درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی ۳ تجربی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

۱۲

نشر الگو

درسنامه

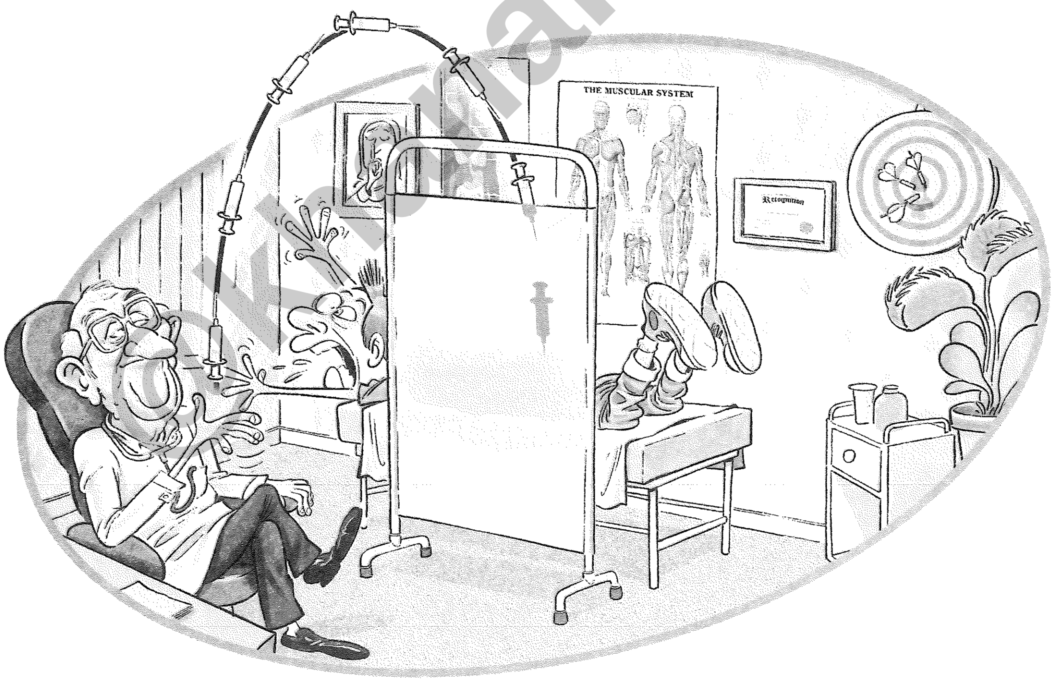
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی ۳
تجربی

قابل استفاده برای

دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه
و داوطلبان آزمون سراسری دانشگاه‌ها



مؤلفان: کاظم اجلالی
ارشک حمیدی

سرشناسه : اجلالی، کاظم، ۱۳۵۶-

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی ۳ تجربی: قابل استفاده برای دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه و داوطلبان آزمون سراسری دانشگاه‌ها/ درسنامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های تشریحی/ کاظم اجلالی و ارشک حمیدی

مشخصات نشر : تهران: نشر الگو.

مشخصات ظاهری : ۴۴۰ ص.۲۲×۲۹س.م.

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۷۹۵۰-۸۴-۵

وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا

یادداشت : فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.

یادداشت : بالای عنوان: درسنامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های تشریحی

شناسهٔ افزوده : حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲-

شمارهٔ کتابخانه ملی : ۳۵۲۹۳۵۳

ریاضی ۳ تجربی

نشر الگو

www.olgoobooks.ir

ناشر : الگو

مدیر مسئول : محمدحسین متولی

مؤلفان : کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

حروف‌چینی و صفحه‌آرایی : الگو

مدیر تولید : مرتضی فخری

نوبت چاپ : پنجم - ۱۳۹۷

تیراژ : ۲۵۰۰ نسخه

قیمت : ۴۷۰۰۰ تومان

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۷۹۵۰-۸۴-۵

آدرس انتشارات: تهران، میدان فاطمی، خیابان بیستون، کوچهٔ دوم الف، پلاک ۹

تلفن: ۸۸۹۹۳۰۳۰

مقدمه

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضی۳ سال دوازدهم و با هدف کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آنها را در انتهای فصل گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعهٔ این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف به ویژه کنکور سراسری نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعهٔ هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «ریاضی۳ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش علمی کتاب، خانم‌ها نسیم نوریان و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

همچنین از خانم‌ها شیرین دانشی‌پور، زهرا رئیسی‌بهان، زینب آدینه‌وند و آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

فهرست

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

فصل اول

تابع

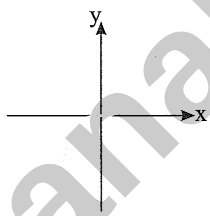
فصل اول

درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

تعریف **هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را که ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ است، که در اینجا n عددی صحیح و نامنفی اســت و a_0، a_1، ... و a_n عددهایی حقیقی هستند و $a_n \neq 0$، تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.**

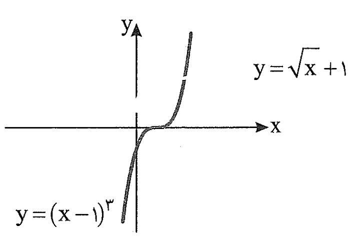
نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ ۳ با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ به صورت زیر است.



چون هر خط موازی محور x نمودار این تابع را قطع می‌کند، پس برد این تابع $\mathbb{R}$ اســت (توجه کنید که طبق تعریف، دامنهٔ این تابع هم $\mathbb{R}$ است). همین‌طور، چون هر خط موازی محور x این نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع یک‌به‌یک نیز هست. به این ترتیب، تابع f وارون‌پذیر است.

تست ۱ **نمودار تابع $y=\sqrt{x}+1$ در چند نقطه نمودار تابع $y=(x-1)^3$ را قطع می‌کند؟**

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

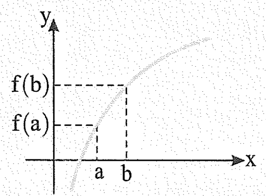


راه‌حل نمـودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یـک واحد به بالا انتقـال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x}+1$ به‌دسـت بیاید. نمودار تابع $y=x^3$ را یـک واحد به سـمت راسـت انتقـال می‌دهیم تا نمـودار تابع $y=(x-1)^3$ به‌دسـت بیاید. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که این دو نمودار یک نقطهٔ تقاطع دارند.

توابع صعودی و نزولی

• **تعریف** تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

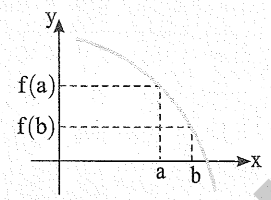
$$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$$



اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً نزولی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$$

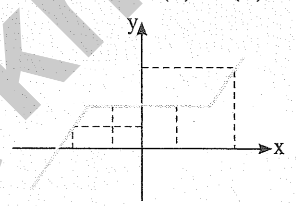


اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

• اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A اکیداً یکنواست.

• تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

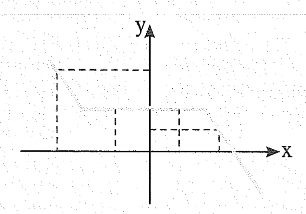
$$a<b\Rightarrow f(a)\le f(b)$$



اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش صعودی است.

• تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ نزولی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\ge f(b)$$

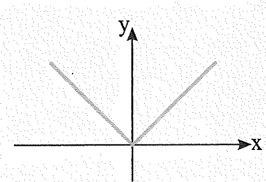


اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش نزولی است.

• اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A یکنواست.

تذکر تابع ثابت روی هر زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش هم صعودی است هم نزولی. همچنین، تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

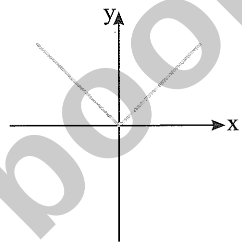
تعریف **تابعی که روی مجموعه‌ای نه صعودی است نه نزولی، تابعی غیریکنوا است.**



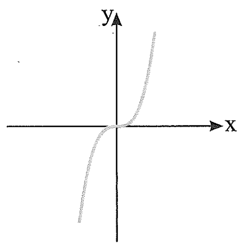
تابعی غیریکنوا

تذکر ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا باشد، اما روی زیرمجموعه‌هایی از دامنه‌اش یکنوا باشد.

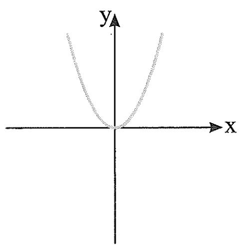
یکنوایی برخی توابع معروف را می‌توان از روی نمودار آنها مشخص کرد.



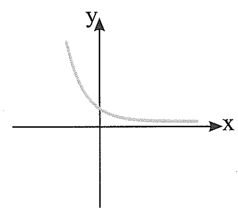
$y=|x|$ ، غیریکنوا



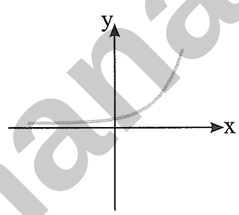
$y=x^3$ ، اکیداً صعودی



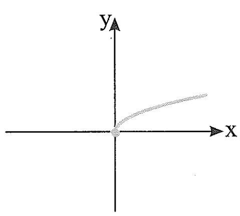
$y=x^2$ ، غیریکنوا



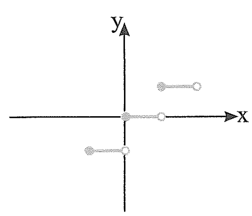
$y=a^x , 0<a<1$ ، اکیداً نزولی



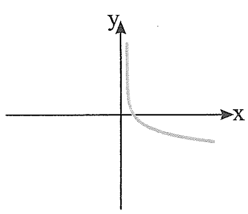
$y=a^x , a>1$ ، اکیداً صعودی



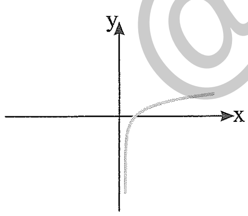
$y=\sqrt{x}$ ، اکیداً صعودی



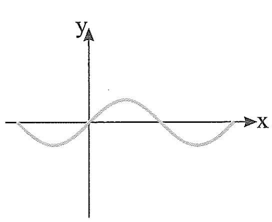
$y=[x]$ ، صعودی



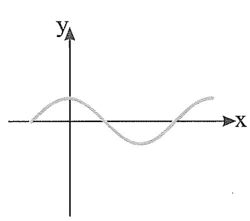
$y=\log_a x , 0<a<1$ ، اکیداً نزولی



$y=\log_a x , a>1$ ، اکیداً صعودی



$y=\sin x$ ، غیریکنوا



$y=\cos x$ ، غیریکنوا

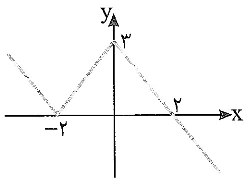
تست ۲ تابع $f=\{(۱,۲),(۲,m-۱),(۳,۷-m)\}$ صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $۳\leq m\leq ۴$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $m\geq ۴$ ۴) $m\leq ۳$

راه‌حل با توجه به تعریف تابع صعودی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱<۲\Rightarrow f(۱)\leq f(۲)\Rightarrow ۲\leq m-۱\Rightarrow m\geq ۳ \\ ۲<۳\Rightarrow f(۲)\leq f(۳)\Rightarrow m-۱\leq ۷-m\Rightarrow ۲m\leq ۸\Rightarrow m\leq ۴ \end{cases}\Rightarrow ۳\leq m\leq ۴$$

تست ۳ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. تابع f روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

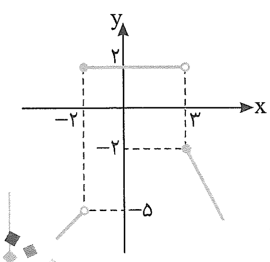


۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(۰,+\infty)$

راه‌حل تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۲]$ و $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-۲,۰]$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(-۲,۰)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[-۲,۰]$ است.

تست ۴ تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<-۲ \\ ۲ & -۲\leq x<۳ \\ -۲x+۴ & x\geq ۳ \end{cases}$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ صعودی است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۳   ۴) ۴



راه‌حل تابع $y=x-۳$ روی بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً صعودی است. تابع $y=۲$ روی بازهٔ $[-۲,۳)$ تابعی ثابت است، پس هم نزولی است هم صعودی. تابع $y=-۲x+۴$ روی بازهٔ $[۳,+\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۳)$ صعودی است، پس بیشترین مقدار a برابر ۳ است.

تست ۵ تابع نمایی $f(x)=(۳k+۱)^x$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

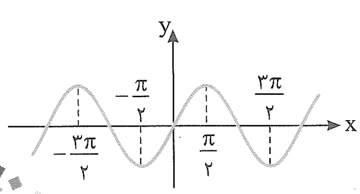
۱) $۰<k<\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}<k<۰$ ۳) $-\frac{۱}{۳}<k<\frac{۱}{۳}$ ۴) $k>۰$

راه‌حل اگر تابع $y=a^x$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a>۱$. بنابراین $۳k+۱>۱$، پس $k>۰$.

تست ۶ تابع $f(x)=\sin x$ روی بازهٔ $[a,\frac{۳\pi}{۲}]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

راه‌حل با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ معلوم می‌شود که حداقل مقدار a برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

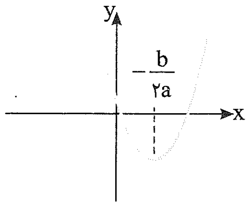


نکته

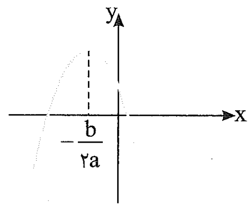
تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{2}+bx+c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

اگر $a>0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.

اگر $a<0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



$a>0$



$a<0$

تست ۷ تابع $f(x)=2x^{2}-10x$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

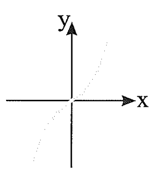
راه‌حل تابع $f(x)=2x^{2}-10x$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{5}{2}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[\frac{5}{2},+\infty)$ اکیداً صعودی است.

بنابراین حداقل مقدار a برابر $\frac{5}{2}$ است.

تست ۸ کدام تابع یکنوا نیست؟

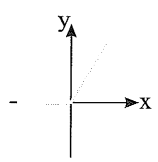
۱) $y=x|x|$ ۲) $y=x+|x|$ ۳) $y=|x|-x$ ۴) $y=x|x-1|$

راه‌حل نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:



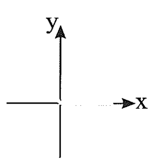
تابع $y=x|x|$ اکیداً صعودی است.

$$y=x|x|=\begin{cases}x^{2} & x\geq 0\\ -x^{2} & x<0\end{cases}$$



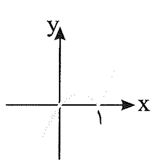
تابع $y=x+|x|$ صعودی است.

$$y=x+|x|=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



تابع $y=|x|-x$ نزولی است.

$$y=|x|-x=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ -2x & x<0\end{cases}$$



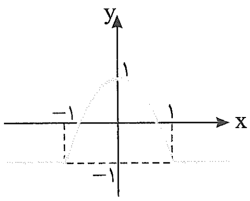
تابع $y=x|x-1|$ غیریکنواست.

$$y=x|x-1|=\begin{cases}x^{2}-x & x\geq 1\\ -x^{2}+x & x<1\end{cases}$$

تست ۹ تابع $f(x)=|x^۲-۱|-x^۲$ روی بازهٔ $[a\,,b]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) ۲

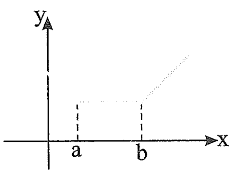
راه‌حل ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱-x^۲ & x^۲\geq ۱ \\ -x^۲+۱-x^۲ & x^۲\leq ۱ \end{cases}=\begin{cases} -۱ & x\geq ۱ \;\text{یا}\; x\leq -۱ \\ -۲x^۲+۱ & -۱\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

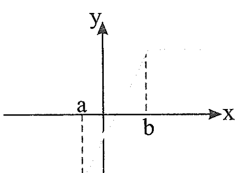
بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱\,,۰]$ اکیداً صعودی است. پس $a=-۱$، $b=۰$ و در نتیجه $b-a=۱$.

نکته



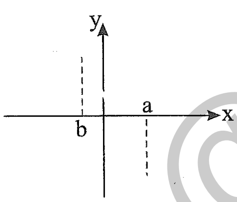
نمودار تابع $f(x)=|x-a|+|x-b|$ به شکل مقابل است $(a<b)$. واضح است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty, b]$ نزولی، روی بازهٔ $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[a, +\infty)$ صعودی، روی بازهٔ $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.

نکته



اگر $a<b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است.

واضح است که تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی، روی بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



اگر $a>b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است.

واضح است که تابع f روی بازهٔ $[b, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه‌های $(-\infty, b]$ و $[a, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

تست ۱۰ به‌ازای چه مقادیری از m، تابع $f(x)=|x-m+۱|-|x-۳m+۳|$ نزولی است؟

۱) $m\leq ۱$ ۲) $m\geq ۱$ ۳) $m>۱$ ۴) $m<۱$

راه‌حل نمودار تابع $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت یا است، که حالت اول به شرط $a<b$ و حالت دوم به شرط $a>b$ رخ می‌دهد. اکنون دقت کنید که

$$f(x)=|x-\underbrace{(m-۱)}_{a}|-|x-\underbrace{(۳m-۳)}_{b}|$$

بنابراین برای آنکه تابع f نزولی باشد، باید $a\geq b$ (اگر $a=b$، تابع f، تابعی ثابت می‌شود که نزولی است):

$$m-۱\geq ۳m-۳\Rightarrow ۲m\leq ۲\Rightarrow m\leq ۱$$

نکته

۱) اگر تابع f صعودی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a<b$.

۲) اگر تابع f نزولی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a>b$.

تست ۱۱

تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی است و $f(۳x-۱)<f(۲-x)$. حدود x کدام است؟

۱) $x>۱$ ۲) $x<۱$ ۳) $x>\frac{۳}{۴}$ ۴) $x<\frac{۳}{۴}$

راه‌حل چون تابع f نزولی است، پس

$$f(۳x-۱)<f(۲-x)\Rightarrow ۳x-۱>۲-x\Rightarrow ۴x>۳\Rightarrow x>\frac{۳}{۴}$$

تست ۱۲

اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(۲)=۰$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-f(x)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۰]$

راه‌حل باید $-f(x)\geq ۰$، پس $f(x)\leq ۰$. از طرف دیگر، چون تابع f اکیداً نزولی است و $f(۲)=۰$، پس

$$f(x)\leq ۰\Rightarrow f(x)\leq f(۲)\Rightarrow x\geq ۲$$

بنابراین $D_g=[۲,+\infty)$.

نکته

۱) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.

۲) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.

۳) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز صعودی است.

۴) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز نزولی است.

۵) اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.

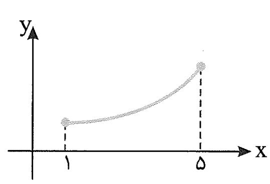
۶) اگر f تابعی نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است.

۷) اگر f تابعی صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{۱}{f}$ نزولی است.

۸) اگر f تابعی نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{۱}{f}$ صعودی است.

تست ۱۳

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً نزولی است؟



۱) $y=\frac{۱}{f(x)}$ ۲) $y=f^{۲}(x)$ ۳) $y=x^{۲}f(x)$ ۴) $y=xf(x)$

راه‌حل f تابعی اکیداً صعودی با مقادیر مثبت است. بنابراین تابع $y=\frac{۱}{f(x)}$ اکیداً نزولی است.

تست ۱۴ اگر تابع f^{3} صعودی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر حتماً نزولی است؟

۱) $y=f(x)+2x^{2}$ ۲) $y=x^{2}f(x)$ ۳) $y=x^{2}-f(x)$ ۴) $y=-f(x)$

راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع‌های f و f^{3} یکسان است. همچنین، اگر a و b در دامنهٔ f باشند و $a<b$، چون تابع f^{3} صعودی است، پس

$$f^{3}(a)\leq f^{3}(b)\Rightarrow f(a)\leq f(b)\Rightarrow -f(a)\geq -f(b)$$

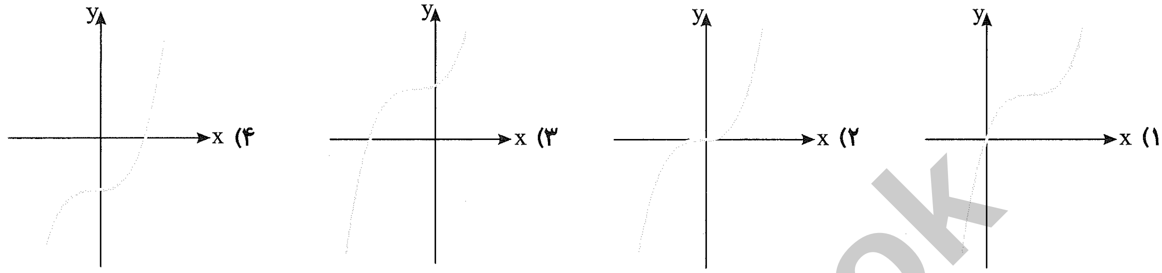
یعنی تابع $-f$ حتماً نزولی است.

فصل اول

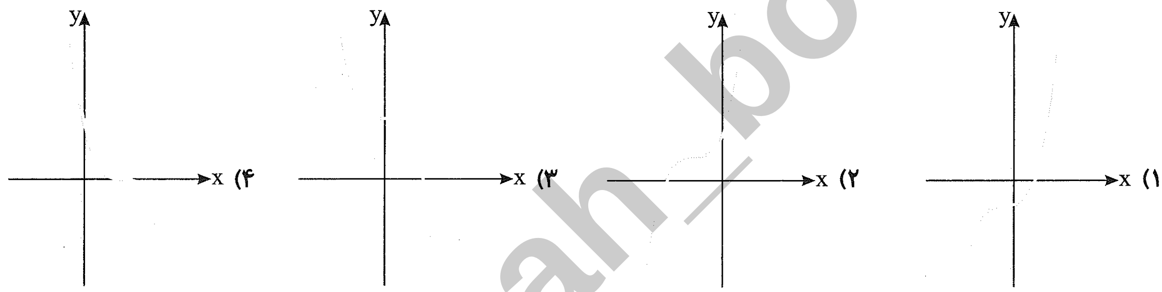
درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

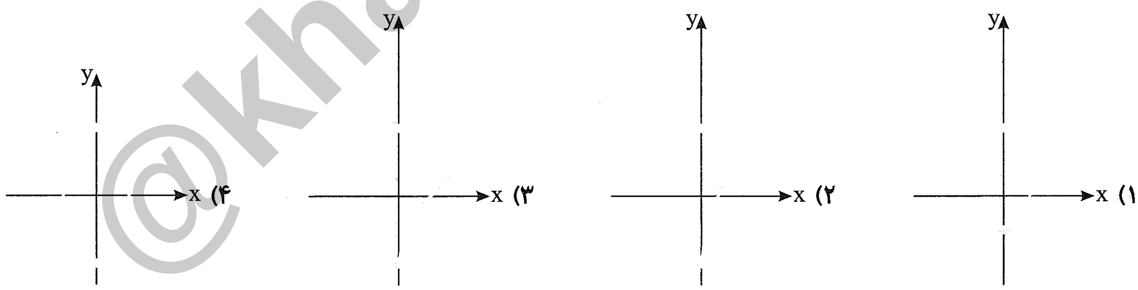
۱- نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3+1$ کدام است؟



۲- نمودار تابع $f(x)=-x^3+2$ کدام است؟



۳- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 0 \\ -x^3+2 & x<0 \end{cases}$ کدام است؟



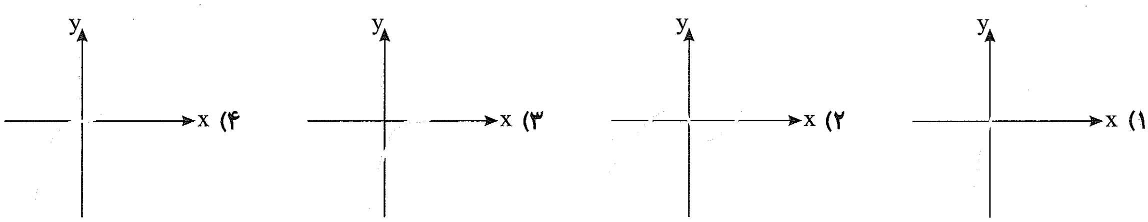
۴- نقطهٔ تلاقی نمودار توابع $f(x)=x^3-2$ و $g(x)=-x^3$ در کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

۵- نمودار تابع $f(x)=x^3-2$ چند بار خط $y=x$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۶- نمودار تابع $f(x)=x^2(x-3)+3x$ کدام است؟



۷- کدام تابع غیریکنوا است؟

۱) $f=\{(-2,1),(-1,2),(1,3)\}$
۲) $g=\{(2,1),(3,0),(4,-1)\}$
۳) $h=\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$
۴) $k=\{(2,1),(3,2),(4,0)\}$

۸- به‌ازای چند عدد صحیح x تابع $f=\{(-2,4x-3),(0,x^2),(x^2,9)\}$ صعودی است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۹- تابع $f=\{(1,5),(2,|m|),(4,\frac{4}{|m|})\}$ نزولی است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

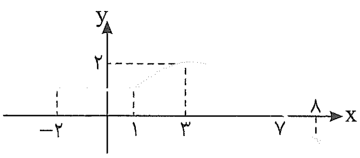
۱۰- تابع $f=\{(1,a-2),(2,3a+4),(3,2a-b)\}$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -4 ۴) -5

۱۱- چند تابع اکیداً صعودی از مجموعهٔ $A=\{1,2,3\}$ به مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4\}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲۷ ۳) ۶۴ ۴) ۸۱

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن صعودی است، کدام است؟



۱) $[1,3]$
۲) $[-2,3]$
۳) $[1,6]$
۴) $[-2,6]$

۱۳- تابع $f(x)=2x^2-4x+3$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(0,+\infty)$

۱۴- اگر $-1<m<1$ و $m\neq 0$، آن‌گاه تابع $g(x)=|m|^x$ چگونه است؟

۱) نه صعودی نه نزولی ۲) صعودی ۳) اکیداً صعودی ۴) اکیداً نزولی

۱۵- تابع نمایی $f(x)=(k^2-1)^x$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $|k|>\sqrt{2}$ ۲) $|k|>1$ ۳) $1<|k|<\sqrt{2}$ ۴) $|k|<\sqrt{2}$

۱۶- تابع $f(x)=(k^2+\frac{1}{2})^x$ هم صعودی است و هم نزولی. تابع $g(x)=k^{2x}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیریکنوا ۴) ثابت

۱۷- کدام تابع نزولی است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} -x+1 & x\geq 0 \\ -x-1 & x<0 \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} -x-1 & x\geq 0 \\ -x+1 & x<0 \end{cases}$

۱۸- تابع $f(x)=\frac{1}{-x+2}$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۹- اگر f، تابعی اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد و $f(2x+1)<f(x)$، مجموعهٔ مقادیر x کدام است؟

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-\infty,5)$ ۴) $(-\infty,-1)$

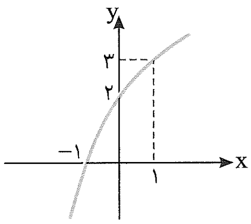
۲۰- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(a^2-1)>f(3a+3)$، حدود a کدام است؟

۱) $a<4$ ۲) $-1<a<4$ ۳) $a<-1$ ۴) $a>4$

-۲۱ اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x^{۲})\leq ۰$
۲) $x\neq ۰\Rightarrow f(x)\leq f(\frac{۱}{x})$
۳) $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(|x|)\leq f(x)$
۴) $x\geq ۰\Rightarrow f(x)\leq f(\sqrt{x})$

-۲۲ اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، کدام نابرابری همواره برقرار نیست؟



۱) $f(|x|)\geq ۲$
۲) $f(x^{۲}+۱)\geq ۳$
۳) $f([x]-x)>۰$
۴) $f(\sin x)\geq ۳$

-۲۳ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۸^{۳x-۱}\geq ۱۶^{۲x-۲}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۵]$
۲) $(۵,+\infty)$
۳) $(-۵,۵)$
۴) $(-\infty,-۵]$

-۲۴ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\frac{۵}{۷})^{x+۲}<(\frac{۷}{۵})^{۳-۲x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۵)$
۲) $(-۵,+\infty)$
۳) $(-۵,۵)$
۴) $(۵,+\infty)$

-۲۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\sqrt{۲}<(\sqrt{۲}-۱)^{۳x-۱}+۱$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$
۲) $(-\infty,\frac{۲}{۳})$
۳) $(\sqrt{۲},+\infty)$
۴) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$

-۲۶ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴^{x-۳}<۳۲^{۵-x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۳۱}{۷})$
۲) $(-\infty,\frac{۳۵}{۳})$
۳) $(\frac{۲۱}{۵},+\infty)$
۴) $(\frac{۳۲}{۳},+\infty)$

-۲۷ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{x+۲}<(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲x+۱}$ کدام است؟

۱) $(-۱,+\infty)$
۲) $(-\infty,-۱)$
۳) $(-\infty,۰)$
۴) $(۰,+\infty)$

-۲۸ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴^{x+۱}-۵\times ۲^{x}+۱\geq ۰$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۱

-۲۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۳-۳^{۱-۲x}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$
۲) $[-۱,+\infty)$
۳) $(-\infty,۱]$
۴) $[۰,+\infty)$

-۳۰ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲^{x}-۸}}{\sqrt{۸۱-۳^{x}}}$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

-۳۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲^{x+۱}-۴^{x}}$ بازهٔ $(-\infty,a]$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

-۳۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{-۳^{۲x}+۴\times ۳^{x}-۳}}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$
۲) $[۰,۲)$
۳) $(۰,۱)$
۴) $(۰,۹)$

-۳۳ اگر $-۱<\log x<۱$، حدود x کدام است؟

۱) $x\in(۰,۱۰)$
۲) $x\in(\frac{۱}{۱۰},۱)$
۳) $x\in(\frac{۱}{۱۰},۱۰)$
۴) $x\in(\frac{۱}{۱۰},+\infty)$

۳۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{۳}(۱۰-x)\le ۲$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۱,۱۰]$ ۴) $[۱,۱۰)$

۳۵- اگر $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)>۲$، حدود x کدام است؟

۱) $x>-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}<x<۱$ ۳) $x<-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-۱<x<-\frac{۳}{۴}$

۳۶- چند عدد طبیعی در نامعادلهٔ $\log_{۲}(\log_{۳}(۲x+۱))>۲$ صدق نمی‌کنند؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۹ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۳۷- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $-۳<\log_{\frac{۱}{۵}}(۴x+۱)<-۲$ صدق می‌کنند؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۳۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱}{۱+\log x}+\frac{۱}{۱-\log x}>۲$ کدام است؟

۱) $(۰,۱۰)-\{۱\}$ ۲) $(۱,۱۰)$ ۳) $(\frac{۱}{۱۰},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۱۰},۱۰)-\{۱\}$

۳۹- مجموع عددهای صحیحی که در نامعادلهٔ $|\log_{۴}(x-۱)|<۱$ صدق می‌کنند، چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log(x+۲)>\log(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(-\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۲,-\frac{۱}{۲})$

۴۱- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{۰/۵}(\log_{۲} x)>۱$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,\sqrt{۲})$ ۳) $(۱,\sqrt{۲})$ ۴) $(\sqrt{۲},+\infty)$

۴۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{x} x^{۲}\ge x$ کدام است؟

۱) $(۰,۲]$ ۲) $(۱,۲]$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,۲]-\{۱\}$

۴۳- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{x}(۱۲-x)>۱$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log_{۳}(x+۲)}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۲)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

۴۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\log(\log_{۰/۲}(۴-x)-۱)$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۱ ۴) ۰/۴

۴۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log\frac{۵x-۱}{x+۲}}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۴۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۳} x-\log_{x} ۳}$ به صورت $D_f=[\frac{۱}{a},b)\cup[a,+\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۸- اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $f(۴)=۰$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{۹-x^۲}{f(x)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) نامتناهی ۴) صفر

۴۹- f یک تابع اکیداً نزولی روی $\mathbb{R}$ است که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد و $g(x)=-x^۲+۲x$. دامنهٔ تابع $h(x)=\frac{۱}{\sqrt{f(x)g(x)}}$ کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $[۲,+\infty)$

۵۰- اگر $f+g$ و $g-f$ توابعی نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$

۵۱- اگر تابع $f(x)=\frac{x^۳+۴}{x^۲}$ روی بازه‌ای صعودی باشد، آن‌گاه تابع $g(x)=\frac{۳x^۳-x^۲+۱۲}{x^۲}$ روی همان بازه چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۵۲- اگر تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ نزولی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر روی همین بازه صعودی است؟

۱) $y=f(x)-x$ ۲) $y=f(x^۲)$ ۳) $y=f^۳(x)$ ۴) $y=x-f(x)$

۵۳- اگر f تابعی نزولی با مقادیر منفی باشد، کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=۲^x f(x)$ ۲) $y=\frac{f(x)}{۲^x}$ ۳) $y=۲^x+f(x)$ ۴) $y=۲^x-f(x)$

۵۴- اگر $g(x)=۳x+۲f(x)$ تابعی صعودی و $h(x)=۲x-۳f(x)$ تابعی نزولی باشد، آن‌گاه تابع f

۱) صعودی است. ۲) نزولی است.

۳) هم صعودی است و هم نزولی. ۴) نه صعودی است نه نزولی.

۵۵- اگر تابع f روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ صعودی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر روی همین بازه حتماً نزولی است؟

۱) $y=f(x)-۲x$ ۲) $y=-\frac{۳}{f(x)}$ ۳) $y=-f^۳(x)$ ۴) $y=۴+f(x)$

۵۶- تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$

۱) صعودی است. ۲) نزولی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۵۷- کدام تابع اکیداً یکنواست؟

۱) $f(x)=x-[x]$ ۲) $f(x)=x+[x]$ ۳) $f(x)=x[x]$ ۴) $f(x)=\frac{[x]}{x}$

۵۸- کدام تابع صعودی نیست؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=|x|-x$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=\frac{x}{|x|}$

۵۹- تابع $f(x)=\frac{۲^x-۱}{۲^x+۱}$

۱) نزولی است. ۲) صعودی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۶۰- کدام تابع صعودی است؟

۱) $y=2^x\sqrt{x}$ ۲) $y=\frac{x}{2^x}$ ۳) $y=x^2\times 2^x$ ۴) $y=\frac{x^2}{2^x}$

۶۱- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}+1 & x\geq 1\\ 3x-k & x<1\end{cases}$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\leq 2$ ۲) $k\leq 1$ ۳) $k\geq 2$ ۴) $k\geq 1$

۶۲- تابع درجهٔ دوم $f(x)=(k+2)x^2+x$ با دامنهٔ $(-\infty,1]$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k<-2$ ۲) $k\geq -\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}\leq k<-2$ ۴) $-2<k<-1$

۶۳- تابع $f(x)=x^2+2(k-1)x+1$ با دامنهٔ $[2,4]$ غیریکنواست. حدود k کدام است؟

۱) $1<k<3$ ۲) $k>-1$ ۳) $-3<k<-1$ ۴) $k<1$

۶۴- تابع $f(x)=x+k^2|x|$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq 1$ ۲) $k\leq -1$ ۳) $-1\leq k\leq 1$ ۴) $k\in\mathbb{R}$

۶۵- تابع $f(x)=\frac{x(x+k)^2}{|x|}$ صعودی است. مجموعهٔ مقادیر k کدام است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\varnothing$

۶۶- تابع $f(x)=(\frac{x}{|x|}+\frac{x-1}{|x-1|})(x+k)^2$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $k<-1$ ۳) $0\leq k\leq 1$ ۴) $-1\leq k\leq 0$

۶۷- تابع $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x\,|\,|x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

فصل اول

درس دوم: ترکیب توابع

تعریف ترکیب تابع f با تابع g را با fog نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنهٔ آن $\{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$ است و به‌ازای هر x در دامنهٔ این تابع،

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

تذکر توجه کنید که $\{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}=\{x \,|\, x \in D_g, g(x) \in D_f\}$. بنابراین، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog، کافی است xهایی را پیدا کنیم که $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$.

تست ۱ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,-۱),(-۱,۱),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۱,۱),(۲,۰),(۳,-۱)\}$، تابع‌های fog و gof چند زوج مرتب یکسان دارند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل دو تابع fog و gof را با اعضایشان می‌نویسیم:

$$fog=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۱)\}$$

$$gof=\{(۱,۰),(-۱,۱),(۰,۰)\}$$

این دو تابع هیچ دو زوج مرتب یکسانی ندارند.

تست ۲ اگر $f=\{(۲,۱),(۳,۵),(۷,۲),(۵,۹),(۴,۳)\}$، برد تابع fof کدام است؟

۱) $\{۱,۵,۹\}$ ۲) $\{۱,۳,۵\}$ ۳) $\{۱,۳,۵,۹\}$ ۴) $\{۱,۲,۵\}$

راه‌حل تابع fof را مشخص می‌کنیم:

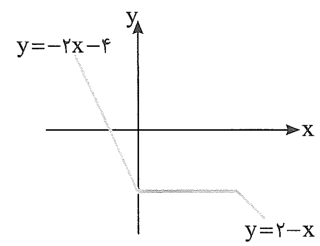
$$\begin{array}{lll} ۲ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{f} \times \\ ۳ \longrightarrow ۵ \longrightarrow ۹ \\ ۷ \longrightarrow ۲ \longrightarrow ۱ \\ ۵ \longrightarrow ۹ \longrightarrow \times \\ ۴ \longrightarrow ۳ \longrightarrow ۵ \end{array}$$

$$fof=\{(۳,۹),(۷,۱),(۴,۵)\}$$

بنابراین

$$R_{fof}=\{۱,۵,۹\}$$

تست ۳ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $(fofof)(۷)$ چقدر است؟



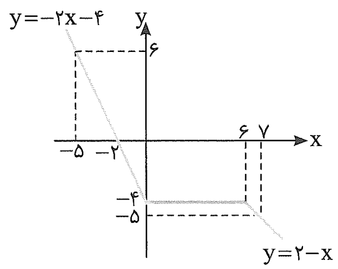
۱) -۱

۲) -۲

۳) -۳

۴) -۴

راه‌حل محل برخورد خط $y=-۲x-۴$ با محور x نقطهٔ $(-۲,۰)$ و با محور y نقطهٔ $(۰,-۴)$ است و محل برخورد خط $y=۲-x$ با خط $y=-۴$ نقطهٔ $(۶,-۴)$ است. بنابراین



$$f(۷)=۲-۷=-۵$$

پس

$$f(f(۷))=f(-۵)=-۲(-۵)-۴=۶$$

در نتیجه

$$(fofof)(۷)=f(f(f(۷)))=f(۶)=-۴$$

تست ۴ اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$، حاصل $(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

راه‌حل ضابطهٔ تابع g را به صورت $g(x)=(x+۱)^۲$ می‌نویسیم. در این صورت

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})=f(g(۱-\sqrt{۲}))=f((۱-\sqrt{۲}+۱)^۲)=f((۲-\sqrt{۲})^۲)=(۲-\sqrt{۲})^۲=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$(gof)(۱-\sqrt{۲})=g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(|۱-\sqrt{۲}|)=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=۲$$

پس

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

تست ۵ اگر $f(x)=۲-|x-۲|$، ضابطهٔ تابع fof برابر کدام است؟

۱) x ۲) $۴-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $۲-f(x)$

راه‌حل ضابطهٔ تابع fof را در دو حالت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x\geq ۲\Rightarrow f(x)=۲-(x-۲)=۴-x\Rightarrow f(x)\leq ۲$$

$$x\leq ۲\Rightarrow f(x)=۲+x-۲=x\Rightarrow f(x)\leq ۲$$

در هر دو حالت $f(x)\leq ۲$، بنابراین

$$(fof)(x)=f(f(x))=۲-|f(x)-۲|=۲+f(x)-۲=f(x)$$

تست ۶ اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=\frac{x+1}{x-1}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{1-x}{2}$ ۲) $g(x)=\frac{x-1}{x}$ ۳) $g(x)=\frac{-x-1}{2}$ ۴) $g(x)=\frac{x}{x-1}$

راه‌حل ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+1} \\ (fog)(x)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(g(x))=\frac{x+1}{x-1}\end{cases}\Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+1}=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow xg(x)-g(x)=xg(x)+x+g(x)+1$$

$$2g(x)=-x-1\Rightarrow g(x)=\frac{-x-1}{2}$$

تست ۷ اگر $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ و $(fog)(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f برای $|x|\geq 2$ کدام است؟

۱) x^2+2 ۲) x^2-2 ۳) x^2-1 ۴) x^2

راه‌حل با توجه به تعریف تابع fog،

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x^4+1}{x^2}$$

با جای‌گذاری $g(x)$ در رابطهٔ فوق به‌دست می‌آید

$$f(\frac{x^2+1}{x})=\frac{x^4+1}{x^2}$$

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\Rightarrow f(x)=x^2-2$$

تست ۸ اگر $f=\{(-2,1),(-1,0),(0,2),(-3,3),(1,4)\}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$، حاصل‌ضرب مقادیر دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -4 ۳) -3 ۴) -12

راه‌حل می‌دانیم $(fog)(x)=f(g(x))$، پس مقادیر $g(x)$ را برابر اعضای دامنهٔ تابع f قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{4-x^2}=-2\ (\text{غ.ق.ق}),\quad \sqrt{4-x^2}=-1\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$\sqrt{4-x^2}=0\Rightarrow x=\pm 2,\quad \sqrt{4-x^2}=-3\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$\sqrt{4-x^2}=1\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

پس دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است

$$\{\pm 2,\pm\sqrt{3}\}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر دامنه برابر ۱۲ است.

تست ۹ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $(0,8)\cup(8,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{0,8\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۴) $(0,+\infty)$

راه‌حل ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم. چون به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ نابرابری $|x|\geq -x$ درست است، پس $|x|+x\geq 0$ و در نتیجه $D_f=\mathbb{R}$.

$$x^2-4x\neq 0\Rightarrow x\neq 0\,,\,x\neq 4\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

در نتیجه

$$D_{gof}=\{x\,|\,x\in D_f\,,\,f(x)\in D_g\}=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\,\sqrt{x+|x|}\neq 0,4\}$$

اگر $x\leq 0$،

$$\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x-x}=0$$

و اگر $x>0$،

$$\sqrt{x+|x|}=\sqrt{2x}\neq 0$$

همچنین

$$\sqrt{x+|x|}\neq 4\Rightarrow\sqrt{2x}\neq 4\Rightarrow 2x\neq 16\Rightarrow x\neq 8$$

بنابراین

$$D_{gof}=(0,+\infty)-\{8\}=(0,8)\cup(8,+\infty)$$

تست ۱۰ اگر $f(x)=1-\sqrt{x-1}$، $g(x)=\sqrt{4+x}-2$ و دامنهٔ تابع gof بازهٔ $[a,b]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

راه‌حل ابتدا دقت کنید که

$$D_f=[1,+\infty)\,,\quad D_g=[-4,+\infty)$$

طبق تعریف دامنهٔ تابع gof،

$$D_{gof}=\{x\,|\,x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x\,|\,x\geq 1, 1-\sqrt{x-1}\geq -4\}$$

نامعادلهٔ $1-\sqrt{x-1}\geq -4$ را حل می‌کنیم:

$$1-\sqrt{x-1}\geq -4\Rightarrow\sqrt{x-1}\leq 5\Rightarrow x-1\leq 25\Rightarrow x\leq 26$$

بنابراین $D_{gof}=[1,26]$ و در نتیجه $a+b=27$.

تست ۱۱ اگر $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ و $D_g=[-3,4)$، دامنهٔ تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل چون

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

پس

$$\begin{cases} x\in D_f: x^2-x\geq 0\Rightarrow x\leq 0 \text{ یا } x\geq 1\\ f(x)\in D_g: -3\leq\sqrt{x^2-x}<4\Rightarrow 0\leq\sqrt{x^2-x}<4\Rightarrow 0\leq x^2-x<16\end{cases}$$

عددهای صحیحی که در دو شرط بالا صدق می‌کنند، عبارت‌اند از $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$.

نکته

۱) اگر تابع‌های f و g هر دو صعودی باشند، آن‌گاه ترکیب آنها تابعی صعودی است.

۲) اگر تابع‌های f و g هر دو نزولی باشند، آن‌گاه ترکیب آنها تابعی صعودی است.

۳) اگر یکی از تابع‌های f و g صعودی و دیگری نزولی باشد، آن‌گاه ترکیب آنها نزولی است.

تست ۱۲ **اگر f تابعی صعودی با مقادیر مثبت باشد، کدام تابع حتماً نزولی است؟**

۱) $y=\sqrt{f(x)}$ ۲) $y=\log f(x)$ ۳) $y=|f(x)|$ ۴) $y=-f(x^۳)$

راه‌حل: چون تابع $g(x)=x^۳$ صعودی و تابع f هم صعودی است، پس ترکیب آنها، یعنی $(fog)(x)=f(x^۳)$ حتماً صعودی است. بنابراین تابع $y=-f(x^۳)$ نزولی است.

تست ۱۳ **اگر $f(x)=(x^۳+x)^۳$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(x^۳)$ کدام است؟**

۱) $(-\infty,۰)$ ۲) $(-\infty,-\frac{۱}{۸})$ ۳) $(-\infty,\frac{۱}{۸})$ ۴) $(-\infty,-\frac{۱}{۶۴})$

راه‌حل: ابتدا توجه کنید که تابع $g(x)=x^۳+x$ مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، بنابراین تابع g اکیداً صعودی است. همچنین تابع $h(x)=x^۳$ اکیداً صعودی است. پس تابع $f=hog$ نیز اکیداً صعودی است:

$$f(x)=h(g(x))=g^۳(x)=(x^۳+x)^۳$$

بنابراین از $f(f(x))<f(x^۳)$ نتیجه می‌شود

$$f(x)<x^۳$$

پس

$$(x^۳+x)^۳<x^۳\Rightarrow x^۳+x<x\Rightarrow x^۳<۰\Rightarrow x<۰$$

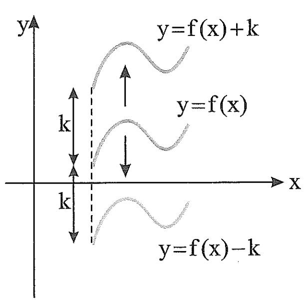
رسم نمودار تابع

می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را از روی نمودار تابع‌های دیگر رسم کنیم.

انتقال عمودی

فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>۰$. برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.

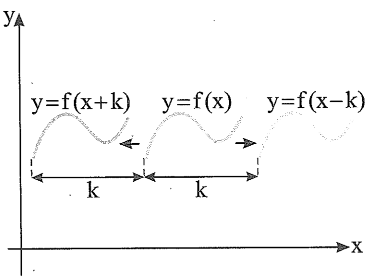
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.



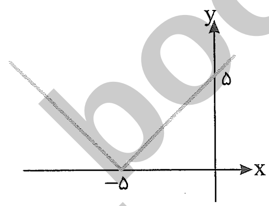
بنابراین نقطهٔ $(x_۰,y_۰+k)$ از نمودار تابع $y=f(x)+k$ متناظر با نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

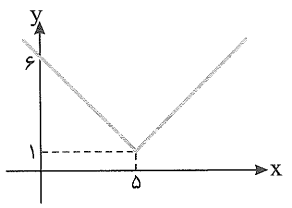
انتقال افقی

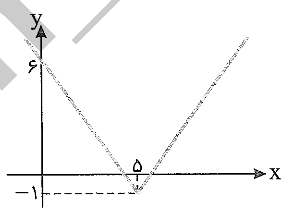
فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>0$. برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم. برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل کنیم. بنابراین نقطهٔ (x_0-k, y_0) از نمودار تابع $y=f(x+k)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

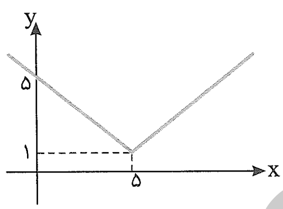


تست ۱۴ نمودار تابع $f(x)=|5-x|+1$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

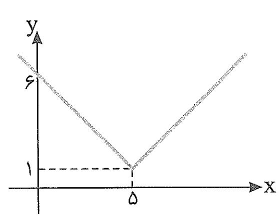
۴) 

راه‌حل راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که چون $|A|=|-A|$، پس

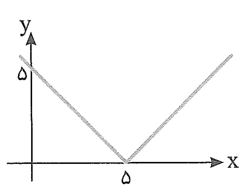
$$f(x)=|5-x|+1$$
$$=|x-5|+1$$

برای رسم کردن نمودار تابع f ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. سپس آن را ۵ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

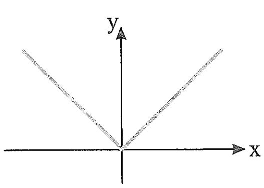
به این ترتیب نمودار گزینهٔ (۲) به‌دست می‌آید.



$y=|x-5|+1$



$y=|x-5|$



$y=|x|$

راه‌حل دوم توجه کنید که نمودار تابع f باید از نقاط $(5,1)$ و $(0,6)$ عبور کند. تنها نموداری که این شرایط را دارد نمودار گزینهٔ (۲) است.

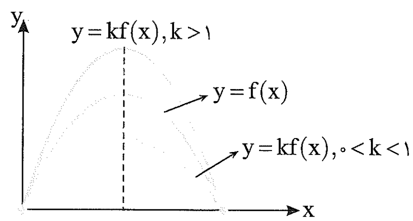
رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

۱) اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم. اگر $k>1$، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

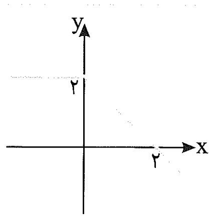
۲) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم.

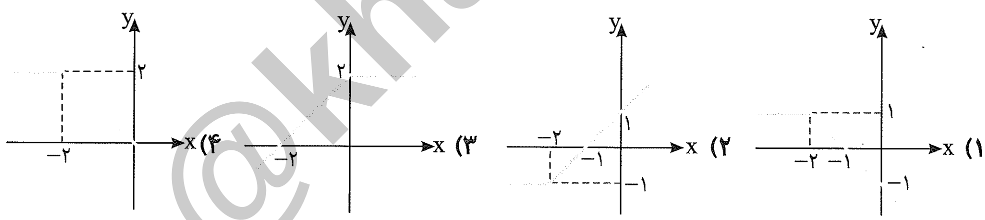
۳) اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=|k|f(x)$ را رسم کنیم و سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم.

نقطهٔ (x_0, ky_0) از نمودار تابع $y=kf(x)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

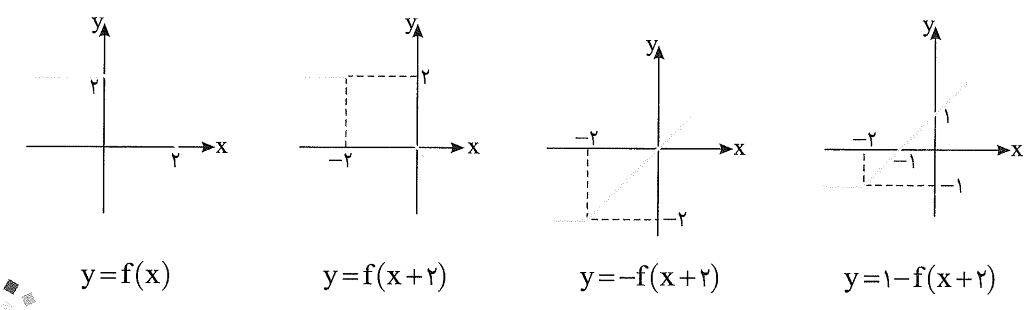


تست ۱۵ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ کدام است؟

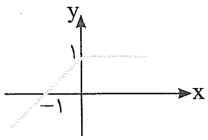


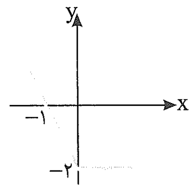
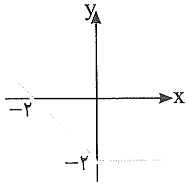
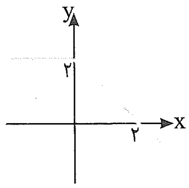
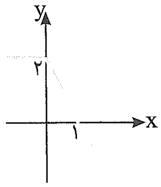


راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+2)$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x+2)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را ۱ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ به‌دست بیاید.

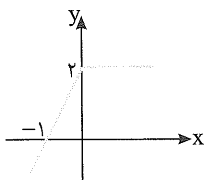


تست ۱۶ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=-۲f(x)$ کدام است؟

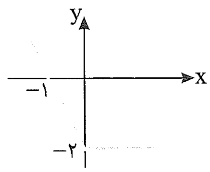


۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=۲f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ برابر می‌کنیم. سپس قرینهٔ این نمودار نسبت به محور x را رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۲f(x)$ به‌دست بیاید.

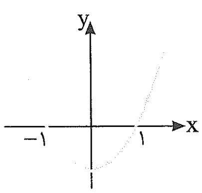


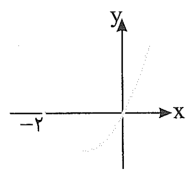
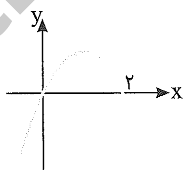
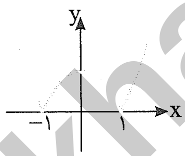
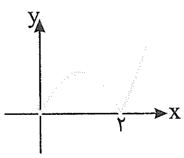
$y=۲f(x)$



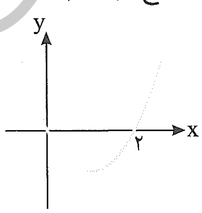
$y=-۲f(x)$

تست ۱۷ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ کدام است؟

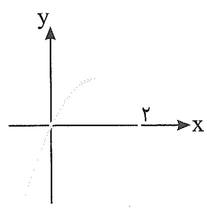


۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید، سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور x به‌دست می‌آوریم تا نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



$y=f(x-۱)$

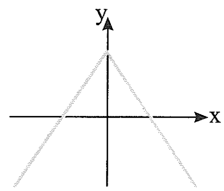


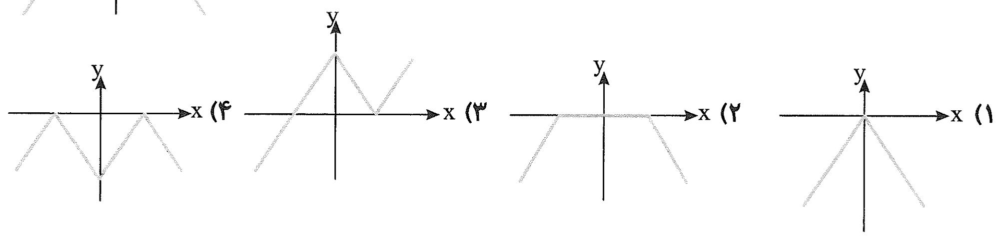
$y=-f(x-۱)$

روش رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

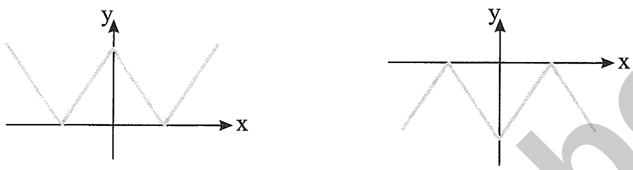
برای رسم کردن نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینهٔ قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم، در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

تست ۱۸ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=-|f(x)|$ کدام است؟



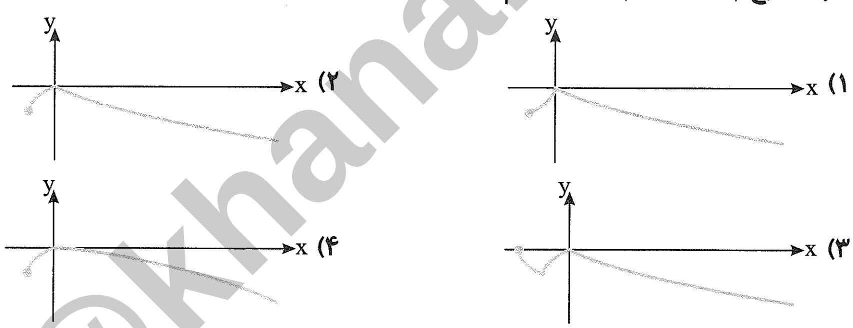


راه‌حل ابتدا قسمتی از نمودار f را که زیر محور x است نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=|f(x)|$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|f(x)|$ به‌دست بیاید.

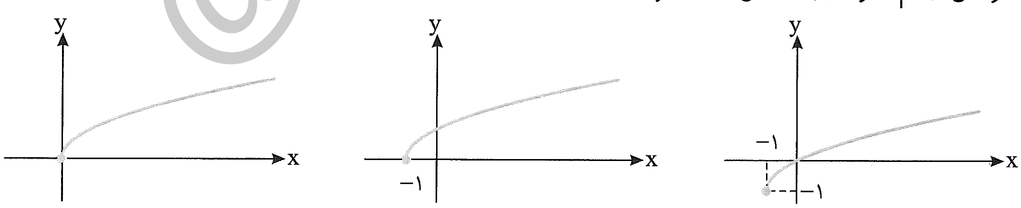


$y=|f(x)|$ $\qquad$ $y=-|f(x)|$

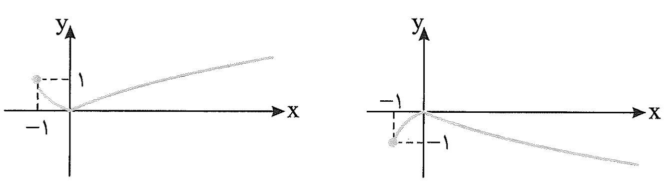
تست ۱۹ نمودار تابع $y=-|\sqrt{x+1}-1|$ کدام است؟



راه‌حل مراحل رسم نمودار در شکل‌های زیر آمده است:



$y=\sqrt{x}$ $\qquad$ $y=\sqrt{x+1}$ $\qquad$ $y=\sqrt{x+1}-1$



$y=|\sqrt{x+1}-1|$ $\qquad$ $y=-|\sqrt{x+1}-1|$

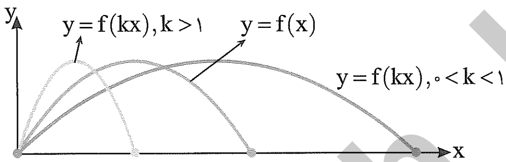
رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

۱) برای رسم کردن نمودار تابع $y=f(-x)$، کافی است قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y رسم کنیم.

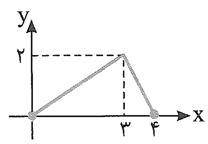
۲) برای رسم کردن نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط روی نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

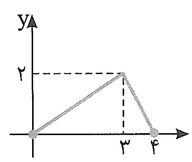
- اگر $۰<k<۱$، نمودار تابع $y=f(kx)$ از منبسط شدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور x با ضریب $\frac{۱}{k}$ به‌دست می‌آید.
- اگر $k>۱$، نمودار تابع $y=f(kx)$ از منقبض شدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور x با ضریب $\frac{۱}{k}$ به‌دست می‌آید.
- اگر $k<۰$، ابتدا نمودار تابع $y=f(|k|x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم، تا نمودار تابع $y=f(kx)$ به‌دست بیاید.

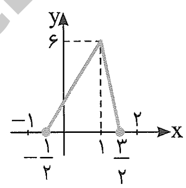
نقطهٔ $(\frac{x_۰}{k}, y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(kx)$ متناظر با نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از نمودار تابع $y=f(x)$ است.

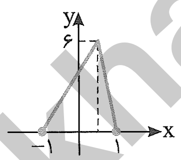


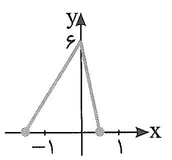
تست ۲۰ نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=۳f(۲x+۱)$ کدام است؟



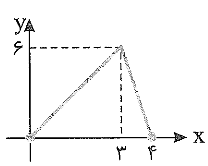
۱) 

۲) 

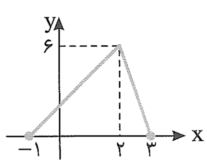
۳) 

۴) 

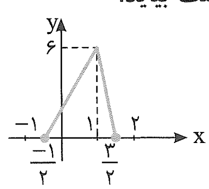
راه‌حل راه‌حل اول ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳f(x)$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۳f(x+۱)$ به‌دست بیاید. در آخر، طول هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳f(۲x+۱)$ به‌دست بیاید.



$y=۳f(x)$



$y=۳f(x+۱)$

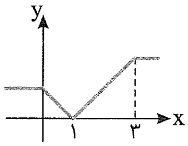


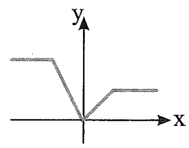
$y=۳f(۲x+۱)$

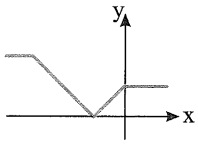
راه‌حل دوم نقطهٔ نظیر $A(۳,۲)$ روی نمودار تابع f را در تابع $y=۳f(۲x+۱)$ می‌یابیم:

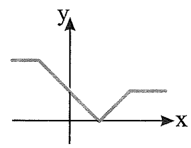
$$۲x+۱=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow \begin{cases} y=۳f(۲x+۱)=۳f(۳)=۳\times۲=۶ \\ x=۱ \end{cases} \Rightarrow A'(۱,۶)$$

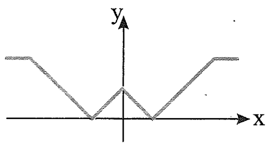
تست ۲۱ اگر نمودار تابع $y=f(x-1)$ شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(1-x)$ کدام است؟



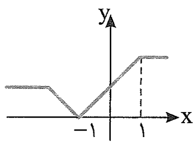
۱) 

۲) 

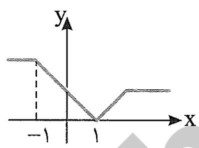
۳) 

۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=f(x-1)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ به‌دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(1-x)$ به‌دست می‌آید.



$y=f(1+x)$



$y=f(1-x)$

تست ۲۲ نمودار تابع $y=f(x-1)$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم، سپس ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و در آخر نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. نمودار به‌دست آمده متعلق به کدام تابع است؟

۱) $y=1-f(x+1)$ ۲) $y=1-f(x-3)$ ۳) $y=f(1-x)+1$ ۴) $y=f(1-x)-1$

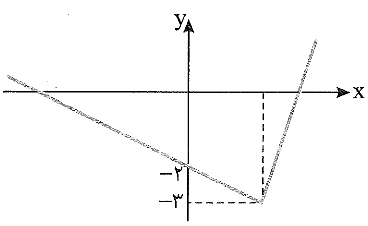
راه‌حل با انتقال تابع $y=f(x-1)$ به مقدار ۲ واحد به سمت چپ، تابع $y=f((x+2)-1)$، یعنی $y=f(x+1)$ به‌دست می‌آید. نمودار تابع $y=f(x+1)-1$ انتقال‌یافتهٔ تابع قبلی به مقدار یک واحد به سمت پایین است. اگر این نمودار را نسبت به محور x، قرینه کنیم، نمودار تابع زیر به دست می‌آید:

$$y=-(f(x+1)-1)=1-f(x+1)$$

روش رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$

برای رسم کردن نمودار تابع $y=f(|x|)$ کافی است قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که سمت چپ محور y است حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم کنیم.

تست ۲۳ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(|x|)+2$ محور x را در چند نقطه قطع می‌کند؟



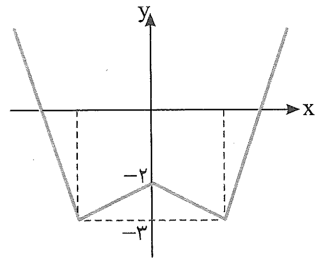
۱) ۱

۲) ۲

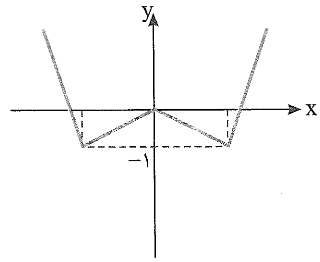
۳) ۳

۴) ۴

راه‌حل ابتدا از روی نمودار $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کرده، و سپس آن را ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=f(|x|)+۲$ برسیم.



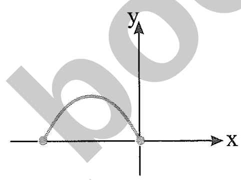
$y=f(|x|)$

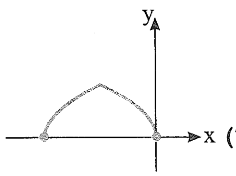


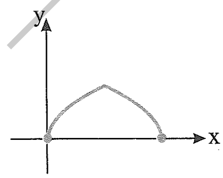
$y=f(|x|)+۲$

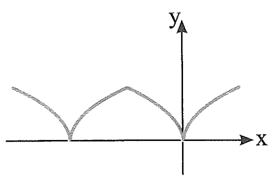
بنابراین نمودار تابع $y=f(|x|)+۲$ محور x را در سه نقطه قطع می‌کند.

تست ۲۴ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-|x+۱|}$ کدام است؟

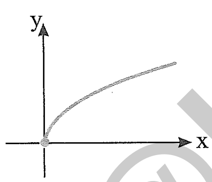
۱) 

۲) 

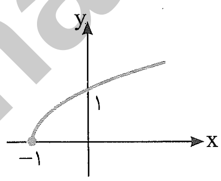
۳) 

۴) 

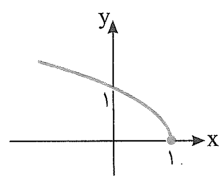
راه‌حل مراحل رسم نمودار به شکل زیر است:



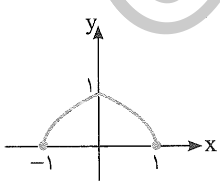
$y=\sqrt{x}$



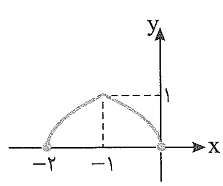
$y=\sqrt{۱+x}$



$y=\sqrt{۱-x}$



$y=\sqrt{۱-|x|}$



$y=\sqrt{۱-|x+۱|}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۸- اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,-۱),(-۱,۳),(۳,-۲)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۳,۲),(-۲,۴),(۱,-۱)\}$، تابع fog کدام است؟

۱) $\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۳),(۳,۱)\}$
۲) $\{(-۱,۱),(۳,۱),(۱,۳)\}$
۳) $\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$
۴) $\{(-۱,-۱),(۳,-۱),(۱,۳)\}$

۶۹- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}$، $g=\{(۱,۴),(۲,۱),(۳,۳),(۴,۲)\}$ و $fog=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$، مقدار $a-b+c-d$ چقدر است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) صفر
۴) ۴

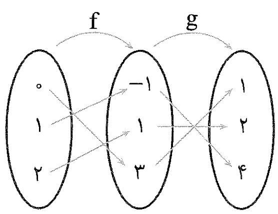
۷۰- اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$، $g=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c)\}$ و همواره $(fog)(x)=x$، مقدار $a-۲b-c$ چقدر است؟

۱) -۸
۲) -۷
۳) -۵
۴) -۴

۷۱- اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$ و $fog=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟

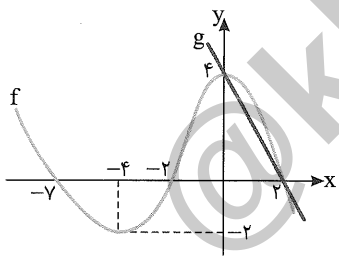
۱) $\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$
۲) $\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$
۳) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$
۴) $\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۳)\}$

۷۲- با توجه به شکل، حاصل $(fog)(۳)+(gof)(۲)+(gof)(۰)$ کدام است؟



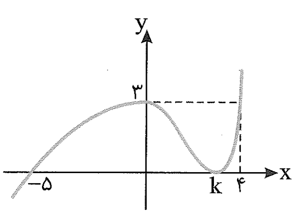
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۳- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\frac{(f+g)(-۴)}{(fog)(۴)}$ کدام است؟



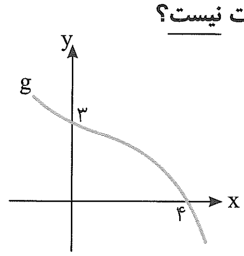
۱) -۵
۲) -۴
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

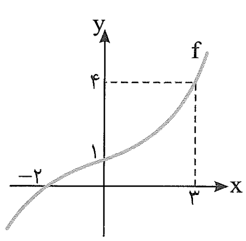
۷۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $(fofof)(-۵)=۰$، مقدار k چقدر است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۵- نمودار تابع‌های f و g در شکل‌های مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟





۱) $(fog)(۴)=۱$
۲) $(gof)(۴)<۰$
۳) $(gof)(-۳)>۰$
۴) $(fog)(۳)<۰$

۷۶- اگر $(fog)(x)=x^{۲}-۲x+۳$، $f(-۱)=۳$ و تابع f یک‌به‌یک باشد، حاصل $g(۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۷- اگر $f(x)=۱-x^{۲}$ و $g(x-۱)=۲x-۱$، مقدار $(fog)(-۲)$ چقدر است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۸ ۴) -۱۲

۷۸- اگر $f(x)=۲x+m$، $g(x)=۲^{x}-۱$ و $(fog)(۳)=۸$، مقدار $f(m)$ چقدر است؟

۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) -۱۵ ۴) -۶

۷۹- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x<۰ \\ ۴x+۵ & ۰\leq x<۵ \\ x^{۳}-۱۵ & x\geq ۵ \end{cases}$، مقدار $(fofof)(-۱)$ چقدر است؟

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۱۰

۸۰- اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{۳x-۱}{x-۱} & x<۰ \\ \frac{۳-x}{۵+x} & x\geq ۰ \end{cases}$، مقدار $(fof)(-۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۸۱- اگر $f(x)=\begin{cases} ax+۲ & x\leq ۱ \\ x^{۲}-۳x & x>۱ \end{cases}$ و $(fof)(۲)=-۴$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۲- اگر $f(۲x+۱)=\begin{cases} x+۵ & x\leq ۱ \\ x-۲ & x>۱ \end{cases}$ و $g(x-۲)=x^{۲}-۶$، مقدار $(fog)(-۳)$ چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) -۲

۸۳- اگر $f(x)=۲x+۳$، $g(x)=\begin{cases} ۲x-m & x\geq ۱ \\ nx+۳ & x<۱ \end{cases}$ و $(gof)(۳)=۲$، مقدار $g(۱)$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) -۱۴

۸۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\leq ۰ \\ x^{۲}+۲ & x>۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+۶ & x\leq ۱ \\ x^{۲} & x>۱ \end{cases}$، مقدار $(fog)(-۲)$ چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

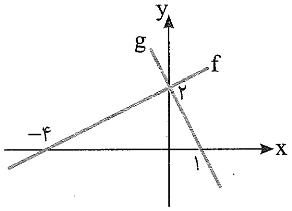
۸۵- اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲}$ و $g(x)=۷-x$، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\frac{۳-x}{۲}$ ۲) $۳-\frac{x}{۲}$ ۳) $\frac{۳+x}{۲}$ ۴) $۳+\frac{x}{۲}$

۸۶- اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=۳x-۲$، سادهٔ شدهٔ عبارت $(gof)(x)-(fog)(x)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۱۵ ۳) $۱۲x-۴$ ۴) $۱۲x-۱۵$

۸۷- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. ضابطهٔ تابع fog کدام است؟



۱) $x+3$
۲) $3-x$
۳) $-3-x$
۴) x

۸۸- اگر $f(x)=3x-1$، $g(x)=4x+a$ و همواره $(fog)(x)=(gof)(x)$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۸۹- اگر $f(x)=\frac{5x-3}{x+4}$ و gof تابع همانی باشد، مقدار $g(4)$ چقدر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶

۹۰- اگر $f(x)=|x+2|-4$ و $g(x)=|x|$، حاصل $(fofog)(x)$ کدام است؟

۱) $|x|+1$ ۲) $|x-2|$ ۳) $|x|-2$ ۴) $|x|-4$

۹۱- اگر $f(x)=x^2+3x+2$، معادلهٔ $(fof)(x)=2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

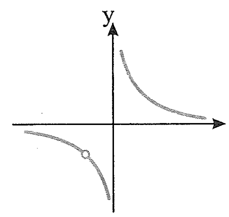
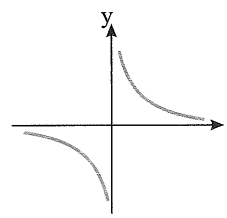
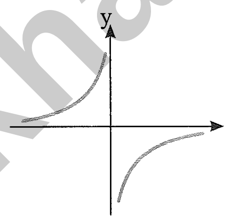
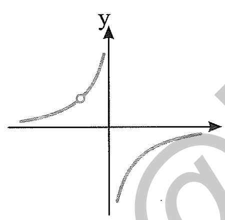
۹۲- اگر $f(x)=|x+1|$ و $g(x)=|x+2|-4$، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=7$ چقدر است؟

۱) ۸- ۲) ۶- ۳) ۴- ۴) ۶

۹۳- اگر تابع‌های f و g در تساوی‌های $(fog)(x)=x^2$ و $(gof)(x)=x^3$ صدق کنند و $g(16)=16$، مقدار $g(4)$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{16}$ ۲) $\sqrt[3]{8}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۴- اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$، نمودار تابع $g(x)=(fof)(x)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۵- اگر $f(x)=\sqrt{3-x^2}$ و $g=\{(-2,2),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$، تابع gof کدام است؟

۱) $\{(-1,0),(1,0)\}$
۲) $\{(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0),(-\sqrt{3},-1),(\sqrt{3},-1)\}$
۳) $\{(\sqrt{2},0),(\sqrt{3},-1)\}$
۴) $\{(-\sqrt{2},1),(\sqrt{2},1),(-\sqrt{3},2),(\sqrt{3},2)\}$

۹۶- اگر

$$f(x)=x^2-x\,,\quad 2\le x\le 4$$
$$g(x)=|x-1|\,,\quad -4\le x\le 4$$

دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $[-4,4]$ ۲) $[-3,4]$ ۳) $[-3,4]-(-1,3)$ ۴) $[-3,5]-[-1,3)$

۹۷- اگر $f(x)=\sqrt{4x-x^2}-1$، دامنهٔ تابع fof کدام است؟

۱) $[0,4]$ ۲) $[2+\sqrt{3},4]$ ۳) $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ ۴) $[0,2-\sqrt{3}]$

۹۸- اگر دامنهٔ تابع $y=f(۱+x)$ به صورت $[-۲,۳]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(۲x-۱)$ کدام است؟

۱) $[۰,\frac{۵}{۲}]$ ۲) $[-۱,۴]$ ۳) $[-۵,۵]$ ۴) $[-۳,۷]$

۹۹- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x^۲)$ کدام است؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[۱,۱۶]$ ۳) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۴) $[۱,۲]\cup[۴,۱۶]$

۱۰۰- اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=x^۲+۴$، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $[۴,+\infty)$ ۳) $[۲,۴]$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۰۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -x & x<۰ \\ x^۲ & x>۰ \end{cases}$، تابع gof کدام است؟

۱) $\begin{cases} x^۴ & x<۰ \\ x^۲ & x>۰ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ -x^۲ & x>۰ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} ۱-x^۲ & x<۰ \\ x^۲+۱ & x>۰ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} -x & x<۰ \\ ۱-x & x>۰ \end{cases}$

۱۰۲- اگر $f(x)=۳x+۲$ و $(gof)(x)=۳x^۲-۱$، مقدار $g(-۷)$ چقدر است؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۱

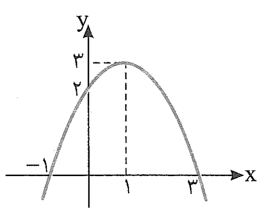
۱۰۳- اگر $f(x)=۳^{۳x-۱}-۱$ و $(fog)(x)=۳f(x)+۲$، مقدار $g(\frac{۴}{۳})$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰۴- اگر $f(x)=۳x-۲$ و $(fog)(۱۰)=۷$، مقدار $(gof)(۴)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

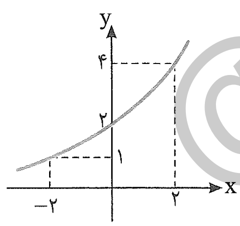
۱۰۵- نمودار تابع fog در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f(x)=۳+۲x$، حاصل $(gog)(۱)$ چقدر است؟



۱) صفر ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) -۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۶- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر $(fof)(t)=۴$، مقدار $f(t-۲)$ چقدر است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۰۷- اگر $g(x)=۴x-۱۹$ و $(gof)(x)=g(x)$، مقدار $(f+g)(۴)$ چقدر است؟

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۰۸- اگر $g(x)=x^۲-x+۴$ و $(gof)(x)=x+f(x)$، مقدار $f(۳)$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۰۹- اگر $g(x)=\frac{x-۱}{۳}$ و $(gof)(x)=۳x+۴$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $۹x+۱۲$ ۲) $۹x+۱۳$ ۳) $۹x-۷$ ۴) $۹x-۸$

۱۱۰- اگر f یک تابع خطی باشد و $(fof)(x)=۴x-۳$، مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۱ یا -۳ ۲) -۱ یا ۳ ۳) -۱ یا -۳ ۴) ۱ یا ۳

۱۱۱- اگر $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=\dfrac{x}{2x-1}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $\dfrac{x}{x+1}$ ۲) $\dfrac{x}{1-x}$ ۳) $\dfrac{x}{x-1}$ ۴) $\dfrac{-x}{x+1}$

۱۱۲- اگر $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ و $(fog)(x)=-f(x)$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\dfrac{x-4}{2x-1}$ ۲) $g(x)=\dfrac{x+4}{2x+1}$ ۳) $g(x)=\dfrac{4-x}{2x+1}$ ۴) $g(x)=\dfrac{4-x}{2x-1}$

۱۱۳- اگر $g(x)=2x-1$ و $(fog)(x)=4x-1$، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $4x+1$ ۲) $2x+1$ ۳) $\dfrac{x+1}{4}$ ۴) $\dfrac{x+1}{2}$

۱۱۴- اگر $g(x)=x+1$ و $(fog)(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ ۲) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ ۳) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ ۴) $\dfrac{x^2+1}{x}$

۱۱۵- اگر $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ و $(gof)(x)=\dfrac{x}{x-1}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $\dfrac{1-x}{1-2x}$ ۲) $\dfrac{1+x}{1+2x}$ ۳) $\dfrac{1-x}{1+2x}$ ۴) $\dfrac{1+x}{1-2x}$

۱۱۶- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x)<1$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(x^2+2)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $\varnothing$

۱۱۷- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، $D_f=\mathbb{R}$، $f(1)=0$ و $f(0)=1$، دامنهٔ تابع $g(x)=\log(f(x))$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

۱۱۸- اگر f تابعی صعودی با دامنهٔ $[-3,3]$ باشد و $f(2)=0$، دامنهٔ تابع $g(x)=\log(f(x+1))$ کدام است؟

۱) $[-4,2]$ ۲) $(1,3]$ ۳) $(1,2]$ ۴) $[-4,1)$

۱۱۹- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، $D_f=[0,+\infty)$، $f(0)=2$ و $f(1)=0$، دامنهٔ تابع $g(x)=(fof)(x)$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[1,2]$

۱۲۰- اگر $f(2)=3$، $f(1)=2$ و f تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و اکیداً صعودی باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{3-(fof)(x)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $[3,+\infty)$

۱۲۱- اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، تابع $y=f(-x^3+2)$ چگونه تابعی است؟

۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی ۳) غیریکنوا ۴) بستگی به تابع f دارد.

۱۲۲- اگر f تابعی نزولی باشد، کدام تابع نزولی است؟

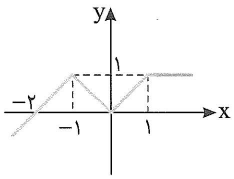
۱) $\dfrac{1}{f}$ ۲) $-f$ ۳) $\sqrt[3]{f}$ ۴) $|f|$

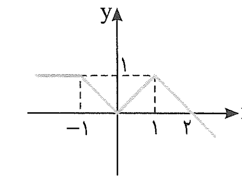
۱۲۳- اگر f تابعی یکنوا باشد، آن‌گاه تابع fof

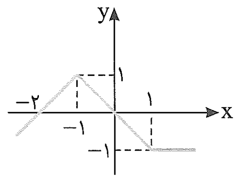
۱) صعودی است. ۲) نزولی است.

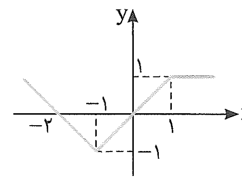
۳) ممکن است صعودی یا نزولی باشد. ۴) ممکن است غیریکنوا باشد.

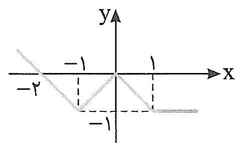
۱۲۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام گزینه است؟



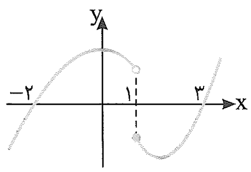
۱) 

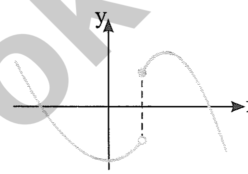
۲) 

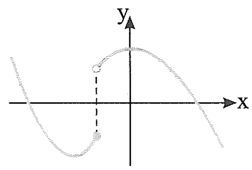
۳) 

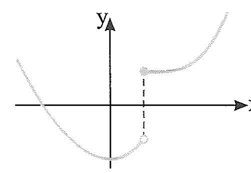
۴) 

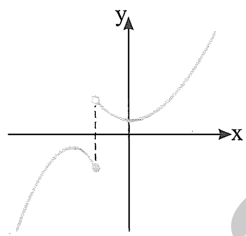
۱۲۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام گزینه است؟



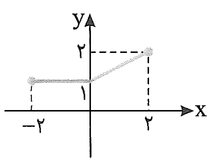
۱) 

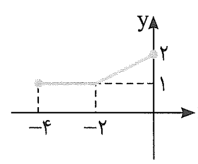
۲) 

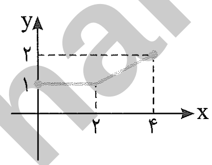
۳) 

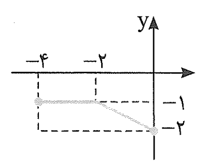
۴) 

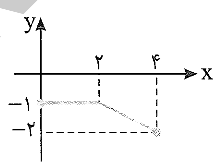
۱۲۶- در شکل مقابل نمودار تابع $y=-f(x-۲)$ رسم شده است. نمودار تابع f کدام گزینه است؟



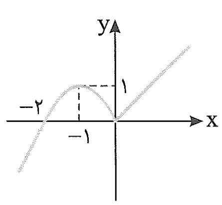
۱) 

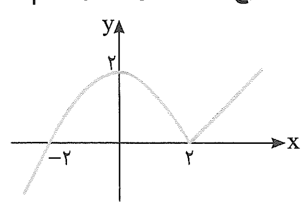
۲) 

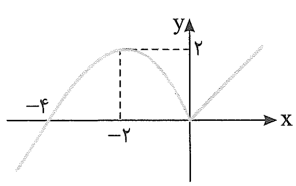
۳) 

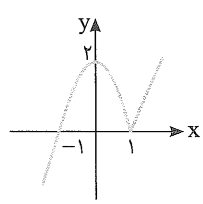
۴) 

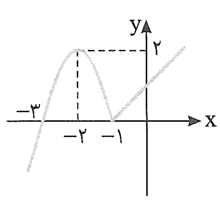
۱۲۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=۲f(x-۱)$ کدام گزینه است؟



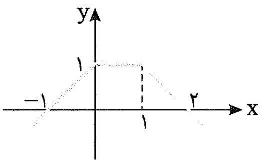
۱) 

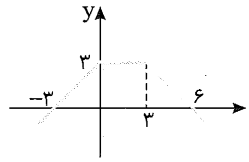
۲) 

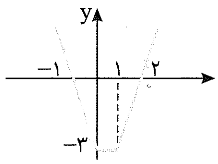
۳) 

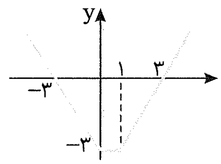
۴) 

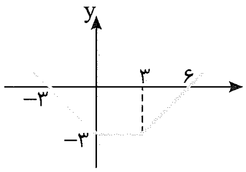
۱۲۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-۳f(x)$ کدام گزینه است؟



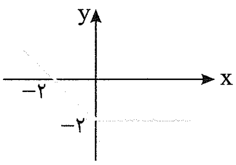
۱) 

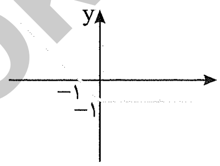
۲) 

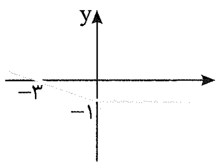
۳) 

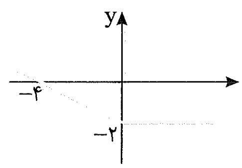
۴) 

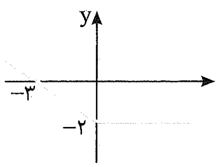
۱۲۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ کدام گزینه است؟



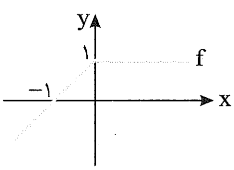
۱) 

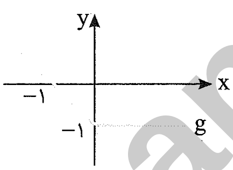
۲) 

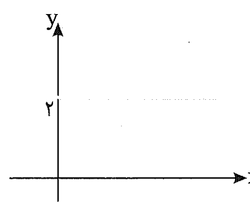
۳) 

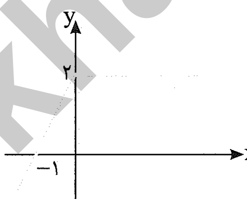
۴) 

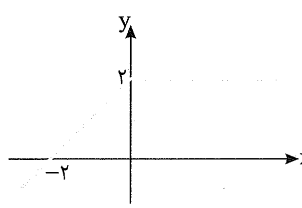
۱۳۰- نمودار تابع‌های f و g در شـکل‌های مقابل رسم شـده است. نمودار تابع $f-g$ کدام گزینه است؟

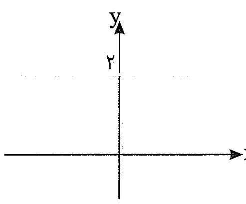




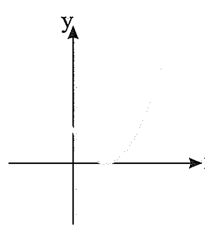
۱) 

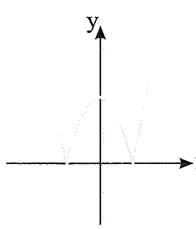
۲) 

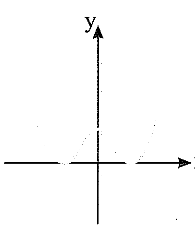
۳) 

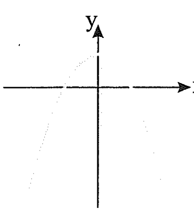
۴) 

۱۳۱- اگر $f(x)=۲x^۲-۱$ و $g(x)=|x-۱|$، نمودار تابع gof کدام است؟

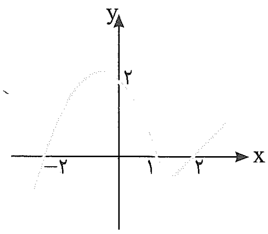
۱) 

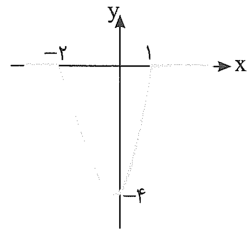
۲) 

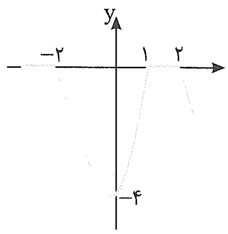
۳) 

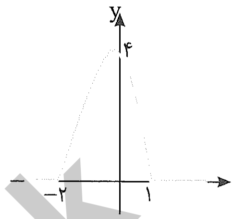
۴) 

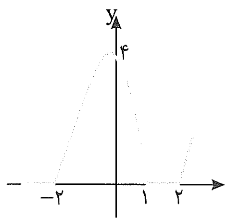
۱۳۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x)+|f(x)|$ کدام گزینه است؟



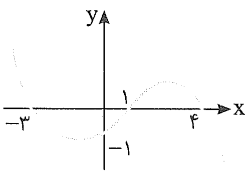
۱) 

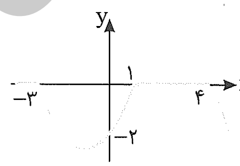
۲) 

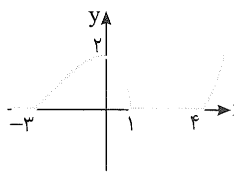
۳) 

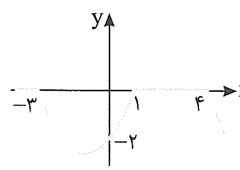
۴) 

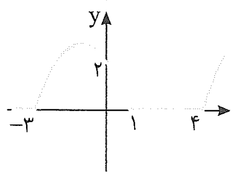
۱۳۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x)-|f(x)|$ کدام گزینه است؟



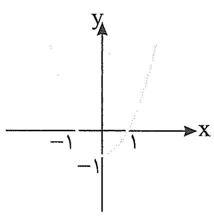
۱) 

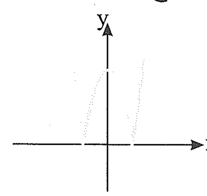
۲) 

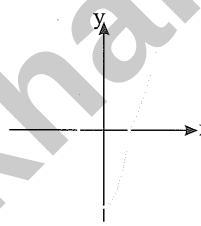
۳) 

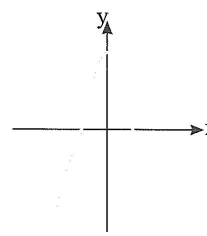
۴) 

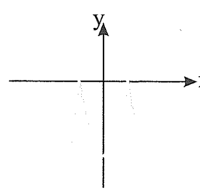
۱۳۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=2f(x)-|f(x)|$ کدام گزینه است؟



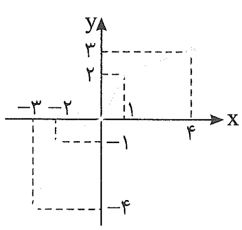
۱) 

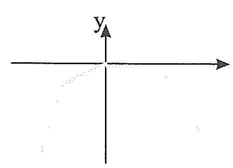
۲) 

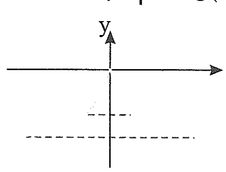
۳) 

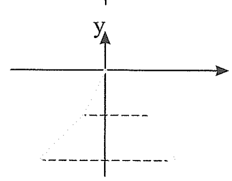
۴) 

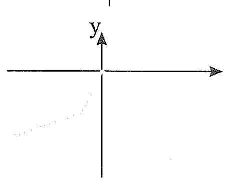
۱۳۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-|f(x)|$ کدام گزینه است؟



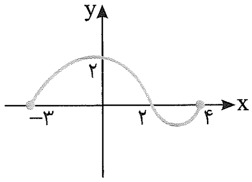
۱) 

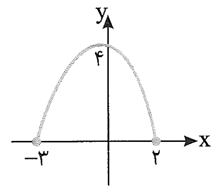
۲) 

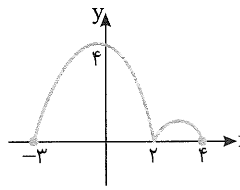
۳) 

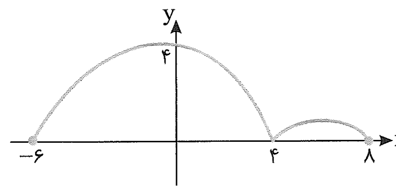
۴) 

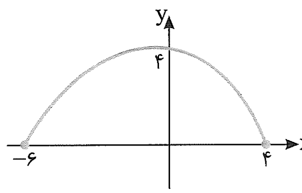
۱۳۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|2f(x)|$ کدام گزینه است؟



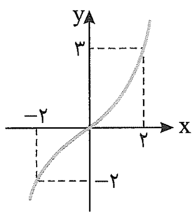
۱)


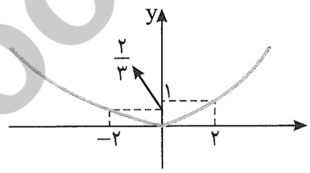
۲)


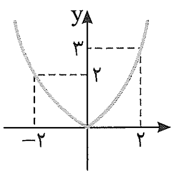
۳)


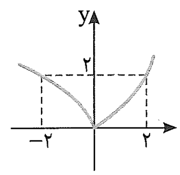
۴)


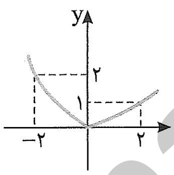
۱۳۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=\dfrac{|2f(x)-|f(x)||}{3}$ کدام گزینه است؟



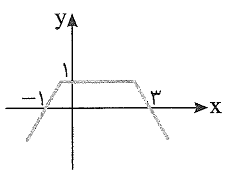
۱)


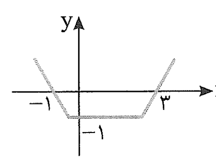
۲)


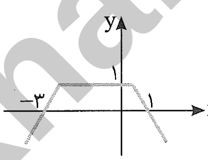
۳)


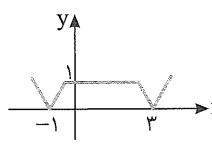
۴)


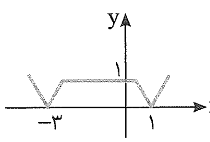
۱۳۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام گزینه است؟



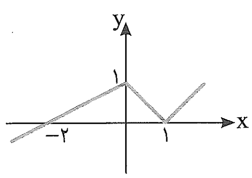
۱)


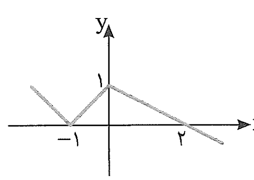
۲)


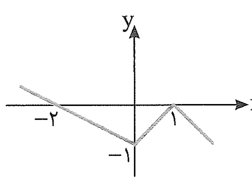
۳)


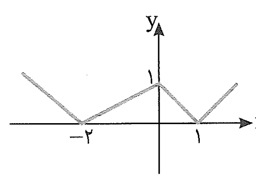
۴)


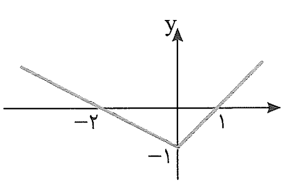
۱۳۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام گزینه است؟



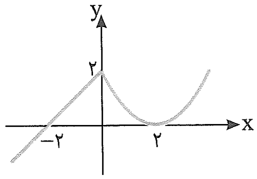
۱)


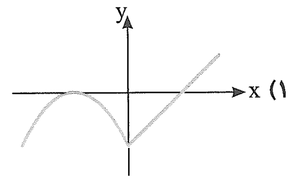
۲)


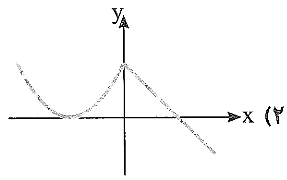
۳)


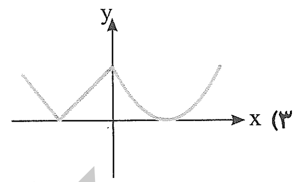
۴)


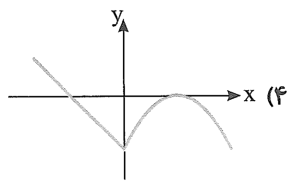
۱۴۰- نمودار تابع $y=f(-x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام است؟



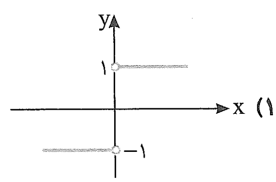

۱)

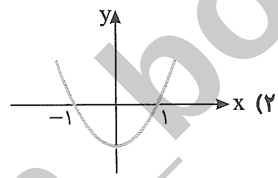

۲)

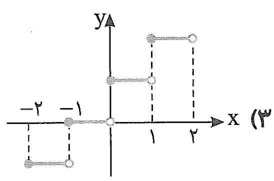

۳)

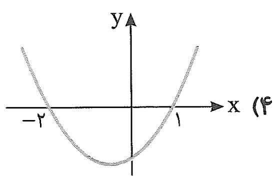

۴)

۱۴۱- در هر گزینه نمودار تابعی مانند f رسـم شـده است. تابع کدام گزینه این ویژگی را دارد که نمودار تابع $g(x)=f(-x)$ بر نمودار تابع f منطبق است؟

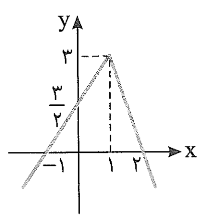

۱)

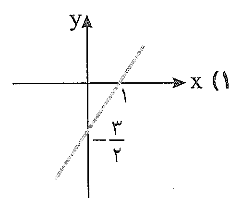

۲)

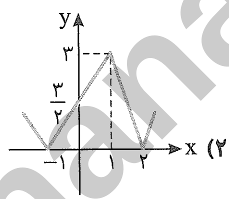

۳)

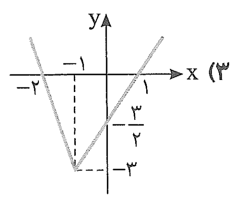

۴)

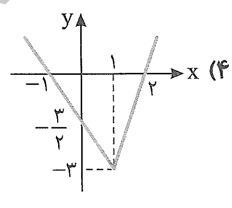
۱۴۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(-x)$ کدام گزینه است؟



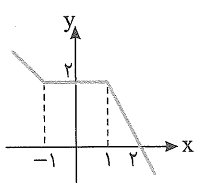

۱)

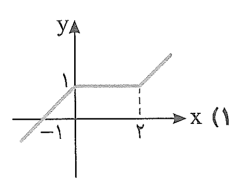

۲)

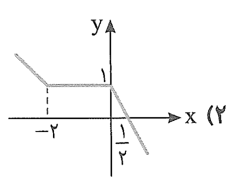

۳)

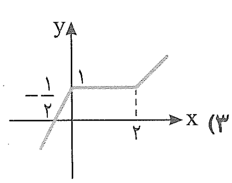

۴)

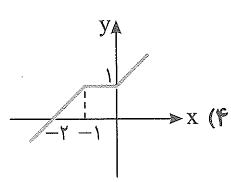
۱۴۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(1-x)-1$ کدام گزینه است؟



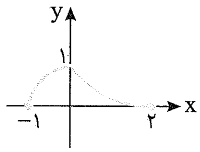

۱)

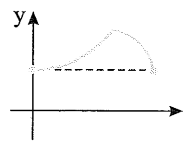

۲)

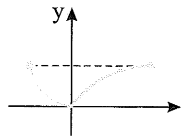

۳)

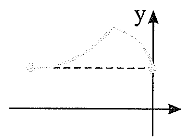

۴)

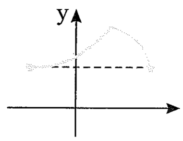
۱۴۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=۱+f(۱-x)$ کدام گزینه است؟



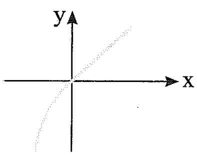
۱) 

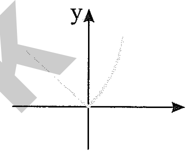
۲) 

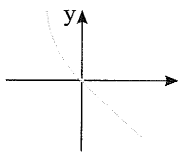
۳) 

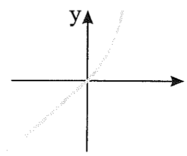
۴) 

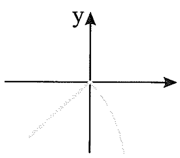
۱۴۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x)=\begin{cases} f(-x) & x\geq ۰ \\ -f(-x) & x<۰ \end{cases}$، نمودار تابع g کدام گزینه است؟



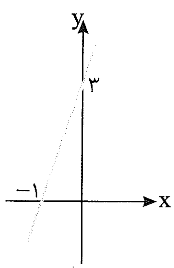
۱) 

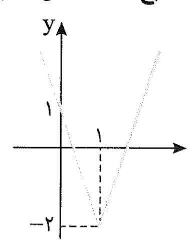
۲) 

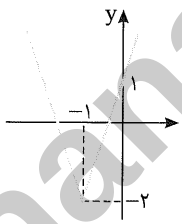
۳) 

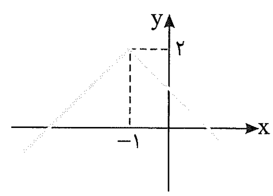
۴) 

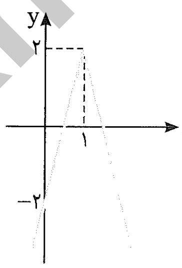
۱۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|-۲$ کدام گزینه است؟



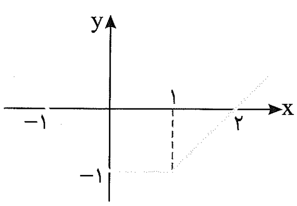
۱) 

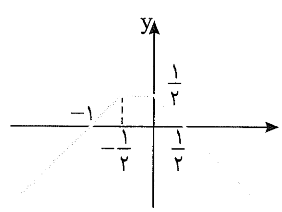
۲) 

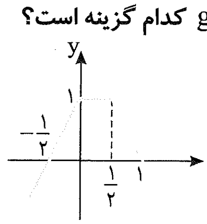
۳) 

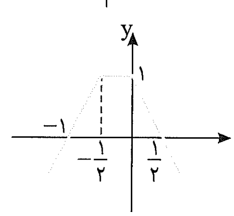
۴) 

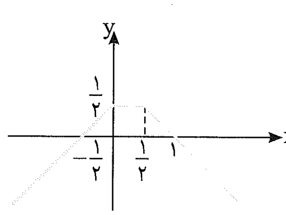
۱۴۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(۲x)$ کدام گزینه است؟



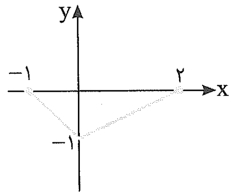
۱) 

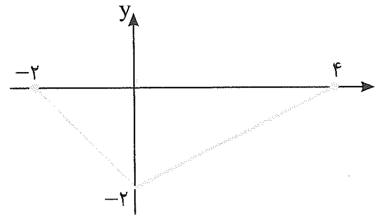
۲) 

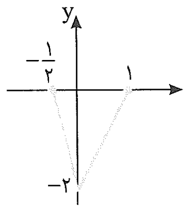
۳) 

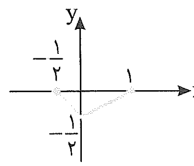
۴) 

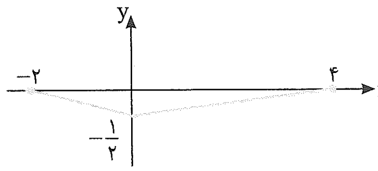
۱۴۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ کدام است؟



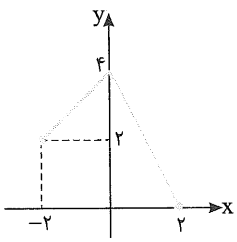
۱) 

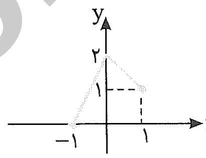
۲) 

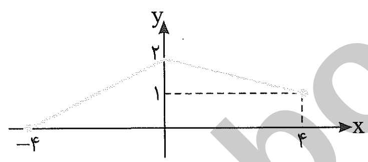
۳) 

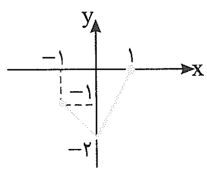
۴) 

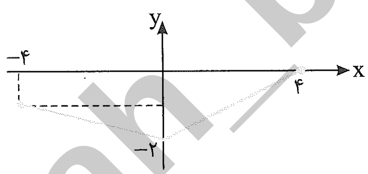
۱۴۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)$ کدام است؟



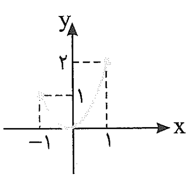
۱) 

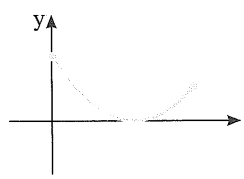
۲) 

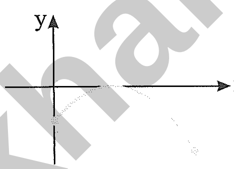
۳) 

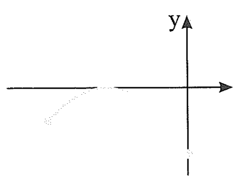
۴) 

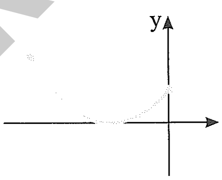
۱۵۰- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{2}+1)$ کدام است؟



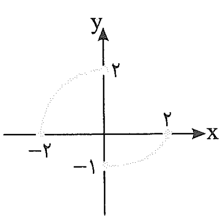
۱) 

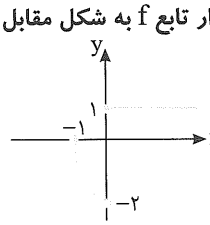
۲) 

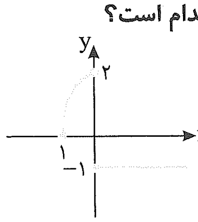
۳) 

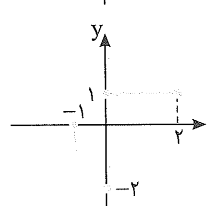
۴) 

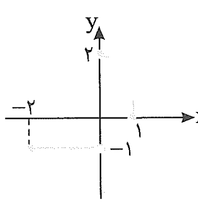
۱۵۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $g(x)=-f(x-|x|)$ کدام است؟



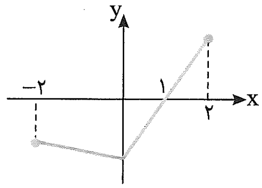
۱) 

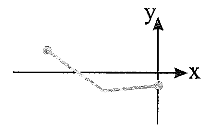
۲) 

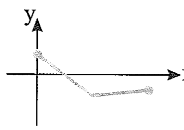
۳) 

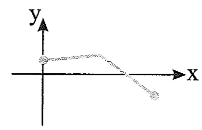
۴) 

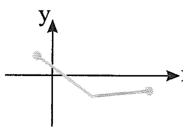
۱۵۲- نمودار تابع $y=f(1-x)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کدام است؟



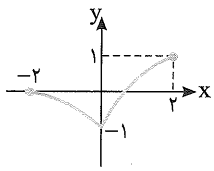
۱) 

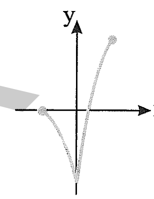
۲) 

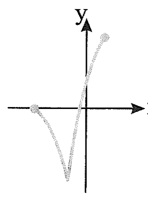
۳) 

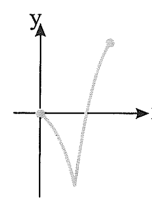
۴) 

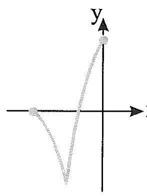
۱۵۳- نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(x-1)$ کدام است؟



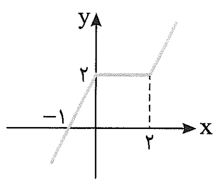
۱) 

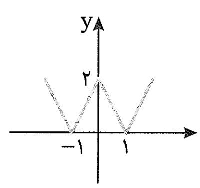
۲) 

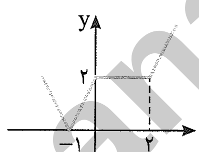
۳) 

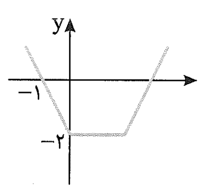
۴) 

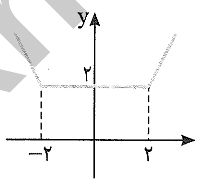
۱۵۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام است؟



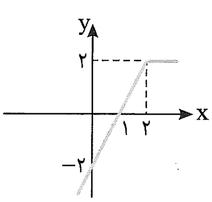
۱) 

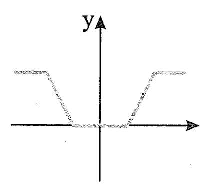
۲) 

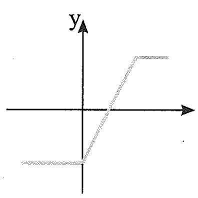
۳) 

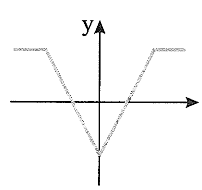
۴) 

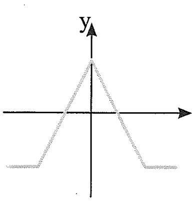
۱۵۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام گزینه است؟



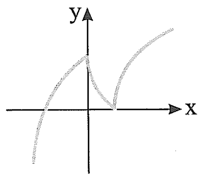
۱) 

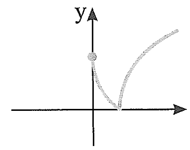
۲) 

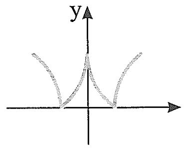
۳) 

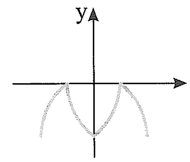
۴) 

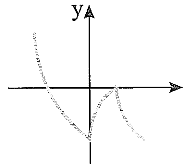
۱۵۶- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام است؟



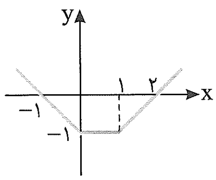
۱) 

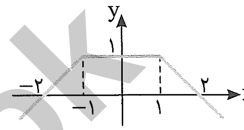
۲) 

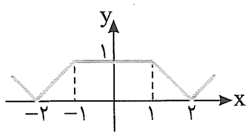
۳) 

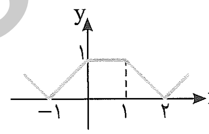
۴) 

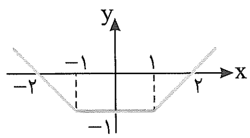
۱۵۷- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(|x|)$ کدام است؟



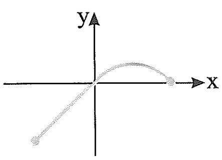
۱) 

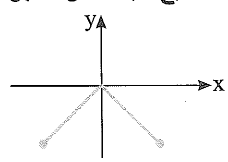
۲) 

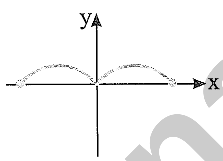
۳) 

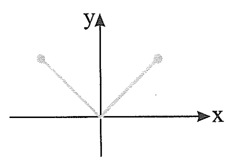
۴) 

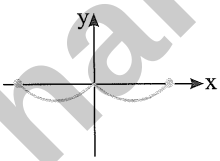
۱۵۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(-|x|)$ کدام است؟



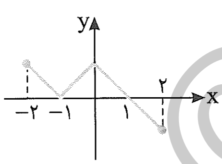
۱) 

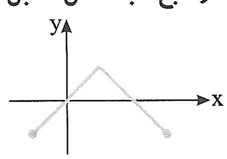
۲) 

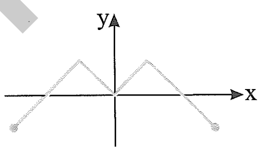
۳) 

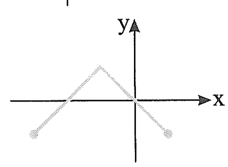
۴) 

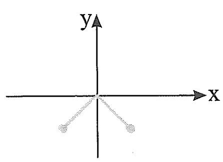
۱۵۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ کدام است؟



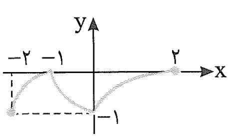
۱) 

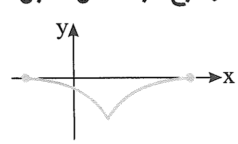
۲) 

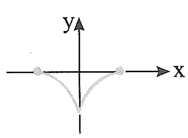
۳) 

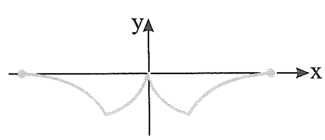
۴) 

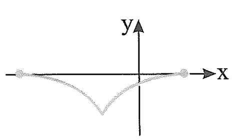
۱۶۰- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ کدام است؟



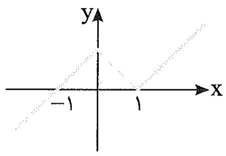
۱) 

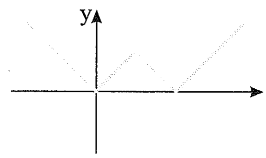
۲) 

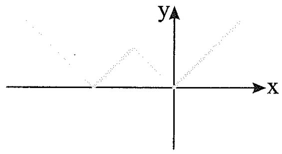
۳) 

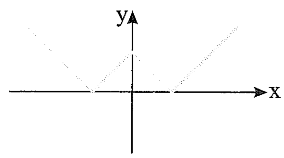
۴) 

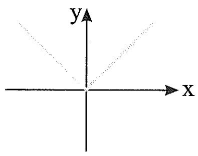
۱۶۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(1+|x|)$ کدام است؟



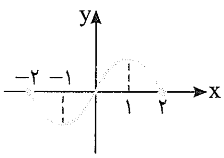
۱) 

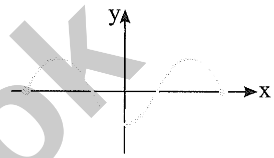
۲) 

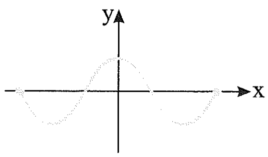
۳) 

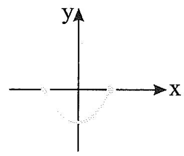
۴) 

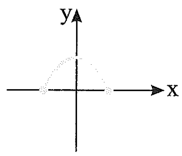
۱۶۲- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(1-|x|)$ کدام است؟



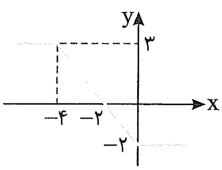
۱) 

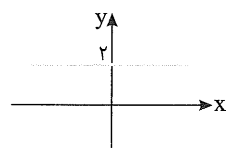
۲) 

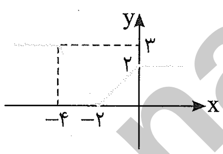
۳) 

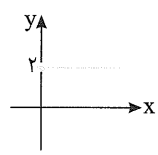
۴) 

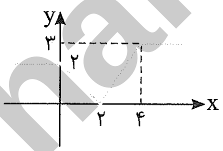
۱۶۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=|f(|x|)|$ کدام گزینه است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۶۴- نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

۱) $y=-f(x)-1$ ۲) $y=-f(x-1)$ ۳) $y=f(-x-1)$ ۴) $y=f(-x+1)$

۱۶۵- طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر می‌کنیم، سپس نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

۱) $y=f(2x+1)$ ۲) $y=f(2x+2)$ ۳) $y=f(\frac{x}{2}+1)$ ۴) $y=f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$

۱۶۶- طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم و عرض آنها را دو برابر می‌کنیم. سپس نمودار را یک واحد به چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

۱) $y=2f(2-2x)$ ۲) $y=2f(1-\frac{x}{2})$ ۳) $y=\frac{1}{2}f(2x+2)$ ۴) $y=\frac{1}{2}f(1-2x)$

۱۶۷- نمودار تابع $g(x)=f(1-x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور طول‌ها و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر طول نقاط را نصف می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=1-f(2x+2)$ ۲) $y=-1+f(2x-2)$ ۳) $y=1-f(2x)$ ۴) $y=-1+f(2x-1)$

۱۶۸- نمودار تابع $g(x)=۲f(۳x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=f(\frac{۳}{۲}x-\frac{۳}{۲})+۱$ ۲) $y=f(\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲})+۱$ ۳) $y=f(۶x-۳)+۱$ ۴) $y=f(۶x-۱)+۱$

۱۶۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-x}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و مجدداً یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=\sqrt{x+۲}$ ۲) $y=\sqrt{x}$ ۳) $y=\sqrt{-x+۲}$ ۴) $y=\sqrt{x-۲}$

۱۷۰- نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=\sqrt{|x+۱|+۱}$ ۲) $y=\sqrt{|-x+۱|+۱}$ ۳) $y=\sqrt{|x+۱|}+۱$ ۴) $y=\sqrt{|-x+۱|}+۱$

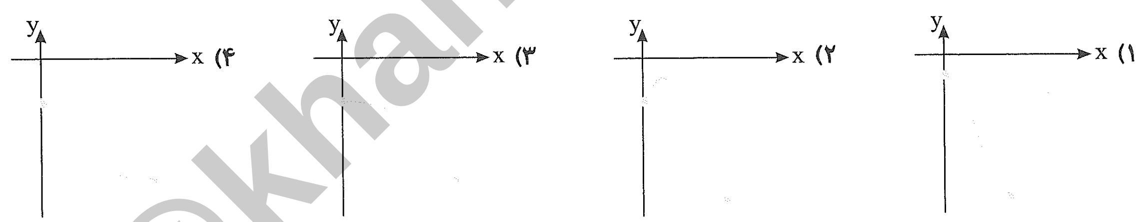
۱۷۱- نمودار تابع $f(x)=\cos(۲x-۱)+۱$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم و در آخر عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

۱) $y=۲\cos(۲x+۳)+۱$ ۲) $y=۲\cos(۲x+۱)+۱$ ۳) $y=۲\cos(۲x+۳)+۲$ ۴) $y=۲\cos(۲x+۲)+۲$

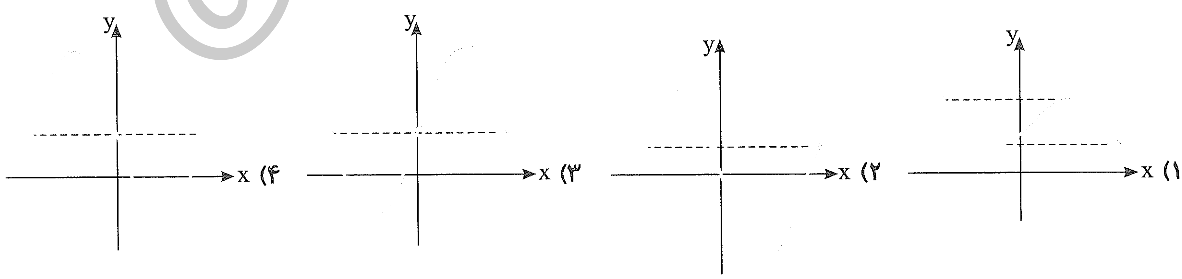
۱۷۲- نمودار تابع $f(x)=۲|x-۱|-۴$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را نصف می‌کنیم و در آخر آن را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

۱) $y=-|۲x-۲|+۱$ ۲) $y=۲|x+۱|-۵$ ۳) $y=-۲|۲x-۲|+۱$ ۴) $y=-|۲x-۱|+۱$

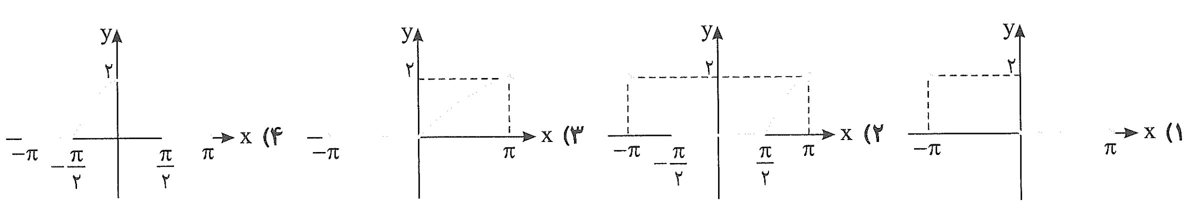
۱۷۳- نمودار تابع f با دامنهٔ $[۰,\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=۳\cos x-۴$ کدام گزینه است؟



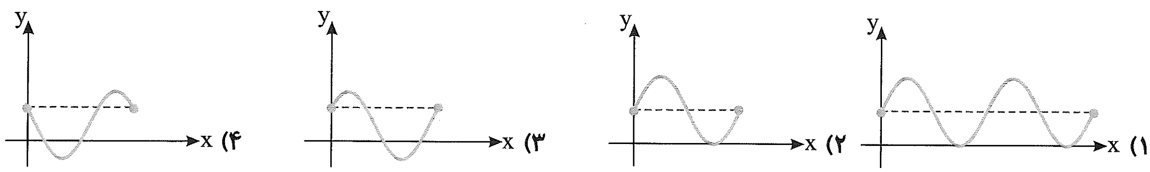
۱۷۴- نمودار تابع f با دامنهٔ $[-\pi,\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=۲-۳\sin x$ کدام گزینه است؟



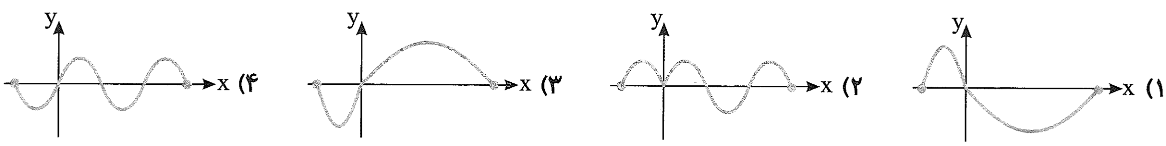
۱۷۵- نمودار تابع f با دامنهٔ $[-\pi,\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=|\cos x|-\cos x$ کدام گزینه است؟



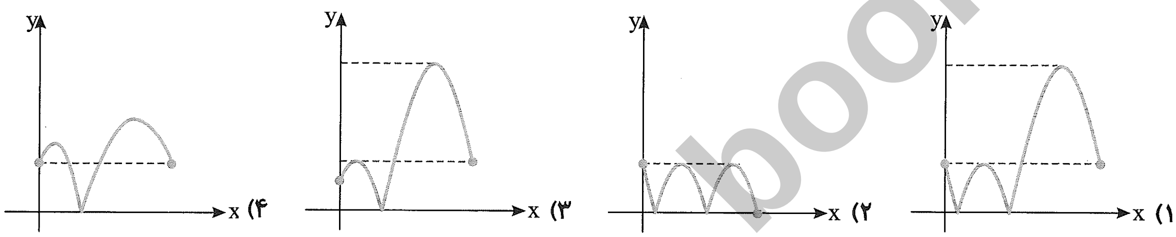
۱۷۶- نمودار تابع f با دامنهٔ $[0, 2\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=\sin 2x+1$ کدام گزینه است؟



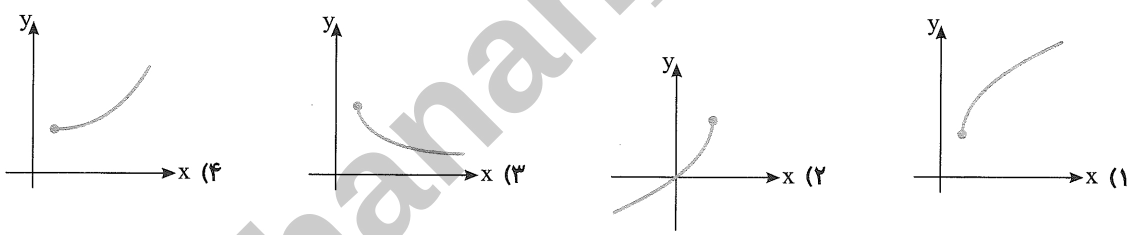
۱۷۷- نمودار تابع f با دامنهٔ $[-\frac{\pi}{3}, \pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=\sin(2x-|x|)$ کدام است؟



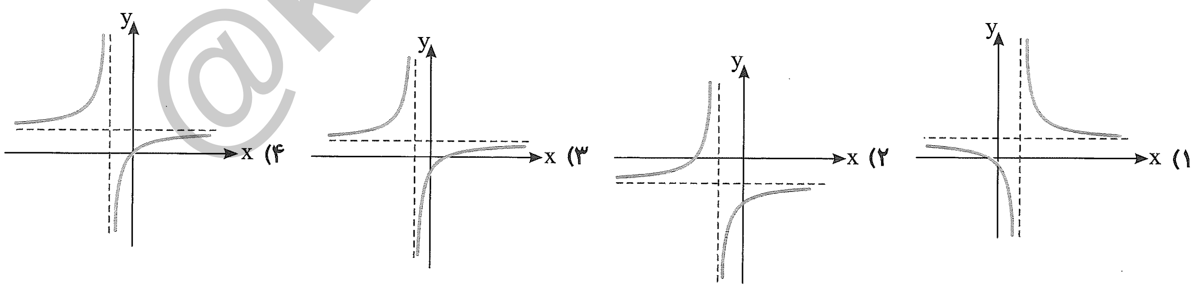
۱۷۸- نمودار تابع $y=|2\sin 2x-1|$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟



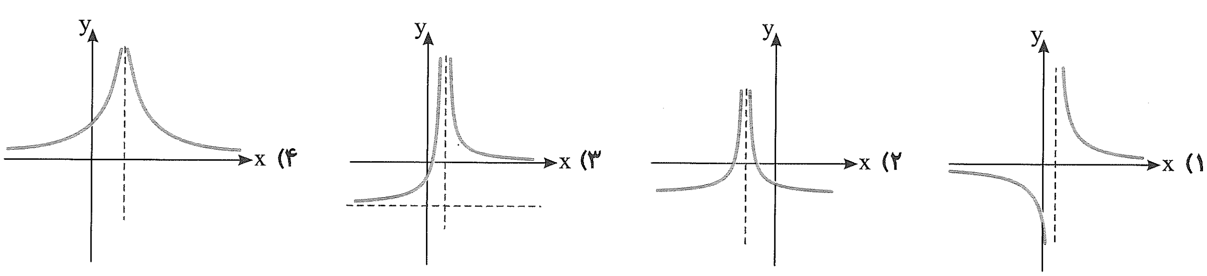
۱۷۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}+1$ کدام است؟



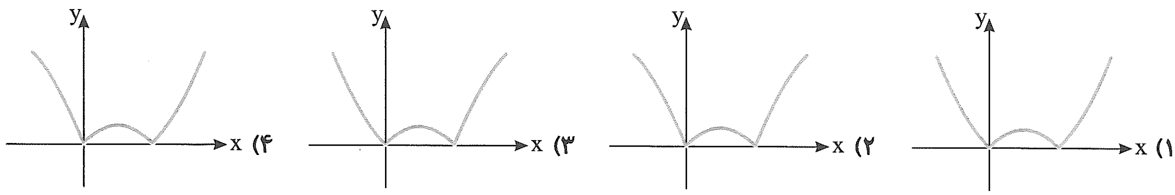
۱۸۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ کدام است؟



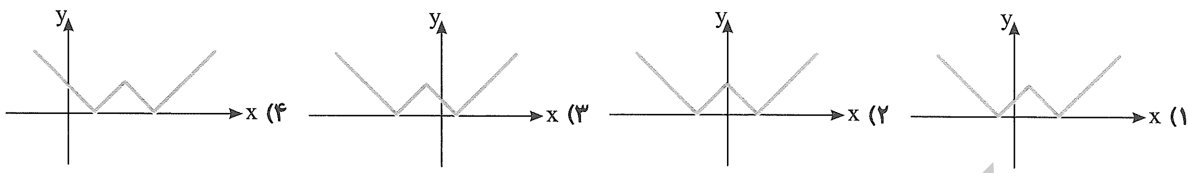
۱۸۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{2}{2x-1}$ کدام است؟



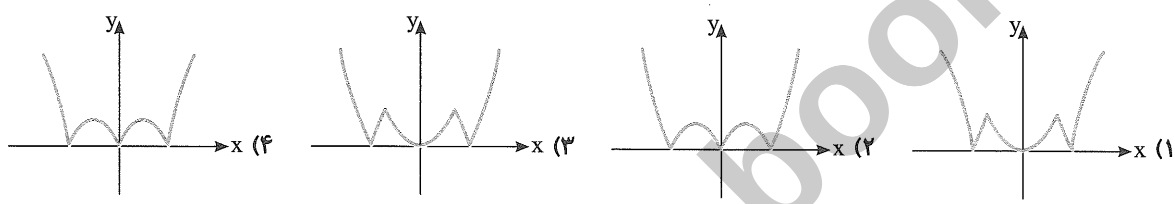
۱۸۲- نمودار تابع $f(x)=|x||x-1|$ کدام گزینه است؟



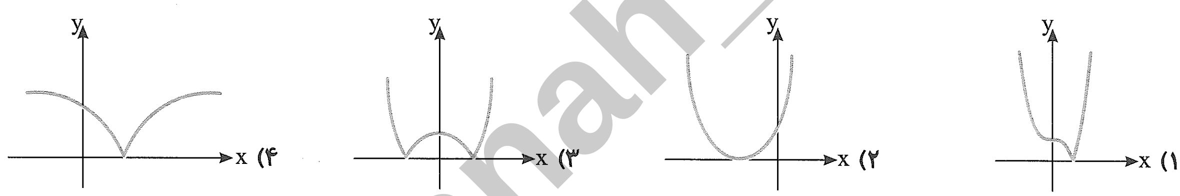
۱۸۳- نمودار تابع $f(x)=||x|-2|$ کدام گزینه است؟



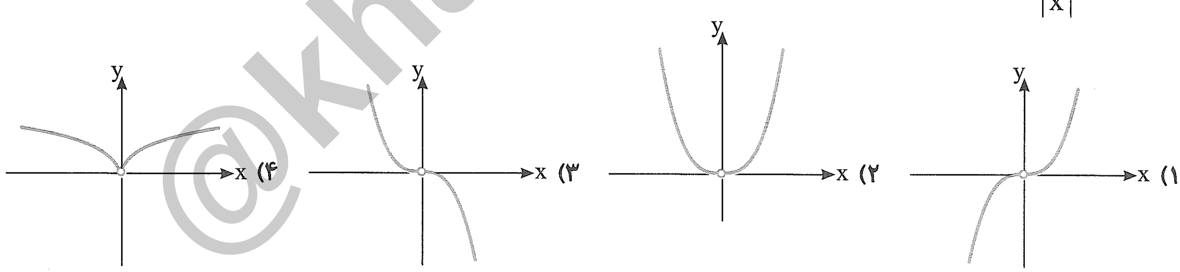
۱۸۴- نمودار تابع $f(x)=||x^2-1|-1|$ کدام گزینه است؟



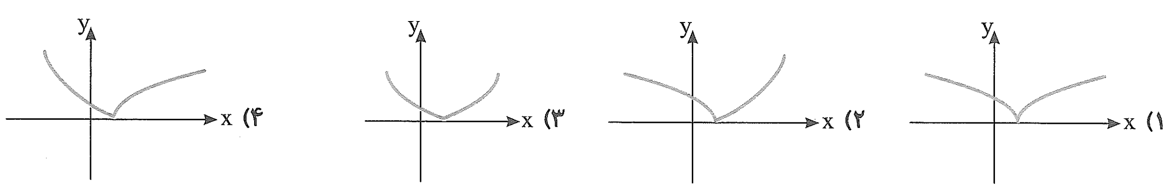
۱۸۵- نمودار تابع $f(x)=|x^3-1|$ کدام است؟



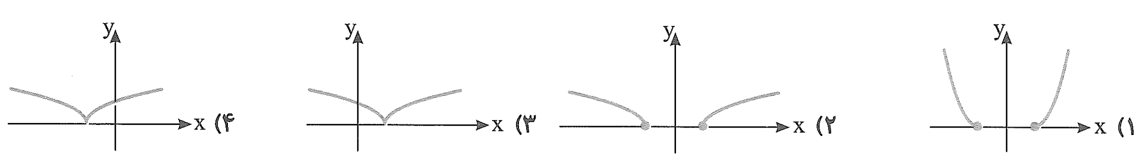
۱۸۶- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^4}{|x|}$ کدام است؟



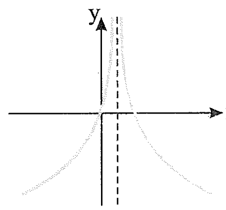
۱۸۷- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ کدام است؟

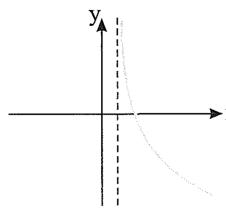


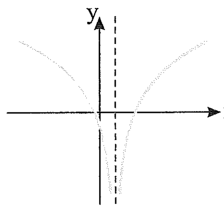
۱۸۸- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|x|-2}$ کدام است؟

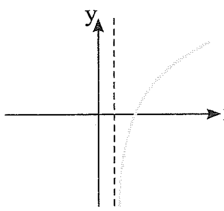


۱۸۹- نمودار تابع $f(x)=\log_{0/5}(x^{2}-2x+1)$ کدام است؟

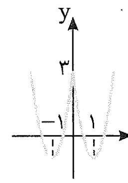
۱) 

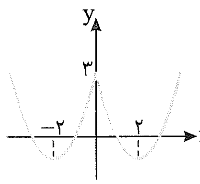
۲) 

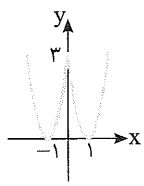
۳) 

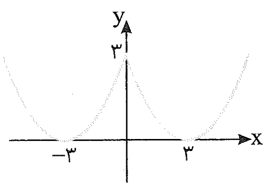
۴) 

۱۹۰- نمودار تابع $f(x)=x^{2}-4|x|+3$ کدام گزینه است؟

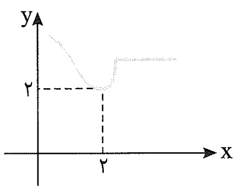
۱) 

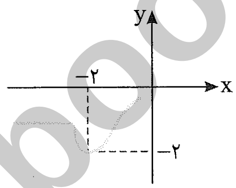
۲) 

۳) 

۴) 

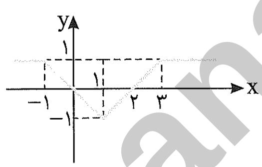
۱۹۱- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟

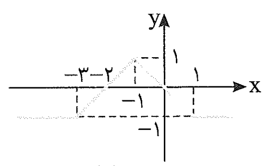

شکل (۱)


شکل (۲)

۱) $y=f(-x)-4$
۲) $y=-f(-x)-4$
۳) $y=-f(4-x)$
۴) $y=f(4-x)$

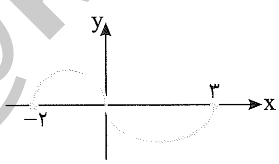
۱۹۲- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟

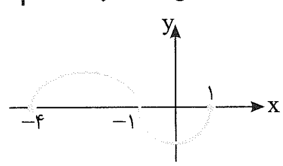

شکل (۱)


شکل (۲)

۱) $y=f(-x)$
۲) $y=-f(x)$
۳) $y=-f(-x)$
۴) $y=f(1-x)$

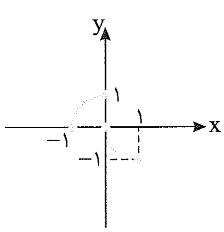
۱۹۳- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟

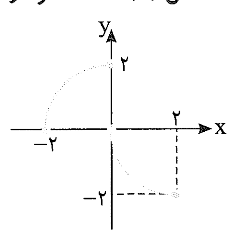

شکل (۱)


شکل (۲)

۱) $y=f(x-1)$
۲) $y=-f(x-1)$
۳) $y=-f(1-x)$
۴) $y=-f(-1-x)$

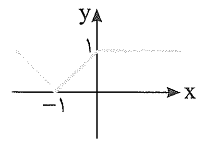
۱۹۴- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به صورت شکل (۲) است؟


شکل (۱)

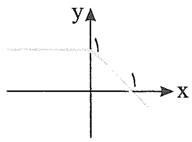

شکل (۲)

۱) $y=2f(\frac{x}{2})$
۲) $y=2f(2x)$
۳) $y=\frac{1}{2}f(2x)$
۴) $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$

۱۹۵- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟



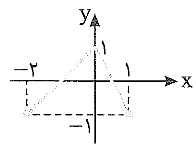
شکل (۲)



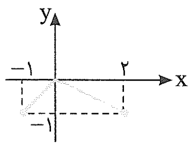
شکل (۱)

۱) $y=-f(x)$ ۲) $y=-f(-x)$ ۳) $y=|f(x)|$ ۴) $y=|f(-x)|$

۱۹۶- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به صورت شکل (۲) است؟



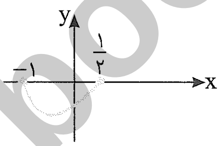
شکل (۲)



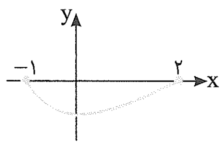
شکل (۱)

۱) $y=1-2f(-x)$ ۲) $y=1+2f(-x)$ ۳) $y=1-2f(x)$ ۴) $y=1+2f(x)$

۱۹۷- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به صورت شکل (۲) است؟



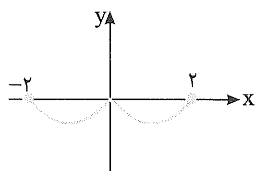
شکل (۲)



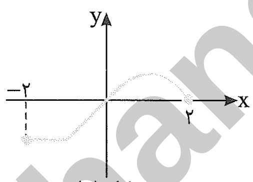
شکل (۱)

۱) $y=f(2x-1)$ ۲) $y=f(2x+1)$ ۳) $y=f(1-2x)$ ۴) $y=f(-1-2x)$

۱۹۸- نمودار تابع f به صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به صورت شکل (۲) است؟



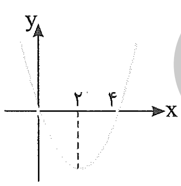
شکل (۲)



شکل (۱)

۱) $y=-f(|x|)$ ۲) $y=-|f(x)|$ ۳) $y=f(-|x|)$ ۴) $y=|f(|x|)|$

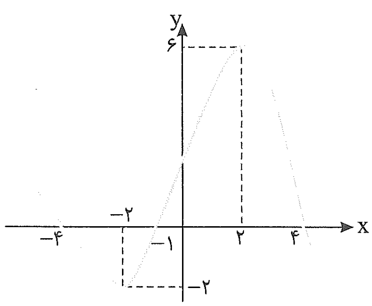
۱۹۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع $y=-f(-\frac{x}{2})$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱) $(4,+\infty)$ ۲) $(2,+\infty)$

۳) $(-4,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-4)$

۲۰۰- نمودار تابع $y=f(3x)$ در شکل مقابل رسم شده است. تابع $y=f(2x)$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱) $(-6,3)$

۲) $(-3,3)$

۳) $(-4,2)$

۴) $(-3,6)$

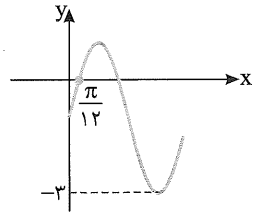
۲۰۱- تابع $f(x)=\log_{(2k-1)}(2x)$ اکیداً نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $0<k<1$ ۲) $\frac{1}{2}<k<1$ ۳) $0<k<\frac{1}{2}$ ۴) $1<k<2$

۲۰۲- تابع $f(x)=-\cos ۲x$ روی بازهٔ $[a,۰]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۳}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\pi$

۲۰۳- بخشی از نمودار کدام تابع در شکل مقابل رسم شده است؟



۱) $y=۳\sin(۲x)-۱$

۲) $y=-(۲+\sqrt{۲})\cos(۳x)+\sqrt{۲}+۱$

۳) $y=۲\sin(۲x)-۱$

۴) $y=-۲\cos(۳x)+۱$

۲۰۴- نمودار تابع $y=\sin(kx)$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ پنج بار محور طول‌ها را قطع می‌کند. حدود k کدام است؟ $(k>۰)$

۱) $\frac{۱}{۲}\le k<\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\le k<\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\le k<\frac{۵}{۲}$ ۴) $۲\le k<\frac{۵}{۲}$

۲۰۵- نمودار تابع $y=\cos(kx)$ روی بازهٔ $[۰,۳\pi]$ شش بار محور طول‌ها را قطع می‌کند. حدود k کدام است؟ $(k>۰)$

۱) $\frac{۳}{۲}\le k<\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\le k<\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۶}\le k<\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}\le k<\frac{۱۳}{۶}$

۲۰۶- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $(gof)(a)=۵$، مقدار a کدام است؟ (تجربی - ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۰۷- اگر $f(x)=x^۲+۳x$ و $g(x)=\frac{-۱}{۲}x+۲$، مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور x قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟ (تجربی - ۹۱)

۱) $(-۴,۱)$ ۲) $(-۳,۲)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۱,۴)$

۲۰۸- اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x-۳)$، مجموعهٔ طول نقاطی از نمودار تابع fog که زیر محور x قرار دارند، برابر کدام بازه است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۱)

۱) $(-۵,۱)$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,۵)$

۲۰۹- اگر $g(x)=۲x-۱$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x-۳}$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۱۰- با کدام ضابطهٔ $f(x)$، همواره تساوی $(-۱)^{[x]}f(x)=|f(x)|$ برقرار است؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) $\sin \pi x$ ۲) $\cos \pi x$ ۳) $\sin ۲\pi x$ ۴) $\cos ۲\pi x$

۲۱۱- اگر $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی - ۹۲)

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱۲- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنهٔ تابع $y=f(۳-x)$ کدام است؟ (تجربی - ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۳]$ ۴) $[۱,۲]$

۲۱۳- اگر $f(x)=۲x+۳$ و $(gof)(x)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $۲x^۲-۷x+۳$ ۲) $۲x^۲-۳x+۷$ ۳) $۴x^۲-۲x+۱۳$ ۴) $۴x^۲-۴x+۱۱$

۲۱۴- نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی - ۹۳)

۱) $-۳/۵$ ۲) -۳ ۳) $-۲/۵$ ۴) -۲

۲۱۵- نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^{2}-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۶- اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^{2}-4x+5)$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

۱) $x^{2}-4x+3$ ۲) $x^{2}-4x+5$ ۳) $x^{2}-2x+5$ ۴) $x^{2}-2x+3$

۲۱۷- اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$ و $g(x)=\log_{2}(x^{2}+2x)$، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (تجربی - ۹۴)

۱) $[-4,2]$ ۲) $[-2,0]$ ۳) $[-4,-1]\cup(1,2]$ ۴) $[-4,-2)\cup(0,2]$

۲۱۸- اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x^{2}+x+2}}$ و $g(x)=(\frac{1}{4})^{x}$، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۴)

۱) $(-\frac{1}{2},+\infty)$ ۲) $(\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(-1,\frac{1}{2})$

۲۱۹- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، نمودار تابع fog محور x را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۴)

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$ ۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ و $\frac{1}{4}$ ۴) ۹ و ۴

۲۲۰- اگر $f(x)=x^{2}+x$ و $g(x)=\sqrt{4x+1}$، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=3$ کدام است؟ (تجربی - ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

۲۲۱- اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^{2}+6x+5$، ضابطهٔ تابع f برابر کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

۱) $2x^{2}+3x+1$ ۲) $2x^{2}-2x+3$ ۳) $2x^{2}-x+4$ ۴) $2x^{2}+x+3$

۲۲۲- تابع $f(x)=|x^{3}|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ چگونه است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

۲۲۳- اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\log(x^{2}-15x)$، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $(0,5]\cup[20,25)$ ۲) $[-5,0)\cup(15,20]$

۳) $(15,20]$ ۴) $[-5,0)$

۲۲۴- اگر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x+2}{2-x}$، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟ (تجربی - ۹۶)

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$

۲۲۵- اگر $f(x)=\dfrac{2x+3}{2-x}$ و $g(x)=\dfrac{1-3x}{x+2}$، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۶)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-1$ ۴) $x+1$

۲۲۶- اگر $f(x)=\dfrac{1+x^{2}}{1-x^{2}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{2}}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (ریاضی - ۹۶)

۱) $[0,1)$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

۲۲۷- اگر $f(x)=\dfrac{1-x^{2}}{1+x^{2}}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^{2}}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-(-1,1)$

۲۲۸- اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟ (تجربی - ۹۷)

۱) x^2-x+3 ۲) x^2-2x-1 ۳) x^2-2x+1 ۴) x^2-x+1

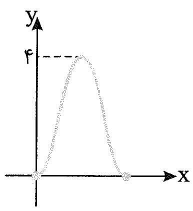
۲۲۹- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۷)

۱) −۷ و −۱ ۲) −۷ و ۱ ۳) ۷ و −۱ ۴) ۷ و ۱

۲۳۰- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌های اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۷)

۱) −۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

۲۳۱- شکل مقابل نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ در بازهٔ $[0,4]$ است. مقدار b کدام است؟ (ریاضی - ۹۷)



۱) −۲

۲) −۱

۳) ۱

۴) ۲

فصل اول

درس سوم: تابع وارون

تعریف اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از عوض کردن جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب این رابطه با هم به‌دست می‌آید **وارون** این رابطه می‌نامیم. اگر رابطهٔ f تابع باشد و وارون رابطهٔ f نیز تابع باشد، تابع f را **وارون‌پذیر** می‌نامیم و وارون آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

نکته

۱) تابع f وارون‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک‌به‌یک باشد.

۲) اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد، آن‌گاه یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

تست ۱ کدام تابع وارون‌پذیر است؟

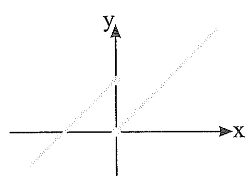
۱) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} -x & x\le 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$

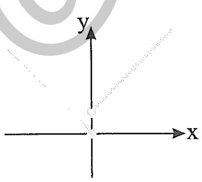
۳) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\le 0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\le 0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$

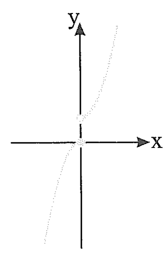
راه‌حل نمودار تابع هر گزینه به شکل زیر است:



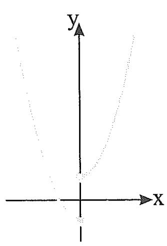
گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)

از روی نمودارها معلوم است که فقط تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، پس وارون‌پذیر است.

نکته

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. در این صورت

۱) اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر، اگر نقطهٔ (a, b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} است.

۲) $D_f=R_{f^{-1}}$ و $D_{f^{-1}}=R_f$.

۳) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۴) نمودار تابع‌های f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار تابعی نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، آن‌گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

۵) اگر نمودار تابع‌های f و f^{-1} یکدیگر را در نقطهٔ (a, b) قطع کرده باشند، آن‌گاه $f(a)=b$ و $f(b)=a$. توجه کنید که نقطهٔ (b, a) نیز یک نقطهٔ تقاطع است.

۶) اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، تابع f^{-1} نیز اکیداً صعودی است.

۷) اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، تابع f^{-1} نیز اکیداً نزولی است.

تست ۲

اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+2x+2m$ از نقطهٔ $(m, 1)$ عبور کند، مقدار $f^{-1}(-6)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -3 ۴) -37

راه‌حل چون نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(m, 1)$ عبور می‌کند، پس

$$f^{-1}(m)=1\Rightarrow f(1)=m\Rightarrow 1+2+2m=m\Rightarrow m=-3$$

بنابراین

$$f(x)=x^3+2x-6$$

فرض کنید $f^{-1}(-6)=a$. در این صورت

$$f(a)=-6\Rightarrow a^3+2a-6=-6$$

$$a^3+2a=0$$

$$a(a^2+2)=0\Rightarrow a=0$$

در نتیجه $f^{-1}(-6)=0$.

تست ۳

برد تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

راه‌حل توجه کنید که برد تابع f^{-1} برابر با دامنهٔ تابع f است. از طرف دیگر،

$$D_f=\{x \mid x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$$

بنابراین

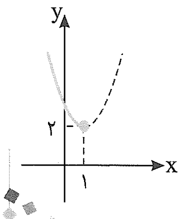
$$R_{f^{-1}}=D_f=\mathbb{R}$$

تست ۴

اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-\infty,۱]$ باشد و $f(x)=x^{۲}-۲x+۳$، دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۲]$

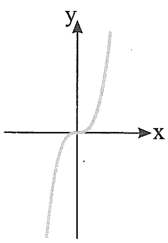
راه‌حل دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ برابر با برد تابع f اســـت. مطابق شـــکل مقابل برد تابع f برابر است با $[۲,+\infty)$. بنابراین

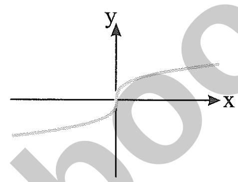


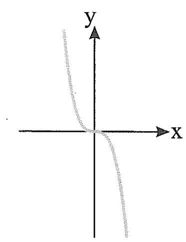
$$D_{f^{-۱}}=R_f=[۲,+\infty)$$

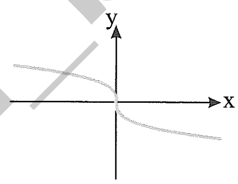
تست ۵

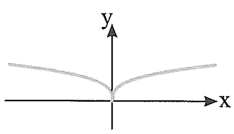
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $f^{-۱}$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


راه‌حل باید نمودارتابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، که نمودار گزینهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

تست ۶

نمودار تابع $f(x)=a+bx^{۳}$ نمودار تابع وارون خود را در نقطهٔ $(۱,۰)$ قطع می‌کند. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

راه‌حل نقطهٔ $(۱,۰)$ روی نمودار هر دو تابع f و $f^{-۱}$ است، پس

$$f(۱)=۰\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$f^{-۱}(۱)=۰\Rightarrow f(۰)=۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $b=-۱$ و $a-b=۲$.

تست ۷

اگر تابع $f^{-۱}$ اکیداً صعودی باشد، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x^{۳})<f(x^{۲})$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰)$ ۴) $(۰,+\infty)$

راه‌حل چون تابع $f^{-۱}$ اکیداً صعودی است، پس تابع f نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

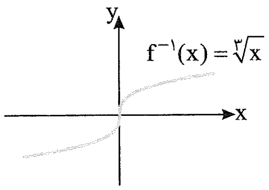
$$f(x^{۳})<f(x^{۲})\Rightarrow x^{۳}<x^{۲}\Rightarrow x^{۲}(x-۱)<۰\Rightarrow x<۱$$

نکته

اگر $f(x)=x^{۳}$، آن‌گاه

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}\ ,\quad D_{f^{-۱}}=R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

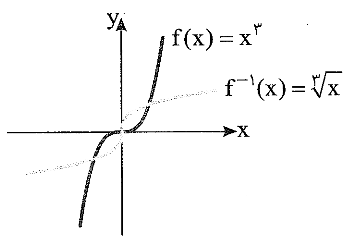
نمودار تابع $f^{-۱}$ به شکل مقابل است.



تست ۸ نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ نمودار تابع وارونش را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

راه‌حل نمودار تابع‌های $f(x)=x^{۳}$ و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$ در شکل مقابل رسم شده‌اند. واضح است که این نمودارها یکدیگر را در سه نقطه قطع می‌کنند.



پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون تابع وارون‌پذیر f، از تساوی $y=f(x)$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم.

تست ۹ تابع وارون تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵\ ,\ x\le ۲$
۲) $f^{-۱}(x)=-x^{۲}+۴x-۵\ ,\ x\le ۲$
۳) $f^{-۱}(x)=-x^{۲}+۴x-۵\ ,\ x\ge ۱$
۴) $f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵\ ,\ x\ge ۱$

راه‌حل ضابطهٔ تابع f را به صورت $y=۲-\sqrt{x-۱}$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x-۱}=۲-y\xrightarrow{۲-y\ge ۰}x-۱=۴+y^{۲}-۴y$$

$$x=y^{۲}-۴y+۵$$

چون $۲-y\ge ۰$، پس $y\le ۲$ و

$$f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵\ ,\ x\le ۲$$

تست ۱۰

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^{۲}-۴x$ با شرط $x<۲$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$
۲) $f^{-۱}(x)=-۲+\sqrt{x+۴}$
۳) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x-۴}$
۴) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۴}$

راه‌حل

راه‌حل اول چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۳,۲۱)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۲۱,-۳)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱)

$$f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۲۵}=-۳$$

گزینهٔ (۲)

$$f^{-۱}(۲۱)=-۲+\sqrt{۲۵}=۳$$

گزینهٔ (۳)

$$f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۱۷}$$

گزینهٔ (۴)

$$f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۱۷}$$

راه‌حل دوم ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت $y=(x-۲)^{۲}-۴$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۲)^{۲}=y+۴\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{y+۴}\xrightarrow{x<۲}۲-x=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۴}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$$

تست ۱۱

اگر $f(x)=۳^{۵x-۱}$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\log_{۳}(۵x)-۱$
۲) $\log_{۳}(۵x)+۱$
۳) $\dfrac{\log_{۳}x-۱}{۵}$
۴) $\dfrac{\log_{۳}x+۱}{۵}$

راه‌حل اگر $y=۳^{۵x-۱}$، آن‌گاه

$$\log_{۳}y=۵x-۱\Rightarrow x=\frac{\log_{۳}y+۱}{۵}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{\log_{۳}x+۱}{۵}$$

تست ۱۲

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\log_{۳}(x-۲)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۳^{x}-۲$
۲) $f^{-۱}(x)=۳^{x}+۲$
۳) $f^{-۱}(x)=۲^{x}+۳$
۴) $f^{-۱}(x)=۲^{x}-۳$

راه‌حل اگر $y=\log_{۳}(x-۲)$، آن‌گاه

$$۳^{y}=x-۲\Rightarrow x=۳^{y}+۲$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=۳^{x}+۲$$

تست ۱۳ اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$، نمودار دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) غیرمتقاطع

راه‌حل ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. اگر $y=\frac{2x-1}{x+3}$، آن‌گاه

$$yx+3y=2x-1 \Rightarrow (y-2)x=-3y-1$$

$$x=\frac{3y+1}{2-y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2-x}$$

اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع f و f^{-1} را می‌یابیم:

$$\frac{2x-1}{x+3}=\frac{3x+1}{2-x} \Rightarrow 4x-2x^2-2+x=3x^2+9x+x+3$$

$$5x^2+5x+5=0$$

$$x^2+x+1=0, \Delta<0$$

بنابراین نقطهٔ برخوردی وجود ندارد.

تست ۱۴ اگر $f=\{(1,2),(2,5),(0,3),(4,-1)\}$ و $g=\{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$، تابع gof^{-1} کدام است؟

۱) $\{(1,3),(0,0)\}$
۲) $\{(2,4),(3,5)\}$
۳) $\{(2,0),(-1,4)\}$
۴) $\{(5,3),(-1,1)\}$

راه‌حل تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(3,0),(-1,4)\}$$

در نتیجه

$$gof^{-1}=\{(5,3),(-1,1)\}$$

نکته

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه

۱) به‌ازای هر x از دامنهٔ f،

$$(f^{-1}of)(x)=x$$

۲) به‌ازای هر x از دامنهٔ f^{-1}،

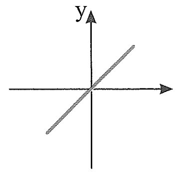
$$(fof^{-1})(x)=x$$

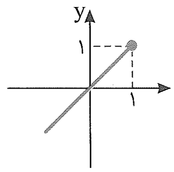
نکته

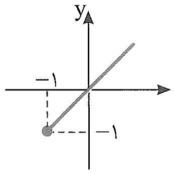
اگر f و g تابع‌هایی وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه

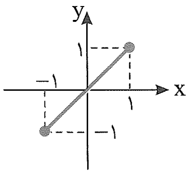
$$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$$

تست ۱۵ اگر $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$، نمودار تابع $y=(fof^{-۱})(x)$ کدام است؟

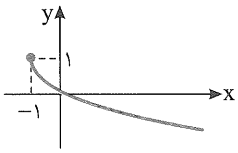
۱)


۲)


۳)


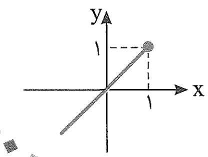
۴)


راه‌حل می‌دانیم که $y=(fof^{-۱})(x)=x$ $(x\in R_f)$، پس باید برد تابع f را حساب کنیم. با توجه به نمودار تابع f معلوم است که



$R_f=(-\infty,۱]$

پس نمودار تابع $fof^{-۱}$ به شکل روبه‌رو است.



تست ۱۶ اگر تابع‌های f و g یک‌به‌یک باشند، $(fog)(x)=۲g(x)-۳$ و $(gof)(x)=۳g(x)-x$، مقدار $g(۳)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$　　۲) $\frac{۹}{۲}$　　۳) $\frac{۷}{۲}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$

راه‌حل اگر در تساوی $(fog)(x)=۲g(x)-۳$ به جای x قرار دهیم $g^{-۱}(x)$، به‌دست می‌آید

$$(fogog^{-۱})(x)=۲(gog^{-۱})(x)-۳\Rightarrow f(x)=۲x-۳$$

بنابراین از تساوی $(gof)(x)=۳g(x)-x$ به‌دست می‌آید

$$g(۲x-۳)=۳g(x)-x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید

$$g(۳)=۳g(۳)-۳$$

پس $g(۳)=\frac{۳}{۲}$.

فصل اول

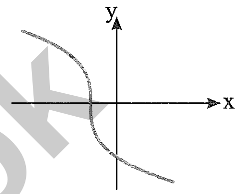
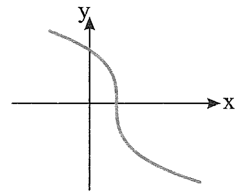
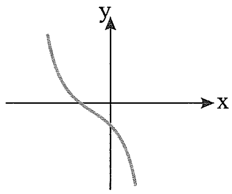
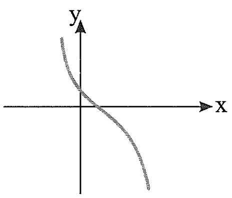
درس سوم: تابع وارون

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

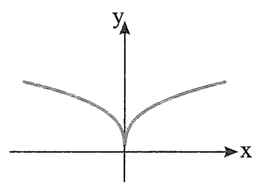
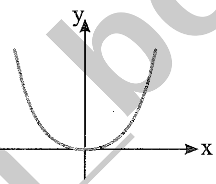
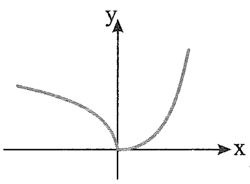
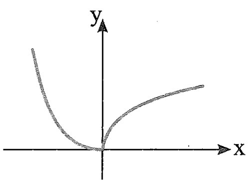
۲۳۲- نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ چند بار نمودار تابع $y=-x^3$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

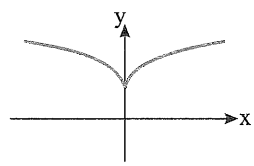
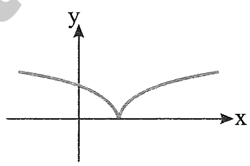
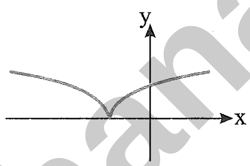
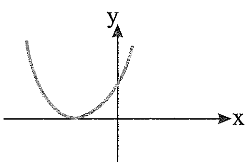
۲۳۳- نمودار تابع $f(x)=-\sqrt[3]{2x+1}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

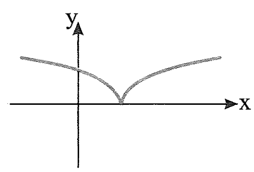
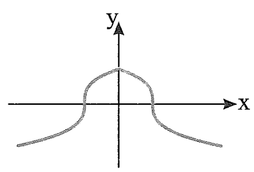
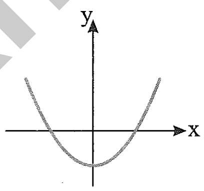
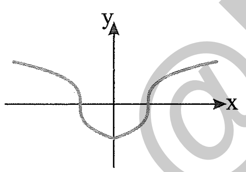
۲۳۴- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

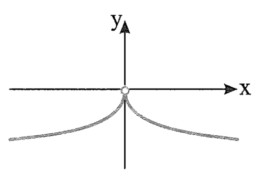
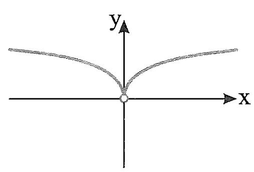
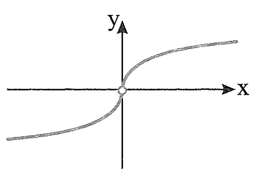
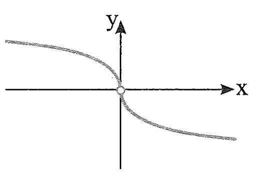
۲۳۵- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{|x+1|}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

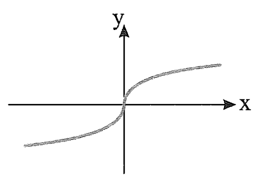
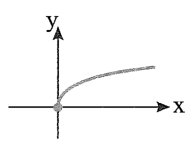
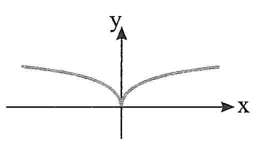
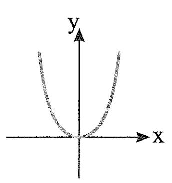
۲۳۶- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{|x|-1}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۳۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt[3]{-x}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۳۸- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[6]{x^2}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۳۹- نمودار توابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ بر هم منطبق هستند. ضابطهٔ تابع f کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $f(x)=x^{3}$　۲) $f(x)=\sqrt[3]{x}$　۳) $f(x)=x^{2}$　۴) $f(x)=\sqrt{x}$

۲۴۰- کدام تابع روی دامنه‌اش صعودی است؟

۱) $y=-\frac{1}{x}$　۲) $y=-\sqrt[3]{x+1}$　۳) $y=x^{3}-1$　۴) $y=1-x^{2}$

۲۴۱- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x}-1$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(1,3)$　۲) $(1,8)$　۳) $(8,9)$　۴) $(9,8)$

۲۴۲- اگر $f(x)=\sqrt{18-x}+\sqrt[3]{18+x}$، مقدار $f(9)+f^{-1}(6)$ چقدر است؟

۱) ۳　۲) ۶　۳) ۹　۴) ۱۵

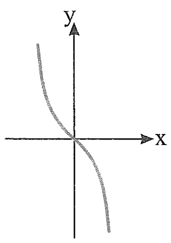
۲۴۳- اگر $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+5}+2}$، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

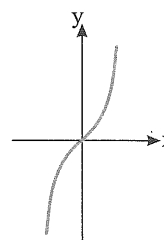
۱) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$　۲) $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$　۳) $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$　۴) $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

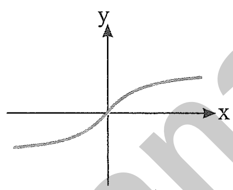
۲۴۴- اگر $f^{-1}(\sqrt{x}+1)=x^{3}+1$، مقدار $f(65)$ چقدر است؟

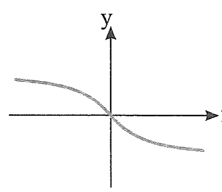
۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

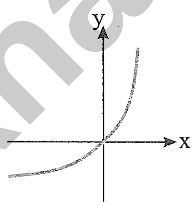
۲۴۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



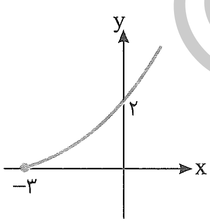
۱)


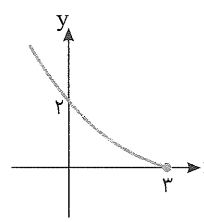
۲)


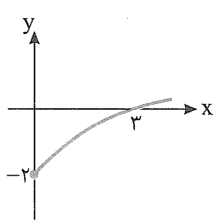
۳)


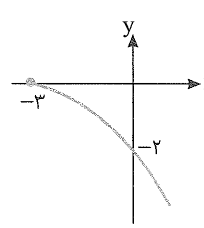
۴)


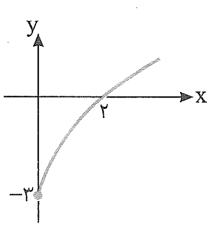
۲۴۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f^{-1} کدام گزینه است؟



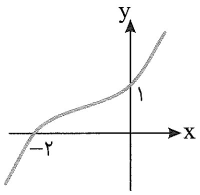
۱)


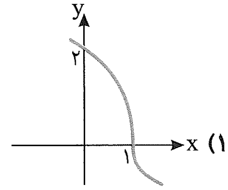
۲)


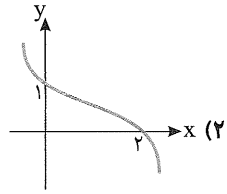
۳)


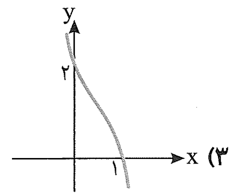
۴)


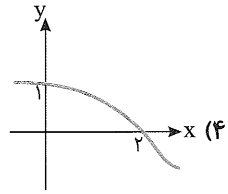
۲۴۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f^{-1}(x)$ کدام گزینه است؟



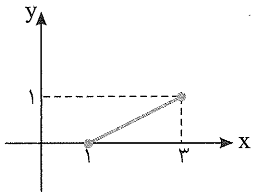
۱)


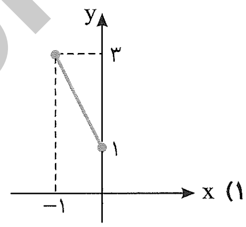
۲)


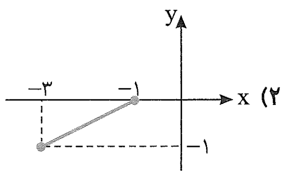
۳)


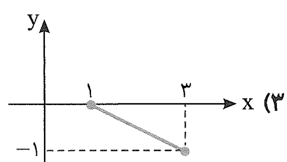
۴)


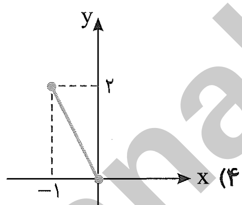
۲۴۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-1$ کدام گزینه است؟



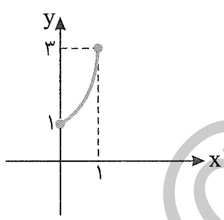
۱)


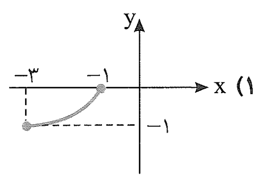
۲)


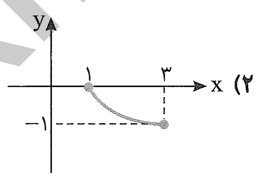
۳)


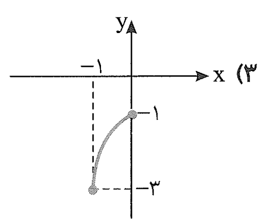
۴)


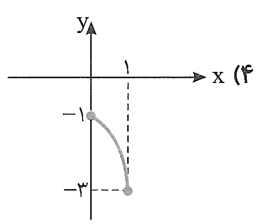
۲۴۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f^{-1}(-x)$ کدام گزینه است؟



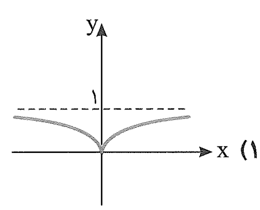
۱)


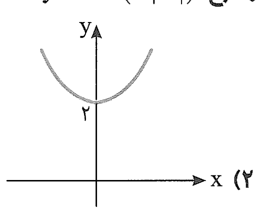
۲)


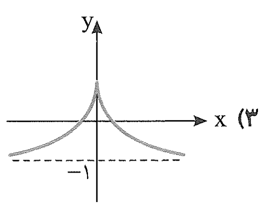
۳)


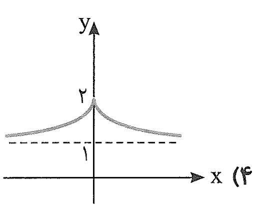
۴)


۲۵۰- اگر $f(x)=\log_{3}(x-1)$، نمودار تابع $y=f^{-1}(-|x|)$ کدام گزینه است؟

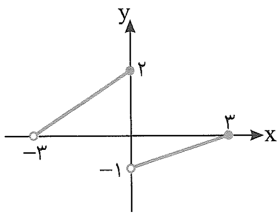
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۵۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $f^{-۱}$ در چند نقطه این نمودار را قطع می‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۵۲- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-\infty, \frac{۱}{۲}]$ باشد و $f(x)=x^{۲}-x$، دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$ ۲) $[-\frac{۱}{۴}, +\infty)$ ۳) $(-\infty, \frac{۱}{۲}]$ ۴) $(-\infty, -\frac{۱}{۴}]$

۲۵۳- اگر $f(x)=\sqrt{x^{۳}+۱}$ و $D_f=[-۱,۲]$، دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۳]$ ۴) $[۲,۳]$

۲۵۴- اگر $f(x)=\frac{۸}{\sqrt{x}+۲}$ و $R_f=[۱,۲]$، برد تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[۴,۲۵]$ ۲) $[۱,۱۶]$ ۳) $[۴,۳۶]$ ۴) $[۱,۹]$

۲۵۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{x^{۲}-۳}{۲}$ ۲) $\frac{x^{۲}+۳}{۲}$ ۳) $x^{۲}-۳$ ۴) $x^{۲}+۳$

۲۵۶- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=۳-\sqrt{۲-x}$ به صورت $f^{-۱}(x)=-x^{۲}+ax+b$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۵۷- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ به صورت $f^{-۱}(x)=\frac{x^{۳}+a}{b}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۵۸- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt[۳]{x-۱}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt[۳]{x+۱}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt[۳]{x+۱}$

۲۵۹- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=-x^{۳}+۶x^{۲}-۱۲x$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۸}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt[۳]{x+۸}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt[۳]{x-۸}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt[۳]{x+۸}$

۲۶۰- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=-x^{۲}+۴x\ ,\ x<۲$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{۴-x}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{۴+x}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{۴-x}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{۴+x}$

۲۶۱- اگر $f(x)=x^{۲}+۴x+۵$ و $D_f=[-۲,+\infty)$، ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟

۱) $-۲-\sqrt{x-۱}$ ۲) $-۲+\sqrt{x-۱}$ ۳) $-۲+\sqrt{x+۱}$ ۴) $-۲-\sqrt{x+۱}$

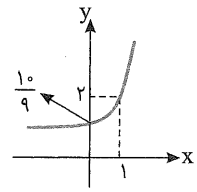
۲۶۲- اگر $f(۱-t)=t^{۲}+۲t$ و $t>۰$، ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟

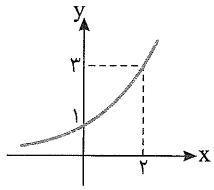
۱) $(x-۲)^{۲}-۱$ ۲) $۲-\sqrt{۱+x}$ ۳) $(x-۱)^{۲}-۲$ ۴) $۲+\sqrt{x-۱}$

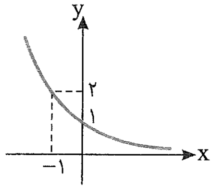
۲۶۳- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\log_{۳}(۳x+۱)$ کدام است؟

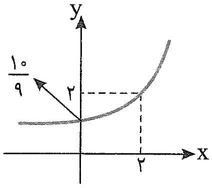
۱) $f^{-۱}(x)=۳^{x}+۱$ ۲) $f^{-۱}(x)=۳^{x}-۱$ ۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۳^{x}-۱}{۳}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۳^{x}+۱}{۳}$

۲۶۴- اگر $f(x)=2+\log_3(x-1)$، نمودار تابع f^{-1} کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۶۵- اگر $f(x)=3\log_2(x-3)+5$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $2^{\frac{x+5}{3}}+3$ ۲) $2^{\frac{x-5}{3}}+3$ ۳) $2^{x-5}+3$ ۴) $2^{\frac{x-5}{3}}+5$

۲۶۶- اگر $f(x)=2^{3x-1}$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $\frac{1+\log_2 x}{2}$ ۲) $\frac{1-\log_2 x}{3}$ ۳) $\frac{1+\log_2 x}{3}$ ۴) $3(1-\log_2 x)$

۲۶۷- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}+3$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\log_2(\frac{2}{x-3})$ ۲) $f^{-1}(x)=\log_2(\frac{1}{x-3})$ ۳) $f^{-1}(x)=\log_2(\frac{1}{x+3})$ ۴) $f^{-1}(x)=\log_2(\frac{2}{x+3})$

۲۶۸- اگر $f(x)=\frac{10^x-3}{5+10^x}$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $\log(\frac{5x+1}{1-x})$ ۲) $\log(\frac{x-5}{x-3})$ ۳) $\log(\frac{x+3}{x+5})$ ۴) $\log(\frac{5x+3}{1-x})$

۲۶۹- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{\log x}{1+\log x}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=10^{(\frac{x}{1+x})}$ ۲) $f^{-1}(x)=10^{(\frac{x}{1-x})}$ ۳) $f^{-1}(x)=10^{(\frac{x+1}{x})}$ ۴) $f^{-1}(x)=10^{(\frac{x-1}{x})}$

۲۷۰- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=4^x+2^{x+1}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt{x+1}-1)$ ۲) $f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt{x-1}+1)$

۳) $f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt{x}-1)$ ۴) $f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt{x}+1)$

۲۷۱- اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(1,2)$ برخورد کنند، مقدار ab کدام است؟

۱) -21 ۲) 10 ۳) -10 ۴) 21

۲۷۲- نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax+b$ در نقطهٔ $(-1,\frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{10}{9}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{13}{9}$

۲۷۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. حاصل‌ضرب طول این نقطه‌ها کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۲۷۴- نمودار تابع $f(x)=-\sqrt[3]{x+1}-1$ نمودار تابع وارونش را در چند نقطه قطع می‌کند. مجموع طول این نقطه‌ها کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) صفر

۲۷۵- f و g تابع‌هایی یک‌به‌یک هستند، $(fog^{-1})(6)=12$ و $f(3)=12$. مقدار $g(3)$ چقدر است؟

۱) 12 ۲) 3 ۳) 6 ۴) -6

۲۷۶- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,-۲),(-۱,۴)\}$، $g=\{(۳,۴),(۱,-۱),(۴,-۲),(-۴,۱)\}$ و $(f^{-۱}og^{-۱})(a)=-۱$، مقدار $f^{-۱}(a)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۲۷۷- اگر $g=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۴)\}$ و $f^{-۱}og=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۳)\}$، تابع f کدام می‌تواند باشد؟

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}$　　۲) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۴)\}$

۳) $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۳)\}$　　۴) $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۱)\}$

۲۷۸- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}$، $g=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۴)\}$ و $foh^{-۱}=g$، تابع h کدام می‌تواند باشد؟

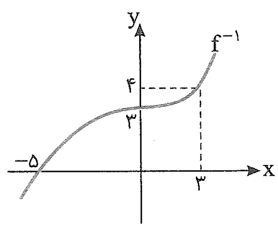
۱) $\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳),(۴,۴)\}$　　۲) $\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\}$

۳) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۴)\}$　　۴) $\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۳)\}$

۲۷۹- اگر $f(x)=\begin{cases}-x+۷ & x<۴\\ ۳x-۲ & x\geq ۴\end{cases}$ و $g(x)=x^{۳}+۱$، مقدار $(fog^{-۱}of)(۱۰)$ چقدر است؟

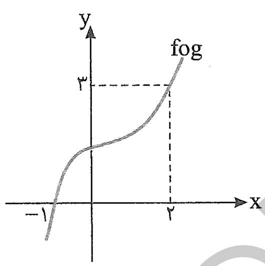
۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۲۸۰- نمودار تابع $f^{-۱}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $(fofof)(۴)$ چقدر است؟



۱) -۵
۲) -۴
۳) -۳
۴) -۲

۲۸۱- f و g تابع‌هایی یک‌به‌یک هستند و نمودار تابع fog در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر $f^{-۱}(۳)=۵$، مقدار $g^{-۱}(۵)+f^{-۱}(۰)-g(-۱)$ چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۸۲- اگر $f(x)=\log_{۲}(x+۱)$، حاصل $f^{-۱}(\log_{۲} x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{۱+x}$　　۲) $x-۱$　　۳) $\frac{۱}{x}$　　۴) x

۲۸۳- اگر $f(x)=\log_{۲} x$، $g(x)=۴^{x}$ و $(fog^{-۱})(t)=۲$، مقدار t چقدر است؟

۱) ۶۴　　۲) ۱۲۸　　۳) ۲۵۶　　۴) ۵۱۲

۲۸۴- اگر $f(x)=۲x-۱$ و $(fof)(t)=f^{-۱}(t)$، مقدار t چقدر است؟

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

۲۸۵- اگر $f(x)=۳x+۲$، $g(x)=۵x+۶$ و $(gof^{-۱})(۲+a)=۱۰$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۲/۴　　۲) ۰/۸　　۳) ۱　　۴) ۲

۲۸۶- اگر $f(x)=۵x-۳$، $g(x)=۲x-m$ و $(gof)^{-۱}(۱)=۳$، مقدار m چقدر است؟

۱) ۲۳　　۲) ۲۴　　۳) ۲۵　　۴) ۲۶

۲۸۷- اگر $f(x)=2x-1$ و $(gof^{-1})(x)=x+1$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{1}{2}x-1$ ۲) $g(x)=2x$ ۳) $g(x)=\frac{1}{2}x$ ۴) $g(x)=\frac{1}{2}x+1$

۲۸۸- اگر $f(x)=\frac{x+a}{x+1}$، $g(x)=\frac{ax+2}{x-2}$ و $(g^{-1}of)(2)=1$، مقدار a چقدر است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 3 ۴) -3

۲۸۹- اگر $f(x)=5x-7$، $(fog^{-1})(x)=3x-1$ و $g(x)=ax+b$، مقدار ab چقدر است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{10}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۲۹۰- اگر $f(x)=2x-1$ و $(g^{-1}of)(x)=\frac{4x-3}{2}$، مقدار $g(3)$ چقدر است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۲۹۱- اگر $(f^{-1}og)(x)=(m-2)x+4$ و $f(6)=g(2)$، مقدار m چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۲- اگر $(f^{-1}og)(2x+3)=5x-2$ و $g^{-1}(4)=7$، مقدار $f(8)$ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۹۳- اگر $f^{-1}(\frac{2x+1}{3})=g(\frac{2-x}{4})$، مقدار $(fog)(-\frac{1}{2})$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۴- اگر $f(x)=2x-1$، $g(x)=ax-b$ و همواره $(gof^{-1})^{-1}(x)=2x+5$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۵- اگر $f(x)=x-1$ و $(f^{-1}og)^{-1}(x)=\frac{x-2}{2}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{1}{2}x+1$ ۲) $g(x)=\frac{1}{2}x-1$ ۳) $g(x)=2x-1$ ۴) $g(x)=2x+1$

۲۹۶- اگر $f(x)=x-2$ و $g(x)=2x-1$، ضابطهٔ تابع $(gof^{-1})^{-1}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ ۲) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ۳) $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ۴) $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

۲۹۷- اگر $f(x)=1+\sqrt[3]{x-2}$ و $g(x)=(x-1)^3$، ضابطهٔ تابع $f^{-1}og^{-1}$ کدام است؟

۱) $y=x-2$ ۲) $y=x+2$ ۳) $y=-x+2$ ۴) $y=-x-2$

۲۹۸- اگر $f(x)=1-\sqrt{x-1}$، دامنهٔ تابع fof^{-1} کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-1]$ ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $[-1,+\infty)$

۲۹۹- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}+2$، برد تابع $g(x)=(fof^{-1})(x)+3$ کدام است؟

۱) $[3,+\infty)$ ۲) $[5,+\infty)$ ۳) $[1,3]$ ۴) $[2,5]$

۳۰۰- اگر $f(x)=2-\sqrt{x-1}$، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $(fof^{-1})(x)=(f^{-1}of)(x)$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $\{1,2\}$

۳۰۱- اگر $f(x-3)=f^{-1}(3x+7)$، مقدار $(fof)(2)$ چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۳۰۲- g تابعی یک‌به‌یک است، $(fog)(x)=2x+3$ و $f(3)=7$. مقدار $g^{-1}(3)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۰۳- تابع f اکیداً صعودی است. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f^{-1}(x+2)>f^{-1}(x^2)$ کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-2,-1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(-2,1)$

۳۰۴- اگر $f(x)=2x-5$، $g=\{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $(f^{-1}og)(a)=6$، مقدار a کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۵- اگر $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$، $g=\{(2,-1),(-1,4),(3,-2),(-4,-3)\}$ و $(g^{-1}of)(a)=3$، مقدار a کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

۱) -4 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۴

۳۰۶- دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og)(2a)=6$، مقدار a کدام است؟

(تجربی - ۹۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۰۷- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$ کدام است؟ (تجربی - ۹۶)

۱) $-x^2$ ۲) x^2 ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۳۰۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$ نمودار تابع وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۶)

۱) -4 و -1 ۲) ۴ و -1 ۳) -4 و ۱ ۴) ۴ و ۱

۳۰۹- دو تابع $f=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(1,1)\}$ و $g(x)=\sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$، مقدار a کدام است؟

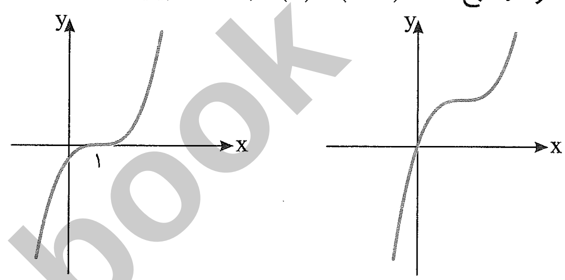
(خارج از کشور تجربی - ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

فصل اول

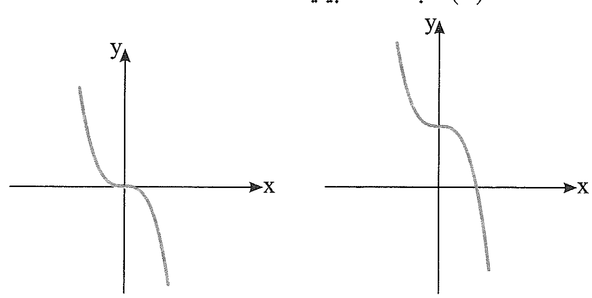
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=(x-1)^3$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3+1$ به‌دست بیاید.



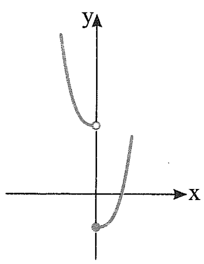
$y=(x-1)^3$ $\qquad$ $f(x)=(x-1)^3+1$

۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-x^3$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-x^3+2$ به‌دست بیاید.

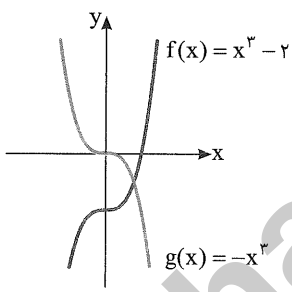


$y=-x^3$ $\qquad$ $f(x)=-x^3+2$

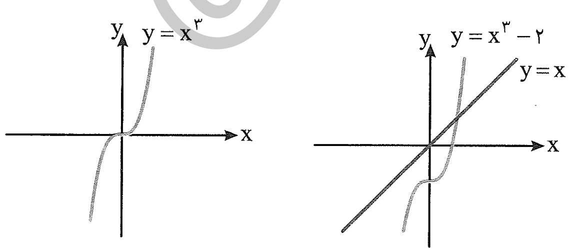
۳- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^3-1$ را به‌ازای x هایی که $x\geq 0$ رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^3-1$ به‌دست بیاید، و از این نمودار قسمتی را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=-x^3+2$ را به‌ازای xهایی که $x<0$ رسم می‌کنیم. برای این کار ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-x^3$ به‌دست بیاید، بعد این نمودار را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=-x^3+2$ به‌دست بیاید، در آخر قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است حذف می‌کنیم.



۴- گزینهٔ ۴ نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده است. واضح است که نقطهٔ تلاقی آنها در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.



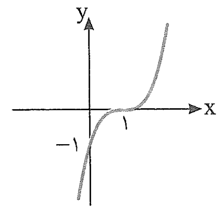
۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^3$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=x^3-2$ به‌دست می‌آید که یک‌بار خط $y=x$ را قطع می‌کند.



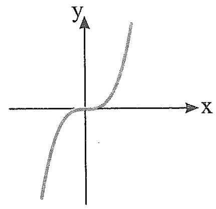
۶- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x$$
$$=(x-1)^3+1$$

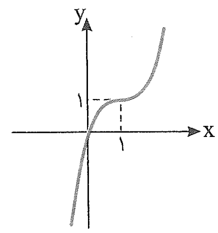
بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم.



$y=(x-1)^3$



$y=x^3$



$y=(x-1)^3+1$

۷- گزینهٔ ۴ تابع f صعودی، تابع g نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۸- گزینهٔ ۳ با توجه به دو زوج مرتب $(0, x^2)$ و $(-2, 4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2<0 \Rightarrow 4x-3 \le x^2 \Rightarrow x^2-4x+3 \ge 0 \Rightarrow x \le 1 \text{ یا } x \ge 3$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^2, 9)$ و $(-2, 4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2<x^2 \Rightarrow 4x-3 \le 9 \Rightarrow 4x \le 12 \Rightarrow x \le 3$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^2, 9)$ و $(0, x^2)$ می‌توان نوشت:

$$0 \le x^2 \Rightarrow x^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le x \le 3$$

با توجه به اینکه x مقدار صحیح است، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود:

$$x \in \{3, 1, 0, -1, -2, -3\}$$

ولی اگر $x=0$،

$$f=\{(-2,-3),(0,0),(0,9)\}$$

که در این صورت f تابع نیست. بنابراین ۵ مقدار صحیح برای x وجود دارد.

۹- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع نزولی نتیجه می‌شود

$$f(1) \ge f(2) \Rightarrow 5 \ge |m|$$

$$-5 \le m \le 5$$

$$f(2) \ge f(4) \Rightarrow |m| \ge \frac{4}{|m|} \Rightarrow m^2 \ge 4$$

$$m \le -2 \text{ یا } m \ge 2$$

بنابراین اگر $2 \le m \le 5$ یا $-5 \le m \le -2$، آن‌گاه تابع f نزولی است. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح ± 2، ± 3، ± 4 و ± 5 را داشته باشد.

۱۰- گزینهٔ ۳ تنها تابعی که هم صعودی است و هم نزولی تابع ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

$$f(1)=f(2)=f(3)$$

$$a-2=3a+4=2a-b$$

$$a=-3, b=-1$$

در نتیجه

$$a+b=-4$$

۱۱- گزینهٔ ۱ فرض کنید f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\{1,2,3\}$ باشد. در این صورت

$$1<2<3 \Rightarrow f(1)<f(2)<f(3)$$

بنابراین $\{f(1), f(2), f(3)\}$ زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ است. از طرف دیگر، اگر $\{a,b,c\}$ زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ باشد و $a<b<c$، می‌توانیم فرض کنیم $f(1)=a$، $f(2)=b$ و $f(3)=c$. یعنی تعداد تابع‌های مورد نظر برابر با تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ است. زیرا به هر طریقی که سه عضو از مجموعهٔ B انتخاب کنیم فقط به یک طریق می‌توانیم آنها را به اعضای مجموعهٔ A نسبت دهیم. تعداد این زیرمجموعه‌ها هم برابر است با

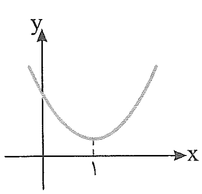
$$\binom{4}{3}=4$$

۱۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل رسم شده بازهٔ $[-2,3]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع f روی آن صعودی است.

۱۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=2x^2-4x+3$ برابر است با

$$-\frac{b}{2a}=1$$

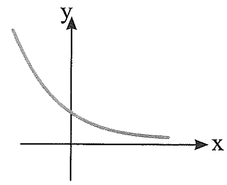
از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(1,2)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[1,+\infty)$ است.



۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$-1<m<1 \Rightarrow 0 \le |m|<1 \xrightarrow{m\neq 0} 0<|m|<1$$

بنابراین تابع $g(x)=|m|^x$ اکیداً نزولی است.



$$y=a^x\ ,\quad 0<a<1$$

۱۵- گزینهٔ ۳ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $0<a<1$، آن‌گاه تابع نزولی است. بنابراین

$$0<k^2-1<1 \Rightarrow 1<k^2<2 \Rightarrow 1<|k|<\sqrt{2}$$

۱۶- گزینهٔ ۲ در تابع $y=a^x$ اگر $a>1$، آن‌گاه تابع صعودی است. اگر $0<a<1$، آن‌گاه تابع نزولی است و اگر $a=1$، آن‌گاه تابع ثابت است (هم صعودی است و هم نزولی). پس

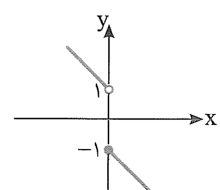
$$k^2+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow k^2=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$g(x)=k^{2x}=(k^2)^x=(\frac{1}{2})^x$$

بنابراین تابع g نزولی است.

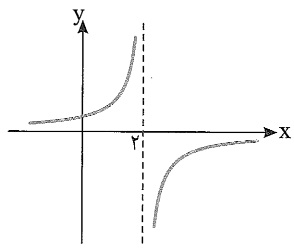
۱۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به صورت زیر است و این تابع نزولی است.



$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & x\ge 0 \\ -x+1 & x<0 \end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آنها را رد کنید.

۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{-x}$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{-(x-2)}=\frac{1}{-x+2}$ به‌دست بیاید. اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty, 2)$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.



۱۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در تابع اکیداً صعودی، اگر $x_1<x_2$، آن‌گاه $f(x_1)<f(x_2)$، و برعکس. بنابراین

$$f(2x+1)<f(x) \Rightarrow 2x+1<x \Rightarrow x<-1$$

۲۰- گزینهٔ ۲ از تعریف تابع نزولی نتیجه می‌شود

$$a^2-1<3a+3$$

پس

$$a^2-3a-4<0 \Rightarrow (a+1)(a-4)<0 \Rightarrow -1<a<4$$

۲۱- گزینهٔ ۳ به‌ازای هر x حقیقی نابرابری $|x|\ge x$ برقرار است. از نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$f(|x|)\le f(x)$$

پس نتیجه‌گیری زیر درست است:

$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(|x|)\le f(x)$$

توجه کنید که گزینه‌های دیگر ممکن است درست نباشد. مثلاً در گزینهٔ (۱) فرض کنید $f(x)=5$ و در گزینه‌های (۲) و (۴) فرض کنید $f(x)=-x$.

۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است و $f(0)=2$، $f(1)=3$ و $f(-1)=0$. بنابراین به‌ازای هر x نتیجه‌گیری‌های زیر درست هستند.

گزینهٔ (۱)

$$|x|\ge 0 \Rightarrow f(|x|)\ge f(0) \Rightarrow f(|x|)\ge 2$$

گزینهٔ (۲)

$$x^2+1\ge 1 \Rightarrow f(x^2+1)\ge f(1) \Rightarrow f(x^2+1)\ge 3$$

گزینهٔ (۳)

$$0\le x-[x]<1 \Rightarrow -1<[x]-x\le 0$$

$$f(-1)<f([x]-x)\le f(0)$$

$$0<f([x]-x)\le 2$$

گزینهٔ (۴)

$$-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow f(-1)\le f(\sin x)\le f(1)$$

$$0\le f(\sin x)\le 3$$

۲۳- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف نامعادله را به‌صورت عبارت‌های نمایی با پایهٔ ۲ می‌نویسیم

$$16^{2x-2}=(2^4)^{2x-2}=2^{8x-8}$$

$$8^{3x-1}=(2^3)^{3x-1}=2^{9x-3}$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $2^{8x-8}\ge 2^{9x-3}$ را حل کنیم، در نتیجه

$$8x-8\ge 9x-3\Rightarrow x\le -5$$

۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم

(دقت کنید که $\frac{5}{7}=(\frac{7}{5})^{-1}$)

$$(\frac{7}{5})^{3-2x}<((\frac{7}{5})^{-1})^{x+2}=(\frac{7}{5})^{-x-2}$$

چون $\frac{7}{5}>1$، پس

$$3-2x<-x-2\Rightarrow x>5$$

۲۵- گزینهٔ ۲ نامعادله به‌صورت $(\sqrt{2}-1)^{3x-1}>\sqrt{2}-1$ نوشته می‌شود. چون $(\sqrt{2}-1)<1$، پس

$$3x-1<1\Rightarrow 3x<2\Rightarrow x<\frac{2}{3}$$

۲۶- گزینهٔ ۱ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$(2^2)^{x-3}<(2^5)^{5-x}\Rightarrow 2^{2x-6}<2^{25-5x}$$

بنابراین

$$2x-6<25-5x\Rightarrow 7x<31\Rightarrow x<\frac{31}{7}$$

۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1}>(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-x-2}$$

چون

$$0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$$

پس

$$2x+1<-x-2\Rightarrow 3x<-3\Rightarrow x<-1$$

۲۸- گزینهٔ ۳ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$4(2^x)^2-5(2^x)+1\ge 0$$

اگر فرض کنیم $2^x=t$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید

$$4t^2-5t+1\ge 0\Rightarrow (t-1)(4t-1)\ge 0$$

$$t\ge 1\Rightarrow 2^x\ge 1\Rightarrow 2^x\ge 2^0\Rightarrow x\ge 0$$

$$t\le \frac{1}{4}\Rightarrow 2^x\le \frac{1}{4}\Rightarrow 2^x\le 2^{-2}\Rightarrow x\le -2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ است که همان $\mathbb{R}-(-2,0)$ است. پس $a=-2$ و $b=0$ و در نتیجه $a+b=-2$.

۲۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$D_f=\{x|3-3^{1-2x}\ge 0\}$$

بنابراین باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$3^{1-2x}\le 3\Rightarrow 1-2x\le 1\Rightarrow x\ge 0$$

پس

$$D_f=[0,+\infty)$$

۳۰- گزینهٔ ۳ باید نامعادله‌های $2^x-8\ge 0$ و $81-3^x>0$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آنها را به‌دست آوریم

$$2^x-8\ge 0\Rightarrow 2^x\ge 2^3\Rightarrow x\ge 3$$

$$81-3^x>0\Rightarrow 3^x<3^4\Rightarrow x<4$$

بنابراین

$$D_f=[3,4)$$

در نتیجه $a=3$، $b=4$ و $a+b=7$.

۳۱- گزینهٔ ۳ باید نامعادلهٔ $2^{x+1}-4^x\ge 0$ را حل کنیم تا دامنهٔ تابع به‌دست آید

$$2^{x+1}-4^x\ge 0\Rightarrow 2\times 2^x-(2^x)^2\ge 0$$

$$2^x(2-2^x)\ge 0$$

با توجه به اینکه $2^x>0$ نتیجه می‌شود

$$2-2^x\ge 0\Rightarrow 2^x\le 2\Rightarrow x\le 1$$

بنابراین $a=1$.

۳۲- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f برابر است با

$$D_f=\{x|-3^{2x}+4\times 3^x-3>0\}$$

فرض می‌کنیم $3^x=t$. در نتیجه باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم

$$-t^2+4t-3>0\Rightarrow -(t-1)(t-3)>0$$

جواب نامعادلهٔ بالا به‌صورت $1<t<3$ است. در نتیجه

$$1<3^x<3\Rightarrow 3^0<3^x<3^1$$

بنابراین $0<x<1$.

۳۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $\log 10=1$ و $\log\frac{1}{10}=-1$. در نتیجه نابرابری‌ها را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\log\frac{1}{10}<\log x<\log 10$$

بنابراین $\frac{1}{10}<x<10$.

۳۴- گزینهٔ ۴ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_3(10-x)\le \log_3 9$$

نتیجه می‌گیریم

$$10-x\le 9\Rightarrow x\ge 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3(10-x)$ وقتی معنی‌دار است که $10-x>0$ و در نتیجه $x<10$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[1,10)$ است.

۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>2$، آن‌گاه

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

$$x+1<\frac{1}{4}$$

بنابراین $x<-\frac{3}{4}$. همچنین باید $x+1>0$. در نتیجه $x>-1$.

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(-1,-\frac{3}{4})$ است.

۳۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $\log_a x>\log_a y$ و $a>1$، آن‌گاه $x>y$. بنابراین

$$\log_2(\log_3(2x+1))>2=\log_2 4$$

$$\log_3(2x+1)>4=\log_3 3^4$$

$$2x+1>3^4\Rightarrow x>40$$

بنابراین عددهای طبیعی ۱ تا ۴۰ در نامعادله صدق نمی‌کنند که تعداد آنها ۴۰ تا است.

۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{5}}(4x+1)=\log_{5^{-1}}(4x+1)$$

$$=-\log_5(4x+1)$$

بنابراین نامعادلهٔ داده شده می‌شود

$$-3<-\log_5(4x+1)<-2$$

در نتیجه

$$2<\log_5(4x+1)<3$$

$$\log_5(4x+1)<3=\log_5 5^3\Rightarrow 4x+1<5^3\Rightarrow x<31$$

$$\log_5(4x+1)>2=\log_5 5^2\Rightarrow 4x+1>5^2\Rightarrow x>6$$

پس $6<x<31$ (توجه کنید که در این محدوده $4x+1>0$).
تعداد عددهای صحیح در این محدوده ۲۴ تا است.

۳۸- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{1-\log x+1+\log x}{(1-\log x)(1+\log x)}>2\Rightarrow\frac{2}{1-(\log x)^2}>2$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2}>1\Rightarrow\frac{1}{1-(\log x)^2}-1>0$$

$$\frac{1-1+(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0\Rightarrow\frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0$$

بنابراین باید $(\log x)^2\neq 0$ و $1-(\log x)^2>0$:

$$(\log x)^2\neq 0\Rightarrow x\neq 1$$

$$(\log x)^2<1\Rightarrow -1<\log x<1\Rightarrow\frac{1}{10}<x<10$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(\frac{1}{10},10)-\{1\}$ است.

۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-1>0$، یعنی $x>1$. از طرف دیگر،

$$|\log_4(x-1)|<1\Rightarrow -1<\log_4(x-1)<1$$

$$\log_4(x-1)>-1\Rightarrow\log_4(x-1)>\log_4 4^{-1}$$

$$x-1>\frac{1}{4}\Rightarrow x>\frac{5}{4}$$

$$\log_4(x-1)<1\Rightarrow\log_4(x-1)<\log_4 4$$

$$x-1<4\Rightarrow x<5$$

بنابراین

$$\frac{5}{4}<x<5$$

عددهای صحیح در این محدوده ۲، ۳ و ۴ هستند که مجموع آنها ۹ است.

۴۰- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+2)>\log(2x+1)$ نتیجه می‌شود

$$x+2>2x+1\Rightarrow x<1$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x>-2$ معنی‌دار است و عبارت $\log(2x+1)$ برای $x>-\frac{1}{2}$ معنی‌دار است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\frac{1}{2},1)$ است.

۴۱- گزینهٔ ۳ نامعادله را به صورت

$$\log_{0/5}(\log_2 x)>\log_{0/5} 0/5$$

می‌نویسیم، در نتیجه

$$\log_2 x<0/5\Rightarrow\log_2 x<\log_2 2^{0/5}$$

$$x<2^{0/5}\Rightarrow x<\sqrt{2}$$

از طرف دیگر عبارت $\log_2 x$ برای $x>0$ تعریف شده است و عبارت $\log_{0/5}(\log_2 x)$ وقتی تعریف می‌شود که

$$\log_2 x>0\Rightarrow \log_2 x>\log_2 1\Rightarrow x>1$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(1,\sqrt{2})$ است.

۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x>0$ و $x\neq 1$، تا عبارت $\log_x x^2$ معنی‌دار باشد. اکنون نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_x x^2\ge x\Rightarrow 2\log_x x\ge x\Rightarrow 2\ge x$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(0,2]-\{1\}$ است.

۴۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که باید $x>0$، $x\neq 1$ و $12-x>0$ تا عبارت $\log_x(12-x)$ معنی‌دار باشد، پس

$$x\in(0,12)-\{1\}$$

اکنون دو حالت برای مبنا در نظر می‌گیریم:

حالت اول $x>1$، در این حالت،

$$\log_x(12-x)>\log_x x\Rightarrow 12-x>x\Rightarrow x<6$$

پس $(1,6)$ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است.

حالت دوم $0<x<1$، در این حالت،

$$\log_x(12-x)>\log_x x\Rightarrow 12-x<x\Rightarrow x>6$$

در این حالت نامعادله جواب ندارد.

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(1,6)$ است و نتیجه می‌شود

$$a=1,\ b=6\Rightarrow a+b=7$$

۴۴- گزینهٔ ۲ برای اینکه $\log_3(x+2)$ بامعنی باشد، باید $x+2>0$، یعنی $x>-2$. از طرف دیگر، باید

$$1-\log_3(x+2)\ge 0$$

$$\log_3(x+2)\le 1=\log_3 3$$

$$x+2\le 3\Rightarrow x\le 1$$

پس دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-2,1]$ است.

۴۵- گزینهٔ ۲ عبارت‌هایی که لگاریتم آنها را حساب می‌کنیم باید مثبت باشند، پس

$$4-x>0\Rightarrow x<4$$

$$\log_{0/2}(4-x)-1>0\Rightarrow \log_{0/2}(4-x)>\log_{0/2} 0/2$$

$$4-x<0/2\Rightarrow x>3/8$$

بنابراین دامنهٔ تابع بازهٔ $(3/8,4)$ است و در نتیجه $a=3/8$، $b=4$ و $b-a=0/2$.

۴۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_f=\{x\mid \frac{5x-1}{x+2}>0,\ \log\frac{5x-1}{x+2}\ge 0,\ x\neq -2\}$$

$$\frac{5x-1}{x+2}>0\Rightarrow x<-2 \text{ یا } x>\frac{1}{5}$$

نامعادلهٔ $\log\frac{5x-1}{x+2}\ge 0$ را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\log\frac{5x-1}{x+2}\ge\log 1=0$$

در نتیجه

$$\frac{5x-1}{x+2}\ge 1\Rightarrow\frac{4x-3}{x+2}\ge 0$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌ی فوق به صورت زیر است:

$$(-\infty,-2)\cup[\frac{3}{4},+\infty)$$

در نتیجه دامنهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$D_f=(-\infty,-2)\cup[\frac{3}{4},+\infty)$$

بنابراین دامنهٔ f عددهای صحیح $x=-2,-1,0$ را شامل نمی‌شود.

۴۷- گزینهٔ ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>0$ و $x\neq 1$. برای اینکه عبارت رادیکالی بامعنی باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$\log_3 x-\log_x 3\ge 0$$

$$\log_3 x-\frac{1}{\log_3 x}\ge 0$$

فرض می‌کنیم $\log_3 x=t$. در این صورت

$$t-\frac{1}{t}\ge 0\Rightarrow\frac{t^2-1}{t}\ge 0$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\frac{t^2-1}{t}$		$-$	0	$+$	ت	$-$	0	$+$	

بـا توجه به جدول تعیین علامت معلوم می‌شود $-1\le t<0$ یا $t\ge 1$، پس

$$-1\le\log_3 x<0\Rightarrow\frac{1}{3}\le x<1 \text{ یا } \log_3 x\ge 1\Rightarrow x\ge 3$$

بنابراین دامنهٔ تابع به صورت $D_f=[\frac{1}{3},1)\cup[3,+\infty)$ اســت.

پس $a=3$ و $b=1$ و در نتیجه $a+b=4$.

۴۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$x>۴\Rightarrow f(x)>f(۴)\Rightarrow f(x)>۰$$

$$x<۴\Rightarrow f(x)<f(۴)\Rightarrow f(x)<۰$$

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $\frac{۹-x^۲}{f(x)}\geq ۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت زیر است

$$x\in(-\infty,-۳]\cup[۳,۴)$$

بنابراین در دامنهٔ تابع g فقط یک عدد طبیعی قرار دارد که همان ۳ است.

x	$-\infty$		-۳		۳		۴		$+\infty$
$۹-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{۹-x^۲}{f(x)}$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$h(x)=\frac{۱}{\sqrt{f(x)g(x)}}\Rightarrow D_h=\{x|f(x)g(x)>۰\}$$

و چون تابع f اکیداً نزولی است و $f(۰)=۰$، پس

$$x>۰\Rightarrow f(x)<۰$$

$$x<۰\Rightarrow f(x)>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر نتیجه می‌شود:

$$D_h=(۲,+\infty)$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)g(x)$		$-$	ت ن	$-$	ت ن	$+$	

۵۰- گزینهٔ ۴ مجموع دو تابع نزولی تابعی نزولی است. پس تابع $h=(f+g)+(g-f)=۲g$ نزولی است و در نتیجه تابع $k=-\frac{۱}{۲}(۲g)=-g$ تابع صعودی است.

۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$g(x)=\frac{۳(x^۳+۴)-x^۲}{x^۲}$$

$$=\frac{۳(x^۳+۴)}{x^۲}-\frac{x^۲}{x^۲}$$

$$=۳f(x)-۱$$

بنابراین تابع g نیز صعودی است.

۵۲- گزینهٔ ۴ چون تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ نزولی است، پس تابع $-f$ روی این بازه صعودی است. از طرف دیگر، چون تابع $y=x$ روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ صعودی است، پس مجموع این تابع‌ها، یعنی تابع $y=x-f(x)$ روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ صعودی است.

۵۳- گزینهٔ ۱ تابع f تابعی نزولی با مقادیر منفی است، پس تابع $-f$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است. از طرف دیگر تابع $y=۲^x$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است، پس ضرب این دو تابع، یعنی $y=-۲^xf(x)$، صعودی است و در نتیجه تابع $y=۲^xf(x)$ نزولی است.

۵۴- گزینهٔ ۱ تابع g صعودی است، پس تابع $۲g$ هم صعودی است. تابع h نزولی است، پس تابع $-۳h$ صعودی است. بنابراین تابع $۲g-۳h$ هم صعودی است. از طرف دیگر،

$$\begin{cases}۲g(x)=۶x+۴f(x)\\-۳h(x)=-۶x+۹f(x)\end{cases}$$

$$۲g(x)-۳h(x)=۱۳f(x)$$

$$f(x)=\frac{۱}{۱۳}(۲g(x)-۳h(x))$$

با توجه به اینکه $۲g-۳h$ صعودی است، تابع f نیز صعودی است.

۵۵- گزینهٔ ۳ اگر a و b عددهایی مثبت باشند، آن‌گاه چون تابع f صعودی است،

$$a<b\Rightarrow f(a)\leq f(b)$$

$$f^۳(a)\leq f^۳(b)$$

$$-f^۳(b)\leq -f^۳(a)$$

یعنی تابع $y=-f^۳(x)$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ نزولی است.

۵۶- گزینهٔ ۲ تابع $y=x^۲+۱$ روی بازه $(۰,+\infty)$ صعودی و مثبت است، پس تابع $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$ روی این بازه نزولی است.

۵۷- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=x-[x]$ اکیداً یکنوا نیست، مثلاً $f(۰)=f(۱)=۰$.

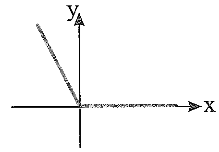
تابع $f(x)=x[x]$ اکیداً یکنوا نیست، مثلاً $f(۰)=f(\frac{۱}{۲})=۰$.

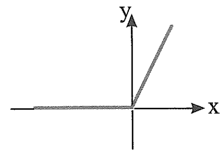
تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ اکیداً یکنوا نیست، مثلاً $f(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۳})=۰$.

تابع $f(x)=x+[x]$ اکیداً صعودی است. زیرا اگر $a<b$ آن‌گاه $[a]\leq[b]$ و در نتیجه

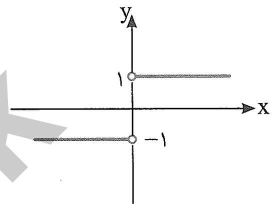
$$a+[a]<b+[b]\Rightarrow f(a)<f(b)$$

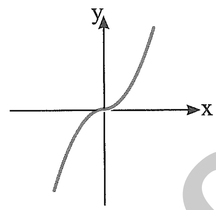
۵۸- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار توابع، واضح است که تابع $y=|x|-x$ صعودی نیست.





$$y=|x|-x=\begin{cases}۰ & x\geq ۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}\qquad y=x+|x|=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$





$$y=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}\qquad y=x|x|=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$$

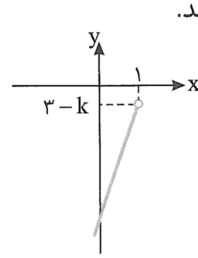
۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۲^x-۱}{۲^x+۱}=\frac{۲^x+۱-۲}{۲^x+۱}=\frac{۲^x+۱}{۲^x+۱}-\frac{۲}{۲^x+۱}=۱-\frac{۲}{۲^x+۱}$$

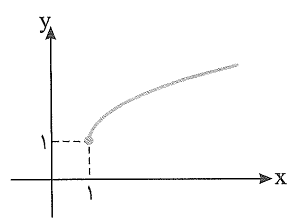
تابع $y=۲^x+۱$ صعودی و مثبت است، پس تابع $y=\frac{۱}{۲^x+۱}$ نزولی است و تابع $y=\frac{-۲}{۲^x+۱}$ صعودی است. بنابراین تابع $y=۱-\frac{۲}{۲^x+۱}$ صعودی است.

۶۰- گزینهٔ ۱ تابع‌های $y=۲^x$ و $y=\sqrt{x}$ صعودی و مثبت‌اند. پس تابع $y=۲^x\sqrt{x}$ نیز صعودی است.

۶۱- گزینهٔ ۳ توابع $y=\sqrt{x-۱}+۱$ و $y=۳x-k$ صعودی هستند.



$y=۳x-k\ ,\ x<۱$



$y=\sqrt{x-۱}+۱$

مطابق شکل‌های بالا کافی است $۳-k$ بیشتر از ۱ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس

$$۳-k\leq ۱\Rightarrow k\geq ۲$$

۶۲- گزینهٔ ۳ تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ با شرط $a<۰$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ نزولی است.

بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f صعودی باشد:

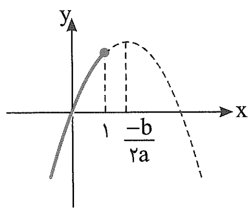
$$k+۲<۰\Rightarrow k<-۲$$

$$۱\leq\frac{-۱}{۲(k+۲)}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۲(k+۲)}\leq ۰\Rightarrow\frac{۲k+۴+۱}{۲(k+۲)}\leq ۰$$

$$\frac{۲k+۵}{۲(k+۲)}\leq ۰\Rightarrow -\frac{۵}{۲}\leq k<-۲$$

بنابراین

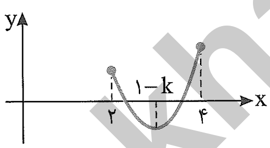
$$-\frac{۵}{۲}\leq k<-۲$$



۶۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد. یعنی اگر رأس سهمی که طول آن $x=۱-k$ است، در بازهٔ $(۲,۴)$ باشد، آن‌گاه تابع غیریکنوا می‌شود. پس

$$۲<۱-k<۴\Rightarrow ۱<-k<۳$$

$$-۳<k<-۱$$



۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}(۱+k^{۲})x & x\geq ۰\\ (۱-k^{۲})x & x<۰\end{cases}$$

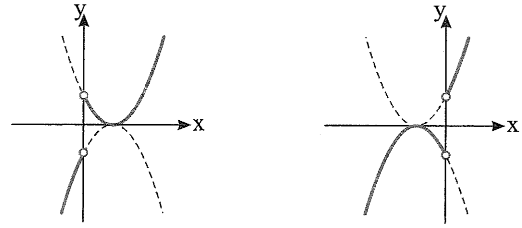
برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y=(۱+k^{۲})x$ و $y=(۱-k^{۲})x$ دارای شیب نامنفی باشند. شیب خط $y=(۱+k^{۲})x$ همواره مثبت است. پس باید شیب خط $y=(۱-k^{۲})x$ همواره نامنفی باشد. یعنی

$$۱-k^{۲}\geq ۰\Rightarrow k^{۲}\leq ۱\Rightarrow -۱\leq k\leq ۱$$

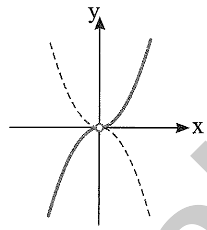
۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}(x+k)^{۲} & x>۰\\ -(x+k)^{۲} & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع در سه حالت مختلف به صورت زیر است.



$k<۰$ $\qquad$ $k>۰$



$k=۰$

ملاحظه می‌کنید که فقط وقتی $k=۰$، تابع f صعودی است.

۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ۲(x+k)^۲ & x>۱ \\ ۰ & ۰<x<۱ \\ -۲(x+k)^۲ & x<۰ \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، لازم است که تابع‌های

$$g(x)=۲(x+k)^۲,\ x>۱$$

$$h(x)=-۲(x+k)^۲,\ x<۰$$

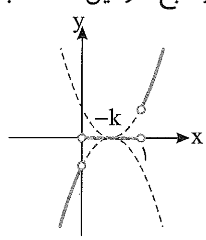
صعودی باشند. بنابراین باید دامنهٔ توابع g و h شامل دو طرف رأس سهمی‌ها یعنی $x=-k$ نباشد. پس باید

$$-k\le ۱\Rightarrow k\ge -۱$$

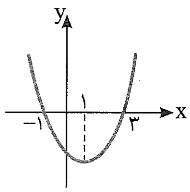
$$-k\ge ۰\Rightarrow k\le ۰$$

در نتیجه $-۱\le k\le ۰$.

توجه کنید که نمودار تابع در این حالت به شکل زیر است.



۶۷- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع از نامساوی $-۲<x-۱<۲$ به‌دست می‌آید، پس $D_f=(-۱,۳)$. با توجه به نمودار تابع $y=x^۲-۲x-۳$، در بازهٔ $(-۱,۳)$ مقدار تابع f همواره منفی است و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.



۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۲)=-۱$$

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۲)=-۱$$

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۴)\ \text{تعریف نشده}$$

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(-۱)=۳$$

بنابراین

$$fog=\{(-۱,-۱),(۳,-۱),(۱,۳)\}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۴)=۱\Rightarrow a=۱$$

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۲\Rightarrow b=۲$$

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۳)=۴\Rightarrow c=۴$$

$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۲)=۳\Rightarrow d=۳$$

بنابراین $a-b+c-d=۰$.

۷۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(۱)=۱,\quad f(۲)=۳,\quad f(۳)=۲$$

$$g(۱)=a,\quad g(۲)=b,\quad g(۳)=c$$

اکنون توجه کنید که چون $(fog)(x)=x$ و f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$f(g(۱))=۱=f(۱)\Rightarrow g(۱)=۱\Rightarrow a=۱$$

$$f(g(۲))=۲=f(۳)\Rightarrow g(۲)=۳\Rightarrow b=۳$$

$$f(g(۳))=۳=f(۲)\Rightarrow g(۳)=۲\Rightarrow c=۲$$

بنابراین $a-۲b-c=-۷$.

۷۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(۱)=۱,\quad f(۲)=۳,\quad f(۳)=۲$$

$$f(g(۱))=۲,\quad f(g(۲))=۱,\quad f(g(۳))=۳$$

اکنون توجه کنید که چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$f(g(۱))=f(۳)\Rightarrow g(۱)=۳$$

$$f(g(۲))=f(۱)\Rightarrow g(۲)=۱$$

$$f(g(۳))=f(۲)\Rightarrow g(۳)=۲$$

بنابراین

$$g=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$$

۷۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$g(۳)=۱\Rightarrow (fog)(۳)=f(g(۳))=f(۱)=-۱$$

$$f(۲)=۱\Rightarrow (gof)(۲)=g(f(۲))=g(۱)=۲$$

$$f(۰)=۳\Rightarrow (gof)(۰)=g(f(۰))=g(۳)=۱$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۲ است.

۷۳- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که g تابعی خطی است که از نقطه‌های $(۰,۴)$ و $(۲,۰)$ می‌گذرد. پس

$$g(x)=۴-۲x$$

بنابراین

$$g(-۴)=۴-۲(-۴)=۱۲$$

$$g(۴)=۴-۲(۴)=-۴$$

در نتیجه با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$(f+g)(-۴)=f(-۴)+g(-۴)=-۲+۱۲=۱۰$$

$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۴)=-۲$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -۵ است.

۷۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(-۵)=۰$ و $f(۰)=۳$. در نتیجه

$$(fofof)(-۵)=۰\Rightarrow f(f(f(-۵)))=۰$$

$$f(f(۰))=۰\Rightarrow f(۳)=۰$$

چون f فقط به‌ازای -۵ و k برابر صفر است، پس $k=۳$.

۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $g(۳)>۰$ و مقدار f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت است. بنابراین

$$(fog)(۳)=f(g(۳))>۰$$

یعنی گزینهٔ (۴) درست نیست. بقیهٔ گزینه‌ها درست هستند.

۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(g(۲))=۲^۲-۲\times۲+۳=۳=f(-۱)$$

چون تابع f یک‌به‌یک است، پس

$$g(۲)=-۱$$

۷۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))$$

اکنون توجه کنید که

$$g(x-۱)=۲x-۱\xrightarrow{x=-۱}g(-۲)=۲(-۱)-۱=-۳$$

$$f(g(-۲))=f(-۳)=۱-(-۳)^۲=-۸$$

پس

$$(fog)(-۲)=-۸$$

۷۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(fog)(۳)=۸\Rightarrow f(g(۳))=۸$$

$$f(۲^۳-۱)=۸$$

$$f(۷)=۸$$

اکنون اگر در تساوی $f(x)=۲x+m$ قرار دهیم $x=۷$ به‌دست می‌آید

$$f(۷)=۱۴+m\Rightarrow ۸=۱۴+m\Rightarrow m=-۶$$

در نتیجه $f(-۶)=-۱۲-۶=-۱۸$.

۷۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fofof)(-۱)=f(f(f(-۱)))$$

از طرف دیگر،

$$f(-۱)=(-۱)^۲-۱=۰$$

بنابراین

$$f(f(-۱))=f(۰)=۴\times۰+۵=۵$$

در نتیجه

$$f(f(f(-۱)))=f(۵)=۵^۳-۱۵=۱۱۰$$

بنابراین

$$(fofof)(-۱)=۱۱۰$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $(fof)(-۲)=f(f(-۲))$.

از طرف دیگر،

$$f(-۲)=\frac{۳(-۲)-۱}{-۲-۱}=\frac{-۷}{-۳}=\frac{۷}{۳}$$

$$f(f(-۲))=f(\frac{۷}{۳})=\frac{۳-\frac{۷}{۳}}{۵+\frac{۷}{۳}}=\frac{۱}{۱۱}$$

۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۲)=f(f(۲))$. از طرف دیگر،

$$f(۲)=۲^۲-۳\times۲=-۲$$

$$f(f(۲))=f(-۲)=-۲a+۲$$

بنابراین

$$(fof)(۲)=-۴\Rightarrow -۲a+۲=-۴\Rightarrow a=۳$$

۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$g(-۳)=g(-۱-۲)=(-۱)^۲-۶=-۵$$

و

$$f(-۵)=f(۲(-۳)+۱)=-۳+۵=۲$$

بنابراین

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(-۵)=۲$$

۸۳- گزینهٔ ۴ چون $f(3)=9$، پس

$$(gof)(3)=g(f(3))=g(9)=2\times9-m=18-m=2$$

درنتیجه $m=16$. بنابراین

$$g(x)=\begin{cases}2x-16 & x\ge 1\\ nx+3 & x<1\end{cases}$$

از این‌رو

$$g(1)=2\times1-16=-14$$

۸۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(-2)=f(g(-2))$$

از طرف دیگر،

$$g(-2)=-2+6=4$$

$$f(g(-2))=f(4)=4^2+2=18$$

۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)-1}{2}=\frac{7-x-1}{2}=3-\frac{x}{2}$$

۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(3x-2)$$
$$=2(3x-2)-3=6x-7$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$$
$$=3(2x-3)-2=6x-11$$

بنابراین

$$(gof)(x)-(fog)(x)=6x-11-(6x-7)=-4$$

۸۷- گزینهٔ ۲ تابع‌های f و g تابع‌هایی خطی هستند که نمایش جبری آنها به شکل زیر است

$$f(x)=2+\frac{1}{2}x$$
$$g(x)=2-2x$$

بنابراین

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2-2x)$$
$$=2+\frac{1}{2}(2-2x)=3-x$$

۸۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))$$
$$3g(x)-1=4f(x)+a\Rightarrow 3(4x+a)-1=4(3x-1)+a$$
$$12x+3a-1=12x-4+a\Rightarrow 2a=-3\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(gof)(x)=x$، پس

$$g(f(x))=x$$

اکنون برای اینکه $g(4)$ را حساب کنیم، xای را پیدا می‌کنیم که $f(x)=4$، یعنی

$$f(x)=4\Rightarrow\frac{5x-3}{x+4}=4\Rightarrow 5x-3=4x+16\Rightarrow x=19$$

به این ترتیب، $f(19)=4$، پس

$$(gof)(x)=x\xrightarrow{x=19}g(f(19))=19\Rightarrow g(4)=19$$

۹۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fofog)(x)=f(f(g(x)))$$

از طرف دیگر، می‌توان نوشت

$$f(g(x))=f(|x|)=||x|+2|-4$$

چون $|x|+2>0$، پس

$$f(g(x))=|x|-2$$

و

$$f(f(g(x)))=f(|x|-2)=||x|-2+2|-4$$
$$=||x||-4=|x|-4$$

۹۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fof)(x)=f(f(x))=f^2(x)+3f(x)+2$$

بنابراین

$$(fof)(x)=2\Rightarrow f^2(x)+3f(x)+2=2$$
$$f^2(x)+3f(x)=0\Rightarrow f(x)(f(x)+3)=0$$
$$f(x)=0\Rightarrow x^2+3x+2=0\Rightarrow x=-1,x=-2$$
$$f(x)=-3\Rightarrow x^2+3x+2=-3\Rightarrow x^2+3x+5=0$$

معادلهٔ $x^2+3x+5=0$ جواب ندارد. پس معادلهٔ $(fof)(x)=2$ دو جواب دارد.

۹۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=||x+2|-4+1|=||x+2|-3|$$

بنابراین

$$||x+2|-3|=7\Rightarrow\begin{cases}|x+2|-3=7\\ |x+2|-3=-7\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x+2|=10\\ |x+2|=-4 \quad \text{(غ.ق.ق)}\end{cases}$$

اکنون توجه کنید که

$$|x+2|=10\Rightarrow x+2=\pm10\Rightarrow x=\pm10-2$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۴- است.

۹۳- گزینهٔ ۱ در تساوی $(gof)(x)=x^{۳}$ به جای x قرار می‌دهیم $g(x)$:

$$(gof)(g(x))=g^{۳}(x)\Rightarrow(gofog)(x)=g^{۳}(x)$$

از تساوی $(fog)(x)=x^{۲}$ نتیجه می‌شود

$$g((fog)(x))=g(x^{۲})$$

و در نتیجه

$$(gofog)(x)=g(x^{۲})$$

بنابراین $g^{۳}(x)=g(x^{۲})$. در تساوی قبل قرار می‌دهیم $x=۴$:

$$g^{۳}(۴)=g(۱۶)\Rightarrow g^{۳}(۴)=۱۶\Rightarrow g(۴)=\sqrt[۳]{۱۶}$$

۹۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$ و

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x\neq-۱,\frac{x-۱}{x+۱}\neq-۱\}$$

$$\frac{x-۱}{x+۱}=-۱\Rightarrow x-۱=-x-۱\Rightarrow x=۰$$

بنابراین

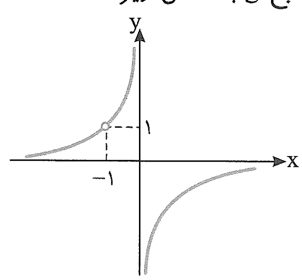
$$D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$$

اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}$$

$$=\frac{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}{\frac{x-۱}{x+۱}+۱}=\frac{x-۱-x-۱}{x-۱+x+۱}=\frac{-۱}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است.



۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

$$=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳},\sqrt{۳-x^{۲}}\in\{-۲,۰,۱,۲\}\}$$

$\sqrt{۳-x^{۲}}=-۲$ (غ.ق.ق)

$$\sqrt{۳-x^{۲}}=۰\Rightarrow ۳-x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۳-x^{۲}}=۱\Rightarrow ۳-x^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

$\sqrt{۳-x^{۲}}=۲\Rightarrow ۳-x^{۲}=۴\Rightarrow x^{۲}=-۱$ (غ.ق.ق)

بنابراین

$$D_{gof}=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳},x\in\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}\}$$

$$=\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}$$

از طرف دیگر،

$$(gof)(-\sqrt{۲})=g(f(-\sqrt{۲}))=g(۱)=۰$$

$$(gof)(\sqrt{۲})=g(f(\sqrt{۲}))=g(۱)=۰$$

به همین ترتیب نتیجه می‌شود که

$$(gof)(\sqrt{۳})=(gof)(-\sqrt{۳})$$

$$=g(۰)=-۱$$

بنابراین

$$gof=\{(-\sqrt{۲},۰),(\sqrt{۲},۰),(-\sqrt{۳},-۱),(\sqrt{۳},-۱)\}$$

۹۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x|-۴\le x\le ۴,۲\le|x-۱|\le ۴\}$$

$$۲\le|x-۱|\le ۴\Rightarrow\begin{cases}۲\le x-۱\le ۴\Rightarrow ۳\le x\le ۵\\ \text{یا}\\ -۴\le x-۱\le -۲\Rightarrow -۳\le x\le -۱\end{cases}$$

بنابراین

$$D_{fog}=[-۴,۴]\cap([-۳,-۱]\cup[۳,۵])$$

$$=[-۳,-۱]\cup[۳,۴]$$

$$=[-۳,۴]-(-۱,۳)$$

۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$۴x-x^{۲}\ge ۰\Rightarrow x(۴-x)\ge ۰\Rightarrow ۰\le x\le ۴\Rightarrow D_f=[۰,۴]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}$$

$$=\{۰\le x\le ۴|۰\le\sqrt{۴x-x^{۲}}-۱\le ۴\}$$

$$۱\le\sqrt{۴x-x^{۲}}\le ۵\Rightarrow ۱\le ۴x-x^{۲}\le ۲۵$$

$$-۳\le ۴x-x^{۲}-۴\le ۲۱\Rightarrow -۳\le-(x-۲)^{۲}\le ۲۱$$

$$-۲۱\le(x-۲)^{۲}\le ۳\Rightarrow|x-۲|\le\sqrt{۳}\Rightarrow-\sqrt{۳}\le x-۲\le\sqrt{۳}$$

$$۲-\sqrt{۳}\le x\le ۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{۰\le x\le ۴,۲-\sqrt{۳}\le x\le ۲+\sqrt{۳}\}$$

$$=[۲-\sqrt{۳},۲+\sqrt{۳}]$$

۹۸- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $f(1+x)$ را یک واحد به راست انتقال دهیم، نمودار تابع f به‌دست می‌آید. بنابراین $D_f=[-1,4]$. اکنون طبق قاعدهٔ محاسبهٔ دامنهٔ ترکیب تابع‌ها می‌توان نوشت

$$D_{f(2x-1)}=\{x|-1\le 2x-1\le 4\}$$

$$-1\le 2x-1\le 4\Rightarrow 0\le 2x\le 5\Rightarrow 0\le x\le \frac{5}{2}$$

بنابراین

$$D_{f(2x-1)}=[0,\frac{5}{2}]$$

۹۹- گزینهٔ ۳ تابع $f(x^2)$ ترکیب تابع‌های f و x^2 است. بنابراین طبق قاعدهٔ محاسبهٔ دامنهٔ ترکیب تابع‌ها می‌توان نوشت

$$D_{f(x^2)}=\{x|1\le x^2\le 4\}$$

بنابراین

$$D_{f(x^2)}=[-2,-1]\cup[1,2]$$

۱۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\ge 2,\sqrt{x-2}\in\mathbb{R}\}$$
$$=[2,+\infty)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-2})=(\sqrt{x-2})^2+4$$
$$=x-2+4=x+2$$

اکنون با توجه به دامنهٔ تابع gof که شرط $x\ge 2$ دارد، برد آن را پیدا می‌کنیم:

$$x\ge 2\Rightarrow x+2\ge 4\Rightarrow (gof)(x)\ge 4$$

$$R_{gof}=[4,+\infty)$$

۱۰۱- گزینهٔ ۱ اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=x^2>0$. بنابراین

$$(gof)(x)=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$$

اگر $x>0$، آن‌گاه

$$f(x)=x>0$$

بنابراین

$$(gof)(x)=g(x)=x^2$$

در نتیجه

$$(gof)(x)=\begin{cases}x^4 & x<0\\ x^2 & x>0\end{cases}$$

۱۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(gof)(x)=3x^2-1\Rightarrow g(f(x))=3x^2-1\quad (1)$$

اکنون برای این‌که مقدار $g(-7)$ را حساب کنیم، کافی است مقداری از x را پیدا کنیم که $f(x)=-7$، یعنی

$$f(x)=-7\Rightarrow 3x+2=-7\Rightarrow x=-3$$

بنابراین اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=-3$ به‌دست می‌آید

$$g(-7)=3(-3)^2-1=26$$

۱۰۳- گزینهٔ ۱ اگر در تساوی $(fog)(x)=3f(x)+2$ قرار دهیم $x=\frac{4}{3}$ به‌دست می‌آید

$$(fog)(\frac{4}{3})=3f(\frac{4}{3})+2\quad (1)$$

اکنون با توجه به اینکه $f(x)=3^{3x-1}-1$ و

$$(fog)(\frac{4}{3})=f(g(\frac{4}{3}))$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$3^{3g(\frac{4}{3})-1}-1=3(3^{3\times\frac{4}{3}-1}-1)+2=3^4-1$$

بنابراین $3^{3g(\frac{4}{3})-1}=3^4$، پس $3g(\frac{4}{3})-1=4$، یعنی

$$g(\frac{4}{3})=\frac{5}{3}$$

۱۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(4)=g(f(4))=g(10)$$

از طرف دیگر،

$$(fog)(10)=f(g(10))=7$$
$$3g(10)-2=7\Rightarrow g(10)=3$$

بنابراین $(gof)(4)=g(10)=3$.

۱۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=3+2g(x)$$

با توجه به شکل $(fog)(1)=3$، پس

$$f(g(1))=3\Rightarrow 3+2g(1)=3\Rightarrow g(1)=0$$

در نتیجه

$$(gog)(1)=g(g(1))=g(0)$$

اکنون مقدار $g(0)$ را پیدا می‌کنیم. با توجه به شکل $(fog)(0)=2$، در نتیجه

$$f(g(0))=3+2g(0)=2\Rightarrow g(0)=\frac{-1}{2}$$

۱۰۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(s)=۴\Rightarrow s=۲$$

$$f(s)=۲\Rightarrow s=۰$$

بنابراین

$$(fof)(t)=f(f(t))=۴$$

$$f(t)=۲\Rightarrow t=۰$$

پس

$$f(t-۲)=f(-۲)=۱$$

۱۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(x)\Rightarrow g(f(x))=g(x)$$

$$۴f(x)-۱۹=۴x-۱۹\Rightarrow f(x)=x$$

در نتیجه

$$(f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=۴+۴\times۴-۱۹=۱$$

۱۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=x+f(x)\Rightarrow g(f(x))=x+f(x)$$

$$f^۲(x)-f(x)+۴=x+f(x)\Rightarrow f^۲(x)-۲f(x)-x+۴=۰$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید

$$f^۲(۳)-۲f(۳)-۳+۴=۰\Rightarrow f^۲(۳)-۲f(۳)+۱=۰$$

$$(f(۳)-۱)^۲=۰\Rightarrow f(۳)=۱$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=۳x+۴\Rightarrow g(f(x))=۳x+۴$$

$$\frac{f(x)-۱}{۳}=۳x+۴$$

$$f(x)=۳(۳x+۴)+۱=۹x+۱۳$$

۱۱۰- گزینهٔ ۲ چون f خطی است، پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=ax+b$ است. پس

$$(fof)(x)=f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b$$

$$=a^۲x+ab+b$$

$$a^۲x+ab+b=۴x-۳\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\\ ab+b=-۳\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-۲, b=۳\\ a=۲, b=-۱\end{cases}$$

بنابراین

$f(x)=-۲x+۳$ یا $f(x)=۲x-۱$

که نتیجه می‌شود

$f(۰)=۳$ یا $f(۰)=-۱$

۱۱۱- گزینهٔ ۳ با توجه به ضابطهٔ تابع f،

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+۱}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)+۱}=\frac{x}{۲x-۱}\Rightarrow ۲xg(x)-g(x)=xg(x)+x$$

$$(x-۱)g(x)=x\Rightarrow g(x)=\frac{x}{x-۱}$$

۱۱۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+۲}{g(x)-۱}=-\frac{x+۲}{x-۱}$$

بنابراین

$$(x-۱)g(x)+۲x-۲=(-x-۲)g(x)+x+۲$$

$$(x-۱+x+۲)g(x)=-x+۴\Rightarrow g(x)=\frac{-x+۴}{۲x+۱}$$

۱۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=۴x-۱\Rightarrow f(g(x))=۴x-۱$$

$$f(۲x-۱)=۴x-۱\quad(۱)$$

اکنون توجه کنید که اگر $۲x-۱=t$، آن‌گاه

$$x=\frac{t+۱}{۲}$$

و اگر در تساوی (۱) این مقدار x را قرار دهیم به‌دست می‌آید

$$f(t)=۴(\frac{t+۱}{۲})-۱=۲t+۱$$

چون t هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، پس

$$f(x)=۲x+۱$$

در نتیجه

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲(۲x+۱)-۱=۴x+۱$$

۱۱۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(fog)(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$$

$$f(g(x))=\frac{x}{x^۲+۱}$$

$$f(x+۱)=\frac{x}{x^۲+۱}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-۱$، به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{x-۱}{(x-۱)^۲+۱}$$

$$=\frac{x-۱}{x^۲-۲x+۲}$$

۱۱۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(gof)(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow g(f(x))=\frac{x}{x-۱}$$

$$g(\frac{۱}{x+۱})=\frac{x}{x-۱}$$

فرض کنید $\frac{۱}{x+۱}=t$، در این صورت $x=\frac{۱}{t}-۱$ و در نتیجه

$$g(t)=\frac{\frac{۱}{t}-۱}{\frac{۱}{t}-۱-۱}=\frac{۱-t}{۱-۲t}$$

بنابراین

$$g(x)=\frac{۱-x}{۱-۲x}$$

۱۱۶- گزینهٔ ۱ نامعادله به صورت $f(f(x))<f(x^۲+۲)$ است که چون تابع f اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$f(x)<x^۲+۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر $f(x)<۱$ و $x^۲+۲\ge۲$.

بنابراین هر عدد حقیقی در نامعادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g کافی است نامعادلهٔ $f(x)>۰$ را حل کنیم. با توجه به $f(۱)=۰$ نتیجه می‌شود $f(x)>f(۱)$ و با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x<۱$. بنابراین

$$D_g=(-\infty,۱)$$

۱۱۸- گزینهٔ ۳ برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g ابتدا باید نامعادلهٔ $f(x+۱)>۰$ را حل کنیم. چون $f(۲)=۰$، پس $f(x+۱)>f(۲)$ و با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x+۱>۲$ و در نتیجه $x>۱$.

از طرف دیگر، $D_f=[-۳,۳]$، بنابراین $-۳\le x+۱\le۳$ و در نتیجه $-۴\le x\le۲$. بنابراین دامنهٔ تابع g به صورت $(۱,۲]$ است.

۱۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$D_g=D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$

$$=\{x \mid x\ge۰ , f(x)\ge۰\}$$

با توجه به اینکه تابع f اکیداً نزولی است، نتیجه می‌شود

$$f(x)\ge۰\Rightarrow f(x)\ge f(۱)\Rightarrow x\le۱$$

بنابراین

$$D_g=\{x \mid x\ge۰ , x\le۱\}=[۰,۱]$$

۱۲۰- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$۳-(fof)(x)\ge۰$$

$$f(f(x))\le۳$$

$$f(f(x))\le f(۲)$$

با توجه به اینکه تابع f اکیداً صعودی است نتیجه می‌شود

$$f(x)\le۲\Rightarrow f(x)\le f(۱)$$

مجدداً از اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\le۱$. بنابراین

$$D_g=(-\infty,۱]$$

۱۲۱- گزینهٔ ۲ چون تابع f اکیداً نزولی و تابع $y=-x^۳+۲$ نیز اکیداً نزولی است، پس ترکیب آنها اکیداً صعودی است.

۱۲۲- گزینهٔ ۳ اگر f تابعی نزولی و g تابعی صعودی باشد، تابع gof نزولی است. تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ صعودی است، بنابراین تابع $(gof)(x)=\sqrt[۳]{f(x)}$ نزولی است. توابع $\frac{۱}{f}$ و $|f|$ می‌توانند غیریکنوا باشند و تابع $-f$ صعودی است.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ اگر تابع f صعودی باشد، آن‌گاه تابع fof صعودی است، زیرا به‌ازای هر a و b از دامنهٔ f که $a<b$،

$$f(a)\le f(b)$$

$$f(f(a))\le f(f(b))$$

$$(fof)(a)\le(fof)(b)$$

اگر تابع f نزولی باشد، آن‌گاه تابع fof صعودی است، زیرا به‌ازای هر a و b از دامنهٔ f که $a<b$،

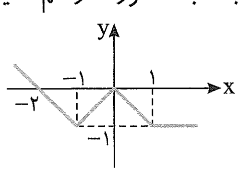
$$f(a)\ge f(b)$$

$$f(f(a))\le f(f(b))$$

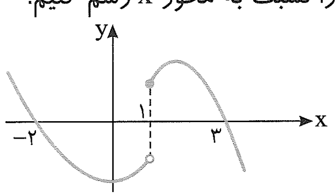
$$(fof)(a)\le(fof)(b)$$

بنابراین اگر تابع f یکنوا باشد، تابع fof حتماً صعودی است.

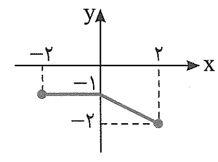
۱۲۴- گزینهٔ ۴ برای رسم کردن نمودار تابع $-f$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.



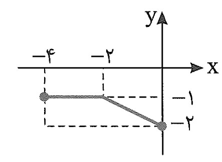
۱۲۵- گزینهٔ ۱ برای رسم کردن نمودار تابع $-f$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.



۱۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=-f(x-2)$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-2)$ به‌دست بیاید. سپس نمودار تابع $y=f(x-2)$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید (توجه کنید که اگر $g(x)=f(x-2)$، آن‌گاه $g(x+2)=f(x)$).

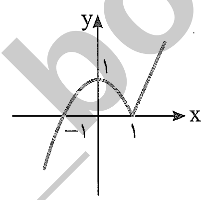


$y=f(x-2)$

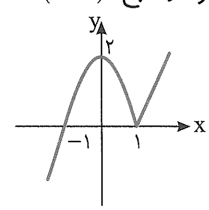


$y=f(x)$

۱۲۷- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2f(x-1)$ به‌دست بیاید.

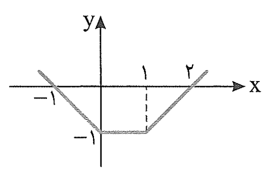


$y=f(x-1)$

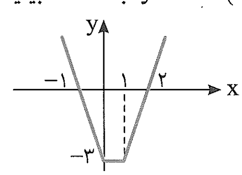


$y=2f(x-1)$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور x پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $-f$ به‌دست بیاید. سپس، عرض هر نقطه روی نمودار تابع $-f$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-3f(x)$ به‌دست بیاید.

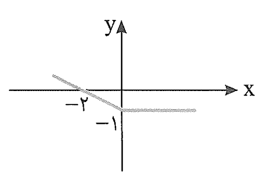


$y=-f(x)$

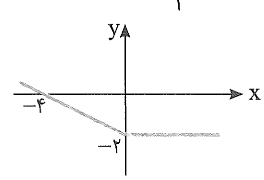


$y=-3f(x)$

۱۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $\frac{1}{2}f$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)-1$ به‌دست بیاید.



$y=\frac{1}{2}f(x)$



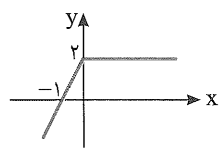
$y=\frac{1}{2}f(x)-1$

توجه کنید که اگر $x<0$، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(0,-2)$ و $(-2,0)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x<0$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-x-2$ است. در نتیجه اگر $x<0$ و $\frac{1}{2}f(x)-1=0$، آن‌گاه $\frac{1}{2}(-x-2)-1=0$، پس $x=-4$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)-1$ محور x را در نقطه‌ای به طول -4 قطع می‌کند.

۱۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر قرینهٔ نمودار تابع g را نسبت به محور x رسم کنیم، نمودار تابع f به‌دست می‌آید. بنابراین همواره $f(x)=-g(x)$. به این ترتیب، همواره

$$f(x)-g(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$$

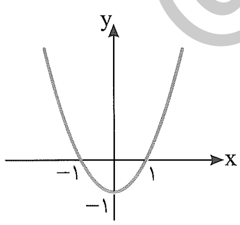
بنابراین کافی است نمودار تابع $2f$ را رسم کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را دو برابر می‌کنیم.



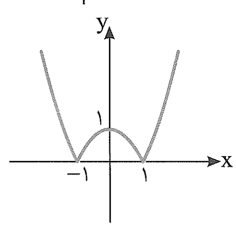
۱۳۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=|f(x)-1|=|2x^2-2|=2|x^2-1|$$

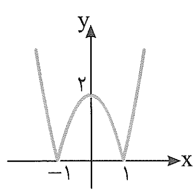
برای رسم کردن نمودار تابع $y=2|x^2-1|$، ابتدا نمودار تابع $y=x^2$ را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^2-1$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی از نمودار را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^2-1|$ به‌دست بیاید. در آخر، عرض هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2|x^2-1|$ به‌دست بیاید.



$y=x^2-1$



$y=|x^2-1|$



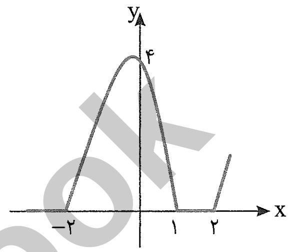
$y=2|x^2-1|$

۱۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=f(x)+|f(x)|=\begin{cases} f(x)+f(x) & f(x)\geq 0 \\ f(x)-f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2f(x) & f(x)\geq 0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار تابع f نامنفی است عرض نقاط روی نمودار تابع f را دو برابر کنیم، در بقیهٔ جاها تابع g تابع ثابت صفر است.

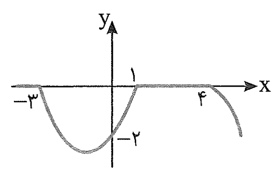


۱۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$g(x)=f(x)-|f(x)|=\begin{cases} f(x)-f(x) & f(x)\geq 0 \\ f(x)-(-f(x)) & f(x)<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & f(x)\geq 0 \\ 2f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

بنابراین کافی اســت در جاهایی که مقدار f منفی است عرض نقــاط روی نمودار f را ۲ برابر کنیم، در بقیهٔ جاها g تابع ثابت صفر است.

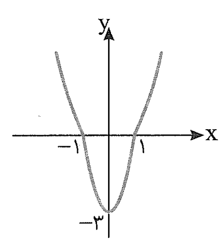


۱۳۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=2f(x)-|f(x)|=\begin{cases} 2f(x)-f(x) & f(x)\geq 0 \\ 2f(x)-(-f(x)) & f(x)<0 \end{cases}$$

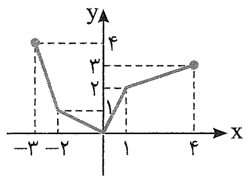
$$=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ 3f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

بنابراین کافی اســت در جاهایی که مقدار f منفی است عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g همان نمودار f است.

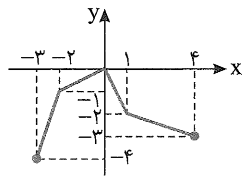


۱۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|f(x)|$ را رسم می‌کنیم.

برای این کار، قرینهٔ قســمتی از نمودار تابع f را که زیر محور x است نسبت به محور x پیدا می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x اســت حذف می‌کنیم. اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم، نمودار تابع $y=-|f(x)|$ به‌دست می‌آید.



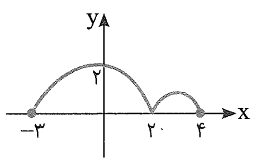
$y=|f(x)|$



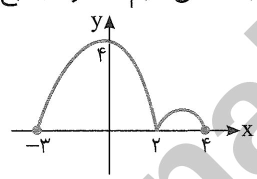
$y=-|f(x)|$

۱۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=|2f(x)|=2|f(x)|$.

ابتدا نمودار تابع $|f|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع f را که زیر محور x اســت نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. اکنون، نمودار تابع $|f|$ را در امتداد محور y با ضریب ۲ به‌طور عمودی منبسط می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2|f(x)|$ به‌دست بیاید.



$y=|f(x)|$



$y=2|f(x)|$

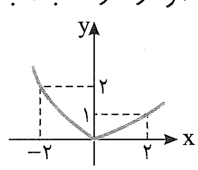
۱۳۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{|2f(x)-f(x)|}{3} & f(x)\geq 0 \\ \dfrac{|2f(x)-(-f(x))|}{3} & f(x)<0 \end{cases}$$

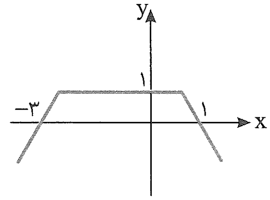
$$=\begin{cases} \dfrac{|f(x)|}{3} & f(x)\geq 0 \\ \dfrac{|3f(x)|}{3} & f(x)<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{3}f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

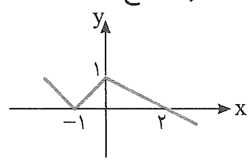
بنابراین کافی است در جاهایی که مقادیر f نامنفی هستند، عرض نقــاط روی نمودار f را یک ســوم کنیم و در جاهایی که مقادیر f منفی هستند، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور x رسم کنیم.



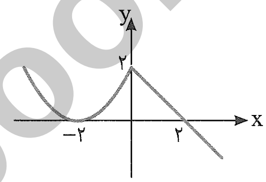
۱۳۸- گزینهٔ ۲ باید نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم.



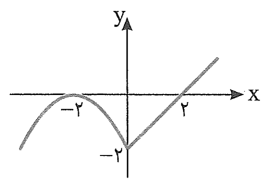
۱۳۹- گزینهٔ ۱ باید نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم.



۱۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا قرینهٔ نمودار داده شده را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(-(-x))=f(x)$ به‌دست بیاید.

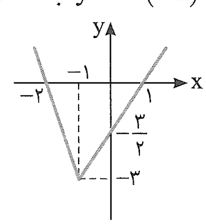


اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x پیدا کنیم، نمودار $y=-f(x)$ به‌دست می‌آید.

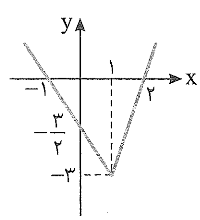


۱۴۱- گزینهٔ ۲ نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به محور y است. بنابراین باید نموداری را پیدا کنیم که قرینه‌اش نسبت به محور y برخودش منطبق باشد. در بین گزینه‌ها، فقط تابعی که نمودارش در گزینهٔ (۲) رسم شده است این ویژگی را دارد.

۱۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.

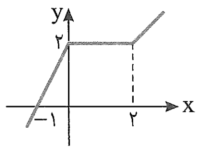


$y=-f(-x)$

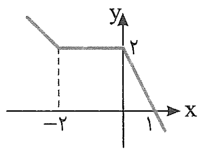


$y=-f(x)$

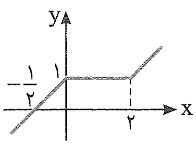
۱۴۳- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ به‌دست بیاید. اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم کنیم، به نمودار تابع $y=f(1-x)$ می‌رسیم. در آخر، نمودار تابع $y=f(1-x)$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)-1$ به‌دست بیاید.



$y=f(1-x)$

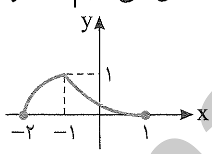


$y=f(1+x)$

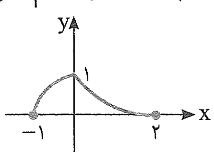


$y=f(1-x)-1$

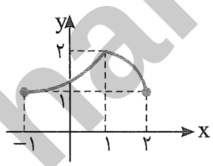
۱۴۴- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1+f(1-x)$ رسم شود.



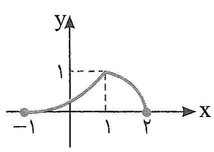
$y=f(1+x)$



$y=f(x)$

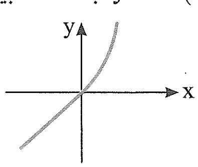


$y=1+f(1-x)$

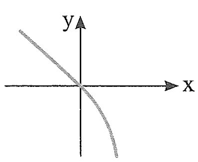


$y=f(1-x)$

۱۴۵- گزینهٔ ۴ قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست بیاید. اکنون این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.

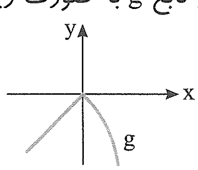


$y=-f(-x)$



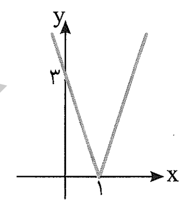
$y=f(-x)$

به این ترتیب، نمودار تابع g به صورت زیر است.

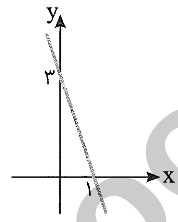


۱۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

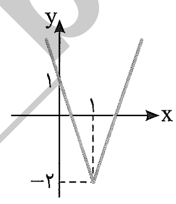
در آخر، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ به‌دست بیاید.



$y=|f(-x)|$

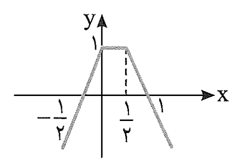


$y=f(-x)$

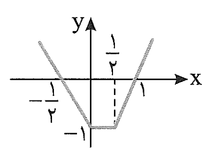


$y=|f(-x)|-2$

۱۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ به‌دست بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(2x)$ به‌دست بیاید.



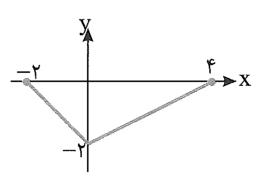
$y=-f(2x)$



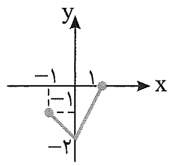
$y=f(2x)$

۱۴۸- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم، یعنی در ۲ ضرب کنیم.

همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.

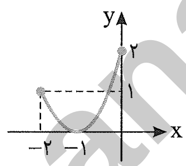


۱۴۹- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور عرض‌ها علاوه‌بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.

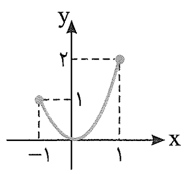


۱۵۰- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{2}+1)$، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)$ به‌دست آید. سپس طول نقاط نمودار اخیر را بر $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم (در ۲ ضرب می‌کنیم) تا نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2}+1)$ رسم شود.

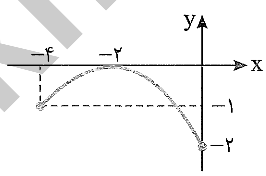
در آخر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{2}+1)$ رسم شود.



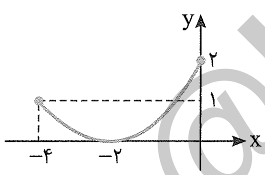
$y=f(x+1)$



$y=f(x)$



$y=-f(\frac{x}{2}+1)$



$y=f(\frac{x}{2}+1)$

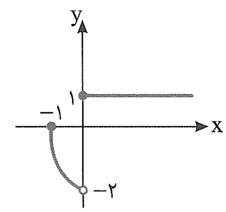
۱۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x\ge 0\Rightarrow g(x)=-f(0)\,,\qquad x<0\Rightarrow g(x)=-f(2x)$$

پس

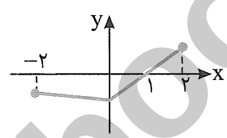
$$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -f(2x) & -1\le x<0\end{cases}$$

پس در بازهٔ $[0,+\infty)$ باید نمودار تابع $y=1$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[-1,0)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.

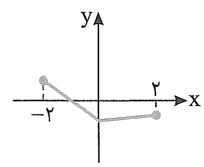


۱۵۲- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=f(1-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(1+x)$ به‌دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم نمودار تابع $y=f(1+2x)$ به سمت می‌آید.

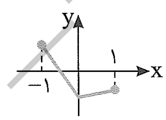
اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(1+2(x-1))=f(2x-1)$ به‌دست می‌آید.



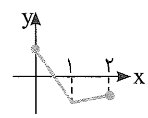
$y=f(1-x)$



$y=f(x+1)$

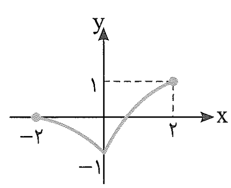


$y=f(1+2x)$

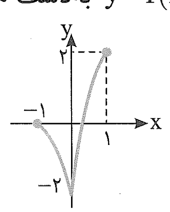


$y=f(2x-1)$

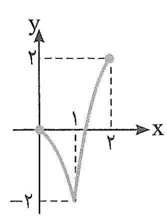
۱۵۳- گزینهٔ ۳ اگر طول نقاط نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ را نصف و عرض آنها را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(\frac{1}{2}f(\frac{2x}{2}))=f(x)$ به‌دست می‌آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست می‌آید.



$y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$

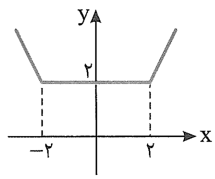


$y=f(x)$

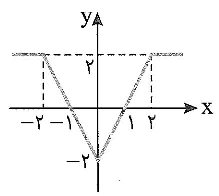


$y=f(x-1)$

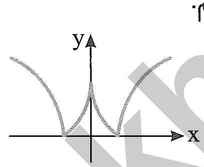
۱۵۴- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ قسمتی از نمودار f را که در سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که در سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



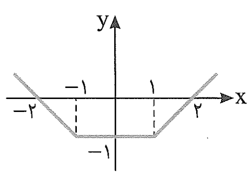
۱۵۵- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$، قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



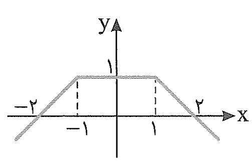
۱۵۶- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ قسمتی از نمودار f را که در سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



۱۵۷- گزینهٔ ۱ ابتدا قسمتی از نمودار را که در سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت سمت راست محور y را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(|x|)$ به‌دست بیاید.



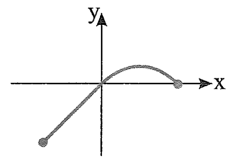
اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم، نمودار $y=-f(|x|)$ به‌دست می‌آید:



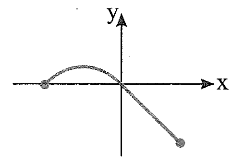
۱۵۸- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$y=f(-|x|)=\begin{cases} f(-x) & x\geq \circ \\ f(x) & x\leq \circ \end{cases}$$

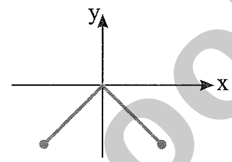
بنابراین کافی است که برای $x\geq\circ$ نمودار تابع $y=f(-x)$ را که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به محور عرض‌هاست، رسم کنیم و برای $x\leq\circ$ نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کنیم.



$y=f(x)$

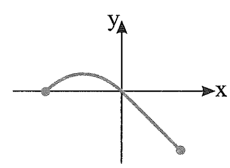


$y=f(-x)$

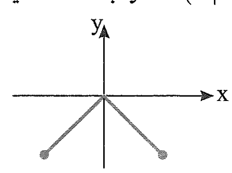


$y=f(-|x|)$

راه‌حل دوم ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست آید. سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(-|x|)$ به‌دست آید.

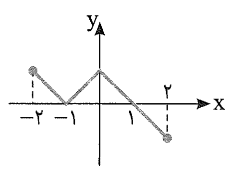


$y=f(-x)$

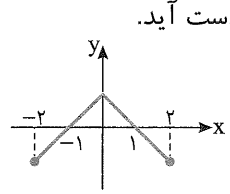


$y=f(-|x|)$

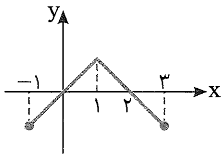
۱۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی از نمودار را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد، نسبت به محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(|x|)$ به‌دست آید. اکنون این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(|x-1|)$ به‌دست آید.



$y=f(x)$

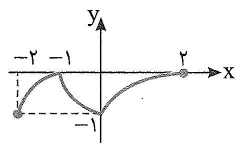


$y=f(|x|)$

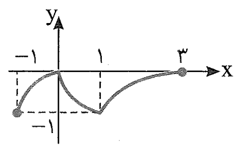


$y=f(|x-1|)$

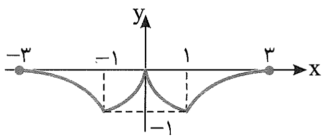
۱۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست آید. سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(|x|-1)$ به‌دست آید.



$y=f(x)$

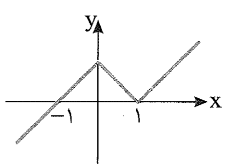


$y=f(x-1)$

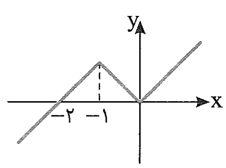


$y=f(|x|-1)$

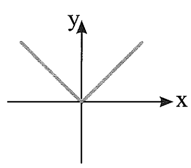
۱۶۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ به‌دست آید. اکنون در نمودار به‌دست آمده قسمت‌هایی را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم. به این ترتیب نمودار تابع $y=f(1+|x|)$ رسم می‌شود.



$y=f(x)$

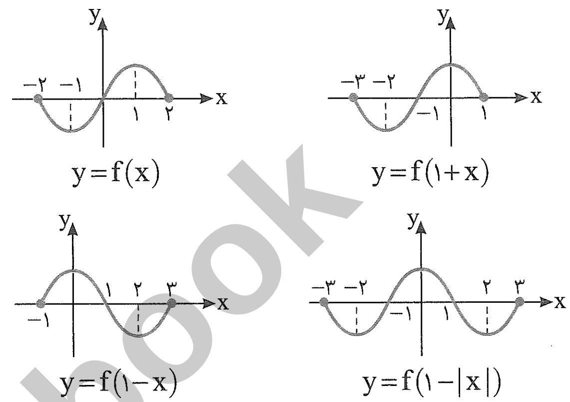


$y=f(1+x)$

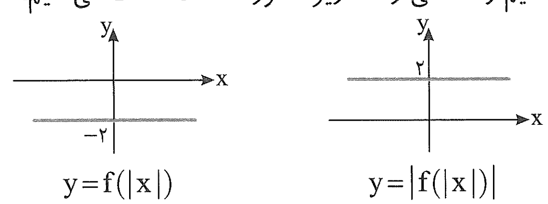


$y=f(1+|x|)$

۱۶۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ به‌دست آید. اکنون این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ به‌دست آید. در نمودار اخیر قسمتی را که در سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد، حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی را که در سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-|x|)$ به‌دست آید.



۱۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(|x|)|$، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(|x|)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



۱۶۴- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))$ به‌دست می‌آید. پس نمودار نهایی نمودار تابع $y=f(1-x)$ است.

۱۶۵- گزینهٔ ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x+1}{2})$ به‌دست می‌آید. پس نمودار رسم شده متعلق به تابع $y=f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$ است.

۱۶۶- گزینهٔ ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2f(2x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=2f(2(x+1))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=2f(2x+2)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=2f(-2x+2)$ به‌دست می‌آید.

۱۶۷- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(1-x)$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(1-x)-1$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(1-(x-1))-1=f(2-x)-1$ به‌دست می‌آید.

اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(2-x)+1$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(2+x)+1$ به‌دست می‌آید.

اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-f(2+2x)+1$ به‌دست می‌آید.

۱۶۸- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=2f(3x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=2f(3(x-1))=2f(3x-3)$$

اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=2f(3x-3)+2$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=2f(3(2x)-3)+2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}(2f(6x-3)+2)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده به صورت $y=f(6x-3)+1$ است.

۱۶۹- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x+1)}=\sqrt{-x-1}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{(x+1)-1}=\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید.

۱۷۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{|x-۱|}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را هم یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{|x-۱|}+۱$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{|-x-۱|}+۱$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده به‌صورت $y=\sqrt{|x+۱|}+۱$ است.

۱۷۱- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\cos(۲x-۱)+۱$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\cos(-۲x-۱)+۱=\cos(۲x+۱)+۱$$

اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

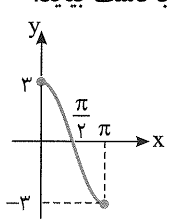
$$y=\cos(۲(x+۱)+۱)+۱=\cos(۲x+۳)+۱$$

و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

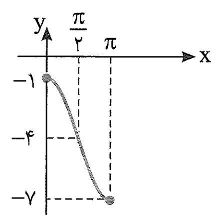
$$y=۲(\cos(۲x+۳)+۱)=۲\cos(۲x+۳)+۲$$

۱۷۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=۲|x-۱|-۴$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-۲|x-۱|+۴$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-۲|۲x-۱|+۴$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-|۲x-۱|+۲$ به‌دست می‌آید. با یک واحد انتقال دادن این نمودار به سمت پایین نمودار تابع $y=-|۲x-۱|+۱$ به‌دست خواهد آمد.

۱۷۳- گزینهٔ ۱ باید عرض نقاط روی نمودار تابع $y=\cos x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ را ۳ برابر کنیم تا نمودار تابع $y=۳\cos x$ به‌دست بیاید، بعد این نمودار را ۴ واحد به سمت پایین انتقال دهیم تا نمودار تابع $y=۳\cos x-۴$ به‌دست بیاید.

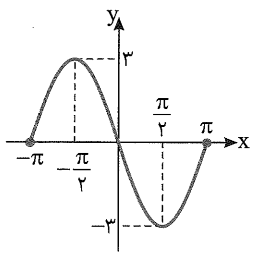


$y=۳\cos x$

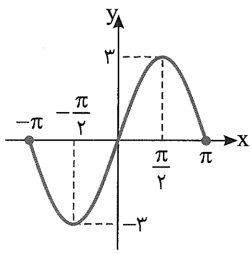


$y=۳\cos x-۴$

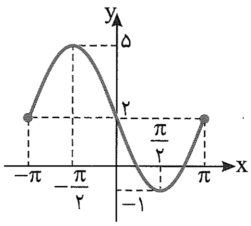
۱۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳\sin x$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۳\sin x$ به‌دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y=-۳\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۲-۳\sin x$ به‌دست بیاید.



$y=-۳\sin x$



$y=۳\sin x$

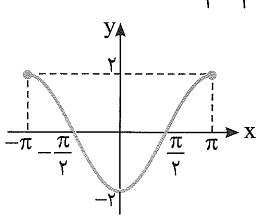


$y=۲-۳\sin x$

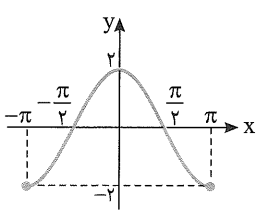
۱۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-\cos x-\cos x & -\pi\le x<-\frac{\pi}{۲}\\ \cos x-\cos x & -\frac{\pi}{۲}\le x<\frac{\pi}{۲}\\ -\cos x-\cos x & \frac{\pi}{۲}\le x\le\pi\end{cases}=\begin{cases}-۲\cos x & -\pi\le x<-\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & -\frac{\pi}{۲}\le x<\frac{\pi}{۲}\\ -۲\cos x & \frac{\pi}{۲}\le x\le\pi\end{cases}$$

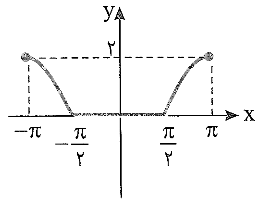
بنابراین، برای رسم کردن نمودار تابع f کافی است روی بازه‌های $[-\pi,-\frac{\pi}{۲})$ و $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را دو برابر کنیم، سپس قرینهٔ نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x رسم کنیم. نمودار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ خط $y=۰$ است.



$y=-۲\cos x$



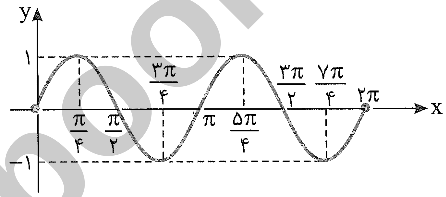
$y=۲\cos x$



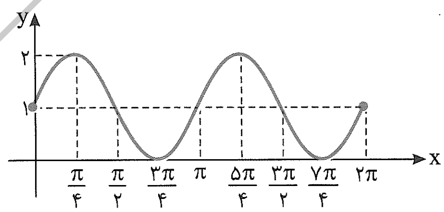
$y=f(x)$

۱۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۴\pi]$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌دست بیاید.

سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.



$y=\sin ۲x$



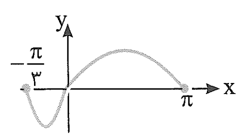
$y=\sin ۲x+۱$

۱۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sin(۲x+x) & -\frac{\pi}{۳}\leq x<۰\\ \sin(۲x-x) & ۰\leq x\leq \pi\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin ۳x & -\frac{\pi}{۳}\leq x<۰\\ \sin x & ۰\leq x\leq \pi\end{cases}$$

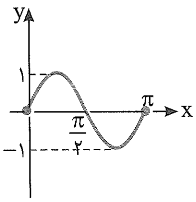
بنابراین روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۳},۰)$ باید نمودار $y=\sin ۳x$ را رسم کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,۰)$ را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار $y=\sin ۳x$ به‌دست بیاید. نمودار f روی بازهٔ $[۰,\pi]$ همان نمودار تابع $y=\sin x$ روی این بازه است.



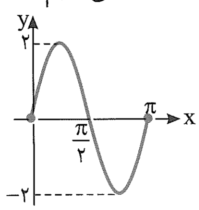
۱۷۸- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

سپس عرض هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲\sin ۲x-۱$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید.

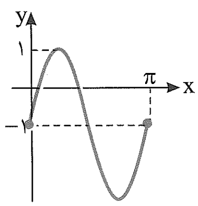
در آخر قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



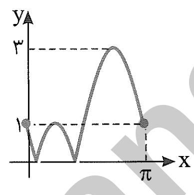
$y=\sin ۲x$



$y=۲\sin ۲x$



$y=۲\sin ۲x-۱$

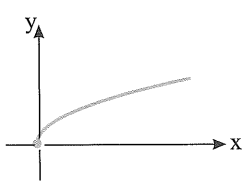


$y=|۲\sin ۲x-۱|$

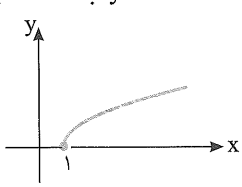
۱۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم.

سپس این نمودار را یک واحد به سمت راست و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}+۱$ به‌دست آید.

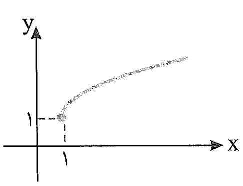
اکنون طول نقاط روی نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{۲x-۱}+۱$ به‌دست آید.



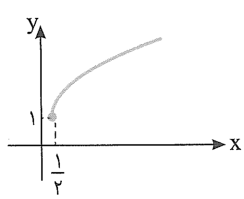
$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x-۱}$



$y=\sqrt{x-۱}+۱$



$y=\sqrt{۲x-۱}+۱$

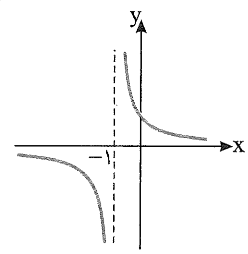
۱۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$$

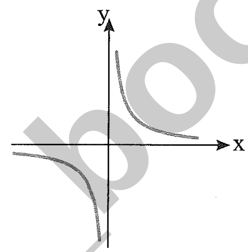
اکنون نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم و یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{x+1}$ به‌دست آید.

این نمودار را نسبت به محور طول‌ها، قرینه می‌کنیم و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{-2}{x+1}$ به‌دست آید.

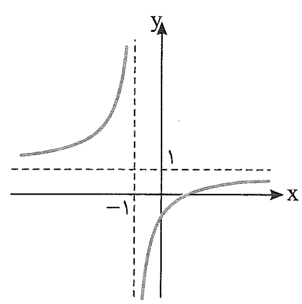
نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-\frac{2}{x+1}$ به‌دست آید.



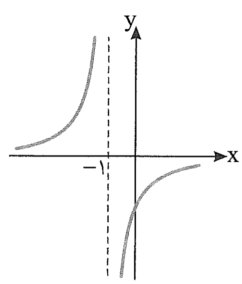
$y=\frac{1}{x+1}$



$y=\frac{1}{x}$



$y=1-\frac{2}{x+1}$



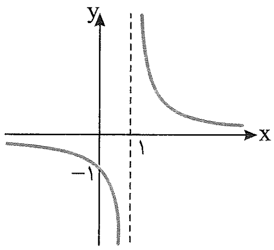
$y=-\frac{2}{x+1}$

۱۸۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم.

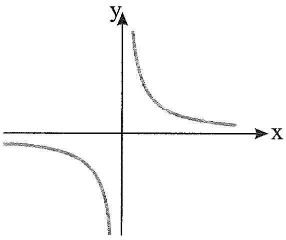
اگر این نمودار را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{x-1}$ به‌دست می‌آید.

اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم نمودار تابع $y=\frac{1}{2x-1}$ به‌دست می‌آید.

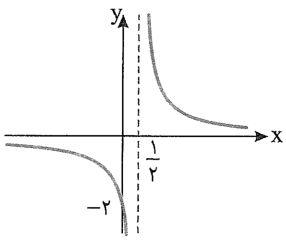
اگر عرض نقاط نمودار اخیر را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=\frac{2}{2x-1}$ به‌دست می‌آید.



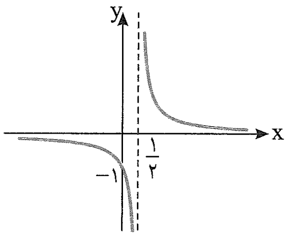
$y=\frac{1}{x-1}$



$y=\frac{1}{x}$



$y=\frac{2}{2x-1}$

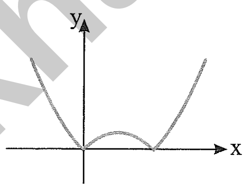


$y=\frac{1}{2x-1}$

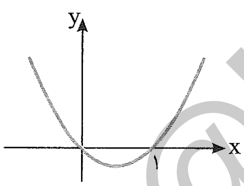
۱۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=|x||x-1|$$
$$=|x(x-1)|$$
$$=|x^2-x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^2-x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

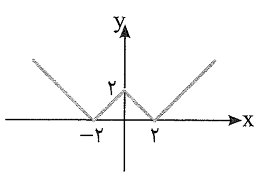


$y=|x^2-x|$

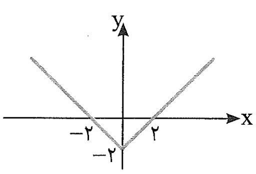


$y=x^2-x$

۱۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=|x|-2$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



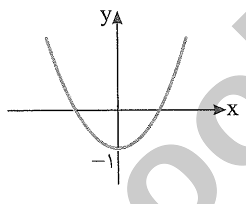
$y=||x|-2|$



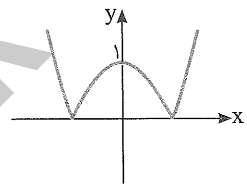
$y=|x|-2$

۱۸۴- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=x^2$ را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^2-1$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^2-1|$ به‌دست بیاید. اکنون این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=|x^2-1|-1$ رسم شود.

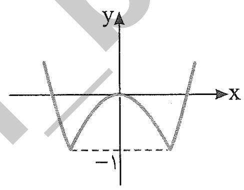
در آخر، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



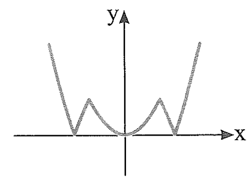
$y=x^2-1$



$y=|x^2-1|$



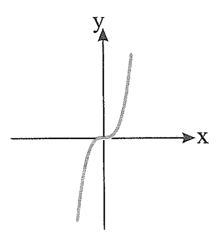
$y=|x^2-1|-1$



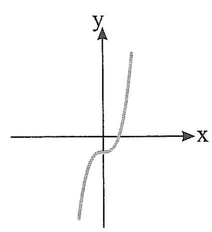
$y=||x^2-1|-1|$

۱۸۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^3-1$ به‌دست آید.

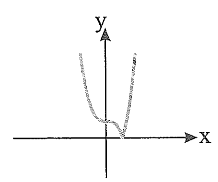
اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^3-1|$ به‌دست آید.



$y=x^3$



$y=x^3-1$

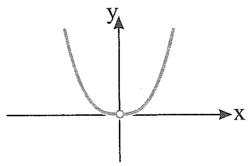


$y=|x^3-1|$

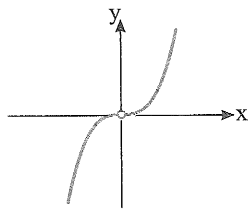
۱۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^4}{|x|}=\frac{|x^4|}{|x|}=\left|\frac{x^4}{x}\right|=\left|\frac{x^4}{x}\right|=|x^3|\,,\quad x\neq 0$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را برای xهای مخالف صفر رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه کنیم.



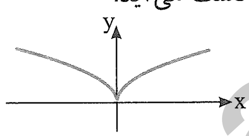
$y=|x^3|\,,\,x\neq 0$



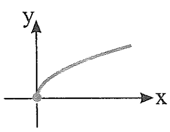
$y=x^3,\,x\neq 0$

۱۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم.

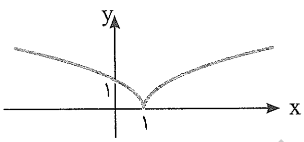
اکنون قرینهٔ نمودار نسبت به محور عرض‌ها را به آن اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ به‌دست آید. اگر این نمودار را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{|x-1|}$ به‌دست می‌آید.



$y=\sqrt{|x|}$

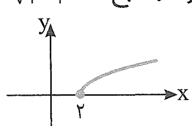


$y=\sqrt{x}$

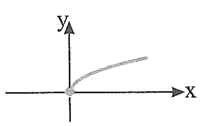


$y=\sqrt{|x-1|}$

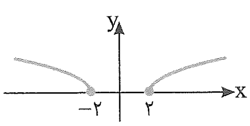
۱۸۸- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم و آن را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-2}$ به‌دست آید. اکنون با توجه به اینکه تمام این نمودار سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد، کافی است قرینهٔ آن نسبت به محور عرض‌ها را هم به نمودار اضافه کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{|x|-2}$ به‌دست آید.



$y=\sqrt{x-2}$



$y=\sqrt{x}$

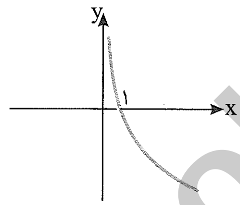


$y=\sqrt{|x|-2}$

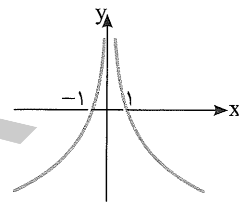
۱۸۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log_{۰/۵}(x-۱)^۲=\log_{۰/۵}|x-۱|^۲=۲\log_{۰/۵}|x-۱|$$

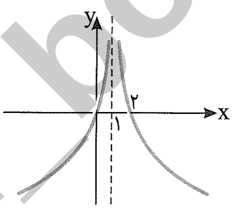
پس ابتدا نمودار تابع $y=\log_{۰/۵} x$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ نمودار نسبت به محور عرض‌ها را نیز به آن اضافه می‌کنیم تا نمودار $y=\log_{۰/۵}|x|$ به‌دست آید (توجه کنید که در نمودار تابع $y=\log_{۰/۵} x$ هیچ قسمتی سمت چپ محور عرض‌ها قرار ندارد). اکنون نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log_{۰/۵}|x-۱|$ به‌دست آید.



$y=\log_{۰/۵} x$



$y=\log_{۰/۵}|x|$



$y=\log_{۰/۵}|x-۱|$

۱۹۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۴|x|+۳$$
$$=|x|^۲-۴|x|+۳$$

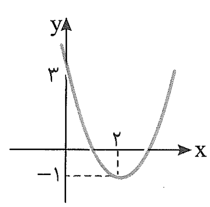
پس اگر فرض کنیم

$$g(x)=x^۲-۴x+۳$$

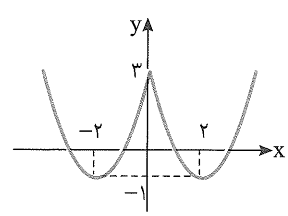
آن‌گاه

$$f(x)=g(|x|)$$

به این ترتیب، کافی است نمودار $y=g(|x|)$ رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

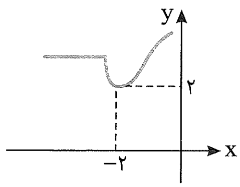


$y=g(x)=(x-۲)^۲-۱$

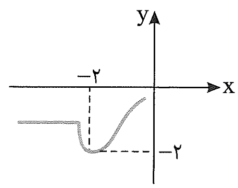


$y=g(|x|)$

۱۹۱- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را ۴ واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(-x)-۴$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.

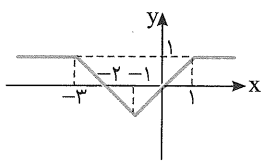


$y=f(-x)$

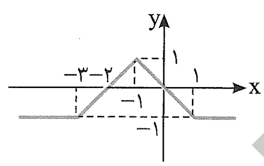


$y=f(-x)-۴$

۱۹۲- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.

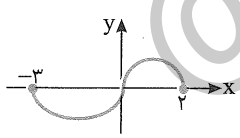


$y=f(-x)$

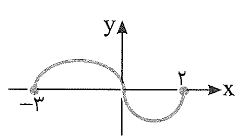


$y=-f(-x)$

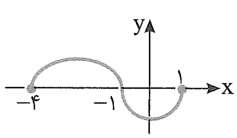
۱۹۳- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+۱))$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



$y=f(-x)$



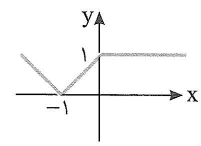
$y=-f(-x)$

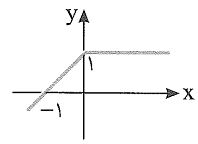


$y=-f(-x-۱)$

۱۹۴- گزینهٔ ۱ طول و عرض نقاط روی شکل (۲) دو برابر طول و عرض نقاط روی شکل (۱) هستند، پس شکل (۲) نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۲})$ است.

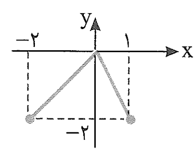
۱۹۵- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید و اگر قسمتی از نمودار به‌دست آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارد حذف و به جای آن قرینهٔ همان قسمت را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ به‌دست می‌آید که مطابق شکل (۲) است.

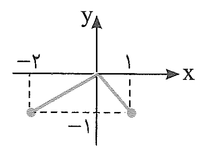

$y=|f(-x)|$

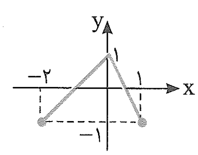

$y=f(-x)$

راه‌حل دوم کافی است توجه کنیم نموداری که در شکل (۲) رسم شده است پایین محور طول‌ها قرار ندارد. پس نمی‌تواند متعلق به توابع $y=-f(x)$ و $y=-f(-x)$ باشد زیرا مقادیر این توابع می‌توانند منفی باشند. برای تابع $y=|f(x)|$ هم توجه کنید که $f(۱)=۰$ و در نتیجه $|f(۱)|=۰$. پس نمودار این تابع باید از نقطهٔ $(۱,۰)$ عبور کند که در شکل (۲) چنین نیست.

۱۹۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر عرض نقاط نمودار به‌دست آمده را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۲f(-x)$ به‌دست می‌آید. نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۱+۲f(-x)$ به‌دست آید که به صورت شکل (۲) خواهد بود.


$y=۲f(-x)$


$y=f(-x)$


$y=۱+۲f(-x)$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-۱)=f(۲)=-۱$. اگر شکل (۲) مربوط به تابع g باشد، آن‌گاه $g(-۲)=g(۱)=-۱$. از طرف دیگر،

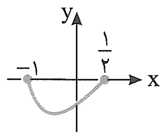
$$g(x)=۱+۲f(-x)$$

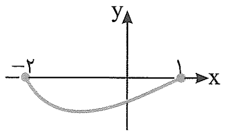
$$g(-۲)=۱+۲f(۲)=۱-۲=-۱$$

$$g(۱)=۱+۲f(-۱)=۱-۲=-۱$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x)=۱+۲f(-x)$ است.

۱۹۷- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول اگر نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y=f(x+۱)$ رسم می‌شود. اکنون اگر در این نمودار طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم، نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$ به‌دست می‌آید که به صورت شکل (۲) است.


$y=f(۲x+۱)$


$y=f(x+۱)$

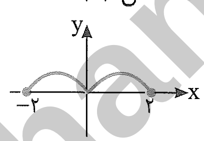
راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(۲)=f(-۱)=۰$. همچنین اگر نمودار تابع g به صورت شکل (۲) باشد، آن‌گاه $g(-۱)=g(\frac{۱}{۲})=۰$.

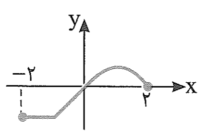
از طرف دیگر، $g(x)=f(۲x+۱)$، پس

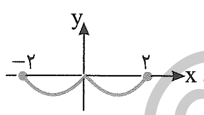
$$g(-۱)=f(-۱)=۰,\quad g(\frac{۱}{۲})=f(۲)=۰$$

بنابراین نمودار تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ به صورت شکل (۲) است.

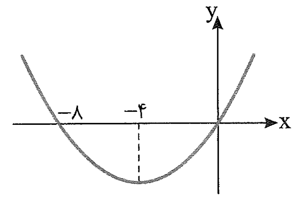
۱۹۸- گزینهٔ ۱ اگر قسمتی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به محور عرض‌ها رسم کنیم، نمودار تابع $y=f(|x|)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم، نمودار تابع $y=-f(|x|)$ به‌دست می‌آید، که به صورت شکل (۲) است.


$y=f(|x|)$

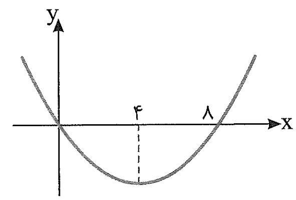

$y=f(x)$


$y=-f(|x|)$

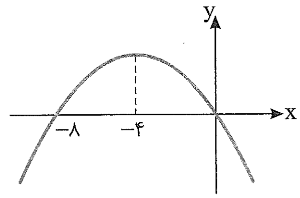
۱۹۹- گزینهٔ ۴ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع f را در $\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}$ یعنی ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست بیاید. اکنون اگر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم کنیم، نمودار تابع $y=f(-\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. در آخر قرینهٔ نمودار تابع $y=f(-\frac{x}{۲})$ را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-\frac{x}{۲})$ به‌دست بیاید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=-f(-\frac{x}{۲})$ روی بازهٔ $(-\infty,-۴)$ اکیداً صعودی است.



$y=f(-\frac{x}{۲})$

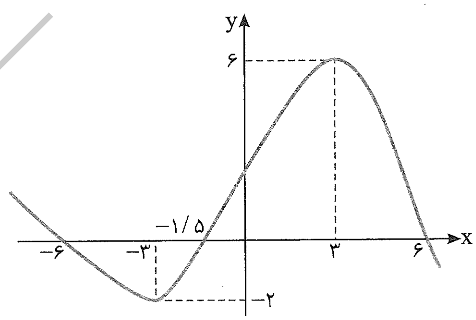


$y=f(\frac{x}{۲})$



$y=-f(-\frac{x}{۲})$

۲۰۰- گزینهٔ ۲ اگر طول هر نقطه روی نمودار $y=f(۳x)$ را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم، نمودار تابع $y=f(۲x)$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=f(۲x)$ روی بازهٔ $(-۳,۳)$ اکیداً صعودی است.

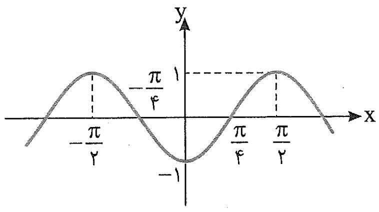


۲۰۱- گزینهٔ ۲ در تابع $y=\log_a x$ اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه تابع اکیداً نزولی است. پس $۰<۲k-۱<۱$، در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}<k<۱$$

توجه کنید که نمودار تابع $y=\log_{(۲k-۱)}(۲x)$ از منقبض کردن افقی نمودار تابع $y=\log_{(۲k-۱)}(x)$ با ضریب $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید. پس نمودار این تابع‌ها از نظر یکنوایی یکسان هستند.

۲۰۲- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\cos x$ به‌دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را نصف کنیم نمودار تابع $y=-\cos ۲x$ به‌دست می‌آید (شکل را ببینید). تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{۲}$ است.



۲۰۳- گزینهٔ ۳ حداقل مقدار تابع برابر ۳- است. حداقل مقدار توابع

$$y=۳\sin(۲x)-۱$$

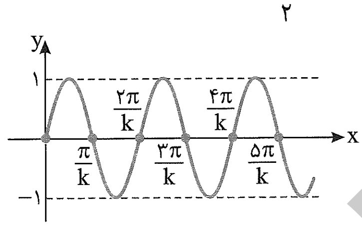
$$y=-(۲+\sqrt{۲})\cos ۳x+\sqrt{۲}+۱$$

$$y=-۲\cos(۳x)+۱$$

به‌ترتیب برابر ۴-، ۱- و ۱- است. پس این توابع جواب نیستند. نمودار تابع $y=۲\sin(۲x)-۱$ مطابق شکل داده شده است.

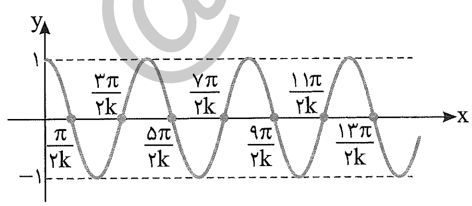
۲۰۴- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل زیر است. مطابق شکل باید $\frac{۴\pi}{k}\le ۲\pi<\frac{۵\pi}{k}$ تا نمودار پنج بار محور طول‌ها را روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قطع کند. بنابراین

$$۴\le ۲k<۵\Rightarrow ۲\le k<\frac{۵}{۲}$$



۲۰۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل زیر است. کافی است $\frac{۱۱\pi}{۲k}\le ۳\pi<\frac{۱۳\pi}{۲k}$ تا روی بازهٔ $[۰,۳\pi]$ تعداد نقاط برخورد نمودار با محور طول‌ها شش عدد باشد. بنابراین

$$۱۱\le ۶k<۱۳\Rightarrow \frac{۱۱}{۶}\le k<\frac{۱۳}{۶}$$



۲۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(۶)=۵$، پس

$$a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow\sqrt{a}=۶-a$$

$$a=۳۶-۱۲a+a^۲\Rightarrow a^۲-۱۳a+۳۶=۰$$

$$(a-۴)(a-۹)=۰\Rightarrow a=۴\ ,\ a=۹$$

$a=۹$ در معادله صدق نمی‌کند، پس $a=۴$ قابل قبول است.

۲۰۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\frac{-۱}{۲}f(x)+۲=\frac{-۱}{۲}(x^۲+۳x)+۲=\frac{-x^۲}{۲}-\frac{۳}{۲}x+۲$$

طـول نقاطی از این تابع که بالای محور x قرار دارند، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(gof)(x)>۰$ است:

$$(gof)(x)>۰\Rightarrow\frac{-x^۲}{۲}-\frac{۳}{۲}x+۲>۰\Rightarrow -x^۲-۳x+۴>۰$$

طبق جدول تعیین علامت زیر جواب نامعادله بازهٔ $(-۴,۱)$ است.

x	$-\infty$		-۴		۱		$+\infty$
$-x^۲-۳x+۴$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

۲۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{۴}(x-۳)^۲+\frac{۱}{۲}(x-۳)-۲$$

$$=\frac{۱}{۴}x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}-۲=\frac{۱}{۴}x^۲-x-\frac{۵}{۴}$$

بنابراین مجموعهٔ مورد نظر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیر است:

$$\frac{۱}{۴}x^۲-x-\frac{۵}{۴}<۰\Rightarrow x^۲-۴x-۵<۰$$

$$(x-۵)(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۵$$

۲۰۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}$$

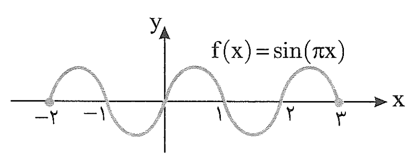
در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x=۲$:

$$f(۳)=\frac{۲}{۲-۳}=-۲$$

۲۱۰- گزینهٔ ۱ به تساوی $|f(x)|=(-۱)^{[x]}f(x)$ در فاصلهٔ $۰\le x<۲$ توجه کنید:

$$\begin{cases}۰\le x<۱:\ |f(x)|=(-۱)^۰f(x)\Rightarrow |f(x)|=f(x)\\ ۱\le x<۲:\ |f(x)|=(-۱)^۱f(x)\Rightarrow |f(x)|=-f(x)\end{cases}$$

پس به‌ازای $۰\le x<۱$، $f(x)\ge ۰$ و به‌ازای $۱\le x<۲$، $f(x)\le ۰$، که در میان گزینه‌ها $f(x)=\sin(\pi x)$ این گونه است.



۲۱۱- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+۲)=(۲x+۴-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$

اکنون معادلهٔ $(fog)(x)=f(x)$ را حل می‌کنیم

$$(۲x+۱)^۲=(۲x-۳)^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۴x^۲-۱۲x+۹$$

$$۱۶x=۸\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

۲۱۲- گزینهٔ ۳ ابتـدا دامنـهٔ تابـع f را بـا حـل نامعادلـهٔ $۲x-x^۲\ge ۰$ حساب می‌کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر $D_f=[۰,۲]$.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$۲x-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

پس در تابع $y=f(۳-x)$ باید $(۳-x)\in D_f$. بنابراین

$$۰\le ۳-x\le ۲\Rightarrow ۰-۳\le -x\le ۲-۳$$

$$-۳\le -x\le -۱\Rightarrow ۱\le x\le ۳$$

۲۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x+۳)$$

$$=۸x^۲+۲۲x+۲۰$$

فرض کنید $۲x+۳=t$، در این صورت $x=\frac{t-۳}{۲}$ و

$$g(t)=۸\left(\frac{t-۳}{۲}\right)^۲+۲۲\left(\frac{t-۳}{۲}\right)+۲۰$$

$$=۲t^۲-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰$$

$$=۲t^۲-t+۵$$

بنابراین

$$g(x)=۲x^۲-x+۵$$

و

$$(fog)(x)=f(g(x))=۲g(x)+۳$$

$$=۲(۲x^۲-x+۵)+۳$$

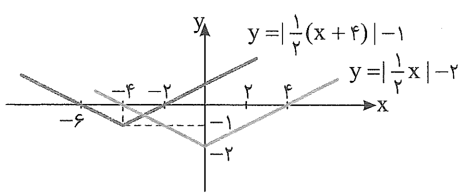
$$=۴x^۲-۲x+۱۳$$

۲۱۴- گزینهٔ ۲ نمـودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسـم می‌کنیم. طول نقطهٔ برخورد نمودارها جواب معادلهٔ زیر است:

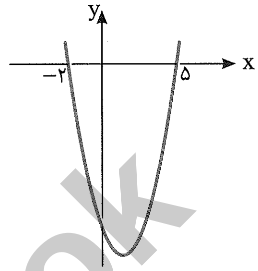
$$\left|\frac{۱}{۲}(x+۴)\right|-۱=\left|\frac{۱}{۲}x\right|-۲\qquad (۱)$$

توجه کنید که x منفی و $x+۴$ مثبت است. بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$\frac{۱}{۲}(x+۴)-۱=-\frac{۱}{۲}x-۲\Rightarrow x=-۳$$



۲۱۵- گزینهٔ ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۱۰=۰$ هستند. جواب‌های این معادله $x=-۲$ و $x=۵$ هستند. بنابراین نمودار تابع مورد نظر به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.



۲۱۶- گزینهٔ ۳ باتوجه به فرض‌های مسئله،

$$(fog)(x)=f(g(x))$$
$$=f(۲x-۳)$$
$$=۴(x^۲-۴x+۵)$$
$$=۴((x-۲)^۲+۱) \qquad (۱)$$

راه‌حل اول اگر $t=۲x-۳$، آن‌گاه $x=\frac{t+۳}{۲}$. در نتیجه

$$f(t)=۴((\frac{t+۳}{۲}-۲)^۲+۱)$$
$$=t^۲-۲t+۵$$

بنابراین

$$f(x)=x^۲-۲x+۵$$

راه‌حل دوم با جای‌گذاری $x=۰$ در تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f(-۳)=۲۰$$

اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ (۱)

$$f(-۳)=۹+۱۲+۳\neq ۲۰$$

گزینهٔ (۲)

$$f(-۳)=۹+۱۲+۵\neq ۲۰$$

گزینهٔ (۳)

$$f(-۳)=۹+۶+۵=۲۰$$

گزینهٔ (۴)

$$f(-۳)=۹+۶+۳\neq ۲۰$$

۲۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به دست می‌آوریم:

$$D_f: ۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳$$

$$D_g: x^۲+۲x>۰\Rightarrow x>۰ \text{ یا } x<-۲$$

از طرف دیگر،

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x|x>۰ \text{ یا } x<-۲,\ \log_۲(x^۲+۲x)\leq ۳\}$$

پس

$$\log_۲(x^۲+۲x)\leq ۳\Rightarrow x^۲+۲x\leq ۸$$
$$(x+۴)(x-۲)\leq ۰\Rightarrow -۴\leq x\leq ۲$$

بنابراین

$$D_{fog}=\{x>۰ \text{ یا } x<-۲|-۴\leq x\leq ۲\}$$
$$=[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

۲۱۸- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف دامنهٔ تابع مرکب،

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

ابتدا دامنهٔ تابع f را می‌یابیم:

$$D_f=\{x|\ -x^۲+x+۲>۰\}$$
$$=\{x|\ (x+۱)(x-۲)<۰\}$$

بنابراین $D_f=(-۱,۲)$. چون $D_g=\mathbb{R}$، پس برای یافتن دامنهٔ تابع fog باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$-۱<(\frac{۱}{۴})^x<۲\Rightarrow(\frac{۱}{۴})^x<۲$$
$$۲^{-۲x}<۲^۱\Rightarrow -۲x<۱\Rightarrow x>\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین دامنهٔ تابع fog بازهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ است.

۲۱۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۶)=۰$، $f(-\frac{۱}{۴})=۰$ و

$$(fog)(x)=f(x-\sqrt{x})$$

پس اگر $(fog)(x)=۰$، آن‌گاه $x-\sqrt{x}=۶$ یا $x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴}$.

بنابراین

$$x-\sqrt{x}=۶\Rightarrow x-۶=\sqrt{x}\Rightarrow x^۲-۱۲x+۳۶=x$$

$$x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow x=۴ \text{ (غ.ق.ق)}, x=۹$$

$$x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow x-\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲})^۲=۰$$

$$\sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

۲۲۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\sqrt{4(x^2+x)+1}=\sqrt{4x^2+4x+1}$$

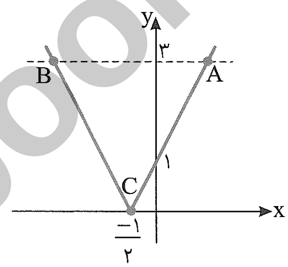
$$=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$$

با توجه به شکل زیر، طول نقاط A و B از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|2x+1|=3 \Rightarrow 2x+1=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S_{ABC}=\frac{3\times(2+1)}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$



۲۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=8x^2+6x+5$$

فرض کنید $2x+1=t$. در این صورت $x=\frac{t-1}{2}$. بنابراین

$$f(t)=8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+6\left(\frac{t-1}{2}\right)+5$$

$$=8\left(\frac{t^2-2t+1}{4}\right)+3(t-1)+5$$

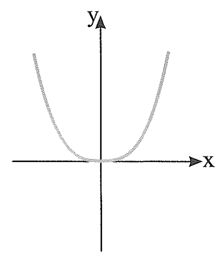
$$=2t^2-4t+2+3t-3+5$$

$$=2t^2-t+4$$

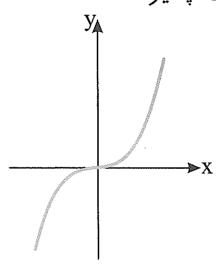
بنابراین

$$f(x)=2x^2-x+4$$

۲۲۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با توجه به نمودار $y=|x^3|$، این تابع یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌ناپذیر است.



$y=|x^3|$



$y=x^3$

راه‌حل دوم سه نقطهٔ $(1,1)$، $(-1,1)$ و $(0,0)$ روی نمودار این تابع است، پس این تابع صعودی، نزولی، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

۲۲۳- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف دامنهٔ تابع مرکب،

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

ابتدا دامنهٔ تابع g را می‌یابیم:

$$x^2-15x>0 \Rightarrow x<0 \text{ یا } x>15$$

$$D_g=(-\infty,0)\cup(15,+\infty)$$

با توجه به $g(x)\in D_f$ نتیجه می‌شود

$$\log(x^2-15x)\le 2 \Rightarrow x^2-15x\le 100$$

$$x^2-15x-100\le 0 \Rightarrow (x+5)(x-20)\le 0$$

$$-5\le x\le 20$$

بنابراین دامنهٔ تابع fog برابر است با

$$D_{fog}=[-5,0)\cup(15,20]$$

۲۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}$$

$$=\frac{6x}{3}=2x$$

۲۲۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)$$

$$=\frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2}=\frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}}$$

$$=\frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

۲۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_{gof}=\{x \mid x\in D_f, f(x)\in D_g\}$$

از طرف دیگر،

$$D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

$$D_g=[0,1]$$

در نتیجه

$$D_{gof}=\{x|x\neq\pm ۱,\ ۰\le\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\le ۱\}$$

$$\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\le ۱\Rightarrow\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}-۱=\frac{۱+x^{۲}-۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\le ۰$$

$$\frac{۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}\le ۰\Rightarrow x<-۱ \ \text{یا}\ x=۰\ \text{یا}\ x>۱$$

$$\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\ge ۰\Rightarrow ۱-x^{۲}>۰\Rightarrow -۱<x<۱$$

از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع gof به‌دست می‌آید، بنابراین

$$D_{gof}=\{۰\}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$$

از طرف دیگر،

$$D_f=\mathbb{R},\quad D_g=[۰,۱]$$

بنابراین

$$D_{gof}=\{x|۰\le\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\le ۱\}$$

$$\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\ge ۰\Rightarrow ۱-x^{۲}\ge ۰\Rightarrow -۱\le x\le ۱$$

$$\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\le ۱\Rightarrow\frac{۱-x^{۲}-۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\le ۰$$

$$\frac{-۲x^{۲}}{۱+x^{۲}}\le ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

در نتیجه $D_{gof}=[-۱,۱]$.

۲۲۸- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول اگر فرض کنیم $۲x-۳=t$، به‌دست می‌آید $x=\frac{t+۳}{۲}$، در نتیجه

$$f(۲x-۳)=۴x^{۲}-۱۴x+۱۳$$

$$f(t)=۴(\frac{t+۳}{۲})^{۲}-۱۴(\frac{t+۳}{۲})+۱۳$$

$$=(t+۳)^{۲}-۷(t+۳)+۱۳$$

$$=t^{۲}+۶t+۹-۷t-۲۱+۱۳$$

$$=t^{۲}-t+۱$$

بنابراین

$$f(x)=x^{۲}-x+۱$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(۲x-۳)=۴x^{۲}-۱۴x+۱۳$$

$$=(۴x^{۲}-۱۲x+۹)-۲x+۳+۱$$

$$=(۲x-۳)^{۲}-(۲x-۳)+۱$$

اگر $۲x-۳=t$، آن‌گاه

$$f(t)=t^{۲}-t+۱$$

۲۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۲(x+۴)-۱}{x+۴+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}\quad(x\neq -۶)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}$$

$$=\frac{۶x+۷}{x+۲}\qquad(x\neq -۲)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{۲x+۷}{x+۶}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$$

$$(۲x+۷)(x+۲)=(۶x+۷)(x+۶)$$

$$۲x^{۲}+۱۱x+۱۴=۶x^{۲}+۴۳x+۴۲$$

$$۴x^{۲}+۳۲x+۲۸=۰\Rightarrow x^{۲}+۸x+۷=۰$$

$$(x+۱)(x+۷)=۰\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=-۷$$

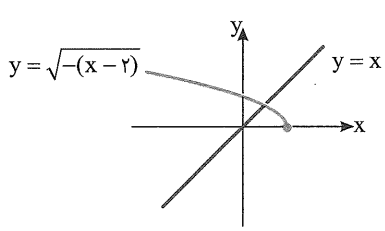
۲۳۰- گزینهٔ ۳ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به محور y، نمودار تابع $y=f(-x)$، یعنی $y=\sqrt{-x}$ است. اگر این نمودار را ۲ واحد به طرف xهای مثبت، یعنی ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-۲)}$ به‌دست می‌آید. طول محل برخورد این نمودار با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{-(x-۲)}=x\Rightarrow -(x-۲)=x^{۲}$$

$$x^{۲}+x-۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x+۲)=۰$$

$$x=۱\ ,\ x=-۲$$

چون x غیرمنفی است، پس $x=۱$.



۲۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع از نقطهٔ $(\circ,\circ)$ گذشته است، پس

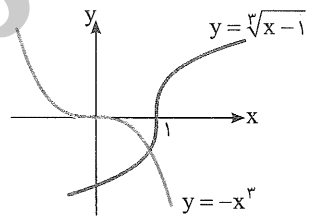
$$\circ=a+b\cos(\circ)=a+b \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون تابع کسینوس در نزدیکی راست نقطهٔ $x=\circ$ نزولی است، اما تابع مورد نظر در نزدیکی راست نقطهٔ $x=\circ$ صعودی است، پس b عددی منفی است. در نتیجه، چون بیشترین مقدار تابع موردنظر برابر ۴ است، پس

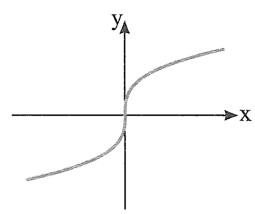
$$4=a-b \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b=-2$.

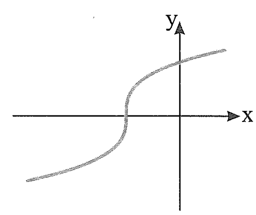
۲۳۲- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.



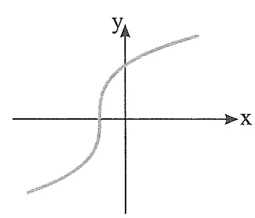
۲۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x+1}$ به‌دست آید. اکنون طول نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{2x+1}$ به‌دست آید. در آخر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\sqrt[3]{2x+1}$ به‌دست آید.



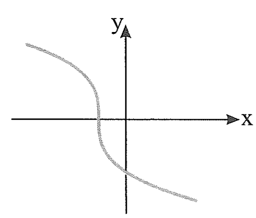
$y=\sqrt[3]{x}$



$y=\sqrt[3]{x+1}$

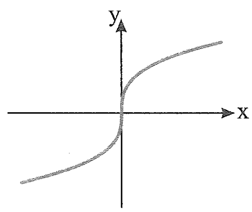


$y=\sqrt[3]{2x+1}$

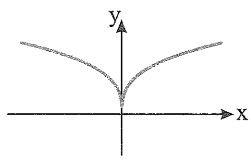


$y=-\sqrt[3]{2x+1}$

۲۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی از نمودار را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم.

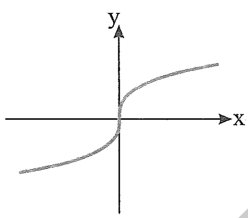


$y=\sqrt[3]{x}$

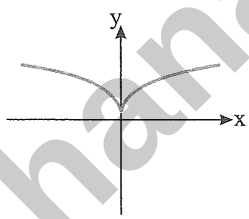


$y=\sqrt[3]{|x|}$

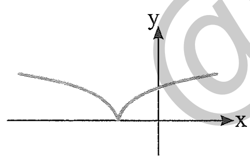
۲۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی از نمودار را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم. بدین ترتیب نمودار تابع $y=\sqrt[3]{|x|}$ به‌دست می‌آید. اکنون نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{|x+1|}$ به دست آید.



$y=\sqrt[3]{x}$

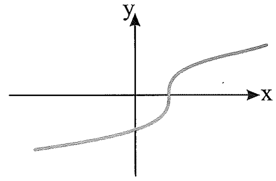


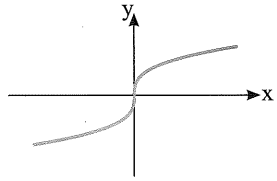
$y=\sqrt[3]{|x|}$

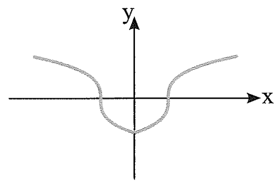


$y=\sqrt[3]{|x+1|}$

۲۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt[3]{|x|-1}$ به‌دست آید.


$y=\sqrt[3]{x-1}$


$y=\sqrt[3]{x}$

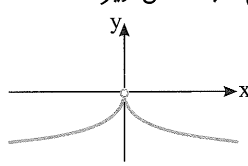

$y=\sqrt[3]{|x|-1}$

۲۳۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt[3]{-x}=\frac{x}{|x|}(-\sqrt[3]{x})=\begin{cases}\frac{x}{x}(-\sqrt[3]{x}) & x>0\\ \frac{x}{-x}(-\sqrt[3]{x}) & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\sqrt[3]{x} & x>0\\ \sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$$

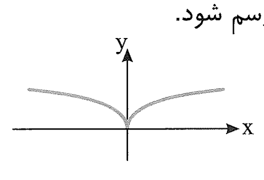
بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است.

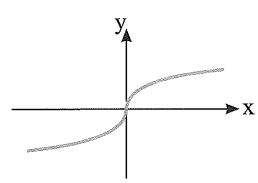


۲۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{|x|^2}=\sqrt[3]{|x|}$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را رسم کنیم. سپس قسمتی را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم تا نمودار $y=\sqrt[3]{|x|}$ رسم شود.


$y=\sqrt[3]{|x|}$


$y=\sqrt[3]{x}$

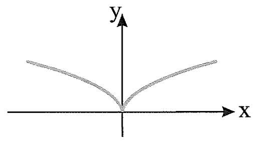
۲۳۹- گزینهٔ ۴ نمودار توابع

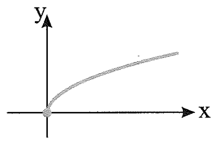
$$y=|f(x)|=|\sqrt{x}|$$

و

$$y=f(|x|)=\sqrt{|x|}$$

به صورت زیر است که بر هم منطبق نیستند.

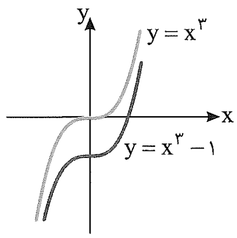

$y=\sqrt{|x|}$


$y=|\sqrt{x}|$

در بقیهٔ موارد نمودار توابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ بر هم منطبق‌اند.

۲۴۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=x^3-1$ به صورت شکل زیر است و این تابع صعودی است.

تابع‌های $y=-\frac{1}{x}$ و $y=1-x^2$ غیریکنوا هستند و تابع $y=-\sqrt[3]{x+1}$ نزولی است.



۲۴۱- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(8,9)$ عبور می‌کند، نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(9,8)$ عبور می‌کند:

$$f(8)=8+\sqrt[3]{8}-1=9\Rightarrow f^{-1}(9)=8$$

۲۴۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(9)=\sqrt{18-9}+\sqrt[3]{18+9}=3+3=6$$

پس $f^{-1}(6)=9$. در نتیجه

$$f(9)+f^{-1}(6)=6+9=15$$

۲۴۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید $f^{-1}(1)=a$. در این صورت

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+5}+2}=1$$

$$a+\sqrt{a+5}+2=1\Rightarrow\sqrt{a+5}=-a-1\quad(*)$$

$$a+5=a^2+2a+1\Rightarrow a^2+a-4=0$$

$$a=\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\quad a=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ (\text{غ.ق.ق})$$

از تساوی $(*)$ واضح است که

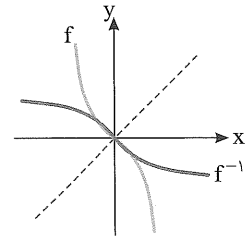
$$-a-1\geq 0\Rightarrow a\leq -1$$

بنابراین $a=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ قابل قبول نیست.

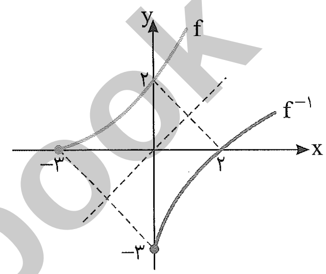
۲۴۴- گزینهٔ ۳ اگر در تساوی $f^{-1}(\sqrt{x}+1)=x^3+1$ قرار دهیم $x=4$، به‌دست می‌آید

$$f^{-1}(\sqrt{4}+1)=4^3+1\Rightarrow f^{-1}(3)=65\Rightarrow f(65)=3$$

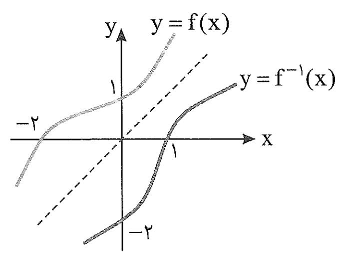
۲۴۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که به شکل زیر است:

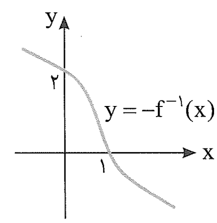


۲۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است.



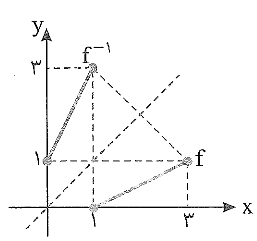
۲۴۷- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $-f^{-1}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور x رسم کنیم.

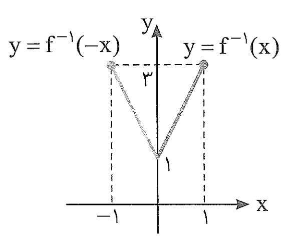


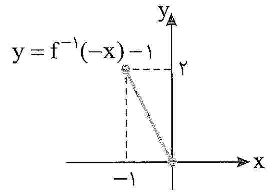


۲۴۸- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ به‌دست بیاید.

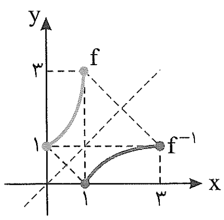
در آخر نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-۱$ به‌دست بیاید.

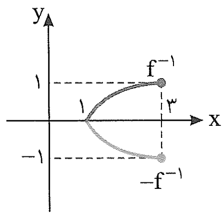


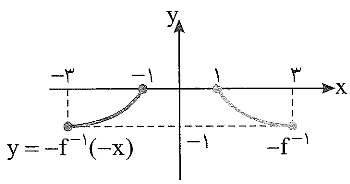




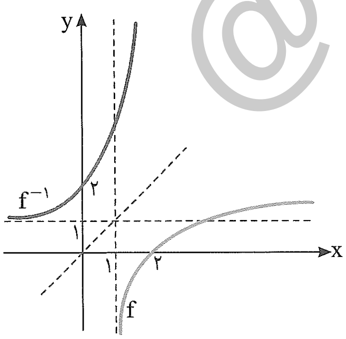
۲۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $-f^{-1}$ به‌دست بیاید. در آخر، قرینهٔ تابع $-f^{-1}$ را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f^{-1}(-x)$ به‌دست بیاید.

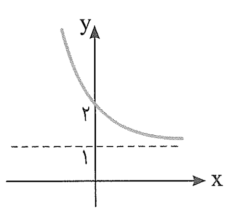




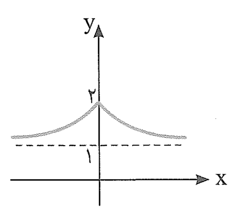


۲۵۰- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ تابع f^{-1} را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ به‌دست بیاید. اکنون اگر قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم کنیم، نمودار تابع $y=f^{-1}(-|x|)$ به‌دست می‌آید.



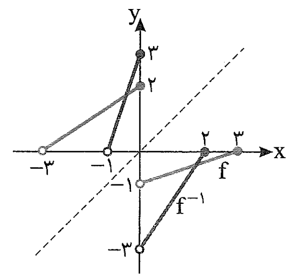


$y=f^{-1}(-x)$



$y=f^{-1}(-|x|)$

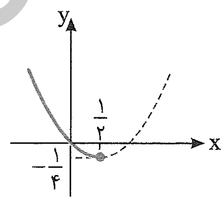
۲۵۱- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} رسم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های f و f^{-1} در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۵۲- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f^{-1} برد تابع f است. توجه کنید که از روی نمودار تابع f معلوم است که

$$R_f=[-\frac{۱}{۴},+\infty)$$

بنابراین $D_{f^{-1}}=[-\frac{۱}{۴},+\infty)$.



۲۵۳- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow -۱\le x^۳\le ۸\Rightarrow ۰\le x^۳+۱\le ۹$$

$$۰\le \sqrt{x^۳+۱}\le ۳\Rightarrow ۰\le f(x)\le ۳$$

بنابراین

$$D_{f^{-1}}=R_f=[۰,۳]$$

۲۵۴- گزینهٔ ۳ برد تابع f^{-1} همان دامنهٔ تابع f است. پس دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم. چون $R_f=[۱,۲]$، پس

$$۱\le f(x)\le ۲\Rightarrow ۱\le \frac{۸}{\sqrt{x}+۲}\le ۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}\le \frac{\sqrt{x}+۲}{۸}\le ۱$$

$$۴\le \sqrt{x}+۲\le ۸\Rightarrow ۲\le \sqrt{x}\le ۶\Rightarrow ۴\le x\le ۳۶$$

بنابراین

$$R_{f^{-1}}=D_f=[۴,۳۶]$$

۲۵۵- گزینهٔ ۲ اگر $y=\sqrt{۲x-۳}$، آن‌گاه

$$y^۲=۲x-۳\Rightarrow ۲x=y^۲+۳\Rightarrow x=\frac{y^۲+۳}{۲}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

۲۵۶- گزینهٔ ۳ از تساوی $y=۳-\sqrt{۲-x}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۲-x}=۳-y\Rightarrow ۲-x=(۳-y)^۲$$

$$x=۲-(۳-y)^۲\Rightarrow x=-۷-y^۲+۶y$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=-x^۲+۶x-۷$$

پس $a=۶$ و $b=-۷$ و در نتیجه $a+b=-۱$.

۲۵۷- گزینهٔ ۲ از تساوی $y=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y^۳=۲x-۱\Rightarrow ۲x=y^۳+۱$$

$$x=\frac{y^۳+۱}{۲}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\frac{x^۳+۱}{۲}$$

و در نتیجه $a=۱$، $b=۲$ و $a+b=۳$.

۲۵۸- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع f را به صورت $y=(x-۱)^۳+۱$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۱)^۳=y-۱\Rightarrow x-۱=\sqrt[۳]{y-۱}$$

$$x=۱+\sqrt[۳]{y-۱}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۱}$$

۲۵۹- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=-(x-۲)^۳-۸$$

و مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۳=-y-۸\Rightarrow x-۲=\sqrt[۳]{-y-۸}$$

$$x=۲-\sqrt[۳]{y+۸}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=۲-\sqrt[۳]{x+۸}$$

۲۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f را به شکل $y=۴-(x-۲)^۲$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲=۴-y\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{۴-y}$$

$$\xrightarrow{x<۲} ۲-x=\sqrt{۴-y}\Rightarrow x=۲-\sqrt{۴-y}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=۲-\sqrt{۴-x}$$

۲۶۱- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=(x+۲)^۲+۱\Rightarrow (x+۲)^۲=y-۱$$

در نتیجه

$$|x+۲|=\sqrt{y-۱}\xrightarrow{x\geq -۲} x+۲=\sqrt{y-۱}$$

$$x=\sqrt{y-۱}-۲$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}-۲$$

۲۶۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱-t)=(t+۱)^۲-۱$$

فرض کنید $۱-t=x$. در این صورت $x<۱$ و $t=۱-x$. پس

$$f(x)=(۱-x+۱)^۲-۱=(۲-x)^۲-۱$$

اکنون توجه کنید که

$$y=(۲-x)^۲-۱\Rightarrow y+۱=(۲-x)^۲$$

در نتیجه

$$|۲-x|=\sqrt{y+۱}\xrightarrow{x<۱} ۲-x=\sqrt{y+۱}$$

$$x=۲-\sqrt{y+۱}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{۱+x}$$

۲۶۳- گزینهٔ ۳ اگر $y=\log_۳(۳x+۱)$، آن‌گاه

$$۳x+۱=۳^y\Rightarrow x=\frac{۳^y-۱}{۳}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{۳^x-۱}{۳}$$

۲۶۴- گزینهٔ ۴ اگر $y=۲+\log_۳(x-۱)$، آن‌گاه

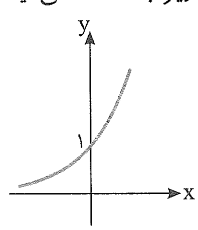
$$\log_۳(x-۱)=y-۲\Rightarrow x-۱=۳^{y-۲}$$

$$x=۳^{y-۲}+۱$$

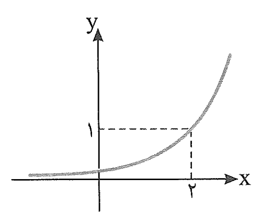
بنابراین

$$f^{-۱}(x)=۳^{x-۲}+۱$$

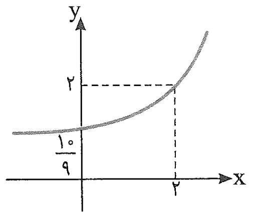
به این ترتیب نمودار $f^{-۱}$ به ترتیب زیر به‌دست می‌آید



$y=۳^x$



$y=۳^{x-۲}$



$y=۳^{x-۲}+۱$

۲۶۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید

$$y=۳\log_۲(x-۳)+۵$$

در این صورت

$$\frac{y-۵}{۳}=\log_۲(x-۳)\Rightarrow ۲^{\frac{y-۵}{۳}}=x-۳\Rightarrow x=۳+۲^{\frac{y-۵}{۳}}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=۳+۲^{\frac{x-۵}{۳}}$$

۲۶۶- گزینهٔ ۳ اگر $y=۲^{۳x-۱}$، آن‌گاه

$$۳x-۱=\log_۲ y\Rightarrow x=\frac{\log_۲ y+۱}{۳}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{\log_۲ x+۱}{۳}$$

۲۶۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع f را به صورت $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}+۳$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y-۳=\frac{۱}{۲^{x-۱}}\Rightarrow ۲^{x-۱}=\frac{۱}{y-۳}$$

$$x-۱=\log_۲(\frac{۱}{y-۳})\Rightarrow x=۱+\log_۲(\frac{۱}{y-۳})$$

$$x=\log_۲ ۲+\log_۲(\frac{۱}{y-۳})=\log_۲(\frac{۲}{y-۳})$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\log_۲(\frac{۲}{x-۳})$$

۲۶۸- گزینهٔ ۴ اگر $y=\frac{۱۰^x-۳}{۵+۱۰^x}$، آن‌گاه

$$y(۵+۱۰^x)=۱۰^x-۳\Rightarrow ۵y+۱۰^x y=۱۰^x-۳$$

$$۱۰^x(y-۱)=-۳-۵y\Rightarrow ۱۰^x=\frac{۵y+۳}{۱-y}\Rightarrow x=\log(\frac{۵y+۳}{۱-y})$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\log(\frac{۵x+۳}{۱-x})$$

۲۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت $y=\frac{\log x}{1+\log x}$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y+y\log x=\log x\Rightarrow(y-1)\log x=-y$$

$$\log x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x=10^{(\frac{y}{1-y})}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=10^{(\frac{x}{1-x})}$$

۲۷۰- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت $y=4^x+2^{x+1}$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=(2^x)^2+2\times 2^x\Rightarrow y=(2^x+1)^2-1$$

$$y+1=(2^x+1)^2\Rightarrow 2^x+1=\sqrt{y+1}$$

$$2^x=\sqrt{y+1}-1$$

$$x=\log_2(\sqrt{y+1}-1)$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\log_2(\sqrt{x+1}-1)$$

۲۷۱- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(1,2)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(1,2)\in f\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow\sqrt{a+b}=2$$

$$(1,2)\in f^{-1}\Rightarrow(2,1)\in f\Rightarrow f(2)=1\Rightarrow\sqrt{2a+b}=1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}a+b=4\\2a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=-3, b=7$$

بنابراین

$$ab=-21$$

۲۷۲- گزینهٔ ۲ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود

$$f(m)=n,\quad f(n)=m$$

بنابراین

$$f(-1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3}$$

$$f(\frac{1}{3})=-1\Rightarrow-\frac{1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-a+b=-\frac{2}{3}\\a+3b=-\frac{26}{9}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{2}{9}, b=-\frac{8}{9}$$

پس

$$a+b=-\frac{10}{9}$$

۲۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع را پیدا می‌کنیم.

اگر $y=\frac{1}{x-1}$، آن‌گاه

$$\frac{1}{y}=x-1\Rightarrow x=1+\frac{1}{y}=\frac{y+1}{y}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x}$$

اکنون معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم تا طول نقطه‌های برخورد نمودار دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آوریم:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow x^2-1=x\Rightarrow x^2-x-1=0$$

بنابراین حاصل‌ضرب طول نقطه‌های برخورد برابر است با -1.

۲۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع را به‌دست می‌آوریم. اگر $y=-\sqrt[3]{x+1}-1$، آن‌گاه

$$\sqrt[3]{x+1}=-y-1\Rightarrow x+1=(-y-1)^3\Rightarrow x=-1-(y+1)^3$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=-1-(x+1)^3$$

برای پیدا کردن طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$-\sqrt[3]{x+1}-1=-1-(x+1)^3$$

$$\sqrt[3]{x+1}=(x+1)^3$$

$$\sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[3]{x+1})^9$$

اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{x+1}=t$، معادله به شکل $t=t^9$ درمی‌آید که $t=0$ و $t=\pm1$ جواب‌های آن هستند. یعنی طول نقطه‌های برخورد دو تابع f و f^{-1} برابر است با

$$t=-1\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}=-1\Rightarrow x=-2$$

$$t=0\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}=0\Rightarrow x=-1$$

$$t=1\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}=1\Rightarrow x=0$$

پس مجموع طول نقطه‌های برخورد برابر -3 است.

۲۷۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که طبق فرض مسئله،

$$(fog^{-1})(۶)=f(۳)$$

یعنی

$$f(g^{-1}(۶))=f(۳)\xrightarrow{\text{f یک‌به‌یک است}} g^{-1}(۶)=۳\Rightarrow g(۳)=۶$$

۲۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-1}og^{-1})(a)=-۱$ مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(a))=-۱\Rightarrow f(-۱)=g^{-1}(a)$$

$$۴=g^{-1}(a)\Rightarrow g(۴)=a\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین مقدار $f^{-1}(-۲)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(۳)=-۲$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(-۲)=۳$.

۲۷۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(f^{-1}og)(۱)=۲\Rightarrow f^{-1}(g(۱))=۲\Rightarrow f^{-1}(۳)=۲\Rightarrow f(۲)=۳$$

$$(f^{-1}og)(۲)=۴\Rightarrow f^{-1}(g(۲))=۴\Rightarrow f^{-1}(۱)=۴\Rightarrow f(۴)=۱$$

$$(f^{-1}og)(۳)=۱\Rightarrow f^{-1}(g(۳))=۱\Rightarrow f^{-1}(۲)=۱\Rightarrow f(۱)=۲$$

$$(f^{-1}og)(۴)=۳\Rightarrow f^{-1}(g(۴))=۳\Rightarrow f^{-1}(۴)=۳\Rightarrow f(۳)=۴$$

بنابراین $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}$.

۲۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$foh^{-1}=g\Rightarrow (foh^{-1})^{-1}=g^{-1}$$

$$hof^{-1}=g^{-1}$$

اگر دو طرف این تساوی را با f ترکیب کنیم به‌دست می‌آید $h=g^{-1}of$. اکنون توجه کنید که

$$g^{-1}=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۴)\}$$

بنابراین

$$h=g^{-1}of=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

۲۷۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۱۰)=۲۸$، همچنین

$$g(۳)=۲۸\Rightarrow g^{-1}(۲۸)=۳$$

بنابراین

$$(fog^{-1}of)(۱۰)=f(g^{-1}(f(۱۰)))=f(g^{-1}(۲۸))$$

$$=f(۳)=-۳+۷=۴$$

۲۸۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f^{-1}(۳)=۴\Rightarrow f(۴)=۳$$

$$f^{-1}(۰)=۳\Rightarrow f(۳)=۰$$

$$f^{-1}(-۵)=۰\Rightarrow f(۰)=-۵$$

بنابراین

$$(fofof)(۴)=f(f(f(۴)))=f(f(۳))=f(۰)=-۵$$

۲۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f^{-1}(۳)=۵\Rightarrow f(۵)=۳ \qquad (۱)$$

همچنین، از روی نمودار معلوم است که

$$(fog)(۲)=۳\Rightarrow f(g(۲))=۳ \qquad (۲)$$

چون f یک‌به‌یک است، از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $g(۲)=۵$، پس $g^{-1}(۵)=۲$. از طرف دیگر، از روی نمودار معلوم است که $(fog)(-۱)=۰$، پس $g(-۱)=f^{-1}(۰)$. بنابراین

$$g^{-1}(۵)+f^{-1}(۰)-g(-۱)=g^{-1}(۵)=۲$$

۲۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ f^{-1} را پیدا می‌کنیم. اگر $y=\log_۲(x+۱)$، آن‌گاه

$$۲^y=x+۱\Rightarrow x=۲^y-۱$$

در نتیجه $f^{-1}(x)=۲^x-۱$. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(\log_۲ x)=۲^{\log_۲ x}-۱=x-۱$$

۲۸۳- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=۴^x$، پس $g^{-1}(x)=\log_۴ x$.

بنابراین

$$(fog^{-1})(t)=f(g^{-1}(t))=\log_۲(\log_۴ t)=۲$$

پس $\log_۴ t=۲^۲=۴$، در نتیجه

$$t=۴^۴=۲۵۶$$

۲۸۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=۲x-۱\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۱}{۲}$$

همچنین

$$(fof)(x)=f(f(x))=۲f(x)-۱=۲(۲x-۱)-۱=۴x-۳$$

بنابراین

$$(fof)(t)=f^{-1}(t)\Rightarrow ۴t-۳=\frac{t+۱}{۲}$$

$$۸t-۶=t+۱\Rightarrow t=۱$$

۲۸۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x=\frac{۴}{۵}$ جواب معادلهٔ $g(x)=۱۰$ است. همچنین

$$(gof^{-1})(۲+a)=g(f^{-1}(۲+a))=۱۰$$

بنابراین $f^{-1}(۲+a)=\frac{۴}{۵}$، در نتیجه $f(\frac{۴}{۵})=۲+a$. توجه کنید که

$$f(\frac{۴}{۵})=۳\times\frac{۴}{۵}+۲=\frac{۲۲}{۵}$$

بنابراین

$$۲+a=\frac{۲۲}{۵}\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۲۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=2f(x)-m$$

$$=2(5x-3)-m=10x-6-m$$

از طرف دیگر،

$$(gof)^{-1}(1)=3\Rightarrow (gof)(3)=1\Rightarrow 10\times 3-6-m=1$$

$$m=23$$

۲۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=2x-1\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$(gof^{-1})(x)=x+1\Rightarrow g(f^{-1}(x))=x+1$$

$$g(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})=x+1 \qquad (1)$$

اکنون توجه کنید که اگر $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=t$، آن‌گاه $x=2t-1$، در نتیجه از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$g(t)=(2t-1)+1=2t$$

چون این تساوی به‌ازای هر عدد حقیقی t درست است، پس $g(x)=2x$.

۲۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=\frac{ax+2}{x-2}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{2x+2}{x-a}$$

در نتیجه

$$(g^{-1}of)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(\frac{2+a}{3})$$

$$=\frac{2(\frac{2+a}{3})+2}{\frac{2+a}{3}-a}=\frac{5+a}{1-a}$$

بنابراین از $(g^{-1}of)(2)=1$ نتیجه می‌شود $\frac{a+5}{1-a}=1$، یعنی $a=-2$.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog^{-1})(x)=3x-1\Rightarrow f(g^{-1}(x))=3x-1$$

$$5g^{-1}(x)-7=3x-1$$

$$g^{-1}(x)=\frac{3x+6}{5}=\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}$$

در نتیجه

$$g(x)=\frac{5}{3}x-2$$

بنابراین $a=\frac{5}{3}$ و $b=-2$، پس $ab=-\frac{10}{3}$.

۲۹۰- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $g(3)=s$. بنابراین $g^{-1}(s)=3$. اکنون توجه کنید که

$$(g^{-1}of)(x)=\frac{4x-3}{2}\Rightarrow g^{-1}(f(x))=\frac{4x-3}{2}$$

$$g^{-1}(2x-1)=\frac{4x-3}{2}=2x-\frac{3}{2}$$

اکنون اگر فرض کنیم $2x-1=s$، آن‌گاه $x=\frac{s+1}{2}$ و از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$g^{-1}(s)=2(\frac{s+1}{2})-\frac{3}{2}\Rightarrow 3=s+1-\frac{3}{2}\Rightarrow s=\frac{7}{2}$$

۲۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(6)=g(2)\Rightarrow f^{-1}(g(2))=6$$

اکنون اگر در تساوی $(f^{-1}og)(x)=(m-2)x+4$ قرار دهیم $x=2$ به‌دست می‌آید

$$f^{-1}(g(2))=(m-2)\times 2+4\Rightarrow 6=2m-4+4\Rightarrow m=3$$

۲۹۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید

$$(f^{-1}og)(2x+3)=5x-2\Rightarrow f^{-1}(g(2x+3))=5x-2$$

چون $g^{-1}(4)=7$، پس $g(7)=4$. اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=2$ به‌دست می‌آید

$$f^{-1}(g(7))=8\Rightarrow f^{-1}(4)=8\Rightarrow f(8)=4$$

۲۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(-\frac{1}{2})=f(g(-\frac{1}{2}))$$

اکنون توجه کنید که اگر در تساوی

$$f^{-1}(\frac{2x+1}{3})=g(\frac{2-x}{4})$$

قرار دهیم $x=4$ به‌دست می‌آید $f^{-1}(3)=g(-\frac{1}{2})$. بنابراین

$$f(g(-\frac{1}{2}))=f(f^{-1}(3))=3$$

۲۹۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(gof^{-1})^{-1}(x)=2x+5\Rightarrow (fog^{-1})(x)=2x+5 \qquad (1)$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=ax-b\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$$

بنابراین تساوی (۱) را می‌توان این طور نوشت

$$f(g^{-1}(x))=2x+5$$

$$2g^{-1}(x)-1=2x+5$$

$$\frac{2}{a}x+\frac{2b}{a}-1=2x+5$$

چون این تساوی به‌ازای هر x درست است، پس

$$\frac{۲}{a}=۲,\ \frac{۲b}{a}-۱=۵ \Rightarrow a=۱, b=۳$$

در نتیجه $a+b=۴$.

۲۹۵- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)^{-۱}(x))=\frac{x-۲}{۲} \Rightarrow (g^{-۱}of)(x)=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-۱}(f(x))=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-۱}(x-۱)=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲} \qquad (x \to x+۱)$$

$$g(x)=۲x+۱$$

راه‌حل دوم اگر تابع‌های وارون دو طرف تساوی $(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}$ را پیدا کنیم به‌دست می‌آید

$$(f^{-۱}og)(x)=۲x+۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$f^{-۱}(x)=x+۱$$

پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f^{-۱}(g(x))=۲x+۲$$

$$g(x)+۱=۲x+۲$$

$$g(x)=۲x+۱$$

۲۹۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(gof^{-۱})^{-۱}(x)=(fog^{-۱})(x)$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=۲x-۱ \Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه

$$(gof^{-۱})^{-۱}(x)=(fog^{-۱})(x)=f(g^{-۱}(x))$$

$$=g^{-۱}(x)-۲=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}-۲=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$$

۲۹۷- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ضابطهٔ تابع وارون تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم که به صورت زیر هستند:

$$f^{-۱}(x)=(x-۱)^۳+۲,\quad g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=f^{-۱}(g^{-۱}(x))=f^{-۱}(\sqrt[۳]{x}+۱)$$

$$=(\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^۳+۲=x+۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$$

از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(۱+\sqrt[۳]{x-۲})=(۱+\sqrt[۳]{x-۲}-۱)^۳=x-۲$$

و

$$(gof)^{-۱}(x)=x+۲$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=x+۲$$

۲۹۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{fof^{-۱}}=\{x \mid x\in D_{f^{-۱}}, f^{-۱}(x)\in D_f\}=R_f$$

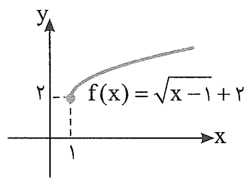
از طرف دیگر، $R_f=(-\infty,۱]$، بنابراین دامنهٔ تابع $fof^{-۱}$ برابر $(-\infty,۱]$ است.

۲۹۹- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. برای محاسبهٔ برد تابع f به نمودار آن توجه کنید:

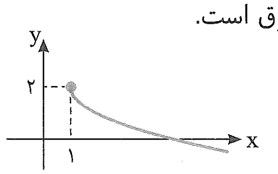
$$R_f=[۲,+\infty)$$

پس برای هر $x\ge ۲$، $g(x)=x+۳$. بنابراین

$$x\ge ۲ \Rightarrow x+۳\ge ۵ \Rightarrow g(x)\ge ۵ \Rightarrow R_g=[۵,+\infty)$$



۳۰۰- گزینهٔ ۳ به‌ازای هر $x\in D_f$ تساوی $(f^{-۱}of)(x)=x$ و به‌ازای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. پس تساوی $(fof^{-۱})(x)=(f^{-۱}of)(x)=x$ به‌ازای هر $x\in D_f\cap R_f$ برقرار است. دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۱,+\infty)$ و برد آن طبق شکل زیر بازهٔ $(-\infty,۲]$ است. پس هر x در بازهٔ $[۱,۲]$ جواب معادلهٔ فوق است.



۳۰۱- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی زیر f بگیریم

$$f(x-۳)=f^{-۱}(۳x+۷)$$

چون $(fof^{-۱})(x)=x$، نتیجه می‌شود که

$$f(f(x-۳))=۳x+۷$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۵$، به‌دست می‌آید

$$f(f(۲))=۲۲ \Rightarrow (fof)(۲)=۲۲$$

۳۰۲- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $(fog)(x)=2x+3$ به جای x قرار دهیم $g^{-1}(x)$، به‌دست می‌آید

$$(fogog^{-1})(x)=2g^{-1}(x)+3 \Rightarrow f(x)=2g^{-1}(x)+3$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید

$$f(3)=2g^{-1}(3)+3 \Rightarrow 7=2g^{-1}(3)+3 \Rightarrow g^{-1}(3)=2$$

۳۰۳- گزینهٔ ۳ چون تابع f اکیداً صعودی است پس تابع f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. بنابراین از $f^{-1}(x+2)>f^{-1}(x^2)$ نتیجه می‌شود

$$x+2>x^2 \Rightarrow x^2-x-2<0$$

$$(x+1)(x-2)<0$$

$$-1<x<2$$

۳۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f^{-1}og)(a)=f^{-1}(g(a))=6$$

بنابراین

$$g(a)=f(6)=12-5=7$$

با توجه به اینکه $g(4)=7$ نتیجه می‌شود $a=4$.

۳۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(g^{-1}of)(a)=g^{-1}(f(a))=3$$

بنابراین

$$f(a)=g(3)=-2$$

باتوجه به ضابطهٔ تابع f،

$$-\sqrt{-a}=-2 \Rightarrow a=-4$$

$$\sqrt{a}=-2 \ (\text{غ.ق.})$$

۳۰۶- گزینهٔ ۲ از تساوی $f^{-1}(g(2a))=6$ نتیجه می‌شود

$$f(6)=g(2a)$$

چون $f(6)=3$، پس

$$g(2a)=3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow 6a-3=2a \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۳۰۷- گزینهٔ ۳ اگر $x<0$،

$$y=-\sqrt{-x} \Rightarrow -x=y^2 \Rightarrow x=-y^2$$

$$\xrightarrow{y<0} x=y|y|$$

و اگر $x \geq 0$،

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^2 \xrightarrow{y\geq 0} x=y|y|$$

بنابراین در هر حالتی $x=y|y|$ و ضابطهٔ تابع وارون تابع f به صورت $f^{-1}(x)=x|x|$ است.

۳۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم. اگر $y=\frac{x+4}{x-2}$، آن‌گاه

$$xy-2y=x+4 \Rightarrow x(y-1)=2y+4 \Rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$$

اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع f و f^{-1} را می‌یابیم

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2+3x-4=2x^2-8$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x+1)(x-4)=0$$

$$x=-1, x=4$$

۳۰۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول از تساوی $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ نتیجه می‌شود

$$g^{-1}(f^{-1}(a))=8 \Rightarrow g(8)=f^{-1}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{5\times 8+9}=f^{-1}(a) \Rightarrow f^{-1}(a)=7$$

پس $a=f(7)$، یعنی $a=3$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)$$

چون $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$، بنابراین

$$(fog)^{-1}(a)=8$$

یعنی $(fog)(8)=a$، در نتیجه

$$f(g(8))=a \Rightarrow f(7)=a \Rightarrow a=3$$

فصل دوم

مثلثات

فصل دوم

درس اول: تناوب و تابع تانژانت

تابع متناوب

فرض کنید عددی حقیقی مانند T وجود دارد که به‌ازای هر $x \in D_f$،

۱) $x \pm T \in D_f$

۲) $f(x \pm T) = f(x)$

در این صورت می‌گوییم f تابعی متناوب است.

کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که در شرایط فوق صدق می‌کند، دورهٔ تناوب تابع f می‌نامیم.

نکته

اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند که $a, b \neq 0$، آن‌گاه تابع‌های $y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos(bx+c)+d$ متناوب‌اند و دورهٔ تناوب آنها برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر $|a|+d$ و مینیمم مقدار آنها برابر $-|a|+d$ است.

تست ۱ **دورهٔ تناوب تابع $f(x) = 2\cos(1-2x)+5$ کدام است؟**

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{4}$

راه‌حل: دورهٔ تناوب تابع $y = a\cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|-2|} = \pi$.

تست ۲ **دورهٔ تناوب تابع $f(x) = -2\sin(\frac{\pi x}{2})$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x) = 3\cos(\frac{\pi}{2} - ax)$ است. مقدار a کدام است؟**

۱) π ۲) -2π ۳) $\pm\pi$ ۴) $\pm 2\pi$

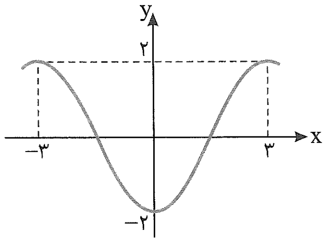
راه‌حل: می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y = a\sin(bx+c)$ و $y = a\cos(bx+c)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. پس

$$T_f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4, \quad T_g = \frac{2\pi}{|-a|} = \frac{2\pi}{|a|}$$

بنابراین

$$T_f = 2T_g \Rightarrow 4 = \frac{4\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \pi \Rightarrow a = \pm\pi$$

تست ۳ نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $-\frac{\pi}{۳}$

۳) $-\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $-\frac{\pi}{۶}$

راه‌حل با توجه به شکل $f(۰)=-۲$. پس

$$-۲=a\cos ۰ \Rightarrow a=-۲$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر ۶ است. پس

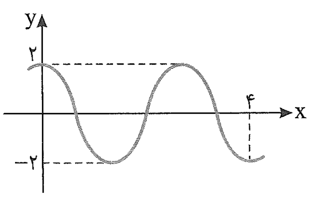
$$\frac{۲\pi}{|b|}=۶$$

$$|b|=\frac{\pi}{۳}$$

$$b=\pm\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین مقدار ab می‌تواند $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $-\frac{۲\pi}{۳}$ باشد.

تست ۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\sin((\frac{۳}{۲}+bx)\pi)$ به صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟ $(b>۰)$



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

راه‌حل توجه کنید که $f(x)=a\sin(\pi bx+\frac{۳\pi}{۲})=-a\cos(\pi bx)$. از طرف دیگر،

$$f(۰)=۲\Rightarrow -a\times ۱=۲\Rightarrow a=-۲$$

همچنین، دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲\cos(\pi bx)$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|\pi b|}=\frac{۲}{|b|}$. از روی نمودار معلوم می‌شود که ۱/۵ برابر دورهٔ تناوب تابع f برابر ۴ است. بنابراین

$$۱/۵T=۴$$

$$T=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \frac{۸}{۳}=\frac{۲}{|b|}$$

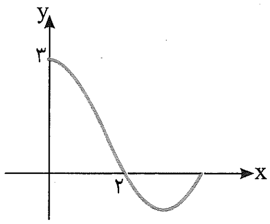
$$|b|=\frac{۳}{۴}\Rightarrow b=\pm\frac{۳}{۴}$$

b باید مثبت باشد، در نتیجه مقدار ab برابر است با

$$\frac{۳}{۴}\times(-۲)=-\frac{۳}{۲}$$

تست ۵

قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۲\cos(\frac{\pi x}{a})+b$ به شکل مقابل است. دورهٔ تناوب تابع f کدام است؟ $(a>۰)$



۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل با توجه به نمودار،

$$f(۰)=۳\Rightarrow ۲+b=۳\Rightarrow b=۱$$

$$f(۲)=۰\Rightarrow ۲\cos(\frac{۲\pi}{a})+۱=۰\Rightarrow \cos(\frac{۲\pi}{a})=-\frac{۱}{۲}$$

کوچک‌ترین زاویهٔ مثبتی که کسینوس آن $-\frac{۱}{۲}$ می‌شود، زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است. پس

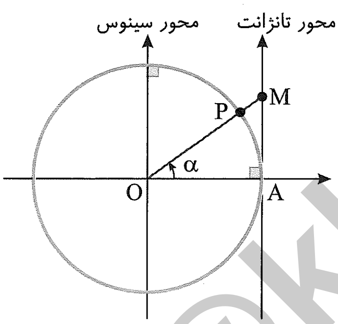
$$\frac{۲\pi}{a}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow a=۳$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با

$$\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}=۶$$

محور تانژانت

در نقطهٔ $A(۱,۰)$ محوری عمود بر محور کسینوس رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور سینوس انتخاب می‌کنیم. این محور را محور تانژانت می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویهٔ دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت

$$\tan\alpha=\frac{AM}{OA}=\frac{AM}{۱}=AM$$

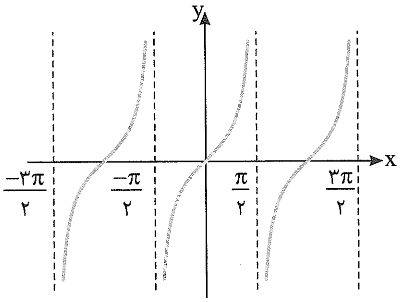
نکته

برای مشخص کردن تانژانت زاویهٔ α، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویهٔ α، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطهٔ $M(۱,y_۱)$ قطع کند. در این‌صورت $y_۱=\tan\alpha$.

تابع تانژانت

اگر x عددی حقیقی باشد و $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود. اگر $f(x)=\tan x$، آن‌گاه

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\},\quad R_f=\mathbb{R}$$



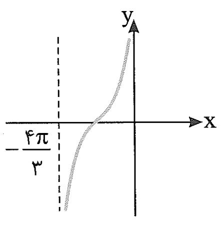
نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تانژانت تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است و روی هر بازه به صورت $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$، که $k\in\mathbb{Z}$، اکیداً صعودی است. این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.

نکته

اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند و $a, b\neq 0$، آن‌گاه دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\tan(bx+c)+d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۶

قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\tan(ax+b)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

راه‌حل توجه کنید که دورهٔ تناوب تابع f برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است. از روی نمودار مشخص است که دورهٔ تناوب تابع $\frac{4\pi}{3}$ است، پس

$$\frac{\pi}{|a|}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow |a|=\frac{3}{4}\Rightarrow a=\pm\frac{3}{4}$$

چون تابع f روی بازهٔ $(-\frac{4\pi}{3}, 0)$ صعودی است، پس a مثبت است و جواب $a=-\frac{3}{4}$ غیر قابل قبول است.

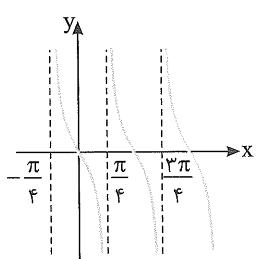
تست ۷

تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ۲) $(0, \frac{\pi}{2})$

۳) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ۴) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

راه‌حل تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



تست ۸ اگر $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan x=\frac{۲m-۳}{۵}$، حدود m کدام است؟

۱) $(۱,-۴)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(-۱,۱)$

راه‌حل توجه کنید که تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{۴})<\tan x<\tan\frac{\pi}{۴}$$

$$-۱<\tan x<۱$$

$$-۱<\frac{۲m-۳}{۵}<۱$$

$$-۱<m<۴$$

حد و پیوستگی تابع تانژانت

تابع‌های $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ با هم برابرند، زیرا دامنهٔ آنها یکسان است و اگر x در دامنهٔ آنها باشد، آن‌گاه $f(x)=g(x)$. بنابراین اگر a در دامنهٔ تابع f باشد،

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a=f(a)$$

نکته

تابع تانژانت در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

فصل دوم

درس اول: تناوب و تابع تانژانت

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۱-\cos ۲x$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۲- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۳\sin(\pi x)-۲$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) ۲ ۴) ۳

۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos(۵x-۸)$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۸\pi}{۵}$

۴- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\cos ۲x|$ چقدر است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۵- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\cos x}{\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\tan x}{\tan x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

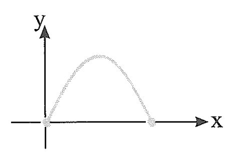
۷- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=-۳\cos(kx)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

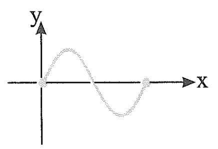
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

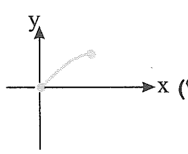
۸- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۴\sin(ax)+ab$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. اگر $f(\frac{\pi}{۸})=۲$، $f(\frac{\pi}{۲۴})$ کدام می‌تواند باشد؟

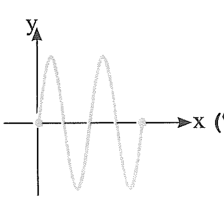
۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹- نمودار تابع $y=۲\sin\frac{x}{۲}$ در بازه‌ای که طول آن نصف دورهٔ تناوب تابع است، کدام است؟

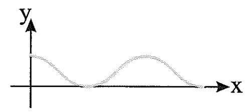
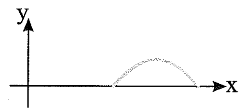
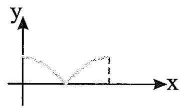
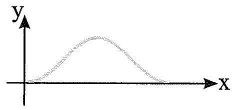
۱)


۲)


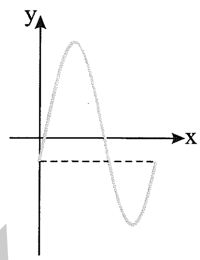
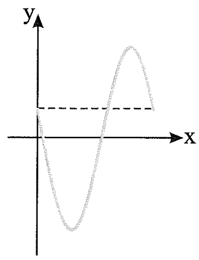
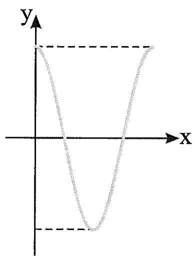
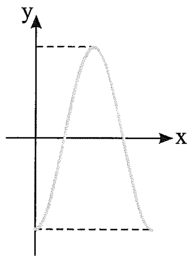
۳)


۴)


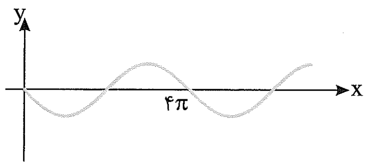
۱۰- نمودار تابع $y=|\sin(\pi x)|$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۱- نمودار تابع $y=-\pi\cos(\frac{\pi x}{2})$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

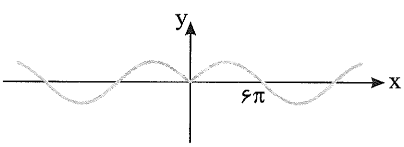
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. ضابطهٔ تابع f کدام گزینه می‌تواند باشد؟



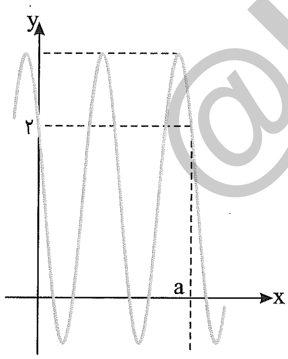
۱) $f(x)=-2\sin\frac{x}{2}$
۲) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}$
۳) $f(x)=-2\sin 2x$
۴) $f(x)=2\sin 2x$

۱۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. ضابطهٔ تابع f کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۱) $f(x)=2\sin|3x|$
۲) $f(x)=2\sin|\frac{x}{3}|$
۳) $f(x)=2\sin|\frac{x}{6}|$
۴) $f(x)=2\sin|6x|$

۱۴- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=2\cos(6x+\frac{\pi}{3})+a$ به شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{3}$
۲) $\frac{2\pi}{3}$
۳) π
۴) $\frac{4\pi}{3}$

۱۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2})$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\}$
۲) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2k\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2k+1\}$
۴) $\mathbb{Z}$

۱۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi-2\pi x}{2})$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\mathbb{Z}$
۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2k, k\in\mathbb{Z}\}$
۴) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2k+1, k\in\mathbb{Z}\}$

۱۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\tan(\frac{۲\pi-\pi x}{۴})}{\sqrt{۹-x^۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan(\frac{x+۱}{۲})$ چقدر است؟

۱) ۲π ۲) ۴π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۹- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۱-۴\tan(\frac{\pi}{۲}x-\frac{\pi}{۳})$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- اگر $f(x)=(\tan x+\frac{۱}{\tan x})\sin x$، دورهٔ تناوب تابع $\frac{۱}{f}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

۲۱- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan(ax+۱)$، دو برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\tan(\frac{x}{a}-۱)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۲- برد تابع $f(x)=|\tan(\frac{\pi x}{۶}+\frac{\pi}{۶})|$ با دامنهٔ $[-۳,۱]$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,\sqrt{۳}]$ ۳) $[۰,\frac{\sqrt{۳}}{۳}]$ ۴) $[۰,+\infty)$

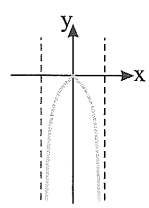
۲۳- برد تابع $f(x)=۱-\tan(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})$ با دامنهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ کدام است؟

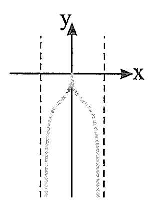
۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,+\infty)$

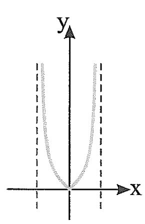
۲۴- اگر $-\frac{\pi}{۳}\leq x<\frac{\pi}{۲}$ و $\tan x=\frac{۲-m}{\sqrt{۳}}$، حداکثر مقدار m کدام است؟

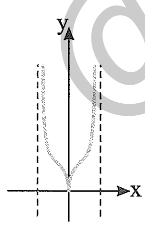
۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) صفر

۲۵- نمودار تابع $f(x)=-|\tan x|$ با دامنهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

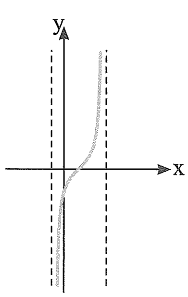
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۶- قسمتی از نمودار تابع f به صورت مقابل است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



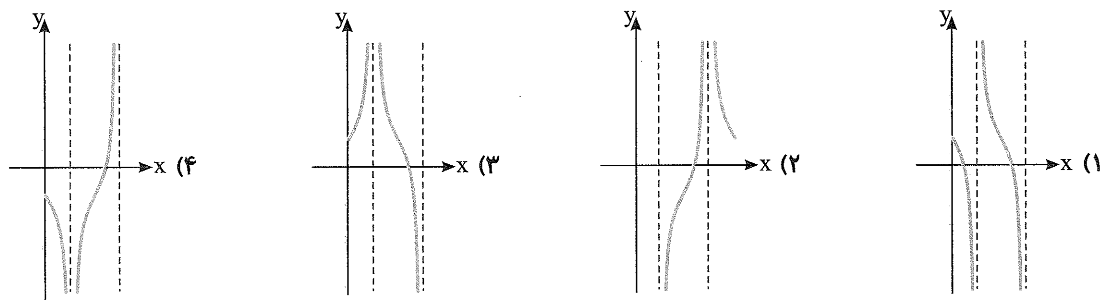
۱) $y=\tan(x+۱)$

۲) $y=\tan(x-۱)$

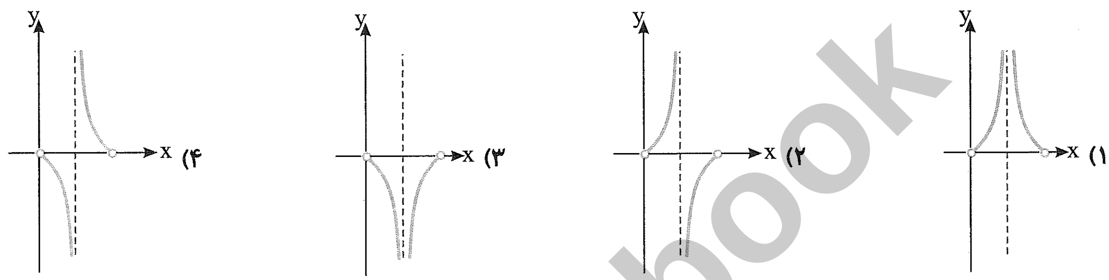
۳) $y=\tan x-۱$

۴) $y=\tan x+۱$

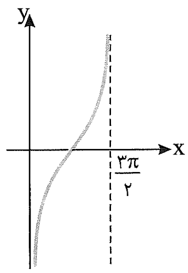
۲۷- کدام‌یک قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۱-\tan ۲x$ است؟



۲۸- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^۳ x(۱+\tan^۲ x)}$ روی بازهٔ $(۰,\pi)$ کدام است؟

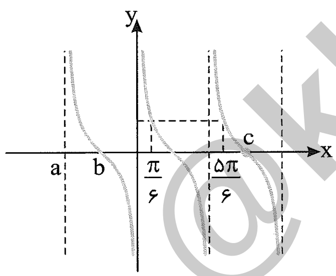


۲۹- نمودار تابع $f(x)=\tan(\pi(\frac{۱}{۲}-ax))$ در یک دورهٔ تناوب به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳\pi}$
۲) $-\frac{۲}{۳\pi}$
۳) $\frac{۳}{۲\pi}$
۴) $-\frac{۳}{۲\pi}$

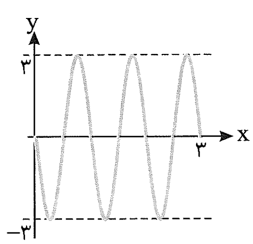
۳۰- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=\tan(kx+m)$ است. مقدار $\frac{a}{b+c}$ چقدر است؟



۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۲}{۳}$

۳۱- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟

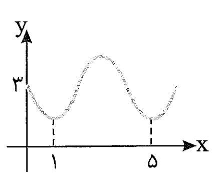
(خارج از کشور ریاضی - ۹۲)



۱) -۶
۲) -۳
۳) ۴/۵
۴) ۶

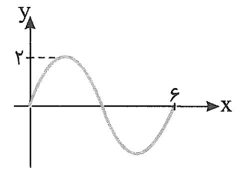
۳۲- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x=\frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟

(تجربی - ۹۳)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۳۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

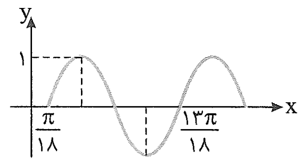


(خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$

۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۳۴- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a-2\cos(bx+\frac{\pi}{2})$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

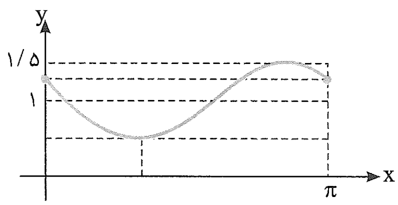


(ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۵- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=1+a\sin(bx-\frac{\pi}{6})$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

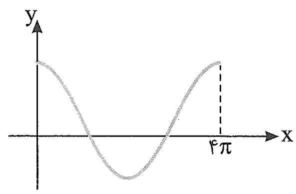


(خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۶- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{1}{2}+2\cos(mx)$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{16\pi}{3}$ کدام است؟

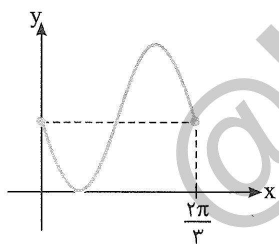


(ریاضی - ۹۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) صفر

۳۷- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=1-\sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{7\pi}{6}$ کدام است؟

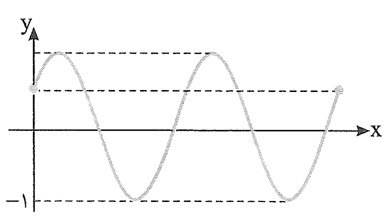


(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) ۲

۳۸- شکل زیر نمودار تابع $y=1+a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[0,\frac{4}{3}]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟



(خارج از کشور ریاضی - ۹۷)

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

درس دوم: معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 2α

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

تست ۱ مقدار $\cos 22/5^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{4}$

راه‌حل چون $22/5^\circ$ نصف 45° است، پس در تساوی $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ قرار می‌دهیم $\alpha = 22/5^\circ$ و در نتیجه

$$\cos(2\times 22/5^\circ) = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow \cos 45^\circ = 2\cos^2 22/5^\circ - 1$$

$$2\cos^2 22/5^\circ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

تست ۲ اگر $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

راه‌حل از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$$

مقدار تابع به‌ازای $x = \frac{\pi}{12}$ برابر با $\cos\frac{\pi}{6}$، یعنی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

تست ۳ حاصل عبارت $A=\sin x\cos^{3}x-\sin^{3}x\cos x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{24}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

راه‌حل ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\sin x\cos^{3}x-\sin^{3}x\cos x$$

$$=\sin x\cos x(\cos^{2}x-\sin^{2}x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

اکنون به جای x مقدار $\frac{\pi}{24}$ را قرار می‌دهیم:

$$A=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

تست ۴ مقدار عددی عبارت $B=\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\cot 80^\circ}{8}$ ۲) $\frac{\cot 40^\circ}{4}$ ۳) $\frac{\tan 40^\circ}{4}$ ۴) $\frac{\tan 80^\circ}{8}$

راه‌حل با ضرب و تقسیم کردن عبارت مورد نظر در $\sin 10^\circ$، از رابطهٔ $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ به‌طور متوالی استفاده می‌کنیم:

$$B=\frac{(\sin 10^\circ\cos 10^\circ)\cos 20^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1}{2}\frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1}{8}\frac{\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1}{8}\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}=\frac{\tan 80^\circ}{8}$$

تست ۵ اگر $\sin x-\cos x=\frac{1}{3}$، حاصل $\sin^{6}x+\cos^{6}x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{11}{27}$

راه‌حل ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x-\cos x)^{2}=(\frac{1}{3})^{2}\Rightarrow\sin^{2}x+\cos^{2}x-2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$$

$$1-\sin 2x=\frac{1}{9}\Rightarrow\sin 2x=\frac{8}{9}$$

اکنون دقت کنید که

$$\sin^{6}x+\cos^{6}x=(\sin^{2}x+\cos^{2}x)^{3}-3\sin^{2}x\cos^{2}x(\sin^{2}x+\cos^{2}x)$$

$$=1-3\sin^{2}x\cos^{2}x=1-\frac{3}{4}\sin^{2}2x$$

بنابراین

$$\sin^{6}x+\cos^{6}x=1-\frac{3}{4}\times(\frac{8}{9})^{2}=1-\frac{16}{27}=\frac{11}{27}$$

تست ۶ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan(ax)$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\sin^{۲}\frac{۳x}{۲}$ است. مقدار $|a|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

راه‌حل توجه کنید که دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$. از طرف دیگر،

$$g(x)=\frac{۱-\cos ۳x}{۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۳x$$

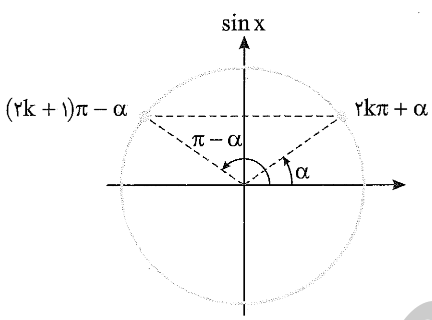
بنابراین دورهٔ تناوب تابع g برابر است با $\frac{۲\pi}{۳}$. به این ترتیب

$$\frac{\pi}{|a|}=۲(\frac{۲\pi}{۳})\Rightarrow |a|=\frac{۳}{۴}$$

معادلات مثلثاتی

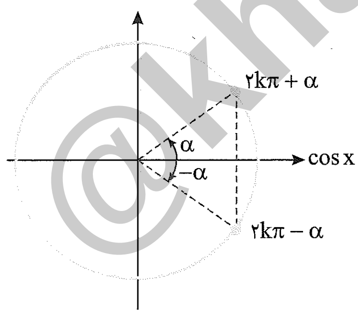
جواب‌هـای کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به صورت زیر است:

$$x=۲k\pi+\alpha\ ,\quad x=(۲k+۱)\pi-\alpha\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به صورت زیر است:

$$x=۲k\pi\pm\alpha\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$



نکته

۱) برای حل کردن معادلهٔ $\sin x=m$ که $-۱\le m\le ۱$، کافی اسـت زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\sin\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ را پیدا کنیم.

۲) برای حل کردن معادلهٔ $\cos x=m$ که $-۱\le m\le ۱$ ، کافی است زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\cos\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ را پیدا کنیم.

تذکر واضح است که معادله‌های $\sin x = m$ و $\cos x = m$ به‌ازای mهایی که در بازهٔ $[-1, 1]$ نیستند، جواب ندارند.

تست ۷ **معادلهٔ $\cos 3x = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب متمایز دارد؟**

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۲

راه‌حل معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 3x = \cos x$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

جواب $\frac{k\pi}{2}$ شامل جواب $k\pi$ نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2}$ هستند که در بازهٔ $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $x = 0$، $x = \frac{\pi}{2}$، $x = \pi$، $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = 2\pi$.

تست ۸ **معادلهٔ $\cos 4x + \cos x = 0$ چند جواب متمایز در بازهٔ $[0, \pi]$ دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x)$$

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)\pi}{5} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \dfrac{(2k-1)\pi}{3} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازهٔ $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π

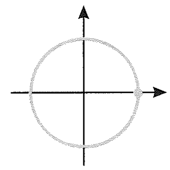
k	۱	۲
$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π

با توجه به مشترک بودن $x = \pi$ در این جواب‌ها، معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ چهار جواب دارد:

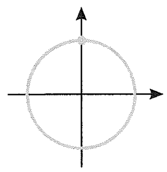
$$x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$$

نکته

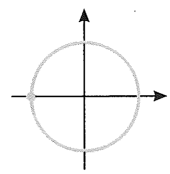
معادلات خاص



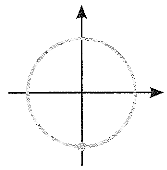
$\cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi$



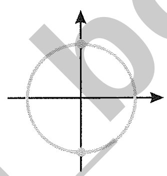
$\sin x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$



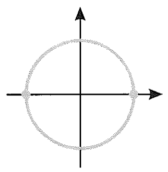
$\cos x=-۱ \Rightarrow x=(۲k+۱)\pi$



$\sin x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$



$\cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$



$\sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi$

تست ۹ نمودار تابع $y=۳\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)$ روی بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل جایی که نمودار محور x را قطع می‌کند، $y=۰$. پس

$$\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi$$

$$۲x=-k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=-\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	−۱	−۲
x	$\frac{\pi}{۸}$	$-\frac{۳\pi}{۸}$	$-\frac{۷\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$

تست ۱۰ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۳ x-\sin x=۰$ کدام است؟

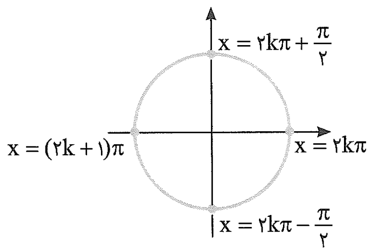
۱) $x=k\pi$ ۲) $x=\frac{k\pi}{۲}$

۳) $x=\frac{k\pi}{۴}$ ۴) $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\sin x=۰ \Rightarrow \sin x(\sin^۲ x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi \\ \sin x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \sin x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایره مشخص می‌کنیم. بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}$ نوشت.



تست ۱۱ تابع $y=-۳\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ چند بار بیشترین مقدار می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل مقادیر $\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ قرار دارند. برای اینکه $y=-۳\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})$ بیشترین مقدار شود، باید $\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})$ برابر با ۱− باشد. پس

$$\cos(۲x-\frac{\pi}{۳})=-۱ \Rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۳}=(۲k+۱)\pi \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$$

به‌ازای $k=-۱$ و $k=۰$، جواب‌های $x=\frac{-\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ هستند.

تست ۱۲ معادلهٔ $۲\cos^۲ x=\cos x+۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب متمایز دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

راه‌حل توجه کنید که

$$۲\cos^۲ x-\cos x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x=۰,۲\pi \\ \cos x=\frac{-۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر چهار جواب متمایز در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

تست ۱۳ جواب‌های معادلهٔ $۹-۱۳\sin x=۶\cos ۲x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ روی دایرهٔ مثلثاتی چند نقطه را مشخص می‌کنند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

راه‌حل با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$ معادله را برحسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$۹-۱۳\sin x=۶(۱-۲\sin^۲ x) \Rightarrow ۱۲\sin^۲ x-۱۳\sin x+۳=۰$$

اکنون اگر فرض کنیم $t=\sin x$، به‌دست می‌آید:

$$۱۲t^۲-۱۳t+۳=۰ \Rightarrow t=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۶۹-۱۴۴}}{۲۴} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۳}{۴}=\sin x \\ t=\frac{۱}{۳}=\sin x \end{cases}$$

معادلات $\sin x=\frac{۱}{۳}$ و $\sin x=\frac{۳}{۴}$ هر کدام در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارند. پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چهار جواب دارد و جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی چهار نقطه را مشخص می‌کنند.

تست ۱۴ معادلهٔ $\sin^۴ x-\sin x=\cos^۴ x$ در بازهٔ $[-\pi,۰]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۴ x-\cos^۴ x=\sin x\Rightarrow(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=\sin x$$

$$-\cos ۲x=\sin x\Rightarrow\cos ۲x=\sin(-x)$$

$$\cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)\Rightarrow\begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+x\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,۰]$ عبارت‌اند از $x=-\frac{\pi}{۶}$ و $x=-\frac{۵\pi}{۶}$. بنابراین معادله در بازهٔ $[-\pi,۰]$ دو جواب دارد.

فصل دوم

درس دوم: معادلات مثلثاتی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۹- حاصل $\dfrac{1-2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $2\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $2\cos x$

۴۰- مقدار $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$

۴۱- اگر $\sin 22/5^\circ=\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{a}}}{2}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۲- حاصل $4\cos^3 x\sin x-4\sin^3 x\cos x$ کدام است؟

۱) $\sin 2x$ ۲) $\cos 4x$ ۳) $2\cos 2x$ ۴) $\sin 4x$

۴۳- اگر $\sin x=\cos x$، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\dfrac{1}{2}$

۴۴- اگر $\cos 3^\circ=a$، مقدار $\sin 84^\circ$ برحسب a کدام است؟

۱) $\dfrac{1-a^2}{2}$ ۲) $\dfrac{a^2-1}{2}$ ۳) $2a^2-1$ ۴) $1-2a^2$

۴۵- اگر $\sin 65^\circ=a$، حاصل $\sin 40^\circ$ برحسب a کدام است؟

۱) $1-2a^2$ ۲) $2a^2-1$ ۳) $2a$ ۴) $\sqrt{1-a^2}$

۴۶- اگر $\sin 12^\circ=x$، مقدار $\cos 66^\circ$ برحسب x کدام است؟

۱) $2x^2-1$ ۲) $x\sqrt{1-x^2}$ ۳) $2x\sqrt{1-x^2}$ ۴) $2x\sqrt{1+x^2}$

۴۷- حاصل $\dfrac{2\sin^2 40^\circ-1}{\sin 20^\circ}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2\cos 10^\circ}$ ۲) $-\dfrac{1}{2\cos 10^\circ}$ ۳) $2\cos 10^\circ$ ۴) $-\dfrac{1}{\cos 10^\circ}$

۴۸- حاصل $\dfrac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$ برابر کدام است؟

۱) $\cos^2 x$ ۲) $\sin^2 x$ ۳) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ۴) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$

۴۹- مقدار $\dfrac{\sin^2 110^\circ-\sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۰- مقدار $3\cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ$ چقدر است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

۵۱- حاصل $\tan 2\alpha \tan \alpha + 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ ۲) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$ ۳) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$ ۴) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$

۵۲- a زاویه‌ای حاده است و $\sin a = \frac{3}{5}$. مقدار $\sin 2a + \cos 2a$ چقدر است؟

۱) $\frac{32}{25}$ ۲) $\frac{31}{25}$ ۳) $\frac{27}{25}$ ۴) $\frac{26}{25}$

۵۳- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$، مقدار $\tan 2\alpha$ چقدر است؟

۱) $\frac{29}{7}$ ۲) $\frac{24}{7}$ ۳) $\frac{23}{7}$ ۴) $\frac{18}{7}$

۵۴- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۵۵- اگر $\tan \alpha = x$، حاصل $\frac{2(1+\sin^2 \alpha)}{1+\cos 2\alpha}$ برحسب x کدام است؟

۱) $1+2x$ ۲) $1+2x^2$ ۳) $2x-3$ ۴) $1+x^2$

۵۶- مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1-2\sin^2 x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۵۷- مقدار $\sin \frac{\pi}{12} (2\cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵۸- اگر $2\sin 4x(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \sin kx$، مقدار k چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۵۹- مقدار $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 40^\circ$ ۲) $\cos 40^\circ$ ۳) $-\cos 40^\circ$ ۴) $-\sin 40^\circ$

۶۰- حاصل $\frac{1-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 20^\circ$ ۲) $\cos 20^\circ$ ۳) $\tan 20^\circ$ ۴) $\cot 20^\circ$

۶۱- حاصل $\frac{1+\cos 40^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟

۱) $2\cos 20^\circ$ ۲) $4\cos 20^\circ$ ۳) $\frac{\cos 20^\circ}{2}$ ۴) $\frac{\cos 20^\circ}{4}$

۶۲- اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ و $\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}=۲$، مقدار $\cot x$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶۳- اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ و $\sqrt{\frac{۱+\cos ۲x}{۲}}=۲\sin x-\cos x-\frac{۱}{۲}$، حاصل $\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۶۴- اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$، آن‌گاه عبارت $A=\sqrt{۲+\sqrt{۲+۲\cos x}}$ برابر است با

۱) $۲\sin\frac{x}{۴}$ ۲) $۲\cos\frac{x}{۴}$ ۳) $\sin\frac{x}{۲}$ ۴) $\cos\frac{x}{۲}$

۶۵- اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{\sin^۳ x}{۲\sin x-\sin ۲x}$، مقدار $\cos ۲x$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $-\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۶۶- اگر $۶=\frac{۱}{\cos\theta}+۹\cos\theta$، مقدار $\cos ۲\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۷}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۶۷- اگر $\cos ۲x=۳\sin^۴ x$، مقدار $\tan^۲ x$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۸- مقدار $\sin^۴\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۴\frac{\pi}{۱۲}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۶۹- مقدار $\tan^۲\frac{\pi}{۸}+\cot^۲\frac{\pi}{۸}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۰- اگر $\sin^۶ x+\cos^۶ x=\frac{۴}{۵}$، مقدار $\cos^۲ ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶۰}$ ۲) $\frac{۵۹}{۶۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۵}$

۷۱- مقدار $۲\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۶}+\cos\frac{۵\pi}{۸}$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۷۲- حاصل $\frac{۲\cos^۲(۴۵^\circ+x)+\sin ۲x}{۲\cos^۲(۴۵^\circ-x)-\sin ۲x}$ کدام است؟

۱) $\cos ۲x$ ۲) $\sin ۲x$ ۳) $\tan ۲x$ ۴) ۱

۷۳- مقدار $\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۷۴- اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{\cos ۳x}{\sin ۶x+\cos ۳x}$، مقدار $\frac{۱}{\sin ۳x}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵- مقدار $\sin ۷۵^\circ \sin ۱۵^\circ$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۶- مقدار $\frac{\sin ۵۰^\circ \sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۷۷- مقدار $\sin\frac{۳\pi}{۸}\cos\frac{\pi}{۸}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}$

۷۸- اگر $x=\frac{\pi}{۲۴}$، مقدار $\cos ۱۰x \cos ۲x$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۹- اگر $a=\frac{\pi}{۱۲}$، مقدار $\sin a \cos a \cos ۲a \cos ۴a$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۸۰- اگر $۱۶\sin x\cos ۲x=\frac{۳}{\cos x}$، مقدار $\sin ۴x$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۸۱- اگر $\cos x=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\cos ۴x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵۳}{۸۱}$ ۲) $-\frac{۶۷}{۸۱}$ ۳) $-\frac{۷۳}{۸۱}$ ۴) $-\frac{۷۹}{۸۱}$

۸۲- اگر $\sin ۷۸^\circ=k$، مقدار $\cos ۴۸^\circ$ برحسب k کدام است؟

۱) $۸-۸k^۲$ ۲) $۸k-۸k^۲$ ۳) $۱۶k-۱۶k^۲$ ۴) $۸k^۴-۸k^۲+۱$

۸۳- حاصل عبارت $A=(\sin\frac{\pi}{۸}+\cos\frac{\pi}{۸}+۱)(\sin\frac{\pi}{۸}+\cos\frac{\pi}{۸}-۱)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸۴- مقدار $\tan ۷۵^\circ+\cot ۷۵^\circ$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۵- اگر $\tan ۲x+\cot ۲x=۸$، مقدار $\sin ۴x$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۶- مقدار $\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}$ چقدر است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\cot ۱۰^\circ$

۸۷- مقدار $\tan ۲۲/۵^\circ - \cot ۲۲/۵^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۸۸- اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۲}$، مقدار $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۹- اگر $\sin x + \cos x = \frac{۴}{۳}$، مقدار عبارت $A = \frac{\cos^۳ x - \sin^۳ x}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۰- مقدار $(\sin ۱۶۵^\circ - \sin ۷۵^\circ)^۸$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۹۱- حاصل $\frac{۱+\sin ۲۰^\circ}{\sin ۵۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan ۳۵^\circ$ ۲) $\cot ۳۵^\circ$ ۳) $۲\sin ۳۵^\circ$ ۴) $۲\cos ۳۵^\circ$

۹۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\cos ۲x}{۱+\sin ۲x} = \frac{۱}{۳}$، مقدار $\sin x$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۹۳- ساده شدهٔ عبارت $A = \sqrt{۱-\sin ۱۰^\circ} + \sqrt{۱+\sin ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $۲\sin ۵^\circ$ ۲) $۲\cos ۵^\circ$ ۳) $\sin ۱۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰^\circ$

۹۴- حاصل $۱ + \frac{\cos ۲۰^\circ}{\sqrt{۲}\sin ۱۰^\circ - ۱}$ چند برابر $\cos ۸۰^\circ$ است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۹۵- حاصل $\frac{۱+\cos ۱۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$ ۲) $\cot ۱۰^\circ$ ۳) $\sin ۱۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰^\circ$

۹۶- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۱+\sin ۲۰^\circ - \cos ۲۰^\circ}{۱+\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$ ۲) $\cot ۱۰^\circ$ ۳) $\tan ۲۰^\circ$ ۴) $\cot ۲۰^\circ$

۹۷- اگر $\frac{a}{۲} = \sin^۲ \frac{۳\pi}{۸} + \cos^۲ \frac{\pi}{۸}$، مقدار a چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\sqrt{۲}+۲$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۸- مقدار $\frac{\cos ۱۵^\circ - \sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ + \sin ۱۵^\circ}$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۹۹- دورهٔ تناوب تابع $f(x) = -۳\cos^۲(\pi x)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۰۰- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{۵}{۳}\sin^{۲} ۲(x+\frac{\pi}{۶})$ چقدر است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۰۱- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos ۲x+\cos^{۲} x-۱$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) ۲π ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۰۲- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos^{۲} x-\cos^{۴} x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

۱۰۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^{۶} x+\cos^{۶} x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

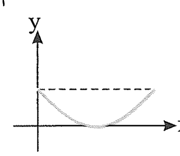
۱۰۴- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۱-۴\sin^{۲}(۵+ax)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

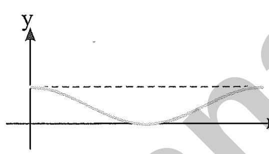
۱) $\pm\frac{۱}{۳}$ ۲) $\pm\frac{۲}{۳}$ ۳) ±۳ ۴) ±۶

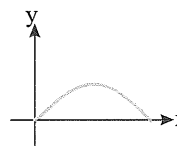
۱۰۵- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sqrt{۲}\cos^{۲}(mx-۴)$ برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

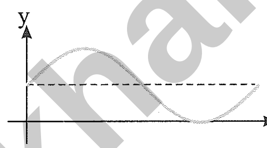
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰۶- قسمتی از نمودار تابع $y=\cos^{۲}(\frac{x}{۲})$ کدام است؟

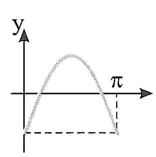
۱)


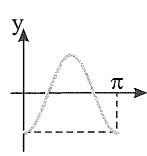
۲)


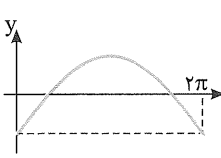
۳)


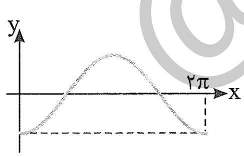
۴)


۱۰۷- نمودار تابع $f(x)=\sin^{۲} x-\frac{۱}{۲}$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

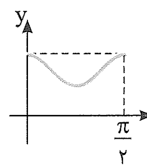
۱)


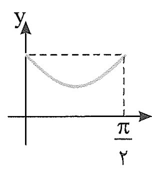
۲)


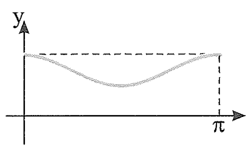
۳)


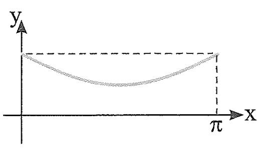
۴)


۱۰۸- نمودار تابع $y=\sin^{۴} x+\cos^{۴} x$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

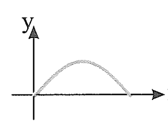
۱)


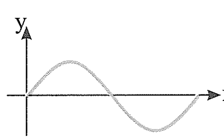
۲)


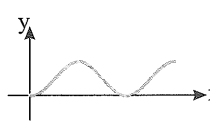
۳)


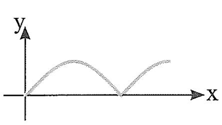
۴)


۱۰۹- نمودار تابع $f(x)=|\sin x\cos x|$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

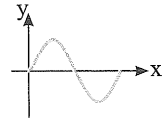
۱)


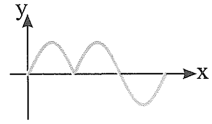
۲)


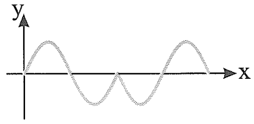
۳)


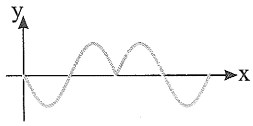
۴)


۱۱۰- نمودار تابع $f(x)=۲\cos x|\sin x|$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

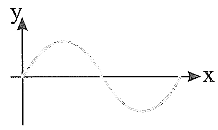
۱) 

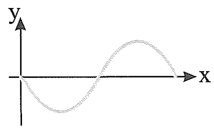
۲) 

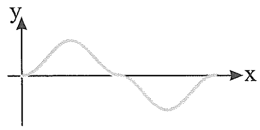
۳) 

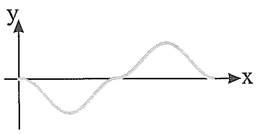
۴) 

۱۱۱- نمودار تابع $f(x)=۲\sin\frac{x}{۲}|\sin\frac{x}{۲}|$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۱۲- اگر $\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{\pi}{۳}$ و $\sin x\cos x=\frac{m}{۴}$، حدود m کدام است؟

۱) $۱<m<۲$ ۲) $۱<m<\sqrt{۳}$ ۳) $۱<m\leq ۲$ ۴) $\sqrt{۳}<m\leq ۲$

۱۱۳- برد تابع $f(x)=\sin^۴ x-\sin^۲ x$ کدام است؟

۱) $[-\frac{۱}{۴},۰]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},۰]$ ۳) $[-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴}]$ ۴) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$

۱۱۴- برد تابع $f(x)=\sin^۴ x+\cos^۴ x$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱]$

۱۱۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\sin(x+\frac{۷\pi}{۳۶})=\sqrt{۲}$ به صورت $x=۲k\pi+\frac{i\pi}{۱۸}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\{۱,۴\}$ ۲) $\{۳,۸\}$ ۳) $\{۱,۱۰\}$ ۴) $\{۳,۱۰\}$

۱۱۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $۴\cos(x+\frac{\pi}{۸})=\sqrt{۱۲}$ به صورت $x=۲k\pi+\frac{i\pi}{۲۴}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\{۱,-۳\}$ ۲) $\{۱,-۷\}$ ۳) $\{۳,-۷\}$ ۴) $\{-۳,۳\}$

۱۱۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\sin ۲x-۱=۰$ که در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) ۲π ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) ۳π

۱۱۸- نمودار تابع $f(x)=\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\pi)$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۹- نمودار تابع $f(x)=\sin ۳x$ در بازهٔ $[-\pi\,,۲\pi]$ چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۰- نمودار تابع $f(x)=-۲\cos ۴x$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۱- جواب‌های کلی معادلهٔ $۱-۴\sin^۲(۵x-\frac{\pi}{۳})=۰$ به صورت $x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{i\pi}{۳۰}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای i کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۲۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos ۳x=\cos ۲x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{k\pi}{۵}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۵}$

۱۲۳- معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۳})-\sin x=۰$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۴- معادلهٔ $\sin(x-\frac{\pi}{۳})-\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ چند جواب در بازهٔ $(-۲\pi,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۵- معادلهٔ $\cos ۲x-\cos(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۶- معادلهٔ $\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{۲x}{۳}=۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos(۲x-\frac{\pi}{۹})=-\sin ۲x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۳۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۳۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۷۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۷۲}$

۱۲۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\cos(۲x+\frac{\pi}{۴})}{\sin ۲x}=۱$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۱۶}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۱۶}$

۱۲۹- معادلهٔ $\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x}=۱$ در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲ x=\sin x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

۱۳۱- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x+\cos x=\frac{۱}{\sin x}$ به صورت $x=k\pi+\frac{i\pi}{۴}$ هستند. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\{۰,۱\}$ ۲) $\{۱,۲\}$ ۳) $\{۰,۲\}$ ۴) $\{۱,۲,۳\}$

۱۳۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\sin^۲ ۲x-۵\sin ۲x+۳=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

۱۳۳- بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $۲\cos^۲ ۲x+۳\cos ۲x+۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

۱۳۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۲(\pi+x)-\sin x-۲=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۱۳۵- معادلهٔ $۲\sin^۳ x-\sin^۲ x-۸\sin x+۴=۰$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۶- معادلهٔ $۲\cos^۲ x+۳\sin x-۳=۰$ چند جواب متمایز در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۷- معادلهٔ $۳\sin^۲ x+\cos^۲ x-(\sqrt{۲}-۲)\sin x-(\sqrt{۲}+۱)=۰$ چند جواب متمایز در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۴\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{\sin x}=۲+۲\sqrt{۳}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) ۳π

۱۳۹- معادلهٔ $(۳\cos x+۱)(۵\cos x-۴)=۰$ چند جواب در بازهٔ $[۰,\frac{۳\pi}{۲}]$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۰- معادلهٔ $۲\sin^۲ x-\cos^۲ x-\cos x=۰$ چند جواب متمایز در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۱- معادلهٔ $(۵\sin x-۳)(۵\cos x-۴)=۰$ چند جواب متمایز در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۴۲- معادلهٔ $\frac{۱}{\cos x}-\frac{۱}{\sin ۲x}=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin ۴x=\sqrt{۲}\sin ۲x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۱۵\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۲۰\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳\pi}{۸}$

۱۴۴- معادلهٔ $\tan ۲x=\sin ۴x$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۵- کدام گزینه جواب معادلهٔ $\sin^۲(x+\frac{\pi}{۴})-\cos^۲(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ نیست؟

۱) $-\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

۱۴۶- معادلهٔ $\cos ۲x=\cos^۲ x$ چند جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۷- معادلهٔ $۱+\cos^۴ x=\sin^۴ x$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۱+\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲})=\cos(۳\pi-x)$ که در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) π ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$

۱۴۹- معادلهٔ $\sin^۲ x+\sin^۲ ۲x=۱$ چند جواب متمایز در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $8\cos^4 x - 11\cos 2x + 1 = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۵۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{9\pi}{2}$ ۲) 5π ۳) $\frac{11\pi}{2}$ ۴) $\frac{13\pi}{2}$

۱۵۲- معادلهٔ $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $4\sin^4 x + 4\cos^4 x = 1 + 4\sin^2 2x$ در بازهٔ $(0, \pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

۱۵۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{6}$ ۴) $\frac{k\pi}{12}$

۱۵۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 3π ۴) $\frac{7\pi}{2}$

۱۵۶- معادلهٔ $\sin^3 x - \cos^3 x = 2 + 2\sin x \cos x$ چند جواب در بازهٔ $(0, 2\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\sin^2(x - \frac{7\pi}{18}) = 2$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{\pi}{9}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{9}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۵۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x + \cos x + 1 = \cos 2x - \sin 2x$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{3}$ ۲) $\frac{17\pi}{3}$ ۳) $\frac{19\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

۱۵۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

۱۶۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x = \frac{2}{\sin 2x} - 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

۱۶۱- معادلهٔ $2\cos x + k = 3$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $1 \le k \le 5$ ۲) $1 \le k < 3$ ۳) $1 < k < 3$ ۴) $1 \le k \le 3$

۱۶۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(2\pi \sin x) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 4π ۳) 5π ۴) 6π

۱۶۳- معادلهٔ $\sin^2 x + 6\sin x + k = 0$ جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k \le 9$ ۲) $-7 \le k \le 5$ ۳) $2 < k < 15$ ۴) $2 < k \le 9$

۱۶۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی - ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۱۶۵- نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x$ روی دایره‌ی مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الساقین

۱۶۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2\frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ (تجربی - ۹۲)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۶۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $2\cos 2x=\cot x(4\sin x+\tan x)$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۶۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x(\sin x+\cos x)=\cos 2x(\cos x-\sin x)$ در بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟ (تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۶۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1$ به کدام صورت است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۱۷۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$ به کدام صورت است؟ (تجربی - ۹٤)

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{8}$

۱۷۱- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x+\cos x=0$، با شرط $\cos x\neq 0$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹٤)

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۷۲- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)$ کدام است؟ (تجربی - ۹۵)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۷۳- جواب‌های کلی معادلهٔ $2\sin^2 x+3\cos x=0$ کدام است؟ (تجربی - ۹۵)

۱) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{3}$

۱۷۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$ در بازهٔ $[0,\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

۱۷۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۷۶- اگر $\tan x=\frac{۴}{۳}$، مقدار $\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}$ کدام است؟ (تجربی - ۹۶)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۷۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰$ کدام است؟ (تجربی - ۹۶)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۷۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin ۲x+\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=۰$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۶)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) ۵π

۱۷۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin ۳x+\sin ۲x}{۱+\cos x}=۰$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$

فصل دوم

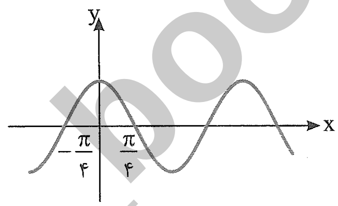
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۱ دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{۲}=\pi$.

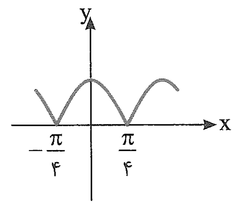
۲- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{\pi}=۲$.

۳- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{۵}$.

۴- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دورهٔ تناوب آن برابر است با $\frac{\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\frac{\pi}{۲}$.



$y=\cos ۲x$

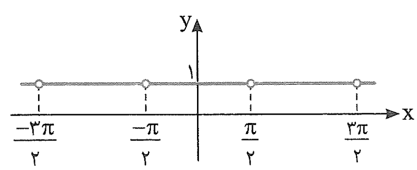


$f(x)=|\cos ۲x|$

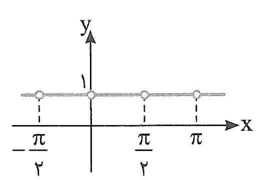
۵- گزینهٔ ۳ تابع f به شکل زیر است

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \text{تعریف نشده} & x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{cases}\quad ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل مقابل است و دورهٔ تناوب آن برابر π است.



۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f به‌ازای $x=\frac{k\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ تعریف نشده است و هرجا که تعریف می‌شود مقدار ۱ دارد. بنابراین نمودار آن به شکل زیر است و دورهٔ تناوب آن برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.



۷- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{|k|}$، بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|k|}=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow |k|=۶\Rightarrow k=\pm۶$$

۸- گزینهٔ ۲ دورهٔ تناوب تابع $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است. پس

$$\frac{۲\pi}{|a|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |a|=۴\Rightarrow a=\pm۴$$

اگر $a=۴$ آن‌گاه

$$f(x)=۴\sin ۴x+۴b\Rightarrow f(\frac{\pi}{۸})=۴\sin\frac{\pi}{۲}+۴b=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

$$f(x)=۴\sin ۴x-۲\Rightarrow f(\frac{\pi}{۲۴})=۴\sin\frac{\pi}{۶}-۲=۰$$

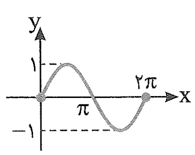
اگر $a=-۴$ آن‌گاه

$$f(x)=۴\sin(-۴x)-۴b$$

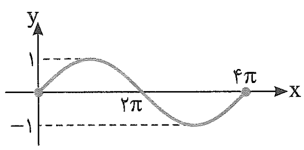
$$f(\frac{\pi}{۸})=۴\sin(-\frac{\pi}{۲})-۴b=۲\Rightarrow b=-\frac{۳}{۲}$$

$$f(x)=۴\sin(-۴x)+۶\Rightarrow f(\frac{\pi}{۲۴})=۴\sin(-\frac{\pi}{۶})+۶=۴$$

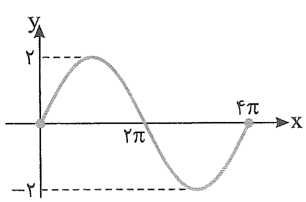
۹- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را بر $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کنیم (در ۲ ضرب می‌کنیم)، سپس عرض نقاط نمودار به‌دست آمده را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin\frac{x}{۲}$ به‌دست بیاید.



$y=\sin x$

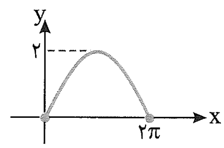


$y=\sin(\frac{x}{۲})$

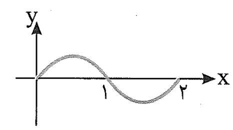


$y=۲\sin(\frac{x}{۲})$

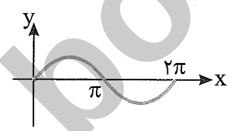
دورهٔ تناوب تابع برابر 4π است، پس نمودار تابع را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.



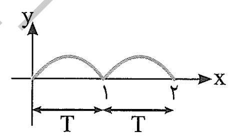
۱۰- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=|\sin(\pi x)|$ ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط روی نمودار را بر π تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin(\pi x)$ به‌دست آید. در آخر هم قسمتی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت زیر محور x را حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\sin(\pi x)|$ به‌دست آید.



$y=\sin(\pi x)$



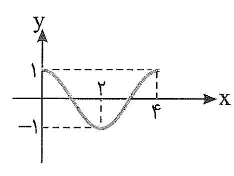
$y=\sin x$



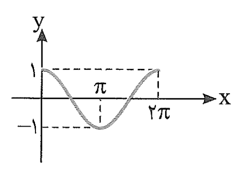
$y=|\sin(\pi x)|$

پس در یک دورهٔ تناوب، نمودار تابع به شکل گزینهٔ (۲) است.

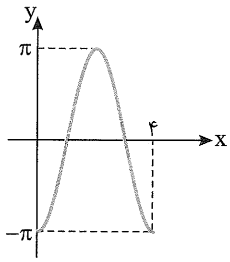
۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط روی نمودار را بر $\frac{\pi}{2}$ تقسیم می‌کنیم (در $\frac{2}{\pi}$ ضرب می‌کنیم) تا نمودار تابع $y=\cos(\frac{\pi x}{2})$ به‌دست آید. در نمودار اخیر عرض نقاط را π برابر کرده و نمودار را نسبت به محو طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\pi\cos(\frac{\pi x}{2})$ به‌دست آید. دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.



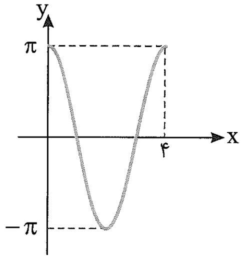
$y=\cos(\frac{\pi}{2}x)$



$y=\cos x$



$y=-\pi\cos(\frac{\pi x}{2})$



$y=\pi\cos(\frac{\pi}{2}x)$

۱۲- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که دورهٔ تناوب تابع f برابر 4π است. گزینه‌ها همگی به صورت $y=\pm 2\sin ax$ هستند. بنابراین دورهٔ تناوب آنها برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است، در نتیجه

$$\frac{2\pi}{|a|}=4\pi \Rightarrow |a|=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

اگر $a=\frac{1}{2}$ آن‌گاه $f(x)=2\sin\frac{x}{2}$. در نتیجه مقادیر f به‌ازای xهای بسیار کوچک مثبت (سمت راست نقطهٔ صفر) مثبت‌اند، درحالی که از روی شکل معلوم است که چنین نیست. بنابراین $a=-\frac{1}{2}$ و $f(x)=-2\sin\frac{x}{2}$.

۱۳- گزینهٔ ۳ همهٔ گزینه‌ها به صورت $y=2\sin|ax|$ هستند. برای رسم کردن نمودار این تابع‌ها باید نمودار $y=2\sin ax$ را رسم کنیم، سپس قسمت سمت چپ محور y را حذف کنیم و قرینهٔ قسمت سمت راست محور y را نسبت به محور y رسم کنیم. به این ترتیب، قسمتی از نمودار تابع f که سمت راست محور y است، نمودار تابعی به صورت $g(x)=2\sin ax$ است. چون نصف دورهٔ تناوب قسمت راست برابر 6π است، پس دورهٔ تناوب تابع g برابر 12π است. از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع $y=2\sin ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. در نتیجه

$$\frac{2\pi}{|a|}=12\pi \Rightarrow |a|=\frac{1}{6}$$

بنابراین $f(x)=2\sin|\frac{x}{6}|$.

۱۴- گزینهٔ ۲ دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ است و با توجه به شکل، $f(0)=f(a)=2$ و نقطهٔ a به اندازهٔ دو برابر دورهٔ تناوب یعنی $\frac{2\pi}{3}$ جلوتر از مبدأ است. پس $a=\frac{2\pi}{3}$.

۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq ۲k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq ۲k\,,k\in\mathbb{Z}\}$$

۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi-۲\pi x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \pi-۲\pi x\neq ۲k\pi+\pi$$

$$-۲\pi x\neq ۲k\pi\Rightarrow x\neq -k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین اعداد صحیح در دامنهٔ تابع قرار ندارند. یعنی $D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

۱۷- گزینهٔ ۲ شرایط زیر باید برای تعریف شدن تابع برقرار باشد:

$$۹-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۹\Rightarrow -۳<x<۳$$

$$\frac{۲\pi-\pi x}{۴}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۲\pi-\pi x\neq ۴k\pi+۲\pi$$

$$x\neq -۴k\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

یعنی اعداد صحیح مضرب ۴، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. بنابراین دامنهٔ f شامل عددهای صحیح ۲-، ۱-، ۱ و ۲ است.

۱۸- گزینهٔ ۱ چون $f(x)=\tan(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲})$، دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{\pi}{\frac{۱}{۲}}=۲\pi$.

۱۹- گزینهٔ ۲ دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۲$.

۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan x+\frac{۱}{\tan x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

پس

$$f(x)=\sin x(\frac{۱}{\sin x\cos x})=\frac{۱}{\cos x}$$

بنابراین

$$g(x)=\frac{۱}{f(x)}=\cos x$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع g برابر ۲π است.

۲۱- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{|a|}$ و دورهٔ تناوب تابع g برابر $\frac{\pi}{|\frac{۱}{a}|}$ است. بنابراین

$$\frac{\pi}{|a|}=۲\times\frac{\pi}{|\frac{۱}{a}|}\Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$-۳\le x\le ۱\Rightarrow -\frac{\pi}{۲}\le\frac{\pi x}{۶}\le\frac{\pi}{۶}$$

$$-\frac{\pi}{۳}\le\frac{\pi x}{۶}+\frac{\pi}{۶}\le\frac{\pi}{۳}$$

چون تابع تانژانت در بازه $[-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}]$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\sqrt{۳}\le\tan(\frac{\pi x}{۶}+\frac{\pi}{۶})\le\sqrt{۳}$$

و در نتیجه

$$۰\le|\tan(\frac{\pi x}{۶}+\frac{\pi}{۶})|\le\sqrt{۳}$$

پس برد تابع f به صورت $[۰,\sqrt{۳}]$ است.

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}<\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\frac{\pi}{۲}<\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}<\pi$$

اکنون از اکیداً صعودی بودن تابع تانژانت در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ نتیجه می‌شود

$$\tan(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})<۰\Rightarrow -\tan(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})>۰$$

$$۱-\tan(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴})>۱\Rightarrow f(x)>۱$$

بنابراین

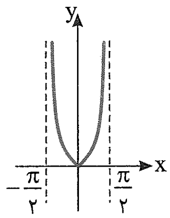
$$R_f=(۱,+\infty)$$

۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{۳}\le x<\frac{\pi}{۲}$ آن‌گاه $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{۳})$ ودرنتیجه $\tan x\ge-\sqrt{۳}$. بنابراین

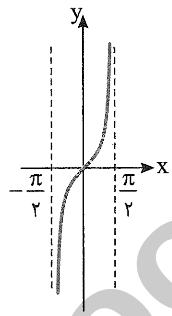
$$\frac{۲-m}{\sqrt{۳}}\ge-\sqrt{۳}\Rightarrow ۲-m\ge-۳\Rightarrow m\le ۵$$

پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

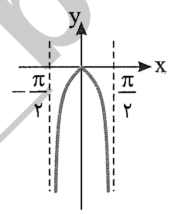
۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد، نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\tan x|$ به‌دست آید. اکنون نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|\tan x|$ به‌دست آید.



$y=|\tan x|$

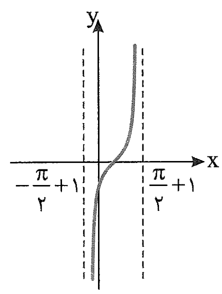


$y=\tan x$

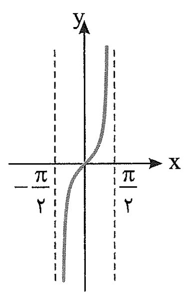


$y=-|\tan x|$

۲۶- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\tan x$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=\tan(x-1)$ به‌دست می‌آید که به شکل زیر است.

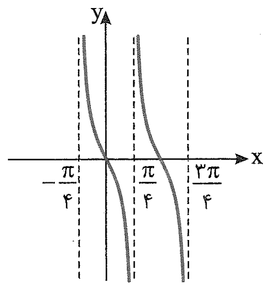


$y=\tan(x-1)$

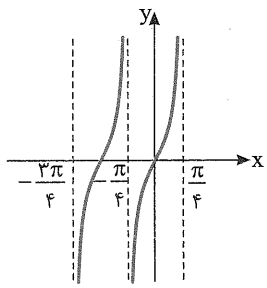


$y=\tan x$

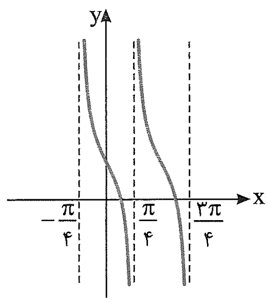
۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\tan x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\tan 2x$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\tan 2x$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.



$y=-\tan 2x$



$y=\tan 2x$



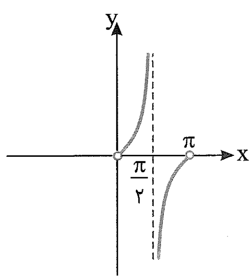
$f(x)=1-\tan 2x$

۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x(1+\tan^2 x)}=\frac{\sin x}{\cos^3 x(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})}$$

$$=\frac{\sin x}{(\cos^2 x+\sin^2 x)\cos x}=\tan x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم کنیم.



$y=\tan x$

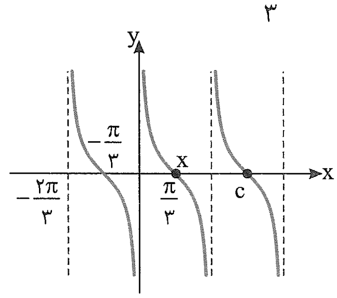
۲۹- گزینهٔ ۲ دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-a\pi|}$ است. از طرفی با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع $\frac{3\pi}{2}$ است. پس

$$\frac{\pi}{|-a\pi|}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow |a|=\frac{2}{3\pi}\Rightarrow a=\pm\frac{2}{3\pi}$$

چون تابع به‌ازای xهای مثبت و نزدیک صفر (سمت راست نقطهٔ صفر) مقادیر منفی دارد، پس $a=-\frac{2}{3\pi}$.

۳۰- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$. چون فاصلهٔ صفر تا a برابر با یک دورهٔ تناوب است و a منفی است، پس $a=-\frac{2\pi}{3}$. چون b وسط فاصلهٔ صفر تا a است، پس $b=-\frac{\pi}{3}$. به این ترتیب، از روی شکل زیر معلوم است که $x=\frac{\pi}{3}$ و $c=x+\frac{2\pi}{3}=\pi$.

در نتیجه $\frac{a}{b+c}=\frac{-\frac{2\pi}{3}}{-\frac{\pi}{3}+\pi}=-1$.



۳۱- گزینهٔ ۱ از نمودار رسم شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب، برابر ۳ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=1\Rightarrow\frac{2}{|b|}=1\Rightarrow b=\pm 2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس

$$|a|=3\Rightarrow a=\pm 3$$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}\Rightarrow y=3\sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}\Rightarrow y=-3\sin(2\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر ۶- است.

۳۲- گزینهٔ ۲ با توجه به مقدار تابع در $x=0$ مقدار a به‌دست می‌آید:

$$x=0\Rightarrow y=a+\sin(0)\xrightarrow{y=3}a=3$$

از روی نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر است با ۴=۱-۵، پس

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}=4\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$$

چون نمودار تابع در بازهٔ $[0,1]$ نزولی است، b باید مقدار منفی داشته باشد. بنابراین $b=-\frac{1}{2}$، به این ترتیب

$$y=3-\sin\frac{\pi x}{2}$$

مقدار تابع در $x=\frac{25}{3}$ برابر است با

$$y=3-\sin(\frac{25\pi}{6})=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

۳۳- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر ۶ است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|\pi}=\frac{2}{|b|}=6\Rightarrow|b|=\pm\frac{1}{3}$$

از طرف دیگر، a و b یا هر دو مثبت هستند یا هر دو منفی و چون همهٔ گزینه‌ها مثبت هستند، $b=\frac{1}{3}$ قابل قبول است.

همچنین بیشترین مقدار تابع ۲ است، پس $a=2$. بدین ترتیب

$$a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

۳۴- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(bx+\frac{\pi}{2})=-1$، پس

$$a+2=1\Rightarrow a=-1$$

در نتیجه

$$y=-1-2\cos(bx+\frac{\pi}{2})=-1+2\sin(bx)$$

با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{13\pi}{18}-\frac{\pi}{18}=\frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow b=\pm 3$$

برای $x>0$ نمودار تابع $y=-1+2\sin(bx)$ به صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=3$ قابل قبول است، یعنی $y=-1+2\sin(3x)$ و مقدار $a+b$ برابر است با ۲=۳+۱-.

۳۵- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر π است، پس

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=۲$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۱/۵ است، پس $|a|=\frac{۱}{۲}$. با توجه به آنکه تابع در شروع از مبدأ یک روند نزولی دارد باید a و b مختلف‌العلامت باشند. اگر فرض کنیم $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-۲$، آن‌گاه

$$y=۱+\frac{۱}{۲}\sin(-۲x-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow y(۰)=\frac{۳}{۴}$$

اما با توجه به نمودار تابع $۱<y(۰)<۱/۵$، پس این حالت غیرقابل قبول است. بنابراین $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=۲$، یعنی $a+b=\frac{۳}{۲}$.

۳۶- گزینهٔ ۱ دورهٔ تناوب تابع برابر ۴π است، پس

$$\frac{۲\pi}{|m|}=۴\pi\Rightarrow |m|=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$y=\frac{۱}{۲}+۲\cos\frac{x}{۲}$$

در نتیجه

$$y(\frac{۱۶\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۶\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$$

$$=\frac{۱}{۲}+۲\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}-۲\cos(\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$$

۳۷- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است، پس

$$\frac{۲\pi}{|m|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow m=\pm۳$$

در ابتدا تابع نزولی است، بنابراین $m=۳$ قابل قبول است، در نتیجه

$$y=۱-\sin(۳x)$$

بنابراین

$$y(\frac{۷\pi}{۶})=۱-\sin\frac{۷\pi}{۲}=۱-\sin(۳\pi+\frac{\pi}{۲})$$

$$=۱+\sin(\frac{\pi}{۲})=۱+۱=۲$$

۳۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، پس

$$۲T=\frac{۴}{۳}\Rightarrow T=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow |b|=۳$$

حداقل مقدار تابع برابر $۱-|a|$ است، پس

$$۱-|a|=-۱\Rightarrow |a|=۲$$

با توجه به اینکه $y(۰)=۱$ و مقادیر تابع در سمت راست صفر و نزدیک آن از یک بیشتر هستند، پس a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی‌اند. بنابراین $a+b=۵$ یا $a+b=-۵$.

۳۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha)$

$$\frac{۱-۲\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin ۲x}{\cos x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\cos x}=۲\sin x$$

۴۰- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه $\frac{۳\pi}{۸}$ رادیان، نصف $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان است، در تساوی $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{۳\pi}{۸}$ و در نتیجه

$$\cos ۲\times\frac{۳\pi}{۸}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۴}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱$$

$$\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱\Rightarrow-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}-۱$$

$$۲\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos^۲\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

۴۱- گزینهٔ ۱ در اتحاد $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ قرار می‌دهیم $\alpha=۲۲/۵^\circ$. در این صورت

$$\cos ۴۵^\circ=۱-۲\sin^۲ ۲۲/۵^\circ$$

$$\sin^۲ ۲۲/۵=\frac{۱-\cos ۴۵^\circ}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\sin ۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

بنابراین $a=۲$.

۴۲- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$۴\cos^۳ x\sin x-۴\sin^۳ x\cos x$$

$$=۴\sin x\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)$$

$$=۲(۲\sin x\cos x)(\cos ۲x)$$

$$=۲\sin ۲x\cos ۲x=\sin ۴x$$

۴۳- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sin^2 x$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$

$$\sin 84^\circ = \sin(90^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \cos(2\times 3^\circ)$$
$$= 2\cos^2 3^\circ - 1 = 2a^2 - 1$$

۴۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a = \sin 65^\circ = \cos 25^\circ$$

بنابراین

$$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ = \cos(2\times 25^\circ)$$
$$= 2\cos^2 25^\circ - 1 = 2a^2 - 1$$

۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$

$$\cos 66^\circ = \cos(90^\circ - 24^\circ) = \sin 24^\circ$$
$$= \sin(2\times 12^\circ) = 2\sin 12^\circ \cos 12^\circ$$
$$= 2\sin 12^\circ \sqrt{1-\sin^2 12^\circ} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $1-2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$، بنابراین

$$\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{-\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$
$$= -\frac{\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{1}{2\cos 10^\circ}$$

۴۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin 110^\circ = \sin(90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

بنابراین

$$\frac{\sin^2 110^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ}$$
$$= \frac{\cos(2\times 20^\circ)}{\sin 50^\circ} \qquad (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha)$$
$$= \frac{\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ} = 1$$

۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$
$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

بنابراین

$$3\cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ = 3\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$$
$$= 2\sin^2 15^\circ + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)$$
$$= 2\sin^2 15^\circ + 1 = 1 - \cos(2\times 15^\circ) + 1$$
$$= 2 - \cos 30^\circ = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$، بنابراین

$$\tan 2\alpha \tan\alpha + 1 = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1$$
$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha} + 1$$
$$= \frac{2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

۵۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$
$$\cos a = \frac{4}{5} \qquad (\text{حاده است } a)$$

بنابراین

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{7}{25}$$

در نتیجه $\sin 2a + \cos 2a = \frac{31}{25}$.

۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$
$$\cos\alpha = -\frac{3}{5} \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

به این ترتیب

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\times\frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

بنابراین $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7}$.

۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x=\frac{9}{10}$$

بنابراین

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\left(\frac{9}{10}\right)-1=\frac{4}{5}$$

۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$1+\cos 2\alpha=1+(2\cos^2\alpha-1)=2\cos^2\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{2(1+\sin^2\alpha)}{2\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

در نتیجه به کمک اتحاد $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ می‌توان نوشت

$$\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=1+\tan^2\alpha+\tan^2\alpha$$

$$=1+2\tan^2\alpha=1+2x^2$$

۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A=\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

بنابراین به‌ازای $x=\frac{\pi}{24}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{24}\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

۵۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $2\cos^2 x-1=\cos 2x$.

بنابراین

$$\sin\frac{\pi}{12}\left(2\cos^2\frac{\pi}{24}-1\right)=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{24}$$

$$=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

۵۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos^4 2x-\sin^4 2x$$

$$=(\cos^2 2x-\sin^2 2x)(\cos^2 2x+\sin^2 2x)$$

$$=\cos 4x\times 1=\cos 4x$$

بنابراین

$$2\sin 4x(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=2\sin 4x\cos 4x=\sin 8x$$

بنابراین $k=8$.

۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$،

بنابراین

$$\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}-\sin 40^\circ=\frac{\cos(2\times 40^\circ)}{\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}-\sin 40^\circ$$

$$=\frac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}-\sin 40^\circ$$

$$=(\cos 40^\circ+\sin 40^\circ)-\sin 40^\circ=\cos 40^\circ$$

۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که همواره

$$\frac{1-\cos 2a}{\sin 2a}=\frac{1+(2\sin^2 a-1)}{2\sin a\cos a}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر $\tan 20^\circ$ است.

۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 55^\circ=\cos(90^\circ-35^\circ)=\sin 35^\circ$$

بنابراین $\left(\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,\ 1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha\right)$

$$\frac{1+\cos 40^\circ}{\cos 55^\circ\cos 35^\circ}=\frac{1+\cos(2\times 20^\circ)}{\sin 35^\circ\cos 35^\circ}$$

$$=\frac{2\cos^2 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 70^\circ}=\frac{4\cos^2 20^\circ}{\sin(90^\circ-20^\circ)}=\frac{4\cos^2 20^\circ}{\cos 20^\circ}=4\cos 20^\circ$$

۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=2\Rightarrow\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{1+2\cos^2 x-1}=2$$

$$\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=2\Rightarrow\tan^2 x=2\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{2}$$

چون $\frac{\pi}{2}<x<\pi$، مقدار $\sqrt{2}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x=-\sqrt{2}$$

و در نتیجه $\cot x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1+2\cos^2 x-1}{2}=\cos^2 x$$

بنابراین

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=|\cos x|$$

چون $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$، پس $\cos x<0$. بنابراین $|\cos x|=-\cos x$

در نتیجه

$$-\cos x=2\sin x-\cos x-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x=\frac{1}{4}$$

۶۴- گزینهٔ ۲ از اتحاد $۱+\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\sqrt{۲+\sqrt{۲+۲\cos x}}=\sqrt{۲+\sqrt{۲(۱+\cos x)}}$$

$$=\sqrt{۲+\sqrt{۲\times ۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}=\sqrt{۲+۲|\cos\frac{x}{۲}|}$$

چون $\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲}$، پس

$$A=\sqrt{۲+۲\cos\frac{x}{۲}}=\sqrt{۲(۱+\cos\frac{x}{۲})}=\sqrt{۲\times ۲\cos^۲\frac{x}{۴}}$$

$$=۲|\cos\frac{x}{۴}|=۲\cos\frac{x}{۴}$$

۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$، بنابراین

$$\frac{\sin^۳ x}{۲\sin x-\sin ۲x}=\frac{\sin^۳ x}{۲\sin x-۲\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin^۲ x}{۲(۱-\cos x)}=\frac{۱-\cos^۲ x}{۲(۱-\cos x)}=\frac{۱+\cos x}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{۱+\cos x}{۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \cos x=\frac{۴}{۳}-۱=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه

$$\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱=\frac{۲}{۹}-۱=-\frac{۷}{۹}$$

۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۹\cos\theta+\frac{۱}{\cos\theta}=۶\Rightarrow ۹\cos^۲\theta+۱=۶\cos\theta$$

$$۹\cos^۲\theta-۶\cos\theta+۱=۰\Rightarrow (۳\cos\theta-۱)^۲=۰$$

در نتیجه

$$\cos\theta=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین

$$\cos ۲\theta=۲\cos^۲\theta-۱=۲(\frac{۱}{۳})^۲-۱=-\frac{۷}{۹}$$

۶۷- گزینهٔ ۴ چون

$$\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$$

پس

$$\cos ۲x=۳\sin^۴ x\Rightarrow ۱-۲\sin^۲ x=۳\sin^۴ x$$

بنابراین

$$۳\sin^۴ x+۲\sin^۲ x-۱=۰$$

اگر فرض کنیم $\sin^۲ x=t$، به معادلهٔ $۳t^۲+۲t-۱=۰$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارت‌اند از

$$t=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۱۲}}{۶}=-۱,\frac{۱}{۳}$$

بنابراین

$$\sin^۲ x=\frac{۱}{۳}$$

پس

$$\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

و در نتیجه

$$\tan^۲ x=\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin^۴\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۴\frac{\pi}{۱۲}$$

$$=(\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۲})^۲-۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

$$=۱-۲(\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲})^۲$$

$$=۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۱۲})^۲\qquad(\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)$$

$$=۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶})^۲=۱-۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})^۲=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\tan^۲ x+\cot^۲ x=(\tan x+\cot x)^۲-۲\tan x\cot x$$

$$=(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^۲-۲$$

$$=(\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\cos x\sin x})^۲-۲$$

$$=(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x})^۲-۲=\frac{۴}{\sin^۲ ۲x}-۲$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=\frac{\pi}{۸}$، به‌دست می‌آید

$$\tan^۲\frac{\pi}{۸}+\cot^۲\frac{\pi}{۸}=\frac{۴}{\sin^۲\frac{\pi}{۴}}-۲=\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}-۲=۶$$

۷۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۳$$

$$-۳\sin^۲ x\cos^۲ x(\sin^۲ x+\cos^۲ x)$$

$$\frac{۴}{۵}=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x\Rightarrow ۳(\sin x\cos x)^۲=\frac{۱}{۵}$$

$$(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین

$$\cos^۲ ۲x=۱-\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$$

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

در نتیجه اگر $x=\frac{۵\pi}{۱۶}$، آن‌گاه

$$\cos(۲\times\frac{۵\pi}{۱۶}) = ۱-۲\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۶} \Rightarrow \cos\frac{۵\pi}{۸} = ۱-۲\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۶}$$

یعنی $۲\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۶}+\cos\frac{۵\pi}{۸}=۱$.

۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(۲\cos^۲\alpha = \cos ۲\alpha + ۱)$

$$\frac{۲\cos^۲(۴۵^\circ+x)+\sin ۲x}{۲\cos^۲(۴۵^\circ-x)-\sin ۲x} = \frac{\cos ۲(۴۵^\circ+x)+۱+\sin ۲x}{\cos ۲(۴۵^\circ-x)+۱-\sin ۲x}$$

$$=\frac{\cos(۹۰^\circ+۲x)+۱+\sin ۲x}{\cos(۹۰^\circ-۲x)+۱-\sin ۲x} = \frac{-\sin ۲x+۱+\sin ۲x}{\sin ۲x+۱-\sin ۲x}=۱$$

۷۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{۱+\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \frac{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}$$

$$=\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$$

بنابراین

$$\frac{۱-\tan^۲\frac{\pi}{۸}}{۱+\tan^۲\frac{\pi}{۸}} = \cos(۲\times\frac{\pi}{۸}) = \cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۷۴- گزینهٔ ۳ چون $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$، پس

$$\frac{\cos ۳x}{\sin ۶x+\cos ۳x}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\cos ۳x}{۲\sin ۳x\cos ۳x+\cos ۳x}=\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{\cos ۳x}{\cos ۳x(۲\sin ۳x+۱)}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{۱}{۲\sin ۳x+۱}=\frac{۳}{۵}$$

از این تساوی به‌دست می‌آید $\sin ۳x=\frac{۱}{۳}$، در نتیجه

$$\frac{۱}{\sin ۳x}=۳$$

۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin ۷۵^\circ \sin ۱۵^\circ = \sin(۹۰^\circ-۱۵^\circ)\sin ۱۵^\circ = \cos ۱۵^\circ \sin ۱۵^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۴}$$

۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin ۵۰^\circ = \sin(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cos ۴۰^\circ$$

بنابراین

$$\frac{\sin ۵۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\cos ۴۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۸۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sin(۹۰^\circ-۱۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}$$

۷۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin\frac{۳\pi}{۸}=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸})=\cos\frac{\pi}{۸}$$

بنابراین $(\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲})$

$$\cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{۳\pi}{۸}=\cos^۲\frac{\pi}{۸}=\frac{۱+\cos(۲\times\frac{\pi}{۸})}{۲}$$

$$=\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۴}}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$$

۷۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $۱۰x+۲x=۱۲x=\frac{\pi}{۲}$، پس

$$\cos ۱۰x\cos ۲x=\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\sin ۴x$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin(۴\times\frac{\pi}{۲۴})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

۷۹- گزینهٔ ۲ پی‌درپی از اتحاد $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin a\cos a\cos ۲a\cos ۴a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a\cos ۲a\cos ۴a$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴a)\cos ۴a=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}\sin ۸a)$$

$$=\frac{۱}{۸}\sin\frac{۸\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۸}\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۱}{۸}\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})$$

$$=\frac{۱}{۸}(\sin\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$$

۸۰- گزینهٔ ۳ دوبار از اتحاد $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$۱۶\sin x\cos ۲x=\frac{۳}{\cos x}\Rightarrow ۱۶\cos x\sin x\cos ۲x=۳$$

$$۱۶(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)\cos ۲x=۳\Rightarrow ۸(\frac{۱}{۲}\sin ۴x)=۳$$

$$۴\sin ۴x=۳\Rightarrow\sin ۴x=\frac{۳}{۴}$$

۸۱- گزینهٔ ۴ ابتدا با استفاده از اتحاد

$$\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$$

مقدار $\cos ۲x$ را حساب می‌کنیم:

$$\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱=۲(\frac{۲}{۳})^۲-۱=\frac{۸}{۹}-۱=-\frac{۱}{۹}$$

مجدداً با استفاده از همین اتحاد مقدار $\cos ۴x$ را حساب می‌کنیم:

$$\cos ۴x=۲\cos^۲ ۲x-۱=۲(-\frac{۱}{۹})^۲-۱=\frac{۲}{۸۱}-۱=-\frac{۷۹}{۸۱}$$

۸۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$78^\circ+12^\circ=90^\circ \Rightarrow \cos 12^\circ=\sin 78^\circ=k$$

از طرف دیگر، $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. بنابراین

$$\cos 48^\circ=2\cos^2 24^\circ-1 \quad (1)$$

همین‌طور $\cos 24^\circ=2\cos^2 12^\circ-1=2k^2-1$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\cos 48^\circ=2(2k^2-1)^2-1=8k^4-8k^2+1$$

۸۳- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$A=\left(\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}\right)^2-1$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-1$$

$$=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}+\frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$=\frac{\sin^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ}{\sin 75^\circ\cos 75^\circ}=\frac{1}{\sin 75^\circ\cos 75^\circ}$$

$$=\frac{2}{2\sin 75^\circ\cos 75^\circ}=\frac{2}{\sin 150^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin(180^\circ-30^\circ)}=\frac{2}{\sin 30^\circ}=4$$

۸۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\tan 2x+\cot 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{\sin^2 2x+\cos^2 2x}{\cos 2x\sin 2x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 4x}=\frac{2}{\sin 4x}$$

بنابراین $\frac{2}{\sin 4x}=8$، یعنی $\sin 4x=\frac{1}{4}$.

۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\tan 50^\circ=\tan(90^\circ-40^\circ)=\cot 40^\circ$$

بنابراین

$$\tan 50^\circ-\tan 40^\circ=\cot 40^\circ-\tan 40^\circ=\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$=\frac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cos(2\times 40^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 40^\circ)}$$

$$=\frac{2\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}=2\cot 80^\circ=2\tan 10^\circ$$

بنابراین $\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\tan 10^\circ$.

۸۷- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ}-\frac{\cos 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ}=\frac{\sin^2 22/5^\circ-\cos^2 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ\times\cos 22/5^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(2\times 22/5^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 22/5^\circ)}$$

$$=\frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ}=-2$$

۸۸- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{4}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

$$1+\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2x=-\frac{3}{4}$$

۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف رابطه را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\frac{16}{9}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{16}{9}$$

$$2\sin x\cos x=\frac{7}{9}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{7}{18}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{1+\frac{7}{18}}{\frac{4}{3}}=\frac{25}{24}$$

۹۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin 165^\circ=\sin(90^\circ+75^\circ)=\cos 75^\circ$$

از طرف دیگر،

$$(\cos 75^\circ-\sin 75^\circ)^2$$

$$=\sin^2 75^\circ+\cos^2 75^\circ-2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$$

$$=1-\sin 150^\circ=1-\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$(\sin 165^\circ-\sin 75^\circ)^8=((\sin 165^\circ-\sin 75^\circ)^2)^4=\frac{1}{16}$$

۹۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin 20^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ$$

و

$$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$$

بنابراین

$$1+\sin 20^\circ = 1+\cos 70^\circ = 1+\cos(2\times 35^\circ) = 2\cos^2 35^\circ$$

همچنین $\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$، بنابراین

$$\frac{1+\sin 20^\circ}{\sin 55^\circ} = \frac{2\cos^2 35^\circ}{\cos 35^\circ} = 2\cos 35^\circ$$

۹۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

و

$$1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)^2$$

بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

به این ترتیب

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\cos x - 3\sin x = \sin x + \cos x$$

$$\cos x = 2\sin x \Rightarrow \cot x = 2$$

بنابراین

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot^2 x = 1+4 = 5$$

و چون x حاده است، پس $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

۹۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$1-\sin 10^\circ = \sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ - 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ$$

$$= (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2$$

به همین ترتیب

$$1+\sin 10^\circ = (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2$$

بنابراین

$$A = \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2}$$

$$= |\sin 5^\circ - \cos 5^\circ| + |\sin 5^\circ + \cos 5^\circ|$$

با توجه به اینکه $\cos 5^\circ > \sin 5^\circ > 0$ نتیجه می‌شود

$$A = -\sin 5^\circ + \cos 5^\circ + \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 2\cos 5^\circ$$

۹۴- گزینهٔ ۴ از اتحاد $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{2}\sin 10^\circ - 1} + 1 = \frac{1-2\sin^2 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 10^\circ - 1} + 1$$

$$= \frac{(1-\sqrt{2}\sin 10^\circ)(1+\sqrt{2}\sin 10^\circ)}{\sqrt{2}\sin 10^\circ - 1} + 1$$

$$= -1-\sqrt{2}\sin 10^\circ + 1 = -\sqrt{2}\sin 10^\circ$$

$$= -\sqrt{2}\cos 80^\circ$$

۹۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ و $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. بنابراین

$$\frac{1+\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{1+\cos 10^\circ + 2\cos^2 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ + 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ(1+2\cos 10^\circ)}{\sin 10^\circ(1+2\cos 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \cot 10^\circ$$

۹۶- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{1+\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{1+\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{1+2\sin 10^\circ \cos 10^\circ - (1-2\sin^2 10^\circ)}{1+2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + 2\cos^2 10^\circ - 1}$$

$$= \frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + 2\sin^2 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + 2\cos^2 10^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 10^\circ(\cos 10^\circ + \sin 10^\circ)}{2\cos 10^\circ(\sin 10^\circ + \cos 10^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \tan 10^\circ$$

۹۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$، پس

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$$

و در نتیجه

$$\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} = \frac{a}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{a}{2}$$

$$2\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{a}{2}$$

اگر از دو طرف این تساوی عدد ۱ را کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{a}{2} - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{a-2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a-2}{2}$$

پس $a = \sqrt{2}+2$.

۹۸- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول فرض کنید

$$A=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$A^2=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ-2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{1-\sin 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

در نتیجه $A=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. چون $\cos 15^\circ>\sin 15^\circ>0$، پس A مثبت است. بنابراین $A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

راه‌حل دوم صورت و مخرج کسر داده شده را در $\cos 15^\circ+\sin 15^\circ$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}{(\cos 15^\circ+\sin 15^\circ)^2}$$

$$=\frac{\cos(2\times 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{\cos 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۹۹- گزینهٔ ۴ چون $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=-3\times\frac{1+\cos(2\pi x)}{2}$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{2\pi}=1$.

۱۰۰- گزینهٔ ۳ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=\frac{5}{3}\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{3}\times\frac{1-\cos 2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$=\frac{5}{6}\left(1-\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

۱۰۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$، بنابراین

$$f(x)=\cos 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}-1=\frac{3\cos 2x-1}{2}$$

در نتیجه، دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

۱۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\cos^2 x\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ است.

۱۰۴- گزینهٔ ۳ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=1-4\times\frac{1-\cos 2(5+ax)}{2}=-1+2\cos(10+2ax)$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2a|}=\frac{\pi}{|a|}$، در نتیجه

$$\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow|a|=3\Rightarrow a=\pm 3$$

۱۰۵- گزینهٔ ۱ چون $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=\sqrt{2}\cos^2(mx-4)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos 2(mx-4))$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos(2mx-8))$$

بنابراین

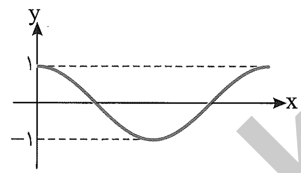
$$\frac{2\pi}{|2m|}=\frac{3\pi}{4}$$

$$|m|=\frac{4}{3}\Rightarrow m=\pm\frac{4}{3}$$

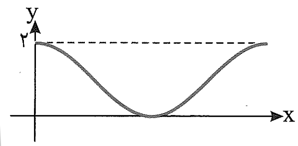
۱۰۶- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است

$$y=\cos^2(\frac{x}{2})=\frac{1+\cos x}{2}$$

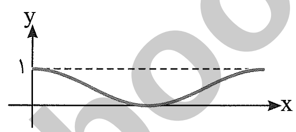
بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع $y=1+\cos x$ به‌دست بیاید، سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{1+\cos x}{2}$ به دست بیاید.



$y=\cos x$



$y=1+\cos x$

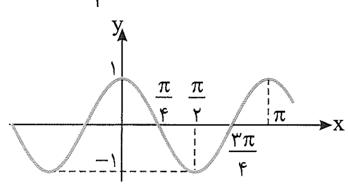


$y=\frac{1+\cos x}{2}$

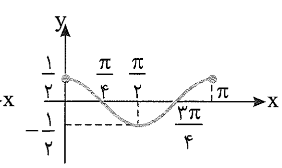
۱۰۷- گزینهٔ ۲ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

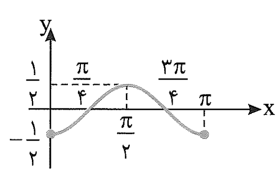
ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos 2x$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{2}\cos 2x$ به‌دست بیاید. در آخر قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ به‌دست بیاید. دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{2}=\pi$.



$y=\cos 2x$



$y=\frac{1}{2}\cos 2x$

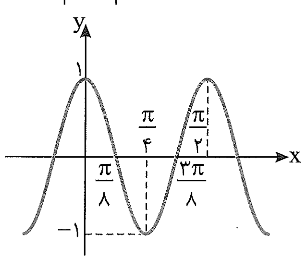


$y=-\frac{1}{2}\cos 2x$

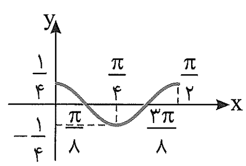
۱۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x$$
$$=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$=1-\frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

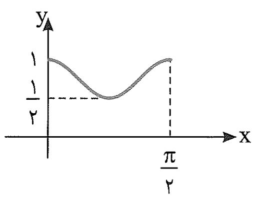
ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم (در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم)، تا نمودار تابع $y=\cos 4x$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{4}\cos 4x$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را $\frac{3}{4}$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید. دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.



$y=\cos 4x$



$y=\frac{1}{4}\cos 4x$

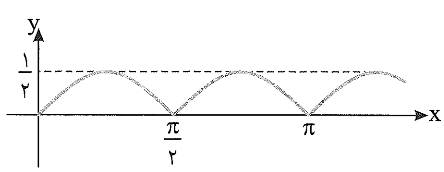


$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

۱۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=|\sin x\cos x|=|\frac{1}{2}\sin 2x|$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم، سپس طول و عرض نقاط آن را نصف کنیم و در آخر قسمتی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه کنیم.



$y=|\frac{1}{2}\sin 2x|$

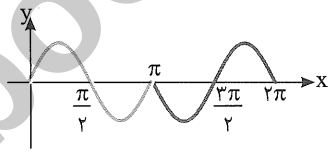
اکنون کافی اســت نمودار تابع را فقط در یک دورهٔ تناوب مثلاً در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم.

۱۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin x\cos x & \sin x\geq 0 \\ -2\sin x\cos x & \sin x<0 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} \sin 2x & \sin x\geq 0 \\ -\sin 2x & \sin x<0 \end{cases}$$

بنابراین در بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است باید نمودار $y=\sin 2x$ را رسم کنیم و در بازه‌هایی که $\sin x$ منفی است باید نمودار $y=-\sin 2x$ را رسم کنیم.

مثلاً در بازهٔ $[0,\pi]$ نمودار $y=\sin 2x$ و در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ نمودار $y=-\sin 2x$ را رسم می‌کنیم.



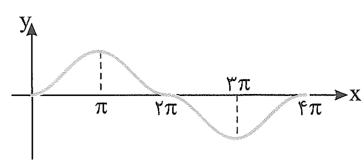
از تکرار نمودار فوق، نمودار تابع f روی $\mathbb{R}$ به‌دست می‌آید.

۱۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^2\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2}\geq 0 \\ -2\sin^2\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2}<0 \end{cases}$$
$$f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & \sin\frac{x}{2}\geq 0 \\ -1+\cos x & \sin\frac{x}{2}<0 \end{cases}$$

بنابراین در بازه‌هایی که $\sin\frac{x}{2}$ نامنفی است باید نمودار $y=1-\cos x$ را رسم کنیم و در بازه‌هایی که $\sin\frac{x}{2}$ منفی است، باید نمودار تابع $y=\cos x-1$ را رسم کنیم.

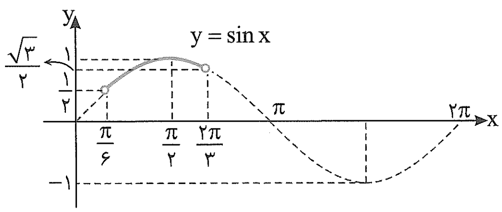
مثلاً در بازهٔ $[0,2\pi]$ باید نمودار $y=1-\cos x$ و در بازهٔ $[2\pi,4\pi]$ باید نمودار $y=\cos x-1$ را رسم کنیم.



از تکرار نمودار تابع فوق، نمودار تابع f روی $\mathbb{R}$ به‌دست می‌آید.

۱۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{6}<2x<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}<\sin 2x\leq 1$$
$$\frac{1}{2}<2\sin x\cos x\leq 1$$
$$\frac{1}{4}<\sin x\cos x\leq\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4}<\frac{m}{4}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow 1<m\leq 2$$



۱۱۳- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^2 x(\sin^2 x-1)=-\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=-(\sin x\cos x)^2=-(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$$
$$=-\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

چون

$$-1\leq\sin 2x\leq 1$$

پس

$$0\leq\sin^2 2x\leq 1\Rightarrow-\frac{1}{4}\leq-\frac{1}{4}\sin^2 2x\leq 0$$

در نتیجه برد تابع f بازهٔ $[-\frac{1}{4},0]$ است.

۱۱۴- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2(\sin x\cos x)^2$$
$$=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

چون

$$-1\leq\sin 2x\leq 1$$

پس

$$0\leq\sin^2 2x\leq 1\Rightarrow-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{2}\sin^2 2x\leq 0$$
$$\frac{1}{2}\leq 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\leq 1\Rightarrow\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$$

پس برد تابع f بازهٔ $[\frac{1}{2},1]$ است.

۱۱۵- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin(x+\frac{7\pi}{36})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x+\frac{7\pi}{36}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{18}$$

$$x+\frac{7\pi}{36}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{10\pi}{18}$$

پس i می‌تواند برابر ۱ یا ۱۰ باشد.

۱۱۶- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\cos(x+\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{24}$$

$$x+\frac{\pi}{8}=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{7\pi}{24}$$

بنابراین i می‌تواند مقادیر ۱ و ۷− را داشته باشد.

۱۱۷- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت $\sin 2x=\frac{1}{2}$ می‌نویسیم.

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را معین می‌کنیم.

k	۰	۱	۲
$x=k\pi+\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\pi+\frac{\pi}{12}$	$2\pi+\frac{\pi}{12}$ (غ.ق.ق)

k	۰	۱	۲
$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi+\frac{5\pi}{12}$	$2\pi+\frac{5\pi}{12}$ (غ.ق.ق)

بنابراین مجموع جواب‌های معادله که در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار دارند، برابر است با

$$\frac{\pi}{12}+\pi+\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\pi+\frac{5\pi}{12}=3\pi$$

۱۱۸- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطهٔ x قطع کند، $f(x)=0$. پس

$$\sin(2x-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{(3k+1)\pi}{6}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\pi)$ را به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{(3k+1)\pi}{6}<\pi$$

$$-3<3k+1<6\Rightarrow -\frac{4}{3}<k<\frac{5}{3}$$

بنابراین به‌ازای $k=-1$، $k=0$ و $k=1$ سه مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌هاست.

۱۱۹- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\sin 3x=1$، نمودار تابع f حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(4k+1)\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	۱−	۰	۱	۲
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع ۴ بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد.
برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آنها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi\le(4k+1)\frac{\pi}{6}\le 2\pi\Rightarrow -6\le 4k+1\le 12$$

$$-7\le 4k\le 11\Rightarrow -\frac{7}{4}\le k\le\frac{11}{4}$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{-1,0,1,2\}$$

۱۲۰- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\cos 4x=1$، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	۱−	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۱۲۱- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^2(5x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin(5x-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{1}{2}=\sin(\pm\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است:

$$5x-\frac{\pi}{3}=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

$$5x=k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{k\pi}{5}+\frac{3\pi}{30}$$

$$5x=k\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{30}$$

بنابراین i می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آنها برابر ۴ است.

۱۲۲- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$3x=2k\pi+2x \Rightarrow x=2k\pi$$

$$3x=2k\pi-2x \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{5}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هم هستند. (مثلاً اگر در $\frac{2k\pi}{5}$ قرار دهید $k=5$ آن‌گاه جواب 2π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود) پس جواب‌های کلی معادله به صورت $\frac{2k\pi}{5}$ هستند.

۱۲۳- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت $\sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+x \Rightarrow \frac{\pi}{3}=2k\pi \ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x$$

$$2x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$ (غ.ق.ق)

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

۱۲۴- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2k\pi=-\frac{7\pi}{12}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{13\pi}{24}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-2\pi,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲	۱-	۲-	۳-
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$	$\frac{-59\pi}{24}$ (غ.ق.ق)

پس معادله چهار جواب در بازهٔ فوق دارد.

۱۲۵- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت $\cos 2x=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$2x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{(8k+1)\pi}{4}$$

$$2x=2k\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{(8k-1)\pi}{12}$$

اکنون مقادیر مختلف و صحیح را به k می‌دهیم و مقدار x را حساب می‌کنیم

k	۰	۱	۱-
$x=\frac{(8k+1)\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{7\pi}{4}$ (غ.ق.ق)

k	۰	۱	۲	۱-	۲-
$x=\frac{(8k-1)\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{4}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{17\pi}{12}$ (غ.ق.ق)

بنابراین معادله در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ چهار جواب دارد.

۱۲۶- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{2x}{3}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})=\cos\frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{2x}{3}\Rightarrow x=\frac{(-12k+3)\pi}{7}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2k\pi-\frac{2x}{3}\Rightarrow x=12k\pi-3\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم. واضح است که هیچ‌یک از جواب‌های به صورت $x=12k\pi-3\pi$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار ندارند. پس جواب‌های به صورت $x=\frac{(-12k+3)\pi}{7}$ را بررسی می‌کنیم

k	۰	۱	۱-
x	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{-9\pi}{7}$ (غ.ق.ق)	$\frac{15\pi}{7}$ (غ.ق.ق)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۱۲۷- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\cos(2x-\frac{\pi}{9})=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

پس جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{11\pi}{18}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\sin 2x \Rightarrow \cos(2x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{16}$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}+2x \Rightarrow 2k\pi=\frac{3\pi}{4} \quad (\text{غ.ق.ق})$$

۱۲۹- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\cos 2x \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \Rightarrow x=\frac{(8k+1)\pi}{12}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+2x \Rightarrow x=\frac{(-8k-1)\pi}{4}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم

k	0	1	2	-1	-2
$x=(8k+1)\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{12}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{15\pi}{12}$ (غ.ق.ق)

k	0	1	-1
$x=-(8k+1)\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{9\pi}{4}$ (غ.ق.ق)	$\frac{7\pi}{4}$ (غ.ق.ق)

جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{12}$، $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{-7\pi}{12}$ و $-\frac{\pi}{4}$ ولی $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{-\pi}{4}$ قابل قبول نیستند زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شوند. پس تعداد جواب‌ها در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ برابر ۲ است.

۱۳۰- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2\sin^2 x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\sin x-1)=0$$

$$\sin x=0 \quad \text{یا} \quad \sin x=\frac{1}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ عبارت‌اند از π، $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ که مجموع آنها برابر 2π است.

۱۳۱- گزینهٔ ۲ با شرط $\sin x\neq 0$ معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\sin^2 x+\sin x\cos x=1 \Rightarrow \sin x\cos x=1-\sin^2 x$$

$$\sin x\cos x=\cos^2 x \Rightarrow \cos x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}=k\pi+\frac{2\pi}{4}$$

$$\cos x=\sin x \Rightarrow \sin x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+x \Rightarrow k=-\frac{1}{4} \quad (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر i به صورت $\{1,2\}$ است.

۱۳۲- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\sin 2x$، آن‌گاه معادله به صورت $2t^2-5t+3=0$ درمی‌آید و از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود $t=1$ و $t=\frac{3}{2}$. بنابراین

$$\sin 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin 2x=\frac{3}{2} \quad (\text{غ.ق.ق})$$

۱۳۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$2\cos^2 2x+3\cos 2x+1=0$$

$$(2\cos 2x+1)(\cos 2x+1)=0$$

بنابراین

$$\cos 2x=-1 \Rightarrow 2x=2k\pi+\pi$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ که بزرگ‌ترین جواب واقع در این بازه $\frac{5\pi}{3}$ است.

۱۳۴- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin(\pi+x)=-\sin x$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^2 x-\sin x-2=0 \Rightarrow (\sin x+1)(\sin x-2)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\sin x-2=0 \Rightarrow \sin x=2 \quad (\text{غ.ق.ق})$$

$$\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\sin x$ $(-۱\leq t\leq ۱)$ معادله به صورت $۲t^۳-t^۲-۸t+۴=۰$ درمی‌آید. ابتدا این معادله را حل می‌کنیم:

$$(۲t^۳-۸t)+(-t^۲+۴)=۰$$

$$۲t(t^۲-۴)-(t^۲-۴)=۰$$

$$(t^۲-۴)(۲t-۱)=۰$$

$$t=۲\ (\text{غ.ق.ق}),\ t=-۲\ (\text{غ.ق.ق}),\ t=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\sin x=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$.

۱۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$۲(۱-\sin^۲ x)+۳\sin x-۳=۰$$

$$۲\sin^۲ x-۳\sin x+۱=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به صورت $۲t^۲-۳t+۱=۰$ درمی‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t=۱$ و $t=\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\sin x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ را معین کرده‌ایم که تعداد آنها سه‌تاست.

۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$۲\sin^۲ x+\sin^۲ x+\cos^۲ x-(\sqrt{۲}-۲)\sin x-(\sqrt{۲}+۱)=۰$$

$$۲\sin^۲ x-(\sqrt{۲}-۲)\sin x-\sqrt{۲}=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$ معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$۲t^۲-(\sqrt{۲}-۲)t-\sqrt{۲}=۰$$

این معادله را حل می‌کنیم

$$t=\frac{\sqrt{۲}-۲\pm\sqrt{(\sqrt{۲}-۲)^۲+۸\sqrt{۲}}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}-۲\pm\sqrt{(\sqrt{۲}+۲)^۲}}{۴}$$

$$t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ t=-۱$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به صورت زیر هستند

$$\sin x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲},\quad \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}$$

پس معادله سه جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۱۳۸- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=\sin x$ معادله به صورت $۴t+\frac{\sqrt{۳}}{t}=۲+۲\sqrt{۳}$ درمی‌آید. پس

$$۴t^۲+\sqrt{۳}=(۲+۲\sqrt{۳})t$$

$$t^۲-۲(۱+\sqrt{۳})t+\sqrt{۳}=۰$$

ابتدا این معادله را حل می‌کنیم

$$\Delta=۴(۱+\sqrt{۳})^۲-۱۶\sqrt{۳}=۴(۱-\sqrt{۳})^۲$$

$$t=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})+\sqrt{۴(۱-\sqrt{۳})^۲}}{۸}\Rightarrow t=\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به صورت زیر هستند

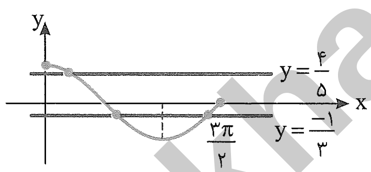
$$\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}$$

مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر ۲π است.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خطوط $y=-\frac{۱}{۳}$ و $y=\frac{۴}{۵}$ معادلهٔ $\cos x=\frac{۴}{۵}$ در بازهٔ $[۰,\frac{۳\pi}{۲}]$ یک جواب دارد و معادلهٔ $\cos x=-\frac{۱}{۳}$ در این بازه دو جواب دارد.

پس معادلهٔ مورد نظر مسئله در بازهٔ فوق ۳ جواب دارد.



۱۴۰- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

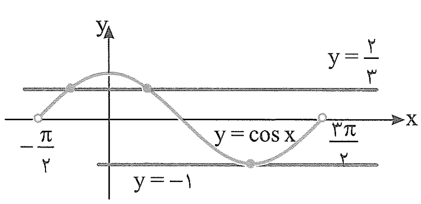
$$۲(۱-\cos^۲ x)-\cos^۲ x-\cos x=۰$$

$$۳\cos^۲ x+\cos x-۲=۰\Rightarrow(\cos x+۱)(۳\cos x-۲)=۰$$

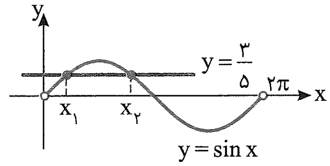
$$\cos x=-۱\ ,\ \cos x=\frac{۲}{۳}$$

با توجه به نمودار زیر معادلهٔ $\cos x=-۱$ یک جواب و معادلهٔ $\cos x=\frac{۲}{۳}$ دو جواب در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ دارد.

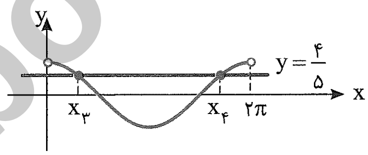
پس معادلهٔ اصلی ۳ جواب در بازهٔ مورد نظر دارد.



۱۴۱- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ و خط $y=\frac{۳}{۵}$ معادلهٔ $\sin x=\frac{۳}{۵}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



همچنین با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{۴}{۵}$ معادلهٔ $\cos x=\frac{۴}{۵}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد. ولی توجه کنید که یکـی از این جواب‌ها $(x_۳)$ همان جواب معادلهٔ $\sin x=\frac{۳}{۵}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ است $(x_۱)$. زیرا $(\frac{۳}{۵})^۲+(\frac{۴}{۵})^۲=۱$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر مسئله سه جواب متمایز در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



۱۴۲- گزینهٔ ۱ با شـرط $\sin ۲x\neq ۰$ معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{\sin ۲x}\Rightarrow \sin ۲x=\cos x$$

$$۲\sin x\cos x=\cos x$$

$$\cos x=۰\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$.

۱۴۳- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=\sqrt{۲}\sin ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x(\cos ۲x-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}$$

$$\cos ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۸}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از

$$۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{\pi}{۸},\frac{۷\pi}{۸}$$

پس مجموع جواب‌های واقع در این بازه برابر است با $\frac{۲۰\pi}{۸}$.

۱۴۴- گزینهٔ ۴ معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x-\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=۰$$

$$\sin ۲x(۲\cos ۲x-\frac{۱}{\cos ۲x})=۰$$

$$\sin ۲x(\frac{۲\cos^۲ ۲x-۱}{\cos ۲x})=۰$$

$$\frac{\sin ۲x\cos ۴x}{\cos ۲x}=۰$$

بنابراین

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۴x=۰\Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۸}$، $\frac{۳\pi}{۸}$، $\frac{۵\pi}{۸}$ و $\frac{۷\pi}{۸}$.

۱۴۵- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد $\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$ معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$-\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{۵\pi}{۶}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است

$$۲x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۲x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$$

$$x=k\pi-\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین $\frac{۲\pi}{۳}$ جواب این معادله نیست.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\cos ۲x=\cos^۲ x\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱=\cos^۲ x$$

$$\cos^۲ x=۱\Rightarrow \cos x=\pm ۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$x=۲k\pi\ \text{یا}\ x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و ۲π.

۱۴۷- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\cos^4 x-\sin^4 x=-1$$

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=-1$$

$$1\times\cos 2x=-1$$

$$\cos 2x=-1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$2x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$.

۱۴۸- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$1+\cos\frac{x}{2}=-\cos x\Rightarrow 1+\cos\frac{x}{2}=-2\cos^2\frac{x}{2}+1$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{4\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌ازای $k=0$ به‌دست می‌آیند

که π و $\frac{4\pi}{3}$ هستند و مجموع آنها $\frac{7\pi}{3}$ است.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=1$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x=1$$

$$\cos 4x=-\cos 2x$$

$$\cos 4x=\cos(\pi-2x)$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$4x=2k\pi+\pi-2x\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{6}$$

$$4x=2k\pi-\pi+2x\Rightarrow x=(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

جواب‌های معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارند عبارت‌اند از

$\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{6}$.

۱۵۰- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$8\cos^4 x-11(2\cos^2 x-1)+1=0$$

$$8\cos^4 x-22\cos^2 x+12=0$$

$$4\cos^4 x-11\cos^2 x+6=0$$

$$(\cos^2 x-2)(4\cos^2 x-3)=0$$

بنابراین

$$\cos^2 x=2\Rightarrow\cos=\pm\sqrt{2}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$\cos^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x(1-\sin^2 x)-\cos x(1-\cos^2 x)=0$$

$$\sin x\cos^2 x-\cos x\sin^2 x=0$$

$$\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=0$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$، 2π، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آنها برابر است با $\frac{13\pi}{2}$.

۱۵۲- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x)$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)$$

$$-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0$$

$$(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=0$$

$$(\cos x-\sin x)(1-\sin x)(1-\cos x)=0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

$$\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x=1\Rightarrow x=0,2\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۵۳- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$4(\sin^4 x+\cos^4 x)=1+4\sin^2 2x$$

$$4((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x)=1+4\sin^2 2x$$

$$4-8\sin^2 x\cos^2 x=1+4\sin^2 2x$$

$$4-2\sin^2 2x=1+4\sin^2 2x\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از

$$\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}$$

که مجموع آنها برابر است با 2π.

۱۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-2(\sin x\cos x)^2=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2})$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

با توجه به اتحاد بالا معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 2x+\cos^4 2x$$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 8x\Rightarrow \cos 4x=\cos 8x$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است:

$$8x=2k\pi+4x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$8x=2k\pi-4x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

واضح است که جواب $\frac{k\pi}{6}$ شامل تمام جواب‌های به صورت $\frac{k\pi}{2}$ هم می‌شود و جواب کلی معادله همان $\frac{k\pi}{6}$ است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$2(\sin^2 x+\cos^2 x+\sin 2x)=3$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$$

$$x=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۱۵۶- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)$$

$$=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)$$

$$=2(1+\sin x\cos x)$$

$$(1+\sin x\cos x)(\sin x-\cos x-2)=0$$

اکنون توجه کنید که معادلهٔ $\sin x-\cos x=2$ جواب ندارد، چون حداکثر مقدار عبارت $\sin x-\cos x$ برابر $\sqrt{2}$ است. بنابراین

$$1+\sin x\cos x=0\Rightarrow 1+\frac{1}{2}\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=-2\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۵۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+\frac{\pi}{9}-(x-\frac{7\pi}{18})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\frac{7\pi}{18}=(x+\frac{\pi}{9})-\frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{9})+2\sin^2(-\frac{\pi}{2}+(x+\frac{\pi}{9}))=2$$

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{9})+2\cos^2(x+\frac{\pi}{9})=2$$

$$1-\cos^2(x+\frac{\pi}{9})+2\cos^2(x+\frac{\pi}{9})=2$$

$$\cos^2(x+\frac{\pi}{9})=1\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{9})=\pm 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر است

$$x+\frac{\pi}{9}=k\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{9}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۱۵۸- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\sin x+\cos x+1=1-2\sin^2 x-2\sin x\cos x$$

$$\sin x+\cos x+2\sin^2 x+2\sin x\cos x=0$$

$$(\sin x+\cos x)+2\sin x(\sin x+\cos x)=0$$

$$(\sin x+\cos x)(1+2\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ به صورت زیر هستند

$$\sin x=-\cos x\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$$

پس مجموع این جواب‌ها برابر است با $\frac{11\pi}{2}$.

۱۵۹- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}=\frac{۲}{۴\sin^۲ x\cos^۲ x}$$

$$\cos^۲ x-\sin^۲ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos ۲x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۱۶۰- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{۲}{۲\sin x\cos x}-۱=\frac{\sin x}{\cos x}\quad(*)$$

$$۱-\sin x\cos x=\sin^۲ x$$

$$۱-\sin^۲ x-\sin x\cos x=۰$$

$$\cos^۲ x-\sin x\cos x=۰$$

$$\cos x(\cos x-\sin x)=۰$$

چون $\cos x$ در مخرج کسر معادلهٔ $(*)$ قرار دارد، پس نباید صفر باشد. بنابراین باید معادلهٔ $\cos x-\sin x=۰$ را حل کنیم که جواب‌های آن به صورت زیر هستند:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به صورت $\cos x=\frac{۳-k}{۲}$ می‌نویسیم. اکنون توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $۰<\cos x\le ۱$. بنابراین برای اینکه معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ جواب داشته باشد، باید $۰<\frac{۳-k}{۲}\le ۱$. بنابراین

$$۰<۳-k\le ۲\Rightarrow -۳<-k\le -۱\Rightarrow ۱\le k<۳$$

۱۶۲- گزینهٔ ۳ از $\cos(۲\pi\sin x)=۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\pi\sin x=۲k\pi\Rightarrow \sin x=k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به $-۱\le\sin x\le ۱$ نتیجه می‌شود k می‌تواند مقادیر صفر، ۱ و ۱- را داشته باشد. بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت زیر هستند

$$\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi$$

$$\sin x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$$

$$\sin x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با ۵π.

۱۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(\sin x+۳)^۲=-k+۹$$

اکنون توجه کنید که

$$-۱\le\sin x\le ۱\Rightarrow ۲\le\sin x+۳\le ۴$$

$$۴\le(\sin x+۳)^۲\le ۱۶$$

بنابراین باید شرط $۴\le -k+۹\le ۱۶$ برقرار باشد تا معادله جواب داشته باشد. در نتیجه $-۷\le k\le ۵$.

۱۶۴- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\cos x\Rightarrow \cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب $۲k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های کلی به صورت $\frac{۲k\pi}{۳}$ هستند.

۱۶۵- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{۱-\cos x}=۱+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=۱-\cos^۲ x$$

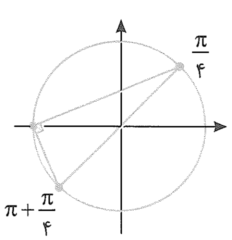
$$\sin x\cos x=\sin^۲ x\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=۰$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi$$

$$\cos x-\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

دقت کنید که به‌ازای $x=۲k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x=(۲k+۱)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ هستند که روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.



۱۶۶- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(\sin^{۲} x-\cos^{۲} x)(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)=\sin^{۲}(\pi+\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin^{۲} x-\cos^{۲} x=\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}\Rightarrow -\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos ۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۶۷- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^{۲} x-۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$۲\cos ۲x=\frac{\cos x}{\sin x}(۴\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})=۴\cos x+۱$$

$$۲(۲\cos^{۲} x-۱)=۴\cos x+۱$$

$$۴\cos^{۲} x-۴\cos x-۳=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\cos x=\frac{۳}{۲} & (\text{غ.ق.ق})\\ \cos x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

۱۶۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=\cos^{۲} x-\sin^{۲} x$ کمک می‌گیریم و معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)^{۲}$$

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)$$
$$\times(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x-۲\sin x\cos x)$$

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(۱-\sin ۲x)$$

$$(\cos x+\sin x)(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x+\sin x=۰\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۱۲}\\ x=\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

که مجموع این سه جواب برابر است با $\frac{۵\pi}{۴}$.

۱۶۹- گزینهٔ ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که مخرج صفر نباشد:

$$\sin ۳x=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)\Rightarrow \sin ۳x=\sin x$$

$$\begin{cases}۳x=۲k\pi+x\Rightarrow x=k\pi & (\text{غ.ق.ق})\\ ۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

به‌ازای $x=k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است و جواب $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

۱۷۰- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(۲\cos^{۲} x-۱)+۲\sin x\cos x=۰$$

$$\cos ۲x+\sin ۲x=۰$$

$$\cos ۲x=-\sin ۲x\Rightarrow \cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۲x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow k=-\frac{۱}{۴} & (\text{غ.ق.ق})\\ ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت

$$\cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳x=۲k\pi+\pi-x\\ ۳x=۲k\pi-\pi+x\end{cases}$$

$$\begin{cases}۴x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ ۲x=۲k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

با توجه به $\cos x\neq ۰$، جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$ غیرقابل قبول است.

پس جواب کلی $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

چون $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$، بنابراین $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$.

۱۷۳- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$۲\sin^{۲}x+۳\cos x=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^{۲}x)+۳\cos x=۰$$

$$-۲\cos^{۲}x+۳\cos x+۲=۰$$

$$\cos x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{-۴}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=-\frac{۱}{۲}\\ \cos x=۲\quad(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

$$\cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۷۴- گزینهٔ ۳ از اتحادهای

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\ ,\qquad \cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)\underbrace{(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)}_{۱}$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=-\cos ۲x\Rightarrow\cos ۲x(۲\sin ۲x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ \sin ۲x=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ و $\frac{۷\pi}{۱۲}$ که مجموعشان برابر $\frac{۳۰\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۲}$ است.

۱۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$. در ادامه معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۸}))=۱$$

$$۲\sin(x+\frac{\pi}{۸})=۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۸})=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت زیر هستند که مجموع آنها برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ است.

$$\begin{cases}x_{۱}=\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۸}\\ x_{۲}=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۸}\end{cases}\Rightarrow x_{۱}+x_{۲}=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{\sin^{۲}\frac{x}{۲}-\cos^{۲}\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

$$=\frac{-\cos x}{\frac{۱}{۲}\sin x}=-۲\cot x=\frac{-۲}{\tan x}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر $\frac{-۲}{\frac{۴}{۳}}$، یعنی $-\frac{۳}{۲}$ است.

۱۷۷- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با توجه به اتحاد

$$۲\cos^{۲}x=\cos ۲x+۱$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x+۲\cos^{۲}x=۰\Rightarrow\cos ۲x+\cos ۲x+۱=۰$$

$$\cos ۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

راه‌حل دوم با توجه به اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x+۲\cos^{۲}x=۰$$

$$۲\cos^{۲}x-۱+۲\cos^{۲}x=۰\Rightarrow ۴\cos^{۲}x=۱$$

$$\cos x=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

این جواب‌ها همان $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ هستند.

۱۷۸- گزینهٔ ۴ زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}-x$، متمم زاویهٔ x است، پس

$$\sin ۲x+\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=۰\Rightarrow \sin ۲x+\sin x=۰$$

$$\sin ۲x=-\sin x\Rightarrow \sin ۲x=\sin(-x)$$

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi-x \\ ۲x=۲k\pi+\pi+x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{۲k\pi}{۳} \\ x=(۲k+۱)\pi \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$۰,\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳},۲\pi,\pi$$

مجموع این جواب‌ها برابر ۵π است.

۱۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت چپ معادله لازم است که

$$۱+\cos x\neq ۰\Rightarrow \cos x\neq -۱\Rightarrow x\neq ۲k\pi+\pi$$

با شرط فوق معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin ۳x+\sin ۲x=۰\Rightarrow \sin ۳x=-\sin ۲x$$

$$\sin ۳x=\sin(-۲x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۳x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵}, k\in\mathbb{Z} \\ ۳x=۲k\pi+\pi+۲x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi \quad (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

فصل سوم

حد بی‌نهایت
و
حد در بی‌نهایت

فصل سوم

درس اول: حد بی‌نهایت

بخش‌پذیری و تقسیم

قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای و a عددی حقیقی باشد. در این صورت چندجمله‌ای منحصربه‌فردی مانند $Q(x)$ وجود دارد که

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R$$

$Q(x)$ را خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ می‌نامند و عدد حقیقی R باقی‌ماندهٔ این تقسیم است.

تعریف اگر در تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x-a$ باقی‌مانده برابر صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x-a$ بخش‌پذیر است.

قضیه ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $x-a$ برابر است با $P(a)$.

تست ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=27x^3+9x^2+2x-2$ بر $x-1$ چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

راه‌حل باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر است با

$$P(1)=27+9+2-2=36$$

تست ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^4-kx^3+2x^2+3$ بر $x-2$ برابر -5 است. مقدار k چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با $P(2)$ است. بنابراین

$$P(2)=-5\Rightarrow 16-8k+8+3=-5\Rightarrow k=4$$

تست ۳ اگر $P(x+1)=4x^3-mx^2-3x+2$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+1$ برابر ۴ باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) ۷ ۲) -7 ۳) ۸ ۴) -8

راه‌حل باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+1$ برابر $P(-1)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده برابر ۴ است، پس $P(-1)=4$.

اکنون اگر در تساوی $P(x+1)=4x^3-mx^2-3x+2$ قرار دهیم $x=-2$، به‌دست می‌آید

$$P(-1)=4\times(-8)-m\times4-3\times(-2)+2$$

$$4=-24-4m\Rightarrow m=-7$$

نکته

اگر یک چندجمله‌ای بر حاصل‌ضرب چند تا چندجمله‌ای بخش‌پذیر باشد، بر هریک از این چندجمله‌ای‌ها نیز بخش‌پذیر است.

تست ۴ **اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^5+mx^2+nx+32$ بر x^2-4 بخش‌پذیر باشد، مقدار $m-n$ کدام است؟**

۱) ۲۴ ۲) -24 ۳) ۸ ۴) -8

راه‌حل چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-4 بخش‌پذیر است، پس بر $x-2$ و $x+2$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\begin{cases}P(2)=0\\P(-2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}32+4m+2n+32=0\\-32+4m-2n+32=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-8\\n=-16\end{cases}$$

پس $m-n=8$.

حد توابع کسری

اگر حد تابع‌های f و g در نقطهٔ a برابر صفر باشد، و تابع‌های f و g در یک همسایگی a تابع ثابت صفر نباشند، آن‌گاه برای محاسبهٔ حد تابع $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a نمی‌توانیم از قضیه‌های حد استفاده کنیم. در این حالت، این حد را حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌گویند.

روش‌های رفع ابهام

۱. حذف عامل صفر کننده

در این روش عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج کسر را پیدا کرده و حذف می‌کنیم. برای این کار از اتحادهای جبری استفاده می‌کنیم.

تست ۵ **مقدار $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ چقدر است؟**

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x-3}=\frac{1+2}{1-3}=-\frac{3}{2}$$

تست ۶

مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج $x-1$ اســت. با تجزیهٔ صورت و مخرج (به کمک تقسـیم یا هر روش دیگر) این عامل را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

تست ۷

مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+3x+x^2}-3}{x^2-2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

راه‌حل مزدوج صورت کسر را در صورت و مخرج ضرب می‌کنیم. در این صورت حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 0}\frac{9+3x+x^2-9}{(x^2-2x)(\sqrt{9+3x+x^2}+3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{x^2-2x}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{3+x}{x-2}=-\frac{1}{4}$$

تست ۸

مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل با ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج‌های صورت و مخرج عامل صفرکننده را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{4-(5-x)}\times\frac{(2+\sqrt{5-x})}{(1+\sqrt{x})}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x-1}\times\frac{(2+\sqrt{5-x})}{(1+\sqrt{x})}\right)=-\frac{2+2}{1+1}=-2$$

تست ۹

مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt{3x-2}-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

راه‌حل عبارت را در چاق صورت و در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم تا بتوان عامل صفرکننده را ساده کرد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt{3x-2}-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+5-8}{3x-2-1}\times\frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4}\right)$$

$$=\frac{1+1}{4+4+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

۲. استفاده از تغییر متغیر

گاهی یک تغییر متغیر متناسب، مسئله را به مسئله‌ای ساده‌تر تبدیل می‌کند.

تست ۱۰ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$ چقدر است؟

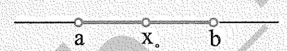
۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $\sqrt[6]{x}=t$. در این صورت، اگر $x\to 1$، آن‌گاه $t\to 1$. اکنون می‌توان نوشت

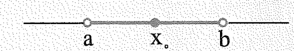
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(t+1)(t-1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2}{t+1}=\frac{1}{2}$$

همسایگی

تعریف اگر x_0 عددی حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. اگر x_0 را از همسایگی x_0 حذف کنیم، به آن همسایگی محذوف x_0 می‌گوییم.



$(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 است.



(a,b) یک همسایگی x_0 است.

اگر r عددی حقیقی و مثبت باشد، بازهٔ (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست x_0 و بازهٔ (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

تست ۱۱ اگر بازهٔ $(a-3, 2a+1)$ یک همسایگی نقطهٔ $x=1$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $1<a<2$ ۲) $0<a<2$ ۳) $1<a<3$ ۴) $0<a<4$

راه‌حل چون ۱ متعلق به بازهٔ $(a-3, 2a+1)$ است، پس

$$a-3<1<2a+1$$

بنابراین

$$0<a<4$$

حد بی‌نهایت

تعریف فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f بی‌کران افزایش یابند، یعنی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی از سمت راست به a نزدیک شده باشند، می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد راست نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

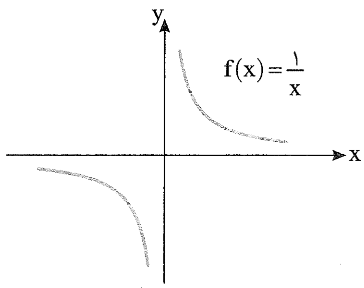
تعریف فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f بی‌کران کاهش یابند، یعنی از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی از سمت راست به a نزدیک شده باشند، می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد راست نامتناهی (منفی بی‌نهایت) دارد.

به طریق مشابه، $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شوند.

مثال:



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

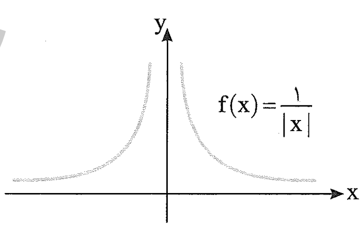
تعریف فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطهٔ a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f بی‌کران افزایش یابند، یعنی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شده باشند، می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

به طور مشابه $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شود.

مثال:



$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

قضایای حدهای نامتناهی

قضیه ۲

الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

قضیه ۳

اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{n زوج باشد}\\ -\infty & \text{n فرد باشد}\end{cases}$$

قضیه ۴

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، آن‌گاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ a حد نامتناهی (بی‌نهایت) دارد و علامت بی‌نهایت با توجه به علامت L و علامت مقادیر تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می‌شود. این قضیه برای حد چپ و حد راست در نقطهٔ a هم درست است.

مثال:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{(x+1)^2}=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2}=+\infty$$

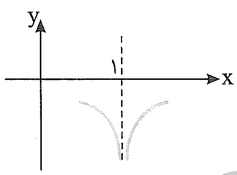
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-1}{\sin x-1}=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\sin^2 x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\tan x=\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}\tan x=\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}\frac{\sin x}{\cos x}=-\infty$$

تست ۱۲

قسمتی از نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطهٔ تابع f باشد؟



۱) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ۲) $f(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$

۳) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ ۴) $f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$

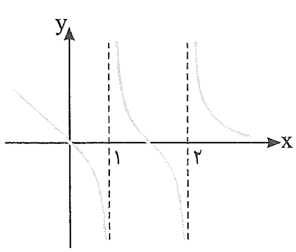
راه‌حل برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to 1^-$ یا $x\to 1^+$ باید $f(x)\to -\infty$. در گزینهٔ (۴)،

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$$

در بقیهٔ گزینه‌ها چنین نیست.

تست ۱۳

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(\frac{2}{x})$ کدام است؟



۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$

۳) ۱   ۴) ۲

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^+} f(\frac{2}{x})=\lim_{t\to 2^-} f(t)=-\infty$$

تست ۱۴

حاصل $L_1=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$ و $L_2=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$ به ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$
۲) $+\infty$ و $-\infty$
۳) صفر و $-\infty$
۴) صفر و $+\infty$

راه‌حل

$$L_1=\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0^+}(0)=0$$

$$L_2=\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

تست ۱۵

مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

راه‌حل حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام، توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{0^-\times 2}=+\infty$$

تست ۱۶

اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{ax^3+3}{(x-3)^2}=-\infty$، حدود a کدام است؟

۱) $a<-\frac{1}{9}$
۲) $a<0$
۳) $a>0$
۴) $a>-\frac{1}{9}$

راه‌حل اگر $x\to 3$، آن‌گاه $(x-3)^2\to 0^+$، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to 3}(ax^3+3)<0\Rightarrow 27a+3<0\Rightarrow a<-\frac{3}{27}\Rightarrow a<-\frac{1}{9}$$

تست ۱۷

اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2+ax+b}=-\infty$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۴
۲) -4
۳) ۸
۴) -8

راه‌حل چون حد صورت برابر -1 است، پس حد مخرج باید صفر باشد تا حاصل حد کسر نامتناهی شود. همچنین چون حد چپ و حد راست هر دو $-\infty$ هستند، پس باید علامت عبارت x^2+ax+b در دو طرف $x=2$ مثبت باشد و این در صورتی امکان‌پذیر است که $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. پس می‌توان یکی از دو راه زیر را به‌کار برد:

راه‌حل اول $x=2$ مخرج را صفر می‌کند و دلتای مخرج صفر است:

$$\begin{cases}4+2a+b=0\Rightarrow b=-4-2a\\ \Delta=a^2-4b=0\Rightarrow a^2-4(-4-2a)=0\Rightarrow a^2+8a+16=0\Rightarrow(a+4)^2=0\Rightarrow a=-4,\ b=4\end{cases}$$

راه‌حل دوم عبارت مخرج باید به صورت $(x-2)^2$ باشد:

$$x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$a=-4, b=4$$

در هر صورت، $a-b=-8$.

تست ۱۸

اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{[x]-k}{x-2}=+\infty$ ، حدود k کدام است؟

۱) $0<k<1$ ۲) $1<k<2$ ۳) $2<k<3$ ۴) $k<2$

راه‌حل برای آنکه حد مورد نظر برابر $+\infty$ باشد، باید حد چپ و حد راست در $x=2$ هر دو برابر $+\infty$ باشند:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]-k}{x-2}=\frac{2-k}{0^+}=+\infty \Rightarrow 2-k>0 \Rightarrow k<2$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-k}{x-2}=\frac{1-k}{0^-}=+\infty \Rightarrow 1-k<0 \Rightarrow k>1$$

بنابراین $1<k<2$.

فصل سوم

درس اول: حد بی‌نهایت

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^5-4x^3+3x^2-x+1$ بر $x-2$ چقدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۲- اگر چندجمله‌ای $P(x)=3x^7-4ax-5$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^3-3x^2+3x+4$ بر $x-\sqrt[3]{3}-1$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴- چندجمله‌ای $P(x)=x^5-3x^4-ax-16$ بر $(x-2)^2$ بخش‌پذیر است. مقدار a چقدر است؟

۱) -8 ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) -16

۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5$ بر $x+4$ برابر ۱۶ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ چقدر است؟

۱) -21 ۲) -26 ۳) ۲۱ ۴) ۱۶

۶- اگر $P(1)=4$ و $P(0)=-4$، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-2)-P(x-1)$ بر $x-2$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) -8 ۴) ۷

۷- چندجمله‌ای $P(x)=x^8+3x^7+ax^2-9$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ چقدر است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -10 ۴) -8

۸- $P(x)$ چندجمله‌ای است و $P(8x)=8x^3-4x^2+2x-7$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ چقدر است؟

۱) -8 ۲) -10 ۳) -12 ۴) -14

۹- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(4x)$ بر $2x-1$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰- $P(x)$ چندجمله‌ای است. اگر $P(x+2)=x^2-3x+2$، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x+3$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱۶ ۳) ۳۰ ۴) ۵۶

۱۱- اگر $P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-4$ برابر ۶ باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲- اگر $P(x)=x^4+ax^3+6x^2+bx+10$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ چقدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۲ ۳) -12 ۴) -22

۱۳- $P(x)$ چندجمله‌ای است و $P^2(x)-6xP(x)=-9x^2$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) -9 ۴) -6

۱۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+1)$ و $Q(x+1)$ بر $x-2$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ بر $x-3$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۸ ۴) صفر

۱۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x)+x$ و $xQ(x)$ بر $x-2$ به‌ترتیب ۳ و ۴ است. اگر چندجمله‌ای $kP(x)+Q^2(x)+1$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، مقدار k چقدر است؟

۱) -5 ۲) 5 ۳) -4 ۴) 4

۱۶- $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و $P(x)=x^3+3xQ(2x+1)+3x-2$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x+3$ برابر -4 است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ چقدر است؟

۱) -8 ۲) 6 ۳) -6 ۴) 8

۱۷- در تقسیم چندجمله‌ای $x^4-3x^3+4x^2+1$ بر $x-1$ خارج‌قسمت چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقی‌مانده برابر ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-2$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) 9 ۴) -9

۱۸- مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-3x-2}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{7}{5}$ ۲) 1 ۳) $\dfrac{7}{3}$ ۴) $\dfrac{5}{3}$

۱۹- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)(2+3x)-6}{11x}$ چقدر است؟

۱) $\dfrac{1}{5}$ ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) 1 ۴) 3

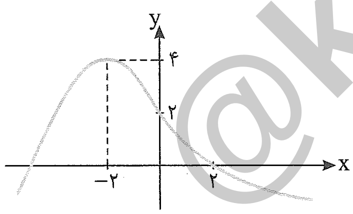
۲۰- اگر $f(x)=x^2+2x$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$ چقدر است؟

۱) $-\dfrac{3}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) $-\dfrac{1}{2}$

۲۱- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(x+2a)^2-4a^2}$ چقدر است؟ $(a\neq 0)$

۱) $\dfrac{1}{2a}$ ۲) $2a$ ۳) $4a$ ۴) $\dfrac{1}{4a}$

۲۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f^3(x)-64}{f(x)-4}$ کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۳- مقدار $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3+3x^2-2}$ کدام است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) صفر ۴) -1

۲۴- مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2-x+7}{x^2-5x+4}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵- مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-1)(x-2)-6}{x(x-1)(x+1)-24}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{7}{23}$ ۲) $\dfrac{9}{25}$ ۳) $\dfrac{13}{27}$ ۴) $\dfrac{11}{26}$

۲۶- مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x+1)^3+(2x-1)^3}{4x}$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۲۷- مقدار $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $\frac{1}{6}$　۳) $\frac{1}{8}$　۴) $\frac{1}{10}$

۲۸- مقدار $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{48}$　۲) $\frac{1}{24}$　۳) $\frac{1}{12}$　۴) $\frac{1}{6}$

۲۹- مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \dfrac{2x+\sqrt{x}-1}{4x-1}$ چقدر است؟

۱) ۳　۲) $\frac{3}{4}$　۳) $-\frac{3}{4}$　۴) -3

۳۰- مقدار $\lim\limits_{a\to b} \dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ چقدر است؟

۱) $2b$　۲) $3b$　۳) $4b$　۴) $6b$

۳۱- مقدار $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-x}{x^2+x-12}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{14}$　۲) $-\frac{1}{17}$　۳) $\frac{1}{17}$　۴) $\frac{1}{14}$

۳۲- مقدار $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-2x-1}{2x-\sqrt{3x^2+1}}$ چقدر است؟

۱) ۱　۲) ۸　۳) ۱۰　۴) ۱۲

۳۳- مقدار $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{\sqrt{5x+1}-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$　۲) $\frac{16}{15}$　۳) $\frac{8}{15}$　۴) $\frac{15}{8}$

۳۴- حد تابع $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{3x-\sqrt{15x+6}}$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$　۲) $\frac{3}{7}$　۳) $\frac{4}{5}$　۴) $\frac{6}{5}$

۳۵- مقدار $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt[3]{x-1}-1}$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{4}$　۲) $-\frac{9}{4}$　۳) $-\frac{3}{4}$　۴) $\frac{9}{4}$

۳۶- مقدار $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $\frac{1}{6}$　۴) $\frac{2}{3}$

۳۷- مقدار $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{\sqrt{x+۴}-\sqrt{x-۴}-۲}{x-۵}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۳}$

۳۸- مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۴\sqrt{x}+۳}{۱-x^{۲}}$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۳۹- مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+۲}-۲\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۵}{۶}$ ۲) $-\dfrac{۵}{۸}$ ۳) $-\dfrac{۵}{۹}$ ۴) $-\dfrac{۵}{۱۲}$

۴۰- مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{\sqrt{۴-\sqrt{x-۲}}-۲}{\sqrt{x-۲}}$ چقدر است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۸}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۱۶}$

۴۱- مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt{x+۳}}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $\dfrac{۷}{۱۲}$ ۴) $\dfrac{۵}{۱۲}$

۴۲- مقدار $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\sqrt{x+۱}-\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۸}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $\dfrac{۱}{۱۲}$ ۴) $\dfrac{۳}{۴}$

۴۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱ & x<۱ \\ \dfrac{۱-\sqrt{x}}{x^{۲}-۱} & x>۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\dfrac{۵}{۴}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $-\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۵}{۴}$

۴۴- اگر $f(x)=\dfrac{x^{۳}-۸}{x-۲}$ و $g(x)=\dfrac{x-۱۲}{\sqrt{x}-۲\sqrt{۳}}$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}(gof)(x)$ چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۴۵- یک همسایگی چپ کدام نقطه در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ قرار <u>ندارد</u>؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

۴۶- چند نقطه وجود دارد که در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۴-x^{۲}}}{x-[x]}$ قرار ندارد ولی یک همسایگی محذوف آن در دامنهٔ تابع است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

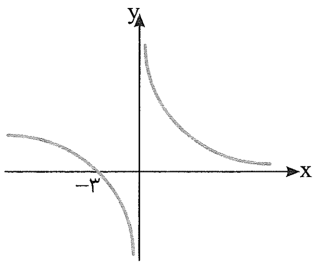
۴۷- کدام نقطه در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|x|(x^{۲}-۱)}$ قرار دارد ولی نه یک همسایگی راست آن در دامنهٔ تابع است و نه یک همسایگی چپ آن؟

۱) $x=۰$ ۲) $x=۱$ ۳) $x=-۱$ ۴) $x=\dfrac{۱}{۲}$

۴۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱}{|x-۲|}>۱$،

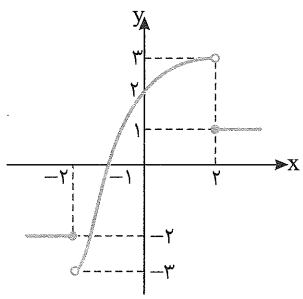
۱) همسایگی ۲ $x=$ است.
۲) همسایگی محذوف ۲ $x=$ است.
۳) همسایگی ۱ $x=$ است.
۴) همسایگی ۳ $x=$ است.

۴۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to -۳^-}\frac{-۱}{f(x)}$ کدام است؟



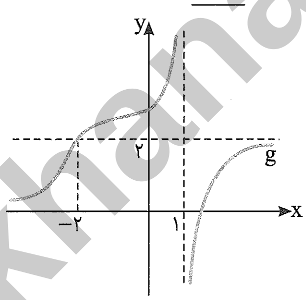
۱) $-\infty$
۲) صفر
۳) ۳
۴) $+\infty$

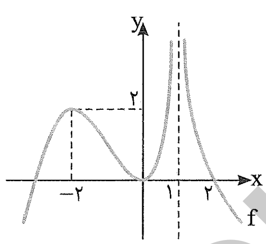
۵۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{۱}{f(x)+۳}=+\infty$
۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{f(x)-۲}=+\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱}{f(x)-۳}=-\infty$
۴) $\lim\limits_{x\to -۱^-}\frac{۱}{f(x)}=-\infty$

۵۱- نمودار تابع‌های f و g در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟





۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-}(f(x)g(x))=+\infty$
۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}(f(x)-g(x))=+\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{f(x)}{g(x)-۲}=-\infty$
۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{g(x)+۵}{f(x)}=+\infty$

۵۲- حاصل $\lim\limits_{x\to -۲^-}\frac{۱}{x+۲}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) -۶ ۴) $+\infty$

۵۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{[-x]}{x-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۵۴- اگر $f(x)=\frac{۲[x]-۵}{x-۳}$، مقدارهای $\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $+\infty$ و $-\infty$ ۳) $-\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۵۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x-|x|}{x^۲+[-x]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۵۶- تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۳}{x^{۳}-۴x}$ در چند نقطه حد نامتناهی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۷- مجموعهٔ نقاطی که تابع $f(x)=\frac{x}{x-[x]}$ در آنها حد چپ یا حد راست نامتناهی دارد کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Z}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{N}\cup\{۰\}$

۵۸- اگر $f(x)=\frac{۱}{x-\sqrt{x+۲}}$، مقدارهای $\lim_{x\to ۲^+} f(x)$ و $\lim_{x\to ۲^-} f(x)$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۵۹- اگر $f(x)=\frac{۱}{x^{۳}-۳x+۲}$، مقادیر $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $-\infty$ ۲) $-\infty$ و $+\infty$ ۳) $+\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۶۰- حاصل $\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{[\cos ۲x]}{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) صفر

۶۱- مقدار $\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{[\cos x]}{۱-\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۶۲- مقادیر حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi[x]}{x})$ در $x=۲$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $-\infty$ ۲) $-\infty$ و $+\infty$ ۳) صفر و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و صفر

۶۳- مقادیر حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{\cos x}{۱-\sin x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۶۴- اگر $\lim_{x\to \frac{۱}{۳}} \frac{۳x^{۲}-(۳a-۱)x-a}{۳x-۱}=b$ ، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۶۵- اگر $\lim_{x\to ۱} \frac{x^{۲}-ax+b}{۲x^{۲}-۳x+۱}=۳$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) صفر

۶۶- تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۳x+۲}{۲x^{۲}+ax+۴}$ در تمام نقطه‌های $\mathbb{R}$ حد دارد. a چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) نامتناهی

۶۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} bx-۷ & x<۳ \\ \frac{x^{۲}+ax+۳}{x-۳} & x>۳ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۳$ حد داشته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۶۸- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x+a}-2}{x-2}=b$ ، مقدار $a+4b$ چقدر است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 3

۶۹- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}-2}=b$ ، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۷۰- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+a+1}}{x-2}=\frac{1}{b}$ ، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) 12 ۲) 14 ۳) 17 ۴) 19

۷۱- اگر $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+ax^2+3x+b}=-\infty$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۷۲- اگر $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{4})^+}\frac{bx-a}{a\sin x+\cos x}=+\infty$ ، حدود b کدام است؟

۱) $b<-\frac{4}{\pi}$ ۲) $b>-\frac{4}{\pi}$ ۳) $b<\frac{4}{\pi}$ ۴) $b>\frac{4}{\pi}$

۷۳- اگر $\lim\limits_{x\to (\frac{1}{6})^+}\frac{[4\cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) -20 ۲) -16 ۳) 10 ۴) 12

۷۴- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) هیچ مقدار a

۷۵- اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

۱) -3 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 12

۷۶- به‌ازای مقداری از a چندجمله‌ای $P(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $P(x)=0$ کدام است؟
(ریاضی - ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

۷۷- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\frac{1}{2}$ ، مقدار b کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۷۸- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}$ ، مقدار b کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) -8 ۲) -6 ۳) 4 ۴) 5

فصل سوم

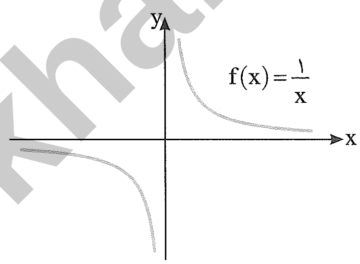
درس دوم: حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

تعریف فرض کنید تابع f روی بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی بزرگ شده باشند. در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و می‌گوییم حد تابع f وقتی x به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است.

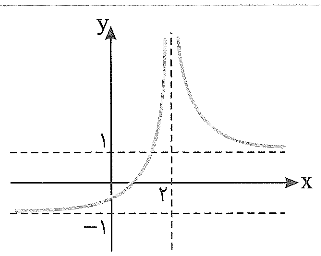
تعریف فرض کنید تابع f روی بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی کوچک شده باشند. در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ و می‌گوییم حد تابع f وقتی x به منفی بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است.

مثال:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=۰$$

تست ۱ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}(f\circ f)(x)$ کدام است؟



۱) $+\infty$　　۲) ۱

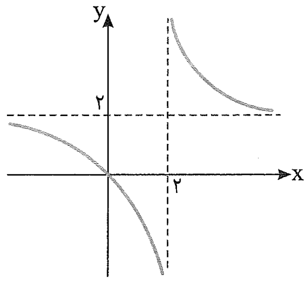
۳) -۱　　۴) $-\infty$

راه‌حل با توجه به نمودار تابع، $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=+\infty$، پس

$$\lim_{x\to ۲}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to +\infty} f(t)=۱$$

تست ۲

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to -\infty}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) ۲

۲) $+\infty$

۳) $-\infty$

۴) صفر

راه‌حل با توجه به نمودار تابع، وقتی $x\to -\infty$ تابع f با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کند، یعنی $f(x)\to ۲^-$. پس

$$\lim_{x\to -\infty}(fof)(x)=\lim_{t\to ۲^-}f(t)=-\infty$$

قضایای حد در بی‌نهایت

قضیه ۱ اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=a$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=a$.

قضیه ۲ اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a}{x^n}=۰$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{a}{x^n}=۰$.

قضیه ۳ اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=L_۲$، آن‌گاه

۱) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)\pm g(x))=L_۱\pm L_۲$

۲) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)g(x))=L_۱L_۲$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}\quad (L_۲\neq ۰)$

این قضیه برای حالتی که $x\to -\infty$ نیز درست است.

تست ۳

حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{۴+\frac{۳}{x^۲}}{۲-\frac{۳}{x^۳}}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to +\infty}(۴+\frac{۳}{x^۲})=۴+\lim_{x\to +\infty}\frac{۳}{x^۲}=۴+۰=۴$$

$$\lim_{x\to +\infty}(۲-\frac{۳}{x^۳})=۲-\lim_{x\to +\infty}\frac{۳}{x^۳}=۲-۰=۲$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{۴+\frac{۳}{x^۲}}{۲-\frac{۳}{x^۲}}=\frac{۴}{۲}=۲$.

حدود نامتناهی در بی‌نهایت

تعریف فرض کنید تابع f روی بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f از عدد مثبتی بزرگ‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی بزرگ شده باشند. در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و می‌گوییم حد تابع f وقتی x به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر مثبت بی‌نهایت است.

به طور مشابه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شوند.

قضیه ۴ اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty} ax^n=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & \text{زوج است } n\\ -\infty & \text{فرد است } n\end{cases}$$

اگر در این قضیه a عددی منفی باشد، در حاصل حدهای فوق «$+\infty$» به «$-\infty$» تبدیل می‌شود و برعکس.

قضیه ۵ اگر $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ (که در اینجا $a\neq 0$)، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax^n)$$

و اگر $f(x)=ax^m+bx^{m-1}+\cdots+k$ و $g(x)=a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots+k'$ (که در اینجا $a, a'\neq 0$)، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{a'}x^{m-n}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{a}{a'} & m=n\\ 0 & m<n\\ \text{نامتناهی} & m>n\end{cases}$$

برای حالتی که $x\to-\infty$ نیز قضیهٔ مشابهی را می‌توان بیان کرد.

تست ۴ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) ۱

راه‌حل بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^2$ برابر x^2 است. همچنین بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$، x^3 است. پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$

تست ۵

اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a|x+1|+3x-1}{|3-x|+ax-15}=2$ ، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $-\dfrac{1}{2}$ ۴) $\dfrac{5}{3}$

راه‌حل توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $x+1$ و $3-x$ به ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+3x-1}{|3-x|+ax-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-1)+3x-1}{3-x+ax-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+3)x-a-1}{(a-1)x-12}=\frac{3-a}{a-1}$$

در نتیجه

$$\frac{3-a}{a-1}=2\Rightarrow a=\frac{5}{3}$$

تست ۶

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^n+2x^3+x-1}{4x^3+x^2-1}=2$ ، مقدار $a+n$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

راه‌حل چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر اســت، پس بزرگ‌ترین توان صورت و مخرج باید یکســان و برابر ۳ باشد. اگر $n<3$، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود. پس $n=3$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+2x^3}{4x^3}=2\Rightarrow\frac{a+2}{4}=2\Rightarrow a=6$$

بنابراین $a+n=9$.

تست ۷

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-1)x^3+(2a-b)x^2+1}{ax+b}=0$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشد:

$$\begin{cases}a-1=0\Rightarrow a=1\\2a-b=0\Rightarrow 2a=b\end{cases}\Rightarrow b=2$$

بنابراین $a+b=3$.

تست ۸

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^n+x^2+1}{5x^2+x-1}=+\infty$ ، n چند مقدار طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل چــون حد مورد نظر نامتناهی اســت، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت بایــد از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج بیشتر باشد. یعنی باید $n>2$، پس n عددهای طبیعی ۱ و ۲ نیست.

تست ۹

اگر $n\in \mathbb{N}$ و $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n+3x^2+1}{x^n+6x^2+x-1}$، چند مقدار متفاوت برای L وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر $n>2$، آن‌گاه x^n جملهٔ دارای بزرگ‌ترین درجه در صورت و مخرج است و

$$L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^n}{x^n}=1$$

اگر $n=2$، آن‌گاه

$$L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x^2}{x^2+6x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x^2}{7x^2}=\frac{4}{7}$$

اگر $n=1$، بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و مخرج برابر ۲ است و

$$L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{6x^2}=\frac{1}{2}$$

پس L می‌تواند سه مقدار متفاوت داشته باشد.

تست ۱۰

حاصل $[\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}]-\lim\limits_{x\to -\infty}[\frac{1}{x}]$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

راه‌حل توجه کنید که

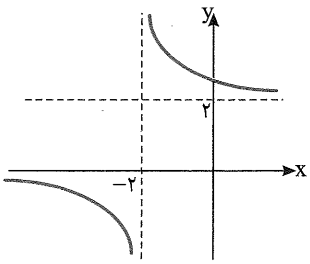
$$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow[\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}]=[0]=0$$

از طرف دیگر، اگر $x\to -\infty$، آن‌گاه $-1<\frac{1}{x}<0$، بنابراین $[\frac{1}{x}]=-1$، پس

$$\lim\limits_{x\to -\infty}[\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to -\infty}(-1)=-1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



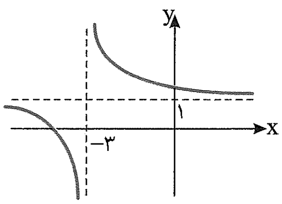
۷۹- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\infty$

۲) ۲

۳) صفر

۴) $+\infty$



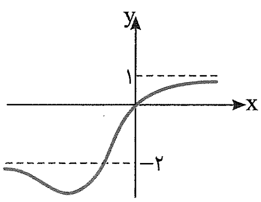
۸۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) وجود ندارد.



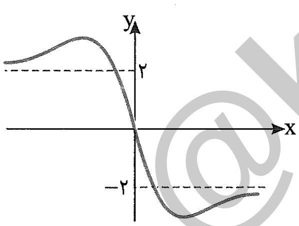
۸۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(۱-x)-۱)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) -۲

۴) -۳



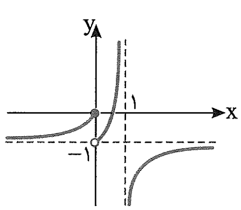
۸۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(۲-x)+۳)$ کدام است؟

۱) -۲

۲) ۱

۳) ۲

۴) صفر



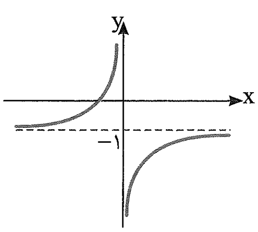
۸۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-۱$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-۱$

۳) $\lim\limits_{x\to۱} f(x)=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to۱} f(x)$ وجود ندارد.



۸۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

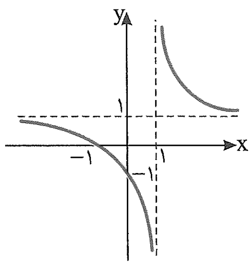
۱) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)+۱}=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^۲(x)=۱$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty} f^۲(x)=۱$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)+۱}=-\infty$

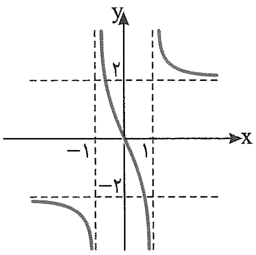
۸۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4}{1-f(x)} = +\infty$ ۲) $\lim_{x\to 1^-}((x+2)f(x)) = -\infty$

۳) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-4}{1-f(x)} = -\infty$

۸۶- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to 1^+}(fof)(x)$ کدام است؟



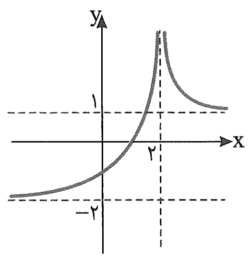
۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

۳) 2

۴) -2

۸۷- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to 2}(fof)(x)$ کدام است؟



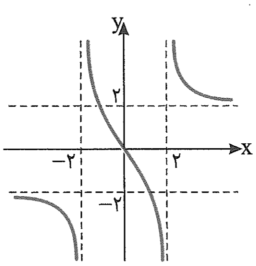
۱) 1

۲) -2

۳) 2

۴) $+\infty$

۸۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to +\infty}(fof)(x)$ کدام است؟



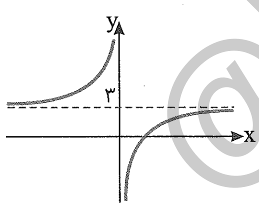
۱) صفر

۲) $+\infty$

۳) $-\infty$

۴) 4

۸۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $2\lim_{x\to +\infty}[f(x)] - [\lim_{x\to +\infty} f(x)]$ کدام است؟



۱) 1 ۲) 3

۳) 4 ۴) 6

۹۰- حاصل $\lim_{x\to +\infty} \frac{(3-\frac{4}{x})^3 - 5(2+\frac{1}{x})^2}{(2+\frac{7}{x})^4 - 2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۱- حاصل $\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -2

۹۲- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-(1-\frac{1}{x})^3}{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 3 ۴) $+\infty$

۹۳- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} (x[-\frac{1}{x}])$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) صفر ۴) $-\infty$

۹۴- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{[\frac{1}{x}]+1}{[-\frac{1}{x}]-1}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۵- حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} ([\frac{1}{x}]-[-\frac{1}{x}])$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۹۶- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x[-\frac{1}{x}]-1}{2x+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) $-\infty$

۹۷- حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2-x^3}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ۴) 1

۹۸- حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x+2x^2-3x^3}{1+x-x^2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) 3 ۴) $+\infty$

۹۹- حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x-1)^2-(3x+1)^3}{(x-1)(3x^2+1)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 9 ۳) -9 ۴) $+\infty$

۱۰۰- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-3)^3(3x+1)^2}{x^4-5x^5}$ کدام است؟

۱) 9 ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $-\frac{9}{5}$ ۴) 1

۱۰۱- حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{((x+1)^2-3)^3(x+4)}{(5-(3-x)^4)^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) 1

۱۰۲- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}+(x+1)^{2}+\cdots+(x+9)^{2}}{3x^{2}+9x-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\frac{10}{3}$

۱۰۳- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)\cdots(x+10)}{(x+2)(2x+3)\cdots(10x+11)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{9!}$ ۳) $\frac{1}{10!}$ ۴) $\frac{1}{11!}$

۱۰۴- اگر $f(x)=x^{2}-x$، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)-1}{f(x)+x^{2}-1}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۰۵- اگر $f(x)=3-x+2x^{2}$، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x-1)-f(1-3x)}{f(3-x)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) -5 ۴) ۵

۱۰۶- اگر f تابعی درجهٔ سوم باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(3x-1)}{f(5-x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{27}{125}$ ۳) ۲۷ ۴) -27

۱۰۷- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+|2x|}{3x-2|x|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۲

۱۰۸- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-|1-3x|}{5x-3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) -1 ۴) ۱

۱۰۹- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|3x+1|-|2x|}{|1-3x|-|5-2x|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) -5

۱۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{||x|-x+3|}{4|x|}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۱۱- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{|x-2|+x}{|x|-x}\right|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $+\infty$

۱۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-4}{5x-6}\times\dfrac{-2x^{2}+2x-1}{x^{2}-x+1}\right)$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $-\frac{6}{5}$

۱۱۳- حاصل $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|x-1|}{2x+1}-\frac{|1-x|}{3x-1}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

۱۱۴- بزرگ‌ترین عدد طبیعی مانند n که $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{5n+4}-16}{x^{4n+11}-4}$ وجود دارد کدام است؟

۱) چنین nای وجود ندارد. ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱۵- به‌ازای چند عدد طبیعی مانند n، $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{3n+4}+x+1}{x^{2n+6}-x+1}=0$ ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۶- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{4n-1}+x-1}{x^{3n+2}-x^5+1}=0$ ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) چنین nای وجود ندارد.

۱۱۷- اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{(3x+1)^5(mx+2)^7}{(2mx-1)^4(6x-1)^8}=-1$ ، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۲۴- ۳) ۳۶- ۴) ۴۸-

۱۱۸- اگر $\lim_{x\to -\infty}\frac{(mx+1)^2(2x-1)^3}{(4x+5)(mx^4-x^2+1)}=\frac{1}{3}$ ، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۱۱۹- اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{|1-mx|+2x-1}{3x+1}=3$ ، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن m چقدر است؟

۱) ۶۴- ۲) ۴۹- ۳) ۳۶- ۴) ۲۵-

۱۲۰- اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{(2a-1)x^3+4x^2-1}{(6a-1)x^2+x+1}=b$ ، مقدار a+b کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۲۱- اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{(a-3)x^3+(b+2)x^2-3x+4}{3x^2-1}=5$ ، مقدار a+b چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۲۲- اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{(a-3)^2x^2+ax-1}{(b+1)x+2}=-6$ ، مقدار ab چقدر است؟

۱) $-\frac{21}{2}$ ۲) $-\frac{15}{2}$ ۳) $-\frac{11}{2}$ ۴) $-\frac{9}{2}$

۱۲۳- اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{(2a-1)x^3+(b-1)x^2+x-4}{(3b+1)x^2+2x-3}=1$ ، مقدار a+b چقدر است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) ۲-

۱۲۴- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+1)x^3+bx^2+x-1}{(a-c)x^2+2x+1}=1$ ، مقدار $a+b+c$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۲۵- اگر $2a-3b=6$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-2b)x^2-5x+3}{3x^2-4}=-\dfrac{1}{3}$ ، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

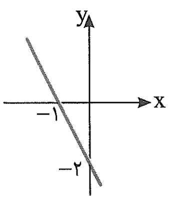
۱۲۶- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n+4x^3-1}{x^n-2x^3+1}=L$ ، چند مقدار متفاوت برای L وجود دارد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۷- f تابعی خطی است، $f(1)=-2$ و $f^{-1}(2)=3$. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+2)}{f^{-1}(1-x)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $-\dfrac{1}{4}$

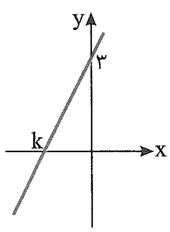
۱۲۸- نمودار تابع خطی f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) -4 ۲) $\dfrac{1}{4}$

۳) $-\dfrac{1}{4}$ ۴) ۴

۱۲۹- نمودار تابع خطی f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)}=4$ ، مقدار k چقدر است؟



۱) -2 ۲) $-\dfrac{3}{2}$

۳) -1 ۴) $-\dfrac{2}{3}$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر است با

$$P(۲)=۲^۵-۴(۲)^۳+۳(۲)^۲-۲+۱=۱۱$$

۲- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ برابر است با

$$P(۱)=۳-۴a-۵=-۴a-۲$$

چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-۴a-۲=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$P(x)=(x-۱)^۳+۵$$

در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[۳]{۳}-۱$ برابر است با

$$P(\sqrt[۳]{۳}+۱)=(\sqrt[۳]{۳}+۱-۱)^۳+۵=۳+۵=۸$$

۴- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر است، پس بر $x-۲$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(۲)=۰\Rightarrow ۳۲-۴۸-۲a-۱۶=۰\Rightarrow a=-۱۶$$

۵- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر با $P(-۴)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(-۴)=۱۶$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{۱۳}+bx^{۹۷}-۵$$

$$P(-۴)=a(-۴)^{۱۳}+b(-۴)^{۹۷}-۵$$

$$۱۶=-۴^{۱۳}a-۴^{۹۷}b-۵$$

$$۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b=-۲۱ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ برابر با $P(۴)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(۴)=۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b-۵$$

$$=-۲۱-۵ \qquad \text{(بنابر تساوی (۱))}$$

$$=-۲۶$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -۲۶ است.

۶- گزینهٔ ۳ بنابر فرض، $P(۱)=۴$ و $P(۰)=-۴$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۲)-P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر است با

$$P(۲-۲)-P(۲-۱)=P(۰)-P(۱)=-۴-۴=-۸$$

۷- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۳)=۰$، در نتیجه

$$P(-۳)=(-۳)^۸+۳(-۳)^۷+a(-۳)^۲-۹=۰$$

بنابراین $a=۱$ و $P(x)=x^۸+۳x^۷+x^۲-۹$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x+۲$ برابر است با

$$P(-۲+۱)=P(-۱)$$

اکنون توجه کنید که

$$P(-۱)=(-۱)^۸+۳(-۱)^۷+(-۱)^۲-۹=-۱۰$$

۸- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر با $P(-۴)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی

$$P(۸x)=۸x^۳-۴x^۲+۲x-۷$$

قرار دهیم $x=-\frac{۱}{۲}$، به‌دست می‌آید

$$P(-۴)=۸(-\frac{۱}{۲})^۳-۴(-\frac{۱}{۲})^۲+۲(-\frac{۱}{۲})-۷=-۱۰$$

۹- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر با ۴ است، پس $P(۲)=۴$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(۴x)$ بر $۲x-۱$ برابر است با

$$P(۴\times\frac{۱}{۲})=P(۲)=۴$$

۱۰- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x+۳$ برابر است با

$$P(-۳-۱)=P(-۴)$$

از طرف دیگر،

$$P(x+۲)=x^۲-۳x+۲$$

$$\xrightarrow{x=-۶} P(-۴)=(-۶)^۲-۳(-۶)+۲=۵۶$$

۱۱- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-4$ برابر است با $P(4-3)=P(1)$. بنابراین $P(1)=6$. اگر در تساوی $P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$ قرار دهیم $x=-2$، به‌دست می‌آید

$$P(1)=(-2)^3-m(-2)^2+m(-2)+2=6 \Rightarrow m=-2$$

۱۲- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ است، پس $P(2-1)=12$، یعنی $P(1)=12$. در نتیجه

$$P(1)=1+a+6+b+10=12 \Rightarrow a+b=-5$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر است با

$$P(-2+1)=P(-1)$$

اکنون توجه کنید که

$$P(-1)=1-a+6-b+10=17-(a+b)=17-(-5)=22$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۳- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-3)$. اکنون اگر در تساوی

$$P^2(x)-6xP(x)=-9x^2$$

قرار دهیم $x=-3$، به‌دست می‌آید

$$P^2(-3)-6(-3)P(-3)=-9(-3)^2$$

$$P^2(-3)+18P(-3)+9^2=0$$

$$(P(-3)+9)^2=0 \Rightarrow P(-3)=-9$$

۱۴- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+1)$ و $Q(x+1)$ بر $x-2$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است، نتیجه می‌شود

$$P(2+1)=3 \Rightarrow P(3)=3\ , \quad Q(2+1)=5 \Rightarrow Q(3)=5$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ بر $x-3$ برابر است با

$$P(3)Q(3)=3\times5=15$$

۱۵- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x)+x$ و $xQ(x)$ بر $x-2$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۴ است، پس

$$P(2)+2=3 \Rightarrow P(2)=1\ , \quad 2Q(2)=4 \Rightarrow Q(2)=2$$

در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $kP(x)+Q^2(x)+1$ بر $x-2$ برابر است با

$$kP(2)+Q^2(2)+1=k\times1+4+1=k+5$$

چون این باقی‌مانده برابر صفر است، پس $k+5=0$، در نتیجه $k=-5$

۱۶- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x+3$ برابر -4 است، پس $Q(-3)=-4$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ برابر با $P(-2)$. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی

$$P(x)=x^3+3xQ(2x+1)+3x-2$$

قرار دهیم $x=-2$، به‌دست می‌آید

$$P(-2)=(-2)^3+3(-2)Q(-3)+3(-2)-2$$

$$=-8-6\times(-4)-6-2=8$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۸ است.

۱۷- گزینهٔ ۲ بنابر فرض مسئله،

$$x^4-3x^3+4x^2+1=(x-1)Q(x)+3 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-2$ برابر با $Q(2)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=2$، به‌دست می‌آید

$$2^4-3\times2^3+4\times2^2+1=(2-1)Q(2)+3$$

در نتیجه $Q(2)=6$.

۱۸- گزینهٔ ۱ عامل $x-2$ را در صورت و مخرج حذف می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{7}{5}$$

۱۹- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to0}\frac{(3+x)(2+3x)-6}{11x}=\lim_{x\to0}\frac{6+11x+3x^2-6}{11x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(11+3x)}{11x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{11+3x}{11}=\frac{11+0}{11}=1$$

۲۰- گزینهٔ ۳ اگر $f(x)=x^2+2x$، آن‌گاه

$$f(x)-f(2)=x^2+2x-(2^2+2\times2)=x^2+2x-8$$

$$=(x-2)(x+4)$$

حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x+2}=\frac{2+4}{2+2}=\frac{3}{2}$$

۲۱- گزینهٔ ۴ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x+2a)^2-4a^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+4ax+4a^2-4a^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+4a)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+4a}=\frac{1}{0+4a}=\frac{1}{4a}$$

۲۲- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to -2} f(x)=4$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-64}{f(x)-4}=\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-4^3}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}(f^2(x)+4f(x)+16)$$

$$=4^2+4\times 4+16=48$$

۲۳- گزینهٔ ۲ عامل $x+1$ را از صورت و مخرج کسر حذف می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-4x+4)}{(x+1)(x^2+2x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x-2}$$

$$=\frac{1+4+4}{1-2-2}=-3$$

۲۴- گزینهٔ ۴ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که

$$x^3-7x^2-x+7=x^3-x-7x^2+7$$

$$=x(x^2-1)-7(x^2-1)$$

$$=(x^2-1)(x-7)$$

$$=(x-1)(x+1)(x-7)$$

و

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

بنابراین حد موردنظر برابر است با

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x-7)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-7)}{x-4}$$

$$=\frac{(1+1)(1-7)}{1-4}=4$$

۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x(x-1)(x-2)-6=x^3-3x^2+2x-6=(x-3)(x^2+2)$$

$$x(x-1)(x+1)-24=x^3-x-24=(x-3)(x^2+3x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(x-1)(x-2)-6}{x(x-1)(x+1)-24}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+2)}{(x-3)(x^2+3x+8)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2}{x^2+3x+8}=\frac{9+2}{9+9+8}=\frac{11}{26}$$

۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(2x+1)^3+(2x-1)^3$$

$$=8x^3+12x^2+6x+1+8x^3-12x^2+6x-1$$

$$=16x^3+12x=4x(4x^2+3)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^3+(2x-1)^3}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x(4x^2+3)}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(4x^2+3)=3$$

۲۷- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم تا عامل $x-3$ ایجاد شود

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{8}$$

۲۸- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\right)\times\left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\right)\times\frac{1}{12}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{x+2}}\right)\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{48}$$

۲۹- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{(2x-1)^2-x}{(4x-1)(2x-1-\sqrt{x})}=\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{4x^2-5x+1}{(4x-1)(2x-1-\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{(4x-1)(x-1)}{(4x-1)(2x-1-\sqrt{x})}=\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{x-1}{2x-1-\sqrt{x}}=\frac{3}{4}$$

۳۰- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که

$$\lim_{a\to b}\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\lim_{a\to b}\frac{\sqrt{a}^3-\sqrt{b}^3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}^2+\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\lim_{a\to b}(a+\sqrt{ab}+b)=3b$$

۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{3x}-x=\sqrt{x}(\sqrt{3}-\sqrt{x})$$

$$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 3}\frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{-\sqrt{x}}{x+4}\times\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{7}\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{7}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{7}\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{14}$$

۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^3+2x^2-2x-1=x^3-1+2x(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+2x(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+3x+1)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج آن ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(2x-\sqrt{3x^2+1})(2x+\sqrt{3x^2+1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{4x^2-3x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+3x+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3x+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{x+1}$$

$$=\frac{5\times 4}{2}=10$$

۳۳- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{\sqrt{5x+1}-4}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{4x-3}-3}{\sqrt{5x+1}-4}\times\frac{\sqrt{4x-3}+3}{\sqrt{4x-3}+3}\times\frac{\sqrt{5x+1}+4}{\sqrt{5x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{4x-3}-3)(\sqrt{4x-3}+3)}{(\sqrt{5x+1}-4)(\sqrt{5x+1}+4)}\times\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}+4}{\sqrt{4x-3}+3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(4x-3)-9}{(5x+1)-16}\times\lim_{x\to 3}\frac{4+\sqrt{5x+1}}{3+\sqrt{4x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{4x-12}{5x-15}\times\lim_{x\to 3}\frac{4+\sqrt{5x+1}}{3+\sqrt{4x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)}{5(x-3)}\times\lim_{x\to 3}\frac{4+\sqrt{5x+1}}{3+\sqrt{4x-3}}$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{4+\sqrt{5\times 3+1}}{3+\sqrt{4\times 3-3}}=\frac{4}{5}\times\frac{8}{6}=\frac{16}{15}$$

۳۴- گزینهٔ ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to 2}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{3x-\sqrt{15x+6}}\times\frac{x+\sqrt{x+2}}{3x+\sqrt{15x+6}}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{9x^2-15x-6}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(9x+3)}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{9x+3}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\frac{3}{21}\times\frac{6+6}{2+2}=\frac{3}{7}$$

۳۵- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. اگر صورت و مخرج کسر داده شـده را در مزدوج صـورت و چاق مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد موردنظر برابر است با

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(\sqrt[3]{x-1}-1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-x^2)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(x-1-1)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(x+1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{\sqrt{x+2}+x}$$

$$=\frac{-3\times 3}{4}=-\frac{9}{4}$$

۳۶- گزینهٔ ۳ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)^2}\times\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2}\times\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{(1+1)(1+1+1)}=\frac{1}{6}$$

۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x-5}=\lim_{x\to5}\left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}-\frac{\sqrt{x-4}-1}{x-5}\right)$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}-\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-4}-1}{x-5}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to5}\left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}\times\frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}\right)-\lim_{x\to5}\left(\frac{\sqrt{x-4}-1}{x-5}\times\frac{\sqrt{x-4}+1}{\sqrt{x-4}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to5}\left(\frac{x+4-9}{x-5}\times\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}\right)-\lim_{x\to5}\left(\frac{x-4-1}{x-5}\times\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}-\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}=\frac{1}{3+3}-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{3}$$

۳۸- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$. در این صورت اگر $x\to1$، آن‌گاه $t\to1$. بنابراین

$$\lim_{x\to1}\frac{x-4\sqrt{x}+3}{1-x^2}=\lim_{t\to1}\frac{t^2-4t+3}{1-t^4}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{(t-3)(t-1)}{(1+t^2)(1-t^2)}=\lim_{t\to1}\frac{(t-3)(t-1)}{(1+t^2)(1-t)(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{-(t-3)}{(1+t^2)(1+t)}=\frac{-(1-3)}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{2}$$

۳۹- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$. در این صورت اگر $x\to1$، آن‌گاه $t\to1$. بنابراین

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+2}-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{t^2+t+2}-2t}{t^3-1}$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{\sqrt{t^2+t+2}-2t}{t^3-1}\times\frac{\sqrt{t^2+t+2}+2t}{\sqrt{t^2+t+2}+2t}\right)$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+2-4t^2}{t^3-1}\times\lim_{t\to1}\frac{1}{\sqrt{t^2+t+2}+2t}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{-(t-1)(3t+2)}{(t-1)(t^2+t+1)}\times\frac{1}{2+2}=-\frac{5}{3}\times\frac{1}{4}=-\frac{5}{12}$$

۴۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\sqrt{x-2}=t$. در این صورت، اگر $x\to2^+$، آن‌گاه $t\to0^+$. اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{4-t}-2}{t}=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\sqrt{4-t}-2}{t}\times\frac{\sqrt{4-t}+2}{\sqrt{4-t}+2}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{4-t-4}{t(2+\sqrt{4-t})}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{-t}{t(2+\sqrt{4-t})}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{-1}{2+\sqrt{4-t}}=-\frac{1}{4}$$

۴۱- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این‌صورت وقتی $x\to1$، $t\to1$. بنابراین

$$\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{t\to1}\frac{2t-\sqrt{t^3+3}}{t^3-1}$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{2t-\sqrt{t^3+3}}{t^3-1}\times\frac{2t+\sqrt{t^3+3}}{2t+\sqrt{t^3+3}}\right)$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{4t^2-t^3-3}{t^3-1}\times\lim_{t\to1}\frac{1}{2t+\sqrt{t^3+3}}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{-(t-1)(t^2-3t-3)}{(t-1)(t^2+t+1)}\times\frac{1}{2+2}$$

$$=\frac{-(1-3-3)}{1+1+1}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt[3]{x}-2}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{2(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)$$

$$-\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{2(x-1)}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)$$

$$-\lim_{x\to1}\left(\frac{x+3-4}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)$$

$$=2\times\frac{1}{1+1+1}-\frac{1}{2+2}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

۴۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این صورت وقتی $x\to 8$، $t\to 2$. بنابراین

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}=\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t^3+1}-t-1}{t^3-8}$$

$$=\lim_{t\to 2}\left(\frac{\sqrt{t^3+1}-(t+1)}{t^3-8}\times\frac{\sqrt{t^3+1}+(t+1)}{\sqrt{t^3+1}+(t+1)}\right)$$

$$=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t^3+1-t^2-2t-1}{t^3-8}\times\frac{1}{\sqrt{t^3+1}+t+1}\right)$$

$$=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t(t-2)(t+1)}{(t-2)(t^2+2t+4)}\times\frac{1}{\sqrt{t^3+1}+t+1}\right)$$

$$=\frac{2\times(2+1)}{4+4+4}\times\frac{1}{3+2+1}=\frac{1}{12}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}-\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\right)$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}\right)$$

$$-\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{x+1-9}{x-8}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}\right)$$

$$-\lim_{x\to 8}\left(\frac{x-8}{x-8}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}-\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\frac{1}{3+3}-\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

۴۳- گزینهٔ ۴ حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=1$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax+1)=a+1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-x}{x^2-1}\times\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-1}{x+1}\times\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{4}$$

چون تابع در نقطهٔ $x=1$ حد دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند:

$$a+1=-\frac{1}{4}\Rightarrow a=-\frac{5}{4}$$

۴۴- گزینهٔ ۴ چون

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(gof)(x)=\lim_{t\to 12}g(t)=\lim_{t\to 12}\frac{t-12}{\sqrt{t}-2\sqrt{3}}$$

$$=\lim_{t\to 12}\frac{(t-12)(\sqrt{t}+2\sqrt{3})}{(\sqrt{t}-2\sqrt{3})(\sqrt{t}+2\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{t\to 12}\frac{(t-12)(\sqrt{t}+2\sqrt{3})}{t-12}$$

$$=\lim_{t\to 12}(\sqrt{t}+2\sqrt{3})=\sqrt{12}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

۴۵- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از شرط $[x]\neq 2$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است:

$$D_f=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x=3$ تعریف نشده است.

۴۶- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 4\Rightarrow -2\leq x\leq 2$$

$$x-[x]\neq 0\Rightarrow x\neq[x]\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت زیر است

$$D_f=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$$

پس نقاط $x=\pm 1$ و $x=0$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آنها در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۴۷- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع از حل نامعادلهٔ $|x|(x^2-1)\geq 0$ به‌دست می‌آید:

$$|x|=0\Rightarrow x=0$$

یا

$$x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x\geq 1 \quad \text{یا} \quad x\leq -1$$

$$D_f=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$$

پس $x=0$ در دامنهٔ تابع است ولی یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ آن در دامنهٔ تابع نیستند.

۴۸- گزینهٔ ۲ نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{|x-2|}>1\Rightarrow |x-2|<1,\quad x\neq 2$$

$$-1<x-2<1\Rightarrow 1<x<3$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(1,2)\cup(2,3)$ است که یک همسایگی محذوف نقطهٔ $x=2$ است.

۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to -۳^-} f(x)=۰$ و مقادیر تابع f در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۳- مثبت هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to-۳^-}\frac{-۱}{f(x)}=-\infty$$

۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim_{x\to ۰^-}(f(x)-۲)=۰$ و مقادیر $f(x)-۲$ در یک همسایگی چپ نقطهٔ صفر منفی هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{f(x)-۲}=-\infty$$

پس گزینهٔ (۲) نادرست است. بقیهٔ گزینه‌ها درست هستند.

۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to-۲^+}(g(x)-۲)=۰$ و مقادیر $g(x)-۲$ در یک همسایگی راست نقطهٔ ۲- مثبت هستند. از طرف دیگر، $\lim_{x\to-۲^+}f(x)=۲>۰$. بنابراین

$$\lim_{x\to-۲^+}\frac{f(x)}{g(x)-۲}=+\infty$$

بقیهٔ گزینه‌ها درست هستند.

۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که وقتی که x از سمت چپ به ۲- نزدیک می‌شود، $x+۲$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین، $\lim_{x\to-۲^-}\frac{۱}{x+۲}=-\infty$.

۵۳- گزینهٔ ۳ اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^+$ و در نتیجه $[-x]=-۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^-}\frac{[-x]}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{-۱}{x-۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۵۴- گزینهٔ ۱ اگر $x\to۳^+$، آن‌گاه $[x]=۳$ و $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to۳^+}f(x)=+\infty$$

اگر $x\to۳^-$، آن‌گاه $[x]=۲$ و $f(x)=\frac{-۱}{x-۳}$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to۳^-}f(x)=+\infty$$

۵۵- گزینهٔ ۴ اگر $x\to۰^-$، آن‌گاه $|x|=-x$ و $[-x]=۰$، در نتیجه

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{x-|x|}{x^۲+[-x]}=\lim_{x\to۰^-}\frac{x-(-x)}{x^۲+۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۲}{x}=-\infty$$

۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰$$

$$x=۰\ ,\ x=\pm۲$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to۰^-}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to۰^+}f(x)=-\infty$$

چون این حدها برابر نیستند، پس تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد نامتناهی ندارد. همین‌طور در نقطه‌های $x=-۲$ و $x=۲$.

۵۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح ریشهٔ مخرج کسر تابع f هستند:

$$x-[x]=۰\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=۰$ ریشهٔ صورت کسر تابع است و در این نقطه،

$$\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{x}{x-۰}=۱$$

$$\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}\frac{x}{x+۱}=۰$$

بنابراین در $x=۰$ تابع حد چپ یا حد راست نامتناهی ندارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x-\sqrt{x+۲}=x+۲-\sqrt{x+۲}-۲$$

$$=\sqrt{x+۲}(\sqrt{x+۲}-۱)-۲$$

بنابراین اگر $x\to۲^+$، آن‌گاه $\sqrt{x+۲}\to۲^+$ و $(\sqrt{x+۲}-۱)\to۱^+$. در نتیجه

$$\sqrt{x+۲}(\sqrt{x+۲}-۱)\to۲^+$$

$$\sqrt{x+۲}(\sqrt{x+۲}-۱)-۲\to۰^+$$

پس $\lim_{x\to۲^+}f(x)=+\infty$.

همچنین اگر $x\to۲^-$، آن‌گاه $\sqrt{x+۲}\to۲^-$ و $(\sqrt{x+۲}-۱)\to۱^-$، در نتیجه

$$\sqrt{x+۲}(\sqrt{x+۲}-۱)\to۲^-$$

$$\sqrt{x+۲}(\sqrt{x+۲}-۱)-۲\to۰^-$$

پس $\lim_{x\to۲^-}f(x)=-\infty$.

۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-۳x+۲=(x-۱)(x^۲+x-۲)$$
$$=(x-۱)(x-۱)(x+۲)$$
$$=(x-۱)^۲(x+۲)$$

بنابراین در دو حالت $x\to ۱^+$ و $x\to ۱^-$:

$$(x-۱)^۲\to ۰^+ \Rightarrow (x-۱)^۲(x+۲)\to ۰^+$$

پس $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=+\infty$.

۶۰- گزینهٔ ۲ اگر $x\to (\frac{\pi}{۲})^+$، آن‌گاه $۲x\to \pi^+$ و $\cos ۲x\to (-۱)^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{[\cos ۲x]}{\cos x}=\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{-۱}{\cos x}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۶۱- گزینهٔ ۴ اگر $x\to (\frac{\pi}{۲})^+$، آن‌گاه $\cos x\to ۰^-$ و در نتیجه $[\cos x]=-۱$. پـس باید مقدار $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{-۱}{۱-\sin x}$ را به‌دست آوریم. حد مخرج کسر صفر اسـت و مقدار عبارت مخرج مثبت است زیرا $\sin x<۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{-۱}{۱-\sin x}=-\infty$$

۶۲- گزینهٔ ۴ اگر $x\to ۲^-$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} \tan(\frac{\pi}{x})=\lim_{t\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan t=-\infty$$

اگر $x\to ۲^+$، آن‌گاه $[x]=۲$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} \tan(\frac{۲\pi}{x})=\tan \pi=۰$$

۶۳- گزینهٔ ۳ می‌توان ضابطهٔ تابع را به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\frac{\cos x}{۱-\sin x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x}$$
$$=\frac{\cos x(۱+\sin x)}{\cos^۲ x}=\frac{۱+\sin x}{\cos x}$$

اکنون توجه کنید که عبارت $۱+\sin x$ همواره نامنفی است. بنابراین

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} \frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

۶۴- گزینهٔ ۲ چون حد مخرج صفر اسـت و حد مورد نظر وجـود دارد، پس حد صـورت هم باید صفر باشـد، تا حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۳}} (۳x^۲-(۳a-۱)x-a)=\frac{۳}{۹}-(۳a-۱)\times\frac{۱}{۳}-a=۰$$

پس $a=\frac{۱}{۳}$. به‌ازای $a=\frac{۱}{۳}$ حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۳}} \frac{۳x^۲-\frac{۱}{۳}}{۳x-۱}=\lim_{x\to \frac{۱}{۳}} \frac{۹x^۲-۱}{۳(۳x-۱)}=\lim_{x\to \frac{۱}{۳}} \frac{(۳x-۱)(۳x+۱)}{۳(۳x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to \frac{۱}{۳}} \frac{۳x+۱}{۳}=\frac{۳\times\frac{۱}{۳}+۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $b=\frac{۲}{۳}$، و در نتیجه $a+b=۱$.

۶۵- گزینهٔ ۲ چون حد مخرج صفر اسـت و حد مورد نظر وجـود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشـد تا حد مورد نظر به صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۱}(x^۲-ax+b)=۰\Rightarrow ۱-a+b=۰\Rightarrow b=a-۱$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-ax+a-۱}{۲x^۲-۳x+۱}=\lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x-a+۱)}{(x-۱)(۲x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to ۱} \frac{x-a+۱}{۲x-۱}=۲-a$$

بنابراین

$$۲-a=۳\Rightarrow a=-۱$$

پس $b=-۲$ و در نتیجه $a+b=-۳$.

۶۶- گزینهٔ ۳ بـرای اینکه f تابع در تمام نقطه‌های $\mathbb{R}$ حد داشته باشد، دو حالت زیر ممکن است پیش آید:

حالت اول مخرج ریشه نداشته باشد:

$$\Delta=a^۲-۳۲<۰\Rightarrow -\sqrt{۳۲}<a<\sqrt{۳۲}$$

حالت دوم مخرج دو ریشـه داشته باشد و این ریشه‌ها، ریشه‌های صورت کسر هم باشند. یعنی مخرج مضربی از صورت کسر باشد.

$$۲x^۲+ax+۴=k(x^۲-۳x+۲)$$

$$۲(x^۲+\frac{a}{۲}x+۲)=k(x^۲-۳x+۲)\Rightarrow k=۲, a=-۶$$

بنابراین عددهای صحیح در بازهٔ $(-\sqrt{۳۲},\sqrt{۳۲})$، یعنی

$$-۵,-۴,\dots,۴,۵$$

و -۶ جواب‌های مسئله هستند که تعداد آنها ۱۲ تاست.

۶۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه حد راست تابع f در $x=3$ وجود داشته باشد، باید $\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2+ax+3)=0$. بنابراین

$$9+3a+3=0\Rightarrow a=-4$$

در این صورت حد راست تابع را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}=2$$

حد چپ تابع را نیز حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(bx-7)=3b-7$$

حد چپ و حد راست تابع باید برابر باشند، پس

$$3b-7=2\Rightarrow b=3$$

در نتیجه $a+b=-1$.

۶۸- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+x+a}-2)=0\Rightarrow\sqrt{2^2+2+a}-2=0\Rightarrow a=-2$$

اگر $a=-2$، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+x-2}-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2}=\frac{2+3}{\sqrt{2^2+2-2}+2}=\frac{5}{4}$$

در نتیجه $b=\frac{5}{4}$ و $a+4b=3$.

۶۹- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس این حد به صورت $\frac{0}{0}$ است. بنابراین حد صورت هم صفر است

$$\lim_{x\to 1}(ax-\sqrt{x})=a-1=0\Rightarrow a=1$$

در نتیجه اگر صورت و مخرج کسر مورد نظر را در مزدوج‌های صورت و مخرج ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}-2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})(\sqrt{3x+1}+2)}{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)(x+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)(\sqrt{3x+1}+2)}{(3x+1-4)(x+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}{3(x-1)(x+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{3x+1}+2)}{3(x+\sqrt{x})}=\frac{1(2+2)}{3(1+1)}=\frac{2}{3}$$

بنابراین $b=\frac{2}{3}$ و $a+b=\frac{5}{3}$.

۷۰- گزینهٔ ۴ چون حد مورد نظر وجود دارد و حد مخرج برابر صفر است، باید حد صورت هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+a}+1)=0\Rightarrow 2-\sqrt{2+a}+1=0\Rightarrow a=7$$

اگر $a=7$، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}-\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}-\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

بنابراین $b=12$ و $a+b=19$.

۷۱- گزینهٔ ۲ برای اینکه حد کسر برابر $-\infty$ شود، باید حد مخرج صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to -1}(x^3+ax^2+3x+b)=-1+a-3+b=0\Rightarrow b=-a+4$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+ax^2+3x+b}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x^3+ax^2+3x-a+4}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2+(a-1)x-a+4)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2+(a-1)x-a+4}$$

برای اینکه حد کسر فوق $-\infty$ شود، باید حد مخرج صفر باشد. یعنی $x=-1$ ریشهٔ (مضاعف) آن باشد. پس

$$1-a+1-a+4=0\Rightarrow a=3$$

بنابراین $b=1$ و $a-b=2$.

۷۲- گزینهٔ ۱ برای اینکه حد مورد نظر $+\infty$ شود باید $x=\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ مخرج کسر باشد:

$$a\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow a\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$a=-1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{bx+1}{\cos x-\sin x}=+\infty$$

اکنون توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\pi}{4})^+$ مقدار مخرج کسر منفی است و باید مقدار صورت کسر هم منفی باشد تا حد مورد نظر برابر $+\infty$ شود. پس

$$\frac{b\pi}{4}+1<0\Rightarrow b<-\frac{4}{\pi}$$

۷۳- گزینهٔ ۱ وقتی $x\to(\frac{1}{6})^+$، $\cos\pi x$ با مقدارهای کوچک‌تر از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos\pi x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-\Rightarrow 4\cos^2\pi x\to 3^-$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{[4\cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، زیرا در غیر این‌صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود. در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}(ax+b)=0\Rightarrow\frac{a}{6}+b=0$$

$$a=-6b$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{-6bx+b}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2(1-6x)}{b(1-6x)}=\frac{2}{b}$$

بنابراین $\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$، یعنی $b=4$. پس $a=-24$ و در نتیجه

$$a+b=-20$$

۷۴- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{-\sqrt[3]{2}(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۷۵- گزینهٔ ۳ چون

$$\lim_{x\to3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$$

بنابراین باید مخرج کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس $x=3$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$2x^2+ax+b=2(x-3)^2$$

$$2x^2+ax+b=2x^2-12x+18$$

$$a=-12\ ,\ b=18$$

پس $a+b=6$.

۷۶- گزینهٔ ۴ برای آنکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد باید $P(-2)=0$. بنابراین

$$P(-2)=16-8a+16=0\Rightarrow a=4$$

پس

$$P(x)=x^4+4x^3-8x$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^4+4x^3-8x=0\Rightarrow(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0$$

$$x(x+2)(x^2+2x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-2\\x^2+2x-4=0\end{cases}$$

$$x^2+2x=4\Rightarrow(x+1)^2=5\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{5}-1\\x=-\sqrt{5}-1\end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه $-\sqrt{5}-1$ است.

۷۷- گزینهٔ ۲ چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}(ax+b)=۰\Rightarrow ۲a+b=۰\Rightarrow b=-۲a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax-۲a}\times\frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{a(x-۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{a(x-۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}=\frac{۱}{a(۲+۲)}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

پس $b=-۱$.

۷۸- گزینهٔ ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}(\sqrt{ax+b}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{a+b}=۲$$

$$a+b=۴\Rightarrow b=۴-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{ax+b}+۲}{\sqrt{ax+b}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{ax-a}{(x-۱)(x+۱)}\times\frac{۱}{۲+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{a}{x+۱}\times\frac{۱}{۴}=\frac{a}{۸}$$

بنابراین $\frac{a}{۸}=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $a=۱۲$، پس $b=-۸$.

۷۹- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=۲$$

۸۰- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=۱,\qquad \lim_{x\to +\infty}f(x)=۱$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۸۱- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to +\infty}f(۱-x)=\lim_{t\to -\infty}f(t)=-۲$$

بنابراین $\lim_{x\to +\infty}(f(۱-x)-۱)=-۲-۱=-۳$.

۸۲- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to -\infty}f(۲-x)=\lim_{t\to +\infty}f(t)=-۲$$

بنابراین $\lim_{x\to -\infty}(f(۲-x)+۳)=-۲+۳=۱$.

۸۳- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to ۱^-}f(x)=+\infty$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست نیست. بقیهٔ گزینه‌ها درست‌اند.

۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}f(x)=-۱$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -\infty}f^۲(x)=\lim_{x\to +\infty}f^۲(x)=۱$$

پس گزینه‌های (۲) و (۳) درست هستند. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=-۱\Rightarrow\lim_{x\to -\infty}(f(x)+۱)=۰$$

و اگر $x\to -\infty$، مقادیر $f(x)+۱$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{f(x)+۱}=-\infty$$

پس گزینهٔ (۱) هم درست است. در آخر،

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=-۱,\qquad \lim_{x\to +\infty}(f(x)+۱)=۰$$

و اگر $x\to +\infty$، مقادیر $f(x)+۱$ منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{f(x)+۱}=+\infty$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست نیست.

۸۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=+\infty$ و

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to ۱^-}((x+۲)f(x))=-\infty$$

بنابراین گزینه‌های (۳) و (۲) درست‌اند. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=۱\Rightarrow\lim_{x\to -\infty}(۱-f(x))=۰$$

و اگر $x\to -\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۴}{۱-f(x)}=+\infty$$

و گزینهٔ (۱) درست است. همچنین

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=۱\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}(۱-f(x))=۰$$

و اگر $x\to+\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-۴}{۱-f(x)}=+\infty$$

و گزینهٔ (۴) درست نیست.

۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^+}(fof)(x)=\lim_{x\to۱^+}f(f(x))$$
$$=\lim_{t\to+\infty}f(t)=۲$$

۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to۲} f(x)=+\infty$.

بنابراین

$$\lim_{x\to۲}(fof)(x)=\lim_{x\to۲}f(f(x))$$
$$=\lim_{t\to+\infty}f(t)=۱$$

۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۲$$

از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$$
$$=\lim_{t\to۲^+}f(t)=+\infty$$

۸۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۳$.

بنابراین $[\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)]=[۳]=۳$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)<۳$، بنابراین $[f(x)]=۲$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}۲=۲$$

پس

$$۲\lim_{x\to+\infty}[f(x)]-[\lim_{x\to+\infty}f(x)]=۲\times۲-۳=۱$$

۹۰- گزینهٔ ۴ چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k}{x^m}=۰$ $(m\geq۱)$، پس حد صورت کسر داده شده برابر است با

$$(۳-۰)^۳-۵(۲+۰)^۲=۷$$

و حد مخرج این کسر برابر است با

$$(۲+۰)^۴-۲=۱۴$$

بنابراین حد داده شده برابر است با $\frac{۷}{۱۴}=\frac{۱}{۲}$.

۹۱- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{۱}{x}$، آن‌گاه $t\to۰^-$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۲}{x^۲}}{\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x^۲}}=\lim_{t\to۰^-}\frac{t-۲t^۲}{۲t-t^۲}=\lim_{t\to۰^-}\frac{۱-۲t}{۲-t}=\frac{۱}{۲}$$

۹۲- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{۰}{۰}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-(۱-\frac{۱}{x})^۳}{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-\frac{(x-۱)^۳}{x^۳}}{\frac{۱}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳-(x-۱)^۳}{x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳-(x^۳-۳x^۲+\cdots)}{x^۲}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-\cdots}{x^۲}=۳$$

۹۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{۱}{x}\to۰^-$ و در نتیجه $[-\frac{۱}{x}]=-۱$، بنابراین حدهای توابع $f(x)=x[-\frac{۱}{x}]$ و $g(x)=-x$ در $+\infty$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to+\infty}(x[-\frac{۱}{x}])=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$$

۹۴- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=\frac{۱}{x}$، آن‌گاه $t\to۰^+$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\frac{۱}{x}]+۱}{[-\frac{۱}{x}]-۱}=\lim_{t\to۰^+}\frac{[t]+۱}{[-t]-۱}=\frac{۰+۱}{-۱-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۹۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\frac{۱}{x}$، آن‌گاه $t\to۰^-$، پس

$$\lim_{x\to-\infty}([\frac{۱}{x}]-[-\frac{۱}{x}])=\lim_{t\to۰^-}([t]-[-t])=-۱-۰=-۱$$

۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{۱}{x}\to۰^-$ و در نتیجه $[-\frac{۱}{x}]=-۱$، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x[-\frac{۱}{x}]-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-۱}{۲x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}$$

۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$$

۹۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x+2x^2-3x^3}{1+x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3}{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$$

۹۹- گزینهٔ ۳ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت $-27x^3$ و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج $3x^3$ است. بنابراین، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-27x^3}{3x^3}=-9$$

۱۰۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)^3(3x+1)^2}{x^4-5x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-\cdots)(9x^2+\cdots)}{-5x^5+x^4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^5-\cdots}{-5x^5+x^4}=-\frac{9}{5}$$

۱۰۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{((x+1)^2-3)^3(x+4)}{(5-(3-x)^4)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+\cdots)^3(x+4)}{(-x^4+\cdots)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^6+\cdots)(x+4)}{x^8+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+\cdots}{x^8+\cdots}=0$$

۱۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که بزرگ‌ترین جمله در صورت کسر مورد نظر برابر است با $10x^2$، در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^2}{3x^2}=\frac{10}{3}$$

۱۰۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+10)}{(x+2)(2x+3)\cdots(10x+11)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}+\cdots}{1\times2\times\cdots\times10x^{10}+\cdots}=\frac{1}{10!}$$

۱۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(2x)-1=(2x)^2-(2x)-1=4x^2-2x-1$$

$$f(x)+x^2-1=x^2-x+x^2-1=2x^2-x-1$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=2$$

۱۰۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(x)=2x^2-x+3$ و در نتیجه

$$f(2x-1)=2(2x-1)^2-\cdots=8x^2-\cdots$$

$$f(1-3x)=2(1-3x)^2-\cdots=18x^2-\cdots$$

$$f(3-x)=2(3-x)^2-\cdots=2x^2-\cdots$$

بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ صورت برابر است با
$8x^2-18x^2=-10x^2$
و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج برابر است با $2x^2$. در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-10x^2}{2x^2}=-5$$

۱۰۶- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $f(x)=ax^3+\cdots$. در این صورت

$$f(3x-1)=a(3x-1)^3+\cdots=27ax^3+\cdots$$

$$f(5-x)=a(5-x)^3+\cdots=-ax^3+\cdots$$

در نتیجه، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{27ax^3}{-ax^3}=-27$$

۱۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $2x$ و x منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+|2x|}{3x-2|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2x}{3x-2(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{5x}=\frac{1}{5}$$

۱۰۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $1-3x$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|1-3x|}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-(1-3x)}{5x-3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{5x-3}=1$$

۱۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، مقادیر $3x+1$ و $2x$ مثبت‌اند و مقادیر $1-3x$ و $5-2x$ منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|3x+1|-|2x|}{|1-3x|-|5-2x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1-2x}{3x-1-(2x-5)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+4}=1$$

۱۱۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left||x|-x+۳\right|}{۴|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-x-x+۳|}{۴(-x)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-۲x+۳|}{-۴x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x+۳}{-۴x}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{|x-۲|+x}{|x|-x}\right|=\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{-(x-۲)+x}{-x-x}\right|$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{۲}{-۲x}\right|=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{۱}{x}\right)=۰$$

۱۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-۴}{۵x-۶}=\frac{۳}{۵},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x^{۲}+۲x-۱}{x^{۲}-x+۱}=-۲$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $\frac{۳}{۵}\times(-۲)=\frac{-۶}{۵}$.

۱۱۳- گزینهٔ ۱ توجـه کنیـد کـه $|x-۱|=|۱-x|$ و اگـر $x\to-\infty$، مقادیر $x-۱$ منفی‌اند. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x-۱|}{۲x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+۱}{۲x+۱}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|۱-x|}{۳x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱-x}{۳x-۱}=-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $-\frac{۱}{۲}-\left(-\frac{۱}{۳}\right)=-\frac{۱}{۶}$.

۱۱۴- گزینهٔ ۲ توجـه کنید که اگر n عددی طبیعی باشـد، $۵n+۴$ و $۴n+۱۱$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۵n+۴}-۱۶}{x^{۴n+۱۱}-۴}=\lim_{x\to+\infty}x^{۵n+۴-(۴n+۱۱)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{n-۷}$$

برای اینکه این حد وجود داشـته باشـد، باید $n-۷\leq ۰$، یعنی $n\leq ۷$ بنابراین، بزرگ‌ترین مقدار ممکن n برابر ۷ است.

۱۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشـد، $۳n+۴$ و $۲n+۶$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳n+۴}+x+۱}{x^{۲n+۶}-x+۱}=\lim_{x\to+\infty}x^{۳n+۴-(۲n+۶)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{n-۲}$$

اگر این حد صفر باشـد، بایـد $n-۲<۰$، یعنی $n<۲$، بنابراین فقط $n=۱$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۱۱۶- گزینهٔ ۱ اگر $n=۱$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳}+x-۱}{x^{۵}-x^{۵}+۱}=+\infty$$

پس $n=۱$ غیر قابل قبول است.

اگر $n\geq ۲$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۴n-۱}+x-۱}{x^{۳n+۲}-x^{۵}+۱}=\lim_{x\to+\infty}x^{۴n-۱-(۳n+۲)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{n-۳}$$

بـرای اینکه این حد صفر باشـد، باید $n-۳<۰$، یعنی $n\leq ۲$. بنابراین $n=۲$. پس فقط یک n ویژگی مورد نظر را دارد.

۱۱۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که باید $m\neq ۰$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳x+۱)^{۵}(mx+۲)^{۷}}{(۲mx-۱)^{۴}(۶x-۱)^{۸}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۳^{۵}x^{۵}+\cdots)(m^{۷}x^{۷}+\cdots)}{(۲^{۴}m^{۴}x^{۴}-\cdots)(۶^{۸}x^{۸}-\cdots)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^{۵}m^{۷}x^{۱۲}+\cdots}{۲^{۴}۶^{۸}m^{۴}x^{۱۲}+\cdots}$$

$$=\frac{۳^{۵}m^{۷}}{۲^{۴}۶^{۸}m^{۴}}=\frac{m^{۳}}{۲^{۱۲}\times ۳^{۳}}$$

بنابراین $\frac{m^{۳}}{۲^{۱۲}\times ۳^{۳}}=-۱$، پس $m=-۴۸$.

۱۱۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که باید $m\neq ۰$ و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(mx+۱)^{۲}(۲x-۱)^{۳}}{(۴x+۵)(mx^{۴}-x^{۲}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(m^{۲}x^{۲}+\cdots)(۸x^{۳}-\cdots)}{۴mx^{۵}-\cdots}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۸m^{۲}x^{۵}-\cdots}{۴mx^{۵}-\cdots}=\frac{۸m^{۲}}{۴m}=۲m$$

بنابراین $۲m=\frac{۱}{۳}$ و $m=\frac{۱}{۶}$.

۱۱۹- گزینهٔ ۲ اگـر m عـددی مثبـت باشـد، وقتـی که $x\to+\infty$، مقادیر $۱-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-۱)+۲x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+۲)x-۲}{۳x+۱}$$

$$=\frac{m+۲}{۳}$$

بنابراین $\frac{m+۲}{۳}=۳$، پس $m=۷$.

اگر m عددی منفی باشد، وقتی که $x\to+\infty$، مقادیر $1-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-m)x}{3x+1}=\frac{2-m}{3}$$

بنابراین $\frac{2-m}{3}=3$، پس $m=-7$.

اگر $m=0$، حد مورد نظر برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود که درست نیست.

بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و ۷- هستند و حاصل‌ضرب آنها ۴۹- است.

۱۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، درنتیجه $2a-1=0$، پس $a=\frac{1}{2}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1}{2x^2+x+1}=\frac{4}{2}=2$$

در نتیجه $b=2$ و $a+b=\frac{5}{2}$.

۱۲۱- گزینهٔ ۳ چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت این کسر جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=3$. در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(b+2)x^2-3x+4}{3x^2-1}=\frac{b+2}{3}$$

بنابراین $\frac{b+2}{3}=5$ و $b=13$. به این ترتیب $a+b=16$.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل x^2 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^2 در صورت کسر داده شده باید صفر باشد، یعنی $(a-3)^2=0$، پس $a=3$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{(b+1)x+2}=\frac{3}{b+1}$$

بنابراین $\frac{3}{b+1}=-6$، پس $b=-\frac{3}{2}$. به این ترتیب، $ab=-\frac{9}{2}$.

۱۲۳- گزینهٔ ۲ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده باید صفر باشد. در نتیجه $2a-1=0$، پس $a=\frac{1}{2}$. به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(b-1)x^2+x-4}{(3b+1)x^2+2x-3}$$

اکنون توجه کنید که اگر ضریب x^2 در صورت یا مخرج کسر داده شده برابر صفر باشد، حد مورد نظر برابر ۱ نمی‌شود. در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(b-1)x^2+x-4}{(3b+1)x^2+2x-3}=\frac{b-1}{3b+1}$$

بنابراین $\frac{b-1}{3b+1}=1$، پس $b=-1$. به این ترتیب، $a+b=-\frac{1}{2}$.

۱۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است. در نتیجه $a+1=0$، پس $a=-1$. به این ترتیب، فرض مسئله می‌شود

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{bx^2+x-1}{(-1-c)x^2+2x+1}=1$$

توجه کنید که اگر ضریب x^2 در صورت یا مخرج یا هر دو صفر باشد، این حد برابر ۱ نمی‌شود. بنابراین حد مورد نظر برابر است با $\frac{b}{-1-c}$. در نتیجه $\frac{b}{-1-c}=1$، یعنی $b=-1-c$، پس $b+c=-1$. بنابراین $a+b+c=-2$.

۱۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که چون حد مورد نظر وجود دارد و صفر نیست، پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2b)x^2-5x+3}{3x^2-4}=\frac{a-2b}{3}$$

در نتیجه $\frac{a-2b}{3}=-\frac{1}{3}$، یعنی $a-2b=-1$. بنابراین

$$\begin{cases}2a-3b=6\\ a-2b=-1\end{cases}\Rightarrow a=15\,,\,b=8$$

پس $a-b=7$.

۱۲۶- گزینهٔ ۳ اگر $n>3$، آن‌گاه

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^n}=1$$

اگر $n=3$، آن‌گاه

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^3}{x^3-2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{-x^3}=-5$$

اگر $n<3$، آن‌گاه

$$L=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^3}{-2x^3}=-2$$

پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

۱۲۷- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$\begin{cases} f(1)=-2 \\ f^{-1}(2)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=-2 \\ f(3)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ 3a+b=2 \end{cases}$$

بنابراین $a=2$ و $b=-4$. در نتیجه

$$f(x)=2x-4,\quad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+2$$

به این ترتیب،

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x+2)}{f^{-1}(1-x)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2(x+2)-4}{\frac{1}{2}(1-x)+2}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4$$

۱۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که نمودار تابع f خطی راست است که از نقطه‌های $(-1,0)$ و $(0,-2)$ گذشته است. بنابراین معادله‌اش به صورت $y=-2x-2$ است. در نتیجه $f(x)=-2x-2$. اکنون ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$y=-2x-2\Rightarrow x=\frac{y+2}{-2}$$

در نتیجه $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-1$. به این ترتیب،

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x-2}{-\frac{1}{2}x-1}=\frac{-2}{-\frac{1}{2}}=4$$

۱۲۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $f(x)=ax+b$، چون تابع f از نقطهٔ $(0,3)$ می‌گذرد، پس $f(0)=3$، بنابراین $b=3$. در نتیجه

$$f(x)=ax+3\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+3}{\frac{1}{a}x-\frac{3}{a}}=\frac{a}{\frac{1}{a}}=a^2$$

در نتیجه $a^2=4$ و چون شیب خط نمودار تابع f مثبت است، پس $a=2$. بنابراین $f(x)=2x+3$ و در نتیجه

$$f(k)=0\Rightarrow 2k+3=0\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

فصل چهارم

مشتق

فصل چهارم

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف فرض کنید $P(x_\circ, f(x_\circ))$ نقطه‌ای روی نمودار تابع f باشد و

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

وجود داشــته و برابر با m باشــد. در این صورت خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ P، خطی است که از نقطهٔ P می‌گذرد و شـیب آن برابر m اســت. معادلهٔ این خط به‌صورت $y=m(x-x_\circ)+y_\circ$ است. m را شیب منحنی در $x_\circ$ نیز می‌نامند.

تعریف فرض کنید $P(x_\circ, f(x_\circ))$ نقطه‌ای روی نمودار تابع f باشد، تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته باشد و

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}=+\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}=-\infty$$

در این صورت می‌گوییم خط $x=x_\circ$ مماس قائم بر نمودار تابع f در نقطهٔ P است.

تعریف اگر نمودار تابعی در نقطه‌ای خط مماس یا خط مماس قائم نداشــته باشــد، می‌گوییم این تابع در این نقطه مماس ندارد.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$\lim_{h\to\circ^-}\frac{f(\circ+h)-f(\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^-}\frac{|h|}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to\circ^+}\frac{f(\circ+h)-f(\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^+}\frac{|h|}{h}=1$$

بنابراین حد عبارت $\frac{f(\circ+h)-f(\circ)}{h}$ وقتی $h\to\circ$ وجود ندارد و حد چپ و حد راست این عبارت متناهی‌اند، پس تابع f در نقطهٔ $x=\circ$ مماس ندارد.

تعریف فرض کنید نقطهٔ $P(x_\circ, f(x_\circ))$ روی نمودار تابع f باشد و

$$\lim_{h\to\circ^+}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \quad , \quad \lim_{h\to\circ^-}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

هــر دو متناهــی باشــند ولی برابر نباشــند، یا یکی متناهــی و دیگری نامتناهی باشــد. در این صورت می‌گوییم نقطهٔ $x_\circ$ نقطه‌ای گوشه‌ای برای تابع f است. توجه کنید که در نقطهٔ P خط مماس بر نمودار تابع f وجود ندارد.

مثال: نقطهٔ $x=0$ برای تابع $f(x)=|x|$ نقطه‌ای گوشه‌ای است.

تعریف اگر نقطهٔ a در دامنهٔ تابع f باشد و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند:

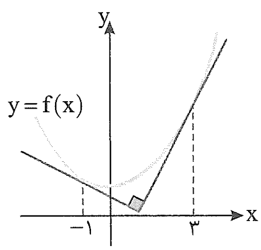
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر مشتق تابع f در نقطهٔ a وجود داشته باشد، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. توجه کنید که مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a, f(a))$ است.

تعریف اگر نقطهٔ a در دامنهٔ تابع f باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تست ۱ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f'(3)-f'(-1)=2$، مقدار $f'(-1)$ چقدر است؟



۱) -2

۲) -1

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{3}{2}$

راه‌حل اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر m باشد، آن‌گاه شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-1$ است، برابر $-\frac{1}{m}$ است. پس

$$m+\frac{1}{m}=2\Rightarrow m=1$$

بنابراین $f'(-1)=-1$.

تست ۲ مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-5)$ در نقطهٔ $x=5$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) -24 ۳) ۶ ۴) -6

راه‌حل تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=5$ را می‌نویسیم:

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}((x-1)(x-2)(x-3)(x-4))=4\times3\times2\times1=24$$

تست ۳

اگر $f'(2)=f(2)=4$، مقدار $\lim_{x\to 2}\frac{f^3(x)-f^3(2)}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۴۸　　۳) ۱۲　　۴) ۲

راه‌حل از اتحاد چاق و لاغر و اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^3(x)-f^3(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f^2(x)+f^2(2)+f(2)f(x))}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)+f^2(2)+f(2)f(x)}{x+2}$$

$$=f'(2)\times\frac{f^2(2)+f^2(2)+f^2(2)}{2+2}=4\times\frac{16+16+16}{4}=48$$

تست ۴

اگر $f(1)=f'(1)=3$، مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{3h}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) -1　　۳) ۲　　۴) -2

راه‌حل با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{3h}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}(3)=1$$

نکته

اگر تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$$

تست ۵

اگر تابع f در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد، مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-3h)}{h}$ کدام است؟

۱) $f'(2)$　　۲) $5f'(2)$　　۳) $3f'(2)$　　۴) $2f'(2)$

راه‌حل بنابر نکتهٔ قبل،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-3h)}{h}=((2-(-3))f'(2)=5f'(2)$$

تست ۶

تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y، $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$.

اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=-1$، مقدار $f'(4)$ چقدر است؟

۱) -1　　۲) ۱　　۳) ۵　　۴) -5

راه‌حل توجه کنید که

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(4)+f(h)-4h)-f(4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-4h}{h}=\lim_{h\to 0}(\frac{f(h)}{h}-4)=-1-4=-5$$

تعریف اگر نقطهٔ a در دامنهٔ تابع f باشد، $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را مشتق چپ تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند. همین‌طور، $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را مشتق راست تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند. توجه کنید که

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته

تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f'_-(a)=f'_+(a)$.

تست ۷ مشتق راست تابع $f(x)=|x^2-1|$ در نقطهٔ $x=1$ چقدر از مشتق چپ آن در این نقطه بیشتر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ به اندازهٔ ۴ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

قضیه ۱ اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است.

نتیجه اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته نباشد، در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

تذکر اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، در این نقطه مشتق چپ هم ندارد. همین‌طور، اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی راست نداشته باشد، در این نقطه مشتق راست هم ندارد.

تست ۸

تابع $f(x)=2x+[-x]$ در نقطهٔ $x=0$ چگونه است؟

۱) مشتق پذیر است.
۲) مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد.
۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.
۴) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

راه‌حل ابتدا پیوستگی تابع f در نقطهٔ $x=0$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(0)=0\,,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-1\,,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوستگی راست ندارد و مشتق راست نیز ندارد، ولی ممکن است مشتق چپ داشته باشد. توجه کنید که

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-0}{x}=2$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ فقط مشتق چپ دارد.

تست ۹

تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+x & x\geq 1 \\ x^2-b & x<1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -1
۳) ۲
۴) -2

راه‌حل چون تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{x\to 1^+}(ax^2+x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-b)=f(1)$$

$$a+1=1-b\Rightarrow a+b=0 \qquad (1)$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ وجود داشته باشند و برابر باشند. پس

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-b-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1-(b+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+x-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x^2-1)+(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(a(x+1)+1)=2a+1$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 2a+1=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

با توجه به تساوی (۱)، $b=-\frac{1}{2}$، در نتیجه $a-b=1$.

تعریف **نیم‌مماس چپ** **در نقطهٔ $(a,f(a))$ روی نمودار تابع f، نیم‌خطی است که شیب آن برابر با $f'_-(a)$ است و از نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌گذرد.**

نیم‌مماس راست **در نقطهٔ $(a,f(a))$ روی نمودار تابع f نیم‌خطی است که شیب آن برابر با $f'_+(a)$ است و از نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌گذرد.**

توجه کنید که اگر $f'_-(a)$ یا $f'_+(a)$ نامتناهی باشند، نیم‌مماس‌ها موازی محور y هستند و شیب آنها تعریف نشده است.

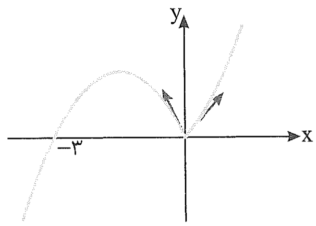
تست ۱۰

مجموع شیب‌های نیم‌مماس‌های چپ و راست رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}+x & x\geq 0 \\ -x^{2}-3x & x<0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -3

راه‌حل

تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است، پس شرط لازم مشتق‌پذیری را دارد. مشتق چپ و مشتق راست تابع f را در این نقطه پیدا می‌کنیم.



شیب نیم‌مماس چپ:

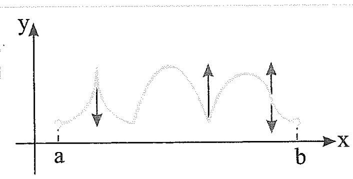
$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-x^{2}-3x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}(-x-3)=-3$$

شیب نیم‌مماس راست:

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^{2}+x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}(x+1)=1$$

پس مجموع مورد نظر برابر -2 است.

تست ۱۱

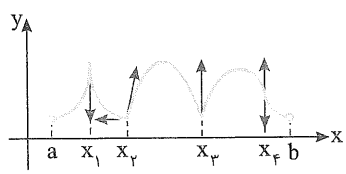


نمودار تابع f روی بازهٔ (a,b) به شکل مقابل است. این تابع در چند نقطه از این بازه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل



مطابق شکل مقابل در نقاط x_1، x_3 و x_4 خط مماس یا نیم‌مماس بر منحنی تابع موازی محور عرض‌هاست، پس تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. در نقطهٔ x_2 دو نیم‌مماس بر نمودار تابع رسم می‌شود و مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر نیستند. بنابراین تابع f در چهار نقطه مشتق‌پذیر نیست.

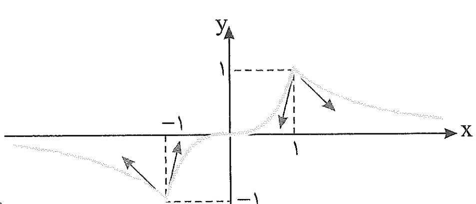
تست ۱۲

تابع $f(x)=\begin{cases} x^{3} & |x|\leq 1 \\ \frac{1}{x} & |x|>1 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل

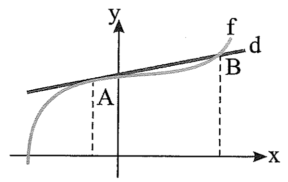
به نمودار تابع توجه کنید. در نقاط $x=1$ و $x=-1$ تابع مشتق‌پذیر نیســت، زیرا مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر نیستند.



فصل چهارم

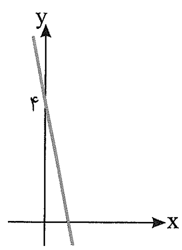
درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



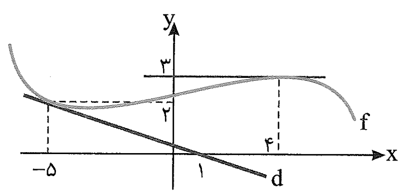
۱- در شکل مقابل خط d در نقطهٔ $A(-۱,۳)$ بر نمودار تابع f مماس است و از نقطهٔ $B(۴,۴)$ نیز گذشته است. مقدار $f'(-۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$



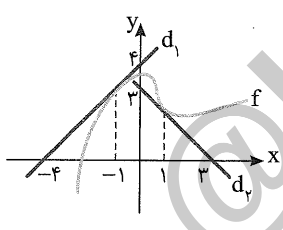
۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f'(-۳)=-۵$، مقدار $f(۴)$ چقدر است؟

۱) -۱۰
۲) -۱۲
۳) -۱۴
۴) -۱۶



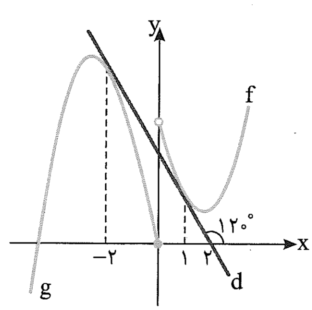
۳- در شکل مقابل خط d در نقطه‌ای به طول -۵ و خط $y=۳$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع f مماس است. مقدار $f'(-۵)+f'(۴)$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۶}$



۴- در شکل مقابل نمودار تابع f در نقطه‌هایی به طول ۱− و ۱ به‌ترتیب بر خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ مماس است. مقدار $(f'of')(-۱)$ چقدر است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴



۵- در شکل مقابل خط d در نقطه‌هایی به طول ۱ و ۲− به‌ترتیب بر نمودار تابع‌های f و g مماس است. مقدار $f'(۱)+g'(-۲)$ چقدر است؟

۱) -۳
۲) $-\sqrt{۳}$
۳) $-۲\sqrt{۳}$
۴) صفر

۶- مشتق تابع $f(x)=x+|x-۲|$ در هیچ نقطه از بازهٔ $(a,+\infty)$ صفر نیست. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۷- اگر $f(x)=|x+۲|+|x-۴|$، مجموع عددهای صحیحی که مشتق تابع f به‌ازای آنها صفر است چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

۸- تابع $f(x)=[x]$ با دامنهٔ $(-۱,۳)$ را درنظر بگیرید. در چند نقطه مشتق تابع برابر صفر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- شیب خطی که دو نقطه به طول‌های ۲ و a از نمودار تابع مشتق‌پذیر f را به هم وصل می‌کند برابر $a^۲-۳a$ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۱

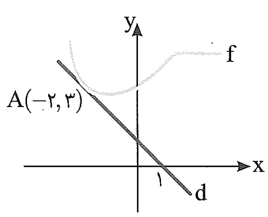
۱۰- اگر $f'(۲)=۳$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۱- اگر $f(۱)=f'(۱)=۲$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-۱}{f(x)-۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۲- در شکل مقابل خط d بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(-۲,۳)$ مماس است. مقدار $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{۲f(x)-۶}{x+۲}$ چقدر است؟



۱) -۳ ۲) -۲
۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳- اگر $f(۲)=f'(۲)=۳$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۹}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۱۴- اگر $f'(-۲)=f(-۲)=k$ و $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{f^۲(x)-kf(x)}{x^۲-۴}=-۲$ ، مقدار $k^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۵- اگر $f(۲)=f'(۲)=۴$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x-۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۶- اگر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۳x+۲}=۳$ ، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۷- اگر $۲f(-۲)=f'(-۲)=۴$، مقدار $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x+f(x)}{x+۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸- اگر $f'(۲)=۴$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۹- اگر $\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}$ $f'(3)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- اگر $f'(1)=6$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -6 ۳) $\dfrac{1}{6}$ ۴) $-\dfrac{1}{6}$

۲۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^3 & x>2 \\ 3x^2 & x\le 2\end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) وجود ندارد.

۲۲- اگر $f(1)=f'(1)=2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^3(1+h)-8}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۲۳- اگر $f'(2)=-2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۲ ۴) صفر

۲۴- اگر $f'(3)=2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵- اگر $f'(-1)=3$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1-h)-f(-1-2h)}{3h}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶- اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}=4$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{f(x)-f(2)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $-\dfrac{1}{4}$

۲۷- اگر $f'_+(2)=-2$ و $f'_-(2)=4$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h^2)-f(2)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۲۸- اگر $f'_+(2)=3$ و $f'_-(2)=2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h^2)-f(2-h^2)}{h^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹- اگر $f'_+(1)=-f'_-(1)=4$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+3h)-f(1-4h)}{h}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) -28

۳۰- اگر f تابعی مشتق‌پذیر با مقادیر مثبت باشد، $f'(2)\neq 0$ و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{f(2+h)}-\sqrt{f(2)}}{h}=\sqrt{f'(2)}$، مقدار $\dfrac{f'(2)}{f(2)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

۳۱- تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است و $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-۱}{x^{۲}-۴}=۳$. مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f^{۲}(۲+h)-۱}{h}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۳۲- تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y، $f(x+y)=f(x)+f(y)+۲xy$. اگر $f'(۰)=۵$، مقدار $f'(-۱)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳- اگر $f(x)=(x+۱)(۲x^{۲}+۱)(۳x^{۲}+۲)$، مقدار $f'(-۱)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۳۴- اگر $f(x)=(x-۱)^{۲}(x+۱)^{۲}(x^{۲}+۱)^{۲}$، مقدار $f'(-۱)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۳۵- اگر $f(x)=۲x(۲x-۱)(۲x-۲)\cdots(۲x-۱۰)$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $۲\times ۸!$ ۲) $-۲\times ۸!$ ۳) $۴\times ۸!$ ۴) $-۴\times ۸!$

۳۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\notin\mathbb{Z} \\ ۲x & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) وجود ندارد.

۳۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-x & x\neq ۲ \\ x^{۳} & x=۲\end{cases}$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۳۸- اگر $f(x)=(x-۲)\sqrt{\dfrac{x+۲}{x-۱}}$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۳۹- اگر $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+x+۳}$، مقدار $f'(۳)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۵}$ ۲) $\dfrac{۳}{۵}$ ۳) $\dfrac{۴}{۵}$ ۴) ۱

۴۰- اگر $f(x)=\dfrac{(x-۱)\cos^{۳}(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{۴})}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۴ ۴) $\dfrac{۱}{۴}$

۴۱- اگر $f(x)=\dfrac{۱-x^{۲}}{۱+\log x}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۴۲- اگر مشتق چپ تابع $f(x)=a\sqrt{۳-\sqrt{۹-x^{۲}}}$ در نقطهٔ $x=۰$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $-۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $-۳\sqrt{۲}$

۴۳- اگر $f(x)=\dfrac{|x-۲|}{x^{۴}+x^{۳}+x+۴}$، مقدار $f'_{-}(۲)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲۰}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲۰}$ ۳) $\dfrac{۱}{۳۰}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۳۰}$

۴۴- اگر $f(x)=2\sqrt{4x^2-x^4}$، مقدار $f'_-(0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۴ ۴) −۴

۴۵- اگر $f(x)=|x|\sqrt[3]{x+1}$، مقدار $f'_+(0)-f'_-(0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۴۶- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt[3]{x+5}}$، مقدار $f'_-(3)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۴۷- اگر $f(x)=|x^3-x^2|$، مقدار $f'_-(0)-f'_+(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) −۲

۴۸- اگر $f(x)=|x^3+kx|$ و $f'_+(0)f'_-(0)=-4$، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) −۴ ۴) ۴

۴۹- اگر $f(x)=\frac{[x]-x}{\sqrt{x^2+3}}$، مقدار $f'_+(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵۰- مشتق چپ تابع $f(x)=([-x]-|x|)\sqrt[3]{4x}$ در نقطهٔ $x=-2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۴ ۴) −۴

۵۱- اگر تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر باشد، $f'_+(2)=\frac{27}{a}$ و $f'_-(2)=a^2$، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۵۲- تابع $f(x)=x[\sin x]$ در نقطهٔ $x=0$،

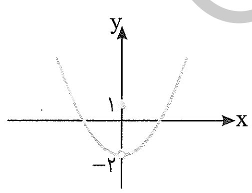
۱) مشتق‌پذیر است. ۲) مشتق چپ و مشتق راست دارد ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد. ۴) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

۵۳- تابع $f(x)=[\cos x]\sin x$ در کدام نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) $x=0$ ۲) $x=\frac{\pi}{4}$ ۳) $x=\frac{\pi}{2}$ ۴) $x=\pi$

۵۴- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد و $g(x)=\frac{x}{2f(x)}$، مقدار $g'(0)$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) وجود ندارد.

۵۵- اگر $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-|x|}}$، مقدار $f'_-(0)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) −۱ ۴) وجود ندارد.

۵۶- اگر $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $f'_-(1)=+\infty\ ,\ f'_+(1)=+\infty$ ۲) $f'_-(1)=-\infty\ ,\ f'_+(1)=-\infty$

۳) $f'_-(1)=+\infty\ ,\ f'_+(1)=-\infty$ ۴) $f'_-(1)=-\infty\ ,\ f'_+(1)=+\infty$

۵۷- برای کدام تابع تساوی‌های $f'_+(0)=+\infty$ و $f'_-(0)=-\infty$ برقرار هستند؟

۱) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ۳) $f(x)=-\sqrt[3]{|x|}$ ۴) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$

۵۸- کدام تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌ناپذیر است؟

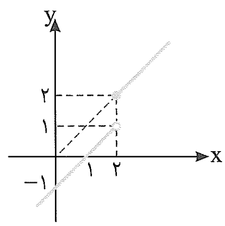
۱) $f(x)=x|x|$ ۲) $f(x)=x\sqrt[3]{x}$ ۳) $f(x)=|x|\sqrt[3]{x}$ ۴) $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$

۵۹- نمودار تابع $f(x)=[x]\sqrt[3]{x}$ در نقطهٔ $x=0$،

۱) خط مماس موازی محور طول‌ها دارد. ۲) خط مماس موازی محور عرض‌ها دارد.

۳) دو نیم‌مماس عمود بر هم دارد. ۴) دو نیم‌مماس با زاویهٔ 45° دارد.

۶۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



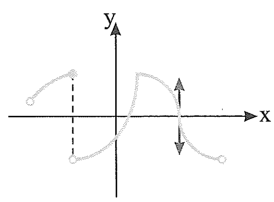
۱) $f'_+(2)=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=1$

۳) $f'_-(2)=1$

۴) $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=1$

۶۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق ندارد؟



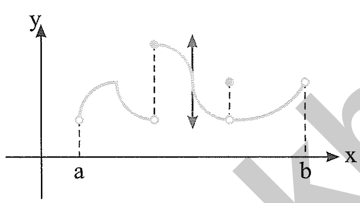
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۶۲- نمودار تابع f با دامنهٔ $(a\,,b)$ به شکل مقابل است. این تابع در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست؟



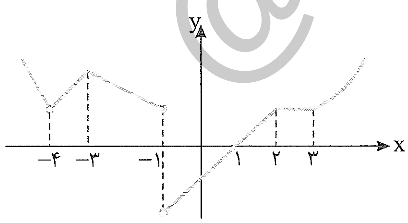
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۶۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست؟



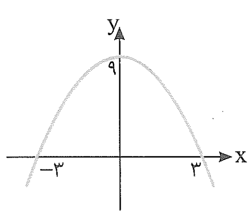
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۶۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x)=|f(x)|$، کدام گزینه درست است؟



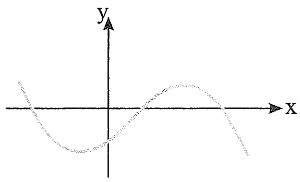
۱) $g'(-3)=g'(3)$

۲) $g'(-2)=g'(2)$

۳) $g'_-(0)=g'_+(0)$

۴) $g'_-(-3)=g'_+(3)$

۶۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع $g(x)=f(x)+|f(x)|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶- تابع $f(x)=\left||x|-۲\right|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & |x|\le ۱ \\ ۲-|x| & |x|>۱ \end{cases}$ چند نقطهٔ گوشه‌ای دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۸- تابع $f(x)=|x-۱|-|x+۱|$ چند نقطهٔ گوشه‌ای دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۹- تابع $f(x)=\left|۲x-|x-۳|\right|$ چند نقطهٔ گوشه‌ای دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰- تابع $f(x)=\left|\left||x|-۲\right|-۲\right|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۱- خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ بر نمودار تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=۳$ مماس است. حد عبارت $\dfrac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ وقتی $x\to ۳$، کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

فصل چهارم

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

تعریف تابع f مفروض است. تابع مشتق تابع f، که آن را با f' نشان می‌دهیم، تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که تابع f در آنها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطهٔ x از دامنه‌اش برابر است با

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تابع مشتق هر یک از توابع معروف در جدول زیر آمده است:

تابع	مشتق	توضیحات
k	0	k عددی حقیقی است.
x^n	nx^{n-1}	$n\in\mathbb{Q}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x\neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x>0$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$x\neq 0$
$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$	$x\neq 0$
$[x]$	0	$x\notin\mathbb{Z}$

تذکر تابع مشتق توابع $y=\frac{1}{x}$، $y=\sqrt{x}$، $y=\sqrt[3]{x}$ و ... را می‌توان به کمک تابع مشتق تابع $y=x^n$ به‌دست آورد.

مثال:

$$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تست ۱

اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مقدار $g(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

راه‌حل بنابر تعریف مشتق،

$$g(x)=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بنابراین

$$g(\frac{1}{4})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1$$

قضیه ۱

اگر توابع f و g روی بازه‌ای باز شامل نقطهٔ $x=a$ تعریف شده باشند و در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه

$$(kf)'(a)=kf'(a)$$ (k عددی حقیقی است.)

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$ (قاعدهٔ جمع)

$$(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$$

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$ (قاعدهٔ ضرب)

همچنین اگر تابع g روی این بازه هیچ‌گاه صفر نشود، آن‌گاه

$$(\frac{1}{g})'(a)=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$$ (قاعدهٔ تقسیم)

تست ۲

اگر $f(x)=1-x+x^2-x^3+\dots-x^{99}+x^{100}$، مقدار $f'(-1)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۵۰۵۰ ۳) ۵۰۵۰- ۴) ۲۵۲۵-

راه‌حل توجه کنید که

$$f'(x)=-1+2x-3x^2+4x^3-\dots-99x^{98}+100x^{99}$$

بنابراین

$$f'(-1)=-1-2-3-4-\dots-99-100=-5050$$

تست ۳

اگر $f(x)=x^4(3x-4x^3)$، حاصل $f'(x)$ کدام است؟

۱) $3x^4-4x^6$ ۲) $15x^4-28x^6$ ۳) $3x^4+4x^6$ ۴) $15x^4+28x^6$

راه‌حل توجه کنید که $f(x)=3x^5-4x^7$، بنابراین

$$f'(x)=15x^4-28x^6$$

تست ۴

اگر f تابعی خطی باشد، $f(\circ)=۴$ و $f'(x)=۳$، مقدار $f(-۲)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۳- ۴) ۲-

راه‌حل فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت $f'(x)=a$ و

$$\begin{cases} f(\circ)=۴ \\ f'(x)=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ a=۳ \end{cases}$$

در نتیجه $f(x)=۳x+۴$ و $f(-۲)=-۲$.

تست ۵

اگر $f(x)=ax^۲+bx+c$، $f'(۱)=۵$ و $f'(-۱)=۷$، مقدار ab چقدر است؟

۱) ۹- ۲) ۶-

۳) ۳- ۴) ۳

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=۲ax+b$. بنابراین

$$\begin{cases} f'(۱)=۵ \\ f'(-۱)=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۵ \\ -۲a+b=۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱}{۲} \\ b=۶ \end{cases}$$

در نتیجه $ab=-۳$.

تست ۶

اگر $f(x)=-۷x^{n-۲}+۹$ و f' تابعی ثابت باشد، مقدار $f(۲)f'(۲)$ چقدر است؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۸

۳) ۲۱ ۴) ۱۴

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=-۷(n-۲)x^{n-۳}$ و چون f' تابعی ثابت اســت، پس $n-۳=\circ$، یعنی $n=۳$. به این ترتیب، $f(x)=-۷x+۹$، $f(۲)=-۵$ و $f'(۲)=-۷$، پس $f(۲)f'(۲)=۳۵$.

تست ۷

اگر $f(x)=\dfrac{۳x^۳-۲x^۲+۱}{(x+۱)^۲}$، مقدار $f'(۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

راه‌حل بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۴}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$.

تست ۸

مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{63(\sqrt[3]{x}+1)}{x^2-1}$ در نقطهٔ $x=8$ کدام است؟

۱) $-\frac{19}{28}$ ۲) $-\frac{21}{28}$ ۳) $-\frac{59}{63}$ ۴) $-\frac{56}{63}$

راه‌حل با استفاده از قضایای مشتق می‌نویسیم:

$$f'(x)=63\times\frac{(\sqrt[3]{x}+1)'(x^2-1)-(x^2-1)'(\sqrt[3]{x}+1)}{(x^2-1)^2}=63\times\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2-1)-2x(\sqrt[3]{x}+1)}{(x^2-1)^2}$$

پس

$$f'(8)=63\times\frac{\frac{63}{3\times4}-2\times8(2+1)}{63^2}=-\frac{19}{28}$$

تست ۹

اگر $f(x)=(x+\sqrt{x^2-x})^{10}$ و $g(x)=(x-\sqrt{x^2-x})^{10}$، مقدار $f'(-1)g(-1)+g'(-1)f(-1)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) ۱۰ ۴) -10

راه‌حل عبارت موردنظر، مشتق تابع $f\times g$ در نقطهٔ $x=-1$ است. پس ابتدا $f\times g$ را پیدا می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم و به‌جای x مقدار -1 را قرار می‌دهیم:

$$(f\times g)(x)=(x+\sqrt{x^2-x})^{10}(x-\sqrt{x^2-x})^{10}$$
$$=((x+\sqrt{x^2-x})(x-\sqrt{x^2-x}))^{10}=(x^2-x^2+x)^{10}=x^{10}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=10x^9\Rightarrow(f\times g)'(-1)=10\times(-1)^9=-10$$

نکته

گاهی بهتر است ضابطهٔ تابع را ساده کنیم، سپس مشتق آن را پیدا کنیم. مثلاً وقتی ضابطهٔ تابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح است، ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک تعیین علامت و بازه‌بندی، بدون قدرمطلق و جزء صحیح می‌نویسیم.

تست ۱۰

مقدار مشتق تابع $f(x)=x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ در نقطهٔ $x=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=x(x^4-1)(x^4+1)=x(x^8-1)=x^9-x$$

بنابراین

$$f'(x)=9x^8-1$$

پس

$$f'(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=9(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})^8-1=0$$

تست ۱۱

اگر $f(x)=|۴x-x^۲|+|x+۱|$ آن‌گاه مقدار $f'(۵)+f'(-۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۱۴ ۴) -۱۲

راه‌حل

توجه کنید که مقدار عبارت $۴x-x^۲$ در اطراف نقطهٔ $x=-۲$ منفی است و مقدار عبارت $x+۱$ هم در اطراف $x=-۲$ منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^۲-۴x-x-۱=x^۲-۵x-۱,\quad f'(x)=۲x-۵\Rightarrow f'(-۲)=-۹$$

همچنین توجه کنید که در اطراف نقطهٔ $x=۵$ مقدار عبارت‌های $۴x-x^۲$ و $x+۱$ به ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^۲-۴x+x+۱=x^۲-۳x+۱,\quad f'(x)=۲x-۳\Rightarrow f'(۵)=۷$$

در نتیجه

$$f'(۵)+f'(-۲)=-۲$$

تست ۱۲

اگر $f(x)=x^۲[x+\frac{۱}{۲}]+x[-\frac{x}{۳}]$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) وجود ندارد. ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۷

راه‌حل

در اطراف $x=۲$،

$$x\to ۲\Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})\to\frac{۵}{۲}\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]=۲$$

همچنین،

$$x\to ۲\Rightarrow -\frac{x}{۳}\to -\frac{۲}{۳}\Rightarrow [-\frac{x}{۳}]=-۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع در اطراف $x=۲$ به صورت $f(x)=۲x^۲-x$ است. پس

$$f'(x)=۴x-۱\Rightarrow f'(۲)=۷$$

عامل صفرکننده در مشتق

اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، $f(a)=۰$ و تابع g در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=f(x)g(x)$ در نقطهٔ $x=a$ کافی است مقدار مشتق تابع f را در مقدار تابع g ضرب کنیم، یعنی

$$y'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)\underbrace{f(a)}_{۰}\Rightarrow y'(a)=f'(a)g(a)$$

در این حالت $f(x)$ را در اصطلاح عامل صفر کننده می‌نامیم.

مثال: برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=(x^۲-۱)\sqrt{\frac{۴x}{x+۱}}$ در نقطهٔ $x=۱$، می‌توان نوشت

$$y=\underbrace{(x^۲-۱)}_{\text{عامل صفر کننده}}\underbrace{\sqrt{\frac{۴x}{x+۱}}}_{\text{بقیهٔ تابع}}\qquad \begin{cases}\text{مشتق عامل صفر کننده}=۲x\xrightarrow{x=۱}۲\times۱=۲\\ \text{بقیهٔ تابع}=\sqrt{\frac{۴x}{x+۱}}\xrightarrow{x=۱}\sqrt{\frac{۴}{۲}}=\sqrt{۲}\end{cases}$$

بنابراین $y'(۱)=۲\sqrt{۲}$.

تست ۱۳ مشتق تابع $f(x)=(x^2-1)(x^2-2)\cdots(x^2-10)$ به‌ازای $x=3$ چقدر است؟

۱) $6\times 8!$ ۲) $8!$ ۳) $-6\times 8!$ ۴) $-8!$

راه‌حل x^2-9 به‌ازای $x=3$ صفر می‌شود، پس عامل صفرکننده است و درنتیجه

$$f'(3)=2\times 3\times(3^2-1)(3^2-2)\cdots(3^2-8)(3^2-10)=2\times 3\times 8\times 7\times\cdots\times 1\times(-1)=-6\times 8!$$

مشتق تابع مرکب، قاعدهٔ زنجیری

اگر تابع g در نقطهٔ x و تابع f در نقطهٔ $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x)) \quad \text{(قاعدهٔ زنجیری)}$$

نکته

۱) از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود که اگر تابع f در نقطهٔ x مشتق‌پذیر و n عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$(f^n(x))'=nf'(x)(f(x))^{n-1}$$

۲) اگر $y=f(u)$ و u تابعی از x باشد، آن‌گاه $y'=u'f'(u)$.

مثال: فرض کنید $y=\sqrt{x^3+1}$. توجه کنید می‌توان نوشت $y=(fog)(x)$، که در اینجا $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^3+1$. بنابراین، طبق قاعدهٔ زنجیری،

$$y'=g'(x)f'(g(x))=(3x^2)\times\frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

تذکر اگر هر تعدادی از تابع‌ها را ترکیب کنیم، باز هم می‌توان طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق تابع مرکب را حساب کرد. برای ترکیب سه تابع،

$$y=(fogoh)(x)\Rightarrow y'=h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))$$

مثال: اگر $y=(\sqrt[3]{x^2+1})^2$، آن‌گاه

$$y'=(2x)\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\right)(2\sqrt[3]{x^2+1})$$

تست ۱۴ اگر $f(x)=\sqrt{5+2\sqrt{x}}$، مقدار $f'(4)$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

راه‌حل توجه کنید که $(\sqrt{g(x)})'=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{5+2\sqrt{x}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{5+2\sqrt{x}}}$$

در نتیجه

$$f'(۴)=\frac{۱}{۲\times ۲\sqrt{۵+۴}}=\frac{۱}{۱۲}$$

تست ۱۵ اگر $g(x)=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})$ و $f'(x)=\frac{x^۲+۲}{x}$، مقدار $g'(\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

راه‌حل می‌توان نوشت

$$g'(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}})'f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})=\frac{-۱}{۲\sqrt{x^۳}}\times f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

پس

$$g'(\frac{۱}{۴})=\frac{-۱}{۲\sqrt{(\frac{۱}{۴})^۳}}\times f'(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=\frac{-۱}{\frac{۱}{۴}}\times f'(۲)=-۴f'(۲)$$

از طرف دیگر $f'(۲)=\frac{۴+۲}{۲}=۳$، بنابراین $g'(\frac{۱}{۴})=-۱۲$.

تست ۱۶ اگر $g(\sqrt{x})=f(\frac{۱}{x})$ و $g'(۲)=۴$، مقدار $f'(\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۱۶ ۴) -۱۶

راه‌حل از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(\sqrt{x})=f(\frac{۱}{x})\Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}g'(\sqrt{x})=-\frac{۱}{x^۲}f'(\frac{۱}{x})$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۴$، به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۴}g'(۲)=-\frac{۱}{۱۶}f'(\frac{۱}{۴})\Rightarrow \frac{۱}{۴}\times ۴=-\frac{۱}{۱۶}f'(\frac{۱}{۴})\Rightarrow f'(\frac{۱}{۴})=-۱۶$$

مشتق‌پذیری روی بازه

۱) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر است، به شرطی که در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۲) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ مشتق‌پذیر است، به شرطی که f روی بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

۳) مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b)$، $(a, b]$، $(a, +\infty)$، $[a, +\infty)$، $(-\infty, b)$ و $(-\infty, b]$ به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ روی بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ مشتق‌پذیر است، اما روی $\mathbb{R}$، یعنی بازهٔ $(-\infty, +\infty)$، مشتق‌پذیر نیست، زیرا تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

دیدیم که اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در این نقطه پیوسته نیز هست. اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست. مثلاً، تابع $f(x)=|x|$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

البته، واضح است که اگر تابعی در نقطه‌ای پیوسته نباشد، در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیست، مثلاً، تابع $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته نیست، بنابراین در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیست.

قضیه ۲

اگر تابع f روی بازهٔ $[a, b)$ پیوسته و روی بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+} f'(x)$$

اگر تابع f روی بازهٔ $(c, a]$ پیوسته و روی بازهٔ (c, a) مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-} f'(x)$$

اگر تابع f روی بازهٔ (c, b) شامل نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$$

برای پیدا کردن مشتق توابع چندضابطه‌ای می‌توانیم از قضیهٔ (۲) استفاده کنیم.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ x^3+1 & x<1 \end{cases}$، چون تابع f در هر نقطه پیوسته است، پس

$$x>1 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(2x)=2$$

$$x<1 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2)=3$$

تست ۱۷ **کدام تابع در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است؟**

۱) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ x^2+1 & x<1 \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ x^3 & x<1 \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & x\geq 1 \\ 2x^3 & x<1 \end{cases}$

راه‌حل توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیستند، پس مشتق‌پذیر نیستند.

در گزینهٔ (۲)،

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ x^3 & x<1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ 3x^2 & x<1 \end{cases}$$

همچنین

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}(۲x)=۲$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}(۳x^۲)=۳$$

چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$، پس این تابع هم در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد.

در گزینهٔ (۴)،

$$f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۱ & x\geq ۱ \\ ۲x^۳ & x<۱ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۶x & x>۱ \\ ۶x^۲ & x<۱ \end{cases}$$

همچنین،

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}(۶x)=۶$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}(۶x^۲)=۶$$

چون $f'_+(۱)=f'_-(۱)$، پس تابع گزینهٔ (۴) در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است.

تست ۱۸ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۱ & x\geq ۲ \\ x^۳+bx & x<۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار b چقدر است؟

۱) ۴   ۲) ۵

۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

راه‌حل چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است، در نتیجه

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

$$۴a+۱=۸+۲b\Rightarrow ۴a-۲b=۷$$

تابع مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ax & x\geq ۲ \\ ۳x^۲+b & x\leq ۲ \end{cases}$$

دقت کنید که چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، مساوی را در هر دو ضابطه قرار داده‌ایم.

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۴a=۱۲+b$$

$$۴a-b=۱۲$$

در نتیجه

$$\begin{cases} ۴a-۲b=۷ \\ ۴a-b=۱۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۱۷}{۴} \\ b=۵ \end{cases}$$

تست ۱۹

اگر $f(x)=\begin{cases} 5x^2+5 & x\geq 2 \\ 2x+21 & x<2 \end{cases}$، مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h^2)-f(2-2h^2)}{h^2}$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰
۳) ۶۴ ۴) ۸۱

راه‌حل ابتدا تابع مشتق را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} 10x & x>2 \\ 2 & x<2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'_+(2)=20 \\ f'_-(2)=2 \end{cases}$$

تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست چون مشتق چپ و مشتق راست آن برابر نیستند. مقدار $f(2)$ را در صورت کسر حد مورد نظر اضافه و کم می‌کنیم و سعی می‌کنیم حد مربوط به مشتق چپ و مشتق راست را ایجاد کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h^2)-f(2-2h^2)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h^2)-f(2)+f(2)-f(2-2h^2)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3\times\frac{f(2+3h^2)-f(2)}{3h^2})-\lim_{h\to 0}((-2)\frac{f(2-2h^2)-f(2)}{-2h^2})$$

$$=3f'_+(2)-(-2f'_-(2))=3f'_+(2)+2f'_-(2)=3\times 20+2\times 2=64$$

مشتق تابع $g(x)=|f(x)|$

برای مشتق گرفتن از تابع $g(x)=|f(x)|$ می‌توانیم آن را به صورت

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)\leq 0 \end{cases}$$

بنویسیم، سپس مشتق بگیریم. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، در نقاطی که $f(x)\neq 0$، تابع g هم مشتق‌پذیر است و

$$g'(x)=\frac{f(x)f'(x)}{|f(x)|}=\begin{cases} f'(x) & f(x)>0 \\ -f'(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

در نقاطی که $f(x)=0$، و f ریشهٔ ساده داشته باشد، تابع g مشتق‌پذیر نیست ولی در بقیهٔ ریشه‌ها (مضاعف و مکرر) مشتق تابع g برابر صفر است.

مثال: تابع $y=|x-2|$ در نقطهٔ $x=2$ که ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است، مشتق ندارد. ولی مشتق تابع $y=|(x-2)^2|$ در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر است، زیرا

$$y=|(x-2)^2|=(x-2)^2\Rightarrow y'=2(x-2)\Rightarrow y'(2)=0$$

مشتق تابع $y=|(x-2)^3|$ نیز در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر است. همچنین تابع $g(x)=|x^2(x-1)(x-2)^3|$ در تمام نقاط به جز در $x=1$ که ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است مشتق دارد. در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ نیز مشتق تابع g برابر صفر است.

تست ۲۰ تابع $y=|(x-2)(ax+3)|$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

راه‌حل چون $x=2$ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق است، برای اینکه تابع در این نقطه مشتق داشته باشد، باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف عبارت داخل قدرمطلق باشد، یعنی باید ریشهٔ عبارت $ax+3$ نیز باشد. پس

$$a(2)+3=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

تست ۲۱ تابع $y=|2x^2-ax+2|$ همواره مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) $a=\pm 4$ ۲) $|a|\leq 4$

۳) $|a|\geq 4$ ۴) هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

راه‌حل برای اینکه تابع همواره مشتق‌پذیر باشد، باید عبارت داخل قدرمطلق یا ریشه نداشته باشد، یا ریشهٔ ساده نداشته باشد. پس

$$2x^2-ax+2=0 \Rightarrow \Delta\leq 0 \Rightarrow a^2-16\leq 0 \Rightarrow |a|\leq 4$$

مشتق تابع $g(x)=[f(x)]$

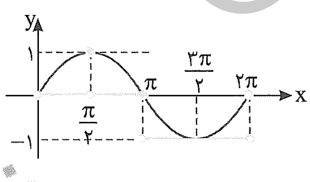
ضابطهٔ تابع $g(x)=[f(x)]$ از تعدادی تابع ثابت تشکیل شده است که مشتق آنها صفر است، پس در هر نقطه‌ای که این تابع پیوسته باشد مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است.

مثال: تابع $g(x)=[\frac{x}{2}]$ در نقاط صحیح زوج ناپیوسته است و مشتق ندارد، ولی در بقیهٔ نقاط مشتق برابر صفر دارد.

تست ۲۲ تابع $y=[\sin x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(0, 2\pi)$ مشتق‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نمودار این تابع در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در نقطه‌های $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ پیوسته نیست و مشتق ندارد و مشتق آن در بقیهٔ نقاط بازهٔ $(0, 2\pi)$ صفر است.



عامل صفرکننده و مشتق‌پذیری

تابع $y=|x-a|$ را درنظر بگیرید. این تابع در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نیست ولی پیوسته است. اکنون اگر یک عامل صفرکننده در این تابع ضرب کنیم، آن را به تابعی مشتق‌پذیر در نقطهٔ $x=a$ تبدیل می‌کنیم. یعنی مشتق تابع $y=(x-a)|x-a|$ در نقطهٔ $x=a$ برابر با صفر است.

همچنین تابع $y=[x]$ در $x=a$ که $a\in\mathbb{Z}$ پیوسته نیست ولی تابع $y=(x-a)[x]$ در این نقطه پیوسته است و تابع $y=(x-a)^{۲}[x]$ در این نقطه مشتق‌پذیر هم هست. اولین عامل صفرکننده باعث پیوستگی و دومی باعث مشتق‌پذیری تابع شده است.

در حالت کلی اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، همچنین $f(a)=۰$ و تابع g در این نقطه پیوسته و مشتق‌ناپذیر باشد، آن‌گاه تابع $y=f(x)g(x)$ در این نقطه مشتق دارد.

تست ۲۳ **تابع $f(x)=(x-۲)|x^{۲}-۵x+۶|$ در چند نقطه مشتق ندارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل تابع را به صورت $f(x)=(x-۲)|(x-۲)(x-۳)|$ می‌نویسیم. تابع $y=|(x-۲)(x-۳)|$ در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ مشتق ندارد، ولی عامل صفرکنندهٔ $(x-۲)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=۳$ مشتق ندارد.

تست ۲۴ **تابع $y=(x^{۲}+ax+b)|x^{۲}-۴|$ مشتق‌پذیر است. مقدار $۳a+b$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۴

راه‌حل عبارت داخل قدرمطلق $(x^{۲}-۴=(x-۲)(x+۲))$ دو ریشهٔ سادهٔ ۲ و -۲ دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، باید $x^{۲}+ax+b$ به ازای $x=-۲$ و $x=۲$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases} x=۲\Rightarrow ۲^{۲}+a\times ۲+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴ \\ x=-۲\Rightarrow (-۲)^{۲}+a(-۲)+b=۰\Rightarrow -۲a+b=-۴ \end{cases}\Rightarrow a=۰\,,\,b=-۴$$

بنابراین $۳a+b=-۴$.

تست ۲۵ **تابع $f(x)=(x+a)x[x]$ در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

راه‌حل راه‌حل اول تعریف مشتق چپ و مشتق راست تابع را در نقطهٔ $x=۰$ می‌نویسیم:

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{(x+a)x[x]-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^{+}}((x+a)[x])=(۰+a)\times ۰=۰$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{(x+a)x[x]-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^{-}}((x+a)[x])=(۰+a)\times(-۱)=-a$$

بنابراین

$$f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)\Rightarrow ۰=-a\Rightarrow a=۰$$

راه‌حل دوم تابع $y=x[x]$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. برای اینکه مشتق‌پذیر هم باشد، لازم است یک عامل صفرکننده در آن ضرب شود. یعنی باید $x+a$ عامل صفرکننده باشد، پس

$$۰+a=۰\Rightarrow a=۰$$

تست ۲۶ تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

راه‌حل برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو عامل $x-1$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1 \Rightarrow a=-2$$

به کمک مشتق می‌توان بسیاری از حدهای $\frac{0}{0}$ را رفع ابهام کرد.

قاعدهٔ هوپیتال

فرض کنید تابع‌های f و g در یک بازه شامل نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و به‌ازای هر x از این بازه $g'(x)\neq 0$. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تست ۲۷ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{2x^3-5x+3}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) -3 ۴) -1

راه‌حل بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{2x^3-5x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x}{6x^2-5}$$

$$=\frac{-3}{1}=-3$$

تست ۲۸ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-x\sqrt{x}}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$ ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{11}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

راه‌حل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-x\sqrt{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{2x}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{7}{12}$$

تست ۲۹

اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲+ax+b}{x-۲}=۳$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

راه‌حل چون حد مخرج کسر صفر است، باید حد صورت آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد مورد نظر وجود ندارد. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}(x^۲+ax+b)=۰\Rightarrow ۴+۲a+b=۰$$

از طرف دیگر، از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+ax+b}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲x+a}{۱}=۴+a=۳\Rightarrow a=-۱$$

پس

$$۴+۲a+b=۰\Rightarrow ۴-۲+b=۰\Rightarrow b=-۲$$

بنابراین $a-b=۱$.

تست ۳۰

اگر $f'(-۱)=۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(h-۱)-f(۲h-۱)}{h^۲+۲h}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

راه‌حل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(h-۱)-f(۲h-۱)}{h^۲+۲h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h-۱)-۲f'(۲h-۱)}{۲h+۲}$$

$$=\frac{f'(-۱)-۲f'(-۱)}{۲}$$

$$=-\frac{۱}{۲}f'(-۱)=-\frac{۱}{۲}\times ۲=-۱$$

تست ۳۱

اگر $f(x)=x^۲-۵x$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f^۲(۲x)-f^۲(۶)}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

راه‌حل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(۲x)-f^۲(۶)}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{۴f'(۲x)f(۲x)-۰}{۲x}=\frac{۴f'(۶)f(۶)}{۶}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=x^۲-۵x\Rightarrow f(۶)=۶,\quad f'(x)=۲x-۵\Rightarrow f'(۶)=۷$$

بنابراین

$$L=\frac{۴\times ۶\times ۷}{۶}=۲۸$$

تست ۳۲

اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۱ \\ x^۳ & x<۱ \end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۵

راه‌حل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f'(۱+h)+f'(۱-h)}{۱}=f'_+(۱)+f'_-(۱)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ ۳x^۲ & x<۱ \end{cases}$$

واضح است که $f'_+(۱)=۲$ و $f'_-(۱)=۳$، بنابراین

$$L=۲+۳=۵$$

تعریف اگر تابع f روی بازهٔ بازی شـامل نقطهٔ a مشـتق‌پذیر باشد $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را **مشتق دوم تابع f در نقطهٔ a** می‌نامند و با $f''(a)$ نشان می‌دهند:

$$f''(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

تعریف تابع f مفروض است. **تابع مشتق دوم** تابع f، که آن را با f'' نشان می‌دهیم، تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که تابع f' در آنها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطهٔ x از دامنه‌اش برابر است با

$$f''(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

تست ۳۳

اگر $f(x)=ax^۳+bx+c$، $f(۰)=۷$، $f'(-۱)=-۶$ و $f''(۱)=۱۲$، مقدار $a+b+c$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=۳ax^۲+b\ ,\quad f''(x)=۶ax$$

بنابراین

$$f''(۱)=۱۲\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲$$

پس $f'(x)=۶x^۲+b$ و در نتیجه

$$f'(-۱)=-۶\Rightarrow ۶+b=-۶\Rightarrow b=-۱۲$$

بنابراین $f(x)=۲x^۳-۱۲x+c$ و در نتیجه

$$f(۰)=۷\Rightarrow c=۷$$

به این ترتیب $a+b+c=-۳$.

تست ۳۴ اگر $f(x)=x^{۳}-۲x+۱$، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f''(x)+f'(x)-x=۰$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^{۲}-۲$$

$$f''(x)=۶x$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$۶x+(۳x^{۲}-۲)-x=۰$$

$$۳x^{۲}+۵x-۲=۰$$

و مجموع جواب‌های این معادله برابر است با $-\frac{۵}{۳}$.

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۲- اگر $f(x)=(3x-4)^3$، مقدار $f'(-2)$ چقدر است؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۹۰۰− ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۰−

۷۳- اگر $f(x)=(x^2+x)^{100}$، مقدار $f'(-\frac{1}{2})$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{100}{2^{100}}$ ۳) $-\frac{100}{2^{99}}$ ۴) $-\frac{1}{2^{99}}$

۷۴- اگر $f(x)=(ax^3+3x^2+a)^{10}$، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

۱) $10\times3^9(a-1)$ ۲) $10\times3^9(a+1)$ ۳) $3^{10}(a-2)$ ۴) $10\times3^{10}(a-2)$

۷۵- اگر $f(x)=(3x-2)^3-(2x-3)^4$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) 5^3 ۲) 49×5^2 ۳) 17×5^3 ۴) -31×5^2

۷۶- اگر $f(x)=(x^2+2x+1)^5(x^2-2x+1)^5$، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۱) 20×3^9 ۲) 20×3^{10} ۳) 40×3^{10} ۴) 40×3^9

۷۷- مقدار مشتق تابع $f(x)=x^2(x^2-1)(x^2+2)$ در چند نقطه برابر صفر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- اگر $f(x)=(x^2-1)^2(x+2)^4$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۷۹- اگر $f(x)=(x^4-1)^2(x^8+x^4+1)^2$، حاصل $f'(x)$ کدام است؟

۱) $12x^{11}(x^{12}-1)$ ۲) $24x^{11}(x^{12}-1)$ ۳) $12x^{11}(x^{12}+1)$ ۴) $24x^{11}(x^{12}+1)$

۸۰- اگر $f(x)=(x-2)(x-1)(2+x)$، مقدار $f'(3)$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۸۱- اگر $f(x)=(ax+2)(bx+2)(cx+2)$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) $a+b+c$ ۲) $2(a+b+c)$ ۳) $3(a+b+c)$ ۴) $4(a+b+c)$

۸۲- اگر $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+ax^2$ و $f'(-1)=0$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳- اگر $f(x)=(1+(1+x^3)^3)^4$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) $2^4\times3^6$ ۲) $2^2\times3^6$ ۳) $2^2\times3^8$ ۴) $2^4\times3^8$

۸۴- اگر $f(x)=((3x+1)^4+(2x-3)^2-x)^2$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) ۲۰− ۲) ۱۸− ۳) ۱۶− ۴) ۱۴−

۸۵- اگر $f(x)=1+x+x^2+\dots+x^{20}$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

۸۶- اگر $f(x)=1-x+x^2-x^3+\dots-x^{19}+x^{20}$، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

۱) -190 ۲) -200 ۳) -210 ۴) -220

۸۷- اگر $f(x)=1+x+x^2+\dots+x^n$ و $f'(1)=10$، مقدار $f(1)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۸- اگر $f(x)=ax^3-ax^2+4x-1$ و $f'(-2)=12$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۸۹- اگر $f(x)=x^n+x^{m-1}+3x$ و $f'(1)=8$، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۹۰- اگر $f(x)=(2x^4+5x^2+3)(ax^2+4)$ و $f'(1)=-4$، مقدار a چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) -3

۹۱- اگر $f(x)=(2x^6-3x^3+x^2)(3x^4+2x^2+a)$ و $f'(-1)=-4$، مقدار a چقدر است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -6 ۴) -9

۹۲- اگر $f(x)=ax^2+bx+1$ و $(f'of)(x)=8x^2-12x+1$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -2

۹۳- اگر $f(x)=(x^2+1)^n$ و $f'(3)=3\times10^5$، مقدار n چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۹۴- اگر f یک تابع خطی باشد و $f'(x)f(x)=9x-3$، مقدار $f'(x)$ کدام است؟

۱) ±4 ۲) ±3 ۳) ±2 ۴) ±1

۹۵- $P(x)$ تابعی چندجمله‌ای است به‌طوری‌که همواره $P(x)+P'(x)=3x-4$. مقدار $P(2)P'(2)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) -3 ۴) -12

۹۶- اگر $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$، حاصل $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$ ۲) $\frac{2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}$ ۳) $\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$ ۴) $\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$

۹۷- اگر $f(x)=\frac{(x-1)(3-x)}{x^2}$، مقدار $f'(-2)$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۹۸- اگر $f(x)=\frac{(x-1)(x^2+3x)}{3x+5}$، مقدار $f'(-1)$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -7

۹۹- اگر $f(x)=(\frac{x^3-1}{x^2-1})^2$، مقدار $f'(-2)$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) صفر ۴) ۷

۱۰۰- اگر $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^6}$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) -22 ۲) -21 ۳) -20 ۴) -19

۱۰۱- اگر $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^3}$، مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-1$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -6

۱۰۲- اگر $f(x)=(3x+\frac{1}{x})^{-3}$، مقدار $128f'(1)$ چقدر است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) -9 ۴) -12

۱۰۳- اگر $f(x)=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{20}}{x^{10}}$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -55 ۳) -109 ۴) -110

۱۰۴- اگر $f(x)=\frac{x^4+x^3+x+1}{x^3+1}$، مقدار $f'(\sqrt{2}-1)$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) -1

۱۰۵- اگر $f(x)=\frac{x^4-13x^2+36}{x^2-9}$، مقدار $f'(4)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) -4 ۴) -8

۱۰۶- اگر $f(x)=\frac{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}{2-x}$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۷- اگر $f(x)=(x+\frac{1}{x})(2x+\frac{1}{x^2})(3x+\frac{1}{x^3})(4x+\frac{1}{x^4})$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۲۴ ۳) -24 ۴) ۱۲

۱۰۸- اگر $f(x)=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{11}}{1+x+x^2+\cdots+x^5}$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰۹- اگر $f(x)=\frac{4-x^m}{2+x^n}$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) $\frac{-m-n}{3}$ ۲) $\frac{m-n}{3}$ ۳) $\frac{m+n}{3}$ ۴) $\frac{n-m}{3}$

۱۱۰- اگر $f(x)=\frac{x^2-mx+1}{x^2+2x+3}$ و $f'(1)=0$ ، مقدار m چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۱۱- مشتق تابع $f(x)=\frac{ax^4+b}{x^2}$ به صورت $f'(x)=\frac{bx^4-6}{x^3}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲- اگر $f(2)=2$ و $f'(2)=3$ و $g(x)=\frac{x^2}{f(x)}$، مقدار $g'(2)$ چقدر است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۳- اگر $f(x)=\frac{۱}{۲x^۲}+\frac{۱}{۳x^۳}+\frac{۱}{۴x^۴}+\cdots+\frac{۱}{nx^n}$ و $f'(۱)=-۳$، مقدار $f(۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷۷}{۶۰}$ ۴) $\frac{۸۷}{۶۰}$

۱۱۴- اگر $f(x)=۲\sqrt{x}+۳\sqrt[۳]{x}$، مقدار $f'(۲^{-۶})$ چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۴۰ ۴) ۷۲

۱۱۵- اگر $f(x)=\sqrt{x^۳+۱}$، مقدار $f'(۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۶- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{(۲x^۲-۱)^۲}$، مقدار $f'(-۱)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۱۱۷- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{۲x+۱}$، حاصل $f'(x)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳f(x)}$ ۲) $\frac{۱}{۳f^۲(x)}$ ۳) $\frac{۲}{۳f^۲(x)}$ ۴) $\frac{۲f(x)}{۳}$

۱۱۸- اگر $f(x)=(\sqrt{x}-\frac{۱}{x^۳}+x)^۴$، مقدار $f'(۱)$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۱۱۹- اگر $f(x)=-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}+\sqrt[۳]{x^۲}$، مقدار $f'(\frac{۱}{۲۷})$ چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۱۲۰- اگر $f(x)=x+\frac{۱}{x^۲}+\sqrt[۳]{x^۲-۳}$، مقدار $f'(۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۹}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۷}{۱۲}$

۱۲۱- مقدار مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[۳]{x}(x\sqrt{x}+۱)$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

۱۲۲- اگر $f(x)=(x^۳+۲)^۲(\sqrt{x}+۲x)^۲$، مقدار $f'(۱)$ چقدر است؟

۱) ۲۹۷ ۲) ۲۹۵ ۳) ۲۹۳ ۴) ۲۹۱

۱۲۳- اگر $f(x)=(x-۲)^۵(\sqrt[۳]{x}+۱)$، مقدار $f'(۱)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳۱}{۳}$ ۲) ۹ ۳) $\frac{۳۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳}$

۱۲۴- اگر $f(x)=(\sqrt{x-۱}+۲)(\sqrt{x+۴}-۱)$، مقدار $f'(۵)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

۱۲۵- اگر $f(x)=x(x-۳)\sqrt{x^۲-۳x}$، مقدار $f'(۴)$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۱۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$، مقدار $f'(4)$ چقدر است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $-\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $-\frac{7}{8}$

۱۲۷- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3+\sqrt[3]{x}}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$ ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۲۸- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{1+2x}\times\sqrt{1+4x}}{\sqrt[3]{1+3x}\times\sqrt[3]{1+6x}}$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) 3

۱۲۹- اگر $f(x)=\frac{ax^2+a}{\sqrt{3x+1}}$ و $f'(1)=\frac{21}{8}$، مقدار a چقدر است؟

۱) -5 ۲) -3 ۳) 3 ۴) $\frac{21}{5}$

۱۳۰- اگر $f(x)=x|x-3|$، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

۱۳۱- اگر $f(x)=|x^3-2x|$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۳۲- اگر $f(x)=(x^2+1)|x^2-5|$، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۱) 8 ۲) -8 ۳) -16 ۴) -25

۱۳۳- اگر $f(x)=|x^2-3x|-|x^2+3x|$، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) -8 ۴) 16

۱۳۴- اگر $f(x)=|x^2-x|-|x^2+x|$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۳۵- اگر $f(x)=|x-|x^2-1||$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) 3 ۴) 1

۱۳۶- مقدار مشتق تابع $f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-20|$ در نقطهٔ $x=\frac{21}{2}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۳۷- اگر $f(x)=|x^2-x|-|x^2-3x+2|$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) 4 ۲) -4 ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۳۸- اگر $f(x)=3x^2-[\frac{x}{2}+1]$، مقدار $f'(\frac{1}{2})$ چقدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۱۳۹- اگر $f(x)=\frac{x^2}{[x]}$، مقدار $f'(\frac{5}{2})$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۴

۱۴۰- اگر $f(x)=\frac{x^2}{[2x]}+\frac{[3x]}{x}$، مقدار $f'(\frac{5}{4})$ کدام است؟

۱) $-0/5$ ۲) $-0/53$ ۳) $-0/65$ ۴) $-0/67$

۱۴۱- اگر $f(x)=[x^2-6x+9]$، مقدار $f'(3)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۴۲- اگر $f(x)=x^2+1-|\frac{x^2}{2}-1|+[2x]$، مقدار $f'(\frac{1}{3})$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۳- اگر $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x+[2x]}$، مقدار $f'(\frac{4}{5})$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -3

۱۴۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>2 \\ 3 & x=2 \\ x^3-1 & x<2 \end{cases}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $f'_+(2)=4$ و $f'_-(2)=12$.

۲) $f'_+(2)=12$ و $f'_-(2)=4$.

۳) $f'_+(2)$ وجود ندارد و $f'_-(2)=12$.

۴) $f'_+(2)$ و $f'_-(2)$ وجود ندارند.

۱۴۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\geq 2 \\ x^3 & x<2 \end{cases}$، مقدار $f'_+(2)-f'_-(2)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) -18

۱۴۶- اگر $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x & x<3 \\ 9x-18 & x\geq 3 \end{cases}$، مقدار $f'(3)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) وجود ندارد.

۱۴۷- اگر $f(x)=\frac{x^2}{[x]}$، مقادیر $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)$ و $f'_-(2)$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) ۴ و ۴

۲) ۴ و وجود ندارد.

۳) وجود ندارد و ۴.

۴) وجود ندارد و وجود ندارد.

۱۴۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^3+2 & x\geq -1 \\ x^2+bx & x<-1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -6

۱۴۹- تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & x>2 \\ b & x=2 \\ cx^2+c & x<2 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) 10 ۳) $\frac{40}{3}$ ۴) $\frac{80}{3}$

۱۵۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x>1 \\ ax^3+x & x\leq 1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $f'(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{13}{8}$

۱۵۱- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a^2x & x\geq 1 \\ 2x^2-a & x<1 \end{cases}$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ± 2 ۲) -2 و 1 ۳) 2 ۴) -2

۱۵۲- دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=|x|+|x-1|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۱۵۳- اگر $f(x)=x|x^2-x|$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۱۵۴- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|\leq 1 \\ 2x-1 & |x|>1 \end{cases}$ مفروض است. دامنهٔ تابع f' شامل چند عدد حقیقی <u>نیست</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۵- اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & |x|\geq 1 \\ \sqrt[3]{x} & |x|<1 \end{cases}$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}$

۱۵۶- اگر $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۵۷- حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{5h}$ کدام است؟

۱) $5x^4$ ۲) x^4 ۳) $\frac{1}{5}x^4$ ۴) $\frac{5}{x^4}$

۱۵۸- اگر $f(x)=2x^2-\frac{4}{x^2}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{3h}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۵۹- اگر $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^4+1}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-2}{h^2-h}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۱۶۰- اگر $f(x)=3x^2-5x+7$، مقدار $\lim\limits_{h\to a+2}\frac{f(h-a-1)-f(1)}{h-a-2}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۱- اگر $f(x)=x^2-x+1$، مقدار $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x+2}$ چقدر است؟

۱) -735 ۲) 749 ۳) 735 ۴) -749

۱۶۲- اگر $f(x)=(x^2-x)^2+1$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(2x-1)-f(3)}{x^2-4}$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۱۶۳- اگر $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x\geq 1\\ x^2+x & x<1\end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) وجود ندارد.

۱۶۴- مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{5x-2}-4}{x-2}$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۱۶۵- اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^3+2$، مقدار $(f\times g)'(2)$ چقدر است؟

۱) ۶۸ ۲) ۶۴ ۳) ۵۶ ۴) ۴۶

۱۶۶- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$، مقدار $(\frac{f}{g})'(1)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) -5

۱۶۷- اگر $5f(x)+g(x)=3x^2$ و $f'(3)=4$، مقدار $g'(3)$ چقدر است؟

۱) -11 ۲) -7 ۳) -2 ۴) ۲

۱۶۸- تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیرند، $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$ و $f(-1)=1$. مقدار $g'(-1)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۳

۱۶۹- اگر $f(x)=\frac{g(x)-1}{x^2+1}$، $f(1)=4$ و $f'(1)=2$، مقدار $g'(1)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۷۰- تابع‌های f و g همه‌جا مشتق‌پذیرند، $(x^2-x)f(x)=g(x)$ و $f(1)=4$. مقدار $g'(1)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱- اگر $f(x)=\frac{x+1}{g(x)}$ و $g(1)=g'(1)=4$، مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) -4 ۴) $\frac{1}{4}$

۱۷۲- اگر $f(x)=\frac{x^3-2x^2-x}{g(x)}$، مقدار $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۱

۱۷۳- اگر $f(x)=\frac{x-1}{g(x)}$ و $f'(2)g(2)=4$، مقدار $f(2)g'(2)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

۱۷۴- اگر $f^3(x)=x^2+x+2$، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۱۷۵- اگر $f(x)=\frac{x^3}{x^3-x^2+x-1}$ و $g(x)=\frac{1}{x(x-1)(x^2+1)}$، مقدار $f'(\frac{1}{2})-g'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۱۷۶- اگر $f(x)=(x^2+\sqrt{x^4+x^2})^9$ و $g(x)=(x^2-\sqrt{x^4+x^2})^9$، مقدار $f'(1)g(1)+g'(1)f(1)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۱۸ ۴) ۱۸-

۱۷۷- اگر $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$، حاصل عبارت $y^3-y'x^3$ کدام است؟

۱) $-x$ ۲) x ۳) ۱ ۴) صفر

۱۷۸- اگر $y=x+\sqrt{x^2+1}$، حاصل عبارت $\frac{xy'}{y'-1}$ کدام است؟

۱) y ۲) $-y$ ۳) x ۴) $-x$

۱۷۹- اگر $f(x)=x^3-x+1$ و $g(x)=2-x^2$، مقدار $(gof)'(1)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) ۴

۱۸۰- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=x^2$، مقدار مشتق تابع fog در نقطهٔ $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۸۱- اگر $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2-7}}$، مقدار $(fog)'(4)$ کدام است؟

۱) $-\frac{13}{72}$ ۲) $-\frac{17}{72}$ ۳) $\frac{7}{36}$ ۴) $\frac{11}{36}$

۱۸۲- اگر $f(x)=3x+|x|$ و $g(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|$، مقدار مشتق تابع gof در نقطهٔ $x=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۱۸۳- اگر f و g دو تابع باشند که همه‌جا مشتق‌پذیر هستند، $(fog)(x)=x$ و $f'(x)=1+f^2(x)$، حاصل $g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1+x^2}$ ۲) $\frac{x}{1+x^2}$ ۳) $\frac{-1}{1+x^2}$ ۴) $\frac{-x}{x^2+1}$

۱۸۴- اگر $f(x)=x^3+1$ و $g(x)=\sqrt[3]{1-x}$، حاصل $f'(2x)g'(f(2x))$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) x ۴) $-x$

۱۸۵- اگر $f(x)=\frac{x+k}{x+2}$ و مشتق تابع fof در نقطهٔ $x=0$ برابر ۴ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۸۶- اگر $f(4-2x)=x^2+3x-6$، مقدار $f'(6)$ چقدر است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۸۷- اگر $f(-3x+5)=2x^3+4x-6$، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) -3 ۴) $-\frac{10}{3}$

۱۸۸- اگر $f(x)+f(3x)+f(5x)=3x-1$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۸۹- اگر $f(2x-3)=ax^2-x+4$ و $f'(-1)=3$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۳

۱۹۰- اگر $f(ax+1)=x^3$، مقدار $\frac{f(5)}{f'(5)}$ چقدر است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۹۱- اگر $f(3x+1)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ و $f(4)=51$، مقدار n چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۹۲- اگر $f(2x-1)=4x\sqrt{x+1}$، مقدار $f'(-1)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۳- اگر $f(1-x)=\frac{1}{(x^3+1)^2}$، مقدار $f'(0)$ چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۹۴- تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است و $g(x)=f(\frac{1+3x}{1-5x})$ $(x\neq\frac{1}{5})$. اگر $f'(-1)=2$، مقدار $g'(1)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۹۵- اگر $f(3x-4)=6x^2+3x+1$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۹۶- اگر $f(x-1)=x^3-x+2$، مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(3x+1)-f(4)}{x^2-1}$ چقدر است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۱ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۲۰

۱۹۷- اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{x-2}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۹۸- اگر $f^2(2x-3)=3x^2-4x+1$، مقدار $f(-5)f'(-5)$ چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

۱۹۹- اگر $g(x)=x^2f(\frac{1}{x})$ و $f(2)=2f'(2)=6$، مقدار $g'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۰- اگر $f^2(2x)=x^4+4x$، مقدار $f(4)f'(4)$ چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۲۰۱- اگر $f'(x)=۲^{-x}$ و $g(x)=f(-۴x)$، مقدار $g'(x)$ کدام است؟

۱) $۴^{۲x-۱}$　۲) $-۴^{۲x+۱}$　۳) $۲^{۴x}$　۴) $-۴^{۴x}$

۲۰۲- اگر $f'(x)=-\frac{۱}{x}$، مشتق تابع $y=f(x-\sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$　۲) $\frac{-۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$　۳) $\sqrt{۱+x^۲}$　۴) $-\sqrt{۱+x^۲}$

۲۰۳- اگر $g(x)=f(\frac{-۱}{\sqrt{x}})$ و $f'(x)=\frac{x^۲+۱}{x-۲}$، مقدار $g'(\frac{۱}{۹})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۲}$　۲) -۲۷　۳) -۵۴　۴) $\frac{۲۷}{۴}$

۲۰۴- اگر $f(x)=\sqrt{g(x)}+g(\sqrt{x})$ و $۲g(۱)=g'(۱)=۸$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۶　۴) ۸

۲۰۵- اگر $f(\sqrt{x})+g(\sqrt[۳]{x})=\frac{kx^۲}{۱۲۸}$، $f'(۸)=۳۲$ و $g'(۴)=۹۶$، مقدار k کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۲۰۶- اگر $f(۴)=\frac{۱}{۳}$ و $f'(۴)=۳$ و $g(x^۳)=\frac{۱}{f(x^۲)}$، مقدار $g'(۸)$ کدام است؟

۱) -۴　۲) -۶　۳) -۹　۴) -۱۲

۲۰۷- اگر f تابعی مشتق‌پذیر و مخالف صفر باشد و $g(x)=\frac{f(\frac{۱}{x})}{f(x)}$، مقدار $\frac{g'(-۱)}{f'(-۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{f(-۱)}$　۲) $\frac{۲}{f'(-۱)}$　۳) $\frac{-۲}{f'(-۱)}$　۴) $\frac{-۲}{f(-۱)}$

۲۰۸- تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۳$. اگر $g(x)=f(x+f(x))$، مقدار $g'(۰)$ چقدر است؟

۱) صفر　۲) ۳　۳) ۱۲　۴) ۱۵

۲۰۹- تابع f روی $\mathbb{R}-\{۰\}$ مشتق‌پذیر است، $f(۱)=۱$ و $f'(۱)=۲$. اگر $g(x)=f(\frac{f(x)}{x})$، مقدار $g'(۱)$ چقدر است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۲۱۰- اگر $f(۴x-۲)=g(x)f(۲x)$، $f(۲)=۴$ و $g'(۱)=۳$، مقدار $f'(۲)$ چقدر است؟

۱) ۳　۲) ۶　۳) ۸　۴) ۱۲

۲۱۱- اگر $f(g(۲x))=۴x^۲+۸x$، $g(۲)=۵$ و $g'(۲)=۱$، مقدار $f'(۵)$ چقدر است؟

۱) ۸　۲) ۷　۳) ۶　۴) ۵

۲۱۲- تابع‌های f و g روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند و $f(۲x+۱)=xg(۱-x)$. اگر $g(۰)-g'(۰)=۶$، مقدار $f'(۳)$ چقدر است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۶　۴) ۳

۲۱۳- اگر $f(x)+۳f(-x)=۲x^۳-x$، مقدار $f'(۱)+۳f'(-۱)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$　۲) $-\frac{۹}{۵}$　۳) -۹　۴) -۱۰

۲۱۴- اگر $f(۰)=\frac{۱}{۳}$، $f'(۰)=۱$، $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، $f'(۱)=۴$ و $g(x)=f(۲f(۳f(x)))$، مقدار $g'(۰)$ چقدر است؟

۱) ۸۶　۲) ۸۸　۳) ۹۴　۴) ۹۶

۲۱۵- تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، مشتق تابع $g(x)=f(x)-f(2x)$ در نقطهٔ $x=1$ برابر ۵ و در نقطهٔ $x=2$ برابر ۷ است. مقدار مشتق تابع $h(x)=f(x)-f(4x)$ در نقطهٔ $x=1$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹

۲۱۶- تابع $f(x)=|x^3-x^2|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۷- اگر تابع $f(x)=|x^2-2x+m|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\geq 1$ ۲) $m>1$ ۳) $m>0$ ۴) $m\geq 0$

۲۱۸- تابع $f(x)=|x^3+ax^2-ax|$ فقط در یک نقطه مشتق ندارد. حدود a کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $0<a\leq 1$ ۲) $-1\leq a<0$ ۳) $0<a\leq 4$ ۴) $-4\leq a<0$

۲۱۹- اگر $f(x)=(x^2-20)(x^2-21)(x^2-22)\cdots(x^2-50)$ مقدار $f'(7)$ چقدر است؟

۱) $-30!$ ۲) $-14\times 30!$ ۳) $-14\times 29!$ ۴) $30!$

۲۲۰- اگر $f(x)=x^3-x^2+x$، در چند نقطه تساوی $f'(x)=f''(x)$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۲۱- مشتق دوم تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^4+ax^3+3x^2+1$ در دو نقطه برابر صفر است. حدود a کدام است؟

۱) $|a|>2$ ۲) $|a|<2$ ۳) $|a|>1$ ۴) $|a|<1$

۲۲۲- اگر $f(x)=x^3+ax^2+bx-12$، $f'(1)=14$ و $f''(1)=16$، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) ۴ ۴) ۱

۲۲۳- اگر $f(x)=ax^3+bx^2+x$ و $f''(-2)=-f''(2)=4$، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۲۲۴- اگر $f(x)=(x+1)^3(x+k)$ و $f''(0)=-12$، مقدار k چقدر است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -3 ۴) ۳

۲۲۵- اگر $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ و $f''(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۲۶- اگر $f(3x-2)=x^3+ax^2+bx+c$ و $f''(-5)=2$، مقدار a چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۲۷- اگر $f(0)=1$، $f'(0)=1$، $f''(0)=0$ و $(gof)(x)=x^4+2x^2$، مقدار $g''(1)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۸- اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-x)$، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{36}$ ۲) $-\frac{11}{36}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $-\frac{7}{12}$

۲۲۹- اگر $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{75}$ ۲) $-\frac{22}{75}$ ۳) $\frac{-11}{125}$ ۴) $-\frac{22}{125}$

۲۳۰- اگر $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x}{x+1}$، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۲۳۱- اگر $f(x)=\frac{x^6-1}{x^2-1}$، مقدار $f''(-2)$ کدام است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۴

۲۳۲- اگر $f(x)=\frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}$، مقدار $f''(2)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳۳- اگر $f(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+1}$ و $f''(1)=2$، مقدار a کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -7

۲۳۴- اگر $y=f(x)$ و $y'=\frac{1}{\sqrt{y}}$، حاصل $\frac{y''}{y'^3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۲۳۵- اگر $y=f(x)$ و $y'=-\frac{1}{x}$، حاصل $\frac{y''}{y'^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۲۳۶- اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x^2+1}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x+h)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{2x}{x^2+1}$ ۲) $\frac{-2}{(x^2+1)^2}$ ۳) $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ۴) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

۲۳۷- اگر $g(2x+1)=-x^2+f(3x+1)$ و $g''(3)=4$، مقدار $f''(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۸- مشتق دوم تابع $f(x)=|x|$ در نقطهٔ $x=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۲۳۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & x\le 1 \\ \frac{c}{x} & x>1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق دوم داشته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -1 ۴) $-\frac{2}{3}$

۲۴۰- تابع $f(x)=[\frac{1}{x}]$ روی کدام بازه مشتق‌پذیر است؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) $[0,1]$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

۲۴۱- اگر $f'(0)=g(0)=1$ و $f(x)=x+1+(g(x))^5$، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

۱) $4g''(0)$ ۲) $5g''(0)$ ۳) $4g''(0)+2$ ۴) $5g''(0)+20$

۲۴۲- اگر $f(x)=\frac{x^۳-۲}{۱+x^۳}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$، حاصل $f'(g(x))\times g'(x)$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $\frac{۳}{x}$ ۲) $\frac{۳}{x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳x}$ ۴) $\frac{x-۳}{x^۲}$

۲۴۳- اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۲۴۴- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۳+bx & x<۱ \\ ۲\sqrt{۴x-۳} & x\geq ۱\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۴۵- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، حاصل $f'(x)g'(f(x))$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) x ۴) $\frac{۱}{۲}x$

۲۴۶- در تابع $f(x)=\begin{cases} x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & x<۱\end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. مقدار $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

۲۴۷- تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۳}{x}-۵ & x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & x<۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۸- مقدار مشتق راست تابع $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x=-۳$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۲۴۹- دو تابع $f(x)=۳x+|x|$ و $g(x)=\frac{۳}{۴}x+a|x|$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

۲۵۰- اگر $f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$، مشتق تابع fog کدام است؟ (تجربی - ۹۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد.

۲۵۱- اگر $f(x)=x^۳-[۲x^۲]x$، مقدار $f'_+(\sqrt{۲})$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۵۲- در تابع $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟ (تجربی - ۹۵)

۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۵۳- در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{16}$

۲۵۴- به‌ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+2)y=mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{1+x^2}$ است؟ (ریاضی - ۹۵)

۱) $m>-1$ ۲) $m<-1$ ۳) $m>1$ ۴) $m<1$

۲۵۵- تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}=\frac{3}{2}$، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۲۵۶- اگر تابع f در نقطهٔ $x=4$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=\frac{-3}{2}$، مقدار مشتق تابع $y=\frac{f(2x)}{x}$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

(ریاضی - ۹۶)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۵۷- اگر تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=\frac{1}{2}$، مقدار مشتق تابع $g(x)=x^2f(x)$ در نقطهٔ $x=-2$ کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۵۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+4 & x\geq -2 \\ x^3-x & x<-2 \end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟ (تجربی - ۹۷)

۱) -3 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

فصل چهارم

درس سوم: آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای، معادلهٔ خط مماس

آهنگ تغییر متوسط

تعریف آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a , b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

که اگر فرض کنیم $b=a+h$، آن‌گاه

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تست ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[۱ , ۴]$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۴ , ۴/۴۱]$ است؟

۱) ۲/۵۱   ۲) ۲/۸۷   ۳) ۱/۲۷   ۴) ۱/۴۱

راه‌حل مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

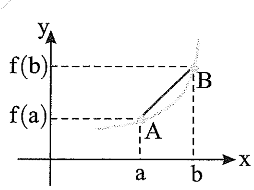
$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۱ , ۴] = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۳} = -\frac{۱}{۶} = A_۱$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۴ , ۴/۴۱] = \frac{f(۴+۰/۴۱)-f(۴)}{۰/۴۱} = \frac{\frac{۱}{۲/۱}-\frac{۱}{۲}}{۰/۴۱} = -\frac{۵۰}{۴۱\times۲۱} = A_۲$$

بنابراین

$$\frac{A_۱}{A_۲} = \frac{-\frac{۱}{۶}}{-\frac{۵۰}{۴۱\times۲۱}} = \frac{۴۱\times۲۱}{۶\times۵۰} = \frac{۴۱\times۷}{۲\times۵۰} = \frac{۲۸۷}{۱۰۰} = ۲/۸۷$$

نکته آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a, b]$ همان شیب پاره‌خط واصل نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ روی نمودار تابع f است.



آهنگ تغییر لحظه‌ای

تعریف مقدار حد آهنگ تغییر متوسـط تابع f در بازهٔ $[a, a+h]$ را وقتی که h بسـیار کوچک باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a می‌نامند.

$$x=a \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ در } = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان $f'(a)$ است.

تست ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x-\frac{2}{x}$ در بازهٔ $[1, 2]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه برابر است؟

۱) $x=\sqrt{2}$ ۲) $x=\sqrt{3}$ ۳) $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) $x=\frac{3}{2}$

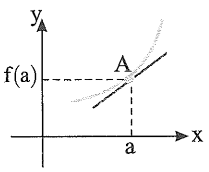
راه‌حل مقدار آهنگ تغییر متوسط را حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{1-(-1)}{1}=2$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر همان مشـتق تابع در این نقطه اسـت که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}=2\Rightarrow\frac{2}{x^2}=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

نکته آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(a, f(a))$ است.



تست ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت دایره (S) تابعی از محیط دایره (P) است. وقتی که محیط دایره برابر π است، آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت دایره کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا مساحت دایره را برحسب محیط آن می‌نویسیم:

$$P=2\pi r\Rightarrow r=\frac{P}{2\pi}\ ,\quad S=\pi r^2=\pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2=\left(\frac{1}{4\pi}\right)P^2$$

اکنون مشتق S را پیدا می‌کنیم:

$$S'=\frac{1}{4\pi}\times 2P=\frac{P}{2\pi}$$

وقتی $P=\pi$،

$$S'=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$$

تست ۴ کمترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۵x+۱$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۵$$

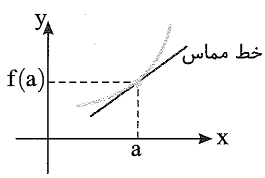
می‌دانیم کمترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ $(a>۰)$ برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است، پس

$$\text{کمترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای}=-\frac{۳۶-۴\times۳\times۵}{۴\times۳}=۲$$

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع

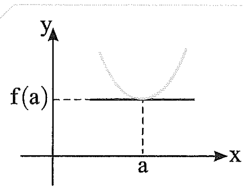
نقطهٔ $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع f را درنظر بگیرید. خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه، خطی است که شیب آن برابر $f'(a)$ است. بنابراین معادلهٔ این خط به صورت زیر است:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

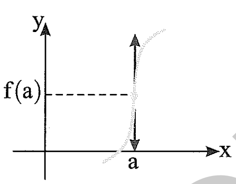


نکته

اگر $f'(a)=۰$، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(a,f(a))$ به صورت $y=f(a)$ است.



همچنین اگر $f'(a)$ نامتناهی باشد، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(a\,,f(a))$ به صورت $x=a$ است.



تست ۵ معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{۲۵x}{x^۲+۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ روی نمودار تابع کدام است؟

۱) $y=-۳x+۱۶$ ۲) $y=۳x-۱۰$ ۳) $y=-۳x+۱۶$ ۴) $y=۳x+۴$

راه‌حل شیب خط مماس در نقطهٔ $x=۲$ برابر مقدار مشتق تابع در این نقطه است:

$$f'(x)=\frac{۲۵(x^۲+۱)-۲x\times۲۵x}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-۲۵x^۲+۲۵}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$f'(۲)=\frac{-۲۵\times۴+۲۵}{(۴+۱)^۲}=\frac{-۷۵}{۲۵}=-۳$$

نقطهٔ به طول ۲ روی تابع نقطهٔ $(۲,\frac{۲۵\times۲}{۴+۱})$، یعنی $(۲,۱۰)$ است و معادلهٔ خط مماس در این نقطه به صورت زیر است:

$$y-۱۰=-۳(x-۲)\Rightarrow y=-۳x+۱۶$$

تست ۶

خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴x}}$ در نقطهٔ $(۲,\frac{۱}{۲})$، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

راه‌حل

شیب خط مماس در یک نقطه برابر با مقدار مشتق تابع در این نقطه است:

$$y=(۴x)^{\frac{-۱}{۳}} \Rightarrow y'=\frac{-۱}{۳}(۴x)^{\frac{-۴}{۳}}\times ۴ \Rightarrow y'=\frac{-۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۴}} \xrightarrow{x=۲} y'=\frac{-۴}{۳\sqrt[۳]{۸^۴}}=\frac{-۴}{۳\times ۲^۴}=\frac{-۱}{۱۲}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۱۲}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{-۱}{۱۲}x+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=\frac{-۱}{۱۲}x+\frac{۲}{۳}$$

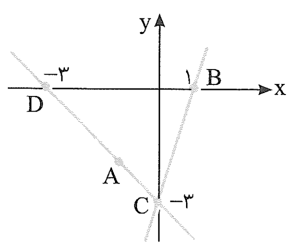
محل تلاقی این خط با محور عرض‌ها همان عرض از مبدأ خط، یعنی $\frac{۲}{۳}$ است.

تست ۷

در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۱ واقع بر نمودار تابع $f(x)=x^۲+x-۲$ دو مماس رسم کرده‌ایم. محیط مثلثی که از برخورد این خطوط با محور x به وجود می‌آید، چقدر است؟

۱) $۴+۳\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴+۴\sqrt{۲}$ ۳) $۴+۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}+۳\sqrt{۲}$

راه‌حل



دو نقطهٔ $A(-۱,-۲)$ و $B(۱,۰)$ روی نمودار مفروض هستند. شیب مماس بر نمودار در این دو نقطه به ترتیب برابر است با

$$f'(x)=۲x+۱ \Rightarrow m_۱=f'(-۱)=-۱\ ,\ m_۲=f'(۱)=۳$$

معادلهٔ دو خط مماس به صورت زیر است:

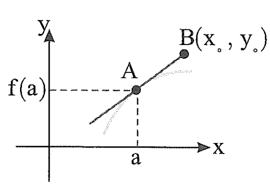
$$\begin{cases} \text{خط مماس بر نمودار در نقطهٔ } A: y+۲=-(x+۱) \Rightarrow y=-x-۳ \\ \text{خط مماس بر نمودار در نقطهٔ } B: y-۰=۳(x-۱) \Rightarrow y=۳x-۳ \end{cases}$$

محل برخورد دو خط نقطهٔ $(۰,-۳)$ روی محور y است. با توجه به شکل

$$BC=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}\ ,\quad DC=\sqrt{۹+۹}=۳\sqrt{۲}\ ,\quad BD=۴$$

پس محیط مثلث BCD برابر است با $۴+۳\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}$.

معادلهٔ خط مماس از نقطه‌ای خارج نمودار تابع



می‌خواهیم از نقطهٔ $B(x_۰,y_۰)$ مطابق شکل مماسی بر نمودار تابع f رسم کنیم. فرض کنیم این خط در نقطهٔ $A(a,f(a))$ بر نمودار مماس باشد. شیب خط مماس برابر $f'(a)$ و معادلهٔ آن به صورت $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ است. اگر مقدار a معلوم باشد، معادلهٔ خط مماس هم معلوم می‌شود. برای معلوم کردن مقدار a کافی است مختصات $B(x_۰,y_۰)$ را در معادلهٔ خط مماس قرار دهیم.

تست ۸
از نقطهٔ $A(0,-3)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ رسم می‌کنیم. حاصل‌ضرب طول نقاط تماس کدام است؟

۱) -4 ۲) 4 ۳) 2 ۴) -2

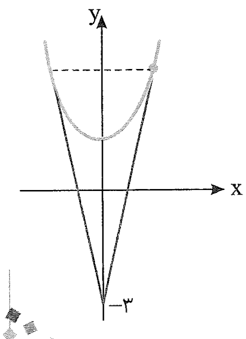
راه‌حل اگر مختصات نقطهٔ تماس (a, a^2+1) باشد، معادلهٔ خط مماس به صورت $y-(a^2+1)=f'(a)(x-a)$ است. چون $f'(a)=2a$، پس

$$y-a^2-1=2a(x-a)$$

نقطهٔ $(0,-3)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$-3-a^2-1=2a(0-a)\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

بنابراین طول نقاط تماس ۲ و ۲− هستند که حاصل‌ضرب آنها ۴− است.



تست ۹
از نقطهٔ $(3,0)$ مماسی بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ خط مماس کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{5}{2}$

راه‌حل نقطهٔ تماس را $(a,\frac{1}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به صورت $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$ است. نقطهٔ $(3,0)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$0-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{-1}{2a\sqrt{a}}(3-a)\Rightarrow 2a=3-a\Rightarrow a=1$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به صورت $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{3}{2}$ است.

تست ۱۰
از مبدأ مختصات چند خط می‌توان بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مماس کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل اگر نقطهٔ تماس $(a,\frac{1}{a+1})$ باشد، شیب خط مماس را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(a)=-\frac{1}{(a+1)^2}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به شکل زیر است:

$$y-\frac{1}{a+1}=-\frac{1}{(a+1)^2}(x-a)$$

مختصات مبدأ در معادلهٔ فوق صدق می‌کنند:

$$0-\frac{1}{a+1}=-\frac{1}{(a+1)^2}(0-a)\Rightarrow a+1=-a\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

چون یک نقطهٔ تماس وجود دارد، پس یک خط مماس می‌توان رسم کرد.

فصل چهارم

درس سوم: آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای، معادلهٔ خط مماس

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۵۹- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=mx+h$ در بازهٔ $[a,b]$ کدام است؟

۱) m ۲) h ۳) $m+h$ ۴) $\frac{m}{b-a}$

۲۶۰- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۲$ در بازهٔ $[۰,a]$ کدام است؟

۱) a ۲) $۲a$ ۳) $a^۲$ ۴) صفر

۲۶۱- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۳-x$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۲- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},a]$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۳- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ در بازهٔ $[a,۱]$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۱۴ ۳) -۱۵ ۴) -۲۰

۲۶۴- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۲-۱$ در بازهٔ $[۲,۴]$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[۰,۲]$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۵- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x+\frac{۲}{x}$ در بازهٔ $[a,a+۱]$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ یا ۳ ۲) -۲ یا -۳ ۳) -۲ یا ۳ ۴) ۲ یا -۳

۲۶۶- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$ در بازهٔ $[-۳,-۲]$ با مقدار تابع در کدام نقطه برابر است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶۷- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در بازهٔ $[\frac{۲}{a},\frac{۱}{a}]$ برابر میانگین مقدار تابع در دو سر این بازه است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۲۶۸- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=-x^۲+۲x$ در بازهٔ $[a,۰]$ چند واحد از آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۰,a+۱]$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $|a|$ ۴) $۲|a|$

۲۶۹- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۴x}{x+۱}$ در بازهٔ $[۰,۳]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۷۰- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=۱+\frac{k}{x}$ در بازهٔ $[۲,۶]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟ $(k\neq ۰)$

۱) $x=۳$ ۲) $x=\frac{۷}{۲}$ ۳) $x=\sqrt{۱۰}$ ۴) $x=\sqrt{۱۲}$

۲۷۱- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^3-kx^2$ در بازهٔ $[0,1]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=1$ برابر است. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷۲- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=kx^2-\frac{2}{x}$ در بازهٔ $[-2,-1]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=-1$ برابر است. مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

۲۷۳- مساحت هر مربع تابعی از محیط آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت یک مربع وقتی که محیط آن ۴ است، چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

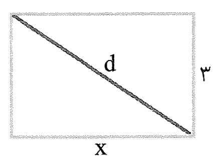
۲۷۴- محیط هر دایره تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک دایره وقتی که مساحت دایره برابر 4π است، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۷۵- محیط هر مربع تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک مربع در لحظه‌ای که مساحت آن برابر ۴ است، چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

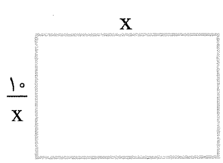
۲۷۶- در شکل مقابل d، اندازهٔ قطر مستطیل، تابعی از x، اندازهٔ طول آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای d وقتی $x=4$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۷۷- در شکل مقابل P، محیط مستطیل، تابعی از x، اندازهٔ طول آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای P وقتی $x=4$ چقدر است؟



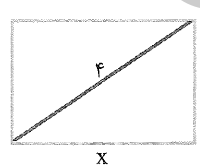
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۷۸- مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع تابعی از طول ضلع آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع وقتی که اندازهٔ ضلع آن برابر $\sqrt{3}$ است، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۷۹- در شکل مقابل S، مساحت مستطیل، تابعی از x، اندازهٔ طول آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای S وقتی که $x=\sqrt{7}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۸۰- عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$ که در آن خط مماس بر نمودار موازی محور x است، چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۲۸۱- اگر مجموع طول نقطه‌هایی روی نمودار تابع $f(x)=x+\frac{16}{x-a}$ که در آنها خط‌های مماس بر نمودار موازی محور x هستند، برابر با ۱۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۸۲- در چند نقطه از نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۴\sqrt{x+۳}$ خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۳- به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+mx-۱۶$ بر محور طول‌ها مماس است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۱۲ ۴) ۱۲-

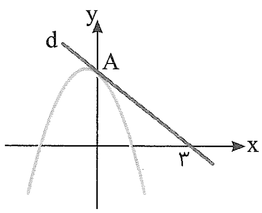
۲۸۴- نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+x^{۲}+m^{۲}x$ در نقطهٔ A بر محور طول‌ها مماس است. طول نقطهٔ A کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۸۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-ax+۹}{x^{۲}+۹}$ درسمت چپ محور عرض‌ها بر محور طول‌ها مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۶ ۴) ۶-

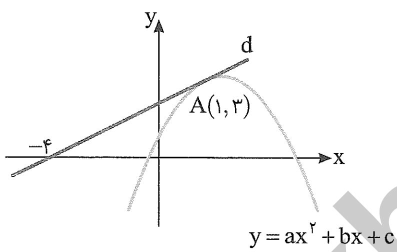
۲۸۶- در شکل مقابل، خط d بر سهمی $y=-x^{۲}+bx+۲$ در نقطهٔ A که روی محور y است، مماس است. مقدار b چقدر است؟



۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

۲۸۷- در شکل مقابل خط d در نقطهٔ $A(۱,۳)$ بر سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ مماس است.

مقدار $a-c$ چقدر است؟



۱) $-\frac{۱۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۹}{۵}$ ۳) $-\frac{۷}{۵}$ ۴) $-\frac{۶}{۵}$

۲۸۸- خط $y=x+۱$ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۲}}{۲}-x+k$، که در آن k عددی مثبت است، مماس است. مقدار k چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

۲۸۹- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+۲x+۱$ در نقطهٔ $x=۱$ روی نمودار، به صورت $y=۲x-۱$ است. مقدار $a+۲b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۸- ۴) ۱۰-

۲۹۰- اگر خط $x+y-۵=۰$ بر نمودار تابع $y=\frac{ax+۳}{x+۱}$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی این نمودار مماس باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۲۹۱- اگر خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{x^{۲}-mx+۲}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی نمودار با خط $y=\frac{۲}{۳}x+۱$ موازی باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱۳}{۹}$ ۳) $-\frac{۱۷}{۹}$ ۴) $-\frac{۲۹}{۹}$

۲۹۲- اگر $f(x)=x^۳+ax+b$ و خط‌های مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول $x=a$ و $x=b$ موازی باشند، مقدار $f(۱)$ چقدر است؟ $(a\neq b)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۳- خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=-x^۲$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع f در این نقاط بر هم عمود باشند، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۶}$

۲۹۴- خط $y=۴x+۱$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-ax+b$ مماس است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۵- اگر خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۴x+۳$ در نقطه‌ای به طول ۲ روی این نمودار بر خط $y=-ax+۵$ عمود باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۲۹۶- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۱۵$ در نقطه‌ای با طول مثبت موازی خط $y=۹x-۱$ است. مقدار تابع در این نقطه کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱۵ ۴) ۱۵

۲۹۷- در دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=\frac{۵x+۲}{x+۲}$ خط مماس بر نمودار تابع بر خط $۲y+x=۱$ عمود است. فاصلهٔ این دو نقطه کدام است؟

۱) $\sqrt{۸۷}$ ۲) $\sqrt{۹۳}$ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ۴) $\sqrt{۹۷}$

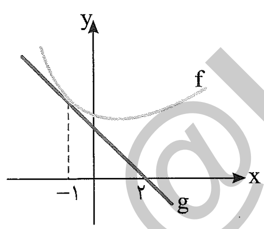
۲۹۸- در کدام نقطه از سهمی $f(x)=x^۲+۵x+۳$ خط مماس موازی خط $y=x-۲$ است؟

۱) $(-۲,-۳)$ ۲) $(-۱,-۱)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۲,۱۷)$

۲۹۹- شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ برابر ۴ و شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۹ برابر -۲ است. اگر $f(x)=۲xg(x^۳+۱)$، مقدار $g(۹)$ چقدر است؟

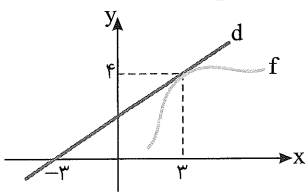
۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۳۰۰- در شکل مقابل خط $g(x)=-x+۲$ بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول -۱ مماس است. اگر $h(x)=f(x)g(x)$، مقدار $h'(-۱)$ چقدر است؟



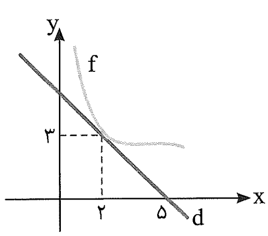
۱) -۸ ۲) -۶
۳) -۴ ۴) -۳

۳۰۱- در شکل مقابل خط d در نقطهٔ $(۳,۴)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x)=x^۲f(x)$، مقدار $g'(۳)$ چقدر است؟



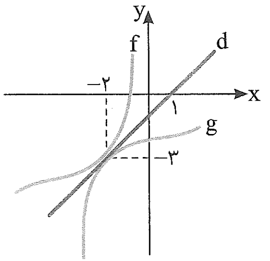
۱) ۳۰ ۲) ۲۷
۳) ۲۴ ۴) ۲۱

۳۰۲- در شکل مقابل خط d در نقطهٔ $(۲,۳)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x)=xf(۳x-۴)$، مقدار $g'(۲)$ چقدر است؟



۱) -۳
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۳

۳۰۳- در شکل مقابل خط d در نقطه‌ای به طول -2 بر نمودار تابع‌های f و g مماس است. اگر $h(x)=x^2f(x)-g(x)$، مقدار $h'(-2)$ چقدر است؟



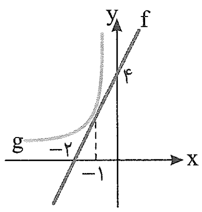
۱) ۱۶

۲) ۱۵

۳) ۱۴

۴) ۱۳

۳۰۴- در شکل مقابل نمودار تابع f خطی راست است که بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول -1 مماس است. مقدار $(fog)'(-1)$ چقدر است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۵- خط $y=\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}a$ بر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ مماس است. حدود a کدام است؟

۱) $a>0$ ۲) $a>1$ ۳) $0<a<1$ ۴) $a\neq 0$

۳۰۶- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & x\geq 1 \\ 4x-2x^2 & x<1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$

۱) خط مماس افقی دارد. ۲) خط مماس عمودی دارد.

۳) دو نیم‌مماس با زاویهٔ 45° دارد. ۴) دو نیم‌مماس با زاویهٔ 135° دارد.

۳۰۷- نمودار تابع $f(x)=2\sqrt{1+|x|}$ در نقطهٔ $x=0$

۱) خط مماس افقی دارد. ۲) خط مماس موازی محور عرض‌ها دارد.

۳) دو نیم‌مماس عمود بر هم دارد. ۴) دو نیم‌مماس با زاویهٔ 45° دارد.

۳۰۸- نیم‌مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & |x|\geq 1 \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3} & |x|<1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

۳۰۹- دو تا از خط‌های مماس بر نمودار تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ موازی محور x هستند. فاصلهٔ این دو خط مماس از هم چقدر است؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۷ ۳) ۲۵ ۴) ۲۱

۳۱۰- معادلهٔ خط مماس بر سهمی $f(x)=2x^2-4x+6$ که با خط $y=x+5$ موازی است، کدام است؟

۱) $4y-4x-12=0$ ۲) $4y-4x+12=0$

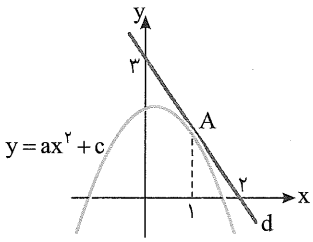
۳) $8y-8x+23=0$ ۴) $8y-8x-23=0$

۳۱۱- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی این نمودار کدام است؟

۱) $x-2y+3=0$ ۲) $2x-y=0$

۳) $3x-y-1=0$ ۴) $x+2y-5=0$

۳۱۲- در شکل روبه‌رو خط d در نقطهٔ A به طول ۱ بر نمودار $y=ax^{۲}+c$ مماس است. مقدار c چقدر است؟



۱) $\frac{۷}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۹}{۴}$

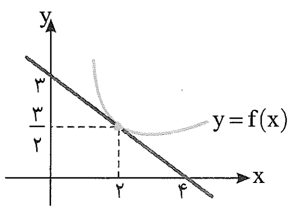
۳۱۳- معادلهٔ خط مماس بر سهمی $y=x^{۲}-۵x+۱$ در نقطه‌ای به طول ۴ روی این سهمی به صورت $y=ax+b$ است. مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) -۷
۲) -۸
۳) -۹
۴) -۱۲

۳۱۴- اگر نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx-۵$ در نقطهٔ $(۱,-۲)$ بر خط $y=۲x-۴$ مماس باشد، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) -۸
۲) -۵
۳) ۲
۴) ۳

۳۱۵- با توجه به شکل مقابل، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=۴f^{۲}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر نمودار تابع کدام است؟



۱) $y=-۳x+۱۰$
۲) $y=-۹x+۹$
۳) $y=-۳x+۲$
۴) $y=-۹x+۲۷$

۳۱۶- عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=k(\sqrt{x-۱}+۱)$ در نقطه‌ای به طول ۵ روی نمودار تابع، چند برابر شیب آن است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۱

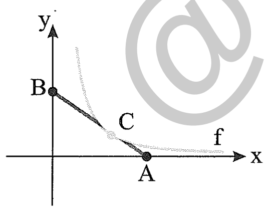
۳۱۷- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x+\frac{۲}{x}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۶

۳۱۸- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}+x^{۲}$ در نقطه‌ای به طول ۳ روی آن در نقطهٔ دیگری نمودار را قطع می‌کند. طول این نقطه کدام است؟

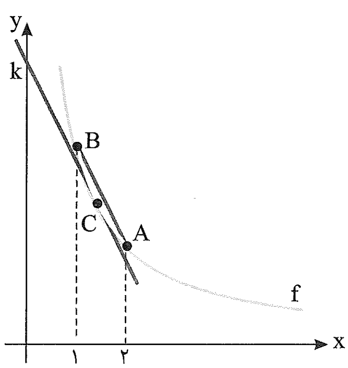
۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۳۱۹- در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{x^{۲}}$ را رسم کرده‌ایم که پاره‌خط AB در نقطهٔ C بر آن مماس شده است. مقدار $\frac{x_A}{x_C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۲۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۴}{x}$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر خط مماس بر این نمودار در نقطهٔ C موازی خط گذرنده از نقاط A و B باشد، مقدار k کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۲۱- در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- واقع بر نمودار تابع $f(x)=x^2-x-2$ دو مماس رسم کرده‌ایم. مساحت ناحیه‌ای که بین این دو خط و محور طول‌ها قرار دارد، چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۲۲- خط $y=-\frac{1}{4}x+1$ بر نمودار تابع $g(x)=-x^2+bx$ مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۲۳- اگر خط $y=3x-b$ بر نمودار تابع $f(x)=x^2+4$ مماس باشد، مقدار b چقدر است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{4}{9}$ ۳) $-\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۳۲۴- خط $y=x+k$ بر نمودار تابع $f(x)=x^3-x^2$ در سمت چپ محور عرض‌ها مماس است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{5}{27}$ ۴) $-\frac{5}{27}$

۳۲۵- اگر خط $y=6x+k$ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x+4$ مماس باشد، مقدار k چقدر است؟

۱) ۸- ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۸

۳۲۶- نمودار تابع $y=-x^2$ را چند واحد به سمت بالا انتقال دهیم تا بر خط $y=x+1$ مماس شود؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۳۲۷- نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را چند واحد به سمت پایین منتقل کنیم تا بر خط $y=-\frac{1}{2}x-1$ مماس شود؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۲۸- خطی که نقاط با طول‌های ۱ و ۱- روی نمودار تابع $f(x)=x^4-x^2$ را به هم وصل می‌کند، در نقطهٔ دیگری بر نمودار تابع مماس است. طول این نقطه کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) صفر

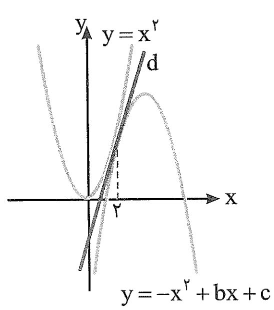
۳۲۹- خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- از نمودار تابع $f(x)=-x^4+mx^2+3x$ را به هم وصل می‌کند، در نقطهٔ دیگری بر نمودار تابع مماس است. طول این نقطه کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

۳۳۰- خط $y=x-1$ در نقطهٔ (a,b) بر نمودار تابع $f(x)=\frac{-k^2}{x+1}$ مماس است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۳۳۱- در شکل مقابل خط d در نقطه‌ای به طول ۲ بر هر دو سهمی $y=x^2$ و $y=-x^2+bx+c$ مماس است. مقدار $b+c$ چقدر است؟



۱) صفر
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۴

۳۳۲- اگر خطی وجود داشته باشد که در نقطهٔ $(-1,4)$ بر نمودار تابع‌های $f(x)=x^2+ax+b$ و $g(x)=2x^3+c$ مماس باشد، مقدار $a+b+c$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۲۸

۳۳۳- از نقطهٔ $A(4,1)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x)=2x-x^2$ رسم می‌کنیم. مجموع شیب‌های این دو خط کدام است؟

۱) -6 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

۳۳۴- از مبدأ مختصات دو مماس عمود بر هم بر نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+m$ رسم می‌کنیم. مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۳۵- از نقطهٔ $A(1,1)$ بر نمودار تابع $f(x)=x-\frac{1}{x}$ خطی مماس می‌کنیم. طول نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۳۳۶- از نقطهٔ $A(0,2)$ دو خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{5x+1}{x-1}$ می‌توان رسم کرد. مجموع طول‌های نقاط تماس این خطوط با نمودار تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) -3

۳۳۷- از نقطهٔ $A(1,\frac{1}{2})$ سه خط مماس می‌توان بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ رسم کرد. کدام‌یک طول نقطهٔ تماس این خطوط با نمودار تابع نیست؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $1+\sqrt{2}$

۳۳۸- شیب خطی که از مبدأ می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x)=x^3+x+16$ مماس است، چقدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۳۳۹- از نقطهٔ $A(1,-1)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x)=-x^3$ می‌توان رسم کرد. شیب این خطوط کدام است؟

۱) -3 و $-\frac{3}{4}$ ۲) ۳ و -3 ۳) -3 و $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{4}$

۳۴۰- از مبدأ مختصات چند خط می‌توان بر نمودار تابع $f(x)=x^4-3x^2$ مماس کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ تغییر متوسط تابع، از نقطهٔ $x=4$ تا $x=12$، از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=4$، چقدر بیشتر است؟ (تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{7}{540}$ ۲) $\frac{11}{540}$ ۳) $\frac{7}{270}$ ۴) $\frac{11}{270}$

۳۴۲- به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات مماس است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) -4 ۲) ۴ یا -12 ۳) -4 یا ۱۲ ۴) ۱۲

۳۴۳- در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ تغییر متوسط تابع از نقطهٔ $x=4$ تا $x=6/25$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=4$ چقدر کمتر است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{5}{72}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۳۴۴- از نقطهٔ $A(۲,-۱)$، دو خط مماس بر نمودار $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x$ رسم شده است. زاویهٔ بین این دو خط مماس، کدام است؟ (ریاضی - ۹۳ با کمی تغییر)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۳۴۵- در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۱,۱/۲۱]$، از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=۱$، چقدر کمتر است؟

(تجربی - ۹۴ با کمی تغییر)

۱) $\frac{۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۴۲}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۳۴۶- در تابع $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۱,۱/۴۴]$، از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=۱$، چقدر کمتر است؟

(خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر)

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۴۷- به‌ازای کدام مقدار a، خط $y=۵x+a$ بر نمودار تابع $y=۲x^{۲}-۳x+۶$ مماس است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۷)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

فصل چهارم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ شیب خطی که از نقطه‌های $A(-۱,۳)$ و $B(۴,۴)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطهٔ ۱- با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A برابر است. بنابراین $f'(-۱)=\frac{۱}{۵}$.

۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که نمودار f خطی راست است و $f'(-۳)$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۳- روی نمودار است. چون این خط مماس، خود نمودار تابع f است، پس شیب خط نمودار تابع f هم برابر است با $f'(-۳)=-۵$. اکنون توجه کنید که چون این خط از نقطهٔ $(۰,۴)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به صورت $y=-۵x+۴$ است.

بنابراین $f(x)=-۵x+۴$ و $f(۴)=-۱۶$.

۳- گزینهٔ ۲ مقدار $f'(-۵)$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول ۵- است، یعنی برابر با شیب خط d است. از طرف دیگر، خط d از نقطه‌های $(-۵,۲)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد، بنابراین شیب آن برابر با $-\frac{۱}{۳}$ است. در نتیجه $f'(-۵)=-\frac{۱}{۳}$. همچنین، مقدار $f'(۴)$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(۴,۳)$، یعنی شیب خط $y=۳$ است. چون شیب این خط صفر است، پس $f'(۴)=۰$. به این ترتیب،

$$f'(-۵)+f'(۴)=-\frac{۱}{۳}+۰=-\frac{۱}{۳}$$

۴- گزینهٔ ۱ خط $d_۱$ از نقطه‌های $(-۴,۰)$ و $(۰,۴)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر است با ۱ و خط $d_۲$ از نقطه‌های $(۰,۳)$ و $(۳,۰)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر است با ۱-. از طرف دیگر، $f'(-۱)$ برابر با شیب خط $d_۱$ است، پس $f'(-۱)=۱$ و $f'(۱)$ برابر با شیب خط $d_۲$ است، یعنی $f'(۱)=-۱$. بنابراین

$$(f'of')(-۱)=f'(f'(-۱))=-۱$$

۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $\tan ۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$. از طرف دیگر، مقدار $f'(x_۰)$ برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(x_۰,f(x_۰))$.

بنابراین $f'(۱)=-\sqrt{۳}$ و $g'(-۲)=-\sqrt{۳}$ و در نتیجه

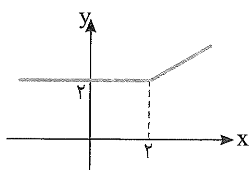
$$f'(۱)+g'(-۲)=-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

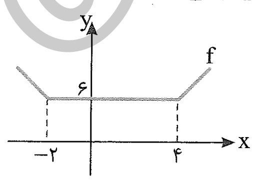
$$x\geq ۲\Rightarrow f(x)=x+x-۲=۲x-۲$$

$$x\leq ۲\Rightarrow f(x)=x-x+۲=۲$$

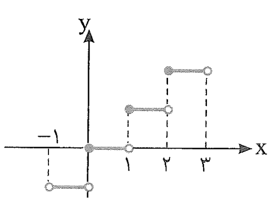
پس نمودار تابع به شکل زیر است و مشتق تابع در هر نقطه از بازهٔ $(-\infty,۲)$ صفر است و در هر نقطه از بازهٔ $(۲,+\infty)$ صفر نیست. پس حداقل مقدار a برابر ۲ است.



۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. توجه کنید که f در نقطه‌های ۲- و ۴ مشتق‌پذیر نیست، و چون نمودار f روی بازهٔ $(-۲,۴)$ پاره‌خطی راست موازی محور x است، پس مشتق تابع f به‌ازای هر عدد در بازهٔ $(-۲,۴)$ برابر صفر است. عددهای صحیح در این بازه ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند، که مجموع آنها برابر ۵ است.



۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که نمودار تابع f به شکل زیر است و در نقاط صحیح بازهٔ $(-۱,۳)$ تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد. در بقیهٔ نقاط مشتق تابع صفر است.



۹- گزینهٔ ۱ اگر $a\to ۲$، آن‌گاه شیب خطی که نقاط $(۲,f(۲))$ و $(a,f(a))$ را به هم وصل می‌کند، برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(۲,f(۲))$ است. بنابراین

$$\text{شیب خط مماس}=\lim_{a\to ۲}(a^۲-۳a)=۴-۶=-۲$$

۱۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲(f(x)-f(۲))}{x-۲}$$

$$=۲\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۲f'(۲)=۶$$

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر به جای ۲ مقدار $f(۱)$ را قرار دهیم، حد خواسته شده عکس تعریف مشتق در نقطهٔ $x=۱$ می‌شود:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{f(x)-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{f(x)-f(۱)}$$

$$=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}}=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۲f(x)-۶}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{۲(f(x)-۳)}{x+۲}$$

$$=۲\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=۲f'(-۲)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-۲)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f درنقطهٔ $A(-۲,۳)$، یعنی شیب خط d است. اکنون توجه کنید که چون خط d از نقطه‌های $A(-۲,۳)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{۳-۰}{-۲-۱}=-۱$. بنابراین $f'(-۲)=-۱$ و حد مورد نظر برابر است با $۲f'(-۱)=-۲$.

۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}=۳$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۹}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۳)(f(x)+۳)}{x(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+۳}{x}$$

$$=f'(۲)\times\frac{f(۲)+۳}{۲}=۳\times\frac{۳+۳}{۲}=۹$$

۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^۲(x)-kf(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}\times\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)}{x-۲}$$

$$=f'(-۲)\times\frac{f(-۲)}{-۴}=\frac{k^۲}{-۴}$$

بنابراین

$$\frac{k^۲}{-۴}=-۲\Rightarrow k^۲=۸$$

۱۵- گزینهٔ ۱ اگر به‌جای ۲ در صورت کسر داده شده، $\sqrt{f(۲)}$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x-۲}\times\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}$$

$$=f'(۲)\times\frac{۱}{۲\sqrt{f(۲)}}=۴\times\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=۱$$

۱۶- گزینهٔ ۴ ابتداتوجه‌کنیدکه‌چون $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۳x+۲)=۰$ پس $\lim\limits_{x\to ۲}(\sqrt{f(x)}-۲)=۰$، زیرا در غیر این صورت $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۳x+۲}$ وجود ندارد. پس با توجه به مشتق‌پذیری و پیوستگی تابع f در نقطهٔ $x=۲$،

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{f(x)}=۲\Rightarrow\lim_{x\to ۲}f(x)=۴\Rightarrow f(۲)=۴$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{(x-۲)(x-۱)}\times\frac{\sqrt{f(x)}+۲}{\sqrt{f(x)}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۴}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(x-۱)(\sqrt{f(x)}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\frac{۱}{(۲-۱)(\sqrt{f(۲)}+۲)}=f'(۲)\times\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۴}f'(۲)=۳\Rightarrow f'(۲)=۱۲$$

۱۷- گزینهٔ ۴ با توجه به تعریف مشتق در نقطهٔ $x=-۲$ مقدار حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+f(x)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۲-۲+f(x)}{x+۲}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{x+۲}{x+۲}+\frac{f(x)-۲}{x+۲}\right)$$
$$=۱+\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}$$
$$=۱+f'(-۲)=۱+۴=۵$$

۱۸- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر نصف مشتق تابع در نقطهٔ $x=۲$ است:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲h}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$
$$=\frac{۱}{۲}f'(۲)=\frac{۱}{۲}\times ۴=۲$$

۱۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\frac{۲\times ۳-۱}{۳+۲}=۱$$

۲۰- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $H=-h$، آن‌گاه $H\to ۰$ و $h=-H$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱)-f(۱-h)}{h}=\lim_{H\to ۰}\frac{f(۱)-f(۱+H)}{-H}$$
$$=\lim_{H\to ۰}\frac{f(۱+H)-f(۱)}{H}=f'(۱)=۶$$

۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'_+(۲)$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد.
دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{(۲+h)^۳-۱۲}{h}=-\infty$$

۲۲- گزینهٔ ۴ بـه جای ۸ قرار می‌دهیم $f^۳(۱)$ و از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=۱$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۱+h)-f(۱))(f^۲(۱+h)+f(۱)f(۱+h)+f^۲(۱))}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\times\lim_{h\to ۰}(f^۲(۱+h)+۲f(۱+h)+۴)$$
$$=f'(۱)\times(f^۲(۱)+۲f(۱)+۴)=۲(۴+۴+۴)=۲۴$$

۲۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)+f(۲)-f(۲-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{-h}$$
$$=f'(۲)+f'(۲)=۲f'(۲)=-۴$$

۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+۲h)-f(۳-h)}{h}=(۲-(-۱))f'(۳)=۳\times ۲=۶$$

۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱-h)-f(-۱-۲h)}{۳h}=\frac{۱}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱-h)-f(-۱-۲h)}{h}$$
$$=\frac{۱}{۳}((-۱-(-۲))f'(-۱))$$
$$=\frac{۱}{۳}f'(-۱)=۱$$

۲۶- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $x=۲-h$، آن‌گاه $h\to ۰$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{f(x)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲-h-۲}{f(۲-h)-f(۲)}$$
$$=-\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۲-h)-f(۲)}$$
$$=-\frac{۱}{\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}}$$
$$=-\frac{۱}{۴}$$

۲۷- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $H=-h^۲$، آن‌گاه $H\to ۰^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h^۲)-f(۲)}{h^۲}=\lim_{H\to ۰^-}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{-H}$$
$$=-\lim_{H\to ۰^-}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{H}$$
$$=-f'_-(۲)=-۴$$

۲۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $H=h^۲$، آن‌گاه $H\to ۰^+$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h^۲)-f(۲-h^۲)}{h^۲}=\lim_{H\to ۰^+}\frac{f(۲+H)-f(۲-H)}{H}$$
$$=\lim_{H\to ۰^+}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{H}+\lim_{H\to ۰^+}\frac{f(۲-H)-f(۲)}{-H}$$
$$=f'_+(۲)+f'_-(۲)=۳+۲=۵$$

۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{H\to 0^-}\frac{f(1+H)-f(1)}{\frac{H}{3}}$$
$$=3f'_-(1)=-12$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-4h)-f(1)}{h}=\lim_{H\to 0^+}\frac{f(1+H)-f(1)}{-\frac{H}{4}}$$
$$=-4f'_+(1)=-16$$

بنابراین

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-4h)-f(1)}{h}=-12+16$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+3h)-f(1-4h)}{h}=4$$

۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(2+h)}-\sqrt{f(2)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{f(2+h)}-\sqrt{f(2)}}{h}\times\frac{\sqrt{f(2+h)}+\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2+h)}+\sqrt{f(2)}}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(2+h)}+\sqrt{f(2)}}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{2\sqrt{f(2)}}$$

بنابراین

$$\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=\sqrt{f'(2)}\Rightarrow\frac{\sqrt{f'(2)}}{\sqrt{f(2)}}=2\Rightarrow\frac{f'(2)}{f(2)}=4$$

۳۱- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x^2-4}=3\Rightarrow\lim_{x\to 2}(f(x)-1)=0$$
$$\lim_{x\to 2}f(x)=1\Rightarrow f(2)=1$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right)=f'(2)\times\frac{1}{4}=3$$
$$f'(2)=12$$

در نتیجه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{f(2+h)+f(2)}{1}\right)$$
$$=f'(2)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)+f(2)}{1}=12\times(1+1)=24$$

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $x=h+2$، آن‌گاه $h=x-2$ و اگر $h\to 0$، آن‌گاه $x\to 2$. بنابراین (توجه کنید همان‌طور که در ابتدای راه‌حل اول گفتیم، $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+h)-1}{h}=\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-1)(f(x)+1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-1}{x^2-4}(f(x)+1)(x+2)\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x^2-4}\times\lim_{x\to 2}((f(x)+1)(x+2))$$
$$=3\times(1+1)(2+2)=24$$

۳۲- گزینهٔ ۳ اگر در تساوی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

قرار دهیم $x=y=0$، به‌دست می‌آید $f(0)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(-1)+f(h)-2h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-2=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}-2$$
$$=f'(0)-2=5-2=3$$

۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x^2+1)(3x^2+2)-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}((2x^2+1)(3x^2+2))=15$$

۳۴- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}((x-1)^2(x+1)(x^2+1)^2)=4\times 0\times 4=0$$

۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(1)=0$. پس

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x(2x-1)(2x-2)(2x-3)\cdots(2x-10)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(4x(2x-1)(2x-3)(2x-4)\cdots(2x-10))$$

$$=4\times 1(1)(-1)(-2)(-3)\cdots(-8)=4\times 8!$$

۳۶- گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2)=2^3=8$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-x)=4-2=2$$

چون $f(2)\neq\lim_{x\to 2}f(x)$، پس تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته نیست و در نتیجه در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۳۸- گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=\sqrt{\frac{4}{1}}=2$$

۳۹- گزینهٔ ۱ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=3$ مقدار $f'(3)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x^2-9}{x^2+x+3}-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+x+3}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

۴۰- گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ مقدار $f'(1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}=\frac{\cos^3\pi}{\tan\frac{\pi}{4}}=-1$$

۴۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f(1)=0$. پس

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x^2}{1+\log x}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(1+\log x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1-x}{1+\log x}=\frac{-1-1}{1+0}=-2$$

(توجه کنید که با استفاده از نمودار تابع $y=\log x$ مشخص است که تابع در $x=1$ پیوسته است و $\lim_{x\to 1}\log x=\log 1=0$)

۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{a\sqrt{3-\sqrt{9-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}{\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sqrt{9-(9-x^2)}}{x\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a|x|}{x\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-ax}{x\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-a}{\sqrt{3+\sqrt{9-x^2}}}=\frac{-a}{\sqrt{6}}$$

بنابراین

$$\frac{-a}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}\Rightarrow a=-\sqrt{18}=-3\sqrt{2}$$

۴۳- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف مشتق چپ در $x=2$ مقدار $f'_-(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{|x-2|}{x^4+x^3+x+4}-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x^4+x^3+x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x^4+x^3+x+4}=\frac{-1}{16+8+2+4}=-\frac{1}{30}$$

۴۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(0)=0$ و در نتیجه

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{4x^2-x^4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{x^2(4-x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2|x|}{x}\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(-2\sqrt{4-x^2})=-4$$

۴۵- گزینهٔ ۱ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt[3]{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt[3]{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x+1}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt[3]{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt[3]{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(-\sqrt[3]{x+1})=-1$$

بنابراین

$$f'_+(0)-f'_-(0)=2$$

۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt[3]{x+5}}=\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x+5}}=\frac{|x-3|}{\sqrt[3]{x+5}}$$

بنابراین

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\frac{|x-3|}{\sqrt[3]{x+5}}-0}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{(x-3)\sqrt[3]{x+5}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-1}{\sqrt[3]{x+5}}=-\frac{1}{2}$$

۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=|x^2(x-1)|=x^2|x-1|$$

پس

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2|x-1|-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(x|x-1|)=0$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2|x-1|-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x^2=1$$

در نتیجه

$$f'_-(0)-f'_+(1)=-1$$

۴۸- گزینهٔ ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=|x||x^2+k|$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x||x^2+k|}{x}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}|x^2+k|=|k|$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(-|x^2+k|)=-|k|$$

بنابراین

$$f'_+(0)f'_-(0)=-|k|^2=-4\Rightarrow k=\pm 2$$

و در نتیجه حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۴- است.

۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 1^+$، آن‌گاه $[x]=1$، پس

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{[x]-x}{\sqrt{x^2+3}}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{-1}{2}$$

۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-2$، $[-x]=2$ و $|x|=-x$. بنابراین $f(x)=(2+x)\sqrt[3]{4x}$

و در نتیجه

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(2+x)\sqrt[3]{4x}-0}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\sqrt[3]{4x}=\sqrt[3]{-8}=-2$$

۵۱- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس در نقطهٔ $x=2$ هم مشتق‌پذیر است. بنابراین

$$f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow\frac{27}{a}=a^2\Rightarrow a^3=27\Rightarrow a=3$$

در نتیجه

$$f'(2)=f'_+(2)=f'_-(2)=9$$

۵۲- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است، بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه را حساب می‌کنیم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x[\sin x]-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}[\sin x]=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x[\sin x]-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}[\sin x]=-1$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست دارد ولی چون برابر نیستند، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]-\{۰\}\Rightarrow ۰\le\cos x<۱\Rightarrow[\cos x]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$x=۰\Rightarrow\cos x=۱\Rightarrow[\cos x]=۱\Rightarrow f(x)=۰$$

$$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow -۱\le\cos x<۰\Rightarrow[\cos x]=-۱$$

$$f(x)=-\sin x$$

بنابراین تابع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & -\frac{\pi}{۲}<x\le\frac{\pi}{۲} \\ -\sin x & \frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته نیست و در نتیجه در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۵۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to۰}f(x)=-۲$ و $g(۰)=۰$. پس

$$g'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x}{۲f(x)}-۰}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{۲f(x)}=\frac{۱}{-۴}$$

۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۰)=۰$ و در نتیجه

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-|x|}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-۱-x}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{-\sqrt{-x}\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}}=-\infty$$

بنابراین $f'_-(۰)$ وجود ندارد.

۵۶- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۱}}=+\infty$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to۱^-}\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۱}}=-\infty$$

۵۷- گزینهٔ ۲ برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ تساوی‌های داده شده برقرار هستند:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=+\infty$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=-\infty$$

برای توابع دیگر توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)=+\infty$$

$$f(x)=-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)=-\infty$$

$$f(x)=-\sqrt[۳]{|x|}\Rightarrow f'_+(۰)=-\infty,\ f'_-(۰)=+\infty$$

۵۸- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{|x|}$ در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۳]{|x|}}{x}$$

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=+\infty$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt[۳]{-x}}{x}=\lim_{x\to۰^-}\frac{-\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰^-}(-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})=-\infty$$

در بقیهٔ گزینه‌ها مشتق تابع در نقطهٔ $x=۰$ برابر صفر است.

۵۹- گزینهٔ ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to۰^+}\frac{[x]\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۰}{x}=۰$$

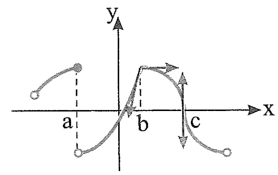
$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{[x]\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{-\sqrt[۳]{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^-}(-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})=-\infty$$

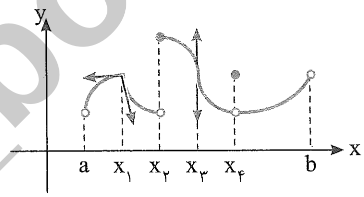
بنابراین نیم‌مماس راست موازی محور طول‌ها و نیم‌مماس چپ موازی محور عرض‌هاست و نیم‌مماس‌ها بر هم عمودند.

۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که نمودار تابع f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ نیم‌خطی با شیب ۱ است، پس $f'_+(۲)=۱$ و $\lim_{x\to۲^+}f'(x)=۱$. از طرف دیگر، چون تابع f در نقطهٔ ۲ از چپ پیوسته نیست، پس در نقطهٔ ۲ مشتق چپ ندارد، یعنی تساوی $f'_-(۲)=۱$ درست نیست. البته، نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۲)$ تکه‌ای از خطی راست با شیب ۱ است، پس $\lim_{x\to۲^-}f'(x)=۱$.

۶۱- گزینهٔ ۳ تابع در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.
در نقطهٔ $x=b$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد.
در نقطهٔ $x=c$ خط مماس بر نمودار تابع موازی محور عرض‌هاست.
پس تابع در سه نقطهٔ فوق مشتق ندارد.

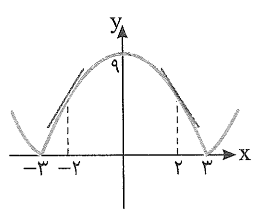


۶۲- گزینهٔ ۳ مطابق شکل زیر، تابع در نقاط $x_۲$ و $x_۴$ پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر نیست. در نقطهٔ $x_۱$ مشتق راست و مشتق چپ تابع با هم برابر نیست (نمودار شکستگی دارد)، پس تابع مشتق‌پذیر نیست. در نقطهٔ $x_۳$ هم خط مماس بر نمودار تابع موازی محور عرض‌هاست، پس تابع مشتق‌پذیر نیست.



۶۳- گزینهٔ ۳ در نقطه‌های ۳−، ۲ و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیست، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطهٔ ۱− پیوسته نیست، پس در این نقطه هم مشتق‌پذیر نیست. تابع f در بقیهٔ نقطه‌های دامنه‌اش مشتق‌پذیر است.

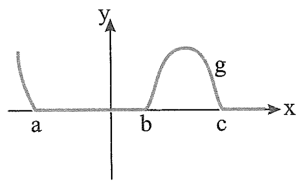
۶۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع g در شکل زیر رسم شده است. از روی این شکل معلوم است که تابع g در نقطه‌های ۳− و ۳ مشتق‌پذیر نیست، پس گزینهٔ (۱) درست نیست. همین‌طور $g'(۲)$ عددی منفی و $g'(-۲)$ عددی مثبت است، پس گزینهٔ (۲) هم درست نیست. چون تابع g در نقطهٔ صفر مشتق‌پذیر است، پس $g'_-(۰)=g'_+(۰)$، پس گزینهٔ (۳) درست است. توجه کنید که $g'_+(۳)$ عددی مثبت و $g'_-(-۳)$ عددی منفی است، پس گزینهٔ (۴) هم درست نیست.



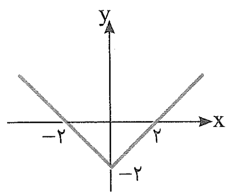
۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$g(x)=\begin{cases} ۲f(x) & f(x)\geq ۰ \\ ۰ & f(x)<۰ \end{cases}$$

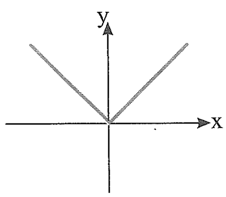
بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است. از روی نمودار تابع g معلوم است که در نقطه‌های a، b و c مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیست، بنابراین تابع g در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست.



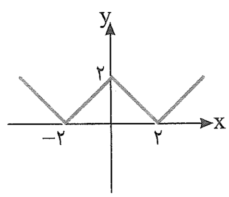
۶۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



$y=|x|-۲$



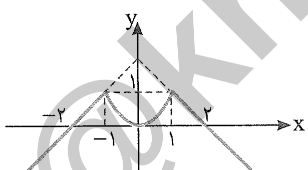
$y=|x|$



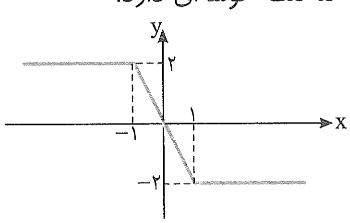
$y=||x|-۲|$

بنابراین تابع در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۶۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



۶۸- گزینهٔ ۲ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



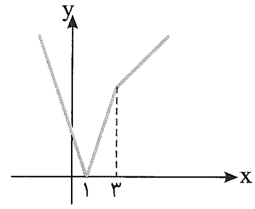
۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x\geq ۳\Rightarrow |x-۳|=x-۳\Rightarrow f(x)=|۲x-x+۳|$$

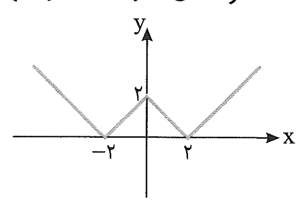
$$=|x+۳|=x+۳$$

$$x<۳\Rightarrow |x-۳|=-x+۳\Rightarrow f(x)=|۲x+x-۳|=|۳x-۳|$$

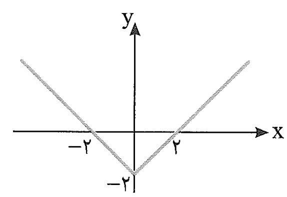
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=۱$ و $x=۳$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



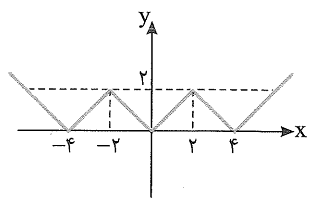
۷۰- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=|x|-۲$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیرمحور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=||x|-۲|$ به‌دست بیاید. اکنون این نمودار را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=||x|-۲|-۲$ به‌دست بیاید. در آخر، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع ۵ نقطهٔ گوشه‌ای دارد، که در آنها مشتق‌پذیر نیست.



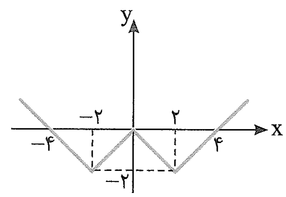
$y=||x|-۲|$



$y=|x|-۲$



$f(x)=|||x|-۲|-۲|$



$y=||x|-۲|-۲$

۷۱- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{۳-۲}{-۱-۱}(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{-۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

این خط در نقطهٔ $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(۳)=\frac{-۱}{۲}\times۳+\frac{۵}{۲}=\frac{-۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱,\quad f'(۳)=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\lim_{x\to۳}\left(\frac{f(x)-۱}{x-۳}\times\frac{f(x)+۵}{-۱}\right)$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\times\lim_{x\to۳}(-f(x)-۵)$$

$$=f'(۳)\times(-f(۳)-۵)=-\frac{۱}{۲}(-۱-۵)=۳$$

۷۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(۳x-۴)'(۳x-۴)^{۳-۱}=۳\times۳(۳x-۴)^۲=۹(۳x-۴)^۲$$

بنابراین $f'(-۲)=۹(-۶-۴)^۲=۹۰۰$.

۷۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۱۰۰(۲x+۱)(x^۲+x)^{۱۰۰-۱}$$

به این ترتیب، $f'(-\frac{۱}{۲})=۰$.

۷۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۱۰(ax^۳+۳x^۲+a)'(ax^۳+۳x^۲+a)^{۱۰-۱}$$

$$=۱۰(۳ax^۲+۶x)(ax^۳+۳x^۲+a)^۹$$

در نتیجه

$$f'(-۱)=۱۰(۳a-۶)(-a+۳+a)^۹$$

$$=۱۰\times۳(a-۲)(۳)^۹=۱۰\times۳^{۱۰}(a-۲)$$

۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۳(۳x-۲)'(۳x-۲)^{۳-۱}-۴(۲x-۳)'(۲x-۳)^{۴-۱}$$

$$=۳(۳)(۳x-۲)^۲-۴(۲)(۲x-۳)^۳$$

در نتیجه

$$f'(-۱)=۹(-۳-۲)^۲-۸(-۲-۳)^۳=۹\times۵^۲+۸\times۵^۳=۴۹\times۵^۲$$

۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=((x+۱)^۲)^۵((x-۱)^۲)^۵$$

$$=((x-۱)(x+۱))^{۱۰}=(x^۲-۱)^{۱۰}$$

از طرف دیگر، $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=۱۰(x^۲-۱)'(x^۲-۱)^{۱۰-۱}=۱۰(۲x)(x^۲-۱)^۹$$

در نتیجه $f'(۲)=۱۰(۴)۳^۹=۴۰\times۳^۹$.

۷۷- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۲(x^۲-۱)(x^۲+۲)=x^۲(x^۴+x^۲-۲)$$

$$=x^۶+x^۴-۲x^۲$$

$$f'(x)=۶x^۵+۴x^۳-۴x=۲x(۳x^۴+۲x^۲-۲)$$

بنابراین

$$f'(x)=0 \Rightarrow x(3x^4+2x^2-2)=0 \Rightarrow x=0$$

$$3x^4+2x^2-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}} \\ x^2=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3} \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

بنابراین در سه نقطه به طول‌های صفر، $\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}}$ و $-\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}}$ مقدار مشتق تابع برابر صفر است.

۷۸- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب و اینکه $(g^n)'=ng'g^{n-1}$،

$$f'(x)=((x^2-1)^2)'(x+2)^4+(x^2-1)^2((x+2)^4)'$$

$$=(2(2x)(x^2-1)^{2-1})(x+2)^4+(x^2-1)^2(4(1)(x+2)^{4-1})$$

$$=4x(x^2-1)(x+2)^4+4(x^2-1)^2(x+2)^3$$

بنابراین $f'(0)=0+4(1)(2)^3=32$.

۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$f(x)=((x^4-1)(x^8+x^4+1))^2=((x^4)^3-1^3)^2=(x^{12}-1)^2$$

در نتیجه

$$f'(x)=2(12x^{11})(x^{12}-1)^{2-1}=24x^{11}(x^{12}-1)$$

۸۰- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(x-2)'(x-1)(2+x)+(x-2)(x-1)'(2+x)$$
$$+(x-2)(x-1)(2+x)'$$
$$=(1)(x-1)(2+x)+(x-2)(1)(2+x)+(x-2)(x-1)(1)$$

در نتیجه $f'(3)=2\times5+1\times5+1\times2=17$.

۸۱- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=a(bx+2)(cx+2)+(ax+2)(b)(cx+2)$$
$$+(ax+2)(bx+2)(c)$$

بنابراین

$$f'(0)=a\times4+b\times4+c\times4=4(a+b+c)$$

۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+1$ به‌ازای $x=-1$ صفر است، پس مشتق عبارت

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

به‌ازای $x=-1$ برابر است با

$$(-1+2)(-1+3)(-1+4)=6$$

از طرف دیگر، مشتق ax^2 به‌ازای $x=-1$ برابر است با $2a(-1)=-2a$. در نتیجه،

$$f'(-1)=0 \Rightarrow 6-2a=0 \Rightarrow a=3$$

۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=4(1+(1+x^3)^3)'(1+(1+x^3)^3)^{4-1}$$

$$=4(3(3x^2)(1+x^3)^{3-1})(1+(1+x^3)^3)^3$$

$$=36x^2(1+x^3)^2(1+(1+x^3)^3)^3$$

در نتیجه $f'(1)=36(1)(2)^2(9)^3=2^4\times3^8$.

۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=2((3x+1)^4+(2x-3)^2-x)'$$
$$\times((3x+1)^4+(2x-3)^2-x)^{2-1}$$
$$=2(4(3)(3x+1)^3+2(2)(2x-3)-1)$$
$$\times((3x+1)^4+(2x-3)^2-x)$$
$$=2(12(3x+1)^3+4(2x-3)-1)((3x+1)^4+(2x-3)^2-x)$$

در نتیجه $f'(0)=2(12+4(-3)-1)(1+9)=-20$.

۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+20x^{19}$$

بنابراین

$$f'(1)=1+2+3+\cdots+20=\frac{20(20+1)}{2}=210$$

۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-1+2x-3x^2+\cdots-19x^{18}+20x^{19}$$

بنابراین

$$f'(-1)=-1-2-3-\cdots-19-20=\frac{-20(20+1)}{2}=-210$$

۸۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

در نتیجه

$$f'(1)=10 \Rightarrow 1+2+3+\cdots+n=10 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=10$$

$$n=4\ ,\ n=-5\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ و $f(1)=5$.

۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=3ax^2-2ax+4$.

بنابراین

$$f'(-2)=12 \Rightarrow 12a+4a+4=12 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x+4$$

پس $f'(1)=\frac{9}{2}$.

۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=nx^{n-۱}+(m-۱)x^{m-۲}+۳$$

در نتیجه

$$f'(۱)=۸\Rightarrow n+m-۱+۳=۸\Rightarrow m+n=۶$$

۹۰- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(۸x^۳+۱۰x)(ax^۲+۴)+(۲x^۴+۵x^۲+۳)(۲ax)$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f'(۱)=۱۸(a+۴)+۲۰a \\ f'(۱)=-۴ \end{cases}\Rightarrow a=-۲$$

۹۱- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(۱۲x^۵-۹x^۲+۲x)(۳x^۴+۲x^۲+a)$$
$$+(۲x^۶-۳x^۳+x^۲)(۱۲x^۳+۴x)$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f'(-۱)=(-۲۳)(۵+a)+(۶)(-۱۶) \\ f'(-۱)=-۴ \end{cases}\Rightarrow a=-۹$$

۹۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=۲ax+b$. بنابراین

$$(f'of)(x)=۲a(ax^۲+bx+۱)+b$$
$$=۲a^۲x^۲+۲abx+۲a+b$$

در نتیجه

$$\begin{cases} ۲a^۲=۸ \\ ۲ab=-۱۲ \\ ۲a+b=۱ \end{cases}\Rightarrow a=۲\,,\,b=-۳$$

بنابراین $f(x)=۲x^۲-۳x+۱$، $f'(x)=۴x-۳$ و $f'(۱)=۱$.

۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$، بنابراین

$$f'(x)=n(۲x)(x^۲+۱)^{n-۱}\Rightarrow f'(۳)=۶n\times۱۰^{n-۱}$$

در نتیجه $۶n\times۱۰^{n-۱}=۳\times۱۰^۵$، پس $۲n\times۱۰^{n-۱}=۱۰^۵$، یعنی

$$n\times۱۰^{n-۱}=۵\times۱۰^۴\Rightarrow n=۵$$

۹۴- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f'(x)=a$$
$$f'(x)f(x)=a^۲x+ab=۹x-۳$$

بنابراین

$$\begin{cases} a^۲=۹ \\ ab=-۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۳\,, & b=-۱ \\ a=-۳\,, & b=۱ \end{cases}$$

پس $f(x)=۳x-۱$ یا $f(x)=-۳x+۱$ و در نتیجه $f'(x)=۳$ یا $f'(x)=-۳$.

۹۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که درجهٔ $P'(x)$ یک واحد از درجهٔ $P(x)$ کمتر است. بنابراین درجهٔ $P(x)+P'(x)$ همان درجهٔ $P(x)$ است. چون $P(x)+P'(x)=۳x-۴$ و درجهٔ عبارت سمت راست ۱ است، پس درجهٔ $P(x)$ هم ۱ است. فرض کنید $P(x)=ax+b$. در این صورت $P'(x)=a$. به این ترتیب

$$\begin{cases} P(x)+P'(x)=ax+b+a \\ P(x)+P'(x)=۳x-۴ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۳ \\ b+a=-۴ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۳ \\ b=-۷ \end{cases}$$

در نتیجه $P(x)=۳x-۷$، پس $P(۲)=-۱$ و $P'(۲)=۳$.

بنابراین $P(۲)P'(۲)=-۳$.

۹۶- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۲x+۱)(x^۲-x+۱)-(۲x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x^۲-x+۱)^۲}$$
$$=\frac{۲(۱-x^۲)}{(x^۲-x+۱)^۲}$$

۹۷- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{((۳-x)-(x-۱))x^۲-۲x(x-۱)(۳-x)}{x^۴}$$
$$=\frac{(۴-۲x)x^۲-۲x(x-۱)(۳-x)}{x^۴}$$

در نتیجه $f'(-۲)=\frac{۸\times۴+۴(-۳)(۵)}{۱۶}=-\frac{۷}{۴}$.

۹۸- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{((۱)(x^۲+۳x)+(x-۱)(۲x+۳))(۳x+۵)}{(۳x+۵)^۲}$$
$$-\frac{۳(x-۱)(x^۲+۳x)}{(۳x+۵)^۲}$$

در نتیجه $f'(-۱)=\frac{((-۲)+(-۲))۲-۳(-۲)(-۲)}{۲^۲}=-۵$.

۹۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲\left(\frac{۳x^۲(x^۲-۱)-۲x(x^۳-۱)}{(x^۲-۱)^۲}\right)\left(\frac{x^۳-۱}{x^۲-۱}\right)$$

در نتیجه، $f'(-۲)=۰$.

۱۰۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=۱+x^{-۱}+x^{-۲}+\cdots+x^{-۶}$$

بنابراین

$$f'(x)=-x^{-۲}-۲x^{-۳}-۳x^{-۴}-\cdots-۶x^{-۷}$$

در نتیجه $f'(۱)=-۲۱$.

۱۰۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$، بنابراین

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}\Rightarrow f(-1)=-6$$

۱۰۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=(-3)(3-\frac{1}{x^2})(3x+\frac{1}{x})^{-4}$$

در نتیجه، $f'(1)=(-3)(2)(4)^{-4}=\frac{-3}{128}$.

۱۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-10}+x^{-9}+\dots+x^{-1}+1+x+x^2+\dots+x^{10}$$

بنابراین

$$f'(x)=-10x^{-11}-9x^{-10}-\dots-x^{-2}+1+2x+\dots+10x^9$$

در نتیجه $f'(1)=-10-9-\dots-1+1+2+\dots+10=0$.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x(x^3+1)+(x^3+1)}{x^3+1}=x+1 \qquad (x\neq -1)$$

در نتیجه $f'(x)=1\ (x\neq -1)$ و $f'(\sqrt{2}-1)=1$.

۱۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^2-9)(x^2-4)}{x^2-9}$$

$$=x^2-4\ (x\neq \pm 3)$$

بنابراین $f'(x)=2x\ (x\neq\pm 3)$ و $f'(4)=8$.

۱۰۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(2-x)f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 \qquad (x\neq 2)$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$-f(x)+(2-x)f'(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+1\ (x\neq 2)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$(چون $f(1)=0$) به‌دست می‌آید $f'(1)=3$.

۱۰۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که مشتق تابع f مجموع چهار جمله است، که هر یک از آنها مشتق یکی از پرانتزها ضرب در بقیهٔ پرانتزهاست. اما مشتق هر یک از پرانتزها در نقطهٔ $x=1$ برابر صفر است:

$$g(x)=kx+\frac{1}{x^k}\Rightarrow g'(x)=k-\frac{k}{x^{k+1}}\Rightarrow g'(1)=0$$

بنابراین $f'(1)=0$.

۱۰۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $x\in D_f$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{(1+x+\dots+x^5)+(x^6+x^7+\dots+x^{11})}{1+x+\dots+x^5}$$

$$=1+\frac{x^6(1+x+\dots+x^5)}{1+x+\dots+x^5}=1+x^6$$

بنابراین $f'(x)=6x^5$ و $f'(1)=6$.

۱۰۹- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(-mx^{m-1})(2+x^n)-(nx^{n-1})(4-x^m)}{(2+x^n)^2}$$

در نتیجه $f'(1)=\frac{-m\times 3-n\times 3}{3^2}=\frac{-m-n}{3}$.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x^2+2x+3)-(2x+2)(x^2-mx+1)}{(x^2+2x+3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(1)=0\Rightarrow (2-m)(6)-4(2-m)=0$$

$$m=2$$

۱۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{ax^4+b}{x^2}=ax^2+\frac{b}{x^2}$$

$$f'(x)=2ax-\frac{2bx}{x^4}=2ax-\frac{2b}{x^3}$$

$$=\frac{2ax^4-2b}{x^3}$$

بنابراین

$$-2b=-6\Rightarrow b=3$$

$$2a=b\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

در نتیجه $\frac{b}{a}=2$.

۱۱۲- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$g'(x)=\frac{(2x)f(x)-f'(x)(x^2)}{f^2(x)}$$

در نتیجه،

$$g'(2)=\frac{4f(2)-4f'(2)}{f^2(2)}$$

$$=\frac{8-12}{4}=-1$$

۱۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^{-2}}{2}+\frac{x^{-3}}{3}+\cdots+\frac{x^{-n}}{n}$$

در نتیجه

$$f'(x)=\frac{-2x^{-3}}{2}+\frac{-3x^{-4}}{3}+\cdots+\frac{-nx^{-n-1}}{n}$$
$$=-(x^{-3}+x^{-4}+\cdots+x^{-n-1})$$

بنابراین

$$f'(1)=-3\Rightarrow -(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1-2})=-3$$
$$-(n-1)=-3\Rightarrow n=4$$

به این ترتیب، $f(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}$ و $f(1)=\frac{13}{12}$.

۱۱۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

در نتیجه

$$f'(2^{-6})=\frac{1}{\sqrt{2^{-6}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^{-12}}}=2^3+2^4=24$$

۱۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{2\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\Rightarrow f'(2)=\frac{3\times4}{2\sqrt{9}}=2$$

۱۱۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2(4x)(2x^2-1)}{3\sqrt[3]{(2x^2-1)^4}}$$
$$f'(-1)=\frac{2(-4)(1)}{3(1)}=-\frac{8}{3}$$

۱۱۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=\frac{2}{3f^2(x)}$$

۱۱۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{x^4}+1\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}+x\right)^3$$

در نتیجه $f'(1)=4(\frac{1}{2}+3+1)(1-1+1)^3=18$.

۱۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=-x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$، بنابراین

$$f'(x)=-\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}\right)+\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$
$$=\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

در نتیجه، $f'(\frac{1}{27})=3^3+2=29$.

۱۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^4}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$$

در نتیجه، $f'(2)=1-\frac{1}{4}+\frac{4}{3\times1}=\frac{25}{12}$.

۱۲۱- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{1}{3}}(xx^{\frac{1}{2}}+1)=x^{\frac{17}{6}}+x^{\frac{4}{3}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}}+\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(1)=\frac{17}{6}+\frac{4}{3}=\frac{25}{6}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=((x^3+2)(\sqrt{x}+2x))^2$$

و $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=2\left((3x^2)(\sqrt{x}+2x)+(x^3+2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\right)\right)$$
$$\times(x^3+2)(\sqrt{x}+2x)$$

در نتیجه

$$f'(1)=2\left(3(3)+3\left(\frac{1}{2}+2\right)\right)(3)(3)=297$$

۱۲۳- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=5(x-2)^4(\sqrt[3]{x}+1)+(x-2)^5\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

در نتیجه $f'(1)=5\times2+(-1)\frac{1}{3}=\frac{29}{3}$.

۱۲۴- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(\sqrt{x+4}-1)+(\sqrt{x-1}+2)\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

در نتیجه $f'(5)=\frac{1}{2\times2}(2)+4\times\frac{1}{2\times3}=\frac{7}{6}$.

۱۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}=(x^2-3x)^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{3}{2}(2x-3)(x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$$

در نتیجه $f'(4)=\frac{3}{2}\times5\times2=15$.

۱۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)'\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2(x-3)-(1)(2x+1)}{(x-3)^2}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

بنابراین

$$f'(4)=\frac{1}{2}\times\frac{2-9}{1}\left(\frac{9}{1}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{7}{6}$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3+\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+\sqrt{x})'(x^3+\sqrt[3]{x})-(x^3+\sqrt[3]{x})'(x^2+\sqrt{x})}{(x^3+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x^3+\sqrt[3]{x})-(3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^2+\sqrt{x})}{(x^3+\sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$، نتیجه می‌شود

$$f'(1)=\frac{(2+\frac{1}{2})(1+1)-(3+\frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2}=-\frac{5}{12}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+4x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{-\frac{1}{3}}(1+6x)^{-\frac{1}{3}}$$

بنابراین $f'(x)$ مجموع چهار جمله است، کـه هر یک از آنها مشـتق یکی از عامل‌ها ضرب در حاصل‌ضرب بقیه است. توجه کنید که مقدار هر یک از عامل‌ها به‌ازای $x=0$ برابر ۱ است، پس مقدار $f'(0)$ برابر است با مجموع مشتق عامل‌ها به‌ازای $x=0$،

$$\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times4+(-\frac{1}{3})3+(-\frac{1}{3})6=0$$

۱۲۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2ax)\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+a)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{21}{8}\Rightarrow\frac{(2a)(2)-\frac{3}{2\times2}(a+a)}{4}=\frac{21}{8}$$

$$\frac{\frac{5a}{2}}{4}=\frac{21}{8}\Rightarrow a=\frac{21}{5}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۱ در نزدیکـی نقطهٔ ۲، علامـت $x-3$ منفی است، بنابراین در نزدیکی نقطهٔ ۲،

$$f(x)=x(-(x-3))=-x(x-3)=-x^2+3x$$

در نتیجه $f'(x)=-2x+3$ و $f'(2)=-1$.

۱۳۱- گزینهٔ ۲ چـون $x^3-2x=x(x^2-2)$، در نزدیکـی نقطهٔ ۱ علامت عبارت x^3-2x منفی است، بنابراین در نزدیکی نقطهٔ ۱،

$$f(x)=-(x^3-2x)=-x^3+2x$$

در نتیجه $f'(x)=-3x^2+2$ و $f'(1)=-1$.

۱۳۲- گزینهٔ ۳ در نزدیکـی نقطهٔ ۲ علامت عبارت x^2-5 منفی است، بنابراین در نزدیکی نقطهٔ ۲،

$$f(x)=(x^2+1)(-(x^2-5))=-(x^2+1)(x^2-5)$$

$$=-x^4+4x^2+5$$

در نتیجه $f'(x)=-4x^3+8x$ و $f'(2)=-16$.

۱۳۳- گزینهٔ ۳ در یـک همسـایگی $x=2$ مقـدار عبارت x^2-3x منفی اسـت و مقدار عبارت x^2+3x مثبت است. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به صورت زیر است:

$$f(x)=-x^2+3x-x^2-3x=-2x^2$$

بنابراین

$$f'(x)=-4x\Rightarrow f'(2)=-8$$

۱۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=|x||x-1|-|x||x+1|=|x|(|x-1|-|x+1|)$$

بنابراین

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|(|x-1|-|x+1|)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(|x-1|-|x+1|)=1-1=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|(|x-1|-|x+1|)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}(-(|x-1|-|x+1|))=-(1-1)=0$$

پس $f'(0)=0$.

۱۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در نزدیکی نقطهٔ صفر، علامت عبارت $x^{۲}-۱$ منفی است، همین‌طور علامت عبارت $|x^{۲}-۱|-x$ منفی است (زیرا مقدار $|x^{۲}-۱|$ نزدیک ۱ است).

بنابراین در نزدیکی نقطهٔ صفر،

$$f(x)=-(x-(-(x^{۲}-۱)))=-x-x^{۲}+۱$$

در نتیجه $f'(x)=-۱-۲x$ و $f'(۰)=-۱$.

۱۳۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۲۱}{۲}$ مقدار عبارت‌های x، $x-۱$، $x-۲$ و ... و $x-۱۰$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-۱۱$، $x-۱۲$، ... و $x-۲۰$ منفی است. بنابراین ضابطهٔ تابع در همسایگی این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x)=x+(x-۱)+(x-۲)+\cdots+(x-۱۰)-(x-۱۱)-(x-۱۲)-\cdots-(x-۲۰)$$

در نتیجه $f(x)=x+k$، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{۲۱}{۲})=۱$.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=|x||x-۱|-|x-۱||x-۲|$$

در یک همسایگی راست $x=۱$ ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=x(x-۱)+(x-۱)(x-۲)$ است و در نتیجه

$$f(x)=۲x^{۲}-۴x+۲\Rightarrow f'(x)=۴x-۴\Rightarrow f'_{+}(۱)=۰$$

و در یک همسایگی چپ $x=۱$ ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=-x(x-۱)-(x-۱)(x-۲)$$

در نتیجه

$$f(x)=-۲x^{۲}+۴x-۲\Rightarrow f'(x)=-۴x+۴\Rightarrow f'_{-}(۱)=۰$$

بنابراین $f'(۱)=۰$.

۱۳۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$، $۱<\frac{x}{۲}+۱<۲$ ، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$، مقدار $[\frac{x}{۲}+۱]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x)=۳x^{۲}-۱\Rightarrow f'(x)=۶x\Rightarrow f'(\frac{۱}{۲})=۳$$

۱۳۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۵}{۲}$ مقدار $[x]$ برابر ۲ است و در نتیجه

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{۲}\Rightarrow f'(x)=x\Rightarrow f'(\frac{۵}{۲})=\frac{۵}{۲}$$

۱۴۰- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۵}{۴}$ مقدار $[۲x]$ برابر ۲ و مقدار $[۳x]$ برابر ۳ است. بنابراین $f(x)=\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{x}$ و در نتیجه

$$f'(x)=x-\frac{۳}{x^{۲}}\ ,\quad f'(\frac{۵}{۴})=\frac{۵}{۴}-\frac{۳}{\frac{۲۵}{۱۶}}=-\frac{۶۷}{۱۰۰}$$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=[(x-۳)^{۲}]$. از طرف دیگر، در نزدیکی نقطهٔ ۳، $۰<(x-۳)^{۲}<۱$، پس در نزدیکی نقطهٔ ۳، $f(x)=۰$ در نتیجه $f'(x)=۰$، بنابراین $f'(۳)=۰$.

۱۴۲- گزینهٔ ۱ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۱}{۳}$، علامت عبارت $\frac{x^{۲}}{۲}-۱$ منفی است و $۰<۲x<۱$. بنابراین در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۱}{۳}$،

$$f(x)=x^{۲}+۱-(-(\frac{x^{۲}}{۲}-۱))+۰=\frac{۳}{۲}x^{۲}$$

پس $f'(x)=۳x$ و $f'(\frac{۱}{۳})=۱$.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$، علامت عبارت $x^{۲}-۱$ منفی است و $۱<۲x<۲$، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$،

$$f(x)=\frac{-(x^{۲}-۱)}{x+۱}=-(x-۱)$$

در نتیجه $f'(x)=-۱$ و $f'(\frac{۴}{۵})=-۱$.

۱۴۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(x^{۲}+۱)=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}(x^{۳}-۱)=۷$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x>۲\\ ۳x^{۲} & x<۲\end{cases}$$

بنابراین

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}} f'(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}(۲x+۲)=۴+۲=۶$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}} f'(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}(۳x^{۲})=۳\times ۴=۱۲$$

و در نتیجه

$$f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)=۶-۱۲=-۶$$

۱۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۴x-۳ & x<۳\\ ۹ & x>۳\end{cases}$$

چون تابع f روی بازهٔ $(-\infty\,,۳]$ پیوسته و روی بازهٔ $(-\infty\,,۳)$ مشتق‌پذیر است، همین‌طور روی بازهٔ $[۳,+\infty)$ پیوسته و روی بازهٔ $(۳,+\infty)$ مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to ۳^-} f'(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۴x-۳)=۹ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f'(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۹)=۹ \qquad (۲)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(۳)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(۳)$ است، و چون این دو مقدار برابرند، پس $f'(۳)=۹$.

۱۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد، پس در این نقطه مشتق چپ ندارد. یعنی مقدار $f'_-(۲)$ وجود ندارد.

از طرف دیگر اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجه

$$f(x)=x^۲\Rightarrow f'(x)=۲x\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f'(x)=۴$$

۱۴۸- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=-۱$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)$$

$$-a+۲=-a+۲=۱-b\Rightarrow a-b=۱$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲ & x>-۱\\ ۲x+b & x<-۱\end{cases}$$

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}(۳ax^۲)=۳a$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲x+b)=-۲+b$$

$$f'_+(-۱)=f'_-(-۱)\Rightarrow ۳a=b-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a-b=۱\\ ۳a-b=-۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۳}{۲}$ و $b=-\frac{۵}{۲}$ و در نتیجه $a+b=-۴$.

۱۴۹- گزینهٔ ۴ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$b=\lim_{x\to ۲^+}(x^۳+ax)=\lim_{x\to ۲^-}(cx^۲+c)\Rightarrow b=۸+۲a=۵c$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+a & x>۲\\ ۲cx & x<۲\end{cases}$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x^۲+a)=۱۲+a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲cx)=۴c$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲+a=۴c$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۲a-۵c=-۸\\ a-۴c=-۱۲\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=\frac{۲۸}{۳}$ و $c=\frac{۱۶}{۳}$ و در نتیجه

$$f(۲)=b=۵c=۵(\frac{۱۶}{۳})=\frac{۸۰}{۳}$$

۱۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+a & x>۱\\ ۳ax^۲+۱ & x<۱\end{cases}$$

پس

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f'(x)=\lim_{x\to ۱^+}(۲x+a)=۲+a$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-} f'(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۳ax^۲+۱)=۳a+۱$$

چون تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است، پس

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)\Rightarrow ۲+a=۳a+۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$f'(a)=f'(\frac{۱}{۲})=۳a(\frac{۱}{۲})^۲+۱=۳(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۴})+۱=\frac{۱۱}{۸}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در نقطهٔ $x=۱$ هم مشتق‌پذیر است و در نتیجه در این نقطه پیوسته است. از شرط پیوستگی نتیجه می‌شود

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)$$

$$a^۲=۲-a\Rightarrow a^۲+a-۲=۰\Rightarrow a=۱\,,\,a=-۲$$

از طرف دیگر، از شرط مشتق‌پذیری نتیجه می‌شود

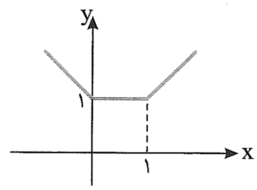
$$f'(x)=\begin{cases}a^۲ & x>۱\\ ۴x & x<۱\end{cases}$$

$$f'_+(۱)=a^۲\ ,\quad f'_-(۱)=۴$$

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$

بنابراین فقط به‌ازای $a=-۲$ تابع در نقطهٔ $x=۱$ و در نتیجه در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

۱۵۲- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل زیر است و در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$.



توجه کنید که $x=۰$ و $x=۱$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.

۱۵۳- گزینهٔ ۳ تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x\geq ۱\Rightarrow f(x)=x(x^۲-x)=x^۳-x^۲$$

$$f'(x)=۳x^۲-۲x\Rightarrow f'_+(۱)=۳-۲=۱$$

$$۰\leq x\leq ۱\Rightarrow f(x)=x(x-x^۲)=x^۲-x^۳$$

$$f'(x)=۲x-۳x^۲\Rightarrow f'_-(۱)=۲-۳=-۱$$

ولی در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x|x^۲-x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}|x^۲-x|=۰$$

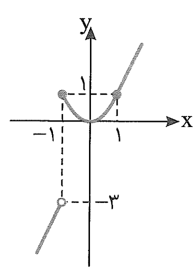
توجه کنید که تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $g(x)=۰$ مشتق ندارد. پس $y=|x^۲-x|$ در $x=۰$ و $x=۱$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^۲-x|$ به دلیل وجود عامل x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۱۵۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع به شکل زیر است. در $x=-۱$ تابع ناپیوسته است و مشتق‌پذیر نیست. در $x=۱$ تابع مشتق‌پذیر است:

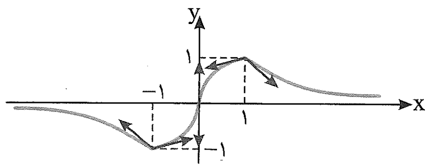
$$x>۱\Rightarrow f(x)=۲x-۱\Rightarrow f'(x)=۲\Rightarrow f'_+(۱)=۲$$

$$-۱<x<۱\Rightarrow f(x)=x^۲\Rightarrow f'(x)=۲x\Rightarrow f'_-(۱)=۲$$

بنابراین $f'(۱)=۲$. پس فقط $x=-۱$ در دامنه f' نیست.



۱۵۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به صورت زیر است. تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد و در $x=۰$ مماس موازی محور عرض‌ها دارد. پس در این سه نقطه تابع مشتق ندارد و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۱\}$.



۱۵۶- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $H=-h$، آن‌گاه

$$L=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱-h)-f(۱)}{h}=\lim_{H\to ۰}\frac{f(۱+H)-f(۱)}{-H}$$

$$=-\lim_{H\to ۰}\frac{f(۱+H)-f(۱)}{H}=-f'(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\frac{x}{x^۲+۱}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $L=-\frac{۱}{۲}$.

۱۵۷- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $f(x)=x^۵$، آن‌گاه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۵-x^۵}{۵h}=\frac{۱}{۵}\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{۱}{۵}f'(x)=\frac{۱}{۵}(۵x^۴)=x^۴$$

۱۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۲}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۲h}$$

$$=\frac{۲}{۳}f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=۲x^۲-۴x^{-۲}$، پس

$$f'(x)=۴x-۴(-۲)x^{-۳}=۴x+\frac{۸}{x^۳}$$

بنابراین $f'(۲)=۸+۱=۹$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$\frac{۲}{۳}\times ۹=۶$$

۱۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-۲}{h^۲-h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h(h-۱)}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h-۱}$$

$$=f'(۱)\times\frac{۱}{-۱}=-f'(۱)$$

از طرف دیگر

$$f(x)=\frac{3x^2+1}{x^4+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{6x(x^4+1)-4x^3(3x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{6\times2-4\times4}{4}=-1$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۱ است.

۱۶۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $t=h-a-2$، در این صورت $h-a-1=t+1$ و اگر $h\to a+2$، آن‌گاه $t\to 0$. به این ترتیب

$$\lim_{h\to a+2}\frac{f(h-a-1)-f(1)}{h-a-2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t+1)-f(1)}{t}=f'(1)$$

از طرف دیگر، $f'(x)=6x-5$، پس $f'(1)=1$ و مقدار حد مورد نظر برابر با ۱ است.

۱۶۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-2}\frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x-(-2)}$$

$$=(f^3)'(-2)=3f'(-2)f^2(-2)$$

از طرف دیگر، $f(-2)=7$، $f'(x)=2x-1$، پس $f'(-2)=-5$.
به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $3\times(-5)(7^2)=-735$.

۱۶۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $g(x)=f(2x-1)$. در این صورت

$$\lim_{x\to2}\frac{f(2x-1)-f(3)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x^2-4}$$

$$=\left(\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\left(\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\right)=g'(2)\times\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}g'(2)$$

از طرف دیگر، طبق قاعدهٔ زنجیری،

$$g'(x)=(f(2x-1))'=(2x-1)'f'(2x-1)=2f'(2x-1)$$

بنابراین $g'(2)=2f'(3)$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=2(2x-1)(x^2-x)\Rightarrow f'(3)=60$$

بنابراین $g'(2)=120$ و حد مورد نظر برابر است با $\frac{1}{4}g'(2)=30$.

۱۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>1\\ 2x+1 & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}(3x^2)=3\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x+1)=3\end{cases}$$

بنابراین $f'(1)=3$. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۱۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{5x-2}-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2}$$

فرض کنید $f(x)=\sqrt{3x-2}$ و $g(x)=\sqrt[3]{5x-2}$. در این صورت حد بالا برابر می‌شود با

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=f'(2)+g'(2)$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3\times2-2}}+\frac{5}{3\sqrt[3]{(5\times2-2)^2}}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$(f\times g)'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$$

از طرف دیگر، $f(2)=3$، $g(2)=10$ و

$$f'(x)=2\Rightarrow f'(2)=2\ ,\quad g'(x)=3x^2\Rightarrow g'(2)=12$$

به این ترتیب، $(f\times g)'(2)=2\times10+3\times12=56$.

۱۶۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

از طرف دیگر، $f(1)=1$، $g(1)=-\frac{1}{2}$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}(2x)=x\Rightarrow g'(1)=1$$

بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})-1\times1}{\frac{1}{4}}=-5$$

۱۶۷- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $5f(x)+g(x)=3x^2$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$5f'(x)+g'(x)=6x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$، چون $f'(3)=4$، به‌دست می‌آید

$$5f'(3)+g'(3)=18\Rightarrow5\times4+g'(3)=18\Rightarrow g'(3)=-2$$

۱۶۸- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$ قرار دهیم $x=-1$، چون $f(-1)=1$، به‌دست می‌آید $g(-1)=0$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{(2x)(2x)-2(x^2-1)}{4x^2}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید $\frac{g'(-1)-0}{1}=1$، بنابراین $g'(-1)=1$.

۱۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-1}{x^2+1}\Rightarrow(x^2+1)f(x)=g(x)-1$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$(2x)f(x)+(x^2+1)f'(x)=g'(x)$$

$$2f(1)+2f'(1)=g'(1)\Rightarrow g'(1)=12$$

۱۷۰- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$(2x-1)f(x)+(x^2-x)f'(x)=g'(x)$$

$$f(1)+0=g'(1)\Rightarrow g'(1)=4$$

۱۷۱- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(1)g(x)-g'(x)(x+1)}{g^2(x)}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ به‌دست می‌آید

$$f'(1)=\frac{g(1)-g'(1)\times 2}{g^2(1)}=\frac{4-4\times 2}{4^2}=-\frac{1}{4}$$

۱۷۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)g(x)=x^3-2x^2-x$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2-4x-1$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=3-4-1=-2$$

۱۷۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)g(x)=x-1$. اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=1$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$ به‌دست می‌آید

$$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=1$$

$$4+f(2)g'(2)=1\Rightarrow f(2)g'(2)=-3$$

۱۷۴- گزینهٔ ۴ اگر در تساوی $f^3(x)=x^2+x+2$ قرار دهیم $x=2$ به‌دست می‌آید $f^3(2)=8$، پس $f(2)=2$. اگر از دو طرف تساوی $f^3(x)=x^2+x+2$ مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=2$ به‌دست می‌آید

$$3f'(x)f^2(x)=2x+1\Rightarrow 3f'(2)f^2(2)=5$$

$$3f'(2)\times 4=5\Rightarrow f'(2)=\frac{5}{12}$$

۱۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مقدار خواسته شده برابر مشتق تابع $f-g$ در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ است. پس ابتدا ضابطهٔ تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$=\frac{x^3}{x^3-x^2+x-1}-\frac{1}{x(x-1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{x^3}{(x-1)(x^2+1)}-\frac{1}{x(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^4-1}{x(x-1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x(x-1)(x^2+1)}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

بنابراین

$$(f-g)'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow(f-g)'(\tfrac{1}{2})=-\frac{1}{\frac{1}{4}}=-4$$

$$f'(\tfrac{1}{2})-g'(\tfrac{1}{2})=-4$$

۱۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(f\times g)'(1)=f'(1)g(1)+g'(1)f(1)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع $f\times g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)$$

$$=(x^2+\sqrt{x^4+x^2})^9(x^2-\sqrt{x^4+x^2})^9$$

$$=((x^2+\sqrt{x^4+x^2})(x^2-\sqrt{x^4+x^2}))^9$$

$$=(x^4-x^4-x^2)^9=-x^{18}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=(-x^{18})'=-18x^{17}$$

$$(f\times g)'(1)=-18\times 1^{17}=-18$$

۱۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

از طرف دیگر

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y^3=\frac{x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

بنابراین

$$\frac{y^3}{y'}=\frac{\frac{x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}=x^3$$

$$y^3=y'x^3\Rightarrow y^3-y'x^3=0$$

۱۷۸- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

بنابراین

$$y'=\frac{y}{y-x}\Rightarrow yy'-xy'=y\Rightarrow yy'-y=xy'$$

$$y(y'-1)=xy'\Rightarrow\frac{xy'}{y'-1}=y$$

۱۷۹- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$(gof)'(1)=f'(1)g'(f(1))$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=x^3-x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-1$$

بنابراین

$$f(1)=1,\quad f'(1)=2$$

در نتیجه

$$g(x)=2-x^2\Rightarrow g'(x)=-2x\Rightarrow g'(f(1))=g'(1)=-2$$

بنابراین $(gof)'(1)=2\times(-2)=-4$.

۱۸۰- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع fog به صورت $(fog)(x)=[x^2]$ است. این تابع در نقطهٔ $x=\sqrt{2}$ ناپیوسته است، پس مشتق ندارد.

$$(fog)(\sqrt{2})=[\sqrt{2}^2]=2$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}(fog)(x)=2,\qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^-}(fog)(x)=1$$

۱۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g(4)=\frac{2+1}{3}=1$ و

$$(fog)'(4)=g'(4)f'(g(4))=g'(4)f'(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x^2-7}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}(\sqrt{x}+1)}{x^2-7}$$

$$g'(4)=\frac{\frac{1}{4}\times3-\frac{8}{6}\times3}{9}=-\frac{13}{36}$$

بنابراین

$$(fog)'(4)=\frac{1}{2}\times\frac{-13}{36}=\frac{-13}{72}$$

۱۸۲- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

اگر $x\geq0$، آن‌گاه

$$f(x)=3x+x=4x$$

$$(gof)(x)=g(4x)=\frac{3}{4}(4x)-\frac{1}{4}|4x|=3x-x=2x$$

اگر $x<0$، آن‌گاه

$$f(x)=3x-x=2x$$

$$(gof)(x)=g(2x)=\frac{3}{4}(2x)-\frac{1}{4}|2x|=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x=2x$$

بنابراین $(gof)(x)=2x$ و در نتیجه

$$(gof)'(x)=2$$

$$(gof)'(0)=2$$

۱۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی $(fog)(x)=x$ مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)f'(g(x))=1$$

از $f'(x)=1+f^2(x)$ نتیجه می‌شود

$$f'(g(x))=1+f^2(g(x))=1+x^2$$

بنابراین

$$g'(x)(1+x^2)=1$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

۱۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2x)g'(f(2x))=\frac{1}{2}(g(f(2x)))'=(\frac{1}{2}g(f(2x)))'$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=\frac{1}{2}g(f(2x))$ را به‌دست می‌آوریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}g(f(2x))=\frac{1}{2}g(8x^3+1)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1-(8x^3+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-8x^3}=-x$$

در نتیجه $y'=-1$.

۱۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+k}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2-k}{(x+2)^2}$$

بنابراین

$$g(x)=(fof)(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)f'(f(x))$$

$$g'(0)=f'(0)f'(f(0))=f'(0)f'(\frac{k}{2})$$

در نتیجه

$$\frac{2-k}{4}\times\frac{2-k}{(\frac{k}{2}+2)^2}=4\Rightarrow(2-k)^2=16(\frac{k}{2}+2)^2$$

$$\begin{cases}2-k=4(\frac{k}{2}+2)\\ 2-k=-4(\frac{k}{2}+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-2\\ k=-10\end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.

۱۸۶- گزینهٔ ۲ اگر از دو طرف تساوی

$$f(4-2x)=x^2+3x-6$$

طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(4-2x)'f'(4-2x)=2x+3$$

$$-2f'(4-2x)=2x+3\xrightarrow{x=-1}-2f'(6)=1$$

$$f'(6)=-\frac{1}{2}$$

۱۸۷- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی

$$f(-3x+5)=2x^3+4x-6$$

طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(-3x+5)'f'(-3x+5)=6x^2+4$$

$$-3f'(-3x+5)=6x^2+4\xrightarrow{x=1}-3f'(2)=10$$

$$f'(2)=-\frac{10}{3}$$

۱۸۸- گزینهٔ ۲ اگر از دو طرف تساوی

$$f(x)+f(3x)+f(5x)=3x-1$$

طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f'(x)+3f'(3x)+5f'(5x)=3$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به‌دست می‌آید $9f'(0)=3$، پس $f'(0)=\frac{1}{3}$.

۱۸۹- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی

$$f(2x-3)=ax^2-x+4$$

طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$2f'(2x-3)=2ax-1\xrightarrow{x=1}2f'(-1)=2a-1$$

$$2\times3=2a-1\Rightarrow a=\frac{7}{2}$$

۱۹۰- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(ax+1)=x^3$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$af'(ax+1)=3x^2\quad(1)$$

فرض کنید x_0 عددی باشد که $ax_0+1=5$، در نتیجه $ax_0=4$. اگر در تساوی داده شده و تساوی (۱) قرار دهیم $x=x_0$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}f(ax_0+1)=x_0^3\\ af'(ax_0+1)=3x_0^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(5)=x_0^3\\ f'(5)=\frac{3x_0^2}{a}\end{cases}$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم به‌دست می‌آید:

$$\frac{f(5)}{f'(5)}=\frac{ax_0}{3}=\frac{4}{3}$$

۱۹۱- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$3f'(3x+1)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ به‌دست می‌آید

$$3f'(4)=1+2+3+\cdots+n$$

$$3\times51=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow n=17$$

۱۹۲- گزینهٔ ۲ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$2f'(2x-1)=4\sqrt{x+1}+(4x)\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(2x-1)=2\sqrt{x+1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به‌دست می‌آید $f'(-1)=2$.

۱۹۳- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$-f'(1-x)=\frac{-2(3x^2)}{(x^3+1)^3}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید $f'(0)=\frac{3}{4}$.

۱۹۴- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$g'(x)=\left(\frac{1+3x}{1-5x}\right)'f'\left(\frac{1+3x}{1-5x}\right)$$

$$=\frac{3(1-5x)-(-5)(1+3x)}{(1-5x)^2}f'\left(\frac{1+3x}{1-5x}\right)$$

$$=\frac{8}{(1-5x)^2}f'\left(\frac{1+3x}{1-5x}\right)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ به‌دست می‌آید:

$$g'(1)=\frac{8}{16}f'(-1)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

۱۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$.

از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$3f'(3x-4)=12x+3\xrightarrow{x=2}3f'(2)=27\Rightarrow f'(2)=9$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۹ است.

۱۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(3x+1)-f(4)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(3x+1)-f(4)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(3x+1)-f(4)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

$$=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{\frac{t-4}{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}f'(4)$$

از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید

$$f'(x-1)=3x^2-1\xrightarrow{x=5}f'(4)=74$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{3}{2}f'(4)=111$.

۱۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(g(2))=f(\frac{1}{2})=0$.

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))-f(g(2))}{x-2}$$

$$=(fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))$$

اکنون توجه کنید که

$$g(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$$

$$g'(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$f(x)=2x-1\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f'(g(2))=2$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2}$.

۱۹۸- گزینهٔ ۲ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$2(f(2x-3))'f(2x-3)=6x-4$$

$$2(2f'(2x-3))f(2x-3)=6x-4$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ به‌دست می‌آید

$$4f'(-5)f(-5)=-10\Rightarrow f(-5)f'(-5)=-\frac{5}{2}$$

۱۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x^2f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow g'(x)=2xf\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=2xf\left(\frac{1}{x}\right)-f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

بنابراین

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)f(2)-f'(2)=f(2)-f'(2)=6-3=3$$

۲۰۰- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$2(f(2x))'f(2x)=4x^3+4\Rightarrow 2(2f'(2x))f(2x)=4x^3+4$$

$$f'(2x)f(2x)=x^3+1$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$ به‌دست می‌آید $f(4)f'(4)=9$.

۲۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی $g(x)=f(-4x)$ مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=-4f'(-4x)=-4\times 2^{-(-4x)}=-2^{4x+2}=-4^{2x+1}$$

۲۰۲- گزینهٔ ۱ طبق قاعدهٔ مشتق تابع مرکب:

$$y=f(x-\sqrt{1+x^2})$$

$$y'=(x-\sqrt{1+x^2})'f'(x-\sqrt{1+x^2})$$

$$=\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\times\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(-\frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$g'(x)=(-\frac{1}{\sqrt{x}})'f'(-\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{1}{2x\sqrt{x}}f'(-\frac{1}{\sqrt{x}})$$

بنابراین

$$g'(\frac{1}{9})=\frac{1}{2\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}}f'(-3)=\frac{27}{2}f'(-3)$$

از طرف دیگر

$$f'(-3)=\frac{9+1}{-5}=-2$$

در نتیجه

$$g'(\frac{1}{9})=\frac{27}{2}(-2)=-27$$

۲۰۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$g(1)=4\,,\quad g'(1)=8$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times g'(\sqrt{x})$$

$$f'(1)=\frac{g'(1)}{2\sqrt{g(1)}}+\frac{1}{2}\times g'(1)=\frac{8}{2\sqrt{4}}+\frac{1}{2}\times 8=2+4=6$$

۲۰۵- گزینهٔ ۴ از دو طرف تساوی $f(\sqrt{x})+g(\sqrt[3]{x})=\frac{kx^2}{128}$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}g'(\sqrt[3]{x})=\frac{kx}{64}$$

اگر $x=64$ را در تساوی فوق جای‌گذاری کنیم نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{16}f'(8)+\frac{1}{48}g'(4)=k\Rightarrow\frac{32}{16}+\frac{96}{48}=k\Rightarrow k=4$$

۲۰۶- گزینهٔ ۳ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3)=\frac{1}{f(x^2)}$$

$$3x^2g'(x^3)=\frac{-2xf'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^3)=\frac{-2f'(x^2)}{3xf^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=2$ و نتیجه می‌شود

$$g'(8)=\frac{-2f'(4)}{6f^2(4)}=\frac{-2\times3}{6\times\frac{1}{9}}=-9$$

۲۰۷- گزینهٔ ۴ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=\frac{\frac{-1}{x^2}f'(x)f(\frac{1}{x})-f'(x)f(\frac{1}{x})}{f^2(x)}$$

بنابراین

$$g'(-1)=\frac{-f'(-1)f(-1)-f'(-1)f(-1)}{f^2(-1)}$$

$$=\frac{-2f'(-1)f(-1)}{f^2(-1)}=\frac{-2f'(-1)}{f(-1)}$$

پس

$$\frac{g'(-1)}{f'(-1)}=\frac{-2}{f(-1)}$$

۲۰۸- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f(x+f(x))$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$g'(x)=(x+f(x))'f'(x+f(x))$$

$$=(1+f'(x))f'(x+f(x))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به‌دست می‌آید:

$$g'(0)=(1+f'(0))(f'(f(0)))$$

$$=4\times f'(0)=4\times3=12$$

۲۰۹- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f(\frac{f(x)}{x})$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$g'(x)=(\frac{f(x)}{x})'f'(\frac{f(x)}{x})$$

$$=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}f'(\frac{f(x)}{x})$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ به‌دست می‌آید:

$$g'(1)=(f'(1)-f(1))f'(f(1))$$

$$=(2-1)f'(1)=2$$

۲۱۰- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $f(4x-2)=g(x)f(2x)$ قرار دهیم $x=1$ به‌دست می‌آید $g(1)=1$ و اگر از دو طرف همین تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$4f'(4x-2)=g'(x)f(2x)+g(x)(2f'(2x))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ به‌دست می‌آید:

$$4f'(2)=g'(1)f(2)+2g(1)f'(2)=12+2f'(2)$$

بنابراین $f'(2)=6$.

۲۱۱- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(g(۲x))=۴x^۲+۸x$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(g(۲x))'f'(g(۲x))=۸x+۸$$

$$۲g'(۲x)f'(g(۲x))=۸x+۸$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ به‌دست می‌آید:

$$۲g'(۲)f'(g(۲))=۱۶$$

$$۲f'(۵)=۱۶\Rightarrow f'(۵)=۸$$

۲۱۲- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(۲x+۱)=xg(۱-x)$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$۲f'(۲x+۱)=g(۱-x)-xg'(۱-x)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ به‌دست می‌آید:

$$۲f'(۳)=g(۰)-g'(۰)=۶\Rightarrow f'(۳)=۳$$

۲۱۳- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$f'(x)-۳f'(-x)=۶x^۲-۱$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ و $x=-۱$ به‌دست می‌آید:

$$f'(۱)-۳f'(-۱)=۵$$

$$f'(-۱)-۳f'(۱)=۵$$

از حل این دستگاه معادلات به‌دست می‌آید

$$f'(۱)=f'(-۱)=-\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $f'(۱)+۳f'(-۱)=-۱۰$.

۲۱۴- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f(۲f(۳f(x)))$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$g'(x)=(۲f(۳f(x)))'f'(۲f(۳f(x)))$$

$$=۲\times۳f'(x)f'(۳f(x))f'(۲f(۳f(x)))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۰$ به‌دست می‌آید:

$$g'(۰)=۶f'(۰)f'(۳f(۰))f'(۲f(۳f(۰)))$$

$$=۶\times۱\times f'(۱)f'(۲f(۱))$$

$$=۶\times۴f'(۱)=۶\times۴\times۴=۹۶$$

۲۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$h(x)=f(x)-f(۴x)=f(x)-f(۲x)+f(۲x)-f(۴x)$$

$$=g(x)+g(۲x)$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$h'(x)=g'(x)+۲g'(۲x)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ به‌دست می‌آید:

$$h'(۱)=g'(۱)+۲g'(۲)=۵+۲\times۷=۱۹$$

۲۱۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=|x^۳-x^۲|=|x^۲(x-۱)|=x^۲|x-۱|$$

بنابراین تابع فقط در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشهٔ $x=۱$ دارد.

۲۱۷- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید تابع $y=x^۲-۲x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta\le ۰\Rightarrow ۴-۴m\le ۰\Rightarrow m\ge ۱$$

۲۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^۳+ax^۲-ax$ حداقل یک ریشهٔ $x=۰$ دارد:

$$y=x(x^۲+ax-a)=xg(x)$$

برای اینکه تابع f فقط در یک نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\Delta=a^۲+۴a\le ۰\Rightarrow -۴\le a<۰$$

۲۱۹- گزینهٔ ۳ اگر تابع را به صورت

$$f(x)=(x^۲-۴۹)(x^۲-۵۰)(x^۲-۲۰)(x^۲-۲۱)\cdots(x^۲-۴۸)$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^۲-۴۹)g(x)$$

$$f'(x)=۲xg(x)+(x^۲-۴۹)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(۷)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^۲-۴۹)g'(x)$ صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت $۲xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(۷)=۲\times۷g(۷)$$

$$=۲\times۷\times(۴۹-۵۰)(۴۹-۲۰)(۴۹-۲۱)\cdots(۴۹-۴۸)$$

$$=-۱۴\times۲۹!$$

۲۲۰- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۳x^۲-۲x+۱\Rightarrow f''(x)=۶x-۲$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-۲x+۱=۶x-۲$ را مشخص کنیم:

$$۳x^۲-۸x+۳=۰,\quad \Delta=۶۴-۳۶>۰$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x)=f''(x)$ برقرار است.

۲۲۱- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2x^3+3ax^2+6x$$

$$f''(x)=6x^2+6ax+6$$

پس معادلهٔ $6x^2+6ax+6=0$ باید دو جواب داشته باشد:

$$\Delta=36a^2-144>0\Rightarrow a^2>4\Rightarrow |a|>2$$

۲۲۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2+2ax+b \xrightarrow{x=1} 14=3+2a+b \\ f''(x)=6x+2a \xrightarrow{x=1} 16=6+2a \end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود $a=5$ و $b=1$، پس $a-b=4$.

۲۲۳- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+1\ ,\quad f''(x)=6ax+2b$$

بنابراین

$$f''(2)=12a+2b=-4\ ,\quad f''(-2)=-12a+2b=4$$

از حل دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $a=-\frac{1}{3}$.

۲۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=3(x+1)^2(x+k)+(x+1)^3=(x+1)^2(4x+3k+1)$$

$$f''(x)=2(x+1)(4x+3k+1)+(x+1)^2(4)$$

بنابراین

$$f''(0)=-12\Rightarrow 2(3k+1)+4=-12\Rightarrow k=-3$$

۲۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که درجهٔ مشتق هر چندجمله‌ای، یک واحد از درجهٔ خود چندجمله‌ای کمتر است. در نتیجه، چون درجهٔ f'' برابر ۱ است، پس درجهٔ f' برابر ۲ است و درجهٔ f برابر ۳ است. بنابراین $n=3$ و

$$f(x)=1+x+x^2+x^3$$

$$f'(x)=1+2x+3x^2$$

$$f''(x)=2+6x$$

در نتیجه $a=6$ و $b=2$، پس $a+b=8$.

۲۲۶- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی

$$f(3x-2)=x^3+ax^2+bx+c$$

دو بار پشت سرهم مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$3f'(3x-2)=3x^2+2ax+b$$

$$9f''(3x-2)=6x+2a$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ به‌دست می‌آید:

$$9f''(-5)=-6+2a\Rightarrow 18=-6+2a\Rightarrow a=12$$

۲۲۷- گزینهٔ ۴ اگر از دوطرف تساوی $(gof)(x)=x^4+2x^2$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$f'(x)g'(f(x))=4x^3+4x$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$f''(x)g'(f(x))+f'(x)f'(x)g''(f(x))=12x^2+4$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به‌دست می‌آید:

$$0+(f'(0))^2g''(f(0))=4\Rightarrow g''(1)=4$$

۲۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{2}}-x)=x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{4}{3}}\ ,\quad f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$f''(x)=-\frac{5}{36}x^{-\frac{7}{6}}-\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$$

بنابراین

$$f''(1)=-\frac{5}{36}-\frac{4}{9}=-\frac{7}{12}$$

۲۲۹- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم و $x=1$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+4)^2-4x(x^2+4)(-x^2+4)}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{-2x(x^2+4)-4x(-x^2+4)}{(x^2+4)^3}$$

بنابراین

$$f''(1)=\frac{-2(5)-4(3)}{5^3}=-\frac{22}{125}$$

۲۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{x+1}=\frac{(x+1)^3-1}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)^3}{x+1}-\frac{1}{x+1}=(x+1)^2-\frac{1}{x+1}$$

بنابراین

$$f'(x)=2(x+1)-\frac{-1}{(x+1)^2}\ ,\quad f''(x)=2-\frac{2}{(x+1)^3}$$

در نتیجه

$$f''(1)=2-\frac{2}{2^3}=\frac{7}{4}$$

۲۳۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^{6}-1}{x^{2}-1}=\frac{(x^{2}-1)(x^{4}+x^{2}+1)}{x^{2}-1}$$
$$=x^{4}+x^{2}+1,\quad x\neq\pm1$$

پس

$$f'(x)=4x^{3}+2x,\quad x\neq\pm1$$

$$f''(x)=12x^{2}+2,\quad x\neq\pm1$$

در نتیجه $f''(-2)=50$.

۲۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^{2}-1)(x^{2}-4)}{(x^{2}-1)(x+2)}=x-2\qquad x\neq\pm1,-2$$

بنابراین $f'(x)=1$ و $f''(x)=0$ $(x\neq\pm1,-2)$.

۲۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x^{2}+1)-2x(x^{2}+ax)}{(x^{2}+1)^{2}}=\frac{-ax^{2}+2x+a}{(x^{2}+1)^{2}}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax+2)(x^{2}+1)^{2}-4x(x^{2}+1)(-ax^{2}+2x+a)}{(x^{2}+1)^{4}}$$

$$=\frac{(-2ax+2)(x^{2}+1)-4x(-ax^{2}+2x+a)}{(x^{2}+1)^{3}}$$

بنابراین

$$f''(1)=\frac{(-2a+2)(2)-4(-a+2+a)}{2^{3}}=\frac{-a-1}{2}=2$$

در نتیجه $a=-5$.

۲۳۴- گزینهٔ ۱ از دو طرف تساوی $y'=\frac{1}{\sqrt{y}}$ مشتق می‌گیریم:

$$y''=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{y}}}{y}=\frac{-1}{2y\sqrt{y}}=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{2}\times\frac{1}{\sqrt{y}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{3}$$

بنابراین

$$y''=-\frac{1}{2}y'^{3}\Rightarrow\frac{y''}{y'^{3}}=-\frac{1}{2}$$

۲۳۵- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=-\frac{1}{x}\Rightarrow y''=\frac{1}{x^{2}}=\left(-\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)$$

بنابراین

$$y''=y'^{2}\Rightarrow\frac{y''}{y'^{2}}=1$$

۲۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\frac{1}{x^{2}+1}$$

$$f''(x)=\frac{-2x}{(x^{2}+1)^{2}}$$

بنابراین

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(x)-f'(x+h)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$
$$=-(f'(x))'=-f''(x)=\frac{2x}{(x^{2}+1)^{2}}$$

۲۳۷- گزینهٔ ۲ از دو طرف تساوی داده شده دو بار مشتق می‌گیریم:

$$g(2x+1)=-x^{2}+f(3x+1)$$

$$2g'(2x+1)=-2x+3f'(3x+1)$$

$$4g''(2x+1)=-2+9f''(3x+1)$$

اکنون $x=1$ را در تساوی فوق جای‌گذاری می‌کنیم:

$$4g''(3)=-2+9f''(4)\Rightarrow16=-2+9f''(4)$$

$$f''(4)=2$$

۲۳۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x & x\geq0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases},\quad f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$$

چون تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۲۳۹- گزینهٔ ۴ اولاً تابع باید در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد و مشتق اول داشته باشد. پس

$$\lim_{x\to1^{-}}f(x)=\lim_{x\to1^{+}}f(x)=f(1)\Rightarrow a+b+1=c\qquad(\mathrm{I})$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x<1\\ \frac{-c}{x^{2}} & x>1\end{cases}$$

$$f'_{-}(1)=f'_{+}(1)\Rightarrow2a+b=-c\qquad(\mathrm{II})$$

ثانیاً باید مشتق دوم چپ و مشتق دوم راست تابع با هم برابر باشند:

$$f''(x)=\begin{cases}2a & x<1\\ \frac{2c}{x^{3}} & x>1\end{cases}$$

$$f''_{-}(1)=f''_{+}(1)\Rightarrow2a=2c\Rightarrow c=a$$

اگر در تساوی‌های (I) و (II) به جای c مقدار a را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}a+b+1=a\\ 2a+b=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+1=0\Rightarrow b=-1\\ 3a+b=0\Rightarrow a=\frac{1}{3}\end{cases}$$

و در نتیجه $a+b=-\frac{2}{3}$.

۲۴۰- گزینه ۴ اگر $x<-1$، آن‌گاه $-1<\frac{1}{x}<0$، بنابراین $[\frac{1}{x}]=-1$. پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-1)$ تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است.

گزینه‌های (۱) و (۲) به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{1}{x}$ در نامتناهی نقطه از آنها مقدار صحیح می‌شود. همچنین در گزینهٔ (۳)،

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$$

پس تابع f روی بازهٔ $[1,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست.

۲۴۱- گزینه ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x+1+(g(x))^5\Rightarrow f'(x)=1+5g'(x)g^4(x)\quad(1)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0)=1+5g'(0)g^4(0)$$

$$1=1+5g'(0)\Rightarrow g'(0)=0$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=0+5g''(x)g^4(x)+20g'^2(x)g^3(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0)=5g''(0)\times1^4+20\times0\times1=5g''(0)$$

۲۴۲- گزینه ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y=f(g(x))$ است. پس،

$$y=f(g(x))=\frac{x-1-2}{1+x-1}=\frac{x-3}{x}\Rightarrow y'=\frac{3}{x^2}$$

۲۴۳- گزینه ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x=-1$ مورد نظر است. برای به‌دست آوردن مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-1$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}((x-2)\sqrt[3]{x^2-7x})=-6$$

۲۴۴- گزینه ۲ تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)\Rightarrow a+b=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3ax^2+b & x\le1\\ \frac{4}{\sqrt{4x-3}} & x\ge1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 4=3a+b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=1$ و $b=1$.

۲۴۵- گزینه ۲ به‌جای اینکه حاصل $f'(x)\times g'(f(x))$ را بیابیم، مشتق تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}=x$$

بنابراین $(gof)'(x)=1$.

۲۴۶- گزینه ۳ تابع f در نقطهٔ $x=1$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=0\\ \lim_{x\to1^-}f(x)=a+b+1\end{cases}\Rightarrow a+b+1=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{-1}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^-}f'(x)\Rightarrow 2=2+a$$

از دو شرط $2=2+a$ و $a+b+1=0$ نتیجه می‌شود $a=0$ و $b=-1$، پس

$$f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2+a(1-\sqrt{2})+b$$

$$=3-2\sqrt{2}-1=2-2\sqrt{2}$$

۲۴۷- گزینه ۲ برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

شرط پیوستگی: $3-5=1+a+b\Rightarrow a+b=-3$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=-3\\ f'_-(1)=2+a\end{cases}$$

$$2+a=-3\Rightarrow a=-5\ ,\ b=2$$

۲۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار جزءصحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=-۳$ مشخص می‌کنیم:

$$x\to -۳^+ \Rightarrow [x]=-۳,\quad |x|=-x$$

$$f(x)=(x-۳)\sqrt[۳]{۹x}$$

بنابراین

$$f'(x)=\sqrt[۳]{۹x}+\frac{۹}{۳\sqrt[۳]{(۹x)^۲}}(x-۳)$$

پس

$$f'_+(-۳)=-۳+\frac{۹}{۳\times ۹}(-۶)=-۵$$

۲۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x\leq ۰\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}(a+\frac{۳}{۴})x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)x & x\leq ۰\end{cases}$$

اکنون تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\begin{cases}(a+\frac{۳}{۴})\times ۴x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)\times ۲x & x\leq ۰\end{cases}$$

در نهایت از تابع به دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(gof)'(x)=\begin{cases}۴a+۳ & x\geq ۰\\ \frac{۳}{۲}-۲a & x\leq ۰\end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع gof در نقطهٔ $x=۰$ نتیجه می‌شود:

$$۴a+۳=\frac{۳}{۲}-۲a\Rightarrow ۶a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

۲۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع‌های f و g را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x\leq ۰\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$$

بنابراین

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۵x) & x\geq ۰\\ f(۳x) & x\leq ۰\end{cases}=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ ۳x & x\leq ۰\end{cases}$$

و در نتیجه $(fog)'(x)=۳$.

۲۵۱- گزینهٔ ۴ در نزدیکی $\sqrt{۲}$ از سمت راست،

$$f(x)=x^۳-۴x$$

بنابراین

$$f'_+(\sqrt{۲})=\lim_{x\to\sqrt{۲}^+}(۳x^۲-۴)=۳\times ۲-۴=۲$$

۲۵۲- گزینهٔ ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(۲)$ است. پس ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{-۳-۴}{(۲x-۳)^۲}$$

بنابراین

$$f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\sqrt{۴}\times(-۷)=-۲۱$$

۲۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ همان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\times\frac{۴\times ۳-۵\times ۱}{(x+۳)^۲}$$

بنابراین

$$f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$$

۲۵۴- گزینهٔ ۱ شیب خط $(m+۲)y=mx$ برابر $\frac{m}{m+۲}$ است. پس باید مشتق تابع $y=\sqrt{۱+x^۲}$ در نقطهٔ $x_۰$ واقع بر منحنی برابر $\frac{m}{m+۲}$ باشد. یعنی

$$y'(x_۰)=\frac{x_۰}{\sqrt{۱+x_۰^۲}}=\frac{m}{m+۲}\Rightarrow\frac{x_۰^۲}{۱+x_۰^۲}=\frac{m^۲}{(m+۲)^۲}$$

$$m^۲x_۰^۲+m^۲=(m+۲)^۲x_۰^۲\Rightarrow x_۰^۲=\frac{m^۲}{۴(m+۱)}\geq ۰$$

بنابراین

$$m+۱>۰\Rightarrow m>-۱$$

۲۵۵- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف مشتق از $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$ نتیجه می‌شود $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ و $f(۲)=۹$.

از طرف دیگر،

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}$$

$$g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$$

بنابراین

$$g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+\frac{۲f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}\Rightarrow g'(۲)=۳+\frac{۳}{۶}=۳/۵$$

۲۵۶- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$$

پس

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}\Rightarrow f(4)=-7,\ f'(4)=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$y=\frac{1}{x}f(2x)\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}f(2x)+2f'(2x)\times\frac{1}{x}$$

$$y'(2)=-\frac{1}{4}f(4)+2f'(4)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}-\frac{6}{4}=\frac{1}{4}$$

۲۵۷- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h\to 0}(f(-2+h)+3)=0$$

$$\lim_{h\to 0}f(-2+h)=-3\Rightarrow f(-2)=-3$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-2$ است:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=f'(-2)=\frac{1}{2}$$

پس

$$g(x)=x^2f(x)$$

$$g'(x)=(x^2f(x))'=2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$g'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)=12+2=14$$

۲۵۸- گزینهٔ ۲ تابع f باید در نقطهٔ $x=-2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^-}f(x)=f(-2)$$

$$4a-2b+4=-8+2\Rightarrow 2a-b=-5$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x\geq -2\\ 3x^2-1 & x\leq -2\end{cases}$$

$$f'_+(-2)=f'_-(-2)\Rightarrow -4a+b=11$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}2a-b=-5\\ -4a+b=11\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=-1$ و در نتیجه

$$f(1)=a+b+4=0$$

۲۵۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{mb+h-(ma+h)}{b-a}=\frac{m(b-a)}{b-a}=m$$

توجه کنید که تابع خطی است و آهنگ تغییر متوسط آن در هر بازه با شیب خط برابر است. زیرا خطوط مماس بر نمودار تابع و خطوط قاطع در هر بازه‌ای بر نمودار تابع منطبق هستند.

۲۶۰- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$ است:

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^2-0}{a-0}=a$$

۲۶۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-1,2]$ برابر $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$ است:

$$\frac{f(2)-f(-1)}{3}=\frac{6-0}{3}=2$$

۲۶۲- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[\frac{1}{2},a]$ برابر $\frac{f(a)-f(\frac{1}{2})}{a-\frac{1}{2}}$ است:

$$\frac{f(a)-f(\frac{1}{2})}{a-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{a}+2}{a-\frac{1}{2}}=\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{2}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow a=3$$

۲۶۳- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,1]$ برابر $\frac{f(1)-f(a)}{1-a}$ است:

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{0-\sqrt{1-a}}{1-a}=\frac{-1}{\sqrt{1-a}}$$

بنابراین

$$\frac{-1}{\sqrt{1-a}}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 1-a=16\Rightarrow a=-15$$

۲۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ }[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-(-1)}{2}=2=A$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ }[2,4]=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{15-3}{2}=6=B$$

بنابراین $B=3A$.

۲۶۵- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a, a+1]$ برابر $\frac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a}$ است:

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{1}=a+1+\frac{2}{a+1}-(a+\frac{2}{a})$$

$$=1+\frac{2}{a+1}-\frac{2}{a}=\frac{a^2+a-2}{a^2+a}$$

بنابراین

$$\frac{a^2+a-2}{a^2+a}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3a^2+3a-6=2a^2+2a$$

$$a^2+a-6=0\Rightarrow (a+3)(a-2)=0\Rightarrow a=2,\quad a=-3$$

۲۶۶- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-3, -2]$ برابر $\frac{f(-2)-f(-3)}{-2-(-3)}$ است:

$$\frac{f(-2)-f(-3)}{1}=-2-(-1)=-1$$

بنابراین

$$f(x)=-1\Rightarrow \frac{2}{x+1}=-1\Rightarrow x+1=-2\Rightarrow x=-3$$

۲۶۷- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[\frac{2}{a}, \frac{1}{a}]$ برابر $\dfrac{f(\frac{1}{a})-f(\frac{2}{a})}{\frac{1}{a}-\frac{2}{a}}$ است. پس

$$\frac{f(\frac{1}{a})-f(\frac{2}{a})}{-\frac{1}{a}}=\frac{f(\frac{2}{a})+f(\frac{1}{a})}{2}\Rightarrow -2a(f(\frac{1}{a})-f(\frac{2}{a}))=f(\frac{2}{a})+f(\frac{1}{a})$$

$$-2a(a^2-\frac{a^2}{4})=\frac{a^2}{4}+a^2\Rightarrow -\frac{3}{2}a^3=\frac{5}{4}a^2$$

$$a=-\frac{5}{6},\ a=0\ (\text{غ.ق.ق})$$

۲۶۸- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(a)}{0-a}=\frac{a^2-2a}{-a}=-a+2$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0, a+1]$ برابر است با

$$\frac{f(a+1)-f(0)}{a+1-0}=\frac{-(a+1)^2+2(a+1)}{a+1}=\frac{-a^2+1}{a+1}=-a+1$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a, 0]$ یک واحد بیشتر از آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[0, a+1]$ است.

۲۶۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0, 3]$ برابر است با

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-0}{3}=1$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان $f'(a)$ است:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(a)=\frac{4}{(a+1)^2}$$

بنابراین

$$\frac{4}{(a+1)^2}=1\Rightarrow (a+1)^2=4$$

$$\begin{cases}a+1=2\\a+1=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=-3\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

۲۷۰- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان $f'(a)$ است:

$$f'(x)=-\frac{k}{x^2}\quad,\quad f'(a)=-\frac{k}{a^2}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[2, 6]$ برابر است با

$$\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{1+\frac{k}{6}-1-\frac{k}{2}}{4}=-\frac{k}{12}$$

بنابراین

$$-\frac{k}{a^2}=-\frac{k}{12}\Rightarrow a^2=12\Rightarrow a=\sqrt{12}$$

۲۷۱- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0, 1]$ برابر است با

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-k$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=1$ برابر است با $f'(1)$:

$$f'(x)=3x^2-2kx\ ,\quad f'(1)=3-2k$$

بنابراین

$$3-2k=1-k\Rightarrow k=2$$

۲۷۲- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-2, -1]$ برابر است با

$$\frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}=\frac{(k+2)-(4k+1)}{1}=-3k+1$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=-1$ برابر $f'(-1)$ است:

$$f'(x)=2kx+\frac{2}{x^2}\quad,\quad f'(-1)=-2k+2$$

بنابراین

$$-3k+1=-2k+2\Rightarrow k=-1$$

۲۷۳- گزینهٔ ۳ اگر S مساحت و P محیط مربعی به طول ضلع x باشد، آن‌گاه

$$P=4x \Rightarrow x=\frac{P}{4}$$

$$S=x^2 \Rightarrow S=(\frac{P}{4})^2 \Rightarrow S(P)=\frac{P^2}{16}$$

بنابراین $S'(P)=\frac{P}{8}$.

مقدار $S'(4)$ خواسته شده که برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۷۴- گزینهٔ ۱ اگر S مساحت و P محیط دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه

$$S=\pi r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$P=2\pi r=2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S)=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

$$P'(S)=2\sqrt{\pi}\times\frac{1}{2\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(4\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۷۵- گزینهٔ ۱ اگر S و P به ترتیب مساحت و محیط مربعی با طول ضلع x باشند، آن‌گاه

$$S=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{S}\ ,\quad P=4x \Rightarrow P(S)=4\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P'(S)=\frac{4}{2\sqrt{S}}=\frac{2}{\sqrt{S}}$$

مقدار خواسته شده همان $P'(4)$ است که برابر ۱ است.

۲۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$d^2=3^2+x^2\ ,\quad d(x)=\sqrt{9+x^2}$$

بنابراین

$$d'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

مقدار $d'(4)$ خواسته شده که برابر است با

$$d'(4)=\frac{4}{\sqrt{9+16}}=\frac{4}{5}$$

۲۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$P(x)=2(x+\frac{10}{x})\ ,\quad P'(x)=2(1-\frac{10}{x^2})$$

مقدار $P'(4)$ خواسته شده که برابر است با

$$P'(4)=2(1-\frac{10}{16})=\frac{3}{4}$$

۲۷۸- گزینهٔ ۴ اگر S مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول ضلع x باشد، آن‌گاه

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow S'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

مقدار $S'(\sqrt{3})$ خواسته شده که برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

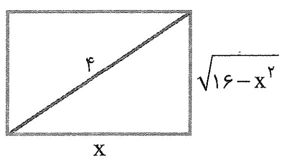
$$S(x)=x\sqrt{16-x^2}$$

$$S'(x)=\sqrt{16-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

مقدار $S'(\sqrt{7})$ خواسته شده که برابر است با

$$S'(\sqrt{7})=\frac{16-14}{\sqrt{16-7}}=\frac{2}{3}$$



۲۸۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر (x_0, y_0) باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_0)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_0)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow 3(x_0-1)^2=0 \Rightarrow x_0=1$$

بنابراین $y_0=f(x_0)=f(1)=-1$.

۲۸۱- گزینهٔ ۳ طول نقطه‌هایی روی نمودار تابع f که در آنها خط‌های مماس بر نمودار موازی محور x هستند، جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=1-\frac{16}{(x-a)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-a)^2=16$$

$$x=4+a\ ,\quad x=-4+a$$

مجموع این دو ریشه برابر $2a$ است، پس

$$2a=12$$

یعنی $a=6$.

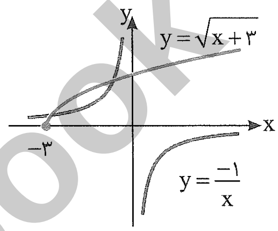
۲۸۲- گزینهٔ ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f(x)=x^2+4\sqrt{x+3}$$

$$f'(x)=2x+\frac{4}{2\sqrt{x+3}}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}}=-x \Rightarrow \sqrt{x+3}=-\frac{1}{x}$$

اکنون به نمودار توابع $y=\sqrt{x+3}$ و $y=-\frac{1}{x}$ توجه کنید که در دو نقطه متقاطع هستند. بنابراین معادلهٔ فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.



۲۸۳- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین

$$f'(x)=3x^2+m=0 \Rightarrow m=-3x^2$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3+(-3x^2)x-16=0$$

$$x^3=-8 \Rightarrow x=-2$$

بنابراین $m=-12$.

۲۸۴- گزینهٔ ۳ در نقطهٔ A مقدار تابع و مقدار مشتق تابع صفر است:

$$f'(x)=3x^2+2x+m^2=0 \Rightarrow m^2=-3x^2-2x$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3+x^2+(-3x^2-2x)x=0$$

$$x^3+x^2-3x^3-2x^2=0$$

$$-2x^3-x^2=0 \Rightarrow x=0,\ x=-\frac{1}{2}$$

۲۸۵- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است. پس ابتدا نقطه‌ای را که مشتق تابع در آن صفر است پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(2x-a)(x^2+9)-2x(x^2-ax+9)}{(x^2+9)^2}=0$$

$$2x^3+18x-ax^2-9a-2x^3+2ax^2-18x=0$$

$$a(x^2-9)=0 \xrightarrow{a\neq 0} x=-3,\ x=3$$

نقطه‌ای با طول منفی مورد سؤال است. بنابراین

$$f(-3)=0 \Rightarrow 9+3a+9=0 \Rightarrow a=-6$$

۲۸۶- گزینهٔ ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی $y=-x^2+bx+2$ است، پس عرض آن برابر است با $y=2$. چون خط d از نقطه‌های $(0,2)$ و $(3,0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$. چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است، مقدار y' به‌ازای $x=0$ برابر با شیب خط d است:

$$y=-x^2+bx+2 \Rightarrow y'=-2x+b \xrightarrow{x=0} -\frac{2}{3}=b$$

۲۸۷- گزینهٔ ۱ چون خط d از نقطه‌های $(-4,0)$ و $(1,3)$ گذشته است، شیب آن برابر است با $\frac{3-0}{1+4}=\frac{3}{5}$. بنابراین مقدار y' به‌ازای $x=1$ برابر $\frac{3}{5}$ است:

$$y'=2ax+b \xrightarrow{x=1} 2a+b=\frac{3}{5} \qquad (1)$$

چون نقطهٔ $(1,3)$ روی سهمی است، پس

$$3=a+b+c \qquad (2)$$

اکنون توجه کنید که از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$2a+b=\frac{3}{5} \Rightarrow (a+b)+a=\frac{3}{5}$$

$$(3-c)+a=\frac{3}{5} \Rightarrow a-c=\frac{3}{5}-3=-\frac{12}{5}$$

۲۸۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ تماس (x_0,y_0) باشد. در این صورت مقدار $f'(x_0)$ برابر با شیب خط $y=x+1$ است، یعنی $f'(x_0)=1$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=x^2-x-1$$

$$f'(x_0)=1 \Rightarrow x_0^2-x_0-2=0 \Rightarrow x_0=2,\ x_0=-1$$

اگر $x_0=2$، چون نقطهٔ (x_0,y_0) روی خط $y=x+1$ است، پس $y_0=3$ و چون نقطهٔ $(2,3)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$3=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-2+k \Rightarrow k=\frac{13}{3}$$

اگر $x_0=-1$، آن‌گاه $y_0=0$ و نتیجه می‌شود که $k=-\frac{1}{6}$، که قابل قبول نیست $(k>0)$.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow y=1$$

بنابراین

$$f(1)=1 \Rightarrow a+b+3=1 \Rightarrow a+b=-2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، شیب خط $y=2x-1$ برابر ۲ است و چون نمودار تابع f در نقطهٔ $x=1$ بر این خط مماس است، پس $f'(1)=2$، در نتیجه

$$f'(x)=3ax^2+2bx+2$$

$$f'(1)=3a+2b+2=2 \Rightarrow 3a+2b=0 \qquad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-6$. بنابراین

$$a+2b=4-12=-8$$

۲۹۰- گزینهٔ ۲ شیب خط $x+y-5=0$ برابر -1 است، بنابراین مقدار مشتق y به‌ازای $x=1$ برابر با -1 است:

$$y'=\frac{a(x+1)-(ax+3)}{(x+1)^2}=\frac{a-3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{a-3}{(1+1)^2}=-1 \Rightarrow a=-1$$

۲۹۱- گزینهٔ ۳ شیب خط $y=\frac{2}{3}x+1$ برابر $\frac{2}{3}$ است. بنابراین مقدار مشتق y به‌ازای $x=1$ برابر $\frac{2}{3}$ است:

$$y'=\frac{(2x-m)(x+3)-(x^2-mx+2)}{(x+3)^2}$$

$$\frac{(2-m)(4)-(1-m+2)}{(1+3)^2}=\frac{2}{3} \Rightarrow m=-\frac{17}{9}$$

۲۹۲- گزینهٔ ۱ شیب خط‌های مماس بر نمودار f در نقطه‌های به طول a و b برابر است با $f'(a)$ و $f'(b)$. بنابراین $f'(a)=f'(b)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=3x^2+a$$

$$f'(a)=f'(b) \Rightarrow 3a^2+a=3b^2+a$$

$$a^2=b^2 \Rightarrow a=-b \quad (a\neq b)$$

به این ترتیب $f(x)=x^3-bx+b$ و $f(1)=1$.

۲۹۳- گزینهٔ ۲ خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=-x^2$ را در نقاط $A(\sqrt{-k}\,,k)$ و $B(-\sqrt{-k}\,,k)$ قطع می‌کند. شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x$$

$$m_A=f'(\sqrt{-k})=-2\sqrt{-k}$$

$$m_B=f'(-\sqrt{-k})=2\sqrt{-k}$$

چون خطوط مماس بر نمودار در نقاط A و B بر هم عمودند، پس حاصل‌ضرب شیب آنها برابر -1 است:

$$2\sqrt{-k}(-2\sqrt{-k})=-1 \Rightarrow -4k=1 \Rightarrow k=-\frac{1}{4}$$

۲۹۴- گزینهٔ ۲ خط $y=4x+1$ در نقطهٔ $A(1,5)$ بر نمودار تابع f مماس است. بنابراین $f(1)=5$ و $f'(1)=4$. در نتیجه از اینکه $f'(x)=3x^2-a$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}1-a+b=5\\3-a=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

۲۹۵- گزینهٔ ۳ شیب خط $y=-ax+5$ برابر با $-a$ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ برابر است با $f'(2)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow f'(2)=8$$

در نتیجه $(8)(-a)=-1$، پس $a=\frac{1}{8}$.

۲۹۶- گزینهٔ ۴ شیب خط $y=9x-1$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f در نقطهٔ مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x)=x^3-3x^2+15$$

$$f'(x)=3x^2-6x=9$$

$$3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=-1\,,\ x=3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3)=27-27+15=15$$

۲۹۷- گزینهٔ ۳ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر ۲ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار مشتق تابع در آنها برابر ۲ است. پس

$$f'(x)=\frac{5(x+2)-(5x+2)}{(x+2)^2}=\frac{8}{(x+2)^2}=2$$

$$(x+2)^2=4 \Rightarrow x=0, x=-4$$

پس نقاط مورد نظر $A(0,1)$ و $B(-4,9)$ هستند که فاصلهٔ آنها برابر است با $AB=\sqrt{(-4-0)^2+(9-1)^2}=\sqrt{80}$

۲۹۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر (x_0,y_0) باشد. در این صورت $f'(x_0)$ شیب خط مماس در نقطهٔ (x_0,y_0) است، که چون این خط با خط $y=x-2$ موازی است، پس شیب آنها برابر است با

$$f'(x)=2x+5 \Rightarrow f'(x_0)=1 \Rightarrow 2x_0+5=1 \Rightarrow x_0=-2$$

بنابراین $f(x_0)=x_0^2+5x_0+3=-3$. پس نقطهٔ مورد نظر $(-2,-3)$ است.

۲۹۹- گزینه ۲ بنابر فرض‌های مسئله، $f'(2)=4$ و $g'(9)=-2$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=2g(x^3+1)+2x(3x^2g'(x^3+1))$$

$$=2g(x^3+1)+6x^3g'(x^3+1)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$، به‌دست می‌آید:

$$f'(2)=2g(9)+48g'(9)\Rightarrow 4=2g(9)+48(-2)\Rightarrow g(9)=50$$

۳۰۰- گزینه ۲ چون شیب خط $y=-x+2$ برابر -1 است، و $f'(-1)$ برابر با شیب این خط مماس است، پس $f'(-1)=-1$. چون $g'(x)=-1$، در نتیجه $g'(-1)=-1$. همچنین، $f(-1)=g(-1)=3$. اکنون توجه کنید که

$$h'(-1)=(f\times g)'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$$

$$=-3-3=-6$$

۳۰۱- گزینه ۱ خط d از نقطه‌های $(-3,0)$ و $(3,4)$ گذشته است، بنابراین شیب آن برابر است با $\frac{4-0}{3+3}=\frac{2}{3}$. مقدار $f'(3)$ برابر با شیب خط d است، پس $f'(3)=\frac{2}{3}$. چون نقطهٔ $(3,4)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(3)=4$. به این ترتیب

$$g'(x)=(2x)f(x)+x^2f'(x)$$

$$g'(3)=6f(3)+9f'(3)=24+6=30$$

۳۰۲- گزینه ۱ چون نقطهٔ $(2,3)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(2)=3$. چون خط d از نقطه‌های $(2,3)$ و $(5,0)$ گذشته است، شیب آن برابر است با $\frac{3-0}{2-5}=-1$. بنابراین $f'(2)=-1$.

اکنون توجه کنید که

$$g'(x)=f(3x-4)+x(3f'(3x-4))$$

$$g'(2)=f(2)+6f'(2)=3-6=-3$$

۳۰۳- گزینه ۲ خط d از نقطه‌های $(-2,-3)$ و $(1,0)$ گذشته است، بنابراین شیب آن برابر است با $\frac{-3-0}{-2-1}=1$. خط d در نقطه‌ای به طول -2 بر نمودار تابع‌های f و g مماس است، پس $f'(-2)=1$ و $g'(-2)=1$. نقطهٔ $(-2,-3)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(-2)=-3$. اکنون توجه کنید که

$$h'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-g'(x)$$

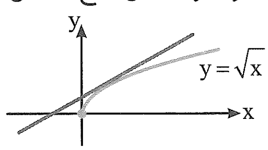
$$h'(-2)=-4f(-2)+4f'(-2)-g'(-2)$$

$$=(-4)(-3)+4(1)-1=15$$

۳۰۴- گزینه ۴ نمودار تابع خطی f از نقطه‌های $(-2,0)$ و $(0,4)$ گذشته است، بنابراین معادله‌اش به صورت $y=2x+4$ است. بنابراین $f(x)=2x+4$ و همواره $f'(x)=2$. از طرف دیگر، مقدار $g'(-1)$ برابر است با شیب خط $y=2x+4$، یعنی $g'(-1)=2$. به این ترتیب،

$$(fog)'(-1)=g'(-1)f'(g(-1))=2\times2=4$$

۳۰۵- گزینه ۱ شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ در نقطه‌ای به طول x_0 برابر است با $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$، که عددی مثبت است. بنابراین شیب خط $y=\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}a$ نیز در نقطهٔ x_0 مثبت است، یعنی $\frac{1}{2a}>0$، پس $a>0$. از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ معلوم است که اگر a عددی مثبت باشد، خطی به شکل مورد نظر وجود دارد که بر نمودار این تابع مماس است.

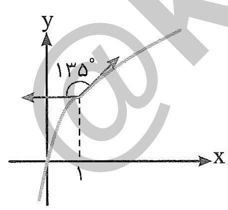


۳۰۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & x>1\\ 4-4x & x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=1,\quad f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}(4-4x)=0$$

نمودار تابع به شکل زیر است و زاویهٔ بین نیم‌مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=1$ برابر 135° است.



۳۰۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x>0\Rightarrow f(x)=2\sqrt{1+x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1$$

$$x<0\Rightarrow f(x)=2\sqrt{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=-1$$

بنابراین نمودار تابع f در نقطهٔ $x=0$ دو نیم‌مماس با شیب‌های ۱ و -1 دارد. پس این نیم‌مماس‌ها بر هم عمودند.

۳۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$x>1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x^2}=-1$$

$$-1<x<1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1$$

بنابراین در نقطهٔ $x=1$ دو نیم‌مماس با شیب‌های ۱ و ۱- بر نمودار تابع رسم می‌شود و این نیم‌مماس‌ها زاویهٔ 90° درست می‌کنند.

۳۰۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید این دو خط در نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بر نمودار تابع مماس باشند. در این صورت $f'(x_1)$ و $f'(x_2)$ برابر صفر هستند:

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=2$$

در نتیجه

$$y_1=f(x_1)=f(-1)=12, \quad y_2=f(x_2)=f(2)=-15$$

بنابر فاصلهٔ دو خط مماس برابر است با $12-(-15)=27$.

۳۱۰- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ (x_0, y_0) بر سهمی مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به‌ازای $x=x_0$ برابر با شیب خط $y=x+5$ است. بنابراین

$$y'=4x-4 \Rightarrow 4x_0-4=1 \Rightarrow x_0=\frac{5}{4}$$

چون نقطهٔ (x_0, y_0) روی سهمی $y=2x^2-4x+6$ است، پس

$$y_0=2x_0^2-4x_0+6=\frac{33}{8}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطهٔ $(\frac{5}{4}, \frac{33}{8})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس معادله‌اش به صورت $y-\frac{33}{8}=x-\frac{5}{4}$، یعنی $8y-8x-23=0$ است.

۳۱۱- گزینهٔ ۴ نقطهٔ تماس نقطهٔ $(1, f(1))=(1, 2)$ است.

شیب خط مماس برابر $f'(1)$ است:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

بنابراین خط مورد نظر $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$، یعنی $x+2y-5=0$ است.

۳۱۲- گزینهٔ ۴ خط d از نقطه‌های $(0, 3)$ و $(2, 0)$ گذشته است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=-\frac{3}{2}x+3$ است. چون خط d در نقطه‌ای به طول ۱ بر سهمی مماس است، پس مقدار y' به‌ازای $x=1$ برابر با شیب خط d است:

$$y=ax^2+c \Rightarrow y'=2ax$$

$$\xrightarrow{x=1} -\frac{3}{2}=2a$$

$$a=-\frac{3}{4}$$

چون نقطهٔ A روی خط $y=-\frac{3}{2}x+3$ است، پس عرض آن برابر است با $y=-\frac{3}{2}\times 1+3=\frac{3}{2}$. چون نقطهٔ $A(1, \frac{3}{2})$ روی سهمی $y=-\frac{3}{4}x^2+c$ است، پس $\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}+c$، یعنی $c=\frac{9}{4}$.

۳۱۳- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول ۴ برابر است با مقدار y' به‌ازای $x=4$:

$$y'=2x-5$$

شیب خط مماس $=8-5=3$

شیب خط $y=ax+b$ برابر a است، پس $a=3$. طول نقطهٔ تماس برابر ۴ است، پس عرض آن برابر است با

$$y=16-20+1=-3$$

بنابراین نقطهٔ $(4, -3)$ روی خط $y=3x+b$ است، در نتیجه

$$-3=12+b \Rightarrow b=-15$$

به این ترتیب

$$a+b=-12$$

۳۱۴- گزینهٔ ۱ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(1, -2)$ برابر است با مقدار مشتق تابع در نقطهٔ $x=1$:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

شیب خط مماس $=3+2a+b$

چون شیب خط $y=2x-4$ برابر ۲ است، پس

$$3+2a+b=2$$

$$2a+b=-1 \quad (1)$$

چون نقطهٔ $(1, -2)$ روی نمودار تابع است، پس

$$-2=1+a+b-5$$

$$a+b=2 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=5$. بنابراین $a-b=-8$.

۳۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f(2)=\frac{3}{2}$ و $f'(2)=\frac{3-0}{0-4}=-\frac{3}{4}$. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۲ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)=4f^2(x)\Rightarrow g'(x)=8f'(x)f(x)$$

$$g'(2)=8f'(2)f(2)$$

$$\text{شیب خط مماس}=g'(2)=8\times\frac{-3}{4}\times\frac{3}{2}=-9$$

همچنین $g(2)=4f^2(2)=4(\frac{3}{2})^2=9$. بنابراین می‌خواهیم معادلهٔ خطی با شیب ۹- را بنویسیم که از نقطهٔ $(2,9)$ می‌گذرد:

$$y-9=-9(x-2)\Rightarrow y=-9x+27$$

۳۱۶- گزینهٔ ۱ می‌خواهیم در نقطهٔ $A(5,3k)$ مماسی بر نمودار تابع رسم کنیم. شیب این خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=k(\sqrt{x-1}+1)$$

$$f'(x)=\frac{k}{2\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'(5)=\frac{k}{4}$$

بنابراین معادلهٔ این خط به صورت زیر است:

$$y-3k=\frac{k}{4}(x-5)\Rightarrow y=\frac{k}{4}x+\frac{7}{4}k$$

پس عرض از مبدأ این خط $\frac{7}{4}k$ است و شیب آن $\frac{k}{4}$ است.

در نتیجه عرض از مبدأ ۷ برابر شیب است.

۳۱۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(1)=3$ و $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$. بنابراین $f'(1)=-1$ و در نتیجه معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(1,3)$ به صورت زیر است:

$$y-3=-(x-1)\Rightarrow y=-x+4$$

این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(0,4)$ و $B(4,0)$ قطع می‌کند. بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{4\times4}{2}=8$.

۳۱۸- گزینهٔ ۲ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(3)$ است. بنابراین

$$f(x)=\frac{x+1}{x-2}+x^2\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}+2x\Rightarrow f'(3)=3$$

بنابراین معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $A(3,13)$ با شیب ۳ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-13=3(x-3)\Rightarrow y=3x+4$$

در نتیجه طول نقطهٔ برخورد خط فوق و نمودار تابع را می‌خواهیم که به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2+\frac{x+1}{x-2}=3x+4$$

$$x^3-2x^2+x+1=3x^2-6x+4x-8$$

$$x^3-5x^2+3x+9=0\Rightarrow (x-3)(x^2-2x-3)=0$$

$$(x-3)^2(x+1)=0\Rightarrow x=3,\ x=-1$$

بنابراین طول نقطهٔ برخورد ۱- است.

۳۱۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x_C=\alpha$، آن‌گاه شیب خط مماس در نقطهٔ C برابر $f'(\alpha)$ است:

$$f(x)=\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-4}{x^3}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-4}{\alpha^3}$$

پس معادلهٔ این خط به صورت زیر است:

$$y-f(\alpha)=\frac{-4}{\alpha^3}(x-\alpha)\Rightarrow y-\frac{2}{\alpha^2}=\frac{-4}{\alpha^3}(x-\alpha)$$

نقطهٔ $A(x_A,0)$ روی خط فوق قرار دارد. پس

$$0-\frac{2}{\alpha^2}=\frac{-4}{\alpha^3}(x_A-\alpha)\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=x_A-\alpha\Rightarrow x_A=\frac{3\alpha}{2}$$

بنابراین $\frac{x_A}{x_C}=\frac{\frac{3\alpha}{2}}{\alpha}=\frac{3}{2}$.

۳۲۰- گزینهٔ ۴ شیب خط گذرنده از نقاط $A(2,2)$ و $B(1,4)$ برابر با $\frac{4-2}{1-2}=-2$ است. بنابراین شیب خط مماس در نقطهٔ C برابر ۲- است. طول این نقطه را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-4}{x^2}=-2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $C(\sqrt{2},2\sqrt{2})$ به صورت زیر است:

$$y-2\sqrt{2}=-2(x-\sqrt{2})\Rightarrow y=-2x+4\sqrt{2}$$

عرض از مبدأ خط مماس $4\sqrt{2}$ است که برابر k است.

۳۲۱- گزینهٔ ۲ در نقاط $A(1,-2)$ و $B(-1,0)$ بر نمودار تابع مماس رسم کرده‌ایم. پس شیب این خطوط به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x)=x^2-x-2\Rightarrow f'(x)=2x-1$$

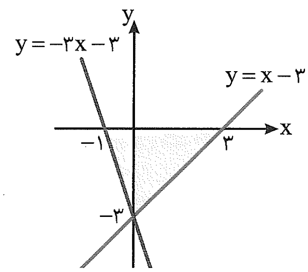
$$m_1=f'(1)=1,\quad m_2=f'(-1)=-3$$

بنابراین معادلهٔ این خطوط به صورت زیر است:

مماس در نقطهٔ A: $y-(-2)=x-1\Rightarrow y=x-3$

مماس در نقطهٔ B: $y-0=-3(x+1)\Rightarrow y=-3x-3$

محل برخورد دو خط نقطهٔ $C(0,-3)$ است و مساحت مثلث شکل زیر مدنظر است که برابر است با $S=\frac{4\times 3}{2}=6$.



۳۲۲- گزینهٔ ۱ در نقطه‌ای که خط بر تابع g مماس است، مشتق تابع g برابر شیب خط است:

$$g'(x)=-2x+b=\frac{-1}{4}\Rightarrow b=2x-\frac{1}{4}$$

همچنین در این نقطه،

$$g(x)=-\frac{1}{4}x+1\Rightarrow -x^2+bx=-\frac{1}{4}x+1$$

$$-x^2+x(2x-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}x+1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \begin{cases} x=1\Rightarrow b=\frac{7}{4}\\ x=-1\Rightarrow b=-\frac{9}{4}\end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای b برابر است با $-\frac{1}{2}$.

۳۲۳- گزینهٔ ۳ اگر نقطهٔ تماس (x_0,y_0) باشد، مقدار $f'(x_0)$ برابر با شیب خط مماس است. چون شیب خط $y=3x-b$ برابر ۳ است، پس $f'(x_0)=3$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=2x\Rightarrow 2x_0=3\Rightarrow x_0=\frac{3}{2}$$

بنابراین $y_0=f(x_0)=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$. چون نقطهٔ $(\frac{3}{2},\frac{25}{4})$ روی خط $y=3x-b$ است، پس

$$\frac{25}{4}=\frac{9}{2}-b\Rightarrow b=-\frac{7}{4}$$

۳۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع $f(x)=x^3-x^2$ پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط $y=x+k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x)=3x^2-2x=1\Rightarrow 3x^2-2x-1=0\Rightarrow \begin{cases} x=1 \ \text{(غ.ق.)}\\ x=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

بنابراین خط $y=x+k$ در نقطهٔ $A(-\frac{1}{3},-\frac{4}{27})$ بر نمودار تابع مماس می‌شود و نقطهٔ A روی این خط قرار دارد. یعنی

$$-\frac{4}{27}=-\frac{1}{3}+k\Rightarrow k=\frac{5}{27}$$

۳۲۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول نقطهٔ تماس (x_0,y_0) باشد. شیب خط مماس برابر $f'(x_0)$ است. شیب خط $y=6x+k$ برابر ۶ است، پس $f'(x_0)=6$. بنابراین

$$f'(x)=x^3-2\Rightarrow x_0^3-2=6\Rightarrow x_0=2$$

چون نقطهٔ (x_0,y_0) روی نمودار تابع f است، پس $y_0=f(x_0)=4$. چون نقطهٔ $(2,4)$ روی خط $y=6x+k$ است، پس $4=12+k$، یعنی $k=-8$.

۳۲۶- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=-x^2$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به نمودار تابع $f(x)=-x^2+k$ تبدیل می‌شود $(k>0)$. می‌خواهیم خط $y=x+1$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط $y=x+1$، یعنی ۱ باشد:

$$f'(x)=-2x=1\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{4}+k$$

پس نقطهٔ $A(-\frac{1}{2},k-\frac{1}{4})$ نقطهٔ مورد نظر است که باید روی خط $y=x+1$ باشد. پس

$$k-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+1\Rightarrow k=\frac{3}{4}$$

۳۲۷- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را k واحد به پایین منتقل می‌کنیم، نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{x}-k$ رسم می‌شود $(k>0)$. می‌خواهیم نمودار تابع f بر خط $y=-\frac{1}{2}x-1$ مماس شود. باید نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه با شیب خط فوق برابر شود، یعنی $f'(x)=-\frac{1}{2}$:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=1\Rightarrow y=-1-k$$

پس در نقطهٔ $A(1,-1-k)$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود. برای اینکه خط $y=-\frac{1}{2}x-1$ بر نمودار تابع f در نقطهٔ A مماس شود کافی است که A روی خط باشد. پس

$$-1-k=-\frac{1}{2}-1\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

۳۲۸- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خطی که نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ را به هم وصل می‌کند، به صورت $y=0$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x)=4x^3-2x=0\Rightarrow x=0,\ x^2=\frac{1}{2}$$

اگر $x=0$، آن‌گاه $f(x)=0$، پس نمودار تابع در $(0,0)$ بر محور طول‌ها مماس است.

اگر $x^2=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $f(x)=-\frac{1}{4}$، پس نمودار تابع در این نقاط بر محور طول‌ها مماس نیست.

توجه کنید که شرط‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ برای نقاطی که در آنها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۳۲۹- گزینهٔ ۱ شیب خطی که نقطه‌های $A(1,2+m)$ و $B(-1,-4+m)$ را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{2+m+4-m}{1+1}=3$ است. پس معادلهٔ این خط به صورت زیر است:

$$y-(2+m)=3(x-1)\Rightarrow y=3x+m-1$$

پس نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم که مشتق در آن نقطه برابر ۳ است و این نقطه روی خط فوق قرار دارد:

$$f'(x)=-4x^3+2mx+3=3 \quad (\mathrm{I})$$

$$f(x)=3x+m-1$$

$$-x^4+mx^2+3x=3x+m-1$$

$$x^4-mx^2+m-1=0\Rightarrow x^4-1-m(x^2-1)=0$$

$$(x^2-1)(x^2+1-m)=0$$

$$x=\pm 1 \quad \text{یا} \quad m=x^2+1 \quad (\mathrm{II})$$

از تساوی‌های (I) و (II) نتیجه می‌شود

$$-4x^3+2(x^2+1)x+3=3\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0$$

۳۳۰- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=x-1$ برابر ۱ است. پس ابتدا نقطه‌ای روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در آن نقطه برابر ۱ است، یعنی

$$f(x)=\frac{-k^2}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{k^2}{(x+1)^2}=1$$

$$(x+1)^2=k^2\Rightarrow x=-1\pm k$$

$$x=-1+k\Rightarrow y=\frac{-k^2}{-1+k+1}=-k$$

$$x=-1-k\Rightarrow y=\frac{-k^2}{-1-k+1}=k$$

پس این نقاط $A(-1+k,-k)$ و $B(-1-k,k)$ هستند. برای اینکه خط بر نمودار تابع مماس باشد، باید این نقاط روی خط باشند. یعنی

$$-k=-1+k-1\Rightarrow k=1\Rightarrow A(-1+k,-k)=(0,-1)$$

$$k=-1-k-1\Rightarrow k=-1\Rightarrow B(-1-k,k)=(0,-1)$$

پس $(a,b)=(0,-1)$ و در نتیجه $a=0$ و $b=-1$ و $a+b=-1$.

۳۳۱- گزینهٔ ۱ چون خط d در نقطه‌ای به طول ۲ بر هر دو سهمی مماس است، پس مقدار مشتق‌های تابع‌های درجهٔ دومی که سهمی‌ها را مشخص می‌کنند در نقطهٔ $x=2$ برابر است:

$$y=x^2\Rightarrow y'=2x\xrightarrow{x=2}y'=4$$

$$y=-x^2+bx+c\Rightarrow y'=-2x+b\xrightarrow{x=2}y'=-4+b$$

بنابراین $4=-4+b$، یعنی $b=8$. چون نقطهٔ به طول ۲ هم روی سهمی $y=x^2$ است هم روی سهمی $y=-x^2+8x+c$، پس

$$4=-4+16+c\Rightarrow c=-8$$

بنابراین $b+c=0$.

۳۳۲- گزینهٔ ۳ مشتق تابع‌های f و g در نقطهٔ -1 برابر است:

$$f'(x)=2x+a\Rightarrow f'(-1)=-2+a$$

$$g'(x)=6x^2\Rightarrow g'(-1)=6$$

بنابراین $-2+a=6$، پس $a=8$. چون نقطهٔ $(-1,4)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$f(-1)=4\Rightarrow 1-8+b=4\Rightarrow b=11$$

چون نقطهٔ $(-1,4)$ روی نمودار تابع g است، پس

$$g(-1)=4\Rightarrow -2+c=4\Rightarrow c=6$$

بنابراین $a+b+c=25$.

۳۳۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید خطی که از نقطهٔ $A(4,1)$ می‌گذرد در نقطهٔ $B(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس مقدار $f'(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x-x^2\Rightarrow f'(x)=2-2x\Rightarrow f'(\alpha)=2-2\alpha$$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}=2-2\alpha$$

$$\frac{2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-4}=2-2\alpha$$

$$2\alpha-\alpha^2-1=2\alpha-8-2\alpha^2+8\alpha$$

$$\alpha^2-8\alpha+7=0\Rightarrow(\alpha-1)(\alpha-7)=0$$

$$\alpha=1,\alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$.

بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

۳۳۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مماس بر منحنی که از مبدأ می‌گذرد در نقطهٔ $A(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-0}{\alpha-0}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس

$$f'(x)=2x+2$$

$$f'(\alpha)=2\alpha+2=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{\alpha^2+2\alpha+m}{\alpha}$$

$$2\alpha^2+2\alpha=\alpha^2+2\alpha+m$$

$$\alpha^2=m\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\sqrt{m}\Rightarrow f'(\alpha)=2\sqrt{m}+2\\ \alpha=-\sqrt{m}\Rightarrow f'(\alpha)=-2\sqrt{m}+2\end{cases}$$

چون دو خط مماس عمود بر هم هستند، پس حاصل‌ضرب شیب آنها برابر -1 است:

$$(2\sqrt{m}+2)(-2\sqrt{m}+2)=-1\Rightarrow 4-4m=-1\Rightarrow m=\frac{5}{4}$$

۳۳۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید $B(\alpha,f(\alpha))$ نقطهٔ تماس باشد. شیب خط گذرنده از نقطه‌های $A(1,1)$ و $B(\alpha,\alpha-\frac{1}{\alpha})$ برابر $\frac{\alpha-\frac{1}{\alpha}-1}{\alpha-1}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است:

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(\alpha)=1+\frac{1}{\alpha^2}$$

بنابراین

$$\frac{\alpha-\frac{1}{\alpha}-1}{\alpha-1}=1+\frac{1}{\alpha^2}\Rightarrow\frac{\alpha^2-\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}$$

$$\frac{\alpha^2-\alpha-1}{\alpha-1}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\Rightarrow\alpha^3-\alpha^2-\alpha=\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1$$

$$2\alpha=1\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$$

۳۳۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید این خط‌ها در نقطهٔ $B(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x)=\frac{5x+1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-6}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطهٔ $A(0,2)$ و $B(\alpha,f(\alpha))$ می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-2}{\alpha-0}$.

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}\Rightarrow\frac{\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{3\alpha+3}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}\Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1)=-6\alpha$$

$$\alpha^2+2\alpha-1=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آنها -2 است.

۳۳۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید خط مماسی که از نقطهٔ A رسم می‌شود در نقطهٔ $(\alpha,\frac{\alpha}{\alpha^2+1})$ بر نمودار تابع مماس شود. شیب این خط مماس برابر است با

$$\frac{\frac{\alpha}{\alpha^2+1}-\frac{1}{2}}{\alpha-1}=\frac{2\alpha-\alpha^2-1}{2(\alpha-1)(\alpha^2+1)}=\frac{1-\alpha}{2(\alpha^2+1)}$$

از طرف دیگر شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است:

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{1-\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}$$

بنابراین

$$\frac{1-\alpha}{2(\alpha^2+1)}=\frac{1-\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}\Rightarrow(\alpha^2+1)(1-\alpha)=2(1-\alpha^2)$$

$$(1-\alpha)(\alpha^2+1-2-2\alpha)=0$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha^2-2\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=1\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین $\alpha=1$، $\alpha=1+\sqrt{2}$ و $\alpha=1-\sqrt{2}$ طول نقاط تماس هستند.

۳۳۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ تماس (x_0,y_0) باشد. در این صورت $y_0=x_0^3+x_0+16$ و شیب خطی که از مبدأ و نقطه (x_0,y_0) می‌گذرد برابر است با $\frac{x_0^3+x_0+16}{x_0}$. از طرف دیگر، شیب خطی که در نقطهٔ به طول x_0 بر نمودار تابع f مماس است برابر با $f'(x_0)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2+1\Rightarrow 3x_0^2+1=\frac{x_0^3+x_0+16}{x_0}$$

$$3x_0^3+x_0=x_0^3+x_0+16\Rightarrow x_0^3=8\Rightarrow x_0=2$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر است با $f'(2)=13$.

۳۳۹- گزینه ۱ چون نقطهٔ A روی نمودار تابع f قرار دارد، پس یکی از خطوط در همان نقطهٔ A بر نمودار مماس می‌شود. اگر فرض کنیم خط دیگر در نقطهٔ $B(\alpha,-\alpha^3)$ بر نمودار مماس شود، آن‌گاه شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس

$$f'(\alpha)=\frac{-\alpha^3+1}{\alpha-1}\Rightarrow -3\alpha^2=\frac{-\alpha^3+1}{\alpha-1}$$

$$-3\alpha^3+3\alpha^2=-\alpha^3+1\Rightarrow 2\alpha^3-3\alpha^2+1=0$$

$$(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$$

بنابراین شیب خطوط مماس به صورت زیر است:

$$\alpha=1\Rightarrow m_1=f'(1)=-3$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_2=f'(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$$

۳۴۰- گزینه ۳ توجه کنید که $f(0)=f'(0)=0$ و نمودار تابع f در مبدأ مختصات بر خط $y=0$ مماس است. اکنون فرض کنید خطی که از مبدأ مختصات رسم می‌کنیم در نقطهٔ $(\alpha,\alpha^4-3\alpha^2)$ بر نمودار تابع مماس شود. شیب این خط برابر است با

$$\frac{\alpha^4-3\alpha^2-0}{\alpha-0}=\alpha^3-3\alpha\,,\quad \alpha\neq 0$$

از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس

$$f'(\alpha)=\alpha^3-3\alpha\Rightarrow 4\alpha^3-6\alpha=\alpha^3-3\alpha$$

$$3\alpha^3-3\alpha=0\Rightarrow 3\alpha(\alpha^2-1)=0\Rightarrow \alpha=\pm 1$$

پس سه خط مماس وجود دارد که در نقطه‌های $(0,0)$، $(1,-2)$ و $(-1,-2)$ بر نمودار تابع مماس می‌شوند.

۳۴۱- گزینه ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[4,12]$ و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $x=4$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\dfrac{f(12)-f(4)}{12-4}=\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\dfrac{\frac{-2}{15}}{8}=\dfrac{-1}{60}\\[2ex] f'(x)=-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(4)=\dfrac{-1}{27}\end{cases}\Rightarrow \frac{-1}{60}-(\frac{-1}{27})=\frac{11}{540}$$

۳۴۲- گزینه ۱ راه‌حل اول شیب نیمساز ناحیهٔ اول برابر ۱ است. پس ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x)=2x^2+(m+1)x+m+6$ را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x)=1\Rightarrow 4x+m+1=1\Rightarrow x=-\frac{m}{4}$$

بنابراین خط $y=x$ در نقطهٔ $(-\frac{m}{4},-\frac{m}{4})$ بر نمودار تابع f مماس شده است. این نقطه روی نمودار تابع f است، پس مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

$$-\frac{m}{4}=2(-\frac{m}{4})^2+(m+1)(-\frac{m}{4})+m+6$$

$$m^2-8m-48=0\Rightarrow (m-12)(m+4)=0\Rightarrow\begin{cases}m=12\\ m=-4\end{cases}$$

$m=12$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطهٔ تماس $(-3,-3)$ می‌شود که در ناحیهٔ اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادلهٔ حاصل از تلاقی آنها ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases}y=2x^2+(m+1)x+m+6\\ y=x\end{cases}$$

$$2x^2+(m+1)x+m+6=x$$

$$2x^2+mx+m+6=0$$

$$\Delta=0\Rightarrow m^2-8(m+6)=0$$

$$m^2-8m-48=0$$

$$(m-12)(m+4)=0\Rightarrow m=12,\ m=-4$$

$$m=12\Rightarrow 2x^2+12x+18=0$$

$$x^2+6x+9=0\Rightarrow x=-3\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$m=-4\Rightarrow 2x^2-4x+2=0$$

$$x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس باید طول نقطهٔ تماس مثبت باشد. پس $x=1$ و در نتیجه $m=-4$ قابل قبول است.

۳۴۳- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4,6/25]$ برابر است با

$$\frac{f(6/25)-f(4)}{6/25-4}=\frac{\sqrt{6/25}-\sqrt{4}}{6/25-4}=\frac{2/5-2}{2/25}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{9}$$

اما آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$\text{حاصل}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$$

۳۴۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض کنید خط‌ها در نقطهٔ $B(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2-\alpha)$ بر نمودار تابع f مماس شده باشند. شیب پاره‌خط AB برابر است با

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha-(-1)}{\alpha-2}$$

از طرف دیگر شیب این خطوط با $f'(\alpha)$ برابر است. پس

$$f'(\alpha)=\alpha-1=\frac{\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-2}$$

$$(\alpha-1)(\alpha-2)=\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha+1$$

$$\alpha^2-3\alpha+2=\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha+1$$

$$\alpha^2-4\alpha+2=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2+\sqrt{2}\\ \alpha=2-\sqrt{2}\end{cases}$$

اگر $\alpha=2+\sqrt{2}$، آن‌گاه $f'(\alpha)=1+\sqrt{2}$.

و اگر $\alpha=2-\sqrt{2}$، آن‌گاه $f'(\alpha)=1-\sqrt{2}$.

پس شیب یکی از خطوط مماس برابر $m_1=1+\sqrt{2}$ و شیب خط مماس دیگر برابر $m_2=1-\sqrt{2}$ است و چون $m_1m_2=-1$، بنابراین این دو خط بر هم عمودند.

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم شیب خط گذرنده از نقطهٔ A و مماس بر منحنی $y=\frac{1}{2}x^2-x$ برابر m باشد. باید معادلهٔ حاصل از تقاطع خط و منحنی ریشهٔ مضاعف داشته باشد. بنابراین

$$\frac{1}{2}x^2-x=mx-2m-1$$

$$x^2-2(1+m)x+4m+2=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} m^2-2m-1=0$$

$$m_1\times m_2=-1$$

پس دو خط مماس بر هم عمودند.

۳۴۵- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[1,1/21]$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{1/21}-\sqrt{1}}{1/21-1}=\frac{1/1-1}{0/21}=\frac{0/1}{0/21}=\frac{10}{21}$$

اکنون آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطهٔ $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} f'(1)=\frac{1}{2}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{21-20}{42}=\frac{1}{42}$$

۳۴۶- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,1/44]$ برابر است با

$$\frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1}=\frac{\frac{0/44}{1/2}-0}{0/44}=\frac{5}{6}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=1$ نیز این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{1}{6}$ است.

۳۴۷- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=5x+a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای از تابع $f(x)=2x^2-3x+6$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x)=4x-3=5 \Rightarrow x=2$$

پس خط در نقطهٔ $(2, f(2))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$f(2)=5\times2+a \Rightarrow 8=10+a \Rightarrow a=-2$$

فصل پنجم

کاربرد مشتق

فصل پنجم

درس اول: اکسترمم‌های تابع

ارتباط مشتق و یکنوایی تابع

فرض کنید تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ پیوسته و روی بازهٔ (a, b) مشتق پذیر باشد. اگر به‌ازای هر x از بازهٔ (a, b)،

الف) $f'(x) > 0$، آن‌گاه f روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

ب) $f'(x) < 0$، آن‌گاه f روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً نزولی است.

پ) $f'(x) = 0$، آن‌گاه f روی بازهٔ $[a, b]$ ثابت است.

مثال به کمک مشتق می‌توان بازه‌های یکنوایی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را مشخص کرد. کافی است مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		اکیداً صعودی		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی	

نکته

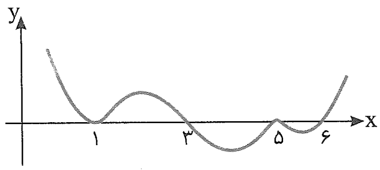
اگر مشتق تابع f روی بازهٔ (a, b) نامنفی باشد، یعنی $f'(x) \geq 0$ و نقاطی از این بازه که مشتق تابع f در آنها برابر صفر است یک بازه تشکیل ندهند، باز هم تابع f روی بازهٔ (a, b) اکیداً صعودی است. همچنین اگر مشتق تابع f روی بازهٔ (a, b) نامثبت باشد، یعنی $f'(x) \leq 0$ و نقاطی از این بازه که مشتق تابع f در آنها برابر صفر است یک بازه تشکیل ندهند، تابع f روی بازهٔ (a, b) اکیداً نزولی است.

مثال: فرض کنید $f(x) = x^3$. در این صورت $f'(x) = 3x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

چون f' فقط در $x = 0$ برابر صفر است و در بقیهٔ نقاط مثبت است، پس تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

تست ۱ نمودار تابع مشـتق تابع f به شکل مقابل است. تابع f روی بـازهٔ (a,b) اکیداً نزولی اسـت. بیشـترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

راه‌حل می‌دانیم اگر $f'(x)\leq ۰$ و نقاطی که $f'(x)=۰$، تشکیل پاره‌خط ندهند تابع اکیداً نزولی است.

روی بازهٔ $(۳,۶)$ نمودار تابع مشتق زیر محور x است و فقط در نقطهٔ $x=۵$ مشتق برابر صفر است. پس تابع فقط روی بازهٔ $(۳,۶)$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۳ است.

تست ۲ تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x^{۲}}$ روی کدام بازه نزولی است؟

۱) $(۰,+\infty)$

۲) $(-\infty,۰)$

۳) $(۱,+\infty)$

۴) $(۰,۲)$

راه‌حل باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f'(x)\leq ۰$. توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۸}{x^{۳}}=\frac{x^{۳}-۸}{x^{۳}}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(۰,۲)$ نزولی است.

تست ۳ کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟

۱) $f(x)=x^{۳}+۳x+۱$

۲) $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$

۳) $f(x)=\frac{۱}{x^{۳}-۱}$

۴) $f(x)=-۲x^{۳}+x^{۲}-x$

راه‌حل در گزینهٔ (۱)، $f'(x)=۳x^{۲}+۳>۰$، بنابراین تابع اکیداً صعودی است.

درگزینهٔ (۲)، $f'(x)=۳x^{۲}-۳$. مشتق در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ تغییر علامت می‌دهد و تابع نه صعودی است و نه نزولی.

در گزینهٔ (۳)، تابع در $x=۱$ مجانب قائم دارد، پس نمی‌تواند نزولی یا صعودی باشد.

در گزینـهٔ (۴)، $f'(x)=-۶x^{۲}+۲x-۱<۰$، بنابرایـن تابـع اکیداً نزولی اسـت. توجه کنیـد که عبارت $-۶x^{۲}+۲x-۱$ همواره منفی است، زیرا $\Delta<۰$ و $a<۰$.

تست ۴ تابع $f(x)=x^{3}-4x^{2}+5x+1$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

راه‌حل مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^{3}-4x^{2}+5x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^{2}-8x+5$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=1\,,\ x=\frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین کمترین مقدار a برابر ۱ و بیشترین مقدار b برابر $\frac{5}{3}$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$.

تست ۵ رفتار تابع $f(x)=\frac{-2x-1}{x^{2}-2x+1}$ روی بازهٔ $(-\infty,1)$ به چه صورت است؟

۱) صعودی ۲) نزولی
۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

راه‌حل مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-2(x^{2}-2x+1)-(2x-2)(-2x-1)}{(x^{2}-2x+1)^{2}}=\frac{2x+4}{(x-1)^{3}}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	▨	$+$	

طبق این جدول، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,1)$ ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

تست ۶ تابع $f(x)=-x^{3}+mx^{2}-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. m چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

راه‌حل مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-x^{3}+mx^{2}-12x+1 \Rightarrow f'(x)=-3x^{2}+2mx-12$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد:

$$f'(x)\le 0 \Rightarrow -3x^{2}+2mx-12\le 0$$

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta\le 0 \Rightarrow 4m^{2}-144\le 0 \Rightarrow m^{2}\le 36 \Rightarrow -6\le m\le 6$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

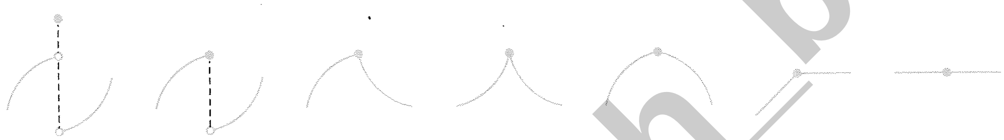
اکسترمم‌های نسبی

تعریف **می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه بازه‌ای مانند $(a\,,b)$ شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد که تابع f روی آن تعریف شده باشد و به‌ازای هر x از این بازه $f(x)\le f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم. نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.**

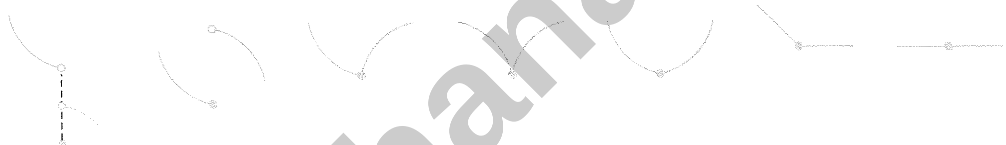
تعریف **می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی دارد، هرگاه بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد که تابع f روی آن تعریف شده باشد و به‌ازای هر x از این بازه $f(x)\ge f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم. نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.**

نقطه‌های ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی تابع را نقطه‌های اکسترمم نسبی می‌نامند.

در نمودارهای زیر، نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ ماکزیمم نسبی است:



در نمودارهای زیر، نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ مینیمم نسبی است:



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. توجه کنید که تابع f

در نقطهٔ x_1 اکسترمم نسبی ندارد،

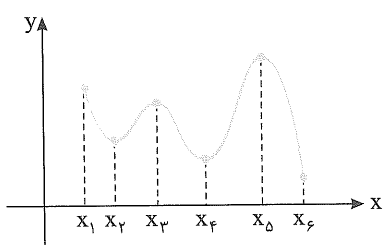
در نقطهٔ x_2 مینیمم نسبی دارد،

در نقطهٔ x_3 ماکزیمم نسبی دارد،

در نقطهٔ x_4 مینیمم نسبی دارد،

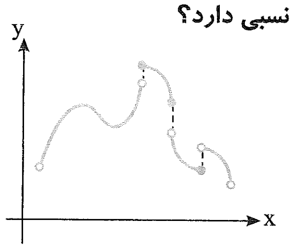
در نقطهٔ x_5 ماکزیمم نسبی دارد،

در نقطهٔ x_6 اکسترمم نسبی ندارد.



تست ۷

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟



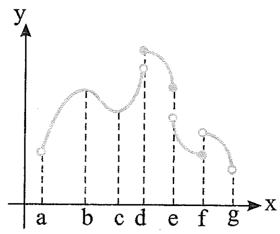
۱) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و سه نقطهٔ مینیمم نسبی

۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چهار نقطهٔ مینیمم نسبی

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۴) سه نقطهٔ ماکزیمم نسبی و سه نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل: b و d طول نقاط ماکزیمم نسبی و f و c طول نقاط مینیمم نسبی هستند.



تست ۸

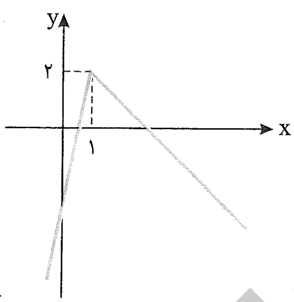
تعداد نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x-3|x-1|$ کدام است؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و صفر نقطهٔ مینیمم نسبی

۳) صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۴) صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی و صفر نقطهٔ مینیمم نسبی



راه‌حل: تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3(x-1) & x\geq 1 \\ 2x+3(x-1) & x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\geq 1 \\ 5x-3 & x\leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه تابع در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد و نقطهٔ مینیمم نسبی ندارد.

تست ۹

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & x\geq 1 \\ -x^2-2x+1 & x<1 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

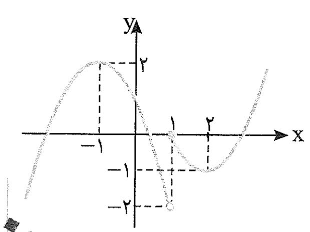
۱) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل: با رسم نمودار تابع متوجه می‌شویم که تابع در نقاط $x=-1$ و $x=1$ ماکزیمم نسبی و درنقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی دارد.

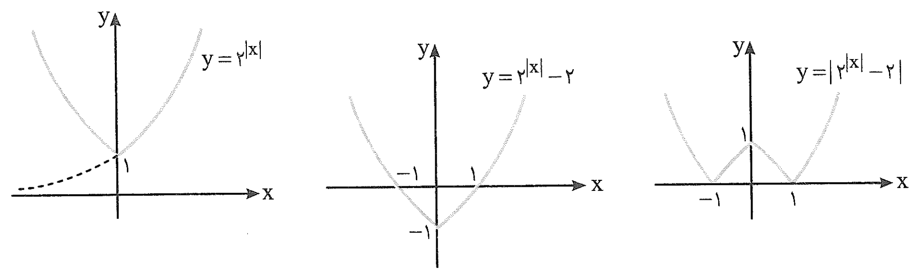


تست ۱۰

تابع $f(x)=\left|2^{|x|}-2\right|$ به ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ و ۱ ۲) ۲ و ۲ ۳) ۲ و ۱ ۴) ۱ و ۲

راه‌حل نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

تست ۱۱

در تابع $f(x)=(x-1)^2(x-2)|x+1|$ نقاط $x=1$ و $x=-1$ به ترتیب چه وضعیتی دارند؟

۱) ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی

۲) ماکزیمم نسبی، ماکزیمم نسبی

۳) مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی

۴) مینیمم نسبی، مینیمم نسبی

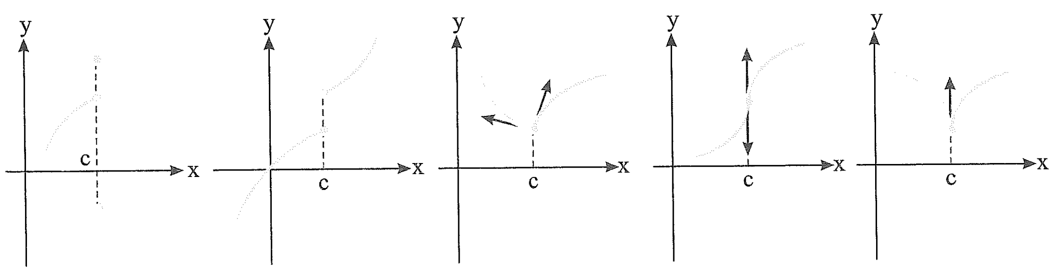
راه‌حل تابع f را تعیین علامت می‌کنیم. چون قدرمطلق و توان ۲ علامت ناحیه‌های مجاور را یکسان نگه می‌دارند، بنابراین در یک همسایگی $x=1$ و $x=-1$، $f(x)\leq 0$ و چون $f(1)=f(-1)=0$، تابع در این نقاط ماکزیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

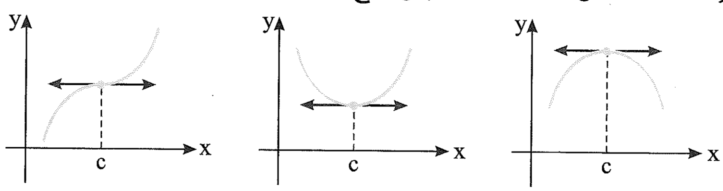
نقاط بحرانی

تعریف فرض کنید تابع f روی یک بازهٔ باز شامل نقطهٔ c تعریف شده باشد. نقطهٔ $(c, f(c))$ را **نقطهٔ بحرانی** تابع f می‌نامیم به شرطی که $f'(c)=0$ یا تابع در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر نباشد.

در شکل‌های زیر نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ بحرانی تابع است، زیرا تابع f در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر نیست.



درشکل‌های زیر نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ بحرانی تابع است، زیرا $f'(c)=0$.

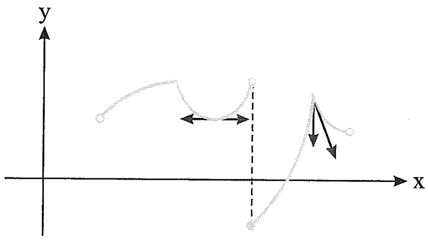


تست ۱۲

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تعداد نقاط بحرانی تابع کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵



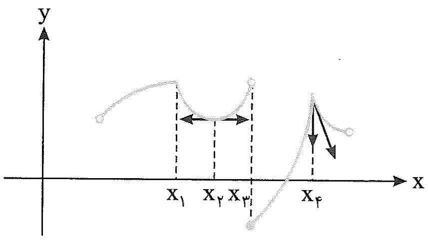
راه‌حل توجه کنید که تابع f در نقطهٔ x_1 مشتق‌پذیر نیست، زیرا

$$f'_+(x_1)\neq f'_-(x_1)$$

همچنین تابع f در نقطهٔ x_3 مشتق‌پذیر نیست، زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست.

تابع f در نقطهٔ x_4 مشتق‌پذیر نیست، زیرا این نقطه برای تابع f نقطهٔ گوشه‌ای است.

از طرف دیگر $f'(x_2)=0$، پس x_1، x_2، x_3 و x_4 طول نقطه‌های بحرانی تابع f هستند.



تست ۱۳

کدام گزینه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=x^2(1-x)^3$ **نیست**؟

۱) $x=1$ ۲) $x=0$ ۳) $x=-2$ ۴) $x=\frac{2}{5}$

راه‌حل چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، برای پیدا کردن نقاط بحرانی، معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=2x(1-x)^3-3x^2(1-x)^2=0\Rightarrow(1-x)^2(2x(1-x)-3x^2)=0$$

$$(1-x)^2(-5x^2+2x)\Rightarrow x=1,0,\frac{2}{5}$$

تست ۱۴

تابع $f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نقاطی از دامنهٔ تابع، که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد، نقاط بحرانی‌اند. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{3x^2(1-x)^2+2(1-x)x^3}{(1-x)^4}=\frac{(1-x)(3x^2-3x^3+2x^3)}{(1-x)^4}=\frac{-x^3+3x^2}{(1-x)^3}=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

بنابراین $x=0$ و $x=3$ طول دو نقطهٔ بحرانی تابع f هستند. توجه کنید که $x=1$ در دامنهٔ تابع اصلی قرار ندارد، پس طول نقطهٔ بحرانی نیست.

تست ۱۵

تابع $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع برابر $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ است. مشتق تابع را پیدا می‌کنیم و نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

اگـر $f'(x)=0$، آن‌گاه $x=0$، که درسـت نیسـت، زیرا صفـر در دامنهٔ تابع نیسـت. همچنین تابع در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشـتق‌پذیر نیسـت، اما نقطه‌های با طول ۱ و ۱− نقطهٔ بحرانی تابع f نیستند، زیرا تابع f در هیچ بازهٔ بازی شامل این نقطه‌ها تعریف نشده است. پس f نقطهٔ بحرانی ندارد.

تست ۱۶

تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-3x & -2<x\leq 2 \\ x^3-18x & 2<x<4 \end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-2,4)$ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

راه‌حل تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته نیست، بنابراین $x=2$ طول نقطهٔ بحرانی است. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & -2<x<2 \\ 3x^2-18 & 2<x<4 \end{cases} \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x=\pm 1 \xrightarrow{-2<x<2} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{6} \xrightarrow{2<x<4} x=\sqrt{6} \end{cases}$$

مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{-1,1,2,\sqrt{6}\}$ است.

تست ۱۷

مجموع عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=2|x+2|-x^2$ کدام است؟

۱) ۴− ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4-x^2 & x\geq -2 \\ -2x-4-x^2 & x<-2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2-2x & x>-2 \\ -2-2x & x<-2 \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=-2$ مشتق ندارد، پس نقطه به طول ۲− نقطهٔ بحرانی تابع است.

از طرف دیگر،

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 2-2x=0\Rightarrow x=1 \\ -2-2x=0\Rightarrow x=-1 \quad (\text{غ.ق.}) \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ به طول ۱ نقطهٔ بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با

$$f(-2)+f(1)=-4+5=1$$

تست ۱۸ تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنهٔ تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{6x^2+x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنهٔ تابع هستند بنابراین تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

آزمون مشتق اول

فرض کنید تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و $c\in(a,b)$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین تابع f در نقاط دیگر این بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

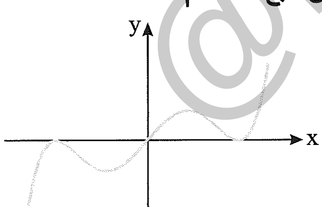
الف) اگر جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر باشد، تابع در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	⋮	$-$	

ب) اگر جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر باشد، تابع در نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی دارد.

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	⋮	$+$	

تست ۱۹ نمودار تابع مشتق تابع f به شکل مقابل است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

راه‌حل تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است. مشتق تنها در $x=0$ تغییر علامت داده است، پس بنابر آزمون مشتق اول، $x=0$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	⋮	$+$	
$f(x)$		↘	min نسبی	↗	

تست ۲۰

دربارهٔ تابع f می‌دانیم که روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=x^{3}-3x^{2}+2x$. تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل توجه کنید که

$$f'(x)=x(x^{2}-3x+2)$$
$$=x(x-1)(x-2)$$

جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

طبق جدول، تابع دو نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

تست ۲۱

تابع $f(x)=x^{5}-5x^{3}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل مشتق اول تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=5x^{4}-15x^{2}=5x^{2}(x^{2}-3)=0$$
$$x=0,\pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		۰		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↗	max نسبی	↘		↘	min نسبی	↗	

با توجه به جدول تغییرات بالا، تابع در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{3}$ مینیمم نسبی و در نقطه‌ای به طول $x=-\sqrt{3}$ ماکزیمم نسبی دارد.

توجه کنید که در نقطهٔ $x=0$ مشتق تابع تغییر علامت نمی‌دهد و تابع در این نقطه اکسترمم نسبی ندارد.

تست ۲۲ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $y=(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^{۲})\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) $x=۰$ ۲) $x=۱$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۳$

راه‌حل توجه کنید که

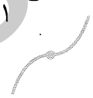
$$y=(\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۷}x^{۲})x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۱}{۷}x^{\frac{۷}{۳}},\quad y'=x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۱}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}=x^{\frac{۱}{۳}}(۱-\frac{۱}{۳}x)=\sqrt[۳]{x}(\frac{۳-x}{۳})$$

جدول تعیین علامت مشتق به صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
y′		−	min نسبی	+	max نسبی	−	

پس $x=۳$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

تست ۲۳ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+x+۱}$ در اطراف نقطهٔ $x=-۱$ چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

راه‌حل مشتق تابع را پیدا و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x^{۲}+x+۱)-(۲x+۱)(x^{۲}+۱)}{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}=\frac{x^{۲}-۱}{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f′(x)		+		−		+	
f(x)		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

با توجه به جدول، تابع در $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد. بنابراین نمودار آن در اطراف این نقطه به صورت شکل گزینهٔ (۴) است.

چند نکته در مورد اکسترمم‌های نسبی

فرض کنید $x=a$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد. در این صورت

۱) f می‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد.

۲) اگر f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(a)=۰$. (قضیهٔ فرما)

۳) نقطهٔ $(a,f(a))$ روی نمودار تابع f قرار دارد، یعنی مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

تذکر اگر $f'(a)=۰$، آن‌گاه f ممکن است در نقطهٔ $x=a$ اکسترمم نسبی نداشته باشد و تغییر علامت $f'(x)$ در این نقطه مهم است.

تست ۲۴ اگر طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^{۳}+bx^{۲}+۶x+۱$ برابر ۲ و -۱ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) -۳

راه‌حل نقاط به طول ۲ و ۱− ریشه‌های مشتق هستند. بنابراین

$$y'=۳ax^۲+۲bx+۶=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱+x_۲=\dfrac{-۲b}{۳a}=۱\\ x_۱x_۲=\dfrac{۶}{۳a}=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲b=۳a\\ a=-۱\end{cases}\Rightarrow a=-۱\ ,\ b=\dfrac{۳}{۲}$$

تست ۲۵ اگر $(۱,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۴+ax^۲+bx+۱$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱−　　۲) ۳−　　۳) ۵−　　۴) ۶−

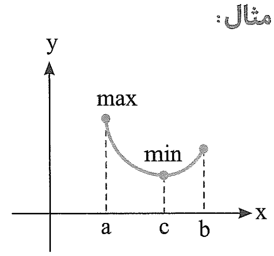
راه‌حل تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است. در نتیجه مشتق آن در طول نقاط اکسترمم نسبی برابر صفر است. بنابراین

$$\begin{cases}f'(x)=۴x^۳+۲ax+b\xrightarrow{f'(۱)=۰}۴+۲a+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴\\ f(x)=x^۴+ax^۲+bx+۱\xrightarrow{f(۱)=۱}۱+a+b+۱=۱\Rightarrow a+b=-۱\end{cases}\Rightarrow a=-۳\ ,\ b=۲\Rightarrow a-b=-۵$$

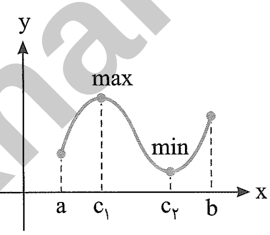
اکسترمم‌های مطلق

تعریف می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $f(x)\le f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f می‌نامیم. همچنین می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ مینیمم مطلق دارد، هرگاه به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $f(x)\ge f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع f می‌نامیم.

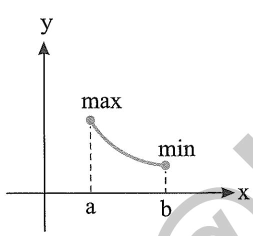
مثال:



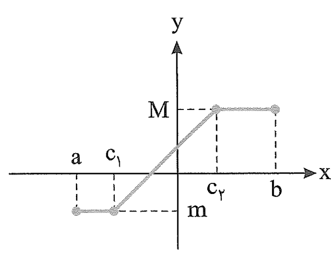
$f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.
$f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع است.



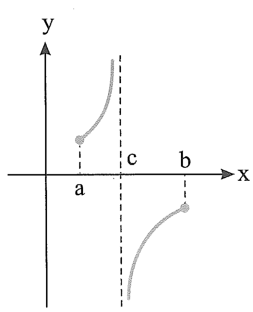
$f(c_۱)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.
$f(c_۲)$ مقدار مینیمم مطلق تابع است.



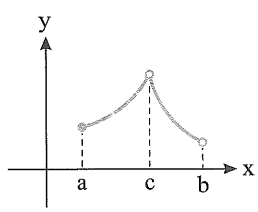
$f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.
$f(b)$ مقدار مینیمم مطلق تابع است.



تابع در تمام نقاط بازهٔ $[a,c_۱]$
دارای مینیمم مطلق m
و در تمام نقاط بازهٔ $[c_۲,b]$
دارای ماکزیمم مطلق M است.



تابع ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق ندارد.



تابع ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق ندارد.

تعریف به نقطهٔ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع نقطهٔ اکسترمم مطلق آن می‌گوییم.

تست ۲۶ تابع $f(x)=(m-1)x^2-4x-1$ نقطهٔ مینیمم مطلق دارد. این نقطه در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

راه‌حل در تابع درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ اگر $a>0$، آن‌گاه تابع نقطهٔ مینیمم مطلق دارد. طول این نقطه برابر با $\frac{-b}{2a}$ و عرض آن برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است. بنابراین در تابع f، باید $m-1>0$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2(m-1)}=\frac{2}{m-1}>0$$

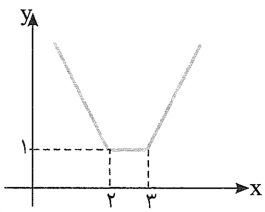
$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(16+4(m-1))}{4(m-1)}<0$$

پس طول نقطهٔ مینیمم مطلق مثبت و عرض آن منفی است، درنتیجه در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست ۲۷ تابع $f(x)=|x-2|+|x-3|$ در چند نقطهٔ صحیح مینیمم مطلق دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل نمودار تابع را رسم می‌کنیم. واضح است که مقدار مینیمم مطلق تابع روی بازهٔ $[2,3]$ برابر ۱ است که به‌ازای دو نقطهٔ صحیح $x=2$ و $x=3$ به‌دست می‌آید.



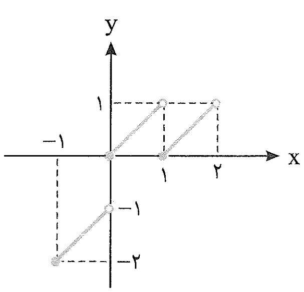
تست ۲۸ مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x-[x]^2$ با دامنهٔ $[-1,2)$ به ترتیب کدام است؟

۱) ۱ و -2 ۲) ۲ و -2

۳) وجود ندارد و -2. ۴) ۱ و وجود ندارد.

راه‌حل تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ x-1 & 1\le x<2 \end{cases}$$



واضح است که تابع ماکزیمم مطلق ندارد و در نقطهٔ $x=-1$ مینیمم مطلق -2 دارد.

قضیه ۱ اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این بازه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد.

روش پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق در توابع پیوسته

برای محاسبهٔ اکسترمم‌های مطلق تابع پیوستهٔ f روی بازهٔ $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم، سپس مقدار تابع در نقاط بحرانی و $f(a)$ و $f(b)$ را حساب می‌کنیم. بیشترین مقدار و کمترین مقدار از بین این مقادیر، به ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ هستند.

تذکر اگر بخواهیم اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازهٔ (a,b) را پیدا کنیم می‌توانیم در روش فوق به جای $f(a)$ از $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$ از $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ استفاده کنیم. اگر هر کدام از این مقادیر حدی بیشترین مقدار به دست آمده باشد، تابع f روی بازهٔ (a,b) ماکزیمم مطلق ندارد و اگر کمترین مقدار به‌دست آمده باشند، تابع f روی این بازه مینیمم مطلق ندارد.

در مورد بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$، $(-\infty,a]$، $(a,+\infty)$، $[a,+\infty)$ و $(-\infty,+\infty)$ نیز به همین روش عمل می‌کنیم.

تست ۲۹ مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x)=x^3-x^2-x$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=3x^2-2x-1=0\Rightarrow(x-1)(3x+1)=0$$

$$x=1,\ x=-\frac{1}{3}$$

اکنون مقادیر تابع در نقاط بحرانی و دو سر بازه را حساب می‌کنیم:

$$f(1)=-1,\quad f(-\frac{1}{3})=\frac{5}{27},\quad f(-1)=-1,\quad f(2)=2$$

بنابراین مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع برابر است با $-1+2=1$.

تست ۳۰ مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0,\quad f(0)=-1$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر است با $f(0)=-1$.

تست ۳۱ حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-2x}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

راه‌حل دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-2x}$ بازهٔ $[0,2]$ است. نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{4-2x}}=\frac{\sqrt{4-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-2x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{4-2x}=2\sqrt{x}\Rightarrow 4-2x=4x\Rightarrow 6x=4\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

اکنون مقدار تابع f در نقطهٔ $x=\frac{2}{3}$ را با مقدار تابع در نقاط $x=0$ و $x=2$ مقایسه می‌کنیم:

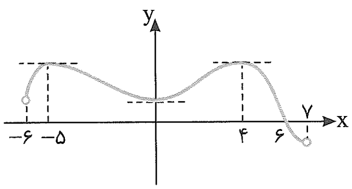
$$f(0)=2\,,\quad f(2)=\sqrt{2}\,,\quad f(\frac{2}{3})=\sqrt{6}$$

پس بیشـــترین مقدار تابع برابر $\sqrt{6}$ و کمترین مقدار آن برابر $\sqrt{2}$ و در نتیجه مقدار مورد نظر برابر با $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ است.

فصل پنجم

درس اول: اکسترمم‌های تابع

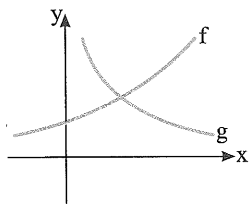
پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. چند عدد صحیح در نابرابری $f'(x)<0$ صدق می‌کنند؟

۱) ۶ ۲) ۷

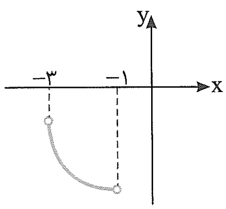
۳) ۸ ۴) ۹



۲- نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. کدام نابرابری، جایی که معنی دارد، درست است؟

۱) $f'(x)g'(x)<0$ ۲) $g(x)g'(x)>0$

۳) $xf'(x)g'(x)>0$ ۴) $xf(x)f'(x)>0$



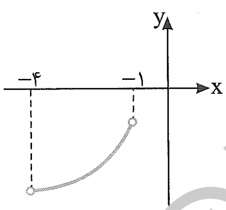
۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟

۱) $f'(x)<0$

۲) $f(x)f'(x)>0$

۳) $f(x)f'(x)<0$

۴) $\frac{f(x)+f'(x)}{x}>0$



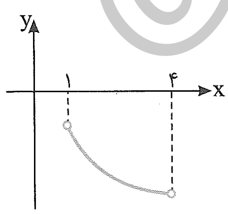
۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟

۱) $f(x)f'(x)>0$

۲) $f'(x)-f(x)>0$

۳) $\frac{f'(x)}{xf(x)}<0$

۴) $x^2f'(x)<0$



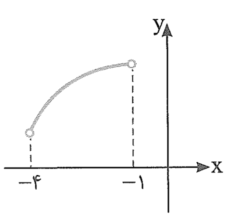
۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟

۱) $xf'(x)<0$

۲) $f(x)+f'(x)<0$

۳) $x-f'(x)>0$

۴) $(f^2)'(x)<0$



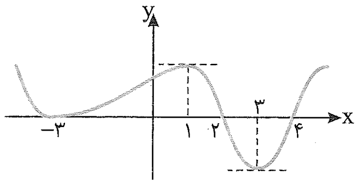
۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً نزولی است؟

۱) $y=xf(x)$

۲) $y=f(x^3)$

۳) $y=x^2f(x)$

۴) $y=\frac{f(x)}{x}$



۷- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع عددهای صحیحی که در نابرابری $xf'(x)<0$ صدق می‌کنند چقدر است؟

۱) -1 ۲) -2

۳) 2 ۴) 3

۸- اگر f تابعی مشتق‌پذیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و اکیداً صعودی باشد، کدام تابع قطعاً غیریکنواست؟

۱) $y=f^3(x)$ ۲) $y=|f(x)|$ ۳) $y=\frac{1}{f(x)}$ ۴) $y=f(x^2)$

۹- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$، مشتق‌پذیر و نزولی باشد، کدام تابع قطعاً صعودی است؟

۱) $y=x^3+f(x)$ ۲) $y=x^3-f(x)$ ۳) $y=x^2+f(x)$ ۴) $y=x^2-f(x)$

۱۰- اگر f تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، نزولی و مشتق‌پذیر باشد، کدام تابع صعودی است؟

۱) f^3 ۲) $\frac{1}{f}$ ۳) $\sqrt[3]{f}$ ۴) fof

۱۱- تابع‌های f و g روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند و تابع $h(x)=f(-x)g(x)$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. کدام گزینه درست است؟

۱) $f'(-x)f(x)<g'(-x)g(x)$ ۲) $g'(x)f(-x)<g(x)f'(-x)$

۳) $f(x)g(x)<f'(x)g'(x)$ ۴) $f'(x)g'(x)<f(x)g(x)$

۱۲- تابع $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(3,4)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(0,4)$

۱۳- کدام تابع همواره نزولی است؟

۱) $y=-x^3-x^2+2x$ ۲) $y=-x^3+x^2-2x$ ۳) $y=-x^3+x^2+2x$ ۴) $y=-x^3+2x^2+2x$

۱۴- تابع $f(x)=x^4+x^3$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) ابتدا نزولی، سپس صعودی ۴) ابتدا صعودی، سپس نزولی، سپس صعودی

۱۵- تابع $f(x)=x(x-1)(x+2)$ روی کدام بازه نزولی است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-\frac{1}{2},1)$ ۳) $(-1,\frac{1}{2})$ ۴) $(-2,\frac{1}{2})$

۱۶- تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۷- تابع $f(x)=3x^5-80x^3$ روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۸- تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹- تابع $f(x)=\frac{x}{x^3+2}$ روی بازهٔ $[-1,+\infty)$

۱) صعودی است. ۲) نزولی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۲۰- تابع $f(x)=\frac{x^{4}}{x^{2}+2}$ روی بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) -2
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۲۱- تابع $f(x)=\sqrt{3x^{2}-x+1}$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,1)$
۲) $(-\infty,\frac{1}{6})$
۳) $(\frac{1}{6},6)$
۴) $(1,6)$

۲۲- تابع $f(x)=x\sqrt{x^{2}+1}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) همواره صعودی
۲) همواره نزولی
۳) ابتدا صعودی سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۲۳- تابع $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+x$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{4}$

۲۴- تابع $f(x)=2\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $2\sqrt{7}-2$

۲۵- تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$ روی بازهٔ $(0,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt[3]{2}$
۳) $\sqrt[4]{8}$
۴) $\sqrt[4]{27}$

۲۶- تابع $f(x)=x^{2}\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ روی دامنه‌اش

۱) صعودی است.
۲) نزولی است.
۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است.
۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۲۷- تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ روی دامنه‌اش

۱) صعودی است.
۲) نزولی است.
۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است.
۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۲۸- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ روی دامنه اش

۱) صعودی است.
۲) نزولی است.
۳) ابتدا نزولی سپس صعودی است.
۴) ابتدا صعودی سپس نزولی است.

۲۹- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

۱) روی دامنه‌اش صعودی است.
۲) روی دامنه‌اش نزولی است.
۳) روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.
۴) روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ نزولی است.

۳۰- تابع $f(x)=x^{2}-8\sqrt{x+3}$ روی بازهٔ $[-3,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{4}$

۳۱- تابع $f(x)=-x^{3}+ax^{2}-2x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $[-6,6]$
۲) $[-3,3]$
۳) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$
۴) $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$

۳۲- تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-ax^{۲}+(a+۱)x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. مجموع حداقل و حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۳- اگر تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}+۲x^{۲}-mx+۱$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty,-۱]$ ۲) $(-\infty,-۲]$ ۳) $(-\infty,-۳]$ ۴) $(-\infty,-۴]$

۳۴- تابع $f(x)=\frac{۱}{۵}x^{۵}+\frac{۲}{۳}kx^{۳}+x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $-۱\leq k\leq ۱$ ۲) $k\geq ۱$ ۳) $k\geq -۱$ ۴) $k\leq ۱$

۳۵- اگر $f(x)=\frac{ax^{۲}+۲x+b}{۳x^{۲}+bx+۲b}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ۴) ۷

۳۶- به‌ازای کدام مقادیر k تابع $f(x)=\frac{x+k}{x^{۲}+x+۱}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $k\geq ۰$ ۲) $k\leq ۰$ ۳) هر مقدار k ۴) هیچ مقدار k

۳۷- تابع $f(x)=\frac{kx-۲}{|x|+۱}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۲$ ۲) $k\leq ۲$ ۳) $k\geq -۲$ ۴) $k\leq -۲$

۳۸- تابع $f(x)=\frac{kx^{۳}-x}{x^{۲}+۱}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $-۱\leq k\leq -\frac{۱}{۹}$ ۲) $k<۰$ ۳) $k\leq -\frac{۱}{۹}$ ۴) $-۱\leq k<۰$

۳۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۲-x}+k & x<۱\\ x-x^{۳} & x\geq ۱\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۰$ ۲) $k\geq ۱$ ۳) $k\geq -۱$ ۴) $k\geq -۲$

۴۰- تابع $f(x)=x\sqrt{k-x}$ روی دامنه‌اش صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۰$ ۲) $k\leq ۰$ ۳) $k\neq ۰$ ۴) $k=۰$

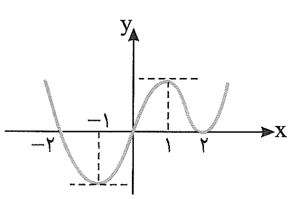
۴۱- تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+k^{۲}}}$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. مجموعهٔ مقادیر k کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۴۲- اگر $f(x)=x^{۳}+x$، چند عدد طبیعی در نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(۲۶x)$ صدق می‌کنند؟

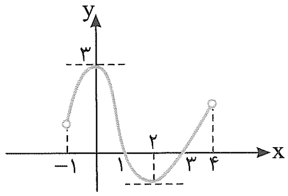
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

۴۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع طول نقطه‌های مینیمم نسبی تابع f چقدر است؟



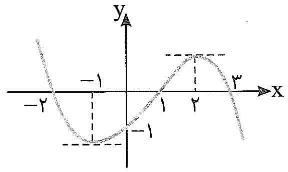
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

۴۴- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f در کدام نقطه ماکزیمم نسبی دارد؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۵- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f در کدام نقطه مینیمم نسبی دارد؟



۱) -2 ۲) -1
۳) ۱ ۴) ۳

۴۶- تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x>0 \\ -x-2 & x\leq 0 \end{cases}$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۳) یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد.

۴۷- تابع $f(x)=\begin{cases} |x-2| & x\geq 0 \\ -|x+2| & x<0 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۴۸- تابع $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & x\geq 0 \\ x^2-1 & x<0 \end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.
۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) نقطهٔ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ مینیمم نسبی ندارد.

۴۹- تابع $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\geq 0 \\ -(x+1)^2 & x<0 \end{cases}$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰- تابع $f(x)=\begin{cases} |x|+1 & x\neq 0 \\ k-1 & x=0 \end{cases}$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k>2$ ۲) $k>1$ ۳) $k<1$ ۴) $k<2$

۵۱- تابع $f(x)=\begin{cases} ||x|-2| & x\neq 0 \\ k+1 & x=0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد ولی مینیمم مطلق ندارد. حدود k کدام است؟

۱) $0<k<2$ ۲) $-1<k<1$ ۳) $k<2$ ۴) $k<1$

۵۲- مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x+3|x-2|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳- تابع $f(x)=2|x|-|x-1|$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.
۳) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) نقطهٔ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ مینیمم نسبی ندارد.

۵۴- تابع $f(x)=x|x-2|$ به ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ و صفر　۲) صفر و ۱　۳) ۱ و ۱　۴) ۱ و ۲

۵۵- تابع $f(x)=\left|2x-|x|\right|$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۵۶- تابع $f(x)=\left||x-1|-2\right|$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۵۷- تابع $f(x)=-|\cos x|$ روی بازهٔ $(0,2\pi)$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۵۸- تابع $f(x)=x[-x]$ در نقطهٔ $x=0$

۱) ماکزیمم نسبی و مطلق دارد.
۲) فقط ماکزیمم نسبی دارد.
۳) فقط مینیمم نسبی دارد.
۴) مینیمم نسبی و مطلق دارد.

۵۹- تابع $f(x)=\dfrac{x}{2^{[x]}}$ روی بازهٔ $(-1,2)$ به ترتیب چند نقطهٔ مینیمم نسبی و چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ و صفر　۲) ۱ و ۲　۳) صفر و ۲　۴) ۲ و صفر

۶۰- تابع $f(x)=x+\sqrt{2-[x]^2}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) صفر

۶۱- تابع $f(x)=[x]+\cos(\pi x)$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی روی بازهٔ $(-1,2)$ دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۶۲- تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin(\pi x)$ روی بازهٔ $(-2,2)$ به ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۳ و ۳　۲) ۴ و ۴　۳) ۴ و ۳　۴) ۳ و ۴

۶۳- تابع $f(x)=x-[\cos x]$ روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ به ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ و صفر　۲) صفر و ۱　۳) ۱ و ۱　۴) صفر و ۲

۶۴- دربارهٔ تابع f می‌دانیم روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x+1)(x-3)^2(x+2)^2$. مجموع طول نقطه‌هایی که تابع f در آنها اکسترمم نسبی دارد چقدر است؟

۱) صفر　۲) -1　۳) -2　۴) ۳

۶۵- اگر روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=3x^3-4x^2+x$، تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۶۶- اگر روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=x^3-5x^2+4x$، تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۶۷- اگر $D_f=\mathbb{R}$ و به جز $x\neq 0$، $f'(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}}$، تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۶۸- فاصلهٔ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2-9x$ از یکدیگر کدام است؟

۱) $4\sqrt{65}$ ۲) $2\sqrt{65}$ ۳) $2\sqrt{33}$ ۴) $4\sqrt{33}$

۶۹- تابع $f(x)=(x^3-3x^2+3x-1)^4$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۰- اگر $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+1$، مقدار ماکزیمم نسبی تابع f کدام است؟

۱) ۱ ۲) -11 ۳) -31 ۴) ۴

۷۱- تابع $f(x)=x^5-5x^4+1$ به ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ و ۱ ۲) ۲ و صفر ۳) صفر و ۲ ۴) ۱ و صفر

۷۲- اگر $(1,2)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^4+bx-1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -4 ۴) ۴

۷۳- تابع $f(x)=x^2|x|-3x^2$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۷۴- تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+bx+1$ در نقطهٔ $x=-1$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=3$ مینیمم نسبی دارد. مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) -4 ۳) -3 ۴) -2

۷۵- اگر مجموع طول نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+mx^2-6x+1$ برابر -1 باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۷۶- اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$ برابر -13 باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۷۷- تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد. حدود a کدام است؟

۱) $-1\leq a\leq 1$ ۲) $-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}$

۳) $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ ۴) $-1<a<1$

۷۸- تابع $f(x)=2x^3+ax^2+x$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. حدود a کدام است؟

۱) $|a|>\sqrt{3}$ ۲) $|a|>\sqrt{6}$ ۳) $|a|<\sqrt{6}$ ۴) $|a|<\sqrt{3}$

۷۹- اگر $(-1,4)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ باشد، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -9 ۴) -12

۸۰- اگر $(-1,2)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{a}{3}x^3+2bx^2+4x-\frac{4}{3}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۲ ۳) ۲۳ ۴) ۳۱

۸۱- اگر $f(x)=ax^3-3x^2+bx-1$ و $(-1,6)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f' باشد، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -4

۸۲- اگر $x=1$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^3+2ax^2+a^2x$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) -3 ۳) -1 یا -3 ۴) ۱ یا ۳

۸۳- حاصل‌ضرب عرض نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۸۴- اگر $f(x)=\frac{6x^2-3x+2}{x^2+1}$، مجموع طول نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f چقدر است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۸۵- نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^3}$ در کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۸۶- اگر $(-2,3)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{ax^2+bx-2}{x+1}$ باشد، مقدار ab چقدر است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۸۷- اگر $(-1,-2)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{ax}{x^2-b}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۸۸- تابع $f(x)=\frac{x^2+ax}{x^2+1}$ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0]$

۸۹- تابع $f(x)=\frac{kx^2+1}{x^2+1}$ در مبدأ مختصات ماکزیمم نسبی دارد. مجموعهٔ مقادیر k کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)$

۹۰- تابع $f(x)=\frac{x}{(x+k)^2+1}$ به‌ازای هر مقدار k

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. ۲) نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد.

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد. ۴) دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۹۱- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=k\sqrt{x}-x$ برابر ۶ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۹۲- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x+2\sqrt{3-x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=2x\sqrt{3-x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴- طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) ۱　۲) $2a$　۳) a　۴) ۲

۹۵- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt{5-x}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

۹۶- طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{13}}{3}$　۲) $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$　۳) $\frac{3-\sqrt{13}}{3}$　۴) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

۹۷- اگر $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=(x+a)\sqrt[3]{x+1}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۵　۲) -5　۳) ۷　۴) -7

۹۸- تابع $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۹۹- تابع $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^4}$ به ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک- یک　۲) یک- دو　۳) دو- یک　۴) دو- دو

۱۰۰- تابع $f(x)=\sqrt{9-x^2}-x$ با دامنهٔ $(-3,3)$

۱) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.　۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

۳) نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد.　۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۰۱- تابع $f(x)=x\sqrt{k-x}$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k>0$　۲) $k<0$　۳) $0<k<1$　۴) $-1<k<0$

۱۰۲- مجموع عرض نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x>0 \\ 2x+3 & x\leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) -1　۲) -2　۳) ۱　۴) ۲

۱۰۳- تابع $f(x)=x^2|x|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۴- عرض نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=3x-2|x-1|$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۵- اگر $f(x)=|x|(x-2)$، فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع f از یکدیگر کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$　۲) ۲　۳) $\sqrt{3}$　۴) ۳

۱۰۶- تابع $f(x)=\left|2x+|x|+1\right|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۷- تابع $f(x)=\left|x|x|-1\right|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۸- تابع $f(x)=(-1)^{[x]}x$ با دامنهٔ $(-2,1)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۰۹- اگر $f(x)=-2x^3+3x^2$، فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع f از یکدیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{5}$

۱۱۰- مساحت مثلثی که رأس‌های آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^4-4x^2$ هستند، چقدر است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۱۱- تابع $f(x)=x|x^2-1|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲- تابع $f(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{-x}}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۳- طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=x\sqrt{x+6}$ با دامنهٔ $(-5,+\infty)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۱۴- تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۵- عرض نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=\dfrac{x^2-13}{\sqrt{x+4}}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{3}$ ۲) $-4\sqrt{2}$ ۳) $-4\sqrt{3}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

۱۱۶- مجموع طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x\sqrt[3]{x-4}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۷- تابع $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x^2}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸- تابع $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۹- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{[x]+2}$ روی بازهٔ $[-1,2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{4}{3}$ ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{2}{3}$

۱۲۰- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & 0\le x\le 1 \\ 2-x^2 & -1\le x<0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۱- اختلاف مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ x-1 & -1\le x<0 \end{cases}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۲- حداکثر مقدار تابع $f(x)=||x|-2|-1$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$

۱۲۳- حاصل‌ضرب مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\begin{cases}|x-۲| & ۰\leq x\leq ۳\\ -|x+۱| & -۲\leq x<۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۱۲۴- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=-x^۳+۱۲x+۲$ روی بازهٔ $[-۱,۳]$ چقدر از مقدار مینیمم مطلق آن در این بازه بیشتر است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۱۲۵- اگر $f(x)=mx^۳+۳mx^۲$ و بیشترین مقدار تابع f' برابر ۱۲ باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۲۶- حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=(x+۲)^۳(x-۱)$ با دامنهٔ $[-۱,۲]$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳^۷}{۶۴}$ ۲) $-(\frac{۳}{۲})^۷$ ۳) $-\frac{۳^۷}{۴}$ ۴) -۱۲۸

۱۲۷- اگر مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^۵-۲۰x+a$ روی بازهٔ $[۰,۲]$ برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۷\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۲}$

۱۲۸- اگر (a,b) نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۱۰}-۱۰x+۱$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) -۷ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۹- اختلاف مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=(x-۱)|x-۲|$ روی بازهٔ $[۰,۳]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۰- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=-۵x^۳+x|x-۱|$ با دامنهٔ $[۰,۲]$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۲۵}$

۱۳۱- حداکثر مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲-x+۱}$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},۱]$ چقدر از کمترین مقدار آن در این بازه بیشتر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۲۱}$ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۱}$

۱۳۲- حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۳}{x^۲+۱}$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) صفر

۱۳۳- کمترین مقدار تابع $f(x)=x^۲+\frac{۱۶}{x}$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۳۴- حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x)=۲\sqrt{x}+\sqrt{۵-x}$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۱۳۵- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳۶- نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳۷- اگر حداکثر مقدار تابع $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[1,4]$ برابر $\frac{9}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟ $(0<a<1)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۳۸- اگر $a>0$ و ثابت، و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) $2a$ ۲) $3a$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۹- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=2^x$، آن‌گاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) ماکزیمم - مینیمم ۲) ماکزیمم - فاقد مینیمم

۳) فاقد ماکزیمم - مینیمم ۴) فاقد ماکزیمم - فاقد مینیمم

۱۴۰- بیشترین مقدار تابع $y=x^3-3x^2-9x+5$ در بازهٔ $[-2,2]$ کدام است؟ (تجربی - ۹۲)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

۱۴۱- کمترین مقدار تابع $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۲)

۱) -36 ۲) -32 ۳) -24 ۴) -18

۱۴۲- کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) صفر

۱۴۳- نقاط بحرانی روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴۴- مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ روی بازهٔ $[-4,3]$ به‌ترتیب کدام است؟ (تجربی - ۹۵)

۱) -18 و ۲۴ ۲) -45 و ۲۷ ۳) -36 و ۲۷ ۴) -27 و ۳۶

۱۴۵- طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

فصل پنجم

درس دوم: بهینه‌سازی

از روش پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق می‌توان برای حل مسئله‌های بهینه‌سازی استفاده کرد. در این مسئله‌ها می‌خواهیم مقدار ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق کمیتی را پیدا کنیم.

تست ۱ **اگر $2x-y=a$، کمترین مقدار xy کدام است؟**

۱) $\frac{a^2}{8}$ ۲) $\frac{a^2}{4}$ ۳) $-\frac{a^2}{8}$ ۴) $-\frac{a^2}{4}$

راه‌حل چون $y=2x-a$، پس

$$A(x)=xy=x(2x-a)=2x^2-ax\ ,\quad A'(x)=0\Rightarrow 4x-a=0\Rightarrow x=\frac{a}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با

$$2(\frac{a}{4})^2-a\times\frac{a}{4}=-\frac{a^2}{8}$$

تست ۲ **اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=6$، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+3y$ کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۹ ۴) $5\sqrt{6}$

راه‌حل چون $xy=6$، پس $y=\frac{6}{x}$. بنابراین $P=2x+\frac{18}{x}$. در نتیجه

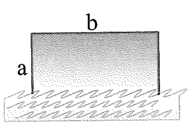
$$P'=2-\frac{18}{x^2}\Rightarrow P'=0\Rightarrow x=3 \qquad (\text{مثبت است } x)$$

بنابراین کمترین مقدار عبارت P به‌ازای $x=3$ به‌دست می‌آید و برابر است با $6+6=12$.

تست ۳ **بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیلهٔ یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیهٔ یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند مترمربع است؟**

۱) ۲۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۹۶ ۴) ۳۱۶

راه‌حل اگر مطابق شکل مستطیل را به ابعاد a و b در نظر بگیریم، آن‌گاه $2a+b=48$ و می‌خواهیم $S=ab$ ماکزیمم شود.



توجه کنید که $b=48-2a$ و در نتیجه

$$S=a(48-2a)=48a-2a^2\ ,\quad S'=48-4a\ ,\quad S'=0\Rightarrow a=12$$

بنابراین بیشترین مقدار S به‌ازای $a=12$ به‌دست می‌آید و برابر است با $12\times 24=288$.

تست ۴ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

راه‌حل طول اضلاع قائمهٔ مثلث را a و b فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S=\frac{1}{2}ab$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که $a^2+b^2=16$. پس $b=\sqrt{16-a^2}$، در نتیجه

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{16-a^2}$$

$$S'=\frac{1}{2}\sqrt{16-a^2}-\frac{a^2}{2\sqrt{16-a^2}}$$

$$S'=0\Rightarrow a=2\sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})\sqrt{8}=4$.

تست ۵ کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,0)$ از نقاط منحنی نمودار تابع $y=\sqrt{2x+9}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

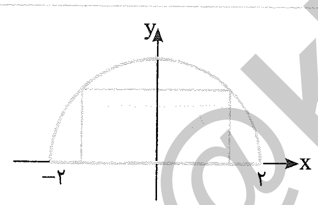
راه‌حل نقطهٔ $B(x,y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{2x+9}$. بنابراین

$$d=AB=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+2x+9}=\sqrt{x^2-6x+25}$$

$$d'=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+25}}\ ,\quad d'=0\Rightarrow x=3$$

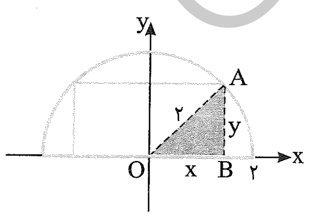
بنابراین کمترین مقدار d به‌ازای $x=3$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۴.

تست ۶ مستطیلی در یک نیم‌دایره به شعاع ۲ محاط شده است و یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره منطبق است. بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟



۱) ۴ ۲) $2\sqrt{2}$
۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

راه‌حل در مثلث OAB با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، y را برحسب x پیدا می‌کنیم:



$$x^2+y^2=4\Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}$$

همچنین مساحت مستطیل از رابطهٔ $S=2xy$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$S=2xy\ \Rightarrow\ S(x)=2x\sqrt{4-x^2}\ ,\ 0<x<2$$

می‌خواهیم بیشترین مقدار تابع S را پیدا کنیم. نقاط بحرانی این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$S'(x)=2(\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}})=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0$$

$$4-x^2-x^2=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

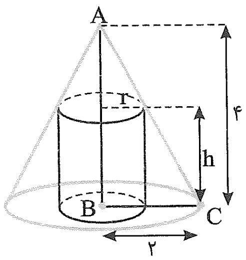
بنابراین بیشترین مقدار S به‌ازای $x=\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$.

تست ۷

استوانه‌ای را درون یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۴ محاط کرده‌ایم. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا حجم آن بیشترین مقدار شود؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

راه‌حل حجم استوانه از رابطهٔ $V=\pi r^۲ h$ به‌دست می‌آید. با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC می‌توان رابطه‌ای بین r و h به‌دست آورد:



$$\frac{r}{۲}=\frac{۴-h}{۴}\Rightarrow ۴-h=۲r\Rightarrow h=۴-۲r$$

اکنون حجم استوانه را برحسب متغیر r می‌نویسیم:

$$V=\pi r^۲ h=\pi r^۲(۴-۲r)=۲\pi r^۲(۲-r)=۲\pi(۲r^۲-r^۳)$$

پس

$$V'=۲\pi(۴r-۳r^۲)=۰\Rightarrow r=\frac{۴}{۳}\ ,\ r=۰\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین

$$h=۴-۲r=۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

فصل پنجم

درس دوم: بهینه‌سازی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۴۶- اگر $x-y=12$، کمترین مقدار ممکن $2x^2+y^2$ چقدر است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۹۶ ۳) ۸۸ ۴) ۷۶

۱۴۷- اگر $x+y+z=1$، بیشترین مقدار ممکن $xy+yz$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۴۸- اگر $x+y=2$، کمترین مقدار ممکن x^3+y^3 چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

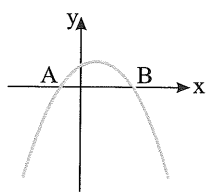
۱۴۹- اگر $2x+y=8$، بیشترین مقدار ممکن xy^3 چقدر است؟

۱) ۲۰۸ ۲) ۲۱۲ ۳) ۲۱۶ ۴) ۲۲۴

۱۵۰- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+2m-1=0$ باشند، کمترین مقدار ممکن $x_1^2+x_2^2$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

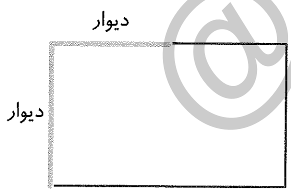
۱۵۱- نمودار تابع $f(x)=(m^2-2)x^2+(3-2m)x+3$ در شکل مقابل رسم شده است. کمترین مقدار ممکن x_A+x_B چقدر است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۳ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵۲- مطابق شکل مقابل، یک ضلع و نیمی از ضلعی دیگر از باغچه‌ای مستطیلی دیوار است. برای نرده‌کشی دور این باغچه، به ۱۲۰ متر نرده احتیاج داریم. مساحت این باغچه حداکثر چقدر است؟



۱) ۱۸۰۰

۲) ۲۴۰۰

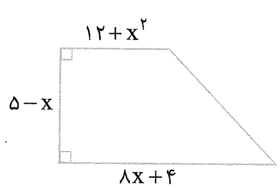
۳) ۳۰۰۰

۴) ۴۲۰۰

۱۵۳- می‌خواهیم دور زمینی مستطیلی به مساحت ده هزار مترمربع را نرده بکشیم. هزینهٔ نرده‌کشی در امتداد شمال - جنوب هر متر ۱۵ هزار تومان و در امتداد شرق - غرب هر متر ۶۰ هزار تومان است. اگر کمترین هزینهٔ ممکن را پرداخت کرده باشیم، محیط این زمین چقدر است؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۷۵۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

۱۵۴- بیشترین مقدار ممکن مساحت ذوزنقهٔ شکل مقابل چقدر است؟



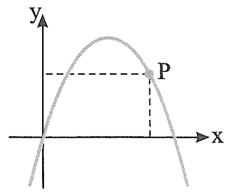
۱) ۵۴

۲) ۴۸

۳) ۴۵

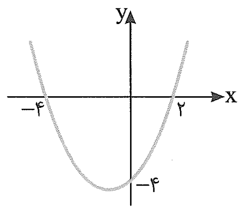
۴) ۳۶

۱۵۵- در شکل مقابل P نقطه‌ای روی سهمی $y=x(۷-x)$ است، به طوری که مجموع مختصات P بیشترین مقدار ممکن است. طول نقطه P چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵۶- شکل مقابل نمودار یک سهمی است. اگر $(x_۱, y_۱)$ نقطه‌ای روی این سهمی باشد، کمترین مقدار ممکن $x_۱+y_۱$ چقدر است؟

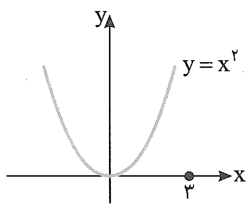


۱) -۹
۲) -۸
۳) -۷
۴) -۶

۱۵۷- مقدار x چقدر باشد تا فاصلهٔ نقطه‌های $(x, ۳)$ و $(۳x, x+۶)$ کمترین مقدار ممکن باشد؟

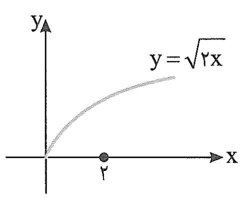
۱) -۱
۲) $-\frac{۴}{۵}$
۳) $-\frac{۳}{۵}$
۴) $-\frac{۲}{۵}$

۱۵۸- عرض نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y=x^۲$ به نقطهٔ $A(۳,۰)$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۲

۱۵۹- نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y=\sqrt{۲x}$ به نقطهٔ $A(۲,۰)$ کدام نقطه است؟



۱) $(۱, \sqrt{۲})$
۲) $(۲, ۲)$
۳) $(\frac{۱}{۲}, ۱)$
۴) $(\frac{۱}{۴}, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

۱۶۰- مجموع مختصات نزدیک‌ترین نقطه روی سهمی $y=x^۲$ به خط $y=۳x-۶$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}$
۲) $\frac{۱۳}{۴}$
۳) $\frac{۱۵}{۴}$
۴) $\frac{۲۱}{۴}$

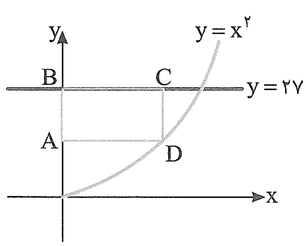
۱۶۱- اگر A نقطه‌ای از نمودار تابع $y=\frac{۴}{x}$ باشد، طول پاره‌خط OA حداقل چقدر است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) $\sqrt{۱۷}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۶۲- اگر A و B نقطه‌هایی با طول یکسان به ترتیب روی سهمی‌های $y=x^۲-x+۵$ و $y=-x^۲+۳x$ باشند، کمترین مقدار طول پاره‌خط AB چقدر است؟

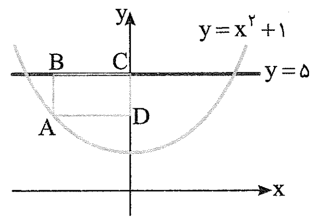
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۳- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل $ABCD$ چقدر است؟



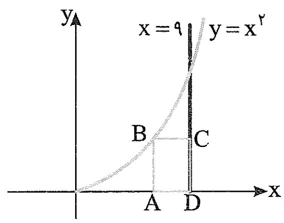
۱) ۵۶
۲) ۵۴
۳) ۵۲
۴) ۵۰

۱۶۴- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟



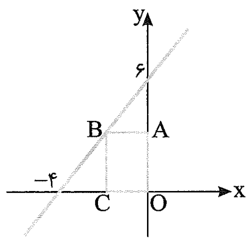
۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
۲) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
۳) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$
۴) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

۱۶۵- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟



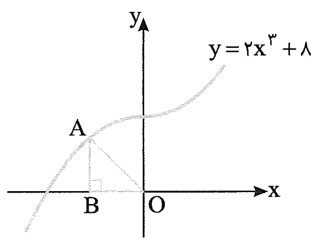
۱) ۱۰۴
۲) ۱۰۶
۳) ۱۰۸
۴) ۱۱۰

۱۶۶- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل OABC چقدر است؟



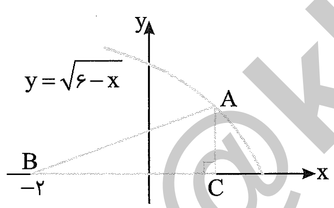
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

۱۶۷- در شکل مقابل، بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB چقدر است؟



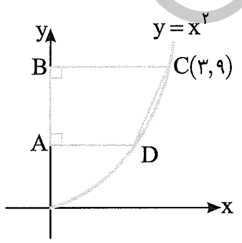
۱) $2\sqrt{3}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\sqrt{3}$

۱۶۸- در شکل مقابل اگر مساحت مثلث ABC بیشترین مقدار ممکن باشد، طول نقطهٔ C چقدر است؟



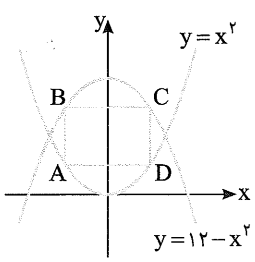
۱) ۳
۲) $\frac{10}{3}$
۳) $\frac{7}{2}$
۴) ۴

۱۶۹- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت ذوزنقهٔ ABCD چقدر است؟



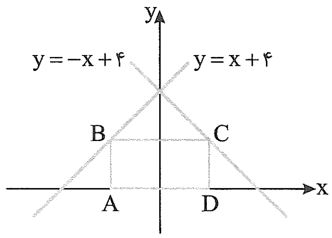
۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۷۰- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟



۱) $14\sqrt{2}$
۲) $16\sqrt{2}$
۳) $18\sqrt{2}$
۴) $20\sqrt{2}$

۱۷۱- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟



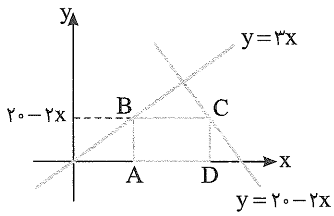
۱) ۱۶

۲) ۱۲

۳) ۸

۴) ۶

۱۷۲- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟



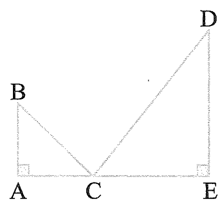
۱) ۲۸

۲) ۳۰

۳) ۳۶

۴) ۳۸

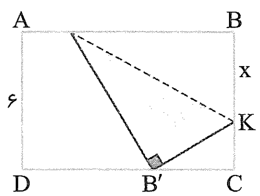
۱۷۳- در شـکل مقابل $AB=۶$، $AE=۹$ و $DE=۱۲$. اگر $BC+CD$ کمترین مقدار ممکن باشد، طول پاره‌خط AC چقدر است؟



۱) ۳   ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

۱۷۴- در شـکل مقابل ABCD مسـتطیلی کاغذی به عرض ۶ اسـت. این مسـتطیل را طوری تا کرده‌ایم که رأس B روی ضلع DC در نقطه‌ای مانند B' قرار گرفته است. اگر مساحت مثلث $KB'C$ بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار x چقدر است؟



۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

۱۷۵- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

۱) ۹۵۸   ۲) ۹۶۸   ۳) ۹۷۸   ۴) ۹۸۸

۱۷۶- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟ (ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱   ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۷۷- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{۳}x^۳+۲x^۲-x$ با بیشترین شیب ممکن محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۷)

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

فصل پنجم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ (۱) توجه کنید که تابع f فقط روی بازه‌های $(-۵,۰)$ و $(۴,۷)$ اکیداً نزولی است. بنابراین فقط روی این بازه‌ها مقادیر f' منفی‌اند. تعداد عددهای صحیح در این بازه‌ها شش‌تا است.

۲- گزینهٔ (۱) چون تابع f اکیداً صعودی است، پس $f'>۰$ و چون تابع g اکیداً نزولی است، پس $g'<۰$. بنابراین به‌ازای xهایی که در اشتراک دامنه‌های تابع‌های f و g هستند، $f'(x)g'(x)<۰$. نابرابری گزینهٔ (۲) هیچ‌وقت درست نیست، نابرابری گزینهٔ (۳) به‌ازای xهای مثبت و نابرابری گزینهٔ (۴) به‌ازای xهای منفی درست نیست.

۳- گزینهٔ (۳) از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۳,-۱)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'<۰$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند. بنابراین فقط گزینهٔ (۳) درست نیست.

۴- گزینهٔ (۲) از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۴,-۱)$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است. بنابراین $f'>۰$. همچنین مقادیر تابع f منفی‌اند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست نیستند و گزینهٔ (۲) درست است.

۵- گزینهٔ (۴) از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(۱,۴)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'<۰$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینهٔ (۴) توجه کنید که

$$(f^۲)'(x)=۲f'(x)f(x)>۰$$

پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۶- گزینهٔ (۴) از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $(-۴,-۱)$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است. بنابراین $f'>۰$. اکنون توجه کنید که چون مقادیر تابع f مثبت‌اند، پس

$$y=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^۲}<۰,\quad x\in(-۴,-۱)$$

بنابراین تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی است.
مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x)=x^۳+۱۰۰$ است.

۷- گزینهٔ (۱) تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۳)$ و $(۱,۳)$ اکیداً نزولی است، پس روی این بازه‌ها $f'<۰$. تابع f روی بازه‌های $(-۳,۱)$ و $(۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی این بازه‌ها $f'>۰$. جدول زیر را در نظر بگیرید.

	$-\infty$		-۳		۰		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
x		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	

از روی این جدول معلوم می‌شود که عددهای صحیح در بازه‌های $(-۳,۰)$ و $(۱,۳)$ در نابرابری $xf'(x)<۰$ صدق می‌کنند. این عددها ۲−، ۱− و ۲ هستند و مجموعشان برابر ۱− است.

۸- گزینهٔ (۴) تابع f اکیداً صعودی است، پس $f'(x)>۰$.
تابع $y=f^۳(x)$ اکیداً صعودی است، زیرا

$$y'=۳f^۲(x)f'(x)\geq ۰$$

توابع $y=|f(x)|$ و $y=\frac{۱}{f(x)}$ ممکن است یکنوا باشند. کافی است $f(x)$ همواره مثبت باشد. مثلاً تابع $f(x)=۲^x$ اکیداً صعودی است و تابع $y=|۲^x|=۲^x$ نیز اکیداً صعودی است و تابع $y=\frac{۱}{۲^x}=(\frac{۱}{۲})^x$ اکیداً نزولی است. ولی تابع $g(x)=f(x^۲)$ قطعاً غیریکنواست. زیرا، مثلاً

$$g(۰)=f(۰),\quad g(-۱)=g(۱)=f(۱),\quad f(۰)<f(۱)$$

$۰<۱\Rightarrow g(۰)<g(۱)\Rightarrow$ تابع g نزولی نیست.

$-۱<۰\Rightarrow g(-۱)>g(۰)\Rightarrow$ تابع g صعودی نیست.

۹- گزینهٔ (۲) چون تابع f نزولی است، پس $f'(x)\leq ۰$. بنابراین $-f'(x)\geq ۰$ و در نتیجه

$$y=x^۳-f(x)\Rightarrow y'=۳x^۲-f'(x)\geq ۰$$

پس تابع $y=x^۳-f(x)$ صعودی است.

۱۰- گزینهٔ (۴) چون $f'(x)\leq ۰$، پس تابع $y=(fof)(x)$ صعودی است، زیرا

$$y'=f'(x)f'(f(x))\geq ۰$$

توابع f^3 و $\sqrt[3]{f}$ نزولی‌اند، زیرا

$$y=f^3(x)\Rightarrow y'=3f'(x)f^2(x)\le 0$$

$$y=\sqrt[3]{f(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}\le 0$$

ولی تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ می‌تواند غیریکنوا باشد. مثلاً تابع $f(x)=-x$ نزولی است ولی تابع $y=-\frac{1}{x}$ غیریکنواست.

۱۱- گزینهٔ ۲ چون تابع h روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس مشتق آن روی $\mathbb{R}$ منفی است. بنابراین

$$h'(x)=-f'(-x)g(x)+f(-x)g'(x)<0$$

$$f(-x)g'(x)<f'(-x)g(x)$$

۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)=3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(3,4)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۳- گزینهٔ ۲ در تابع $y=-x^3+x^2-2x$ مشتق تابع در هر نقطه‌ای منفی است و تابع نزولی است:

$$y'=-3x^2+2x-2<0 \qquad (\text{توجه کنید که } \Delta=4-24<0)$$

۱۴- گزینهٔ ۳ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{3}{4}]$ نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{3}{4},+\infty)$ صعودی است.

۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x(x-1)(x+2)=x(x^2+x-2)=x^3+x^2-2x$$

$$f'(x)=3x^2+2x-2=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

چون $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\simeq 0/54$ و $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\simeq -1/2$، پس تابع f روی بازهٔ $(-1,\frac{1}{2})$ نزولی است.

۱۶- گزینهٔ ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=x^3-3x^2+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=0$$

$$x=0, x=2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[0,2]$ نزولی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۲ است. توجه کنید که تابع f روی بازه‌هایی که زیرمجموعهٔ $[0,2]$ باشند نیز نزولی است. مثلاً، روی بازهٔ $[\frac{1}{2},1]$ هم نزولی است.

۱۷- گزینهٔ ۳ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=15x^4-240x^2$$
$$=15x^2(x^2-16)$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-4,4]$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۸ است.

۱۸- گزینهٔ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1,1]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{x^3+2}$$

$$f'(x)=\frac{x^3+2-3x^3}{(x^3+2)^2}=\frac{2(1-x^3)}{(x^3+2)^2}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+			+	0	−	

پس تابع f روی بازهٔ $[-1,1]$ صعودی و روی بازهٔ $[1,+\infty)$ نزولی است.

۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2+2)-2x^5}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^3(x^2+4)}{(x^2+2)^2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به شکل زیر است:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0]$ نزولی و روی بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که همواره $3x^2-x+1>0$، پس $D_f=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,\frac{1}{6})$ اکیداً نزولی است.

۲۲- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x\sqrt{x^2+1}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

صورت و مخرج کسر فوق عبارت‌هایی همواره مثبت‌اند. پس $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع f همواره صعودی است.

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x}}+1=\frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	//////		$-$	0	$+$	

یعنی تابع f روی بازهٔ $(0,1]$ نزولی و روی بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی است و حداقل مقدار a برابر ۱ است.

۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[4,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-4}}=\frac{2\sqrt{x-4}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}\Rightarrow 4x-16=x-1\Rightarrow x=5$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:
(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(9)>0$)

x		4		5		$+\infty$
$f'(x)$	//////		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $[4,5]$ نزولی و روی بازهٔ $[5,+\infty)$ صعودی است. یعنی حداکثر مقدار $b-a$ وقتی به‌دست می‌آید که $a=4$ و $b=5$ و برابر ۱ است.

۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-3}{3x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \sqrt[3]{x^4}=3\Rightarrow x^4=27\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{27}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{27}$		0		$\sqrt[4]{27}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	//////	$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-\sqrt[4]{27}]$ و $[\sqrt[4]{27},+\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $[-\sqrt[4]{27},0)$ و $(0,\sqrt[4]{27}]$ نزولی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\sqrt[4]{27}$ است.

۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{2-x}\geq 0\Rightarrow 0\leq x<2$$

اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=2x\sqrt{\frac{x}{2-x}}+x^2\times\frac{\frac{2}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}\geq 0$$

بنابراین مشتق تابع نامنفی است و تابع صعودی است.

۲۷- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x}+1-\frac{1}{2\sqrt{x}}x}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

واضح است که اگر $x>0$، علامت $f'(x)$ مثبت است و تابع f روی دامنه‌اش صعودی است.

۲۸- گزینهٔ ۱ تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+2)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}$$

واضح است که برای هر $x>0$ مشتق تابع مثبت است و تابع f روی دامنه‌اش صعودی است.

۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)-\{1\}$ و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

توجه کنید که مخرج کسر فوق همواره مثبت و صورت این کسر با توجه به دامنهٔ تابع همواره منفی است.

x	۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	۰	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	۰

همچنین

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

بنابراین جدول تغییرات تابع f به شکل بالاست و این تابع روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ نزولی است ولی در دامنه‌اش غیریکنواست.

۳۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=2x-\frac{8}{2\sqrt{x+3}}=\frac{2x\sqrt{x+3}-4}{\sqrt{x+3}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به‌دست می آوریم:

$$2x\sqrt{x+3}-4=0\Rightarrow x\sqrt{x+3}=2\Rightarrow x^2(x+3)=4$$

$$x^3+3x^2-4=0\Rightarrow (x-1)(x^2+4x+4)=0$$

$$(x-1)(x+2)^2=0\Rightarrow x=1\,,\,x=-2\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	-3		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	

تابع f روی بازهٔ $[-3,1]$ نزولی است و حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۳۱- گزینهٔ ۴ مشتق تابع f به صورت زیر است:

$$f'(x)=-3x^2+2ax-2$$

برای اینکه تابع f اکیداً نزولی باشد باید مشتق آن همواره نامثبت باشد. پس به‌ازای هر x،

$$-3x^2+2ax-2\le 0$$

بنابراین

$$\Delta=4a^2-24\le 0\Rightarrow a^2\le 6\Rightarrow -\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$$

۳۲- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f باید نامنفی باشد. پس

$$f'(x)=2x^2-2ax+a+1\ge 0$$

برای اینکه عبارت درجهٔ دوم فوق نامنفی باشد، باید

$$\Delta\le 0\Rightarrow 4a^2-8(a+1)\le 0\Rightarrow a^2-2a-2\le 0$$

$$1-\sqrt{3}\le a\le 1+\sqrt{3}$$

بنابرایـن حداکثر مقـدار a برابر $1+\sqrt{3}$ و کمترین مقدار آن برابر $1-\sqrt{3}$ است که مجموع آنها برابر ۲ است.

۳۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=2x^2+4x-m$$

برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشـد، باید $f'\ge 0$. در نتیجه، چون ضریب x^2 در f' مثبت است، باید $\Delta\le 0$. به این ترتیب

$$\Delta=4^2-4(-m)(2)\le 0\Rightarrow m\le -2$$

۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مشـتق تابع باید نامنفی باشد. پس باید به‌ازای هر x،

$$f'(x)=x^4+2kx^2+1\ge 0\Rightarrow -2kx^2\le x^4+1$$

$$-2k\le\frac{x^4+1}{x^2}\Rightarrow -2k\le x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$-2k-2\le x^2+\frac{1}{x^2}-2\Rightarrow -2k-2\le\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

حداقـل مقدار عبـارت $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ برابر صفر اسـت که به‌ازای $x=\pm 1$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید $-2k-2$ نامثبت باشد تا به‌ازای هر x نابرابری $-2k-2\le\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ برقرار باشد. پس

$$-2k-2\le 0\Rightarrow k\ge -1$$

۳۵- گزینهٔ ۳ به جز در ریشه‌های مخرج ضابطهٔ تابع f،

$$f'(x)=\frac{(2ax+2)(3x^2+bx+2b)-(6x+b)(ax^2+2x+b)}{(3x^2+bx+2b)^2}$$

$$=\frac{(ab-6)x^2+2b(2a-3)x+4b-b^2}{(3x^2+bx+2b)^2}$$

اگـر f تابعـی ثابت باشـد، مشـتق آن صفر اسـت. بنابراین چندجملـه‌ای صورت ضابطهٔ f' بایـد چندجمله‌ای ثابت صفر باشد. در نتیجه ضریب‌های این چندجمله‌ای صفرند:

$$\begin{cases} ab-6=0 \\ 2b(2a-3)=0 \\ 4b-b^2=0 \end{cases}$$

توجه کنید که $b\neq ۰$، زیرا اگر $b=۰$، تساوی $ab-۶=۰$ درست نیست. بنابراین از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $۲a-۳=۰$، یعنی $a=\frac{۳}{۲}$. بنابراین $\frac{۳}{۲}b-۶=۰$، یعنی $b=۴$. به این ترتیب، $a+b=\frac{۱۱}{۲}$.

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+x+۱-(۲x+۱)(x+k)}{(x^۲+x+۱)^۲}=\frac{-x^۲-۲kx+۱-k}{(x^۲+x+۱)^۲}$$

مخرج کسر فوق همواره مثبت است. پس باید صورت این کسر همواره نامثبت باشد تا f' نامثبت باشد و تابع f نزولی شود. برای اینکه عبارت درجهٔ دوم صورت کسر فوق همواره نامثبت باشد باید

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۴k^۲+۴(۱-k)\leq ۰\Rightarrow k^۲-k+۱\leq ۰\Rightarrow (k-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}\leq ۰$$

نابرابری اخیر به‌ازای هیچ مقدار k برقرار نیست و در نتیجه تابع f به‌ازای هیچ مقدار k نمی‌تواند نزولی باشد.

۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{kx-۲}{x+۱} & x\geq ۰\\ \frac{kx-۲}{-x+۱} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{k+۲}{(x+۱)^۲} & x>۰\\ \frac{k-۲}{(-x+۱)^۲} & x<۰\end{cases}$$

با توجه به پیوسته بودن تابع f، کافی است توابع $y=\frac{kx-۲}{-x+۱}, x<۰$ و $y=\frac{kx-۲}{x+۱}, x\geq ۰$ نزولی باشند تا تابع f نزولی باشد. پس این توابع باید نامثبت باشند. بنابراین

$$k+۲\leq ۰\Rightarrow k\leq -۲,\quad k-۲\leq ۰\Rightarrow k\leq ۲$$

یعنی اگر $k\leq -۲$ آن‌گاه تابع f نزولی است.

۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مشتق تابع f باید نامثبت باشد، یعنی

$$f'(x)=\frac{(۳kx^۲-۱)(x^۲+۱)-۲x(kx^۳-x)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$=\frac{kx^۴+(۳k+۱)x^۲-۱}{(x^۲+۱)^۲}\leq ۰$$

بنابراین باید به‌ازای هر x،

$$g(x)=kx^۴+(۳k+۱)x^۲-۱\leq ۰$$

واضح است که اگر $k\geq ۰$، آن‌گاه $g(x)$ نمی‌تواند همواره منفی باشد، مثلاً

$$g(۲)=۲۸k+۳>۰$$

همچنین اگر $k\leq -\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه $g(x)$ همواره منفی است.

اگر $-\frac{۱}{۳}<k<۰$، آن‌گاه

$$g(x)=k(x^۲+\frac{۳k+۱}{۲k})^۲-k(\frac{۳k+۱}{۲k})^۲-۱$$

$$=k(x^۲+\frac{۳k+۱}{۲k})^۲+\frac{۹k^۲+۱۰k+۱}{-۴k}$$

چون k منفی است، کافی است شرط $۹k^۲+۱۰k+۱\leq ۰$ برقرار باشد تا $g(x)\leq ۰$. بنابراین $-۱\leq k\leq -\frac{۱}{۹}$، در نتیجه $-\frac{۱}{۳}<k\leq -\frac{۱}{۹}$.

پس مجموعهٔ مقادیر k بازهٔ $(-\infty,-\frac{۱}{۹}]$ است.

۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع $g(x)=\sqrt{۲-x}+k$ با دامنهٔ $(-\infty,۱)$ نزولی است:

$$g'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}\Rightarrow g'(x)<۰$$

همچنین تابع $h(x)=x-x^۳$ با دامنهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی است:

$$h'(x)=۱-۳x^۲\xrightarrow{x\geq ۱}h'(x)<۰$$

پس کافی است مقادیر تابع h بیشتر از مقادیر تابع g نباشند تا تابع f نزولی باشد. بیشترین مقدار تابع g بیشتر از $k+۱$ است:

$$g(x)=\sqrt{۲-x}+k\xrightarrow{x<۱}g(x)>g(۱)=۱+k$$

بیشترین مقدار تابع h نیز برابر $h(۱)=۰$ است. پس

$$۱+k\geq ۰\Rightarrow k\geq -۱$$

۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=(-\infty,k]$ و

$$f'(x)=\sqrt{k-x}-\frac{x}{۲\sqrt{k-x}}=\frac{۲k-۳x}{۲\sqrt{k-x}}$$

با توجه به دامنهٔ تابع f نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$x\leq k\Rightarrow -۳x\geq -۳k\Rightarrow ۲k-۳x\geq -k$$

اگر $-k\geq ۰$، آن‌گاه برای هر x از دامنهٔ تابع f نابرابری $۲k-۳x\geq ۰$ برقرار است و در نتیجه $f'(x)\geq ۰$. پس برای هر k که $k\leq ۰$ تابع f صعودی است.

۴۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $k=۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x}{|x|}$ که روی $\mathbb{R}$ صعودی نیست. اگر $k\neq ۰$، آن‌گاه

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^۲+k^۲}-\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+k^۲}}}{x^۲+k^۲}=\frac{k^۲}{(x^۲+k^۲)\sqrt{x^۲+k^۲}}>۰$$

پس تابع f صعودی است.

۴۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، زیرا $f'(x)=3x^2+1>0$. بنابراین نامعادله به صورت زیر حل می‌شود:

$$f(f(x))<f(26x)\Rightarrow f(x)<26x\Rightarrow x^3+x<26x$$

$$x^3-25x<0\Rightarrow x(x^2-25)<0$$

با توجه به جدول زیر مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty,-5)\cup(0,5)$ است که شامل چهار عدد طبیعی است.

x	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
x^3-25x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

۴۳- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطه‌های ۱- و ۲ مینیمم نسبی دارد. مجموع این عددها برابر ۱ است.

۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

x	-1		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

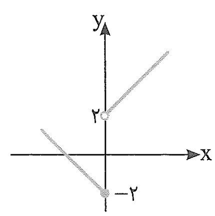
چون $f'(1)=0$ و تغییر علامت f' در نقطهٔ $x=1$ از مثبت به منفی است، پس تابع f در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد.

۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

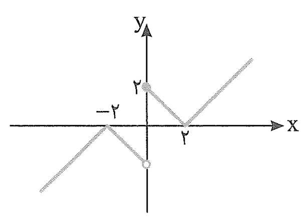
x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

چون $f'(1)=0$ و تابع f' در نقطهٔ $x=1$ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطهٔ $x=1$ مینیمم نسبی دارد.

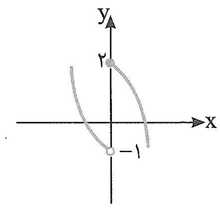
۴۶- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



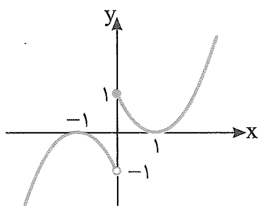
۴۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه‌های $x=-2$ و $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی دارد.



۴۸- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به صورت زیر است. این تابع در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای مینیمم نسبی ندارد.

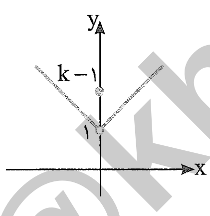


۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=1$ مینیمم نسبی دارد.



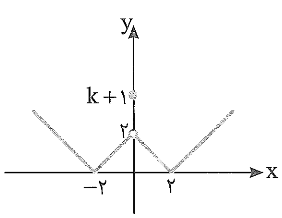
۵۰- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است که نقطهٔ $(0,k-1)$ هر جایی روی محور y می‌تواند باشد. چون تابع ماکزیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید بالاتر از نقطهٔ $(0,1)$ باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد و ماکزیمم نسبی ندارد. بنابراین

$$k-1>1\Rightarrow k>2$$



۵۱- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به صورت زیر است که نقطهٔ $(0,k+1)$ می‌تواند هر جای محور y باشد. اگر این نقطه بالاتر از نقطهٔ $(0,2)$ باشد یا بر آن منطبق باشد، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر این نقطه پایین‌تر از نقطهٔ $(0,2)$ باشد، آن‌گاه تابع در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد. ولی این نقطه باید بالای محور x باشد تا مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x=0$ رخ ندهد. پس

$$0<k+1<2\Rightarrow -1<k<1$$

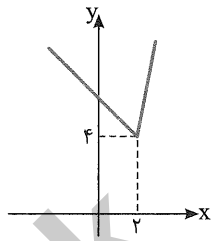


۵۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x \ge 2 \Rightarrow f(x)=2x+3(x-2)=5x-6$$

$$x \le 2 \Rightarrow f(x)=2x-3(x-2)=-x+6$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و مینیمم نسبی آن در نقطهٔ $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر ۴ است.



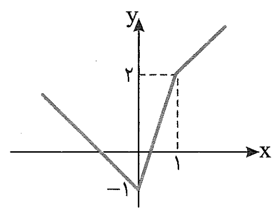
۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x \ge 1 \Rightarrow f(x)=2x-(x-1)=x+1$$

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow f(x)=2x+x-1=3x-1$$

$$x \le 0 \Rightarrow f(x)=-2x+x-1=-x-1$$

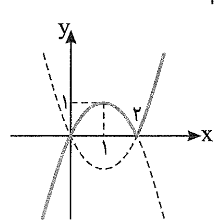
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد که $x=0$ است.



۵۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x \ge 2 \\ -x^2+2x & x<2 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است. واضح است که این تابع در نقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی و در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد.

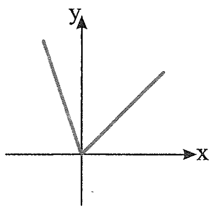


۵۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

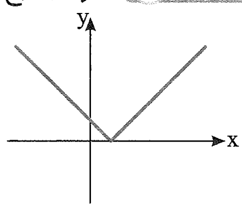
$$x \ge 0 \Rightarrow f(x)=|2x-x|=|x|=x$$

$$x \le 0 \Rightarrow f(x)=|2x+x|=|3x|=-3x$$

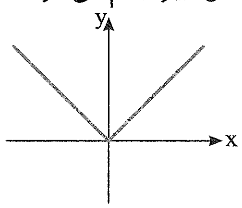
پس نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع فقط در نقطهٔ $x=0$ اکسترمم (مینیمم) نسبی دارد.



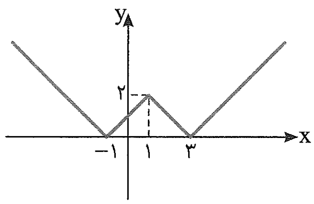
۵۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به شکل زیر رسم می‌شود:



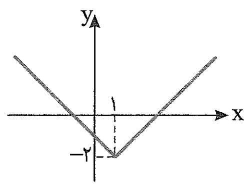
$y=|x-1|$



$y=|x|$



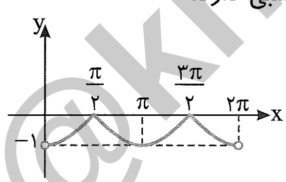
$f(x)=||x-1|-2|$



$y=|x-1|-2$

واضح است که تابع در نقطه‌های $x=-1$ و $x=3$ مینیمم نسبی و در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. پس تابع f سه نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۵۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به صورت زیر است. این تابع در نقطه‌های $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=\pi$ مینیمم نسبی دارد.

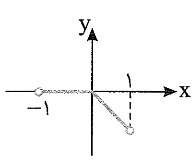


۵۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$0<x<1 \Rightarrow -1<-x<0 \Rightarrow [-x]=-1 \Rightarrow f(x)=-x$$

$$-1<x<0 \Rightarrow 0<-x<1 \Rightarrow [-x]=0 \Rightarrow f(x)=0$$

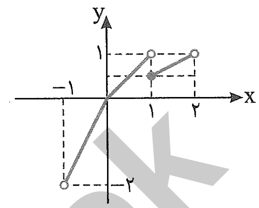
بنابراین نمودار تابع f در اطراف مبدأ مختصات به صورت زیر است و تابع در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد. همچنین واضح است که مقادیر تابع هیچ‌گاه مثبت نیستند، پس ماکزیمم مطلق تابع هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در $x=0$ ماکزیمم نسبی و مطلق دارد.



۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} 2x & -1<x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ \dfrac{x}{2} & 1\le x<2 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است و تابع روی بازهٔ $(-1,2)$ فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x=1$ دارد و نقطهٔ ماکزیمم نسبی ندارد.



۶۰- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

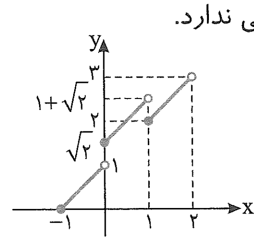
$$2-[x]^2\ge 0\Rightarrow [x]^2\le 2\Rightarrow -\sqrt{2}\le [x]\le \sqrt{2}$$

$$-1\le [x]\le 1\Rightarrow -1\le x<2$$

بنابراین تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x<0 \\ x+\sqrt{2} & 0\le x<1 \\ x+1 & 1\le x<2 \end{cases}$$

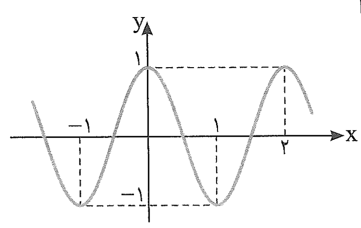
نمودار تابع f به شکل زیر است و مشخص است که این تابع نقطهٔ ماکزیمم نسبی ندارد.



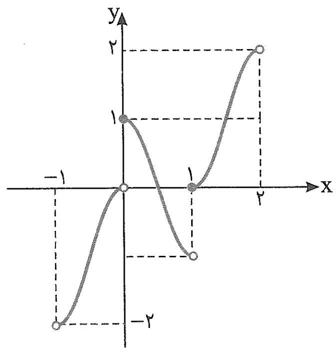
۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} -1+\cos(\pi x) & -1<x<0 \\ \cos(\pi x) & 0\le x<1 \\ 1+\cos(\pi x) & 1\le x<2 \end{cases}$$

اکنون نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=\cos(\pi x)$ رسم می‌کنیم:



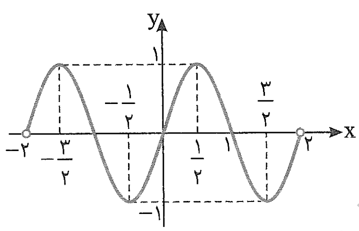
$y=\cos(\pi x)$



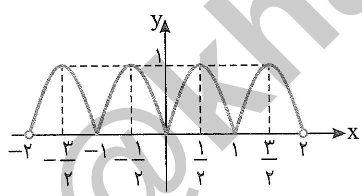
$y=f(x)$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و نقطهٔ مینیمم نسبی ندارد.

۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=1$ و در نتیجه $f(x)=\sin(\pi x)$ و اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=-1$ و در نتیجه $f(x)=-\sin(\pi x)$. پس نمودار تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ به صورت زیر است.



$y=\sin(\pi x)$



$y=f(x)$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ در نقاط $-\frac{3}{2}$، $-\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقاط -1، 0 و 1 مینیمم نسبی دارد.

۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}\Rightarrow 0\le \cos x<1$$

$$[\cos x]=0\Rightarrow f(x)=x$$

$$x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\Rightarrow -1\le \cos x<0$$

$$[\cos x]=-1\Rightarrow f(x)=x+1$$

$$x=0\Rightarrow f(x)=-1$$

@khanah_book

۷۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & x\geq 0 \\ -x^3-3x^2 & x\leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & x\geq 0 \\ -3x^2-6x & x\leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2,\ x=-2$$

جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است و تابع f در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی و در نقطه‌های $x=2$ و $x=-2$ مینیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

۷۴- گزینهٔ ۴ چون تابع f در نقطه‌های $x=-1$ و $x=3$ اکسترمم نسبی دارد و همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس $f'(-1)=f'(3)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=x^2-2ax+b$$

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2a+b=0 \\ 9-6a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=1\ ,\ b=-3$$

بنابراین $a+b=-2$.

۷۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2+2mx-6$$

چون تابع f' ریشهٔ مضاعف ندارد $(\Delta>0)$، پس ریشه‌هایش نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. اکنون توجه کنید که

$$\text{مجموع ریشه‌های } f' = \frac{-2m}{3}=-1 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

۷۶- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی آن ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$$

چون $f'(2)=0$ و f' در نقطهٔ $x=2$ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(2)=-13$، پس

$$2\times 8-3\times 4-12\times 2+a=-13 \Rightarrow a=7$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

۷۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد باید مشتق آن همواره مثبت یا همواره منفی یا گاهی صفر باشد. توجه کنید که $f'(x)=3x^2+2ax+1$. ضریب x^2 در عبارت $f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین باید $f'(x)\geq 0$. یعنی

$$\Delta\leq 0 \Rightarrow 4a^2-12\leq 0 \Rightarrow a^2\leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$$

۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2+2ax+1$$

برای اینکه تابع f یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد باید مشتق آن، که تابعی درجهٔ دوم است، دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta=4a^2-24>0 \Rightarrow a^2>6 \Rightarrow |a|>\sqrt{6}$$

۷۹- گزینهٔ ۴ چون $(-1,4)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است و تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس $f(-1)=4$ و $f'(-1)=0$. از طرف دیگر، $f'(x)=3x^2+2ax+b$. بنابراین

$$\begin{cases} f(-1)=4 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+a-b-1=4 \\ 3-2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-3\ ,\ b=-9$$

در نتیجه $a+b=-12$.

۸۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3+2bx^2+4x-\frac{4}{3}$$

$$f'(x)=ax^2+4bx+4$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow a-4b+4=0$$

از طرف دیگر، مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1)=2 \Rightarrow -\frac{a}{3}+2b-4-\frac{4}{3}=2 \Rightarrow -a+6b=22$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a-4b=-4 \\ -a+6b=22 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=32$ و $b=9$ و در نتیجه $a-b=23$.

۸۱- گزینهٔ ۴ چون $(-1,6)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f' است و تابع f' همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس $f'(-1)=6$ و $f''(-1)=0$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=3ax^2-6x+b \Rightarrow f''(x)=6ax-6$$

بنابراین

$$\begin{cases} f'(-1)=6 \\ f''(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+6+b=6 \\ -6a-6=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1\,,\, b=3$$

در نتیجه $a-b=-4$.

۸۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2+4ax+a^2$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=1$ مینیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس $f'(1)=0$:

$$3+4a+a^2=0 \Rightarrow a=-1\,,\, a=-3$$

اگر $a=-1$، آن‌گاه $f'(x)=3x^2-4x+1$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر تابع f در نقطهٔ $x=1$ مینیمم نسبی دارد:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اگر $a=-3$، آن‌گاه $f'(x)=3x^2-12x+9$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر تابع f در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

پس فقط $a=-1$ قابل قبول است.

۸۳- گزینهٔ ۴ ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس تابع f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ اکسترمم نسبی دارد و حاصل $f(1)f(-1)$ خواستهٔ مسئله است که برابر است با $-\frac{1}{4}$.

۸۴- گزینهٔ ۴ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی تابع f ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(12x-3)(x^2+1)-2x(6x^2-3x+2)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+8x-3=0 \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{8}{3}$$

۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2(x+1)}{x^6}=-\frac{2x+3}{x^4}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	

تابع f در نقطهٔ $x=-\frac{3}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد. چون $f(-\frac{3}{2})=\frac{4}{27}$، نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

۸۶- گزینهٔ ۲ چون $(-2,3)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است و تابع f در نقطهٔ -2 مشتق‌پذیر است، پس $f(-2)=3$ و $f'(-2)=0$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(1)(ax^2+bx-2)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^2+2ax+b+2}{(x+1)^2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} f(-2)=3 \\ f'(-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4a-2b-2}{-2+1}=3 \\ \frac{4a-4a+b+2}{(-2+1)^2}=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{5}{4}\,,\, b=-2$$

پس $ab=\frac{5}{2}$.

۸۷- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و در نقطهٔ -1 ماکزیمم نسبی دارد، پس $f'(-1)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{a(x^2-b)-2x(ax)}{(x^2-b)^2}=\frac{-ax^2-ab}{(x^2-b)^2}$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow \frac{-a-ab}{(1-b)^2}=0 \Rightarrow a+ab=0 \Rightarrow a(1+b)=0 \quad (1)$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که $a=0$ یا $b=-1$. اگر $a=0$، آن‌گاه f تابع ثابت صفر است و ماکزیمم نسبی آن در نقطهٔ $x=-1$ برابر -2 نیست. بنابراین $b=-1$.

از طرف دیگر، چون $(-1,-2)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است، پس $f(-1)=-2$. در نتیجه

$$\frac{-a}{1-b}=-2$$

$$a=2-2b=4$$

۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲x+a)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+ax)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$=\frac{-ax^۲+۲x+a}{(x^۲+۱)^۲}$$

برای اینکه تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(x)$ در دو نقطه تغییر علامت دهد. یعنی معادلهٔ $-ax^۲+۲x+a=۰$ باید دو ریشهٔ متمایز داشته باشد.

اگر $a=۰$، آن‌گاه معادلهٔ فوق فقط یک ریشهٔ $x=۰$ دارد.

اگر $a\neq۰$، آن‌گاه دلتای معادله همواره مثبت است و معادله دو ریشه دارد $(\Delta=۴+۴a^۲>۰)$. پس برای هر $a\neq۰$ تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۸۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲kx(x^۲+۱)-۲x(kx^۲+۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲(k-۱)x}{(x^۲+۱)^۲}$$

اگر $k-۱>۰$، آن‌گاه جدول تعیین علامت تابع f' به شکل زیر است و تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	

اگر $k-۱<۰$، آن‌گاه جدول تعیین علامت تابع f' به شکل زیر است و تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	

پس اگر $k<۱$، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد.

۹۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(x+k)^۲+۱-۲x(x+k)}{((x+k)^۲+۱)^۲}=\frac{-x^۲+k^۲+۱}{((x+k)^۲+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=k^۲+۱\Rightarrow x=\pm\sqrt{k^۲+۱}$$

بنابراین $f'(x)$ در دو نقطه صفر می‌شود و چون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ ساده هستند، پس $f'(x)$ در این نقاط تغییر علامت می‌دهد و تابع f همواره یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

x	$-\infty$		$-\sqrt{k^۲+۱}$		$\sqrt{k^۲+۱}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	

۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{k}{۲\sqrt{x}}-۱=\frac{k-۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow k=۲\sqrt{x}\Rightarrow x=\frac{k^۲}{۴},\ k>۰$$

پس طول نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع برابر $\frac{k^۲}{۴}$ است.

مقدار تابع f در این نقطه را به‌دست می‌آوریم:

$$f(\frac{k^۲}{۴})=k\sqrt{\frac{k^۲}{۴}}-\frac{k^۲}{۴}=\frac{k^۲}{۴}$$

بنابراین

$$\frac{k^۲}{۴}=۶\Rightarrow k^۲=۲۴\Rightarrow k=۲\sqrt{۶}$$

۹۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=(-\infty,۳]$ و

$$f'(x)=۱+\frac{-۱}{\sqrt{۳-x}}=\frac{\sqrt{۳-x}-۱}{\sqrt{۳-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۳-x}=۱\Rightarrow x=۲$$

پس $x=۲$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است که با توجه به صورت مسئله طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است و $f(۲)=۴$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۹۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۲x\sqrt{۳-x}$$

$$f'(x)=۲\sqrt{۳-x}-\frac{x}{\sqrt{۳-x}}=\frac{۶-۳x}{\sqrt{۳-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

بنابراین $x=۲$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و $f(۲)=۴$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۹۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+a}{۲\sqrt{x}}}{x}=\frac{۲x-x-a}{۲x\sqrt{x}}=\frac{x-a}{۲x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=a$$

پس $x=a$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,۵]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+\frac{-۲}{۲\sqrt{۵-x}}=\frac{\sqrt{۵-x}-۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۵-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۵-x}=۲\sqrt{x}\Rightarrow ۵-x=۴x\Rightarrow x=۱$$

پس $x=۱$ طول اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد نظر است که برابر است با $f(۱)=۵$.

۹۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(-\infty,\frac{1}{2}]$ و

$$f'(x)=\frac{\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}(x^2+4)-2x\sqrt{1-2x}}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{-x^2-4-2x+4x^2}{\sqrt{1-2x}(x^2+4)^2}=\frac{3x^2-2x-4}{(x^2+4)^2\sqrt{1-2x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{13}}{3}>\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق})\\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{3}<\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس $x=\frac{1-\sqrt{13}}{3}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

۹۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است و برای اینکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(1)=0$. پس

$$f'(x)=\sqrt[3]{x+1}+\frac{x+a}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{4x+a+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$f'(1)=\frac{4+a+3}{3\sqrt[3]{4}}=0\Rightarrow a=-7$$

۹۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

پس تابع f' فقط در نقطهٔ $x=0$ تغییر علامت می‌دهد و تابع f فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۹۹- گزینهٔ ۳ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x-4x^3}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^4)^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 4x(1-x^2)=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm1$$

البته در نقطهٔ $x=0$ تابع f مشتق‌پذیر نیست. جدول تغییرات تابع f به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	

پس تابع f در نقطه‌های $x=-1$ و $x=1$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد.

۱۰۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}-1\ ,\quad x\in(-3,3)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -x=\sqrt{9-x^2}$$

$$x^2=9-x^2$$

$$x=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ ,\ x=\frac{3}{\sqrt{2}}\ (\text{غ.ق.ق})$$

جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	-3		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد (نقطهٔ $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$).

۱۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(-\infty,k]$ و

$$f'(x)=\sqrt{k-x}-\frac{x}{2\sqrt{k-x}}$$

$$=\frac{2(k-x)-x}{2\sqrt{k-x}}$$

$$=\frac{2k-3x}{2\sqrt{k-x}}\ ,\quad x<k$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{2k}{3}$$

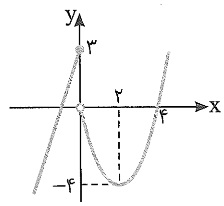
اگر $k<0$، آن‌گاه $\frac{2k}{3}>k$، پس $x=\frac{2k}{3}$ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی تابع f' هیچ‌جا صفر نمی‌شود و همواره $f'>0$. یعنی تابع f اکیداً صعودی است و ماکزیمم نسبی ندارد.

اگر $k>0$، آن‌گاه $\frac{2k}{3}<k$، پس تابع f' فقط در نقطهٔ $x=\frac{2k}{3}$ صفر می‌شود. توجه کنید که

x	$-\infty$		$\frac{2k}{3}$		k
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	

بنابراین اگر $k>0$، تابع f فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

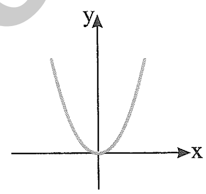
۱۰۲- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس $(۰,۳)$ و $(۲,-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آنها برابر ۱- است.



۱۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰ \\ -x^۳ & x\leq ۰ \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است و $f'(۰)=۰$ و $(۰,۰)$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است.



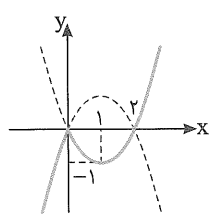
۱۰۴- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست (نقطهٔ گوشه‌ای دارد)، پس $x=۱$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است که عرض آن برابر ۳ است.

۱۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x\geq ۰ \\ -x^۲+۲x & x<۰ \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است و $f'(۱)=۰$ و f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین $x=۱$ و $x=۰$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس فاصلهٔ نقاط $O(۰,۰)$ و $A(۱,-۱)$ را باید به‌دست بیاوریم:

$$OA=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

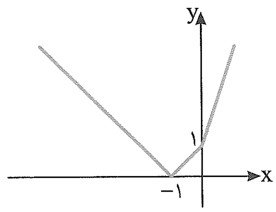


۱۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x\geq ۰ \Rightarrow f(x)=|۲x+x+۱|=۳x+۱$$

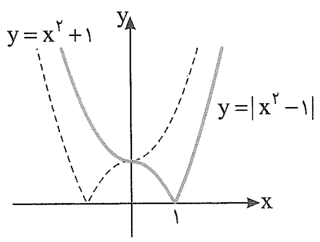
$$x\leq ۰ \Rightarrow f(x)=|۲x-x+۱|=|x+۱|$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=-۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و هیچ‌جا مشتق آن صفر نیست. پس دو نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۰۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=|x^۲-۱|$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=|-x^۲-۱|=x^۲+۱$.

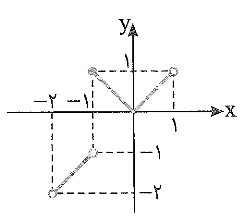
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. پس در نقطهٔ $x=۱$ تابع f مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x & -۲<x<-۱ \\ -x & -۱\leq x<۰ \\ x & ۰\leq x<۱ \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و تابع f در $x=۰$ و $x=-۱$ نقطهٔ بحرانی دارد، زیرا در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نیست و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق‌پذیر نیست.



۱۰۹- گزینهٔ ۳ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

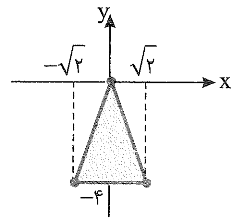
$$f'(x)=-۶x^۲+۶x=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱$$

پس $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آنها برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین $(0,0)$، $(\sqrt{2},-4)$ و $(-\sqrt{2},-4)$ نقاط بحرانی تابع هستند، و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با $4\sqrt{2}$.



۱۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & x\ge 1 \text{ یا } x\le -1\\ -x^3+x & -1\le x\le 1\end{cases}$$

تابع f در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست. همچنین

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x>1 \text{ یا } x<-1\\ -3x^2+1 & -1<x<1\end{cases}$$

پس

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

یعنی تابع f چهار نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(-\infty,0)$ و

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{-x}-\frac{-1}{2\sqrt{-x}}(3-x)}{-x}=\frac{2x+3-x}{-2x\sqrt{-x}}=-\frac{x+3}{2x\sqrt{-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-3$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس $x=-3$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است.

۱۱۳- گزینهٔ ۴ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sqrt{x+6}+\frac{x}{2\sqrt{x+6}}=\frac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-4$$

پس $x=-4$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است.

۱۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(0,4)$ و

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{4-x}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{2(4-x)\sqrt{4-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow (4-x)\sqrt{4-x}=x\sqrt{x}$$

$$(4-x)^3=x^3\Rightarrow 4-x=x\Rightarrow x=2$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس $x=2$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است.

۱۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=(-4,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x+4}-\frac{x^2-13}{2\sqrt{x+4}}}{x+4}=\frac{3x^2+16x+13}{2(x+4)\sqrt{x+4}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+16x+13=0\Rightarrow x=-1,\ x=-\frac{13}{3}\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس $x=-1$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است با $f(-1)=-4\sqrt{3}$.

۱۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\sqrt[3]{x-4}+\frac{x}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}=\frac{4x-12}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=4$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(3)=0$. پس $x=3$ و $x=4$ طول‌های نقاط بحرانی تابع f هستند که مجموع آنها برابر ۷ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{8x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(-\frac{1}{2})=0$ و $f'(\frac{1}{2})=0$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$$

تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق ندارد و در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشتق آن صفر است. پس این تابع پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

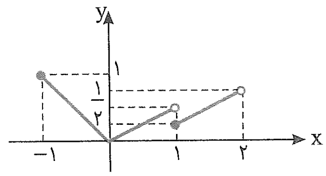
۱۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$-1\le x<0\Rightarrow f(x)=\frac{-x}{-1+2}=-x$$

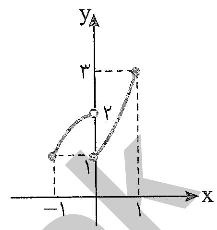
$$0\le x<1\Rightarrow f(x)=\frac{x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

$$1\le x<2\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+2}=\frac{x}{3}$$

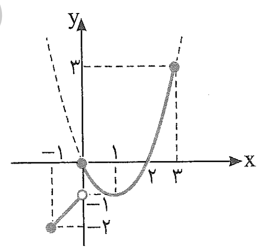
پس نمودار تابع f به صورت زیر است. مقدار مینیمم مطلق تابع برابر صفر و مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر ۱ است و مجموع آنها برابر ۱ است.



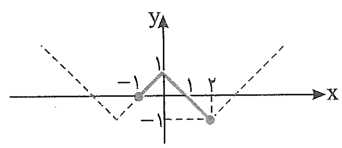
۱۲۰- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به صورت زیر است. مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر ۳ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر ۱ است و مجموع آنها برابر ۴ است.



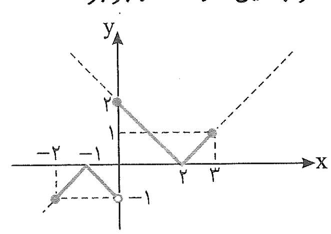
۱۲۱- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.



۱۲۲- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است و حداکثر مقدار تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر ۱ است.



۱۲۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است و مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر -۱ است و حاصل‌ضرب این دو مقدار برابر -۲ است.



۱۲۴- گزینهٔ ۱ f تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=-۳x^۲+۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-۲\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(-۱)$، $f(۳)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-۱,۳]$ مشخص شود:

$$f(-۱)=-۹,\quad f(۳)=۱۱,\quad f(۲)=۱۸$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع ۱۸ و کمترین مقدار آن -۹ است که اختلاف آنها برابر ۲۷ است.

۱۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۳mx^۲+۶mx$. چون

$$f''(x)=۶mx+۶m$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow x=-۱$$

پس تنها نقطهٔ بحرانی تابع f' نقطهٔ $x=-۱$ است و بیشترین مقدار تابع f' به‌ازای $x=-۱$ به‌دست می‌آید:

$$f'(-۱)=۱۲\Rightarrow ۳m-۶m=۱۲\Rightarrow m=-۴$$

۱۲۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۳(x+۲)^۲(x-۱)+(x+۲)^۳$$

$$=(x+۲)^۲(۴x-۱),\quad x\in(-۱,۲)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

اکنون توجه کنید که $f(-۱)=-۲$، $f(\frac{۱}{۴})=-\frac{۳^۷}{۲^۸}$ و $f(۲)=۶۴$، پس مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر $-\frac{۳^۷}{۲^۸}$ و مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر ۶۴ است. حاصل‌ضرب این عددها برابر $-\frac{۳^۷}{۴}$ است.

۱۲۷- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۵x^۴-۲۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۵(x^۴-۴)=۰$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{۲}\\ x=-\sqrt{۲}\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۲)$ و $f(\sqrt{۲})$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(۰)=a,\quad f(\sqrt{۲})=-۱۶\sqrt{۲}+a,\quad f(۲)=a-۸$$

پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر a و مقدار مینیمم مطلق آن برابر $a-۱۶\sqrt{۲}$ است. بنابراین

$$a+a-۱۶\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow a=۹\sqrt{۲}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱۰x^{۹}-۱۰=۱۰(x^{۹}-۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم مطلق تابع معلوم شود:

$$f(۱)=-۸,\quad f(-۱)=۱۲,\quad f(۲)=۱۰۰۵$$

پس $(۱,-۸)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ است. بنابراین $a=۱$، $b=-۸$ و $a+b=-۷$.

۱۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۳x+۲ & ۲\le x\le ۳\\ -x^{۲}+۳x-۲ & ۰\le x<۲\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & ۲<x<۳\\ -۲x+۳ & ۰<x<۲\end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(\frac{۳}{۲})=۰$.

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۳)$، $f(۲)$ و $f(\frac{۳}{۲})$ را مقایسه کنیم تا مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع به‌دست آید:

$$f(۰)=-۲,\quad f(۳)=۲,\quad f(۲)=۰,\quad f(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

۱۳۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-۵x^{۳}-x(x-۱) & ۰\le x<۱\\ -۵x^{۳}+x(x-۱) & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-۵x^{۳}-x^{۳}+x & ۰\le x<۱\\ -۵x^{۳}+x^{۲}-x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-۱۵x^{۲}-۲x+۱ & ۰<x<۱\\ -۱۵x^{۲}+۲x-۱ & ۱<x<۲\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}-۱۵x^{۲}-۲x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۵},\ x=-\frac{۱}{۳}\ \text{(غ.ق.ق)}\\ -۱۵x^{۲}+۲x-۱=۰\ \text{ریشه ندارد}\end{cases}$$

اکنون توجه کنید که $f(۰)=۰$، $f(۱)=-۵$، $f(\frac{۱}{۵})=\frac{۳}{۲۵}$ و $f(۲)=-۳۸$. بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $\frac{۳}{۲۵}$ است.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{-۲x+۱}{(x^{۲}-x+۱)^{۲}}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

پس باید مقادیر $f(-\frac{۱}{۲})$، $f(۱)$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را مقایسه کنیم:

$$f(۱)=۱,\quad f(\frac{۱}{۲})=\frac{۴}{۳},\quad f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۴}{۷}$$

پس بیشترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},۱]$ برابر $\frac{۴}{۳}$ و کمترین مقدار آن در این بازه $\frac{۴}{۷}$ است که اختلاف آنها برابر $\frac{۱۶}{۲۱}$ است.

۱۳۲- گزینهٔ ۳ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x^{۲}+۱)-۲x^{۴}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{x^{۴}+۳x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^{۲}(x^{۲}+۳)=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین باید مقادیر $f(۰)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم:

$$f(۰)=۰,\quad f(-۱)=-\frac{۱}{۲},\quad f(۲)=\frac{۸}{۵}$$

پس $\frac{۸}{۵}$ و $-\frac{۱}{۲}$ به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ هستند که حاصل‌ضرب آنها برابر $-\frac{۴}{۵}$ است.

۱۳۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۲x-\frac{۱۶}{x^{۲}}$، پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(۲)=۱۲$.

۱۳۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,۵]$ و تابع f روی بازهٔ $(۰,۵)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}=\frac{۲\sqrt{۵-x}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۵-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{۵-x}=\sqrt{x}$$

$$۴(۵-x)=x\Rightarrow x=۴$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(4)$ و $f(5)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌دست آید:

$$f(0)=\sqrt{5},\quad f(4)=5,\quad f(5)=2\sqrt{5}$$

بنابراین حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $5\sqrt{5}$ است.

۱۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[-1,1]$ و تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس باید مقادیر $f(-1)$، $f(1)$، $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ را با هم مقایسه کنیم تا حداکثر مقدار تابع به‌دست آید. البته واضح است که مقدار ماکزیمم تابع در نقطه‌ای که طول آن مثبت باشد به‌دست می‌آید، پس فقط $f(1)$ و $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(1)=0,\quad f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}$$

پس حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-1,1]$ و تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{1-x^2}=x\Rightarrow 1-x^2=x^2$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین باید $f(1)$، $f(-1)$، $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-1,1]$ پیدا شود:

$$f(1)=1,\quad f(-1)=-1$$

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2},\quad f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $\sqrt{2}$ و کمترین مقدار آن برابر -1 است و نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a)}{x}=\frac{x-a}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=a\notin[1,4]\quad (\text{غ.ق.ق})$$

پس باید بین مقادیر $f(1)$ و $f(4)$ دنبال ماکزیمم مطلق تابع بگردیم:

$$f(1)=1+a,\quad f(4)=2+\frac{a}{2}$$

چون a عددی از بازهٔ $(0,1)$ است، مقدار $2+\frac{a}{2}$ از مقدار $1+a$ بزرگ‌تر است، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع $2+\frac{a}{2}$ است. بنابراین

$$2+\frac{a}{2}=\frac{9}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۱۳۸- گزینهٔ ۴ عبارت داده شده را $f(x)$ می‌نامیم. پس $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f(x)=\frac{3a}{\sqrt[4]{a^3}}\times x^{\frac{-1}{4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\times x^{\frac{3}{4}}$$

$$f'(x)=-\frac{3a}{4\sqrt[4]{a^3}}\times x^{\frac{-5}{4}}+\frac{3}{4\sqrt[4]{a^3}}\times x^{\frac{-1}{4}}=\frac{-3a+3x}{4\sqrt[4]{a^3}\times x\sqrt[4]{x}}$$

اگر $f'(x)=0$، آن‌گاه $x=a$. بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع برابر است با

$$f(a)=\frac{3a+a}{\sqrt[4]{a^4}}=4$$

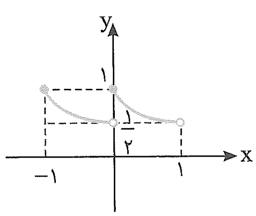
۱۳۹- گزینهٔ ۲ چون $0\le x-[x]<1$، پس $-1<f(x)\le 0$، بنابراین از اینکه تابع $g(x)=2^x$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$g(-1)<g(f(x))\le g(0)\Rightarrow\frac{1}{2}<(gof)(x)\le 1$$

پس تابع gof مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازهٔ $[-1,1)$ توجه کنید.

$$-1\le x<0\Rightarrow f(x)=-1-x\Rightarrow(gof)(x)=2^{-x-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^x$$

$$0\le x<1\Rightarrow f(x)=-x\Rightarrow(gof)(x)=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x$$



۱۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا طول نقاط بحرانی تابع مشتق‌پذیر f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3(x^2-2x-3)=0$$

$$3(x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1\ ,\ x=3\ (\text{غ.ق.ق})$$

اکنون مقادیر $f(-2)$ ، $f(2)$ و $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شود:

$$f(-2)=3\ ,\quad f(2)=-17\ ,\quad f(-1)=10$$

پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است.

۱۴۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=x^3-3x^2-4x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x(x^2-3x-4)=0$$

$$x=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=4$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(0)=0\ ,\quad f(-1)=-\frac{3}{4}\ ,\quad f(4)=-32$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر ۳۲- است.

۱۴۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$$

$$=\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^3-x^2\le x^3$، پس $\sqrt[3]{x^3-x^2}\le\sqrt[3]{x^3}$ و در نتیجه $f(x)\ge 0$. از طرف دیگر $f(0)=0$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

۱۴۳- گزینهٔ ۳ در تابع

$$f(x)=(x-1)|(x-1)(x+2)|$$

$x=-2$ ریشهٔ ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست. در $x=1$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است.

اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)\ge 0\\ -(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \left((x-1)^2(x+2)\right)'=0$$

$$2(x-1)(x+2)+(x-1)^2=(x-1)(3x+3)=0$$

$$x=1,-1$$

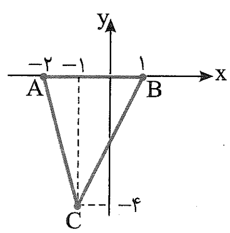
پس نقطهٔ بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-1$ است. بنابراین

نقاط بحرانی: $A(-2,0)\ ,\ B(1,0)\ ,\ C(-1,-4)$

در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}$$

$$=\frac{4\times 3}{2}=6$$



۱۴۴- گزینهٔ ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازهٔ $[-4,3]$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$$

$$f'(x)=x^2-2x-15$$

$$f'(x)=0\Rightarrow (x-5)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=5\end{cases}$$

$x=5$ در بازهٔ مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-4)=-\frac{64}{3}-16+60=-\frac{64}{3}+44$$

$$=\frac{68}{3}=22/\overline{6}$$

مقدار ماکزیمم مطلق: $f(-3)=-\frac{27}{3}-9+45=-18+45=27$

مقدار مینیمم مطلق: $f(3)=\frac{27}{3}-9-45=-45$

۱۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2+2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\sqrt[3]{x^2}=\frac{2(x-1)^2+6x(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

$$x=1\,,\,x=\frac{1}{4}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{x}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

با توجه به جدول، $x=\frac{1}{4}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

۱۴۶- گزینهٔ ۲ چون $x-y=12$، پس $y=x-12$ و

$$2x^2+y^2=2x^2+(x-12)^2=3x^2-24x+144$$

بنابرایــن باید کمترین مقدار تابع $f(x)=3x^2-24x+144$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=6x-24\,,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=4$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

پــس کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=4$ به‌دســت می‌آید و برابر است با $f(4)=96$.

۱۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$xy+yz=y(x+z)=y(1-y)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(y)=y(1-y)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(y)=1-2y\,,\quad f'(y)=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

چون تنها نقطهٔ بحرانی تابع f نقطهٔ $y=\frac{1}{2}$ است، پس بیشترین مقدار تابع f به‌ازای $y=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

۱۴۸- گزینهٔ ۲ چون $x+y=2$، پس $y=2-x$، در نتیجه

$$x^3+y^3=x^3+(2-x)^3$$
$$=2(3x^2-6x+4)$$

بنابراین بایــد کمترین مقدار تابع $f(x)=2(3x^2-6x+4)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=2(6x-6)=12(x-1)$$
$$f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

پــس کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=1$ به‌دســت می‌آید و برابر است با $f(1)=2$.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ چون $2x+y=8$، پس $y=8-2x$ و

$$xy^3=x(8-2x)^3=8x(4-x)^3$$

بنابراین باید بیشــترین مقدار تابع $f(x)=8x(4-x)^3$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=8(4-x)^3-24x(4-x)^2$$
$$=32(4-x)^2(1-x)$$
$$f'(x)=0\Rightarrow x=4,\,x=1$$

چون تابع f' در $x=4$ تغییــر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=1$ اکسترمم نسبی دارد. همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

پس بیشــترین مقدار تابع f به‌ازای $x=1$ به‌دســت می‌آید و برابر است با $f(1)=216$.

۱۵۰- گزینهٔ ۱ توجــه کنیــد کــه $x_1+x_2=m$ و $x_1x_2=2m-1$. بنابراین

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=m^2-2(2m-1)$$
$$=m^2-4m+2$$

بنابراین بایــد کمترین مقدار تابــع $y=m^2-4m+2$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=2m-4\,,\quad y'=0\Rightarrow m=2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به‌ازای $m=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با -2.

۱۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که طول نقطه‌های A و B صفرهای تابع f هستند، در نتیجه x_A+x_B برابر مجموع صفرهای تابع درجهٔ دوم f است:

$$x_A+x_B=-\frac{3-2m}{m^2-2}=\frac{2m-3}{m^2-2}$$

اگر $y=\frac{2m-3}{m^2-2}$، آن‌گاه

$$y'=\frac{2(m^2-2)-2m(2m-3)}{(m^2-2)^2}=\frac{-2m^2+6m-4}{(m^2-2)^2}$$

$$y'=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow m=1\,,\,m=2$$

اگر $m=2$، آن‌گاه ضریب x^2 در ضابطهٔ تابع f مثبت می‌شود و در نتیجه نمودار تابع f پایین‌ترین نقطه دارد که چنین نیست. بنابراین $m=1$ و کمترین مقدار تابع y به‌ازای $m=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۱.

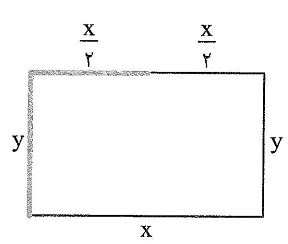
۱۵۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه x و y باشند (شکل را ببینید). در این صورت، طبق فرض $x+y+\frac{x}{2}=120$، یعنی $\frac{3}{2}x+y=120$. بنابراین

$$\text{مساحت باغچه}=xy=x(120-\frac{3}{2}x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(120-\frac{3}{2}x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=120-3x\,,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=40$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به‌ازای $x=40$ به‌دست می‌آید و برابر است با $40\times60=2400$.



۱۵۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال-جنوب برابر x و در امتداد شرق-غرب برابر y باشد. در این صورت، $xy=10000$ و هزینهٔ نرده‌کشی برابر است با

$$S=15000(2x)+60000(2y)=30000x+120000y$$

$$=3\times10^4x+\frac{12\times10^8}{x}$$

بنابراین $S'=3\times10^4-\frac{12\times10^8}{x^2}$ و اگر $S'=0$، $x=200$.
بنابراین کمترین مقدار تابع S به‌ازای $x=200$ به‌دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{10000}{200}=50$. بنابراین محیط زمین برابر است با $2(200+50)=500$.

۱۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{1}{2}(5-x)(12+x^2+8x+4)$$
$$=\frac{1}{2}(5-x)(x^2+8x+16)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=\frac{1}{2}(5-x)(x^2+8x+16)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=-\frac{1}{2}(x^2+8x+16)+(5-x)(x+4)$$
$$=-\frac{3}{2}x^2-3x+12$$
$$y'=0\Rightarrow x=2,\ x=-4\ \text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{1}{2}(3)(36)=54$.

۱۵۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ P $(x, x(7-x))$ باشد. در این صورت مجموع مختصات P برابر است با

$$x+x(7-x)=8x-x^2$$

فرض کنید $y=8x-x^2$. در این صورت $y'=8-2x$، پس

$$y'=0\Rightarrow x=4$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y به‌ازای $x=4$ به‌دست می‌آید. یعنی طول نقطهٔ P برابر ۴ است.

۱۵۶- گزینهٔ ۴ چون ۴- و ۲ نقطه‌های برخورد سهمی مورد نظر با محور x هستند، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+4)(x-2)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(0,-4)$ می‌گذرد، پس $-4=a(4)(-2)$، بنابراین $a=\frac{1}{2}$. یعنی $y=\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$. به این ترتیب، اگر (x, y) نقطه‌ای روی سهمی باشد، باید کمترین مقدار تابع زیر را پیدا کنیم:

$$f(x)=x+y=x+\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=\frac{1}{2}x^2+2x-4$$

چون $f'(x)=x+2$، پس تنها ریشهٔ f' نقطهٔ $x=-2$ است. بنابراین کمترین مقدار تابع برابر است با $f(-2)=-6$.

۱۵۷- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2+(x+6-3)^2}=\sqrt{5x^2+6x+9}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{5x^2+6x+9}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که همواره $5x^2+6x+9>0$ و

$$f'(x)=\frac{10x+6}{2\sqrt{5x^2+6x+9}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{3}{5}$ به‌دست می‌آید.

۱۵۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید B نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^2$ باشد. در این صورت مختصات نقطهٔ B به صورت (x,x^2) است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$$

اگر $y=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$، آن‌گاه $y'=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$

و در نتیجه

$$y'=0\Rightarrow 2x^3+x-3=0$$

$$2(x^3-1)+(x-1)=0$$

$$(x-1)(2x^2+2x+3)=0$$

$$x=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب، نقطهٔ B $(1,1)$ است.

۱۵۹- گزینهٔ ۱ اگر B نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=\sqrt{2x}$ باشد، مختصات آن به صورت $(x,\sqrt{2x})$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{2x}-0)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+2x}=\sqrt{x^2-2x+4}$$

اگر $y=\sqrt{x^2-2x+4}$، آن‌گاه $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$، در نتیجه

$$y'=0\Rightarrow x=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y، یعنی کمترین مقدار طول پاره‌خط AB به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید. بنابراین نقطهٔ B $(1,\sqrt{2\times 1})$، یعنی $(1,\sqrt{2})$ است.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ فرض کنید (x,x^2) نقطه‌ای روی سهمی $y=x^2$ باشد. فاصلهٔ این نقطه تا خط $y-3x+6=0$ برابر است با

$$\frac{|x^2-3x+6|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|x^2-3x+6|}{\sqrt{10}}$$

$$=\frac{x^2-3x+6}{\sqrt{10}}$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر، جایی است که کمترین مقدار تابع $y=x^2-3x+6$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که

$$y'=2x-3$$

$$y'=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{15}{4}\Rightarrow x+y=\frac{21}{4}$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید A نقطهٔ $(x,\frac{4}{x})$ باشد. در این صورت

$$OA=\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}$$

توجه کنید که کمترین مقدار OA جایی به‌دست می‌آید که کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$ به‌دست می‌آید. اکنون توجه کنید که

$$y'=2x-\frac{32}{x^3}\Rightarrow y'=0\Rightarrow x=\pm 2$$

چون $f(\pm 2)=8$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، پس کمترین مقدار تابع f برابر با ۸ است. بنابراین، کمترین مقدار طول پاره‌خط OA برابر $\sqrt{8}$ است.

۱۶۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید A و B به ترتیب نقطه‌های (x,y_1) و (x,y_2) باشند. در این صورت $y_1=x^2-x+5$ و $y_2=-x^2+3x$ و

$$AB=\sqrt{(x-x)^2+\left(x^2-x+5-(-x^2+3x)\right)^2}$$

$$=\sqrt{(2x^2-4x+5)^2}=2x^2-4x+5$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $y=2x^2-4x+5$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=4x-4$$

$$y'=0\Rightarrow x=1$$

به این ترتیب، کمترین مقدار تابع y به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۳.

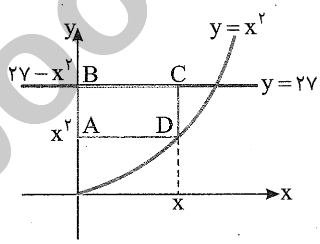
۱۶۳- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض آن برابر $x^۲$ است. به این ترتیب، عرض نقطهٔ A هم برابر $x^۲$ است و در نتیجه $AB=۲۷-x^۲$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = x(۲۷-x^۲)$$

اگر $y=x(۲۷-x^۲)$، آن‌گاه $y=۲۷x-x^۳$، در نتیجه $y'=۲۷-۳x^۲$، پس

$$y'=۰ \Rightarrow x=۳ \quad (\text{توجه کنید که } x>۰)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به‌ازای $x=۳$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۳(۲۷-۹)=۵۴$.



۱۶۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر $-x$ باشد. در این صورت، چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۲+۱$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر $x^۲+۱$ است. به این ترتیب، عرض نقطهٔ D هم برابر $x^۲+۱$ است و در نتیجه

$$CD=۵-(x^۲+۱)=۴-x^۲$$

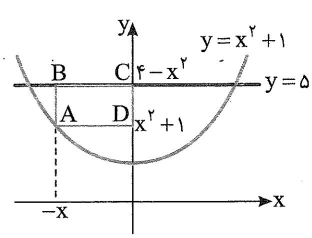
بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = x(۴-x^۲)$$

اگر $y=x(۴-x^۲)$، آن‌گاه $y=۴x-x^۳$، در نتیجه $y'=۴-۳x^۲$. پس

$$y'=۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad (\text{توجه کنید که } x>۰)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به‌ازای $x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۲}{\sqrt{۳}}(۴-\frac{۴}{۳})=\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۹}$.



۱۶۵- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر x باشد ($۰<x<۹$). در این صورت طول نقطهٔ B هم برابر x است و چون نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر $x^۲$ است. همچنین، $AD=۹-x$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = x^۲(۹-x)$$

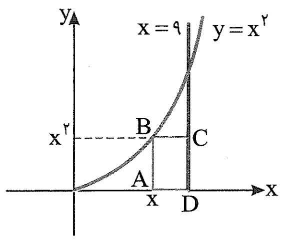
اگر $y=x^۲(۹-x)$، آن‌گاه $y=۹x^۲-x^۳$، پس

$$y'=۱۸x-۳x^۲$$

در نتیجه

$$y'=۰ \Rightarrow x=۰, x=۶$$

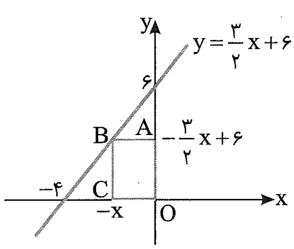
چون $۰<x<۹$، پس بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD وقتی به‌دست می‌آید که $x=۶$ و برابر است با $۶^۲(۹-۶)=۱۰۸$.



۱۶۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ B هم برابر $-x$ است. نقطهٔ B روی خطی است که از نقطه‌های $(-۴,۰)$ و $(۰,۶)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط $y=\frac{۳}{۲}x+۶$ است. بنابراین عرض نقطهٔ B برابر $-\frac{۳}{۲}x+۶$ است. به این ترتیب،

$$\text{مساحت مستطیل } OABC = x(-\frac{۳}{۲}x+۶)$$

پس باید بیشترین مقدار تابع $y=x(-\frac{۳}{۲}x+۶)$ را پیدا کنیم. چون $y'=-۳x+۶$، اگر $y'=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل OABC به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲\times۳=۶$.



۱۶۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ B برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ A هم برابر $-x$ است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=۲x^۳+۸$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر است با $۸-۲x^۳$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث } OAB=\frac{۱}{۲}x(۸-۲x^۳)$$

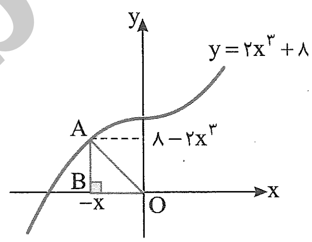
اگر $y=\frac{۱}{۲}x(۸-۲x^۳)$، آن‌گاه $y=۴x-x^۴$، پس

$$y'=۴-۴x^۳$$

در نتیجه

$$y'=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی به‌دست می‌آید که $x=۱$ و برابر است با $\frac{۱}{۲}(۱)\big(۸-۲(۱)\big)=۳$.



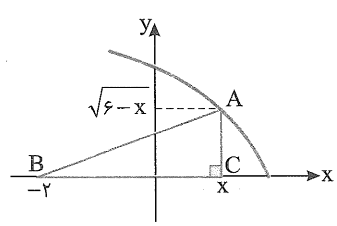
۱۶۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{۶-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{۶-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{۶-x}$. از طرف دیگر، $BC=x+۲$. به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث } ABC=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$$

بنابراین باید xای را پیدا کنیم که تابع $y=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$y'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}+\frac{۱}{۲}(x+۲)\frac{-۱}{۲\sqrt{۶-x}}$$

$$y'=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}=\frac{x+۲}{۴\sqrt{۶-x}}\Rightarrow ۶-x=\frac{x+۲}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$



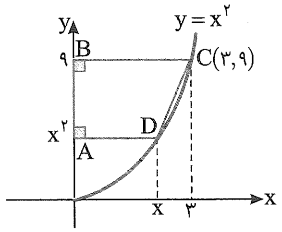
۱۶۹- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض نقطهٔ D برابر $x^۲$ است. در نتیجه، عرض نقطهٔ A نیز برابر $x^۲$ است. به این ترتیب، $BA=۹-x^۲$. بنابراین

$$\text{مساحت ذوزنقهٔ } ABCD=\frac{۱}{۲}AB(BC+AD)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$$

اگر $y=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$، آن‌گاه $y'=\frac{۳}{۲}(۳+x)(۱-x)$، پس

$$y'=۰\Rightarrow x=۱\quad(x>۰\text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ ABCD به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۲}(۹-۱)(۳+۱)=۱۶$.



۱۷۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت طول نقطهٔ C هم برابر x است. از طرف دیگر، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ و نقطهٔ C روی نمودار تابع $y=۱۲-x^۲$ است، پس عرض نقطهٔ D برابر $x^۲$ و عرض نقطهٔ C برابر $۱۲-x^۲$ است. در نتیجه

$$CD=۱۲-x^۲-x^۲=۱۲-۲x^۲$$

همچنین، از روی شکل معلوم است که طول نقطهٔ A برابر $-x$ است، پس $AD=۲x$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD=۲x(۱۲-۲x^۲)$$

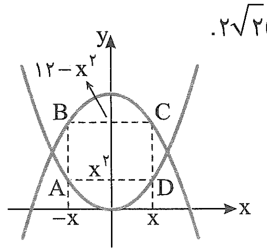
اگر $y=۲x(۱۲-۲x^۲)$، آن‌گاه $y=۴(۶x-x^۳)$، پس

$$y'=۱۲(۲-x^۲)$$

در نتیجه

$$y'=۰\Rightarrow x=\sqrt{۲}\quad(x>۰\text{ توجه کنید که})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به‌ازای $\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲\sqrt{۲}(۱۲-۴)=۱۶\sqrt{۲}$.

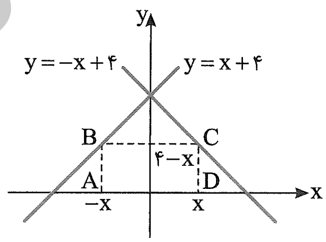


۱۷۱- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=-x+4$ است، پس عرض نقطهٔ C برابر $-x+4$ است.

اکنون توجه کنید که عرض نقطهٔ B هم برابر $-x+4$ است، و چون نقطهٔ B روی خط $y=x+4$ است، پس طول نقطهٔ B برابر $-x$ است. به این ترتیب طول نقطهٔ A نیز برابر $-x$ است، در نتیجه $AD=2x$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل ABCD}=2x(4-x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=2x(4-x)$ را به‌دست بیاوریم. چون $y'=8-4x$، پس اگر $y'=0$، آن‌گاه $x=2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2\times2\times2=8$.



۱۷۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=20-2x$ است، پس عرض نقطهٔ C برابر $20-2x$ است. اکنون توجه کنید که عرض نقطهٔ B هم برابر با $20-2x$ است، و چون نقطهٔ B روی خط $y=3x$ است، پس طول نقطهٔ B برابر است با $\frac{20-2x}{3}$. بنابراین طول نقطهٔ A نیز برابر $\frac{20-2x}{3}$ است. به این ترتیب،

$$AD=x-\frac{20-2x}{3}=\frac{5x-20}{3}$$

بنابراین

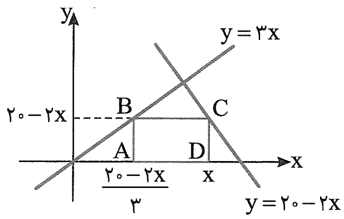
$$\text{مساحت مستطیل ABCD}=\frac{5x-20}{3}\times(20-2x)$$

$$=\frac{10}{3}(x-4)(10-x)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=\frac{10}{3}(x-4)(10-x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=\frac{20}{3}(-x+7)\,,\quad y'=0\Rightarrow x=7$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به‌ازای $x=7$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{10}{3}(7-4)(10-7)=30$.



۱۷۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید $AC=x$. در این صورت $CE=9-x$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABC و CDE،

$$BC+CD=\sqrt{6^2+x^2}+\sqrt{12^2+(9-x)^2}$$

بنابراین باید xای را پیدا کنیم که تابع

$$y=\sqrt{6^2+x^2}+\sqrt{12^2+(9-x)^2}$$

کمترین مقدار ممکن باشد. توجه کنید که

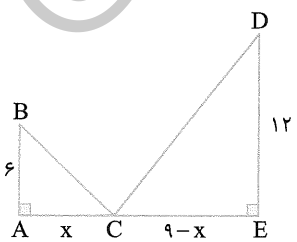
$$y'=\frac{x}{\sqrt{6^2+x^2}}-\frac{9-x}{\sqrt{12^2+(9-x)^2}}$$

$$y'=0\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{6^2+x^2}}=\frac{9-x}{\sqrt{12^2+(9-x)^2}}$$

$$\frac{x^2}{6^2+x^2}=\frac{(9-x)^2}{12^2+(9-x)^2}\Rightarrow\frac{6^2+x^2}{x^2}=\frac{12^2+(9-x)^2}{(9-x)^2}$$

$$\frac{6^2}{x^2}+1=\frac{12^2}{(9-x)^2}+1\Rightarrow\frac{6}{x}=\pm\frac{12}{9-x}$$

$$x=3,\ x=-9\ \text{(غ.ق.ق)}$$



۱۷۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $KB'=KB=x$ و $KC=6-x$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $KB'C$،

$$KB'^2=KC^2+B'C^2\Rightarrow x^2=(6-x)^2+B'C^2$$

$$B'C^2=x^2-(6-x)^2=12x-36$$

$$B'C=\sqrt{12x-36}=2\sqrt{3x-9}$$

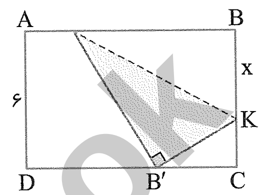
بنابراین

$$\text{KB'C مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}(۶-x)(۲\sqrt{۳x-۹})$$
$$=(۶-x)\sqrt{۳x-۹}$$

بنابرایـن باید xای را پیدا کنیم که تابع $y=(۶-x)\sqrt{۳x-۹}$ بیشترین مقدار ممکن باشد. توجه کنید که

$$y'=-\sqrt{۳x-۹}+\frac{۳(۶-x)}{۲\sqrt{۳x-۹}}$$

$$y'=۰ \Rightarrow x=۴$$



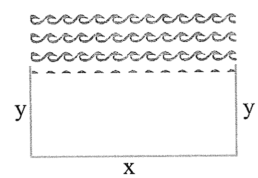
۱۷۵- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر،

$$x+۲y=۸۸ \Rightarrow x=۸۸-۲y$$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ ماکزیمم باشد:

$$S(y)=(۸۸-۲y)y=-۲y^{۲}+۸۸y$$

$$S'=-۴y+۸۸=۰ \Rightarrow y=۲۲ \Rightarrow S_{max}=۹۶۸$$



۱۷۶- گزینهٔ ۳ کمیتی که باید کمینه گردد، مســاحت جانبی قیف است:

$$S=\pi rl=\pi r\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}$$

از طرف دیگر حجم قیف برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، یعنی

$$\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow r^{۲}h=۱ \Rightarrow r^{۲}=\frac{۱}{h}$$

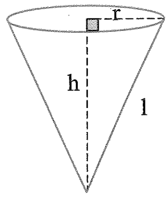
اکنون S را برحسب h می‌نویسیم:

$$S=\pi\sqrt{r^{۲}h^{۲}+r^{۴}}=\pi\sqrt{\frac{۱}{h}\times h^{۲}+\frac{۱}{h^{۲}}}$$
$$=\pi\sqrt{h+\frac{۱}{h^{۲}}}=\pi\sqrt{\frac{h^{۳}+۱}{h^{۲}}}$$

برای اینکه کمترین مقدار جنس مصرف شود، باید

$$S'=۰ \Rightarrow \frac{۳h^{۴}-۲h(h^{۳}+۱)}{h^{۴}}=۰$$

$$h^{۴}-۲h=۰ \Rightarrow \begin{cases} h=۰ & (\text{غ.ق.ق}) \\ h=\sqrt[۳]{۲} \end{cases}$$



۱۷۷- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول x برابر با $f'(x)$ است. بنابراین

$$m=f'(x)=-x^{۲}+۴x-۱$$

بیشترین مقدار $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m'=-۲x+۴\ , \quad m'=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow m=۳$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y-f(۲)=۳(x-۲) \Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۳x-۶$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=۰ \Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۰-۶ \Rightarrow y=-\frac{۸}{۳}$$

فصل ششم

هندسه

فصل ششم

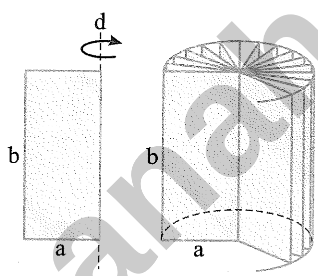
درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

دوران حول محور

اگر شــکلی هندســی را حول یک محور دوران دهیم یک جسم هندسی به‌دست می‌آید. در شکل‌های زیر، حاصل دوران برخی شکل‌های معروف حول یک محور را نشان داده‌ایم.

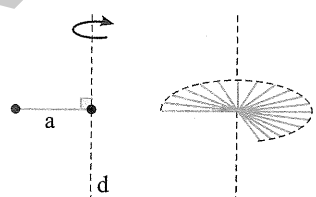
- جســم حاصل از دوران مســتطیل شکل زیر حول خط d، یک اســتوانه است. شعاع قاعدهٔ این استوانه برابر a و ارتفاع آن برابر b است.

$\pi a^2 b =$ حجم استوانه



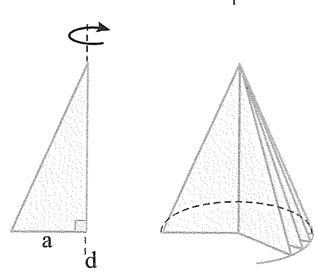
- جسم حاصل از دوران پاره‌خط شکل زیر حول خط d، یک قرص به شعاع a است.

$\pi a^2 =$ مساحت قرص



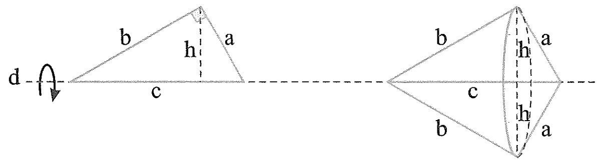
- جســم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ شــکل زیر حول خط d، یک مخروط است. شعاع قاعدهٔ این مخروط برابر a و ارتفاع آن برابر b است.

$\frac{\pi a^2 b}{3} =$ حجم مخروط



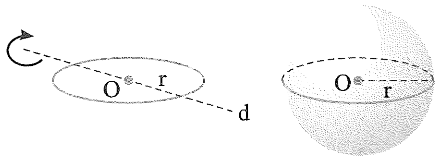
● جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر حول خط d، دو مخروط به هم چسبیده است.

$$\text{حجم جسم حاصل} = \frac{\pi h^{۲} c}{۳}$$



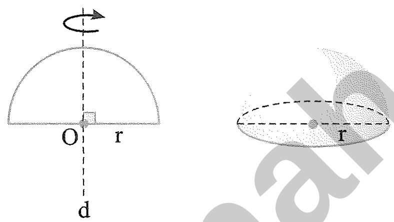
● جسم حاصل از دوران دایرهٔ شکل زیر حول خط d، یک کره است.

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

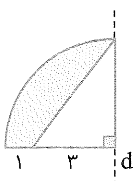


● جسم حاصل از دوران نیم‌دایرهٔ شکل زیر حول خط d، یک نیم‌کره است.

$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$$



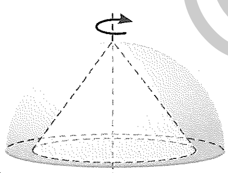
تست ۱ **ربع دایرهٔ شکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران قسمت رنگی چقدر است؟**



۱) $\frac{۹۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۹۴\pi}{۳}$

۳) $\frac{۹۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۹۷\pi}{۳}$

راه‌حل جسم حاصل نیم‌کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این جسم برابر است با



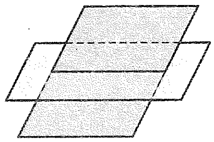
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times ۴^{۳}\right)-\frac{\pi\times ۳^{۲}\times ۴}{۳}=\frac{۹۲\pi}{۳}$$

برش

تعریف **شکل حاصل از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی، سطح مقطع این جسم نامیده می‌شود.**

تذکر سطح مقطع ممکن است توپر یا توخالی باشد. همین‌طور، سطح مقطع حاصل از برش یک جسم با صفحه‌های مختلف ممکن است متفاوت باشد.

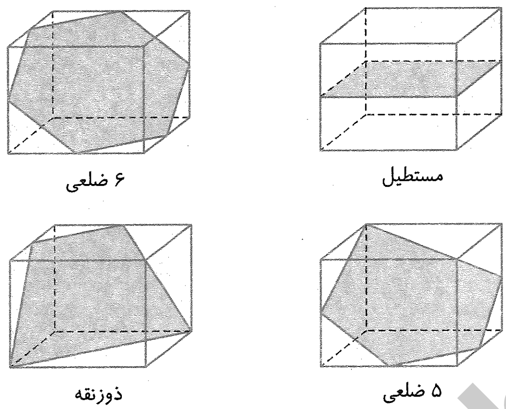
مثال: سطح مقطع هر صفحه خطی راست است.



تست ۲ سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل چندتا از شکل‌های زیر را می‌تواند ایجاد کند؟
شش‌ضلعی، ذوزنقه، پنج‌ضلعی، مثلث، مستطیل

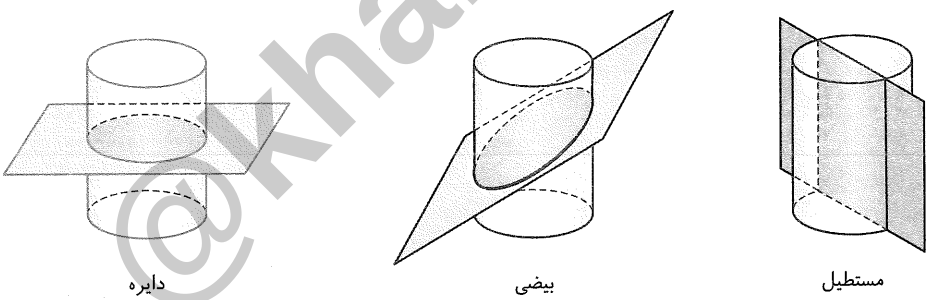
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

راه‌حل



بنابراین هر پنج شکل می‌تواند ایجاد شود.

مثال: سطح مقطع یک استوانه را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم.



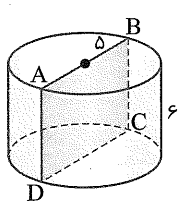
اگر استوانه توپر باشد، سطح مقطع آن، شکل‌های گفته شده به همراه نقاط درون آنها هستند.

تست ۳ استوانه‌ای قائم به ارتفاع ۶ و شعاع قاعدهٔ ۵ را با صفحه‌ای عمودی گذرا از مرکز قاعدهٔ آن برش می‌زنیم. محیط سطح مقطع حاصل کدام است؟

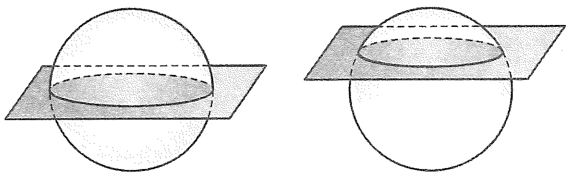
۱) ۲۲ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۲۸

راه‌حل اگر استوانهٔ قائم را با صفحه‌ای عمودی گذرا از مرکز قاعدهٔ آن برش بزنیم، مستطیلی ایجاد می‌شود که طول آن دو برابر شعاع قاعده یعنی ۱۰ و عرض آن برابر ارتفاع استوانه یعنی ۶ است. بنابراین

$$\text{محیط سطح مقطع} = ۲(۱۰+۶) = ۳۲$$



سـطح مقطع یک کره را در شـکل‌های زیر نشان داده‌ایم. همهٔ این سـطح مقطع‌ها دایره هستند. بیشترین مقدار مساحت سطح مقطع‌های ایجاد شده مربوط به صفحه‌هایی است که از مرکز کره می‌گذرند. اگر کره توپر باشد، سطح مقطع آن دایره همراه با نقاط درون آن است.



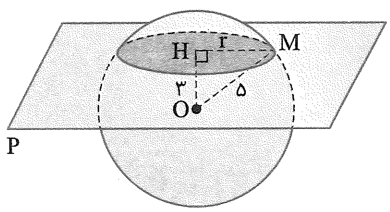
تست ۴

صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شـعاع ۵ سـانتی‌متر را قطع کرده اسـت. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از این صفحه، ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع کدام است؟

۱) 8π ۲) 16π

۳) 4π ۴) 25π

راه‌حل سـطح مقطع حاصل، یک دایره اسـت. این دایره در شـکل با مرکز H و شـعاع HM مشـخص شده اسـت. با توجه به اطلاعات مسئله و قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHM،



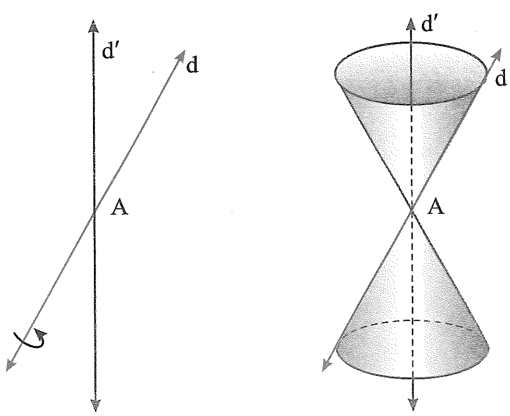
$$r=\sqrt{OM^2-OH^2}$$
$$=\sqrt{25-9}=4$$

پس مساحت دایرهٔ ایجاد شده برابر است با

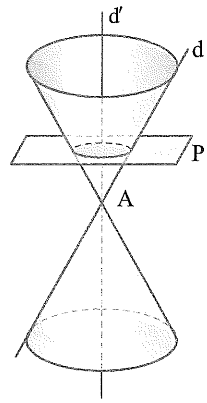
$$\pi r^2=\pi\times 4^2=16\pi$$

آشنایی با مقاطع مخروطی

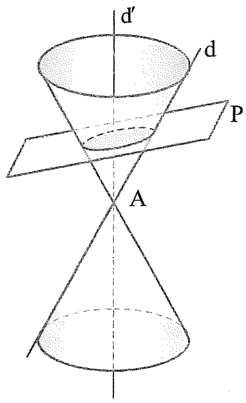
فـرض می‌کنیم خط‌های d و d' در نقطهٔ A متقاطع باشـند. اگـر خط d را حول خط d' دوران دهیم، شکل حاصل را یک **سطح مخروطی** می‌نامند. در این سطح مخروطی، خط d' را **محور**، نقطهٔ A را **رأس** و خط d را **مولد** می‌نامند.



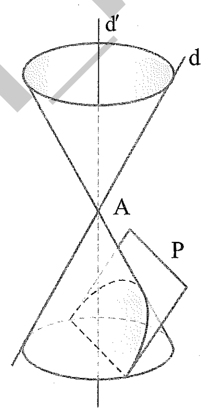
ســطح مقطع‌های یک سطح مخروطی را **مقاطع مخروطی** می‌نامند. انواع مقاطع مخروطی را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم.



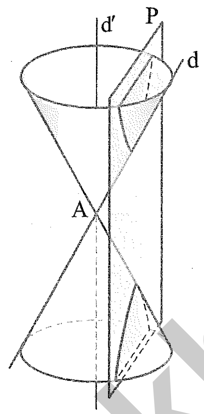
- اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن نگذرد، سطح مقطع **دایره** است.



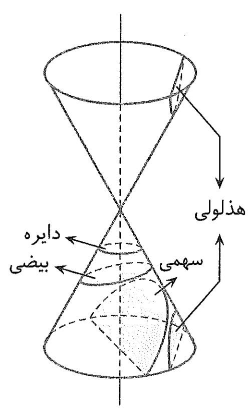
- اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی نگذرد، بر محور آن عمود نباشد و با مولد سطح مخروطی موازی نباشد، سطح مقطع **بیضی** است.



- اگر صفحهٔ P با مولد ســطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن نگذرد، سطح مقطع **سهمی** است.



- اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قســمت پاییــنی قطع کند و از رأس آن نگذرد، سطح مقطع **هذلولی** است.

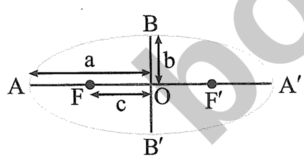


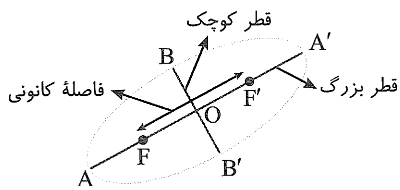
بیضی

تعریف بیضی مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت در صفحه برابر مقداری ثابت است. این دو نقطهٔ ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند.

در شکل زیر نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند. طول پاره‌خط FF' را فاصلهٔ کانونی بیضی می‌نامند. وسط پاره‌خط FF' را مرکز بیضی می‌نامند و با O نشان می‌دهند. قطری را که از کانون‌های بیضی می‌گذرد، یعنی AA'، قطر بزرگ یا قطر کانونی بیضی و قطری را که بر قطر کانونی بیضی عمود است، یعنی BB'، قطر کوچک بیضی می‌نامند.

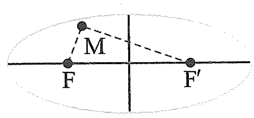
در بیضی نصف طول قطر بزرگ را با a، نصف طول قطر کوچک را با b و نصف فاصلهٔ کانونی را با c نشان می‌دهیم.



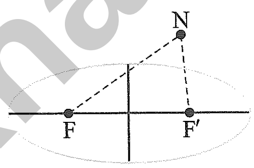


نکته

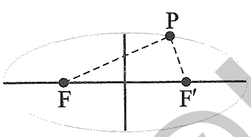
مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های آن برابر با $2a$ است. اگر نقطه‌ای خارج بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ بیشتر است و اگر نقطه‌ای درون بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن تا کانون‌های بیضی از $2a$ کمتر است.



$MF+MF'<2a$

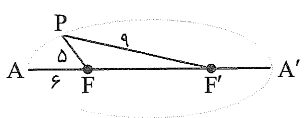


$NF+NF'>2a$



$PF+PF'=2a$

تست ۵ **در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های یک بیضی‌اند و P نقطه‌ای از این بیضی است. فاصلهٔ کانونی این بیضی چقدر است؟**



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

راه‌حل مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

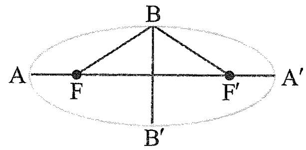
$$2a=PF+PF'=5+9=14$$

اکنون دقت کنید که $A'F'=AF=6$. با توجه به شکل فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با

$$FF'=AA'-AF-A'F'$$

$$2c=14-6-6=2$$

نکته



چون نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' است، پس $BF=BF'$.

از طرف دیگر، $BF+BF'=۲a$، پس $BF=BF'=a$.

اگر در یک بیضی، نصف طول قطر بزرگ برابر a، نصف طول قطر کوچک برابر b و نصف فاصلهٔ کانونی برابر c باشد، آن‌گاه $a^۲=b^۲+c^۲$.

تست ۶ طول قطر بزرگ و قطر کوچک یک بیضی به ترتیب برابر ۸ و ۶ است. فاصلهٔ کانونی این بیضی چقدر است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۷}$ ۴) $۶\sqrt{۷}$

راه‌حل طول قطر بزرگ، طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی بیضی به ترتیب ۲a، ۲b و ۲c است. بنابراین

$$۲a=۸\Rightarrow a=۴$$

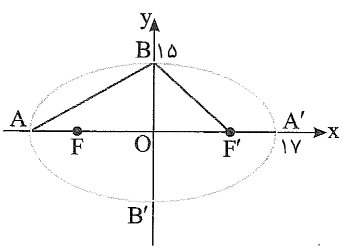
$$۲b=۶\Rightarrow b=۳$$

از طرف دیگر،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۶=۹+c^۲\Rightarrow c^۲=۷\Rightarrow c=\sqrt{۷}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $۲c=۲\sqrt{۷}$.

تست ۷ در شکل مقابل مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های بیضی روی محور x هستند. مساحت مثلث ABF' چقدر است؟



۱) $\frac{۳۷۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳۴۵}{۲}$

۳) $\frac{۲۵۵}{۲}$ ۴) $\frac{۳۵۵}{۲}$

راه‌حل چون مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های بیضی روی محور x هستند، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است. یعنی BB' قطر کوچک بیضی است. اکنون توجه کنید که $a=OA'=۱۷$ و $b=OB=۱۵$. در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۷^۲=۱۵^۲+c^۲\Rightarrow c=۸$$

بنابراین $AF'=a+c=۲۵$. در نتیجه، مساحت مثلث ABF' برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AF'\times OB=\frac{۱}{۲}\times ۲۵\times ۱۵=\frac{۳۷۵}{۲}$$

تعریف اگر در یک بیضی نصف طول قطر بزرگ را با a و نصف فاصلهٔ کانونی را با c نشان دهیم، مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز** بیضی می‌نامند و معمولاً با حرف e نشان می‌دهند.

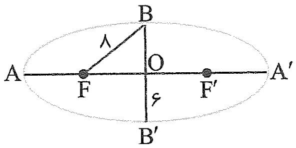
نکته

چون $a^۲=b^۲+c^۲$، پس $c<a$، در نتیجه $۰<\frac{c}{a}<۱$. بنابراین خروج از مرکز بیضی همواره از ۱ کمتر است.

هر چقدر خروج از مرکز بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چقدر خروج از مرکز کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر می‌شود.

تست ۸

در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند و BB' قطر کوچک بیضی است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۸}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

راه‌حل بنابر فرض‌های مسئله،

$$a = BF = ۸\ , \quad b = OB' = ۶$$

بنابراین

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۸^۲ = ۶^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۷}$$

پس خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$.

تست ۹

فاصلهٔ کانونی یک بیضی برابر $۲\sqrt{۵}$ و اختلاف طول قطر بزرگ و قطر کوچک آن برابر ۲ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

راه‌حل بنابر فرض مسئله،

$$۲c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

$$۲a - ۲b = ۲ \Rightarrow a - b = ۱ \quad (۱)$$

بنابراین

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = c^۲ \Rightarrow (a-b)(a+b) = ۵$$

$$\xrightarrow{(۱)} a + b = ۵ \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲)، $a = ۳$ به‌دست می‌آید. در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

فصل ششم

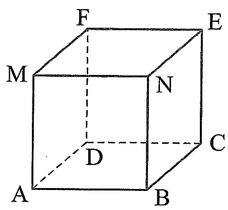
درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- یک هرم مربع‌القاعده مفروض است. اگر صفحه‌ای بر ارتفاع این هرم عمود باشد، سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟

۱) مثلث ۲) دو خط متقاطع ۳) مربع ۴) ذوزنقه

۲- در مکعب شکل روبه‌رو، صفحهٔ P از کدام‌یک از رأس‌های آن عبور کند تا سطح مقطع حاصل مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد؟



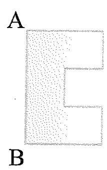
۱) M، B و D ۲) M، D و E

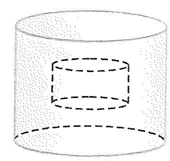
۳) A، B و F ۴) A، N و C

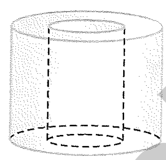
۳- سطح مقطع یک استوانه با صفحه‌های افقی، مایل و قائم چه شکلی نمی‌تواند باشد؟

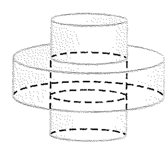
۱) مثلث ۲) مستطیل ۳) بیضی ۴) دایره

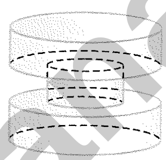
۴- از دوران شکل مقابل حول AB کدام جسم فضایی ایجاد می‌شود؟



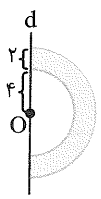
۱) 

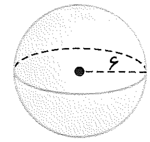
۲) 

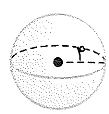
۳) 

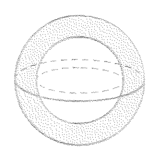
۴) 

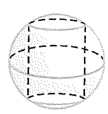
۵- مطابق شکل مقابل، دو نیم‌دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۴ و ۶ را در نظر بگیرید. از دوران قسمت رنگی حول خط d، کدام شکل به‌وجود می‌آید؟



۱) 

۲) 

۳) 

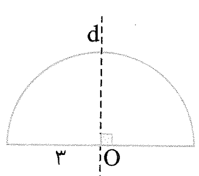
۴) 

۶- از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن کدام شکل فضایی ایجاد می‌شود؟

۱) دو مخروط مساوی با قاعدهٔ مشترک ۲) دو مخروط با قاعدهٔ مشترک

۳) یک استوانه که دو مخروط از آن جدا شده است. ۴) یک استوانه که دو مخروط به آن اضافه شده است.

۷- نیم‌دایره‌ای به مرکز O در شکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. مساحت جانبی جسم حاصل چقدر است؟



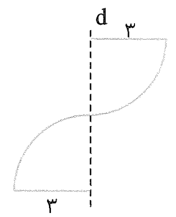
۱) ۴۲π

۲) ۳۶π

۳) ۳۲π

۴) ۲۷π

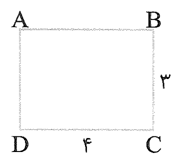
۸- شـکل مقابل را که از دو ربع دایره هر یک به شـعاع ۳ درسـت شده است، حول خط d دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



۱) ۶۴π ۲) ۴۸π

۳) ۳۶π ۴) ۲۷π

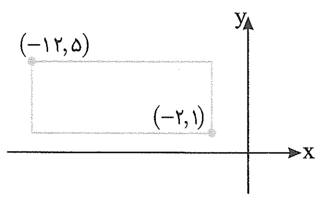
۹- مسـتطیل ABCD در شـکل مقابل را حول ضلع AB آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



۱) ۴۲π ۲) ۳۶π

۳) ۳۲π ۴) ۲۴π

۱۰- مستطیل شکل مقابل را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



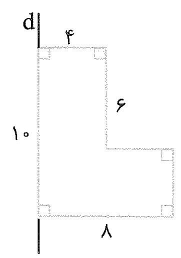
۱) ۵۶۰π

۲) ۵۷۰π

۳) ۵۷۲π

۴) ۵۷۶π

۱۱- شکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



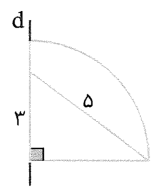
۱) ۳۴۶π

۲) ۳۴۸π

۳) ۳۵۰π

۴) ۳۵۲π

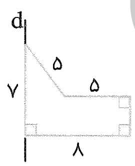
۱۲- ربع دایرهٔ شکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران قسمت رنگی چقدر است؟



۱) $\frac{۸۶\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۸۰\pi}{۳}$

۳) $\frac{۸۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۸۲\pi}{۳}$

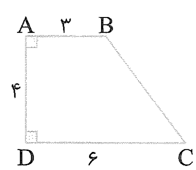
۱۳- شکل مقابل را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



۱) ۲۰۰π ۲) ۲۰۲π

۳) ۲۰۴π ۴) ۲۱۲π

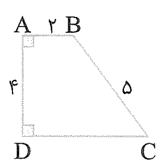
۱۴- ذوزنقهٔ ABCD در شـکل مقابل را حول ضلع CD آن دوران می‌دهیم. حجم جسـم حاصل چقدر است؟



۱) ۶۴π ۲) ۶۲π

۳) ۵۶π ۴) ۴۸π

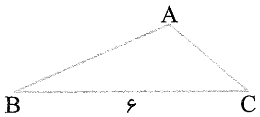
۱۵- ذوزنقهٔ ABCD در شـکل مقابل را حول ضلع AB آن دوران می‌دهیم. حجم جسـم حاصل چقدر است؟



۱) ۷۲π ۲) ۶۴π

۳) ۵۶π ۴) ۴۸π

۱۶- مساحت مثلث ABC در شکل مقابل برابر ۱۲ است. این مثلث را حول ضلع BC آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟

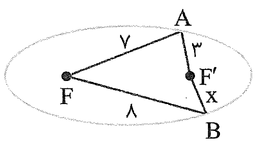


۱) ۴۸π ۲) ۳۶π
۳) ۳۲π ۴) ۲۴π

۱۷- نقطه‌های $F(-۳,۱)$ و $F'(۷,۳)$ کانون‌های یک بیضی‌اند. مرکز این بیضی کدام نقطه است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۲,۲)$ ۴) $(۲,۱)$

۱۸- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های یک بیضی و A و B دو نقطه از این بیضی هستند. مقدار x چقدر است؟

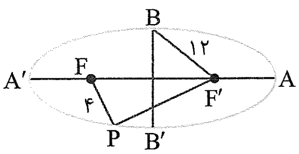


۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۱۹- نقطه‌های $F(۲,-۹)$ و $F'(۳,-۵)$ کانون‌های یک بیضی هستند و $P(-۳,۳)$ نقطه‌ای از این بیضی است. طول قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟

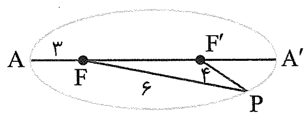
۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۲۰- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند، BB' قطر کوچک بیضی و P نقطه‌ای از بیضی است. طول پاره‌خط PF' چقدر است؟



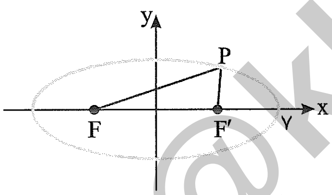
۱) ۱۰ ۲) ۱۶
۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲۱- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و P نقطه‌ای روی بیضی است. فاصلهٔ کانونی این بیضی چقدر است؟



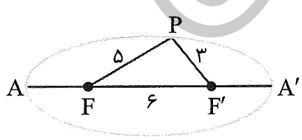
۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۲۲- در شکل مقابل مرکز بیضی در مبدأ مختصات است، کانون‌های بیضی روی محور x هستند و P نقطه‌ای از بیضی است. اگر $PF-PF'=۸$، طول پاره‌خط PF' چقدر است؟



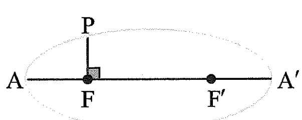
۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۲۳- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و P نقطه‌ای از بیضی است. طول پاره‌خط AF چقدر است؟



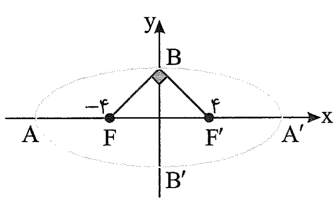
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) ۵

۲۴- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند و P نقطه‌ای از بیضی است. اگر $AA'=۸$ و $PF=۲$، فاصلهٔ کانونی بیضی چقدر است؟



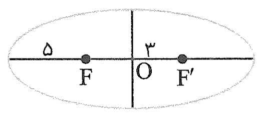
۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

۲۵- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و روی محور x هستند. اگر $F\hat{B}F'=۹۰^\circ$، طول قطر بزرگ بیضی چقدر است؟



۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

۲۶- در شکل مقابل F و F' کانون‌های بیضی هستند و O مرکز بیضی است. طول قطر کوچک این بیضی چقدر است؟



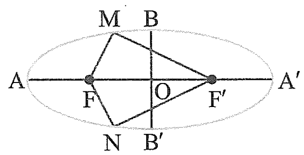
۱) $\sqrt{۵۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵۵}$

۳) $۴\sqrt{۷}$ ۴) $۸\sqrt{۷}$

۲۷- نقطهٔ $O(-۳,۴)$ مرکز و نقطهٔ $F(۱,۱)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است. اگر طول قطر کوچک این بیضی ۲۴ باشد، طول قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۲۸- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند و BB' قطر کوچک بیضی است. اگر $BB'=۸$ و $OF=۳$، محیط چهارضلعی $MFNF'$ چقدر است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۴

۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲۹- طول قطر بزرگ و قطر کوچک یک بیضی به ترتیب ۱۶ و ۱۲ است. فاصلهٔ کانونی این بیضی چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۸\sqrt{۷}$ ۴) $۶\sqrt{۷}$

۳۰- فاصلهٔ کانونی یک بیضی برابر ۸ و طول قطر کوچک آن برابر ۶ است. طول قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۱۳}$ ۲) $۴\sqrt{۱۳}$ ۳) ۸ ۴) ۱۰

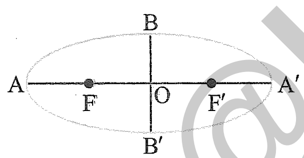
۳۱- مرکز یک بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های بیضی روی محور x هستند. اگر طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک این بیضی به ترتیب برابر ۱۰ و ۸ باشد، کدام نقطه یکی از کانون‌های این بیضی است؟

۱) $(۲,۰)$ ۲) $(۶,۰)$ ۳) $(۳,۰)$ ۴) $(۵,۰)$

۳۲- نقطه‌های $F(-۸,۰)$ و $F'(۸,۰)$ کانون‌های یک بیضی‌اند و طول قطر کوچک این بیضی برابر ۱۲ است. طول قطر بزرگ این بیضی چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

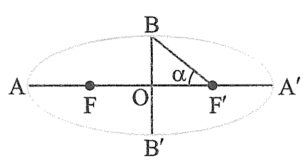
۳۳- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و BB' قطر کوچک بیضی است. اگر $AA'=۱۲$ و $BB'=۴\sqrt{۵}$، مقدار $\frac{AF}{OF}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

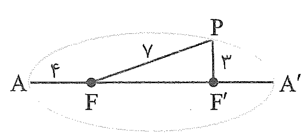
۳۴- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند و BB' قطر کوچک بیضی است. اگر طول قطر بزرگ و کوچک به ترتیب ۸ و ۶ باشد، مقدار $\cos\alpha$ چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۸}$

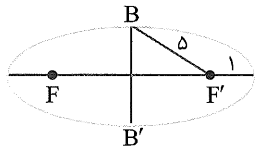
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۷}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$

۳۵- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی و P نقطه‌ای از بیضی است. طول قطر کوچک این بیضی چقدر است؟



۱) $۲\sqrt{۸}$ ۲) $۴\sqrt{۸}$

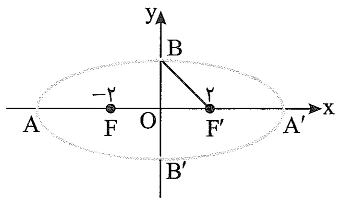
۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۶}$



۳۶- در شکل مقابل نقطه‌های F و F′ کانون‌های بیضی و BB′ قطر کوچک بیضی است. طول قطر کوچک بیضی چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶

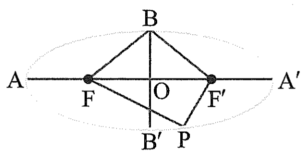
۳) ۸ ۴) ۱۲



۳۷- در شکل مقابل نقطه‌های F و F′ کانون‌های بیضی هستند و BB′ قطر کوچک بیضی است. اگر $۳BF'=۲AF'$، طول قطر کوچک بیضی چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$

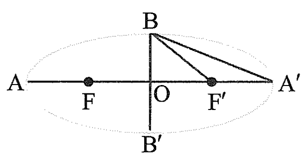
۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$



۳۸- در شکل مقابل نقطه‌های F و F′ کانون‌های بیضی‌اند و BB′ قطر کوچک بیضی است. اگر $OB=OF$ و محیط چهارضلعی BFPF′ برابر ۳۲ باشد، فاصلهٔ کانونی بیضی چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$

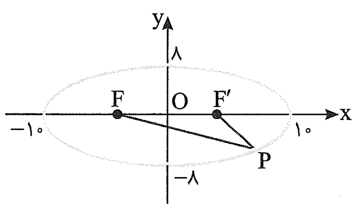
۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$



۳۹- در شکل مقابل نقطه‌های F و F′ کانون‌های بیضی هستند و BB′ قطر کوچک بیضی است. اگر $AA'=۱۰$ و $BB'=۶$، محیط مثلث BF′A′ چقدر است؟

۱) $۶+\sqrt{۳۴}$ ۲) $۶+\sqrt{۲۷}$

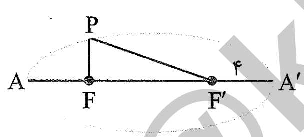
۳) $۴+\sqrt{۲۷}$ ۴) $۴+\sqrt{۳۴}$



۴۰- در شکل مقابل مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است، کانون‌های بیضی روی محور x هستند و P نقطه‌ای از بیضی است. محیط مثلث PFF′ چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴

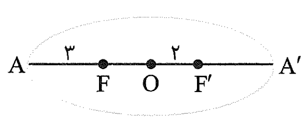
۳) ۲۸ ۴) ۳۲



۴۱- در شکل مقابل نقطه‌های F و F′ کانون‌های بیضی هستند، P نقطه‌ای از بیضی است و محیط مثلث PFF′ برابر ۱۸ است. طول قطر کوچک این بیضی چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۶

۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۲}$



۴۲- در شکل مقابل نقطه‌های F و F′ کانون‌های بیضی هستند و O مرکز بیضی است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۳- مرکز یک بیضی روی مبدأ مختصات، نقطهٔ $F(-۱۲,۰)$ یکی از کانون‌های این بیضی و طول قطر کوچک بیضی برابر ۱۰ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۴۴- نقطه‌های $F(-۳,۰)$ و $F'(۳,۰)$ کانون‌های یک بیضی‌اند و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۱}{۳}$ است. طول قطر کوچک این بیضی چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

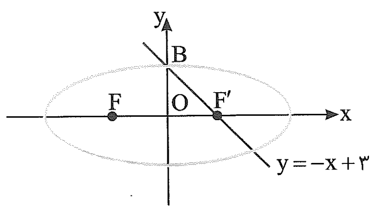
۴۵- نسبت طول قطر بزرگ یک بیضی به طول قطر کوچک آن برابر $\frac{۵}{۴}$ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۶- اختلاف طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک یک بیضی برابر ۴ و خروج از مرکز آن برابر $\frac{۳}{۵}$ است. طول قطر کوچک این بیضی چقدر است؟

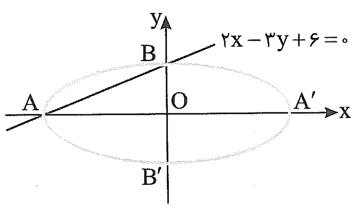
۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۴۷- در شکل مقابل مرکز بیضی روی مبدأ مختصات، کانون F روی محور x و خط $y=-x+۳$ از کانون F' و یک سر قطر کوچک بیضی گذشته است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟



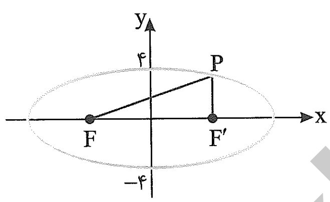
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۴۸- در شکل مقابل خط $۲x-۳y+۶=۰$ از یک سر قطر بزرگ و یک سر قطر کوچک بیضی گذشته است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۴۹- مرکز بیضی شکل مقابل روی مبدأ مختصات است و کانون‌های این بیضی روی محور x هستند. اگر P نقطه‌ای روی بیضی باشد و $PF+PF'=۱۶$، خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

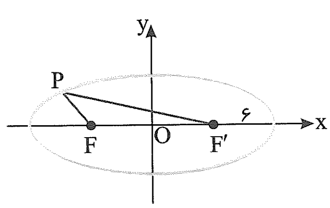


۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۵۰- نقطه‌های F و F' کانون‌های یک بیضی هستند و P نقطه‌ای از این بیضی است. اگر خروج از مرکز این بیضی برابر $\frac{۱}{۳}$ و طول قطر کوچک این بیضی برابر ۸ باشد، محیط مثلث PFF' چقدر است؟

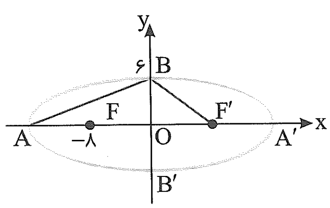
۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۵۱- در شکل مقابل مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است و کانون‌های بیضی روی محور x هستند. اگر محیط مثلث PFF' برابر ۳۲ باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



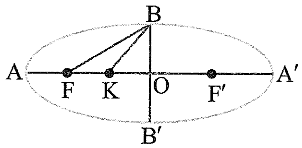
۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۵۲- در شکل مقابل کانون‌های F و F' بیضی روی محور x هستند و قطر کوچک بیضی روی محور y است. مساحت مثلث ABF' چقدر است؟



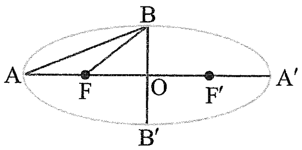
۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۵۳- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند، BB' قطر کوچک بیضی است و $AA'=۳$. اگر $AF=FK=KO$، مساحت مثلث BFK چقدر است؟



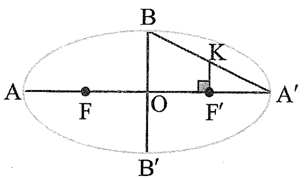
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۸}$
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$
۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

۵۴- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و BB' قطر کوچک آن است. اگر $OF=AF$ و مساحت مثلث ABF برابر $۶\sqrt{۳}$ باشد، فاصلهٔ کانونی این بیضی چقدر است؟



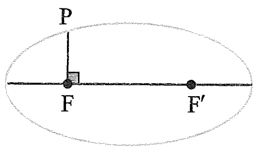
۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

۵۵- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و BB' قطر کوچک بیضی است. اگر $AA'=۱۰$ و $BB'=۸$، طول پاره‌خط KF' چقدر است؟



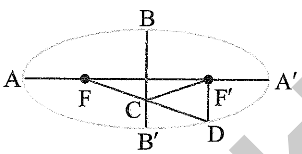
۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۸}{۵}$
۴) $\frac{۹}{۵}$

۵۶- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی هستند و طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به ترتیب ۲۰ و ۱۲ است. طول پاره‌خط PF چقدر است؟



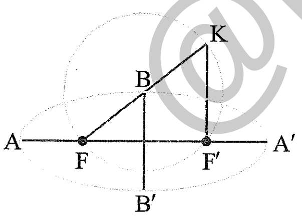
۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) $\frac{۱۲}{۵}$
۳) $\frac{۱۴}{۵}$
۴) $\frac{۱۸}{۵}$

۵۷- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و BB' قطر کوچک بیضی است. اگر $AA'=۲۴$، محیط مثلث CDF' چقدر است؟



۱) ۲۴
۲) ۲۰
۳) ۱۲
۴) ۸

۵۸- در شکل مقابل نقطه‌های F و F' کانون‌های بیضی‌اند و BB' قطر کوچک بیضی است. همچنین FK قطر دایرهٔ به مرکز نقطهٔ B است که از نقطهٔ F' گذشته است. اگر $AA'=۴\sqrt{۵}$ و $BB'=۴$، طول پاره‌خط KF' چقدر است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

فصل ششم

درس دوم: دایره

دایـــــره

تعریف مجموعهٔ نقاطی از صفحه را که فاصلهٔ آنها تا یک نقطهٔ ثابت مقداری ثابت و غیرصفر است دایره می‌گوییم. نقطهٔ ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع دایره باشد، معادلهٔ دایره به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است.

صورت گستردهٔ دایره

معادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ را می‌توان به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نوشت، که به آن صورت گستردهٔ دایره می‌گوییم. در این صورت مرکز دایره نقطهٔ $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع دایره برابر $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ است. واضح است که معادله به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2-4c>0$.

تست ۱ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $C(-1,3)$ و گذرا از مبدأ کدام است؟

۱) $x^2+y^2-2x+6y=0$
۲) $x^2+y^2+2x-6y=0$
۳) $x^2+y^2-2x-6y=0$
۴) $x^2+y^2+2x+6y=0$

راه‌حل مبدأ مختصات روی دایره است و فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است. پس

$$r=OC=\sqrt{(-1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=10\Rightarrow x^2+y^2+2x-6y=0$$

تست ۲ معادلهٔ دایره‌ای که نقطه‌های $A(-1,2)$ و $B(3,6)$ دو سر قطر آن هستند، به صورت $x^2+y^2+ax+by=c$ است. مقدار c کدام است؟

۱) -8
۲) -9
۳) -17
۴) -13

راه‌حل مرکز دایره وسط دو سر قطر است، پس نقطهٔ $(\frac{6+2}{2},\frac{3-1}{2})$، یعنی $(1,4)$ مرکز دایره است.

اکنون توجه کنید که شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۲}AB$ است، پس

$$AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۶-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow r=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=۸\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸-۱-۱۶=-۹\Rightarrow c=-۹$$

تست ۳ اگر $۲x^۲+ay^۲-۴x+by=۸$ معادلهٔ دایره به شعاع ۳ باشد، مقدار ab چقدر است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۴ ۳) ± ۸ ۴) ± ۱۶

راه‌حل در معادلهٔ گستردهٔ دایره ضریب $x^۲$ و $y^۲$ برابر ۱ است. پس معادلهٔ داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب $x^۲$ برابر ۱ شود:

$$x^۲+\frac{a}{۲}y^۲-۲x+\frac{b}{۲}y-۴=۰$$

به این ترتیب $\frac{a}{۲}=۱$، پس $a=۲$. از طرف دیگر، چون شعاع برابر ۳ است، پس

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(\frac{b}{۲})^۲+۴(۴)}=۳\Rightarrow\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲+۲۰}=۶\Rightarrow b=\pm ۸\Rightarrow ab=\pm ۱۶$$

تست ۴ اگر $x^۲+y^۲+ax-۲ay+۵=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد، حدود a کدام است؟

۱) $|a|>۲$ ۲) $|a|>۱$ ۳) $|a|<۱$ ۴) $|a|<۲$

راه‌حل باید نابرابری $a^۲+(-۲a)^۲-۴\times ۵>۰$ برقرار باشد، پس

$$a^۲+۴a^۲-۲۰>۰\Rightarrow a^۲>۴\Rightarrow |a|>۲$$

تست ۵ شعاع دایره‌ای که از نقطه‌های $(۱,۰)$، $(۰,۱)$ و $(-۱,۱)$ می‌گذرد، چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$

راه‌حل فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند:

$$۱+a+c=۰,\quad ۱+b+c=۰,\quad ۱+۱-a+b+c=۰$$

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم به‌دست می‌آید $a=b=۱$ و $c=-۲$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱-۴(-۲)}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

وضعیت نقطه نسبت به دایره

دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) اگر نقطهٔ A روی دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی $OA=r$.

ب) اگر نقطهٔ B درون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است، یعنی $OB<r$.

پ) اگر نقطهٔ C بیرون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است، یعنی $OC>r$.

بنابراین

الف) نقاطی که مختصات آنها در تساوی $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=r^{۲}$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که روی دایره قرار دارند.

ب) نقاطی که مختصات آنها در نابرابری $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}<r^{۲}$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که درون دایره قرار دارند.

پ) نقاطی که مختصات آنها در نابرابری $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}>r^{۲}$ صدق می‌کنند، نقاطی هستند که بیرون دایره قرار دارند.

نکته

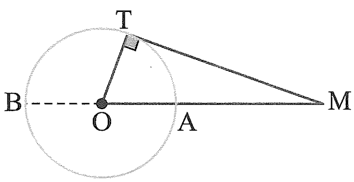
اگر نقطهٔ M درون دایره به مرکز O و شعاع r باشد، آن‌گاه کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M عبور می‌کند، وتری است که در نقطهٔ M بر شعاع گذرنده از نقطه‌های O و M عمود است و بلندترین وتری که از نقطهٔ M عبور می‌کند، قطری است که از نقطهٔ M عبور می‌کند.

نکته

اگر نقطهٔ M بیرون دایره به مرکز O و شعاع r باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط MT که در نقطهٔ T بر دایره مماس است برابر است با

$$\sqrt{OM^{۲}-r^{۲}}$$

در این حالت A نزدیک‌ترین نقطه از دایره به نقطهٔ M است و B دورترین نقطه از دایره به نقطهٔ M است.



تست ۶

کدام‌یک از نقطه‌های داده شده درون دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۳x-۳y+۲=۰$ است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۲,۱)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(-۳,۲)$

راه‌حل هرکدام از نقاط که مختصات آن در نابرابری

$$x^{۲}+y^{۲}+۳x-۳y+۲<۰$$

صدق کنند، درون دایره قرار دارد. برای نقطهٔ $(-۲,۱)$ این شرط برقرار است:

$$(-۲)^{۲}+۱^{۲}+۳(-۲)-۳(۱)+۲=-۲<۰$$

تست ۷

از نقطهٔ $A(۶,۰)$ مماسی بر دایرهٔ $(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۴$ رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ تماس T باشد، طول پاره‌خط AT چقدر است؟

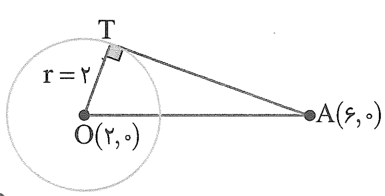
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

راه‌حل نقطهٔ $(۲,۰)$ مرکز دایره و شعاع دایره ۲ است. پس

$$OA=\sqrt{(۶-۲)^{۲}+۰^{۲}}=۴$$

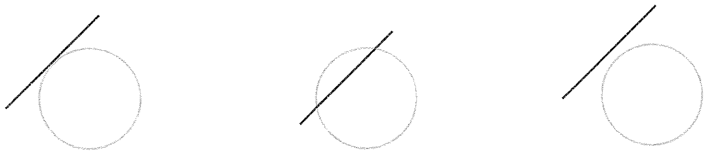
$$OT=r=۲$$

در نتیجه $AT=\sqrt{۴^{۲}-۲^{۲}}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$.

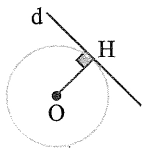


وضعیت نسبی خط و دایره

خط و دایره ممکن است یک یا دو نقطهٔ مشترک داشته باشند یا هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

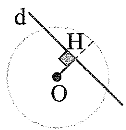


هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.   دو نقطهٔ مشترک دارند.   یک نقطهٔ مشترک دارند.



OH = r

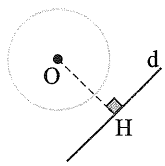
در حالتی که خط و دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است. در شکل مقابل، خط d بر دایره مماس است. خط مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع نظیر نقطهٔ تماس عمود است و OH برابر شعاع دایره است.



OH < r

در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، می‌گوییم خط و دایره متقاطع‌اند و خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامند. در شکل مقابل خط d و دایره متقاطع‌اند، در این حالت فاصلهٔ مرکز دایره از خط d از شعاع دایره کوچک‌تر است.

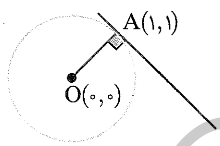
اگر خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، می‌گوییم خط، دایره را قطع نمی‌کند. در این حالت فاصلهٔ مرکز دایره از خط d از شعاع دایره بزرگ‌تر است.



OH > r

تست ۸ معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ $x^2+y^2=2$ در نقطهٔ $A(1,1)$ کدام است؟

۱) $y=-x+2$ ۲) $y=3x-2$ ۳) $y=2x-1$ ۴) $y=x$



راه‌حل مرکز دایره نقطهٔ $O(0,0)$ است. شیب خطی که نقطه‌های O و A روی آن قرار دارند، برابر است با $\frac{1-0}{1-0}=1$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره که بر خط گذرنده از O و A عمود است، برابر -1 است. پس معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-1=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+2$$

تست ۹ اگر خط $4y=3x+c$ بر دایرهٔ $x^2+y^2=16$ مماس باشد، مقدار $|c|$ چقدر است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۵   ۳) ۲۰   ۴) ۲۵

راه‌حل مرکز دایره $(0,0)$ و شعاع آن برابر ۴ است. فاصلهٔ نقطهٔ $(0,0)$ تا خط $3x-4y+c=0$ برابر است با

$$\frac{|0-0+c|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|c|}{5}$$

برای اینکه خط بر دایره مماس باشد، باید فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، پس

$$\frac{|c|}{5}=4\Rightarrow|c|=20$$

تست ۱۰

اگر خط $y=۲x-k$ دایرهٔ $(x-۱)^۲+y^۲=۵$ را قطع کند، حدود k کدام است؟

۱) $-۵<k<۵$ ۲) $-۳<k<۷$ ۳) $-۳<k<۳$ ۴) $۳<k<۷$

راه‌حل نقطهٔ $O(۱,۰)$ مرکز دایره و شعاع دایره برابر $\sqrt{۵}$ است. فاصلهٔ O تا خط $۲x-y-k=۰$ برابر است با

$$d=\frac{|۲-۰-k|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|k-۲|}{\sqrt{۵}}$$

برای اینکه خط، دایره را قطع کند، باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط کمتر از شعاع دایره باشد. پس

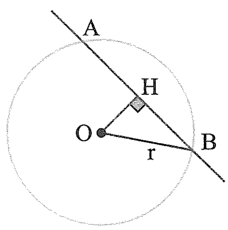
$$\frac{|k-۲|}{\sqrt{۵}}<\sqrt{۵}\Rightarrow|k-۲|<۵\Rightarrow-۵<k-۲<۵\Rightarrow-۳<k<۷$$

تست ۱۱

طول وتری از دایرهٔ $x^۲+y^۲=\frac{۱۶۹}{۲۵}$ که روی خط $۴x+۳y-۱۲=۰$ است، چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

راه‌حل مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲=\frac{۱۶۹}{۲۵}$ نقطهٔ $(۰,۰)$ و شعاع آن برابر $\frac{۱۳}{۵}$ است. بنابراین



مطابق شکل مقابل، OH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۰)$ از خط $۴x+۳y-۱۲=۰$ است، که برابر است با

$$\frac{|۰+۰-۱۲|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$$

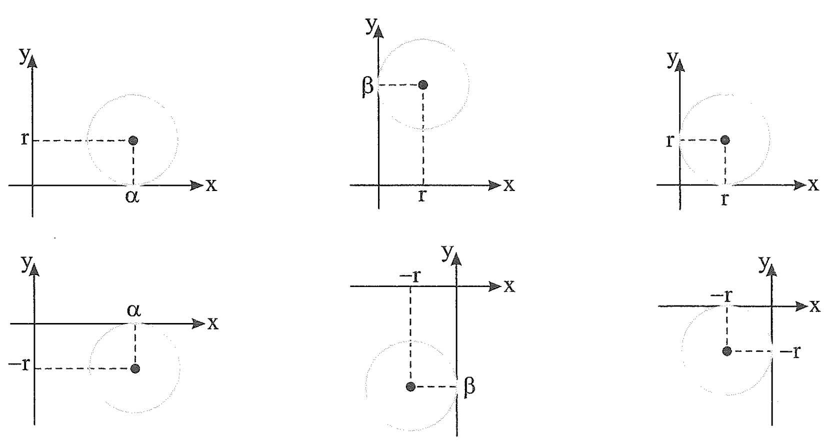
در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲\Rightarrow(\frac{۱۳}{۵})^۲=(\frac{۱۲}{۵})^۲+HB^۲\Rightarrow HB=۱$$

اکنون توجه کنید که $AB=۲HB=۲$.

نکته

اگر دایرهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ بر محور x مماس باشد، آن‌گاه $|\beta|=r$ و اگر این دایره بر محور y مماس باشد، آن‌گاه $|\alpha|=r$. بنابراین اگر بر هر دو محور مماس باشد، آن‌گاه $|\alpha|=|\beta|=r$. معلوم است که دایرهٔ مورد نظر می‌تواند در هر یک از چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار بگیرد. برخی از حالت‌های ممکن را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم.

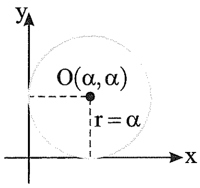


تست ۱۲ معادلـهٔ دایره‌ای که مرکزش در ناحیهٔ اول اسـت، بر محورهای مختصات مماس اسـت و از نقطهٔ $(۶,۳)$ می‌گذرد کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۴۱$ ۲) $(x-۳)^۲+(y-۳)^۲=۹$

۳) $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۲۶$ ۴) $(x-۴)^۲+(y-۴)^۲=۱۶$

راه‌حل مطابق شکل مقابل، معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲$ اسـت. این دایره از نقطهٔ $(۶,۳)$ می‌گذرد، پس مختصـات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

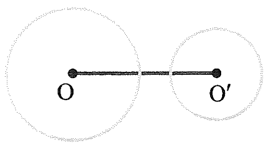
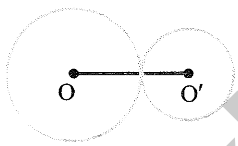
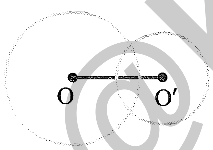
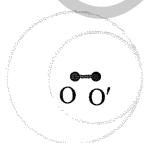
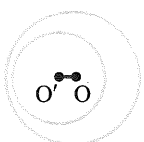
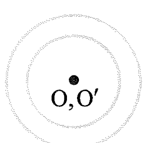


$$(۶-\alpha)^۲+(۳-\alpha)^۲=\alpha^۲ \Rightarrow \alpha=۳\,,\ \alpha=۱۵$$

پس معادلهٔ دایره می‌تواند به صورت $(x-۳)^۲+(y-۳)^۲=۹$ یا $(x-۱۵)^۲+(y-۱۵)^۲=۲۲۵$ باشد.

وضعیت نسبی دو دایره

دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر بگیرید. خط‌المرکزین دو دایره، پاره‌خطی است که مرکزهای آنها را به هم وصل می‌کند. اگر طول خط‌المرکزین دو دایره، یعنی طول OO'، برابر d باشد، وضعیت نسبی دو دایره را برحسب رابطهٔ میان r، r' و d در جدول زیر آورده‌ایم:

دو دایره بیرون هم هستند (متخارج)	$d>r+r'$	
دو دایره مماس بیرونی‌اند.	$d=r+r'$	
دو دایره متقاطع‌اند.	$r-r'<d<r+r'$	
دو دایره مماس درونی‌اند.	$d=r-r'$	
دو دایره متداخل‌اند.	$d<r-r'$	
دو دایره هم‌مرکزند.	$d=۰$	

تست ۱۳

وضعیت نسبی دو دایرهٔ $x^۲+y^۲=۷$ و $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ چگونه است؟

۱) متخارج ۲) متقاطع ۳) متداخل ۴) مماس درونی

راه‌حل مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲=۷$ نقطهٔ $(۰,۰)$ و شعاع آن برابر $\sqrt{۷}$ است. مرکز دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ نقطهٔ $(۱,۱)$ و شعاع آن برابر $\sqrt{۲}$ است. طول خط‌المرکزین دایره‌ها برابر است با

$$\sqrt{(۰+۱)^۲+(۰+۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

اکنون توجه کنید که چون $\sqrt{۷}-\sqrt{۲}<\sqrt{۲}<\sqrt{۷}+\sqrt{۲}$، پس دایره‌های مورد نظر متقاطع‌اند.

تست ۱۴

وضعیت نسبی دایره‌های $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰$ و $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۵=۰$ چگونه است؟

۱) متداخل ۲) متقاطع ۳) مماس درونی ۴) مماس بیرونی

راه‌حل مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰$ نقطهٔ $(۱,۳)$ و شعاع آن برابر $\sqrt{۵}$ است. مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۵=۰$ نقطهٔ $(۳,-۱)$ و شعاع آن برابر $\sqrt{۵}$ است. طول خط‌المرکزین دایره‌ها برابر است با

$$\sqrt{(۱-۳)^۲+(۳+۱)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

چون طول خط‌المرکزین دایره‌ها برابر مجموع شعاع‌های آنهاست، پس دو دایره مماس بیرونی‌اند.

تست ۱۵

اگر دایره‌های $(x-k)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$ و $(x+۲)^۲+y^۲=۹$ مماس درونی باشند، مجموع مقادیر k چقدر است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

راه‌حل مرکز دایره‌ها نقطه‌های $(k,۱)$ و $(-۲,۰)$ هستند و شعاع دایره‌ها ۵ و ۳ است. چون دایره‌ها مماس درونی‌اند، طول خط‌المرکزین آنها برابر اختلاف شعاع‌های آنهاست:

$$\sqrt{(k+۲)^۲+(۱-۰)^۲}=۵-۳=۲\Rightarrow(k+۲)^۲=۳\Rightarrow k=\pm\sqrt{۳}-۲$$

بنابراین مجموع مقادیر k برابر -۴ است.

فصل ششم

درس دوم: دایره

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۹- مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(3,-1)$ و شعاع آن $\sqrt{2}$ است. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $x^2+y^2+6x-2y-8=0$
۲) $x^2+y^2-6x+2y+8=0$
۳) $x^2+y^2+2x-6y-8=0$
۴) $x^2+y^2-2x+6y-8=0$

۶۰- مرکز دایرهٔ $2x^2+2y^2+4x-12y-1=0$ کدام است؟

۱) $(-1,3)$ ۲) $(1,-3)$ ۳) $(-2,6)$ ۴) $(2,-6)$

۶۱- معادلهٔ دایره‌ای به صورت $x^2+y^2-2x+6y-1=0$ است. مرکز و شعاع این دایره به ترتیب کدام است؟

۱) $(1,-3)$ و $\sqrt{44}$ ۲) $(1,-3)$ و $\sqrt{11}$ ۳) $(-1,3)$ و $\sqrt{44}$ ۴) $(-1,3)$ و $\sqrt{11}$

۶۲- اگر r_1، r_2 و r_3 به ترتیب شعاع دایره‌های $x^2+y^2-4x+6y=5$، $x^2+y^2+6x-4y=3$ و $x^2+y^2-2x+4y=8$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $r_1>r_2>r_3$ ۲) $r_2>r_3>r_1$ ۳) $r_3>r_1>r_2$ ۴) $r_1>r_3>r_2$

۶۳- شعاع دایرهٔ $(4x-1)^2+(4y-3)^2=4$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۶۴- شعاع دایرهٔ $x^2+y^2-6x+4y-c=0$ برابر ۲ است. مقدار c چقدر است؟

۱) 9 ۲) -12 ۳) -11 ۴) -9

۶۵- اگر شعاع دایرهٔ $x^2+y^2+ax+2ay-4=0$ برابر ۳ باشد، مرکز آن کدام است؟ $(a>0)$

۱) $(1,2)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(1,-2)$ ۴) $(-1,-2)$

۶۶- اگر $x^2+y^2+4x+6y-k=0$ معادلهٔ یک دایره باشد، کوچک‌ترین مقدار صحیح k چقدر است؟

۱) -12 ۲) -11 ۳) -10 ۴) -9

۶۷- اگر $x^2+y^2+kx+2y+k=0$ معادلهٔ یک دایره باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $k\neq 2$ ۳) $k>2$ ۴) $0<k<1$

۶۸- اگر $x^2+y^2+2x+4y+2k-3=0$ معادلهٔ یک دایره باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>4$ ۲) $k<2$ ۳) $k>2$ ۴) $k<4$

۶۹- اگر $x^2+y^2+(k-2)xy+(k+2)x-8y-k=0$ معادلهٔ یک دایره باشد، شعاع این دایره چقدر است؟

۱) $\sqrt{11}$ ۲) $\sqrt{15}$ ۳) $\sqrt{22}$ ۴) $\sqrt{23}$

۷۰- شعاع دایرهٔ $(k-1)x^2+(3k-5)y^2+2x-4y-3k=0$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$ ۳) $\sqrt{12}$ ۴) $\sqrt{15}$

۷۱- معادلهٔ دایره‌ای را می‌توان به صورت $ax^2+6x-5a=3y^2+15y$ نوشت. قطر این دایره چقدر است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) 4 ۳) 7 ۴) 8

-۷۲ اگر $4x^2+ay^2+8x-by=4$ معادلهٔ یک دایره به شعاع ۲ باشد، مقدار b^2 کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۲

-۷۳ شعاع دایرهٔ $(a-2b)x^2+(b-2a)y^2+ax+by+a=0$ کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{9}}{2}$

-۷۴ کدام‌یک از خط‌های زیر قطری از دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-13=0$ نیست؟

۱) $x-2y=5$ ۲) $2x-y=4$ ۳) $3x-y=3$ ۴) $3x-y=5$

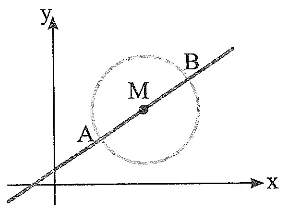
-۷۵ خط $x+2by+7=0$ قطری از دایرهٔ $x^2+y^2-6x+2y=0$ است. مقدار b چقدر است؟

۱) ۳ ۲) -5 ۳) -1 ۴) ۵

-۷۶ یک سر قطری از دایرهٔ $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ نقطهٔ $(5,-6)$ است. سر دیگرش کدام نقطه است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(1,8)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-3,0)$

-۷۷ در شکل مقابل، نقطهٔ M مرکز دایرهٔ $x^2+y^2-24x-20y+k=0$ روی خط $2x-3y+6=0$ قرار دارد و عرض نقطهٔ A برابر ۶ است. نقطهٔ B کدام است؟



۱) $(16,14)$ ۲) $(18,14)$
۳) $(21,16)$ ۴) $(15,12)$

-۷۸ معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $(3,-2)$ است و از نقطهٔ $(-1,-3)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $x^2+y^2-6x+4y-9=0$ ۲) $x^2+y^2-6x+4y-7=0$
۳) $x^2+y^2-6x+4y-5=0$ ۴) $x^2+y^2-6x+4y-4=0$

-۷۹ شعاع دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ $x^2+y^2-6x+10y-2=0$ که از نقطهٔ $(2,-1)$ می‌گذرد چقدر است؟

۱) $\sqrt{12}$ ۲) $\sqrt{17}$ ۳) $\sqrt{18}$ ۴) $\sqrt{19}$

-۸۰ دایرهٔ $x^2+y^2+2ax+(a+1)y-3=0$ از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرد. مرکز این دایره کدام نقطه است؟

۱) $(-1,-1)$ ۲) $(-2,-\frac{3}{2})$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(0,-\frac{1}{2})$

-۸۱ معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ $(-2,2)$ است و از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرد به صورت $x^2+y^2-ax+ay=b$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۳ ۴) ۲

-۸۲ مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های $(1,6)$، $(3,10)$ و $(10,3)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $(5,5)$ ۲) $(6,6)$ ۳) $(7,7)$ ۴) $(8,8)$

-۸۳ چهار نقطهٔ متمایز $A(0,0)$، $B(1,2)$، $C(-1,1)$ و $D(k,k+1)$ روی دایره‌ای قرار دارند. مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

-۸۴ شعاع دایره‌ای که مرکزش روی محور x است و از نقطه‌های $(0,-2)$ و $(4,0)$ می‌گذرد چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۸۵- شعاع دایره‌ای که از نقاط $(0,0)$ و $(1,-1)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط $y=-2x$ است چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

۸۶- دایره‌ای از نقاط $(2,-1)$ و $(3,0)$ می‌گذرد و معادلهٔ یک قطر آن $2y=x+1$ است. شعاع دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۸۷- دو قطر از دایره‌ای روی خطوط $y=2x$ و $y=-x+3$ قرار دارند. اگر این دایره از نقطهٔ $(0,1)$ عبور کند، شعاع آن چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۸۸- دو قطر از دایره‌ای به محیط 10π روی خط‌های $2x+3y+1=0$ و $3x-y-4=0$ هستند. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ ۲) $x^2+y^2-2x-2y-23=0$

۳) $x^2+y^2+2x+2y-23=0$ ۴) $x^2+y^2-2x+2y-23=0$

۸۹- معادلهٔ دایره‌ای که در ناحیهٔ اول قرار دارد و بر محورهای مختصات در نقطه‌هایی به فاصلهٔ یک واحد از مبدأ مماس است کدام است؟

۱) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ ۲) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

۳) $x^2+y^2-2x-2y=0$ ۴) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$

۹۰- معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۳ که در ناحیهٔ چهارم قرار دارد و بر محورهای مختصات مماس است کدام است؟

۱) $x^2+y^2-6x+6y+9=0$ ۲) $x^2+y^2-6x-6y+9=0$

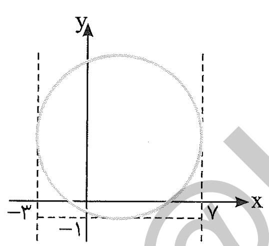
۳) $x^2+y^2+6x-6y+9=0$ ۴) $x^2+y^2+6x+6y+9=0$

۹۱- معادلهٔ دایره‌ای که از نقطه‌های $(1,0)$ و $(9,0)$ می‌گذرد و بر محور y مماس است کدام است؟

۱) $(x-5)^2+(y-1)^2=17$ ۲) $(x-5)^2+(y-2)^2=20$

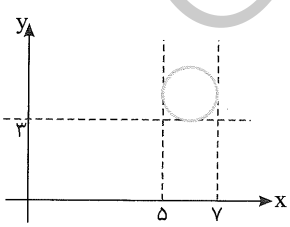
۳) $(x-5)^2+(y-3)^2=25$ ۴) $(x-5)^2+(y-4)^2=32$

۹۲- دایرهٔ شکل مقابل بر خط‌های $x=-3$، $x=7$ و $y=-1$ مماس است. مرکز این دایره کدام نقطه است؟



۱) $(3,4)$
۲) $(2,4)$
۳) $(3,5)$
۴) $(2,5)$

۹۳- دایرهٔ شکل مقابل بر خط‌های $x=5$، $x=7$ و $y=3$ مماس است. مرکز این دایره کدام نقطه است؟



۱) $(6,7)$
۲) $(6,6)$
۳) $(6,5)$
۴) $(6,4)$

۹۴- خط‌های $3x-4y+4=0$ و $6x-8y-7=0$ بر دایره‌ای مماس‌اند. شعاع این دایره چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{20}$

۹۵- اگر نقطهٔ $A(2,-1)$ درون دایرهٔ $x^2+y^2+ax+y-1=0$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a<-\frac{2}{3}$ ۲) $a>-\frac{2}{3}$ ۳) $a<-\frac{3}{2}$ ۴) $a>-\frac{3}{2}$

۹۶- اگر نقطهٔ $A(2,2)$ بیرون دایرهٔ $x^2+y^2+ax-a=0$ باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(-8,+\infty)$ ۳) $(-8,-4)\cup(0,+\infty)$ ۴) $(-8,-4)$

۹۷- مساحت ناحیهٔ $18<x^2+y^2<24$ در صفحه چقدر است؟

۱) 3π ۲) 4π ۳) 6π ۴) 8π

۹۸- بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,-2)$ از نقاط روی دایرهٔ $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{41}$ ۲) $3+\sqrt{39}$ ۳) $2+\sqrt{39}$ ۴) $4+\sqrt{41}$

۹۹- دایرهٔ $x^2+y^2+3x+2y-4=0$ محور x را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰۰- دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ $O(1,-2)$ است و از نقطهٔ $A(4,-2)$ عبور می‌کند، محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۰۱- خط $y=1$ از دایرهٔ $x^2+y^2=k^2+1$، وتری به طول $4\sqrt{2}$ جدا می‌کند. مقدار k کدام است؟

۱) $\pm2\sqrt{2}$ ۲) $\pm\sqrt{2}$ ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ±2

۱۰۲- حاصل‌ضرب طول کوتاه‌ترین و بلندترین وتری از دایرهٔ $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ که از نقطهٔ $A(2,2)$ عبور می‌کنند کدام است؟

۱) $16\sqrt{17}$ ۲) $8\sqrt{17}$ ۳) $8\sqrt{15}$ ۴) $16\sqrt{15}$

۱۰۳- خط $y=x$ دایرهٔ به مرکز O و معادلهٔ $x^2+y^2+6x-8=0$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. محیط مثلث OAB کدام است؟

۱) $3\sqrt{17}$ ۲) $7\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}+2\sqrt{17}$ ۴) $7\sqrt{2}+\sqrt{17}$

۱۰۴- طول وتری که خط $2x+y-1=0$ از دایرهٔ $x^2+y^2+4x-5=0$ جدا می‌کند چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{5}$

۱۰۵- طول وتری از دایرهٔ $(x-14)^2+(y-12)^2=100$ که روی خط $x=2y$ است چقدر است؟

۱) $8\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{5}$ ۳) $5\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

۱۰۶- نقطهٔ $(3,-1)$ مرکز دایره‌ای است که روی خط $4x+3y+6=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $(x-3)^2+(y+1)^2=18$ ۲) $(x-3)^2+(y+1)^2=19$

۳) $(x-3)^2+(y+1)^2=20$ ۴) $(x-3)^2+(y+1)^2=21$

۱۰۷- طول وتری که خط $y=2x+k$ از دایرهٔ $x^2+y^2+2x+4y-1=0$ جدا می‌کند، برابر ۴ است. مقدار k کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) $\pm\sqrt{5}$ ۳) $\pm\sqrt{10}$ ۴) $\pm\sqrt{12}$

۱۰۸- خط $y=2x-k$ دایرهٔ $x^2+y^2-2x+6y-1=0$ را قطع می‌کند و بزرگ‌ترین وتر ممکن را از دایره جدا می‌کند. مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۰۹- مجموع عددهای صحیح مانند k که خط $y-x-k=0$ دایرهٔ $x^2+(y-1)^2=8$ را در دو نقطه قطع می‌کند چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۰- اگر خط $3x-4y+k=0$ دایرهٔ $x^2+y^2+4x-2y-11=0$ را در دو نقطه قطع کرده باشد، حدود k کدام است؟

۱) $-20<k<30$ ۲) $-15<k<30$ ۳) $-10<k<30$ ۴) $-5<k<30$

۱۱۱- خط $y=x+a$ دایرهٔ $x^۲+y^۲+x+by-۲=۰$ را در نقطهٔ $A(۱,۲)$ قطع می‌کند. مجموع طول و عرض نقطهٔ تلاقی دیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۱۲- خط $ky=x-۳$ دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$ را قطع نمی‌کند. حدود k کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}\le k\le ۰$ ۲) $k\le -\frac{۴}{۳}$ ۳) $k\ge ۰$ ۴) $-۲<k<۱$

۱۱۳- اگر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲ax+۸y+۱۶=۰$ بر محور x مماس باشد، مقدار $|a|$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱

۱۱۴- اگر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x+۲y+k=۰$ بر خط $y=۱$ مماس باشد، مقدار k چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۵- خط $y=۳x+k$ بر دایرهٔ $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$ مماس است. مقدار k کدام است؟

۱) $-۱\pm\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\pm\sqrt{۱۰}$ ۳) $۱\pm\sqrt{۱۰}$ ۴) $-۲\pm۲\sqrt{۱۰}$

۱۱۶- به‌ازای چند مقدار m خط $y=mx+۲$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+x+۲y+۱=۰$ مماس است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۷- دایره‌ای بر خطوط $y=x$ و $y=-x$ مماس است و عرض مرکز آن منفی است. اگر شعاع دایره برابر ۲ باشد، عرض مرکز آن کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-۲\sqrt{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\sqrt{۲}$

۱۱۸- دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۶y+a=۰$ بر خطوط $۲x+y+k=۰$ و $۲x-y-۲k=۰$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۵}$ یا $\frac{۴۹}{۵}$ ۲) $\frac{۵۱}{۵}$ یا $\frac{۵۹}{۵}$ ۳) ۸ یا ۵ ۴) -۴ یا -۲

۱۱۹- معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $(۳,-۲)$ است و بر خط $۴x+۳y+۱۹=۰$ مماس است کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۶x+۴y+۸=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۶x+۴y-۱۲=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۶x+۴y+۱۲=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۶x+۴y-۳=۰$

۱۲۰- نقطهٔ $(۴,b)$ مرکز دایره‌ای که بر محور x مماس است، روی خط $x=۲y$ است. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۱$ ۲) $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۴$

۳) $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۹$ ۴) $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۱۶$

۱۲۱- دایره‌ای بر محور x و خط $y=۳$ مماس است و مرکزش روی خط $x=۴$ است. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۸x-۳y+۱۶=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۸x-۳y+۸=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۸x-۳y-۱۶=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۸x-۳y-۸=۰$

۱۲۲- معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش روی خط $۲y=x$ است و بر خط‌های $y=-۳$ و $y=۷$ مماس است کدام است؟

۱) $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$ ۲) $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$

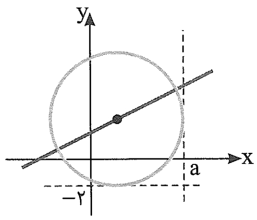
۳) $(x-۶)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$ ۴) $(x-۸)^۲+(y-۴)^۲=۲۵$

۱۲۳- خط‌های $y=۲$ و $y=۶$ بر دایره‌ای که مرکزش روی خط $۲x+y-۶=۰$ است مماس‌اند. معادلهٔ این دایره کدام است؟

۱) $(x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۴$ ۲) $(x+۱)^۲+(y-۸)^۲=۴$

۳) $(x+۲)^۲+(y-۱۰)^۲=۴$ ۴) $(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=۴$

۱۲۴- دایرهٔ شکل مقابل بر خط‌های $x=a$ و $y=-۲$ مماس است، مرکزش روی خط $۲y-x-۴=۰$ است و عرض مرکز آن برابر ۳ است. مقدار a چقدر است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۱۲۵- از نقطهٔ $A(۲,۴)$ مماسی بر دایره به معادلهٔ $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۹$ رسم می‌کنیم. اگر این خط در نقطهٔ T بر دایره مماس شود، طول پاره‌خط AT کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۲۶- از نقطهٔ $A(۱,۷)$ بر دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y+k=۰$ مماسی رسم می‌کنیم. اگر این خط در نقطهٔ T بر دایره مماس شود و $AT=\sqrt{۲۲}$، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) -۲

۱۲۷- معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ $(x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۳۴$ در نقطهٔ $(۲,۳)$ کدام است؟

۱) $۲x-۳y=-۵$ ۲) $۳x+۵y=۲۱$ ۳) $x-۲y=-۴$ ۴) $۵x-۲y=۴$

۱۲۸- مرکز دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد، نقطهٔ $(-۶,۸)$ است. معادلهٔ مماس بر این دایره در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲y=x$ ۲) $۴y=۳x$ ۳) $۳y=۴x$ ۴) $۳x=-۴y$

۱۲۹- معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۵=۰$ در نقطهٔ $(۴,-۱)$ کدام است؟

۱) $y=-x+۳$ ۲) $y=-x-۳$ ۳) $y=-x+۵$ ۴) $y=x-۵$

۱۳۰- معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+ax+by-۲=۰$ در نقطهٔ $(۰,-۲)$ روی دایره به صورت $y=۳x-۲$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) -۲ ۴) صفر

۱۳۱- وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x=۸$ و $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$ نسبت به هم چگونه است؟

۱) متقاطع ۲) متداخل ۳) مماس درونی ۴) مماس بیرونی

۱۳۲- وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۶y-۱۵=۰$ کدام است؟

۱) متخارج ۲) متداخل ۳) مماس درونی ۴) مماس بیرونی

۱۳۳- اگر دایره‌های $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۳۶$ و $(x+۲)^۲+(y-۶)^۲=r^۲$ بر هم مماس درونی باشند، مقدار r چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۴- اگر دایره‌های $(x-k)^۲+(y-۲)^۲=۱۲۱$ و $(x+۱)^۲+(y+۳)^۲=۴$ بر هم مماس بیرونی باشند، مجموع مقادیر k چقدر است؟

۱) -۱۳ ۲) -۱۱ ۳) -۲ ۴) ۴

۱۳۵- اگر دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۶y=k$ بر هم مماس درونی باشند، مقدار k کدام است؟

۱) فقط -۱۰ ۲) فقط ۶ ۳) -۱۰ یا ۶ ۴) ۱۰ یا ۶

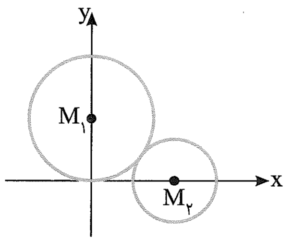
۱۳۶- اگر دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y=k$ و $x^۲+y^۲-۴x+۴y=۸$ بر هم مماس بیرونی باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۳۷- دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۳x+۱=۰$ و $x^۲+y^۲+۳y+۱=۰$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۱۳۸- در شکل مقابل $M_1(0,3)$ مرکز دایره‌ای است که بر محور x مماس است و M_2، نقطه‌ای روی محور x، مرکز دایره‌ای اسـت که بر این دایره مماس بیرونی اسـت. اگر $M_1M_2=5$، معادلهٔ دایرهٔ به مرکز M_2 کدام است؟



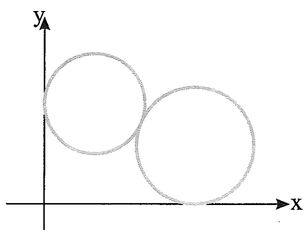
۱) $(x-2)^2+y^2=4$

۲) $(x-2)^2+y^2=9$

۳) $(x-4)^2+y^2=4$

۴) $(x-4)^2+y^2=9$

۱۳۹- دایره‌هـای $(x-6)^2+(y-12)^2=36$ و $(x-18)^2+(y-r)^2=r^2$ مطابق شـکل مقابل بر هم و بر محورهای مختصات مماس‌اند. مقدار r چقدر است؟



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۱۴۰- شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $(2,1)$، $(-2,4)$ و $(0,0)$ می‌گذرد، کدام است؟ (تجربی - ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۱۴۱- به‌ازای کدام مقادیر m خط $y=mx+2$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x=3$ مماس است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۱)

۱) $-\frac{4}{3}$ یا صفر ۲) $\frac{4}{3}$ یا صفر ۳) $-\frac{2}{3}$ یا ۱ ۴) $\frac{2}{3}$ یا ۱

۱۴۲- مرکز دایره‌ای روی نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(6,3)$ گذشته و بر خط $y=2x$ مماس باشد، شعاع آن کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{10}$

۱۴۳- نقطهٔ $M(2\sqrt{5},b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط $y=2x$ و $x=2y$ مماس است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۱۴۴- شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(0,0)$، $(2,1)$ و $(1,-2)$ برابر کدام است؟ (تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۱۴۵- شعاع دایرهٔ به مرکز $(-2,2)$ و مماس بیرونی بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۳)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

۱۴۶- دایره‌ای به مرکز $(2,-1)$ و مماس بر خط $x-y=1$ محور x را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی - ۹۵)

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱ ۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

۱۴۷- دایره‌ای محور x را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند و مرکز آن روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۱۴۸- دو دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(۲,-۹)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس هستند. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر کدام است؟ (ریاضی - ۹۵)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۴۹- دایرهٔ گذرا بر مبدأ مختصات بر دو خط $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(-۳,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۱,۲)$

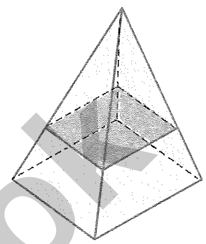
۱۵۰- دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(۱,-۲)$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۷)

۱) ۴ یا ۱ ۲) ۵ یا ۱ ۳) ۴ یا ۲ ۴) ۵ یا ۲

فصل ششم

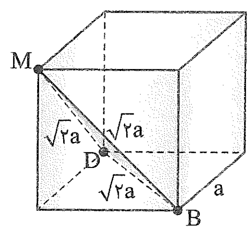
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۳ همان‌گونه که در شکل زیر دیده می‌شود، سطح مقطع حاصل یک مربع است.

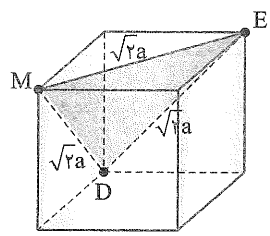


۲- گزینهٔ ۳ طول یال مکعب را a فرض می‌کنیم.

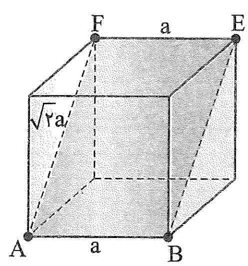
• شکل سطح مقطع صفحهٔ گذرنده از نقطه‌های M، B و D یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $a\sqrt{2}$ است.



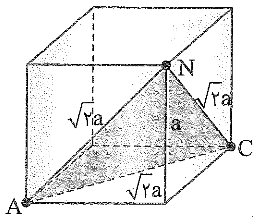
•• شکل سطح مقطع صفحهٔ گذرنده از نقطه‌های M، D و E مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $a\sqrt{2}$ است.



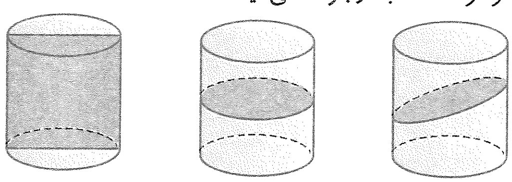
∴ شکل سطح مقطع صفحهٔ گذرنده از نقطه‌های A، B و F مستطیل ABEF به طول ضلع‌های a و $a\sqrt{2}$ است.



∷ شکل سطح مقطع صفحهٔ گذرنده از نقطه‌های A، N و C مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $a\sqrt{2}$ است.

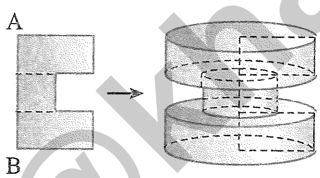


۳- گزینهٔ ۱ سطح مقطع یک استوانه با صفحه‌های افقی، مایل و قائم، به ترتیب دایره، بیضی و مستطیل می‌تواند باشد ولی هرگز مثلث به وجود نمی‌آید.



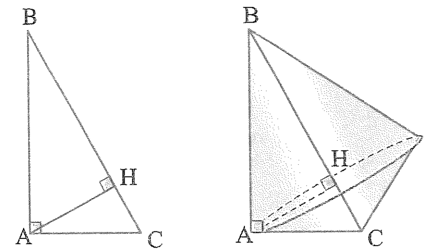
سطح مقطع با صفحهٔ مایل بیضی است. — سطح مقطع با صفحهٔ افقی دایره است. — سطح مقطع با صفحهٔ قائم مستطیل است.

۴- گزینهٔ ۴ با رسم خط‌چین‌ها، شکل به سه مستطیل تقسیم می‌شود. از دوران هر مستطیل حول AB یک استوانه به‌وجود می‌آید، پس شکل حاصل به‌صورت زیر است:



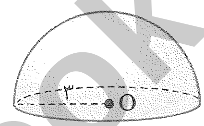
۵- گزینهٔ ۳ از دوران هر نیم‌دایره حول خط d یک کره ایجاد می‌شود. پس شکل ایجاد شده فضای بین دو کره است.

۶- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ارتفاع AH وارد بر وتر BC را رسم می‌کنیم. در این صورت مثلث ABC به دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH تقسیم می‌شود. می‌دانیم از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائمهٔ آن یک مخروط قائم ایجاد می‌شود. بنابراین از دوران مثلث ABH حول BC یک مخروط و از دوران مثلث ACH حول BC مخروط دیگری به‌وجود می‌آید. پس شکل حاصل دو مخروط با قاعدهٔ مشترک است. اگر مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد، دو مخروط مساوی ایجاد می‌شود. در حالت کلی لازم نیست این دو مخروط مساوی باشند.



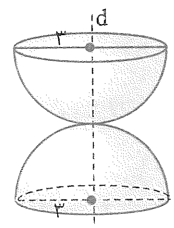
۷- گزینهٔ ۴ جسم حاصل یک نیم‌کره به شعاع ۳ است که روی سطحی دایره‌ای به شعاع ۳ قرار دارد. بنابراین مساحت جانبی این جسم برابر است با

$$\frac{۴\pi\times ۳^۲}{۲}+\pi\times ۳^۲=۲۷\pi$$



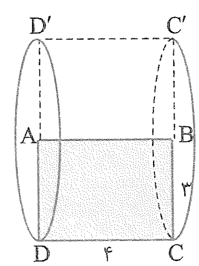
۸- گزینهٔ ۳ جسم حاصل از دو نیم‌کره هر یک به شعاع ۳ درست شده است. بنابراین حجم آن برابر است با

$$۲\times\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^۳\right)\right)=۳۶\pi$$



۹- گزینهٔ ۲ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ است. بنابراین حجم آن برابر است با

$$\pi r^۲h=\pi\times ۳^۲\times ۴=۳۶\pi$$

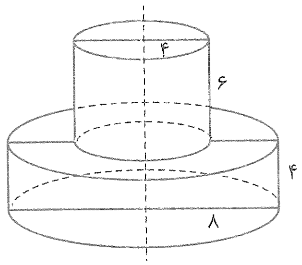


۱۰- گزینهٔ ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۱۲ و ارتفاع ۴ است که استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۴ از آن حذف شده است. بنابراین حجم آن برابر است با

$$\pi\times ۱۲^۲\times ۴-\pi\times ۲^۲\times ۴=۵۶۰\pi$$

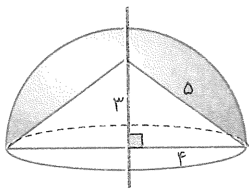
۱۱- گزینهٔ ۴ جسم مورد نظر از دو استوانه درست شده است. یکی به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۴ و دیگری به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۶. بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\pi\times ۸^۲\times ۴+\pi\times ۴^۲\times ۶=۳۵۲\pi$$



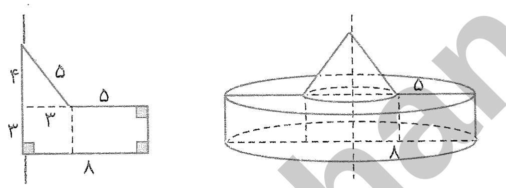
۱۲- گزینهٔ ۲ جسم حاصل نیم‌کره‌ای به شعاع ۴ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم این جسم برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi\times ۴^۳\right)-\frac{\pi\times ۴^۲\times ۳}{۳}=\frac{۸۰\pi}{۳}$$



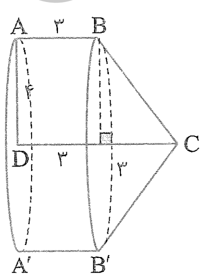
۱۳- گزینهٔ ۳ شکل مورد نظر از یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۸ و ارتفاع ۳ و از یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۴ درست شده است. بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\pi\times ۸^۲\times ۳+\frac{\pi\times ۳^۲\times ۴}{۳}=۲۰۴\pi$$



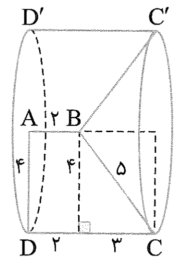
۱۴- گزینهٔ ۱ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ به آن اضافه شده است. بنابراین حجم جسم حاصل برابر است با

$$\pi\times ۴^۲\times ۳+\frac{\pi\times ۴^۲\times ۳}{۳}=۶۴\pi$$



۱۵- گزینهٔ ۲ جسم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ است که مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ از آن جدا شده است. بنابراین حجم حاصل برابر است با

$$\pi\times ۴^۲\times ۵-\frac{\pi\times ۴^۲\times ۳}{۳}=۶۴\pi$$

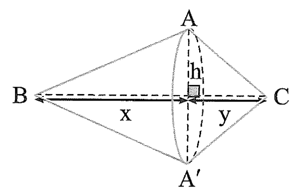


۱۶- گزینهٔ ۳ جسم حاصل از دو مخروط به هم چسبیده شده درست شده است. شعاع قاعدهٔ هر دو مخروط برابر ارتفاع وارد بر ضلع BC مثلث ABC است. اگر ارتفاع‌های آنها برابر x و y باشد، آن‌گاه $x+y=BC=۶$. اکنون توجه کنید که

$$S_{ABC}=۱۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}h\times BC=۱۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}h\times ۶=۱۲\Rightarrow h=۴$$

بنابراین حجم مورد نظر برابر است با

$$\frac{\pi h^۲ x}{۳}+\frac{\pi h^۲ y}{۳}=\frac{\pi h^۲}{۳}(x+y)=\frac{\pi\times ۴^۲\times ۶}{۳}=۳۲\pi$$



۱۷- گزینهٔ ۳ مرکز بیضی وسط پاره‌خط FF' است که $(\frac{-۳+۷}{۲},\frac{۱+۳}{۲})$ یعنی $(۲,۲)$ است.

۱۸- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی مقداری ثابت است. بنابراین

$$AF+AF'=BF+BF'\Rightarrow ۷+۳=۸+x\Rightarrow x=۲$$

۱۹- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با طول قطر بزرگ بیضی است. بنابراین

طول قطر بزرگ $=PF+PF'$

$$=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}+\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۳+۱۰=۲۳$$

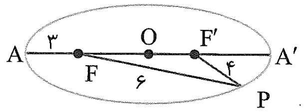
۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $a=BF'=۱۲$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'\Rightarrow ۲۴=۴+PF'\Rightarrow PF'=۲۰$$

۲۱- گزینهٔ ۲ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$AA'=PF+PF'=۶+۴=۱۰$$

$$A'F'=AF=۳\Rightarrow FF'=AA'-AF-A'F'$$
$$=۱۰-۳-۳=۴$$



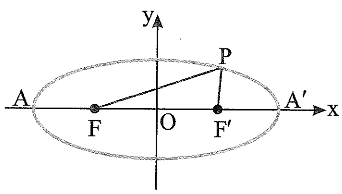
۲۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $a=OA'=۷$. بنابراین

$$PF+PF'=۲a=۱۴ \qquad (۱)$$

بنابر فرض مسئله،

$$PF-PF'=۸ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $PF'=۳$.



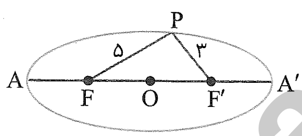
۲۳- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=۵+۳=۸$$

$$AF=A'F'$$

$$AA'=AF+A'F'+FF'$$

$$۸=۲AF+۶\Rightarrow AF=۱$$



۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $۲a=AA'=۸$، پس $a=۴$.

از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$PF+PF'=۲a\Rightarrow ۲+PF'=۸\Rightarrow PF'=۶$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ PFF'،

$$PF^۲+FF'^۲=PF'^۲\Rightarrow ۴+FF'^۲=۳۶\Rightarrow FF'=۴\sqrt{۲}$$

۲۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور y از وسط پاره‌خط FF' می‌گذرد و بر آن عمود است. بنابراین BB' قطر کوچک بیضی مورد نظر است. در نتیجه $BF=BF'=a$. اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ BFF' بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$BF^۲+BF'^۲=FF'^۲$$

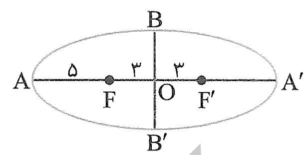
$$a^۲+a^۲=۸^۲\Rightarrow ۲a^۲=۶۴\Rightarrow a=۴\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $۲a=۸\sqrt{۲}$.

۲۶- گزینهٔ ۲ چون O مرکز بیضی است، پس $OF=OF'=3$. به این ترتیب، $a=AO=5+3=8$. از طرف دیگر، فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $2c$. پس $2c=6$، در نتیجه $c=3$. اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 64=b^2+9 \Rightarrow b=\sqrt{55}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $2b=2\sqrt{55}$.



۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در بیضی $c=OF$. بنابراین

$$c=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

طول قطر کوچک بیضی برابر با $2b$ است. بنابراین $2b=24$، یعنی $b=12$. اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=12^2+5^2=169 \Rightarrow a=13$$

در نتیجه، طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $2a=26$.

۲۸- گزینهٔ ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است با $2a$. بنابراین

$$MF+MF'=2a\ ,\quad NF+NF'=2a$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با $4a$. اکنون توجه کنید که

$$2b=BB'=8 \Rightarrow b=4,\quad c=OF=3$$

بنابراین

$$a^2=b^2+c^2=16+9=25 \Rightarrow a=5$$

پس محیط چهارضلعی $MFNF'$ برابر است با $4a=20$.

۲۹- گزینهٔ ۱ طول قطر بزرگ، طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی بیضی به ترتیب $2a$، $2b$ و $2c$ است. بنابراین

$$2a=16 \Rightarrow a=8$$

$$2b=12 \Rightarrow b=6$$

از طرف دیگر،

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 64=36+c^2 \Rightarrow c^2=28 \Rightarrow c=2\sqrt{7}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $2c=4\sqrt{7}$.

۳۰- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $2c$. بنابراین $2c=8$، یعنی $c=4$. طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b$. بنابراین $2b=6$، یعنی $b=3$. اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2=9+16=25 \Rightarrow a=5$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $2a=10$.

۳۱- گزینهٔ ۳ طول قطر بزرگ و طول قطر کوچک بیضی به ترتیب برابر $2a$ و $2b$ هستند. بنابراین

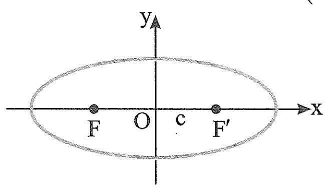
$$2a=10 \Rightarrow a=5$$

$$2b=8 \Rightarrow b=4$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 5^2=4^2+c^2 \Rightarrow c=3$$

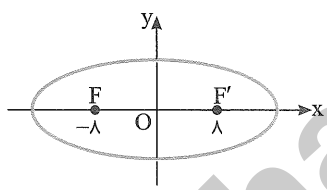
بنابراین $OF'=c=3$. در نتیجه کانون‌های بیضی نقطه‌های $(3,0)$ و $(-3,0)$ هستند.



۳۲- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ کانونی بیضی مورد نظر برابر است با $FF'=16$. پس $2c=16$، یعنی $c=8$. از طرف دیگر، طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b$. پس $2b=12$، یعنی $b=6$، اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2=36+64=100 \Rightarrow a=10$$

بنابراین طول قطر بزرگ بیضی مورد نظر برابر است با $2a=20$.



۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2a=AA'=12 \Rightarrow a=6$$

$$2b=BB'=4\sqrt{5} \Rightarrow b=2\sqrt{5}$$

بنابراین

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 6^2=(2\sqrt{5})^2+c^2 \Rightarrow c=4$$

در نتیجه $AF=a-c=2$ و $OF=c=4$، پس $\frac{AF}{OF}=\frac{1}{2}$.

۳۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2a=AA'=8 \Rightarrow a=4$$

$$2b=BB'=6 \Rightarrow b=3$$

از طرف دیگر،

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4^2=3^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{7}$$

بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOF'،

$$\cos\alpha=\frac{OF'}{BF'}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۳۵- گزینهٔ ۴ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$۲a=PF+PF'=۷+۳=۱۰\Rightarrow a=۵$$

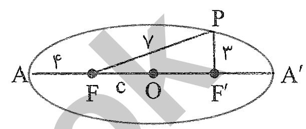
اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$AO=AF+FO\Rightarrow a=۴+c\Rightarrow ۵=۴+c\Rightarrow c=۱$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۲۵=b^۲+۱\Rightarrow b=۲\sqrt{۶}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $۲b=۴\sqrt{۶}$.



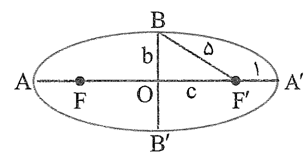
۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $a=BF'=۵$. از طرف دیگر،

$$OA'=OF'+F'A'\Rightarrow a=c+۱\Rightarrow ۵=c+۱\Rightarrow c=۴$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۵^۲=b^۲+۴^۲\Rightarrow b=۳$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۶$.



۳۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $c=OF'=۲$. بنابراین

$$۳BF'=۲AF'\Rightarrow ۳a=۲(a+c)\Rightarrow a=۲c=۴$$

از طرف دیگر،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴^۲=b^۲+۲^۲\Rightarrow b=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $۲b=۴\sqrt{۳}$.

۳۸- گزینهٔ ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. بنابراین

$$BF+BF'=۲a$$

$$PF+PF'=۲a$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که محیط چهارضلعی $BFPF'$ برابر $۴a$ است. بنابراین $۴a=۳۲$، یعنی $a=۸$.
از طرف دیگر، $OB=b$ و $OF=c$. پس $b=c$. در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲=۲c^۲\Rightarrow c^۲=\frac{a^۲}{۲}=۳۲\Rightarrow c=۴\sqrt{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $۲c=۸\sqrt{۲}$.

۳۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲a=AA'=۱۰\Rightarrow a=۵$$

$$۲b=BB'=۶\Rightarrow b=۳$$

از طرف دیگر،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۵^۲=۳^۲+c^۲\Rightarrow c=۴$$

بنابراین $A'F'=a-c=۱$. همچنین، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOA'،

$$BA'^۲=OB^۲+OA'^۲=b^۲+a^۲=۹+۲۵=۳۴$$

پس $BA'=\sqrt{۳۴}$. به این ترتیب،

$$\text{محیط مثلث } BF'A'=BF'+F'A'+BA'=۵+۱+\sqrt{۳۴}$$

$$=۶+\sqrt{۳۴}$$

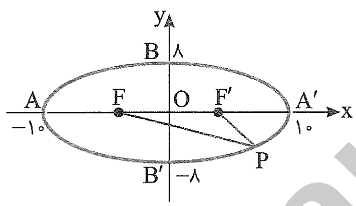
۴۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'=۲a+۲c$$

از طرف دیگر، $a=OA'=۱۰$ و $b=OB=۸$. اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۰^۲=۸^۲+c^۲\Rightarrow c=۶$$

بنابراین محیط مثلث PFF' برابر است با $۲a+۲c=۳۲$.



۴۱- گزینهٔ ۳ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $۲a$ است. همچنین، $FF'=۲c$. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF'=۲a+۲c$$

$$۱۸=۲(a+c)\Rightarrow a+c=۹$$

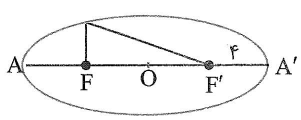
از طرف دیگر، اگر O مرکز بیضی باشد، آن‌گاه

$$A'O=A'F'+F'O\Rightarrow a=۴+c\Rightarrow a-c=۴$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=(a-c)(a+c)=۳۶\Rightarrow b=۶$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی مورد نظر برابر است با $۲b=۱۲$.



۴۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=FO=F'O=۲$ و در نتیجه $a=AO=۳+۲=۵$. بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{۲}{۵}$.

۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $c=OF=12$ و چون $2b=10$، پس $b=5$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2=5^2+12^2=169 \Rightarrow a=13$$

در نتیجه، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$.

۴۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $2c=FF'=6$، پس $c=3$. همچنین $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$، پس $a=3c=9$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 9^2=b^2+3^2 \Rightarrow b=6\sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b=12\sqrt{2}$.

۴۵- گزینهٔ ۳ بنابر فرض مسئله $\frac{2a}{2b}=\frac{5}{4}$، پس $\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$، یعنی $b=\frac{4}{5}a$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2=(\frac{4}{5}a)^2+c^2 \Rightarrow a^2-\frac{16}{25}a^2=c^2$$

$$\frac{9}{25}a^2=c^2 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{3}{5}$$

۴۶- گزینهٔ ۴ بنابر فرض مسئله، $2a-2b=4$، پس $a-b=2$ در نتیجه $a=2+b$. از طرف دیگر، $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$، پس $c=\frac{3}{5}a=\frac{3}{5}(2+b)$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (2+b)^2=b^2+(\frac{3}{5}(2+b))^2 \Rightarrow b=8$$

بنابراین طول قطر کوچک بیضی برابر است با $2b=16$.

۴۷- گزینهٔ ۲ نقطه‌های F' و B به ترتیب محل برخورد خط $y=-x+3$ با محور x و محور y هستند. بنابراین F' نقطهٔ $(3,0)$ و B نقطهٔ $(0,3)$ است. در نتیجه $b=OB=3$ و $c=OF'=3$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2=3^2+3^2=18 \Rightarrow a=3\sqrt{2}$$

در نتیجه خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

۴۸- گزینهٔ ۴ نقطه‌های A و B به ترتیب محل برخورد خط $2x-3y+6=0$ با محور x و محور y هستند. بنابراین A نقطهٔ $(-3,0)$ و B نقطهٔ $(0,2)$ است. بنابراین $a=OA=3$ و $b=OB=2$. در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 3^2=2^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{5}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

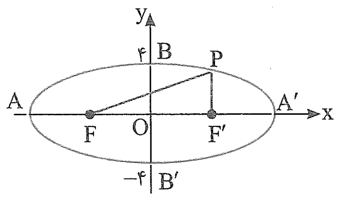
۴۹- گزینهٔ ۱ چون محور y عمود منصف بیضی است، پس قطر کوچک بیضی روی محور y است. در نتیجه $b=OB=4$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با $2a$ است. بنابراین

$$2a=PF+PF'=16 \Rightarrow a=8$$

در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 8^2=4^2+c^2 \Rightarrow c=4\sqrt{3}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

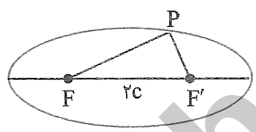


۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$، پس $c=\frac{a}{3}$ و $2b=8$، پس $b=4$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=16+\frac{a^2}{9} \Rightarrow a=3\sqrt{2}$$

بنابراین $c=\frac{a}{3}=\sqrt{2}$. مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است. بنابراین

$$\text{محیط مثلث } PFF'=PF+PF'+FF'=2a+2c=8\sqrt{2}$$



۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $c=OF'=6$، پس $FF'=2c=12$. از طرف دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر است با $2a$. در نتیجه

$$PF+PF'=2a$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{محیط مثلث } PFF'=(PF+PF')+FF' \Rightarrow 32=2a+12 \Rightarrow a=10$$

در نتیجه، خروج از مرکز بیضی برابر است با $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که BB' قطر کوچک بیضی و روی محور y است، پس مرکز بیضی روی مبدأ مختصات است. بنابراین $b=OB=6$ و $c=OF=8$. در نتیجه

$$a^2=b^2+c^2=6^2+8^2=100 \Rightarrow a=10$$

بنابراین $AF'=a+c=18$. به این ترتیب، مساحت مثلث ABF' برابر است با

$$\frac{1}{2}\times AF'\times OB=\frac{1}{2}\times 18\times 6=54$$

۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $2a=AA'=3$، پس $a=\frac{3}{2}$.

به این ترتیب

$$AF=FK=KO=\frac{a}{3}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه $c=OF=1$. اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (\frac{3}{2})^2=b^2+1 \Rightarrow b=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

به این ترتیب، مساحت مثلث BFK برابر است با

$$\frac{1}{2}FK\times OB=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{8}$$

۵۴- گزینهٔ ۲ بنابر فرض $AF=OF=c$. بنابراین

$$a=AO=AF+OF=2c$$

اکنون توجه کنید که

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (2c)^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=3c^2 \Rightarrow b=\sqrt{3}c$$

از طرف دیگر، طبق فرض مسئله،

$$S_{ABF}=6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}AF\times OB=6\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}(c)(\sqrt{3}c)=6\sqrt{3} \Rightarrow c=2\sqrt{3}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی بیضی برابر است با $2c=4\sqrt{3}$.

۵۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $2a=AA'=10$، پس $a=5$ و $2b=BB'=8$، پس $b=4$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 5^2=4^2+c^2 \Rightarrow c=3$$

به این ترتیب، $A'F'=a-c=2$. اکنون توجه کنید که بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $A'BO$ $(KF' \parallel BO)$،

$$\frac{KF'}{BO}=\frac{A'F'}{A'O} \Rightarrow \frac{KF'}{4}=\frac{2}{5} \Rightarrow KF'=\frac{8}{5}$$

۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $2a=20$، پس $a=10$ و $2b=12$، پس $b=6$. بنابراین

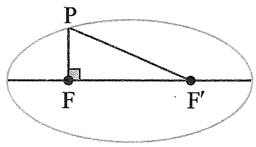
$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 10^2=6^2+c^2 \Rightarrow c=8$$

پس $FF'=2c=16$، فرض کنید $PF=s$ و $PF'=t$. چون مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر $2a$ است، پس $s+t=20$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ PFF'،

$$PF^2+FF'^2=PF'^2 \Rightarrow s^2+16^2=t^2$$

$$s^2+16^2=(20-s)^2 \Rightarrow s^2+16^2=20^2-40s+s^2$$

$$40s=20^2-16^2 \Rightarrow s=\frac{18}{5}$$



۵۷- گزینهٔ ۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی تا کانون‌های بیضی برابر با طول قطر بزرگ بیضی است. بنابراین

$$FD+DF'=AA'=24 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، چون قطر کوچک بیضی روی عمود منصف پاره‌خط FF' است، پس $FC=CF'$ (هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است). به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود:

$$(FC+CD)+DF'=24$$

$$(CF'+CD)+DF'=24 \Rightarrow \text{محیط مثلث } CDF'=24$$

۵۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $2a=AA'=4\sqrt{5}$، پس $a=2\sqrt{5}$ و $2b=BB'=4$، پس $b=2$. بنابراین

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (2\sqrt{5})^2=2^2+c^2 \Rightarrow c=4$$

بنابراین $FF'=2c=8$. از طرف دیگر، چون FK قطر دایرهٔ به مرکز B است، پس $FK=2BF=2a=4\sqrt{5}$. اکنون توجه کنید که زاویهٔ $FF'K$، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است. بنابراین، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $FF'K$ نتیجه می‌شود:

$$FF'^2+F'K^2=FK^2 \Rightarrow 8^2+F'K^2=(4\sqrt{5})^2 \Rightarrow F'K=4$$

۵۹- گزینهٔ ۲ معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ (α,β) و شعاعش r است به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است.

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=2$$

$$x^2+y^2-6x+2y+8=0$$

۶۰- گزینهٔ ۱ مرکز دایره به معادلهٔ

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

نقطهٔ $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ است. پس ابتدا دو طرف معادلهٔ دایره داده شده را بر دو تقسیم می‌کنیم تا ضرایب x^2 و y^2 برابر ۱ شوند:

$$x^2+y^2+2x-6y-\frac{1}{2}=0$$

بنابراین مرکز دایره، نقطهٔ $(-\frac{2}{2},-\frac{-6}{2})$، یعنی $(-1,3)$ است.

۶۱- گزینهٔ ۲ مرکز و شعاع دایره به معادلهٔ

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

بـه ترتیب $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ اسـت. بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{-2}{2},-\frac{6}{2})$، یعنی $(1,-3)$ است و شعاع آن برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{4+36+4}=\frac{1}{2}\sqrt{44}=\sqrt{11}$$

۶۲- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2+y^2-4x+6y-5=0 \Rightarrow x^2+y^2+6x-4y-3=0$$

$$x^2+y^2-2x+4y-8=0$$

بنابراین

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+6^2-4(-5)}=\frac{1}{2}\sqrt{72}$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{64}$$

$$r_3=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(-8)}=\frac{1}{2}\sqrt{52}$$

در نتیجه $r_1>r_2>r_3$.

۶۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(4x-1)^2+(4y-3)^2=4 \Rightarrow 16(x-\frac{1}{4})^2+16(y-\frac{3}{4})^2=4$$

$$(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{3}{4})^2=\frac{1}{4}$$

بنابراین شعاع دایره برابر $\frac{1}{2}$ است.

۶۴- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+4^2-4(-c)}=\frac{1}{2}\sqrt{52+4c}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{52+4c}=2 \Rightarrow 52+4c=16 \Rightarrow c=-9$$

۶۵- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(2a)^2-4(-4)}=\frac{1}{2}\sqrt{5a^2+16}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{5a^2+16}=3 \Rightarrow \sqrt{5a^2+16}=6 \Rightarrow 5a^2+16=36$$

$$a^2=4 \Rightarrow a=2$$

بنابراین معادلهٔ دایــره به صورت $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ است که مرکز آن نقطهٔ $(-1,-2)$ است.

۶۶- گزینهٔ ۱ شــرط اینکــه $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره باشد این است که $a^2+b^2-4c>0$. بنابراین

$$4^2+6^2-4(-k)>0 \Rightarrow k>-13$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد صحیح k برابر -12 است.

۶۷- گزینهٔ ۲ معادلـهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ وقتـی معادلهٔ یک دایره است که $a^2+b^2-4c>0$. بنابراین باید

$$k^2+2^2-4k>0 \Rightarrow k^2-4k+4>0 \Rightarrow (k-2)^2>0 \Rightarrow k\neq 2$$

۶۸- گزینهٔ ۴ معادلـهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ وقتـی معادلهٔ یک دایره است که $a^2+b^2-4c>0$. بنابراین باید

$$2^2+4^2-4(2k-3)>0 \Rightarrow 20-4(2k-3)>0 \Rightarrow k<4$$

۶۹- گزینهٔ ۳ در معادلـهٔ دایـره، جملهٔ شـامل xy وجود نـدارد. بنابراین ضریب xy باید صفر باشـد، یعنی $k-2=0$، پس $k=2$. به این ترتیب معادلهٔ دایره می‌شود

$$x^2+y^2+4x-8y-2=0$$

و شعاعش برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-8)^2-4(-2)}=\sqrt{22}$.

۷۰- گزینهٔ ۲ در معادلـهٔ دایره، ضریب جمله‌های شـامل x^2 و y^2 برابر ۱ اسـت. بنابرایـن ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $k-1$ تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $k-1\neq 0$):

$$x^2+\frac{3k-5}{k-1}y^2+\frac{2}{k-1}x-\frac{4}{k-1}y-\frac{3k}{k-1}=0$$

بنابراین $\frac{3k-5}{k-1}=1$، پس $k=2$ و معادلهٔ دایره می‌شود

$$x^2+y^2+2x-4y-6=0$$

و شعاعش برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-6)}=\sqrt{11}$.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتـدا معادلهٔ داده شـده را بـه صورت زیر می‌نویسیم:

$$ax^2-3y^2+6x-15y-5a=0$$

در معادلـهٔ دایره، ضریب جمله‌های شـامل x^2 و y^2 برابر ۱ اسـت. بنابرایـن ابتدا دو طرف ایـن معادله را بر a تقسـیم می‌کنیم (توجه کنید که $a\neq 0$):

$$x^2-\frac{3}{a}y^2+\frac{6}{a}x-\frac{15}{a}y-5=0$$

به این ترتیب، $-\frac{3}{a}=1$، پس $a=-3$ و معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$x^2+y^2-2x+5y-5=0$$

و شعاع این دایره برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۵^۲-۴(-۵)}=\frac{۷}{۲}$$

پس قطر این دایره برابر ۷ است.

۷۲- گزینهٔ ۲ در فرم گستردهٔ دایره، ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابرند. پس $a=۴$. بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$۴x^۲+۴y^۲+۸x-by=۴$$

$$x^۲+y^۲+۲x-\frac{b}{۴}y-۱=۰$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+\frac{b^۲}{۱۶}-۴(-۱)}$$

طبق فرض $r=۲$، در نتیجه

$$۸+\frac{b^۲}{۱۶}=۱۶\Rightarrow\frac{b^۲}{۱۶}=۸\Rightarrow b^۲=۱۲۸$$

۷۳- گزینهٔ ۳ در معادلهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ باید برابر باشند. پس

$$a-۲b=b-۲a\Rightarrow a=b$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$-bx^۲-by^۲+bx+by+b=۰$$

$$x^۲+y^۲-x-y-۱=۰$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۱+۴}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۷۴- گزینهٔ ۳ هر خطی که از مرکز دایرهٔ مورد نظر می‌گذرد قطری از آن است. مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۲,۱)$ است. این نقطه فقط روی خط گزینهٔ (۳) نیست.

۷۵- گزینهٔ ۴ مرکز دایرهٔ داده شده، یعنی نقطهٔ $(۳,-۱)$، باید روی خط $x+۲by+۷=۰$ باشد. در نتیجه

$$۳+۲b(-۱)+۷=۰\Rightarrow b=۵$$

۷۶- گزینهٔ ۴ مرکز دایره، وسط پاره‌خط میان دو سر قطر است. مرکز دایرهٔ مورد نظر، نقطهٔ $(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۶}{۲})$، یعنی $(۱,-۳)$ است. اگر سر دیگر قطر مورد نظر نقطهٔ (x,y) باشد، آن‌گاه وسط این قطر، نقطهٔ $(\frac{x+۵}{۲},\frac{y-۶}{۲})$ است. بنابراین

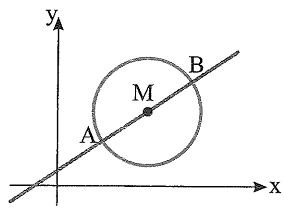
$$(\frac{x+۵}{۲},\frac{y-۶}{۲})=(۱,-۳)\Rightarrow\begin{cases}\frac{x+۵}{۲}=۱\\ \frac{y-۶}{۲}=-۳\end{cases}$$

بنابراین $x=-۳$ و $y=۰$. پس نقطهٔ مورد نظر $(-۳,۰)$ است.

۷۷- گزینهٔ ۲ چون A نقطه‌ای به عرض ۶ روی خط $۲x-۳y+۶=۰$ است، پس اگر طول آن x_A باشد، آن‌گاه $۲x_A-۳(۶)+۶=۰$، یعنی $x_A=۶$. بنابراین A نقطهٔ $(۶,۶)$ است. اکنون توجه کنید که نقطهٔ B سر دیگر قطری است که از A می‌گذرد. بنابراین مرکز دایره، وسط پاره‌خط AB است. از طرف دیگر، مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $M(۱۲,۱۰)$ است. بنابراین

$$\frac{x_A+x_B}{۲}=۱۲\Rightarrow\frac{۶+x_B}{۲}=۱۲\Rightarrow x_B=۱۸$$

$$\frac{y_A+y_B}{۲}=۱۰\Rightarrow\frac{۶+y_B}{۲}=۱۰\Rightarrow y_B=۱۴$$



۷۸- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر فاصلهٔ نقطه‌های $(۳,-۲)$ و $(-۱,-۳)$ است:

$$\text{شعاع دایره}=\sqrt{(۳+۱)^۲+(-۲+۳)^۲}=\sqrt{۱۷}$$

به این ترتیب، چون مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۳,-۲)$ است، معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۷$$

$$x^۲+y^۲-۶x+۴y=۴$$

۷۹- گزینهٔ ۲ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۱۰}{۲})$، یعنی $(۳,-۵)$ است. بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر هم $(۳,-۵)$ است. شعاع این دایره برابر فاصلهٔ نقطه‌های $(۳,-۵)$ و $(۲,-۱)$ است، که می‌شود

$$\sqrt{(۳-۲)^۲+(-۵-(-۱))^۲}=\sqrt{۱۷}$$

۸۰- گزینهٔ ۳ چون دایره از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند. بنابراین

$$۱^۲+۲^۲+۲a\times۱+(a+۱)\times۲-۳=۰$$

$$a=-۱$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ داده شده به صورت $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ است، که مرکز آن نقطهٔ $(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۰}{۲})$، یعنی $(۱,۰)$ است.

۸۱- گزینهٔ ۲ مرکز دایره، نقطهٔ $(\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$ است. بنابراین

$$(\frac{a}{2},-\frac{a}{2})=(-2,2)\Rightarrow \frac{a}{2}=-2\Rightarrow a=-4$$

و معادلهٔ دایره می‌شود

$$x^2+y^2+4x-4y=b$$

چون دایره از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرد، مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند، پس

$$1+4+4-8=b\Rightarrow b=1$$

در نتیجه $a+b=-3$.

۸۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد. چون مختصات نقطه‌های داده شده در این معادله صدق می‌کنند، پس

$$\begin{cases}1+36+a+6b+c=0\\ 9+100+3a+10b+c=0\\ 100+9+10a+3b+c=0\end{cases}$$

اگر معادلهٔ اول را از معادلهٔ سوم کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$72+9a-3b=0 \qquad (1)$$

و اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$7a-7b=0 \qquad (2)$$

از دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=b=-12$.

اکنون توجه کنید که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$، یعنی نقطهٔ $(6,6)$ است.

۸۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد. نقاط A، B و C روی دایره هستند، پس مختصات آنها در این معادله صدق می‌کنند:

$$A:\quad 0+0+0+0+c=0\Rightarrow c=0$$

$$B:\quad 1+4+a+2b=0\Rightarrow a+2b=-5$$

$$C:\quad 1+1-a+b=0\Rightarrow -a+b=-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+2b=-5\\ -a+b=-2\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{1}{3}$ و $b=-\frac{7}{3}$، پس معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2-\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}y=0$ است و نقطهٔ $D(k,k+1)$ روی این دایره قرار دارد. پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$k^2+(k+1)^2-\frac{1}{3}k-\frac{7}{3}(k+1)=0\Rightarrow 2k^2-\frac{2}{3}k-\frac{4}{3}=0$$

بنابراین $k=1$ و $k=-\frac{2}{3}$. توجه کنید که اگر $k=1$، نقطه‌های B و D یکسان می‌شوند، که درست نیست. بنابراین $k=-\frac{2}{3}$.

۸۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول چون مرکز دایره روی محور x است، پس به صورت $O(\alpha,0)$ است. فرض کنید شعاع دایره r باشد. نقطه‌های $A(0,-2)$ و $B(4,0)$ روی دایره قرار دارند، پس $r=OA=OB$. از طرف دیگر،

$$OA=\sqrt{\alpha^2+4},\quad OB=\sqrt{(\alpha-4)^2}$$

بنابراین

$$\alpha^2+4=\alpha^2-8\alpha+16\Rightarrow \alpha=\frac{3}{2}$$

و در نتیجه

$$r=OA=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم اگر معادلهٔ گستردهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد، مرکزش نقطهٔ $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ است که چون روی محور x است، پس $-\frac{b}{2}=0$، یعنی $b=0$.

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^2+y^2+ax+c=0$ است. چون نقطه‌های $(0,-2)$ و $(4,0)$ روی این دایره‌اند، پس مختصات آنها در معادلهٔ این دایره صدق می‌کنند:

$$(0,-2):\quad 0+4+0+c=0\Rightarrow c=-4$$

$$(4,0):\quad 16+0+4a+c=0\xrightarrow{c=-4}a=-3$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت $x^2+y^2-3x-4=0$ است و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2-4(-4)}=\frac{5}{2}$$

۸۵- گزینهٔ ۱ چون مرکز دایره روی خط $y=-2x$ قرار دارد، پس به صورت $O(\alpha,-2\alpha)$ است. فرض کنید r شعاع دایره باشد. نقاط $A(0,0)$ و $B(1,-1)$ روی دایره قرار دارند، پس $r=OA=OB$. از طرف دیگر،

$$OA=\sqrt{(\alpha-0)^2+(-2\alpha-0)^2}=\sqrt{5\alpha^2}$$

$$OB=\sqrt{(\alpha-1)^2+(-2\alpha+1)^2}=\sqrt{5\alpha^2-6\alpha+2}$$

بنابراین

$$-6\alpha+2=0\Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}$$

و در نتیجه

$$r=OA=\sqrt{5\alpha^2}=\sqrt{5(\frac{1}{9})}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

۸۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید مرکز دایره، نقطهٔ $O(۲\alpha-۱,\alpha)$ باشد. نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۳,۰)$ روی دایره قرار دارند. بنابراین $r=OA=OB$. از طرف دیگر،

$$OA=\sqrt{(۲\alpha-۱-۲)^۲+(\alpha+۱)^۲}=\sqrt{۵\alpha^۲-۱۰\alpha+۱۰}$$

$$OB=\sqrt{(۲\alpha-۱-۳)^۲+(\alpha-۰)^۲}=\sqrt{۵\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۶}$$

پس

$$۵\alpha^۲-۱۰\alpha+۱۰=۵\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۶\Rightarrow ۶\alpha=۶\Rightarrow\alpha=۱$$

بنابراین

$$r=OA=\sqrt{۵\alpha^۲-۱۰\alpha+۱۰}=\sqrt{۵}$$

۸۷- گزینهٔ ۳ نقطهٔ تقاطع دو قطر با معادلات $y=۲x$ و $y=-x+۳$ را از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}y=۲x\\y=-x+۳\end{cases}$ به‌دست می‌آوریم که همان مرکز دایره است:

$$۲x=-x+۳\Rightarrow x=۱,\ y=۲$$

پس $O(۱,۲)$ مرکز دایره و $A(۰,۱)$ نقطه‌ای روی دایره است، در نتیجه

$$r=OA=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

۸۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید شعاع دایره r باشد. در این صورت محیط دایره $۲\pi r$ است، در نتیجه $۲\pi r=۱۰\pi$، پس $r=۵$. محل برخورد قطرها مرکز دایره است. بنابراین مختصات مرکز دایره جواب‌های دستگاه معادلات زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x+۳y+۱=۰\\۳x-y-۴=۰\end{cases}\Rightarrow x=۱,\ y=-۱$$

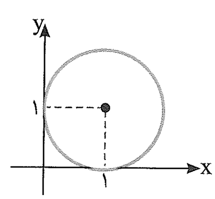
بنابراین مرکز دایرهٔ مورد نظر، نقطهٔ $(۱,-۱)$ و شعاعش برابر ۵ است. در نتیجه معادلهٔ این دایره به صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲۵$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲۳=۰$$

۸۹- گزینهٔ ۱ از روی شکل زیر معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۱,۱)$ و شعاع آن برابر ۱ است. بنابراین معادله‌اش به صورت زیر است:

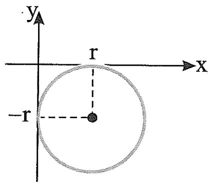
$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۲y+۱=۰$$



۹۰- گزینهٔ ۱ اگر شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر r باشد، از روی شکل زیر معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(r,-r)$ است. چون $r=۳$، پس مرکز دایرهٔ مورد نظر، نقطهٔ $(۳,-۳)$ و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x-۳)^۲+(y-(-۳))^۲=۹$$

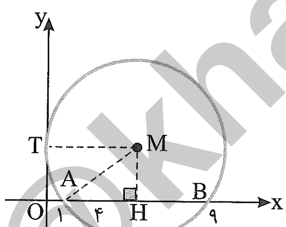
$$x^۲+y^۲-۶x+۶y+۹=۰$$



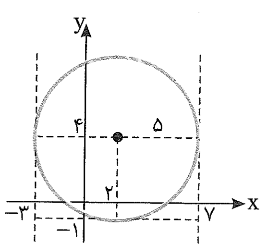
۹۱- گزینهٔ ۳ فرض کنید مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ M باشد و دایره در نقطهٔ T بر محور y مماس باشد. با نمادگذاری شکل زیر $AB=۹-۱=۸$، پس $AH=\frac{AB}{۲}=۴$. در نتیجه $TM=OH=۵$، یعنی شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر ۵ است. به این ترتیب، $AM=۵$ و بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM،

$$AM^۲=AH^۲+MH^۲\Rightarrow ۵^۲=۴^۲+MH^۲\Rightarrow MH=۳$$

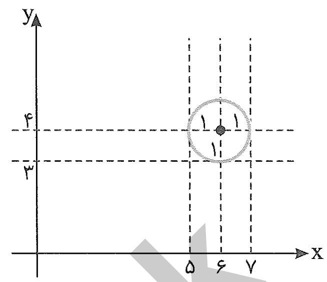
به این ترتیب، مرکز دایرهٔ مورد نظر، نقطهٔ $(۵,۳)$ و شعاعش برابر ۵ است. پس معادله‌اش به صورت $(x-۵)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$ است.



۹۲- گزینهٔ ۲ از روی شکل زیر معلوم است که شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر با نصف فاصلهٔ خط‌های $x=-۳$ و $x=۷$، یعنی برابر است با $\frac{۷-(-۳)}{۲}=۵$. به این ترتیب، از روی شکل معلوم می‌شود که طول مرکز دایره برابر ۲ و عرض آن برابر ۴ است، یعنی مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۲,۴)$ است.



۹۳- گزینهٔ ۴ شعاع دایرهٔ مورد نظر نصف فاصلهٔ خط‌های $x=۵$ و $x=۷$ است. چون این فاصله برابر ۲ است، پس شعاع دایرهٔ مورد نظر ۱ است. به این ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که طول مرکز دایره برابر ۶ و عرض آن برابر ۴ است، یعنی مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۶,۴)$ است.



۹۴- گزینهٔ ۲ چون خط‌های داده شده موازی‌اند (شیب هر کدام $\frac{۳}{۴}$ است)، پس شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است. فاصلهٔ دو خط برابر است با

$$\frac{|۴-(-\frac{۷}{۲})|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۹۵- گزینهٔ ۳ اگر مختصات نقطهٔ A را در عبارت سمت چپ معادلهٔ دایره قرار دهیم، باید حاصل مقداری منفی شود:

$$x^۲+y^۲+ax+y-۱=۰$$

$$\xrightarrow{x=۲\,,\,y=-۱} ۴+۱+۲a-۱-۱<۰$$

$$۲a<-۳ \Rightarrow a<-\frac{۳}{۲}$$

۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر معادلهٔ

$$x^۲+y^۲+ax-a=۰$$

مربوط به یک دایره باشد، باید

$$a^۲+۰^۲-۴(-a)>۰$$

پس

$$a^۲+۴a>۰ \Rightarrow a>۰ \quad \text{یا} \quad a<-۴$$

همچنین اگر مختصات نقطهٔ $A(۲,۲)$ را در عبارت سمت چپ معادلهٔ دایره قرار دهیم، باید حاصل عددی مثبت شود:

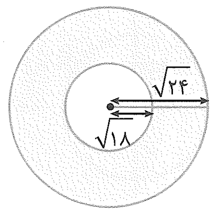
$$x^۲+y^۲+ax-a=۰$$

$$\xrightarrow{x=۲\,,\,y=۲} ۴+۴+۲a-a>۰ \Rightarrow a>-۸$$

بنابراین $a\in(-۸,-۴)\cup(۰,+\infty)$.

۹۷- گزینهٔ ۳ ناحیهٔ $x^۲+y^۲<۲۴$ ناحیهٔ درون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۴$ و ناحیهٔ $x^۲+y^۲>۱۸$ ناحیهٔ بیرون دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۸$ است. این دایره‌ها هم‌مرکزند و شعاع آنها $\sqrt{۲۴}$ و $\sqrt{۱۸}$ است. بنابراین مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با مساحت ناحیهٔ رنگی در شکل زیر:

$$\pi(\sqrt{۲۴})^۲-\pi(\sqrt{۱۸})^۲=۶\pi$$

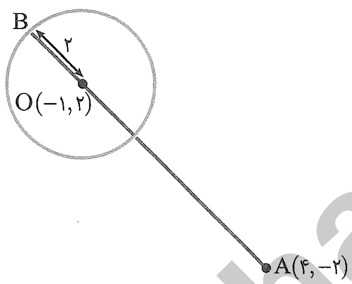


۹۸- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که مرکز دایره نقطهٔ $O(-۱,۲)$ و شعاع آن برابر ۲ است. مطابق شکل زیر بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ A از نقاط روی دایره برابر طول پاره‌خط AB است. چون

$$OA=\sqrt{(۴+۱)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۴۱}$$

پس

$$AB=OA+OB=\sqrt{۴۱}+۲$$



۹۹- گزینهٔ ۱

$$x^۲+۰+۳x+۰-۴=۰ \Rightarrow x^۲+۳x-۴=۰ \Rightarrow x=-۴, x=۱$$

بنابراین $AB=۱-(-۴)=۵$.

۱۰۰- گزینهٔ ۳ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ $O(۱,-۲)$ از نقطهٔ $A(۴,-۲)$ است:

$$r=OA=\sqrt{(۴-۱)^۲+(-۲+۲)^۲}=۳$$

پس معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹$$

این دایره محورهای مختصات را در چهار نقطه قطع می‌کند که مختصات آنها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=۰ \Rightarrow ۱+(y+۲)^۲=۹ \Rightarrow (y+۲)^۲=۸ \Rightarrow y=-۲\pm۲\sqrt{۲}$$

$$y=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+۴=۹ \Rightarrow (x-۱)^۲=۵ \Rightarrow x=۱\pm\sqrt{۵}$$

چهار نقطه عبارت‌اند از:

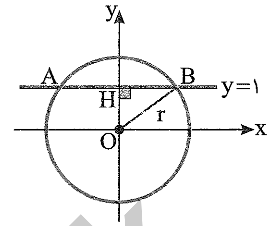
$$(۰,-۲+۲\sqrt{۲}),\ (۰,-۲-۲\sqrt{۲}),\ (۱+\sqrt{۵},۰),\ (۱-\sqrt{۵},۰)$$

۱۰۱- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر $AB=۴\sqrt{۲}$، پس $BH=۲\sqrt{۲}$ و در نتیجه

$$r=\sqrt{OH^۲+HB^۲}=\sqrt{۱^۲+(۲\sqrt{۲})^۲}=۳$$

از طرف دیگر شعاع دایره برابر $\sqrt{k^۲+۱}$ است. پس

$$r=\sqrt{k^۲+۱}=۳\Rightarrow k^۲=۸\Rightarrow k=\pm۲\sqrt{۲}$$



۱۰۲- گزینهٔ ۴ کوتاه‌ترین وتری که از A می‌گذرد وتری است که بر قطر گذرا از A عمود است و بلندترین وتری که از A می‌گذرد، قطر گذرنده از A است. با توجه به شکل زیر،

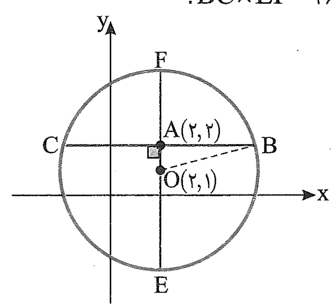
$$OB=r=۴,\quad OA=۱$$

در نتیجه

$$AB=\sqrt{OB^۲-OA^۲}=\sqrt{۱۶-۱}=\sqrt{۱۵}\Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۵}$$

$$EF=۲r=۲\times۴=۸$$

بنابراین $BC\times EF=۱۶\sqrt{۱۵}$.



۱۰۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید خط مورد نظر دایره را در نقطه‌های A و B قطع کرده باشد. توجه کنید که مرکز دایره مورد نظر نقطهٔ $O(-۳,۰)$ است و شعاع آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۶^۲+۰-۴(-۸)}=\sqrt{۱۷}$$

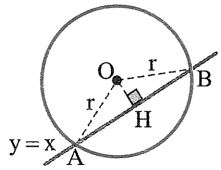
از طرف دیگر، طول پاره‌خط OH برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از خط $x-y=۰$ است:

$$OH=\frac{|-۳-۰|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$HB^۲=r^۲-OH^۲=۱۷-\frac{۹}{۲}=\frac{۲۵}{۲}\Rightarrow HB=\frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

در نهایت $AB=۲HB=۵\sqrt{۲}$. پس محیط مثلث OAB برابر است با $۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱۷}$.



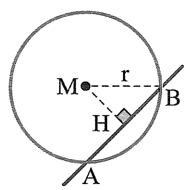
۱۰۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید خط مورد نظر، دایره را در نقطه‌های A و B قطع کرده باشد و M مرکز دایره باشد. ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{۴}{۲},-\frac{۰}{۲})$، یعنی $(-۲,۰)$ است و شعاع این دایره برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+۰^۲-۴(-۵)}=۳$. از طرف دیگر، طول پاره‌خط MH برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از خط $۲x+y-۱=۰$ است:

$$MH=\frac{|۲(-۲)+۰-۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHB،

$$r^۲=MH^۲+HB^۲\Rightarrow ۹=۵+HB^۲\Rightarrow HB=۲$$

در آخر $AB=۲HB=۴$.



۱۰۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید خط $x=۲y$ دایره را در نقطه‌های A و B قطع کرده باشد و M مرکز دایره باشد. در این صورت، با نمادگذاری شکل زیر $AB=۲HB$.

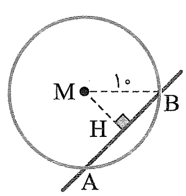
از طرف دیگر، طول پاره‌خط MH برابر فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۱۴,۱۲)$ از خط $x-۲y=۰$ است، که برابر است با

$$MH=\frac{|۱۴-۲(۱۲)|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHB،

$$۱۰^۲=MH^۲+HB^۲\Rightarrow ۱۰^۲=۲۰+HB^۲\Rightarrow HB=۴\sqrt{۵}$$

پس $AB=۲HB=۸\sqrt{۵}$.



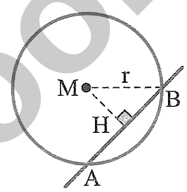
۱۰۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید خط مورد نظر دایره را در نقطه‌های A و B قطع کرده باشد و مرکز دایره، نقطهٔ M باشد. در این صورت، با نمادگذاری شکل زیر، $HB=\frac{۱}{۲}AB=۳$. از طرف دیگر، طول پاره‌خط MH برابر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۴x+۳y+۶=۰$ است. چون مرکز دایره نقطهٔ $(۳,-۱)$ است، این فاصله برابر است با

$$MH=\frac{|۴\times۳+۳(-۱)+۶|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MHB،

$$r^۲=MH^۲+HB^۲=۳^۲+۳^۲=۱۸$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۱۸$ است.



۱۰۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطهٔ $O(-۱,-۲)$ مرکز دایره و شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۴}=\sqrt{۶}$ است. با توجه به شکل زیر،

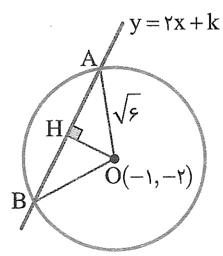
$$AH=\frac{AB}{۲}=۲\Rightarrow OH=\sqrt{OA^۲-AH^۲}=\sqrt{۶-۴}=\sqrt{۲}$$

از طرف دیگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $۲x-y+k=۰$ برابر است با

$$OH=\frac{|-۲+۲+k|}{\sqrt{۴+۱}}$$

بنابراین

$$\frac{|k|}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۲}\Rightarrow|k|=\sqrt{۱۰}\Rightarrow k=\pm\sqrt{۱۰}$$



۱۰۸- گزینهٔ ۳ بزرگ‌ترین وتر دایره، قطر آن است، پس خط باید از مرکز دایره عبور کند. نقطهٔ $(۱,-۳)$ مرکز دایره است و مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کنند. پس

$$-۳=۲-k\Rightarrow k=۵$$

۱۰۹- گزینهٔ ۴ اگر خط مورد نظر دایره را در دو نقطه قطع کند، فاصلهٔ مرکز دایره، یعنی نقطهٔ $(۰,۱)$ از خط $y-x-k=۰$، از شعاع دایره کمتر است. شعاع دایره برابر است با $\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$، پس

$$\frac{|۱-۰-k|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}<۲\sqrt{۲}\Rightarrow|۱-k|<۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$$

$$-۴<k-۱<۴\Rightarrow-۳<k<۵$$

مقدارهای صحیح k که در این نابرابری‌ها صدق می‌کنند ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند، که مجموع آنها برابر ۷ است.

۱۱۰- گزینهٔ ۳ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-۲,۱)$ و شعاع آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲-۴(-۱۱)}=۴$$

اگر خط $۳x-۴y+k=۰$ دایره را در دو نقطه قطع کرده باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط از شعاع دایره کمتر است، بنابراین

$$\frac{|۳(-۲)-۴(۱)+k|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}<۴\Rightarrow|k-۱۰|<۲۰$$

$$-۲۰<k-۱۰<۲۰\Rightarrow-۱۰<k<۳۰$$

۱۱۱- گزینهٔ ۴ مختصات نقطهٔ $A(۱,۲)$ در معادلهٔ خط و معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$y=x+a\Rightarrow ۲=۱+a\Rightarrow a=۱$$

$$x^۲+y^۲+x+by-۲=۰\Rightarrow ۱+۴+۱+۲b-۲=۰\Rightarrow b=-۲$$

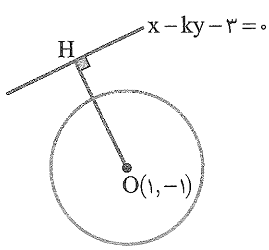
بنابراین نقطهٔ تلاقی $B(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است. مجموع طول و عرض نقطهٔ B برابر ۲− است.

۱۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که نقطهٔ $(۱,-۱)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر ۲ است. چون دایره و خط متقاطع نیستند، پس یا خط بر دایره مماس است یا خارج آن قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ مرکز دایره از خط باید کمتر از شعاع دایره نباشد. مطابق شکل زیر،

$$OH=\frac{|۱+k-۳|}{\sqrt{k^۲+۱}}=\frac{|k-۲|}{\sqrt{k^۲+۱}}\geq۲$$

بنابراین

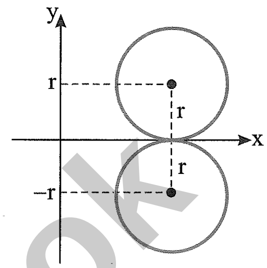
$$(k-۲)^۲\geq۴(k^۲+۱)\Rightarrow۳k^۲+۴k\leq۰\Rightarrow-\frac{۴}{۳}\leq k\leq۰$$



۱۱۳- گزینهٔ ۲ اگر دایره‌ای بر محور x مماس باشد، شعاعش برابر با قدرمطلق عرض مرکز آن است (شکل زیر را ببینید). عرض مرکز این دایره برابر است با $-\frac{8}{2}=-4$ و شعاعش برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+64-4(16)}=|a|$$

بنابراین $|a|=4$.

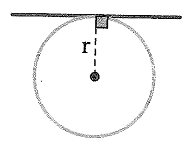


۱۱۴- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-\frac{4}{2},-\frac{2}{2})$، یعنی $(-2,-1)$ است. اگر دایره بر خطی مماس باشد، شعاعش برابر با فاصلهٔ مرکز دایره از این خط است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-2,-1)$ از خط $y=1$ برابر ۲ است. شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2-4k}=\frac{1}{2}\sqrt{20-4k}$$

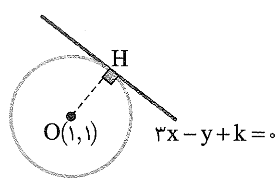
در نتیجه

$$\frac{1}{2}\sqrt{20-4k}=2\Rightarrow\sqrt{20-4k}=4\Rightarrow k=1$$



۱۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که نقطهٔ $(1,1)$ مرکز دایره و شعاع دایره برابر ۲ است. برای اینکه خط بر دایره مماس باشد باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد:

$$OH=\frac{|3-1+k|}{\sqrt{9+1}}=2\Rightarrow|k+2|=2\sqrt{10}\Rightarrow k=-2\pm2\sqrt{10}$$



۱۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $O(-\frac{1}{2},-1)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر است با

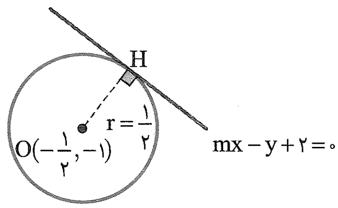
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{1+4-4}=\frac{1}{2}$$

برای اینکه خط بر دایره مماس باشد باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد:

$$OH=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{|-\frac{m}{2}+1+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow|-m+6|=\sqrt{m^2+1}$$

$$m^2+36-12m=m^2+1\Rightarrow m=\frac{35}{12}$$

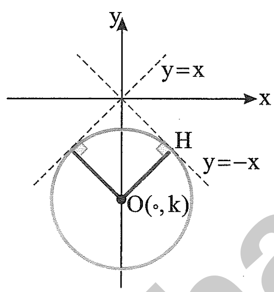
پس به‌ازای یک مقدار m خط بر دایره مماس است.



۱۱۷- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر مرکز دایره باید روی محور y باشد. اگر $O(0,k)$ مرکز دایره باشد، آن‌گاه

$$r=OH=\frac{|0+k|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2$$

پس $|k|=2\sqrt{2}$ و چون k منفی است، $k=-2\sqrt{2}$.



۱۱۸- گزینهٔ ۱ مرکز دایره نقطهٔ $O(-1,3)$ است. پس فاصلهٔ این نقطه تا دو خط $2x+y+k=0$ و $2x-y-2k=0$ باید برابر باشد. این فاصله برابر با شعاع دایره است:

$$\frac{|-2+3+k|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-2-3-2k|}{\sqrt{4+1}}\Rightarrow|k+1|=|2k+5|$$

$$\begin{cases}2k+5=k+1\Rightarrow k=-4\Rightarrow r=\frac{3}{\sqrt{5}}\\ 2k+5=-k-1\Rightarrow k=-2\Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

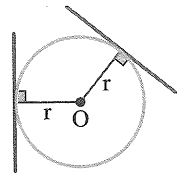
از طرف دیگر شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-4a}=\sqrt{10-a}$$

پس

$$\sqrt{10-a}=\frac{3}{\sqrt{5}}\Rightarrow10-a=\frac{9}{5}\Rightarrow a=\frac{41}{5}$$

$$\sqrt{10-a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow10-a=\frac{1}{5}\Rightarrow a=\frac{49}{5}$$



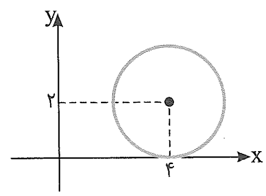
۱۱۹- گزینهٔ ۲ شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,-۲)$ از خط $۴x+۳y+۱۹=۰$ است:

$$\text{شعاع}=\frac{|۴(۳)+۳(-۲)+۱۹|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=۵$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۲۵\Rightarrow x^۲+y^۲-۶x+۴y-۱۲=۰$$

۱۲۰- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(۴,b)$ روی خط $x=۲y$ است، پس $۴=۲b$، یعنی $b=۲$. در نتیجه، از روی شکل زیر معلوم است که شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر ۲ است. معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $(۴,۲)$ و شعاعش برابر ۲ است به صورت $(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۴$ است.

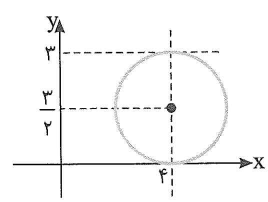


۱۲۱- گزینهٔ ۱ از روی شکل زیر معلوم است که مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۴,\frac{۳}{۲})$ و شعاعش برابر $\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x-۴)^۲+(y-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$$

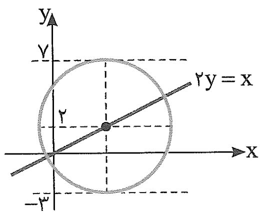
$$x^۲-۸x+۱۶+y^۲-۳y+\frac{۹}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

$$x^۲+y^۲-۸x-۳y+۱۶=۰$$



۱۲۲- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر با نصف فاصلهٔ خط‌های $y=-۳$ و $y=۷$ است. فاصلهٔ این خط‌ها برابر است با $۷-(-۳)=۱۰$، پس شعاع دایره برابر ۵ است. عرض مرکز دایره روی خطی موازی با خطوط $y=۷$ و $y=-۳$ است و از این دو خط به یک فاصله است، یعنی روی خط $y=\frac{۷-۳}{۲}=۲$ است، در نتیجه طول مرکز دایره برابر است با $x=۲y=۴$. یعنی، مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(۴,۲)$ و شعاع آن برابر ۵ است و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$(x-۴)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$$

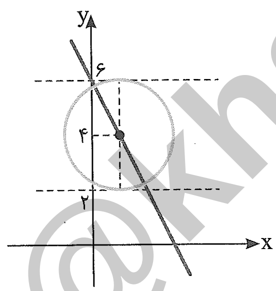


۱۲۳- گزینهٔ ۴ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با نصف فاصلهٔ خط‌های $y=۲$ و $y=۶$، یعنی $\frac{۶-۲}{۲}=۲$. از طرف دیگر، معلوم می‌شود که عرض مرکز دایره برابر ۴ است و چون مرکز دایره روی خط $۲x+y-۶=۰$ است، پس اگر طول آن x باشد،

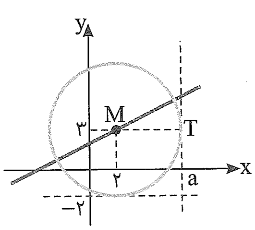
$$۲x+۴-۶=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین مرکز دایره، نقطهٔ $(۱,۴)$ است و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲+(y-۴)^۲=۴$$



۱۲۴- گزینهٔ ۴ چون عرض مرکز دایره برابر ۳ و مرکزش روی خط $۲y-x-۴=۰$ است، پس $۲\times۳-x-۴=۰$، یعنی طول مرکز برابر ۲ است، پس مرکز نقطهٔ $(۲,۳)$ است. اکنون، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که شعاع دایره برابر است با $۳-(-۲)=۵$. به این ترتیب، چون MT برابر شعاع است، پس $MT=۵$ و در نتیجه $a=۲+۵=۷$.



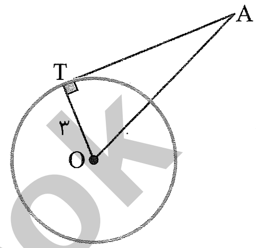
۱۲۵- گزینهٔ ۳ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $O(2,-2)$ و شعاعش برابر ۳ است. از طرف دیگر،

$$OA=\sqrt{(2-2)^2+(-2-4)^2}=6$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTA،

$$OA^2=OT^2+AT^2$$

$$6^2=3^2+AT^2\Rightarrow AT=3\sqrt{3}$$



۱۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که نقطهٔ $O(-1,2)$ مرکز دایره است و شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4k}$$
$$=\sqrt{5-k}$$

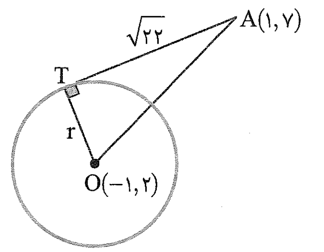
از طرف دیگر،

$$OA=\sqrt{(1+1)^2+(7-2)^2}=\sqrt{29}$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTA،

$$OT^2+AT^2=OA^2$$

$$5-k+22=29\Rightarrow k=-2$$



۱۲۷- گزینهٔ ۲ مرکز دایرهٔ مورد نظر نقطهٔ $(-1,-2)$ است. بنابراین شیب خطی که از مرکز و نقطهٔ $(2,3)$ می‌گذرد (یعنی خطی که شعاع نظیر نقطهٔ $(2,3)$ روی آن قرار دارد) برابر است با $\frac{3+2}{2+1}=\frac{5}{3}$. چون خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس m باشد،

$$m\times\frac{5}{3}=-1\Rightarrow m=-\frac{3}{5}$$

بنابراین خط مماس، خطی است که شیب آن $-\frac{3}{5}$ است و از نقطهٔ $(2,3)$ می‌گذرد و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y-3=-\frac{3}{5}(x-2)\Rightarrow 3x+5y-21=0$$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ شیب خطی که از مرکز دایره و مبدأ مختصات می‌گذرد برابر است با $-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$. چون خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس مورد نظر برابر m باشد، $(-\frac{4}{3})(m)=-1$، پس $m=\frac{3}{4}$. معادلهٔ خطی که شیب آن $\frac{3}{4}$ است و از مبدأ می‌گذرد، به صورت $y=\frac{3}{4}x$ یعنی $4y=3x$ است.

۱۲۹- گزینهٔ ۱ مرکز دایرهٔ داده شده نقطهٔ $(2,-3)$ است. بنابراین شیب خطی که شعاع نظیر نقطهٔ $(4,-1)$ روی آن است برابر است با $\frac{-3+1}{2-4}=1$. چون خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس اگر شیب خط مماس مورد نظر برابر m باشد، $m(1)=-1$، یعنی $m=-1$. بنابراین خط مماس مورد نظر خطی است که شیب آن -1 است و از نقطهٔ $(4,-1)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط به صورت زیر است:

$$y+1=-(x-4)\Rightarrow y=-x+3$$

۱۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که نقطهٔ $A(0,-2)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$0+4+0-2b-2=0\Rightarrow b=1$$

بنابراین معادله دایره به صورت $x^2+y^2+ax+y-2=0$ است و نقطهٔ $O(-\frac{a}{2},-\frac{1}{2})$ مرکز آن است. شیب خط گذرنده از نقطه‌های O و A برابر است با

$$\frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{a}{2}-0}=-\frac{3}{a}$$

پس شیب خط مماسی که بر شعاع OA عمود است، برابر $\frac{a}{3}$ است. از طرف دیگر شیب خط $y=3x-2$ برابر ۳ است، بنابراین

$$\frac{a}{3}=3\Rightarrow a=9$$

در نتیجه $a+b=10$.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در دایرهٔ $x^2+y^2+2x=8$ مرکز نقطهٔ $O(-1,0)$ و شعاع برابر $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+32}=3$ و در دایرهٔ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ مرکز نقطهٔ $O'(2,-1)$ و شعاع برابر $r'=3$ است. بنابراین

$$OO'=\sqrt{(2+1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{10}$$

$$r+r'=3+3=6,\quad r-r'=0$$

پس $r-r'<OO'<r+r'$ و در نتیجه دو دایره متقاطع‌اند.

۱۳۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که در دایرهٔ

$$x^2+y^2-2x-6y+5=0$$

نقطهٔ $O(1,3)$ مرکز دایره است و شعاع آن برابر است با

$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-4(5)}=\sqrt{5}$ و در دایرهٔ

$$x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

نقطهٔ $O'(-1,3)$ مرکز دایره است و شعاع آن برابر است با $r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-4(-15)}=5$. بنابراین

$$r'-r=5-\sqrt{5},\quad OO'=\sqrt{(1+1)^2+(3-3)^2}=2$$

پس $OO'<r'-r$ و در نتیجه دو دایره متداخل‌اند.

۱۳۳- گزینهٔ ۱ اگر دو دایره بر هم مماس درونی باشند، طول خط‌المرکزین آنها برابر قدرمطلق اختلاف شعاع‌های آنهاست. مرکز دایره‌ها، نقطه‌های $(1,2)$ و $(-2,6)$ و شعاع آنها ۶ و r است. از طرف دیگر، مرکز دایرهٔ به شعاع r درون دایرهٔ $(x-1)^2+(y-2)^2=36$ است، زیرا عبارت سمت چپ این معادله به‌ازای مختصات این مرکز از ۳۶ کمتر است. بنابراین

$$6-r=\sqrt{(1+2)^2+(2-6)^2}=5$$

پس $r=1$.

۱۳۴- گزینهٔ ۳ اگر دایره‌ها بر هم مماس بیرونی باشند، طول خط‌المرکزین آنها برابر با مجموع شعاع‌های دایره‌هاست. مرکز دایره‌ها، نقطه‌های $(k,2)$ و $(-1,-3)$ و شعاع‌های آنها ۱۱ و ۲ است. بنابراین

$$\text{طول خط‌المرکزین}=\sqrt{(k+1)^2+(2+3)^2}=\sqrt{(k+1)^2+25}$$

در نتیجه

$$\sqrt{(k+1)^2+25}=11+2=13\Rightarrow (k+1)^2+25=169$$

$$(k+1)^2=144\Rightarrow k=\pm 12-1$$

بنابراین مجموع مقادیر k برابر -2 است.

۱۳۵- گزینهٔ ۲ در دایرهٔ $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ مرکز نقطهٔ $O(1,3)$ و شعاع برابر $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=2$ و در دایرهٔ $x^2+y^2+2x-6y-k=0$ مرکز نقطهٔ $O'(-1,3)$ و شعاع برابر $r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+36+4k}=\sqrt{10+k}$ است. بنابراین

$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(3-3)^2}=2$$

برای اینکه دو دایره بر هم مماس درونی باشند باید $|r-r'|=OO'$. پس

$$|\sqrt{10+k}-2|=2$$

$$\begin{cases}\sqrt{10+k}=0\Rightarrow k=-10 \ (\text{غ.ق.ق})\\ \sqrt{10+k}=4\Rightarrow k=6\end{cases}$$

توجه کنید که به‌ازای $k=-10$ شعاع دایرهٔ $x^2+y^2+2x-6y=k$ برابر صفر می‌شود و در واقع دایره‌ای وجود ندارد و تبدیل به یک نقطه شده است.

۱۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+4x-2y=k$ نقطهٔ $O(-2,1)$ و شعاع آن $r=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+4k}=\sqrt{5+k}$ است. همچنین مرکز دایرهٔ $x^2+y^2-4x+4y=8$ نقطهٔ $O'(2,-2)$ و شعاع آن $r'=\frac{1}{2}\sqrt{16+16+32}=4$ است. بنابراین

$$OO'=\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5$$

$$r+r'=\sqrt{5+k}+4$$

برای اینکه دو دایره بر هم مماس بیرونی باشند باید $OO'=r+r'$. پس

$$5=\sqrt{5+k}+4\Rightarrow k+5=1\Rightarrow k=-4$$

۱۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقاط A و B در معادلهٔ هر دو دایره صدق می‌کنند. پس مختصات این نقاط از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}x^2+y^2+3x+1=0 & (1)\\ x^2+y^2+3y+1=0 & (2)\end{cases}$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۲) را از دو طرف معادلهٔ (۱) کم کنیم، به معادلهٔ $3x-3y=0$ می‌رسیم.

بنابراین نقاط A و B روی خط $y=x$ قرار دارند و باید نقاط تقاطع این خط و یکی از دایره‌ها را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2+3x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^2+3x+1=0$$

$$2x^2+3x+1=0 \Rightarrow x=-1,\ x=-\frac{1}{2}$$

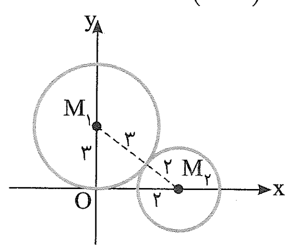
بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-1,-1)$ و $B(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ را به‌دست بیاوریم:

$$AB=\sqrt{(-1+\frac{1}{2})^2+(-1+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳۸- گزینهٔ ۳ چون دایرهٔ به مرکز M_1 بر محور x مماس و مرکزش نقطهٔ $(0,3)$ است، پس شعاع این دایره برابر ۳ است. از طرف دیگر، چون دایره‌ها بر هم مماس بیرونی‌اند، پس طول خط‌المرکزین آنها برابر مجموع شعاع‌های آنهاست. در نتیجه، اگر شعاع دایرهٔ به مرکز M_2 برابر r باشد، آن‌گاه $5=3+r$، پس $r=2$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OM_1M_2،

$$M_1M_2^2=OM_1^2+OM_2^2 \Rightarrow 5^2=3^2+OM_2^2 \Rightarrow OM_2=4$$

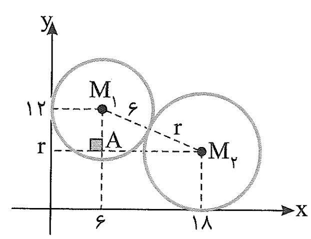
بنابراین نقطهٔ M_2 نقطهٔ $(4,0)$ است، و معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر می‌شود $(x-4)^2+y^2=4$.



۱۳۹- گزینهٔ ۳ چون دایره‌ها بر هم مماس بیرونی‌اند، پس طول خط‌المرکزین آنها برابر مجموع شعاع‌های آنهاست. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AM_1M_2،

$$M_1M_2^2=AM_1^2+AM_2^2$$

$$(6+r)^2=(12-r)^2+12^2 \Rightarrow r=7$$



۱۴۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد. نقاط $A(0,0)$، $B(2,1)$ و $C(-2,4)$ روی دایره قرار دارند، پس مختصات آنها در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$A:\ 0+0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

$$B:\ 4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b=-5$$

$$C:\ 4+16-2a+4b+c=0 \Rightarrow -2a+4b=-20$$

پس $a=0$ و $b=-5$. در نتیجه شعاع دایره برابر است با

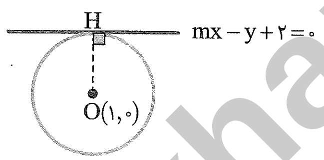
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{0+25-0}=\frac{5}{2}$$

۱۴۱- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ نقطهٔ $O(1,0)$ و شعاع آن برابر $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+0-4(-3)}=2$ است. اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است:

$$OH=\frac{|m\times1-0+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \Rightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$$\frac{(m+2)^2}{m^2+1}=4 \Rightarrow m^2+4m+4=4m^2+4$$

$$3m^2-4m=0 \Rightarrow m=0 \text{ یا } m=\frac{4}{3}$$



راه‌حل دوم ابتدا در معادلهٔ دایره به جای y قرار می‌دهیم $mx+2$:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=3 \\ y=mx+2 \end{cases}$$

$$x^2+(mx+2)^2-2x=3$$

$$x^2+m^2x^2+4mx+4-2x-3=0$$

$$(m^2+1)x^2+(4m-2)x+1=0$$

معادلهٔ به‌دست آمده باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=(4m-2)^2-4(m^2+1)(1)$$

$$=16m^2-16m+4-4m^2-4$$

$$=12m^2-16m=0 \Rightarrow 3m^2-4m=0$$

$$m=0 \text{ یا } m=\frac{4}{3}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x$ است. پس مرکز دایره به صورت (α,α) است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۶,۳)$ و خط $y=۲x$ یکسان است:

$$\sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\alpha-۳)^۲}=\frac{|۲\alpha-\alpha|}{\sqrt{۵}}$$

$$\alpha^۲+۳۶-۱۲\alpha+\alpha^۲+۹-۶\alpha=\frac{\alpha^۲}{۵}$$

$$۲\alpha^۲-۱۸\alpha+۴۵=\frac{\alpha^۲}{۵}$$

$$۹\alpha^۲-۱۸\times۵\alpha+۴۵\times۵=۰$$

$$\alpha^۲-۱۰\alpha+۲۵=۰$$

$$(\alpha-۵)^۲=۰\Rightarrow\alpha=۵$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(۵,۵)$ است و شعاع دایره برابر است با

$$r=OA=\sqrt{(۵-۶)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

۱۴۳- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},b)$ از دو خط مماس برابر است. فرض کنید نقاط تماس H و H' باشند. در این صورت

$$MH=MH'\Rightarrow\frac{|۲\sqrt{۵}-۲b|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|b-۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$\begin{cases}۲\sqrt{۵}-۲b=b-۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=۲\sqrt{۵}\Rightarrow M(۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})\\ ۲\sqrt{۵}-۲b=-b+۴\sqrt{۵}\Rightarrow b=-۲\sqrt{۵}\Rightarrow M(۲\sqrt{۵},-۲\sqrt{۵})\end{cases}$$

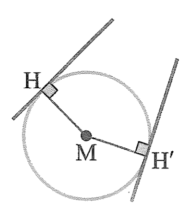
اگر نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},۲\sqrt{۵})$ مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r=MH=\frac{|۲\sqrt{۵}-۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۵}}=۲$$

اگر نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵},-۲\sqrt{۵})$ مرکز دایره باشد، شعاع آن برابر می‌شود با

$$r=MH=\frac{|۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}|}{\sqrt{۵}}=۶$$

بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر ۲ است.



۱۴۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. نقاط $A(۰,۰)$، $B(۲,۱)$ و $C(۱,-۲)$ روی دایره قرار دارند، پس مختصات آنها در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند:

$$A:\ ۰+۰+۰+۰+c=۰$$

$$B:\ ۴+۱+۲a+b+c=۰$$

$$C:\ ۱+۴+a-۲b+c=۰$$

از حل دستگاه معادلات فوق نتیجه می‌شود $a=-۳$، $b=۱$ و $c=۰$. بنابراین شعاع دایره برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۱-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۱۴۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ نقطهٔ $O(۱,-۲)$ است و شعاع آن برابر است با

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$$

فرض کنید شعاع دایرهٔ دیگر r' و مرکز آن $O'(-۲,۲)$ باشد. چون دو دایره بر هم مماس بیرونی هستند، پس $OO'=r+r'$. از طرف دیگر،

$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

بنابراین

$$r+r'=۵\Rightarrow۲+r'=۵\Rightarrow r'=۳$$

۱۴۶- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,-۱)$ از خط $x-y-۱=۰$ برابر است با

$$r=\frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲\Rightarrow(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲$$

در معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم $y=۰$ تا محل تقاطع این دایره را با محور x به‌دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲+(۰+۱)^۲=۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱$$

$$x-۲=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ x=۱\end{cases}$$

۱۴۷- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول مرکز دایره روی نیمساز ربع اول است، پس مختصات آن به صورت $O(\alpha,\alpha)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از دو نقطهٔ $A(1,0)$ و $B(3,0)$ برابر هم و برابر شعاع دایره است، پس

$$OA=OB$$

$$\sqrt{(\alpha-3)^2+(\alpha-0)^2}=\sqrt{(\alpha-1)^2+(\alpha-0)^2}$$

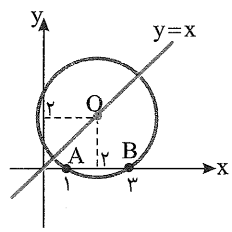
$$2\alpha^2-6\alpha+9=2\alpha^2-2\alpha+1$$

$$4\alpha=8\Rightarrow\alpha=2$$

بنابراین

$$r=OA=\sqrt{(2-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

راه‌حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وترهای دایره است، پس طول مرکز دایره برابر $\frac{1+3}{2}=2$ و در نتیجه عرض آن نیز برابر ۲ است و شعاع دایره برابر $OA=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ است.



۱۴۸- گزینهٔ ۳ چون نقطهٔ $(2,-9)$ در ربع چهارم قرار دارد و دایرهٔ مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیهٔ چهارم است. فرض کنید شعاع این دایره r باشد. با توجه به شکل زیر معلوم است که مرکز آن نقطهٔ $O(r,-r)$ است. بنابراین معادلهٔ دایره به صورت زیر است:

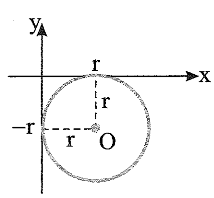
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

دایره از نقطهٔ $(2,-9)$ می‌گذرد، پس مختصات آن در معادلهٔ بالا صدق می‌کنند:

$$(2-r)^2+(-9+r)^2=r^2\Rightarrow r^2-22r+85=0$$

$r=5$ یا $r=17$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.



۱۴۹- گزینهٔ ۳ چون خط‌های $y=2x$ و $y=2x+10$ موازی‌اند، پس فاصلهٔ آنها برابر است با

$$\frac{|0-10|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{5}$. مرکز دایره روی خطی موازی دو خط داده شده است که فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است. معادلهٔ این خط $y=2x+\frac{10}{2}=2x+5$ است.

فرض کنید مرکز دایره $O(\alpha,2\alpha+5)$ باشد. چون دایره از مبدأ می‌گذرد، پس فاصلهٔ مرکز دایره تا مبدأ برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{\alpha^2+(2\alpha+5)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow\alpha^2+(2\alpha+5)^2=5$$

$$5\alpha^2+20\alpha+20=0\Rightarrow\alpha^2+4\alpha+4=0\Rightarrow\alpha=-2$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $(-2,1)$ است.

۱۵۰- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(1,-2)$ در ناحیهٔ چهارم است و دایرهٔ مورد نظر بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن در ناحیهٔ چهارم است. اگر شعاع این دایره برابر r باشد، از روی شکل زیر معلوم است که مرکز آن نقطهٔ $(r,-r)$ است.

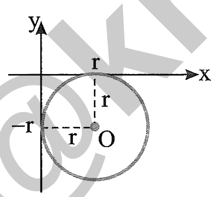
بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

چون نقطهٔ $(1,-2)$ روی این دایره است، پس

$$(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2\Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$(r-1)(r-5)=0\Rightarrow r=1,\ r=5$$



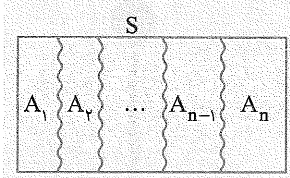
فصل هفتم

احتمال

فصل هفتم

قانون احتمال کل

تعریف فرض کنید A_1، A_2، ... و A_n زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند به طوری که اجتماع آنها برابر S و اشتراک هر دوتا از آنها تهی باشد. در این صورت می‌گوییم A_1، A_2، ... و A_n مجموعهٔ S را افراز کرده‌اند.



$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = S$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ , \ 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

مثال: مجموعهٔ عددهای زوج طبیعی و مجموعهٔ عددهای فرد طبیعی، مجموعهٔ عددهای طبیعی را افراز می‌کنند.

احتمال پیشامدهای ناسازگار

اگر پیشامدهای A_1، A_2، ... و A_n فضای نمونه‌ای S را افراز کنند، آن‌گاه

$$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

قانون احتمال کل

فرض کنید پیشامدهای A_1، A_2، ... و A_n فضای نمونه‌ای S را افراز کرده باشند و B پیشامدی دلخواه باشد. در این صورت

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$
$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$

تست ۱ **احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ است. اگر والدین حامل این نوع بیماری باشند و در انتظار تولد فرزند خود باشند، به کدام احتمال فرزند سالم است؟**

۱) ۰/۸۷۵ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۸۹ ۴) ۰/۸۹۵

راه‌حل پیشامد پسر بودن فرزند را با B، پیشامد دختر بودن فرزند را با G و سالم بودن فرزند را با پیشامد A نمایش می‌دهیم.

بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(G)P(A|G)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times(۱-\frac{۱۲}{۱۰۰})+\frac{۱}{۲}\times(۱-\frac{۹}{۱۰۰})=۰/۸۹۵$$

تست ۲ **در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و در جعبه‌ای دیگر ۹ مهرهٔ سفید و ۷ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک مهره به تصادف از جعبهٔ دوم برمی‌داریم و در جعبهٔ اول قرار می‌دهیم. سپس به تصادف یک مهره از جعبهٔ اول بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟**

۱) $\frac{۶۳}{۱۶۰}$ ۲) $\frac{۷۳}{۱۶۰}$ ۳) $\frac{۸۳}{۱۶۰}$ ۴) $\frac{۹۳}{۱۶۰}$

راه‌حل فرض می‌کنیم W و B به ترتیب پیشامد سفید یا سیاه بودن مهرهٔ انتخاب شده از جعبهٔ دوم باشند و A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخاب شده از جعبهٔ اول باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(W)P(A|W)+P(B)P(A|B) \quad (۱)$$

اکنون توجه کنید که $P(W)=\frac{۹}{۱۶}$ و $P(B)=\frac{۷}{۱۶}$. از طرف دیگر، $P(A|W)$ احتمال این است که مهرهٔ انتخاب شده از جعبهٔ اول سفید باشد، به شرطی که مهرهٔ انتخاب شده از جعبهٔ دوم سفید باشد. اگر مهرهٔ انتخاب شده از جعبهٔ دوم سفید باشد، در جعبهٔ اول ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه داریم. بنابراین $P(A|W)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$. به همین ترتیب معلوم می‌شود $P(A|B)=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$. در نتیجه، بنابر تساوی (۱)،

$$P(A)=\frac{۹}{۱۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۷}{۱۶}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۷۳}{۱۶۰}$$

تست ۳ **در مدرسه‌ای ۷۰٪ دانش‌آموزان طرفدار تیم A، ۲۰٪ دانش‌آموزان طرفدار تیم B و ۱۰٪ دانش‌آموزان طرفدار تیم C هستند. از طرفداران تیم A، ۳۰٪ موافق برگزاری مسابقه در روز جمعه هستند، از طرفداران تیم B، ۴۰٪ و از طرفداران تیم C، ۹۰٪ با این موضوع موافق‌اند. اگر یک نفر از دانش‌آموزان این مدرسه را انتخاب کنیم، احتمال اینکه موافق برگزاری مسابقه در روز جمعه باشد چقدر است؟**

۱) ۰/۳۸ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۴۴ ۴) ۰/۴۸

راه‌حل فرض کنید M پیشامد این باشد که دانش‌آموز انتخاب شده طرفدار برگزاری مسابقه در روز جمعه است. همچنین، A، B و C به ترتیب پیشامد این باشند که این دانش‌آموز طرفدار تیم A، B و C است.

در این صورت

$$P(M)=P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)+P(C)P(M|C)$$

$$=۰/۷\times۰/۳+۰/۲\times۰/۴+۰/۱\times۰/۹=۰/۳۸$$

تست ۴

در یک کارخانه، سه ماشین M_1، M_2 و M_3 یک نوع محصول تولید می‌کنند. ماشین M_1، ۴۰٪، ماشین M_2، ۳۵٪ و ماشین M_3، ۲۵٪ از کل تولیدات این محصول را تولید می‌کنند. به ترتیب، ۵٪، ۳٪ و ۴٪ از تولیدات ماشین‌های M_1، M_2 و M_3 ایراد دارند. یک عدد از این محصول را از انبار کارخانه بیرون می‌آورند و می‌فروشند. احتمال اینکه محصول فروخته شده ایراد داشته باشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۰۴۰۵ ۴) ۰/۰۵۰۵

راه‌حل پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

E_1: محصولی که از انبار بیرون می‌آورند از تولیدات M_1 باشد.

E_2: محصولی که از انبار بیرون می‌آورند از تولیدات M_2 باشد.

E_3: محصولی که از انبار بیرون می‌آورند از تولیدات M_3 باشد.

A: محصول ایراد داشته باشد.

توجه کنید که

$$P(E_1)=0/4,\quad P(A|E_1)=0/05$$

$$P(E_2)=0/35,\quad P(A|E_2)=0/03$$

$$P(E_3)=0/25,\quad P(A|E_3)=0/04$$

پس بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)$$

$$=(0/4\times 0/05)+(0/35\times 0/03)+(0/25\times 0/04)=0/0405$$

تست ۵

در کیسهٔ اول ۸ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه و در کیسهٔ دوم ۱۰ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یکی از مهره‌های درون این کیسه را بیرون می‌آوریم. می‌بینیم که مهرهٔ انتخاب شده سیاه است. احتمال اینکه کیسهٔ اول را انتخاب کرده باشیم چقدر است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $\frac{4}{5}$

راه‌حل پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

B_1: کیسهٔ اول انتخاب شده باشد.

B_2: کیسهٔ دوم انتخاب شده باشد.

A: مهرهٔ بیرون آمده از کیسهٔ انتخاب شده سیاه باشد.

چون کیسه را به تصادف از میان دو کیسه انتخاب کرده‌ایم، پس $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$. از طرف دیگر، روشن است که

$$P(A|B_1)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7},\quad P(A|B_2)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$$

پس بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=(\frac{1}{2}\times\frac{3}{7})+(\frac{1}{2}\times\frac{2}{7})=\frac{5}{14}$$

اکنون احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}}=\frac{3}{5}$$

تست ۶

در کیسهٔ ۱، دو توپ سفید و چهار توپ قرمز و در کیسهٔ ۲، یک توپ سفید و یک توپ قرمز است. توپی از کیسهٔ ۱ بیرون می‌آوریم و آن را در کیسهٔ ۲ می‌گذاریم. سپس یک توپ از کیسهٔ ۲ بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه توپی که از کیسهٔ ۲ بیرون می‌آوریم سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

راه‌حل پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A: توپی که در کیسهٔ ۲ گذاشته‌ایم سفید باشد.

B: توپی که از کیسهٔ ۲ بیرون آورده‌ایم سفید باشد.

روشن است که $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$.

بنابر قانون احتمال کل،

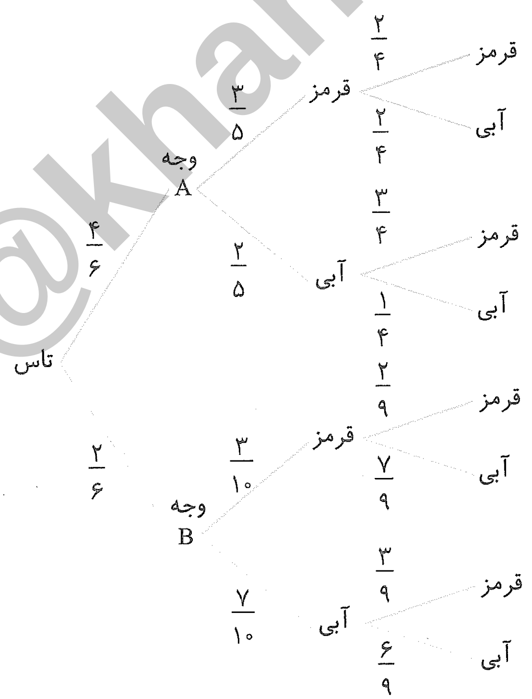
$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۹}$$

تست ۷

روی چهار وجه یک تاس، A و روی دو وجه آن B نوشته شده است. در جعبهٔ A سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی و در جعبهٔ B سه مهرهٔ قرمز و هفت مهرهٔ آبی وجود دارد. یک بار تاس را پرتاب می‌کنیم و هر حرفی را که نشان داد، از جعبهٔ متناظرش به تصادف دو مهره یکی پس از دیگری بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه رنگ این مهره‌ها فرق کند چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

راه‌حل نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید.



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۷}{۹}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

فصل هفتم

قانون احتمال کل

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- در جعبه‌ای ۲ توپ قرمز و ۵ توپ آبی وجود دارد. دو توپ را یکی پس از دیگری بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه توپ دوم آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۲- دو ظرف همانند داریم که اولی دارای ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه، دومی دارای ۱۵ مهرهٔ سفید و ۲۱ مهرهٔ سیاه است. با چشم بسته یکی از دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۳- سه جعبه داده شده است. در اولی ۵ لامپ سالم و یک لامپ معیوب، در دومی ۲ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب و در سومی ۶ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب وجود دارد. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب می‌کنیم و از آن لامپی بیرون می‌آوریم. احتمال سالم بودن این لامپ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳۶}$

۴- در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. به تصادف یک مهره از جعبه بیرون می‌آوریم و آن را کنار می‌گذاریم. سپس یک مهرهٔ دیگر از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه یکی از این دو مهره قرمز و دیگری آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۸}$

۵- در جعبه‌ای سه مهرهٔ قرمز، سه مهرهٔ آبی و سه مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف از این جعبه بیرون می‌آوریم و آن را کنار می‌گذاریم (رنگ این مهره را نمی‌دانیم). سپس یک مهرهٔ دیگر به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه رنگ این مهره سبز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۶- احتمال قطعی برق در روز بارانی برابر ۰/۱۵ و در روز غیربارانی برابر ۰/۰۵ است. احتمال اینکه فردا باران ببارد برابر ۰/۸ است. احتمال اینکه فردا برق قطع نشود چقدر است؟

۱) ۰/۸۵ ۲) ۰/۸۶ ۳) ۰/۸۷ ۴) ۰/۸۸

۷- در جعبه‌ای ۶ توپ قرمز و ۳ توپ آبی وجود دارد. یک توپ به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر این توپ آبی بود، یک توپ قرمز و اگر قرمز بود، یک توپ آبی به جعبه اضافه می‌کنیم (توپ اول را به جعبه برنمی‌گردانیم). سپس به تصادف یک توپ از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه توپ دوم قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲۳}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۷}$

۸- دو جعبه داریم. در اولی ۲ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و در دومی ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه وجود دارد. به تصادف یک مهره از اولی برمی‌داریم و در دومی می‌اندازیم. سپس یک مهره از جعبهٔ دوم برمی‌داریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳۰}{۴۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹- دو جعبه داریم. در یکی ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و در دیگری ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه وجود دارد. به یکی از جعبه‌ها ۳ مهرهٔ سیاه اضافه می‌کنیم، سپس از همان جعبه یک مهره انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۲۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۱۰- دو ظرف داریم، در اولی ۷ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه و در دومی ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. از ظرف دوم ۱ مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف اول قرار می‌دهیم. آن‌گاه از ظرف اول ۱ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۳۱}{۶۴}$ ۲) $\frac{۶۱}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۶}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۳۲}$

۱۱- جعبهٔ A شامل ۱۱ مهره با شماره‌های ۲ تا ۱۲ و جعبهٔ B شامل ۹ مهره با شماره‌های ۱ تا ۹ است. یک جعبه به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر شمارهٔ این مهره زوج باشد، مهرهٔ دیگری از همان جعبه و اگر فرد باشد، مهره‌ای از جعبهٔ دیگر بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه روی هر دو مهره عدد زوج نوشته شده باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲۹}{۲۶۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۴۴}$ ۴) $\frac{۲۹}{۱۳۲}$

۱۲- احمد دو تاس را پرتاب می‌کند. اگر عددهایی که تاس‌ها نشـان می‌دهند برابر نبودند، آنها را با هم جمع می‌کند. در غیر این صورت، دو تاس دیگر را هم پرتاب می‌کند و چهار عددی را که تاس‌ها نشان می‌دهند با هم جمع می‌کند. احتمال اینکه مجموعی که به‌دست می‌آورد برابر ۴ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۷۳}{۳۶^{۲}}$ ۲) $\frac{۷۵}{۳۶^{۲}}$ ۳) $\frac{۷۷}{۳۶^{۲}}$ ۴) $\frac{۷۹}{۳۶^{۲}}$

۱۳- ظرفی شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. یک سکه پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» آمد، دو مهره و اگر «پشت» آمد، سه مهره از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه همهٔ مهره‌های خارج شده از ظرف سفید باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲۲}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۴}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۱۴- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ لامپ یکسان وجود دارد. در جعبهٔ اول ۴ و در جعبهٔ دوم ۲ لامپ معیوب‌اند. از جعبهٔ اول ۸ و از جعبهٔ دوم ۶ لامپ به تصادف برمی‌داریم و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید معیوب است؟

۱) $\frac{۱۷}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$

۱۵- ظرفی شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه است. به تصادف ۴ مهره از این ظرف خارج می‌کنیم و به جای آنها ۵ مهرهٔ سفید در ظرف قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۱۶- از کیسه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است، مهره‌ای را خارج می‌کنیم، سپس آن مهره را همراه با مهره‌ای دیگر با همان رنگ به کیسه برمی‌گردانیم و مهره‌ای از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۱۷- در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف از این جعبه بیرون می‌آوریم و بعد آن را درون جعبه می‌اندازیم. سپس یک مهرهٔ دیگر به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه یکی از این مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۶}{۲۵}$ ۲) $\frac{۹}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

۱۸- در جعبه‌ای ۲ مهرهٔ قرمز و ۷ مهرهٔ آبی وجود دارد. در جعبه‌ای دیگر، ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد. اگر به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کنیم و مهره‌ای از آن بیرون بیاوریم، احتمال اینکه آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۸}$

۱۹- جمعهٔ این هفته به احتمال $\frac{۱}{۶}$ باران می‌آید. احمد در مسابقات اتومبیل‌رانی، در هوای آفتابی به احتمال $\frac{۱}{۳}$ و در هوای بارانی به احتمال $\frac{۱}{۵}$ می‌برد. احتمال اینکه احمد جمعهٔ این هفته در مسابقه برنده شود چقدر است؟

۱) $\frac{۴۳}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ ۳) $\frac{۱۴}{۴۵}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴۵}$

۲۰- ٪۳۰ گروهی از افراد دست‌کم ۵۰ سال دارند. افرادی که ۵۰ سال دارند دست‌کم در ٪۸۰ موارد راست می‌گویند و افراد زیر ۵۰ سال در ٪۷۰ موارد راست می‌گویند. اگر فردی را به تصادف از این افراد انتخاب کنیم، احتمال اینکه در جواب پرسشی، دروغ بگوید چقدر است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۷ ۳) ۰/۲۲ ۴) ۰/۳

۲۱- در جعبه‌ای هفت مهرهٔ قرمز و پنج مهرهٔ آبی وجود دارد. به تصادف یک مهره از این جعبه بیرون می‌آوریم و آن را کنار می‌گذاریم. سپس به تصادف یک مهرهٔ دیگر بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ اول قرمز و مهرهٔ دوم آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳۵}{۶۴}$ ۲) $\frac{۷۰}{۱۳۱}$ ۳) $\frac{۳۵}{۶۶}$ ۴) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$

۲۲- در جعبهٔ A سه مهرهٔ قرمز و چهار مهرهٔ آبی و در جعبهٔ B چهار مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی وجود دارد. به تصادف مهره‌ای از جعبهٔ A بیرون می‌آوریم. اگر قرمز بود، دو مهرهٔ قرمز به جعبهٔ B اضافه می‌کنیم و اگر آبی بود، دو مهرهٔ آبی به جعبهٔ B اضافه می‌کنیم. سپس به تصادف مهره‌ای از جعبهٔ B بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۸}$ ۲) $\frac{۲۷}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۲۸}$

۲۳- در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی وجود دارد. دو مهره را یکی پس از دیگری از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه دست‌کم یکی از آنها آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲۳}{۲۸}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۲۸}$

۲۴- در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ سبز وجود دارد. دو مهره را یکی پس از دیگری از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این دو مهره هم‌رنگ نباشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲۳}$

۲۵- ٪۶۰ جمعیت کشوری را مردان و بقیه را زنان تشکیل می‌دهند و ٪۱۰ مردان تحصیلات دانشگاهی دارند. با فردی در شهر برخورد می‌کنیم. در صورتی‌که احتمال داشتن تحصیلات دانشگاهی این فرد ٪۹/۲ باشد، چند درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ٪۹ ۲) ٪۸ ۳) ٪۶ ۴) ٪۵

۲۶- در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ سبز وجود دارد. دو مهره را یکی پس از دیگری از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه یکی از این مهره‌ها قرمز و دیگری سبز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

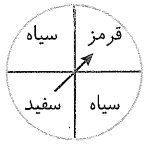
۲۷- در اولین ظرف از سه ظرف همانند، ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و در دومین ظرف، ۱۱ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم فقط مهرهٔ سیاه داریم. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۸- در جعبه‌ای چهار مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره را یکی پس از دیگری از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه هر سه مهره قرمز باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۲۰}$ ۴) $\frac{۹}{۲۰}$

۲۹- در شکل مقابل عقربهٔ چرخان را دوبار می‌چرخانیم. احتمال اینکه در دو ناحیهٔ غیر هم‌رنگ بایستد چقدر است؟



۱) $\frac{9}{16}$ ۲) $\frac{11}{16}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۳۰- در جعبهٔ A سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی، در جعبهٔ B چهار مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی و در جعبهٔ C دو مهرهٔ قرمز و سه مهرهٔ آبی وجود دارد. تاسی سه وجه با علامت A، دو وجه با علامت B و یک وجه با علامت C دارد. تاس را پرتاب می‌کنیم و از جعبه‌ای که نشان داد یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره قرمز باشد چقدر است؟

۱) $\frac{29}{30}$ ۲) $\frac{23}{30}$ ۳) $\frac{17}{30}$ ۴) $\frac{19}{30}$

۳۱- در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. یک مهره از جعبه بیرون می‌آوریم، رنگ آن را می‌بینیم و آن را به جعبه برمی‌گردانیم. بعد یک مهرهٔ دیگر از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه رنگ مهره‌ها با هم فرق کند چقدر است؟

۱) $\frac{94}{12^2}$ ۲) $\frac{47}{12^2}$ ۳) $\frac{89}{12^2}$ ۴) $\frac{64}{12^2}$

۳۲- مینا و تینا تنیس بازی می‌کنند و برنده اولین کسی است که ۲ سِت را ببرد. احتمال بردن مینا در هر سِت ٪۴۰ است. احتمال اینکه مینا بازی را ببرد چقدر است؟

۱) $\frac{22}{125}$ ۲) $\frac{44}{25}$ ۳) $\frac{44}{125}$ ۴) $\frac{22}{125}$

۳۳- هر روز، احتمال اینکه حاج داود به سر کار برود ٪۹۵ است. احتمال اینکه او دست‌کم یک روز از دو روز آینده سر کارش برود چقدر است؟

۱) ۰/۹۹۶۰ ۲) ۰/۹۹۶۵ ۳) ۰/۹۹۷۰ ۴) ۰/۹۹۷۵

۳۴- روی چهار وجه یک تاس، A و روی دو وجه آن B نوشته شده است. در جعبهٔ A سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی و در جعبهٔ B سه مهرهٔ قرمز و هفت مهرهٔ آبی وجود دارد. یک‌بار تاس را پرتاب می‌کنیم و هر حرفی را که نشان داد، از جعبهٔ متناظرش به تصادف دو مهره یکی پس از دیگری بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه هر دو مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۳۵- در جعبه‌ای چهار مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی وجود دارد. یکی پس از دیگری سه مهره از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه دقیقاً دوتا از آنها آبی باشند چقدر است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۳۶- در جعبه‌ای چهار مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی وجود دارد. یکی پس از دیگری سه مهره از این جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه دست‌کم دوتا از آنها قرمز باشند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۳۷- در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و تعدادی مهرهٔ آبی وجود دارد. دو مهره را یکی پس از دیگری از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه هر دو مهره قرمز باشند برابر $\frac{2}{11}$ است. چند مهرهٔ آبی در این جعبه وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

۳۸- در مدرسه‌ای ٪۴۰ دانش‌آموزان در پایهٔ دهم، ٪۳۰ دانش‌آموزان در پایهٔ یازدهم و ٪۳۰ دانش‌آموزان در پایهٔ دوازدهم تحصیل می‌کنند. از دانش‌آموزان پایهٔ دهم ٪۳۰، از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم ٪۴۰ و از دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم ٪۲۰ به کارهای هنری علاقه‌مندند. اگر از این مدرسه دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه به کارهای هنری علاقه‌مند باشد چقدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۶

۳۹- آقای فیضی سه نوع تیروکمان دارد که احتمال اصابت تیر به هدف در آنها به ترتیب ۰/۹، ۰/۸۵ و ۰/۸ است. اگر یکی از این تیروکمان‌ها را به تصادف انتخاب و با آن تیر را پرتاب کند، احتمال اینکه به هدف بخورد چقدر است؟

۱) ۰/۹　　۲) ۰/۸۵　　۳) ۰/۸　　۴) ۰/۷۵

۴۰- در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی با سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۳۰، ۴۵ و ۲۵ است. می‌دانیم ۱ درصد محصولات A، ۲ درصد از محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن چقدر است؟

۱) ۰/۹۷۵　　۲) ۰/۹۷۸　　۳) ۰/۹۸۲　　۴) ۰/۹۸۷

۴۱- در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$　　۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$　　۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$　　۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$

۴۲- ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟ (تجربی - ۹۳)

C	B	A
۶ سفید، ۳ سیاه	۶ سفید، ۳ سیاه	۵ سیاه، ۴ سفید

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$　　۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$　　۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$　　۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

فصل هفتم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در اینجا فضای احتمال $S=\{$ق ق, ق آ, آ آ, آ ق$\}$ است. فرض کنید $B_۲$ پیشامد این باشد که توپ دوم آبی و $R_۱$ و $B_۱$ به ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون $R_۱$ و $B_۱$ فضای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B_۲)=P(R_۱)P(B_۲|R_۱)+P(B_۱)P(B_۲|B_۱)$$

$$=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۳۰}{۴۲}=\frac{۵}{۷}$$

۲- گزینهٔ ۱

$P($مهرهٔ انتخابی سفید$)$

$=P($انتخاب جعبهٔ اول$)P($مهرهٔ انتخابی سفید$|$انتخاب جعبهٔ اول$)$

$+P($انتخاب جعبهٔ دوم$)P($مهرهٔ انتخابی سفید$|$انتخاب جعبهٔ دوم$)$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۷+۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۱۵+۲۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۷}{۲۴}+\frac{۵}{۲۴}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید B_i پیشامد انتخاب جعبهٔ iام، $i=۱,۲,۳$ و A پیشامد سالم بودن لامپ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۸}=\frac{۵}{۱۸}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۰+۶+۹}{۳۶}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

۴- گزینهٔ ۲ فرض کنید R پیشامد قرمز بودن مهره و B پیشامد آبی بودن مهره باشد. در این صورت، اگر S پیشامد این باشد که یکی از مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(S)=P(R)P(S|R)+P(B)P(S|B)$$

$$=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید A پیشامد سبز بودن مهرهٔ اول و B پیشامد سبز بودن مهرهٔ دوم باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')=\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۳}$$

۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید B این پیشامد باشد که فردا باران ببارد و A این پیشامد باشد که فردا برق قطع شود. باید $P(A')$ را حساب کنیم. ابتدا $P(A)$ را به کمک قانون احتمال کل به‌دست می‌آوریم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$=۰/۸\times۰/۱۵+۰/۲\times۰/۰۵$$

$$=۰/۱۲+۰/۰۱=۰/۱۳$$

در نتیجه

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۱۳=۰/۸۷$$

۷- گزینهٔ ۱ در اینجا فضای احتمال برابر است با $S=\{$ق ق, ق آ, آ آ, آ ق$\}$. فرض کنید $R_۲$ پیشامد این باشد که توپ دوم قرمز است و $R_۱$ و $B_۱$ به ترتیب پیشامدهای این باشند که توپ اول قرمز باشد و توپ اول آبی باشد. در این صورت، چون $R_۱$ و $B_۱$ فضای S را افراز می‌کنند، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(R_۲)=P(R_۱)P(R_۲|R_۱)+P(B_۱)P(R_۲|B_۱)$$

$$=\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۹}+\frac{۳}{۹}\times\frac{۷}{۹}=\frac{۵۱}{۸۱}=\frac{۱۷}{۲۷}$$

۸- گزینهٔ ۳ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهرهٔ اول و A پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. چون B و B' فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند (توجه کنید B' پیشامد سیاه بودن مهرهٔ اول است)، طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۷}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

توجه کنید که اگر مهرهٔ اول سفید باشد، مهرهٔ دوم از بین ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس $P(A|B)=\frac{۵}{۷}$ و اگر مهرهٔ اول سیاه باشد، مهرهٔ دوم از بین ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه انتخاب می‌شود، پس

$$P(A|B')=\frac{۴}{۷}$$

-۹ گزینهٔ ۲ فرض کنید B پیشامد انتخاب جعبهٔ اول برای افزودن ۳ مهرهٔ سیاه باشد. در این صورت B' پیشامد انتخاب جعبهٔ دوم برای افزودن ۳ مهرهٔ سیاه است. همچنین فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخاب شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

توجه کنید که اگر سه مهرهٔ سیاه به جعبهٔ اول اضافه شود، این جعبه شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه می‌شود، پس احتمال سفید بودن مهرهٔ انتخابی از این جعبه برابر $\frac{5}{10}$ می‌شود، یعنی $P(A|B)=\frac{5}{10}$. به طور مشابه $P(A|B')=\frac{2}{8}$.

-۱۰ گزینهٔ ۲

$$P(\text{مهرهٔ نهایی سفید})$$

$$=P(\text{مهرهٔ اول سفید})P(\text{مهرهٔ نهایی سفید}|\text{مهرهٔ اول سفید})$$

$$+P(\text{مهرهٔ اول سیاه})P(\text{مهرهٔ نهایی سفید}|\text{مهرهٔ اول سیاه})$$

$$=\frac{5}{3+5}\times\frac{8}{8+7+1}+\frac{3}{3+5}\times\frac{7}{8+7+1}$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{8}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{7}{16}=\frac{40+21}{8\times16}=\frac{61}{128}$$

-۱۱ گزینهٔ ۴

$$P(\text{مطلوب})=\overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{احتمال انتخاب جعبهٔ A}}\times\Big(\underbrace{\frac{6}{11}}_{\text{احتمال زوج بودن مهرهٔ اول}}\times\underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{احتمال زوج بودن مهرهٔ دوم}}\Big)+\overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{احتمال انتخاب جعبهٔ B}}\times\Big(\underbrace{\frac{4}{9}}_{\text{احتمال زوج بودن مهرهٔ اول}}\times\underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{احتمال زوج بودن مهرهٔ دوم}}\Big)=\frac{3}{22}+\frac{1}{12}=\frac{29}{132}$$

-۱۲ گزینهٔ ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که عددهای برابر نیایند (که از اینها $(1,3)$ و $(3,1)$ مطلوب‌اند)، B پیشامد این باشد که عددهای برابر بیایند (که از اینها $(1,1)$ و سپس بار دیگر $(1,1)$ مطلوب‌اند) و C پیشامد این باشد که مجموع نهایی برابر ۴ باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$=\frac{30}{36}\times\frac{2}{30}+\frac{6}{36}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{18}+\frac{1}{36^2}$$

$$=\frac{72+1}{36^2}=\frac{73}{36^2}$$

-۱۳ گزینهٔ ۱ فرض کنید B پیشامد «رو» آمدن سکه و A پیشامد سفید بودن همهٔ مهره‌های خارج شده از ظرف باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=\overbrace{P(B)}^{\text{سکه «رو» بیاید}}\ \overbrace{P(A|B)}^{\text{انتخاب دو مهرهٔ سفید}}+\overbrace{P(B')}^{\text{سکه «پشت» بیاید}}\ \overbrace{P(A|B')}^{\text{انتخاب سه مهرهٔ سفید}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{21}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{35}$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{2}{35}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$$

-۱۴ گزینهٔ ۲ فرض کنید A پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی باشد و B پیشامد آن باشد که لامپ انتخابی به جعبهٔ اول تعلق داشته باشد. در این صورت B' پیشامد تعلق این لامپ به جعبهٔ دوم است. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

چون در جعبهٔ جدید ۸ لامپ از جعبهٔ اول و ۶ لامپ از جعبهٔ دوم است، پس $P(B)=\frac{8}{14}$ و $P(B')=\frac{6}{14}$. همچنین احتمال معیوب بودن یک لامپ انتخابی از جعبهٔ اول برابر $\frac{4}{24}$ و احتمال معیوب بودن یک لامپ انتخابی از جعبهٔ دوم برابر $\frac{2}{15}$ است، پس $P(A|B)=\frac{4}{24}$ و $P(A|B')=\frac{2}{15}$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{8}{14}\times\frac{4}{24}+\frac{6}{14}\times\frac{2}{15}=\frac{2}{21}+\frac{2}{35}$$

$$=\frac{10+6}{105}=\frac{16}{105}$$

-۱۵ گزینهٔ ۳ فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ انتخابی باشد و B پیشامد آن باشد که مهرهٔ انتخابی جزء مهره‌های اولیهٔ داخل ظرف باشد. در این صورت B' پیشامد آن است که مهرهٔ انتخابی جزء ۵ مهرهٔ سفید اضافه شده باشد. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

چون مهرهٔ انتخابی از بین ۱۰تا از مهره‌های اولیه و ۵ مهرهٔ اضافه شده انتخاب شده است، پس $P(B)=\frac{10}{15}$ و $P(B')=\frac{5}{15}$.

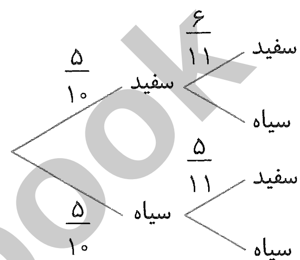
همچنین اگر مهرهٔ انتخابی از مهره‌های اولیه باشد، احتمال سفید بودن آن برابر $\frac{5}{14}$ اســت و اگر از مهره‌های اضافه شده باشد، احتمال سفید بودن آن برابر ۱ است.

بنابراین $P(A|B)=\frac{5}{14}$ و $P(A|B')=1$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{10}{15}\times\frac{5}{14}+\frac{5}{15}\times 1$$

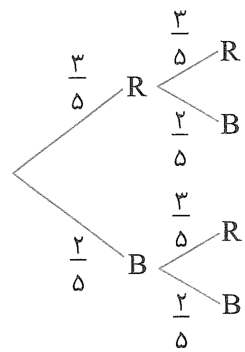
$$=\frac{5}{21}+\frac{1}{3}=\frac{5+7}{21}=\frac{4}{7}$$

۱۶- گزینهٔ ۳ از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



$$P(\text{مهرهٔ آخر سفید باشد})=\frac{5}{10}\times\frac{6}{11}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}=0/5$$

۱۷- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول فرض کنید R پیشامد قرمز بودن و B پیشامد آبی بودن مهره باشد. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایــن نمودار معلوم اســت که احتمال مــورد نظر برابر است با

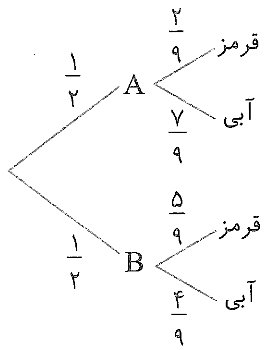
$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$$

راه‌حل دوم فرض کنید R پیشامد قرمز بودن و B پیشامد آبی بودن مهره باشد $(B=R')$. اگر S پیشامد این باشد که یکی از مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(S)=P(R)P(S|R)+P(B)P(S|B)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$$

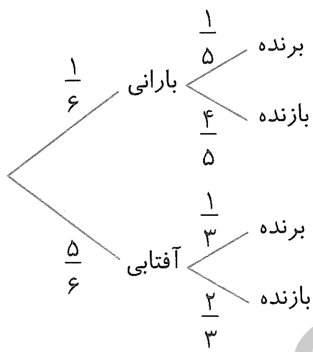
۱۸- گزینهٔ ۱ جعبه‌هــا را A و B می‌نامیم. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایــن نمودار معلوم اســت که احتمــال آبی بودن مهره برابر است با

$$\frac{1}{2}\times\frac{7}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{11}{18}$$

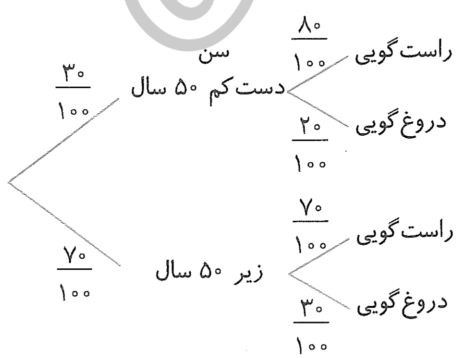
۱۹- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایــن نمودار معلوم می‌شــود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$$

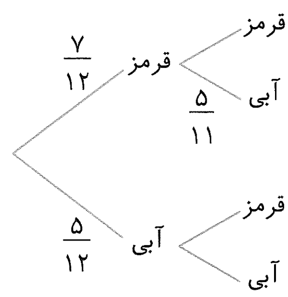
۲۰- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایــن نمودار معلوم می‌شــود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{30}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{70}{100}\times\frac{30}{100}=\frac{27}{100}=0/27$$

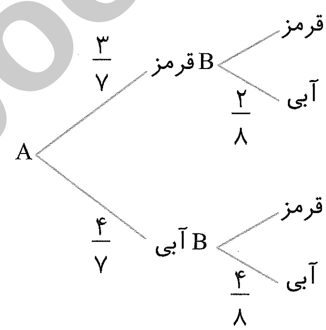
۲۱- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۱}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

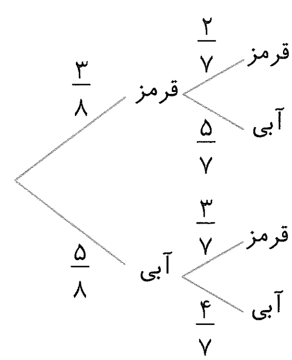
۲۲- گزینهٔ ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۲۲}{۵۶}=\frac{۱۱}{۲۸}$$

۲۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۷}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۵۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

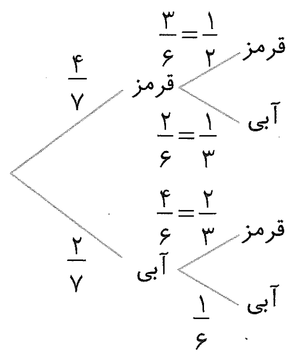
$$P(\text{دست‌کم یکی آبی باشد})=۱-P(\text{هر دو قرمز باشند})$$

$$=۱-\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۵۰}{۵۶}=\frac{۲۵}{۲۸}$$

۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$P(\text{دو مهره هم‌رنگ نباشند})=۱-P(\text{دو مهره هم‌رنگ باشند})$$

بنابراین کافی است احتمال اینکه دو مهره هم‌رنگ باشند را حساب کنیم. توجه کنید که چون فقط یک مهرهٔ سبز در جعبه وجود دارد، امکان ندارد دو مهره سبز رنگ باشند. اکنون نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:

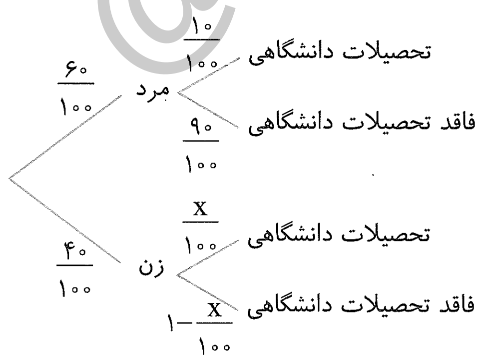


از روی این نمودار معلوم است که

$$P(\text{دو مهره هم‌رنگ باشند})=\frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۷}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱۴}{۴۲}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با $۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$.

۲۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید x درصد زنانی باشند که تحصیلات دانشگاهی دارند، نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:

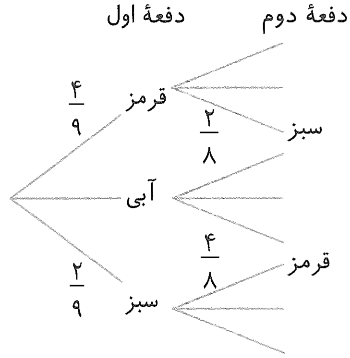


با توجه به فرض مسئله،

$$\left(\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}\right)+\left(\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{x}{۱۰۰}\right)=\frac{۹۲}{۱۰۰۰}$$

$$۰/۰۶+۰/۰۰۴x=۰/۰۹۲\Rightarrow x=۸$$

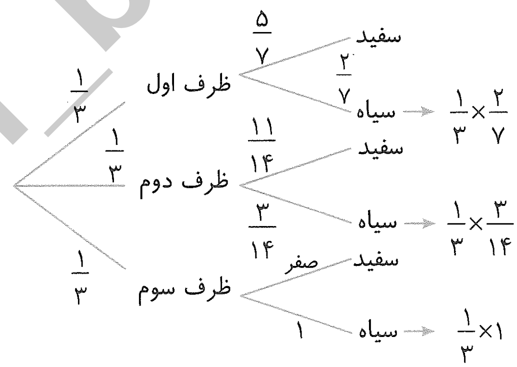
۲۶- گزینهٔ ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم اسـت که احتمال مـورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{2}{9}$$

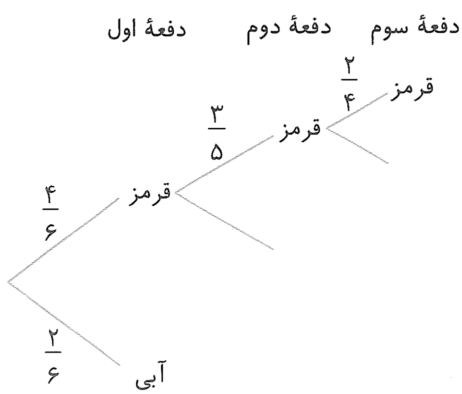
۲۷- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{14}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{2}$$

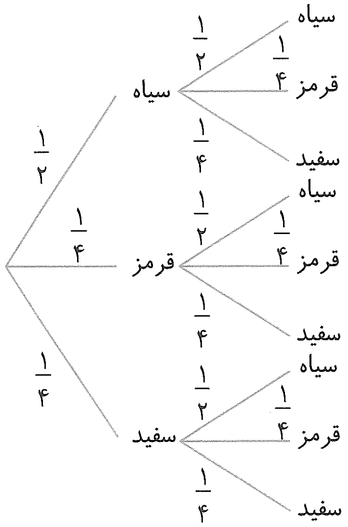
۲۸- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$$

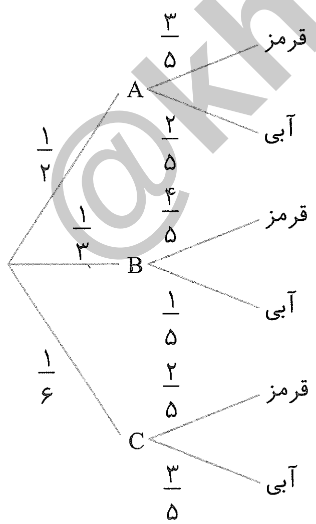
۲۹- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

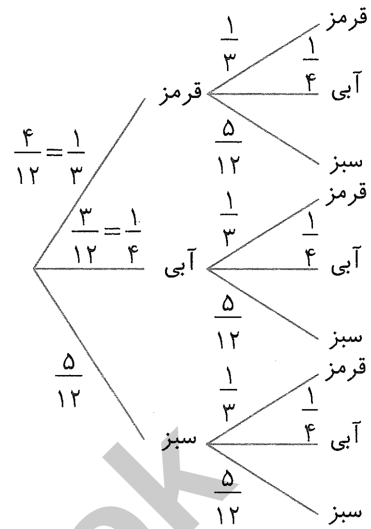
۳۰- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{19}{30}$$

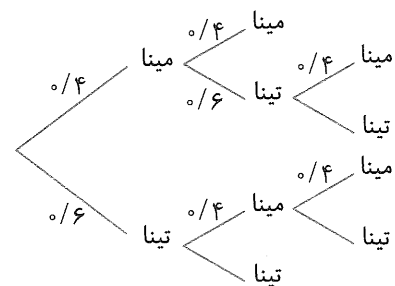
۳۱- گزینهٔ ۱ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{4}=\frac{94}{12^2}$$

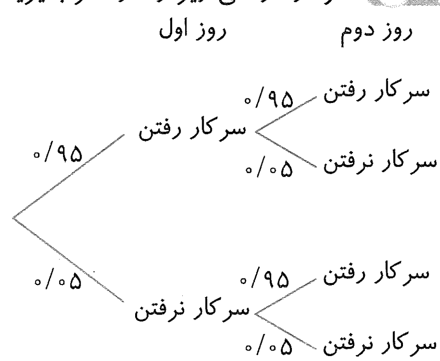
۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$0/4\times0/4+0/4\times0/6\times0/4+0/6\times0/4\times0/4=\frac{352}{1000}=\frac{44}{125}$$

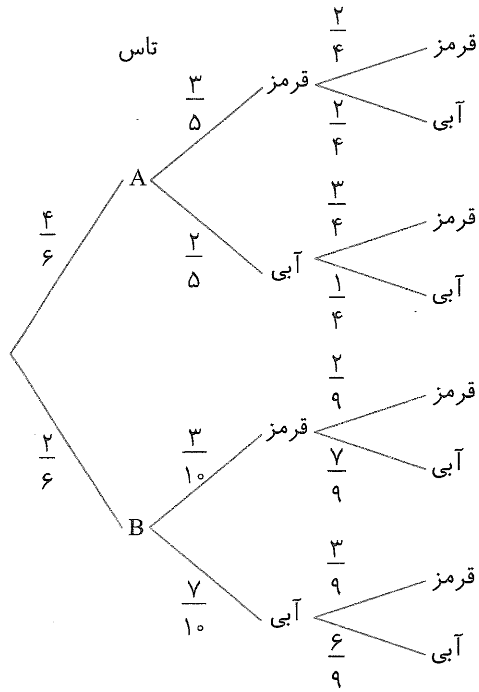
۳۳- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$0/95\times0/95+0/95\times0/05+0/05\times0/95=0/9975$$

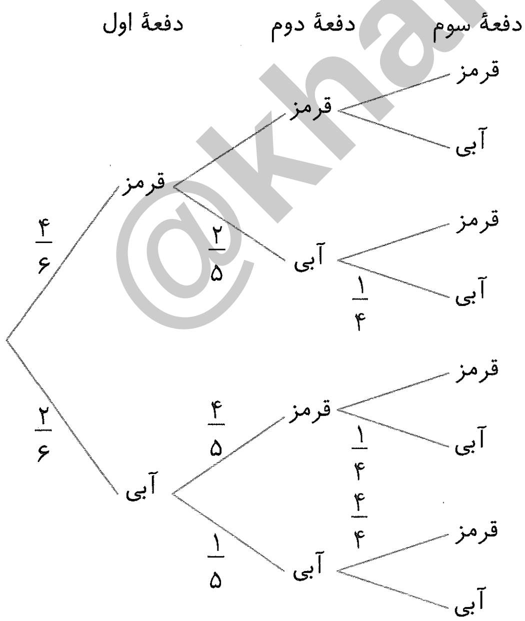
۳۴- گزینهٔ ۴ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{6}\times\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{9}$$

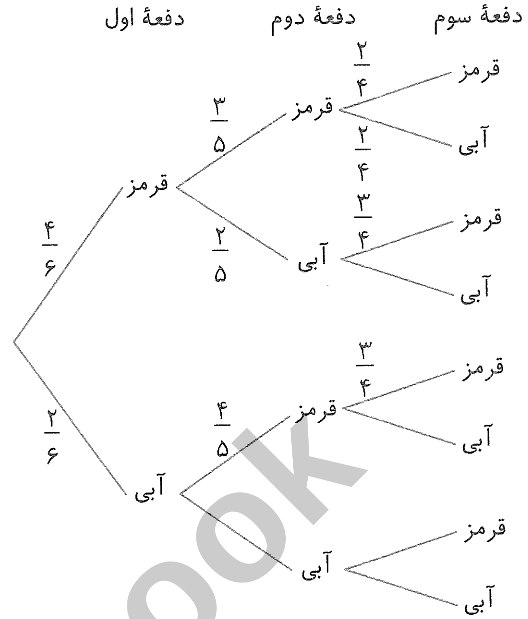
۳۵- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایـن نمودار معلوم می‌شـود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{5}$$

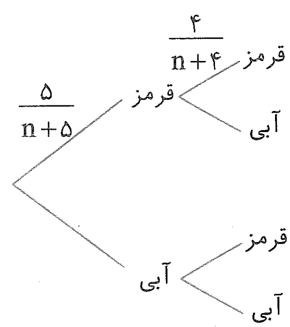
۳۶- گزینهٔ ۲ نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایــن نمودار معلوم می‌شــود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۴}{۵}$$

۳۷- گزینهٔ ۲ فــرض کنید تعــداد مهره‌های آبــی برابر n باشد. نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی ایــن نمودار معلوم می‌شــود که احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵}{n+۵}\times\frac{۴}{n+۴}=\frac{۲}{۱۱}$$

$$(n+۵)(n+۴)=۱۱\times۱۰$$

$$n^۲+۹n-۹۰=۰$$

$$(n-۶)(n+۱۵)=۰$$

$n=۶\ ,\ n=-۱۵$ (غ.ق.ق)

۳۸- گزینهٔ ۱ فــرض کنیــد $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ بــه ترتیب پیشــامد این باشــند که دانش‌آموز انتخاب شده در پایهٔ دهم، یازدهــم یــا دوازدهم باشــد و A پیشــامد این باشــد که این دانش‌آموز به کارهای هنری علاقه‌مند اســت. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(A)=P(A_۱)P(A|A_۱)+P(A_۲)P(A|A_۲)+P(A_۳)P(A|A_۳)$$

$$=۰/۴\times۰/۳+۰/۳\times۰/۴+۰/۳\times۰/۲=۰/۳$$

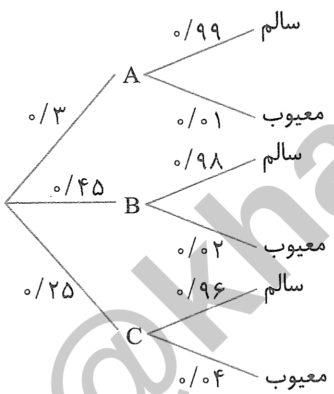
۳۹- گزینهٔ ۲ فــرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامد تیرانــدازی با این کمان‌ها باشــند و D پیشــامد اصابت تیر به هدف باشد. در این صورت، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(D)=P(A)P(A|D)+P(B)P(B|D)+P(C)P(C|D)$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸}{۱۰}$$

$$=\frac{۲۵۵}{۳۰۰}=۰/۸۵$$

۴۰- گزینهٔ ۲



$$P(\text{سالم})=۰/۳\times۰/۹۹+۰/۴۵\times۰/۹۸+۰/۲۵\times۰/۹۶=۰/۹۷۸$$

۴۱- گزینهٔ ۴ از احتمال متمم اســتفاده می‌کنیم. یعنی ابتدا احتمال اینکه رنگ مهره‌ها یکســان باشد را پیدا می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. اما اگر بخواهیم رنگ مهره‌ها یکســان باشــد یعنی اینکه یا هر دو مهره سبز باشد یا هر دو سفید:

$$P(\text{رنگ‌ها یکسان باشد})=P(\text{هر دو سفید})+P(\text{هر دو سبز})$$

$$=P(\text{اولی سفید و دومی سفید})+P(\text{اولی سبز و دومی سبز})$$

$$=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۲}{۸}=\frac{۲۶}{۸۰}$$

$$P(\text{رنگ‌ها متفاوت باشد})=۱-\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۵۴}{۸۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۴۲- گزینهٔ ۱ چون یکی از سه ظرف به تصادف انتخاب می‌شود، احتمال انتخاب هر یک برابر $\frac{1}{3}$ است. اگر از ظرف A، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشد برابر است با

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{6\times 10}{\frac{9\times 8^{2}\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$$

اگر از هر یک دو ظرف B یا C، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آنکه ۲ مهره سفید باشند برابر است با

$$\frac{\binom{6}{2}\times\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{15\times 3}{126}=\frac{5}{14}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با

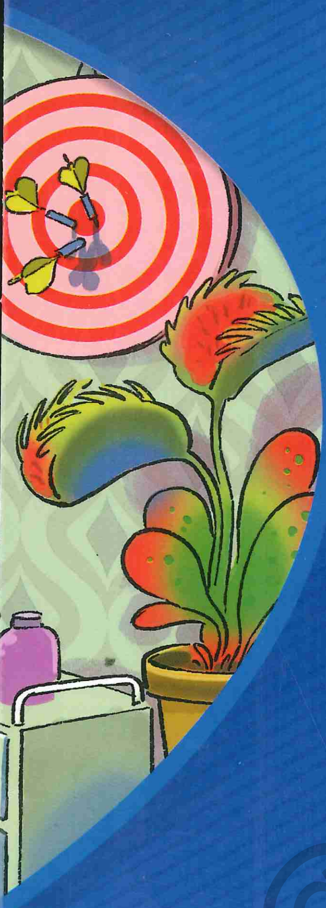
$$P=\underset{A}{\left(\frac{1}{3}\times\frac{10}{21}\right)}+\underset{B}{\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{14}\right)}+\underset{C}{\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{14}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{10}{21}+\frac{5}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{10+15}{21}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{25}{21}=\frac{25}{63}$$

مجموعه کتاب‌های دوازدهم نشر الگو ویژهٔ رشتهٔ تجربی:

- **ریاضی** (۳) تجربی (سه‌بعدی)
- **ریاضی** (۳) تجربی (تست)
- **فیزیک** (۳) تجربی
- **فارسی** (۳) (تست)
- **شیمی** (۳) (تست)
- **زیست‌شناسی** (۳) (سه‌بعدی)



- درسنامه‌ای شامل نکات کلیدی و مرور مطالب مهم در ابتدای هر فصل
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس بخش‌های کتاب درسی
- ۲۲۹ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۱۳۳۳ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سؤالات کنکورهای سراسری سال‌های اخیر
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

(ویژهٔ رشتهٔ ریاضی) https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(ویژهٔ رشتهٔ تجربی) https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

نشر الگو
www.olgoobooks.ir
9786007950845