

فصل اول

@khanah_book

هندسه‌ی تحلیلی و جبر

خانه کتاب

فصل اول: هندسه‌ی تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه‌ی تحلیلی

فاصله‌ی بین دو نقطه

اگر $A(x_A, 0)$ و $B(x_B, 0)$ دو نقطه روی محور x باشند، آن گاه طول پاره خط AB برابر است با

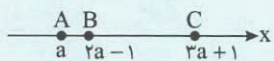
$$AB = |x_A - x_B|$$

به همین ترتیب، اگر $C(0, y_C)$ و $D(0, y_D)$ دو نقطه روی محور y باشند، آن گاه طول پاره خط CD برابر است با

$$CD = |y_C - y_D|$$

به طور کلی، اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند، طول پاره خط AB برابر است با

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



در شکل مقابل $AB + BC = 5$. اندازه‌ی پاره خط BC کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۴/۵ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: فاصله‌ی A از B برابر است با

$$AB = 2a - 1 - a = a - 1$$

فاصله‌ی B از C برابر است با

$$BC = 3a + 1 - (2a - 1) = a + 2$$

بنابراین

$$AB + BC = 5 \Rightarrow a - 1 + a + 2 = 5 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه

$$BC = a + 2 = 4$$

تست ۱

اگر A و B نقطه‌های $(k+3, 2)$ و $(5, 10)$ باشند و $AB = 17$ ، حاصل ضرب مقادیر ممکن k کدام است؟

-۲۲۱ (۴)

۲۲۱ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

تست ۲

پاسخ: توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(k+3-5)^2 + (2-10)^2} = 17 \Rightarrow \sqrt{(k-2)^2 + 8^2}$$

$$289 = (k-2)^2 + 64 \Rightarrow 225 = (k-2)^2$$

$$(k-2) = \pm\sqrt{225} \Rightarrow k = 2 \pm \sqrt{225}$$

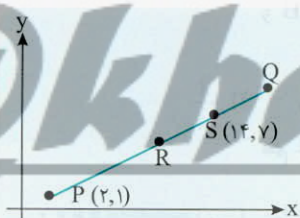
حاصل ضرب این دو مقدار برابر است با

$$(2 - \sqrt{225})(2 + \sqrt{225}) = 4 - 225 = -221$$

مختصات وسط پاره خط

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات باشند، مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره خط AB، برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



در شکل روبه‌رو نقطه‌ی R وسط پاره خط PQ و نقطه‌ی S وسط پاره خط QR است. طول نقطه‌ی Q چقدر است؟

تست ۳

۸ (۲)

۱۴ (۱)

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

پاسخ: طول نقطه‌ی Q را با x نشان می‌دهیم. چون R وسط PQ است، پس طول نقطه‌ی R برابر $\frac{x+2}{2}$ است.

بنابراین طول نقطه‌ی S برابر با $\frac{1}{2}(x + \frac{x+2}{2})$ است. با توجه به شکل، طول نقطه‌ی S برابر ۱۴ است. بنابراین

$$\frac{1}{2}(x + \frac{x+2}{2}) = 14 \Rightarrow x + \frac{x+2}{2} = 28 \Rightarrow x = 18$$

رأس‌های مثلث ABC نقطه‌های A(۲, ۵)، B(-۲, ۳) و C(۴, ۱) هستند. طول میانه‌ای که از رأس A می‌گذرد چقدر است؟

تست ۴

√۲۶ (۴)

√۱۷ (۳)

√۱۳ (۲)

√۱۰ (۱)

پاسخ: وسط ضلع BC نقطه‌ی $(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2})$ یعنی نقطه‌ی (۱, ۲) است. طول میانه‌ای که از رأس A

می‌گذرد برابر با فاصله‌ی A از نقطه‌ی وسط ضلع BC است، یعنی برابر است با

$$\sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$$

اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، چون قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس وسط قطر AC بر وسط قطر BD منطبق است. در نتیجه

نکته

$$x_A + x_C = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

نقطه‌های A(۰, ۲)، B(k, k+۲)، C(۶, ۱۰) و D(n, k) رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. طول

تست ۵

قطر BD چقدر است؟

۲√۵ (۴)

√۵ (۳)

√۵ (۲)

۵√۲ (۱)

پاسخ: در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطه‌ی وسط قطر AC همان نقطه‌ی وسط قطر BD است. بنابراین

$$(\frac{0+6}{2}, \frac{2+10}{2}) = (\frac{k+n}{2}, \frac{k+2+k}{2})$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 6 = k + n \\ 6 = \frac{2k+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 5 + n \Rightarrow n = 1 \\ k = 5 \end{cases}$$

بنابراین B نقطه‌ی (۵, ۷) و D نقطه‌ی (۱, ۵) است و

$$BD = \sqrt{(5-1)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

اگر فاصله‌ی دو خط موازی $ax - 4y + 24 = 0$ و $x - y + b = 0$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، حاصل ضرب مقادیرهای

تست ۱۲

ممکن b چقدر است؟

(۴) -۳۲

(۳) -۱۲

(۲) ۳۲

(۱) ۱۲

پاسخ: معادله‌ی خط دوم را به شکل $4x - 4y + 4b = 0$ می‌نویسیم. در نتیجه فاصله‌ی دو خط موازی برابر

است با

$$\frac{|4b - 24|}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{4|b - 6|}{4\sqrt{2}} = \frac{|b - 6|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |b - 6| = 2 \Rightarrow b = 4, b = 8$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیرهای ممکن b برابر ۳۲ است.

خانه کتاب

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

درس اول:
هندسه تحلیلی

فصل اول

۱- فاصله نقطه $A(2, 0)$ از نقطه $B(m, 0)$ دو برابر فاصله A از نقطه $C(2m-1, 0)$ است. حاصل ضرب مقدارهای ممکن برای m کدام است؟

(۴) $\frac{32}{15}$

(۳) $\frac{16}{15}$

(۲) $\frac{32}{5}$

(۱) $\frac{16}{5}$

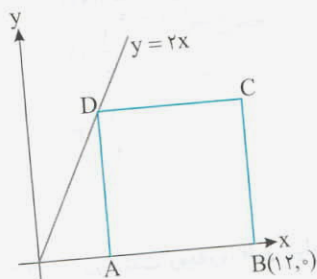
۲- در شکل روبه‌رو $ABCD$ مربع است. نقطه C کدام است؟

(۱) $(8, 12)$

(۲) $(12, 12)$

(۳) $(12, 8)$

(۴) $(12, 10)$



۳- وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(a+1, 4-2b)$ و $(3-a, 2b-3)$ کدام نقطه است؟

(۱) $(a-1, b-1)$

(۲) $(2, -\frac{1}{2})$

(۳) $(2, \frac{1}{2})$

(۴) $(2a, 4b)$

۴- نقطه M ، وسط پاره‌خط AB ، روی خط $y=2x+1$ قرار دارد. اگر نقطه A نقطه $(2, -3m)$ و نقطه B نقطه $(m, 1)$ باشد، نقطه M کدام است؟

(۱) $(-\frac{1}{2}, 2)$

(۲) $(\frac{1}{2}, 2)$

(۳) $(\frac{1}{2}, -2)$

(۴) $(-\frac{1}{2}, -2)$

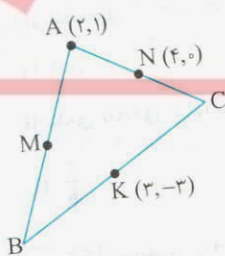
۵- در شکل مقابل نقطه‌های M ، N و K وسط ضلع‌های مثلث ABC هستند. نقطه M کدام است؟

(۱) $(-1, 2)$

(۲) $(1, 2)$

(۳) $(1, -2)$

(۴) $(-1, -2)$



۶- نقطه‌های $(2, 4)$ ، $(4, 5)$ و $(3, 2)$ وسط ضلع‌های یک مثلث هستند. کدام یک از نقطه‌های زیر رأسی از این مثلث نیست؟

(۱) $(1, 1)$

(۲) $(3, 7)$

(۳) $(3, -3)$

(۴) $(5, 3)$

۷- نقطه‌های $A(-2, -3)$ ، $B(3, -2)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1, 3)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. نقطه C کدام است؟

(۱) $(1, 1)$

(۲) $(2, 2)$

(۳) $(3, 3)$

(۴) $(4, 4)$

۸- نقطه‌های $A(m, 4)$ ، $B(3, m)$ ، $C(m+n, m-n)$ و $D(m-n, n)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مقدار mn کدام است؟

(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۳

(۴) -۳

۹- نقطه‌های $A(-b, -a)$ ، $B(a, -3)$ ، $C(5, a)$ و $D(-2, a)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $-\frac{4}{3}$

۱۰- اگر $A(1, 2)$ ، $B(3, -1)$ و $C(-1, -2)$ سه رأس از یک متوازی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس چهارم کدام نمی‌تواند باشد؟

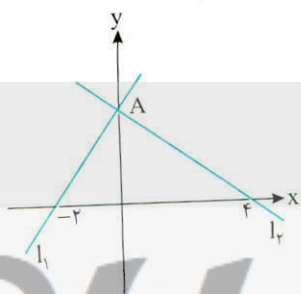
(۱) $(-3, 1)$

(۲) $(2, -3)$

(۳) $(1, -5)$

(۴) $(5, 3)$

۳۵- در شکل مقابل، خطهای l_1 و l_2 در نقطه‌ی A روی محور y بر یکدیگر عمودند. عرض نقطه‌ی A چقدر است؟



$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

۳۶- نقطه‌های $A(0,0)$ ، $B(a,b)$ ، $C(c,16)$ و $D(0,10)$ رأس‌های لوزی ABCD در ربع اول هستند. نسبت $\frac{a+b}{c}$ چقدر است؟

$$\frac{7}{4} \quad (4)$$

$$\frac{9}{2} \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

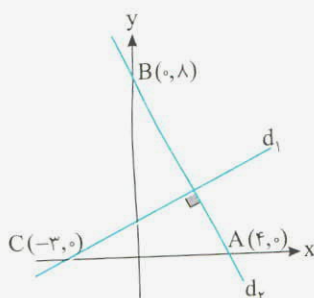
۳۷- در شکل مقابل معادله‌ی خط d_1 کدام است؟

$$2y = x - 3 \quad (1)$$

$$2y - 2x = 6 \quad (2)$$

$$2y = x + 3 \quad (3)$$

$$2y = 3x \quad (4)$$



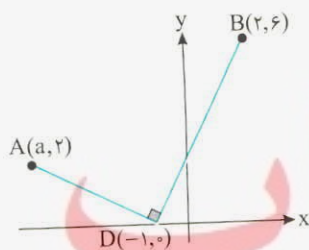
۳۸- در شکل مقابل مقدار a کدام است؟

$$-7 \quad (1)$$

$$-6 \quad (2)$$

$$-5 \quad (3)$$

$$-3 \quad (4)$$



۳۹- اگر نقطه‌های $A(1,2)$ ، $B(-1,0)$ و $C(3,-2)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع CH کدام است؟

$$y = x + 1 \quad (4)$$

$$y = -x + 1 \quad (3)$$

$$y = -x - 1 \quad (2)$$

$$y = x - 1 \quad (1)$$

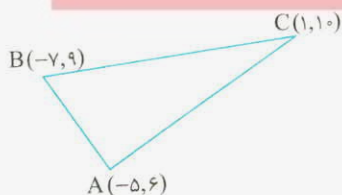
۴۰- در شکل روبه‌رو، معادله‌ی ارتفاع وارد بر AB کدام است؟

$$3y - 2x = 28 \quad (1)$$

$$2y - 3x = 28 \quad (2)$$

$$2y - 3x = 38 \quad (3)$$

$$3y - 2x = 38 \quad (4)$$



۴۱- معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $A(-3,1)$ و $B(5,4)$ کدام است؟

$$6x + 16y = 31 \quad (1)$$

$$16x + 6y = 31 \quad (2)$$

$$16x + 6y = 21 \quad (3)$$

$$6x + 16y = 21 \quad (4)$$

۴۲- اگر نقطه‌های $A(2,1)$ و $B(4,-3)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، معادله‌ی عمودمنصف AB کدام است؟

$$x + 2y = 5 \quad (1)$$

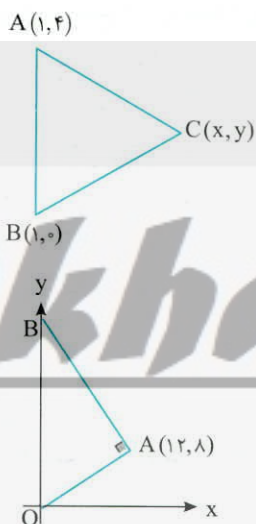
$$x - 2y = 5 \quad (2)$$

$$2x - y = 3 \quad (3)$$

$$2x + y = 3 \quad (4)$$

$$741 \quad (2)$$

$$\sqrt{31} \quad (1)$$



۴۳- در شکل مقابل اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد، عرض نقطه‌ی C کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) ۴
(۴) -۴

۴۴- در شکل روبه‌رو مساحت مثلث OAB چقدر است؟

- (۱) ۱۵۶
(۲) ۳۱۲
(۳) ۹۲
(۴) ۱۱۲

۴۵- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1, 2)$ نسبت به خط $y = ax + b$ نقطه‌ی $A'(-3, 4)$ است. مقدار ab کدام است؟

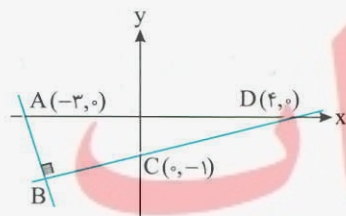
- (۱) ۱۰
(۲) -۱۰
(۳) ۵
(۴) -۵

۴۶- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1, -1)$ نسبت به خط $y = 2x$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$
(۲) $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3})$
(۳) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$
(۴) $(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$

۴۷- اگر نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3, -1)$ نسبت به خط $3x - 4y + 17 = 0$ باشد، طول پاره‌خط AB چقدر است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۶



۴۸- در شکل مقابل طول AB کدام است؟

- (۱) $\frac{7\sqrt{17}}{17}$
(۲) $\frac{8\sqrt{17}}{17}$
(۳) $20\sqrt{17}$
(۴) $\frac{5\sqrt{17}}{17}$

۴۹- طول ارتفاع وارد از رأس B در مثلث ABC با رأس‌های $A(1, 3)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(3, -1)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{8}{\sqrt{5}}$
(۲) $\frac{16}{\sqrt{29}}$
(۳) $\frac{16}{\sqrt{5}}$
(۴) $\frac{8}{\sqrt{29}}$

۵۰- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1, 2k)$ از خط $y = -kx + 1$ برابر ۳ است. مقدار k کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{3}$
(۲) $-\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{5}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

۵۱- فاصله‌ی مبدأ تا خط $y - 4 = m(x + 2)$ برابر ۲ است. مقدار m چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $-\frac{4}{3}$

۵۲- فاصله‌ی نقطه‌ی $(k, 3)$ تا خط $4x - 3y = -5$ برابر ۴ است. مجموع مقادیرهای ممکن k چقدر است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

۵۳- فاصله‌ی نقطه‌ی $(2, 3)$ تا خط $12y - 5x = k$ برابر $\frac{5}{13}$ است. مجموع مقادیرهای ممکن k چقدر است؟

- (۱) ۴۹
(۲) ۵۰
(۳) ۵۱
(۴) ۵۲

۵۴- کدام خط بر خط $3x + 4y = 16$ عمود است و فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 1)$ از آن برابر ۳ است؟

- (۱) $-4x + 3y - 14 = 0$
(۲) $-4x + 3y + 14 = 0$
(۳) $-4x + 3y + 12 = 0$
(۴) $-4x + 3y - 16 = 0$

۵۵- دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقطه‌ها از خط به معادله‌ی $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این

دو نقطه کدام است؟

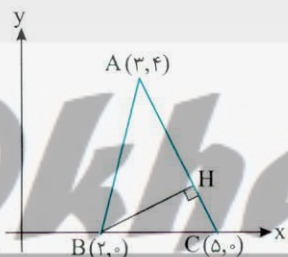
(۱) ۹ و ۱۵

(۲) ۱۱ و ۱۵

(۳) ۱۱ و ۱۵

(۴) ۱۱ و ۹

۵۶- در شکل مقابل طول BH چقدر است؟



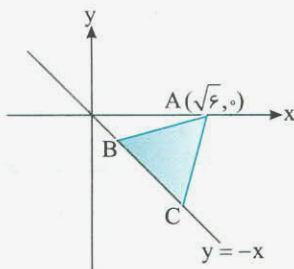
(۱) $\frac{16}{\sqrt{5}}$

(۲) $\frac{14}{\sqrt{5}}$

(۳) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

(۴) $\frac{8}{\sqrt{5}}$

۵۷- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. مساحت این مثلث چقدر است؟



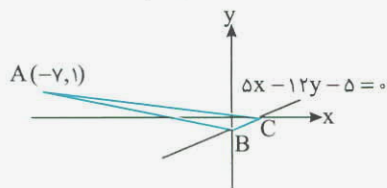
(۱) ۳

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۹

(۴) $2\sqrt{3}$

۵۸- با توجه به شکل، مساحت مثلث ABC چقدر است؟



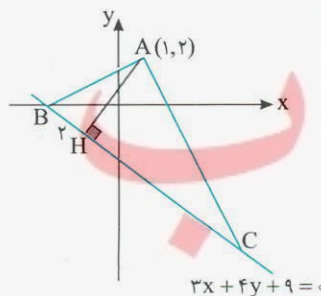
(۱) ۲

(۲) $\frac{13}{6}$

(۳) $\frac{12}{5}$

(۴) $\frac{15}{8}$

۵۹- در شکل روبه‌رو طول پاره‌خط AB کدام است؟



(۱) $\sqrt{5}$

(۲) $2\sqrt{5}$

(۳) ۷

(۴) ۵

۶۰- مساحت مربعی که یک رأس آن نقطه‌ی $A(2, 1)$ و یک ضلع آن روی خط $y = 2x + 1$ است، کدام است؟

(۱) $\frac{16}{5}$

(۲) $\frac{25}{3}$

(۳) ۴

(۴) $\frac{9}{5}$

۶۱- نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

(خارج از کشور تجربی - ۹۳)

(۱) ۴۰

(۲) ۴۵

(۳) ۷۵

(۴) ۸۰

۶۲- اگر نقطه‌های $A(-2, 3)$ ، $B(4, -5)$ و $C(-3, 1)$ رأس‌هایی از متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۲۰

(۴) ۳۰

۶۳- دو ضلع مستطیلی روی خط‌های $4x + 3y = 1$ و $3x - 4y = 2$ هستند. اگر یک رأس آن باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

(۱) $\frac{63}{25}$

(۲) $\frac{56}{25}$

(۳) $\frac{48}{25}$

(۴) $\frac{42}{25}$

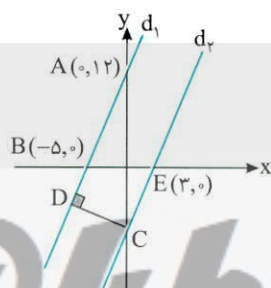
۶۴- معادله‌ی خطی که از دو خط $2x - y + 1 = 0$ و $2y - 4x + 3 = 0$ به یک فاصله است، کدام است؟

(۱) $4x - 2y - \frac{1}{2} = 0$

(۲) $4x - 2y - \frac{1}{4} = 0$

(۳) $2x - y - \frac{1}{2} = 0$

(۴) $2x + y - \frac{1}{2} = 0$



(تجربی - ۹۲)

۶۵- در شکل روبه‌رو $d_1 \parallel d_2$. طول CD چقدر است؟

$$\frac{96}{13} \quad (2)$$

$$\frac{4}{13} \quad (4)$$

$$\frac{13}{24} \quad (1)$$

$$\frac{5}{13} \quad (3)$$

$$\frac{25}{4} \quad (4)$$

$$\frac{25}{8} \quad (3)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{9}{8} \quad (1)$$

۶۶- دو ضلع مستطیلی روی دو خط موازی $3x + 4y + 10 = 0$ و $3x + 4y - 10 = 0$ قرار دارند و مساحت این مستطیل ۱۲ است. طول قطر این

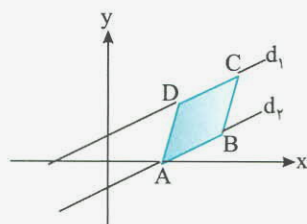
مستطیل چقدر است؟

$$5 \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$\sqrt{7} \quad (1)$$



۶۸- در شکل روبه‌رو $AB = 2\sqrt{5}$. مساحت متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

$$d_1: x - 2y + 2 = 0$$

$$d_2: x - 2y - 6 = 0$$

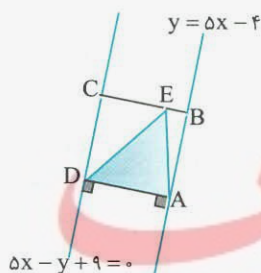
$$16 \quad (2)$$

$$8\sqrt{5} \quad (4)$$

$$4\sqrt{5} \quad (1)$$

$$8 \quad (3)$$

۶۹- در شکل مقابل ABCD مربع است. مساحت مثلث EDA چقدر است؟



$$\frac{13}{4} \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$\frac{13}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

۷۰- خط‌های $x + 2y + 1 = 0$ و $3x + 6y + k = 0$ موازی‌اند و فاصله‌ی میان آن‌ها برابر $\sqrt{5}$ است. مجموع مقدارهای ممکن k چقدر است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$-6 \quad (1)$$

۷۱- فاصله‌ی خط‌های موازی $ax + 3y + 5 = 0$ و $2x + y + k = 0$ برابر $2\sqrt{5}$ است. اگر $k > 0$ ، مقدار $a + k$ چقدر است؟

$$\frac{53}{3} \quad (4)$$

$$\frac{47}{3} \quad (3)$$

$$\frac{35}{3} \quad (2)$$

$$\frac{32}{3} \quad (1)$$

۷۲- فاصله‌ی خط‌های موازی $12x + 9y = 2$ و $ax + 3y + c = 0$ برابر ۳ است. اگر $c > 0$ ، مقدار $\frac{a}{c}$ چقدر است؟

$$\frac{1}{43} \quad (4)$$

$$\frac{3}{45} \quad (3)$$

$$\frac{4}{43} \quad (2)$$

$$\frac{12}{43} \quad (1)$$

۷۳- معادله‌ی خطی که از خط‌های $x + 3y - 1 = 0$ و $x + 3y + 4 = 0$ به یک فاصله است کدام است؟

$$2x + 6y + 3 = 0 \quad (4)$$

$$x + 3y - 3 = 0 \quad (3)$$

$$2x + 6y - 3 = 0 \quad (2)$$

$$x + 3y + 3 = 0 \quad (1)$$

فصل اول: هندسه‌ی تحلیلی و جبر

درس دوم: معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ ، به شرط این که $\Delta=b^2-4ac \geq 0$ ، عبارت‌اند از

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

در این صورت، اگر مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل ضرب ریشه‌ها را با P نشان دهیم، آنگاه

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

همچنین، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر می‌شود با

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

تست ۱ اگر عددهای غیرصفر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (a+1)x + 3b = 0$ باشند، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: چون حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (a+1)x + 3b = 0$ برابر با $3b$ است، پس $ab = 3b$ ، و

چون $b \neq 0$ ، پس $a = 3$. از طرف دیگر، مجموع ریشه‌ها برابر $a+1$ است، پس

$$a+b = a+1 \Rightarrow b=1$$

بنابراین $a-b=2$.

تست ۲ به ازای چند مقدار m معادله‌ی $mx^2 - (m^3 - 4m)x - m + 5 = 0$ دو جواب دارد که قرینه‌ی یکدیگرند؟

۴ صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: اولاً باید حاصل ضرب جواب‌های معادله منفی باشد:

$$\frac{-m+5}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 5$$

ثانیاً باید مجموع جواب‌های معادله برابر صفر باشد:

$$\frac{m^3 - 4m}{m} = 0 \Rightarrow m^3 - 4m = 0$$

$$\Rightarrow m(m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m = -2, m = 0, m = 2$$

از مقدارهای فوق فقط $m = -2$ قابل قبول است.

تست ۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4\sqrt{2}x - 17 = 0$ باشند، مقدار $|x_1 - x_2|$ چقدر است؟

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: توجه کنید که $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ، بنابراین

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{(-4\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-17)}}{1} = \sqrt{100} = 10$$

تست ۴ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $mx^2 - 2mx + 1 + m = 0$ باشند و $2x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = 8$ ، مقدار m چقدر است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: توجه کنید که $x_1 + x_2 = -\left(\frac{-2m}{m}\right) = 2$. بنابراین $x_2 = 2 - x_1$. از طرف دیگر،

$$2x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = 8 \Rightarrow 2x_1^2 + x_1(2 - x_1) - (2 - x_1)^2 = 8$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 + 2x_1 - x_1^2 - 4 - x_1^2 + 4x_1 = 8$$

$$\Rightarrow 6x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 2$$

چون x_1 ریشه‌ی معادله است، پس ۲ در معادله صدق می‌کند:

$$m(2)^2 - 2m(2) + 1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$$

تست ۵ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (m+1)x - 8 = 0$ باشند و $x_1 = x_2^2$ ، مقدار m چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: توجه کنید که

$$\begin{cases} x_1x_2 = -8 \\ x_1 = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow x_2^3 = -8 \Rightarrow x_2 = -2$$

چون x_2 ریشه‌ی معادله است، پس -۲ در معادله صدق می‌کند:

$$(-2)^2 - (m+1)(-2) - 8 = 0 \Rightarrow m = 1$$

تست ۶ اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} &= \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \\ &= \frac{2+2}{-4+2+1} = -4 \end{aligned}$$

تست ۷ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{7+\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{7+4\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{7+2\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}$

پاسخ: فرض می‌کنیم $A = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$. در این صورت

$$A^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}}$$

چون $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$ و $x_1 x_2 = 2$ ، پس

$$A^2 = \frac{\frac{7}{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4} + \sqrt{2} = \frac{7+4\sqrt{2}}{4}$$

چون $A > 0$ ، نتیجه می‌شود

$$A = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}$$

تست ۸ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، مقدار $x_1^2 + 5x_2 + 9$ چقدر است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۳۱

پاسخ: چون x_1 ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس

$$x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 5x_1 - 3$$

از طرف دیگر،

$$x_1 + x_2 = 5$$

بنابراین

$$x_1^2 + 5x_2 + 9 = 5x_1 - 3 + 5x_2 + 9 = 5(x_1 + x_2) + 6 = 5 \times 5 + 6 = 31$$

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر x_1 و x_2 عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ هستند، که در آن $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$.

تست ۹ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $2 - \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{3}$ باشند، کدام است؟

(۱) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (۳) $x^2 - x - 4 = 0$ (۴) $x^2 + x - 4 = 0$

پاسخ: فرض می‌کنیم $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ و $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. در این صورت

$$S = x_1 + x_2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$P = x_1 x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

$$= 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر $x^2 - 4x + 1 = 0$ است.

تست ۱۰

جواب‌های کدام معادله عکس و قرینه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 5 = 0$ هستند؟

(۱) $5x^2 - 3x - 1 = 0$ (۲) $5x^2 + 3x - 1 = 0$ (۳) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ (۴) $5x^2 - 3x - 2 = 0$

پاسخ: اگر جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 5 = 0$ را α و β بنامیم، جواب‌های معادله‌ی مورد نظر $-\frac{1}{\alpha}$

و $-\frac{1}{\beta}$ هستند. بنابراین

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = -5$$

$$S = \left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$P = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{1}{5}$$

پس معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 1 = 0$$

تست ۱۱

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (x_1 + 2)x + 3x_2 = 0$ باشند، معادله‌ای که ریشه‌هایش $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ هستند کدام است؟

(۱) $x^2 - 3x + 6 = 0$ (۲) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (۳) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (۴) $x^2 - 7x + 12 = 0$

پاسخ: توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = x_1 + 2 \Rightarrow x_2 = 2, \quad x_1 x_2 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = 3$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر برابرند با

$$x_1 + 1 = 3 + 1 = 4, \quad x_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

مجموع این ریشه‌ها ۷ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲ است، پس معادله‌ی مورد نظر $x^2 - 7x + 12 = 0$ است.

صفرهای تابع

اگر f تابع باشد، جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را **صفرهای تابع** f می‌نامند. صفرهای تابع f طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع با محور x هستند.

اگر x_1 و x_2 صفرهای تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، آن‌گاه

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

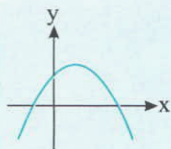
تست ۱۲

نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر S مجموع

صفرهای تابع f باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $S > 0$ و $c > 0$ (۲) $S < 0$ و $c < 0$

(۳) $S > 0$ و $c < 0$ (۴) $S < 0$ و $c > 0$



پاسخ: از روی شکل معلوم می‌شود که عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه $c > 0$. همچنین

$$S = -\frac{b}{a}$$

چون طول رأس سهمی برابر $-\frac{b}{2a}$ و عددی مثبت است، پس $S = -\frac{b}{a} > 0$.

نکته

اگر $x = \alpha$ یکی از صفرهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، آن گاه $x - \alpha$ یکی از عامل‌های $f(x)$ است، و اگر $f(x)$ را بر $x - \alpha$ تقسیم کنیم، عامل دیگری برای $f(x)$ به دست می‌آید.

تست ۱۳

اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$ باشد، مجموع مربع‌های ریشه‌های دیگر تابع چقدر است؟

۱۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: با توجه به فرض می‌دانیم که $f(2) = 0$ ، پس

$$f(2) = 8 + 4a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow a = -4$$

چون $x - 2$ عاملی از $x^3 - 4x^2 + x + 6$ است، پس

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)Q(x)$$

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای $x^3 - 4x^2 + x + 6$ را بر $x - 2$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

بنابراین

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

پس به غیر از $x = 2$ صفرهای دیگر تابع -1 و 3 هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها 10 است.

رابطه‌ی بین ضرایب و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Delta \geq 0$.

• اگر $\frac{c}{a} < 0$ ، آن گاه معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. در این صورت، اگر $-\frac{b}{a} > 0$ ، آن گاه

قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت کوچک‌تر است. اگر $-\frac{b}{a} < 0$ ، آن گاه قدرمطلق ریشه‌ی منفی از

ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است.

• اگر $\frac{c}{a} > 0$ ، آن گاه معادله دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد. در این صورت، اگر $-\frac{b}{a} > 0$ ، آن گاه هر دو ریشه

مثبت‌اند. اگر $-\frac{b}{a} < 0$ ، آن گاه هر دو ریشه منفی‌اند.

تست ۱۴

به ازای چند عدد صحیح مانند m معادله‌ی $x^2 + (m - 4)x + 2m + 4 = 0$ دو ریشه‌ی مثبت دارد؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

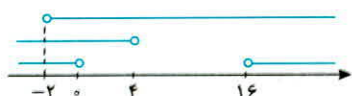
صفر (۱)

پاسخ: برای این که معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta > 0 : (m - 4)^2 - 4(2m + 4) > 0 \Rightarrow m^2 - 16m > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 16$$

$$\frac{c}{a} > 0 : 2m + 4 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$-\frac{b}{a} > 0 : 4 - m > 0 \Rightarrow m < 4$$



با توجه به محور روبه‌رو، اشتراک سه جواب به دست آمده، $-2 < m < 0$ را مشخص می‌کند که شامل یک عدد صحیح است.

تست ۱۵

به ازای چند عدد صحیح مانند m معادله $4x^2 - mx + m^2 - 6 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

پاسخ: وقتی $\frac{c}{a} < 0$ ، معادله دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد. توجه کنید که در این حالت حتماً $\Delta > 0$:

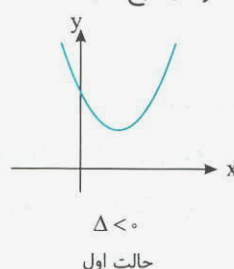
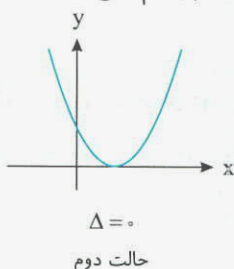
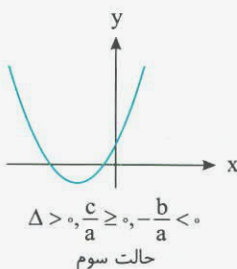
$$\frac{c}{a} = \frac{m^2 - 6}{4} < 0 \Rightarrow m^2 < 6 \Rightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$$

تست ۱۶

نمودار تابع $y = x^2 + ax + 4 - a^2$ به ازای کدام مقدارهای a از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد؟

- (۱) $\frac{4}{\sqrt{5}} < a \leq 2$ (۲) $-2 \leq a \leq 2$ (۳) $-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq a \leq 2$ (۴) $-2 \leq a < \frac{4}{\sqrt{5}}$

پاسخ: نمودار تابع در سه حالت زیر از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد:



بنابراین Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = a^2 - 4(4 - a^2) = 5a^2 - 16$$

اکنون توجه کنید که

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 5a^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq a \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow 5a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ یا } a > \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 4 - a^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[\text{بازدهای به دست آمده}]{\text{اشتراک گیری از}} \frac{4}{\sqrt{5}} < a \leq 2$$

اجتماع محدوده‌های به دست آمده در حالت‌های اول، دوم و سوم برابر است با $-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq a \leq 2$.

معادله‌هایی که به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شوند

برخی معادله‌ها را می‌توان با تغییر متغیر به معادله‌ای درجه‌ی دوم تبدیل و حل کرد.

تست ۱۷

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: فرض می‌کنیم $x^2 + x = t$. در این صورت

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1 \\ t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

به ازای کدام مقدارهای k معادله‌ی $x^4 - kx^2 + \frac{3-2k}{4} = 0$ دو ریشه دارد؟

تست ۱۸

$k \geq \frac{3}{2}$ (۱)
 $k > \frac{3}{2}$ (۲)
 $k = 1$ یا $k > \frac{3}{2}$ (۳)
 $k = 1$ یا $k < \frac{3}{2}$ (۴)

پاسخ: اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، به معادله‌ی زیر می‌رسیم.

$$t^2 - kt + \frac{3-2k}{4} = 0$$

اگر این معادله یک ریشه‌ی مضاعف مثبت مانند t_1 داشته باشد، معادله‌ی اصلی دو ریشه به صورت $x = \pm\sqrt{t_1}$ دارد:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t_1 = -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - (3-2k) = 0 \\ \frac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \end{cases} \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -3 \text{ (غ.ق.)}, k = 1$$

همچنین اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، ریشه‌ی منفی قابل قبول نیست، چون x^2 نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادله‌ی اصلی دو ریشه به صورت $x = \pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3-2k}{4} < 0 \Rightarrow 3-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{3}{2}$$

بنابراین $k > \frac{3}{2}$ یا $k = 1$ جواب مسئله است.

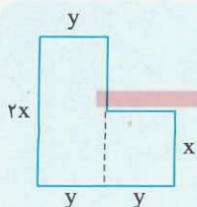
ماکسیمم و مینیمم تابع درجه‌ی دوم

بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و

برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

با طنابی به طول ۴۰ متر زمینی به شکل مقابل را محصور کرده‌ایم. بیش‌ترین مساحت محصور شده‌ی ممکن کدام است؟

تست ۱۹



75 (۲)
 50 (۱)
 125 (۴)
 100 (۳)

پاسخ: محیط شکل برابر است با

$$4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S = 2xy + xy = 3xy$$

$$= 3x(10 - x)$$

$$= -3x^2 + 30x$$

بیش‌ترین مقدار این عبارت درجه‌ی دوم برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است:

$$S_{\max} = -\frac{900}{4(-3)} = 75$$

بیشترین مساحت مربوط به یک مثلث قائم‌الزاویه با وتری به طول ۳ واحد چقدر است؟

$$\frac{3}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: اگر طول ضلع‌های قائمه‌ای مثلث را a و b فرض کنیم، مساحت مثلث از رابطه‌ی $S = \frac{ab}{2}$ به دست

می‌آید که بین a و b رابطه‌ی $a^2 + b^2 = 9$ برقرار است. ابتدا، بیشترین مقدار S^2 را به دست می‌آوریم. برای این کار، S^2 را بر حسب یک متغیر می‌نویسیم:

$$b^2 = 9 - a^2 \Rightarrow S^2 = \frac{a^2 b^2}{4} = \frac{a^2(9 - a^2)}{4} = \frac{-(a^2)^2 + 9a^2}{4}$$

حاصل S^2 به صورت یک عبارت درجه‌ی دوم بر حسب a^2 است که بیشترین مقدار آن به ازای

$$a^2 = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

$$S_{\max}^2 = \frac{-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{9}{2}\right)}{4} = \frac{81}{16}$$

$$S_{\max} = \frac{9}{4} \quad \text{در نتیجه}$$

خانه کتاب

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس دوم:

معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه‌ی دوم

۷۴- اگر عددهای غیر صفر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ باشند، مقدار b چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (x_1 x_2)x - \frac{1}{6} = 0$ باشند و $x_1 > x_2$ ، مقدار $\frac{x_1}{x_2}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۷۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3mx + 6m + 1 = 0$ باشند، کدام تساوی درست است؟

- (۱) $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 1$ (۲) $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 1$ (۳) $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$ (۴) $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

۷۷- اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $mx^2 - nx + 12 = 0$ به صورت $\left\{-\frac{n}{1+n}, \frac{n}{1-n}\right\}$ باشد، مقدار n چقدر است؟

- (۱) ۲۴ (۲) -۲۴ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۷۸- اگر $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}$ و $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + bx + 2 = 0$ باشند، مقدار b چقدر است؟

- (۱) $\pm\sqrt{3}$ (۲) $\pm 2\sqrt{3}$ (۳) $\pm 3\sqrt{2}$ (۴) $\pm\sqrt{2}$

۷۹- نوید ضریب x در معادله‌ی $x^2 + 13x + k = 0$ را به اشتباه ۱۷ دید و وقتی معادله را حل کرد ریشه‌هایش ۲- و ۱۵- شدند. ریشه‌های معادله‌ی اصلی چه عددهایی هستند؟

- (۱) -۶ و -۷ (۲) -۵ و -۸ (۳) -۴ و -۹ (۴) -۳ و -۱۰

۸۰- از هر یک از جواب‌های معادله‌ی $x^2 + 2x = 6$ ، دو واحد کم می‌کنیم. حاصل ضرب آن‌ها به اندازه‌ی واحد تغییر می‌کند.

- (۱) -۸ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) -۶

۸۱- در معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ یکی از جواب‌ها عکس و قرینه‌ی جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۸۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + (k-1)x + 8 = 0$ باشند و $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{4}$ ، مقدار k چقدر است؟

- (۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۷ (۴) -۸

۸۳- در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیش‌تر باشد، مقدار m کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۸۴- در معادله‌ی $2x^2 - 4x + m = 0$ یکی از جواب‌ها از سه برابر جواب دیگر سه واحد بیش‌تر است. مقدار m کدام است؟

- (۱) $-\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $-\frac{9}{16}$

۸۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + (m+1)x + 2 = 0$ باشند و $3(x_1 + x_2) - 5x_1 x_2 = -19$ ، مقدار m چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

@khanah_book

خانه کتاب

۱۰۲- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - (m+1)x + m = 0$ باشند و $2\alpha + 3\beta = \alpha\beta$ ، مجموع مقادیرهای ممکن برای m کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۳- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - mx + m - 1 = 0$ باشند و $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = 2$ ، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 5x + 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{26}$ (۲) $-\frac{4}{25}$ (۳) $\frac{3}{25}$ (۴) $-\frac{3}{25}$

۱۰۵- در معادله‌ی $x^2 - 7x + 1 = 0$ قدرمطلق تفاضل جواب‌ها کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{53}$ (۴) $\sqrt{47}$

۱۰۶- دربارهی معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌دانیم $\Delta = 5$. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، حاصل $4a^2(x_1 - x_2)^2$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۱۰۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2)$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۲ (۳) -۱۶ (۴) -۴

۱۰۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند، مقدار $x_1^2 + x_2^2$ چقدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۱۰۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 8x - 13 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{25}$ (۲) $\frac{2}{25}$ (۳) $-\frac{4}{25}$ (۴) $-\frac{2}{25}$

۱۱۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۱- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۴۴ (۴) ۸۴

۱۱۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 4 = 0$ باشند، مقدار $x_1^3 + x_2^3$ چقدر است؟

- (۱) ۱۱۲ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۲۴

۱۱۳- عددهای ۲ و ۴ به‌ترتیب ریشه‌ای از معادله‌های $x^2 - ax + b = 0$ و $x^2 - cx + d = 0$ هستند و ریشه‌ی دیگر این دو معادله مشترک است. مقدار $a - c + \frac{b}{d}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 12x + 9 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۵- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند و $\alpha < \beta$ ، مقدار $\alpha^2 - \beta^2$ کدام است؟

- (۱) $-8\sqrt{5}$ (۲) $8\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $-4\sqrt{5}$

۱۱۶- اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ جواب‌های معادله‌ی $x^2 - (m-3)x + 2m-1=0$ باشند، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1=0$ باشند، مقدار $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}$ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

۱۱۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 1=0$ باشند، مقدار $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۹- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 1=0$ باشند، مقدار $\alpha^2 + \frac{2}{\beta} + 2\beta^2$ کدام است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۶۹ (۳) ۴۶ (۴) ۵۱

۱۲۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x - 1=0$ باشند، مقدار $3\alpha^2 + (3\alpha - 4)^2 + \beta^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{100}{9}$ (۲) $\frac{110}{9}$ (۳) $\frac{130}{9}$ (۴) $\frac{220}{9}$

۱۲۱- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - \sqrt{5}x + 1=0$ باشند و $\alpha < \beta$ ، مقدار $2\alpha + 4\beta$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{5} - 1$ (۲) $3\sqrt{5} + 1$ (۳) $\sqrt{5} + 3$ (۴) $\sqrt{5} - 1$

۱۲۲- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 1=0$ باشند، مقدار $4\alpha^2 + 6\beta(1 + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۲۳- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1=0$ باشند، مقدار $\alpha^3 + 5\beta$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۲۴- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 1=0$ باشند، مقدار $\alpha^4 + 33\beta$ کدام است؟

- (۱) ۹۹ (۲) ۱۰۹ (۳) ۱۱۱ (۴) ۱۱۹

۱۲۵- کدام گزینه درباره‌ی بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ درست است؟

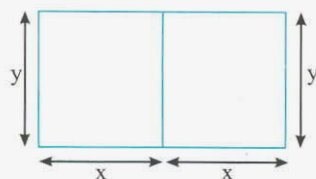
- (۱) بیش‌ترین مقدار آن ۵ است. (۲) کم‌ترین مقدار آن ۵ است.
(۳) بیش‌ترین مقدار آن -۴ است. (۴) کم‌ترین مقدار آن -۳۱ است.

۱۲۶- اگر حداقل مقدار عبارت $4x^2 + ax + 13$ برابر با ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ± 4 (۲) ± 2 (۳) ± 8 (۴) ± 6

۱۲۷- یک ماهی‌گیر می‌خواهد کنار رودخانه‌ای، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را حصار بکشد. اگر طول حصار ۱۰۰m باشد، ابعاد مستطیل چه باشد تا مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟

- (۱) 30×40 (۲) 25×37.5 (۳) 12.5×75 (۴) 25×50



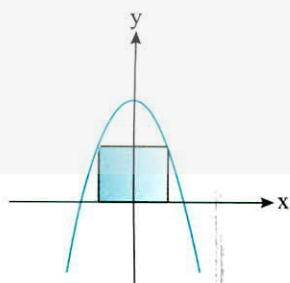
۱۲۸- مطابق شکل با ۲۰۰m نرده‌ی چوبی، اصطبل‌ی درست کرده‌ایم. حداکثر مقدار مساحت این اصطبل چقدر است؟

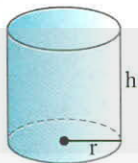
- (۱) ۵۰۰۰ (۲) ۱۰۰۰۰ (۳) $\frac{5000}{3}$ (۴) $\frac{10000}{3}$

۱۲۹- در شکل مقابل دو رأس مستطیل روی محور x و دو رأس دیگر روی سهمی $y = 4 - x^2$ است.

بیش‌ترین مقدار محیط مستطیل چقدر است؟

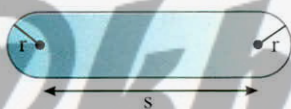
- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) $6\sqrt{3}$





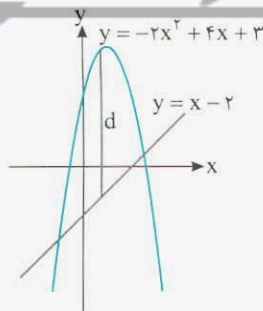
۱۳۰- اگر مجموع طول قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه‌ی قائم برابر 30° باشد، ارتفاع استوانه چه باشد تا مساحت جانبی استوانه بیش‌ترین مقدار ممکن شود؟

- (۱) 10° (۲) 20° (۳) 15° (۴) $12/5^\circ$



۱۳۱- در شکل مقابل، محیط زمین برابر با 1800m است. اگر مساحت زمین حداکثر مقدار ممکن باشد، مقدار r چقدر است؟ ($\pi=3$)

- (۱) 270° (۲) 300° (۳) 330° (۴) 350°



۱۳۲- در شکل مقابل، حداکثر مقدار فاصله‌ی عمودی، d ، میان خط و سهمی چقدر است؟

- (۱) $\frac{49}{8}$ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) 4 (۴) $\frac{31}{8}$

۱۳۳- مفتولی به طول ۲ متر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و با یکی مربع و با دیگری دایره درست می‌کنیم. اگر مجموع مساحت مربع و دایره کم‌ترین مقدار ممکن باشد، نسبت طول قطعه‌ی بزرگ‌تر به طول قطعه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{\pi}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{2}{\pi}$

۱۳۴- به ازای چه مقداری از a مجموع مربع‌های ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (a-2)x - a + 1 = 0$ کم‌ترین مقدار ممکن است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۱

۱۳۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2a^2(x-a)x = \sqrt{2}$ باشند، کم‌ترین مقدار $x_1^4 + x_2^4$ کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 4$ (۳) $2\sqrt{2} + 1$ (۴) $2 + 2\sqrt{2}$

۱۳۶- معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن $a + \sqrt{a^2 + 1}$ و $a - \sqrt{a^2 + 1}$ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 - 2ax - 1 = 0$ (۲) $x^2 - 2ax + 1 = 0$ (۳) $x^2 + 2ax - 1 = 0$ (۴) $x^2 + 2ax + 1 = 0$

۱۳۷- واسطه‌ی حسابی ریشه‌های معادله‌ای درجه‌ی دوم $3/5$ و واسطه‌ی هندسی ریشه‌های آن $2/5$ است. این معادله کدام است؟

- (۱) $4x^2 - 28x + 25 = 0$ (۲) $4x^2 + 28x + 25 = 0$ (۳) $x^2 - 14x + 25 = 0$ (۴) $x^2 + 14x + 25 = 0$

۱۳۸- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، ریشه‌های معادله‌ی $cx^2 - bx + a = 0$ کدام هستند؟

- (۱) $\frac{1}{\beta}$ و $\frac{1}{\alpha}$ (۲) $-\frac{1}{\beta}$ و $\frac{1}{\alpha}$ (۳) $\frac{1}{\beta}$ و α (۴) $-\frac{1}{\beta}$ و $-\frac{1}{\alpha}$

۱۳۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$ است؟

(ریاضی - ۹۲)

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۱۴۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}$ و $\beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (۲) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 3x - 1 = 0$ (۴) $x^2 + 3x - 1 = 0$

۱۴۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 6x - 4 = 0$ باشند، معادله‌ای که ریشه‌هایش $x_1^2 + x_1x_2$ و $x_2^2 + x_1x_2$ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 - 4x + 16 = 0$ (۲) $3x^2 - 12x + 16 = 0$ (۳) $x^2 - 12x + 16 = 0$ (۴) $3x^2 - 12x - 16 = 0$

۱۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $(\alpha - \beta)^2$ و $(\alpha + \beta)^2$ باشند، کدام است؟

$$(1) x^2 + 14x - 13 = 0 \quad (2) x^2 - 14x + 13 = 0 \quad (3) x^2 - 13x - 14 = 0 \quad (4) x^2 + 13x - 14 = 0$$

۱۴۳- اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2 + ax + b = 0$ از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 9$ ، 2 واحد کم‌تر باشند، مقدار a کدام است؟

$$(1) 20 \quad (2) 31 \quad (3) 42 \quad (4) 17$$

۱۴۴- جواب‌های کدام معادله مکعب جواب‌های معادله‌ی $x^3 - 3x - 5 = 0$ هستند؟

$$(1) x^3 - 72x - 125 = 0 \quad (2) x^3 - 25x - 27 = 0 \quad (3) x^3 - 18x - 125 = 0 \quad (4) x^3 - 18x - 27 = 0$$

۱۴۵- اگر $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$ و $x_1 + x_2 - x_1x_2 = -11$ ، معادله‌ای که ریشه‌هایش x_1 و x_2 هستند کدام است؟

$$(1) x^2 + 6x - 5 = 0 \quad (2) x^2 - 6x - 5 = 0 \quad (3) x^2 + 6x + 5 = 0 \quad (4) x^2 - 12x + 6 = 0$$

۱۴۶- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3mx + 2 = 0$ دو واحد از یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (m+2)x + n = 0$ بیش‌تر باشد،

مقدار m چقدر است؟

$$(1) 2 \quad (2) 3 \quad (3) 4 \quad (4) 6$$

۱۴۷- هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + mx + n = 0$ یک واحد از ریشه‌های $mx^2 + 3x - 1 = 0$ بیش‌تر است. اگر m مثبت باشد،

مقدار n چقدر است؟

$$(1) -3 \quad (2) -2 \quad (3) -1 \quad (4) 1$$

۱۴۸- چند عدد مانند k می‌توان پیدا کرد که معادله‌ی $x^2 - 3x + k = 0$ دو ریشه‌ی مختلف در بازه‌ی $(0, 1)$ داشته باشد؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) \text{ نامتناهی}$$

۱۴۹- اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + 2ax + 3a - 1 = 0$ هم‌علامت نباشند، حدود a کدام است؟

$$(1) 0 < a < \frac{1}{2} \quad (2) 0 < a < \frac{1}{3} \quad (3) \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2} \quad (4) a > \frac{1}{3}$$

۱۵۰- اگر معادله‌ی $4ax^2 - 4(a+2)x + 9 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی مثبت داشته باشد، حدود a کدام است؟

$$(1) (4, +\infty) \quad (2) (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \quad (3) (-\infty, -1) \quad (4) (0, 1) \cup (4, +\infty)$$

۱۵۱- اگر معادله‌ی $2x^2 + mx + m - 2 = 0$ دو جواب منفی داشته باشد، حدود m کدام است؟

$$(1) m \in (2, +\infty) - \{4\} \quad (2) m \in (2, +\infty) \quad (3) m \in (2, 4) \quad (4) m \in (0, 4)$$

۱۵۲- x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (m+1)x + m = 0$ هستند و $0 < x_1 < 2 < x_2$. حدود m کدام است؟

$$(1) (2, +\infty) \quad (2) (-\infty, 2) \quad (3) (2, 4) \quad (4) (-4, -2)$$

۱۵۳- معادله‌ی $(k+6)x^2 + 17(k+1)x + 5(k-2) = 0$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 دارد که $x_1 < 0 < x_2$ و $|x_1| > x_2$. حدود k کدام است؟

$$(1) (-6, -1) \quad (2) (-1, 3) \quad (3) (0, 3) \quad (4) (-1, 2)$$

۱۵۴- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای m ، منحنی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x را در هر دو طرف مبدأ مختصات

قطع می‌کند؟

$$(1) m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad (2) -2 < m < 1 \quad (3) \text{ فقط } m < -2 \quad (4) \text{ فقط } m > 1$$

۱۵۵- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای m ، منحنی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x را دو نقطه به طول‌های منفی

قطع می‌کند؟

$$(1) m > 2 \quad (2) -1 < m < 2 \quad (3) \text{ هر مقدار } m \quad (4) \text{ هیچ مقدار } m$$

۱۵۶- به ازای کدام مقدار a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ ، دو ریشه‌ی مثبت دارد؟

$$(1) -2 < a < 2 \quad (2) 2 < a < 5 \quad (3) 2 < a < 14 \quad (4) 5 < a < 14$$

۱۵۷- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x است؟

$$(1) a < 1 \quad (2) a < -2 \quad (3) a > 3 \quad (4) -2 < a < 1$$

۱۵۸- نمودار $y = 2mx^2 + 4mx + m - 2$ از چهار ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات عبور می‌کند. حدود m کدام است؟

- (۱) $0 < m < 2$ (۲) $1 < m < 2$ (۳) $m > 2$ (۴) $m < 0$

۱۵۹- به ازای کدام مجموعه‌ی مقدارهای a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی - ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۱۶۰- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $4x^3 + 16x^2 + 9x + a = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، اختلاف دو جواب دیگر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۱۶۱- اگر $x = \frac{1}{3}$ ، $x = -1$ و $x = k$ جواب‌های معادله‌ی $6x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ باشند، مقدار $\frac{ab}{k}$ کدام است؟

- (۱) 14 (۲) -8 (۳) -16 (۴) 7

۱۶۲- معادله‌ی $(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) + 4 = 0$

- (۱) فقط دو جواب مثبت دارد.
(۲) فقط دو جواب منفی دارد.
(۳) دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد.
(۴) چهار جواب مثبت دارد.

۱۶۳- کدام یک جواب معادله‌ی $3(6x^2 + \frac{1}{3})^2 - 7(6x^2 + \frac{1}{3}) + 4 = 0$ نیست؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۶۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x^2 - x)^2 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 1 (۴) -1

۱۶۵- معادله‌ی $(x^2 - 7x + 11)^2 = 3x^2 - 21x + 37$ چند جواب دارد؟

- (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴) 1

۱۶۶- معادله‌ی $x^3 + 2x^2 - mx - m - 1 = 0$ سه جواب متمایز دارد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m \in (\frac{1}{4}, +\infty)$ (۲) $m \in (-\frac{5}{4}, +\infty)$ (۳) $m \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$ (۴) $m \in (-\frac{5}{4}, +\infty) - \{-1\}$

۱۶۷- اگر معادله‌ی $mx^6 - x^3 + m - 1 = 0$ دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $-1 < m < 1$ (۲) $-1 < m < 0$ (۳) $0 < m < 1$ (۴) $m > 1$

۱۶۸- معادله‌ی $x^6 - 2x^2 + m^2 - 1 = 0$ چهار جواب دارد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (۲) $m \in (-1, 1)$ (۳) $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - [-1, 1]$ (۴) $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

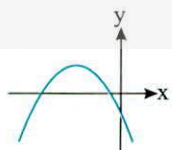
۱۶۹- اگر معادله‌ی $x^6 - mx^2 + m - 1 = 0$ دو جواب داشته باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m \in (-\infty, 1)$ (۲) $m \in (-\infty, 2]$ (۳) $m \in (-\infty, 1) \cup \{2\}$ (۴) $m \in (-\infty, 2] - \{1\}$

۱۷۰- اگر معادله‌ی $x^6 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0$ جواب حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

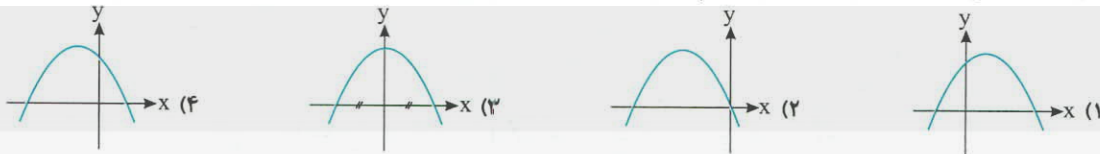
- (۱) $m > 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $m < -2$ (۴) $-2 < m < 0$

۱۷۱- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx - c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه علامت a ، b و c را درست نشان می‌دهد؟

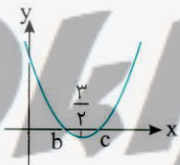


- (۱) $a < 0$ ، $b < 0$ و $c < 0$ (۲) $a < 0$ ، $b < 0$ و $c > 0$ (۳) $a > 0$ ، $b > 0$ و $c < 0$ (۴) $a > 0$ ، $b < 0$ و $c < 0$

۱۷۲- درباره‌ی سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌دانیم $a < 0$ ، $b < 0$ و $c > 0$. نمودار این سهمی کدام شکل می‌تواند باشد؟

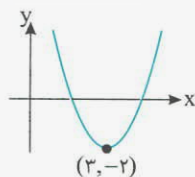


۱۷۳- نمودار تابع $y = x^2 + ax + a^2 - a - 1$ شکل روبه‌رو است. مقدار abc کدام است؟



- (۱) -۶
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) -۳

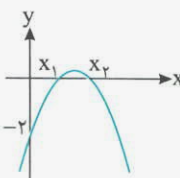
۱۷۴- در شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = x^2 + bx + c$ رسم شده است. کدام گزینه صفرهای تابع



$y = x^2 + bx + c$ را درست نشان می‌دهد؟

- (۱) -۱ و ۷
(۲) $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$
(۳) -۱ و -۷
(۴) $3 + 2\sqrt{2}$ و $3 - 2\sqrt{2}$

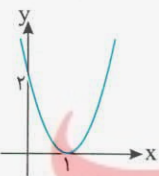
۱۷۵- در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = -x^2 + bx + c$ رسم شده است. اگر $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ ، بیش‌ترین



مقدار تابع f چقدر است؟

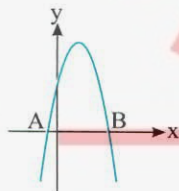
- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{1}{8}$

۱۷۶- نمودار سهمی $y = (a+1)x^2 + (b-1)x + c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار abc چقدر است؟



- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) -۴
(۴) -۶

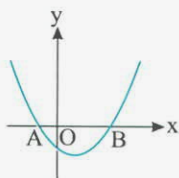
۱۷۷- در شکل مقابل نمودار سهمی $y = -x^2 + 4x + c + 5$ رسم شده است. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۶



باشد، مقدار c چقدر است؟

- (۱) صفر
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۱۰

۱۷۸- در شکل مقابل نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است و $OA < OB$. چند تا از نابرابری‌های

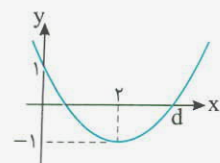


زیر درست‌اند؟

$$b^2 - 4ac > 0, \quad ab > 0, \quad ac < 0, \quad b + c < 0.$$

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۷۹- نمودار یک تابع درجه‌ی دوم در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار d کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) $2 + \sqrt{2}$
(۴) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

۱۸۰- درباره‌ی تابع f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ می‌دانیم $f(x+1) = x^2 - x - 6$. مجموع صفرهای تابع f چقدر است؟

- (۱) -۳
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) ۴

فصل اول: هندسه‌ی تحلیلی و جبر

درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

برای حل کردن معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، با ضرب کردن معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده به معادله‌ای می‌رسیم، که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده نباید مخرج هیچ‌یک از کسرهای معادله‌ی اصلی را صفر کنند. همچنین، ممکن است برخی جواب‌های به دست آمده با شرط‌های مسئله مطابقت نداشته باشند، که این جواب‌ها قابل قبول نیستند.

معادله‌ی $\frac{1}{2x^3-3x+1} - \frac{2}{4x^3-5x+1} = 0$ چند جواب دارد؟

تست ۱

۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{2x^3-3x+1} = \frac{2}{4x^3-5x+1}$$

در نتیجه

$$4x^3 - 5x + 1 = 4x^3 - 6x + 2 \Rightarrow x = 1$$

اما $x=1$ ریشه‌ی مخرج هر دو کسر است، بنابراین معادله جواب ندارد.

معادله‌ی $\frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x+2}{3(x-1)} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{6}$ چند جواب دارد؟

تست ۲

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها برابر $6(x-1)(x+1)$ است. دو طرف معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم:

$$3(x-1)^2 + 2(x+2)(x+1) - 12x = (x-1)(x+1) \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 2x^2 + 6x + 4 - 12x = x^2 - 1$$

$$4x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=2$$

$x=1$ قابل قبول نیست، چون مخرج دو تا از کسرهای موجود در معادله را صفر می‌کند. پس معادله یک جواب دارد.

اگر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{2}{x-2} + \frac{a}{x+2} = 1$ برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟

تست ۳

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: معادله‌ی داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{2x+4+ax-2a}{x^2-4} = 1 \Rightarrow x^2 - 4 = (a+2)x + 4 - 2a \Rightarrow x^2 - (a+2)x + 2a - 8 = 0$$

چون مجموع ریشه‌های معادله‌ی داده شده ۶ است، پس $a+2=6$ ، یعنی $a=4$.

تست ۴

زمانی که طول می کشد تا شیر A به تنهایی حوضی را پر کند، از دو برابر مدت زمانی که شیر B همان حوض را پر می کند، ۱ ساعت بیش تر است. اگر هر دو شیر را هم زمان باز کنیم، حوض در ۲ ساعت و ۶ دقیقه پر می شود. شیر A به تنهایی در چند ساعت حوض را پر می کند؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: اگر شیر B در t ساعت حوض را پر کند، شیر A در $2t+1$ ساعت حوض را پر می کند. پس شیر B در یک ساعت $\frac{1}{t}$ و شیر A در یک ساعت $\frac{1}{2t+1}$ از کل حوض را پر می کنند. از طرف دیگر، دو شیر با هم در یک ساعت $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$ از حوض را پر می کنند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{2\frac{1}{1}} \Rightarrow \frac{3t+1}{t(2t+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6t+2=2t^2+1 \Rightarrow 2t^2-5t-1=0$$

$$\Rightarrow (t-3)(2t+7)=0 \Rightarrow t=-\frac{7}{2} \text{ (غ.ق.)}, t=3$$

در نتیجه شیر A در ۷ ساعت حوض را پر می کند.

معادله‌های شامل عبارت‌های گنگ

در برخی از معادله‌ها عبارت‌هایی رادیکالی از مجهول آمده، که به این معادله‌ها، **معادله‌های گنگ** می گویند. برای حل کردن این معادله‌ها می توانیم با به توان رساندن دو طرف معادله (و در صورت لزوم تکرار این کار) به معادله‌ای بدون رادیکال برسیم، که آن را حل می کنیم. جواب‌های به دست آمده را باید در معادله اصلی هم آزمایش کرد.

تست ۵

در معادله‌ی $2x+1=\sqrt{11x-2}$ قدرمطلق تفاضل دو ریشه کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: برای حل معادله‌ی $2x+1=\sqrt{11x-2}$ ، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x^2+4x+1=11x-2 \Rightarrow 4x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}, x=1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو ریشه $\frac{1}{4}$ است.

تست ۶

درباره‌ی جواب‌های معادله‌ی رادیکالی $\sqrt{12+x}-\sqrt{2x+7}=2$ کدام درست است؟

(۱) دو ریشه با علامت مخالف دارد. (۲) دو ریشه‌ی مثبت دارد.
(۳) یک ریشه‌ی مثبت دارد. (۴) یک ریشه‌ی منفی دارد.

پاسخ: دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sqrt{12+x}-\sqrt{2x+7}=2 \Rightarrow 3x+19-2\sqrt{(x+12)(2x+7)}=4$$

$$\Rightarrow 3x+15=2\sqrt{2x^2+31x+84}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$9x^2+90x+225=8x^2+124x+336 \Rightarrow x^2-34x-111=0$$

$$\Rightarrow x=-3, x=37$$

$x=-3$ در معادله‌ی اصلی صدق می‌کند اما $x=37$ قابل قبول نیست، چون سمت چپ معادله برابر -2 می‌شود. پس معادله یک ریشه‌ی منفی دارد.

۷

تست

برای معادله‌ی $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) فقط یک ریشه دارد.
 (۲) دو ریشه‌ی متمایز دارد.
 (۳) ریشه ندارد.
 (۴) نامتناهی ریشه دارد.

پاسخ: معادله‌ی $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2$ را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{4}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = 2 \Rightarrow 4-x=2 \Rightarrow x=2$$

که این جواب قابل قبول است و در معادله صدق می‌کند.

۸

تست

مجموع جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

پاسخ: فرض می‌کنیم $x^2 - 4x + 3 = t$. در این صورت معادله‌ی مورد نظر می‌شود

$$t = \sqrt{t+2} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ (غ.ق.)}, t = 2$$

بنابراین

$$t=2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

هر دو جواب این معادله جواب معادله‌ی اصلی نیز هستند، پس مجموع جواب‌های معادله‌ی اصلی برابر با ۴ است.

خانه کتاب

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس سوم:

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

$$181- \text{معادله‌ی } \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = -\frac{5}{2} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) ۴

$$182- \text{معادله‌ی } \frac{x}{x^4-x^2-2x-1} - \frac{1}{x^3-1} = 0 \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$183- \text{اگر } x_1 \text{ و } x_2 \text{ ریشه‌های معادله‌ی } \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-1}{x-5} = 0 \text{ باشند، مقدار } x_1 + x_2 \text{ چقدر است؟}$$

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

$$184- \text{معادله‌ی } \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{7(x+1)}{9(x-1)} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$185- \text{معادله‌ی } \frac{x^2+x-1}{x^2+x-2} = 1 + \frac{1}{x^2+2x-3} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$186- \text{معادله‌ی } \frac{2x}{x-5} = 3 + \frac{1-x}{x-3} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$187- \text{معادله‌ی } \frac{x-12}{x^2+3x} - \frac{2}{x} = \frac{5}{x+3} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$188- \text{معادله‌ی } \frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

$$189- \text{معادله‌ی } \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2-1} \text{ چند جواب دارد؟}$$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$190- \text{معادله‌ی } \frac{x-2}{x^2-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{2-2x} \text{ چند ریشه دارد؟}$$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$191- \text{در معادله‌ی } \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{14}{x^3+1} = 0 \text{ حاصل ضرب جواب‌ها کدام است؟}$$

(۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) -۷ (۴) -۲

۱۹۲- حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $\frac{5}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x^2+5x+4} = 1$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۶

۱۹۳- معادله‌ی $\frac{2x}{x^4-1} = \frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x^3+1}$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۹۴- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{x^3-2}{x+2} - \frac{13x+4}{x^2-10} = x-3$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۱۹۵- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-2} = 1$ عدد ۶ باشد، دیگری کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۶- اگر $x = \frac{3}{2}$ یک جواب معادله‌ی $\frac{x-5}{x^2-2x} + \frac{3}{2x-4} - \frac{1}{x} = a$ باشد، معادله چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۷- اگر $x=2$ و $x=b$ جواب‌های معادله‌ی $\frac{2}{x} - \frac{a}{x-3} = 3$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۹۸- اگر x_1 یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(x-\frac{1}{x})^2 - 4x + \frac{4}{x} = -4$ باشد، مقدار $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۹۹- اگر معادله‌ی $\frac{3x}{x+2} + 2 = \frac{2}{1+ax}$ دقیقاً یک جواب داشته باشد، مقدار a چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (۴) $0, \frac{1}{2}$

۲۰۰- به ازای چه مقدارهایی از a معادله‌ی $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = a$ جواب ندارد؟

- (۱) $a = \frac{1}{2}$ (۲) $a \neq 0$ (۳) $a = 0$ یا $a = -\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

۲۰۱- معادله‌ی $(x+\frac{2}{x})^4 - 3(x+\frac{2}{x})^2 - 4 = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۲- معادله‌ی $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۳- معادله‌ی $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = a$ به ازای چه مقدارهایی از a جواب دارد؟

- (۱) $a \in [0, +\infty)$ (۲) $a \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ (۳) $a \in [-\frac{1}{4}, +\infty) - \{0\}$ (۴) $a \in (-\infty, \frac{1}{4}]$

۲۰۴- حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$ چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۰۵- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{3}{1+x+x^2} = 3-x-x^2$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۰۶- هزینه‌ی یک سفر تفریحی یک روزه کلاسی ۷۰۰ هزار تومان است. مدرسه برای کاهش هزینه‌ها، از ۵ نفر از اولیا دعوت کرده است و هزینه‌ی سرانه به میزان ۷ هزار تومان کاهش یافته است. تعداد افراد کلاس چند نفر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۲۰۷- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن نسبت اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه برابر $\frac{3}{4}$ و مجموع معکوس اندازه‌ی ضلع‌ها برابر $\frac{47}{30}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۰۸- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۰٪ موجود است. اگر نیمی از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم باید شکر اضافه کنیم تا غلظت آن ۴۰٪ گردد؟

- (۱) $\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۳) ۸ (۴) این کار ممکن نیست.

۲۰۹- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از این محلول، غلظت به ۵۰ درصد می‌رسد؟

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

۲۱۰- یک تپاساز، گردنبندی ۲۰ گرمی دارد که ۶۰٪ آن طلا و ۴۰٪ نقره است، ولی می‌خواهد گردنبند را ذوب کرده و به مقدار کافی طلا به آن بیفزاید که ۸۰٪ آن طلا باشد. چند گرم طلا باید به گردنبند بیفزاید؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۲۱۱- معادله‌ی $\sqrt{4-x^2} = x-1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) ۱

۲۱۲- معادله‌ی $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۱۳- معادله‌ی $x + \sqrt{x} = 4$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۱۴- جواب معادله‌ی $2\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = 2$ کدام است؟

- (۱) $26 \pm 8\sqrt{10}$ (۲) $26 - 8\sqrt{10}$ (۳) $27 \pm 12\sqrt{5}$ (۴) $27 - 12\sqrt{5}$

۲۱۵- معادله‌ی $\sqrt{4+x} + \sqrt{5-x} = 3$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۱۶- معادله‌ی $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۲۱۷- تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۱۸- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۱۹- اگر $x=2$ یک جواب معادله‌ی $\sqrt{x-1} + \sqrt{a-x} = 3$ باشد، این معادله چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

فصل اول

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای

هندسه‌ی تحلیلی و جبر



۵- گزینه‌ی ۳ اگر C نقطه‌ی (x_1, y_1) باشد، چون نقطه‌ی

N وسط AC است، پس

$$(4, 0) = \left(\frac{2+x_1}{2}, \frac{1+y_1}{2} \right)$$

بنابراین $x_1 = 6$ و $y_1 = -1$ به همین ترتیب، اگر B نقطه‌ی

(x_2, y_2) باشد، چون نقطه‌ی K وسط BC است، پس

$$(3, -3) = \left(\frac{6+x_2}{2}, \frac{-1+y_2}{2} \right)$$

بنابراین $x_2 = 0$ و $y_2 = -5$ سرانجام، اگر M نقطه‌ی

(x_3, y_3) باشد، چون وسط AB است، پس

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-5}{2} \right) = (1, -2)$$

۶- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم رأس‌های مثلث نقطه‌های

$A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ باشند و نقطه‌های

$(2, 4)$ ، $(4, 5)$ و $(3, 2)$ به ترتیب وسط ضلع‌های AB، BC و

CA باشند. در این صورت

$$x_1 + x_2 = 4, \quad y_1 + y_2 = 8$$

$$x_2 + x_3 = 8, \quad y_2 + y_3 = 10$$

$$x_1 + x_3 = 6, \quad y_1 + y_3 = 4$$

اگر تساوی‌های ستون اول را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

بنابراین $x_1 + 8 = 9$ ، پس $x_1 = 1$ به همین ترتیب $x_2 = 3$ و

$x_3 = 5$. اگر همین کار را با ستون سمت راست انجام دهیم،

معلوم می‌شود $y_1 = 1$ ، $y_2 = 7$ و $y_3 = 3$. بنابراین رأس‌های

مثلث نقطه‌های $(1, 1)$ ، $(3, 7)$ و $(5, 3)$ هستند.

۷- گزینه‌ی ۴ در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف

می‌کنند. بنابراین نقطه‌ی وسط پاره‌خط AC همان نقطه‌ی وسط

پاره‌خط BD است. بنابراین

$$\left(\frac{-2+x}{2}, \frac{-3+y}{2} \right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = \left(1, \frac{1}{2} \right)$$

در نتیجه

$$-2+x=2 \Rightarrow x=4$$

$$-3+y=1 \Rightarrow y=4$$

یعنی C نقطه‌ی $(4, 4)$ است.

۴- گزینه‌ی ۴ فاصله‌ی A از B برابر است با $|m-2|$ و

فاصله‌ی A از C برابر است با $|2m-1-2|$. بنابراین

$$|m-2| = |2m-3|$$

پس

$$m-2=4m-6 \Rightarrow m=\frac{4}{3}$$

$$m-2=-4m+6 \Rightarrow m=\frac{8}{5}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن برای m برابر است با $\frac{32}{15}$.

۲- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی D روی خط $y=2x$ است، پس

به صورت $(d, 2d)$ است. در نتیجه نقطه‌ی A به صورت

$A(d, 0)$ است. بنابراین طول AB برابر است با

$$AB = x_B - x_A = 12 - d$$

چون $AD = AB$ ، پس

$$12 - d = 2d \Rightarrow d = 4$$

C نقطه‌ی $(12, 24)$ یعنی $(12, 8)$ است.

۳- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی وسط پاره‌خط میان نقطه‌های

(x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقطه‌ی $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$ است.

بنابراین نقطه‌ی موردنظر نقطه‌ی زیر است

$$\left(\frac{a+1+3-a}{2}, \frac{4-2b+2b-3}{2} \right) = \left(2, \frac{1}{2} \right)$$

۴- گزینه‌ی ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+m}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3m+1}{2}$$

چون M روی خط $y=2x+1$ است، پس

$$\frac{-3m+1}{2} = 2\left(\frac{2+m}{2}\right) + 1 \Rightarrow -3m+1 = 4+2m+2$$

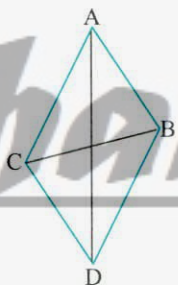
$$\Rightarrow 5m = -5 \Rightarrow m = -1$$

بنابراین M نقطه‌ی $\left(\frac{2-1}{2}, \frac{-3(-1)+1}{2} \right)$ یعنی $\left(\frac{1}{2}, 2 \right)$ است.

حالت دوم

$$x_A + x_D = x_B + x_C \Rightarrow 1 + x_D = 3 - 1 \Rightarrow x_D = 1$$

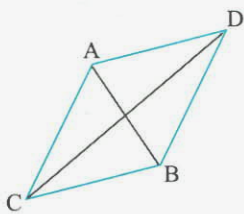
$$y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow 2 + y_D = -1 - 2 \Rightarrow y_D = -5$$



حالت سوم

$$x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow 1 + 3 = -1 + x_D \Rightarrow x_D = 5$$

$$y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow 2 - 1 = -2 + y_D \Rightarrow y_D = 3$$



۱۱- گزینه ۲ دو سر وتر مثلث مورد نظر نقطه‌های برخورد خط $x + 2y = 12$ با محورهای مختصات هستند. این نقطه‌ها $(0, 6)$ و $(12, 0)$ هستند. وسط پاره خط میان این دو نقطه، نقطه‌ی $(\frac{0+12}{2}, \frac{6+0}{2}) = (6, 3)$ یعنی $(6, 3)$ است. معادله‌ی خطی که از مبدأ و این نقطه می‌گذرد $x - 2y = 0$ است.

۱۲- گزینه ۴ خط‌های $2y = x + 3$ و $y = 3x + 2$ موازی نیستند. پس معادله‌های داده شده دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع هستند. همچنین $A(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ روی هیچ یک از این خط‌ها قرار

ندارد. مطابق شکل مختصات B را مشخص می‌کنیم

$$3x + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{5}$$

بنابراین رأس دیگر متوازی الاضلاع است. پس

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}}{2} = \frac{\frac{5}{5}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{7}{5}}{2} = \frac{\frac{10}{5}}{2} = 1$$

۸- گزینه ۲ چون قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را

نصف می‌کنند، مطابق شکل زیر M وسط AC و BD است. یعنی

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow \frac{m + m + n}{2} = \frac{3 + m - n}{2}$$

$$\Rightarrow m = 3 - 2n$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow \frac{4 + m - n}{2} = \frac{m + n}{2}$$

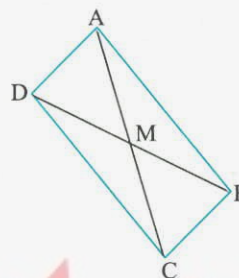
$$\Rightarrow n = 2$$

بنابراین

$$m = -1$$

و در نتیجه

$$mn = -2$$



۹- گزینه ۳ در متوازی الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطه‌ی وسط پاره خط AC همان نقطه‌ی وسط پاره خط BD است. در نتیجه

$$(\frac{-b+5}{2}, \frac{-a+a}{2}) = (\frac{a-2}{2}, \frac{-3+a}{2})$$

بنابراین

$$\begin{cases} -b+5=a-2 \\ 0=-3+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=7-a \\ a=3 \end{cases}$$

پس $a=3$ و $b=7-a=4$. در نتیجه

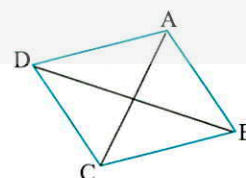
$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه ۲ سه حالت زیر ممکن است به وجود آید

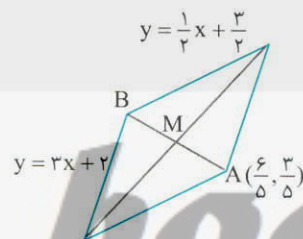
حالت اول

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 1 - 1 = 3 + x_D \Rightarrow x_D = -3$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 - 2 = -1 + y_D \Rightarrow y_D = 1$$



پس $M(\frac{1}{2}, 1)$ محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع است.



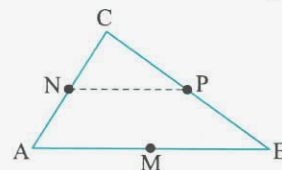
۱۳- گزینه ی ۱ چون NP و AB موازی هستند، شیب خط NP را به دست می آوریم

$$m_{NP} = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{-4 - 4}{-3 - 5} = 1 = m_{AB}$$

معادله ی خطی را که از نقطه ی $M(-2, -1)$ با شیب ۱ می گذرد می نویسیم

$$y + 1 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 1$$

پس معادله ی خطی که AB روی آن است $y = x + 1$ است.



۱۴- گزینه ی ۲ در هر متوازی الاضلاع قطرهای یکدیگر را

نصف می کنند. بنابراین P وسط پاره خط MK است. طول

نقطه ی M برابر است با $\frac{0+9}{2} = \frac{9}{2}$ و طول نقطه ی K برابر است

با $\frac{0-3}{2} = -\frac{3}{2}$. بنابراین طول نقطه ی P برابر است با

$$\frac{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۵- گزینه ی ۱ M نقطه ی $(\frac{5-4}{2}, \frac{-2+5}{2})$ ، یعنی $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

است. بنابراین

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{2} \end{aligned}$$

۱۶- گزینه ی ۲ مختصات نقطه ی M ، وسط AB ، را

حساب می کنیم

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \end{aligned}$$

پس طول میانه ی CM برابر است با

$$CM = \sqrt{(m-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 8}$$

بنابراین

$$\sqrt{m^2 - 4m + 8} = 2 \Rightarrow m^2 - 4m + 8 = 4$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

۱۷- گزینه ی ۴ فاصله ی A از B را حساب می کنیم

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (m-2)^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 5}$$

بنابراین

$$\sqrt{m^2 - 4m + 5} = m \Rightarrow m^2 - 4m + 5 = m^2 \Rightarrow m = \frac{5}{4}$$

۱۸- گزینه ی ۳ مختصات نقطه ی C را با $(c, 0)$ نشان

می دهیم. در این صورت

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(c-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16 + (c-3)^2}$$

در نتیجه

$$\sqrt{16 + (c-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 16 + (c-3)^2 = 18$$

$$(c-3)^2 = 2 \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{2}$$

چون $c > x_A = 3$ ، پس $c = 3 + \sqrt{2}$.

۱۹- گزینه ی ۴ فاصله ی نقطه های $(a, 2)$ و $(3, 4)$ برابر

است با

$$\sqrt{(a-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + 4}$$

فاصله ی نقطه های $(a, 2)$ و $(-2, 1)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + 1}$$

چون این فاصله ها برابرند، پس

$$\sqrt{(a-3)^2 + 4} = \sqrt{(a+2)^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می رسانیم}} (a-3)^2 + 4 = (a+2)^2 + 1$$

$$a^2 - 6a + 9 + 4 = a^2 + 4a + 4 + 1$$

$$10a = 8 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

۲۰- گزینه ی ۲ ابتدا توجه کنید که O وسط AB است.

بنابراین

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{a+2b}{2} \Rightarrow a+2b=2$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{b+a-1}{2} \Rightarrow a+b=-1$$

در نتیجه

۲۴- گزینه‌ی ۲ نقطه‌ی موردنظر را نقطه‌ی $C(a, 0)$ در

نظر می‌گیریم. در این صورت

$$AC = \sqrt{(a-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{a^2 + 9}$$

$$BC = \sqrt{(a-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + 4}$$

بنابراین

$$\sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{(a-3)^2 + 4}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} a^2 + 9 = (a-3)^2 + 4$$

$$a^2 + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4 \Rightarrow 6a = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ مختصات نقطه‌ی موردنظر را با $(0, a)$

نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\sqrt{(0-(-3))^2 + (a-0)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (a-(-1))^2}$$

$$\sqrt{9 + a^2} = \sqrt{16 + (a+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} 9 + a^2 = 16 + (a+1)^2$$

$$9 + a^2 = 16 + a^2 + 2a + 1 \Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین نقطه‌ی موردنظر $(0, -4)$ است.۲۶- گزینه‌ی ۲ اگر این نقطه $C(x, 2x)$ باشد، آن گاه

$$AC = \sqrt{(x-1)^2 + (2x+1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2}$$

$$AC = BC$$

چون

پس

$$(x-1)^2 + (2x+1)^2 = (x+1)^2 + (2x-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4$$

$$8x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{8}$$

پس مختصات C به صورت $(\frac{3}{8}, \frac{6}{8})$ است و مجموع طول وعرض آن $\frac{9}{8}$ است.۲۷- گزینه‌ی ۲ اگر نقطه‌ی موردنظر $B(a, a^2)$ باشد،

$$AB = 1$$

آن گاه

پس

$$\sqrt{(a-0)^2 + (a^2-1)^2} = 1$$

$$a^2 + (a^2-1)^2 = 1$$

$$a^4 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a^2-1) = 0$$

$$a = 0, a = 1, a = -1$$

$$a = -4, b = 3$$

پس کافی است فاصله‌ی نقطه‌های $A(-4, 3)$ و $O(1, -1)$ را

حساب کنیم تا طول شعاع دایره به دست آید

$$OA = \sqrt{(-4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

۲۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{cases} OA = \sqrt{a^2 + 25} \\ OB = \sqrt{b^2 + 9} \end{cases} \xrightarrow{OA=OB} a^2 + 25 = b^2 + 9$$

پس $b^2 - a^2 = 16$ همچنین

$$AB = \sqrt{(b-a)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$(b-a)^2 = 4 \xrightarrow{b>a} b-a=2$$

بنابراین

$$a+b = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{16}{2} = 8$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ طول ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

واضح است که تساوی $BC^2 = AB^2 + AC^2$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است.۳۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست

می‌آوریم

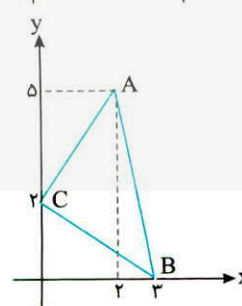
$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

واضح است که تساوی $AC^2 + BC^2 = AB^2$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{13}{2} = 6.5$$



۳۱- گزینه‌ی ۱ شیب خط AC برابر است با $\frac{4-1}{5-2}$. شیب

خط BD برابر است با $\frac{1-3}{k-2} = \frac{2}{2-k}$. چون این دو خط بر هم

عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است. بنابراین

$$1 \times \frac{2}{2-k} = -1 \Rightarrow k = 4$$

۳۲- گزینه‌ی ۱ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم

برابر -1 است. بنابراین شیب خطی که بر خط $y = \frac{3}{4}x$ عمود

است $-\frac{4}{3}$ است و معادله‌ی خطی که شیب آن $-\frac{4}{3}$ است و

از نقطه‌ی $(15, 0)$ می‌گذرد به صورت زیر است

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 15) \Rightarrow 4x + 3y = 60$$

۳۳- گزینه‌ی ۲ خط $(5-k)y + 2x = 3$ محور x را در

نقطه‌ی $(\frac{3}{2}, 0)$ قطع می‌کند. این نقطه روی خط $mx - y = -2$

نیز هست، پس

$$m(\frac{3}{2}) - 0 = -2 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها -1 است

$$m \times (\frac{-2}{5-k}) = -1 \Rightarrow -\frac{4}{3} \times \frac{-2}{5-k} = -1 \Rightarrow k = \frac{23}{3}$$

بنابراین $k - m = 9$.

۳۴- گزینه‌ی ۱ مختصات نقطه‌ی B را با $(b, 0)$ نشان

می‌دهیم. چون $AD \perp AB$ ، پس حاصل ضرب شیب‌های این

دو خط برابر -1 است

$$\frac{8-6}{3-0} \times \frac{0-6}{b-0} = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{-6}{b} = -1 \Rightarrow b = 4$$

بنابراین

$$AD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$AB = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

مساحت مستطیل برابر ۲۶ است.

۳۵- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم A نقطه‌ی $(0, y)$ باشد. در

این صورت، چون خطی که از نقطه‌های $(0, y)$ و $(-2, 0)$

می‌گذرد بر خطی که از نقطه‌های $(0, y)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد

عمود است، پس حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است

$$\frac{y-0}{0+2} \times \frac{y-0}{0-4} = -1 \Rightarrow y^2 = 8 \xrightarrow{y>0} y = 2\sqrt{2}$$

پس سه نقطه‌ی $B_1(0, 0)$ ، $B_2(1, 1)$ و $B_3(-1, 1)$ در

شرط‌های مسئله صدق می‌کنند.

۲۸- گزینه‌ی ۲ شیب خط $x + ky = 1$ برابر $-\frac{1}{k}$ و شیب

خط $(k+1)x - ky = 2$ برابر $\frac{k+1}{k}$ است. برای این که دو خط

بر هم عمود باشند، باید

$$(-\frac{1}{k})(\frac{k+1}{k}) = -1 \Rightarrow k+1 = k^2 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

پس به ازای دو مقدار k دو خط بر هم عمودند.

۲۹- گزینه‌ی ۳ چون خط‌های $mx + 3y - 6 = 0$ و

$4x + ny - 8 = 0$ بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها

برابر -1 است

$$(-\frac{m}{3})(-\frac{4}{n}) = -1 \Rightarrow \frac{m}{n} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4m + 3n = 0$$

اگر دستگاه $\begin{cases} 4m - 3n = 8 \\ 4m + 3n = 0 \end{cases}$ را حل کنیم، به دست می‌آید

$$m = 1 \text{ و } n = -\frac{4}{3} \text{ بنابراین } m + n = -\frac{1}{3}$$

۳۰- گزینه‌ی ۱ چون $AB \perp BC$ ، پس حاصل ضرب شیب

خط‌های گذرنده از AB و BC باید برابر -1 باشد

$$m_{AB} = \frac{4-2}{2-0} = \frac{3}{2}, \quad m_{BC} = \frac{a^2-4}{-a-2}$$

بنابراین

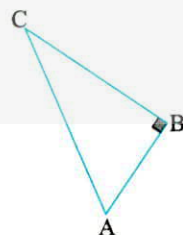
$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} \times \left(\frac{a^2-4}{-a-2}\right) = -1$$

$$3a^2 - 12 = 2a + 4 \Rightarrow 3a^2 - 2a - 16 = 0$$

$$a = -2, a = \frac{8}{3}$$

اگر $a = -2$ ، آن‌گاه $C(2, 4)$ بر $B(2, 4)$ منطبق است و مثلث

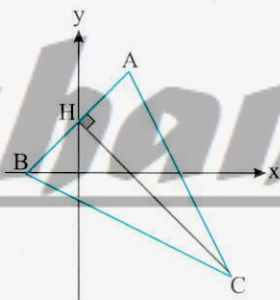
تشکیل نمی‌شود، پس $a = \frac{8}{3}$.



۳۶- گزینه‌ی ۴ در لوزی قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین وسط پاره‌خط AC همان وسط پاره‌خط BD است. در نتیجه

$$y - y_C = m_{CH} \times (x - x_C) \Rightarrow y + 2 = -(x - 3)$$

$$\Rightarrow y = -x + 1$$



۴۰- گزینه‌ی ۱ شیب خط گذرنده از A و B برابر $-\frac{3}{2}$ است. بنابراین چون CH بر AB عمود است، شیب خط گذرنده از C و H برابر $\frac{2}{3}$ است. بنابراین معادله‌ی ارتفاع CH به صورت زیر است

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow 3y - 2x = 2$$

۴۱- گزینه‌ی ۲ راه‌حل اول می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این پاره‌خط یعنی نقطه‌ی $M(1, \frac{5}{2})$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر $\frac{3}{8}$ است. بنابراین شیب عمودمنصف پاره‌خط برابر $-\frac{8}{3}$ است. در نتیجه معادله‌ی این خط به صورت

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{8}{3}(x - 1) \quad \text{یا به طور ساده‌تر } 16x + 6y = 31 \text{ است.}$$

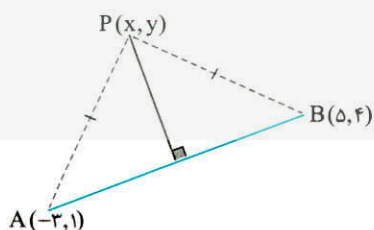
راه‌حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می‌کنیم نقطه‌ی P روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت

$$PA = PB$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 41$$

$$16x + 6y = 31$$



بنابراین $a = c$ و $b = 6$. از طرف دیگر قطرهای بر هم عمودند، یعنی حاصل ضرب شیب خط‌های AC و BD برابر -۱ است

$$\left(\frac{0+c}{2}, \frac{0+16}{2}\right) = \left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+10}{2}\right)$$

بنابراین $a = c$ و $b = 6$. از طرف دیگر قطرهای بر هم عمودند، یعنی حاصل ضرب شیب خط‌های AC و BD برابر -۱ است

$$\frac{16-0}{c-0} \times \frac{10-b}{0-a} = -1 \Rightarrow \frac{16}{a} \times \frac{10-6}{-a} = -1$$

بنابراین $a^2 = 64$ ، یعنی $a = -8$ یا $a = 8$. اگر $a = -8$ ، رأس‌های چهارضلعی ABCD در ربع اول نیست، پس

$$a = c = 8$$

و در نتیجه

$$\frac{a+b}{c} = \frac{8+6}{8} = \frac{y}{4}$$

۳۷- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی خط d به صورت زیر است

$$y = -2(x-4) = -2x + 8$$

در نتیجه شیب خط d برابر $\frac{1}{2}$ است و از نقطه‌ی $C(-3, 0)$ می‌گذرد. بنابراین، معادله‌ی آن به صورت زیر است

$$y = \frac{1}{2}(x+3) \Rightarrow 2y = x+3$$

۳۸- گزینه‌ی ۳ معادله‌ی خط گذرنده از B و D به صورت

$$y = 2x + 2 \text{ است. بنابراین شیب خط گذرنده از A و D برابر}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ است و چون این خط از نقطه‌ی } D(-1, 0) \text{ می‌گذرد،}$$

معادله‌ی آن به صورت زیر است

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

چون این خط از نقطه‌ی $A(a, 2)$ می‌گذرد، پس

$$2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow a = -5$$

۳۹- گزینه‌ی ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B

می‌گذرد حساب می‌کنیم

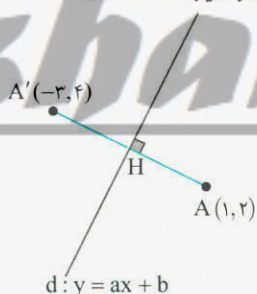
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$$

از طرف دیگر، شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، عکس و قرینه‌ی شیب خط $y = ax + b$ است، پس

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{4-2}{-3-1} = -\frac{1}{2}$$

$$m_d = a \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $b = 5$ و در نتیجه $ab = 10$.



۴۶- گزینه‌ی ۱ اگر فرض کنیم $A'(a, b)$ قرینه‌ی

$A(1, -1)$ نسبت به $y = 2x$ باشد، مختصات H که وسط

AA' است، برابر است با

$$x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{1+a}{2}, \quad y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{-1+b}{2}$$

این نقطه روی خط $y = 2x$ است، بنابراین

$$\frac{-1+b}{2} = 2 \left(\frac{1+a}{2} \right) \Rightarrow -1+b = 2+2a \Rightarrow b = 2a+3$$

از طرف دیگر، شیب خطی که از AA' می‌گذرد، برابر است با

$$m = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{b+1}{a-1} = \frac{2a+3+1}{a-1} = \frac{2a+4}{a-1}$$

چون AA' بر خط $y = 2x$ عمود است، پس

$$2 \left(\frac{2a+4}{a-1} \right) = -1 \Rightarrow 4a+8 = -a+1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{9}{5}, b = \frac{1}{5}$$

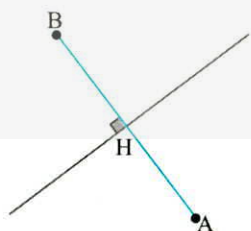
پس $A'(-\frac{9}{5}, \frac{1}{5})$ قرینه‌ی $A(1, -1)$ نسبت به $y = 2x$ است.

۴۷- گزینه‌ی ۲ اگر H پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط

$3x - 4y + 17 = 0$ باشد، آن‌گاه

$$AH = \frac{|3 \times 3 - 4 \times (-1) + 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

بنابراین $AB = 2AH = 2 \times 6 = 12$



۴۲- گزینه‌ی ۲ راه‌حل اول مختصات وسط پاره‌خط را

حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-1}{4-2} = -2$$

بنابراین شیب عمودمنصف AB برابر $\frac{1}{2}$ است. پس معادله‌ی

عمودمنصف به‌صورت زیر است

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow x - 2y = 5$$

راه‌حل دوم اگر نقطه‌ی $M(x, y)$ روی عمودمنصف AB باشد،

فاصله‌ی M از A برابر فاصله‌ی M از B است

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9$$

$$4x - 8y = 20 \Rightarrow x - 2y = 5$$

معادله‌ی اخیر همان معادله‌ی عمودمنصف AB است.

۴۳- گزینه‌ی ۱ توجه کنید نقطه‌ی C روی عمودمنصف

پاره‌خط AB قرار دارد. معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB به

شکل $y = 2$ است. بنابراین عرض نقطه C هم برابر ۲ است.

۴۴- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی خط گذرنده از A و O به‌صورت

$$y = \frac{2}{3}x \text{ است. چون } OA \perp AB, \text{ پس شیب } AB \text{ برابر } -\frac{3}{2}$$

است و این خط از نقطه‌ی $(12, 8)$ می‌گذرد. بنابراین معادله‌ی

خط گذرنده از A و B به‌صورت زیر است

$$y = -\frac{3}{2}x + 26$$

در نتیجه عرض نقطه‌ی B برابر ۲۶ است. بنابراین

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} x_A \times OB = \frac{1}{2} \times 12 (y_B - y_O)$$

$$= 6 \times 26 = 156$$

۴۵- گزینه‌ی ۱ مختصات نقطه‌ی H وسط AA' در

معادله‌ی خط $y = ax + b$ صدق می‌کند، پس

$$x_H = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_H = \frac{2+4}{2} = 3$$

بنابراین

$$3 = a(-1) + b \Rightarrow b = a + 3$$

۵۳- گزینه ۴) فاصله نقطه (x_0, y_0) تا خط

$ax+by+c=0$ برابر است با $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. بنابراین اگر

معادله خط را به شکل $12y-5x-k=0$ بنویسیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{|12 \times 3 - 5 \times 2 - k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{|26 - k|}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow |26 - k| = 5$$

$$\Rightarrow k = 26 \pm 5$$

بنابراین مجموع مقادیرهای ممکن k برابر ۵۲ است.

۵۴- گزینه ۱) شیب خط $3x+4y=16$ برابر $-\frac{3}{4}$ است.

پس شیب خط موردنظر $\frac{4}{3}$ است و معادله آن به صورت $-4x+3y+c=0$ است. چون فاصله نقطه $(1,1)$ از این خط برابر ۳ است، پس

$$\frac{|-4 \times 1 + 3 \times 1 + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3 \Rightarrow |c-1| = 3 \times 5 = 15$$

$$c-1 = \pm 15 \Rightarrow c = -14, c = 16$$

بنابراین معادله خط موردنظر $-4x+3y+16=0$ یا $-4x+3y-14=0$ است.

۵۵- گزینه ۲) اگر این نقطه‌ها به صورت $(a, a-1)$ باشند، آن‌گاه

$$\frac{|2a - 3(a-1) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{13} \Rightarrow |-a-2| = 13$$

$$-a-2 = -13 \Rightarrow a = 11$$

$$-a-2 = 13 \Rightarrow a = -15$$

۵۶- گزینه ۳) معادله خط گذرنده از A و C به صورت

زیر است

$$y+2x-10=0$$

بنابراین، طول BH برابر با فاصله B از این خط است

$$BH = \frac{|0+4-10|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

۵۷- گزینه ۲) فاصله نقطه $A(\sqrt{6}, 0)$ از خط

$y+x=0$ برابر است با

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times \sqrt{6} + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

بنابراین طول ارتفاع مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ است. اکنون توجه کنید که در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a و طول ارتفاع

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ و $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ بنابراین چون $h = \sqrt{3}$ ، پس

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3} \text{ و } a = 2$$

۴۸- گزینه ۱) معادله خط گذرنده از B ، C و D

به صورت زیر است

$$4y-x+4=0$$

طول AB برابر با فاصله A از این خط است و برابر است با

$$AB = \frac{|4 \times 0 - (-3) + 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{17}}{17}$$

۴۹- گزینه ۱) ضلع AC از نقطه‌های $A(1,3)$ و $C(3,-1)$

می‌گذرد. بنابراین معادله آن به صورت زیر است

$$y-3 = \frac{3+1}{1-3}(x-1) \Rightarrow y+2x-5=0$$

طول ارتفاع وارد از رأس B ، برابر با فاصله نقطه $B(-2,1)$

از این خط است

$$\frac{|1+2(-2)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

۵۰- گزینه ۲) ابتدا معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم

$$kx+y-1=0$$

به این ترتیب

$$AH = \frac{|k+2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \Rightarrow |3k-1| = 3\sqrt{k^2+1}$$

$$9k^2 - 6k + 1 = 9k^2 + 9 \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$$

۵۱- گزینه ۲) معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y-mx-4-2m=0$$

در این صورت، فاصله نقطه $(0,0)$ ، یعنی مبدأ، تا این خط

برابر است با

$$\frac{|0-m \times 0 - 4 - 2m|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \Rightarrow |2+m| = \sqrt{1+m^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} 4+m^2+4m=1+m^2$$

$$4m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

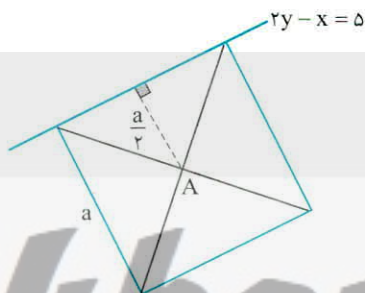
۵۲- گزینه ۴) فاصله نقطه (x_0, y_0) تا خط

$ax+by+c=0$ برابر با $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است. بنابراین

$$\frac{|4k-3 \times 3+5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|4k-4|}{5} = 4 \Rightarrow |k-1| = 5$$

$$\Rightarrow k = \pm 5 + 1$$

بنابراین مجموع مقادیرهای ممکن k برابر ۲ است.



۶۲- گزینه‌ی ۳ اندازه‌ی AB، قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع، برابر است با

$$AB = \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} = 10.$$

معادله‌ی خطی را که ضلع AB روی آن قرار دارد می‌نویسیم

$$m_{AB} = \frac{-5-3}{4+2} = -\frac{4}{3}$$

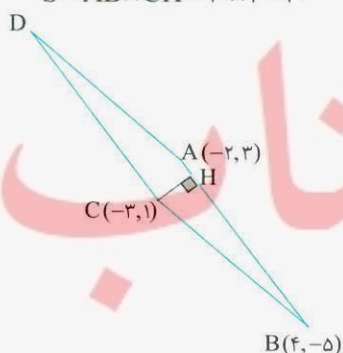
$$y-3 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow 4x + 3y - 1 = 0.$$

فاصله‌ی C از این خط را به‌دست می‌آوریم که اندازه‌ی ارتفاع CH است

$$CH = \frac{|-12+3-1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با

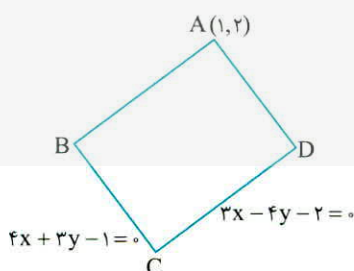
$$S = AB \times CH = 10 \times 2 = 20.$$



۶۳- گزینه‌ی ۱ رأس A روی هیچ کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کند. پس برای محاسبه‌ی طول ضلع‌های مستطیل کافی است فاصله‌ی A از دو خط داده شده را به‌دست آوریم

$$AB = \frac{|4+6-1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{9}{5}, \quad AD = \frac{|3-8-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S = \frac{9}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{63}{25}$



۵۸- گزینه‌ی ۴ B نقطه‌ی $(0, -\frac{5}{12})$ و C نقطه‌ی $(1, 0)$

است. در نتیجه

$$BC = \sqrt{1^2 + (\frac{5}{12})^2} = \frac{13}{12}$$

برای یافتن طول ارتفاع وارد بر BC، کافی است فاصله‌ی

نقطه‌ی A از خط $5x - 12y - 5 = 0$ را بیابیم

$$\frac{|5(-7) - 12(1) - 5|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|-52|}{13} = \frac{52}{13}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \frac{52}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{52}{24} = \frac{13}{6}$$

۵۹- گزینه‌ی ۲ طول AH برابر با فاصله‌ی نقطه‌ی A از

خط $3x + 4y + 9 = 0$ است

$$AH = \frac{|3+8+9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

در نتیجه

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 2\sqrt{5}$$

۶۰- گزینه‌ی ۱ چون مختصات نقطه‌ی A در معادله‌ی خط

داده شده صدق نمی‌کند، پس $y = 2x + 1$ معادله‌ی AB و AD

نیست. یا معادله‌ی BC است یا DC. هر کدام که باشد، اگر

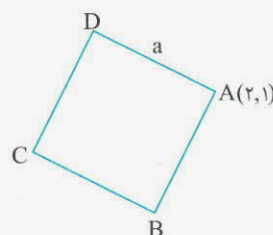
فاصله‌ی A تا خط $y = 2x + 1$ را حساب کنیم، طول ضلع مربع

به‌دست می‌آید

$$2x - y + 1 = 0, \quad a = \frac{|4-1+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با

$$S = a^2 = \frac{16}{5}$$



۶۱- گزینه‌ی ۴ فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط $2y - x - 5 = 0$

برابر نصف طول ضلع مربع است

$$\frac{a}{2} = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با

$$S = a^2 = 80.$$

۶۷- گزینه‌ی ۴) فاصله‌ی خط‌های موازی $3x+4y+10=0$

و $3x+4y-10=0$ برابر است با

$$\frac{|10+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

بنابراین طول یک ضلع مستطیل موردنظر ۴ است، و چون مساحت آن ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر است با $\frac{12}{4} = 3$. در نتیجه طول قطر مستطیل برابر است با

$$\sqrt{4^2+3^2} = 5$$

۶۸- گزینه‌ی ۲) طول ارتفاع وارد بر ضلع‌های CD یا AB

برابر با فاصله‌ی دو خط موازی d_1 و d_2 یعنی $\frac{A}{\sqrt{5}}$ است.

چون $AB = 2\sqrt{5}$ ، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر ۱۶ است.

۶۹- گزینه‌ی ۱) طول AD برابر با فاصله‌ی دو خط موازی

$y-5x+4=0$ و $y-5x-9=0$ است که برابر با $\frac{13}{\sqrt{26}}$ طول

ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AD برابر با طول AB است. چون

ABCD مربع است، پس $AB = \frac{13}{\sqrt{26}}$. بنابراین مساحت

مثلاً EDA برابر است با

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{13}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

۷۰- گزینه‌ی ۳) ابتدا دو طرف معادله‌ی خط اول را در ۳

ضرب می‌کنیم تا به شکل $3x+6y+3=0$ در بیاید. در این صورت

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{3^2+6^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|k-3|}{\sqrt{45}} = \sqrt{5}$$

$$|k-3|=15 \Rightarrow k=\pm 15+3$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن k برابر ۶ است.

۷۱- گزینه‌ی ۴) چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس

شیب‌های آن‌ها برابر است، در نتیجه $-\frac{2}{1} = -\frac{a}{3}$ ، پس $a=6$.

اگر دو طرف معادله‌ی خط دوم را در ۳ ضرب کنیم، به شکل $6x+3y+3k=0$ در می‌آید. چون فاصله‌ی این دو خط

است، پس

$$\frac{|3k-5|}{\sqrt{6^2+3^2}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |3k-5|=30$$

$$k = -\frac{25}{3} \text{ (غ.ق.ق)}, k = \frac{35}{3}$$

بنابراین

$$a+k = 6 + \frac{35}{3} = \frac{53}{3}$$

۶۲- گزینه‌ی ۱) فرض می‌کنیم نقطه‌ی (x, y) روی خط

موردنظر باشد. فاصله‌ی این نقطه از دو خط باید برابر باشد

$$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2x-y-\frac{3}{2}|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow |2x-y+1| = |2x-y-\frac{3}{2}|$$

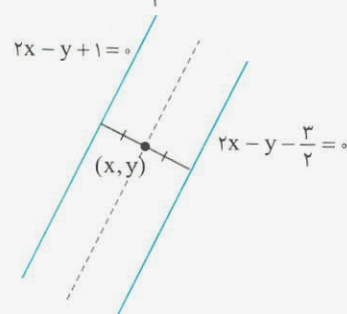
$$2x-y+1 = 2x-y-\frac{3}{2} \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$2x-y+1 = -2x+y+\frac{3}{2} \Rightarrow 4x-2y-\frac{1}{2} = 0$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک

فاصله باشند، در معادله‌ی $4x-2y-\frac{1}{2}=0$ صدق می‌کنند.

یعنی معادله‌ی خط موردنظر $4x-2y-\frac{1}{2}=0$ است.



۶۵- گزینه‌ی ۲) شیب خط d_1 برابر با $\frac{12}{5}$ و معادله‌ی آن

به صورت زیر است

$$y = \frac{12}{5}(x+5) = \frac{12}{5}x + 12$$

در نتیجه شیب خط d_2 برابر $\frac{12}{5}$ است. بنابراین معادله‌ی آن

به شکل زیر است

$$y = \frac{12}{5}(x-3) = \frac{12}{5}x - \frac{36}{5}$$

بنابراین فاصله‌ی دو خط d_1 و d_2 برابر است با

$$\frac{|\frac{12}{5} + \frac{36}{5}|}{\sqrt{1^2 + (\frac{12}{5})^2}} = \frac{\frac{48}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{48}{13}$$

در نتیجه $DC = \frac{96}{13}$

۶۶- گزینه‌ی ۳) معادله‌ی خط دوم را به شکل

$2x-2y+2=0$ می‌نویسیم. طول ضلع مربع برابر فاصله‌ی دو

خط موازی $2x-2y-3=0$ و $2x-2y+2=0$ است. در نتیجه

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{|-3-2|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(\frac{5}{\sqrt{8}})^2 = \frac{25}{8}$

ریشه‌های این معادله $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{2}$ هستند. در نتیجه

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$

توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = 3m$$

$$x_1 x_2 = 6m + 1 = 2(3m) + 1 = 2(x_1 + x_2) + 1$$

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \quad \text{بنابراین}$$

فرض می‌کنیم

$$r = \frac{-n}{1+n}, \quad s = \frac{n}{1-n}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{r} = -\frac{1+n}{n} = -\frac{1}{n} - 1, \quad \frac{1}{s} = \frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = -2 \quad \text{پس اکنون توجه کنید که}$$

$$r + s = \frac{n}{m}, \quad rs = \frac{12}{m}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{r+s}{rs} = \frac{n}{12} = -2$$

$$n = -24 \quad \text{بنابراین}$$

$$r = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}} \quad \text{فرض می‌کنیم}$$

$$s = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} = 1 + \frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{1}{s^2} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} = 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

بنابراین

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = 2$$

توجه کنید که

$$r + s = -b, \quad rs = 2$$

بنابراین

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{r^2 + s^2}{(rs)^2} = \frac{(r+s)^2 - 2rs}{(rs)^2} = \frac{b^2 - 4}{4} = 2$$

در نتیجه

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3}$$

۷۲- گزینه‌ی ۱) فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c_1 = 0$

و $ax + by + c_2 = 0$ برابر است با

$$\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا دو طرف معادله‌ی $ax + 3y + c = 0$ را در ۳ ضرب می‌کنیم

$$3ax + 9y + 3c = 0$$

چون این خط با خط $12x + 9y - 2 = 0$ موازی است، پس شیب

آنها برابر است

$$-\frac{3a}{9} = -\frac{12}{9} \Rightarrow a = 4$$

چون فاصله‌ی دو خط برابر ۳ است، پس

$$\frac{|3c - (-2)|}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = 3 \Rightarrow |3c + 2| = 3 \times 15$$

$$c = -\frac{47}{3} \text{ (غ.ق.ق)}, c = \frac{43}{3}$$

بنابراین

$$\frac{a}{c} = \frac{12}{43}$$

۷۳- گزینه‌ی ۴) شیب خط $x + 3y - 1 = 0$ برابر $-\frac{1}{3}$ است.

بنابراین شیب خط موردنظر هم برابر $-\frac{1}{3}$ و معادله‌ی آن

به صورت $x + 3y + c = 0$ است. چون فاصله‌ی این خط از

خط‌های داده شده برابر است، پس

$$\frac{|c+1|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|c-4|}{\sqrt{1^2+3^2}} \Rightarrow |c+1| = |c-4|$$

$$c+1 = \pm(c-4) \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

بنابراین معادله‌ی خط موردنظر $x + 3y + \frac{3}{2} = 0$ یا

$$2x + 6y + 3 = 0 \quad \text{است.}$$

۷۴- گزینه‌ی ۱) توجه کنید که حاصل ضرب ریشه‌ها برابر b

است، پس $ab = b$ و چون $b \neq 0$ ، پس $a = 1$. از طرف دیگر

مجموع ریشه‌ها برابر $-a$ است، پس

$$a + b = -a \Rightarrow b = -2a = -2$$

۷۵- گزینه‌ی ۲) حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{1}{6}$ است، پس

$x_1 x_2 = -\frac{1}{6}$. بنابراین معادله‌ی داده شده به صورت زیر در

می‌آید:

$$x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow 6x^2 + x - 1 = 0$$

۸۶- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 1$ و

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{1 - 4(2k - 4)}$$

از طرف دیگر،

$$x_1^2 - x_2^2 = 5 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 5$$

پس $x_1 - x_2 > 0$ ، در نتیجه

$$\sqrt{17 - 8k} = 5 \Rightarrow 17 - 8k = 25 \Rightarrow k = -1$$

۸۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = k - 1$$

$$\text{از حل دستگاه معادله‌های} \begin{cases} \alpha + \beta = k \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{cases} \text{ به دست می‌آید}$$

$$\alpha = 2k - 5, \quad \beta = 5 - k$$

بنابراین

$$\alpha\beta = (2k - 5)(5 - k) = k - 1 \Rightarrow k^2 - 7k + 12 = 0$$

$$(k - 4)(k - 3) = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ یا } k = 4$$

پس مجموع مقادیرهای ممکن برای k برابر ۷ است.

۸۸- گزینه‌ی ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند،

آن‌گاه $\alpha = \beta^2$ از طرف دیگر،

$$\alpha\beta = -8 \Rightarrow \beta^3 = -8 \Rightarrow \beta = -2$$

پس $\alpha = 4$ ، همچنین

$$\alpha + \beta = m \Rightarrow m = 4 - 2 = 2$$

۸۹- گزینه‌ی ۱ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند،

$$x_2 = -x_1^2 \text{ از طرف دیگر } x_1 x_2 = -m \text{ پس}$$

$$-x_1^3 = -m \Rightarrow m = x_1^3$$

در معادله به جای m مقدار x_1^3 را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - x_1^3 x - x_1^3 = 0$$

چون x_1 جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x_1^2 - x_1^3 x_1 - x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1^2(1 - x_1 - x_1^2) = 0$$

$$x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ (غ.ق.)}$$

$$1 - x_1 - x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{m}$$

توجه کنید که چون معادله دو جواب دارد، پس $m^2 + 4m > 0$

و در نتیجه $m > 0$ یا $m < -4$. بنابراین $m = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^3 \approx 0.2$

قابل قبول است. البته $m = (\frac{-\sqrt{5}-1}{2})^3 \approx -4.2$ هم قابل

قبول است که چون $m > 0$ شرط مسئله است این عدد در گزینه‌ها نیامده است.

۹۰- گزینه‌ی ۴ چون k در دو معادله یکسان بوده، پس

$$k = (-2)(-15) = 30$$

بنابراین معادله‌ی اصلی

$$x^2 + 13x + 30 = 0 \text{ است، که ریشه‌هایش } -10 \text{ و } -3 \text{ هستند.}$$

۹۱- گزینه‌ی ۲ جواب‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 6 = 0$ را با

α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل

$$(\alpha - 2)(\beta - 2) = (2 - \alpha)(2 - \beta)$$

$$x^2 + 2x - 6 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید

$$(2 - \alpha)(2 - \beta) = 2$$

چون $\alpha\beta = -6$ ، پس حاصل ضرب به اندازه‌ی ۸ واحد تغییر

کرده است.

۹۲- گزینه‌ی ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند،

آن‌گاه $\alpha = -\frac{1}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta = -1$ ، بنابراین

$$\frac{m-1}{2} = -1 \Rightarrow m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$$

۹۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = -(k-1) = 1-k, \quad x_1 x_2 = 8$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1-k}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین $k = -5$.

۹۴- گزینه‌ی ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} + 5$$

از حل دستگاه معادله‌های بالا به دست می‌آید $\alpha = 6$ و $\beta = 2$.

از طرف دیگر،

$$\alpha\beta = m \Rightarrow m = 12$$

۹۵- گزینه‌ی ۱ اگر جواب‌های معادله را α و β بنامیم، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha = 3\beta + 3$$

از حل دستگاه فوق به دست می‌آید $\alpha = \frac{9}{4}$ و $\beta = -\frac{1}{4}$.

از طرف دیگر،

$$\alpha\beta = \frac{m}{2} \Rightarrow (\frac{9}{4})(-\frac{1}{4}) = \frac{m}{2} \Rightarrow m = -\frac{9}{8}$$

۹۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -(m+1)$ و

$$x_1 x_2 = 2$$

$$3(x_1 + x_2) - 5x_1 x_2 = -19$$

$$3(-(m+1)) - 5 \times 2 = -19$$

$$-3m - 3 = -9 \Rightarrow m = 2$$

۹۰- گزینه‌ی ۴ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = 64, \quad \beta = \alpha^3$$

بنابراین

$$\alpha(\alpha^3) = 64 \Rightarrow \alpha^4 = 64 \Rightarrow \alpha = \sqrt[4]{64} \Rightarrow \beta = \alpha^3 = 8\sqrt[4]{64}$$

در نتیجه

$$\alpha + \beta = \sqrt[4]{64} + 8\sqrt[4]{64} = m \Rightarrow m = 9\sqrt[4]{64} = 18\sqrt[4]{2}$$

۹۱- گزینه‌ی ۲ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$\xrightarrow{x_1 \neq x_2} x_1 + x_2 = 1$$

بنابراین

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{m} = 1$$

پس $m = 2$

۹۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = 3k, \quad x_1 x_2 = 9$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 3 \Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 9$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 9$$

$$\Rightarrow 3k - 2\sqrt{9} = 9$$

پس $k = 5$

۹۳- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های

معادله‌ی موردنظر باشند. در این صورت

$$x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{16}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 4$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m = 6$$

۹۴- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های

معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ و α و β ریشه‌های معادله‌ی

$$8x^2 - mx - 8 = 0 \text{ باشند. در این صورت}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 x_2 = -1$$

$$\alpha + \beta = \frac{m}{8}, \quad \alpha\beta = -1$$

$$\alpha = x_1^3, \quad \beta = x_2^3$$

دو طرف تساوی $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{1}{8}$$

$$\alpha + \beta - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{m}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \Rightarrow m = 13$$

۹۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که بنابر اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \quad (1)$$

از طرف دیگر، $x_1 + x_2 = 2$ و $x_1 x_2 = k+1$. در نتیجه، از

تساوی (۱) و این که $x_1^3 + x_2^3 = 5$ به دست می‌آید

$$8 = 5 + 3(k+1)(2)$$

$$\text{بنابراین } k = -\frac{1}{2}$$

۹۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - x_1$$

بنابراین

$$x_1^2 + 5x_1 + x_2 = 19 \Rightarrow x_1^2 + 5x_1 - 4 - x_1 = 19$$

$$x_1^2 + 4x_1 = 23$$

از طرف دیگر، چون x_1 ریشه‌ی معادله است، پس

$$x_1^2 + 4x_1 - 5k - 3 = 0 \Rightarrow 23 - 5k - 3 = 0$$

$$\text{بنابراین } k = 4$$

۹۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، $x_1 + x_2 = k-2$ و $x_1 x_2 = 8$. بنابراین از

تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$20 = (k-2)^2 - 2 \times 8 \Rightarrow (k-2)^2 = 36$$

$$k-2 = \pm 6 \Rightarrow k = 8, \quad k = -4$$

۹۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = 3m, \quad x_1 x_2 = m-3$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 4$$

$$\frac{3m}{m-3} > 4 \Rightarrow \frac{3m}{m-3} - 4 > 0$$

$$\frac{3m - 4(m-3)}{m-3} > 0 \Rightarrow \frac{-m+12}{m-3} > 0$$

بنابراین $m \in (3, 12)$

۱۰۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = m$ و $\alpha\beta = m - 1$ از طرف دیگر،

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2 \Rightarrow 2\alpha + \beta = 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha + (\alpha + \beta) = 2\alpha\beta$$

$$\alpha + m = 2m - 2 \Rightarrow \alpha = m - 2$$

چون α ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، در معادله صدق می‌کند

$$(m-2)^2 - m(m-2) + m - 1 = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 - m^2 + 2m + m - 1 = 0$$

بنابراین $m = 3$

۱۰۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -5$ و $x_1 x_2 = 3$

بنابراین

$$\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{3}{25}$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 7, \quad \alpha\beta = 1$$

بنابراین

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{49 - 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$fa^2(x_1 - x_2)^2 = fa^2((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2)$$

$$= fa^2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}\right)$$

$$= 4(b^2 - 4ac) = 4\Delta = 20$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم $A = fa^2(x_1 - x_2)^2$ در این صورت

$$\sqrt{A} = 2|a| \times |x_1 - x_2| = 2|a| \times \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$$

$$A = (2\sqrt{5})^2 = 20 \quad \text{بنابراین}$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3$ و $x_1 x_2 = -5$

در نتیجه

$$x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2) = 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)$$

$$= 2(-5) - 2(3) = -16$$

۱۰۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

از طرف دیگر،

$$x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 x_2 = 3$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $6^2 - 2 \times 3 = 30$

۹۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = -2$ و $\alpha\beta = k$

بنابراین

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{k}$$

بنابراین تساوی داده شده بین ریشه‌های معادله به دو شرط

زیر برقرار است:

• حاصل ضرب ریشه‌ها صفر نباشد، یعنی $k \neq 0$

• معادله دو ریشه داشته باشد، یعنی

$$\Delta = 4 - 4k > 0 \Rightarrow k < 1$$

بنابراین تساوی داده شده برای $k \in (-\infty, 1) - \{0\}$ برقرار است.

۱۰۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 3 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow 3x_2^2 = 3 \Rightarrow x_2^2 = 1$$

بنابراین $x_2 = 1$ یا $x_2 = -1$

اگر $x_2 = 1$ ، آن‌گاه

$$1^2 - (3m+1) \times 1 + 3 = 0 \Rightarrow m = 1$$

اگر $x_2 = -1$ ، آن‌گاه

$$(-1)^2 - (3m+1)(-1) + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

چون مقدار مثبت m مورد نظر است، پس $m = 1$ قابل قبول است.

۱۰۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 6$ ، بنابراین

$x_2 = 6 - x_1$ در نتیجه

$$3x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 = 12$$

$$3x_1^2 + 2x_1(6 - x_1) - (6 - x_1)^2 = 12$$

$$3x_1^2 + 12x_1 - 2x_1^2 - x_1^2 - 36 + 12x_1 = 12$$

$$24x_1 = 48 \Rightarrow x_1 = 2$$

چون x_1 ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، پس در این

معادله صدق می‌کند

$$2^2 - 6(2) + k + 3 = 0 \Rightarrow k = 5$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = m + 1$ و

$\alpha\beta = m$ از طرف دیگر،

$$2(\alpha + \beta) + \beta = \alpha\beta \Rightarrow 2(m+1) + \beta = m$$

$$\beta = -2 - m$$

چون β ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر است، در معادله صدق می‌کند

$$(-2-m)^2 - (m+1)(-2-m) + m = 0$$

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

بنابراین مجموع مقادیرهای ممکن برای m برابر است با مجموع

جواب‌های معادله‌ی فوق که -4 است.

۱۰۹- گزینه‌ی ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} = \frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$= \frac{8-4}{-13-16+4} = -\frac{4}{25}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $x_1+x_2=8$. همچنین

$$x^2-8x+13=(x-x_1)(x-x_2)$$

در نتیجه

$$(2-x_1)(2-x_2)=2^2-8 \times 2+13=-25$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} = \frac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$= \frac{8-4}{-25} = -\frac{4}{25}$$

۱۱۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=5, \quad \alpha\beta=-2$$

بنابراین

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{(\alpha-1)(\beta+1)+(\alpha+1)(\beta-1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$= \frac{\alpha\beta+\alpha-\beta-1+\alpha\beta-\alpha+\beta-1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$= \frac{2\alpha\beta-2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{-4-2}{-2+5+1} = -\frac{3}{2}$$

۱۱۱- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $\alpha\beta=2$. در نتیجه

$$\frac{2}{\alpha}=\beta, \quad \frac{2}{\beta}=\alpha$$

بنابراین باید حاصل عبارت زیر را حساب کنیم

$$(2\alpha)^2 + (2\beta)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 4(\alpha + \beta)^2 - 8\alpha\beta$$

$$= 4(5)^2 - 8 \times 2 = 84$$

۱۱۲- گزینه‌ی ۱ راه‌حل اول توجه کنید که $x_1+x_2=4$ و

$$x_1x_2=-4$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)$$

$$= (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2)$$

$$= (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)$$

$$= 4(4^2+3 \times 4) = 112$$

راه‌حل دوم بنابر اتحاد مکعب دوجمله‌ای،

$$(x_1+x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$4^3 = x_1^3 + x_2^3 - 3 \times 4 \times 4$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 112$$

۱۱۳- گزینه‌ی ۱ ریشه‌ی مشترک دو معادله را t در نظر

می‌گیریم. در این صورت، چون ۲ و ۳ ریشه‌های $x^2-ax+b=0$ هستند، پس

$$2+t=a, \quad 2t=b$$

و چون ۴ و t ریشه‌های $x^2-cx+d=0$ هستند، پس

$$4+t=c, \quad 4t=d$$

بنابراین

$$a-c + \frac{b}{d} = (2+t) - (4+t) + \frac{2t}{4t} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

۱۱۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $x_1+x_2=12$ و $x_1x_2=9$.

بنابراین

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}}{\sqrt{x_1x_2}}$$

$$= \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4$$

۱۱۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=4$ و $\alpha\beta=-1$.

همچنین

$$\alpha-\beta = -|\alpha-\beta| = -\sqrt{(\alpha-\beta)^2} = -\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

$$= -\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = -\sqrt{16+4} = -2\sqrt{5}$$

بنابراین

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (-2\sqrt{5}) \times 4 = -8\sqrt{5}$$

البته می‌توانستیم $|\alpha-\beta|$ را به صورت زیر نیز به دست آوریم

$$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{20}}{1} = 2\sqrt{5}$$

۱۱۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب جواب‌های

معادله برابر $2m-1$ است. بنابراین

$$\tan \alpha \cot \alpha = 2m-1 \Rightarrow 1 = 2m-1 \Rightarrow m=1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m-3$ است. پس

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m-3 = -2$$

دو طرف تساوی فوق را به توان دو می‌رسانیم

$$(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 4$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 2$$

۱۲۱- گزینه‌ی ۲) راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \sqrt{5}$

و $\alpha\beta = 1$ بنابراین

$$\begin{aligned} A &= 2\alpha + 4\beta = 2\alpha - \alpha + 2\beta + \beta = 2(\alpha + \beta) + \beta - \alpha \\ &= 2(\alpha + \beta) + \sqrt{(\beta - \alpha)^2} = 2(\alpha + \beta) + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta} \\ &= 2(\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \end{aligned}$$

بنابراین

$$A = 2\sqrt{5} + \sqrt{5^2 - 4 \times 1} = 2\sqrt{5} + \sqrt{1} = 3\sqrt{5} + 1$$

راه‌حل دوم جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 2\alpha + 4\beta &= 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \sqrt{5} - 1 + 2\sqrt{5} + 2 \\ &= 3\sqrt{5} + 1 \end{aligned}$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۳) α جواب معادله است، پس در معادله

صدق می‌کند

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 = 3\alpha + 1 \Rightarrow 4\alpha^2 = 6\alpha + 2$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A &= 4\alpha^2 + 6\beta(1 + \alpha) = 6\alpha + 2 + 6\beta + 6\alpha\beta \\ &= 6(\alpha + \beta + \alpha\beta) + 2 \end{aligned}$$

چون $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$ ، بنابراین

$$A = 6\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2 = 8$$

۱۲۳- گزینه‌ی ۴) چون α ریشه‌ی معادله است، پس در آن

صدق می‌کند

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 1$$

دو طرف تساوی فوق را در α ضرب می‌کنیم

$$\alpha^3 = 2\alpha^2 + \alpha \Rightarrow \alpha^3 = 2(2\alpha + 1) + \alpha = 5\alpha + 2$$

بنابراین

$$\alpha^3 + 5\beta = 5\alpha + 2 + 5\beta = 5(\alpha + \beta) + 2 = 5 \times 2 + 2 = 12$$

۱۲۴- گزینه‌ی ۲) چون α ریشه‌ی معادله است، پس در آن

صدق می‌کند

$$\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 1$$

دو طرف تساوی فوق را به توان دو می‌رسانیم

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 9(3\alpha + 1) + 6\alpha + 1 \\ &= 33\alpha + 10 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\alpha^4 + 33\beta = 33\alpha + 10 + 33\beta = 33(\alpha + \beta) + 10$$

$$= 33 \times 3 + 10 = 109$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۲) توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3$ و $x_1 x_2 = 1$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} &(x_1 \sqrt{x_1} + x_2 \sqrt{x_2})^2 \\ &= (x_1 \sqrt{x_1})^2 + (x_2 \sqrt{x_2})^2 + 2x_1 \sqrt{x_1} x_2 \sqrt{x_2} \\ &= x_1^3 + x_2^3 + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2} \\ &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2} \\ &= 3^3 - 3(1)(3) + 2(1)\sqrt{1} = 2 \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که ریشه‌های معادله عددهایی مثبت‌اند، پس

عبارت مورد نظر هم مثبت است. بنابراین

$$x_1 \sqrt{x_1} + x_2 \sqrt{x_2} = \sqrt{2} = 2\sqrt{5}$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۲) توجه کنید که $x_1 + x_2 = 4$ و $x_1 x_2 = -1$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} &(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3 \\ &= \sqrt[3]{x_1}^3 + \sqrt[3]{x_2}^3 + 3\sqrt[3]{x_1} \sqrt[3]{x_2} (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \\ &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2} (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \\ &= 4 - 3(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \end{aligned}$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = A$ آن‌گاه

$$A^3 = 4 - 3A \Rightarrow A^3 + 3A - 4 = 0$$

$$A^3 + 3A - 3 - 1 = 0$$

$$(A^3 - 1) + 3(A - 1) = 0$$

$$(A - 1)(A^2 + A + 1) + 3(A - 1) = 0$$

$$(A - 1)(A^2 + A + 4) = 0$$

چون $A^2 + A + 4$ همواره مثبت است، پس $A = 1$

۱۱۹- گزینه‌ی ۲) ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 5$ و $\alpha\beta = 1$

بنابراین

$$\alpha^2 + \frac{2}{\beta^2} + 3\beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 + 3\beta^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 3((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 3(25 - 2) = 69$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۴) ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \frac{4}{3}$ و

$\alpha\beta = -\frac{1}{3}$ ، بنابراین $3\alpha - 4 = -3\beta$ ، پس عبارت خواسته شده

به شکل زیر در می‌آید

$$10\alpha^2 + (3\alpha - 4)^2 + \beta^2 = 10\alpha^2 + (-3\beta)^2 + \beta^2 = 10(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 10((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 10\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{220}{9}$$

۱۲۵- گزینه‌ی ۱) توجه کنید که

$$f(x) = -(x^2 - 6x) - 4 = -(x-3)^2 + 5 \leq 5$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار $f(x)$ برابر ۵ است.

۱۲۶- گزینه‌ی ۳) حداقل مقدار عبارت $4x^2 + ax + 13$ به

ازای $x = \frac{-a}{2 \times 4} = -\frac{a}{8}$ به دست می‌آید. در نتیجه

$$4\left(-\frac{a}{8}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{8}\right) + 13 = \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{8} + 13 = 13 - \frac{a^2}{16}$$

پس

$$13 - \frac{a^2}{16} = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{16} = 4 \Rightarrow a^2 = 64$$

بنابراین $a = \pm 8$.

۱۲۷- گزینه‌ی ۴) شکل زیر، حصاری را که ماهی گیر

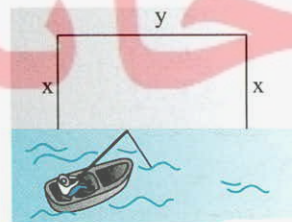
می‌خواهد ایجاد کند نشان می‌دهد. بنابراین طول حصار برابر با $2x + y = 100$ است. همچنین مساحت ناحیه‌ی محصور برابر با

$A = xy$ است. چون $y = 100 - 2x$ ، پس

$$A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

حداکثر مقدار عبارت فوق به ازای $x = \frac{-100}{2(-2)} = 25$ به دست

می‌آید. بنابراین $x = 25$ و $y = 50$ و در نتیجه بیش‌ترین مقدار مساحت برابر است با 25×50 .

۱۲۸- گزینه‌ی ۳) طول نرده‌ها برابر با $3y + 4x = 200$ است.

همچنین مساحت کل زمین برابر است با $A = 2xy$. در نتیجه

$$A = 2xy = \frac{1}{4} \times 4xy = \frac{1}{4} (200 - 3y)y = \frac{1}{4} (200y - 3y^2)$$

بنابراین

$$2A = 200y - 3y^2 = -3\left(y^2 - \frac{200y}{3}\right)$$

$$= -3\left(\left(y - \frac{100}{3}\right)^2 - \frac{10000}{9}\right)$$

$$= \frac{10000}{3} - 3\left(y - \frac{100}{3}\right)^2 \leq \frac{10000}{3}$$

بنابراین $A \leq \frac{5000}{3}$ ، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر $\frac{5000}{3}$

است.

۱۲۹- گزینه‌ی ۲) با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت

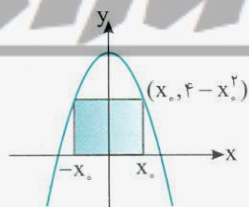
محیط مستطیل برابر است با

$$2(2x_0 + 4 - x_0^2) = -2x_0^2 + 4x_0 + 8$$

$$= -2(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 10$$

$$= -2(x_0 - 1)^2 + 10 \leq 10$$

در نتیجه بیش‌ترین محیط مستطیل برابر است با ۱۰.



۱۳۰- گزینه‌ی ۲) از فرض مسئله نتیجه می‌گیریم

$$2r + h = 30 \Rightarrow 2r = 30 - h$$

مساحت جانبی استوانه برابر است با $S = 2\pi rh$. بنابراین

$$S = \pi(2r)h = \pi(30 - h)h = \pi(30h - h^2)$$

در نتیجه، حداکثر مقدار عبارت فوق به ازای $h = -\frac{30}{2(-1)} = 15$

به دست می‌آید.

۱۳۱- گزینه‌ی ۲) با توجه به شکل زیر نتیجه می‌گیریم محیط

زمین برابر است با

$$P = 2\pi r + 2s \xrightarrow{\pi=3} P = 6r + 2s = 1800$$

بنابراین $s + 3r = 900$. همچنین، مساحت زمین برابر است با

$$A = \pi r^2 + 2rs \xrightarrow{\pi=3} A = 3r^2 + 2rs$$

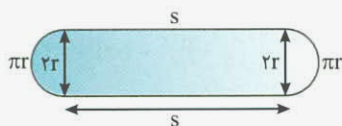
در نتیجه

$$A = 3r^2 + 2r(900 - 3r) = 1800r - 3r^2$$

اکنون حداکثر مقدار عبارت فوق را پیدا می‌کنیم

$$A = -3(r^2 - 600r) = -3(r - 300)^2 + 270000$$

بنابراین حداکثر مقدار A به ازای $r = 300$ به دست می‌آید.

۱۳۲- گزینه‌ی ۱) نقطه‌ی (x_0, y_0) روی خط را در نظر

می‌گیریم. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی عمودی این نقطه تا سهمی باید نقطه‌ای به طول x_0 را روی سهمی در نظر بگیریم. در

نتیجه با توجه به شکل نتیجه می‌شود

$$d = -2x_0^2 + 4x_0 + 3 - (x_0 - 2) = -2x_0^2 + 3x_0 + 5$$

۱۳۵- گزینه‌ی ۴) معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2a^2x^2 - 2a^2x - \sqrt{2} = 0$$

بنابراین

$$x_1 + x_2 = a$$

$$x_1 x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2a^2}$$

در نتیجه

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= a^2 + \frac{\sqrt{2}}{a^2}$$

بنابراین

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$= \left(a^2 + \frac{\sqrt{2}}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2a^2}\right)^2$$

$$= a^4 + \frac{1}{a^4} + 2\sqrt{2}$$

$$= \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 2 \geq 2 + 2\sqrt{2}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x_1^4 + x_2^4$ برابر $2 + 2\sqrt{2}$ است و به ازای $a = 1$ یا $a = -1$ به دست می‌آید.

۱۳۶- گزینه‌ی ۱) ابتدا مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها را

حساب می‌کنیم

$$S = a + \sqrt{a^2 + 1} + a - \sqrt{a^2 + 1} = 2a$$

$$P = (a + \sqrt{a^2 + 1})(a - \sqrt{a^2 + 1}) = a^2 - a^2 - 1 = -1$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 2ax - 1 = 0$$

۱۳۷- گزینه‌ی ۱) فرض می‌کنیم ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند.

در این صورت

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$$

$$\sqrt{x_1 x_2} = 2/5 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{4}{25}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - 3x + \frac{4}{25} = 0$$

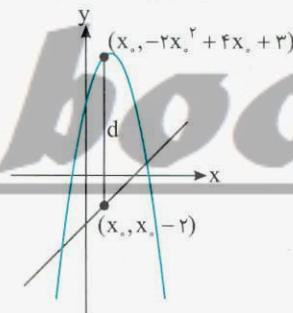
که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود

$$4x^2 - 12x + 4 = 0$$

حداکثر مقدار d به ازای $x = \frac{-3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$ به دست می‌آید. در

نتیجه حداکثر فاصله‌ی عمودی میان خط و سهمی برابر است با

$$-2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right) + 5 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 5 = 5 + \frac{9}{8} = \frac{49}{8}$$



۱۳۳- گزینه‌ی ۱) اگر طول یکی از قطعه‌ها را x و طول قطعه‌ی

دیگر را $2-x$ فرض کنیم، آن‌گاه

$$x = \text{محیط دایره} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow \text{مساحت دایره} = \frac{x^2}{4\pi}$$

$$2-x = \text{طول ضلع مربع} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = \frac{(2-x)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مربع} = \frac{(2-x)^2}{16}$$

بنابراین مجموع مساحت‌ها برابر با

$$S(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(2-x)^2}{16} = \left(\frac{4+\pi}{16\pi}\right)x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

کم‌ترین مقدار $S(x)$ به ازای $x = -\frac{-\frac{1}{4}}{2\left(\frac{4+\pi}{16\pi}\right)}$ به دست می‌آید

که برابر است با $x = \frac{2\pi}{\pi+4}$. پس طول قطعه‌ی دیگر برابر است با

$$2-x = 2 - \frac{2\pi}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}$$

در نتیجه نسبت طول قطعه‌ی بزرگ‌تر به طول قطعه‌ی کوچک‌تر

برابر است با

$$\frac{\frac{8}{\pi+4}}{\frac{2\pi}{\pi+4}} = \frac{4}{\pi}$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۴) ریشه‌ها را x_1 و x_2 در نظر می‌گیریم. در

این صورت

$$x_1 + x_2 = a - 2, \quad x_1 x_2 = -a + 1$$

در نتیجه

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (a-2)^2 - 2(-a+1)$$

$$= a^2 - 4a + 4 + 2a - 2 = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $x_1^2 + x_2^2$ به ازای $a = 1$ به دست می‌آید.

۱۴۱- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -\left(\frac{-6}{3}\right) = 2$ و

$$x_1 x_2 = -\frac{4}{3} \text{ از طرف دیگر،}$$

$$S = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 = 4$$

$$P = (x_1^2 + x_1 x_2)(x_2^2 + x_1 x_2)$$

$$= x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2$$

$$= x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2$$

$$= -\frac{4}{3} \times 4 = -\frac{16}{3}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر $x^2 - 4x - \frac{16}{3} = 0$ یا

$$3x^2 - 12x - 16 = 0 \text{ است.}$$

۱۴۲- گزینه‌ی ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 1$ و

$\alpha\beta = -3$. اکنون مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های موردنظر

را حساب می‌کنیم

$$S = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 1^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1 + (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 + 1 - 4(-3) = 14$$

$$P = (\alpha + \beta)^2 (\alpha - \beta)^2 = 1^2 (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1^2 - 4(-3) = 13$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 14x + 13 = 0$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 1$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{13} \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 13$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که ریشه‌های آن ۱ و ۱۳ باشند،

$$\text{یعنی } x^2 - 14x + 13 = 0$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۲ ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 9 = 0$ را با

α و β نشان می‌دهیم. اگر ریشه‌های معادله‌ی

$$9x^2 + ax + b = 0 \text{ را با } z \text{ و } t \text{ نشان دهیم، آن‌گاه}$$

$$z = \frac{1}{\alpha^2} - 2, \quad t = \frac{1}{\beta^2} - 2$$

۱۳۸- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

در نتیجه

$$-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \times \left(-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$$

معادله‌ی $cx^2 - bx + a = 0$ نیز دو ریشه دارد که حاصل ضرب

آن‌ها برابر $\frac{a}{c}$ و مجموع آن‌ها برابر $\frac{b}{c}$ است. در نتیجه $-\frac{1}{\alpha}$

و $-\frac{1}{\beta}$ ریشه‌های این معادله هستند.

۱۳۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -2$.

بنابراین مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی موردنظر به شکل زیر است

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به صورت زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = -1$ و

$\alpha\beta = -1$. بنابراین مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی

مورد نظر به شکل زیر است

$$S = \alpha^2 + \frac{1}{\beta} + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= 1 + 2 + \frac{-1}{-1} = 4$$

$$P = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha\beta)^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{-1} = -1$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

توجه کنید که ۱۴۷- گزینه ۱) اگر ریشه‌های معادله $x^2 + mx + n = 0$

را با x_1 و x_2 نشان دهیم، $x_1 - 1$ و $x_2 - 1$ ریشه‌های معادله‌ی زیر هستند

$$mx^2 + 3x - 1 = 0$$

بنابراین

$$x_1 + x_2 = -m, \quad x_1 x_2 = n$$

از طرف دیگر،

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) = -\frac{3}{m} \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 = -\frac{3}{m}$$

$$-m - 2 = -\frac{3}{m} \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$(m - 1)(m + 3) = 0$$

چون $m > 0$ ، پس $m = 1$. اکنون توجه کنید که

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -\frac{1}{m} \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 + 1 + 1 = -1$$

پس

$$n = x_1 x_2 = -3$$

۱۴۸- گزینه ۱) فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله‌ی

$$x^2 - 3x + k = 0$$

باشند. در این صورت

$$x_1 + x_2 = 3$$

اما

$$x_1, x_2 \in (0, 1) \Rightarrow x_1, x_2 < 1 \Rightarrow x_1 + x_2 < 2$$

بنابراین هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

۱۴۹- گزینه ۲) حاصل ضرب ریشه‌های معادله باید منفی

باشد. در نتیجه

$$\frac{3a - 1}{a} < 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{3}$$

۱۵۰- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که Δ ی معادله باید مثبت

باشد

$$\Delta = 16(a + 2)^2 - 16a \times 9 = 16((a + 2)^2 - 9a)$$

$$= 16(a^2 - 5a + 4) = 16(a - 1)(a - 4) > 0$$

بنابراین

$$a \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

همچنین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها باید مثبت باشد. در

نتیجه

$$\frac{a + 2}{a} > 0, \quad \frac{9}{4a} > 0 \Rightarrow a > 0$$

بنابراین

$$a \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$$

توجه کنید که

$$z + t = -\frac{a}{9} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - 4 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} - 4$$

$$\text{چون } \alpha + \beta = \frac{3}{2} \text{ و } \alpha\beta = -\frac{9}{2} \text{، پس}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$$

بنابراین

$$\frac{-a}{9} = \frac{\frac{45}{4}}{\frac{81}{4}} - 4 = \frac{5}{9} - 4 \Rightarrow a = -5 + 36 = 31$$

۱۴۴- گزینه ۱) اگر جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$

را α و β بنامیم، آنگاه

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = -5$$

جواب‌های معادله‌ی مورد نظر α^3 و β^3 هستند. بنابراین

$$S = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 27 - 3 \times (-5) \times 3 = 72$$

$$P = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (-5)^3 = -125$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 72x - 125 = 0$$

۱۴۵- گزینه ۳) اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -1 \\ (x_1 + x_2) - x_1 x_2 = -11 \end{cases}$$

را حل می‌کنیم، به دست می‌آید $x_1 + x_2 = -6$ و $x_1 x_2 = 5$.

بنابراین x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + 5 = 0$ هستند.

۱۴۶- گزینه ۲) فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های

معادله‌ی زیر باشند

$$x^2 - 3mx + 20 = 0$$

در این صورت

$$x_1 + x_2 = 3m \quad (*)$$

همچنین، $x_1 - 2$ و $x_2 - 2$ ریشه‌های معادله‌ی زیر هستند

$$x^2 - (m + 2)x + n = 0$$

پس

$$x_1 - 2 + x_2 - 2 = m + 2$$

$$x_1 + x_2 - 4 = m + 2$$

بنابراین از تساوی (*) نتیجه می‌شود $3m - 4 = m + 2$ ، پس

$$m = 3$$

۱۵۶- گزینه‌ی ۴ برای این که معادله دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0, \quad \frac{c}{a} > 0.$$

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) = 4a^2 - 12a - 40 = 4(a-5)(a+2)$$

از شرط $\Delta > 0$ نتیجه می‌شود $a < -2$ یا $a > 5$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2$$

$$\frac{c}{a} = 14-a > 0 \Rightarrow a < 14$$

اشتراک ناحیه‌های به دست آمده جواب مسئله است که به صورت $5 < a < 14$ است.

۱۵۷- گزینه‌ی ۲ برای این که نمودار تابع همواره بالای محور x باشد، باید

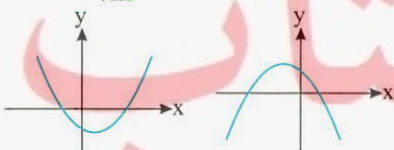
$$1-a > 0 \Rightarrow a < 1$$

$$\Delta = 24 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow -a^2 + a + 6 < 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به دست می‌آید $a < -2$.

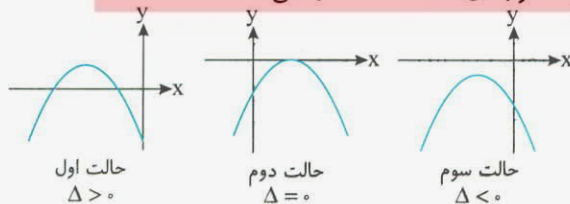
۱۵۸- گزینه‌ی ۱ مطابق شکل‌های زیر، وقتی نمودار سهمی از چهار ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات عبور می‌کند، معادله‌ی درجه‌ی دوم نظیر آن دو جواب مختلف‌العلامت دارد. یعنی حاصل ضرب جواب‌ها منفی است. بنابراین

$$\frac{m-2}{2m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$



۱۵۹- گزینه‌ی ۱ نمودار تابع در سه حالت زیر از ناحیه‌ی

اول محورهای مختصات گذر نمی‌کند



در حالت اول تابع باید دو ریشه‌ی نامثبت داشته باشد

$$\Delta = a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+6) > 0$$

$$\Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-a}{(a-3)} < 0 \Rightarrow a > 3 \text{ یا } a < 0$$

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} \geq 0 \Rightarrow a < 3$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به دست می‌آید $a < -6$.

۱۵۱- گزینه‌ی ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های $\Delta > 0$ ، $\alpha + \beta < 0$ و $\alpha\beta > 0$ برقرار باشد تا معادله دو جواب منفی داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta = m^2 - 8(m-2) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 > 0$$

$$(m-4)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 4$$

$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$\alpha\beta > 0 \Rightarrow \frac{m-2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\text{بنابراین } m \in (2, +\infty) - \{4\}$$

۱۵۲- گزینه‌ی ۱ چون $x_1 < 2 < x_2$ پس

$$2 - x_1 > 0, \quad 2 - x_2 < 0 \Rightarrow (2 - x_1)(2 - x_2) < 0$$

$$4 - 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 < 0 \Rightarrow 4 - 2(m+1) + m < 0 \Rightarrow 2 - m < 0$$

$$\text{پس } m > 2$$

۱۵۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که معادله دو ریشه دارد که یکی مثبت و یکی منفی است، پس حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است:

$$\frac{5(k-2)}{k+6} < 0 \Rightarrow k \in (-6, 2)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع ریشه‌ها منفی است

$$-\frac{17(k+1)}{k+6} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{k+6} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$$

$$\text{بنابراین } k \in (-1, 2)$$

۱۵۴- گزینه‌ی ۱ برای آن که منحنی، محور x را در دو

طرف مبدأ مختصات قطع کند، باید $\frac{c}{a} < 0$ ، پس

$$\frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

۱۵۵- گزینه‌ی ۴ برای این که منحنی محور x را در دو نقطه

با طول منفی قطع کند، باید

$$\Delta > 0, \quad -\frac{b}{a} < 0, \quad \frac{c}{a} > 0$$

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4 \times 12(m-2)$$

$$= 4(m^2 - 10m + 25)$$

$$= 4(m-5)^2$$

از شرط $\Delta > 0$ نتیجه می‌شود $m \neq 5$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

سه محدوده‌ی به دست آمده اشتراک ندارد، پس $m \in \emptyset$.

۱۶۳- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم $6x^2 + \frac{1}{3} = t$ در نتیجه به

معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$3t^2 - 7t + 4 = 0$$

که ریشه‌های آن $t = 1, \frac{4}{3}$ هستند. در نتیجه

$$6x^2 + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$6x^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 6x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

۱۶۴- گزینه‌ی ۳ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 3 = 0$$

با قرار دادن $x^2 - x = t$ به دست می‌آید

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, t = 1$$

معادله ریشه ندارد $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x = -3 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$

$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$ مجموعه ریشه‌ها

۱۶۵- گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم $x^2 - 7x + 11 = t$ در نتیجه

$$t^2 = 3t + 4$$

بنابراین $t = -1, 4$ پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^2 - 7x + 11 = -1 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, 4$$

$$x^2 - 7x + 11 = 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

پس معادله‌ی مورد نظر چهار ریشه دارد.

۱۶۶- گزینه‌ی ۴ واضح است که $x = -1$ جواب معادله

است. پس $x + 1$ عامل سمت چپ معادله است

$$x^3 + x^2 + x^2 - mx - m - 1 = 0$$

$$x^2(x+1) + (x+1)(x-m-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + x - (m+1)) = 0$$

برای این که معادله سه جواب متمایز داشته باشد، باید

معادله‌ی $x^2 + x - (m+1) = 0$ دو جواب داشته باشد و یکی از

این جواب‌ها برابر -1 نباشد. بنابراین

$$\Delta = 1 + 4(m+1) > 0 \Rightarrow 5 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$(-1)^2 - 1 - (m+1) \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

پس

$$m \in \left(-\frac{5}{4}, +\infty\right) - \{-1\}$$

در حالت‌های دوم و سوم می‌توان نوشت

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

اجتماع محدوده‌های به دست آمده برای a جواب مسئله است.

یعنی $a \leq 2$.

۱۶۰- گزینه‌ی ۳ چون $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله است، پس در

معادله صدق می‌کند

$$4\left(\frac{1}{8}\right) + 16\left(\frac{1}{4}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = -9$$

با توجه به این که $2x - 1$ عامل سمت چپ معادله است، پس

به کمک تقسیم می‌توان نوشت

$$4x^3 + 16x^2 + 9x - 9 = 0 \Rightarrow (2x-1)(2x^2 + 9x + 9) = 0$$

$$(2x-1)(2x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -\frac{3}{2}, x = -3$$

بنابراین اختلاف دو جواب دیگر برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۶۱- گزینه‌ی ۳ چون $x = -1$ و $x = \frac{1}{3}$ جواب‌های معادله

هستند، پس

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{27}\right) - 5\left(\frac{1}{9}\right) + a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \\ 6(-1) - 5 \times 1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = -11 \end{cases}$$

بنابراین $a = -8$ و $b = 3$. پس معادله به شکل

$$6x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 0 \text{ در می‌آید که چون } \frac{1}{3} \text{ و } -1$$

جواب‌های آن هستند، پس $3x - 1$ و $x + 1$ عامل‌های سمت

چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت

$$(x+1)(3x-1)(2x-3) = 0$$

بنابراین جواب دیگر معادله $x = \frac{3}{2}$ است. در نتیجه $k = \frac{3}{2}$ و

$$\frac{ab}{k} = \frac{(-8) \times 3}{\frac{3}{2}} = -16$$

۱۶۲- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم $x^2 - x = t$ و معادله به

شکل زیر در می‌آید

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 4$$

اگر $t = 1$

$$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی فوق برابر -1 است. پس

معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

اگر $t = 4$

$$x^2 - x = 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

معادله‌ی فوق هم یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

پس معادله‌ی مورد نظر دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد.

۱۶۷- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $x^3 = t$ ، معادله به شکل

زیر در می‌آید

$$mt^2 - t + m - 1 = 0$$

اگر معادله‌ی بالا دو جواب مختلف‌العلامت مانند t_1 و t_2 داشته باشد، معادله‌ی اصلی هم دو جواب مختلف‌العلامت $\sqrt[3]{t_1}$ و $\sqrt[3]{t_2}$ خواهد داشت. بنابراین کافی است داشته باشیم

$$t_1 t_2 < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

۱۶۸- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$

و $t \geq 0$. همچنین معادله به شکل $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$ می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادله‌ی اصلی چهار جواب خواهد داشت.

بنابراین در معادله‌ی $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$ باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m^2 - 1) > 0 \Rightarrow m^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر m عضو مجموعه‌ی $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ باشد، معادله‌ی اصلی چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - [-1, 1]$$

۱۶۹- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$

و $t \geq 0$. بنابراین معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2 - mt + m - 1 = 0 \quad (*)$$

اگر این معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت (t_1) و یکی منفی باشد (t_2)، آن‌گاه معادله‌ی اصلی دو جواب خواهد داشت ($x = \pm\sqrt{t_1}$). بنابراین

$$t_1 t_2 < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

همچنین اگر معادله‌ی (*) یک جواب مثبت داشته باشد (t_1)، معادله‌ی اصلی دو جواب خواهد داشت. پس

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(m-1) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

به ازای $m = 2$ معادله‌ی (*) جواب $t_1 = 1$ و معادله‌ی اصلی دو جواب $x = \pm 1$ دارد. پس اگر $m \in (-\infty, 1) \cup \{2\}$ ، معادله‌ی مورد نظر دو جواب دارد.

۱۷۰- گزینه‌ی ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$

و $t \geq 0$ و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

در این معادله

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 4) = 16 > 0$$

بنابراین معادله‌ی (*) به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله‌ی اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت.

بنابراین اگر t_1 و t_2 جواب‌های معادله‌ی (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2$$

بنابراین کافی است $m < -2$ باشد تا معادله‌ی اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

۱۷۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که سهمی ماکسیمم (بالا‌ترین

نقطه) دارد، پس $a < 0$. معادله‌ی نظیر سهمی دو ریشه‌ی منفی دارد. پس جمع ریشه‌ها منفی و ضرب آن‌ها مثبت است. بنابراین

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$-\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -c < 0 \Rightarrow c > 0$$

۱۷۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $-\frac{b}{a} < 0$ و $\frac{c}{a} < 0$. بنابراین

ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ مختلف‌العلامت هستند و ریشه‌ای که منفی است، قدرمطلقش از ریشه‌ی دیگر بزرگ‌تر است. فقط نمودار گزینه‌ی (۴) این ویژگی‌ها را دارد.

۱۷۳- گزینه‌ی ۱ چون طول رأس سهمی برابر با $\frac{3}{4}$ است، پس

$$\frac{-a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -3$$

بنابراین

$$y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

در نتیجه b و c به ترتیب برابر با ۱ و ۲ هستند. در نتیجه

$$abc = -6$$

۱۷۴- گزینه‌ی ۲ طول رأس سهمی برابر ۳ است. در نتیجه

$$\frac{-b}{2} = 3 \Rightarrow b = -6$$

بنابراین $y = x^2 - 6x + c$. چون نقطه‌ی $(3, -2)$ روی سهمی است، پس

$$-2 = 9 - 18 + c \Rightarrow c = 7$$

بنابراین معادله‌ی سهمی به صورت $y = x^2 - 6x + 7$ است که ریشه‌های آن $3 \pm \sqrt{2}$ هستند.

۱۷۸- گزینه ۳ چون معادله ی $ax^2+bx+c=0$ دو

ریشه ی حقیقی مختلف العلامت دارد، پس $b^2-4ac>0$. طول نقطه های A و B ریشه های معادله ی $ax^2+bx+c=0$ هستند. و چون $OA<OB$ ، پس مجموع ریشه های این معادله مثبت است، یعنی

$$OA+OB=-\frac{b}{a}>0$$

در نتیجه $\frac{b}{a}<0$ ، پس علامت a و b فرق دارد، یعنی $ab<0$.

چون معادله یک ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی دارد، پس حاصل ضرب ریشه هایش منفی است، یعنی $\frac{c}{a}<0$ و در نتیجه

$ac<0$. چون شاخه های سهمی روبه بالا هستند، پس $a>0$ و در نتیجه از $ab<0$ و $ac<0$ معلوم می شود که b و c منفی اند، پس $b+c<0$. بنابراین سه تا از نابرابری های مورد نظر درست هستند.

۱۷۹- گزینه ۳ فرض می کنیم تابع $y=ax^2+bx+c$

باشد. توجه کنید که $c=1$. همچنین، طول نقطه ی رأس سهمی برابر ۲ است. در نتیجه

$$\frac{-b}{2a}=2 \Rightarrow b=-4a$$

چون سهمی از نقطه ی $(2, -1)$ رد می شود، پس

$$a(2)^2+(-4a)(2)+1=1-4a=-1$$

در نتیجه $a=\frac{1}{2}$. بنابراین نمایش جبری تابع به صورت زیر است

$$y=\frac{x^2}{2}-2x+1$$

ریشه های معادله ی $\frac{x^2}{2}-2x+1=0$ برابر با $\frac{x^2}{2}-2x+1=0$ هستند.

چون d ریشه ی بزرگ تر است، پس $d=2+\sqrt{2}$.

۱۸۰- گزینه ۳ اگر در تساوی $f(x+1)=x^2-x-6$ ، به

جای x قرار دهیم $x-1$ ، به دست می آید

$$f(x)=(x-1)^2-(x-1)-6$$

$$=x^2-2x+1-x+1-6$$

$$=x^2-3x-4$$

بنابراین مجموع صفرهای تابع f برابر است با مجموع ریشه های معادله ی $x^2-3x-4=0$ که ۳ است.

۱۸۱- گزینه ۳ معادله ی مورد نظر را می توان این طور نوشت

$$-2x^2-6x+8=5x^2-20x+15$$

$$7x^2-14x+7=0 \Rightarrow 7(x-1)^2=0$$

$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

اما $x=1$ ریشه ی مخرج کسر است، بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۷۵- گزینه ۳ چون نمودار تابع f از نقطه ی $(0, -2)$

گذشته است، پس

$$f(0)=-2 \Rightarrow c=-2$$

از طرف دیگر، x_1 و x_2 ریشه های معادله ی زیر هستند،

$$-x^2+bx+c=0$$

در نتیجه $x_1+x_2=b$ و $x_1x_2=-c=2$. بنابراین

$$x_1+x_2=\frac{3}{2}x_1x_2 \Rightarrow b=\frac{3}{2} \times 2=3$$

بنابراین

$$f(x)=-x^2+3x-2$$

از طرف دیگر، عرض رأس سهمی برابر است با

$$\frac{fac-b^2}{4a}$$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع f برابر است با

$$\frac{4(-1)(-2)-3^2}{4(-1)}=\frac{1}{4}$$

۱۷۶- گزینه ۴ چون نمودار سهمی محور x را یک جا قطع

کرده است، پس معادله ی آن به شکل $y=A(x-1)^2$ است.

همچنین، چون سهمی از نقطه ی $(0, 2)$ گذشته است، پس

$$2=A(0-1)^2$$

یعنی $A=2$. بنابراین معادله ی سهمی به شکل زیر است،

$$y=2x^2-4x+2$$

در نتیجه

$$a+1=2 \Rightarrow a=1$$

$$b-1=-4 \Rightarrow b=-3$$

$$c=2$$

بنابراین

$$abc=-6$$

۱۷۷- گزینه ۱ فرض می کنیم طول نقطه های A و B

به ترتیب $-x_1$ و x_2 باشد. در این صورت $-x_1$ و x_2

ریشه های معادله ی $-x^2+4x+c+5=0$ هستند. در نتیجه

$$-x_1+x_2=-\frac{4}{-1}=4 \quad (1)$$

از طرف دیگر طول پاره خط AB برابر است با

$$x_1+x_2=6 \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) به دست می آید $x_1=1$ و $x_2=5$ ، بنابراین

$$-(c+5)=(-x_1)(x_2)=-x_1x_2=-5$$

پس $c=0$.

اگر دو طرف این معادله را در $x(x-2)(x+2)$ ضرب کنیم، به دست می‌آید

$$2x + (x-4)(x-2) = x+2 \Rightarrow 2x + x^2 - 6x + 8 = x+2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x=2, x=3$$

توجه کنید که جواب $x=2$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای $x=2$ مخرج کسره‌های $\frac{1}{x^2-2x}$ و $\frac{2}{x^2-4}$ صفر می‌شود.

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

دو طرف معادله را در x^2-1 که کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌هاست، ضرب می‌کنیم

$$x(x+1) + x(x-1) = 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x-1) = 0 \Rightarrow x=0, x=1$$

هر دو جواب باعث صفر شدن مخرج کسرها در معادله‌ی اصلی می‌شوند و قابل قبول نیستند. پس معادله جواب ندارد.

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+2}{x+1} + \frac{5}{2(x-1)} = 0$$

$$\frac{2(x-2) - 2(x+2)(x-1) + 5(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = 0$$

$$2x - 4 - 2x^2 - 2x + 4 + 5x + 5 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{65}}{4}, x = \frac{5 + \sqrt{65}}{4}$$

بنابراین معادله دو جواب دارد.

دو طرف معادله را در $(x+1)^2(x^2-x+1)$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{14}{(x+1)(x^2-x+1)} = 0$$

$$x^2 - x + 1 - (x+1)(x^2 - x + 1) + 14(x+1) = 0$$

$$x^3 - x^2 - 13x - 14 = 0$$

$$(x^3 + 8) - (x^2 + 13x + 22) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x+2)(x+11) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4 - x - 11) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 3x - 7) = 0$$

یک جواب معادله $x=-2$ است و دو جواب دیگر از معادله‌ی

$$x^2 - 3x - 7 = 0$$

به دست می‌آیند که ضرب آن‌ها -7 است. پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۱۴ است.

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{x}{x^4 - x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$$

بنابراین

$$x^4 - x = x^4 - x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

در معادله‌ی اخیر $\Delta = -3$ و در نتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

معادله‌ی موردنظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-1)\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}\right) = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x-5+x-3}{(x-3)(x-5)}\right) = 0$$

$$(x-1)\left(\frac{2x-8}{(x-3)(x-5)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-5)} = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله‌ی موردنظر ۱ و ۴ هستند و مجموع آن‌ها ۵ است.

دو طرف معادله‌ی داده شده را در

$$(x-1)(x^2-x+1)$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = \frac{y}{9}(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3 - 1 = \frac{y}{9}(x^3 + 1) \Rightarrow \frac{y}{9}x^3 = \frac{16}{9}$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر یک جواب دارد.

معادله را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x-2} - 1 = \frac{1}{x^2+2x-3} \Rightarrow \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x^2+2x-3}$$

در نتیجه

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x = 1$$

اما $x=1$ ریشه‌ی مخرج هر دو کسر است. بنابراین معادله جواب ندارد.

معادله را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\frac{2x}{x-5} - 2 = \frac{1-x}{x-3} + 1 \Rightarrow \frac{10}{x-5} = \frac{-2}{x-3}$$

در نتیجه

$$10x - 30 = -2x + 10 \Rightarrow 12x = 40 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

معادله‌ی داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-12}{x^2+3x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x+3} = \frac{2x+6+5x}{x^2+3x} = \frac{7x+6}{x^2+3x}$$

در نتیجه، با فرض $x \neq 0, -3$,

$$x-12 = 7x+6 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = -3$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

معادله‌ی موردنظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}$$

بنابراین معادله به صورت $\frac{x-5}{x^2-2x} + \frac{3}{2x-4} - \frac{1}{x} = 1$ است. دو

طرف معادله را در $2x(x-2)$ ضرب می‌کنیم

$$2(x-5) + 3x - 2(x-2) = 2x(x-2)$$

$$3x - 6 = 2x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(2x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = 2$$

چون $x=2$ باعث صفر شدن مخرج دو کسر در معادله اصلی می‌شود، پس قابل قبول نیست و معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۷- گزینه ۲ یک جواب معادله $x=2$ است، پس در معادله صدق می‌کند

$$\frac{2}{2} - \frac{a}{2-3} = 3 \Rightarrow 1+a=3 \Rightarrow a=2$$

بنابراین معادله به صورت $\frac{2}{x} - \frac{2}{x-3} = 3$ است. دو طرف

معادله را در $x(x-3)$ ضرب می‌کنیم

$$2x - 6 - 2x = 3x^2 - 9x \Rightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=2$$

بنابراین $b=1$ و در نتیجه $a+b=3$.

۱۹۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(x_1 - \frac{1}{x_1})^2 - 4x_1 + \frac{4}{x_1} = -4$$

$$(x_1 - \frac{1}{x_1})^2 - 4(x_1 - \frac{1}{x_1}) + 4 = 0$$

$$((x_1 - \frac{1}{x_1}) - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} = 2$$

اگر دو طرف تساوی آخر را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} - 2 = 4 \Rightarrow x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} = 6$$

۱۹۹- گزینه ۴ معادله داده شده را این طور می‌نویسیم

$$\frac{3x}{x+2} = \frac{2}{1+ax} - 2 = \frac{-2ax}{1+ax}$$

در نتیجه

$$x(\frac{3}{x+2} + \frac{2a}{1+ax}) = 0 \Rightarrow x(\frac{5ax+4a+3}{(x+2)(1+ax)}) = 0$$

ریشه‌های این معادله $5ax+4a+3=0$ ($a \neq 0$)، $x=0$ ، هستند. اگر $a=0$ ،

معادله $5ax+4a+3=0$ ریشه ندارد و معادله مورد نظر تنها یک جواب دارد. اگر $a \neq 0$ ، باید یکی از ریشه‌های مخرج یعنی

$-\frac{1}{a}$ یا -2 ریشه‌ی معادله $5ax+4a+3=0$ نیز باشد.

۱۹۲- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)} - \frac{3}{(x+1)(x+4)} = 1 \Rightarrow \frac{5(x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = 1$$

$$\frac{2(x+4)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = 1 \Rightarrow 2 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر -3 است.

۱۹۳- گزینه ۴ سمت راست معادله را ساده می‌کنیم

$$\frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x^3+1} = \frac{x^2+1-x^3+1}{(x^3-1)(x^3+1)} = \frac{2}{x^6-1}$$

بنابراین معادله به شکل $\frac{2x}{x^6-1} = \frac{2}{x^6-1}$ است، پس

$$2x(x^6-1) = 2(x^6-1) \Rightarrow x^6 - x = x^6 - 1 \Rightarrow x = 1$$

چون $x=1$ باعث صفر شدن مخرج دو کسر می‌شود، پس قابل قبول نیست و معادله جواب ندارد.

۱۹۴- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان این طور نوشت

$$(\frac{x^3-2}{x+2} + 3) - (\frac{13x+4}{x^2-1} + x) = 0$$

$$\frac{x^3+3x+4}{x+2} - \frac{x^3+3x+4}{x^2-1} = 0$$

$$(x^3+3x+4)(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-1}) = 0$$

$$(x^3+3x+4)(\frac{x^2-x-12}{(x+2)(x^2-1)}) = 0$$

$$\begin{cases} x^3+3x+4 = (x+1)(x^2-x+4) = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2-x-12 = (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 4 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها صفر است.

۱۹۵- گزینه ۳ معادله داده شده را این طور می‌نویسیم

$$\frac{3x-2-2a}{x^2-(a+2)x+2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a+5)x + 4a + 2 = 0 \quad (1)$$

چون $x=6$ ریشه‌ی معادله است، پس

$$36 - 6(a+5) + 4a + 2 = 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

چون مجموع ریشه‌های معادله (۱) برابر ۹ است، پس دومین ریشه‌ی معادله مورد نظر برابر ۳ است.

۱۹۶- گزینه ۱ چون $x = \frac{3}{2}$ جواب معادله است، پس در

معادله صدق می‌کند

$$\frac{\frac{3}{2}-5}{\frac{3}{2}-3} + \frac{3}{3-4} - \frac{2}{3} = a \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه

اگر دو طرف این معادله را در $t(t+1)$ ضرب کنیم، می‌شود

$$4(t+1)+5t=2t(t+1) \Rightarrow 4t+4+5t=2t^2+2t$$

$$2t^2-7t-4=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}, t=4$$

چون $t > 0$ ، پس $t = -\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است. اگر $t = 4$ ، آن وقت

$$x^2+4=4 \Rightarrow x=0$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر یک جواب دارد.

۲-۳- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم

$$\frac{1}{x}=t$$

در این صورت معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2-t-a=0$$

برای این که معادله جواب داشته باشد، باید $\Delta \geq 0$. پس

$$1+4a \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{4}$$

۲-۴- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم

$$\frac{2x+1}{x}=t$$

در این صورت معادله‌ی موردنظر به معادله‌های زیر تبدیل می‌شود

$$t+\frac{4}{t}=5 \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow t=1, t=4$$

بنابراین

$$t=1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x}=1 \Rightarrow x=-1$$

$$t=4 \Rightarrow \frac{2x+1}{x}=4 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی موردنظر برابر است با

$$(-1)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

۲-۵- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم $x+x^2=t$. در این صورت

معادله‌ی موردنظر به معادله‌های زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{3}{1+t}=3-t \Rightarrow 3=(3-t)(1+t)=3+3t-t-t^2$$

$$\Rightarrow t^2=2t \Rightarrow t=0, t=2$$

بنابراین

$$t=0 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -1$$

$$t=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -1$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله‌ی موردنظر برابر است با

$$-1-1=-2$$

$$x=-2 \Rightarrow -10a+4a+3=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{1}{a} \Rightarrow -5+4a+3=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a=0, \frac{1}{2}$$

۲-۶- گزینه‌ی ۳ دو طرف معادله را در x^2-1 ضرب می‌کنیم

$$x-1+2=a(x^2-1) \Rightarrow ax^2-x-(a+1)=0 \quad (*)$$

برای این که معادله‌ی (*) جواب نداشته باشد، یا باید $\Delta < 0$ ، پس

$$\Delta=1+4a(a+1)<0 \Rightarrow 4a^2+4a+1<0$$

$$\Rightarrow (2a+1)^2<0$$

نابرابری فوق به ازای هیچ مقدار a برقرار نیست. پسمعادله‌ی (*) همواره جواب دارد. یا باید $x=1$ یا $x=-1$

ریشه‌های معادله (*) باشند که در معادله‌ی اصلی قابل قبول

نیستند، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کنند.

$$x=1: a-1-(a+1)=0 \Rightarrow -2=0$$

پس $x=1$ نمی‌تواند جواب معادله‌ی (*) باشد.

$$x=-1: a+1-(a+1)=0 \Rightarrow 0=0$$

پس $x=-1$ همواره جواب معادله‌ی (*) است و در این صورت $x=\frac{a+1}{a}$ جواب دیگر معادله است. اگر $a=0$ یا $a=-\frac{1}{2}$ ،معادله‌ی (*) فقط یک جواب $x=-1$ دارد و در نتیجه

معادله‌ی اصلی جواب ندارد.

۲-۷- گزینه‌ی ۱ اگر فرض کنیم

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=t$$

معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2-3t-4=0 \Rightarrow (t-4)(t+1)=0 \Rightarrow t=-1, t=4$$

چون $t > 0$ ، پس $t=-1$ غیر قابل قبول است. اگر $t=4$ ، آن

وقت

$$x+\frac{2}{x}=2 \Rightarrow x^2-2x+2=0, \quad \Delta < 0$$

$$x+\frac{2}{x}=-2 \Rightarrow x^2+2x+2=0, \quad \Delta < 0$$

پس معادله جواب ندارد.

۲-۸- گزینه‌ی ۱ اگر فرض کنیم $x^2+4=t$ ، معادله‌ی

موردنظر می‌شود

$$\frac{4}{t}+\frac{5}{t+1}=2$$

۲۱۰- گزینهی ۴ توجه کنید که با افزایش x گرم طلا، میزان طلا در گردن‌بند برابر $x+12$ و کل وزن گردن‌بند برابر $x+20$ می‌شود. در نتیجه

$$\frac{x+12}{x+20} = \frac{8}{10} \Rightarrow 10x+120=8x+160$$

$$\Rightarrow 2x=40 \Rightarrow x=20$$

۲۱۱- گزینهی ۴ ابتدا توجه کنید که $x-1 \geq 0$. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$4-x^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

بنابراین

$$2x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2-\sqrt{28}}{4}, x=\frac{2+\sqrt{28}}{4}$$

که جواب اول منفی است و قابل قبول نیست.

۲۱۲- گزینهی ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}-1$

می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x-2=x+1+1-2\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1}=2$$

$$x+1=4 \Rightarrow x=3$$

بنابراین معادله یک جواب دارد. توجه کنید که $x=3$ در معادله‌ی اصلی صدق می‌کند.

۲۱۳- گزینهی ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x}=4-x$ می‌نویسیم.

توجه کنید که باید جواب‌های به‌دست آمده در شرط $0 \leq x \leq 4$ صدق کنند زیرا عبارت زیر رادیکال نباید منفی شود و حاصل $\sqrt{x}$ نیز نمی‌تواند منفی باشد. حالا دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x=16+x^2-8x \Rightarrow x^2-9x+16=0$$

$$x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} < 4, x=\frac{9+\sqrt{17}}{2} > 4$$

بنابراین $x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$ تنها جواب معادله است.

۲۱۴- گزینهی ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{3x-2}=2-2\sqrt{x} \quad (*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

$$3x-2=4+4x-8\sqrt{x} \Rightarrow x+6=8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^2+36+12x=64x \Rightarrow x^2-52x+36=0$$

$$x=26-8\sqrt{10}, x=26+8\sqrt{10}$$

در معادله‌ی (*) طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$2-2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب $26+8\sqrt{10}$ قابل قبول نیست و $x=26-8\sqrt{10}$ جواب معادله است.

۲۰۶- گزینهی ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر

باشند، در نتیجه هزینه سرانه‌ی ابتدایی برابر $\frac{700}{n}$ (برحسب

هزار تومان) است. با افزودن ۵ نفر از اولیا هزینه‌ی سرانه برابر

با $\frac{700}{n}-7$ می‌شود. در نتیجه

$$\left(\frac{700}{n}-7\right)(n+5)=700$$

بنابراین

$$\left(\frac{700-7n}{n}\right)(n+5)=700 \Rightarrow (700-7n)(n+5)=700n$$

$$n^2+5n-500=0 \Rightarrow (n+25)(n-20)=0 \Rightarrow n=-25, n=20$$

تنها جواب $n=20$ قابل قبول است.

۲۰۷- گزینهی ۲ اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث را

a و b و طول وتر آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+\frac{16}{9}a^2} = \sqrt{\frac{25}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

بنابراین

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{4}{3}a} + \frac{1}{\frac{5}{3}a} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{4a} + \frac{3}{5a} = \frac{47}{30}$$

دو طرف معادله را در $60a$ ضرب می‌کنیم

$$60+45+36=94a \Rightarrow a=\frac{141}{94}=\frac{3}{2} \Rightarrow b=2$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$$

۲۰۸- گزینهی ۱ ۲۰ کیلوگرم از مخلوط اولیه شکر و ۸۰

کیلوگرم آن آب است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰

کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه

کنیم، وزن شکر $20+x$ و وزن مخلوط $60+x$ می‌شود. پس

$$\frac{20+x}{60+x} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{20+x}{60+x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 100+5x=120+2x$$

$$\Rightarrow 3x=20 \Rightarrow x=\frac{20}{3}$$

۲۰۹- گزینهی ۳ در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است،

$\frac{40}{100} \times 11 = 4.4$ کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم

است، $\frac{70}{100} \times 4 = 2.8$ کیلوگرم رنگ است. فرض می‌کنیم که با

تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{4.4+2.8}{11+4-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7.2}{15-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0.6$$

۲۱۹- گزینه‌ی ۲ یک جواب معادله $x=2$ است، پس $x=2$

باید در معادله صدق کند

$$\sqrt{2-1} + \sqrt{a-2} = 3 \Rightarrow \sqrt{a-2} = 2 \Rightarrow a-2=4 \Rightarrow a=6$$

بنابراین معادله به صورت $\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} = 3$ است و در

نتیجه

$$\sqrt{x-1} - 3 = -\sqrt{6-x} \Rightarrow x-1+9-6\sqrt{x-1} = 6-x$$

$$x+1=3\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2+2x+1=9x-9$$

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-2)(x-5)=0 \Rightarrow x=2, x=5$$

هر دو جواب در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۱۵- گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم

$$\sqrt{4+x}=a, \quad \sqrt{5-x}=b$$

در این صورت

$$a^2+b^2=9$$

همچنین $a+b=3$ ، بنابراین

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=9-9=0$$

در نتیجه $ab=0$ ، پس

$$ab=\sqrt{4+x} \times \sqrt{5-x}=0 \Rightarrow x=-4, x=5$$

۲۱۶- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{4-x}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} 3x-5=1+4-x+2\sqrt{4-x}$$

$$4x-10=2\sqrt{4-x} \Rightarrow 2x-5=\sqrt{4-x}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} 4x^2+25-20x=4-x$$

$$4x^2-19x+21=0 \Rightarrow x=\frac{7}{4}, x=3$$

$x=3$ در معادله صدق می‌کند، اما $x=\frac{7}{4}$ در معادله صدق

نمی‌کند، زیرا سمت چپ معادله برابر ۱- می‌شود.

۲۱۷- گزینه‌ی ۲ اگر دو طرف معادله‌ی موردنظر را به توان

دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$4-6x-x^2=x^2+8x+16$$

$$2x^2+14x+12=0 \Rightarrow x^2+7x+6=0$$

$$(x+6)(x+1)=0 \Rightarrow x=-6, x=-1$$

$x=-1$ در معادله صدق می‌کند، اما اگر $x=-6$ ، سمت

راست معادله منفی می‌شود در حالی که سمت چپ آن نامنفی

است، پس تنها جواب $x=-1$ است.

۲۱۸- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم $x^2+4x+5=t$ ، در این

صورت معادله‌ی موردنظر به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\xrightarrow[\text{به توان دو می‌رسانیم}]{t-2=\sqrt{t}} t^2-4t+4=t$$

$$t^2-5t+4=0 \Rightarrow t=1, t=4$$

در صورتی که $t=1$ ، سمت چپ معادله‌ی $t-2=\sqrt{t}$ منفی

می‌شود، در حالی که سمت چپ آن نامنفی است، پس

$$t=4 \Rightarrow x^2+4x+5=4 \Rightarrow x^2+4x+1=0$$

این معادله دو ریشه دارد و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر

۱ است.

کتابخانه

فصل دوم

@khanah book

هندسه

خانه کتاب

فصل دوم: هندسه

درس‌های اول و دوم: ترسیم‌های هندسی – استدلال و قضیه‌ی تالس

استدلال

در استدلال استقرایی بر اساس بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود. اگر استدلال بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه‌ی واقعیت‌هایی باشد که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود.

به نتایج مهم و کاربردی که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند **قضیه** می‌گویند. اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آن چه حاصل می‌شود **عکس قضیه** است. عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد. اگر عکس یک قضیه درست باشد، آن گاه این قضیه و عکس آن را می‌توان به صورت «اگر و فقط اگر» یا نماد $\Leftrightarrow$ بیان کرد. این قضیه‌ها را **قضیه‌های دوشرطی** می‌نامند. گزاره جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، هر چند که درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. **نقیض** یک گزاره، گزاره‌ای است که از یک گزاره ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

برهان غیرمستقیم یا **برهان خلف** نوعی از استدلال است، که در آن به جای این که به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد و به یک تناقض یا یک نتیجه‌ی غیرممکن می‌رسیم.

مثال نقض مثالی است که برای رد کردن یک حکم از آن استفاده می‌شود.

درستی یک نتیجه‌گیری کلی به وسیله‌ی اثبات می‌گردد و نادرستی آن با یک نشان داده می‌شود.

تست ۱

- (۱) مثال نقض - استدلال استقرایی
(۲) استدلال استنتاجی - استدلال استقرایی
(۳) استدلال استنتاجی - مثال نقض
(۴) استدلال استنتاجی - برهان خلف

پاسخ: گزینه‌ی (۳) درست است.

نقیض گزاره‌ی «مستطیل چهار زاویه‌ی قائمه دارد» کدام است؟

تست ۲

- (۱) مستطیلی وجود دارد که چهار زاویه‌اش قائمه هستند.
(۲) مستطیلی وجود دارد که هیچ زاویه‌ای از آن قائمه نیست.
(۳) مستطیلی وجود دارد که دست کم یک زاویه‌ی غیرقائم دارد.
(۴) مستطیلی وجود دارد که حداکثر یک زاویه‌ی قائمه دارد.

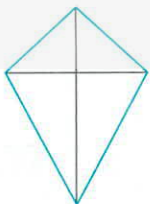
پاسخ: گزینه‌ی (۳) درست است.

کدام قضیه دوشرطی نیست؟

تست ۳

- (۱) در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه‌ی یکی از ضلع‌ها بر هم منطبق هستند.
(۲) اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن گاه ضلع‌های یکی، همان ضلع‌های دیگری هستند.
(۳) فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز زاویه تا ضلع‌های آن برابر است.
(۴) در لوزی قطر‌ها بر هم عمودند.

پاسخ: عکس قضیه‌ی گزینه‌ی (۴) درست نیست، مثال نقض آن شکل زیر است. پس این قضیه دوشرطی نیست. بقیه‌ی گزینه‌ها قضیه‌هایی دوشرطی‌اند.



خاصیت عمودمنصف

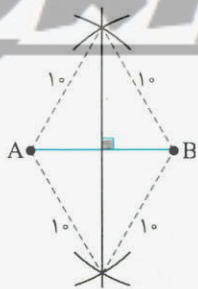
هر نقطه که روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، و برعکس، اگر فاصله‌ی نقطه‌ای تا دو سر یک پاره‌خط برابر باشد، این نقطه روی عمودمنصف این پاره‌خط است.

پاره‌خط AB به طول 10 مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف آن وجود دارد که از دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی 10 هستند؟

تست ۴

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) نامتناهی (۴) ۱

پاسخ: پاره‌خط AB به طول 10 را رسم می‌کنیم. به مرکزهای A و B و شعاع‌های 10 کمان‌هایی رسم می‌کنیم. چون این کمان‌ها یک‌دیگر را، روی عمودمنصف، در دو نقطه قطع می‌کنند، پس دو نقطه با چنین ویژگی‌ای داریم.

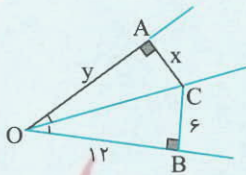


خاصیت نیمساز

فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه تا دو ضلع این زاویه برابر است، و برعکس، اگر فاصله‌ی نقطه‌ای تا دو ضلع یک زاویه برابر باشد، این نقطه روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

در شکل مقابل مقدار $x + y$ چقدر است؟

تست ۵



پاسخ: چون C روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد، پس $x = CA = CB = 6$. از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OAC و OBC همنهشت‌اند (وتر و یک زاویه‌ی حاده). بنابراین

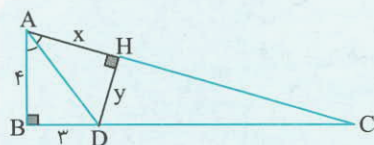
$$y = OA = OB = 12$$

در نتیجه

$$x + y = 18$$

در شکل مقابل مقدار $x + y$ چقدر است؟

تست ۶



پاسخ: چون D روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس

$$y = DH = DB = 3$$

از طرف دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABD و AHD همنهشت‌اند (وتر و یک زاویه‌ی حاده). بنابراین

$$x = AH = AB = 4$$

در نتیجه

$$x + y = 7$$

نسبت و تناسب

هر دو نسبت برابر، یک **تناسب** تشکیل می‌دهند. برخی ویژگی‌های تناسب را در زیر آورده‌ایم:

الف) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ (طرفین - وسطین کردن)

ب) $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, d \neq 0$) (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

پ) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ($a, c \neq 0$) (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ($a, b, c, d \neq 0$) (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ترکیب نسبت در صورت)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ($a+b, c+d \neq 0$) (ترکیب نسبت در مخرج)

ج) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (تفضیل نسبت در صورت)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ ($a-b, c-d \neq 0$) (تفضیل نسبت در مخرج)

اگر $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$ ، نسبت $\frac{2n}{n-m}$ برابر کدام است؟

تست ۷

$\frac{2}{5}$ (۴)

۵ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: اگر تناسب داده شده را تفضیل در صورت کنیم، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{n-m}{n} = \frac{5-3}{5} \Rightarrow \frac{n}{n-m} = \frac{5}{2}$$

اگر طرفین تناسب آخر را در ۲ ضرب کنیم، به دست می‌آید $\frac{2n}{n-m} = 5$.

درباره‌ی عددهای غیر صفر x, y و z می‌دانیم $3x = y = 2z$. مقدار $\frac{3x+y-4z}{x+y}$ کدام است؟

تست ۸

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: از تساوی $3x = y = 2z$ نتیجه می‌شود $x = \frac{y}{3}$ و $z = \frac{y}{2}$. اکنون این مقادیر را در عبارت خواسته شده

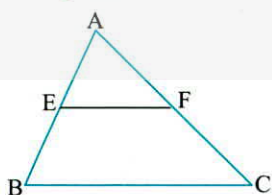
قرار می‌دهیم:

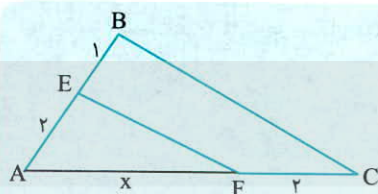
$$\frac{3x+y-4z}{x+y} = \frac{3(\frac{y}{3})+y-4(\frac{y}{2})}{\frac{y}{3}+y} = \frac{y+y-2y}{\frac{4y}{3}} = 0$$

قضیه‌ی تالس

اگر مانند شکل مقابل در مثلث ABC ، $EF \parallel BC$ ، آن‌گاه

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$





در شکل مقابل $EF \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟

تست ۹

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

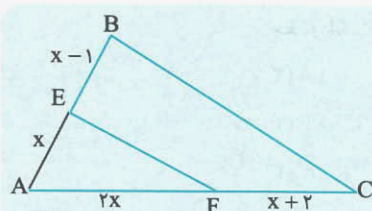
۴ (۴)

پاسخ: چون

$EF \parallel BC$

بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \times 2 = 4$$



در شکل مقابل $EF \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟

تست ۱۰

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

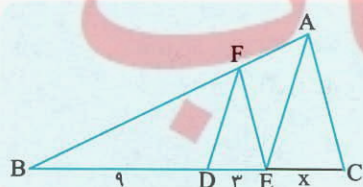
۴ (۴)

پاسخ: چون

$EF \parallel BC$

بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow x^2 + 2x = 2x^2 - 2x \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x = 4$$



در شکل مقابل $EF \parallel AC$ و $FD \parallel AE$. مقدار x چقدر است؟

تست ۱۱

۵ (۲)

۲ (۱)

۴ (۴)

۷ (۳)

پاسخ: چون

$FD \parallel AE$

بنابر قضیه تالس در مثلث ABE،

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DE} = \frac{9}{3} = 3$$

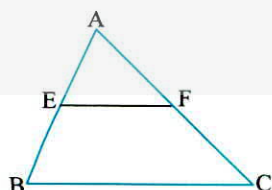
همین طور، چون $EF \parallel AC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC،

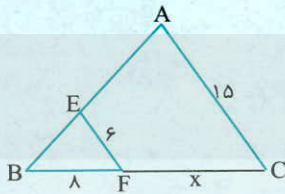
$$\frac{BE}{EC} = \frac{BF}{FA} \Rightarrow \frac{12}{x} = 3 \Rightarrow x = 4$$

تعمیم قضیه تالس

اگر مانند شکل مقابل در مثلث ABC، $EF \parallel BC$ ، آنگاه

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$



در شکل مقابل $EF \parallel AC$. مقدار x چقدر است؟

تست ۱۲

(۱) ۳

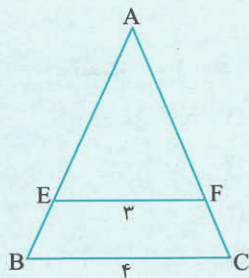
(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۱۲

پاسخ: چون $EF \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه ی تالس،

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow \frac{6}{8+x} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{8}{8+x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 40 = 2(8+x) \Rightarrow 40 = 16 + 2x \Rightarrow x = 12$$

در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $AB + AC = 12$. مقدار $AE + AF$ چقدر است؟

تست ۱۳

(۱) ۱۰

(۲) ۹

(۳) ۸

(۴) ۷

پاسخ: چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه ی تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{4}$$

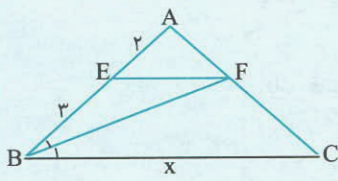
بنابراین

$$\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AE = \frac{3}{4} AB \quad (1)$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AF = \frac{3}{4} AC \quad (2)$$

اگر تساوی های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم به دست می آید

$$AE + AF = \frac{3}{4} (AB + AC) = \frac{3}{4} (12) = 9$$

در شکل مقابل $EF \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟

تست ۱۴

$$\frac{15}{2} \quad (2)$$

(۱) ۱۵

$$\frac{15}{7} \quad (4)$$

(۳) $\frac{15}{4}$ پاسخ: ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، بنابر قضیه ی خطوطموازی و مورب، $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و چون $\hat{B}_2 = \hat{F}_1$ ، پس

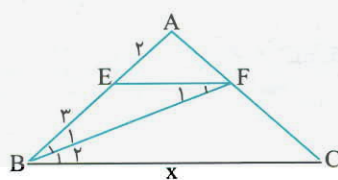
$$\hat{B}_1 = \hat{F}_1$$

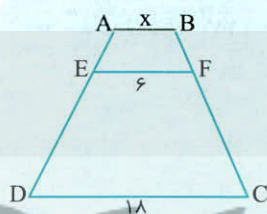
بنابراین مثلث BEF متساوی الساقین است و در نتیجه

$$EF = EB = 3$$

اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه ی تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{2+3} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$





در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟ $FC = 3BF$ و DC موازی اند و EF ، AB

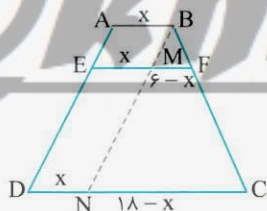
تست ۱۵

۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)



پاسخ: از B خطی موازی AD رسم می کنیم و فرض می کنیم پاره خط های EF و DC را به ترتیب در نقطه های M و N قطع کند. در این صورت EMND و ABME متوازی الاضلاع اند، و چون در متوازی الاضلاع ضلع های روبه رو برابرند، پس

$$DN = EM = AB = x$$

در نتیجه

$$MF = EF - EM = 6 - x$$

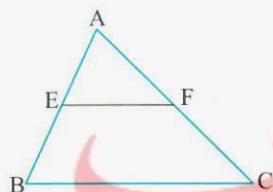
$$NC = DC - DN = 18 - x$$

اکنون توجه کنید که چون $MF \parallel NC$ ، بنابر تعمیم قضیه ی تالس در مثلث BNC،

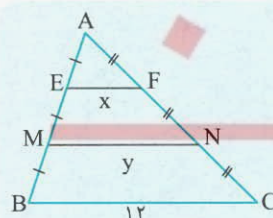
$$\frac{MF}{NC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{6-x}{18-x} = \frac{BF}{BF+FC} = \frac{BF}{BF+3BF} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 24 - 4x = 18 - x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

عکس قضیه ی تالس



اگر مانند شکل مقابل نقطه های E و F به ترتیب روی ضلع های AB و AC از مثلث ABC باشند و $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ ، آن گاه EF با BC موازی است.



در شکل مقابل مقدار $x+y$ چقدر است؟

تست ۱۶

۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۲ (۳)

۱۴ (۴)

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه، بنابر عکس قضیه ی تالس، $EF \parallel BC$. به همین ترتیب،

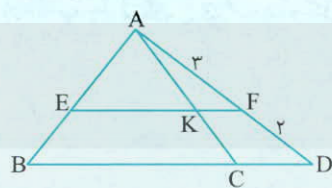
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{2}{1}$$

پس باز هم بنابر عکس قضیه ی تالس، $MN \parallel BC$. اکنون توجه کنید که بنابر تعمیم قضیه ی تالس،

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 4$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 8$$

پس $x+y=12$.



در شکل مقابل $\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AC}$ مقدار $\frac{KF}{CD}$ چقدر است؟

تست ۱۷

- (۱) $\frac{1}{5}$
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: اگر تناسب $\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AC}$ را تفصیل در مخرج کنیم به دست می‌آید $\frac{AE}{EB} = \frac{AK}{KC}$. در نتیجه، بنابر عکس قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، $EK \parallel BC$. بنابراین $EF \parallel BD$ و در نتیجه بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ACD،

$$\frac{KF}{CD} = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{5}$$

در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی است و اندازه‌ی آن برابر با نصف اندازه‌ی ضلع سوم است. به هر یک از این پاره‌خط‌ها یک **میان خط** مثلث می‌گوییم.

نکته

وسط‌های ضلع‌های مجاور یک چهارضلعی را به یک‌دیگر وصل کرده‌ایم. شکل حاصل حتماً کدام است؟

تست ۱۸

- (۱) مربع (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) لوزی

پاسخ: از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم که در آن M، N، P و Q وسط‌های ضلع‌های چهارضلعی ABCD هستند. در مثلث ABC، MN میان‌خط مثلث است، پس

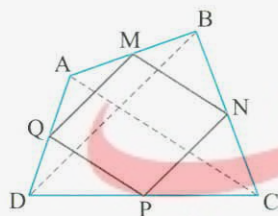
$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC$$

به‌طور مشابه در مثلث DAC، PQ میان‌خط است و $PQ = \frac{1}{2} AC$

و $PQ \parallel AC$ ، بنابراین

$$MN = PQ, \quad MN \parallel PQ$$

در نتیجه MNPQ متوازی‌الاضلاع است.



در مثلث ABC، از رأس B خطی رسم کرده‌ایم که از نقطه‌ی O، وسط میانه‌ی AM گذشته و ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع کرده است. اگر $OB = 6$ ، طول OD چقدر است؟

تست ۱۹

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

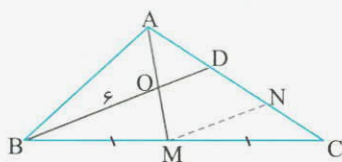
پاسخ: از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم که در آن از نقطه‌ی M خطی موازی BD رسم کرده‌ایم و محل برخورد آن با AC را N نامیده‌ایم. در مثلث AMN، OD میان‌خط است، پس

$$OD = \frac{1}{2} MN$$

است، پس $MN = \frac{1}{2} BD$ در نتیجه

$$OD = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BD \right) = \frac{1}{4} BD$$

بنابراین $OD = \frac{1}{4} (6 + OD)$ ، در نتیجه $OD = 2$.

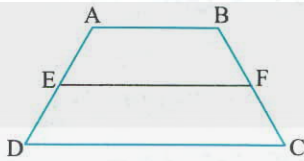


قضیه تالس در ذوزنقه



اگر مانند شکل مقابل در ذوزنقه $ABCD$ ، پاره‌های AB ، EF و DC موازی باشند، آنگاه

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

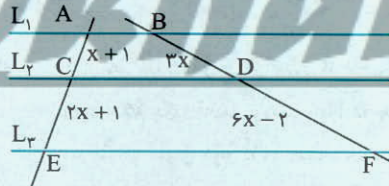


در شکل مقابل خط‌های L_1 ، L_2 و L_3 موازی‌اند. طول

تست ۲۰



پاره‌خط AC چقدر است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: در ذوزنقه $ABFE$ ، چون AB ، CD و EF موازی هستند، از قضیه تالس در ذوزنقه نتیجه می‌شود

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF} \Rightarrow \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x}{6x-2}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 2x + 6x - 2 = 6x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow x = 2$$

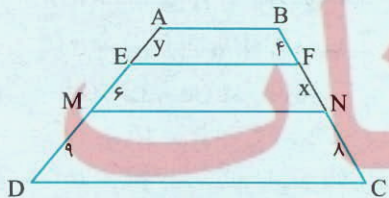
بنابراین $AC = x + 1 = 3$.

در شکل مقابل AB ، EF ، MN و DC موازی‌اند. مقدار $\frac{x}{y}$

تست ۲۱



چقدر است؟



(۲) $\frac{32}{27}$

(۴) $\frac{37}{27}$

(۱) $\frac{31}{27}$

(۳) $\frac{34}{27}$

پاسخ: بنابر قضیه تالس در ذوزنقه $EFCD$ ،

$$\frac{EM}{MD} = \frac{FN}{NC} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

بنابر قضیه تالس در ذوزنقه $ABNM$ ،

$$\frac{AE}{EM} = \frac{BF}{FN} \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{4}{\frac{16}{3}} \Rightarrow y = \frac{9}{2}$$

بنابراین $\frac{x}{y} = \frac{32}{27}$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل دوم

درس‌های اول و دوم:

ترسیم‌های هندسی - استدلال و قضیه‌ی تالس

۱- «در هر مثلث مربع هر ضلع، از مجموع مربعات دو ضلع دیگر کوچک‌تر است».

این حکم یک قضیه نیست زیرا در مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است. در نتیجه‌گیری فوق از استفاده کرده‌ایم.

(۱) برهان خلف (۲) استدلال استنتاجی (۳) استدلال استقرایی (۴) مثال نقض

۲- عکس کدام قضیه‌ی زیر درست نیست؟

- (۱) اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن‌گاه قطرهایش مساوی و بر یک‌دیگر عمودند.
 (۲) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهای چهارضلعی بر هم عمودند.
 (۳) اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه ارتفاع و میانه‌ی یک ضلع بر هم منطبق‌اند.
 (۴) اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن‌گاه اضلاع متناظر آن‌ها مساویند.

۳- نقیض گزاره‌ی «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست» کدام است؟

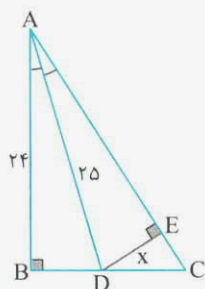
- (۱) در هر مثلث مجموع زوایای داخلی 180° نیست.
 (۲) حداقل در یک مثلث مجموع زوایای داخلی 180° است.
 (۳) هیچ مثلثی وجود ندارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° باشد.
 (۴) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

۴- کدام حکم مثال نقض دارد؟

- (۱) دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند.
 (۲) اگر دو زاویه برابر باشند، مکمل‌هایشان نیز برابرند.
 (۳) اگر یک زاویه‌ی مثلث متساوی‌الساقینی 60° باشد، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.
 (۴) محل برخورد سه ارتفاع هر مثلث داخل یا خارج مثلث قرار دارد.

۵- پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف این پاره‌خط وجود دارد به طوری که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر ۵ است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی

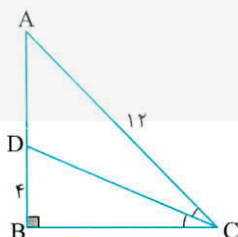


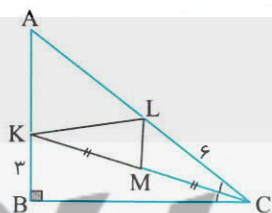
۶- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۷
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۵
 (۴) ۱۸

۷- در شکل مقابل مساحت مثلث ADC چقدر است؟

- (۱) ۱۶
 (۲) ۱۸
 (۳) ۲۴
 (۴) ۳۰





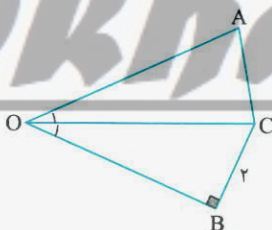
۸- در شکل مقابل مساحت مثلث KLM چقدر است؟

۱۸ (۱)

۱۲ (۲)

۹ (۳)

$\frac{9}{2}$ (۴)



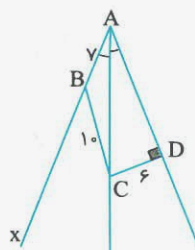
۹- در شکل مقابل $OA - OB = 4$. اختلاف مساحت مثلث‌های AOC و BOC چقدر است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)



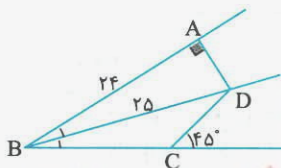
۱۰- در شکل روبه‌رو طول AD کدام است؟

۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

۱۷ (۳)

۱۵ (۴)



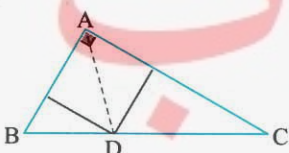
۱۱- در شکل روبه‌رو طول BC چقدر است؟

۱۵ (۱)

۱۷ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)



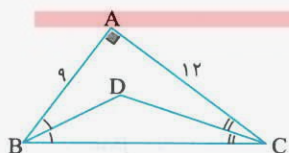
۱۲- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه‌ی قائمه کدام است؟ (تجربی - ۹۵)

$\frac{2}{1}$ (۲)

$\frac{2}{1\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (۱)

$\frac{2}{8}$ (۳)



۱۳- در شکل مقابل مساحت مثلث BDC چقدر است؟

۲۰ (۱)

$\frac{22}{5}$ (۲)

۳۰ (۳)

۴۵ (۴)

۱۴- اگر $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{b+c}{a+d}$ چقدر است؟

۴ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۱۵- اگر $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ و $3x + 2y - z = 12$ ، مقدار Z چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۶- اگر $\frac{a}{-5} = \frac{f}{b} = c$ و $a + b + c = 0$ ، مقدار c^2 چقدر است؟

۳ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

۱ (۱)

۱۷- اگر $\frac{z}{t} = 1$, $\frac{y}{z} = \frac{1}{4}$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ و $x+y+z+t=38$, مقدار z چقدر است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱۸- اگر $\frac{a}{\delta} = \frac{b}{\gamma} = \frac{c}{\phi} = k$ و $\frac{3a+2b+mc}{\delta 3} = k$, مقدار m کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۹- اگر $\frac{3x-y}{y} = k$, مقدار $\frac{x+y}{x-2y}$ بر حسب k کدام است؟

 $\frac{k+4}{k-5}$ (۴) $\frac{k+3}{k-3}$ (۳) $\frac{k+1}{k-5}$ (۲) $\frac{k}{k-1}$ (۱)

۲۰- اگر $\frac{4x-y}{2x+y} = \frac{1}{5}$, مقدار $\frac{6x+y}{x+y}$ چقدر است؟

 $\frac{9}{4}$ (۴)

۳ (۳)

 $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۱)

۲۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $\frac{a+7c}{b+7d} = \frac{3}{2}$, حاصل $\frac{ad+bc}{bd}$ کدام است؟

-۲ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۲۲- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $\frac{3a-c}{2b-d} = \frac{7}{4}$, مقدار $a+b$ کدام است؟

۵۴ (۴)

۴۴ (۳)

۵۵ (۲)

۶۶ (۱)

۲۳- اگر $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$, مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{10}$ (۲) $\frac{10}{7}$ (۱)

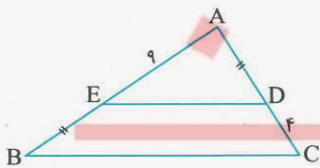
۲۴- در شکل روبه‌رو $ED \parallel BC$, طول AC چند است؟

۸ (۱)

۶ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)



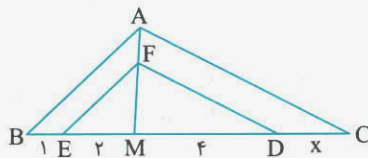
۲۵- در شکل مقابل $EF \parallel AB$ و $DF \parallel AC$, مقدار x چقدر است؟

 $\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

 $\frac{5}{2}$ (۴)

۲ (۳)



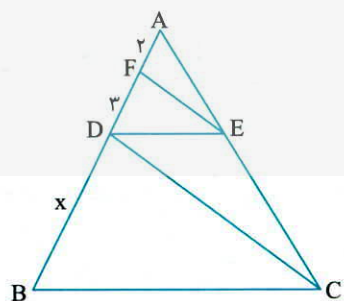
۲۶- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $EF \parallel CD$, مقدار x چقدر است؟

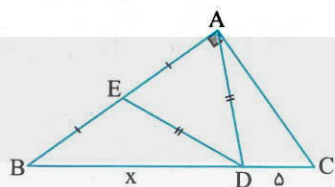
۷/۵ (۱)

۸/۵ (۲)

۶/۵ (۳)

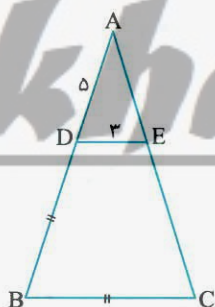
۹/۵ (۴)





۲۷- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

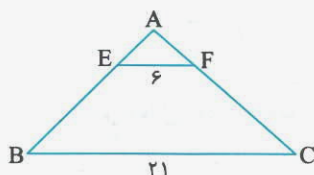
- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۱۸
(۴) ۲۰



۲۸- در شکل رویهرو $DE \parallel BC$. مقدار $\frac{AE}{EC}$ چقدر است؟

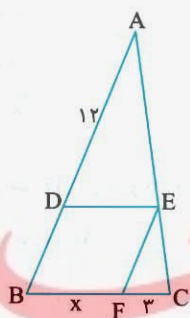
- (۲) $\frac{۵}{۲}$
(۴) $\frac{۲}{۳}$

- (۱) $\frac{۳}{۲}$
(۳) $\frac{۲}{۵}$



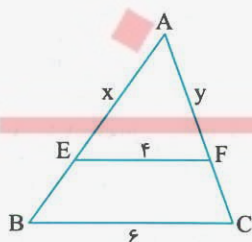
۲۹- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $BE + CF = ۲۰$ ، محیط مثلث AEF چقدر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵



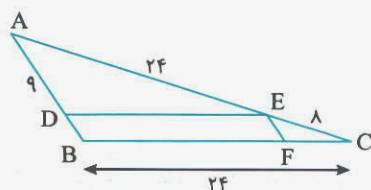
۳۰- در شکل مقابل BFED لوزی است. مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۹
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۱۲



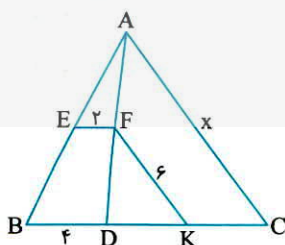
۳۱- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $x + y = ۸$ ، محیط مثلث ABC چقدر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸



۳۲- در شکل مقابل DBFE متوازی الاضلاع است. محیط آن چقدر است؟

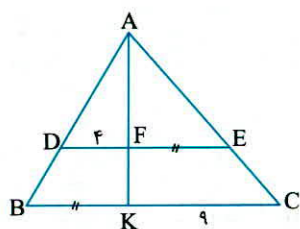
- (۱) ۴۲
(۲) ۲۸
(۳) ۱۹
(۴) ۳۸



۳۳- در شکل مقابل $EF \parallel BD$ و $FK \parallel AC$. مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۶

۳۴- در شکل مقابل $DE \parallel BC$. مقدار $\frac{AE}{EC}$ چقدر است؟



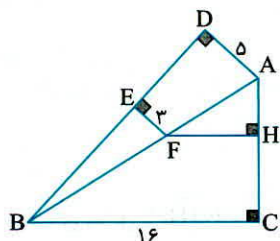
(۱) ۲

(۲) $1/5$

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$

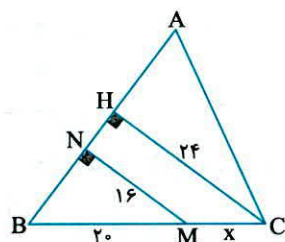
۳۵- در شکل مقابل طول FH چقدر است؟

(۲) $\frac{27}{5}$

(۱) ۶

(۴) $\frac{32}{5}$ (۳) $\frac{24}{5}$

۳۶- در شکل مقابل مقدار X چقدر است؟

(۱) $7/5$

(۲) ۱۰

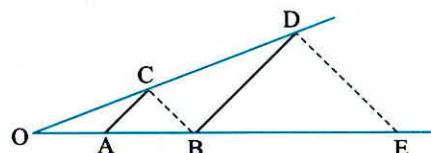
(۳) ۵

(۴) ۱۵

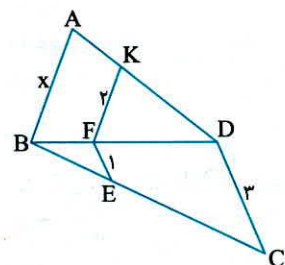
۳۷- در شکل روبه‌رو دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = 3$ و $AB = 5$ ، اندازه‌ی BE

(خارج از کشور تجربی - ۹۴)

کدام است؟

(۲) $12\frac{2}{3}$ (۱) $13\frac{1}{3}$ (۴) $10\frac{2}{3}$ (۳) $11\frac{1}{3}$

۳۸- در شکل مقابل $EF \parallel CD$ و $FK \parallel AB$. مقدار x چقدر است؟



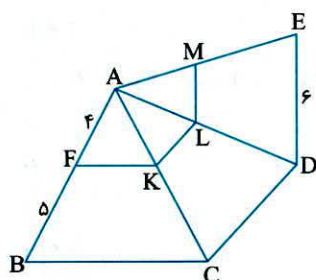
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳۹- در شکل مقابل $FK \parallel BC$ ، $KL \parallel CD$ و $LM \parallel DE$. طول پاره‌خط LM چقدر است؟

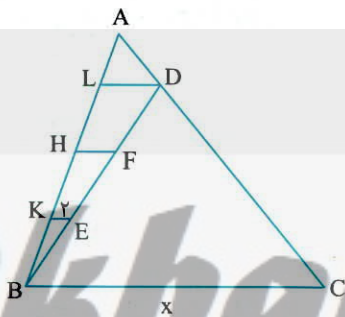


(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{10}{3}$

۴۰- در شکل مقابل نقطه‌های L، H و K پاره خط AB را به چهار قسمت برابر تقسیم کرده‌اند و LD، HF، KE و BC موازی‌اند. مقدار x چقدر است؟



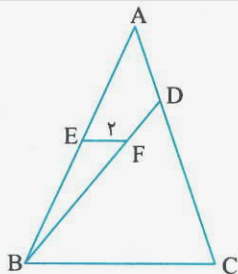
(۱) ۲۴

(۲) ۲۲

(۳) ۱۸

(۴) ۱۶

۴۱- در شکل روبه‌رو $EF \parallel BC$ اگر $\frac{BF}{FD} = 2$ و $\frac{DC}{AD} = 5$ ، طول BC چند است؟



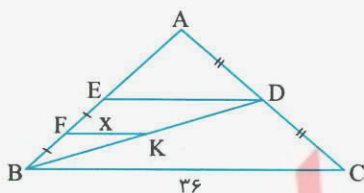
(۱) ۱۸

(۲) ۱۲

(۳) ۱۵

(۴) ۲۱

۴۲- در شکل مقابل ED، FK و BC موازی‌اند. مقدار x چقدر است؟



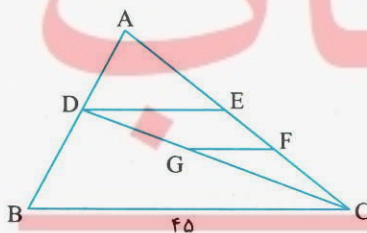
(۱) ۹

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۳

۴۳- در شکل مقابل $DE \parallel GF \parallel BC$ اگر $3AE = 4FC = 6EF$ و $BC = 45$ ، طول GF کدام است؟



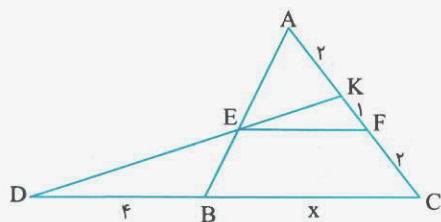
(۱) ۱۲

(۲) ۱۰

(۳) ۹

(۴) ۸

۴۴- در شکل مقابل $EF \parallel DC$ مقدار x چقدر است؟



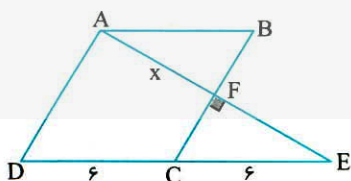
(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۴۵- در شکل مقابل ABCD لوزی است. مقدار x چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

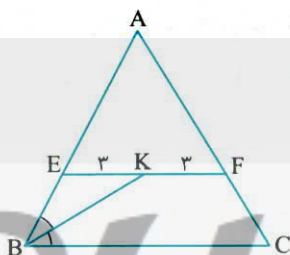
۴۶- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $AF = 2FC$. مقدار $BC + AB$ چقدر است؟

۱۷ (۱)

۱۸ (۲)

۱۹ (۳)

۲۰ (۴)



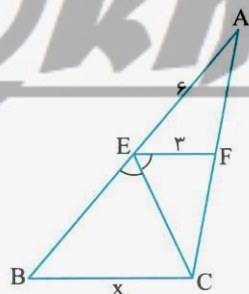
۴۷- در شکل مقابل $EF \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟

۸ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)



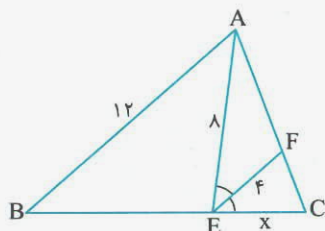
۴۸- در شکل مقابل $EF \parallel AB$. مقدار x چقدر است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)



۴۹- در شکل مقابل $EF \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟

۱۱ (۱)

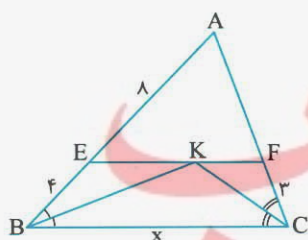
۲۱ (۲)

۲ (۳)

۱۰ (۴)

۱۹ (۵)

۲ (۶)



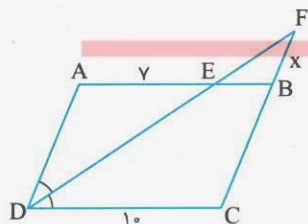
۵۰- در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است. مقدار x چقدر است؟

۶ (۱)

۵ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)



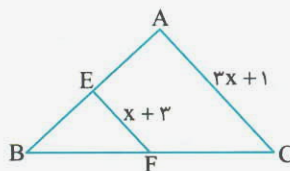
۵۱- در شکل مقابل E وسط ضلع AB و F وسط ضلع BC است. طول پاره خط EF چقدر است؟

۱۰ (۱)

۹ (۲)

۸ (۳)

۷ (۴)



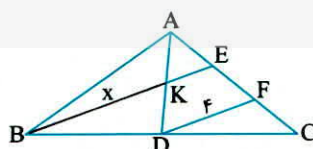
۵۲- در شکل مقابل نقطه های E و F ضلع AC را به سه قسمت برابر تقسیم کرده اند، K وسط AD و D وسط BC است. مقدار x چقدر است؟

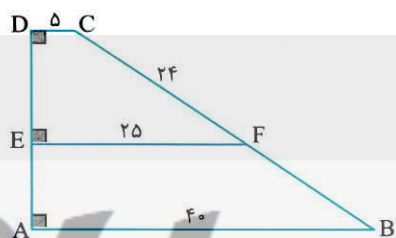
۷ (۲)

۹ (۴)

۶ (۱)

۸ (۳)

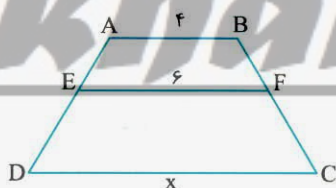




۵۳- در شکل روبه‌رو طول FB چقدر است؟

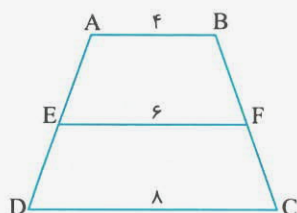
- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸

۵۴- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی‌اند و $3AE = 2DE$. مقدار x چقدر است؟



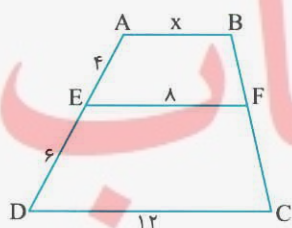
- (۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۰

۵۵- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی‌اند. مقدار $\frac{AE}{ED}$ چقدر است؟



- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{4}{2}$
(۴) ۱

۵۶- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی‌اند. مقدار x چقدر است؟



- (۱) $\frac{10}{3}$
(۲) ۴
(۳) $\frac{14}{3}$
(۴) $\frac{16}{3}$

۵۷- در دوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۵ و ۶ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل می‌شود، (تجربی - ۹۴)

کدام است؟

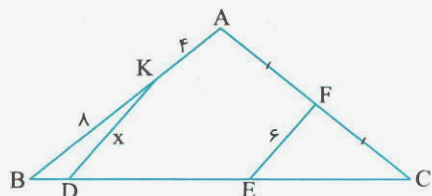
$$12/8 \text{ (۴)}$$

$$12/2 \text{ (۳)}$$

$$11/6 \text{ (۲)}$$

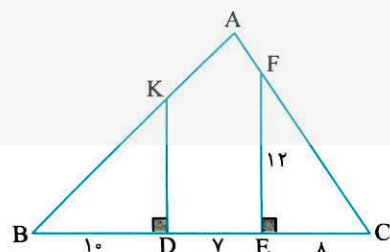
$$11/4 \text{ (۱)}$$

۵۸- در شکل مقابل $EF \parallel KD$. مقدار x چقدر است؟



- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۹

۵۹- در شکل مقابل اگر $CF = 4AF$ ، طول KD چند است؟



- (۱) ۱۲
(۲) ۹
(۳) ۱۵
(۴) ۱۰

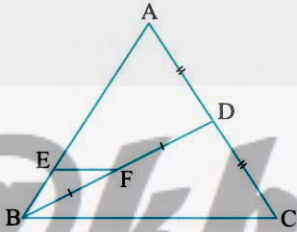
۶۰- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ ، مقدار $\frac{EF}{BC}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{6}$



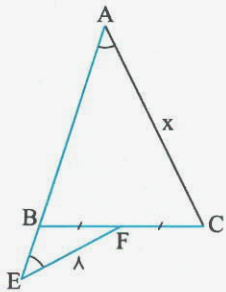
۶۱- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۴

(۳) ۱۶

(۴) ۲۴



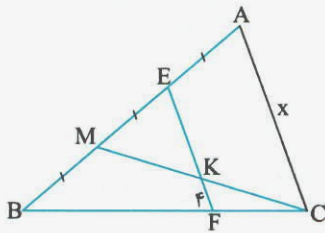
۶۲- در شکل مقابل $EF \parallel AC$ ، مقدار x چقدر است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۲۰

(۳) ۲۲

(۴) ۲۴



خانه کتاب

فصل دوم: هندسه

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

تعریف

دو مثلث **متشابه** هستند، به شرطی که زاویه‌های یکی همان زاویه‌های دیگری باشند و ضلع‌های روبه‌رو به زاویه‌های برابر متناسب باشند.

اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، می‌نویسیم

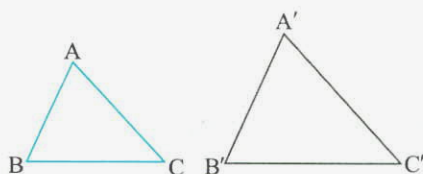
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

و منظورمان این است که

$$\hat{A} = \hat{A'}, \quad \hat{B} = \hat{B'}, \quad \hat{C} = \hat{C'}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

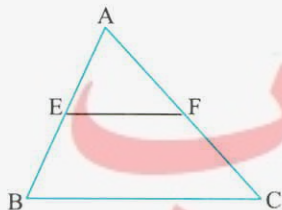
نسبت اضلاع متناظر دو مثلث متشابه را **نسبت تشابه** این دو مثلث می‌نامیم.



قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از ضلع‌های مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه مثلثی کوچک به وجود می‌آید که با مثلث اصلی متشابه است.

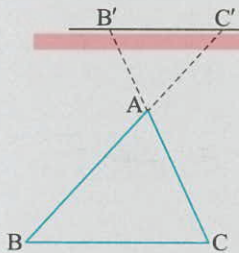
$$EF \parallel BC \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$



نکته

اگر خطی موازی ضلعی از مثلث، امتداد دو ضلع دیگر را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کند، باز هم مثلثی متشابه با مثلث اصلی به وجود می‌آید.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \triangle AB'C' \sim \triangle ACB$$

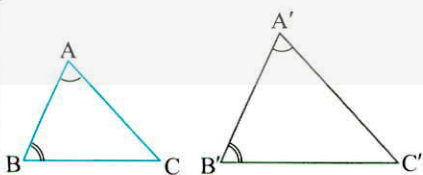


معیارهایی برای متشابه بودن مثلث‌ها

قضیه ۱

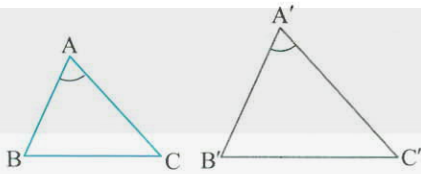
اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، این دو مثلث متشابه‌اند (حالت (ز.ز)).

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A'} \\ \hat{B} = \hat{B'} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



قضیه ۲

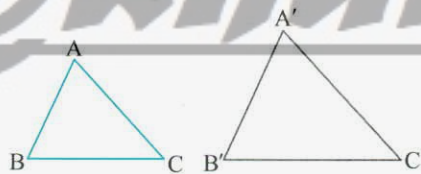
اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند و زاویه‌ی بین آن‌ها هم برابر باشند، این دو مثلث متشابه‌اند (حالت (ضض)).



$$\begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

قضیه ۳

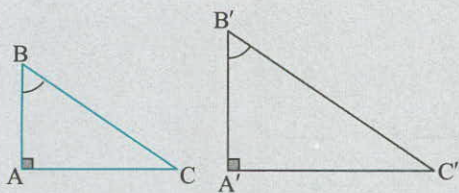
اگر اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند، این دو مثلث متشابه‌اند (حالت (ضضض)).



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

نکته

دو مثلث قائم‌الزاویه که زاویه‌ی حاده‌ای برابر دارند، متشابه‌اند.

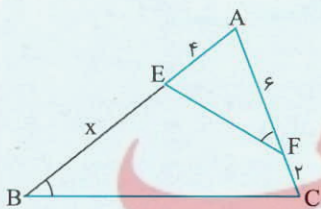


$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

تست ۱



در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟



- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

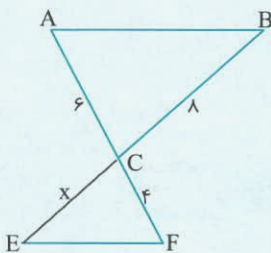
پاسخ: مثلث‌های AEF و ACB دو زاویه‌ی برابر دارند ($\hat{F} = \hat{C}$) و در زاویه‌ی رأس A مشترک‌اند، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{4}{6+2} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{4+x} \Rightarrow 4+x=12 \Rightarrow x=8$$

تست ۲



در شکل مقابل $AB \parallel EF$. مقدار x چقدر است؟



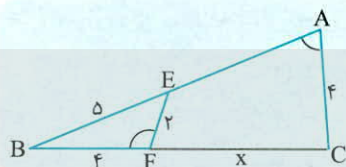
- (۱) $\frac{16}{3}$
(۲) ۸
(۳) $\frac{16}{5}$
(۴) ۷

پاسخ: چون

$$AB \parallel EF$$

پس مثلث‌های ABC و FEC متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{FC} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

۳

تست

۷ (۲)

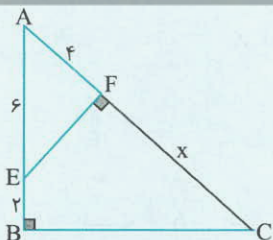
۶ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

پاسخ: مثلث‌های ABC و FBE متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های A و F در آن‌ها برابرند و زاویه‌ی B هم در آن‌ها مشترک است. بنابراین

$$\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{FE} \Rightarrow \frac{4+x}{5} = \frac{4}{2} \Rightarrow 4+x=10 \Rightarrow x=6$$

در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

۴

تست

۹ (۱)

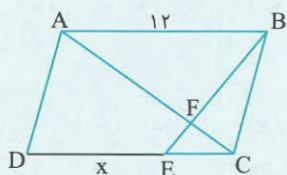
۸ (۲)

۷ (۳)

۶ (۴)

پاسخ: مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABC و AFE که در زاویه‌ی حاده‌ی A مشترک‌اند متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{4+x}{6} = \frac{8}{4} \Rightarrow 4+x=12 \Rightarrow x=8$$

در شکل مقابل $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و $AF=3FC$.مقدار x چقدر است؟

۵

تست

۹ (۲)

۱۰ (۱)

۷ (۴)

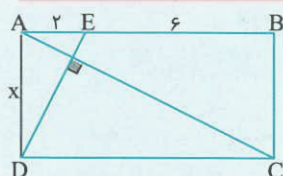
۸ (۳)

پاسخ: چون $AB \parallel EC$ ، پس مثلث‌های ABF و CEF متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AB}{CE} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{12}{CE} = 3 \Rightarrow CE=4$$

چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند، پس

$$DC=AB \Rightarrow x+4=12 \Rightarrow x=8$$

در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است. مقدار x چقدر است؟

۶

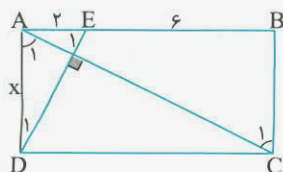
تست

۵ (۲)

۴ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

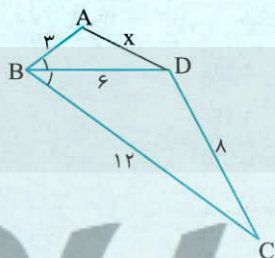
پاسخ: توجه کنید که چون $AD \parallel BC$ ، بنابر قضیه‌ی خطوط موازیو مورب، $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1$$

بنابراین $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$. به این ترتیب، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AED و BCA که یک زاویه‌ی حاده‌ی برابر دارند،

متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x=4$$

در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

۷

تست

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

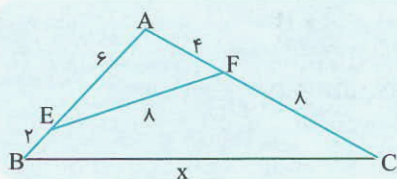
(۴) ۵

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}, \quad \hat{ABD} = \hat{DBC}$$

بنابراین مثلث‌های ABD و DBC متشابه‌اند (ض‌ض‌ض). در نتیجه

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$$

در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

۸

تست

(۱) ۱۴

(۲) ۱۶

(۱) ۱۳

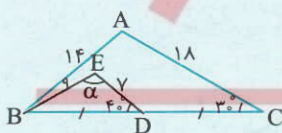
(۲) ۱۵

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$$

بنابراین دو مثلث AEF و ACB که دو ضلع متناسب دارند و زاویه‌ی بین این دو ضلع متناسب در آنها (یعنی $\hat{A}$) برابر است، متشابه‌اند (ض‌ض‌ض). بنابراین

$$\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 16$$

در شکل مقابل مقدار α چقدر است؟

۹

تست

(۱) 100° (۲) 110° (۳) 115° (۴) 120°

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EB} = \frac{BC}{DB} = 2$$

بنابراین مثلث‌های EBD و ABC متشابه‌اند (ض‌ض‌ض). در نتیجه

$$\hat{EBD} = \hat{ACB} = 30^\circ$$

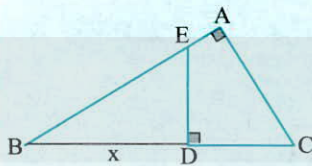
پس

$$\alpha = \hat{BED} = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

اگر مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند و نسبت تشابه آنها برابر k باشد، آنگاه

$$\frac{\text{محیط}(ABC)}{\text{محیط}(A'B'C')} = k, \quad \frac{\text{مساحت}(ABC)}{\text{مساحت}(A'B'C')} = k^2$$

نکته



در شکل مقابل $AB=2$ و مساحت مثلث EBD با مساحت چهارضلعی DCAE برابر است. مقدار x چقدر است؟

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \quad (2) \\ & 2 \quad (4) \end{aligned}$$

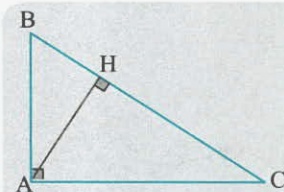
$$\begin{aligned} & 1 \quad (1) \\ & \sqrt{3} \quad (3) \end{aligned}$$

تست ۱۰

پاسخ: مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و DBE که در زاویه‌ی حاده‌ی B مشترک‌اند، متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین اگر مساحت مثلث DBE برابر با S باشد،

$$\begin{aligned} \frac{\text{مساحت}(ABC)}{\text{مساحت}(DBE)} &= \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{2S}{S} = \left(\frac{2}{x}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{x^2} = 2 \\ &\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه



در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

$$\triangle AHB \sim \triangle CHA \sim \triangle CAB$$

نکته

اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه

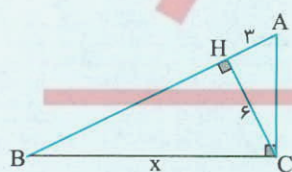
$$1 - AH^2 = HB \times HC$$

$$2 - AB^2 = BH \times BC$$

$$3 - AC^2 = CH \times BC$$

$$4 - BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{قضیه‌ی فیثاغورس})$$

$$5 - AH \times BC = AB \times AC$$



در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

$$6\sqrt{5} \quad (1)$$

$$5\sqrt{7} \quad (2)$$

$$5\sqrt{6} \quad (3)$$

$$7\sqrt{5} \quad (4)$$

تست ۱۱

پاسخ: بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACB ،

$$CH^2 = HA \times HB$$

$$6^2 = 3 \times HB$$

$$HB = 12$$

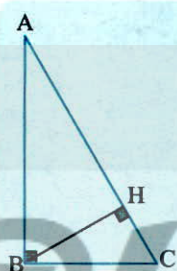
اکنون بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی CHB ،

$$BC^2 = HC^2 + HB^2$$

$$x^2 = 6^2 + 12^2 = 6^2(1 + 2^2) = 6^2 \times 5$$

$$x = 6\sqrt{5}$$

پس



در شکل مقابل $AH = 3HC$ ، مقدار $\frac{AB}{BC}$ چقدر است؟

تست ۱۲

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $\sqrt{6}$

پاسخ: بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AB^2 = AH \times AC$$

$$BC^2 = HC \times AC$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم به دست می‌آید

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AH \times AC}{HC \times AC} = \frac{AH}{HC} = 3$$

بنابراین $\frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$



در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

تست ۱۳

(۱) $\frac{50}{13}$

(۲) $\frac{54}{13}$

(۳) $\frac{60}{13}$

(۴) $\frac{64}{13}$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

پس $AC = 13$. از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

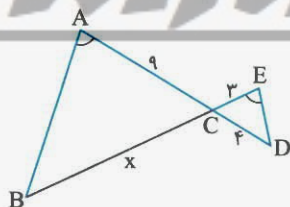
$$AB \times BC = BH \times AC \Rightarrow 12 \times 5 = x \times 13 \Rightarrow x = \frac{60}{13}$$

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

درس سوم:

تشابه مثلث‌ها

فصل دوم

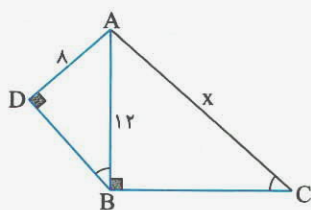
۶۳- در شکل روبه‌رو مقدار x چقدر است؟

۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۴ (۳)

۱۶ (۴)

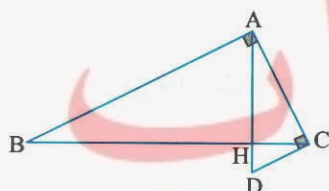
۶۴- در شکل روبه‌رو مقدار x چقدر است؟

۲۴ (۱)

۳۶ (۲)

۹ (۳)

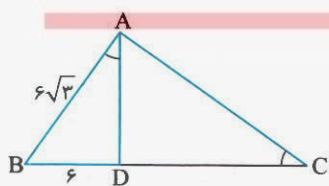
۱۸ (۴)

۶۵- در شکل مقابل $AH = 4HD$ ، مقدار $\frac{AB}{CD}$ چقدر است؟ $\sqrt{3}$ (۱)

۲ (۲)

 $\sqrt{5}$ (۳)

۴ (۴)



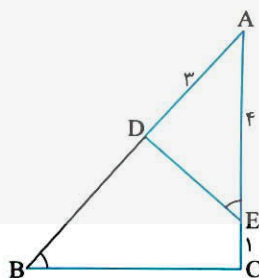
۶۶- در شکل مقابل طول پاره‌خط DC چقدر است؟

۱۵ (۱)

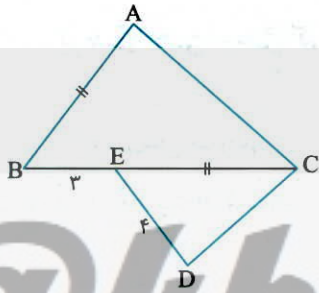
۱۲ (۲)

۱۸ (۳)

۹ (۴)

۶۷- در شکل روبه‌رو $\hat{AED} = \hat{ABC}$ ، طول BD چند است؟ $\frac{3}{11}$ (۱) $\frac{11}{3}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{11}{5}$ (۴)

۶۸- اگر در شکل روبه‌رو بدانیم $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ ، طول BC کدام است؟ ($AB=EC$)



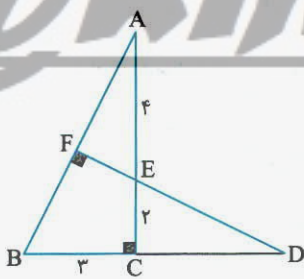
(۱) ۹

(۲) ۶

(۳) ۳

(۴) ۱۲

۶۹- در شکل مقابل طول پاره‌خط CD چقدر است؟



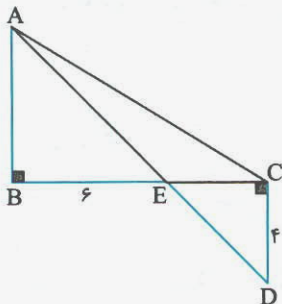
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۷۰- در شکل مقابل مساحت مثلث AEC چقدر است؟



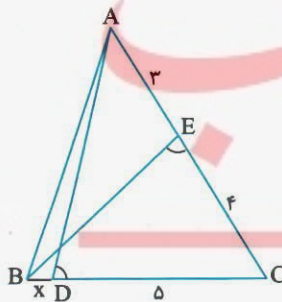
(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

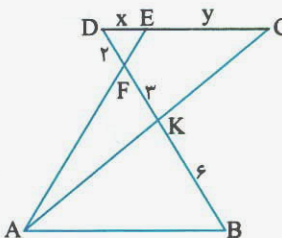
(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

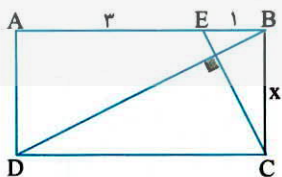
۷۱- در شکل مقابل مقدار X چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۷۲- در شکل مقابل $DC \parallel AB$ ، مقدار $\frac{x}{x+y}$ چقدر است؟

(۲) $\frac{2}{15}$ (۴) $\frac{7}{15}$ (۱) $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{4}{15}$

۷۳- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. مقدار X چقدر است؟

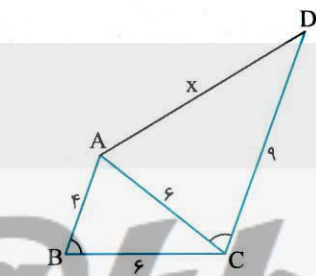
(۲) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

(۱) ۲

(۳) ۳

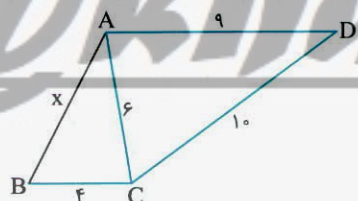
۸۱- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

۸۲- در شکل مقابل $AD \parallel BC$. مقدار x چقدر است؟

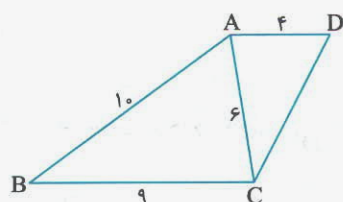
- (۲) $\frac{20}{3}$
(۴) $\frac{22}{3}$

- (۱) ۶
(۳) ۷

۸۳- در شکل مقابل $AD \parallel BC$. طول پاره خط DC چقدر است؟

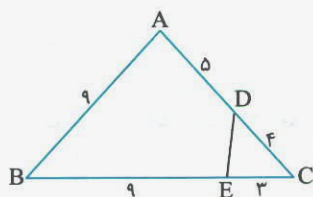
- (۲) $\frac{25}{3}$
(۴) $\frac{20}{3}$

- (۱) $\frac{40}{3}$
(۳) $\frac{23}{3}$

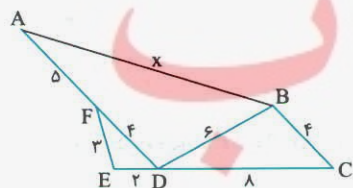


۸۴- در شکل مقابل طول پاره خط DE چقدر است؟

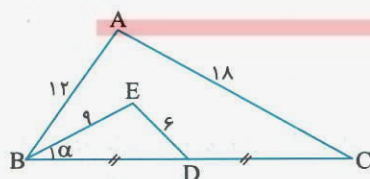
- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۵

۸۵- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

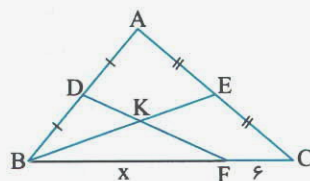
- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۲۰

۸۶- در شکل روبه رو $\hat{ACB} = 3\alpha - 40^\circ$. زاویه α چند درجه است؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۳۰
(۴) ۳۶

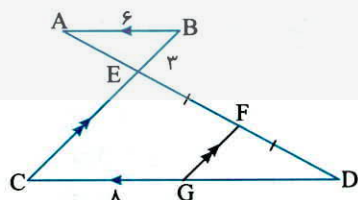
۸۷- در شکل مقابل $2BK = 3KE$. مقدار x چقدر است؟

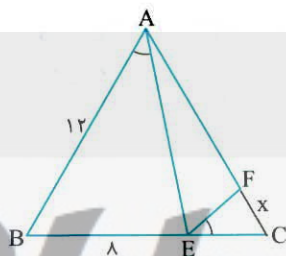
- (۱) ۱۶
(۲) ۱۸
(۳) ۲۰
(۴) ۲۲



۸۸- در شکل مقابل طول GF کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲





۸۹- در شکل روبه‌رو مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. مقدار x چقدر است؟

۱ (۱)

$\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۳)

۳ (۴)

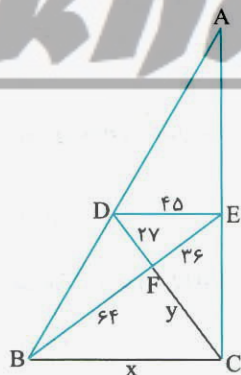
۹۰- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

۴۸ (۱)

۱۴۸ (۲)

۱۲۸ (۳)

۸۰ (۴)



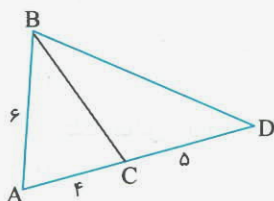
۹۱- در شکل مقابل محیط مثلث BCD برابر ۲۰ است. طول BC کدام است؟

۹ (۱)

۶ (۲)

۱۲ (۳)

۱۵ (۴)



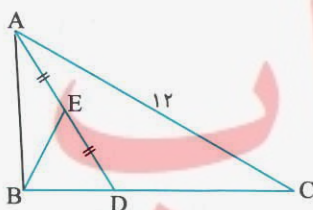
۹۲- در شکل روبه‌رو $DC = 2BE = 2BD$. اگر $AC = 12$ ، طول AB چقدر است؟

۸ (۱)

۶ (۲)

۵ (۳)

۳ (۴)



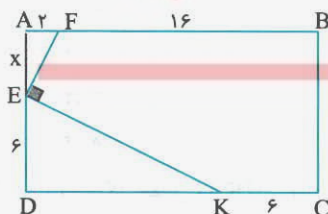
۹۳- در شکل مقابل مستطیل ABCD است. مقدار x چقدر است؟

$\frac{10}{3}$ (۲)

۳ (۱)

۴ (۴)

$\frac{11}{3}$ (۳)



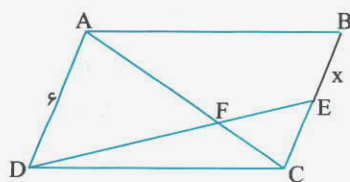
۹۴- در شکل روبه‌رو ABCD متوازی‌الاضلاع است و $AF = 2FC$. مقدار x چقدر است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۴)



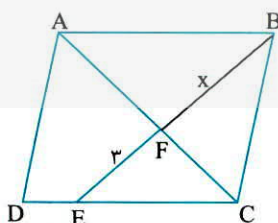
۹۵- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و $CE = 3DE$. مقدار x چقدر است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

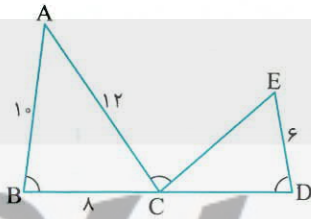


۹۶- در شکل مقابل $\hat{A}BD = \hat{E}DB = \hat{A}CE$. حاصل $CD \times EC$ چند است؟

(۱) ۲۲۵

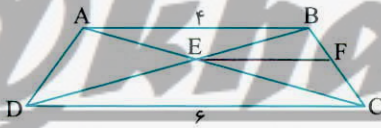
(۲) ۱۲۰

(۳) ۲۴۰

(۴) $\frac{۱۳۵}{۲}$ 

۹۷- در شکل مقابل AB، EF و CD موازی‌اند. طول پاره خط EF چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{۲}{۴}$ (۳) $\frac{۲}{۶}$ 

۹۸- در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

(تجربی - ۹۵)

(۱) ۲۸

(۲) ۲۴

(۳) ۲۰

(۴) ۱۸

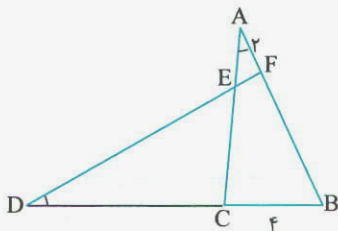
۹۹- در شکل روبه‌رو $\hat{A} = \hat{D}$. اگر $\frac{AC}{DF} = \frac{۲}{۳}$ ، طول CD چقدر است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۱۲

(۳) ۸

(۴) ۱۰



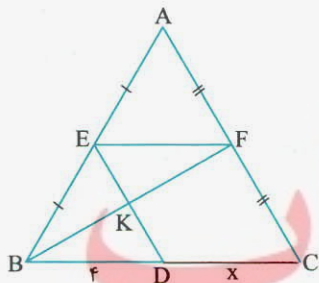
۱۰۰- در شکل مقابل $BK = KF$. مقدار x چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵



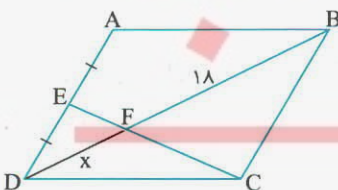
۱۰۱- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و E وسط AD است. مقدار x چقدر است؟

(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۸



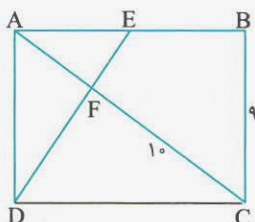
۱۰۲- در شکل مقابل ABCD مستطیل و E وسط ضلع AB است. طول ضلع DC چقدر است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

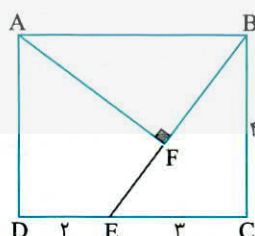


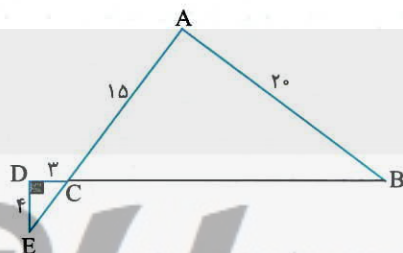
۱۰۳- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. طول پاره خط EF چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{۵}{۲}$

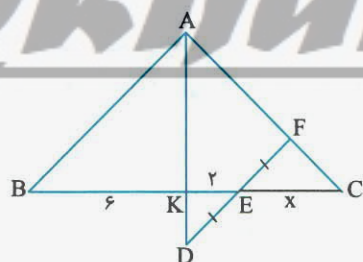
(۳) ۳

(۴) $\frac{۷}{۲}$ 



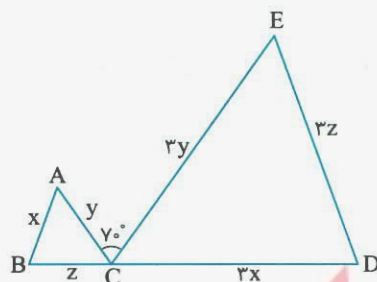
۱۰۴- در شکل مقابل طول BC چند است؟

- (۱) ۹
(۲) ۴۱
(۳) ۲۵
(۴) ۱۶



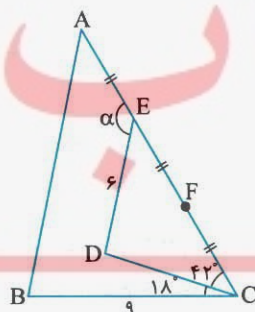
۱۰۵- در شکل مقابل $DF \parallel AB$. مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶



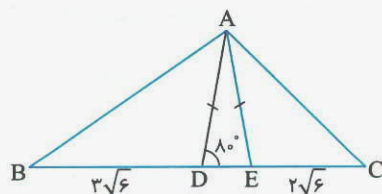
۱۰۶- در شکل مقابل $\hat{A}CE = 70^\circ$. حاصل $\hat{B} + \hat{D}$ چقدر است؟

- (۱) 70°
(۲) 140°
(۳) 90°
(۴) 110°



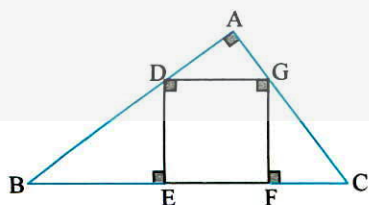
۱۰۷- در شکل روبه‌رو $AE = EF = FC$ و $2AB = 3DC$. زاویه α چند درجه است؟

- (۱) 60°
(۲) 150°
(۳) 30°
(۴) 120°



۱۰۸- در شکل روبه‌رو $\hat{ADC} = 80^\circ$ و $\hat{BAC} = 100^\circ$. طول AD کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۳
(۴) ۶

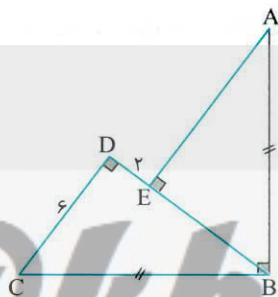


۱۰۹- در شکل روبه‌رو DEFG مربع است. اگر $AB = 4$ و $AC = 3$ ، طول ضلع مربع چند است؟

- (۱) $\frac{60}{37}$
(۲) $\frac{10}{37}$

- (۱) $\frac{40}{37}$
(۲) $\frac{80}{37}$

۱۱۰- در شکل روبه‌رو $AB=BC$. اگر $DC=۶$ و $ED=۲$ ، طول AB چند است؟



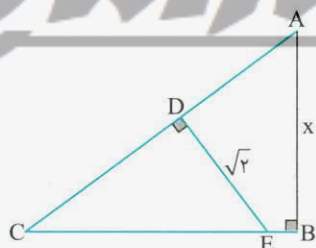
(۱) ۸

(۲) ۱۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۰

۱۱۱- در شکل روبه‌رو مساحت مثلث DEC با مساحت چهارضلعی $ABED$ برابر است. اگر

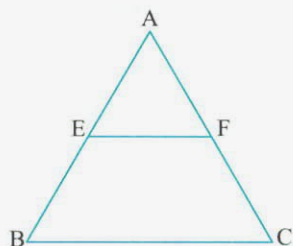


$DE = \sqrt{2}$ ، طول AB چند است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۲

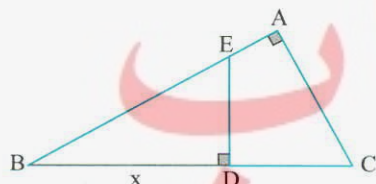
۱۱۲- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $AE = EB$. مقدار $\frac{\text{مساحت (AEF)}}{\text{مساحت (BEFC)}}$ چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$

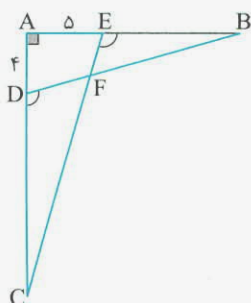
۱۱۳- در شکل مقابل $AB=۸$ و مساحت مثلث DBE با مساحت چهارضلعی $ACDE$ برابر است. مقدار x چقدر است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۱۴- درون مثلثی به اضلاع ۹، ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگری طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

(۴) $1/5$ (۳) $1/25$

(۲) ۱

(۱) $0/75$ 

۱۱۵- در شکل مقابل $\hat{C}EB = \hat{B}DC$. اگر نسبت مساحت مثلث EBF به مساحت مثلث

DCF برابر $\frac{4}{9}$ باشد، طول EB کدام است؟

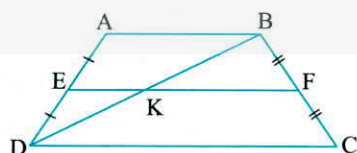
(۱) ۹

(۲) ۱۲

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

۱۱۶- در شکل مقابل AB ، EF و DC موازی‌اند. اگر مساحت مثلث‌های DEK و BFK به



ترتیب ۴ و ۸ باشد، مساحت چهارضلعی $ABCD$ چقدر است؟

(۲) ۴۴

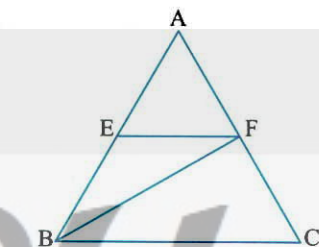
(۱) ۴۸

(۴) ۳۶

(۳) ۴۰

۱۱۷- در شکل مقابل $EF \parallel BC$ ، مساحت مثلث‌های EBF و FBC به ترتیب ۴ و ۶ است.

مساحت مثلث AEF چقدر است؟



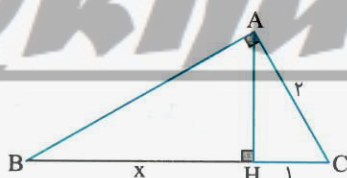
۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

۱۱۸- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟



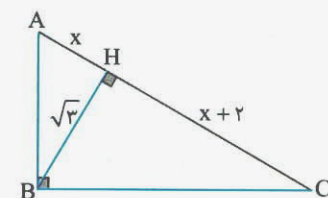
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۱۹- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟



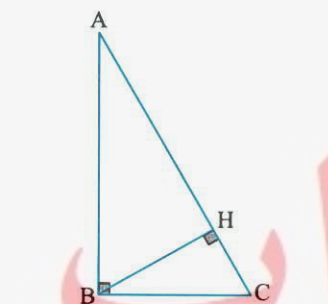
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۱۲۰- در شکل مقابل $AH = 3HC$. مقدار $\frac{AB}{BC}$ چقدر است؟



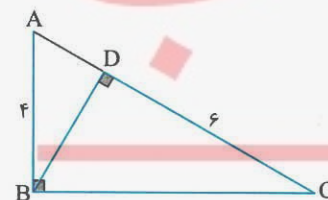
$\sqrt{2}$ (۱)

$\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۴)

۱۲۱- در شکل روبه‌رو طول AD کدام است؟



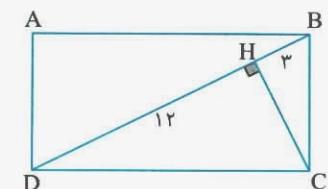
۲ (۱)

۶ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۱۲۲- در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟



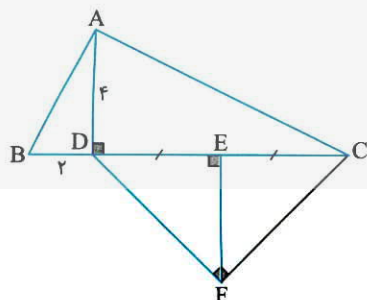
۹۰ (۱)

۸۰ (۲)

۷۲ (۳)

۶۴ (۴)

۱۲۳- در شکل روبه‌رو طول FC کدام است؟



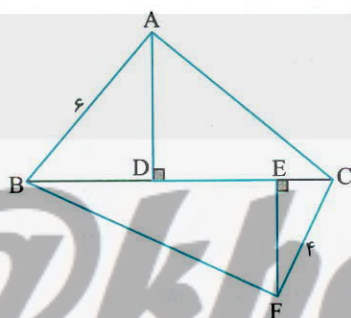
$4\sqrt{2}$ (۱)

$2\sqrt{6}$ (۲)

$2\sqrt{7}$ (۳)

۵ (۴)

۱۲۴- در شکل مقابل حاصل $\frac{BD}{EC}$ چقدر است؟



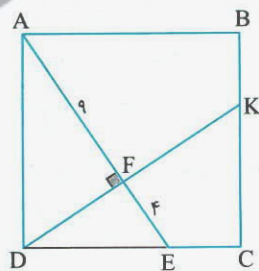
(۱) $\frac{9}{4}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۵- در شکل مقابل ABCD مربع است. طول پاره خط DE چقدر است؟



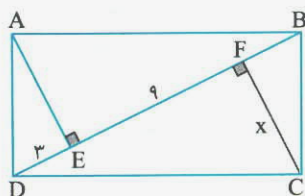
(۱) $\sqrt{56}$

(۲) $\sqrt{55}$

(۳) $\sqrt{54}$

(۴) $\sqrt{52}$

۱۲۶- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. مقدار x چقدر است؟



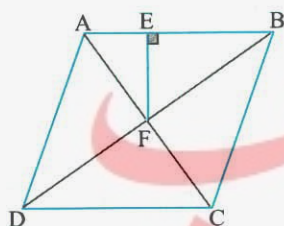
(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۸

۱۲۷- در شکل مقابل ABCD لوزی است و $BE = 2AE$. مقدار $\frac{BD}{AC}$ چقدر است؟



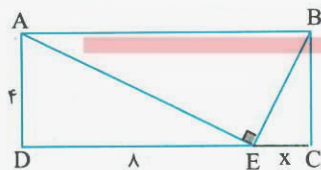
(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۸- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. مقدار x چقدر است؟



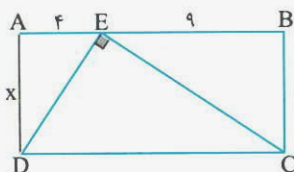
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۶

۱۲۹- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. مقدار x چقدر است؟



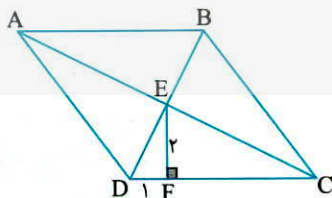
(۱) $2\sqrt{6}$

(۲) ۵

(۳) $2\sqrt{7}$

(۴) ۶

۱۳۰- در شکل مقابل ABCD لوزی است. محیط این لوزی چقدر است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۲۰

(۳) ۲۷

(۴) ۳۲



۱۳۱- در شکل روبه‌رو $\angle BAC = 90^\circ$ ، $BH = AB$ و $AH = 4\sqrt{2}$. طول HC چقدر

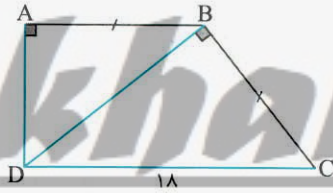
است؟

۱۲ (۲)

۸ (۱)

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)



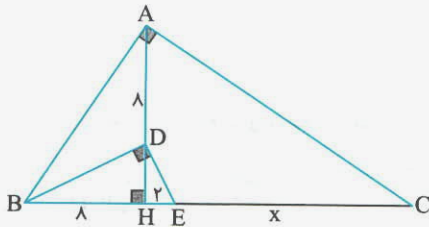
۱۳۲- در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $AB = BC = x$ ، مقدار x چقدر است؟

$9\sqrt{5} - 9$ (۱)

$6\sqrt{5}$ (۲)

$3\sqrt{3} - 3$ (۳)

$5\sqrt{5}$ (۴)



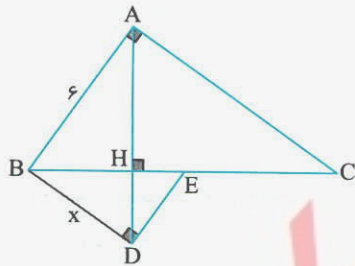
۱۳۳- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

۱۲ (۱)

۱۴ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)



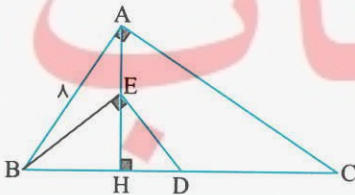
۱۳۴- در شکل مقابل $BE = EC$. مقدار x چقدر است؟

$3\sqrt{2}$ (۱)

$2\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۳)

$4\sqrt{2}$ (۴)



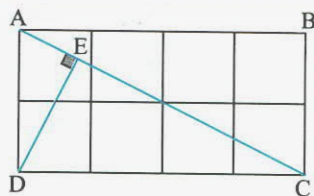
۱۳۵- در شکل مقابل طول BE چند است؟ ($BD = DC$)

$4\sqrt{2}$ (۱)

۶ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۳)

۵ (۴)



۱۳۶- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک ۱ است. طول پاره خط DE چقدر است؟

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲)

$\frac{8\sqrt{5}}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱)

$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (۳)



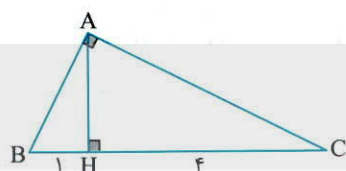
۱۳۷- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

$\frac{60}{11}$ (۱)

$\frac{64}{11}$ (۲)

$\frac{60}{13}$ (۳)

$\frac{64}{13}$ (۴)



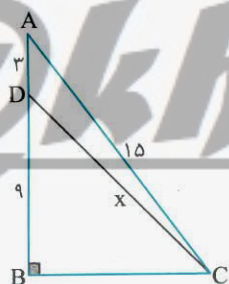
۱۳۸- در شکل مقابل مقدار $AB \times AC$ چقدر است؟

۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۲ (۳)

۱۵ (۴)



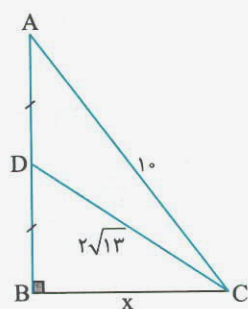
۱۳۹- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

$6\sqrt{3}$ (۱)

$5\sqrt{6}$ (۲)

$4\sqrt{10}$ (۳)

$9\sqrt{2}$ (۴)



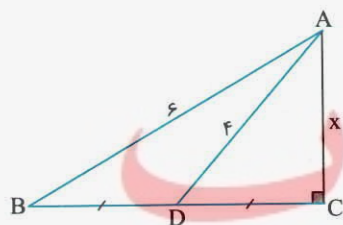
۱۴۰- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

۵ (۱)

$4\sqrt{2}$ (۲)

۶ (۳)

$3\sqrt{5}$ (۴)



۱۴۱- در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

$2\sqrt{21}$ (۱)

$\sqrt{21}$ (۲)

$2\sqrt{21}$ (۳)

۳ (۴)

$\sqrt{21}$ (۴)

۲

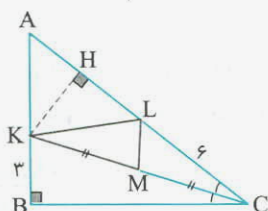


در نتیجه

$$(KLC) = \frac{1}{2} KH \times LC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

چون میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند، پس

$$(KLM) = \frac{1}{2} (KLC) = \frac{9}{2}$$



۹- گزینه‌ی ۳ چون C روی نیمساز زاویه‌ی O قرار دارد،

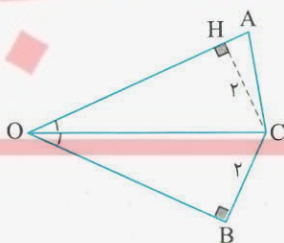
پس فاصله‌اش تا ضلع‌های این زاویه برابر است، بنابراین

$$CH = CB = 2$$

اکنون توجه کنید که

$$(AOC) - (BOC) = \frac{1}{2} CH \times OA - \frac{1}{2} CB \times OB$$

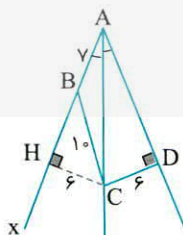
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times OA - \frac{1}{2} \times 2 \times OB = OA - OB = 4$$



۱۰- گزینه‌ی ۴ از نقطه‌ی C بر Ax عمودی رسم می‌کنیم.

چون AC نیمساز است، پس $CD = CH = 6$. همچنین دو مثلث ACH و ACD به حالت وتر و یک زاویه‌ی منتهی هستند.در نتیجه $AD = AH$. اکنون توجه کنید که در مثلث BHC،

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

بنابراین $AH = AB + BH = 15 = AD$ 

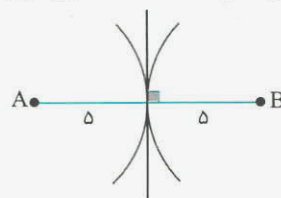
۱- گزینه‌ی ۴

۲- گزینه‌ی ۲

۳- گزینه‌ی ۴

۴- گزینه‌ی ۴ در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد سه ارتفاع مثلث در رأس قائمه است.

۵- گزینه‌ی ۲ پاره‌خط AB به طول ۱۰ را در نظر می‌گیریم. تنها نقطه‌ای که از A و B به فاصله‌ی ۵ است وسط پاره‌خط AB است که روی عمود منصف AB نیز قرار دارد.



۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که بتایر قضیه‌ی فیثاغورس

در مثلث ABD،

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 \Rightarrow 25^2 = 24^2 + BD^2$$

$$BD^2 = 25^2 - 24^2 = (25 - 24)(25 + 24) = 49$$

بنابراین $BD = 7$. از طرف دیگر، چون D روی نیمساز زاویه‌ی

A قرار دارد، پس

$$x = DE = DB = 7$$

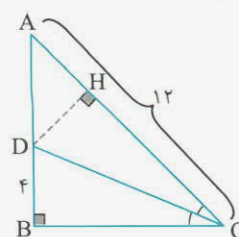
۷- گزینه‌ی ۳ چون D روی نیمساز زاویه‌ی C قرار دارد،

پس فاصله‌ی آن از دو ضلع این زاویه برابر است. بنابراین

$$DH = DB = 4$$

در نتیجه

$$ADC = \frac{1}{2} DH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$$



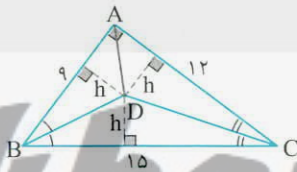
۸- گزینه‌ی ۴ چون K روی نیمساز زاویه‌ی C قرار دارد،

پس فاصله‌ی آن تا ضلع‌های این زاویه برابر است. بنابراین

$$KH = KB = 3$$

بنابراین

$$(BDC) = \frac{1}{2} h \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 15 = 22.5$$



توجه کنید که

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$$

$$\frac{d}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2d$$

بنابراین

$$\frac{b+c}{a+d} = \frac{2a+2d}{a+d} = \frac{2(a+d)}{a+d} = 2$$

توجه کنید که

$$\frac{x-1}{2} = z \Rightarrow x = 2z+1$$

$$\frac{y+1}{3} = z \Rightarrow y = 3z-1$$

بنابراین

$$3x+2y-z=12 \Rightarrow 3(2z+1)+2(3z-1)-z=12$$

$$\Rightarrow 11z=11$$

پس $z=1$

توجه کنید که

$$\frac{a}{-5} = c \Rightarrow a = -5c$$

$$\frac{f}{b} = c \Rightarrow b = \frac{f}{c}$$

بنابراین

$$a+b+c=0 \Rightarrow -5c+\frac{f}{c}+c=0 \Rightarrow -4c+\frac{f}{c}=0$$

$$\Rightarrow -4c^2+f=0 \Rightarrow c^2=1$$

توجه کنید که

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{z} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{4} \right) = \frac{z}{8}$$

$$\frac{z}{t} = 1 \Rightarrow t = z$$

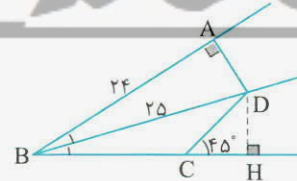
بنابراین

$$x+y+z+t=38 \Rightarrow \frac{z}{8} + \frac{z}{4} + z + z = 38$$

$$\frac{z+2z+16z}{8} = 38 \Rightarrow \frac{19z}{8} = 38 \Rightarrow z = 16$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ از نقطه‌ی D بر امتداد BC عمود می‌کنیم.

چون D روی نیمساز زاویه‌ی B است، پس $AD = DH$. توجه کنید که $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. در نتیجه $DH = CH = 7$. بنابراین در مثلث DCH، $\hat{C} = 45^\circ$ و مثلث CHD قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. دو مثلث ABD و BDH به حالت وتر و یک زاویه‌ی همنهشت هستند. بنابراین $BH = AB = 24$. در نتیجه $BC = BH - HC = 24 - 7 = 17$.



۱۲- گزینه‌ی ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC برابر

مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ABD}$$

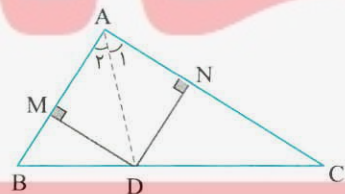
$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{DN \times AC}{2} + \frac{DM \times AB}{2}$$

هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است، پس $DM = DN = x$. در نتیجه

$$3 \times 7 = x \times 7 + x \times 3 \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2.1$$

توجه کنید که $\hat{A}_1 = 45^\circ$ ، پس مثلث ADN قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. بنابراین

$$AD = x\sqrt{2} \Rightarrow AD = 2.1/\sqrt{2}$$



۱۳- گزینه‌ی ۲ چون D روی نیمساز زاویه‌ی B قرار دارد،

پس فاصله‌اش از ضلع‌های AB و BC برابر است. همین‌طور، چون D روی نیمساز زاویه‌ی C قرار دارد، پس فاصله‌اش از ضلع‌های AC و BC برابر است. فرض کنید این فاصله برابر h باشد. اکنون توجه کنید که بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$$

پس $BC = 15$. مساحت مثلث ABC از یک طرف برابر است با $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$ و از طرف دیگر برابر است با مجموع

مساحت‌های سه مثلث ADB و BDC، ADC:

$$\frac{1}{2} h \times 9 + \frac{1}{2} h \times 15 + \frac{1}{2} h \times 12 = 54$$

$$\frac{1}{2} h (9 + 15 + 12) = 54 \Rightarrow h = 3$$

در نتیجه $b=16$. بنابراین $a=\frac{7}{4}b=28$. پس

$$a+b=44$$

۲۳- گزینه ۱ اگر تناسب داده شده را تفصیل در صورت

کنیم به دست می آید

$$\frac{a}{10+2a} = \frac{b}{7+2b}$$

اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم به دست می آید

$$a(7+2b) = b(10+2a) \Rightarrow 7a+2ab = 10b+2ab$$

$$\Rightarrow 7a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$$

۲۴- گزینه ۳ چون $ED \parallel BC$ ، از قضیه تالس به دست

می آید

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{9}{EB} = \frac{EB}{4} \Rightarrow EB = 6$$

در نتیجه

$$AC = AD + DC = 10$$

۲۵- گزینه ۳ چون $EF \parallel AB$ ، بنابر قضیه تالس در

مثلث AMB

$$\frac{MF}{FA} = \frac{ME}{EB} = \frac{2}{1}$$

همین طور، $DF \parallel AC$ و بنابر قضیه تالس در مثلث AMC ،

$$\frac{MD}{DC} = \frac{MF}{FA} \Rightarrow \frac{4}{x} = 2 \Rightarrow x = 2$$

۲۶- گزینه ۱ چون $EF \parallel CD$ ، بنابر قضیه تالس در

مثلث ADC

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

چون $DE \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

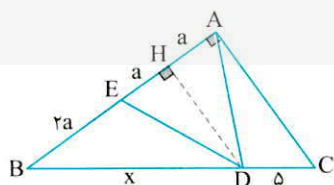
۲۷- گزینه ۲ مثلث ADE متساوی الساقین است، پس

میانه ای وارد بر قاعده ای AE در آن ارتفاع نیز هست. از طرف

دیگر، اگر $AH = a$ ، آن گاه $EH = a$ و $BE = EA = 2a$ ،

همچنین، چون $HD \parallel AC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{BH}{HA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{3a}{a} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$



۱۸- گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله

$$a = 5k, \quad b = 7k, \quad c = 4k$$

بنابراین

$$\frac{3a+2b+mc}{53} = \frac{15k+14k+4mk}{53} = \frac{29k+4mk}{53} = k$$

در نتیجه

$$29k+4mk = 53k \Rightarrow 4mk = 24k \Rightarrow m = 6$$

۱۹- گزینه ۴ اگر تناسب $\frac{3x-y}{y} = k$ را طرفین - وسطین

کنیم به دست می آید

$$3x - y = ky \Rightarrow 3x = (k+1)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{k+1}{3}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{x+y}{x-2y} = \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-2} = \frac{\frac{k+1}{3}+1}{\frac{k+1}{3}-2} = \frac{\frac{k+1+3}{3}}{\frac{k+1-6}{3}} = \frac{k+4}{k-5}$$

۲۰- گزینه ۴ اگر تناسب $\frac{4x-y}{2x+y} = \frac{1}{5}$ را طرفین - وسطین

کنیم به دست می آید

$$5(4x-y) = 2x+y \Rightarrow 20x-5y = 2x+y$$

$$\Rightarrow 18x = 6y \Rightarrow 3x = y$$

بنابراین

$$\frac{6x+y}{x+y} = \frac{6x+3x}{x+3x} = \frac{9x}{4x} = \frac{9}{4}$$

۲۱- گزینه ۱ فرض می کنیم

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

در نتیجه

$$a = kb, \quad c = kd$$

بنابراین

$$\frac{a+7c}{b+7d} = \frac{kb+7kd}{b+7d} = \frac{k(b+7d)}{b+7d} = k = \frac{3}{2}$$

در نتیجه

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k + k = 2k = 3$$

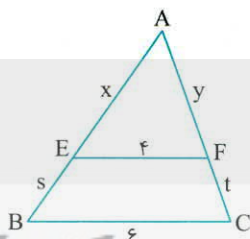
۲۲- گزینه ۳ فرض می کنیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ، بنابراین

$a = kb$ و $c = kd$ در نتیجه

$$\frac{3a-c}{3b-d} = \frac{3kb-kd}{3b-d} = \frac{k(3b-d)}{3b-d} = k$$

بنابراین $k = \frac{7}{4}$ اکنون توجه کنید که

$$a-b = kb-b = (k-1)b = \frac{3}{4}b = 12$$



۲۸- گزینه‌ی ۴ چون $DE \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

در نتیجه

$$\frac{5}{5+DB} = \frac{3}{DB} \Rightarrow 5DB = 3DB + 15$$

بنابراین $DB = 7/5$ ، بنابر قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{5}{7/5} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

بنابراین

$$AE = \frac{2}{7} AB = \frac{2}{7} (AE + EB) \Rightarrow AE = \frac{2}{5} EB \quad (1)$$

به همین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$AF = \frac{2}{5} FC \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$AE + AF = \frac{2}{5} (EB + FC) = \frac{2}{5} \times 20 = 8$$

بنابراین محیط مثلث AEF برابر است با $8 + 6 = 14$.

۳۰- گزینه‌ی ۳ چون BFED لوزی است، پس

$$DE = EF = BF = DB = x$$

چون $DE \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{12}{12+x} = \frac{x}{x+3}$$

$$\Rightarrow 12x + 36 = x^2 + 12x$$

$$\Rightarrow 36 = x^2 \Rightarrow x = 6$$

۳۱- گزینه‌ی ۴ چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+s} = \frac{y}{y+t} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\frac{x}{x+s} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2x + 2s \Rightarrow x = 2s$$

$$\frac{y}{y+t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3y = 2y + 2t \Rightarrow y = 2t$$

بنابراین

$$x + y = 2(s + t) \Rightarrow 8 = 2(s + t) \Rightarrow s + t = 4$$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر است با

$$x + y + s + t + 6 = 8 + 4 + 6 = 18$$

۳۲- گزینه‌ی ۱ چون DBFE متوازی‌الاضلاع است، پس

$$DE = BF = y, \quad DB = EF = x$$

چون $DE \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC،

$$\frac{y}{24} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 18$$

همچنین چون $EF \parallel AB$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ACB،

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{9+x} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 3$$

بنابراین

$$DBFE \text{ محیط} = 2(x + y) = 42$$

۳۳- گزینه‌ی ۲ چون $EF \parallel BD$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AF}{AD} = \frac{EF}{BD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، چون $FK \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{FK}{AC} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow \frac{x-6}{x} = \frac{DA-DF}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{x-6}{x} = \frac{AF}{DA} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 12 = x \Rightarrow x = 12$$

۳۴- گزینه‌ی ۱ بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث‌های

ABK و AKC،

$$\frac{AE}{AC} = \frac{FE}{9} = \frac{AF}{AK}$$

$$\frac{AF}{AK} = \frac{DF}{BK} = \frac{4}{FE}$$

بنابراین

$$\frac{4}{FE} = \frac{FE}{9} \Rightarrow FE = 6$$

در نتیجه

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE+EC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3-2} = 2$$

همچنین چون $KL \parallel CD$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ACD .

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AL}{AD} = \frac{4}{9}$$

و چون $LM \parallel DE$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ADE ،

$$\frac{AL}{AD} = \frac{ML}{DE} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{ML}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow ML = 4$$

چون $KE \parallel LD$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BLD ،

$$\frac{KE}{LD} = \frac{BK}{BL} \Rightarrow \frac{2}{LD} = \frac{1}{3} \Rightarrow LD = 6$$

پس $LD = 6$ ، همین‌طور، $LD \parallel BC$ ، پس بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{LD}{BC} = \frac{AL}{AB} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 24$$

۴۱- گزینه‌ی ۱ از نقطه‌ی D خطی موازی EF رسم می‌کنیم. طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BKD ،

$$\frac{BF}{BD} = \frac{EF}{KD}$$

در نتیجه

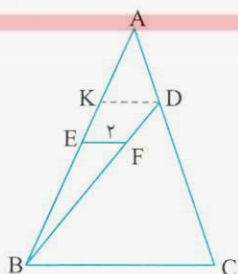
$$\frac{BF}{BF+FD} = \frac{2}{KD}$$

توجه کنید که

$$\frac{BF}{BF+FD} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

بنابراین $KD = 3$. اکنون طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{KD}{BC} = \frac{AD}{AC} \xrightarrow{\frac{AD}{AC} = \frac{1}{6}} \frac{3}{BC} = \frac{1}{6} \Rightarrow BC = 18$$



۴۲- گزینه‌ی ۱ چون $ED \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{36} = \frac{AD}{2AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow ED = 18$$

همین‌طور، چون $FK \parallel ED$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BED ،

$$\frac{FK}{ED} = \frac{BF}{BE} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{BF}{2BF} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 9$$

۳۵- گزینه‌ی ۴ از تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ABC و ABD استفاده می‌کنیم:

$$\frac{FH}{BC} = \frac{AF}{AB}, \quad \frac{FE}{AD} = \frac{BF}{AB}$$

با جمع کردن دو تساوی بالا معلوم می‌شود که

$$\frac{FH}{16} + \frac{3}{5} = \frac{AF+BF}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{FH}{16} = \frac{2}{5} \Rightarrow FH = \frac{32}{5}$$

۳۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $NM \parallel HC$. در نتیجه طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BHC ،

$$\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{HC} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM+MC} = \frac{20}{20+x} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه $x = 10$.

۳۷- گزینه‌ی ۱ طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در دو مثلث ODE و OBD ،

$$\begin{cases} AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow \frac{3}{3+5} = \frac{3+5}{OE} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3OE = 64 \Rightarrow OE = \frac{64}{3}$$

$$\Rightarrow BE + 8 = \frac{64}{3} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

۳۸- گزینه‌ی ۳ چون $EF \parallel CD$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BDC ،

$$\frac{BF}{BD} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $FK \parallel AB$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABD ،

$$\frac{FK}{AB} = \frac{DF}{BD} \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که از تناسب (۱) و ویژگی‌های تناسب نتیجه می‌شود

$$\frac{BF}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BD-BF}{BD} = \frac{3-1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{BD} = \frac{2}{3}$$

بنابراین از تساوی (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 3$$

۳۹- گزینه‌ی ۳ چون $FK \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC ،

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore EF = FC = AE = 12 \text{ k}$$

$$\frac{6}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2BC = 12 \Rightarrow BC = 6$$

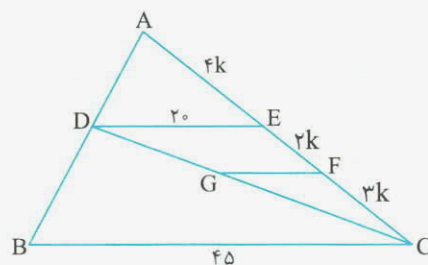
$$EF = 2k, \quad FC = 3k, \quad AE = 4k$$

طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC،

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{40} = \frac{4k}{9k} \Rightarrow DE = 20$$

اکنون طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث DEC،

$$\frac{GF}{DE} = \frac{FC}{EC} = \frac{3k}{5k} \Rightarrow \frac{GF}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow GF = 12$$



۴۴- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم $EF=y$. چون $EF \parallel DC$,

در مثلث KDC از تعمیم قضیه‌ی تالس نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{DC} = \frac{KF}{KC} \Rightarrow \frac{y}{f+x} = \frac{1}{1+r} \Rightarrow ry = f+x \quad (1)$$

همین‌طور، در مثلث ABC از تعمیم قضیه‌ی تالس نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{r+1}{(r+1)+r} = \frac{r}{\Delta} \Rightarrow \Delta y = rx \quad (2)$$

از حل دستگاه $\begin{cases} 3y = 4 + x \\ 5y = 3x \end{cases}$ به دست می آید $x = 5$.

۴۵- گزینه‌ی ۴ چون در لوزی همه‌ی ضلع‌ها برابرند، پس

$AD = AB = BC = CD = 6$. از طرف دیگر، چون $FC \parallel AD$ ،

بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث AED ،

$$\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{FC}{6} = \frac{6}{12}$$

پس $FC = 3$. بنابراین $BF = 6 - 3 = 3$. اکنون بنابر قضیه ی

فیثاغورس در مثلث AFB ،

$$AB^T = AF^T + FB^T \Rightarrow y = x^T + q$$

$$\Rightarrow X^T = Y \Rightarrow X = \sqrt{Y}$$

۴۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، از

قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$.

از طرف دیگر، $\hat{B}_v = \hat{B}_1$ ، پس $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$ بنابراین مثلث BEK

متساوی الساقین است و در نتیجه $BE = EK = 3$. اکنون توجه

کنید که چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}$$

$$\frac{AB-3}{AB} = \frac{6}{BC} = \frac{AF}{AF+FC} = \frac{2FC}{2FC+FC} = \frac{2}{3}$$

بنابر این

$$AB + BC = 1A$$

۴۷- گزینه ی ۳ ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، از

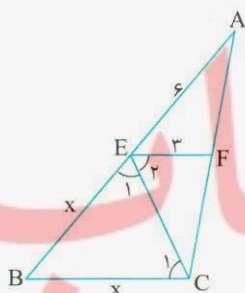
قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{E}_\nu = \hat{C}_1$. از

طرف دیگر، $\hat{E}_r = \hat{E}_l$ ، پس $\hat{E}_l = \hat{C}_l$ بنابراین مثلث EBC

متساوی الساقین است و در نتیجه $EB = x$. اکنون توجه کنید

که چون $EF \parallel BC$ ، از تعمیم قضیه‌ی تالس نتیجه می‌شود

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{6}{6+x} = \frac{3}{x} \Rightarrow 6x = 18 + 3x \Rightarrow x = 6$$



۴۸- گزینه‌ی ۱) بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب،

$$\hat{E}_1 = \hat{B}, \quad \hat{E}_2 = \hat{A},$$

و چون $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ پس

$$\hat{A}_1 = \hat{B}$$

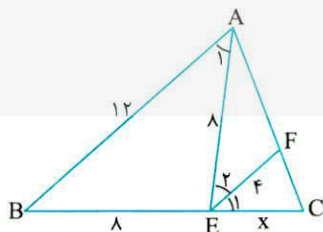
یعنی مثلث AEB متساوی الساقین است، بنابراین

$AE = BE = 8$. اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel AB$ ، بنابر

تعمیم قضیه ی تالس،

$$\frac{CE}{CB} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lambda X = X + \lambda \Rightarrow X = f$$



۴۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، از

۵۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $AB \parallel EF \parallel DC$ ، قطر AC

را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط EF را در M قطع کند. اکنون توجه کنید که طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ABC و ADC،

$$\frac{MF}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{CM}{AC} \quad (۱)$$

$$\frac{ME}{DC} = \frac{AM}{AC} \quad (۲)$$

با جمع کردن این تساوی‌ها به دست می‌آید

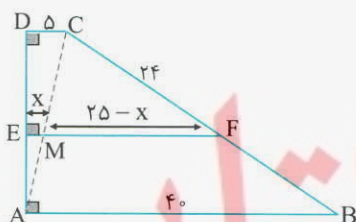
$$\frac{MF}{AB} + \frac{ME}{DC} = \frac{AM+CM}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{25-x}{40} + \frac{x}{5} = 1$$

بنابراین $x = \frac{15}{7}$. اکنون با توجه به تساوی (۱)،

$$\frac{25-15}{40} = \frac{24}{24+FB}$$

در نتیجه

$$\frac{24}{24+FB} = \frac{4}{7} \Rightarrow FB = 18$$



۵۴- گزینه‌ی ۳ از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا

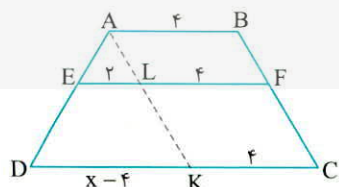
پاره‌خط‌های EF و CD را به ترتیب در L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت چون ABFL و LFCK متوازی‌الاضلاع هستند، پس $KC = LF = AB = 4$. اکنون توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ ، در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EL}{DK} \quad (۱)$$

از طرف دیگر $\frac{AE}{DE} = \frac{2}{3}$ و اگر این تناسب را ترکیب در مخرج

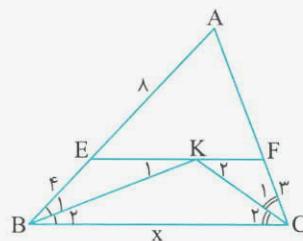
کنیم به دست می‌آید $\frac{AE}{AD} = \frac{2}{5}$. بنابراین تناسب (۱) می‌شود

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{x-4} \Rightarrow 2x-8=10 \Rightarrow x=9$$



قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$. از طرف دیگر، $\hat{B}_1 = \hat{B}_1$ ، پس $\hat{K}_1 = \hat{B}_1$ ، و در نتیجه مثلث BEK متساوی‌الساقین است، پس $EK = EB = 4$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $KF = 3$. به این ترتیب $EF = 4+3=7$. اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

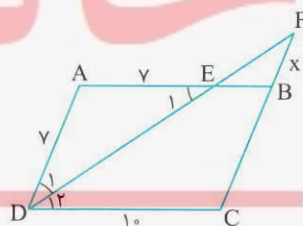
$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{7}{x+7} \Rightarrow 7x = 70 \Rightarrow x = 10$$



۵۰- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که چون $AE \parallel DC$ ، بنابر

قضیه‌ی خطوط موازی و مورب، $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$. از طرف دیگر، بنابر فرض، $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ ، پس $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ ، یعنی مثلث DAE متساوی‌الساقین است، بنابراین $AD = AE = 7$. بنابراین، چون $AB = CD = 10$ ، پس $EB = 10-7=3$. اکنون توجه کنید که چون $EB \parallel CD$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{FB}{FC} = \frac{EB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{3}{10} \Rightarrow 10x = 3x+21 \Rightarrow x = 3$$



۵۱- گزینه‌ی ۳ چون پاره‌خط EF وسط ضلع‌های AB و

BC را به هم وصل کرده است، پس طول آن برابر با نصف طول ضلع سوم است. بنابراین

$$x+3 = \frac{1}{2}(3x+1) \Rightarrow x=5$$

بنابراین

$$EF = 5+3 = 8$$

۵۲- گزینه‌ی ۱ چون K و E وسط ضلع‌های AD و AF در

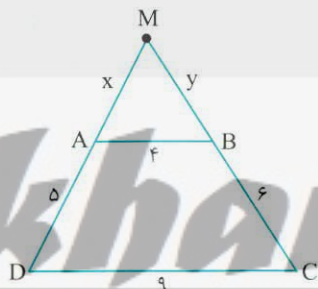
مثلث ADF هستند، پس $KE = \frac{DF}{2} = 2$. چون D و F وسط

ضلع‌های BC و EC در مثلث‌های BCE هستند، پس

$$DF = \frac{BE}{2} \Rightarrow 4 = \frac{x+2}{2} \Rightarrow x=6$$

بنابراین محیط مثلث AMB برابر است با

$$P = x + y + 4 = 4 + 4 + 8 + 4 = 12/8$$



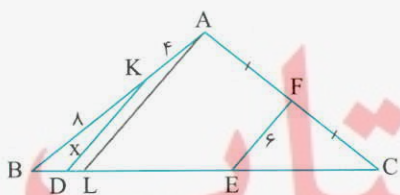
۵۸- گزینه ی ۳ از A خطی موازی EF (و در نتیجه KD)

رسم می کنیم و فرض می کنیم پاره خط DE را در نقطه ی L قطع می کند. چون $EF \parallel AL$ ، بنابر تعمیم قضیه ی تالس در مثلث ACL،

$$\frac{EF}{AL} = \frac{CF}{CA} \Rightarrow \frac{6}{AL} = \frac{1}{2} \Rightarrow AL = 12$$

همین طور، چون $KD \parallel AL$ ، بنابر تعمیم قضیه ی تالس در مثلث ABL،

$$\frac{KD}{AL} = \frac{BK}{BA} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = 8$$



۵۹- گزینه ی ۴ نخست ارتفاع AH را رسم می کنیم. اکنون

بنابر تعمیم قضیه ی تالس در مثلث AHC،

$$\frac{CF}{AC} = \frac{FE}{AH} = \frac{EC}{HC}$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{4AF}{AF+4AF} = \frac{4}{5} = \frac{12}{AH} \Rightarrow AH = 15$$

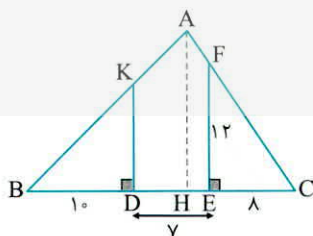
$$\frac{8}{8+HE} = \frac{4}{5} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{EC}{HC} = \frac{EC}{EC+HE} = \frac{4}{5}$$

در نتیجه $HE = 2$ ، بنابراین

$$DH = 7 - HE = 5$$

در نتیجه بنابر تعمیم قضیه ی تالس در مثلث AHB،

$$\frac{KD}{AH} = \frac{BD}{BH} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{KD}{15} = \frac{1}{5} \Rightarrow KD = 3$$



۵۵- گزینه ی ۴ از A خطی موازی BC رسم می کنیم تا

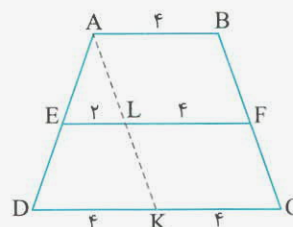
پاره خط های EF و CD را به ترتیب در نقطه های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت، چون ABFL و LFCK متوازی الاضلاع هستند، پس $KC = LF = AB = 4$. اکنون توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ ، در مثلث ADK

تعمیم قضیه ی تالس نتیجه می شود

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EL}{DK} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

اگر این تناسب را تفصیل در مخرج کنیم به دست می آید

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AD - AE} = \frac{1}{2 - 1} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = 1$$



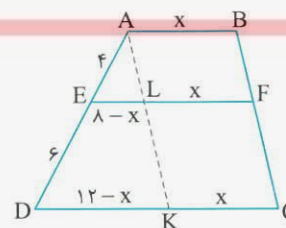
۵۶- گزینه ی ۴ از A خطی موازی BC رسم می کنیم تا

پاره خط های EF و CD را به ترتیب در نقطه های L و K قطع کند (شکل زیر را ببینید). در این صورت ABFL و LFCK متوازی الاضلاع هستند، پس $KC = LF = AB = x$. اکنون توجه کنید که چون $EL \parallel DK$ ، در مثلث ADK، بنابر تعمیم قضیه ی تالس،

$$\frac{EL}{DK} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{8-x}{12-x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 40 - 5x = 24 - 2x$$

$$\Rightarrow 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$



۵۷- گزینه ی ۴ محل تلاقی امتداد ساق های دوزنقه ی

ABCD را M می نامیم، با توجه به تعمیم قضیه ی تالس در مثلث MDC،

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{4}{9}$$

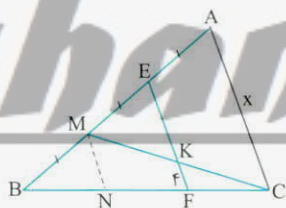
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5+x} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 20 \Rightarrow x = 4 \\ \frac{y}{6+y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 24 + 4y \Rightarrow y = 4/8 \end{cases}$$

چون $KF \parallel MN$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث CMN.

$$\frac{KF}{MN} = \frac{CF}{CN} \Rightarrow \frac{4}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = 8$$

اکنون توجه کنید که بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BAC.

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 24$$



۶۳- گزینه‌ی ۲ زاویه‌های ACB و ECD متقابل به رأس

هستند، پس برابرند. بنابراین مثلث‌های ACB و ECD متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 12$$

۶۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود

$$\triangle ADB \sim \triangle ABC \text{ (زز)}$$

بنابراین

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 18$$

۶۵- گزینه‌ی ۴ چون BA و DC بر AC عمودند، پس

موازی‌اند و در نتیجه مثلث‌های AHB و DHC متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AH}{HD} = 4$$

۶۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که در مثلث‌های ABD و

ABC زاویه‌ی B مشترک است و $\hat{B}AD = \hat{A}CD$. بنابراین

این دو مثلث متشابه‌اند (زز). در نتیجه

$$\frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{6\sqrt{3}}{6+DC}$$

بنابراین

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{6+DC} \Rightarrow DC = 12$$

۶۷- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (زز)}$$

در نتیجه

$$\frac{3}{5} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{3+BD}$$

بنابراین

$$BD = \frac{11}{3}$$

۶۰- گزینه‌ی ۳ از نقطه‌ی D خطی موازی BC رسم می‌کنیم

و فرض می‌کنیم AB را در K قطع می‌کند. چون $EF \parallel KD$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BKD،

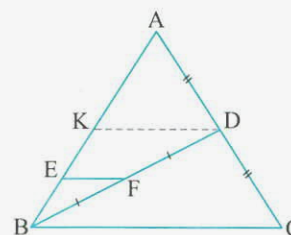
$$\frac{EF}{KD} = \frac{BF}{BD} = \frac{BF}{2BF} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

همچنین، چون $KD \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC،

$$\frac{KD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{2AD} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم به دست می‌آید

$$\frac{EF}{KD} \times \frac{KD}{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4}$$



۶۱- گزینه‌ی ۳ از F خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا AB

را در نقطه‌ی D قطع کند. در این صورت، بنابر قضیه‌ی خطوط

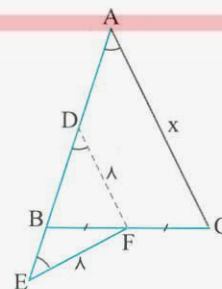
موازی و مورب، $\hat{D} = \hat{A}$. از طرف دیگر، طبق فرض، $\hat{A} = \hat{E}$ ،

پس $\hat{D} = \hat{E}$. یعنی مثلث DFE متساوی‌الساقین است، پس

$$DF = EF = 8$$

اکنون، چون $FD \parallel AC$ ، بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC،

$$\frac{BF}{BC} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{BF}{2BF} = \frac{8}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 16$$



۶۲- گزینه‌ی ۴ از M به وسط پاره خط BF، که آن را با N

نشان می‌دهیم، وصل می‌کنیم. چون M و N وسط ضلع‌های

BE و BF در مثلث BEF هستند، پس $MN \parallel EF$. در نتیجه،

بنابر قضیه‌ی تالس در ذوزنقه‌ی MNCA،

$$\begin{cases} \frac{NF}{FC} = \frac{ME}{EA} \\ ME = EA \end{cases} \Rightarrow NF = FC$$

۶۸- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل می‌توان گفت

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{ACB} = \hat{ECD}$$

در نتیجه

$$\frac{EC}{BC} = \frac{ED}{AB}$$

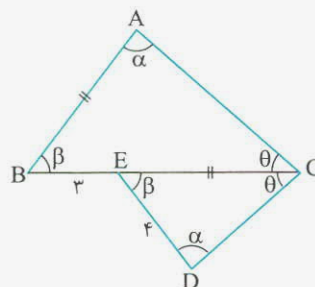
بنابراین

$$\frac{EC}{3+EC} = \frac{ED}{EC} = \frac{4}{EC}$$

در نتیجه

$$EC^2 = 4EC + 12 \Rightarrow EC = 6$$

بنابراین $BC = 3 + 6 = 9$



۶۹- گزینه‌ی ۴ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABC و DEC که

زاویه‌ی B در آن‌ها مشترک است، متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{CD}$$

در نتیجه $CD = \frac{2 \times 6}{3} = 4$

۷۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که زاویه‌های E_1 و E_2 متقابل

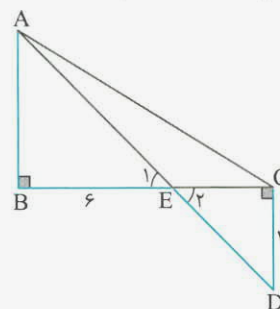
به رأس هستند، پس برابرند. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی

ABE و DCE متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{6}{CE} \Rightarrow AB \times CE = 4 \times 6 = 24$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{مساحت (AEC)} = \frac{1}{2} AB \times CE = \frac{1}{2} \times 24 = 12$$



۷۱- گزینه‌ی ۳ مثلث‌های ADC و BEC دو زاویه‌ی برابر

دارند (D و E) و در زاویه‌ی C مشترک هستند. بنابراین این

دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC} \Rightarrow \frac{7}{x+5} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5x + 25 = 28 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

۷۲- گزینه‌ی ۳ چون $DE \parallel AB$ ، پس مثلث‌های DEF و

BAF متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{DE}{BA} = \frac{DF}{BF} \Rightarrow \frac{x}{BA} = \frac{2}{9} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $DC \parallel AB$ ، پس مثلث‌های DCK و

BAK متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{DC}{BA} = \frac{DK}{BK} \Rightarrow \frac{x+y}{BA} = \frac{5}{6} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم به‌دست می‌آید

$$\frac{\frac{x}{BA}}{\frac{x+y}{BA}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{4}{15}$$

۷۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که چون $AD \parallel BC$ ، بنابر

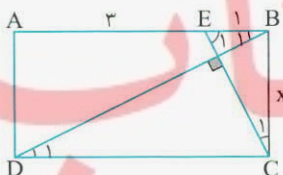
قضیه‌ی خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی BEC و CBD

که یک زاویه‌ی حاده‌ی برابر دارند، متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$



۷۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که زاویه‌های ACB و DCE و

متقابل به رأس‌اند، پس برابرند. از طرف دیگر،

$$\frac{AC}{DC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{EC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

بنابراین مثلث‌های ACB و DCE متشابه‌اند (ض.ض). در

نتیجه

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{6}{12} \Rightarrow x = 10$$

۷۵- گزینه‌ی ۳ توجه کنید $\hat{AEB} = \hat{CED}$ (زاویه‌های

متقابل به رأس). همچنین

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$$

بنابراین دو مثلث AEB و CED به حالت (ض.ض) متشابه

هستند. در نتیجه

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 20$$

۹۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل نتیجه می‌شود

$$\hat{D}\hat{E}\hat{F} = \hat{F}\hat{B}\hat{C}, \quad \hat{E}\hat{D}\hat{F} = \hat{F}\hat{C}\hat{B}$$

بنابراین دو مثلث DEF و FBC به حالت (زر) متشابه هستند.

در نتیجه

$$\frac{DE}{BC} = \frac{FE}{FB} = \frac{DF}{FC}$$

پس

$$\frac{45}{x} = \frac{36}{64} = \frac{27}{y}$$

بنابراین

$$\frac{45}{x} = \frac{27}{y} = \frac{9}{16}$$

در نتیجه

$$x = 80, \quad y = 48 \Rightarrow x + y = 128$$

۹۱- گزینه‌ی ۲ چون

$$\frac{AC}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{AB}{AD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پس $\triangle ACB \sim \triangle ABD$ (ض.ض). بنابراین نسبت تشابه دو

مثلث نیز برابر $\frac{2}{3}$ است. در نتیجه

$$BD = \frac{2}{3} BC$$

بنابراین

$$\triangle BCD \text{ محیط} = BC + CD + DB$$

$$= BC + 5 + \frac{2}{3} BC = 20$$

در نتیجه $BC = 6$.

۹۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل،

$$DC = 2BE = 2BD = 2k$$

بنابراین $BE = BD = k$ و $DC = 2k$. در نتیجه

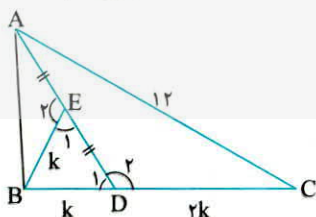
$$\hat{E}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{E}_r = \hat{D}_r$$

همچنین

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{DC} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ (ض.ض). بنابراین

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 6$$



۸۶- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$\frac{BE}{AC} = \frac{ED}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$$

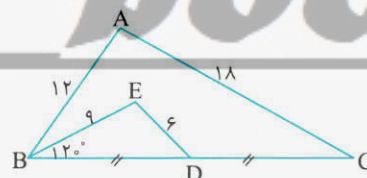
در نتیجه

$$\triangle BED \sim \triangle ABC \text{ (ض.ض.ض)}$$

بنابراین

$$\alpha = \hat{E}\hat{B}\hat{D} = \hat{A}\hat{C}\hat{B} = 3\alpha - 40^\circ$$

در نتیجه $\alpha = 20^\circ$.



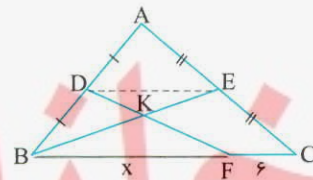
۸۷- گزینه‌ی ۲ پاره‌خط DE را رسم کنید. چون این پاره‌خط

وسط‌های دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را به هم وصل

کرده است، پس با BC موازی است و $DE = \frac{BC}{2}$. چون

$DE \parallel BC$ ، مثلث‌های BKF و EKD متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{DE}{FB} = \frac{KE}{KB} \Rightarrow \frac{\frac{x+6}{2}}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x + 18 = 4x \Rightarrow x = 18$$



۸۸- گزینه‌ی ۱ بنابر قضیه‌ی تالس در مثلث ECD،

$$1 = \frac{FD}{FE} = \frac{GD}{GC} = \frac{GD}{8} \Rightarrow GD = 8$$

چون $\triangle AEB \sim \triangle ECD$ (زر)، پس

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{6}{16} = \frac{3}{EC} \Rightarrow EC = 8$$

در نتیجه با استفاده‌ی دوباره از قضیه‌ی تالس در مثلث CED،

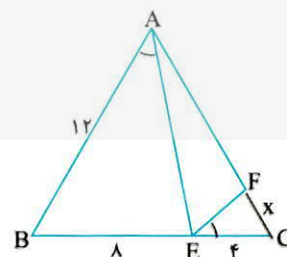
$$\frac{GF}{EC} = \frac{GD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow GF = \frac{EC}{2} = 4$$

۸۹- گزینه‌ی ۳ چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است،

پس $\hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ و $BC = AB = 12$ ، بنابراین $EC = 4$. اکنون

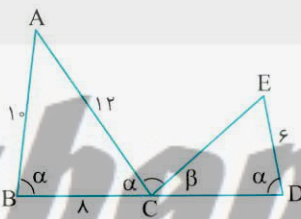
توجه کنید که مثلث‌های ABE و ECF متشابه‌اند (زر). بنابراین

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{EC} \Rightarrow \frac{\frac{12}{x}}{x} = \frac{12}{4} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$



بنابراین

$$EC=9, CD=\frac{15}{2} \Rightarrow EC \times CD = \frac{135}{2}$$



چون ۹۷- گزینه ۲

$$EF \parallel DC$$

بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث BDC.

$$\frac{EF}{DC} = \frac{BE}{BD} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون

$$AB \parallel CD$$

پس مثلث‌های AEB و CED متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم می‌شود

$$\frac{BE}{BD} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

از تناسب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{EF}{6} = \frac{2}{5} \Rightarrow EF = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۹۸- گزینه ۳ دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، پس

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2y \\ \Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6, x = 4 \\ x + y = 10 \Rightarrow 3x + 2y = 30 \end{cases}$$

بنابراین مساحت مثلث OCD برابر است با

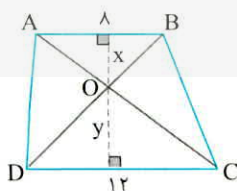
$$S_{OCD} = \frac{y \times 12}{2} = 36$$

توجه کنید که ارتفاع مثلث ADC نیز برابر ۱۰ است، در نتیجه

$$S_{ADC} = \frac{10 \times 12}{2} = 60$$

بنابراین

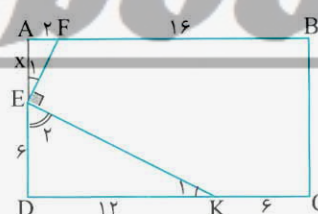
$$S_{ADO} = S_{ADC} - S_{OCD} = 60 - 36 = 24$$

۹۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون $DC=AB=18$ ،پس $DK=12$. از طرف دیگر، چون زاویه‌های E_1 و E_2 متمم‌اند و زاویه‌های E_1 و K_1 هم متمم‌اند، پس $\hat{E}_1 = \hat{K}_1$.

بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AEF و DKE متشابه‌اند (ز.ز).

بنابراین

$$\frac{AE}{DK} = \frac{AF}{DE} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{2}{6} \Rightarrow x = 4$$

۹۴- گزینه ۲ چون $AD \parallel BC$ ، پس مثلث‌های ADF و

CEF متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CE} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو

برابرند، پس

$$AD = BC \Rightarrow 6 = x + CE \Rightarrow CE = 6 - x$$

و چون $\frac{AF}{CF} = 2$ ، پس تناسب (۱) می‌شود

$$2 = \frac{6}{6-x} \Rightarrow 12 - 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۹۵- گزینه ۲ چون $AB \parallel CE$ ، مثلث‌های ABF و CEF

متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AB}{CE} = \frac{BF}{EF} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو

برابرند، پس

$$AB = CD = CE + ED = CE + \frac{1}{3} CE = \frac{4}{3} CE$$

در نتیجه $\frac{AB}{CE} = \frac{4}{3}$ و تناسب (۱) می‌شود

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 4$$

۹۶- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $\hat{ACE} = \alpha$ ، $\hat{ECD} = \beta$ و $\hat{ACB} = \gamma$. بنابراین با توجه به این که $\hat{BCE}$ زاویه‌ی خارجیمثلث ECD است، پس $\hat{E} = \gamma$. به طور مشابه $\hat{A} = \beta$. بنابراین

$$\triangle ABC \sim \triangle ECD \quad (\text{ز.ز})$$

در نتیجه

$$\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{EC}{12} = \frac{CD}{10} = \frac{6}{8}$$

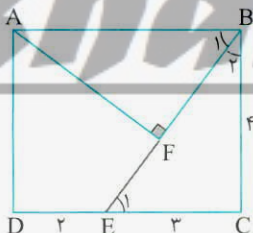
از طرف دیگر، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث BCE،

$$BE^2 = BC^2 + EC^2 = 25$$

$$BE = 5$$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{5}{5} = \frac{5-EF}{3} \Rightarrow 1 = \frac{5-EF}{3} \Rightarrow 3 = 5-EF \Rightarrow EF = 2$$



توجه کنید که (۱۰۴-گزینه ۳)

$$EC = \sqrt{DE^2 + DC^2} = 5$$

اکنون از نقطه‌ی A بر BC عمود می‌کنیم:

$$\triangle DEC \sim \triangle ACH \text{ (ز.ز)}$$

بنابراین

$$\frac{DE}{AH} = \frac{DC}{CH} = \frac{EC}{AC} = \frac{5}{15}$$

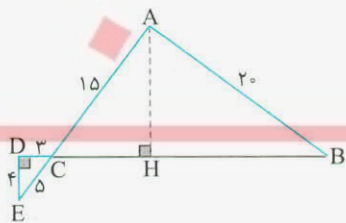
بنابراین $CH = 9$ و $AH = 12$. در مثلث AHB،

$$HB = \sqrt{AB^2 - AH^2}$$

$$= \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$$

در نتیجه

$$BC = CH + HB = 9 + 16 = 25$$



(۱۰۵-گزینه ۳) چون $DE \parallel AB$ ، پس مثلث‌های EKD و

BKA متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{ED}{BA} = \frac{EK}{BK} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون $EF \parallel AB$ ، پس مثلث‌های CEF و CBA

متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{EF}{BA} = \frac{CE}{CB} = \frac{x}{x+8} \quad (2)$$

چون $ED = EF$ ، پس نسبت‌های سمت چپ تناسب‌های (۱)

و (۲) برابرند، پس

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{x+8} \Rightarrow 3x = x+8 \Rightarrow x = 4$$

(۹۹-گزینه ۳) طبق شکل زیر،

$$\hat{C} = 180^\circ - \alpha - \beta = \hat{F} = 180^\circ - \alpha - \beta$$

بنابراین دو مثلث DFB و ACB به حالت (ز.ز) متشابه هستند.

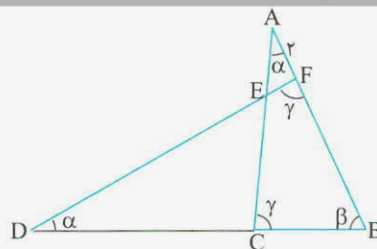
در نتیجه

$$\frac{2}{3} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{FB} = \frac{4}{FB}$$

بنابراین $FB = 6$. در نتیجه

$$\frac{2}{3} = \frac{AB}{BD} = \frac{2+FB}{4+CD} = \frac{8}{4+CD}$$

در نتیجه $CD = 8$.



(۱۰۰-گزینه ۳) چون $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} = 1$ ، بنابر عکس قضیه‌ی

تالس، $EF \parallel BC$ موازی است، و بنابر تعمیم قضیه‌ی تالس،

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow EF = \frac{1}{2} BC = \frac{x+4}{2}$$

اکنون توجه کنید که چون $EF \parallel BD$ ، مثلث‌های EFK و DBK متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{EF}{DB} = \frac{FK}{BK} \Rightarrow \frac{\frac{x+4}{2}}{4} = \frac{KF}{KB} = 1 \Rightarrow x+4 = 8 \Rightarrow x = 4$$

(۱۰۱-گزینه ۲) چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو

برابرند، پس $BC = 2DE$. از طرف دیگر، چون $BC \parallel DE$ ،

پس مثلث‌های BFC و DFE متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{BF}{DF} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{18}{x} = \frac{2DE}{DE} = 2 \Rightarrow x = 9$$

(۱۰۲-گزینه ۳) چون $AE \parallel DC$ ، مثلث‌های AFE و CFD

متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AE}{CD} = \frac{AF}{CF} \Rightarrow \frac{AE}{2AE} = \frac{AF}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AF}{10}$$

پس $AF = 5$ و در نتیجه $AC = 15$. اکنون، بنابر قضیه‌ی

فیثاغورس در مثلث ADC،

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow 15^2 = 9^2 + DC^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = 15^2 - 9^2 = 144$$

پس $DC = 12$.

(۱۰۳-گزینه ۱) با توجه به شکل، زاویه‌های B_1 و E_1 هر

دو متمم زاویه‌ی B_2 هستند، پس برابرند. در نتیجه مثلث‌های

قائم‌الزاویه‌ی ABF و BEC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BF}{EC} \quad (1)$$

در نتیجه

$$\Delta = BC = BE + EF + FC$$

$$= \frac{4}{3}x + x + \frac{3}{4}x \Rightarrow x = \frac{6}{37}$$

۱۱۰- گزینه ۴ با توجه به شکل،

$$\hat{A} + \hat{ABE} = 90^\circ, \quad \hat{ABE} + \hat{DBC} = 90^\circ$$

پس $\hat{D} = \hat{AEB} = 90^\circ$ همچنین $\hat{A} = \hat{DBC}$ بنابراین $\Delta ABE \sim \Delta DCB$ (ز.ز). در نتیجه

$$1 = \frac{AB}{BC} = \frac{EB}{DC} = \frac{AE}{DB}$$

در نتیجه

$$EB = DC = 6$$

از این رو $DB = DE + EB = 8$ در نتیجه

$$BC = \sqrt{DC^2 + DB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

بنابراین $AB = 10$

۱۱۱- گزینه ۴ از فرض مسئله نتیجه می‌شود نسبت

مساحت مثلث DCE به مساحت مثلث ABC برابر $\frac{1}{4}$ است.

چون

$$\Delta DCE \sim \Delta ABC \text{ (ز.ز)}$$

پس نسبت تشابه دو مثلث برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است. در این صورت

$$\frac{DE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 2$$

۱۱۲- گزینه ۳ چون $EF \parallel BC$ پس مثلث‌های AEF و ABC متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت (AEF)}}{\text{مساحت (ABC)}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AE}{2AE}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

اگر این تناسب را تفصیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{\text{مساحت (AEF)}}{\text{مساحت (BEFC)}} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

۱۱۳- گزینه ۴ مثلث‌های ABC و DBE قائم‌الزاویه‌اند و

زاویه B در آن‌ها مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$$\frac{\text{مساحت (ABC)}}{\text{مساحت (DBE)}} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$\text{مساحت (ABC)} = \text{مساحت (DBE)} + \text{مساحت (ACDE)}$$

$$= 2(\text{مساحت (DBE)})$$

در نتیجه، تناسب (۱) می‌شود

$$2 = \left(\frac{AB}{x}\right)^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

۱۰۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\frac{CD}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه $\Delta ABC \sim \Delta CED$ (ض.ض.ض). بنابراین

$$\hat{B} = \hat{D} = \beta, \quad \hat{ACB} = \hat{E} = \alpha, \quad \hat{ECD} = \hat{A} = \gamma$$

در نتیجه $\alpha + \gamma + 70^\circ = 180^\circ$ بنابراین $\alpha + \gamma = 110^\circ$ پس

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 70^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 2\beta = 140^\circ$$

۱۰۷- گزینه ۴ با توجه به شکل و فرض مسئله می‌توان نوشت

$$2AB = 3DC = 6k \Rightarrow AB = 3k, \quad DC = 2k$$

همچنین $AE = EF = FC = m$ بنابراین

$$\frac{DE}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad \frac{EC}{AC} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}, \quad \frac{DC}{AB} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$$

پس

$$\frac{DE}{BC} = \frac{EC}{AC} = \frac{DC}{AB}$$

در نتیجه $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (ض.ض.ض). در این صورت

$$\hat{DEC} = \hat{ACB} = 18^\circ + 42^\circ = 60^\circ$$

بنابراین

$$\alpha = 180^\circ - \hat{DEC} = 120^\circ$$

۱۰۸- گزینه ۴ با توجه به شکل فرض می‌کنیم، $\hat{BAD} = \alpha$ و $\hat{EAC} = \beta$ و $\alpha + \beta = 80^\circ$ بنابراین

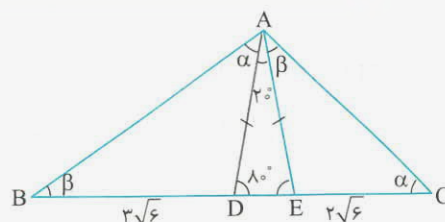
$$\hat{C} = 80^\circ - \beta = \alpha, \quad \hat{B} = 80^\circ - \alpha = \beta$$

در نتیجه (ز.ز) $\Delta ABD \sim \Delta AEC$ بنابراین

$$\frac{AE}{BD} = \frac{EC}{AD} \Rightarrow \frac{AE}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{AE}$$

بنابراین

$$AE^2 = 36 \Rightarrow AE = AD = 6$$



۱۰۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس

 $BC = 5$ اکنون توجه کنید که

$$\Delta GFC \sim \Delta ABC \text{ (ز.ز)}, \quad \Delta BDE \sim \Delta ABC \text{ (ز.ز)}$$

بنابراین

$$\frac{FC}{AC} = \frac{GF}{AB} \xrightarrow{GF=x} \frac{FC}{3} = \frac{x}{4} \Rightarrow FC = \frac{3}{4}x$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC} \xrightarrow{DE=x} \frac{BE}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow BE = \frac{4}{3}x$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم $BD=a$ و در نتیجه

$AB=2a$. بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث DBC .

$$DC^2 = BC^2 + DB^2 \Rightarrow 52 = x^2 + a^2$$

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow 100 = x^2 + 4a^2$$

اگر دستگاه را حل کنیم، به دست می‌آید

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = 52 \\ x^2 + 4a^2 = 100 \end{cases}$$

$x^2 = 36$ پس $x=6$.

۱۴۱- گزینه‌ی ۳ فرض کنید $DC=y$ و در نتیجه $BC=2y$.

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ACD ,

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow 16 = x^2 + a^2$$

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ACB ,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 36 = x^2 + 4a^2$$

اگر دستگاه را حل کنیم، به دست می‌آید

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = 16 \\ x^2 + 4a^2 = 36 \end{cases}$$

$x^2 = \frac{28}{3}$ پس $x = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

خانه کتاب

@khanah_book

خانہ کتاب

فصل سوم

@khanah_book

تابع

خانه کتاب

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع

یادآوری:

هر تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را دامنه‌ی این تابع و B را هم‌دامنه این تابع می‌نامند. مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند برد این تابع می‌نامند. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه‌ی تابع است.

تابع به عنوان ماشین

می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه‌ی تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن، به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد، البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از دامنه‌ی تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشند، می‌نویسیم $y = f(x)$. به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا به خروجی تبدیل کند، ضابطه‌ی تابع می‌گویند.

تست ۱

اگر $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$ ، آن گاه $f(\sqrt[3]{2})$ چقدر است؟ $\sqrt[3]{2}$ (۴) $\sqrt[3]{4}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: رابطه‌ی داده شده را به صورت $f(x+1) = (x+1)^3 - 1$ می‌نویسیم. حال اگر فرض کنیم $x+1 = \sqrt[3]{2}$ ، یعنی $x = \sqrt[3]{2} - 1$ ، به دست می‌آید

$$f(\sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = 1$$

تست ۲

اگر $f(x) + xf(2) = x^3 + 1$ ، حاصل $f(-2)$ چقدر است؟

۳ (۴)

۹ (۳)

-۱ (۲)

-۷ (۱)

پاسخ: در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $x = 2$:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) + 2f(2) = 8 + 1 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow f(x) + 3x = x^3 + 1$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x = -2$ ، به دست می‌آید

$$f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$$

تست ۳

اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار $f\left(\frac{1}{4}\right)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: اگر معادله‌ی $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{4}$ را حل کنیم، به دست می‌آید $x = 3$. بنابراین اگر در تساوی داده شده قراردهیم $x = 3$ ، به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

تست ۴

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $4x$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

پاسخ: در ضابطه‌ی تابع به جای x مقدارهای $1+x$ و $1-x$ را قرار می‌دهیم:

$$f(1+x) = (1+x)^2(1-x)^2, \quad f(1-x) = (1-x)^2(1+x)^2$$

بنابراین $f(1+x) - f(1-x) = 0$.

تست ۵

اگر $f\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، آن گاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4x+1}{x+1}$ (۲) $\frac{2x+1}{1-x}$ (۳) $\frac{1}{x}$ (۴) $\frac{4x+1}{2-x}$

پاسخ: فرض می‌کنیم $t = \frac{x-1}{2x+1}$ ، بنابراین

$$2tx + t = x - 1 \Rightarrow (2t-1)x = -t-1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{1-2t}$$

در نتیجه

$$f(t) = \frac{2\left(\frac{t+1}{1-2t}\right) - 1}{\frac{t+1}{1-2t} + 1} = \frac{2t+2-1+2t}{t+1+1-2t} = \frac{4t+1}{2-t} \Rightarrow f(x) = \frac{4x+1}{2-x}$$

تابع گویا

تعریف اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد، به تابع با ضابطه‌ی

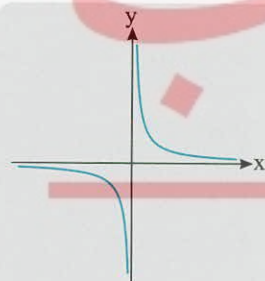
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

دامنه‌ی $D_f = \{x | Q(x) \neq 0\}$ تابع گویا می‌گوییم.

نکته

نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ که دامنه‌ی آن $\mathbb{R} - \{0\}$ است به شکل مقابل است.

از روی این نمودار معلوم است که برد تابع f مجموعه‌ی $\mathbb{R} - \{0\}$ است.



تابع ریشه‌ی nام

تعریف اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشه‌ی n ام نامنفی آن را نسبت می‌دهد،

تابع ریشه‌ی n ام می‌گوییم. و اگر n عددی طبیعی و فرد و مخالف یک باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی، ریشه‌ی n ام آن را نسبت می‌دهد، تابع ریشه‌ی n ام می‌گوییم.

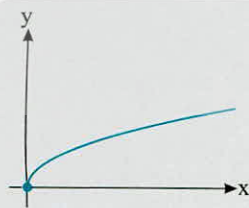
نکته

نمودار تابع ریشه‌ی دوم به صورت رویه‌رو است.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = [0, +\infty)$$

$$R_f = [0, +\infty)$$



پیدا کردن دامنه

معمولاً دامنه‌ی تابع را به همراه ضابطه‌ی آن مشخص می‌کنند. در غیر این صورت، دامنه‌ی تابع را بزرگ‌ترین زیرمجموعه از عددهای حقیقی می‌گیریم که ضابطه‌ی تابع به ازای عضوهای این زیرمجموعه بامعنی باشد.

نکته اگر f و g دو تابع باشند، دامنه‌ی تابع h با ضابطه‌ی $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر است با

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

نکته اگر n عددی فرد باشد، دامنه‌ی تابع g با ضابطه‌ی $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ برابر با D_f است.

اگر n عددی زوج باشد، دامنه‌ی تابع g با ضابطه‌ی $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ برابر است با

$$D_g = \{x | x \in D_f, f(x) \geq 0\}$$

تست ۶ تابع $y = \frac{2x-1}{x^2+kx+1}$ به ازای کدام مقدار k همواره تعریف شده است؟

$k = \frac{1}{2}$ (۴)

$k = -3$ (۳)

$k = 5$ (۲)

$k = 10$ (۱)

پاسخ: اگر دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج کسر ریشه نداشته باشد، پس
 $x^2+kx+1=0 \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = k^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < k < 2$

تست ۷ اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-1}{2x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

24 (۴)

20 (۳)

16 (۲)

8 (۱)

پاسخ: فقط عدد -2 در دامنه‌ی تابع قرار ندارد، پس تنها ریشه‌ی مخرج عدد -2 است. بنابراین مخرج مضربی از $(x+2)^2$ است. با توجه به عبارت مخرج، این مضرب $2(x+2)^2$ است، و در نتیجه

$$2(x+2)^2 = 2x^2 + ax + b$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 2x^2 + ax + b$$

$$a = 8, b = 8 \Rightarrow a + b = 16$$

تست ۸ دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

8 (۴)

6 (۳)

4 (۲)

2 (۱)

پاسخ: شرط‌های دامنه را می‌نویسیم:

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

از اشتراک شرط‌های فوق معلوم می‌شود که

$$D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$$

پس عددهای صحیح ± 3 و ± 2 در دامنه‌ی تابع هستند.

دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1 - 2x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

تست ۹

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: عبارت زیر رادیکال‌ها باید نامنفی باشد، پس

$$1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$4 - \sqrt{1 - 2x} \geq 0 \Rightarrow 4 \geq \sqrt{1 - 2x} \Rightarrow 16 \geq 1 - 2x \Rightarrow 2x \geq -15 \Rightarrow x \geq -\frac{15}{2}$$

بنابراین $D_f = [-\frac{15}{2}, \frac{1}{2}]$. عددهای صحیح $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ در دامنه‌ی تابع قرار دارند.

دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{||x| - 2| - 1}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

تست ۱۰

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد، پس

$$||x| - 2| - 1 \geq 0 \Rightarrow ||x| - 2| \geq 1$$

$$|x| - 2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3$$

$$|x| - 2 \leq -1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

در نتیجه

$$D_f = (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$$

بنابراین فقط عددهای صحیح ۲ و -۲ در دامنه‌ی تابع قرار ندارند.

دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{-x+5}} - \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

تست ۱۱

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: برای تعیین دامنه باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

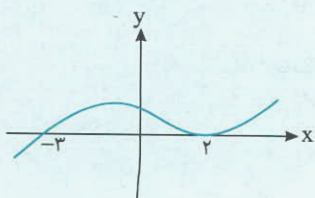
$$\frac{x+1}{-x+5} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x < 5, \quad \frac{x+2}{3-x} \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x < 3$$

از اشتراک دو ناحیه‌ی بالا نتیجه می‌شود $D_f = [-1, 3)$. بنابراین دامنه‌ی این تابع شامل چهار عدد

صحیح $-1, 0, 1$ و 2 است.

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. دامنه‌ی تابع

تست ۱۲



کدام است؟ $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{1-x^2}}$

(۱) $(-\infty, -3) \cup [-1, 1]$

(۲) $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

(۳) $(-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup \{2\}$

(۴) $(-\infty, -3] \cup [-1, 1]$

پاسخ: توجه کنید که

$$D_g = \{x \mid \frac{f(x)}{1-x^2} \geq 0, x^2 \neq 1\}$$

در جدول زیر تابع f و $1-x^2$ تعیین علامت شده‌اند:

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	-	+	+	+	+	+
$1-x^2$	-	-	+	-	-	-
$g(x)$	+	-	+	-	-	-

بنابراین

$$D_g = (-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup \{2\}$$

جزء صحیح عدد حقیقی

جزء صحیح هر عدد حقیقی بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است.

تست ۱۳

حاصل $[x^3] + [2x]$ به ازای $x = -\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴) -۸

پاسخ: ابتدا $x = -\sqrt{2}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{2})^3] + [2(-\sqrt{2})] = [-\sqrt{8}] + [-2\sqrt{2}] = [-2\sqrt{2}] + [-2\sqrt{2}] = 2[-2\sqrt{2}]$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ به دست می‌آید

$$1 < \sqrt{2} < 1.5 \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow -3 < -2\sqrt{2} < -2$$

$$\Rightarrow [-2\sqrt{2}] = -3 \Rightarrow 2[-2\sqrt{2}] = -6$$

تست ۱۴

مقدار عبارت $A = [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \dots + [\sqrt[3]{30}]$ کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۷ (۳) ۵۹ (۴) ۴۷

پاسخ: عبارت را تکه‌تکه حساب می‌کنیم:

$$[\sqrt[3]{1}] = [\sqrt[3]{2}] = \dots = [\sqrt[3]{7}] = 1$$

$$[\sqrt[3]{8}] = [\sqrt[3]{9}] = \dots = [\sqrt[3]{26}] = 2$$

$$[\sqrt[3]{27}] = [\sqrt[3]{28}] = [\sqrt[3]{29}] = [\sqrt[3]{30}] = 3$$

پس

$$A = 7 \times 1 + 19 \times 2 + 4 \times 3$$

یعنی $A = 57$.

ویژگی‌های جزء صحیح

۱- اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x] = x$.

۲- اگر n عددی صحیح باشد و $n \leq x < n+1$ ، آن‌گاه $[x] = n$ و برعکس.

۳- $x-1 < [x] \leq x$ و $[x] + 1 < x$.

۴- $0 \leq x - [x] < 1$.

۵- اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k] = [x] + k$ ، و برعکس.

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست ۱۵

اگر $[-x] = -2$ ، مقدار $[\frac{1-4x}{3}]$ چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: چون $[-x] = -2$ ، پس

$$-2 \leq \frac{1-4x}{3} < -1 \Rightarrow -6 \leq 1-4x < -3 \Rightarrow 1 < x \leq \frac{7}{4} \Rightarrow -\frac{7}{4} \leq -x < -1 \Rightarrow [-x] = -2$$

تست ۱۶

اگر $x^2 + x < 0$ ، حاصل $[x] + [x^2] + \dots + [x^{10}]$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۵ (۴) -۵

پاسخ: ابتدا با حل نامعادله، محدوده x را می‌یابیم:

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

اگر عددی بین -1 و 0 باشد، به توان هر عدد فردی برسد در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد عددی بین 0 و 1 می‌شود، یعنی

$$\begin{cases} 0 < x^{2k} < 1 \Rightarrow [x^{2k}] = 0 \\ -1 < x^{2k+1} < 0 \Rightarrow [x^{2k+1}] = -1 \end{cases} \Rightarrow [x] + [x^2] + \dots + [x^{10}] = 5 \times 0 + 5 \times (-1) = -5$$

تست ۱۷

اگر x عددی غیر صحیح باشد، حاصل $[x^2 - 1] + [2 - x^2]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) صفر یا -۱ (۴) صفر یا ۱

پاسخ: می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس

$$[x^2 - 1] + [2 - x^2] = [x^2] - 1 + 2 + [-x^2] = [x^2] + [-x^2] + 1$$

می‌دانیم $[a] + [-a]$ به ازای مقدارهای صحیح a برابر صفر و برای مقدارهای غیر صحیح a برابر -1 است.

اگر x عددی غیر صحیح باشد، x^2 می‌تواند صحیح باشد (مثل $x = \sqrt{2}$) یا غیر صحیح باشد (مثل $x = \frac{1}{2}$).

بنابراین $[x^2] + [-x^2] + 1$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

تست ۱۸

اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}]$ برابر کدام است؟

- (۱) n (۲) $n+1$ (۳) $n-1$ (۴) نامشخص

پاسخ: از نابرابری $n^3 < n^3 + 3n^2 < (n+1)^3$ نتیجه می‌گیریم

$$n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} < n+1 \Rightarrow [\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}] = n$$

تست ۱۹

مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $[x+1] + [x-x] = 2$ به صورت $[a, b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k] = [x] + k$$

بنابراین

$$[x+1] + [x-x] = 2 \Rightarrow [x] + 1 + [x] - [x] = 2 \Rightarrow [x] = 1$$

در نتیجه $1 \leq x < 2$ ، پس $a=1$ و $b=2$. بنابراین $b-a=1$.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل سوم

درس اول:

آشنایی با برخی از انواع توابع

-۱ اگر $f(x) = 3f(x-1)$ و $f(1) = 3$ ، مقدار $f(9)$ چقدر است؟

- (۱) 3^8 (۲) 3^9 (۳) 3^{10} (۴) 3^{11}

-۲ اگر $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ و $f(\frac{1}{2}) = 8$ ، مقدار $f(\frac{1}{3})$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

-۳ اگر $2f(1) + f(4x-1) = 2x+5$ ، مقدار $f(-2)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

-۴ اگر $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ، حاصل $f(x-2)$ بر حسب $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2f(x)+1}{f(x)}$ (۲) $\frac{f(x)-2}{f(x)}$ (۳) $\frac{2f(x)-1}{f(x)}$ (۴) $\frac{f(x)+2}{f(x)}$

-۵ اگر $f(\frac{x+1}{x-2}) = 2x-1$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$)

- (۱) $\frac{3x+3}{x-1}$ (۲) $\frac{3x-1}{x-1}$ (۳) $\frac{2x-3}{x-1}$ (۴) $\frac{5x+4}{x-1}$

-۶ اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار به دست آمده نمودار اولیه را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) $\frac{25}{16}$ (۴) $\frac{16}{25}$

-۷ چند عدد در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^3-2x^2-x+2}$ قرار ندارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

-۸ چند عدد در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4-3x^2+2}$ قرار ندارند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

-۹ دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-2}{1-\frac{4}{x+1}}$ به صورت $\mathbb{R} - A$ است. حاصل ضرب عضوهای مجموعه‌ی A کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۶ (۴) -۶

-۱۰ چند عدد در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{|x|}{2|x|-|x+1|}$ قرار ندارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{|x-1|+2}{||x-1|-2|-2}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{-3, 5\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{-3, -1, 5\}$

۱۲- اگر $x = -2$ در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{x^3 - ax^2 + 2ax}$ نباشد، دامنه‌ی این تابع کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 0\}$

۱۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{|x|}{a|x| - bx + 1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{16}$

۱۴- اگر دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + mx + 2}$ مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ (۲) $m > 2\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ (۴) $m > \sqrt{2}$

۱۵- اگر m عددی صحیح باشد و دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{[x]-4}{x^2 + 2x - m + 4}$ مجموعه‌ی عددهای حقیقی باشد، بیش‌ترین مقدار ممکن m چقدر است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۶- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{m^2x^2 + x + 1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{n\}$ است. چند مقدار مختلف برای n وجود دارد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۷- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4} + \sqrt{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty) - \{2\}$ (۳) $[1, 2) \cup (2, +\infty)$ (۴) $[1, +\infty)$

۱۸- کدام عدد در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x+1}}$ قرار ندارد؟

- (۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

۱۹- چند عدد صحیح در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}-2}$ قرار دارند؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۲۰- چند عدد صحیح در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{4-x}}$ قرار دارند؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۲۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{2-|x+1|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۲۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{5-|x-3|}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 8]$ (۲) $(-2, 8)$ (۳) $[-8, 2]$ (۴) $(-8, 2)$

۲۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-|x-1|}}{x^2-4}$ کدام است؟

- (۱) $[-6, 3] - \{\pm 2\}$ (۲) $[-4, 4] - \{\pm 2\}$ (۳) $[-3, 3] - \{\pm 2\}$ (۴) $[-3, 5] - \{\pm 2\}$

۴۹- اگر $\sqrt{x}=9$ و $\sqrt{y}=12$ ، بیشترین مقدار $[x+y]$ چقدر است؟

- (۱) ۲۲۵ (۲) ۲۴۲ (۳) ۲۵۶ (۴) ۲۶۸

۵۰- اگر $[x^2-5x]=[x^2-7x]=2$ ، مقدار $[x^2-6x+1]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۱- اگر $[x^2-2x]=-1$ ، مقدار $[\frac{x^5}{32}]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۵۲- اگر $[x^2]=0$ و $x \neq 0$ ، مقدار عبارت $A=[-x^4]+[-x^6]+\dots+[-x^{20}]$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۹ (۳) -۱۰ (۴) -۱۲

۵۳- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt{n^2+4n+1}]$ کدام است؟

- (۱) n (۲) $n+1$ (۳) $n+2$ (۴) $n+3$

۵۴- برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است؟ (تجربی - ۹۱)

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}]$ کدام است؟

- (۱) $n-1$ (۲) n (۳) $n+1$ (۴) $n+2$

۵۶- اگر $f(x)=[x+2]+[x+3]$ ، مقدار $f(-\pi)$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۷- اگر $f(x)=[x]-[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}]$ ، حاصل $f(x+2)-f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $[x]$ (۴) $[\frac{x}{2}]$

۵۸- اگر $f(x)=x(-1)^{[x]}$ و $x \notin \mathbb{Z}$ ، حاصل $f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $xf(x)$ (۴) $-xf(x)$

۵۹- اگر $f(x)=x-4[x]+[2x]$ ، حاصل $f(f(x))$ کدام است؟

- (۱) $[x]$ (۲) x (۳) $2x$ (۴) $[2x]$

۶۰- اگر $[\frac{5-x}{2}]=-3$ ، حدود x کدام است؟

- (۱) $(9, 11)$ (۲) $(-11, 11)$ (۳) $[-11, -9]$ (۴) $[9, 11)$

۶۱- اگر $[x+[x-3]]=1$ ، حدود x کدام است؟

- (۱) $(1, 2)$ (۲) $[2, 3)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) $[2, 4)$

۶۲- اگر $[x+2]+[3-x]=x$ ، چند مقدار مختلف برای x وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۳- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $|[2x+3]| < 1$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $[-\frac{3}{2}, -1)$ (۴) $(-2, -\frac{3}{2})$

۶۴- مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $[-2x]+[1-2x]+[3-2x]=1$ کدام است؟

- (۱) $(0, \frac{1}{3}]$ (۲) $(0, \frac{1}{2}]$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, \frac{1}{4}]$

۶۵- اگر معادله‌ی $[x+2[x]]+[x-2]=k$ جواب داشته باشد، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۶- مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $2[x]^2 + [x-1] = 0$ کدام است؟

- (۱) $[-1, -\frac{1}{2}]$ (۲) $[-1, 0)$ (۳) $[-2, 0)$ (۴) $[-2, -1]$

۶۷- مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $[\frac{2[x]+1}{3}] = 3$ کدام است؟

- (۱) $[5, 6)$ (۲) $[4, 5)$ (۳) $[4, 6)$ (۴) $[4, 7)$

۶۸- معادله‌ی $[2x^2] - [4x] = x - 2$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۹- معادله‌ی $x^2 + [x] = 3 - [-x]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۰- اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $[x-3] - [-x] = -2$ بازه‌ی (a, b) باشد، مقدار $a+b$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۷۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{[\frac{x}{2}]-1}$ بازه‌ی $[a, b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۷۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{N}$ (۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۷۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{[4-x] + [x-3]}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{N}$ (۲) $\mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۷۴- چند عدد در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[x] + [-x] + 1}$ قرار دارند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) نامتناهی

۷۵- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{[x]+1} + \sqrt{2-[x]}$ بازه‌ی $[a, b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2[x]^2 + 5[x] - 2}}$ کدام است؟

- (۱) $[1, 2)$ (۲) $[1, 3)$ (۳) $[1, 4)$ (۴) $[1, 5)$

۷۷- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{[x+1]-2}}$ کدام است؟

- (۱) $[2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -4]$ (۳) $[-4, 2]$ (۴) $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

۷۸- برد تابع $f(x) = [3[x] - x] - [x + [x]]$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نامتناهی

۷۹- اگر $f(x) = x - [x]$ ، برد تابع $g(x) = f(2x-3) - 2f(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-1, 0)$ (۴) $\{0, 1\}$

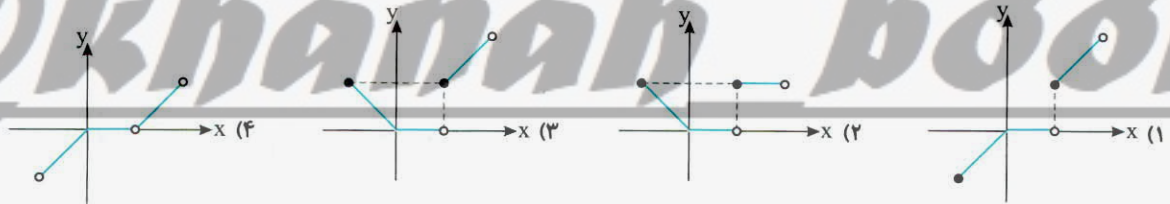
۸۰- برد تابع $f(x) = [x] - |x|$ با دامنه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 0] - \{-1\}$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $[-2, 1)$ (۴) $(-2, -1)$

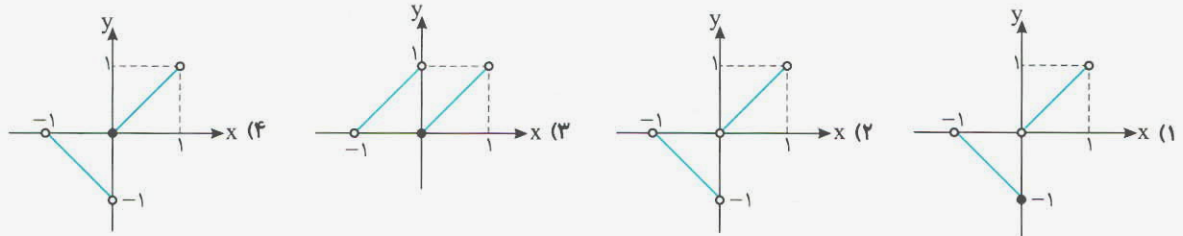
۸۱- نمودار تابع $y = x - [x]$ در بازه $[-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه 1 تشکیل شده است. زوج مرتب $(n, 1)$ کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$ (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 1)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

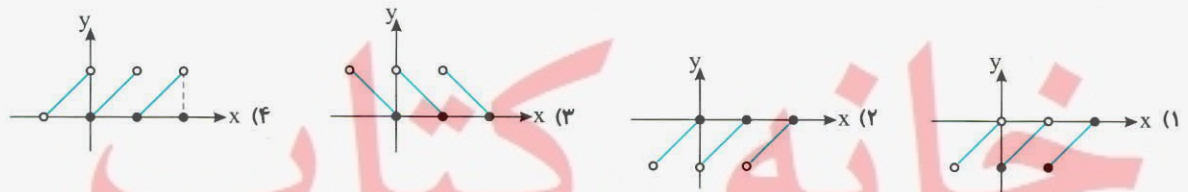
۸۲- نمودار تابع $f(x) = x[x]$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟



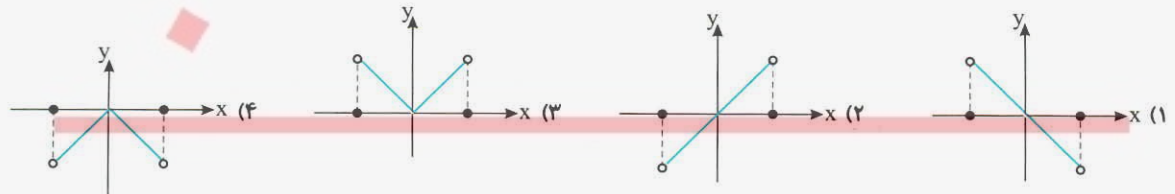
۸۳- نمودار تابع $y = |x| + [x]$ روی بازه $(-1, 1)$ کدام است؟



۸۴- نمودار تابع $y = x + [-x]$ روی بازه $(-1, 2]$ کدام است؟



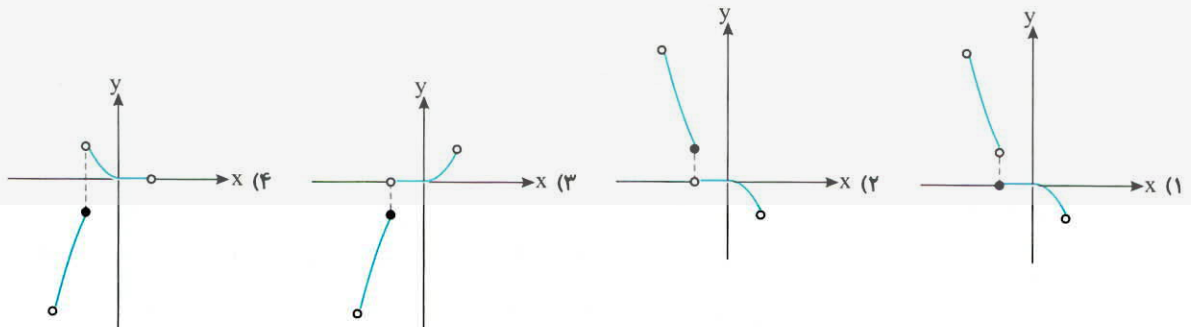
۸۵- نمودار تابع $y = x[x - x]$ روی بازه $[-1, 1]$ کدام است؟



۸۶- نمودار تابع $y = [\sqrt{x}]$ روی بازه $[0, 1]$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

- (۱) سه پاره خط هم اندازه (۲) چهار پاره خط هم اندازه
(۳) سه پاره خط با اندازه های مختلف (۴) چهار پاره خط با اندازه های مختلف

۸۷- نمودار تابع $f(x) = x^2[-x]$ روی بازه $(-2, 1)$ کدام است؟



۸۸- اگر تابع‌های $f = \{(1, a), (2, 2a+b), (c, 3)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 5), (4, 3)\}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۸۹- کدام دو تابع برابرند؟

$$g(x) = x+1 \text{ و } f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad (۲)$$

$$g(x) = x \text{ و } f(x) = \frac{x^2}{x} \quad (۱)$$

$$g(x) = x^2+2x \text{ و } f(x) = \frac{x^3-4x}{x-2} \quad (۴)$$

$$g(x) = x \text{ و } f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1} \quad (۳)$$

۹۰- کدام دو تابع برابرند؟

$$g(x) = \sqrt{x}\sqrt{4-x} \text{ و } f(x) = \sqrt{4x-x^2} \quad (۲)$$

$$g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-2} \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2-2x} \quad (۱)$$

$$g(x) = x-2 \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} \quad (۴)$$

$$g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+2} \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2+2x} \quad (۳)$$

۹۱- تابع $f(x) = 2+|x+3|-|x-1|$ با کدام تابع برابر است؟

$$\begin{cases} 2x-2 & x < 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} x & x < -3 \\ 2x+4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 1-x & x > 2 \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} -2 & x < -3 \\ 2x+4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 6 & x > 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x-1 & x < -3 \\ x+4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases} \quad (۱)$$

۹۲- کدام تابع با تابع $f(x) = |x-|x-|x||$ برابر است؟

$$\begin{cases} x & x \leq 0 \\ -3x & x > 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} -3x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} 3x & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases} \quad (۱)$$

۹۳- تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x-3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2+2x+3 & x > 0 \end{cases}$ با کدام تابع مساوی است؟

$$x^2 \frac{|x|}{x} + 3 \quad (۲)$$

$$(x^2+3) \frac{|x|}{x} + 2x \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x^2 \frac{|x|}{x} + 3 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} (x^2+3) \frac{|x|}{x} + 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۹۴- کدام دو تابع مساوی‌اند؟

$$g(x) = 0 \text{ و } f(x) = [x] + [-x] \quad (۲)$$

$$g(x) = x + [-x] \text{ و } f(x) = x - [x] \quad (۱)$$

$$g(x) = 4[x] \text{ و } f(x) = [x+3[x]] \quad (۴)$$

$$g(x) = (-1)^{[-x]} \text{ و } f(x) = (-1)^{[x]} \quad (۳)$$

۹۵- دو تابع با ضابطه‌های $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ و $f(x) = \frac{5}{x-2}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟

(۴) -۲۰۰

(۳) -۱۰۰

(۲) ۲۰۰

(۱) ۱۰۰

۹۶- تابع $f(x) = \frac{bx+1}{ax+2b}$ با تابع $g(x) = c, x \neq a$ حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

(۴) ± 8 (۳) ± 4 (۲) ± 2 (۱) ± 1

فصل سوم: تابع

درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک

تعریف

تابع f را یک به یک می‌نامند، به شرطی که دو عضو متمایز از دامنه به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند. به عبارت دیگر، تابع f یک به یک است، به شرطی که به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 ،

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

به طور معادل، تابع f یک به یک است، به شرطی که به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنه f مانند x_1 و x_2 ،

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

نکته

تابع f یک به یک است، اگر و فقط اگر هر خط موازی محور x نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تست ۱

تابع $f = \{(a+b, 1), (2, 3), (4, 1), (a-b, 3), (5, 6)\}$ یک به یک است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: چون دو زوج مرتب $(4, 1)$ و $(a+b, 1)$ در تابع وجود دارند، پس

$$a+b=4$$

و چون دو زوج مرتب $(2, 3)$ و $(a-b, 3)$ در تابع وجود دارند، پس

$$a-b=2$$

بنابراین

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3, b=1 \Rightarrow \frac{a}{b}=3$$

تست ۲

کدام گزینه تابعی یک به یک است؟

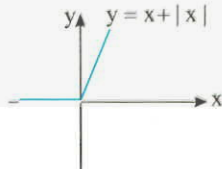
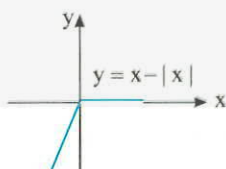
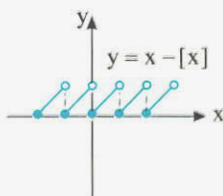
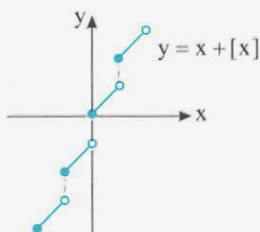
$$y = x + |x| \quad (۴)$$

$$y = x - |x| \quad (۳)$$

$$y = x - [x] \quad (۲)$$

$$y = x + [x] \quad (۱)$$

پاسخ: نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:



واضح است که تابع $y = x + [x]$ یک به یک است.

تابع $f(x) = x^2 - 4x$ با دامنه $[m, +\infty)$ یک به یک است. حداقل مقدار m چقدر است؟

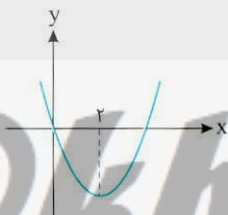
تست ۳

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخ: نمودار تابع $y = x^2 - 4x$ به شکل مقابل است. واضح است که اگر دامنه‌ی تابع را به x های بزرگ‌تر یا مساوی ۲ محدود کنیم، تابع یک به یک خواهد بود. البته اگر دامنه‌ی تابع را مثلاً $x \geq 4$ بگیریم، هم تابع یک به یک خواهد بود. پس حداقل مقدار m برای این که تابع با دامنه‌ی $x \geq m$ یک به یک باشد، برابر ۲ است.

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ با دامنه‌ی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک به یک است.

نکته

تابع $f(x) = \frac{mx+9}{3x+3m}$ با کدام شرط یک به یک است؟

تست ۴

$m = \pm 3$ (۴)

$m = 3$ (۳)

$m \neq \pm 3$ (۲)

$m \neq 3$ (۱)

پاسخ: توجه کنید که

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{mx_1 + 9}{3x_1 + 3m} = \frac{mx_2 + 9}{3x_2 + 3m}$$

$$3mx_1x_2 + 3m^2x_1 + 27x_2 + 27m = 3mx_1x_2 + 27x_1 + 3m^2x_2 + 27m$$

$$3m^2(x_1 - x_2) - 27(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(m^2 - 9) = 0$$

برای این که تابع یک به یک باشد، باید $x_1 = x_2$ که این در صورتی ممکن است که $m^2 - 9 \neq 0$. بنابراین

$$m \neq \pm 3$$

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک به یک است.

نکته

اگر رابطه‌ی بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از عوض کردن جای دو مؤلفه‌ی هر زوج مرتب این رابطه با هم به دست می‌آید **وارون** این رابطه می‌نامیم. اگر رابطه‌ی f تابع باشد و وارون رابطه‌ی f نیز تابع باشد، تابع f را **وارون‌پذیر** می‌نامیم و وارون آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

تعریف

تابع f وارون‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

نکته

کدام تابع وارون‌پذیر است؟

تست ۵

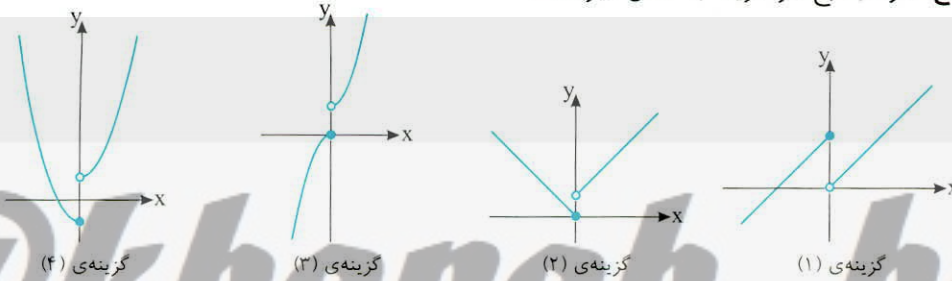
$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases} \quad (۳)$$

پاسخ: نمودار تابع هر گزینه به شکل زیر است



از روی نمودارها معلوم است که فقط تابع گزینه (۳) یک به یک است، پس وارون پذیر است.

نکته

فرض کنید تابع f وارون پذیر باشد. در این صورت

۱- اگر $f(a) = b$ ، آن گاه $f^{-1}(b) = a$. به عبارت دیگر، اگر نقطه‌ای (a, b) روی نمودار تابع f باشد، آن گاه نقطه‌ی

(b, a) روی نمودار f^{-1} است.

۲- $D_f = R_{f^{-1}}$ و $D_{f^{-1}} = R_f$.

۳- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

۴- نمودار تابع‌های f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه‌ی یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار تابعی نسبت به خط $y = x$ متقارن باشد، آن گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

۵- اگر نمودارهای f و f^{-1} یکدیگر را در نقطه‌ی (a, b) قطع کرده باشند، آن گاه $f(a) = b$ و $f(b) = a$. توجه کنید که نقطه‌ی (b, a) نیز یک نقطه‌ی تقاطع است.

اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 2x + 2m$ از نقطه‌ی $(m, 1)$ عبور کند، مقدار $f^{-1}(-6)$ کدام است؟

تست ۶

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) -۳۷

پاسخ: چون نمودار f^{-1} از $(m, 1)$ عبور می‌کند، پس

$$f^{-1}(m) = 1 \Rightarrow f(1) = m \Rightarrow 1 + 2 + 2m = m$$

$$\Rightarrow m = -3 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x - 6$$

بنابراین

$$f^{-1}(-6) = a \Rightarrow f(a) = -6 \Rightarrow a^3 + 2a - 6 = -6$$

$$\Rightarrow a^3 + 2a = 0 \Rightarrow a(a^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow f^{-1}(-6) = 0$$

برد تابع وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ کدام است؟

تست ۷

(۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: توجه کنید برد تابع f^{-1} برابر با دامنه‌ی تابع f است. از طرف دیگر،

$$D_f = \{x \mid x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

بنابراین

$$R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$$

اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $(-\infty, 1]$ باشد و $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، دامنه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

۸ تست

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) $(-\infty, 2]$

پاسخ: دامنه‌ی تابع f^{-1} برد تابع f است. چون

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$$

پس $R_f \subseteq [2, +\infty)$. از طرف دیگر، اگر $t \geq 2$ ، چون معادله‌ی $f(x) = t$ جواب دارد، پس $[2, +\infty) \subseteq R_f$.

یعنی $R_f = [2, +\infty)$ در نتیجه

$$D_{f^{-1}} = R_f = [2, +\infty)$$

نمودار تابع $f(x) = a + bx^3$ نمودار وارون خود را در نقطه‌ی $(1, 0)$ قطع می‌کند. مقدار $a - b$ کدام است؟

۹ تست

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 3 (۴) -3

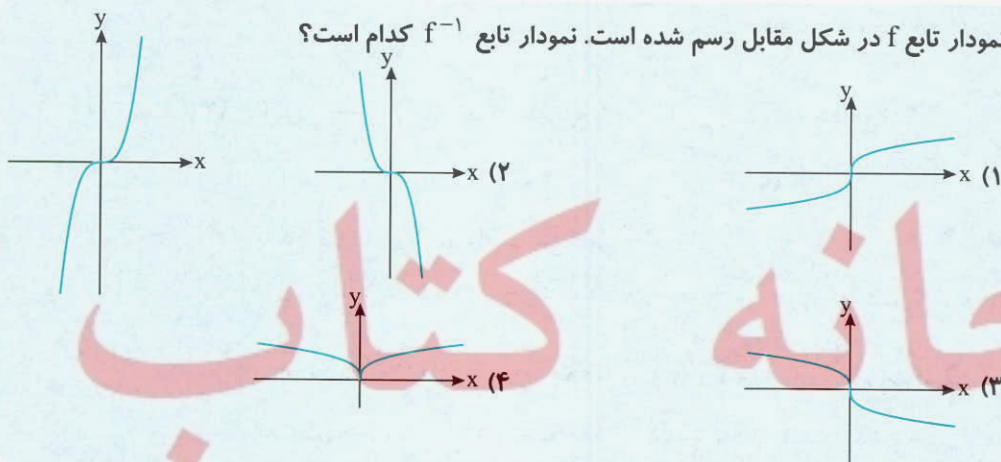
پاسخ: نقطه‌ی $(1, 0)$ روی نمودار هر دو تابع f و f^{-1} است، پس

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b, \quad f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $b = -1$ و $a - b = 2$.

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟

۱۰ تست



پاسخ: باید نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، که نمودار گزینه‌ی (۱) به دست می‌آید.

پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون

برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون تابع وارون‌پذیر f ، از تساوی $y = f(x)$ ، x را برحسب y پیدا

می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x ، ضابطه‌ی f^{-1} را به دست می‌آوریم.

تابع وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، کدام است؟

۱۱ تست

$$y = -x^2 + 4x - 5, \quad x \leq 2 \quad (2)$$

$$y = x^2 - 4x + 5, \quad x \leq 2 \quad (1)$$

$$y = x^2 - 4x + 5, \quad x \geq 1 \quad (4)$$

$$y = -x^2 + 4x - 5, \quad x \geq 1 \quad (3)$$

پاسخ: x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{2-y \geq 0} (x-1) = 4 + y^2 - 4y \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

چون $2 - y \geq 0$ ، پس $y \leq 2$ و

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \leq 2$$

تست ۱۲

ضابطه‌ی تابع وارون تابع $y = x^2 - 4x$ با شرط $x < 2$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4} \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-4} \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-4} \quad (۳)$$

پاسخ: راه حل اول $(-3, 21)$ عضو تابع است، پس نقطه‌ی $(21, -3)$ باید عضو تابع وارون باشد.

در گزینه‌ی (۱)،

$$f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{25} = -3$$

در گزینه‌ی (۲)،

$$f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{25} = 7$$

در گزینه‌ی (۳)،

$$f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{17}$$

در گزینه‌ی (۴)،

$$f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{17}$$

راه حل دوم ضابطه‌ی تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow y = (x-2)^2 - 4 \Rightarrow (x-2)^2 = y+4$$

$$\begin{cases} x-2 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y+4} > 2 \text{ (غ.ق.ق)} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4} \\ x-2 = -\sqrt{y+4} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+4} < 2 \end{cases}$$

تست ۱۳

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ ، نمودار دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟

(۴) غیر متقاطع

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: ضابطه‌ی f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow yx+3y=2x-1 \Rightarrow (y-2)x = -3y-1 \Rightarrow x = \frac{-3y-1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$$

برای تعیین نقطه‌های برخورد، معادله‌ی $f(x) = f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{3x+1}{2-x} \Rightarrow 4x^2 - 2x^2 - 2 + x = 3x^2 + x + 9x + 3 \Rightarrow 5x^2 + 5x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0, \Delta < 0$$

بنابراین نقطه‌ی برخوردی وجود ندارد.

تست ۱۴

تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+4 & x \leq 1 \\ 2x+5 & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{x-5}{3} & x \leq 1 \\ \frac{x-4}{2} & x > 1 \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} \frac{x-5}{2} & x \leq 1 \\ \frac{x-4}{3} & x > 1 \end{cases} \quad (۳) \quad \begin{cases} \frac{x-4}{3} & x \leq 1 \\ \frac{x-5}{2} & x > 1 \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} \frac{x-4}{2} & x \leq 1 \\ \frac{x-5}{3} & x > 1 \end{cases} \quad (۱)$$

پاسخ: توجه کنید که

$$g: (-\infty, 1] \rightarrow (-\infty, 7], \quad g(x) = 3x+4 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$$

$$h: (1, +\infty) \rightarrow (7, +\infty), \quad h(x) = 2x+5 \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3} & x \leq 7 \\ \frac{x-5}{2} & x > 7 \end{cases}$$

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل سوم

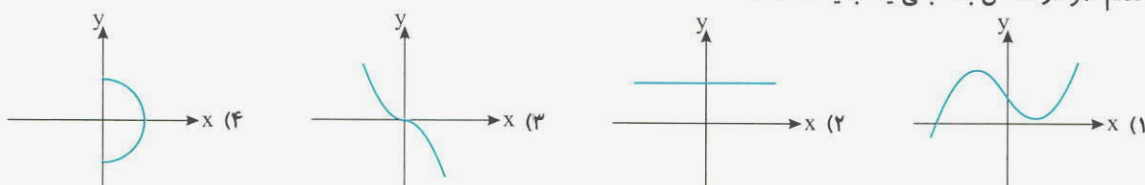
درس دوم:

وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

۹۷- تابع $f = \{(a^2, 1), (4, 1), (2a+b, 2), (6, 2), (a, b)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) -12 (۲) -10 (۳) -6 (۴) صفر

۹۸- کدام نمودار متعلق به تابعی یک‌به‌یک است؟



۹۹- کدام نمودار متعلق به تابعی یک‌به‌یک است؟

۱۰۰- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان نوشت؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۹۶ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۲۵

۱۰۱- تابع $f(x) = |2x-4| + |8-4x|$ روی کدام بازه یک‌به‌یک نیست؟

- (۱) $[2, 4]$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $(4, +\infty)$ (۴) $[1, 4]$

۱۰۲- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

- (۱) $f(x) = x + |x|$ (۲) $f(x) = x - |x|$ (۳) $f(x) = 2x + |x|$ (۴) $f(x) = x + 2|x|$

۱۰۳- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

- (۱) $f(x) = x^2 + 2x$ (۲) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ (۳) $f(x) = \frac{x|x^2-1|}{x^2-1}$ (۴) $f(x) = (x-3)(|x+1|+1)$

۱۰۴- تابع‌های زیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. کدام یک از آن‌ها یک‌به‌یک است؟

- (۱) $f(x) = x^3 + x + 1$ (۲) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (۳) $f(x) = x^2 + x|x|$ (۴) $f(x) = x^3 - 2x^2$

۱۰۵- تابع $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ روی بازه $[-1, a]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۶- تابع $f(x) = x^2 + 4x - 1$ با دامنه $(-\infty, k]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۰۷- تابع $f(x) = -x^2 + kx$ با دامنه $(-\infty, 3]$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار k کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۰۸- کدام تابع یک به یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (۳) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (۲) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (۱)$$

۱۰۹- کدام تابع یک به یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & |x| > 1 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ |x| & |x| > 1 \end{cases} \quad (۳) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & |x| > 1 \end{cases} \quad (۲) \quad f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & |x| > 1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$۱۱۰- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & x > 0 \\ 2k - x & x \leq 0 \end{cases} \text{ یک به یک است. حدود } k \text{ کدام است؟}$$

$$(۱) \quad k \geq \frac{1}{2} \quad (۲) \quad k \leq \frac{1}{2} \quad (۳) \quad k \geq 1 \quad (۴) \quad k \leq 1$$

$$۱۱۱- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} x + m & x \leq 3 \\ mx + 2 & x > 3 \end{cases} \text{ یک به یک است. مجموعه‌ی مقدارهای } m \text{ کدام است؟}$$

$$(۱) \quad \left(0, \frac{1}{2}\right] \quad (۲) \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right) \quad (۳) \quad \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (۴) \quad \mathbb{R}$$

$$۱۱۲- \text{به ازای چند مقدار مختلف } k \text{ تابع } f(x) = \frac{k^3 x + 1}{kx + 2} \text{ یک به یک نیست؟}$$

$$(۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۳ \quad (۴) \quad ۴$$

$$۱۱۳- \text{اگر } f \text{ تابعی یک به یک باشد، معادله‌ی } f(x^3 + 1) - f(x^2 + 1) = 0 \text{ چند جواب متمایز دارد؟}$$

$$(۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۳ \quad (۴) \quad ۴$$

۱۱۴- کدام تابع وارون پذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases} \quad (۴) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases} \quad (۳) \quad f(x) = \begin{cases} -x - 1 & x \leq 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases} \quad (۲) \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases} \quad (۱)$$

۱۱۵- کدام تابع وارون پذیر نیست؟

$$f(x) = x - 2|x| \quad (۴) \quad f(x) = 2x + |x| \quad (۳) \quad f(x) = 2x - |x| \quad (۲) \quad f(x) = x|x| \quad (۱)$$

$$۱۱۶- \text{اگر } f = \{(-6, 3), (-1, -1), (3, -6), (4, -3)\} \text{ مقدار } f^{-1}(3) + f^{-1}(-3) \text{ چقدر است؟}$$

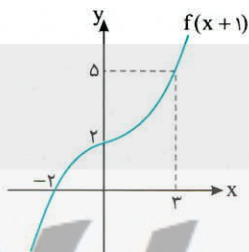
$$(۱) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad -۱ \quad (۳) \quad -۲ \quad (۴) \quad -۳$$

$$۱۱۷- \text{اگر } f = \{(3, 2), (2, 3), (4, -1), (5, 6)\} \text{ و } g = \{(2, 4), (3, 2), (1, 5), (5, -1)\} \text{ مقدار } f^{-1}(a) + g^{-1}(2) = 6 \text{ کدام است؟}$$

$$(۱) \quad ۲ \quad (۲) \quad ۴ \quad (۳) \quad ۵ \quad (۴) \quad -۱$$

$$۱۱۸- \text{دو تابع } f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\} \text{ و } g(x) = \frac{x}{x-1} \text{ مفروض‌اند. اگر } f^{-1}(g(2a)) = 6 \text{ مقدار } a \text{ کدام است؟}$$

$$(۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{3}{4} \quad (۳) \quad \frac{3}{2} \quad (۴) \quad \frac{5}{2}$$



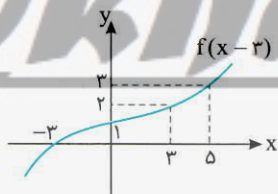
۱۱۹- نمودار تابع $y = f(x+1)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(-1)+f^{-1}(5)}{f(1)}$ چقدر است؟

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) $1/5$



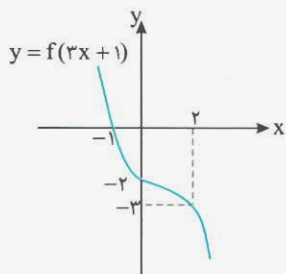
۱۲۰- نمودار تابع $y = f(x-3)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f^{-1}(3)+f^{-1}(2)}{f^{-1}(0)+f(0)}$ چقدر است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) $1/2$

(۳) $-1/2$



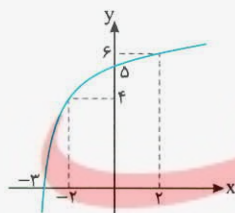
۱۲۱- نمودار تابع $y = f(3x+1)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f(-2)+1}{f^{-1}(-2)+f^{-1}(-3)}$ چقدر است؟

(۲) $1/6$

(۱) $1/8$

(۴) $1/2$

(۳) $1/4$



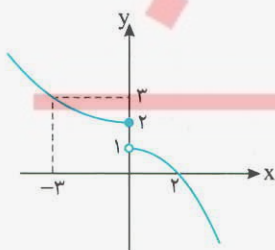
۱۲۲- نمودار تابع $y = 1 + f(1+2x)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f^{-1}(-1)+f(-3)}{f(1)-f^{-1}(5)}$ چقدر است؟

(۲) $15/2$

(۱) ۹

(۴) ۲

(۳) $10/3$



۱۲۳- نمودار تابع f^{-1} در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f(3m-9)=2$ ، مقدار m چقدر است؟

(۲) $2/3$

(۱) $4/3$

(۴) ۳

(۳) $11/3$

۱۲۴- نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x} - 1$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۴) (۱۱, ۹)

(۳) (۹, ۱۱)

(۲) (۱, ۹)

(۱) (۱, ۱۱)

۱۲۵- اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 1 \\ 3x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ ، مقدار $f^{-1}(7)+f^{-1}(-1)$ چقدر است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۲

۱۲۶- اگر $f(x) = \frac{-a}{x-3} + 2$ و $f^{-1}(4)=5$ ، مقدار a چقدر است؟

(۴) -۶

(۳) -۸

(۲) -۲

(۱) -۴

۱۲۷- اگر $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2$ ، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

۱۲۸- اگر $f^{-1}(\sqrt{x}+1) = x^3 + 1$ ، مقدار $f(65)$ چقدر است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۲۹- f تابعی خطی است، $f(1) = 3$ و $f^{-1}(11) = 3$ ، مقدار $f(-3)$ چقدر است؟

$$-7 \quad (4)$$

$$-10 \quad (3)$$

$$-13 \quad (2)$$

$$-16 \quad (1)$$

۱۳۰- اگر تابع‌های f و g وارون‌پذیر باشند، $f(2x-1) = g(3x)-1$ و $f^{-1}(2) = 3$ ، مقدار $g(6)$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۳۱- اگر $f(2x+1) = 2 - mx$ و $f^{-1}(5) = 3$ ، مقدار m چقدر است؟

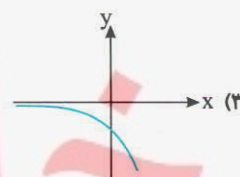
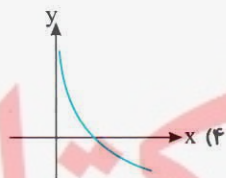
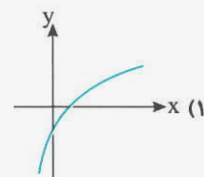
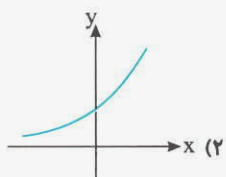
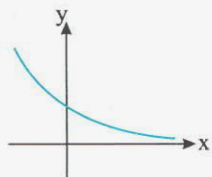
$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

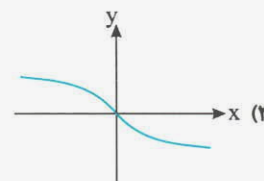
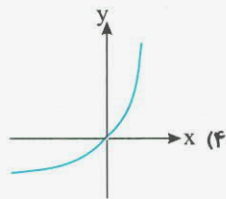
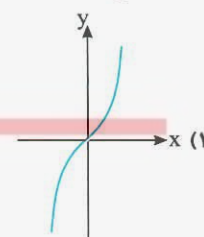
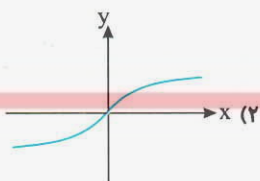
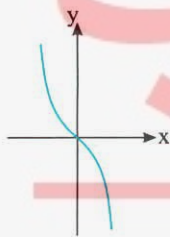
$$-2 \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

۱۳۲- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



۱۳۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



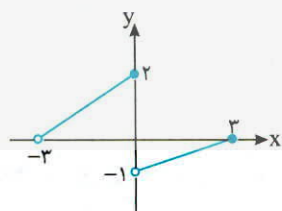
۱۳۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} در چند نقطه این نمودار را قطع می‌کند؟

$$1 \quad (1)$$

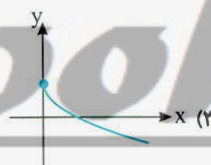
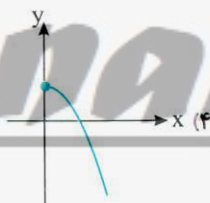
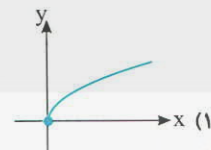
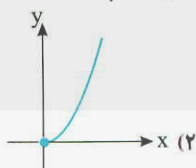
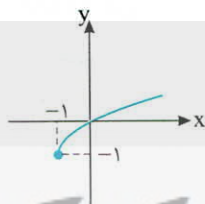
$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

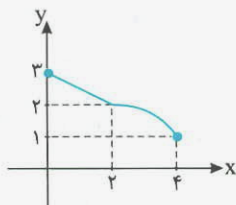
$$\text{صفر} \quad (4)$$



۱۳۵- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x-1) + 1$ کدام است؟



۱۳۶- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مساحت محصور بین نمودار f ، نمودار f^{-1} و محورهای مختصات



کدام است؟

(۲) ۶

(۱) ۷

(۴) ۴

(۳) ۵

۱۳۷- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$ ، برد تابع f^{-1} کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - (-1, 0)$

(۳) $[-1, 0]$

(۲) $\mathbb{R} - (0, 1)$

(۱) $[0, 1]$

۱۳۸- اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $(-\infty, \frac{1}{4}]$ باشد و $f(x) = x^2 - x$ ، دامنه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

(۴) $(-\infty, -\frac{1}{4}]$

(۳) $(-\infty, \frac{1}{4}]$

(۲) $[-\frac{1}{4}, +\infty)$

(۱) $[\frac{1}{4}, +\infty)$

۱۳۹- اگر $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ و $D_f = [-1, 2]$ ، دامنه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

(۴) $[2, 3]$

(۳) $[1, 3]$

(۲) $[0, 3]$

(۱) $[0, 2]$

۱۴۰- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ برابر $[0, 2]$ است. دامنه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

(۴) $[0, \frac{1}{4}]$

(۳) $[\frac{1}{9}, 1]$

(۲) $[1, 9]$

(۱) $[\frac{1}{9}, 2]$

۱۴۱- اگر $f(x) = \frac{1-2x}{5}$ ، آن گاه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1-5x}{2}$

(۳) $\frac{1+5x}{2}$

(۲) $\frac{5x-1}{2}$

(۱) $\frac{-5x-1}{2}$

۱۴۲- اگر $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{4}$ ، آن گاه $f(x)$ کدام است؟

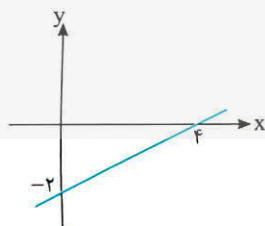
(۴) $4x-2$

(۳) $\frac{4x-2}{3}$

(۲) $\frac{4x+2}{3}$

(۱) $\frac{2x+4}{3}$

۱۴۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. ضابطه‌ی تابع $y = f^{-1}(x-1)$ کدام است؟



(۱) $2x+2$

(۲) $2x+1$

(۳) $2x-1$

(۴) $2x-2$

۱۴۴- ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = 3 - \sqrt{2-x}$ به صورت $f^{-1}(x) = -x^2 + ax + b$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۴۵- اگر $f(x) = \sqrt{2x-3}$ ، ضابطه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{x^2-3}{2}$ (۲) $\frac{x^2+3}{2}$ (۳) x^2-3 (۴) x^2+3

۱۴۶- اگر $f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x-2}$ ، حاصل $f(x+1) - 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x-4}{x}$ (۲) $\frac{x+4}{x}$ (۳) $\frac{3}{x}$ (۴) $\frac{4}{x}$

۱۴۷- ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{x-1}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۸- دربارهی تابع $f: \mathbb{R} - \{m\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-\frac{1}{p}\}$ می‌دانیم $f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{4x+n}$. مقدار mn چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۹- ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ ، $x < 2$ ، کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4-x}$ (۲) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4+x}$ (۳) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4-x}$ (۴) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4+x}$

۱۵۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. تابع f^{-1} در آن بازه کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

- (۱) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$ (۳) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

۱۵۱- ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+1}$ (۲) $f^{-1}(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$ (۳) $f^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x+1}$ (۴) $f^{-1}(x) = x - 2 + 2\sqrt{x+1}$

۱۵۲- اگر $f(x) = \begin{cases} 7x+2 & x < 1 \\ 5x+4 & x \geq 1 \end{cases}$ ، تابع وارون تابع f کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} \frac{x-2}{7} & x < 9 \\ \frac{x-4}{5} & x \geq 9 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} \frac{x-2}{7} & x < 1 \\ \frac{x-4}{5} & x \geq 1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x-2 & x < 9 \\ \frac{x-4}{5} & x \geq 9 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} \frac{x-4}{5} & x < 9 \\ \frac{x-2}{7} & x \geq 9 \end{cases}$

۱۵۳- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و f^{-1} در نقطه‌ی $(1, 2)$ برخورد کنند، حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) ۲۱

۱۵۴- نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax + b$ در نقطه‌ی $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $-\frac{10}{9}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{13}{9}$

۱۵۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. حاصل ضرب طول این نقطه‌ها کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۵۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۶)

- (۱) -۴ و -۱ (۲) ۴ و -۱ (۳) -۴ و ۱ (۴) ۴ و ۱

۱۵۷- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه‌ی $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (ریاضی - ۹۲)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) غیرمتقاطع

۱۵۸- اگر دو خط به معادله‌های $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم متقارن باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

- (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) -3 و 2 (۴) -2 و 3

۱۵۹- اگر $a \neq 1$ ، $f(x) = ax + b$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} بر هم منطبق باشند، مجموعه‌ی مقدارهای b کدام است؟

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\{-1\}$ (۳) $\{0\}$ (۴) $\mathbb{R}$

۱۶۰- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+3}{2x-4}$ نسبت به خط $y = x$ متقارن باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

خانه کتاب

فصل سوم: تابع

درس سوم: اعمال جبری روی توابع

فرض کنید f و g دو تابع باشند. در این صورت
 ۱- حاصل جمع f و g را با $f+g$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه‌ی آن $D_f \cap D_g$ است و به ازای هر x از دامنه‌ی این تابع،

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

۲- تفاضل f و g را با $f-g$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه‌ی آن $D_f \cap D_g$ است و به ازای هر x از دامنه‌ی این تابع،

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

۳- حاصل ضرب f و g را با $f \times g$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه‌ی آن $D_f \cap D_g$ است و به ازای هر x از دامنه‌ی این تابع،

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x)$$

۴- تقسیم f و g را با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنه‌ی آن $D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$ است و به ازای هر x از دامنه‌ی این تابع،

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مقدار	اگر	تست ۱
$g = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$	$f = \{(-1, -1), (0, 2), (1, -1), (2, 1)\}$	
	$(f+g)(-1) + (f-g)(0)$ چقدر است؟	
۴ صفر	۳ -۱	۲ (۲)
		۲ -۲ (۱)

پاسخ: توجه کنید که

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 0 = -1$$

$$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = 2 - 1 = 1$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر صفر است.

مقدار	اگر	تست ۲
$D_{f+g} = \{0, -2\}$ برد	$g = \{(-1, 2), (-2, 1), (0, 4)\}$ و $f = \{(1, 2), (0, a^2), (a, 0)\}$	
	تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟	
{ } (۴)	{1, 0} (۳)	{0} (۲)
		{1} (۱)

پاسخ: عدد -2 در دامنه‌ی تابع $f+g$ است. پس -2 باید در دامنه‌ی تابع f باشد. چون $D_f = \{1, 0, a\}$.

پس $a = -2$ و

$$f = \{(1, 2), (0, 4), (-2, 0)\}$$

$$g = \{(-1, 2), (-2, 1), (0, 4)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(0, 1), (-2, 0)\} \Rightarrow R_{\frac{f}{g}} = \{1, 0\}$$

تست ۳

اگر $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ و $g = \{(-1, 2), (0, 1), (2, 0), (1, 1)\}$ برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, 1, \sqrt{3}\}$ (۲) $\{0, 1\}$ (۳) $\{1, \sqrt{3}\}$ (۴) $\{0, \sqrt{3}\}$

پاسخ: دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

چون $D_g = \{-1, 0, 2, 1\}$ ، $g(2) = 0$ و $D_f = [0, 4]$ پس دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ برابر است با $D_{\frac{f}{g}} = \{0, 1\}$ و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

بنابراین برد تابع فقط شامل عددهای صفر و $\sqrt{3}$ است.

تست ۴

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x+2 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$ ، ضابطه‌ی تابع $f+g$ کدام است؟

$$\begin{cases} 3x-2 & x \leq 1 \\ 2x & 1 < x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2 & x < 1 \\ 2x & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2 & x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x+2 & 1 < x < 2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x-2 & x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x < 2 \\ -x & x \geq 2 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \leq 1 \\ 2x & 1 < x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$

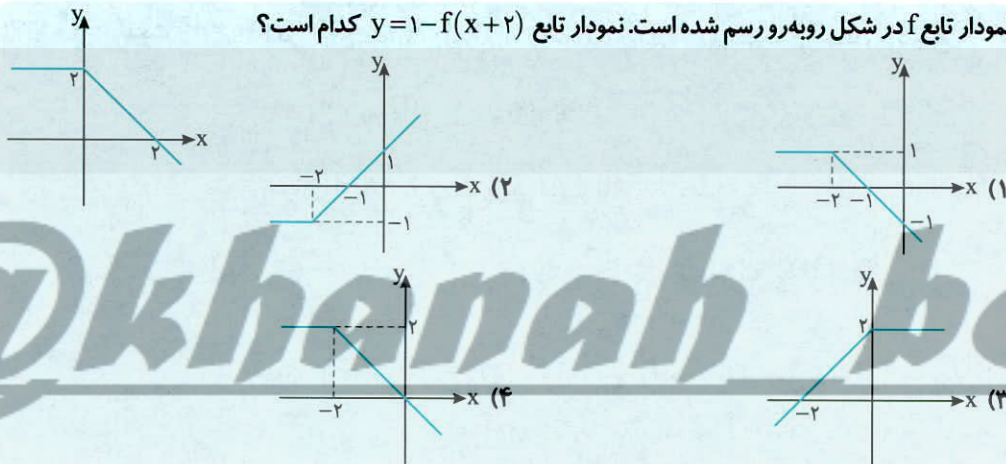
۱- اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

۲- برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم.

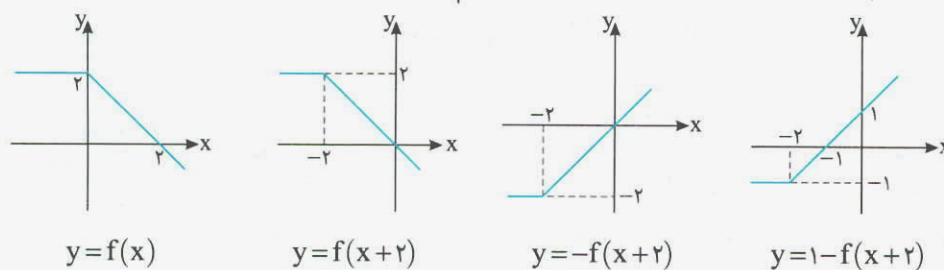
۳- اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y = |k|f(x)$ را رسم کنیم و سپس قرینه‌ی این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم.

تست ۵

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(x+2)$ کدام است؟

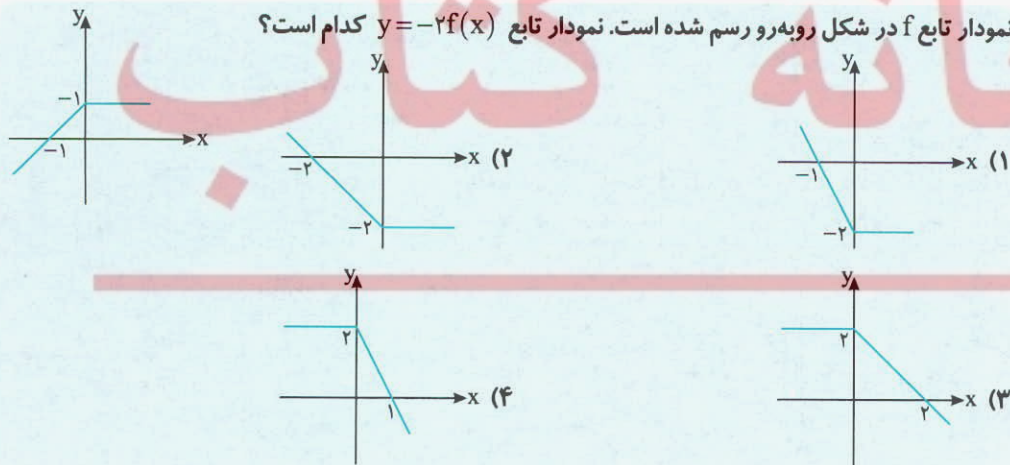


پاسخ: ابتدا نمودار $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x+2)$ به دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x+2)$ به دست بیاید. در آخر، این نمودار را ۱ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = 1 - f(x+2)$ به دست بیاید.

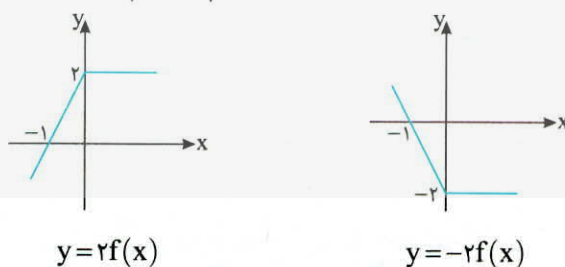


تست ۶

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y = -2f(x)$ کدام است؟



پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y = 2f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار $y = f(x)$ را ۲ برابر می‌کنیم. سپس قرینه‌ی این نمودار نسبت به محور x را رسم می‌کنیم تا نمودار $y = -2f(x)$ به دست بیاید.



پرسش‌های چهار گزینه‌ای

درس سوم:

اعمال جبری روی توابع

فصل سوم

۱۶۱- اگر $f = \{(2, 3), (4, 1), (-1, 2)\}$ تابع $g = f^2$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 9), (16, 1), (1, 4)\}$ (۲) $\{(2, 9), (4, 1), (-1, 4)\}$
 (۳) $\{(4, 3), (16, 1), (1, 2)\}$ (۴) $\{(2, 3), (16, 1), (1, 4)\}$

۱۶۲- اگر $f = \{(1, -1), (4, 2), (3, 2), (5, 1)\}$ تابع $g = \frac{f}{2-f}$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, -\frac{1}{3}), (5, 1)\}$ (۲) $\{(-1, -\frac{1}{3}), (-\frac{5}{3}, 1)\}$
 (۳) $\{(1, -\frac{1}{3}), (5, 1), (3, 0), (4, 0)\}$ (۴) $\{(1, -1), (5, -\frac{5}{3})\}$

۱۶۳- اگر $f = \{(0, 1), (1, 4), (2, -6)\}$ و $g = \{(0, -1), (1, -2), (2, 3), (3, 17)\}$ مجموع مقدارهای تابع $f + 2g$ چقدر است؟

- (۱) ۶- (۲) ۵- (۳) ۳- (۴) ۱-

۱۶۴- اگر $f = \{(2, 3), (a, 5), (4, 6), (7, 2)\}$ و $g = \{(1, -1), (2, 5), (3, -b), (4, 9)\}$ مقدار $(f-g)(3) = 8$ مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۶۵- اگر $f = \{(2, 3), (1, 2), (c, 1)\}$ و $g = \{(2, a), (b, 4), (3, 5)\}$ و $f+g = \{(2, 4), (1, 6), (d, 6)\}$ مجموع مقدارهای ممکن d کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶۶- اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (2, -2), (4, 1)\}$ و $g = \{(3, 2), (4, 3), (2, 4), (1, 1)\}$ مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1} - g^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶۷- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x}$ و $g = \{(-2, 1), (-1, 0), (0, 2), (3, 1), (4, 2)\}$ تابع $\frac{f}{g}$ چند زوج مرتب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۶۸- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ و $g = \{(-1, 2), (1, 4), (0, 1), (2, 5), (4, 3)\}$ مقدار $(2g-f)(a) = 4$ مقدار $f(-a)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{28}$ (۲) $\sqrt{24}$ (۳) $\sqrt{12}$ (۴) $\sqrt{10}$

۱۶۹- اگر $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{x-4}{x+2}$ مقدار $(f \times g)(2)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $-\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۱۷۰- اگر $f(x) = 3x+1$ و $g(x) = x^2-1$ مقدار $(\frac{f+g}{f-g})(1)$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۷۱- اگر $(f+g)(x)=2x+1$ و $(f-g)(x)=1-x$ ، مقدار $(f \times g)(2)$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

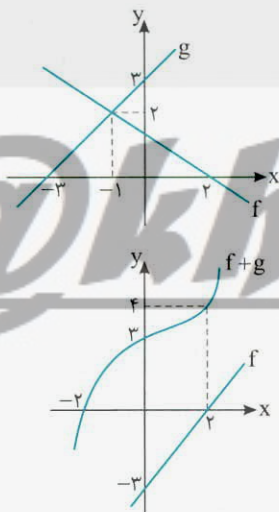
۱۷۲- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $(f-2g)(-1)+(f \times g)(-3)$ چقدر است؟

- (۱) ۲

- (۲) -۲

- (۳) ۶

- (۴) -۶



۱۷۳- نمودار تابع‌های f و $f+g$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) $g(-2)=6$

- (۲) $(f-g)(2)=-4$

- (۳) $g(0)=3$

- (۴) $(f+g)(2)=4$

۱۷۴- اگر $f(x)=x^2+3x+2$ و $g(x)=x^2+2x+1$ ، حاصل $(f-g)(x-1)$ کدام است؟

- (۱) x (۲) x^2 (۳) $x+1$ (۴) x^2+1

۱۷۵- اگر $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-x}$ ، کدام گزینه ضابطه و دامنه‌ی تابع $f-g$ را درست نشان می‌دهد؟

- (۱) $(f-g)(x)=\frac{1}{x}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{0\}$ (۲) $(f-g)(x)=\frac{1}{x}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{0,1\}$

- (۳) $(f-g)(x)=\frac{2}{x-1}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{1\}$ (۴) $(f-g)(x)=\frac{2}{x}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{0,1\}$

۱۷۶- اگر $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-2}$ ، $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$ و $(f-g)(x)=\sqrt{ax+b}$ ، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) صفر

۱۷۷- اگر $f(x)=\frac{1}{a^2x^2-4ax+4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-(b+1)x+b}$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ یا ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۳ یا ۱

۱۷۸- اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ ، $g(x)=\sqrt{a-x+b}$ ، $D_{f-g}=[2,4]$ و $(f+g)(3)=5$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۷۹- اگر $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=|x|$ ، در بازه‌ای که تابع $f+g$ ثابت است، ضابطه‌ی تابع $f-g$ کدام است؟

- (۱) $y=2x-1$ (۲) $y=2x+1$ (۳) $y=-2x+1$ (۴) $y=-2x-1$

۱۸۰- اگر f و g تابع‌هایی گویا باشند، $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ ، $(f \times g)(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$ و $(\frac{f}{g})(x)=\frac{1}{x}$ ، ضابطه‌ی تابع $f-g$ کدام است؟

- (۱) $y=\frac{1}{x}$ یا $y=1$ (۲) $y=1$ یا $y=-1$ (۳) $y=\frac{1}{x-1}$ یا $y=-1$ (۴) $y=\frac{-1}{x-1}$ یا $y=-1$

۱۸۱- اگر f و g تابع‌هایی گویا باشند، $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$ ، $(f+g)(x)=\frac{1}{x}$ و $(\frac{g}{f})(x)=-x$ ، ضابطه‌ی تابع $f-g$ کدام است؟

- (۱) $y=\frac{x+1}{x-x^2}$ (۲) $y=-\frac{1}{x}$ (۳) $y=\frac{x+1}{x^2-x}$ (۴) $y=\frac{1}{x-1}$

۱۸۲- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ -2 & |x| > 1 \end{cases}$ ، برد تابع $f-g$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۸۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 1 \\ 3x+2 & x \geq 1 \end{cases}$ ، ضابطه‌ی تابع $f+g$ کدام است؟

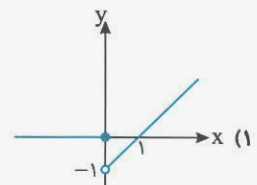
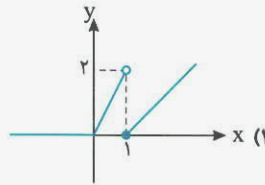
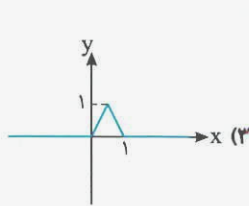
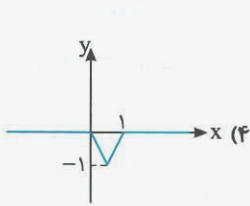
$$\begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ 3x+5 & 0 < x < 1 \\ 4x+4 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 & x \leq 0 \\ 3x+5 & 0 < x < 1 \\ 4x+3 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 & x \leq 0 \\ 3x+5 & 0 < x < 1 \\ 4x+4 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 & x \leq 0 \\ 2x+5 & 0 < x < 1 \\ 4x+4 & x \geq 1 \end{cases}$$

۱۸۴- اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ ، نمودار تابع $f+g$ کدام است؟



۱۸۵- اگر $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1-2x & x \leq 0 \\ 2-x^2 & x > 0 \end{cases}$ ، ضابطه‌ی تابع $f+g$ کدام است؟

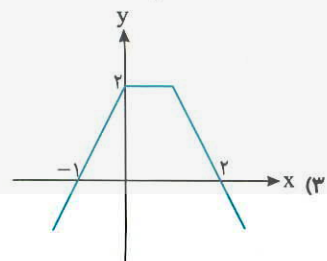
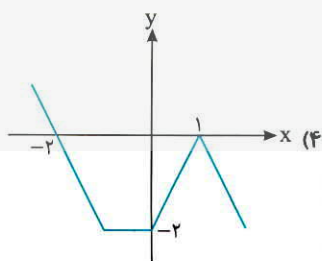
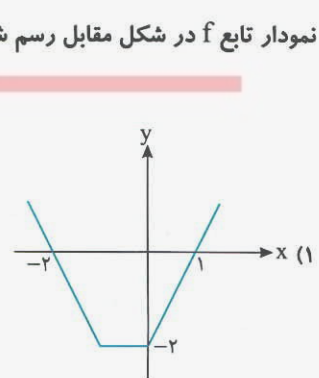
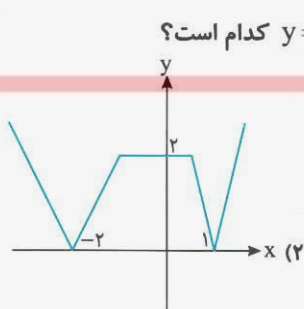
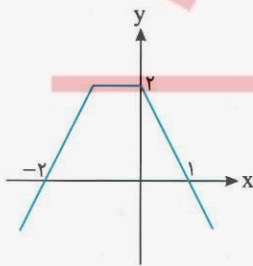
$$\begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ -x^2+x+2 & 0 < x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ -x^2+x+2 & 0 < x < 1 \\ 3 & x > 1 \end{cases}$$

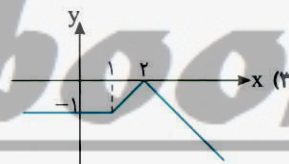
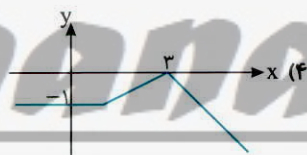
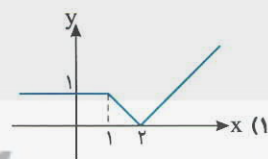
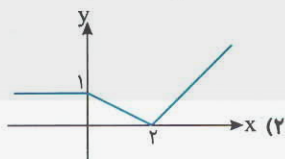
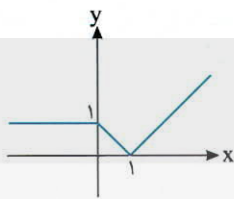
$$\begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ x^2-1 & 0 < x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+x & x \leq 0 \\ 2x^2-x & 0 < x < 1 \\ x^2+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

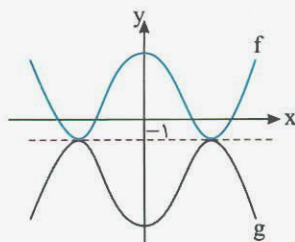
۱۸۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(x)$ کدام است؟



۱۸۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(x-1)$ کدام است؟



۱۸۸- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، ضابطه‌ی تابع g کدام است؟



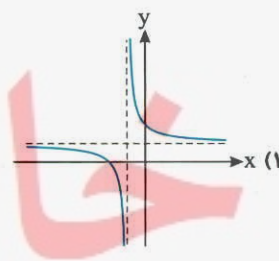
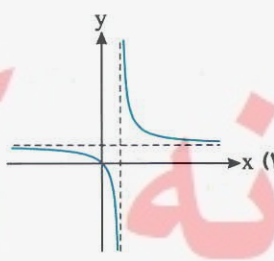
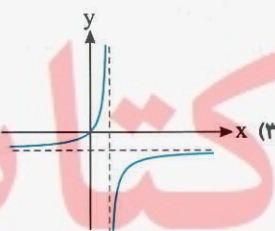
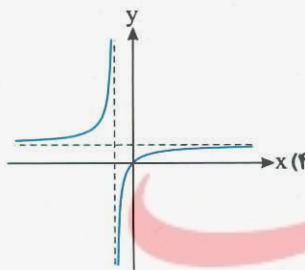
$$y = -f(x) \quad (1)$$

$$y = f(-x) + 2 \quad (2)$$

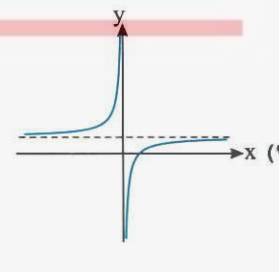
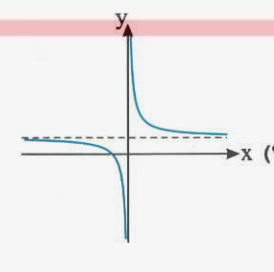
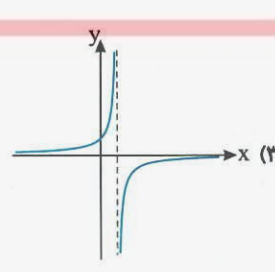
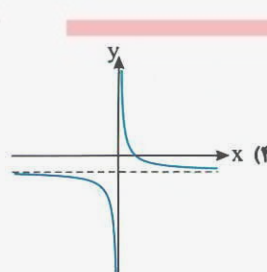
$$y = -f(x) - 2 \quad (3)$$

$$y = f(-x) - 2 \quad (4)$$

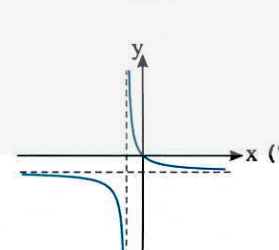
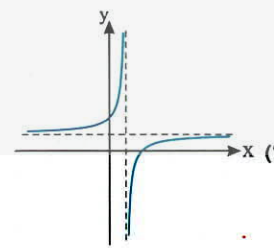
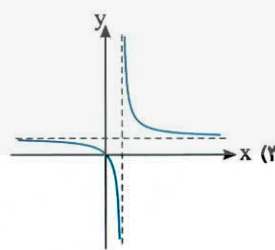
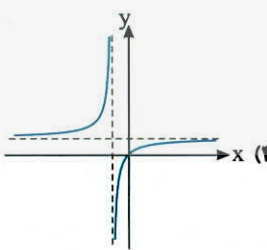
۱۸۹- نمودار تابع $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ کدام است؟



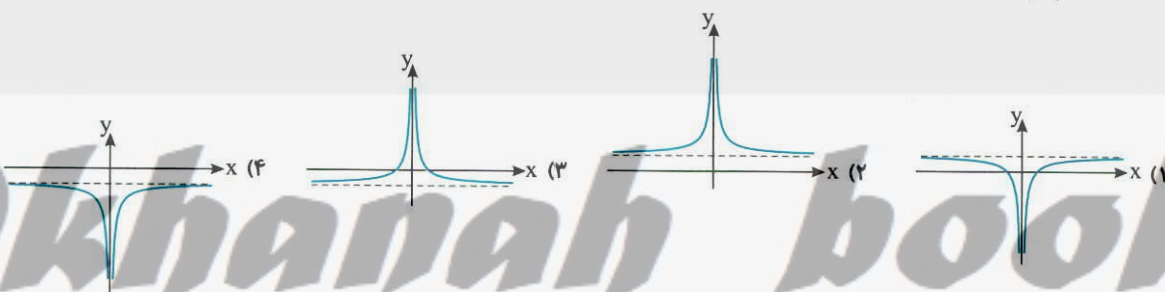
۱۹۰- نمودار تابع $y = 1 - \frac{1}{x}$ کدام است؟



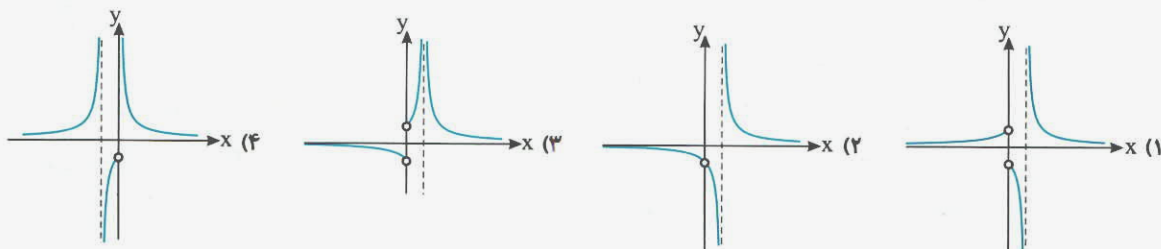
۱۹۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ کدام است؟



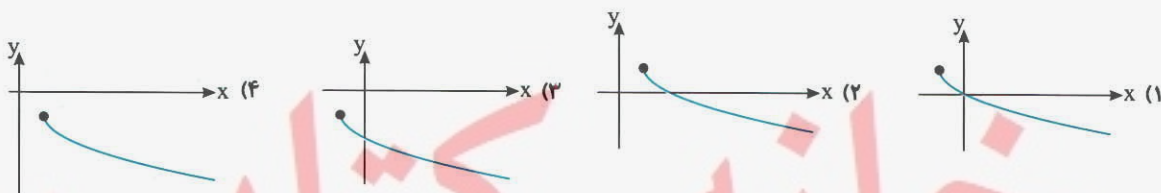
۱۹۲- نمودار تابع $y = 1 - \frac{1}{|x|}$ کدام است؟



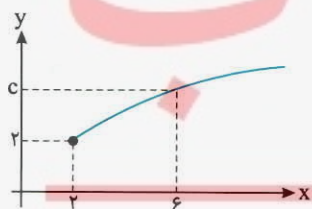
۱۹۳- نمودار تابع $y = \frac{|x|}{x^2 - x}$ کدام است؟



۱۹۴- نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{x+1}$ کدام است؟

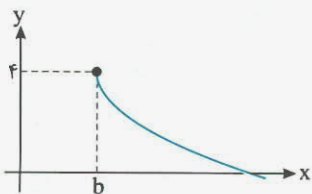


۱۹۵- نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{x+b}$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



- ۱۰ (۱)
- ۶ (۲)
- ۴ (۳)
- ۲ (۴)

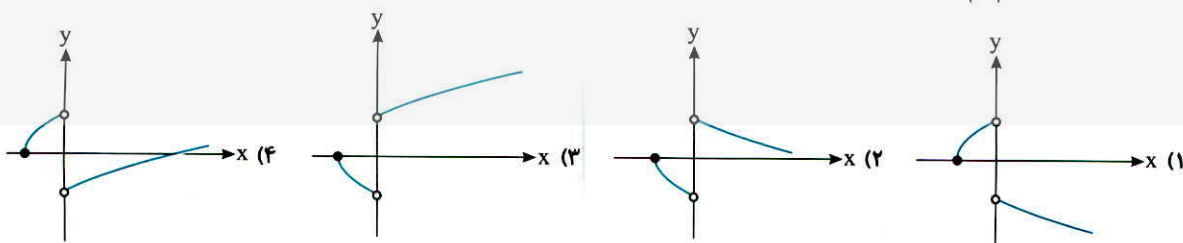
۱۹۶- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x-3$ و نمودار تابع $h(x) = a - f(g(x))$ به صورت شکل مقابل



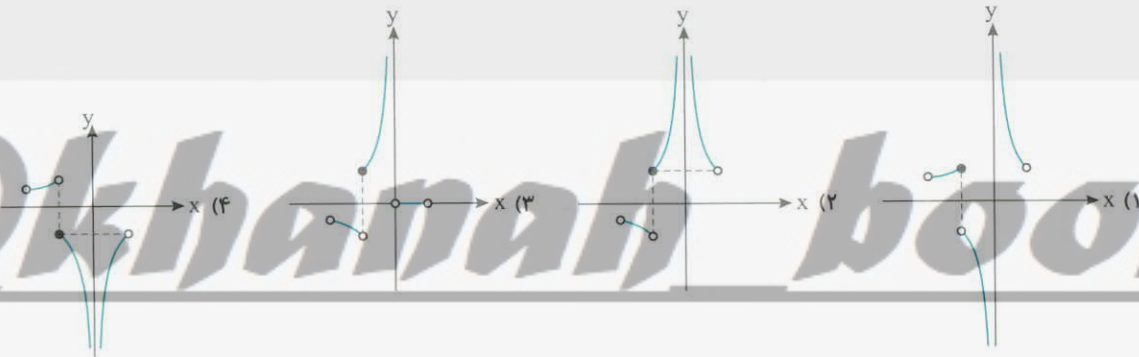
باشد، حاصل ab کدام است؟

- ۱۰ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

۱۹۷- نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|} \sqrt{x+1}$ کدام است؟



۱۹۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x}$ روی بازه $(-2, 1)$ کدام است؟



خانه کتاب



۱- گزینه‌ی ۲ اگر در تساوی $f(x) = 3f(x-1)$ به طور

متوالی قرار دهیم $x=2, x=3, \dots, x=9$ به دست می‌آید

$$f(2) = 3f(1) = 3^2$$

$$f(3) = 3f(2) = 3 \times 3^2 = 3^3$$

$$f(4) = 3f(3) = 3 \times 3^3 = 3^4$$

$\vdots$

$$f(9) = 3f(8) = 3 \times 3^8 = 3^9$$

۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow f(y)f(x-y) = f(x) \quad (1)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{f(1)} = \sqrt{64} = 8$$

اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=1$ و $y=\frac{1}{3}$ به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{3}\right) f\left(\frac{2}{3}\right) = f(1) = 64 \quad (2)$$

و اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=\frac{2}{3}$ و $y=\frac{1}{3}$ به دست می‌آید

$$f\left(\frac{1}{3}\right) f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 \quad (3)$$

بنابراین از تساوی‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^3 = 64 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$$

۳- گزینه‌ی ۳ اگر در رابطه‌ی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$

به دست می‌آید

$$f\left(4 \times \frac{1}{2} - 1\right) + 2f(1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \Rightarrow 3f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = 2$$

بنابراین

$$f(4x-1) + 2 \times 2 = 2x + 5 \Rightarrow f(4x-1) = 2x + 1$$

$$f\left(4\left(-\frac{1}{4}\right) - 1\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1$$

$$f(-2) = \frac{1}{2}$$

۴- گزینه‌ی ۳ اگر در تساوی $f(x) = \frac{x}{x+2}$ به جای x

قرار دهیم $x-2$ به دست می‌آید

$$f(x-2) = \frac{x-2}{x} \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \Rightarrow xf(x) + 2f(x) = x$$

$$x(1-f(x)) = 2f(x) \Rightarrow x = \frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f(x-2) = \frac{x-2}{x} = \frac{\frac{2f(x)}{1-f(x)} - 2}{\frac{2f(x)}{1-f(x)}} = \frac{2f(x) - 2(1-f(x))}{2f(x)} = \frac{2f(x) - 2 + 2f(x)}{2f(x)} = \frac{4f(x) - 2}{2f(x)} = \frac{2f(x) - 1}{f(x)}$$

۵- گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم

$$\frac{x+1}{x-2} = t$$

و در نتیجه

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow tx - x = 2t + 1$$

$$(t-1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-1}$$

در رابطه‌ی داده شده به جای x قرار می‌دهیم

$$f(t) = 2\left(\frac{2t+1}{t-1}\right) - 1 = \frac{4t+2-t-1}{t-1} = \frac{3t+3}{t-1}$$

و در نتیجه

$$f(x) = \frac{3x+3}{x-1}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲) مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و

ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$2|x| - |x+1| = 0 \Rightarrow 2|x| = |x+1|$$

$$2x = x+1 \Rightarrow x=1$$

$$2x = -x-1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$$

بنابراین دو عدد در دامنه‌ی تابع قرار ندارند.

۱۱- گزینه‌ی ۳) توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid |x-1| - 2 \neq 0\}$$

از طرف دیگر،

$$||x-1| - 2| - 2 = 0 \Rightarrow |x-1| - 2 = \pm 2$$

بنابراین

$$|x-1| = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = -3, 5$$

$$|x-1| = 0 \Rightarrow x=1$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 1, 5\}$.

۱۲- گزینه‌ی ۱) عددهایی که مخرج ضابطه‌ی تابع را صفر

می‌کنند، در دامنه‌ی تابع قرار ندارند. پس $x = -2$ ریشه‌ی

$$x^3 - ax^2 + 2ax = 0 \text{ است. پس}$$

$$-8 - 4a - 4a = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x}$ است.

دامنه‌ی تابع را به دست می‌آوریم:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-2$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$.

۱۳- گزینه‌ی ۱) باید $x = -1$ و $x = 2$ ریشه‌های

$$a|x| - bx + 1 = 0 \text{ باشند، بنابراین}$$

$$x = -1 \Rightarrow a + b + 1 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow 2a - 2b + 1 = 0$$

$$ab = \frac{3}{16} \text{ بنابراین } a = -\frac{3}{4} \text{ و } b = -\frac{1}{4} \text{ و در نتیجه}$$

۱۴- گزینه‌ی ۱) برای این که $\mathbb{R}$ دامنه‌ی تابع باشد، باید

$$\text{مخرج کسر } \frac{|x|}{x^2 + mx + 2} \text{ ریشه نداشته باشد. بنابراین}$$

$$\Delta = m^2 - 8 < 0 \Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به

راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع

$y = \sqrt{x-1} - 2$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به

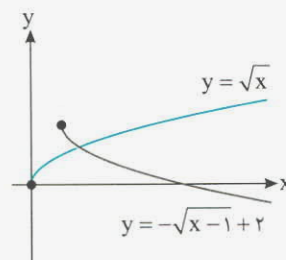
محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\sqrt{x-1} + 2$

به دست می‌آید. طول نقطه‌ی برخورد نمودارهای مورد نظر از

معادله‌ی $\sqrt{x} = -\sqrt{x-1} + 2$ به دست می‌آید. بنابراین

$$\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow x-1 = 4 + x - 4\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = \frac{25}{16}$$



۱۷- گزینه‌ی ۳) مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و

ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow (x^3 - x^2) - (x^2 + x - 2) = 0$$

$$x^2(x-1) - (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=-1, x=2$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1, 2\}$ و سه عدد در دامنه‌ی تابع

قرار ندارند.

۱۸- گزینه‌ی ۳) ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$ و چهار عدد در دامنه‌ی تابع

قرار ندارند.

۱۹- گزینه‌ی ۴) سه کسر در ضابطه‌ی تابع وجود دارد.

مخرج هر یک را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$1 - \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow x+1-4=0 \Rightarrow x=3$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$. پس حاصل ضرب عددهایی

که در دامنه‌ی تابع قرار ندارند برابر ۶- است.

۲۰- گزینه‌ی ۲ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:
 $x \geq 0$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{4-x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \neq \sqrt{4-x} \Rightarrow x \neq 4-x \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین $D_f = [0, 4] - \{2\}$. پس عدد‌های صحیح ۰، ۱، ۳ و ۴ در دامنه‌ی تابع قرار دارند.

۲۱- گزینه‌ی ۲ باید نامعادله‌ی $2 - |x+1| \geq 0$ را حل کنیم:

$$|x+1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1$$

بنابراین $D_f = [-3, 1]$ و دامنه‌ی تابع شامل پنج عدد صحیح است.

۲۲- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid 5 - |x-3| \geq 0\}$$

از طرف دیگر،

$$5 - |x-3| \geq 0 \Rightarrow |x-3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-3 \leq 5$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 8$$

پس $D_f = [-2, 8]$

۲۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid 4 - |x-1| \geq 0, x^2 - 4 \neq 0\}$$

از طرف دیگر،

$$4 - |x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

اگر $x^2 - 4 = 0$ ، آن‌گاه $x = \pm 2$. بنابراین

$$D_f = [-3, 5] - \{\pm 2\}$$

۲۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{(3-x)^2}}}{4 - x^2} = \frac{\sqrt{5 - |3-x|}}{4 - x^2}$$

بنابراین

$$D_f = \{x \mid 5 - |3-x| \geq 0, 4 - x^2 \neq 0\}$$

از طرف دیگر،

$$5 - |3-x| \geq 0 \xrightarrow{(|A| = |-A|)} |x-3| \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq x-3 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \leq 8$$

و اگر $4 - x^2 = 0$ ، آن‌گاه $x = \pm 2$. بنابراین

$$D_f = (-2, 2) \cup (2, 8]$$

پس در دامنه‌ی f ، نه عدد صحیح قرار دارند.

۲۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که اگر $t - |t| \geq 0$ ، آن‌گاه $t \geq 0$.

در نتیجه

$$D_f = \{x \mid |x-1| - |x-1| \geq 0, \frac{1}{x} > 0, x \neq 0\}$$

$$= \{x \mid x-1 \geq 0, x > 0\} = [1, +\infty)$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid x^2 + 2x - m + 4 \neq 0\}$$

برای این که معادله‌ی $x^2 + 2x - m + 4 = 0$ ریشه نداشته باشد، باید $\Delta < 0$:

$$\Delta = 2^2 - 4(-m+4) = 4 + 4m - 16 < 0 \Rightarrow m < 3$$

چون m عددی صحیح است، پس بیش‌ترین مقدار آن ۲ است.

۱۶- گزینه‌ی ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه‌ی تابع

قرار ندارد، پس مخرج عبارت $\frac{1}{m^2 x^2 + x + 1}$ باید فقط یک

جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 1 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

در این حالت $x = -2$ ریشه‌ی مخرج است. در نتیجه $n = -2$

حالت دوم مخرج عبارت درجه‌ی اول باشد. یعنی ضریب x^2

برابر صفر باشد: $m = 0$. در این حالت $x = -1$ ریشه‌ی مخرج

است. در نتیجه $n = -1$.

پس دو مقدار مختلف برای n وجود دارد.

۱۷- گزینه‌ی ۳ باید هر دو عبارت $\sqrt{x-1}$ و $\frac{x+4}{x^2-4}$ بامعنی

باشند، در نتیجه

$$D_f = \{x \mid x^2 - 4 \neq 0, x-1 \geq 0\}$$

بنابراین

$$D_f = [1, +\infty) - \{2\}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x \geq -1$ برای

دامنه‌ی تابع وجود دارد. عدد‌های داده شده در گزینه‌ها بزرگ‌تر

از ۱- هستند. پس ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x - \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x+1}, \quad x \geq 0$$

$$x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $\left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} - [-1, +\infty)$ است.

۱۹- گزینه‌ی ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه‌ی تابع

وجود دارد:

$$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2} - 2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \neq 2 \Rightarrow x+2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین $D_f = [-2, 3] - \{2\}$ و عدد‌های صحیح ۰، -۱، -۲،

و ۳ در دامنه‌ی تابع قرار دارند.

۲۶- گزینه‌ی ۲ باید هر دو عبارت رادیکالی بامعنی باشند.

در نتیجه

$$D_f = \{x \mid 2-x \geq 0, \frac{3}{7-|x-1|} > 0, 7-|x-1| \neq 0\}$$

$$= \{x \mid 2-x \geq 0, 7-|x-1| > 0\}$$

$$= \{x \mid 2-x \geq 0, |x-1| < 7\}$$

جواب نامعادله‌ی $|x-1| < 7$ به صورت $-6 < x < 8$ است. در

نتیجه

$$D_f = (-\infty, 2] \cap (-6, 8) = (-6, 2]$$

۲۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid |x^2 - 4| \leq 9\}$$

در نتیجه

$$-9 \leq x^2 - 4 \leq 9 \Rightarrow -5 \leq x^2 \leq 13$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$0 \leq x^2 \leq 13 \Rightarrow -\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13}$$

۲۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \sqrt{-(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{-(x-1)^2}$$

بنابراین

$$D_f = \{x \mid -(x-1)^2 \geq 0\} = \{1\}$$

۲۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \geq 0, x^2 \neq 1\}$$

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ به صورت $x \leq -1$ یا $x \geq 4$ است. بنابراین دامنه‌ی تابع f برابر است با $(-\infty, -1) \cup [4, +\infty) = \mathbb{R} - [-1, 4)$

۳۰- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid \frac{4-x}{x+2} \geq 0, \frac{x}{2} \neq 2\}$$

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{4-x}{x+2} \geq 0$ به شکل $[-2, 4]$ است. همچنین مخرج کسر دوم به ازای $x=4$ صفر می‌شود. بنابراین $x=4$ در دامنه‌ی تابع نیست. در نتیجه $D_f = (-2, 4)$.

۳۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid x-2 \neq 0, \frac{x-6}{1-x} \geq 0\}$$

از طرف دیگر،

$$\frac{x-6}{1-x} \geq 0 \Rightarrow x \in (1, 6]$$

اگر $x-2=0$ ، آن‌گاه $x=2$. بنابراین

$$D_f = (1, 2) \cup (2, 6]$$

پس در دامنه‌ی f چهار عدد صحیح وجود دارد.

۳۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid \frac{x^2 - 2x + 8}{-x^2 + 2x + 8} \geq 0, -x^2 + 2x + 8 \neq 0\}$$

چون همواره $x^2 - 2x + 8 > 0$ ($\Delta < 0$) و

$$-x^2 + 2x + 8 = -(x^2 - 2x - 8)$$

$$= -(x-4)(x+2)$$

پس برای این که کسر $\frac{x^2 - 2x + 8}{-x^2 + 2x + 8}$ نامنفی باشد و مخرجش

صفر نباشد، باید $(x-4)(x+2) < 0$ ، یعنی

$$x \in (-2, 4)$$

بنابراین

$$D_f = (-2, 4)$$

۳۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} \geq 0\}$$

از طرف دیگر،

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{1-2x}{x(x-1)}$$

بنابراین باید جواب نامعادله‌ی $\frac{1-2x}{x(x-1)} \geq 0$ را پیدا کنیم:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\frac{1-2x}{x(x-1)}$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{2}, 1)$$

۳۴- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 \geq 0\}$$

بنابراین باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \xrightarrow{\frac{1}{x} = t} t^2 - t - 2 \geq 0$$

$$(t-2)(t+1) \geq 0$$

در نتیجه

$$(\frac{1}{x} - 2)(\frac{1}{x} + 1) = \frac{(1-2x)(1+x)}{x^2} \geq 0$$

بنابراین

$$D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \neq 0\}$$

$$= [-1, \frac{1}{2}] - \{0\}$$

@khanah_book

خانه کتاب

۴۵- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$

بنابراین

$$A = 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + 2 + 3 + 3 + \dots + 3 + 4 + 4 + \dots + 4$$

$$= 2 + 10 + 21 + 20 = 53$$

۴۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[3]{2}] = [\sqrt[3]{3}] = \dots = [\sqrt[3]{7}] = 1$$

$$[\sqrt[3]{8}] = [\sqrt[3]{9}] = \dots = [\sqrt[3]{26}] = 2$$

$$[\sqrt[3]{27}] = [\sqrt[3]{28}] = \dots = [\sqrt[3]{63}] = 3$$

بنابراین

$$A = 1 + 1 + \dots + 1 + 2 + 2 + \dots + 2 + 3 + 3 + \dots + 3$$

$$= 6 + 38 + 111 = 155$$

۴۷- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{8} = 2$$

$$2 + \sqrt[3]{2} < 2 + 2 = 4 < 8$$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} < 2$$

$$2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} < 2 + 2 = 4 < 8$$

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} < 2$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{2} > 1$$

بنابراین

$$1 < \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} < 2$$

پس

$$[\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}] = 1$$

۴۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$-x^3 = -20 \Rightarrow -x = \sqrt[3]{20}$$

همچنین $2 < \sqrt[3]{20} < 3$ ، بنابراین

$$-3 < -\sqrt[3]{20} < -2 \Rightarrow -3 < -x < -2$$

در نتیجه $[-x] = -3$ ۴۲- گزینه‌ی ۴ باید نامعادله‌ی $\frac{f(x)}{x^2 - x} \geq 0$ را حل کنیم.

مطابق جدول تعیین علامت زیر جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x = -1 \text{ یا } 0 < x < 1 \text{ یا } 1 < x \leq 2$$

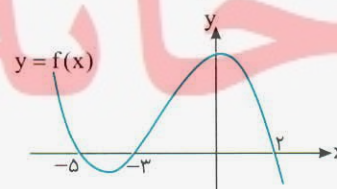
بنابراین

$$D_g = \{-1\} \cup (0, 1) \cup (1, 2]$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f(x)		-	+	-	+	+	
$x^2 - x$		+	+	-	-	+	
$\frac{f(x)}{x^2 - x}$		-	+	-	+	+	

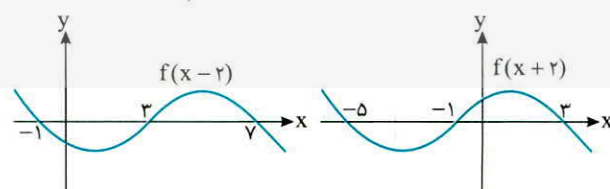
۴۳- گزینه‌ی ۴ برای این که از نمودار $y = f(x-2)$ بهنمودار $y = f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل کنیم. برای به دست آوردن دامنه‌ی تابع عبارت $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-5	-3	0	2	$+\infty$
f(x)	+	-	+	+	-	
x	-	-	-	+	+	
xf(x)	-	+	-	+	-	

بنابراین $D_g = [-5, -3] \cup [0, 2]$ ۴۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا نمودار تابع‌های $f(x-2)$ و $f(x+2)$ را رسم می‌کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت، دامنه‌ی تابع g به شکل $\{-1, 3\} \cup (\mathbb{R} - (-5, 7))$ است. در نتیجه عددهایصحیح $-4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6$ در دامنه‌ی تابع g نیستند.

که مجموع این عددها برابر است با ۹.

x	$-\infty$	-5	-1	3	7	$+\infty$
$f(x-2)$	+	+	-	+	-	
$f(x+2)$	+	-	+	-	+	
$f(x-2)f(x+2)$	+	-	-	-	+	



۴۴- گزینه‌ی ۳) راه‌حل اول به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$

حاصل عبارت، عددی منحصر به فرد است، پس به ازای $n=3$ این عدد را به دست می‌آوریم:

$$[\sqrt{36-9+1}] - 2[\sqrt{9-6}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2 = 3$$

راه‌حل دوم به ازای $n > 2$ می‌توان نوشت

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2$$

$$(2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

$$2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n$$

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n - 1$$

9

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1$$

$$(n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

$$n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1$$

$$[\sqrt{n^2 - 2n}] = n - 2$$

بنابراین

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n - 1 - 2(n - 2) = 4 - 1 = 3$$

۵۵- گزینه‌ی ۲) توجه کنید که

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < (n+1)^3$$

$$n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} < n+1$$

بنابراین

$$[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}] = n$$

۵۶- گزینه‌ی ۴) توجه کنید که

$$f(-\pi) = |[3-\pi]| + |[2-\pi]| = |[3-\pi]| + |\pi-2|$$

از طرف دیگر،

$$-1 < 3-\pi < 0, \quad 1 < \pi-2 < 2$$

در نتیجه

$$[3-\pi] = -1, \quad [\pi-2] = 1$$

پس $f(-\pi) = 2$

۵۷- گزینه‌ی ۱) ابتدا توجه کنید که

$$f(x+2) = [x+2] - \left[\frac{x+2}{2} + \frac{1}{2}\right] = [x] + 2 - \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right] - 1$$

$$= [x] - \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right] + 1 = f(x) + 1$$

بنابراین

$$f(x+2) - f(x) = 1$$

۴۹- گزینه‌ی ۴) توجه کنید که

$$[\sqrt{x}] = 9 \Rightarrow 9 \leq \sqrt{x} < 10 \Rightarrow 81 \leq x < 100$$

$$[\sqrt{y}] = 12 \Rightarrow 12 \leq \sqrt{y} < 13 \Rightarrow 144 \leq y < 169$$

بنابراین $225 \leq x+y < 269$

$$x+y < 269 \Rightarrow [x+y] \leq 268$$

توجه کنید که در این نابرابری به ازای $x=99/9$ و $y=168/9$ تساوی برقرار است، و این عددها همگی ویژگی‌های مورد نظر را دارند. بنابراین بیش‌ترین مقدار $[x+y]$ برابر ۲۶۸ است.

۵۰- گزینه‌ی ۳) از تساوی $[x^2 - 5x] = 2$ نتیجه می‌شود

$$2 \leq x^2 - 5x < 3$$

از تساوی $[x^2 - 7x] = 2$ نتیجه می‌شود

$$2 \leq x^2 - 7x < 3$$

با جمع کردن نابرابری‌های فوق به دست می‌آید

$$4 \leq 2x^2 - 12x < 6 \Rightarrow 2 \leq x^2 - 6x < 3$$

$$\Rightarrow 3 \leq x^2 - 6x + 1 < 4$$

بنابراین $[x^2 - 6x + 1] = 3$

۵۱- گزینه‌ی ۴) ابتدا توجه کنید که

$$[x^2 - 2x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 2x < 0$$

$$0 \leq x^2 - 2x + 1 < 1 \Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 < 1$$

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

بنابراین

$$0 < \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x^5}{32} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^5}{32}\right] = 0$$

۵۲- گزینه‌ی ۲) ابتدا توجه کنید که

$$x \neq 0, [x^2] = 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x^{2n} < 1$$

$$\Rightarrow -1 < -x^{2n} < 0 \Rightarrow [-x^{2n}] = -1$$

بنابراین

$$A = \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{9 \text{ تا}} = -9$$

۵۳- گزینه‌ی ۲) ابتدا توجه کنید که

$$n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n + 1 < n^2 + 4n + 4$$

$$(n+1)^2 < n^2 + 4n + 1 < (n+2)^2$$

$$n+1 < \sqrt{n^2 + 4n + 1} < n+2$$

بنابراین

$$[\sqrt{n^2 + 4n + 1}] = n+1$$

۵۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن گاه

$$[-x] = -[x] - 1 \quad \text{بنابراین}$$

$$f(-x) = -x(-1)^{[-x]} = -x(-1)^{-[x]-1}$$

$$= -x(-1)^{-[x]}(-1)^{-1}$$

$$= x(-1)^{-[x]} = x(-1)^{[x]}$$

$$\text{بنابراین } f(-x) = f(x)$$

۵۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f(f(x)) = f(x) - 4[f(x)] + [2f(x)]$$

از طرف دیگر،

$$[f(x)] = [x - 4[x] + [2x]] = [x] - 4[x] + [2x] = -3[x] + [2x]$$

$$[2f(x)] = [2x - 8[x] + 2[2x]] = [2x] - 8[x] + 2[2x]$$

$$= -8[x] + 2[2x]$$

بنابراین

$$f(f(x)) = x - 4[x] + [2x] + 12[x] - 4[2x] - 8[x] + 3[2x] = x$$

۶۰- گزینه‌ی ۱ اگر $\left[\frac{5-x}{2}\right] = -3$ ، آن گاه

$$-3 \leq \frac{5-x}{2} < -2$$

بنابراین

$$-6 \leq 5-x < -4 \Rightarrow -11 \leq -x < -9$$

در نتیجه $9 < x \leq 11$.

۶۱- گزینه‌ی ۲ اگر k عددی صحیح باشد، $[x+k] = [x] + k$ ،

بنابراین

$$[x + [x-3]] = 1 \Rightarrow [x] + [x-3] = 1$$

$$[x] + [x] - 3 = 1 \Rightarrow [x] = 2$$

در نتیجه $2 \leq x < 3$.

۶۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که $[x+2] = [x] + 2$ و

$$[3-x] = 3 + [-x]$$

است

$$[x] + 2 + 3 + [-x] = x \Rightarrow [x] + [-x] + 5 = x$$

اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن گاه $[x] + [-x] = 0$ و در نتیجه $x = 5$.

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن گاه $[x] + [-x] = -1$ و در نتیجه $x = 4$ که قابل قبول نیست. پس فقط یک مقدار برای x وجود دارد.

۶۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$|[2x+3]| < 1 \Rightarrow -1 < [2x+3] < 1$$

بنابراین $[2x+3]$ عددی صحیح بین -1 و 1 است، پس

$$[2x+3] = 0$$

$$0 \leq 2x+3 < 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -1$$

۶۴- گزینه‌ی ۲ اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$[x+k] = [x] + k$$

بنابراین

$$[-2x] + [1-2x] + [3-2x] = 1$$

$$[-2x] + 1 + [-2x] + 3 + [-2x] = 1$$

$$[-2x] = -1 \Rightarrow -1 \leq -2x < 0$$

در نتیجه

$$0 < x \leq \frac{1}{2}$$

۶۵- گزینه‌ی ۲ معادله را ساده می‌کنیم:

$$[x+2[x]] + [x-2] = k$$

$$[x] + 2[x] + [x] - 2 = k$$

$$4[x] = k+2 \Rightarrow [x] = \frac{k+2}{4}$$

برای این که معادله جواب داشته باشد، باید $\frac{k+2}{4}$ عددی

صحیح باشد. پس k می‌تواند برابر ۶ باشد.

۶۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $[x-1] = [x] - 1$ ، بنابراین

معادله‌ی مورد نظر می‌شود

$$2[x]^2 + [x] - 1 = 0 \Rightarrow (2[x]-1)([x]+1) = 0$$

$$2[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = \frac{1}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$[x] = -1 \Rightarrow x \in [-1, 0)$$

۶۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\left[\frac{2[x]+1}{3}\right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{2[x]+1}{3} < 4 \Rightarrow 4 \leq [x] < \frac{11}{2}$$

بنابراین، چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

$$[x] = 5 \Rightarrow 5 \leq x < 6$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی مورد نظر می‌شود

$$[4, 5) \cup [5, 6) = [4, 6)$$

۶۸- گزینه‌ی ۱ سمت چپ معادله عددی صحیح است،

پس سمت راست معادله هم باید عددی صحیح باشد. در نتیجه

x عددی صحیح است و

$$[2x^2] = 2x^2, \quad [4x] = 4x$$

پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$2x^2 - 4x = x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (\text{غ.ق.}), \quad x = 2$$

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

۷۵- گزینه ۲) باید نامعادله‌های $[x] + 1 \geq 0$ و $2 - [x] \geq 0$ را

حل کنیم و اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها را به دست آوریم

$$[x] + 1 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq -1 \Rightarrow x \geq -1$$

$$2 - [x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 2 \Rightarrow x < 3$$

بنابراین $D_f = [-1, 3)$. پس $a = -1$, $b = 3$ و $a + b = 2$.

۷۶- گزینه ۱) توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid -2[x]^2 + 5[x] - 2 > 0\}$$

از طرف دیگر،

$$-2[x]^2 + 5[x] - 2 > 0 \Rightarrow 2[x]^2 - 5[x] + 2 < 0$$

$$(2[x] - 1)([x] - 2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < [x] < 2$$

بنابراین $[x] = 1$ ، پس $1 \leq x < 2$. یعنی $D_f = [1, 2)$.

۷۷- گزینه ۴) توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid [|x+1| - 2] > 0\}$$

از طرف دیگر، چون $[|x+1| - 2]$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا مساوی یک است:

$$[|x+1| - 2] \geq 1$$

در نتیجه

$$|x+1| - 2 \geq 1 \Rightarrow |x+1| \geq 3$$

$$x+1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -4$$

$$x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$$

بنابراین $D_f = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

۷۸- گزینه ۲) اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه

$$f(x) = [3x - x] - [x + x] = 2x - 2x = 0$$

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} f(x) &= [3[x] - x] - [x + [x]] = 3[x] + [-x] - [x] - [x] \\ &= [x] + [-x] = -1 \end{aligned}$$

بنابراین

$$R_f = \{0, -1\}$$

توجه کنید که از ویژگی‌های زیر استفاده کرده‌ایم:

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x+k] = [x] + k$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

۷۹- گزینه ۳) ابتدا دقت کنید که

$$\begin{aligned} f(2x-3) &= 2x-3 - [2x-3] = 2x-3 - [2x] + 3 \\ &= 2x - [2x] \end{aligned}$$

۶۹- گزینه ۴) ابتدا معادله را به شکل $x^2 + [x] + [-x] = 3$

می‌نویسیم. اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] + [-x] = 0$ و در نتیجه

$$x^2 + 0 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \text{ (غ.ق.)}$$

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] + [-x] = -1$ و در نتیجه

$$x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین معادله جواب ندارد.

۷۰- گزینه ۱) اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $x-3$ و

$-x$ هم صحیح هستند، پس

$$[x-3] - [-x] = -2 \Rightarrow x-3 - (-x) = -2$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین اگر x جواب معادله‌ی مورد نظر باشد، عددی ناصحیح است و در نتیجه $[x] + [-x] = -1$. به این ترتیب

$$[x-3] - [-x] = -2 \Rightarrow [x] - 3 - (-1 - [x]) = -2$$

$$2[x] = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

چون x عددی ناصحیح است، پس $0 < x < 1$. بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی مورد نظر بازه‌ی $(0, 1)$ است.

پس $a = 0$ ، $b = 1$ و $a + b = 1$.

۷۱- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که باید $9 - x^2 \geq 0$ و در

نتیجه $-3 \leq x \leq 3$. از طرف دیگر،

$$\left[\frac{x}{2}\right] - 1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

بنابراین عددهای بازه‌ی $[2, 4)$ در دامنه‌ی تابع نیستند و دامنه‌ی تابع به صورت $[-3, 2)$ است. پس $a = -3$ ، $b = 2$ و

$$a + b = -1$$

۷۲- گزینه ۳) ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x - [x] = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

بنابراین عددهای صحیح در دامنه‌ی تابع قرار ندارند و در نتیجه

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

۷۳- گزینه ۲) ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$[4-x] + [x-3] = 0 \Rightarrow 4 + [-x] + [x] - 3 = 0$$

$$[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

پس عددهای غیر صحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنه‌ی تابع نیستند. بنابراین دامنه‌ی تابع $\mathbb{Z}$ است.

۷۴- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که $4 - x^2 \geq 0$ و در نتیجه

$-2 \leq x \leq 2$. از طرف دیگر، اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] + [-x] = 0$ و

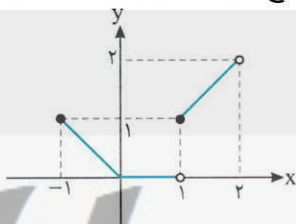
مخرج کسر برابر ۱ است و اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] + [-x] = -1$

و مخرج کسر برابر صفر است. پس عددهای غیر صحیح در

دامنه‌ی تابع قرار ندارند. در نتیجه فقط عددهای صحیح واقع در

بازه‌ی $[-2, 2]$ در دامنه‌ی تابع قرار دارند که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۸۳- گزینه‌ی ۴ اگر $0 \leq x < 1$ ، آن‌گاه $[x] = 0$ و اگر

$-1 < x < 0$ ، آن‌گاه $[x] = -1$. در نتیجه

$$y = \begin{cases} |x| & 0 \leq x < 1 \\ |x| - 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

این نمایش را می‌توان ساده‌تر هم نوشت:

$$y = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ -x - 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

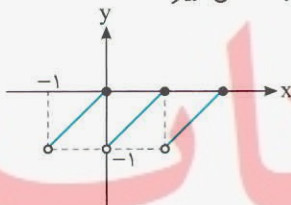
۸۴- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر است:

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x < -1 \Rightarrow [-x] = -2 \Rightarrow y = x - 2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۸۵- گزینه‌ی ۱ اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k] = [x] + k \text{ بنابراین}$$

$$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = x([x] + [-x])$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ از طرفی می‌دانیم پس می‌توان نوشت}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

و نمودار آن به صورت گزینه‌ی (۱) است.

۸۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطه‌ی تابع به شکل

زیر است:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3 \Rightarrow y = 3$$

پس

$$g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2x + 2[x] \\ = 2[x] - [2x]$$

حال فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این

صورت اگر $k \leq x < k + \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $[x] = k$ و

$$2k \leq 2x < 2k + 1 \Rightarrow [2x] = 2k$$

$$g(x) = 2k - 2k = 0$$

بنابراین

اگر $k + \frac{1}{2} \leq x < k + 1$ ، آن‌گاه $[x] = k$ و

$$2k + 1 \leq 2x < 2k + 2 \Rightarrow [2x] = 2k + 1$$

بنابراین

$$g(x) = 2k - 2k - 1 = -1$$

در نتیجه

$$R_g = \{-1, 0\}$$

۸۰- گزینه‌ی ۱ اگر $-1 \leq x < 0$ ،

$$[x] = -1, |x| = -x \Rightarrow f(x) = -1 + x$$

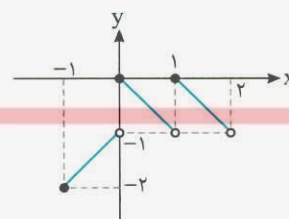
اگر $0 \leq x < 1$ ،

$$[x] = 0, |x| = x \Rightarrow f(x) = -x$$

اگر $1 \leq x < 2$ ،

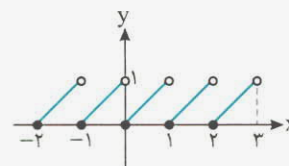
$$[x] = 1, |x| = x \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به صورت $\{-1\} - [-2, 0]$ است.



۸۱- گزینه‌ی ۴ نمودار تابع به شکل زیر است. تعداد

قطعه‌ها ۵ و طول هر پاره‌خط برابر $\sqrt{2}$ است.



۸۲- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

۹۱- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع را به سه قطعه‌ی $x \leq -3$ ،

$-3 \leq x \leq 1$ و $x \geq 1$ تقسیم می‌کنیم:

$$x \leq -3: f(x) = 2 + (-3 - x) - (1 - x) = -2$$

$$-3 \leq x \leq 1: f(x) = 2 + x + 3 - (1 - x) = 2x + 4$$

$$x \geq 1: f(x) = 2 + x + 3 - (x - 1) = 6$$

۹۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$|x - |x|| = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

بنابراین اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = |x - (-2x)| = |3x| = -3x$$

و اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = |x - 0| = |x| = x$$

۹۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

در نتیجه گزینه‌ها به شکل زیر درمی‌آیند:

گزینه‌ی (۱)

$$\begin{cases} -x^2 + 2x - 3 & x < 0 \\ x^2 + 2x + 3 & x > 0 \end{cases}$$

گزینه‌ی (۲)

$$\begin{cases} -x^2 + 3 & x < 0 \\ x^2 + 3 & x > 0 \end{cases}$$

گزینه‌ی (۳)

$$\begin{cases} -x^2 + 2x - 3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 2x + 3 & x > 0 \end{cases}$$

گزینه‌ی (۴)

$$\begin{cases} -x^2 + 3 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 3 & x > 0 \end{cases}$$

۹۴- گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی تمام تابع‌های موجود در گزینه‌ها

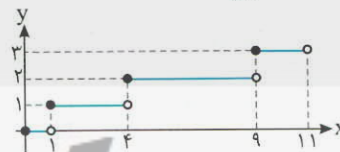
$\mathbb{R}$ است. پس یکسان بودن ضابطه‌ها را چک می‌کنیم:

$$f(x) = [x + 3[x]] = [x] + 2[x] = 4[x] = g(x)$$

۹۵- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع f به صورت زیر است

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است که از چهار پاره‌خط با اندازه‌های مختلف تشکیل شده است.



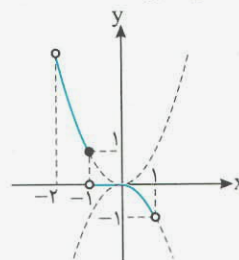
۸۷- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر است:

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۸۸- گزینه‌ی ۳ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(1, a) = (1, 4) \Rightarrow a = 4$$

$$(2, 2a + b) = (2, 5) \Rightarrow 2a + b = 5 \Rightarrow 8 + b = 5 \Rightarrow b = -3$$

$$(c, 3) = (4, 3) \Rightarrow c = 4$$

بنابراین $a + b + c = 5$.

۸۹- گزینه‌ی ۳ تابع‌های $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ و $g(x) = x$

برابرند، زیرا

$$D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$$

در بقیه‌ی گزینه‌ها دامنه‌ی دو تابع داده شده، برابر نیست.

۹۰- گزینه‌ی ۲ تابع‌های $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ و

$$g(x) = \sqrt{x} \sqrt{4 - x}$$

برابرند، زیرا

$$D_f = D_g = [0, 4]$$

$$f(x) = \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{x(4 - x)} = \sqrt{x} \sqrt{4 - x}$$

تابع‌های $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ و $g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x - 2}$ دامنه‌ی

یکسان ندارند، پس برابر نیستند. همین‌طور تابع‌های

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ و $g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x + 2}$ تابع‌های

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $g(x) = x - 2$ ضابطه‌ی برابر ندارند.

زیرا

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2| \neq g(x)$$

اگر $a=2$ ، آن گاه $b=2$ و تابع به صورت زیر است که یک به یک نیست.

$$f = \{(4, 1), (6, 2), (2, 2)\}$$

اگر $a=-2$ ، آن گاه $b=10$ و تابع به صورت زیر است که یک به یک است.

$$f = \{(4, 1), (6, 2), (-2, 10)\}$$

$$\text{پس } a-b=-12$$

۹۸- گزینه ۳ هر خط موازی محور طولها نمودار تابع گزینه ۳ را حداکثر در یک نقطه قطع می کند، پس تابع مربوط به آن یک به یک است.

۹۹- گزینه ۴ هر خط موازی محور طولها نمودار تابع گزینه ۴ را حداکثر در یک نقطه قطع می کند، پس تابع مربوط به آن یک به یک است.

۱۰۰- گزینه ۳ عضوهای مجموعه A را در یک ردیف می نویسیم:

$$a, b, c, d \quad (1)$$

اکنون کافی است ۴ عضو متمایز از مجموعه B انتخاب کنیم و آنها را زیر حروف ردیف (۱) بنویسیم تا تابعی یک به یک از A به B درست شود. تعداد راههای انجام این کار برابر است با

$$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

۱۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که

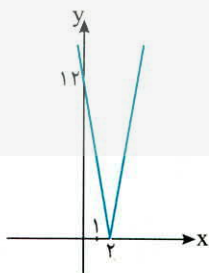
$$|2x-4| = |2(x-2)| = 2|x-2|$$

$$|8-4x| = |4(2-x)| = 4|x-2|$$

در نتیجه

$$f(x) = 6|x-2|$$

نمودار تابع f به صورت زیر است. با توجه به شکل، تابع روی بازه های $(2, +\infty)$ ، $[2, 4]$ و $(4, +\infty)$ یک به یک است، ولی روی بازه $[1, 4]$ یک به یک نیست.



پس باید دامنه ی g هم به همین صورت باشد. یعنی $x=2$ ریشه ی مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^2 + cx + 4 = (x-2)^2$$

$$x^2 + cx + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow c = -4$$

از طرف دیگر ضابطه ی f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل ۵ و یک عامل $x-2$ داشته باشد:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax+b}{(x-2)^2} = \frac{5}{x-2}$$

$$ax+b = 5(x-2) \Rightarrow a=5, b=-10$$

بنابراین

$$abc = 5(-10)(-4) = 200$$

۹۶- گزینه ۳ ضابطه ی دو تابع را مساوی قرار می دهیم:

$$\frac{bx+1}{8x+2b} = c \Rightarrow 8cx + 2bc = bx + 1$$

$$\begin{cases} 8c = b \\ 2bc = 1 \end{cases} \Rightarrow 2c \times 8c = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{4}, b = 2 \\ c = -\frac{1}{4}, b = -2 \end{cases}$$

اگر $b=2$ ، آن گاه

$$f(x) = \frac{2x+1}{8x+4}$$

بنابراین $x = -\frac{1}{2}$ در دامنه ی f قرار ندارد و در دامنه ی g نیز

نباید قرار داشته باشد. پس $a = -\frac{1}{2}$ و در نتیجه

$$\frac{ab}{c} = -4$$

در حالت $b=-2$ نیز

$$f(x) = \frac{-2x+1}{8x-4}$$

که نتیجه می شود $a = \frac{1}{2}$ و $\frac{ab}{c} = 4$.

۹۷- گزینه ۱ چون مؤلفه ی دوم زوج مرتبهای (۴، ۱) و $(a^2, 1)$ مساوی هستند، باید مؤلفه های اول آنها هم مساوی باشند:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

به همین ترتیب باید مؤلفه های اول زوج مرتبهای (۶، ۲) و $(2a+b, 2)$ نیز مساوی باشند. پس

$$2a+b=6 \Rightarrow b=6-2a$$

۱۰۴- گزینه‌ی ۱ در تابع گزینه‌ی (۲)، $f(0) = f(\pm\sqrt{2}) = 0$.

در تابع گزینه‌ی (۳)، اگر $x \leq 0$ ، آن گاه $f(x) = 0$.

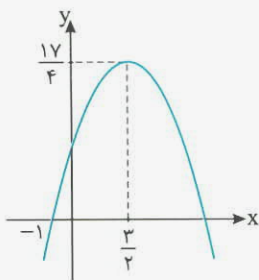
در تابع گزینه‌ی (۴)، $f(0) = f(2) = 0$.

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شوند. خودتان ثابت کنید تابع گزینه‌ی (۱) یک‌به‌یک است.

۱۰۵- گزینه‌ی ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.

از روی شکل معلوم است که تابع روی بازه‌ی $[-1, \frac{3}{2}]$ یک‌به‌یک است. اما اگر $a > \frac{3}{2}$ ، خطی افقی وجود دارد که

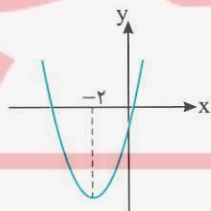
نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{3}{2}$ است.



۱۰۶- گزینه‌ی ۲ تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ با

دامنه‌ی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا با دامنه‌ی $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک‌به‌یک است.

بنابراین حداکثر مقدار k برابر طول رأس سهمی $y = x^2 + 4x - 1$ است که برابر است با -2 .

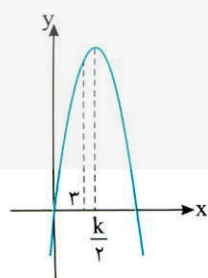


۱۰۷- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع $y = -x^2 + kx$ به شکل زیر

است. اگر $x = 3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن

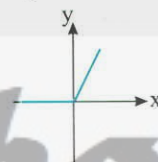
منطبق شود، تابع یک‌به‌یک است. بنابراین

$$3 \leq \frac{k}{2} \Rightarrow k \geq 6$$

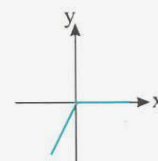


۱۰۲- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

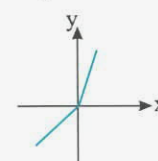
$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{یک‌به‌یک نیست}$$



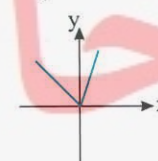
$$f(x) = x - |x| = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{یک‌به‌یک نیست}$$



$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{یک‌به‌یک است}$$



$$f(x) = x + 2|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{یک‌به‌یک نیست}$$



۱۰۳- گزینه‌ی ۴ در گزینه‌ی (۱)، $f(0) = f(-2) = 0$ ، در نتیجه

تابع یک‌به‌یک نیست.

در گزینه‌ی (۲)، $f(0) = f(2) = 0$ ، پس تابع یک‌به‌یک نیست.

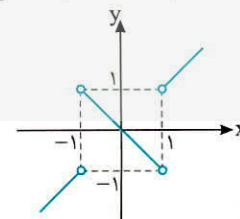
در گزینه‌ی (۳)، $f(-1) = f(2) = -4$ ، در نتیجه تابع یک‌به‌یک

نیست.

اکنون ثابت می‌کنیم تابع گزینه‌ی (۴) یک‌به‌یک است. توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x & |x| < 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$$

نمودار این تابع به شکل زیر است. بنابراین تابع یک‌به‌یک است.

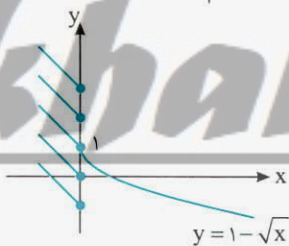


۱۱۰- گزینهی ۱ نمودار تابع به ازای مقادیرهای مختلف k به

شکل زیر است. برای این که تابع یک‌به‌یک باشد، باید کم‌ترین مقدار عبارت $2k - x$ به ازای $x \leq 0$ از ۱ کم‌تر نباشد:

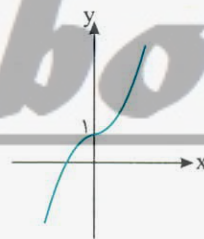
$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 2k - x \geq 2k$$

یعنی $2k \geq 1$ ، در نتیجه $k \geq \frac{1}{2}$.

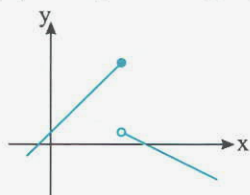


$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

شکل زیر است. واضح است که تابع یک‌به‌یک است. بقیه‌ی گزینه‌ها را می‌توانید با رسم نمودار یا آوردن مثال نقض رد کنید.

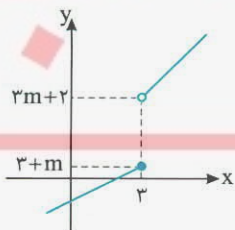
**۱۱۱- گزینهی ۳** اگر $m \neq 0$ ، هر یک از بخش‌های تابع

یک‌به‌یک هستند. اگر $m < 0$ ، نمودار بخش دوم خطی با شیب منفی می‌شود، که در این صورت یک‌به‌یک بودن تابع نقض می‌شود. زیرا شکل کلی آن به صورت زیر می‌شود:



اگر $m > 0$ ، نمودار تابع شبیه شکل زیر می‌شود. برای این که تابع یک‌به‌یک باشد، کافی است عرض نقطه‌ی توخالی بیش‌تر یا مساوی عرض نقطه‌ی توپر باشد. در نتیجه

$$3m + 2 \geq m + 3 \Rightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

**۱۱۲- گزینهی ۳** توجه کنید که از $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه

می‌شود

$$\frac{k^3 x_1 + 1}{kx_1 + 4} = \frac{k^3 x_2 + 1}{kx_2 + 4}$$

$$k^4 x_1 x_2 + 4k^3 x_1 + kx_2 + 4 = k^4 x_1 x_2 + 4k^3 x_2 + kx_1 + 4$$

$$4k^3(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_2) = 0$$

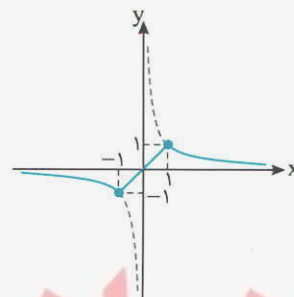
$$(x_1 - x_2)(4k^3 - k) = 0$$

حال اگر $4k^3 - k \neq 0$ ، آن‌گاه $x_1 = x_2$ و در نتیجه تابع

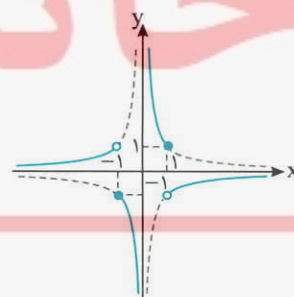
یک‌به‌یک است. اگر $4k^3 - k = 0$ ، آن‌گاه تابع یک‌به‌یک نیست

۱۰۹- گزینهی ۲ نمودار تابع‌ها را رسم می‌کنیم:

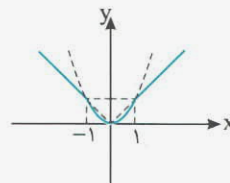
گزینهی (۱)



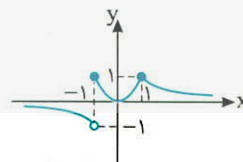
گزینهی (۲)



گزینهی (۳)



گزینهی (۴)

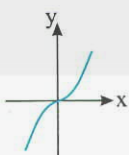


واضح است که تابع گزینهی (۲) یک‌به‌یک است.

۱۱۵- گزینه‌ی ۴) نمودار تابع‌های چهار گزینه به صورت زیر

است:

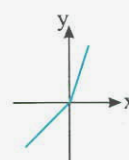
گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$


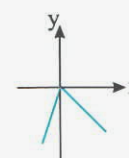
گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = 2x - |x| = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$


گزینه‌ی (۳)

$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$$


گزینه‌ی (۴)

$$f(x) = x - 2|x| = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$$


با توجه به نمودارها، تابع زیر وارون پذیر نیست

$$f(x) = x - 2|x|$$

۱۱۶- گزینه‌ی ۳) توجه کنید که

$$f(-6) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = -6$$

$$f(4) = -3 \Rightarrow f^{-1}(-3) = 4$$

بنابراین

$$f^{-1}(3) + f^{-1}(-3) = -2$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۲) ابتدا توجه کنید که $g(3) = 2$ ، پس

$$g^{-1}(2) = 3$$

بنابراین

$$f^{-1}(a) + g^{-1}(2) = 6 \Rightarrow f^{-1}(a) + 3 = 6$$

$$f^{-1}(a) = 3 \Rightarrow f(3) = a \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه

$$g(a) = g(2) = 4$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۲) از تساوی $f^{-1}(g(2a)) = 6$ نتیجه می‌شود

$$f(6) = g(2a)$$

بنابراین

$$g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 \Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

و در نتیجه $k = 0$ و $k = \pm \frac{1}{2}$. توجه کنید که به ازای $k = 0$

$k = \pm \frac{1}{2}$ تابع f ثابت است.

$$k = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}, \quad k = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}, x \neq -8$$

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}, x \neq 8$$

نکته تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc \neq 0$ یک به یک است.

۱۱۳- گزینه‌ی ۲) معادله را به صورت $f(x^3+1) = f(x^2+1)$

می‌نویسیم. چون f تابعی یک به یک است، پس

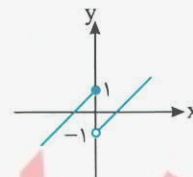
$$x^3+1 = x^2+1 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

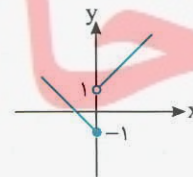
پس معادله دو جواب متمایز دارد.

۱۱۴- گزینه‌ی ۴) نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

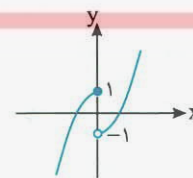
گزینه‌ی (۱)



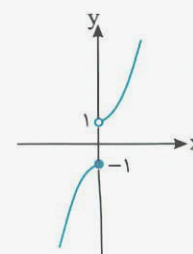
گزینه‌ی (۲)



گزینه‌ی (۳)



گزینه‌ی (۴)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینه‌ی (۴) وارون پذیر است.

۱۲۴- گزینه‌ی ۴ چون نمودار تابع f از نقطه‌ی $(9, 11)$ عبور

می‌کند، نمودار تابع f^{-1} از نقطه‌ی $(11, 9)$ عبور می‌کند.

۱۲۵- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$f(-4) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -4$$

$$f(2) = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2$$

$$f^{-1}(7) + f^{-1}(-1) = 2 - 4 = -2$$

بنابراین ۱۲۶- گزینه‌ی ۱ چون $f^{-1}(4) = 5$ ، پس $f(5) = 4$ در نتیجه

$$f(5) = \frac{-a}{5-3} + 2 = -\frac{a}{2} + 2 = 4$$

پس $a = -4$.

۱۲۷- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم $f^{-1}(1) = a$ در این صورت

$$f(a) = 1 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a+5} + 2 = 1$$

$$a + \sqrt{a+5} + 2 = 1 \Rightarrow \sqrt{a+5} = -a-1 \quad (*)$$

$$a+5 = a^2 + 2a+1 \Rightarrow a^2 + a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \quad a = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق})$$

از تساوی (*) واضح است که

$$-a-1 \geq 0 \Rightarrow a \leq -1$$

بنابراین $a = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ قابل قبول نیست.

۱۲۸- گزینه‌ی ۳ اگر در تساوی $f^{-1}(\sqrt{x}+1) = x^3 + 1$ قرار

دهیم $x = 4$ ، به دست می‌آید

$$f^{-1}(\sqrt{4}+1) = 4^3 + 1 \Rightarrow f^{-1}(3) = 65 \Rightarrow f(65) = 3$$

۱۲۹- گزینه‌ی ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم

$f(x) = ax + b$ در این صورت

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(11) = 3 \Rightarrow f(3) = 11 \Rightarrow 3a + b = 11 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید

$a = 4$ و $b = -1$. بنابراین $f(x) = 4x - 1$ و در نتیجه

$$f(-3) = -13$$

۱۳۰- گزینه‌ی ۳ در تساوی $f(2x-1) = g(3x) - 1$ قرار

می‌دهیم $x = 2$:

$$f(3) = g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = f(3) + 1$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2) = 3 \Rightarrow f(3) = 2$$

در نتیجه

$$g(6) = 2 + 1 = 3$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۳ فرض می‌کنیم $g(x) = f(1+x)$ در نتیجه

$$g(0) = f(1) = 2, \quad g(-2) = f(-1) = 0$$

همچنین

$$5 = g(3) = f(4)$$

بنابراین

$$f^{-1}(5) = 4$$

مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{0+4}{2} = 2$.

۱۲۰- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم $g(x) = f(x-3)$ در این

صورت

$$g(3) = f(0) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0$$

همچنین

$$3 = g(5) = f(2) \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

$$0 = g(-3) = f(-6) \Rightarrow f^{-1}(0) = -6$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{2+0}{-6+2} = -\frac{1}{2}$$

۱۲۱- گزینه‌ی ۱ نقطه‌ی $(-1, 0)$ روی نمودار است، پس

$$f(-2) = 0, \quad \text{یعنی } f(3(-1)+1) = 0$$

نقطه‌ی $(0, -2)$ روی نمودار است، پس $f(3(0)+1) = -2$

$$\text{یعنی } f(1) = -2, \quad \text{پس } f^{-1}(-2) = 1$$

نقطه‌ی $(2, -3)$ روی نمودار است، پس $f(3(2)+1) = -3$

$$\text{یعنی } f(7) = -3, \quad \text{پس } f^{-1}(-3) = 7$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با

$$\frac{0+1}{1+7} = \frac{1}{8}$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۴ فرض می‌کنیم

$$g(x) = 1 + f(1+2x)$$

توجه کنید که

$$6 = g(2) = 1 + f(5) \Rightarrow f(5) = 5$$

$$0 = g(-3) = 1 + f(-5) \Rightarrow f(-5) = -1$$

بنابراین

$$f^{-1}(5) = 5, \quad f^{-1}(-1) = -5$$

همچنین

$$4 = g(-2) = 1 + f(-3) \Rightarrow f(-3) = 3$$

$$5 = g(0) = 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 4$$

حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-5+3}{4-5} = \frac{-2}{-1} = 2$$

۱۲۳- گزینه‌ی ۴ از روی شکل معلوم می‌شود که

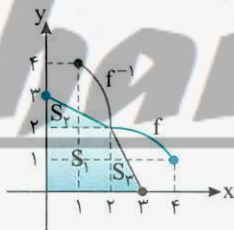
$$f^{-1}(2) = 0 \Rightarrow f(0) = 2$$

چون f یک‌به‌یک است (زیرا وارون آن یک تابع است)، پس

$$2 = f(3m-9) = f(0) \Rightarrow 3m-9 = 0 \Rightarrow m = 3$$

۱۳۶- گزینه ۲ نمودار تابع f^{-1} قرینه‌ی نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow S = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = 6$$



۱۳۷- گزینه ۲ برد تابع f^{-1} همان دامنه‌ی تابع f است. پس دامنه‌ی f را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1$$

بنابراین

$$R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (0, 1)$$

۱۳۸- گزینه ۲ دامنه‌ی تابع f^{-1} برد تابع f است. توجه کنید که

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

بنابراین $R_f \subseteq [-\frac{1}{4}, +\infty)$. از طرف دیگر، اگر $t \geq -\frac{1}{4}$ معادله‌ی

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = t$$

جواب دارد، پس $[-\frac{1}{4}, +\infty) \subseteq R_f$ در نتیجه

$$R_f = [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

بنابراین

$$D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

۱۳۹- گزینه ۲ دامنه‌ی f^{-1} همان برد f است. پس برد f را به دست می‌آوریم

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x^3 \leq 8 \Rightarrow 0 \leq x^3 + 1 \leq 9$$

$$0 \leq \sqrt{x^3 + 1} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, 3]$$

۱۴۰- گزینه ۳ دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f است:

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^3 \leq 8 \Rightarrow 1 \leq x^3 + 1 \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{x^3 + 1} \leq \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow R_f = [\frac{1}{9}, 1] \Rightarrow D_{f^{-1}} = [\frac{1}{9}, 1]$$

۱۳۱- گزینه ۱ اگر در تساوی $f(2x+1) = 2 - mx$ قرار

دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید

$$f(3) = 2 - m$$

از طرف دیگر، چون $f^{-1}(5) = 3$ ، پس $f(3) = 5$. در نتیجه

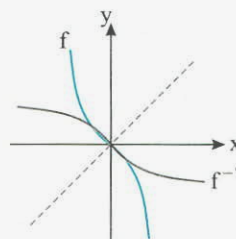
$$2 - m = 5 \Rightarrow m = -3$$

۱۳۲- گزینه ۴ نمودار تابع f^{-1} قرینه‌ی نمودار تابع f

نسبت به خط $y=x$ است که به شکل گزینه ۴ است.

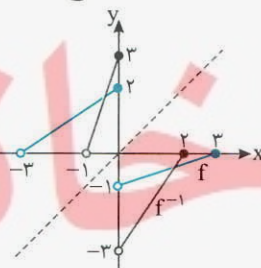
۱۳۳- گزینه ۳ نمودار تابع f^{-1} قرینه‌ی نمودار تابع f

نسبت به خط $y=x$ است که به شکل زیر است:



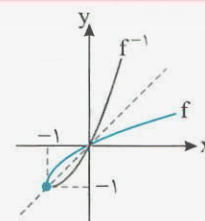
۱۳۴- گزینه ۲ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه

می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} رسم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های f و f^{-1} در دو نقطه متقاطع‌اند.

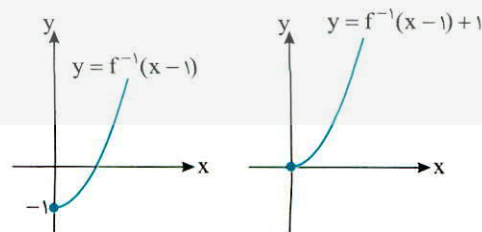


۱۳۵- گزینه ۲ نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ قرینه‌ی نمودار

تابع $y = f(x)$ نسبت به خط $y=x$ است.



اگر نمودار $y = f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f^{-1}(x-1) + 1$ رسم می‌شود.



۱۴۷- گزینه‌ی ۳ از تساوی $y = \frac{x+a}{x+b}$ مقدار x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$yx + by = x + a \Rightarrow (y-1)x = a - by$$

$$\Rightarrow x = \frac{a-by}{y-1}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{a-bx}{x-1}$$

و در نتیجه $a=2$ ، $b=3$ و $a+b=5$.

۱۴۸- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{4x+n} \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(x) = \frac{-nx+1}{4x+2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-nx+1}{4x+2}$$

بنابراین

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \mathbb{R} - \{m\} \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{n}{4}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{n}{4} \Rightarrow n = 2$$

در نتیجه $mn = -1$.

۱۴۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به شکل

$$y = 4 - (x-2)^2 \text{ می‌نویسیم. حالا } x \text{ را بر حسب } y \text{ پیدا می‌کنیم:}$$

$$(x-2)^2 = 4-y \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{4-y} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-y}$$

چون $x < 2$ فقط $x = 2 - \sqrt{4-y}$ قابل قبول است. پسضابطه‌ی وارون f به صورت زیر است

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4-x}$$

۱۵۰- گزینه‌ی ۴ ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x) = \begin{cases} 4x-4 & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

تابع f در بازه‌ی $(-\infty, 2]$ وارون‌پذیر است. فرض می‌کنیم

$$y = 4x - 4 \text{، در این صورت}$$

$$x = \frac{y+4}{4}$$

از طرف دیگر،

$$x \leq 2 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۴ از تساوی $y = \frac{1-2x}{5}$ مقدار x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$5y = 1 - 2x \Rightarrow 2x = 1 - 5y \Rightarrow x = \frac{1-5y}{2}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{1-5x}{2}$$

۱۴۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$y = \frac{3x+2}{4} \Rightarrow 4y = 3x+2$$

در نتیجه

$$3x = 4y - 2 \Rightarrow x = \frac{4y-2}{3}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{4x-2}{3}$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۱ f خطی است که از نقطه‌های $(0, -2)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد. بنابراین $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$. در نتیجه

$$f^{-1}(x) = 2(x+2) \Rightarrow f^{-1}(x-1) = 2(x+1)$$

۱۴۴- گزینه‌ی ۳ از تساوی $y = 3 - \sqrt{2-x}$ مقدار x را

بر حسب y به دست می‌آوریم

$$\sqrt{2-x} = 3-y \Rightarrow 2-x = (3-y)^2$$

$$x = 2 - (3-y)^2 \Rightarrow x = -y^2 + 6y - 7$$

بنابراین $f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 7$ پس $a = 6$ و $b = -7$ و در

نتیجه $a+b = -1$.

۱۴۵- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$y = \sqrt{2x-3} \Rightarrow y^2 = 2x-3$$

$$2x = y^2 + 3 \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2+3)$$

۱۴۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x-2} \Rightarrow f(x) = (f^{-1})^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x+1) - 2 = \frac{2x+4}{x} - 2 = \frac{4}{x}$$

در نتیجه

۱۵۱- گزینه ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به صورت زیر

می‌نویسیم

$$\begin{cases} -a+b=-\frac{2}{3} \\ a+3b=-\frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{2}{9}, b=-\frac{8}{9}$$

$$y=(\sqrt{x+1})^2-1$$

حالا x را بر حسب y پیدا می‌کنیم:

$$y+1=(\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{y+1}-1 \Rightarrow x=(\sqrt{y+1}-1)^2$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}-1)^2=x+1+1-2\sqrt{x+1}=x+2-2\sqrt{x+1}$$

۱۵۲- گزینه ۱ اگر $x < 1$ ، آن‌گاه

$$7x+2 < 7 \times 1 + 2 = 9$$

و اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه

$$5x+4 \geq 5+4=9$$

اکنون می‌توان نوشت

$$y=7x+2 \Rightarrow 7x=y-2 \Rightarrow x=\frac{y-2}{7}$$

$$y=5x+4 \Rightarrow 5x=y-4 \Rightarrow x=\frac{y-4}{5}$$

در نتیجه

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{7} & x < 9 \\ \frac{x-4}{5} & x \geq 9 \end{cases}$$

۱۵۳- گزینه ۱ چون این دو منحنی در نقطه‌ی $(1, 2)$

برخورد می‌کنند، پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow \sqrt{a+b}=2$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow \sqrt{2a+b}=1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-3, b=7$$

بنابراین $ab=-21$ ۱۵۴- گزینه ۲ اگر (m, n) نقطه‌ی برخورد نمودارتابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود

$$f(m)=n, \quad f(n)=m$$

بنابراین

$$f(-1)=\frac{1}{3} \Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1 \Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1$$

۱۵۵- گزینه ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع وارون تابع را پیدا

می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{y}=x-1 \Rightarrow x=1+\frac{1}{y}=\frac{y+1}{y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x}$$

اکنون معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم تا طولنقطه‌های برخورد نمودار دو تابع f و f^{-1} را به دست آوریم:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2-1=x \Rightarrow x^2-x-1=0$$

بنابراین حاصل ضرب طول نقطه‌های برخورد برابر است با -1 .۱۵۶- گزینه ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع وارون تابع f را به دست

می‌آوریم

$$y=\frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy-2y=x+4 \Rightarrow x(y-1)=2y+4$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع را می‌یابیم

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2+3x-4=2x^2-8$$

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x+1)(x-4)=0$$

$$x=-1, x=4$$

۱۵۷- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا ضابطه‌ی f^{-1} را به دست

می‌آوریم

$$y=(x+1)^2 \Rightarrow x+1=\sqrt{y} \Rightarrow x=\sqrt{y}-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$$

حال محل برخورد f و f^{-1} را پیدا می‌کنیم

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow (x+1)^2+1=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} (x+1)^2+2(x+1)+1=x$$

$$(x+1)^4+2x^2+3x+3=0$$

معادله‌ی بالا با توجه به این که جمع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.

اگر $a = -d$ ، تابع با وارونش برابر است. بنابراین $a = 4$. توجه کنید که بدون دانستن نکته‌ی بالا، مسئله به این شکل حل می‌شود:

$$y = \frac{ax+3}{2x-4} \Rightarrow 2xy - 4y = ax + 3 \Rightarrow (2y-a)x = 4y+3$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y+3}{2y-a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2x-a}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{ax+3}{2x-4} = \frac{4x+3}{2x-a} \Rightarrow a = 4$$

۱۶۱- گزینه‌ی ۲ برای تشکیل تابع f^2 کافی است مؤلفه‌های

دوم تابع f را به توان دو برسانیم

$$g = f^2 = \{(2, 9), (4, 1), (-1, 4)\}$$

۱۶۲- گزینه‌ی ۱ دامنه‌ی تابع g به شکل زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1) = \frac{f(1)}{2-f(1)} = \frac{-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$$

$$g(5) = \frac{f(5)}{2-f(5)} = \frac{1}{2-1} = 1$$

بنابراین

$$g = \{(1, -\frac{1}{3}), (5, 1)\}$$

۱۶۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$D_{f+2g} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 2\}$$

بنابراین

$$(f+2g)(0) = f(0) + 2g(0) = 1 + 2(-1) = -1$$

$$(f+2g)(1) = f(1) + 2g(1) = 4 + 2(-2) = 0$$

$$(f+2g)(2) = f(2) + 2g(2) = -6 + 2(3) = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $f+2g$ برابر -1 است.

۱۶۴- گزینه‌ی ۳ چون 3 در دامنه‌ی تابع $f-g$ قرار دارد،

باید در دامنه‌ی تابع f هم باشد، پس $a = 3$. از طرف دیگر،

$$(f-g)(3) = f(3) - g(3) = 5 + b = 8 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین $a+b=6$.

۱۶۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(2) = 4 \Rightarrow f(2) + g(2) = 4 \Rightarrow 3 + a = 4 \Rightarrow a = 1$$

چون $f(c) + g(b) = 5$ و عدد 5 در برد تابع $f+g$ وجود

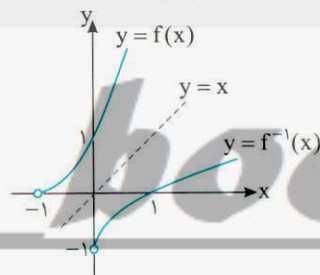
ندارد، پس باید $b \neq c$ و $b=1$. در این صورت

$$f = \{(2, 3), (1, 2), (c, 1)\}$$

$$g = \{(2, 1), (1, 4), (3, 5)\}$$

راه حل دوم نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار

نسبت به خط $y=x$ ، نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم. واضح است که دو نمودار نقطه‌ی برخوردی ندارند.



۱۵۸- گزینه‌ی ۲ اگر قرینه‌ی یک نمودار نسبت به خط

$y=x$ را بخواهیم، کافی است جای x و y را در آن عوض کنیم:

$$2x - 3y = b \xrightarrow{\text{قرینه}} 2y - 3x = b$$

خط به دست آمده می‌تواند مضربی از خط $ax+by=8$ باشد، پس

$$\begin{cases} -3x + 2y = b \\ ax + by = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{a} = \frac{2}{b} = \frac{b}{8}$$

بنابراین $b^2 = 16$ ، در نتیجه

$$b = -4 \Rightarrow \frac{-3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a+b = 2$$

$$b = 4 \Rightarrow \frac{-3}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a+b = -2$$

بنابراین $a+b = \pm 2$.

۱۵۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا ضابطه‌ی وارون تابع $y=ax+b$ را

به دست می‌آوریم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

چون نمودار f و f^{-1} بر هم منطبق هستند، پس به ازای هر x

تساوی $f(x) = f^{-1}(x)$ برقرار است. یعنی

$$ax + b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{a}, b = -\frac{b}{a}$$

از تساوی $a = \frac{1}{a}$ نتیجه می‌شود $a^2 = 1$ و چون $a \neq 1$ ، پس

$a = -1$ و تساوی $b = -\frac{b}{a}$ وقتی که $a = -1$ باشد همواره

برقرار است. پس b هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. در واقع وارون هر تابع به شکل $f(x) = -x + b$ برابر خودش است.

۱۶۰- گزینه‌ی ۴ اگر نمودار یک تابع نسبت به خط $y=x$

متقارن باشد، نمودار تابع و نمودار وارون آن بر هم منطبق‌اند.

یعنی $f(x) = f^{-1}(x)$. از طرف دیگر در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

۱۷۱- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\left(\frac{f+g}{f-g}\right)(1) &= \frac{(f+g)(1)}{(f-g)(1)} = \frac{f(1)+g(1)}{f(1)-g(1)} \\ &= \frac{(3 \times 1 + 1) + (1^2 - 1)}{(3 \times 1 + 1) - (1^2 - 1)} = 1\end{aligned}$$

۱۷۱- گزینه‌ی ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= 2x+1 \Rightarrow (f+g)(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \\ \Rightarrow f(2) + g(2) &= 5 \quad (1)\end{aligned}$$

$$(f-g)(x) = 1-x \Rightarrow (f-g)(2) = 1-2 = -1$$

$$\Rightarrow f(2) - g(2) = -1 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید
بنابراین $g(2) = 3$ و $f(2) = 2$

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 2 \times 3 = 6$$

راه‌حل دوم از اتحاد $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ نتیجه می‌شود

$$(f \times g)(x) = \frac{(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)}{4}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(f \times g)(2) &= \frac{(f+g)^2(2) - (f-g)^2(2)}{4} \\ &= \frac{(2 \times 2 + 1)^2 - (1 - 2)^2}{4} = 6\end{aligned}$$

۱۷۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$f(-1) = g(-1) = 2 \text{ و } g(-3) = 0 \text{ بنابراین}$$

$$(f-2g)(-1) = f(-1) - 2g(-1) = 2 - 2(2) = -2$$

$$g(-3) = 0 \Rightarrow (f \times g)(-3) = 0$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲- است.

۱۷۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$g(0) = (f+g)(0) - f(0) = 3 - (-3) = 6$$

پس گزینه‌ی (۳) درست نیست. بقیه‌ی گزینه‌ها درست‌اند.

۱۷۴- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 2x + 1) \\ &= x + 1\end{aligned}$$

بنابراین

$$(f-g)(x-1) = x - 1 + 1 = x$$

۱۷۵- گزینه‌ی ۴ دامنه‌ی تابع‌های f و g مجموعه‌ی

$\mathbb{R} - \{0, 1\}$ است. پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول $c=d=3$ که در این صورت

$$f+g = \{(2, 4), (1, 6), (3, 6)\}$$

حالت دوم $d=1$ که در این صورت

$$f+g = \{(2, 4), (1, 6)\}$$

توجه کنید که در این حالت c نمی‌تواند مقدارهای ۱، ۲ و ۳ باشد.
بنابراین مجموع مقدارهای ممکن d برابر ۴ است.

۱۶۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا به تابع‌های f^{-1} و g^{-1} توجه کنید:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -1), (-2, 2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2), (1, 1)\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-1} - g^{-1}$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}f^{-1} - g^{-1} &= \{(2, 1-3), (3, -1-4), (1, 4-1)\} \\ &= \{(2, -2), (3, -5), (1, 3)\}\end{aligned}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1} - g^{-1}$ برابر است با

$$2 + (-2) + 3 + (-5) + 1 + 3 = 2$$

۱۶۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$D_f = (-\infty, 3] - \{0\}, \quad D_g = \{-2, -1, 0, 3, 4\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}D_{\frac{f}{g}} &= (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} \\ &= \{-2, -1, 3\} - \{-1\} = \{-2, 3\}\end{aligned}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ دو زوج مرتب دارد.

۱۶۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ و

$$D_g = \{-1, 1, 0, 2, 4\} \text{ بنابراین}$$

$$D_{2g-f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\}$$

بنابراین a باید یکی از مقدارهای ۰ یا ۱ یا ۴ باشد:

$$(2g-f)(-1) = 2g(-1) - f(-1) = 4 - 2 = 2$$

$$(2g-f)(0) = 2g(0) - f(0) = 2 - 0 = 2$$

$$(2g-f)(4) = 2g(4) - f(4) = 6 - 2 = 4$$

بنابراین $a=4$ و در نتیجه

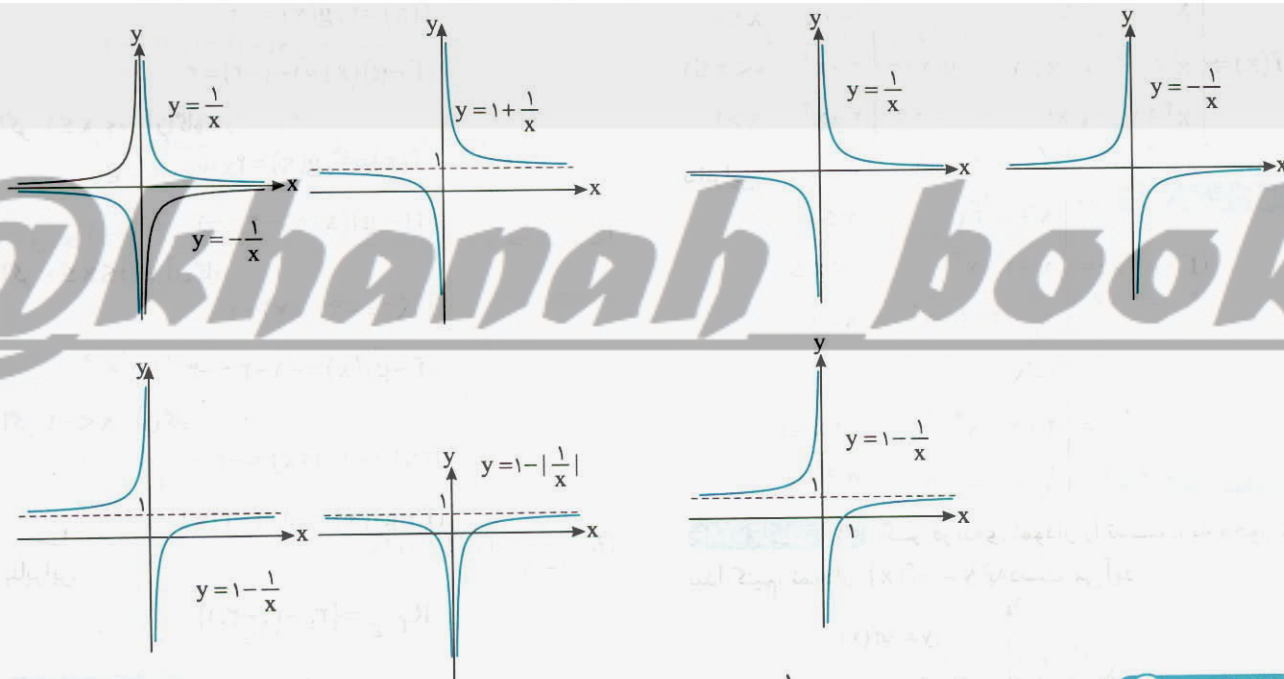
$$f(-4) = f(-4) = \sqrt{28}$$

۱۶۹- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = \frac{2-1}{2 \times 2 + 1} \times \frac{2-4}{2+2} = -\frac{1}{10}$$

۱۹۰- گزینه‌ی ۱

سپس به ترتیب زیر نمودار آن را رسم می‌کنیم:

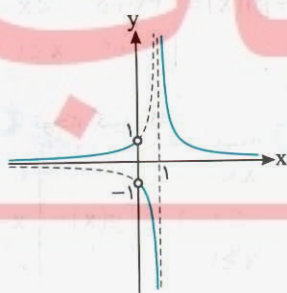


۱۹۳- گزینه‌ی ۱ ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

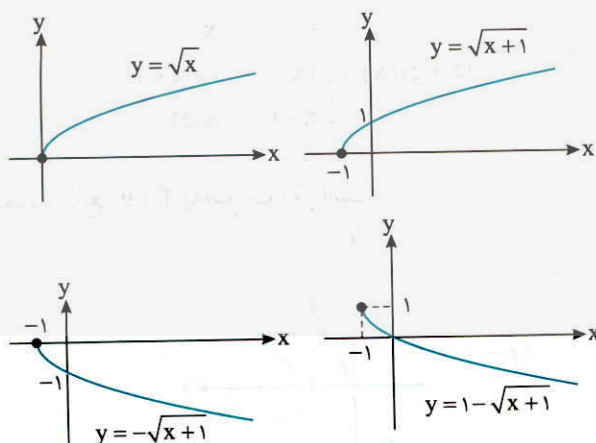
$$x > 0, x \neq 1 \Rightarrow y = \frac{x}{x^2 - x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{x^2 - x} = \frac{-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x-1}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:

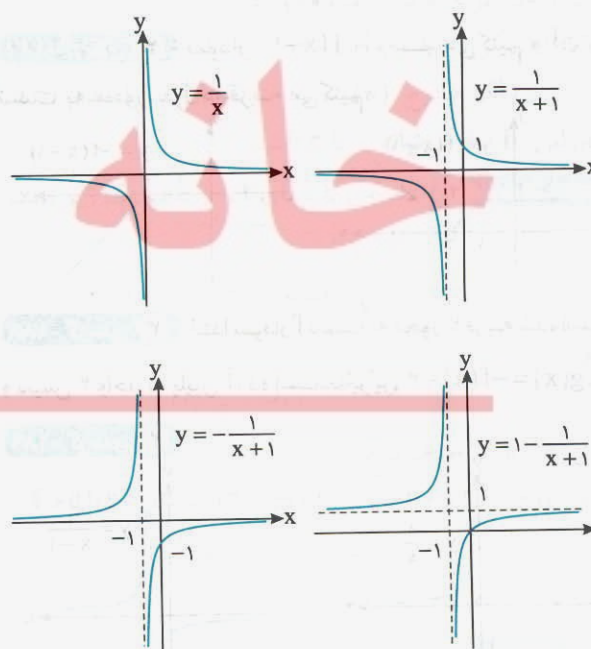


۱۹۴- گزینه‌ی ۱



۱۹۱- گزینه‌ی ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع را به صورت $y = 1 - \frac{1}{x+1}$

می‌نویسیم و به ترتیب زیر نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

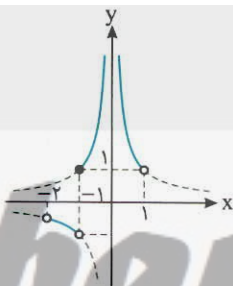


۱۹۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر

می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x > 0 \\ 1 + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۹۵- گزینه‌ی ۳ با توجه به شکل معلوم می‌شود

$D_f = [2, +\infty)$ و چون دامنه‌ی f به صورت $[-b, +\infty)$

است، پس $b = -2$. در نتیجه

$$f(x) = a + \sqrt{x-2} \geq a$$

بنابراین برد تابع به صورت $[a, +\infty)$ است. با توجه به شکل،

برد تابع برابر با $[2, +\infty)$ است. بنابراین $a = 2$. از این رو

$$f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$$

در نهایت با توجه به شکل $f(6) = c$ ، در نتیجه

$$f(6) = 2 + \sqrt{6-2} = 2 + 2 = 4 = c$$

در نتیجه

$$a + b + c = 2 - 2 + 4 = 4$$

۱۹۶- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f(g(x)) = f(x-3) = \sqrt{x-3}$$

بنابراین $D_h = [3, +\infty)$ توجه کنید که $h(x) = a - \sqrt{x-3}$

و نیز برد تابع به صورت $(-\infty, a]$ است، زیرا

$$-\sqrt{x-3} \leq 0 \Rightarrow a - \sqrt{x-3} \leq a + 0 = a$$

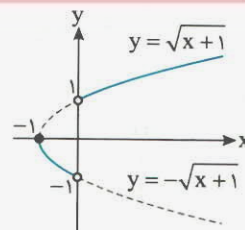
بنابراین با توجه به شکل $a = 4$ و $b = 3$ پس $ab = 12$.

۱۹۷- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر است:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{-x} \sqrt{x+1} = -\sqrt{x+1}$$

$$x > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{x} \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۹۸- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = \frac{(-1)^{-2}}{x} = \frac{1}{x}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \frac{(-1)^{-1}}{x} = -\frac{1}{x}$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = \frac{(-1)^0}{x} = \frac{1}{x}$$

@khanah_book

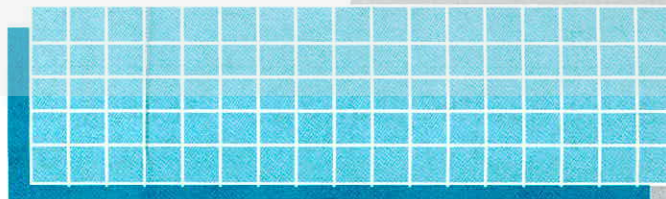
خانه کتاب

فصل چهارم

@khanah_book

مثلثات

خانه کتاب



فصل چهارم: مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه

تعریف

یک رادیان در هر دایره اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. یک رادیان تقریباً $57/29^\circ$ است.

تبدیل واحدهای زاویه

اگر D اندازه‌ی زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه‌ی این زاویه برحسب رادیان باشد، آن‌گاه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

تست ۱

کدام تساوی درست نیست؟

$$(1) \quad \frac{3\pi}{4} = 135^\circ \text{ رادیان}$$

$$(2) \quad \frac{3\pi}{8} = 67/5^\circ \text{ رادیان}$$

$$(3) \quad \frac{4}{15} = 32^\circ \text{ رادیان}$$

$$(4) \quad \frac{3}{4} = (135)^\circ \text{ رادیان}$$

پاسخ: چون $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

$$R = \frac{4}{15} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} \times \frac{4}{15} = \frac{48}{\pi} \neq 32^\circ$$

خودتان تحقیق کنید که بقیه‌ی تساوی‌ها درست‌اند.

تست ۲

مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب 110° و $\frac{2\pi}{9}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر چند رادیان است؟

$$\frac{\pi}{7} \quad (4)$$

$$\frac{5\pi}{12} \quad (3)$$

$$\frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (1)$$

پاسخ: اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر را a و اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک‌تر را b می‌گیریم:

$$\begin{cases} a+b=110^\circ = 110 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{18} \\ a-b=\frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

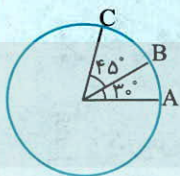
از حل این دستگاه به دست می‌آید

$$a = \frac{5\pi}{12}$$

طول کمان

اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازه‌ی زاویه‌ای مرکزی برحسب رادیان برابر θ و طول کمان روبه‌رو به آن زاویه برابر L باشد، آن‌گاه

$$L = r\theta$$



در شکل مقابل طول کمان AB برابر 4π است. طول کمان BC کدام است؟

۳ تست

(۲) 2π

(۱) 6π

(۴) 5π

(۳) 8π

پاسخ: ابتدا توجه کنید که $\frac{\pi}{6}$ رادیان $= 30^\circ$ و $\frac{\pi}{4}$ رادیان $= 45^\circ$.

اگر طول شعاع دایره r باشد، آنگاه

$$\widehat{AB} = r \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow 4\pi = r \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 24$$

بنابراین

$$\widehat{BC} = r \times \frac{\pi}{4} = 24 \times \frac{\pi}{4} = 6\pi$$

خانه کتاب

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل چهارم

درس اول:

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۱- اندازه‌ی زاویه‌ی 75° برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{12}$ (۲) $\frac{9\pi}{12}$ (۳) $\frac{7\pi}{12}$ (۴) $\frac{5\pi}{12}$

۲- اندازه‌ی دو زاویه از مثلثی 18° و $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{5}$ (۲) $\frac{3\pi}{5}$ (۳) $\frac{4\pi}{9}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

۳- حاصل ضرب اندازه‌های یک زاویه برحسب درجه و رادیان برابر 5π است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 120° (۲) 80° (۳) 60° (۴) 30°

۴- اندازه‌ی یک زاویه برحسب رادیان از $\frac{\pi}{80}$ برابر اندازه‌ی آن برحسب درجه، کم‌تر است. اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 35° (۲) 40° (۳) 50° (۴) 55°

۵- یکی از زاویه‌های مثلثی 72° و زاویه‌ی دیگر آن $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. در این مثلث،

- (۱) هر سه زاویه برابر هستند.
(۲) زاویه‌ها به نسبت ۲، ۲ و ۴ هستند.
(۳) زاویه‌ها به نسبت ۳، ۳ و ۴ هستند.
(۴) زاویه‌ها به نسبت ۲، ۳ و ۴ هستند.

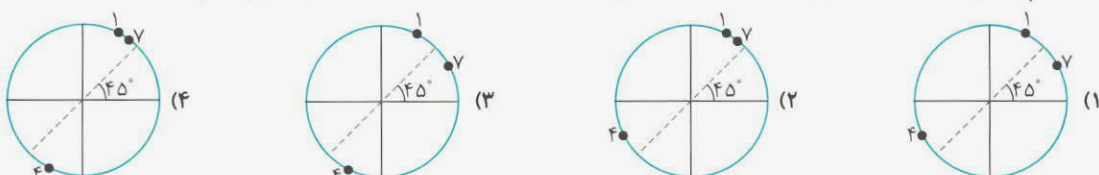
۶- انتهای کمان مربوط به کدام زاویه درست نشان داده نشده است؟



۷- انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۶- رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۸- در کدام شکل، انتهای کمان مربوط به زوایای مشخص شده، درست است؟ (اندازه‌ی زاویه‌ها برحسب رادیان هستند)

۹- انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره‌ی مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) ذوزنقه

۱۰- انتهای کمان نظیر زاویه‌ی 50° در کدام ناحیه قرار دارد؟

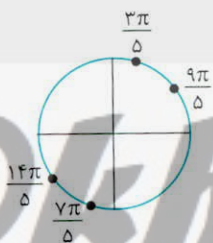
- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۱- انتهای کمان نظیر کدام زاویه در ناحیه سوم قرار ندارد؟

- (۱) 56° (۲) -52° (۳) 93° (۴) -92°

۱۲- انتهای کمان نظیر کدام زاویه درست نشان داده شده است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{5}$ (۲) $\frac{7\pi}{5}$ (۳) $\frac{9\pi}{5}$ (۴) $\frac{14\pi}{5}$



۱۳- انتهای کمان نظیر زاویه $\frac{17\pi}{4}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۴- انتهای کمان نظیر زاویه $-\frac{27\pi}{10}$ رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۵- انتهای زاویه‌ای که اندازه‌اش $-\frac{53\pi}{3}$ است بر انتهای کمان مربوط به کدام زاویه منطبق است؟

- (۱) 2° (۲) 4° (۳) 6° (۴) 8°

۱۶- انتهای کمان نظیر زاویه 17 رادیان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

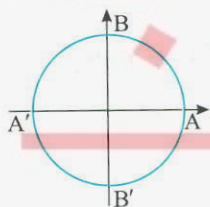
۱۷- اگر زاویه 225° را به شکل $\alpha + 2k\pi$ رادیان بنویسیم که در این جا k عددی طبیعی است و $0 < \alpha < 2\pi$ مقدار α چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۸- اگر زاویه 330° را به شکل $\alpha + 360^\circ k$ بنویسیم، که در این جا k عددی طبیعی است، مقدار α چند درجه است؟

- (۱) 4° (۲) 5° (۳) 6° (۴) 7°

۱۹- در دایره‌ی مثلثاتی شکل مقابل، انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی که مضرب زوج 18° هستند در نقطه‌ی



..... و زاویه‌هایی که مضرب فرد 18° هستند، در نقطه‌ی قرار دارند.

(۱) A, A'

(۲) A, A'

(۳) B, B'

(۴) B, B'

۲۰- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی که مضرب صحیحی از π هستند در کدام نقطه از دایره‌ی مثلثاتی مقابل

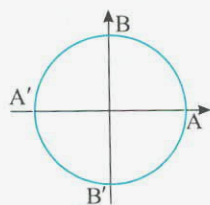
قرار دارد؟

(۱) A

(۲) A یا A'

(۳) B یا B'

(۴) B



۲۱- اگر k عددی صحیح باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌هایی به شکل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ در دایره‌ی مثلثاتی مقابل

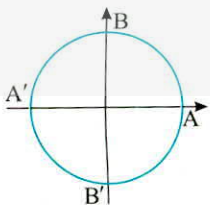
روی کدام نقطه قرار می‌گیرد؟

(۱) A یا A'

(۲) B یا B'

(۳) A یا B

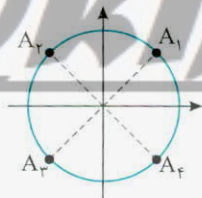
(۴) A' یا B'



۲۲- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی به صورت $\frac{k\pi}{2}$ که k عددی صحیح است، در کدام شکل درست نشان داده شده است؟



۲۳- در دایره‌ی مثلثاتی مقابل، انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی با نقاط A_1 تا A_4 مشخص شده است.



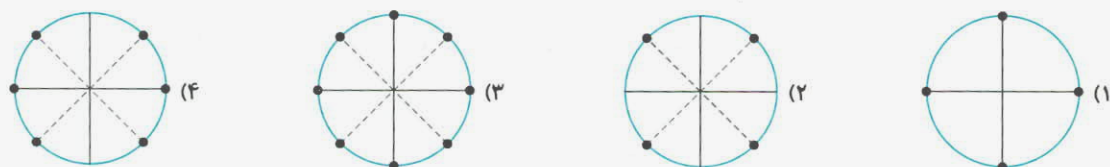
$$\frac{k\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (1)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

۲۴- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی به صورت $\frac{k\pi}{4}$ روی دایره‌ی مثلثاتی در کدام شکل درست نشان داده شده است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)



۲۵- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی به شکل $\alpha = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ را به ازای مقادیر مختلف و صحیح k ، روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص می‌کنیم. اگر

این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می‌شود؟

(۴) شش ضلعی غیرمنتظم

(۳) پنج ضلعی غیرمنتظم

(۲) شش ضلعی منتظم

(۱) پنج ضلعی منتظم

۲۶- اگر k مقادیر صحیح و مختلف را اختیار کند، انتهای کمان نظیر زاویه‌ی $\alpha = \frac{2k\pi}{3}$ روی دایره‌ی مثلثاتی چند نقطه‌ی متمایز را مشخص می‌کند. اگر این نقاط را به صورت متوالی به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می‌شود؟

(۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

(۳) مثلث قائم‌الزاویه

(۲) مستطیل

(۱) مربع

۲۷- شعاع چرخ و فلک شکل مقابل ۵۰ متر است. مسافران با گذر از نقطه‌ی P_0 به سمت P_1 چه

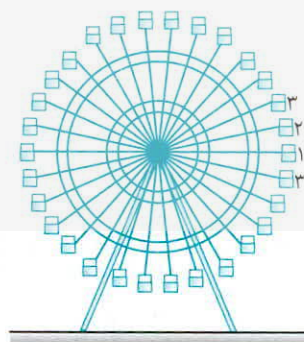
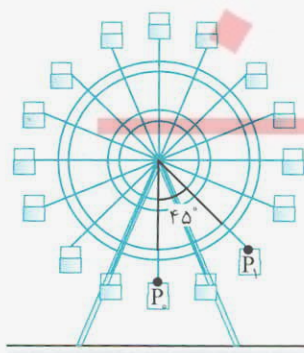
مسافتی را روی چرخ و فلک طی می‌کنند؟

$$\frac{25\pi}{2} \quad (1)$$

$$\frac{25\pi}{4} \quad (2)$$

$$50\pi \quad (3)$$

$$25\pi \quad (4)$$



۲۸- چرخ و فلکی مطابق شکل مقابل ۳۰ کابین دارد که از شماره‌ی ۱ تا ۳۰ شماره‌گذاری شده‌اند،

این چرخ و فلک در هر دقیقه ۴ دور می‌چرخد. اگر چرخ و فلک ۱۸۵ ثانیه بچرخد، کابین

شماره‌ی یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟

(۱) کابین دهم

(۲) کابین یازدهم

(۳) کابین نوزدهم

(۴) کابین بیستم

۲۹- وقتی عقربه‌ی ساعت‌شمار به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{8}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

- ۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۴۰

۳۰- اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی ساعت‌شمار بین دو زمان خاص طی می‌کند $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است. اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی دقیقه‌شمار در

این مدت طی می‌کند، چند رادیان است؟

- ۱) $\frac{6\pi}{5}$ (۲) $\frac{4\pi}{5}$ (۳) $\frac{9\pi}{10}$ (۴) $\frac{11\pi}{10}$

۳۱- در ساعت ۴:۰۰ زاویه‌ی میان عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چقدر است؟

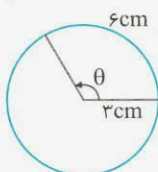
- ۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{4\pi}{5}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۳۲- اندازه‌ی زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۲:۲۴ چند رادیان است؟

- ۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{2\pi}{5}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

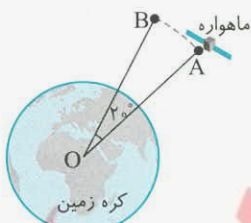
۳۳- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی θ برحسب رادیان چند است؟

- ۱) ۴ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲



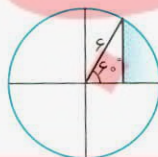
۳۴- مطابق شکل ماهواره‌ای در شعاع ۳۶۰۰۰ کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. این ماهواره چه مسافتی باید طی کند تا از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برسد؟

- ۱) 2000π (۲) 2400π (۳) 4000π (۴) 4800π



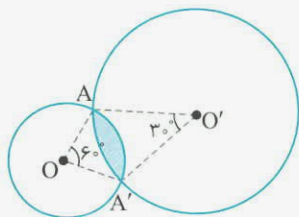
۳۵- در شکل مقابل، اندازه‌ی محیط قسمت رنگی کدام است؟

- ۱) $3(1+\sqrt{3})\pi$ (۲) $2(1+\sqrt{3})\pi$ (۳) $3(1+\sqrt{3})+2\pi$ (۴) $2(1+\sqrt{3})+3\pi$



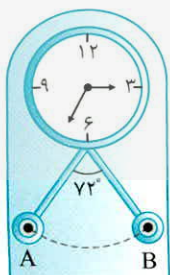
۳۶- در شکل مقابل اندازه‌ی محیط چهارضلعی OAO'A' برابر ۳۰ واحد و اندازه‌ی محیط قسمت رنگی برابر 3π است. نسبت اندازه‌ی شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر به اندازه‌ی شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام است؟

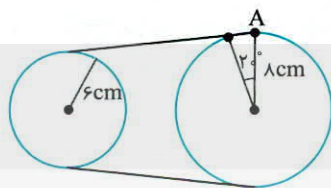
- ۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۳۷- مطابق شکل، طول پاندول یک ساعت ۲۰ سانتی‌متر است. این پاندول در هر ثانیه از A به B یا بالعکس جابه‌جا می‌شود. بین ساعت ۲:۱۰ تا ۲:۱۵ طول مسیری که نوک پاندول طی می‌کند چند سانتی‌متر است؟

- ۱) 2400π (۲) 480π (۳) 420π (۴) 400π





۳۸- در شکل مقابل اگر نقطه ی A، 2° جابه جا شود، چرخ کوچک تر چند درجه جابه جا می شود؟

$$\frac{9\pi}{27} \quad (۲)$$

$$\frac{8^\circ}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4\pi}{27} \quad (۱)$$

$$\frac{4^\circ}{3} \quad (۳)$$

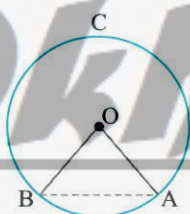
۳۹- در شکل مقابل، شعاع دایره برابر ۶ و طول کمان ACB برابر 10π است. طول وتر AB کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$4 \quad (۳)$$

$$6 \quad (۴)$$



۴۰- کدام یک از اعداد زیر بزرگ تر است؟ (زاویا بر حسب رادیان هستند.)

$$\sin 4 \quad (۴)$$

$$\sin 3 \quad (۳)$$

$$\sin 2 \quad (۲)$$

$$\sin 1 \quad (۱)$$

۴۱- کدام یک نادرست است؟ (زاویه ها بر حسب رادیان هستند.)

$$\tan 3 + \cot 3 > 0 \quad (۴)$$

$$\sin 5 \cos 5 < 0 \quad (۳)$$

$$\tan 2 + \cot 2 < 0 \quad (۲)$$

$$\sin 2 \cos 2 < 0 \quad (۱)$$

۴۲- کدام یک از نسبت های مثلثاتی زاویه ی 2 - رادیان بزرگ تر است؟

$$\text{کتانژانت} \quad (۴)$$

$$\text{تانژانت} \quad (۳)$$

$$\text{کسینوس} \quad (۲)$$

$$\text{سینوس} \quad (۱)$$

۴۳- مقادیر $\sin 4 - \cos 4$ و $\tan 4 - \cot 4$ به ترتیب چه علامتی دارند؟ (زاویه ها بر حسب رادیان هستند.)

$$(۴) \text{ منفی، مثبت}$$

$$(۳) \text{ مثبت، منفی}$$

$$(۲) \text{ منفی، منفی}$$

$$(۱) \text{ مثبت، مثبت}$$

۴۴- کدام یک از اعداد زیر کوچک تر است؟ (زاویه ها بر حسب رادیان هستند.)

$$\tan 6 \quad (۴)$$

$$\tan 5 \quad (۳)$$

$$\tan 3 \quad (۲)$$

$$\tan 2 \quad (۱)$$

خانه کتاب

فصل چهارم: مثلثات

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan \alpha$$

نکته

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

$$\sin(-\alpha)=-\sin \alpha, \quad \tan(-\alpha)=-\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos \alpha, \quad \cot(-\alpha)=-\cot \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin \alpha, \quad \tan(\pi-\alpha)=-\tan \alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot \alpha$$

نکته

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin \alpha, \quad \tan(\pi+\alpha)=\tan \alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos \alpha, \quad \cot(\pi+\alpha)=\cot \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin \alpha, \quad \tan(2k\pi+\alpha)=\tan \alpha$$

$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos \alpha, \quad \cot(2k\pi+\alpha)=\cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin \alpha, \quad \tan(2k\pi-\alpha)=-\tan \alpha$$

$$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos \alpha, \quad \cot(2k\pi-\alpha)=-\cot \alpha$$

حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

تست ۱

(۱) $3 \tan \alpha$ (۲) $\frac{3}{2} \tan \alpha$ (۳) $-\tan \alpha$ (۴) $-3 \tan \alpha$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

بنابراین

$$A = \frac{-2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha}{-3 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{-6 \sin \alpha}{-2 \cos \alpha} = 3 \tan \alpha$$

مقدار عبارت $A = \frac{1 + \cos(13\pi - \alpha)}{\sin(\delta\pi - \alpha)} \times \frac{1 + \cos(12\pi + \alpha)}{\sin(7\pi + \alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ چقدر است؟

تست ۲

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\cos(13\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(12\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\delta\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(7\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

بنابراین

$$A = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{1 + \cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{-\sin^2 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -1$$

حاصل عبارت $A = 2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 3 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 4 \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + 5 \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ کدام است؟

تست ۳

(۱) $2 \sin \alpha$ (۲) $4 \sin \alpha$ (۳) $-4 \cos \alpha$ (۴) $-2 \cos \alpha$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$$

بنابراین

$$A = 2 \cos \alpha + 3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha - 5 \cos \alpha = -4 \cos \alpha$$

اگر $a + b = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\cos(2a + b) \times \cot(a + 2b)$ کدام است؟

تست ۴

(۱) $\cos a$ (۲) $\tan^2 a$ (۳) $-\tan^2 a$ (۴) $-\cos a$

پاسخ: توجه کنید که $2a + b = a + (a + b) = a + \frac{\pi}{2}$ پس

$$\cos(2a + b) = \cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a$$

همین طور، $a + 2b = (a + b) + b = \frac{\pi}{2} + b$ پس

$$\cot(a + 2b) = \cot(\frac{\pi}{2} + b) = -\tan b$$

و چون $a + b = \frac{\pi}{2}$ پس $\tan b = \cot a$ و در نتیجه

$$\cos(2a + b) \times \cot(a + 2b) = -\sin a (-\cot a) = \cos a$$

تست ۵

اگر $a+b=\frac{\pi}{6}$ ، مقدار $\sin(3a+2b)+\sin(9a+8b)$ چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: فرض کنید

$$3a+2b=x \quad (1)$$

ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی $a+b=\frac{\pi}{6}$ را در ۶ ضرب کنیم به دست می‌آید

$$6a+6b=\pi \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم به دست می‌آید

$$9a+8b=x+\pi$$

بنابراین

$$\sin(9a+8b)=\sin(x+\pi)=-\sin x$$

در نتیجه

$$\sin(9a+8b)+\sin x=0$$

یعنی

$$\sin(9a+8b)+\sin(3a+2b)=0$$

تست ۶

اگر $\cot \alpha = -2$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم باشد، مقدار عبارت

$$A = \cos\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) + 4 \sin(9\pi - \alpha)$$

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $-\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{24}$ (۴) $-\sqrt{24}$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\sin(9\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

پس $A = 5 \sin \alpha$. از طرف دیگر

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی چهارم است، پس $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$. بنابراین $A = -\sqrt{5}$.

تست ۷

مقدار $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 33^\circ}$ چقدر است؟

- (۱) $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ (۲) $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 33^\circ = \cos(36^\circ - 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

مقدار $\frac{-\sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ + 1 - \sin 70^\circ}{\tan 40^\circ \tan 50^\circ - 1 - 2 \cos 20^\circ}$ چقدر است؟

تست ۸

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

پاسخ: چون زاویه‌های 40° و 50° متمم‌اند، پس $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$. بنابراین
 $-\sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ = -(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ) = -(\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) = -1$

به همین ترتیب، $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$ و در نتیجه
 $\tan 40^\circ \tan 50^\circ = \cot 50^\circ \tan 50^\circ = 1$

بنابراین کسر مورد نظر برابر است با

$$\frac{-1 + 1 - \sin 70^\circ}{1 - 1 - 2 \cos 20^\circ} = \frac{\sin 70^\circ}{2 \cos 20^\circ}$$

اکنون توجه کنید که زاویه‌های 70° و 20° متمم یکدیگرند، پس $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ و در نتیجه کسر مورد نظر برابر است با $\frac{1}{2}$.

حاصل $A = 3 \sin \frac{3\pi}{4} + 5 \sin \frac{5\pi}{4} + 7 \sin \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

تست ۹

- (۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sin \frac{3\pi}{4} &= \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{5\pi}{4} &= \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{7\pi}{4} &= \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

بنابراین

$$A = 3(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

اگر $\tan 125^\circ = -a$ ، مقدار $\frac{\tan 35^\circ - \cot 125^\circ}{1 - \tan 35^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

تست ۱۰

- (۱) $\frac{1+a}{2a}$ (۲) $\frac{1-a}{2a}$ (۳) $\frac{a}{1-a}$ (۴) $\frac{2}{a(1+a)}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\cot 125^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 35^\circ = -\tan(90^\circ - 125^\circ) = -\cot 125^\circ = -(-\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$$

$$\tan 35^\circ = \tan(180^\circ + 125^\circ) = \tan 125^\circ = -a$$

در نتیجه

$$\frac{\tan 35^\circ - \cot 125^\circ}{1 - \tan 35^\circ} = \frac{\frac{1}{a} - (-\frac{1}{a})}{1 - (-a)} = \frac{\frac{2}{a}}{1+a} = \frac{2}{a(1+a)}$$

تست ۱۱

حاصل $A = \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \dots + \cos^3 \frac{10\pi}{11}$ کدام است؟

- (۱) $5 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۲) $10 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ آن گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$ پس $\cos^3 \beta = -\cos^3 \alpha$ و در نتیجه

$\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta = 0$ بنابراین

$$\frac{\pi}{11} + \frac{10\pi}{11} = \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{10\pi}{11} = 0$$

$$\frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11} = \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = 0$$

⋮

$$\frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} = \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{5\pi}{11} + \cos^3 \frac{6\pi}{11} = 0$$

پس $A = 0$.

تست ۱۲

مقدار کسر $\frac{\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \dots + \sin 88^\circ}{\cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \cos 6^\circ + \dots + \cos 88^\circ}$ چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: توجه کنید که

$$\sin 2^\circ = \sin(90^\circ - 88^\circ) = \cos 88^\circ$$

$$\sin 4^\circ = \sin(90^\circ - 86^\circ) = \cos 86^\circ$$

⋮

$$\sin 88^\circ = \sin(90^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$$

بنابراین

$$\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \dots + \sin 88^\circ = \cos 88^\circ + \cos 86^\circ + \dots + \cos 2^\circ$$

پس مقدار کسر مورد نظر برابر ۱ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل چهارم

درس دوم:

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

۴۵- حاصل عبارت $A = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + 2 \tan \frac{\pi}{4} + 3 \tan \frac{\pi}{6}}{6 \cot \frac{\pi}{3} - 2 \tan \frac{\pi}{4} - 4 \cot \frac{\pi}{6}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$

۴۶- به جای x چه می‌توان گذاشت که تساوی $\cos(4x - 10^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ برقرار شود؟

- (۱) 25° (۲) 30° (۳) 40° (۴) 45°

۴۷- حاصل عبارت $A = \frac{\tan(\pi - \alpha) + 3 \tan(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) - \tan(2\pi + \alpha)}$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۸- اگر $A = 4 \tan(3\pi + \alpha) + 2 \tan(4\pi - \alpha) + 3 \tan(\delta\pi - \alpha)$ و $B = 2 \cot(3\pi - \alpha) + 3 \cot(4\pi + \alpha) + 4 \cot(\delta\pi + \alpha)$

مقدار AB کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) -۸۱ (۲) ۸۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۴۹- حاصل عبارت $A = \tan(\alpha) \cot(-\alpha) + \sin^2(-\alpha) + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $-2 \sin^2 \alpha$

۵۰- به جای x چه عددی می‌توان گذاشت تا تساوی $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$ برقرار باشد؟

- (۱) $\frac{5\pi}{12}$ (۲) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{6\pi}{5}$ (۴) صفر

۵۱- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{3 \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) - 6 \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۵۲- اگر $\sin(\frac{\pi}{2} + x) \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = \frac{1}{2}$ مقدار عبارت $A = \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۳- اگر $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ حاصل $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

۵۴- اگر $a-b=\frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\sin(b-2a)$ کدام است؟

- (۱) $-\sin a$ (۲) $-\cos a$ (۳) $\sin a$ (۴) $\cos a$

۵۵- اگر $\alpha+\beta=90^\circ$ و $a+b=180^\circ$ ، کدام گزینه حتماً درست است؟

- (۱) $\sin \alpha = -\cos \beta$ (۲) $\sin(\alpha+a) = \cos(\beta+b)$
(۳) $\cos a = \cos b$ (۴) $\tan(a-\alpha) = \cot(b-\beta)$

۵۶- اگر $a+b=\frac{3\pi}{2}$ ، حاصل عبارت $\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1}$ کدام است؟

- (۱) $\tan b$ (۲) $\cot b$ (۳) $-\cot b$ (۴) $-\tan b$

۵۷- اگر $\alpha-\beta=\frac{5\pi}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2\sin^3 \alpha - \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha - 2\sin^3 \beta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3} \cot^3 \beta$ (۲) $-\frac{1}{3} \cot^3 \beta$ (۳) $\tan^3 \alpha$ (۴) $-\frac{1}{3} \tan^3 \alpha$

۵۸- اگر $\hat{A}$ زاویه‌ای حاده باشد، $\hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{8}$ و $\cos(\hat{A} + \hat{B}) = -\frac{5}{13}$ ، مقدار $\tan \hat{A}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{11}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۵۹- اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ و $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $-\frac{5}{12}$

۶۰- اگر $\tan \alpha = 3$ و انتهای کمان نظیر زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \tan(\pi - \alpha) + \cot(2\pi - \alpha) + 2 \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)$$

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) -4 (۴) 4

۶۱- اگر $\cos(7\pi - \alpha) = \frac{1}{2}$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶۲- اگر $\sin(\pi - x) \cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) \cos(2\pi - x) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin^2(\frac{3\pi}{2} + x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$

۶۳- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم و تساوی $4 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 1$ برقرار باشد، مقدار

$$\tan(\frac{5\pi}{2} + \alpha)$$

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۶۴- کدام گزینه با $\sin 55^\circ$ برابر نیست؟

- (۱) $\cos(-35^\circ)$ (۲) $-\cos 145^\circ$ (۳) $-\sin 305^\circ$ (۴) $-\sin 215^\circ$

۶۵- حاصل عبارت $\sin(75^\circ) + \cos(192^\circ) + \tan(1215^\circ)$ چند است؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -2

۲۰۲

۸۹- حاصل $\sin^2(48^\circ - \alpha) + \sin^2(\beta - 65^\circ) + \cot(25^\circ + \beta) \cot(42^\circ + \alpha) + \sin^2(42^\circ + \alpha)$ چقدر است؟
۲ (۱)
 $\frac{1}{3}$ (۲)
۱ (۳)

۴ (۴) صفر

۹۰- مقدار $\cot 5^\circ \cot 10^\circ \cot 15^\circ \dots \cot 85^\circ \cot 90^\circ$ چقدر است؟
۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)

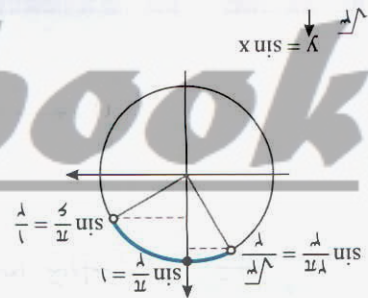
۴ (۴)

۹۱- مقدار $\sin^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{2\pi}{18} + \dots + \sin^2 \frac{8\pi}{18}$ چقدر است؟
۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)

۴ (۴)

۹۲- حاصل عبارت $A = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ$ کدام است؟
۴۵ (۱)
۴۵/۵ (۲)
۸۹ (۳)
۹۰ (۴)

خانه کتاب



$$\Rightarrow m < 3 < 5$$

$$\frac{1}{4} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 4 < m-1 \leq 4$$

با توجه به هر یک از شکل‌های مقابل می‌توان فهمید
می‌توان نوشت $\frac{1}{4} < \sin x \leq 1$ آن‌گاه $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ که اگر

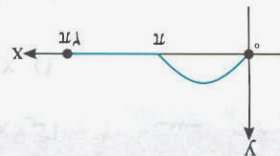
- ۴) ۳) ۲) ۱)



تست

۴

۵ باشد می‌تواند صحیح مقدار چند باشد m ، $\sin x = \frac{m-1}{4}$ و $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ اگر



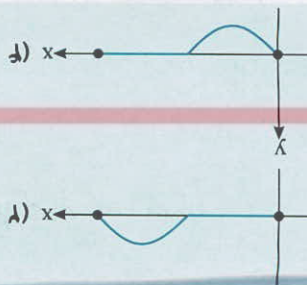
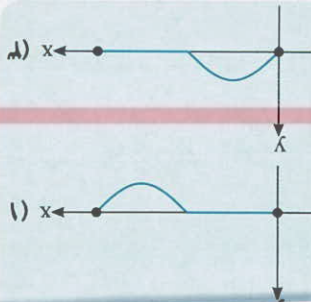
بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است

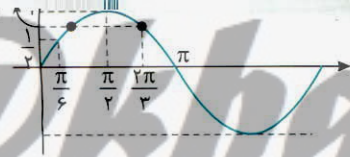
$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sin x - \sin x} = 0$$

از طرف دیگر، اگر $\pi < x \leq 3\pi$ ، در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + \sin x} = \frac{1}{2\sin x}$$

پس $\sin x \geq 0$ ، آن‌گاه $\pi \leq x \leq 2\pi$ که اگر توجه کنید:





کمترین مقدار تابع $f(x) = 3 - 5 \sin x$ کدام است؟

۵

تست



(۴) -۸

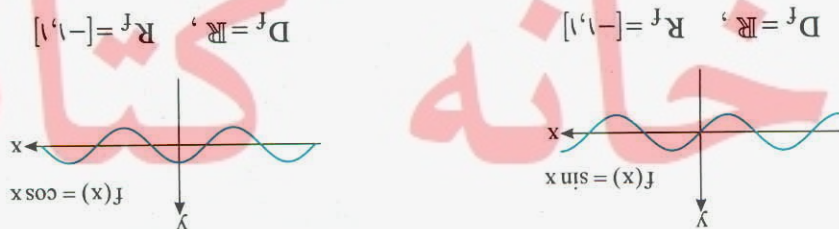
(۳) -۵

(۲) -۳

(۱) -۲

پاسخ: بیشترین مقدار عبارت $\sin x$ برابر یک است. پس کمترین مقدار تابع $f(x) = 3 - 5 \sin x$ وقتی به دست می‌آید که $\sin x = 1$ و برابر است با $3 - 5 = -2$.

$$f(x) = \cos x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad f(x) = \sin(x + \pi) = -\sin x$$



به صورت زیر است: $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ متناهی توار نمودار و نموده، برد دامنه.

درس سوم: توابع مثلثاتی

فصل چهارم: مثلثات

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس سوم:
توابع مثلثاتی

فصل چهارم

۹۳- اگر $f(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x - \cos x$ ، ضابطه‌ی تابع f کدام است؟

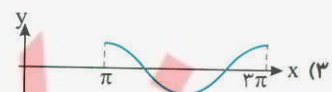
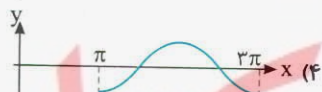
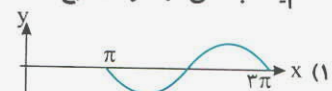
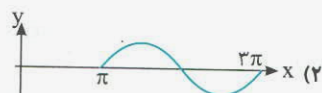
- (۱) $\cos x - \sin x$ (۲) $\sin x - \cos x$ (۳) $\sin x + \cos x$ (۴) صفر

۹۴- نمودار تابع $f(x) = a \sin x + b$ از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{2}, 2)$ عبور می‌کند و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{4}$ قطع می‌کند. مقدار ab کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{2} + 16$ (۲) $-12\sqrt{2}$ (۳) $-12\sqrt{2} - 16$ (۴) $12\sqrt{2}$

۹۵- اگر بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = a^2 \sin 2x + b$ برابر یک و کم‌ترین مقدار آن برابر -7 باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -1 (۳) ۳ (۴) -3

۹۶- کدام یک بخشی از نمودار تابع $y = \sin x$ است؟۹۷- کدام یک بخشی از نمودار تابع $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ است؟۹۸- کدام یک بخشی از نمودار تابع $y = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$ است؟۹۹- نمودار تابع f را $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت پایین منتقل کرده‌ایم تا به تابع $y = \frac{1}{2} \sin x$ رسیده‌ایم. ضابطه‌ی تابع f کدام است؟

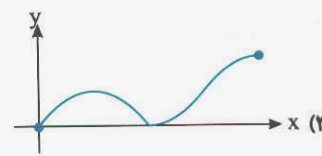
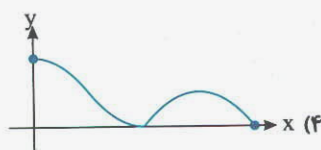
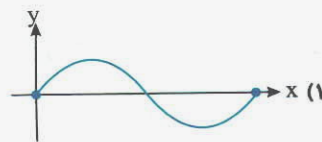
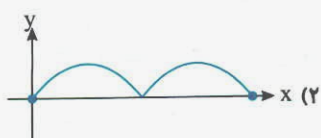
- (۱) $1 + \frac{1}{2} \cos x$ (۲) $-\frac{1}{2} \cos x + 1$ (۳) $\frac{1}{2} \cos x - 1$ (۴) $-\frac{1}{2} \cos x - 1$

۱۰۰- حداکثر و حداقل مقدار تابع زیر در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

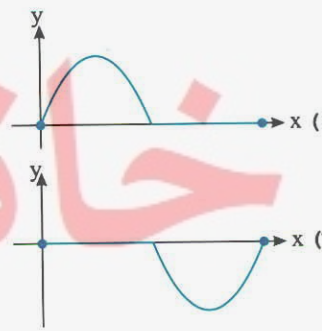
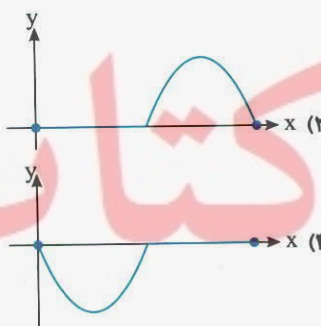
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \\ \sin x & \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

(۱) ۱ و -۱ (۲) ۱ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و -۱ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و -۱

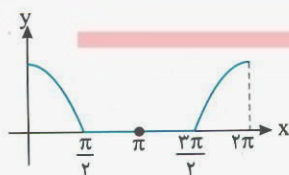
۱۰۱- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \pi \\ 1 + \cos x & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ کدام است؟



۱۰۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x - |\sin x|}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



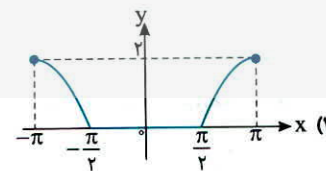
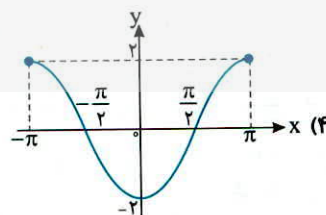
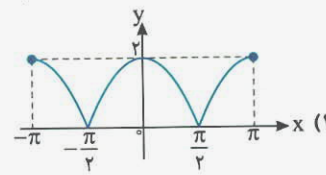
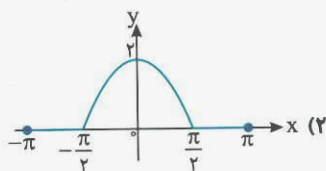
۱۰۳- نمودار روبه‌رو نمودار چه تابعی می‌تواند باشد؟

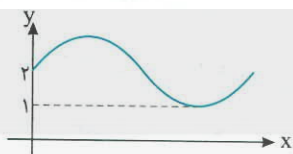


(۲) $\frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)$
(۴) $\frac{1}{2}(|\sin x| - \sin x)$

(۱) $\frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|)$
(۳) $\frac{1}{2}(|\cos x| - \cos x)$

۱۰۴- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\cos|x| + |\cos x|}{2}$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟





۱۰۵- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = (a+b)\sin x + 2a - b$ به شکل مقابل است. بیشترین مقدار

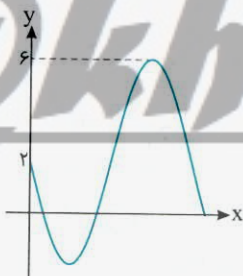
تابع چقدر است؟

۳ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

۴ (۴)

$\frac{7}{2}$ (۳)



۱۰۶- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 2b \sin x$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟

-۴ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳)

-۲ (۴)

۱۰۷- اگر $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\sin x = \frac{m+1}{2m}$ ، حدود m کدام است؟

$m < -\frac{1}{2}$ (۴)

$m > -\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$ (۲)

$m > \frac{1}{2}$ (۱)

۱۰۸- اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{m^2 - 2m}{8}$ ، کدام یک صحیح است؟

$3 \leq |m-1| \leq 4$ (۴)

$0 \leq |m-1| \leq 3$ (۳)

$\sqrt{5} < |m-1| \leq 3$ (۲)

$0 \leq |m-1| \leq 4$ (۱)

۱۰۹- اگر $0 < A < \frac{\pi}{3}$ و $\cos A = \frac{m+1}{m-1}$ ، حدود m کدام است؟

$m \in (-3, -1)$ (۴)

$m > -3$ (۳)

$m \in (-\infty, -3)$ (۲)

$m < 1$ (۱)

۱۱۰- مجموع کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = -3 \sin x - 2$ کدام است؟

-۶ (۴)

-۵ (۳)

-۴ (۲)

-۳ (۱)

۱۱۱- برد تابع $f(x) = 7 - 2 \sin x$ کدام است؟

$[-1, 5]$ (۴)

$[2, 5]$ (۳)

$[5, 9]$ (۲)

$[3, 9]$ (۱)

۱۱۲- برد تابع $f(x) = 3 - 5 \cos^2 x$ کدام است؟

$[-3, 8]$ (۴)

$[-2, 8]$ (۳)

$[-8, 8]$ (۲)

$[-5, 5]$ (۱)

۱۱۳- برد تابع $f(x) = 2 \sin^2 x - 3$ کدام است؟

$[-3, 2]$ (۴)

$[-2, 2]$ (۳)

$[-5, -1]$ (۲)

$[-3, -1]$ (۱)

۱۱۴- اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = a - b^2 |\cos x|$ به ترتیب برابر ۳ و -۴ باشند، مقدار $f(\frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

صفر (۴)

-۲ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

۱۱۵- برد تابع $f(x) = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x$ کدام است؟

$[0, 5]$ (۴)

$[3, 5]$ (۳)

$[0, 8]$ (۲)

$[3, 8]$ (۱)

۱۱۶- برد تابع $f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x$ کدام است؟

$[-2, 2]$ (۴)

$[-1, 3]$ (۳)

$[-3, 1]$ (۲)

$[-1, 1]$ (۱)

۱۱۷- برد تابع $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ بازه‌ی $[a, b]$ است. $a+b$ کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۱۱۸- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ کدام است؟

(۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

(۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

۱۱۹- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - \{2k\pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(۳) $\mathbb{R} - \{k\pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(۴) $\mathbb{R} - \{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۱۲۰- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\sin x}$ کدام است؟

(۱) $\{x \mid (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi\}$

(۲) $\{x \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi\}$

(۳) $\{x \mid 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi\}$

(۴) $\{x \mid (2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi\}$

۱۲۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1 - \cos x}}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}^+$

(۲) $\mathbb{R}^+ - \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(۳) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

(۴) $\mathbb{R} - \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۱۲۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|\cos x| - 1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۲

۱۲۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۱۷۹

خانه کتاب

فصل چهارم

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای

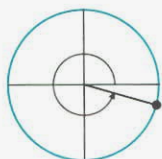
مثلثات



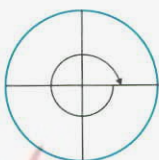
۱- گزینه‌ی ۴ در تساوی $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=75$: در نتیجه اندازه‌ی زاویه‌های مثلث به صورت $\frac{4\pi}{10}$ ، $\frac{3\pi}{10}$ و $\frac{3\pi}{10}$ هستند. بنابراین نسبت زاویه‌ها به صورت ۳، ۳ و ۴ است.

$$\frac{75}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{12}$$

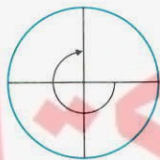
۶- گزینه‌ی ۴ نمایش درست زاویه‌ی ۶ رادیان به شکل زیر است.



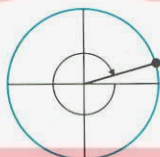
۷- گزینه‌ی ۱ با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ۶- رادیان در ناحیه‌ی اول قرار دارد.



رادیان $(-6) = (-2\pi)$ رادیان



رادیان $(-\frac{4}{7}) = (-\frac{3\pi}{2})$ رادیان



رادیان (-6)

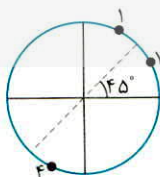
۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا به تساوی‌های زیر توجه کنید:

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \approx 0.785$$

$$225^\circ = \frac{5\pi}{4} \text{ رادیان} \approx 3.927$$

$$405^\circ = \frac{9\pi}{4} \text{ رادیان} \approx 7.069$$

پس نمایش درست انتهای کمان مربوط به زاویه‌های ۱، ۴ و ۷ رادیان به شکل زیر است:



۲- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که 18° برابر با $\frac{\pi}{10}$ رادیان است.

بنابراین اندازه‌ی زاویه‌ی سوم مثلث برابر است با

$$\pi - (\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{10}) = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

که این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

۳- گزینه‌ی ۴ اگر اندازه‌ی زاویه برحسب درجه برابر D

و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه

$$D \times R = 5\pi \Rightarrow R = \frac{5\pi}{D}$$

از طرف دیگر، $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ، بنابراین

$$\frac{D}{180} = \frac{5\pi}{D \pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{5}{D} \Rightarrow D^2 = 900 \Rightarrow D = 30^\circ$$

بنابراین اندازه‌ی این زاویه برحسب درجه برابر 30° است.

۴- گزینه‌ی ۲ فرض می‌کنیم اندازه‌ی زاویه برحسب

درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین

$$R = \frac{\pi}{180} D - \frac{5\pi}{18}$$

از طرف دیگر، $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{D}{180} &= \frac{\frac{\pi}{180} D - \frac{5\pi}{18}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{180} D - \frac{5 \times 180}{18} \\ &\Rightarrow \frac{5}{4} D = 50 \Rightarrow D = 40^\circ \end{aligned}$$

۵- گزینه‌ی ۳ زاویه‌ها را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{72^\circ}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \pi \frac{72}{180} = \frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه اندازه‌ی سومین زاویه‌ی مثلث برابر است با

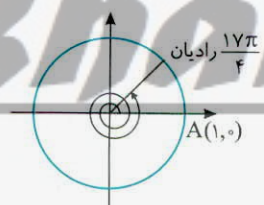
$$\pi - (\frac{2\pi}{5}) - (\frac{3\pi}{10}) = \frac{3\pi}{10}$$

۱۳- گزینه ۱ زاویه $\frac{17\pi}{4}$ را می‌توانیم به صورت

$4\pi + \frac{\pi}{4}$ بنویسیم. با توجه به این که انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی

که مضرب زوج π هستند، در نقطه‌ی $A(1,0)$ است، انتهای

کمان نظیر زاویه‌ی $\frac{17\pi}{4}$ در ناحیه‌ی اول قرار می‌گیرد.

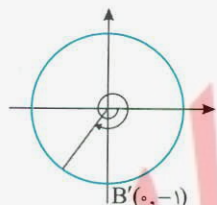


۱۴- گزینه ۳ زاویه $-\frac{27\pi}{10}$ رادیان را به شکل

$-\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ رادیان می‌نویسیم. با توجه به این که انتهای کمان

نظیر زاویه‌ی $-\frac{5\pi}{2}$ رادیان در نقطه‌ی $B'(0,-1)$ قرار دارد،

انتهای کمان نظیر زاویه‌ی $-\frac{27\pi}{10}$ در ناحیه‌ی سوم قرار دارد.



۱۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$-\frac{53\pi}{3} = -18\pi + \frac{\pi}{3} = (-9) \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

بنابراین انتهای زاویه‌ی موردنظر بر انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی 60° منطبق است.

۱۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $5\pi \approx 15.7$ و انتهای

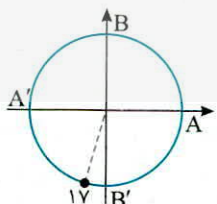
کمان نظیر زاویه‌ی 5π رادیان در نقطه‌ی $A'(-1,0)$ قرار

دارد. از طرفی برای این که از نقطه‌ی A' به نقطه‌ی B'

برسیم، باید $\frac{\pi}{5} \approx 0.628$ رادیان دیگر جلو برویم. ولی می‌دانیم

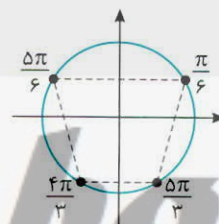
$\frac{\pi}{3} < 1.7 - 5\pi \approx 1.7$. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی 17

رادیان در ربع سوم قرار دارد.



۹- گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل

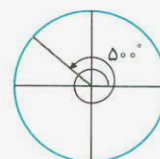
ذوزنقه است.



۱۰- گزینه ۲ 50° را می‌توان 5° تا 90° به علاوه‌ی 5°

در نظر گرفت. 5° تا 90° یعنی 5° تا ربع دایره. پس انتهای کمان

روبه‌رو به زاویه‌ی 50° در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.



۱۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$560^\circ = 540^\circ + 20^\circ = 3 \times 180^\circ + 20^\circ$$

$$-520^\circ = -540^\circ + 20^\circ = -3 \times 180^\circ + 20^\circ$$

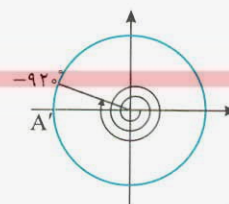
$$930^\circ = 900^\circ + 30^\circ = 5 \times 180^\circ + 30^\circ$$

$$-920^\circ = -900^\circ - 20^\circ = -5 \times 180^\circ - 20^\circ$$

با توجه به این که انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌هایی که مضرب

فردی از 180° هستند در نقطه‌ی $A'(-1,0)$ قرار دارند، انتهای

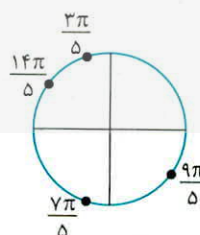
کمان نظیر زاویه‌ی 920° در ناحیه‌ی دوم قرار می‌گیرد.



۱۲- گزینه ۲ انتهای کمان نظیر هر یک از زاویه‌های داده

شده در شکل زیر مشخص شده است. توجه کنید که

$$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$$



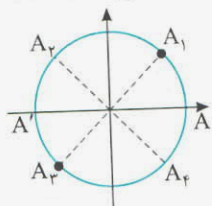
۲۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی که به شکل $k\pi$ هستند در نقاط A و A' قرار دارد. اگر این نقاط را $\frac{\pi}{4}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی جابه‌جا کنیم، بر

نقاط A_1 و A_3 منطبق می‌شوند $(k\pi + \frac{\pi}{4})$ و اگر در جهت

منفی به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ رادیان جابه‌جا کنیم، بر نقاط A_2 و A_4 منطبق می‌شوند $(k\pi - \frac{\pi}{4})$.

پس نقاط A_1, A_2, A_3, A_4 انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی

به شکل $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ را نشان می‌دهند.



۲۴- گزینه‌ی ۳ با قرار دادن $k=0, 1, 2, \dots, 7$ و

زاویه‌های صفر رادیان، $\frac{\pi}{4}$ رادیان، $\dots$ و $\frac{7\pi}{4}$ رادیان به‌دست می‌آید که انتهای کمان نظیر این زاویه‌ها در گزینه‌ی (۳) نشان داده شده است.

۲۵- گزینه‌ی ۲ زاویه‌ی α به شکل $\alpha = (2k-1)\frac{\pi}{6}$ است

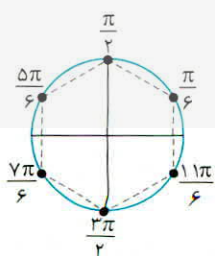
که در واقع مضارب فرد $\frac{\pi}{6}$ هستند. مقادیری از α که نقطه‌ی انتهایی کمان روبه‌رو به آن‌ها متمایز هستند، در جدول زیر آمده است:

k	۱	۲	۳	۴	۵	۶
α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$

توجه کنید که به ازای $k=7$ زاویه‌ی $\alpha = \frac{13\pi}{6}$ به‌دست

می‌آید که انتهای کمان آن بر انتهای کمان $\frac{\pi}{6}$ منطبق است.

مطابق شکل زیر، یک شش‌ضلعی منتظم از وصل کردن متوالی این نقاط به‌دست می‌آید.



۱۷- گزینه‌ی ۴ چون 2π رادیان معادل 360° است، پس

ابتدا 225° را بر 36° تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 225^\circ : 36^\circ \\ \underline{6 \times 36^\circ} \\ 216^\circ \\ \underline{6 \times 36^\circ} \\ 9^\circ \end{array}$$

بنابراین

$$225^\circ = 9^\circ + 6 \times 36^\circ$$

در نتیجه 225° معادل $\frac{\pi}{4} + 6 \times 2\pi$ رادیان است، پس

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا 330° را بر 36° تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 330^\circ : 36^\circ \\ \underline{9 \times 36^\circ} \\ 324^\circ \\ \underline{9 \times 36^\circ} \\ 6^\circ \end{array}$$

بنابراین

$$330^\circ = 6^\circ + 9 \times 36^\circ$$

در نتیجه

$$\alpha = 6^\circ$$

۱۹- گزینه‌ی ۱

۲۰- گزینه‌ی ۲ انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی که مضرب

زوجی از π هستند در نقطه‌ی A و زاویه‌هایی که مضرب

فردی از π هستند در نقطه‌ی A' قرار دارد.

۲۱- گزینه‌ی ۲ اگر k عددی زوج باشد، انتهای کمان نظیر

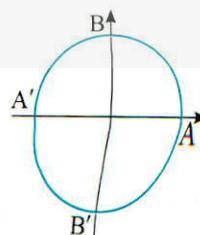
زاویه‌ی $k\pi + \frac{\pi}{4}$ در نقطه‌ی B و اگر k عددی فرد باشد، در

نقطه‌ی B' قرار می‌گیرد.

۲۲- گزینه‌ی ۳ اگر k را صفر، ۱، ۲ و ۳ فرض کنیم، انتهای

کمان روبه‌رو به زاویه‌ی $\frac{k\pi}{4}$ به‌ترتیب در نقاط A, B, A', B'

و B' قرار می‌گیرد.



بنابراین

$$A = 4 \tan \alpha - 2 \tan \alpha - 3 \tan \alpha = -\tan \alpha$$

$$B = -2 \cot \alpha + 3 \cot \alpha + 4 \cot \alpha = 5 \cot \alpha$$

در نتیجه $(\tan \alpha \times \cot \alpha = 1)$ $AB = -5$

گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

بنابراین

$$A = -\tan \alpha \cot \alpha + (-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha$$

$$= -\tan \alpha \cdot \cot \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -1 + 1 = 0$$

گزینه ۱ اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ آن گاه $\sin \alpha = \cos \beta$ اکنون مقدار x را طوری پیدا می‌کنیم که

$$x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین $x = \frac{5\pi}{12}$ به سادگی معلوم می‌شود که گزینه‌های دیگر

در تساوی مورد نظر صدق نمی‌کنند.

گزینه ۲ با توجه به تساوی‌های $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ و

$$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$$
 می‌توان نوشت

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cot\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین

$$A = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

گزینه ۱ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$= (\cos x)(-\sin x) = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2}$$

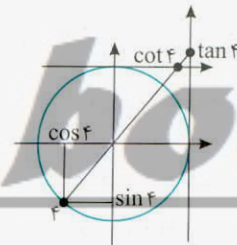
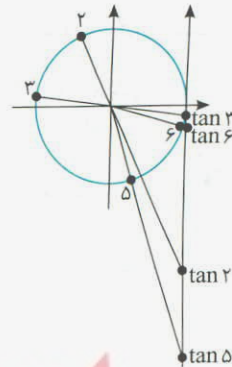
$$\sin x \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$A = \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) = -\sin x - \cos x$$

$$A^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

بنابراین $A = 0$ گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\frac{5\pi}{4} \approx 3.9 < 4$ و

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4}, \quad \tan \frac{5\pi}{4} = \cot \frac{5\pi}{4}$$

با توجه به شکل $\sin 4 < \cos 4$ و $\cot 4 < \tan 4$ بنابراین $\tan 4 - \cot 4 > 0$ و $\sin 4 - \cos 4 < 0$.گزینه ۳ با توجه به شکل زیر $\tan 5$ کوچک‌تر از اعداد دیگر است.

گزینه ۲

$$A = \frac{\sqrt{3} + 2 \times 1 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \times 1 - 4\sqrt{3}} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2 - 2\sqrt{3}} = -1$$

گزینه ۳ می‌دانیم $\cos 15^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ در نتیجهکافی است به جای x ، 40° را قرار دهیم. به سادگی می‌توان دید سایر گزینه‌ها برای تساوی مناسب نیستند.

گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

بنابراین

$$A = \frac{-\tan \alpha + 3 \tan \alpha}{-\tan \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{-2 \tan \alpha} = -1$$

گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \tan(k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

بنابراین

۵۳- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\sin \hat{A} = \frac{5}{13}$$

پس

$$\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A} = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= \frac{13^2 - 5^2}{13^2} = \frac{144}{13^2} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

و چون $\hat{A}$ حاده است، پس $\cos \hat{A} = \frac{12}{13}$ و در نتیجه

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

۵۹- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

در نتیجه از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

اکنون توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{169}{144} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{144}$$

چون α در ناحیه‌ی اول قرار دارد، پس $\tan \alpha > 0$. بنابراین

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

۶۰- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = -\tan \alpha - \cot \alpha - 2 \cot \alpha$$

$$= -\tan \alpha - 3 \cot \alpha$$

چون $\tan \alpha = 3$ ، پس

$$\cot \alpha = \frac{1}{3}$$

و در نتیجه

$$A = -3 - 3\left(\frac{1}{3}\right) = -4$$

۶۱- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\cos(7\pi - \alpha) = \cos(6\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

در نتیجه $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ و $\sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}$ چونپس $\sin \alpha < 0$ ، $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ و در نتیجه

$$\sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

در نتیجه

$$\sin x = -2 \cos x \Rightarrow \tan x = -2$$

۵۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sin(b - 2a) = \sin((b - a) - a) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$$= \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cos a$$

۵۵- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$a + b - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

بنابراین $(a - \alpha) + (b - \beta) = 90^\circ$ و در نتیجه

$$\tan(a - \alpha) = \cot(b - \beta)$$

۵۶- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\sin a = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - b\right) = -\cos b$$

$$\tan a = \tan\left(\frac{3\pi}{2} - b\right) = \cot b$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1} &= \frac{-\cos b + \cot b \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \sin^2 a + 1} \\ &= \frac{-\cos b + 1 - 1}{\sin b - 1 + 1} = \frac{-\cos b}{\sin b} \\ &= -\cot b \end{aligned}$$

۵۷- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $\alpha = \frac{5\pi}{2} + \beta$ و در نتیجه

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right) = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \beta\right) = -\sin \beta$$

بنابراین

$$A = \frac{2 \cos^3 \beta - \cos^3 \beta}{-\sin^3 \beta - 2 \sin^3 \beta} = \frac{\cos^3 \beta}{-3 \sin^3 \beta} = -\frac{1}{3} \cot^3 \beta$$

۵۸- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos(\hat{A} + \hat{A} + \hat{B})$$

$$= \cos(\hat{A} + 2(\hat{A} + \hat{B}))$$

$$= \cos\left(\hat{A} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\hat{A} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \hat{A}$$

۶۲- گزینه‌ی ۱ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(2\pi - x) = \frac{1}{3}$$

$$\sin x (-\sin x) + \cos x \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 x = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

۶۳- گزینه‌ی ۴ طرفین تساوی داده شده را بر $\sin^2 \alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$4 - \cot^2 \alpha + \cot \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$2 \cot^2 \alpha - \cot \alpha - 3 = 0$$

$$\cot \alpha = -1 \text{ یا } \cot \alpha = \frac{3}{2}$$

با توجه به این که انتهای کمان نظیر زاویه‌ی α در ناحیه‌ی سوم قرار دارد، پس

$$\cot \alpha = \frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{2}$$

۶۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\cos(-35^\circ) = \cos 35^\circ = \sin 55^\circ$$

$$-\cos(145^\circ) = -\cos(90^\circ + 55^\circ) = -(-\sin 55^\circ) = \sin 55^\circ$$

$$-\sin 305^\circ = -\sin(360^\circ - 55^\circ) = -\sin(-55^\circ) = \sin 55^\circ$$

$$-\sin 215^\circ = -\sin(180^\circ + 35^\circ) = \sin 35^\circ \neq \sin 55^\circ$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) با $\sin 55^\circ$ برابر نیست.

۶۵- گزینه‌ی ۱ حاصل هر جمله را حساب می‌کنیم:

$$\sin(75^\circ) = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(192^\circ) = \cos(5 \times 36^\circ + 12^\circ) = \cos 12^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(1215^\circ) = \tan(3 \times 36^\circ + 135^\circ) = \tan 135^\circ = -1$$

بنابراین حاصل عبارت موردنظر برابر -1 است.

۶۶- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\sin 41^\circ = \sin(36^\circ + 5^\circ) = \sin 5^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin(36^\circ + 4^\circ) = \sin 4^\circ$$

از طرف دیگر،

$$\sin 5^\circ = \sin(9^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ$$

بنابراین

$$\sin^2 41^\circ + \sin^2 40^\circ = \cos^2 4^\circ + \sin^2 4^\circ = 1$$

همچنین

$$\tan 731^\circ = \tan(2 \times 36^\circ + 11^\circ) = \tan 11^\circ$$

$$\cot 1069^\circ = \cot(2 \times 36^\circ + 349^\circ) = \cot 349^\circ$$

از طرف دیگر،

$$\tan 11^\circ = \tan(36^\circ - 349^\circ) = -\tan 349^\circ$$

بنابراین

$$\tan 731^\circ \times \cot 1069^\circ = -\tan 349^\circ \times \cot 349^\circ = -1$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با $-\frac{1}{-1} = 1$.

۶۷- گزینه‌ی ۳ چون $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$ ، پس

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$$

همچنین

$$\cos 795^\circ = \cos(2 \times 36^\circ + 75^\circ) = \cos 75^\circ$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos 75^\circ + \cos 75^\circ + 1}{6 \cos 75^\circ + 3} = \frac{2 \cos 75^\circ + 1}{3(2 \cos 75^\circ + 1)} = \frac{1}{3}$$

۶۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید

$$5\alpha + 3\alpha = \frac{5\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$

$$2\alpha + 6\alpha = \frac{2\pi}{16} + \frac{6\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین 5α و 3α متمم یکدیگرند، و در نتیجه

$$\sin 5\alpha = \cos 3\alpha$$

همین‌طور، 2α و 6α متمم یکدیگرند، در نتیجه

$$\tan 2\alpha = \cot 6\alpha$$

بنابراین

$$\frac{\sin 5\alpha \tan 2\alpha}{\cot 6\alpha \cos 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha \cot 6\alpha}{\cot 6\alpha \cos 3\alpha} = 1$$

۶۹- گزینه‌ی ۳ چون

$$(32^\circ - x) + (58^\circ + x) = 90^\circ$$

پس

$$\sin(32^\circ - x) = \cos(58^\circ + x)$$

و در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر صفر است.



۸۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$ ، بنابراین

$$\tan \frac{\pi}{8} = \cot \frac{11\pi}{8}$$

همچنین $\frac{13\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین

$$\sin \frac{13\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\cot \frac{11\pi}{8} \tan \frac{11\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} = 1 + 1 = 2$$

۸۹- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$65^\circ - \beta + 25^\circ + \beta = 90^\circ, \quad 42^\circ + \alpha + 48^\circ - \alpha = 90^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sin^2(42^\circ + \alpha) + \sin^2(48^\circ - \alpha) \\ = \sin^2(42^\circ + \alpha) + \cos^2(42^\circ + \alpha) = 1 \end{aligned}$$

$$\cot(25^\circ + \beta) \cot(\beta - 65^\circ)$$

$$= -\cot(25^\circ + \beta) \cot(65^\circ - \beta)$$

$$= -\cot(25^\circ + \beta) \tan(25^\circ + \beta) = -1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر صفر است.

۹۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$5^\circ + 85^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 5^\circ = \tan 85^\circ$$

$$1^\circ + 89^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 1^\circ = \tan 89^\circ$$

⋮

$$4^\circ + 86^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 4^\circ = \tan 86^\circ$$

بنابراین

$$\cot 5^\circ \cot 1^\circ \cdots \cot 8^\circ \cot 85^\circ$$

$$= \tan 85^\circ \tan 89^\circ \cdots \tan 86^\circ \cot 45^\circ$$

$$\cot 5^\circ \cdots \cot 8^\circ \cot 85^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

۹۱- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{18} + \frac{8\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{18} = \cos \frac{8\pi}{18}$$

$$\frac{2\pi}{18} + \frac{7\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{18} = \cos \frac{7\pi}{18}$$

$$\frac{3\pi}{18} + \frac{6\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{18} = \cos \frac{6\pi}{18}$$

$$\frac{4\pi}{18} + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{18} = \cos \frac{5\pi}{18}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

۸۴- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن گاه

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}} = 1 \end{aligned}$$

۸۵- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$2^\circ + 178^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 2^\circ = -\cos 178^\circ$$

$$4^\circ + 176^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 4^\circ = -\cos 176^\circ$$

⋮

$$88^\circ + 92^\circ = 180^\circ \Rightarrow \cos 88^\circ = -\cos 92^\circ$$

بنابراین

$$\cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \cdots + \cos 88^\circ + \cos 90^\circ + \cos 92^\circ$$

$$+ \cdots + \cos 176^\circ + \cos 178^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= -\cos 178^\circ - \cos 176^\circ - \cdots - \cos 92^\circ + \cos 90^\circ$$

$$+ \cos 92^\circ + \cdots + \cos 176^\circ + \cos 178^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1$$

۸۶- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ ،

آن گاه $\sin \beta = \sin \alpha$ ، بنابراین

$$\sin 179^\circ = \sin 1^\circ, \quad \sin 178^\circ = \sin 2^\circ$$

$$\dots, \quad \sin 92^\circ = \sin 88^\circ, \quad \sin 91^\circ = \sin 89^\circ$$

بنابراین صورت و مخرج کسر A با هم برابرند و در نتیجه

$$A = 1$$

۸۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن گاه

$\tan \beta = -\tan \alpha$ و در نتیجه $\tan \alpha + \tan \beta = 0$ ، بنابراین

$$\frac{\pi}{9} + \frac{8\pi}{9} = \pi \Rightarrow \tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{8\pi}{9} = 0$$

$$\frac{2\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} = \pi \Rightarrow \tan \frac{2\pi}{9} + \tan \frac{7\pi}{9} = 0$$

۹۵- گزینه‌ی ۲ بیش‌ترین مقدار تابع وقتی $\sin 2x = 1$

به‌دست می‌آید که برابر است با $a^2 + b$ و کم‌ترین مقدار تابع وقتی به‌دست می‌آید که $\sin 2x = -1$ و برابر است با $-a^2 + b$ بنابراین

$$\begin{cases} a^2 + b = 1 \\ -a^2 + b = -7 \end{cases} \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow b = -3$$

$$a^2 - 3 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$$

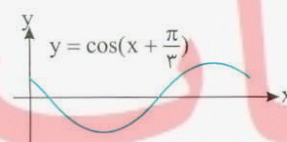
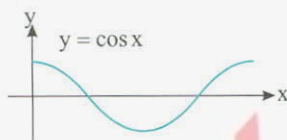
بنابراین

$$f(x) = 4 \sin 2x - 3 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{6} - 3 = -1$$

۹۶- گزینه‌ی ۱

۹۷- گزینه‌ی ۴ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم،

سپس نمودار را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ به سمت چپ انتقال می‌دهیم.



۹۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم کرده، سپس این نمودار را به

اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم، اگر نمودار به‌دست

آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

۹۲- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $\sin^2 18^\circ = 0$ ، همچنین

$$\sin^2 179^\circ = \sin^2(180^\circ - 1^\circ) = \sin^2 1^\circ$$

$$\sin^2 178^\circ = \sin^2(180^\circ - 2^\circ) = \sin^2 2^\circ$$

:

$$\sin^2 91^\circ = \sin^2(180^\circ - 89^\circ) = \sin^2 89^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ) + \sin^2 90^\circ$$

از طرف دیگر $\sin^2 90^\circ = 1$ و همچنین

$$\sin^2 89^\circ = \cos^2 1^\circ, \quad \sin^2 88^\circ = \cos^2 2^\circ$$

$$\dots, \quad \sin^2 46^\circ = \cos^2 44^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots$$

$$+ \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ) + 1$$

$$= 2\left(\underbrace{1+1+\dots+1}_{64} + \frac{1}{2}\right) + 1 = 90$$

۹۳- گزینه‌ی ۳ در تساوی $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x - \cos x$ به

جای x قرار می‌دهیم $x + \frac{\pi}{2}$ ، در نتیجه

$$f\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos x + \sin x$$

۹۴- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع از نقاط $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ عبور

می‌کند. بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow a \sin \frac{\pi}{4} + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a \sin \frac{\pi}{2} + b = 0 \Rightarrow a \frac{\sqrt{2}}{2} + b = 0$$

بنابراین

$$\begin{cases} b = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2 \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a = 2$$

$$\frac{4}{1 - \sqrt{2}} = 2(2 + \sqrt{2})$$

$$\frac{4}{1 - \sqrt{2}} = -12\sqrt{2} - 16 \quad \frac{4}{1 + \sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 16$$

نمودار تابع زیر است:

$$y = \frac{1}{2} (\cos x + |\cos x|)$$

۱۰۴- گزینه ۲ چون $\cos(-x) = \cos x$ پس

$$\cos|x| = \cos x$$

اگر $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ، آن وقت $\cos x < 0$ و در نتیجه

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos x}{2} = 0$$

اگر $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، آن وقت $\cos x \geq 0$ و در نتیجه

$$f(x) = \frac{\cos x + \cos x}{2} = \cos x$$

اگر $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ ، آن وقت $\cos x < 0$ و در نتیجه

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos x}{2} = 0$$

نمودار تابع f در گزینه ۲ رسم شده است.

۱۰۵- گزینه ۲ با توجه به شکل $f(0) = 2$ و کمترین مقدار

تابع برابر ۱ است که به ازای $\sin x = -1$ به دست می آید. بنابراین

$$f(0) = 2a - b = 2$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow f(x) = -a - b + 2a - b = 1$$

$$\Rightarrow a - 2b = 1$$

از حل دستگاه $\begin{cases} 2a - b = 2 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$ نتیجه می شود $a = 1$ و $b = 0$.

بنابراین $f(x) = \sin x + 2$ که بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است.

۱۰۶- گزینه ۲ نمودار تابع از نقطه $(0, 2)$ عبور می کند.

یعنی $f(0) = 2$ ، بنابراین

$$f(0) = a - 2b \sin 0 = a \Rightarrow a = 2$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = 2 - 2b \sin x$ است.

بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x = 1$ به دست

می آید یا به ازای $\sin x = -1$ (بستگی به علامت b دارد).

اگر $b > 0$ آن گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x = -1$

به دست می آید که برابر است با $2 + 2b$ ، بنابراین

$$2 + 2b = 6 \Rightarrow b = 2$$

و در نتیجه

$$f(x) = 2 - 4 \sin x$$

اگر $b < 0$ آن گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x = 1$

به دست می آید که برابر است با $2 - 2b$ ، بنابراین

$$2 - 2b = 6 \Rightarrow b = -2$$

۹۹- گزینه ۱ از فرض مسئله معلوم می شود که

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2} \sin x$$

یک واحد
به پایین
به راست

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin x + 1$$

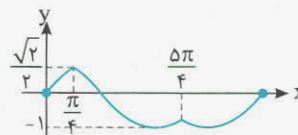
اگر به جای x قرار دهیم $x + \frac{\pi}{2}$ ، به دست می آید

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cos x + 1$$

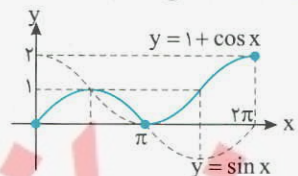
۱۰۰- گزینه ۴ از ضابطه‌ی تابع معلوم می شود که نمودار

آن به شکل زیر است. بنابراین حداکثر و حداقل مقدار f

به ترتیب $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و -1 است.



۱۰۱- گزینه ۳ نمودار تابع به شکل زیر رسم می شود:

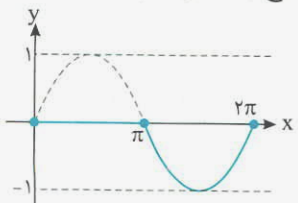


۱۰۲- گزینه ۳ ضابطه‌ی تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin x}{2} & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\sin x + \sin x}{2} & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر خواهد بود:



۱۰۳- گزینه ۲ دقت کنید که

$$\frac{1}{2} (\cos x + |\cos x|) = \begin{cases} \cos x & \cos x \geq 0 \\ 0 & \cos x < 0 \end{cases}$$

چون $\cos x$ در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ نامنفی و در

بازه‌ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ نامثبت است، پس نمودار داده شده،

۱۰۹- گزینه‌ی ۲ از این که $A \in (0, \frac{\pi}{3})$ نتیجه می‌شود

$$\cos \frac{\pi}{3} < \cos A < \cos 0$$

بنابراین $1 < \cos A < \frac{1}{2}$. در نتیجه باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\frac{1}{2} < \frac{m+1}{m-1} < 1$$

می‌توان نامعادله‌ی فوق را به شکل زیر درآورد:

$$\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{m-1} - 1\right) < 0 \Rightarrow \frac{(m+3)}{(m-1)^2} < 0$$

در نتیجه، جواب نامعادله به شکل $(-\infty, -3)$ است.

۱۱۰- گزینه‌ی ۲ چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$-3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq -3 \sin x - 2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq f(x) \leq 1$$

پس بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار آن برابر -۵ است که مجموع آن‌ها -۴ است.

۱۱۱- گزینه‌ی ۲ چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$-2 \leq -2 \sin x \leq 2 \Rightarrow 5 \leq 7 - 2 \sin x \leq 9 \Rightarrow 5 \leq f(x) \leq 9$$

پس برد تابع بازه‌ی $[5, 9]$ است.

۱۱۲- گزینه‌ی ۳ چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \cos^3 x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq -5 \cos^3 x \leq 5$$

$$\Rightarrow -2 \leq 3 - 5 \cos^3 x \leq 8$$

$$\Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 8$$

پس برد تابع بازه‌ی $[-2, 8]$ است.

۱۱۳- گزینه‌ی ۱ چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin^4 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \sin^4 x \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq 2 \sin^4 x - 3 \leq -1$$

$$\Rightarrow -3 \leq f(x) \leq -1$$

پس برد تابع بازه‌ی $[-3, -1]$ است.

۱۱۴- گزینه‌ی ۲ چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow -b^2 \leq -b^2 |\cos x| \leq 0$$

$$\Rightarrow a - b^2 \leq a - b^2 |\cos x| \leq a$$

$$\Rightarrow a - b^2 \leq f(x) \leq a$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار تابع برابر a و کم‌ترین مقدار آن

$a - b^2$ است. پس

$$a = 3, \quad a - b^2 = -4 \Rightarrow b^2 = 7$$

در نتیجه $f(x) = 3 - 7|\cos x|$ و

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 - 7\left|\cos \frac{2\pi}{3}\right| = 3 - 7\left|-\frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{2}$$

و در نتیجه $f(x) = 2 + 4 \sin x$. با توجه به این که برای x هایی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کم‌تر از ۲ است، ضابطه‌ی $f(x) = 2 + 4 \sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b = 2$ و در نتیجه $ab = 4$.

۱۰۷- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل، وقتی $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$

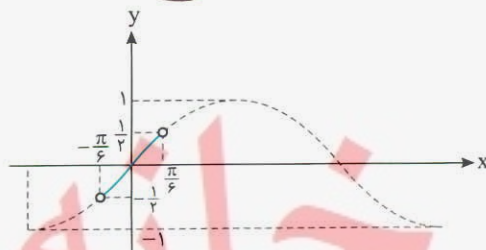
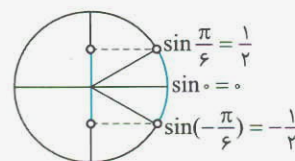
آن‌گاه $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. بنابراین

$$-\frac{1}{2} < \frac{m+1}{2m} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \Rightarrow \left|\frac{m+1}{m}\right| < 1$$

$$\Rightarrow |m+1| < |m|, \quad m \neq 0$$

در نتیجه

$$m^2 + 2m + 1 < m^2 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$



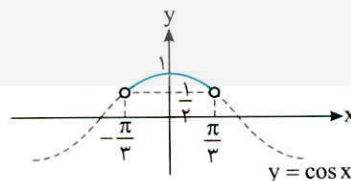
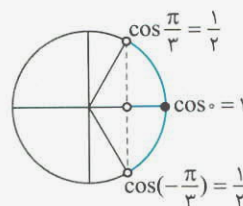
۱۰۸- گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

آن‌گاه $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$. بنابراین

$$\frac{1}{2} < \frac{m^2 - 2m}{8} \leq 1 \Rightarrow 4 < m^2 - 2m \leq 8$$

$$\Rightarrow 5 < (m-1)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} < |m-1| \leq 3$$



بنابراین

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۴- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{49\pi}{10} = \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin \frac{\pi}{10}$$

$$\sin \frac{7\pi}{5} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos \frac{\pi}{10}$$

$$\sin \frac{18\pi}{5} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -\cos \frac{\pi}{10}$$

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -\sin \frac{\pi}{10}$$

بنابراین

$$A = \sin \frac{\pi}{10} + (-\cos \frac{\pi}{10}) + (-\cos \frac{\pi}{10}) + (-\sin \frac{\pi}{10})$$

$$= -2 \cos \frac{\pi}{10}$$

۷۵- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ در نتیجه

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cot \frac{\pi}{12}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\left(\tan \frac{\pi}{12} \times \tan \frac{5\pi}{12}\right)^8 \times \left(\tan \frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$= \left(\tan \frac{\pi}{12} \times \cot \frac{\pi}{12}\right)^8 \times \left(\tan \frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$= \tan^2 \frac{\pi}{12} = a^2$$

۷۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\tan 168^\circ = \tan(180^\circ - 12^\circ) = -\tan 12^\circ \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$1 + \tan^2 12^\circ = \frac{1}{\cos^2 12^\circ} = \frac{1}{m^2} \Rightarrow \tan^2 12^\circ = -1 + \frac{1}{m^2}$$

بنابراین $(\tan 12^\circ > 0)$

$$\tan 12^\circ = \sqrt{\frac{-m^2 + 1}{m^2}}$$

$$\xrightarrow{m = \cos 12^\circ > 0} \tan 12^\circ = \frac{\sqrt{-m^2 + 1}}{m}$$

$$(1) \Rightarrow \tan 168^\circ = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

۷۰- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$(z+t) - (x+y) = 90^\circ \Rightarrow z-x = 90^\circ - (t-y)$$

بنابراین

$$\tan(z-x) = \tan(90^\circ - (t-y)) = \cot(t-y)$$

صورت درست سایر تساوی‌ها به شکل زیر است:

گزینه‌ی ۱)

$$\tan z = -\tan t$$

گزینه‌ی ۲)

$$\sin(x+z) = -\cos(y+t)$$

گزینه‌ی ۴)

$$\cos z = -\cos t$$

۷۱- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$A = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} = -1$$

۷۲- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \frac{11\pi}{6} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6}$$

بنابراین

$$A = -\tan \frac{\pi}{6} + 3 \tan \frac{\pi}{6} - 5 \tan \frac{\pi}{6}$$

$$= -3 \tan \frac{\pi}{6} = -3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

۷۳- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\sin\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۷- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

بنابراین

$$\sin 54^\circ + \tan 36^\circ \sin 36^\circ = \cos 36^\circ + \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} \sin 36^\circ$$

$$= \frac{\cos^2 36^\circ + \sin^2 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{1}{\cos 36^\circ}$$

اکنون توجه کنید که

$$\cos 144^\circ = \cos(180^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{-\cos^2 36^\circ} = \frac{1}{-(1-\sin^2 36^\circ)} = \frac{1}{-(1-a^2)} = \frac{1}{a^2-1}$$

۷۸- گزینه‌ی ۳ عبارت را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی

زاویه‌ی 20° می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin(270^\circ - 20^\circ) + \sin(720^\circ - 20^\circ)}{\cos(540^\circ + 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

۷۹- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{1/\sqrt{3} + 1}{1/\sqrt{3} - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

۸۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin 195^\circ = \sin(180^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$A = \frac{\cos 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{2 \sin 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{3 \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$= 3 \cot 15^\circ = \frac{3}{\tan 15^\circ} = \frac{3}{a}$$

۸۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\cos 115^\circ = \cos(90^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\cos 155^\circ = \cos(180^\circ - 25^\circ) = -\cos 25^\circ$$

$$\cos 245^\circ = \cos(270^\circ - 25^\circ) = -\sin 25^\circ$$

$$\cos 335^\circ = \cos(360^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ$$

بنابراین

$$A = \frac{-\sin 25^\circ - 3 \cos 25^\circ}{-3 \sin 25^\circ + \cos 25^\circ}$$

صورت و مخرج کسر A را بر $\sin 25^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{-\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} - 3 \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}{\frac{-3 \sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} + \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}$$

$$= \frac{-1 - 3 \cot 25^\circ}{-3 + \cot 25^\circ}$$

$$= \frac{-1 - 3a}{-3 + a} = \frac{3a + 1}{3 - a}$$

۸۲- گزینه‌ی ۴

$$A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 0/2} = 3$$

۸۳- گزینه‌ی ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)} = 3$$

$$\frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

بنابراین

$$\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2}) = -\tan(\frac{5\pi}{2} - \alpha)$$

$$= -\cot \alpha = -\frac{1}{5}$$

@khanah_book

خانہ کتاب

قرار دارد.

به صورت $x \in [0, \pi]$ و تنها عددهای صحیح $1, 2, 3$ در آن f تابعی دایمهی تابع $\sin x \geq 0$ بنا براین x باید به دنبال x های در بازه $(-\pi, \pi)$ باشد که $\sin x \geq 0$ است. جواب نامعادله $\pi - x < x < \pi$ به صورت $\pi - x > 0$ و $x < \pi$ است.

$$\{x | \sin x \geq 0, \pi - x \geq 0, x < \pi\}$$

۱۲۳- گزینشی ۳ دایمهی تابع $f(x)$ برابر است با $x = -\pi, -1, 1, 2$ هستند. صحیح در دامنه f عددهای $x = 0$ است. در نتیجه عددهای

بنابراین $k\pi$ هستند. بنا براین $|\cos x| = 1$ صدق میکند به صورت $x = k\pi$ است و x های $[-\pi, \pi]$ بازه x و x های $[-\pi, \pi]$ جواب نامعادله $\pi - x < x < \pi$ است.

$$f(x) = \{x | \pi - x < x < \pi, |\cos x| \neq 1\}$$

۱۲۴- گزینشی ۴ دایمهی تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

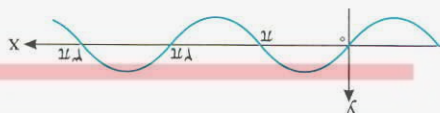
$$D_f = \mathbb{R}^+ - \{x | x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \cos x \geq 0$$

یعنی $x \geq 0$ و $1 - \cos x \neq 0$ و در نتیجه کافی است صورت کسر نامنفی باشد و مخرج آن صفر نباشد. بنا براین مخرج عبارت $\frac{1 - \cos x}{x}$ هیچگاه منفی نمیشود. پس

$$-1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

پس $1 - \cos x \leq 2$ و $1 - \cos x \geq -1$ باشد. باید داشته باشیم $\frac{1 - \cos x}{x} \geq 0$ با توجه به این که

۱۲۱- گزینشی ۴ برای این که عبارت $\sqrt{\frac{x \cos x}{1 - \cos x}}$ به معنی



$$\{x | \pi k \leq x \leq (k+1)\pi\}$$

به صورت زیر است:

مورد نظر $[k\pi, (k+1)\pi]$ نامنفی است. بنا براین دایمهی تابع $\sin x$ در بازه $[k\pi, (k+1)\pi]$ است. در نتیجه این بازه در بازه $[k\pi, (k+1)\pi]$ است.

۱۲۰- گزینشی ۳ می دانیم نمودار تابع $y = \sin x$ به شکل

$$f = \{x | \sin x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{x | x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

بنابراین $\sin x = -1$ است.

۱۱۹- گزینشی ۱ می دانیم در نقاط $x = k\pi - \pi$ مقدار تابع

$$\{x \in \mathbb{R} | x \neq (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

هستند. پس دامنه f به صورت زیر است:

$$x = (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۸- گزینشی ۴ اعدادی که کسینوس آن ها صفر شود در

$$a + b = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین

$$b = \frac{\pi}{2}, a = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{\pi}{2} - (\cos x + \frac{1}{x}) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -(\cos x + \frac{1}{x}) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \cos x + \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x + \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2}$$

حالا با توجه به $1 \leq \cos x \leq 1$ معلوم میشود که

$$= \frac{\pi}{2} - (\cos x + \frac{1}{x})$$

$$f(x) = \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (\cos x + \frac{1}{x}) \right) = 1 - \cos x - \frac{1}{x}$$

به شکل زیر نوشت:

۱۱۷- گزینشی ۱ ابتدا توجه کنید که ضابطه f را می توان

بنابراین برد تابع بازه $[-1, \pi]$ است.

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \pi$$

$$\Rightarrow -1 \leq (\cos x - 1) \leq \pi$$

$$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$$

با توجه به $1 \leq \cos x \leq 1$ می توان نوشت

$$f(x) = (\cos x - 1) - 1$$

۱۱۶- گزینشی ۳ ضابطه f را می توان به شکل زیر نوشت:

بنابراین برد تابع بازه $[3, 5]$ است.

$$\Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq 5 - 2 \sin^2 x \leq 5$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \sin^2 x \leq 0$$

با توجه به $1 \leq \sin x \leq 1$ معلوم میشود که

$$f(x) = 3 \sin^2 x + 5(1 - \sin^2 x) = 5 - 2 \sin^2 x$$

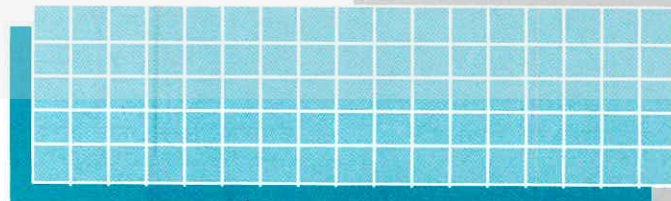
۱۱۵- گزینشی ۳ ضابطه f را به شکل زیر ساده می کنیم:

فصل پنجم

@khanah_book

توابع نمایی و لگاریتمی

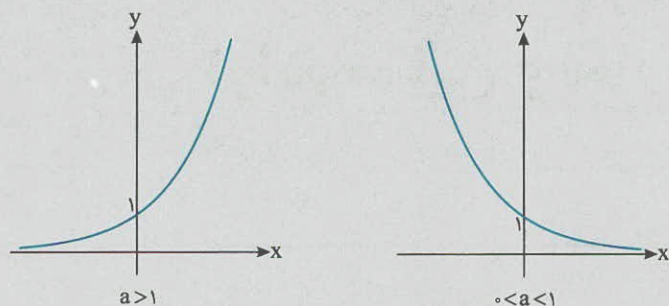
خانه کتاب



فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

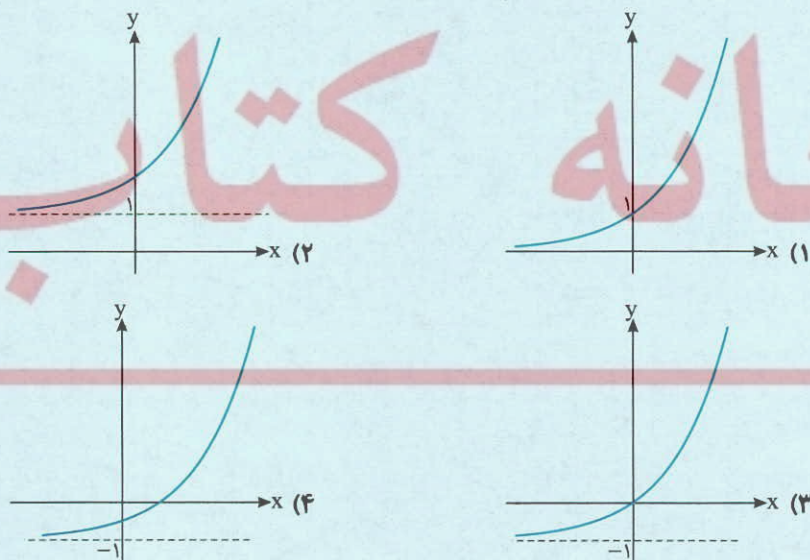
درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن

تعریف اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، تابع $f(x) = a^x$ را تابعی نمایی می‌نامند. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است و نمودار آن به صورت زیر است:

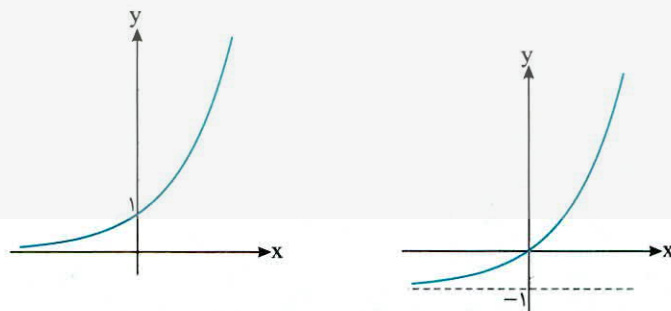


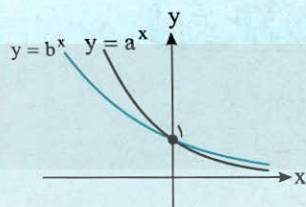
نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ کدام است؟

تست ۱



پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم می‌کنیم و سپس ۱ واحد آن را به سمت پایین منتقل می‌کنیم.





در شکل مقابل، نمودار $y = a^x$ و $y = b^x$ رسم شده‌اند. کدام گزینه

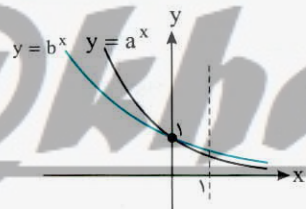
صحیح است؟

(۲) $1 < b < a$

(۱) $0 < b < a < 1$

(۴) $1 < a < b$

(۳) $0 < a < b < 1$



پاسخ: با توجه به نمودار دو تابع، مشخص است که هر دو مقدار a و b ، بین صفر و یک قرار دارند.

اگر به محل برخورد خط $x = 1$ با نمودارها دقت کنیم، معلوم می‌شود که $b > a$ بنابراین $0 < a < b < 1$.

ویژگی‌های توان‌های حقیقی

(۲) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(۱) $a^0 = 1$

(۴) $(a^x)^y = a^{xy}$

(۳) $a^x a^y = a^{x+y}$

(۶) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(۵) $(ab)^x = a^x b^x$

(۷) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

اگر $f(x) = 2^{-x}$ ، حاصل $\frac{f(x+1) - f(x-1)}{f(x+2)}$ کدام است؟

(۴) -۶

(۳) $2^x - 2^{-x}$

(۲) ۶

(۱) $2^x + 2^{-x}$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{f(x+1) - f(x-1)}{f(x+2)} &= \frac{2^{-(x+1)} - 2^{-(x-1)}}{2^{-(x+2)}} \\ &= \frac{2^{-x-1} - 2^{-x+1}}{2^{-x-2}} \\ &= \frac{2^{-x}(2^{-1} - 2^1)}{2^{-x}(2^{-2})} = -6 \end{aligned}$$

اگر a, b, c دنباله‌ای حسابی باشد، کدام درست است؟

(۲) $2^a, 2^b, 2^c$ دنباله‌ای هندسی است.

(۱) $2^a, 2^b, 2^c$ دنباله‌ای حسابی است.

(۴) $2^a, 2^{2b}, 2^c$ دنباله‌ای هندسی است.

(۳) $2^a, 2^{b+1}, 2^c$ دنباله‌ای حسابی است.

پاسخ: توجه کنید که $2b = a + c$ ، در نتیجه

$$2^{2b} = 2^{a+c} = 2^a \times 2^c$$

بنابراین

$$2^a \times 2^c = (2^b)^2$$

یعنی $2^a, 2^b, 2^c$ دنباله‌ای هندسی است.

معادله‌های نمایی

معادله‌ای را که در آن مجهول در نما قرار گرفته باشد **معادله‌ی نمایی** می‌نامند. چون تابع نمایی یک به یک است، اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد و $a^x = a^y$ ، آن گاه $x = y$. از این ویژگی برای حل کردن معادله‌های نمایی استفاده می‌کنیم.

تست ۵ جواب معادله‌ی $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{81}{16}\right)^{x-1}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

بنابراین

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{81}{16}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4(x-1)}$$

در نتیجه $x+2 = -4(x-1)$ ، پس $x = \frac{2}{5}$.

معادله‌ی $5^{2x+1} = 24 \times 5^x + 5$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: با تغییر متغیر $t = 5^x$ ، معادله را بر حسب t می‌نویسیم:

$$5(5^x)^2 - 24(5^x) - 5 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 24t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{10} = \frac{24 \pm 26}{10} \Rightarrow t = 5 \text{ یا } t = -\frac{1}{5}$$

به ازای $t = -\frac{1}{5}$ ، معادله‌ی $5^x = -\frac{1}{5}$ جواب ندارد زیرا 5^x همواره مثبت است. اما به ازای $t = 5$ ،

$$5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

نامعادله‌های نمایی

اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد، آن گاه از روی نمودار تابع نمایی نتایج زیر به دست می‌آید.

الف) اگر $a > 1$ و $a^x > a^y$ ، آن گاه $x > y$.

ب) اگر $0 < a < 1$ و $a^x > a^y$ ، آن گاه $x < y$.

از این نتایج برای حل کردن نامعادله‌های نمایی استفاده می‌کنیم.

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$ کدام است؟

- ۱) $x < 3$ ۲) $x > 3$ ۳) $x < 1$ ۴) $x > 2$

پاسخ: می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ و $x > y$ ، آن گاه $a^x < a^y$ و بالعکس. چون $\frac{1}{4} < 1$ ، پس

$$3-x > x-3 \Rightarrow x < 3$$

دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{9 - 3^{1-x}}$ کدام است؟

۸

تست

(۴) $[0, +\infty)$ (۳) $[-1, +\infty)$ (۲) $[-1, 1]$ (۱) $(-\infty, 1]$

پاسخ: توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid 9 - 3^{1-x} \geq 0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$9 - 3^{1-x} \geq 0 \Rightarrow 9 \geq 3^{1-x} \Rightarrow 3^2 \geq 3^{1-x} \Rightarrow 2 \geq 1-x \Rightarrow x \geq -1$$

بنابراین $D_f = [-1, +\infty)$

خانه کتاب

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل پنجم

درس اول:

تابع‌نمایی و ویژگی‌های آن

$$-1 \quad \text{اگر} \quad f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x & x < 1 \\ \frac{x}{2^2} & x > 1 \end{cases} \quad \text{حاصل } f(f(-1)) \text{ کدام است؟}$$

۴ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱۶ (۴)

-۲ اگر $f(x) = 5^{2x-1} + 3$ و $f^{-1}(t) = 1$ ، مقدار t چقدر است؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۱۳ (۴)

-۳ نمودار تابع $f(x) = a \times 3^{x+b} - 12$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{32}{3}$ قطع می‌کند. این نمودار محور طول‌ها را در نقطه‌ای با

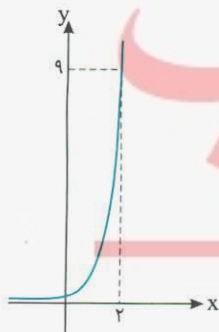
کدام طول قطع می‌کند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

-۴ نمودار تابع $f(x) = 4^{x+a} + b$ محور طول‌ها و عرض‌ها را به ترتیب در نقطه‌های ۱ و $-\frac{3}{4}$ قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۲ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)

-۵ نمودار تابع $f(x) = a^{x-1}$ ، در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $f(f(2))$ چند است؟



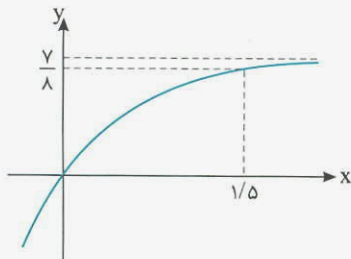
۳^{۱۴} (۱)

۳^{۱۵} (۲)

۳^{۱۶} (۳)

۳^{۱۷} (۴)

-۶ در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 1 - 4^{ax}$ رسم شده است. مقدار a کدام است؟



۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۴)

-۷ نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)



۸- نمودارهای دو تابع $y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y = 3^x + \frac{1}{3}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-1, 1)$ کدام است؟

(ریاضی - ۹۶)

$\sqrt{5}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۹- نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = (\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{2}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نقطه‌ی $(-\frac{1}{2}, 1)$ کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

$\sqrt{5}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۱۰- در تابع $f(x) = ab^x$ ، $f(0) = \frac{3}{2}$ ، $f(-2) = \frac{3}{32}$ و $b > 0$. مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

(تجربی - ۹۱)

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۱۱- اگر $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ ، ساده شده‌ی عبارت $f(x) + f(-x)$ کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

2^x (۲)

2^{-x} (۱)

۱۲- اگر $f(x) = 3^{x+2}$ ، حاصل $f(a+b-1)$ کدام است؟

$\frac{f(a+b)}{27}$ (۴)

$\frac{f(a+b)}{9}$ (۳)

$\frac{f(a)f(b)}{27}$ (۲)

$\frac{f(a)f(b)}{9}$ (۱)

۱۳- اگر $f(x) = 2^{x+5}$ ، حاصل $f(m+n+3)$ کدام است؟

$2f(m)f(n)$ (۴)

$\frac{f(m)f(n)}{2}$ (۳)

$\frac{f(m)f(n)}{4}$ (۲)

$f(m)f(n)$ (۱)

۱۴- کدام یک از تابع‌های زیر یک به یک نیست؟

$f(x) = 2^{3-|x|}$ (۴)

$f(x) = 9^x + 2 \times 3^{x+1}$ (۳)

$f(x) = 4^{5-x}$ (۲)

$f(x) = 3^{1+2x}$ (۱)

۱۵- کدام تابع یک به یک است؟

$f(x) = |2^x - 5|$ (۴)

$f(x) = 2^{|x|}$ (۳)

$f(x) = 2^x - x^2$ (۲)

$f(x) = 2^x + 3^x$ (۱)

۱۶- اگر $f(x+2) = 3^x + 4$ ، مقدار $f^{-1}(31)$ چقدر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۷- اگر $f(x) = 2^x + 3^x$ ، حاصل $f^{-1}(5)$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

۱۸- اگر $f(x) = -1 + 5x$ و $f^{-1}(2^{m-2} + 1) = 26$ ، مقدار m کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

۱۹- اگر $f(g(x+2)) = 2^x + 1$ و $g(x) = 2^{x-1}$ ، حاصل $f^{-1}(9)$ کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۰ (۳)

۱۵ (۲)

۲۰ (۱)

۲۰- اگر $f(x) = 8^x$ و $g(x) = 2^{2x+5}$ ، حاصل $f(\frac{x}{3})g(x-2)$ کدام است؟

$\sqrt{f(x)}$ (۴)

$4f(x)$ (۳)

$2f(x)$ (۲)

$\frac{1}{2}f(x)$ (۱)

۲۱- اگر k عددی مثبت و b واسطه‌ی حسابی a و c باشد، آن گاه

(۲) k^b واسطه‌ی هندسی k^a و k^c است.

(۴) b^k واسطه‌ی هندسی a^k و c^k است.

(۱) k^b واسطه‌ی حسابی k^a و k^c است.

(۳) b^k واسطه‌ی حسابی a^k و c^k است.

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

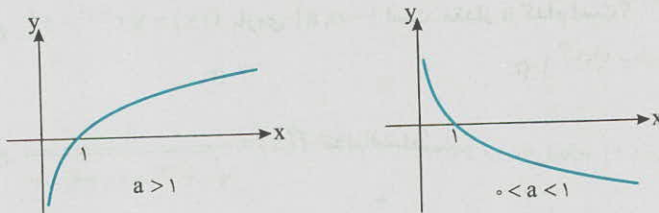
درس‌های دوم و سوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

تعریف

چون تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است، پس وارون پذیر است. وارون این تابع را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را تابع لگاریتم در مبنای a می‌نامند. توجه کنید که

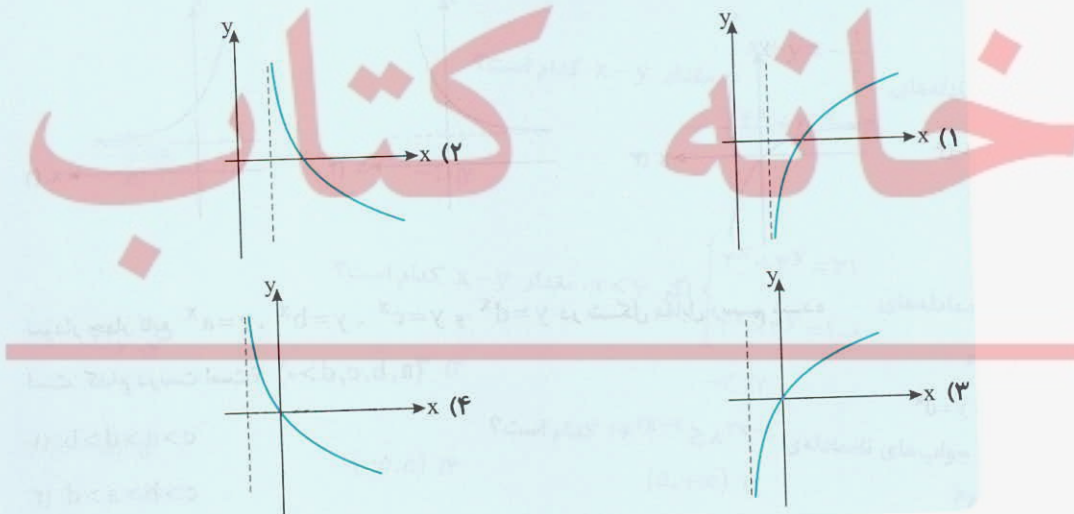
$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است، برد این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است و نمودار آن به صورت زیر است:

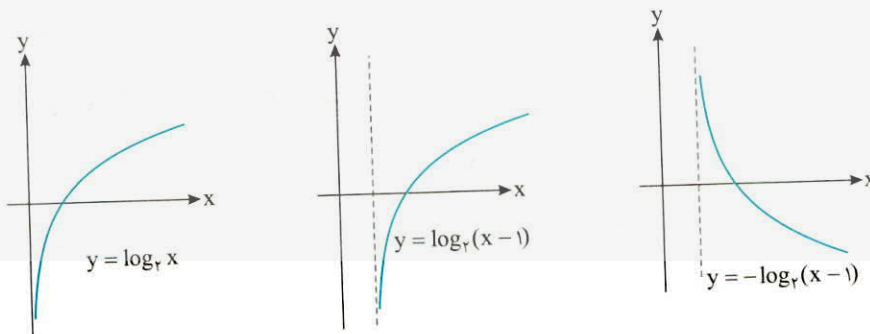


تست ۱

نمودار تابع $f(x) = -\log_7(x-1)$ کدام است؟



پاسخ:



چند عدد صحیح در دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(16 - x^2)$ قرار دارند؟

۲

تست

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: توجه کنید

$$D_f = \{x \mid 16 - x^2 > 0\}$$

از طرف دیگر

$$16 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 16$$

$$\Rightarrow -4 < x < 4$$

بنابراین فقط هفت عدد صحیح $-3, -2, \dots, 2, 3$ در دامنه‌ی تابع f قرار دارند.

اگر $f(x) = \log_3(4x - 1)$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ چقدر است؟

۳

تست

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: توجه کنید که

$$f(x) = \log_3(4x - 1) = 3 \Rightarrow 4x - 1 = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 7$$

پس

$$f^{-1}(3) = 7$$

اگر $f(x) = 3^{5x-1}$ ، ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۴

تست

$$\frac{\log_3 x + 1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{\log_3 x - 1}{5} \quad (۳)$$

$$\log_3(\Delta x) + 1 \quad (۲)$$

$$\log_3(\Delta x) - 1 \quad (۱)$$

پاسخ: اگر $y = 3^{5x-1}$ ، آنگاه

$$\log_3 y = 5x - 1 \Rightarrow x = \frac{\log_3 y + 1}{5}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x + 1}{5}$$

ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = \log_3(x - 2)$ کدام است؟

۵

تست

$$f^{-1}(x) = 2^x - 3 \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = 2^x + 3 \quad (۳)$$

$$f^{-1}(x) = 3^x + 2 \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = 3^x - 2 \quad (۱)$$

پاسخ: ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y = \log_3(x - 2) \Rightarrow 3^y = x - 2$$

$$\Rightarrow x = 3^y + 2$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = 3^x + 2$$

تست ۱۳

اگر $\log_2 3 = a$ ، مقدار $\log_{12} 18$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1+a}{1+2a}$ (۲) $\frac{2+a}{1+2a}$ (۳) $\frac{1+2a}{1+a}$ (۴) $\frac{1+2a}{2+a}$

پاسخ: می توان نوشت

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2 \times 3^2)}{\log_2 (2^2 \times 3)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3^2}{\log_2 2^2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2 \log_2 3}{2 \log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2a}{2 + a}$$

معادله های لگاریتمی

چون تابع لگاریتمی یک به یک است، پس

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

از این ویژگی برای حل معادله های لگاریتمی استفاده می کنیم.

تست ۱۴

اگر $f(1 - \log_2 x) = 4^x + 25^x$ ، مقدار $f(2)$ چقدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

پاسخ: ابتدا x ای را پیدا می کنیم که

$$1 - \log_2 x = 2$$

پس

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم $\frac{1}{2}$ ، به دست می آید

$$f(2) = 4^{\frac{1}{2}} + 25^{\frac{1}{2}} = 2 + 5 = 7$$

تست ۱۵

اگر $x = 8 \log_2 \sqrt{2}$ ، مقدار لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه x کدام می باشد؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: ابتدا x را تا حد امکان ساده می کنیم.

$$x = 8 \log_2 \sqrt{2}^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 8 \times \frac{3}{2} \log_2 2 = 6$$

$$x = 6 \Rightarrow \log_x 4(x+3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

تست ۱۶

اگر $\log_3 (x^2 - 1) = 1 + \log_3 (x+3)$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۵ و ۲ (۲) ۵ و -۲ (۳) -۵ و ۲ (۴) -۲ و -۵

پاسخ: ابتدا طرفین را ساده می کنیم:

$$\log_3 (x^2 - 1) = \log_3 3 + \log_3 (x+3) \Rightarrow \log_3 (x^2 - 1) = \log_3 3(x+3)$$

$$x^2 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

تست ۱۷

با فرض $\log(x+1) = \frac{1}{3} \log(x^3 + x^2 + 3)$ ، حاصل $\log_3(4|x|+1)$ کدام است؟

- ۱ (۲) ۲ (۱) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: معادله را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$3 \log(x+1) = \log(x^3 + x^2 + 3) \Rightarrow \log(x+1)^3 = \log(x^3 + x^2 + 3)$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = \frac{1}{2}$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است چون به ازای آن لگاریتم تعریف نمی‌شود. پس به ازای $x = \frac{1}{2}$.

$$\log_3(4|x|+1) = \log_3 3 = 1$$

تست ۱۸

معادله‌ی $\log_x(x^3 - 2x) = 2$ چند ریشه دارد؟

- ۱ (۲) ۲ (۱) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_x(x^3 - 2x) = 2 \Rightarrow x^3 - 2x = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (غ.ق.ق)}, x = -1 \text{ (غ.ق.ق)}, x = 2$$

پس معادله ۱ ریشه دارد.

تست ۱۹

اگر $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 4 \end{cases}$ مقدار x کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: معادله‌ی لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log_4 x - \log_2 y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 y \Rightarrow \log_2 x = \log_2 y^2 \Rightarrow x = y^2$$

بنابراین باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 3y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y^4 - 3y^2 = 4 \Rightarrow y^4 - 3y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-4) = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ (غ.ق.ق)}, y = 4$$

تست ۲۰

اگر $\log x = \log 2 + \log y$ و $2^x \times 8^y = 4$ مقدار x کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: معادله‌ی لگاریتمی را ساده می‌کنیم:

$$\log x = \log 2 + \log y \Rightarrow \log x - \log y = \log 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \log 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$$

بنابراین باید دستگاه مقابل را حل کنیم:

$$\begin{cases} 2^x \times 8^y = 4 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow 2^{2y} \times 8^y = 4 \Rightarrow 2^{2y} \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow 2^{5y} = 2^2 \Rightarrow 5y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

نامعادله‌های لگاریتمی

از روی نمودار تابع لگاریتمی نتایج زیر به دست می‌آید

(الف) اگر $a > 1$ و $\log_a x > \log_a y$ ، آن‌گاه $x > y$.

(ب) اگر $0 < a < 1$ و $\log_a x > \log_a y$ ، آن‌گاه $x < y$.

از این نتایج برای حل کردن نامعادله‌های لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

چند عدد صحیح کوچک‌تر از ۱۰ در نامعادله‌ی $1 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x-4) < 0$ صدق می‌کنند؟

تست ۲۱

(۴) نامتناهی

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

پاسخ: نامعادله را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$1 - \log_3(x-2) - \log_3(x-4) < 0 \Rightarrow \log_3(x-2) + \log_3(x-4) > 1 \Rightarrow \log_3(x-2)(x-4) > 1$$

$$x^2 - 6x + 8 > 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 5$$

چون $x-2$ و $x-4$ باید مثبت باشند، پاسخ را با $x > 4$ اشتراک می‌گیریم. جواب نامعادله مقادیر $x > 5$ است و فقط ۴ عدد صحیح کوچک‌تر از ۱۰ در آن وجود دارد.

دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

تست ۲۲

(۴) $(1, 11]$

(۳) $[1, 11)$

(۲) $[2, 10]$

(۱) $(1, 2]$

پاسخ: شرایط دامنه را می‌نویسیم:

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$1 - \log(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log(x-1) \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 10 \Rightarrow x \leq 11$$

بنابراین $D_f = (1, 11]$.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل پنجم

درس‌های دوم و سوم:

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

۴۶- اگر نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ از نقطه‌ی $(\frac{1}{3}, 1)$ بگذرد، مقدار $f(f(\frac{1}{27}))$ چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۳

۴۷- اگر $f(x) = 4 + \log(2x - 4)$ ، مقدار $f^{-1}(6)$ چقدر است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۲ (۴) ۱۰۴

۴۸- اگر $f(x) = \log_3(2x - k)$ و $f^{-1}(3) = 29$ ، مقدار k چقدر است؟

- (۱) ۶۹ (۲) ۵۷ (۳) ۵۲ (۴) ۳۱

۴۹- اگر $f^{-1}(g(x)) = \log_3(4x + 1)$ ، مقدار $g(2) - f(2)$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۰- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4-x^2} & x < -2 \\ \log_{16}(x+3) & x \geq 2 \end{cases}$ ، مقدار $f^{-1}(-\frac{1}{4})$ چقدر است؟

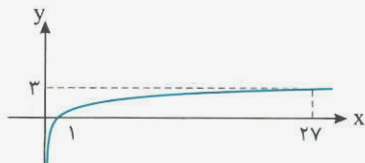
- (۱) $\frac{16}{21}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) ۴ (۴) -۴

۵۱- اگر $f(\log_3 x - 3) = \frac{x}{3}$ ، مقدار $f(0) - f(-2)$ کدام است؟

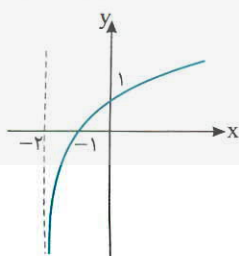
- (۱) $\frac{10}{3}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{14}{3}$

۵۲- اگر $f(x) = \log_3 x$ و $g(f(x)) = x + 2$ ، ضابطه‌ی تابع g کدام است؟

- (۱) $2^x - 1$ (۲) $2^x - 2$ (۳) $2^x + 1$ (۴) $2^x + 2$

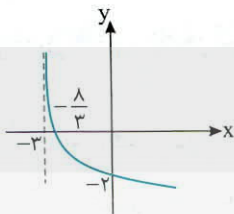
۵۳- نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f^{-1}(2)$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۵۴- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \log_a(x+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵- نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(ax+b)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab چقدر است؟



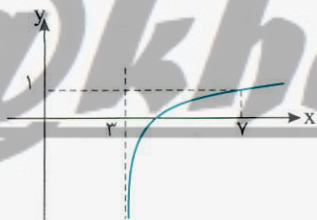
۹ (۱)

۳۶ (۲)

۸۱ (۳)

۲۷ (۴)

۵۶- در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \log_4(cx-k)$ رسم شده است. حاصل $\frac{f(19)}{f(\frac{13}{4})}$ چقدر است؟

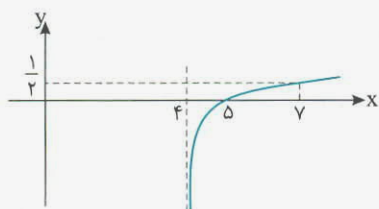
 $-\frac{5}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

-۳ (۴)

۱ (۳)

۵۷- در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \log_a(x+m)$ رسم شده است. مقدار



$f(13) + f^{-1}(1)$ چقدر است؟

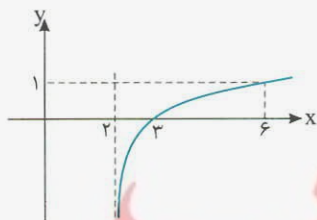
۱۳ (۱)

۱۴ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)

۵۸- نمودار تابع $f(x) = \log_a(bx+c)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار



$2f(a) + f^{-1}(b) + c$ چقدر است؟

۵ (۲)

 $\frac{1}{5}$ (۱)

۶ (۴)

 $\frac{11}{2}$ (۳)

۵۹- نمودار تابع $f(x) = \log_a(bx+7)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطه‌ی $(b, 1)$ بگذرد، مقدار

ab کدام است؟

-۵۵ (۴)

-۴۴ (۳)

-۳۳ (۲)

-۲۲ (۱)

۶۰- نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ محور x را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه‌ی چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده

است. مقدار b کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۴)

۳ (۴)

 $\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

 $\frac{3}{2}$ (۱)

۶۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a + \log_7(bx-4)$ ، از دو نقطه‌ی $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد، a کدام است؟ (ریاضی - ۹۶)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۶۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a + \log_7(3x+b)^2$ ، از دو نقطه‌ی $(5, 1)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، a کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۳- تابع $f(x) = \log_7(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{7}, +\infty)$ بامعنی است. اگر $f(4) = 2$ ، آن‌گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

(ریاضی - ۹۴)

۱ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۶۴- دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_{2x-x^2} 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۶۵- دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_{(x-1)}(16-x^2)$ به صورت $(a, b) - \{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۶۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \log(x^2 + 2x - 8)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $(2, +\infty)$ ۲ (۲) $[-13, -4]$ ۳ (۳) $(-4, +\infty)$ ۴ (۴) $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

۶۷- اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_7(x^2 - (k+1)x + k + 2)$ مجموعه‌ی همه‌ی عددهای حقیقی باشد، حدود k کدام است؟

- ۱ (۱) $k \in [-1, 2]$ ۲ (۲) $k \in (1-2\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$ ۳ (۳) $k \in [1-2\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}]$ ۴ (۴) $k \in (-1, 2)$

۶۸- کدام دو تابع برابر هستند؟

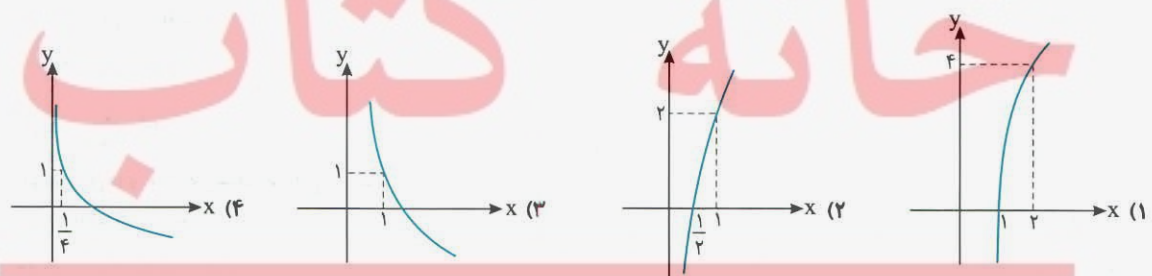
$$\begin{cases} f(x) = \log(x+1) - \log x \\ g(x) = \log \frac{x+1}{x} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(x) = \log x + \log(x+1) \\ g(x) = \log(x^2 + x) \end{cases} \quad (1)$$

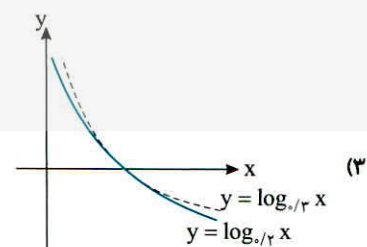
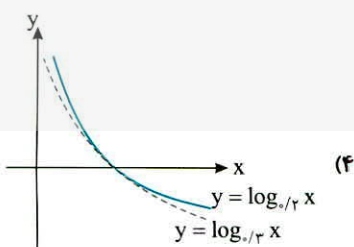
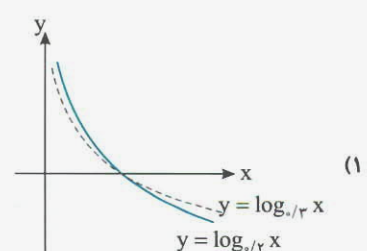
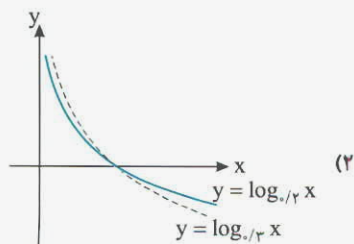
$$\begin{cases} f(x) = \log x^4 \\ g(x) = 4 \log x \end{cases} \quad (4)$$

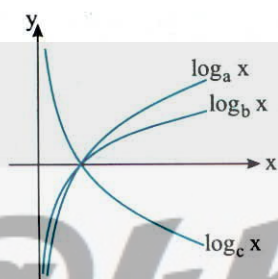
$$\begin{cases} f(x) = \log x + \log(4-x) \\ g(x) = \log(4x - x^2) \end{cases} \quad (3)$$

۶۹- نمودار تابع $y = \log_4 x$ کدام است؟



۷۰- نمودار تابع‌های $y = \log_{3/2} x$ و $y = \log_{2/3} x$ در کدام گزینه درست رسم شده است؟

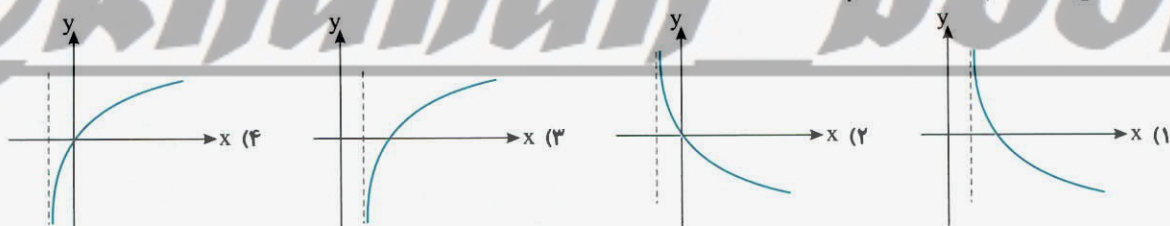




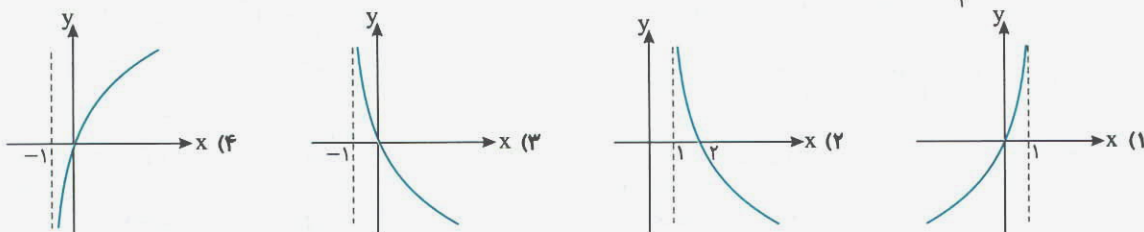
۷۱- با توجه به نمودار روبه‌رو، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a < b < c$
- (۲) $a < c < b$
- (۳) $c < a < b$
- (۴) $c < b < a$

۷۲- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ کدام است؟

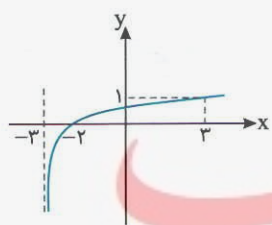


۷۳- نمودار تابع $f(x) = 3 \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ کدام است؟



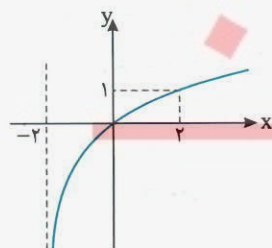
۷۴- نمودار روبه‌رو مربوط به کدام تابع است؟

- (۱) $y = \log_3(x+3)$
- (۲) $y = \log_3(x-3)$
- (۳) $y = \log_3(x+3)$
- (۴) $y = \log_3(x-3)$

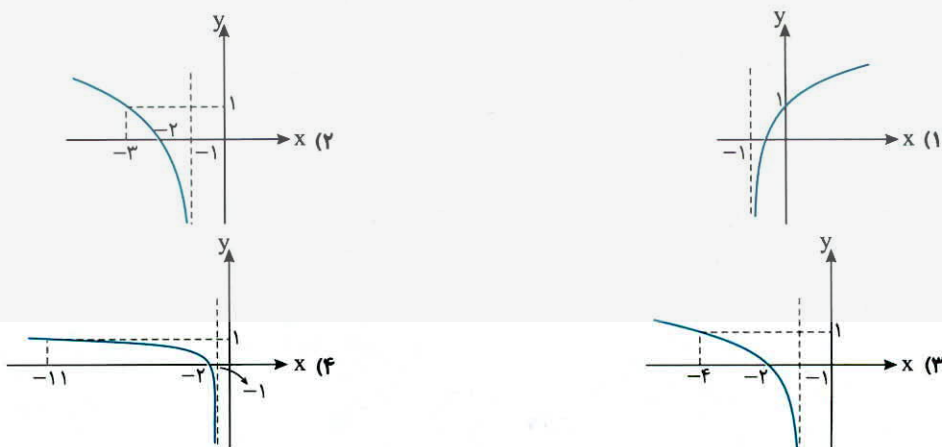


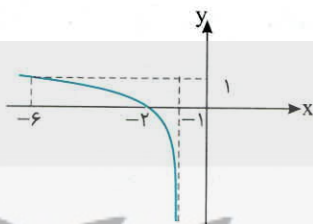
۷۵- نمودار روبه‌رو مربوط به کدام تابع است؟

- (۱) $y = 1 + \log_2(x+2)$
- (۲) $y = 1 - \log_2(x+2)$
- (۳) $y = -1 + \log_2(x+2)$
- (۴) $y = 2 - \log_2(x-2)$



۷۶- کدام گزینه نمودار تابع $f(x) = \log_2(-x-1)$ است؟





۷۷- نمودار روبه‌رو مربوط به کدام تابع است؟

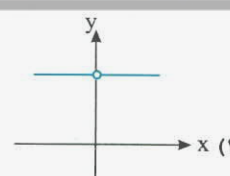
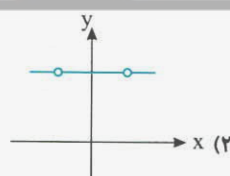
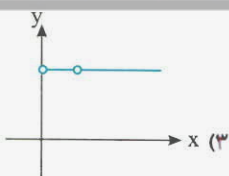
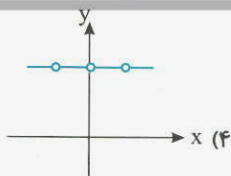
(۱) $f(x) = \log_3(1-x)$

(۲) $f(x) = \log_5(-x-1)$

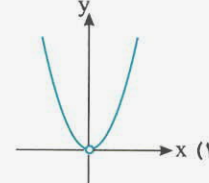
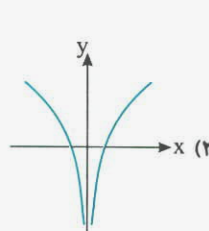
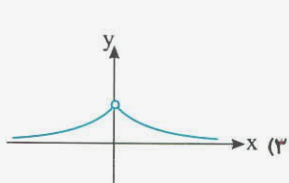
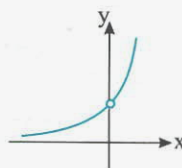
(۳) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

(۴) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(-x-1)$

۷۸- نمودار تابع $f(x) = \log_{x^2} x^2$ کدام است؟



۷۹- نمودار تابع $f(x) = 2^{\log_2 x^2}$ کدام است؟



۸۰- نمودار $y = 2^x$ را ابتدا یک واحد به چپ برده پس از آن یک واحد به بالا می‌بریم، سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی

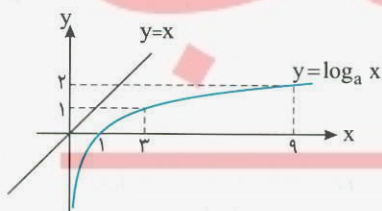
تابع جدید کدام است؟

(۱) $y = \log_2(x+1) + 1$

(۲) $y = \log_2(x-1) - 1$

(۳) $y = \log_2(x-1) + 1$

(۴) $y = \log_2(x+1) - 1$



۸۱- نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. قرینه‌ی این نمودار نسبت

به خط $y = x$ نمودار کدام تابع است؟

(۱) $y = \log_3 \sqrt{x}$

(۲) $y = 3^x$

(۳) $y = \log_3 x$

(۴) $y = 9^x$

۸۲- وارون تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \log_3(3x+1)$ کدام است؟

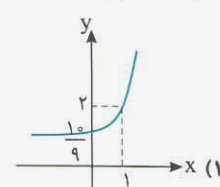
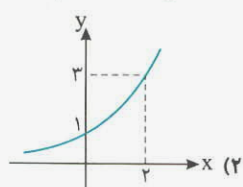
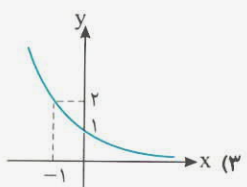
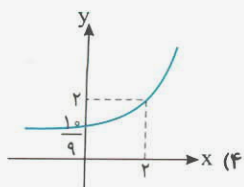
(۱) $f^{-1}(x) = \frac{3^x + 1}{3}$

(۲) $f^{-1}(x) = \frac{3^x - 1}{3}$

(۳) $f^{-1}(x) = 3^x - 1$

(۴) $f^{-1}(x) = 3^x + 1$

۸۳- اگر $f(x) = 2 + \log_3(x-1)$ ، نمودار تابع f^{-1} کدام گزینه است؟



۸۴- اگر $f(x) = 3 \log_3(x-3) + 5$ ، ضابطه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

(۱) $\frac{x-5}{3} + 3$

(۲) $\frac{x-5}{3} + 5$

(۳) $2^{x-5} + 3$

(۴) $2^{x-5} + 5$

۸۵- اگر $f(x) = 2^{3x-1}$ ، ضابطه‌ی تابع f^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{1+\log_2 x}{2}$ (۲) $\frac{1-\log_2 x}{3}$ (۳) $\frac{1+\log_2 x}{3}$ (۴) $2(1-\log_2 x)$

۸۶- ضابطه‌ی تابع وارون تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-1} + 3$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{2}{x-3})$ (۲) $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{1}{x-3})$ (۳) $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{1}{x+3})$ (۴) $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{2}{x+3})$

۸۷- اگر $f(x) = \log_2(x+1)$ ، حاصل $f^{-1}(\log_2 x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{1+x}$ (۲) $x-1$ (۳) $\frac{1}{x}$ (۴) x

۸۸- اگر $f(x) = \log_2 x$ ، $g(x) = 4^x$ و $f(g^{-1}(t)) = 2$ ، مقدار t چقدر است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) ۵۱۲

۸۹- اگر $\log_2 x = 3$ و $\log_3 y = 2$ ، مقدار $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۷ (۴) ۲۷

۹۰- حاصل $\sqrt{2(\log 25)^2 + (\log \frac{1}{5})^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} \log 5$ (۲) $3 \log 5$ (۳) $\sqrt{3} \log 5$ (۴) $3\sqrt{2} \log 5$

(ریاضی - ۹۱)

۹۱- اگر $3^a = A$ ، مقدار $\log_3 9A^2$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $2+2a$ (۲) $3+2a$ (۳) $2+a^2$ (۴) $3+a^2$

۹۲- اگر a, b, c, d عددهایی مثبت و مخالف ۱ باشند و $abcd = 1$ ، مقدار $\log_d abc + \log_c abd + \log_a bcd$ چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۹۳- مقدار $\log_{16\sqrt[3]{4}} 8\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۹۴- مقدار $\frac{\log_3 \sqrt[4]{3^3 3^3 3^3 3^3}}{\log_3 \sqrt{3^3 3^3 3^4 3^3}}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{17}{24}$ (۳) $\frac{27}{17}$ (۴) $\frac{9}{17}$

۹۵- مقدار $\log(\sqrt{5}+2) + \log(\sqrt{5}-2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۹۶- مقدار $\log_{(\sqrt{5}-2)}(\sqrt{5}+2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹۷- مقدار $\log_{\cot \alpha} \tan^2 \alpha$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{4})$

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹۸- مقدار $\log_{(\sqrt{2}-1)}(3+2\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۹۹- مقدار $\frac{1}{1+\log_7 15} + \frac{1}{1+\log_7 10} + \frac{1}{1+\log_5 6}$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\log_7 2$
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\log_7 3$ (۴) $\log_7 2$

۱۰۰- مقدار $\frac{1}{1+\log_7 3} + \frac{1}{1+\log_3 2}$ کدام است؟

۱۰۱- مقدار $\frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70}$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۲- اگر $\log_7 x - 2 \log_7 y - 2 = 0$ ، مقدار $\frac{x-y}{x+y}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۳- مقدار $\sqrt{9^{\frac{1}{\log_8 3}}} + \sqrt{16^{\log_4 6}}$ چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۰۴- حاصل $(a^{\log_7 3})^{\log_8 a}$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۰۵- مقدار $\log_{\sqrt{4}}(\frac{1}{81}) + \log_{16} \sqrt{8+10} + 2 \log_2 3$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{27}{8}$

۱۰۶- اگر $\log_6 2 = a$ ، مقدار $\log_6 18$ کدام است؟

- (۱) $1-a$ (۲) $2-a$ (۳) $3-a$ (۴) $4-a$

۱۰۷- اگر $\log 6! = a$ و $\log 7! = b$ ، مقدار $\log 9!$ بر حسب a و b کدام است؟

- (۱) $a+b$ (۲) $a+b+1$ (۳) $b-a+1$ (۴) $a+b-1$

۱۰۸- اگر $\log 5 = a$ ، مقدار $\log \sqrt{12/5}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{3a+1}{2}$ (۲) $\frac{3a-1}{2}$ (۳) $\frac{3a-2}{3}$ (۴) $\frac{3a+2}{3}$

۱۰۹- اگر $2n^2 - 2n = \log_3 x + \log_3 x^2 + \dots + \log_3 x^{n-1}$ ، مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۲۴۳ (۲) ۸۱ (۳) ۲۷ (۴) ۹

۱۱۰- مقدار عبارت $A = \log(\tan 1^\circ) \times \log(\tan 2^\circ) \times \dots \times \log(\tan 89^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۱۱۱- مقدار عبارت $A = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) -۱

۱۱۲- حاصل عبارت $A = \log_4 3 \times \log_5 4 \times \log_6 5 \times \dots \times \log_{81} 80$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۱۳- اگر $\log_a x = \sqrt[3]{x}$ ، $\log_{a^2} b \times \log_{\sqrt{b}} 2 \times \log_{16} a^2 = \log_a x$ مقدار x چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۱۴- اگر $\log_c a^2 = 5$ ، $\log_a d = 5$ ، حاصل $\log_d c$ کدام است؟

(۱) $\frac{25}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{25}$

۱۱۵- اگر $x = \log 2$ و $y = \log 3$ ، حاصل $\log 216$ برحسب x و y کدام است؟

(۱) $2x + 4y$ (۲) $3x + 2y$ (۳) $4x + 2y$ (۴) $5x + y$

۱۱۶- اگر $\log_x 2 = \log_y 3$ ، حاصل $\log_y x$ کدام است؟

(۱) $\log_3 y$ (۲) $\log_3 2$ (۳) $\log_2 3$ (۴) $\log_2 6$

۱۱۷- اگر $2^x = 3^y$ ، حاصل $\log_8 9$ برحسب x و y کدام است؟

(۱) $\frac{3x}{2y}$ (۲) $\frac{2x}{3y}$ (۳) $\frac{2y}{3x}$ (۴) $\frac{3y}{2x}$

۱۱۸- اگر $\log_3 3 = x$ و $\log_3 5 = y$ ، حاصل $\log_6 20$ برحسب x و y کدام است؟

(۱) $\frac{y(2x+y)}{y+1}$ (۲) $\frac{x(x+2y)}{x+1}$ (۳) $\frac{y(2x+y)}{x+1}$ (۴) $\frac{2+xy}{1+x}$

۱۱۹- اگر $\log_{\sqrt{3}} 4 = a$ و $\log_3 9 = b$ ، مقدار $\log_{ab} 4$ چقدر است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۴

۱۲۰- اگر $\log 3 = a$ و $\log 15 = b$ ، مقدار $\log 48$ برحسب a و b کدام است؟

(۱) $4a - 4b + 5$ (۲) $4a - 5b + 4$ (۳) $4a - 4b + 1$ (۴) $5a - 4b + 4$

۱۲۱- اگر $\log_6 a = 6$ ، مقدار $\log_{24} 54$ برحسب a کدام است؟

(۱) $\frac{3a+1}{a-1}$ (۲) $\frac{3a-1}{a+1}$ (۳) $\frac{3a-1}{a-1}$ (۴) $\frac{3a+1}{a+1}$

۱۲۲- اگر $\log_{18} 72 = a$ ، مقدار $\log_3 3$ برحسب a کدام است؟

(۱) $\frac{3-a}{a-1}$ (۲) $\frac{3-a}{2a-2}$ (۳) $\frac{2a-2}{3-a}$ (۴) $\frac{a-1}{3-a}$

۱۲۳- اگر $\log 3 = a$ و $\log 2 = b$ ، مقدار $\log \sqrt[4]{54}$ برحسب a و b کدام است؟

(۱) $\frac{2a+3b}{4}$ (۲) $\frac{3a+2b}{4}$ (۳) $\frac{a+3b}{4}$ (۴) $\frac{3a+b}{4}$

۱۲۴- اگر $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 3$ ، مقدار $\log_a b + \log_b a$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۲۵- اگر $\sin x = \sqrt{1-4^a}$ ، مقدار $\log_8 \sqrt{1+\tan^2 x}$ برحسب a کدام است؟

(۱) $-\frac{a}{2}$ (۲) $\frac{a}{3}$ (۳) $-\frac{a}{6}$ (۴) $\frac{2a}{3}$

۱۲۶- اگر $a^2 + b^2 = 23ab$ ، عبارت $\log_{\Delta}(a+b)$ با کدام یک برابر است؟ ($a, b > 0$)

(۱) $2 + \log_{\Delta} a + \log_{\Delta} b$ (۲) $1 + \frac{\log_{\Delta} a + \log_{\Delta} b}{2}$ (۳) $\log_{\Delta} a + \log_{\Delta} b - 2$ (۴) $4 - \log_{\Delta} a + \log_{\Delta} b$

$\frac{\log(\log b)}{\log a}$

۱۲۷- مقدار $\log a$ کدام است؟

(۱) a (۲) b (۳) $\log a$ (۴) $\log b$

۱۲۸- اگر $\log_a\left(\frac{2x}{y}\right) = \frac{1}{3}$ ، $\log_a\left(\frac{3y}{2z}\right) = \frac{1}{4}$ و $\log_a\left(\frac{4z}{3x}\right) = \frac{5}{12}$ ، مقدار $\log_a \frac{1}{16}$ چقدر است؟

(۱) -6 (۲) -4 (۳) -3 (۴) -2

۱۲۹- حاصل عبارت $112 \times \log_{28} 7 + \log_{28} 4^2 + A = (\log_{28} 4)^2$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 7

۱۳۰- حاصل $[\log_3 56]$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 2

۱۳۱- مقدار $[\log_3 \sqrt{2}]$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۱۳۲- مقدار عبارت $A = [\log_2 3] + [\log_2 4] + \dots + [\log_2 63]$ کدام است؟

(۱) 252 (۲) 255 (۳) 257 (۴) 259

۱۳۳- اگر $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$ ، $b = \log_{\frac{1}{4}} 5$ و $c = \log_{\frac{1}{2}} 4$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $a < c < b$ (۲) $a < b < c$ (۳) $b < c < a$ (۴) $c < a < b$

۱۳۴- اگر $\log a$ ، $\log b$ ، $\log c$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه

(۱) b واسطه‌ی حسابی a و c است. (۲) b واسطه‌ی هندسی a و c است.

(۳) 10^b واسطه‌ی حسابی a و c است. (۴) 10^b واسطه‌ی هندسی a و c است.

۱۳۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $10^{x^2-x} = 5$ باشند، مقدار $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ چقدر است؟

(۱) 1 (۲) $\log_{\Delta} 10$ (۳) $\log 2$ (۴) $\log 5$

۱۳۶- معادله‌ی $\log(x^2 - 7x) = \log x$ چند جواب دارد؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۱۳۷- اگر $\log_2(2 + \log_3 x) = 2$ ، مقدار $x^2 + x$ چقدر است؟

(۱) 81 (۲) 90 (۳) 72 (۴) 89

۱۳۸- معادله‌ی $\log_{2x-1} x = 2$ چند جواب دارد؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) صفر

۱۳۹- جواب معادله‌ی $\log_2(29 + \log_{\Delta}(x+1)) = 5$ کدام است؟

(۱) 114 (۲) 119 (۳) 124 (۴) 135

۱۴۰- ریشه‌ی معادله‌ی $\log_2(13 + \log_2(x-1)) = 2$ کدام است؟

(۱) 4 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 16

۱۴۱- اگر $3 = \log_2(\log_2(\log_{\Delta} x))$ ، مقدار x چقدر است؟

(۱) 5^{27} (۲) 5^{30} (۳) 5^{35} (۴) 5^{81}

۱۷۰- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\log(x+2) > \log(2x+1)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-2, -\frac{1}{2})$

۱۷۱- مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{5}}(\log_2 x) > 1$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, \sqrt{2})$ (۳) $(1, \sqrt{2})$ (۴) $(\sqrt{2}, +\infty)$

۱۷۲- اگر $\log_2(a-3) < 5$ ، مجموع عددهای صحیح در میان مقدارهای ممکن $\log_2(39-a)$ چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۱۷۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\log(x+2)}{\log(3-x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 3) - \{2\}$ (۲) $(-2, 3)$ (۳) $(-3, -2)$ (۴) $(-3, 2) - \{1\}$

۱۷۴- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_2(x+2)}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $(-2, 1]$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(-2, 1)$

۱۷۵- دامنه‌ی تابع $f(x) = \log(\log_{\frac{1}{2}}(4-x) - 1)$ بازه‌ی (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $0/8$ (۲) $0/2$ (۳) ۱ (۴) $0/4$

۱۷۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\log \frac{5x-1}{x+2}}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

خانه کتاب

فصل پنجم

پاسخ پرسش‌های چهار گزینه‌ای

توابع نمایی و لگاریتمی



۶- گزینه‌ی ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که نمودار تابع

f از نقطه‌ی $(\frac{3}{2}, \frac{7}{8})$ می‌گذرد. در نتیجه

$$\frac{7}{8} = 1 - 4^{\frac{3}{2}a} = 1 - (2^2)^{\frac{3}{2}a} = 1 - 2^{3a}$$

بنابراین

$$2^{3a} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

در نتیجه

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

۷- گزینه‌ی ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع

هستند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{b-a} = 9 = 3^2 \Rightarrow b-a=2 \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$f(2) = \frac{1}{3}$$

پس

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a+b=-1 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-1$ و $b=1$.

پس $f(x) = 3^{-x+1}$. اکنون فرض می‌کنیم $f^{-1}(27) = m$ در

این صورت

$$f(m) = 27 \Rightarrow 3^{-m+1} = 27 \Rightarrow -m+1=3 \Rightarrow m=-2$$

۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا نقطه‌ی تقاطع نمودارها را به دست

می‌آوریم

$$3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow (3^x)^2 + \frac{1}{3} \times 3^x = 1$$

$$3(3^x)^2 + 1 \times 3^x - 3 = 0 \Rightarrow (3 \times 3^x - 1)(3^x + 3) = 0$$

همواره مثبت

$$3 \times 3^x - 1 = 0 \Rightarrow 3^{x+1} = 1 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=3$$

بنابراین باید فاصله‌ی نقاط $A(-1, 3)$ و $B(-1, 1)$ را به دست

آوریم که برابر است با

$$AB = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-1)^2} = 2$$

۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$f(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = (4^{-1})^{-1} = 4$$

در نتیجه

$$f(f(-1)) = f(4) = 2^2 = 4$$

۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که اگر $f^{-1}(t) = 1$ ، آن‌گاه

$t = f(1)$ بنابراین

$$t = f(1) = 5^{2 \times 1 - 1} + 3 = 8$$

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به فرض مسئله،

$$f(0) = -\frac{32}{3} \Rightarrow a \times 3^b - 12 = -\frac{32}{3} \Rightarrow a \times 3^b = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a \times 3^{b+1} = 4 \Rightarrow a \times 3^{b+2} = 12$$

$$\Rightarrow a \times 3^{b+2} - 12 = 0 \Rightarrow f(2) = 0$$

بنابراین نمودار محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند.

۴- گزینه‌ی ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4^a + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -4^a - \frac{3}{4}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 4^{1+a} + b = 0 \Rightarrow b = -4^{1+a}$$

بنابراین

$$-4^{1+a} = -4^a - \frac{3}{4} \Rightarrow -4^{1+a} + 4^a = -\frac{3}{4}$$

$$4^a(-4+1) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4^a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -1$$

پس $b = -1$ و در نتیجه

$$a+b = -2$$

۵- گزینه‌ی ۳ چون نمودار تابع از نقطه‌ی $(2, 9)$ می‌گذرد،

پس

$$f(2) = a^{2-1} = a = 9$$

در نتیجه

$$f(x) = 9^{x-1}$$

بنابراین

$$f(f(2)) = f(9) = 9^8 = 3^{16}$$

۸۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا نقطه‌ی تقاطع نمودارها را به دست

می‌آوریم

$$4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} \Rightarrow 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \times (4^x)^2 = 2 + 3 \times 4^x$$

۸۶- گزینه‌ی ۲ $2 \times (4^x)^2 - 3 \times 4^x - 2 = 0 \Rightarrow (2 \times 4^x + 1)(4^x - 2) = 0$ همواره مثبت

$$4^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$$

بنابراین باید فاصله‌ی نقاط $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ و $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ را به دست

آوریم که برابر است با

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

۸۷- گزینه‌ی ۱

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^2 = 16$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b = 4$

۸۸- گزینه‌ی ۱

$$f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$$

بنابراین

۸۹- گزینه‌ی ۱ $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$

۴ ابتدا $f(-x)$ را به دست می‌آوریم

۹۰- گزینه‌ی ۱ $f(-x) = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x}$

بنابراین

$$f(x) + f(-x) = \frac{2^x - 1}{1 + 2^x} + \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = \frac{2^x - 1 + 1 - 2^x}{1 + 2^x} = 0$$

۲ توجه کنید که

$$f(a+b-1) = 3^{a+b-1}$$

از طرف دیگر،

۹۱- گزینه‌ی ۱ $f(a+b) = 3^{a+b+2}, f(a) \times f(b) = 3^{a+b+4}$

بنابراین

$$f(a+b-1) = \frac{f(a+b)}{3} = \frac{f(a) \times f(b)}{27}$$

۹۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$f(m+n+3) = 2^{(m+n+3)+5} = 2^{m+n+8}$$

همچنین

$$f(m)f(n) = 2^{m+5} \times 2^{n+5} = 2^{m+n+10}$$

$$= 2^2 \times 2^{m+n+8}$$

۹۳- گزینه‌ی ۱ بنا بر این $f(m+n+3) = \frac{f(m)f(n)}{4}$

۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل

$$f(x) = ka^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

تابع‌های 3^{1+2x} و 4^{5-x} یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x) = 2^{3-|x|}$

یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی،

$$f(x) = f(-x) = 2^{3-|x|}$$

اکنون ثابت می‌کنیم تابع $y = 9^x + 2 \times 3^{x+1}$ یک‌به‌یک است.

دقت کنید که

$$9^x + 2 \times 3^{x+1} = (3^x + 3)^2 - 9$$

فرض می‌کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ در نتیجه

$$(3^{x_1} + 3)^2 - 9 = (3^{x_2} + 3)^2 - 9$$

۹۴- گزینه‌ی ۱ بنا بر این

$$(3^{x_1} + 3)^2 = (3^{x_2} + 3)^2$$

چون $3^{x_1} + 3, 3^{x_2} + 3 > 0$ پس

۹۵- گزینه‌ی ۱ $3^{x_1} + 3 = 3^{x_2} + 3 \Rightarrow 3^{x_1} = 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

۱ به کمک مثال نقض یک‌به‌یک بودن

گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) را رد می‌کنیم.

$$f(x) = 2^x - x^2 \quad x=2, x=4 \Rightarrow y=0$$

۹۷- گزینه‌ی ۱ $f(x) = 2^{|x|} \quad x=\pm 1 \Rightarrow y=2$

$$f(x) = |2^x - 5| \quad x=1, x=3 \Rightarrow y=3$$

بنابراین تابع $f(x) = 2^x + 3^x$ باقی می‌ماند که یک‌به‌یک

است.

۹۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $3^x + 4 = 31$

توجه کنید که

$$3^x + 4 = 31 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم ۳

به دست می‌آید

$$f(3+2) = 3^3 + 4 = 31 \Rightarrow f(5) = 31$$

بنابراین $f^{-1}(31) = 5$

بنابراین گزینه ی

$$x^3 = -x^2 + x \Rightarrow x^3 + x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 1) = 0$$

$$x = 0, \quad x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

پس معادله سه جواب دارد.

۱ اگر فرض کنیم

$$2^x = t$$

معادله به شکل $t^2 - t - 3 = 0$ در می آید. پس

$$t = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad t = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

بنابراین گزینه ی

$$2^\alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad 2^\beta = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

در نتیجه

$$2^\alpha \times 2^\beta = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) = -3 \Rightarrow 2^{\alpha+\beta} = -3$$

۲ معادله را به صورت زیر می نویسیم

$$(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 32 = 0$$

اگر فرض کنیم $2^x = t$ ، معادله به صورت $t^2 - 12t + 32 = 0$ در می آید. بنابراین

$$(t-8)(t-4) = 0$$

$$t = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3 = \alpha$$

بنابراین گزینه ی

$$t = 4 = 2^x \Rightarrow x = 2 = \beta$$

در نتیجه

$$\alpha^\beta + \beta^\alpha = 3^2 + 2^3 = 17$$

۱۰۷- گزینه ی ۲ اگر فرض کنیم $3^x = t$ ، معادله به شکل زیر در می آید

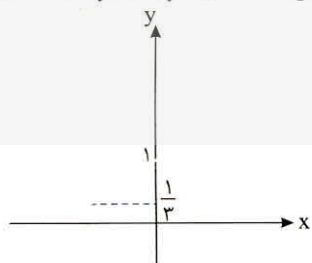
$$3 \times 3^x + \frac{1}{3^x} - 4 = 0 \Rightarrow 3t + \frac{1}{t} - 4 = 0$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)(3t-1) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow 3^x = 1$$

بنابراین گزینه ی

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3}$$

با توجه به نمودار تابع $y = 3^x$ هر یک از معادله های فوق یک جواب دارند. پس معادله ی مورد نظر مسئله دو جواب دارد.۹۹- گزینه ی ۱ توجه کنید که $f(1) = 2 + 3 = 5$. بنابراین

$$f^{-1}(5) = 1$$

۱ فرض می کنیم $2^{m-2} + 1 = s$ چون

$$f^{-1}(s) = 26$$

پس $f(26) = s$ در نتیجه

$$f(26) = 5(26) - 1 = 129$$

اکنون می توان نوشت

$$s = 2^{m-2} + 1 = 129 \Rightarrow 2^{m-2} = 128 = 2^7$$

بنابراین

$$m - 2 = 7 \Rightarrow m = 9$$

۴ توجه کنید که

$$g(x+2) = 2^{x+2-1} = 2^{x+1} \quad 100- \text{گزینه ی}$$

بنابراین

$$f(g(x+2)) = f(2^{x+1}) = 2^x + 1$$

حال اگر قرار دهیم $x = 3$ ، به دست می آید

$$f(16) = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = 16$$

۲ می توان نوشت

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = 8^{\frac{x}{3}} = 2^x$$

بنابراین گزینه ی

$$g(x-2) = 2^2(x-2) + 5 = 2^{2x+1}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{x}{3}\right)g(x-2) = 2^x \times 2^{2x+1} = 2^{3x+1} = 2^{3x} \times 2 = 2 \times 8^x = 2f(x)$$

۲ چون b واسطه ی حسابی a و c است، پس

$$2b = a + c$$

بنابراین گزینه ی

$$k^{2b} = k^{a+c} \Rightarrow (k^b)^2 = k^a \times k^c$$

یعنی k^b واسطه ی هندسی k^a و k^c است.۱ با فاکتورگیری از 3^x معادله را حل می کنیم

$$3^x(3+1) = 108 \Rightarrow 3^x \times 4 = 108$$

$$3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله یک جواب دارد.

$$5^{x^2-x} = 5^2 \quad 2 \text{ معادله را به صورت}$$

بنابراین گزینه ی

$$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

حاصل ضرب جواب های معادله ی فوق برابر با -2 است.

۳ معادله را به شکل زیر می نویسیم:

$$2^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \Rightarrow 2^{x^2} = 2^{-x^2+x}$$

۲۸- گزینه‌ی ۲) توجه کنید که

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

بنابراین اگر فرض کنیم $(2 + \sqrt{3})^x = t$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = 2 + \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^x \Rightarrow x = 1$$

$$t = 2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^x \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^{-1} = (2 + \sqrt{3})^x$$

$$\Rightarrow x = -1$$

پس حاصل ضرب جواب‌ها برابر -1 است.

۲۹- گزینه‌ی ۲) معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3 \times (4^x)^2 + 2 \times (9^x)^2 - 5 \times 4^x \times 9^x = 0$$

اگر فرض کنیم $4^x = a$ و $9^x = b$ ، معادله به شکل زیر در می‌آید

$$3a^2 + 2b^2 - 5ab = 0 \Rightarrow (a-b)(3a-2b) = 0$$

$$a = b \Rightarrow 4^x = 9^x \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$3a - 2b = 0 \Rightarrow 3 \times 4^x - 2 \times 9^x = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین معادله دو جواب دارد.

۳۰- گزینه‌ی ۴) از معادله‌ی $x + y = -\frac{1}{2}$ مقدار y را

بر حسب x حساب می‌کنیم و در معادله‌ی $4^x + 2^{-y} = 4$ قرار می‌دهیم

$$x + y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} - x$$

$$4^x + 2^{-y} = 4 \Rightarrow 4^x + 2^{\frac{1}{2} + x} = 4$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 + \sqrt{2} \times 2^x - 4 = 0$$

اگر فرض کنیم $2^x = t$ ، آن‌گاه

$$t^2 + \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$$t = \sqrt{2} = 2^x \Rightarrow 2^2 = 2^x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -1$$

$$t = -2\sqrt{2} = 2^x \text{ (غ.ق.)}$$

$$\text{بنابراین } x - y = \frac{3}{2}$$

۳۱- گزینه‌ی ۱) از معادله‌ی $2^x + 3^y = 31$ نتیجه می‌گیریم

$$3^y = 31 - 2^x$$

با جای گذاری $31 - 2^x$ به جای 3^y در معادله‌ی $2^x \times 3^y = 108$ به دست می‌آید

$$2^x(31 - 2^x) = 108 \Rightarrow (2^x)^2 - 31 \times 2^x + 108 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 27)(2^x - 4) = 0$$

$$2^x = 4 \Rightarrow 3^y = 27 \Rightarrow x = 2, y = 3 \Rightarrow x - y = -1$$

$$2^x = 27 \Rightarrow 3^y = 4 \text{ (غ.ق.)}$$

توجه کنید که اگر $2^x = 27$ و $3^y = 4$ آن‌گاه $4 < x < 5$ و $1 < y < 2$ در نتیجه $x > y$.

۳۲- گزینه‌ی ۴) ابتدا دو طرف نامعادله را به صورت

عبارت‌های نمایی با پایه‌ی ۲ می‌نویسیم

$$16^{2x-2} = (2^4)^{2x-2} = 2^{8x-8}$$

$$8^{3x-1} = (2^3)^{3x-1} = 2^{9x-3}$$

بنابراین باید نامعادله‌ی $2^{8x-8} \geq 2^{9x-3}$ را حل کنیم، در نتیجه

$$8x - 8 \geq 9x - 3 \Rightarrow x \leq -5$$

۳۳- گزینه‌ی ۴) ابتدا نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\left(\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{7}{5}\right)^{-1} \text{ (دقت کنید که)}$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{3-2x} < \left(\left(\frac{7}{5}\right)^{-1}\right)^{x+2} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-x-2}$$

$$\text{چون } \frac{7}{5} > 1 \text{ پس}$$

$$3 - 2x < -x - 2 \Rightarrow x > 5$$

۳۴- گزینه‌ی ۲) نامعادله به صورت $(\sqrt{2}-1)^{2x-1} > \sqrt{2}-1$

نوشته می‌شود. چون

$$(\sqrt{2}-1) < 1$$

پس

$$3x - 1 < 1 \Rightarrow 4x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{4}$$

۳۵- گزینه‌ی ۱) نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$(2^2)^{x-3} < (2^5)^{5-x} \Rightarrow 2^{2x-6} < 2^{25-5x}$$

بنابراین

$$2x - 6 < 25 - 5x \Rightarrow 7x < 31 \Rightarrow x < \frac{31}{7}$$

۳۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-x-2}$$

چون

$$0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$$

پس

$$2x+1 < -x-2 \Rightarrow 3x < -3 \Rightarrow x < -1$$

۳۷- گزینه‌ی ۳ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$4(2^x)^2 - 5(2^x) + 1 \geq 0$$

اگر فرض کنیم $2^x = t$ ، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید

$$4t^2 - 5t + 1 \geq 0 \Rightarrow (t-1)(4t-1) \geq 0$$

$$t \geq 1 \Rightarrow 2^x \geq 1 \Rightarrow 2^x \geq 2^0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq 2^{-2} \Rightarrow x \leq -2$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

است که همان $\mathbb{R} - (-2, 0)$ است. پس $a = -2$ و $b = 0$ و در

$$\text{نتیجه } a+b = -2$$

۳۸- گزینه‌ی ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در

دامنه‌ی تابع قرار ندارند. پس

$$|2^x - 4| - 3 = 0 \Rightarrow 2^x - 4 = \pm 3 \Rightarrow 2^x = 7, 2^x = 1$$

هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند. پس دامنه‌ی تابع شامل دو عدد نیست.

۳۹- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$D_f = \{x | 3 - 3^{1-2x} \geq 0\}$$

بنابراین باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم

$$3^{1-2x} \leq 3 \Rightarrow 1-2x \leq 1 \Rightarrow x \geq 0$$

بنابراین

$$D_f = [0, +\infty)$$

۴۰- گزینه‌ی ۳ باید نامعادله‌های $2^x - 8 \geq 0$ و

$81 - 3^x > 0$ را حل کنیم و اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های

آنها را به دست آوریم

$$2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3$$

$$81 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین

$$D_f = [3, 4)$$

در نتیجه $a=3$ و $b=4$ و $a+b=7$.

۴۱- گزینه‌ی ۳ باید نامعادله‌ی $2^{x+1} - 4^x \geq 0$ را حل کنیم

تا دامنه‌ی تابع به دست آید

$$2^{x+1} - 4^x \geq 0 \Rightarrow 2 \times 2^x - (2^x)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^x(2 - 2^x) \geq 0$$

با توجه به این که $2^x > 0$ نتیجه می‌شود

$$2 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

بنابراین $a=1$.

۴۲- گزینه‌ی ۳ دامنه‌ی تابع f برابر است با

$$D_f = \{x | -3^{2x} + 4 \times 3^x - 3 > 0\}$$

فرض می‌کنیم $3^x = t$. در نتیجه باید نامعادله‌ی زیر را حل کنیم

$$-t^2 + 4t - 3 > 0 \Rightarrow -(t-1)(t-3) > 0$$

جواب نامعادله‌ی بالا به صورت $1 < t < 3$ است. در نتیجه

$$1 < 3^x < 3 \Rightarrow 3^0 < 3^x < 3^1$$

بنابراین

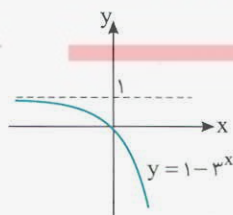
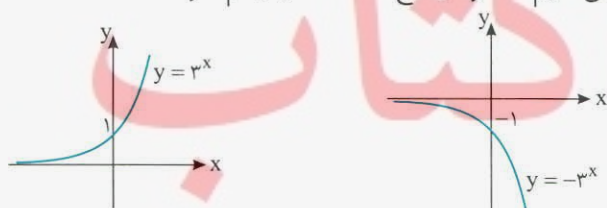
$$0 < x < 1$$

۴۳- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع $y = 3^x$ را رسم می‌کنیم سپس

آن را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع

$y = -3^x$ به دست آید. نمودار اخیر را یک واحد به بالا انتقال

می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 1 - 3^x$ رسم شود.

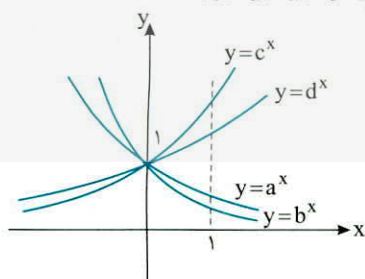


۴۴- گزینه‌ی ۴ چون عرض نقطه‌ی برخورد تابع‌ها با خط

$x=1$ به صورت a, b, c, d است، با توجه به نمودار چهار

تابع و مقایسه‌ی عرض نقطه‌ی برخورد تابع‌ها با خط $x=1$

معلوم می‌شود $c > d > a > b$.



۲ در تساوی فرض مسئله یک بار به جای x

عدد ۲ و یک بار عدد ۸ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=2: f(\log_2 2-3)=f(-2)=\frac{2}{3} \\ x=8: f(\log_2 8-3)=f(0)=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f(0)-f(-2)=2$$

۴ توجه کنید که

$$g(f(x))=g(\log_2 x)=x+2$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم 2^x ، به دست می‌آید

$$g(\log_2 2^x)=2^x+2 \Rightarrow g(x)=2^x+2$$

۴ توجه کنید که

$$f(27)=3 \Rightarrow \log_a 27=3 \Rightarrow a^3=27 \Rightarrow a=3$$

بنابراین

$$f(x)=\log_3 x$$

در نتیجه $f^{-1}(2)=3^2=9$ و $f^{-1}(x)=3^x$

۴ دامنه‌ی تابع f به صورت $(-b, +\infty)$

است. با توجه به شکل، دامنه‌ی تابع f به صورت $(-2, +\infty)$

است. در نتیجه

$$-b=-2 \Rightarrow b=2$$

همچنین نمودار تابع از نقطه‌ی $(0, 1)$ می‌گذرد. در نتیجه

$$f(x)=\log_a (x+2) \Rightarrow f(0)=\log_a 2=1 \Rightarrow a=2$$

بنابراین $a+b=4$.

۴ با توجه به شکل دامنه‌ی تابع به صورت

$(-3, +\infty)$ است. از طرف دیگر، دامنه‌ی تابع باید به شکل

$$(-\frac{b}{a}, +\infty)$$
 باشد. بنابراین

$$-\frac{b}{a}=-3 \Rightarrow b=3a$$

همچنین، نمودار تابع از نقطه‌ی $(0, -2)$ می‌گذرد. بنابراین

$$f(0)=\log_{\frac{1}{3}} b=-2 \Rightarrow b=(\frac{1}{3})^{-2}=9$$

در نتیجه $a=3$. بنابراین $ab=27$.

۱ با توجه به شکل دامنه‌ی تابع به صورت

$(3, +\infty)$ است. همچنین دامنه‌ی تابع به صورت

$\{x | cx-k > 0\}$ است. جواب نامعادله‌ی اخیر به صورت

$(\frac{k}{c}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{k}{c})$ است. چون دامنه‌ی تابع به شکل

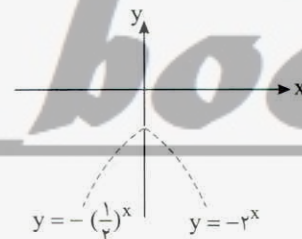
$(3, +\infty)$ است، پس

$$c > 0, \quad \frac{k}{c}=3 \Rightarrow k=3c$$

۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} -2^x & x \leq 0 \\ -2^{-x} & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2^x & x \leq 0 \\ -(\frac{1}{2})^x & x > 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۱ توجه کنید که

$$f(\frac{1}{3})=1 \Rightarrow \log_a \frac{1}{3}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

در نتیجه $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ ، پس

$$f(f(\frac{1}{27}))=f(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27})=f(3)=\log_{\frac{1}{3}} 3=-1$$

۳ می‌توان نوشت

$$f(x)=4+\log(2x-4)=6 \Rightarrow \log(2x-4)=2$$

$$2x-4=10^2 \Rightarrow x=52$$

بنابراین $f^{-1}(6)=52$.

۴ چون $f^{-1}(3)=29$ ، پس $f(29)=3$ در

نتیجه

$$\log_3(2 \times 29 - k)=3 \Rightarrow 58 - k=3^3=27 \Rightarrow k=31$$

۱ توجه کنید که

$$f^{-1}(g(x))=\log_3(4x+1) \Rightarrow g(x)=f(\log_3(4x+1))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$ ، به دست می‌آید

$$g(2)=f(\log_3(4 \times 2 + 1))=f(\log_3 9)=f(2)$$

بنابراین $g(2)-f(2)=0$.

۴ توجه کنید که اگر $x \geq 2$ ، آن‌گاه $x+3 \geq 5$.

بنابراین

$$\log_{16}(x+3) \geq \log_{16} 5 > \log_{16} 1=0$$

در نتیجه اگر $f(s)=-\frac{1}{4}$ ، باید $s < -2$ ، توجه کنید که

$$\frac{3}{4-s^2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow 4-s^2=-12 \Rightarrow s^2=16$$

در نتیجه $s=\pm 4$. چون $s < -2$ ، پس $s=-4$. بنابراین

$$f(-4)=-\frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1}(-\frac{1}{4})=-4$$



به این ترتیب $f(x) = \log_a(-2x+7)$ نمودار تابع از نقطه‌ی $(b, 1)$ عبور می‌کند، پس

$$f(b) = 1 \Rightarrow f(-2) = 1 \Rightarrow \log_a(4+7) = 1 \Rightarrow a = 11$$

بنابراین $ab = -22$.

۱ نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند، پس از نقطه‌ی $(-1, 0)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیه‌ی چهارم را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند، پس از نقطه‌ی $(1, -1)$ عبور می‌کند.

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(-a+b) = 0 \Rightarrow -a+b = 1 \quad (1)$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(a+b) = -1 \Rightarrow a+b = 2 \quad (2)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$

۳ با توجه به این که نمودار تابع از نقاط $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد، پس

$$f(2) = 6, \quad f(12) = 10$$

بنابراین

$$f(2) = a + \log_7(2b-4) = 6 \Rightarrow \log_7(2b-4) = 6-a$$

$$f(12) = a + \log_7(12b-4) = 10 \Rightarrow \log_7(12b-4) = 10-a$$

طرفین تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم

$$\log_7(12b-4) - \log_7(2b-4) = 4 \Rightarrow \log_7\left(\frac{12b-4}{2b-4}\right) = 4$$

$$\frac{12b-4}{2b-4} = 16 \Rightarrow 12b-4 = 32b-64 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین

$$\log_7(2b-4) = \log_7(6-4) = 1 = 6-a \Rightarrow a = 5$$

۳ با توجه به این که نمودار تابع از دو نقطه‌ی $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، پس

$$f(5) = 11, \quad f(21) = 15$$

بنابراین

$$f(5) = a + \log_7(15+b)^2 = 11 \Rightarrow \log_7(15+b) = \frac{11-a}{2}$$

$$f(21) = a + \log_7(63+b)^2 = 15 \Rightarrow \log_7(63+b) = \frac{15-a}{2}$$

طرفین تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم

$$\log_7(63+b) - \log_7(15+b) = 2 \Rightarrow \log_7\left(\frac{63+b}{15+b}\right) = 2$$

$$\frac{63+b}{15+b} = 49 \Rightarrow 63+b = 60+49b \Rightarrow b = 1$$

بنابراین

$$a + \log_7(15+1)^2 = 11 \Rightarrow a = 3$$

همچنین نمودار تابع از نقطه‌ی $(7, 1)$ می‌گذرد. در نتیجه

$$1 = f(7) \Rightarrow \log_7(7c-k) = 1$$

بنابراین

$$7c-k = 4 \Rightarrow 7c-3c = 4 \Rightarrow c = 1$$

پس $k = 3$ و در نتیجه $f(x) = \log_7(x-3)$ بنابراین

$$f(19) = \log_7(16) = 2, \quad f\left(\frac{13}{4}\right) = \log_7\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -2 است. ۲ توجه کنید که

$$f(5) = 0 \Rightarrow \log_a(5+m) = 0 \Rightarrow 5+m = 1 \Rightarrow m = -4$$

پس $f(x) = \log_a(x-4)$ از طرف دیگر،

$$f(7) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_a 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow a = 9$$

به این ترتیب $f(x) = \log_9(x-4)$ اکنون توجه کنید که

$$f(13) = \log_9(13-4) = \log_9 9 = 1$$

پس $f^{-1}(1) = 13$ و در نتیجه

$$f(13) + f^{-1}(1) = 1 + 13 = 14$$

۲ با توجه به شکل دامنه‌ی تابع به صورت

$(2, +\infty)$ است، همچنین دامنه‌ی تابع به صورت

$\{x \mid bx+c > 0\}$ است. جواب نامعادله‌ی اخیر به صورت

$(-\frac{c}{b}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{c}{b})$ است. چون دامنه‌ی تابع به شکل

$(2, +\infty)$ است، پس

$$-\frac{c}{b} = 2 \Rightarrow c = -2b$$

از طرف دیگر،

$$f(3) = 0 \Rightarrow \log_a(3b+c) = 0 \Rightarrow 3b+c = 1$$

$$\Rightarrow 3b-2b = 1 \Rightarrow b = 1$$

پس $c = -2$ و $f(x) = \log_a(x-2)$ اکنون توجه کنید که

$$f(6) = 1 \Rightarrow \log_a 4 = 1 \Rightarrow a = 4$$

پس

$$f(x) = \log_4(x-2)$$

در نتیجه

$$f(a) = f(4) = \log_4(4-2) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$f(6) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 6 \Rightarrow f^{-1}(b) = 6$$

بنابراین

$$2f(a) + f^{-1}(b) + c = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 6 - 2 = 5$$

۱ نمودار تابع از نقطه‌ی $(3, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f(3) = 0 \Rightarrow \log_a(3b+7) = 0 \Rightarrow 3b+7 = 1 \Rightarrow b = -2$$

بنابراین

$$(k-1)^2 < 12 \Rightarrow |k-1| < 2\sqrt{3}$$

در نتیجه $1-2\sqrt{3} < k < 1+2\sqrt{3}$ **۶۸- گزینه ۳** برای این که دو تابع مساوی باشند، باید

علاوه بر این که نمایش جبری یکسانی داشته باشند، دامنه‌های یکسان نیز داشته باشند. اکنون به بررسی هر گزینه می‌پردازیم.

گزینه ۱

$$D_f = (0, +\infty), \quad D_g = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

بنابراین $f \neq g$ **گزینه ۲**

$$D_f = (0, +\infty), \quad D_g = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

بنابراین $f \neq g$ **گزینه ۳**

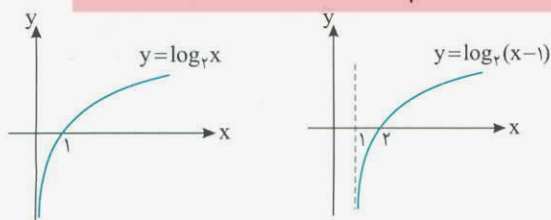
$$D_f = \{x | x > 0, 4-x > 0\} = D_g = \{x | 4x - x^2 > 0\} = (0, 4)$$

بنابراین $f = g$ **گزینه ۴**

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = (0, +\infty)$$

بنابراین $f \neq g$ **۶۹- گزینه ۴****۷۰- گزینه ۲****۷۱- گزینه ۳** توجه کنید که $a, b > 1$ و $c < 1$. همچنین $a < b$. پس $b > a > c$ **۷۲- گزینه ۳** برای رسم نمودار تابع $y = \log_2(x-1)$ کافی است نمودار تابع $y = \log_2 x$ را یک واحد به سمت

راست انتقال دهیم:

**۷۳- گزینه ۳****۷۴- گزینه ۳** دامنه‌ی تابع به صورت $(-3, +\infty)$ است ونمودار از نقطه‌ی $(3, 1)$ می‌گذرد. تنها گزینه‌ی (۳) ویژگی‌های

مورد نظر را دارد.

۷۵- گزینه ۳ دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(-2, +\infty)$ است. چوننمودار تابع از نقطه‌های $(0, 0)$ و $(2, 1)$ می‌گذرد. فقط تابع

گزینه (۳) ویژگی‌های مورد نظر را دارد.

۶۳- گزینه ۱ دامنه‌ی تابع به صورت $\{x | ax + b > 0\}$ است. جواب نامعادله‌ی اخیر به صورت $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{a})$ است. چون تابع فقط در بازه‌ی $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

تعریف شده است، پس

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3(4a + b) = 2 \Rightarrow 4a + b = 9 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = 2$ و $b = 1$.

به این ترتیب

$$f(x) = \log_3(2x + 1)$$

و در نتیجه

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_3(-\frac{4}{9} + 1) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

۶۴- گزینه ۴ دو شرط زیر باید برقرار باشند:

$$-x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$-x^2 + 2x \neq 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

بنابراین دامنه‌ی تابع به صورت $(0, 2) - \{1\}$ است و شامل

عدد صحیحی نمی‌شود.

۶۵- گزینه ۳ برای این که عبارت $\log_{(x-1)}(16-x^2)$

معنی‌دار باشد، باید

$$16 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین دامنه‌ی تابع به صورت $D_f = (1, 4) - \{2\}$ است، پس

$$a + b + c = 7 \text{ و در نتیجه } c = 2 \text{ و } b = 4, a = 1$$

۶۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$D_f = \{x | x > 0, x^2 + 2x - 8 > 0\}$$

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2 + 2x - 8 > 0$ به صورت

$$(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$$
 است. بنابراین دامنه‌ی تابع f می‌شود

$$(0, +\infty) \cap ((2, +\infty) \cup (-\infty, -4)) = (2, +\infty)$$

۶۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_f = \{x | x^2 - (k+1)x + k + 3 > 0\}$$

برای این که دامنه‌ی تابع f ، همه‌ی عددهای حقیقی را شاملشود، کافی است نابرابری $x^2 - (k+1)x + k + 3 > 0$ همواره

برقرار باشد. در نتیجه

$$\Delta = (k+1)^2 - 4(k+3) = k^2 - 2k - 11 < 0$$

۷۶- گزینه‌ی ۲ دامنه‌ی تابع به صورت $(-\infty, -1)$ است و

نمودار تابع از نقطه‌های $(-2, 0)$ و $(-3, 1)$ می‌گذرد.

۷۷- گزینه‌ی ۲ دقت کنید که دامنه‌ی تابع به صورت

$(-\infty, -1)$ است. همچنین تابع از نقطه‌ی $(-6, 1)$ می‌گذرد.

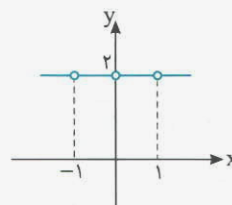
۷۸- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی

عددهای حقیقی مخالف ± 1 و صفر است و

$$f(x) = \log_{x^2} x^4 = \frac{4}{2} \log_x x = 2$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:

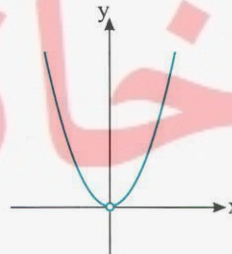


۷۹- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی

عددهای حقیقی مخالف صفر است و

$$f(x) = 2^{\log_2 x^2} = x^2, \quad x \neq 0$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۸۰- گزینه‌ی ۲ با دو تغییر ابتدایی به تابع $f(x) = 2^{x+1} + 1$

می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ ، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطه‌ی تابع وارون f به صورت زیر پیدا می‌شود

$$y = 1 + 2^{x+1} \Rightarrow 2^{x+1} = y - 1 \Rightarrow x + 1 = \log_2(y - 1)$$

$$\Rightarrow x = \log_2(y - 1) - 1$$

در نتیجه $f^{-1}(x) = \log_2(x - 1) - 1$.

۸۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$f(3) = 1 \Rightarrow \log_a 3 = 1 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $f(x) = \log_3 x$. نمودار مورد نظر، نمودار تابع وارون

تابع f است. از طرف دیگر، $f^{-1}(x) = 3^x$ ، پس نمودار

مورد نظر نمودار $y = 3^x$ است.

۸۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$y = \log_3(3x + 1) \Rightarrow 3x + 1 = 3^y \Rightarrow x = \frac{3^y - 1}{3}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{3^x - 1}{3}$$

۸۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

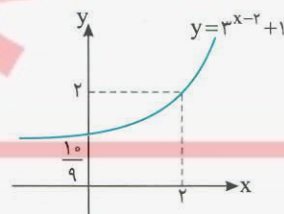
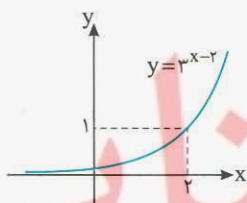
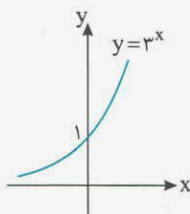
$$y = 2 + \log_3(x - 1) \Rightarrow \log_3(x - 1) = y - 2$$

$$x - 1 = 3^{y-2} \Rightarrow x = 3^{y-2} + 1$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = 3^{x-2} + 1$$

به این ترتیب نمودار f^{-1} به ترتیب زیر به دست می‌آید



۸۴- گزینه‌ی ۲ فرض کنیم

$$y = 3 \log_3(x - 3) + 5$$

در نتیجه

$$\frac{y-5}{3} = \log_3(x-3) \Rightarrow \frac{y-5}{3} = x-3$$

بنابراین

$$x = 3 + \frac{y-5}{3}$$

از این رو

$$f^{-1}(x) = 3 + \frac{x-5}{3}$$

۹- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$y = 2^{3x-1} \Rightarrow 3x-1 = \log_2 y \Rightarrow x = \frac{\log_2 y + 1}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_2 x + 1}{3} \quad \text{بنابراین}$$

۱ ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3 \Rightarrow y-3 = \frac{1}{2^{x-1}} \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{1}{y-3}$$

$$x-1 = \log_2 \left(\frac{1}{y-3}\right) \Rightarrow x = 1 + \log_2 \left(\frac{1}{y-3}\right)$$

$$x = \log_2 2 + \log_2 \left(\frac{1}{y-3}\right) = \log_2 \left(\frac{2}{y-3}\right)$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{2}{x-3}\right)$$

۱۰- گزینه‌ی ۲

۲ ابتدا ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = \log_2(x+1) \Rightarrow 2^y = x+1 \Rightarrow x = 2^y - 1$$

در نتیجه $f^{-1}(x) = 2^x - 1$. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} - 1 = x - 1$$

۳ چون $g(x) = 4^x$ ، پس $g^{-1}(x) = \log_4 x$

بنابراین

$$f(g^{-1}(t)) = \log_2(\log_4 t) = 2$$

پس $t = 4^4 = 256$ در نتیجه $\log_4 t = 4 = 2^2$

۳ با توجه به تعریف لگاریتم،

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8 \quad \text{۱۱- گزینه‌ی ۲}$$

$$\log_3 y = 2 \Rightarrow y = 3^2 = 9$$

بنابراین $x+y=17$

۲ توجه کنید که

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5$$

$$\log \frac{1}{5} = \log 5^{-1} = -\log 5$$

بنابراین

$$\sqrt{2(\log 25)^2 + (\log \frac{1}{5})^2} = \sqrt{2(2 \log 5)^2 + (-\log 5)^2}$$

$$= \sqrt{9(\log 5)^2} = 3 \log 5$$

۱ ابتدا توجه کنید که $A^2 = (3^a)^2 = 3^{2a}$

بنابراین

$$\log_3 9A^2 = \log_3 (3^2 \times 3^{2a}) = \log_3 3^{(2+2a)}$$

$$= (2+2a) \log_3 3 = 2+2a$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ چون $abcd=1$ ، پس $abc=\frac{1}{d}$ ، در نتیجه

$$\log_d abc = \log_d \frac{1}{d} = -1$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$\log_c abd = \log_a bcd = -1$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر -3 است.

۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم به دست می‌آید:

$$\log_{\frac{1}{16}\sqrt{4}} \sqrt{16} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

۱۴- گزینه‌ی ۲

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{16} \log_2 2 = \frac{3}{32}$$

۴ توجه کنید که

$$\log_3 \sqrt[4]{3^3 \sqrt{3}} = \log_3 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \log_3 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\log_3 \sqrt[4]{3^3 \sqrt[3]{3}} = \log_3 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \log_3 3^{\frac{17}{12}} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{17}{12}} = \frac{9}{17} \quad \text{بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با } \frac{9}{17}$$

۴ می‌توان نوشت

$$\log(\delta + 2\sqrt{6}) + \log(\delta - 2\sqrt{6}) = \log((\delta + 2\sqrt{6})(\delta - 2\sqrt{6})) \\ = \log(\delta^2 - 24) = \log 1 = 0$$

۳ ابتدا توجه کنید که

$$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 5-4=1$$

$$\sqrt{5}+2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \quad \text{۱۵- گزینه‌ی ۲ یعنی}$$

$$\log(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = \log(\sqrt{5}-2) \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right) = -1$$

۲ توجه کنید که $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ ، بنابراین

$$\log_{\cot \alpha} \tan^2 \alpha = 2 \log_{\cot \alpha} \tan \alpha$$

$$= 2 \log_{\cot \alpha} \frac{1}{\cot \alpha} = -2$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید

$$3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

بنابراین

$$\log(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}) = \log(\sqrt{2}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

$$= 2 \log(\sqrt{2}-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = -2$$

۱ طبق ویژگی‌های توان، عبارت را به صورت

$a^{\log_f 3 \times \log_a 8}$ می‌نویسیم. اکنون توان عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\log_f 3 \times \log_a 8 = \frac{\log 3}{\log f} \times \frac{\log 8}{\log a} = \frac{\log 3}{2 \log 2} \times \frac{3 \log 2}{\log a}$$

$$= \frac{3 \log 3}{2 \log a} = \frac{3}{2} \log_a 3$$

گزینه‌ی ۲۵

بنابراین باید حاصل عبارت زیر را حساب کنیم:

$$a^{\frac{3}{2} \log_a 3} = (a^{\log_a 3})^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

۴ توجه کنید که $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ و

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

$$\log_{\sqrt[3]{9}} \left(\frac{1}{81} \right) = \log_{\frac{3}{2}} 3^{-4} = \frac{3}{2} \times (-4) \log_{\frac{3}{2}} 3 = -6$$

$$\log_{16} \sqrt{8} = \log_{2^4} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{8}$$

گزینه‌ی ۲۶

$$10^2 \log 3 = 10 \log 9 = 9$$

در نتیجه مقدار مورد نظر برابر است با

$$-6 + \frac{3}{8} + 9 = 3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$

۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log_6 2 + \log_6 18 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

بنابراین

$$a + \log_6 18 = 2 \Rightarrow \log_6 18 = 2 - a$$

گزینه‌ی ۲۷

$$a + b = \log 7! + \log 6! = \log (7! \times 6!)$$

$$= \log (7! \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6) = \log (7! \times 8 \times 9 \times 10)$$

$$= \log (9! \times 10) = \log (9!) + \log 10 = \log 9! + 1$$

$$\log 9! = a + b - 1$$

بنابراین

۲ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log \sqrt{12/5} = \log \left(\frac{25}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{25}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\log 25 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{2} (\log 5^2 - \log \frac{1}{5})$$

$$= \frac{1}{2} (2 \log 5 - \log 10 + \log 5)$$

$$= \frac{1}{2} (3 \log 5 - \log 10) = \frac{1}{2} (3a - 1)$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$1 + \log_2 15 = \log_2 2 + \log_2 15 = \log_2 30 = \frac{\log 30}{\log 2}$$

گزینه‌ی ۱۸

$$1 + \log_3 10 = \log_3 3 + \log_3 10 = \log_3 30 = \frac{\log 30}{\log 3}$$

$$1 + \log_5 6 = \log_5 5 + \log_5 6 = \log_5 30 = \frac{\log 30}{\log 5}$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$\frac{\log 2}{\log 30} + \frac{\log 3}{\log 30} + \frac{\log 5}{\log 30} = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 5}{\log 30}$$

$$= \frac{\log (2 \times 3 \times 5)}{\log 30} = \frac{\log 30}{\log 30} = 1$$

گزینه‌ی ۱۹

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad \text{با توجه به خاصیت}$$

می‌توان نوشت

$$\frac{1}{1 + \log_2 3} + \frac{1}{1 + \log_3 2} = \frac{1}{1 + \log_2 3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_2 3}}$$

$$= \frac{1}{1 + \log_2 3} + \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 3} = \frac{1 + \log_2 3}{1 + \log_2 3} = 1$$

گزینه‌ی ۲۰

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a \quad \text{چون پس}$$

$$\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 20} + \frac{1}{\log_5 40}$$

$$= \log_{70} 2 + \log_{20} 7 + \log_{40} 5$$

$$= \log_{70} (2 \times 7 \times 5) = \log_{70} 70 = 1$$

گزینه‌ی ۲۱

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b \quad \text{توجه کنید که}$$

بنابراین

$$\log_2 x - 2 \log_4 y - 2 = 0 \Rightarrow \log_2 x - 2 \times \frac{1}{2} \log_2 y - 2 = 0$$

گزینه‌ی ۲۲

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 4$$

بنابراین $x = 4y$ و

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{4y-y}{4y+y} = \frac{3}{5}$$

گزینه‌ی ۲۳

۴ توجه کنید که

$$\frac{1}{9 \log_8 3} = 3^2 \log_3 8 = 3 \log_3 64 = 64$$

$$16 \log_4 6 = 4^2 \log_2 6 = 4 \log_2 36 = 36$$

گزینه‌ی ۲۴

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 14$

اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که تساوی داده شده را می‌توان این طور نوشت

$$\frac{1}{3} = \log_2 \sqrt[3]{x} \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = 2$$

توجه کنید که

$$\log_c a^2 = 2 \log_c a = 5 \Rightarrow \log_c a = \frac{5}{2}$$

در نتیجه

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a} = \frac{2}{5}$$

$$\log_d a = \frac{1}{\log_a d} = \frac{1}{5}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\log_d c = \frac{\log c}{\log d} = \frac{\log c}{\log a} \times \frac{\log a}{\log d} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

توجه کنید که

$$216 = 6^3 = 2^3 \times 3^3$$

در نتیجه

$$\log 216 = \log(2^3 \times 3^3) = \log 2^3 + \log 3^3$$

$$= 3 \log 2 + 3 \log 3 = 3x + 3y$$

توجه کنید

$$\log_x 2 = \frac{\log 2}{\log x}$$

$$\log_y 3 = \frac{\log 3}{\log y}$$

در نتیجه

$$\frac{\log 2}{\log x} = \frac{\log 3}{\log y} \Rightarrow \frac{\log x}{\log y} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

بنابراین

$$\log_y x = \frac{\log x}{\log y} = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2$$

از دو طرف تساوی $2^x = 3^y$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log 2^x = \log 3^y \Rightarrow x \log 2 = y \log 3$$

بنابراین

$$\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{x}{y}$$

بنابراین

$$\log_8 9 = \frac{\log 9}{\log 8} = \frac{\log 3^2}{\log 2^3} = \frac{2 \log 3}{3 \log 2}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{2x}{3y}$$

توجه کنید که

$$\log_3 x + \log_3 x^2 + \dots + \log_3 x^{n-1}$$

$$= \log_3 (x \times x^2 \times \dots \times x^{n-1})$$

$$= \log_3 x^{\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{(n-1)n}{2} \log_3 x$$

بنابراین

$$\frac{(n-1)n}{2} \log_3 x = 2n^2 - 2n = 2n(n-1)$$

$$\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 = 81$$

توجه کنید که

$$\tan 45^\circ = 1$$

پس

$$\log(\tan 45^\circ) = \log 1 = 0$$

و در نتیجه $A = 0$.

ابتدا توجه کنید که

$$\log(\tan \alpha) + \log(\tan(90^\circ - \alpha))$$

$$= \log(\tan \alpha) + \log(\cot \alpha)$$

$$= \log(\tan \alpha \cot \alpha) = \log 1 = 0$$

بنابراین

$$\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 89^\circ) = 0$$

$$\log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 88^\circ) = 0$$

:

$$\log(\tan 44^\circ) + \log(\tan 46^\circ) = 0$$

همچنین $\log(\tan 45^\circ) = \log 1 = 0$ ، بنابراین $A = 0$.

با استفاده از تساوی $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

می‌توان نوشت

$$A = \frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 4}{\log 5} \times \frac{\log 5}{\log 6} \times \dots \times \frac{\log 80}{\log 81} = \frac{\log 3}{\log 81}$$

$$= \frac{\log 3}{\log 3^4} = \frac{\log 3}{4 \log 3} = \frac{1}{4}$$

توجه کنید که

$$\log_{a^3} b = \frac{1}{3} \log_a b = \frac{1}{3} \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_{\sqrt{b}} 2 = 2 \log_b 2 = 2 \frac{\log 2}{\log b}$$

$$\log_{16} a^2 = 2 \log_{16} a = 2 \times \frac{1}{4} \log_2 a = \frac{1}{2} \times \frac{\log a}{\log 2}$$

بنابراین

$$\log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{\log_2 (3^3 \times 2)}{\log_2 (2^3 \times 3)} = \frac{3 \log_2 3 + \log_2 2}{3 \log_2 2 + \log_2 3}$$

$$= \frac{3(2a-1)+1}{3+2a-1} = \frac{6a-2}{2a+2} = \frac{3a-1}{a+1}$$

۱۲۲- گزینه‌ی ۲ اگر $\log_2 3 = b$ ، آن گاه

$$a = \log_{18} 72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 18} = \frac{\log_2 (2^3 \times 3^2)}{\log_2 (2 \times 3^2)}$$

$$= \frac{\log_2 2^3 + \log_2 3^2}{\log_2 2 + \log_2 3^2} = \frac{3 \log_2 2 + 2 \log_2 3}{\log_2 2 + 2 \log_2 3} = \frac{3+2b}{1+2b}$$

بنابراین

$$a = \frac{3+2b}{1+2b} \Rightarrow a + 2ab = 3 + 2b \Rightarrow b(2a-2) = 3-a$$

$$\Rightarrow b = \frac{3-a}{2a-2}$$

۱۲۳- گزینه‌ی ۴ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم می‌توان

نوشت

$$\log \sqrt[4]{54} = \log 54^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 54 = \frac{1}{4} \log (27 \times 2)$$

$$= \frac{1}{4} (\log 27 + \log 2) = \frac{1}{4} (3 \log 3 + \log 2)$$

$$= \frac{1}{4} (3a + b)$$

۱۲۴- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \log_{ab} x = \frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 3 \Rightarrow \frac{\log(ab)}{\log a} = 3 \Rightarrow \frac{\log a + \log b}{\log a} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\log b}{\log a} = 3 \Rightarrow \log_a b = 2$$

بنابراین

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$\log_a b + \log_b a = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

۱۲۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا از تساوی $\sin x = \sqrt{1-4^a}$ مقدار $|\cos x|$ را حساب می‌کنیم:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (\sqrt{1-4^a})^2 = 1 - 1 + 4^a = 4^a$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۴ به کمک رابطه‌ی $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

می‌توان نوشت

$$\log_6 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (2^2 \times 5)}{\log_2 (2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_2 2^2 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{2 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$$

اکنون توجه کنید که

$$xy = \log_2 3 \times \log_3 5 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\log 5}{\log 2} = \log_2 5$$

در نتیجه

$$\log_6 20 = \frac{2+xy}{1+x}$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$ab = \log_{\sqrt{3}} 4 \times \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 2^2 \times \log_3 2^2$$

$$= 2 \times \frac{2}{1} \log_3 2 \times (2 \log_3 3) = 8 \log_3 2 \times \log_3 3$$

$$= 8 \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 8$$

بنابراین

$$\log_{ab} 4 = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = 2 \times \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

۱۲۰- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\log 15 = b \Rightarrow \log 3 + \log 5 = b \Rightarrow a + \log 5 = b$$

$$\Rightarrow \log 5 = b - a$$

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - (b - a) = a - b + 1$$

بنابراین

$$\log 48 = \log (2^4 \times 3) = 4 \log 2 + \log 3$$

$$= 4(a - b + 1) + a = 5a - 4b + 4$$

۱۲۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log_6 6 = a \Rightarrow \log_{2^3} (3 \times 2) = a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (\log_2 3 + \log_2 2) = a$$

$$\Rightarrow \log_2 3 + 1 = 3a$$

$$\Rightarrow \log_2 3 = 3a - 1$$

در نتیجه

۱۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{28} 112 = \log_{28} (16 \times 7) = \log_{28} 16 + \log_{28} 7 \\ = 2 \log_{28} 4 + \log_{28} 7$$

حال اگر فرض کنیم $\log_{28} 4 = x$ و $\log_{28} 7 = y$ معلوم می‌شود که

$$A = x^2 + y(2x + y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \\ = (\log_{28} 4 + \log_{28} 7)^2 = (\log_{28} 28)^2 = 1$$

۱۳۰- گزینه ۱ توجه کنید که $27 < 56 < 81$ در نتیجه

$$3^3 < 56 < 3^4$$

اگر از سه طرف نابرابری در مبنای ۳ لگاریتم بگیریم، به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$3 = \log_3 3^3 < \log_3 56 < \log_3 3^4 = 4$$

بنابراین

$$[\log_3 56] = 3$$

۱۳۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$8 \log_3 \sqrt{2} = \log_3 (\sqrt{2})^8 = \log_3 16$$

اکنون با توجه به این که $9 < 16 < 27$ به دست می‌آید

$$\log_3 9 < \log_3 16 < \log_3 27 \Rightarrow 2 < \log_3 16 < 3$$

بنابراین

$$[8 \log_3 \sqrt{2}] = [\log_3 16] = 2$$

۱۳۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $2^n \leq a < 2^{n+1}$

آن‌گاه $n \leq \log_2 a < n+1$ و در نتیجه $[\log_2 a] = n$. بنابراین

اگر $2 \leq a < 4$ ، آن‌گاه $1 \leq \log_2 a < 2$ و $[\log_2 a] = 1$.

اگر $4 \leq a < 8$ ، آن‌گاه $2 \leq \log_2 a < 3$ و $[\log_2 a] = 2$.

اگر $8 \leq a < 16$ ، آن‌گاه $3 \leq \log_2 a < 4$ و $[\log_2 a] = 3$.

اگر $16 \leq a < 32$ ، آن‌گاه $4 \leq \log_2 a < 5$ و $[\log_2 a] = 4$.

اگر $32 \leq a < 64$ ، آن‌گاه $5 \leq \log_2 a < 6$ و $[\log_2 a] = 5$.

پس

$$A = 1 + \underbrace{2+2+2+2}_{64} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{64} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{64} + \underbrace{5+5+\dots+5}_{64} \\ = 1 + 8 + 24 + 64 + 160 = 257$$

۱۳۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$b = \log_{\frac{1}{4}} 5 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 5 = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}$$

و چون $\sqrt{5} < 3 < 4$

$$x < y \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$$

پس

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5} > \log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 4$$

یعنی $b > a > c$.

$$|\cos x| = \sqrt{4^a} = 2^a$$

بنابراین

$$\log_8 \sqrt[4]{1 + \tan^2 x} = \log_8 \sqrt[4]{\frac{1}{\cos^2 x}} = \log_{2^3} |\cos x|^{-\frac{1}{2}} \\ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \log_2 |\cos x| = -\frac{1}{6} \log_2 2^a \\ = -\frac{a}{6}$$

۱۲۶- گزینه ۲ به دو طرف تساوی داده شده $2ab$ را اضافه

می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = 2ab$$

بنابراین

$$\log_\Delta (a+b)^2 = \log_\Delta (2ab)$$

$$2 \log_\Delta (a+b) = \log_\Delta 2 + \log_\Delta a + \log_\Delta b$$

$$2 \log_\Delta (a+b) = 2 + \log_\Delta a + \log_\Delta b$$

$$\log_\Delta (a+b) = 1 + \frac{\log_\Delta a + \log_\Delta b}{2}$$

۱۲۷- گزینه ۴ راه حل اول با توجه به تساوی

$$\log_n m = \frac{\log_k m}{\log_k n}$$

$$\frac{\log(\log b)}{\log a} = \log_a(\log b)$$

حالا با توجه به تساوی $a^{\log_a x} = x$ می‌توان نوشت

$$\frac{\log(\log b)}{a^{\log a}} = a^{\log_a(\log b)} = \log b$$

راه حل دوم فرض می‌کنیم

$$\frac{\log(\log b)}{x = a^{\log a}}$$

در این صورت

$$\log_a x = \frac{\log(\log b)}{\log a} \Rightarrow \frac{\log x}{\log a} = \frac{\log(\log b)}{\log a}$$

$$\log x = \log(\log b) \Rightarrow x = \log b$$

۱۲۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\log_a \left(\frac{2x}{y}\right) + \log_a \left(\frac{3y}{2z}\right) + \log_a \left(\frac{4z}{3x}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1$$

$$\log_a \left(\frac{2x}{y} \times \frac{3y}{2z} \times \frac{4z}{3x}\right) = 1 \Rightarrow \log_a(4) = 1 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین

$$\log_a \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\log_4(13 + \log_2(x-1)) = 2 \Rightarrow 13 + \log_2(x-1) = 4^2$$

$$\log_2(x-1) = 3 \Rightarrow x-1 = 2^3 \Rightarrow x = 8+1 = 9$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۱ چون $\log_a b = b$ پس

$$\log_2(\log_2(\log_2 x)) = 3 \Rightarrow \log_2(\log_2 x) = 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow x = 2^8 = 256$$

۱۴۲- گزینه‌ی ۲ چون $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ پس معادله‌ی

مورد نظر می‌شود

$$\log_{2^2} x + \log_{2^4} x + \log_{2^6} x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{6} \log_2 x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{12} \log_2 x = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

۱۴۳- گزینه‌ی ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$$

$$\log_x(3x+8) + \log_x(x-6) = 2$$

$$\log_x((3x+8)(x-6)) = 2$$

$$(3x+8)(x-6) = x^2$$

$$3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 8$$

به ازای $x = -3$ عبارت‌های $\log_x(3x+8)$ و $\log_x(x-6)$

بی‌معنی هستند، بنابراین $x = 8$ و مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴

برابر است با

$$\log_4 x = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

۱۴۴- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\log_4(x^2 - 6x + 9) = \log_4(x-3)^2 = \frac{\log(x-3)^2}{\log 4}$$

$$= \frac{2 \log|x-3|}{2 \log 2} = \log_2|x-3|$$

در نتیجه مسئله به حل معادله‌ی زیر منجر می‌شود

$$\log_2(x+3) + \log_2|x-3| = \log_2(x+3)|x-3| = 4$$

بنابراین

$$(x+3)|x-3| = 2^4 = 16 \quad (*)$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۲ چون $\log b$ واسطه‌ی حسابی $\log a$ و

$\log c$ است، پس

$$2 \log b = \log a + \log c \Rightarrow \log b^2 = \log ac \Rightarrow b^2 = ac$$

پس b واسطه‌ی هندسی a و c است.

۱۳۵- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$10^{x^2-x} = 5 \Rightarrow x^2 - x = \log 5 \Rightarrow x^2 - x - \log 5 = 0$$

بنابراین $x_1 + x_2 = 1$ و $x_1 x_2 = -\log 5$ در نتیجه

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1 - \log 5 = \log 10 - \log 5$$

$$= \log \frac{10}{5} = \log 2$$

۱۳۶- گزینه‌ی ۱ کافی است معادله‌ی $x^2 - 7x = x$ را حل

کنیم:

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8$$

واضح است که $x = 0$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر

تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۳۷- گزینه‌ی ۲ از تساوی فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\log_2(2 + \log_3 x) = 2 \Rightarrow 2 + \log_3 x = 4 \Rightarrow \log_3 x = 2$$

$$\Rightarrow x = 3^2 = 9$$

بنابراین

$$x^2 + x = 9^2 + 9 = 90$$

۱۳۸- گزینه‌ی ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به

صورت $(2x-1)^2 = x$ می‌نویسیم. بنابراین

$$4x^2 - 4x + 1 = x \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

مبنای لگاریتم عبارت $(2x-1)$ است که به ازای $x = 1$ برابر

۱ می‌شود و به ازای $x = \frac{1}{4}$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود. ولی می‌دانیم

که مبنای لگاریتم باید مثبت و مخالف یک باشد. پس هیچ کدام

از مقدارهای به‌دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۱۳۹- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\log_2(29 + \log_5(x+1)) = 5 = \log_2 2^5$$

$$29 + \log_5(x+1) = 2^5$$

$$\log_5(x+1) = 32 - 29 = 3$$

$$x+1 = 5^3 = 125 \Rightarrow x = 124$$

۱۵۹- گزینه ۱ از دو طرف معادله $2^x = 3^y$ در مبنای

۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3 2^x = \log_3 3^y \Rightarrow x \log_3 2 = y \log_3 3$$

$$\Rightarrow y = x \log_3 2$$

در معادله $x + y = 1$ به جای y قرار می‌دهیم $x \log_3 2$ ، در

نتیجه

$$x + x \log_3 2 = 1 \Rightarrow x(1 + \log_3 2) = 1$$

$$x(\log_3 3 + \log_3 2) = 1 \Rightarrow x \log_3 6 = 1$$

$$x = \frac{1}{\log_3 6} \Rightarrow x = \log_6 3$$

۱۶۰- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $\log x = a$ و $\log y = b$ ،

آن‌گاه

$$\begin{cases} a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - a \\ ab = 8 \end{cases}$$

بنابراین

$$a(6 - a) = 8$$

و در نتیجه

$$a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 4) = 0$$

$$a = 2, b = 4 \Rightarrow x = 10^2, y = 10^4$$

$$a = 4, b = 2 \Rightarrow x = 10^4, y = 10^2$$

بنابراین

$$\log \frac{x}{y} = \log \frac{10^2}{10^4} = \log 10^{-2} = -2$$

یا

$$\log \frac{x}{y} = \log \frac{10^4}{10^2} = \log 10^2 = 2$$

۱۶۱- گزینه ۳ از دو طرف معادله $x^{\log y} = 100$ لگاریتم

می‌گیریم:

$$\log x^{\log y} = \log 100 \Rightarrow \log y \times \log x = 2$$

از دو طرف معادله $xy = 1000$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log(xy) = \log 1000 \Rightarrow \log x + \log y = 3$$

فرض می‌کنیم $a = \log x$ و $b = \log y$. در این صورت

دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} a \times b = 2 \\ a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - a \end{cases}$$

$$a(3 - a) = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0$$

$$a = 1 \Rightarrow b = 2, \quad a = 2 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین

$$\log x = 1, \log y = 2 \Rightarrow x = 10, y = 100$$

$$\log x = 2, \log y = 1 \Rightarrow x = 100, y = 10$$

در هر صورت $x + y = 110$.

۱۶۲- گزینه ۳ از معادله $\log y = 2 \log 3 + \log x$

به دست می‌آید

$$\log y - \log x = \log 9 \Rightarrow \log \frac{y}{x} = \log 9$$

$$\frac{y}{x} = 9 \Rightarrow y = 9x$$

در معادله $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ به جای y قرار می‌دهیم $9x$ ، در نتیجه

$$2^{x-9x} \times 4^{x+9x} = 1 \Rightarrow 2^{x-9x} \times 2^{2x+18x} = 1 \Rightarrow 2^{11x-7} = 1$$

$$11x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{11} \Rightarrow y = \frac{9}{11}$$

۱۶۳- گزینه ۴ از معادله $\log(x + 2y) = 1 + \log y$

به دست می‌آید

$$\log(x + 2y) = \log 10y \Rightarrow x + 2y = 10y \Rightarrow x = 8y$$

در معادله $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ به جای x قرار می‌دهیم $8y$ ،

در نتیجه

$$3^{16y+y} = 9 \times 3^{8y-y} \Rightarrow 3^{17y} = 3^{7y+2}$$

$$17y = 7y + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

۱۶۴- گزینه ۳ می‌دانیم $\log 10 = 1$ و $\log \frac{1}{10} = -1$. در

نتیجه نابرابری‌ها را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\log \frac{1}{10} < \log x < \log 10$$

$$\text{بنابراین } \frac{1}{10} < x < 10$$

۱۶۵- گزینه ۴ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_3(10 - x) \leq \log_3 9$$

نتیجه می‌گیریم

$$10 - x \leq 9 \Rightarrow x \geq 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3(10 - x)$ وقتی معنی‌دار است که

$10 - x > 0$ و در نتیجه $x < 10$. پس مجموعه‌ی جواب‌های

نامعادله بازه‌ی $[1, 10)$ است.

۱۶۶- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2$ ، آن‌گاه

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Rightarrow x+1 < \frac{1}{4}$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x > -2$ معنی‌دار است و عبارت

$\log(2x+1)$ برای $x > -\frac{1}{2}$ معنی‌دار است. پس مجموعه‌ی

جواب‌های نامعادله $(-\frac{1}{2}, 1)$ است.

۱۷۱- گزینه‌ی ۳ نامعادله را به صورت

$$\log_{\frac{5}{2}}(\log_2 x) > \log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2}$$

می‌نویسیم. در نتیجه

$$\log_2 x < \frac{5}{2} \Rightarrow \log_2 x < \log_2 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow x < 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x < \sqrt{2}$$

از طرف دیگر عبارت $\log_2 x$ برای $x > 0$ تعریف شده است

و عبارت $\log_{\frac{5}{2}}(\log_2 x)$ وقتی تعریف می‌شود که

$$\log_2 x > 0 \Rightarrow \log_2 x > \log_2 1 \Rightarrow x > 1$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله بازه‌ی $(1, \sqrt{2})$ است.

۱۷۲- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\log_2(a-3) < 5 = \log_2 2^5 \Rightarrow a-3 < 2^5 \Rightarrow a < 32+3=35$$

همچنین، باید $a-3 > 0$ ، یعنی $a > 3$ ، پس $3 < a < 35$. اگر

$\log_2(39-a)$ عددی صحیح باشد، باید $39-a$ به شکل 2^s

باشد که در آن s عددی صحیح است. البته چون $3 < a < 35$ ،

پس $36 < 39-a < 4$ ، پس s عددی طبیعی است. در نتیجه

$39-a$ ، یکی از عددهای 2^3 ، 2^4 و 2^5 است، یعنی

$\log_2(39-a)$ یکی از عددهای 3 ، 4 و 5 است که مجموع

آن‌ها ۱۲ است.

۱۷۳- گزینه‌ی ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+2)$ و

$$\log(3-x) \neq 0$$

$$D_f = \{x \mid x+2 > 0, 3-x > 0, \log(3-x) \neq 0\}$$

اگر $\log(3-x) = 0$ ، آن‌گاه $x=2$. بنابراین دامنه‌ی تابع f به

صورت $\{2\} - (-2, 3)$ است.

۱۷۴- گزینه‌ی ۲ برای این که $\log_3(x+2)$ با معنی باشد،

باید $x+2 > 0$ ، یعنی $x > -2$ از طرف دیگر، باید

$$1 - \log_3(x+2) \geq 0 \Rightarrow \log_3(x+2) \leq 1 = \log_3 3$$

$$\Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

پس دامنه‌ی f بازه‌ی $(-2, 1]$ است.

بنابراین $x < -\frac{3}{4}$. همچنین باید $x+1 > 0$. در نتیجه $x > -1$.

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به صورت زیر است.

$$(-1, -\frac{3}{4})$$

۱۶۷- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که اگر $\log_a x > \log_a y$ و

$a > 1$ ، آن‌گاه $x > y$. بنابراین

$$\log_2(\log_2(2x+1)) > 2 = \log_2 4$$

$$\log_2(2x+1) > 4 = \log_2 3^4$$

$$2x+1 > 3^4 \Rightarrow x > 40.$$

بنابراین عددهای طبیعی ۱ تا ۴۰ در نامعادله صدق نمی‌کنند

که تعداد آن‌ها ۴۰ تا است.

۱۶۸- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{5}}(4x+1) = \log_{5^{-1}}(4x+1) = -\log_5(4x+1)$$

بنابراین نامعادله‌ی داده شده می‌شود

$$-3 < -\log_5(4x+1) < -2$$

در نتیجه

$$2 < \log_5(4x+1) < 3$$

$$\log_5(4x+1) < 3 = \log_5 5^3 \Rightarrow 4x+1 < 5^3 \Rightarrow x < 31$$

$$\log_5(4x+1) > 2 = \log_5 5^2 \Rightarrow 4x+1 > 5^2 \Rightarrow x > 6$$

پس $6 < x < 31$ (توجه کنید که در این محدوده $4x+1 > 0$).

تعداد عددهای صحیح در این محدوده ۲۴ تا است.

۱۶۹- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-1 > 0$ ، یعنی

$x > 1$ از طرف دیگر،

$$|\log_4(x-1)| < 1 \Rightarrow -1 < \log_4(x-1) < 1$$

$$\log_4(x-1) > -1 \Rightarrow \log_4(x-1) > \log_4 4^{-1}$$

$$\Rightarrow x-1 > \frac{1}{4} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$$

$$\log_4(x-1) < 1 \Rightarrow \log_4(x-1) < \log_4 4$$

$$\Rightarrow x-1 < 4 \Rightarrow x < 5$$

بنابراین

$$\frac{5}{4} < x < 5$$

عددهای صحیح در این محدوده ۲، ۳ و ۴ هستند که مجموع

آن‌ها ۹ است.

۱۷۰- گزینه‌ی ۲ از نامعادله‌ی $\log(x+2) > \log(2x+1)$

نتیجه می‌شود

$$x+2 > 2x+1 \Rightarrow x < 1$$

۱۷۵- گزینه‌ی ۲ عبارت‌هایی که لگاریتم آن‌ها را حساب

می‌کنیم باید مثبت باشند، پس

$$4-x > 0 \Rightarrow x < 4$$

$$\log_{0.2}(4-x) - 1 > 0 \Rightarrow \log_{0.2}(4-x) > \log_{0.2} 0.2$$

$$\Rightarrow 4-x < 0.2 \Rightarrow x > 3.8$$

بنابراین دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(3.8, 4)$ است و در نتیجه

$$b-a = 0.2 \text{ و } b=4, a=3.8$$

۱۷۶- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid \frac{5x-1}{x+2} > 0, \log \frac{5x-1}{x+2} \geq 0, x \neq -2\}$$

$$\frac{5x-1}{x+2} > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > \frac{1}{5}$$

$$\log \frac{5x-1}{x+2} \geq \log 1 = 0 \text{ را به صورت } \log \frac{5x-1}{x+2} \geq 0$$

درمی‌آوریم. در نتیجه

$$\frac{5x-1}{x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{4x-3}{x+2} \geq 0$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی فوق به صورت

$$(-\infty, -2) \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$$

صورت زیر است:

$$D_f = (-\infty, -2) \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$$

بنابراین دامنه‌ی f عددهای صحیح $0, -1, -2$ را شامل نمی‌شود.

کتابخانه

فصل ششم

@khanah_book

حد و پیوستگی

خانه کتاب

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس اول: فرایندهای حدی

تعریف

فرض کنید تابع f در اطراف نقطه‌ی x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم **حد** تابع f در نقطه‌ی x_0 برابر عدد L است، هرگاه بتوان مقادیر تابع f را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آن که x (هم از چپ، هم از راست) به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک شده باشد. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

تعریف

فرض کنید تابع f در سمت چپ نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد. می‌گوییم **حد چپ** تابع f در نقطه‌ی x_0 برابر عدد L است، هرگاه بتوان مقادیر تابع f را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آن که x از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک شده باشد. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

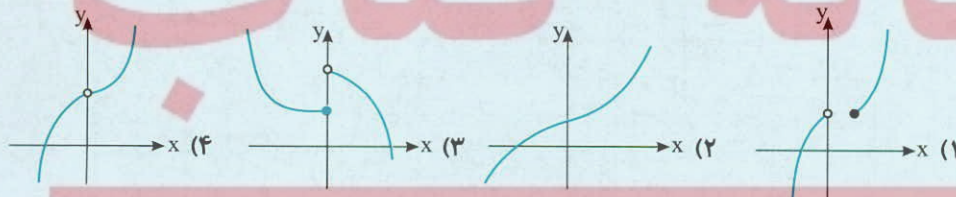
فرض کنید تابع f در سمت راست نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد. می‌گوییم **حد راست** تابع f در نقطه‌ی x_0 برابر عدد L است، هرگاه بتوان مقادیر تابع f را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آن که x از سمت راست به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک شده باشد. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

نکته

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ اگر و فقط اگر } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

تست ۱

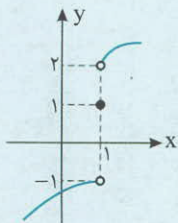
کدام یک از توابعی که نمودار آن‌ها در زیر رسم شده، در $x=0$ دارای حد راست است ولی حد ندارد؟



پاسخ: در گزینه‌های (۲) و (۴) تابع در $x=0$ حد دارد. در گزینه‌ی (۱) تابع در $x=0$ حد راست ندارد. در گزینه‌ی (۳) تابع هم حد راست دارد، هم حد چپ، ولی این دو حد نابرابرند.

تست ۲

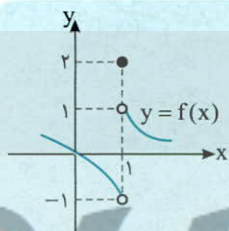
با توجه به نمودار f ، مقدار $A = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - f(1)$ کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) -۳
(۳) -۴
(۴) صفر

پاسخ: از روی نمودار معلوم می‌شود که

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow A = -1 - 2 - 1 = -4$$



نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x) = f(\frac{1}{x})$ مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۳- (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۲-

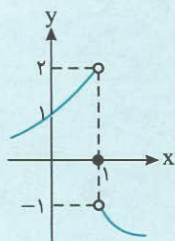
پاسخ: از روی شکل معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 2$$

پس مقدار عبارت خواسته شده برابر ۲- است.

تست ۳



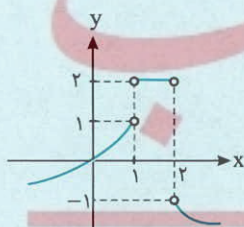
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)]$

کدام است؟

- (۱) ۲- (۲) ۵- (۳) ۴- (۴) ۶-

پاسخ: با توجه به نمودار، اگر $x \rightarrow 1^+$ آن گاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ آن گاه $f(x) \rightarrow 2^-$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = -1 - 2 \times 2 = -5$$



نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(3-x^2)$

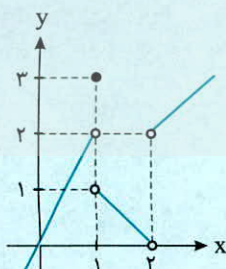
کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱- (۴) صفر

پاسخ: اگر x از سمت چپ به ۱ نزدیک شود، آن گاه x^2 هم از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، پس $3-x^2$ از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(3-x^2) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -1$$

تست ۵



نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x))$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست ۶

پاسخ: وقتی $x \rightarrow 1^-$ یعنی x با مقادیر کم‌تر از یک به عدد یک نزدیک می‌شود و با توجه به نمودار،

مقادیر $f(x)$ نیز با مقادیر کم‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \quad f(x) < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 0$$

تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 2 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی بازه $(-3, 3)$ در چند نقطه حد ندارد؟

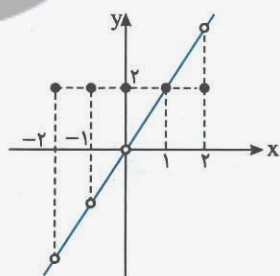
تست ۷

(۴) هیچ نقطه

(۳) سه نقطه

(۲) دو نقطه

(۱) پنج نقطه



پاسخ: نمودار تابع یک خط راست است که نقاط با طول صحیح روی آن توخالی شده‌اند و تنها در $x = 1$ است که نقطه‌ی توپر متناظر روی خط قرار گرفته است. بنابراین در تمام نقاط بازه، تابع حد دارد، هرچند که در نقاط با طول‌های -2 ، -1 ، 0 و 2 ، حد تابع با مقدار آن فرق دارد.

خانه کتاب

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

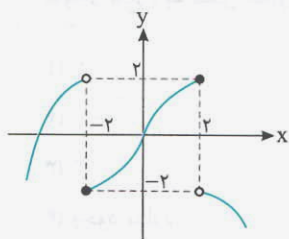
فصل ششم

درس اول:

فرایندهای حدی

@khanah_book

۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟



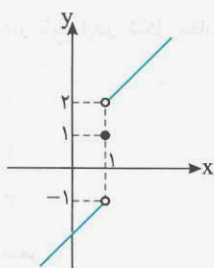
(۱) -۴

(۲) صفر

(۳) ۲

(۴) ۴

۲- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1)$ کدام است؟



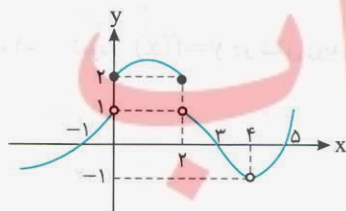
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۳- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. چند تا از تساوی‌های زیر درست است؟



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$$

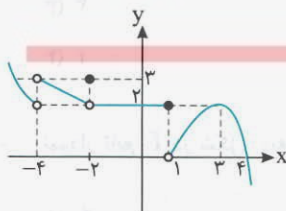
(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در چند نقطه حد ندارد؟



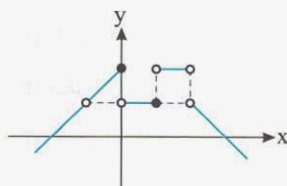
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. در چند نقطه حد راست تابع از حد چپ آن بیش‌تر است؟



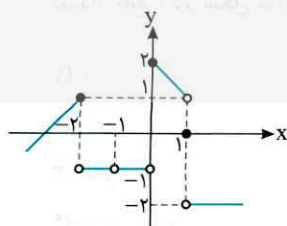
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۶- نمودار تابع f به شکل مقابل است. در نقطه‌ای مقدار حد راست تابع با مقدار تابع برابر است ولی با حد چپ تابع برابر نیست. مجموع حدهای چپ و راست تابع در این نقطه کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) -۲

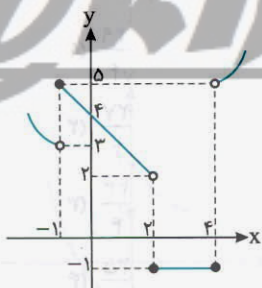
(۴) صفر

۱۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(f(x))$ کدام است؟



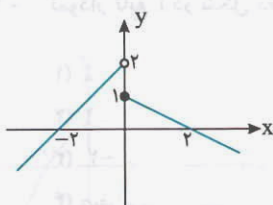
- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۲
(۴) -۲

۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x))$ چقدر است؟



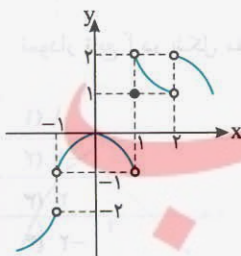
- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۲
(۴) ۳

۲۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x))$ چقدر است؟



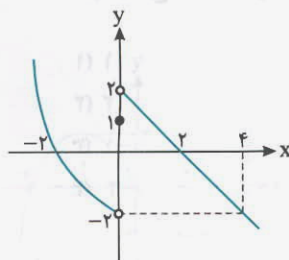
- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) -۲

۲۲- با توجه به نمودار تابع f مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x))$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) -۲

۲۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $A = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(f(x))$ و $B = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x))$ مقدار $\frac{A}{B}$ کدام است؟



$$\frac{-1}{2} \quad (۲)$$

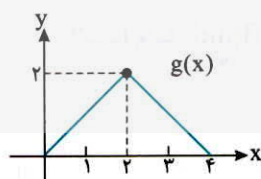
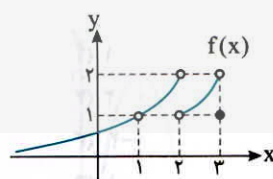
$$-۱ \quad (۴)$$

مقدار $\frac{A}{B}$ کدام است؟

$$۱ \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

۲۴- نمودار تابع‌های f و g در شکل‌های زیر رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x))$ چقدر است؟

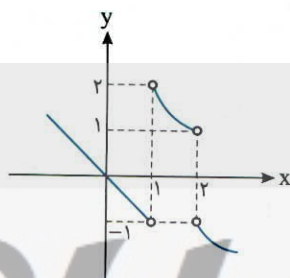


$$۲ \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۳)$$



۲۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} [f(f(x))]$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) -۲

۲۶- تابع $f(x) = [x] + [-x]$ در چند نقطه از بازه $[-3, 3]$ حد ندارد؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۷
(۴) صفر

۲۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 4 & x \in \mathbb{Z} \\ -6 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(3x)$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) -۶
(۳) وجود ندارد.
(۴) صفر

۲۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1| & x \neq \pm 1 \\ 1 & x = -1 \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) تابع فقط در $x=1$ حد ندارد.
(۲) تابع فقط در $x=-1$ حد ندارد.
(۳) تابع در $\mathbb{R}$ حد دارد.
(۴) تابع در $x=1, -1$ حد ندارد.

۲۹- اگر $f(x) = \begin{cases} -3 & x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 4 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) ۱۲
(۳) -۲۰
(۴) وجود ندارد.

۳۰- تابع $f(x) = x(-1)^{[x]}$ در چند نقطه از بازه $(-2, 2)$ حد ندارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۵

۳۱- تابع $f(x) = \frac{x-2}{[x]}$ در چند نقطه از بازه $(1, 4)$ حد ندارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۳۲- تابع $f(x) = x[x]$ در چند نقطه از بازه $(-1, 2)$ حد ندارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس دوم: محاسبه‌ی حد توابع

قضیه ۱- حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} (c) = c$.

$$\lim_{x \rightarrow a} (x) = a \quad ۲-$$

فرض کنید تابع‌های f و g در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

در این صورت

۱- **حد مجموع:** مجموع این دو تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

۲- **حد تفاضل:** تفاضل این دو تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$$

۳- **حد حاصل ضرب:** حاصل ضرب این دو تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = L_1 \times L_2$$

۴- **حد خارج قسمت:** اگر $L_2 \neq 0$ ، آن گاه تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و c عددی ثابت باشد، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL \quad ۱-$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n \quad ۲-$$

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ چند جمله‌ای و a عددی دلخواه باشد، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد و $\sqrt[n]{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد،

آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آنگاه

نکته

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

اگر a عددی حقیقی باشد، آنگاه

قضیه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - (x+3)^2}{\sin x + 2 \cos x}$ چقدر است؟

تست ۱

$$-\frac{7}{3} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

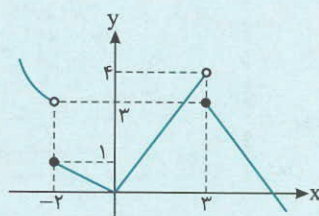
$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{7}{2} \quad (1)$$

پاسخ: توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{4+x} - (x+3)^2) = \sqrt{4+0} - (0+3)^2 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2 \cos x) = \sin 0 + 2 \cos 0 = 0 + 2 \times 1 = 2$$

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با $-\frac{7}{2}$.نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x-4)}{f(5-x)}$

تست ۲

چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

پاسخ: وقتی که x از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود، $x-4$ از سمت راست به -2 نزدیک می‌شود و $5-x$ از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x-4) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(5-x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x-4)}{f(5-x)} = \frac{1}{4}$$

در نتیجه

اگر $f(x) = (x^2 - 1)^2$ و $g(x) = (2x - 1)^2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x)g(x)}$ کدام است؟

تست ۳

$$\frac{2}{9} \quad (4)$$

$$\frac{1}{81} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

پاسخ: توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = (2^2 - 1)^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (2 \times 2 - 1)^2 = 9$$

بنابراین طبق قضیه‌های محاسبه‌ی حد می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x)g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)g(x))} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{2 \times 9 - 9}{9 \times 9} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1 & x < 2 \\ 9 & x = 2 \\ 2x+3 & x > 2 \end{cases}$$

مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ چقدر است؟

تست ۴

۴ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x-1) = 4 \times 2 - 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+3) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 \text{ پس}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2bx-a & x < 2 \\ ax+3b & x \geq 2 \end{cases}$$

مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 22$ چقدر است؟

تست ۵

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2bx-a) = 2b(2) - a = 4b - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+3b) = a(2) + 3b = 2a + 3b$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 22$ پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۲۲ است:

$$\begin{cases} 4b-a=22 \\ 2a+3b=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

بنابراین $ab=12$.

اگر تابع f در نقطه‌ی ۲ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x - 2) = 6$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

تست ۶

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: طبق قضیه‌ی حد مجموع تابع‌ها می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 0 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6 \text{ در نتیجه}$$

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

تست ۷

۳ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$. در این صورت طبق قضیه‌های حد،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{2L-1}{L+1} = 1 \Rightarrow 2L-1 = L+1 \Rightarrow L=2$$

اگر تابع‌های f و g در $x=1$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow 1} (2f+g)(x)=3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (f-3g)(x)=5$ حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) \text{ کدام است؟}$$

$$-3 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

پاسخ: اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = L_2$ ، طبق قضیه‌های حد،

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2f+g)(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2L_1 + L_2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f-3g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = L_1 - 3L_2 = 5$$

از حل دستگاه فوق به دست می‌آید

$$L_1 = 2, \quad L_2 = -1$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{2}{-1} = -2$$

قضیه

تابع $f(x) = [x]$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر x_0 عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = x_0 - 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = x_0$$

بنابراین f در نقطه‌ی x_0 حد ندارد.

ب) اگر x_0 عددی صحیح نباشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = [x_0]$$

نکته

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن‌گاه

۱- اگر L عددی صحیح نباشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [L]$.

۲- اگر L عددی صحیح باشد و مقدارهای f در اطراف a از L بیش‌تر باشند، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = L$.

۳- اگر L عددی صحیح باشد و مقدارهای f در اطراف a از L کم‌تر باشند، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = L - 1$.

مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} [|x|] + \lim_{x \rightarrow 0^+} [|x|]$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ: مقدار دو حد را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow [x] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [|x|] = |-1| = 1$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [|x|] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = [0^+] = 0$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $1+0=1$.

$$f(x) = \begin{cases} [x] & 0 < x < 2 \\ |x| & 2 \leq x < 3 \end{cases} \quad \text{تابع}$$

تست ۱۰

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: تابع $[x]$ در هیچ نقطه‌ای صحیح از دامنه‌اش حد ندارد. پس در محدوده‌ی $0 < x < 2$ تابع f در $x=1$ حد ندارد. حدهای چپ و راست تابع را در نقطه‌ی تغییر ضابطه ($x=2$) حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x| = 2$$

پس تابع در $x=2$ نیز حد ندارد. در سایر نقطه‌های دامنه، تابع حد دارد.

$$\text{اگر } a = -\frac{1}{5}, \text{ حاصل } \lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{1}{x} \right] \text{ کدام است؟}$$

تست ۱۱

۱ (۱) -۵ ۲ (۲) -۴ ۳ (۳) -۶ ۴ (۴) -۳

پاسخ: توجه کنید که

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^- \Rightarrow x < -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} > -5 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow (-5)^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{1}{x} \right] = [(-5)^+] = -5$$

$$\text{مقدار } a \text{ چقدر باشد تا تابع } f(x) = a\left[\frac{x}{3}\right] + 2ax\left[\frac{-x}{3}\right] - [x^2] \text{ در } x=3 \text{ حد داشته باشد؟}$$

تست ۱۲

۱ (۱) $\frac{1}{19}$ ۲ (۲) $-\frac{1}{17}$ ۳ (۳) $\frac{1}{17}$ ۴ (۴) $-\frac{1}{5}$

پاسخ: حد چپ و حد راست تابع را در نقطه‌ی ۳ حساب می‌کنیم:

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \rightarrow 1^- \\ -\frac{x}{3} \rightarrow (-1)^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (0 - 2ax - 8) = -6a - 8$$

$$x \rightarrow 3^+ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \rightarrow 1^+ \\ -\frac{x}{3} \rightarrow (-1)^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (a - 4ax - 9) = -11a - 9$$

برای این که تابع در $x=3$ حد داشته باشد، باید حدهای چپ و راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$-11a - 9 = -6a - 8 \Rightarrow 5a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

$$\text{حد چپ تابع } f(x) = [\sin x] - [\cos x] \text{ در } x = \pi \text{ کدام است؟}$$

تست ۱۳

۱ (۱) -۱ ۲ (۲) -۲ ۳ (۳) -۲ ۴ (۴) صفر

پاسخ: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$ ، همچنین

$$x < \pi \Rightarrow \sin x > 0, \cos x > -1$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} ([\sin x] - [\cos x]) = [0^+] - [-1^+] = 0 - (-1) = 1$$

محاسبه‌ی حد تابع‌های کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

اگر حد تابع‌های f و g در نقطه‌ی a برابر صفر باشد، و تابع‌های f و g در اطراف a تابع ثابت صفر نباشند، آن‌گاه برای محاسبه‌ی حد تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی a نمی‌توانیم از قضیه‌های حد استفاده کنیم. در این حالت،

این حد را حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌گویند. برای پیدا کردن مقدار این حد‌ها، عامل صفرکننده‌ی صورت و مخرج کسر را پیدا کرده و حذف می‌کنیم. برای این کار از اتحادهای جبری استفاده می‌کنیم.

مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ چقدر است؟

۱۴ تست

$\frac{3}{2}$ (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{1+2}{1-3} = -\frac{3}{2}$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ کدام است؟

۱۵ تست

1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

پاسخ: عامل صفرکننده‌ی صورت و مخرج $x-1$ است. با تجزیه‌ی صورت و مخرج (به کمک تقسیم یا هر روش دیگر) این عامل را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$ کدام است؟

۱۶ تست

1 (۱) -1 (۲) 3 (۳) -3 (۴)

پاسخ: عبارت داخل قدرمطلق به صورت $(x-2)(1-x)$ تجزیه می‌شود. با توجه به منفی بودن $1-x$ در اطراف $x=2$ و منفی بودن $x-2$ در سمت چپ ۲، داخل قدرمطلق مثبت است و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(1-x)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{x-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x[x] - 4}{x^2 - 4}$ چقدر است؟

۱۷ تست

1 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x[x] - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(2) - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل ششم

درس دوم:

محاسبه‌ی حد توابع

۳۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1}$ چقدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) صفر

۳۴- مقدار $\lim_{a \rightarrow b} \frac{rab - 3a^2 + 4b}{5a - 3b}$ چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) b (۳) ۲b (۴) ۴b

۳۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{|x - 3|}$ چقدر است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۲

۳۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[4]{7x + \sqrt{3x - 4} + \sqrt[3]{x + 6}}$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x + \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 3}}}{x - 1}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۸- اگر $a < 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x}{|x|} (3x + 1) \right) = 7$ ، مقدار a چقدر است؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{13}{3}$

۳۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\cos 4x - \sin 2x}{\sin 4x}$ چقدر است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$

۴۰- اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{7x - 5}{x + 1} = 3$ ، مقدار a چقدر است؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۴۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} ((x^2 + ax + 2b)(x + 1)) = -6$ ، مقدار $a + b$ چقدر است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۲

۴۲- اگر $\lim_{x \rightarrow a} (x^6 - 1) = 15$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow a} (x^6 - 16)$ چقدر است؟

(۱) ۶۴ (۲) ۴۸ (۳) ۸۰ (۴) ۲۴

۴۳- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ 1 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$ کدام است؟

۴ (۴)

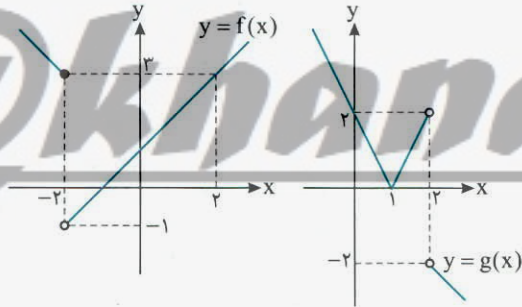
 $1 + \sqrt[3]{4}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۴۴- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. مقدار

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (f(x) + g(x))$$
 چقدر است؟



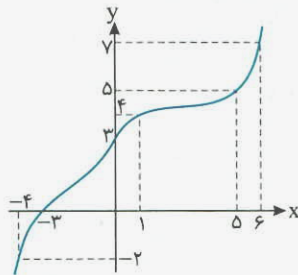
۴ (۱)

۵ (۲)

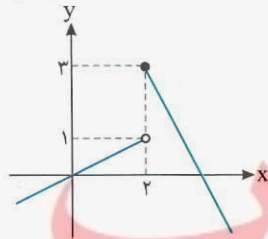
۶ (۳)

۹ (۴)

۴۵- نمودار تابع $f(x+1)$ در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x+2)}{f(x-3)}$ کدام است؟

 $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۱) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{3}$ (۳)

۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(1+2x-x^2)$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

وجود ندارد. (۴)

۴۷- اگر $f(x) = x-2$ و $g(x) = \frac{1}{x} - x$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))}{x-2}$ چقدر است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

۴۸- اگر $f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^4 + 1}$ و $g(x) = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8}}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)}$ کدام است؟

 $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۱)

۴۹- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0} f(3x)$ مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

 $-\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

۵۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} (|x^2 - 4| + |x^2 - 4x|)$ چقدر است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

۵۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} (x|x-3| + x^2|1-4x|)$ کدام است؟

۵۶ (۴)

۴۶ (۳)

۲۶ (۲)

۳۶ (۱)

۵۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1-x^2|-3}{|x-1|-1}$ چقدر است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

۵۳- بیشترین مقدار اختلاف حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x < 2 \\ x - 3 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = k$ اتفاق می‌افتد. این اختلاف چقدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۵۴- $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x < 2 \\ x^2+a & x > 2 \end{cases}$ در $x=2$ حد داشته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟ اگر تابع

(۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۵۵- $f(x) = \begin{cases} ax+b & x < -2 \\ b+x & x = -2 \\ x^2+ax & x > -2 \end{cases}$ اگر f تابع f در تمامی عددهای حقیقی حد داشته باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۶- اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m+2$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m^2$ ، به ازای چند مقدار m تابع $h(x) = \begin{cases} g(x) & x < a \\ f(x) & x > a \end{cases}$ در $x=a$ حد دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) نامتناهی

۵۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)+4g(x)}{2f(x)+3g(x)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{25}{18}$ (۲) $\frac{25}{9}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{7}{9}$

۵۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = -4$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3x-1)-f(x+5)}{f(x^2-1)}$ چقدر است؟

(۱) صفر (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۹- اگر تابع f در نقطه‌ی ۲ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)^2 - x}{f(x)} = 8$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۰- اگر تابع f در نقطه‌ی -۲ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - f(x)}{x - 2} = 2$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ چقدر است؟

(۱) -۸ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۶۱- اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{3f(x)+2} = 1$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۶۲- اگر تابع f در نقطه‌ی ۳ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 3} (4f^2(x) - 4f(x) + 3x - 1) = 7$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۶۳- اگر تابع f در نقطه‌ی ۲ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{f(x)} = \frac{5}{4}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1)}{x+1}$ چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱۴ (۴) ۵

۶۴- اگر حد تابع‌های f و g در نقطه‌ی ۱ وجود داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 3g(x)) = -9$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + g(x)) = 10$ مقدار

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۶۵- اگر تابع‌های f و g در $x=a$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f-2g)(x) = 8$ مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۶۶- اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = -6$ حاصل $\lim_{x \rightarrow a} (f^2 + g^2)(x)$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۶۷- اگر حد تابع‌های $f-g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی $x=2$ به ترتیب برابر ۲ و ۳ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x+1) + g(2x))$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۸- اگر حد تابع‌های $f-g$ و $f^2 - g^2$ در $x=2$ به ترتیب برابر ۳ و ۲۱ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1)}{g(x+1)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۶۹- اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، کدام تابع قطعاً در این نقطه حد دارد؟

(۱) $y = \frac{x}{f(x)-1}$ (۲) $y = \frac{f(x)}{x}$ (۳) $y = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$ (۴) $y = \frac{1-f^2(x)}{f(x)}$

۷۰- اگر تابع f در $x=a$ حد نداشته باشد، کدام یک از تابع‌های زیر قطعاً در این نقطه حد ندارد؟

(۱) $y = |f(x)|$ (۲) $y = [f(x)]$ (۳) $y = xf(x)$ (۴) $y = x + f(x)$

۷۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} ([\delta x] - \delta[x])$ چقدر است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) وجود ندارد.

۷۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^3 - 27]}{x-3}$ چقدر است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲۷ (۴) وجود ندارد.

۷۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (x[8x])$ چقدر است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۷۴- مجموع حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{[-x]}$ در نقطه‌ی ۲ چقدر است؟

(۱) -۴ (۲) $-\frac{7}{6}$ (۳) $-\frac{5}{6}$ (۴) -۳

۷۵- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} ([-3x] + 3[-x])$ چقدر است؟

(۱) صفر (۲) -۶ (۳) -۱۶ (۴) -۱۸

۱۰۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 - x + 7}{x^2 - 5x + 4}$ چقدر است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4(x+1)^2}{x^4 + x^3 + x + 1}$ کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{1}{3}$

۱۰۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-1)(x-2)-6}{x(x-1)(x+1)-24}$ کدام است؟

(۲) $\frac{9}{25}$ (۱) $\frac{7}{23}$

۱۰۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 + (2x-1)^3}{4x}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^4 - (2x-3)^4}{2x-4}$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۰۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 3|}$ چقدر است؟

(۲) ۳

(۱) ۴

۱۰۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{|x^2 - 9|}{x + 3}$ چقدر است؟

(۲) ۳

(۱) ۶

۱۰۸- اختلاف حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x^2 - 4}$ در $x = 2$ کدام است؟

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

۱۰۹- اگر $f(x) = \frac{|x^2 + x - 12|}{x - 3}$ ، اختلاف حدهای چپ و راست تابع در $x = 3$ کدام است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۴

۱۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + |x|}{x - 4|x|}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{1}{5}$

۱۱۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x[x] - 3}{x[x] - 6}$ کدام است؟

(۲) -۲

(۱) ۲

۱۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x^3[-x] + 12x}$ کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس سوم: پیوستگی

تعریف تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است، به شرطی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

تعریف می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی a از راست پیوسته است، به شرطی که $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی a از چپ پیوسته است، به شرطی که $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است، اگر و فقط اگر در a هم از چپ و هم از راست پیوسته باشد.

نکته

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2x & |x| \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & |x| > 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های -1 و 1 به ترتیب چگونه است؟

تست ۱

(۱) ناپیوسته - ناپیوسته (۲) ناپیوسته - پیوسته (۳) پیوسته - پیوسته (۴) پیوسته - ناپیوسته

پاسخ: ضابطه‌ی تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x < -1 \end{cases}$$

حدهای چپ و راست تابع را در -1 به دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2x) = -2 = f(-1)$$

بنابراین تابع در $x = -1$ پیوسته است. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

پس تابع در $x = 1$ حد ندارد و ناپیوسته است.

اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax+b & x > 2 \\ x^2+bx-1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

تست ۲

(۱) -1 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

پاسخ: برای آن که تابع f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید حدهای چپ و راست تابع در این نقطه برابر ۵ باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 5 \Rightarrow 4 + 2b - 1 = 5 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$$

بنابراین $2a = 5 - 1 = 4$ ، یعنی $a = 2$.

تعریف

می‌گوییم تابع f روی بازه‌ی (a, b) پیوسته است، به شرطی که f در هر نقطه از بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد. می‌گوییم تابع f بر بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد و در نقطه‌ی a از سمت راست و در نقطه‌ی b از سمت چپ پیوسته باشد. می‌گوییم تابع f بر بازه‌ی $[a, b)$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد و در نقطه‌ی a از سمت راست پیوسته باشد. می‌گوییم تابع f بر بازه‌ی $(a, b]$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازه‌ی (a, b) پیوسته باشد و در نقطه‌ی b از سمت چپ پیوسته باشد.

برای چه مقدارهایی از m تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2mx + 2 - m}$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی پیوسته است؟

۳

تست



- (۱) $m \in (-2, 1)$ (۲) $m \in (1, 2)$ (۳) $m \in (-2, 2)$ (۴) $m \in (-1, 4)$

پاسخ: این تابع تنها وقتی همواره پیوسته است که مخرج کسر $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 2mx + 2 - m}$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد. در این صورت تابع در تمام نقطه‌ها تعریف شده و در نتیجه روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی پیوسته است. اکنون باید مقدار m را طوری پیدا کنیم که معادله‌ی $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$ جواب حقیقی نداشته باشد. در نتیجه باید

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(2 - m) = 4m^2 + 4(m - 2) = 4(m^2 + m - 2) < 0$$

بنابراین $(m - 1)(m + 2) < 0$ ، در نتیجه $-2 < m < 1$.

نکته

تابع $f(x) = [x]$ در نقطه‌های صحیح پیوسته نیست و در بقیه‌ی نقطه‌ها پیوسته است.

۴

تست



تابع $f(x) = [x]$ روی بازه‌ی $[a, 3)$ پیوسته است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

پاسخ: اگر a عددی کمتر از 2 باشد، آن وقت 2 عضوی از بازه‌ی $[a, 3)$ است، که f در آن پیوسته نیست. بنابراین $a \geq 2$. اگر $a = 2$ ، آن وقت معلوم است که f روی بازه‌ی $[2, 3)$ پیوسته است. بنابراین کم‌ترین مقدار a برابر 2 است.

۵

تست



تابع $f(x) = [2x]$ روی بازه‌ی $(1, 3)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

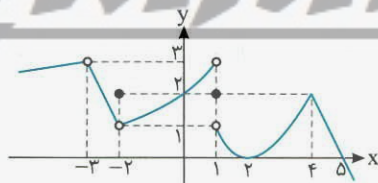
پاسخ: اگر تابع f در نقطه‌ی x_0 پیوسته نباشد، $2x_0$ عددی صحیح است. از طرف دیگر، $2x_0$ روی بازه‌ی $(1, 3)$ به ازای $x_0 = \frac{3}{2}$ ، $x_0 = 2$ و $x_0 = \frac{5}{2}$ عددی صحیح می‌شود. بنابراین f در سه نقطه‌ی $\frac{3}{2}$ ، 2 و $\frac{5}{2}$ پیوسته نیست.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل ششم

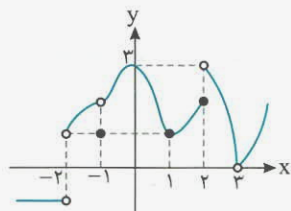
درس سوم:

پیوستگی

۱۱۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f روی بازه‌ی $(-4, 5)$ چند نقطه‌ی

ناپیوستگی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f روی بازه‌ی $(-3, 4)$ چند نقطه‌ی

ناپیوستگی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۵- تابع $f(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{4} \right]$ در کدام نقطه پیوسته نیست؟

- ۱ (۱) $x=1$ ۲ (۲) $x=4$ ۳ (۳) $x=9$ ۴ (۴) $x=16$

۱۱۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & x < 2 \\ ax + b & x \geq 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی پیوسته است. مقدار a کدام است؟

(خارج از کشور تجربی - ۹۱)

- ۱ (۱) -۱ ۲ (۲) ۱ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) ۳

۱۱۷- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & x \geq a \end{cases}$ در دامنه‌اش پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) ۲ ۳ (۳) ۳ ۴ (۴) هیچ مقدار a

۱۱۸- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & x < 1 \\ m & x = 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، مقدار m چقدر است؟

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) ۲ ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ ۴ (۴) -۱

۱۱۹- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - m^2 x^2 & x < 3 \\ 2x - 3 & x \geq 3 \end{cases}$ در $x=3$ پیوسته باشد، حاصل ضرب مقدارهای ممکن m چقدر است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{25}$ ۲ (۲) $\frac{1}{9}$ ۳ (۳) $-\frac{1}{9}$ ۴ (۴) $-\frac{1}{25}$

۱۲۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & x < -1 \\ |3x-a| & x \geq -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته باشد، مجموع مقدارهای ممکن a کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۱۴ (۳) ۶ (۴) ۱۴

۱۲۱- به ازای چند مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-2} & x < -1 \\ \frac{-2}{x+a} & x \geq -1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۲۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)^3-1}{x+1} & x \neq -1 \\ 2ax+1 & x = -1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار a چقدر است؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۲

۱۲۳- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

(تجربی - ۹۴)

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۴- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است؟

(تجربی - ۹۲)

(۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) هیچ مقدار a

۱۲۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟

(تجربی - ۹۶)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax - a + 2 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x > 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟

(خارج از کشور تجربی - ۹۶)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هر مقدار a (۴) هیچ مقدار a

۱۲۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+3 & x < 2 \\ b-1 & x = 2 \\ 4ax+21 & x > 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b چقدر است؟

(۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۲

۱۲۸- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x & x < -1 \\ ax-b & -1 \leq x < 2 \\ x^2-1 & x \geq 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی - ۹۶)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) همواره ناپیوسته است.

۱۳۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sin 2x - a & x < \frac{\pi}{4} \\ 1 + ab & x = \frac{\pi}{4} \\ -2 - \sin 2x & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ چقدر است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) -۵

۱۳۱- اگر تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+6x+m+2}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1)$ (۲) $(0, 7)$ (۳) $(-11, 7)$ (۴) $(7, +\infty)$

۱۳۲- اگر تابع $f(x) = \frac{x^2-3x+5}{x^2+(2m-1)x+m^2-4}$ فقط یک نقطه‌ی ناپیوستگی داشته باشد، مقدار m چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) m ای وجود ندارد.

۱۳۳- اگر تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2-ax+b}$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ چقدر است؟

- (۱) -۱۱ (۲) -۷ (۳) -۱ (۴) ۵

۱۳۴- تابع $f(x) = \frac{x^4+2}{x|x-3|-1}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۵- حاصل ضرب طول نقطه‌های ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{3x}{10} & x < 2 \\ \frac{1}{x^2+3x-18} & x \geq 2 \end{cases}$ چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳۶ (۳) -۶ (۴) -۳۶

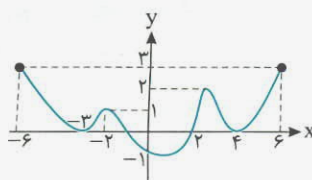
۱۳۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-x & x^2=x \\ x^2+x & x^2 \neq x \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۷- تابع $f(x) = x[x]$ روی بازه‌ی $[-2, 2]$ در چند عدد صحیح پیوسته است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۳۸- نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-6, 6]$ در شکل مقابل رسم شده است. تابع g با ضابطه‌ی $g(x) = \frac{x-4}{f(x)-1}$



در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - 1 = 1$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ در سمت راست نقطه‌ی -1 ، -1 و $[x] = -1$

بنابراین $|x| = -x$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{|x|}{[x]}\right) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{-x}{-1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1\end{aligned}$$

۱۸- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که اگر $x \rightarrow (-2)^-$ ، آن گاه

$$|x| \rightarrow 2^+ \Rightarrow \frac{f}{|x|} \rightarrow 2^-$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f\left(\frac{f}{|x|}\right) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = -2$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ با توجه به نمودار،

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^+$$

$$t \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(t) \rightarrow -2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -2$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ وقتی که x از سمت چپ به 2 نزدیک

می‌شود، $f(x)$ از سمت راست به 2 نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t)$$

از طرف دیگر، وقتی که t از سمت راست به 2 نزدیک می‌شود،

$f(t)$ مقدار ثابت -1 است. بنابراین

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -1$$

پس حد موردنظر هم برابر -1 است.

۲۱- گزینه‌ی ۲ وقتی که x از سمت چپ به 2 نزدیک

می‌شود، $f(x)$ از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

وقتی که t از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود، $f(t)$ به 1

نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$$

بنابراین حد موردنظر برابر 1 است.

۲۲- گزینه‌ی ۱ با توجه به نمودار اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه

$f(x) \rightarrow 2^-$ بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 1$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار واضح است که

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

بنابراین

$$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [2] = 2$$

از طرف دیگر در اطراف $x=1$ مقادیر تابع f نزدیک 2 و کم تر از

آن هستند یعنی $f(x) \rightarrow 2^-$ ، بنابراین $[f(x)] = 1$. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] - [\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = 1 - 2 = -1$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] = 1$$

بنابراین در $x=1$ حد توابع $y=f(x)$ و $y=[f(x)]$ برابر است.

۱۴- گزینه‌ی ۴ از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که

ضابطه‌ی تابع f روی بازه‌ی $[0, +\infty)$ تابعی خطی است که

نمایش جبری آن به صورت $y = 3 - \frac{3}{4}x$ است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(3 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{9}{4}$$

همچنین وقتی که x در سمت چپ -2 قرار دارد، مقادیر $f(x)$

کم تر یا مساوی 5 هستند. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [f(x)] = 4$$

بنابراین حاصل عبارت موردنظر برابر $4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$ است.

۱۵- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که در سمت راست نقطه‌ی 1 ،

$[x] = 1$ در نتیجه

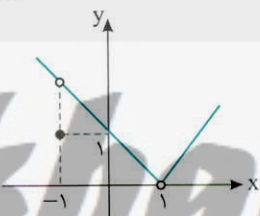
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x[x]) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

۱۶- گزینه‌ی ۴ اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه $f(x) \rightarrow (-1)^+$

بنابراین $\frac{1}{f(x)} \rightarrow (-1)^-$ در نتیجه

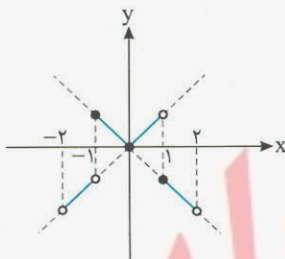
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)}\right] = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2$$

۲۸- گزینه‌ی ۳ با توجه به نمودار تابع مشخص است که تابع در $\mathbb{R}$ حد دارد، هرچند که در نقطه‌ی $x=1$ مقدار ندارد و در نقطه‌ی $x=-1$ مقدار حد با مقدار تابع متفاوت است.



۲۹- گزینه‌ی ۱ در بازه‌های $(-5, -4)$ و $(-4, -3)$ یعنی سمت راست و چپ -4 ، مقدار تابع برابر -3 است. پس مقدار حد نیز برابر -3 می‌شود.

۳۰- گزینه‌ی ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $1 = (-1)^{[x]}$ و در نتیجه $f(x) = x$ و اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $-1 = (-1)^{[x]}$ و در نتیجه $f(x) = -x$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که تابع در نقاط $x = \pm 1$ از بازه‌ی $(-2, 2)$ حد ندارد.



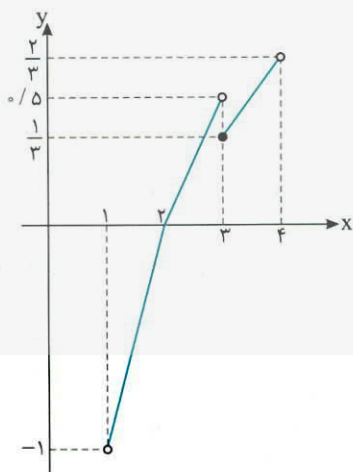
۳۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم

$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{2}$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{3}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. پس تابع فقط در $x=3$ از بازه‌ی $(1, 4)$ حد ندارد.



۲۳- گزینه‌ی ۴ وقتی x از سمت چپ به -2 نزدیک می‌شود، $f(x)$ از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = 2$$

وقتی که x از سمت راست به 2 نزدیک می‌شود، $f(x)$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(y) = -2$$

در نتیجه مقدار موردنظر برابر $2 = -2$ است.

۲۴- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$$

اما مقادیر $g(x)$ در اطراف $x=2$ از 2 کم‌تر یا با آن برابرند. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 2$$

۲۵- گزینه‌ی ۱ اگر $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه

$$f(x) \rightarrow 1^+$$

و در نتیجه $f(f(x)) \rightarrow 2^-$ ، بنابراین

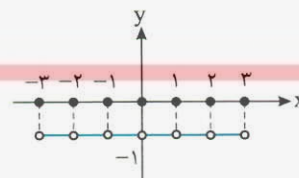
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [f(f(x))] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [t] = 1$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] \Rightarrow f(x) = 0$$

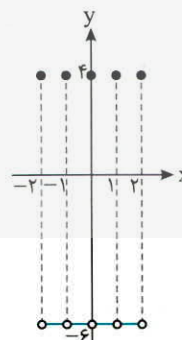
$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1 \Rightarrow f(x) = -1$$

بنابراین نمودار تابع در بازه‌ی $[-3, 3]$ به شکل زیر است. با توجه به نمودار، این تابع در تمام نقاط حد دارد و حد آن برابر -1 است.



۲۷- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار تابع f ، معلوم می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(3x) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = -6$$



۳۹- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\lambda}} \frac{\cos 4x - \sin 2x}{\sin 4x} = \frac{\cos(\frac{4\pi}{\lambda}) - \sin(\frac{2\pi}{\lambda})}{\sin(\frac{4\pi}{\lambda})}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{0 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴۰- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{7x-5}{x+1} = \frac{7a-5}{a+1}$$

توجه کنید که امکان ندارد هم‌زمان $7a-5=0$ و $a+1=0$. بنابراین

$$\frac{7a-5}{a+1} = 3 \Rightarrow 7a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{7}$$

۴۱- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} ((x^2 + ax + 2b)(x+1)) = (2^2 + a(2) + 2b)(2+1)$$

$$= (4 + 2a + 2b)(3)$$

بنابراین

$$12 + 6(a+b) = -6 \Rightarrow a+b = -3$$

۴۲- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^6 - 1) = a^6 - 1 = 15 \Rightarrow a^6 = 16$$

در نتیجه $a^2 = 4$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^6 - 16) = a^6 - 16 = (a^2)^3 - 16 = 4^3 - 16 = 64 - 16 = 48$$

۴۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 1 = 1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با ۲.

۴۴- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 3$ درضمن، اگر $x \leq 1$ ، نمودار تابع g نمودار خطی راست است که از نقطه‌های $(1, 0)$ و $(0, 2)$ می‌گذرد. بنابراین به ازای $x \leq 1$ ،ضابطه‌ی تابع g به صورت $g(x) = -2x + 2$ است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-2x + 2) = 4 + 2 = 6$$

بنابراین

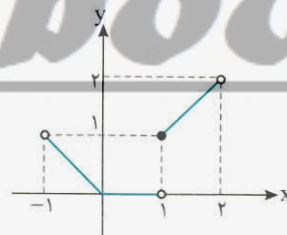
$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (f(x) + g(x)) = 3 + 6 = 9$$

۳۲- گزینه‌ی ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است و فقط در $x=1$ از بازه‌ی $(-1, 2)$ حد ندارد.

۳۳- گزینه‌ی ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{2^2 - 4}{2 + 1} = 0$$

۳۴- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{3ab - 3a^2 + 4b}{5a - 3b} = \frac{3b \times b - 3b^2 + 4b}{5b - 3b} = \frac{4b}{2b} = 2$$

۳۵- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{|x - 3|} = \frac{2^2 - 1}{|2 - 3|} = 3$$

۳۶- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[4]{7x + \sqrt{3x - 4} + \sqrt{x + 6}} = \sqrt[4]{7 \times 2 + \sqrt{3 \times 2 - 4} + \sqrt{2 + 6}}$$

$$= \sqrt[4]{14 + \sqrt{2} + 2} = \sqrt[4]{16 + \sqrt{2}} = 2$$

۳۷- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{2x + \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{x - 3}} = \sqrt{2 \times 7 + \sqrt[3]{7 - 1} + \sqrt{7 - 3}}$$

$$= \sqrt{14 + \sqrt[3]{6} + 2} = \sqrt{16 + \sqrt[3]{6}} = 4$$

9

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x - 1) = 7 - 1 = 6$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.۳۸- گزینه‌ی ۳ چون $a < 0$ ، وقتی که $x \rightarrow a$ ، مقدار x

منفی است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x}{|x|} (3x + 1) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x}{-x} (3x + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (-(3x + 1)) = -(3a + 1)$$

در نتیجه $-(3a + 1) = 7$ ، پس $a = -\frac{\lambda}{3}$.

بنابراین

۴۵- گزینه ۳ نمودار تابع $f(x+1)$ را یک واحد به راست

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1) = a(-1)^2 + b(0-1) + c = a - b + c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = 9a \times 1^2 + 3b \times 1 + c$$

بنابراین از شرط مسئله نتیجه می‌شود

$$a - b + c = 9a + 3b + c$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{2} \text{ پس } 8a = -4b \text{ یعنی}$$

۵۰- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |x^2 - 4| = |3^2 - 4| = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |x^2 - 4x| = |3^2 - 4 \times 3| = 3$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۸ است.

۵۱- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x|x-3| + x^2|1-4x|) = -2|-2-3| + (-2)^2|1-4(-2)|$$

$$= -2 \times 5 + 4 \times 9 = 26$$

۵۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (|1-x^2| - 3) = |1-1^2| - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |x-1| - 1 = |1-1| - 1 = -1$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۳ است.

۵۳- گزینه ۴ تابع در تمام نقطه‌ها به جز $x=2$ حد دارد.

پس اختلاف حدهای چپ و راست در این نقطه‌ها صفر است.

 $x=2$ در

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - x) = 8 - 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = -1$$

پس اختلاف حدهای چپ و راست در $x=2$ برابر ۷ است.**۵۴- گزینه ۱** حدهای چپ و راست تابع در $x=2$ را

حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax+2) = 2a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+a) = 4+a$$

باید حدهای چپ و راست تابع در $x=2$ برابر باشند، یعنی

$$4+a = 2a+2 \Rightarrow a=2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2+2) = 9+2=11$$

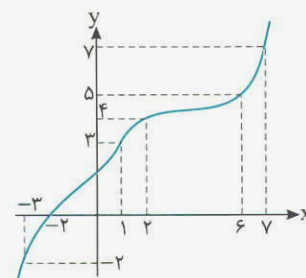
انتقال می‌دهیم تا به نمودار f برسیم. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x+2) = \lim_{t \rightarrow 6} f(t) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x-3) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 3$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر $\frac{5}{3}$ است.**۴۶- گزینه ۱** توجه کنید

$$1+2x-x^2 = 2-(x-1)^2 \leq 2$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(1+2x-x^2) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 1$$

۴۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(g(x)) = \frac{1}{x} - x - 2$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = 1 - 1 - 2 = -2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))}{x-2} = \frac{-2}{1-2} = 2$$

۴۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x+2}{x^4+1} = \frac{1+1+2}{1+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+8}} = \frac{2\sqrt{1+\sqrt{1+3}}}{\sqrt{1+8}} = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2 \times \frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

۴۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$f(3x) = 9ax^2 + 3bx + c$$

۵۵- گزینه ۲ هر یک از ضابطه‌ها، یعنی تابع‌های $ax+b$ و x^2+ax در نقطه‌هایی که تعریف شده‌اند، یعنی $(-\infty, -2)$ و $(-2, +\infty)$ حد دارند. بنابراین کافی است مقدار a و b را

طوری پیدا کنیم که تابع در $x=-2$ حد داشته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (ax+b) = b-2a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^2+ax) = 4-2a$$

در نتیجه برای این که تابع f در $x=-2$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$$

$$b-2a = 4-2a \Rightarrow b=4$$

۵۶- گزینه ۲ برای این که تابع h در $x=a$ حد داشته باشد، باید حدهای چپ و راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = m^+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m+2$$

$$m^+ = m+2 \Rightarrow m^+ - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

پس به ازای دو مقدار m تابع h در $x=a$ حد دارد.

۵۷- گزینه ۱ با توجه به قضیه‌های محاسبه حد مجموع تابع‌ها می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) + 4g(x)}{2f(x) + 3g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3f(x) + 4g(x))}{\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 3g(x))} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1} (4g(x))}{\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1} (3g(x))} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 4 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{3 \times 3 + 4 \times 4}{2 \times 3 + 3 \times 4} = \frac{25}{18} \end{aligned}$$

۵۸- گزینه ۱ توجه کنید که وقتی x از سمت چپ به ۳

نزدیک می‌شود، $3x-1$ ، $x+5$ و x^2-1 همگی از سمت چپ به ۸ نزدیک می‌شوند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3x-1) - f(x+5)}{f(x^2-1)} = \frac{2-2}{2} = 0$$

۵۹- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2(x+1)^2 - x) = 18 - 2 = 16$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)^2 - x}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2(x+1)^2 - x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{16}{2} = 8$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

۶۰- گزینه ۴ اگر $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = a$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - f(x)}{x-2} = 2 \Rightarrow \frac{(-2)^2 - a}{-2-2} = 2 \Rightarrow a = 12$$

۶۱- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{3f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{2 \lim_{x \rightarrow a} f(x)}{3 \lim_{x \rightarrow a} f(x) + 2} = 1 \Rightarrow \frac{2L}{3L+2} = 1$$

$$\Rightarrow 3L+2=2L \Rightarrow L=-2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)+1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)-1} = \frac{L+1}{L-1} = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{1}{3}$$

۶۲- گزینه ۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = a$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4f^2(x) - 4f(x) + 3x - 1) = 7$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 3} f^2(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 3 \times 3 - 1 = 7$$

$$4a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow (2a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۶۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a$ در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{f(x)} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{2+3}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 4$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(3x-1) = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 4$$

و $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ بنابراین حد مورد نظر برابر با ۲ است.

۶۴- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$ و

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = b$ در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 3g(x)) = -9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} (3g(x)) = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -9 \Rightarrow a - 3b = -9 \quad (1)$$

به همین ترتیب، از تساوی $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + g(x)) = 10$ معلوم می‌شود

$$2a + b = 10 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $a=3$ و $b=4$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \times 4 = 12$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases} L_1 - L_2 = 3 \\ L_1 + L_2 = 7 \end{cases}$ به دست می‌آید

$L_1 = 5$ و $L_2 = 2$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x-1)}{g(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(3x-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x+1)} = \frac{\lim_{t \rightarrow 2} f(t)}{\lim_{k \rightarrow 2} g(k)} = \frac{5}{2}$$

۶۹- گزینه‌ی ۳ مطابق قضیه‌های محاسبه‌ی حد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1+f^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{1+(\lim_{x \rightarrow a} f(x))^2} = \frac{L}{1+L^2}$$

۷۰- گزینه‌ی ۴ اگر تابع $y=x+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=x$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=x+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳) تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ را

در نظر بگیرید. این تابع در $x=0$ حد ندارد، ولی

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$$

برای رد گزینه‌ی (۲) تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر

بگیرید که در $x=0$ حد ندارد ولی

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

۷۱- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([\Delta x] - \Delta[x]) = 4 - 5 \times 0 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([\Delta x] - \Delta[x]) = 5 - 5 \times 1 = 0$$

بنابراین حد مورد نظر وجود ندارد.

۷۲- گزینه‌ی ۱ وقتی که x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، $x^3 - 27$ از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود، پس تابع‌های $\frac{x^3 - 27}{x - 3}$ و صفر در سمت راست ۳ با هم برابرند، در نتیجه حد مورد نظر برابر صفر است.

۷۳- گزینه‌ی ۱ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x \lfloor \lambda x \rfloor) = 0 \times (-1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \lfloor \lambda x \rfloor) = 0 \times 0 = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \lambda x \rfloor = 0$

۶۵- گزینه‌ی ۳ از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 8$$

فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$. در این صورت

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = 2 \\ L_1 - 2L_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 4 \\ L_2 = -2 \end{cases}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{4}{-2} = -2$$

۶۶- گزینه‌ی ۲ اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2, \text{ آن‌گاه}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 L_2 = -6$$

بنابراین $L_1 = 3$ و $L_2 = -2$ یا $L_1 = -2$ و $L_2 = 3$. در هر صورت،

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2 + g^2)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} g^2(x) = 13$$

۶۷- گزینه‌ی ۲ اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2, \text{ به دست می‌آید}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f-g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 - L_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = 3$$

$$\begin{cases} L_1 - L_2 = 2 \\ L_1 - 3L_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow L_1 = 3, L_2 = 1$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x+1) + g(2x)) = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) + \lim_{t \rightarrow 2} g(t) = L_1 + L_2 = 4$$

۶۸- گزینه‌ی ۴ با فرض $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2, \text{ معلوم می‌شود که}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \Rightarrow L_1 - L_2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g^2(x) = 21 \Rightarrow L_1^2 - L_2^2 = 21$$

$$(L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = 21 \Rightarrow 3(L_1 + L_2) = 21 \Rightarrow L_1 + L_2 = 7$$

۷۴- گزینه‌ی ۲) توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{[-x]} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]}{[-x]} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با $-\frac{7}{6}$.

۸۱- گزینه‌ی ۳) ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{-1} - \frac{-}{x} \right) = 0 - 0 = 0$$

۸۲- گزینه‌ی ۳) حدهای چپ و راست تابع را در $x = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2}{3})^-} ([3x] + [-3x]) = 1 + (-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2}{3})^+} ([3x] + [-3x]) = 2 + (-3) = -1$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} ([3x] + [-3x]) = -1$$

۸۳- گزینه‌ی ۴) اگر $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $-3x^2 \rightarrow 0$. از طرف

دیگر، مقدارهای $-3x^2$ منفی هستند، در نتیجه در اطراف نقطه‌ی صفر،

$$[-3x^2] = -1$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[-3x^2]}{x+4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+4} = -\frac{1}{4}$$

۸۴- گزینه‌ی ۱) ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow (\frac{1}{3})^+$ ، آن‌گاه

$$\frac{1}{x} \rightarrow 3^- \text{ و } 6x \rightarrow 2^+ \text{ زیرا}$$

$$x > \frac{1}{3} \Rightarrow 6x > 2, \quad \frac{1}{x} < 3$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} (x[\frac{1}{x}] - a[6x]) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} (2x - 2a) = \frac{2}{3} - 2a$$

در نتیجه

$$\frac{2}{3} - 2a = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

۸۵- گزینه‌ی ۳)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x[1^+] + [(-9)^+]) = 3 - 9 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x[1^-] + [(-9)^-]) = 0 - 10 = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -6 - 10 = -16$$

۷۵- گزینه‌ی ۴) وقتی x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود،

$-3x$ از سمت راست به -9 نزدیک می‌شود، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-3x] = -9$$

همین‌طور، $-x$ از سمت راست به -3 نزدیک می‌شود، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (3[-x]) = 3 \times (-3) = -9$$

بنابراین حد مورد نظر برابر -18 است.

۷۶- گزینه‌ی ۴) وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود،

$-x$ از سمت راست به -2 نزدیک می‌شود، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x[-x]) = 2 \times (-2) = -4$$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x[x]) = 2 \times 1 = 2$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $-4 - 2 = -6$.

۷۷- گزینه‌ی ۳) ابتدا حدهای چپ و راست تابع در $x = -2$

را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-9ax + x) = 18a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-6ax + x) = 12a - 2$$

بنابراین

$$18a - 2 + 12a - 2 = 11 \Rightarrow 30a = 15 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۷۸- گزینه‌ی ۲) توجه کنید که $1 < \frac{\pi}{2} < 2$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin[x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 1 = \sin 1$$

۷۹- گزینه‌ی ۲) وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک

می‌شود، $x-1$ و $x+1$ به ترتیب از سمت چپ به صفر و ۲

نزدیک می‌شوند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x-1]^3 + [x+1]^3) = (-1)^3 + (1)^3 = 0$$

۸۰- گزینه‌ی ۴) توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{[2x]}{x-2} + \frac{2x}{[x]} \right) = \frac{4}{4-2} + \frac{8}{3} = \frac{4}{2} + \frac{8}{3} = \frac{37}{6}$$

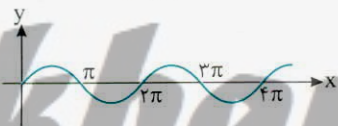
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{[2x]}{x-2} + \frac{2x}{[x]} \right) = \frac{8}{4-2} + \frac{8}{4} = 4 + 2 = 6$$

بنابراین حد مورد نظر وجود ندارد.

۹۰- گزینه‌ی ۱ در شکل زیر نمودار تابع $y = \sin x$ رسم

شده است. در نتیجه در سمت چپ 4π ، $\sin x$ منفی است. بنابراین $[\sin x] = -1$ در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 4\pi^-} [2 + \sin x] = \lim_{x \rightarrow 4\pi^-} [\sin x] + 2 = -1 + 2 = 1$$



۹۱- گزینه‌ی ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow \pi^-$ ، آن گاه

$\sin x \rightarrow 0^+$ و اگر $x \rightarrow \pi^+$ آن گاه $\sin x \rightarrow 0^-$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} a[\sin x] - \lim_{x \rightarrow \pi^-} 3a[\sin x] = -a - 0 = 12$$

در نتیجه $a = -12$.

۹۲- گزینه‌ی ۲ اگر $x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+$ ، آن گاه

$$\cos x \rightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2})^-$$

بنابراین $\sqrt{2} \cos x \rightarrow (-1)^-$ پس

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} [\sqrt{2} \cos x] = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2$$

۹۳- گزینه‌ی ۱ در نقطه‌هایی که مقدار $\sin x$ عدد

صحیحی نشود، تابع $y = [\sin x]$ حد دارد. در نقطه‌های

$x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \pi$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ مقدار $\sin x$ عددی صحیح است.

در این نقطه‌ها،

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\sin x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [\sin x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} [\sin x] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} [\sin x] = -1$$

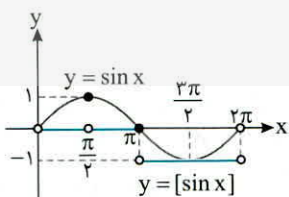
در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [\sin x] = -1$$

بنابراین تابع فقط در $x = \pi$ حد ندارد.

توجه کنید که $y = \sin x$ در نقطه‌های $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$

بیشترین و کمترین مقدار خود را دارد.



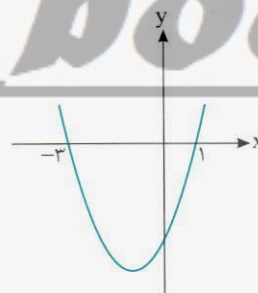
۸۶- گزینه‌ی ۱ در شکل زیر نمودار تابع $y = x^2 + 2x - 3$

رسم شده است. توجه کنید $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x - 3) = 0$ اما در

سمت چپ $x = -3$ ، مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه

در سمت چپ $x = -3$ ، $[x^2 + 2x - 3] = 0$. در نتیجه حاصل

حد نیز صفر می‌شود.



۸۷- گزینه‌ی ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 4} [x^2 - 8x + 19] = \lim_{x \rightarrow 4} [(x-4)^2 + 3] = \lim_{x \rightarrow 4} [(x-4)^2] + 3$$

اکنون توجه کنید که اگر $x \rightarrow 4$ ، آن گاه $0 < (x-4)^2 < 1$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} [(x-4)^2] = 0$$

بنابراین حد مورد نظر برابر با ۳ است.

۸۸- گزینه‌ی ۲ اگر x از سمت چپ به ۳ نزدیک شود،

$-2x$ از سمت راست به -6 نزدیک می‌شود، پس

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-2x] = -6$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ax+3}{4} = \frac{3a+3}{4}$$

اگر تابع f در نقطه‌ی ۳ حد داشته باشد، آن گاه

$$-6 = \frac{3a+3}{4} \Rightarrow a = -9$$

۸۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا حدهای چپ و راست تابع را در

$x = 1$ حساب می‌کنیم. اگر $x < 1$ ، $2x < 2$ و $-x > -1$ و اگر

$x > 1$ ، $2x > 2$ و $-x < -1$ در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x]$$

$$= 1 + (m+1)(-1) = -m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x]$$

$$= 2 + (m+1)(-2) = -2m$$

در نتیجه

$$-2m = -m \Rightarrow m = 0$$

۹۴- گزینه ۱ عامل $x-2$ را در صورت و مخرج حذف

۱۰۰- گزینه ۲ عامل $x+1$ را از صورت و مخرج کسر

می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم

می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 + 3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 4)}{(x+1)(x^2 + 2x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{7}{5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 2} = \frac{1+4+4}{1-2-2} = -3$$

۹۵- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان

۱۰۱- گزینه ۴ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه

نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)(2+3x) - 6}{11x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+11x+3x^2 - 6}{11x}$$

$$x^3 - 7x^2 - x + 7 = x^3 - x - 7x^2 + 7$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(11+3x)}{11x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{11+3x}{11} = \frac{11+0}{11} = 1$$

$$= x(x^2 - 1) - 7(x^2 - 1)$$

۹۶- گزینه ۳ اگر $f(x) = x^2 + 2x$ آن‌گاه

$$= (x^2 - 1)(x - 7)$$

$$f(x) - f(2) = x^2 + 2x - (2^2 + 2 \times 2) = x^2 + 2x - 8$$

$$= (x-1)(x+1)(x-7)$$

$$= (x-2)(x+4)$$

حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2+4}{2+2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x-7)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-7)}{x-4}$$

$$= \frac{(1+1)(1-7)}{1-4} = \frac{0}{-3} = 0$$

۹۷- گزینه ۴ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان

نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+2a)^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 4ax + 4a^2 - 4a^2}$$

۱۰۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^3+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+4a)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+4a} = \frac{1}{0+4a} = \frac{1}{4a}$$

و طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$x^4 + x^3 + x + 1 = (x+1)^2(x^2 - x + 1)$$

۹۸- گزینه ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4(x+1)^2}{x^6 + x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4(x+1)^2}{(x^2 - x + 1)(x+1)^2}$$

در نتیجه

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4}{x^2 - x + 1} = \frac{2(-1)^4}{(-1)^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - 64}{f(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x) - 4^3}{f(x) - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (f^2(x) + 4f(x) + 16) = 4^2 + 4 \times 4 + 16 = 48$$

۱۰۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x(x-1)(x-2) - 6 = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x-3)(x^2+2)$$

۹۹- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان

نوشت

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^4 - 9x^2}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x^2 - 3)}{x - \sqrt{3}}$$

$$x(x-1)(x+1) - 24 = x^3 - x - 24 = (x-3)(x^2+3x+8)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (3x^2(x + \sqrt{3}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3x + 8} = \frac{9+2}{9+9+8} = \frac{11}{26}$$

$$= 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$$

۱۰۴- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}
 & (2x+1)^3 + (2x-1)^3 \\
 &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\
 &= 16x^3 + 12x = 4x(4x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 + (2x-1)^3}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(4x^2 + 3)}{4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 3) = 3
 \end{aligned}$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}
 & (x-1)^4 - (2x-3)^4 \\
 &= ((x-1)^2 + (2x-3)^2)((x-1)^2 - (2x-3)^2) \\
 &= (\Delta x^2 - 14x + 10)(x-1+2x-3)(x-1-2x+3) \\
 &= (\Delta x^2 - 14x + 10)(3x-4)(-x+2)
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^4 - (2x-3)^4}{2x-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\Delta x^2 - 14x + 10)(3x-4)(-x+2)}{2(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(\Delta x^2 - 14x + 10)(3x-4)}{2} \\
 &= -\frac{(20 - 28 + 10)(6-4)}{2} = -2
 \end{aligned}$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۴ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان

نوشت

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x-3|} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{-(x-3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-(x+1)) = -4
 \end{aligned}$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه

کنید که اگر $x \rightarrow (-3)^-$ ، آن‌گاه $x^2 > 9$. بنابراین $x^2 - 9 > 0$. و در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{|x^2 - 9|}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^2 - 9}{x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (-3)^-} (x-3) = -3-3 = -6
 \end{aligned}$$

۱۰۸- گزینه‌ی ۲ حدهای چپ و راست تابع در $x=2$ را

حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x(x-2)|}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{x+2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x(x-2)|}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

بنابراین اختلاف مورد نظر برابر ۱ است.

۱۰۹- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{|(x+4)(x-3)|}{x-3}$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+4)(3-x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-(x+4)) = -7$$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+4) = 7$$

بنابراین اختلاف مورد نظر برابر ۱۴ است.

۱۱۰- گزینه‌ی ۲ وقتی که x از سمت چپ به صفر میلمی‌کند، $|x| = -x$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + |x|}{x - 4|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x - 4(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

۱۱۱- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳

مساوی ۲ است. پس

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x[x] - 3}{x[x] - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

۱۱۲- گزینه‌ی ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x^3[-x] + 12x} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{-3x^3 + 12x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{-3x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{-3x} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

۱۱۸- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2) = 1$$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

چون تابع در $x=1$ پیوسته است باید $f(1)$ برابر با حد تابع در $x=1$ باشد. پس $m=1$.

۱۱۹- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4 - m^2 x^2) = 4 - 9m^2$$

همچنین

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 3) = 2 \times 3 - 3 = 3$$

در نتیجه باید

$$4 - 9m^2 = 3 \Rightarrow 9m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{3}$$

بنابراین حاصل ضرب مقادیرهای ممکن m برابر $-\frac{1}{9}$ است.

۱۲۰- گزینه‌ی ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2 - 3x) = 5$$

همچنین

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = |-3 - a| = |3 + a|$$

در نتیجه

$$|3 + a| = 5 \Rightarrow a = -8, a = 2$$

بنابراین مجموع مقادیرهای ممکن a برابر -6 است.

۱۲۱- گزینه‌ی ۱ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در

$x=-1$ هم پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{a}{x-2} = \frac{a}{-3}$$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-2}{x+a} = \frac{-2}{a-1}$$

بنابراین

$$\frac{a}{-3} = \frac{-2}{a-1} \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = -3, a = 2$$

اگر $a=-3$ ، تابع در نقطه‌ی $x=3$ تعریف نمی‌شود، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیست. بنابراین فقط $a=2$ قابل قبول است.

۱۱۳- گزینه‌ی ۳ تابع f در نقطه‌ی ۳- تعریف نشده است،

پس در این نقطه حد ندارد. حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ی ۲- برابرند (برابر ۱) اما برابر مقدار تابع (برابر ۲) نیستند، بنابراین تابع f در نقطه‌ی ۲- پیوسته نیست. حدهای چپ و راست تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر نیستند، پس تابع در این نقطه پیوسته نیست. تابع f در بقیه‌ی نقطه‌های بازه‌ی $(-4, 5)$ پیوسته است. بنابراین تابع f در سه نقطه‌ی این بازه پیوسته نیست.

۱۱۴- گزینه‌ی ۴ تابع f در نقطه‌ی ۲- ناپیوسته است، زیرا

حدهای چپ و راست تابع برابر نیستند. حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ی ۱- برابرند، اما با مقدار تابع در این نقطه برابر نیستند، پس تابع در نقطه‌ی ۱- ناپیوسته است. همین‌طور حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ی ۲ برابر نیستند، بنابراین تابع f در نقطه‌ی ۲ ناپیوسته است. تابع f در نقطه‌ی ۳ تعریف نشده است، بنابراین در نقطه‌ی ۳ هم ناپیوسته است. تابع f در بقیه‌ی نقطه‌های بازه‌ی $(-3, 4)$ پیوسته است. بنابراین روی این بازه در چهار نقطه ناپیوسته است.

۱۱۵- گزینه‌ی ۴ در $x=16$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{4}$ صحیح

می‌شود. پس تابع $f(x) = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{4} \right\rfloor$ در این نقطه پیوسته نیست.

$$f(16) = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 16^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} [t] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 16^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 1^+} [t] = 1$$

در نقطه‌های $x=1$ ، $x=4$ و $x=9$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{4}$ صحیح

نیست، پس تابع $y = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{4} \right\rfloor$ در این نقطه‌ها پیوسته است.

۱۱۶- گزینه‌ی ۳ حدهای چپ و راست تابع در $x=2$ باید

برابر حد تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 5$$

$$4 + 2b - 1 = 5 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 5$$

$$2a + b = 5$$

در نتیجه $2a + 1 = 5$ ، یعنی $a = 2$.

۱۱۷- گزینه‌ی ۲ برای آن که تابع همواره پیوسته باشد، باید

در $x=a$ پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{a}{4} \Rightarrow 4 = 4a - a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۱۲۲- گزینهی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+2)^3 - 1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+2-1)((x+2)^2 + (x+2) + 1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)} ((x+2)^2 + (x+2) + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

بنابراین باید $f(-1) = 3$ ، در نتیجه

$$f(-1) = -2a + 1 = 3 \Rightarrow a = -1$$

۱۲۳- گزینهی ۲ تابع f باید در نقطه‌ی $x = 6$ پیوسته باشد، پس

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \Rightarrow a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow a + \frac{3}{4} &= \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

۱۲۴- گزینهی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

پس به ازای هیچ مقدار a حدهای چپ و راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در $x = 2$ برابر باشند.

۱۲۵- گزینهی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x}) = 2\end{aligned}$$

بنابراین اگر $f(0) = a = 2$ ، تابع در $x = 0$ پیوسته است.

۱۲۶- گزینهی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) \\ &= a - a + 2 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر مقدار a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2$$

۱۲۷- گزینهی ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 3) = 2a + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (4ax + 21) = 8a + 21\end{aligned}$$

برای این که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ی ۲ با مقدار تابع به ازای ۲ برابر باشند، بنابراین

$$2a + 3 = 8a + 21, \quad 2a + 3 = b - 1$$

از معادله‌ی اول به دست می‌آید $a = -3$ و در نتیجه از تساوی دوم به دست می‌آید $b = -2$.

۱۲۸- گزینهی ۲ توجه کنید که باید

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (ax - b) \\ -3 &= -a - b \quad (1)\end{aligned}$$

همچنین باید

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - b) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) \\ 2a - b &= 3 \quad (2)\end{aligned}$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $a = 2$ و $b = 1$. پس

$$\frac{a}{b} = 2$$

۱۲۹- گزینهی ۱ توجه کنید که اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه

$$[x] + [-x] = -1$$

$$\text{بنابراین تابع به صورت } f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ است و به}$$

ازای $a = -1$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی پیوسته است.

۱۳۰- گزینهی ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin 2x - a) = \sin \frac{\pi}{2} - a = 1 - a$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = 1 + ab$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} (-2 - \sin 2x) = -2 - \sin \frac{\pi}{2} = -3$$

برای این که تابع f در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، باید

$$-3 = 1 - a = 1 + ab$$

در نتیجه $a = 4$ و

$$1 + ab = 1 + 4b = -3 \Rightarrow b = -1$$

پس $a + b = 3$.

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)} (x^2 + x) = 0 \neq f(-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2 \neq f(1) = 0$$

بنابراین تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.**۱۳۷- گزینه ۲** تابع f در نقطه‌های -2 و 2 پیوسته نیست.در نقطه‌های -1 و 1 هم پیوسته نیست، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x[x]) = (-1)(-2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x[x]) = (-1)(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x]) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x[x]) = 1 \times 1 = 1$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x[x]) = 0 \times (-1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x[x]) = 0 \times 0 = 0$$

و بنابراین $f(0) = 0 \times [0] = 0$ در نقطه‌ی صفر پیوسته است.**۱۳۸- گزینه ۴** نقطه‌های ناپیوستگی تابع g ، نقطه‌های -6 و 6 و صفرهای مخرج آن هستند، یعنی جاهایی که $f(x) - 1 = 0$ که می‌شود جاهایی که $f(x) = 1$. چون خط $y = 1$ نمودار تابع $y = f(x)$ را در پنج نقطه قطع می‌کند، پس تابع g در هفت

نقطه ناپیوسته است.

۱۳۱- گزینه ۴ باید مخرج هیچ‌جا صفر نشود، در نتیجهباید Δ ی معادله‌ی $x^2 + 6x + m + 2 = 0$ منفی باشد:

$$\Delta = 6^2 - 4(m+2) < 0 \Rightarrow m > 7$$

۱۳۲- گزینه ۳ باید مخرج فقط در یک نقطه برابر صفرباشد، یعنی Δ ی معادله‌ی $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 4 = 0$ برابر

صفر است:

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - 4) = 0$$

$$4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 16 = 0$$

$$4m = 17 \Rightarrow m = \frac{17}{4}$$

۱۳۳- گزینه ۱ مجموعه‌ی نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x است که مخرج به ازای آن‌ها صفر است.بنابراین -3 و 4 ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a = 4 - 3 = 1 \text{ مجموع ریشه‌ها}$$

$$b = 4(-3) = -12 \text{ حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

بنابراین $a + b = -11$.**۱۳۴- گزینه ۱** تابع f تنها در نقطه‌هایی ناپیوسته است که

تعریف نشده باشد، در نتیجه باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$x|x-3| = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = \pm 1$$

معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ جواب ندارد اما جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، $x = -2$ و $x = 5$ است که تنها $x = 5$ قابل

قبول است. در نتیجه تابع تنها در یک نقطه ناپیوسته است.

۱۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{3x}{10} \right) = -\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 + 3x - 18} = \frac{1}{2^2 + 3 \times 2 - 18} = -\frac{1}{8}$$

پس f در نقطه‌ی 2 پیوسته نیست. ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 3x - 18 = 0$ عددهای -6 و 3 هستند، و چون $-6 < 2$ و $3 > 2$ پس f در نقطه‌ی 3 نیز ناپیوسته است. بنابراین نقطه‌هایناپیوستگی f نقطه‌های 2 و 3 هستند که حاصل ضرب آن‌ها 6 است.**۱۳۶- گزینه ۳** ابتدا توجه کنید که

$$x^3 = x \Rightarrow x = \pm 1, x = 0$$

ضابطه‌ی تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x = 0 \text{ یا } x = \pm 1 \\ x^2 + x & x \neq 0, x \neq \pm 1 \\ 2 & x = -1 \\ 0 & x = 0 \text{ یا } x = 1 \\ x^2 + x & x \neq 0, x \neq \pm 1 \end{cases}$$

@khanah_book

خانہ کتاب

فصل هفتم

@khanah_book

آمار و احتمال

خانه کتاب

فصل هفتم: آمار و احتمال

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

یادآوری:

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲- فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.۳- پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آن‌ها

فرض کنید A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.۵- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه A و B با هم رخ ندهند، یعنی $A \cap B = \emptyset$.

۶- محاسبه‌ی احتمال وقوع یک پیشامد

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

۷- رابطه میان احتمال اجتماع و احتمال اشتراک دو پیشامد A و B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

تست ۱

سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل یک بار رو بیاید چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۱) \quad \frac{1}{6} \quad (۲) \quad \frac{3}{4} \quad (۳) \quad \frac{1}{3} \quad (۴)$$

پاسخ: در این جا فضای نمونه‌ای برابر است با

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, پ), (پ, ر)\}$$

و پیشامد مورد نظر $A = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر)\}$ است. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

تست ۲

تاسی را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که عددی زوج یا عددی اول بیاید چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{2}{3} \quad (۳) \quad \frac{5}{6} \quad (۴)$$

پاسخ: فرض کنید A پیشامد این باشد که عدد تاس زوج باشد و B پیشامد این باشد که عدد تاس اول بیاید.در این صورت $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و $B = \{۲, ۳, ۵\}$. بنابراین $A \cap B = \{۲\}$.در نتیجه $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ، بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

تست ۳

A و B دو پیشامد ناسازگار در یک فضای نمونه‌ای هستند، به طوری که $P(A') = ۰/۶۵$ و $P(A \cup B) = ۰/۶۵$.

احتمال رخ دادن B چقدر است؟

- (۱) $۰/۳$ (۲) $۰/۴$ (۳) $۰/۵$ (۴) $۰/۶$

پاسخ: توجه کنید که $P(A) = 1 - P(A') = 1 - ۰/۶۵ = ۰/۳۵$. از طرف دیگر، چون A و B ناسازگارند،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow ۰/۶۵ = ۰/۳۵ + P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = ۰/۳$$

تست ۴

اگر $P(A) = ۰/۳$ ، $P(B) = ۰/۴$ و $P(A - B) = ۰/۱$ ، مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $۰/۴$ (۲) $۰/۵$ (۳) $۰/۶$ (۴) $۰/۷$

پاسخ: با توجه به تساوی‌های

$$(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$$

$$(A \cap B) \cup (A - B) = A$$

می‌توان نتیجه گرفت

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$$

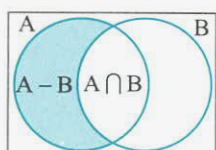
بنابراین

$$۰/۳ = P(A \cap B) + ۰/۱ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲$$

از طرف دیگر

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= ۰/۳ + ۰/۴ - ۰/۲ = ۰/۵$$



تعریف

احتمال وقوع A به شرط رخ دادن B که آن را با $P(A|B)$ نشان می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است،

به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است و برابر است با

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

که اگر صورت و مخرج این کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم می‌شود

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

برای محاسبه‌ی $P(A|B)$ باید $P(B) \neq ۰$.

تست ۵

در پرتاب هم‌زمان دو تاس، اگر مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، احتمال این که هر دو عدد رو شده زوج باشند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: فرض کنید A پیشامد این باشد که هر دو عدد رو شده زوج باشند و B پیشامد این باشد که مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، در این صورت

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$$

پس

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}$$

تست ۶

احتمال شیوع نوعی بیماری در یک جامعه برابر $\frac{3}{10}$ است. احتمال این که فردی سالم به این بیماری مبتلا شود و سپس بهبود یابد $\frac{2}{10}$ است. اگر فردی به این بیماری مبتلا شود احتمال بهبود یافتن او چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: فرض کنید A پیشامد این باشد که فرد مبتلا شده بهبود یابد و B پیشامد این باشد که فردی به این بیماری مبتلا شود، در این صورت

$$P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{10}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

تست ۷

اگر $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A|B) = \frac{1}{2}$ و $P(B|A) = \frac{2}{3}$ ، مقدار $P(A \cup B)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

پاسخ: توجه کنید که

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

از طرف دیگر

$$P(B|A) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{6}}{P(A)} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

پیشامدهای مستقل

می‌گوییم دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، به شرطی که وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

نکته

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، اگر و فقط اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

تست ۸

اگر $P(A) = \frac{3}{10}$ و $P(B) = \frac{4}{10}$ و A و B دو پیشامد مستقل از هم در فضای S باشند، آنگاه $P(A \cup B)$

کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{10}$ (۲) $\frac{58}{100}$ (۳) $\frac{12}{100}$ (۴) $\frac{88}{100}$

پاسخ: چون A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند، پس $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و می‌توان نوشت

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} - \frac{12}{100} = \frac{58}{100} = \frac{58}{100}$$

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $A \subset B$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ ، مقدار

تست ۹

$P(B'|A')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{3}{8}$

پاسخ: توجه کنید که

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')}$$

اما $A \subset B$ ، پس $B' \subset A'$ و در نتیجه $A' \cap B' = B'$ ، پس

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P(B')}{P(A')} = \frac{1 - P(B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

از بین ۵ دانش آموز رشته‌ی تجربی و ۷ دانش آموز رشته‌ی ریاضی، دو دانش آموز پشت سرهم انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال اولی ریاضی و دومی تجربی است؟

تست ۱۰

- (۱) $\frac{28}{132}$ (۲) $\frac{35}{132}$ (۳) $\frac{42}{132}$ (۴) $\frac{20}{132}$

پاسخ: دانش آموز اول رشته‌ی ریاضی باشد را پیشامد A و دانش آموز دوم رشته‌ی تجربی باشد را پیشامد B در نظر می‌گیریم. پس

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

در واقع پیشامد $B|A$ یعنی می‌دانیم دانش آموز اول رشته‌ی ریاضی است، می‌خواهیم دانش آموز دوم رشته‌ی تجربی باشد.

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن‌گاه پیشامدهای زیر هم مستقل از هم هستند.

نکته

- (۱) A' و B' (۲) A' و B (۳) A و B'

علی به احتمال 70% و رضا به احتمال 80% در کنکور قبول می‌شوند. به چه احتمال فقط یکی از آن‌ها قبول می‌شوند؟

تست ۱۱

- (۱) 24% (۲) 38% (۳) 1% (۴) 14%

پاسخ: A پیشامد آن است که علی قبول شود و B پیشامد آن است که رضا قبول شود.

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{14}{100}$$

$$P(B \cap A') = P(B)P(A') = \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{24}{100}$$

$$\text{احتمال آن که فقط یکی قبول شود} = \frac{14 + 24}{100} = \frac{38}{100}$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(A|B) + P(A'|B)$ کدام است؟

تست ۱۲

- (۱) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (۲) $P(A)P(B)$ (۳) $P(A) + P(B)$ (۴)

پاسخ: می‌دانیم اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، A' و B نیز مستقل هستند، پس

$$P(A|B) + P(A'|B) = P(A) + P(A') = 1$$

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

فصل هفتم

درس اول:

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

۱- یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که حداکثر یک بار رو بیاید، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{3}{4} \quad (4) \frac{1}{3}$$

۲- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که مجموع عددهای ظاهر شده‌ی تاس‌ها کم‌تر از ۶ باشد؟

$$(1) \frac{7}{18} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{5}{18}$$

۳- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که عدد ظاهر شده در پرتاب اول مضرب عدد ظاهر شده در پرتاب دوم باشد؟

$$(1) \frac{7}{18} \quad (2) \frac{4}{9} \quad (3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{5}{18}$$

۴- خانواده‌ی آقای عسگری ۵ فرزند و خانواده‌ی آقای فیضی ۳ فرزند دارند. از این ۸ بچه، ۵ تا دخترند و ۳ تا پسر. احتمال این که فرزندان

یک خانواده فقط دختر باشند چقدر است؟

$$(1) \frac{3}{56} \quad (2) \frac{5}{56} \quad (3) \frac{9}{56} \quad (4) \frac{11}{56}$$

۵- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A') = \frac{2}{5}$ و $P(B') = \frac{7}{10}$ ، مقدار $P((A \cup B)')$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{10} \quad (2) \frac{1}{5} \quad (3) \frac{3}{10} \quad (4) \frac{2}{5}$$

۶- اگر $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ و $P(B') = \frac{9}{10}$ ، مقدار $P(A) - P(A \cap B)$ چقدر است؟

$$(1) \frac{1}{10} \quad (2) \frac{1}{5} \quad (3) \frac{3}{10} \quad (4) \frac{2}{5}$$

۷- اگر $P(A \cap B) = \frac{5}{24}$ و $P(A') = \frac{5}{8}$ ، مقدار $P(A \cap B')$ چقدر است؟

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{5}{24} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{7}{24}$$

۸- اگر $P(B - A) = P(A - B) = \frac{1}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ ، مقدار $P(A \cap B)$ کدام است؟

$$(1) \frac{4}{10} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{3}{5} \quad (4) \frac{3}{10}$$

۹- کدام یک ممکن است نادرست باشد؟

$$(1) P(A|A') = 0 \quad (2) P(A|S) = P(A) \quad (3) P(A|A \cap B) = 1 \quad (4) P(A|A \cup B) = 1$$

۱۰- اگر $P(A) = \frac{7}{10}$ ، $P(B') = \frac{7}{10}$ و $P(B \cup A') = \frac{7}{10}$ ، مقدار $P(B|A')$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{5} \quad (4) \frac{1}{3}$$

۱۱- اگر $P(A) = \frac{3}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A|B) = \frac{2}{3}$ ، مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۱۲- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A|B) = \frac{1}{2}$ و $P(B|A) = \frac{2}{3}$ ، مقدار $P(B)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۳- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{2}$ و $P(A|B) = \frac{1}{8}$ ، مقدار $P(B|A)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۴- اگر $P(A|B) = 4P(B)$ و $P(B|A) = 9P(A)$ ، مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۱۵- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار نباشند، مقدار $P(A \cup B | A \cap B)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (۲) $\frac{P(A)}{P(B)}$ (۳) $P(A|B)$ (۴) $P(A \cup B)$

۱۶- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $A \subseteq B$ ، $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{2}{5}$ ، مقدار $P(B' | A')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۱۷- اگر $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{2}{3}$ ، مجموع حداکثر و حداقل مقدار $P(A|B)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{13}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۸- تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد روی آن فرد باشد، احتمال این که اول باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۹- زن و شوهری ۲ بچه دارند. اگر بدانیم که بچه‌ی بزرگ‌تر دختر است، احتمال این که بچه‌ی کوچک‌تر هم دختر باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۰- احتمال این که پروازی در زمان مقرر انجام شود $\frac{9}{10}$ است، احتمال این که در زمان مقرر به مقصد برسد $\frac{8}{10}$ است و احتمال این که هم در زمان مقرر انجام شود و هم در زمان مقرر برسد $\frac{7}{10}$ است. اگر این پرواز در زمان مقرر انجام شده باشد، احتمال این که در زمان مقرر برسد چقدر است؟

- (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۳) $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{56}{10}$

۲۱- در کیسه‌ای ۲ توپ قرمز و ۳ توپ سفید هست. یک توپ را بیرون می‌آوریم و رنگ آن را می‌بینیم. سپس این توپ را به کیسه برمی‌گردانیم و یک توپ هم‌رنگ آن هم به کیسه اضافه می‌کنیم. اکنون دوباره یک توپ بیرون می‌آوریم. احتمال این که توپ اول و این توپ هر دو قرمز باشند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۲۲- در مینی‌بوسی که ۱۲ مسافر دارد، ۲ نفر آنفلوآنزا دارند. اگر ۲ نفر از مینی‌بوس پیاده شوند، احتمال این که هر دو نفر آنفلوآنزا داشته باشند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۳) $\frac{1}{66}$ (۴) $\frac{1}{72}$

۲۳- احتمال شیوع یک بیماری در یک جامعه ۵٪ و احتمال این که فردی از آن جامعه که به این بیماری مبتلا شده است، بهبود یابد ۴٪ است.

است. احتمال این که فردی از این جامعه به این بیماری دچار شود و بهبود یابد چقدر است؟

- (۱) ۰/۰۱ (۲) ۰/۰۲ (۳) ۰/۰۳ (۴) ۰/۰۴

۲۴- ترکیبی از ۴ ماده‌ی شیمیایی ساخته شده است، که دو تا از آن‌ها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده‌ی A برابر $\frac{1}{5}$ و

احتمال واکنش نشان دادن ماده‌ی B برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر ماده‌ی A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن B برابر $\frac{1}{4}$ است.

احتمال این که حداقل یکی از A یا B واکنش نشان دهد چقدر است؟

- (۱) $\frac{21}{140}$ (۲) $\frac{41}{140}$ (۳) $\frac{1}{14}$ (۴) $\frac{11}{35}$

۲۵- سه سکه را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. اگر دست‌کم یکی از آن‌ها رو بیاید، احتمال این که هر سه رو بیایند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۶- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع عددهای روی تاس‌ها برابر ۷ باشد، به شرطی که بدانیم تاس دوم ۳ آمده است چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۲۷- تاسی را دو بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم مجموع عددهایی که آمده‌اند برابر ۶ بوده است. احتمال این که دست‌کم یک بار ۴ آمده باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۲۸- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم حاصل ضرب اعداد روی دو تاس زوج است، چقدر احتمال دارد که هر دو عدد زوج باشند؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۹- دو تاس را با هم پرتاب کرده‌ایم و پیشامد A را «زوج بودن حداقل یکی از تاس‌ها» تعریف کرده‌ایم. پیشامد B چه باشد تا احتمال وقوع A به شرط وقوع B کم‌ترین مقدار باشد؟

- (۱) B: مجموع دو تاس کمتر از ۴
(۲) B: مجموع دو تاس برابر ۴
(۳) B: مجموع دو تاس بیش‌تر از ۱۰
(۴) B: مجموع دو تاس برابر ۱۰

۳۰- اعداد ۱ تا ۱۰۰ را روی ۱۰۰ کارت نوشته‌ایم. یک کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد روی کارت مضرب ۵ است، چقدر احتمال دارد که مضرب ۴ هم باشد؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۳۱- صد کارت به شماره‌های ۰، ۱، ۲، ... و ۹۹ داریم. اگر کارتی به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که حاصل ضرب رقم‌های عدد روی آن صفر است، احتمال این که مجموع رقم‌های عدد روی آن ۸ باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{9}{10}$ (۳) $\frac{7}{10}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۳۲- اعداد ۱ تا ۹ را روی نه کارت می‌نویسیم و دو کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روی کارت‌های انتخاب شده زوج باشد، چقدر احتمال دارد که هر دو عدد فرد باشند؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳۳- در پرتاب دو تاس، اگر حاصل ضرب اعداد ظاهر شده زوج باشد، چقدر احتمال دارد که مجموع آن‌ها نیز زوج باشد؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳۴- تمام جایگشت‌های رقم‌های ۱، ۲، ... و ۶ را که با ۱ شروع نمی‌شوند می‌نویسیم. اگر یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این که سومین رقم از سمت چپ برابر ۳ باشد چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{۴}{۱۸۰} & (۲) & \frac{۱}{۳۶} \\ (۳) & \frac{۴}{۲۵} & (۴) & \frac{۴}{۵} \end{array}$$

۳۵- احتمال این که یک دانش‌آموز در کنکور در درس ریاضی ۱۰۰٪ سوالات را درست پاسخ دهد $\frac{۱}{۱۰}$ است. احتمال قبول شدن این دانش‌آموز در کنکور $\frac{۱}{۴}$ است و اگر او در درس ریاضی ۱۰۰٪ سوالات را درست پاسخ دهد، احتمال قبولی او در کنکور $\frac{۱}{۲}$ است. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق «قبولی کنکور» یا «پاسخ درست به تمام سوالات ریاضی» برای او می‌افتد؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{۷}{۲۰} & (۲) & \frac{۶}{۲۰} \\ (۳) & \frac{۱۱}{۲۰} & (۴) & \frac{۱۳}{۲۰} \end{array}$$

۳۶- در کیسه‌ای ۶ توپ قرمز و ۹ توپ آبی وجود دارد. ابتدا چهار توپ از کیسه خارج می‌کنیم. سپس چهار توپ دیگر از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این که چهار توپ اول قرمز و چهار توپ دوم آبی باشند چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{۱}{۷۱۵} & (۲) & \frac{۲}{۷۱۵} \\ (۳) & \frac{۳}{۷۱۵} & (۴) & \frac{۴}{۷۱۵} \end{array}$$

۳۷- از میان ۸ نفر پزشک و ۴ نفر دستیار، تیمی چهار نفره انتخاب شده است. اگر بدانیم که دست کم یک نفر دستیار در این تیم حضور دارد، احتمال این که دقیقاً دو نفر دستیار در این تیم حضور داشته باشند چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{۱۶۴}{۴۲۵} & (۲) & \frac{۱۶۸}{۴۲۵} \\ (۳) & \frac{۱۷۲}{۴۲۵} & (۴) & \frac{۱۷۴}{۴۲۵} \end{array}$$

۳۸- در آزمایش پرتاب یک تاس، کدام پیشامد زیر مستقل از پیشامد $A = \{۲, ۳, ۵\}$ است؟

(۱) $B = \{۲, ۵\}$ (۲) $C = \{۲, ۴, ۶\}$ (۳) $D = \{۲, ۳\}$ (۴) $E = \{۲, ۳, ۴, ۶\}$

۳۹- مینا به زودی صاحب سه فرزند می‌شود، سه پیشامد A ، B و C را در نظر بگیرید:

$A = \{\text{همه‌ی بچه‌ها هم جنسیت باشند}\}$

$B = \{\text{حداکثر یک فرزند پسر باشد}\}$

$C = \{\text{یک فرزند پسر و یک فرزند دختر باشد}\}$

چه تعداد از پیشامدهای زیر مستقل هستند؟

الف) A و B	ب) B و C	پ) A و C
(۱) صفر	(۲) ۱	(۳) ۲
(۴) ۳		

۴۰- یک جعبه حاوی ۵ توپ قرمز و ۴ توپ سیاه است. توپی را به تصادف از جعبه برمی‌داریم و سپس داخل جعبه می‌اندازیم. سپس توپ دیگری را برمی‌داریم. احتمال این که هر دو توپ قرمز باشند چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{۵}{۱۸} & (۲) & \frac{۵}{۸۱} \\ (۳) & \frac{۲۵}{۸۱} & (۴) & \frac{۱۰}{۸۱} \end{array}$$

۴۱- دو فرد A و B به ترتیب با احتمال $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ در یک آزمون قبول می‌شوند. با کدام احتمال حداقل یکی از آن‌ها در آزمون قبول می‌شود؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & \frac{۳}{۵} & (۲) & \frac{۴}{۵} \\ (۳) & \frac{۱۸}{۲۵} & (۴) & \frac{۲۲}{۲۵} \end{array}$$

۴۲- احتمال این که علی تنها به مسافرت برود ۲۰٪ و احتمال این که محسن تنها به مسافرت برود ۲۵٪ است، احتمال این که علی تنها به مسافرت برود و محسن تنها به مسافرت نرود چند درصد است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & ۵ & (۲) & ۶ \\ (۳) & ۷ & (۴) & ۱۵ \end{array}$$

۴۳- احتمال این که مهدی در درس ریاضی قبول شود ۶۰٪ و احتمال این که وی در درس ریاضی قبول نشود اما در فیزیک قبول شود برابر ۱۸٪ می‌باشد. احتمال این که مهدی در درس فیزیک قبول نشود چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} (۱) & ۰/۴۲ & (۲) & ۰/۴۵ \\ (۳) & ۰/۶ & (۴) & ۰/۵۵ \end{array}$$

۴۴- احتمال این که دو شخص تیری را به هدف بزنند به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{8}$ است. با چه احتمالی حداقل یکی از آن‌ها تیر را به هدف نمی‌زند؟

$\frac{15}{16}$ (۴)	$\frac{29}{32}$ (۳)	$\frac{7}{8}$ (۲)	$\frac{27}{32}$ (۱)
---------------------	---------------------	-------------------	---------------------

۴۵- دو نفر به هدفی شلیک می‌کنند. احتمال این که نفر اول به هدف بزند $\frac{7}{8}$ و احتمال این که نفر دوم به هدف بزند $\frac{7}{8}$ است. اگر هر یک از این دو نفر یک بار شلیک کند، احتمال این که دست کم یک نفر به هدف بزند چقدر است؟

$\frac{7}{8}$ (۱)	$\frac{7}{8}$ (۲)	$\frac{7}{8}$ (۳)	$\frac{7}{8}$ (۴)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

۴۶- احتمال قبولی فرد A در یک آزمون $\frac{7}{8}$ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون $\frac{7}{8}$ است. با کدام احتمال لافل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

$\frac{7}{8}$ (۱)	$\frac{7}{8}$ (۲)	$\frac{7}{8}$ (۳)	$\frac{7}{8}$ (۴)
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

۴۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، حاصل $P(B'|A) + P(B|A) + P(A|B) + P(A'|B')$ برابر کدام است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۴ (۳)	$P(A) + P(B)$ (۴)
-------	-------	-------	-------------------

۴۸- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B') = \frac{1}{4}$ و A و B مستقل از هم باشند، مقدار $P(A' \cup B)$ کدام است؟

$\frac{7}{12}$ (۱)	$\frac{2}{3}$ (۲)	$\frac{3}{4}$ (۳)	$\frac{11}{12}$ (۴)
--------------------	-------------------	-------------------	---------------------

۴۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، حاصل $P(A) - P(A - B)$ کدام است؟

$P(A - B)$ (۱)	$P(A)$ (۲)	$P(A')$ (۳)	$P(A)P(B)$ (۴)
----------------	------------	-------------	----------------

۵۰- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A' \cup B') = P(A)P(B') + P(A')$ ، آنگاه احتمال این که فقط B رخ دهد برابر

کدام است؟

$P(B)$ (۱)	$P(A)$ (۲)	$P(A')P(B)$ (۳)	$P(B') - P(A)$ (۴)
------------	------------	-----------------	--------------------

۵۱- اگر A و B مستقل از هم باشند و $P(A \cap B') = \frac{1}{4}$ و $P(A' \cap B) = \frac{1}{6}$ ، مقدار $P(A)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}$ (۱)	$\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{3}$ (۲)	$\frac{2}{3}$ یا $\frac{1}{4}$ (۳)	$\frac{3}{4}$ یا $\frac{1}{3}$ (۴)
------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

۵۲- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$ ، حداقل مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

$\frac{5}{16}$ (۱)	$\frac{3}{8}$ (۲)	$\frac{7}{16}$ (۳)	$\frac{9}{16}$ (۴)
--------------------	-------------------	--------------------	--------------------

۵۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A) = \frac{1}{3} - P(B)$ ، حداکثر مقدار $P(A \cap B)$ کدام است؟

$\frac{1}{9}$ (۱)	$\frac{1}{12}$ (۲)	$\frac{1}{24}$ (۳)	$\frac{1}{36}$ (۴)
-------------------	--------------------	--------------------	--------------------

فصل هفتم: آمار و احتمال

درس دوم: آمار توصیفی

معیارهای گرایش به مرکز

(۱) میانگین یا مرکز ثقل داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_N$ که آن را با $\bar{x}$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

(۲) اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است **میانه** این داده‌ها می‌نامیم و آن را با Q_p نشان می‌دهیم. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه‌ی آن‌ها داده‌ی وسط است و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه‌ی آن‌ها میانگین دو داده‌ی وسط است.

میانه‌ی داده‌های قبل از میانه را **چارک اول** می‌نامیم، **چارک دوم** همان میانه است و **چارک سوم** میانه‌ی داده‌های بعد از میانه است.

معیارهای پراکندگی

(۱) اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را **دامنه‌ی تغییرات** داده‌ها می‌نامیم و آن را با R نشان می‌دهیم.

(۲) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آن‌ها را **واریانس** داده‌ها می‌نامیم و آن را با σ^2 نشان می‌دهیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

(۳) جذر واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند و با σ نشان می‌دهیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

(۴) نسبت انحراف معیار به میانگین داده‌ها را **ضریب تغییرات** می‌نامیم و آن را با cv نشان می‌دهیم.

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

مزیت این ضریب این است که واحد ندارد و برای مقایسه‌ی دو دسته از داده‌ها به کار می‌رود.

نکته اگر داده‌ها را با عدد k جمع کنیم، آنگاه میانگین و میانه‌ی داده‌های جدید برابر با مجموع k با میانگین و میانه‌ی داده‌های قدیم است، ولی دامنه‌ی تغییرات، واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کنند.

نکته اگر داده‌ها را در عدد k ضرب کنیم، آنگاه میانگین، میانه و دامنه‌ی تغییرات داده‌های جدید برابر است با k ضرب در میانگین، میانه و دامنه‌ی تغییرات داده‌های قدیم، واریانس داده‌های جدید برابر است با k^2 ضرب در واریانس داده‌های قدیم و انحراف معیار برابر است با $|k|$ ضرب در انحراف معیار داده‌های قدیم.

نکته در هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

نکته هر چه واریانس بزرگ‌تر باشد، نشانه‌ی وجود داده‌هایی است که از میانگین دور هستند و هر چه واریانس کوچک‌تر باشد، نشانه‌ی نزدیکی داده‌ها به میانگین است.

نکته

اگر داده‌ها با هم برابر باشند، همه‌ی معیارهای پراکندگی برابر صفرند و برعکس.

تست ۱

در داده‌های آماری ۹، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۴ ضریب تغییرات تقریباً کدام است؟

- (۱) ۰/۰۸ (۲) ۰/۰۹ (۳) ۰/۱۳ (۴) ۰/۱۶

پاسخ: ابتدا از هر یک از داده‌ها ۱۲ واحد کم می‌کنیم که میانگین داده‌های جدید برابر می‌شود با

$$\bar{x} = \frac{-3 - 1 - 1 + 0 + 0 + 1 + 2 + 2}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

پس واریانس این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$$

میانگین داده‌های اولیه برابر با $12 + 0 = 12$ است ولی واریانس آن‌ها تغییر نمی‌کند و همان ۲/۵ است.

بنابراین ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.5}}{12} = 0.13$$

تست ۲

در یک‌سری داده‌ی آماری ضریب تغییرات ۰/۲ می‌باشد. اگر ۵ برابر میانگین را به هر داده بیفزاییم ضریب تغییرات جدید کدام است؟

- (۱) ۰/۲ (۲) $\frac{1}{30}$ (۳) $\frac{1}{25}$ (۴) $\frac{1}{15}$

پاسخ: با افزودن مقدار ثابتی به هر داده، انحراف معیار تغییری نمی‌کند ولی میانگین به همان مقدار افزایش پیدا می‌کند.

$$(cv)' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 5\bar{x}} = \frac{\sigma}{6\bar{x}} = \frac{cv}{6} = \frac{0.2}{6} = \frac{1}{30}$$

تست ۳

نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است:

A: ۱۵، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹

B: ۱۶، ۱۴، ۱۷، ۱۴، ۱۷، ۱۸

دقت عمل کدام بیش‌تر است؟

- (۱) A (۲) B (۳) یکسان (۴) غیرقابل پیش‌بینی

پاسخ: اگر از هر یک از داده‌ها ۱۵ واحد کم کنیم میانگین داده‌های جدید برابر می‌شوند با

$$\bar{x}_1 = \frac{0 - 1 + 0 + 1 + 2 + 4}{6} = 1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1 - 1 + 2 - 1 + 2 + 3}{6} = 1$$

در نتیجه میانگین نمرات مهارت فنی دو کارگر A و B برابر است با $\bar{x}_A = 1 + 15 = 16$ و $\bar{x}_B = 1 + 15 = 16$

بنابراین میانگین نمرات دو کارگر برابر است و واریانس نمرات دو کارگر برابر است با

$$\sigma_A^2 = \frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2}{6} = \frac{1 + 4 + 1 + 1 + 9}{6} = \frac{16}{6}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 2^2}{6} = \frac{4 + 1 + 4 + 1 + 4}{6} = \frac{14}{6}$$

واریانس نمرات کارگر B کم‌تر از کارگر A است، پس دقت عمل کارگر B بیش‌تر از کارگر A است.

در داده‌های آماری ۳، ۴، ۶، ۸، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۳ داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیش‌تر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب تغییرات باقی‌مانده‌ی داده‌ها تقریباً کدام است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۲۱ (۳)

۰/۱۷ (۲)

۰/۱۵ (۱)

پاسخ: میانه‌ی این ۱۲ داده بین داده‌ی ششم و هفتم است. پس ۳ داده‌ی اول کوچک‌تر از چارک اول و ۳ داده‌ی آخر بزرگ‌تر از چارک سوم هستند، با حذف آن‌ها ۶ داده‌ی ۶، ۸، ۸، ۹، ۱۱ باقی می‌مانند و

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{2 \times 6 + 2 \times 8 + 9 + 11}{6} = \frac{48}{6} = 8 \\ \sigma^2 = \frac{2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{array} \right. \Rightarrow cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.21$$

خانه کتاب

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

درس دوم:

آمار توصیفی

فصل هفتم

۵۴- اگر میانگین داده‌های $3x_1 - 2, \dots, 3x_n - 2$ برابر با ۱۳ باشد، میانگین داده‌های $5x_1 + 2, \dots, 5x_n + 2$ چقدر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۵۵- در میان داده‌های آماری ۱۴، ۱۸، ۱۳، ۱۱، ۲۱، ۱۶، ۱۹، ۸، ۹، ۱۲، اختلاف میانه و میانگین به طور تقریبی چقدر است؟

- (۱) ۰/۷ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۵ (۴) ۰/۴

۵۶- با توجه به نمرات دانش‌آموزان یک کلاس در ردیف زیر، چارک اول و سوم کدام است؟

۱۶، ۱۵، ۱۸، ۱۹، ۱۵، ۱۷، ۱۴، ۱۸، ۵، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۷، ۱۰، ۱۶

- (۱) ۱۳/۵ و ۱۵ (۲) ۱۴ و ۱۵ (۳) ۱۳ و ۱۷ (۴) ۱۳/۵ و ۱۷/۵

۵۷- واریانس ۵ داده‌ی آماری صفر است. اگر سه داده‌ی ۵، ۸، ۱۰ را به داده‌ها بیفزاییم، میانگین داده‌ها ۶ می‌شود. واریانس ۸ داده کدام است؟

- (۱) ۳/۷۵ (۲) ۳/۲۵ (۳) ۳/۴ (۴) ۴/۵

۵۸- اگر انحراف معیار داده‌های $\frac{-x_1}{4} + 2, \dots, \frac{-x_n}{4} + 2$ برابر ۱/۲ باشد، انحراف معیار داده‌های $x_1 - 2, \dots, x_n - 2$ کدام است؟

- (۱) ۰/۸ (۲) ۲/۴ (۳) ۴/۸ (۴) ۱/۶

۵۹- کارخانه‌ای ۳ نوع لاستیک تولید می‌کند که میانگین طول عمر و

انحراف معیار آن‌ها در جدول روبه‌رو آمده است. کدام نوع لاستیک

بهتری است؟

لاستیک	انحراف معیار	میانگین طول عمر
A	۲۰۰۰	۱۱۰۰۰
B	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
C	۱۵۰۰	۱۲۰۰۰

(۱) A

(۲) C

(۳) B

(۴) A و B

۶۰- در جدول روبه‌رو، پول توجیبی (برحسب ده هزار ریال) هفتگی ۵ دوست نزدیک مینا و

مریم آمده است. برنامه‌ریزی برای سفری یک روزه با دوستان مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳
مریم	۳۵	۳۰	۲۵	۲۰	۱۵

(۲) هر دو

(۱) مینا

(۳) مریم (۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۶۱- در n داده‌ی آماری $x_i: i=1, 2, 3, \dots, n$ ضریب تغییرات برابر ۱/۲ محاسبه شده است. میانگین داده‌های مفروض را به هریک از

آن‌ها اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات در داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) ۰/۶ (۲) ۱ (۳) ۱/۲ (۴) ۲/۴

۶۲- در داده‌های آماری زیر، داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیش‌تر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۵۷، ۵۶، ۵۳، ۵۲، ۴۶، ۴۵، ۴۵، ۴۴، ۴۰، ۴۰، ۳۹، ۳۸، ۳۸، ۳۷، ۳۵، ۳۴، ۳۱

- (۱) ۴۲/۷ (۲) ۴۲/۹ (۳) ۴۳/۲ (۴) ۴۳/۴

۶۳- پانزده داده‌ی آماری با واریانس ۱۲ و ده داده‌ی آماری با واریانس ۷/۶ را با هم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشد،

انحراف معیار ۲۵ داده‌ی حاصل کدام است؟

- (۱) ۳/۱۰ (۲) ۳/۲۰ (۳) ۳/۲۵ (۴) ۳/۵۰

۶۴- تمام داده‌های زیر را سه برابر کرده، سپس 40 واحد از آن‌ها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

۸۰، ۸۱، ۸۵، ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۰، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۸

(۱) ۲۴۰ (۲) ۲۴۵ (۳) ۲۵۰ (۴) ۲۲۵

۶۵- در ۲۵ داده‌ی آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب 30 و 8 می‌باشد. اگر داده‌های دور افتاده‌ی 10 ، 15 ، 45 و 50 از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ (تجربی - ۹۳)

(۱) $14/72$ (۲) $14/81$ (۳) $15/33$ (۴) $16/66$

۶۶- واریانس 11 داده‌ی آماری صفر است. اگر داده‌های 24 ، 16 و 26 به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند. انحراف معیار 14 داده‌ی حاصل کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

(۱) $0/75$ (۲) $1/25$ (۳) $1/5$ (۴) 2

۶۷- در مجموعه‌ی اعداد $\{x, 64, 65, 77, 50, 66, 70, 63\}$ به ازای کدام مقدار x شاخص‌های میانگین و میانه برابر هم‌اند؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

(۱) ۶۴ (۲) ۶۵ (۳) ۶۶ (۴) نشدنی

۶۸- میانگین و انحراف معیار 18 داده‌ی آماری به ترتیب 25 و 3 است. اگر داده‌های 20 ، 27 و 28 به آن‌ها افزوده شود، واریانس 21 داده‌ی جدید به طور تقریبی کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

(۱) $9/25$ (۲) $9/36$ (۳) $9/52$ (۴) $9/63$

۶۹- داده‌های $1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ به طور تقریبی کدام است؟ (ریاضی - ۹۵)

(۱) $0/4$ (۲) $0/48$ (۳) $0/52$ (۴) $0/6$

۷۰- دستگاه A کالایی با میانگین وزن 150 و انحراف معیار $3/6$ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزن 160 و انحراف معیار $3/84$ بسته‌بندی می‌کنند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیش‌تر است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

(۱) یکسان (۲) A (۳) B (۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

خانه کتاب



۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$$

بنابراین

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B)$$

$$= 1 - \frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

۶- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

از طرف دیگر،

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = P(A) + \frac{1}{10} - P(A \cap B)$$

بنابراین

$$P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

۷- گزینه‌ی ۱ راه حل اول فرض کنید $n(S) = s$. در این

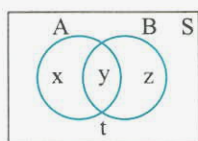
صورت

$$P(A \cap B) = \frac{5}{24} \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{5}{24} s$$

$$P(A') = \frac{5}{8} \Rightarrow n(A') = \frac{5}{8} s$$

از روی نمودار وین زیر و تساوی‌های بالا معلوم می‌شود که

$$y = \frac{5}{24} s, \quad z + t = \frac{5}{8} s$$



اکنون توجه کنید که

$$x + y + z + t = s \Rightarrow x + \frac{5}{24} s + \frac{5}{8} s = s$$

$$\Rightarrow x = s - \frac{5}{24} s - \frac{5}{8} s = \frac{1}{6} s$$

۱- گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای آزمایش به شکل $S = \{(R, R), (R, P), (P, R), (P, P)\}$ است. پیشامد این که

سکه حداکثر یک بار رو بیاید به صورت زیر است

$$A = \{(R, P), (P, R), (P, P)\}$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

۲- گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای آزمایش 6×6 عضو دارد

و پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2),$$

$$(2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۳- گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش 6×6 عضو

دارد و پیشامد مطلوب به شکل زیر است

$$A = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4),$$

$$(5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

۴- گزینه‌ی ۴ کلاً ۸ بچه وجود دارد. تعداد راه‌های

انتخاب ۳ فرزند برای آقای فیضی برابر است با

$$n(S) = \binom{8}{3} = 56$$

آقای عسگری خود به خود مشخص می‌شوند. تعداد راه‌های

$$\binom{5}{3} = 10$$

فقط یک امکان وجود دارد که بچه‌های آقای عسگری همگی

دختر باشند (۵ دختر برای آقای عسگری و ۳ پسر برای آقای

فیضی). بنابراین اگر A پیشامد موردنظر باشد،

$$n(A) = 10 + 1 = 11$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{56}$$

به این ترتیب

۱۲- گزینه‌ی ۲ توجه کنید که

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B') = \frac{n(A \cap B')}{n(S)} = \frac{x}{s} = \frac{1}{6}$$

راه حل دوم روی نمودار ون معلوم می‌شود که $A \cap B' = A - B$

بنابراین

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

در نتیجه

$$P(A \cap B') = \frac{3}{8} - \frac{5}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

۸- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل زیر تساوی‌های زیر

برقرارند

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

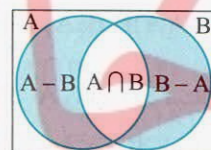
$$(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$$

پیشامدهای $A - B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ دویّه دو ناسازگارند. پس

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{5} + P(A \cap B) + \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

۹- گزینه‌ی ۴ رابطه‌ی $P(A|A \cup B) = 1$ در حالت کلی

درست نیست. زیرا

$$P(A|A \cup B) = \frac{n(A \cap (A \cup B))}{n(A \cup B)} = \frac{n(A)}{n(A \cup B)} \leq 1$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) + P(A') - P(B \cup A')}{P(A')}$$

$$= \frac{1 - P(B') + 1 - P(A) - P(B \cup A')}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{0/2 + 0/3 - 0/4}{0/3} = \frac{0/1}{0/3} = \frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ ابتدا توجه کنید که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{4}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ توجه کنید که

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0/8 = \frac{P(A \cap B)}{0/2}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/16$$

در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0/16}{0/4} = 0/4$$

۱۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$P(A|B) = 4P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 4P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 4P^2(B)$$

$$P(B|A) = 9P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 9P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 9P^2(A)$$

بنابراین

$$4P^2(B) = 9P^2(A) \Rightarrow \frac{P^2(A)}{P^2(B)} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B \subset A \cup B \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$$

بنابراین

$$P(A \cup B | A \cap B) = \frac{P((A \cup B) \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ اگر $A \subset B$ ، آن‌گاه $B' \subset A'$ و در نتیجهبنابراین $A' \cap B' = B'$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P(B')}{P(A')}$$

$$= \frac{1 - P(B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

۳۷- گزینه‌ی ۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که دست کم

یک نفر دستیار انتخاب شده باشد و B پیشامد این باشد که دقیقاً دو نفر دستیار انتخاب شده باشند. توجه کنید که A' پیشامد این است که هیچ دستیاری انتخاب نشده باشد، یعنی هر چهار نفر از میان ۸ نفر پزشک انتخاب شده‌اند. بنابراین

$$P(A') = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{14}{99}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{85}{99}$$

از طرف دیگر، $A \cap B$ پیشامد این است که دو نفر پزشک و دو نفر دستیار انتخاب شده باشند. بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{8}{2} \binom{4}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{56}{165}$$

در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{56}{165}}{\frac{85}{99}} = \frac{168}{425}$$

۳۸- گزینه‌ی ۴ پیشامدهای A و B مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap B = \{2, 5\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای A و C مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap C = \{2\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) \times P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

پیشامدهای A و D مستقل از هم نیستند، زیرا

$$A \cap D = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A) \times P(D) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای A و E مستقل از هم هستند، زیرا

$$A \cap E = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A) \times P(E) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

از طرف دیگر $A \cap B$ پیشامدی است که در آن حاصل ضرب و حاصل جمع اعداد ظاهر شده زوج است. بنابراین باید عدد روی هر دو تاس زوج باشد. بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

۳۹- گزینه‌ی ۳ اگر A را پیشامد ۱ نبودن رقم نخست بگیریم، آن گاه

$$P(A) = \frac{5 \times 5!}{6!}$$

اگر B را پیشامد ۳ بودن سومین رقم از سمت چپ بگیریم، آن گاه

$$P(A \cap B) = \frac{4 \times 4!}{6!}$$

در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4 \times 4!}{6!}}{\frac{5 \times 5!}{6!}} = \frac{4}{25}$$

۳۵- گزینه‌ی ۲ اگر پیشامد «قبولی در کنکور» را A و

پیشامد «پاسخ گویی درست به تمام سؤالات ریاضی» را B بنامیم، آن گاه

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{10}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{10}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

و در نتیجه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{6}{20}$$

۳۶- گزینه‌ی ۳ فرض کنید A پیشامد این باشد که چهار

توپ اول قرمز باشند و B پیشامد این باشد که چهار توپ دوم آبی باشند. در این صورت

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{15}{4}}, \quad P(B|A) = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{11}{4}}$$

در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{\binom{6}{4} \binom{9}{4}}{\binom{15}{4} \binom{11}{4}} = \frac{3}{715}$$

۴۴- گزینه‌ی ۳ پیشامد «به هدف زدن شخص اول» را A و پیشامد «به هدف زدن شخص دوم» را B می‌نامیم. پس

$$P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

پیشامد «حداقل یکی از آن‌ها به هدف نزد» برابر $A' \cup B'$ است که چون A' و B' مستقل از یکدیگرند، پس

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A')P(B')$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{29}{32}$$

۴۵- گزینه‌ی ۴ فرض کنید A پیشامد این باشد که نفر اول به هدف بزند و B پیشامد این باشد که نفر دوم به هدف بزند. توجه کنید که $P(A) = \frac{1}{8}$ و $P(B) = \frac{1}{7}$. پیشامدهای A و B مستقل‌اند و در نتیجه

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{56}$$

احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{56} = \frac{9}{56}$$

۴۶- گزینه‌ی ۳ **راه‌حل اول** احتمال قبولی فرد A و فرد B در آزمون مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{84} \times \frac{1}{75} = \frac{1}{6300}$$

پیشامد این که لااقل یکی از آنان قبول شود، همان اجتماع دو پیشامد است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{84} + \frac{1}{75} - \frac{1}{6300} = \frac{1}{96}$$

راه‌حل دوم متمم پیشامد خواسته شده آن است که هیچ کدام در این آزمون قبول نشوند، این دو پیشامد نیز مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')P(B')$$

$$= 1 - (1 - \frac{1}{84})(1 - \frac{1}{75}) = 1 - \frac{16}{105} \times \frac{25}{75} = \frac{1}{96}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۴۷- گزینه‌ی ۲ اگر A و B مستقل از هم باشند، آن‌گاه A' و B' و همین‌طور A و B' نیز مستقل از هم هستند. پس

$$P(B'|A) = P(B')$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A'|B') = P(A')$$

بنابراین

$$P(B'|A) + P(B|A) + P(A|B) + P(A'|B') =$$

$$= P(B') + P(B) + P(A) + P(A') = 1 + 1 = 2$$

۳۹- گزینه‌ی ۳ توجه کنید که $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{2}$ و

$$P(C) = \frac{3}{4} \text{ اکنون توجه کنید که}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P(A) \times P(B)$$

A و B مستقل هستند.

$$P(B \cap C) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = P(B) \times P(C)$$

B و C مستقل هستند.

اما

$$P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(C) = \frac{3}{16}$$

A و C مستقل نیستند.

۴۰- گزینه‌ی ۳ این دو پیشامد مستقل هستند و احتمال

وقوع هر یک برابر $\frac{5}{9}$ است. در نتیجه احتمال این که هر دو

توپ قرمز باشند، برابر است با

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$$

۴۱- گزینه‌ی ۱ چون پیشامد قبولی A و پیشامد قبولی B

مستقل از هم هستند، پس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

۴۲- گزینه‌ی ۴ پیشامد A را تنها به مسافرت رفتن علی و پیشامد B را تنها به مسافرت رفتن محسن تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{25}$$

اکنون باید $P(A \cap B')$ را حساب کنیم. می‌دانیم این دو پیشامد مستقل هستند. در نتیجه

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = P(A)(1 - P(B))$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{25}) = \frac{1}{2} \times \frac{24}{25} = \frac{12}{25}$$

$$= \frac{12}{25} = 48\%$$

۴۳- گزینه‌ی ۴ احتمال قبولی مهدی در ریاضی را با

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ و قبولی در فیزیک را با } P(B) \text{ نشان می‌دهیم. با}$$

توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$P(B|A') = \frac{1}{18}$$

می‌دانیم این دو پیشامد (قبولی در فیزیک و ریاضی) مستقل از یکدیگرند. در نتیجه

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = P(B)(1 - P(A))$$

$$= P(B)(1 - \frac{1}{6}) = \frac{1}{18}$$

بنابراین $P(B) = \frac{1}{45}$ در نتیجه

$$P(B') = 1 - P(B) = \frac{44}{45}$$

مجموع مربعات اختلاف از میانگین داده‌های دور افتاده برابر است با

$$400 + 225 + 225 + 400 = 1250$$

حال واریانس ۲۱ داده‌ی باقی‌مانده به صورت زیر به دست می‌آید

$$\sigma^2 = \frac{64 \times 25 - 1250}{25 - 4} = \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} \approx 16.66$$

۶۶- گزینه‌ی ۴ میانگین ۳ داده‌ی ۱۶، ۲۴ و ۲۶ برابر است با

$$\frac{16 + 24 + 26}{3} = 22$$

است و چون واریانس آن‌ها صفر است پس تمام آن‌ها با هم برابرند و ۲۲ هستند. بنابراین واریانس این ۱۴ داده برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(22-22)^2 + (22-22)^2 + \dots + (16-22)^2}{14}$$

$$+ \frac{(24-22)^2 + (26-22)^2}{14} = \frac{36 + 4 + 16}{14} = 4$$

بنابراین انحراف معیار برابر $\sigma = 2$ است.

۶۷- گزینه‌ی ۲ داده‌ها را بدون در نظر گرفتن x مرتب می‌کنیم:

$$50, 63, 64, 65, 66, 70, 77$$

در حال حاضر میانه ۶۵ است. اگر عدد x را خود ۶۵ در نظر بگیریم،

$$\bar{x} = \frac{50 + 63 + 64 + 65 + 65 + 66 + 70 + 77}{8}$$

$$= 65 + \frac{-15 - 2 - 1 + 0 + 0 + 1 + 5 + 12}{8}$$

$$= 65 + \frac{-18 + 18}{8} \Rightarrow \bar{x} = 65$$

پس $x = 65$ قابل قبول است.

۶۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا میانگین داده‌های جدید را به دست

می‌آوریم

$$\bar{y} = \frac{18 \times 25 + 20 + 27 + 28}{18 + 3} \Rightarrow \bar{y} = 25$$

برای محاسبه‌ی واریانس از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{18} - 625$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 18 \times 634 = 11412$$

بنابراین مجموع مربعات داده‌های قبلی برای ۱۱۴۱۲ است.

مجموع مربعات داده‌های جدید برابر است با

$$A = 11412 + 20^2 + 27^2 + 28^2 = 13325$$

در نتیجه

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{A}{21} - (25)^2 = \frac{13325}{21} - 625 = 9.52$$

۶۲- گزینه‌ی ۱ تعداد داده‌ها ۱۸ تاست. چارک‌های اول،

دوم و سوم را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_2 = \frac{40 + 44}{2} = 42, \quad Q_1 = 38, \quad Q_3 = 52$$

پس از حذف داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیش‌تر از چارک

سوم داده‌های ۲۸، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۰، ۴۴، ۴۵، ۴۵، ۴۶، ۵۲

باقی‌مانده که میانگین آن‌ها برابر است با

$$\bar{x} = \frac{427}{10} = 42.7$$

۶۳- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم واریانس ۱۵ داده‌ی اول برابر ۱۲ و

واریانس ۱۰ داده‌ی دوم برابر ۷/۶ است. بنابراین

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2}{15} = 12$$

$$\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{10} - \bar{y})^2}{10} = 7/6$$

واریانس همه‌ی این داده‌ها برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2}{25}$$

$$+ \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{10} - \bar{y})^2}{25}$$

$$= \frac{12 \times 15 + 7/6 \times 10}{25} = \frac{180 + 76}{25} = \frac{256}{25}$$

$$\sigma = \frac{16}{5} = 3.2$$

۶۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{80 + 81 + 85 + 92 + 94 + 96}{12}$$

$$+ \frac{97 + 100 + 100 + 103 + 104 + 108}{12}$$

$$\bar{x} = 95$$

اگر داده‌ها را سه برابر کنیم و سپس با ۴۰ جمع کنیم،

میانگین هم سه برابر شده و با ۴۰ جمع می‌شود. در نتیجه

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 3 \times 95 - 40 = 245$$

۶۵- گزینه‌ی ۴ با توجه به $n = 25$ ، $\bar{x} = 30$ و $\sigma = 8$ ،

$$64 = \frac{\text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}}{25}$$

$$1600 = 25 \times 64 = \text{مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها}$$

از طرفی داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ دارای میانگین ۳۰ هستند.

در نتیجه

x_i	۱۰	۱۵	۴۵	۵۰
$x_i - 30$	-۲۰	-۱۵	۱۵	۲۰

۶۹- گزینه‌ی ۱ ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های x_i

را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\overline{x^2} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\sigma_x^2 = 11 - (3)^2 = 2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2}$$

حال برای داده‌های u_i به دست می‌آید

$$\begin{cases} \bar{u} = 12\bar{x} + 6 = 12 \times 3 + 6 = 42 \\ \sigma_u = 12 \times \sigma_x = 12\sqrt{2} \end{cases}$$

$$(cv)_u = \frac{\sigma_u}{\bar{u}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} = \frac{2 \times 1.4}{7} = 0.4$$

۷۰- گزینه‌ی ۱ برای مقایسه‌ی دقت عمل این دو دستگاه

کافی است که ضریب تغییرات آن‌ها را مقایسه کنیم

$$\begin{cases} cv_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{3/6}{150} = 0.024 \\ cv_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{3/84}{160} = 0.024 \end{cases} \Rightarrow cv_A = cv_B$$

با توجه به برابری ضریب تغییرات دو دستگاه A و B، دقت عمل هر دو پیرامون میانگین یکسان است.

خانه کتاب

ریاضی (۲) تجربی (۳ بعدی) ▶

پایه یازدهم

مؤلفان:

کاظم اجلالی- ارشک حمیدی- نوید صفایی



- کامل ترین کتاب آموزشی ریاضی ۲ تجربی پایه یازدهم
- پوشش کامل مطالب کتاب درسی و نکات و جزئیاتی فراتر از آن در درس نامه ها
- تقسیم مطالب، تمرین ها و پرسش های چهارگزینه ای بر اساس بخش های کتاب درسی
- تمرین های تشریحی در پایان درس نامه ها
- پرسش های چهارگزینه ای در پایان درس نامه ها
- پاسخ های کاملاً تشریحی برای مهمی تمرین ها و پرسش های چهارگزینه ای

