y=-(x+۱)(x-۵)$$
$$=-(x^۲-۴x-۵)$$
$$=-((x-۲)^۲-۹)=-(x-۲)^۲+۹$$

در نتیجه رأس سهمی نقطه‌ی $(۲,۹)$ است، که مجموع مختصات آن برابر ۱۱ است.

۹۷- گزینه‌ی ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است. پس

$$-\frac{b}{۲a}=۲\Rightarrow b=-۴a$$

پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=ax^۲-۴ax+۱$ است. با قرار دادن $x=۲$ در معادله‌ی سهمی، عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$y=۴a-۸a+۱=۱-۴a$$

بنابراین با توجه به نمودار، $۱-۴a=-۱$ و در نتیجه $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-۲$، یعنی معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۱$ است. طول نقطه‌ی برخورد سهمی با محور طول‌ها مورد سؤال است. پس در معادله‌ی سهمی قرار می‌دهیم $y=۰$.

$$\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۲}$$

طبق شکل، c ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی فوق است و بزرگ‌تر از ۲ است. پس $c=۲+\sqrt{۲}$.

۹۸- گزینه‌ی ۲ معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=a(x-۱)^۲+۹$ است. چون نقطه‌ی $(۰,۸)$ روی سهمی است، پس $a=-۱$. بنابراین، معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=-(x-۱)^۲+۹$ درمی‌آید. در نتیجه مختصات نقاط A و B به ترتیب $A=(۴,۰)$ و $B=(-۲,۰)$ است. در نتیجه

$$AB=۴-(-۲)=۶$$

مساحت مثلث TAB برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AB\times y_T=\frac{۹\times۶}{۲}=۲۷$$

۹۹- گزینه‌ی ۳ مطابق شکل زیر، مساحت مثلث رنگی برابر است با

$$S_{ABC}=\frac{AB\times OC}{۲}$$

برای پیدا کردن اندازه‌ی OC کافی است عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها را پیدا کنیم

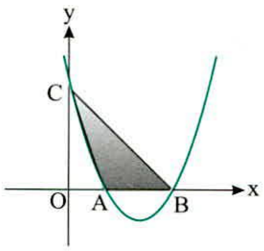
$$x=۰\Rightarrow y=۳\Rightarrow OC=۳$$

برای پیدا کردن اندازه‌ی AB کافی است طول نقاط برخورد سهمی با محور طول‌ها را پیدا کنیم:

$$y=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱,\ x=۳$$

بنابراین $AB=۳-۱=۲$ و در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{۲\times۳}{۲}=۳$$



۱۰۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به این که سهمی محور طول‌ها را در $x=۴$ و $x=-۲$ قطع کرده است، معادله‌ی سهمی به شکل $y=k(x+۲)(x-۴)$ است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $۴m$ است. که m، عرض نقطه‌ی A است و با جای‌گذاری $x=۳$ در معادله‌ی سهمی به‌دست می‌آید.

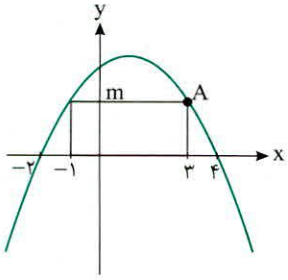
$$m=k(۳+۲)(۳-۴)=-۵k$$

بنابراین

$$S=۴m=۴(-۵k)=-۲۰k$$

$$-۲۰k=۷/۵\Rightarrow k=-\frac{۳}{۸}$$

بنابراین معادله‌ی سهمی به شکل $y=-\frac{۳}{۸}(x+۲)(x-۴)$ یا $y=-\frac{۳}{۸}x^۲+\frac{۳}{۴}x+۳$ است و در نتیجه $c=۳$.



۱۰۱- گزینه‌ی ۱ ریشه‌ی عبارت $x=\frac{۳}{۲}$ است و چون ضریب x عددی منفی است، پس جدول تعیین علامت عبارت مانند گزینه‌ی (۱) است.

۱۰۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به جدول، b ریشه‌ی عبارت است. پس

$$(a-۲b)b-۲a+۴b=۰$$

$$(a-۲b)b-۲(a-۲b)=۰$$

$$(a-۲b)(b-۲)=۰\Rightarrow a=۲b \quad \text{یا} \quad b=۲$$

با توجه به جدول تعیین علامت باید ضریب x، یعنی $a-۲b$، منفی باشد. پس $a<۲b$ و $a=۲b$ قابل قبول نیست. بنابراین $b=۲$ و در نتیجه $a<۴$.

بنابراین a می‌تواند اعداد طبیعی ۱، ۲ و ۳ باشد.

۱۰۳- گزینه‌ی ۱ ریشه‌ی عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$m^۲x+|m|=۰\Rightarrow x=\frac{-|m|}{m^۲}=\frac{-|m|}{|m|^۲}=\frac{-۱}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{\lvert m\rvert}$		$+\infty$
y		−	۰	+	

۱۰۴- گزینه‌ی ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=(a^{۳}-a^{۲}b)x+ab-b^{۲}=a^{۲}(a-b)x+b(a-b)$$

ریشه‌ی عبارت عدد $x=-\frac{b}{a^{۲}}$ است. ضریب $x^{۲}$ عددی منفی است، زیرا $a^{۲}>۰$ و $a-b<۰$. بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a^{۲}}$		$+\infty$
y		+	۰	−	

۱۰۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به این‌که $\Delta=۹-۳۲<۰$ و ضریب $x^{۲}$ برابر ۲ و عددی مثبت است، پس علامت عبارت همواره مثبت است.

x	$-\infty$		$+\infty$
y		+	

۱۰۶- گزینه‌ی ۴ چون $\Delta=۱۶-۱۲=۴>۰$، عبارت دو ریشه دارد $(x=۳, x=۱)$ و چون ضریب $x^{۲}$ عددی منفی است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	

۱۰۷- گزینه‌ی ۱ چون $\Delta=۱۲-۴(-۳)(-۱)=۰$ و ضریب $x^{۲}$ برابر -۳ و عددی منفی است، جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	−	

۱۰۸- گزینه‌ی ۲ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت عبارت متفاوت است، پس باید عبارت از درجه‌ی اول باشد. یعنی ضریب $x^{۲}$ باید صفر باشد.

$$m-۲=۰\Rightarrow m=۲$$

بنابراین عبارت به‌صورت $y=۲nx+۲$ است. چون $x=۴$ ریشه‌ی عبارت است، پس

$$۰=۲n\times۴+۲\Rightarrow n=\frac{-۱}{۴}$$

بنابراین $mn=\frac{-۱}{۲}$.

۱۰۹- گزینه‌ی ۴ چون عبارت یک ریشه دارد، پس باید از درجه‌ی اول باشد.یعنی ضریب $x^{۲}$ صفر است، پس

$$m^{۲}-۹=۰\Rightarrow m=\pm۳$$

اگر $m=۳$، عبارت به‌صورت $y=۳x-n$ در می‌آید که جدول تعیین علامت آن به‌صورت زیر است

x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	+	

پس $m=۳$ قابل قبول نیست و $m=-۳$. از طرف دیگر $x=۲$ ریشه‌ی عبارت است. بنابراین

$$y=-۳x-n$$

$$۰=-۳\times۲-n\Rightarrow n=-۶$$

۱۱۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به جدول، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x=۱\Rightarrow m+۱-(m+۱)^{۲}+n=۰ \quad (*)$$

$$x=۲\Rightarrow ۴(m+۱)-۲(m+۱)^{۲}+n=۰$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم. بنابراین

$$(m+۱)^{۲}-۳(m+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}m+۱=۰\Rightarrow m=-۱\\ m+۱=۳\Rightarrow m=۲\end{cases}$$

به ازای $m=-۱$ نتیجه می‌شود $y=n$ که علامت y ثابت خواهد بود و به ازای $m=۲$ از معادله‌ی $(*)$ به‌دست می‌آید

$$۳-۹+n=۰\Rightarrow n=۶$$

۱۱۱- گزینه‌ی ۳ چون $y=-x(x^{۲}-mx+n)$، جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$x_{۱}$		۰		$x_{۲}$		$+\infty$
$-x$		+		+	۰	−		−	
$x^{۲}-mx+n$		+	۰	−		−	۰	+	
y		+	۰	−	۰	+	۰	−	

۱۱۲- گزینه‌ی ۲ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$x^{۳}-۳x+۲=(x^{۳}-x^{۲})+(x^{۲}-۳x+۲)$$

$$=x^{۲}(x-۱)+(x-۱)(x-۲)$$

$$=(x-۱)(x^{۲}+x-۲)$$

$$=(x-۱)(x-۱)(x+۲)$$

$$=(x-۱)^{۲}(x+۲)$$

چون $(x-۱)^{۲}$ همواره نامنفی است، جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	+	

۱۱۳- گزینه‌ی ۱ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y=x^{۴}-۳x^{۲}-۴=(x^{۲}+۱)(x^{۲}-۴)$$

چون $x^{۲}+۱$ همواره مثبت است، پس کافی است $x^{۲}-۴$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۱۱۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y=\frac{(x-۱)(x-۲)(x-۱)(x+۱)}{(x-۲)^۳}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{(x-۱)^۲(x+۱)}{(x-۲)^۲}$$

چون عبارت‌های $(x-۱)^۲$ و $(x-۲)^۲$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+۱$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		۱		۲		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	۰	$+$	ت ن	$+$	

۱۱۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $x^۲-۳x-۱۰=(x-۵)(x+۲)$.

چون $|۳-x|\geq ۰$، علامت $\frac{x^۲-۳x-۱۰}{|۳-x|}$ همان علامت $x^۲-۳x-۱۰$ است که در $x=۳$ تعریف نشده است.

به این ترتیب جدول تعیین علامت عبارت موردنظر، جدول گزینه‌ی (۴) است.

۱۱۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $x=۱,-۲$ ریشه‌های مخرج هستند. هم‌چنین y به شکل زیر در می‌آید:

$$y=\frac{(x-۱)^۲(x^۲+bx+c)}{(x-۱)(x+۲)}$$

چون مقدار y به‌ازای $x=۰$ برابر صفر است، پس $x=۰$ جواب معادله‌ی $x^۲+bx+c=۰$ است. در نتیجه $c=۰$.

هم‌چنین، چون عبارت y در $x=-۲$ که ریشه‌ی مخرج است تغییر علامت نداده است، پس $x=-۲$ ریشه‌ی صورت نیز هست. بنابراین $(-۲)^۲+b(-۲)+۰=۰$، پس $b=۲$.

۱۱۷- گزینه‌ی ۴ با توجه به جدول، جواب نامعادله‌ی $AB>۰$ برابر است با

$$(-۶,۸)-\{-۴,۲\}$$

	$-\infty$		-۶		-۴		۲		۸		$+\infty$
A		$+$		$+$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
B		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$+$		$+$	
AB		$-$	۰	$+$	۰	$+$	۰	$+$	۰	$-$	

۱۱۸- گزینه‌ی ۲ از نامعادله‌ی $۵x-۱\leq ۲x-۴$ به‌دست می‌آید

$$۳x\leq -۳\Rightarrow x\leq -۱$$

از نامعادله‌ی $۲x-۴<۳x+۵$ به‌دست می‌آید

$$-x<۹\Rightarrow x>-۹$$

بنابراین اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های فوق را باید بگیریم که $-۹<x\leq -۱$ می‌شود.

۱۱۹- گزینه‌ی ۱ جواب نامعادله‌ی $x-۴<۲a$ به‌صورت $(-\infty,۲a+۴)$ و جواب نامعادله‌ی $x-۱>a^۲$ به‌صورت $(۱+a^۲,+\infty)$ است. برای این‌که مجموعه‌ی جواب‌ها ناتهی باشد، کافی است این دو بازه اشتراک داشته باشند. در نتیجه باید

$$۱+a^۲<۲a+۴\Rightarrow a^۲-۲a-۳<۰$$

چون $a^۲-۲a-۳=(a-۳)(a+۱)$، پس جواب نامعادله به شکل زیر است:

$$(-۱,۳)$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۳ نامعادله‌ی موردنظر را می‌توان به شکل‌های زیر نوشت:

$$abx+ab<a+ax$$

$$abx+ab-a-ax<۰$$

$$ax(b-۱)+a(b-۱)<۰$$

$$a(b-۱)(x+۱)<۰$$

چون $a<۰$ و $b-۱<۰$، پس $a(b-۱)>۰$. در نتیجه باید $x+۱<۰$، یعنی $x<-۱$.

۱۲۱- گزینه‌ی ۲ ریشه‌های صورت و مخرج a و $\frac{۱}{a}$ هستند.

چون $a>۱$، پس $\frac{۱}{a}<۱<a$. بنابراین عبارت $\frac{x-a}{ax-۱}$ میان این دو ریشه، یعنی روی بازه‌ی $(\frac{۱}{a},a)$ منفی است.

۱۲۲- گزینه‌ی ۱ مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $ax-b>۰$ به یکی از دو صورت $(\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{b}{a})$ است. با توجه به فرض مسئله،

$$a>۰,\quad \frac{b}{a}=۱\Rightarrow a=b$$

بنابراین عبارت $\frac{ax+b}{x-۲}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$a(\frac{x+۱}{x-۲})$$

چون $a>۰$، کافی است مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x+۱}{x-۲}>۰$ را بیابیم که برابر با مجموعه‌ی $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ است.

۱۲۳- گزینه‌ی ۱ نامعادله را به شکل زیر در می‌آوریم:

$$(n-۱)x^۲-(n+۱)x-m-n\leq ۰\quad (*)$$

می‌دانیم عبارت‌های درجه‌ی دوم در بازه‌هایی به شکل (c,d) یا $(-\infty,c)\cup(d,+\infty)$ منفی هستند. در نتیجه عبارت $(*)$ درجه‌ی دوم نیست. بنابراین $n-۱=۰$. در نتیجه به نامعادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$-۲x-m-۱\leq ۰\Rightarrow x\geq -\frac{m+۱}{۲}$$

بنابراین $-\frac{m+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$، از این رو $m=-۲$.

در نتیجه $m+n=-۱$.

۱۲۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا نامعادله‌ها را به‌صورت‌های زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x-x^۳=x(۱-x)(۱+x)>۰$$

$$x-x^۲=x(۱-x)<۰$$

در نتیجه مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر، با مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی زیر برابر است:

$$x(۱-x)x(۱-x)(۱+x)<۰\Rightarrow x^۲(۱-x)^۲(۱+x)<۰$$

مجموعه‌ی جواب‌های این نامعادله نیز بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ است.

۱۲۵- گزینه‌ی ۴ باید نامعادله‌های $x^۳-۳x^۲\leq ۰$ و $x^۳-۳x^۲\geq -۴$ را حل کنیم و بین مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^۳-۳x^۲\leq ۰\Rightarrow x^۲(x-۳)\leq ۰\Rightarrow x\leq ۳$$

$$x^۳-۳x^۲+۴\geq ۰\Rightarrow (x+۱)(x^۲-۴x+۴)\geq ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x-۲)^۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱$$

بنابراین $-۱\leq x\leq ۳$ مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌های موردنظر است. یعنی $a=-۱$ و $b=۳$ و در نتیجه $b-a=۴$.

۱۲۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$x^۲-۴x-۵=(x-۵)(x+۱)$$

$$x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادله‌ی داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=x(x+۱)^۳(x-۵)^۲(x-۱)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۵		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$	

مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$.

۱۲۷- گزینه‌ی ۱ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$(x^۲-x-۱)^۲-(۲x^۲-۱)^۲\geq ۰$$

به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$(x^۲-x-۱+۲x^۲-۱)(x^۲-x-۱-۲x^۲+۱)\geq ۰$$

$$(۳x^۲-x-۲)(-x^۲-x)\geq ۰$$

$$y=x(۳x+۲)(x-۱)(x+۱)\leq ۰$$

x	$-\infty$		-۱		$\frac{-۲}{۳}$		۰		۱		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به‌صورت $[-۱,\frac{-۲}{۳}]\cup[۰,۱]$ است که اعداد صحیح ۱، ۰ و ۱- را شامل می‌شود.

۱۲۸- گزینه‌ی ۴ نامعادله‌ها را ساده می‌کنیم و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۲-۲x+۶\leq x^۲+x<x^۲-۴$$

اکنون سه طرف نامعادله‌ها را با $-x^۲$ جمع می‌کنیم:

$$-۲x+۶\leq x<-۴$$

جواب نامعادله‌ی $-۲x+۶\leq x$ به‌صورت $x\geq ۲$ و جواب نامعادله‌ی سمت راست به صورت $x<-۴$ است، که اشتراکی ندارند.

۱۲۹- گزینه‌ی ۴ برای حل این مسئله کافی است جواب نامعادله‌ی $y=\frac{x^۲(x^۲-۹)}{x^۲-۵x+۶}\leq ۰$ را پیدا کنیم.

توجه کنید که

$$x^۲-۹=(x-۳)(x+۳),\quad x^۲-۵x+۶=(x-۳)(x-۲)$$

در نتیجه جدول تعیین علامت عبارت سمت چپ این نامعادله به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۳		۰		۲		۳		$+\infty$
y		$+$	۰	$-$	۰	$-$	تن	$+$	تن	$+$	

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر $[-۳,۲)$ است.

۱۳۰- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که دلتای عبارت $x^۲+۲x+\frac{۵}{۲}$ منفی است $(\Delta=-۶)$. در نتیجه $x^۲+۲x+\frac{۵}{۲}>۰$. بنابراین مسئله به حل نامعادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$(۲-x)(x+۳)\geq ۰\Rightarrow -۳\leq x\leq ۲$$

در نتیجه ۶ عدد صحیح $-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲$ در نامعادله‌ی موردنظر صدق می‌کنند.

۱۳۱- گزینه‌ی ۴ ابتدا عبارت طرف چپ نامعادله را ساده‌تر می‌کنیم (توجه کنید که $x\neq ۱$، پس می‌توان $x-۱$ را از صورت و مخرج حذف کرد):

$$\frac{(x-۱)(x+۵)(x-۳)}{x^۲-۱}=\frac{(x+۵)(x-۳)}{x+۱}$$

اکنون این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

	$-\infty$		-۵		-۱		۱		۳		$+\infty$
$\frac{(x+۵)(x-۳)}{x+۱}$		$-$	۰	$+$	تن	$-$	تن	$-$	۰	$+$	

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر به‌صورت $(-\infty,-۵]\cup(-۱,۳]-\{۱\}$ است.

۱۳۲- گزینه‌ی ① توجه کنید که $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$. دلتای عبارت $x^۲-x+۱$ منفی است $(\Delta=-۳)$. در نتیجه همواره $x^۲-x+۱>۰$. بنابراین مسئله به یافتن جواب نامعادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$y=\frac{x+۱}{(x-۳)(x-۲)}\leq ۰$$

جدول تعیین علامت عبارت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۲		۳		$+\infty$
y		−	۰	+	تن	−	تن	+	

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر $(-\infty\,,-۱]\cup(۲,۳)$ است.

۱۳۳- گزینه‌ی ④ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\frac{(x-۴)^۲(۱-x)}{(x+۵)(x-۳)}\geq ۰$$

در نتیجه کافی است جواب نامعادله‌ی زیر را پیدا کنیم:

$$y=\frac{(x-۴)^۲(x-۱)}{(x+۵)(x-۳)}\leq ۰$$

جدول تعیین علامت عبارت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۵		۱		۳		۴		$+\infty$
y		−	تن	+	۰	−	تن	+	۰	+	

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر $(-\infty\,,-۵)\cup[۱\,,۳)$ است.

۱۳۴- گزینه‌ی ③ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۴}=\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x-۳}{x+۲},\quad x\neq ۲$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۲		۳		$+\infty$
y		+	تن	−	تن	−	۰	+	

بنابراین y به‌ازای هر x که در مجموعه‌ی $(-۲,۳)-\{۲\}$ باشد، منفی است.

پس $a=-۲$ ، $b=۳$ و $c=۲$. در نتیجه $\frac{a+b}{c}=\frac{۱}{۲}$.

۱۳۵- گزینه‌ی ② چون عبارت $|x|+۲$ به‌ازای هر مقدار x مثبت است، باید نامعادله‌ی $(۲+x)^۳-۸x^۳<۰$ را حل کنیم:

$$(۲+x^۳)-۸x^۳=(۲+x-۲x)((۲+x)^۲+۲x(۲+x)+(۲x)^۲)<۰$$
$$(۲-x)(۷x^۲+۸x+۴)<۰$$

چون عبارت $۷x^۲+۸x+۴$ برای هر x، مثبت است $(\Delta<۰)$، پس باید نامعادله‌ی $۲-x<۰$ را حل کنیم که نتیجه می‌شود $x>۲$. بنابراین اعداد طبیعی $x=۱$ و $x=۲$ در نامعادله صدق نمی‌کنند.

توجه کنید که نامعادله‌ی $(۲+x)^۳-۸x^۳<۰$ را می‌توان به شکل زیر هم حل کرد:

$$(۲+x)^۳<۸x^۳\Rightarrow ۲+x<۲x\Rightarrow x>۲$$

۱۳۶- گزینه‌ی ① نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x-\frac{۲}{x}-۱\geq ۰\Rightarrow\frac{x^۲-x-۲}{x}\geq ۰$$

به کمک تعیین علامت مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
$\frac{x^۲-x-۲}{x}$		−	۰	+	تن	−	۰	+	

این مجموعه به‌صورت $[-۱\,,+\infty)-[۰\,,۲)$ است.

پس $a=-۱$ و $b=۲$. در نتیجه $a+b=۱$.

۱۳۷- گزینه‌ی ② برای حل این مسئله باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\frac{۳}{x}-x<۲\Rightarrow\frac{۳}{x}-x-۲<۰$$

عبارت طرف چپ این نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{-x^۲-۲x+۳}{x}<۰\Rightarrow\frac{x^۲+۲x-۳}{x}>۰$$

چون $x^۲+۲x-۳=(x-۱)(x+۳)$، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۳		۰		۱		$+\infty$
y		−	۰	+	تن	−	۰	+	

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر $(-۳,۰)\cup(۱,+\infty)$ است.

۱۳۸- گزینه‌ی ① نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۹}{x+۳}+۵-x<۰\Rightarrow\frac{۹+(۵-x)(x+۳)}{x+۳}<۰$$
$$\frac{-x^۲+۲x+۲۴}{x+۳}<۰\Rightarrow\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه‌ی جواب نامعادله به‌صورت $(-۴,-۳)\cup(۶,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-۴		-۳		۶		$+\infty$
y		−	۰	+	تن	−	۰	+	

پس $a=-۴$ و $b=۶$ و در نتیجه $a+b=۲$.

۱۳۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا، جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم. ریشه‌های صورت و مخرج، a، b و ۰ هستند که $a<۰<b$. در نتیجه جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		a		۰		b		$+\infty$
$\frac{(x-b)(a-x)^۲}{-۲x}$		$-$	۰	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی موردنظر $\{a\}\cup(۰\,,b]$ است.

۱۴۰- گزینه‌ی ۲ ریشه‌های صورت و مخرج ۱−، ۱، ۰ و $-a$ هستند. چون ۳− و b جزء مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله نیستند، پس $a=۳$ و $b=۰$. هم‌چنین $c=۱$. در نتیجه $a+b+c=۴$.

(نامعادله به‌صورت $\frac{x^۲-۱}{x(x+۳)}\leq۰$ درمی‌آید که مجموعه‌ی جواب‌های آن $(-۳,-۱]\cup(۰\,,۱]$ است.)

۱۴۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-x-۶=۰$ عددهای ۲− و ۳ و ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۵x+۴=۰$ عددهای ۱ و ۴ هستند. اکنون جدول تعیین علامت را برای دو چندجمله‌ای درجه‌ی دوم تشکیل می‌دهیم:

	$-\infty$		-۲		۱		۳		۴		$+\infty$
$x^۲-x-۶$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x^۲-۵x+۴$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

۱۴۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$x^۲-۸x-۲۰=(x-۱۰)(x+۲)$$

در نتیجه مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^۲-۸x-۲۰<۰$ به‌صورت $(-۲,۱۰)$ است. چون مجموعه‌ی جواب‌های نامعادلات هم‌زمان داده شده به‌صورت $(-۲,-۱)\cup(۱\,,۱۰)$ است، پس مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^۲-(a+۴)x-b>۰$ به‌صورت $(-\infty,-۱)\cup(۱\,,+\infty)$ است. بنابراین $x=۱,-۱$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-(a+۴)x-b=۰$ هستند. در نتیجه

$$\begin{matrix}۱-(a+۴)-b=۰\\۱+(a+۴)-b=۰\end{matrix}\Rightarrow a=-۴,\quad b=۱$$

بنابراین

$$a^۲+b^۲=۱۶+۱=۱۷$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۴ باید دلتای معادله مثبت باشد.

$$\Delta=۴k^۲-۴(\frac{۱}{۴})=۴k^۲-۱>۰$$

$$k^۲>\frac{۱}{۴}\Rightarrow|k|>\frac{۱}{۲}\Rightarrow k>\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ k<-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین k متعلق به بازه‌ی $\mathbb{R}-[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ است.

۱۴۴- گزینه‌ی ۲ برای این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم حداقل دارای یک ریشه‌ی حقیقی باشد، باید دلتای معادله نامنفی باشد. پس

$$\Delta=(۴\sqrt{k})^۲-۴k^۲\geq۰\Rightarrow k^۲-۴k\leq۰$$

با توجه به جدول زیر، k باید در بازه‌ی $[۰\,,۴]$ باشد.

k	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$k^۲-۴k$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس به‌ازای پنج عدد صحیح ۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ معادله حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۴۵- گزینه‌ی ۳ برای این‌که عبارت $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد باید $\Delta<۰$ و $a>۰$. پس در عبارت $y=x^۲-(m+۱)x+۴m^۲$ باید

$$\Delta=(m+۱)^۲-۱۶m^۲<۰$$

$$(m+۱+۴m)(m+۱-۴m)<۰$$

$$(۵m+۱)(-۳m+۱)<۰$$

m	$-\infty$		$-\frac{۱}{۵}$		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
Δ		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

با توجه به جدول بالا m باید عضو $(-\infty\,,-\frac{۱}{۵})\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$ باشد.

۱۴۶- گزینه‌ی ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار x نابرابری $mx^۲-۲mx+۲>-۲$ برقرار باشد. یعنی $mx^۲-۲mx+۴>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^۲-۱۶m<۰\Rightarrow m(m-۴)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۴$.

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m(m-۴)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$ آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ خواهد بود که از ۲− بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\leq m<۴$.

۱۴۷- گزینه‌ی ۲ برای این‌که معادله دارای دو جواب باشد، باید $\Delta>۰$. پس

$$(-m)^۲-۴\times۲(m-۱)(۲-m)>۰$$

$$m^۲-۸(-m^۲+۳m-۲)>۰$$

$$۹m^۲-۲۴m+۱۶>۰$$

$$(۳m-۴)^۲>۰$$

بنابراین کافی است $m\neq\frac{۴}{۳}$، تا معادله دو جواب داشته باشد.

۱۴۸- گزینه‌ی ② نابرابری داده شده به‌صورت زیر است

$$(x+1)(x-3)(x^2-ax+b)\geq 0$$

پس باید ۱− و ۳ ریشه‌های $x^2-ax+b=0$ باشند. زیرا در غیر این‌صورت علامت عبارت $(x+1)(x-3)(x^2-ax+b)$ در $x=-1$ و $x=3$ تغییر می‌کند. بنابراین

$$x=-1\Rightarrow 1+a+b=0$$

$$x=3\Rightarrow 9-3a+b=0$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a-b=9 \end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=2$ و $b=-3$.

توجه کنید که عبارت‌های x^2-2x-3 و x^2-ax+b باید با هم برابر باشند، یعنی واضح است که $a=2$ و $b=-3$ و در نتیجه $\frac{a}{b}=-\frac{2}{3}$.

۱۴۹- گزینه‌ی ④ نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2+mx+m}{x^2-x+1}-2\leq 0\Rightarrow \frac{-x^2+(m+2)x+m-2}{x^2-x+1}\leq 0$$

چون به‌ازای هر x نابرابری $x^2-x+1>0$ برقرار است، پس کافی است نامعادله‌ی $-x^2+(m+2)x+m-2\leq 0$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta=(m+2)^2+4(m-2)\leq 0\Rightarrow m^2+8m-4\leq 0$$

m	$-\infty$		$-4-\sqrt{20}$		$-4+\sqrt{20}$		$+\infty$
m^2+8m-4		+	0	−	0	+	

پس $-4-\sqrt{20}\leq m\leq -4+\sqrt{20}$ و حداکثر مقدار m برابر $-4+\sqrt{20}$ است.

۱۵۰- گزینه‌ی ④ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x^2+ax-5}{x^2-2x+3}-1<0\Rightarrow \frac{(a+2)x-8}{x^2-2x+3}<0$$

چون دلتای x^2-2x+3 منفی است $(\Delta=-8)$، پس کافی است نامعادله‌ی $(a+2)x-8<0$ برای هر x برقرار باشد.

اگر $a+2\neq 0$، مجموعه‌ی جواب‌های این نامعادله به‌صورت $(-\infty, \frac{8}{a+2})$ یا $(\frac{8}{a+2}, +\infty)$ است، در نتیجه نامعادله‌ی داده شده همواره برقرار نیست. بنابراین $a+2=0$، پس $a=-2$.

۱۵۱- گزینه‌ی ② ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^2+(a-1)x+2a-14=0$$

در نتیجه باید دلتای این معادله مثبت باشد و با توجه به این‌که $x_1<2<x_2$، باید مقدار چندجمله‌ای $x^2+(a-1)x+2a-14$ به ازای $x=2$ منفی باشد. بنابراین

$$\Delta=(a-1)^2-4(2a-14)=a^2-10a+57>0 \quad (1)$$

$$2^2+2(a-1)+2a-14=4a-12<0 \quad (2)$$

دقت کنید که دلتای عبارت $a^2-10a+57$ منفی است $(\Delta=-128)$ و ضریب a^2 مثبت است. بنابراین، نابرابری (۱) همواره برقرار است، هم‌چنین نابرابری (۲) برای $a<3$ همواره برقرار است.

۱۵۲- گزینه‌ی ④ معادله باید دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta=4-4(4m)>0\Rightarrow m<\frac{1}{4} \quad (1)$$

هم‌چنین عدد ۱− بین دو ریشه‌ی معادله و عدد ۱ خارج دو ریشه‌ی معادله قرار دارد. در نتیجه چون ضریب x^2 مثبت است، پس

$$4(-1)-2(-1)+m<0\Rightarrow m-2<0\Rightarrow m<2 \quad (2)$$

$$4(1)-2(1)+m>0\Rightarrow m+2>0\Rightarrow m>-2 \quad (3)$$

اشتراک مجموعه‌های جواب این سه نامعادله به شکل $(-2, \frac{1}{4})$ است.

۱۵۳- گزینه‌ی ① طول رأس سهمی $x=-\frac{-2\sqrt{3}}{2m}=\frac{\sqrt{3}}{m}$ است. پس عرض رأس سهمی برابر است با

$$y=m(\frac{\sqrt{3}}{m})^2-2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{m})+m+2$$

$$=\frac{3}{m}-\frac{6}{m}+m+2=m-\frac{3}{m}+2$$

برای این‌که رأس سهمی در ناحیه‌ی سوم باشد، باید طول و عرض آن منفی باشد.

$$x=\frac{\sqrt{3}}{m}<0\Rightarrow m<0 \quad (1)$$

$$y=m-\frac{3}{m}+2<0\xrightarrow{m<0} m^2-3+2m>0$$

$$(m-1)(m+3)>0$$

چون $m<0$ پس $m-1<0$ و در نتیجه باید $m+3<0$. بنابراین

$$m<-3 \quad (2)$$

از اشتراک دو نامعادله‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m<-3$.

۱۵۴- گزینه‌ی ④ مختصات رأس سهمی داده شده به صورت

$$(\frac{4(a+1)}{2\times 4}, -\frac{16(a^2+a+1)}{16})$$

یا به طور ساده‌تر $(\frac{a+1}{2}, -(a^2+a+1))$ است.

می‌دانیم در ربع دوم عرض نقاط مثبت است، اما چون دلتای a^2+a+1 منفی است $(\Delta=-3)$، پس

$$a^2+a+1>0$$

بنابراین $-(a^2+a+1)<0$، در نتیجه رأس سهمی هرگز در ربع دوم قرار نمی‌گیرد.

۱۵۵- گزینه‌ی ۱ چون سهمی بالاترین نقطه دارد، پس

$$m-1<0$$

هم‌چنین، سهم محور xها را قطع نمی‌کند در نتیجه دلتای معادله منفی است:

$$(m-1)x^2+(m-1)x-4=0 \Rightarrow \Delta=(m-1)^2+16(m-1)<0$$

بنابراین به نامعادله‌ی $(m-1)(m+15)<0$ می‌رسیم. می‌دانیم $m-1<0$، در نتیجه $m+15>0$، پس $m>-15$. بنابراین $m\in(-15\,,1)$.

۱۵۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب x^2 و عرض نقطه‌ی تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m-1>0,\quad m+3>0 \quad (1)$$

هم‌چنین معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. در نتیجه $\Delta>0$. بنابراین

$$\Delta=4(m+1)^2-4(m-1)(m+3)=4((m+1)^2-(m-1)(m+3))$$
$$=4(m^2+2m+1-(m^2+2m-3))$$
$$=16>0$$

که عبارت بالا به ازای هر m دلخواه درست است.

از طرفی چون مجموع ضرایب صفر است. بنابراین، ریشه‌های معادله $\frac{m+3}{m-1}$ و ۱ هستند. که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند. بنابراین حدود m بازه‌ی $(1\,,+\infty)$ است.

۱۵۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار سهمی داده شده، ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ برابر $x=1\,,4$ هستند. هم‌چنین $x=0\,,1$ ریشه‌های مخرج هستند. بنابراین جدول تعیین علامت را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
ax^2+bx+c		+		+	0	−	0	+	
$x-x^2$		−	0	+	0	−		−	
$\dfrac{ax^2+bx+c}{x-x^2}$		−	تن	+	تن	+	0	−	

بنابراین جواب نامعادله‌ی موردنظر به‌صورت $(0\,,4)-\{1\}$ است.

۱۵۸- گزینه‌ی ۴ باتوجه‌به‌شکل، چون‌سهمی $y=bx^2-2x+b$ در دو نقطه محور طول‌ها را قطع کرده است، پس

$$\Delta=4-4b^2>0 \Rightarrow b^2-1<0 \Rightarrow |b|<1$$
$$\Rightarrow -1<b<1 \xrightarrow{b<0} -1<b<0$$

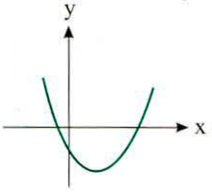
در مورد سهمی $y=(b+1)x^2-2x+(b-1)$ می‌توان نوشت

$$\Delta=4-4(b-1)(b+1)=4-4(b^2-1)=4-4b^2+4$$

با توجه به این‌که $4-4b^2>0$ پس $4-4b^2+4>4>0$ درنتیجه $\Delta>0$.

بنابراین این سهمی هم باید محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند. ضریب x^2 عدد $b+1$ است که چون مثبت است، سهمی پایین‌ترین نقطه دارد.

طول رأس سهمی $x=\frac{2}{2(b+1)}=\frac{1}{b+1}$ است که چون $b+1>0$، پس طول رأس سهمی مثبت است و چون $b-1<0$، پس عرض نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور عرض‌ها منفی است و نمودار آن به شکل زیر است:



۱۵۹- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار، عبارت x^2+ax-b هیچ‌گاه منفی نیست و چون $P=-x^2(x^2+ax-b)$، بنابراین جدول تعیین علامت P به شکل زیر است:

x	$-\infty$		0		x_1		$+\infty$
y		+		+	0	+	
$-x^2$		−	0	−		−	
P		−	0	−	0	−	

۱۶۰- گزینه‌ی ۴ از $-2<x<0$ نتیجه می‌شود

$$-4<2x<0 \Rightarrow 0<2x+4<4 \Rightarrow |2x+4|=2x+4$$
$$0<-3x<6 \Rightarrow -6<-3x-6<0 \Rightarrow |-3x-6|=3x+6$$

بنابراین

$$y=2x+4+3x+6-5x=10$$

۱۶۱- گزینه‌ی ۳ اگر $x>2$، آن‌گاه $x-2>0$ و $x-1>0$. در نتیجه

$$y=\frac{x-1}{x-1}+\frac{x-2}{x-2}=1+1=2$$

اگر $1<x<2$، آن‌گاه $x-2<0$ و $x-1>0$. در نتیجه

$$y=\frac{x-1}{x-1}+\frac{x-2}{-(x-2)}=1-1=0$$

اگر $x<1$، آن‌گاه $x-2<0$ و $x-1<0$. در نتیجه

$$y=\frac{-(x-1)}{x-1}+\frac{x-2}{-(x-2)}=-1-1=-2$$

بنابراین y سه مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد.

۱۶۲- گزینه‌ی ۱ عبارت a^2+2a+3 همواره مثبت است، زیرا $\Delta=4-12=-8$.

عبارت $-a^2+2a-3$ همواره منفی است، زیرا $\Delta=4-12=-8$.

بنابراین

$$y=\frac{a^2+2a+3-(-a^2+2a-3)}{2}=\frac{2a^2+6}{2}=a^2+3$$

۱۶۳- گزینه‌ی ④ چون $۰<x<۲$، عبارت $x+\frac{۴}{x}$ مثبت است، پس $|x+\frac{۴}{x}|=x+\frac{۴}{x}$.

از طرف دیگر،

$$|x-\frac{۴}{x}|=|\frac{x^۲-۴}{x}|=|\frac{(x-۲)(x+۲)}{x}|$$

چون $۰<x<۲$، پس $x-۲<۰$ و $x+۲>۰$ و در نتیجه

$$|x-\frac{۴}{x}|=-(x-\frac{۴}{x})$$

بنابراین

$$y=x+\frac{۴}{x}-(x-\frac{۴}{x})=x+\frac{۴}{x}-x+\frac{۴}{x}=\frac{۸}{x}$$

۱۶۴- گزینه‌ی ④ می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$. بنابراین

$$A=\frac{|x|-۱}{|x|^۲-۱}-\frac{|x|^۲-|x|}{|x|^۲-۲|x|+۱}$$

$$=\frac{|x|-۱}{(|x|-۱)(|x|+۱)}-\frac{|x|(|x|-۱)}{(|x|-۱)^۲}$$

$$=\frac{۱}{|x|+۱}-\frac{|x|}{|x|-۱}=\frac{|x|-۱-|x|(|x|+۱)}{(|x|+۱)(|x|-۱)}$$

$$=\frac{|x|-۱-|x|^۲-|x|}{|x|^۲-۱}=\frac{-۱-x^۲}{x^۲-۱}=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$$

۱۶۵- گزینه‌ی ④ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$|x-۲|=۳\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۳\\x-۲=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۱\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

۱۶۶- گزینه‌ی ② می‌دانیم اگر $a\geq۰$، آن‌گاه جواب‌های معادله‌ی $|x|=a$ برابرند با $x=\pm a$.

بنابراین

$$||x-۴|-۱|=۳\Rightarrow\begin{cases}|x-۴|-۱=۳\Rightarrow|x-۴|=۴\\|x-۴|-۱=-۳\Rightarrow|x-۴|=-۲\end{cases}$$

معادله‌ی $|x-۴|=-۲$ جواب ندارد. پس

$$|x-۴|=۴\Rightarrow\begin{cases}x-۴=۴\\x-۴=-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۸\\x=۰\end{cases}$$

۱۶۷- گزینه‌ی ① از تساوی $||x|-k|=۳$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}|x|-k=۳\\|x|-k=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|=k+۳\\|x|=k-۳\end{cases}$$

برای این‌که معادله ۴ جواب داشته باشد باید هر یک از معادلات بالا دو جواب داشته باشد. یعنی $k+۳>۰$ و $k-۳>۰$. پس

$$k+۳>۰\Rightarrow k>-۳$$

$$k-۳>۰\Rightarrow k>۳$$

بنابراین کافی است $k>۳$.

۱۶۸- گزینه‌ی ① یک شرط این‌که معادله سه جواب داشته باشد این است که $k\geq۰$.

در این صورت معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}|x|-۲=k\\|x|-۲=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|=۲+k\\|x|=۲-k\end{cases}$$

چون $۲+k>۰$، پس معادله‌ی $|x|=۲+k$ دو جواب دارد:

$$x=۲+k,\quad x=-۲-k$$

پس معادله‌ی $|x|=۲-k$ باید یک جواب داشته باشد که فقط در حالت $۲-k=۰$ معادله دارای یک جواب $x=۰$ خواهد بود.

پس فقط به‌ازای $k=۲$ معادله‌ی $||x|-۲|=k$ سه جواب متمایز دارد.

۱۶۹- گزینه‌ی ③ برای این‌که معادله چهار جواب داشته باشد باید اولاً $۳k-۱>۰$ و در نتیجه $k>\frac{۱}{۳}$.

در این حالت معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}|x|-۲k=۳k-۱\\|x|-۲k=-۳k+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|=۵k-۱\\|x|=-k+۱\end{cases}$$

ثانیاً باید هر یک از معادلات فوق دو جواب داشته باشد.

بنابراین باید $۵k-۱>۰$ و $-k+۱>۰$. یعنی

$$\begin{cases}۵k-۱>۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۵}\\-k+۱>۰\Rightarrow k<۱\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{۵}<k<۱$$

چون $k>\frac{۱}{۳}$، بنابراین باید $\frac{۱}{۳}<k<۱$ تا معادله چهار جواب داشته باشد.

۱۷۰- گزینه‌ی ③ می‌دانیم از $|x|=|b|$ نتیجه می‌شود $x=\pm b$. بنابراین

$$|۲x-۱|=|x-۳|\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱=x-۳\\۲x-۱=-x+۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۲\\x=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

۱۷۱- گزینه‌ی ② توجه کنید که

$$x^۲-x-۱۲=(x+۳)(x-۴)$$

در نتیجه

$$|x^۲-x-۱۲|=|(x+۳)(x-۴)|=|x-۴||x+۳|$$

همچنین $|۲x+۶|=۲|x+۳|$. بنابراین مسئله به حل معادله‌ی زیر منجر می‌شود:

$$|x+۳||x-۴|=۲|x+۳|\Rightarrow|x+۳|(|x-۴|-۲)=۰$$

بنابراین باید معادله‌های زیر را حل کنیم:

$$|x+۳|=۰\Rightarrow x=-۳$$

$$|x-۴|=۲\Rightarrow x=۶,۲$$

در نتیجه، مجموع جواب‌ها برابر با ۵ است.

۱۷۲- گزینه‌ی ۲ این دو عدد را x و $\frac{1}{x}$ در نظر می‌گیریم.

بنابراین

$$|x-\frac{1}{x}|=\frac{3}{2}$$

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$$

اگر $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$، آن‌گاه $2x^2-3x-2=0$ و در نتیجه $x=2$ یا $x=-\frac{1}{2}$.

اگر $x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$، آن‌گاه $2x^2+3x-2=0$ و در نتیجه $x=-2$ یا $x=\frac{1}{2}$.

چون x عددی منفی است، پس $x=-2$ و $x=\frac{-1}{2}$ قابل قبول هستند، که در هر صورت مجموع x و $\frac{1}{x}$ برابر $-\frac{5}{2}$ می‌شود.

۱۷۳- گزینه‌ی ۲ اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $|x|=x$ و باید معادله‌ی $x^2=3x-2$ را حل کنیم:

$$x^2-3x+2=0\Rightarrow (x-2)(x-1)=0\Rightarrow x=2, \quad x=1$$

اگر $x\le 0$، آن‌گاه $|x|=-x$ و باید معادله‌ی $-x^2=3x-2$ را حل کنیم:

$$x^2+3x-2=0\Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \quad x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

چون $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ عددی مثبت است، پس قابل قبول نیست.

بنابراین معادله ۳ جواب دارد.

۱۷۴- گزینه‌ی ۲ فرض کنید $x+2=y$. در این صورت به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$(y-2)|y|=24$$

اکنون مسئله را در دو حالت حل می‌کنیم:

$$(1)\, y\ge 0\Rightarrow y^2-2y=24\Rightarrow (y-1)^2=25\Rightarrow y=6,-4$$

$$(2)\, y\le 0\Rightarrow -y^2+2y=24\Rightarrow y^2-2y=-24\Rightarrow (y-1)^2=-23$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $y=6$ یا $x=4$ است.

۱۷۵- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم اگر $|A|=-A$، آن‌گاه $A\le 0$. بنابراین

$$2x^2-9x\le 0\Rightarrow x(2x-9)\le 0\Rightarrow 0\le x\le \frac{9}{2}$$

بنابراین $x=0$، $x=1$، $x=2$، $x=3$ و $x=4$ جواب‌های صحیح معادله هستند که تعداد آن‌ها ۵تاست.

۱۷۶- گزینه‌ی ۴ اگر $x\ge 2$، آن‌گاه $x-2\ge 0$ و $|x-2|=x-2$. پس باید معادله‌ی $x^2=x-(x-2)$ را حل کنیم:

$$x^2=x-x+2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

چون $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ کوچک‌تر از ۲ هستند، پس قابل قبول نیستند.

اگر $x\le 2$، آن‌گاه $x-2\le 0$ و $|x-2|=-(x-2)$. پس باید معادله‌ی $x^2=x+x-2$ را حل کنیم:

$$x^2-2x+2=0, \quad \Delta=4-8=-4$$

چون $\Delta<0$ پس این معادله جواب ندارد.

بنابراین معادله‌ی $x^2=x-|x-2|$ جواب ندارد.

۱۷۷- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم $x-2=y$.

بنابراین $x=2+y$، در نتیجه به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$(2+y)^2-8=|y|\Rightarrow y^2+4y-4=|y|$$

اکنون مسئله را در دو حالت حل می‌کنیم:

$$(1)\ \ y\ge 0\Rightarrow y^2+3y-4=0\Rightarrow y=-4,1$$

$$(2)\ \ y\le 0\Rightarrow y^2+5y-4=0\Rightarrow y=\frac{-5-\sqrt{41}}{2},\frac{-5+\sqrt{41}}{2}$$

بنابراین تنها جواب‌های قابل قبول برای ما عبارت‌اند از

$$y=1\Rightarrow x=3$$

$$y=\frac{-5-\sqrt{41}}{2}\Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$$

که مجموع آن‌ها برابر است با $3+\frac{-1-\sqrt{41}}{2}=\frac{5-\sqrt{41}}{2}$.

۱۷۸- گزینه‌ی ۳ اگر $x<0$، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و سمت چپ آن نامنفی است.

اگر $x\ge 0$، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2-3=2x \\ x^2-3=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1, \quad x=3 \\ x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1, \quad x=-3 \end{cases}$$

جواب‌های $x=-1$ و $x=-3$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x\ge 0$ معادله را حل کرده‌ایم. پس معادله دو جواب $x=1$ و $x=3$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.

۱۷۹- گزینه‌ی ۲

اگر $x\ge 2$، آن‌گاه $x-2\ge 0$ و معادله به شکل زیر حل می‌شود:

$$x+x-2=x+1\Rightarrow x=3$$

اگر $0\le x\le 2$، آن‌گاه $x-2\le 0$ و معادله به شکل زیر حل می‌شود:

$$x-(x-2)=x+1\Rightarrow x=1$$

اگر $x\le 0$، آن‌گاه $x-2<0$ و معادله به شکل زیر حل می‌شود:

$$-x-(x-2)=x+1\Rightarrow x=\frac{1}{3}\ \text{غ‌ق‌ق}$$

بنابراین معادله دو جواب دارد.

۱۸۰- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که سمت چپ معادله عبارتی مثبت است، پس سمت راست معادله هم باید مثبت باشد. پس $x>۰$ و در نتیجه $x+۱>۰$، $x+۲>۰$ و $x+۳>۰$، پس معادله به شکل $x+۱+x+۲+x+۳=۶x$ در می‌آید که از این معادله به‌دست می‌آید $x=۲$.

۱۸۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر در می‌آوریم:

$$-۱<\sqrt{n}-۷<۱\Rightarrow ۶<\sqrt{n}<۸$$

بنابراین می‌توان گفت

$$۳۶<n<۶۴$$

(دو طرف نامعادله‌ها را به توان ۲ رساندیم).

بنابراین ۲۷ مقدار n در نابرابری موردنظر صدق می‌کنند.

۱۸۲- گزینه‌ی ۴ ابتدا باید جواب نامعادله‌های $|x-۳|\ge ۲$ و $|۲x+۱|\le ۵$ را بیابیم.

مجموعه‌ی جواب‌های اولی برابر با $A=[۵,+\infty)\cup(-\infty,۱]$ و مجموعه‌ی جواب‌های دومی $B=[-۳,۲]$ است. بنابراین

$$A\cap B=[-۳,۱]$$

۱۸۳- گزینه‌ی ۲ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\big||x|-۳\big|<۵\Rightarrow -۵<|x|-۳<۵\Rightarrow -۲<|x|<۸$$

چون $-۲<|x|$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است، پس کافی است $|x|<۸$ را حل کنیم:

$$|x|<۸\Rightarrow -۸<x<۸$$

بنابراین اعداد صحیح $\{۰,\pm۱,\pm۲,\dots,\pm۷\}$ در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تاست.

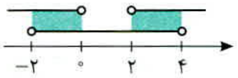
۱۸۴- گزینه‌ی ۱ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\big||x-۱|-۲\big|<۱\Rightarrow -۱<|x-۱|-۲<۱$$
$$\Rightarrow ۱<|x-۱|<۳$$

از نامعادله‌ی $|x-۱|<۳$ به‌دست می‌آید $-۳<x-۱<۳$ و در نتیجه $-۲<x<۴$.

از نامعادله‌ی $|x-۱|>۱$ به‌دست می‌آید $x-۱>۱$ یا $x-۱<-۱$ و در نتیجه $x>۲$ یا $x<۰$.

اشتراک این مجموعه‌ها، مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله است که به‌صورت زیر است:



$$x\in(-۲,۰)\cup(۲,۴)$$

بنابراین اعداد صحیح -۱ و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند که مجموع آن‌ها ۲ است.

۱۸۵- گزینه‌ی ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-۳>۱ \text{ یا } |x|-۳<-۱$$
$$|x|>۴ \text{ یا } |x|<۲$$

از نامعادله‌ی $|x|<۲$ نتیجه می‌شود $-۲<x<۲$.

از نامعادله‌ی $|x|>۴$ نتیجه می‌شود $x>۴$ یا $x<-۴$.

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به صورت زیر است

$$(-\infty,-۴)\cup(-۲,۲)\cup(۴,+\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ±۴، ±۳ و ±۲ نمی‌شود. تعداد این اعداد ۶ تاست.

۱۸۶- گزینه‌ی ۲ فرض کنید $|x|=y\ge ۰$. در این صورت به نابرابری $\frac{y^۲-۴}{y-۱}<۰$ می‌رسیم، طبق جدول زیر، مجموعه‌ی جواب‌های این نامعادله برابر با $(-\infty,-۲)\cup(۱,۲)$ است.

y	$-\infty$		-۲		۱		۲		$+\infty$
$\frac{y^۲-۴}{y-۱}$		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

که چون $y\ge ۰$ تنها جواب‌های $۱<y<۲$ قابل قبول است. بنابراین باید جواب نامعادله‌ی $۱<|x|<۲$ را پیدا کنیم که به‌صورت زیر است:

$$(-۲,-۱)\cup(۱,۲)$$

۱۸۷- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که دلتای عبارت $۲x^۲+x+۷$ منفی است $(\Delta=-۵۵)$. در نتیجه $۲x^۲+x+۷>۰$.

بنابراین مسئله به یافتن جواب نامعادله‌ی $|۳x-۵|-۲\le ۰$ تبدیل می‌شود:

$$|۳x-۵|\le ۲\Rightarrow -۲\le ۳x-۵\le ۲$$

در نتیجه $x\in[۱,\frac{۷}{۳}]$.

۱۸۸- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول** نابرابری $|x|\le|y|$ با نابرابری $(x-y)(x+y)\le ۰$ معادل است. زیرا

$$|x|\le|y|\Rightarrow x^۲\le y^۲\Rightarrow x^۲-y^۲\le ۰\Rightarrow (x-y)(x+y)\le ۰$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a-۵+a+۵)(a-۵-a-۵)\le ۰$$

نابرابری بالا به‌صورت $-۱۰(۲a)\le ۰$ یا $۲a\ge ۰$ در می‌آید که مجموعه‌ی جواب‌های آن $[۰,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادله‌ی زیر برسیم:

$$a^۲-۱۰a+۲۵\le a^۲+۱۰a+۲۵\Rightarrow ۲۰a\ge ۰$$

پس مجموعه‌ی جواب‌های آن $[۰,+\infty)$ است.

۱۸۹- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول** برای حل این نامعادله دو طرف را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادله‌ی زیر برسیم:

$$(x-۱)^۲\geq(۲x-۱)^۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱\geq ۴x^۲-۴x+۱$$

در نتیجه مسئله به حل کردن نامعادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$۳x^۲-۲x\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq\frac{۲}{۳}$$

راه‌حل دوم از نامعادله‌ی $|a|\geq|b|$ نتیجه می‌شود

$$a^۲\geq b^۲\Rightarrow a^۲-b^۲\geq ۰\Rightarrow(a-b)(a+b)\geq ۰$$

در نتیجه جواب نامعادله‌ی موردنظر معادل است با

$$(x-۱+۲x-۱)(x-۱-۲x+۱)\geq ۰\Rightarrow -x(۳x-۲)\geq ۰$$

مجموعه‌ی جواب‌های این نامعادله $[۰\,,\frac{۲}{۳}]$ است.

بنابراین $a=۰$, $b=\frac{۲}{۳}$. در نتیجه $b-a=\frac{۲}{۳}$.

۱۹۰- گزینه‌ی ۲ نامعادله را به‌صورت $\frac{|x-۱۰|}{|x-۲|}>۲$ می‌نویسیم. با شرط $x\neq ۲$ طرفین نامعادله را در عبارت مثبت $|x-۲|$ ضرب می کنیم:

$$|x-۱۰|>۲|x-۲|$$

چون طرفین نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم طرفین را به توان دو برسانیم:

$$x^۲-۲۰x+۱۰۰>۴x^۲-۱۶x+۱۶$$

$$۳x^۲+۴x-۸۴<۰$$

$$\frac{-۲-۱۶}{۳}<x<\frac{-۲+۱۶}{۳}\Rightarrow -۶<x<\frac{۱۴}{۳}$$

بنابراین اعداد صحیح ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۳ و ۴ در نامعادله صدق می کنند.

۱۹۱- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم اگر $-۱\leq a\leq ۱$، آن‌گاه $|a|\leq ۱$.

بنابراین نامعادله را به‌صورت $|\frac{x-۳}{۲-x}|\leq ۱$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-۳|}{|۲-x|}\leq ۱\Rightarrow|x-۳|\leq|۲-x|,\quad x\neq ۲$$

$$|x-۳|^۲\leq|۲-x|^۲\Rightarrow x^۲-۶x+۹\leq ۴-۴x+x^۲\Rightarrow x\geq\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله است و

درنتیجه $a=۵$، $b=۲$. پس $a+b=۷$.

۱۹۲- گزینه‌ی ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-۴)(x-۲)|<|(x-۲)(x-۳)|$$

$$|x-۲||x-۴|<|x-۲||x-۳|$$

با فرض $x\neq ۲$ می‌توانیم بنویسیم

$$|x-۴|<|x-۳|$$

چون طرفین نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^۲-۸x+۱۶<x^۲-۶x+۹$$

$$۲x>۷\Rightarrow x>\frac{۷}{۲}$$

۱۹۳- گزینه‌ی ۲ فرض کنید $|x|=y$. در نتیجه به نامعادله‌ی $y^۲+y-۲<۰$ می‌رسیم، که جواب آن $-۲<y<۱$ است. پس $-۲<|x|<۱$. واضح است که نامعادله‌ی $-۲<|x|$ همواره برقرار است. پس باید جواب نامعادله‌ی $|x|<۱$ را بیابیم که برابر $(-۱\,,۱)$ است.

۱۹۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $x^۲-x$ دو حالت زیر به وجود می‌آید.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x^۲-x$		+	۰	−	۰	+	

حالت اول اگر $x>۱$ یا $x<۰$، نامعادله به‌صورت $x^۲-x+x^۲\leq ۱$ درمی‌آید. پس

$$۲x^۲-x-۱\leq ۰\Rightarrow(۲x+۱)(x-۱)\leq ۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq x\leq ۱$$

بنابراین در این حالت $\frac{-۱}{۲}\leq x<۰$ جواب است.

حالت دوم اگر $۰\leq x\leq ۱$ نامعادله به‌صورت $-x^۲+x+x^۲\leq ۱$ درمی‌آید. پس $x\leq ۱$. پس در این حالت $۰\leq x\leq ۱$ جواب است. اجتماع دو بازه‌ی به‌دست آمده مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله است که بازه‌ی $[\frac{-۱}{۲},۱]$ است. پس $a=\frac{-۱}{۲}$ و $b=۱$.

در نتیجه $a+b=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۵- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول** اگر $۱-\frac{x}{۲}<۰$ نامعادله جواب ندارد. پس $x>۲$ جواب نامعادله نیست. اگر $x\leq ۲$ نامعادله را به‌صورت $-۱+\frac{x}{۲}\leq x+۱\leq ۱-\frac{x}{۲}$ بازنویسی می‌کنیم و باید نامعادله‌های $x+۱\leq ۱-\frac{x}{۲}$ و $-۱+\frac{x}{۲}\leq x+۱$ را حل کرده و اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases} x+۱\leq ۱-\frac{x}{۲}\Rightarrow\frac{۳x}{۲}\leq ۰\Rightarrow x\leq ۰ \\ -۱+\frac{x}{۲}\leq x+۱\Rightarrow\frac{x}{۲}\geq -۲\Rightarrow x\geq -۴\end{cases}\Rightarrow -۴\leq x\leq ۰$$

راه‌حل دوم با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $x+۱$ دو حالت زیر به وجود می‌آید

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
$x+۱$		−	۰	+	

اگر $x\geq -۱$، آن‌گاه نامعادله به شکل $x+۱\leq ۱-\frac{x}{۲}$ درمی‌آید. پس $x\leq ۰$ و در نتیجه $-۱\leq x\leq ۰$ جواب است.

اگر $x\leq -۱$، آن‌گاه نامعادله به شکل $-x-۱\leq ۱-\frac{x}{۲}$ درمی‌آید. پس $x\geq -۴$ و در نتیجه $-۴\leq x\leq -۱$ جواب است.

بنابراین $[-۴,۰]$ مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله است که شامل ۵ عدد صحیح است.

۱۹۶- گزینه‌ی ۲ اگر $x \ge ۱$، آن‌گاه $x-۱ \ge ۰$ و نامعادله به شکل $(x-۱)x<x(x-۱)$ در می‌آید که جواب ندارد.

اگر $۰<x<۱$، آن‌گاه $x-۱<۰$ و نامعادله به شکل $(x-۱)x<-x(x-۱)$ درمی‌آید. یعنی $۲x(x-۱)<۰$ که هر عدد واقع در $(۰, ۱)$ جواب آن است.

اگر $x \le ۰$، آن‌گاه $x-۱<۰$ و نامعادله به شکل $-(x-۱)x<-x(x-۱)$ در می‌آید که جواب ندارد.

پس مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله بازه‌ی $(۰, ۱)$ است.

۱۹۷- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $x^۲=|x|^۲$ بنابراین نامعادله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$|x|^۲-۵|x|+۴ \le ۰$$

اگر فرض کنیم $t=|x|$، نامعادله به‌صورت $t^۲-۵t+۴ \le ۰$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، $۱ \le t \le ۴$ جواب نامعادله است. یعنی $۱ \le |x| \le ۴$.

t	$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
$t^۲-۵t+۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۱۹۸- گزینه‌ی ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^۲-۲x+۱<۲+|x-۱|$$

بنابراین

$$(x-۱)^۲<۲+|x-۱| \Rightarrow |x-۱|^۲<۲+|x-۱|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-۱|$، آن‌گاه

$$t^۲-t-۲<۰ \Rightarrow (t+۱)(t-۲)<۰$$

چون $t \ge ۰$، بنابراین $t+۱ \ge ۱$ و در نتیجه باید نامعادله‌ی $t-۲<۰$ را حل کنیم که $t<۲$ جواب است. پس $|x-۱|<۲$ و در نتیجه

$$-۲<x-۱<۲ \Rightarrow -۱<x<۳$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله قرار دارند.

فصل پنجم

تابع

فصل پنجم: تابع

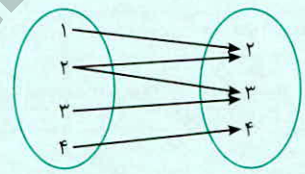
درس‌های اول و دوم: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن – دامنه و برد توابع

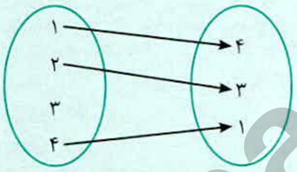
تعریف هر رابطه بین دو مجموعه را می‌توان با نمودار پیکانی نشان داد. هر تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت داده می‌شود.

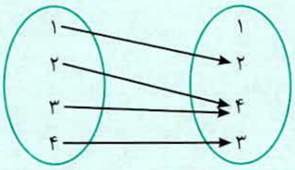
مشخصه‌های هر تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B

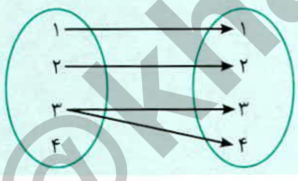
- به هر عضو از A باید عضوی از B نسبت داده شود.
- به هیچ عضوی از A نباید دو عضو (متمایز) از B نسبت داده شده باشد.
- ممکن است عضوی از B وجود داشته باشد که به هیچ عضوی از A نسبت داده نشده است.
- ممکن است به دو یا تعداد بیش‌تری از عضوهای A یک عضو از B نسبت داده شده باشد.

تست ۱ کدام رابطه تابع است؟

(۱


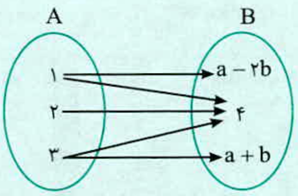
(۲


(۳


(۴


پاسخ: در گزینه‌ی (۳)، از هر عضو مجموعه‌ی اول دقیقاً یک پیکان خارج شده است و این رابطه تابع است.

تست ۲ نمودار مقابل نمایش یک تابع است. مقدار a کدام است؟



۱ (۱
۲ (۲
۳ (۳
۴ (۴

پاسخ: از عدد ۱ در مجموعه‌ی A دو پیکان خارج شده است. پس باید $a-۲b$ و ۴ یکسان باشند. همچنین از عدد ۳ در مجموعه‌ی A دو پیکان خارج شده است، پس باید $a+b$ و ۴ یکسان باشند. یعنی

$$\begin{cases} a-۲b=۴ \\ a+b=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۰ \\ a=۴ \end{cases}$$

نمایش زوج مرتبی تابع

هر رابطه بین مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B را می‌توانیم با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهیم. به این ترتیب، اگر به عضو a از A عضو b از B را نسبت داده باشیم، زوج مرتب (a,b) را در این مجموعه قرار می‌دهیم.

این نوع نمایش را **نمایش زوج مرتبی** این رابطه می‌نامند.

نکته در نمایش زوج مرتبی تابع، هیچ دو زوج مرتب متمایزی وجود ندارد که مؤلفه‌ی اولشان برابر باشد و مؤلفه‌های دومشان برابر نباشد.

تست ۳ در کدام رابطه، اگر $m=-۲$ باشد، y تابعی از x خواهد بود؟

۱)

x	۱	$-۲m$	$m^۲$
y	۲	۳	m

۲)

x	m	$m+۱$	$-m-۳$
y	۳	$۲m$	m

۳)

x	۱	$۲m$	$-m^۲$
y	$۲m$	m	m

۴)

x	-۲	m	۱
y	m	$-m$	۳

پاسخ: جدول گزینه‌ی (۳) به ازای $m=-۲$ به صورت زیر در می‌آید که واضح است در رابطه‌ای که توسط این جدول توصیف می‌شود، y تابعی از x است.

x	۱	-۴
y	-۴	-۲

تست ۴ رابطه‌ی $\{(۱,a+b),(۲,۵),(۱,-۵),(۲,۲a-۳b),(۵,a)\}$ تابع است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

پاسخ: زوج‌های مرتب $(۱,a+b)$ و $(۱,-۵)$ دارای مؤلفه‌ی اول یکسان هستند، پس باید دارای مولفه‌ی دوم یکسان هم باشند. یعنی $a+b=-۵$.

زوج‌های مرتب $(۲,۵)$ و $(۲,۲a-۳b)$ دارای مولفه‌ی اول یکسان هستند، پس باید دارای مولفه‌ی دوم یکسان هم باشند. یعنی $۲a-۳b=۵$.

از حل دستگاه معادلات زیر مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a+b=-۵ \\ ۲a-۳b=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=-۳ \end{cases}$$

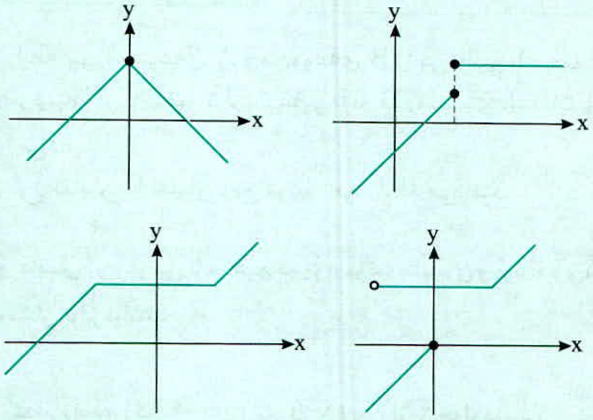
بنابراین $a-b=۱$.

نمودار مختصاتی تابع

هر زوج مرتب از عددها را می‌توان مختصات نقطه‌ای در صفحه‌ی مختصات در نظر گرفت و هر نقطه در صفحه را هم می‌توان با یک زوج مرتب نشان داد، به طوری که در هر دو مورد، مؤلفه‌ی اول طول این نقطه و مؤلفه‌ی دوم عرض این نقطه است. اگر نمایش زوج مرتبی رابطه‌ای را داشته باشیم، می‌توانیم **نمودار مختصاتی** آن را رسم کنیم.

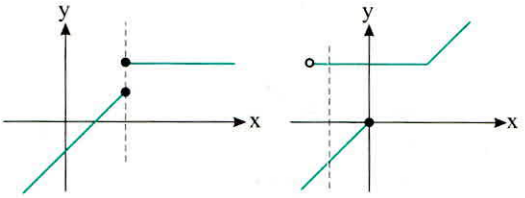
نکته یک رابطه وقتی تابع است که در نمودار مختصاتی آن، هر خطی موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تست ۵ چند تا از رابطه‌های زیر تابع‌هایی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ هستند؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: در هر یک از دو رابطه‌ی روبه‌رو، خطی موازی محور y وجـود دارد که نمودار رابطه را در بیـش از دو نقطه قطع کرده اسـت. در نتیجه، این رابطه‌ها تابع نیسـتند. دو رابطه‌ی دیگر تابع هستند.



دامنه و برد تابع

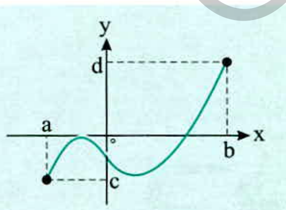
مجموعه همه‌ی مولفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی تابع را **دامنه‌ی** تابع و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم این زوج‌های مرتب را **برد** تابع می‌نامند.

تست ۶ اگر عدد ۳ در دامنه‌ی تابع $f=\{(۴,m-۱),(m+۱,۲m),(۵,۳m)\}$ باشـد، کدام عدد در برد تابع قرار ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: دامنه‌ی تابع $\{۴,۵,m+۱\}$ است، پس $m+۱=۳$ و در نتیجه $m=۲$. بنابراین برد تابع $\{۱,۴,۶\}$ است و ۲ در آن قرار ندارد.

تست ۷ نمودار تابع f در شـکل روبه‌رو رسـم شده اسـت. اگر دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[-۳,۸]$ و برد تابع بازه‌ی $[-۴,۵]$ باشد، مقدار $b+c$ چقدر است؟



۱) -۷ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۱۳

پاسخ: از روی شکل معلوم است دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[a,b]$ است، پس $b=۸$. همچنین، برد تابع f بازه‌ی $[c,d]$ است، پس $c=-۴$. بنابراین $b+c=۴$.

مقدار تابع

اگر زوج مرتب (a,b) در نمایش زوج مرتبی تابع f آمده باشـد، می‌نویسیم $f(a)=b$ (بخوانید اِ فِ a مساوی b است) و می‌گوییم مقدار تابع f در نقطه‌ی a برابر با b است.

تست ۸ در تابع $f=\{(۱,m+۱),(۲,m-۵n),(۳,۳n),(۵,m-۲)\}$ اگر $f(۲)=۳f(۱)=۶$، مقدار $f(۳)-f(۵)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ: از $۳f(۱)=۶$ نتیجه می‌شود $f(۱)=۲$، پس $m+۱=۲$ در نتیجه $m=۱$. از $f(۲)=۶$ نتیجه می‌شود $m-۵n=۶$، پس $۱-۵n=۶$ در نتیجه $n=-۱$. بنابراین $f(۳)=۳n=-۳$ و $f(۵)=m-۲=-۱$ و در نتیجه $f(۳)-f(۵)=-۲$.

تست ۹ اگر $f(۳x+۱)=۲x+۵$، مقدار $f(۴)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: برای این‌که از تساوی $f(۳x+۱)=۲x+۵$ مقدار $f(۴)$ را حساب کنیم، ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $۳x+۱=۴$. اگر این معادله را حل کنیم به‌دست می‌آید $x=۱$. بنابراین

$$f(۳\times۱+۱)=۲\times۱+۵\Rightarrow f(۴)=۷$$

تست ۱۰ اگر $f(ax-b)=ax+b$، مقدار $f(۰)$ کدام است؟ $(a\neq۰)$

۱) a ۲) b ۳) ۲a ۴) ۲b

پاسخ: ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $ax-b=۰$. به این ترتیب $x=\frac{b}{a}$. اکنون در تساوی $f(ax-b)=ax+b$ به جای x قرار می‌دهیم $\frac{b}{a}$:

$$f(a(\frac{b}{a})-b)=a(\frac{b}{a})+b=b+b=۲b$$

پس $f(۰)=۲b$.

تست ۱۱ اگر $f(x)=۲x+۱-f(x+۱)$ و $f(۴)=۲$، مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: از تساوی $f(x)=۲x+۱-f(x+۱)$ نتیجه می‌شود (چون $f(۴)=۲$)

$$f(۳)=۲\times۳+۱-f(۴)=۶+۱-۲=۵$$

همین‌طور،

$$f(۲)=۲\times۲+۱-f(۳)=۴+۱-۵=۰$$

تست ۱۲ اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ و $f(m+۱)-f(m-۱)=\frac{۲}{۹}$، مقدار m چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: توجه کنید که

$$f(m+۱)=\frac{۲(m+۱)-۱}{m+۱+۳}=\frac{۲m+۱}{m+۴}$$

$$f(m-۱)=\frac{۲(m-۱)-۱}{m-۱+۳}=\frac{۲m-۳}{m+۲}$$

در نتیجه باید مقدار m را طوری بیابیم که $\frac{۲m+۱}{m+۴}-\frac{۲m-۳}{m+۲}=\frac{۲}{۹}$. بنابراین

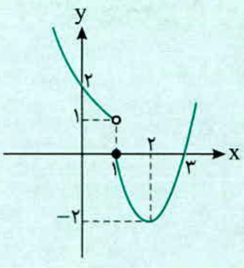
$$\frac{(۲m+۱)(m+۲)-(m+۴)(۲m-۳)}{(m+۴)(m+۲)}=\frac{۱۴}{m^۲+۶m+۸}=\frac{۲}{۹}$$

در نتیجه

$$m^۲+۶m-۵۵=۰\Rightarrow m=۵,-۱۱$$

تست ۱۳

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(۲)+f(۱)+f(۰)$ چقدر است؟



۱) ۱−

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

پاسخ: از روی شکل معلوم است که

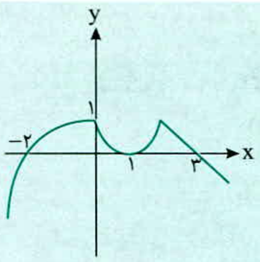
$$f(۲)=-۲,\quad f(۱)=۰,\quad f(۰)=۲$$

بنابراین

$$f(۲)+f(۱)+f(۰)=۰$$

تست ۱۴

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر تساوی $f(۲a-۱)+f(۰)=۱$ درست باشد، حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن a چقدر است؟



۱) ۱

۲) ۱−

۳) ۶

۴) ۶−

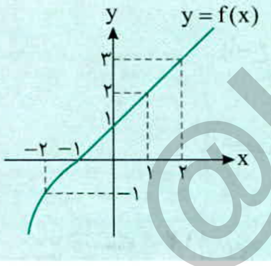
پاسخ: چون $f(۰)=۱$، تساوی داده شده به صورت $f(۲a-۱)=۰$ در می‌آید. چون نمودار تابع در نقاط $x=-۲$، $x=۱$ و $x=۳$ محور طول‌ها را قطع کرده است، پس $f(۳)=f(۱)=f(-۲)=۰$ و در نتیجه

$$۲a-۱=۳\Rightarrow a=۲,\quad ۲a-۱=۱\Rightarrow a=۱,\quad ۲a-۱=-۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقدارهای a برابر ۱− است.

تست ۱۵

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f(f(a))=۲$، مقدار a چقدر است؟



۱) ۲−

۲) ۱−

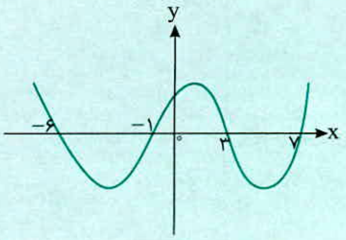
۳) صفر

۴) ۱

پاسخ: ابتدا باید ببینیم مقدار تابع به ازای چه عددی برابر با ۲ است. از روی شکل معلوم است که $f(۱)=۲$. اکنون باید ببینیم، مقدار تابع به ازای چه عددی برابر با ۱ است. از روی شکل معلوم است که $f(۰)=۱$. بنابراین $f(f(۰))=۲$، در نتیجه $a=۰$.

تست ۱۶

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع عددهای صحیحی که در نامعادله‌ی $f(x)<۰$ صدق می‌کنند چقدر است؟



۱) ۱

۲) ۱−

۳) ۲

۴) ۲−

پاسخ: از روی شکل معلوم است که مقدار f روی بازه‌های $(-۶, -۱)$ و $(۳, ۷)$ منفی است. عددهای صحیح در این بازه‌ها ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۴، ۵ و ۶ هستند، که مجموع آن‌ها ۱ است.

ضابطه‌ی تابع

اگر بتوان رابطه‌ای میان مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی تابع را با یک تساوی نشان داد، این تساوی را **ضابطه‌ی تابع** و آن را **نمایش جبری** تابع می‌نامند.

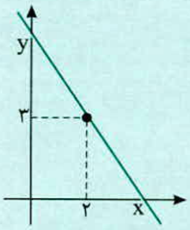
تست ۱۷ **اگر P محیط و S مساحت یک دایره باشد، کدام تابع، مساحت دایره را به صورت تابعی از محیط آن نشان می‌دهد؟**

۱) $S(P)=۴\pi P^۲$ ۲) $S(P)=\frac{۱}{۴}P^۲$ ۳) $S(P)=\frac{۱}{۱۲}P^۲$ ۴) $S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^۲$

پاسخ: اگر R شعاع دایره باشد، $P=۲\pi R$ و در نتیجه $R=\frac{P}{۲\pi}$. از طرف دیگر $S=\pi R^۲$. بنابراین

$$S=\pi(\frac{P}{۲\pi})^۲=\frac{\pi P^۲}{۴\pi^۲}\Rightarrow S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^۲$$

تست ۱۸ **خط راستی که از نقطه‌ی $(۲,۳)$ می‌گذرد، محور طول‌ها را در نقطه‌ی $(x,۰)$ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $(۰,y)$ قطع می‌کند. y تابعی از x است. ضابطه‌ی این تابع کدام است؟**



۱) $y=\frac{x}{x+۲}$ ۲) $y=\frac{-x}{x-۲}$

۳) $y=\frac{۳x}{x-۲}$ ۴) $y=\frac{-۳x}{x+۲}$

پاسخ: شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(x,۰)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{۳-۰}{۲-x}$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۰,y)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{y-۳}{۰-۲}$ است.

چون نقطه‌های $(۲,۳)$، $(x,۰)$ و $(۰,y)$ روی یک خط واقع‌اند، پس برابری $\frac{y-۳}{۰-۲}=\frac{۳-۰}{۲-x}$ برقرار است.

بنابراین

$$y-۳=\frac{-۶}{۲-x}\Rightarrow y=۳-\frac{۶}{۲-x}\Rightarrow y=\frac{۳x}{x-۲}$$

تست ۱۹ **اگر $f(۲^n+۵)=۴^n-۲^n-۳۴$، مقدار $f(۱۳)$ چقدر است؟**

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲۲

پاسخ: برای این که از تساوی

$$f(۲^n+۵)=۴^n-۲^n-۳۴ \qquad (۱)$$

مقدار $f(۱۳)$ را حساب کنیم، ابتدا n ای را پیدا می‌کنیم که $۲^n+۵=۱۳$. اگر این معادله را حل کنیم به‌دست می‌آید

$$۲^n+۵=۱۳\Rightarrow ۲^n=۸\Rightarrow n=۳$$

بنابراین اگر در تساوی (۱) به جای n، قرار دهیم ۳، به‌دست می‌آید

$$f(۲^۳+۵)=۴^۳-۲^۳-۳۴$$
$$f(۱۳)=۲۲$$

تست ۲۰ دربارهٔ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌دانیم که $f(x)=f(x+۱)+x$. اگر $f(۲)=۱۴$، مقدار $f(۳)$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: توجه کنید که $f(x+۱)=f(x)-x$. بنابراین اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به‌دست می‌آید

$$f(۳)=f(۲)-۲=۱۴-۲=۱۲$$

تابع خطی

هر تابعی را که ضابطهٔ آن به شکل $f(x)=ax+b$ است، **تابعی خطی** می‌نامند. اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن، خطی راست است که شیب آن a است.

تست ۲۱ اگر $f=\{(۱,m+۱),(۲,m),(-۱,۲m+۲),(n,۲n-۱)\}$ یک تابع خطی باشد، مقدار n کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: برای این‌که ضابطهٔ تابع $f(x)=ax+b$ باشد، باید

$$a=\frac{m+۱-m}{۱-۲}=\frac{۲m+۲-m}{-۱-۲}$$

بنابراین

$$a=-۱=\frac{m+۲}{-۳}\Rightarrow m+۲=۳\Rightarrow m=۱$$

پس نقطهٔ $(۲,m)=(۲,۱)$ در معادلهٔ $y=-x+b$ صدق می‌کند:

$$۱=-۲+b\Rightarrow b=۳$$

پس نقطهٔ $(n\,,۲n-۱)$ باید در معادلهٔ $y=-x+۳$ صدق کند:

$$۲n-۱=-n+۳\Rightarrow ۳n=۴\Rightarrow n=\frac{۴}{۳}$$

تست ۲۲ f تابعی خطی است، $f(۲)=۳$ و $f(۳)=۵$. مقدار $f(۶)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخ: فرض می‌کنیم ضابطهٔ f به صورت $f(x)=ax+b$ باشد. در این صورت

$$\begin{cases}f(۲)=۳\\ f(۳)=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=۳\\ ۳a+b=۵\end{cases}$$

اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم به‌دست می‌آید $a=۲$ و $b=-۱$. بنابراین

$$f(x)=۲x-۱\Rightarrow f(۶)=۲\times۶-۱=۱۱$$

تست ۲۳ اگر f تابعی خطی باشد و $f(x)+f(۲x)+f(۳x)=۲۴x-۱۲$، حاصل $f(\frac{x}{۴})$ کدام است؟

۱) $۴x-۴$ ۲) $۴x-۲$ ۳) $۲x-۴$ ۴) $x-۴$

پاسخ: فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(x)+f(۲x)+f(۳x)=۲۴x-۱۲$$

$$ax+b+۲ax+b+۳ax+b=۲۴x-۱۲$$

$$۶ax+۳b=۲۴x-۱۲$$

بنابراین $۶a=۲۴$ و $۳b=-۱۲$. در نتیجه $a=۴$ و $b=-۴$. به این ترتیب

$$f(x)=۴x-۴\Rightarrow f(\frac{x}{۴})=۴(\frac{x}{۴})-۴=x-۴$$

تست ۲۴

اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۲-x}{۳}$ بازه‌ی $(۳,۵]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

۱) $[-۱,۱)$
۲) $[-۱,-\frac{۱}{۳})$
۳) $(\frac{۱}{۳},۱]$
۴) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}]$

پاسخ: اگر $x\in(۳,۵]$، آن‌گاه

$$۳<x\le ۵$$
$$-۵\le -x<-۳$$
$$۲-۵\le ۲-x<۲-۳$$
$$-۱\le \frac{۲-x}{۳}<-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین برد تابع f بازه‌ی $[-۱,-\frac{۱}{۳})$ است.

تست ۲۵

اگر $f(x)=۲x+۱$ و برد f بازه‌ی $(-۱۱,۷]$ باشد، مجموع عددهای صحیح در دامنه‌ی f چقدر است؟

۱) -۵
۲) -۷
۳) -۹
۴) -۱۵

پاسخ: چون برد f بازه‌ی $(-۱۱,۷]$ است، پس $-۱۱<f(x)\le ۷$، یعنی

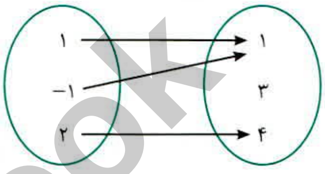
$$-۱۱<۲x+۱\le ۷\Rightarrow -۶<x\le ۳$$

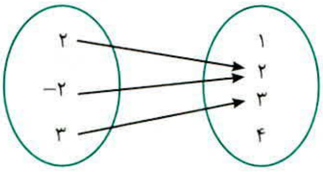
بنابراین عددهای صحیح ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲ و ۳ در دامنه‌ی f هستند، که مجموعشان برابر است با ۹−.

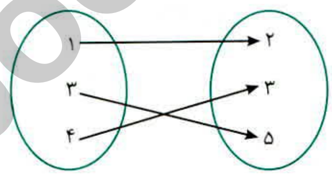
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

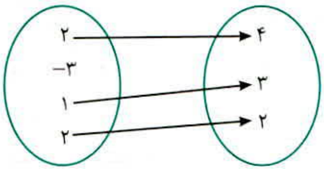
درس‌های اول و دوم:
مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن – دامنه و برد توابع

۱- کدام رابطه تابع نیست؟

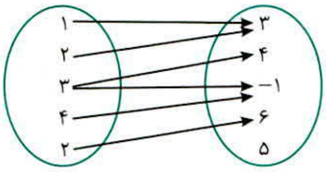
۱)


۲)


۳)


۴)


۲- چند پیکان باید از نمودار روبه‌رو حذف کنیم تا رابطه تبدیل به تابع شود؟



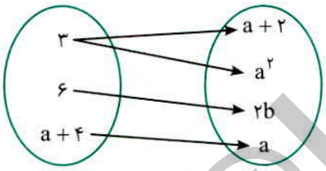
۱) دقیقاً ۲ پیکان

۲) حداقل ۲ پیکان

۳) حداکثر ۲ پیکان

۴) رابطه به هیچ‌وجه تابع نمی‌شود.

۳- نمودار مقابل نمایش یک تابع است. مقدار $a-b$ کدام است؟



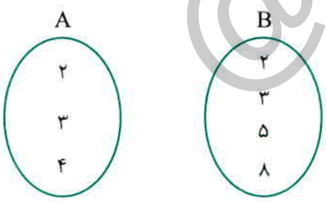
۱) −۲

۲) −۱

۳) ۲

۴) ۱

۴- رابطـه‌ی f اعضای مجموعه‌ی B را به اعضای مجموعه‌ی A نسـبت می‌دهد. f را چگونه تعریف کنیم تا تابع باشد؟



۱) به هر عضو A عددی بزرگ‌تر از آن از B را نسبت دهیم.

۲) به هر عضو A عددی کوچک‌تر از آن از B را نسبت دهیم.

۳) به هر عضو A مقسوم‌علیه آن از B را نسبت دهیم.

۴) به هر عضو A مضرب طبیعی آن از B را نسبت دهیم.

۵- اگر دو زوج مرتب $(۳ , ۲a+۳b)$ و $(a+۲b , ۴)$ مساوی باشند، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۶ ۴) −۶

۶- اگر $(a+b , -۱)=(\frac{۳}{۲} , ab)$، کدام تساوی می‌تواند درست باشد؟

۱) $(a , ۲b)=(۲ , ۱)$ ۲) $(a-۲b , ۱)=(۳, a)$ ۳) $(a+۴b , \frac{a}{b})=(۰ , -۴)$ ۴) $(a^{۲} , ۱)=(۳a , -۲b)$

۷- کدام رابطه تابع است؟

۱) $\{(۲ , ۱) , (۳ , ۲) , (۲ , ۳)\}$ ۲) $\{(۱ , -۱) , (-۲ , ۱) , (-۲ , -۱)\}$

۳) $\{(۱ , ۲) , (۲ , ۲), (۳ , ۲)\}$ ۴) $\{(۲ , ۱) , (۲ , ۲) , (۲ , ۳)\}$

۸- به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $\{(m,۲m),(m-۱,m+۱),(m^۲,m+۱)\}$ تابع نیست؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) صفر

۹- فرض کنید $A=\{x,y,z\}$ و $B=\{۱,۲\}$. کدام رابطه‌ی زیر تابعی از A به B است؟

۱) $\{(x,۱),(y,۱),(z,۲)\}$
۲) $\{(x,۱),(x,۲),(y,۱),(z,۱)\}$
۳) $\{(x,۱),(y,۲)\}$
۴) $\{(۱,x),(۲,y),(z,z)\}$

۱۰- اگر $f=\{(۲,۲),(۲,a-b),(۳,۲a),(۳,a+۲b)\}$ تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

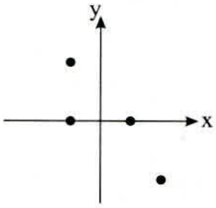
۱۱- به ازای چند مقدار مختلف m رابطه‌ی $f=\{(۱,m^۳-۴m),(\frac{m}{۲},۲),(۱,۰),(۰,۳),(۳m,۲)\}$ تابع است؟

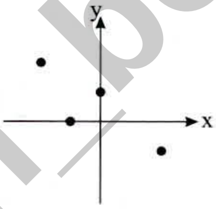
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

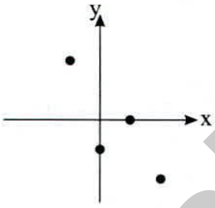
۱۲- رابطه‌ی $f=\{(۳,a+b),(۴,۱),(۳,۴),(۴,ab)\}$ تابع است. اگر $a>b$ مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

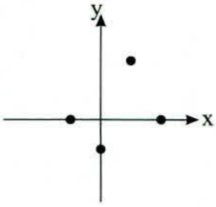
۱) $۲-\sqrt{۳}$
۲) $۲+\sqrt{۳}$
۳) $۷-۴\sqrt{۳}$
۴) $۷+۴\sqrt{۳}$

۱۳- نمودار تابع $f=\{(۱,۰),(-۱,۲),(۲,-۲),(۰,-۱)\}$ کدام است؟

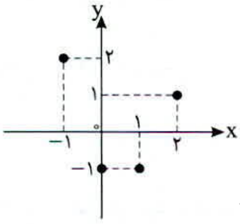
۱)


۲)


۳)


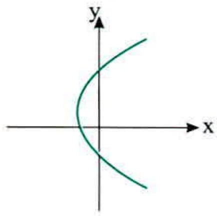
۴)


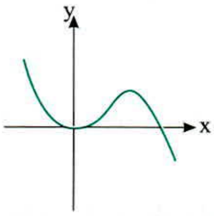
۱۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. f کدام تابع است؟

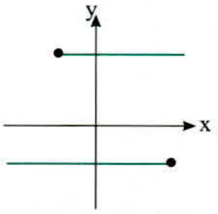


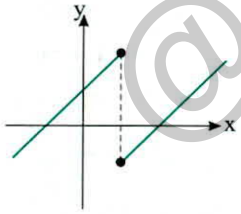
۱) $\{(-۱,۲),(۰,-۱),(۱,-۱),(۲,۱)\}$
۲) $\{(-۱,۲),(۰,۱),(۱,-۱),(۱,۲)\}$
۳) $\{(-۱,۲),(-۱,۰),(۱,-۱),(۲,۱)\}$
۴) $\{(-۱,۲),(۰,۱),(۱,-۱),(۲,۱)\}$

۱۵- کدام‌یک نمودار تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؟

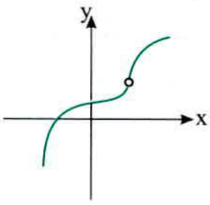
۱)


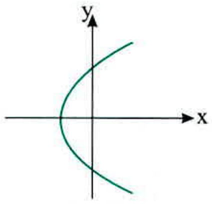
۲)


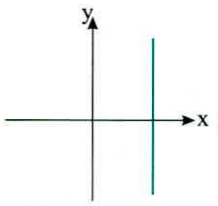
۳)


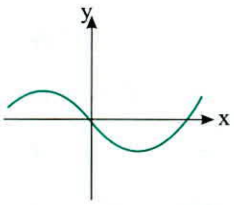
۴)


۱۶- کدام‌یک از نمودارهای زیر تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۷- مجموع اعضای دامنه‌ی تابع $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(-۲,۴)\}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۱۸- برد تابع $f=\{(۲,۳),(-۲,۴),(۳,۷),(-۳,۴),(-۱,۷)\}$ چند عضو کم‌تر از دامنه‌ی آن دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

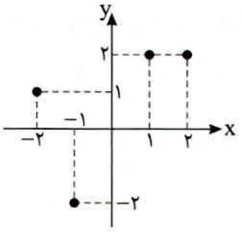
۱۹- اگر تعداد اعضای برد تابع $f=\{(۱,۳),(۳,۵),(۵,a^۲)\}$ کم‌تر از تعداد اعضای دامنه‌ی آن باشد، چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۰- اگر برد تابع $f=\{(۲,۲m+n),(۳,۳m),(۴,۶)\}$ تک عضوی باشد، مقدار mn کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۱- دامنه و برد تابع روبه‌رو در کدام گزینه درست است؟



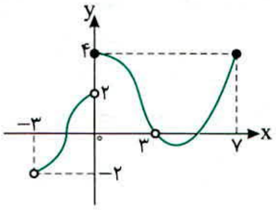
۱) دامنه$=\{-۱,-۲,۱,۲\}$ ، برد$=\{۱,۲,-۲\}$

۲) دامنه$=\{۱,۲,-۲\}$ ، برد$=\{-۱,-۲,-۱,۲\}$

۳) دامنه$=\{۱,-۱,۲\}$ ، برد$=\{۱,-۲,۲\}$

۴) دامنه$=\{۱,۲,-۲\}$ ، برد$=\{۱,-۱,-۲\}$

۲۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. دامنه‌ی f کدام است؟



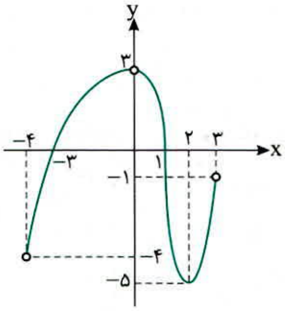
۱) $[-۳,۰)\cup(۳,۷)$

۲) $[-۳,۲]\cup(۳,۷)$

۳) $(-۳,۳)\cup(۳,۷]$

۴) $[-۳,۲)\cup(۳,۷]$

۲۳- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. برد این تابع کدام است؟



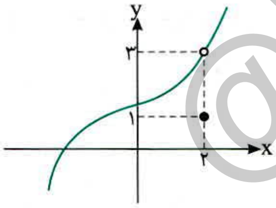
۱) $(-۴,۳)$

۲) $(-۴,۳]$

۳) $(-۵,۳]$

۴) $[-۵,۳)$

۲۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. برد این تابع کدام است؟



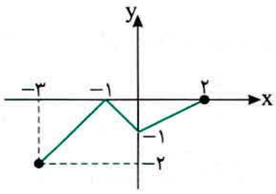
۱) $\mathbb{R}$

۲) $\mathbb{R}-\{۲\}$

۳) $\mathbb{R}-\{۳\}$

۴) $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$

۲۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. اگر D دامنه‌ی تابع و R برد آن باشد، $D-R$ کدام است؟



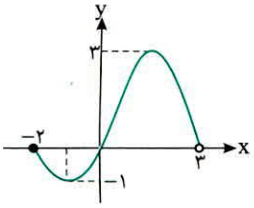
۱) $(۰,۲]$

۲) $[-۳,-۱)$

۳) $[-۳,-۲)\cup(۰,۲]$

۴) $[-۳,-۲)\cup[۱,۲]$

۲۶- نمودار تابع f به شکل مقابل است. اشتراک دامنه و برد تابع شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

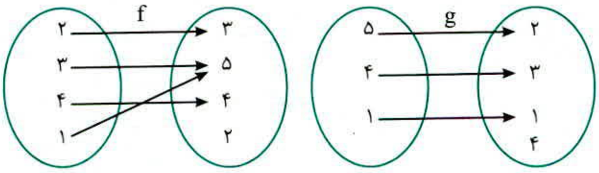
۲۷- درباره‌ی تابع $f=\{(۱,۴),(۴,-۱),(-۱,۲),(۲,۱)\}$ کدام صحیح است؟

۱) $f(۱)=۲$
۲) $f(۲)=-۱$
۳) $f(۴)=-۱$
۴) $f(-۱)=۴$

۲۸- در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,-۱),(-۱,۲),(۳,۱)\}$ مقدار $\frac{f(f(۳))}{f(۲)}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) −۲
۴) −۱

۲۹- با توجه به نمودار توابع f و g، به ازای کدام مقدار a عبارت $g(f(a))$ بی‌معنی است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۰- اگر $f=\{(۲,۲),(۳,۱),(۴,-۱),(-۱,۲)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۳,-۱),(-۱,۲),(۴,۲)\}$، مقدار $f(g(۲))-g(f(۲))$ کدام است؟

۱) −۳
۲) −۴
۳) −۲
۴) صفر

۳۱- در تابع $f=\{(۱,m),(۲,۴),(m,۴),(m^۲-۱,-۳),(۴,۳)\}$ اگر $f(f(۱))=m^۲$، مقدار $f(f(m^۲))$ چقدر است؟

۱) −۳
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

۳۲- در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۲),(۵,۴)\}$ اگر $f(f(a))=۲$، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۴
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۲

۳۳- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و f تابعی از A به A باشد، تفاضل بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار ممکن $f(۱)+f(۲)+f(۳)+f(۴)$ چقدر است؟

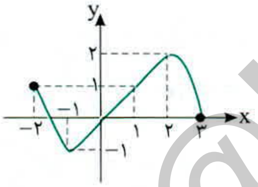
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

۳۴- درباره‌ی تابع f می‌دانیم که همواره $f(x)<f(x+۲)$. از نابرابری‌های زیر کدام‌یک حتماً درست است؟

الف) $f(۱)<f(۵)$
ب) $|f(-۱)|<|f(۱)|$
پ) $f(۰)+f(۲)<۲f(۴)$

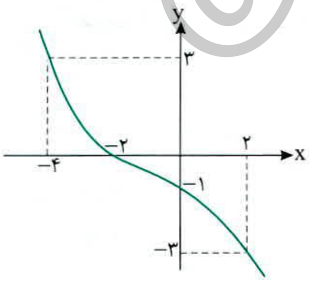
۱) فقط «الف»
۲) فقط «ب»
۳) «الف» و «ب»
۴) «الف» و «پ»

۳۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $f(۲)-f(-۲)$ کدام است؟



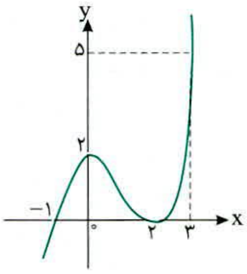
۱) ۱
۲) ۲
۳) −۱
۴) −۲

۳۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



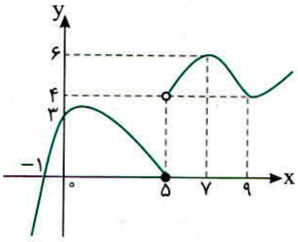
۱) $f(-۴)=۳$
۲) $f(-۲)=۰$
۳) $f(۲)=۰$
۴) $f(۰)=-۱$

۳۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(۳)+f(-۱)}{f(۲)+f(۰)}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

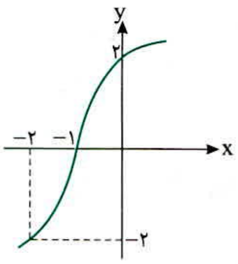
۳۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(۵)+f(۷)-f(۹)}{f(۰)-f(-۱)}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۳۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(-۲)+f(f(-۱))$ چقدر است؟



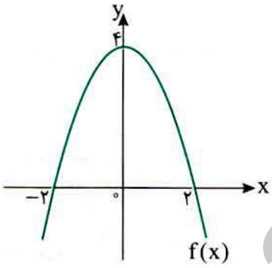
۱) -۲

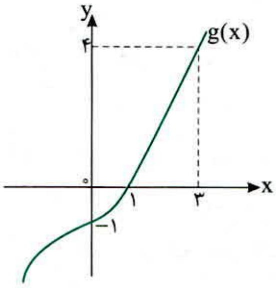
۲) -۱

۳) صفر

۴) ۱

۴۰- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(-۲)+g(۳)}{f(۰)+g(۱)}$ چقدر است؟

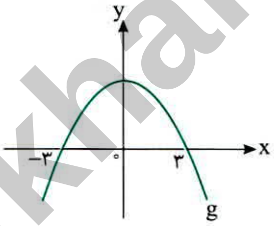


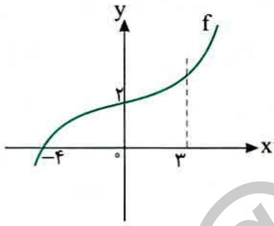


۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۴۱- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟





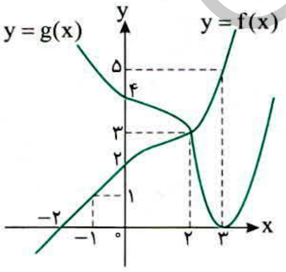
۱) $f(۲)g(۲)>۰$

۲) $f(۱)+g(۱)>۱$

۳) $g(-\frac{۷}{۲})<f(-\frac{۷}{۲})$

۴) هر سه گزینه درست هستند.

۴۲- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(-۱)+f(۳)}{g(۲)+g(۳)}$ چقدر است؟



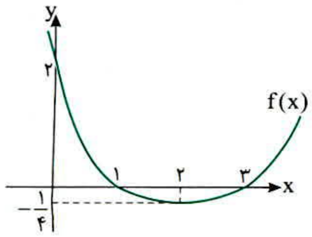
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۴۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر همواره $f(x-۱)+af(x-۲)=f(x-۴)$، مقدار a چقدر است؟



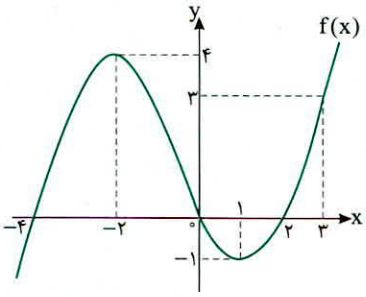
۱) -۸

۲) -۶

۳) صفر

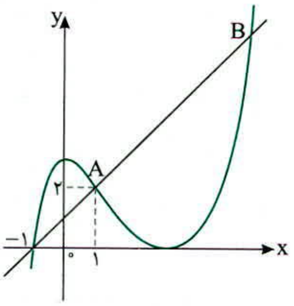
۴) ۲

۴۴- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر $g(x)=۳-f(x-۲)$، مقدار $g(-۲)+g(۵)$ چقدر است؟



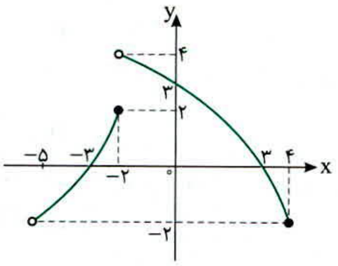
۱) -۳
۲) -۴
۳) ۳
۴) ۴

۴۵- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. اگر طول پاره‌خط AB برابر با $۵\sqrt{۲}$ باشد، مقدار $f(۶)$ چقدر است؟



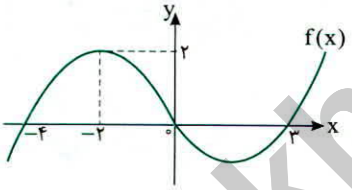
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ چقدر است؟



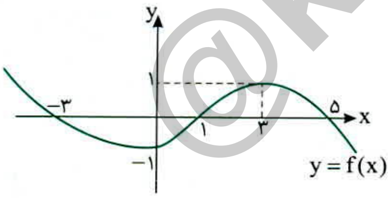
۱) -۹
۲) ۶
۳) ۱۸
۴) ۷۲

۴۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. معادله‌ی $f(x)=۱$ چند جواب دارد؟



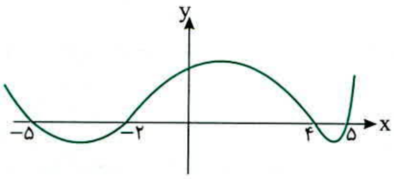
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(f(f(۲x-۱)))=-۱$ چقدر است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۴۹- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، چند عدد صحیح در نامعادله‌ی $f(x)\leq ۰$ صدق می‌کنند؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۸

۵۰- در تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۳-۲x$ مقدار $f(۲)-f(-۲)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۴
۳) -۶
۴) -۸

۵۱- اگر $f(x)=۲x-a$، $g(x)=۱-x$ و $f(g(۱))+g(f(a))=۲$، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۵۲- اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$، مقدار $f(f(f(۴)))$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳- اگر $f(x)=\frac{۳x-۲}{m+۴}$ و $f(۲)=۴$، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) $-\frac{۱۰}{۳}$

۵۴- اگر $f(x)=\frac{x+۳}{۲}$ و $f(k-۳)+f(۲)=۲f(k-۱)$، مقدار k کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۵۵- اگر $f(x)=x-a$، $g(x)=۲-۳x$ و تساوی $f(g(۱))=g(f(۱))$ درست باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۶- اگر $f(x)=۴x-۱$ و $f(a)+f(a^۲)=-۳$، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۵۷- اگر $f(n-۲x)=x-۵$ و $f(۴m-x)=۲x+۸$، مقدار $f(n)+f(۴m)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸- اگر $f(۴x-۲)=۶x-۴$، مقدار $f(۶)+f(-۲)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۵۹- اگر $f(۲x-۲m)=۲x-۶$ و $f(m)=۶$، مقدار m چقدر است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۶۰- اگر $f(x)=\frac{x}{۱۳}+۹۶$ ،$f(۹۵)=b$ و $f(a)=۹۵$، مقدار $\frac{۹۵-a}{۹۵-b}$ چقدر است؟

۱) -۱۳ ۲) $-\frac{۱}{۱۳}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۶۱- اگر $f(x)=۴x+۴$، حاصل $f(\frac{x}{۲})-f(\frac{x}{۴})$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{x}{۲}$ ۳) $\frac{x}{۴}$ ۴) $\frac{x}{۸}$

۶۲- اگر $f(x)=۴x+۳$ و $f(۲x+۱)=۸x+k$، مقدار k چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۳- اگر $f(x)=۴x-۳$، حاصل $f(۲a+۱)$ برحسب $f(a)$ کدام است؟

۱) $۴f(a)-۳$ ۲) $۲f(a)+۷$ ۳) $۲f(a)+۱$ ۴) $۲f(a)-۲$

۶۴- اگر $a, b\neq ۰$ و $f(b+ax)=\frac{a}{b}x$، حاصل $f(۰)$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) a ۴) $-b$

۶۵- اگر همواره $f(x)-۲f(-x)=x-۲$، مقدار $f(-۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۶۶- دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی اعداد طبیعی است و همواره $(n+۱)f(n+۱)-nf(n)=۰$. اگر $f(۱)\neq ۰$، مقدار $\frac{f(۴)+f(۵)}{f(۲)}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

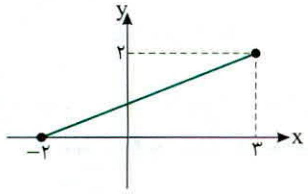
۶۷- اگر $f(x)=۹x$، مقدار $\underbrace{f(f(\cdots f}_{\text{۲۰تا}}(۳)\cdots))$ چقدر است؟

۱) $۳^{۴۱}$ ۲) $۳^{۴۰}$ ۳) $۳^{۲۲}$ ۴) $۳^{۲۱}$

۶۸- اگر تابع $f=\{(m,۲),(۳,۴),(۲,m)\}$ تابعی خطی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) ۱۱

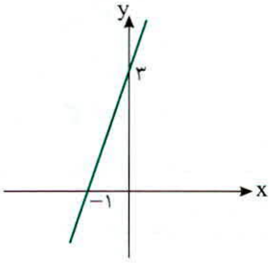
۶۹- نمودار تابع خطی f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $f(f(۲))$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

۷۰- نمودار تابع خطی f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $۴f(a)-f(۲a)=۱۵$، مقدار a چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

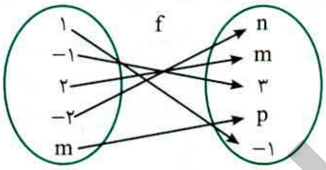
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

۷۱- درباره‌ی تابع خطی f می‌دانیم $f(-۱)=-۷$ و $f(۲)=۲$. مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۳

۷۲- اگر نمودار زیر مربوط به تابعی خطی باشد، حاصل $m+n+p$ چند است؟



۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

۷۳- اگر f تابعی خطی باشد، $۲f(۵)-f(۳)=۸$ و $f(۳)-f(۵)=۴$، مقدار $f(-۱)$ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) -۲۴ ۴) -۲۰

۷۴- برای تابع خطی f تساوی‌های $f(f(۱))=۱$ و $f(f(-۱))=-۷$ برقرار است. مقدار $f(۰)$ چقدر است؟

۱) -۱ یا -۳ ۲) ۱ یا -۳ ۳) -۱ یا ۳ ۴) ۱ یا ۳

۷۵- در مورد تابع خطی f می‌دانیم $f(x-۲)+f(x+۱)=۸x-۶$. ضابطه‌ی f کدام است؟

۱) $f(x)=۴x+۱$ ۲) $f(x)=-۴x+۱$ ۳) $f(x)=۴x-۱$ ۴) $f(x)=-۴x-۱$

۷۶- در مورد تابع خطی f به ازای هر مقدار x تساوی $f(f(x))=۴x+۶$ برقرار است. مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۲ یا ۶ ۲) -۲ یا ۶ ۳) -۲ یا -۶ ۴) ۲ یا -۶

۷۷- اگر $f(x)=۲x-۱$ و برد f مجموعه‌ی $\{۰,۱,-\frac{۱}{۲},۵\}$ باشد، کدام‌یک از عددهای زیر در دامنه‌ی f نیست؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۸- برد تابع $f(x)=-۲x-۳$ با دامنه‌ی $(-۲,۴]$ کدام است؟

۱) $[-۴,۲)$ ۲) $[-۱۱,۱)$ ۳) $(-۱۱,۱]$ ۴) $(-۴,۲]$

۷۹- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۵-۴x$ بازه‌ی $[-۳,۱)$ است. دامنه‌ی این تابع کدام است؟

۱) $(۱,۲]$ ۲) $[۱,۲)$ ۳) $(-۲,-۱]$ ۴) $[-۲,-۱)$

۵	۴	۳	۲	۱	عمق (km)
۲۲۰	۱۸۰	۱۴۰	۱۰۰	۶۰	دما (°C)

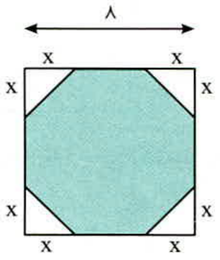
۸۰- در جدول مقابل دمای یک مخزن در عمق‌های متفاوت از سطح زمین آمده است. دمای مخزن در عمق ۱۲km سطح زمین چه می‌تواند باشد؟

۱) ۴۲۰°C ۲) ۵۰۰°C

۳) ۵۴۰°C ۴) ۴۶۰°C

۸۱- اگر P محیط و S مساحت یک دایره باشد، کدام تابع محیط دایره را به‌صورت تابعی از مساحت آن نشان می‌دهد؟

۱) $P(S)=۲\sqrt{\pi S}$ ۲) $P(S)=۲\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ ۳) $P(S)=۶\sqrt{S}$ ۴) $P(S)=\frac{۲}{۳}\sqrt{S}$



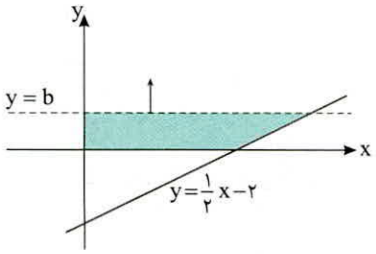
۸۲- در شکل روبه‌رو، ۴ گوشه‌ی قطعه‌ی مربعی به طول ۸cm بریده شده است. دامنه‌ی تابع مساحت قطعه‌ی باقی‌مانده کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$

۲) $[۰,۴]$

۳) $(۰,۴)$

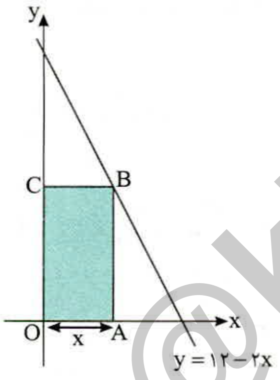
۴) $[۰,+\infty)$



۸۳- مطابق شکل مقابل، خط $y=b$ به سمت بالا حرکت می‌کند. ضابطه‌ی تابعی که مساحت قسمت رنگی بین خطوط $y=b$، $y=\frac{۱}{۲}x-۲$ و محورهای مختصات را برحسب b نشان می‌دهد، کدام است؟

۱) $f(b)=۲b^۲+۳b$ ۲) $f(b)=b^۲+۴b$

۳) $f(b)=۲b^۲+۲b$ ۴) $f(b)=b^۲+۳b$



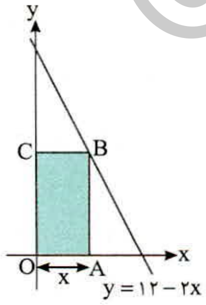
۸۴- کدام گزینه مساحت مستطیل OABC در شکل روبه‌رو را به‌صورت تابعی از $OA=x$ نشان می‌دهد؟

۱) $S=x(۶-x)$

۲) $S=x(۱۲-۲x)$

۳) $S=۲x(۱۲-۲x)$

۴) $S=x(۱۶-x)$



۸۵- اگر S مساحت مستطیل OABC به‌صورت تابعی از $OA=x$ باشد، دامنه‌ی تابع S کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$

۲) $[۰,۱۲]$

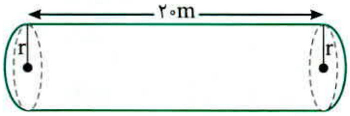
۳) $[۰,۸]$

۴) $[۰,۶]$

۸۶- در شکل مقابل، مستطیل در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ واحد محاط شده است. طول قطر مستطیل (d) را به‌صورت تابعی از طول مستطیل (x) می‌نویسیم. ضابطه‌ی این تابع کدام است؟

۱) $d(x)=\sqrt{۳x^۲-x+۴}$ ۲) $d(x)=\sqrt{\frac{۳}{۴}x^۲+۴}$

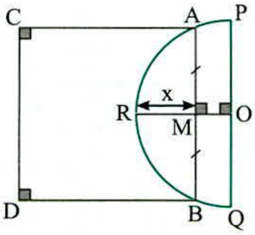
۳) $d(x)=\sqrt{۳x^۲+۱۶}$ ۴) $d(x)=\sqrt{۳x^۲+۴}$



۸۷- مطابق شکل یک مخزن از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع‌های r تشکیل شده است. حجم مخزن V یک تابع .... از r بوده و ضابطه‌ی آن به‌صورت .... است.

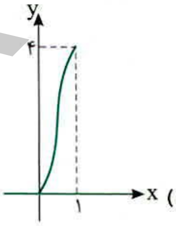
۱) درجه‌ی دوم، $۲۴\pi r^۲$ ۲) درجه‌ی سوم، $\frac{۲\pi}{۳}r^۳+۲۰\pi r^۲$

۳) درجه‌ی دوم، $۲۲\pi r^۲$ ۴) درجه‌ی سوم، $\frac{۴\pi}{۳}r^۳+۲۰\pi r^۲$

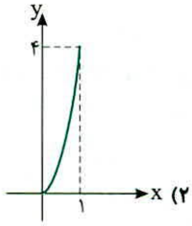


۸۸- در شکل روبه‌رو شعاع نیم‌دایره برابر ۱ است و می‌دانیم $OR \perp PQ$. نقطه‌ی M روی OR حرکت می‌کند. با حرکت M، مربعی به ضلع AB رسم می‌کنیم. کدام گزینه مساحت مربع را به‌صورت تابعی از $RM=x$ درست نشان می‌دهد؟

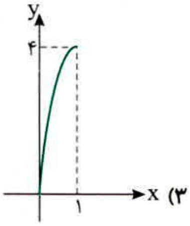
۱)



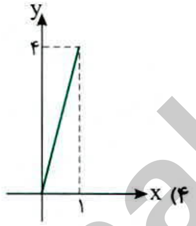
۲)



۳)



۴)



۸۹- اگر $f(۹x-۲)=۹x+۷$، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۹۰- اگر $f(x+۱)=f(x)+x$، مقدار $f(۱۴)-f(۰)$ چقدر است؟

۱) ۷۸ ۲) ۸۴ ۳) ۹۱ ۴) ۹۸

۹۱- اگر $f(x+۳)=xf(x)-۲x+۳$ و $f(۷)=۷$، مقدار $f(۱)$ چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۲- اگر $f(x)=f(x-۱)-۳$ و $f(۳)=۳۲$، مقدار $f(۱۵)$ چقدر است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۲

۹۳- اگر $f(۳x+۱)=۳x+۲f(-۳x)-۳$، مقدار $f(۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۹۴- اگر $f(\frac{۲}{x})=۱۶+۲f(\frac{x}{۲})$، مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

۱) -۴۸ ۲) -۲۴ ۳) -۱۶ ۴) -۸

۹۵- در کدام تابع رابطه‌ی $f(m+n)=f(m)+f(n)$ به ازای هر m و n برقرار است؟

۱) $f(x)=x-۱$ ۲) $f(x)=۲x+۱$ ۳) $f(x)=۳x$ ۴) $f(x)=۲$

۹۶- اگر $f(xy)=f(x)+f(y)+۳$، مقدار $f(۱)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۹۷- درباره‌ی تابع f می‌دانیم همواره $f(xy)=f(x)+f(y)$. اگر

$$f(۱۰)=۱,\quad f(۵)=a,\quad f(۳)=b$$

مقدار $f(۶)$ کدام است؟

۱) $a-b$
۲) $a+b$
۳) $a+b-۱$
۴) $b-a+۱$

۹۸- اگر $\frac{۲x+f(x)}{xf(x)-۳}=۴$، نمایش جبری f کدام است؟

۱) $\frac{۲x}{۴x+۱}$
۲) $\frac{۴x+۱۲}{۴x-۱}$
۳) $\frac{۳x-۲}{۲x+۱}$
۴) $\frac{۲x+۱۲}{۴x-۱}$

۹۹- اگر $f(x)=\frac{۳x-۴}{۲x+۱}$، جواب معادله‌ی $f(۲x)=۲$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) -۲
۴) -۳

۱۰۰- اگر $f(x-۲)=\frac{۳x}{۲x+۵}$، جواب معادله‌ی $f(x)=۳$ کدام است؟

۱) -۷
۲) ۱
۳) صفر
۴) -۵

۱۰۱- اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$، کدام گزینه حاصل $f(a)-f(b)$ را درست نشان می‌دهد؟

۱) $f(\frac{b-a}{ab})$
۲) $f(\frac{ab}{a-b})$
۳) $f(\frac{a-b}{ab})$
۴) $f(\frac{ab}{b-a})$

۱۰۲- اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، حاصل $f(x+۱)$ برابر کدام است؟ (مخرج‌ها صفر نیستند)

۱) $۱-\frac{۱}{f(x)}$
۲) $\frac{۱-f(x)}{f(x)}$
۳) $\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$
۴) $\frac{f(x)+۱}{f(x)}$

فصل پنجم: تابع

درس سوم: انواع توابع

تابع ثابت

تابعی است که برد آن فقط یک عضو دارد. اگر f تابعی ثابت باشد، ضابطه‌ی آن به شکل $f(x)=k$ است، که در این‌جا k عددی حقیقی و ثابت است.

تست ۱ **اگر تابع $f(x)=(a+۲)x^{۲}+(b-a)x+a+b$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(-۴)$ چقدر است؟**

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) -۸

پاسخ: چون f تابعی ثابت است، در آن جمله‌ای که برحسب x باشد وجود ندارد. بنابراین باید ضریب‌های $x^{۲}$ و x صفر باشند. در نتیجه

$$\begin{cases}a+۲=۰\\ b-a=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=a=-۲\end{cases}$$

به این ترتیب $f(x)=a+b=-۲-۲=-۴$ در نتیجه $f(-۴)=-۴$.

تست ۲ **اگر $f(x)=\frac{۳x+k}{۲x-۴}$ تابعی ثابت باشد، مقدار k کدام است؟**

۱) -۸ ۲) -۶ ۳) -۴ ۴) -۲

پاسخ: فرض کنید تابع موردنظر، تابع ثابت c باشد. در این‌صورت

$$\frac{۳x+k}{۲x-۴}=c\Rightarrow ۳x+k=۲cx-۴c$$

در نتیجه

$$۳=۲c,\quad k=-۴c$$

از تساوی اول نتیجه می‌شود $c=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه

$$k=-۴c=-۴\times\frac{۳}{۲}=-۶$$

تابع همانی

تابعی است که دامنه و برد آن برابرند و هر عضو از دامنه‌ی تابع به همان عضو در برد تابع نظیر می‌شود.

تست ۳ **اگر تابع $f(x)=۳x+(a+b)x+a-۲$ تابع همانی باشد، مقدار $a+f(b)$ چقدر است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ: توجه کنید که

$$f(x)=(۳+a+b)x+a-۲$$

در نتیجه، اگر f تابع همانی باشد، باید

$$۳+a+b=۱,\quad a-۲=۰$$

بنابراین $a=۲$ و $b=۱-۳-a=-۴$. به این ترتیب، چون $f(b)=b$،

$$a+f(b)=a+b=۲-۴=-۲$$

تابع چندجمله‌ای

تابعی است که نمایش جبری آن چندجمله‌ایی یک متغیره است و دامنه‌اش $\mathbb{R}$ است.

تست ۴

درباره‌ی تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx$ می‌دانیم $f(۱)=۲$ و $f(-۱)=-۴$. مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) ۴

پاسخ: مقادیر $x=۱$ و $x=-۱$ را در ضابطه‌ی تابع قرار می‌دهیم:

$$f(۱)=۱+a+b=۲$$
$$f(-۱)=-۱+a-b=-۴$$

پس از حل دستگاه $\begin{cases} a+b=۱ \\ a-b=-۳ \end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=-۱$ و $b=۲$ و در نتیجه $ab=-۲$.

تست ۵

اگر $f(x)=۲x^۳-۶x^۲+۶x-۵$ ، مقدار $f(۱+\sqrt[۳]{۷})$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای این کار از اتحاد مکعب دوجمله‌ای کمک می‌گیریم:

$$f(x)=۲(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)-۳$$
$$=۲(x-۱)^۳-۳$$

در نتیجه

$$f(۱+\sqrt[۳]{۷})=۲(\sqrt[۳]{۷})^۳-۳=۲\times۷-۳=۱۱$$

تست ۶

اگر $f(x)=ax^۷+bx^۵+cx+۲$ و $f(-۲)=۱۰$، مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۸ ۴) -۱۰

پاسخ: توجه کنید که

$$f(-۲)=۱۰\Rightarrow a(-۲)^۷+b(-۲)^۵+c(--۲)+۲=۱۰$$
$$\Rightarrow -(۲^۷a+۲^۵b+۲c)=۸$$
$$\Rightarrow ۲^۷a+۲^۵b+۲c=-۸$$

از طرف دیگر،

$$f(۲)=a\times۲^۷+b\times۲^۵+c\times۲+۲=-۸+۲=-۶$$

تست ۷

در مورد تابع f می‌دانیم $f(۲x-۳)=x^۲-۳$، مقدار $\frac{f(-۵)}{f(۱)}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱۱ ۴) -۱۱

پاسخ: اگر $۲x-۳=-۵$، نتیجه می‌شود $x=-۱$. بنابراین اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=-۱$، مقدار $f(-۵)$ به‌دست می‌آید:

$$x=-۱\Rightarrow f(-۵)=(-۱)^۲-۳=-۲$$

همچنین اگر $۲x-۳=۱$، نتیجه می‌شود $x=۲$. پس

$$x=۲\Rightarrow f(۱)=۲^۲-۳=۱$$

بنابراین $\frac{f(-۵)}{f(۱)}=-۲$.

تست ۸

اگر $f(x)=x^۳-۳x(x-۱)+۱$ ، حاصل $f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $x^۲$
۲) $x^۳$
۳) $x^۳+۱$
۴) $x^۳+۲$

پاسخ: اگر از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}f(x)&=x^۳-۳x^۲+۳x+۱\\&=(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۲\\&=(x-۱)^۳+۲\end{aligned}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم x+۱، به‌دست می‌آید

$$f(x+۱)=(x+۱-۱)^۳+۲=x^۳+۲$$

تست ۹

اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-۳,۵]$ باشد و همواره $f(x)=x^۲-۹$، چند عدد صحیح در برد f قرار دارند؟

۱) ۲۵
۲) ۲۶
۳) ۵۵
۴) ۶۴

پاسخ: اگر $x\in[-۳,۵]$ ، آن‌گاه

$$-۳\le x\le ۵\Rightarrow ۰\le x^۲\le ۲۵\Rightarrow -۹\le x^۲-۹\le ۱۶$$

بنابراین عددهای صحیح

$$-۹,\ -۸,\dots,\ -۱,\ ۰,\ ۱,\ ۲,\dots,\ ۱۶$$

در برد f قرار دارند که تعداد آن‌ها ۲۶ تاست.

تابع چندضابطه‌ای

تابعی است که بتوان آن را روی زیر مجموعه‌های مختلف دامنه‌اش با ضابطه‌های مختلف نشان داد.

تست ۱۰

اگر $f(x)=\begin{cases}۳x-۲ & x>۲\\ ۲x+۱ & x\le ۲\end{cases}$، مقدار $f(f(۲))$ چقدر است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۷
۴) ۲۰

پاسخ: چون $۲\le۲$، پس $f(۲)=۲\times۲+۱=۵$. همچنین، چون $۵>۲$، پس

$$f(f(۲))=f(۵)=۳\times۵-۲=۱۳$$

تست ۱۱

اگر $f(x)=\begin{cases}kx+۴ & x<۴\\ \frac{۸}{x+۱} & x\ge ۴\end{cases}$ و $f(۲)-f(۴)=\frac{۲}{۵}$، مقدار k چقدر است؟

۱) -۴
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۱

پاسخ: چون $f(۲)-f(۴)=\frac{۲}{۵}$ ، پس ابتدا مقادیر $f(۲)$ و $f(۴)$ را حساب می‌کنیم:

$$۲<۴\Rightarrow f(۲)=k\times۲+۴=۲k+۴$$

$$۴\ge۴\Rightarrow f(۴)=\frac{۸}{۴+۱}=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$f(۲)-f(۴)=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۲k+۴-\frac{۸}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

$$۲k=\frac{۲}{۵}+\frac{۸}{۵}-۴=-۲$$

پس $۲k=-۲$، یعنی $k=-۱$.

تست ۱۲ اگر $f(x)=\begin{cases} ۱ & \text{x زوج باشد} \\ -۲ & \text{x فرد باشد} \end{cases}$ ، مقدار عبارت $f(۱)+f(۲)+\cdots+f(۹۹)$ کدام است؟

۱) -۵۱ ۲) -۵۰ ۳) -۴۹ ۴) -۵۲

پاسخ: مقدار تابع به ازای اعداد زوج برابر یک است. در بین اعداد ۱ تا ۹۹، ۴۹ عدد زوج وجود دارد. پس در عبارت داده شده ۴۹ تا یک وجود دارد.
مقدار تابع به ازای اعداد فرد برابر ۲- است، در بین اعداد ۱ تا ۹۹، پنجاه عدد فرد وجود دارد. پس در عبارت داده شده ۵۰ تا ۲- وجود دارد. بنابراین

$$f(۱)+f(۲)+\cdots+f(۹۹)=۴۹\times۱+۵۰(-۲)=-۵۱$$

تست ۱۳ به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^۲+mx & x\geq -۱ \\ x+m & x\leq -۱ \end{cases}$ تابع است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: به ازای $x=-۱$ رابطه دارای دو مقدار است که از دو ضابطه‌ی مختلف به‌دست می‌آیند:

$$x=-۱\Rightarrow x^۲+mx=۱-m$$

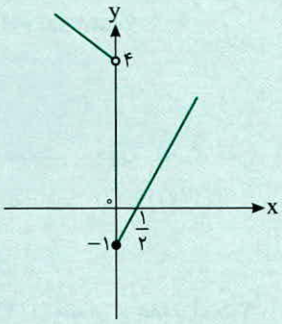
$$x=-۱\Rightarrow x+m=-۱+m$$

این دو مقدار باید یکسان باشند تا رابطه، تابع باشد. بنابراین

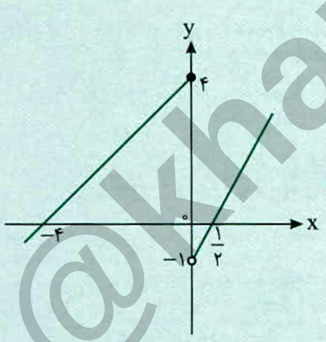
$$۱-m=-۱+m\Rightarrow m=۱$$

تست ۱۴ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۴-x & x\leq ۰ \\ ۲x-۱ & x>۰ \end{cases}$ کدام شکل است؟

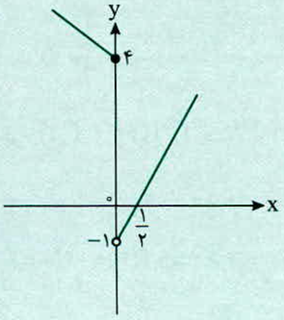
۱)



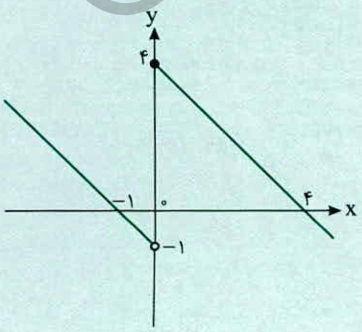
۲)



۳)



۴)



پاسخ: به ازای $x\leq ۰$، نمودار f خطی است که شیب آن منفی است و عرض از مبدأ آن ۴ است. به ازای $x>۰$، نمودار f خطی است که شیب آن مثبت است و عرض از مبدأ آن ۱- است. بنابراین نمودار f گزینه‌ی (۳) است. توجه کنید که فرق نمودار تابع‌های گزینه‌های (۱) و (۳) در این است که در نمودار گزینه‌ی (۱) مقدار تابع به ازای $x=۰$ برابر با ۴ نیست.

تابع قدرمطلق

تابع قدرمطلق تابعی است که هر عضو دامنه‌اش را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. اگر f تابع قدرمطلق باشد، نمایش جبری آن $f(x)=|x|$ است.

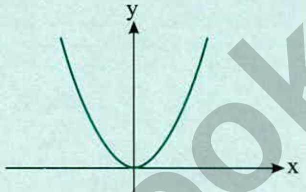
نکته

$$|x|=|-x|,\quad |x^{۲}|=|x|^{۲}=x^{۲},\quad \sqrt{x^{۲}}=|x|$$

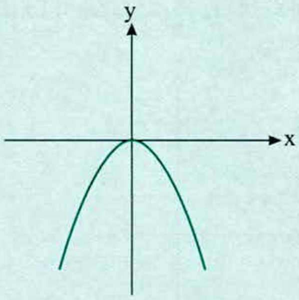
$$|xy|=|x||y|,\quad \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad (y\neq ۰)$$

تست ۱۵ نمودار تابع $f(x)=x|x|$ کدام است؟

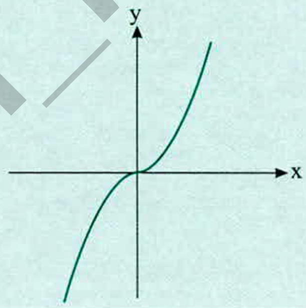
۱)



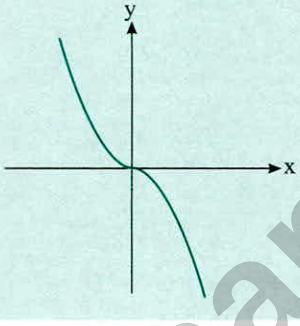
۲)



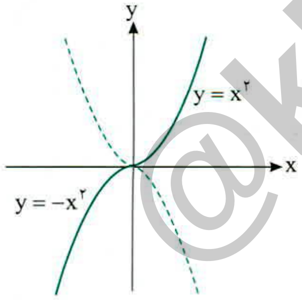
۳)



۴)



پاسخ: ضابطه‌ی تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۰\\ -x^{۲} & x\leq ۰\end{cases}$ است. پس باید برای $x\geq ۰$ نمودار تابع $y=x^{۲}$ را رسم کنیم و برای $x\leq ۰$ نمودار تابع $y=-x^{۲}$ را رسم کنیم.



رسم نمودار به کمک انتقال

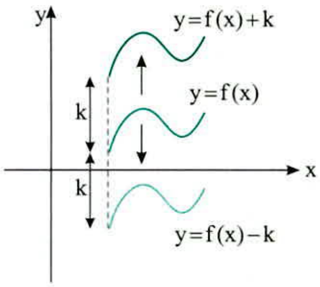
می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را از روی نمودار تابع‌های معروف رسم کنیم. برای این کار از **انتقال** استفاده می‌کنیم.

انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>۰$.

برای رسم نمودار $f(x)+k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.

برای رسم نمودار $f(x)-k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.

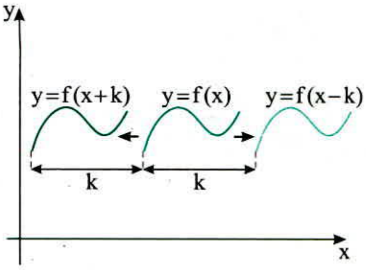


انتقال افقی

فرض کنید نمودار f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>۰$.

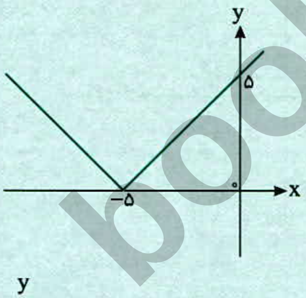
برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

برای رسم نمودار $f(x-k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل کنیم.

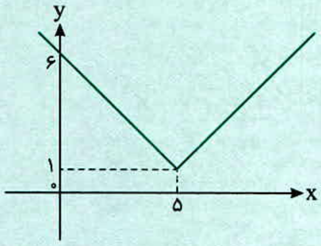


تست ۱۶ نمودار تابع $f(x)=|۵-x|+۱$ کدام است؟

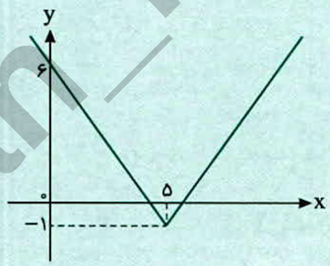
۱)



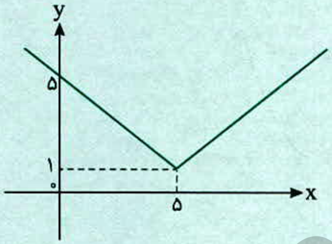
۲)



۳)



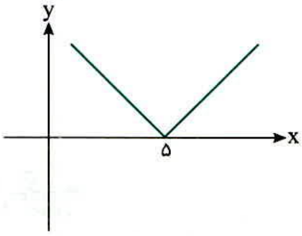
۴)



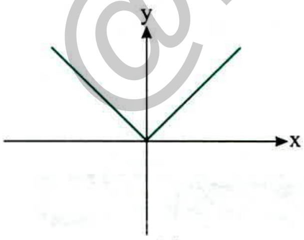
پاسخ: ابتدا توجه کنید که چون $|A|=|-A|$، پس

$$f(x)=|۵-x|+۱=|x-۵|+۱$$

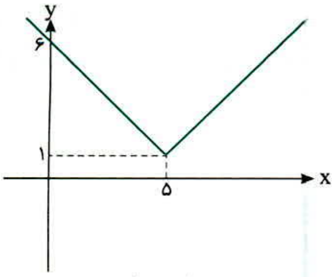
برای رسم کردن نمودار f ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. سپس آن را ۵ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. به این ترتیب نمودار گزینه‌ی (۲) به‌دست می‌آید.



$y=|x-۵|$



$y=|x|$

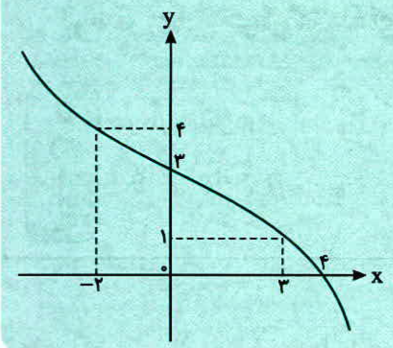


$y=|x-۵|+۱$

تست ۱۷

در شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ رسم شده است.

مقدار $f(-۶)f(۲)+f(۱)f(-۲)$ چقدر است؟



۱) ۷

۲) ۶

۳) ۳

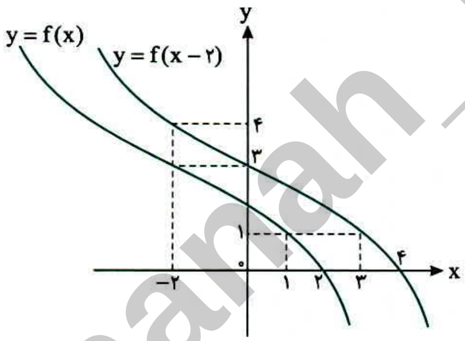
۴) ۱

پاسخ: برای به‌دست آوردن نمودار $y=f(x-۲)$ از روی نمودار $y=f(x)$، نمودار $y=f(x)$ را ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم. بنابراین، اگر نمودار $y=f(x-۲)$ را ۲ واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید (شکل زیر را ببینید). از روی شکل معلوم است که

$$f(۲)=۰,\quad f(۱)=۱,\quad f(-۲)=۳$$

بنابراین

$$f(-۶)f(۲)+f(۱)f(-۲)=f(-۶)\times ۰+۱\times ۳=۳$$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل پنجم

درس سوم:
انواع توابع

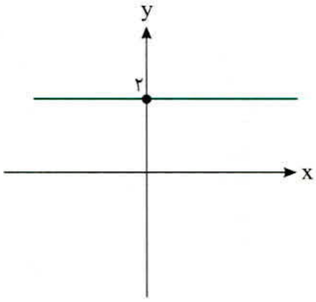
۱۰۳- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{a,b,c\}$، کدام‌یک از تابع‌های زیر تابعی ثابت از A به B است؟

۱) $\{(۱,a),(۲,b),(۳,c)\}$
۲) $\{(۱,b),(۲,c),(۳,c)\}$
۳) $\{(۱,a),(۲,a),(۳,a)\}$
۴) $\{(۱,a),(۲,a),(۳,b)\}$

۱۰۴- اگر $f=\{(۲,۴),(۳,m-۲),(-۲,m+۲n),(-۳,mn+k)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴
۲) ۱۰
۳) ۸
۴) ۶

۱۰۵- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=(a+b-۱)x+b-۴$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۱۱
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۱

۱۰۶- اگر تابع $f(x)=(۴-a)x^۲+(۳+b)x+ab+۱۹$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(۱۱۱)$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۲-

۱۰۷- اگر $f(x)=(kx-۲)(m-x)+۲x^۲$ ضابطه‌ی یک تابع ثابت باشد، مقدار $k+m$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۳
۴) ۳-

۱۰۸- به ازای کدام مقدار a، $f(x)=\frac{۲x+۱}{ax-۳}$ ضابطه‌ی یک تابع ثابت است؟

۱) ۲-
۲) ۴-
۳) ۶-
۴) ۸-

۱۰۹- اگر تابع $f(x)=\frac{(a-۲)x+۳}{۲x-۱}$ تابعی ثابت باشد، مقدار a چند است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۳-
۴) ۴-

۱۱۰- در مورد تابع f می‌دانیم $f(-۱)=۳$، $f(۲)=۶$ و $f(-۳)=۱۱$. چند تا از جمله‌های زیر درست هستند؟

الف) تابع f قطعاً ثابت نیست.
ب) تابع f قطعاً خطی نیست.
پ) تابع f می‌تواند درجه‌ی دوم باشد.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۱- کدام تابع همانی است؟

۱) $\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$
۲) $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$
۳) $\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲)\}$
۴) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$

۱۱۲- اگر تابعی همانی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ به مجموعه‌ی $\{a, b, c\}$ وجود داشته باشد، مقدار abc چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

۱۱۳- اگر f تابعی همانی باشد و $f(۲)=۱۴-۲k$ ، مقدار $f(۱۴-۳k)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۴
۴) ۴

۱۱۴- اگر f تابع همانی باشد و $f(۵-۳m)=۴m-۹$ ، مقدار m چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۵- تابع $f=\{(-۲, m-۲n), (۳, n+m), (mn, k)\}$ همانی است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۲۰}{۹}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۱۱۶- اگر تابع $f(x)=(a-۱)x+b-۲$ تابع همانی باشد، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۷- اگر f تابع همانی باشد و $f(x-۴)=(۲a-۷)x+b+۱$ ، مقدار $f(a+b)$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۵
۴) -۵

۱۱۸- اگر $f(x)=(a-b)x+c+۳$ تابع همانی و تابع $g(x)=(a+b)x-۲a$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(a)+g(b)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۱۹- اگر تابع $f(x)=(a-۲)x^۲+(b-۳)x+a+b-c$ تابع همانی باشد، مقدار c چقدر است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

۱۲۰- اگر تابع $f(x)=(a+۳)x^۲+(b-۳)x-c+۱$ تابع همانی باشد، مقدار abc کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) -۱۲
۴) -۲۴

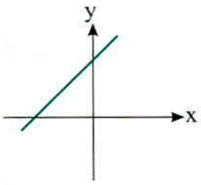
۱۲۱- اگر $f(x)=\frac{x^۲-۲ax+۴a-۴}{x-۲}$ ضابطه‌ی یک تابع همانی باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

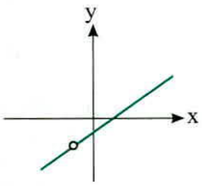
۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

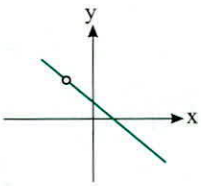
۱۲۲- اگر $f(x)=mx(۲-x)+x^۲-۴x-m$ ضابطه‌ی یک تابع خطی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

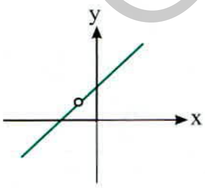
۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) -۳

۱۲۳- اگر $f(x)=\frac{x^۲+mx+۲}{x+۱}$ ضابطه‌ی تابعی خطی باشد، نمودار این تابع کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲۴- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲-۴x$ و برد $B=\{۰, -۳, -۴\}$ مفروض است. دامنه‌ی تابع حداکثر و حداقل چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱) حداکثر ۶، حداقل ۳
۲) حداکثر ۵، حداقل ۴
۳) حداکثر ۵، حداقل ۳
۴) حداکثر ۶، حداقل ۴

۱۲۵- اگر دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x-x^۳$ مجموعه‌ی $A=\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ باشد، برد تابع شامل چند عضو خواهد بود؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۲۶- اگر $f(x)=x^۲-۲$ و دامنه‌ی f بازه‌ی $[-۱, ۳]$ باشد، برد f کدام است؟

۱) $[-۲, ۷]$
۲) $[-۱, ۷]$
۳) $[۰, ۷]$
۴) $[۱, ۷]$

۱۲۷- اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-۴,۵]$ باشد و همواره $f(x)=x^{۲}+۲x-۲$، بزرگ‌ترین عضو برد f کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۳۳ ۴) ۳۶

۱۲۸- درباره‌ی تابع چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}-bx$ می‌دانیم $f(۲)=۰$ و $f(-۱)=۳$. مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۲۹- اگر $f(x)=x^{۳}-(k+۹۶)x$ و $f(-۱)=۸$، مقدار $f(۱)$ چقدر است؟

۱) -۹ ۲) -۸ ۳) -۷ ۴) -۶

۱۳۰- اگر $f(x)=۳x+a$، $g(x)=x^{۲}-ax$ و $f(g(-۱))=۹$، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۳۱- اگر $f(x)=f(۱)+f(-۱)+x^{۲}-۲x$، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۳۲- در تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ مقدار $f(۳)-۲f(۲)+۲f(۰)$ کدام است؟

۱) $f(۱)$ ۲) $f(-۱)$ ۳) $f(۰)$ ۴) $f(-۲)$

۱۳۳- اگر $f(x)=x^{۲}+۲x-۱۰$، مقدار $f(۹۹)$ چقدر است؟

۱) ۹۹۹۰ ۲) ۱۰۱۰ ۳) ۹۹۹۱ ۴) ۹۹۸۹

۱۳۴- اگر $f(x)=x^{۲}-۶x+۷$، مقدار $f(۳+\sqrt{۱۱})$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۷ ۴) ۹

۱۳۵- اگر $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x$، مقدار $f(\sqrt[۳]{۲}+۲)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۶ ۳) ۱۰ ۴) ۶

۱۳۶- در تابع $f(x)=۲x^{۳}+x^{۲}-۴x-۵$ حاصل $f(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۴\sqrt{۶}$ ۳) $-۴\sqrt{۶}$ ۴) صفر

۱۳۷- در تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ مقدار $f(a)f(-\frac{۱}{a})$ به ازای $a\neq ۱,-۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $(a+۱)^{۲}$ ۴) $\frac{۱}{(a-۱)^{۲}}$

۱۳۸- در تابع $f(x)=\frac{۸x}{x^{۲}+۳}$ اگر $f(a)=-۲$، آن‌گاه $f(a+۲)$ کدام است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۴ ۴) صفر

۱۳۹- اگر $f(x)=ax^{۴}-bx^{۲}+\frac{c}{x^{۲}}$ و $f(۲-\sqrt{۳})=۵$، حاصل $f(\sqrt{۳}-۲)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۴۰- اگر $f(x)=x^{۶۹}+۲x+۱$، مقدار $f(-۳۱)+f(-۳۰)+\cdots+f(۳۰)+f(۳۱)$ چقدر است؟

۱) ۳۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۵

۱۴۱- اگر $f(x+۲)=x^{۲}+۴x+۲$، مقدار $f(\sqrt{۳})$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۲- اگر $f(۲۳-x)=\frac{x}{۲۳+x}$ و $f(a)=۲$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۵ ۳) ۶۷ ۴) ۶۹

۱۴۳- اگر $f(x^۲-۴x)=۸x-۲x^۲+۱۲$ ، مقدار $f(۳)$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۴۴- اگر $xf(x+۲)+f(۳x+۱)=۲x^۲+۳x+۴$ ، مقدار $f(۳)+f(۴)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۴۵- اگر $f(\frac{x^۴-۱}{x^۴+۲})=x^۴-x^۸+x^{۱۶}$ ، مقدار $f(\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۴۶- اگر $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{mx+۱}{x+۱}$ و $f(۴)=۳$ ، مقدار $f(۰)$ چقدر است؟

۱) -۷ ۲) -۲ ۳) ۷ ۴) ۲

۱۴۷- اگر $\frac{x+۴}{x-۸}=\frac{f(۲x+۱)+x}{۱-f(۳x-۴)}$ ، مقدار $f(۱۱)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸- اگر $f(\frac{۳x+۴}{۵x+۲})=\frac{x^۲+۶x+۱۰}{۳x+۲}$ ، مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۹- اگر $f(\frac{x^۲+۱}{x})=۳x+\frac{۳}{x}-۴$ ، مقدار $f(۴)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۵۰- اگر $f(\frac{x^۲+x+۱}{x^۲-x+۱})=x^۳+۳x+۲$ ، مقدار $f(۳)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۵۱- فرض کنید $f(x)=x+\frac{۱}{x}$. اگر a عددی مثبت باشد و $f(a^۲)=۲۳$ ، مقدار $f(a^۳)$ چقدر است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۰۰

۱۵۲- اگر $f(x)=x^۲-۴x-۲$ ، ساده شده‌ی عبارت $A=f(x+۲)+f(x-۲)-۸$ کدام است؟

۱) $f(x)-۴$ ۲) $f(x)+۴$ ۳) $۲f(x)+۲$ ۴) $۲f(x)$

۱۵۳- در مورد تابع $f(x)=ax^۲-bx+۲$ رابطه‌ی $f(x-۱)-f(x)=۶x+۲$ به ازای هر x برقرار است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۵۴- اگر $f(x+۲)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۹$ ، حاصل $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۳-۱$ ۲) $x^۳+۱$ ۳) $x^۳-۲$ ۴) $x^۳+۲$

۱۵۵- اگر $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ و a عددی حقیقی باشد، مقدار $f(a)+f(\frac{۱}{a})$ برابر کدام است؟

۱) $f(۲a)$ ۲) $f(\frac{۲}{a})$ ۳) $\frac{f(a)}{۲}$ ۴) $۲f(a)$

۱۵۶- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x-۳ & x\geq ۰ \\ x+۲ & x<۰ \end{cases}$ ، مقدار $f(۲)+f(-۲)$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x>۱ \\ ۲-x & x\le ۱ \end{cases}$، مقدار $f\left(f(-۱)\right)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۱
۴) -۱

۱۵۸- اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x & x\in\mathbb{Q} \\ x^۲ & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$، آن‌گاه مقدار $f(f(\sqrt{۲}))$ چقدر است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) $۹\sqrt{۲}$
۴) ۱۸

۱۵۹- اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\in\mathbb{Q} \\ x^۲ & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$، مقدار $f(f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))$ چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۲}+۲$
۲) $\sqrt{۲}+۲$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۶۰- اگر $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ ۲-x & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ و a عددی گنگ باشد، مقدار $f(f(a))$ کدام است؟

۱) a
۲) $۲-a$
۳) $۴-a$
۴) $۲+a$

۱۶۱- اگر $f(۲x-۱)=\begin{cases} -۲x+۴ & x\ge -۱ \\ ۳x-۲ & x<-۱ \end{cases}$، مقدار $f(۰)+f(-۵)$ چقدر است؟

۱) ۵
۲) ۲
۳) -۵
۴) -۲

۱۶۲- اگر $g(x-۲)=۲-x$ و $f(x)=\begin{cases} \frac{x+۲}{۳} & x<۰ \\ g(x) & x\ge ۰ \end{cases}$، حاصل $f(-۵)+f(۰)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) -۳

۱۶۳- اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{x+۱}{x+a} & x>۱ \\ \frac{۱-x}{x+b} & x<۱ \end{cases}$، $f(۲)=a$ و $f(a)=b$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ یا -۴
۲) ۱ یا -۴
۳) ۲ یا ۴
۴) -۲ یا -۴

۱۶۴- فرض کنید $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le -۱ \\ ax+۴b & x>-۱ \end{cases}$. اگر $f(-۱)+f(۶)=-۱۰$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۲

۱۶۵- فرض کنید $g(x)=۲x-۳$ و $f(x)=\begin{cases} \frac{۲x+۱}{۳} & x<۱ \\ mx+۲ & x\ge ۱ \end{cases}$. اگر $f(m)=g(۳)$، مقدار m چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۶- در تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x>۱ \\ x+۳ & -۱\le x\le ۱ \\ x+۲ & x<-۱ \end{cases}$ اگر $f(a)=۴a+۵$، چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۶۷- اگر $f(x)=\begin{cases} -۲ & x\ge ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$، حاصل $f\left(f(-f(a))\right)$ کدام است؟

۱) $-a^۴$
۲) $a^۴$
۳) -۲
۴) -۴

۱۶۸- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x<۳\\ ۳x+m & x\geq ۳\end{cases}$ و $f\left(f(۱)\right)=۶$، مقدار m چند است؟

۱) -۳
۲) -۱
۳) ۳
۴) ۱

۱۶۹- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x^{۲} & \text{x زوج باشد}\\ c & \text{x فرد باشد}\end{cases}$ و بدانیم $f(۱)+f(۴)+f(۵)=۵۴$ مقدار c چند است؟

۱) ۹
۲) ۲
۳) ۱۱
۴) ۸

۱۷۰- اگر $f(x)=\begin{cases}x-۱ & \text{x فرد باشد}\\ x+۱ & \text{x زوج باشد}\end{cases}$، مقدار $A=f(۱)+f(۲)+\cdots+f(۲۰)$ چقدر است؟

۱) ۲۱۰
۲) ۲۳۰
۳) ۲۴۰
۴) ۲۵۰

۱۷۱- اگر $f(x)=\begin{cases}۱ & x^{۲۴}\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x^{۲۴}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، مقدار عبارت $f(\sqrt{۲})+f(\sqrt[۳]{۲})+\cdots+f(\sqrt[۹]{۲})$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۱۷۲- اگر $f(x)=\begin{cases}x & \frac{۳۰}{x}\in\mathbb{Z}\\ -۱ & \frac{۳۰}{x}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، حاصل عبارت $A=f(۱)+f(۲)+f(۳)+\cdots+f(۲۹)$ کدام است؟

۱) ۲۰
۲) -۲۰
۳) ۲۲
۴) -۲۲

۱۷۳- اگر $f(x)=\begin{cases}x+۱ & \sqrt[۳]{x}\in\mathbb{Q}\\ x & \sqrt[۳]{x}\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، حاصل عبارت $A=f(۱)+f(۲)+\cdots+f(۱۰۰)$ کدام است؟

۱) ۵۰۵۰
۲) ۵۰۵۴
۳) ۵۰۵۵
۴) ۵۰۴۰

۱۷۴- کدام‌یک ضابطه‌ی یک تابع نیست؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۱\\ x^{۳} & x\leq ۱\end{cases}$
۲) $f(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۱\\ \frac{۲}{x} & x\leq ۱\end{cases}$
۳) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲ & x\geq ۱\\ ۲x-۳ & x\leq ۱\end{cases}$
۴) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲ & x\geq ۱\\ ۲x+۳ & x\leq ۱\end{cases}$

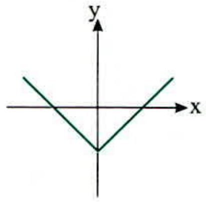
۱۷۵- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x^{۲}+a & x\geq ۲\\ ax^{۳}-۲ & x\leq ۲\end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد، مقدار $۷f(۷a)$ کدام است؟

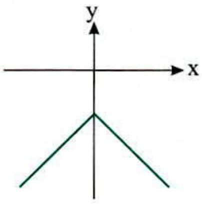
۱) ۱۴۲۰
۲) ۱۴۷۰
۳) ۱۴۰۰
۴) ۱۴۱۰

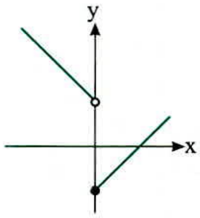
۱۷۶- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x\geq ۲a\\ ۳x+۶ & x\leq a-۱\end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد، آن‌گاه

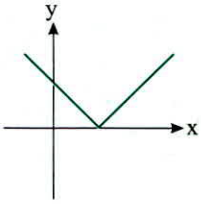
۱) $a=-۱$
۲) $a>-۱$
۳) $a\geq -۱$
۴) $a\leq -۱$

۱۷۷- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x-۲ & x\geq ۰\\ -x+۲ & x<۰\end{cases}$ کدام است؟

۱)


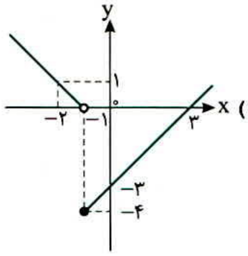
۲)


۳)


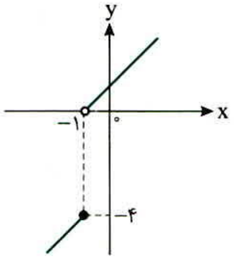
۴)


۱۷۸- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x>-۱ \\ x+۱ & x\leq -۱ \end{cases}$ کدام شکل است؟

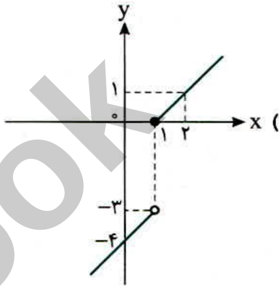
۱)



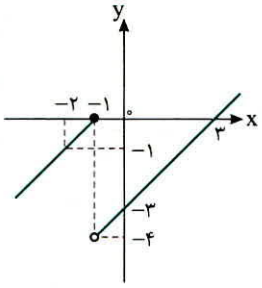
۲)



۳)

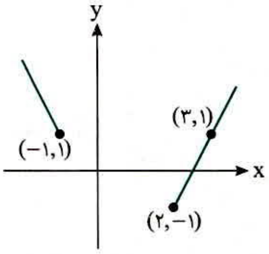


۴)



۱۷۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر ضابطه‌ی تابع f به‌صورت زیر باشد، مقدار $B+C$ چند است؟

$$f(x)=\begin{cases} Ax+B & x\leq -۱ \\ -Ax+C & x\geq ۲ \end{cases}$$



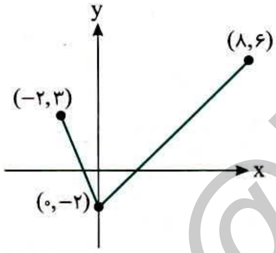
۱) -۶

۲) -۴

۳) ۵

۴) ۶

۱۸۰- کدام گزینه ضابطه‌ی تابع قطعه‌ای زیر را درست نشان می‌دهد؟



۱) $f(x)=\begin{cases} \frac{۵}{۲}x-۲ & x\leq ۰ \\ x-۲ & ۰\leq x\leq ۸ \end{cases}$

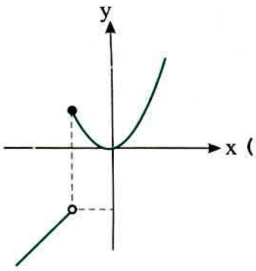
۲) $f(x)=\begin{cases} -\frac{۵}{۲}x-۲ & -۲\leq x\leq ۰ \\ x-۲ & ۰\leq x\leq ۸ \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} -\frac{۵}{۲}x-۲ & x\leq ۰ \\ x-۲ & x\geq ۰ \end{cases}$

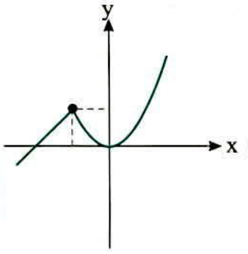
۴) $f(x)=\begin{cases} -\frac{۵}{۲}x+۲ & -۲\leq x\leq ۰ \\ x-۲ & ۰\leq x\leq ۸ \end{cases}$

۱۸۱- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq -۱ \\ x-۱ & x<-۱ \end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟

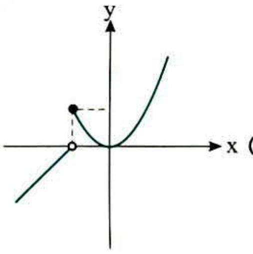
۱)



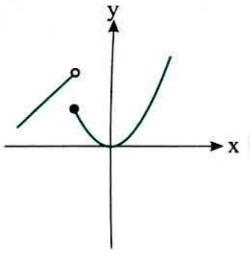
۲)



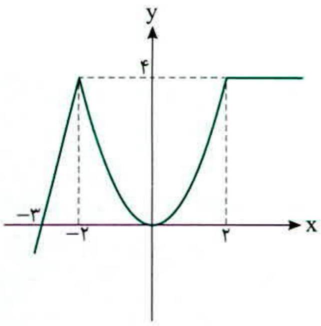
۳)



۴)



۱۸۲- مانند شکل مقابل، نمودار تابع f از یک سهمی و دو خط تشکیل شده است. کدام گزینه ضابطه‌ی تابع را درست نشان می‌دهد؟



۱) $f(x)=\begin{cases} ۴x+۱۲ & x\le -۲ \\ x^۲ & -۲\le x\le ۲ \\ ۴ & x\ge ۲ \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} ۴x+۱۲ & x\le -۲ \\ x^۲ & x=-۲ \\ ۴ & x\ge ۲ \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} ۴x+۸ & x\le -۲ \\ x^۲ & -۲\le x\le ۲ \\ ۴ & x\ge ۲ \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} ۴x+۱۲ & x\le -۲ \\ ۲x^۲ & -۲\le x\le ۲ \\ ۴ & x\ge ۲ \end{cases}$

۱۸۳- برد تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۳ & x>۲ \\ x+۲ & x<-۲ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[۰,۱)$

۲) $\mathbb{R}-(۰,۱)$

۳) $\mathbb{R}-[-۲,۲]$

۴) $\mathbb{R}-[-۱,۰]$

۱۸۴- اگر $f(x)=\begin{cases} -x+۸ & x<۳ \\ x+۲ & x\ge ۳ \end{cases}$، برد f کدام است؟

۱) $[۳,+\infty)$

۲) $[۵,+\infty)$

۳) $(-\infty,۵]$

۴) $(-\infty,۳]$

۱۸۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x-۵ & x\ge ۲ \\ -x-۳ & x<۲ \end{cases}$، مجموع جواب‌های صحیح نامعادله‌ی $f(x)\le ۰$ چقدر است؟

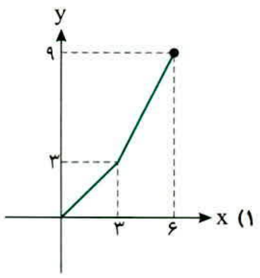
۱) -۶

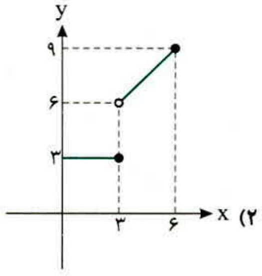
۲) -۲

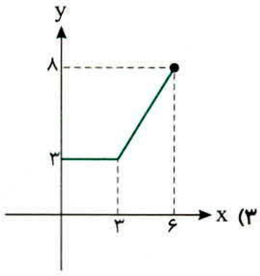
۳) ۹

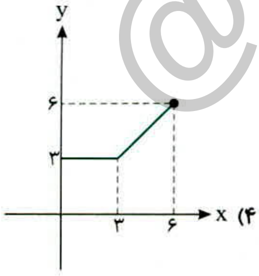
۴) ۱۲

۱۸۶- هزینه‌ی مکالمه‌ی تلفنی با کشور دیگر از زمان برقراری تماس برای سه دقیقه یا کم‌تر ۳ هزار تومان است و پس از آن به ازای هر دقیقه، ۱۰۰۰ تومان به هزینه افزوده می‌شود. کدام گزینه نمودار هزینه برحسب زمان را تا پایان دقیقه‌ی ۶ درست نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۸۷- اگر $f(x)=|x-۱|-|x|$ و $f(\frac{a^۲+۱}{a^۲})=a$، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) صفر

۱۸۸- در تابع $f(x)=۵|۳x-۱|+۳|۵x-۱|$ حاصل $f(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۵}-۲)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-\sqrt{۵}$

۲) ۴

۳) $\sqrt{۳}-۲$

۴) ۶

۱۸۹- اگر $f(x)=|x-۲|+۱$ ساده شده‌ی عبارت $۲f(۲-|a|)-f(۲+|a|)$ کدام است؟

۱) $|a|$

۲) $|a|+۱$

۳) $|a|-۱$

۴) صفر

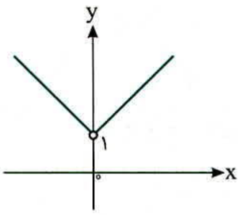
۱۹۰- برد تابع $f(x)=\frac{|x+۱|}{x+۱}+\frac{۱-x}{|x-۱|}$ چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) نامتناهی

۱۹۱- اگر برای هر $x\in[-۱۰,۱۰]$، $f(x)=|x|$ و همواره $f(x+۲۰)=f(x)$، مقدار $f(۱۱۷)$ چقدر است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

۱۹۲- نمودار مقابل، نمودار کدام تابع می‌تواند باشد؟



۱) $y=|x|+۱$
۲) $y=\frac{|x|}{x^۲}+۱$
۳) $y=\frac{x^۲}{|x|}+۱$
۴) $y=|x|+۱-x$

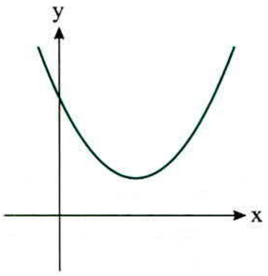
۱۹۳- مساحت ناحیه‌ی محدود به زیر نمودار تابع $f(x)=x-|۲x-۱|$ و بالای محور طول‌ها کدام است؟

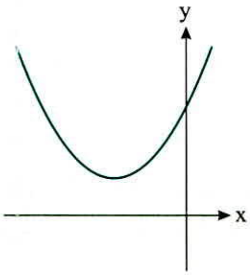
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

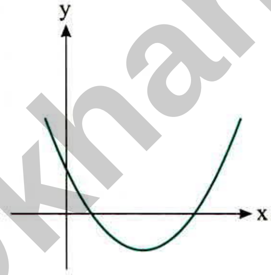
۱۹۴- نمودار تابع با نمایش جبری $f(x)=x^۲-۶x+۲$ را ابتدا ۳ واحد به چپ و سپس ۷ واحد به بالا انتقال داده‌ایم. نمایش جبری تابع جدید کدام است؟

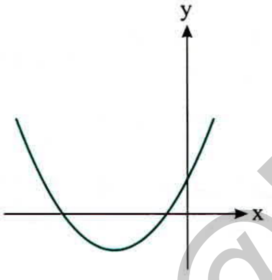
۱) $x^۲$
۲) $(x-۶)^۲$
۳) $x^۲-۷$
۴) $(x-۶)^۲-۱۴$

۱۹۵- نمودار تابع $f(x)=(x-۲)^۲+۱$ کدام است؟

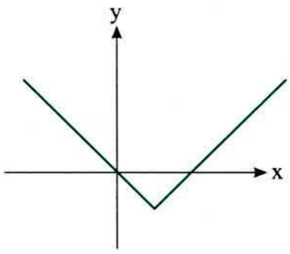
۱)


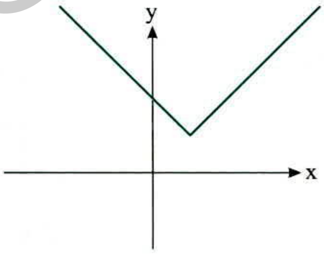
۲)


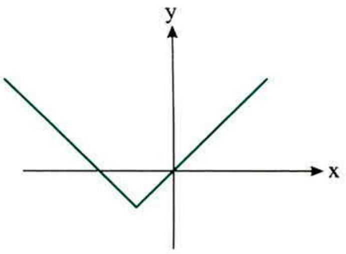
۳)


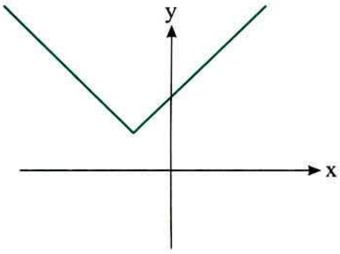
۴)


۱۹۶- نمودار تابع $f(x)=|x+۱|-۱$ کدام است؟

۱)


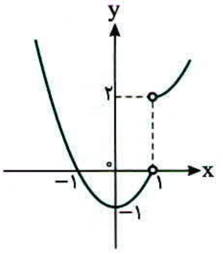
۲)


۳)


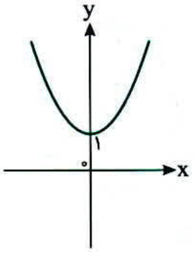
۴)


۱۹۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}+x^۲$ کدام است؟

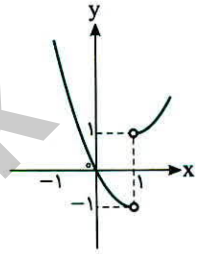
۱)



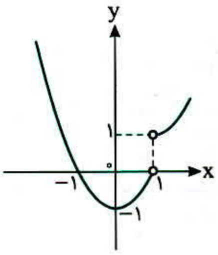
۲)



۳)

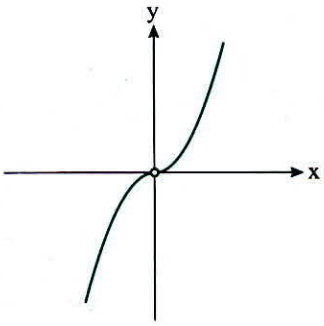


۴)

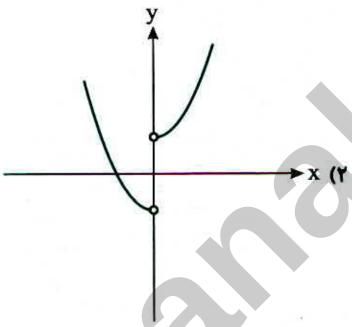


۱۹۸- نمودار تابع $f(x)=|x|(x+\frac{۱}{x})$ کدام است؟

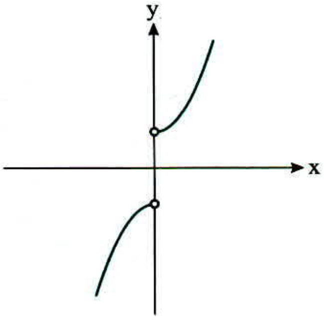
۱)



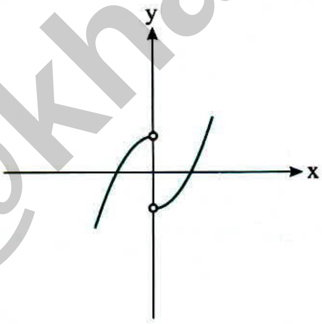
۲)



۳)

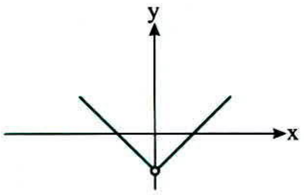


۴)

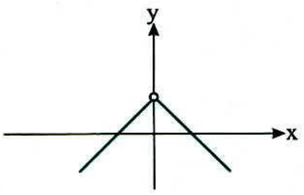


۱۹۹- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲-۲|x|}{|x|}$ کدام است؟

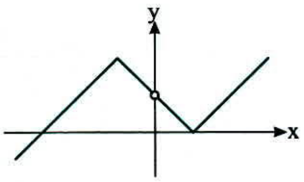
۱)



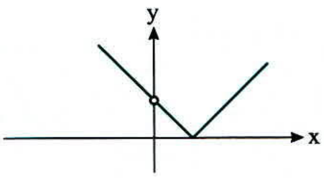
۲)



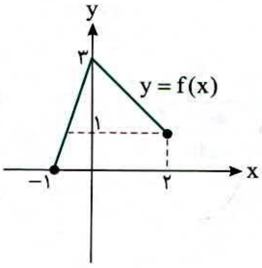
۳)

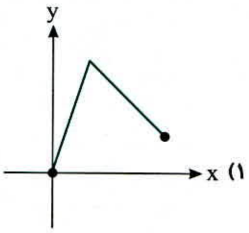


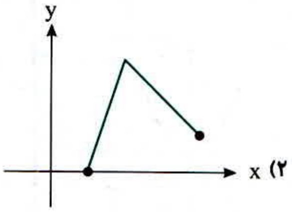
۴)

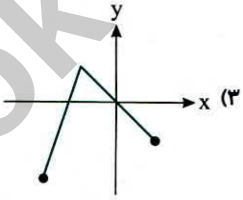


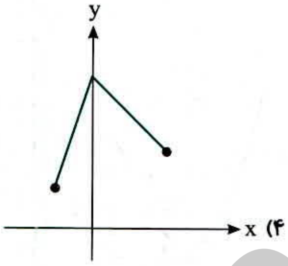
۲۰۰- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(x+۱)-۲$ کدام است؟



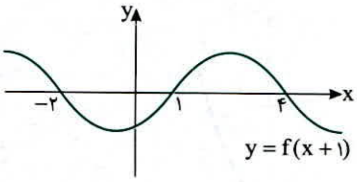


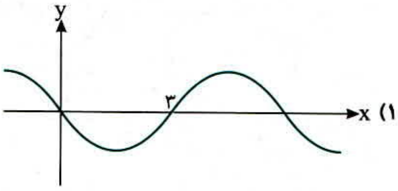


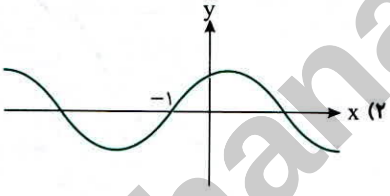


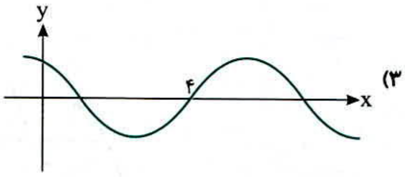


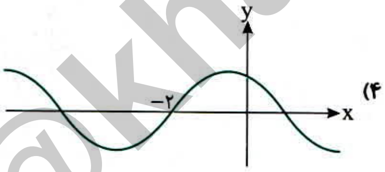
۲۰۱- نمودار تابع $y=f(x+۱)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(x-۲)$ کدام است؟



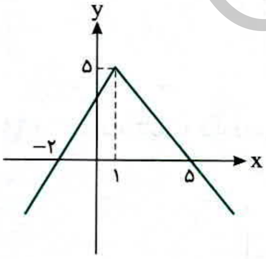


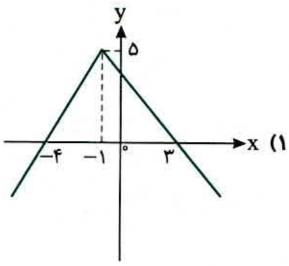


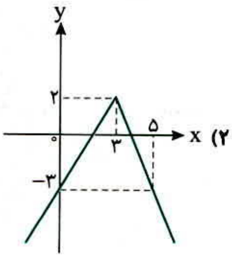


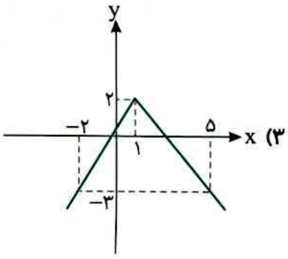


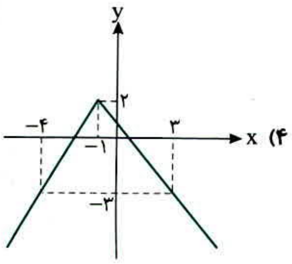
۲۰۲- در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x-۲)+۳$ رسم شده است. نمودار تابع f کدام است؟



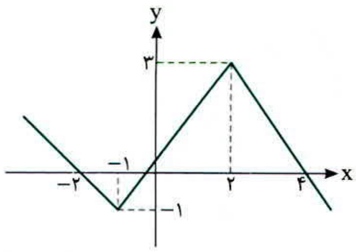




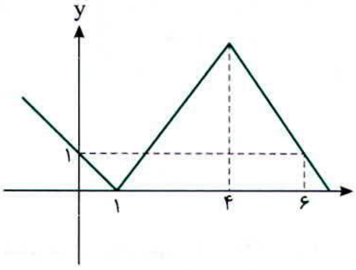




۲۰۳- در شکل (۱) نمودار تابع $y=f(x-a)-b$ و در شکل (۲) نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است، مقدار a و b کدام‌اند؟



شکل (۱)



شکل (۲)

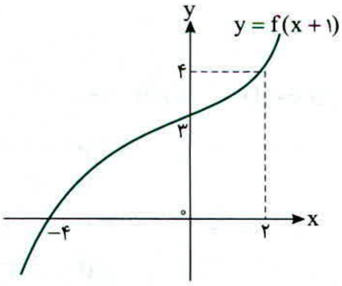
۱) $a=۲$ و $b=۱$

۲) $a=-۲$ و $b=-۱$

۳) $a=-۲$ و $b=۱$

۴) $a=۲$ و $b=-۱$

۲۰۴- در شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x+۱)$ رسم شده است. مقدار $\frac{f(-۳)+f(۳)}{f(۱)}$ چقدر است؟



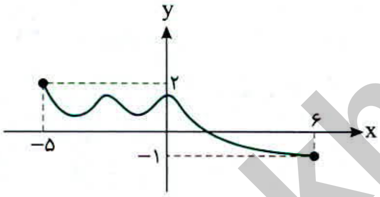
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۰۵- نمودار تابع $f(x+۳)$ به شکل زیر است. دامنه‌ی تابع f کدام است؟



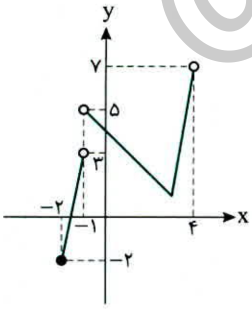
۱) $[-۱,۲]$

۲) $[-۵,۶]$

۳) $[-۸,۳]$

۴) $[-۲,۹]$

۲۰۶- اگر نمودار تابع $y=f(x+۲)-۳$ به شکل زیر باشد، دامنه و برد تابع f کدام است؟



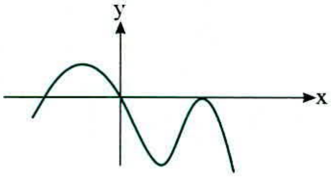
۱) دامنه: $[۰,۱)\cup(۱,۶)$، برد: $[-۱,۶)\cup(۸,۱۰)$

۲) دامنه: $[-۴,-۳)\cup(-۳,۲)$، برد: $[۱,۱۰)$

۳) دامنه: $[-۴,-۳)\cup(-۲,۲)$، برد: $[-۲,۷)$

۴) دامنه: $[۰,۱)\cup(۱,۶)$، برد: $[۱,۱۰)$

۲۰۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. معادله‌ی $f(x+۲)=۰$ چند جواب دارد؟



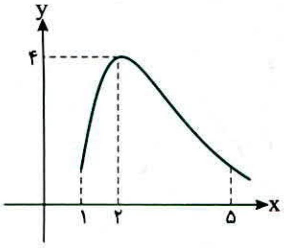
۱) صفر

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۰۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. جواب معادله‌ی $f(x+۱)=۴$ کدام است؟



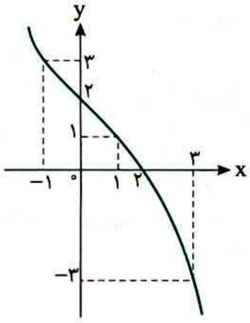
۱) ۲

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۴

۲۰۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. معادله‌ی $f(x-۳)=-۳$ چند جواب دارد؟



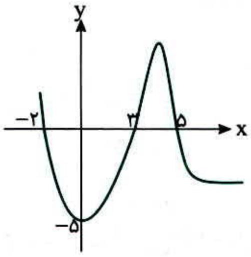
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۲۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. معادله‌ی $f\left(f(x+۱)\right)=-۵$ چند جواب دارد؟



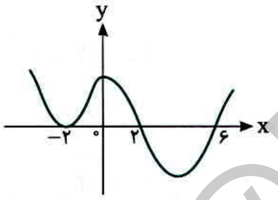
۱) ۳

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

۲۱۱- نمودار تابع $y=f(x-۲)$ در شکل مقابل رسم شده است. چند عدد صحیح در نامعادله‌ی $f(x+۲)<۰$ صدق می‌کنند؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل پنجم

تابع

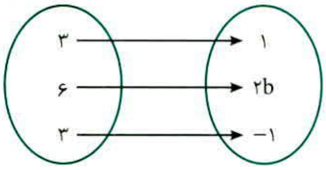
۱- گزینه‌ی ۴ در رابطه‌ی گزینه‌ی (۴) از عدد ۳− پیکان خارج نشده است، پس به عدد ۳− هیچ عددی نسبت نمی‌دهد و تابع نیست.

۲- گزینه‌ی ۱ از اعداد ۲ و ۳ دو پیکان خارج شـده است. پس اگر یکی از پیکان‌های هر یک را حذف کنیم، رابطه تبدیل به تابع می‌شود. یعنی دقیقاً ۲ پیکان باید حذف شود.

۳- گزینه‌ی ۴ چون از عدد ۳ دو پیکان خارج شـده است، پس باید $a+۲$ و $a^۲$ یکسان باشند. بنابراین

$$a^۲=a+۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\Rightarrow a=-۱ \text{ یا } a=۲$$

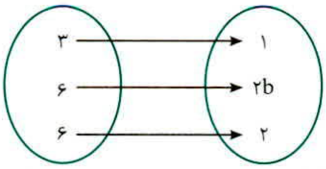
اگر $a=-۱$، رابطه به شکل زیر در می‌آید که واضح است تابع نیست.



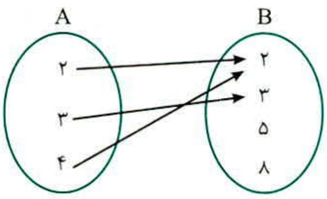
اگر $a=۲$، رابطه به شـکل زیر درمی‌آید. چون از ۶ دو پیکان خارج شده، پس باید ۲b و ۲ یکسان باشند. یعنی

$$۲b=۲\Rightarrow b=۱$$

پس $a-b=۱$.



۴- گزینه‌ی ۳ نمـودار رابطـه‌ای کـه بـه هـر عضو A مقسـوم‌علیه آن از B را نسـبت می‌دهد به شکل زیر است که تابع است.



۵- گزینه‌ی ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}a+۲b=۳\\ ۲a+۳b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow ab=-۲$$

۶- گزینه‌ی ۳ از تسـاوی داده شـده نتیجـه می‌گیریـم $a+b=\frac{۳}{۲}$ و $ab=-۱$. از معادله‌ی اول به‌دست می‌آید

$$b=-a+\frac{۳}{۲}$$

که از جای‌گذاری آن در معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود

$$۲a^۲-۳a-۲=۰$$

و در نتیجه $a=-\frac{۱}{۲}$ یا $a=۲$.

اگر $a=۲$، آن‌گاه $b=-\frac{۱}{۲}$ و تسـاوی $(a+۴b,\frac{a}{b})=(۰,-۴)$ برقرار است.

۷- گزینه‌ی ۳ در رابطـه‌ی $\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲)\}$ هیچ دو زوج مرتبی وجود ندارند که مؤلفه‌ی اول یکسـان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت داشته باشند، پس این رابطه تابع است.

۸- گزینه‌ی ۴ بـه ازای $m=۱$ رابطـه به‌صـورت $\{(۱,۲),(۰,۲),(۱,۲)\}$ درمی‌آید که تابع است.

به ازای $m=-۱$ رابطه به‌صورت $\{(-۱,-۲),(-۲,۰),(۱,۰)\}$ درمی‌آید که تابع است.

بـه ازای $m=۲$ رابطـه به‌صـورت $\{(۲,۴),(۱,۳),(۴,۳)\}$ درمی‌آید که تابع است.

بـه ازای $m=۰$ رابطـه به‌صـورت $\{(۰,۰),(-۱,۱),(۰,۱)\}$ درمی‌آید که تابع نیست.

۹- گزینه‌ی ۱ چـون دامنه‌ی تابع موردنظر مجموعه‌ی A اسـت، پس این تابع باید از زوج مرتب‌هایی تشکیل شده باشد که هر عضو A مؤلفه‌ی اول دقیقاً یک زوج مرتب از آن باشـد. در میان گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (۱) این ویژگی را دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ بـا توجـه بـه زوج مرتب‌هـای $(۲,۲)$ و $(۲,a-b)$ باید $a-b=۲$. با توجه به زوج مرتب‌های $(۳,۲a)$ و $(۳,a+۲b)$ بایـد $a+۲b=۲a$. بنابرایـن مقادیـر a و b از دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}a-b=۲\\ a+۲b=۲a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین $a+b=۶$.

۱۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به زوج مرتب‌های $(۱,۰)$ و $(۱,m^{۳}-۴m)$ باید تساوی $m^{۳}-۴m=۰$ برقرار باشد. پس

$$m(m^{۲}-۴)=۰ \Rightarrow m=۰, \quad m=\pm ۲$$

به ازای $m=۰$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f=\{(۱,۰),(۰,۲),(۰,۳),(۰,۲)\}$$

به ازای $m=۲$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f=\{(۱,۰),(۱,۲),(۰,۳),(۶,۲)\}$$

به ازای $m=-۲$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f=\{(۱,۰),(-۱,۲),(۰,۳),(-۶,۲)\}$$

پس فقط به ازای $m=-۲$ رابطه تابع است.

۱۲- گزینه‌ی ۴ با توجه به زوج مرتب‌های $(۳,a+b)$ و $(۳,۴)$ باید تساوی $a+b=۴$ برقرار باشد. با توجه به زوج مرتب‌های $(۴,۱)$ و $(۴,ab)$ باید تساوی $ab=۱$ برقرار باشد. از تساوی اول به‌دست می‌آید $b=۴-a$ که اگر آن را در تساوی دوم قرار دهیم، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$a(۴-a)=۱ \Rightarrow a^{۲}-۴a+۱=۰ \Rightarrow a=۲\pm\sqrt{۳}$$

اگر $a=۲+\sqrt{۳}$، آن‌گاه $b=۲-\sqrt{۳}$ و اگر $a=۲-\sqrt{۳}$. آن‌گاه $b=۲+\sqrt{۳}$. چون $a>b$، پس

$$a=۲+\sqrt{۳}, \quad b=۲-\sqrt{۳}$$

در نتیجه

$$\frac{a}{b}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{۲}=۷+۴\sqrt{۳}$$

۱۳- گزینه‌ی ۳

۱۴- گزینه‌ی ۱

۱۵- گزینه‌ی ۲

۱۶- گزینه‌ی ۴

۱۷- گزینه‌ی ۱ دامنه‌ی تابع $\{۱,۳,-۲\}$ است که مجموع اعضای آن برابر ۲ است.

۱۸- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع $\{۲,-۲,۳,-۳,-۱\}$ و برد آن $\{۳,۴,۷\}$ است. پس برد تابع ۲ عضو کم‌تر از دامنه‌ی آن دارد.

۱۹- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی تابع $\{۱,۳,۵\}$ است که ۳ عضو دارد. برد تابع $\{۳,۵,a^{۲}\}$ است که باید تعداد اعضای آن کم‌تر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^{۲}=۳$ یا باید $a^{۲}=۵$. بنابراین

$$a=\pm\sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad a=\pm\sqrt{۵}$$

پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۲۰- گزینه‌ی ۱ برای این‌که برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد ۶، $۳m$ و $۲m+n$ یکسان باشند:

$$۳m=۶ \Rightarrow m=۲$$

$$۲m+n=۶ \Rightarrow ۴+n=۶ \Rightarrow n=۲$$

بنابراین $mn=۴$.

۲۱- گزینه‌ی ۱

۲۲- گزینه‌ی ۳ از روی شکل معلوم است که ۳− و ۳ در دامنه‌ی f نیستند و هر عدد دیگر در بازه‌ی $(-۳,۷]$ در دامنه‌ی f است. بنابراین دامنه‌ی f مجموعه‌ی $(-۳,۳)\cup(۳,۷]$ است.

۲۳- گزینه‌ی ۴ از روی شکل معلوم است که هر عدد حقیقی بین ۵− و ۳ و نیز عدد ۵− در برد f قرار دارند. بنابراین برد f بازه‌ی $[-۵,۳)$ است.

۲۴- گزینه‌ی ۳ از روی شکل معلوم است که فقط ۳ در برد f قرار ندارد. بنابراین برد f مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\{۳\}$ است.

۲۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع $D=[-۳,۲]$ و برد آن $R=[-۲,۰]$ است. بنابراین

$$D-R=[-۳,-۲)\cup(۰,۲]$$

۲۶- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع $[-۲,۳)$ و برد آن $[-۱,۳]$ است که اعداد صحیح ۱−، ۰، ۱ و ۲ در هر دو مجموعه قرار دارند.

۲۷- گزینه‌ی ۳ اگر $(a,b)\in f$، آن‌گاه $f(a)=b$. چون $(۴,-۱)\in f$، پس $f(۴)=-۱$.

۲۸- گزینه‌ی ۳ چون $f(۳)=۱$، پس $f(f(۳))=f(۱)=۲$. از طرف دیگر $f(۲)=-۱$. بنابراین

$$\frac{f(f(۳))}{f(۲)}=-۲$$

۲۹- گزینه‌ی ۲ به نمودارهای زیر توجه کنید:

$$۱ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ۲$$

$$۳ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ۲$$

$$۴ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۳$$

$$۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} ?$$

چون $g(۳)$ تعریف نشده است، پس $g(f(۲))=g(۳)$ بی‌معنی است.

۳۰- گزینه‌ی ۳ واضح است که $f(۲)=۲$ و $g(۲)=۳$. بنابراین

$$f(g(۲))-g(f(۲))=f(۳)-g(۲)$$
$$=۱-۳=-۲$$

۳۱- گزینه‌ی ۱ چون $f(m)=۴$ و $f(۱)=m$، پس $f(f(۱))=f(m)=۴$. بنابراین $m^{۲}=۴$ و $f(m^{۲})=f(۴)=۳$. پس

$$f(f(m^{۲}))=f(۳)=f(m^{۲}-۱)=-۳$$

۳۲- گزینه‌ی ۳ چون $f(۱)=۲$ و $f(۴)=۲$، پس $f(a)=۴$ یا $f(a)=۱$. از $f(a)=۴$ نتیجه می‌شود $a=۵$ و از $f(a)=۱$ نتیجه می‌شود $a=۳$. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۳۳- گزینه‌ی ④ توجه کنید که $f(۱)$، $f(۲)$، $f(۳)$ و $f(۴)$ همگی می‌توانند برابر با ۱ باشند. بنابراین کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع آن‌ها برابر با ۴ است. به همین ترتیب، هر یک از عددهای $f(۱)$، $f(۲)$، $f(۳)$ و $f(۴)$ ممکن است برابر با ۶ باشد. در نتیجه، بیش‌ترین مقدار ممکن برای مجموع این عددها برابر با ۲۴ است. به این ترتیب، تفاضل مورد نظر برابر با ۲۰ است.

۳۴- گزینه‌ی ④ موارد داده شده را بررسی می‌کنیم.

الف) چون $f(x)<f(x+۲)$، پس

$$f(۱)<f(۳),\quad f(۳)<f(۵)$$

پس $f(۱)<f(۵)$.

ب) این مورد ممکن است درست نباشد. مثلاً اگر $f(x)=x$، آن وقت همواره $f(x)<f(x+۲)$، اما $|f(-۱)|=۱$ و $|f(۱)|=۱$، پس نابرابری $|f(-۱)|<|f(۱)|$ درست نیست.

پ) این مورد درست است. به نابرابری‌های زیر توجه کنید

$$\begin{cases} f(۰)<f(۲) \\ f(۲)<f(۴) \end{cases} \Rightarrow f(۰)+f(۲)<f(۲)+f(۲)=۲f(۲)<۲f(۴)$$

۳۵- گزینه‌ی ① با توجه به نمودار $f(-۲)=۱$ و $f(۲)=۲$، بنابراین

$$f(۲)-f(-۲)=۲-۱=۱$$

۳۶- گزینه‌ی ③ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که

$$f(-۴)=۳,\quad f(-۲)=۰,\quad f(۲)=-۳,\quad f(۰)=-۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست نیست.

۳۷- گزینه‌ی ④ از روی شکل معلوم است که

$$f(۳)=۵,\quad f(-۱)=۰,\quad f(۲)=۰,\quad f(۰)=۲$$

بنابراین

$$\frac{f(۳)+f(-۱)}{f(۲)+f(۰)}=\frac{۵+۰}{۰+۲}=\frac{۵}{۲}$$

۳۸- گزینه‌ی ① از روی شکل معلوم است که

$$f(۵)=۰,\quad f(۷)=۶,\quad f(۹)=۴,\quad f(۰)=۳,\quad f(-۱)=۰$$

بنابراین

$$\frac{f(۵)+f(۷)-f(۹)}{f(۰)-f(-۱)}=\frac{۰+۶-۴}{۳-۰}=\frac{۲}{۳}$$

۳۹- گزینه‌ی ③ از روی شکل معلوم است که $f(-۲)=-۲$، $f(-۱)=۰$ و $f(۰)=۲$. بنابراین

$$f(f(-۱))=f(۰)=۲$$

در نتیجه،

$$f(-۲)+f(f(-۱))=-۲+۲=۰$$

۴۰- گزینه‌ی ① از روی شکل‌ها معلوم است که

$$f(-۲)=۰,\quad g(۳)=۴,\quad f(۰)=۴,\quad g(۱)=۰$$

بنابراین

$$\frac{f(-۲)+g(۳)}{f(۰)+g(۱)}=\frac{۰+۴}{۴+۰}=۱$$

۴۱- گزینه‌ی ④ از روی شکل‌ها معلوم است که

۱) $f(۲)>۰$ و $g(۲)>۰$ در نتیجه $f(۲)g(۲)>۰$.

۲) $g(۱)>۰$ و $f(۱)>۲$ در نتیجه $f(۱)+g(۱)>۲+۰=۲>۱$.

۳) $f(-\frac{۷}{۲})>۰$ و $g(-\frac{۷}{۲})<۰$ در نتیجه $f(-\frac{۷}{۲})>g(-\frac{۷}{۲})$.

بنابراین هر سه گزینه درست هستند.

۴۲- گزینه‌ی ① از روی شکل معلوم است که

$$f(-۱)=۱,\quad f(۳)=۵,\quad g(۲)=۳,\quad g(۳)=۰$$

بنابراین

$$\frac{f(-۱)+f(۳)}{g(۲)+g(۳)}=\frac{۱+۵}{۳+۰}=۲$$

۴۳- گزینه‌ی ① باید در تساوی

$$f(x-۱)+af(x-۲)=f(x-۴)\qquad (۱)$$

به جای x عددی قرار دهیم که مقدار f به ازای $x-۱$، $x-۲$ و $x-۴$ مشخص باشد، تا مقدار a به‌دست آید. از روی شکل معلوم است که فقط مقدار f به ازای عددهای ۰، ۱، ۲ و ۳ را می‌دانیم:

$$f(۰)=۲,\quad f(۱)=۰,\quad f(۲)=-\frac{۱}{۴},\quad f(۳)=۰$$

بنابراین اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۴$، به‌دست می‌آید

$$f(۳)+af(۲)=f(۰)\Rightarrow ۰+a\times(-\frac{۱}{۴})=۲$$

بنابراین $a=-۸$.

۴۴- گزینه‌ی ③ توجه کنید که

$$g(-۲)=۳-f(-۲-۲)=۳-f(-۴)=۳-۰=۳$$
$$g(۵)=۳-f(۵-۲)=۳-f(۳)=۳-۳=۰$$

پس $g(-۲)+g(۵)=۳+۰=۳$.

۴۵- گزینه‌ی ③ خطی که پاره‌خط AB روی آن قرار دارد، از نقطه‌های $(-۱,۰)$ و $(۱,۲)$ گذشته است. بنابراین معادله‌ی آن $y=x+۱$ است. اگر مختصات نقطه‌ی B به‌صورت (a,b) باشد، چون طول پاره‌خط AB برابر با $۵\sqrt{۲}$ است، پس

$$\sqrt{(a-۱)^۲+(b-۲)^۲}=۵\sqrt{۲}\qquad (۱)$$

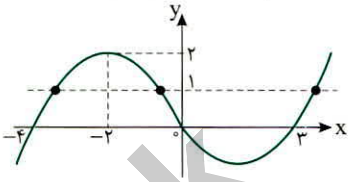
از طرف دیگر، چون (a,b) نقطه‌ای روی خط $y=x+۱$ است، پس $b=a+۱$. به این ترتیب، اگر دو طرف تساوی (۱) را به توان دو برسانیم، (توجه کنید که $a>۰$)

$$(a-۱)^۲+(a+۱-۲)^۲=۲\times۲۵\Rightarrow ۲(a-۱)^۲=۲\times۲۵\Rightarrow a=۶$$

بنابراین $b=۷$. در نتیجه $f(۶)=b=۷$.

۴۶- گزینه‌ی ۱ جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f با محور x هستند. بنابراین جواب‌های این معادله ۳- و ۳ هستند، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۹- است.

۴۷- گزینه‌ی ۴ تعداد جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۱$ برابر با تعداد نقطه‌های برخورد خط $y=۱$ با نمودار تابع f است. از روی شکل زیر معلوم است که تعداد این نقطه‌ها سه تا است.



۴۸- گزینه‌ی ۱ از روی شکل معلوم است که

$$f(۰)=-۱$$

بنابراین باید ریشه‌های معادله‌ی $f(۲x-۱)=۰$ را پیدا کنیم. چون f به ازای ۳-، ۱ و ۵ برابر با صفر است، پس باید معادله‌های زیر را حل کنیم:

$$۲x-۱=-۳,\quad ۲x-۱=۱,\quad ۲x-۱=۵$$

جواب‌های این معادله‌ها ۱-، ۱ و ۳ هستند، که مجموعشان می‌شود ۳.

۴۹- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادله‌ی موردنظر به‌صورت زیر است:

$$[-۵,-۲]\cup[۴,۵]$$

بنابراین ۶ عدد صحیح در این نامعادله صدق می‌کنند.

۵۰- گزینه‌ی ۴ کافی است در ضابطه‌ی تابع به جای x مقادیر ۲ و ۲- را قرار دهیم:

$$f(۲)=۳-۲(۲)=-۱$$
$$f(-۲)=۳-۲(-۲)=۷$$

بنابراین

$$f(۲)-f(-۲)=-۸$$

۵۱- گزینه‌ی ۱ با توجه به ضابطه‌ی f و g،

$$f(a)=۲a-a=a\Rightarrow g(f(a))=g(a)=۱-a$$
$$g(۱)=۱-۱=۰\Rightarrow f(g(۱))=f(۰)=-a$$

بنابراین باتوجه به فرض مسئله،

$$-a+۱-a=۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۵۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f(۴)=\frac{۴+۲}{۴-۱}=۲$$
$$f(f(۴))=f(۲)=\frac{۲+۲}{۲-۱}=۴$$
$$f(f(f(۴)))=f(۴)=۲$$

۵۳- گزینه‌ی ۳ چون $f(۲)=۴$، پس

$$\frac{۳\times۲-۲}{m+۴}=۴\Rightarrow\frac{۴}{m+۴}=۴$$

پس $m=-۳$.

۵۴- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$f(k-۳)=\frac{k-۳+۳}{۲}=\frac{k}{۲},\quad f(۲)=\frac{۵}{۲}$$
$$f(k-۱)=\frac{k-۱+۳}{۲}=\frac{k+۲}{۲}$$

در نتیجه، از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$f(k-۳)+f(۲)=۲f(k-۱)\Rightarrow\frac{k}{۲}+\frac{۵}{۲}=۲\,\frac{k+۲}{۲}$$
$$\Rightarrow k+۵=۲k+۴\Rightarrow k=۱$$

۵۵- گزینه‌ی ۲ مقادیر $f(g(۱))$ و $g(f(۱))$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۱)=۱-a\Rightarrow g(f(۱))=g(۱-a)=۲-۳(۱-a)=۳a-۱$$
$$g(۱)=-۱\Rightarrow f(g(۱))=f(-۱)=-۱-a$$

بنابراین باید تساوی $۳a-۱=-۱-a$ برقرار باشد. یعنی $a=۰$. پس $f(x)=x$ و در نتیجه $f(۲)=۲$.

۵۶- گزینه‌ی ۳ با جای‌گذاری مقادیر a و $a^۲$ به جای x در ضابطه‌ی f به‌دست می‌آید

$$f(a)=۴a-۱,\quad f(a^۲)=۴a^۲-۱$$

بنابراین

$$۴a-۱+۴a^۲-۱=-۳\Rightarrow۴a^۲+۴a+۱=۰$$
$$\Rightarrow(۲a+۱)^۲=۰$$
$$\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین

$$f(a)=f(-\frac{۱}{۲})=۴(-\frac{۱}{۲})-۱=-۳$$

۵۷- گزینه‌ی ۳ برای این‌که از تساوی $f(n-۲x)=x-۵$ مقدار $f(n)$ را حساب کنیم کافی است در این تساوی به جای x قرار دهیم صفر:

$$f(n-۲\times۰)=۰-۵\Rightarrow f(n)=-۵$$

همین‌طور، برای این‌که از تساوی $f(۴m-x)=۲x+۸$ مقدار $f(۴m)$ را حساب کنیم کافی است در این تساوی به جای x قرار دهیم صفر:

$$f(۴m-۰)=۲\times۰+۸\Rightarrow f(۴m)=۸$$

بنابراین

$$f(n)+f(۴m)=-۵+۸=۳$$

۵۸- گزینه‌ی ② برای این‌که از تساوی

$$f(۴x-۲)=۶x-۴ \quad (۱)$$

مقدار $f(۶)$ را پیدا کنیم، باید xای پیدا کنیم که $۴x-۲=۶$. اگر این معادله را حل کنیم به‌دست می‌آید $x=۲$. بنابراین، اگر در تساوی (۱) به جای x قرار دهیم ۲ به‌دست می‌آید

$$f(۴\times۲-۲)=۶\times۲-۴\Rightarrow f(۶)=۸$$

همین‌طور، اگر در تساوی (۱) به جای x قرار دهیم صفر، به‌دست می‌آید

$$f(۴\times۰-۲)=۶\times۰-۴\Rightarrow f(-۲)=-۴$$

بنابراین

$$f(۶)+f(-۲)=۸-۴=۴$$

۵۹- گزینه‌ی ④ برای این‌که از تساوی $f(۲x-۲m)=۲x-۶$ مقدار $f(m)$ را حساب کنیم، ابتدا xای را پیدا می‌کنیم که $۲x-۲m=m$. اگر این معادله را حل کنیم به‌دست می‌آید $x=\frac{۳m}{۲}$. به این‌ترتیب

$$f(۲\times\frac{۳m}{۲}-۲m)=۲\times\frac{۳m}{۲}-۶\Rightarrow f(m)=۳m-۶$$

و چون $f(m)=۶$، پس $۳m-۶=۶$، در نتیجه $m=۴$.

۶۰- گزینه‌ی ① ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{۱۳}+۹۶\Rightarrow f(۹۵)=\frac{۹۵}{۱۳}+۹۶=\frac{۹۵+۱۳\times۹۶}{۱۳}$$

در نتیجه

$$f(۹۵)=b\Rightarrow b=\frac{۹۵+۱۳\times۹۶}{۱۳}=\frac{۹۵+۱۳(۹۵+۱)}{۱۳}=\frac{۱۴\times۹۵+۱۳}{۱۳}$$

از طرف دیگر،

$$f(a)=۹۵\Rightarrow\frac{a}{۱۳}+۹۶=۹۵\Rightarrow a=-۱۳$$

بنابراین

$$\frac{۹۵-a}{۹۵-b}=\frac{۹۵+۱۳}{۹۵-\frac{۱۴\times۹۵+۱۳}{۱۳}}$$

$$=\frac{(۹۵+۱۳)۱۳}{۱۳\times۹۵-۱۴\times۹۵-۱۳}$$

$$=\frac{(۹۵+۱۳)۱۳}{-۹۵-۱۳}=-۱۳$$

۶۱- گزینه‌ی ① توجه کنید که

$$f(x)=۴x+۴\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{x}{۲})=۴(\frac{x}{۲})+۴=۲x+۴\\ f(\frac{x}{۴})=۴(\frac{x}{۴})+۴=x+۴\end{cases}$$

بنابراین

$$f(\frac{x}{۲})-f(\frac{x}{۴})=۲x+۴-(x+۴)=x$$

۶۲- گزینه‌ی ③ می‌توان نوشت

$$f(x)=۴x+۳\Rightarrow f(۲x+۱)=۴(۲x+۱)+۳=۸x+۷$$

بنابراین

$$f(۲x+۱)=۸x+k\Rightarrow ۸x+۷=۸x+k$$

پس $k=۷$.

۶۳- گزینه‌ی ② ابتدا توجه کنید که

$$f(a)=۴a-۳\Rightarrow a=\frac{f(a)+۳}{۴}$$

پس

$$f(۲a+۱)=۴(۲a+۱)-۳=۸a+۱$$

$$=۸(\frac{f(a)+۳}{۴})+۱$$

$$=۲f(a)+۷$$

۶۴- گزینه‌ی ① اگر در تساوی $f(b+ax)=\frac{a}{b}x$ به جای x، قرار دهیم $-\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید

$$f(۰)=\frac{a}{b}(-\frac{b}{a})=-۱$$

۶۵- گزینه‌ی ④ در تساوی

$$f(x)-۲f(-x)=x-۲$$

یک بار قرار می‌دهیم $x=۱$ و سپس قرار می‌دهیم $x=-۱$. در این صورت،

$$f(۱)-۲f(-۱)=۱-۲=-۱$$

$$f(-۱)-۲f(۱)=-۱-۲=-۳$$

اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم به‌دست می‌آید $f(-۱)=\frac{۵}{۳}$.

۶۶- گزینه‌ی ④ ابتدا توجه کنید که

$$(n+۱)f(n+۱)-nf(n)=۰\Rightarrow(n+۱)f(n+۱)=nf(n)$$

بنابراین

$$۴f(۴)=۳f(۳)=۲f(۲)=f(۱)$$

پس $f(۴)=\frac{f(۱)}{۴}$. به همین ترتیب،

$$f(۵)=\frac{f(۱)}{۵},\quad f(۲)=\frac{f(۱)}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{f(۴)+f(۵)}{f(۲)}=\frac{\frac{f(۱)}{۴}+\frac{f(۱)}{۵}}{\frac{f(۱)}{۲}}=\frac{\frac{۹}{۲۰}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۹}{۱۰}$$

۶۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$f(۳)=۹\times۳=۳^۳=۳^{۲\times۱+۱}$$
$$f(f(۳))=۹\times۳^۳=۳^۵=۳^{۲\times۲+۱}$$
$$f(f(f(۳)))=۹\times۳^۵=۳^۷=۳^{۲\times۳+۱}$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{\text{۲۰تا}}(۳)\cdots))=۳^{۲\times۲۰+۱}=۳^{۴۱}$$

۶۸- گزینه‌ی ۳ اگر ضابطه‌ی تابع $f(x)=ax+b$ باشد، مقدار a را می‌توان از تساوی‌های $a=\frac{۴-۲}{۳-m}=\frac{m-۴}{۲-۳}$ به‌دست آورد. یعنی

$$\frac{۲}{۳-m}=\frac{m-۴}{-۱}\Rightarrow(m-۴)(m-۳)=۲$$
$$\Rightarrow m^۲-۷m+۱۰=۰$$

بنابراین

$$m_۱=۲,\quad m_۲=۵$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با

$$m_۱+m_۲=۲+۵=۷$$

۶۹- گزینه‌ی ۴ اگر ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم، با توجه به نمودار $f(-۲)=۰$ و $f(۳)=۲$. بنابراین

$$\begin{cases}-۲a+b=۰\\ ۳a+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۲}{۵}\\ b=\frac{۴}{۵}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۵}x+\frac{۴}{۵}$$

پس $f(۲)=\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۵}$ و در نتیجه

$$f(f(۲))=f(\frac{۸}{۵})=\frac{۱۶}{۲۵}+\frac{۴}{۵}=\frac{۳۶}{۲۵}$$

۷۰- گزینه‌ی ۲ نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(-۱,۰)$ و $(۰,۳)$ گذشته است. معادله‌ی این خط $y=۳(x+۱)$ است. بنابراین $f(x)=۳(x+۱)$. به این ترتیب

$$۴f(a)-f(۲a)=۱۵\Rightarrow۴(۳(a+۱))-۳(۲a+۱)=۱۵$$
$$\Rightarrow۱۲a+۱۲-۶a-۳=۱۵\Rightarrow a=۱$$

۷۱- گزینه‌ی ۳ اگر ضابطه‌ی تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم، معلوم می‌شود که

$$f(۲)=۲a+b=۲,\quad f(-۱)=-a+b=-۷$$
$$\begin{cases}a-b=۷\\ ۲a+b=۲\end{cases}\Rightarrow۳a=۹\Rightarrow a=۳\Rightarrow b=-۴$$

بنابراین $f(x)=۳x-۴$ و در نتیجه $f(۱)=-۱$.

۷۲- گزینه‌ی ۴ چون تابع خطی است و از نقاط $(۱,-۱)$ و $(-۱,۳)$ می‌گذرد، پس ضابطه‌ی آن به‌صورت $f(x)=۱-۲x$ است. بنابراین

$$f(۲)=-۳=m$$
$$f(-۲)=۵=n$$
$$f(m)=۱-۲m\xrightarrow{m=-۳}f(m)=۷=p$$

در نتیجه

$$m+n+p=۹$$

۷۳- گزینه‌ی ۱ چون f تابعی خطی است، پس

$$f(x)=ax+b$$

بنابراین

$$f(۳)-f(۵)=۴\Rightarrow۳a+b-(۵a+b)=۴$$
$$\Rightarrow-۲a=۴\Rightarrow a=-۲$$
$$۲f(۵)-f(۳)=۸\Rightarrow۲(۵a+b)-(۳a+b)=۸$$
$$\Rightarrow۷a+b=۸\Rightarrow۷\times(-۲)+b=۸$$
$$\Rightarrow b=۲۲$$

به این ترتیب

$$f(-۱)=(-۲)\times(-۱)+۲۲=۲۴$$

۷۴- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$f(۱)=a+b\Rightarrow f(f(۱))=f(a+b)=a(a+b)+b$$
$$=a^۲+ab+b=۱$$
$$f(-۱)=-a+b\Rightarrow f(f(-۱))=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$
$$=-a^۲+ab+b=-۷$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲+ab+b-(-a^۲+ab+b)=۱-(-۷)$$
$$۲a^۲=۸\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$
$$a=۲\Rightarrow۴+۲b+b=۱\Rightarrow b=-۱\Rightarrow f(x)=۲x-۱$$
$$a=-۲\Rightarrow۴-۲b+b=۱\Rightarrow b=۳\Rightarrow f(x)=-۲x+۳$$

بنابراین $f(۰)=-۱$ یا $f(۰)=۳$.

۷۵- گزینه‌ی ۳ فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(x-۲)=a(x-۲)+b=ax+b-۲a$$
$$f(x+۱)=a(x+۱)+b=ax+a+b$$

در نتیجه

$$f(x+۱)+f(x-۲)=۲ax+۲b-a=۸x-۶$$

بنابراین

$$\begin{cases}۲a=۸\\ ۲b-a=-۶\end{cases}\Rightarrow a=۴,\quad b=-۱$$

پس $f(x)=۴x-۱$.

۷۶- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(ax+b) \\ &= a(ax+b)+b \\ &= a^{۲}x+ab+b \end{aligned}$$

پس تساوی $a^{۲}x+(ab+b)=۴x+۶$ یک اتحاد است. یعنی

$$\begin{cases} a^{۲}=۴ \\ ab+b=۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=۲ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow f(x)=۲x+۲ \Rightarrow f(۰)=۲ \\ a=-۲ \Rightarrow b=-۶ \Rightarrow f(x)=-۲x-۶ \Rightarrow f(۰)=-۶ \end{cases}$$

۷۷- گزینه‌ی ۳ اگر عددی جواب یکی از معادله‌های زیر باشد، در دامنه‌ی f است.

$$۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$
$$۲x-۱=۱ \Rightarrow x=۱$$
$$۲x-۱=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$
$$۲x-۱=۵ \Rightarrow x=۳$$

بنابراین صفر در دامنه‌ی f نیست.

۷۸- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع $(-۲,۴]$ است. پس

$$-۲<x\leq ۴$$

در نتیجه

$$-۸\leq -۲x<۴ \Rightarrow -۱۱\leq -۲x-۳<۱$$
$$\Rightarrow -۱۱\leq f(x)<۱$$

یعنی برد تابع $[-۱۱,۱)$ است.

۷۹- گزینه‌ی ۱ چون برد تابع بازه‌ی $[-۳,۱)$ است، پس

$$-۳\leq f(x)<۱$$

و در نتیجه

$$-۳\leq ۵-۴x<۱ \Rightarrow -۸\leq -۴x<-۴$$
$$\Rightarrow ۱<x\leq ۲$$

بنابراین دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(۱,۲]$ است.

۸۰- گزینه‌ی ۲ با توجه به این‌که نسبت تغییرات دما به تغییرات عمق ثابت و برابر ۴۰ است، می‌توان فرض کرد T (دما) تابعی خطی از عمق (h) است. در نتیجه

$$T=ah+b$$

اگر در این تساوی یک بار به جای h بگذاریم ۱ (و در نتیجه $T=۶۰$) و بار دیگر به جای h بگذاریم ۲ (و در نتیجه $T=۱۰۰$)، نتیجه می‌شود $b=۲۰$ و $a=۴۰$. بنابراین

$$T=۴۰h+۲۰$$

در نتیجه دمای مخزن در عمق ۱۲km برابر ۵۰۰°C است.

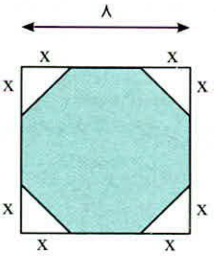
۸۱- گزینه‌ی ۱ اگر R شعاع دایره باشد، $S=\pi R^{۲}$ و در نتیجه $R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. از طرف دیگر $P=۲\pi R$. بنابراین

$$P=۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P(S)=۲\sqrt{\pi S}$$

۸۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل، مساحت هر مثلث برابر $\frac{x^{۲}}{۲}$ است. از این‌رو مساحت بخش باقی‌مانده برابر $۶۴-۴(\frac{x^{۲}}{۲})$ است.

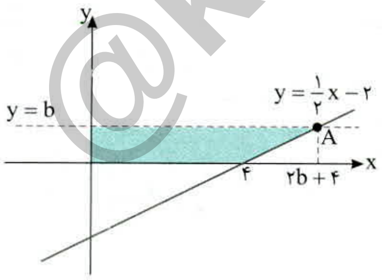
در نتیجه تابع مساحت آن به‌صورت $A(x)=۶۴-۲x^{۲}$ است.

می‌دانیم x باید نامنفی باشد و مقدار بریده شده یعنی ۲x نمی‌تواند از ۸ بیش‌تر شود. پس $۰\leq ۲x\leq ۸$ در نتیجه $۰\leq x\leq ۴$. بنابراین دامنه‌ی این تابع برابر $[۰,۴]$ است.



۸۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل زیر، با قرار دادن $y=b$ در معادله‌ی خط $y=\frac{۱}{۲}x-۲$ مختصات نقطه‌ی A را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه باید مساحت ذوزنقه‌ای را حساب کنیم که ارتفاع آن b، قاعده‌ی کوچک آن ۴ و قاعده‌ی بزرگ آن $۲b+۴$ است. یعنی

$$f(b)=\frac{(۴+۲b+۴)b}{۲}=b(۴+b)=b^{۲}+۴b$$



۸۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که طول AB برابر با عرض نقطه‌ی B است. نقطه‌ی B روی خط $y=۱۲-۲x$ است. بنابراین مختصات آن به‌صورت $(x,۱۲-۲x)$ است. در نتیجه مساحت مستطیل برابر است با

$$S=x(۱۲-۲x)$$

۸۵- گزینه‌ی ۴ از روی شکل معلوم است که نقطه‌ی A تا محل برخورد خط با محور x، یعنی نقطه‌ی $(۶,۰)$، می‌تواند حرکت کند. بنابراین، دامنه‌ی این تابع بازه‌ی $[۰,۶]$ است.

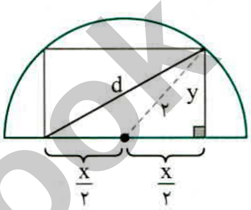
۸۶- گزینه‌ی ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس،

$$(\frac{x}{۲})^{۲}+y^{۲}=۲^{۲}\Rightarrow y^{۲}=۴-\frac{x^{۲}}{۴}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطه‌ی فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+۴-\frac{x^{۲}}{۴}}$$

بنابراین $d(x)=\sqrt{\frac{۳}{۴}x^{۲}+۴}$ ضابطه‌ی تابع موردنظر است.



۸۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا حجم مخزن را حساب می‌کنیم:

$V=$ حجم استوانه + ۲× حجم نیم کره

$$=\pi(r^{۲})(۲۰)+۲\times\frac{۲}{۳}\pi(r^{۳})=\frac{۴\pi}{۳}r^{۳}+۲۰\pi r^{۲}$$

این عبارت یک چندجمله‌ای درجه‌ی سوم از r است.

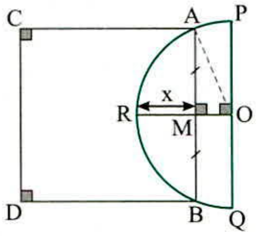
۸۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $AM^{۲}=OA^{۲}-OM^{۲}$. در نتیجه، چون $OM=۱-x$ و $OA=۱$، پس

$$AM^{۲}=۱-(۱-x)^{۲}=۲x-x^{۲}$$

در نتیجه مساحت مربع برابر است با

$$AB^{۲}=(۲AM)^{۲}=۴(۲x-x^{۲})=-۴x^{۲}+۸x$$

بنابراین نمودار تابع موردنظر قسمتی از یک سهمی به رأس $(۱,۴)$ است که بالاترین نقطه دارد.



۸۹- گزینه‌ی ۳ برای این‌که از تساوی $f(۹x-۲)=۹x+۷$ مقدار $f(-۱)$ را حساب کنیم، باید x ای را پیدا کنیم که $۹x-۲=-۱$. اگر این معادله را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=\frac{۱}{۹}$. بنابراین

$$f(۹\times\frac{۱}{۹}-۲)=۹\times\frac{۱}{۹}+۷\Rightarrow f(-۱)=۱+۷=۸$$

۹۰- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$f(x+۱)=f(x)+x\Rightarrow f(x+۱)-f(x)=x$$

بنابراین

$$f(۱۴)-f(۱۳)=۱۳$$
$$f(۱۳)-f(۱۲)=۱۲$$
$$\vdots$$
$$f(۱)-f(۰)=۰$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$f(۱۴)-f(۰)=۱۳+۱۲+\cdots+۱+۰$$
$$=\frac{۱۳(۱۳+۱)}{۲}=۹۱$$

۹۱- گزینه‌ی ۳ چون $f(۷)=۷$، پس در تساوی

$$f(x+۳)=xf(x)-۲x+۳\quad(۱)$$

ابتدا قرار می‌دهیم $x=۴$ تا مقدار $f(۴)$ به‌دست آید:

$$f(۷)=۴f(۴)-۲\times۴+۳\Rightarrow f(۴)=۳$$

اکنون در تساوی (۱) قرار می‌دهیم $x=۱$ تا مقدار $f(۱)$ به‌دست آید

$$f(۴)=۱\times f(۱)-۲\times۱+۳\Rightarrow ۳=f(۱)-۲+۳$$
$$\Rightarrow f(۱)=۲$$

۹۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f(۴)=f(۳)-۳=۳۲-۳$$
$$f(۵)=f(۴)-۳=۳۲-۳-۳=۳۲-۲\times۳$$
$$f(۶)=f(۵)-۳=۳۲-۲\times۳-۳=۳۲-۳\times۳$$

پس

$$f(۱۵)=۳۲-۱۲\times۳=-۴$$

۹۳- گزینه‌ی ۴ اگر در تساوی

$$f(۳x+۱)=۳x+۲f(-۳x)-۳$$

به‌ترتیب قرار دهیم $x=۰$ و $x=-\frac{۱}{۳}$، به‌دست می‌آید

$$f(۱)=۲f(۰)-۳$$
$$f(۰)=-۱+۲f(۱)-۳$$

اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم، به‌دست می‌آید $f(۱)=\frac{۱۱}{۳}$.

۹۴- گزینه‌ی ۳ اگر در تساوی

$$f(\frac{۲}{x})=۱۶+۲f(\frac{x}{۲})$$

یک بار قرار دهیم $x=۱$ و یک بار قرار دهیم $x=۴$، به‌دست می‌آید

$$f(۲)=۱۶+۲f(\frac{۱}{۲}),\quad f(\frac{۱}{۲})=۱۶+۲f(۲)$$

اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم، به‌دست می‌آید $f(۲)=-۱۶$.

۹۵- گزینه‌ی ۳ در مورد تابع $f(x)=x-۱$:

$$f(m+n)=m+n-۱$$
$$f(m)+f(n)=m-۱+n-۱=m+n-۲$$

در مورد تابع $f(x)=۲x+۱$:

$$f(m+n)=۲(m+n)+۱=۲m+۲n+۱$$
$$f(m)+f(n)=۲m+۱+۲n+۱=۲m+۲n+۲$$

در مورد تابع $f(x)=۲$:

$$f(m+n)=۲$$
$$f(m)+f(n)=۲+۲=۴$$

در مورد تابع $f(x)=۳x$:

$$f(m+n)=۳(m+n)=۳m+۳n$$
$$f(m)+f(n)=۳m+۳n$$

بنابراین رابطه‌ی داده شده به ازای هر m و n در تابع $f(x)=۳x$ برقرار است.

۹۶- گزینه‌ی ۴ اگر در تساوی $f(xy)=f(x)+f(y)+۳$ قرار دهیم $x=y=۱$، به‌دست می‌آید

$$f(۱)=f(۱)+f(۱)+۳$$

بنابراین $f(۱)=-۳$.

۹۷- گزینه‌ی ۴ اگر در تساوی

$$f(xy)=f(x)+f(y) \quad (۱)$$

قرار دهیم $x=۲$ و $y=۵$ به‌دست می‌آید

$$f(۱۰)=f(۲)+f(۵)\Rightarrow ۱=f(۲)+a$$
$$\Rightarrow f(۲)=۱-a$$

اکنون اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۲$ و $y=۳$، به‌دست می‌آید

$$f(۶)=f(۲)+f(۳)=۱-a+b$$

۹۸- گزینه‌ی ۴ تساوی را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$۲x+f(x)=۴x\times f(x)-۱۲$$

در نتیجه

$$(۴x-۱)\times f(x)=۲x+۱۲$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{۲x+۱۲}{۴x-۱}$$

۹۹- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$f(۲x)=\frac{۳(۲x)-۴}{۲(۲x)+۱}=\frac{۶x-۴}{۴x+۱}$$

بنابراین باید معادله‌ی $\frac{۶x-۴}{۴x+۱}=۲$ را حل کنیم:

$$\frac{۶x-۴}{۴x+۱}=۲\Rightarrow ۶x-۴=۲(۴x+۱)$$
$$\Rightarrow ۶x-۴=۸x+۲$$
$$\Rightarrow -۶=۲x\Rightarrow x=-۳$$

۱۰۰- گزینه‌ی ۱ اگر در تساوی $f(x-۲)=\frac{۳x}{۲x+۵}$ به جای x قرار دهیم $x+۲$، به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{۳(x+۲)}{۲(x+۲)+۵}=\frac{۳x+۶}{۲x+۹}$$

اکنون اگر معادله‌ی $\frac{۳x+۶}{۲x+۹}=۳$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $x=-۷$.

۱۰۱- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$f(a)-f(b)=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{۱}{\frac{ab}{b-a}}=f(\frac{ab}{b-a})$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow f(x)(x-۱)=x$$
$$\Rightarrow xf(x)-f(x)=x$$
$$\Rightarrow xf(x)-x=f(x)$$
$$\Rightarrow x(f(x)-۱)=f(x)$$
$$\Rightarrow x=\frac{f(x)}{f(x)-۱}$$

از طرف دیگر،

$$f(x+۱)=\frac{x+۱}{x+۱-۱}=\frac{x+۱}{x}=\frac{\frac{f(x)}{f(x)-۱}+۱}{\frac{f(x)}{f(x)-۱}}=\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$$

۱۰۳- گزینه‌ی ۳ گزینه‌ی (۳) تابعی ثابت، با مقدار ثابت a است.

۱۰۴- گزینه‌ی ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-۲=۴\Rightarrow m=۶$$
$$m+۲n=۴\Rightarrow ۶+۲n=۴\Rightarrow n=-۱$$
$$mn+k=۴\Rightarrow -۶+k=۴\Rightarrow k=۱۰$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۱ از روی شکل معلوم است که f تابع ثابت ۲ است. درنتیجه

$$\begin{cases} a+b-۱=۰ \\ b-۴=۲ \end{cases}\Rightarrow a=-۵,\quad b=۶$$

بنابراین $b-a=۱۱$.

۱۰۶- گزینه‌ی ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضریب $x^۲$ و x برابر با صفر باشند:

$$۴-a=۰\Rightarrow a=۴$$
$$۳+b=۰\Rightarrow b=-۳$$

در این صورت

$$f(x)=ab+۱۹=۴\times(-۳)+۱۹=۷$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^{۲}-۲m+۲x+۲x^{۲}$$
$$=(۲-k)x^{۲}+(۲+km)x-۲m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته باشد. یعنی ضرایب x و $x^{۲}$ باید صفر باشند. پس

$$۲-k=۰ \quad \Rightarrow k=۲$$
$$۲+km=۰\Rightarrow ۲+۲m=۰\Rightarrow m=-۱$$

بنابراین $k+m=۱$.

۱۰۸- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول** ضابطه‌ی تابع ثابت به‌صورت $f(x)=k$ است. بنابراین

$$\frac{۲x+۱}{ax-۳}=k\Rightarrow ۲x+۱=kax-۳k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=۲$ و $۱=-۳k$ برقرار باشند. بنابراین $k=-\frac{۱}{۳}$ و $a=-۶$.

راه‌حل دوم با توجه به این‌که $f(۰)=-\frac{۱}{۳}$ و تابع ثابت است، پس $f(۱)=-\frac{۱}{۳}$ و درنتیجه

$$f(۱)=\frac{۲+۱}{a-۳}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۹=-a+۳\Rightarrow a=-۶$$

۱۰۹- گزینه‌ی ۴ اگر f تابع ثابت c باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{(a-۲)x+۳}{۲x-۱}=c$$

بنابراین

$$(a-۲)x+۳=۲cx-c$$

بنابراین

$$a-۲=۲c\,, \quad ۳=-c$$

به‌این‌ترتیب $c=-۳$ و

$$a=۲c+۲=۲\times(-۳)+۲=-۴$$

۱۱۰- گزینه‌ی ۴ دقت کنید که $f(-۱)\neq f(۲)$ بنابراین تابع f تابعی ثابت نیست. هم‌چنین

$$۱=\frac{f(۲)-f(-۱)}{۲-(-۱)}\neq\frac{f(۲)-f(-۳)}{۲-(-۳)}=-۱$$

پس این تابع خطی هم نیست.

در نهایت، تابع $f(x)=۲+x^{۲}$ در سه شرط $f(-۱)=۳$، $f(۲)=۶$ و $f(-۳)=۱۱$ صدق می‌کند، بنابراین تابع f می‌تواند درجه‌ی دوم باشد.

۱۱۱- گزینه‌ی ۲

۱۱۲- گزینه‌ی ۴ اگر f تابعی همانی با دامنه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ باشد،

$$f(۱)=۱,\quad f(۲)=۲,\quad f(۳)=۳$$

بنابراین a، b و c به ترتیب عددهای ۱، ۲ و ۳ هستند. درنتیجه

$$abc=۱\times۲\times۳=۶$$

۱۱۳- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع‌های همانی $f(x)=x$ است. پس $f(۲)=۲$ و درنتیجه

$$۱۴-۲k=۲\Rightarrow ۲k=۱۲\Rightarrow k=۶$$

بنابراین باید $f(۱۴-۳\times۶)$ را حساب کنیم:

$$f(۱۴-۳\times۶)=f(-۴)=-۴$$

۱۱۴- گزینه‌ی ۲ چون f تابع همانی اســت، پس $f(x)=x$. بنابراین

$$f(۵-۳m)=۴m-۹\Rightarrow ۵-۳m=۴m-۹$$

درنتیجه $m=۲$.

۱۱۵- گزینه‌ی ۳ در تابع همانی، ضابطه به شکل $f(x)=x$ است. بنابراین

$$f(-۲)=m-۲n=-۲,\quad f(۳)=m+n=۳$$

$$\begin{cases} m-۲n=-۲\\ m+n=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=\frac{۴}{۳}\\ n=\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

از طرف دیگر $f(mn)=k$. بنابراین $k=mn=\frac{۲۰}{۹}$.

۱۱۶- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع همانی به شــکل $f(x)=x$ است. بنابراین

$$(a-۱)x+b-۲=x\Rightarrow a-۱=۱,\quad b-۲=۰$$

بنابراین $a=۲$ و $b=۲$. درنتیجه $a-b=۰$.

۱۱۷- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که اگر در تساوی

$$f(x-۴)=(۲a-۷)x+b+۱$$

به جای x قرار دهیم $x+۴$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=(۲a-۷)(x+۴)+b+۱$$
$$=(۲a-۷)x+۴(۲a-۷)+b+۱$$

درنتیجه، اگر f تابع همانی باشد

$$۲a-۷=۱\Rightarrow a=۴$$

و

$$۴(۲a-۷)+b+۱=۰\Rightarrow ۴(۲\times۴-۷)+b+۱=۰$$

یعنی $b=-۵$. درنتیجه چون $f(x)=x$ ، پس

$$f(a+b)=a+b=۴-۵=-۱$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۱ اگر f تابع همانی باشد، باید

$$\begin{cases} a-b=۱ \\ c+۳=۰ \end{cases} \quad (۱)$$

هم‌چنین، اگر g تابعی ثابت باشد، باید

$$a+b=۰ \quad (۲)$$

از حل دستگاه معادله‌ی (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=\frac{۱}{۲}$، $b=-\frac{۱}{۲}$ و $c=-۳$. به‌این‌ترتیب

$$f(a)=a=\frac{۱}{۲}$$

$$g(b)=-۲a=-۲(\frac{۱}{۲})=-۱$$

پس $f(a)+g(b)=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}$. (توجه کنید که مقدارهای b و c تأثیری در جواب ندارند.)

۱۱۹- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a-۲=۰, \quad b-۳=۱, \quad a+b-c=۰$$

درنتیجه $a=۲$، $b=۴$ و

$$c=a+b=۲+۴=۶$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a+۳=۰$$

$$b-۳=۱$$

$$-c+۱=۰$$

درنتیجه $a=-۳$، $b=۴$ و $c=۱$، پس $abc=-۱۲$.

۱۲۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^۲-۴)-۲ax+۴a}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)-۲a(x-۲)}{x-۲}$$

$$=\frac{(x-۲)(x+۲-۲a)}{x-۲}=x+۲-۲a, \quad x\neq ۲$$

ضابطه‌ی تابع‌های همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $۲-۲a=۰$ و درنتیجه $a=۱$، پس $f(a)=f(۱)=۱$.

۱۲۲- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۲mx-mx^۲+x^۲-۴x-m$$

$$=(۱-m)x^۲+(۲m-۴)x-m$$

ضابطه‌ی توابع خطی به شکل $y=ax+b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای درجه‌ی اول است. بنابراین باید $m=۱$ باشد تا ضابطه‌ی تابع یک چندجمله‌ای درجه‌ی اول شود، یعنی

$$m=۱\Rightarrow f(x)=-۲x-۱$$

بنابراین

$$f(m)=f(۱)=-۳$$

۱۲۳- گزینه‌ی ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطه‌ی آن یک چندجمله‌ای درجه‌ی یک باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطه‌ی داده شده ساده شوند. یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+۱$ است. یعنی

$$x^۲+mx+۲=(x+۱)(x+a)$$

$$x^۲+mx+۲=x^۲+(a+۱)x+a$$

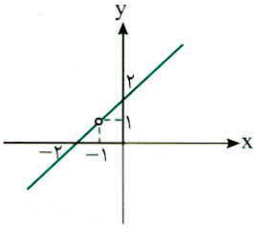
برای این‌که تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=۲, \quad m=a+۱\Rightarrow m=۳$$

پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۲)}{x+۱}=x+۲, \quad x\neq -۱$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۲۴- گزینه‌ی ۳ باید معین کنیم به ازای چه مقادیری از x، اعداد ۰، ۳- و ۴- توسط تابع تولید می‌شوند:

$$f(x)=۰ \Rightarrow x^۲-۴x=۰\Rightarrow x=۰, \quad x=۴$$

$$f(x)=-۳\Rightarrow x^۲-۴x=-۳\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\ , \quad x=۳$$

$$f(x)=-۴\Rightarrow x^۲-۴x=-۴\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰$$

$$\Rightarrow x=۲$$

بنابراین دامنه‌ی تابع حداکثر شامل اعداد فوق است. یعنی دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی $A=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ می‌تواند باشد. توجه کنید که با دامنه‌های مختلفی مانند $A_۱=\{۰,۱,۲\}$، $A_۲=\{۰,۱,۲,۳\}$، $A_۳=\{۱,۲,۴\}$ و ... برد تابع، مجموعه‌ی B خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع حداقل ۳ عضو و حداکثر ۵ عضو دارد.

۱۲۵- گزینه‌ی ۲ مقدار تابع به ازای مقادیر مختلف دامنه را حساب می‌کنیم:

$$f(-۲)=-۲-(-۲)^۳=۶$$

$$f(-۱)=-۱-(-۱)^۳=۰$$

$$f(۰)=۰-۰^۳=۰$$

$$f(۱)=۱-۱^۳=۰$$

$$f(۲)=۲-۲^۳=-۶$$

بنابراین برد تابع مجموعه‌ی $B=\{۰,۶,-۶\}$ است که ۳ عضو دارد.

۱۲۶- گزینه‌ی ۱ اگر $x\in[-۱,۳]$، آن‌گاه $-۱\le x\le ۳$، درنتیجه

$$۰\le x^۲\le ۹\Rightarrow -۲\le x^۲-۲\le ۷$$

بنابراین برد f بازه‌ی $[-۲,۷]$ است.

۱۲۷- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲+۲x-۲=(x+۱)^۲-۳$$

از طرف دیگر، اگر $x\in[-۴,۵]$ ، آن‌گاه

$$-۴\le x\le ۵\Rightarrow -۳\le x+۱\le ۶$$

$$۰\le (x+۱)^۲\le ۳۶$$

$$-۳\le (x+۱)^۲-۳\le ۳۳$$

بنابراین بزرگترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۱۲۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا $f(-۱)$ و $f(۲)$ را حساب می‌کنیم تا ضرایب a و b به‌دست آید:

$$\begin{cases} f(-۱)=a+b=۳ \\ f(۲)=۴a-۲b=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۱ \\ b=۲ \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^۲-۲x$ و درنتیجه $f(۱)=-۱$.

۱۲۹- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول** چون $f(x)=x^۳-(k+۹۶)x$، پس

$$f(-۱)=۸\Rightarrow(-۱)^۳-(k+۹۶)(-۱)=۸$$

$$-۱+(k+۹۶)=۸\Rightarrow k=-۸۷$$

بنابراین

$$f(۱)=۱^۳-(-۸۷+۹۶)(۱)=۱-۹=-۸$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(۱)+f(-۱)=۱-(k+۹۶)+(-۱)-(k+۹۶)(-۱)=۰$$

پس $f(۱)=-f(-۱)=-۸$.

۱۳۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا $g(-۱)$ را حساب می‌کنیم:

$$g(-۱)=۱+a$$

درنتیجه

$$f\big(g(-۱)\big)=f(۱+a)=۹$$

بنابراین

$$f(۱+a)=۳(۱+a)+a=۴a+۳=۹\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $f(x)=۳x+\frac{۳}{۲}$ و درنتیجه

$$f(a)=f(\frac{۳}{۲})=۳(\frac{۳}{۲})+\frac{۳}{۲}=۶$$

۱۳۱- گزینه‌ی ۴ اگر قرار دهیم $x=۱$ مقدار $f(-۱)$ حساب می‌شود:

$$f(۱)=f(۱)+f(-۱)-۱\Rightarrow f(-۱)=۱$$

اگر قرار دهیم $x=-۱$ مقدار $f(۱)$ حساب می‌شود:

$$f(-۱)=f(۱)+f(-۱)+۳\Rightarrow f(۱)=-۳$$

و اگر قرار دهیم $x=۲$ مقدار $f(۲)$ حساب می‌شود:

$$f(۲)=f(۱)+f(-۱)+۰\Rightarrow f(۲)=-۲$$

۱۳۲- گزینه‌ی ۲ مقادیر $x=۰$، $x=۲$ و $x=۳$ را در ضابطه‌ی تابع قرار می‌دهیم:

$$f(۰)=c$$

$$f(۲)=۴a+۲b+c$$

$$f(۳)=۹a+۳b+c$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(۳)-۲f(۲)+۲f(۰)&=۹a+۳b+c-۸a-۴b-۲c+۲c \\ &=a-b+c=f(-۱) \end{aligned}$$

۱۳۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲+۲x-۱۰=(x+۱)^۲-۱۱$$

پس

$$f(۹۹)=(۹۹+۱)^۲-۱۱=۱۰۰^۲-۱۱=۱۰۰۰۰-۱۱=۹۹۸۹$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$f(x)=(x-۳)^۲-۲$$

درنتیجه

$$f(۳+\sqrt{۱۱})=(۳+\sqrt{۱۱}-۳)^۲-۲=(\sqrt{۱۱})^۲-۲=۹$$

۱۳۵- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع به‌صورت

$$f(x)=(x-۲)^۳+۸$$

است. بنابراین

$$f(\sqrt[۳]{۲}+۲)=(\sqrt[۳]{۲}+۲-۲)^۳+۸=۲+۸=۱۰$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ قرینه‌اند، پس ابتدا مقدار $f(a)+f(-a)$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(a)+f(-a)&=(۲a^۳+a^۲-۴a-۵)+(-۲a^۳+a^۲+۴a-۵) \\ &=۲a^۲-۱۰ \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $a=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$. بنابراین

$$f(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})=۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲-۱۰=-۴\sqrt{۶}$$

۱۳۷- گزینه‌ی ۲ با جای‌گذاری عدد $-\frac{۱}{a}$ به جای x در ضابطه‌ی تابع به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{۱}{a})=\frac{-\frac{۱}{a}+۱}{-\frac{۱}{a}-۱}=\frac{\frac{-۱+a}{a}}{\frac{-۱-a}{a}}=\frac{a-۱}{-a-۱}=\frac{۱-a}{a+۱}$$

بنابراین

$$f(a)\times f(-\frac{۱}{a})=\frac{a+۱}{a-۱}\times\frac{۱-a}{a+۱}=-۱$$

۱۳۸- گزینه‌ی ۲ از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$f(a)=\frac{۸a}{a^۲+۳}=-۲$$

بنابراین $-۲a^۲-۶=۸a$ ، درنتیجه

$$a^۲+۴a+۳=۰\Rightarrow a=-۱ \text{ یا } a=-۳$$

بنابراین $f(a+۲)$ یکی از دو عدد زیر است:

$$a=-۱\Rightarrow f(a+۲)=f(۱)=۲$$

$$a=-۳\Rightarrow f(a+۲)=f(-۱)=-۲$$

۱۳۹- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$f(-t)=a(-t)^۴-b(-t)^۲+\frac{c}{(-t)^۲}=at^۴-bt^۲+\frac{c}{t^۲}=f(t)$$

درنتیجه

$$f(۲-\sqrt{۳})=f\left(-(۲-\sqrt{۳})\right)=f(\sqrt{۳}-۲)=۵$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$f(-k)+f(k)=(-k)^{۶۹}+۲(-k)+۱+k^{۶۹}+۲k+۱$$

$$=-k^{۶۹}-۲k+۱+k^{۶۹}+۲k+۱=۲$$

بنابراین

$$f(-۳۱)+f(۳۱)=۲$$

$$f(-۳۰)+f(۳۰)=۲$$

$$\vdots$$

$$f(-۱)+f(۱)=۲$$

از طرف دیگر،

$$f(۰)=۱$$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$f(-۳۱)+\cdots+f(۳۱)=۳۱\times۲+۱=۶۳$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x+۲)=x^۲+۴x+۲=(x+۲)^۲-۲$$

اکنون اگر فرض کنیم $x+۲=\sqrt{۳}$، یعنی $x=\sqrt{۳}-۲$، نتیجه می‌شود

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲=۱$$

۱۴۲- گزینه‌ی ۴ اگر در تساوی $f(۲۳-x)=\frac{x}{۲۳+x}$ به جای x قرار دهیم $-x+۲۳$ به‌دست می‌آید

$$f\left(۲۳-(-x+۲۳)\right)=\frac{-x+۲۳}{۲۳-x+۲۳}$$

$$f(x)=\frac{۲۳-x}{۴۶-x}$$

بنابراین

$$f(a)=۲\Rightarrow\frac{۲۳-a}{۴۶-a}=۲$$

$$۲۳-a=۲(۴۶-a)$$

$$a=۶۹$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$f(x^۲-۴x)=۸x-۲x^۲+۱۲$$

$$=-۲(x^۲-۴x)+۱۲$$

بنابراین، اگر x عددی حقیقی باشد که $x^۲-۴x=۳$ (چنین x ای وجود دارد، زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲-۴x-۳=۰$ مثبت است)، آن‌گاه

$$f(۳)=-۲(۳)+۱۲=۶$$

۱۴۴- گزینه‌ی ۴ اگر در تساوی

$$xf(x+۲)+f(۳x+۱)=۲x^۲+۳x+۴$$

به جای x قرار دهیم ۱ به‌دست می‌آید

$$۱\times f(۱+۲)+f(۳\times۱+۱)=۲\times۱^۲+۳\times۱+۴$$

پس $f(۳)+f(۴)=۹$.

۱۴۵- گزینه‌ی ۲ مقدار $x^۴$ را طوری پیدا می‌کنیم که $\frac{x^۴-۱}{x^۴+۲}=\frac{۱}{۴}$. یعنی

$$۴x^۴-۴=x^۴+۲\Rightarrow۳x^۴=۶\Rightarrow x^۴=۲$$

بنابراین $x^۸=۴$ و $x^{۱۶}=۱۶$.

با جای‌گذاری مقادیر فوق در تساوی داده شده، $f(\frac{۱}{۴})$ مشخص می‌شود

$$f(\frac{۱}{۴})=۲-۴+۱۶=۱۴$$

۱۴۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا x ای پیدا می‌کنیم که $\frac{x+۲}{x-۱}=۴$. به این‌ترتیب

$$\frac{x+۲}{x-۱}=۴\Rightarrow x+۲=۴(x-۱)\Rightarrow x=۲$$

اکنون اگر در تساوی $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{mx+۱}{x+۱}$ قرار دهیم $x=۲$ به‌دست می‌آید

$$f(\frac{۲+۲}{۲-۱})=\frac{m\times۲+۱}{۲+۱}$$

$$f(۴)=\frac{۲m+۱}{۳}$$

و چون $f(۴)=۳$، پس $\frac{۲m+۱}{۳}=۳$ و درنتیجه $m=۴$. به این‌ترتیب

$$f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{۴x+۱}{x+۱}$$

اکنون x ای پیدا می‌کنیم که $\frac{x+۲}{x-۱}=۰$. به‌این‌ترتیب $x=-۲$. درنتیجه

$$f(\frac{-۲+۲}{-۲-۱})=\frac{۴\times(-۲)+۱}{-۲+۱}$$

یعنی $f(۰)=۷$.

۱۴۷- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که اگر $۲x+۱=۱۱$، آن‌گاه $x=۵$. از طرف دیگر اگر $x=۵$،

$$۳x-۴=۳\times۵-۴=۱۱$$

بنابراین، اگر در تساوی

$$\frac{f(۲x+۱)+x}{۱-f(۳x-۴)}=\frac{x+۴}{x-۸}$$

قرار دهیم $x=۵$ به‌دست می‌آید

$$\frac{f(۱۱)+۵}{۱-f(۱۱)}=\frac{۹}{-۳}=-۳$$

درنتیجه $f(۱۱)=۴$.

۱۴۸- گزینه‌ی ④ ابتدا معادله‌ی $\frac{۳x+۴}{۵x+۲}=۲$ را حل می‌کنیم:

$$۳x+۴=۲(۵x+۲)=۱۰x+۴$$

پس $x=۰$. اکنون اگر در تساوی

$$f(\frac{۳x+۴}{۵x+۲})=\frac{x^۲+۶x+۱۰}{۳x+۲}$$

به جای x قرار دهیم صفر به‌دست می‌آید

$$f(\frac{۴}{۲})=\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow f(۲)=۵$$

۱۴۹- گزینه‌ی ③ توجه کنید که

$$f(\frac{x^۲+۱}{x})=۳x+\frac{۳}{x}-۴$$

$$f(x+\frac{۱}{x})=۳(x+\frac{۱}{x})-۴$$

بنابراین، اگر x عددی باشد که $x+\frac{۱}{x}=۴$ (چنین عددی وجود دارد، زیرا معادله‌ی $x+\frac{۱}{x}=۴$ معادل است با $x^۲-۴x+۱=۰$، که دلتای آن مثبت است)، آن‌گاه

$$f(۴)=۳\times۴-۴=۸$$

۱۵۰- گزینه‌ی ③ ابتدا معادله‌ی $\frac{x^۲+x+۱}{x^۲-x+۱}=۳$ را حل می‌کنیم که به‌صورت $۲x^۲-۴x+۲=۲(x-۱)^۲=۰$ درمی‌آید و تنها جواب آن $x=۱$ است. حال اگر در تساوی فرض مسئله به جای x ، ۱ قرار دهیم معلوم می‌شود.

$$f(۳)=۱+۳+۲=۶$$

۱۵۱- گزینه‌ی ② ابتدا توجه کنید که چون $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، پس

$$f(a^۲)=۲۳\Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۲۳\Rightarrow(a+\frac{۱}{a})^۲-۲=۲۳$$

پس $(a+\frac{۱}{a})^۲=۲۵$ و چون $a+\frac{۱}{a}$ عددی مثبت است (زیرا a عددی مثبت است)، پس $a+\frac{۱}{a}=۵$. از طرف دیگر، بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$f(a^۳)=a^۳+\frac{۱}{a^۳}=(a+\frac{۱}{a})(a^۲+\frac{۱}{a^۲}-a\times\frac{۱}{a})$$
$$=۵(۲۳-۱)=۱۱۰$$

۱۵۲- گزینه‌ی ④ در ضابطه‌ی تابع به جای x مقادیر $x+۲$ و $x-۲$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x+۲)=(x+۲)^۲-۴(x+۲)-۲=x^۲-۶$$

$$f(x-۲)=(x-۲)^۲-۴(x-۲)-۲=x^۲-۸x+۱۰$$

بنابراین ساده شده‌ی A به شکل زیر است:

$$A=x^۲-۶+x^۲-۸x+۱۰-۸=۲x^۲-۸x-۴$$
$$=۲(x^۲-۴x-۲)=۲f(x)$$

۱۵۳- گزینه‌ی ① در ضابطـه‌ی تابع به‌جای x مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-۱)=a(x-۱)^۲-b(x-۱)+۲$$
$$=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲$$

بنابراین از رابطه‌ی داده شده به‌دست می‌آید

$$f(x-۱)-f(x)=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲-ax^۲+bx-۲$$
$$=۶x+۲$$

بنابراین

$$-۲ax+a+b=۶x+۲$$

چون رابطه‌ی فوق به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases}-۲a=۶\\a+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\b=۵\end{cases}\Rightarrow a-b=-۸$$

۱۵۴- گزینه‌ی ② توجه کنید که

$$f(x+۲)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۹$$
$$=(x+۲)^۳+۱$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-۲$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=x^۳+۱$$

۱۵۵- گزینه‌ی ④ توجه کنید که

$$f(a)+f(\frac{۱}{a})=\frac{a}{a^۲+۱}+\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{۱}{a^۲}+۱}=\frac{a}{a^۲+۱}+\frac{a}{a^۲+۱}$$
$$=\frac{۲a}{a^۲+۱}=۲\frac{a}{a^۲+۱}=۲f(a)$$

۱۵۶- گزینه‌ی ③ چون $۲>۰$، پس $f(۲)=۲\times۲-۳=۱$. چون $-۲<۰$، پس $f(-۲)=-۲+۲=۰$. بنابراین

$$f(۲)+f(-۲)=۱$$

۱۵۷- گزینه‌ی ① با توجه به ضابطه‌ی تابع به‌دست می‌آید

$$-۱<۱\Rightarrow f(-۱)=۲-(-۱)=۳$$
$$۳>۱\Rightarrow f(f(-۱))=f(۳)=۳+۲=۵$$

۱۵۸- گزینه‌ی ① چون $\sqrt{۲}\notin\mathbb{Q}$ پس $f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲}^۲=۲$. بنابراین

$$f(f(\sqrt{۲}))=f(۲)=۳\times۲=۶$$

۱۵۹- گزینه‌ی ④ چون $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\notin\mathbb{Q}$، پس

$$f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}$$

درنتیجه، چون $\frac{۱}{۲}\in\mathbb{Q}$،

$$f(f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))=f(\frac{۱}{۲})=۳\times\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

۱۶۰- گزینه‌ی ① چون $a \notin \mathbb{Q}$ پس $f(a)=۲-a$. تفاضل یک عدد گنگ و یک عدد گویا، عددی گنگ است. پس $۲-a$ عددی گنگ است و درنتیجه

$$f\big(f(a)\big)=f(۲-a)=۲-(۲-a)=a$$

۱۶۱- گزینه‌ی ③ ابتدا xای پیدا می‌کنیم که $۲x-۱=۰$. به‌این‌ترتیب $x=\frac{۱}{۲}$. چون $\frac{۱}{۲}>-۱$، پس

$$f(۲\times\frac{۱}{۲}-۱)=-۲\times\frac{۱}{۲}+۴$$

پس $f(۰)=۳$. اکنون xای پیدا می‌کنیم که $۲x-۱=-۵$. به‌این‌ترتیب $x=-۲$. چون $-۲<-۱$، پس

$$f\big(۲\times(-۲)-۱\big)=۳\times(-۲)-۲$$

پس $f(-۵)=-۸$. بنابراین

$$f(۰)+f(-۵)=۳-۸=-۵$$

۱۶۲- گزینه‌ی ② توجه کنید که

$$f(-۵)=\frac{-۵+۲}{۳}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$
$$f(۰)=g(۰)$$

اکنون اگر در تساوی $g(x-۲)=۲-x$ به جای x قرار دهیم ۲ به‌دست می‌آید

$$g(۲-۲)=g(۰)=۲-۲=۰$$

بنابراین

$$f(-۵)+f(۰)=-۱+۰=-۱$$

۱۶۳- گزینه‌ی ② با توجه به ضابطه‌ی تابع، واضح است که $f(۲)=\frac{۳}{۲+a}$، بنابراین

$$\frac{۳}{۲+a}=a \Rightarrow a^۲+۲a-۳=۰ \Rightarrow a=۱ \text{ یا } a=-۳$$

اگر $a=۱$، آن‌گاه $f(۱)=b$، که غیرقابل قبول است. زیرا تابع به ازای $x=۱$ تعریف نشده است. اگر $a=-۳$، آن‌گاه $f(-۳)=b$. بنابراین

$$\frac{۴}{-۳+b}=b \Rightarrow b^۲-۳b=۴ \Rightarrow b^۲-۳b-۴=۰$$

بنابراین $b=-۱$ یا $b=۴$.

پس $a+b$ می‌تواند -۴ یا ۱ باشد.

۱۶۴- گزینه‌ی ② چون

$$f(-۱)=a\times(-۱)+b=b-a$$
$$f(۶)=a\times(۶)+۴b=۶a+۴b$$

پس

$$f(-۱)+f(۶)=-۱۰$$
$$b-a+۶a+۴b=-۱۰$$
$$۵(a+b)=-۱۰$$
$$a+b=-۲$$

۱۶۵- گزینه‌ی ① ابتدا توجه کنید که $g(۳)=۲\times۳-۳=۳$. اکنون، اگر $m<۱$، آن‌گاه

$$f(m)=\frac{۲m+۱}{۳}$$

و چون $f(m)=g(۳)$، پس $\frac{۲m+۱}{۳}=۳$، یعنی $m=۴$، که درست نیست، زیرا فرض کرده‌ایم $m<۱$. بنابراین $m\geq۱$. درنتیجه

$$f(m)=g(۳)$$
$$m\times m+۲=۳$$
$$m^۲+۲=۳$$

پس $m=۱$.

۱۶۶- گزینه‌ی ① اگر $a>۱$، آن‌گاه

$$f(a)=a^۲ \Rightarrow a^۲=۴a+۵$$
$$\Rightarrow a^۲-۴a-۵=۰ \Rightarrow a=۵ \text{ یا } a=-۱ \text{ غ‌ق}$$

اگر $-۱\leq a\leq۱$، آن‌گاه

$$f(a)=a+۳ \Rightarrow a+۳=۴a+۵ \Rightarrow a=\frac{-۲}{۳}$$

اگر $a<-۱$، آن‌گاه

$$f(a)=a+۲ \Rightarrow a+۲=۴a+۵ \Rightarrow a=-۱ \text{ غ‌ق}$$

بنابراین دو مقدار ۵ و $\frac{-۲}{۳}$ برای a وجود دارد.

۱۶۷- گزینه‌ی ④ با توجه به این‌که -۲ عددی منفی است و اگر $x<۰$ مقدار $-x^۲$ نیز منفی است، مقادیر تابع f همواره منفی هستند. یعنی $f(a)<۰$. پس $-f(a)>۰$ و درنتیجه $f(-f(a))=-۲$. بنابراین

$$f\big(f(-f(a))\big)=f(-۲)=-(-۲)^۲=-۴$$

۱۶۸- گزینه‌ی ① توجه کنید که $f(۱)=۳$. درنتیجه

$$f(f(۱))=f(۳)=m+۹=۶$$

بنابراین $m=-۳$.

۱۶۹- گزینه‌ی ③ توجه کنید که $f(۱)=f(۵)=c$ و $f(۴)=۲(۴)^۲=۳۲$. بنابراین

$$۳۲+۲c=۵۴$$
$$c=۱۱$$

۱۷۰- گزینه‌ی ① برای ورودی‌های فرد، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن کم‌تر است. یعنی

$$f(۱)=۱-۱=۰,\quad f(۳)=۳-۱=۲,\quad \ldots,\quad f(۱۹)=۱۹-۱=۱۸$$

برای ورودی‌های زوج، خروجی تابع f یک واحد از ورودی آن بیش‌تر است. یعنی

$$f(۲)=۲+۱=۳,\quad f(۴)=۴+۱=۵,\quad \ldots,\quad f(۲۰)=۲۰+۱=۲۱$$

بنابراین

$$A=(۰+۲+۴+\cdots+۱۸)+(۳+۵+\cdots+۲۱)$$
$$=۲+۳+۴+\cdots+۲۱-۲۰$$
$$A=\frac{۲۰}{۲}(۲+۲۱)-۲۰=۲۳۰-۲۰=۲۱۰$$

۱۷۱- گزینه‌ی ۳ توان ۲۴ اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt[۳]{۲}$، $\sqrt[۴]{۲}$، $\sqrt[۶]{۲}$ و $\sqrt[۸]{۲}$ عددی صحیح است و درنتیجه

$$f(\sqrt{۲})=f(\sqrt[۳]{۲})=f(\sqrt[۴]{۲})=f(\sqrt[۶]{۲})=f(\sqrt[۸]{۲})=۱$$

توان ۲۴ اعداد $\sqrt[۵]{۲}$، $\sqrt[۷]{۲}$ و $\sqrt[۹]{۲}$ عددی غیر صحیح است، پس

$$f(\sqrt[۵]{۲})=f(\sqrt[۷]{۲})=f(\sqrt[۹]{۲})=-۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با

$$۵\times۱+۳(-۱)=۲$$

۱۷۲- گزینه‌ی ۱ اگر x مقسوم‌علیه ۳۰ باشد، $\frac{۳۰}{x}$ عددی صحیح می‌شود و در این صورت خروجی تابع f همان x است. در غیر این صورت خروجی تابع f عدد ۱− است. بنابراین

$$f(۱)=۱,\quad f(۲)=۲,\quad f(۳)=۳,\quad f(۵)=۵$$
$$f(۶)=۶,\quad f(۱۰)=۱۰,\quad f(۱۵)=۱۵$$

پس از ۲۹ مقداری که می‌خواهیم آن‌ها را جمع کنیم، هفت عدد ۱− نیستند که در بالا نوشته شده‌اند. ۲۲ عدد دیگر ۱− هستند. بنابراین مجموع خواسته شده برابر است با

$$A=۲۲(-۱)+۱+۲+۳+۵+۶+۱۰+۱۵=۲۰$$

۱۷۳- گزینه‌ی ۲ از اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ فقط اعداد ۱، ۸، ۲۷ و ۶۴ دارای ریشه‌ی سوم گویا هستند. پس

$$f(۱)=۱+۱,\quad f(۸)=۸+۱$$
$$f(۲۷)=۲۷+۱,\quad f(۶۴)=۶۴+۱$$

بنابراین مجموع خواسته شده برابر است با

$$A=f(۱)+f(۲)+\cdots+f(۱۰۰)$$
$$=(۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰)+(۱+۱+۱+۱)$$
$$A=\frac{۱۰۰}{۲}(۱+۱۰۰)+۴=۵۰۵۴$$

۱۷۴- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی گزینه‌ی (۴) متعلق به یک تابع نیست، زیرا به ازای $x=۱$ دو مقدار ۳ و ۵ برای $f(x)$ وجود دارد:

$$f(x)=x^۲+۲\Rightarrow f(۱)=۳$$
$$f(x)=۲x+۳\Rightarrow f(۱)=۵$$

۱۷۵- گزینه‌ی ۴ اگر ضابطه‌ی داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در $x=۲$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد. یعنی مقدار $f(۲)$ در ضابطه‌ی اول با مقدار آن در ضابطه‌ی دوم برابر باشد. اگر $f(x)=۲x^۲+a$، آن‌گاه $f(۲)=۸+a$.

اگر $f(x)=ax^۳-۲$، آن‌گاه $f(۲)=۸a-۲$.

بنابراین

$$۸+a=۸a-۲\Rightarrow ۷a=۱۰\Rightarrow a=\frac{۱۰}{۷}$$

و درنتیجه

$$۷f(۷a)=۷f(۱۰)=۷(۲\times۱۰^۲+\frac{۱۰}{۷})=۱۴۱۰$$

۱۷۶- گزینه‌ی ۳ اگر $۲a>a-۱$، آن‌گاه دامنه‌ی دو ضابطه، اشتراکی ندارند و ضابطه‌ی داده شده مربوط به یک تابع است. یعنی $a>-۱$. اگر $a=-۱$، ضابطه‌ی f به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x\geq-۲\\ ۳x+۶ & x\leq-۲\end{cases}$$

چون از هر دو ضابطه مقدار $f(-۲)$ برابر صفر به‌دست می‌آید، بازهم این ضابطه متعلق به یک تابع است. بنابراین $a\geq-۱$ جواب مسئله است.

۱۷۷- گزینه‌ی ۳ برای x های مثبت یا صفر خطی با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۲− باید رسم کنیم و برای xهای منفی خطی با شیب منفی و عرض از مبدأ ۲ باید رسم کنیم. پس گزینه‌ی (۳) درست است.

۱۷۸- گزینه‌ی ۴ برای xهای بزرگ‌تر از ۱− خطی با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۳− باید رسم کنیم. برای x های کوچک‌تر از یا برابر با ۱− خطی با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۱ باید رسم کنیم. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

۱۷۹- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را برای $x\geq۲$ به‌دست می‌آوریم. چون نمودار تابع از نقطه‌های $(۲,-۱)$ و $(۳,۱)$ گذشته است، این ضابطه به‌صورت زیر است:

$$y=-۱+۲(x-۲)=۲x-۵$$

بنابراین $A=-۲$ و $C=-۵$. درنتیجه ضابطه‌ی تابع برای $x\leq-۱$ به شکل $-۲x+B$ است. چون نمودار از نقطه‌ی $(-۱,۱)$ گذر می‌کند، بنابراین $B=-۱$. پس $B+C=-۶$.

۱۸۰- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع از دو پاره‌خط تشکیل شده است که از نقاط $(-۲,۳)$ و $(۰,-۲)$ و نیز $(۸,۶)$ و $(۰,-۲)$ می‌گذرند. درنتیجه ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر است:

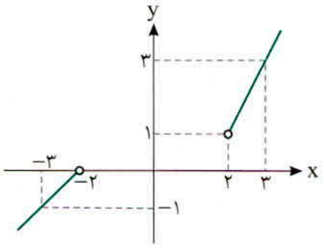
$$f(x)=\begin{cases}-\frac{۵}{۲}x-۲ & -۲\leq x\leq۰\\ x-۲ & ۰\leq x\leq۸\end{cases}$$

۱۸۱- گزینه‌ی ۱ برای x های بزرگ‌تر از یا برابر با ۱− باید سهمی $y=x^۲$ را رسم کنیم. برای xهای کوچک‌تر از ۱− باید خطی با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۱− رسم کنیم. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

۱۸۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی سهمی را پیدا می‌کنیم. رأس این سهمی $(۰,۰)$ است و از نقطه‌ی $(۲,۴)$ می‌گذرد. بنابراین معادله‌ی آن به‌صورت $y=x^۲$ است.

روی بازه‌ی $(-\infty,-۲]$، نمودار تابع خطی است که از نقطه‌های $(-۲,۴)$ و $(-۳,۰)$ می‌گذرد، که معادله‌ی آن $y=۴x+۱۲$ است. برای $x\geq۲$، تابع ثابت و برابر ۴ است.

۱۸۳- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که برد تابع $\mathbb{R}-[۰,۱]$ است.



۱۸۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که اگر $x \geq ۳$، آن‌گاه $x+۲ \geq ۵$.
هم‌چنین، اگر $x<۳$، آن‌گاه $-x+۸>۵$.
بنابراین برد f بازه‌ی $[۵,+\infty)$ است.

۱۸۵- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که اگر $x \geq ۲$، آن‌گاه $f(x)=x-۵$. بنابراین

$$\begin{cases} x \geq ۲ \\ f(x) \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ \\ x-۵ \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ \\ x \leq ۵ \end{cases}$$

و تنها عددهای صحیحی که در این نابرابری‌ها صدق می‌کنند، ۲، ۳، ۴ و ۵ هستند. همین‌طور، اگر $x<۲$، آن‌گاه $f(x)=-x-۳$.
بنابراین

$$\begin{cases} x<۲ \\ f(x) \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<۲ \\ -x-۳ \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<۲ \\ x \geq -۳ \end{cases}$$

و تنها عددهای صحیحی که در این نابرابری‌ها صدق می‌کنند، ۳−، ۲−، ۱−، ۰ و ۱ هستند.
بنابراین مجموع عددهای مورد نظر برابر است با ۹.

۱۸۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا نمایش جبری تابع را پیدا می‌کنیم. اگر زمان مکالمه را با x نشان دهیم، نتیجه می‌شود برای $۰ \leq x \leq ۳$، هزینه‌ی مکالمه برابر است با $C=۳$. اکنون اگر $x \geq ۳$ هزینه‌ی مکالمه به‌صورت زیر است:

$$C=\underbrace{۳}_{\text{هزینه‌ی اولیه}}+۱\times\underbrace{(x-۳)}_{\text{دقایق بیش از ۳}}=x$$

درنتیجه تابع هزینه به‌صورت $C(x)=\begin{cases} ۳ & ۰ \leq x \leq ۳ \\ x & x \geq ۳ \end{cases}$ است.

۱۸۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به تساوی $\frac{a^۲+۱}{a^۲}=۱+\frac{۱}{a^۲}$ می‌توانیم مقدار $f(\frac{a^۲+۱}{a^۲})$ را حساب کنیم.

$$f(\frac{a^۲+۱}{a^۲})=f(۱+\frac{۱}{a^۲})=|۱+\frac{۱}{a^۲}-۱|-|۱+\frac{۱}{a^۲}|$$
$$=\frac{۱}{a^۲}-۱-\frac{۱}{a^۲}=-۱$$

بنابراین $a=-۱$ و باید $f(-۱)$ را حساب کنیم:

$$f(a)=f(-۱)=|-۱-۱|-|-۱|=۲-۱=۱$$

۱۸۸- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع f به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x \geq \frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=۵(۳x-۱)+۳(۵x-۱)=۳۰x-۸$$

$$\frac{۱}{۵} \leq x \leq \frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=-۵(۳x-۱)+۳(۵x-۱)=۲$$

$$x \leq \frac{۱}{۵} \Rightarrow f(x)=-۵(۳x-۱)-۳(۵x-۱)=-۳۰x+۸$$

می‌دانیم $\frac{۱}{۳}>\sqrt{۳}-\sqrt{۲} \simeq ۰/۳>\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}>\sqrt{۵}-۲ \simeq ۰/۲۳>\frac{۱}{۵}$.
بنابراین

$$f(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۵}-۲)=۲+۲=۴$$

۱۸۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقادیر $f(۲-|a|)$ و $f(۲+|a|)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۲-|a|)=\left|۲-|a|-۲\right|+۱=\left|-|a|\right|+۱=|a|+۱$$
$$f(۲+|a|)=\left|۲+|a|-۲\right|+۱=\left||a|\right|+۱=|a|+۱$$

بنابراین

$$۲f(۲-|a|)-f(۲+|a|)=۲|a|+۲-|a|-۱=|a|+۱$$

۱۹۰- گزینه‌ی ۱ برای $x>۱$ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-۱>۰,\quad x+۱>۰ \Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}+\frac{۱-x}{x-۱}=۱-۱=۰$$

به طریق مشابه برای $-۱<x<۱$ به‌دست می‌آید

$$x-۱<,\quad x+۱>۰ \Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}+\frac{۱-x}{-(x-۱)}=۱+۱=۲$$

هم‌چنین برای $x<-۱$،

$$x-۱<۰\ ,\ x+۱<۰ \Rightarrow f(x)=\frac{-(x+۱)}{x+۱}+\frac{۱-x}{-(x-۱)}=-۱+۱=۰$$

بنابراین مقادیر تابع همواره یا صفر هستند یا ۲. یعنی برد تابع ۲ عضو دارد.

۱۹۱- گزینه‌ی ۱ اگر در تساوی $f(x)=f(x+۲۰)$ به جای x قرار دهیم $x-۲۰$، به‌دست می‌آید

$$f(x-۲۰)=f(x)$$

اکنون اگر به‌طور متوالی از تساوی $f(x)=f(x-۲۰)$ استفاده کنیم به‌دست می‌آید

$$f(۱۱۷)=f(۱۱۷-۲۰)=f(۱۱۷-۲\times۲۰)=\cdots$$
$$=f(۱۱۷-۶\times۲۰)=f(-۳)=|-۳|=۳$$

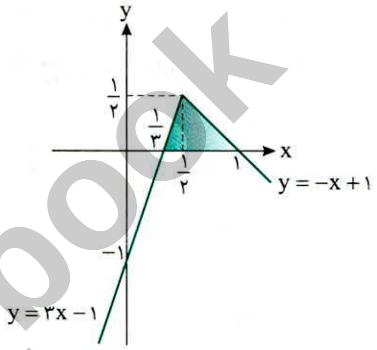
۱۹۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که به ازای x های مثبت، نمودار تابع داده شده خطی راست با شیب مثبت است. فقط گزینه‌های (۱) و (۳) به‌ازای x های مثبت خطی با شیب مثبت هستند. چون صفر در دامنه‌ی تابع موردنظر قرار ندارد و صفر در دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۱) قرار دارد، پس نمودار تابع داده شده می‌تواند نمودار تابع گزینه‌ی (۳) باشد.

۱۹۳- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$x \ge \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = x-(۲x-۱) = -x+۱$$

$$x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = x+۲x-۱ = ۳x-۱$$

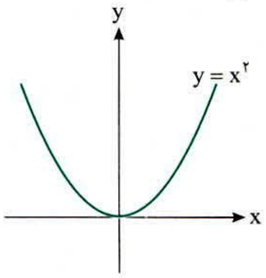
مطابق شکل زیر، مساحت مثلثی به ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ و قاعده‌ی $\frac{۲}{۳}$ مدنظر است که برابر است با $\frac{۱}{۶}$.

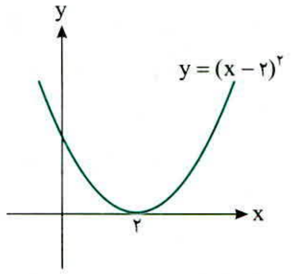


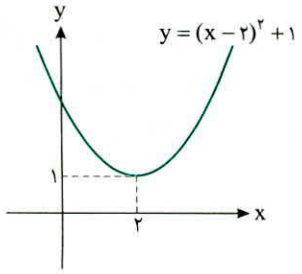
۱۹۴- گزینه‌ی ۱ با انتقال‌هایی که انجام داده‌ایم به تابع $f(x+۳)+۷$ می‌رسیم، که ضابطه‌ی آن برابر است با

$$(x+۳)^۲ - ۶(x+۳)+۲+۷ = x^۲$$

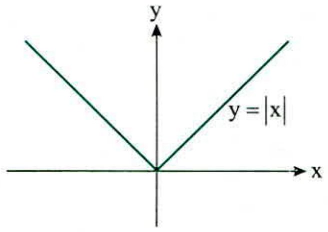
۱۹۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۲$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا به نمودار تابع $y=(x-۲)^۲$ تبدیل شود. سپس این نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=(x-۲)^۲+۱$ رسم شود.

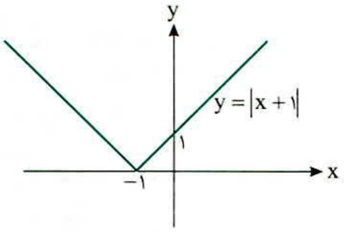


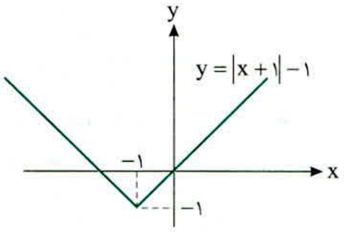




۱۹۶- گزینه‌ی ۳ برای رسم نمودار این تابع، کافی است ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم تا به نمودار $y=|x+۱|$ برسیم. سپس نمودار اخیر را یک واحد به پایین منتقل کنیم تا به نمودار $y=|x+۱|-۱$ تبدیل شود.







۱۹۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\frac{|x-۱|}{x-۱} = \begin{cases} ۱ & x>۱ \\ -۱ & x<۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x^۲+۱ & x>۱ \\ x^۲-۱ & x<۱ \end{cases}$$

درنتیجه نمودار تابع f گزینه‌ی (۱) است.

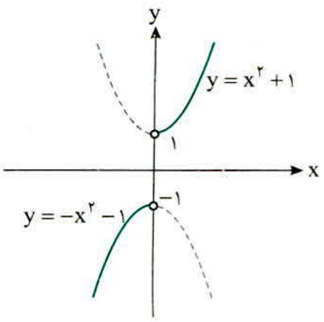
۱۹۸- گزینه‌ی ۳ برای $x>۰$ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x>۰ \Rightarrow f(x) = x(x+\frac{۱}{x}) = x^۲+۱$$

برای $x<۰$ نیز ضابطه‌ی تابع به شکل زیر است:

$$x<۰ \Rightarrow f(x) = -x(x+\frac{۱}{x}) = -x^۲-۱$$

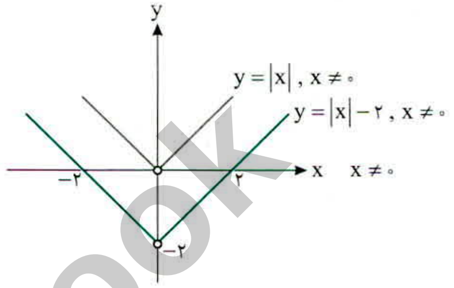
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



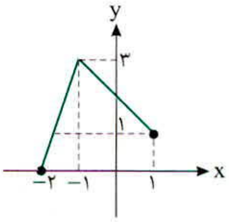
۱۹۹- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $|x|^۲=x^۲$. بنابراین ضابطه‌ی تابع را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$f(x)=\frac{|x|^۲-۲|x|}{|x|}=\frac{|x|(|x|-۲)}{|x|}=|x|-۲,\quad x\neq ۰$$

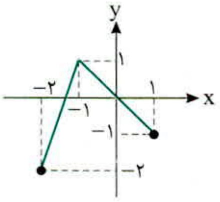
بنابراین کافی است نمودار $y=|x|$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم. توجه کنید که تابع به ازای $x=۰$ مقداری ندارد.



۲۰۰- گزینه‌ی ۳ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به چپ ببریم، نمودار تابع $y=f(x+۱)$ حاصل می‌شود.



اگر نمودار بالا را دو واحد پایین بیاوریم، نمودار تابع $y=f(x+۱)-۲$ به‌دست می‌آید.



۲۰۱- گزینه‌ی ۳ برای رسم نمودار تابع $y=f(x-۲)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x+۱)$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل کنیم. نمودار تابع $y=f(x-۲)$ در گزینه‌ی (۳) رسم شده است.

۲۰۲- گزینه‌ی ۴ برای رسم نمودار تابع f، کافی است، نمودار داده شده را ۲ واحد به چپ، سپس ۳ واحد به پایین انتقال دهیم.

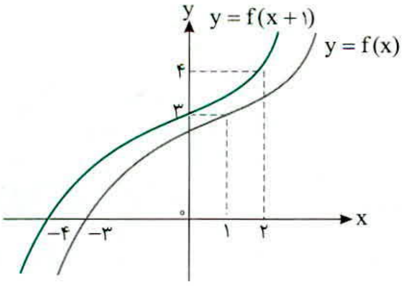
۲۰۳- گزینه‌ی ۳ معلوم است که نمودار تابع f، ۲ واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال یافته است. درنتیجه شکل (۱) نمودار تابع $f(x+۲)-۱$ است. درنتیجه

$$a=-۲,\quad b=۱$$

۲۰۴- گزینه‌ی ۲ برای این‌که نمودار $y=f(x+۱)$ را از روی نمودار $y=f(x)$ به‌دست بیاوریم، باید نمودار $y=f(x)$ را ۱ واحد به چپ منتقل کنیم. بنابراین، اگر نمودار $y=f(x+۱)$ را ۱ واحد به راست منتقل کنیم، نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید (شکل زیر را ببینید). از روی شکل زیر معلوم است که

$$f(-۳)=۰,\quad f(۳)=۴,\quad f(۱)=۳$$

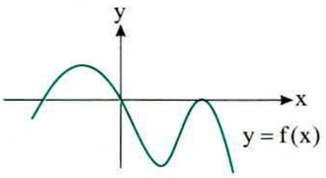
بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{۴}{۳}$.

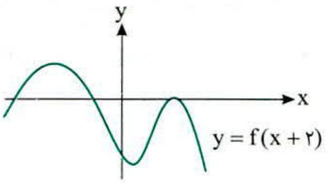


۲۰۵- گزینه‌ی ۴ ابتدا نمودار تابع را سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست آید. با توجه به این‌که دامنه‌ی $y=f(x+۳)$ به‌صورت $[-۵,۶]$ است، در نتیجه دامنه‌ی تابع f به‌صورت $[-۲,۹]$ است.

۲۰۶- گزینه‌ی ۴ با توجه به‌صورت مسئله، ابتدا نمودار تابع را ۲ واحد به راست و سپس ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. بنابراین دامنه‌ی تابع f به‌صورت $[۰,۱)\cup(۱,۶)$ و برد آن به‌صورت $[۱,۱۰)$ است.

۲۰۷- گزینه‌ی ۳ برای رسم نمودار تابع $y=f(x+۲)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل کنیم. درنتیجه، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y=f(x+۲)$ با محور x، همان تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ با محور x است. یعنی، معادله‌ی $f(x+۲)$ سه جواب دارد.

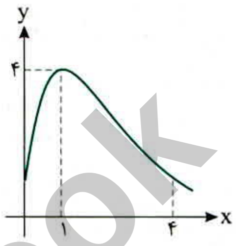




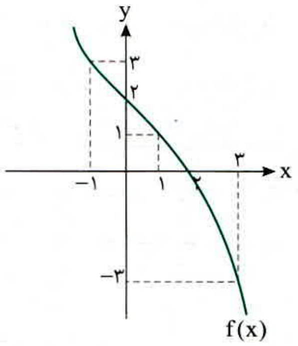
۲۰۸- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول** می‌دانیم $t=۲$ تنها جواب معادله‌ی $f(t)=۴$ است. درنتیجه

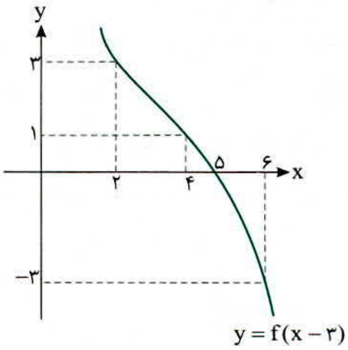
$$x+۱=۲\Rightarrow x=۱$$

راه‌حل دوم نمودار تابع را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا به نمودار $f(x+۱)$ برسیم. اکنون می‌توان دید تنها جواب معادله‌ی $f(x+۱)=۴$ همان $x=۱$ است.



۲۰۹- گزینه‌ی ۲ برای به‌دست آوردن نمودار تابع $y=f(x-۳)$، نمودار تابع $y=f(x)$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). از روی شکل معلوم است که معادله‌ی $f(x-۳)=-۳$ یک جواب دارد.

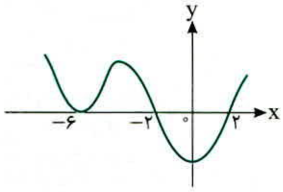




۲۱۰- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم تنها جواب معادله‌ی $f(t)=-۵$، برابر صفر است. اکنون باید جواب‌های معادله‌ی $f(x+۱)=۰$ را پیدا کنیم. کافی است نمودار تابع را یک واحد به چپ انتقال دهیم. بنابراین ریشه‌های معادله‌ی $f(x+۱)=۰$ برابر هستند با

$$x=۴, ۲, -۳$$

۲۱۱- گزینه‌ی ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(x+۲)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم. این نمودار را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی شکل معلوم است که عددهای صحیح −۱، ۰ و ۱ در نامعادله‌ی مورد نظر صدق می‌کنند، که تعداد آن‌ها سه تا است.



فصل ششم

ترکیبیات

فصل ششم: ترکیبیات

درس اول: شمارش

تعریف **اصل جمع**

فرض کنید بتوان کاری را از k روش انجام داد. اگر روش اول به m_1 طریق، روش دوم به m_2 طریق، ... و روش k ام به m_k طریق ممکن باشد و بخواهیم فقط یکی از این k روش را انتخاب کنیم، برای انجام کار مورد نظر $m_1+m_2+\cdots+m_k$ طریق وجود دارد.

تعریف **اصل ضرب**

فرض کنید انجام کاری k مرحله داشته باشد. اگر مرحله‌ی اول را بتوان به m_1 طریق انجام داد، مرحله‌ی دوم را بتوان به m_2 طریق انجام داد، ... و مرحله‌ی k ام را بتوان به m_k طریق انجام داد، کل کار مورد نظر را می‌توان به $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ طریق انجام داد.

تست ۱ پسری پنج پیراهن و سه جلیقه دارد. به چند طریق می‌تواند یک پیراهن و یک جلیقه روی آن بپوشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۵

پاسخ: بــرای انتخاب پیراهن ۵ راه و برای انتخاب جلیقه ۳ راه دارد. بنابراین به ۳×۵=۱۵ طریق می‌تواند یک پیراهن و یک جلیقه روی آن بپوشد.

تست ۲ حمید ۵ پیراهن، ۴ جلیقه و ۲ کاپشن دارد. به چند طریق می‌تواند پیراهن و جلیقه یا پیراهن، جلیقه و کاپشن بپوشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

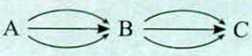
پاسخ:

پیراهن وجلیقه = ۵×۴ = ۲۰

پیراهن، جلیقه و کاپشن = ۵×۴×۲ = ۴۰

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۲۰+۴۰=۶۰.

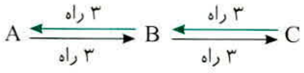
تست ۳ مانند شـکل زیر ســه جاده از شهر A به شهر B و سه جاده از شهر B به شهر C وجود دارد. می‌خواهیم از A به C برویم و برگردیم به A. ابتدا همه‌ی جاده‌ها به سمت C یک‌طرفه‌اند و وقتی به C می‌رسیم همه‌ی جاده‌ها به سمت A یک‌طرفه می‌شوند. به چند طریق می‌توانیم برویم و برگردیم؟



۱) ۱۳ ۲) ۳۶
۳) ۸۱ ۴) ۹

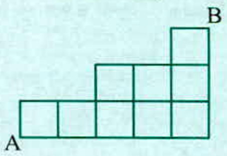
پاسخ: تعداد راه‌های رفتن از A به C برابر است با ۳×۳=۹. به‌همین ترتیب، تعداد راه‌های برگشتن از C به A برابر است با ۳×۳=۹. بنابراین تعداد راه‌های رفتن به C و برگشتن به A برابر است با

۹×۹=۸۱

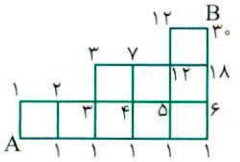


تست ۴

در شکل مقابل، اگر روی خط‌ها به سمت راست یا بالا حرکت کنیم، به چند طریق می‌توانیم از A به B برویم؟



۱) ۲۴
۲) ۳۰
۳) ۳۲
۴) ۳۶

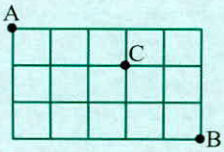


پاسخ: تعداد راه‌های رسیدن از نقطه‌ی A به هر نقطه روی شکل را به کمک اصل جمع حساب می‌کنیم که مطابق شکل روبه‌رو است.

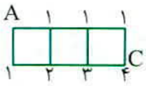
بنابراین به ۳۰ طریق مختلف می‌توانیم از A به B برویم.

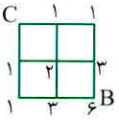
تست ۵

در شکل مقابل به چند طریق می‌توان از A به B رفت، به‌طوری که حتماً از C بگذریم و همواره یا به سمت پایین حرکت کنیم یا به سمت راست؟



۱) ۱۰
۲) ۴
۳) ۲۴
۴) ۶





پاسخ: در شکل‌های روبه‌رو تعداد راه‌های رسیدن از A به C و نیز رسیدن از C به B را حساب کرده‌ایم.

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۲۴=۶×۴.

تست ۶

با استفاده از رقم‌های مجموعه‌ی $\{۰, ۳, ۴, ۵, ۸\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $۳^۵$
۲) $۵^۳$
۳) ۱۰۰
۴) ۵۰

پاسخ: رقم صدگان عدد مورد نظر نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین برای صدگان ۴ انتخاب داریم. برای هر یک از رقم‌های دهگان و یکان ۵ انتخاب داریم. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با

۱۰۰=۵×۵×۴

تست ۷

چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۳۲۸
۲) ۳۶۰
۳) ۳۲۰
۴) ۲۸۸

پاسخ: اگر رقم یکان عدد را صفر در نظر بگیریم، رقم صدگان را می‌توان هر یک از ارقام ۱ تا ۹ انتخاب کرد و رقم دهگان را می‌توان به ۸ حالت انتخاب کرد چون باید مخالف یکان و صدگان باشد. تعداد این اعداد ۱×۸×۹ است.

اگر رقم یکان را یکی از اعداد ۲، ۴، ۶ یا ۸ انتخاب کنیم، صدگان را می‌توان به ۸ حالت انتخاب کرد زیرا باید مخالف یکان و غیرصفر باشد. همچنین دهگان را می‌توان به ۸ حالت انتخاب کرد زیرا باید مخالف یکان و صدگان باشد. تعداد این اعداد ۴×۸×۸ است.

بنابراین تعداد کل اعداد سه رقمی زوج با ارقام متمایز برابر است با

۳۲۸=۲۵۶+۷۲

تست ۸

با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد سه رقمی کم‌تر از ۳۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۹۸
۲) ۱۱۲
۳) ۱۲۰
۴) ۱۲۴

پاسخ: برای رقم صدگان ۲ انتخاب داریم: ۱ یا ۲. رقم‌های دهگان و یکان را بدون هیچ محدودیتی می‌توان انتخاب کرد. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

۹۸=۷×۷×۲

تست ۹ در یک آزمون چهار گزینه‌ای ۷ سؤال درست داده شده است. به هر سؤال باید پاسخ داد. چند پاسخ‌نامه‌ی مختلف ممکن است به وجود بیاید؟

۱) $۴^۷$ ۲) $۷^۴$ ۳) ۲۸ ۴) ۲۷

پاسخ: تعداد راه‌های پاسخ دادن به هر سؤال ۴ تاست. بنابراین تعداد پاسخ‌نامه‌های مختلف برابر است با

$$۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۴^۷$$

تست ۱۰ اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ چند تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B وجود دارد؟

۱) $۳^۴$ ۲) $۴^۳$ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

پاسخ: هر تابع به شکل موردنظر به‌صورت $\{(a,x),(b,y),(c,z)\}$ است، که x، y و z می‌توانند هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشند. بنابراین برای هر یک از x، y و z، ۴ حالت داریم. در نتیجه تعداد تابع‌های موردنظر برابر است با

$$۴\times۴\times۴=۴^۳$$

نکته تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی n عضوی برابر با ۲^n است.

تست ۱۱ مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ چند زیرمجموعه دارد که ۲ عضو آن است ولی ۵ عضو آن نیست؟

۱) $۲^۶$ ۲) $۲^۷$ ۳) $۲^۸$ ۴) $۲^۹$

پاسخ: چون ۵ عضو زیرمجموعه‌ی موردنظر نیست، کلاً از آن صرف‌نظر می‌کنیم و آن را کنار می‌گذاریم. چون ۲ عضو زیرمجموعه‌ی موردنظر است، پس آن را حتماً به‌حساب می‌آوریم. بنابراین، باید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹\}$ را حساب کنیم، که برابر است با $۲^۷$.

تست ۱۲ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۳۰۰ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ: عدد ۳۰۰ را می توان به‌صورت $۲^۲\times۳^۱\times۵^۲$ نوشت.

برای نوشتن هر مقسوم‌علیه ۳۰۰ باید تعدادی ۲، تعدادی ۳ و تعدادی ۵ را در هم ضرب کنیم. تعداد هر کدام از اعداد ۲، ۳ و ۵ حداقل برابر صفر و حداکثر برابر توان آن‌ها در تجزیه‌ی عدد ۳۰۰ است. یعنی هر مقسوم‌علیه عدد ۳۰۰ عددی به‌صورت $۲^x\times۳^y\times۵^z$ است که x و z می‌توانند ۰، ۱ یا ۲ باشند و y می‌تواند ۰ یا ۱ باشد. پس x و z را به ۳ حالت و y را به ۲ حالت می‌توانیم انتخاب کنیم. یعنی تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۳۰۰ برابر $۳\times۳\times۲=۱۸$ است.

نکته اگر عدد طبیعی n را به‌صورت $n=p_۱^{a_۱}p_۲^{a_۲}\ldots p_k^{a_k}$ به عوامل اول تجزیه کنیم، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با $(a_۱+۱)\times(a_۲+۱)\times\cdots\times(a_k+۱)$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ششم

درس اول:
شمارش

۱- شخصی سه پیراهن آستین کوتاه و چهار پیراهن آستین بلند دارد. به چند طریق می‌تواند یکی از پیراهن‌هایش را بپوشد؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۷   ۴) ۱۲

۲- پسری سه نوع خودنویس و چهاررنگ جوهر دارد. به چند طریق می‌تواند یکی از خودنویس‌هایش را جوهر کند؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۷   ۴) ۱۲

۳- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عددی فرد آمده است، کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۶

۴- شخصی دارای ۲ کت، ۳ جفت کفش، ۴ شلوار و ۵ پیراهن متمایز است. با اضافه‌کردن فقط یک مورد متمایز به کدام یک از پوشش‌های فرد، می‌توان امکان بیش‌ترین شکل متفاوت از آن‌ها را فراهم کرد؟

۱) کفش   ۲) کت   ۳) شلوار   ۴) پیراهن

۵- عبارت $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ بعد از ضرب دارای چند جمله است؟

۱) ۶   ۲) ۱۲   ۳) ۲۴   ۴) ۱۶

۶- هفت کیسه‌ی متمایز وجود دارد و سه مهره به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ که می‌خواهیم آن‌ها را در کیسه‌ها بیندازیم. اگر بخواهیم تمام مهره‌ها را در کیسه‌ها قرار دهیم به‌طوری‌که در هر کیسه حداکثر یک مهره باشد، به چند طریق می‌توان این‌کار را انجام داد؟

۱) ۲۱   ۲) ۲۱۰   ۳) $۳^{۷}$ ۴) $۷^{۳}$

۷- فرهاد دو نوع کلاه مختلف، سه تا پیراهن مختلف و چهار جور شلوار مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند این لباس‌ها را بپوشد؟ (از هر کدام باید یکی را انتخاب کند.)

۱) ۹   ۲) ۲۴   ۳) ۳۰   ۴) ۶۰

۸- از میان ۹ نفر بازیکن فوتبال، به چند طریق می‌توان یک مدافع راست، یک مدافع چپ و یک مدافع وسط انتخاب کرد؟

۱) $۳^{۹}$ ۲) $۹^{۳}$ ۳) ۵۰۴   ۴) ۷۲

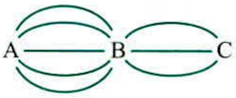
۹- چهار نامه و شش صندوق پست داریم. اگر در هر صندوق حداکثر یک نامه بتوان انداخت، به چند طریق می‌توان نامه‌ها را پست کرد؟

۱) ۲۴   ۲) ۱۲۰   ۳) ۳۶۰   ۴) ۷۲۰

۱۰- پنج میله به زمین کوبیده‌ایم و می‌خواهیم آن‌ها را با چهار رنگ مختلفی که در اختیار داریم طوری رنگ کنیم که هیچ دو میله‌ی مجاوری هم‌رنگ نباشند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

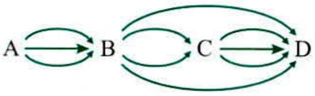
۱) ۳۲۴   ۲) ۲۱۲   ۳) ۱۲۰   ۴) ۷۲

۱۱- مانند شکل زیر، پنج راه از شهر A به شهر B و سه راه از شهر B به شهر C وجود دارد. می‌خواهیم از A به C برویم و برگردیم، به‌طوری‌که در مسیر برگشت از هیچ‌یک از راه‌هایی که رفته‌ایم برنگردیم. ابتدا همه‌ی راه‌ها به سمت C یک طرفه‌اند و وقتی به C می‌رسیم همه‌ی راه‌ها به سمت A یک‌طرفه می‌شوند. به چند طریق می‌توانیم برویم و برگردیم؟



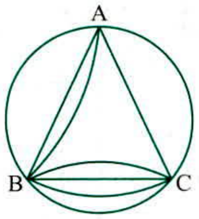
۱) ۱۲۰   ۲) ۲۲۵
۳) ۲۳   ۴) ۴۰

۱۲- در شکل زیر همه‌ی جاده‌ها از سمت A به سمت D یک‌طرفه‌اند. به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟



۱) ۲۴   ۲) ۳۰
۳) ۳۶   ۴) ۴۲

۱۳- در شکل مقابل مسیرهای از A به B، از B به C و از A به C یک‌طرفه هستند. به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟



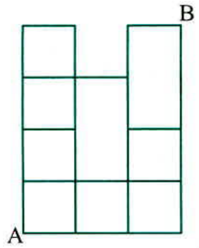
۱) ۲۴

۲) ۱۸

۳) ۱۴

۴) ۱۰

۱۴- در شکل مقابل می‌خواهیم از روی خط‌ها حرکت کنیم و فقط به سمت بالا و راست برویم. به چند طریق می‌توانیم از A به B برویم؟



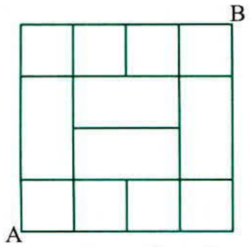
۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۱

۴) ۱۴

۱۵- در شکل مقابل، اگر روی خط‌ها به سمت بالا یا راست حرکت کنیم، به چند حالت می‌توانیم از A به B برویم؟



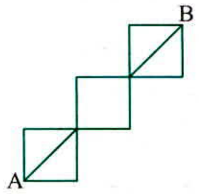
۱) ۲۷

۲) ۲۸

۳) ۲۹

۴) ۳۰

۱۶- در شکل مقابل به چند طریق می‌توان از A به B رفت، به شرطی که همواره یا به سمت راست، یا به سمت بالا یا به‌طور مورب رو به راست حرکت کنیم؟



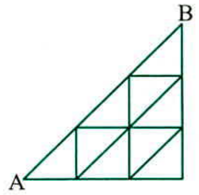
۱) ۱۶

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۲

۱۷- در شکل مقابل می‌خواهیم با حرکت روی خط‌ها به شکل → یا ↑ یا ↗ از A به B برویم. چند راه برای رسیدن از A به B وجود دارد؟



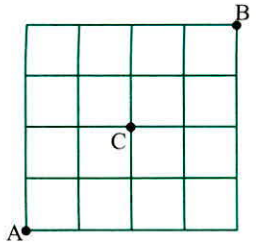
۱) ۱۶

۲) ۲۰

۳) ۲۲

۴) ۲۴

۱۸- در شکل مقابل می‌خواهیم با حرکت روی خط‌ها به سمت راست و بالا، از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم. چند راه برای رفتن از A به B وجود دارد که از نقطه‌ی C می‌گذرد؟



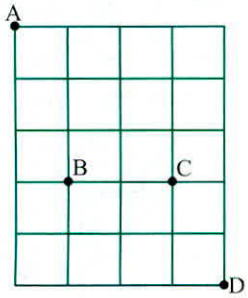
۱) ۱۲

۲) ۲۰

۳) ۳۶

۴) ۴۹

۱۹- در شکل مقابل به چند طریق می‌توان از A به D رفت، به‌طوری‌که حتماً از پاره‌خط BC رد شد و همواره رو به پایین و به سمت راست حرکت کرد؟



۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۲۰- در شکل مقابل، اگر از بالا به پایین روی خط‌ها حرکت کنیم و از هر سطر یک حرف را بخوانیم، به چند طریق می‌توان کلمه‌ی «نشر الگو» را خواند؟

۱) !۷

۲) !۶

۳) ۲۰

۴) ۱۰

۲۱- چند عدد دو رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۲۲- چند عدد ۶ رقمی فرد می‌توان نوشت که ارقام آن ۲ یا ۵ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۲۳- پلاک اتومبیل سـواری سـری «ب» ایران ۱۱ در تهران به‌صورت ایران ۱۱ | *** ب ** است که هر ستاره، نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری «ب» ایران ۱۱، چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۱) ۵×۹^{۴} ۲) ۲۰×۹^{۳} ۳) $۹^{۵}$ ۴) ۱۶×۹^{۴}

۲۴- اعدادی که از هر دو طرف به یک صورت خوانده شوند را اعداد متقارن می‌نامیم، مانند ۱۲۱. چند عدد سه رقمی متقارن وجود دارد؟

۱) ۹۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

۲۵- چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که ارقام آن عضو مجموعه‌ی {۰, ۱, ۲, ۳} باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۲۶- با رقم‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۶۰

۲۷- چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که ارقام آن متمایز و عضو مجموعه‌ی {۰, ۱, ۲, ۳, ۴} باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۸- چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت که ارقام آن عضو مجموعه‌ی {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵} باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۸

۲۹- چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت که ارقام آن متمایز و عضو مجموعه‌ی {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶} باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

۳۰- چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ با رقم‌های غیرتکراری داریم؟

۱) ۹۵۲ ۲) ۱۰۰۸ ۳) ۲۲۶۸ ۴) ۴۵۳۶

۳۱- با رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که دست کم دو رقم تکراری داشته باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۲۰

۳۲- در چند تا از عددهای چهار رقمی، رقم ۷ نیامده است؟

۱) ۶۵۶۱ ۲) ۳۰۲۴ ۳) ۴۰۹۶ ۴) ۵۸۳۲

۳۳- در چند عدد سه رقمی، رقم ۷ وجود دارد؟

۱) ۳۳۳ ۲) ۳۱۲ ۳) ۲۹۸ ۴) ۲۵۲

۳۴- با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد کوچک‌تر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۹۲ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۳۵- چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان نوشت که ارقام آن کوچک‌تر از ۷ باشند؟

۱) ۱۴۶ ۲) ۱۴۷ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۴۹

۳۶- با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۵۰ با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۹۷ ۲) ۹۸ ۳) ۹۹ ۴) ۱۰۰

۳۷- با رقم‌های ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۷۸۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۰

۳۸- چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ می‌توان نوشت که ارقام آن کوچک‌تر از ۶ و متمایز باشند؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۳۹- با رقم‌های ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ همه‌ی عددهای پنج رقمی با رقم‌های غیرتکراری را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک نوشته‌ایم. عدد ۵۹۷۳۱ چندمین عددی است که نوشته‌ایم؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۶۸ ۴) ۶۹

۴۰- با رقم‌های ۲، ۴، ۶، ۸ و ۹ همه‌ی عددهای پنج رقمی با رقم‌های غیرتکراری را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک نوشته‌ایم. ۷۲ امین عددی که نوشته‌ایم کدام عدد است؟

۱) ۶۲۴۸۹ ۲) ۴۲۶۸۹ ۳) ۶۴۲۸۹ ۴) ۴۶۲۸۹

۴۱- عدد $a=۲^۳\times ۳^۲\times ۵^۴$ چند مقسوم‌علیه طبیعی زوج دارد که بر ۳ بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۴۲- دو عدد $a=۲^۳\times ۳^۴\times ۵^۲$ و $b=۲^۱\times ۵^۳\times ۷^۴$ چند مقسوم‌علیه طبیعی مشترک دارند؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۳- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,\dots,۹\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل عضو ۲ هست ولی شامل عضو ۸ نیست؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۲

۴۴- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل عضوهای ۲ و ۳ هست ولی شامل عضوهای ۴ و ۵ نیست؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۴۵- مجموعه‌ی $A=\{۰,۱,۲,۳,\dots,۱۹\}$ چند زیرمجموعه دارد که حداقل یکی از اعضای آن یک رقمی است؟

۱) $۱۰۲۴^۲$ ۲) ۱۰۲۴×۱۰۲۳ ۳) $۱۰۲۳^۲$ ۴) $۱۰۲۴^۲-۱$

۴۶- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ چند زیرمجموعه دارد که در آن مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برابر ۱۶ است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۷- اگر یک عضو جدید به مجموعه‌ای n عضوی اضافه کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲ برابر می‌شود. ۲) n برابر می‌شود.

۳) ۲ واحد زیاد می‌شود. ۴) n واحد زیاد می‌شود.

۴۸- اگر سه عضو جدید به یک مجموعه اضافه کنیم، به تعداد زیر مجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد اضافه می‌شود. تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی جدید چندتاست؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۵۱۲ ۴) ۱۰۲۴

۴۹- اگر A مجموعه‌ی اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳ و ۷ باشد، A چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۵۰- اگر A مجموعه‌ی اعداد دو رقمی کم‌تر از ۵۰ باشد که ارقام آن‌ها متمایز است و این مجموعه دارای ۱۶^{a} زیرمجموعه باشد، a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

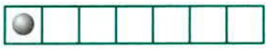
۵۱- شش صندوق وجود دارد و چهار پاکت‌نامه که می‌خواهیم آن‌ها را پست کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۶ ۲) $۶^{۲}$ ۳) $۶^{۴}$ ۴) $۶^{۶}$

۵۲- یک آسانسور با ۱۰ مسافر در طبقات اول تا بیستم یک ساختمان توقف می‌کند و تمام مسافران را در این طبقات پیاده می‌کند. مسافران به چند طریق می‌توانند پیاده شوند؟

۱) $۲۰^{۱۰}$ ۲) $۱۰^{۲۰}$ ۳) $۲۰!$ ۴) $۱۰!$

۵۳- در نوار مقابل، در خانه‌ی نخست از سمت چپ یک مهره قرار دارد. می‌توانیم این مهره را هر تعداد خانه که بخواهیم به سمت راست حرکت دهیم. به چند طریق می‌توانیم به آخرین خانه در سمت راست برسیم؟



۱) ۵ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۵۴- تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ‌گویی به تعدادی تست چهار گزینه‌ای، برابر $۲^{۳۰}$ است. تعداد تست‌ها کدام است؟ (به شرط آن‌که تمام تست‌ها پاسخ داده شود.)

۱) ۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵

۵۵- در یک آزمون چهارگزینه‌ای با ۲۰ سؤال، یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند پاسخ‌نامه را تکمیل نماید؟

۱) $۴^{۲۰}$ ۲) $۲۰^{۴}$ ۳) $۵^{۲۰}$ ۴) $۲۰^{۵}$

۵۶- هفت نفر در آزمونی شرکت کرده‌اند. نتایج قبولی شرکت‌کنندگان چند حالت دارد؟

۱) ۷ ۲) $۲^{۷}$ ۳) $۷^{۲}$ ۴) ۱۴

۵۷- در یک آزمون چهار گزینه‌ای ۱۰ سؤال داده شده است. اگر بخواهیم گزینه‌ها را طوری بچینیم که در هیچ دو سؤال متوالی گزینه‌ی درست یکی نباشد، چند پاسخ‌نامه می‌توان درست کرد؟

۱) ۴×۳^{۹} ۲) ۴×۳^{۱۸} ۳) $۴^{۱۰}$ ۴) $۱۰^{۴}$

۵۸- چند تابع با دامنه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ می‌توان نوشت که مؤلفه‌ی دوم زوج مرتب‌های آن از مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشند؟

۱) ۲۷ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۲۵۶

۵۹- چند تابع غیرتهی می‌توان نوشت که دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ای از $A=\{۱,۲,۳\}$ و برد آن زیر مجموعه‌ای از $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۱ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۲۵

۶۰- چند تابع وجود دارد که دامنه‌ی آن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد آن زیرمجموعه‌ی A است و شامل زوج مرتب $(۱,۱)$ نیست؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۹۲ ۳) ۲۵۵ ۴) ۲۵۶

۶۱- چند تابع می‌توان نوشت که دامنه‌ی آن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد آن زیرمجموعه‌ای از $B=\{۵,۶,۷,۸\}$ باشد و شامل زوج مرتب $(۱,۵)$ باشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۲۴۳ ۴) ۱۲۸

۶۲- چند تابع مانند f می‌توان نوشت که دامنه‌ی آن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد آن زیرمجموعه‌ای از A باشد و برای هر $x\in A$ نابرابری $f(x)\leq x$ برقرار باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۶۴

فصل ششم: ترکیبیات

درس دوم: جایگشت

تعریف به هر حالت چیدن n شیء متمایز در یک ردیف کنار هم یک **جایگشت** از این اشیاء می‌گوییم.

نکته تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$، که در این‌جا
$n!=۱\times ۲\times \cdots \times n$

تست ۱

اگر $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۳۰$، حاصل $\frac{n!}{(n-۲)!}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

پاسخ: تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۳۰\Rightarrow \frac{(n+۱)n(n-۱)!}{(n-۱)!}=۳۰$$

$$\Rightarrow n(n+۱)=۳۰$$

بنابراین $n=۵$ و در نتیجه

$$\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{۵!}{۳!}=۲۰$$

تست ۲

با رقم‌های عدد ۹۴۱۷۸ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۶۴ ۴) ۵۱۲

پاسخ: چون رقم‌های عدد ۹۴۱۷۸ متمایزند، هر جایگشتی از رقم‌های آن عددی پنج رقمی و متمایز از بقیه است. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با $۵!=۱۲۰$.

تست ۳

۵ نفر که فرامرز هم جزء آن‌هاست، به چند طریق می‌توانند روی ۵ صندلی که در یک ردیف قرار گرفته‌اند بنشینند، و فرامرز هم روی صندلی اول از سمت راست بنشیند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۲۴

پاسخ: اگر فرامرز در صندلی اول از سمت راست بنشیند، چهار نفر دیگر باید روی ۴ صندلی که در یک ردیف قرار دارند بنشینند. تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $۴!=۲۴$.

نکته **تعداد راه‌های انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز $(۰\leq r\leq n)$ و چیدن آن‌ها در یک ردیف، به عبارت دیگر تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم، که برابر است با**

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تست ۴ **حـروف کلمه‌ی MISSISSIPI را با جایگشـت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیـم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟**

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۶۰

پاسخ: حروف یکسـان را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را به عنوان یک عضو جایگشت در نظر می‌گیریم. یعنی می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های مختلف M ، I ، S و P را حساب کنیم که برابر !۴ است.

تست ۵ **بـا رقم‌هـای ۱، ۲، ۳ و ۴ همه‌ی عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری را نوشـته‌ایم. مجموع ارقام تمام اعداد نوشته شده کدام است؟**

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۶۰

پاسخ: تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری، برابر ۲۴=!۴ است. مجموع ارقام در هر یک از عددها برابر است با ۱۰=۴+۳+۲+۱. بنابراین مجموع کل ارقام نوشته شده برابر ۲۴۰=۱۰×۲۴ است.

تست ۶ **در چند جایگشـت از حروف کلمه‌ی triangle ، حروف t و r کنار هم قرار می‌گیرند ولی حروف n و g کنار هم قرار نمی‌گیرند؟**

۱) !۶×۵ ۲) !۵×۱۰ ۳) !۶×۱۰ ۴) !۷×۵

پاسخ: تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t و r کنار هم هستند برابر است با !۷×!۲. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t و r کنار هم هستند و g و n هم کنار هم هستند برابر است با !۶×!۲×!۲.
بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t و r کنار هم هستند ولی g و n کنار هم نیستند برابر است با

$$۲!\times۷!-۲!\times۲!\times۶!=۶!(۲\times۷-۲\times۲)=۱۰\times۶!$$

تست ۷ **با استفاده از رقم‌های عدد ۹۳۷۴۱۲ چند عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت؟**

۱) ۹۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲۰

پاسخ: بایـد ۳ رقـم متمایـز از میان رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ و ۹ انتخـاب کنیم و با آن‌ها عددی ۳ رقمی بنویسیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\mathrm{P}(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۱۲۰$.

تست ۸ **چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که ارقام اول و آخر آن فرد هستند؟**

۱) $\frac{۸!}{۳!}$ ۲) $\frac{۱۰!}{۲!}$ ۳) !۲!۵ ۴) !۵!۳

پاسخ: ارقام اول و آخر را باید از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم که این کار به P(۵ , ۲) حالت امکان‌پذیر است.
سه رقم وسطی را هم باید از بین ۸ رقم باقیمانده انتخاب کنیم که این کار به P(۸ , ۳) حالت امکان‌پذیر است.
بنابراین تعداد اعداد مطلوب مسأله برابر است با

$$\mathrm{P}(۵,۲)\times\mathrm{P}(۸,۳)=\frac{۵!}{۳!}\times\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸!}{۳!}$$

تست ۹ **در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی triangle هیچ دو حرف صداداری کنار یکدیگر قرار ندارند؟**

۱) !۷×۵ ۲) !۶×۵ ۳) !۶×۴ ۴) !۶×۲۰

پاسخ: ابتدا پنج حرف بی‌صدا را به !۵ حالت در کنار هم در یک ردیف قرار می‌دهیم.

☐ ⓣ ☐ ⓡ ☐ ⓝ ☐ ⓖ ☐ ⓛ ☐

حـالا در شـش جای خالی شـکل بالا باید ۳ حرف صـدادار را قرار دهیم که ایـن کار به P(۶, ۳) حالت امکان‌پذیر است. بنابراین تعداد جایگشت‌های موردنظر مسأله برابر است با

$$۵!\,\mathrm{P}(۶,۳)=۵!\times\frac{۶!}{۳!}=۲۰\times۶!$$

توجه شود که از راه‌حل تست ۶ نمی‌توان استفاده کرد زیرا تمام حالات در نظر گرفته نمی‌شود.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ششم

درس دوم:
جایگشت

۶۳- اگر $\frac{(n+۱)!+(n-۱)!}{n^۳-۱}=۲۴$ ، مقدار n چقدر است؟

۱) ۹　۲) ۸　۳) ۶　۴) ۵

۶۴- اگر $۶P(n,r)=P(n+۱,r+۱)$ ، مقدار $P(n+۱,n)$ کدام است؟

۱) ۶۰　۲) ۱۲۰　۳) ۳۶۰　۴) ۷۲۰

۶۵- اگر $P(n-۱,۲)+۱۲=P(n,۲)$ ، مقدار n چقدر است؟

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۷

۶۶- اگر $\frac{P(n,۳)}{n-۲}=۴۹-n$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۷　۲) ۸　۳) ۹　۴) ۱۰

۶۷- اگر $\frac{P(n+۱,n-۱)+P(n,n-۲)}{P(n,n)}=۴$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۷

۶۸- اگر $\frac{a!+b!}{b!}=۵۷$ ، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱۱۰　۲) ۵۵　۳) ۲۵　۴) ۱۴

۶۹- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی triangle عبارت angle دیده می‌شود؟

۱) ۶　۲) ۲۴　۳) ۳۰　۴) ۶۰

۷۰- علی و حسن و پنج نفر از دوستان آن‌ها در یک صف پشت سر هم می‌ایستند. در چند حالت علی و حسن، یکی پشت دیگری می‌ایستد؟

۱) ۷۲۰　۲) ۵۰۴۰　۳) ۱۴۴۰　۴) ۲۵۲۰

۷۱- ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه طوری چید که ابتدا و انتهای قفسه کتاب ریاضی باشد و هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم نباشند؟

۱) ۷۲　۲) ۱۴۴　۳) ۱۸۰　۴) ۲۱۶

۷۲- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی triangle حروف صدادار کنار هم قرار دارند؟

۱) $۶\times۶!$　۲) $۷!$　۳) $۳\times۶!$　۴) $\frac{۸!}{۳!}$

۷۳- در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی triangle حروف صدادار کنار هم و حروف بی‌صدا کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $۶!$　۲) $۲\times۶!$　۳) $\frac{۷!}{۲}$　۴) $\frac{۸!}{۴}$

۷۴- ۴ کتاب ریاضی مختلف، ۲ کتاب شیمی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه طوری چید که بین هر دو کتاب ریاضی، دقیقاً یک کتاب فیزیک باشد و کتاب شیمی قرار نداشته باشد؟

۱) $۲!۴!۳!$　۲) $۴!۳!۴!$　۳) $۵!۴!$　۴) $۴!۳!۳!$

۷۵- سه نفر به چند طریق می‌توانند روی شش صندلی که در یک ردیف قرار گرفته‌اند طوری بنشینند که هر سه نفر کنار هم باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۷۶- شش دانش‌آموز که سارا و سمیه هم در میان آن‌ها هستند می‌خواهند در یک صف بایستند. اگر قرار باشد سارا و سمیه در ابتدا و انتهای صف بایستند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) !۶ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۷۷- پنج نفر که مینا و مژگان هم در میان آن‌ها هستند، به چند طریق می‌توانند در یک صف طوری بایستند که مینا و مژگان کنار هم نباشند؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۷۸- ۴ دانش‌آموز پایه‌ی دهم و ۳ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند، به‌طوری که هیچ دو دانش‌آموز کلاس یازدهمی کنار هم نباشند؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۲۱۶۰

۷۹- پنج دانش‌آموز که تعدادی از آن‌ها دانش‌آموز پایه‌ی دهم هستند می‌خواهند در یک صف بایستند، به‌طوری که دانش آموز اول صف حتماً از پایه‌ی دهم باشد. اگر ۷۲ راه برای این کار وجود داشته باشد، تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی دهم چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- با رقم‌های ۱، ۴، ۶ و ۹ همه‌ی عددهای چهاررقمی با رقم‌های غیرتکراری را نوشته‌ایم. مجموع ارقام هزارگان این اعداد چند است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۸۰

۸۱- با رقم‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ همه‌ی عددهای چهاررقمی با رقم‌های غیرتکراری را نوشته‌ایم. مجموع همه‌ی عددهای نوشته شده کدام است؟

۱) ۹۹۹۹۹ ۲) ۱۹۹۹۸ ۳) ۱۱۸۸۹۹ ۴) ۱۱۹۹۸۸

۸۲- به چند طریق می‌توان حروف کلمه‌ی panama را جابه‌جا کرد طوری‌که حروف a یکی در میان قرار گیرند؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۸۳- علی و حسن و چهار نفر از دوستان آن‌ها در یک صف پشت سر هم می‌ایستند. در چند حالت علی در مکان جلوتری نسبت به حسن قرار می‌گیرد؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

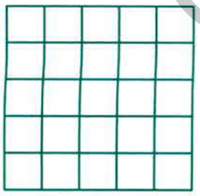
۸۴- علی، حسن و احمد به همراه چهار نفر از دوستانشان می‌خواهند در یک صف بایستند. در چند جایگشت علی جلوتر از حسن و احمد و حسن نیز جلوتر از احمد در صف می‌ایستد؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۶۸۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۱۸۶۰

۸۵- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۳ دانش‌آموز کلاس دوم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند طوری‌که دانش‌آموزان کلاس اول همگی کنار هم باشند ولی دانش‌آموزان کلاس دوم همگی کنار هم نباشند؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۳۰۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۳۶۰

۸۶- به چند طریق می‌توان خانه‌های جدول زیر را طوری رنگ کرد که در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک خانه رنگی باشد؟



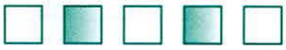
۱) ۱۲۰

۲) ۸۰

۳) ۷۲

۴) ۶۴

۸۷- در هر یک از مربع‌های زیر باید یکی از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ را طوری بنویسیم که رقمی که در هر خانه‌ی رنگی نوشته شده از رقم مربع‌های مجاورش بزرگ‌تر باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶

۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰

۸۸- با رقم‌های ۱، ۲، ۴، ۷، ۸ و ۹ چند عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که در آن‌ها رقم‌های ۱ و ۸ آمده است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۸۹- با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۶، ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی مضرب ۹ بدون رقم‌های تکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

تست ۳

محسن ۶ کتاب مختلف دارد و ابراهیم نیز ۸ کتاب مختلف دارد که با کتاب‌های محسن فرق دارند. این دو نفر به چند طریق می‌توانند ۳ تا از کتاب‌هایشان را با هم مبادله کنند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۴۲۲ ۳) ۵۱۲ ۴) ۱۱۲۰

پاسخ: محسن به $\binom{6}{3}$ طریق می‌تواند ۳ تا از کتاب‌هایش را انتخاب کند و ابراهیم نیز به $\binom{8}{3}$ طریق می‌تواند ۳ تا از کتاب‌هایش را انتخاب کند. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{6}{3}\binom{8}{3}=1120$.

تست ۴

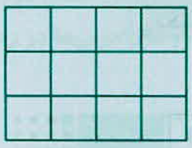
مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ چند زیرمجموعه‌ی چهار عضوی دارد که شامل عضو ۱۰ است؟

۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۷۰ ۴) ۱۲۶

پاسخ: عدد ۱۰ را در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. (۱ حالت). سه عضو دیگر زیرمجموعه را از بین اعداد ۱ تا ۹ به $\binom{9}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های با این شرایط ۸۴ تاست.

تست ۵

شکل مقابل از ۱۲ مربع کوچک تشکیل شده است. در این شکل چند مستطیل وجود دارد که مربع نیستند؟



۱) ۴۰ ۲) ۶۰

۳) ۲۰ ۴) ۳۰

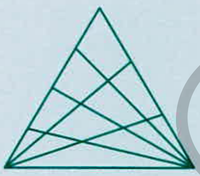
پاسخ: مربع‌هایی که در این شکل وجود دارند ۱×۱، ۲×۲ یا ۳×۳ هستند، بنابراین تعداد آن‌ها برابر است با $3\times4+2\times3+1\times2=20$.

تعداد مستطیل‌های این شکل هم برابر است با $\binom{5}{2}\binom{4}{2}=10\times6=60$.

بنابراین تعداد مستطیل‌هایی که مربع نیستند برابر است با $60-20=40$.

تست ۶

در شکل زیر چند مثلث وجود دارد؟



۱) ۲۴

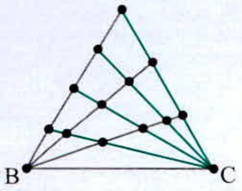
۲) ۴۲

۳) ۵۴

۴) ۶۴

پاسخ: ابتدا تعداد مثلث‌هایی را حساب می‌کنیم که یک رأس آن‌ها B است. دو رأس دیگر این مثلث‌ها، دو تا از نقطه‌های مشخص شده روی خط‌های رنگی است. تعداد راه‌های انتخاب دو نقطه روی هر خط رنگی برابر است با $\binom{4}{2}$، و چون ۴ خط رنگی داریم، تعداد مثلث‌های با رأس B برابر است با $4\binom{4}{2}=24$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود که تعداد مثلث‌های با رأس C برابر است با $3\binom{5}{2}=30$.



اما مثلث‌هایی که B و C دو رأس آن‌ها باشند را دوبار شمرده‌ایم. با توجه به این‌که رأس سوم مثلث باید یکی از نقاط مشخص شده روی شکل (به جز B و C) باشند، تعداد این مثلث‌ها برابر ۱۲ است.

بنابراین تعداد مثلث‌ها در شکل مورد نظر برابر است با

$$24+30-12=42$$

تست ۷

هشت مهره‌ی یکسان را به چند طریق می‌توانیم در سه کیسه‌ی متمایز بریزیم به‌طوری که در هر کیسه دست کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۱) ۲۱ **۲)** ۲۵ **۳)** ۱۲۰ **۴)** ۲۴

پاسخ: هشت مهره را در یک ردیف بچینید:

○○○○○○○○

در این صورت ۷ جای خالی بین این مهره‌ها وجود دارد، که اگر ۲ تا از آن‌ها را انتخاب کنیم، با این کار، مهره‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند که هر دسته را در یک کیسه می‌ریزیم. مثلاً، در شکل زیر به کیسه‌ی اول ۲ مهره، به کیسه‌ی دوم ۵ مهره و به کیسه‌ی سوم ۱ مهره می‌رسد.

○○|○○○○○|○

تعداد راه‌های انتخاب ۲ جای خالی از ۷ جای خالی برابر است با

$$\binom{۷}{۲}=۲۱$$

تست ۸

در یک آپارتمان ۶ زن و شوهر زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از بین این ۱۲ نفر را انتخاب کرد به‌طوری که دقیقاً یک زن و شوهر بین آن‌ها وجود داشته باشد؟

۱) ۴۸۰ **۲)** ۳۲۰ **۳)** ۹۶۰ **۴)** ۸۰

پاسخ: ابتدا یک زن و شوهر را از بین ۶ زن و شوهر به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم. حال باید ۳ نفر را از بین ۵ زوج دیگر انتخاب کنیم. ابتدا ۳ زوج انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. سپس از بین هر زوج انتخاب شده یا زن یا شوهر را انتخاب می‌کنیم که این کار به ۲×۲×۲ راه ممکن است. پس کل حالت‌های انتخاب ۵ نفر از بین ساکنین آپارتمان برابر است با $\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۳}\times۲^{۳}=۴۸۰$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل ششم

درس سوم: ترکیب

۱۰۰- اگر $\binom{n}{۲}=۲n$ آن‌گاه مقدار $\binom{۲n}{n+۲}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۲۰

۱۰۱- اگر $P(n,۲)=C(n,۲)+۳۶$ حاصل $C(n+۱,n-۱)$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۱۰۲- مقدار $k\binom{n}{k}$ همواره با کدام‌یک از مقادیر زیر برابر است؟ $(۱\le k\le n)$

۱) $k\binom{n-۱}{k-۱}$ ۲) $n\binom{n+۱}{k+۱}$ ۳) $k\binom{n+۱}{k-۱}$ ۴) $n\binom{n-۱}{k-۱}$

۱۰۳- در بوستان شهر، هفت مسیر پیاده‌روی به شکل جاده‌ای مستقیم وجود دارد. شهرداری می‌خواهد در تقاطع هر دو مسیر یک چراغ نصب کند. حداکثر چند چراغ لازم است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۴۲

۱۰۴- در یک تورنمنت، ۱۰ تیم شرکت کرده‌اند. هر تیم دقیقاً یک بار با هر تیم دیگر بازی می‌کند. برنده ۳ امتیاز می‌گیرد، بازنده امتیازی نمی‌گیرد و اگر بازی به تساوی کشید، هر تیم ۱ امتیاز می‌گیرد. اگر در انتهای تورنمنت مجموع امتیازهای تیم‌ها ۱۳۰ باشد، چند بازی به تساوی ختم شده است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۰۵- چند عدد شش رقمی داریم که در آن هر رقم از رقم قبل از خودش کوچک‌تر است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۳۰ ۴) ۲۴۰

۱۰۶- ۵ سیب، ۳ پرتقال و ۲ گلابی داریم. به m طریق می‌توان دو تا از آن‌ها را انتخاب کرد و به n طریق می‌توان دو میوه‌ی مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۴۵ ۳) ۷۶ ۴) ۹۶

۱۰۷- به چند طریق می‌توان ۴ نقطه با طول و عرض طبیعی از صفحه‌ی مختصات انتخاب کرد طوری که طول آن‌ها کم‌تر از ۶ و عرض آن‌ها کم‌تر از ۷ باشد؟

۱) $\binom{۵}{۴}\binom{۶}{۴}$ ۲) $\binom{۳۰}{۴}$ ۳) $\binom{۵}{۴}\binom{۶}{۴}\binom{۱۶}{۴}$ ۴) $\binom{۳۵}{۴}$

۱۰۸- در کشوری سکه‌هایی به ارزش ۱، ۲، ۵ و ۱۰ واحد رایج است و شما از هر سکه یک عدد دارید. چند جور پرداخت مختلف می‌توانید با سکه‌هایتان انجام دهید؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۱۰۹- منطقه‌ای چهار ناحیه دارد و هر ناحیه چهار تیم فوتبال دارد. در هر ناحیه هر دو تیم فوتبال یک‌بار با هم بازی می‌کنند. تیم برتر هر ناحیه به مسابقات منطقه‌ای می‌رود. در این مسابقات هر تیم با هر تیم دیگر دوبار بازی می‌کند تا قهرمان منطقه مشخص شود. در کل چند مسابقه برگزار می‌شود؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۱۱۰- در نوار روبه‌رو در خانه‌ی نخست از سمت چپ یک مهره قرار دارد. می‌توانیم این مهره را هر تعداد خانه که بخواهیم به سمت راست حرکت دهیم. به چند طریق می‌توانیم با ۴ حرکت به آخرین خانه در سمت راست برسیم؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۱۱۱- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ چند زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که شامل ۱ و ۲ هست و شامل ۳ و ۴ نیست؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۵۶۰

۱۱۲- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,...,n\}$ دارای ۲۸ زیرمجموعه‌ی دو عضوی است. این مجموعه چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۱۱۳- تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی ۳۵ واحد بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی آن است. این مجموعه چند زیرمجموعه‌ی غیر تهی دارد؟

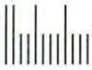
۱) ۲۵۵ ۲) ۵۱۱ ۳) ۱۰۲۳ ۴) ۲۰۴۷

۱۱۴- تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی آن برابر است. این مجموعه چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی‌دارد؟

۱) $\binom{۱۱}{۸}$ ۲) $\binom{۱۰}{۷}$ ۳) $\binom{۹}{۶}$ ۴) $\binom{۱۲}{۹}$

۱۱۵- مقدار n از معادله‌ی $\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\cdots+\binom{n}{n-۱}=۵۰۱$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۱۶- بارکد محصولات کارخانه‌ای با استفاده از ۴ پاره‌خط بلند و ۸ پاره‌خط کوچک درست می‌شود. مثلاً  یکی از این بارکدها است. به‌این‌ترتیب چند بارکد می‌توان درست کرد؟

۱) ۹۹۰ ۲) ۸۲۵ ۳) ۴۹۵ ۴) ۴۲۵

۱۱۷- شش اسباب بازی یکسان را به چند طریق می‌توان بین چهار کودک توزیع کرد؟

۱) ۴۲ ۲) ۸۴ ۳) $۶^۴$ ۴) $۲^{۱۲}$

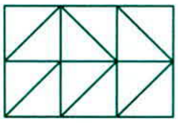
۱۱۸- شش توپ رنگی یک‌جور و ۴ توپ سفید یک‌جور را به چند طریق می‌توان در یک ردیف چید به‌طوری که هیچ دو توپ سفیدی کنار هم نباشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۵ ۴) ۷۰

۱۱۹- در یک هفت ضلعی محدب هیچ سه قطری از یک نقطه درون چند ضلعی رد نمی‌شوند. تعداد نقطه‌های برخورد قطرهای این هفت ضلعی درون آن چندتاست؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۵۴

۱۲۰- به چند طریق می‌توان دقیقاً $\frac{۱}{۳}$ مستطیل مقابل را با یک رنگ، رنگ کرد؟ (مثلث‌های کوچک باید کامل رنگ شوند.)



۱) ۱۳۶ ۲) ۳۲۶

۳) ۴۹۵ ۴) ۵۰۵

۱۲۱- به چند طریق می‌توان از میان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰ چهار عدد مختلف انتخاب کرد که مجموع آن‌ها عددی فرد باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۶۴ ۴) ۱۰۰

۱۲۲- در یک صفحه‌ی شطرنجی ۶×۵ چند مستطیل وجود دارد؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۱۵

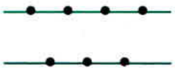
۱۲۳- در یک صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ چند مستطیل افقی یا عمودی با ابعاد ۳ و ۵ وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۱۲۴- اگر پنج نقطه روی محیط دایره‌ای قرار داشته باشند، چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس آن‌ها روی این نقاط باشد؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۱۲۵- چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس آن روی نقاط مشخص شده در شکل مقابل باشد؟



۱) ۲۴
۲) ۳۰
۳) ۳۵
۴) ۴۰

۱۲۶- روی یک خط ۵ نقطه و روی خطی موازی آن ۶ نقطه انتخاب کرده‌ایم. چند مثلث وجود دارند که رأس‌هایشان از این نقطه‌ها هستند؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۲۵
۳) ۱۳۰
۴) ۱۳۵

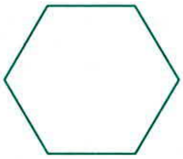
۱۲۷- در شکل مقابل چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌هایشان از ۹ نقطه‌ی مشخص شده هستند؟ (فقط نقاط روی خط در یک راستا هستند)

۱) ۸۴
۲) ۸۰
۳) ۷۶
۴) ۷۴

۱۲۸- در شکل مقابل چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن‌ها از نقطه‌های مشخص شده هستند؟

۱) ۵۰
۲) ۵۱
۳) ۵۲
۴) ۵۴

۱۲۹- چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌هایشان از رأس‌های شش ضلعی منتظم روبه‌رو باشد و دست کم یک ضلع آن‌ها، ضلعی از این شش ضلعی باشد؟



۱) ۲۰
۲) ۱۸
۳) ۱۶
۴) ۱۲

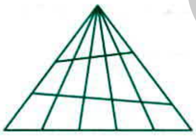
۱۳۰- چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن روی نقاط مشخص‌شده‌ی شکل مقابل باشند؟

۱) ۴۶
۲) ۸۴
۳) ۵۶
۴) ۷۴

۱۳۱- اگر پنج نقطه روی محیط دایره‌ای قرار داشته باشند، تعداد چند ضلعی‌های محاطی که می‌توان رسم کرد به‌طوری که رئوس آن‌ها از این نقاط باشد، چند تاست؟

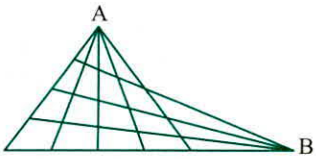
۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۳۲- تعداد مثلث‌ها در شکل مقابل چند تاست؟



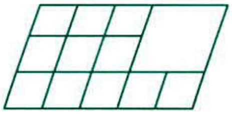
۱) ۳۶
۲) ۴۵
۳) ۵۵
۴) ۶۶

۱۳۳- در شکل مقابل چند مثلث وجود دارد؟



۱) ۷۰
۲) ۶۵
۳) ۶۰
۴) ۵۴

۱۳۴- در شکل مقابل چند متوازی‌الاضلاع وجود دارد؟



۱) ۵۰
۲) ۵۱
۳) ۵۲
۴) ۵۳

۱۳۵- پنج مستطیل حداکثر در چند نقطه ممکن است یکدیگر را قطع کنند؟ (هر دو ضلع حداکثر در یک نقطه متقاطع‌اند.)

۱) ۸۰
۲) ۶۰
۳) ۴۰
۴) ۲۰

۱۳۶- به چند طریق می‌توان یک تیم ۴ نفره را ازمیان ۵ دانش‌آموز سال دهم و ۶ دانش‌آموز سال یازدهم انتخاب کرد طوری که حداقل یکی از دانش‌آموزان سال دهم در تیم باشد؟

۱) ۳۱۰ ۲) ۳۱۵ ۳) ۳۲۰ ۴) ۳۳۰

۱۳۷- به چند طریق می‌توان یک تیم ۴ نفره را از میان ۵ زن و ۷ مرد انتخاب کرد طوری که حداکثر ۳ مرد انتخاب شود؟

۱) ۴۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۸۲۰

۱۳۸- به چند طریق می‌توان ۵ لنگه کفش را از بین ۶ جفت کفش انتخاب کرد طوری که دقیقاً یک جفت کفش در بین آن‌ها وجود داشته باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۱۳۹- با ۵ شلوار و ۶ پیراهن متمایز، به چند طریق می‌توان ۳ دست پیراهن و شلوار درست کرد؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۲۴۰۰

۱۴۰- شش سکه را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. به چند طریق ممکن است فقط دوتا از آن‌ها رو بیایند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۴۱- یک سکه را ده بار پرتاب می‌کنیم. در چند حالت، در پرتاب چهارم، برای دومین بار سکه رو می‌آید؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۹۲ ۳) ۱۲۸ ۴) ۳۸۴

۱۴۲- یک تاس را هفت بار پرتاب می‌کنیم. در چند حالت سومین باری که ۶ ظاهر می‌شود در پرتاب ششم است؟

۱) ۳۲۵۰ ۲) ۷۵۰۰ ۳) ۹۰۰۰ ۴) ۱۲۵۰۰

۱۴۳- چند تابع با دامنه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد $B=\{۱,۲,۳\}$ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

۱۴۴- ۴ حلقه‌ی قرمز، ۳ حلقه‌ی آبی و ۲ حلقه‌ی سفید را به چند طریق می‌توان در یک میله‌ی فلزی که عمود بر زمین است انداخت؟

۱) ۱۰۸۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) ۱۳۴۰ ۴) ۱۴۲۰

۱۴۵- ۵ توپ متمایز را به چند طریق می‌توان بین ۳ برادر طوری تقسیم کرد که به برادر بزرگ‌تر ۱ توپ برسد و به هر یک از دو برادر دیگر دست کم یک توپ برسد؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۱۴۶- خانمی ۷ دوست دارد که ۳ تا از آن‌ها خارجی و ۴ تا از آن‌ها ایرانی هستند. شوهرش هم ۷ دوست دارد که ۴ تا از آن‌ها خارجی و ۳ تا از آن‌ها ایرانی هستند. این زن و شوهر به چند طریق می‌توانند ۳ نفر ایرانی و ۳ نفر خارجی را به ناهار دعوت کنند، به شرطی که ۳ نفر از دوستان زن و ۳ نفر از دوستان شوهر انتخاب شوند؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۵ ۴) ۵۵۵

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ترکیبیات

۱- گزینه‌ی ۳ او باید یا یکی از پیراهن‌های آستین کوتاه را بپوشد (۳ حالت) یا یکی از چهار پیراهن آستین بلند را بپوشد (۴ حالت). بنابراین، طبق اصل جمع، به ۷=۴+۳ طریق می‌تواند یکی از پیراهن‌هایش را بپوشد.

۲- گزینه‌ی ۴ به ۳ طریق می‌تواند خودنویس را انتخاب کند. تعداد راه‌های جوهرکردن این خودنویس هم ۴تاست. بنابراین، طبق اصل ضرب، ۱۲=۴×۳ راه برای جوهرکردن یکی از خودنویس‌ها وجود دارد.

۳- گزینه‌ی ۴ برای این‌که تاس عددی فرد بیاید، باید یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵ ظاهر شود. از طرفی به ازای ظاهر شدن هر یک از این سه عدد، سکه می‌تواند «پشت» یا «رو» بیاید. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های مورد نظر برابر است با ۶=۲×۳.

۴- گزینه‌ی ۲ به هر یک از پوشش‌ها، یک مورد متمایز اضافه کرده و اعداد حاصل از ضرب آن‌ها را باهم مقایسه می‌کنیم:

کت‌ها: ۲+۱=۳ ⇒ ۳×۳×۴×۵=۱۸۰

کفش‌ها: ۳+۱=۴ ⇒ ۲×۴×۴×۵=۱۶۰

شلوارها: ۴+۱=۵ ⇒ ۲×۳×۵×۵=۱۵۰

پیراهن‌ها: ۵+۱=۶ ⇒ ۲×۳×۴×۶=۱۴۴

۵- گزینه‌ی ۳ برای این‌که عمل ضرب پرانتزهای داده شده را انجام دهیم، از هر پرانتز یک جمله انتخاب کرده و جمله‌های انتخابی را درهم ضرب می‌کنیم. حال برای انتخاب یک جمله از پرانتز اول، دو حالت، از پرانتز دوم، سه حالت و از پرانتز سوم، چهار حالت وجود دارد. یعنی در نهایت ۲۴=۴×۳×۲ جمله تولید می‌شود.

۶- گزینه‌ی ۲ برای مهره‌ی اول ۷ انتخاب داریم.
برای مهره‌ی دوم ۶ انتخاب داریم.
برای مهره‌ی سوم ۵ انتخاب داریم.
بنابراین، تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۲۱۰=۵×۶×۷.

۷- گزینه‌ی ۲ ۲۴=۴×۳×۲.

۸- گزینه‌ی ۳ برای مدافع راست ۹ انتخاب داریم. وقتی‌که مدافع راست را انتخاب کردیم، از میان ۸ نفر باقی‌مانده می‌توانیم به ۸ طریق مدافع چپ را انتخاب کنیم. وقتی‌که مدافع چپ را انتخاب کردیم، از میان ۷ نفر باقی‌مانده می‌توانیم به ۷ طریق مدافع وسط را انتخاب کنیم. بنابراین، طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

۵۰۴=۷×۸×۹

۹- گزینه‌ی ۳ برای نامه‌ی اول ۶ انتخاب وجود دارد. برای نامه‌ی دوم ۵ انتخاب وجود دارد، زیرا در صندوقی که نامه‌ی اول را انداخته‌ایم دیگر نمی‌توان نامه‌ای انداخت. به همین ترتیب، برای نامه‌ی سوم ۴ انتخاب و برای نامه‌ی چهارم ۳ انتخاب داریم. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

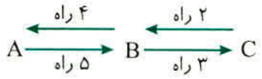
۳۶۰=۳×۴×۵×۶

۱۰- گزینه‌ی ۱ میله‌ها را از سمت چپ با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. میله‌ی شماره‌ی (۱) را به ۴ رنگ می‌توانیم رنگ کنیم. رنگ میله‌ی شماره‌ی (۲) باید با رنگ میله‌ی شماره‌ی (۱) فرق کند. بنابراین به ۳ رنگ می‌توانیم آن را رنگ کنیم. رنگ میله‌ی شماره‌ی (۳) باید با رنگ میله‌ی شماره‌ی (۲) فرق کند، اما می‌تواند به رنگ میله‌ی شماره‌ی (۱) باشد. بنابراین میله‌ی شماره‌ی (۳) را به ۳ رنگ می‌توانیم رنگ کنیم. به همین ترتیب معلوم می‌شود که میله‌های (۴) و (۵) را هم می‌توان به ۳ رنگ، رنگ کرد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

۳۲۴=۳×۳×۳×۳×۴

۱۱- گزینه‌ی ۱ تعداد راه‌های رفتن از A به C برابر است با ۱۵=۳×۵. در مسیر برگشت، از یکی از راه‌های از C به B و یکی از راه‌های B به A (که قبلاً رفته‌ایم) نمی‌توانیم برگردیم. بنابراین تعداد راه‌های رفتن از C به A برابر است با ۸=۴×۲. در نتیجه، تعداد راه‌های ممکن برابر است با

۱۲۰=۸×۱۵



۱۲- گزینه‌ی ۱ از دو طریق می‌توان از A به D رفت:

مسیر ABCD: ۱۸=۳×۲×۳

مسیر ABD: ۶=۲×۳

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۲۴=۶+۱۸.

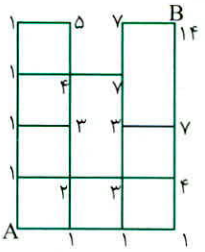
۱۳- گزینه‌ی ۳

$$A \xrightarrow[۳]{} B \xrightarrow[۴]{} C : ۳\times۴=۱۲$$

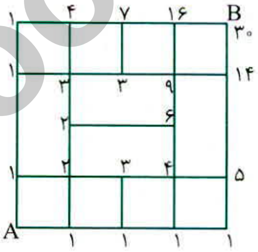
$$A \xrightarrow[۲]{} C : ۲$$

پس تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۱۴=۲+۱۲.

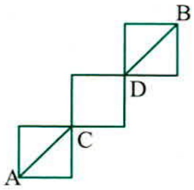
۱۴- گزینه‌ی ۴ تعداد راه‌های رفتن از A به هر نقطه روی شکل زیر طبق اصل جمع مشخص شده است. تعداد راه‌های رفتن از A به B برابر ۱۴ است.

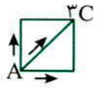


۱۵- گزینه‌ی ۴ تعداد راه‌های رسیدن از A به هر نقطه روی شکل زیر به کمک اصل جمع مشخص شده است. بنابراین تعداد راه‌ها از A به B برابر ۳۰ است.

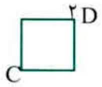


۱۶- گزینه‌ی ۲ مطابق شکل، برای این‌که از A به B برویم، باید مسیر $A\to C\to D\to B$ را طی کنیم:

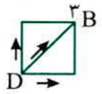




۳ راه $A\to C$



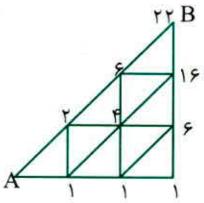
۲ راه $C\to D$



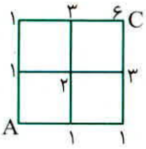
۳ راه $D\to B$

بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۱۸=۳\times۲\times۳$.

۱۷- گزینه‌ی ۳ تعداد راه‌های رسیدن از A به هر نقطه، طبق اصل جمع روی شکل زیر مشخص شده است.
بنابراین تعداد راه‌های رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برابر ۲۲ تاست.

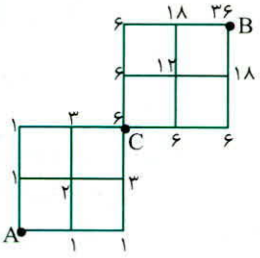


۱۸- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول** تعداد راه‌های رسیدن به نقطه‌ی C از نقطه‌ی A مطابق شکل به کمک اصل جمع به‌دست می‌آید که برابر ۶ راه است.

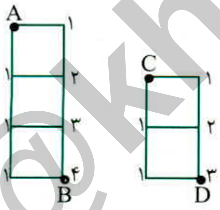


تعداد راه‌های رسیدن به B از نقطه‌ی C نیز به همین ترتیب ۶ راه به‌دست می‌آید. توجه کنید که ابتدا باید با ۶ راه از A به C برویم. سپس با ۶ راه از C به B برویم.
بنابراین $۳۶=۶\times۶$ راه با شرایط مسأله وجود دارد.

راه‌حل دوم چون باید ابتدا به C برویم، راه‌هایی که از آن‌ها نمی‌توان به نقطه‌ی C رسید را حذف می‌کنیم. پس باید روی راه‌های شکل زیر حرکت کنیم، که به کمک اصل جمع تعداد راه‌ها ۳۶ به‌دست می‌آید.

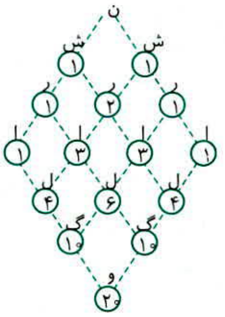


۱۹- گزینه‌ی ۲ در شکل‌های زیر تعداد راه‌های رفتن از A به B و نیز از C به D را حساب کرده‌ایم:



از B به C هم فقط به ۱ طریق می‌توان رفت. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۱۲=۴\times۱\times۳$.

۲۰- گزینه‌ی ۳ در شکل زیر راه‌های رسیدن به هر حرف را زیر آن نوشته‌ایم. به این ترتیب، بنابر تعمیم اصل جمع، تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۲۰.



۲۱- گزینه‌ی ② برای این‌که عددی مضرب ۵ باشد، بایستی یکان آن صفر یا ۵ باشد. از طرفی توجه داریم که در یک عدد دو رقمی، رقم دهگان می‌تواند هر یک از ارقام ۱, ۲, ۳, ... , ۹ (یعنی تمامی ارقام به غیر از صفر) باشد. پس

=۱۸	②	×	⑨
	صفر یا ۵		ارقام غیرصفر

۲۲- گزینه‌ی ③ جایگاه هر یک از ارقام را با یک دایره نشان می‌دهیم و سپس تعیین می‌کنیم که در هر یک از این جایگاه‌ها چند رقم می‌تواند قرار بگیرد. در نهایت طبق اصل ضرب، تعداد حالات ممکن برای قرار دادن ارقام در دایره‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

= ۳۲	①	×	②	×	②	×	②	×	②	×	②
	فقط ۵		۲ یا ۵		۲ یا ۵		۲ یا ۵		۲ یا ۵		۲ یا ۵

۲۳- گزینه‌ی ②

= ۲۰×۹^{۳}	④	×	⑨	×	⑨	×	⑨	×	⑤
	ارقام زوج غیر صفر		ارقام غیر صفر		ارقام غیر صفر		ارقام غیر صفر		ارقام فرد

۲۴- گزینه‌ی ①

= ۹۰	①	×	⑩	×	⑨
	رقم مشابه صدگان		تمام ارقام		ارقام غیرصفر

۲۵- گزینه‌ی ② برای رقم صدگان می‌توانیم هر یک از ارقام به‌جز صفر را انتخاب کنیم. بنابراین ۳ حالت برای نوشتن صدگان وجود دارد. هر یک از رقم‌های یکان و دهگان را می‌توان به ۴ حالت انتخاب کرد. بنابراین ۴×۴×۳ عدد سه رقمی با شرایط مسأله وجود دارد.

۲۶- گزینه‌ی ③ ۴×۳×۲=۲۴.

۲۷- گزینه‌ی ③ رقم صدگان نمی‌تواند صفر باشد، پس به ۴ حالت می‌توان آن را انتخاب کرد. رقم دهگان را باید متفاوت از صدگان انتخاب کنیم. پس این رقم نیز به ۴ حالت انتخاب می‌شود چون صفر نیز در این حالت شمرده می‌شود. رقم یکان را باید متمایز از صدگان و دهگان انتخاب کنیم، پس این رقم به ۳ حالت نوشته می‌شود. بنابراین تعداد کل اعداد سه رقمی با شرایط مسأله برابر ۳×۴×۴ است.

۲۸- گزینه‌ی ③ یکان عدد می‌تواند صفر، ۲ یا ۴ باشد، پس سه حالت برای انتخاب یکان وجود دارد. صدگان عدد می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد، پس پنج حالت برای انتخاب صدگان وجود دارد. دهگان عدد هم می‌تواند هر یک از ارقام عضو مجموعه باشد یعنی شش حالت برای انتخاب دهگان وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب ۵×۶×۳=۹۰ عدد با شرایط مسأله وجود دارد.

۲۹- گزینه‌ی ② اگر رقم یکان را صفر انتخاب کنیم، رقم دهگان را به ۶ حالت دیگر می‌توان انتخاب کرد و رقم صدگان را به ۵ حالت می‌توان انتخاب کرد. پس تعداد این اعداد ۵×۶ است.

صفر	به‌جز صفر	به‌جز صفر و دهگان
۱ حالت	۶ حالت	۵ حالت

اگر رقم یکان صفر نباشد، باید یکی از ارقام ۲، ۴ یا ۶ باشد تا عدد مورد نظر زوج شود. پس برای انتخاب یکان سه حالت وجود دارد. در این صورت، صدگان را می‌توان به ۵ حالت انتخاب کرد، زیرا باید صفر و برابر یکان نباشد. همچنین دهگان را می‌توان به ۵ حالت انتخاب کرد. زیرا باید برابر یکان و صدگان نباشد. پس تعداد این اعداد ۳×۵×۵ است.

۲، ۴، ۶	به‌جز یکان و صدگان	به‌جز یکان و صفر
۳ حالت	۵ حالت	۵ حالت

بنابراین تعداد کل اعداد مورد نظر ۷۵+۳۰ یعنی ۱۰۵ است.

۳۰- گزینه‌ی ① رقم یکان باید صفر یا ۵ باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول رقم یکان ۵ است. در این حالت چون رقم هزارگان صفر نمی‌تواند باشد، پس برای رقم هزارگان ۸ انتخاب و برای رقم صدگان نیز ۸ انتخاب داریم (چون رقم صدگان می‌تواند صفر باشد). برای رقم دهگان نیز ۷ انتخاب داریم.

۸×۸×۷×۱=۴۴۸

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۱	۷	۸	۸
۵			

حالت دوم رقم یکان صفر است. در این حالت برای رقم هزارگان ۹ انتخاب، برای رقم صدگان ۸ انتخاب و برای رقم دهگان ۷ انتخاب داریم.

۹×۸×۷×۱=۵۰۴

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۱	۷	۸	۹
صفر			

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با ۹۵۲=۵۰۴+۴۴۸.

۳۱- گزینه‌ی ③ تعداد عددهای مورد نظر برابر است با تعداد کل عددهای سه رقمی که می‌توان با این رقم‌ها نوشت، منهای تعداد عددهای سه رقمی با این ارقام که رقم تکراری ندارند.

یکان	دهگان	صدگان		یکان	دهگان	صدگان
۴	۴	۴	−	۲	۳	۴

بنابراین

تعداد عددهای مورد نظر = ۴×۴×۴ − ۴×۳×۲ = ۶۴ − ۲۴ = ۴۰

۳۲- گزینه‌ی ④ باید تعداد عددهای چهار رقمی‌ای را حساب کنیم که می‌توان با ۹ رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ نوشت. تعداد این عددها برابر است با

۸×۹×۹×۹=۵۸۳۲

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۹	۹	۹	۸

۳۳- گزینه‌ی ۴ برای پیداکردن تعداد عددهای موردنظر می‌توانیم تعداد عددهایی را که در آن‌ها رقم ۷ وجود ندارد از تعداد کل عددهای سه رقمی کم کنیم. تعداد عددهای سه رقمی که در آن‌ها رقم ۷ وجود ندارد، برابر است با تعداد عددهای سه رقمی که می‌توان با ۹ رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ نوشت. تعداد این عددها برابر است با ۶۴۸=۹×۹×۸. بنابراین تعداد عددهای سه رقمی که در آن‌ها ۷ وجود دارد برابر است با ۲۵۲=۶۴۸−۹۰۰.

۳۴- گزینه‌ی ۴ در این‌جا باید تعداد همه‌ی عددهای یک‌رقمی، دورقمی و سه‌رقمی با ویژگی موردنظر را پیدا کنیم.

تعداد عددهای سه‌رقمی:

یکان	دهگان	صدگان
۶	۶	۳
		۳, ۲, ۱

۱۰۸=۶×۶×۳

تعداد عددهای دورقمی:

یکان	دهگان
۶	۵

۳۰=۶×۵

تعداد عددهای یک‌رقمی:

یکان
۶

۶

بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با

۱۴۴=۶+۳۰+۱۰۸

۳۵- گزینه‌ی ۱ رقم صدگان می‌تواند ۴، ۵ یا ۶ باشد، پس ۳ حالت دارد. دهگان و یکان می‌توانند صفر تا ۶ باشند، پس هر کدام ۷ حالت دارند. به این ترتیب عدد ۴۰۰ هم نوشته می‌شود که قابل قبول نیست. یعنی تعداد اعداد با شرایط مذکور برابر است با

۱۴۶=۱−۷×۷×۳

۳۶- گزینه‌ی ۳ رقم صدگان باید ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول رقم صدگان ۴، ۵ یا ۶ باشد.

یکان	دهگان	صدگان
۵	۶	۳
		۴, ۵, ۶

۹۰=۵×۶×۳

حالت دوم رقم صدگان ۳ باشد. در این صورت رقم دهگان باید ۵ یا ۶ باشد.

یکان	دهگان	صدگان
۵	۲	۱
	۵, ۶	۳

۱۰=۵×۲×۱

البته توجه کنید که در این حالت باید ۳۵۰ را حساب نکنیم. در نتیجه تعداد عددهای موردنظر برابر است با

۹۹=۱−۱۰+۹۰

۳۷- گزینه‌ی ۲ دو حالت داریم: رقم صدگان ۵ یا ۶ باشد یا رقم صدگان ۷ باشد.

یکان	دهگان	صدگان		یکان	دهگان	صدگان
۳	۲	۱	+	۳	۴	۲
		۷				۵, ۶

۳۰=۶+۲۴=۳×۲×۱+۳×۴×۲=تعداد عددهای موردنظر

۳۸- گزینه‌ی ۲ رقم صدگان باید ۳، ۴ یا ۵ باشد. پس سه حالت برای صدگان وجود دارد. دهگان می‌تواند هر یک از ارقام صفر تا ۵، به جز رقمی که در صدگان استفاده شده، باشد پس دهگان ۵ حالت دارد. رقم یکان هم می‌تواند هر یک از ارقام صفر تا ۵ به‌جز ارقامی که در صدگان و دهگان استفاده شده باشد، پس ۴ حالت برای یکان وجود دارد. یعنی ۶۰=۴×۵×۳ عدد با شرایط مذکور وجود دارد.

۳۹- گزینه‌ی ۲ عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ یا ۷ است از عدد ۵۹۷۳۱ بزرگ‌ترند. تعداد این عددها برابر است با

۱	۲	۳	۴	۲
				۷, ۹

۴۸=۱×۲×۳×۴×۲

بعد از این‌ها بزرگ‌ترین عدد ۵۹۷۳۱ است، بنابراین ۴۹ اُمین عددی است که نوشته‌ایم.

۴۰- گزینه‌ی ۱ تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۹ است برابر است با

۱	۲	۳	۴	۱

۲۴=۱×۲×۳×۴×۱

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۸ است برابر است با

۱	۲	۳	۴	۱

۲۴=۱×۲×۳×۴×۱

تعداد عددهایی که اولین رقم سمت چپ آن‌ها ۶ است برابر است با

۱	۲	۳	۴	۱

۲۴=۱×۲×۳×۴×۱

تعداد این عددها برابر است با ۷۲=۲۴+۲۴+۲۴، پس ۷۲ اُمین عددی که نوشته‌ایم کوچک‌ترین عددی است که اولین رقم سمت چپ آن برابر ۶ است. این عدد ۶۲۴۸۹ است.

۴۱- گزینه‌ی ۲ هر مقسوم‌علیه طبیعی عدد a به‌صورت $۲^{x}\times ۳^{y}\times ۵^{z}$ است که x، y و z اعدادی حسابی هستند. چون می‌خواهیم مقسوم‌علیه، زوج باشد پس باید حداقل یک عامل ۲ داشته باشد و چون می‌خواهیم بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، پس نباید عامل ۳ داشته باشد. بنابراین باید $۱\leq x\leq ۳$، $y=۰$ و $۰\leq z\leq ۴$. یعنی برای x سه حالت، برای y یک حالت و برای z پنج حالت وجود دارد. پس تعداد این مقسوم‌علیه‌ها برابر ۱۵=۵×۱×۳ است.

۴۲- گزینه‌ی ① مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد a و b باید عامل‌های مشترک دو عدد را داشته باشند. یعنی هر مقسوم‌علیه مشترک دو عدد به‌صورت $۲^x \times ۵^y$ است که x و y اعداد حسابی‌اند و $۰ \le x \le ۱$ و $۰ \le y \le ۲$.

(توجه کنید که حداکثر مقدار x برابر کوچک‌ترین نمای ۲ در دو عدد است. همین‌طور حداکثر مقدار y برابر کوچک‌ترین نمای ۵ در دو عدد است. زیرا باید هر دو عدد بر مقسوم‌علیه مشترک، بخش‌پذیر باشند.)

پس برای x دو حالت و برای y سه حالت وجود دارد در نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک برابر $۲ \times ۳ = ۶$ است.

۴۳- گزینه‌ی ② عدد ۲ را در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. (۱حالت). عدد ۸ را در زیرمجموعه قرار نمی‌دهیم (۱حالت). بنابراین هفت عدد دیگر وجود دارند که هر کدام می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند (هر کدام دو حالت).

بنابراین $۱ \times ۱ \times \underbrace{۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}_{\text{۷تا}} = ۱۲۸$ زیرمجموعه با شرایط سوال وجود دارد.

۴۴- گزینه‌ی ③ عضوهای ۲ و ۳ را به یک حالت در زیرمجموعه قرار می‌دهیم. عضوهای ۴ و ۵ را به یک حالت کنار می‌گذاریم و در مجموعه قرار نمی‌دهیم. شش عضو دیگر را می‌توانیم در زیرمجموعه قرار دهیم یا قرار ندهیم. یعنی هر کدام از آن‌ها ۲ حالت دارد.

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط مسأله $۲^۶ = ۶۴$ است.

۴۵- گزینه‌ی ② تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر $۲^{۲۰}$ است. تعداد زیرمجموعه‌هایی که هیچ‌کدام از اعضای آن‌ها یک‌رقمی نیستند، برابر $۲^{۱۰}$ است. زیرا مجموعه‌ی A دارای ۱۰ عضو دورقمی است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل یکی از اعضای آن‌ها یک‌رقمی است، برابر است با

$$۲^{۲۰} - ۲^{۱۰} = ۲^{۱۰}(۲^{۱۰} - ۱) = ۱۰۲۴ \times ۱۰۲۳$$

۴۶- گزینه‌ی ③ اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۶ و ۱۰ باشند، عضوهای دیگر زیرمجموعه می‌توانند اعداد ۷، ۸ و ۹ باشند که می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها $۲^۳$ است.

به همین ترتیب اگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۷ و ۹ باشند، عدد ۸ می‌تواند در زیرمجموعه باشد یا نباشد. یعنی ۲ زیرمجموعه به این شکل وجود دارد.

پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب مسأله ۱۰ تاست.

۴۷- گزینه‌ی ① تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر ۲^n و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+۱$ عضوی برابر $۲^{n+۱}$ است.

با توجه به این‌که $۲^{n+۱} = ۲ \times ۲^n$، تعداد زیرمجموعه‌ها با اضافه کردن یک عضو جدید، دو برابر می‌شود.

۴۸- گزینه‌ی ② فرض می‌کنیم مجموعه دارای n عضو بوده است و ۲^n زیرمجموعه دارد.

اگر سه عضو به مجموعه اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+۳$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{n+۳}$ می‌شود. بنابراین تساوی زیر درست است:

$$۲^{n+۳} = ۲^n + ۲۲۴$$

در نتیجه

$$۲^n \times ۲^۳ - ۲^n = ۲۲۴ \Rightarrow ۷ \times ۲^n = ۲۲۴$$
$$\Rightarrow ۲^n = ۳۲ \Rightarrow n = ۵$$

بنابراین مجموعه‌ی جدید ۸ عضو دارد و $۲^۸ = ۲۵۶$ زیرمجموعه دارد.

۴۹- گزینه‌ی ① اعدادی که بر ۳ و ۷ بخش‌پذیرند، بر ۲۱ بخش‌پذیرند. مجموعه‌ی اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۲۱ $A = \{۲۱, ۴۲, ۶۳, ۸۴\}$ است که دارای ۴ عضو است و $۲^۴$ زیرمجموعه دارد.

۵۰- گزینه‌ی ③ تعداد اعداد دو رقمی کم‌تر از ۵۰ برابر ۴۰ است. از این اعداد، ۱۱، ۲۲، ۳۳ و ۴۴ دارای ارقام مشابه هستند، پس ۳۶ عدد دیگر دارای ارقام متمایز هستند. بنابراین A دارای ۳۶ عضو و $۲^{۳۶}$ زیرمجموعه است. بنابراین

$$۲^{۳۶} = ۱۶^a$$
$$(۲^۴)^۹ = ۱۶^a$$
$$۱۶^۹ = ۱۶^a$$
$$a = ۹$$

۵۱- گزینه‌ی ③ برای انداختن پاکت اول ۶ انتخاب داریم. به همین ترتیب، برای انداختن هر یک از دیگر پاکت‌ها نیز ۶ انتخاب داریم. بنابراین تعداد راه‌های پست کردن نامه‌ها برابر است با

$$۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶ = ۶^۴$$

۵۲- گزینه‌ی ① هر مسافر می‌تواند در یکی از ۲۰ طبقه پیاده شود. پس تعداد انتخاب‌های مسافر اول ۲۰ تا، مسافر دوم ۲۰ تا و ... و مسافر دهم ۲۰ تاست. بنابراین $\underbrace{۲۰ \times ۲۰ \times ۲۰ \times \cdots \times ۲۰}_{\text{۱۰تا}} = ۲۰^{۱۰}$ حالت برای پیاده شدن مسافران وجود دارد.

۵۳- گزینه‌ی ② می‌توان مهره را در هر یک از خانه‌ها به‌جز خانه‌های ابتدا و انتها قرار داد یا قرار نداد. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۲^۵ = ۳۲$.

۵۴- گزینه‌ی ④ فرض کنیم تعداد تست‌ها n تا باشد. چون برای پاسخ‌گویی به هر تست ۴ حالت وجود دارد، بنابراین

$$\underbrace{\textcircled{۴} \times \textcircled{۴} \times \cdots \times \textcircled{۴}}_{n\ \text{تا}} = ۲^{۳۰}$$

$$\Rightarrow ۴^n = ۲^{۳۰} \Rightarrow (۲^۲)^n = ۲^{۳۰} \Rightarrow ۲^{۲n} = ۲^{۳۰}$$
$$\Rightarrow ۲n = ۳۰ \Rightarrow n = ۱۵$$

۵۵- گزینه‌ی ۳ هر سوال دارای چهار گزینه است که دانش‌آموز می‌تواند یکی از آن‌ها را انتخاب نماید. همچنین دانش‌آموز می‌تواند به سوال پاسخ ندهد. پس برای پاسخ‌گویی به هر سوال ۵ حالت وجود دارد. بنابراین تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به ۲۰ سوال برابر $\underbrace{۵\times۵\times\cdots\times۵}_{\text{۲۰تا}}$ یعنی $۵^{۲۰}$ است.

۵۶- گزینه‌ی ۲ هرکدام از ۷ نفر ممکن است در این آزمون قبول شود یا رد شود:

نفر هفتم	...	نفر دوم	نفر اول
۲ حالت	...	**۲ حالت**	**۲ حالت**

بنابراین تعداد نتیجه‌های ممکن برابر است با

$$۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^{۷}$$

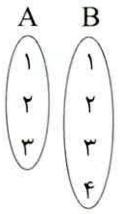
۵۷- گزینه‌ی ۱ گزینه‌ی درست سؤال اول را هر یک از ۴ گزینه می‌توان انتخاب کرد. گزینه‌ی درست سؤال دوم را باید گزینه‌ای غیر از گزینه‌ی سؤال اول انتخاب کرد. پس ۳ انتخاب داریم. برای سوال سوم، باید گزینه‌ای غیر از گزینه‌ی درست سؤال دوم انتخاب کنیم، اما می‌توانیم گزینه‌ی درست سؤال اول را هم انتخاب کنیم. بنابراین برای سؤال سوم هم ۳ انتخاب داریم. به همین ترتیب معلوم می‌شود که برای بقیه‌ی سؤال‌ها هم ۳ انتخاب داریم. بنابراین، تعداد پاسخ‌نامه‌ها برابر است با

$$۴\times\underbrace{۳\times۳\times\cdots\times۳}_{\text{۹تا}}=۴\times۳^{۹}$$

۵۸- گزینه‌ی ۲

این تابع به صورت $f=\{(۱,x),(۲,y),(۳,z)\}$ خواهد بود که x، y و z می‌توانند هر یک از چهار عضو مجموعه‌ی B باشند. یعنی x، y و z هر کدام چهار مقدار مختلف می‌توانند داشته باشند. پس $۴\times۴\times۴$ تابع با این شرایط وجود دارد.

۵۹- گزینه‌ی ۳ هر عضو مجموعه‌ی A را می‌توانیم به یکی از اعضای مجموعه‌ی B با یک پیکان وصل کنیم. همچنین می‌توانیم این عضو A را به هیچ عضوی از B وصل نکنیم. یعنی برای خارج کردن یک پیکان از هر عضو A، پنج حالت وجود دارد. پس $۵\times۵\times۵$ تابع می‌توان نوشت که دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ی A و برد آن زیرمجموعه‌ی B است. یکی از این توابع تهی است که در آن دامنه‌ی تابع تهی است. بنابراین ۱۲۴ تابع غیر تهی وجود دارد.



۶۰- گزینه‌ی ۲

هر تابع به صورت $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$ مطلوب مسأله است که در آن c ،b و d می‌توانند ۱ تا ۴ باشند (چهار انتخاب دارند) ولی a می‌تواند ۲ تا ۴ باشد (سه انتخاب دارد). بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با

$$۴\times۴\times۴\times۳=۱۹۲$$

۶۱- گزینه‌ی ۱

هر تابع مانند $f=\{(۱,۵),(۲,x),(۳,y),(۴,z)\}$ مطلوب مسأله است که x، y و z هر کدام می‌توانند اعداد ۵، ۶، ۷ و ۸ باشند. یعنی هر کدام ۴ حالت دارند. بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با

$$۴\times۴\times۴=۶۴$$

۶۲- گزینه‌ی ۲

تابع f به‌صورت $f=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$ است که در آن $a\leq۱$، $b\leq۲$، $c\leq۳$ و $d\leq۴$ و در ضمن a، b، c و d عضو A هستند. یعنی a یک حالت، b دو حالت، c سه حالت و d چهار حالت می‌تواند داشته باشد. بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با

$$۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$$

۶۳- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{(n+۱)!+(n-۱)!}{n^{۳}-۱}=۲۴$$

$$\frac{(n-۱)!(n(n+۱)+۱)}{(n-۱)(n^{۲}+n+۱)}=۲۴$$

$$\frac{(n-۱)(n-۲)!(n^{۲}+n+۱)}{(n-۱)(n^{۲}+n+۱)}=۲۴$$

$$(n-۲)!=۲۴\Rightarrow n=۶$$

۶۴- گزینه‌ی ۴ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$۶P(n,r)=P(n+۱,r+۱)$$

$$۶\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{(n+۱)!}{(n+۱-r-۱)!}$$

$$\frac{۶n!}{(n-r)!}=\frac{(n+۱)n!}{(n-r)!}$$

$$n+۱=۶\Rightarrow n=۵$$

بنابراین

$$P(n+۱,n)=P(۶,۵)=\frac{۶!}{(۶-۵)!}=۷۲۰$$

۶۵- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$P(n-۱,۲)+۱۲=P(n,۲)$$

$$\frac{(n-۱)!}{(n-۳)!}+۱۲=\frac{n!}{(n-۲)!}$$

$$(n-۱)(n-۲)+۱۲=n(n-۱)$$

$$n^{۲}-۳n+۲+۱۲=n^{۲}-n$$

$$۱۴=۲n\Rightarrow n=۷$$

۶۶- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$P(n,۳)=\frac{n!}{(n-۳)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}$$

$$=n(n-۱)(n-۲)$$

بنابراین

$$\frac{P(n,۳)}{n-۲}=۴۹-n$$

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)}{(n-۲)}=۴۹-n$$

$$n(n-۱)=۴۹-n\Rightarrow n^{۲}=۴۹$$

پس $n=۷$.

۶۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$P(n+۱,n-۱)=\frac{(n+۱)!}{(n+۱-(n-۱))!}=\frac{(n+۱)!}{۲!}=\frac{(n+۱)n!}{۲}$$

$$P(n,n-۲)=\frac{n!}{(n-(n-۲))!}=\frac{n!}{۲!}=\frac{n!}{۲}$$

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=n!$$

بنابراین

$$\frac{P(n+۱,n-۱)+P(n,n-۲)}{P(n,n)}=۴$$

$$\frac{\frac{(n+۱)n!}{۲}+\frac{n!}{۲}}{n!}=۴$$

$$\frac{n+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴\Rightarrow\frac{n+۲}{۲}=۴$$

پس $n=۶$.

۶۸- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\frac{a!+b!}{b!}=۵۷\Rightarrow\frac{a!}{b!}+\frac{b!}{b!}=۵۷$$

$$\Rightarrow\frac{a!}{b!}+۱=۵۷$$

$$\Rightarrow\frac{a!}{b!}=۵۶=۷\times ۸$$

بنابراین $a!=b!\times ۷\times ۸$، در نتیجه $a!>b!$، پس $a>b$. به این ترتیب

$$a!=۱\times ۲\times\cdots\times b\times(b+۱)\cdots a$$

$$=b!(b+۱)\cdots a$$

$$=b!\,۷\times ۸$$

بنابراین $(b+۱)\cdots a=۷\times ۸$، در نتیجه $b+۱=۷$ و $a=۸$، پس $b=۶$ و $a+b=۸+۶=۱۴$.

۶۹- گزینه‌ی ۲ عبارت angle و سه حرف t، r و i چهار شئ متمایز هستند که به $۴!$ حالت می‌توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند. پس تعداد جایگشت‌های مطلوب مسأله برابر ۲۴ است.

۷۰- گزینه‌ی ۳ علی و حسن به دو طریق می‌توانند یکی پشت دیگری بایستد. این دو نفر با پنج نفر از دوستان، شش شئ متمایز هستند که تعداد جایگشت‌های مختلف آن‌ها $۶!$ است. بنابراین $۲\times ۶!=۱۴۴۰$ حالت برای ایستادن به شیوه‌ی موردنظر مسأله وجود دارد.

۷۱- گزینه‌ی ۲ کتاب‌های ریاضی را به $۴!$ طریق می‌توان در یک ردیف چید. اکنون کتاب‌های فیزیک را می‌توان فقط در جاهای مشخص شده در سطر زیر گذاشت.

ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی

این کار به $۳!$ طریق ممکن است. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $۴!\times ۳!=۱۴۴$.

۷۲- گزینه‌ی ۱ حروف صدادار a، i و e هستند که به $۳!$ حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند. این بسته‌ی حروف صدادار به همراه ۵ حرف بی‌صدای دیگر ۶ شئ متمایز هستند که به $۶!$ حالت می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر مسأله برابر $۳!\times ۶!$ است.

۷۳- گزینه‌ی ۲ حروف صدادار i، a و e هستند که به $۳!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. حروف بی‌صدا و t، r، n، g و l هستند که به $۵!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. دو دسته حرف صدادار و بی‌صدا هم به $۲!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. بنابراین تعداد کل جایگشت‌های مورد نظر برابر است با

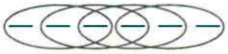
$$۳!۵!۲!=۲\times ۶!$$

۷۴- گزینه‌ی ۴ کتاب‌های ریاضی را می‌توان به $۴!$ طریق کنار هم چید. بین این کتاب‌ها ۳ جای خالی وجود دارد که باید کتاب‌های فیزیک را در آن‌ها بگذاریم. این کار هم به $۳!$ حالت ممکن است.

ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی **فیزیک** ریاضی

کل این مجموعه و ۲ کتاب شیمی را می‌توان ۳ کتاب در نظر گرفت و آن‌ها را به $۳!$ حالت مرتب کرد. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $۴!۳!۳!$.

۷۵- گزینه‌ی ① از این شش صندلی به ۴ طریق می‌توان سه صندلی کنار هم انتخاب کرد.



تعداد راه‌های نشستن ۳ نفر روی سه صندلی هم $۳!$ است. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با $۴\times ۳!=۲۴$.

۷۶- گزینه‌ی ② سارا و سمیه را می‌توان به $۲!$ طریق در ابتدا یا انتهای صف قرار داد. ۴ نفر دیگر را هم می‌توان به $۴!$ طریق بین آن‌ها قرار داد. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $۲!\times ۴!=۴۸$.

سمیه ــــ ــــ ــــ ــــ سارا
سارا ــــ ــــ ــــ ــــ سمیه

۷۷- گزینه‌ی ④ کافی است تعداد حالت‌هایی را که مینا و مژگان کنار هم ایستاده‌اند از تعداد کل حالت‌های ایستادن این پنج نفر کم کنیم. اگر مینا و مژگان کنار هم ایستاده باشند، می‌توان آن‌ها را یک نفر در نظر گرفت، که البته به دو طریق می‌توانند کنار هم بایستند (مژگان و مینا یا مینا و مژگان). بنابراین تعداد راه‌ها در این حالت برابر است با $۲\times ۴!=۴۸$. تعداد صف‌هایی که بدون محدودیت می‌توان تشکیل داد برابر است با $۵!=۱۲۰$. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $۱۲۰-۴۸=۷۲$.

۷۸- گزینه‌ی ③ ۴ دانش‌آموز پایه‌ی دهم به $۴!$ حالت می‌توانند در یک ردیف بایستند. بین آن‌ها و دو طرف آن‌ها کلاً ۵ جای خالی وجود دارد که دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم می‌توانند در آن‌ها قرار بگیرند.

ـ دهم ـ دهم ـ دهم ـ دهم ـ

اولین دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم ۵ انتخاب برای ایستادن دارد، دومی ۴ انتخاب و سومی ۳ انتخاب. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$۴!\times ۵\times ۴\times ۳=۱۴۴۰$$

۷۹- گزینه‌ی ③ تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی دهم را n می‌گیریم. اگر یکی از این‌ها در جلوی صف بایستد، چهار دانش‌آموز دیگر به $۴!$ حالت می‌توانند بایستند. بنابراین تعداد راه‌های ایستادن آن‌ها در صف برابر است با $n\times ۴!$. بنابراین

$$n\times ۴!=۷۲\Rightarrow n\times ۲۴=۷۲\Rightarrow n=۳$$

۸۰- گزینه‌ی ② تعداد کل اعداد نوشته شده $۴!=۲۴$ است که از نظر مقدار هزارگان به چهار دسته‌ی شش‌تایی تقسیم می‌شوند. شش عدد دارای رقم هزارگان ۱، شش عدد دارای رقم هزارگان ۴، شش عدد دارای رقم هزارگان ۶ و شش عدد دارای رقم هزارگان ۹ هستند. بنابراین مجموع ارقام هزارگان این اعداد برابر است با

$$۶(۱+۴+۶+۹)=۶\times ۲۰=۱۲۰$$

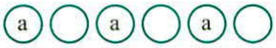
۸۱- گزینه‌ی ④ تعداد کل عددهای نوشته شده برابر است با $۴!=۲۴$. می‌توانیم این عددها را طوری جفت کنیم که مجموع هر جفت برابر ۹۹۹۹ باشد. مثلاً

$$\begin{array}{r} ۴\;۶\;۳\;۵\\ +\;۵\;۳\;۶\;۴\\ \hline ۹\;۹\;۹\;۹\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r} ۳\;۴\;۵\;۶\\ +\;۶\;۵\;۴\;۳\\ \hline ۹\;۹\;۹\;۹\end{array}$$

بنابراین ۱۲ تا ۹۹۹۹ را باید با هم جمع کنیم که مجموع آن‌ها برابر است با $۱۲\times ۹۹۹۹=۱۱۹۹۸۸$.

۸۲- گزینه‌ی ② به دو روش می‌توان حروف را چید طوری‌که حروف a یکی در میان باشند:

روش اول:



روش دوم:

در هر دو روش، سه حرف p، n و m را به $۳!$ حالت می‌توان در جاهای خالی قرار داد. پس تعداد حالت‌های مورد نظر $۲\times ۳!=۱۲$ است.

۸۳- گزینه‌ی ③ تعداد کل حالت‌های ایستادن ۶ نفر در یک صف $۶!$ است. در نیمی از این حالات حسن در مکان جلوتری نسبت به علی ایستاده است و در نیم دیگر حالات علی در مکان جلوتری نسبت به حسن ایستاده است. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسأله برابر $\frac{۶!}{۲}=۳۶۰$ است.

۸۴- گزینه‌ی ③ تعداد کل جایگشت‌هایی که ۷ نفر در صف می‌ایستند، $۷!$ است.
علی، حسن و احمد به $۳!$ حالت می‌توانند نسبت به هم در صف بایستند. یعنی $\frac{۱}{۶}$ تعداد کل جایگشت‌ها مربوط به حالتی است که علی جلوتر از حسن و احمد و حسن نیز جلوتر از احمد است. بنابراین $\frac{۷!}{۶}$ مطلوب مسأله است که برابر است با ۸۴۰.

۸۵- گزینه‌ی ① تعداد حالت‌هایی که چهار دانش‌آموز کلاس اول کنار هم باشند، برابر است با $۴!\times ۴!$. زیرا دسته‌ی دانش‌آموزان کلاس اول به $۴!$ حالت می‌تواند تشکیل شود و این دسته با ۳ دانش‌آموز سال دوم، چهار شئ متمایز هستند که به $۴!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.
تعداد حالت‌هایی که چهار دانش‌آموز کلاس اول کنار هم باشند و ۳ دانش‌آموز کلاس دوم هم کنار هم باشند برابر است با $۴!۳!۲!$.
زیرا دانش‌آموزان کلاس اول به $۴!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند و دانش‌آموزان کلاس دوم هم به $۳!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند و این دو دسته هم به $۲!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند.
مطلوب مسأله تعداد حالت‌هایی است که دانش‌آموزان کلاس اول کنار هم باشند ولی دانش‌آموزان کلاس دوم همگی کنار هم نباشند. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$۴!۴!-۴!۳!۲!=۲۸۸$$

۸۶- گزینه‌ی ۱ برای رنگ کردن یکی از خانه‌های ستون اول ۵ انتخاب داریم. برای رنگ کردن یکی از خانه‌های ستون دوم ۴ انتخاب داریم، زیرا خانه‌ای که در همان سطری است که خانه‌ی ستون اول را رنگ کرده‌ایم نباید رنگ شود. به‌همین ترتیب، برای رنگ کردن خانه‌ای از ستون‌های سوم، چهارم و پنجم به‌ترتیب ۳ ، ۲ و ۱ انتخاب داریم. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با ۱۲۰=۵!.

۸۷- گزینه‌ی ۲ در خانه‌های رنگی باید رقم‌های ۵ و ۴ یا رقم‌های ۵ و ۳ را بنویسیم. وقتی ۵ و ۴ را می‌نویسیم، تعداد راه‌ها برابر است با ۱۲=۳!×۲!. وقتی ۵ و ۳ را می‌نویسیم، جای رقم ۴ به‌طور یکتا تعیین می‌شود (که یکی از گوشه‌هاست). بنابراین، تعداد راه‌های نوشتن رقم‌ها برابر است با ۴=۲!×۲!. بنابراین، تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با ۱۲+۴=۱۶.

۸۸- گزینه‌ی ۳ چون دو تا از رقم‌های عددهای سه رقمی مورد نظر معلوم است، فقط یک رقم دیگر را باید انتخاب کنیم. این رقم باید یکی از رقم‌های ۲ ، ۴ ، ۷ یا ۹ باشد، پس ۴ انتخاب داریم. سپس سه رقم عدد موردنظر را به ۳! راه می‌توانیم بچینیم. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با

$$۴×۳!=۲۴$$

۸۹- گزینه‌ی ۲ مجموع رقم‌های عدد موردنظر باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد. بنابراین مجموعه‌ی رقم‌های عدد موردنظر یکی از مجموعه‌های زیر است:

$$\{۱,۲,۶\}:۳!$$

$$\{۲,۷,۹\}:۳!$$

$$\{۳,۶,۹\}:۳!$$

بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با ۱۸=۳!+۳!+۳!.

۹۰- گزینه‌ی ۴ تعداد عددهایی که با رقم ۱ شروع می‌شوند برابر با ۳! است:

$$\boxed{۱}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{باید با ۳ ، ۵ و ۶ عددی سه رقمی بنویسیم}} \quad : \quad ۳!=۶$$

به همین ترتیب می‌توانیم تعداد عددهایی را که با رقم ۳ یا ۵ شروع می‌شوند پیدا کنیم:

$$\boxed{۳}\ \_\ \_\ \_ \quad : \quad ۳!=۶$$

$$\boxed{۵}\ \_\ \_\ \_ \quad : \quad ۳!=۶$$

تا این‌جا ۱۸=۶+۶+۶ عدد داریم. بنابراین عدد ۲۱اُم با رقم ۶ شروع می‌شود.

۹۱- گزینه‌ی ۴ عددی مضرب ۳ است که مجموع رقم‌هایش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چند حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول رقم‌های عدد موردنظر ۱ ، ۲ و ۶ باشند. تعداد این عددها ۳! است.

حالت دوم رقم‌های عدد موردنظر ۲ ، ۴ و ۶ باشند. تعداد این عددها ۳! است.

حالت سوم رقم‌های عدد موردنظر ۱ ، ۱ و ۴ باشند. تعداد این عددها ۳ تاست (۱۴۱،۱۱۴،۴۱۱).

حالت چهارم رقم‌های عدد موردنظر ۱ ، ۴ و ۴ باشند. تعداد این عددها ۳ تاست (۴۱۴،۱۴۴،۴۴۱).

حالت پنجم رقم‌های عدد موردنظر برابر باشند. تعداد این عددها ۴ تاست.

بنابراین، تعداد عددهای موردنظر برابر است با

$$۳!+۳!+۳+۳+۴=۲۲$$

۹۲- گزینه‌ی ۳ تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ بدون رقم تکراری برابر است با P(۵,۴)=۱۲۰. از این رقم‌ها، تعداد عددهایی که با رقم ۲ شروع می‌شوند برابر است با P(۴,۳)=۲۴. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با ۱۲۰−۲۴=۹۶.

۹۳- گزینه‌ی ۲ تعداد همه‌ی عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با شش رقم ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ نوشت برابر است با P(۶,۴)=۳۶۰. از طرف دیگر، تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که در آن‌ها هیچ‌یک از رقم‌های ۱ و ۵ نیامده است، برابر است با تعداد عددهای چهار رقمی با رقم‌های غیرتکراری که می‌توان با رقم‌های ۲ ، ۳ ، ۴ و ۶ نوشت. تعداد این عددها برابر است با ۲۴=۴!. بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با ۳۶۰−۲۴=۳۳۶.

۹۴- گزینه‌ی ۴ برای چیدن کتاب‌های ریاضی P(۴,۲) راه وجود دارد. برای چیدن کتاب‌های فیزیک P(۵,۳) راه و برای چیدن کتاب‌های شیمی P(۶,۴) راه وجود دارد. تعداد راه‌های انتخاب قفسه‌های مربوط به موضوعات ۳! است. بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با

$$P(۴,۲)×P(۵,۳)×P(۶,۴)×۳!=\frac{۴!}{۲!}\frac{۵!}{۲!}\frac{۶!}{۲!}×۳!$$
$$=۳!×۵!×۶!×۳$$

۹۵- گزینه‌ی ۲ پنج مکان برای ۵ حرف جایگشت در نظر می‌گیریم. حرف سمت چپ t و حرف سمت راست e است. بنابراین سه مکان دیگر باید با ۶ حرف دیگر پرشوند که تعداد حالت‌ها برابر است با P(۶,۳). بنابراین تعداد جایگشت‌های مورد نظر مسأله برابر است با

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۶×۵×۴=۱۲۰$$

۹۶- گزینه‌ی ① دانش‌آموزان سال اول به $P(۶,۳)$ حالت می‌توانند در ردیف اول قرار بگیرند. دانش‌آموزان سال دوم به $P(۶,۴)$ حالت می‌توانند در ردیف دوم قرار بگیرند. پس از نشستن دانش‌آموزان سال اول و دوم ۵ صندلی خالی وجود خواهد داشت که دانش‌آموزان سال سوم به $P(۵,۲)$ حالت می‌توانند روی آن‌ها بنشینند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسأله برابر است با

$$P(۶,۳)P(۶,۴)P(۵,۲)=\frac{۶!}{۳!}\times\frac{۶!}{۲!}\times\frac{۵!}{۳!}=۸۶۴۰۰۰$$

۹۷- گزینه‌ی ③ تعداد کل جایگشت‌های ۶ حرفی کلمه‌ی ۹ حرفی logarithm برابر $P(۹,۶)$ است. تعداد جایگشت‌های ۶ حرفی که هیچ‌کدام از حروف m و t را ندارند برابر $P(۷,۶)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با

$$P(۹,۶)-P(۷,۶)=\frac{۹!}{۳!}-\frac{۷!}{۱!}=\frac{۹\times۸\times۷!}{۶}-۷!$$

$$=۱۲\times۷!-۷!=۱۱\times۷!$$

۹۸- گزینه‌ی ② **راه‌حل اول** تعداد کل جایگشت‌های چهارحرفی هشت حرف این کلمه برابر $P(۸,۴)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حرف t وجود ندارد برابر است با $P(۷,۴)$. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حرف t دارند می‌شود $P(۸,۴)-P(۷,۴)$ که برابر است با

$$P(۸,۴)-P(۷,۴)=\frac{۸!}{۴!}-\frac{۷!}{۳!}=۸\times۷\times۶\times۵-۷\times۶\times۵\times۴$$

$$=۷\times۶\times۵(۸-۴)=۷\times۶\times۵\times۴=۸۴۰$$

راه‌حل دوم ابتدا حرف t را به ۴ حالت در یکی از چهارخانه‌ی خالی در نظر گرفته شده برای جایگشت قرار می‌دهیم. سپس سه خانه‌ی خالی وجود دارد که باید با ۷ حرف باقی‌مانده پر شوند که تعداد حالت‌های پر شدن آن‌ها $P(۷,۳)$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها t وجود دارد برابر است با

$$۴P(۷,۳)=۴\times\frac{۷!}{۴!}=۴\times۷\times۶\times۵=۸۴۰$$

۹۹- گزینه‌ی ② تعداد کل جایگشت‌های ۸ حرفی این کلمه !۸ است. ابتدا تعداد حالت‌هایی که هیچ دو حرف صداداری کنار یکدیگر قرار ندارند را حساب می‌کنیم، سپس آن را از !۸ کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که حداقل دو حرف صدادار کنار یکدیگر قرار دارند، به‌دست آید.

برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌هایی که هیچ دو حرف صداداری کنار هم قرار ندارند، ابتدا پنج حرف بی‌صدا را کنار هم قرار می‌دهیم که این کار به !۵ حالت انجام‌پذیر است. سپس در شش جای خالی مطابق شکل زیر ۳ حرف صدادار را قرار می‌دهیم که این‌کار به $P(۶,۳)$ حالت امکان‌پذیر است.

☐ t ☐ r ☐ n ☐ g ☐ l ☐

پس تعداد حالت‌های مطلوب مسأله $P(۶,۳)!۵-!۸$ است که برابر است با

$$۸!-۵!\times\frac{۶!}{۳!}=۸!-۲۰\times۶!=۶!(۵۶-۲۰)=۳۶\times۶!$$

۱۰۰- گزینه‌ی ③ از تساوی داده شده مقدار n را حساب می‌کنیم:

$$\binom{n}{۲}=۲n\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!۲!}=۲n$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!}=۲n$$

$$\Rightarrow n(n-۱)=۴n\Rightarrow n=۵\ \text{یا}\ n=۰$$

توجه کنید که n باید بزرگ‌تر از ۲ باشد، پس $n=۰$ قابل قبول نیست. بنابراین

$$\binom{۲n}{n+۲}=\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=۱۲۰$$

۱۰۱- گزینه‌ی ③ از تساوی $P(n,۲)=C(n,۲)+۳۶$ مقدار n را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n!}{۲!(n-۲)!}+۳۶$$

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!}+۳۶$$

$$n(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}+۳۶$$

$$۲(n^۲-n)=n^۲-n+۷۲$$

$$n^۲-n-۷۲=۰$$

$$(n+۸)(n-۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۸ & \text{غ‌ق‌ق}\\ n=۹\end{cases}$$

بنابراین

$$C(n+۱,n-۱)=C(۱۰,۸)=\frac{۱۰!}{۸!۲!}=۴۵$$

۱۰۲- گزینه‌ی ④ **راه‌حل اول** عبارت $k\binom{n}{k}$ را ساده می‌کنیم:

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

حالا عبارت‌های موجود در گزینه‌ها را ساده می‌کنیم. عبارت گزینه‌ی (۴) به شکل زیر است:

$$n\binom{n-۱}{k-۱}=n\frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-۱-k+۱)!}$$

$$=\frac{n(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

بنابراین

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱}$$

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم k=۱، آن‌گاه $k\binom{n}{k}=\binom{n}{۱}=n$.

در گزینه‌ها k=۱ را قرار می‌دهیم:

$$k\binom{n-۱}{k-۱}=\binom{n-۱}{۰}=۱,\quad n\binom{n+۱}{k+۱}=n\binom{n+۱}{۲}=\frac{n^۲(n+۱)}{۲}$$

$$k\binom{n+۱}{k-۱}=\binom{n+۱}{۰}=n+۱,\quad n\binom{n-۱}{k-۱}=n\binom{n-۱}{۰}=n$$

بنابراین فقط $k\binom{n}{k}=n\binom{n-۱}{k-۱}$ می‌تواند درست باشد.

۱۰۳- گزینه‌ی ۳ هر مسیر را یک خط درنظر می‌گیریم. هفت خط در یک صفحه، وقتی حداکثر نقاط تقاطع را دارند که هر دو خط یکدیگر را قطع کنند و هیچ سه خطی یکدیگر را در یک نقطه قطع نکنند. بنابراین تعداد حداکثر نقاط تقاطع برابر $\binom{۷}{۲}$ است که به همین تعداد چراغ لازم است.

۱۰۴- گزینه‌ی ۳ تعداد بازی‌ها برابر است با $\binom{۱۰}{۲}=۴۵$.

اگر n بازی به تساوی ختم شده باشد، $۴۵-n$ بازی برنده داشته‌اند، پس

$$۳\times(۴۵-n)+۲\times n=۱۳۰\Rightarrow n=۵$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۱ برای این‌که عددی با ویژگی موردنظر بنویسیم باید ۶ رقم از عدد ۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ انتخاب کنیم که فقط به یک حالت می‌توانند از بزرگ به کوچک مرتب شوند. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $\binom{۱۰}{۶}=۲۱۰$.

۱۰۶- گزینه‌ی ۳ تعداد میوه‌ها $۵+۳+۲=۱۰$ تاست.

در این صورت

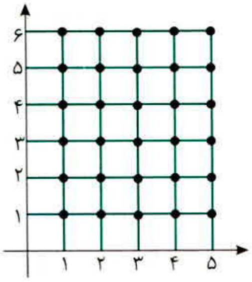
$$m=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$$

$$n=\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}=۱۵+۶+۱۰=۳۱$$

در نتیجه

$$m+n=۴۵+۳۱=۷۶$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۲ می‌خواهیم ۴ نقطه از ۳۰ نقطه‌ی شکل زیر را انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۳۰}{۴}$ حالت امکان‌پذیر است.



۱۰۸- گزینه‌ی ۱ از این چهار سکه می‌توانید یکی، دوتا، سه‌تا یا هر چهارتا را انتخاب کنید. بنابراین پاسخ برابر است با

$$\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۴+۶+۴+۱=۱۵$$

۱۰۹- گزینه‌ی ۲ در هر ناحیه $\binom{۴}{۲}=۶$ مسابقه برگزار می‌شود. چون چهار ناحیه وجود دارد، پس تعداد بازی‌های ناحیه‌ها می‌شود $۶\times۴=۲۴$. در دور آخر $۲\binom{۴}{۲}=۱۲$ بازی برگزار می‌شود. بنابراین تعداد کل بازی‌ها برابر است با $۲۴+۱۲=۳۶$.

۱۱۰- گزینه‌ی ۱ باید با آخرین حرکت به آخرین خانه برسیم. پس باید ۳ خانه‌ای را انتخاب کنیم که باید مهره در آن‌ها قرار بگیرد. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۶}{۳}=۲۰$.

۱۱۱- گزینه‌ی ۱ اعداد ۱ و ۲ را به یک حالت در زیرمجموعه قرار می‌دهیم.

اعداد ۳ و ۴ را به یک حالت کنار می‌گذاریم تا عضو زیرمجموعه نباشند.

دو عضو دیگر زیرمجموعه را از بین اعداد ۵ تا ۲۰ به $\binom{۱۶}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های با شرایط مسأله برابر $۱\times۱\times\binom{۱۶}{۲}=۱۲۰$ است.

۱۱۲- گزینه‌ی ۱ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n^۲-n-۵۶=۰$$

$$\Rightarrow(n-۸)(n+۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۸\\ n=-۷\ \text{غقق}\end{cases}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی این مجموعه برابر است با $\binom{۸}{۳}=۵۶$.

۱۱۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی و تک عضوی به‌ترتیب $\binom{n}{۲}$ و $\binom{n}{۱}$ است. یعنی

$$\binom{n}{۲}=\binom{n}{۱}+۳۵$$

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=n+۳۵$$

$$n^۲-۳n-۷۰=۰\Rightarrow(n-۱۰)(n+۷)=۰$$

$$\begin{cases}n=۱۰\\ n=-۷ \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

بنابراین این مجموعه دارای $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ زیرمجموعه است که یکی از آن‌ها تهی است پس ۱۰۲۳ زیرمجموعه‌ی غیرتهی دارد.

۱۱۴- گزینه‌ی ۱ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است. بنابراین $\binom{n}{۵}=\binom{n}{۶}$ و در نتیجه $n=۵+۶=۱۱$.

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ی ۱۱ عضوی برابر است با $\binom{۱۱}{۳}$ یا همان $\binom{۱۱}{۸}$. (توجه کنید که $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$).

۱۱۵- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{n}=۲^n$$

بنابراین

$$\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\cdots+\binom{n}{n-۱}=۲^n-\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}-\binom{n}{n}$$

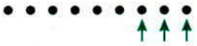
$$۵۰۱=۲^n-۱-n-۱$$

$$۲^n-n=۵۰۳$$

واضح است که $۲^۹-۹=۵۰۳$ بنابراین $n=۹$.

۱۱۶- گزینه‌ی ۳ اگر جای ۴ پاره‌خط بلند در میان ۱۲ جای شکل زیر را انتخاب کنیم، یک بارکد تولید می‌شود. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۱۲}{۴}=۴۹۵$.

۱۱۷- گزینه‌ی ۲ ۹ دایره‌ی توپر در نظر بگیرید. اکنون توجه کنید که هر جور که ۳ تا از این دایره‌ها را انتخاب کنیم، توزیعی از اسباب‌بازی‌ها بین ۴ کودک به‌دست می‌آید. مثلاً توزیع



یعنی این که هر شش اسباب‌بازی به کودک اول رسیده است. یا

یعنی این‌که به کودک اول ۲ تا، به کودک دوم ۲ تا، به کودک سوم یکی و به کودک چهارم هم یک اسباب بازی رسیده است.

بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با $\binom{۹}{۳}=۸۴$.

۱۱۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا شش توپ رنگی را در یک ردیف می‌چینیم. اکنون ۷ جا داریم که می‌توانیم توپ‌های سفید را در آن‌ها بگذاریم (شکل زیر را ببینید).

بنابراین باید از میان ۷ جا، ۴ جا را انتخاب کنیم، که تعداد راه‌های این‌کار برابر است با

$$\binom{۷}{۴}=\frac{۷!}{۴!۳!}=۳۵$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۲ هر نقطه‌ی برخورد مربوط به دو قطر و در نتیجه مربوط به ۴ رأس است. بنابراین تعداد نقطه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۷}{۴}=۳۵$.

۱۲۰- گزینه‌ی ۳ تعداد مثلث‌های کوچک ۱۲ تاست. بنابراین باید ۴ تا از ۱۲ مثلث کوچک را انتخاب و رنگ کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{۱۲}{۴}=۴۹۵$.

۱۲۱- گزینه‌ی ۴ عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰ را بر حسب زوجیت آن‌ها به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

دسته‌ی اول: ۱ ۳ ۵ ۷ ۹

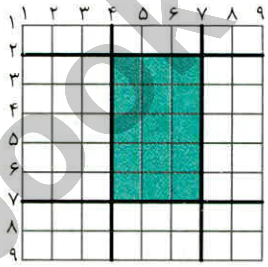
دسته‌ی دوم: ۲ ۴ ۶ ۸ ۱۰

برای این‌که مجموع چهار عدد مورد نظر فرد باشد، یا باید یکی از دسته‌ی اول انتخاب کنیم و سه تا از دسته‌ی دوم، یا باید سه تا از دسته‌ی اول انتخاب کنیم و یکی از دسته‌ی دوم. بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با

$$\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۱}=۱۰۰$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۴ در یک صفحه‌ی شطرنجی ۶×۵ تعداد خط‌های افقی ۶ تا و تعداد خط‌های عمودی ۷ تاست. از تقاطع هر دو خط عمودی و دو خط افقی یک مستطیل رسم می‌شود پس باید ۲ خط از ۶ خط افقی و ۲ خط از ۷ خط عمودی را انتخاب کنیم. یعنی تعداد مستطیل‌ها $\binom{۷}{۲}\binom{۶}{۲}=۳۱۵$ تاست.

۱۲۳- گزینه‌ی ۳ هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی از ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی شکل زیر به‌وجود می‌آید. برای این‌که مستطیل‌ها $۳×۵$ یا $۵×۳$ باشند، باید فاصله‌ی دو خط موازی ۳ واحد و فاصله‌ی دو خط موازی دیگر ۵ واحد باشد. برای رسم مستطیل‌های $۵×۳$ یکی از خطوط ۱ تا ۶ افقی را می‌توانیم انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصله‌ی ۳ واحد رسم می‌شود. همچنین یکی از خطوط عمودی ۱ تا ۴ را می‌توانیم انتخاب کنیم و خط موازی آن خودبه‌خود به فاصله‌ی ۵ واحد رسم می‌شود. بنابراین $۶×۴=۲۴$ مستطیل $۵×۳$ وجود دارد. به‌همین ترتیب ۲۴ مستطیل $۳×۵$ وجود دارد. پس جمعاً ۴۸ مستطیل با ابعاد ۳ و ۵ وجود دارد.



۱۲۴- گزینه‌ی ۲ اگر هر سه نقطه از این پنج نقطه را به هم وصل کنیم، یک مثلث تشکیل خواهند داد. پس تعداد مثلث‌ها برابر $\binom{۵}{۳}$ است. یعنی ۱۰ تا.

۱۲۵- گزینه‌ی ۲ به دو روش می‌توان مثلث را رسم کرد:

الف) دو رأس مثلث را از بین نقاط A_1 تا A_4 انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط B_1 تا B_3 انتخاب کنیم.

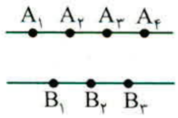
تعداد این مثلث‌ها برابر است با $\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}$.

ب) دو رأس مثلث را از بین نقاط B_1 تا B_3 انتخاب کنیم و یک رأس مثلث را از بین نقاط A_1 تا A_4 انتخاب کنیم.

تعداد این مثلث‌ها برابر است با $\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}$.

بنابراین تعداد کل مثلث‌ها برابر است با

$$\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۶×۳+۳×۴=۳۰$$



۱۲۶- گزینه‌ی ۴ دو تا از رأس‌های هر مثلث مورد نظر روی یکی از خط‌ها قرار دارند و رأس دیگرش روی خط دیگر قرار دارد. بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با

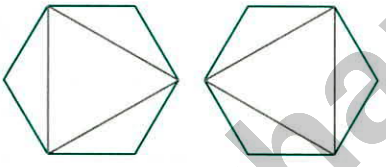
$$\binom{۵}{۲}×۶+\binom{۶}{۲}×۵=۶۰+۷۵=۱۳۵$$

۱۲۷- گزینه‌ی ۴ تعداد راه‌هایی که می‌توان ۳ نقطه از این ۹ نقطه انتخاب کرد برابر است با $\binom{۹}{۳}=۸۴$. از این‌ها، آن‌هایی که روی خط راست داده شده هستند، رأس‌های یک مثلث نیستند. تعداد راه‌های انتخاب ۳ نقطه از ۵ نقطه‌ی روی خط داده شده برابر است با $\binom{۵}{۳}=۱۰$. بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با $۸۴-۱۰=۷۴$.

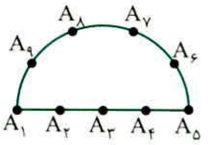
۱۲۸- گزینه‌ی ۱ تعداد راه‌های انتخاب ۳ نقطه از ۸ نقطه‌ی داده شده برابر است با $\binom{۸}{۳}$. از این‌ها، هر سه نقطه‌ای که روی یک خط راست باشند، رأس هیچ مثلثی نیستند. بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{۸}{۳}-\binom{۳}{۳}-\binom{۳}{۳}-\binom{۴}{۳}=۵۶-۱-۱-۴=۵۰$$

۱۲۹- گزینه‌ی ۲ تعداد مثلث‌هایی که رأس‌های آن‌ها از رأس‌های شش ضلعی است برابر است با $\binom{۶}{۳}=۲۰$. دو تا از این مثلث‌ها ضلعی مشترک با شش ضلعی ندارند (شکل‌های زیر را ببینید). بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با $۲۰-۲=۱۸$.



۱۳۰- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول** به سه روش می‌توان مثلث را رسم کرد. در روش اول دو رأس مثلث را از نقاط A_1 تا A_5 انتخاب می‌کنیم و یک رأس دیگر را از بین نقاط A_6 تا A_9 انتخاب می‌کنیم. تعداد این مثلث‌ها $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}$ است. در روش دوم یک رأس مثلث را از نقاط A_1 تا A_5 و دو رأس دیگر را از نقاط A_6 تا A_9 انتخاب می‌کنیم. تعداد این مثلث‌ها $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}$ است. و در روش سوم هر سه رأس مثلث را از نقاط A_6 تا A_9 انتخاب می‌کنیم که تعداد این مثلث‌ها $\binom{۴}{۳}$ است. پس مجموعاً $۴۰+۳۰+۴=۷۴$ مثلث وجود دارد.



راه‌حل دوم تعداد انتخاب‌های ۳ نقطه از ۹ نقطه برابر $\binom{۹}{۳}$ است که اگر هر سه نقطه روی یک خط نباشند می‌توانند رئوس یک مثلث باشند. پس تعداد حالت‌هایی که سه نقطه روی یک خط هستند یعنی $\binom{۵}{۳}$ را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

$$\binom{۹}{۳}-\binom{۵}{۳}=۷۴$$

۱۳۱- گزینه‌ی ۳ چند ضلعی‌های محاطی که با این پنج نقطه می‌توان رسم کرد، یا مثلث هستند، یا چهارضلعی محاطی و یا پنج ضلعی محاطی.

تعداد مثلث‌ها برابر $\binom{۵}{۳}$، تعداد چهارضلعی‌های محاطی برابر $\binom{۵}{۴}$ و تعداد پنج‌ضلعی‌های محاطی برابر $\binom{۵}{۵}$ است.

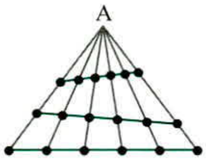
بنابراین تعداد همه‌ی چندضلعی‌های محاطی برابر است با

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}=۱۰+۵+۱=۱۶$$

۱۳۲- گزینه‌ی ۲ رأس بالایی را A بنامید. یک رأس همه‌ی مثلث‌ها، A است و دو رأس دیگر آن‌ها دو تا از نقطه‌های مشخص شده روی یکی از خط‌های رنگی است.

تعداد راه‌های انتخاب دو نقطه روی هر خط رنگی برابر است با $\binom{۶}{۲}$ و چون ۳ خط رنگی داریم، تعداد مثلث‌ها برابر است با

$$۳\binom{۶}{۲}=۴۵$$



۱۳۳- گزینه‌ی ۱

مثلث‌هایی که یک راس آن‌ها A است $\binom{۵}{۲}\times۴=۴۰$

مثلث هایی که یک راس آن‌ها B است $\binom{۴}{۲}\times۵=۳۰$

بنابراین تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر است با $۳۰+۴۰=۷۰$.

۱۳۴- گزینه‌ی ۴ تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که در ناحیه‌ی رنگی قرار دارند برابر است با

$$\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}=۶\times۶=۳۶$$

تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که از متوازی‌الاضلاع (۱) و متوازی‌الاضلاع‌های رنگی درست می‌شوند برابر است با ۳.

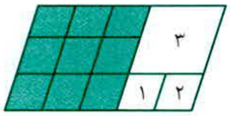
تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که از متوازی‌الاضلاع‌های (۱) و (۲) و متوازی‌الاضلاع‌های رنگی درست می‌شوند برابر است با ۳.

تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که با متوازی‌الاضلاع (۳) و متوازی‌الاضلاع‌های رنگی درست می‌شوند برابر است با ۳.

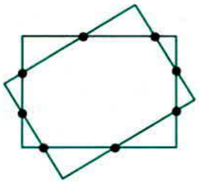
تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که با متوازی‌الاضلاع‌های (۱)، (۲) و (۳) و متوازی‌الاضلاع‌های رنگی درست می‌شوند برابر است با ۳.

تعداد متوازی‌الاضلاع‌هایی که با متوازی‌الاضلاع‌های (۱)، (۲) و (۳) به تنهایی یا با هم درست می‌شوند برابر است با ۵. بنابراین تعداد متوازی‌الاضلاع‌ها در شکل مورد نظر برابر است با

$$۳۶+۳+۳+۳+۳+۵=۵۳$$



۱۳۵- گزینه‌ی ۱ هر دو مستطیل حداکثر در ۸ نقطه ممکن است یکدیگر را قطع کنند (شکل زیر را ببینید).



تعداد راه‌های انتخاب ۲ مستطیل از ۵ مستطیل برابر است با $\binom{۵}{۲}$.

هر یک از این جفت مستطیل‌ها هم حداکثر در ۸ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین ۵ مستطیل حداکثر در $\binom{۵}{۲}\times۸=۱۰\times۸=۸۰$ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۳۶- گزینه‌ی ۲ **راه‌حل اول** می‌توانیم به چند روش این کار را انجام دهیم:

الف) یک دانش‌آموز دهم و سه دانش‌آموز یازدهم را به $\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

ب) دو دانش‌آموز دهم و دو دانش‌آموز یازدهم را به $\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

پ) سه دانش‌آموز دهم و یک دانش‌آموز یازدهم را به $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

ت) چهار دانش‌آموز دهم و صفر دانش‌آموز یازدهم را به $\binom{۵}{۴}\binom{۶}{۰}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۳}+\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲}+\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۱}+\binom{۵}{۴}\binom{۶}{۰}=۳۱۵$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۱ نفر برابر $\binom{۱۱}{۴}$ است و تعداد حالت‌هایی که در آن هیچ دانش‌آموز سال دهم در تیم نباشد برابر $\binom{۶}{۴}$ است. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسأله $\binom{۱۱}{۴}-\binom{۶}{۴}=۳۱۵$ حالت است.

۱۳۷- گزینه‌ی ① **راه‌حل اول** این کار را به چند روش می‌توانیم انجام دهیم:

الف) صفر مرد و چهار زن را به $\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۴}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

ب) یک مرد و سه زن را به $\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

پ) دو مرد و دو زن را به $\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

ت) سه مرد و یک زن را به $\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۱}$ طریق انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با

$$\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۴}+\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۳}+\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۱}=۴۶۰$$

راه‌حل دوم تعداد حالت‌های انتخاب ۴ نفر از بین ۱۲ نفر برابر است با $\binom{۱۲}{۴}$. همچنین تعداد حالت‌هایی که در آن ۴ مرد انتخاب شود برابر $\binom{۷}{۴}$ است. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با $\binom{۱۲}{۴}-\binom{۷}{۴}=۴۶۰$.

۱۳۸- گزینه‌ی ③ ابتدا یک جفت کفش را از ۶ جفت کفش به $\binom{۶}{۱}$ حالت انتخاب می‌کنیم. حالا باید ۳ لنگه کفش را از بین ۵ جفت کفش باقیمانده انتخاب کنیم طوری که هیچ دو لنگه‌ای متعلق به یک جفت نباشند. به این منظور ابتدا ۳ جفت کفش را از بین ۵ جفت کفش به $\binom{۵}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سپس از هر جفت کفش انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم که این کار به $۲\times۲\times۲$ حالت امکان‌پذیر است.

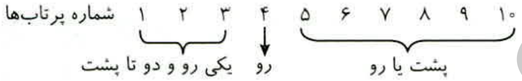
پس تعداد حالت‌های مورد نظر مسأله $\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۳}\times ۲^۳=۴۸۰$ است.

۱۳۹- گزینه‌ی ③ ابتدا ۳ شلوار از بین ۵ شلوار را به $\binom{۵}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم. سپس ۳ پیراهن از بین ۶ پیراهن را به $\binom{۶}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم. حالا شلوار اول را می‌توان با ۳ پیراهن دست کرد. شلوار دوم را با ۲ پیراهن و شلوار سوم را با ۱ پیراهن می‌توان دست کرد. بنابراین به $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۳}\times۳\times۲\times۱$ حالت می‌توان ۳ دست پیراهن و شلوار درست کرد که می‌شود ۱۲۰۰ حالت.

۱۴۰- گزینه‌ی ② هر حالت پرتاب ۶ سکه، یک رشته‌ی شش حرفی مانند RPPRPP درست می‌کند. اگر جای ۲ تا رو را در این رشته انتخاب کنیم، جای ۴ «پشت» خود به خود معلوم می‌شود. بنابراین تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

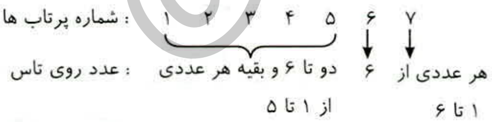
$$\binom{۶}{۲}=۱۵$$

۱۴۱- گزینه‌ی ② به شکل زیر توجه کنید.



پرتاب چهارم باید رو بیاید پس ۱ حالت دارد. یکی از سه پرتاب اول باید رو بیاید که این کار به ۳ حالت امکان‌پذیر است. دو پرتاب دیگر باید پشت بیایند که ۱ حالت دارد. پرتاب‌های پنجم تا دهم می‌توانند رو یا پشت بیایند که هر کدام دو حالت دارند و کلاً $۲^۶$ حالت دارند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسأله $۳\times۲^۶=۱۹۲$ است.

۱۴۲- گزینه‌ی ② به شکل زیر توجه کنید:



پرتاب ششم یک حالت دارد که باید ۶ بیاید. پرتاب هفتم می‌تواند هر عددی از ۱ تا ۶ بیاید پس ۶ حالت دارد. دو تا از پرتاب‌های اول تا پنجم را به $\binom{۵}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم که باید عدد تاس در آن‌ها ۶ بیاید. در بقیه‌ی پرتاب‌ها عدد تاس می‌تواند ۱ تا ۵ بیاید. یعنی هر یک از این پرتاب‌ها ۵ حالت دارد و در کل $۵^۳$ حالت دارند. پس تعداد حالت‌های مطلوب مسأله $۱\times۶\times\binom{۵}{۲}\times۵^۳=۷۵۰۰$ است.

۱۴۳- گزینه‌ی ۱ **راه‌حل اول** این تابع به‌صورت زیر است

$$f=\{(۱,\ldots),(۲,\ldots),(۳,\ldots),(۴,\ldots)\}$$

که چهار جای خالی باید با اعداد ۱ ، ۲ و ۳ پر شوند طوری که هر کدام از این اعداد حداقل یک بار استفاده شود. پس ابتدا ۳ جای خالی را به $\binom{۴}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم، سپس به ۳! حالت اعداد ۱ ، ۲ و ۳ را در آن‌ها می‌نویسیم. در یک جای خالی باقی‌مانده هر کدام از اعداد ۱ ، ۲ و ۳ را می‌توان نوشت: با کمی دقت متوجه می‌شوید که با این روش هر تابع را دوبار شمرده‌ایم. پس تعداد توابع با این شرایط برابر $\frac{۱}{۲}\times\binom{۴}{۳}\times ۳!\times ۳=۳۶$ است.

راه‌حل دوم یکی از اعداد ۱ ، ۲ یا ۳ باید دوبار در برد تابع ظاهر شود. ابتدا این عدد را به ۳ حالت انتخاب می‌کنیم. سپس در دو جای خالی آن را می‌نویسیم. این جاهای خالی را به $\binom{۴}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم. سپس در یکی از دو جای خالی باقی‌مانده به ۲ حالت یکی از دو عدد باقی‌مانده از برد را می‌نویسیم. در یک جای خالی باقی‌مانده هم یک عدد باقی‌مانده از برد را به ۱ حالت می‌توان نوشت. پس $۳\times\binom{۴}{۲}\times ۲\times ۱=۳۶$ تابع با این شرایط وجود دارد.

۱۴۴- گزینه‌ی ۲ مسئله مثل این است که ۹ جای خالی داریم و می‌خواهیم با ۴ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی سفید آن‌ها را پر کنیم. ۴ جا از ۹ جای خالی (برای رنگ قرمز) را می‌توان به $\binom{۹}{۴}$ طریق انتخاب کرد. از ۵ جای خالی باقی‌مانده، ۳ جا (برای رنگ آبی) را می‌توان به $\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب کرد. از ۲ جای خالی باقی‌مانده، ۲ جا (برای رنگ سفید) را می‌توان به $\binom{۲}{۲}$ طریق انتخاب کرد. بنابراین، تعداد راه‌های موردنظر برابر است با

$$\binom{۹}{۴}\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۲}=۱۲۶۰$$

۱۴۵- گزینه‌ی ۴ تعداد راه‌های انتخاب توپ برادر بزرگ‌تر برابر است با $\binom{۵}{۱}$. از ۴ توپ باقی‌مانده، به برادر وسطی یا ۱ توپ می‌رسد، یا ۲ توپ یا ۳ توپ، و در هر حالت بقیه‌ی توپ‌ها به برادر کوچک‌تر می‌رسد.

بنابراین تعداد راه‌های رسیدن توپ‌ها به برادر وسطی برابر است با $\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۱}$. به این ترتیب، تعداد راه‌های موردنظر برابر است با

$$\binom{۵}{۱}\left(\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}\right)=۵(۴+۶+۴)=۷۰$$

۱۴۶- گزینه‌ی ۳ مرد ۳ نفر خارجی و زن ۳ نفر ایرانی را دعوت می‌کند:

$$\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۳}=۱۶$$

مرد ۱ ایرانی و ۲ خارجی و زن ۱ خارجی و ۲ ایرانی را دعوت می‌کند:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}=۳۲۴$$

مرد ۲ ایرانی و ۱ خارجی و زن ۱ ایرانی و ۲ خارجی را دعوت می‌کند:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}\times\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۱۴۴$$

مرد ۳ نفر ایرانی و زن ۳ نفر خارجی را دعوت می‌کند:

$$\binom{۳}{۳}\binom{۳}{۳}=۱$$

بنابراین تعداد راه‌های موردنظر برابر است با

$$۱۶+۳۲۴+۱۴۴+۱=۴۸۵$$

فصل هفتم

آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

تعریف

آزمایش تصادفی: آزمایشی است که همه‌ی حالت‌های ممکن نتیجه‌ی آن را بدانیم، اما نتیجه‌ی آن از پیش معلوم نباشد.

مجموعه‌ی همه‌ی پیشامدهای ممکن آزمایش تصادفی را **فضای نمونه‌ای** این آزمایش تصادفی می‌نامند. هر زیرمجموعه‌ی فضای نمونه‌ای را یک **پیشامد تصادفی** این فضای نمونه‌ای می‌نامند.

تست ۱

در آزمایش پرتاب یک سکه و یک تاس، چند پیشامد وجود دارد؟

۱) $۲^{۶}$ ۲) $۲^{۸}$ ۳) $۲^{۱۰}$ ۴) $۲^{۱۲}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی $۲\times۶=۱۲$ عضو دارد. چون هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشـامد است، پس تعداد پیشامدها برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۱۲ عضوی، که برابر است با $۲^{۱۲}$.

تعریف

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\cap B=\varnothing$، آن‌گاه A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامند.

اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و

$$A\cap B=\varnothing,\quad B\cap C=\varnothing,\quad C\cap A=\varnothing$$

این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامند.

تست ۲

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. چند پیشامد ناتهی وجود دارد که با پیشامد $\{۱,۳,۵,۶\}$ ناسازگار هستند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: هر پیشـامد ناتهی از فضای نمونه‌ای $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که با پیشـامد $\{۱,۳,۵,۶\}$ اشتراک نداشته باشـد، با این پیشـامد ناسازگار اسـت. این‌ها زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه‌ی $\{۲,۴\}$ هستند، که تعداد آن‌ها برابر است با $۳=۱-۲^{۲}$.

احتمال رخداد یک پیشامد

اگر A پیشـامدی از فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی S باشـد، **احتمال** رخداد پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

تست ۳

سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یک‌بار رو بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: در این‌جا فضای نمونه‌ای برابر است با

S={(ر,ر),(ر,پ),(پ,ر),(پ,پ)}

و پیشامد موردنظر A={(ر,ر),(ر,پ),(پ,ر)} است. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

تست ۴

در آزمایش پرتاب دو تاس، اگر بدانیم عددهای ظاهر شده روی دو تاس، مربع کامل هستند، احتمال این‌که مجموع آن‌ها مکعب کامل باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

پاسخ: چون می‌دانیم عددهای روی تاس‌ها مربع کامل هستند، فضای نمونه‌ای آزمایش به شکل زیر است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\}$$

پیشامدی که در آن مجموع عددهای ظاهر شده مکعب کامل هستند به‌صورت $A=\{(۴,۴)\}$ است. پس

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

تست ۵

خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. چقدر احتمال دارد که حداکثر دو فرزند پسر باشد؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای دارای $۲^۴$ عضو است. پیشامد حداکثر دو فرزند پسر به شکل زیر است:

A={(د, د, د, د), (د, د, د, پ), (د, د, پ, د), (د, پ, د, د), (پ, د, د, د), (پ, پ, د, د), (پ, د, پ, د), (د, پ, د, پ),

(پ, د, د, پ), (د, پ, پ, د), (د, د, پ, پ)}

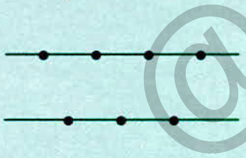
بنابراین $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۱۶}$.

توجه کنید که تعداد اعضای پیشامد A برابر است با

$$n(A)=\binom{۴}{۰}+\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}=۱+۴+۶=۱۱$$

تست ۶

سه نقطه از هفت نقطه‌ی مشخص شده در شکل زیر را انتخاب می‌کنیم و به یکدیگر وصل می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که شکل حاصل، مثلث باشد؟



۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

پاسخ: تعداد حالت‌های انتخاب سه نقطه از هفت نقطه برابر $\binom{۷}{۳}$ است. یعنی $n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$. برای این‌که این نقطه‌ها، سه رأس یک مثلث باشند نباید سه نقطه روی یک خط راست باشند. یعنی تعداد حالت‌های مطلوب مسئله برابر است با

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}=۳۰$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۳۵}=\frac{۶}{۷}$$

تست ۷

در جعبه‌ای ۱۲ لامپ وجود دارد که ۴ تا از آن‌ها خراب‌اند. اگر سه لامپ به تصادف از جعبه بیرون بیاوریم، احتمال این‌که هر سه سالم باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴۵}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳۵}$ ۳) $\frac{۷}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱۴}{۵۵}$

پاسخ: تعداد راه‌های انتخاب ۳ لامپ از ۱۲ لامپ برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۳}$. چون ۸ لامپ درون جعبه سالم‌اند، پس اگر A پیشامد موردنظر باشد آن‌گاه $n(A)=\binom{۸}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{\frac{۸!}{۵!۳!}}{\frac{۱۲!}{۹!۳!}}=\frac{۸!\times۹!}{۵!\times۱۲!}=\frac{۶\times۷\times۸}{۱۰\times۱۱\times۱۲}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

تست ۸

در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی و ۶ مهره‌ی قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که همرنگ باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: واضح است که $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. برای این که سه مهره همرنگ باشند، یا باید هر سه آبی باشند یا هر سه قرمز.

پس تعداد حالت‌های انتخاب سه مهره‌ی همرنگ برابر است با $n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۴+۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

تست ۹

در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که دست کم یکی از آن‌ها قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۳۵}$

۳) $\frac{۲۷}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۵}$

پاسخ: تعداد کل مهره‌ها در کیسه ۷ تاست. تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از میان این ۷ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$. برای این‌که دست کم یکی از مهره‌ها قرمز باشد، باید یکی از حالت‌های زیر پیش بیاید:

۱: ۱ قرمز + ۲ آبی $\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}=۳\times۶=۱۸$

۲: ۲ قرمز + ۱ آبی $\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}=۳\times۴=۱۲$

۳: ۳ قرمز $\binom{۳}{۳}=۱$

بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد، $n(A)=۱۸+۱۲+۱=۳۱$. به‌این‌ترتیب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۱}{۳۵}$$

تست ۱۰

در کیسه‌ای ۲ مهره‌ی قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد. اگر سه مهره به تصادف از این کیسه خارج کنیم، احتمال این‌که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌رنگ نباشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: در کل تعداد مهره‌های درون کیسه برابر است با ۱۰=۵+۳+۲ و تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از این ۱۰ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$. اگر A پیشامد این باشد که مهره‌ها به سه رنگ مختلف باشند، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}=۳۰$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

تست ۱۱

سکه‌ای را ۵ بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که ۳ بار رو و ۲ بار پشت بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۲}$

پاسخ: در این جا $n(S)=۲^۵$. اگر A پیشامد موردنظر باشد، آن‌گاه $n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰$، زیرا کافی است از ۵ جای زیر، جای ۳ پرتابی را که رو می‌آیند انتخاب کنیم، در این صورت جای دو پرتابی که پشت می‌آیند خودبه‌خود مشخص می‌شود؛ مثلاً

_ _ _ _ _

ر ر پ ر پ

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲^۵}=\frac{۵}{۱۶}$$

ویژگی‌های احتمال

فرض کنید S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی باشد و A و B دو پیشامد از این فضای نمونه‌ای باشند. در این صورت

۱) $P(S)=۱, \quad P(\varnothing)=۰, \quad ۰\leq P(A)\leq ۱$

۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ و اگر A و B ناسازگار باشند،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

و اگر A، B و C دوبه‌دو ناسازگار باشند،

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

۳) $P(A')=۱-P(A)$

۴) اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $P(A)\leq P(B)$ و چون $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$، پس

$$P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$$

تست ۱۲

اگر $P(A)=۲P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A\cup B)=\frac{۱}{۳}$، مقدار $P(A\cap B)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۲۴}$
۴) $\frac{۱}{۳۶}$

پاسخ: توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}-P(A\cap B)$$

پس

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲۴}$$

تست ۱۳

A و B دو پیشامد ناسازگارند، $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A\cup B)=\frac{۳}{۸}$. مقدار $P(B')$ **چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۸}$

پاسخ: چون A و B ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین

$$P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

تست ۱۴

اگر $P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}$ و $P(A)=\frac{۱}{۲}$، مقدار $P(B\cap A')$ **چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: فرض کنید $n(S)=s$. در این صورت

$$P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}\Rightarrow n(A\cup B)=\frac{۵}{۶}s$$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n(A)=\frac{۱}{۲}s$$

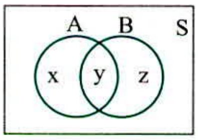
از روی نمودار وِن زیر و تساوی‌های بالا معلوم می‌شود که

$$x+y+z=\frac{۵}{۶}s$$

$$x+y=\frac{۱}{۲}s$$

اگر تساوی دوم را از تساوی اول کم کنیم، به‌دست می‌آید $z=\frac{۱}{۳}s$. بنابراین

$$P(B\cap A')=\frac{n(B\cap A')}{n(S)}=\frac{z}{s}=\frac{۱}{۳}$$



تست ۱۵

اگر $P(A)=۰/۳$، $P(B)=۰/۴$ و $P(A-B)=۰/۱$، مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ: با توجه به تساوی‌های $(A\cap B)\cap(A-B)=\varnothing$ و $(A\cap B)\cup(A-B)=A$ می‌توان نتیجه گرفت

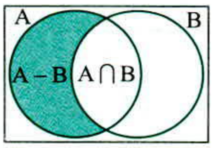
$$P(A)=P(A\cap B)+P(A-B)$$

بنابراین

$$۰/۳=P(A\cap B)+۰/۱\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$$

از طرف دیگر

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=۰/۳+۰/۴-۰/۲=۰/۵$$



تست ۱۶

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۳}{m}$، حدود m کدام است؟

۱) $m\geq ۳$ ۲) $m\geq ۴$ ۳) $m\geq ۵$ ۴) $m\geq ۶$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که $۰\leq P(B)\leq ۱$، پس $۰\leq\frac{۳}{m}\leq ۱$ و در نتیجه $m\geq ۳$.

از طرف دیگر با توجه به ناسازگار بودن A و B داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{m}$$

و چون $P(A)\leq P(A\cup B)\leq ۱$، پس

$$\frac{۱}{۴}\leq\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{m}\leq ۱\Rightarrow ۰\leq\frac{۳}{m}\leq\frac{۳}{۴}$$

که با توجه به مثبت بودن مقدار m نتیجه می‌شود $m\geq ۴$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل هفتم

درس اول:
احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱- در آزمایش پرتاب دو تاس، چند پیشامد وجود دارد؟

۱) $۸^{۱۲}$ ۲) $۶^{۱۲}$ ۳) $۱۲^{۶}$ ۴) $۱۲^{۸}$

۲- یک تاس را پرتاب می‌کنیم. چند پیشامد ناتهی وجود دارد که با پیشامد $\{۱,۲\}$ ناسازگار هستند؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۵ ۴) ۳۱

۳- اگر $S=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و پیشامدهای پنج‌عضوی $A=\{۱,۳,۵,۷,a\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸,b\}$ ناسازگار باشند، چند مجموعه به شکل $C=\{a,b\}$ یافت می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۴- اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، کدام دو پیشامد زیر می‌توانند ناسازگار نباشند؟

۱) A' و B' ۲) $A-B$ و $B-A$ ۳) B و $A-B$ ۴) $A'\cap B'$ و $A\cup B$

۵- یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداکثر یک بار رو بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع عددهای روشده‌ی تاس‌ها برابر ۱۰ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۷- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که مجموع عددهای ظاهر شده‌ی تاس‌ها کم‌تر از ۶ باشد؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۸- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که عدد ظاهر شده در پرتاب اول مضرب عدد ظاهر شده در پرتاب دوم باشد؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۹- از هر یک از مجموعه‌های $\{۱,۲,۳,۴\}$ و $\{-۲,-۱,۰\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع این دو عدد صفر باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۰- در آزمایش پرتاب دو تاس، اگر بدانیم حاصل‌جمع عددهای ظاهر شده برابر ۸ است، احتمال این‌که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۵ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۱۱- یک عدد سه‌رقمی با رقم‌های متمایز می‌نویسیم. چقدر احتمال دارد که این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۳۳}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۱}{۷۲}$ ۳) $\frac{۴۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲- یک عدد سه‌رقمی می‌نویسیم که رقم‌های آن عضو مجموعه‌ی $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشند. چقدر احتمال دارد که این عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۳- فرض کنید $A=\{x\in\mathbb{Z}\,\big|\,|x-۱|<۲\}$ و $B=\{y\in\mathbb{Z}\,\big|\,|۲y+۱|<۴\}$. اگر عضوی از مجموعه‌ی B به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که عضو مجموعه‌ی A باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۴- یک عدد سه‌رقمی با رقم‌های متمایز می‌نویسیم که رقم‌های آن عضو مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ هستند. چقدر احتمال دارد که در این عدد صدگان بزرگ‌تر از دهگان و دهگان بزرگ‌تر از یکان باشد؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۰}$
۲) $\frac{۱}{۶۰}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۱۵- یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۴ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

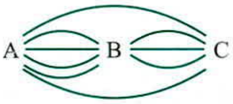
۱۶- در خانواده‌ای با ۶ فرزند، چقدر احتمال دارد که تعداد فرزندان دختر بیش‌تر از تعداد فرزندان پسر باشد؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۲}$
۲) $\frac{۲۱}{۶۴}$
۳) $\frac{۵}{۱۶}$
۴) $\frac{۲۳}{۶۴}$

۱۷- خانواده‌ی آقای عسگری ۵ فرزند و خانواده‌ی آقای فیضی ۳ فرزند دارد. از این ۸ بچه، ۵ تا دخترند و ۳ تا پسر. احتمال این‌که فرزندان یک خانواده فقط دختر باشند چقدر است؟

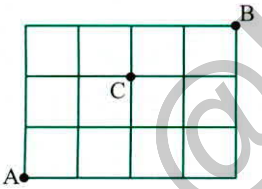
۱) $\frac{۳}{۵۶}$
۲) $\frac{۵}{۵۶}$
۳) $\frac{۹}{۵۶}$
۴) $\frac{۱۱}{۵۶}$

۱۸- در شکل مقابل می‌خواهیم از شهر A به شهر C برویم. اگر یکی از مسیرها را به‌صورت تصادفی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که در مسیر از شهر B عبور کنیم؟



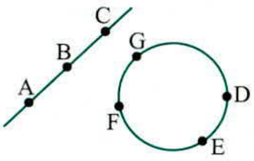
۱) $\frac{۵}{۷}$
۲) $\frac{۶}{۷}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۹- در شکل مقابل می‌خواهیم با حرکت روی خطوط به سمت راست و بالا از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم. چقدر احتمال دارد که از نقطه‌ی C عبور کنیم؟



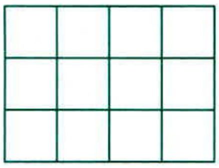
۱) $\frac{۱۷}{۳۲}$
۲) $\frac{۹}{۱۷}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱۸}{۳۵}$

۲۰- از میان مثلث‌هایی که رأس‌های آن‌ها از نقطه‌های مشخص شده در شکل مقابل هستند یک مثلث به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که دو رأس این مثلث نقطه‌های B و D باشند چقدر است؟



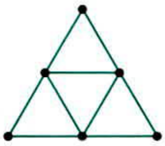
۱) $\frac{۱}{۱۷}$
۲) $\frac{۲}{۱۵}$
۳) $\frac{۵}{۳۴}$
۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۱- اگر در شکل روبه‌رو یک مستطیل انتخاب کنیم، احتمال این‌که مربع باشد چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۱۱}{۴۵}$
۳) $\frac{۱۳}{۴۵}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

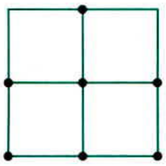
۲۲- سه پاره‌خط از پاره‌خط‌های کوچکی که نقطه‌های مشخص شده در شکل مقابل را به هم وصل می‌کنند، انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این سه پاره‌خط ضلع‌های یک مثلث باشند؟



۱) $\frac{۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۵}{۸۴}$

۲۳- از ۷ نقطه‌ی مقابل ۳ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این ۳ نقطه رأس‌های یک مثلث باشند چقدر است؟



۱) $\frac{۳۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳۳}{۳۵}$

۳) $\frac{۳۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۵}$

۲۴- اگر دو خانه از جدولی ۵×۵ را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که در یک سطر یا یک ستون نباشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۵- در یک صفحه‌ی شطرنجی ۵×۵ طول ضلع هر خانه ۱ سانتی‌متر است. یک مستطیل به‌طور تصادفی روی این صفحه رسم می‌کنیم، به‌طوری که ضلع‌هایش روی ضلع‌های خانه‌هاست. احتمال این‌که محیط این مستطیل بیش‌تر از ۴ سانتی‌متر باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۲۶- در ظرفی ۲ مهره‌ی سیاه، ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که هر دو مهره سفید باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۲۷- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که دقیقاً یکی از آن‌ها قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۱۰}$ ۳) $\frac{۲۷}{۵۵}$ ۴) $\frac{۳۷}{۲۲}$

۲۸- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که یکی قرمز باشد و دو تا آبی باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۲۷}{۳۵}$

۲۹- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که هر سه مهره از یک رنگ باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴۴}$

۳۰- در ظرفی ۲ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی زرد وجود دارد. سه مهره به تصادف از ظرف بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد که هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۱- در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که حداکثر یکی از آن‌ها قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۳۲- در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که دست کم یکی از آن‌ها سبز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۱۱۰}$ ۲) $\frac{۷}{۴۴}$ ۳) $\frac{۳۷}{۴۴}$ ۴) $\frac{۲۴}{۵۵}$

۳۳- در کیسه‌ای n مهره وجود دارد که ۴ تا از آن‌ها سفید هستند. دو مهره به تصادف از کیسه خارج کنیم. اگر احتمال سفید بودن هر دو مهره $\frac{۲}{۱۵}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳۴- در کیسه‌ای به یک تعداد مهره‌ی قرمز و مهره‌ی آبی وجود دارد. می‌دانیم اگر دو مهره از این کیسه به تصادف خارج کنیم، احتمال این‌که هر دو قرمز باشند برابر $\frac{۸}{۳۳}$ است. در این کیسه چند مهره وجود دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

۳۵- در کیسه‌ای n مهره‌ی آبی و $n-۲$ مهره‌ی قرمز وجود دارد. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. اگر احتمال غیر هم‌رنگ بودن مهره‌ها $\frac{۸}{۱۵}$ باشد، چند مهره در کیسه وجود دارد؟

۱) ۶ یا ۹ ۲) ۶ یا ۱۰ ۳) ۸ یا ۹ ۴) ۸ یا ۱۰

۳۶- حروف کلمه‌ی friend را به تصادف جابه‌جا می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حروف اول و آخر کلمه صدادار باشند؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۳۷- ۳ کتاب با موضوع ریاضی و ۲ کتاب با موضوع فیزیک را در یک قفسه کنار هم می‌چینیم. چقدر احتمال دارد که موضوع کتاب‌ها یک در میان باشد؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۸- شش نفر که رها، مینا، تینا و مبینا در میان آن‌ها هستند در یک ردیف می‌نشینند. احتمال این که رها و مینا کنار هم نشسته باشند ولی تینا و مبینا کنار هم ننشسته باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۳۹- تمام جایگشت‌های پنج‌حرفی کلمه‌ی triangle را می‌نویسیم و یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که در آن حداقل یکی از حروف t و g وجود داشته باشد؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۸}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۴۰- علی و احمد در یک کلاس ۱۰ نفره عضو هستند. می‌خواهیم یک تیم ۴ نفره از این کلاس انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد که علی عضو تیم باشد و احمد عضو تیم نباشد؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۸}{۱۰۵}$

۴۱- از میان هشت نفر که علی هم جزء آن‌ها هست چهار نفر را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال این‌که علی جزء این چهار نفر نباشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۲- کمیته‌ای متشکل از ۴ مرد و ۳ زن به تصادف از میان ۸ مرد و ۵ زن که حمید و سارا هم جزء آن‌ها هستند انتخاب می‌شود. احتمال این‌که حمید و سارا هر دو انتخاب شده باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۴۳- از میان ۱۲ نفر که مهران و مهرداد هم در بین آن‌ها هستند، ۷ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم و در یک ردیف کنار هم می‌نشانیم. احتمال این‌که مهران و مهرداد کنار هم نشسته باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۴۴- از میان ۶ زوج، ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که هیچ زن و شوهری در میان آن‌ها نباشند چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳۳}$ ۳) $\frac{۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۴۵}$

۴۵- سکه‌ای را چهار بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که در دو پرتاب پشت بیاید؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۶- سکه‌ای را ۵ بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداکثر یک بار پشت بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۴۷- سکه‌ای را ۵ بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که دست کم ۳ بار رو بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۴۸- تاسی را چهار بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که در دو پرتاب عدد ۶ ظاهر شود؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۱۶}$

۴۹- اگر دو عدد به تصادف از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۲۰\}$ انتخاب کنیم، احتمال این‌که دو عدد متوالی باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

۵۰- از میان عددهای مجموعه‌ی $\{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که یکی از آن‌ها سه برابر دیگری باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵۰}$ ۳) $\frac{۳}{۲۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰۰}$

۵۱- اگر زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از مجموعه‌ی $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ انتخاب کنیم، احتمال این‌که حاصل‌ضرب عضوهایش منفی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۵۲- اگر زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از مجموعه‌ی $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ انتخاب کنیم، احتمال این‌که مجموع عضوهای آن زوج باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

۵۳- از میان ۵ عدد منفی متمایز و ۶ عدد مثبت متمایز ۳ عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۳}$ ۳) $\frac{۲۷}{۵۵}$ ۴) $\frac{۲۸}{۵۵}$

۵۴- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A)=\frac{۱}{۹}$ و $P(B')=\frac{۱}{۶}$، مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$ ۴) ۱

۵۵- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A')=\frac{۲}{۵}$ و $P(B')=\frac{۷}{۱۰}$، مقدار $P((A\cup B)')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۵۶- اگر $P(A\cup B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(B')=\frac{۹}{۱۰}$، مقدار $P(A)-P(A\cap B)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۱۰}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

۵۷- اگر $P(A\cap B)=\frac{۱}{۹}$ و $۲P(A)+۲P(B)=P(A')+P(B')$، مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۸- اگر $P(A)=۲P(B)$ و $P(B')=۳P(A')$، مقدار $P(A)+P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$
۲) $\frac{۷}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

۵۹- اگر $P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}$ و $P(A')=\frac{۵}{۸}$، مقدار $P(A\cap B')$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۵}{۲۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۶۰- اگر A، B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار باشند و $P(A)=۲x$، $P(B)=۳x$، $P(C)=۴x$ و $P(A\cup B\cup C)=۱-x$، مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

۶۱- اگر $P(B-A)=P(A-B)=\frac{۱}{۵}$ و $P(A\cup B)=\frac{۷}{۱۰}$، مقدار $P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۰}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۶۲- اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۳}{۱۰}$، بیش‌ترین مقدار $P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۰}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۶۳- اگر $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$، $P(A\cup B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(A)=\frac{k}{۳}$، حدود k کدام است؟

۱) $۰\le k\le ۲$
۲) $۲\le k\le \frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}\le k\le \frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}\le k\le ۲$

۶۴- اگر $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و $P(B)=\frac{۲}{۳}$، مجموع حداکثر و حداقل مقدار $P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱۶}{۱۵}$
۳) $\frac{۱۷}{۱۵}$
۴) $\frac{۲۹}{۱۵}$

فصل هفتم: آمار و احتمال

درس‌های دوم و سوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه – متغیر و انواع آن

آمار و علم آمار

آمار مجموعه‌ای از اعداد و اطلاعات اســت. **علم آمار** مجموعه‌ی روش‌هایی اســت که شــامل جمع‌آوری اعــداد و اطلاعــات، ســازمان‌دهی و نمایش، تحلیل و تفســیر داده‌ها و در نهایــت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است.

مراحل علم آمار

جمع‌آوری اعداد و اطلاعات
↓
سازمان‌دهی و نمایش
↓
تحلیل و تفسیر داده‌ها
↓
نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی

جامعه یا جمعیت

مجموعه‌ی تمام افراد یا اشــیایی را که می‌خواهیم درباره‌ی یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق کنیم، **جامعه** یا **جمعیت** می‌نامیم و به هر یک از این افراد یا اشیا، **عضو جامعه** می‌گوییم.

مثال: افراد ساکن یک کوچه می‌توانند جامعه باشند و هر نفر ساکن این کوچه عضو این جامعه است.

اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازه‌ی جامعه** یا **حجم جامعه** می‌نامند.

نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب می‌شود، **نمونه** می‌نامند. هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** می‌نامند.

مثال: افراد یک خانواده یک نمونه از افراد ســاکن یک کوچه هســتند و هر فرد این خانواده عضو این نمونه است.

اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را **اندازه‌ی نمونه** یا **حجم نمونه** می‌نامند.

متغیر و مقدار متغیر

متغیر ویژگی‌ای از اعضای یک جامعه اســت که بررسی می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، **مقدار متغیر** می‌نامند.

متغیرهای کمی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، **متغیرهای کمی** می‌نامند.

مثال: تعداد خودروهایی که در یک روز از یک خیابان رد می‌شوند، متغیری کمی است.

این متغیرها بر دو نوع‌اند:

۱) **متغیر پیوسته** متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند.

۲) **متغیر گسسته** متغیری است که پیوسته نباشد.

مثال: وزن افراد و دمای محیط متغیرهایی پیوسته‌اند. تعداد خودروهایی که در طول یک روز از یک خیابان رد می‌شوند متغیری گسسته است.

متغیرهای کیفی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، **متغیرهای کیفی** می‌نامند.

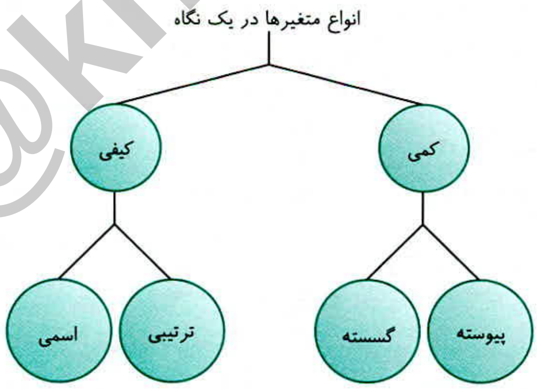
مثال: میزان رضایتمندی از شغل و گروه خونی افراد متغیرهایی کیفی‌اند.

این متغیرها بر دو نوع‌اند:

۱) **متغیر ترتیبی** متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد.

۲) **متغیر اسمی (غیرترتیبی)** متغیری است که ترتیبی نیست.

مثال: پایه‌ی تحصیلی (ابتدایی، متوسطه‌ی دوره‌ی اول، متوسطه‌ی دوره‌ی دوم) متغیری ترتیبی است. گروه خونی متغیری اسمی است.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل هفتم

درس‌های دوم و سوم:
مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه – متغیر و انواع آن

۶۵- **اولین مرحله از علم آمار کدام است؟**

۱) تعیین هدف
۲) جمع‌آوری اعداد و اطلاعات
۳) تحلیل و تفسیر داده‌ها
۴) سازمان‌دهی اطلاعات

۶۶- **نتیجه‌ی علم آمار چیست؟**

۱) جمع‌آوری داده‌ها و نمایش آن‌ها
۲) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده
۳) تحلیل درست از پدیده‌ها
۴) سازمان‌دهی اطلاعات به‌دست آمده

۶۷- **بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب می‌شود چه می‌نامند؟**

۱) نمونه
۲) عضو نمونه
۳) متغیر
۴) جمعیت

۶۸- **کدام جمله درست است؟**

۱) اندازه‌ی نمونه و اندازه‌ی جامعه یکی است.
۲) بررسی برخی اعضای جامعه را سرشماری گوییم.
۳) نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است.
۴) برخی اعضای نمونه را جامعه می‌نامند.

۶۹- **مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد ویژگی‌های آن‌ها تحقیق کنیم چه نام دارد؟**

۱) جامعه
۲) نمونه
۳) متغیر تصادفی
۴) اطلاعات

۷۰- **اگر متغیری که دارای دو مقدار a و b است، بتواند هر مقدار بین a و b را نیز اختیار کند، نوع متغیر کدام است؟**

۱) کیفی اسمی
۲) کیفی ترتیبی
۳) کمی پیوسته
۴) کمی گسسته

۷۱- **کدام یک متغیر کیفی ترتیبی است؟**

۱) مراحل تحصیل
۲) رنگ پوست افراد ساکن یک شهر
۳) جنسیت نوزادان متولد شده در یک سال در یک شهر
۴) مدل گوشی افراد یک خانواده

۷۲- **نوع درختان یک باغ چه نوع متغیری است؟**

۱) کیفی اسمی
۲) کیفی ترتیبی
۳) کمی گسسته
۴) کمی پیوسته

۷۳- **کدام متغیر تصادفی از نوع کیفی اسمی است؟**

۱) مراحل زندگی یک فرد
۲) تعداد سفرهای نوروزی در سال‌های مختلف
۳) جنسیت افراد
۴) درجه‌ی حرارت یک اتاق در طول روز

۷۴- **«تعداد طبقات ساختمان‌های یک شهر» و «نوع نمای ساختمان‌های یک شهر» چه نوع متغیر تصادفی هستند؟**

۱) کمی پیوسته - کمی گسسته
۲) کمی گسسته - کمی پیوسته
۳) کمی گسسته - کیفی اسمی
۴) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی

۷۵- **کدام متغیر، کمی پیوسته نیست؟**

۱) گنجایش آب تانکرها
۲) طول مکالمات تلفنی افراد
۳) تعداد اتومبیل‌های یک شهر
۴) وزن دانش‌آموزان یک کلاس

۷۶- **نوع متغیر تصادفی در کدام گزینه با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟**
۱) تعداد افراد مراجعه‌کننده به یک اداره در یک روز
۲) رنگ اتومبیل‌های در حال تردد در یک شهر
۳) گروه خونی اعضای یک خانواده
۴) شرکت سازنده‌ی تلفن همراه کارمندان یک اداره

۷۷- **نوع کدام متغیر با بقیه فرق دارد؟**
۱) شدت آلودگی هوا (کم، متوسط، زیاد)
۲) انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی)
۳) نوع بارندگی (برف، باران)
۴) میزان بارندگی بر حسب سانتی‌متر در یک شهر

۷۸- **نمره‌ی دانش‌آموزان یک کلاس در یک امتحان چه نوع متغیری است؟ (واحد نمره ۰/۲۵ است.)**
۱) کیفی اسمی ۲) کیفی ترتیبی ۳) کمی گسسته ۴) کمی پیوسته

۷۹- **در کدام گزینه، هر چهار نوع متغیر تصادفی وجود دارد؟**
۱) رنگ چشم افراد، شغل افراد، وزن افراد، قد افراد
۲) میزان آلودگی هوا، میزان درآمد افراد، گروه خونی افراد، رنگ اتومبیل افراد
۳) مراحل رشد انسان، رنگ چشم افراد، تعداد تماس‌های یک فرد در روزهای یک سال، قد افراد
۴) تعداد تماس‌های گرفته شده با یک اداره در روز، مراحل رشد انسان، گروه خونی افراد، تعداد فرزندان خانواده‌های یک شهر

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل هفتم

آمار و احتمال

۱- گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش ۶×۶ عضو دارد. چون هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد است. پس $۸^{۱۲}=۲^{۳۶}$ پیشامد وجود دارد.

۲- گزینه‌ی ۳ پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که با پیشامد $A=\{۱,۲\}$ اشتراک نداشته باشند، با این پیشامد ناسازگار هستند. پس زیرمجموعه‌هایی از S را پیدا می‌کنیم که شامل عضوهای A نباشند. یعنی کافی است زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $\{۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر بگیریم که تعداد آن‌ها $۲^{۴}$ است. یکی از این زیرمجموعه‌ها تهی است، پس ۱۵ تا پیشامد ناتهی از S با A ناسازگارند.

۳- گزینه‌ی ۱ با توجه به این‌که A و B ناسازگار هستند، یعنی $A\cap B=\varnothing$ و پیشامدها پنج‌عضوی هستند، نتیجه می‌شود دو حالت می‌تواند وجود داشته باشد.
حالت اول $a=۹$ و $b=۱۰$، حالت دوم $a=۱۰$ و $b=۹$. در هر دو حالت $C=\{۹,۱۰\}$ و مجموعه‌ی C منحصر به فرد است.

۴- گزینه‌ی ۱ چون A و B ناسازگار هستند، پس $A\cap B=\varnothing$ و در نتیجه

$$A-B=A,\quad B-A=B$$

بنابراین $A-B$ و $B-A$ ناسازگارند. همچنین $A-B$ و B ناسازگارند. همچنین با توجه به $A'\cap B'=(A\cup B)'$، پیشامدهای $A\cup B$ و $A'\cap B'$ متمم یکدیگر هستند و ناسازگارند.
ولی A' و B' لزوماً ناسازگار نیستند. مثلاً اگر $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۳,۴\}$، آن‌گاه $A'=\{۳,۴,۵,۶\}$ و $B'=\{۱,۲,۵,۶\}$ و در نتیجه

$$A'\cap B'=\{۵,۶\}\neq\varnothing$$

پس A' و B' ناسازگار نیستند.

۵- گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش به شکل $S=\{(R,R),(R,P),(P,R),(P,P)\}$ است. پیشامد این‌که سکه حداکثر یک بار رو بیاید به‌صورت $A=\{(R,P),(P,R),(P,P)\}$ است. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

۶- گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای آزمایش ۶×۶ عضو دارد و پیشامد مطلوب برابر است با

$$A=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

۷- گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای آزمایش ۶×۶ عضو دارد و پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),$$
$$(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۸- گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش ۶×۶ عضو دارد و پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A=\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),$$
$$(۵,۱),(۵,۵),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۶)\}$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$$

۹- گزینه‌ی ۳ در این‌جا $n(S)=۴\times۳=۱۲$. اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$A=\{\{۱,-۱\},\{۲,-۲\}\}$$

بنابراین $n(A)=۲$ و در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$.

۱۰- گزینه‌ی ۲ چون می‌دانیم حاصل‌جمع عددهای ظاهر شده برابر ۸ است، پس فضای نمونه‌ای آزمایش به‌صورت زیر است

$$S=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$$

پیشامد مطلوب که در آن حاصل‌ضرب عددهای ظاهر شده ۱۵ است به شکل زیر است

$$A=\{(۳,۵),(۵,۳)\}$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۵}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ تعداد کل عددهای سه‌رقمی با رقم‌های متمایز برابر است با $۹\times۹\times۸$. پس

$$n(S)=۹\times۹\times۸$$

تعداد عددهای سه‌رقمی زوج با رقم‌های متمایز که یکان آن‌ها صفر است، برابر است با

$$۹\times۸\times۱$$

تعداد عددهای سه‌رقمی زوج با رقم‌های متمایز که یکان آن‌ها ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است، برابر است با

$$۸\times۸\times۴$$

بنابراین تعداد عددهای سه‌رقمی زوج با رقم‌های متمایز برابر است با

$$۹\times۸+۸\times۸\times۴$$

و در نتیجه

$$n(A)=۹\times۸+۸\times۸\times۴$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{۹\times۸+۸\times۸\times۴}{۹\times۹\times۸}=\frac{۴۱}{۸۱}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ تعداد تمام عددهای سه‌رقمی که رقم‌های آن عضو مجموعه‌ی $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشند، برابر است با

$$n(S)=۵\times۵\times۵$$

برای این‌که عدد نوشته شده بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، کافی است صدگان آن ۲ نباشد. یعنی تعداد این عددها $۴\times۵\times۵$ است. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴\times۵\times۵}{۵\times۵\times۵}=\frac{۴}{۵}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\Rightarrow -۱<x<۳$$

بنابراین $A=\{۰,۱,۲\}$. همچنین

$$|۲y+۱|<۴\Rightarrow -۴<۲y+۱<۴\Rightarrow -\frac{۵}{۲}<y<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $B=\{-۲,-۱,۰,۱\}$. به این ترتیب، اگر پیشامد موردنظر T باشد، $T=\{۰,۱\}$. در نتیجه

$$P(T)=\frac{n(T)}{n(B)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ تعداد کل عددهای سه‌رقمی با رقم‌های متمایز که رقم‌های آن عضو مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشند برابر است با $۶\times۵\times۴$، یعنی $n(S)=۱۲۰$.

اگر A پیشامد این باشد که صدگان بزرگ‌تر از دهگان و دهگان بزرگ‌تر از یکان باشد، تعداد اعضای A برابر است با $\binom{۶}{۳}$. یعنی $n(A)=\binom{۶}{۳}$ (توجه کنید که به هر طریقی که سه رقم از شش رقم مجموعه را انتخاب کنیم فقط به یک طریق می‌توانیم آن‌ها را از بزرگ به کوچک مرتب کنیم). بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

۱۵- گزینه‌ی ۳ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۴ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ که تعداد آن‌ها ۸ تاست. تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی و زوج ۲۴ برابر ۶ تاست. بنابراین احتمال زوج بودن مقسوم‌علیه انتخاب شده $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ است.

۱۶- گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای دارای $۲^۶$ عضو است، پس $n(S)=۲^۶=۶۴$. اگر تعداد فرزندان دختر بیش‌تر از تعداد فرزندان پسر باشد، باید تعداد فرزندان دختر ۴ یا ۵ یا ۶ باشد. پس تعداد اعضای این پیشامد برابر است با

$$n(A)=\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۵}+\binom{۶}{۶}=۱۵+۶+۱=۲۲$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۲}{۶۴}=\frac{۱۱}{۳۲}$$

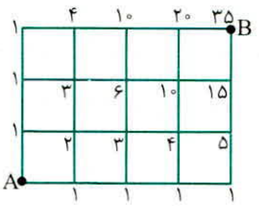
۱۷- گزینه‌ی ۴ کلاً ۸ بچه وجود دارد. تعداد راه‌های انتخاب ۳ فرزند برای آقای فیضی برابر است با $n(S)=\binom{۸}{۳}=۵۶$ (توجه کنید که در این صورت بچه‌های آقای عسگری خود به خود مشخص می‌شوند). تعداد راه‌های انتخاب ۳ دختر برای آقای فیضی برابر است با $\binom{۵}{۳}=۱۰$.

فقط یک امکان وجود دارد که بچه‌های آقای عسگری همگی دختر باشند (۵ دختر برای آقای عسگری و ۳ پسر برای آقای فیضی). بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد، $n(A)=۱۰+۱=۱۱$. بنابراین

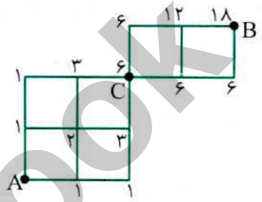
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۵۶}$$

۱۸- گزینه‌ی ۲ تعداد کل مسیرهایی که از A به C می‌روند، برابر است با $۴\times۳+۲=۱۴$. دو مسیر مستقیم از A به C است که از B عبور نمی‌کنند، ۱۲ مسیر دیگر از B عبور می‌کنند. بنابراین $\frac{۱۲}{۱۴}=\frac{۶}{۷}$ احتمال دارد که در مسیرمان از شهر B عبور کنیم.

۱۹- گزینه‌ی ۴ تعداد راه‌های رفتن از A به B مطابق شکل زیر برابر ۳۵ است.



در شکل زیر تعداد راه‌های رفتن از A به B با عبور از C مشخص شده است که برابر ۱۸ است. بنابراین احتمال عبور از C برابر $\frac{۱۸}{۳۵}$ است.



۲۰- گزینه‌ی ۳ اگر ۳ نقطه از این ۷ نقطه انتخاب کنیم به شرطی که نقطه‌های $\{A, B, C\}$ نباشند، یک مثلث با رأس‌های این ۳ نقطه وجود دارد. بنابراین $n(S)=\binom{۷}{۳}-۱=۳۴$. اگر دو رأس این مثلث B و D باشند، رأس دیگرش یکی از ۵ نقطه‌ی دیگر است. بنابراین، اگر T پیشامد موردنظر باشد، $n(T)=۵$ و در نتیجه

$$P(T)=\frac{n(T)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۴}$$

۲۱- گزینه‌ی ۴ با هر دو خط افقی و هر دو خط عمودی می‌توان یک مستطیل درست کرد، بنابراین $n(S)=\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}=۶۰$.

از طرف دیگر،

تعداد مربع‌های ۱×۱ $=۳\times۴=۱۲$

تعداد مربع‌های ۲×۲ $=۳+۳=۶$

تعداد مربع‌های ۳×۳ $=۱+۱=۲$

پس تعداد مربع‌های روی شکل برابر است با $۱۲+۶+۲=۲۰$.

در نتیجه احتمال موردنظر برابر است با $\frac{۲۰}{۶۰}=\frac{۱}{۳}$.

۲۲- گزینه‌ی ۱ در شکل ۹ پاره‌خط کوچک وجود دارد که انتخاب ۳ تا از آن‌ها به $\binom{۹}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. بنابراین $n(S)=\binom{۹}{۳}$. از طرف دیگر ۴ مثلث در شکل وجود دارد که با ۳ تا از این پاره‌خط‌های کوچک درست شده است. بنابراین $n(A)=۴$ و در نتیجه

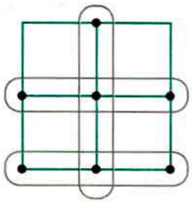
$$P(A)=\frac{۴}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱}{۲۱}$$

۲۳- گزینه‌ی ۳ تعداد راه‌های ۳ نقطه از ۷ نقطه برابر است با $n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$. اگر این سه نقطه، نقطه‌هایی باشند که در شکل زیر در یک دسته قرار گرفته‌اند، با آن‌ها نمی‌توان مثلث رسم کرد. بنابراین، اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$n(A)=\binom{۷}{۳}-۳=۳۵-۳=۳۲$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۲}{۳۵}$$



۲۴- گزینه‌ی ۳ فرض کنید A پیشامد موردنظر باشد. در این صورت A' پیشامد این است که هر دو خانه در یک سطر یا یک ستون باشند. در اینجا $n(S)=\binom{۲۵}{۲}=۳۰۰$. همچنین، تعداد راه‌های انتخاب دو خانه از یک سطر یا دو خانه از یک ستون هر کدام برابر است با $\binom{۵}{۲}$ و چون ۵ سطر و ۵ ستون داریم، پس

$$n(A')=\binom{۵}{۲}\times۵+\binom{۵}{۲}\times۵=۱۰\times۵+۱۰\times۵=۱۰۰$$

بنابراین $P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۰۰}{۳۰۰}=\frac{۱}{۳}$، پس

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۲۵- گزینه‌ی ۴ فرض کنید A پیشامد موردنظر باشد. در این صورت A' پیشامد این است که محیط مستطیل از ۴ بیش‌تر نباشد. توجه کنید که محیط هر خانه روی صفحه‌ی موردنظر ۴ است. پس محیط هر مستطیل روی این صفحه یا ۴ است یا از ۴ بیش‌تر است. بنابراین A' پیشامد این است که محیط مستطیل دقیقاً ۴ باشد. یعنی مستطیل دقیقاً یکی از خانه‌های روی صفحه باشد. بنابراین چون تعداد خانه‌های روی صفحه برابر است با $۵\times۵=۲۵$ و تعداد مستطیل‌های روی صفحه برابر است با $\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۲}=۲۲۵$، پس

$$P(A')=\frac{۲۵}{۲۲۵}=\frac{۱}{۹}$$

در نتیجه

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

۲۶- گزینه‌ی ۳ انتخاب ۲ مهره از ۹ مهره به $\binom{۹}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است و انتخاب ۲ مهره از ۳ مهره‌ی سفید به $\binom{۳}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است. بنابراین احتمال انتخاب دو مهره‌ی سفید $\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱}{۱۲}$ است.

۲۷- گزینه‌ی ۳ تعداد کل مهره‌های کیسه برابر است با $۳+۴+۵=۱۲$ و تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از این ۱۲ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$. اگر A پیشامد این باشد که دقیقاً یک مهره‌ی قرمز انتخاب شود، ۲ مهره‌ی دیگر را باید از ۹ مهره‌ی آبی یا سبز انتخاب کنیم. بنابراین $n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۹}{۲}=۱۰۸$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰۸}{۲۲۰}=\frac{۲۷}{۵۵}$$

۲۸- گزینه‌ی ۲ تعداد کل مهره‌ها در کیسه ۷ تاست. تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از میان این ۷ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$. تعداد راه‌های انتخاب ۱ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی آبی برابر است با $\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}=۱۸$. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد، $n(A)=۱۸$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

۲۹- گزینه‌ی ۲ تعداد کل مهره‌ها برابر است با $۳+۴+۵=۱۲$. تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از این ۱۲ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$. اگر A پیشامد این باشد که هر سه مهره‌ی خارج شده از یک رنگ باشند، آن‌گاه

$$n(A)=\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}$$
$$=۱+۴+۱۰=۱۵$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۲۲۰}=\frac{۳}{۴۴}$$

۳۰- گزینه‌ی ۲ در این‌جا $n(S)=\binom{۹}{۳}$. برای این‌که هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند، باید از هر رنگ یک مهره خارج شود. یعنی $n(A)=\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۲}{۷}$$

۳۱- گزینه‌ی ۱ تعداد کل مهره‌ها در کیسه ۱۰ تاست. تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از میان این ۱۰ مهره برابر است با $n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$. برای این‌که حداکثر یکی از مهره‌ها قرمز باشد، باید یکی از حالت‌های زیر پیش بیاید:

۱ قرمز + ۲ آبی: $\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۲}=۴\times۱۵=۶۰$

۳ آبی: $\binom{۶}{۳}=۲۰$

بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد، $n(A)=۶۰+۲۰=۸۰$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸۰}{۱۲۰}=\frac{۲}{۳}$$

۳۲- گزینه‌ی ۳ در کل تعداد مهره‌های درون کیسه برابر است با $۳+۴+۵=۱۲$ و تعداد راه‌های انتخاب ۳ مهره از این ۱۲ مهره برابر است با

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$$

تعداد راه‌های انتخاب سه مهره که هیچ‌کدام سبز نباشد، یعنی هر سه از ۷ مهره‌ی قرمز یا آبی انتخاب شده باشند برابر است با $\binom{۷}{۳}=۳۵$.

بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد، $n(A)=۲۲۰-۳۵=۱۸۵$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸۵}{۲۲۰}=\frac{۳۷}{۴۴}$$

۳۳- گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش دارای $\binom{n}{۲}$ عضو است. اگر A پیشامد سفید بودن هر دو مهره باشد، تعداد اعضای A برابر $\binom{۴}{۲}$ است. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{n}{۲}}=\frac{۶}{\frac{n(n-۱)}{۲}}=\frac{۱۲}{n(n-۱)}=\frac{۲}{۱۵}$$

پس

$$n(n-۱)=۹۰\Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰$$

$$\Rightarrow(n-۱۰)(n+۹)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۱۰\\ n=-۹ \quad \text{غ ق}\end{cases}$$

۳۴- گزینه‌ی ۳ فرض کنید k مهره‌ی قرمز و k مهره‌ی آبی در کیسه وجود دارد. در این صورت تعداد راه‌های انتخاب دو مهره از این ۲k مهره برابر است با $n(S)=\binom{۲k}{۲}=\frac{۲k(۲k-۱)}{۲}$.

از طرف دیگر، اگر A پیشامد بیرون آمدن دو مهره‌ی قرمز از کیسه باشد، $n(A)=\binom{k}{۲}=\frac{k(k-۱)}{۲}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{k(k-۱)}{۲}}{\frac{۲k(۲k-۱)}{۲}}=\frac{k-۱}{۲(۲k-۱)}$$

در نتیجه $\frac{k-۱}{۲(۲k-۱)}=\frac{۸}{۳۳}$. اگر این معادله را حل کنیم، به‌دست می‌آید $k=۱۷$. در نتیجه تعداد مهره‌های درون کیسه برابر است با $۲k=۳۴$.

۳۵- گزینه‌ی ۲ تعداد مهره‌ها $۲n-۲$ است، پس $n(S)=\binom{۲n-۲}{۲}$. اگر A پیشامد غیرهم‌رنگ بودن مهره باشد، $n(A)=\binom{n}{۱}\binom{n-۲}{۱}$. زیرا باید یک مهره‌ی آبی و یک مهره‌ی قرمز انتخاب کنیم. بنابراین

$$P(A)=\frac{\binom{n}{۱}\binom{n-۲}{۱}}{\binom{۲n-۲}{۲}}=\frac{n(n-۲)}{\frac{(۲n-۲)(۲n-۳)}{۲}}$$

$$=\frac{n(n-۲)}{(n-۱)(۲n-۳)}=\frac{۸}{۱۵}$$

پس

$$۱۵n(n-۲)=۸(n-۱)(۲n-۳)$$

$$۱۵n^۲-۳۰n=۱۶n^۲-۴۰n+۲۴$$

$$n^۲-۱۰n+۲۴=۰$$

$$(n-۶)(n-۴)=۰$$

$$n=۶ \quad \text{یا} \quad n=۴$$

پس تعداد مهره‌ها در کیسه ۶ یا ۱۰ تاست.

۳۶- گزینه‌ی ۳ تعداد تمام جایگشت‌های حروف این کلمه $۶!$ است. پس $n(S)=۶!$. حروف اول و آخر کلمه در دو حالت می‌توانند حروف صدادار i و e باشند و بقیه‌ی حروف به $۴!$ حالت بین آن‌ها قرار می‌گیرند. پس $n(A)=۲\times۴!$.

بنابراین احتمال پیشامد موردنظر برابر است با

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۴!}{۶!}=\frac{۱}{۱۵}$$

۳۷- گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش $۵!$ عضو دارد. یعنی $n(S)=۵!$. اگر A پیشامد مطلوب مسئله باشد، تعداد اعضای A برابر است با

$$n(A)=۳!\times۲!$$

(ابتدا کتاب‌های ریاضی را به $۳!$ حالت می‌چینیم، سپس در مکان بین آن‌ها کتاب‌های فیزیک را به $۲!$ حالت می‌چینیم.)

ریاضی ☐ ریاضی ☐ ریاضی

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳!۲!}{۵!}=\frac{۱}{۱۰}$$

۳۸- گزینه‌ی ۳ تعداد راه‌های نشستن ۶ نفر کنار هم برابر است با $n(S)=۶!$. تعداد راه‌هایی که رها و مینا کنار هم بنشینند برابر است با $۲!\times۵!$. همین‌طور تعداد راه‌هایی که رها و مینا کنار هم و تینا و مبینا نیز کنار هم نشسته باشند برابر است با $۲!\times۲!\times۴!$. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$n(A)=۵!\times۲!-۴!\times۲!\times۲!$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!\times۲!-۴!\times۲!\times۲!}{۶!}$$

$$=\frac{۴!\times۵\times۲-۴!\times۲\times۲}{۶!}=\frac{۴!\times۶}{۶!}=\frac{۱}{۵}$$

۳۹- گزینه‌ی ۲ تعداد کل جایگشت‌های پنج‌حرفی کلمه‌ی هشت‌حرفی triangle برابر $P(۸,۵)$ است. تعداد جایگشت‌هایی که هیچ کدام از حروف t و g را ندارند برابر $P(۶,۵)$ است، پس تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یکی از این دو حرف را دارند برابر است با $P(۸,۵)-P(۶,۵)$.

بنابراین احتمال این‌که در جایگشت انتخاب شده حداقل یکی از حروف t و g وجود داشته باشد، برابر است با

$$\frac{P(۸,۵)-P(۶,۵)}{P(۸,۵)}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

۴۰- گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای آزمایش دارای $\binom{۱۰}{۴}$ عضو است. یعنی $n(S)=\binom{۱۰}{۴}$. اگر A پیشامد «انتخاب شدن علی و انتخاب نشدن احمد» باشد. تعداد اعضای A برابر $\binom{۸}{۳}$ است. زیرا علی به یک طریق انتخاب می‌شود. احمد را از کلاس کنار می‌گذاریم و از بین ۸ نفر باقی‌مانده ۳ نفر را به $\binom{۸}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۲۸}{۱۰۵}$$

۴۱- گزینه‌ی ۲ فرض کنید A پیشامد موردنظر باشد. تعداد راه‌های انتخاب چهار نفر از ۸ نفر برابر است با $n(S)=\binom{۸}{۴}$ و تعداد راه‌های انتخاب ۳ نفر از میان ۷ نفر (علی را انتخاب نمی‌کنیم) برابر است با $n(A)=\binom{۷}{۳}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

۴۲- گزینه‌ی ۱ تعداد راه‌های انتخاب ۴ مرد و ۳ زن از میان ۸ مرد و ۵ زن برابر است با $n(S)=\binom{۸}{۴}\binom{۵}{۳}$. اگر حمید و سارا انتخاب شده باشند، ۳ مرد و ۲ زن را باید از میان ۷ مرد و ۴ زن انتخاب کنیم. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد

$$n(A)=\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۴}\binom{۵}{۳}}=\frac{۳}{۱۰}$$

۴۳- گزینه‌ی ۳ ۷ نفر را می‌توان به $\binom{۱۲}{۷}$ طریق انتخاب کرد و به !۷ طریق در یک ردیف نشاند. بنابراین $n(S)=\binom{۱۲}{۷}۷!$. مهران و مهرداد را کنار می‌گذاریم، ۵ نفر دیگر را از میان ۱۰ نفر دیگر به $\binom{۱۰}{۵}$ انتخاب می‌کنیم، مهران و مهرداد را یک نفر حساب می‌کنیم و با این ۵ نفر به !۶ طریق در یک ردیف می‌نشانیم و توجه می‌کنیم که خود مهران و مهرداد هم به !۲ طریق می‌توانند کنار هم بنشینند. بنابراین، اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$n(A)=\binom{۱۰}{۵}۶!۲!$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱۰}{۵}۶!۲!}{\binom{۱۲}{۷}۷!}=\frac{۱}{۱۱}$$

۴۴- گزینه‌ی ۲ در کل تعداد افراد برابر است با $۲\times۶=۱۲$، در نتیجه تعداد راه‌های انتخاب ۴ نفر از این ۱۲ نفر برابر است با $n(S)=\binom{۱۲}{۴}$. برای این‌که از این ۴ نفر هیچ دو نفری زن و شوهر نباشند، باید از هر زوج حداکثر ۱ نفر را انتخاب کرده باشیم، یعنی باید ابتدا ۴ زوج را انتخاب کنیم و سپس یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد، $n(A)=\binom{۶}{۴}۲\times۲\times۲\times۲$. به این ترتیب

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۴}۲^{۴}}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۱۶}{۳۳}$$

۴۵- گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای این آزمایش $۲^۴$ عضو دارد. یعنی $n(S)=۱۶$. اگر A پیشامد «دو بار پشت آمدن» باشد، تعداد اعضای A برابر است با انتخاب ۲ پرتاب از ۴ پرتاب، یعنی $n(A)=\binom{۴}{۲}$ (توجه کنید که وقتی ۲ پرتاب از ۴ پرتاب انتخاب شوند، هر کدام از آن‌ها فقط در یک حالت پشت می‌آیند). بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

۴۶- گزینه‌ی ۴ در این‌جا $n(S)=۲^۵$. فرض کنید A پیشامد موردنظر باشد. در این صورت باید از ۵ جای زیر حداکثر ۱ جا را برای نوشتن «پ» انتخاب کنیم. مثلاً

ر ر ر ر ر یا ر ر پ ر ر

بنابراین

$$n(A)=\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۰}=۵+۱=۶$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲^۵}=\frac{۳}{۱۶}$$

۴۷- گزینه‌ی ۱ در این‌جا $n(S)=۲^۵$. فرض کنید A پیشامد موردنظر باشد. در این صورت باید از ۵ جای زیر دست کم ۳ جا رو باشد. بنابراین

_ _ _ _ _

$$n(A)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{۳ جا رو بیاید}}}{\binom{۵}{۳}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{۴ جا رو بیاید}}}{\binom{۵}{۴}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{۵ جا رو بیاید}}}{\binom{۵}{۵}}=۱۰+۵+۱=۱۶$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۲^۵}=\frac{۱}{۲}$$

۴۸- گزینه‌ی ۴ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش $۶^۴$ است. یعنی $n(S)=۶^۴$. اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ در دو پرتاب باشد، تعداد اعضای A برابر است با

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\times۱\times۱\times۵^۲$$

(توجه کنید که کافی است دو پرتاب از چهار پرتاب را انتخاب کنیم که در آن‌ها به یک حالت عدد ۶ ظاهر می‌شود و در دو پرتاب باقی‌مانده به پنج حالت عدد دیگری ظاهر شود). بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}\times۵^۲}{۶^۴}=\frac{۲۵}{۲۱۶}$$

۴۹- گزینه‌ی ۱ تعداد راه‌های انتخاب ۲ عدد از میان ۲۰ عدد داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۲۰}{۲}=۱۹۰$. از طرف دیگر، اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$A=\{\{۱,۲\},\{۲,۳\},\{۳,۴\},\{۴,۵\},\dots,\{۱۹,۲۰\}\}$$

پس $n(A)=۱۹$ و در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۹}{۱۹۰}=\frac{۱}{۱۰}$.

۵۰- گزینه‌ی ۲ تعداد راه‌های انتخاب ۲ عدد از ۱۰۰ عدد برابر است با $n(S)=\binom{۱۰۰}{۲}$. اگر A پیشامد موردنظر باشد، آن‌گاه

$$A=\{\{۱,۳\},\{۲,۶\},\{۳,۹\},\dots,\{۳۳,۹۹\}\}$$

بنابراین $n(A)=۳۳$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۳}{\binom{۱۰۰}{۲}}=\frac{۳۳}{\frac{۱۰۰\times۹۹}{۲}}=\frac{۱}{۱۵۰}$$

۵۱- گزینه‌ی ۲ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از مجموعه‌ی ۶ عضوی داده شده برابر است با

$$n(S)=\binom{۶}{۳}=۲۰$$

برای این‌که حاصل‌ضرب عضوهای زیرمجموعه‌ی انتخاب شده منفی باشد، باید ۱ عضوش منفی باشد و ۲ عضوش مثبت باشند. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد

$$n(A)=\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۲}=۶$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

۵۲- گزینه‌ی ۱ تعداد راه‌های انتخاب زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از مجموعه‌ی ۶ عضوی داده شده برابر است با $n(S)=\binom{۶}{۳}=۲۰$. برای این‌که مجموع عضوهای زیرمجموعه‌ی انتخاب شده زوج باشد، یا باید ۱ عضوش زوج باشد و دو عضوش فرد باشند، یا باید هر سه عضوش زوج باشند. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}=۳\times۳+۱=۱۰$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

۵۳- گزینه‌ی ۱ در کل تعداد عددها برابر است با $۱۱=۶+۵$ و تعداد راه‌های انتخاب ۳ عدد از میان این ۱۱ عدد برابر است با $n(S)=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$. برای این که حاصل‌ضرب ۳ عدد مثبت باشد، یا باید هر سه مثبت باشند، یا دو تا منفی باشند و سومی مثبت. بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$n(A)=\binom{۶}{۳}+\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱}=۲۰+۶۰=۸۰$$

در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸۰}{۱۶۵}=\frac{۱۶}{۳۳}$$

۵۴- گزینه‌ی ۳ چون A و B ناسازگارند، $P(A\cap B)=۰$. از طرف دیگر

$$P(B)=۱-P(B')=\frac{۵}{۶}$$

در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۹}+\frac{۵}{۶}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۵۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۷}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

بنابراین

$$P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)$$
$$=۱-P(A)-P(B)$$
$$=۱-\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

۵۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

از طرف دیگر،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۱}{۲}=P(A)+\frac{۱}{۱۰}-P(A\cap B)$$

بنابراین

$$P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۵۷- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$۲P(A)+۲P(B)=P(A')+P(B')$$

$$۲P(A)+۲P(B)=۱-P(A)+۱-P(B)$$

$$۳P(A)+۳P(B)=۲\Rightarrow P(A)+P(B)=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

۵۸- گزینه‌ی ۱ از تساوی $P(B')=۳P(A')$ نتیجه می‌شود

$$۱-P(B)=۳(۱-P(A))\Rightarrow ۱-P(B)=۳-۳P(A)$$

$$\Rightarrow P(B)=۳P(A)-۲$$

در تساوی فوق به جای $P(A)$ قرار می‌دهیم $۲P(B)$ و نتیجه می‌شود

$$P(B)=۶P(B)-۲\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و در نتیجه

$$P(A)+P(B)=\frac{۶}{۵}$$

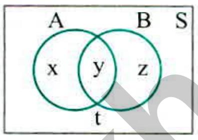
۵۹- گزینه‌ی ۱ فرض کنید $n(S)=s$. در این صورت

$$P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}\Rightarrow n(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}s$$

$$P(A')=\frac{۵}{۸}\Rightarrow n(A')=\frac{۵}{۸}s$$

از روی نمودار وِن زیر و تساوی‌های بالا معلوم می‌شود که

$$y=\frac{۵}{۲۴}s\,,\quad z+t=\frac{۵}{۸}s$$



اکنون توجه کنید که

$$x+y+z+t=s\Rightarrow x+\frac{۵}{۲۴}s+\frac{۵}{۸}s=s$$

$$\Rightarrow x=s-\frac{۵}{۲۴}s-\frac{۵}{۸}s=\frac{۱}{۶}s$$

به این ترتیب

$$P(A\cap B')=\frac{n(A\cap B')}{n(S)}=\frac{x}{s}=\frac{۱}{۶}$$

۶۰- گزینه‌ی ۳ چون A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، پس

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$۱-x=۲x+۳x+۴x$$

$$۱=۱۰x\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}$$

بنابراین $P(A)=\frac{۲}{۱۰}$ و $P(B)=\frac{۳}{۱۰}$ و در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۵}{۱۰}$$

۶۱- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل زیر تساوی‌های زیر برقرارند

$$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$$

$$(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$$

$$(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$$

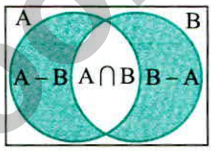
$$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$$

پیشامدهای $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ دوبه‌دو ناسازگارند.

پس

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)$$

$$\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱}{۵}+P(A\cap B)+\frac{۱}{۵}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۱۰}$$



۶۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل زیر $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر $A\cup B$ است.

پس

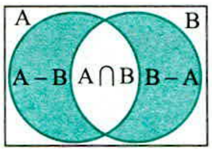
$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۱۰}+P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+P(A\cap B)$$

چون $P(A\cup B)\leq ۱$، پس

$$\frac{۱}{۲}+P(A\cap B)\leq ۱\Rightarrow P(A\cap B)\leq\frac{۱}{۲}$$

یعنی بیش‌ترین مقدار $P(A\cap B)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



۶۳- گزینه‌ی ۴ با توجه به رابطه‌ی

$$P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۶}\leq\frac{k}{۳}\leq\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\leq k\leq ۲$$

۶۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

و

$$۰\leq P(A\cup B)\leq ۱$$

از طرف دیگر چون $A\subseteq A\cup B$، پس $P(A)\leq P(A\cup B)$، یعنی $\frac{۴}{۵}\leq P(A\cup B)$.

بنابراین

$$\frac{۴}{۵}\leq P(A\cup B)\leq ۱\Rightarrow\frac{۴}{۵}\leq P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq ۱$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{۵}\leq\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}-P(A\cap B)\leq ۱$$

$$\Rightarrow-\frac{۲}{۳}\leq -P(A\cap B)\leq -\frac{۷}{۱۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۷}{۱۵}\leq P(A\cap B)\leq\frac{۲}{۳}$$

پس مجموع حداقل و حداکثر مقدار $P(A\cap B)$ برابر است با $\frac{۱۷}{۱۵}$.

۶۵- گزینه‌ی ۲

۶۶- گزینه‌ی ۲

۶۷- گزینه‌ی ۱

۶۸- گزینه‌ی ۳

۶۹- گزینه‌ی ۱

۷۰- گزینه‌ی ۳

۷۱- گزینه‌ی ۱

۷۲- گزینه‌ی ۱

۷۳- گزینه‌ی ۳

۷۴- گزینه‌ی ۳

۷۵- گزینه‌ی ۳ «تعداد اتومبیل‌های یک شهر» کمی گسسته است.

۷۶- گزینه‌ی ۱ نوع متغیر در گزینه‌ی (۱) کمی گسسته است ولی در بقیه‌ی گزینه‌ها کیفی اسمی است.

۷۷- گزینه‌ی ۴ متغیر گزینه‌ی (۴) کمی پیوسته و بقیه‌ی گزینه‌ها کیفی اسمی است.

۷۸- گزینه‌ی ۳

۷۹- گزینه‌ی ۳ «مراحل رشد انسان» کیفی ترتیبی، «رنگ چشم افراد» کیفی اسمی، «تعداد تماس‌های یک فرد در روزهای یک سال» کمی گسسته و «قد افراد» کمی پیوسته است.