@khaneh_book

سخن ناشر

آیا می دانید برای تهیه ی هر تن کاغذ مفید ۱۷ اصله درخت سبز قطع می شود؟ آیا می دانید برای تولید یک عنوان کتاب ۲ صفحه ای در قطع رحلی و در شمارگان ۲۰۰۰ نسخه یک تن کاغذ مصرف می شود؟ لذا شایسته است پس از مطالعه ی کتاب حاضر آن را در وب سایت mygaj.com قرار دهید تا از تولید مجدد آن جلوگیری و در مصرف کاغذ صرفه جویی شود. باشد که شما دوست خوب نادیده ام با این حرکت به ظاهر کوچک، گامی بلند در حفظ منابع طبیعی کره ی زمین برداشته باشید.

ارادتمند شما
ابوالفضل جوکار

@khaneh_book

چند دقیقه با مدیر تألیف

کتاب‌های میکروطبقه‌بندی یا نقره‌ای گاج از خوش‌نام‌ترین و پرفروش‌ترین کتاب‌های آموزشی کشور به‌شمار می‌روند و نیازی به معرفی ندارند. کم‌تر دانش‌آموزی در کشور وجود دارد که در جلسه کنکور حاضر شود و کتابی از کتاب‌های میکروطبقه‌بندی گاج را مطالعه نکرده باشد. در انتشارات گاج، هر سال تعداد هنگفتی کتاب میکروطبقه‌بندی با جلد نقره‌ای برای پایه‌های تحصیلی دهم، یازدهم، دوازدهم و کنکور رشته‌های تجربی، ریاضی و انسانی تولید می‌شود. این موضوع مهم، وظیفه تیم ما را در واحد کتاب‌های میکروطبقه‌بندی به مراتب سنگین‌تر می‌کند و به‌طور مداوم به ما گوشزد می‌کند که باید تلاشمان را چندین برابر نماییم.

با تغییر نظام آموزشی کشور از سیستم ۵-۳-۴ به ۶-۳-۳ انتشارات بین‌المللی گاج همچنان به تولید کتاب‌های میکروطبقه‌بندی در ۳ سال متوسطه دوم برای آمادگی دانش‌آموزان عزیز در آزمون‌های کنکور سراسری ادامه می‌دهد. امیدوارم که تلاش بنده و همکارانم مورد استفاده شما اساتید گرانقدر و دانش‌آموزان عزیز قرار بگیرد.

▪ **مهندس افشین احمدی**

Shinmadi

@khanen_book

تقدیم به پدر و مادر مهربانم حسین اسفینی
تقدیم به همسر عزیزم و رادوین کوچولو یوسف داستان

در ادامهٔ تغییرات بنیادین کتاب‌های درسی، امسال ریاضی (۲) به جای کتاب ریاضی (۳) قدیم وارد زمین شد تا دانش‌آموزان سال یازدهم، شاهد کتابی متفاوت، چغر و بد بدن به جای ریاضی (۳) گوگولی مگولی باشن. کتابی که خیلی له و علیه اون صحبت شد و ما هم انتقاداتی داریم که آخر همین مقدمه میاریم. اما قبل از همه بریم سراغ ویژگی‌های کتابی که براتون آماده کردیم:

۱ صفر تا صد بودن (قابل استفاده برای هر سطحی)

آقا، کتاب طوری نوشته شده که مدعیان درجه ۱ کنکور و عارفان بی‌ادعا، همگی بتونن ازش استفاده کنن؛ حتی ممکنه جای این دو گروه عوض شه! یعنی یه عارف بی‌ادعا با خوندن دقیق کتاب، بشه جزء مدعیان قهرمانی. ویژگی میکروطبقه‌بندیه رعایت‌شده توی این کتاب رو لطفاً اصلاً دست کم نگیرین و قدرش رو بدونین (البته اگه می‌خواین همیشه عارف بی‌ادعا بمونین، خب قدر ندونین!) برای افزودن این ویژگی خفن به کتاب، مؤلفین زمان زیادی صرف کرده‌اند و با وسواس زیاد و با در نظر گرفتن نظرات ده‌ها معلم، تست‌ها را در جای مناسب خود آورده‌اند، ضمناً درسنامه‌ها هم در فواصل کوتاه اومدن تا تست‌های زیر هر درسنامه کاملاً منطبق با اونا باشه و خواننده کاملاً شیرفهم (لطفاً چیز دیگه‌ای نخونین) بشه.

۲ وفاداری به کتاب درسی

علی‌رغم چندتا بد و بیراهی که ته مقدمه نثار کتاب درسی کرده‌ایم ولی به متن کتاب درسی وفادار بوده‌ایم. وفاداری به متن کتاب درسی خیلی مهمه! آقا طرف نوشته: «یک کلمه، خارج کتاب نمی‌بینید.» اون وقت اصلاً وقت نذاشته ببینه مثلاً کتاب درسی توی بحث تابع معکوس، فقط راجع به توابع خطی صحبت کرده! برداشته کلی تست خارج مبحث آورده! خب این چه وفاداری‌ایه! (آیا مؤلفین کتاب درسی شما رو نفرین نخواهند کرد؟!) از خدا نمی‌ترسید؟! آقا نکنین این کارها رو، در عوض وقت بذارین سؤالاتی زیبا، بر مبنای کتاب درسی طرح کنین. (جان! از اتاق فرمون خبر میرسه، زیادی نوشابه باز کردیم!)

۳ استفاده از منابعی کامل برای تهیهٔ تست‌ها

کتاب درسی، سؤالات کنکورهای سال‌های قبل، سؤالات کنکورهای آزمایشی استاندارد (البته با لحاظ کردن تغییرات کتاب جدید)، کتاب‌های دانشگاهی، کتاب‌های درسی و کمک‌درسی خارجکی (به‌جز رزیم اشغالگر قدس و داعش!) و هر چیز به درد بخور دیگه‌ای که فکرش رو بکنین برای تألیف کتاب استفاده شدن.

۴ سؤالات دانش‌آموزان

برخی دانش‌آموزان نخبه، خیلی خوب، خوب، دنبال علم، بیکار، جک و ... سؤالاتی رو مطرح کردن که به هر حال ممکنه بعضی از اونا، سؤالات شما هم باشه. این سؤالات رو با ذکر اسم پرسش‌کننده آورده‌ایم و البته با برخی‌هاشون شوخی‌هایی هم داشته‌ایم!

۵ علایم به کار رفته در کتاب

الف) تست‌های بدون علامت: سؤالاتی معمولی؛ کسی که می‌خواد از کتاب درسی ۲۰ بگیره، کافیه اونا رو بخونه. مطمئن باشین با خوندن اونا توی یه امتحان معمولی، اگه ۲۱ رو نگیرین، ۲۰ رو حتماً خواهید گرفت.

ب) تست‌های با علامت : سؤالاتی خفن و کمی ترسناک؛ اگه جوابتون به این سؤالات شانسی نبوده، معلومه که کارتون خیلی درسته! برین خودتونو آمادهٔ پَر دادن کنین.

ج) تست‌های با علامت : این سؤالا از همه، تعدادشون کم‌تره ولی اگه تونستین اونا رو حل کنین، ترکوندین! دیگه نباید نگران هیچ چیزی باشین! می‌تونین تصور کنین سوار یه ماشین شاسی‌بلند لوکس هستین و دارین از همه سبقت می‌گیرین! فقط بیایین که چپ نکنین یا زیاد جریمه نشین!!

@khanehbook

دو کلام با دانش‌آموز ...

۱ آقا اون درسنامه‌ها رو خواهشاً حتماً بخونید. بعد برید سراغ تست‌های بدون علامت، بعد برید سراغ علامت‌دارها. البته اگه سروران گرامی (معلمان عزیزتان) نظر دیگری به نفع شما داشتن اون رو اجرا کنید.

۲ آقایون، خانم‌ها! جون خودتون پاسخ‌ها رو بخونید. نه به خاطر این‌که جون ما در اومده و بهترین پاسخ رو نوشتیم، بلکه برای این‌که:
الف) ممکنه خدای نکرده، زبونم لال، شانسی به جواب رسیده باشین، اون وقته که اگه پاسخ رو نخونید حتماً توی تست‌های مشابه به مشکل برمی‌خورین.
ب) ممکنه راه شما درست باشه، ولی راه ما یه کوچولو بهتر باشه. اون وقت حداقل یه راه بهتر هم یاد می‌گیرین.
ج) ممکنه راه حل شما بهتر باشه یا ایرادی توی جواب ما باشه (البته بعید می‌دونم!) در این صورت حتماً راه حل‌تون رو از طریق پست یا ایمیل یا آی‌دی کانال تلگرام یا انداختن زیر در مؤسسهٔ گاج (بنویسید برسد به دست آقای اسفینی یا داستان ـ جون مادرتون ننویسید به وقت آقای احمدی! بالاخره مدیر تألیفه ممکنه ناراحت بشه از دست ما و ... ولش کنید) بالاخره به یه طریقی به دست ما برسونین که با اسم خودتون بزنیم توی کتاب (اون وقت می‌شید آقای کتابی! شاید هم مثل آقای دوربینی مشهور شدید!) فقط خواهشاً جار نزنید. هیچ کتابی حتی بهترین‌ها خالی از ایراد نیستن.

• کتاب دیر اومد ولی ازدها اومد

وسواس بیش از حد مؤلفین در چینش سؤالات، گیر دادن‌های بیشمار به ویراستاری‌ها و چندین بار دیدن و حل کردن سؤالات به همراه تاسزاگویی‌های زیر لب! سعی در آوردن درسنامه‌هایی کامل و دقیق و روان و یاد دادن تمام مطالب لازم، بازنویسی چندبارهٔ جواب‌ها و ده‌ها دلیل بی‌مورد و با مورد دیگر! ولش کنید به هر حال کتاب آماده شد و بهترین شد خداروشکر.

• توصیهٔ نهایی

نمی‌خواد کتاب دیگه‌ای بخونین ولی این کتاب رو چندین‌بار بخونین! در پایان سال اونو دور نندازید چون احتمالاً برای کنکورتون لازمش دارین! کتاب هم مثل دلار هر روز قیمتش بالا میره! ولی بعد قبول شدن توی پزشکی یا هر رشتهٔ دلخواهتون می‌تونین اونو هدیه بدین که بقیه هم استفاده کنن.

• سخنی چند با مؤلفین عزیز کتاب درسی

به عنوان حسن ختام چند سؤال انتقادی از مؤلفین عزیز مطرح می‌نماییم:

۱ چرا مؤلفین در مبحث حد این‌قدر متغیرالاحوال هستند! تا سال پیش تمام سعی‌شان این بود که توی مخ دانش‌آموز فرو برود که تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=0$ حد دارد ولی حالا با بازگشتی عجیب به قبل، باید گفت حد ندارد! البته حد داشتن یا نداشتن این تابع بستگی به سال تحصیل شما دارد!! اگر یازدهمی هستید حد ندارد و اگر سال آخر (کنکوری) هستید، حد دارد. بگذریم که در یکی از سال‌ها نوع رشتهٔ تحصیلی هم در جواب تأثیر داشت!

۲ تاکنون در تمام نظام آموزشی کشور این‌گونه بوده که تابع رادیکالی و دامنهٔ آن معرفی می‌شد و در سال‌های بعد معادلات رادیکالی مطرح و حل می‌شدند ولی امسال در فصل (۱) معادلات رادیکالی را داریم، در حالی‌که در فصل سوم، تابع رادیکالی معرفی می‌شود!

۳ فصل دوم کتاب که مرتبط با هندسه است هیچ ربطی به فصل‌های قبل و بعد ندارد! فصلی سنگین که واقعاً تدریس آن کمر معلم را خم می‌کند! کمر دانش‌آموز را نیز! بهتر نبود چنین فصلی یا آخر می‌آمد یا اصلاً نمی‌آمد! (بچهٔ تجربی را چه به هندسه!)

• در آخر باید تشکر ویژه نمود از:

۱ جناب آقای مهندس ابوالفضل جوکار، مدیر محترم انتشارات بین‌المللی گاج که حضورشان همواره همراه با موفقیت برای انتشارات بوده است.

۲ جناب آقای مهندس افشین احمدی، مدیر تألیف توانا و خوش فکر کتاب‌های میکروطبقه‌بندی که با آرامش در طول تألیف این اثر همواره همراه ما بوده و با اعتماد به ما زمینهٔ تألیف این کتاب را فراهم نمودند.

۳ جناب آقای افشین پورافشار که زحمت برنامه‌ریزی، نظارت و هماهنگی با قسمت‌های مختلف برعهده ایشان بود. هماهنگی‌هایی که بعضاً بسیار سخت، طاقت‌فرسا و حوصله‌سربر بود.

۴ جناب آقای شاکری و همکاران محترمشان در واحد تایپ.

۵ واحد ویرایش فنی کتاب‌های میکروطبقه‌بندی که شبانه‌روزی برای به موقع رساندن کار تلاش کردند.

۶ خانواده‌های عزیزمان که هر چه داریم از آن‌هاست. خداوند حفظ‌شان کند ... .

نظرات و پیشنهادات خود را از طریق ایمیل با ما در میان بگذارید.

Hossein _ esfini @ alum.sharif.edu yousefdastan@ gmail.com

یوسف داستان ـ حسین اسفینی

@khanehbook

فهرست

MATHEMATICS

فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر ۸

پاسخ تشریحی ۴۱

فصل ۲

هندسه ۸۶

پاسخ تشریحی ۱۱۶

فصل ۳

تابع ۱۵۱

پاسخ تشریحی ۱۸۱

فصل ۴

مثلثات ۲۱۷

پاسخ تشریحی ۲۳۱

فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی ۲۴۹

پاسخ تشریحی ۲۷۸

فصل ۶

حد و پیوستگی ۳۱۳

پاسخ تشریحی ۳۳۴

فصل ۷

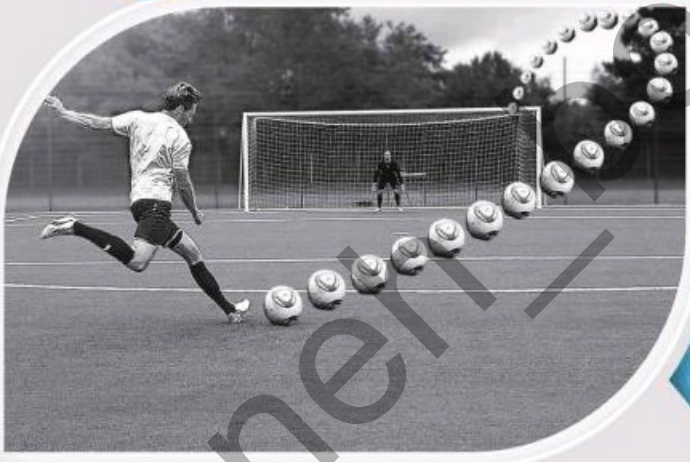
آمار و احتمال ۳۶۱

پاسخ تشریحی ۳۹۰

@khaneh_book

فصل ۱

MATHEMATICS



هندسهٔ تحلیلی و جبر

- درس اول: هندسهٔ تحلیلی
- درس دوم: معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجه۲
- درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

@khanen_book

درسنامهٔ ۱

یادآوری (معادلهٔ خط)

تعریف: هر معادله به صورت کلی $y = ax + b$، معادلهٔ یک خط است. **مثلاً** $y = 2x$ یا $y = 3x + 1$ یا ...

قرار داشتن یک نقطه روی خط:

اگر نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ روی خط $y = ax + b$ قرار داشته باشد، آن‌گاه مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کند (یعنی $y_A = ax_A + b$).

مثال نقطهٔ $A(1,2)$ روی خط $y = 2x$ قرار دارد. زیرا:

مختصات A در معادله صدق کرد و تساوی برقرار شد. $\Rightarrow$ ✓ $y = 2x \xrightarrow[y_A=2]{x_A=1} 2 = 2\times 1 \Rightarrow 2 = 2$

مثال اگر $A(2,5)$ روی خط $mx + (m-1)y = 2m$ قرار داشته باشد، مقدار m را به دست آورید.

پاسخ: چون A روی خط $mx + (m-1)y = 2m$ قرار دارد، پس مختصات آن در معادله صدق می‌کند:

$$mx + (m-1)y = 2m \xrightarrow[y_A=5]{x_A=2} m(2) + (m-1)(5) = 2m \Rightarrow 2m + 5m - 5 = 2m \Rightarrow 7m - 5 = 2m \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$$

رسم نمودار خط $y = ax + b$:

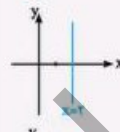
برای رسم هر خط به دو نقطهٔ دلخواه از آن خط نیاز داریم. برای پیدا کردن آن دو نقطه، به جای x در معادله، دو عدد دلخواه قرار می‌دهیم و به کمک آن yها را می‌یابیم. سپس دو نقطهٔ به‌دست آمده را روی دستگاه محورهای مختصات مشخص کرده و به‌هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

مثال خط $y = 2x + 1$ را رسم کنید.

پاسخ: دو عدد دلخواه صفر و ۱ را به جای x قرار داده و yها را می‌یابیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow A(0,1)$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 3 \Rightarrow B(1,3)$$

رسم خطوط خاص:



۱ خطوط $x = a$: خطوطی موازی محور yها هستند که طول همهٔ نقاط روی آن a می‌باشد. **مثلاً:**

۲ خطوط $y = b$: خطوطی موازی محور xها هستند که عرض همهٔ نقاط روی آن b می‌باشد. **مثلاً:**

۱- نقطه‌ای به طول ۲ روی خط $y = 2x - 1$ و $\frac{x-y}{3} + y$ قرار دارد. عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۲- نقطهٔ $(3,b)$ روی خط $y - 2x = 5$ قرار دارد. مقدار b برابر است با:

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۱۱ ۴) ۳

۳- خط $(3m-6)x + 2y = 2m + 6$ از نقطهٔ A به عرض ۲ روی محور yها عبور می‌کند. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

@khanen_book

۴- مختصات نقطه‌ای از خط $2x + 5y = 19 - (x - y)$ که عرض آن از سه برابر طولش، یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

۱) $(۳,۱۰)$ ۲) $(۲,۷)$ ۳) $(۱,۴)$ ۴) $(۴,۱۳)$

۵- به‌ازای چه مقداری از a دو خط $(a+۲)x + y = ۱$ و $x + ay - ۲ = ۰$ روی محور yها یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

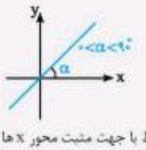
درسنامه ۲

یادآوری (شیب خط، عرض از مبدأ و طول از مبدأ)

تعریف: در معادلهٔ خط $y = ax + b$، ضریب x یعنی a را شیب خط می‌گویند. مثلاً شیب خط $y = ۵x - ۴$، برابر ۵ است.

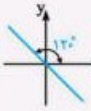
نکته اگر a (شیب خط) را تغییر دهیم، زاویهٔ خط با محور طول‌ها (یعنی α) نیز تغییر می‌کند.

اگر زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها (یعنی α) بیشتر از ۹۰° باشد، شیب خط یعنی a منفی است.



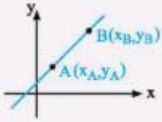
اگر زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها (یعنی α) کمتر از ۹۰° باشد، شیب خط یعنی a مثبت است.

مثال اگر خطی با محور طول‌ها زاویهٔ ۱۲۰° بسازد، شیبش منفی است.



$۱۲۰^\circ > ۹۰^\circ \Rightarrow$ شیب $= a < ۰$

نکته شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به عبارت دیگر اگر دو نقطه از خط مانند $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ معلوم باشد، آن‌گاه شیب خط AB را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:



$$\text{شیب خط } AB = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

مثال اگر $A(۲,۳)$ و $B(۶,۹)$، آن‌گاه شیب پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به فرمول شیب خط داریم:

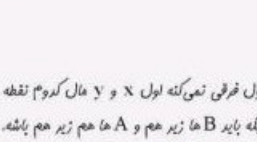
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۹-۳}{۶-۲} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

سؤال دانش‌پژوه (پانته‌آ گاکیاز)، آقا ما توی فرمول شیب خط، اول x و y نقطهٔ A رو نوشتیم، بعد واسه نقطهٔ B رو نوشتیم. غلطه؟ جوابا که یکی شد:

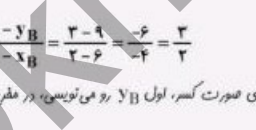
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۳-۹}{۲-۶} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲}$$

پاسخ: نه توی فرمول خرقی نمی‌کنه اول x و y مال کدوم نقطه باشه ولی قبلی مهمه اگه توی صورت کسر، اول y_B رو می‌نویسی، در مخرج هم اول x_B رو بنویسی. به عبارت دیگه باید Bها زیر هم و Aها هم زیر هم باشه.

نکته خط گذرنده از دو نقطهٔ هم‌عرض افقی بوده و شیب آن صفر است. هم‌چنین خط گذرنده از دو نقطهٔ هم‌طول، قائم بوده و شیب آن تعریف‌نشده است. زیرا:



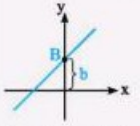
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \xrightarrow{x_B = x_A} \frac{y_B - y_A}{۰} = \text{تعریف نشده}$$



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \xrightarrow{y_A = y_B} \frac{۰}{x_B - x_A} = ۰$$

@kharen_book

عرض از مبدأ: در معادلهٔ خط $y = ax + b$، به عدد b عرض از مبدأ می‌گویند. **مثلاً:** عرض از مبدأ خط $y = 3x - 4$ برابر (-4) است.



سؤال دانش‌پژوه (مینا شریفی)، آقا میشه روی شکل بگین که b دقیقاً کجای خطّه؟

کجه پاسخ: ببین وقتی می‌گیم عرض از مبدا قطی b هست، یعنی نمودار اون قط، محور yها رو در نقطه‌ای به عرض b قطع می‌کنه. اگه اسم اون نقطه رو B بذاریم، مختصاتش $B(0,b)$ می‌شه، زیرا نقطهٔ B روی محور yها قرار داره و طول اون صفره.

نکته برای پیدا کردن عرض از مبدأ، کافی است در معادلهٔ خط، به جای x، صفر قرار بدهیم و y را به‌دست آوریم. **مثلاً:** عرض از مبدأ خط $y + x = 2x - 7$ برابر می‌شود با:

$$y + x = 2x - 7 \xrightarrow{x=0} y + 0 = 0 - 7 \Rightarrow y = -7$$

طول از مبدأ: محل برخورد خط با محور xها را طول از مبدأ می‌گویند. برای پیدا کردن طول از مبدأ کافی است، در معادلهٔ خط، به جای y، صفر قرار بدهیم و x را به‌دست آوریم:

مثال طول از مبدأ خط $y = 2x - 8$ برابر می‌شود با:

$$y = 2x - 8 \xrightarrow{y=0} 0 = 2x - 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

یعنی خط $y = 2x - 8$ در نقطهٔ A به طول ۴ محور xها را قطع می‌کند.

معادلهٔ خط در حالت کلی

معادلهٔ خط در حالت کلی به صورت $ax + by + c = 0$ است که برای محاسبهٔ شیب آن به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

روش اول: ابتدا معادلهٔ خط را به صورت استاندارد در آورده و سپس ضریب x را می‌یابیم:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \xrightarrow{\div b} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow \text{شیب} = \text{ضریب } x = -\frac{a}{b}$$

مثال شیب خط $2x + 4y + 8 = 0$ را بیابید.

کجه پاسخ: **روش اول:**

$$2x + 4y + 8 = 0 \Rightarrow 4y = -2x - 8 \xrightarrow{\div 4} y = \frac{-2}{4}x - \frac{8}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

روش دوم: از فرمول زیر شیب خط $ax + by + c = 0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$

مثال: $2x + 4y + 8 = 0 \xrightarrow[\text{ضریب } y = 4]{\text{ضریب } x = 2}$ شیب $= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالاده‌زاده)، آقا اجازه مثلاً اگه بخوایم شیب خط $5x = -2y + 7$ رو به دست بیاریم با توجه به فرمول شما میشه $\frac{5}{2}$؟

$$\text{شیب} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$$

کجه پاسخ: پی میگی اصغرا تقسیم رو شهید کردی، دقت کن واسه استفاده از این فرمول باید معادلهٔ خط حتماً به شکل $ax + by + c = 0$ باشه. یعنی قسماً باید x و y بغل هم باشن! ولی تو معادلهٔ قطی که گفتی x و y از هم جدا هستن. پس اول باید x و y رو بغل هم بیاریم، بعد از فرمول بریم.

$$5x = -2y + 7 \Rightarrow 5x + 2y = 7 \xrightarrow[\text{ضریب } y = 2]{\text{ضریب } x = 5} \text{شیب} = -\frac{5}{2}$$

سؤال همون دانش‌پژوه، آقا عدد ۷ رو چرا نبردین پیش x و yها؟

کجه پاسخ: برای محاسبهٔ شیب اصلاً عدد ثابت معادله رو توم حساب نمی‌کنیم. بزار هر طرفی دوس داشت باشه. مهم نیست!

مثال شیب، طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $3x + 4y = 5x - 7y + 2$ را به دست آورید.

کجه پاسخ: برای محاسبهٔ شیب باید معادله را مرتب کنیم تا جایی که فقط یک x و یک y در معادله باقی بماند:

$$5x - 7y + 2 = 3x + 4y \Rightarrow 5x - 7y + 2 - 3x - 4y = 0 \Rightarrow 2x - 11y + 2 = 0 \xrightarrow[\text{ضریب } y = -11]{\text{ضریب } x = 2} \text{شیب} = -\frac{2}{-11} = \frac{2}{11}$$

برای محاسبهٔ عرض از مبدأ، x را صفر قرار می‌دهیم:

$$2x - 11y + 2 = 0 \xrightarrow{x=0} 0 - 11y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{11}$$

برای محاسبهٔ طول از مبدأ، y را صفر قرار می‌دهیم:

$$2x - 11y + 2 = 0 \xrightarrow{y=0} 2x - 0 + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

@khanen_book

۶- اگر شیب خط $y = (2m-4)x + m$ برابر ۲ باشد، طول از مبدأ خط کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) ۶

۷- عرض از مبدأ خطی ۳ و شیب آن ۲- است. این خط محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

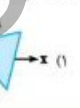
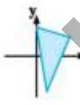
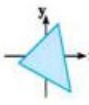
۸- مجموع عرض از مبدأ و شیب خط $3\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2\left(\frac{x-y}{3}\right) = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{5}$ ۲) $-\frac{6}{5}$ ۳) $-\frac{7}{5}$ ۴) $\frac{7}{5}$

۹- مساحت مثلثی که از برخورد خط d به معادلهٔ $3x + 2y = 12$ با محورهای مختصات به‌دست می‌آید برابر است با:

۱) ۱۲ ۲) ۶۴ ۳) ۴ ۴) ۲۴

۱۰- از تقاطع سه خط با شیب‌های ۰/۵، ۱۰ و ۱- در صفحهٔ مختصات، یک مثلث به وجود آمده است. کدام شکل می‌تواند نشان‌دهندهٔ این مثلث باشد؟

۱) 
۲) 
۳)
۴) 

درسنامه ۳

یادآوری (به‌دست آوردن معادلهٔ خط)

معمولاً در سه حالت زیر از ما می‌خواهند، معادلهٔ خط بنویسیم. پس خوب به ادامهٔ درس توجه کنید:

حالت اول: شیب m و عرض از مبدأ h را به ما می‌دهند، در این صورت معادلهٔ خط به صورت $y = mx + h$ است.

مثال معادلهٔ خطی که شیبش ۲ و عرض از مبدأ آن ۳ باشد، به صورت $y = 2x + 3$ است.

حالت دوم: شیب m و یک نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ را به ما می‌دهند، در این صورت کافی است از فرمول زیر معادلهٔ خط را به دست آوریم:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $A(2,4)$ عبور کرده و شیب آن $m = 3$ باشد، به دست آورید.

پاسخ:

$$y - 4 = 3(x-2) \Rightarrow y - 4 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 2$$

حالت سوم: فقط ۲ نقطه از خط مانند $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را به ما می‌دهند و هرچی نگاه می‌کنیم در سؤال خبری از شیب خط نیست! در این صورت از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم.

روش اول: ابتدا شیب را با توجه به فرمول زیر حساب کرده و سپس معادله را با داشتن شیب و یک نقطه از خط می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \text{معادلهٔ خط: } y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ $A(1,2)$ و $B(2,4)$ می‌گذرد، به دست آورید.

پاسخ: خب در صورت سؤال خبری از شیب نیست! پس ابتدا شیب خط را به دست آورده و سپس معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 2(x-1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x$$

سؤال دانش‌پژوه (مدّگل عنبرستانی)، آقا من واسه معادله نوشتن از نقطهٔ B استفاده کردم، جواب منم $y = 2x$ شد، اونم درسته؟ ببینید:

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 4 = 2(x-2) \Rightarrow y - 4 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x$$

پاسخ: بله، فرقی نمی‌کنه که برای نوشتن معادله از کدوم نقطه استفاده کنی، چون هم A و هم B روی خط قرار دارن و مختصاتشون در معادلهٔ خط صدق می‌کنه.

روش دوم: معادلهٔ خط در حالت کلی را به صورت $y = mx + h$ در نظر می‌گیریم و سپس چون دو نقطهٔ A و B از خط را داریم، مختصات آن‌ها را در معادله قرار داده و مجهولات m و h را می‌یابیم.

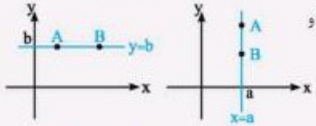
@khanen_book

مثال معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۲,۴)$ می‌گذرد.

پاسخ:

$$y=mx+h \Rightarrow \begin{cases} A(\overset{x}{۱},\overset{y}{۲}): ۲=m(۱)+h \\ B(\overset{x}{۲},\overset{y}{۴}): ۴=m(۲)+h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+h=۲ \\ ۲m+h=۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} m=۲, h=۰ \Rightarrow y=۲x+۰ \Rightarrow y=۲x$$

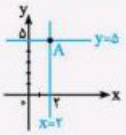
نکته معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ هم‌طول $A(a,b)$ و $B(a,c)$ می‌گذرد، برابر $x=a$ و معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ هم‌عرض $A(a,b)$ و $B(c,b)$ می‌گذرد، برابر $y=b$ است.



مثال معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۱,۵)$ به صورت $x=۱$ و معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(۲,۴)$ و $B(۳,۴)$ به صورت $y=۴$ است.

نکته معادلهٔ خط افقی گذرنده از نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ به‌صورت $y=y_A$ و معادلهٔ خط عمودی گذرنده از آن به‌صورت $x=x_A$ است.

مثال معادلهٔ خط افقی گذرنده از $A(۲,۵)$ به‌صورت $y=۵$ و معادلهٔ خط عمودی گذرنده از آن به‌صورت $x=۲$ است.



نکته معادلهٔ خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم به‌صورت $y=x$ و معادلهٔ خط نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم به‌صورت $y=-x$ است.

۱۱- معادلهٔ خطی که شیب آن ۴ بوده و از نقطهٔ $A(۳,۲)$ عبور کند، کدام است؟

۱) $y=۲x-۸$ ۲) $y=۴x-۱۰$ ۳) $y=۳x+۲$ ۴) $y=-۳x+۵$

۱۲- شیب خطی ۶- و طول از مبدأ آن ۲- است. عرض از مبدأ آن چیست؟

۱) ۳- ۲) ۴- ۳) ۱۲- ۴) ۶-

۱۳- معادلهٔ خطی که عرض از مبدأ آن ۵ و طول از مبدأ آن ۳- باشد، کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۳}x+۵$ ۲) $y=۵x+\frac{۵}{۳}$ ۳) $y=۵x+\frac{۱}{۳}$ ۴) $y=\frac{۵}{۳}x+۵$

۱۴- خطی که از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(۲,۴)$ می‌گذرد، به‌ازای کدام مقدار m از نقطهٔ $(m,m-۱)$ نیز خواهد گذشت؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۵- شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲m-۱,۵m)$ و $B(۳m,۵m-۱)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. معادلهٔ آن خط کدام است؟

۱) $x+۲y+۲۳=۰$ ۲) $۲x+y=۲۳$ ۳) $x+۲y=۲۳$ ۴) $۲y-x+۲۳=۰$

درسنامهٔ ۴

یادآوری (خطوط موازی و عمود)

خطوط موازی:

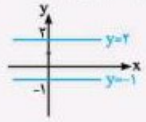
دو خط $y=ax+b$ و $y=cx+d$ با هم موازی هستند، هرگاه شیب‌های آن‌ها برابر باشد. یعنی $a=c$. مثلاً دو خط $y=۲x-۷$ و $y=۲x+۵$ با هم موازی می‌باشند، زیرا شیب هر دو خط ۲ است.

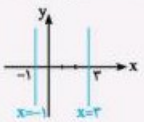
@khanen_book

دو خط عمود بر هم:

دو خطِ غیرموازی با محورهای مختصاتِ $y = ax + b$ و $y = cx + d$ بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) شود. یعنی $a \times c = -1$. به بیان دیگر در صورتی می‌گوییم آن دو خط بر هم عمودند که شیب هر کدام، عکسِ قرینهٔ شیب دیگری باشد. یعنی: $a = \frac{-1}{c}$. مثلاً: دو خط $y = -2x$ و $y = \frac{1}{2}x + 1$ بر هم عمودند، زیرا $-1 = \frac{1}{2} \times (-2)$ است.

نکته اگر خطی موازی محور xها باشد، معادله‌اش به‌صورت $(\text{عدد} = y)$ و اگر موازی محور yها باشد، معادله‌اش به‌صورت $(\text{عدد} = x)$ است. مثلاً:





۱۶- به‌ازای چه مقداری از a، خط $(a+1)y = 5$ موازی با خط $y = -x$ است؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۱۷- به‌ازای کدام مقدار b، خطی که از نقطهٔ $A(-2,3)$ و مبدأ مختصات می‌گذرد با خط $y = \frac{3}{b}x + 2$ موازی است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۱۸- دو خط با معادلات $(m-1)y - mx = 5$ و $2x - m(1 - x + y) = 0$ موازی یک‌دیگرند. مقدار $-\frac{1}{m}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۹- عرض از مبدأ خطی که از نقطهٔ $(-3,2)$ موازی خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(1,4)$ و $(-1,5)$ رسم شود، کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۲۰- کدام‌یک از خطوط زیر خط $2x - 3y = 5$ را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند و با خط $4x - 2y = 5$ موازی است؟

۱) $2x - y = 15$ ۲) $2x - y = -15$
۳) $y = -2x - 15$ ۴) $2y - x = 15$

۲۱- در یک مستطیل $A(0,2)$ و $B(2,-4)$ دو رأس مجاور هستند. اگر $C(3,3)$ رأس سوم آن باشد، آن‌گاه خط گذرنده از ضلع CD، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) 4 ۴) -4

۲۲- مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رأس مجاور آن هستند. خط گذرنده از ضلع AD، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) 7

۲۳- نقاط $A(1,0)$، $B(4,2)$ و $C(a,-a)$، سه رأس یک مثلث هستند. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و $\hat{A} = 90^\circ$ است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) 4 ۴) -4

۲۴- در متوازی‌الاضلاع شکل مقابل، عرض نقطهٔ C کدام است؟

۱) $\frac{12}{7}$ ۲) $\frac{12}{17}$ ۳) $-\frac{12}{7}$ ۴) $-\frac{12}{17}$

۲۵- به‌ازای چه مقدار m، دو خط $(2m+1)x = 1$ و $y - x = 2$ بر هم عمودند؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۶- خط L به معادلهٔ $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(-1,2)$ و $(3,-8)$ عمود است. معادلهٔ خط L کدام است؟

۱) $2y + 3x = 4$ ۲) $2y + 3x = 1$ ۳) $2y - 3x = -5$ ۴) $3y - 2x = -5$

@khaneh_book

درسنامهٔ ۵

طول پاره‌خط AB و مختصات وسط آن

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، آن‌گاه:

الف) طول پاره‌خط AB (فاصلهٔ A و B) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ب) مختصات $M(x_M, y_M)$، وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad و \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال اگر $A(-2,4)$ و $B = (2,1)$ باشد، طول پاره‌خط AB و مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

کلک پاسخ:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+1}{2} = 2/5 \quad و \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 \Rightarrow M(x_M, y_M) = (2/5, 0)$$

سؤال *(دانش‌پژوه (افشین روشن)):* آقا اجازه! در فرمول طول پاره‌خط AB، چرا اول طول و عرض نقطهٔ B و بعدش طول و عرض نقطهٔ A رو نوشتین؟ اگه ما فرمول رو به صورت زیر بنویسیم، غلطه؟

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

کلک پاسخ: اصلاً مهم نیست اول، طول یا عرض نقطهٔ A رو بنویسی یا نقطهٔ B رو. فقط مهم اینه که طول‌های دو نقطه و عرض‌های دو نقطه رو از هم کم کنیم. من دلم اینطوری می‌خواد، یکی دیگه دلش با ما نیست اون‌طوری می‌خوادا (وله دیگه کاریش نمیشه کردا) تو هر گروهی رو خواستی اول بنویس.

۲۷- در مثلث ABC با رئوس $A(0,0)$، $B(-2,1)$ و $C(1,2)$ طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۳) $2\sqrt{10}$ ۴) $\frac{2\sqrt{10}}{2}$

۲۸- فاصلهٔ نقطهٔ A به طول ۲- از نقطهٔ $B(1,-3)$ برابر ۵ است. عرض نقطهٔ A کدام می‌تواند باشد؟ آزمون‌های گاج

۱) ۷ ۲) -1 ۳) -5 ۴) -7

۲۹- در یکی از محله‌های تهران، خانه‌ای آتش گرفته است که مختصات آن خانه بر روی نقشهٔ مرکز آتش‌نشانی به صورت $P(50,30)$ است. نزدیک‌ترین مراکز آتش‌نشانی به این خانه در نقاط $A(10,-20)$ و $B(80,90)$ قرار دارند. کدام مرکز برای اعزام آتش‌نشانان به محل آتش گرفته مناسب‌تر است و چه‌قدر تا محل فاصله دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) A، $\sqrt{4500}$ ۲) B، $\sqrt{4100}$ ۳) A، $\sqrt{4100}$ ۴) B، $\sqrt{4500}$

۳۰- طول جغرافیایی تبریز و چابهار به ترتیب ۴۶ و ۶۱ درجهٔ شرقی و عرض آن‌ها به ترتیب ۳۸ و ۲۵ درجهٔ شمالی است که به طور خلاصه موقعیت آن‌ها را می‌توان به صورت $T(46,38)$ و $C(61,25)$ نمایش داد. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول و عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، فاصلهٔ مستقیم این دو شهر چند کیلومتر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\sqrt{349}$ ۲) $110\sqrt{349}$ ۳) $\sqrt{394}$ ۴) $110\sqrt{394}$

۳۱- دایره‌ای به مرکز $O(3,4)$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند. محیط این دایره کدام است؟

۱) 10π ۲) 5π ۳) 2π ۴) π

۳۲- دو نقطهٔ $A(1,-2)$ و $B(-3,0)$ دو سر قطر یک مربع هستند. محیط مربع کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) ۱۰ ۳) $2\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{160}$

۳۳- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای $A(-2,4)$ و $B(-2,6)$ است. در این صورت کدام گزینه غلط است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) مختصات مرکز دایره $O(1,2)$ است.
۲) شعاع دایره برابر ۵ است.
۳) نقطهٔ $C(4,6)$ روی محیط دایره قرار دارد.
۴) معادلهٔ یکی از قطرهای آن $2x + 3y = 4$ است.

@khanehbook

۳۴- نقاط $A(۳,۳)$، $B(-۱,۱)$ و $O(۰,۰)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۳۵- سه نقطهٔ $A(۴,-۲)$، $B(۱,۲)$ و $C(۰,۰)$، سه رأس مثلث ABC هستند. محیط مثلث کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۵+۲\sqrt{۵}$ ۳) $۵+۳\sqrt{۵}$ ۴) $۳\sqrt{۵}$

۳۶- اگر نقاط $A=(۰,-۱)$، $B=(۱,-۲)$ و $C=(-۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آن‌گاه نوع دقیق مثلث و محیط آن کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه، $۲+۲\sqrt{۲}$ ۲) متساوی‌الساقین، $۳\sqrt{۲}$

۳) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، $۲+۲\sqrt{۲}$ ۴) متساوی‌الاضلاع، $۳\sqrt{۲}$

برگرفته از کتاب درسی

۳۷- اگر $A(۱,۴)$، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM کدام است؟

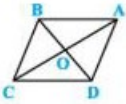
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

برگرفته از کتاب درسی

۳۸- در مثلث ABC با سه رأس $A(۱,۴)$، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ میانهٔ وارد بر ضلع BC محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹- در شکل مقابل نقاط $C(۲,۲)$، $B(۴,۶)$ و $O(۵,۴)$ رئوس متوازی‌الاضلاع هستند. معادلهٔ ضلع AD کدام است؟



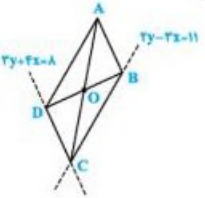
۱) $y=۳x+۱۰$ ۲) $y=۳x-۱۰$

۳) $y=۲x-۱۰$ ۴) $y=۲x+۱۰$

۴۰- نقطهٔ $A(۳,۱)$ یک رأس مربعی می‌باشد. اگر معادلهٔ دو قطر این مربع $y-۲x=۰$ و $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ باشد، طول قطر مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۴۱- نقطهٔ $A(۷,۶)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع مقابل است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۳x-۲y=۱۱$ و $۴x+۳y=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ تجربی داخل ۹۰



۱) $(۱,۵)$

۲) $(۳,۴)$

۳) $(۳,۵)$

۴) $(۴,۳)$

۴۲- نقاط A و B با مختصات $(۳,m)$ و $(-۱,۷)$ مفروض‌اند. از وسط پاره‌خط AB، خط d را موازی خط به معادلهٔ $۲x=y-۴$ رسم می‌کنیم. اگر عرض از مبدأ خط d، ۵- باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۹ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۴۳- کدام خط زیر حتماً از محل برخورد میانه‌های مثلث مقابل عبور می‌کند؟

۱) $y=-x+۳$ ۲) $y=۳x-۱$

۳) $x=۰$ ۴) $y=x$

۴۴- اگر $A(۱,۱)$ و $C(-۳,-۳)$ دو رأس مقابل در لوزی $ABCD$ باشند، معادلهٔ خطی که دو رأس B و D روی آن قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) $y=-x-۲$ ۲) $y=۲x-۳$

۳) $y=-x-۲, (x\neq -۱)$ ۴) $y=۲x-۳, (x\neq -۱)$

۴۵- نقطهٔ $M(۲,۳)$ وسط پاره‌خط واصل بین نقطهٔ A و نقطهٔ $B(۴,۶)$ است. خطی که از نقطهٔ A گذشته و بر پاره‌خط AB عمود است، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۶- نقطهٔ $A(۲,۳)$، قرینهٔ نقطه B نسبت به نقطهٔ $M(-۲,۵)$ است. مساحت دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ B بوده و از وسط پاره‌خط MB می‌گذرد، کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) ۵π

۴۷- دایره‌ای به مرکز $O(-۱,۲)$، از قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۲,۲)$ می‌گذرد. کدام‌یک از نقاط زیر روی محیط این دایره قرار دارد؟

۱) $C(-۲,۳)$ ۲) $C(-۵,۴)$ ۳) $C(۸,۳)$ ۴) $C(۵,۴)$

@khanenet_book

۴۸- اگر d، خط گذرنده از نقاط $A(a,b)$ و $B(b,a)$ باشد، این خط کدام ویژگی را ندارد؟ $(a\neq b, a,b\in\mathbb{R})$ برگرفته از کتاب درسی

۱) بر خط $y-x=3$ عمود است.
۲) با خط $4x+2y=2(x-3)$ موازی است.
۳) از نقطهٔ $\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$ می‌گذرد.
۴) خط $y=x$ را در نقطهٔ $\left(\frac{b-a}{2},\frac{a+b}{2}\right)$ قطع می‌کند.

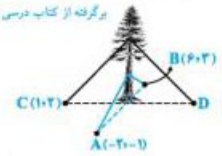
۴۹- خطی محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر $M(-3,2)$ وسط AB باشد، معادلهٔ این خط کدام است؟

۱) $2x-3y=-12$ ۲) $2x-3y=12$ ۳) $3x+2y=-5$ ۴) $3x-2y=5$

۵۰- نقاط $A(1,2)$، $B(-5,2)$ و $C(-2,5)$ سه رأس یک مربع هستند. مجموع طول و عرض رأس چهارم کدام است؟

۱) -3 ۲) -5 ۳) -1 ۴) 1

۵۱- برای جلوگیری از افتادن یک درخت کهنسال، آن را به کمک ۴ کابل به چهار نقطه در زمین محکم کرده‌اند، به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا پای درخت، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای درخت. مختصات نقطهٔ D کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

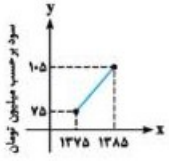


۱) $(0,3)$
۲) $(1,3)$
۳) $(3,1)$
۴) $(3,0)$

۵۲- دو نقطهٔ $A(2a,a)$ و $B(a+3,a-4)$ دو رأس یک مثلث هستند. میانهٔ نظیر رأس C، منطبق بر خط $y=5$ است. فاصلهٔ وسط ضلع AB تا نقطهٔ $E(8,2)$ چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۵۳- سود سالانهٔ یک کارگاه از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ مطابق نمودار مقابل بوده و در طول ۳۰ سال آینده این سود با همین روند افزایش خواهد یافت. اگر در سال nاُم، مقدار سود سالانه با میانگین سود سالانهٔ کارگاه در ده سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ برابر باشد، آن‌گاه در سال $(n+20)$اُم، سود سالانهٔ شرکت چقدر است؟ برگرفته از کتاب درسی

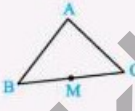


۱) ۱۳۵ ۲) ۱۴۰
۳) ۱۴۵ ۴) ۱۵۰

درسنامه ۶

عمودمنصف در مثلث

فرض کنید بخواهیم معادلهٔ عمودمنصف وارد به ضلع BC را به دست آوریم. برای این کار مراحل زیر را طی می‌کنیم:



۱) مختصات نقطهٔ M، وسط ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}, y_M=\frac{y_B+y_C}{2}$$

۲) چون عمودمنصف وارد بر BC، عمود بر آن است، پس شیب ضلع BC را یافته و سپس آن را قرینه و معکوس می‌کنیم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}\Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=-\frac{1}{m_{BC}}$$

۳) با داشتن نقطهٔ M و شیب، معادلهٔ عمودمنصف وارد بر BC به صورت زیر خواهد بود:

$$y-y_M=\frac{-1}{m_{BC}}(x-x_M)$$

مثال اگر $A(-1,2)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ باشد، معادلهٔ عمودمنصف وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

پاسخ: ۱) محاسبهٔ وسط BC:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3+1}{2}=2\ ,\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+(-2)}{2}=-1\Rightarrow M(2,-1)$$

۲) محاسبهٔ شیب عمودمنصف:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2-0}{1-3}=\frac{-2}{-2}=1\Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=-\frac{1}{m_{BC}}=-1$$

۳) نوشتن معادلهٔ عمودمنصف:

$$y-(-1)=-1(x-2)\Rightarrow y+1=-x+2\Rightarrow y=-x+1$$

@khanen_book

۵۴- نقاط $A(۵,۳)$ و $B(۳,۵)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف AB کدام است؟

۱) $y=-x$ ۲) $y=x-۲$ ۳) $y=۲-x$ ۴) $y=x$

۵۵- دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A(۱,۱)$ و $B(۵,۱)$ هستند. مختصات رأس سوم این مثلث کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۳,۱+\sqrt{۳})$ ۲) $(۳,-\sqrt{۳})$ ۳) $(۳,۱-۲\sqrt{۳})$ ۴) $(۱,۱+۲\sqrt{۳})$

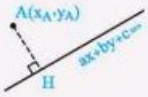
۵۶- اگر $A(۲,۱)$ و $B(۵,۳)$ دو سر قطر مربع ACBD باشند، عرض از مبدأ خط عبوری از قطر CD کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲۹}{۴}$ ۴) ۵

درسنامهٔ ۷

فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:



$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

فرار از اشتباه: برای استفاده از این فرمول حتماً باید معادلهٔ خط به‌صورت $ax+by+c=۰$ باشد. به عبارت دیگر تمام جمله‌ها باید در یک سمت تساوی باشند.

مثال فاصلهٔ $A(-۱,۲)$ از خط $y=x-۳$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا با توجه به قرار از اشتباه گفته شده، معادلهٔ خط را به‌صورت $x-y+۳=۰$ نوشته و سپس از فرمول بیان شده استفاده می‌کنیم:

$$AH=\frac{|y_A-x_A+۳|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}} \xrightarrow[A(-۱,\ ۲)]{x_A\ \ y_A} \frac{|۲-(-۱)+۳|}{\sqrt{۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$$

دید ویژه مهم‌ترین جاهایی که از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط استفاده می‌شود، عبارتند از:

۱) محاسبهٔ طول ضلع مربع یا مستطیل

۲) محاسبهٔ طول ارتفاع مثلث

۳) محاسبهٔ شعاع دایره به کمک مرکز و یک خط مماس بر دایره

۵۷- یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۵۸- نقطهٔ $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟ تجربی خارج ۹۳

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۵۹- قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه اول و سوم است و نقطهٔ $A(۲,-۴)$ یکی از رئوس آن است. مساحت مربع چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۶۰- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $a^۲x+(a^۲+۱)y=۵$ برابر یک است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $(a^۲+۱)x+a^۲y=۱۰$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۶۱- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $x+۲y=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ تجربی خارج ۹۰

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

۶۲- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $y=ax+b$ برابر ۱ واحد است. اگر این خط از نقطهٔ $(۱,۲)$ گذشته باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

@khanehbook

۶۳- فاصلهٔ $O(۰,۰)$ از خط $۲y - mx = ۴ - m$ برابر ۲ است. این خط محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۶۴- دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

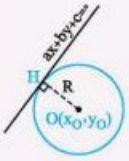
۱) ۹ و ۱۵- ۲) ۱۱ و ۱۵- ۳) ۱۵ و ۱۱- ۴) ۹- و ۱۱

۶۵- نقاط $A(-۱,۴)$، $B(۱,۷)$ و $C(۷,۶)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت متوازی‌الاضلاع چه‌قدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

درسنامهٔ ۸

مماس شدن دایره بر یک خط



کلک اگر دایره‌ای بر خط $ax + by + c = ۰$ مماس شود، فاصلهٔ مرکز دایره از آن خط برابر شعاع می‌باشد و داریم:

فاصلهٔ مرکز دایره از خط = شعاع دایره $\Rightarrow R = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

مثال اگر دایره‌ای به مرکز $O(۱,۲)$ بر خط به معادلهٔ $۳x + ۴y + ۱ = ۰$ مماس باشد، شعاع برابر می‌شود با:

$$R = \frac{|۳x_۰ + ۴y_۰ + ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} \xrightarrow[O(۱,۲)]{x_۰\ y_۰} \frac{|۳(۱) + ۴(۲) + ۱|}{۵} \Rightarrow R = \frac{۱۲}{۵}$$

۶۶- دایره‌ای به مرکز $(۲,۱-)$، بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟ تجربی داخل ۸۸

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۶۷- دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع $\sqrt{۵ - a}$ بر خط $x + ۲y = ۰$ مماس است. a کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳/۵

درسنامهٔ ۹

ارتفاع در مثلث

الف) طول ارتفاع:

فرض کنید بخواهیم طول ارتفاع AH در شکل مقابل را بیابیم. برای این منظور باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) نوشتن معادلهٔ خط BC

۲) استفاده از فرمول زیر برای محاسبهٔ فاصلهٔ A از ضلع BC که همان ارتفاع است:

معادلهٔ خط BC که مختصات نقطهٔ A را در آن قرار داده‌ایم.

$$\text{ارتفاع AH} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

ب) معادلهٔ ارتفاع:

فرض کنید بخواهیم معادلهٔ ارتفاع AH را در شکل فوق بیابیم. برای این منظور باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) محاسبهٔ شیب خط BC (m_{BC}) ۲) قرینه و معکوس کردن شیب خط BC $(m_{AH} = -\frac{۱}{m_{BC}})$

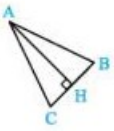
۳) نوشتن معادلهٔ ارتفاع به‌صورت $y - y_A = m_{AH}(x - x_A)$ به کمک نقطهٔ A و شیب محاسبه شده از مرحلهٔ (۲)

تذکر بعضی اوقات نقطهٔ A را نمی‌دهند و به جای آن معادلهٔ دو ضلع AC و AB را می‌دهند. در این صورت باید معادلات AB و AC را در یک دستگاه حل کنیم تا نقطهٔ A به‌دست بیاید.

دید ویژه یکی از راهکارهای جالب برای حل این نوع مسائل، کشیدن شکل مثلث است. این کار درک خوبی از سؤال ایجاد می‌کند و حتی در برخی از موارد می‌توان با رسم دقیق، جواب مسأله را از روی شکل یافت!

@khaneh_book

۶۸- اگر $A(-۱,۲)$، $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۶۹- اگر $A(۱,۴)$، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع BH کدام است؟

۱) $۳y-۲x=-۴$ ۲) $۳y+۲x=-۱۰$ ۳) $۲y+۳x=۲$ ۴) $۲y-۳x=۲$

۷۰- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: ۲y-x=۳$، $AC: y-۲x=۵$ و $BC: ۲y+۳x=۶$ هستند. معادلهٔ ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $۶y-۴x=۱۵$ ۲) $۹y-۶x=۱۷$ ۳) $۳y-۲x=۷$ ۴) $۳y+۲x=۹$

۷۱- در مثلث ABC ضلع BC به معادلهٔ $x+۳y=۱$ و $A(۵,۲)$ یکی از رئوس آن می‌باشد. مختصات نقطهٔ H (محل تلاقی ارتفاع AH با ضلع BC) کدام است؟

۱) $(۳,۲)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۴,-۱)$ ۴) $(۲,۲)$

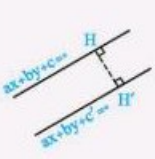
۷۲- معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$، $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ تجربی داخل ۸۴

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

درس‌نامه ۱۰

فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبر بوپه)، آقا شرایط استفاده از این فرمول چیه؟

پاسخ: چه سؤال قفنی پرسیدی بهت نمیاد از این سؤالا بپرسی ☺

اگر به معادلات داده‌شده دقت کنی، می‌بینی که ضرایب x و y در هر دو معادله یکسانه، پس خواست باشه که این ضرایب یکسان نباشه از فرمول فوق نمی‌تونی استفاده کنی. پس حتماً قبل از هر کاری ضرایب x و y رو یکسان کن و بعد دست به کار شو.

دید ویژه یکی از کاربردهای فرمول فاصلهٔ دو خط موازی، یافتن طول ضلع مربع یا مستطیل در مسائلی است که معادلهٔ دو ضلع موازی داده‌شده است.

مثال دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $y-x=۱$ و $۴x-۴y=۶$ است. طول ضلع این مربع را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا ضرایب x و y را در هر دو معادله یکسان می‌کنیم:

$$\xrightarrow{-۴\times}\begin{cases}y-x=۱\\ ۴x-۴y=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴x-۴y=-۴\\ ۴x-۴y=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴x-۴y+۴=۰\\ ۴x-۴y-۶=۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow[c'=-۶]{c=۴}\text{ضلع}=\frac{|۴-(-۶)|}{\sqrt{۴^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۳۲}}=\frac{۱۰}{۴\sqrt{۲}}$$

۷۳- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۷۴- فاصلهٔ بین دو خط به معادلات $y=x\sqrt{۳}+۲$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۸

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۷۵- دایره‌ای بر دو خط به معادلات $۲x-۴y=۵$ و $y=\frac{x}{۲}-۲$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

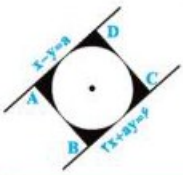
۱) $\frac{۹\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴۰}$ ۳) $\frac{۹\pi}{۸۰}$ ۴) $\frac{۱۶۹\pi}{۸۰}$

@khanen_book

۷۶- فاصلهٔ خطی که دو نقطهٔ $A(۰,۰)$ و $B(۱,۱)$ را به هم وصل می‌کند، از خطی که دو نقطهٔ $C(۱,۳)$ و $D(۲,۴)$ را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۷۷- با توجه به شکل، در مربع ABCD یک دایره محاط کرده‌ایم. مساحت ناحیهٔ سیاه کدام است؟ ($\pi \approx ۳$)



۱) ۳/۵
۲) ۳/۱۲۵
۳) ۴/۲۱۵
۴) ۴/۱۲

درسنامهٔ ۱۱

محاسبهٔ مساحت مثلث

اگر $A(x_A, y_A)$، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آن‌گاه برای محاسبهٔ مساحت مثلث از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

روشی جالب برای به خاطر سپردن فرمول بالا:

برای راحت‌تر نوشتن فرمول فوق ابتدا مانند فرمول معمولی مساحت مثلث، عدد $\frac{۱}{۲}$ را بنویسید، سپس سه عبارت $x(y - y)$ در داخل قدرمطلق قرار دهید. حال برای نوشتن اندیس‌ها، دایرهٔ روبه‌رو را رسم کرده و یک بار از A، یک‌بار از B و یک‌بار از C، دایره را در جهت فلش‌ها طی کنید و یک دور کامل بزنید و حروفی را که در حین طی کردن دایره می‌بینید به ترتیب به عنوان اندیس در عبارت‌های $x(y - y)$ جای‌گذاری کنید.

مثال مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$، کدام است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

پاسخ: گزینهٔ (۲)

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{۱}{۲}|۲(۰-۲) + ۳(۲-۵) + ۰(۵-۰)| = \frac{۱}{۲}|-۴-۹| = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

سؤال دانش‌پژوه (دارام سام): آقا اجازه، به ما گفته‌بودن که مساحت مثلث میشه ارتفاع در قاعده تقسیم به ۲. این راهی که شما گفتین خیلی کار ما رو راحت کرد، چون محاسبه طول ارتفاع کلی طول می‌کشید! خواستم تشکری ویژه بکنم ازتون.

پاسخ: خواهش می‌کنم دانم. انجام وظیفه است!

۷۸- مساحت مثلثی که سه رأس آن $A(۱,۴)$، $B(۱,-۱)$ و $C(۲,۲)$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۷۹- مساحت مثلثی با سه رأس $A(۳,۶)$، $B(۴,۱)$ و $C(۱,۳)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

درسنامهٔ ۱۲

معادله به فرم $a\square^۲ + b\square + c = ۰$

برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب به معادلهٔ درجه دوم تبدیل کنیم. فقط بعد از این‌که معادلهٔ درجه دوم را حل کردیم، کار تموم نمی‌شه! باید ادامه بدیم ... نگاه کن:

مثال معادلهٔ $(x^۲ - x)^۲ + (x^۲ - x) - ۱۲ = ۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

@khanenbook

پاسخ: گزینهٔ (۳)

عبارت $x^۲-x$ را A بگیریم تا معادله به فرم یک معادلهٔ درجه دوم دربیاید:

$$(x^۲-x)^۲+(x^۲-x)-۱۲=۰ \Rightarrow A^۲+A-۱۲=۰$$

حالا معادله را حل می‌کنیم:

$$(A+۴)(A-۳)=۰ \xrightarrow[\text{یا دومی}]{\text{اولی صفر}} A=-۴ \text{ یا } A=۳$$

و هنوز باید ادامه بدیم. A چی بود؟ $x^۲-x$ بود، پس داریم:

$$\begin{cases} A=-۴ \Rightarrow x^۲-x=-۴ \Rightarrow x^۲-x+۴=۰ \Rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(۴)=۱-۱۶=-۱۵<۰ \\ \text{یا} \\ A=۳ \Rightarrow x^۲-x=۳ \Rightarrow x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(-۳)=۱+۱۲=۱۳>۰ \end{cases}$$

معادله جواب حقیقی ندارد. ۰ > ۲ جواب حقیقی متمایز دارد.

پس در کل، معادلهٔ داده‌شده ۲ جواب حقیقی متمایز دارد.

۸۰- معادلهٔ $x^۴+x^۲-۱۲=۰$، چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

۸۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲(۱۳-x^۲)=۳۶$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۱۰

۸۲- معادلهٔ $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=۶$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۴(۲x-۱)^۲-۵(۲x-۱)+۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۸}$

۸۴- در مورد معادلهٔ $\left(\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right)^۲+\frac{x^۲}{x^۲+۱}-۶=۰$ کدام گزینه درست است؟

۱) جواب مضاعف دارد. ۲) جواب حقیقی ندارد. ۳) چهار جواب دارد. ۴) دو جواب دارد.

۸۵- معادلهٔ $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲+۲\left(x+\frac{۱}{x}\right)=۸$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۸۷- معادلهٔ $(x^۲+x+۱)^۲+x^۲+x-۱=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۸۸- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۴

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۹- معادلهٔ $\frac{x^۲-۳}{x+۱}+\frac{x+۱}{x^۲-۳}=-۲$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۹۰- معادلهٔ $\sqrt{\frac{x+۱}{x^۲+۱}}+\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x+۱}}=۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۱- معادلهٔ $x+\frac{۱}{x}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۲- در معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲-۲x}-\frac{۱}{x^۲-۲x-۱}=\frac{۱}{۲}$ جواب بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۱+\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

@khaneh_book

۹۳- معادلهٔ $\frac{1}{10}+\frac{11}{10}(x-\sqrt{x})=(x-\sqrt{x})^2$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۹۴- معادلهٔ $x^2+\frac{1}{x^2}+3x+\frac{3}{x}+1=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

درس‌نامهٔ ۱۳

روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه جمع و ضرب جواب‌ها را از فرمول‌های زیر به‌دست می‌آوریم:

$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$: حاصل‌ضرب جواب‌ها و $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$: مجموع جواب‌ها

مثال **به ازای کدام مقدار m مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجه دوم $4x^2-m^2x+m+1=0$ برابر ۱ می‌شود؟**

۱) ±2 ۲) -2

۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ: گزینهٔ (۲). در معادلهٔ $4x^2-m^2x+m+1=0$ داریم:

$$\xrightarrow[c=m+1]{a=4,\,b=-m^2} S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-m^2)}{4}=\frac{m^2}{4}\xrightarrow[S=1]{\text{طبق فرض}}\frac{m^2}{4}=1\Rightarrow m^2=4\xrightarrow{\text{جذر}}|m|=2\Rightarrow m=\pm2$$

امّا چک کنیم و ببینیم به ازای m های حاصل، آیا معادله، دو جواب حقیقی دارد یا ندارد:

$$4x^2-m^2x+m+1=0\xrightarrow{m=2}4x^2-2^2x+2+1=0\Rightarrow 4x^2-4x+3=0;\ \Delta=(-4)^2-4(4)(3)=-32<0$$

پس این معادله به ازای $m=2$ اصلاً جواب حقیقی ندارد که جمع جواب‌هایش ۱ شود.

$$4x^2-m^2x+m+1=0\xrightarrow{m=-2}4x^2-(-2)^2x+(-2)+1=0\Rightarrow 4x^2-4x-1=0;\ \Delta=16-4(4)(-1)=32>0$$

پس $m=-2$ صحیح است.

مثال **در معادلهٔ $(x+1)(x^2-x-6m)=0$، حاصل‌ضرب سه جواب برابر ۶ است. مقدار m کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ (۱). معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$(x+1)(x^2-x-6m)=0\xrightarrow{\text{یکی صفر یا دومی صفر}}\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x_1=-1\\ x^2-x-6m=0\ (*)\end{cases}$$

چون معادله ۳ جواب دارد و یکی از جواب‌های آن ۱- است، پس معادلهٔ (*) باید دارای ۲ جواب باشد که حاصل‌ضرب جواب‌های آن $P=x_2x_3=\frac{c}{a}=\frac{-6m}{1}=-6m$ است. از طرفی طبق فرض حاصل‌ضرب سه جواب (۶) است. پس داریم:

$$x_1x_2x_3=6\xrightarrow[x_2x_3=-6m]{x_1=-1}(-1)(-6m)=6\Rightarrow 6m=6\Rightarrow m=1$$

نکته با توجه به دو فرمول اصلی $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$، روابط زیر را از ما به‌خاطر داشته باشید:

۱) $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ مجموع مجذور جواب‌ها ۲) $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$ مجموع مکعب جواب‌ها

۳) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4P}$ قدرمطلق تفاضل جواب‌ها ۴) $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}$ مجموع (تفاضل) جذر جواب‌ها $(\alpha>\beta>0)$

نکته عباراتی مانند $\alpha^2+\beta^2$ و $\alpha^3+\beta^3$ را عبارات متقارن برحسب α و β می‌نامند، زیرا اگر جای α و β را در آن‌ها عوض کنیم، یعنی در آن عبارت به جای α، β و به جای β، α قرار دهیم، تغییری در ظاهر عبارت ایجاد نمی‌شود. عبارات متقارن را اکثراً می‌توان برحسب S و P بیان نمود!

مثال **اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+4x-1=0$ باشد، حاصل $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟**

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۸۹ ۳) ۳۲۴ ۴) ۸۱

@khanehbook

پاسخ: گزینهٔ (۳). ابتدا از معادلهٔ $x^2+4x-1=0$، مقادیر S و P را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-4}{1}=-4 \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \quad (*)$$

حال بریم سراغ عبارتی که خواسته:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2=\left(\frac{S^2-2P}{P}\right)^2 \overset{(*)}{=} \left(\frac{(-4)^2-2(-1)}{-1}\right)^2=\left(\frac{16+2}{-1}\right)^2=(-18)^2=324$$

نکته عباراتی مانند $\alpha^2+5\beta$ و یا $\alpha+\frac{1}{\beta}$ برحسب α و β نامتقارن هستند. زیرا اگر در آن‌ها به جای α، β و به جای β، α قرار دهیم قیافهٔ آن‌ها عوض می‌شود. در این‌گونه موارد با قرار دادن α و β در معادله، رابطهٔ کمکی به‌دست می‌آوریم. به مثال بعد توجه کنید:

مثال اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-4x-1=0$ باشد، حاصل $\beta^2+4\alpha-5$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶-

پاسخ: گزینهٔ (۳). عبارت خواسته شده برحسب α و β نامتقارن است. حال از خود معادله کمک می‌گیریم. چون α و β جواب‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2-4x-1=0 \xrightarrow[x=\beta]{x=\alpha} \begin{cases}\alpha^2-4\alpha-1=0\\ \beta^2-4\beta-1=0\end{cases} \Rightarrow \beta^2=4\beta+1$$

حال به جای β^2 در عبارت خواسته شده، $4\beta+1$ قرار می‌دهیم:

$$A=\beta^2+4\alpha-5 \xrightarrow{\beta^2=4\beta+1} (4\beta+1)+4\alpha-5=4\beta+4\alpha+1-5=4(\beta+\alpha)-4=4S-4$$

از طرفی مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^2-4x-1=0$ برابر $S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-4)}{1}=4$ است؛ پس:

$$A=4S-4 \xrightarrow{S=4} 4(4)-4=16-4=12$$

مثال اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $5x^2+10x-1=0$ باشند، حاصل $(x_1^2+2x_1)^5+(x_2^2+2x_2)^5$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5^5}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{2}{5^5}$

پاسخ: گزینهٔ (۴). برای محاسبهٔ هر کدام از عبارت‌های $(x_1^2+2x_1)^5$ و $(x_2^2+2x_2)^5$ از معادله کمک می‌گیریم:

چون x_1 و x_2 جواب معادله هستند، داریم:

$$5x^2+10x-1=0 \Rightarrow \begin{cases}5x_1^2+10x_1-1=0 \Rightarrow 5x_1^2+10x_1=1 \xrightarrow{\div 5} x_1^2+2x_1=\frac{1}{5}\\ 5x_2^2+10x_2-1=0 \Rightarrow 5x_2^2+10x_2=1 \Rightarrow x_2^2+2x_2=\frac{1}{5}\end{cases} \quad (*)$$

بنابراین:

$$(x_1^2+2x_1)^5+(x_2^2+2x_2)^5 \overset{(*)}{=} \left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^5}=\frac{2}{5^5}$$

۹۵- به ازای چه مقداری از m حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(m-1)x^2+2m^2x+m=0$ برابر ۲ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۶- اگر α و β جواب‌های حقیقی معادلهٔ $m^2x^2+m=x(3+4x)$ باشد، به‌ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ میانگین دو عدد α و β است؟

۱) ± 4 ۲) -4 ۳) ۴ ۴) ۶

۹۷- در معادلهٔ درجه دوم $x^2=2m(x+1)+2$ معکوس جمع دو جواب برابر حاصل‌ضرب آن دو جواب است. m کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۸- اگر x' و x'' جواب‌های معادلهٔ $x^2-4mx+3=0$ باشد، به ازای چه مقدار m بین جواب‌های آن رابطهٔ $x'/x''^2=3$ برقرار است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۹۹- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2+2x+1-2k=0$ باشند و داشته باشیم $\alpha^2-4=-\alpha\beta$، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰۰- به ازای کدام مقدار m تفاضل جواب‌های معادلهٔ $2x^2-3x=m$ برابر $\frac{5}{2}$ است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

@khaneh_book

۱۰۱- به ازای کدام مقدار a مجموع مربعات جواب‌های حقیقی معادلهٔ $2x^2 - 3x + a = 0$ برابر $\frac{3}{4}$ است؟ مشابه تجربی داخل ۹۳

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۰۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند $(\beta > \alpha)$، حاصل $\beta^2 - \alpha^2$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{5}$ ۲) $-3\sqrt{5}$ ۳) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ۴) $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$

۱۰۳- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد، مقدار $\alpha^3 + \beta^3$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

۱۰۴- به ازای کدام مقدار a مجموع معکوس مکعب جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2 - 3x + a = 0$ برابر ۹ می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۱۰۵- در معادلهٔ $x^2 - 5x - 1 = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۴۰ ۳) -140 ۴) -110

۱۰۶- در معادلهٔ $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل $x_1^4 + x_2^4$ کدام است؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۵ ۳) ۷۲۹ ۴) ۱۵۳

۱۰۷- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 + 3x - 1 = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل $x_2^3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 + x_1^3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) -27 ۴) ۲۷

۱۰۸- در معادلهٔ درجه دوم $3x^2 + 5x + a = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، به‌ازای کدام مقدار a رابطهٔ $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = -1$ بین جواب‌های این معادله برقرار است؟

۱) -3 ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۰۹- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x(x - m) = 2$ باشند و داشته باشیم $\alpha < 2 < \beta$، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m > 1$ ۲) $m < 1$ ۳) $m < -1$ ۴) $m < -3$

۱۱۰- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند و $\frac{\alpha + n}{\beta} + \frac{\beta + n}{\alpha} = 2$ باشد، n کدام است؟

۱) ۴ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۲

۱۱۱- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۱

۱۱۲- در معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۱۱۳- به‌ازای کدام مقدار k بین دو جواب معادلهٔ $x^2 - k^2x + 8 = 0$ رابطهٔ $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4} = 3$ برقرار است؟

۱) $k = \pm 1$ ۲) $k = \pm 2$ ۳) $k = \pm 3$ ۴) $k = \pm 4$

۱۱۴- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل عبارت $(x_1^2 - 4x_2 + 4)(x_2^2 - 4x_1 + 2)$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۵- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ اگر جواب‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۱۶- در معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، حاصل $\sqrt{x_1^2(3x_2 - 1)}$ چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) ± 1

۱۱۷- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2 + 2x - 1 = 0$ باشند. مقدار $\beta^2 + 2\alpha^2$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۶

@khanehbook

۱۱۸- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ باشد، حاصل $\frac{\alpha^2}{(\beta-1)^2}+\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۹- اگر α یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^2+5x+1=0$ باشد، حاصل $\frac{1}{\alpha^2}+\alpha^2+1$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۱۲۰- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-4x-1=0$ باشند، حاصل $(\beta-\frac{1}{\alpha})^2+(\alpha-\frac{1}{\beta})^2$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۵۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۴

۱۲۱- در معادلهٔ درجه دوم $x^2+2x-4=0$ حاصل $x_1^3-2x_2^2+4x_2$ کدام است؟ (x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ درجه دوم هستند.)

۱) -۱۶ ۲) صفر ۳) -۳۰ ۴) -۳۲

۱۲۲- در معادلهٔ درجه دوم $2x^2+ax+9=0$ یک جواب دو برابر جواب دیگر است. مجموع دو جواب مثبت کدام است؟ تجربی خارج ۸۰

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۱۲۳- در معادلهٔ درجه دوم $3x^2-17x+m=0$ یک جواب از سه برابر جواب دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۲۴- به‌ازای کدام مقدار m جواب‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2+3x+m^2=2$ معکوس یک‌دیگرند؟ تجربی خارج ۹۰

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۵- به‌ازای کدام مقدار m معادلهٔ $(m-1)x^2+m(m^2-9)x=2$ دو جواب قرینه دارد؟

۱) -۳ ۲) ±۳ ۳) ۳ ۴) ۳ و ۰

۱۲۶- به‌ازای کدام مقدار m جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجه دوم $mx^2+5x+m^2-6=0$ قرینه و معکوس هم می‌باشند؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۷- در معادلهٔ $x^2+mx=x+8$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر است. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

درسنامهٔ ۱۴

تشکیل معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم و جمع و ضرب آن‌ها به ترتیب $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشند، آن‌گاه معادلهٔ درجه دوم را می‌توان به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ بیان نمود.

مثال اگر $\alpha=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ و $\beta=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، معادلهٔ آن کدام است؟

۱) $x^2+10x-1=0$ ۲) $x^2-10x-1=0$ ۳) $x^2-10x+1=0$ ۴) $x^2+10x+1=0$

پاسخ: گزینهٔ (۳). ابتدا با استفاده از $\alpha=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ و $\beta=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$، مقادیر S و P را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=[(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{3})(\sqrt{2})]+[(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2(\sqrt{3})(\sqrt{2})]=10$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$P=\alpha\beta=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=((\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}))^2=((\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2)^2=(3-2)^2=1^2=1$$

اتحاد مزدوج

پس معادله برابر می‌شود با:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-10x+1=0$$

نکته اگر α و β جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، معادله را می‌توان به‌صورت $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ نیز تشکیل داد.

مثال اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ جواب‌های معادلهٔ درجه دوم باشند، معادله‌ای بنویسید که $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ جواب‌های آن باشند.

پاسخ:

$$(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})=0\Rightarrow x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{3}x+\sqrt{2}\sqrt{3}=0\Rightarrow x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$$

@khanen_book

۱۲۸- در کدام معادله مجموعهٔ جواب‌ها به‌صورت $\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right\}$ است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $4x^2+4x-1=0$ ۲) $4x^2-4x-1=0$ ۳) $2x^2-2x+1=0$ ۴) $2x^2+2x-1=0$

۱۲۹- اگر محیط مستطیلی ۱۱ و مساحت آن ۶ باشد، نسبت ضلع بزرگ‌تر مستطیل به ضلع کوچک‌تر کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۲ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{11}{3}$

۱۳۰- مجموع دو عدد حقیقی x و y برابر ۵ و حاصل ضربشان ۲۴- است. در این صورت مقدار x^2+2y کدام است؟ $(x>0)$ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۸۵ ۲) ۵۸ ۳) ۲۵ ۴) ۵۲

۱۳۱- معادلهٔ درجه دومی با ضرایب گویا که یکی از جواب‌هایش $\sqrt{5}-3$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-6x-4=0$ ۲) $x^2-6x+4=0$ ۳) $x^2-6x+5=0$ ۴) $x^2-3x+1=0$

۱۳۲- معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{8}-3\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}+\sqrt{3}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-x+\sqrt{8}=0$ ۲) $x^2-\sqrt{8}x=1$ ۳) $x^2+\sqrt{8}x=1$ ۴) $x^2-\sqrt{8}x=-1$

۱۳۳- معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{5}-4\sqrt{9}$ و $\sqrt{14}-6\sqrt{5}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-x+5\sqrt{5}=11$ ۲) $x^2+x-5\sqrt{5}=11$ ۳) $x^2-(5\sqrt{5}-11)x+1=0$ ۴) $x^2+(11-5\sqrt{5})x=1$

۱۳۴- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $x(x-a)=b$ باشند و داشته باشیم $\begin{cases}2\alpha+\beta=7\\2(\alpha+1)=\beta+3\end{cases}$، آن‌گاه دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(5,6)$ ۲) $(-5,6)$ ۳) $(5,-6)$ ۴) $(-5,-6)$

۱۳۵- اگر α و β جواب‌های مثبت معادلهٔ درجه دوم $2x^2+ax+b=0$ باشند و داشته باشیم $\alpha^2+\beta^2=13$ و $\alpha\beta=6$، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۲-

۱۳۶- حاصل $(\sqrt{3}-1)^4+(1-\sqrt{3})^4$ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۵۶ ۳) ۸ ۴) ۶۴

درسنامهٔ ۱۵

محاسبهٔ رأس و محور تقارن نمودار تابع درجه دوم

نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو شکل زیر است:

به عبارت دیگر اگر $a>0$ باشد، نمودار سهمی رو به بالا بوده و دارای می‌نیمم است و اگر $a<0$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین بوده و دارای ماکزیمم است. صرفاً جهت اطلاع! عرض کنم که به نقطهٔ S می‌گوییم رأس سهمی و در هر دو حالت، ماکزیمم یا می‌نیمم سهمی، همان عرض نقطهٔ S (یعنی y_S) است. پس این رأس سهمی خیلی واسمون اهمیت داره بریم محاسبهٔ اونو یاد بگیریم:

طول رأس سهمی: طول رأس سهمی از فرمول $x_S=\frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید، امّا برای محاسبهٔ عرض آن ۲ تا کار می‌توانیم انجام دهیم:

کار اول: فرمولشو حفظ کنیم:

عرض رأس سهمی: $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ $\frac{\Delta=b^2-4ac}{}$ $\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$

کار دوم: طول رأس سهمی را در ضابطهٔ تابع جایگذاری کرده و عرض آن را به‌دست آوریم:

$y=ax^2+bx+c \xrightarrow{x_S=\frac{-b}{2a}} y_S=a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c$ ⟸ نگران نباش ساده می‌شه ☺

@khanen_book

مثال رأس سهمی $y = x^2 + 4x - 5$ در کدام ناحیهٔ محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ (۳) خوب بریم مختصات رأس سهمی رو حساب کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2 \xrightarrow[y=x^2+4x-5]{\text{جایگذاری در}} y_S = (-2)^2 + 4(-2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9 \Rightarrow S(-2,-9)$$

چون $x_S < 0$ و $y_S < 0$ است، پس رأس سهمی در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

تذکر می‌توان y_S را از فرمولش به‌دست آورد:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(4^2 - 4(1)(-5))}{4(1)} = \frac{-(16+20)}{4} = \frac{-36}{4} = -9$$

تذکر ضریب x^2 این تابع مثبت است. پس این تابع دارای می‌نیمم است. یعنی حداقل مقدار y آن -9 است، پس همواره $y \geq -9$ است.

مثال حاصل جمع دو عدد ۱۰۰ است. حداکثر حاصل‌ضرب آن‌ها چند است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) -2500 ۴) ۵۰۰۰

پاسخ گزینهٔ (۲): آن دو عدد را x و y فرض می‌کنیم. پس $x + y = 100$. از طرفی حاصل‌ضرب آن‌ها $P = xy$ می‌شود که به‌دنبال یافتن ماکزیمم P هستیم. ابتدا آن را برحسب فقط x یا y می‌نویسیم:

$$P = xy \xrightarrow{x+y=100 \Rightarrow y=100-x} P = x(100-x) = 100x - x^2 = -x^2 + 100x$$

تابع P، تابعی درجه دوم است که چون ضریب x^2 منفی است، ماکزیمم دارد. حالا برویم ماکزیمم تابع را که همان عرض رأس سهمی است، به‌دست آوریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(100)}{2(-1)} = 50 \xrightarrow[\text{ضابطهٔ P}]{\text{جایگذاری در}} P_{max} = -(50)^2 + 100(50) = -2500 + 5000 = 2500$$

مثال اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -4 ۲) ۱ ۳) -5 ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ (۱). اولاً چون تابع دارای بیشترین مقدار است، پس ضریب x^2 باید منفی باشد:

$$k + 3 < 0 \Rightarrow k < -3$$

از طرفی بیشترین مقدار تابع همان عرض رأس سهمی است که برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است. پس داریم:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} \xrightarrow{y_S=0} 0 = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 0 = \Delta \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \xrightarrow[c=k]{a=k+3,\ b=-4} (-4)^2 - 4(k+3)k = 0 \Rightarrow 16 - 4k^2 - 12k = 0$$

$$\Rightarrow -4(k^2 + 3k - 4) = 0 \xrightarrow{\div(-4)} k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k+4)(k-1) = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = -4$$

که با توجه به شرط $k < -3$ فقط $k = -4$ صحیح است.

محور تقارن سهمی

تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ دارای یک محور تقارن قائم است که از رأس سهمی عبور کرده و در رأس سهمی بر سهمی عمود است و معادلهٔ آن $x = x_S = \frac{-b}{2a}$ است. به شکل‌ها توجه کنید:

مثال اگر محور تقارن منحنی $y = x^2 + ax + b$ خط $x = -\frac{3}{2}$ باشد، محور تقارن منحنی تابع $y = ax^2 + x + b$ کدام است؟

۱) $x = -\frac{1}{6}$ ۲) $x = \frac{1}{6}$ ۳) $x = -\frac{1}{3}$ ۴) $x = \frac{1}{3}$

پاسخ گزینهٔ (۱). محور تقارن منحنی $y = x^2 + ax + b$ برابر است با:

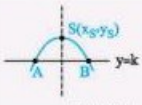
$$x = \frac{-(a)}{2(1)} = -\frac{a}{2} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{-a}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = 3 \quad (*)$$

حال محور تقارن منحنی $y = ax^2 + x + b$ را می‌خواهیم که برابر می‌شود با:

$$y = ax^2 + x + b \Rightarrow x = \frac{-1}{2a} \overset{(*)}{=} \frac{-1}{2(3)} = \frac{-1}{6}$$

@khanen_book

نکته اگر مطابق شکل خط $y=k$، نمودار تابع درجه دوم را در ۲ نقطهٔ هم‌عرض A و B قطع کند، آن‌گاه:



۱) معادلهٔ محور تقارن و طول رأس سهمی برابر $x=\frac{-b}{2a}=\frac{x_A+x_B}{2}$ است.

۲) طول نقطه‌ای که وسط پاره‌خط AB قرار دارد با طول رأس سهمی برابر است.

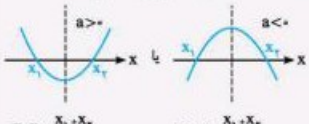
$$x=x_S=\frac{x_A+x_B}{2}$$

مثال اگر خط $y=k$ منحنی $y=x^2-5x+b$ را در نقاط A و B قطع کند، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB روی کدام خط زیر قرار دارد؟

۱) $x=5$ ۲) $x=\frac{5}{2}$ ۳) $x=-\frac{5}{2}$ ۴) $x=\frac{2}{5}$

پاسخ گزینهٔ (۲)، با توجه به نکتهٔ بیان‌شده، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB روی محور تقارن سهمی قرار دارد که معادلهٔ آن $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-5)}{2(1)}=\frac{5}{2}$ است.

نکته اگر x_1 و x_2 ریشه‌های تابع درجه دوم f باشند، آن‌گاه می‌توان معادلهٔ محور تقارن یا طول رأس سهمی را از فرمول $x=x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$ به‌دست آورد:



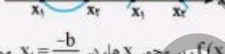
مثال در تابع درجه دوم $f(x)=5(x-1)(x+3)$، طول رأس سهمی را بیابید.

پاسخ ریشه‌های f برابر ۱ و -3 هستند، پس طول رأس سهمی برابر $x_S=\frac{-3+1}{2}=-1$ است.

نوشتن معادلهٔ سهمی در حالت‌های مختلف

نکته اگر $\Delta>0$ باشد، نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، محور x‌ها را در ۲ نقطهٔ متمایز x_1 و x_2 قطع می‌کند. در این حالت تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$



نکته اگر $\Delta=0$ باشد، نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، بر محور x‌ها، در $x_1=\frac{-b}{2a}$ مماس است. در این حالت تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a(x-x_1)^2$$

مثال معادلهٔ سهمی‌های زیر را به دست آورید.

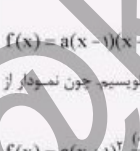
پاسخ الف) در نمودار داده‌شده ریشه‌ها ۱ و ۲ بوده، لذا با توجه به نکتهٔ بیان شده می‌توان معادله را به صورت $f(x)=a(x-1)(x-2)$ نوشت. از طرفی نمودار از نقطهٔ (۰،۴) عبور می‌کند. پس مختصات آن نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x)=a(x-1)(x-2)\xrightarrow{(0,4)\in f}4=a(0-1)(0-2)\Rightarrow 4=2a\Rightarrow a=2\Rightarrow f(x)=2(x-1)(x-2)$$

ب) تابع در $x=-1$ بر محور xها مماس است. پس با توجه به نکتهٔ بیان شده، معادله را به صورت $f(x)=a(x-(-1))^2$ می‌نویسیم. چون نمودار از نقطهٔ (۰،۱) عبور می‌کند، پس مختصات آن نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x)=a(x+1)^2\xrightarrow{(0,1)\in f}1=a(0+1)^2\Rightarrow a=1\Rightarrow f(x)=(x+1)^2$$

ج) ابتدا ریشهٔ β را می‌یابیم. چون $x=3$ محور تقارن است، طبق نکتهٔ گفته‌شده می‌توان نوشت:



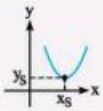
$$3=\frac{2+\beta}{2}\Rightarrow 6=2+\beta\Rightarrow\beta=4$$

حال می‌توانیم ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=a(x-2)(x-4)\xrightarrow[\text{نمودار تابع است.}]{\text{نقطهٔ (0،4) روی}}4=a(0-2)(0-4)\Rightarrow 4=8a\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$$

@khanen_book

نکته اگر $S(x_S, y_S)$ مختصات رأس سهمی تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، ضابطهٔ تابع را می‌توان به صورت $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ نوشت.



مثال معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

پاسخ با توجه به نمودار، $S(1,-1)$ رأس سهمی است، بنابراین معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + (-1)$$

نقطهٔ $(0,-2)$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصات آن در ضابطهٔ f صدق می‌کند:

$$f(x) = a(x-1)^2 - 1 \xrightarrow{(0,-2)\in f} -2 = a(0-1)^2 - 1 \Rightarrow -2 = a - 1 \Rightarrow a = -1$$

پس معادله به صورت $f(x) = -(x-1)^2 - 1$ درمی‌آید.

۱۳۷- بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -3x^2 + 5x - \frac{1}{12}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۳۸- کم‌ترین فاصلهٔ نمودار تابع $y = x^2 - 6x + 11$ از محور x ها کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۳۹- کدام گزینه در مورد تابع درجه دوم $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ صحیح است؟

۱) در $x = 1$ به کم‌ترین مقدار خود یعنی $y = 4$ می‌رسد.
۲) رأس آن در ناحیهٔ اول محورهای مختصات واقع است.
۳) رأس آن روی خط $x = 2$ قرار دارد.
۴) محور تقارن آن $y = 1$ است.

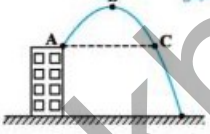
۱۴۰- نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (m^2 - m)x^2 + (m+1)x$ به‌ازای کدام مقادیر m همواره ماکزیمم دارد؟

۱) $-1 < m < 0$ ۲) $0 < m < 1$ ۳) $m < -1$ یا $m > 1$ ۴) $m < 0$ یا $m > 1$

۱۴۱- رأس سهمی به معادلهٔ $y = x^2 + 2x$ و نقاط تلاقی این سهمی با محور x ها سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۱۴۲- شخصی از نقطهٔ A روی یک ساختمان مطابق شکل توپی را به سمت بالا پرتاب می‌کند. اگر ارتفاع توپ از سطح زمین برحسب زمان از تابع $h(t) = -5t^2 + 20t + 80$ به دست بیاید، آن‌گاه کدام گزینه صحیح نیست؟ برگرفته از کتاب درسی

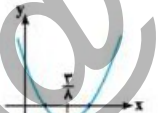


۱) توپ پس از ۲ ثانیه به نقطهٔ B می‌رسد.
۲) ماکزیمم ارتفاع توپ از سطح زمین ۱۰۰ متر است.
۳) توپ پس از ۴ ثانیه به نقطهٔ C می‌رسد.
۴) توپ پس از ۸ ثانیه به سطح زمین برخورد می‌کند.

۱۴۳- نقطهٔ $A(-1,-4)$، رأس سهمی به معادلهٔ $y = 3x^2 + ax + b$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۲

۱۴۴- اگر نمودار تابع $y = (a+5)x^2 - 2ax + 1$ به صورت زیر باشد، کم‌ترین مقدار تابع کدام است؟



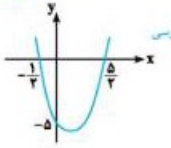
۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۴۵- نمودار تابع درجه دوم $y = (m-1)x^2 + x$ به صورت زیر می‌باشد. فاصلهٔ نقاط تلاقی نمودار این تابع با محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۸

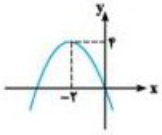
@khanehbook

۱۴۶- عرض نقطهٔ می‌نیمم سهمی شکل مقابل کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



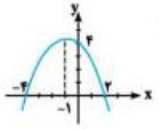
۱) -۶
۲) -۷
۳) -۸
۴) -۹

۱۴۷- با توجه به نمودار تابع $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$، مقدار a کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



۱) ۱
۲) -۱
۳) -۲
۴) ۲

۱۴۸- معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

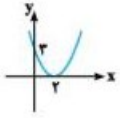


۱) $y=\frac{2}{3}(x+2)(x-2)$
۲) $y=\frac{1}{2}(x+4)(2-x)$
۳) $y=\frac{1}{2}(2+x)(x-4)$
۴) $y=-\frac{1}{2}(2+x)(x-4)$

۱۴۹- اگر نمودار تابع درجه دوم با ضابطهٔ $f(x)=x^2+mx+n$ محور x ها را با طول‌های ۱ و ۲ قطع کند، آن‌گاه مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x)>6$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) صفر

۱۵۰- اگر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت مقابل باشد، مقدار $\frac{c-b}{a}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



۱) ۸
۲) -۸
۳) صفر
۴) ۴

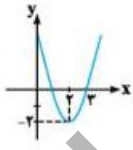
۱۵۱- به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=m(x^2+1)-2x^2-3x+2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

۱) -۳
۲) $-\frac{5}{2}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۳

۱۵۲- اگر کم‌ترین مقدار تابع $y=x^2+ax+a^2-12$ روی قسمت منفی محور x ها رخ دهد، a کدام است؟

۱) ۴
۲) -۴
۳) ۱۶
۴) ± 4

۱۵۳- اگر نمودار سهمی به معادلهٔ $y=a(x-x_0)^2+y_0$ به صورت روبه‌رو باشد، a کدام است؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۴

۱۵۴- اگر تابع $f(x)=2x^2-3x+4$ به صورت $f(x)=2(x-h)^2+k$ نوشته شود، مقدار $h+k$ کدام است؟

۱) $\frac{23}{4}$
۲) $\frac{23}{8}$
۳) $\frac{35}{4}$
۴) $\frac{29}{8}$

۱۵۵- اگر رأس سهمی $y=ax^2+2ax-3$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد، a چه‌قدر است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۵۶- به ازای کدام مقدار a می‌نیمم تابع $y=ax^2-2\sqrt{2}x+a$ بر روی خط به معادلهٔ $y=1$ واقع است؟

۱) ۲ و -۱
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۵۷- رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=m(x^2+2)+2x-1$ در یکی از ربع‌های اول یا سوم قرار دارد، محدودهٔ m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(-\frac{1}{2},2)$
۲) $(\frac{1}{2},1)$
۳) $\mathbb{R}-[-\frac{1}{2},1]$
۴) $(-1,\frac{1}{2})$

۱۵۸- معادلهٔ محور تقارن منحنی نمایش تابع $2x^2+y-x-\frac{3}{2}=0$ کدام است؟

۱) $x=\frac{-1}{2}$
۲) $x=\frac{-1}{4}$
۳) $x=\frac{1}{4}$
۴) $x=\frac{1}{2}$

@khanen_book

۱۵۹- محور تقارن نمودار تابع $y = -3x^2 + 4x$ خط به معادلهٔ $2y + 3x = 1$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{-3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۶۰- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ تجربی داخل ۸۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۶۱- اگر خط $y = a$ سهمی به معادلهٔ $y = -x^2 + ax + 3$ را در دو نقطهٔ A و B قطع کند به طوری‌که طول وسط AB برابر ۲- باشد، فاصلهٔ نقاط A و B چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۱۱}$ ۴) $۴\sqrt{۱۱}$

۱۶۲- هرگاه خط $y = m$ سهمی به معادلهٔ $y = x^2 + 4x + 3$ را در دو نقطهٔ A و B قطع کند و فاصلهٔ راس سهمی از نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB برابر ۵ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۶۳- اگر دو نقطهٔ متمایز $(n, -1)$ و $(m, -1)$ متعلق به نمودار سهمی به معادلهٔ $y = 2x^2 - 8x + b$ باشند، $m + n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۶۴- نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی $y = a(x-b)^2 + c$ قرار دارند. آن‌گاه:

۱) $b = -1$ ۲) $b = 1$ ۳) $b = 0$ ۴) $b = -2$

۱۶۵- سهمی به معادلهٔ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ محور تقارن خود را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۱۶۶- اگر خط $x = 2a$ محور تقارن نمودار تابع $y = 2(x-5)(x+a)$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) -18 ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) -9

۱۶۷- خط $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -2x^2 + bx + c$ است. این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. فاصلهٔ رأس سهمی از محور x کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۱۶۸- خط به معادلهٔ $y = -\frac{5}{2}$، محور تقارن تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۹- اگر فاصلهٔ نقاطی از منحنی تابع $y = x^2 + ax + b$ که روی محور xها قرار دارند از هم برابر ۸ و خط $x = 5$، محور تقارن منحنی باشد، می‌نیمم تابع کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -16 ۳) -10 ۴) ۹

۱۷۰- محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. ماکزیمم مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۶۵۲ ۲) ۶۲۵ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۲۵۰

۱۷۱- عدد ۲۴ را به صورت مجموع دو عدد x و y نوشته‌ایم به گونه‌ای که xy، ماکزیمم باشد. در این صورت $2x + 5y$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۰ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

۱۷۲- اگر در شکل مقابل $2x + 3y = 12$ باشد، ماکزیمم مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۷۳- نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات است. کم‌ترین مقدار T چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{31}$ ۲) $\frac{\sqrt{31}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ ۴) $2\sqrt{31}$

@khanehketab

۱۷۴- می‌خواهیم با طنابی به طول ۴۸متر زمینی به شکل مستطیل را که در یک طرف آن رودخانه جریان دارد محدود کنیم. بیشترین مساحت زمین محدود شده با طنابی به این طول چند متر مربع است؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۵۷۶ برگرفته از کتاب درسی

۳) ۱۴۴ ۴) ۳۴۰

۱۷۵- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ باشد، در این صورت عرض مستطیل چه‌قدر باشد تا مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود؟ ($\pi = 3$) برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۵۰

۳) ۳۷۵ ۴) ۵۰۰

۱۷۶- در شکل، پنجره‌ای به شکل مستطیل وجود دارد که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ واحد باشد، به‌ازای کدام مقدار x، پنجره حداکثر نوردهی را دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

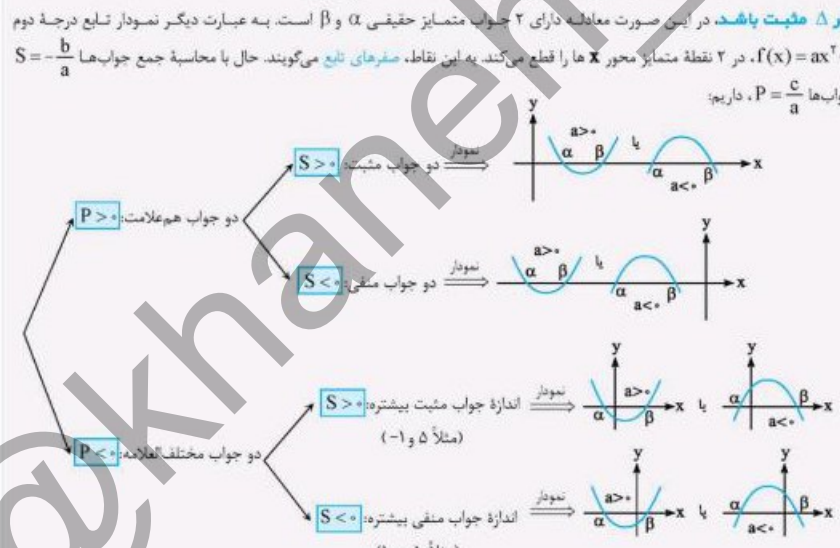
۱) $\frac{-۴}{\sqrt{۳}-۶}$ ۲) $\frac{۶-\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۳-\sqrt{۶}}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳-\sqrt{۶}}$

درسنامهٔ ۱۶

بحث روی علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، ابتدا Δ را حساب می‌کنیم. سپس با توجه به علامت Δ حالات زیر را داریم:

الف) اگر Δ مثبت باشد، در این صورت معادله دارای ۲ جواب متمایز حقیقی α و β است. به عبارت دیگر نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$، در ۲ نقطهٔ متمایز محور xها را قطع می‌کند. به این نقاط، صفرهای تابع می‌گویند. حال با محاسبهٔ جمع جواب‌ها $S=-\frac{b}{a}$ و ضرب جواب‌ها $P=\frac{c}{a}$، داریم:



نتیجه اگر بخواهیم ۲ جواب متمایز مثبت داشته باشیم، باید: $\Delta>۰$ و $P>۰$ و $S>۰$ باشد.

نتیجه اگر بخواهیم ۲ جواب متمایز منفی داشته باشیم، باید: $\Delta>۰$ و $P>۰$ و $S<۰$ باشد.

مثال **اگر منحنی به معادلهٔ $y=۲x^۲-۴x+m-۳$، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟**

۱) $m>۳$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $۴<m<۵$

@khanenbook

پاسخ: گزینهٔ (۳). منحنی موردنظر محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند؛ پس معادلهٔ $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ باید دارای ۲ جواب متمایز حقیقی مثبت باشد. پس شرط‌ها رو اعمال کنیم:

$$\begin{cases} 1)\ \Delta > 0 : b^2 - 4ac > 0 \xrightarrow[c=m-3]{a=2,\ b=-4} (-4)^2 - 4(2)(m-3) > 0 \Rightarrow 16 - 8m + 24 > 0 \Rightarrow 40 > 8m \xrightarrow{\div 8} 5 > m \\ 2)\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \xrightarrow{\times 2} m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3 \\ 3)\ S = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-(-4)}{2} > 0 \Rightarrow \frac{4}{2} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \text{ همواره برقرار} \Rightarrow m \in \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow[\text{جواب‌ها}]{\text{اشتراک}} 3 < m < 5$$

نتیجه اگر دوست دارید جواب‌های مختلف‌العلامه داشته باشید، باید $P < 0$ باشد.

تذکر اگر $P < 0$ باشد، حتماً Δ مثبت خواهد بود و معادله دارای ۲ جواب متمایز است. یعنی اگر $P < 0$ شد، دیگر نیاز به چک کردن Δ نیست.

مثال اگر معادلهٔ $mx^2 + 2mx = 6 - 2m + x^2$ دارای دو جواب مختلف‌العلامه باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $-3 < m < -1$ ۲) $1 < m < 3$ ۳) $m > 3$ ۴) $m < 1$ یا $m > 3$

پاسخ: گزینهٔ (۲). ابتدا ظاهر معادله رو مرتب می‌کنیم:

$$mx^2 + 2mx = 6 - 2m + x^2 \xrightarrow{\text{همه برن به سمت چپ}} mx^2 + 2mx - 6 + 2m - x^2 = 0 \Rightarrow (m-1)x^2 + 2mx + 2m - 6 = 0$$

حال شرط دو جواب مختلف‌العلامه داشتن را اعمال می‌کنیم:

$$P = \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow[a=m-1]{c=2m-6} \frac{2m-6}{m-1} < 0 \xrightarrow{\text{۱ و ۳ ریشه‌ها}} \begin{array}{c|ccccc} m & & 1 & & 3 & \\ \hline P & + & \| & - & \| & + \end{array} \xrightarrow{P<0} 1 < m < 3$$

ب) اگر Δ صفر باشد، در این صورت معادله دارای یک جواب حقیقی مضاعف برابر $-\frac{b}{2a}$ است که چون جواب معلوم است، پس علامتش هم مشخص خواهد بود.

ج) اگر Δ منفی شود، در این صورت جواب حقیقی نداریم که بخواهیم علامتشو تعیین کنیم!

مثال اگر معادلهٔ $x^2 + bx + 4 = 0$ دارای یک جواب مضاعف مثبت باشد، b کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ± 4 ۴) ± 16

پاسخ: گزینهٔ (۲). خوب اول شرط $\Delta = 0$ را اعمال کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{\surd} |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4$$

از طرفی چون جواب مضاعف مثبت است داریم:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2(1)} > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2} > 0 \xrightarrow[\text{جهت عوض}]{\times(-2)} b < 0$$

پس $b = -4$ جواب است.

۱۷۷- در معادلهٔ $100x^2 - 15x - 1 = 0$: برگرفته از کتاب درسی

۱) دو جواب معادله، هم‌علامت هستند.
۲) معادله دارای جواب مضاعف است.
۳) جواب مثبت از نظر اندازه بزرگ‌تر از جواب منفی است.
۴) جواب منفی از نظر اندازه بزرگ‌تر از جواب مثبت است.

۱۷۸- معادلهٔ $-3x^2 + x + k^2 + 1 = 0$ دارای:

۱) دو جواب مثبت است.
۲) دو جواب منفی است.
۳) دو جواب مختلف‌العلامه است.
۴) جواب حقیقی نیست.

۱۷۹- معادلهٔ $(x-1)(x-3) + 2 + k^2 = 0$ چه وضعی دارد؟

۱) دو جواب مثبت دارد.
۲) دو جواب منفی دارد.
۳) دو جواب مختلف‌العلامه دارد.
۴) جواب حقیقی ندارد.

۱۸۰- حدود m برای آن‌که معادلهٔ $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دو جواب مختلف‌العلامه داشته باشد؛ کدام است؟

۱) $m > 2$ ۲) $1 < m < 3$ ۳) $m < 1$ ۴) $0 < m < 1$

۱۸۱- به‌ازای کدام مقدار m معادلهٔ درجه دوم $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ دو جواب حقیقی متمایز مثبت دارد؟

۱) $m < -1$ ۲) $m > 1$ ۳) $m < -1$ یا $m > 1$ ۴) $-1 < m < 1$

@khanen_book

۱۸۲- به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$، محور x ها را در دو نقطه به‌طول‌های منفی قطع می‌کند؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۱۸۳- به‌ازای کدام مقادیر m در معادلهٔ درجه دوم $m^2x^2-4x-1=0$ فقط جوابی که قدرمطلق آن بیشتر است، مثبت است؟

۱) $-2<m<2$ ۲) $m<-2$ یا $m>2$ ۳) هر مقدار m به جز صفر ۴) هیچ مقدار m

درسنامهٔ ۱۷

مشخص کردن علامت a، b و c در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$

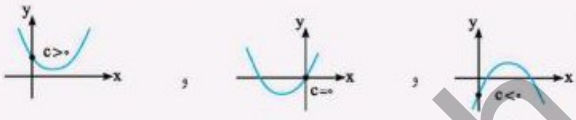
علامت a: اگر نمودار سهمی رو به بالا بود، $a>0$ و اگر نمودار سهمی رو به پایین بود $a<0$ می‌باشد.

مثال

$y=3x^2-5x+1$ $a=3>0$ و $y=-x^2+5$ $a=-1<0$

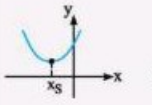
علامت c: اگر نمودار سهمی محور yها را در قسمت مثبت‌ها قطع کرد، $c>0$ و اگر در قسمت منفی‌ها قطع کرد، $c<0$ است. به عبارت دیگر c، همان عرض نقطهٔ تلاقی نمودار سهمی با محور yها است.

مثال



علامت b: برای تعیین علامت b، از طول رأس سهمی یعنی $x_S=-\frac{b}{2a}$ کمک می‌گیریم. به مثال‌های زیر توجّه کنید.

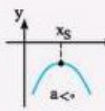
مثال در شکل مقابل رأس سهمی در ناحیه دوم بوده و دهانهٔ سهمی رو به بالا ($a>0$) است. بنابراین داریم:



$x_S<0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0$

به عبارت دیگر چون $a>0$ است، برای آن که کسر $-\frac{b}{2a}$ منفی باشد، لازم است که $b>0$ در نظر گرفته شود.

مثال در شکل روبه‌رو رأس سهمی در ناحیه چهارم و دهانهٔ سهمی رو به پایین ($a<0$) است. بنابراین داریم:

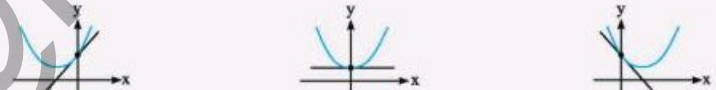


$x_S>0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b>0$

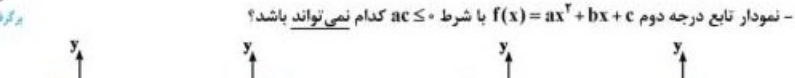
به عبارت دیگر چون $a<0$ است، برای آن‌که کسر $-\frac{b}{2a}$ مثبت باشد، لازم است که $b>0$ در نظر گرفته شود.

سؤال *دانش‌پژوه (سامان طلوعی)*، **آقا اجازه برای تعیین علامت b یه روشی رو تو کلاس خصوصی بهم گفته بودین اونو به بچه‌ها هم بگین حال کنن ☺**

پاسخ: تو هرف تزنی نمیشه؟ باشه میگم. بچه‌ها کافیه ببینین در بابی که نمودار محور yها رو قطع می‌کند (عرض از مبدا)، شیب نمودار چه‌جوریه، علامت شیب نمودار همان علامت b میشه.

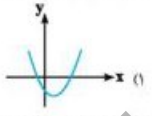
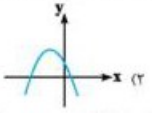
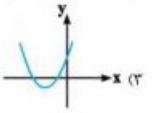
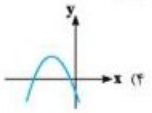


۱۸۴- نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با شرط $ac\leq 0$ کدام نمی‌تواند باشد؟ برگرفته از کتاب درسی

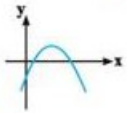


@khaneh_book

۱۸۵- در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ داریم $abc > 0$. در این صورت نمودار این سهمی کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

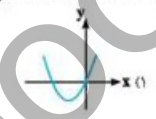
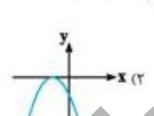
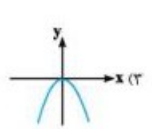
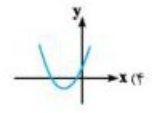
۱۸۶- با توجه به نمودار سهمی داده‌شده، کدام گزینه درست است؟



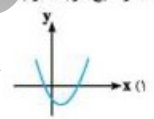
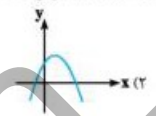
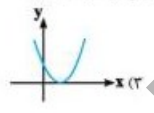
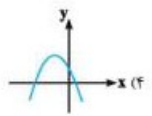
برگرفته از کتاب درسی

۱) $ab > 0$
۲) $bc > 0$
۳) $ac > 0$
۴) $abc < 0$

۱۸۷- اطلاعات داده‌شده در کدام گزینه غلط است؟

۱)  $ac=0, b>0$
۲)  $ac>0, b<0$
۳)  $b=c=0, a>0$
۴)  $bc>0, a>0$

۱۸۸- در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با فرض $ab < 0$، کدام نمودار غلط است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

درسنامهٔ ۱۸

معادلات کسری

عبارات گویا، کسرهایی مانند $\frac{2x+5}{x-2}$، $\frac{3}{1+x}$ و ... هستند که صورت و مخرجشان چندجمله‌ای است و هنگامی تعریف شده (یا معنی) هستند که مخرج آن‌ها صفر نشود. به عنوان مثال اگر در عبارت گویای $\frac{x+1}{x-2}$، عدد ۲ = x را قرار دهیم، مخرج کسر صفر شده و لذا کسر $\frac{x+1}{x-2}$ به ازای $x = 2$ تعریف نمی‌شود.

حال اگر معادله‌ای شامل عبارات گویا باشد، برای حل آن مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله ۱: مخرج کسرها را در صورت امکان تجزیه و ساده می‌کنیم.

مرحله ۲: ک.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) مخرج کسرها را به روش زیر به‌دست می‌آوریم:

عوامل غیر مشترک × عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر = ک.م

مرحله ۳: طرفین معادله را در ک.م مخرج‌ها ضرب کرده و پس از ساده‌سازی، معادلهٔ جبری حاصل را حل می‌کنیم.

مرحله ۴: در انتها جواب‌هایی قابل قبول هستند که مخرج هیچ کدام از کسرهای موجود در معادلهٔ اولیه را صفر نکنند.

مثال معادلهٔ $\frac{4-4x}{4-x^2} = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ (۲). مخرج‌ها x، $x+2$ و $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ هستند که ک.م آن‌ها $x(2-x)(2+x)$ است. پس طرفین معادله را در آن ضرب می‌کنیم:

$$x(2-x)(2+x)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+2} = \frac{4-4x}{(2-x)(2+x)}\right) \Rightarrow \underbrace{2(2-x)(2+x)}_{=4-x^2 \text{ اتحاد مزدوج}} + 3x(2-x) = x(4-4x)$$

$$8 - 2x^2 + 6x - 3x^2 = 4x - 4x^2 \xrightarrow[\text{به سمت چپ می‌بریم.}]{\text{همه عبارت‌ها را}} -5x^2 + 6x + 8 - 4x + 4x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } -2$$

$x = -2$ مخرج را صفر می‌کند و لذا غیر قابل قبول می‌باشد؛ پس فقط $x = 4$ جواب معادله است.

@khaneh_book

توجه می‌توانستیم در طرف چپ تساوی، بین دو کسر داده‌شده مخرج مشترک بگیریم و سپس طرفین وسطین کنیم و معادلهٔ حاصل را حل کنیم.

نکته جواب یک معادله، در معادله صدق می‌کند. به عنوان مثال اگر $x=3$ جواب معادلهٔ $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+3}{x}$ باشد، نتیجه می‌گیریم که اگر به جای x، عدد ۳ را در معادله قرار بدهیم تساوی برقرار می‌شود:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+3}{x} \xrightarrow{x=3} \frac{3+1}{3-1}=\frac{3+3}{3} \Rightarrow \frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Rightarrow 2=2 \quad \checkmark$$

مثال اگر $t=-3$ جواب معادلهٔ $\frac{4-t}{2-2t}=\frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ باشد، k کدام است؟

۱) -1 ۲) -53 ۳) ۱ ۴) ۵۶

پاسخ گزینهٔ (۳). به جای t در معادله عدد -3 را قرار داده و k را می‌یابیم:

$$\frac{4-t}{2-2t}=\frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68} \xrightarrow{t=-3} \frac{4-(-3)}{2-2(-3)}=\frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68} \Rightarrow \frac{7}{8}=\frac{27+k}{100-68} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 7(32)=8(27+k)$$

$$\Rightarrow 7\times 4=27+k \Rightarrow 28=27+k \Rightarrow k=28-27=1$$

۱۸۹- اگر $x=\alpha$ جواب معادلهٔ $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+1}{x+3}$ باشد، مقدار $(4\alpha^2+1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۹۰- در معادلهٔ $\frac{x-1}{x-2}=\frac{1+x}{x}$ مقدار عبارت سمت راست معادله به‌ازای جواب معادله کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) صفر ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۹۱- معادلهٔ $\frac{10}{x^2-1}=\frac{2x+3}{x-1}-\frac{2x-3}{x+1}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۲- اگر a و b جواب‌های معادلهٔ $3x\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۱۹۳- معادلهٔ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۴- معادلهٔ $\frac{3}{x^2-x+k}=\frac{1}{x^2+x+2}$ دو جواب حقیقی متمایز دارد. مجموعهٔ k کدام است؟

۱) $k<4$ ۲) $-5<k<0$ ۳) $k>4$ ۴) $0<k<5$

۱۹۵- اگر $x=3$ جواب معادلهٔ $\frac{a+x}{x+3}-1=\frac{5-x}{x-4}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۹۶- اگر جواب‌های معادلهٔ $\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{a}{2x-2}+\frac{a}{x^2+2x-3}$ برابر ۳ و β باشد، آن‌گاه β^3 کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۰ ۳) ۶۸ ۴) ۴۶

۱۹۷- اگر معادلهٔ $\frac{3-x}{1-x}=\frac{x+2}{x+1}+\frac{ax+b}{x^2-1}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۱۹۸- به ازای چند مقدار a، معادلهٔ $\frac{x^2-x+3}{x^2-2x}-\frac{x}{x-2}=\frac{a}{x}$ جواب ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۹- در یک مستطیل، نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض مستطیل است. در این صورت نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۳) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ۴) $1+\sqrt{5}$

@khanehbook

۲۰۰- زهرا برای ویرایش علمی ۲۰ صفحه از کتابی ۱ ساعت وقت صرف می‌کند. اگر نرگس در این ویرایش به او کمک کند کار ویرایش ۴۰ دقیقه طول می‌کشد. حال اگر نرگس بخواهد به تنهایی این ویرایش را به عهده بگیرد، چند دقیقه وقت لازم خواهد داشت؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۸۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۰۰

۲۰۱- اگر دو ماشین رنگ کاری با هم کار کنند می‌توانند در ۹ ساعت دیوار یک سالن ورزشی را رنگ‌آمیزی کنند. با فرض آن که سرعت کار یکی از آن‌ها ۳ برابر دیگری باشد، ماشینی که سرعت کم‌تری دارد در چند ساعت می‌تواند کل کار را انجام دهد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۲۰۲- استخری توسط دو شیر آب A و B پر می‌شود. دو شیر A و B با هم، استخر را در ۲ ساعت پر می‌کنند. اگر بدانیم شیر A به تنهایی برای پر کردن استخر ۳ ساعت بیشتر زمان لازم دارد، چند ساعت طول می‌کشد که شیر A به تنهایی استخر را پر از آب کند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰۳- علی کاری را به تنهایی در ۱۰ ساعت و حسین همان کار را به تنهایی در ۱۵ ساعت انجام می‌دهد. علی شروع به انجام کار کرده و بعد از ۵ ساعت، حسین به کمک او می‌آید. از این لحظه به بعد چند ساعت طول می‌کشد که کار انجام شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸

۲۰۴- قطاری مسافت ۶۰ کیلومتر را با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. اگر در مسیر برگشت از سرعت متوسط قطار $10\frac{km}{h}$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مجموع زمان رفت و برگشت چند ساعت است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۲۰۵- دبیر زبان احمد هر روز، آزمونی ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ روز، احمد روی هم ۳۶ امتیاز به دست آورده و از روز ششم به بعد، در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب می‌کند، به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شده است. احمد از روز ششم به بعد در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

درسنامهٔ ۱۹

معادلات گنگ (رادیکالی)

برای حل این‌گونه معادلات مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ ۱: یک عبارت رادیکالی را یک طرف تساوی و سایر عبارات را طرف دیگر تساوی می‌بریم.

مرحلهٔ ۲: برای خلاص شدن از شرّ رادیکال‌ها طرفین تساوی را به توان مورد نیاز می‌رسانیم (حتی اگر مجبور شویم چند بار به توان می‌رسانیم.)

مرحلهٔ ۳: معادلهٔ حاصل را حل نموده و جواب‌های به‌دست آمده را در معادلهٔ اولیه چک می‌کنیم. اگر در آن معادله صدق کردند، قابل قبول هستند.

مثال اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $\sqrt[3]{x^2-9}-\sqrt{2x-6}=0$ باشند و $x_1<x_2$ باشد، مقدار $3x_1-2x_2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۹ ۴) -۹

پاسخ: گزینهٔ (۲)

$$\sqrt[3]{x^2-9}-\sqrt{2x-6}=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2-9}=\sqrt{2x-6}\xrightarrow{\text{توان }6}(\sqrt[3]{x^2-9})^6=(\sqrt{2x-6})^6\Rightarrow x^2-9=((\sqrt{2x-6})^2)^3\Rightarrow x^2-9=(2x-6)^3$$

$$\Rightarrow x^2-9=4x^3+36-24x\xrightarrow[\text{راست}]{\text{همه برن}}0=4x^3+36-24x-x^2+9\Rightarrow 3x^2-24x+45=0\xrightarrow{\div 3}x^2-8x+15=0$$

$$\Rightarrow(x-5)(x-3)=0\Rightarrow x=3\text{ یا }5$$

هر دو عدد ۳ و ۵ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند و قابل‌قبول‌اند. بنابراین:

$$3x_1-2x_2=3(3)-2(5)=9-10=-1$$

سؤال دانش‌پژوه (کرام بعفری): آقا ببخشید عدد ۳ زیر رادیکال‌ها رو صفر می‌کنه که! مشکلی نیست؟

پاسخ: نه! رادیکال‌ها توی مفرج که نیستند، پس صفر هم که بشه به کسی برنمی‌خوره ...

@khaneh_book

مثال معادلهٔ $\sqrt{x} = \sqrt{1+x} + 2$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ (۱). طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(2+\sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow 2^2 + (\sqrt{1+x})^2 + 2(2)\sqrt{1+x} = x \Rightarrow 4+1+\cancel{x}+4\sqrt{1+x} = \cancel{x} \Rightarrow 4\sqrt{1+x} = -5$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

تا همین‌جا می‌توانیم بگیم معادله جواب ندارد زیرا رادیکال با فرجه زوج هیچ‌گاه منفی نمی‌شد. فرض کن متوجه این مطلب نشدی، حل را ادامه می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (4\sqrt{1+x})^2 = (-5)^2 \Rightarrow 16(1+x) = 25 \Rightarrow 16+16x = 25 \Rightarrow 16x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{16}$$

امّا جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند پس غیرقابل قبول است و معادله جواب ندارد.

نکته گاهی مواقع قبل از شروع به حل، با استفاده از دامنهٔ عبارات رادیکالی می‌توانیم جواب معادله را به‌دست بیاوریم.

نکته برخی مواقع تعیین دامنهٔ عبارات رادیکالی موجود در معادله کمک زیادی در تعیین جواب‌های معادله بدون حل می‌کند. البته خیلی جالبه که در فصل سوم دامنهٔ توابع رادیکالی گفته‌شده ولی حل معادلات رادیکالی در فصل اول آمده است.

مثال معادلهٔ $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 5 - 5x$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ (۲). می‌دانیم زیر رادیکال با فرجه ۲ نباید منفی شود؛ پس داریم:

$$\sqrt{x-1}: x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad , \quad \sqrt{1-x}: 1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{فقط } x = 1$$

پس فقط $x = 1$ می‌تواند وارد معادله شود، زیرا در غیر این صورت زیر یکی از رادیکال‌ها منفی شده و معادله جواب ندارد! حال ببینیم $x = 1$ جواب معادله است یا نه:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 5 - 5x \xrightarrow{x=1} \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} \overset{?}{=} 5 - 5(1) \Rightarrow 0+0 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$$

پس $x = 1$ قابل قبول بوده و معادله همین یک جواب را دارد.

نکته اگر جمع چند عبارت رادیکالی با فرجهٔ زوج برابر صفر شود، تک‌تک آن‌ها باید صفر باشند و جواب معادله، اشتراک بین جواب‌های به‌دست آمده است.

مثال تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x^2-x-2} = 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ (۲). با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} = 0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-x-2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \xrightarrow{\text{اولی صفر یا دومی}} x = 2 \text{ یا } x = -1 \\ \sqrt{x^2-5x+6} = 0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-5x+6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 3 \end{cases}$$

جواب معادله اشتراک دو دسته جواب به‌دست آمده یعنی $x = 2$ است. پس معادله یک جواب دارد.

۲۰۶- اگر x_0 جواب معادلهٔ $\sqrt{5+\sqrt{2x+4}} = 3$ باشد، مقدار $(3x_0+7)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۵ ۳) ۱۸ ۴) ۱۲

۲۰۷- اگر α جواب معادلهٔ $x = 2 + \sqrt{2x^2-5x+2}$ باشد، آن‌گاه $\alpha^2+\alpha^3$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۰۸- جواب معادلهٔ $3x+4 = \sqrt{x^2+6}$ چگونه است؟

۱) یک جواب منفی ۲) یک جواب مثبت

۳) دو جواب منفی ۴) یک جواب مثبت، یک جواب منفی

۲۰۹- معادلهٔ $x(x^2-9)\sqrt{x-2} = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

۲۱۰- معادلهٔ $3x-2 = 5\sqrt{1-9x^2}$:

۱) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۲) یک ریشهٔ مضاعف دارد. ۳) یک ریشهٔ ساده دارد. ۴) دو ریشه دارد.

@khanen_book

۲۱۱- فاصلهٔ نقاط A و B روی محور xها از نقطهٔ P(۲،۳) برابر ۵ است. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۲۱۲- اگر $x = ۴$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x + a = \sqrt{۵x - x^۲}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگری ندارد.

۲۱۳- جواب‌های مورد قبول معادلهٔ رادیکالی $\sqrt{x+۲} - \sqrt{۳x+۳} = ۱$ چگونه‌اند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) فقط یک جواب منفی ۲) فقط یک جواب مثبت

۳) دو جواب مثبت ۴) یک جواب منفی و یک جواب مثبت

۲۱۴- کدام‌یک از معادلات زیر دارای ریشهٔ حقیقی می‌باشد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $۲\sqrt{۵-x} + \sqrt{x-۶} = ۰$ ۲) $\sqrt{x} + \sqrt{۲x-۶} = -۱$

۳) $\sqrt{x-۳} + \sqrt{۲-x} = ۰$ ۴) $(x+۱)^۲ + \sqrt{x+۱} + ۳ = ۰$

۲۱۵- معادلهٔ $\sqrt{x+۱۰\sqrt{x-۲}+۳} + \sqrt{x-۲} = ۵$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۶- معادلهٔ $\sqrt{x^۲-x-۲} + \sqrt{x^۲-۴} = ۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۱۷- معادلهٔ $\sqrt[۴]{x^۳+x-۱۰} + \sqrt{x^۲-۳x+۲} = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ریشه حقیقی ندارد.

۲۱۸- معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}} = \sqrt{۲-x} + \sqrt{۲x-۲}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲۱۹- معادلهٔ $x^۲ - ۴ = \sqrt{x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۲۲۰- یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کرده و پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت، به طوری که $t = \sqrt{۱۰ - \frac{h}{۵}}$. اگر لحظه‌ای که ارتفاعش از سطح زمین یک دهم ارتفاع ساختمان باشد را $t_۱$ بنامیم، آن‌گاه این شیء در $\frac{۱}{۳}t_۱$ ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۴۰

۲۲۱- اگر تفاضل جذر عدد صحیح غیر صفر x، از خودش برابر نصف آن عدد باشد، آن‌گاه تفاضل x از جذرش کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۲۲۲- نقطهٔ O(a،۲a) مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ (۲،۱) و (-۱،۴) است. شعاع این دایره کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۲۳- دایره‌ای از دو نقطهٔ (۰،۰) و (۳،۱) گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y = ۲x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟ تجربی خارج ۸۰

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۲۲۴- دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و یک قطر آن منطبق بر نیمساز ربع اول است. شعاع دایره کدام است؟ تجربی خارج ۹۵ و مشابه تجربی خارج ۹۰

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۲۲۵- مرکز دایره‌ای که از نقاط A(۲،-۲) و B(۲،۶) گذشته و بر محور yها مماس است، از مبدأ مختصات چه فاصله‌ای دارد؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۲۹}$ ۴) ۶

@khanen_book

پاسخ‌های تشریحی

۱ **۲** نقطه روی خط $\frac{x-y}{۳}+y=۲x-۱$ قرار دارد، پس مختصاتش در معادله صدق می‌کند. حال با قرار دادن طول نقطه یعنی $x=۲$ در معادله، عرض آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-y}{۳}+y=۲x-۱ \xrightarrow{x=۲} \frac{۲-y}{۳}+y=۲(۲)-۱ \Rightarrow \frac{۲-y+۳y}{۳}=۳$$

$$\Rightarrow ۲+۲y=۹ \Rightarrow ۲y=۷ \Rightarrow y=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

۲ **۲** چون نقطهٔ $(۳,b)$ روی خط $۲x-y=۵$ قرار دارد، پس مختصات آن در معادله صدق می‌کند:

$$۲x-y=۵ \xrightarrow[y=b]{x=۳} ۲(۳)-b=۵ \Rightarrow b=۱$$

۳ **۲** چون نقطهٔ A روی محور yها قرار دارد، پس طول آن صفر است، پس $A(۰,۲)$. از طرفی چون خط از نقطهٔ A عبور می‌کند، مختصات A در معادلهٔ خط صدق می‌کند. داریم:

$$۲y+(۳m-۶)x=۲m+۶ \xrightarrow{(۰,۲)} ۲(۲)+\underbrace{(۳m-۶)(۰)}_{۰}=۲m+۶ \Rightarrow ۴=۲m+۶$$

$$\Rightarrow ۴-۶=۲m \Rightarrow ۲m=-۲ \Rightarrow m=-۱$$

۴ **۳** اگر طول نقطهٔ A را با x_A و عرض آن را با y_A نمایش دهیم، طبق فرض سؤال می‌خواهیم عرض آن از سه برابر طولش، یک واحد بیشتر باشد، یعنی $y_A=۳x_A+۱$. چون نقطهٔ A روی خط قرار دارد، پس مختصاتش در معادله صدق می‌کند:

$$۲x_A+۵y_A=۱۹-(x_A-y_A) \xrightarrow{y_A=۳x_A+۱} ۲x_A+۵(۳x_A+۱)=۱۹-(x_A-(۳x_A+۱))$$

$$\Rightarrow ۲x_A+۱۵x_A+۵=۱۹-x_A+۳x_A+۱ \Rightarrow ۱۵x_A=۱۵ \Rightarrow x_A=۱$$

با جایگذاری $x_A=۱$ در $y_A=۳x_A+۱$، عرض A برابر ۴ می‌شود. بنابراین مختصات نقطهٔ A به صورت $(۱,۴)$ درمی‌آید.

۵ **۲** فرض کنید نقطهٔ A، محل برخورد دو خط باشد. طبق فرض نقطهٔ A روی محور yها قرار دارد. پس $x_A=۰$. حال در معادلهٔ $(a+۲)x+y=۱$، x را صفر قرار داده تا عرض نقطهٔ A به‌دست آید:

$$(a+۲)x_A+y_A=۱ \xrightarrow{x_A=۰} \underbrace{(a+۲)(۰)}_{۰}+y_A=۱ \Rightarrow y_A=۱ \Rightarrow A(۰,۱)$$

چون A محل برخورد دو خط است، پس مختصات آن در هر دو معادلهٔ خط صدق می‌کند. لذا مختصات A را در معادلهٔ $x+ay-۲=۰$ قرار می‌دهیم و a را می‌یابیم:

$$۰+a(۱)-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

۶ **۲** شیب خط $y=(۲m-۴)x+m$ یعنی $۲m-۴$ برابر ۲ است. پس:

$$۲m-۴=۲ \Rightarrow ۲m=۶ \Rightarrow m=۳$$

حال $m=۳$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم و طول از مبدأ خط را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(۲m-۴)x+m \xrightarrow{m=۳} y=۲x+۳ \xrightarrow[y \text{ را صفر قرار می‌دهیم.}]{\text{برای محاسبهٔ طول از مبدأ}} ۰=۲x+۳ \Rightarrow ۲x=-۳ \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

۷ **۳** ابتدا معادلهٔ خط را با داشتن شیب و عرض از مبدأ می‌نویسیم:

$$y=ax+b \xrightarrow[b=۳]{a=-۲} y=-۲x+۳$$

برای پیدا کردن محل برخورد خط با محور xها، کافی است در معادله، y را صفر قرار بدهیم:

$$y=-۲x+۳ \xrightarrow{y=۰} ۰=-۲x+۳ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

۸ **۳** قبل از هر اقدامی آن را ساده کنید:

$$۲\left(\frac{x-y}{۳}\right)+۲\left(\frac{x+y}{۲}\right)=۱ \Rightarrow \frac{۲x-۲y}{۳}+\frac{۳x+۳y}{۲}=۱ \xrightarrow{\times ۶} ۲(۲x-۲y)+۳(۳x+۳y)=۶$$

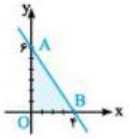
$$\Rightarrow ۴x-۴y+۹x+۹y=۶ \Rightarrow ۱۳x+۵y=۶ \Rightarrow ۵y=-۱۳x+۶ \xrightarrow{\div ۵} y=\frac{-۱۳}{۵}x+\frac{۶}{۵}$$

پس شیب $a=\frac{-۱۳}{۵}$ و عرض از مبدأ $b=\frac{۶}{۵}$ است:

$$a+b=\frac{-۱۳}{۵}+\frac{۶}{۵}=-\frac{۷}{۵}$$

@khaneh_book

۹ ۱ **راه اول:** ابتدا محل برخورد خط با محورهای مختصات (یعنی همان عرض از مبدأ و طول از مبدأ) را می‌یابیم:



x را صفر قرار می‌دهیم $\xrightarrow{}$ محاسبهٔ عرض از مبدأ $\Rightarrow 3(0)+2y=12 \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow y=6$

y را صفر قرار می‌دهیم $\xrightarrow{}$ محاسبهٔ طول از مبدأ $\Rightarrow 3x+2(0)=12 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$

پس خط مطابق شکل، محور xها را در $x=4$ و محور yها را در $y=6$ قطع می‌کند و مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB را می‌سازد که مساحت آن برابر $\frac{4\times 6}{2}=12$ می‌شود.

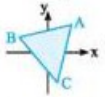
راه دوم:

نکته در خط $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$، عرض از مبدأ q و طول از مبدأ p است و مساحت مثلث حاصل از برخورد خط با محورهای مختصات برابر $\left|\frac{pq}{2}\right|$ است.

$$3x+2y=12 \xrightarrow{\div 12} \frac{3x}{12}+\frac{2y}{12}=\frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{\underbrace{4}_{p}}+\frac{y}{\underbrace{6}_{q}}=1 \Rightarrow \text{مساحت مثلث}=\left|\frac{pq}{2}\right|=\left|\frac{4\times 6}{2}\right|=12$$

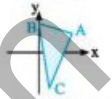
۱۰ ۱ از تقاطع سه خط با شیب‌های $0/5$، 10 و -1 مثلثی ایجاد کرده‌ایم. پس دو ضلع مثلث باید شیب مثبت و یک ضلع دیگر باید شیب منفی داشته باشد. حالا بریم خدمت گزینه‌ها برسیم:

گزینهٔ (۱):



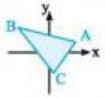
شیب اضلاع AB و AC مثبت و شیب ضلع BC منفی است. پس همین گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۲):



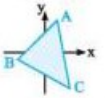
شیب اضلاع AB و BC منفی و شیب ضلع AC مثبت است. پس غلط است.

گزینهٔ (۳):



شیب اضلاع AB و BC منفی و شیب ضلع AC مثبت است. پس غلط است.

گزینهٔ (۴):



شیب اضلاع AC و BC منفی و شیب ضلع AB مثبت است. پس غلط است.

۱۱ ۲ $y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-2=4(x-3) \Rightarrow y-2=4x-12 \Rightarrow y=4x-10$

۱۲ ۳ معادلهٔ خط را به صورت $y=ax+b$ فرض می‌کنیم. با توجه به مسأله شیب -6 است $(a=-6)$ و طول از مبدأ -2 است، یعنی خط محور xها را در $x=-2$ قطع کرده و لذا از نقطهٔ $A(-2,0)$ عبور کرده است. حال با جای‌گذاری مختصات A در معادله، عرض از مبدأ را می‌یابیم:

$$y=ax+b \xrightarrow{a=-6} y=-6x+b \xrightarrow{A(-2,0)} 0=-6(-2)+b \Rightarrow b=-12$$

عرض از مبدأ: -12

۱۳ ۴ **راه اول:** در معادلهٔ خط $y=ax+b$، عرض از مبدأ b بوده که طبق فرض مسأله برابر 5 است. از طرفی طول از مبدأ آن -3 می‌باشد، یعنی خط محور xها را در $x=-3$ قطع کرده و لذا نقطهٔ $A(-3,0)$ عبور کرده است. برای به‌دست آوردن شیب خط، مختصات نقطهٔ A را در معادله قرار می‌دهیم:

$$y=ax+5 \xrightarrow{A(-3,0)} 0=a(-3)+5 \Rightarrow 3a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{3} \Rightarrow y=\frac{5}{3}x+5$$

راه دوم:

یادآوری اگر p طول از مبدأ و q عرض از مبدأ یک خط باشد، معادلهٔ خط به‌صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$\begin{cases} \text{عرض از مبدأ} = q = 5 \\ \text{طول از مبدأ} = p = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow \frac{y}{5}=\frac{x}{3}+1 \xrightarrow{\times 5} y=\frac{5}{3}x+5$$

۱۴ ۲ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(1,2)$ و $B(2,4)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-2}{2-1}=2 \Rightarrow y-y_A=m_{AB}(x-x_A) \Rightarrow y-2=2(x-1) \Rightarrow y=2x-2+2 \Rightarrow y=2x$$

حال اگر خط بخواهد از نقطهٔ $(m,m-1)$ عبور کند، مختصات $(m,m-1)$ باید در معادلهٔ خط (یعنی $y=2x$) صدق کند:

$$y=2x \Rightarrow m-1=2(m) \Rightarrow m=-1$$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام مشت‌کل)، آقا، **m** همون شیبه؟

پاسخ: بهرام جان شما که قواپ بودی! شیب برابر ۲ شد. قرار نیست هر گردی، گردو باشه که! بهه هر چایی توی دنیا، تو **m** دیدی که شیب نیست. این‌جا **m** یه مجهوله، همین!

@khaneh_book

۱۵ ۴

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{(\Delta m-1)-(\Delta m)}{\Upsilon m-(\Upsilon m-1)}=\frac{\Delta m-1-\Delta m}{\Upsilon m-\Upsilon m+1}=\frac{-1}{m+1}\xrightarrow{\text{شیب}=\frac{1}{\Upsilon}}\frac{-1}{m+1}=\frac{1}{\Upsilon}\Rightarrow m+1=-\Upsilon\Rightarrow m=-\Upsilon$$

با توجه به مقدار m، مختصات نقطهٔ A و B برابر $A(-\Upsilon,-1\Delta)$ و $B(-\Upsilon,-1\Upsilon)$ می‌شود. حال به کمک شیب و یکی از نقاط A یا B معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m_{AB}(x-x_A)\Rightarrow y-(-1\Delta)=\frac{1}{\Upsilon}(x-(-\Upsilon))\Rightarrow y+1\Delta=\frac{1}{\Upsilon}(x+\Upsilon)\Rightarrow \Upsilon y+\Upsilon\circ=x+\Upsilon\Rightarrow \Upsilon y-x+\Upsilon\Upsilon=\circ$$

۱۶ ۲ دو خط $(a-\Upsilon)x-(a+1)y=\Delta$ و $y=-x$ با هم موازی هستند، پس شیب‌هایشان برابر است. بریم ابتدا شیب‌ها را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}(a-\Upsilon)x-(a+1)y=\Delta\xrightarrow{\text{شیب}=-\frac{\text{ضریب }x}{\text{ضریب }y}}\text{شیب}=-\dfrac{a-\Upsilon}{-(a+1)}=\dfrac{a-\Upsilon}{a+1}\\ y=-x\Rightarrow\text{شیب}=-1\end{cases}$$

از برابر قرار دادن شیب‌ها، a به‌دست می‌آید:

$$\frac{a-\Upsilon}{a+1}=-1\xrightarrow{\text{وسطین}\atop\text{طرفین}}a-\Upsilon=-a-1\Rightarrow \Upsilon a=1\Rightarrow a=1$$

۱۷ ۴ خطی گذرنده از نقاط $A(-\Upsilon,\Upsilon)$ و مبدأ مختصات $(B(\circ,\circ))$، با خط $y=\frac{\Upsilon}{b}x+\Upsilon$ موازی است، پس شیب هر دو خط با هم یکسان می‌باشد:

$$\begin{cases}y=\frac{\Upsilon}{b}x+\Upsilon\Rightarrow\text{شیب}=\frac{\Upsilon}{b}\\ B(\circ,\circ)\text{ و }A(-\Upsilon,\Upsilon)\Rightarrow\text{شیب خط گذرنده از}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{\circ-\Upsilon}{\circ-(-\Upsilon)}=-\dfrac{\Upsilon}{\Upsilon}\end{cases}\xrightarrow{\text{برابر}\atop\text{شیب‌ها}}\frac{\Upsilon}{b}=-\frac{\Upsilon}{\Upsilon}\xrightarrow{\text{وسطین}\atop\text{طرفین}}\Upsilon=-\Upsilon b\Rightarrow b=-\Upsilon$$

۱۸ ۴ دو خط $(m-1)y-mx=\Delta$ و $\Upsilon x-m(1-x+y)=\circ$ موازی هم هستند، پس شیب‌هایشان برابر است. بریم ابتدا شیب‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{cases}(m-1)y-mx=\Delta\xrightarrow{\text{شیب}=-\frac{\text{ضریب }x}{\text{ضریب }y}}\text{شیب}=-\dfrac{-m}{m-1}=\dfrac{m}{m-1}\\ \Upsilon x-m(1-x+y)=\circ\Rightarrow \Upsilon x-m+mx-my=\circ\Rightarrow(\Upsilon+m)x-my-m=\circ\xrightarrow{\text{شیب}=-\frac{\text{ضریب }x}{\text{ضریب }y}}\text{شیب}=\dfrac{\Upsilon+m}{m}\end{cases}$$

از برابر قرار دادن شیب‌ها، m را می‌یابیم:

$$\frac{m}{m-1}=\frac{\Upsilon+m}{m}\xrightarrow{\text{وسطین}\atop\text{طرفین}}m\times m=(m-1)(\Upsilon+m)\Rightarrow m^{\Upsilon}=\Upsilon m+m^{\Upsilon}-\Upsilon-m\Rightarrow\circ=m-\Upsilon\Rightarrow m=\Upsilon\Rightarrow-\frac{1}{m}=-\frac{1}{\Upsilon}$$

۱۹ ۲ خط مورد نظر ما، موازی خط گذرنده بر دو نقطهٔ $A(1,\Upsilon)$ و $B(-1,\Delta)$ است. پس شیب هر دو خط یکسان است. شیب خط گذرنده از A و B برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta-\Upsilon}{-1-1}=\frac{1}{-\Upsilon}$$

بنابراین معادلهٔ خط را با داشتن شیب $-\frac{1}{\Upsilon}$ و نقطهٔ $C(\Upsilon,-\Upsilon)$ می‌نویسیم:

$$y-y_C=m(x-x_C)\Rightarrow y-(-\Upsilon)=-\frac{1}{\Upsilon}(x-\Upsilon)\Rightarrow y+\Upsilon=-\frac{1}{\Upsilon}x+1\Rightarrow y=-\frac{1}{\Upsilon}x-\Upsilon$$

$-\Upsilon=$ عرض از مبدأ

۲۰ ۱ در سؤال از نقطه‌ای صحبت شده که عرض آن ۵ است. چون آن نقطه محل برخورد دو خط است، پس روی هر دو خط قرار دارد. با قرار دادن $y=\Delta$ در معادلهٔ خط $\Upsilon x-\Upsilon y=\Delta$، طول نقطه را می‌یابیم:

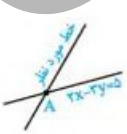
$$\Upsilon x-\Upsilon y=\Delta\xrightarrow{y=\Delta}\Upsilon x-\Upsilon(\Delta)=\Delta\Rightarrow\Upsilon x=\Upsilon\circ\Rightarrow x=1\circ\Rightarrow A(1\circ,\Delta)$$

از طرفی خط موردنظر با خط $\Upsilon x-\Upsilon y=\Delta$ موازی است، پس شیب آن همان شیب خط $\Upsilon x-\Upsilon y=\Delta$ است.

$$\Upsilon x-\Upsilon y=\Delta\Rightarrow\Upsilon y=\Upsilon x-\Delta\xrightarrow{\div\Upsilon}y=\Upsilon x-\frac{\Delta}{\Upsilon}\Rightarrow\text{شیب}=\Upsilon$$

بنابراین معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از نقطهٔ $A(1\circ,\Delta)$ می‌گذرد و شیب آن $m=\Upsilon$ است:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-\Delta=\Upsilon(x-1\circ)\Rightarrow y=\Upsilon x-1\Delta\Rightarrow\Upsilon x-y=1\Delta$$

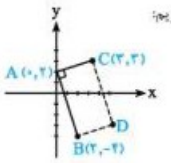


سؤال دانش‌پژوه (تیک‌سیما پهلوان): آقا اجازه چرا گفتین نقطهٔ برخورد (تقاطع) دو خط روی هر دو خطه؟

پاسخ: بذار رو شکل توضیح بدم، ببین دو خط مقابل، همدیگرو توی نقطهٔ A قطع کردن. همون‌طوری که می‌بینی A هم روی خط $\Upsilon x-\Upsilon y=\Delta$ قرار داره و هم روی خطی که رنبالشیم. پس مختصات A در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کنه.

@khanen_book

۲۱ ۳ می‌دانیم در مستطیل اضلاع روبه‌رو به هم شیب‌های برابر دارند. پس شیب ضلع CD برابر شیب ضلع AB است. داریم:

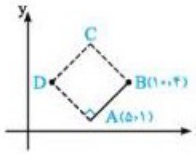


$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۴-۲}{۲-۰}=-\frac{۶}{۲}=-۳\Rightarrow m_{CD}=-۳$$

حال معادلهٔ خط CD را با داشتن $C(۳,۳)$ و $m_{CD}=-۳$ می‌نویسیم:

$$y-۳=-۳(x-۳)\xrightarrow[y=۰]{\text{برخورد با محور x}}۰-۳=-۳(x-۳)\Rightarrow x-۳=۱\Rightarrow x=۴$$

۲۲ ۳ فرض کنید مربع مورد نظر به صورت مقابل باشد:



می‌دانیم در مربع، اضلاع AB و AD برهم عمود است. پس شیب AD، قرینه و معکوس شیب ضلع AB است:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow m_{AD}=-\frac{۱}{m_{AB}}=-\frac{۱}{\frac{۳}{۵}}=-\frac{۵}{۳}$$

حال با داشتن شیب $m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$ و نقطهٔ $A(۵,۱)$، معادلهٔ خط گذرنده از ضلع AD را به دست می‌آوریم:

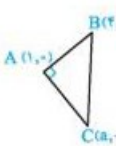
$$y-۱=-\frac{۵}{۳}(x-۵)$$

برای محاسبهٔ محل برخورد این خط و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $(y=x)$ در معادلهٔ خط فوق به جای y، x قرار می‌دهیم:

$$x-۱=-\frac{۵}{۳}(x-۵)\Rightarrow ۳x-۳=-۵x+۲۵\Rightarrow ۸x=۲۸\Rightarrow x=\frac{۲۸}{۸}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

چون $x=y$ است، پس عرض نقطهٔ برخورد هم ۳/۵ است.

۲۳ ۱ مثلث ABC متساوی‌الساقین و در رأس A قائمه است. پس دو پاره‌خط AB و AC برهم عمودند. لذا حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها (-۱) است. داریم:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲-۰}{۴-۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-a-۰}{a-۱}=-\frac{a}{a-۱}$$

$$\Rightarrow m_{AB}\times m_{AC}=-۱\Rightarrow\frac{۲}{۳}\times\frac{-a}{a-۱}=-۱\Rightarrow\frac{-۲a}{۳a-۳}=-۱\Rightarrow -۲a=-۳a+۳\Rightarrow a=۳$$

سؤال دانش‌پژوه (لیلا قهرمانی‌پور)، آقا اجازه ما اومدیم طول اضلاع AB، AC و BC رو پیدا کردیم و بعدش در فرمول فیثاغورس $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ قرار دادیم و a رو به دست آوردیم. اینم میشه؟

پاسخ: آره میشه ولی ۲ ساعت طول می‌کشه! افراد مبتدی از این راهی که تو گفتی میرن!

۲۴ ۴ می‌دانیم در متوازی الاضلاع، اضلاع روبه‌رو موازی‌اند؛ پس AC با BD موازی است. حال شیب خط BD را یافته و از روی آن، شیب خط AC را به دست می‌آوریم:

$$۲y-۳x=۱\Rightarrow \text{شیب BD}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \text{شیب AC}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ ضلع AC برابر است با:

$$y-y_A=m_{AC}(x-x_A)\Rightarrow y-۶=\frac{۳}{۲}(x-۷)\Rightarrow ۲y-۱۲=۳x-۲۱\Rightarrow ۲y-۳x=-۹$$

حال برای به دست آوردن عرض نقطهٔ C کافی است، معادلات دو خط AC و BC را در یک دستگاه حل کنیم:

$$\begin{matrix}۲\times\\ ۳\times\end{matrix}\begin{cases}۲y-۳x=-۹\\ ۳y+۲x=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۸y-۱۲x=-۳۶\\ ۹y+۱۲x=۲۴\end{cases}\xrightarrow{+}۱۷y=-۱۲\Rightarrow y=\frac{-۱۲}{۱۷}$$

۲۵ ۳ دو خط $(۲m+۱)x-y=۱$ و $(m+۱)y-x=۲$ بر هم عمودند. پس حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-۱) است. پس شیب‌های آن‌ها را حساب کنیم:

$$y-(۲m+۱)x=۱\Rightarrow y=(۲m+۱)x+۱\Rightarrow \text{شیب}=۲m+۱$$

$$(m+۱)y-x=۲\Rightarrow (m+۱)y=x+۲\Rightarrow y=\frac{۱}{m+۱}x+\frac{۲}{m+۱}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{۱}{m+۱}$$

بنابراین:

$$\text{شیب خط اول}\times\text{شیب خط دوم}=-۱\Rightarrow (۲m+۱)\times\frac{۱}{m+۱}=-۱\Rightarrow\frac{۲m+۱}{m+۱}=-۱\Rightarrow ۲m+۱=-m-۱\Rightarrow ۳m=-۲\Rightarrow m=\frac{-۲}{۳}$$

@khanen_book

۲۶ ۲ ابتدا شیب هر دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$(k+1)y+2kx-k+1=0 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{2k}{k+1}$$

$$A(2,-1) \text{ و } B(8,3) \Rightarrow \text{شیب} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-1)}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

دو خط بر هم عمودند، پس حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) است. بنابراین داریم:

$$\frac{-2k}{k+1} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow \frac{-4k}{2k+3} = -1 \Rightarrow 4k = 2k+3 \Rightarrow k = 3$$

حال $k=3$ را در معادلهٔ خط L قرار دهیم تا معادلهٔ آن به‌دست آید:

$$(k+1)y+2kx-k+1=0 \xrightarrow{k=3} 4y+6x-3+1=0 \xrightarrow{\div 2} 2y+3x-1=0 \Rightarrow 2y+3x=1$$

۲۷ ۲ ابتدا مختصات وسط پاره‌خط‌های AB و AC را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{وسط پاره‌خط AB: } x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{0+(-2)}{2} = -1 \text{ و } y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{وسط پاره‌خط AC: } x_N = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y_N = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow N\left(\frac{1}{2},1\right)$$

حال طول پاره‌خط MN را می‌یابیم:

$$MN = \sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2} = \sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۲۸ ۴ عرض نقطهٔ A را y_A فرض می‌کنیم. فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(-2,y_A)$ و $B(1,-3)$ برابر ۵ است. بنابراین:

$$AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{(-2-1)^2+(y_A-(-3))^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25 = 9+(y_A+3)^2 \Rightarrow (y_A+3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow (y_A+3)^2-16=0 \Rightarrow \underbrace{(y_A+3)^2-4^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}=0 \Rightarrow (y_A+3-4)(y_A+3+4)=0$$

$$\Rightarrow (y_A-1)(y_A+7)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_A-1=0 \Rightarrow y_A=1 \\ y_A+7=0 \Rightarrow y_A=-7 \end{cases}$$

سؤال دانش‌پژوه (مریم گلدره): **آقا من اومدم گزینه‌ها را در معادلهٔ $(y_A+3)^2=16$ جایگذاری کردم، دیدم اگه $y_A=-7$ باشه تساوی برقراره و گفتم همون جوابه.**

پاسخ: آفرین به هوشت. البته اول سال تحصیلیه همه خوبن ایشالا تا آخر سال هم اینطوری فعال باشین ☺

۲۹ ۳ فاصلهٔ خانه از دو تا مرکز آتش‌نشانی را حساب می‌کنیم تا ببینیم کدام مرکز به خانهٔ آتش‌گرفته نزدیک‌تر است.

$$\begin{cases} P(50,30) \\ A(10,-20) \\ B(80,90) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP = \sqrt{(50-10)^2+(30-(-20))^2} = \sqrt{40^2+50^2} = \sqrt{1600+2500} = \sqrt{4100} \\ BP = \sqrt{(80-50)^2+(90-30)^2} = \sqrt{30^2+60^2} = \sqrt{900+3600} = \sqrt{4500} \end{cases}$$

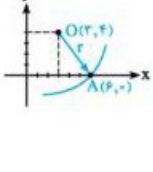
پس مرکز آتش‌نشانی A به خانهٔ آتش گرفته شده نزدیک‌تر است و اگر اعزام آتش‌نشانان از آن‌جا انجام بگیرد، بهتر است.

۳۰ ۴

$$AB = \sqrt{(61-46)^2+(25-38)^2} = \sqrt{15^2+13^2} = \sqrt{225+169} = \sqrt{394}$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ مستقیم این دو شهر در حالت واقعی} = 110 \times AB = 110\sqrt{394}$$

۳۱ ۱ دایرهٔ موردنظر محور xها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $A(6,0)$ روی دایره قرار دارد. از طرفی فاصلهٔ هر نقطه روی محیط دایره تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است. پس داریم:



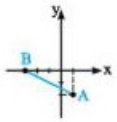
$$\text{شعاع} = r = OA = \sqrt{(6-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

بنابراین:

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r \xrightarrow{r=5} 2\pi(5) = 10\pi$$

@khaneh_book

۳۲ ۴ ابتدا طول قطر مربع را می‌یابیم:

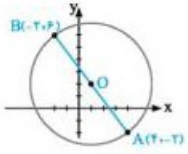


$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

از طرفی می‌دانیم: (ضلع × $\sqrt{2}$ = قطر). پس داریم:

$$\sqrt{20}=\sqrt{2}\times\text{ضلع}\Rightarrow\text{ضلع}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{20}{2}}=\sqrt{10}\Rightarrow\text{محیط}=4\,(\text{ضلع})=4\sqrt{10}=\sqrt{16\times10}=\sqrt{160}$$

۳۳ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**



گزینهٔ (۱): چون A و B دو سر قطر دایره هستند، پس وسط قطر AB همان مرکز دایره است. لذا داریم:

$$\begin{cases}x_O=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4+(-2)}{2}=1\\ y_O=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+6}{2}=2\end{cases}\Rightarrow O(1,2)\quad\checkmark$$

گزینهٔ (۲): ابتدا طول قطر را می‌یابیم:

$$AB=\sqrt{(4-(-2))^2+(-2-6)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10\Rightarrow\frac{\text{قطر}}{2}=\text{شعاع}=5\quad\checkmark$$

گزینهٔ (۳): اگر نقطهٔ $C(4,6)$ روی محیط دایره باشد، باید فاصله‌اش تا مرکز دایره $O(1,2)$ برابر شعاع دایره باشد:

$$OC=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

پس نقطهٔ C روی محیط دایره قرار دارد.

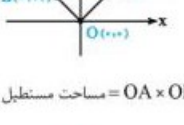
گزینهٔ (۴): اگر معادلهٔ $2x+3y=4$، معادلهٔ یکی از قطرهای دایره باشد، حتماً مختصات مرکز دایره در آن صدق می‌کند:

$$2x+3y=4\xrightarrow{O(1,2)}\overbrace{2(1)+3(2)}^{8}\neq4\Rightarrow$$

این گزینه غلط و جواب است.

۳۴ ۲ *واسه حل اینجور مسائل، کشیدن شکل فیلی به ما کمک می‌کنه!*

با توجه به شکل، مساحت مستطیل برابر $OA\times OB$ می‌شود. حال طول OB و OA را می‌یابیم:



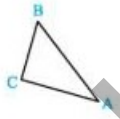
$$OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

$$OB=\sqrt{(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت مستطیل}=OA\times OB=\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$$

۳۵ ۳ برای پیدا کردن محیط مثلث باید طول اضلاع AB، AC و BC را به‌دست آوریم:



$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

پس محیط مثلث برابر می‌شود با:

$$AB+AC+BC=5+2\sqrt{5}+\sqrt{5}=5+3\sqrt{5}$$

۳۶ ۳ با توجه به شکل حدس می‌زنیم AB و AC بر هم عمودند. برای آن‌که مطمئن شویم، شیب آن‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{cases}m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-(-1)}{1-0}=-1\\ m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2-(-1)}{-1-0}=1\end{cases}\Rightarrow m_{AB}\times m_{AC}=-1\times1=-1$$

چون حاصل‌ضرب شیب‌ها (۱-) شد پس مطمئن شدیم دو ضلع AB و AC بر هم عمودند. در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است. برای محاسبهٔ محیط باید طول اضلاع آن را بیابیم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-0)^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-(-2))^2}=\sqrt{4+0}=\sqrt{4}=2$$

@khanehketab

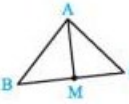
پس اولاً چون $AB = AC$ شد، پس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. ثانیاً محیط آن برابر می‌شود با:

$$\text{محیط} = AB + AC + BC = \sqrt{۲} + \sqrt{۲} + ۲ = ۲\sqrt{۲} + ۲$$

سؤال *دانش‌پژوه (ناصر افقه‌پاری):* **آقا اجازه ما اول اومدیم طول اضلاع رو به‌دست آوردیم و فهمیدیم چون دوتا ضلع با هم برابرند مثلث متساوی الساقینه، بعدش طول اضلاع رو در رابطهٔ فیثاغورس $a^۲ = b^۲ + c^۲$ چک کردیم چون تساوی برقرار شد، گفتیم پس قائم‌الزاویه هم هستش. آیا درسته حرف ما؟**

پاسخ: ناصر از این حرفِ تو، اشک تو چشای من هم شدا یله کاملاً درسته. فکرشم نمی‌کردم این‌قدر تاثیر کتاب خوب، زور روی تو، فورشو نشون بده!

۳۷ **۲** همان‌طوری که در شکل می‌بینید، میانهٔ AM از نقطهٔ A به وسط ضلع BC (نقطهٔ M) وصل می‌شود. پس ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط BC را می‌یابیم:



$$x_M = \frac{x_C + x_B}{۲} = \frac{۴ + (-۲)}{۲} = ۱ \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_C + y_B}{۲} = \frac{۲ + (-۲)}{۲} = ۰ \Rightarrow M(۱,۰)$$

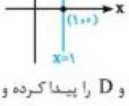
حال با استفاده از نقاط $A(۱,۴)$ و $M(۱,۰)$، طول میانهٔ AM را می‌یابیم:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۱-۱)^۲ + (۰-۴)^۲} = \sqrt{۰+۱۶} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۳۸ **۱** ابتدا مختصات وسط پاره‌خط BC را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{۲} = \frac{۴ + (-۲)}{۲} = ۱ \;,\; y_M = \frac{y_C + y_B}{۲} = \frac{۲ + (-۲)}{۲} = ۰ \Rightarrow M(۱,۰)$$

با معلوم شدن دو نقطهٔ A و M می‌توان معادلهٔ میانهٔ AM را نوشت. حواستان باشد A و M دارای طول یکسان ۱ هستند. پس طبق درسنامه معادلهٔ خط گذرنده از آن‌ها به‌صورت $x = ۱$ خواهد بود. واضح است که این خط محور x ها را در $x = ۱$ قطع می‌کند.



سؤال *دانش‌پژوه (شهرام هدهدی):* **آقا کجا واضحه؟ واسه ما که خیلی هم تاریکه!**

پاسخ: بذار شکل بکشم واست تا تاریکی تو هم از بین بره. خط $x = ۱$ محور x ها رو در $x = ۱$ قطع می‌کنه.

پس نقطهٔ برخورد آن با محور x ها، نقطهٔ $(۱,۰)$ میشه.

۳۹ **۳** در متوازی‌الاضلاع نقطهٔ O وسط دو قطر AC و BD است. حال با توجه به فرمول وسط پاره‌خط، مختصات رئوس A و D را پیدا کرده و سپس با معلوم شدن دو نقطهٔ A و D می‌توانیم معادلهٔ خط AD را بنویسیم:

$$\text{AC وسط } O: \begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_C}{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{x_A + ۲}{۲} \Rightarrow ۱۰ = x_A + ۲ \Rightarrow x_A = ۸ \\ y_O = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{y_A + ۲}{۲} \Rightarrow ۸ = y_A + ۲ \Rightarrow y_A = ۶ \end{cases} \Rightarrow A(۸,۶)$$

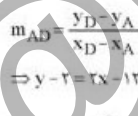
$$\text{BD وسط } O: \begin{cases} x_O = \frac{x_B + x_D}{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{۴ + x_D}{۲} \Rightarrow ۱۰ = ۴ + x_D \Rightarrow x_D = ۶ \\ y_O = \frac{y_B + y_D}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۶ + y_D}{۲} \Rightarrow ۸ = ۶ + y_D \Rightarrow y_D = ۲ \end{cases} \Rightarrow D(۶,۲)$$

حال می‌توانیم معادلهٔ AD را بنویسیم:

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{۲-۶}{۶-۸} = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \Rightarrow y - y_D = m_{AD}(x - x_D) \Rightarrow y - ۲ = ۲(x - ۶)$$

$$\Rightarrow y - ۲ = ۲x - ۱۲ \Rightarrow y = ۲x - ۱۰$$

۴۰ **۱** ابتدا نقطهٔ برخورد دو قطر را که همان مرکز مربع است به کمک حل دستگاه زیر پیدا می‌کنیم:



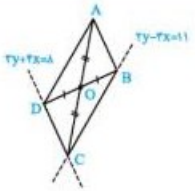
$$\begin{cases} y - ۲x = ۰ \Rightarrow y = ۲x & (*) \\ y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \end{cases} \xrightarrow{(*)} ۲x = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲x + \frac{۱}{۲}x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۵x}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{(*)} y = ۲ \times ۱ = ۲$$

پس مرکز مربع $O(۱,۲)$ می‌شود. از طرفی فاصلهٔ مرکز مربع تا یکی از رأس‌های آن مثل رأس A، برابر نصف قطر است. بنابراین:

$$\text{نصف قطر} = \sqrt{(x_O - x_A)^۲ + (y_O - y_A)^۲} = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵} \Rightarrow \text{قطر} = ۲\sqrt{۵}$$

@khanen_book

۴۱ ۳ معادلهٔ دو ضلع BC و CD را در یک دستگاه قرار داده و با حل دستگاه محل تلاقی آن‌ها یعنی نقطهٔ C مشخص می‌شود. داریم:



$$\begin{cases} 4\times & 2y-3x=11 \\ 3\times & 3y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y-12x=44 \\ 9y+12x=24 \end{cases} \oplus$$

$$+17y=68 \Rightarrow y=\frac{68}{17}=4 \xrightarrow[\text{از معادلات}]{\text{جای‌گذاری در یکی}} x=-1 \Rightarrow C(-1,4)$$

حال با معلوم بودن مختصات دو رأس مقابل A و C (دو سر قطر AC)، مختصات وسط قطر را می‌یابیم:

$$x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{7+(-1)}{2}=3 \text{ و } y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{6+4}{2}=5 \Rightarrow O(3,5)$$

۴۲ ۴ با فرض $A(3,m)$ و $B(7,-1)$، مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB را می‌یابیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+7}{2}=5 \text{ و } y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{m-1}{2} \Rightarrow M\left(5,\frac{m-1}{2}\right)$$

شیب خط $2x=y-4$ یا همان $y=2x+4$ برابر ۲ است. چون خط d موازی آن می‌باشد، پس شیب خط d نیز ۲ می‌باشد و از وسط پاره‌خط AB یعنی از نقطهٔ M عبور می‌کند. پس معادلهٔ خط d برابر می‌شود با:

$$y-y_M=m(x-x_M) \Rightarrow y-\left(\frac{m-1}{2}\right)=2(x-5) \Rightarrow y=2x-10+\frac{m-1}{2}$$

طبق فرض عرض از مبدأ خط ۵- است. با توجه به معادلهٔ داده شده عرض از مبدأ $\frac{m-1}{2}-10$ بوده که باید آن را مساوی ۵- قرار دهیم تا m به‌دست آید:

$$-10+\frac{m-1}{2}=-5 \Rightarrow \frac{m-1}{2}=5 \Rightarrow m-1=10 \Rightarrow m=11$$

سؤال دانش‌پژوه (علیرضا اسماعیلی)، آقا اجازه عرض از مبدأ خط مگه $\frac{m-1}{2}$ نیست؟ چرا ۱۰- رو هم با اون گرفتین؟

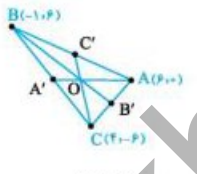
پاسخ: ببین هر معادلهٔ خط استانداردی از ۲ قسمت تشکیل شده، یه قسمت اون x داره و قسمت دیگه x نداره. به قسمت بدون x می‌گیم عرض از مبدا و به ضریب x میگیم شیب. حالا یه بار دیگه ببین.

$$y=\underbrace{2x}_{\text{قسمت دارای x}}\underbrace{-10+\frac{m-1}{2}}_{\text{قسمت بدون x}}$$

ـ آره، آقا حالا درست شد!

ـ درست پور پیه، برای تو حالا درست شد!

۴۳ ۱ فرض کنید O محل برخورد میانه‌ها باشد. برای پیدا کردن آن، کافی است معادلهٔ دو تا از میانه‌ها را به دست آورده و آن دو معادله را در یک دستگاه قرار داده و از حل آن مختصات O را بیابیم.



معادلهٔ میانهٔ AA': نقطهٔ A' وسط ضلع BC است. پس مختصات آن برابر می‌شود با:

$$x_{A'}=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2} \text{ و } y_{A'}=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{6+(-6)}{2}=0 \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},0\right)$$

با معلوم شدن دو نقطهٔ A و A' می‌توانیم معادلهٔ میانهٔ AA' را بنویسیم:

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}=\frac{0-0}{\frac{3}{2}-6}=0 \Rightarrow \text{معادله: } y=y_A \Rightarrow y=0 \text{ پس میانهٔ } AA' \text{ افقی است.}$$

معادلهٔ میانهٔ CC': نقطهٔ C' وسط ضلع AB است. پس مختصات آن برابر می‌شود با:

$$x_{C'}=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{6+(-1)}{2}=\frac{5}{2} \text{ و } y_{C'}=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+6}{2}=3 \Rightarrow C'\left(\frac{5}{2},3\right)$$

با معلوم شدن دو نقطهٔ C و C' می‌توانیم معادلهٔ میانهٔ CC' را بنویسیم:

$$m_{CC'}=\frac{y_{C'}-y_C}{x_{C'}-x_C}=\frac{3-(-6)}{\frac{5}{2}-4}=\frac{9}{-\frac{3}{2}}=\frac{-18}{3}=-6 \Rightarrow y-y_C=m_{CC'}(x-x_C)$$

$$\Rightarrow y-(-6)=-6(x-4) \Rightarrow y+6=-6x+24 \Rightarrow y=-6x+18$$

حال معادلات میانه‌های CC' و AA' را در یک دستگاه قرار داده تا محل تلاقی آن‌ها پیدا شود:

$$\begin{cases} y=0 & (*) \\ y=-6x+18 \end{cases} \xrightarrow{(*)} 0=-6x+18 \Rightarrow 6x=18 \Rightarrow x=3 \Rightarrow O(3,0)$$

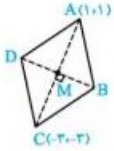
با توجه به گزینه‌ها، فقط خط $y=-x+3$ از نقطهٔ $O(3,0)$ عبور می‌کند زیرا مختصات O در معادلهٔ آن صدق می‌کند. پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

@khanen_book

سؤال دانش‌پژوه (والیه همزه‌لویی): **آقا اجازه سؤال محل برخورد سه میانه رو خواسته بود، شما چرا محل برخورد دو تا میانه‌رو به دست آوردین پس؟**

پاسخ: اگه به شکل دقت کنی می‌بینی که محل برخورد دو میانه همان محل برخورد سه میانه یعنی نقطهٔ O است. پس کافیه هر دو تا میانه‌ای که دوس داشتیو در نظر بگیری و محل برخوردشونو پیدا کنی.

۴۴ ۴ فعلاً داریم داد و بیداد می‌کنیم که این دیگه چه سؤال سقتیه آقا! خب ابتدا شکل بکشیم تا مسأله کمی واضح‌تر شود، می‌دانیم در لوزی قطرها بر هم عمودند و هم‌دیگر را نصف می‌کنند.



برای نوشتن معادلهٔ خط DB به دو چیز نیاز داریم یکی مختصات نقطهٔ M و دیگری شیب خط DB. اول مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{۱ + (-۳)}{۲} = -۱ \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{۲} = \frac{۱ + (-۳)}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow M(-۱,-۱)$$

از طرفی چون DB بر AC عمود است. شیب AC را یافته و آن را قرینه و معکوس می‌کنیم:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-۳-۱}{-۳-۱} = ۱ \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m_{BD} = -۱$$

حال معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y - y_M = m_{BD}(x - x_M) \Rightarrow y - (-۱) = (-۱)(x - (-۱)) \Rightarrow y + ۱ = -x - ۱ \Rightarrow y = -x - ۲$$

صبر کنید گزینهٔ (۱) را انتخاب نکنید! ما دنبال خطی هستیم که دو رأس B و D بتواند روی آن قرار بگیرد اما اگر یکی از نقاط B یا D روی نقطهٔ M قرار بگیرد، آنگاه آن نقطه به همراه A و C در یک راستا بوده و لذا شکل لوزی نمی‌شود! پس باید نقطهٔ M را از خط BD حذف کنیم. برای این کار باید شرط $x \neq -۱$ را به خط اضافه کنیم زیرا $x = -۱$ طول نقطهٔ M است که آن را نمی‌خواهیم!

۴۵ ۱ با توجه به فرمول وسط پاره‌خط داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{x_A + ۴}{۲} \Rightarrow ۴ = x_A + ۴ \Rightarrow x_A = ۰$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow ۳ = \frac{y_A + ۶}{۲} \Rightarrow ۶ = y_A + ۶ \Rightarrow y_A = ۰$$

پس $A(۰,۰)$. از طرفی شیب پاره‌خط AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۶-۰}{۴-۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{شیب خط عمود بر } AB = -\frac{۲}{۳}$$

حال معادلهٔ خط گذرنده از A و عمود بر پاره‌خط AB را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۰ = -\frac{۲}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x$$

عرض از مبدأ خط فوق صفر است. پس محور yها را در نقطه‌ای به عرض صفر قطع می‌کند.

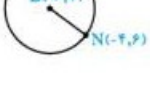
۴۶ ۴ A قرینهٔ B نسبت به نقطهٔ $M(-۲,۵)$ است، یعنی M وسط پاره‌خط AB است (مانند شکل زیر) پس داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow -۲ = \frac{۲ + x_B}{۲} \Rightarrow -۴ = ۲ + x_B \Rightarrow x_B = -۶ \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{۳ + y_B}{۲} \Rightarrow ۱۰ = ۳ + y_B \Rightarrow y_B = ۷ \end{cases} \Rightarrow B(-۶,۷)$$

حال وسط پاره‌خط MB را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_M}{۲} = \frac{-۶ + (-۲)}{۲} = -۴ \\ y_N = \frac{y_B + y_M}{۲} = \frac{۷ + ۵}{۲} = ۶ \end{cases} \Rightarrow N(-۴,۶)$$

حال شعاع دایره را می‌یابیم:



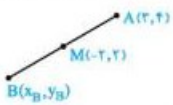
$$R = BN = \sqrt{(-۶ - (-۴))^۲ + (۷ - ۶)^۲} = \sqrt{۴ + ۱} = \sqrt{۵}$$

پس مساحت دایره برابر می‌شود با:

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲ = \pi(\sqrt{۵})^۲ = ۵\pi$$

@khanen_book

۴۷ **۴** ابتدا نقطهٔ B قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-۲,۲)$ می‌یابیم. در این صورت با توجه به شکل نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است. داریم:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow -۲ = \frac{۳ + x_B}{۲} \Rightarrow -۴ = ۳ + x_B \Rightarrow x_B = -۷$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{۴ + y_B}{۲} \Rightarrow ۴ = ۴ + y_B \Rightarrow y_B = ۰$$

حال شعاع دایره به مرکز $O(-۱,۲)$ و عبوری از نقطهٔ $B(-۷,۰)$ را می‌یابیم:

$$R = \sqrt{(-۱-(-۷))^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۳۶+۴} = \sqrt{۴۰}$$

اگر نقطه‌ای روی محیط دایره باشد، فاصله‌اش تا مرکز دایره باید برابر شعاع یعنی $\sqrt{۴۰}$ باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $C(-۲,۳) : OC = \sqrt{(-۲-(-۱))^۲ + (۳-۲)^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} \neq \sqrt{۴۰}$

گزینهٔ (۲): $C(-۵,۴) : OC = \sqrt{(-۵-(-۱))^۲ + (۴-۲)^۲} = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} \neq \sqrt{۴۰}$

گزینهٔ (۳): $C(۸,۳) : OC = \sqrt{(۸-(-۱))^۲ + (۳-۲)^۲} = \sqrt{۸۱+۱} = \sqrt{۸۲} \neq \sqrt{۴۰}$

گزینهٔ (۴): $C(۵,۴) : OC = \sqrt{(۵-(-۱))^۲ + (۴-۲)^۲} = \sqrt{۳۶+۴} = \sqrt{۴۰} = \sqrt{۴۰}$ ✓

۴۸ **۴** ابتدا شیب خط d گذرنده از نقاط $A(a,b)$ و $B(b,a)$ را می‌یابیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a-b}{b-a} = \frac{-(b-a)}{(b-a)} = -۱$$

حال درستی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): شیب خط $y - x = ۳$ یا $y = x + ۳$، یک است که چون قرینه و معکوس شیب خط d است، پس خط d بر خط $y = x + ۳$ عمود است و این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۲): شیب خط $۴x + ۲y = ۲(x-۳)$ را می‌یابیم: $۴x + ۲y = ۲x - ۶ \Rightarrow ۲y = -۲x - ۶ \Rightarrow y = -x - ۳$

چون در این خط $m = -۱$ بوده و برابر شیب خط d است، پس این دو خط موازی بوده و این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۳): نقطهٔ $(\frac{a+b}{۲}, \frac{a+b}{۲})$، در حقیقت مختصات وسط پاره‌خط AB است و چون نقاط A و B روی خط d قرار دارند، لذا وسط پاره‌خط AB نیز روی خط d قرار دارد. پس این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۴): غلط است، زیرا می‌دانیم نقطهٔ برخورد دو خط باید در معادلهٔ هر دو خط صدق کند ولی مختصات نقطهٔ $(\frac{b-a}{۲}, \frac{a+b}{۲})$ در ضابطهٔ $y = x$ صدق نمی‌کند! پس نمی‌تواند نقطهٔ برخورد خط d و خط $y = x$ باشد. قابل ذکر است که خط $y = x$ و خط d در نقطهٔ $(\frac{a+b}{۲}, \frac{a+b}{۲})$ متقاطع و در آن نقطه بر هم عمود هم هستند (چرا؟).

۴۹ **۱** ابتدا دو نقطه روی محورهای مختصات و نقطهٔ M را روی شکل نشان می‌دهیم؛ چون $M(-۳,۲)$ وسط پاره‌خط AB است. داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow -۳ = \frac{۰+\beta}{۲} \Rightarrow \beta = -۶ \Rightarrow B(-۶,۰)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{\alpha + ۰}{۲} \Rightarrow \alpha = ۴ \Rightarrow A(۰,۴)$$

$$\text{شیب } AB = \frac{۴-۰}{۰-(-۶)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

$$\text{معادلهٔ } AB : y - ۴ = \frac{۲}{۳}(x-۰) \Rightarrow ۳(y-۴) = ۲x \Rightarrow ۳y - ۲x = ۱۲ \xrightarrow{\times(-۱)} ۲x - ۳y = -۱۲$$

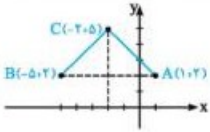
۵۰ **۱**

نکته

در هر متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

ابتدا شکل مربع را رسم کرده و سپس از فرمول فوق استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow ۱ + (-۵) = -۲ + x_D \Rightarrow x_D = -۲ \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow ۲ + ۲ = ۵ + y_D \Rightarrow y_D = -۱ \end{cases}$$

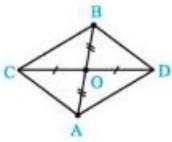
پس $x_D + y_D = -۳$.

@khanehbook

سؤال *دانش‌پژوه (آرمان بدیعی):* **آقا شما توی فرمول که نقاط A و C رو با هم و نقاط B و D رو با هم گرفته بودین پس چرا توی این مسأله A و B را با هم و C و D را با هم گرفتین؟**

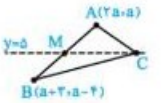
پاسخ: ببین عزیز جان، مهم اسم نقاط نیس که! مهم اینه که توی این فرمول نقاطی را باید با هم بگیریم که در متوازی‌الاضلاع، مقابل هم هستند. به کمک رسم شکل می‌توان فهمید کدام نقاط مقابل هم هستند.

۵۱ ۴ در چهارضلعی مقابل می‌توانیم رابطهٔ زیر را بنویسیم:



$$\begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \\ y_A + y_B = y_C + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲ + ۶ = ۱ + x_D \Rightarrow x_D = ۳ \\ -۱ + ۳ = ۲ + y_D \Rightarrow y_D = ۰ \end{cases} \Rightarrow D(۳,۰)$$

۵۲ ۱ میانهٔ نظیر رأس C پاره‌خطی است که یک سر آن رأس C و سر دیگر آن وسط ضلع AB است. پس ابتدا مختصات نقطهٔ M، وسط ضلع AB را می‌یابیم:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲a + (a+۳)}{۲} = \frac{۳a+۳}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{a + (a-۴)}{۲} = \frac{۲a-۴}{۲} = a - ۲$$

از طرفی معادلهٔ میانهٔ CM، $y = ۵$ است. چون نقطهٔ M روی این خط است، پس y_M نیز برابر ۵ خواهد بود. داریم:

$$y_M = ۵ \Rightarrow a - ۲ = ۵ \Rightarrow a = ۷ \Rightarrow x_M = \frac{۳a+۳}{۲} \overset{a=۷}{=\!=\!=} \frac{۳(۷)+۳}{۲} = ۱۲$$

پس $M(۱۲,۵)$ بوده و فاصلهٔ آن تا نقطهٔ $E(۸,۲)$ برابر است با:

$$ME = \sqrt{(۱۲-۸)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۵۳ ۴ میانگین سود سالانهٔ کارگاه در ده سالهٔ مورد نظر با توجه به نمودار برابر است با:

$$\text{میانگین سود سالانه} = \frac{۱۰۵ + ۷۵}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰$$

این مقدار سود در میانگین ۱۰ سالهٔ اول یعنی در سال ۱۳۸۰ $= \frac{۱۳۷۵ + ۱۳۸۵}{۲} = n$ام رخ می‌دهد. حال باید ببینیم در سال $۱۴۰۰ = ۱۳۸۰ + ۲۰ = (n+۲۰)$ام، سود سالانه چه‌قدر است. پس ابتدا معادلهٔ خط را می‌یابیم:

$$m = \text{شیب} : \frac{۱۰۵ - ۷۵}{۱۳۸۵ - ۱۳۷۵} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳ \Rightarrow y - ۷۵ = ۳(x - ۱۳۷۵) \Rightarrow y = ۳x - ۴۱۲۵ + ۷۵ \Rightarrow y = ۳x - ۴۰۵۰$$

حال زمان را ۱۴۰۰ قرار می‌دهیم تا سود سالانه را بیابیم: $۳(۱۴۰۰) - ۴۰۵۰ = ۱۵۰$ سود سالانه در سال ۱۴۰۰

۵۴ ۴ می‌دانیم عمودمنصف AB، آن را نصف کرده و بر آن عمود است. پس ابتدا مختصات وسط پاره خط AB و شیب AB را می‌یابیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۵+۳}{۲} = ۴ \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳+۵}{۲} = ۴ \Rightarrow M(۴,۴)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۵-۳}{۳-۵} = \frac{۲}{-۲} = -۱ \xrightarrow{\text{ضرب و معکوس}} m_{\text{عمودمنصف}} = ۱$$

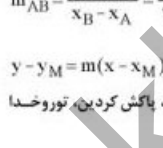
حال با داشتن نقطهٔ $M(۴,۴)$ و شیب ۱ معادلهٔ عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - ۴ = ۱(x - ۴) \Rightarrow y = x - ۴ + ۴ \Rightarrow y = x$$

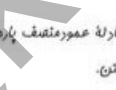
سؤال *دانش‌پژوه (عسل مهازیان):* **آقا اجازه احساس کردیم رو تخته یه فرمول نوشتین واسه این سؤال ولی بعد باگش کردین. تورو خدا اگه فرمولی داره بگین. قول می‌دیم خوب یادش بگیریم.**

پاسخ: این احساست منو کشته! باشه می‌گم ببینین بچه‌ها اگه $A(m,n)$ و $B(n,m)$ باشه، معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB میشه $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم). خواستون به مختصات A و B باشه‌ها، طول و عرض A و B جابه‌جا هستن.

۵۵ ۳ در مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل، رأس سوم C روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد. با توجه به شکل طول ضلع $AB = ۴$ است. از طرفی می‌دانیم ارتفاع در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. پس در این مثلث با ضلع $AB = ۴$، ارتفاع $CH = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$ است. حال وسط پاره‌خط AB را می‌یابیم:



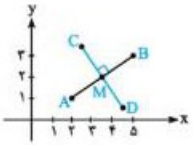
$$\text{مختصات نقطهٔ H} : x_H = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱+۵}{۲} = ۳ \quad , \quad y_H = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \Rightarrow H(۳,۱)$$



حال کافی است از نقطهٔ H به اندازه طول ارتفاع بالا برویم و به نقطهٔ C برسیم یا پایین برویم و به نقطهٔ C' برسیم (مسأله دو تا جواب دارد.)

@khanehbook

۵۶ ۳ $A(۲,۱)$ و $B(۵,۳)$ دو سر قطر AB از یک مربع هستند، می‌دانیم در مربع دو قطر عمودمنصف هم‌دیگر هستند. یعنی از وسط هم رد شده و حاصل‌ضرب شیب‌هایشان ۱- است (شیب‌ها قرینه و معکوس هم‌اند). حال برای نوشتن معادلهٔ قطر CD ابتدا وسط قطر AB و شیبش را به دست می‌آوریم:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳-۱}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow m_{CD}=-\frac{۱}{m_{AB}}=-\frac{۳}{۲}$$

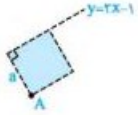
$$M\text{ مختصات: }x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۵}{۲}=\frac{۷}{۲},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲\Rightarrow M(\frac{۷}{۲},۲)$$

حال با داشتن یک نقطهٔ $M(\frac{۷}{۲},۲)$ و شیب $m_{CD}=-\frac{۳}{۲}$ معادلهٔ قطر CD را می‌نویسیم:

$$y-۲=-\frac{۳}{۲}(x-\frac{۷}{۲})\Rightarrow y-۲=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۲۱}{۴}+۲$$

پس عرض از مبدأ برابر $\frac{۲۹}{۴}=۲+\frac{۲۱}{۴}$ می‌شود.

۵۷ ۱ ابتدا معادلهٔ خط را به صورت $y-۲x+۱=۰$ نوشته و سپس فاصلهٔ A از خط $y=۲x-۱$ را می‌یابیم که با توجه به شکل، طول ضلع مربع است. پس با استفاده از فرمول فاصلهٔ یک نقطه از خط داریم:

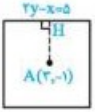


$$\text{ضلع a} = \text{فاصلهٔ A از خط}=\frac{|y_A-۲x_A+۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}\xrightarrow{A(۲,۰)}\frac{|۰-۲(۲)+۱|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}^۲}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت}=a^۲=(\sqrt{۵})^۲=۵$$

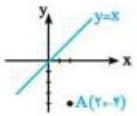
۵۸ ۴ فرض کنید در شکل مقابل A وسط قطر مربع باشد. در این صورت A مرکز مربع بوده و فاصله‌اش از ضلعی که معادلهٔ آن $۲y-x=۵$ است، برابر نصف ضلع مربع می‌باشد. پس ابتدا این فاصله را می‌یابیم:



$$\text{نصف ضلع مربع}=AH=\frac{|۲y_A-x_A-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}\xrightarrow{\text{همه به سمت چپ}}۲y-x-۵=۰\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{A(۲,-۱)}\frac{|۲(-۱)-۲-۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\text{ضلع مربع}=۲(\frac{۱۰}{\sqrt{۵}})=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\text{مساحت}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۲۰}{\sqrt{۵}})^۲=\frac{۴۰۰}{۵}=۸۰$$

۵۹ ۴ می‌دانیم معادلهٔ نیمساز اول و سوم برابر $y=x$ یا $y-x=۰$ است و فاصلهٔ یک رأس از قطر همان نصف قطر است:



$$\text{نصف قطر}=\frac{|y_A-x_A|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}\xrightarrow{A(۲,-۲)}\frac{|-۲-۲|}{\sqrt{۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}\Rightarrow\text{قطر}=۲\times۳\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}$$

از طرفی می‌دانیم قطر مربع، $\sqrt{۲}$ برابر ضلع است:

$$\text{مساحت}=(\text{ضلع})^۲=۶^۲=۳۶\Rightarrow\text{ضلع}\times\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}\Rightarrow\text{ضلع}=۶=\text{قطر}\times\sqrt{۲}$$

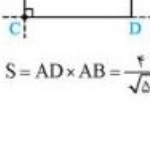
۶۰ ۱ فاصلهٔ $O(۰,۰)$ از خط $a^۲x+(a^۲+۱)y-۵=۰$ برابر ۱ است. داریم:

$$\frac{|a^۲(۰)+(a^۲+۱)(۰)-۵|}{\sqrt{(a^۲)^۲+(a^۲+۱)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}۱\Rightarrow\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}=۵\qquad(*)$$

حال فاصلهٔ $O(۰,۰)$ از خط $(a^۲+۱)x+a^۲y-۱۰=۰$ را می‌یابیم:

$$\text{فاصلهٔ موردنظر}=\frac{|(a^۲+۱)(۰)+a^۲(۰)-۱۰|}{\sqrt{(a^۲+۱)^۲+(a^۲)^۲}}=\frac{|-۱۰|}{\sqrt{a^۴+(a^۲+۱)^۲}}\xrightarrow{(*)}\frac{|-۱۰|}{۵}=۲$$

۶۱ ۲ چون مختصات رأس $A(۸,۵)$ در معادلات اضلاع داده شده صدق نمی‌کند، پس نقطهٔ A بر هیچ‌یک از این اضلاع واقع نیست و شکل تقریبی آن به‌صورت زیر است. با توجه به شکل، کافی است فاصلهٔ A را از دو ضلعی که معادلاتشان داده شده، به‌دست آوریم. این فاصله‌ها طول و عرض مستطیل می‌باشند:



$$AD=\frac{|۲x_A-y_A-۷|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}\xrightarrow{A(۸,۵)}\frac{|۱۶-۵-۷|}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$AB=\frac{|۲y_A+x_A-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}\xrightarrow{A(۸,۵)}\frac{|۱۰+۸-۶|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S=AD\times AB=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

@khanehbook

۶۲ **۲** فاصلهٔ $O(0,0)$ از خط $y=ax+b$ را می‌یابیم:

$$\text{فاصله}=\frac{|y-ax-b|}{\sqrt{1^2+(-a)^2}}\xrightarrow{O(0,0)}\frac{|0-a(0)-b|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{1+a^2}}\xrightarrow[\text{فاصله}=1]{\text{طبق فرض}}\frac{|b|}{\sqrt{1+a^2}}=1\Rightarrow|b|=\sqrt{1+a^2}\quad(*)$$

از طرفی خط از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرد، لذا مختصات این نقطه در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$y=ax+b\xrightarrow{(1,2)}2=a(1)+b\Rightarrow a+b=2\Rightarrow b=2-a$$

حال $b=2-a$ در معادلهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$|b|=\sqrt{1+a^2}\xrightarrow{b=2-a}|2-a|=\sqrt{1+a^2}\xrightarrow{\text{توان }2}(2-a)^2=1+a^2\Rightarrow 4+a^2-4a=1+a^2\Rightarrow 4-1=4a\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۶۳ **۳** فاصلهٔ $O(0,0)$ از خط $2y-mx=4-m$ را یافته و برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\text{فاصله}=\frac{|2y-mx-4+m|}{\sqrt{2^2+(-m)^2}}\xrightarrow{O(0,0)}\frac{|0-0-4+m|}{\sqrt{4+m^2}}=\frac{|m-4|}{\sqrt{4+m^2}}\xrightarrow[\text{فاصله}=2]{\text{طبق فرض}}2\Rightarrow|m-4|=2\sqrt{4+m^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان }2}(|m-4|)^2=(2\sqrt{4+m^2})^2\Rightarrow m^2+16-8m=4(4+m^2)\Rightarrow m^2+16-8m=16+4m^2$$

$$\Rightarrow 3m^2+8m=0\Rightarrow m(3m+8)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\3m+8=0\Rightarrow m=-\frac{8}{3}\end{cases}$$

به ازای $m=0$ معادلهٔ خط $2y-mx=4-m$ به صورت $y=2$ درمی‌آید که محور xها را قطع نمی‌کند. پس غلط است. حال $m=-\frac{8}{3}$ را در معادلهٔ خط قرار داده و محل برخورد آن با محور xها را می‌یابیم:

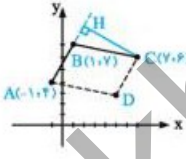
$$2y-mx=4-m\xrightarrow{m=-\frac{8}{3}}2y-\left(-\frac{8}{3}\right)x=4-\left(-\frac{8}{3}\right)\xrightarrow[y=0]{\text{برخورد با محور }x\text{ها}}\frac{8}{3}x=\frac{20}{3}\Rightarrow x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

۶۴ **۲** نقطهٔ مجهول $A(x_A,y_A)$ بر روی خط به معادلهٔ $y=x-1$ قرار دارد، پس $y_A=x_A-1$. چون فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $2x-3y-5=0$ برابر $\sqrt{13}$ است، در نتیجه با توجه به فرمول فاصلهٔ نقطه از خط داریم:

$$AH=\frac{|2x_A-3y_A-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}\xrightarrow{y_A=x_A-1}\frac{|2x_A-3(x_A-1)-5|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}\Rightarrow|-x_A-2|=\sqrt{13}\times\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow|-(x_A+2)|=13\Rightarrow|x_A+2|=13\Rightarrow x_A+2=\pm13\Rightarrow x_A=11,-15$$

۶۵ **۲** با توجه به شکل ابتدا معادلهٔ ضلع AB را نوشته و سپس فاصلهٔ نقطهٔ C از آن را می‌یابیم که همان طول ارتفاع CH است.



$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{7-2}{1-(-1)}=\frac{3}{2}\xrightarrow{B(1,7)}y-7=\frac{3}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow 2y-14=3x-3\Rightarrow 2y-3x-11=0$$

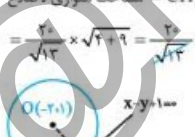
$$\text{فاصلهٔ }C(7,6)\text{ از }AB=\frac{|2y_C-3x_C-11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\xrightarrow{C(7,6)}\frac{|2(6)-3(7)-11|}{\sqrt{13}}=\frac{|12-21-11|}{\sqrt{13}}=\frac{20}{\sqrt{13}}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت مستوی‌الاضلاع}=CH\times AB=\frac{20}{\sqrt{13}}\times\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\frac{20}{\sqrt{13}}\times\sqrt{(1-(-1))^2+(7-2)^2}$$

$$=\frac{20}{\sqrt{13}}\times\sqrt{4+9}=\frac{20}{\sqrt{13}}\times\sqrt{13}=20$$

۶۶ **۲** مرکز دایره، نقطهٔ $O(-2,1)$ است. این دایره بر خط به معادلهٔ $y=x-1$ مماس است. پس فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است. داریم:



$$OH=R=\frac{|y_0-x_0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\xrightarrow{O(-2,1)}\frac{|1-(-2)+1|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

۶۷ **۱** فاصلهٔ مرکز تا خط $x+3y=0$ همان شعاع دایره است. داریم:

$$\text{شعاع}=\frac{|x_0+3y_0|}{\sqrt{1^2+3^2}}\xrightarrow{O(1,-2)}\frac{|1+3(-2)|}{\sqrt{10}}=\frac{|-5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$$

از طرفی شعاع برابر $\sqrt{5-a}$ است. داریم:

$$\frac{5}{\sqrt{10}}=\sqrt{5-a}\xrightarrow{\text{توان }2}\frac{25}{10}=5-a\Rightarrow 2/5=5-a\Rightarrow a=2/5$$

@khanen_book

۶۸ **۴** با توجه به درسنامه مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) نوشتن معادلهٔ خط BC:

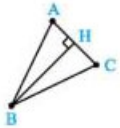
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-۲-۰}{۱-۳}=۱\Rightarrow y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\xrightarrow{B(۳,۰)}y-۰=۱(x-۳)\Rightarrow y-x+۳=۰$$

۲) استفاده از فرمول فاصله:

$$AH=\frac{|y_A-x_A+۳|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}\xrightarrow{A(-۱,۲)}\frac{|۲-(-۱)+۳|}{\sqrt{۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

۶۹ **۴** با توجه به درسنامه مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) محاسبهٔ شیب ضلع AC:



$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{۲-۴}{۴-۱}=\frac{-۲}{۳}$$

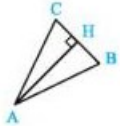
۲) قرینه و معکوس کردن شیب AC:

$$m_{BH}=\frac{-۱}{m_{AC}}=\frac{-۱}{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

۳) معادلهٔ ارتفاع BH:

$$y-y_B=m_{BH}(x-x_B)\Rightarrow y-(-۲)=\frac{۳}{۲}(x-(-۲))\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۱\Rightarrow ۲y=۳x+۲\Rightarrow ۲y-۳x=۲$$

۷۰ **۲** برای نوشتن معادلهٔ ارتفاع AH، باید نقطهٔ A را داشته باشیم. این نقطه، محل برخورد دو خط AB و AC است. پس معادلات این دو خط را در یک دستگاه قرار داده و با حل کردن دستگاه مختصات نقطهٔ A را می‌یابیم:



$$\begin{cases}۲y-x=۳\\y-۲x=۵\end{cases}\xrightarrow{(-۲)\times}\begin{cases}۲y-x=۳\\-۲y+۴x=-۱۰\end{cases}\xrightarrow{\oplus}۳x=-۷\Rightarrow x=\frac{-۷}{۳}\xrightarrow[y-۲x=۵]{\text{جایگذاری در معادلهٔ}}y-۲\left(\frac{-۷}{۳}\right)=۵\Rightarrow y=۵-\frac{۱۴}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

پس $A\left(-\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳}\right)$. از طرفی ارتفاع AH به ضلع BC به معادلهٔ $۲y+۳x=۶$ عمود است و لذا شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است:

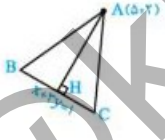
$$۲y+۳x=۶\xrightarrow{\text{شیب}=-\frac{x\text{ ضریب}}{y\text{ ضریب}}}\text{شیب}=\frac{-۳}{۲}\xrightarrow[\text{و معکوس}]{\text{قرینه}}\text{شیب AH}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین با معلوم شدن A و شیب AH معادله را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\left(x-\left(-\frac{۷}{۳}\right)\right)\xrightarrow{\times۳}۳y-۱=۲\left(x+\frac{۷}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow ۳y-۲x=\frac{۱۷}{۳}\xrightarrow{\times۳}۹y-۶x=۱۷$$

۷۱ **۳** برای یافتن نقطهٔ H که محل تلاقی دو خط AH و BC است، باید معادلات AH و BC را در یک دستگاه قرار دهیم. حل آن دستگاه به ما مختصات نقطهٔ H را می‌دهد. پس ابتدا معادلهٔ ارتفاع AH را می‌یابیم.



چون AH عمود بر ضلع BC می‌باشد، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب خط BC است:

$$\text{BC خط:}\ x+۳y=۱\Rightarrow m_{BC}=-\frac{\text{ضریب }x}{\text{ضریب }y}=\frac{-۱}{۳}\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{قرینه و}}m_{AH}=۳$$

حال که شیب خط AH و نقطهٔ A را داریم، معادله ارتفاع AH را می‌توانیم بنویسیم:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-۲=۳(x-۵)\Rightarrow y=۳x-۱۵+۲\Rightarrow y=۳x-۱۳$$

اکنون معادلهٔ ارتفاع AH و ضلع BC را در یک دستگاه قرار داده و با حل دستگاه مختصات نقطهٔ H را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=۳x-۱۳\qquad(*)\\x+۳y=۱\end{cases}\xrightarrow{(*)}x+۳(۳x-۱۳)=۱\Rightarrow x+۹x-۳۹=۱\Rightarrow ۱۰x=۴۰\Rightarrow x=۴$$

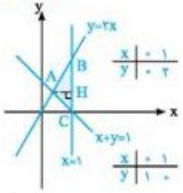
حال با جایگذاری $x=۴$ در معادلهٔ (*) مقدار y را می‌یابیم:

$$y=۳(۴)-۱۳=۱۲-۱۳=-۱$$

بنابراین مختصات نقطهٔ H برابر $(۴,-۱)$ است.

@khanen_book

۷۲ ۱ ابتدا سعی می‌کنیم شکل را رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است AH کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است که بر بزرگ‌ترین ضلع یعنی BC عمود می‌باشد. چون قاعدهٔ BC، خطی عمودی است و ارتفاع AH بر آن عمود می‌باشد، پس AH خطی افقی بوده و چون از نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت $y = y_A$ است که فقط گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد. برای محاسبهٔ دقیق معادلهٔ ارتفاع کافی است محل تلاقی دو خط $y = ۲x$ و $x + y = ۱$ (یعنی نقطهٔ A) را از طریق حل دستگاه زیر بیابیم:

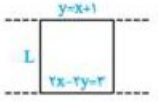


$$\begin{cases} y = ۲x \quad (*) \\ x + y = ۱ \end{cases} \xrightarrow{(*)} x + ۲x = ۱ \Rightarrow ۳x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{(*)} y = \frac{۲}{۳} \Rightarrow A(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

بنابراین معادلهٔ ارتفاع AH برابر می‌شود با:

$$y = y_A \xrightarrow{y_A = \frac{۲}{۳}} y = \frac{۲}{۳}$$

۷۳ ۳ برای استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی، ابتدا ضرایب x و y هر دو معادله را یکسان می‌کنیم:



$$\begin{cases} y = x + ۱ \Rightarrow x - y + ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} \underbrace{۲x - ۲y}_{c} + ۲ = ۰ \\ ۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow \underbrace{۲x - ۲y}_{c'} - ۳ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲ - (-۳)|}{\sqrt{۲^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۸}} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = L^۲ = (\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲ = \frac{۲۵}{۸}$$

۷۴ ۳ دو خط داده شده موازی هستند، حال برای استفاده از فرمول داده‌شده در درسنامه، ابتدا ضرایب x و y را یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x\sqrt{۳} + ۲ \xrightarrow{\times\sqrt{۳}} \sqrt{۳}y = (x\sqrt{۳})\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}y - ۳x - ۲\sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow c' = -۲\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰ \Rightarrow c = ۶ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{فاصلهٔ دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۶ - (-۲\sqrt{۳})|}{\sqrt{(\sqrt{۳})^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۶ + ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۲}} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{۳(۲ + \sqrt{۳})}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} + \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} + ۱$$

۷۵ ۳ دو خط $۲x - ۴y = ۵$ و $\frac{x}{۲} - ۲ = y$ با هم موازی هستند. زیرا:

$$\frac{x}{۲} - ۲ = y \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad ۲x - ۴y = ۵ \Rightarrow ۲x - ۵ = ۴y \xrightarrow{\div ۴} y = \frac{x}{۲} - \frac{۵}{۴} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۱}{۲}$$

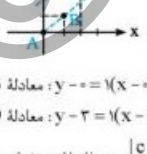
حال فاصلهٔ این دو خط را می‌یابیم که با توجه به شکل همان طول قطر دایره است. برای استفاده از فرمول بیان شده در درسنامه باید ابتدا ضرایب x و y را یکسان کنیم:

$$\begin{cases} ۲x - ۴y = ۵ \Rightarrow ۲x - ۴y - ۵ = ۰ \Rightarrow c = -۵ \\ \frac{x}{۲} - ۲ = y \xrightarrow{\times ۲} ۲x - ۸ = ۴y \Rightarrow ۲x - ۴y - ۸ = ۰ \Rightarrow c' = -۸ \end{cases}$$

$$\text{قطر دایره} = \text{فاصلهٔ دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۵ - (-۸)|}{\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲}} = \frac{|۳|}{\sqrt{۲۰}} = \frac{۳}{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{\frac{۳}{\sqrt{۲۰}}}{۲} \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{۳}{۲\sqrt{۲۰}}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲ = \pi(\frac{۳}{۲\sqrt{۲۰}})^۲ = \pi(\frac{۹}{۴ \times ۲۰}) = \frac{۹\pi}{۸۰}$$

۷۶ ۳ ابتدا شیب خط عبوری از B و A و همچنین شیب خط عبوری از C و D را می‌یابیم:



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۱ - ۰}{۱ - ۰} = ۱ \quad , \quad m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{۳ - ۴}{۱ - ۲} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

پس این دو خط موازی هستند، پس ابتدا معادلات دو خط را نوشته و سپس از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی استفاده می‌کنیم:

معادلهٔ AB: $y - ۰ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y = x \Rightarrow y - x = ۰$

معادلهٔ CD: $y - ۳ = ۱(x - ۱) \Rightarrow y = x + ۲ \Rightarrow y - x - ۲ = ۰$

$$\text{فاصلهٔ دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \xrightarrow[a=-۱, b=۱]{c=۰, c'=-۲} \frac{|۰ - (-۲)|}{\sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

@khanen_book

۷۷ **۲** چون دو خط $۲x + ay = ۶$ و $x - y = a$، دو ضلع مقابل مربع هستند، پس شیب‌های آن‌ها یکسان است:

$$\begin{cases} ۲x + ay = ۶ \Rightarrow m = -\frac{۲}{a} \\ x - y = a \Rightarrow m = -\frac{۱}{-۱} = ۱ \end{cases} \xrightarrow{m=m'} -\frac{۲}{a} = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

حال فاصلهٔ دو خط موازی را می‌یابیم:

$$۲\times\begin{cases} x - y = -۲ \\ ۲x - ۲y = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲y = \frac{c}{-۴} \\ ۲x - ۲y = \frac{c'}{۶} \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۴ - ۶|}{\sqrt{۲^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۸}}$$

فاصلهٔ دو خط موازی برای مربع همان ضلع و برای دایره برابر قطر است.

مساحت ناحیهٔ سیاه = مساحت مربع − مساحت دایره = $(\text{ضلع})^۲ - \pi(\text{شعاع})^۲$

$$= \left(\frac{۱۰}{\sqrt{۸}}\right)^۲ - \pi\left(\frac{\frac{۱۰}{\sqrt{۸}}}{۲}\right)^۲ = \frac{۱۰۰}{۸} - ۳\times\frac{۲۵}{۸} = \frac{۱۰۰ - ۷۵}{۸} = \frac{۲۵}{۸} = ۳/۱۲۵$$

سؤال دانش‌پژوه (سارا سیاوشی)، **آقا چرا اعداد ثابت رو به سمت چپ معادلات نبردین؟ و همین‌طوری c و c' گرفتین اونارو؟**

پاسخ: فرقی نمی‌کنه ولی مهم اینه که هر دو تا عدد یا طرف راست معادله باشن یا هر دو طرف چپ معادله.

۷۸ **۱**

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}|۱(-۱ - ۲) + ۱(۲ - ۴) + ۲(۴ - (-۱))|$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}|-۳ + (-۲) + ۱۰| = \frac{۱}{۲}|۵| = \frac{۵}{۲}$$

۷۹ **۳** با استفاده از فرمول درسنامه داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{۱}{۲}|۳(۱ - ۳) + ۴(۳ - ۶) + ۱(۶ - ۱)|$$

$$= \frac{۱}{۲}|۳(-۲) + ۴(-۳) + (۵)| = \frac{۱}{۲}|-۶ - ۱۲ + ۵| = \frac{۱}{۲}|-۱۳| = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

۸۰ **۴** $x^۲$ را A می‌گیریم:

$$x^۴ + x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x^۲)^۲ + x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow A^۲ + A - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (A + ۴)(A - ۳) = ۰ \Rightarrow A = -۴ \text{ یا } ۳$$

A برابر $x^۲$ بود، پس:

$$\begin{cases} A = -۴ \Rightarrow x^۲ = -۴ \text{ هیچ‌وقت منفی نمی‌شود} \\ \text{یا} \\ A = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۳ \xrightarrow{\text{جذر}} |x| = \sqrt{۳} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله ۲ جواب حقیقی دارد.}$$

۸۱ **۱** ابتدا ظاهر معادله رو مرتب کنیم:

$$x^۲(۱۳ - x^۲) = ۳۶ \Rightarrow ۱۳x^۲ - x^۴ = ۳۶ \Rightarrow x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$$

حال یا فرض $A = x^۲$ داریم:

$$(x^۲)^۲ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰ \Rightarrow A^۲ - ۱۳A + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (A - ۹)(A - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۹ \xrightarrow{x^۲=A} x = \pm ۳ \\ \text{یا} \\ A = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = ۳ - ۳ + ۲ - ۲ = ۰$$

۸۲ **۴** ابتدا ظاهر معادله رو کمی مرتب کنیم:

$$x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = ۶ \xrightarrow{x^۲=A} A + \frac{۱}{A} = ۶ \xrightarrow{\times A} A^۲ + ۱ = ۶A \Rightarrow A^۲ - ۶A + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow A = \frac{-(-۶) \pm \sqrt{(-۶)^۲ - ۴(۱)(۱)}}{۲(۱)} = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۲}}{۲} = \frac{۶ \pm \sqrt{۱۶\times۲}}{۲} = \frac{۶ \pm ۴\sqrt{۲}}{۲} = ۳ \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{A=x^۲} \begin{cases} x^۲ = ۳ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳ + ۲\sqrt{۲}} \\ x^۲ = ۳ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله ۴ جواب حقیقی دارد.}$$

۸۳ **۴** در معادلهٔ داده شده $۲x - ۱$ را A گرفته و داریم:

$$۴(۲x - ۱)^۲ - ۵(۲x - ۱) + ۱ = ۰ \xrightarrow{A=۲x-۱} ۴A^۲ - ۵A + ۱ = ۰$$

مجموع ضرایب معادلهٔ حاصل صفر می‌شود، پس جواب‌های آن $A = ۱$ و $A = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$ است. حالا A چی بود؟ آها $۲x - ۱$ بود، بنابراین:

$$A = ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$A = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲x - ۱ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲x = \frac{۱}{۴} + ۱ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{\frac{۵}{۴}}{۲} = \frac{۵}{۸}$$

پس حاصل جمع جواب‌ها $\frac{۱۳}{۸} = \frac{۸ + ۵}{۸} = \frac{۵}{۸} + ۱$ می‌شود.

@khaneh_book

سؤال دانش‌پژوه (لیلا زمان): آقا اجازه من اومدم $(2x-1)^2$ را باز کردم و به معادله درجه ۲ رسیدم و اینطوری حل کردم.

$$4(2x-1)^2-5(2x-1)+1=0\Rightarrow 4(4x^2-4x+1)-10x+5+1=0\Rightarrow 16x^2-16x+4-10x+6=0\Rightarrow 16x^2-26x+10=0$$

$$\Rightarrow 8x^2-13x+5=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} x=1,x=\frac{5}{8}$$

پاسخ: آره اونم میشه!

۸۴ ۲ مجدداً عبارت $\frac{x^2}{x^2+1}$ را A گرفته و داریم:

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)-6=0\Rightarrow A^2+A-6=0\Rightarrow (A+3)(A-2)=0\Rightarrow A=-3 \text{ یا } 2$$

A که برابر $\frac{x^2}{x^2+1}$ بود، پس:

$$A=-3\Rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{\text{همواره نامنفی}}=-3\Rightarrow$$ معادله جواب حقیقی ندارد. (سمت چپ نامنفی و سمت راست منفیه!)

$$A=2\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1}=2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2=2(x^2+1)\Rightarrow x^2=2x^2+2\Rightarrow \underbrace{x^2}_{\text{نامنفی}}=\underbrace{-2}_{\text{منفی}}\Rightarrow$$ معادله جواب حقیقی ندارد.

۸۵ ۴

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=8 \xrightarrow{x+\frac{1}{x}=A} A^2+2A-8=0\Rightarrow (A+4)(A-2)=0\Rightarrow A=-4,A=2$$

$$\begin{cases} A=-4 \xrightarrow{A=x+\frac{1}{x}} x+\frac{1}{x}=-4\Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=-4\Rightarrow x^2+4x+1=0\Rightarrow \Delta=16-4=12>0\Rightarrow \\ \text{یا} \\ A=2 \xrightarrow{A=x+\frac{1}{x}} x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow x=1 \end{cases}$$

معادله ۲ جواب حقیقی دارد

پس معادله دارای ۳ جواب حقیقی متمایز است.

۸۶ ۲ بیایید دست به دست هم دهیم و x^2+x را برابر A بگیریم ☺ پس معادله برابر می‌شود با:

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0 \xrightarrow{A=x^2+x} A^2-18A+72=0\Rightarrow (A-6)(A-12)=0\Rightarrow A=6 \text{ یا } 12$$

می‌دانیم $A=x^2+x$ پس داریم:

$$\begin{cases} A=6\Rightarrow x^2+x=6\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow x=-3 \text{ یا } 2 \\ \text{یا} \\ A=12\Rightarrow x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow (x+4)(x-3)=0\Rightarrow x=-4 \text{ یا } 3 \end{cases}$$

پس حاصل جمع جواب‌ها برابر $-3=2+(-4)+3+(-2)$ می‌شود.

۸۷ ۳ ابتدا ظاهر معادله رو کمی مرتب کنیم:

$$(x^2+x+1)^2+x^2+x-1=0\Rightarrow (x^2+x+1)^2+x^2+x\underbrace{+1-2}_{-1}=0$$

حالا فرض کنیم $A=x^2+x+1$، بنابراین معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-2=0\Rightarrow A^2+A-2=0\Rightarrow (A+2)(A-1)=0\Rightarrow A=-2 \text{ یا } 1$$

A که برابر x^2+x+1 بود، پس:

$$\begin{cases} A=1\Rightarrow x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } -1 \\ \text{یا} \\ A=-2\Rightarrow x^2+x+1=-2\Rightarrow x^2+x+3=0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4(1)(3)=1-12=-11<0 \end{cases}$$

معادله جواب حقیقی ندارد.

پس کلاً معادله ۲ جواب حقیقی دارد.

سؤال دانش‌پژوه (الناز شاکرانه): آقا ما اومدیم x^2+x رو A فرض کردیم:

$$\underbrace{(x^2+x+1)^2}_{A}+\underbrace{x^2+x}_{A}-1=0\Rightarrow (A+1)^2+A-1=0\Rightarrow A^2+2A+1+A-1=0\Rightarrow A^2+3A=0\Rightarrow A=0,-3$$

$$\begin{cases} A=x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0,-1 \\ \text{یا} \\ A=x^2+x=-3\Rightarrow x^2+x+3=0\Rightarrow \Delta<0 \text{ جواب ندارد.} \end{cases}$$

پاسخ: این هم میشه.

@khaneh_book

۸۸ **۲** با فرض $A=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ داریم:

$$x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}\Rightarrow x^۲+۴x+۵-۲=\sqrt{x^۲+۴x+۵}\Rightarrow A^۲-۲=A\Rightarrow A^۲-A-۲=۰\Rightarrow (A-۲)(A+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=۲\Rightarrow\sqrt{x^۲+۴x+۵}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲+۴x+۵=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\ (*)\\ A=-۱\Rightarrow\underbrace{\sqrt{x^۲+۴x+۵}}_{\text{مثبت یا صفر}}=\underbrace{-۱}_{\text{منفی}}\ \text{غ ق ق}\ (\text{تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست})\end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ (*) برابر $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱}=۱$ است.

۸۹ **۳** با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو کسر داده شده معکوس هم هستند، لذا اگر $\frac{x^۲-۳}{x+۱}$ را A فرض کنیم، عبارت $\frac{x+۱}{x^۲-۳}$ برابر $\frac{۱}{A}$ خواهد شد پس با این تغییر متغیر داریم:

$$\frac{x^۲-۳}{x+۱}+\frac{x+۱}{x^۲-۳}=-۲\Rightarrow A+\frac{۱}{A}=-۲\Rightarrow A+\frac{۱}{A}+۲=۰\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{A^۲+۱+۲A}{A}=۰$$

$$\Rightarrow A^۲+۲A+۱=۰\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}(A+۱)^۲=۰\Rightarrow A=-۱$$

اگر یادتان باشد A برابر $\frac{x^۲-۳}{x+۱}$ بود، بنابراین داریم:

$$\frac{x^۲-۳}{x+۱}=-۱\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x^۲-۳=-x-۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۱,-۲$$

هر دو جواب قابل قبول هستند، چون مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند.

۹۰ **۲** اگر کمی به کسرها دقت کنیم متوجه می‌شویم دو کسر داده شده معکوس هم هستند. پس اگر $\sqrt{\frac{x+۱}{x^۲+۱}}$ را A فرض کنیم، $\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x+۱}}$ برابر $\frac{۱}{A}$ شده و داریم:

$$\sqrt{\frac{x+۱}{x^۲+۱}}+\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x+۱}}=۲\Rightarrow A+\frac{۱}{A}=۲\xrightarrow{\times A}A^۲+۱=۲A\Rightarrow A^۲-۲A+۱=۰\Rightarrow (A-۱)^۲=۰\Rightarrow A=۱$$

حالا A هم که $\sqrt{\frac{x+۱}{x^۲+۱}}$ بود:

$$A=۱\Rightarrow\sqrt{\frac{x+۱}{x^۲+۱}}=۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{x+۱}{x^۲+۱}=۱\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x+۱=x^۲+۱\Rightarrow x^۲-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰\ \text{یا}\ ۱$$

هر دو جواب به‌دست آمده چون مخرج‌ها و زیر رادیکال را صفر نمی‌کنند، قابل قبول هستند.

۹۱ **۱**

$$x+\frac{۱}{x}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{\frac{x^۲+۱}{x}}=۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+\frac{۱}{x}}=۲\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t}t+\frac{۱}{t}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{t^۲+۱}{t}=۲\Rightarrow t^۲+۱=۲t\Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰\Rightarrow (t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=۱\xrightarrow{t=x+\frac{۱}{x}}x+\frac{۱}{x}=۱\Rightarrow\frac{x^۲+۱}{x}=۱$$

$$\Rightarrow x^۲+۱=x\Rightarrow x^۲-x+۱=۰\Rightarrow\Delta=۱-۴=-۳<۰$$

پس معادله جواب ندارد.

۹۲ **۳** اگر کمی به معادله دقت کنیم عبارت $x^۲-۲x$ در هر دو کسر وجود دارد. اگر اسم آن‌ها را A فرض کنیم، به معادلهٔ کسری زیر می‌رسیم و آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\underbrace{\frac{۱}{x^۲-۲x-۱}}_{\frac{۱}{A}}-\underbrace{\frac{۱}{x^۲-۲x}}_{\frac{۱}{A}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\underbrace{\frac{۱}{A-۱}-\frac{۱}{A}}_{\text{مخرج مشترک}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{A-(A-۱)}{(A-۱)A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{A^۲-A}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۱\times ۲=(A^۲-A)\times ۱\Rightarrow A^۲-A-۲=۰\Rightarrow (A-۲)(A+۱)=۰\Rightarrow A=۲\ \text{یا}\ A=-۱$$

Aها رو به‌دست آوردیم. حالا یادته A چی بود؟ آفرین درسته $A=x^۲-۲x$ بود. پس:

$$\begin{cases}A=۲\Rightarrow x^۲-۲x=۲\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(-۲)=۴+۸=۱۲\\ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۲)\pm\sqrt{۱۲}}{۲(۱)}=\frac{۲\pm\sqrt{۴\times ۳}}{۲}=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲(۱\pm\sqrt{۳})}{۲}=۱\pm\sqrt{۳}\\ \text{یا}\\ A=-۱\Rightarrow x^۲-۲x=-۱\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow (x-۱)^۲=۰\Rightarrow x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

که بین جواب‌ها $۱+\sqrt{۳}$ از همه بزرگ‌تر است.

@khanehbook

۹۳ ۲ عبارت $x-\sqrt{x}$ را A می‌گیریم:

$$(x-\sqrt{x})^2-\frac{11}{10}(x-\sqrt{x})+\frac{1}{10}=0 \Rightarrow A^2-\frac{11}{10}A+\frac{1}{10}=0 \xrightarrow{\times 10} 10A^2-11A+1=0$$

جمع ضرایب معادلهٔ فوق صفر است پس جواب‌ها $A=1$ و $A=\frac{c}{a}=\frac{1}{10}$ است. از طرفی A که $x-\sqrt{x}$ بود، پس داریم:

$$\begin{cases} A=1 \Rightarrow x-\sqrt{x}=1 \Rightarrow x-\sqrt{x}-1=0 \\ \text{یا} \\ A=\frac{1}{10} \Rightarrow x-\sqrt{x}=\frac{1}{10} \xrightarrow{\times 10} 10x-10\sqrt{x}-1=0 \end{cases}$$

حال باید تک‌تک معادله‌ها رو حل کنیم. برای حل آن‌ها $\sqrt{x}$ را t می‌گیریم که در این صورت $t \geq 0$ بوده و داریم:

$$\sqrt{x}=t \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=t^2$$

و لذا معادله‌ها به‌صورت $t^2-t-1=0$ و $10t^2-10t-1=0$ درمی‌آیند. از طرفی $P=\frac{c}{a}$ در هر دو معادلهٔ منفی می‌باشد، پس هر کدام از آن معادله‌ها دارای ۲ جواب مختلف‌العلامه (یعنی یک جواب مثبت و یکی جواب منفی) هستند که با توجه به آن‌که $t \geq 0$ باید باشد پس فقط جواب‌های مثبت آن قبول است. بنابراین از $t^2-t-1=0$ یک جواب مثبت و از $10t^2-10t-1=0$ نیز یک جواب مثبت به دست خواهد آمد و در ادامه به ازای ۲ جواب مثبت به دست آمده برای t، چون $x=t^2$ است، دو جواب برای x به دست خواهد آمد و لذا معادلهٔ اصلی ۴ جواب خواهد داشت.

۹۴ ۴

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3x+\frac{3}{x}+1=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0 \quad (*)$$

$x+\frac{1}{x}$ را A فرض می‌کنیم:

$$x+\frac{1}{x}=A \xrightarrow{\text{توان ۲}} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=A^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)\frac{1}{x}=A^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=A^2-2$$

با جایگذاری تساوی فوق در معادلات صورت سؤال داریم:

$$\xRightarrow{(*)} (A^2-2)+3A+1=0 \Rightarrow A^2+3A-1=0 \text{ و } \Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(-1)=9+4=13$$

$$\Rightarrow A=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2(1)} \xrightarrow{\sqrt{13}=3/6} \frac{-3\pm 3/6}{2} \Rightarrow A=\frac{0/6}{2}=0/3 \text{ یا } \frac{-6/6}{2}=-3/3$$

خوب A که $x+\frac{1}{x}$ بود، پس $x+\frac{1}{x}=0/3$ یا $x+\frac{1}{x}=-3/3$.

$$x+\frac{1}{x}=0/3 \xrightarrow{\times x} x^2+1=0/3x \Rightarrow x^2-0/3x+1=0 \Rightarrow \Delta<0$$

معادله جواب حقیقی ندارد.

$$x+\frac{1}{x}=-3/3 \xrightarrow{\times x} x^2+1=-3/3x \Rightarrow x^2+3/3x+1=0 \Rightarrow \Delta>0$$

۲ جواب حقیقی دارد:

سؤال دانش‌پژوه (علی امدی): **آقا یادمه قبلاً یه نکتهٔ مهمی در مورد $x+\frac{1}{x}$ گفته بودین میشه دوباره بگین:**

پاسخ: فراموش کار!

نکته در معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=a$ اگر $a>2$ یا $a<-2$ باشد، دارای ۲ جواب حقیقی، اگر $a=-2$ یا $a=2$ باشد، دارای ۱ جواب مضاعف و اگر $-2<a<2$ باشد، جواب حقیقی ندارد.

الان با توجه به این نکته می‌تونستیم بدون حل بفهمیم معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=0/3$ چون $0/3>-2$ است جواب حقیقی دارد و معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=-3/3$ چون $-3/3<-2$ است، ۲ جواب حقیقی داره.

۹۵ ۲

$$\underbrace{(m-1)}_{a}x^2+\underbrace{2m}_{b}x+\underbrace{m}_{c}=0 \Rightarrow P=\frac{c}{a}=\frac{m}{m-1}=2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m=2(m-1) \Rightarrow m=2m-2 \Rightarrow 2=2m-m \Rightarrow m=2$$

تذکر به ازای $m=2$ معادله به‌صورت $x^2+8x+2=0$ درمی‌آید که چون دلتای آن مثبت است پس دارای ۲ جواب بوده و $m=2$ قابل قبول است. اگر به ازای $m=2$ دلتا منفی می‌شد، m به‌دست آمده قابل قبول نبود.

سؤال دانش‌پژوه (احسان زرباف): **آقا ببخشید، این‌جا که نیازی به چک کردن علامت Δ نداره! چون توی گزینه‌ها «امکان ندارد» نداشتیم.**

پاسخ: بله، اشارهٔ خوبی بود. من منظورم صرفاً این سؤال نبود. دقت کنید توی این سؤال نیازی نبود، اما توی سؤالاتی که دو یا چند مقدار برای m به دست میاد یا گزینهٔ «به‌ازای هیچ مقدار m» یا «امکان ندارد» در میان گزینه‌ها باشد، حتماً باید بررسی کنیم که به‌ازای mهای به دست آمده، علامت Δ چی می‌شه!

@khaneh_book

۹۶ ۲ ابتدا ظاهر معادلهٔ داده شده را مرتب کنیم:

$$m^۲x^۲+m=x(۳+۴x)\Rightarrow m^۲x^۲+m=۳x+۴x^۲\Rightarrow m^۲x^۲+m-۳x-۴x^۲=۰\Rightarrow (m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰\quad (*)$$

عدد $\frac{۱}{۸}$ میانگین دو عدد α و β است، یعنی:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۱}{۸}\xrightarrow{\times ۲}\underbrace{\alpha+\beta}_{S}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی مجموع جواب‌ها $S=\frac{-b}{a}$ است، پس داریم:

$$-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow[a=m^۲-۴]{b=-۳}-\frac{(-۳)}{m^۲-۴}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۳\times ۴=m^۲-۴\Rightarrow ۱۲+۴=m^۲\Rightarrow m^۲=۱۶$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}|m|=۴\Rightarrow\begin{cases}m=۴\xrightarrow{\text{در (*) قرار بدهیم}}(۴^۲-۴)x^۲-۳x+۴=۰\Rightarrow ۱۲x^۲-۳x+۴=۰\Rightarrow\Delta<۰\\ m=-۴\xrightarrow{\text{در (*) قرار بدهیم}}((-۴)^۲-۴)x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow ۱۲x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow\Delta>۰\end{cases}$$

پس به ازای $m=۴$ معادله جواب حقیقی ندارد، پس غلطه و فقط $m=-۴$ درسته!

۹۷ ۴ ابتدا ظاهر معادله را مرتب کنیم:

$$۲m(x+۱)+x^۲=۲\Rightarrow ۲mx+۲m+x^۲=۲\Rightarrow x^۲+۲mx+۲m-۲=۰$$

معکوس جمع دو جواب برابر حاصل ضرب دو جواب است یعنی:

$$\frac{۱}{\alpha+\beta}=\alpha\beta\xrightarrow[\alpha\beta=P]{\alpha+\beta=S}\frac{۱}{S}=P$$

از طرفی $S=\frac{-b}{a}=\frac{-۲m}{۱}$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{۲m-۲}{۱}$ است. بنابراین:

$$\frac{۱}{S}=P\Rightarrow\frac{۱}{-۲m}=۲m-۲\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۱=-۴m^۲+۴m\Rightarrow \underbrace{۴m^۲-۴m+۱}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=۰\Rightarrow(۲m-۱)^۲=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۹۸ ۳

$$x^۲-۴mx+۳=۰\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۴m)}{۱}=۴m\quad ,\quad P=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۱}=۳\quad (*)$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $x'x''^۲=۳$ داریم:

$$x'x''^۲=۳\Rightarrow\underbrace{x'x''}_{P}.x''=۳\Rightarrow P.x''=۳\xrightarrow{(*)}۳x''=۳\Rightarrow x''=۱\xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}}۱-۴m(۱)+۳=۰\Rightarrow ۴m=۴\Rightarrow m=۱$$

۹۹ ۳

$$x^۲+۲x+۱-۲k=۰\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲\quad ,\quad P=\frac{c}{a}=\frac{۱-۲k}{۱}=۱-۲k\quad (*)$$

با توجه به رابطهٔ $\alpha^۲-۴=-\alpha\beta$ داریم:

$$\alpha^۲-۴=-\alpha\beta\Rightarrow\alpha^۲+\alpha\beta-۴=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از }\alpha}\alpha(\alpha+\underbrace{\beta}_{S})-۴=۰\Rightarrow\alpha S-۴=۰\xrightarrow{(*)}-۲\alpha-۴=۰\Rightarrow\alpha=-۲$$

$\alpha=-۲$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x^۲+۲x+۱-۲k=۰\xrightarrow{x=-۲}(-۲)^۲+۲(-۲)+۱-۲k=۰\Rightarrow ۴-۴+۱-۲k=۰\Rightarrow ۱=۲k\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۰ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت $-۲x^۲+۳x-m=۰$ می‌نویسیم. حال با توجه به فرمول تفاضل جواب‌ها داریم:

$$\text{تفاضل جواب‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{|a|}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳^۲-۴(-۲)(-m)}}{|-۲|}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۹-۸m}}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\sqrt{۹-۸m}=۵\xrightarrow{\text{توان ۲}}۹-۸m=۲۵\Rightarrow ۹-۲۵=۸m\Rightarrow -۱۶=۸m\Rightarrow m=\frac{-۱۶}{۸}=-۲$$

۱۰۱ ۴

$$۲x^۲-۳x+a=۰\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۳)}{۲}=\frac{۳}{۲}\quad ,\quad P=\frac{c}{a}\Rightarrow P=\frac{a}{۲}\quad (*)$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S^۲-۲P=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{(*)}\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲-۲\left(\frac{a}{۲}\right)=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۹}{۴}-a=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۹}{۴}-\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

: مجموع مربعات

به دقیقه صبر کن و گزینهٔ (۲) رو انتخاب نکن. بذار ببینیم اصلاً به ازای $a=\frac{۳}{۲}$ که به‌دست آوردی، معادله دارای جواب حقیقی است یا نه!

$$۲x^۲-۳x+a=۰\xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}}۲x^۲-۳x+\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow\Delta=(-۳)^۲-۴(۲)\left(\frac{۳}{۲}\right)=۹-۱۲=-۳<۰$$

پس اگر $a=\frac{۳}{۲}$ باشد اصلاً معادله جواب ندارد. پس کلاً هیچ مقدار aای وجود ندارد که شرایط مسأله را برقرار کند.

@khanehbook

۱۰۲ ۱

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱} = ۳ \quad , \quad P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱} = ۱ \quad (*)$$

حال عبارت داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$\underbrace{\beta^۲ - \alpha^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}\underbrace{(\beta + \alpha)}_{S} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S = \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{|a|}.S \overset{(*)}{\Rightarrow} \beta^۲ - \alpha^۲ = \frac{\sqrt{(-۳)^۲ - ۴(۱)(۱)}}{|۱|} \times ۳ = \frac{\sqrt{۹ - ۴}}{۱} \times ۳ = ۳\sqrt{۵}$$

تذکر شرط $\beta > \alpha$ باعث می‌شود تا $\beta - \alpha$ مثبت شود؛ یعنی اگر $\alpha - \beta$ رو می‌خواستیم باید به جای آن $-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ قرار می‌دادیم!

۱۰۳ ۲

$$۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۴)}{۲} = ۲ \quad , \quad P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \quad (*)$$

پس داریم:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۳PS \overset{(*)}{=\!=} (۲)^۳ - ۳\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲) = ۸ - ۳ = ۵$$

۱۰۴ ۲

$$۲x^۲ - ۳x + a = ۰ \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۲} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{a}{۲} \quad (*)$$

از طرفی مجموع معکوس مکعب جواب‌ها $(\frac{۱}{\alpha^۳} + \frac{۱}{\beta^۳})$ برابر ۹ است. لذا داریم:

$$\frac{۱}{\alpha^۳} + \frac{۱}{\beta^۳} = ۹ \overset{\text{مخرج مشترک}}{\Rightarrow} \frac{\beta^۳ + \alpha^۳}{\alpha^۳\beta^۳} = \frac{S^۳ - ۳PS}{P^۳} = ۹ \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{(\frac{۳}{۲})^۳ - ۳(\frac{a}{۲})(\frac{۳}{۲})}{(\frac{a}{۲})^۳} = ۹ \Rightarrow \frac{\frac{۲۷}{۸} - \frac{۹a}{۴}}{\frac{a^۳}{۸}} = ۹$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۲۷ - ۱۸a}{۸}}{\frac{a^۳}{۸}} = ۹ \Rightarrow \frac{۲۷ - ۱۸a}{a^۳} = ۹ \overset{\text{طرفین وسطین}}{\Rightarrow} ۲۷ - ۱۸a = ۹a^۳ \Rightarrow ۹a^۳ + ۱۸a - ۲۷ = ۰$$

جمع ضرایب معادلهٔ حاصل صفر است؛ پس $a = ۱$ جواب این معادله است.

سؤال دانش‌پژوه (ثاریا مشهدی)، **آقا اجازه ما نفهمیدیم چطوری $a = ۱$ شد؟**

پاسخ: کلاً در هر معادله اگر جمع ضرائب صفر شه همیشه عدد ۱ جواب معادله می‌شه. در این سؤالم جمع ضرائب صفر بود دیگه $(۰ = ۲۷ - ۱۸ + ۹)$ پس $a = ۱$ جوابشه.

سؤال دانش‌پژوه (فاطمه تهرانی)، **آقا ببخشید، معادلهٔ درجه ۳، دو تا جواب دیگه هم داره؟**

پاسخ: می‌تونیم نشون بدیم این معادله، فقط همین یه جواب رو داره ولی چون تستیه، بهتره خیالی فورمون رو معطل نکنیم و سریع جواب رو انتخاب کنیم.

۱۰۵ ۲ در معادلهٔ $۵x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ $S = ۵$ و $P = -۱$ است. بنابراین:

$$\frac{x_۱}{x_۲^۲} + \frac{x_۲}{x_۱^۲} \overset{\text{مخرج مشترک}}{=\!=} \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۲x_۲^۲} = \frac{S^۳ - ۳PS}{P^۲} = \frac{۵^۳ - ۳(-۱)(۵)}{(-۱)^۲} = \frac{۱۲۵ + ۱۵}{۱} = ۱۴۰$$

۱۰۶ ۴

$$x^۲ - ۳\sqrt{۳}x + ۶ = ۰ \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳\sqrt{۳})}{۱} = ۳\sqrt{۳} \quad , \quad P = \frac{c}{a} = \frac{۶}{۱} = ۶ \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = S^۲ - ۲P \overset{\text{طرفین به توان ۲}}{\Longrightarrow} \underbrace{(x_۱^۲ + x_۲^۲)^۲}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} = (S^۲ - ۲P)^۲ \Rightarrow (x_۱^۲)^۲ + (x_۲^۲)^۲ + ۲(x_۱^۲)(x_۲^۲) = (S^۲ - ۲P)^۲$$

$$\Rightarrow x_۱^۴ + x_۲^۴ + ۲\underbrace{(x_۱x_۲)}_{P}^۲ = (S^۲ - ۲P)^۲ \overset{(*)}{\Rightarrow} x_۱^۴ + x_۲^۴ + ۲(۶)^۲ = ((۳\sqrt{۳})^۲ - ۲ \times ۶)^۲$$

$$\Rightarrow x_۱^۴ + x_۲^۴ + ۷۲ = \underbrace{(۹ \times ۳ - ۱۲)}_{۱۵}^۲ \Rightarrow x_۱^۴ + x_۲^۴ = ۱۵^۲ - ۷۲ = ۲۲۵ - ۷۲ = ۱۵۳$$

۱۰۷ ۳ با توجه به اتحاد $(x_۱ + x_۲)^۳ = x_۱^۳ + ۳x_۱^۲x_۲ + ۳x_۱x_۲^۲ + x_۲^۳$، عبارت خواسته شده همان $S^۳$ با $S^۳$ است. با توجه به معادلهٔ $۵x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ برابر $-۳ = \frac{-b}{a}$ می‌باشد؛ پس داریم:

$$x_۱^۳ + ۳x_۱^۲x_۲ + ۳x_۱x_۲^۲ + x_۲^۳ = S^۳ = (-۳)^۳ = -۲۷$$

@khanehbook

۱۰۸ ۲

$$۳x^۲+۵x+a=۰ \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-۵}{۳} \quad , \quad P=\frac{c}{a} \Rightarrow P=\frac{a}{۳} \quad (*)$$

با توجه به رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$x_۱^۲x_۲+x_۱x_۲^۲=-۱ \xrightarrow{\text{فاکتور از } x_۱x_۲} x_۱x_۲(x_۱+x_۲)=-۱ \Rightarrow PS=-۱ \Rightarrow \left(\frac{a}{۳}\right)\left(\frac{-۵}{۳}\right)=-۱ \Rightarrow a=\frac{-۹}{-۵}=\frac{۹}{۵}$$

۱۰۹ ۴ **روش اول:** ابتدا ظاهر معادله رو مرتب کنیم:

$$x(x-m)=۲ \Rightarrow x^۲-mx-۲=۰$$

از طرفی داریم:

$$\alpha<۲<\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha<۲ \Rightarrow \alpha-۲<۰ \\ ۲<\beta \Rightarrow \beta-۲>۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{مثبت} \times \text{منفی}} (\alpha-۲)(\beta-۲)<۰ \qquad (*)$$

حال نامعادلهٔ (*) را حل می‌کنیم:

$$(\alpha-۲)(\beta-۲)<۰ \Rightarrow \alpha\beta-۲\alpha-۲\beta+۴<۰ \Rightarrow \underbrace{\alpha\beta}_{P}-۲\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+۴<۰ \Rightarrow P-۲S+۴<۰$$

با توجه به معادلهٔ $x^۲-mx-۲=۰$، S و P را به دست آورده و در نامعادلهٔ فوق قرار می‌دهیم:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-m)}{۱}=m \ , \ P=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲ \Rightarrow P-۲S+۴<۰ \Rightarrow -۲-۲m+۴<۰ \Rightarrow ۲<۲m \Rightarrow ۱<m$$

سؤال دانش‌پژوه (کیمیا، کاشان)، **آقا لازم نبود شرط $\Delta>۰$ رو چک کنیم؟**

پاسخ: حرف خوبیه! ولی باید بگم توی معادلاتی که $\frac{c}{a}<۰$ باشه، همواره $\Delta>۰$ میشه و نیازی به چک کردن شرط $\Delta>۰$ نیست. این‌جا هم $\frac{c}{a}<۰$ هست.

روش دوم: با توجه به آن‌که معادلهٔ $x^۲-mx-۲=۰$ دارای ۲ جواب α و β بوده و ضریب $x^۲$ مثبت است. نمودار تابع درجه دوم $x^۲-mx-۲$ در حالت کلی به فرم است و چون $\alpha<۲<\beta$ است. با توجه به شکل مشخص است $f(۲)<۰$ یعنی عرض نقطهٔ به طول ۲ روی منحنی، منفی است و داریم:

$$f(x)=x^۲-mx-۲ \xrightarrow{x=۲} f(۲)=۲^۲-m(۲)-۲<۰ \Rightarrow ۴-۲m-۲<۰ \Rightarrow ۲<۲m \Rightarrow ۱<m$$

۱۱۰ ۳ در معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$، مقادیر $S=۲$ و $P=-۱$ است. حال بریم سراغ ساده‌سازی رابطهٔ داده شده:

$$\frac{\alpha+n}{\beta}+\frac{\beta+n}{\alpha}=۲ \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{\alpha(\alpha+n)+\beta(\beta+n)}{\beta\alpha}=۲ \Rightarrow \frac{\alpha^۲+\alpha n+\beta^۲+\beta n}{\alpha\beta}=۲ \Rightarrow \frac{\alpha^۲+\beta^۲+n(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=۲$$

$$\Rightarrow \frac{S^۲-۲P+nS}{P}=۲ \xrightarrow[P=-۱]{S=۲} \frac{۲^۲-۲(-۱)+n(۲)}{-۱}=۲ \Rightarrow \frac{۴+۲+۲n}{-۱}=۲ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۶+۲n=-۲ \Rightarrow ۲n=-۸ \Rightarrow n=-۴$$

۱۱۱ ۱ در معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$، مقادیر S و P به‌ترتیب ۳ و ۱ هستند. حال با فرض $A=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^۲=\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^۲=\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^۲+\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^۲+۲\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\times\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+۲=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}+۲$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\Rightarrow A^۲=\frac{S^۲-۲P}{P}+۲ \xrightarrow[P=۱]{S=۳} A^۲=\frac{۳^۲-۲(۱)}{۱}+۲=۹-۲+۲=۹ \Rightarrow A=\sqrt{۹}=۳$$

۱۱۲ ۱ در معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$، مقادیر S و P به‌ترتیب برابر ۳ و ۱ هستند. حال با فرض $A=x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱}$ داریم:

$$A^۲=(x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱})^۲=(x_۱\sqrt{x_۲})^۲+(x_۲\sqrt{x_۱})^۲+۲(x_۱\sqrt{x_۲})(x_۲\sqrt{x_۱})$$

$$\Rightarrow A^۲=\underbrace{x_۱^۲x_۲+x_۲^۲x_۱}_{\text{فاکتور از } x_۱x_۲}+۲x_۱x_۲\sqrt{x_۱x_۲}=\underbrace{x_۱x_۲}_{P}\underbrace{(x_۱+x_۲)}_{S}+۲\underbrace{x_۱x_۲}_{P}\sqrt{\underbrace{x_۱x_۲}_{P}}=PS+۲P\sqrt{P}$$

$$\xrightarrow[S=۳]{P=۱} A^۲=۱\times۳+۲(۱)\sqrt{۱}=۵ \Rightarrow A=\sqrt{۵}$$

@khanehbook

۱۱۳ ۳ در معادلهٔ $x^۲ - k^۲x + ۸ = ۰$، S و P به‌ترتیب برابر $k^۲$ و ۸ هستند. حال طرفین رابطهٔ $\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x^۴} = ۳$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x^۴})^۳ = ۳^۳ \Rightarrow (\sqrt[۳]{x^۲})^۳ + \underbrace{۳(\sqrt[۳]{x^۲})^۲\sqrt[۳]{x^۴} + ۳\sqrt[۳]{x^۲}(\sqrt[۳]{x^۴})^۲}_{\text{فاکتور از } ۳\sqrt[۳]{x^۲}\sqrt[۳]{x^۴}} + (\sqrt[۳]{x^۴})^۳ = ۲۷$$

$$\Rightarrow x' + ۳\sqrt[۳]{x^۲}\sqrt[۳]{x^۴}\underbrace{(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x^۴})}_{\text{طبق فرض سؤال } = ۳} + x'' = ۲۷ \Rightarrow \underbrace{x' + ۳\sqrt[۳]{x'x''} \times ۳ + x''}_{S} = ۲۷ \Rightarrow S + ۹\sqrt[۳]{P} = ۲۷ \xrightarrow[P=۸]{S=k^۲} k^۲ + ۹\sqrt[۳]{۸} = ۲۷$$

$$\Rightarrow k^۲ + ۹\sqrt[۳]{r^۳} = ۲۷ \Rightarrow k^۲ + ۹ \times ۲ = ۲۷ \Rightarrow k^۲ = ۲۷ - ۱۸ = ۹ \xrightarrow{\sqrt{}} |k| = ۳ \Rightarrow k = \pm ۳$$

۱۱۴ ۲ چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ هستند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x_۱^۲ - ۴x_۱ + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱^۲ - ۴x_۱ = -۱ \\ x_۲^۲ - ۴x_۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۲^۲ - ۴x_۲ = -۱ \end{cases} \quad (*)$$

حال عبارت خواسته شده را به کمک روابط فوق به‌دست می‌آوریم:

$$(x_۲^۲ - ۴x_۲ + ۴)(x_۱^۲ - ۴x_۱ + ۲) \overset{(*)}{=\!=} (-۱ + ۴)(-۱ + ۲) = ۳ \times ۱ = ۳$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبرقلی سخوره): آقا نمیشه جملات داخل پرانتزها رو در هم ضرب کنیم و ...

پاسخ آره، اونقوری هم میشه ولی ایشالا اگه دعای فیر مسلمین بدرقهٔ راهت باشه! بعد از کنکور به جواب می‌رسی!

۱۱۵ ۱ α جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^۲ - ۲\alpha - ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ - ۴ = ۲\alpha \quad (*)$$

با جایگذاری رابطهٔ حاصل، در صورت سؤال داریم:

$$A = (\alpha^۲ - ۴)^۲ + ۴\beta^۲ \overset{(*)}{=\!=} (۲\alpha)^۲ + ۴\beta^۲ = ۴\alpha^۲ + ۴\beta^۲ = ۴(\alpha^۲ + \beta^۲) = ۴(S^۲ - ۲P)$$

از طرفی مقادیر S و P در معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$ به‌ترتیب ۲ و ۴- هستند؛ پس داریم:

$$A = ۴(۲^۲ - ۲(-۴)) = ۴(۴ + ۸) = ۴(۱۲) = ۴۸$$

۱۱۶ ۳ $x_۲$ جواب معادله بوده پس در آن صدق می‌کند:

$$x_۲^۲ - ۳x_۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x_۲ - ۱ = x_۲^۲ \quad (*)$$

حال تساوی فوق را در رابطهٔ خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{x_۱^۲(۳x_۲ - ۱)} \overset{(*)}{=\!=} \sqrt{x_۱^۲(x_۲^۲)} = \sqrt{(x_۱x_۲)^۲} = \sqrt{P^۲} \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=۱]{x^۲-۳x+۱=۰} \sqrt{۱^۲} = ۱$$

۱۱۷ ۳ در معادلهٔ $x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$، مقادیر S و P به‌ترتیب برابر ۲- و ۱- است.

از طرفی α جواب معادله بوده پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^۲ + ۲\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\alpha = ۱ - \alpha^۲ \quad (*)$$

حال تساوی فوق را در رابطهٔ خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$A = \beta^۲ + ۲\alpha^۲ + ۲\alpha \overset{(*)}{\Longrightarrow} A = \beta^۲ + ۲\alpha^۲ + (۱ - \alpha^۲) = (\beta^۲ + \alpha^۲) + ۱ = S^۲ - ۲P + ۱ \xrightarrow[P=-۱]{S=-۲} (-۲)^۲ - ۲(-۱) + ۱ = ۴ + ۲ + ۱ = ۷$$

۱۱۸ ۲ در معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$، مقادیر S و P به‌ترتیب ۱ و ۱- هستند.

$$S = \alpha + \beta = ۱ \Rightarrow \alpha - ۱ = -\beta \text{ یا } \beta - ۱ = -\alpha \quad (*)$$

با جایگذاری تساوی‌های فوق در رابطهٔ داده شده داریم:

$$\frac{\beta^۲}{(\alpha-۱)^۲} + \frac{\alpha^۲}{(\beta-۱)^۲} \overset{(*)}{=\!=} \frac{\beta^۲}{(-\beta)^۲} + \frac{\alpha^۲}{(-\alpha)^۲} = \frac{\beta^۲}{\beta^۲} + \frac{\alpha^۲}{\alpha^۲} = ۱ + ۱ = ۲$$

۱۱۹ ۱ در معادلهٔ $x^۲ + ۵x + ۱ = ۰$، مقادیر S و P به‌ترتیب برابر ۵- و ۱ هستند. اگر جواب دیگر معادله، β باشد، داریم:

$$P = \alpha\beta = ۱ \Rightarrow \beta = \frac{۱}{\alpha} \quad (*)$$

با استفاده از رابطهٔ فوق داریم:

$$A = ۱ + \alpha^۲ + \frac{۱}{\alpha^۲} = ۱ + \alpha^۲ + \left(\frac{۱}{\alpha}\right)^۲ \overset{(*)}{=\!=} ۱ + \alpha^۲ + \beta^۲ = ۱ + S^۲ - ۲P \Rightarrow A = ۱ + (-۵)^۲ - ۲(۱) = ۱ + ۲۵ - ۲ = ۲۴$$

۱۲۰ ۱ در معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$، مقادیر S و P به‌ترتیب برابر ۴ و ۱- هستند:

$$P = \alpha\beta = -۱ \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{\beta} \text{ یا } \beta = -\frac{۱}{\alpha} \quad (*)$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$A = \left(\alpha - \frac{۱}{\beta}\right)^۲ + \left(\beta - \frac{۱}{\alpha}\right)^۲ \overset{(*)}{=\!=} (\alpha + \alpha)^۲ + (\beta + \beta)^۲ = (۲\alpha)^۲ + (۲\beta)^۲ = ۴\alpha^۲ + ۴\beta^۲$$

$$\Rightarrow A = ۴(\alpha^۲ + \beta^۲) = ۴(S^۲ - ۲P) \xrightarrow[P=-۱]{S=۴} ۴(۴^۲ - ۲(-۱)) = ۴(۱۶ + ۲) = ۴(۱۸) = ۷۲$$

@kharen_book

۱۲۱ **۴** در معادلهٔ $x^2+2x-4=0$، مقادیر S و P به‌ترتیب برابر ۲- و ۴- هستند. از طرفی چون x_1 و x_2 جواب معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2+2x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2+2x_1-4=0 \xrightarrow{\times x_1} x_1^3+2x_1^2-4x_1=0 \Rightarrow x_1^3=-2x_1^2+4x_1 \quad (*) \\ x_2^2+2x_2-4=0 \end{cases}$$

حال با جایگذاری رابطهٔ (*) در عبارت صورت سؤال داریم:

$$A=x_1^3-2x_2^2+4x_2 \overset{(*)}{=\!=} (-2x_1^2+4x_1)-2x_2^2+4x_2=-2(x_1^2+x_2^2)+4(x_1+x_2)=-2(S^2-2P)+4S$$

$$\overset{\substack{S=-2 \\ P=-4}}{=\!=\!=} -2((-2)^2-2(-4))+4(-2) \Rightarrow A=-2(4+8)-8=-2(12)-8=-24-8=-32$$

۱۲۲ **۳** در معادلهٔ $2x^2+ax+9=0$، ابتدا S و P را بیابیم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-a}{2} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{9}{2} \quad (*)$$

با توجه به فرض مسأله $\alpha=2\beta$، پس با جایگذاری این واسطه در (*) داریم:

$$\alpha\beta=\frac{9}{2} \xrightarrow{\alpha=2\beta} (2\beta)\beta=\frac{9}{2} \Rightarrow 2\beta^2=\frac{9}{2} \xrightarrow{\div 2} \beta^2=\frac{9}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} |\beta|=\frac{3}{2} \Rightarrow \beta=\pm\frac{3}{2}$$

مسأله مجموع دو جواب مثبت را خواسته، پس α و β باید مثبت باشند؛ پس:

$$\beta=\frac{3}{2} \xrightarrow{\alpha=2\beta} \alpha=3$$

حال با معلوم بودن α و β داریم:

$$\alpha+\beta=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$

۱۲۳ **۲** در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ داریم $\alpha=3\beta+3$. از طرفی S برابر است با:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-17)}{3}=\frac{17}{3} \xrightarrow{\alpha=3\beta+3} (3\beta+3)+\beta=\frac{17}{3} \Rightarrow 4\beta+3=\frac{17}{3} \Rightarrow 4\beta=\frac{17}{3}-3$$

$$\Rightarrow 4\beta=\frac{17-9}{3}=\frac{8}{3} \xrightarrow{\div 4} \beta=\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{8}{3\times 4}=\frac{2}{3} \xrightarrow{\alpha=3\beta+3} \alpha=3\left(\frac{2}{3}\right)+3=2+3=5$$

از این‌جا به بعد ۲ تا کار می‌تونیم انجام بدیم:

روش اول: بگیم $\alpha=5$ جواب معادله بوده، پس در آن صدق می‌کند:

$$3x^2-17x+m=0 \xrightarrow{x=5} 3(5)^2-17(5)+m=0 \Rightarrow 3(25)-85+m=0 \Rightarrow 75-85+m=0 \Rightarrow m=10$$

روش دوم: بگیم $\alpha=5$ و $\beta=\frac{2}{3}$ است، پس ضربشان $P=5\times\frac{2}{3}$ می‌شود. پس با توجه به فرمول P داریم:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m}{3}=5\times\frac{2}{3} \Rightarrow m=10$$

۱۲۴ **۲** ابتدا معادله را مثل آدم می‌نویسیم: $mx^2+3x+m^2-2=0$. حال طبق فرض $\alpha=\frac{1}{\beta}$ است و یا به عبارت دیگر (طرفین وسطین کنیم) $\alpha\beta=1$ پس $P=1$. پس کافی است P را حساب کرده و برابر ۱ قرار دهیم:

$$P=\frac{c}{a} \xrightarrow[a=m]{c=m^2-2} \frac{m^2-2}{m}=1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m^2-2=m \xrightarrow{\text{همه چپ}} m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow m=2 \text{ یا } -1$$

بررسی کنیم به‌ازای کدام m، دلتای معادله منفی نمی‌شود:

$$m=2: 2x^2+3x+2^2-2=0 \Rightarrow 2x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4(2)(2)=9-16=-7<0 \text{ غلطه}$$

پس $m=-1$ درست است و نیازی به چک کردن $m=-1$ نیست! (چرا؟)

۱۲۵ **۳** ابتدا ظاهر معادله را به‌صورت آدمیزادی $(m-1)x^2+m(m^2-9)x-2=0$ نوشته و چون دو جواب قرینه دارد، پس $\alpha=-\beta$ و یا $\alpha+\beta=0$. خوب $\alpha+\beta$ که همان S بود پس $S=0$:

$$S=\frac{-b}{a}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow m(m^2-9)=0 \Rightarrow m(m-3)(m+3)=0 \Rightarrow m=0 \text{ یا } m=-3 \text{ یا } m=3$$

بررسی درست بودن m:

$$(m-1)x^2+m(m^2-9)x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 : -x^2-2=0 \Rightarrow x^2=-2 \text{ غ‌ق‌ق} \\ m=3 : 2x^2-2=0 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ m=-3 : -4x^2-2=0 \Rightarrow 4x^2=-2 \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

پس $m=3$ صحیح است.

@khanenam_book

۱۲۶ ۱ در معادلهٔ $mx^2+5x+m^2-6=0$ داریم $\alpha=-\frac{1}{\beta}$ که اگر طرفین وسطین کنیم میشه $\alpha\beta=-1$ پس $P=-1$. حال P را حساب کرده و آن را برابر -1 قرار می‌دهیم:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m^2-6}{m}=-1 \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} m^2-6=-m \xrightarrow{\text{همه چپ}} m^2+m-6=0 \Rightarrow (m+3)(m-2)=0 \Rightarrow m=-3 \text{ یا } 2$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۱) درسته!

سؤال دانش‌پژوه (اعظم اکبری): **آقا اجازه! چرا Δ رو چک نکردین، از کجا معلوم که منفی نیست؟**

پاسخ: چند بار بگم! هر وقت $P<0$ شه حتماً Δ مثبته و دیگه لازم نیست اونو چک کنی توی این سؤال هم $P=-1$ شده پس حتماً $\Delta>0$ میشه.

۱۲۷ ۲ اول قیافشو مرتب کنیم:

$$x^2+mx-x-8=0 \Rightarrow x^2+(m-1)x-8=0$$

طبق فرض $\alpha=\beta^2$. از طرفی S و P برابر است با:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(m-1)}{1}=-m+1 \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-8}{1}=-8$$

از $P=-8$ کمک گرفته و داریم:

$$\alpha\beta=-8 \xrightarrow{\alpha=\beta^2} (\beta^2)\beta=-8 \Rightarrow \beta^3=-8 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} \beta=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$$

حالا که $\beta=-2$ هست با توجه به رابطهٔ $\alpha=\beta^2$ پس $\alpha=4$ می‌شود. حالا از رابطهٔ S استفاده می‌کنیم و m را می‌یابیم:

$$S=\alpha+\beta=-m+1 \xrightarrow[\beta=-2]{\alpha=4} 4+(-2)=-m+1 \Rightarrow 2=-m+1 \Rightarrow m=1-2=-1$$

۱۲۸ ۲ با توجه به جواب‌های $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$، مقادیر S و P را می‌یابیم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P=\alpha\beta=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{4} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(1)^2-(\sqrt{2})^2}{4}=\frac{1-2}{4}=\frac{-1}{4}$$

با جایگذاری S و P حاصل در معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$، معادله به دست می‌آید:

$$x^2-(1)x+\left(-\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow x^2-x-\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-4x-1=0$$

۱۲۹ ۲ اگر x و y به ترتیب طول و عرض مستطیل باشند، آن‌گاه با توجه به شکل داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط}=P=2x+2y=2(x+y) \xrightarrow{\text{محیط}=11} 2(x+y)=11 \Rightarrow x+y=\frac{11}{2} \\ \text{مساحت}=S=xy \xrightarrow{\text{مساحت}=6} xy=6 \end{cases}$$

اگر x و y را جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم در نظر بگیریم، آن‌گاه $S=x+y=\frac{11}{2}$ و $P=xy=6$. پس معادله‌ای که x و y جواب‌های آن هستند برابر می‌شود با:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{11}{2}x+6=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-11x+12=0$$

حال معادلهٔ حاصل را حل کرده و جواب‌های آن را می‌یابیم که همان طول اضلاع مستطیل هستند:

$$\Delta=b^2-4ac=(-11)^2-4(2)(12)=121-96=25 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{25}}{2(2)}=\frac{11\pm5}{4} \Rightarrow x=4 \text{ یا } \frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

پس ضلع بزرگ‌تر ۴ و ضلع کوچک‌تر $\frac{3}{2}$ است و نسبت آن‌ها برابر می‌شود با:

$$\frac{\text{ضلع بزرگ‌تر}}{\text{ضلع کوچک‌تر}}=\frac{4}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{3}{2}} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{4\times 2}{3}=\frac{8}{3}$$

سؤال دانش‌پژوه (اکرم عبادی): **آقا اجازه خب S و P چیه دیگه، ما دو تا معادلهٔ $x+y=\frac{11}{2}$ و $xy=6$ داریم، میشه این‌طوری گفت:**

$$x+y=\frac{11}{2} \Rightarrow y=\frac{11}{2}-x \quad (*)$$

$$xy=6 \xrightarrow{(*)} x\left(\frac{11}{2}-x\right)=6 \Rightarrow \frac{11}{2}x-x^2=6 \xrightarrow{\times 2} 11x-2x^2=12 \Rightarrow 2x^2-11x+12=0$$

پاسخ: آره آفرین ولی هل من با کلاس‌تره ☺

@khanehbook

۱۳۰ ۲ طبق مسأله $x+y=5$ و $xy=-24$ است. حال فرض می‌کنیم x و y جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند. در این صورت $S=x+y=5$ و $P=xy=-24$. پس معادله‌ای که x و y جواب‌های آن هستند برابر می‌شود با:

$$x^2-Sx+P=0 \xrightarrow[P=-24]{S=5} x^2-5x-24=0 \Rightarrow (x-8)(x+3)=0 \Rightarrow x=8, x=-3 \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{x>0} x=8$$

$$\xrightarrow{x+y=5} 8+y=5 \Rightarrow y=-3$$

بنابراین:

$$x^2+2y=8^2+2(-3)=64-6=58$$

۱۳۱ ۲

نکته در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با ضرایب گویا اگر $n+\sqrt{m}$ جواب معادله باشد، جواب دیگر معادله $n-\sqrt{m}$ می‌باشد و برعکس. به عبارت دیگر دو جواب معادله فقط در علامت $\sqrt{m}$ با هم فرق دارند و قسمت صحیح آن‌ها مثل هم هستند.

با توجه به نکتهٔ فوق چون یکی از جواب‌ها $3-\sqrt{5}$ است. پس جواب دیگر معادله $3+\sqrt{5}$ است. حال که جواب‌های معادله معلوم شدند، ابتدا S و P را محاسبه کرده و به کمک آن‌ها معادله را می‌سازیم:

$$\alpha=3-\sqrt{5} \\ \beta=3+\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}=6 \\ P=\underbrace{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}_{\text{اتحاد مزدوج}}=3^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4 \end{cases}$$

$$: x^2-Sx+P=0 \xrightarrow[P=4]{S=6} x^2-6x+4=0$$

۱۳۲ ۴

$$S=\alpha+\beta=\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}} \xrightarrow{\sqrt{8}=2\sqrt{2}} \sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\underbrace{|\sqrt{2}+1|}_{+}+\underbrace{|\sqrt{2}-1|}_{+}=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$$

$$P=\alpha\beta=\sqrt{3+\sqrt{8}}\times\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}=\sqrt{3^2-(\sqrt{8})^2}=\sqrt{9-8}=\sqrt{1}=1$$

بنابراین معادله برابر می‌شود با:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\sqrt{8}x+1=0$$

۱۳۳ ۱ ابتدا ریشه‌های $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ و $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$\alpha=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=\underbrace{|\sqrt{5}-2|}_{+} \xrightarrow{\sqrt{5}>2/2} \sqrt{5}-2$$

$$\beta=\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=|3-\sqrt{5}|=3-\sqrt{5}$$

حال S و P را می‌یابیم:

$$S=\alpha+\beta=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1$$

$$P=\alpha\beta=(\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})=3\sqrt{5}-5-6+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}-11$$

بنابراین معادله برابر می‌شود با:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-1(x)+5\sqrt{5}-11=0$$

۱۳۴ ۳ ابتدا جواب‌های α و β را با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی داده‌شده می‌یابیم:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=7 \\ 2(\alpha+1)=\beta+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=7 \\ 2\alpha+2=\beta+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=7 \\ 2\alpha-\beta=1 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 4\alpha=8 \Rightarrow \alpha=\frac{8}{4}=2$$

حال اگر $\alpha=2$ را در معادلهٔ $2\alpha+\beta=7$ قرار بدهیم، β به‌دست می‌آید:

$$2(2)+\beta=7 \Rightarrow 4+\beta=7 \Rightarrow \beta=3$$

حال با توجه به $\alpha=2$ و $\beta=3$ مقادیر S و P به‌ترتیب برابر $2+3=5$ و $2\times3=6$ می‌شود و معادله برابر می‌شود با:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \quad (*)$$

حال قیافهٔ معادلهٔ صورت سؤال را مرتب می‌کنیم:

$$x(x-a)=b \Rightarrow x^2-ax-b=0$$

با مقایسهٔ معادلهٔ صورت سؤال و معادلهٔ (*)، مقادیر a و b برابر می‌شوند با:

$$a=5, b=-6 \Rightarrow (a,b)=(5,-6)$$

@khaneh_book

۱۳۵ **۳** ابتدا با توجه به روابط $\alpha\beta = P$, $\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$ ، S و P را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \alpha\beta = ۶ \Rightarrow P = ۶ \quad (*) \\ \alpha^۲ + \beta^۲ = ۱۳ \Rightarrow S^۲ - ۲P = ۱۳ \xrightarrow{(*)} S^۲ - ۲(۶) = ۱۳ \Rightarrow S^۲ = ۱۳ + ۱۲ = ۲۵ \xrightarrow{\sqrt{}} |S| = ۵ \Rightarrow S = \pm ۵ \end{cases}$$

چون α و β جواب‌های مثبت معادله‌اند، پس جمعشان نیز مثبت بوده، لذا $S = ۵$ قابل قبول است. حال با معلوم بودن S و P معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \xrightarrow[P=۶]{S=۵} x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$$

برای این که معادله‌ای را که به دست آوردیم، بتوانیم با معادلهٔ $۲x^۲ + ax + b = ۰$ مقایسه کنیم، باید آن را در ۲ ضرب کنیم:

$$x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۱۰x + ۱۲ = ۰$$

حال با مقایسهٔ دو معادله درمی‌یابیم که $a = -۱۰$ و $b = ۱۲$ بوده، لذا $a + b = -۱۰ + ۱۲ = ۲$.

۱۳۶ **۲** ابتدا عبارت داده شده را خیلی کوچولو ساده کنیم:

$$(-\sqrt{۳} - ۱)^۴ + (۱ - \sqrt{۳})^۴ = \underbrace{(-(۱ + \sqrt{۳}))^۴}_{\text{توان زوج منفی رو می‌خوره}} + (۱ - \sqrt{۳})^۴ = (۱ + \sqrt{۳})^۴ + (۱ - \sqrt{۳})^۴$$

حال فرض کنید $\alpha = ۱ - \sqrt{۳}$ و $\beta = ۱ + \sqrt{۳}$ جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشد، در این صورت باید $\alpha^۴ + \beta^۴$ را به‌دست آوریم. ابتدا مقادیر S و P را پیدا می‌کنیم:

$$S = \alpha + \beta = ۱ - \sqrt{۳} + ۱ + \sqrt{۳} = ۲ \quad , \quad P = \alpha\beta = \underbrace{(۱ - \sqrt{۳})(۱ + \sqrt{۳})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = ۱^۲ - (\sqrt{۳})^۲ = ۱ - ۳ = -۲$$

پس معادله به‌صورت مقابل درمی‌آید: $x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$

می‌دانیم $\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$ است. پس:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P \xrightarrow[P=-۲]{S=۲} (۲)^۲ - ۲(-۲) = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = ۸ \xrightarrow{\text{توان ۴}} \underbrace{(\alpha^۲ + \beta^۲)^۲}_{\text{اتحاد مربع ۲جمله‌ای}} = ۶۴$$

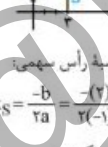
$$\Rightarrow (\alpha^۲)^۲ + (\beta^۲)^۲ + ۲\alpha^۲\beta^۲ = ۶۴ \Rightarrow \alpha^۴ + \beta^۴ + ۲(P)^۲ = ۶۴ \xrightarrow{P=-۲} \alpha^۴ + \beta^۴ + \underbrace{۲(-۲)^۲}_{۸} = ۶۴ \Rightarrow \alpha^۴ + \beta^۴ = ۶۴ - ۸ = ۵۶$$

۱۳۷ **۲** **روش اول:** بیشترین مقدار تابع $f(x) = -۳x^۲ + ۵x - \frac{۱}{۱۲}$ همان عرض رأس سهمی است که برابر $y_S = \frac{-\Delta}{۴a}$ می‌باشد:

$$y_S = \frac{-(b^۲ - ۴ac)}{۴a} \xrightarrow[c=\frac{-۱}{۱۲}]{a=-۳, b=۵} y_S = \frac{-\left(۵^۲ - ۴(-۳)\left(\frac{-۱}{۱۲}\right)\right)}{۴(-۳)} = \frac{-\left(۲۵ + ۱۲\left(\frac{-۱}{۱۲}\right)\right)}{-۱۲} = \frac{-(۲۵ - ۱)}{-۱۲} = \frac{-۲۴}{-۱۲} = ۲$$

روش دوم: ابتدا طول رأس سهمی را از فرمول $x_S = \frac{-b}{۲a}$ به دست آورده و بعد با جای‌گذاری x_S در معادله، عرض رأس سهمی را می‌یابیم. (به عهدهٔ خودتان)

۱۳۸ **۳** در تابع $y = x^۲ - ۶x + ۱۱$ چون ضریب $x^۲$ مثبت است، پس نمودار آن رو به بالا می‌باشد و دارای می‌نیمم است. برای مختصات رأس سهمی (نقطهٔ می‌نیمم تابع) را پیدا کنیم:



$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲(۱)} = ۳ \xrightarrow[y=x^۲-۶x+۱۱]{\text{جایگذاری در}} y_S = ۳^۲ - ۶(۳) + ۱۱ = ۹ - ۱۸ + ۱۱ = ۲ \Rightarrow S(۳, ۲)$$

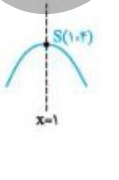
پس نمودار آن در حالت کلی به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار مشخص است که کم‌ترین فاصلهٔ نمودار از محور x ها برابر ۲ می‌باشد.

۱۳۹ **۲** تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۳$ به خاطر منفی بودن ضریب $x^۲$، دارای ماکزیمم است و نمودار آن رو به پایین می‌باشد. امّا محاسبهٔ رأس سهمی:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۲)}{۲(-۱)} = ۱ \xrightarrow[f(x)=-x^۲+۲x+۳]{\text{جایگذاری در}} y_S = -(۱)^۲ + ۲(۱) + ۳ = ۴ \Rightarrow S(۱, ۴)$$

از طرفی می‌دانیم محور تقارن سهمی همان $x = \frac{-b}{۲a}$ است که برابر $x = ۱$ شد. با توجه به داده‌های فوق، گزینه‌ها رو بررسی کنیم:



گزینهٔ (۱): تابع در $x = ۱$ به بیشترین مقدار خود یعنی $y = ۴$ می‌رسد نه کم‌ترین مقدار! چون ضریب $x^۲$ منفیه!

گزینهٔ (۲): مختصات رأس $S(۱, ۴)$ بوده که در ناحیهٔ اول محورهای مختصات است. پس این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۳): با توجه به شکل تقریبی مقابل نتیجه می‌گیریم رأس سهمی روی خط $x = ۱$ قرار دارد نه $x = ۲$!

گزینهٔ (۴): با توجه به شکل معادلهٔ محور تقارن آن $x = ۱$ است نه $y = ۱$! اصلاً خط $y = ۱$ خط افقی بوده در حالی‌که محور تقارن توابع سهمی همواره قائم است.

@khanen_book

۱۴۰ **۲** برای آن‌که یک سهمی دارای ماکزیمم باشد کافی است، ضریب x^2 آن منفی باشد، بنابراین:

$$y=(m^2-m)x+(m+1)x \xrightarrow{\text{ضریب } x^2=m^2-m} \underbrace{m^2-m}_{m(m-1)}<0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } 0,1} \begin{array}{c|ccccc} m & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline m^2-m & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

پس با توجه به جدول، $0<m<1$.

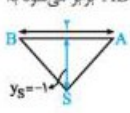
۱۴۱ **۲** اول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=-1 \xrightarrow[y=x^2+2x]{\text{جایگذاری در}} y_S=(-1)^2+2(-1)=1-2=-1 \Rightarrow S(-1,-1)$$

از طرفی می‌دانیم نقاط تلاقی سهمی با محور xها، همان ریشه‌های نمودار تابع هستند، پس داریم:

$$x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-2 \Rightarrow A(0,0), B(-2,0)$$

حال اگر نمودار تقریبی آن را رسم کنیم، خیلی خوب می‌شود. با توجه به شکل مساحت مثلث ABS برابر می‌شود با:



$$\Rightarrow \text{مساحت}: \frac{1\times 2}{2}=1$$

۱۴۲ **۴** بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱) و (۲): تابع ارتفاع برحسب زمان یعنی $h(t)=-5t^2+20t+80$، تابعی درجه دوم بوده و شکل رسم شده، نمودار آن است. نقطهٔ B در حقیقت همان رأس سهمی است. داریم:

$$t_B=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2(-5)}=\frac{-20}{-10}=2 \xrightarrow[h=-5t^2+20t+80]{\text{جایگذاری در}} h(2)=-5(2)^2+20(2)+80=100$$

پس مختصات نقطهٔ B برابر (۲,۱۰۰) است. به عبارت دیگر توپ در $t=2$ ثانیه به ارتفاع ۱۰۰ متری که ماکزیمم ارتفاعش است، می‌رسد، پس گزینه‌های (۱) و (۲) صحیح هستند.

گزینه (۳): توپ در لحظهٔ پرتاب ($t=0$) در نقطهٔ A بوده، ببینیم ارتفاع A چنده؟

$$h(t)=-5t^2+20t+80 \xrightarrow{t=0} h(0)=-5(0)^2+20(0)+80=80 \Rightarrow h_A=80$$

نقطهٔ C هم‌ارتفاع نقطهٔ A است یعنی $h_C=h_A=80$، برای محاسبهٔ زمانی که توپ به نقطهٔ C می‌رسد، معادلهٔ $h(t)=80$ را حل می‌کنیم:

$$h(t)=-5t^2+20t+80=80 \Rightarrow -5t^2+20t=0 \Rightarrow -5t(t-4)=0 \Rightarrow t=0, t=4$$

پس در $t=4$ ثانیه به نقطهٔ C می‌رسد. توجه کنید $t=0$ زمان آغاز پرتاب است که در ارتفاع ۸۰ متری در نقطهٔ A بوده است.

گزینه (۴): وقتی توپ به سطح زمین می‌رسد که ارتفاعش صفر شود ($h=0$) پس کافی‌است ببینیم آیا به ازای $t=8$، h برابر صفر می‌شود یا خیر:

$$h(8)=-5(8)^2+20(8)+80=-5(64)+160+80=-320+160+80=-80\neq 0$$

پس این گزینه غلط است.

۱۴۳ **۳** نقطهٔ $A(-1,-4)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=3x^2+ax+b$ است. بنابراین:

$$x_S=\frac{-a}{2(3)}=\frac{-a}{6} \xrightarrow{x_S=-1} \frac{-a}{6}=-1 \xrightarrow{\times(-6)} a=6 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} y=3x^2+6x+b$$

از طرفی چون A روی سهمی قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ $y=3x^2+6x+b$ صدق می‌کند:

$$y=3x^2+6x+b \xrightarrow[y_S=-4]{x_S=-1} -4=3(-1)^2+6(-1)+b \Rightarrow -4=3-6+b \Rightarrow b=-1$$

بنابراین معادله به صورت $y=3x^2+6x-1$ در می‌آید و برای تعیین محل برخورد با محور yها کافی است $x=0$ را در آن قرار دهیم:

$$y=3x^2+6x-1 \xrightarrow{x=0} y=3(0)^2+6(0)-1 \Rightarrow y=-1$$

۱۴۴ **۲** با توجه به شکل طول رأس سهمی $x=\frac{3}{8}$ است بنابراین با توجه به فرمول طول رأس سهمی $y=(a+5)x^2-2ax+1$ داریم:

$$x_S=\frac{-(-2a)}{2(a+5)}=\frac{a}{a+5} \xrightarrow{x_S=\frac{3}{8}} \frac{a}{a+5}=\frac{3}{8} \Rightarrow 8a=3(a+5) \Rightarrow 8a=3a+15 \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3$$

با جایگذاری a، معادله به صورت $y=8x^2-6x+1$ در می‌آید. که برای محاسبهٔ کم‌ترین مقدار تابع (عرض رأس سهمی) کافی است طول رأس سهمی را در آن قرار دهیم:

$$y_S=8\left(\frac{3}{8}\right)^2-6\left(\frac{3}{8}\right)+1=\cancel{8}\times\frac{9}{\cancel{64}_{8}}-\frac{18}{8}+1=\frac{9}{8}-\frac{18}{8}+1 \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{9-18+8}{8}=\frac{-1}{8}$$

@khaneh_book

۱۴۵ ۴ با توجه به شکل عرض رأس سهمی (می‌نیمم تابع) برابر ۲- است.

$$y_S = -2 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1^2 - 4(m-1)(0))}{4(m-1)} = -2 \Rightarrow \frac{-1}{4(m-1)} = -2 \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} -1 = -2(4(m-1))$$

$$\Rightarrow -1 = -8m + 8 \Rightarrow 8m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{8}$$

حال $m = \frac{9}{8}$ را در معادله قرار داده و سپس نقاط تلاقی نمودار تابع با محور x ها (ریشه‌های تابع) را می‌یابیم:

$$y = (m-1)x^2 + x \xrightarrow{m=\frac{9}{8}} y = \left(\frac{9}{8} - 1\right)x^2 + x = \frac{1}{8}x^2 + x \Rightarrow \frac{1}{8}x^2 + x = 0$$

$$\xrightarrow{\times 8} x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x+8) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -8$$

پس نقاط تلاقی نمودار تابع با محور x ها (۰،۰) و (۸-،۰) بوده که فاصلهٔ آن‌ها از هم ۸ است.

۱۴۶ ۴ می‌دانیم اگر x_1 و x_2 ریشه‌های تابع درجه دوم f باشند می‌توان معادلهٔ تابع را به صورت $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ نوشت. با توجه به شکل ریشه‌ها $-\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{2}$ هستند، بنابراین داریم:

$$f(x) = a\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

از طرفی نمودار سهمی از نقطهٔ $(0, -5)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$-5 = a\left(0 + \frac{1}{2}\right)\left(0 - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow -5 = a\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow -5 = -5\left(\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

پس تابع به فرم $y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$ در می‌آید. می‌دانیم طول رأس سهمی میانگین ریشه‌های تابع است، بنابراین

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{4}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \xrightarrow[y=4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)]{\text{جایگذاری در}} y_S = 4\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{5}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) = -9$$

سؤال دانش‌پژوه (مکیم قلی‌زاده)، **آقا اجازه یه سؤال واسم پیش اومده، آیا میشه $4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$ رو به صورت $(4x-10)(4x+2)$ نوشت؟**

پاسخ: نه! عدد ۴ در پشت پرانتزها رو فقط میشه توی یکی از پرانتزها ضرب کنی! مثلاً تو اومدی ۴ رو توی هر دو تا پرانتز ضرب کردی پسرا

۱۴۷ ۲ با توجه به شکل طول رأس سهمی $x_S = -2$ و یکی از ریشه‌های تابع صفر است زیرا نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است. از طرفی می‌دانیم طول رأس سهمی میانگین ریشه‌های تابع است. بنابراین داریم:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow -2 = \frac{0 + x_2}{2} \Rightarrow -2 = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_2 = -4$$ ریشهٔ دیگر

در تابع $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$، x_1 و x_2 ریشه‌های تابع بوده که برابر ۰ و ۴- به دست آمدند. با جایگذاری آن‌ها در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(x) = a(x-0)(x-(-4)) \Rightarrow f(x) = ax(x+4)$$

از طرفی مختصات رأس سهمی یعنی $S(-2,4)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند. لذا داریم:

$$f(x) = ax(x+4) \Rightarrow 4 = a(-2)(-2+4) \Rightarrow 4 = -4a \Rightarrow a = -1$$

۱۴۸ ۲ منحنی سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴- قطع کرده، پس ریشهٔ تابع درجه دوم $x_1 = 2$ و $x_2 = -4$ بوده و می‌توان معادلهٔ آن را به صورت زیر بیان نمود:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \xrightarrow[x_2=-4]{x_1=2} f(x) = a(x-2)(x-(-4)) = a(x-2)(x+4)$$

از طرفی نمودار از نقطهٔ $(0,4)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ f صدق می‌کند:

$$(0,4) \in f \Rightarrow 4 = a(0-2)(0+4) \Rightarrow 4 = -8a \Rightarrow a = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی برابر می‌شود با:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+4) \overset{\text{بـ}}{=} \frac{1}{2}(2-x)(x+4)$$

۱۴۹ ۳ چون نمودار تابع f محور x ها را با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است، پس $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ ریشه‌های تابع f هستند. پس می‌توان $f(x) = x^2 + mx + n$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x) = 1x^2 + mx + n = 1(x-1)(x-2) \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2$$

حال با معلوم شدن ضابطهٔ f معادلهٔ $f(x) > 6$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) > 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 - 6 > 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 3x - 4}_{(x-4)(x+1)} > 0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{جدول}} x < -1 \text{ یا } x > 4$$

پس مجموعه جواب حاصل شامل ۶ عدد صحیح ۱-،۰،۱،۲،۳،۴ نمی‌شود.

@khanenbook

۱۵۰ ۱ **روش اول:** با توجه به شکل، سهمی دارای ریشهٔ مضاعف $x = 2$ است. از طرفی می‌دانیم اگر x_0 ریشهٔ مضاعف تابع $y = ax^2 + bx + c$ باشد، می‌توان ضابطهٔ تابع را به صورت $y = a(x - x_0)^2$ نوشت. پس داریم:

$$y = a(x-2)^2 \xrightarrow[\text{با توجه به نمودار}]{(0,3)\in f} 3 = a(0-2)^2 \Rightarrow 3 = 4a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

با جایگذاری a در رابطهٔ (*) داریم:

$$y = \frac{3}{4}(x-2)^2 = \frac{3}{4}(x^2-4x+4) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \xrightarrow[\text{مقایسه با } f(x)]{f(x)=ax^2+bx+c} a = \frac{3}{4}, b = -3, c = 3$$

$$\Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{3-(-3)}{\frac{3}{4}} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = \frac{24}{3} = 8$$

روش دوم: نقاط $(0,3)$ و $(2,0)$ روی نمودار سهمی قرار دارند؛ پس در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} 3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 3 \quad (*) \\ 0 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \xrightarrow{(*)} 4a + 2b + 3 = 0 \quad (**) \end{cases}$$

از طرفی طول رأس سهمی $x_S = 2$ است. پس:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow b = -4a$$

با جایگذاری رابطهٔ فوق در (**) داریم:

$$4a + 2b + 3 = 0 \Rightarrow 4a + 2(-4a) + 3 = 0 \Rightarrow 4a - 8a + 3 = 0 \Rightarrow -4a + 3 = 0 \Rightarrow 3 = 4a \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -4a = -3$$

ادامهٔ حل مانند روش اول است.

۱۵۱ ۳ ابتدا ظاهر تابع را مرتب کنیم:

$$y = m(x^2+1) - 2x^2 - 3x + 2 = mx^2 + m - 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$$

نمودار تقریبی نمودار به صورت است که از آن دو تا نکته متوجه می‌شویم:

۱) نمودار رو به بالا است، لذا باید ضریب x^2 مثبت باشد. پس:

$$m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

۲) رأس سهمی روی محور xها قرار دارد، پس معادلهٔ متناظر با این تابع، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4\underbrace{(m-2)(m+2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 0$$

$$\Rightarrow 9 - 4(m^2-4) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0 \Rightarrow 4m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4} \xrightarrow{\sqrt{}} |m| = \frac{5}{2} \Rightarrow m = \pm\frac{5}{2}$$

که با توجه به شرط $m > 2$، فقط $m = \frac{5}{2}$ صحیح است.

۱۵۲ ۱ با توجه به صورت سؤال شکل تقریبی نمودار تابع به صورت می‌باشد. پس اولاً نمودار رو به بالا بوده و ضریب x^2 باید مثبت باشد که با توجه به ضابطهٔ تابع مثبت است. ثانیاً عرض رأس سهمی صفر و طول رأس سهمی منفی است:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4(1)(a^2-12) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a^2 + 48 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 = 48 \Rightarrow a^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{}} |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

که فقط به ازای $a = 4$ طول رأس سهمی منفی می‌شود. ببینید:

$$x_S = \frac{-a}{2(1)} = \frac{-a}{2} : a = 4 \Rightarrow x_S = \frac{-4}{2} = -2 \ \checkmark \quad \text{و} \quad a = -4 \Rightarrow x_S = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \ \times$$

۱۵۳ ۳ در نحوهٔ نمایش به صورت $y = a(x - x_S)^2 + y_S$، اعداد x_S و y_S به ترتیب طول و عرض رأس سهمی هستند که با توجه به شکل $x_S = 2$ و $y_S = -2$ است. پس تابع به صورت $y = a(x-2)^2 - 2$ در می‌آید. از طرفی نمودار تابع از نقطهٔ $(3,0)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$y = a(x-2)^2 - 2 \Rightarrow 0 = a(3-2)^2 - 2 \Rightarrow 0 = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

۱۵۴ ۴ می‌توانیم ضابطهٔ تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به صورت $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ نمایش دهیم که در آن x_S و y_S به ترتیب طول و عرض رأس سهمی هستند. پس ابتدا رأس سهمی $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ را بیابیم:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4 : x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(2)} = \frac{3}{4} \xrightarrow[y=2x^2-3x+4]{\text{جایگذاری در}} y_S = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 4 = 2\left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} + 4$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 4 = \frac{9 - 18 + 32}{8} = \frac{23}{8}$$

@khanehbook

پس ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به صورت $f(x)=a\left(x-\frac{۳}{۴}\right)^۲+\frac{۲۳}{۸}$ بنویسیم که در این صورت با مقایسهٔ آن با $f(x)=۲(x-h)^۲+k$ نتیجه می‌گیریم که $h=\frac{۳}{۴}$ و $k=\frac{۲۳}{۸}$ و در نتیجه:

$$h+k=\frac{۳}{۴}+\frac{۲۳}{۸}=\frac{۶+۲۳}{۸}=\frac{۲۹}{۸}$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبر اکبری): **آقا ما اومدیم به صورت زیر عمل کردیم:**

$$f(x)=۲(x-h)^۲+k=۲(x^۲-۲hx+h^۲)+k=۲x^۲-۴hx+۲h^۲+k\xrightarrow[\text{فرض}]{\text{طبق}}۲x^۲-۳x+۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۴h=-۳\Rightarrow h=\frac{۳}{۴}\quad(*)\\ ۲h^۲+k=۴\xrightarrow{(*)}۲\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲+k=۴\Rightarrow\frac{۹}{۸}+k=۴\Rightarrow k=۴-\frac{۹}{۸}=\frac{۲۳}{۸}\end{cases}\Rightarrow h+k=\frac{۲۹}{۸}$$

کجا پاسخ: آفرین اونم میشه ولی راه‌حل ما با کلاس‌تره!

۱۵۵ **۱** ابتدا مختصات رأس سهمی $y=ax^۲+۲ax-۳$ را می‌یابیم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(۲a)}{۲(a)}=-۱\xrightarrow[y=ax^۲+۲ax-۳]{\text{جایگذاری در}}y_S=a(-۱)^۲+۲a(-۱)-۳=a-۲a-۳=-a-۳\quad(*)$$

از طرفی چون رأس سهمی روی خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (یعنی $y=x$) است، پس مختصاتش در آن صدق می‌کند و داریم:

$$y=x\xrightarrow{S(x_S,y_S)}y_S=x_S\xrightarrow{(*)}-a-۳=-۱\Rightarrow-۳+۱=a\Rightarrow a=-۲$$

۱۵۶ **۴** با توجه به مسأله نمودار تقریبی تابع به صورت $y=۱$ است که از این شکل ۲ نکتهٔ زیر را می‌فهمیم:

۱) نمودار رو به بالا بوده پس ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد؛ یعنی $a>۰$.

۲) رأس سهمی روی خط $y=۱$ قرار دارد؛ یعنی عرض رأس سهمی برابر ۱ است و داریم:

$$y_S=\frac{-\Delta}{۴a}=۱\Rightarrow\frac{-(b^۲-۴ac)}{۴a}=۱\Rightarrow\frac{-((-۲\sqrt{۲})^۲-۴(a)(a))}{۴a}=۱\Rightarrow\frac{-(۸-۴a^۲)}{۴a}=۱$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}-۸+۴a^۲=۴a\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{همه برن}}۴a^۲-۴a-۸=۰\xrightarrow{\div۴}a^۲-a-۲=۰\Rightarrow(a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow a=۲\text{ یا }-۱$$

چون باید $a>۰$ باشد، پس $a=۲$ صحیح است.

۱۵۷ **۲** ابتدا ظاهر تابع را مرتب کنیم:

$$f(x)=m(x^۲+۲)+۲x-۱=mx^۲+۲m+۲x-۱=mx^۲+۲x+۲m-۱$$

حال مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(m)}=\frac{-۱}{m}\xrightarrow[\text{ضابطهٔ تابع}]{\text{جایگذاری در}}y_S=m\left(\frac{-۱}{m}\right)^۲+۲\left(\frac{-۱}{m}\right)+۲m-۱=m\left(\frac{۱}{m^۲}\right)-\frac{۲}{m}+۲m-۱$$

$$=\frac{۱}{m}-\frac{۲}{m}+۲m-۱\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}}\frac{۱-۲+m(۲m-۱)}{m}=\frac{-۱+۲m^۲-m}{m}\Rightarrow S\left(\frac{-۱}{m},\frac{۲m^۲-m-۱}{m}\right)$$

اگر نقطهٔ $S(x_S,y_S)$ در ربع اول باشد، $y_S>۰$ و $x_S>۰$ و اگر در ربع سوم $y_S<۰$ و $x_S<۰$. پس در هر ۲ حالت طول و عرض S هم‌علامت هستند، یعنی $x_S\times y_S>۰$ و داریم:

$$x_S\times y_S>۰\Rightarrow\frac{-۱}{m}\times\frac{۲m^۲-m-۱}{m}>۰\Rightarrow\frac{-(۲m^۲-m-۱)}{m^۲}>۰\xrightarrow[\text{جهت عوض}]{\times(-۱)}\frac{۲m^۲-m-۱}{m^۲}<۰$$

جمع ضرایب عبارت $۲m^۲-m-۱$ صفر است؛ پس ریشه‌های آن ۱ و $\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۲}$ و ریشهٔ مخرج صفر است. بنابراین:

m	$-\infty$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	$+\infty$
$۲m^۲-m-۱$	+	۰	−	۰	+
$m^۲$	+	+	۰	+	+
$x_S\times y_S$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow m\in\left(-\frac{۱}{۲},۰\right)\cup(۰,۱)$$

گزینهٔ (۲) که زیرمجموعه‌ای از محدودهٔ فوق است، جواب است.

@khanenet_book

۱۵۸ ۳ ابتدا ظاهر تابع را مثل آدم کنیم:

$$۲x^۲ + y - x - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow y = -۲x^۲ + x + \frac{۳}{۲}$$

حال از فرمول $x = \frac{-b}{۲a}$، معادلهٔ محور تقارن آن را می‌یابیم:

$$x = \frac{-b}{۲a} \xrightarrow[a=-۲]{b=۱} x = \frac{-۱}{۲(-۲)} = \frac{۱}{۴}$$

۱۵۹ ۱ معادلهٔ محور تقارن نمودار تابع $y = -۳x^۲ + ۴x$ برابر $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۳)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$ است. حال برای تعیین عرض نقطهٔ تلاقی خط با سهمی، کافی است معادله‌های دو خط را در یک دستگاه قرار داده و آن دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} x = \frac{۲}{۳} \quad (*) \\ ۲y + ۳x = ۱ \end{cases} \xrightarrow{(*)} ۲y + ۳\left(\frac{۲}{۳}\right) = ۱ \Rightarrow ۲y + ۲ = ۱ \Rightarrow ۲y = -۱ \Rightarrow y = \frac{-۱}{۲}$$

پس محل برخورد محور تقارن با خط مذکور نقطهٔ $\left(\frac{۲}{۳}, \frac{-۱}{۲}\right)$ بوده که عرض آن $-\frac{۱}{۲}$ است.

۱۶۰ ۴ منحنی تابع درجه دوم فقط نسبت به یک خط که همان محور تقارن $\left(x = \frac{-b}{۲a}\right)$ است، تقارن دارد. پس مسأله با زبان بی زبانی دارد به ما می‌گوید که $x = ۲$ همان معادله محور تقارن منحنی است. بنابراین:

$$y = (a-۱)x^۲ + x + ۳ : x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲(a-۱)} \xrightarrow{\text{طبق فرض } x=۲} ۲ = \frac{-۱}{۲(a-۱)} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۲(۲(a-۱)) = -۱$$

$$\Rightarrow ۴a - ۴ = -۱ \Rightarrow ۴a = -۱ + ۴ = ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

حال $a = \frac{۳}{۴}$ را در ضابطه تابع قرار داده و محل برخورد منحنی با سمت مثبت محور xها (ریشهٔ مثبت) را می‌یابیم:

$$y = (a-۱)x^۲ + x + ۳ \xrightarrow{a=\frac{۳}{۴}} y = -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times(-۴)} x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۶ \text{ یا } -۲$$

پس تابع در نقاط به طول ۲- و ۶ محور xها را قطع کرده که طول مثبت همان $x = ۶$ است.

۱۶۱ ۳ با توجه به درس‌نامه طول وسط پاره‌خط AB همان طول رأس سهمی بوده که برابر ۲- است. از طرفی می‌دانیم طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ است. بنابراین داریم:

$$x_S = \frac{-a}{۲(-۱)} = \frac{a}{۲} \xrightarrow{x_S=-۲} \frac{a}{۲} = -۲ \Rightarrow a = -۴$$

با معلوم شدن a، معادلهٔ $y = a$ برابر $y = -۴$ و معادلهٔ سهمی برابر $y = -x^۲ - ۴x + ۳$ می‌شود. حال برای پیدا کردن نقاط برخورد خط و منحنی باید معادلهٔ تقاطع زیر را حل کنیم:

$$-x^۲ - ۴x + ۳ = -۴ \Rightarrow -x^۲ - ۴x + ۳ + ۴ = ۰ \Rightarrow -x^۲ - ۴x + ۷ = ۰ \quad (*)$$

جواب‌های حاصل از معادلهٔ فوق طول نقاط A و B را به ما می‌دهد ولی ما به دنبال $x_B - x_A$ هستیم یعنی تفاضل جواب‌ها. اگر یادتون باشد تفاضل ریشه‌ها فرمولی به صورت زیر داشت:

$$|x_B - x_A| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-۴)^۲ - ۴(-۱)(۷)}}{|-۱|} = \frac{\sqrt{۱۶ + ۲۸}}{۱} = \sqrt{۴۴} = \sqrt{۴ \times ۱۱} = ۲\sqrt{۱۱}$$

البته می‌توانیم معادلهٔ (*) را حل کنیم و سپس جوابهای به دست آمده را از هم کم کنیم.

۱۶۲ ۴ به شکل تقریبی روبه‌رو دقت کنید. با توجه به فرضیات مسأله، فاصله رأس سهمی از نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB برابر ۵ بیان شده یعنی $SC = ۵$ یعنی اگر از ارتفاع y_S، ۵ واحد بالاتر برویم به نقطهٔ C می‌رسیم که y آن برابر m است (زیرا روی خط $y = m$ قرار دارد)، به عبارت دیگر:

$$y_S + ۵ = y_C \xrightarrow{y_C=m} y_S + ۵ = m$$

حال عرض رأس سهمی را با توجه به معادلهٔ $y = x^۲ + ۴x + ۳$ به دست آورده و در رابطهٔ فوق قرار می‌دهیم:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(۱)} = -۲ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{جایگذاری در}} y_S = (-۲)^۲ + ۴(-۲) + ۳ = ۴ - ۸ + ۳ = -۱$$

بنابراین:

$$y_S + ۵ = m \xrightarrow{y_S=-۱} -۱ + ۵ = m \Rightarrow m = ۴$$

@khanen_book

۱۶۳ ۳

یادآوری اگر دو نقطهٔ هم‌عرض A و B متعلق به نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشند، آن‌گاه طول نقطه‌ای که وسط پاره‌خط AB قرار دارد یا طول رأس سهمی برابر است. به عبارت دیگر داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

با توجه به یادآوری فوق چون نقاط $A(n,-1)$ و $B(m,-1)$ روی نمودار سهمی به معادلهٔ $y = 2x^2 - 8x + b$ قرار داشته و عرض آن‌ها یکسان است، پس طول نقطهٔ وسط پاره‌خط AB (یعنی $\frac{x_A + x_B}{2}$) با طول رأس سهمی (یعنی $\frac{-b}{2a}$) برابر است و داریم:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{-(-8)}{2(2)} = \frac{n+m}{2} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{n+m}{2} \Rightarrow 2 = \frac{n+m}{2} \Rightarrow n + m = 4$$

۱۶۴ ۱ نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی $y = a(x-b)^2 + c$ قرار داشته و دارای عرض یکسان هستند؛ پس طول نقطهٔ وسط پاره‌خط AB (یعنی $\frac{x_A + x_B}{2}$) با طول رأس سهمی (یعنی x_S) برابر است و داریم:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که می‌توان ضابطهٔ تابع درجه دوم را به فرم $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ نوشت که در آن x_S و y_S به ترتیب طول و عرض رأس سهمی هستند. با مقایسهٔ $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ با معادلهٔ $y = a(x-b)^2 + c$ درمی‌یابیم که b همان x_S است که با توجه به تساوی (*) داریم:

$$b = x_S \overset{(*)}{=} -1$$

۱۶۵ ۱ نمودار سهمی داده شده رو به بالا است (زیرا ضریب x^2 آن مثبت است). پس شکل تقریبی آن به صورت زیر بوده و معادلهٔ محور تقارن آن برابر است با:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(\frac{1}{2})} = \frac{2}{1} = 2 \quad (*)$$

با توجه به شکل، نمودار سهمی محور تقارن خود را در رأس سهمی ملاقات می‌کند؛ پس هدف سؤال، عرض رأس سهمی است:

$$x_S \overset{(*)}{=} 2 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} y_S = \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 3 = 2 - 4 + 3 = 1$$

۱۶۶ ۱ می‌دانیم اگر ضابطهٔ تابع درجه دوم را به فرم $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ارائه کرده باشند، ریشه‌های معادله x_1 و x_2 می‌باشند. از طرفی معادلهٔ محور تقارن $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ است؛ پس در تابع $y = 2(x-5)(x+a)$ ریشه‌ها برابر $-a$ و ۵ بوده و معادلهٔ محور تقارن برابر می‌شود با:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-a)}{2} = \frac{5 - a}{2} \xrightarrow[x=2a]{\text{طبق فرض}} \frac{5-a}{2} = 2a \Rightarrow 5 - a = 2(2a) \Rightarrow 5 - a = 4a \Rightarrow 5 = 5a \Rightarrow a = 1$$

با جایگذاری $a = 1$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$y = 2(x-5)(x+1) \quad (*)$$

طول رأس سهمی نیز میانگین ریشه‌ها (یعنی $\frac{5 + (-1)}{2} = 2$) بوده و داریم:

$$x_S = 2 \xrightarrow[\text{جایگذاری در } (*)]{} y_S = 2(2-5)(2+1) = 2(-3)(3) = -18$$

۱۶۷ ۴ محور تقارن سهمی $y = -2x^2 + bx + c$ برابر $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4}$ می‌باشد که با توجه به فرض همان $x = -1$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{b}{4} = -1 \Rightarrow b = -4$$

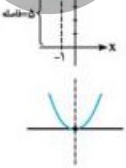
از طرفی نمودار سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، یعنی از نقطهٔ $(0,3)$ می‌گذرد. پس مختصات این نقطه در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$f(x) = -2x^2 + bx + c \xrightarrow{b=-4} f(x) = -2x^2 - 4x + c \xrightarrow{(0,3)\in f} 3 = -2(0)^2 - 4(0) + c \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = -2x^2 - 4x + 3$$

حال رأس سهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$x_S = -1 \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} y_S = -2(-1)^2 - 4(-1) + 3 = -2 + 4 + 3 = 5$$

شکل تقریبی سهمی به صورت مقابل است. در نتیجه فاصلهٔ رأس از محور xها برابر ۵ است.



۱۶۸ ۴ نمودار سهمی با ضابطهٔ $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ به خاطر مثبت بودن ضریب x^2 رو به بالا است. از طرفی طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(\frac{1}{2})} = \frac{3}{1} = 3$$

@khaneh_book

با توجه به نمودار، رأس سهمی روی $y=-\frac{۵}{۲}$ قرار گرفته و لذا عرض رأس سهمی $-\frac{۵}{۲}$ می‌شود. پس داریم:

$$x_S=۳ \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} y_S=\frac{۱}{۲}(۳)^۲-۳(۳)+a=\frac{۹}{۲}-۹+a=\frac{۹-۱۸+۲a}{۲}=\frac{-۹+۲a}{۲}$$

$$\xrightarrow{y_S=-\frac{۵}{۲}} \frac{-۹+۲a}{۲}=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲a=۹-۵=۴ \Rightarrow a=۲$$

۱۶۹ ۲ خط $x=۵$ محور تقارن منحنی است. داریم:

$$x=\frac{-a}{۲(۱)}=۵ \Rightarrow a=-۱۰ \xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع}} y=x^۲-۱۰x+b$$

از طرفی نقاطی از منحنی که روی محور xها قرار دارند، همان ریشه‌های تابع هستند و فاصلهٔ ریشه‌ها از فرمول $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به دست می‌آید. داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۸ \Rightarrow \frac{\sqrt{(-۱۰)^۲-۴(۱)(b)}}{۱}=۸ \Rightarrow ۱۰۰-۴b=۶۴ \Rightarrow ۴b=۳۶ \Rightarrow b=۹ \xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع}} y=x^۲-۱۰x+۹$$

حال از فرمول $y_S=\frac{-\Delta}{۴a}$، می‌نیمم تابع را می‌یابیم:

$$y_S=\frac{-((-۱۰)^۲-۴(۱)(۹))}{۴(۱)}=\frac{-(۱۰۰-۳۶)}{۴}=\frac{-۶۴}{۴}=-۱۶$$

۱۷۰ ۲ **روش اول:** با فرض آن‌که y عرض و x طول مستطیل مقابل باشد، داریم:

$$\text{محیط}: P=۲x+۲y=۱۰۰ \Rightarrow ۲(x+y)=۱۰۰ \xrightarrow{\div ۲} x+y=۵۰$$

$$\text{مساحت}: A=xy$$

برای محاسبهٔ ماکزیمم مساحت ابتدا به کمک تساوی $x+y=۵۰$، y را برحسب x به صورت $y=۵۰-x$ به دست آورده و در فرمول مساحت جایگذاری می‌کنیم:

$$A=xy \xrightarrow{y=۵۰-x} x(۵۰-x) \Rightarrow A=-x^۲+۵۰x$$

حال به دنبال ماکزیمم تابع مساحت A هستیم. تابع A، تابعی درجه دوم بوده که چون ضریب $x^۲$ منفی است دارای ماکزیمم است و مقدار ماکزیمم آن همان عرض رأس سهمی است:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(۵۰)}{۲(-۱)}=۲۵ \Rightarrow A_{max}=-(۲۵)^۲+۵۰(۲۵)=-۶۲۵+۱۲۵۰=۶۲۵$$

پس ماکزیمم مساحت ۶۲۵ است.

تذکر ماکزیمم مساحت به ازای $x=۲۵$ رخ داد که در این حالت y برابر می‌شود با: $y=۵۰-x=۵۰-۲۵=۲۵$. در این حالت طول و عرض مستطیل با هم برابر شده و مستطیل تبدیل به مربع می‌شود.

روش دوم:

نکته اگر $x+y=k$، ماکزیمم xy وقتی رخ می‌دهد که $x=y=\frac{k}{۲}$.

با توجه به نکتهٔ فوق چون $x+y=۵۰$، پس ماکزیمم xy وقتی رخ می‌دهد که $x=y=\frac{۵۰}{۲}=۲۵$ و برابر می‌شود با:

$$\text{Max}(xy) \xrightarrow{x=y=۲۵} ۲۵\times ۲۵=۶۲۵$$

۱۷۱ ۳ ۲۴ را به صورت مجموع دو عدد x و y نوشته‌ایم یعنی $x+y=۲۴$؛ از طرفی می‌خواهیم xy ماکزیمم شود:

$$S=xy \xrightarrow{x+y=۲۴ \Rightarrow y=۲۴-x} S=x(۲۴-x)=-x^۲+۲۴x$$

S تابعی درجه دوم است و ماکزیمم آن به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ رخ می‌دهد:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲۴}{۲(-۱)}=۱۲ \Rightarrow y=۲۴-x=۲۴-۱۲=۱۲$$

پس:

$$۲x+۵y=۲(۱۲)+۵(۱۲)=۷(۱۲)=۸۴$$

۱۷۲ ۴ مساحت مثلث برابر است با:

$$A=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{xy}{۲} \quad (*)$$

حال ابتدا از تساوی $۲x+۳y=۱۲$، مقدار y را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$۲x+۳y=۱۲ \Rightarrow ۳y=۱۲-۲x \xrightarrow{\div ۳} y=\frac{۱۲-۲x}{۳}=\frac{۱۲}{۳}-\frac{۲x}{۳}=۴-\frac{۲x}{۳}$$

با جایگذاری y برحسب x در رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$A=\frac{xy}{۲}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x\left(۴-\frac{۲x}{۳}\right)=-\frac{۱}{۳}x^۲+۲x$$

خوب ماکزیمم مساحت همان عرض رأس سهمی فوق است:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(۲)}{۲(-\frac{۱}{۳})}=۳ \Rightarrow A_{max}=-\frac{۱}{۳}(۳)^۲+۲(۳)=-\frac{۹}{۳}+۶=-۳+۶=۳$$

@khanen_book

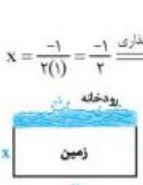
۱۷۳ ۳ ابتدا تابع T که فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات است را از فرمول زیر می‌یابیم:

$$T=\sqrt{x_M^2+y_M^2}\xrightarrow{y=\sqrt{x+8}}\sqrt{x^2+(\sqrt{x+8})^2}=\sqrt{x^2+x+8}$$

حال می‌خواهیم کم‌ترین مقدار عبارت $\sqrt{x^2+x+8}$ را بیابیم. برای این کار کافی است کم‌ترین مقدار x^2+x+8 را به دست آوریم (چرا؟) که می‌دانیم به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد:

$$x=\frac{-1}{2(1)}=\frac{-1}{2}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+8=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+8=\frac{1-2+32}{4}=\frac{31}{4}\Rightarrow T_{min}=\sqrt{\frac{31}{4}}=\frac{\sqrt{31}}{2}$$

۱۷۴ ۱ با توجه به شکل طول طناب استفاده شده برابر $2x+y$ بوده که برابر ۴۸ است. از طرفی مساحت زمین محدود شده با طناب برابر $S=xy$ است و داریم:



$$S=xy\xrightarrow{2x+y=48\Rightarrow y=48-2x}S=x(48-2x)=-2x^2+48x$$

تابع S، تابعی درجه دوم بوده که ماکزیمم آن به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{48}{2(-2)}=\frac{-48}{-4}=12\xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع مساحت}}S=-2(12)^2+48(12)\Rightarrow S=-2(144)+576=288$$

۱۷۵ ۲ شکل مقابل را در نظر بگیرید. در این صورت مساحت مستطیل برابر می‌شود با:

$$S=2xy\quad(*)$$

از طرفی طبق فرض محیط استادیوم ۱۵۰۰ است:

$$\text{محیط استادیوم}=\underbrace{\frac{2\pi x}{2}+\frac{2\pi x}{2}}_{\text{محیط ۲ نیم‌دایره}}+2y=1500\Rightarrow 2\pi x+2y=1500\xrightarrow[\div 2]{\pi=3}3x+y=750\Rightarrow y=750-3x\quad(**)$$

با جایگذاری (**) در (*) داریم:

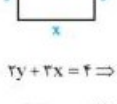
$$S=2xy\xrightarrow{(**)}2x(750-3x)=-6x^2+1500x$$

تابع مساحت مستطیل، تابعی درجه دوم است که حداکثر آن به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-1500}{2(-6)}=125\xrightarrow{y=750-3x}y=750-3(125)=750-375=375$$

پس عرض مستطیل باید $2x=250$ باشد.

۱۷۶ ۱ برای حداکثر نوردهی، مساحت پنجره باید حداکثر باشد. با توجه به شکل محیط پنجره برابر $2y+3x$ است که طبق فرض ۴ است:



$$2y+3x=4\quad(*)$$

از طرفی می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$ است. پس مساحت پنجره برابر می‌شود با:

$$S=xy+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\quad(**)$$

حال از رابطهٔ (*) y را برحسب x به دست آورده و در رابطهٔ (**) قرار می‌دهیم:

$$2y+3x=4\Rightarrow 2y=4-3x\Rightarrow y=2-\frac{3}{2}x\xrightarrow{(**)}S=x\left(2-\frac{3}{2}x\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\Rightarrow S=2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+2x$$

تابع مساحت فوق دارای ماکزیمم است (زیرا ضریب x^2 منفی است!) که به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید:

$$x=\frac{-2}{2\left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)}=\frac{-2}{\frac{\sqrt{3}-6}{2}}=\frac{-4}{\sqrt{3}-6}$$

۱۷۷ ۳ ابتدا ببینیم معادلهٔ $100x^2-15x-1=0$ اصلاً چند تا جواب دارد:

$$\Delta=b^2-4ac=(-15)^2-4(100)(-1)=225+400=625>0\Rightarrow$$ ۲ جواب متمایز دارد.

خوب حالا با محاسبهٔ P و S دربارهٔ علامت آن‌ها نظر می‌دهیم:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-1}{100}<0\quad,\quad S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-15)}{100}=\frac{15}{100}>0$$

پس یکی از جواب‌ها مثبت و دیگری منفی بوده که ضریبشان منفی شده، از طرفی چون جمع آن‌ها مثبت است، نتیجه می‌گیریم از نظر اندازه جواب مثبت بزرگ‌تر از جواب منفی بوده است.

۱۷۸ ۳ در معادلهٔ داده شده، $a=-3$، $b=10$ و $c=k^2+1$ می‌باشد و می‌دانیم k^2+1 همواره مثبت است. پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها که به صورت زیر است، منفی می‌شود:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{\overbrace{k^2+1}^{\oplus}}{\underbrace{-3}_{\ominus}}<0$$

@khaneh_book

از منفی بودن P دو نتیجه می‌گیریم، اولاً چون P منفی است، دلتای معادله حتماً مثبت بوده و لذا دو جواب متمایز داریم. دوماً چون $P<0$ است پس جواب‌ها مختلف‌العلامه هستند.

سؤال دانش‌پژوه (امعد اصفری)، آقا چرا $1+k^2$ مثبته؟

پاسخ: امعد جان قلب همیشه $k^2\geq 0$ است حالا به طرفین نامساوی عدد ۱ را اضافه کن میشه $k^2+1\geq 1$ پس k^2+1 مثبته دیگه.

۱۷۹ ۴ ابتدا ظاهر معادله رو مرتب نمایید:

$$\underbrace{(x-1)(x-3)}_{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}+2+k^2=0\Rightarrow x^2-4x+3+2+k^2=0\Rightarrow x^2-4x+5+k^2=0$$

اول ببینیم چند تا جواب داره:

$$\Delta=b^2-4ac\xrightarrow[c=5+k^2]{a=1,\,b=-4}\Delta=(-4)^2-4(1)(5+k^2)=16-20-4k^2=-4-4k^2<0\Rightarrow$$

معادله، جواب حقیقی ندارد.

سؤال دانش‌پژوه (سیما مصتی)، آقا اجازه! چرا $-4-4k^2$ همواره منفیه؟

پاسخ: گناه کن:

$$k^2\geq 0\xrightarrow[\text{جهت عوض میشه}]{\times(-4)}-4k^2\leq 0\xrightarrow{-4}\underbrace{-4k^2-4}_{\Delta}\leq -4\Rightarrow\Delta\leq -4\Rightarrow\Delta\text{ منفیه}$$

۱۸۰ ۲ شرط داشتن دو جواب مختلف‌العلامه، $P<0$ است. بنابراین:

$$P=\frac{c}{a}\xrightarrow[a=m-1]{c=m-3}\frac{m-3}{m-1}<0\xrightarrow{\text{۳ و ۱: ریشه‌ها}}\begin{array}{c|ccccc}m & -\infty & & 1 & & 3 & & +\infty\\ \hline P & & + & \nexists & - & 0 & + & \end{array}\xrightarrow{\text{کجاها منفیه؟}}1<m<3$$

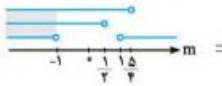
۱۸۱ ۱ می‌دانیم شرط داشتن ۲ جواب حقیقی متمایز مثبت $\Delta>0$ ، $P=\frac{c}{a}>0$ و $S=\frac{-b}{a}>0$ است. حال این نامعادله‌ها را حل کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$1)\ \Delta>0\Rightarrow b^2-4ac=(2m-1)^2-4(1)(m^2-1)>0\Rightarrow(2m)^2+1-2(1)(2m)-4m^2+4>0$$

$$\Rightarrow 4m^2+1-4m-4m^2+4>0\Rightarrow 5-4m>0\Rightarrow 5>4m\Rightarrow\frac{5}{4}>m$$

$$2)\ P=\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{m^2-1}{1}>0\Rightarrow\underbrace{m^2-1}_{(m-1)(m+1)}>0\xrightarrow{\pm1\text{: ریشه‌ها}}\begin{array}{c|ccccc}m & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty\\ \hline P & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}\Rightarrow m<-1\ \text{یا}\ m>1$$

$$3)\ S=\frac{-b}{a}>0\Rightarrow\frac{-(2m-1)}{1}>0\Rightarrow -2m+1>0\Rightarrow 1>2m\xrightarrow{\div 2}\frac{1}{2}>m$$



$\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ m محدودهٔ: $m<-1$

سؤال دانش‌پژوه (سامان سلامتی)، آقا ببخشید بهتر نیست اول شروط (۲) و (۳) رو چک کنیم؟ اون‌وقت بدون نیاز به شرط (۱) گزینهٔ درست رو می‌تونستیم انتخاب کنیم.

پاسخ: آفرین! بله شرط‌های (۲) و (۳) هم ساده‌تر هستند و هم گاهی با چک کردن اونا (مثله این سوال) میشه سریع گزینهٔ درست رو انتخاب کرد.

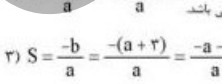
۱۸۲ ۱ نمودار تابع f محور x ها را در ۲ نقطه به طول‌های منفی قطع کرده است. پس معادلهٔ $ax^2+(a+3)x-1=0$ دارای ۲ جواب حقیقی منفی است. از طرفی می‌دانیم شرط داشتن دو جواب حقیقی متمایز منفی $\Delta>0$ ، $P=\frac{c}{a}>0$ و $S=\frac{-b}{a}<0$ است. حال این نامعادله‌ها را حل کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$1)\ \Delta>0\Rightarrow b^2-4ac=(a+3)^2-4(a)(-1)>0\Rightarrow a^2+6a+9+4a>0\Rightarrow\underbrace{a^2+10a+9}_{(a+1)(a+9)}>0$$

$$\xrightarrow{\text{۹- و ۱-: ریشه‌ها}}\begin{array}{c|ccccc}a & -\infty & & -9 & & -1 & & +\infty\\ \hline \Delta & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}\xrightarrow{\text{کجاها مثبته؟}}a<-9\ \text{یا}\ a>-1$$

$$2)\ P=\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{-1}{a}>0\xrightarrow[\text{پس مخرج هم باید منفی باشد}]{\text{صورت کسر منفی هست}}a<0$$

$$3)\ S=\frac{-b}{a}=\frac{-(a+3)}{a}=\frac{-a-3}{a}<0\xrightarrow{\text{۰ و ۳-: ریشه‌ها}}\begin{array}{c|ccccc}a & -\infty & & -3 & & 0 & & +\infty\\ \hline S & & - & 0 & + & \nexists & - & \end{array}\xrightarrow{\text{کجاها منفیه؟}}a<-3\ \text{یا}\ a>0$$



$\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ a محدودهٔ: $a<-9$

@khaneh_book

۱۸۳ ۳ با توجه به صورت مسأله نتیجه می‌گیریم که معادله دارای ۲ جواب مختلف‌العلامت بوده و اندازهٔ جواب مثبت از جواب منفی نیز بیشتر است. پس باید شرط $S=\frac{-b}{a}>0$ را در نظر بگیریم:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-4)}{m^2}=\frac{4}{m^2}>0 \xrightarrow[\text{مخرج نیز باید مثبت باشه}]{\text{صورت کسر مثبته پس}} m^2>0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{0\}$$

پس جواب $\mathbb{R}-\{0\}$ خواهد شد.

سؤال *دانش‌پژوه (قلی سلامی)*: **آقا اجازه چرا شرط‌های $P<0$ و $\Delta>0$ رو چک نکردین پس؟**

پاسخ: عزیزم فورِ سؤال گفته که دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داریم پس حتماً $P<0$ هست. از طرفی گفته بودیم که اگه $P<0$ منفی شه حتماً $\Delta>0$ میشه. پس این دو تا شرط برقرارن و نیازی به چک کردن اونا نیست!

۱۸۴ ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) سهمی رو به پایین: $a<0$ — $ac<0$ ✓

۲) سهمی رو به بالا: $a>0$ — $ac=0$ ✓

۳) سهمی رو به پایین: $a<0$ — $ac=0$ ✓

۴) سهمی رو به پایین: $a<0$ — $ac>0$ ✗

۱۸۵ ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) $b<0$ شب منفی $\Rightarrow abc=\oplus\ominus\ominus>0$ ✓

۲) $b<0$ شب منفی $\Rightarrow abc=\ominus\ominus\oplus>0$ ✓

۳) $b>0$ شب مثبت $\Rightarrow abc=\oplus\oplus\oplus>0$ ✓

۴) $b<0$ شب منفی $\Rightarrow abc=\ominus\ominus\ominus<0$ ✗

۱۸۶ ۳ سهمی رو به پایین است، پس $a<0$، از طرفی نمودار سهمی محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است پس $c<0$ و شیب نمودار در محل برخورد نمودار با محور yها مثبت است، پس $b>0$.

با توجه به علامت‌های a، c و b گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $ab=\ominus\oplus=\ominus$ ✗

گزینهٔ (۲): $bc=\oplus\ominus=\ominus$ ✗

گزینهٔ (۳): $ac=\ominus\ominus=\oplus$ ✓

گزینهٔ (۴): $abc=\ominus\oplus\ominus=\oplus$ ✗

۱۸۷ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): سهمی رو به بالا: $a>0$، نمودار محور yها را در مبدأ مختصات قطع کرده، پس $c=0$ و در نتیجه $ac=0$ و طول رأس سهمی منفی است:

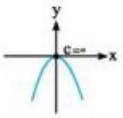
$$x_S=-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0$$

گزینهٔ (۲): سهمی رو به پایین: $a<0$. نمودار محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده، پس $c<0$ و لذا $ac>0$. طول رأس سهمی منفی است:

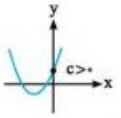
$$x_S=-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

@khaneh_book

گزینهٔ (۳): سهمی رو به پایین: $a<0$، نمودار محور yها را در مبدأ مختصات قطع کرده، پس $c=0$ و طول رأس سهمی صفر است، پس $-\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow b=0$. این گزینه جواب است. زیرا گفته شده که $a<0$ است!



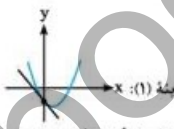
گزینهٔ (۴): سهمی رو به بالا: $a>0$، نمودار محور yها را در قسمت مثبت‌ها قطع کرده پس $c>0$ و طول رأس سهمی منفی است:



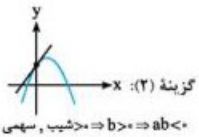
$$-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0 \Rightarrow bc>0$$

۱۸۸ ۴ وقتی $ab<0$ است، یعنی حالت اول: $a>0$ و $b<0$ و حالت دوم: $a<0$ و $b>0$. با توجه به آن گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $a>0$، سهمی رو به بالا، شیب $<0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow ab<0$

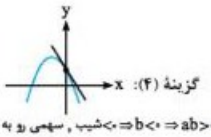


گزینهٔ (۲): $a<0$، سهمی رو به پایین، شیب $>0 \Rightarrow b>0 \Rightarrow ab<0$



گزینهٔ (۳): $a>0$، سهمی رو به بالا، شیب $<0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow ab<0$

گزینهٔ (۴): $a<0$، سهمی رو به پایین، شیب $<0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow ab>0$ ×



۱۸۹ ۳

$$\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+1}{x+3} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} (x-2)(x+3)=(x+1)(x-4) \Rightarrow x^2+3x-2x-6=x^2-4x+x-4$$

$$\Rightarrow x-6=-3x-4 \Rightarrow x+3x=6-4 \Rightarrow 4x=2 \xrightarrow{\div 4} x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

جواب حاصل، مخرج کسرها را صفر نمی‌کند. پس قابل قبول است، لذا:

$$\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow 4\alpha^2+1=4\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=4\left(\frac{1}{4}\right)+1=1+1=2$$

۱۹۰ ۳

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x}-\frac{1+x}{x}=\frac{x-1}{x-3} \Rightarrow \frac{x^2-3x+2}{x(x-3)}=\frac{1+x}{x}+\frac{x-1}{x-3}$$

$$\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{x^2-3x+2}{x(x-3)}=\frac{(1+x)(x-3)+x(x-1)}{x(x-3)} \Rightarrow x^2-3x+2=x-3+x^2-3x+x^2-x$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2=2x^2-3x-3 \Rightarrow 2x^2-x-3-x^2+3x-2=0 \Rightarrow x^2-4=0$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{اتحاد}} (x-2)(x+2)=0 \xrightarrow[\text{با دومی صفر}]{\text{اولی صفر}} x=2,-2$$

$x=2$ چون مخرج را صفر می‌کند غیرقابل قبول است؛ پس معادله فقط یک جواب $x=-2$ دارد. حال طرف راست معادله را به ازای $x=-2$ می‌یابیم:

$$\frac{x-1}{x-3}\Big|_{x=-2}=\frac{-2-1}{-2-3}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$$

۱۹۱ ۱

$$\frac{2x+3}{x-1}-\frac{2x-3}{x+1}=\frac{10}{x^2-1} \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{(2x+3)(x+1)-(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{10}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+2x+3x+3-(2x^2-2x-3x+3)}{x^2-1}=\frac{10}{x^2-1} \Rightarrow 2x^2+5x+3-2x^2+5x-3=10 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$$

$x=1$ چون مخرج را صفر می‌کند غیرقابل قبول بوده و لذا معادله جواب ندارد.

@khanehbook

۱۹۲ ۲

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=۲x\left(۱-\frac{x-1}{x+1}\right)\Rightarrow\frac{\overbrace{(x+1)(x+1)}^{x^۲+۲x+۱}-\overbrace{(x-1)(x-1)}^{x^۲-۲x+۱}}{(x-1)(x+1)}=۲x\left(\frac{\overbrace{x+1-(x-1)}^{۲}}{x+1}\right)$$

مخرج مشترک — مخرج مشترک

$$\Rightarrow\frac{x^۲+۲x+۱-x^۲+۲x-۱}{(x-1)(x+1)}=۲x\left(\frac{۲}{x+1}\right)\Rightarrow\frac{۴x}{x-1}=۶x\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}۴x=۶x(x-1)\Rightarrow۶x^۲-۶x-۴x=۰$$

$$\Rightarrow۶x^۲-۱۰x=۰\Rightarrow x(۶x-۱۰)=۰\xrightarrow[\text{دومی}=۰]{\text{اولی}=۰}x=۰\ \text{یا}\ ۶x-۱۰=۰\Rightarrow x=۰\ \text{یا}\ x=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}$$

$x=۰$ و $x=\frac{۵}{۳}$ مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند پس هر دو قابل قبول می‌باشند. بنابراین جمع جواب‌ها برابر $\frac{۵}{۳}=\frac{۵}{۳}+۰$ می‌شود.

۱۹۳ ۱

$$\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}\Rightarrow\frac{\overbrace{x-(x+۱)}^{x-x-۱}}{(x+۱)x}=\frac{\overbrace{(x-۲)-(x-۱)}^{x-۲-x+۱}}{(x-۱)(x-۲)}\Rightarrow\frac{-۱}{x^۲+x}=\frac{-۱}{x^۲-۳x+۲}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}x^۲-۳x+۲=x^۲+x$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۲=x^۲+x\Rightarrow۲=x+۳x\Rightarrow۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$x=\frac{۱}{۲}$ مخرج‌ها را صفر نمی‌کند؛ پس قابل قبول است. لذا معادله دارای ۱ جواب است.

۱۹۴ ۳

$$\frac{۳}{x^۲-x+k}=\frac{۱}{x^۲+x+۲}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}۳(x^۲+x+۲)=۱(x^۲-x+k)\Rightarrow۳x^۲+۳x+۶=x^۲-x+k$$

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{همه طرف}}۳x^۲+۳x+۶-x^۲+x-k=۰\Rightarrow۲x^۲+۴x+۶-k=۰$$

برای آن معادلهٔ درجه دوم ۲ جواب حقیقی متمایز داشته باشد؛ باید دلتای آن مثبت باشد، لذا داریم:

$$\underbrace{b^۲-۴ac}_{\Delta}>۰\xrightarrow[c=۶-k]{a=۲,b=۴}۴^۲-۴(۲)(۶-k)>۰\Rightarrow۱۶-۸(۶-k)>۰\Rightarrow۱۶-۴۸+۸k>۰\Rightarrow۸k>۳۲\xrightarrow{\div۸}k>۴$$

توجه عبارت $x^۲+x+۲$ که در مخرج کسر سمت راست معادله قرار دارد ریشه ندارد (زیرا $\Delta=-۷<۰$) و مخرج کسر سمت چپ معادله یعنی $x^۲-x+k$ نیز به ازای محدودهٔ k به‌دست آمده (یعنی $k>۴$) ریشه ندارد زیرا:

$$x^۲-x+k:\Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(k)=۱-۴k\xrightarrow{k>۴}\Delta<۰$$

پس اگر $k>۴$ باشد، معادله ۲ جواب حقیقی متمایز قابل قبول خواهد داشت که هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند زیرا مخرج‌ها ریشه ندارند.

۱۹۵ ۱ $x=۳$ جواب معادله است پس در آن صدق می‌کند، داریم:

$$\frac{a+x}{x+۳}-۱=\frac{۵-x}{x-۴}\xrightarrow{x=۳}\frac{a+۳}{۳+۳}-۱=\frac{۵-۳}{۳-۴}\Rightarrow\frac{a+۳}{۶}-۱=\frac{۲}{-۱}\Rightarrow\frac{a+۳}{۶}=\overbrace{-۲+۱}^{-۱}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}a+۳=-۶\Rightarrow a=-۹$$

حال $a=-۹$ را در معادله قرار داده و آن را حل می‌کنیم تا جواب دیگر معادله را به‌دست آوریم:

$$\frac{a+x}{x+۳}-۱=\frac{۵-x}{x-۴}\xrightarrow{a=-۹}\frac{-۹+x}{x+۳}-۱=\frac{۵-x}{x-۴}\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}}\frac{-۹+x-(x+۳)}{x+۳}=\frac{۵-x}{x-۴}$$

$$\frac{-۱۲}{x+۳}=\frac{۵-x}{x-۴}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}-۱۲(x-۴)=(۵-x)(x+۳)\Rightarrow-۱۲x+۴۸=۵x+۱۵-x^۲-۳x$$

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{همه}\atop\text{برن}}-۱۲x+۴۸-۵x-۱۵+x^۲+۳x=۰\Rightarrow x^۲-۱۴x+۳۳=۰\Rightarrow(x-۳)(x-۱۱)=۰\Rightarrow x=۳,۱۱$$

$x=۳$ را که خود سؤال گفته بود، پس $x=۱۱$ جواب دیگر معادله است.

سؤال دانش‌پژوه (رومینا صدقی): آقا یه وقت نکنه ۱۱ مخرج رو صفر کنه؟

پاسخ: نکتهٔ خوبی اشاره کردی ولی چک کردم اوکیه.

@khaneh_book

۱۹۶ **۳** $x=۳$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{a}{x^۲+۲x-۳}+\frac{a}{۲x-۲}=\frac{x-۱}{x^۲+x-۶} \xrightarrow{x=۳} \frac{a}{۹+۶-۳}+\frac{a}{۶-۲}=\frac{۲}{۹+۳-۶}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱۲}+\frac{a}{۴}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{a+۳a}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۴a}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a=۱$$

حال با جایگذاری $a=۱$ در معادله، جواب دیگر آن یعنی β را می‌یابیم:

$$\frac{۱}{x^۲+۲x-۳}+\frac{۱}{۲x-۲}=\frac{x-۱}{x^۲+x-۶} \Rightarrow \frac{۱}{(x+۳)(x-۱)}+\frac{۱}{۲(x-۱)}=\frac{x-۱}{(x+۳)(x-۲)}$$

$$\Rightarrow \frac{۲+x+۳}{۲(x+۳)(x-۱)}=\frac{x-۱}{(x+۳)(x-۲)} \Rightarrow \frac{x+۵}{۲(x-۱)}=\frac{x-۱}{x-۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (x+۵)(x-۲)=۲(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x-۱۰=۲(x^۲-۲x+۱) \Rightarrow x^۲-۷x+۱۲=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=۳,۴ \Rightarrow \beta=۴ \Rightarrow \beta^۳+\beta=۴^۳+۴=۶۴+۴=۶۸$$

۱۹۷ **۴**

$$\frac{x+۲}{x+۱}+\frac{ax+b}{x^۲-۱}=\frac{۳-x}{۱-x} \Rightarrow \frac{(x+۲)(x-۱)+ax+b}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۳-x}{-(x-۱)} \xrightarrow{x\neq ۱} \frac{x^۲+x-۲+ax+b}{x+۱}=\frac{۳-x}{-۱}$$

(مخرج مشترک: $(x-۱)(x+۱)$ — اتحاد جمله مشترک)

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} x^۲+x-۲+ax+b=(x-۳)(x+۱) \Rightarrow x^۲+x-۲+ax+b=x^۲-۲x-۳$$

(اتحاد جمله مشترک)

$$\Rightarrow ax+b=-۲x-۳-x+۲ \Rightarrow ax+b=-۳x-۱ \quad (*)$$

حال اگر $a=-۳$ و $b=-۱$ باشد رابطهٔ $(*)$، یک رابطهٔ بدیهی $-۳x-۱=-۳x-۱$ می‌شود که به ازای هر x حقیقی به جز ریشه‌های مخرج یعنی ± ۱ برقرار بوده و بی‌شمار جواب دارد. بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{-۳}{-۱}=۳$.

۱۹۸ **۳**

$$\frac{x^۲-x+۳}{x^۲-۲x}-\frac{x}{x-۲}=\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{x^۲-x+۳-x(x)}{x(x-۲)}=\frac{a}{x} \xrightarrow{x\neq ۰} \frac{x^۲-x+۳-x^۲}{x-۲}=a$$

$$\Rightarrow \frac{-x+۳}{x-۲}=a \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} -x+۳=a(x-۲) \Rightarrow -x+۳=ax-۲a \Rightarrow ۳+۲a=ax+x \Rightarrow ۳+۲a=(a+۱)x \Rightarrow x=\frac{۳+۲a}{a+۱}$$

برای آن که جواب به‌دست آمده غیرقابل قبول باشد، باید a یکی از عددهای زیر باشد:

۱) $a=-۱$ باشد در این صورت مخرج کسر جواب به‌دست آمده صفر شده و جواب حاصل غیرقابل قبول می‌شود.

۲) جواب حاصل یکی از مخرج‌ها را صفر کند، به عبارت دیگر ریشه‌های مخرج‌های معادله باشد، یعنی:

$$\begin{cases} \frac{۳+۲a}{a+۱}=۰ \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۳+۲a=۰ \Rightarrow ۲a=-۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲} \\ \text{یا} \\ \frac{۳+۲a}{a+۱}=۲ \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۳+۲a=۲(a+۱) \Rightarrow ۳+۲a=۲a+۲ \Rightarrow ۳=۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس به ازای دو مقدار $a=-۱$ و $a=-\frac{۳}{۲}$ معادله جواب ندارد.

۱۹۹ **۲** با فرض آن‌که طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشد، داریم:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x}+\frac{y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow ۱+\frac{y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow ۱+\frac{۱}{\frac{x}{y}}=\frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} ۱+\frac{۱}{t}=t \Rightarrow \frac{t+۱}{t}=t \Rightarrow t+۱=t^۲ \Rightarrow t^۲-t-۱=۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴(۱)(-۱)}}{۲} \Rightarrow t=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

نسبت طول به عرض نمی‌تواند منفی شود؛ لذا $\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ صحیح است.

@khaneh_book

۲۰۰ ۳ زهرا کل کار را در یک ساعت (۶۰ دقیقه) انجام می‌دهد و زهرا و نرگس با هم کل کار را در ۴۰ دقیقه انجام می‌دهند. در این حالت داریم:

	زمان انجام کار	مقداری از کار که در ۱ دقیقه قابل انجام است.
زهرا	۶۰ دقیقه	$\frac{۱}{۶۰}$
نرگس	t دقیقه	$\frac{۱}{t}$
زهرا و نرگس با هم	۴۰ دقیقه	$\frac{۱}{۴۰}$

با توجه به جدول، معادلهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۴۰}-\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow\frac{۱}{t}=\frac{۶۰-۴۰}{۴۰\times۶۰}=\frac{۲\not{۰}}{۲۴\not{۰}\not{۰}}=\frac{۱}{۱۲۰}\Rightarrow t=۱۲۰$$ دقیقه

سؤال *دانش‌پژوه (دلربا موتایی):* **آقا اجازه چرا شما کل کار را یک گرفتین؟ اون ۲۰ صفحه چی شد؟**

پاسخ: قانوم جان، برای راحتی کار ☺ شما می‌تونی کل کارو مثلاً A بگیری در این صورت اعداد در جدول به صورت $\frac{A}{۶۰}$، $\frac{A}{t}$ و $\frac{A}{۴۰}$ در میان که وقتی معادله رو می‌نویسی، میشه: $\frac{A}{۶۰}+\frac{A}{t}=\frac{A}{۴۰}$ ها از طرفین تساوی ساده میشن و مهم نیستن! و مجدداً به معادلهٔ $\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۴۰}$ می‌رسیم اون ۲۰ صفحه هم اینی بوده ☺

۲۰۱ ۳ ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. در این حالت داریم:

ماشین	زمان انجام کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
A	t	$\frac{۱}{t}$
B	۳t	$\frac{۱}{۳t}$
A و B با هم	۹	$\frac{۱}{۹}$

با توجه به جدول، معادلهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۳t}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\frac{۳+۱}{۳t}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\frac{۴}{۳t}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow۳t=۳۶\Rightarrow t=۱۲$$

پس ماشین A به تنهایی در ۱۲ ساعت و ماشین B به تنهایی در $۳t=۳۶$ ساعت کل کار را انجام می‌دهد.

۲۰۲ ۳ فرض کنید شیر B به تنهایی، استخر را در x ساعت پر کند، در این صورت شیر A در $x+۳$ ساعت به تنهایی استخر را پر می‌کند. پس:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{(x+۳)+x}{x(x+۳)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow۲(۲x+۳)=x^۲+۳x$$

$$\Rightarrow۴x+۶=x^۲+۳x\Rightarrow x^۲-x-۶=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳ & ✓\\ x=-۲ & ✗\end{cases}$$

پس شیر A به تنهایی در $x+۳=۳+۳=۶$ ساعت، استخر را پر می‌کند.

۲۰۳ ۲ علی کار را در ۱۰ ساعت انجام می‌دهد. پس در یک ساعت $\frac{۱}{۱۰}$ کار را انجام می‌دهد. بنابراین در ۵ ساعت اول که فقط علی مشغول کار است، $\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۰}\times۵$ کار انجام می‌شود. حال حسین به کمک او می‌آید. از این‌جا به بعد که فقط $\frac{۱}{۲}$ کار باقی مانده، علی و حسین دو نفری با هم می‌خواهند کار کنند. آن‌ها با هم در یک ساعت $\frac{۱}{۶}=\frac{۳+۲}{۳۰}=\frac{۵}{۳۰}$ کار را انجام می‌دهند؛ پس مقدار کار باقی‌مانده را در ۳ ساعت $\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}$ انجام می‌دهند؛ زیرا:

۳ ساعت کار دو نفری

$$\frac{۱}{۶}\times۳=\frac{۱}{۲}$$

مقدار کار انجام‌شدهٔ دو نفری در ۱ ساعت — مقدار کار باقی‌مانده

@khanen_book

۲۰۴ ۴ از فیزیک می‌دانیم، معادلهٔ حرکت سرعت ثابت برابر $x = vt$ است. پس زمان رفت برابر است با مسافت طی‌شده تقسیم بر سرعت متحرک:

رفت $t_1 = \frac{۶۰}{v}$ (*)

در موقع برگشت، سرعت $۱۰\frac{km}{h}$ کاهش یافته، پس با توجه به سرعت رفت، سرعت برگشت برابر $v - ۱۰$ خواهد بود ولی مسافت در برگشت همان ۶۰ است.

برگشت $t_2 = \frac{۶۰}{v - ۱۰}$ (**)

حال با توجه به این‌که زمان بازگشت، نیم‌ساعت ($\frac{۱}{۲}$ ساعت) طولانی‌تر بوده، داریم:

$$t_2 = t_1 + \frac{۱}{۲} \xrightarrow{(**),(*)} \frac{۶۰}{v - ۱۰} = \frac{۶۰}{v} + \frac{۱}{۲}$$

با حل کردن معادلهٔ فوق، سرعت متحرک و به دنبال آن t_1 و t_2 را می‌یابیم:

$$\frac{۶۰}{v - ۱۰} = \frac{۱۲۰ + v}{۲v} \Rightarrow ۶۰(۲v) = (v - ۱۰)(۱۲۰ + v) \Rightarrow ۱۲۰v = ۱۲۰v + v^۲ - ۱۲۰۰ - ۱۰v \Rightarrow v^۲ - ۱۰v - ۱۲۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (v - ۴۰)(v + ۳۰) = ۰ \Rightarrow v = ۴۰ \text{ , } v = -۳۰$$

پس سرعت رفت $۴۰\frac{km}{h}$ و سرعت بازگشت با توجه به علامت منفی $۳۰\frac{km}{h}$ است. بنابراین $t_2 = \frac{۶۰}{v - ۱۰} = \frac{۶۰}{۴۰ - ۱۰} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲$ و $t_1 = \frac{۶۰}{v} = \frac{۶۰}{۴۰} = ۱/۵$ و لذا $t_1 + t_2 = ۳/۵$ خواهد بود.

۲۰۵ ۱ فرض می‌کنیم تعداد آزمون‌ها از روز ششم به بعد n باشد. پس جمع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد بود. حال میانگین امتیازهای تمام آزمون‌های احمد را می‌نویسیم و برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n} = ۸ \Rightarrow ۹n + ۳۶ = ۸(۵ + n) \Rightarrow ۹n + ۳۶ = ۴۰ + ۸n \Rightarrow n = ۴$$

۲۰۶ ۲

$$\sqrt{۵ + \sqrt{۲x + ۴}} = ۳ \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} (\sqrt{۵ + \sqrt{۲x + ۴}})^۲ = ۳^۲ \Rightarrow ۵ + \sqrt{۲x + ۴} = ۹ \Rightarrow \sqrt{۲x + ۴} = ۹ - ۵ = ۴$$

$$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} (\sqrt{۲x + ۴})^۲ = ۴^۲ \Rightarrow ۲x + ۴ = ۱۶ \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$ در معادله صدق می‌کند

پس $x = ۶$ قابل قبول بوده و جواب معادله است، لذا $x_۰ = ۶$ بنابراین $۳x_۰ + ۷ = ۳(۶) + ۷ = ۲۵$.

۲۰۷ ۲

$$۲ + \sqrt{۲x^۲ - ۵x + ۲} = x \Rightarrow \sqrt{۲x^۲ - ۵x + ۲} = x - ۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{۲x^۲ - ۵x + ۲})^۲ = (x - ۲)^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۵x + ۲ = x^۲ - ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۲, x = -۱$$

فقط $x = ۲$ در معادله صدق می‌کند و جواب معادله است. بنابراین $\alpha = ۲$ و لذا $\alpha^۲ + \alpha^۳ = ۴ + ۸ = ۱۲$.

۲۰۸ ۱

$$۳x + ۴ = \sqrt{x^۲ + ۶} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} (۳x + ۴)^۲ = (\sqrt{x^۲ + ۶})^۲ \Rightarrow ۹x^۲ + ۱۶ + ۲(۳x)(۴) = x^۲ + ۶$$

$$\xrightarrow[\text{به‌ویژه}]{\text{همه}} ۹x^۲ + ۱۶ + ۲۴x - x^۲ - ۶ = ۰ \Rightarrow ۸x^۲ + ۲۴x + ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۴x^۲ + ۱۲x + ۵ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \xrightarrow[b=۱۲,c=۵]{a=۴} ۱۲^۲ - ۴(۴)(۵) = ۱۴۴ - ۸۰ = ۶۴ \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱۲ \pm \sqrt{۶۴}}{۲(۴)} = \frac{-۱۲ \pm ۸}{۸} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲}, \frac{-۵}{۲}$$

از بین جواب‌های به دست آمده فقط $x = -\frac{۱}{۲}$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند، پس معادله فقط یک جواب منفی دارد.

۲۰۹ ۱

$$x(x^۲ - ۹)\sqrt{x - ۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ \text{یا} \\ x^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۳, -۳ \\ \text{یا} \\ \sqrt{x - ۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

از بین جواب‌های به‌دست آمده $x = ۰, -۳$ غیرقابل قبول‌اند، زیرا به ازای آن‌ها زیر رادیکال منفی می‌شود که غلط! ولی $x = ۳$ و $x = ۲$ هر دو قابل قبول‌اند؛ زیرا در معادله صدق می‌کنند.

۲۱۰ ۱ در معادلهٔ داده شده، باید عبارت زیر رادیکال ($۱ - ۹x^۲$) و عبارت $۳x - ۲$ نامنفی باشد. داریم:

$$۳x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۲}{۳}$$

$$۱ - ۹x^۲ \geq ۰ \Rightarrow (۱ - ۳x)(۱ + ۳x) \geq ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۳}$	
$۱ - ۹x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{۳} \leq x \leq \frac{۱}{۳}$$

جواب‌های به دست آمده با هم اشتراک ندارند. پس معادلهٔ داده‌شده، ریشهٔ حقیقی ندارد.

@khanehketab

۲۱۱ ۱ نقاط A و B روی محور xها قرار دارند، لذا آن‌ها را به صورت $(x,0)$ در نظر می‌گیریم. حال فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(2,3)$ را می‌یابیم:

$$\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2} \xrightarrow{\text{طرفین}} 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-2)^2+9=25$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=16 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-2|=4 \Rightarrow x-2=\pm 4 \Rightarrow x=2\pm 4 \Rightarrow x=6,-2$$

پس $A(6,0)$ و $B(-2,0)$ بوده که طول پاره‌خط AB برابر می‌شود با:

$$AB=\sqrt{(6-(-2))^2+(0-0)^2}=\sqrt{64}=8$$

۲۱۲ ۴ جواب معادله (یعنی $x=4$) در آن صدق می‌کند، لذا $x=4$ را در معادله قرار داده و مجهول a را می‌یابیم:

$$x+a=\sqrt{5x-x^2} \xrightarrow{x=4} 4+a=\sqrt{5(4)-4^2} \Rightarrow 4+a=\sqrt{20-16}=\sqrt{4} \Rightarrow 4+a=2 \Rightarrow a=-2$$

حال $a=-2$ را در معادله قرار داده و آن را حل می‌کنیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} (x-2)^2=(\sqrt{5x-x^2})^2 \Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2$$

$$\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{همه برن}} x^2-4x+4-5x+x^2=0 \Rightarrow 2x^2-9x+4=0$$

$$\Delta=(-9)^2-4(2)(4)=81-32=49 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{9\pm 7}{4} \Rightarrow x=4,\frac{1}{2}$$

$x=4$ که خود سؤال گفته بود خسته نباشیم! امّا $x=\frac{1}{2}$ در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند. پس $x=\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول بوده و معادله جواب دیگری به جز $x=4$ ندارد.

۲۱۳ ۱

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+3}=1 \xrightarrow[\text{تنها بمونه}]{\text{فقط به رادیکال}} \sqrt{x+2}=1+\sqrt{3x+3} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} \underbrace{(\sqrt{x+2})^2=(1+\sqrt{3x+3})^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}$$

$$x+2=1^2+(\sqrt{3x+3})^2+2(1)(\sqrt{3x+3}) \Rightarrow x+2=1+3x+3+2\sqrt{3x+3} \Rightarrow -2x-2=2\sqrt{3x+3}$$

$$\xrightarrow{+(-2)} x+1=-\sqrt{3x+3} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} x^2+2x+1=3x+3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{غ ق ق} \\ x=-1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

سؤال *دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضی):* **آقا شوخی جالبی بود! $x=2$ که مثبته غیرقابل قبوله، اون وقت $x=-1$ که منفیه قابل قبوله؟!**

پاسخ: *اکبر شوقی من با تو. توی کارنامت معلوم میشه. پس به منفی بودن ربطی نداره، باید توی معادلهٔ اولیه صدق کنن! ببین:*

$$x=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادلهٔ اولیه}} \sqrt{2+2}-\sqrt{3(2)+3} \overset{?}{=} 1 \Rightarrow 2-3 \overset{?}{=} 1 \Rightarrow -1=1 \quad \times$$

$$x=-1 \Rightarrow \sqrt{-1+2}-\sqrt{3(-1)+3} \overset{?}{=} 1 \Rightarrow \sqrt{1}-\sqrt{0} \overset{?}{=} 1 \Rightarrow 1=1 \quad \checkmark$$

۲۱۴ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$2\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=0$$

زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ نباید منفی شود. پس داریم:

$$\begin{cases} 5-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 5 \\ x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

پس اصلاً هیچ xای نمی‌تواند وارد معادله شود، پس معادله جواب ندارد.

گزینهٔ (۲): بدون حل کردن هم می‌توان فهمید معادلهٔ زیر جواب ندارد، زیرا سمت چپ تساوی دو رادیکال با فرجهٔ ۲ داریم که هر دو نامنفی هستند پس جمع آن‌ها نیز نامنفی است، ولی سمت راست تساوی، عدد -1، حضور دارد؛ پس معادله جواب ندارد.

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{همواره نامنفی}}+\underbrace{\sqrt{2x-6}}_{\text{همواره نامنفی}}=-1 \Rightarrow \text{تساوی برقرار نیست.}$$

گزینهٔ (۳): زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ نباید منفی شود. پس داریم:

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \\ 2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \sqrt{2-2}+\sqrt{2-2}=0 \Rightarrow 0=0$$

$x=2$ جواب معادله و تست است.

گزینهٔ (۴): سمت چپ تساوی زیر همواره مثبت است و لذا هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر شود؛ پس معادلهٔ زیر جواب ندارد.

$$\underbrace{(x+1)^2}_{\text{همواره نامنفی}}+\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\text{همواره نامنفی}}+\underbrace{3}_{\text{همواره مثبت}}=0 \Rightarrow x\in\varnothing$$

همیشه مثبت است.

@khanehbook

۲۱۵ ۲ ابتدا یکی از رادیکال‌ها را سمت چپ تساوی نگه داشته و دیگری را می‌بریم سمت راست:

$$\sqrt{x+10\sqrt{x-2}+3}+\sqrt{x-2}=5 \Rightarrow \sqrt{x+10\sqrt{x-2}+3}=5-\sqrt{x-2} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} \underbrace{(\sqrt{x+10\sqrt{x-2}+3})^2}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}=(5-\sqrt{x-2})^2$$

$$\Rightarrow x+10\sqrt{x-2}+3=25+(\sqrt{x-2})^2-2(5)(\sqrt{x-2}) \Rightarrow x+10\sqrt{x-2}+3=25+x-2-10\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x-2}+10\sqrt{x-2}=25+x-2-x-3 \Rightarrow 20\sqrt{x-2}=20 \xrightarrow{\div 20} \sqrt{x-2}=1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$x=3$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند، پس قابل قبول است.

۲۱۶ ۲ با توجه به درسنامه حاصل جمع دو رادیکال با فرجه زوج زمانی صفر می‌شود که هر دو عبارت زیر رادیکال‌ها صفر باشند. پس xهایی که به ازای آن‌ها عبارات x^2-4 و x^2-x-2 صفر می‌شوند را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2-4=0 \xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{اتحاد}} (x-2)(x+2)=0 \xrightarrow[\text{یا دومی صفر}]{\text{اولی صفر}} x=2, x=-2$$

$$x^2-x-2=0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} (x-2)(x+1)=0 \xrightarrow[\text{یا دومی صفر}]{\text{اولی صفر}} x=2, x=-1$$

جواب معادله، اشتراک جواب‌های به‌دست آمده است یعنی $x=2$، زیرا به ازای $x=2$ هر دو عبارت زیر رادیکال‌ها صفر می‌شوند.

۲۱۷ ۳ با توجه به درسنامه باید ببینیم عبارات x^2-3x+2 و x^3+x-10 به ازای چه xهایی هم‌زمان صفر می‌شوند:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1, x=2$$

حال بررسی می‌کنیم آیا $x=1$ و $x=2$، عبارت x^3+x-10 را هم صفر می‌کنند که در این صورت ریشهٔ معادله خواهند بود:

$$x^3+x-10 \xrightarrow{x=1} 1+1-10=-8\neq 0 \quad \text{و} \quad x^3+x-10 \xrightarrow{x=2} 2^3+2-10=8-8=0$$

پس فقط $x=2$ ریشهٔ حقیقی معادله است.

سؤال *دانش‌پژوه (شهوا سیاح)*، **آقا چرا اول ریشه‌های معادلهٔ $x^3-3x+2=0$ رو پیدا کردین و بعد توی معادلهٔ دیگه گذاشتین؟**

پاسخ: *چون حل به معادله درجه ۲ آسون‌تر از حل معادلهٔ درجه ۳ هست و اینکه در هر حال باید ریشه‌های مشترک دو معادله رو بیابیم.*

۲۱۸ ۳ می‌دانیم زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی شود. در این سؤال به‌خاطر وجود $\sqrt{2-x}$ باید $2-x\geq 0 \Leftarrow 2\leq 2$ باشد و به خاطر وجود $\sqrt{x-2}$ باید $x-2\geq 0 \Leftarrow x\geq 2$ باشد که اشتراک آن‌ها فقط $x=2$ می‌شود. حال چک می‌کنیم که آیا $x=2$ که تنها کاندیدای جواب معادله است، در معادلهٔ صدق می‌کند یا خیر:

$$\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-2} \xrightarrow{x=2} \sqrt{2+\sqrt{2-2}}=\sqrt{2-2}+\sqrt{4(2)-2} \Rightarrow \sqrt{2}=0+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{2} \checkmark$$

پس معادله یک جواب $x=2$ دارد.

سؤال *دانش‌پژوه (حسن احمدی)*، **آقا اجازه چرا زیر رادیکال $\sqrt{2x-2}$ و $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}$ را بررسی نکردین که یه وقت منفی نشن!**

پاسخ: *سؤال خوبی بود. ببین پسرم، توی این سؤال نیاز نشد اونارو بررسی کنیم. چون از بررسی همون دو تا رادیکال $\sqrt{x-2}$ و $\sqrt{2-x}$ متوجه شدیم که فقط $x=2$ می‌تونه وارد معادله بشه ولی ممکنه در یه سؤالی مجبور شیم بقیه رادیکال‌ها رو هم بررسی کنیم. ضمن این‌که برای بالا بردن سرعت از آسون‌ترین رادیکال‌ها شروع می‌کنیم.* ☺

۲۱۹ ۳

نکته گاهی اوقات برای حل یک معادله به صورت $f(x)=g(x)$، کافی است، نمودار f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و سپس بررسی کنیم این دو نمودار هم‌دیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند. تعداد نقاط تلاقی دو منحنی f و g همان تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است.

با توجه به نکتهٔ فوق نمودارهای توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2-4$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، این دو منحنی هم‌دیگر را در ۱ نقطه قطع می‌کنند، پس معادلهٔ مورد نظر دارای ۱ ریشهٔ حقیقی است.

۲۲۰ ۳ ابتدا لحظه‌ای که ارتفاع شئ از سطح زمین، یک دهم ارتفاع ساختمان یعنی $\frac{50}{10}=5$ متر است را می‌یابیم:

$$t_1=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \xrightarrow{h=5} t_1=\sqrt{10-\frac{5}{5}}=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=3$$

حال ارتفاعی را می‌یابیم که شئ در $\frac{1}{3}t_1=\frac{1}{3}(3)=1$ ثانیه پس از سقوط در آن قرار دارد:

$$t=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \xrightarrow{t=1} 1=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1=10-\frac{h}{5} \xrightarrow{\times 5} 5=50-h \Rightarrow h=50-5 \Rightarrow h=45$$

@khanehketab

۲۲۱ ۱

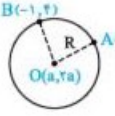
$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲x-۲\sqrt{x}=x\Rightarrow x-۲\sqrt{x}=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از }\sqrt{x}}\sqrt{x}(\sqrt{x}-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۰ & \text{طبق فرض (غ ق ق)}\\ \sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow\sqrt{x}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}x=۴ & (*)\end{cases}$$

بنابراین:

$$\sqrt{x}-x\xrightarrow{(*)}\sqrt{۴}-۴=۲-۴=-۲$$

۲۲۲ ۱ با توجه به شکل نقطهٔ $O(a,۲a)$ مرکز دایره و دو نقطهٔ $A(۲,۱)$ و $B(-۱,۴)$ روی دایره هستند، فاصلهٔ مرکز دایره از این ۳ نقطه، یکسان و برابر با شعاع دایره است. (یعنی $OA=OB=R$)



$$\sqrt{(a-۲)^۲+(۲a-۱)^۲}=\sqrt{(a-(-۱))^۲+(۲a-۴)^۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(a^۲-۴a+۴)+(۴a^۲-۴a+۱)}=\sqrt{(a^۲+۲a+۱)+(۴a^۲+۱۶-۱۶a)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۵a^۲-۸a+۵}=\sqrt{۵a^۲-۱۴a+۱۷}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۵a^۲-۸a+۵=۵a^۲-۱۴a+۱۷\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲\xrightarrow{O(a,۲a)}O(۲,۴)$$

حال برای محاسبهٔ شعاع کافی است فاصلهٔ O را از A یا B به دست آوریم:

$$R=OA=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

۲۲۳ ۳ مرکز دایره چون روی خط $y=۲x$ قرار دارد، پس مختصات آن را می‌توان به صورت $O(\alpha,۲\alpha)$ در نظر گرفت. لذا فاصلهٔ مرکز دایره از این دو نقطهٔ $A(۰,۰)$ و $B(۲,۱)$ یکسان و برابر شعاع است:

$$OB=OA\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(۲\alpha-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲+۴\alpha^۲=\alpha^۲-۶\alpha+۹+۴\alpha^۲-۴\alpha+۱$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲=۵\alpha^۲-۱۰\alpha+۱۰\Rightarrow\alpha=۱\xrightarrow{O(\alpha,۲\alpha)}O(۱,۲)\Rightarrow R=OA=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

۲۲۴ ۳ قطری از دایره منطبق بر نیمساز ربع اول $(y=x)$ است و چون مرکز دایره روی این قطر قرار دارد، پس طول و عرض مرکز با هم برابرند و می‌توان مختصات آن را به صورت $O(\alpha,\alpha)$ فرض کرد. مجدداً فاصله‌اش را از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۳,۰)$ حساب کرده و با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$OA=OB=R\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۰)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲-۲\alpha+۱+\alpha^۲=\alpha^۲-۶\alpha+۹+\alpha^۲\Rightarrow ۴\alpha=۸\Rightarrow\alpha=۲\Rightarrow O(۲,۲)$$

بنابراین:

$$R=OA=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

۲۲۵ ۳ فرض کنید مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ باشد. چون دایره از نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۲,۶)$ می‌گذرد لذا فاصلهٔ O از هر دو نقطه برابر شعاع است:

$$R=OA=OB\Rightarrow\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}=\sqrt{(x_B-x_O)^۲+(y_B-y_O)^۲}=\text{شعاع}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(۲-\alpha)^۲+(-۲-\beta)^۲}=\sqrt{(۲-\alpha)^۲+(۶-\beta)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(۲-\alpha)^۲+(-(۲+\beta))^۲=(۲-\alpha)^۲+(۶-\beta)^۲$$

$$\Rightarrow ۴+\beta^۲+۴\beta=۳۶+\beta^۲-۱۲\beta\Rightarrow -۳۲=-۱۶\beta\Rightarrow\beta=۲$$

از طرفی چون دایره بر محور yها (خط $x=۰$) مماس است، پس فاصلهٔ مرکز دایره $O(\alpha,\overset{۲}{\beta})$ تا آن خط، شعاع دایره $(R=OA=OB)$ است داریم:

$$\frac{|x_O|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=\underbrace{\sqrt{(۲-\alpha)^۲+(۶-\beta)^۲}}_{OB}\xrightarrow{\beta=۲}\frac{|\alpha|}{۱}=\sqrt{(۲-\alpha)^۲+(۶-۲)^۲}\Rightarrow|\alpha|=\sqrt{(۲-\alpha)^۲+۱۶}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲=(۲-\alpha)^۲+۱۶\Rightarrow\alpha^۲=۴+\alpha^۲-۴\alpha+۱۶\Rightarrow ۴\alpha=۲۰\Rightarrow\alpha=۵$$

پس مرکز دایره $O(۵,۲)$ شده که فاصله‌اش تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{(۵-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۲۹}$$

@khanehketab

فصل ۲

MATHEMATICS

هندسه

- درس اول: ترسیم‌های هندسی
- درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس
- درس سوم: تشابه مثلث‌ها

@khanen_book

درس‌نامه ۱

چند تعریف

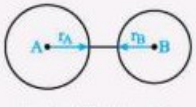
۱ دایره: وقتی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r رسم می‌کنیم، تمام نقاط روی محیط دایره، دارای یک ویژگی مشترک هستند و آن ویژگی این است که فاصلهٔ تمام آن نقاط از مرکز دایره (O) یکسان و برابر r است. از این ویژگی خوب استفاده‌های زیادی می‌کنیم. مثلاً فرض کنید بخواهیم نقاطی را در صفحه پیدا کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ A برابر ۵ باشد. کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ رسم کنیم. با این کار نقاط موردنظر به دست می‌آیند که همگی روی محیط دایره قرار دارند.

مثال نقاط A و B به فاصلهٔ ۶ از هم وجود دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۵ باشند؟

پاسخ: تمام نقاطی که از A به فاصلهٔ ۴ هستند روی محیط دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ قرار دارند و به طور مشابه تمام نقاطی که از B به فاصلهٔ ۵ هستند روی محیط دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۵ قرار دارند. حال اگر این دو دایره را رسم کنیم در دو نقطهٔ **M** و **N** هم‌دیگر را قطع می‌کنند. این دو نقطه جواب مسئله هستند؛ زیرا روی هر دو دایره قرار دارند. پس همزمان فاصله‌شان از A برابر ۴ و از B برابر ۵ است.

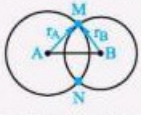
سؤال *دانش‌پژوه (هانی اکرمی)*: آقا اجازه از کجا مطمئنین که دو دایره همدیگرو قطع می‌کنن؟! اصلاً ممکنه قطع نکنن همو؟

پاسخ: *ایول سؤال فیلی خوبی پرسیدی. ببین چون مجموع فاصله‌ها از A و B ($r_A + r_B$) بیشتر از فاصلهٔ A و B است یعنی $۶ < ۵ + ۴$، پس حتماً دو دایره همو در دو نقطه قطع می‌کنند امّا اگر مجموع فاصله‌های خواسته شده از A و B ($r_A + r_B$) برابر فاصلهٔ A و B باشد، در این صورت دو دایره بر هم مماس می‌شوند و اگر مجموع فاصله‌های خواسته شده ($r_A + r_B$) کم‌تر از فاصلهٔ A و B شود، اصلاً دو دایره به هم نمی‌رسن و مسأله جواب ندارد. به شکل‌ها نگاه کن:*



طول پاره‌خط $r_A + r_B < AB$
مسأله جواب ندارد.

طول پاره‌خط $r_A + r_B = AB$
مسأله ۱ جواب دارد.

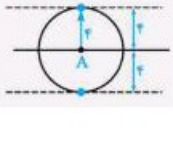


طول پاره‌خط $r_A + r_B > AB$
مسأله ۲ جواب دارد.

۲ دو خط موازی: وقتی خطی مانند L موازی خط d و به فاصلهٔ مثلاً ۲ از آن رسم می‌کنیم، تمام نقاط روی خط L، یک ویژگی مشترک دارند و آن ویژگی مشترک این است که فاصله‌شان از خط d یکسان و برابر ۲ خواهد بود. امّا این ویژگی به چه دردی می‌خورد؟ فرض کنید بخواهیم نقاطی از صفحه را پیدا کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از خط d برابر ۲ باشد. خب کافی است دو خط موازی اطراف خط d و به فاصلهٔ ۲ از آن رسم کنیم، با این کار تمام نقاط مورد نظر روی این دو خط رسم شده قرار خواهند داشت.

مثال خط d و نقطهٔ A روی آن مفروض است. نقاطی از صفحه را پیدا کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ و از خط d به فاصلهٔ ۲ باشند

پاسخ: خب تمام نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ هستند روی محیط دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ قرار دارند و تمام نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲ هستند دو خط موازی با خط d و در طرفین آن هستند. با توجه به شکل، جواب مسأله نقاط برخورد دو خط موازی رسم‌شده با دایره است که با توجه به شرایط مسأله، ۴ نقطه به دست می‌آید.

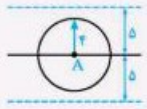


سؤال *دانش‌پژوه (زامیار غیابانی)*: آقا اجازه میشه حفظ کنیم همیشه تعداد جوابا ۴ تا میشه؟

پاسخ: *نه! ببین دانش‌آموز نمونه! درس دقتی که نمی‌فونی! اگه فاصله‌های داده‌شده با هم برابر بود مثلاً هر دو ۴ تا بودند مسأله به صورت مقابل در می‌آید:*

@khanehbook

همچنین اگه دنبال نقاطی بودیم که فاصله‌اش از فط بیشتر از فاصله‌شان از نقطه بود مساله جواب نداشت. مثلاً اگر فاصله از فط، ۵ و فاصله از نقطهٔ A، ۴ باشد. مساله جواب ندارد زیرا دو فط رسم شده اصلاً با دایره رسم شده برخوردی ندارند.



سؤال دانش‌پژوه (سیما دانش)، **آقا ببخشید از هندسه سؤالای سختی تو کنکور می‌یاد؟**

پاسخ نه همیشه ولی یه چیز قطعاً یادتون باشه. سؤال سختی قوبه که بر مبنای مباحث کتاب درسی سفت شده باشه، (طرح این تست‌ها زمان‌بره ولی قبلی مفیدن) نه این‌که الکی سفت شده باشن. بعضی‌ها رو می‌بینی از سری A تا Z سؤالارو سفت می‌کنن ولی از سری A به بعدش اصلاً توی کتاب درسی نیست و اصلاً تو کنکور نمی‌یاد!

۱- نقطهٔ ثابت O را در صفحه در نظر بگیرید. تمام نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ثابت ۳ سانتی‌متر از آن هستند، چه شکلی را تشکیل می‌دهند و مساحت ناحیهٔ داخل آن چه‌قدر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) دایره، 6π ۲) مربع، ۶ ۳) مربع، ۹ ۴) دایره، 9π

۲- خط d را در نظر بگیرید. تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند چه شکل (شکل‌هایی) تشکیل می‌دهند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) یک خط راست به فاصلهٔ ۲ از آن ۲) دو خط موازی در طرفین خط d و به فاصلهٔ ۲ از آن
۳) دایره‌ای به شعاع ۲ ۴) دو خط متقاطع با خط d

۳- نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۳ و از B به فاصلهٔ ۵ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴- پاره‌خط AB به طول ۱۵ مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله‌اش از A برابر ۷ و از B برابر ۸ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۵- نقاط A و B به فاصلهٔ L سانتی‌متر از هم قرار دارند. اگر حداکثر یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ ۵ و از B به فاصلهٔ ۷ باشد. محدودهٔ L کدام است؟ ($L \geq 7$)

۱) $7 < L < 12$ ۲) $L > 7$ ۳) $L > 10$ ۴) $L \geq 12$

۶- نقاط A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از هم قرار دارند. به مرکز A و به شعاع ۶ سانتی‌متر و از مرکز B به شعاع ۴ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم تا دو کمان همدیگر را در نقاط X و Y قطع کنند. مساحت چهارضلعی AXBY کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $16\sqrt{3}$

۷- نقطهٔ A در فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. چند نقطه از خط d وجود دارد که فاصله‌شان از نقطهٔ A برابر ۳ سانتی‌متر باشد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸- نقطهٔ A در فاصلهٔ L از خط d قرار دارد. اگر حداکثر ۱ نقطه روی خط d وجود داشته باشد که فاصلهٔ آن از A برابر ۶ باشد، محدودهٔ L کدام است؟

۱) $L = 6$ ۲) $L < 6$
۳) $L \geq 6$ ۴) $5 < L < 6$

۹- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. چند نقطه وجود دارد که فاصله‌اش از A برابر ۴ و از خط d برابر ۲ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- مطابق شکل زیر نقطهٔ A را روی خط d در نظر بگیرید. چند نقطه وجود دارد که از نقطهٔ A و خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۱- خط d و نقطهٔ A روی آن مفروض است. تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از خط و به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از نقطهٔ A قرار دارند. رئوس یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۱۸۲ ۲) ۱۹۰ ۳) ۱۹۲ ۴) ۹۶

@khanen_book

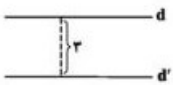
۱۲- حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ و از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ باشند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

۱۳- تمام نقاطی که از دو خط موازی d و d′ به یک فاصله باشند، چه شکلی تشکیل می‌دهند؟

۱) دو خط موازی در بالا و پایین خطوط d و d′
۲) یک خط موازی d و d′ در بالای خط d
۳) یک خط موازی d و d′ و در بین آن‌ها
۴) یک خط عمود بر d و d′

۱۴- دو خط موازی d و d′ در صفحه به فاصلهٔ ۳ از هم وجود دارند. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از خط d برابر ۲ و از d′ برابر ۵ باشد، چه شکلی تشکیل می‌دهند؟



۱) خطی موازی d و d′ و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از d بالای خط d
۲) خطی موازی d و d′ و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از d پایین خط d
۳) خطی موازی d و d′ و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از d′ بالای خط d′
۴) خطی موازی d و d′ و به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از d′ در پایین

۱۵- دو خط به معادلات $y = x + 1$ و $y = -x + 2$ مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله‌اش از این دو خط یکسان و برابر ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۴

۱۶- مربع ABCD به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۷- چند نقطه روی محیط مربعی به ضلع ۴ وجود دارد که فاصله‌اش از مرکز مربع $\frac{۵}{۲}$ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۸

۱۸- تمام نقاطی از محیط یک مربع به ضلع $۲a$ که فاصله‌شان از مرکز مربع ۵ است، رئوس یک چهارضلعی هستند. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{\sqrt{۳}}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۵

۱۹- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۰ مفروض است. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از رأس A و ضلع BC به فاصلهٔ $۵\sqrt{۳}$ باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ چند نقطه در صفحه وجود دارد که از هر ۳ رأس به فاصلهٔ ۲ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

۲۱- مثلث‌هایی را در نظر بگیرید که دو رأس آن‌ها B(۰،۰) و C(۶،۰) و مساحت آن‌ها ۱۲ است. تمام نقاطی از صفحه که رأس A می‌تواند آن‌جا قرار بگیرد، تشکیل چه شکل (شکل‌هایی) می‌دهند؟

۱) یک خط موازی قاعده
۲) دو خط موازی قاعده و در طرفین آن
۳) دو نقطه در طرفین قاعده
۴) یک نقطه

۲۲- فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کرده‌ایم که A یک رأس آن و قاعده‌اش بر خط d منطبق بوده و مساحتش ۸ سانتی‌متر مربع باشد. در این صورت محیط مثلث کدام است؟

۱) $۴ + \sqrt{۵}$ ۲) $۴(۱ + \sqrt{۵})$ ۳) $۱ + ۴\sqrt{۵}$ ۴) ۱۲

۲۳- ناحیه‌ای در صفحه وجود دارد که فاصلهٔ تمام نقاط آن از نقطهٔ M(۲،۱) کم‌تر از ۲r و بیشتر از r است. اگر مساحت این ناحیه ۳π باشد، r کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴- مربعی به ضلع ۳ واحد در نظر بگیرید. نقاطی از درون مربع که فاصلهٔ آن‌ها از یکی از رئوس مربع کم‌تر از یک واحد است، ناحیه‌ای را تشکیل می‌دهند. مساحت این ناحیه کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

۲۵- مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۳ در نظر بگیرید. نقاطی از درون مثلث که فاصلهٔ آن‌ها از هر رأس بیشتر از ۱ باشد، ناحیه‌ای را تشکیل می‌دهند. مساحت این ناحیه کدام است؟

۱) $\frac{۹\sqrt{۳} + ۲\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳} + ۲\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۹\sqrt{۳} - ۲\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳} - ۲\pi}{۲}$

@khanen_book

۲۶- شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۲ در نظر بگیرید. تمام نقاط درون این شش‌ضلعی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز و رئوس شش‌ضلعی بیشتر از یک است، ناحیه‌ای را تشکیل می‌دهند. مساحت این ناحیه کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳} - ۳\pi$ ۲) $۶\sqrt{۲} - \pi$ ۳) $۶\sqrt{۳} - \pi$ ۴) $-۶\sqrt{۳} + ۳\pi$

۲۷- مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به طول ساق $\sqrt{۲}$ مفروض است. تمام نقاطی از محیط مثلث که فاصلهٔ آن‌ها از یکی از رئوس مثلث کم‌تر از $\frac{۱}{۶}$ است، تشکیل تعدادی پاره‌خط می‌دهند. مجموع طول این پاره‌خط‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) ۰/۵

۲۸- سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را روی یک مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. ناحیه‌ای در داخل مربع وجود دارد که اگر مرکز سکه در آن ناحیه قرار گیرد، تمام سکه درون مربع واقع خواهد شد. مساحت این ناحیه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲π ۴) ۴π

۲۹- تمام نقاطی از درون دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ مختصات که فاصلهٔ آن‌ها حداقل از یکی از محورهای x یا y کم‌تر از $\sqrt{۲}$ نباشد، تشکیل یک ناحیه می‌دهند. مساحت این ناحیه چه‌قدر است؟

۱) ۲π ۲) $۴\pi - ۸$ ۳) $\pi - ۲$ ۴) $۴\pi - ۴$

درسنامهٔ ۲

خواص عمودمنصف

تعریف: عمودمنصف پاره‌خط AB، خطی است که در وسط پاره‌خط AB به آن عمود می‌شود.

نتیجه ۱ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی:

$OA = OB$

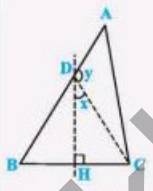
پس مثلث OAB متساوی‌الساقین بوده و لذا $\hat{A} = \hat{B}$.

سؤال *دانش‌پژوه (سپا ضیاء):* **آقا اجازه میشه بگید چرا OA = OB؟**

پاسخ: *ببین گلم دو مثلث AOH و BOH به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین هم‌نهشت‌اند (AH = HB و OH مشترک و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$) پس اجزای متناظر آن‌ها نیز برابرند. پس OA = OB.*

نتیجه ۲ هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

مثال در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع BC، ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کرده است. اگر $\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C}}{۴}$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های x و y را بیابید.

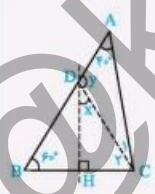


پاسخ: فرض کنیم کسرهای داده شده برابر t باشد.

$$\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C}}{۴} = t \Rightarrow \hat{A} = ۲t, \hat{B} = ۳t, \hat{C} = ۴t \quad (*)$$

می‌دانیم جمع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است. پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲t + ۳t + ۴t = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹t = ۱۸۰^\circ \Rightarrow t = ۲۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۴۰^\circ, \hat{B} = ۶۰, C = ۸۰^\circ$$



D روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. پس $\hat{C}_۲ = \hat{B} = ۶۰^\circ$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{CDH} : \hat{H} + x + \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ + x + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$$

$$y : \text{زاویهٔ خارجی مثلث BCD} \quad y = \hat{B} + \hat{C}_۲ = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

۳۰- A و B دو سر یک پاره‌خط هستند، تمام نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۱) یک خط عمود بر پاره‌خط AB که آن را نصف نمی‌کند. ۲) دو خط موازی با پاره‌خط AB

۳) خطی گذرنده از وسط پاره‌خط AB که بر آن عمود نیست. ۴) خطی که از وسط پاره‌خط AB عبور کرده و بر آن عمود باشد.

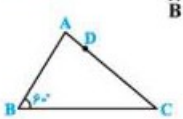
۳۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) اگر $\hat{A} = ۸۰^\circ$ باشد، زاویهٔ بین دو عمودمنصف اضلاع AB و BC کدام است؟

۱) ۴۰° ۲) ۵۰° ۳) ۶۰° ۴) ۵۵°

برگرفته از کتاب درسی

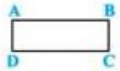
@khanen_book

۳۲- در شکل مقابل، نقطهٔ D محل برخورد عمودمنصف ضلع BC با ضلع AC بوده و داریم $\hat{B} = 60^\circ$ و $AB = BD$. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟



۱) 20° ۲) 30° ۳) 40° ۴) 50°

۳۳- در شکل مقابل $\frac{CD}{AD} = 3$ است. عمودمنصف قطر AC امتداد ضلع BC را در نقطهٔ P قطع می‌کند. اگر $PB = 4$ باشد، طول قطر AC کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{8}$

۳۴- چند نقطه می‌توان یافت که از هر ۳ رأس مثلث ABC فاصلهٔ یکسان داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۵- سه نقطهٔ A، B و C در صفحه وجود دارند. تمام نقاطی از صفحه که از این نقاط به یک فاصله باشند، چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۱) حداکثر ۱ نقطه ۲) حداقل ۱ خط ۳) ۱ نقطه ۴) حداکثر ۲ نقطه

۳۶- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۰ مفروض است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از دو رأس B و C برابر ۱۰ و فاصله‌شان از ضلع BC برابر $5\sqrt{3}$ باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۳۷- حداکثر چند نقطه روی دایرهٔ (C) به شعاع ۳ سانتی‌متر وجود دارد که فاصله‌اش از دو سر پاره‌خط AB یکسان باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸- اگر شیب خط d و پاره‌خط AB، قرینه و معکوس هم باشند، در حالت کلی چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقاط A و B (دو سر پاره‌خط AB) به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) بی‌شمار ۳) ۲ ۴) صفر یا بی‌شمار

۳۹- نقاط $A(1,2)$، $B(3,4)$ و $C(3,0)$ مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله‌اش از نقاط A و B برابر و فاصله‌اش از نقطهٔ C برابر ۱/۵ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۰- نقطهٔ P خارج از خط d مفروض است. به مرکز P و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) نقطهٔ P روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. ۲) فاصلهٔ P از دو نقطهٔ A و B یکسان و برابر a است.
۳) مثلث ABP، حتماً متساوی‌الاضلاع است. ۴) نقاط A و B از خط گذرنده از P و عمود بر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

۴۱- نقطهٔ M روی خط d مفروض است. به مرکز M و شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. حال دو کمان با شعاع a و به مراکز A و B رسم می‌کنیم. اگر این دو کمان در نقاط P و Q مقاطع باشند، کدام گزینه غلط است؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) نقطهٔ M روی پاره‌خط PQ قرار دارد. ۲) خط گذرنده از نقاط P و Q بر خط d عمود است.
۳) خط d عمودمنصف PQ است. ۴) a باید کم‌تر از نصف طول پاره‌خط AB باشد.

۴۲- دو پاره‌خط AB و CD مفروض‌اند. نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله و از دو نقطهٔ C و D نیز به یک فاصله باشد، روی کدام خط قرار ندارد؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) عمودمنصف پاره‌خط AB ۲) عمودمنصف پاره‌خط CD
۳) خطی که هر دو عمودمنصف‌های AB و CD را قطع می‌کند. ۴) خطی که از نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های AB و CD می‌گذرد.

۴۳- دو پاره‌خط AB و CD مفروض‌اند. فرض کنید نقطهٔ F وجود دارد که از نقاط A، B، C و D به یک فاصله باشد. در این صورت کدام گزینه غلط است؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) نقطهٔ F روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد. ۲) نقطهٔ F روی عمودمنصف BD قرار دارد.
۳) نقطهٔ F روی دایرهٔ گذرنده از نقاط A، B، C و D قرار دارد. ۴) نقطهٔ F مرکز دایره‌ای است که از نقاط A، B، C و D می‌گذرد.

@khanehbook

۴۴- در شکل، عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و CD هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. در این صورت کدام گزینه غلط است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) دایره به مرکز O و شعاع OA از هر ۴ نقطهٔ A، B، C و D می‌گذرد. ۲) مثلث OAD متساوی‌الساقین است.

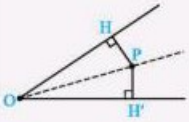
۳) فاصلهٔ نقطهٔ O از نقاط B و D یکسان است. ۴) مثلث‌های OAB و OCD هم‌نهشت‌اند.

درس‌نامهٔ ۳

خواص نیمساز

تعریف: نیمساز هر زاویه، نیم‌خطی است که آن زاویه را به دو زاویهٔ مساوی تقسیم می‌کند.

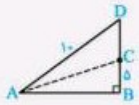
نتیجه ۱ هر نقطه روی نیمساز زاویهٔ O، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی:



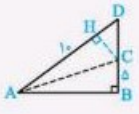
$$PH = PH'$$

نتیجه ۲ هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مثال در شکل زیر اگر AC نیمساز زاویهٔ A باشد و $AD = ۱۰$ و $BC = ۵$، آن‌گاه مساحت مثلث ACD کدام است؟



پاسخ: چون نقطهٔ C روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویهٔ A یکسان است. از C بر AD عمود می‌کنیم. طبق نتیجهٔ ۱ داریم:



$$CB = CH = ۵ \quad (*)$$

بنابراین:

$$S_{\Delta ACD} = \frac{CH \times AD}{۲} \overset{(*)}{=} \frac{۵ \times ۱۰}{۲} = ۲۵$$

سؤال دانش‌پژوه (علی مهتابی): آقا اجازه منظورتون از فاصلهٔ نقطه از دو ضلع زاویه چیه؟

پاسخ: برای پیدا کردن فاصلهٔ یه نقطه از خط باید از آن نقطه بر خط عمود کنیم. طول پاره‌خط عمودشده رو فاصلهٔ اون نقطه تا خط می‌گیم.

۴۵- در مثلث ABC، رابطهٔ $\frac{\hat{C}}{۵} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{A}}{۳}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{C}$، چند درجه است؟ مشابه تجربی داخل و خارج ۹۲

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۶۰ ۴) ۳۵

۴۶- چند نقطه در داخل مثلث ABC وجود دارد که از هر ۳ ضلع به فاصلهٔ یکسان باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حداقل ۳

۴۷- به مرکز O و به شعاع a کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویهٔ O را در نقاط P و Q قطع کند. مجدداً به مراکز P و Q و به شعاع b دو کمان به گونه‌ای می‌زنیم تا هم‌دیگر را در نقطهٔ W قطع کنند. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) b همواره بزرگ‌تر از نصف PQ است.

۲) خط گذرنده از نقاط O و W نیمساز زاویهٔ O است.

۳) مثلث PQW همواره متساوی‌الاضلاع است.

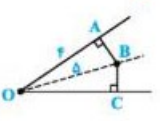
۴) فاصلهٔ W از دو ضلع زاویهٔ O یکسان است.

۴۸- دو خط متقاطع d و d' شکل مقابل را در نظر بگیرید. تمام نقاطی از صفحه که فاصله‌شان از دو خط d و d' یکسان است، چه شکل (شکل‌هایی) را تشکیل می‌دهند؟

۱) دو خط عمود بر هم ۲) چهار نقطه

۳) یک خط ۴) دو خط غیرعمود بر هم

۴۹- در شکل اگر OB نیمساز زاویهٔ O باشد، مقدار $BC + OC$ کدام است؟

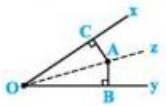


۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۷ ۴) ۵

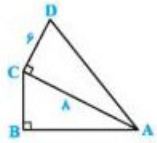
@khaneh_book

۵۰- اگر Oz نیمساز زاویهٔ $\hat{O} = 60^\circ$ باشد و $OB = \sqrt{3}$، آن‌گاه محیط مثلث OAC چه‌قدر است؟



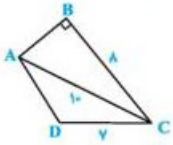
۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $3+\sqrt{3}$
۳) $3+\sqrt{2}$ ۴) $2+\sqrt{2}$

۵۱- در شکل روبه‌رو AC نیمساز زاویهٔ A است. طول پاره‌خط BC کدام است؟



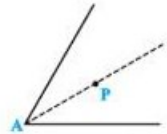
۱) ۴/۸
۲) ۶/۸
۳) ۴/۶
۴) ۴/۲

۵۲- در شکل زیر AC نیمساز زاویهٔ C بوده و مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\hat{B} = 90^\circ$). در این صورت طول AD کدام است؟



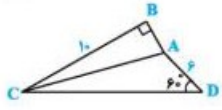
۱) ۶ ۲) $\sqrt{37}$
۳) $\sqrt{72}$ ۴) ۸

۵۳- نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ $A = 60^\circ$ و به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از رأس A قرار دارد. چند نقطه روی دو ضلع زاویهٔ A وجود دارد، به طوری‌که فاصله‌اش از نقطهٔ P برابر ۷ باشد؟



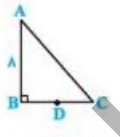
۱) ۲
۲) صفر
۳) ۴
۴) ۳

۵۴- در شکل مقابل CA نیمساز زاویهٔ C است. محیط چهارضلعی ABCD کدام است؟



۱) $25+3\sqrt{3}$ ۲) $29+3\sqrt{3}$
۳) ۲۹ ۴) $36+6\sqrt{3}$

۵۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{B} = 90^\circ)$ از نقطهٔ D روی ضلع BC، خطی را بر وتر AC عمود می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. اگر $DH = BD$ و مساحت مثلث ABD برابر ۲۴ باشد، فاصلهٔ H از پاره‌خط AD کدام است؟



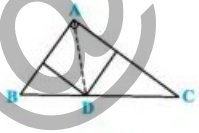
۱) ۴ ۲) ۴/۸
۳) ۵/۲ ۴) ۵/۴

۵۶- مثلث ABC به مساحت ۴۲ مفروض است. اگر نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در H قطع کند و فاصلهٔ H تا ضلع $AC = 14$ برابر ۴/۲ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

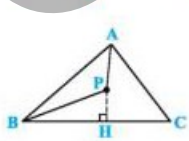
۵۷- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟

تجربی ۹۵ خارج



۱) $1/4\sqrt{2}$
۲) ۲/۱
۳) ۲/۸
۴) $2/1\sqrt{2}$

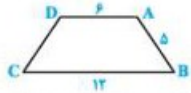
۵۸- اگر AP و BP نیمسازهای زوایای A و B باشند و محیط مثلث ۱۸ و مساحت آن $9\sqrt{3}$ باشد، طول پاره‌خط PH کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

@khaneh_book

۵۹- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر، نیمسازهای دو رأس مجاور A و B هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. فاصلهٔ O از ضلع AB کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۰- در نقشهٔ زیر، موقعیت سه شهر A، B و C مشخص شده است. می‌خواهیم یک بیمارستان برای مردم این ۳ شهر بسازیم که فاصلهٔ هر ۳ شهر تا آن مساوی باشد. این بیمارستان باید در کجای نقشه احداث شود؟

۱) محل تلاقی سه نیمساز زوایای A و B و C در مثلث ABC

۲) محل تلاقی سه عمودمنصف اضلاع AB، AC و BC

۳) محل تلاقی سه میانهٔ مثلث ABC

۴) محل تلاقی عمودمنصف پاره‌خط AB با نیمساز زاویهٔ C از مثلث ABC

درسنامهٔ ۴

نسبت و تناسب

در سال‌های گذشته با مفهوم نسبت و تناسب آشنا شدیم. مثلاً می‌گوییم نسبت پول علی (۳۰۰۰) به پول حسن (۷۰۰۰) برابر $\frac{۳۰۰۰}{۷۰۰۰}$ یا $\frac{۳}{۷}$ است. همان‌طور که می‌دانید $\frac{۳}{۷}=\frac{۳۰۰۰}{۷۰۰۰}$ است. یعنی دو نسبت $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۳۰۰۰}{۷۰۰۰}$ با هم مساوی هستند و به برابری دو نسبت فوق یک تناسب می‌گویند $\left(\frac{۳۰۰۰}{۷۰۰۰}=\frac{۳}{۷}\right)$.

نتیجه تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ یعنی نسبت a به b برابر نسبت c به d است.

مثال در شکل روبه‌رو نسبت طول پاره‌خط AB به BC برابر $\frac{۲}{۶}$ و نسبت طول پاره‌خط AD به DE برابر $\frac{۱}{۳}$ است و چون این دو تا نسبت با هم برابرند، می‌توان تناسب $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$ را نوشت.

ویژگی‌های تناسب

در ادامه ویژگی‌های تناسب را بیان می‌کنیم که دانستن آن‌ها در مسائل مختلف کمک بزرگی به ما می‌کند. در تمام این ویژگی‌ها مخرج‌ها غیر صفرند.

۱) طرفین وسطین کردن:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

مثال: $\frac{x}{y}=\frac{۶}{۷}\Rightarrow ۷x=۶y$

۲) تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب:

$ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

مثال: $xy=۴z\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{z}{y}$

۳) معکوس کردن تناسب:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

مثال: $\frac{۴}{x}=\frac{y}{۵}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۵}{y}$

۴) تعویض جای طرفین با وسطین:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

مثال: $\frac{۲}{x}=\frac{۶}{y}\Rightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{x}{y}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

مثال: $\frac{۲}{x}=\frac{۶}{y}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{۶}{۲}$

۵) ترکیب نسبت در صورت یا مخرج:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

مثال: $\frac{۲}{x}=\frac{۴}{y}\Rightarrow\frac{۲+x}{x}=\frac{۴+y}{y}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

مثال: $\frac{۲}{x}=\frac{۴}{y}\Rightarrow\frac{۲}{x+۲}=\frac{۴}{y+۴}$

@khanehbook

سؤال دانش‌پژوه (روژا دامپزشک): آقا میشه بگین چطوری اینا به دست اومدن؟

پاسخ: آفرین به تو که هیچی رو بدون دلیل حفظ نمی‌کنی. ببین:

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{به علاوه ۱}]{\text{طرفین تساوی}} \frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱ \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{طرفین تساوی}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xrightarrow[\text{به علاوه ۱}]{\text{طرفین تساوی}} \frac{b}{a}+۱=\frac{d}{c}+۱ \Rightarrow \frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c} \xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{طرفین تساوی}} \frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}\end{cases}$$

۶ تفضیل نسبت در صورت یا مخرج:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

مثال: $\frac{۱}{x}=\frac{۱}{y} \Rightarrow \frac{۱-x}{x}=\frac{۱-y}{y}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل نسبت}} \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

مثال: $\frac{x}{۶}=y \Rightarrow \frac{x}{۶-x}=\frac{y}{۱-y}$

سؤال دانش‌پژوه (الفا شکرابی): آقا اجازه من اومدم تفضیل در صورت رو به صورت $\frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d}$ نوشتم. آیا اینم درسته یا حتماً باید صورت منهای مخرج بشه؟

پاسخ: واسه تو هم درسته. نگاه کن:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{تساوی در (-۱)}]{\text{ضرب طرفین}} \frac{-a}{b}=\frac{-c}{d} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{(-a)+b}{b}=\frac{(-c)+d}{d} \Rightarrow \frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d}$$

۷ اگر دو تا نسبت با هم برابر باشند، می‌توان صورت‌ها را با هم و مخرج را نیز با هم جمع یا تفریق کرده و به یک نسبت جدید رسید که با نسبت‌های قبلی برابر است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ (+ یا -)

مثال: $\frac{x}{y}=\frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{x+۵}{y+۶}=\frac{x}{y}=\frac{۵}{۶}$

در حالت کلی‌تر داریم:

$$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}=\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

مثال اگر x، y و z اضلاع یک مثلث باشند و داشته باشیم $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۶}$، آن‌گاه محیط مثلث چند برابر ضلع x است؟

پاسخ:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۶} \Rightarrow \frac{x+y+z}{۲+۴+۶}=\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث}}{۱۲}=\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث}}{x}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

پس محیط مثلث، شش برابر ضلع x است.

مثال اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\frac{c}{d-c}$ ب) $\frac{a+b}{a-b}$ پ) $\frac{c+a+۳}{d+b+۵}$ ت) $\frac{۲c-۳a}{۲d-۳b}$

پاسخ:

الف) $\frac{c}{d}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل نسبت در}} \frac{c}{d-c}=\frac{۳}{۵-۳} \Rightarrow \frac{c}{d-c}=\frac{۳}{۲}$

ب) $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow a=\frac{۳}{۵}b \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{۳}{۵}b+b}{\frac{۳}{۵}b-b}=\frac{\frac{۳b+۵b}{۵}}{\frac{۳b-۵b}{۵}}=\frac{۸b}{-۲b}=-۴$

پ) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\text{و مخرج‌ها با هم جمع شوند.}]{\text{صورت‌ها با هم}} \frac{c+a+۳}{d+b+۵}=\frac{۳}{۵}$

ت) صورت و مخرج کسرهای $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ را به ترتیب در ۲ و -۳ ضرب کرده و از ویژگی (۷) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{۲c}{۲d}=\frac{-۳a}{-۳b}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۲c-۳a}{۲d-۳b}=\frac{۳}{۵}$$

@khaneh_book

۸ $\frac{x}{y}=\frac{z}{p} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y}=\frac{z+p}{z-p}$

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد)، آقا اجازه میشه اثبات ویژگی ۸ رو هم میشه بگین؟

پاسخ: به‌به چه عجب یکی هم اثبات پراش مهمه! باشه نگاه کن:

از فرض $\frac{x}{y}=\frac{z}{p}$ می‌توان نتیجه گرفت $x=\frac{zy}{p}$. حال در نسبت $\frac{x+y}{x-y}$ به جای x آن، $\frac{zy}{p}$ قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم حاصل کسر برابر $\frac{z+p}{z-p}$ می‌شود:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\frac{zy}{p}+y}{\frac{zy}{p}-y}=\frac{\frac{zy+py}{p}}{\frac{zy-yp}{p}}=\frac{zy+py}{zy-yp}=\frac{y(z+p)}{y(z-p)}=\frac{z+p}{z-p}$$

۶۱- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ۲) $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ ۳) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ ۴) $\frac{a-b}{b}=\frac{d-c}{d}$

۶۲- اگر $\frac{3x}{2}=\frac{y}{5}$ باشد، حاصل $\frac{2x-3y}{x+y}$ کدام است؟

۱) $\frac{41}{17}$ ۲) $-\frac{41}{17}$ ۳) $\frac{14}{17}$ ۴) $-\frac{14}{17}$

۶۳- اگر $\frac{3b+7}{7+2b}=\frac{3a+10}{10+2a}$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۰/۷ ۲) $\frac{10}{7}$ ۳) $\frac{20}{7}$ ۴) $\frac{7}{20}$

۶۴- اگر $ad=bc$ باشد، عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ با کدام عبارت برابر است؟ $(a,b,c,d\neq 0)$

۱) $\frac{c-d}{c+d}$ ۲) $\frac{c+2d}{c+3d}$ ۳) $\frac{c+d}{c-d}$ ۴) $\frac{c+d}{d-c}$

۶۵- اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ و $\frac{2a+b}{2c+d}=\frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{a+3b}{c+3d}$ کدام است؟ $(a,b,c,d\neq 0)$

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۶۶- اگر $\frac{1}{2}=\frac{2a+3b}{2c+3d}$ و $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ باشد، حاصل $\frac{cd}{dc+ad+bc}$ کدام است؟ $(a,b,c,d\neq 0)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۶۷- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{5}{3}$ باشد، حاصل $\frac{b+d}{a+c}+\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟ $(a,b,c,d\neq 0)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{23}{5}$ ۳) $\frac{19}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶۸- اگر $x^2=ab$ و $\frac{2x-b}{2a-x}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\frac{4x+a}{5b+x}$ کدام است؟ $(a,b,x>0)$

۱) ۲ ۲) $\frac{12}{7}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{12}{5}$

۶۹- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=5$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{a^2+2c^2}{b^2+2d^2}}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{25}$

۷۰- اگر $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+2$ و $2x+y-2z=16$، مقدار $x+y$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۵

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۷۱- اگر $a_1, a_2, \cdots$ و a_5 اضلاع یک پنج‌ضلعی باشند و داشته باشیم $\frac{a_5}{1}=\frac{a_4}{2}=\frac{a_3}{3}=\frac{a_2}{4}=\frac{a_1}{5}$، آن‌گاه محیط این پنج‌ضلعی چند برابر طول ضلع a_2 است؟

۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{15}{2}$ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

@khaneh_book

۷۲- روی پاره‌خط $AB = ۴$، دو نقطهٔ M و N را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = ۲$ باشد. در این صورت طول پاره‌خط MN چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۷۳- مطابق شکل نقاط P و Q در نیمهٔ سمت چپ پاره‌خط AB قرار دارند. نقطهٔ P پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ و نقطهٔ Q پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{۳}{۴}$ تقسیم می‌کند. اگر طول پاره‌خط PQ برابر ۲ باشد. آن‌گاه طول پاره‌خط AB کدام است؟

A P Q B

۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

درسنامه

استدلال استقرایی

تعریف: استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است. به عبارت دیگر در این نوع از استدلال با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌گیری کلی می‌کنیم یعنی از جزء به کل می‌رسیم.

مثال وارد روستایی شده و متوجه می‌شویم تمام افرادی که با آن‌ها مواجه شده‌ایم، نابینا هستند. شاید به این نتیجه برسیم که تمام افراد آن روستا نابینا هستند. ضعف این نوع استدلال واضح است، زیرا همواره این احتمال وجود دارد، فردی در آن روستا نابینا نباشد! پس به درست بودن نتیجهٔ حاصل از استدلال استقرایی نمی‌توان اطمینان داشت.

استدلال استنتاجی

تعریف: استدلال استنتاجی، استدلالی است که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

تمرین ثابت کنید اگر x فرد باشد، آن‌گاه $x(x+۲)$ نیز فرد است.

پاسخ: با فرض $x = ۲k+۱, (k \in Z)$ داریم:

$$x(x+۲) = (۲k+۱)(۲k+۱+۲) = ۴k^۲ + ۸k + ۳ = ۴k^۲ + ۸k + ۲ + ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۴k + ۱}_{k'}) + ۱ = ۲k' + ۱ \Rightarrow$$

$x(x+۲)$ عددی فرد است.

مثال نقض

تعریف: به مثالی که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری (حکم) کلی غلط است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال اگر با دیدن اعداد ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ نتیجه بگیریم که تمام اعداد فرد، اول هستند، می‌توانیم عدد ۹ را به‌عنوان مثال نقض معرفی کنیم، زیرا این عدد، عددی فرد بوده ولی اول نیست. پس نشان دادیم که نتیجه‌گیری کلی انجام‌شده غلط است.

مثال حکم کلی «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها با هم برابر است.» را در نظر بگیرید. برای این حکم هر چه‌قدر مثال بزنیم نمی‌توانیم مثال نقضی ارائه کنیم ولی این برای پذیرش این حکم کافی نبوده و برای نشان دادن درستی، باید آن را اثبات کنیم.»

نکته اگر برای رد یک حکم کلی ارائه شده، نتوانیم مثال نقضی پیدا کنیم، نمی‌توانیم دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای بگیریم.

مثال حکم کلی «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲ + n + ۴۱$، عددی اول است.» را در نظر بگیرید. شاید در نگاه اول به این حکم، هر nای حدس بزنیم، عبارت $n^۲ + n + ۴۱$ عددی اول باشد و نتوانیم مثال نقضی برای آن بیابیم. امّا نمی‌توانیم بگوییم چون ما مثال نقض پیدا نکردیم پس حکم کلی بیان شده درست است، زیرا اگر خوب بگردیم عبارت داده‌شده به ازای $n = ۴۱$، مضرب ۴۱ می‌شود. پس عددی اول نیست. نگاه کنید:

$$n^۲ + n + ۴۱ \overset{n=۴۱}{=\!=\!=} ۴۱^۲ + ۴۱ + ۴۱ = ۴۱(۴۱ + ۱ + ۱) = ۴۱ \times ۴۳$$

قضایای شرطی

قضیهٔ شرطی: جملهٔ شرطی به‌صورت «اگر p، آن‌گاه q» را که همواره درست باشد قضیهٔ شرطی می‌نامند و آن را به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهند. به قسمت شرطی جمله (یعنی p) فرض قضیه و به نتیجهٔ جمله (یعنی q) حکم قضیه می‌گویند.

مثال جملهٔ شرطی «اگر $x \geq ۰$، آن‌گاه $x^۳ \geq ۰$» یک قضیهٔ شرطی بوده که فرض آن $x \geq ۰$ و حکم آن $x^۳ \geq ۰$ است.

عکس قضیهٔ شرطی: برای نوشتن عکس قضیهٔ شرطی کافی است جای فرض و حکم در قضیهٔ شرطی را با هم عوض کنیم. پس اگر قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر p، آن‌گاه q» باشد، عکس این قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر q، آن‌گاه p» خواهد بود. که آن را به صورت $q \Rightarrow p$ نمایش می‌دهیم. شایان ذکر است که عکس یک قضیهٔ شرطی، همواره یک قضیهٔ شرطی نیست.

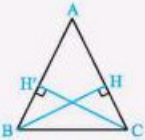
مثال آن قضیهٔ شرطی «اگر $x \geq ۰$، آن‌گاه $x^۳ \geq ۰$» به‌صورت «اگر $x^۳ \geq ۰$، آن‌گاه $x \geq ۰$» است که باز هم قضیهٔ شرطی می‌باشد، اما عکس قضیهٔ شرطی «اگر $x = y$، آن‌گاه $x^۲ = y^۲$» به‌صورت «اگر $x^۲ = y^۲$، آن‌گاه $x = y$» است که قضیهٔ شرطی نمی‌باشد، زیرا مثلاً $(-۲)^۲ = ۲^۲$ اما $۲ \neq -۲$ است.

@khanenet_book

مثال قضیه: «اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یک‌دیگر را نصف می‌کنند.»

عکس آن قضیه: «اگر در یک چهارضلعی قطرها یک‌دیگر را نصف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.»

مثال قضیه: «اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.»

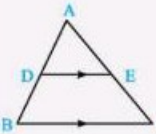


حکم: $BH = CH'$ فرض: $AB = AC$

عکس آن قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند:

حکم: $AB = AC$ فرض: $BH = CH'$

مثال قضیه: «در مثلث ABC اگر $DE \| BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$»



عکس قضیه: در مثلث ABC اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \| BC$.

قضیهٔ دو شرطی: اگر عکس یک قضیهٔ شرطی، خودش یک قضیهٔ شرطی باشد (یعنی همواره درست باشد)، آن‌گاه این دو قضیه را به‌صورت یک قضیه می‌نویسیم و به آن قضیه، قضیهٔ دو شرطی می‌گوییم. قضیهٔ دو شرطی را معمولاً به‌صورت «p اگر و تنها اگر q» بیان می‌کنند و به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهند.

مثال عکس قضیهٔ شرطی «**اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه مربع یک ضلع آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگرش برابر است.**» به صورت «**اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن‌گاه مثلث، قائم‌الزاویه است**» می‌باشد که یک قضیهٔ شرطی است. پس می‌توان این دو قضیه را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی به فرم «**یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر باشد.**» بیان نمود.

تذکر اگر بخواهیم یک قضیهٔ دو شرطی به‌صورت $p \Leftrightarrow q$ را اثبات کنیم، باید هم قضیهٔ $p \Rightarrow q$ و هم قضیهٔ $q \Rightarrow p$ را اثبات کنیم.

قضایای کلی

تعریف: قضایای کلی، احکامی هستند که همیشه برقرارند. اکثر قضیه‌های مهم ریاضی مانند قضیهٔ فیثاغورس در هر مثلث قائم‌الزاویه ($a^2 = b^2 + c^2$) و همهٔ اتحادهای جبری مانند اتحاد مربع دوجمله‌ای ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$) قضایای کلی محسوب می‌شوند.

برهان خلف

گاهی وقت‌ها برای این‌که قضیه‌ای را ثابت کنیم، به جای این‌که به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، ابتدا فرض می‌کنیم حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم. بنابراین معلوم می‌شود که فرض انجام شدهٔ ابتدای مسأله (غلط بودن حکم قضیه) نادرست بوده و لذا حکم مسأله درست است. این روش استدلال را **برهان خلف** یا **برهان غیرمستقیم** می‌گویند. در ادامه خلاصه‌ای از اثبات به روش برهان خلف را ببینید:

اثبات به روش برهان خلف:

مسأله: $A \Rightarrow B$ (حکم) (فرض)

A درست ⇒ ⋯ ⇒ ⋯ ⇒ ⋯ ⇒ B نادرست

استدلال منطقی و حقایق

① A درست نیست

② تناقض منطقی

همان‌طور که می‌بینید که با فرض نادرست بودن B (حکم) به یکی از دو نتیجهٔ ① یا ② رسیدیم که غلط است. پس نتیجه می‌گیریم که حکم B درست است.

مثال اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

پاسخ: از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید حکم مسأله نادرست باشد، یعنی n عددی فرد نباشد، پس n عددی زوج خواهد بود و می‌توان آن را به صورت $n = 2k$ نوشت که در آن k عددی طبیعی است. پس:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k' \Rightarrow n^2 = \text{زوج}$$

پس رسیدیم به این‌که n^2 زوج است و با فرض مسأله در تناقض است. (زیرا فرض مسأله، فرد بودن n^2 بود!) لذا فرض زوج بودنِ n نادرست است.

@khanenbook

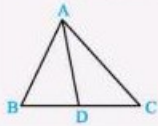
تمرین ثابت کنید اگر $\sqrt{۲}$ گنگ باشد، آن‌گاه $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ نیز عددی گنگ است؟

پاسخ: فرض کنیم $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گنگ نباشد، پس برابر با عدد گویایی مانند a خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=a \Rightarrow \sqrt{۳}=a-\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳=(a-\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow ۳=a^۲+۲-۲\sqrt{۲}a \Rightarrow ۲\sqrt{۲}a=a^۲-۱ \Rightarrow \underbrace{\sqrt{۲}}_{\text{عددی گنگ}}=\underbrace{\frac{a^۲-۱}{۲a}}_{\text{عددی گویا}}$$

چون a عددی گویا می‌باشد، پس $\frac{a^۲-۱}{۲a}$ نیز گویا می‌باشد و نمی‌تواند با عدد گنگ $\sqrt{۲}$ برابر باشد، پس به تناقض رسیدیم و همان حکم اولیه درست است.

تمرین فرض کنید AD نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC باشد. اگر $CD \neq BD$، ثابت کنید $AB \neq AC$.



پاسخ: فرض کنیم $AB=AC$، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز AD میانه هم می‌باشد، پس طبق تعریف میانه $BD=CD$ که با فرض مسأله تناقض دارد، پس فرض $AB=AC$ نادرست بوده و حکم اولیه درست است؛ یعنی $AB \neq AC$.

۷۴- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات، کدام نوع استدلال است؟

۱) برهان خلف ۲) مثال نقض ۳) استنتاجی ۴) استقرایی

۷۵- دو تیم فوتبال A و B بیست بازی مقابل هم انجام داده‌اند که در تمام بازی‌ها تیم A برنده بوده است. حال اگر با دیدن این ۲۰ بازی نتیجه بگیریم که همیشه تیم A در مقابل B برنده خواهد بود، از چه نوع استدلالی استفاده کرده‌ایم؟

۱) برهان خلف ۲) استدلال استقرایی ۳) مثال نقض ۴) استدلال استنتاجی

۷۶- انسان‌های غارنشین مشاهده می‌کردند که آب، برف و یخ آن‌قدر می‌جوشند تا آن‌که چیزی از آن‌ها باقی نماند. بنابراین از روی آن مشاهدات نتیجه‌گیری کرده بودند که «هر چیزی آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.» روش استدلال آن انسان‌ها چه نام دارد؟

۱) استدلال استقرایی ۲) مثال نقض ۳) برهان خلف ۴) استدلال استنتاجی

۷۷- «فلزات بر اثر گرما منبسط می‌شوند، شیشه بر اثر گرما منبسط می‌شود، هوا بر اثر گرما منبسط می‌شود. در نتیجه هر چیزی بر اثر گرما منبسط می‌شود.» این نتیجه‌گیری، ضعف کدام نوع استدلال را نشان می‌دهد؟

۱) استقرایی ۲) استنتاجی ۳) تمثیلی ۴) مثال نقض

۷۸- اگر a عددی فرد و b عددی زوج باشد، می‌دانیم مجذور هر عدد فرد یک واحد بیش‌تر از مضرب ۸ است. با کدام استدلال می‌توان نتیجه گرفت که $(a+b)^۲-۱$ بر ۸ بخش‌پذیر است؟

۱) استنتاجی ۲) استقرایی ۳) برهان خلف ۴) مثال نقض

۷۹- اگر a، b و c سه عدد متمایز باشند که «b کوچک‌تر از c است و a کوچک‌ترین عدد نیست.» کدام گزینه الزاماً درست است؟

۱) a بزرگ‌ترین عدد است. ۲) a از b بزرگ‌تر است. ۳) a از c بزرگ‌تر است. ۴) c بزرگ‌ترین عدد است.

۸۰- کدام عدد کلیت حکم «مربع هر عدد صحیح، مضرب ۷ به علاوه یک است» را نقض می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۸۱- کدام عدد کلّیت حکم «توان دوم هر عدد بزرگ‌تر از خود آن عدد است.» را نقض می‌کند؟

۱) $۱-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}+۱$ ۳) $\sqrt{۳}-۲$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۸۲- کدام دو عدد کلیت حکم «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ عددی گنگ است.» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}-۲$ و $\sqrt{۲}+۱$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ و $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$ و $\sqrt{۲}$

۸۳- اگر بخواهیم حکم «اگر x عدد گنگ باشد، آن‌گاه $۲x^۲-۴x+۵$ همواره عددی گنگ است» را رد کنیم، از کدام عدد زیر به‌عنوان مثال نقض استفاده کنیم؟

۱) $۲\sqrt{۳}+۲$ ۲) $۳\sqrt{۲}-۲$ ۳) $۵\sqrt{۲}+۱$ ۴) $۴\sqrt{۲}+۵$

۸۴- کدام عدد کلیت حکم «رقم سمت راست هر عددی که بر پنج و سه قابل قسمت باشد، صفر است.» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۵

۸۵- برای آن‌که یک جملهٔ شرطی «اگر p، آن‌گاه q» را به روش مثال نقض رد کنیم، مثال بیان‌شده باید کدام ویژگی را داشته باشد؟

۱) در p و q صدق کند. ۲) در q صدق کند ولی p به‌ازای آن برقرار نباشد.
۳) در p صدق کند ولی q به‌ازای آن برقرار نباشد. ۴) فقط در q صدق کند.

@khanehbook

۸۶- کدام گزینهٔ زیر، مثال نقض دارد؟

۱) توان دوم هر عدد، بزرگ‌تر از توان سوم آن است.
۲) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۳) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲، فرد است.
۴) هر مربع یک لوزی است.

۸۷- برای کدام حکم کلی زیر نمی‌توان مثال نقض یافت؟

۱) هر عدد اول فرد است.
۲) هر لوزی یک مستطیل است.
۳) هر مستطیل یک لوزی است.
۴) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

۸۸- کدام‌یک از گزینه‌های زیر قضیهٔ شرطی بوده و عکس آن مثال نقض ندارد؟

۱) اگر $x = y \neq 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 2$.
۲) اگر $x = y$ باشد، آن‌گاه $\sin x = \sin y$.
۳) اگر $x = y$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 0$.
۴) اگر $(x-1)^4 > 0$ باشد، آن‌گاه $x - 1 > 0$.

۸۹- عکس کدام قضیهٔ شرطی زیر، قضیهٔ شرطی است؟

۱) اگر $x = 1$ باشد، آن‌گاه $x^2 - 3x + 2 = 0$.
۲) اگر $3x^3 - 81 \geq 0$ باشد، آن‌گاه $(x-3)(x+3) \geq 0$.
۳) اگر $x > 2$ باشد، آن‌گاه $x > 1$.
۴) اگر $(a-2)(b-2) = 0$ باشد، آن‌گاه حداقل یکی از a یا b برابر ۲ است.

۹۰- عکس کدام قضیهٔ شرطی، مثال نقض دارد؟

۱) اگر $x \geq |x|$ باشد، آن‌گاه $x^2 \geq 0$ است.
۲) اگر $x = 1$ باشد، آن‌گاه $(x-1)^2 + (x^2-1)^2 = 0$ است.
۳) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه قطرهای آن با هم برابرند.
۴) اگر نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد (یعنی $MA = MB$)، آن‌گاه M بر عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۹۱- کدام‌یک از عبارات زیر همواره درست نمی‌باشد؟

۱) اگر x عددی فرد باشد، آن‌گاه $3x^3 - 3$ مضرب ۲۴ است.
۲) حاصل‌ضرب هر دو عدد به‌صورت $6k + 5$، به‌صورت $6k'' + 1$ است.
۳) حاصل‌ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۴۸ است.
۴) اگر حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه حاصل جمعشان همواره زوج است.

۹۲- کدام گزینه در مورد روش برهان خلف صحیح نمی‌باشد؟

۱) اثبات غیرمستقیم است.
۲) ثابت می‌کنیم خلاف حکم نمی‌تواند درست باشد.
۳) با فرض نادرست بودن حکم به یک تناقض می‌رسیم.
۴) با فرض نادرست بودن فرض مسأله به نادرست بودن حکم می‌رسیم.

۹۳- اگر $\sqrt{7}$ عددی گنگ و x عددی گویا باشد، آن‌گاه با روش ..... ثابت می‌شود که عدد $(x + \sqrt{7})$ عددی ..... است.

۱) استدلال استقرایی ـ گویا
۲) برهان خلف ـ گنگ
۳) مثال نقض ـ گنگ
۴) استدلال استنتاجی ـ گویا

۹۴- فرض کنید d_1، d_2 و d_3 سه خط متمایز در یک صفحه باشند، به‌طوری که $d_2 \parallel d_3$ و $d_1 \parallel d_3$. اگر بخواهیم با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنیم $d_2 \parallel d_3$، ابتدا چه فرضی می‌کنیم؟

۱) d_1 موازی d_2 نباشد.
۲) d_1 موازی d_3 نباشد.
۳) d_2 و d_3 هم‌دیگر را فقط در ۱ نقطه قطع می‌کنند.
۴) d_2 موازی d_3 باشد.

۹۵- در اثبات حکم «اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است» به روش برهان خلف، ابتدا فرض می‌کنیم که:

۱) n^2 عددی زوج باشد.
۲) n عددی زوج است.
۳) n عددی فرد باشد.
۴) n عددی طبیعی نباشد.

۹۶- اگر برای اثبات یک قضیهٔ شرطی از نادرست بودن حکم به نادرست بودن فرض برسیم، در این صورت:

۱) از مثال نقض استفاده کرده‌ایم.
۲) عکس قضیهٔ شرطی را اثبات کرده‌ایم.
۳) از برهان خلف استفاده کرده‌ایم.
۴) استدلال ما کاملاً نادرست است.

۹۷- کدام گزینه نادرست است؟

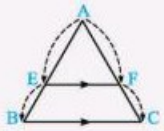
۱) در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.
۲) برای اثبات یک حکم ریاضی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم.
۳) استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.
۴) با استدلال استقرایی می‌توان نتیجه‌ای را که با استدلال استنتاجی به دست آورده‌ایم، اثبات کنیم.

@khanehbook

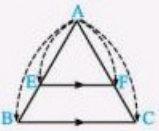
در سامانه ۶

قضیهٔ تالس

اگر در مثلث ABC، پاره‌خط EF موازی ضلع BC باشد. داریم:



$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$: جزء به جزء



$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$: جزء به کل

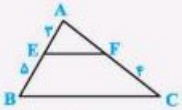
سؤال دانش‌پژوه (دارام امینی)؛ آقا اجازه تو مسائل از کجا بدونیم باید از قضیه تالس بریم. منظورم اینه که نشونه‌ای چیزی داره؟

پاسخ: البته که داره! ببین در مسائلی که قطوط موازی داره یا با توجه به داده‌ها می‌فهمیم که دو خط موازی هستند، به احتمال زیاد می‌توان از قضیهٔ تالس استفاده کرد.

سؤال دانش‌پژوه (توش آزار)؛ آقا اجازه از کجا بدونیم کی باید از فرمول جزء به جزء استفاده کنیم، کی از فرمول جزء به کل؟

پاسخ: سؤال خوبی پرسیدی. ببین عزیزم بستگی به مساله‌ای داره که به ما می‌دن. اگه تو مساله طول پاره‌خط‌های EF و BC (دو ضلع موازی) داده شده بود یا خواسته شده بود فرمول جزء به کل قیافی مقیده!

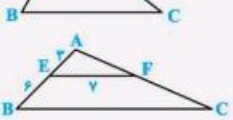
مثال در شکل زیر اگر EF موازی BC باشد، مقدار AF را بیابید.



پاسخ: خب سؤال به دو ضلع موازی کاری ندارد، پس از تالس جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{AF}{4}\Rightarrow 3\times 4=5AF\Rightarrow AF=\frac{12}{5}$$

مثال در شکل زیر اگر EF موازی BC باشد، مقدار BC را پیدا کنید.

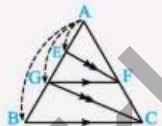


پاسخ: چون ضلع BC را می‌خواهند از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{3}{3+6}=\frac{7}{BC}\Rightarrow 3BC=9\times 7\Rightarrow BC=\frac{9\times 7}{3}=21$$

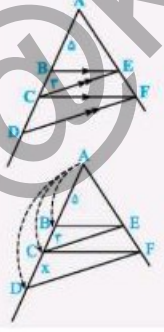
سؤال دانش‌پژوه (کیانوش مهران)؛ آقا یه مسائلی هست که توش ۴تا خط دو به دو موازی وجود داره. اونارو چیکار کنیم؟ خیلی سخته، من همیشه گیر می‌کنم.

پاسخ: همش تو پیجی‌ها! عاشق راه‌حل‌های میانبری تووو ... چرا داره! (صدای بیغ و کف بچه‌های کلاس!) یه فرمول اقتراع کردیم واسه همهٔ اهالی فرمولستان! روی ضلعی که ۳ تیکه شده، سه تا خلش مثل شکل مقابل رسم کن و بعد طول خلش رو حساب کن و بذار تو فرمول زیر، ظلاص!



$$\frac{\text{فلش بزرگ}}{AB}\times\frac{\text{فلش کوچک}}{AE}=\frac{(\text{فلش متوسط})^2}{AG}$$

مثال در شکل روبه‌رو $CF\parallel BE$ و $DF\parallel CE$ است. اگر $AB=5$ و $BC=3$، آن‌گاه اندازهٔ CD کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۴/۸

۳) ۵/۴

۴) ۵/۶

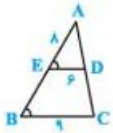
پاسخ: گزینهٔ (۲). ابتدا طول CD را x فرض کرده و روی ضلعی که ۳ تکه داره، سه تا فلش رسم می‌کنیم و از فرمول بیان شده می‌رویم:

$$\frac{AC}{\text{فلش متوسط}}{}^2=\frac{AB}{\text{فلش کوچک}}\times\frac{AD}{\text{فلش بزرگ}}\Rightarrow(5+3)^2=5\times(5+3+x)$$

$$\Rightarrow 64=5(8+x)\Rightarrow 64=40+5x\Rightarrow 5x=24\Rightarrow x=\frac{24}{5}\overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}}\frac{48}{10}=4/8$$

@khanen_book

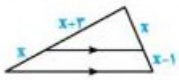
۹۸- در شکل روبه‌رو $\hat{B}=\hat{E}$، $AE=۸$، $ED=۶$ و $BC=۹$. طول BE کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴/۲
۳) ۴/۴
۴) ۴/۶

ریاضی خارج ۸۲

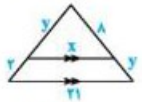
۹۹- در شکل مقابل، x کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

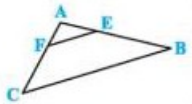
برگرفته از کتاب درسی

۱۰۰- در شکل مقابل، مقدار x چه‌قدر است؟



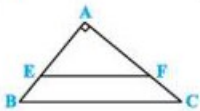
۱) ۴
۲) ۱۴
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۱۰۱- در شکل زیر $EF \parallel BC$، $AE=۳$، $BE=۶$، $BC=۱۵$ و محیط مثلث ABC برابر ۳۶ می‌باشد. اندازهٔ FC کدام است؟



۱) ۹
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۱۰

۱۰۲- در شکل زیر $EF \parallel BC$ است. اگر $AF=۵$، $EB=۲$ و مساحت مثلث AEF برابر با ۱۰ باشد، اندازهٔ BC چه‌قدر است؟



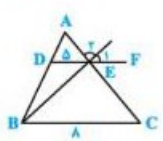
۱) $\sqrt{۴۱}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۴۱}}{۳}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۴۱}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۴۱}}{۳}$

۱۰۳- در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

تجربی داخل ۹۲

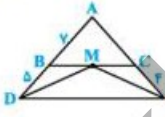
۱) ۱۱/۴
۲) ۱۱/۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱۲/۸

۱۰۴- در شکل مقابل $DF \parallel BC$ است و $DE=۵$ و $BC=۸$ است. اگر $\hat{E}_۱=\hat{E}_۲$ باشد، AE کدام است؟



۱) ۱۳
۲) $\frac{۴۰}{۳}$
۳) $\frac{۲۷}{۲}$
۴) $\frac{۵۱}{۴}$

۱۰۵- در شکل $BC \parallel DE$ و نیمساز زوایای E و D همدیگر را روی ضلع BC در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. در این صورت طول DE کدام است؟



۱) $\frac{۱۰۸}{۷}$
۲) $\frac{۱۰۷}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۱۳}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

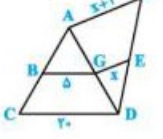
۱۰۶- قدّ علی ۱۸۰ سانتی‌متر است. او هر شب هنگام پیاده‌روی، از کنار چراغ‌های مخصوص روشنایی خیابان که بلندی آن‌ها ۴/۵ متر است، می‌گذرد. سایهٔ علی، هنگامی که به ۳ متری چراغ روشنایی می‌رسد، چند متر است؟

۱) ۲
۲) ۱/۸
۳) ۲/۱
۴) ۲/۲

۱۰۷- در شکل زیر $\frac{CD}{BC}=\frac{۱}{۴}$ و $EF=۳$ است. اگر $CG \parallel AB$ و $GE \parallel AF$ باشند، مقدار DE کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

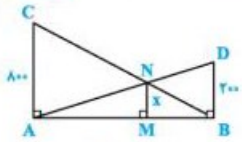
۱۰۸- در شکل مقابل $BG \parallel CD$ و $GE \parallel AF$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۳/۵
۲) ۳
۳) ۲/۵
۴) ۲

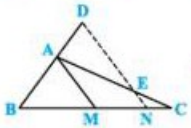
@khaneh_book

۱۰۹- در شکل مقابل با توجه به اندازه‌ها، مقدار x برابر است با:



۱) ۱۶۰
۲) ۱۶
۳) ۱۶۰۰
۴) ۱۶۰۰۰

۱۱۰- در مثلث ABC $\left(AB=\frac{۲}{۳}AC\right)$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۲

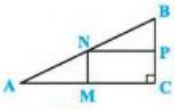


۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۱۱- بر روی زمین، تیر برقی ۱۰ متری در فاصله‌ای از تیر ۱۵ متری دیگری قرار گرفته است. سیم‌هایی که از سر هر تیر به پایین تیر دیگر وصل می‌شوند، همدیگر را در نقطه‌ای مانند F قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ F تا زمین ۶ متر و فاصلهٔ F تا پای تیر ده متری، ۱۰ متر باشد، فاصلهٔ دو تیر چه‌قدر است؟

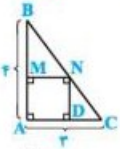
۱) ۲۲
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۱۸

۱۱۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC اگر $BC=۵$ و $AC=۱۲$ و $AM=۶$ باشد و MNPC مستطیل باشد، محیط مستطیل چه‌قدر است؟



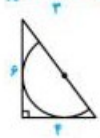
۱) ۱۷
۲) ۱۸
۳) ۱۹
۴) ۲۰

۱۱۳- مساحت مربع AMND در شکل مقابل کدام است؟



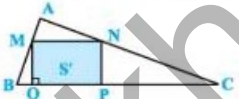
۱) $\frac{۱۴۴}{۴۹}$
۲) $\frac{۱۴۴}{۳۶}$
۳) $\frac{۴۹}{۱۴۴}$
۴) $\frac{۳۶}{۴۹}$

۱۱۴- مطابق شکل در یک مثلث قائم‌الزاویه که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۴ و ۶ می‌باشند، یک نیم‌دایره که مرکز آن روی وتر مثلث است در مثلث محاط شده است (بر اضلاع قائمهٔ مثلث مماس است) شعاع این نیم‌دایره چه‌قدر است؟



۱) ۲/۴
۲) ۲/۵
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۵- مستطیل MNPQ مطابق شکل در مثلث ABC قرار گرفته است. اگر نسبت طول AM به AB برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، نسبت مساحت مستطیل به مساحت مثلث ABC کدام است؟

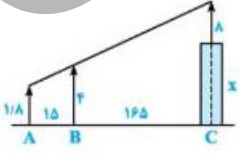


۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۱۶- در شکل روبه‌رو $AC=۲۰$ و $AB=۱۲$ و AD نیمساز زاویهٔ A و $DE \parallel AB$ است. اندازهٔ EC کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۳/۵
۴) ۱۵

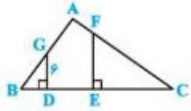
۱۱۷- در شکل زیر دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. شخص A با قد ۱/۸ متر، از پشت یک تیرک ۴ متری به نوک دکل نگاه می‌کند. بلندی برج چند متر است؟ ریاضی داخل ۸۷



۱) ۱۹/۸
۲) ۲۰/۲
۳) ۲۰/۸
۴) ۲۱/۲

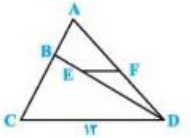
@khanen_book

۱۱۸- در شکل مقابل G وسط ضلع AB و $\frac{CF}{AF} = ۴$ است. مقدار FE کدام است؟



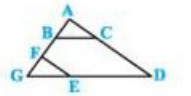
۱) ۶/۹
۲) ۹/۶
۳) ۷/۸
۴) ۸/۷

۱۱۹- در شکل زیر $EF \parallel CD$ بوده و $۲AB = CB$ و $۳BE = BD$ و $CD = ۱۲$ در این صورت طول EF کدام است؟



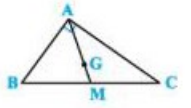
۱) $\frac{۷}{۳}$
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) ۳
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۱۲۰- در شکل زیر $BC \parallel DG$. از نقطهٔ F وسط BG خط FE را موازی AD رسم می‌کنیم. اگر $\frac{EF}{AD} = \frac{۲}{۵}$ باشد، حاصل $\frac{DG}{BC}$ کدام است؟



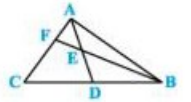
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۲۱- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به طول اضلاع قائم ۷ و ۲۴ مفروض است. اگر $\frac{GM}{AM} = \frac{۱}{۳}$ باشد، فاصلهٔ G از خط BC کدام است؟



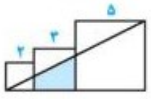
۱) ۶/۷۲
۲) ۳/۳۶
۳) ۲/۲۴
۴) ۴/۴۸

۱۲۲- در شکل زیر AD میانهٔ وارد بر ضلع BC و E وسط میانهٔ AD است. در این صورت $\frac{FB}{FE}$ کدام است؟



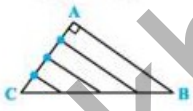
۱) ۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۳- سه مربع به ضلع‌های ۲، ۳ و ۵ مانند شکل در کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت سایه‌دار چه‌قدر است؟



۱) ۴/۵
۲) ۵/۲۵
۳) ۶/۲۵
۴) ۷/۲۵

۱۲۴- ضلع AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به وسیلهٔ ۳ نقطه به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌شود، از این نقطه‌ها، سه پاره‌خط موازی AB رسم می‌شود. در صورتی که $AB = ۱۰$ باشد، آن‌گاه مجموع طول‌های سه پاره‌خط رسم شده، کدام است؟



۱) ۱۷/۵
۲) ۱۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۰

۱۲۵- شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$ آن‌گاه اندازهٔ BE کدام است؟

تجربی خارج ۹۲

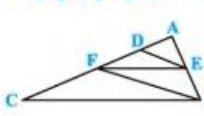
۱) $\frac{۴۰}{۳}$
۲) $\frac{۳۸}{۳}$
۳) $\frac{۳۴}{۳}$
۴) $\frac{۳۲}{۳}$

۱۲۶- در شکل مقابل، اندازهٔ x کدام است؟

تجربی خارج ۸۶

۱) ۴/۵۴
۲) ۵/۳۶
۳) ۵/۷۶
۴) ۶/۷۵

۱۲۷- در شکل زیر $DE \parallel FB$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $AD = ۳$ و $DF = ۶$ باشد، آن‌گاه BC چند برابر EF است؟



تجربی خارج ۸۹ و مشابه ریاضی خارج ۹۳

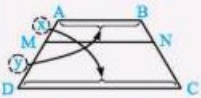
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۲/۷۵
۴) ۳

@khaneh_book

درسنامهٔ ۷

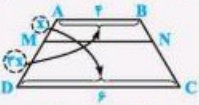
تالس در ذوزنقه

نکتهٔ ۱ اگر MN موازی قاعده‌ها باشد، طول آن از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$MN = \frac{x \times DC + y \times AB}{x + y}$$

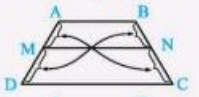
مثال در شکل مقابل اگر $AB \| MN \| DC$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{۱}{۳}$ باشد، آن‌گاه طول MN را بیابید.



پاسخ: چون $\frac{AM}{MD} = \frac{۱}{۳}$، فرض می‌کنیم $AM = x$ و $MD = ۳x$ باشد. در این صورت داریم:

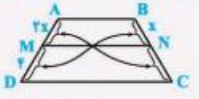
$$MN = \frac{x(۶) + ۳x(۴)}{x + ۳x} = \frac{۶x + ۱۲x}{۴x} = \frac{۱۸\cancel{x}}{۴\cancel{x}} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

نکتهٔ ۲



$$AM \times NC = MD \times BN$$

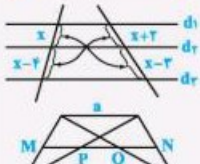
مثال در شکل مقابل اگر $AB \| MN \| CD$ و $MD = ۴$ و $AM = ۲BN$ باشد، طول NC را بیابید.



پاسخ: چون $AM = ۲BN$، فرض می‌کنیم $BN = x$ و $AM = ۲x$ داریم:

$$(۲x)(NC) = x(۴) \Rightarrow NC = \frac{۴x}{۲x} = ۲$$

مثال در شکل مقابل اگر $d_۱ \| d_۲ \| d_۳$، مقدار x را بیابید.



پاسخ:

$$x(x-۳) = (x+۲)(x-۴) \Rightarrow x^۲ - ۳x = x^۲ - ۲x - ۸ \Rightarrow x = ۸$$

نکتهٔ اگر P و Q وسط قطرهای ذوزنقه را به هم وصل کنیم و ادامه دهیم تا ساق‌های ذوزنقه را در M و N قطع کنند، در این صورت MN با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی بوده و داریم:

$$PQ = \frac{b-a}{۲} \quad , \quad MN = \frac{a+b}{۲}$$

مثال در شکل زیر PQ را بیابید.

پاسخ:

$$PQ = \frac{۲۰-۴}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

سؤال *دانش‌پژوه (سیا قشنگ)*: آقا اجازه؟ فرمول $PQ = \frac{b-a}{۲}$ رو میشه اثبات کنید؟

پاسخ: چه عجب یکی هم اثبات یه نکته‌ای رو از ما سؤال کرد! باشه نگاه کن:

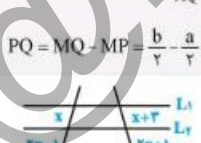
$$\overset{\Delta}{ABE}: \frac{MP}{AB} = \frac{EP}{EB} \xrightarrow[EP=\frac{۱}{۲}EB]{\text{P وسط قطر است}} \frac{MP}{a} = \frac{\frac{۱}{۲}\cancel{EB}}{\cancel{EB}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MP = \frac{a}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AEF}: \frac{MQ}{EF} = \frac{AQ}{AF} \xrightarrow[AQ=\frac{۱}{۲}AF]{\text{Q وسط قطر است}} \frac{MQ}{b} = \frac{\frac{۱}{۲}\cancel{AF}}{\cancel{AF}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MQ = \frac{b}{۲}$$

بنابراین:

$$PQ = MQ - MP = \frac{b}{۲} - \frac{a}{۲} \Rightarrow PQ = \frac{b-a}{۲}$$

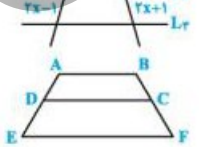
۱۲۸- در شکل مقابل اگر ۳ خط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ با هم موازی باشند، آن‌گاه مقدار x کدام است؟



۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۶

۳) ۰/۷ ۴) ۰/۸

۱۲۹- در شکل $AB \| DC \| EF$ و $DE = ۴$ و $\frac{AD}{BC} = \frac{۲}{۳}$. در این صورت CF کدام است؟



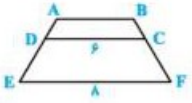
۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰

برگرفته از کتاب درسی

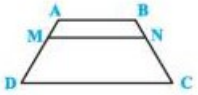
@khanen_book

۱۳۰- در شکل $AB\|\|EF\|\|CD$ و $\frac{AD}{DE}=\frac{۱}{۳}$. طول AB کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۱۰}{۳}$
۳) $\frac{۱۶}{۳}$
۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۱۳۱- در ذوزنقهٔ ABCD، اگر $AB=۳$ و $DC=۶$ و $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۳}$ باشد، آن‌گاه:



۱) $MN=\frac{۱۳}{۴}$
۲) $MN=\frac{۹}{۲}$
۳) $MN=۴$
۴) $MN=۵$

۱۳۲- طول خطی که دو نقطهٔ وسط قطرهای یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر ۳ است. اگر طول قاعدهٔ بزرگ‌تر ۹۷ باشد، طول قاعدهٔ کوچک‌تر برابر است با:

۱) ۹۴
۲) ۹۱
۳) ۹۰
۴) ۸۹

درسنامهٔ ۸

نسبت مساحت دو شکل

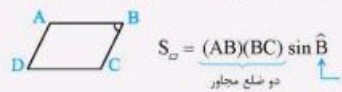
روش ویژه: در مسائلی که یک نسبت داده می‌شود و از ما می‌خواهند بگوییم مساحت یک شکل چند درصد شکل دیگر است، ابتدا نسبت داده‌شده را روی شکل می‌نویسیم. مثلاً اگر در شکل زیر بگویند $\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۲}$ است، فرض می‌کنیم $AM=۳x$ و $MB=۲x$ بوده و آن‌ها را روی شکل می‌نویسیم. سپس با توجه به قضیهٔ تالس، نسبت‌ها روی اضلاع دیگر را با حروف انگلیسی متمایز مطابق شکل یادداشت می‌کنیم:

سؤال دانش‌پژوه (نفیسه سالم): آقا اجازه؟ چرا ۲x و ۳x را با هم جمع کردین؟

پاسخ: ببین چون بحث قاعده در میان هست، از تالس بهره به کل استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۳x}{۲x+۲x}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۳x}{۵x}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow MN=۳z, BC=۵z$$

نکته در این‌گونه مسائل حتماً دو فرمول مساحت زیر را به یاد داشته باشید:

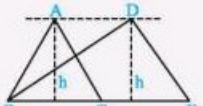


دید ویژه

۱) یکی از کاربردهای نکتهٔ فوق در محاسبهٔ نسبت مساحت دو مثلث با مثلث و متوازی‌الاضلاع است که یک زاویهٔ مشترک دارند.

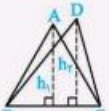
۲) یکی از حالت‌های مهم و پرکاربرد در مقایسهٔ مساحت‌های دو مثلث، مثلث‌هایی هستند که ارتفاع یا قاعدهٔ برابر دارند. در این مثلث‌ها نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها یا نسبت ارتفاعات است. به شکل‌های زیر توجه کنید:

الف) قاعدهٔ برابر:



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDE}}=\frac{BC}{BE}$$

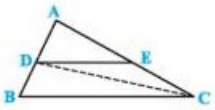
ب) ارتفاع برابر:



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{h_۱}{h_۲}$$

@khanehketab

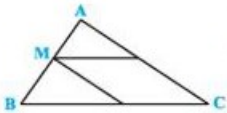
۱۳۳- در شکل زیر اگر $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$ و $DE \parallel BC$، آن‌گاه مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟



تجربی داخل ۸۹

۱) ۷۰
۲) ۷۵
۳) ۷۸
۴) ۸۴

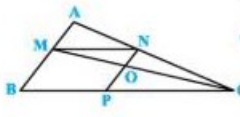
۱۳۴- در شکل مقابل، $AM=\frac{۲}{۳}MB$ و چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



تجربی خارج ۸۹ و مشابه ریاضی داخل ۹۵

۱) ۴۸
۲) ۵۰
۳) ۵۴
۴) ۶۰

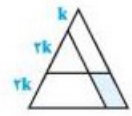
۱۳۵- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۷}$ و چهارضلعی MNPB متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



تجربی داخل ۹۰

۱) ۶۳
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۴

۱۳۶- در شکل روبه‌رو، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۲،۲،۱ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع رنگی، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



تجربی خارج ۹۲

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۴

درسنامهٔ ۹

عکس قضیهٔ تالس

اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$، آن‌گاه پاره‌خط MN موازی ضلع BC است.

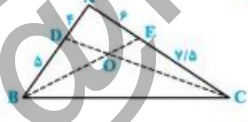
دید ویژه معمولاً وقتی سراغ عکس قضیهٔ تالس می‌رویم که طول پاره‌خط‌های روی اضلاع مثلث داده شده باشد!

نکته اگر دو قطر ذوزنقه را رسم کنیم، چهار مثلث ایجاد می‌شود که بین آن‌ها روابط زیر برقرار است:

۱) $S_۲=S_۴$

۲) $S_۲\times S_۴=S_۱\times S_۳$

۱۳۷- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



تجربی خارج ۸۷

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) ۱

۱۳۸- اثبات کدام قضیهٔ زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) فرض کنید AD نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC باشد. اگر $BD\neq CD$ باشد، آن‌گاه $AB\neq AC$.

۲) در مثلث ABC مقابل اگر $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

۳) از یک نقطهٔ خارج یک خط نمی‌توان بیش‌تر از یک خط بر آن عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

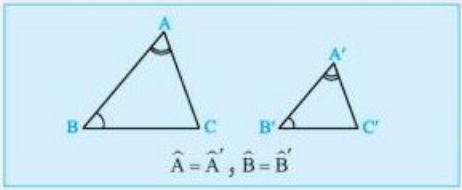
@khanen_book

درس‌نامه ۱۰

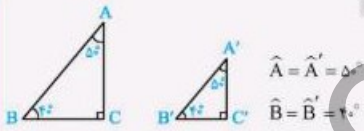
دو مثلث متشابه

حالت‌های تشابه دو مثلث عبارت است از:

حالت (۱): دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد.

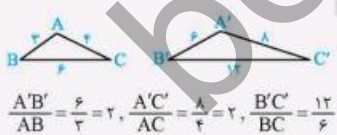


مثال

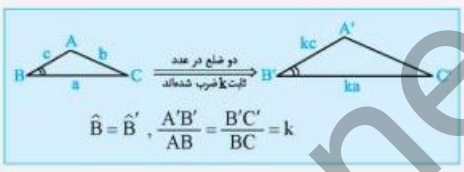


حالت (۲): سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد.

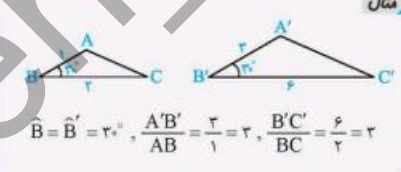
مثال



حالت (۳): دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویهٔ بین آن‌ها مساوی باشد.

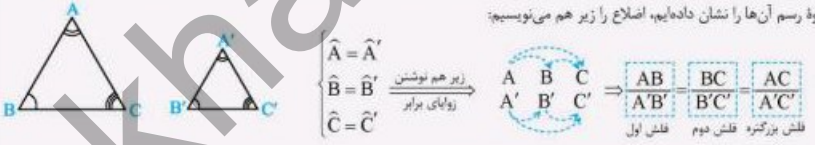


مثال



تذکر برای نوشتن نسبت تشابه (k) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا زاویه‌های یکی از دو مثلث را نوشته و زیر هر کدام از زاویه‌های نوشته‌شده، زاویهٔ مساوی‌اش از مثلث دیگر را می‌نویسیم و سپس با توجه به فلش‌هایی که در زیر نحوهٔ رسم آن‌ها را نشان داده‌ایم، اضلاع را زیر هم می‌نویسیم:

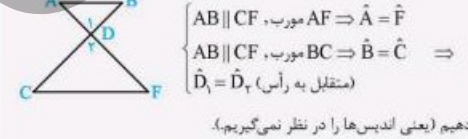


سؤال *دانش‌پژوه (نپوشا یا کرل)*: **آقا فلش‌ها چطوری تبدیل به ضلع شدن؟**

پاسخ: *ببین قانوم، ابتدا و انتهای هر فلش دوتا حرفه دیگه، یادتشون کنار هم، دیگه به هیچی کار نداشته باش فورش میشه یه ضلع مثلث.*

مثال **در دو مثلث متشابه زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. (AB || CF)**

پاسخ: ابتدا زاویه‌های مساوی را در مثلث‌ها یافته و سپس آن‌ها را زیر هم می‌نویسیم و فلش‌ها را رسم می‌کنیم و به کمک آن‌ها نسبت‌های متناسب را می‌نویسیم:



تذکر دقت کنید $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ را در این روش با همون D نمایش می‌دهیم (یعنی اندیس‌ها را در نظر نمی‌گیریم.).

@khanen_book

۱۳۹- دو زاویهٔ مثلثی ۴۵ و ۶۰ درجه هستند، دو زاویهٔ یک مثلث دیگر 75° و 60° هستند. کدام صحیح است؟

۱) دو مثلث متشابه نیستند. ۲) دو مثلث متشابهند. ۳) شاید متشابه باشند. ۴) بعید است متشابه باشند.

۱۴۰- مثلثی که طول اضلاع آن ۳، ۴ و ۶ است، با کدام مثلث به اضلاع داده‌شده متشابه است؟

۱) $۲, \frac{۳}{۲}, ۱$ ۲) $۱۱, ۸, ۶$ ۳) $۱۸, ۱۲, ۹$ ۴) $۴, ۳, ۲$

۱۴۱- مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع‌های $x-۱$ و ۱۰ و $x+۷$ متشابه است (اندازهٔ ضلع‌ها از کوچک به بزرگ نوشته شده‌اند.) محیط مثلث DEF کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۲۶

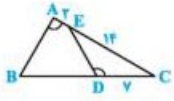
۱۴۲- مثلثی با اضلاع ۳، ۵ و ۷ با مثلثی به اضلاع ۵، x و y متشابه است. اگر $x > ۵$ و $y > ۵$ باشند، $x+y$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۸}{۳}$ ۲) ۲۰ ۳) $\frac{۶۱}{۳}$ ۴) ۲۱

۱۴۳- محیط مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ چند برابر محیط مثلثی متشابه با مثلث اول و به اضلاع ۳، ۶ و x است؟

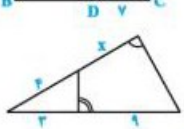
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

۱۴۴- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$، طول BD چند واحد است؟



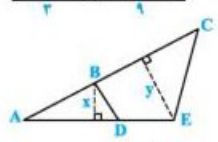
۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۴۵- در شکل مقابل، دو زاویهٔ مقابل چهارضلعی مکمل‌اند. اندازهٔ x کدام است؟ تجربی خارج ۸۵



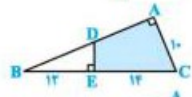
۱) ۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

۱۴۶- در شکل مقابل $AD = ۸ , DE = ۴ , AB = ۶$ و $BC = ۱۰$ است. نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۵



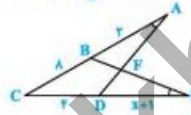
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۴۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۳۰ ۲) ۱۳۰ ۳) ۹۰ ۴) ۷۰

۱۴۸- در شکل مقابل اگر $\hat{A} = \hat{E}$ باشد، مقدار $\frac{DE}{CE}$ کدام است؟

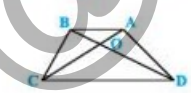


۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۷

۱۴۹- در شکل روبه‌رو AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $OH = AD = ۵OD = \frac{۱}{۳}$ باشد، طول HC کدام است؟

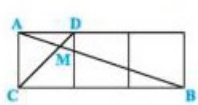
۱) ۱۶۵ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۸۰

۱۵۰- اگر ABCD ذوزنقه و $BD = ۱۴$ و $\frac{AB}{CD} = \frac{۲}{۵}$ باشد، طول OD کدام است؟



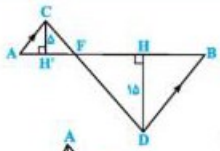
۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۵۱- در شکل روبه‌رو، سه مربع به اضلاع واحد، کنار هم قرار دارند. فاصلهٔ AM چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



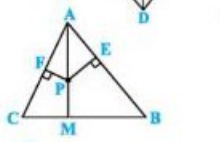
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$ ریاضی داخل ۸۳

@khaneh_book



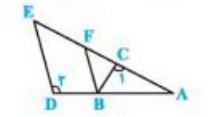
۱۵۲- در شکل زیر اگر $AC \parallel BD$ و $AB = ۴۰$ باشد، مساحت مثلث ACF کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵



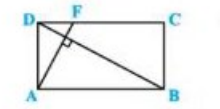
۱۵۳- در شکل فاصلهٔ نقطهٔ P از ضلع AB دو برابر فاصلهٔ آن از ضلع AC است $(PE = ۲PF)$، در این صورت نسبت فاصله‌های نقطهٔ M از اضلاع AB و AC کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۸



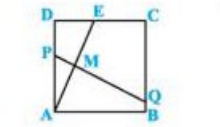
۱۵۴- در شکل $\hat{C}_۱ = \hat{D}_۲$ و $BF \parallel DE$ و $AC = BD = ۲$ و $AB = ۳$ است. $\frac{BC}{BF}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) ۱



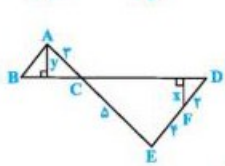
۱۵۵- در شکل زیر چهارضلعی ABCD یک مستطیل است و F نقطه‌ای روی ضلع DC به طوری که $AF \perp BD$، اگر $AB = ۳DA$، DC چند برابر DF است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۴
۴) ۷



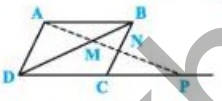
۱۵۶- در مربع ABCD در شکل روبه‌رو $DE = ۵cm$ و ضلع مربع $۱۲cm$ است. اگر M وسط AE باشد، $\frac{PM}{MQ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$
۲) $\frac{۵}{۱۳}$
۳) $\frac{۵}{۱۹}$
۴) $\frac{۵}{۲۱}$



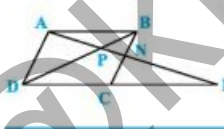
۱۵۷- در شکل مقابل اگر $AB \parallel ED$ باشد، مقدار $\frac{y}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۸}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۸}$



۱۵۸- در شکل روبه‌رو، ABCD متوازی‌الاضلاع است. حاصل $MP \times MN$ برابر کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $AB^۲$
۲) $AD^۲$
۳) $MD^۲$
۴) $MA^۲$



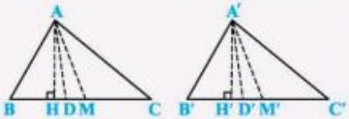
۱۵۹- در متوازی‌الاضلاع ABCD از نقطهٔ دلخواه M روی امتداد قاعدهٔ DC به رأس $\hat{A}$ وصل می‌کنیم. اگر $MP = ۳۲$ و $MN = ۲۴$ باشد، AP کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

درسنامهٔ ۱۱

نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازهای دو مثلث متشابه

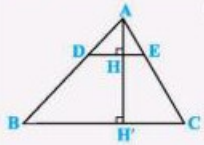
اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دو مثلث متشابه باشند، آن‌گاه نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازهای متناظر دو مثلث برابر است با:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ (اضلاع مثلث)} = \frac{AH}{A'H'} \text{ (ارتفاع‌ها)} = \frac{AD}{A'D'} \text{ (نیمسازها)} = \frac{AM}{A'M'} \text{ (میانه‌ها)} = k$$

@khaneh_book

مثال در شکل زیر اگر $\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت مثلث ADE چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



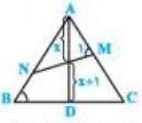
پاسخ: نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت }\overset{\Delta}{ADE}}{\text{مساحت }\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times DE}{\frac{۱}{۲}AH'\times BC}=\frac{AH\times DE}{AH'\times BC}\quad (*)$$

با توجه به درسنامه نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است، یعنی:

$$\frac{AH}{AH'}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۳}\overset{(*)}{\Longrightarrow}\frac{\text{مساحت }\overset{\Delta}{ADE}}{\text{مساحت }\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{AH}{AH'}\times\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۹}$$

۱۶۰- در شکل اگر $\widehat{M_۱}=\widehat{B}$ ، $BC=۳NM$ و AD نیمساز باشد، مقدار x کدام است؟

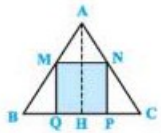


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۱- در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطهٔ M متقاطع‌اند. فاصلهٔ M از قاعدهٔ بزرگ‌تر، چه‌قدر است؟

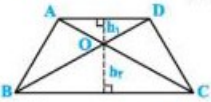
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۱۶۲- در مثلث ABC طول ارتفاع $AH=۴$ و $BC=۸$ است. مساحت مربع MNPQ برابر است با:



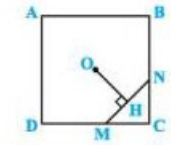
۱) ۸
۲) ۹
۳) $\frac{۲۳}{۳}$
۴) $\frac{۶۴}{۹}$

۱۶۳- دو قطر ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد را رسم می‌کنیم تا هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. در این صورت $h_۱+۲h_۲$ کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۴
۴) ۱۰

۱۶۴- در شکل روبه‌رو ABCD مربع است و $OH=MN=x$ می‌باشد. اگر ضلع مربع ۲۰cm باشد، x چند سانتی‌متر است؟



۱) $\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $۵\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۵}$
۴) $\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۳}$

درسنامه ۱۲

محیط و مساحت دو مثلث متشابه

همان‌طور که قبلاً گفتیم اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دو مثلث متشابه و نسبت تشابه آن‌ها k باشد، آن‌گاه نسبت محیط‌ها و مساحت‌های این دو مثلث برابر است با:

$$\frac{\text{محیط مثلث }A'B'C'}{\text{محیط مثلث }ABC}=k\quad ,\quad \frac{\text{مساحت مثلث }A'B'C'}{\text{مساحت مثلث }ABC}=k^۲$$

در واقع نسبت محیط‌ها همان نسبت تشابه، یعنی k است ولی نسبت مساحت‌ها، مربع نسبت تشابه، یعنی $k^۲$ است.

۱۶۵- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{۴}{۹}$ است، نسبت ارتفاع‌های آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۶۶- دو مثلث متشابه‌اند و نسبت محیط اولی به دومی مثل ۲ به ۳ است. اگر اضلاع اولی ۶ و ۹ و ۱۲ باشند، اندازهٔ اضلاع مثلث دوم برابر کدام است؟

۱) ۴ و ۶ و ۸
۲) ۹ و ۱۳/۵ و ۱۸
۳) ۳ و ۶ و ۹
۴) ۱۲ و ۱۳/۵ و ۱۵

@khanenet_book

۱۶۷- نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر با این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟

۱) $۲۱\sqrt{۲}$ ۲) $۲۱\sqrt{۳}$ ۳) $۲۴\sqrt{۳}$ ۴) $۲۴\sqrt{۳}$

۱۶۸- اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۶۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸۲}{۹}$ ۳) $\frac{۶۵}{۹}$ ۴) $\frac{۵۶}{۹}$

۱۶۹- طول اضلاع مثلثی ۱۲، ۱۷ و ۲۱ سانتی‌متر است. این مثلث با مثلث دیگری به محیط ۲۰ سانتی‌متر متشابه است. طول کوچک‌ترین ضلع مثلث دوم چند سانتی‌متر است؟

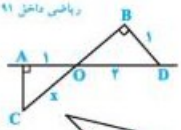
۱) ۲/۴ ۲) ۳/۴ ۳) ۴/۸ ۴) ۴/۲

۱۷۰- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳

ریاضی داخل ۹۱

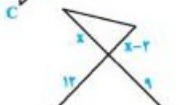
۱۷۱- در شکل مقابل دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند. مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

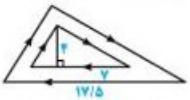
تجربی داخل ۸۳

۱۷۲- در شکل روبه‌رو دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت این دو مثلث کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۷۳- در شکل زیر مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟



۱) ۸۸/۵ ۲) ۸۷/۵ ۳) ۷۸/۵ ۴) ۷۷/۵

۱۷۴- درون مثلثی به اضلاع ۹، ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگری طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشند. اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۷۵- مثلثی به اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ با مثلثی دیگر به محیط ۶۰ متشابه است. مساحت مثلث دوم چه‌قدر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۳۰

۱۷۶- مثلثی به طول اضلاع a، b و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵، ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) ۷/۲ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲/۵

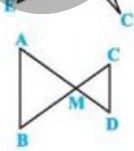
۱۷۷- مثلثی به اضلاع ۴/۵ و a، با مثلثی به طول اضلاع ۷/۹ و b متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a، کدام است؟ تجربی خارج ۹۰

۱) $\frac{۳۶}{۷}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷}$ ۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۱۷۸- در شکل $\hat{B} = \hat{D}$، $AB = ۲$، $AC = ۴$، $BC = ۳$ و $AE = ۸$ است. محیط مثلث ADE کدام است؟

۱) ۹ ۲) $\frac{۲۷}{۲}$ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

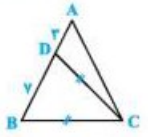
۱۷۹- در شکل زیر $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵}$. نسبت مساحت‌های دو مثلث در این شکل کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۲۵}$

@khanen_book

۱۸۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، پاره‌خط CD را هم‌اندازهٔ BC رسم کرده‌ایم. اگر AD = ۳ و BD = ۷ باشد، طول BC کدام است؟

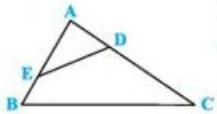


۱) $\sqrt{۷۰}$
۲) $\sqrt{۶۰}$
۳) $\sqrt{۵۰}$
۴) $\sqrt{۸۰}$

۱۸۱- در مثلث ABC داریم $\hat{A} = ۷۰^\circ$، $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و ضلع AB = ۱۸ و در مثلث MNP داریم $\hat{N} = ۶۰^\circ$ و $\hat{M} = ۷۰^\circ$. اگر مساحت مثلث ABC، برابر $\frac{۹}{۴}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چه‌قدر است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۲۴
۴) ۲۷

۱۸۲- در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های زیر مکمل هم‌اند. اگر BC = ۲۰ و DE = ۱۲ باشد، آن‌گاه مساحت چهارضلعی BCDE چند برابر مساحت مثلث ABC است؟ تجربی خارج ۸۷

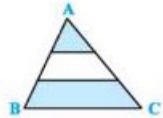


۱) ۰/۵۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۲
۴) ۰/۸۰

۱۸۳- طول یک ضلع مثلثی ۱۸cm است. در داخل این مثلث پاره‌خطی موازی با این ضلع رسم می‌کنیم. ذوزنقه‌ای به دست می‌آید که مساحتش یک سوم مساحت مثلث است. طول این پاره‌خط برحسب سانتی‌متر کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۶}$
۲) $۹\sqrt{۳}$
۳) ۱۲
۴) ۹

۱۸۴- در شکل زیر اضلاع AB و AC به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. مساحت سایه‌زده شده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۸۵- در شکل زیر AB || MN و AC || NP است. نسبت مساحت دو ناحیهٔ سایه زده شده کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

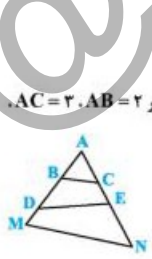
۱۸۶- در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۸۷- مثلث متساوی‌الساقینی که در آن $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و مساحت آن برابر $S = \sqrt{۳}$ است، با مثلث متساوی‌الساقینی که در آن $\hat{M} = ۳۰^\circ$ و قاعدهٔ آن $MN = ۶\sqrt{۳}$، متشابه است. نسبت مساحت دو مثلث چه‌قدر است؟

۱) ۹
۲) ۳
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۸۱

۱۸۸- در شکل مثلث ABC، ADE و AMN متشابه‌اند. اضلاع BC و MN موازی و DE موازی آن‌ها نیست. اگر AB = ۳، AC = ۲ و $CE = \frac{۱}{۲}DM$ باشند، مساحت مثلث AMN چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

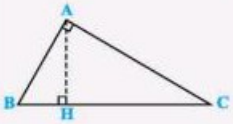


۱) $\frac{۶۴}{۲۵}$
۲) $\frac{۱۴۴}{۲۵}$
۳) $\frac{۴۹}{۲۵}$
۴) ۴

@khanen_book

درسنامهٔ ۱۳

فرمول‌های بسیار مهم و کاربردی در مثلث قائم‌الزاویه



الف) طول اضلاع قائمه را می‌توان از فرمول‌های زیر به‌دست آورد:

$$AB^2 = BH \times BC \quad \text{و} \quad AC^2 = CH \times BC$$

(وتر: BC؛ تصویر ضلع AB روی وتر: BH؛ وتر: BC؛ تصویر ضلع AC روی وتر: CH)

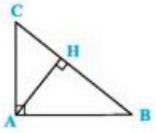
ب) ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قسمت HC و BH تقسیم می‌کند و فرمول زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$AH^2 = BH \times HC$$

ج) برای محاسبهٔ ارتفاع وارد بر وتر، می‌توان مساحت مثلث را از دو روش زیر محاسبه نمود و با برابر هم قرار دادن آن‌ها به رابطهٔ زیر رسید:

$$\begin{cases} S = \frac{AH \times BC}{2} \\ S = \frac{AB \times AC}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow AH \times BC = AB \times AC$$

۱۸۹- در مثلث ABC، $\widehat{A} = 90^\circ$ و AH ارتفاع است. کدام گزینه غلط است؟



۱) $AC^2 = BC \times CH$

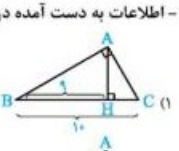
۲) $BC \times AH = AB \times AC$

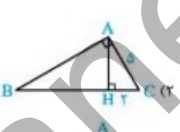
۳) $AH^2 = CH \times BH$

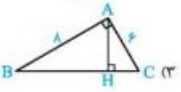
۴) $BH^2 = BC \times AB$

برگرفته از کتاب درسی

۱۹۰- اطلاعات به دست آمده در کدام گزینه نادرست است؟

۱) $AH = 3$ 

۲) $AB = \frac{5\sqrt{21}}{2}$ 

۳) $AH = 3/8$ 

۴) $HC = \frac{25}{12}$

۱۹۱- ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، وتر را به دو قسمت ۳ و ۱۲ سانتی‌متری تقسیم کرده است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۲۶ ۲) ۴۵ ۳) ۴۲ ۴) ۴۰

۱۹۲- طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن ۵ و ۱۲ سانتی‌متر هستند، چند سانتی‌متر است؟

۱) $\frac{30}{7}$ ۲) $\frac{30}{11}$ ۳) $\frac{60}{13}$ ۴) $\frac{60}{11}$

۱۹۳- در یک مستطیل با طول و عرض $2\sqrt{6}$ و $2\sqrt{3}$، فاصلهٔ هر رأس از قطر مستطیل کدام است؟

تجربی داخل ۸۴

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۹۴- در مستطیل شکل مقابل، $\widehat{P} = 90^\circ$ و $3AP = BP = 9$ است. طول DP کدام است؟

تجربی داخل ۸۰

۱) ۵ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۶

۱۹۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ قائمهٔ A اندازهٔ دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر جدا می‌کند، به ترتیب ۶/۴ و ۳/۶ است. در این صورت مجموع دو ضلع مجاور زاویهٔ قائمهٔ A کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

@khaneh_book

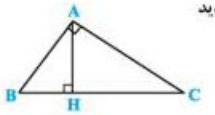
۱۹۶- در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چه‌قدر است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) ۵ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۹۷- در مثلث ABC، $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع $AH=۶$ و اندازهٔ $CH=۱۲$ است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۹۸- در شکل روبه‌رو به فرض آن‌که طول ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ و نسبت دو پاره‌خطی که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد $\frac{۹}{۱۶}$ باشد، طول وتر کدام است؟



۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

۱۹۹- در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، اندازهٔ بزرگ‌ترین میانه کدام است؟ تجربی داخل ۸۶

۱) $\sqrt{۵۰}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$ ۳) $\sqrt{۷۰}$ ۴) $\sqrt{۷۵}$

۲۰۰- در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟ تجربی خارج ۹۰

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

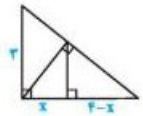
۲۰۱- ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم کرده‌ایم. مساحت یکی از دو مثلث حاصل دو برابر مساحت مثلث دیگر است. اگر طول این ارتفاع برابر ۴ باشد، مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

۱) $۹\sqrt{۳}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) $۱۱\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۲۰۲- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه‌های قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟ ریاضی خارج ۹۱

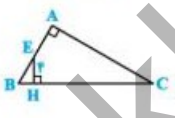
۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲

۲۰۳- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟



۱) ۱/۴۴ ۲) ۱/۵۶ ۳) ۱/۶۴ ۴) ۱/۹۶

۲۰۴- در شکل زیر $\frac{AE}{BE}=۲$، $BC=۳۰$ و $EH=۴$ باشد، آن‌گاه $AB+AC$ کدام است؟



۱) $۲۰\sqrt{۵}$ ۲) $۱۸\sqrt{۵}$ ۳) $۱۶\sqrt{۵}$ ۴) $۱۲\sqrt{۵}$

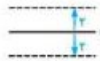
یادداشت

@khanenbook

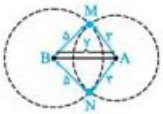
پاسخ‌های تشریحی

۱ ۴ تمام نقاطی از صفحه که از نقطهٔ O، به فاصلهٔ ۳ هستند، محیط دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۳ است که مساحت ناحیهٔ داخل آن برابر $\pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$ است.

۲ ۲ نقاطی که فاصله‌شان از خط d برابر ۲ باشد، دو خط موازی در طرفین خط d و به فاصلهٔ ۲ از آن است:

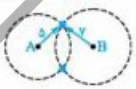


۳ ۳ نقاطی که از A، ۳ سانتی‌متر فاصله دارند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ و نقاطی که از B، ۵ سانتی‌متر فاصله دارند، روی محیط دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۵ هستند. جواب مسأله، نقاط برخورد این دو دایره است. چون فاصلهٔ A و B از هم ۷ سانتی‌متر است و $7 < 5 + 3$، پس دو دایره متقاطع بوده و همدیگر را در ۲ نقطهٔ M و N قطع می‌کنند. لذا مسأله ۲ جواب دارد.



۴ ۲ تمام نقاطی که فاصله‌شان از A برابر ۷ است، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ و تمام نقاطی که فاصله‌شان از B برابر ۸ است روی محیط دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۸ است. چون $15 = 8 + 7$، پس نتیجه می‌گیریم که این دو دایره در ۱ نقطه بر هم مماس شده‌اند. لذا تنها یک نقطه وجود دارد. مثل شکل مقابل:

۵ ۴ دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ سانتی‌متر و دایرهٔ دیگری به مرکز B و به شعاع ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دو دایره با توجه به اندازهٔ L یکی از ۳ حالت زیر است:

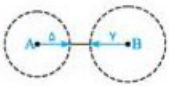


$L < 5 + 7 \Rightarrow L < 12$

۲ نقطه

$L = 5 + 7 = 12$

۱ نقطه

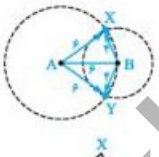


$L > 5 + 7 \Rightarrow L > 12$

صفر نقطه

حال طبق فرض حداکثر ۱ نقطه (۱ یا ۰ نقطه) می‌خواهیم که با توجه به شکل، حالت $L > 12$ یا $L = 12$ یعنی $L \geq 12$ جواب است.

۶ ۴ مثلث‌های AXB و AYB متساوی‌الساقین و با هم، هم‌نهشت هستند که طول ساق‌های آن‌ها ۶ است.



پس کافی است مساحت یکی از آن‌ها را یافته و جواب را در ۲ ضرب کنیم:

$$6^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 36 - 4 = h^2 \Rightarrow h^2 = 32 = 2 \times 16 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$$

$$S_{AXB} = \frac{h \times BX}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 4}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{AXBY} = 2 \times 8\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

۷ ۳ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ قرار دارند. دایرهٔ مذکور خط d را در ۲ نقطهٔ B و C قطع می‌کند. زیرا فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط d کم‌تر از شعاع دایره است ($r = 3 > 2$). به عبارت دیگر خط d از درون دایره رد می‌شود.

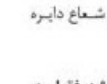
سؤال دانش‌پژوه (مهتا مهتابی): **آقا اجازه یعنی اگه می‌گفت فاصله تا A، ۲ سانتی‌متر باشد فقط یه نقطه می‌شد و اگه می‌گفت فاصله تا A، مثلاً ۱ سانتی‌متر باشد جواب می‌شد صفر نقطه.**

پاسخ: آره آفرین!

سؤال دانش‌پژوه (ناصر اتمی): **آقا میشه یه کم توضیح بدین؟**

پاسخ: آره! به شکل‌ها نگاه کن!

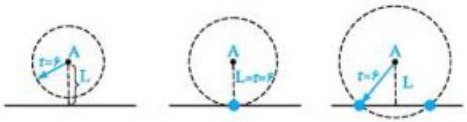
دایره ، خط را قطع نمی‌کند. (۰ جواب)



دایره بر خط مماس است و یک نقطهٔ مشترک دارد. (۱ جواب)

@khanenbook

۸ ۳ نقاطی که از A فاصله‌شان برابر ۶ است، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ قرار دارد حال با توجه به فاصلهٔ A تا خط d یعنی L، سه حالت زیر رخ می‌دهد:

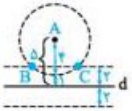


حال می‌خواهیم حداکثر ۱ نقطه (۱ نقطه یا صفر نقطه) روی خط d وجود داشته باشد که فاصله‌اش تا نقطهٔ A، ۶ باشد. پس باید $L = ۶$ یا $L > ۶$ باشد یعنی $L \geq ۶$.

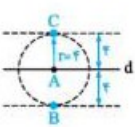
سؤال *دانش‌پژوه (اصفر بالازاده)*، **آقا مگه نگفته یک نقطه؟ پس $L = ۶$ جوابه دیگه؟**

پاسخ پسر برو ادبیاتت رو تقویت کن! گفته حداکثر یک نقطه نه یک نقطه، حداکثر یک نقطه یعنی یک یا صفر نقطه، پس اون حالت صفر چی میشه؟ پس باید جواب $L \geq ۶$ باشد.

۹ ۳ نقاطی که از A به فاصلهٔ ۴ هستند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴سانتی‌متر قرار دارند و نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲ قرار دارند روی دو خط موازی به فاصلهٔ۲ در طرفین خط d قرار دارند. تعداد نقاط برخورد دایره و دو خط موازی خط‌چین جواب مسأله است که طبق شکل ۲ نقطهٔ B و C هستند.



۱۰ ۳ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر هستند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ می‌باشند. از طرفی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر هستند دو خط موازی به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر در طرفین خط d هستند. برخورد دایره و دو خط موازی خط‌چین جواب مسأله است که طبق شکل ۲ نقطه است. پس ۲ نقطه وجود دارد که هم از A و هم از d، ۴ سانتی‌متر فاصله دارند.



۱۱ ۳ خط d و نقطهٔ A روی آن را رسم می‌کنیم. تمام نقاطی که در فاصلهٔ ۶ سانتی‌متری از خط d قرار دارند، روی دو خط موازی با خط d در بالا و پایین آن قرار دارند که به صورت خط‌چین رسم کرده‌ایم. از طرفی تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متری از نقطهٔ A قرار دارند، روی محیط دایره به مرکز نقطهٔ A و به شعاع ۱۰ سانتی‌متر است. پس نقاطی که دارای هر دو ویژگی هستند (یعنی هم از خط ۶ سانتی‌متر فاصله دارند و هم از نقطهٔ A، ۱۰ سانتی‌متر فاصله دارند) محل‌های برخورد دو خط خط‌چین و دایرهٔ رسم شده‌اند که تعداد آن‌ها ۴ تا است و چهارضلعی حاصل یک مستطیل است. حال طول و عرض مستطیل را می‌یابیم:

$$\begin{cases} BF = ۶ + ۶ = ۱۲ \\ \overset{\Delta}{AHB}: \text{قائم‌الزاویه} \Rightarrow AB^۲ = HB^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = HB^۲ + ۶^۲ \Rightarrow HB^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow HB = ۸ \\ BC = CH + HB \xrightarrow{CH=HB} ۲HB = ۲(۸) = ۱۶ \end{cases}$$

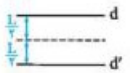
پس مساحت مورد نظر برابر است با:

$$BF \times BC = ۱۲ \times ۱۶ = ۱۹۲$$

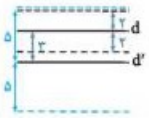
۱۲ ۴ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ هستند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ قرار دارند و نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ باشند روی دو خط موازی در طرفین خط d و به فاصلهٔ ۲/۵ از آن قرار دارند. جواب مسأله نقاط برخورد دایره با دو خط خط‌چین بیان شده است که حالات زیر را داریم:

@khanenbook

۱۳ ۳ اگر فاصلهٔ دو خط موازی d و d' از هم برابر L باشد، آن‌گاه تمام نقاطی که از این دو خط موازی به یک فاصله هستند، خطِ خط‌چین رسم شده در وسط دو خط d و d' است که فاصلهٔ تمام نقاط روی آن تا دو خط موازی d و d' یکسان و برابر $\frac{L}{2}$ است.

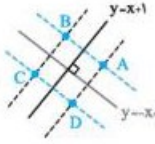


۱۴ ۱ می‌خواهیم فاصلهٔ آن نقطه‌ها از خط d برابر ۲ و از d' برابر ۵ باشد. با توجه به آن‌که دو خط ۳ سانتی‌متر از هم فاصله دارند، پس نقاط مورد نظر خارج از فضای بین دو خط قرار دارند. نقاطی که از d به فاصلهٔ ۲ قرار دارند دو خط موازی در طرفین d و به فاصلهٔ ۲ از آن قرار دارند. به‌طور مشابه نقاطی که از d' به فاصلهٔ ۵ قرار دارند دو خط موازی در طرفین d' به فاصلهٔ ۵ از آن قرار دارند. جواب مسأله محل برخورد خط‌های خط‌چین رسم‌شده است که این خط‌ها همدیگر را در بیرون دو خط و در فاصلهٔ ۳ سانتی‌متری خط d قطع می‌کنند. پس شکل مورد نظر خطی موازی d و d' و بیرون فضای ۲ خط و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d است.



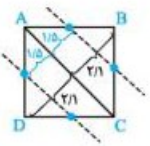
۱۵ ۴ دو خط $y = x + 1$ و $y = -x + 2$ بر هم عمودند، زیرا شیب‌های آن‌ها $m_1 = 1$ و $m_2 = -1$ بوده که قرینه و معکوس هم هستند.

نقاطی از صفحه که از خط $y = x + 1$ به فاصله ۱ باشد دو خط موازی در طرفین آن و به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از آن قرار دارد. به‌طور مشابه نقاطی از صفحه که از خط $y = -x + 2$ به فاصله ۱ باشند نیز دو خط موازی در طرفین آن و به فاصلهٔ ۱ از آن هستند. جواب مسأله نقاط برخورد خطوط خط‌چین یعنی چهار نقطهٔ A، B، C و D است.



۱۶ ۱ تمام نقاطی که از قطر AC به فاصلهٔ $\frac{3}{2} = 1/5$ هستند، دو خط موازی در طرفین قطر AC و به فاصلهٔ ۱/۵ از آن هستند. حال برای آن‌که ببینیم این دو خط، مربع را در چند نقطه قطع می‌کنند، قطر مربع را می‌یابیم.

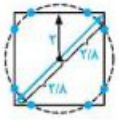
$$\text{قطر} = \text{ضلع} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \xrightarrow{\sqrt{2}\simeq 1/4} 3 \times 1/4 = 4/2 = \text{نصف قطر} = \frac{4/2}{2} = 2/1$$



چون فاصلهٔ دو خط‌چین از قطر (۱/۵) کم‌تر از نصف قطر مربع است، پس دو خط موازی مربع را در ۴ نقطه مطابق شکل قطع می‌کنند. به عبارت دیگر دو خط خط‌چین از درون مربع رد می‌شوند.

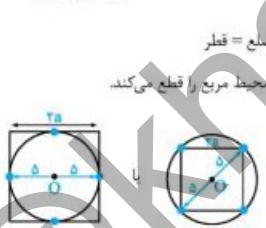
۱۷ ۴ نقاطی که از مرکز مربع (O)، فاصله‌شان $\frac{5}{2} = 2/5$ است، روی محیط دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲/۵ قرار دارد. نقاط برخورد این دایره و مربع جواب مسأله است. برای آن‌که ببینیم دایره، محیط مربع را در چند نقطه قطع می‌کند، ابتدا قطر مربع را به دست می‌آوریم:

$$\text{قطر} = \text{ضلع} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \xrightarrow{\sqrt{2}\simeq 1/4} 4 \times 1/4 = 5/6 \Rightarrow \text{نصف قطر} = \frac{5/6}{2} = 2/8$$



چون فاصله نقاط روی محیط مربع از مرکز بیشتر از ۲ و کم‌تر از ۲/۸ است، پس دایره در ۸ نقطه، محیط مربع را قطع می‌کند.

۱۸ ۴ نقاطی که از مرکز مربع (O) فاصله‌شان ۵ است، روی محیط دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۵ است. نقاط برخورد این دایره و مربع جواب مسأله است. چون طبق فرض مسأله نقاط برخورد، رئوس یک چهارضلعی است، پس مشخص است که دایره و مربع از ۴ نقطه هم‌دیگر را قطع کرده‌اند. پس با توجه به مقدار a یکی از دو حالت مقابل باید رخ دهد:



$$2a = 10 \Rightarrow a = 5 \qquad \sqrt{2} \times \text{ضلع} = \text{قطر مربع} = \text{قطر دایره}$$

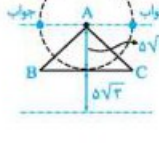
$$10 = 2a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

که فقط $a = 5$ در گزینه‌ها وجود دارد. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۹ ۳ ابتدا ارتفاع مثلث را می‌یابیم:

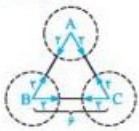
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{a=10} \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

نقاطی که از رأس A به فاصلهٔ $5\sqrt{3}$ باشند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع $5\sqrt{3}$ است. از طرفی نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از ضلع BC، $5\sqrt{3}$ باشد، دو خط موازی در طرفین ضلع BC و به فاصلهٔ $5\sqrt{3}$ از آن است. جواب مسأله نقاط برخورد دایره با دو خط موازی خط‌چین رسم شده است که مطابق شکل در ۲ نقطه برخورد دارند. پس مسأله ۲ جواب دارد.



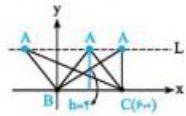
@khanenbook

۲۰ ۳ نقاطی که از رأس‌ها به فاصلهٔ ۲ باشند، روی محیط دایره‌هایی به مرکز رأس‌ها و به شعاع ۲ هستند. جواب مسأله نقاط برخورد هر ۳ دایره با هم است که مطابق شکل این ۳ دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که همزمان فاصله‌اش از هر ۳ رأس برابر ۲ باشد.

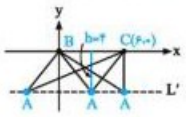


۲۱ ۲ مثلث‌های بیان شده دارای قاعدهٔ $BC = ۶$ و مساحت $S = ۱۲$ هستند. بیابیم ارتفاع آن‌ها را به دست آوریم:

$$S = \frac{h \times BC}{۲} \Rightarrow ۱۲ = \frac{h \times ۶}{۲} \Rightarrow h = ۴$$



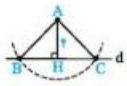
پس باید فاصلهٔ رأس A تا قاعدهٔ BC برابر ۴ باشد. از طرفی می‌دانیم تمام نقاطی از صفحه که فاصله‌شان از قاعدهٔ BC برابر ۴ است، دو خط موازی در طرفین قاعدهٔ BC و به فاصلهٔ ۴ از آن است. پس رأس A می‌تواند روی دو خط L و L′ قرار داشته باشد تا همواره فاصله‌اش از قاعدهٔ BC برابر ۴ باشد.



۲۲ ۲ مساحت مثلث ABC طبق فرض ۸ و ارتفاع آن فاصلهٔ A تا خط d یعنی $AH = ۴$ است. داریم:

$$\text{مساحت} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} \Rightarrow ۸ = \frac{\text{قاعده} \times ۴}{۲} \Rightarrow \text{قاعده} = ۴$$

برای رسم مثلث مورد نظر به مرکز A و به شعاع ۲ کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند که BC همان قاعدهٔ مثلث بوده که هر بالا اندازهٔ آن را ۴ به دست آوردیم. مثلث ABC متساوی‌الساقین است زیرا AC و AB هر دو برابر شعاع ۲ هستند و $BH = HC = \frac{BC}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$ است. حال طول ساق‌های AB و AC را می‌یابیم:



$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow AB = AC = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

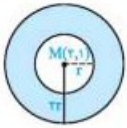
پس محیط مثلث برابر می‌شود با:

$$\text{محیط مثلث} = AB + BC + AC = ۲\sqrt{۵} + ۴ + ۲\sqrt{۵} = ۴ + ۴\sqrt{۵} = ۴(۱ + \sqrt{۵})$$

سؤال *دانش‌پژوه (اکرم حسینی)*، **آقا اجازه از کجا فهمیدین $BH = HC$ است؟**

پاسخ: *سؤال خوبیه ببین A مرکز دایره و BC وتری از دایره است. سال گذشته خوندین که اگر از مرکز دایره بر هر وتری از دایره عمود کنیم، وتر به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. به عبارت دیگه AH عمودمنصف BC خواهد بود.*

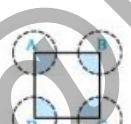
۲۳ ۱ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $M(۲,۱)$ کم‌تر از ۲r است، داخل دایره‌ای به مرکز M و به شعاع ۲r قرار دارند و تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از M بیشتر از r است، بیرون دایره‌ای به مرکز M و به شعاع r قرار دارند. جواب مسأله تمام نقاطی از صفحه هستند که به‌طور همزمان در هر دو تا شرط صدق کنند؛ یعنی بیرون دایره به شعاع r و داخل دایره به شعاع ۲r باشند مطابق شکل روبه‌رو که مساحتش برابر می‌شود با:



$$\text{مساحت سایه‌دار} = \text{مساحت دایره به شعاع } ۲r - \text{مساحت دایره به شعاع } r = \pi(۲r)^۲ - \pi r^۲ = ۴\pi r^۲ - \pi r^۲ = ۳\pi r^۲$$

طبق فرض این مساحت برابر ۳π است. پس $r = ۱$ می‌شود.

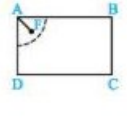
۲۴ ۲ تمام نقاطی که از یک رأس به فاصلهٔ کم‌تر از یک قرار دارند، در داخل دایره‌ای به مرکز آن رأس و به شعاع ۱ قرار دارند. پس اطراف هر کدام از رأس‌ها یک دایره به مرکز آن رأس و شعاع ۱ می‌کشیم. چون در صورت سؤال گفته تمام نقاطی را بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از یکی از رئوس مربع (نه همهٔ رئوس) کم‌تر از یک باشد، پس کافی است آن نقطه‌ها در داخل یکی از ناحیه‌های سایه‌دار باشند. مساحت این ناحیه برابر است با:



$$\text{مساحت} = \text{ربع دایره} \times ۴ = ۴ \times \left(\frac{\pi(۱)^۲}{۴}\right) = \pi$$

سؤال *دانش‌پژوه (زهرا بانی)*، **آقا اجازه اگر یه نقطه از رأس A فاصله‌اش کم‌تر از یک باشد، آن‌گاه از بقیه نقاط فاصله‌اش بیشتر از یکه که!**

پاسخ: *آره دیگه به شکل نگاه کن. الان فاصلهٔ F تا A از یک کم‌تره ولی فاصله‌اش از B و C و D بیشتر از یکه. واسه همین توی سؤال گفته، فاصله‌اش از یه راس (نه فاصله‌اش از همهٔ راس‌ها)*

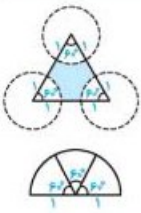


@khanehbook

۲۵ ۳

یادآوری مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$ است.

تمام نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از هر ۳ رأس بیشتر از یک است باید در ناحیهٔ سایه‌دار مقابل قرار بگیرند. زیرا در داخل دایره‌هایی به مرکز رأس‌ها و به شعاع ۱، فاصله‌های نقاط از رأس‌ها کم‌تر از یک هستند. حال مساحت سایه‌دار را می‌یابیم:



(مساحت قطاعی از دایره با زاویهٔ ۶۰ درجه)×۳ − مساحت مثلث متساوی الاضلاع = مساحت سایه‌دار

تشکیل نیم‌دایره می‌دهند

$$=\frac{3^2\times\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi(1)^2}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}$$

۲۶ ۱

نکته مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

نکته هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر ۱۲۰° است.

برای آن‌که فاصلهٔ نقطهٔ انتخابی از مرکز و رئوس بیشتر از یک باشد، مطابق شکل در رئوس و مرکز، دایره‌هایی به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. نقطهٔ مورد نظر باید در ناحیهٔ سایه‌دار باشد. برای محاسبهٔ مساحت سطح سایه‌دار باید ۶ قطاع ۱۲۰° و یک دایرهٔ کامل به شعاع ۱ از مساحت شش‌ضلعی منتظم کم کنیم. اما هر سه قطاع ۱۲۰° تشکیل یک دایرهٔ کامل را می‌دهند.

۲ دایره کامل

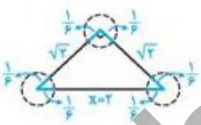
$$\text{مساحت سایه‌دار}=\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم}-\text{(مساحت شش قطاع }120^\circ\text{)}-\text{(مساحت یک دایرهٔ کامل+مساحت یک دایرهٔ کامل)}=\frac{3\sqrt{3}(2)^2}{2}-(2\pi(1)^2+\pi(1)^2)=6\sqrt{3}-3\pi$$

۲۷ ۱

وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین برابر است با:

$$x^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=4\Rightarrow x=2$$

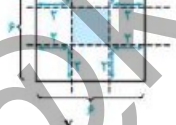
می‌خواهیم نقطه‌ای که از روی اضلاع مثلث انتخاب می‌کنیم، فاصله‌اش از یکی از رئوس مثلث کم‌تر از $\frac{1}{6}$ باشد، پس ۳ دایره به شعاع $\frac{1}{6}$ و به مرکز رئوس رسم کنیم. قسمت‌هایی از اضلاع مثلث که داخل این دایره‌ها قرار می‌گیرد، مطلوب مسأله است. یعنی اگر نقطه‌ای از این قسمت‌ها انتخاب شود، فاصله‌اش حتماً از یکی از رئوس کم‌تر از $\frac{1}{6}$ خواهد بود. بنابراین داریم:



$$\text{مجموع طول ۶ پاره‌خط هم‌اندازهٔ آبی‌رنگ}=6\times\frac{1}{6}=1=\text{مجموع طول پاره‌خط‌ها}$$

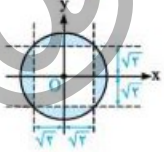
۲۸ ۲

برای این‌که سکه به تمامی درون مربع قرار بگیرد باید فاصلهٔ مرکز سکه از اضلاع مربع بیشتر از شعاع سکه (یعنی ۲) باشد. از طرفی می‌دانیم تمام نقاطی که فاصله‌شان از هر ضلع بیشتر از ۲ است، در بیرون خطی موازی ضلع و به فاصلهٔ ۲ از آن قرار دارند! پس ناحیهٔ مورد نظر مربع هاشورخورده شکل مقابل است که طول ضلع آن ۲ = ۲ − ۲ − ۶ است و در نتیجه مساحت آن ۴ = 2^2 می‌شود.



۲۹ ۲

تمام نقاطی از دایره که فاصلهٔ آن‌ها از محور xها (محور y) برابر $\sqrt{2}$ است، دو خط موازی در طرفین محور xها (محور y) است. حال می‌خواهیم فاصلهٔ نقاط مورد نظر از یکی از محورهای xها یا yها کم‌تر از $\sqrt{2}$ نباشد. پس فاصله باید بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{2}$ باشد؛ یعنی در خارج از خط‌های خط‌چین رسم‌شده که ناحیهٔ هاشورخورده را تشکیل می‌دهد. مساحت آن برابر می‌شود با:



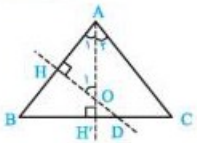
$$\text{مساحت سایه‌دار}=\text{مساحت دایره}-\text{مساحت مربع}=\pi(2)^2-(2\sqrt{2})^2=4\pi-8$$

۳۰ ۴

طبق درسنامه تمام نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند، خط عمودمنصف پاره‌خط AB است که همان گزینهٔ (۴) می‌شود.

@khanehbook

۳۱ ۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC، میانه و نیمساز هم است. به عبارت دیگر AH همان عمودمنصف ضلع BC است. پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 40^\circ$. حال در مثلث AHO داریم:

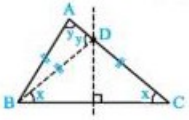


$$\hat{H} + \hat{O}_1 + \hat{A}_1 = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{O}_1 + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 50^\circ$$

سؤال دانش‌پژوه (امیر سه رهی): **آقا چرا می‌گین زاویهٔ بین اونا $A\hat{O}D = 130^\circ$ نمیشه؟**

پاسخ: لعنت بر کسی که بگه نشه! چرا حرف تو دهن من میذاری بچه! ولی تو گزینه‌ها 50° هست. پس اونو می‌زنیم.

۳۲ ۳ چون D روی عمودمنصف BC قرار دارد، طبق خاصیت عمودمنصف فاصله‌اش از دو سر پاره‌خط یعنی از نقاط B و C یکسان است (DB = DC). از طرفی طبق فرض AB = BD. پس مثلث‌های BCD و ABD متساوی‌الساقین هستند. حال زوایای پای ساق مثلث BCD را با x و زاویای پای ساق مثلث ABD را با y نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل و این‌که $\hat{B} = 60^\circ$ است، داریم:

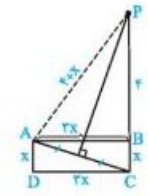


$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow y + 60^\circ + x = 180^\circ \xrightarrow[y = 2x \text{ است BCD}]{\text{y زاویهٔ خارجی برای مثلث}} 2x + 60^\circ + x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

۳۳ ۳ طبق فرض $\frac{CD}{AD} = 3$ است. پس اگر AD = x باشد، CD = 3x می‌شود. حال عمودمنصف AC را رسم کرده و ضلع BC را امتداد داده تا عمودمنصف را در P قطع کند. از P به A وصل می‌کنیم. چون P روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس فاصله‌اش از A و C برابر است:

$$AP = PC = 4 + x$$



حال در مثلث ABP، قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم و x را می‌یابیم:

$$AP^2 = AB^2 + PB^2 \Rightarrow (4+x)^2 = (3x)^2 + 4^2 \Rightarrow 16 + x^2 + 8x = 9x^2 + 16 \Rightarrow 8x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow 8x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (غ ق ق)} \quad \text{و} \quad x = 1$$

بنابراین طول قطر AC برابر می‌شود با:

$$\overset{\Delta}{ACD}: \text{فیثاغورس}: AC^2 = x^2 + (3x)^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2 \xrightarrow{x=1} 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

۳۴ ۲ می‌دانیم اگر نقطه‌ای روی خط عمودمنصف یک ضلع باشد، فاصله‌اش از هر دو رأس (۲ نقطهٔ دو سر ضلع) به یک فاصله است. حال عمودمنصف هر ۳ ضلع مثلث را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف‌ها همدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. چون O روی عمودمنصف هر ۳ ضلع قرار دارد، پس فاصله‌اش از هر ۳ رأس یکسان بوده و جواب مسأله است.

سؤال دانش‌پژوه (رضا احمدی): **آقا میشه بگین چرا فاصلهٔ O از هر ۳ رأس یکسانه؟**

پاسخ: فرض کن O محل برخورد دو عمودمنصف AB و BC باشد، ثابت می‌کنیم عمودمنصف سومی هم از O می‌گذرد. چون O روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد، پس OA = OB و چون O روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد، پس OB = OC. پس داریم:

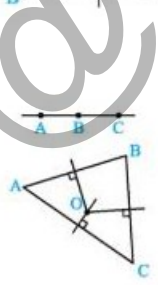
$$\begin{cases} OA = OB \\ OB = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \text{پس O روی عمودمنصف ضلع AC نیز قرار دارد} \Rightarrow OA = OC = OB$$

بنابراین O نقطه‌ای است که از هر ۳ راس به یک فاصله است.

۳۵ ۱ مسأله را در ۲ حالت زیر حل می‌کنیم:

الف) سه نقطهٔ متمایز A، B و C روی یک خط راست قرار دارند. در این صورت هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که از هر ۳ نقطه به یک فاصله باشد! (چرا؟)

ب) سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست قرار ندارد. در این صورت با آن ۳ نقطه می‌توان یک مثلث تشکیل داد که محل برخورد عمودمنصف‌های ۳ ضلع AB، AC و BC از مثلث ABC همان نقطه‌ای است که از هر ۳ رأس به یک فاصله است. (با توجه به تست قبل)

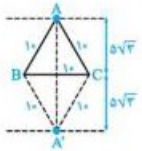


@khaneh_book

۳۶ ۳

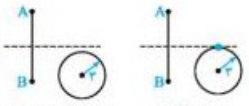
یادآوری ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است.

تمام نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از دو رأس B و C یکسان باشد، عمودمنصف پاره‌خط BC است. امّا در سؤال گفته فاصلهٔ آن نقاط از B و C یکسان و برابر ۱۰ باشد. در این صورت فقط ۲ نقطه با این ویژگی روی عمودمنصف وجود دارد. یکی خود رأس A است، چون $AB = AC = ۱۰$ (ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع) و یکی هم قرینهٔ رأس A نسبت به قاعدهٔ BC است. از طرفی در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰، ارتفاع برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{a=10} \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ است و مسأله خواسته که فاصلهٔ نقاط از قاعدهٔ BC، $5\sqrt{3}$ شود (یعنی فاصله به اندازهٔ ارتفاع شود). پس تمام این نقاط که از BC به فاصلهٔ ارتفاع باشند ۲ خط موازی در طرفین قاعدهٔ BC و به فاصلهٔ $5\sqrt{3}$ از آن است که جواب مسأله نقاط برخورد این دو خط با آن دو نقطهٔ A و A′ است. چون A و A′ دقیقاً روی این دو خط قرار دارند پس مسأله ۲ جواب دارد.



۳۷ ۲

می‌دانیم نقاطی که روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار بگیرند، فاصله‌شان از دو سر پاره‌خط (B و A) یکسان است. جواب مسأله، نقاط برخورد خط عمودمنصف پاره‌خط AB با دایرهٔ (C) به شعاع ۳ سانتی‌متر است که حالات مقابل را داریم:



پس مسأله حداکثر ۲ جواب دارد.

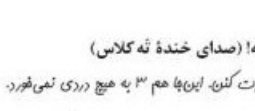
سؤال دانش‌پژوه (اکبر عبادی)، **آقا اجاره اون ۳ چی بود پس تو صورت مسأله!**

سؤال دانش‌پژوه (ناصر راستی)، **آقا ما بگیم! الکی بود، واسه این بود که با خودت ببری خونه! (صدای خندهٔ ثه کلاس)**

پاسخ: ناصر مسفره بازی در نظم نیارا دقت کنین. بعضی مسائل یه سری اطلاعات میدن که هواستونو پرت کنن. این‌ها هم ۳ به هیچ دردی نمی‌خورد.

۳۸ ۴

شیب خط d و پاره‌خط AB قرینه و معکوس‌اند پس دو خط بر هم عمودند. حالا دو حالت مهم داریم:



حالت (۱) خط d بر عمودمنصف پاره‌خط AB منطبق است. حالت (۲) خط d موازی عمودمنصف پاره‌خط AB است و با آن فاصله دارد.

می‌دانیم نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند.

پس در حالت (۱) چون خط d روی عمودمنصف است، تمام نقاط خط d (بی‌شمار نقطه) از A و B به یک فاصله‌اند ولی در حالت (۲) چون خط d موازی عمودمنصف B است و هیچ برخوردی با آن ندارد، پس هیچ نقطه‌ای از آن از A و B به یک فاصله نیست (صفر نقطه) پس جواب بی‌شمار یا صفر نقطه است.

سؤال دانش‌پژوه (شیدا زمانی)، **آقا اجازه اگه خط d و پاره‌خط AB با هم موازی باشند جواب چگونه میشد؟**

پاسخ: دراین صورت عمودمنصف AB فقط خط d را در یک نقطه قطع می کرد و مسأله ۱ جواب داشت.

۳۹ ۳

نقاط A(۱,۲) و B(۳,۴) و C(۳,۰) را روی محورهای مختصات نشان می‌دهیم. تمام نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند بر روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند و تمام نقاطی که فاصله‌شان از C برابر ۱/۵ است روی محیط دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۱/۵ است. جواب مسأله تعداد نقاط برخورد خط عمودمنصف AB و دایره به مرکز C و شعاع ۱/۵ است.

حال ابتدا معادلهٔ عمودمنصف AB را یافته و سپس فاصلهٔ نقطهٔ C از خط عمودمنصف را به دست می‌آوریم. با توجه به فاصلهٔ C از خط عمودمنصف AB سه حالت زیر را داریم:

حالت (۱): فاصلهٔ C از خط عمودمنصف AB بیشتر از ۱/۵ باشد. در این صورت دایرهٔ موردنظر، عمودمنصف را قطع نمی‌کند و مسأله جواب ندارد.

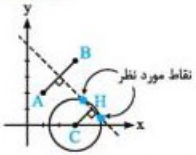
حالت (۲): فاصلهٔ C از عمودمنصف برابر ۱/۵ باشد. دراین صورت دایره بر خط عمودمنصف مماس می‌شود و لذا جواب ۱ نقطه می‌شود.

حالت (۳): فاصلهٔ C از عمودمنصف کمتر از ۱/۵ باشد. در این صورت دایره در ۲ نقطه، خط عمودمنصف را قطع می‌کند و جواب ۲ نقطه می‌شود.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{۱+۳}{2} = ۲ \;,\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{۲+۴}{2} = ۳ \Rightarrow M(۲,۳)$$

$$\text{شیب}_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۴-۲}{۳-۱} = \frac{۲}{۲} = ۱ \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} \text{شیب عمودمنصف} = -۱$$

@khanehketab



حال معادلهٔ عمود منصف را با داشتن شیب $m = -1$ و نقطه $M(2,3)$ می‌نویسیم:

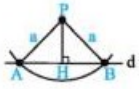
$$y - 3 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -x + 2 \Rightarrow y + x - 5 = 0$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $C(3,0)$ را از خط عمودمنصف می‌یابیم:

$$CH = \frac{|y_C + x_C - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \overset{C(3,0)}{=\!=} \frac{|0 + 3 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \simeq 1/4$$

چون فاصلهٔ C از عمودمنصف کم‌تر از ۱/۵ است. پس دایره، خط عمودمنصف را در ۲ نقطه قطع می‌کند و جواب ۲ نقطه می‌شود.

۴۰ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**



گزینهٔ (۱): شکل مسأله را رسم می‌کنیم. مثلث ABP متساوی‌الساقین است؛ زیرا $AP = BP = a$. پس PH هم بر AB عمود است و هم آن را نصف می‌کند (عمودمنصف) لذا P روی عمودمنصف AB قرار دارد. این گزینه درست است.

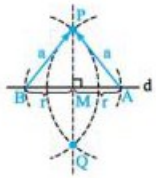
گزینهٔ (۲): این گزینه صحیح است $AP = BP = a$.

گزینهٔ (۳): مثلث ABP لزوماً متساوی‌الاضلاع نیست و فقط اگر $AB = a$ باشد متساوی‌الاضلاع خواهد بود. پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۴): چون PH عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس $AH = BH$. بنابراین فاصلهٔ A و B از PH یکسان است. این گزینه صحیح است.

۴۱ ۴ ابتدا اطلاعات مسأله را روی شکل پیاده کرده و سپس درستی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

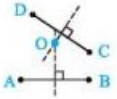


گزینهٔ (۱) و (۲): دو نقطهٔ P و Q از A و B به یک فاصله‌اند. پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. پس خطی که از P و Q عبور می‌کند عمودمنصف AB است. پس بر خط d عمود است (گزینهٔ (۲) صحیح است) و چون M وسط AB است $(BM = MA = r)$ لذا PQ از آن عبور می‌کند (گزینهٔ (۱) صحیح است)

گزینهٔ (۳): دو نقطهٔ A و B از P و Q به یک فاصله‌اند. پس روی عمودمنصف پاره‌خط PQ قرار دارند و چون خط d از این دو نقطه می‌گذرد پس عمودمنصف PQ است و این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۴): اگر a کم‌تر از نصف طول پاره‌خط AB باشد، اصلاً دو کمان رَده شده همدیگر را قطع نمی‌کنند و نقاط P و Q حاصل نمی‌شود! پس این گزینه غلط بوده و جواب تست است.

۴۲ ۳ نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB و نقاطی که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله‌اند، عمودمنصف‌های پاره‌خط CD است. جواب مسأله، محل برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB و CD است (یعنی نقطهٔ O). با این دیدگاه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

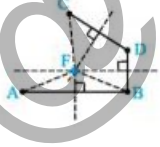


گزینهٔ (۱) و (۲): نقطهٔ O هم روی عمودمنصف پاره‌خط AB و هم روی عمودمنصف پاره‌خط CD قرار دارد. پس این دو گزینه صحیح هستند.

گزینهٔ (۳): خطی که هر دو عمودمنصف‌های AB و CD را قطع کند، لزوماً از محل تلاقی دو عمودمنصف عبور نمی‌کند! پس این گزینه در حالت کلی غلط و جواب تست است.

گزینهٔ (۴): نقطهٔ تلاقی دو عمودمنصف همان نقطهٔ مورد نظر ما (نقطهٔ O) است و چون خط از همین نقطهٔ تلاقی می‌گذرد، پس نقطهٔ O روی آن قرار دارد و این گزینه صحیح است.

۴۳ ۳ برای آن‌که نقطه‌ای مانند F از چهار نقطهٔ مقابل به یک فاصله باشد باید آن نقطه محل تلاقی سه عمودمنصف پاره‌خط‌های CD، BD و AB باشد. در این صورت داریم:



$$\left.\begin{array}{l} F \text{ روی عمودمنصف } CD \Rightarrow FC = FD \\ F \text{ روی عمودمنصف } BD \Rightarrow FD = FB \\ F \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow FB = FA \end{array}\right\} \Rightarrow FC = FD = FB = FA$$

بررسی گزینه‌ها:

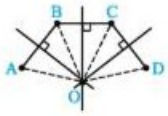
گزینهٔ (۱): F روی عمودمنصف AC قرار دارد زیرا $FA = FC$.

گزینهٔ (۲): F روی عمودمنصف BD قرار دارد، زیرا $FD = FB$.

گزینهٔ (۳) و (۴): اگر دایره‌ای به مرکز F و به شعاع FC (FD یا FB یا FA) رسم کنیم از هر ۴ نقطهٔ A، B، C، D می‌گذرد. پس گزینهٔ (۴) صحیح است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

@khanenbook

۴۴ **۴** چون O محل تلاقی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB، BC و CD است، می‌توان نتیجه گرفت که:



$$\left.\begin{array}{l} O \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow OA = OB \\ O \text{ روی عمودمنصف } BC \Rightarrow OB = OC \\ O \text{ روی عمودمنصف } CD \Rightarrow OC = OD \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): دایره به مرکز O و به شعاع OA از هر ۴ نقطه می‌گذرد. زیرا نشان دادیم $OA = OB = OC = OD$ در نتیجه دایره‌ای که شعاع آن OA است، سه نقطهٔ D, C, B نیز روی آن است، زیرا فاصلهٔ نقاط C, B و D از مرکز برابر شعاع OA برابر است.

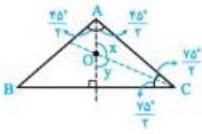
گزینهٔ (۲): مثلث OAD متساوی‌الساقین است، زیرا نشان دادیم $OA = OD$.

گزینهٔ (۳): فاصلهٔ O از B و D یکسان است، زیرا $OB = OD$.

گزینهٔ (۴): مثلث‌های OAB و OCD الزاماً هم‌نهشت نیستند و تنها در حالتی هم‌نهشت هستند که $AB = CD$ نیز باشد. پس این گزینه در حالت کلی غلط بوده و جواب تست است.

۴۵ **۳** هر یک از کسرهای داده شده را برابر t فرض می‌کنیم:

$$\frac{\hat{A}}{۳} = \frac{\hat{B}}{۴} = \frac{\hat{C}}{۵} = t \Rightarrow \hat{A} = ۳t, \hat{B} = ۴t, \hat{C} = ۵t$$



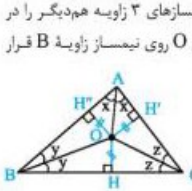
می‌دانیم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳t + ۴t + ۵t = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲t = ۱۸۰^\circ \Rightarrow t = ۱۵^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A} = ۳ \times ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \ , \ \hat{B} = ۴ \times ۱۵^\circ = ۶۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۵ \times ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$$

y زاویهٔ خارجی مثلث ACO است: $y = \frac{۴۵^\circ}{۲} + \frac{۷۵^\circ}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$

حواستان باشد x زاویهٔ منفرجهٔ بین دو نیمساز و y زاویهٔ حادهٔ بین دو نیمساز خواسته شده است.

۴۶ **۲** می‌دانیم اگر نقطه‌ای روی خط نیمساز یک زاویه باشد فاصله‌اش از دو ضلع آن زاویه یکسان است. از طرفی نیمسازهای ۳ زاویه هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. حالا نشان می‌دهیم نقطهٔ O، نقطه‌ای است که از هر ۳ ضلع به یک فاصله است. چون O روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد. پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یعنی AB و BC یکسان است ($OH = OH''$). از طرفی O روی نیمساز زاویهٔ C نیز قرار دارد. پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یعنی BC و AC یکسان است ($OH = OH'$).



پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OH = OH'' \\ OH = OH' \end{array}\right\} \Rightarrow OH = OH' = OH'' \Rightarrow$$

فاصلهٔ O از هر ۳ ضلع یکسان است.

۴۷ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): برای آن‌که نقطه‌ای مانند W ایجاد شود که محل برخورد دو کمان به مرکزهای P و Q است باید شعاع کمان زده‌شده (b) از نصف طول پاره‌خط PQ بیشتر باشد وگرنه دو کمان زده‌شده اصلاً همدیگر را قطع نمی‌کنند.

سؤال *(انش‌پژوه (اسماء انفی)،* **آقا اجازه میشه یه شکل بکشین که توی اون b کوچک‌تر از نصف PQ باشه تا ما ببینیم که کمان‌ها همو قطع می‌کنن یا نه.**

پاسخ: به شکل روبه‌رو نگاه کنید:

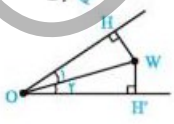
$$b + b < PQ \Rightarrow ۲b < PQ \Rightarrow b < \frac{PQ}{۲}$$

گزینهٔ (۲): توضیحات صورت سؤال برای رسم نیمساز زاویهٔ O است. در ادامه ثابت می‌کنیم که OW نیمساز است:

طول PW و QW با هم یکسان و برابر b است. از طرفی $OQ = OP = a$ و OW هم مشترک، پس دو مثلث OQW و OPW هم‌نهشت‌اند. لذا $O_۱ = O_۲$ و در نتیجه OW نیمساز زاویهٔ O است.

گزینهٔ (۳): مثلث PQW لزوماً متساوی‌الاضلاع نمی‌باشد. تنها زمانی متساوی‌الاضلاع خواهد شد که $b = PQ$ باشد؛ یعنی دو کمان زده‌شده به مرکز P و Q به شعاع PQ باشد، پس این گزینه نادرست و جواب تست است.

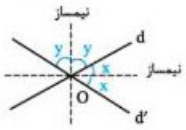
گزینهٔ (۴): ثابت می‌کنیم فاصلهٔ W از دو ضلع زاویهٔ O یکسان است.



$$\left.\begin{array}{l} OW \text{ مشترک} \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} OHW \cong OWH' \Rightarrow HW = H'W$$

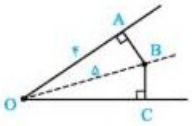
@khanenbook

۴۸ ۱ نیمسازهای زاویهٔ حادهٔ O و زاویهٔ منفرجهٔ O را رسم می‌کنیم. می‌دانیم هر نقطه‌ای روی این دو خط نیمساز قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو ضلع زاویه (خطوط d و d′) برابر است. پس شکل‌های مورد نظر دو خط نیمساز هستند و نشان می‌دهیم که این دو نیمساز بر هم عمودند:



$$x+x+y+y=180^\circ \Rightarrow 2(x+y)=180^\circ \Rightarrow x+y=90^\circ$$

۴۹ ۲ چون B روی نیمساز زاویهٔ O قرار دارد پس $AB=BC$. از طرفی مثلث OAB قائم‌الزاویه است. داریم:



$$OB^2=OA^2+AB^2 \Rightarrow 5^2=4^2+AB^2 \Rightarrow 25-16=AB^2 \Rightarrow AB^2=9 \Rightarrow AB=3 \Rightarrow BC=3$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC داریم:

$$OB^2=OC^2+BC^2 \Rightarrow 5^2=OC^2+3^2 \Rightarrow 25-9=16=OC^2 \Rightarrow OC=4$$

$$BC+OC=3+4=7$$

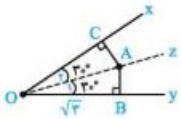
بنابراین:

سؤال *دانش‌پژوه (لیلا عبدی)*: **آقا اجازه ما گفتیم مثلث‌های OAB و OBC هم‌نهشت‌اند. پس $OC=OA=4$ درسته؟**

پاسخ: بعله، درسته آفرین.

۵۰ ۲ چون Oz نیمساز زاویهٔ $O=60^\circ$ است، پس $\hat{O}_1=\hat{O}_2=30^\circ$. دو مثلث OAB و OCA هم‌نهشت‌اند. زیرا:

$$O_1=O_2=30^\circ \ ,\ \text{ضلع مشترک: OA} \ ,\ \hat{B}=\hat{C}=90^\circ$$



در نتیجه: $OC=OB$ و چون $OB=\sqrt{3}$ پس $OC=\sqrt{3}$. از طرفی داریم:

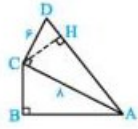
$$\cos 30^\circ=\frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{OA} \Rightarrow OA=2 \Rightarrow \text{فیثاغورس: } OA^2=OC^2+AC^2$$

$$\Rightarrow 2^2=\sqrt{3}^2+AC^2 \Rightarrow AC^2=4-3=1$$

بنابراین:

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{OAC}=OA+AC+OC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$$

۵۱ ۱ C روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد؛ پس فاصلهٔ C تا دو ضلع زاویهٔ A یکسان است:



$$CB=CH \quad (*)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD، ابتدا وتر AD را می‌یابیم:

$$AD^2=CD^2+CA^2 \Rightarrow AD^2=6^2+8^2=36+64=100 \Rightarrow AD=10$$

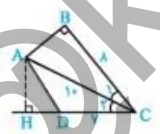
حال مساحت مثلث ACD را از دو طریق به دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{AC\times CD}{2}=\frac{CH\times AD}{2} \Rightarrow 8\times 6=CH\times 10 \Rightarrow CH=\frac{48}{10}=4/8 \overset{(*)}{\Longrightarrow} CB=4/8$$

۵۲ ۲

$$\text{رابطهٔ فیثاغورس در } \overset{\Delta}{ABC}: AC^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow 10^2=AB^2+8^2 \Rightarrow 100-64=36=AB^2 \Rightarrow AB=6$$

A روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد پس $AH=AB=6$. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ACH به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده، هم‌نهشت‌اند. زیرا $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ و AC مشترک و $\hat{B}=\hat{H}=90^\circ$. پس داریم:

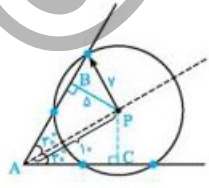


$$HC=BC=8 \xrightarrow[DC=7]{HC=HD+DC} HD+7=8 \Rightarrow HD=1$$

با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHD داریم:

$$AD^2=AH^2+HD^2 \Rightarrow AD^2=6^2+1^2=37 \Rightarrow AD=\sqrt{37}$$

۵۳ ۲ در مثلث APC داریم:



$$\sin 30^\circ=\frac{PC}{AP} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{PC}{10} \Rightarrow PC=5 \xrightarrow[PC=PB]{\text{P روی نیمساز زاویهٔ A است}} PB=5$$

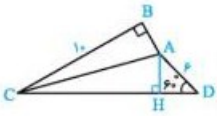
تمام نقاطی که از P به فاصلهٔ ۷ هستند، دایره‌ای به مرکز P و به شعاع ۷ است که چون $PB=PC=5<7$ است، پس دایرهٔ مورد نظر هر کدام از دو ضلع زاویه را در ۲ نقطه قطع می‌کند. پس ۴ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

@khanen_book

۵۴ ۲ A روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه برابر است، پس داریم:

$$BA = AH \quad (*)$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD داریم:



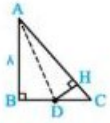
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH = ۳\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} AB = ۳\sqrt{۳}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{HD}{AD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{HD}{۶} \Rightarrow HD = ۳$$

دو مثلث ABC و ACH هم‌نهشت‌اند؛ پس $CH = CB = ۱۰$. بنابراین محیط چهارضلعی ABCD برابر می‌شود با:

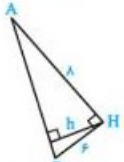
$$AB + BC + CD + DA \xrightarrow{CD=CH+HD} ۳\sqrt{۳} + ۱۰ + (۱۰ + ۳) + ۶ = ۲۹ + ۳\sqrt{۳}$$

۵۵ ۲ از D بر وتر AC عمود کرده‌ایم. چون $BD = DH$ و $\hat{B} = \hat{H} = ۹۰^\circ$ پس D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، لذا دو مثلث ABD و ADH هم‌نهشت‌اند. پس $AH = AB = ۸$. مساحت مثلث ABD طبق فرض ۲۴ است:



$$S_{\Delta ABD} = \frac{AB \times BD}{۲} = ۲۴ \Rightarrow \frac{۸ \times BD}{۲} = ۲۴ \Rightarrow BD = ۶ \xrightarrow{BD=DH} DH = ۶$$

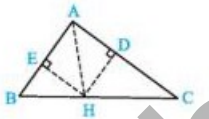
خواستهٔ مسأله فاصلهٔ H تا ضلع AD (یعنی h) است. پس از H بر AD عمود می‌کنیم (ارتفاع وارد بر AD). حال مساحت مثلث ADH را از دو طریق محاسبهٔ کرده و با هم برابر قرار می‌دهیم تا h به دست آید.



$$AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow AD = ۱۰$$

$$\text{مساحت}_{\Delta ADH} = \frac{h \times AD}{۲} = \frac{AH \times DH}{۲} \Rightarrow \frac{h \times ۱۰}{۲} = \frac{۸ \times ۶}{۲} \Rightarrow h = ۴/۸$$

۵۶ ۱ در شکل زیر نیمساز زاویهٔ A را رسم کرده و از آن بر دو ضلع AB و AC عمود کرده‌ایم. طبق فرض فاصلهٔ H تا ضلع $AC = ۱۴$ برابر ۴/۲ است. پس $HD = ۴/۲$. از طرفی چون H روی نیمساز قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویهٔ A برابر است؛ پس $HD = HE = ۴/۲$. از طرفی مساحت مثلث ABC برابر ۴۲ است. داریم:

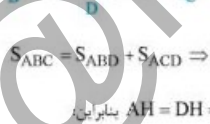


$$S_{\Delta ABC} = ۴۲ \Rightarrow S_{\Delta ABH} + S_{\Delta ACH} = ۴۲ \Rightarrow \frac{EH \times AB}{۲} + \frac{HD \times AC}{۲} = ۴۲$$

$$\Rightarrow \frac{۴/۲ \times AB}{۲} + \frac{۴/۲ \times ۱۴}{۲} = ۴۲ \Rightarrow ۲/۱AB + ۲۹/۴ = ۴۲ \Rightarrow ۲/۱AB = ۱۲/۶ \Rightarrow AB = ۶$$

۵۷ ۴ **اولاً:** AD نیمساز زاویهٔ A است؛ پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۴۵^\circ$

دوماً: D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویهٔ A برابر است:



$$HD = H'D = a \quad (*)$$

حالا مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{a \times AB}{۲} + \frac{a \times AC}{۲} \Rightarrow \frac{۳ \times ۷}{۲} = \frac{۳a}{۲} + \frac{۷a}{۲} \Rightarrow ۲۱ = ۱۰a \Rightarrow a = ۲/۱$$

مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH متساوی‌الساقین است. زیرا $H = ۹۰^\circ$ و $A_۱ = ۴۵^\circ$ پس $D_۱ = ۴۵^\circ$. لذا $AH = DH = a = ۲/۱$ بنابراین:

$$AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \Rightarrow AD^۲ = ۲/۱^۲ + ۲/۱^۲ = ۲ \times ۲/۱^۲ \Rightarrow AD = \sqrt{۲ \times ۲/۱^۲} = ۲/۱\sqrt{۲}$$

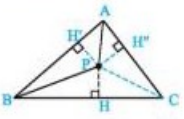
سؤال دانش‌پژوه (سامان سلامتی)، **آقا چهارضلعی AHDH′ مربعه فک کنم، کمک خاصی بهمون نمی‌تونه بکنه؟**

پاسخ: ترشی نخوری یه چیزی میشی‌ها! آره میشه. بین نیمساز AD، قطر مربعه پس داریم:

$$\text{قطر} = \sqrt{۲} \times \text{ضلع} \Rightarrow AD = \sqrt{۲} \times a \xrightarrow{a=۲/۱} ۲/۱\sqrt{۲}$$

@khanen_book

۵۸ ۳ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد پس طبق خاصیت نیمساز، فاصله‌اش از دو ضلع زاویهٔ B برابر است. پس:



$PH' = PH \quad (*)$

از طرفی P، روی نیمساز زاویهٔ A نیز قرار دارد، پس به‌طور مشابه داریم:

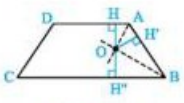
$PH' = PH'' \quad (**)$

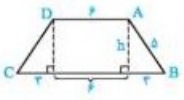
از (*) و (**) نتیجه می‌گیریم که $PH = PH' = PH''$، حال از P به C وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث ABC به ۳ مثلث ABP و ACP و BCP تقسیم می‌شود و داریم:

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{ACP} + S_{BCP} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 9\sqrt{3} = \frac{PH' \times AB}{2} + \frac{PH'' \times AC}{2} + \frac{PH \times BC}{2} \xrightarrow{PH=PH'=PH''}$$

$$9\sqrt{3} = \frac{PH \times AB}{2} + \frac{PH \times AC}{2} + \frac{PH \times BC}{2} \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{PH}{2}\underbrace{(AB + AC + BC)}_{\text{محیط}=18} \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{PH}{2} \times 18 \Rightarrow PH = \sqrt{3}$$

۵۹ ۱ نیمسازهای زوایای A و B هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. چون O روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، طبق خاصیت نیمساز $OH = OH'$ می‌باشد و چون O روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد، طبق خاصیت نیمساز $OH' = OH''$ در نتیجه $OH = OH' = OH''$. از طرفی می‌دانیم HH'' برابر ارتفاع در ذوزنقه است. در ادامه طول ارتفاع ذوزنقه متساوی‌الساقین را می‌یابیم:



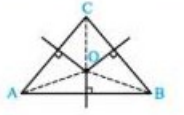


$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4$: قضیهٔ فیثاغورس

پس HH'' نیز برابر ۴ می‌شود و داریم:

$$HH'' = 4 \Rightarrow OH + OH'' = 4 \xrightarrow{OH=OH'=OH''} OH' + OH' = 4 \Rightarrow 2OH' = 4 \Rightarrow OH' = 2$$

۶۰ ۲ اگر بیمارستان در نقطهٔ O (محل تلاقی سه عمودمنصف اضلاع AB، AC و BC) ساخته شود، فاصله‌اش از هر ۳ شهر یکسان است:



$OA = OB = OC$

۶۱ ۴ گزینهٔ (۴)، باید $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ باشد.

سؤال دانش‌پژوه (بهرام چاپلانه)، آقا ما فن ویژه زدیم! یعنی مثال زدیم. مثلاً $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. اونوقت فقط گزینهٔ (۴) ره که غلطه!

چون $\frac{1}{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{3-4}{4} = \frac{8-6}{8}$.

پاسخ: بله، قلب تو که اینقدر با مال و راحت طلبی! بهتر بود $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ رو مثال می‌زدی که کارت راحت‌تر شه!

۶۲ ۲

$$\frac{3x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{2y}{15}$$

حال در عبارت $\frac{2x-3y}{x+y}$، به جای x قرار می‌دهیم $\frac{2y}{15}$:

$$\frac{2x-3y}{x+y} = \frac{2\left(\frac{2y}{15}\right)-3y}{\frac{2y}{15}+y} = \frac{\frac{4y}{15}-\frac{3y}{1}}{\frac{2y+15y}{15}} = \frac{\frac{4y-45y}{15}}{\frac{17y}{15}} = \frac{-41y}{17y} = \frac{-41}{17}$$

۶۳ ۲

$$\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (3a+10)(7+2b) = (3b+7)(10+2a) \Rightarrow 21a + 6ab + 70 + 20b = 30b + 6ab + 70 + 14a$$

$$\Rightarrow 21a - 14a = 30b - 20b \Rightarrow 7a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$$

سؤال دانش‌پژوه (نژادعلی قلی‌زاده)، آقا از کجا بفهمیم که کدوم خاصیت تناسب رو باید استفاده کنیم؟

پاسخ: قلب لولا! یکم باید تمرینات رو زیادتر کنی تا بتونی راحت‌تر این مسائل رو حل کنی. ثانیاً، معمولاً طرفین ـ وسطین کردن یا به دست آوردن یک متغیر برحسب بقیه، حرف اول رو توی حل این نوع مسائل می‌زنه. توی برقی تست‌ها مثل همین تست، عددگذاری هم میتونه کار خوبی باشه.

۶۴ ۳ **روش اول:**

$$ad = bc \Rightarrow a = \frac{bc}{d} \quad (*)$$

$$\frac{a+b}{a-b} \overset{(*)}{=} \frac{\frac{bc}{d}+b}{\frac{bc}{d}-b} = \frac{\frac{bc+bd}{d}}{\frac{bc-bd}{d}} = \frac{bc+bd}{bc-bd} \xrightarrow{\text{فاکتور از } b} \frac{b(c+d)}{b(c-d)} = \frac{c+d}{c-d}$$

روش دوم: استفاده از فرمول به صورت زیر:

$$ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow[\text{تفضیل نسبت در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

روش سوم: عددگذاری (به عهدهٔ خودتان)

@khanenbook

۶۵ ۲

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{2a+b}{2c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$\frac{2}{3}$: فرض

$$\frac{2}{3}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{3b}{3d}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{a+3b}{c+3d}$$

حال کسر $\frac{a+3b}{c+3d}$ را می‌سازیم:

۶۶ ۱

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین با وسطین}}\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{3b}{3d}\Rightarrow\frac{2a+3b}{2c+3d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\quad(*)$$

$\frac{1}{2}$: طبق فرض

$$\frac{cd}{dc+ad+bc}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را تقسیم بر cd کنیم}}\frac{\frac{cd}{cd}}{\frac{dc}{cd}+\frac{ad}{cd}+\frac{bc}{cd}}=\frac{1}{1+\frac{a}{c}+\frac{b}{d}}\overset{(*)}{=}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

۶۷ ۲

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{5}{3}\xrightarrow{\text{طرفین تساوی معکوس}}\frac{b+d}{a+c}=\frac{3}{5}\\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{3}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت و تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{a+b}{a-b}=\frac{5+3}{5-3}=\frac{8}{2}=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{b+d}{a+c}+\frac{a+b}{a-b}=\frac{3}{5}+4=\frac{23}{5}$$

۶۸ ۲

$$x^2=ab\Rightarrow x\times x=a\times b\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{2x}{2a}=\frac{x}{a}=\frac{b}{x}\Rightarrow\frac{2x-b}{2a-x}=\frac{x}{a}=\frac{b}{x}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{1}{2}=\frac{x}{a}=\frac{b}{x}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{x}{a}\Rightarrow x=\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}=\frac{b}{x}\Rightarrow x=2b\end{cases}\Rightarrow 2b=\frac{a}{2}\Rightarrow a=4b$$

تفاضل

تفاضل

$\frac{1}{2}$: طبق فرض

حال در عبارت خواسته شده به جای x، مقدار $\frac{a}{2}$ و سپس به جای a، مقدار 4b را قرار می‌دهیم:

$$\frac{4x+a}{5b+x}=\frac{4\left(\frac{a}{2}\right)+a}{5b+\frac{a}{2}}=\frac{3a}{5b+\frac{a}{2}}\overset{a=4b}{=}\frac{3(4b)}{5b+\frac{4b}{2}}=\frac{12b}{5b+2b}=\frac{12\cancel{b}}{7\cancel{b}}=\frac{12}{7}$$

۶۹ ۲

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=5\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=25\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}\xrightarrow{\times 2}\frac{2c^2}{2d^2}=25\Rightarrow\frac{a^2+2c^2}{b^2+2d^2}=25\xrightarrow{\text{جذر}}\sqrt{\frac{a^2+2c^2}{b^2+2d^2}}=\sqrt{25}=5$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضی): آقا ما گفتیم $a=c=5$ و $b=d=1$، اون وقت ...

پاسخ: اونوقت $\sqrt{\frac{a^2+2c^2}{b^2+2d^2}}=\sqrt{\frac{75}{3}}=\sqrt{25}=5$ میشه. بله این هم میشه. هر چا بحث پیوندن هست نام تو اکبر واقعا می‌رفشه.

سؤال دانش‌پژوه (همون قبلی): آقا دست شما درد نکنه! این هم نتیجه سریع کار کردن!

- شوخی کردم اکبر به هر حال اینم یه فنه که خوب تونستی توی این سؤال اجراش کنی.

۷۰ ۳

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+2\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{2}=z+2\Rightarrow x-1=2z+4\Rightarrow x=2z+5\quad(*)\\ \frac{y}{3}=z+2\Rightarrow y=3z+6\quad(**)\end{cases}$$

(۲) (۱)

حال تساوی‌های به دست آمده را در $2x+y-2z=16$ جایگذاری می‌کنیم:

$$2(2z+5)+(3z+6)-2z=16\Rightarrow 4z+10+3z+6-2z=16\Rightarrow 5z=0\Rightarrow z=0$$

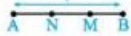
$$\xrightarrow{(*),(**)}\begin{cases}x=2z+5=2(0)+5=5\\ y=3z+6=3(0)+6=6\end{cases}\Rightarrow x+y=11$$

@khaneh_book

۷۱ ۱

$$\frac{a_1}{۵}=\frac{a_۲}{۴}=\frac{a_۳}{۳}=\frac{a_۴}{۲}=\frac{a_۵}{۱}\Rightarrow\frac{\overbrace{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴+a_۵}^{\text{محیط}}}{۵+۴+۳+۲+۱}=\frac{a_۲}{۴}\Rightarrow\frac{\text{محیط}}{۱۵}=\frac{a_۲}{۴}\Rightarrow\text{محیط}=\frac{۱۵}{۴}a_۲$$

۷۲ ۳ روی پاره‌خط AB، دو نقطهٔ N و M را مشخص می‌کنیم و نسبت‌های داده‌شده را می‌نویسیم:



$$۱)\ \frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{AM+MB}{MB}=\frac{۲+۱}{۱}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=۳\xrightarrow{AB=۴}\frac{۴}{MB}=۳\Rightarrow MB=\frac{۴}{۳}$$

$$۲)\ \frac{BN}{AN}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{BN+AN}{AN}=\frac{۲+۱}{۱}\Rightarrow\frac{AB}{AN}=۳\xrightarrow{AB=۴}\frac{۴}{AN}=۳\Rightarrow AN=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین:

$$NM=AB-(AN+MB)=۴-\left(\frac{۴}{۳}+\frac{۴}{۳}\right)=۴-\frac{۸}{۳}=\frac{۱۲-۸}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

۷۳ ۳

$$\frac{AP}{PB}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{AP}{AP+PB}=\frac{۲}{۲+۳}\Rightarrow\frac{AP}{AB}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow AP=\frac{۲}{۵}AB$$

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{AQ}{AQ+QB}=\frac{۳}{۳+۴}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow AQ=\frac{۳}{۷}AB$$

حال با توجه به شکل داریم:

$$PQ=AQ-AP=\frac{۳}{۷}AB-\frac{۲}{۵}AB=\frac{۱۵-۱۴}{۳۵}AB\Rightarrow PQ=\frac{۱}{۳۵}AB\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{PQ=۲}۲=\frac{۱}{۳۵}AB\Rightarrow AB=۷۰$$

۷۴ ۴ با توجه به درسنامه، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۷۵ ۲ نتیجهٔ گرفته‌شده بر اساس مجموعهٔ محدودی از مشاهدات بوده است (فقط مشاهدهٔ ۲۰ بازی انجام شده)، لذا از استدلال استقرایی برای این نتیجه‌گیری استفاده شده است.

۷۶ ۱ نتیجهٔ گرفته‌شده بر اساس مجموعهٔ محدودی از مشاهدات بوده است. پس از استدلال استقرایی استفاده شده است.

۷۷ ۱ نتیجه‌گیری بیان‌شده بر اساس مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است. پس از استدلال استقرایی استفاده شده است و این نتیجه‌گیری همواره درست نمی‌باشد. به‌عنوان مثال اگر پلاستیک را حرارت دهیم به‌جای انبساط، منقبض خواهد شد!

۷۸ ۱ در اثبات حکم موردنظر از استدلال استنتاجی به‌صورت زیر استفاده شده است:

حاصل جمع عدد فرد a و عدد زوج b، عددی فرد است لذا $(a+b)$ فرد می‌باشد. از طرفی با توجه به صورت سؤال مجذور $(a+b)$ یک واحد بیش‌تر از مضرب ۸ است. بنابراین: $(a+b)^۲-۱$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

$$(a+b)^۲-۱=۸k\Rightarrow(a+b)^۲=۸k+۱$$

۷۹ ۲ با توجه به جملات بیان‌شده موقعیت a، b و c را نسبت به هم پیدا می‌کنیم.

الف) b کوچک‌تر از c است. بنابراین: $b<c$

ب) a کوچک‌ترین عدد نیست. بنابراین a نمی‌تواند قبل از b بیاید چون در این صورت کوچک‌ترین عدد خواهد شد. پس a بین b و c قرار می‌گیرد $(b<a<c)$ و یا بعد از c $(b<c<a)$ که در هر دو حالت a از b بزرگ‌تر خواهد بود.

۸۰ ۴ اعداد داده‌شده در گزینه‌ها را به توان ۲ رسانده و بررسی می‌کنیم مربع کدام‌یک مضرب ۷ به علاوهٔ یک نمی‌باشد.

۱) $۸^۲=۶۴=۶۳+۱=\underbrace{۹\times۷}_{\text{مضرب ۷}}+۱$

۲) $۱۳^۲=۱۶۹=۱۶۸+۱=\underbrace{۲۴\times۷}_{\text{مضرب ۷}}+۱$

۳) $۱۵^۲=۲۲۵=۲۲۴+۱=\underbrace{۳۲\times۷}_{\text{مضرب ۷}}+۱$

۴) $۱۷^۲=۲۸۹=\underbrace{۲۸۸}_{\text{مضرب ۷ نیست}}+۱$

پس در گزینهٔ (۴) عددی وجود دارد که مربع آن، مضرب ۷ به علاوهٔ ۱ نمی‌باشد و مثال نقض حکم داده شده است.

۸۱ ۴ می‌دانیم اگر عدد a بین ۰ و ۱ باشد $(۰<a<۱)$، آن‌گاه توان دوم آن عدد کوچک‌تر از خود آن عدد است $(a^۲<a)$. پس در گزینه‌ها به دنبال عددی بین ۰ و ۱ می‌گردیم که فقط گزینهٔ (۴) یعنی عدد $۱-\sqrt{۳}$، بین ۰ و ۱ است. بنابراین توان دوم آن کوچک‌تر شده و مثال نقضی برای حکم داده‌شده به حساب می‌آید.

@khanehbook

۸۲ ۳ باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که وقتی اعداد آن در هم ضرب می‌شوند، عدد حاصل گنگ نباشد (گویا باشد).

۱) $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ گنگ

۲) $(۱+\sqrt{۲})(۲-\sqrt{۲})=۲-\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲=۲+\sqrt{۲}-۲=\sqrt{۲}$ گنگ

۳) $(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}۱^۲-(\sqrt{۲})^۲=۱-۲=-۱$ گویا ✓

۴) $(\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲=\sqrt{۲}-۲$ گنگ

۸۳ ۲ باید عددی را به‌عنوان مثال نقض معرفی کنیم که اولاً گنگ باشد و ثانیاً حکم گزارهٔ شرطی را نقض کند، یعنی عبارت $۲x^۲-۴x+۵$ را تبدیل به عددی گویا کند.

$$A=۲x^۲-۴x+۵=۲x^۲-۴x+۲+۳=۲(x^۲-۲x+۱)+۳=۲(x-۱)^۲+۳$$

اگر گزینه‌ها را امتحان کنید، فقط گزینهٔ (۳) عددی گنگ است که به‌ازای آن A گویا می‌شود:

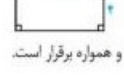
$$x=۵\sqrt{۲}+۱\Rightarrow A=۲(۵\sqrt{۲}+۱-۱)^۲+۳=۲(۵\sqrt{۲})^۲+۳=۲(۵۰)+۳=۱۰۳$$

۸۴ ۴ باید عددی را به‌عنوان مثال نقض حکم داده‌شده معرفی کنیم که بر ۵ و ۳ قابل قسمت باشد ولی رقم سمت راست آن صفر نباشد. از میان اعداد داده‌شده ۱۱۵ بر ۳ قابل قسمت نیست. از میان ۳ عدد باقی‌مانده که هر سه بر ۳ و ۵ قابل قسمت‌اند، عدد ۲۲۵ را انتخاب می‌کنیم که رقم سمت راست آن صفر نمی‌باشد.

۸۵ ۳ با توجه به تعریف مثال نقض، گزینهٔ (۳) صحیح است.

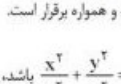
۸۶ ۱ مثال نقض آن $a=۲$ است که توان دوم آن ۴ و توان سوم آن ۸ بوده و در نتیجه توان دوم آن کوچک‌تر از توان سوم آن می‌باشد.

۸۷ ۴ بررسی گزینه‌ها:



گزینهٔ (۱): مثال نقض این گزینه عدد ۲ است که عددی اول و زوج می‌باشد.

گزینهٔ (۲): در لوزی لزوماً اضلاع بر هم عمود نمی‌باشند، حال آن‌که در مستطیل اضلاع حتماً باید بر هم عمود باشد. پس هر لوزی لزوماً مستطیل نمی‌باشد، مانند شکل مقابل که لوزی است ولی مستطیل نیست.



گزینهٔ (۳): در مستطیل لزوماً اضلاع با هم مساوی نمی‌باشند، حال آن‌که در لوزی تمامی اضلاع با هم برابرند. پس هر مستطیل نمی‌تواند لزوماً لوزی باشد، مانند شکل مقابل که مستطیل بوده ولی لوزی نمی‌باشد.

گزینهٔ (۴): هر مثلث متساوی‌الاضلاع شرایط مثلث متساوی‌الساقین (یعنی دو ضلع برابر) را دارد. پس این حکم کلی مثال نقض ندارد و همواره برقرار است.

۸۸ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): جملهٔ شرطی داده‌شده همواره درست بوده، لذا قضیهٔ شرطی است. عکس قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر $\frac{x^۲}{y^۲}+\frac{y^۲}{x^۲}=۲$ باشد، آن‌گاه $x=y\neq۰$ است.» می‌باشد که مثال نقض آن $x=۲$ و $y=-۲$ است که در شرط $\frac{x^۲}{y^۲}+\frac{y^۲}{x^۲}=۲$ صدق می‌کند ولی $x\neq y$ است.

گزینهٔ (۲): جملهٔ شرطی داده‌شده همواره درست بوده، لذا قضیهٔ شرطی است. عکس قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر $\sin x=\sin y$ باشد، آن‌گاه $x=y$ است.» می‌باشد که مثال نقض آن دو زاویهٔ $x=۰$ و $y=\pi$ است که سینوس‌های آن‌ها برابر ولی خودشان با هم مساوی نیستند.

گزینهٔ (۳): جملهٔ شرطی داده‌شده همواره درست بوده، لذا قضیهٔ شرطی است. عکس قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر $\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}=۰$ باشد، آن‌گاه $x=y$ است.»، این جملهٔ شرطی همواره برقرار بوده و مثال نقض ندارد (قضیهٔ دو شرطی است.)، زیرا:

$$\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۳]{y}\xrightarrow{\text{توان ۳}}x=y$$ همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۴): جملهٔ شرطی داده‌شده همواره درست نیست و مثال نقض آن $x=-۲$ است که در $(x-۱)^۴>۰$ صدق کرده ولی در $x-۱>۰$ صدق نمی‌کند. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۸۹ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عکس قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر $x^۲-۳x+۲=۰$ باشد، آن‌گاه $x=۱$» که غلط است، زیرا اگر $x=۲$ باشد، نیز عبارت $x^۲-۳x+۲$ برابر صفر می‌شود ولی $x\neq۱$ است.

گزینهٔ (۲): ابتدا نامعادله‌های $۳x^۳-۸۱\geq۰$ و $(x-۳)(x+۳)\geq۰$ را حل می‌کنیم:

$$(x-۳)(x+۳)\geq۰\Rightarrow x\leq-۳\ \text{یا}\ x\geq۳\quad,\quad ۳x^۳-۸۱\geq۰\Rightarrow x^۳\geq۲۷\Rightarrow x\geq۳$$

پس قضیهٔ شرطی را می‌توان به‌صورت «اگر $x\geq۳$ باشد، آن‌گاه $x\geq۳$ یا $x\leq-۳$» بنویسیم که عکس آن به‌صورت «اگر $x\geq۳$ یا $x\leq-۳$ باشد، آن‌گاه $x\geq۳$» در می‌آید که نادرست است. مثلاً $x=-۴$ در فرض صدق کرده ولی در حکم آن صدق نمی‌کند ($-۴\not\geq۳$).

گزینهٔ (۳): عکس قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر $x>۲$ باشد، آن‌گاه $x>۱$» است که نادرست است، مثلاً $x=۱/۵$ در فرض صدق کرده ولی در حکم آن صدق نمی‌کند ($۱/۵\not>۲$).

گزینهٔ (۴): عکس قضیهٔ شرطی به‌صورت «اگر حداقل یکی از a یا b برابر ۲ باشد، آن‌گاه $(a-۲)(b-۲)=۰$» همواره درست است. پس عکس قضیهٔ شرطی در این گزینه، قضیهٔ شرطی است.

@khanehbook

۹۰ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عکس آن به‌صورت «اگر $x^2 \geq 0$ باشد، آن‌گاه $x \leq |x|$ است.» می‌باشد که همواره درست است. زیرا جواب نامعادلهٔ $x^2 \geq 0$ تمام اعداد حقیقی می‌باشد که به‌ازای همهٔ آن‌ها نامساوی $x \leq |x|$ برقرار است. زیرا قدرمطلق یک عدد همواره از خودش بزرگ‌تر یا مساوی با خودش است.

گزینهٔ (۲): عکس قضیه به‌صورت «اگر $(x-1)^2 + (x^2-1)^2 = 0$، آن‌گاه $x = 1$ است.» که همواره درست است. زیرا:

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{(x^2-1)^2}_{\text{نامنفی}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{و} \\ (x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} x = 1$$

گزینهٔ (۳): عکس قضیه به‌صورت «اگر قطرهای یک چهارضلعی با هم برابر باشد، آن چهارضلعی مستطیل است.» می‌باشد که به عنوان مثال نقض آن ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را در نظر بگیرید که دارای ۲ قطر برابر بوده ولی مستطیل نمی‌باشد.

گزینهٔ (۴): عکس قضیه به‌صورت «هر نقطهٔ دلخواه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.» که همواره درست و اثبات آن را گفته‌ایم.

۹۱ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر x عددی فرد باشد (یعنی $x = 2k+1$)، آن‌گاه با استفاده از استدلال استنتاجی داریم:

$$3x^2 - 3 = 3(2k+1)^2 - 3 = 3(4k^2+4k+1) - 3 = 12k^2 + 12k + 3 - 3 = 12(k^2+k) = 12\underbrace{k(k+1)}_{\text{حاصل‌ضرب ۲ عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۲ است}} = 24t$$

پس اگر x عددی فرد باشد، $3x^2 - 3$ همواره مضرب ۲۴ است.

گزینهٔ (۲): با استفاده از استدلال استنتاجی داریم:

$$\begin{cases} x = 6k+5 \\ y = 6k'+5 \end{cases} \Rightarrow xy = (6k+5)(6k'+5) = 36kk' + 30k + 30k' + \underbrace{25}_{24+1} = \underbrace{6(6kk' + 5k + 5k' + 4)}_{k''} + 1 = 6k'' + 1$$

پس xy همواره به‌صورت $6k''+1$ است.

گزینهٔ (۳): با استفاده از استدلال استنتاجی و با فرض $x = 2k$ و $y = 2k+2$ و $z = 2k+4$ داریم:

$$xyz = (2k)(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$$

k، $k+1$ و $k+2$ سه عدد متوالی هستند و می‌دانیم حاصل‌ضرب هر ۳ عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. بنابراین داریم:

$$xyz = 8(6q) = 48q$$

پس xyz همواره مضرب ۴۸ است.

گزینهٔ (۴): همواره درست نمی‌باشد، مثال نقض آن $x = 2$ و $y = 5$ است که حاصل‌ضربشان عدد زوج ۱۰ می‌باشد ولی حاصل جمعشان $2 + 5 = 7$ عدد زوج نمی‌باشد.

۹۲ ۴ با توجه به درسنامه، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۹۳ ۲ با روش برهان خلف ثابت می‌کنیم که $x + \sqrt{7}$ عددی گنگ (Q') است.

حکم: $(x + \sqrt{7}) \in Q'$ (گنگ)

فرض: $\sqrt{7} \in Q'$ ، $x \in Q$

فرض کنیم $x + \sqrt{7}$ عددی گنگ نباشد، پس گویا بوده و می‌توان آن را به‌صورت $x + \sqrt{7} = \frac{a}{b}$ $(a, b \in Z)$ نمایش داد:

$$x + \sqrt{7} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b} - x$$

می‌دانیم تفریق دو عدد گویا (یعنی $\frac{a}{b} - x$) عددی گویا بوده و برابر عدد گنگ $\sqrt{7}$ نمی‌شود، پس به تناقض رسیدیم. بنابراین حکم برقرار است.

۹۴ ۳ با توجه به روش برهان خلف، برای اثبات، فرض کنیم حکم درست نباشد. یعنی فرض می‌کنیم d_2 با d_1 موازی نباشد. یعنی d_2 و d_1 هم‌دیگر را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند.

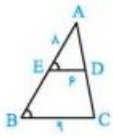
۹۵ ۲ با توجه به روش برهان خلف، برای اثبات فرض می‌کنیم حکم درست نباشد یعنی فرض می‌کنیم n عددی فرد نباشد پس ابتدا فرض می‌کنیم n زوج باشد.

۹۶ ۳ بدون شرح!

۹۷ ۴ گزینهٔ (۴) نادرست است، زیرا با استدلال استنتاجی می‌توان نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به دست آورده‌ایم، ثابت کنیم.

@khanen_book

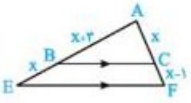
۹۸ ۱ چون $\hat{B} = \hat{E}$ است، پس $ED \parallel BC$ است، از طرفی چون قاعده‌ها داده شده‌اند، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۸+BE} = \frac{۶}{۹} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۹\times ۸ = ۶(۸+BE)$$

$$\Rightarrow ۷۲ = ۴۸ + ۶BE \Rightarrow ۶BE = ۲۴ \Rightarrow BE = ۴$$

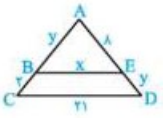
۹۹ ۱ چون BC موازی EF است. پس به کمک قضیهٔ تالس جزء به جزء x را می‌یابیم:



$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF} \Rightarrow \frac{x+۳}{x} = \frac{x}{x-۱} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} (x+۳)(x-۱) = x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = x^۲ \Rightarrow ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

۱۰۰ ۲ ابتدا از قضیهٔ تالس جزء به جزء استفاده می‌کنیم تا y به‌دست بیاید:

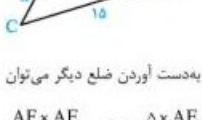


$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{ED} \Rightarrow \frac{y}{۲} = \frac{۸}{y} \Rightarrow y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y = ۴$$

حال قضیهٔ تالس جزء به کل را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{y}{y+۲} = \frac{x}{۲۱} \xrightarrow{y=۴} \frac{۴}{۴+۲} = \frac{x}{۲۱} \Rightarrow ۸۴ = ۶x \Rightarrow x = ۱۴$$

۱۰۱ ۲ ابتدا داده‌های مسأله را روی شکل می‌نویسیم. محیط مثلث ABC برابر ۳۶ است. بنابراین:



$$AB + BC + AC = ۳۶ \Rightarrow ۹ + ۱۵ + AC = ۳۶ \Rightarrow AC = ۱۲ \quad (*)$$

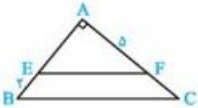
با فرض $FC = x$، داریم $AF = ۱۲ - x$ حال قضیهٔ تالس جزء به جزء را می‌نویسیم:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{۱۲-x}{x} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow \frac{۱۲-x}{x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲۴ - ۲x = x \Rightarrow ۲۴ = ۳x \Rightarrow x = ۸$$

۱۰۲ ۳ فکر می‌کنید مساحت مثلث با داشتن یکی از اضلاع قائمه به چه درد می‌خورد؟ بله، درست حدس زدید. برای به‌دست آوردن ضلع دیگر می‌توان از آن استفاده کرد. با ما همراه باشید. مساحت مثلث AEF برابر ۱۰ است. پس:

$$\frac{AF \times AE}{۲} = ۱۰ \Rightarrow \frac{۵ \times AE}{۲} = ۱۰ \Rightarrow AE = ۴$$

حال رابطهٔ فیثاغورس را در همان مثلث می‌نویسیم:

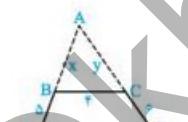


$$EF^۲ = AF^۲ + AE^۲ \Rightarrow EF^۲ = ۵^۲ + ۴^۲ = ۲۵ + ۱۶ = ۴۱ \Rightarrow EF = \sqrt{۴۱}$$

از طرفی چون $EF \parallel BC$ است، پس از قضیهٔ تالس (جزء به کل) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۴+۲} = \frac{\sqrt{۴۱}}{BC} \Rightarrow ۴BC = ۶\sqrt{۴۱} \Rightarrow BC = \frac{۶\sqrt{۴۱}}{۴} = \frac{۳\sqrt{۴۱}}{۲}$$

۱۰۳ ۴ از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

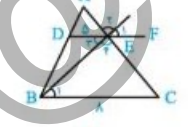


$$\begin{cases} \frac{x}{x+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۰ \Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = ۴ \\ \frac{y}{y+۶} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۴ \Rightarrow ۵y = ۲۴ \Rightarrow y = \frac{۲۴}{۵} \xrightarrow[\times ۲]{} \frac{۴۸}{۱۰} = ۴/۸ \end{cases}$$

بنابراین:

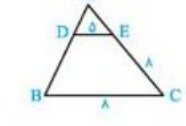
$$\text{محیط مثلث } ABC = x + y + ۴ = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۱۰۴ ۲



$$\begin{cases} DF \parallel BC \text{ مورب } BE \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{E}_۲ = \hat{E}_۱ \text{ متقابل به رأس} \\ \hat{E}_۲ = \hat{E}_۴ \text{ متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\hat{E}_۱ = \hat{E}_۳} \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ = \hat{E}_۳ = \hat{E}_۴ = \hat{B}_۱$$

چون $\hat{E}_۲ = \hat{B}_۱$، مثلث BCE متساوی‌الساقین بوده و لذا: $CE = BC = ۸$

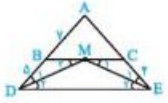


$$DE \parallel BC \text{ قضیهٔ تالس} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AE+۸} = \frac{۵}{۸}$$

$$\Rightarrow ۸AE = ۵AE + ۴۰ \Rightarrow ۳AE = ۴۰ \Rightarrow AE = \frac{۴۰}{۳}$$

@khanenbook

۱۰۵ ۱



① $BC \parallel DE$ ، مورب $ME \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{E}_2$

از طرفی $\hat{E}$ نیمساز ME است. پس $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ و لذا داریم:

$\hat{M}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow$ مثلث CEM متساوی الساقین است $\Rightarrow MC = CE = ۴$

② $BC \parallel DE$ ، مورب $DM \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{D}_2$

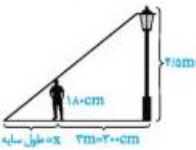
از طرفی $\hat{D}$ نیمساز DM است. پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و لذا داریم:

$\hat{M}_2 = \hat{D}_1 \Rightarrow$ مثلث BMD متساوی الساقین است. $\Rightarrow BM = DB = ۵$

حال در مثلث ADE، قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{۷}{۷+۵} = \frac{BM+MC}{DE} \Rightarrow \frac{۷}{۱۲} = \frac{۵+۴}{DE} \Rightarrow ۷DE = ۱۲\times ۹ \Rightarrow DE = \frac{۱۰۸}{۷}$$

۱۰۶ ۱ سؤال پیشنهادی: *پیشنهاد شبیه به داستانه! پیاده‌روی و غروب و نور و ... ولش کنید! ابتدا شکل مسأله را رسم*

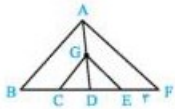


می‌کنیم و سپس از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم تا طول سایه را بیابیم:

$$\frac{۱۸۰}{۴۵۰} = \frac{x}{x+۳۰۰} \Rightarrow ۱۸(x+۳۰۰) = ۴۵x$$

$$\Rightarrow ۱۸x + ۵۴۰۰ = ۴۵x \Rightarrow ۵۴۰۰ = ۲۷x \Rightarrow x = ۲۰۰\,cm$$ یا ۲m

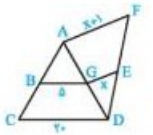
۱۰۷ ۲ طبق فرض $\frac{CD}{BC} = \frac{۱}{۴}$ داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{CD}{BC} = \frac{DG}{AG} \overset{\text{طبق فرض}}{\Longrightarrow} \frac{۱}{۴} = \frac{DG}{AG} \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ADF}: \frac{DG}{AG} = \frac{DE}{EF} \overset{(*)}{\underset{EF=۳}{\Longrightarrow}} \frac{۱}{۴} = \frac{DE}{۳} \Rightarrow DE = \frac{۳}{۴}$$

۱۰۸ ۲



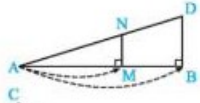
$$\overset{\Delta}{ACD}: \frac{BG}{CD} = \frac{AG}{AD} \Rightarrow \frac{۵}{۲۰} = \frac{AG}{AD} \Rightarrow \frac{AG}{AD} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow AG = \frac{۱}{۴}AD \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ADF}: \frac{DG}{AD} = \frac{GE}{AF} \Rightarrow \frac{AD-AG}{AD} = \frac{x}{x+۱} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{\overbrace{AD-\frac{۱}{۴}AD}^{\frac{۳}{۴}AD}}{AD} = \frac{x}{x+۱}$$

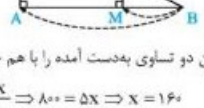
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{x}{x+۱} \Rightarrow ۳x+۳ = ۴x \Rightarrow x = ۳$$

۱۰۹ ۱ چون پاره‌خط‌های AC و NM و BD بر AB عمودند، پس هر ۳ موازی هم هستند. حال از قضیهٔ تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:

$$MN \parallel BD: \frac{AM}{AB} = \frac{NM}{BD} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{x}{۲۰۰}$$



$$MN \parallel AC: \frac{BM}{AB} = \frac{NM}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{x}{۸۰۰}$$



حال طرفین دو تساوی به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{AM}{AB} + \frac{BM}{AB} = \frac{x}{۲۰۰} + \frac{x}{۸۰۰} \Rightarrow \frac{AM+BM}{AB} = \frac{۴x+x}{۸۰۰} \Rightarrow \frac{AB}{AB} = \frac{۵x}{۸۰۰} \Rightarrow ۱ = \frac{۵x}{۸۰۰} \Rightarrow ۸۰۰ = ۵x \Rightarrow x = ۱۶۰$$

سؤال دانش‌پژوه (ترمین نیکلو)، **آقا منتظر راه ساده‌تریما، شما بالاخره استادین مطمئنم به فکر ما شاگردای تیزبینتون هم هستین.** 😊

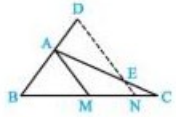
پاسخ: *تره دیگه چیگار کنیم، برای شما تیزبین‌ها هم فرمول داریم. نگاه کن به شکل زیر و فرمولو حفظ کن بره! شاید یه فرقی شد!*

$$\Rightarrow x = \frac{mn}{m+n} \overset{\text{در این سؤال}}{\Longrightarrow} x = \frac{۸۰۰\times ۲۰۰}{۸۰۰+۲۰۰} = \frac{۱۶۰۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۱۶۰$$

ـ اووه عجب فرمول به دردبخوری بود فال کردیم. ایولا دارین استاد! (ملق زدن چند نفر و قرار چند نفر به حیاط مدرسه در حال هیع زدن)

@khanehbook

۱۱۰ ۳ در مثلث BDN دو خط AM با DN موازی‌اند.



طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM}$$

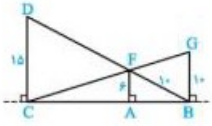
در مثلث ACM دو خط EN و AM موازی‌اند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{MN}{MC}$$

حال چون AM میانه است، پس MC = BM و در نتیجه طرف راست تساوی‌ها با هم برابر هستند و لذا طرف چپ آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\xrightarrow{AB=\frac{3}{2}AC}\frac{AD}{\frac{3}{2}AC}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD}{AE}=\frac{3}{2}$$

۱۱۱ ۲ تمام سختی این سؤال رسم شکل آن است. می‌خواهیم فاصلهٔ دو تیر یعنی طول BC را بیابیم. ابتدا از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF استفاده کرده و طول AB را می‌یابیم:

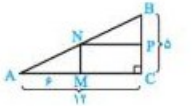


$$FB^2=AF^2+AB^2\Rightarrow 10^2=6^2+AB^2\Rightarrow AB^2=100-36=64\Rightarrow AB=8$$

حال چون AF و CD موازی هستند، از تالس (جزء به کل) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AF}{CD}=\frac{AB}{BC}\xrightarrow{AB=8}\frac{6}{15}=\frac{8}{BC}\Rightarrow 6BC=8\times 15\Rightarrow BC=\frac{120}{6}=20$$

۱۱۲ ۱



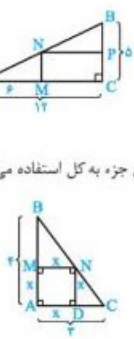
$$MN\parallel BC\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow\frac{MN}{5}=\frac{6}{12}\Rightarrow MN=\frac{5}{2}=2/5$$

چون MNPC مستطیل است، پس $PC=MN=2/5$ و $NP=MC=AC-AM=12-6=6$.

بنابراین محیط مستطیل برابر می‌شود با:

$$\text{محیط مستطیل}=2(NP+MN)=2(6+2/5)=2(8/5)=17$$

۱۱۳ ۱ برای پیدا کردن مساحت مربع، ابتدا باید طول ضلع آن را بیابیم. با فرض آن‌که طول ضلع مربع x باشد، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



$$MN\parallel AC:\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AC}\Rightarrow\frac{4-x}{4}=\frac{x}{3}\Rightarrow 3(4-x)=4x$$

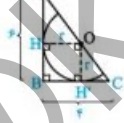
$$\Rightarrow 12-3x=4x\Rightarrow 12=7x\Rightarrow x=\frac{12}{7}$$

پس مساحت مربع برابر می‌شود با: $S=x^2=\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{144}{49}$

سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالازاده)، آقا این سؤال راه راحت‌تری نداشت؟

پاسخ: آقه من یه تو پی بگم پسر؟ باشه حالا که اصرار می‌کنی نه به چون قورت نداشت، خوب شد راهت شد؛ یه ذره هم علمی فکر کن!

۱۱۴ ۱ از نقطهٔ O مرکز دایره، دو خط بر اضلاع AB و BC عمود می‌کنیم. OH و OH′ همان شعاع دایره هستند. حال از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



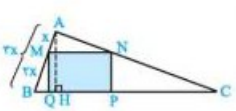
$$\frac{AH}{AB}=\frac{OH}{BC}\Rightarrow\frac{6-r}{6}=\frac{r}{4}$$

$$\Rightarrow 24-4r=6r\Rightarrow 10r=24\Rightarrow r=2/4$$

۱۱۵ ۴ طبق صورت سؤال $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$ است، پس فرض کنیم $AM=x$ و $AB=3x$ باشد. در این‌صورت $BM=AB-AM=3x-x=2x$ شده و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{1}{3}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow MN=\frac{1}{3}BC\quad(*)$$

حال ارتفاع AH را رسم کرده و داریم:

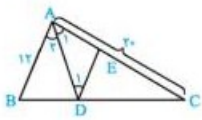


$$\overset{\Delta}{ABH}:\frac{BM}{AB}=\frac{MQ}{AH}\Rightarrow\frac{2x}{3x}=\frac{MQ}{AH}\Rightarrow MQ=\frac{2}{3}AH\quad(**)$$

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{MN\times MQ}{AH\times BC}\xrightarrow{(*),(**)}\frac{\frac{1}{3}BC\times\frac{2}{3}AH}{AH\times BC}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$$

@khanen_book

۱۱۶ ۲



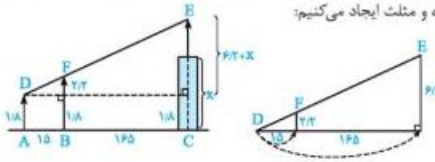
$$\begin{cases} AD: \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ نیمساز} \\ AD: \hat{A}_2 = \hat{D}_1 \text{ مورب و } AB \parallel DE \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \text{مثلث } ADE \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow AE = DE \quad (*)$$

ثانیاً موازی بودن AB و DE ما را یاد قضیهٔ تالس می‌اندازد که چون اندازهٔ AB داده‌شده از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{۲۰} = \frac{DE}{۱۲} \xrightarrow{(*)} \frac{CE}{۲۰} = \frac{AE}{۱۲} \xrightarrow[\text{با توجه به شکل}]{AE = ۲۰ - CE} \frac{CE}{۲۰} = \frac{۲۰ - CE}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۲CE = ۲۰(۲۰ - CE) \Rightarrow ۱۲CE = ۴۰۰ - ۲۰CE \Rightarrow ۳۲CE = ۴۰۰ \Rightarrow CE = \frac{۴۰۰}{۳۲} = \frac{۵۰}{۴} = ۱۲/۵$$

۱۱۷ ۲ از موازی بودن پاره‌خط‌های BF ، AD و CE یاد استفاده از قضیهٔ تالس می‌افتیم. امّا مثلثی در شکل وجود ندارد که بخواهیم قضیهٔ تالس را به کار ببریم. به همین خاطر از D خطی موازی سطح زمین رسم کرده و مثلث ایجاد می‌کنیم:



$$\frac{۲/۲}{۶/۲ + x} = \frac{۱۵}{۱۵ + ۱۶۵} \Rightarrow \frac{۲/۲}{۶/۲ + x} = \frac{\frac{۱}{۱۵}}{\frac{۱۸۰}{۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۱۲ \times ۲/۲ = ۶/۲ + x \Rightarrow ۲۶/۴ = ۶/۲ + x \Rightarrow x = ۲۰/۲$$

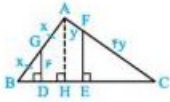
سؤال دانش‌پژوه (آرمین کیوانی)، آقا (۶/۲ + x) از کجا سروکلش پیدا شد؟

پاسخ: ببین طول پاره‌خط CE برابر $۸ + x$ است، اگه به اندازهٔ ۱/۸ از اون رو کنار بگذاریم، مقدار باقی‌مانده برابر می‌شود با:

$$(۸ + x) - ۱/۸ = ۶/۲ + x$$

۱۱۸ ۲ در شکل از A بر ضلع BC عمود رسم کنیم. حال در مثلث‌های ABH و ACH قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

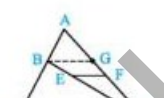
$$\overset{\Delta}{ABH}: \frac{GD}{AH} = \frac{BG}{BA} \xrightarrow{AB \text{ وسط } G} \frac{۶}{AH} = \frac{x}{۲x} \Rightarrow \frac{۶}{AH} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AH = ۱۲ \quad (*)$$



$$\overset{\Delta}{ACH}: \text{طبق فرض} \frac{CF}{AF} = ۴ \Rightarrow \text{فرض کنیم } CF = ۴y, AF = y$$

$$\text{تالس}: \frac{CF}{CA} = \frac{FE}{AH} \Rightarrow \frac{۴y}{۵y} = \frac{FE}{۱۲} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{FE}{۱۲} \Rightarrow FE = \frac{۴ \times ۱۲}{۵} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

۱۱۹ ۲ از نقطهٔ B خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا ضلع AD را در G قطع کند. حال از قضیهٔ تالس در مثلث‌های ACD و BDG استفاده می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ACD}: \frac{AB}{AC} = \frac{BG}{CD} \xrightarrow{CD = ۱۲} \frac{AB}{AB + BC} = \frac{BG}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{۲AB = CD} \frac{AB}{AB + ۲AB} = \frac{BG}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{BG}{۱۲} \Rightarrow BG = ۴ \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{BDG}: \frac{DE}{BD} = \frac{EF}{BG} \xrightarrow{(*)} \frac{BD - BE}{BD} = \frac{EF}{۴} \Rightarrow \frac{BD}{BD} - \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{۴} \xrightarrow{۲BE = BD} ۱ - \frac{BE}{۲BE} = \frac{EF}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{EF}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{EF}{۴} \Rightarrow EF = \frac{۸}{۳}$$

۱۲۰ ۴

$$FE \parallel AD: \frac{GF}{AG} = \frac{FE}{AD} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{GF}{AG} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \text{فرض کنیم } GF = ۲x, AG = ۵x$$

چون F وسط BG است، پس $GF = FB = ۲x$. در نتیجه داریم:

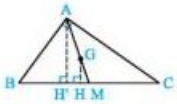
$$AB = AG - (FB + GF) = ۵x - (۲x + ۲x) = x$$

در مثلث ADG چون BC موازی DG است، داریم:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BC}{DG} \Rightarrow \frac{x}{۵x} = \frac{BC}{DG} \Rightarrow \frac{DG}{BC} = ۵$$

@khaneh_book

۱۲۱ ۳ از A و G عمودهایی بر ضلع BC رسم می‌کنیم. در مثلث AH'M داریم:



$$\frac{GM}{AM}=\frac{GH}{AH'}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{۱}{۳}=\frac{GH}{AH'}\Rightarrow GH=\frac{AH'}{۳}$$

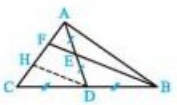
حال ابتدا طول وتر مثلث قائم‌الزاویه را می‌یابیم:

$$\text{فیثاغورس}: BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC^۲=۷^۲+۲۴^۲=۶۲۵\Rightarrow BC=۲۵$$

حال مساحت مثلث را از دو طریق به دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم تا از آن ارتفاع وارد بر وتر به دست آید:

$$AB\times AC=AH'\times BC\Rightarrow ۷\times ۲۴=AH'\times ۲۵\Rightarrow AH'=\frac{۷\times ۲۴}{۲۵}=۶/۷۲\Rightarrow GH=\frac{AH'}{۳}=\frac{۶/۷۲}{۳}=۲/۲۴$$

۱۲۲ ۴ در شکل روبه‌رو از D خطی موازی FB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در H قطع کند. حال در مثلث BCF قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:



$$\frac{HD}{FB}=\frac{CD}{CB}\xrightarrow{CD=\frac{۱}{۲}CB}\frac{HD}{FB}=\frac{\frac{۱}{۲}CB}{CB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow HD=\frac{۱}{۲}FB\ (*)$$

از طرفی چون HD موازی FB است، در مثلث ADH قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AD}=\frac{FE}{HD}\xrightarrow{AE=\frac{۱}{۲}AD}\frac{\frac{۱}{۲}AD}{AD}=\frac{FE}{HD}\Rightarrow\frac{FE}{HD}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow HD=۲FE\ (**)$$

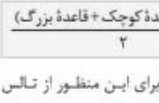
با جایگذاری رابطهٔ (**) در (*) داریم:

$$HD=\frac{۱}{۲}FB\xrightarrow{HD=۲FE}۲FE=\frac{۱}{۲}FB\Rightarrow\frac{FB}{FE}=۴$$

۱۲۳ ۲

یادآوری مساحت ذوزنقه برابر است با: $\frac{\text{ارتفاع}\times(\text{قاعدهٔ کوچک}+\text{قاعدهٔ بزرگ})}{۲}$

قسمت سایه‌دار یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است که برای محاسبهٔ مساحت آن ابتدا باید طول قاعده‌های ذوزنقه را بیابیم. برای این منظور از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



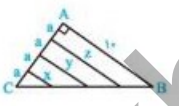
$$GB\parallel ED:\frac{GB}{ED}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{GB}{۵}=\frac{۲}{۲+۳+۵}\Rightarrow GB=۱$$

$$CF\parallel ED:\frac{CF}{ED}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow\frac{CF}{۵}=\frac{۲+۳}{۲+۳+۵}\Rightarrow CF=۲/۵$$

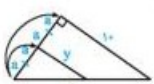
پس مساحت ذوزنقه برابر می‌شود با:

$$\frac{(GB+CF)\times BC}{۲}=\frac{(۱+۲/۵)\times ۳}{۲}=\frac{۳/۵\times ۳}{۲}=\frac{۱۰/۵}{۲}=۵/۲۵$$

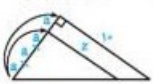
۱۲۴ ۲ **روش اول:** ضلع AC به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است که هر قسمت را a فرض می‌کنیم. چون پاره‌خط‌های رسم‌شده موازی AB هستند، پس مثلث‌های ایجادشده با مثلث ABC متشابه هستند حال نسبت تشابه را در هر دو مثلث می‌نویسیم:



$$\frac{x}{۱۰}=\frac{a}{۴a}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵$$



$$\frac{y}{۱۰}=\frac{۲a}{۴a}\Rightarrow y=\frac{۲۰}{۴}=۵$$



$$\frac{z}{۱۰}=\frac{۳a}{۴a}\Rightarrow z=\frac{۳۰}{۴}=۷/۵$$

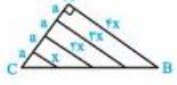
بنابراین:

$$x+y+z=۲/۵+۵+۷/۵=۱۵$$

روش دوم:

نکته اگر خطوطی مطابق شکل موازی قاعدهٔ BC به گونه‌ای رسم شود که ضلع AC را به چند قسمت مساوی تقسیم کنند، آن‌گاه طول پاره‌خط‌های داخل مثلث به صورت x، ۲x، ۳x و ... است.

با توجه به این نکته داریم:

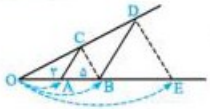


$$\text{طبق فرض}\Rightarrow AB=۱۰\Rightarrow ۴x=۱۰\Rightarrow x=۲/۵$$

$$\text{مجموع طول پاره‌خط‌ها}=x+۲x+۳x=۶x\xrightarrow{x=۲/۵}۶(۲/۵)=۱۵$$

@khaneh_book

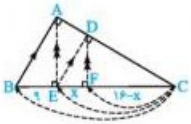
۱۲۵ ۱



$$(\text{فلش متوسط})^2 = \text{فلش بزرگ} \times \text{فلش کوچک} \Rightarrow (3+5)^2 = 3 \times \overbrace{(3+5+BE)}^{8}$$

$$\Rightarrow 64 = 24 + 3BE \Rightarrow 40 = 3BE \Rightarrow BE = \frac{40}{3}$$

۱۲۶ ۳ درسنامه که یادتون هست بچه‌ها. همون روش خوب رو نیاز داریم. چهار خط دو به دو موازی داریم. بنابراین روی ضلعی که ۳ تکه شده است، سه فلش رسم کرده و داریم:



$$(\text{فلش متوسط})^2 = \text{فلش بزرگ} \times \text{فلش کوچک} \Rightarrow (x + (16-x))^2 = (16-x) \times (9 + x + (16-x))$$

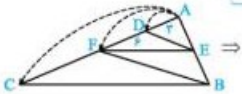
$$\text{CE} \quad \text{CF} \quad \text{CB} \qquad\qquad 25$$

$$\Rightarrow 16^2 = (16-x)(25) \Rightarrow 16 - x = \frac{256}{25} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} \frac{1024}{100} = 10/24 \Rightarrow x = 16 - 10/24 = 5/76$$

۱۲۷ ۴ مانند سؤال قبل داریم:

$$(\text{فلش متوسط})^2 = \text{فلش بزرگ} \times \text{فلش کوچک} \Rightarrow (6+3)^2 = 3 \times (3+6+FC)$$

$$\text{AF} \quad \text{AD} \quad \text{AC}$$



$$\Rightarrow 81 = 3(9+FC) \Rightarrow 81 = 27 + 3FC \Rightarrow 3FC = 54 \Rightarrow FC = 18$$

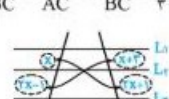
حال چون مسأله نسبت قاعده‌ها را می‌خواهد، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

سؤال دانش‌پژوه (اصفر بالازاده): **آقا کی گفته مسأله، نسبت قاعده‌ها رو می‌خواد؟**

پاسخ: بقال سر کوچه گفته! بچه! هر وقت بگن A چند برابر B است باید نسبت $\frac{A}{B}$ رو پیدا کنی. ادامهٔ حل رو ببین.

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{3+6}{3+6+18} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 3EF$$

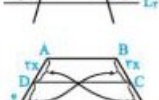
۱۲۸ ۱



$$x(2x+1) = (2x-1)(x+3) \Rightarrow 2x^2 + x = 2x^2 + 6x - x - 3$$

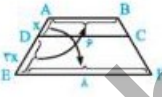
$$\Rightarrow 2x^2 + x = 2x^2 + 5x - 3 \Rightarrow 3 = 4x \Rightarrow x = \frac{3}{4} = 0/75$$

۱۲۹ ۲ طبق فرض $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$ است پس می‌توان $AD = 2x$ و $BC = 3x$ در نظر گرفت. طبق فرمول درسنامه داریم:



$$2x \times CF = 3x \times 4 \Rightarrow CF = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

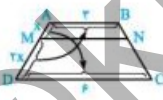
۱۳۰ ۳ داریم: $\frac{AD}{DE} = \frac{1}{3}$ پس فرض می‌کنیم $AD = x$ و $DE = 3x$ باشد.



$$DC = \frac{AD \times EF + DE \times AB}{AD + DE} \Rightarrow 6 = \frac{x(8) + 3x(AB)}{x + 3x} \Rightarrow 6 = \frac{8x + 3x(AB)}{4x}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{x(8 + 3AB)}{4x} \Rightarrow 6 \times 4 = 8 + 3AB \Rightarrow 24 - 8 = 3AB \Rightarrow 16 = 3AB \Rightarrow AB = \frac{16}{3}$$

۱۳۱ ۳



$$\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = x \text{ و } AD = 3x \Rightarrow MD = AD - AM = 2x$$

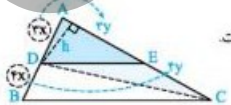
$$\frac{AM \times 6 + MD \times 3}{AM + MD} = MN \Rightarrow \frac{x(6) + 2x(3)}{x + 2x} = MN \Rightarrow MN = \frac{12x}{3x} = 4$$

۱۳۲ ۲ با توجه به فرمول بیان شده در درسنامه داریم:

$$PQ = \frac{a-b}{2} \Rightarrow 3 = \frac{97-b}{2}$$

$$\Rightarrow 6 = 97 - b \Rightarrow b = 91$$

۱۳۳ ۲ طبق فرض $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$، پس $AD = 3x$ و $AB = 7x$ فرض کرده و در نتیجه $DB = AB - AD = 4x$.



$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{AE}{EC} = \frac{3y}{4y} = \frac{3}{4}$$ ارتفاع h در هر دو مثلث یکسان است. ⇒ ۷۵٪ یا

سؤال دانش‌پژوه (قلی پکر): **آقا اجازه، چطوری نسبت مساحت‌ها $\frac{AE}{EC}$ شد؟**

پاسخ: عزیزم پکر نباش، قب تو درسنامه گفتیم دیگه! چون ارتفاع‌ها برابر هستند. پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها میشه.

@khaneh_book

۱۳۴ ۱

$AM=\frac{۲}{۳}MB \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$ ⇐ فرض می‌کنیم: $AM=۲x\ ,\ MB=۳x$

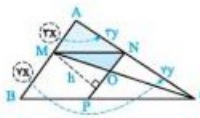
زاویهٔ C در متوازی‌الاضلاع و مثلث ABC مشترک است، پس با توجه به نکتهٔ درسنامه داریم:

$$\frac{S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{NC\times PC\times\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin\hat{C}}=\frac{۳y\times۲z\times\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}\times۵y\times۵z\times\sin\hat{C}}=\frac{۶}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است.

۱۳۵ ۳

ارتفاع وارد بر دو قاعدهٔ ON و AM در مثلث‌های OMN و AMN یکسان و برابر h است (زیرا ON و MA موازی‌اند.) پس داریم:



$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta AMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\times ON}{\frac{۱}{۲}h\times AM}=\frac{ON}{AM}\quad (*)$$

طبق فرض $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۷}$ است، پس طبق درسنامه $MA=۳x$ و $MB=۷x$ در نظر گرفته و پاره‌خط‌های روی AC را ۳y و ۷y در نظر می‌گیریم.

حال در مثلث AMC که در آن $ON\parallel AM$ است، تالس جزء به کل می‌نویسیم:

$$\frac{CN}{AC}=\frac{ON}{AM}\xrightarrow[CN=۷y]{AC=۳y+۷y=۱۰y}\frac{۷y}{۱۰y}=\frac{ON}{AM}\xrightarrow{(*)}\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta AMN}}=\frac{۷}{۱۰}$$ یا ۷۰٪

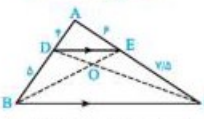
۱۳۶ ۱

$$\frac{\text{مساحت رنگی}}{\text{مساحت مثلث اصلی}}=\frac{QC\times NC\times\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}BC\times AC\times\sin\hat{C}}\ \underset{AC=۳y+۲y=۵y}{BC=۴z+z=۵z}\ \frac{z\times۳y}{\frac{۱}{۲}\times۵z\times۵y}$$

$$=\frac{۲}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۴}{۲۵}\xrightarrow{\times\frac{۴}{۴}}$$ ۰/۱۶ یا ۱۶٪

۱۳۷ ۴

طول پاره‌خط‌های روی اضلاع مثلث داده‌شده است، پس عکس قضیهٔ تالس می‌رویم و می‌بینیم که برقرار است یا خیر:



$$\frac{AD}{DB}\overset{?}{=}\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{۴}{۵}\overset{?}{=}\frac{۶}{۷/۵}\Rightarrow۴\times۷/۵\overset{?}{=}۶\times۵\Rightarrow۳۰\overset{\checkmark}{=}۳۰$$

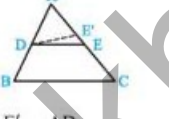
پس طبق عکس قضیهٔ تالس DE موازی BC بوده و در نتیجه چهارضلعی DECB ذوزنقه است. در ذوزنقه می‌دانیم اگر دو قطر CD و BE را رسم کنیم، دو مثلث ODB و OEC هم مساحت‌اند. لذا نسبت مساحت آن‌ها یک است.

۱۳۸ ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در درسنامه اثبات شد.

گزینهٔ (۲): برای اثبات از برهان خلف می‌توان استفاده کرد. فرض کنیم حکم مسأله غلط باشد یعنی DE موازی BC نباشد. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم کرده تا AC را در نقطه‌ای مثل E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}$ حال با مقایسه با فرض مسأله داریم:



$$\begin{cases}\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}\\ \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}\ :\text{فرض مسأله}\end{cases}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}}\frac{AE}{AE+EC}=\frac{AE'}{AE'+E'C}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}\Rightarrow AE=AE'$$

این یعنی E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است زیرا $DE'\parallel BC$ و $DE\not\parallel BC$ است. پس فرض غلط بودن حکم نادرست و حکم غلط نیست یعنی $DE\parallel BC$ است.

گزینهٔ (۳): این گزینه تمرین کتاب درسی بوده که به روش برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید از نقطهٔ A خارج خط L بیش از یک خط بتوان بر آن عمود کرد (مثلاً دو خط d و d')، در این صورت مطابق شکل، مثلث ABC حاصل می‌شود که جمع زوایای آن از ۱۸۰° بیشتر است، زیرا:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ}\hat{A}+۹۰^\circ+۹۰^\circ=\hat{A}+۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{A}>۰}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>۱۸۰^\circ$$

که این خلاف فرض بدیهی «مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است.» می‌باشد، لذا فرضی که کردیم غلط است. پس از هر نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط می‌توان بر آن عمود کرد.

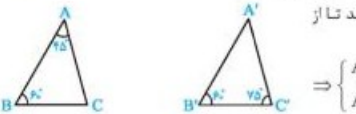
@khaneh_book

گزینهٔ (۴): اثبات این گزینه با استفاده از روش استدلال استنتاجی به‌صورت زیر است:

$$a = \underbrace{2k+1}_{\text{عددی فرد}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1 = 4(2k')+1 = 8k'+1$$

حاصل‌ضرب ۲ عدد صحیح متوالی مضرب ۲ (زوج) است.

۱۳۹ ۲ ابتدا زاویهٔ سوم هر دو مثلث را بیابیم، بعد بنشینیم مقایسه کنیم، ببینیم چند تا از زاویه‌هاشون یکسان است.



$C' = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$ $\quad A' = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{زوایای مثلث ABC} = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \\ \text{زوایای مثلث A'B'C'} = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{دو مثلث متشابه‌اند.}$$

۱۴۰ ۳ منظور این سؤال، حالت متناسب بودن سه ضلع در تشابه مثلث‌ها است. پس باید ببینیم اضلاع کدام مثلث در گزینه‌ها با اضلاع مثلث صورت سؤال متناسب هستند:

گزینهٔ (۴): $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ ✓ $\quad$ گزینهٔ (۳): $\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{18}{6}$ × $\quad$ گزینهٔ (۲): $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{11}{6}$ × $\quad$ گزینهٔ (۱): $\frac{2}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{1}{3}$ ×

سؤال دانش‌پژوه (موسا دارابی)، **آقا از کجا فهمیدین که کدوم عددو باید زیر کدوم عدد بذارین؟**

پاسخ: سؤال قشنگیه. ببین قانون اینه که باید عدد بزرگتا زیر هم، عدد کوچیکا هم زیر هم و نهایتاً اعداد متوسط هم زیر هم باشن واسه همین بود که مثلاً توی بررسی درستی گزینهٔ (۱)، عدد ۲ رو با عدد ۶ در نظر گرفتیم.

۱۴۱ ۳ با توجه به فرض سؤال، در مثلث DEF اضلاع از نظر اندازه به‌صورت مقابل‌اند: $x+7 > 10 > x-1$

پس ضلع کوچک آن $x-1$ بوده که ضلع متناظرش در مثلث ABC، ۴ است. به همین ترتیب اضلاع متناظر دیگر آن را پیدا کرده و نسبت اضلاع را می‌نویسیم:

اضلاع متوسط

$$\frac{4}{x-1} = \frac{5}{10} = \frac{8}{x+7} \Rightarrow \frac{4}{x-1} = \frac{5}{10} \Rightarrow 40 = 5x-5 \Rightarrow 45 = 5x \Rightarrow x = 9$$

اضلاع کوچک $\quad$ اضلاع بزرگ

پس طول اضلاع $\overset{\Delta}{DEF}$ برابر می‌شود با:

$$x = 9 \Longrightarrow x-1 \text{ و } 10 \text{ و } x+7 : \text{اضلاع} \Rightarrow \text{محیط} = 8 + 10 + 16 = 34$$

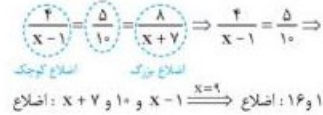
۱۴۲ ۲ چون طبق فرض x و y از ۵ بزرگ‌ترند. پس طول ضلع کوچک مثلث دوم ۵ است و ضلع متناظرش در مثلث اول ۳ (ضلع کوچک) می‌شود. حال با فرض $y > x$ نسبت اضلاع را می‌نویسیم.

$$\frac{3}{5} = \frac{5}{x} = \frac{7}{y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{5}{x} \Rightarrow 3x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{3} \\ \frac{3}{5} = \frac{7}{y} \Rightarrow 3y = 35 \Rightarrow y = \frac{35}{3} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{25}{3} + \frac{35}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

سؤال دانش‌پژوه (صوفیا کامرانی)، **آقا از کجا فهمیدین که y رو باید زیر ۷ و x رو باید زیر ۵ بنویسین؟**

پاسخ: در صورت سؤال نگفته x بزرگ‌تره یا y، منم همینطوری فرض کردم y بزرگ‌تره و اونو زیر ۷ گذاشتم اگه شما x رو بزرگ‌تر فرض کنی جواب x و y عوض میشه ولی $x+y$ فرقی نمی‌کنه و همون ۲۰ میشه دوباره.

۱۴۳ ۳ تمام سختی کار این است که اضلاع متناظر در دو مثلث را پیدا کنیم. اگر اضلاع به طول ۲ و ۴ از مثلث ABC را به‌ترتیب با اضلاع به طول ۳ و ۶ از مثلث MNP متناظر بگیریم، نسبت تشابه مثلث ABC به مثلث MNP، $\frac{2}{3}$ خواهد شد. در این‌صورت x به راحتی به‌دست می‌آید:



$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

حال نسبت محیط‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{MNP} \times \frac{2}{3} = \text{محیط } \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\Delta}{MNP}} = \frac{2+3+4}{3+6+\frac{9}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{27}{2}} = \frac{9 \times 2}{27} = \frac{2}{3}$$

سؤال دانش‌پژوه (صبا آریایی)، **آقا اجازه! چرا اضلاع به طول ۳ در هر دو مثلث رو متناظر هم نگرفتین؟**

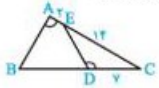
پاسخ: اگه این کارو کنیم نسبت این دو تا ضلع ۱ می‌شه. یعنی باید دو مثلث هم‌نهشت بوده باشن ولی می‌بینیم که اضلاع دیگه با هم برابر نیستند! پس اضلاع به طول ۳ متناظر هم نبوده‌اند.

سؤال همون دانش‌پژوه، **آقا یه جا خونده بودم که نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابره. توی این سؤال که نسبت تشابه $\frac{2}{3}$ شد، پس نسبت محیط‌ها هم $\frac{2}{3}$ میشه دیگه! دیگه این کارای اضافه چیه!**

پاسخ: آفرین، آره اونطوری هم میشه گفت، ولی درستشو جلوتر قراره بگیم.

@khanen_book

۱۴۴ ۴ دو مثلث ABC و CED به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند ($\hat{A}=\hat{D}$ مشترک و $\hat{C}$) حال نسبت اضلاع آن‌ها را می‌نویسیم:

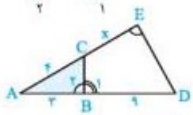


$$\begin{matrix}A & B & C\\ D & E & C\end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EC}=\frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{۷+BD}{۱۴}=\frac{۲+۱۴}{۷}$$

از دو کسر آخر می‌توانیم طول BD را بیابیم:

$$\frac{۷+BD}{۱۴}=\frac{۱۶}{۸} \Rightarrow ۷+BD=۲\times۱۶=۳۲ \Rightarrow BD=۳۲-۷=۲۵$$

۱۴۵ ۱ دو زاویهٔ مقابل چهارضلعی مکمل‌اند، بنابراین داریم:

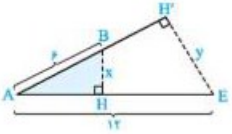


$$\left.\begin{matrix}\hat{E}+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\\ \hat{B}_۲+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{E}+\hat{B}_۱=\hat{B}_۱+\hat{B}_۲ \Rightarrow \hat{E}=\hat{B}_۲$$

دو مثلث ABC و AED به خاطر تساوی دو زاویه ($\hat{B}_۲=\hat{E}$ و $\hat{A}$ مشترک) متشابه‌اند. پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AED} \Rightarrow \begin{matrix}A & B & C\\ A & E & D\end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{۳}{۴+x}=\frac{۴}{۳+۹} \Rightarrow ۱۶+۴x=۳۶ \Rightarrow x=۵$$

۱۴۶ ۱ ابتدا قسمت‌های مزاحم شکل را حذف می‌کنیم تا شکل به صورت زیر درآید. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و AEH′ به علت برابری دو زاویه ($\hat{A}$ مشترک و $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$) متشابه‌اند. با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث، نسبت $\frac{x}{y}$ برابر است با:

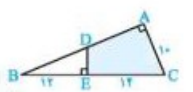


$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{AEH'} \Rightarrow \begin{matrix}A & B & H\\ A & E & H'\end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BH}{EH'} \Rightarrow \frac{۶}{۸+۴}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴۷ ۳ ابتدا با توجه به رابطهٔ فیثاغورس طول AB را می‌یابیم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow ۲۶^۲=AB^۲+۱۰^۲ \Rightarrow AB^۲=۲۶^۲-۱۰^۲=(۲۶-۱۰)(۲۶+۱۰)=۱۶\times۳۶ \xrightarrow{\text{جذر}} AB=۴\times۶=۲۴$$

دو مثلث ABC و BDE به حالت برابری دو زاویه ($\hat{B}$ مشترک و $\hat{E}=\hat{A}=۹۰^\circ$) متشابه‌اند. پس داریم:



$$\begin{matrix}A & B & C\\ E & B & D\end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{EB}=\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{ED} \Rightarrow \frac{۲۴}{۱۲}=\frac{۲۶}{BD}=\frac{۱۰}{ED}$$

از برابری کسرهای اول و سوم، طول ED را می‌یابیم:

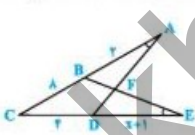
$$\frac{۲۴}{۱۲}=\frac{۱۰}{ED} \Rightarrow ۲ED=۱۰ \Rightarrow ED=۵$$

بنابراین:

$$\text{مساحت رنگی} = \text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} - \text{مساحت } \overset{\Delta}{BDE} = \frac{AC\times AB}{۲}-\frac{ED\times BE}{۲}=\frac{۱۰\times۲۴}{۲}-\frac{۵\times۱۲}{۲}=۱۲۰-۳۰=۹۰$$

۱۴۸ ۲ دو مثلث ACD و BEC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. زیرا $\hat{C}$ مشترک و طبق فرض $\hat{A}=\hat{E}$.

پس داریم:



$$\begin{matrix}A & C & D\\ E & C & B\end{matrix} \Rightarrow \frac{AC}{EC}=\frac{CD}{CB} \xrightarrow[\text{شکل}]{\text{با توجه به}} \frac{۲+۸}{۴+x+۱}=\frac{۴}{۸} \Rightarrow \frac{۱۰}{x+۵}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲۰=x+۵ \Rightarrow x=۱۵$$

بنابراین:

$$\frac{DE}{CE}=\frac{x+۱}{۴+x+۱} \xrightarrow{x=۱۵} \frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۱۴۹ ۴ ابتدا اعداد داده‌شده در صورت سؤال را روی شکل می‌نویسیم:

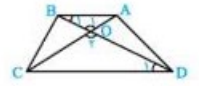
$$\frac{۱}{۳}OH=AD=۵OD=۱۲ \Rightarrow OH=۳۶, AD=۱۲, OD=\frac{۱۲}{۵}$$

به دنبال دو مثلث می‌گردیم که پاره‌خط‌هایی که طول آن‌ها مشخص است، اضلاع آن‌ها باشند، آهان! دو مثلث AOD و OCH که هر دو قائم‌الزاویه هستند و به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند ($\hat{H}=\hat{D}=۹۰^\circ$ و زاویهٔ O متقابل به رأس) از هر جهت مناسبند. حال نسبت اضلاع آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix}A & D & O\\ C & H & O\end{matrix} \Rightarrow \frac{AD}{CH}=\frac{DO}{HO}=\frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{۱۲}{CH}=\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۳۶}=\frac{AO}{CO} \quad \text{و} \quad \frac{۳}{۵}\times CH=۳\times۳۶ \Rightarrow CH=۵\times۳۶=۱۸۰$$

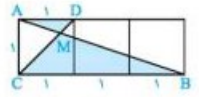
@khaneh_book

۱۵۰ ۲ در ذوزنقه، AB موازی CD است. از طرفی BD مورب است پس $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$. هم‌چنین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ متقابل به رأس است. پس دو مثلث OBA و OCD به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند. داریم:



$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \xrightarrow{\text{طبق فرض } \frac{AB}{CD} = \frac{۲}{۵}} \frac{OB}{OD} = \frac{۲}{۵} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تركيب نسبت}} \frac{OB+OD}{OD} = \frac{۵+۲}{۵} \xrightarrow{BD=۱۴} \frac{۱۴}{OD} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow OD = ۱۰$$

۱۵۱ ۲ AD و BC موازی هستند و AB و CD مورب. لذا در دو مثلث سایه‌دار $\hat{A} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{D}$. پس دو مثلث ADM و BCM به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند. حال نسبت اضلاع را می‌نویسیم:



$$\begin{matrix} A & D & M \\ B & C & M \end{matrix} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow BM = ۳AM$$

(به این کسر نیاز نداریم)

از طرفی $AB = AM + BM$. طول AB را می‌توان از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ABC پیدا کرد:

$$AB^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۰} \Rightarrow AM + BM = \sqrt{۱۰} \xrightarrow{BM=۳AM} \sqrt{۱۰} = AM + ۳AM \Rightarrow AM = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۱۰})$$

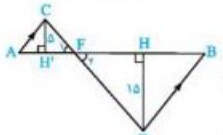
سؤال *دانش‌پژوه (بهنام صفری):* **آقا ما که مخمون سوت کشید! این سؤال فاصلهٔ AM رو خواسته بود. شما رفتی تشابه زدی تو مثلثا؟! آخه چه‌ربطی داشت؟**

جواب پاسخ: *حق با تو نه ولی خب باید تهدیه کسب کنی تا بفهمی که کجا باید چکار کنی، تو این جور مسائل دنبال مثلثی بگرد که پاره‌خط خواسته شده، یکی از اضلاعش باشه، بعدش کافیه ببینی اون مثلث با چه مثلثی متشابهه و بعدش نسبت اضلاع رو بنویسی.*

۱۵۲ ۴ دو مثلث ACF و FBD به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. زیرا:

$$AC \parallel BD \text{ مورب } AB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \text{ و } \hat{F}_1 = \hat{F}_2$$

در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع است، داریم:

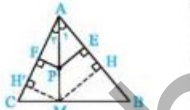


$$\frac{DH}{CH'} = \frac{FB}{AF} \Rightarrow \frac{۱۵}{۵} = \frac{FB}{AF} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تركيب نسبت}} \frac{۱۵+۵}{۵} = \frac{FB+AF}{AF} \xrightarrow{AB=۲۰} \frac{۲۰}{۵۰} = \frac{۲}{AF} \Rightarrow AF = ۱۰$$

بنابراین:

$$S_{\Delta ACF} = \frac{CH' \times AF}{۲} = \frac{۵ \times ۱۰}{۲} = ۲۵$$

۱۵۳ ۱ از M پاره‌خط‌هایی به موازات PE و FP بر AB و AC عمود می‌کنیم.



$$\begin{cases} \hat{A}_1 \text{ مشترک} \\ \hat{E} = \hat{H} = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta AEP \sim \Delta AHM \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{PE}{MH}$$

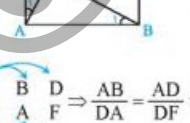
$$\begin{cases} \hat{A}_2 \text{ مشترک} \\ \hat{F} = \hat{H}' \end{cases} \Rightarrow \Delta APF \sim \Delta AMH' \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{FP}{MH'}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{MH} = \frac{FP}{MH'} \Rightarrow \frac{MH}{MH'} = ۲$$

۱۵۴ ۱ طبق فرض $\hat{C}_1 = \hat{D}_2$. از طرفی $BF \parallel DE$ و AD مورب؛ در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{D}_2$. با توجه به این تساوی‌ها دو مثلث ABC و ABF به حالت دو زاویه برابر متشابه‌اند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{D}_2 = \hat{C}_1 \text{ فرض} \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{D}_2} \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{A} \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A & B & C \\ A & F & B \end{matrix} \Rightarrow \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{AB} \xrightarrow[AC=۲]{AB=۳} \frac{BC}{BF} = \frac{۲}{۳}$$

۱۵۵ ۲



$$\begin{cases} \Delta ABD \text{ قائم‌الزاویه}: \hat{B}_1 + \hat{D}_1 = ۹۰^\circ \\ \Delta ADH \text{ قائم‌الزاویه}: \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1$$

دو مثلث ADF و ABD به حالت برابری دو زاویه ($\hat{D} = \hat{A} = ۹۰^\circ, \hat{B}_1 = \hat{A}_1$) متشابه‌اند. زیرا:

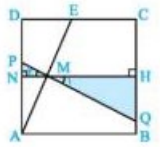
$$\begin{matrix} A & B & D \\ D & A & F \end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{DA} = \frac{AD}{DF} \xrightarrow{AB=۳DA \Rightarrow DA=\frac{AB}{۳}} \frac{AB}{\frac{AB}{۳}} = \frac{\frac{AB}{۳}}{DF} \Rightarrow ۳ = \frac{AB}{۳DF} \Rightarrow AB = ۹DF$$

از طرفی در مستطیل اضلاع روبه‌رو با هم برابرند، پس $DC = AB$. پس:

$$AB = ۹DF \xrightarrow{DC=AB} DC = ۹(DF)$$

@khanenbook

۱۵۶ ۳ از M خطی موازی دو ضلع مربع رسم می‌کنیم. M وسط AE است. پس $AM = EM = \frac{1}{2}AE$. در مثلث ADE، قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:



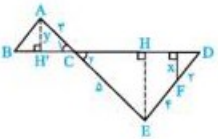
$$\frac{AM}{AE} = \frac{NM}{DE} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AE}{AE} = \frac{NM}{5} \Rightarrow NM = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow MH = NH - NM \xrightarrow{NH=\text{ضلع مربع}=12} 12 - \frac{5}{2} = \frac{24-5}{2} = \frac{19}{2}$$

دو مثلث MQH و PNM به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند. زیرا:

$$\hat{N} = \hat{H} = 90^\circ,\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \Rightarrow \frac{PM}{MQ} = \frac{NM}{MH} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{19}{2}} = \frac{5}{19}$$

۱۵۷ ۱ از رأس E ارتفاع وارد بر CD را رسم می‌کنیم. حال در مثلث DEH قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:



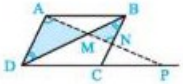
$$\frac{DF}{DE} = \frac{x}{EH} \Rightarrow \frac{2}{2+4} = \frac{x}{EH} \Rightarrow 2EH = 6x \Rightarrow EH = 3x \quad (*)$$

از طرفی دو مثلث AH'C و CEH متشابه‌اند. زیرا $\hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (متقابل به رأس). پس داریم:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AH'}{EH} \xrightarrow{(*)} \frac{3}{5} = \frac{y}{3x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{9}{5}$$

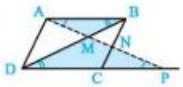
۱۵۸ ۴ در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو موازی‌اند. پس:

$$AD \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \text{مورب } AN: \hat{A} = \hat{N} \\ \text{مورب } BD: \hat{D} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \text{دو مثلث ADM و BNM متشابه‌اند.}$$



$$\begin{matrix} M & A & D \\ M & N & B \end{matrix} \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MD}{MB} \quad (*)$$

$$AB \parallel DP \Rightarrow \begin{cases} \text{مورب } AP: \hat{A} = \hat{P} \\ \text{مورب } BD: \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \text{دو مثلث ABM و DMP متشابه‌اند.}$$



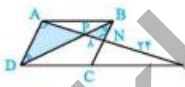
$$\begin{matrix} P & M & D \\ A & M & B \end{matrix} \Rightarrow \frac{MP}{MA} = \frac{MD}{MB} \quad (**)$$

سمت راست تساوی‌های (*) و (**) یکسان است. پس سمت چپ آن‌ها نیز باید مساوی باشد. داریم:

$$\frac{MA}{MN} = \frac{MP}{MA} \Rightarrow MN \times MP = MA^2$$

۱۵۹ ۴ $MP = 32$ و $MN = 24 \Rightarrow PN = MP - MN = 32 - 24 = 8$

دو مثلث ADP و BPN متشابه‌اند. زیرا ABCD متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه $AD \parallel BC$ و دو خط AN و DB مورب هستند. پس:



$$\hat{B} = \hat{D},\ \hat{A} = \hat{N}$$

$$\frac{PN}{AP} = \frac{BN}{AD} \quad (*)$$

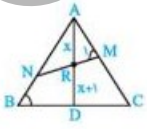
دو مثلث ABN و NCM متشابه‌اند. زیرا ABCD متوازی‌الاضلاع بوده و در نتیجه $AB \parallel CM$ و دو خط AM و BC مورب هستند. پس:

$$\hat{A} = \hat{M},\ \hat{B} = \hat{C}$$

$$\frac{AN}{24} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{AP+8}{24} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AP+8}{24+(AP+8)} = \frac{BN}{\underbrace{NC+BN}_{BC=AD}} \xrightarrow{(*)} \frac{AP+8}{AP+32} = \frac{PN}{AP}$$

$$\xrightarrow{PN=8} \frac{AP+8}{AP+32} = \frac{8}{AP} \Rightarrow (AP)^2 + 8AP = 8AP + 8 \times 32 \Rightarrow AP = \sqrt{8 \times 32} = \sqrt{2^3 \times 2^5} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$$

۱۶۰ ۱ دو مثلث AMN و ABC به حالت دو زاویهٔ مساوی ($\hat{M}_1 = \hat{B}$ و $\hat{A}$ مشترک) متشابه‌اند و AD نیمساز هر دو مثلث است. پس داریم:

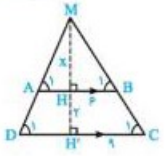


$$\underbrace{\frac{NM}{BC}}_{\text{قاعده‌ها}} = \underbrace{\frac{AR}{AD}}_{\text{نیمسازها}} \xrightarrow{BC=2NM \Rightarrow \frac{NM}{BC}=\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \frac{x}{x+(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2x = 2x+1 \Rightarrow x = 1$$

@khaneh_book

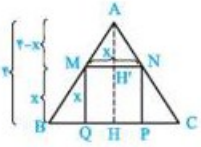
۱۶۱ ۲ ابتدا شکل را رسم می‌کنیم. AB موازی CD است، پس دو مثلث AMB و DMC به حالت دو زاویه ($\hat{A}_1 = \hat{D}_1$, $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$) متشابه بوده و لذا نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه (مثلاً نسبت قاعده‌ها) است:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{۶}{۹} = \frac{x}{x+۲} \Rightarrow ۶x + ۱۲ = ۹x \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴ \quad (*)$$

فاصلهٔ M از قاعدهٔ بزرگ‌تر $= MH' = x + ۲ \overset{(*)}{=\!=} ۶$

۱۶۲ ۴ چون MNPQ مربع است، پس MN || BC و دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند. پس نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایشان است:



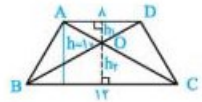
$$\frac{AH'}{AH} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۴ - x}{۴} = \frac{x}{۲} \Rightarrow ۲(۴ - x) = x \Rightarrow ۸ - ۲x = x \Rightarrow ۳x = ۸$$

$$\Rightarrow x = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = x^۲ = \frac{۶۴}{۹}$$

۱۶۳ ۲ دو مثلث OAD و OBC به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند. زیرا:

$$AD \parallel BC \text{ مورب } AC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \text{ و } BD \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاعات برابر نسبت اضلاع است. پس:



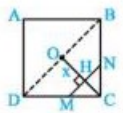
$$\frac{AD}{BC} = \frac{h_۱}{h_۲} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{h_۱}{h_۲}$$

$$\xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{۸ + ۱۲}{۱۲} = \frac{h_۱ + h_۲}{h_۲} \xrightarrow{h = ۱۰} \frac{۲۰}{۱۲} = \frac{۱۰}{h_۲} \Rightarrow h_۲ = ۶ \Rightarrow h_۱ = h - h_۲ = ۱۰ - ۶ = ۴$$

بنابراین:

$$h_۱ + ۲h_۲ = ۴ + ۲(۶) = ۴ + ۱۲ = ۱۶$$

۱۶۴ ۴ قطر BD را رسم می‌کنیم. دو مثلث MNC و BCD قائم‌الزاویه بوده و پاره‌خط‌های MN و BD موازی‌اند. پس $\widehat{M} = \widehat{D}$ و $\widehat{N} = \widehat{B}$ لذا دو مثلث MNC و BCD متشابه‌اند. داریم:



$$\text{نسبت قاعده‌ها} = \text{نسبت ارتفاع‌ها} \Rightarrow \frac{CH}{CO} = \frac{MN}{BD} \xrightarrow[\text{قطر} = BD = ۱۰\sqrt{۲}]{\text{قطر مربع} = \text{ضلع} \times \sqrt{۲} = ۲۰\sqrt{۲}} \frac{۱۰\sqrt{۲} - x}{۱۰\sqrt{۲}} = \frac{x}{۲۰\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱۰\sqrt{۲} - x = \frac{x}{۲} \Rightarrow ۲۰\sqrt{۲} - ۲x = x \Rightarrow ۲۰\sqrt{۲} = ۳x \Rightarrow x = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{۳}$$

سؤال دانش‌پژوه (ساشا پوانی)، **آقا اجازه از کجا فهمیدین MN و BD موازی‌اند؟**

پاسخ: قطرهای مربع بر هم عمودند. از طرفی MN نیز بر OC عمود است، دو خط که بر یک خط عمود باشند با هم موازی خواهند بود!

۱۶۵ ۲ می‌دانیم نسبت مساحت‌ها، مجذور نسبت ارتفاع‌های دو مثلث است:

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{۴}{۹} = k^۲ \Rightarrow k = \frac{۲}{۳} : \text{نسبت ارتفاع‌ها}$$

۱۶۶ ۲ نسبت محیط‌ها، همان نسبت اضلاع (نسبت تشابه) است. چون نسبت محیط‌ها $\frac{۲}{۳}$ است، پس نسبت اضلاع مثلث اول که ۶، ۹ و ۱۲ هستند به اضلاع مثلث دوم نیز $\frac{۲}{۳}$ است. پس داریم:

$$\Rightarrow \frac{۹}{x} = \frac{۶}{y} = \frac{۱۲}{z} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۹}{x} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲۷ = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲۷}{۲} = ۱۳/۵ \\ \frac{۶}{y} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۱۸ = ۲y \Rightarrow y = ۹ \\ \frac{۱۲}{z} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳۶ = ۲z \Rightarrow z = ۱۸ \end{cases}$$

سؤال دانش‌پژوه (زینب قاسمی)، **آقا چرا برای پیدا کردن x، y و z اونطوری کسرها رو دوتا دوتا با هم گرفتین؟ چرا مثلاً کسر اول رو با کسر دوم نگرفتین؟**

پاسخ: تقه آگه متنن کسر $\frac{۹}{x}$ رو بخوایم با $\frac{۶}{y}$ بگیریم به معادلهٔ $\frac{۶}{y} = \frac{۹}{x}$ می‌رسیم که چون دو تا مجهول توشه نمیشه چیزی رو به دست آورد.

@khaneh_book

۱۶۷ **۳** فرض کنید نسبت تشابه دو مثلث k باشد. داریم:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = k^2 \xrightarrow{\text{نسبت مساحت‌ها}} k^2 = \frac{۴۹}{۱۲۸} \xrightarrow{\text{جذر}} k = \frac{۷}{\sqrt{۶۴ \times ۲}} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \xrightarrow{AB=۲۱} \frac{۲۱}{A'B'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow A'B' = \frac{۲۱ \times ۸\sqrt{۲}}{۷} = ۲۴\sqrt{۲}$$

سؤال *دانش‌پژوه (علی رهبی)*، **آقا اجازه! چرا ۲۱ رو توی صورت کسر نوشتین؟ از کجا بفهمیم کی توی صورت و کی تو مخرج کسر بنویسم؟**

پاسخ: چون سؤال گفته که ۲۱ طول ضلع مثلث کوچک‌تره، پس باید چلوی عدد کوچک‌تر توی نسبت تشابه بیاد.

۱۶۸ **۱** نسبت مساحت‌های دو مثلث، مجذور نسبت محیط‌های آن‌ها است.

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \left(\frac{۱۵}{۸}\right)^2 \Rightarrow \frac{۲۵}{S_۱} = \left(\frac{۱۵}{۸}\right)^2 \Rightarrow \frac{۲۵}{S_۱} = \frac{۲۲۵}{۶۴} \Rightarrow S_۱ = \frac{۶۴}{۹}$$

۱۶۹ **۳** چون محیط یکی از مثلث‌ها داده شده، سریع محیط مثلث دیگر را هم به دست می‌آوریم. محیط مثلث اول برابر $۵ + ۱۲ + ۱۷ = ۲۱$ می‌شود.

می‌دانیم نسبت محیط‌ها همان نسبت تشابه (k) است. پس:

$$k = \frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۵}{۲}$$

بنابراین نسبت اضلاع آن‌ها نیز $\frac{۵}{۲}$ است:

$$\frac{\text{ضلع کوچک مثلث اول}}{\text{ضلع کوچک مثلث دوم}} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{x} = \frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲۴ = ۵x \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۵} \xrightarrow{\times ۲} \frac{۴۸}{۱۰} \Rightarrow x = ۴/۸$$

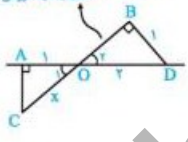
۱۷۰ **۲** مهم‌ترین قسمت حل مسأله، فهمیدن درست آن است. اگر نسبت اضلاع k باشد، نسبت مساحت‌ها k^2 است. پس طبق فرض داریم:

$$k^2 = \frac{۲}{۳}k \Rightarrow k = \frac{۲}{۳} \quad (*)$$

بنابراین:

$$\frac{\text{مساحت مثلث کوچک}}{\text{مساحت مثلث بزرگ}} = k^2 \overset{(*)}{=\!=} \left(\frac{۲}{۳}\right)^2 = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \text{مساحت مثلث بزرگ} = \frac{۹}{۴} \times ۲/۲۵ = ۵$$

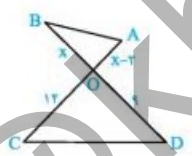
۱۷۱ **۴** دو مثلث AOC و BOD به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. زیرا:



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \text{ (متقابل به راس)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A & O & C \\ B & O & D \end{matrix} \Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

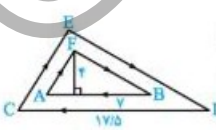
۱۷۲ **۱** طبق فرض دو مثلث متشابه‌اند. پس ابتدا نسبت اضلاع را نوشته تا مجهول x را پیدا کنیم. چون $x-۲$ از x کوچک‌تر است، پس $x-۲$ با ۹ و x با ۱۲ متناظر است.



$$\frac{x}{۱۲} = \frac{x-۲}{۹} \Rightarrow ۹x = ۱۲(x-۲) \Rightarrow ۹x = ۱۲x - ۲۴ \Rightarrow ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

پس با معلوم شدن x، نسبت تشابه برابر $k = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$ می‌شود که نسبت مساحت‌ها مجذور آن است و برابر $\left(\frac{۲}{۳}\right)^2 = \frac{۴}{۹}$ می‌شود.

۱۷۳ **۲** چون اضلاع مثلث‌ها دو به دو موازی هستند، پس هر ۳ زاویهٔ آن‌ها برابرند. لذا دو مثلث به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند. نسبت تشابه برابر $k = \frac{CD}{AB}$ می‌شود که نسبت مساحت‌ها مجذور آن است:



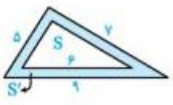
$$\frac{\text{مساحت } \Delta CDE}{\text{مساحت } \Delta ABF} = k^2 = \left(\frac{۱۷/۵}{۷}\right)^2 = \left(\frac{\frac{۳۵}{۲}}{۷}\right)^2 = \left(\frac{۳۵}{۲ \times ۷}\right)^2 = \left(\frac{۵}{۲}\right)^2 = \frac{۲۵}{۴}$$

از طرفی مساحت مثلث ABF برابر $\frac{۴ \times ۷}{۲} = ۱۴$ است. پس:

$$\frac{\text{مساحت } \Delta CDE}{۱۴} = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \text{مساحت } \Delta CDE = ۱۴ \times \frac{۲۵}{۴} = ۷ \times \frac{۲۵}{۲} = \frac{۱۷۵}{۲} = ۸۷/۵$$

@khanehbook

۱۷۴ ۳ با توجه به شکل، دو مثلث متشابه‌اند چون اضلاع آن‌ها موازی‌اند. لذا نسبت مساحت‌های آن‌ها، مجذور نسبت اضلاعشان است. اگر مساحت مثلث کوچک را با S و مساحت مثلث بزرگ را با S′ نمایش دهیم، داریم:



$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{۶}{۹}\right)^۲=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow S=\frac{۴}{۹}S'\Rightarrow \text{مساحت آبی رنگ}=\frac{۵}{۹}S'$$

بنابراین:

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک}}=\frac{\frac{۵}{۹}S'}{\frac{۴}{۹}S'}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵\Rightarrow \text{مساحت محدود به دو مثلث}=۱/۲۵\times \text{مساحت مثلث کوچک}$$

۱۷۵ ۱ محیط مثلث اول برابر $۳۰=۵+۱۲+۱۳$ است. چون نسبت محیط‌ها، همان نسبت تشابه k است، داریم:

$$k=\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}}=\frac{۳۰}{۶۰}=\frac{۱}{۲}\qquad (*)$$

حالا باید حواستان را خوب به سه عدد ۵، ۱۲ و ۱۳ بدهید، این اعداد دارند به ما می‌گویند که مثلث اول قائم‌الزاویه است. زیرا:

$$۱۳^۲=۱۲^۲+۵^۲\Rightarrow ۱۶۹=۱۴۴+۲۵\Rightarrow ۱۶۹=۱۶۹$$

پس مساحت آن برابر می‌شود با:

$$\Rightarrow S=\frac{۱۲\times ۵}{۲}=۳۰\qquad (**)$$

از طرفی نسبت مساحت‌های دو مثلث، مربع نسبت تشابه یعنی $k^۲$ است. پس داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث اول}}{\text{مساحت مثلث دوم}}=k^۲\xrightarrow[(**)]{(*)}\frac{۳۰}{\text{مساحت مثلث دوم}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}\text{مساحت مثلث دوم}=۳۰\times ۴=۱۲۰$$

سؤال *(آتش‌پژوه (الهام افشار))*: **آقا اگه نمی‌فهمیدیم مثلث اول قائم‌الزاویه است، چه خاکی تو سرمون باید می‌ریختیم!**

پاسخ: *فک کن! فقط ببین وقتی مساحت مثلث ۳۰ رو می‌فواد و مساحت مثلث اول رو نمیده، پس باید تو فودت یه هوری مساحت اونو بتونی به دست بیاری که توی اینهور مثلث‌ها اولین چیزی که باید بادت بیاد اینه که شرط قائم‌الزاویه بودنو چک کنی (یعنی شرط $a^۲=b^۲+c^۲$)*

۱۷۶ ۲ مثلث A به اضلاع a، b و ۳ با مثلث B به اضلاع ۵، ۴ و ۳ متشابه است. وقتی دو مثلث قابل انطباق نباشند یعنی دو مثلث هم‌نهشت نیستند و نمی‌توان آن‌ها را روی هم قرار داد. پس ضلع ۳ از مثلث B نمی‌تواند با ضلع ۳ از مثلث A متناظر باشد و ناچار است با یکی از اضلاع ۴ یا ۵ متناظر باشد که در این صورت نسبت تشابه می‌تواند برابر $k=\frac{۳}{۴}$ یا $k=\frac{۳}{۵}$ شود. از طرفی نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است. بنابراین:

$$k=\frac{\text{محیط مثلث A}}{\text{محیط مثلث B}}\xrightarrow{k=\frac{۳}{۴}\text{ یا }\frac{۳}{۵}}\begin{cases}\frac{\text{محیط مثلث A}}{۱۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \text{محیط مثلث A}=۱۲\times\frac{۳}{۴}=۹\rightarrow \text{بیشترین محیط}\\ \frac{\text{محیط مثلث A}}{۱۲}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \text{محیط مثلث A}=۱۲\times\frac{۳}{۵}=\frac{۳۶}{۵}\xrightarrow[\times ۲]{\times ۲}\frac{۷۲}{۱۰}=۷/۲\end{cases}$$

$۳+۴+۵=۱۲$

۱۷۷ ۲ چون بیشترین مقدار ممکن را برای عدد a می‌خواهیم، لذا a با بزرگ‌ترین ضلع از مثلث دوم (یعنی ضلع به طول ۹) متناظر است. حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت (۱): $\frac{a}{۹}=\frac{۵}{۷}=\frac{۴}{b}\Rightarrow a=\frac{۴۵}{۷}$

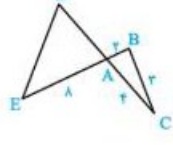
حالت (۲): $\frac{a}{۹}=\frac{۵}{b}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow a=\frac{۳۶}{۷}$

$\Rightarrow$ بیشترین مقدار ممکن $\frac{۴۵}{۷}$ است.

تذکر اگر a با b متناظر باشد، آن‌گاه $\frac{۴}{۷}=\frac{۵}{۹}=\frac{a}{b}$ که چون $\frac{۵}{۹}\neq\frac{۴}{۷}$، پس این امر هیچ‌گاه روی نمی‌دهد.

تذکر با توجه به گزینه‌ها مشخص است که a بزرگ‌ترین ضلع در مثلث با اضلاع ۵، ۴ و a است.

۱۷۸ ۳ دو مثلث ABC و ADE به حالت دو زاویهٔ مساوی متشابه‌اند. زیرا $\hat{B}=\hat{D}$ و زاویهٔ A متقابل به رأس است. چون $\hat{B}$ و $\hat{D}$ مساوی هستند، پس ضلع‌های روبه‌رو به آن‌ها اضلاع متناظر در دو مثلث بوده که نسبت آن‌ها همان نسبت تشابه است:



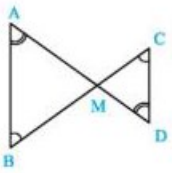
$$k=\frac{AE}{AC}=\frac{۸}{۴}=۲$$

از طرفی نسبت محیط‌ها همان نسبت تشابه است. بنابراین:

$$k=\frac{\text{محیط مثلث ADE}}{\text{محیط مثلث ABC}}\Rightarrow\frac{\text{محیط مثلث ADE}}{۲+۳+۴}=۲\Rightarrow \text{محیط }\overset{\Delta}{ADE}=۲\times ۹=۱۸$$

@khanehketab

۱۷۹ ۳



$$AB \parallel CD \;,\; \begin{cases} \text{مورب } AD \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \\ \text{مورب } BC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \text{ و } \overset{\Delta}{CDM} \text{ متشابه‌اند}$$

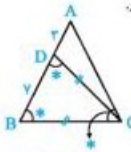
نسبت تشابه را می‌توان به‌صورت $k = \frac{AM}{MD}$ در نظر گرفت. در سؤال گفته $\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵}$ است.

$$\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل نسبت}} \frac{AM}{AD - AM} = \frac{۳}{۵-۳} \Rightarrow \underbrace{\frac{AM}{MD}}_{\text{نسبت اضلاع}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{MCD}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$$

سؤال دانش‌پژوه (اعظم مسینی)، آقا اجازه! $\frac{۹}{۴}$ که توی گزینه‌ها نیست! ضایع شدین ☺

پاسخ: بشین بچه! در صورت سؤال فقط نسبت مساحت‌ها رو خواسته ولی نگفته نسبت مساحت کدوم مثلث به کدوم مثلث، پس هم $\frac{۴}{۹}$ و هم $\frac{۹}{۴}$ درسته، ولی مثلاً اگه می‌گفت نسبت مساحت $\overset{\Delta}{CDM}$ به $\overset{\Delta}{ABM}$ پی میشه اون وقت فقط $\frac{۴}{۹}$ درست می‌شد.

۱۸۰ ۱



$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{C} = \hat{B} \text{ متساوی‌الساقین}$$
$$\overset{\Delta}{BCD}: \hat{B} = \hat{D} \text{ متساوی‌الساقین}$$
$$\Rightarrow \hat{C} = \hat{D}$$

پس دو مثلث ABC و BDC به حالت برابری دو زاویه ($\hat{D} = \hat{C}$ و $\hat{B}$ مشترک) متشابه‌اند.

$$\begin{matrix} A & B & C \\ C & B & D \end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{۳+۷}{BC} = \frac{BC}{۷} \Rightarrow ۱۰ \times ۷ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷۰}$$

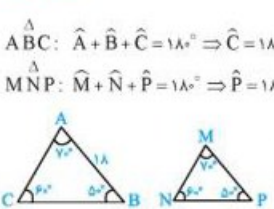
۱۸۱ ۱

ابتدا زاویهٔ سوم هر دو مثلث را پیدا می‌کنیم. چون جمع زوایای داخلی ۱۸۰° است، داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۶۰^\circ \Rightarrow \text{زوایا} : ۵۰^\circ, ۶۰^\circ, ۷۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{MNP}: \hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{P} = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۵۰^\circ \Rightarrow \text{زوایا} : ۵۰^\circ, ۶۰^\circ, ۷۰^\circ$$

پس دو مثلث متشابه‌اند. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت‌ها، مجذور نسبت تشابه است.



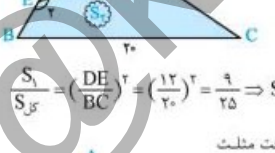
بنابراین:

$$k^۲ = \frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } MNP} = \frac{۹}{۴} \Rightarrow k = \frac{۳}{۲}$$

چون زوایای $\hat{N}$ و $\hat{C}$ هر دو ۶۰° هستند، پس اضلاع روبه‌رو به آن‌ها یعنی MP و AB، اضلاع متناظر یکدیگر در دو مثلث می‌باشند. لذا MP برابر می‌شود با:

$$k = \frac{AB}{MP} \xrightarrow[AB=۱۸]{k=\frac{۳}{۲}} \frac{۳}{۲} = \frac{۱۸}{MP} \Rightarrow ۳ \times (MP) = ۳۶ \Rightarrow MP = ۱۲$$

۱۸۲ ۲



$$\begin{cases} \text{فرض تست} : \hat{B} + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \text{می‌دانیم} : \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_۱$$

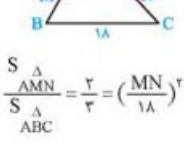
دو مثلث ADE و ABC به حالت تساوی دو زاویه ($\hat{A}$ مشترک و $\hat{B} = \hat{D}_۱$) متشابه‌اند.

پس نسبت مساحت آن‌ها، مربع نسبت اضلاع متناظر است:

$$\frac{S_۱}{S_{کل}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^۲ = \left(\frac{۱۲}{۲۰}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_۱ = \frac{۹}{۲۵} S_{کل} \xrightarrow{S_{کل} = S_۱ + S_۲} S_۲ = \frac{۱۶}{۲۵} S_{کل} \Rightarrow \frac{S_۲}{S_{کل}} = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow[\times ۴]{\times ۴} \frac{۶۴}{۱۰۰}$$

۱۸۳ ۱

پاره خط MN را موازی قاعدهٔ $BC = ۱۸$ رسم می‌کنیم. طبق فرض مساحت ذوزنقه $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث AMN، $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث ABC است. زیرا:



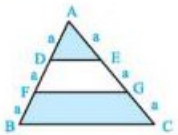
$$S_{\overset{\Delta}{AMN}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - S_{\overset{\Delta}{MNCB}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - \frac{۱}{۳} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۲}{۳} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

از طرفی چون $MN \parallel BC$ است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه است. داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۲}{۳} = \left(\frac{MN}{۱۸}\right)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{MN}{۱۸} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \Rightarrow MN = \frac{۱۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \xrightarrow[\text{کردن}]{\text{گویا}} \frac{۱۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۸\sqrt{۶}}{۳} = ۶\sqrt{۶}$$

@khanen_book

۱۸۴ ۲ **روش اول:**

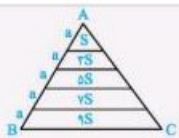


$$\begin{cases} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۳}\text{ , مشترک } \hat{A} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADE}}=\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \\ \frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{۲}{۳}\text{ , مشترک } \hat{A} \Rightarrow \overset{\Delta}{AFG}\sim\overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AFG}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AFG}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \end{cases}$$

$$\text{ناحیهٔ سایه زده شده}=S_{\overset{\Delta}{ADE}}+S_{FGCB}=\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}+(S_{\overset{\Delta}{ABC}}-S_{\overset{\Delta}{AFG}})=\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}+S_{\overset{\Delta}{ABC}}-\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۶}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

پس جواب $\frac{۶}{۹}$ یا $\frac{۲}{۳}$ است.

روش دوم:



نکته اگر خطوطی مطابق شکل موازی قاعدهٔ BC به گونه‌ای رسم شود که ضلع AB را به چند قسمت مساوی تقسیم کند، آن‌گاه مساحت ناحیه‌های ایجاد شده به صورت S، ۳S، ۵S و ... است.

در این تست ضلع مثلث به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده است. پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\text{ مساحت}=S+۳S+۵S=۹S \quad\text{و}\quad \text{مساحت سایه‌دار}=S+۵S=۶S$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت سایه‌زده شده}}{\overset{\Delta}{ABC}\text{ مساحت}}=\frac{۶S}{۹S}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{مساحت سایه‌دار}=\frac{۲}{۳}\times S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

۱۸۵ ۴

$$\overset{\Delta}{ACD}:\frac{DP}{DC}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DPN}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DPN}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ACD}}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}:\frac{MD}{BD}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MND}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MND}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABD}}$$

$$\Rightarrow S_{ABMN}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}-S_{\overset{\Delta}{MND}}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}-\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABD}}=\frac{۵}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABD}}$$

از طرفی داریم:

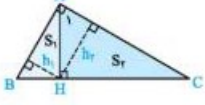
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{\frac{h\times DC}{۲}}{\frac{h\times BD}{۲}}=\frac{DC}{BD}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ACD}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABD}} \quad (*)$$

پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DPN}}}{S_{ABMN}}=\frac{\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ACD}}\overset{(*)}{=}\frac{۴}{۹}(\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABD}})}{\frac{۵}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{\frac{۴}{۱۸}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۲}{۵}$$

۱۸۶ ۱ سخت‌ترین قسمت حل این تست، معنی کردن عبارت «نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم» در صورت تست است. از کلمهٔ «نسبت» که صرف‌نظر کنیم، کلمهٔ «فاصله» همیشه ما را به یاد عمود کردن می‌اندازد. پای ارتفاع هم یعنی محل فرود ارتفاع (نقطهٔ H در شکل زیر) پس مطابق شکل از H به دو ضلع AB و AC عمود می‌کنیم و طول پاره‌خط‌های عمود را $h_۱$ و $h_۲$ می‌نامیم. مسأله، نسبت این دو پاره‌خط (یعنی $\frac{h_۱}{h_۲}$) را از ما می‌خواهد.

$$S_۱=\frac{۱}{۵}S_{\text{کل}} \Rightarrow S_۱=\frac{۱}{۵}(S_۱+S_۲) \Rightarrow ۵S_۱=S_۱+S_۲ \Rightarrow S_۲=۴S_۱ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۴} \quad (*)$$

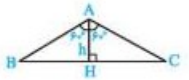


دو مثلث ABH و AHC به حالت دو زاویه ($\hat{A}_۱=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{H}=۹۰^\circ$) متشابه‌اند، پس نسبت مساحت آن‌ها، مجذور نسبت ارتفاع‌هایشان است:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{h_۱}{h_۲})^۲ \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{۱}{۴}=(\frac{h_۱}{h_۲})^۲ \Rightarrow \frac{h_۱}{h_۲}=\frac{۱}{۲}$$

@khanenbook

۱۸۷ ۱ در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز و میانه هم است. با فرض آن‌که ارتفاع h باشد،



قاعده را می‌یابیم:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{HC}{h} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{HC}{h} \Rightarrow HC = \sqrt{۳}h \quad (*)$$

پس قاعدهٔ BC برابر است با:

$$BC = BH + HC \xrightarrow{BH = HC} ۲HC \xrightarrow{(*)} ۲\sqrt{۳}h \quad (**)$$

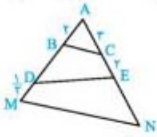
طبق فرض مساحت $\sqrt{۳}$ است:

$$S = \frac{h \times BC}{۲} \xrightarrow{(**)} \sqrt{۳} = \frac{h \times (۲\sqrt{۳}h)}{۲} \xrightarrow{h>۰} h^۲ = ۱ \Rightarrow h = ۱ \xrightarrow{(**)} \text{قاعده}: BC = ۲\sqrt{۳}(۱) = ۲\sqrt{۳}$$

نسبت مساحت دو مثلث برابر مجذور نسبت قاعده‌ها (نسبت تشابه) است:

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^۲ = \left(\frac{۶\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}\right)^۲ = ۳^۲ = ۹$$

۱۸۸ ۱ دو مثلث ABC و ADE طبق فرض متشابه‌اند و چون BC موازی DE نمی‌باشد، پس زاویه‌های برابر آن‌ها به صورت زیر است:



$$\hat{B} = \hat{E}, \hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \begin{matrix} A & B & C \\ A & E & D \end{matrix} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{۲}{۲+۳} = \frac{۳}{AD} \Rightarrow ۲AD = ۱۵ \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۲}$$

دو مثلث AMN و ADE طبق فرض متشابه‌اند و چون DE و MN موازی نمی‌باشند، زاویه‌های برابر آن به صورت زیر است:

$$\hat{E} = \hat{M}, \hat{D} = \hat{N} \Rightarrow k = \text{نسبت تشابه} = \frac{AM}{AE} = \frac{AD + DM}{AC + CE} = \frac{\frac{۱۵}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۳+۲} = \frac{\frac{۱۶}{۲}}{۵} = \frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ADE}} = k^۲ = \left(\frac{۸}{۵}\right)^۲ = \frac{۶۴}{۲۵}$$

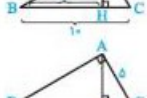
۱۸۹ ۴ با توجه به فرمول‌های درسنامه گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح و لذا گزینه (۴) غلط و جواب تست است.

۱۹۰ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$AH^۲ = BH \times HC \Rightarrow AH^۲ = ۹ \times (۱۰ - ۹) = ۹ \times ۱ = ۹ \Rightarrow AH = ۳ \quad ✓$$

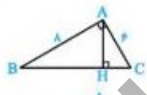
گزینهٔ (۲):



$$AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۵^۲ = ۲ \times BC \Rightarrow BC = \frac{۲۵}{۲} \Rightarrow BH = \frac{۲۵}{۲} - ۲ = \frac{۲۱}{۲}$$

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = \frac{۲۱}{۲} \cdot \frac{۲۵}{۲} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{۲۵ \times ۲۱}{۴}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۲۱} \quad ✓$$

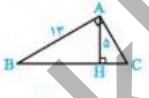
گزینهٔ (۳):



$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۸ \times ۶ \Rightarrow AH = ۴/۸ \quad ×$$

گزینهٔ (۴):



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱۳^۲ = ۵^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱۶۹ - ۲۵ = BH^۲ \Rightarrow ۱۴۴ = BH^۲ \Rightarrow BH = ۱۲$$

$$AH^۲ = BH \times HC \Rightarrow ۵^۲ = ۱۲ \times HC \Rightarrow HC = \frac{۲۵}{۱۲}$$

۱۹۱ ۲

$$AH^۲ = (BH) \times (CH) \Rightarrow AH^۲ = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶$$

بنابراین:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۶}} \times (۳ + ۱۲)}{\cancel{۲}} = ۳ \times ۱۵ = ۴۵$$

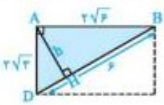
۱۹۲ ۳ ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول وتر BC را می‌یابیم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

حال تساوی زیر را می‌نویسیم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۳ = ۵ \times ۱۲ \Rightarrow AH = \frac{۶۰}{۱۳}$$

۱۹۳ ۴ فاصلهٔ هر رأس تا قطر مستطیل همان ارتفاع وارد بر وتر مثلث مطابق شکل زیر است. حال ابتدا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، طول وتر BD را می‌یابیم:



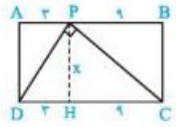
$$BD^۲ = (۲\sqrt{۶})^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲ = ۲۴ + ۱۲ = ۳۶ \xrightarrow{\text{جذر}} BD = ۶ \quad (*)$$

بنابراین:

$$AB \times AD = h \times BD \xrightarrow{(*)} \underbrace{۲\sqrt{۶} \times ۲\sqrt{۳}}_{۲\sqrt{۱۸}} = h \times ۶ \Rightarrow h = \frac{۴\sqrt{۱۸}}{۶} = \frac{۴(۳\sqrt{۲})}{۶} = ۲\sqrt{۳}$$

@khanen_book

۱۹۴ ۴ طبق فرض داریم:

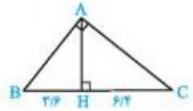


$$۳AP = ۹ \Rightarrow AP = ۳ \ , \ BP = ۹$$

با توجه به شکل، چهارضلعی‌های APHD و PBCH مستطیل هستند، پس اضلاع روبه‌رو در آن‌ها با هم مساوی هستند. پس $DH = ۳$ و $HC = ۹$. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ DPC داریم:

$$DP^۲ = DH \times DC \Rightarrow DP^۲ = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow DP = ۶$$

۱۹۵ ۳



$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۳/۶ \times \underbrace{(۳/۶ + ۶/۴)}_{۱۰} = ۳۶ \Rightarrow AB = ۶$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow AC^۲ = ۶/۴ \times \underbrace{(۶/۴ + ۳/۶)}_{۱۰} = ۶۴ \Rightarrow AC = ۸$$

$$\Rightarrow AB + AC = ۶ + ۸ = ۱۴$$

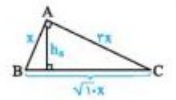
۱۹۶ ۳ اضلاع قائمه را x و $۳x$ در نظر گرفته و با استفاده قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر را می‌یابیم:

$$x^۲ + (۳x)^۲ = BC^۲ \Rightarrow x^۲ + ۹x^۲ = BC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۱۰x^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۱۰}x \qquad (*)$$

از طرفی مساحت مثلث ۶۰ است:

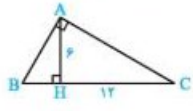
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{x \times ۳x}{۲} = ۶۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲۰ \Rightarrow x^۲ = ۴۰ \Rightarrow x = \sqrt{۴ \times ۱۰} = ۲\sqrt{۱۰} \xrightarrow{(*)} BC = \sqrt{۱۰}(۲\sqrt{۱۰}) = ۲۰$$

برای محاسبهٔ ارتفاع از فرمول مساحت مثلث استفاده می‌کنیم:



$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} \times h_a \times BC \Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۲} h_a (۲۰) \Rightarrow h_a = ۶$$

۱۹۷ ۳

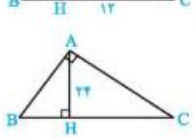


$$AH^۲ = BH \times CH \Rightarrow ۶^۲ = BH \times ۱۲ \Rightarrow ۳۶ = ۱۲(BH) \Rightarrow BH = ۳ \qquad (*)$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABH}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times BH}{۲}} = \frac{BC}{BH} = \frac{BH + HC}{BH} \xrightarrow{(*)} \frac{۳ + ۱۲}{۳} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

۱۹۸ ۳



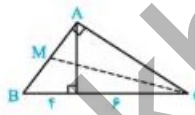
$$\frac{BH}{CH} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow BH = ۹x \ , \ CH = ۱۶x$$

$$AH^۲ = BH \times CH \Rightarrow ۲۴^۲ = (۹x)(۱۶x) \Rightarrow \frac{۲۴ \times ۲۴}{۹ \times ۱۶} = x^۲ \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۳ \times ۴} = ۲$$

پس:

$$\begin{cases} BH = ۹x = ۹(۲) = ۱۸ \\ CH = ۱۶x = ۱۶(۲) = ۳۲ \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \underbrace{BH + CH}_{BC} = ۱۸ + ۳۲ = ۵۰$$

۱۹۹ ۳ با توجه به شکل بزرگ‌ترین میانه، میانهٔ وارد بر ضلع کوچک‌تر یعنی ضلع AB است. لذا باید طول میانهٔ CM را بیابیم.



$$\overset{\Delta}{AMC} : CM^۲ = AM^۲ + AC^۲ \xrightarrow{AM = \frac{AB}{۲}} CM^۲ = \left(\frac{AB}{۲}\right)^۲ + AC^۲ \qquad (*)$$

پس باید اضلاع قائمه را به کمک روابط مطرح شده در درسنامه بیابیم:

$$AB^۲ = BH.BC \Rightarrow AB^۲ = ۴(۱۰) \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۰} \quad , \quad AC^۲ = HC.BC \Rightarrow AC^۲ = ۶(۱۰) \Rightarrow AC = \sqrt{۶۰}$$

$$\xrightarrow{(*)} CM^۲ = \left(\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۲}\right)^۲ + (\sqrt{۶۰})^۲ = ۱۰ + ۶۰ = ۷۰ \Rightarrow CM = \sqrt{۷۰}$$

۲۰۰ ۳ قسمت اصلی حل این تست، رسم شکل است. برای این کار سعی می‌کنیم مرحله به مرحله اطلاعات مسأله را روی شکل پیاده کنیم.

مرحلهٔ (۱): قطر مستطیل را رسم کرده و یک انتهای آن را در نظر می‌گیریم. مثلاً نقطهٔ C.

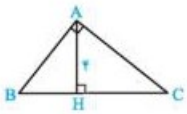
مرحلهٔ (۲): در C خطی بر قطر AC عمود می‌کنیم. این خط باید امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل (یعنی عرض مستطیل) را در M قطع کند. پس عرض مستطیل را از طرفی امتداد می‌دهیم تا با این خطِ عمود برخورد کند.

مثلث ACM قائم‌الزاویه و DC ارتفاع وارد بر وتر است. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر قطر AC مطابق شکل، برابر $MA = x + ۱$ است. پس داریم:

$$CD^۲ = AD \times DM \Rightarrow ۲^۲ = ۱ \times x \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow MA = x + ۱ = ۴ + ۱ = ۵$$

@khaneh_book

۴ ۲۰۱



$$S_{\Delta ACH} = ۲S_{\Delta ABH} \Rightarrow \frac{AH \times HC}{۲} = \not{۲}\left(\frac{AH \times BH}{\not{۲}}\right) \Rightarrow HC = ۲BH \ (*)$$

از طرفی داریم:

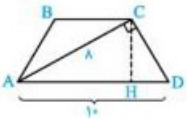
$$AH^۲ = BH \times HC \xrightarrow{(*)} ۴^۲ = BH(۲BH) \Rightarrow ۱۶ = ۲(BH)^۲ \Rightarrow (BH)^۲ = ۸$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{۸} \xrightarrow{(*)} HC = ۲\sqrt{۸} \Rightarrow BC = BH + HC = ۳\sqrt{۸}$$

بنابراین:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{\not{۴} \times ۳\sqrt{۸}}{\not{۲}} = ۶\sqrt{۸} = ۶\sqrt{۴ \times ۲} = ۶ \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$$

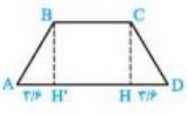
۱ ۲۰۲ در مثلث ACD داریم:



$$AD^۲ = AC^۲ + CD^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۸^۲ + CD^۲ \quad \text{: فیثاغورس}$$

$$\Rightarrow CD^۲ = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow CD = ۶$$

از طرفی داریم:

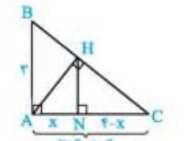


$$CD^۲ = DH \times AD \Rightarrow ۶^۲ = DH \times (۱۰)$$

$$\Rightarrow DH = \frac{۳۶}{۱۰} = ۳/۶ \xrightarrow[\text{متساوی‌الساقین}]{\text{دورنقطه}} AH' = DH = ۳/۶$$

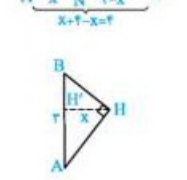
$$BC = AD - (DH + AH') = ۱۰ - (۳/۶ + ۳/۶) = ۲/۸ \quad \text{: قاعدهٔ کوچک‌تر}$$

۱ ۲۰۳ در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ قائمه ۳ و ۴ هستند. بنابراین وتر یعنی $BC = ۵$ خواهد بود. حال در مثلث ABC از روابط زیر استفاده می‌کنیم:



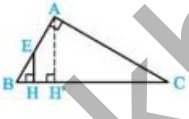
$$\begin{cases} AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵} \\ AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۳^۲ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵} \end{cases}$$

حال در مثلث ABH از رابطهٔ زیر استفاده کرده و x را می‌یابیم:



$$x \times AB = BH \times AH \Rightarrow x \times ۳ = \frac{۹}{۵} \times \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{\frac{۹ \times ۱۲}{۲۵}}{۳} = \frac{۳۶}{۲۵} \xrightarrow[\times ۴]{\times ۴} \frac{۱۴۴}{۱۰۰} = ۱/۴۴$$

۲ ۲۰۴ از رأس A به ضلع BC عمود می‌کنیم. حال در مثلث ABH' داریم:



$$\frac{EH'}{AH'} = \frac{BE}{AB} \ (*)$$

از طرفی طبق فرض $\frac{AE}{BE} = ۲ \Rightarrow BE = y \ , \ AE = ۲y \Rightarrow AB = ۳y$. پس:

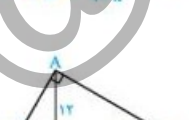
$$\xrightarrow{(*)} \frac{EH'}{AH'} = \frac{y}{۳y} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{AH'} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow AH' = ۱۲$$

حال BH' را x فرض می‌کنیم. در این صورت CH' برابر $۳۰ - x$ می‌شود. حال از رابطهٔ زیر استفاده کرده و x را می‌یابیم:

$$(AH')^۲ = BH' \times H'C \Rightarrow ۱۲^۲ = x(۳۰ - x) \Rightarrow ۱۴۴ = ۳۰x - x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳۰x + ۱۴۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۶)(x - ۲۴) = ۰ \Rightarrow x = ۶, x = ۲۴$$

فرض کنیم $x = ۶$ باشد. داریم:



$$AB^۲ = BH' \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۶ \times ۳۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۸۰} = ۶\sqrt{۵}$$

$$AC^۲ = CH' \times BC \Rightarrow AC^۲ = ۲۴ \times ۳۰ \Rightarrow AC = \sqrt{۷۲۰} = ۱۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow AB + AC = ۶\sqrt{۵} + ۱۲\sqrt{۵} = ۱۸\sqrt{۵}$$

@khaneh_book

فصل ۳

MATHEMATICS

تابع

- درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع
- درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک
- درس سوم: اعمال جبری روی توابع

@khanen_book

درس‌نامه ۱

انتقال توابع (۱)

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ معلوم باشد، می‌توانیم نمودار برخی توابع وابسته به آن را رسم نماییم.

انتقال‌های افقی و عمودی:

اگر تابع $y = f(x)$ و $a > 0$ معلوم باشد، برای رسم نمودار توابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) برای رسم نمودار $y = f(x - a)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازهٔ a **واحد به سمت راست** (در جهت مثبت محور xها) انتقال دهیم.

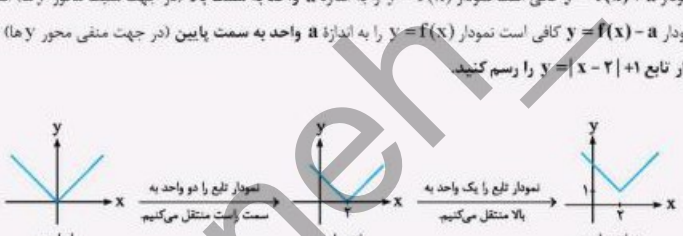
۲) برای رسم نمودار $y = f(x + a)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازهٔ a **واحد به سمت چپ** (در جهت منفی محور xها) انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازهٔ a **واحد به سمت بالا** (در جهت مثبت محور yها) انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازهٔ a **واحد به سمت پایین** (در جهت منفی محور yها) انتقال دهیم.

مثال نمودار تابع $y = |x - ۲| + ۱$ را رسم کنید.

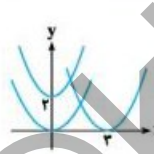
پاسخ:



سؤال دانش‌پژوه (سونیا گل‌محمدی): ببخشید! من به نظرم، شکل باید دو واحد به چپ حرکت کند چون ۲ از x کم شده. نظرم غلطه؟!

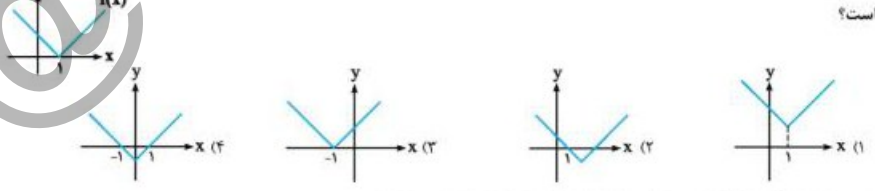
پاسخ: نظرت بسیار برای من محترمه اما غلطه! چون ابتدا معادلهٔ $x - ۲ = ۰$ را حل و در نتیجه $x = ۲$ واحد به راست حرکت می‌کنیم.

۱- در شکل مقابل توابع $y = x^۲$، $y = (x + a)^۲$ و $y = x^۲ + b$ نشان داده شده‌اند. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟



۱) $(-۲, ۳)$
۲) $(-۳, ۲)$
۳) $(۳, -۲)$
۴) $(۲, -۳)$

۲- اگر نمایش هندسی تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمایش هندسی تابع $g(x) = f(x + ۱) - ۱$ کدام است؟



۳- نمودار تابع $y = |x - ۴| - ۱$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) ۳

@khanehbook

۴- کدام تابع در دامنهٔ داده شده، یک‌به‌یک است؟

۱) $D_f=[0,+\infty)\ ,\ f(x)=x^2-2$

۲) $D_f=[-2,+\infty)\ ,\ f(x)=|x-2|$

۳) $D_f=[-1,2]\ ,\ f(x)=x^2+3$

۴) $D_f=\{4,0\}\ ,\ f(x)=4$

۵- تابع $f(x)=|x-4|$ در کدام‌یک از حالات زیر، یک‌به‌یک خواهد بود؟ آزمون‌های گاج

۱) دامنهٔ f همهٔ اعداد حقیقی باشد.

۲) دامنهٔ f همهٔ اعداد طبیعی باشد.

۳) دامنهٔ f مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد.

۴) دامنهٔ f مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۵ باشد.

۶- رأس سهمی به معادلهٔ $y=-2x^2+5$ را ۲ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. معادلهٔ آن پس از انتقال، کدام است؟

۱) $y=-2x^2+8x-7$

۲) $y=-2x^2+8x+3$

۳) $y=-2x^2-8x-7$

۴) $y=2x^2-8x+7$

۷- نموداری پس از انتقال رأس آن به اندازهٔ یک واحد به راست و دو واحد به سمت بالا، با ضابطهٔ $g(x)=(x-2)^2$ مشخص گردیده است. قبل از انتقال، معادلهٔ آن کدام بوده است؟

۱) $f(x)=(x-1)^2$

۲) $f(x)=x^2-2x-1$

۳) $f(x)=x^2-6x+11$

۴) $f(x)=(x-3)^2$

۸- به‌ترتیب با کدام انتقال‌های زیر، می‌توان از نموداری با ضابطهٔ $y=x^2-4x+3$ به نمودار $y=x^2$ رسید؟

۱) ۳ واحد به پایین و ۴ واحد به راست

۲) ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا

۳) ۳ واحد به پایین و ۴ واحد به چپ

۴) ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا

۹- چگونه می‌توان از انتقال نمودار تابع $y=|x-1|+1$ به نمودار تابع $y=|x-2|-1$ رسید؟

۱) انتقال به اندازهٔ ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین

۲) انتقال به اندازهٔ ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین

۳) انتقال به اندازهٔ ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین

۴) انتقال به اندازهٔ ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین

درسنامهٔ ۲

انتقال توابع (۲)

نمودار توابع $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$

۱) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به **محور x ها** رسم می‌کنیم.

۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به **محور y ها** رسم می‌کنیم.

نمودارهای شناخته شده و استاندارد $y=|x|$ و $y=-|x|$ به صورت‌های زیر می‌باشند که به کمک این دو نمودار و با استفاده از روش انتقال می‌توان بعضی از توابع قدرمطلقی را رسم کرد.

۱) $y=|x|$

۲) $y=-|x|$

مثال نمودار تابع $y=-|x-4|+2$ را رسم کنید.

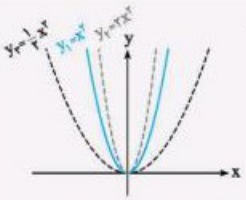
پاسخ: در این‌جا نمودار $y=|x|$، ۴ واحد به سمت راست رفته، سپس نسبت به محور x ها قرینه شده و در نهایت ۲ واحد به سمت بالا منتقل شده است.

وضعیت تابع $y=kf(x)$ به ازای $k>0$: در تابع $y=kf(x)$ نسبت به تابع $y=f(x)$ مقادیر دامنه تغییر نمی‌کنند اما مقادیر برد k برابر می‌شوند. اگر $0<k<1$ باشد، شکل نمودار نسبت به نمودار قبلی به محور x ها نزدیک می‌شود ولی اگر $k>1$ باشد، شکل نمودار نسبت به نمودار قبلی از محور x ها دورتر می‌شود.

@khanen_book

مثال نمودار توابع $y_1=x^2$، $y_2=2x^2$ و $y_3=\frac{1}{2}x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

پاسخ:



وضعیت تابع $y=f(kx)$ به ازای $k>0$: در این حالت مقادیر برد نسبت به $y=f(x)$ تغییری نمی‌کنند، اما مقادیر دامنه $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.

مثال اگر دامنهٔ تابع $f(x)$، $[-1,2]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=2f(\frac{x}{4})+1$ کدام است؟

پاسخ: در تابع $f(x)$ مقادیر ورودی x بود و در تابع جدید مقادیر ورودی (متغیر جدید) $\frac{x}{4}$ می‌باشد. مقادیر ورودی f باید در بازهٔ $[-1,2]$ باشند، لذا داریم:

$$-1\le\frac{x}{4}\le 2 \xrightarrow{\times 4} -4\le x\le 8 \Rightarrow D_y=[-4,8]$$

همان‌طور که گفته شد دامنه $\frac{1}{k}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$ برابر شده است.

سؤال *دانش‌پژوه (عزیز عزیزی اصل)* ببخشید، عدد ۲ که در $f(\frac{x}{4})$ ضرب شده و عدد ۱ که با اون جمع شده پس چی میشن؟

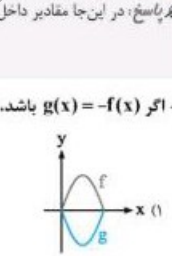
پاسخ: عزیز ! بحث مقادیر دامنه فقط شامل شکم f (درون f) میشه و اون ۲ و ۱ روی مقادیر برد تأثیرگذارن، نه روی مقادیر دامنه.

مثال اگر برد تابع $f(x)$ برابر $[-3,4]$ باشد، برد تابع $y=3f(x+1)-6$ را بیابید.

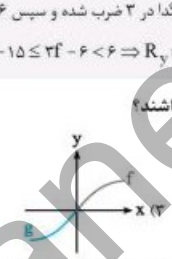
پاسخ: در این‌جا مقادیر داخل شکم f تأثیری روی برد ندارند. چون تابع ابتدا در ۳ ضرب شده و سپس ۶ واحد از مقادیر آن کاسته شده است، داریم:

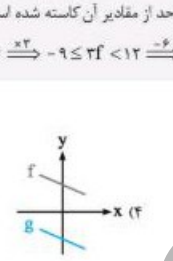
$$-3\le f<4 \xrightarrow{\times 3} -9\le 3f<12 \xrightarrow{-6} -15\le 3f-6<6 \Rightarrow R_y=[-15,6)$$

۱۰- اگر $g(x)=-f(x)$ باشد، f و g کدام‌یک از توابع زیر می‌توانند باشند؟

۱) 

۲)

۳) 

۴) 

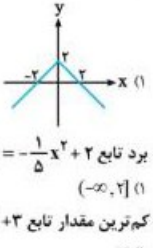
۱۱- نمودارهای توابع $y_1=f(x)$ و $y_2=-f(x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یکسان هستند. $f(2)$ کدام است؟

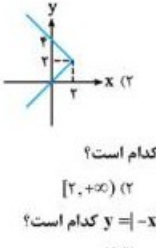
۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) $\frac{1}{2}$

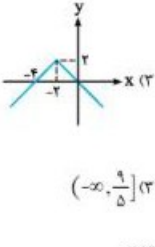
۱۲- نمودار کدام تابع زیر، از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $f(x)=x^4$ ۲) $f(x)=1+x^2$ ۳) $f(x)=x^2$ ۴) $f(x)=1-x^2$

۱۳- نمودار هندسی تابع $y=-|x-2|+2$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴)

۱۴- برد تابع $f(x)=-\frac{1}{5}x^2+2$ کدام است؟

۱) $(-\infty,2]$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $(-\infty,\frac{9}{5}]$ ۴) $(\frac{9}{5},+\infty]$

۱۵- کم‌ترین مقدار تابع $y=|-x^2-2|+3$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱

۱۶- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=-2|x|+3$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-2]$ ۲) $[-2,3]$ ۳) $[3,+\infty)$ ۴) $(-\infty,3]$

برگرفته از کتاب درسی

@khanehketab

۱۷- برد تابع $y = ۲ - \sqrt{۴x^۲ - ۸x + ۴}$ کدام است؟

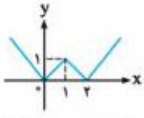
۱) $[۲, +\infty)$ ۲) $(-\infty, ۲]$ ۳) $[۰, ۲]$ ۴) $[-۲, ۲]$

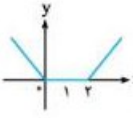
۱۸- تابع $y = |x^۲ - ۱| + \sqrt{۲}$ در کدام نواحی محورهای مختصات قرار دارد؟

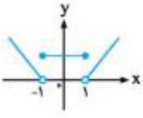
۱) اول و سوم ۲) اول و چهارم ۳) دوم و سوم ۴) اول و دوم

۱۹- نمودار تابع $y = ||x - ۱| - ۱|$ کدام است؟

۱)

۲) 

۳) 

۴) 

۲۰- مساحت محدود به نمودار تابع $y = ۳ - |x|$ و محور xها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

آزمون‌های گاج

۲۱- اگر دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-۱, ۳]$ باشد، دامنهٔ تابع $y = ۳f(\frac{x}{۲}) - ۱$ کدام است؟

۱) $[-۳, ۹)$ ۲) $[-۲, ۶)$ ۳) $[-۴, ۸)$ ۴) $[-۳, ۵)$

۲۲- اگر برد تابع $y = f(x)$ برابر $R_f = [-۱, ۳]$ باشد، برد تابع $y = ۲f(x) - ۱$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۳]$ ۲) $[-۲, ۶]$ ۳) $[-۳, ۵]$ ۴) $[-۱, ۵]$

۲۳- اگر برد تابع $y = f(x)$ برابر $R_f = [-\sqrt{۳}, ۲]$ باشد، برد تابع $y = \sqrt{۲}f(x - ۱) + ۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

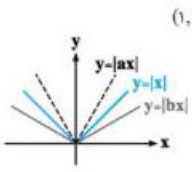
۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴- اگر نقطهٔ $A(۳, ۱)$ بر روی نمودار تابع $f(x)$ باشد، نقطهٔ متناظر با A بر روی نمودار $y = ۳f(۴x - ۱) + ۵$ کدام است؟

۱) $(۱۱, ۱۷)$ ۲) $(۱۱, ۸)$ ۳) $(۱, ۸)$ ۴) $(۱, ۱۷)$

۲۵- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟

برگرفته از کتاب درسی



۱) $a = ۳, b = ۲$ ۲) $a = -\frac{۱}{۲}, b = \frac{۱}{۳}$

۳) $a = -۲, b = \frac{۱}{۲}$ ۴) $a = \frac{۱}{۲}, b = ۲$

۲۶- در کدام تابع زیر، رابطهٔ $f(ax) = af(x)$ به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ برقرار است؟

۱) $f(x) = ۲x + ۱$ ۲) $f(x) = ۳$ ۳) $f(x) = x^۲$ ۴) $f(x) = -۲x$

درسنامهٔ ۳

توابع گویا (کسری)

توابعی که با یک عبارت گویا (عباراتی کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای می‌باشد) نمایش داده می‌شوند، توابع گویا می‌نامیم.

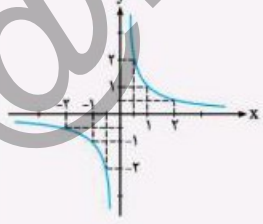
مثال توابع $f(x) = \frac{-۱}{x^۲ + ۲}$ و $g(x) = \frac{۲۵۵x}{۱۰۰ - x}$ توابعی گویا هستند.

مثال اگر $f(x) = \frac{۲x - ۱}{x^۳ - ۵}$ باشد، $f(-۱)$ را بیابید.

پاسخ:

$$f(-۱) = \frac{۲(-۱) - ۱}{(-۱)^۳ - ۵} = \frac{-۳}{-۶} = \frac{۱}{۲}$$

نمودار تابع کسری $y = \frac{۱}{x}$: نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل می‌باشد:



x	...	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	...
y	...	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	...

نکته همان‌طور که از نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ پیدا است، دامنه و برد این تابع، $\mathbb{R} - \{۰\}$ می‌باشد.

@khanen_book

نکته تابع $y=\frac{1}{x}$ تابعی **یک‌به‌یک** است و **معکوس این تابع خودش می‌شود.** (ضابطهٔ این تابع با وارونش برابر است.)

دامنهٔ توابع گویا: دامنهٔ توابع گویا برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است، **به جز** آن مجموعه از اعداد حقیقی که باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شوند، (زیرا صفر شدن مخرج کسر به معنای تعریف نشدن عبارت گویا خواهد بود.) بنابراین دامنهٔ توابع گویا را به صورت {ریشه‌های مخرج کسر} - $\mathbb{R}$ تعیین می‌کنیم.

مثال دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-1}{2x-4}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقادیری که تابع را تعریف نشده می‌کنند، به‌دست آوریم.

$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ مقداری که به ازای آن تابع تعریف نشده می‌شود. $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

نکته در توابع گویا برای پیدا کردن دامنه، مجاز به **ساده کردن** صورت و مخرج کسر **نمی‌باشیم.**

مثال دامنهٔ تابع $y=\frac{x-1}{x^2-1}$ را پیدا کنید.

پاسخ: برای حل، ابتدا مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقادیری که تابع را تعریف نشده می‌کنند، به‌دست آید.

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ مقادیری که به ازای آن تابع تعریف نشده می‌شود. $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

توجه **حق نداریم** برای تعیین دامنهٔ توابع گویا، صورت و مخرج کسر را ساده کنیم. مثلاً اگر در مثال قبل، صورت و مخرج را ساده می‌کردیم، داشتیم:

$y=\frac{x-1}{x^2-1} \Rightarrow y=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow y=\frac{1}{x+1}$ $\quad x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

اگر دانش‌پژوهی دامنهٔ تابع فوق را از روی $y=\frac{1}{x+1}$ به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ در بیاورد **اشتباه حل کرده است.**

۲۷- تابع $f(x)=\frac{2}{x+2}$ با برد $\{-1,0,1,2\}$، دارای چه دامنه‌ای است؟

۱) $\{-4,0,-1\}$ ۲) $\{1,3,4\}$ ۳) $\left\{2,\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}$ ۴) $\{-3,-1,0\}$

۲۸- اگر $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+7}$ باشد، $f(\sqrt{3}-2)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲۹- اگر $f(x)=x+\frac{2}{x}$، مقدار $f(1-\sqrt{2})+f(1+\sqrt{2})$ کدام است؟ انسانی خارج ۹۰

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۳۰- اگر $f(x)=\frac{2x^2+2}{x^2-3}$ باشد، مقدار $f(2-\sqrt{3})$ کدام است؟ انسانی داخل ۹۰

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $-2+\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

۳۱- اگر $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{x}{x-1}$، آن‌گاه مقدار $f(2)$ کدام است؟ نمونه‌های گاج

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2}$

۳۲- با توجه به نمودار تابع $y_1=\frac{1}{x}$، نمودار تابع $y_2=\frac{3x+1}{x}$ را چگونه می‌توان با انتقال تابع y_1 به‌دست آورد؟

۱) انتقال تابع y_1 به اندازهٔ ۳ واحد به بالا
۲) انتقال تابع y_1 به اندازهٔ ۳ واحد به سمت چپ
۳) انتقال تابع y_1 به اندازهٔ ۳ واحد به سمت پایین
۴) انتقال تابع y_1 به اندازهٔ ۳ واحد به سمت راست

۳۳- اگر $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-1}$، آن‌گاه $\frac{1}{3}f(0)+f(2x+1)$ کدام است؟ انسانی داخل ۸۹ و مشابه خارج ۸۹

۱) $\frac{1}{x^2+x}$ ۲) $\frac{1}{x^2-x}$ ۳) $\frac{2}{x^2+x}$ ۴) $\frac{2}{x^2-x}$

۳۴- دامنهٔ تابع $y=\frac{2x-1}{1+3x+4x^2}$، کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-\{3,4\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $(-\infty,0]$

@khanehketab

۳۵- تابع $y = \frac{m}{3x^2 - 6x + 2m}$ به ازای چه مقادیری از m همواره تعریف شده است؟

۱) $m = \frac{3}{2}$ ۲) $m < \frac{3}{2}$ ۳) $m > \frac{3}{2}$ ۴) $0 < m < \frac{3}{2}$

۳۶- اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + ax + b}$ به‌صورت $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۵ ۳) ۱ ۴) -۱

۳۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + ax - b}$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۳۸- برد تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 3}$ کدام است؟

۱) $(0, 3]$ ۲) $[1, 3]$ ۳) $(1, 3]$ ۴) $(0, 3)$

۳۹- یک باشگاه سوارکاری به علاقه‌مندان این رشته آموزش می‌دهد. اگر $P(n)$ درصد آمادگی یک فرد در جلسهٔ nام آموزش باشد و $P(n) = 100 \times \frac{4n - 1}{4n + 4}$، درصد آمادگی این فرد در جلسهٔ دوازدهم چند برابر جلسهٔ دوم است؟

۱) $\frac{94}{75}$ ۲) $\frac{19}{15}$ ۳) $\frac{19}{25}$ ۴) $\frac{94}{25}$

۴۰- درصد کارایی مغز یک فرد مبتلا به یک بیماری خاص در هر ماه از رابطهٔ $P(n) = 200\frac{n + 2}{3n + 4}$ حاصل می‌شود، که در آن n تعداد ماه‌های سپری شده از آغاز بیماری است. پس از چند ماه از آغاز بیماری کارایی مغز بیمار به ٪۶۰ کاهش می‌یابد؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) هیچ‌گاه به ٪۶۰ کاهش نمی‌یابد.

۴۱- کدام گزینهٔ زیر بیان‌کنندهٔ مساحت مستطیلی است که قطر آن همواره از نقطهٔ ثابت (a, b) می‌گذرد و جهت مثبت محورهای مختصات را در $(x, 0)$ و $(0, y)$ قطع می‌کند؟

۱) $S = \frac{bx^2}{x - a}$ ۲) $S = \frac{bx^2}{x + a}$ ۳) $S = \frac{ax^2}{x - b}$ ۴) $S = \frac{ax^2}{x + b}$

درسنامهٔ ۴

توابع رادیکالی

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$: نمودار این تابع به‌صورت مقابل می‌باشد:

x	۰	۱	۴	...
y	۰	۱	۲	...

نکته همان‌طور که از نمودار پیداست، دامنه و برد تابع $y = \sqrt{x}$ اعداد حقیقی نامنفی است.

نکته تابع $y = \sqrt{x}$ تابعی **یک‌به‌یک** است.

دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد: برای تعیین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، رادیکال را **نادیده** می‌گیریم. اگر زیر رادیکال با فرجهٔ فرد یک تابع چندجمله‌ای باشد، دامنه $\mathbb{R}$ می‌شود و اگر عبارت کسری باشد، دامنه برابر {ریشه‌های مخرج} $- \mathbb{R}$ می‌شود.

مثال دامنهٔ تابع $y = \sqrt[3]{\frac{2x - 3}{x^2 - 1}}$ چیست؟

پاسخ: با توجه به این‌که فرجهٔ رادیکال عددی فرد (۳) است، رادیکال را نادیده می‌گیریم و چون تابع زیر رادیکال کسری است، دامنه برابر {ریشه‌های مخرج} $- \mathbb{R}$ است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج: برای تعیین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، عبارت زیر رادیکال را **بزرگ‌تر یا مساوی** صفر قرار می‌دهیم.

مثال دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x - 4}$ چه مقادیری می‌باشد؟

پاسخ:

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_f : x \geq 4$$

@khanehbook

مثال دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x-4}}$ چه مقادیری می‌باشد؟

پاسخ: $2x-4>0 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2$

سؤال دانش‌پژوه (التماز پریشانی): آقا اجازه! چرا جلوی عبارت فقط علامت > قرار دادید و علامت ≥ نگذاشتید؟

پاسخ: عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج در مخرج کسر است و اگر آن را مساوی صفر قرار بدیم کسر تعریف نشده می‌شه. بنابراین مواقعی که عبارت رادیکالی با فرجهٔ زوج در مخرج کسر باشه، عبارت زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دیم.

وضعیت تابع $f(x)=x^{\alpha}\ (\alpha\in(0,+\infty))$: اگر $0<x<1$ باشد، هرچه توان α **بزرگ‌تر** باشد، مقدار تابع $f(x)=x^{\alpha}$ **کم‌تر** می‌شود. اگر $x>1$ باشد، هرچه توان α **بزرگ‌تر** باشد $f(x)=x^{\alpha}$ نیز **بزرگ‌تر** می‌شود.

مثال اگر $0<x<1$ باشد، توابع $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt[3]{x^2}$ را مقایسه کنید.

پاسخ: چون $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ و $0<x<1$ بنابراین:

$$x\in(0,1) \xrightarrow{\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<2} x^{\frac{1}{2}}>x^{\frac{2}{3}}>x^2 \Rightarrow \sqrt{x}>\sqrt[3]{x^2}>x^2$$

۴۲- مقدار کدام گزینه، در دامنهٔ تابع $y=\sqrt{-3x-4}$ قرار دارد؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) -2 ۴) ۲

۴۳- دامنهٔ تابع $f(x)=[(2x-3)^{\frac{1}{2}}]^2$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[\frac{3}{2},+\infty)$ ۳) $(\frac{3}{2},+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

آزمون‌های گاج

۴۴- دامنهٔ کدام تابع زیر، برابر دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-2x+1$ است؟

۱) $k(x)=\frac{\frac{1}{2}x-4}{x^2+1}$ ۲) $f(x)=x^2-3x+\frac{1}{x}$ ۳) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ ۴) $z(x)=\sqrt{-x+2}$

۴۵- مجموعهٔ اعداد طبیعی زیرمجموعهٔ دامنهٔ کدام تابع است؟

۱) $y=\sqrt{x-3}$ ۲) $y=\frac{1}{3+x}$ ۳) $y=\sqrt{3-x}$ ۴) $y=\frac{1}{3-x}$

۴۶- بیشترین مقدار تابع $f(x)=-2-\sqrt{x+a}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) a ۳) $-a$ ۴) -2

۴۷- اگر $f(x)=3+\sqrt{2x}$، آن‌گاه $f(8)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸

تجربی داخل ۸۶

۴۸- اگر $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}$، آن‌گاه $f(2)-f(2+\sqrt{7})$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۴۹- اگر $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+2$، آن‌گاه $f(\sqrt{2})$ چه‌قدر است؟

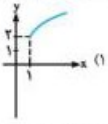
۱) ۳ ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $2+\sqrt{2}$ ۴) ۵

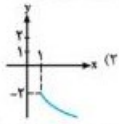
۵۰- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ و $0<a<1$ باشد، حاصل $f(a+\frac{1}{a})+g(a-\frac{1}{a})$ کدام است؟

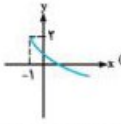
۱) $2a$ ۲) $\frac{2}{a}$ ۳) $\frac{a}{2}$ ۴) $-\frac{2}{a}$

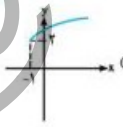
برگرفته از کتاب درسی

۵۱- نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{x+1}+2$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۲- در کدام تابع زیر، اگر دامنه شامل ۳ عضو باشد، برد آن نیز حتماً شامل ۳ عضو می‌باشد؟

۱) $y=\sqrt{x}$ ۲) $y=2|x|$ ۳) $y=x^2+1$ ۴) $y=x^2-1$

۵۳- نمودار کدام‌یک از توابع زیر، در بازهٔ $[1,3]$ بالای سایرین قرار می‌گیرد؟

۱) $y=x^{\frac{1}{3}}$ ۲) $y=x^{\frac{2}{3}}$ ۳) $y=x^2$ ۴) $y=x^3$

@khaneh_book

۵۴- اگر عدد مثبت x کم‌تر از ۱ باشد، نمودار کدام تابع بالای سایرین قرار می‌گیرد؟

۱) $f(x)=x$ ۲) $f(x)=\sqrt{x}$ ۳) $f(x)=x^{۲}$ ۴) $f(x)=x^{۴}$

۵۵- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\sqrt{x}-x}$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۰,۱\}$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-(۰,۱)$

۵۶- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{-\frac{x}{۳}-۲}+\sqrt{\frac{x}{۳}+۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

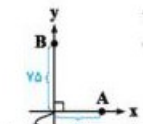
۵۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-|x|}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۱,+\infty)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-(۱,+\infty)$ ۴) $(-۱,+\infty)$

۵۸- در یک دانشگاه برای بالا بردن نمرهٔ یکی از دروس از تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{ax}$ استفاده می‌شود که در آن x نمرهٔ اصلی کسب شده توسط دانشجو و بین صفر تا ۲۰ می‌باشد. این تابع هیچ نمره‌ای را پایین‌تر از نمرهٔ کسب شده و هیچ نمره‌ای را بالاتر از ۲۰ برنمی‌گرداند. دانشجو برای قبولی در این درس (کسب حداقل نمرهٔ ۱۰) باید حداقل چه نمره‌ای در امتحان آورده باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۵۹- مطابق شکل، فاصلهٔ دوکشتی A و B در یک لحظه از یک اسکله به ترتیب ۶۰ و ۷۵ متر است. اگر سرعت کشتی A، ۱۰ متر بر ثانیه و سرعت کشتی B، ۱۵ متر بر ثانیه باشد و هر دو کشتی در مسیری مستقیم به سمت بندرگاه حرکت کنند، کدام تابع زیر، فاصلهٔ دو کشتی را از هم تا زمان رسیدن اولین کشتی به بندرگاه نشان می‌دهد؟



۱) $y=\sqrt{۶۰t^{۲}+۷۵t^{۲}}\ ,\ ۰\le t\le ۵$ ۲) $y=\sqrt{۶۰t^{۲}+۷۵t^{۲}}\ ,\ ۰\le t\le ۶$

۳) $y=\sqrt{(۶۰-۱۰t)^{۲}+(۷۵-۱۵t)^{۲}}\ ,\ ۰\le t\le ۵$ ۴) $y=\sqrt{(۶۰-۱۰t)^{۲}+(۷۵-۱۵t)^{۲}}\ ,\ ۰\le t\le ۶$

درسنامهٔ ۵

دامنهٔ توابع کوبا، رادیکالی و ترکیبی

برای تعیین دامنهٔ برخی توابع خاص باید با توجه به تابع، معادلات یا نامعادلات خاصی را حل نمود. پس از حل معادلات یا نامعادلات می‌توان جواب را مشخص نمود.

مثال دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\sqrt{x+۳}+۹}$ را بیابید.

پاسخ: هر عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین باید هر دو شرط زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} x+۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۳ \\ \sqrt{x+۳}+۹\ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۳}\ge -۹ \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \Rightarrow x\in\mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D=[-۳,+\infty)$$

سؤال دانش‌پژوه (کامپیوز رستگاری)، ببخشید، اون‌جایی که $\sqrt{x+۳}\ge -۹$ شد رو بیشتر توضیح می‌دین؟

پاسخ: ببین عزیزم، یه عبارت رادیکالی همواره نامنفیه. پس همواره $\sqrt{x+۳}\ge ۰$ هست. حالا قبول داری هر چی که بزرگ‌تر از صفر باشه حتماً بزرگ‌تر از یه عدد منفی مثل ۹- هم میشه؟ پس نامساوی $\sqrt{x+۳}\ge -۹$ همواره برقراره.

مثال دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{-x}{|x+۱|-۲}$ را بیابید.

پاسخ: باید ریشه‌های مخرج را بیابیم:

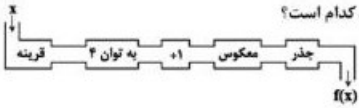
$$|x+۱|-۲=۰ \Rightarrow |x+۱|=۲ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۲ \Rightarrow x=۱ \\ x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۳\}$$

سؤال دانش‌پژوه (الهه وصرتی)، ببخشید، چطور از $|x+۱|=۲$ نتیجه گرفتین $\begin{cases} x+۱=۲ \\ x+۱=-۲ \end{cases}$؟

پاسخ: وقتی قدرمطلق یه عبارتی برابر یه عددی مثل ۲ شده یا اون عبارت ۲ شده یا ۲-. در حالت کلی شما این‌طور در نظر بگیرید که اگه a عددی مثبت و $f(x)$ تابعی دلخواه باشه، اون وقت $|f(x)|=a$ و $\begin{cases} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{cases}$ معادل همدیگه هستن.

@khanehbook

۶۰- دامنهٔ متغیرهایی که می‌توانند به ماشین زیر وارد شوند تا خروجی داشته باشیم، کدام است؟



۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[0,+\infty)$
۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

۶۱- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{2}{x-2}-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۲- تابع $f(x)=(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{2}{3}}$ در کدام‌یک از فاصله‌های زیر، همواره معین (تعریف‌شده) است؟

۱) $(-2,0)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $[-1,1)$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

۶۳- حدود تغییرات x برای با معنی بودن عبارت $\sqrt{5x-3x^2-2}$ کدام است؟

۱) $-1\le x\le\frac{2}{3}$ ۲) $1\le x\le\frac{4}{3}$ ۳) $1\le x\le\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}\le x\le 1$

۶۴- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۵- اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$، دامنهٔ تابع $f(3-x)$ کدام بازهٔ زیر است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3]$ ۳) $[1,3]$ ۴) $[1,2]$

۶۶- نمودار تابع $y=\sqrt[4]{(5x^2-4x+6)(-3x^2+6x-3)}$:

۱) همواره بالای محور xها قرار دارد. ۲) همواره پایین محور xها قرار دارد.
۳) یک نقطهٔ تقاطع با تابع $y=x$ دارد. ۴) تابعی یک‌به‌یک است.

۶۷- به ازای چه مقادیری از m، عبارت $\sqrt{mx^2+2mx+1}$ به ازای جمیع مقادیر x، با معنی است؟

۱) $0\le m\le 1$ ۲) $m>1$ ۳) $m\le 1$ ۴) $0<m<2$

۶۸- دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$ برابر است با:

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,0]$

۶۹- دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}+\sqrt{\frac{2-x}{x}}$، کدام است؟

۱) $(0,1]$ ۲) $(0,3)$ ۳) $[1,2]$ ۴) $(2,3)$

۷۰- دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x^2}}$، کدام است؟

۱) $1<|x|\le 2$ ۲) $|x|>1$ ۳) $1\le|x|<2$ ۴) $|x|<2$

۷۱- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}$ کدام است؟

۱) $[-1,+\infty)$ ۲) $[-3,+\infty)$ ۳) $[-3,-1]$ ۴) $\varnothing$

۷۲- تمام دامنهٔ تابع $y=\sqrt{2-\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[5,+\infty)$ ۳) $[1,5]$ ۴) $(-5,5]$

۷۳- دامنهٔ تابع $y=\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۸

۷۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{16-x^2}}{|x|-2}$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۵- دامنهٔ تابع $f=\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}\}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $x\le 1$ ۳) $x\ge 1$ ۴) $-1\le x\le 1$

@khaneh_book

۷۶- دامنهٔ تابع $y = \sqrt{۴ - |x-۱|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۵

۷۷- دامنهٔ تابع $y = \sqrt{x + |x|}$، کدام است؟

۱) $x < ۰$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\{۰\}$ ۴) $x \geq ۰$

۷۸- برد تابع $y = \sqrt{x - |x|}$، کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{x \mid x \geq ۰\}$ ۳) $\{x \mid x < ۰\}$ ۴) $\{۰\}$

۷۹- دامنهٔ تابع $y = \frac{|۱-x|}{\sqrt{x-|x|}}$، کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $x > ۰$

۸۰- دامنهٔ تابع $y = \frac{\sqrt{x(x^۲-۱)}}{\sqrt{|x|+x}}$، کدام است؟

۱) $x > ۱$ ۲) $-۱ \leq x < ۰$ ۳) $۰ < x \leq ۱$ ۴) $x \geq ۱$

۸۱- کدام عدد در دامنهٔ تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - |x| - ۲}$ می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۵}$

ریاضی خارج ۹۲

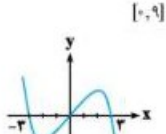
۸۲- برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$، کدام است؟

۱) $(۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۱,۳)$

۸۳- دامنهٔ تابع $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۳$ کدام بازهٔ زیر است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $[۰,۳]$ ۴) $[۰,۹]$

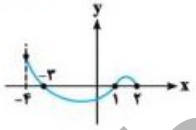
۸۴- دامنهٔ تابع $y = \frac{۱}{f(x)}$ با توجه به نمودار تابع f که به‌صورت مقابل می‌باشد، کدام است؟



۱) $\mathbb{R} - \{۰\}$
۲) $\mathbb{R} - \{۰,-۳,۳\}$
۳) $\mathbb{R} - \{-۳,۳\}$

ریاضی داخل ۹۲

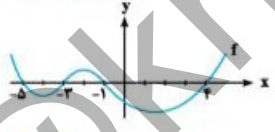
۸۵- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{x f(x)}$ کدام است؟



۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۴,-۳] \cup [۱,۲]$
۴) $[-۳,۰] \cup [۱,۲]$

مشابه تجربی خارج ۹۲

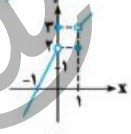
۸۶- با توجه به نمودار تابع f، دامنهٔ تعریف تابع $h(x) = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-۵) \cup (-۳,-۱) \cup (۴,+\infty)$
۲) $(-\infty,-۵) \cup [-۳,-۱] \cup [۴,+\infty)$
۳) $(-۵,-۳) \cup (-۱,۰] \cup (۴,+\infty)$
۴) $[-۵,-۳] \cup [-۱,۰] \cup [۴,+\infty)$

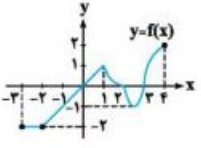
آزمایشی گاج

۸۷- اگر نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $y = \frac{۱}{\sqrt{f(x)-۲}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,۰)$
۲) $(۱,+\infty)$
۳) $[۰,+\infty)$
۴) $(۱,+\infty) \cup \{۰\}$

۸۸- اگر نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(۲x+۱)}$ کدام است؟



۱) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}] \cup [۱,\frac{۳}{۲}]$
۲) $[۱,۳] \cup [۴,۵]$
۳) $[۰,۲] \cup [۳,۴]$
۴) $[۰,۴]$

@khaneh_book

درسنامه ۶

دو تابع مساوی

دو تابع f و g را برابر می‌گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنهٔ آن‌ها با هم برابر باشند، یعنی $D_f = D_g$

۲) به ازای هر عضو دامنه، مقادیر به دست آمده توسط دو تابع f و g با هم برابر باشند، به عبارت دیگر به ازای هر x در دامنه، $f(x) = g(x)$ باشد.

مثال آیا توابع $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$ با هم برابرند؟

سؤال دانش‌پژوه (شهرام هدهدی): آقا این چه سؤال آسونیه! خب معلومه که $\frac{x}{x} = 1$ میشه و دو تابع با هم برابرند!

کتاب پاسخ: ناصر بشیر: این قدر فورتو مسخرهٔ قاصر و عام نکن! پسر پس من این درسنامه رو الکی گفتم! شرط اول میگه ابتدا باید دامنه‌هارو بررسی کنیم:

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $D_g = \mathbb{R} \xrightarrow{D_f \neq D_g}$ شرط اول برقرار نبوده و دو تابع برابر نیستند.

۸۹- اگر دو تابع $f = \{(a,1),(3,2)\}$ و $g = \{(a,b-2),(c,a)\}$ با هم برابر باشند، abc کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) -۶ ۴) ۶

۹۰- تابع $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-3}$ با کدام تابع زیر برابر است؟

۱) $y = x - 3$ ۲) $y = \frac{x^2-9}{x+3}$

۳) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$ ۴) $y = \frac{|x-3|^2}{x-3}$

۹۱- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x - 5$ و $g(x) = \frac{(ax+b)^2}{x-5}$ به ازای هر $x \neq c$ با هم برابرند. $a+b+c$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۱ ۴) -۱

۹۲- نمودار دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8}{x-2} & ; x \neq 2 \\ k & ; x = 2 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ با هم مساوی‌اند. $a+b+k$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۴ ۳) ۲۰ ۴) ۶

۹۳- کدام‌یک از توابع زیر با تابع $f(x) = \sqrt{-x^3}$ برابر است؟

۱) $x\sqrt{x}$ ۲) $x\sqrt{-x}$ ۳) $-x\sqrt{-x}$ ۴) $-x\sqrt{x}$

۹۴- کدام جفت از توابع زیر، مساوی هستند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = (x^2)^{\frac{1}{2}} \\ g(x) = (x^{\frac{1}{2}})^4 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 \\ g(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

۹۵- کدام جفت از توابع زیر با هم برابر هستند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = 4 \\ g(x) = \frac{4x^2-8}{x^2-2} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = |x-4| \\ g(x) = \frac{x^2-16}{|x|+4} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-x^2} \\ g(x) = \sqrt{x}.\sqrt{1-x} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-x} \\ g(x) = \sqrt{x-1}.\sqrt{x} \end{cases}$

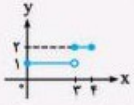
@khaneh_book

درسنامهٔ ۷

توابع پله‌ای و جزء صحیح

تابع پله‌ای: تابعی که نمودارش از پاره‌خط‌های افقی مختلف تشکیل شده است. مثلاً:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le x<3\\ 2 & ; \ 3\le x\le 4\end{cases}$$



جزء صحیح: یکی از معروف‌ترین توابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است. در ادامه با تعریف و ویژگی‌های جزء صحیح آشنا می‌شویم.

تعریف: جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خودش است. مثلاً $[-5]=-5 , [4]=4$ ولی اگر x عددی صحیح نباشد، جزء صحیح x، اولین عدد صحیح قبل آن است. مثلاً:

$$[2/5] \xrightarrow{2<2/5<3} 2 \quad , \quad [-3/6] \xrightarrow{-4<-3/6<-3} -4 \quad , \quad [\pi]=[3/14] \xrightarrow{3<3/14<4} 3 \quad , \quad \left[-\frac{12}{17}\right] \xrightarrow{-1<-\frac{12}{17}<0} -1$$

تذکر دقت کنید $[-4/1]\neq -4$ یعنی فکر نکنید در جزء، صحیح باید اعشار حذف شود.

سؤال دانش‌پژوه (لیلا عبادی): **آقا اجازه بس می‌تونیم بگیم اگه x بین دو عدد صحیح متوالی قرار بگیره، جزء صحیح اون میشه عدد صحیح کوچیکه؟**

پاسخ: آره دیگه تو مثال‌های بالا هم همین کار رو کردیم یعنی مثلاً ۲/۵ بین ۲ و ۳ شد و گفتیم جزء صحیح اون میشه ۲. در حالت کلی داریم:

$$n\le x<n+1 \Rightarrow [x]=n$$

سؤال دانش‌پژوه (سیما صالحی): **آقا اجازه با توجه به فرمول فوق اگه $1\le x<3$ باشه، جزءصحیح x چی میشه؟**

پاسخ: سؤال قوی پرسیدی. در بازه‌ای که گفتی ۱ و ۳ رو عدد صحیح متوالی نیست که! باید بازه رو بشکنونیم به بازه‌هایی که ابتدا و انتهای اون بازه‌ها اعداد صحیح متوالی‌اند و بعد جزءصحیح اونارو حساب کنیم:

$$1\le x<3 \Rightarrow \begin{cases}1\le x<2 \Rightarrow [x]=1\\ 2\le x<3 \Rightarrow [x]=2\end{cases} \Rightarrow$$ جزءصحیح x، در این بازه ۲تا جواب داره

نکته اگر $[x]=n$ که n عددی صحیح است، آن‌گاه $n\le x<n+1$ و در حالت کلی اگر $[\square]=n$ شود، آن‌گاه $n\le \square < n+1$.

مثال **اگر $[x]=2$ باشد آن‌گاه $2\le x<3$ می‌شود.**

مثال **اگر $\left[\frac{x+1}{2}\right]=3$ باشد، محدودهٔ x را بیابید.**

پاسخ:

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]=3 \Rightarrow 3\le \frac{x+1}{2}<4 \xrightarrow{\times 2} 6\le x+1<8 \xrightarrow{-1} 5\le x<7$$

مثال **اگر $\left[\frac{x+1}{2}\right]=\frac{5}{2}$ باشد، محدودهٔ x را بیابید.**

پاسخ: عدد خروجی از جزءصحیح همواره عددی صحیح است. پس $\left[\frac{x+1}{2}\right]$ هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر عدد غیرصحیح $\frac{5}{2}$ شود، لذا معادله جواب ندارد.

نکته اگر داخل جزءصحیح، عدد صحیح k به صورت جمع یا تفریق وجود داشته باشد، می‌توان k را از جزءصحیح بیرون آورد.

$$[x+k] \xrightarrow{k\in Z} [x]+k$$

مثال

$$[x+5]=[x]+5 \quad , \quad [x+\overbrace{[x]}^{\text{عدد صحیح}}]=[x]+[x]=2[x]$$

مثال **معادلهٔ $[x-[x]]+[x+[x+1]]=5$ را حل کنید.**

پاسخ:

$$[x-\overbrace{[x]}^{\text{عدد صحیح}}]+[x+\overbrace{[x+1]}^{\text{عدد صحیح}}]=5 \Rightarrow [x]-[x]+[x]+[x+1]=5$$

$$\Rightarrow [x]+[x]+1=5 \Rightarrow 2[x]+1=5 \Rightarrow 2[x]=4 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\le x<3$$

@khanehbook

۹۶- کدام گزینه صحیح است؟

۱) $[2x]=2[x]$ ۲) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+\frac{1}{2}$ ۳) $2[x+1]=2[x]+1$ ۴) $[x-3[x]]=-2[x]$

۹۷- حاصل $\left[-2\sqrt{2}\right]+\left[\frac{3}{14}\right]+[-\pi]$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) -6 ۲) -5 ۳) -7 ۴) -8

۹۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2[x]$، مقدار $f(\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- مقدار عبارت $[5x+3]+[3x-2]+\left[\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right]$ به ازای $x=-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) -3 ۴) -2

۱۰۰- اگر $f(x)=|[5x]|-|[3x]|$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۱- اگر $x=(\sqrt{3}-1)$ باشد حاصل عبارت $\left[\sqrt{x^2}+\sqrt{(2-x)^2}\right]$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۰۲- جزء صحیح عدد $(\sqrt{3}+1)^4$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۵۷

۱۰۳- اگر $x^2+x<0$ باشد، حاصل $[x^4]+[x^3]+[x^2]+[x]$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۸

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

۱۰۴- اگر $(\sqrt{2}-1)^6=198$ باشد، جزءصحیح عدد $(\sqrt{2}+1)^6$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

۱۰۵- حاصل $[\sin 90^\circ]+\ldots+[\sin 3^\circ]+[\sin 1^\circ]+[\sin 0^\circ]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱

۱۰۶- برای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل $\left[\sqrt{4n^2-3n+1}\right]-2\left[\sqrt{n^2-2n}\right]$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۱

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۷- مجموعه جواب معادلهٔ $[1-2x]=5-$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۰۸- جواب معادله $\left[\frac{2x-1}{x}\right]=3$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}<x\leq -1$ ۲) $-1\leq x<0$ ۳) $-1<x\leq -2$ ۴) $-1\leq x<2$

۱۰۹- دامنهٔ تابع $y=\frac{x}{[x]+1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[-1,0)$ ۲) $\mathbb{R}-(-1,0)$ ۳) $\mathbb{R}-(-1,0]$ ۴) $\mathbb{R}-[0,1]$

۱۱۰- مجموعهٔ جواب معادلهٔ $|[2x+1]|=1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۱- اگر $\left[\frac{3x}{5}+6\right]=4$ باشد، حاصل $\left[\frac{3x-30}{5}\right]$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) -8 ۴) -2

۱۱۲- اگر $|2x-4|<8$ باشد، کم‌ترین مقدار عبارت $\left[\frac{x}{2}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) -2

۱۱۳- اگر جزء صحیح (x^2+x) برابر ۱- باشد، آن‌گاه $[x^{20}]$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۸

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۴- در دامنهٔ تابع $y=\frac{5x^2+6}{[x]^2-2[x]-3}$ چند عدد صحیح وجود ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

@khanen_book

۱۱۵- مجموعه جواب معادلهٔ $[x-[x]]=[x]-[2[x]]+3[x-1]$ کدام است؟

۱) $(3,4)$ ۲) $[3,4)$ ۳) $[3,+\infty)$ ۴) $\{3,4\}$

۱۱۶- مجموعه جواب معادلهٔ $[x+\frac{1}{2}]+[x-\frac{1}{2}]=5$ کدام است؟

۱) $[-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}]$ ۲) $\varnothing$ ۳) $(\frac{5}{2},\frac{7}{2}]$ ۴) $[\frac{5}{2},\frac{7}{2})$

۱۱۷- مجموعه جواب معادلهٔ $[2x-\frac{1}{2}]+[2x+\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ۲) $[-1,1)$ ۳) $(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$ ۴) $\varnothing$

۱۱۸- مجموعه جواب معادلهٔ $[x+\frac{2}{3}]+[2x+\frac{1}{2}]-[x-\frac{1}{3}]=5$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}\le x<\frac{7}{2}$ ۲) $2\le x<2/5$ ۳) $\frac{7}{2}\le x<\frac{9}{2}$ ۴) $1\le x<1/25$

۱۱۹- معادلهٔ $[2x]+[5x-1]=x-7$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

درسنامهٔ ۸

تابع $y=x-[x]$

تابع مهم $y=x-[x]$ را خوب بشناسیم:

۱) با توجه به نمودار آن می‌توان نتیجه گرفت که دامنه‌اش $\mathbb{R}$ و برد آن $[0,1)$ است.

۲) طول هر پاره‌خط، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ است.

مثال برد تابع $y=2x-2[x]+1$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=2x-2[x]+1 \Rightarrow y=2(x-[x])+1$$

حال با توجه به ویژگی (۱) بیان شده، برد را می‌یابیم:

$$0\le x-[x]<1 \xrightarrow{\times 2} 0\le 2(x-[x])<2 \xrightarrow{+1} 1\le 2(x-[x])+1<3 \Rightarrow \text{برد}:[1,3)$$

مثال نمودار تابع $y=3x-3[x]$ را در بازهٔ $(-1,3]$ رسم کنید.

پاسخ: تابع داده‌شده را به صورت $y=3(x-[x])$ می‌نویسیم. حال نمودار $f(x)=x-[x]$ را کشیده و سپس عرض نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم:

۱۲۰- نمودار تابع $y=x-[x]$; $x\in[-2,3)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $(4,1)$ ۲) $(4,\sqrt{2})$ ۳) $(5,1)$ ۴) $(5,\sqrt{2})$

۱۲۱- مجموع طول پاره‌خط‌های نمودار تابع $y=2x-2[x]$ در فاصلهٔ $[0,3)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) ۶ ۴) $\sqrt{3}$

۱۲۲- برد تابع $f(x)=2x-2[x-1]+1$ کدام بازه است؟

۱) $[3,5)$ ۲) $[2,3)$ ۳) $[1,4)$ ۴) $[2,4)$

۱۲۳- مجموعهٔ جواب معادلهٔ $|[x+2]-x|=2$ کدام است؟

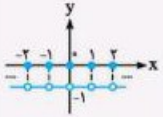
۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\varnothing$

@khanen_book

درسنامهٔ ۹

تابع $y=[x]+[-x]$

تابع مهم $y=[x]+[-x]$ را بشناسیم:



۱) این تابع به ازای $x\in\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) برابر صفر و به ازای $x\notin\mathbb{Z}$ (غیرصحیح) برابر ۱- می‌شود:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & , x\in\mathbb{Z}\\ -1 & , x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

۲) برد تابع فقط دو عدد ۰ و ۱- است.

سؤال دانش‌پژوه (سیاوش احمدی): آقا اجازه پس هر وقت $[x]$و$[-x]$ رو کنار هم دیدیم یاد این تابع خاص بیفتیم؟

پاسخ دقیقاً و اینکه سریع مساله را به دو قسمت $x\in\mathbb{Z}$ و $x\notin\mathbb{Z}$ تقسیم کن و هر قسمت را جداگانه بررسی کن.

مثال معادلهٔ $[x]+[-x]=2x-2$ را حل کنید.

پاسخ مسأله را به خاطر وجود $[x]+[-x]$ به دو قسمت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\in\mathbb{Z}: 2x-2=\underbrace{[x]+[-x]}_{0}\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1\in\mathbb{Z} & \checkmark\\ x\notin\mathbb{Z}: 2x-2=\underbrace{[x]+[-x]}_{-1}\Rightarrow 2x-2=-1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z} & \checkmark\end{cases}$$

پس این معادله دارای دو جواب ۱ و $\frac{1}{2}$ است. $\Rightarrow$

۱۲۴- اگر $x\notin\mathbb{Z}$ باشد، مقدار $[-x]$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $-[x]$ ۲) $1-[x]$ ۳) $-1-[x]$ ۴) $[x]-1$

۱۲۵- اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $x\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $f(x)+f(-x)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۲۶- مجموعه جواب معادلهٔ $[x+[-x]]=-1$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

۱) صفر ۲) بی‌شمار ۳) ۳ ۴) ۲

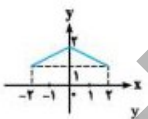
۱۲۷- اگر $x\neq[x]$، مجموعه جواب معادلهٔ $[x+[-x]]+[x-[x]]=-x$ کدام است؟

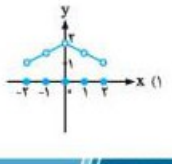
۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\varnothing$

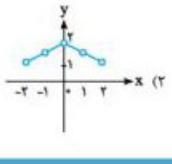
۱۲۸- معادلهٔ $x^2-2x=\frac{1}{[x]+[-x]}$ چند جواب حقیقی دارد؟

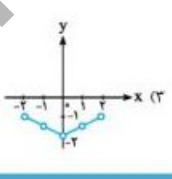
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۹- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=\frac{f(x)}{[x]+[-x]}$ کدام است؟



۱)


۲)


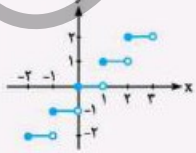
۳)


۴)

درسنامهٔ ۱۰

تابع جزءصحیح $y=[x]$ و $y=m[nx]$

تابع جزءصحیح x را بشناسیم:



۱) این تابع حالت خاصی از تابع پله‌ای بوده که دامنه‌اش $\mathbb{R}$ و بردش اعداد صحیح می‌باشد.

۲) طول هر پله یک و فاصلهٔ هر دو پلهٔ متوالی هم یک است.

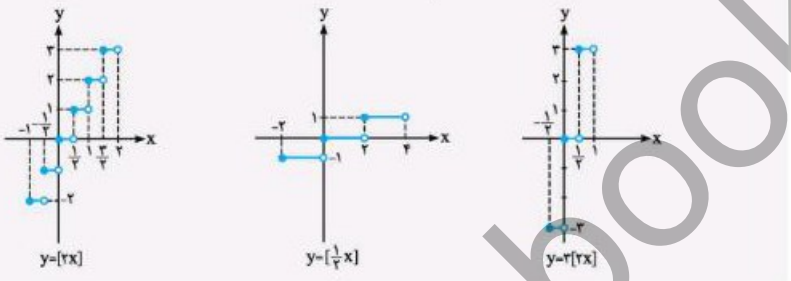
۳) ابتدای پاره‌خط‌ها توپر و انتهای پاره‌خط‌ها توخالی است.

@khanen_book

تابع $y = m[nx]$:

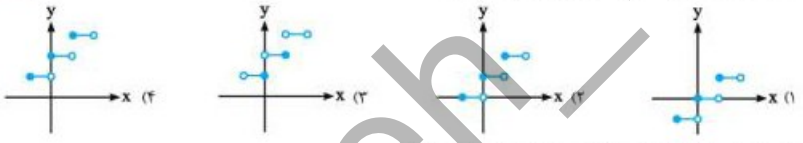
این تابع شبیه تابع $y = [x]$ است با این تفاوت که در نمودار $y = m[nx]$، طول پله‌ها $\frac{1}{|n|}$ و فاصلهٔ بین پله‌ها $|m|$ است.

مثال در نمودار تابع $y = [2x]$ طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ و فاصلهٔ بین پله‌ها، یک و در نمودار $y = [\frac{1}{2}x]$، طول پله‌ها $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ و فاصله بین پله‌ها، یک و در نمودار تابع $y = 3[2x]$، طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ و فاصلهٔ بین پله‌های متوالی ۳ است.



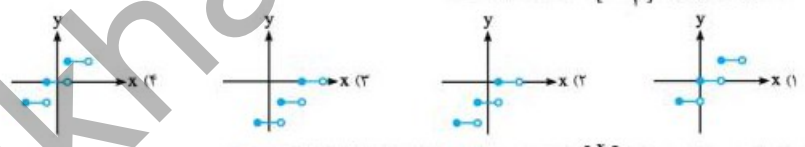
برگرفته از کتاب درسی

۱۳۰- نمودار تابع $f(x) = [x] + 2$ در بازهٔ $[-1,2)$ کدام است؟

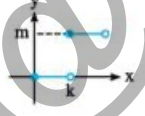


۱۳۱- نمودار تابع $f(x) = [x - 2] + 1$ در بازهٔ $[-1,2)$ کدام است؟

۱۳۲- قسمتی از نمودار $y = [x - \frac{1}{2}] - 1$ شبیه کدام است؟



۱۳۳- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 3[\frac{x}{2}]$ به صورت زیر باشد، مقدار $m + k$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

تجربی خارج ۸۶

۱۳۴- نمودار تابع $y = 2[\frac{x}{2}] + 1 ; x \in [-2,6)$ از چند پاره‌خط مساوی هم، تشکیل شده است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

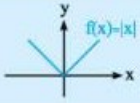
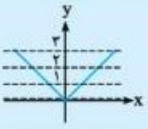
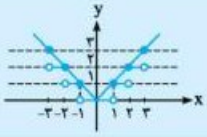
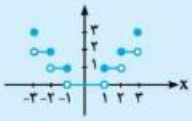
۱۳۵- نمودار $y = [x] + |[x] - 3| + [x - 5]$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

۱) اول و سوم ۲) اول و سوم و چهارم ۳) دوم و سوم و چهارم ۴) اول و دوم و سوم

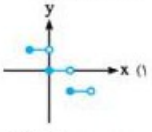
@khaneh_book

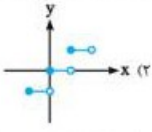
درسنامهٔ ۱۱

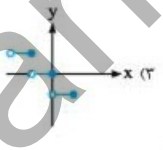
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ به روشی ساده

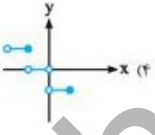
رسم نمودار $y=\|f(x)\|$	مثال: نمودار $y=\|\|x\|\|$ را رسم کنید.
۱ ابتدا نمودار $f(x)$ را با خیال راحت بکشید.	
۲ به سرعت خطوط افقی $y=k \quad (k\in\mathbb{Z})$ را به فاصلهٔ یک واحد از هم به صورت خط‌چین رسم کنید.	
۳ قسمتی از نمودار تابع که در فاصلهٔ بین دو خط قرار دارد را روی خط پایینی تصویر کنید. هم‌چنین نقاط برخورد نمودار با خطوط افقی را پررنگ و زیر آن نقاط را توخالی کنید.	
۴ حال نمودار $f(x)$ و خط‌چین‌های افقی را پاک کنید! نمودار شما آماده است.	

۱۳۶- نمودار تابع $y=[-x]$ در بازهٔ $[-۲,۱)$ به کدام صورت است؟

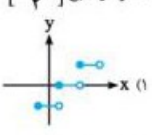
۱) 

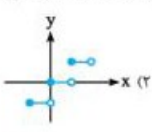
۲) 

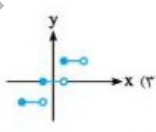
۳) 

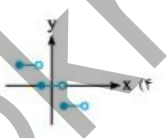
۴) 

۱۳۷- نمودار تابع $y=\left[\frac{x-۱}{۲}\right]$ در بازهٔ $(-۱,۵]$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

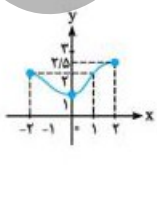
۱۳۸- نمودار تابع $y=[x^۲]$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۹- مجموع طول پاره‌خط‌های نمودار تابع $y=[\sqrt{x}]$ در بازهٔ $[۰,۱۶]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۴۰- با توجه به نمودار f، مجموعه جواب معادلهٔ $[f(x)]=۲$ کدام است؟



۱) $[-۲,۱)$ ۲) $(۱,۲)\cup\{۲\}$

۳) $[۱,۲]\cup\{-۲\}$ ۴) $[-۲,۲]$

@khaneh_book

در سامانه ۱۲

رسم توابع شامل [x]

برای رسم توابع دارای $[x]$ در بازه‌ای مانند $(-۱,۱)$، ابتدا اعداد صحیح داخل بازه را یافته (عدد ۰) و سپس بازه را به صورت $(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ می‌شکنیم. سپس در هر کدام از این بازه‌ها، $[x]$ را حساب کرده و به جای آن، عدد مناسب قرار می‌دهیم. در نهایت تابع حاصل را رسم می‌کنیم.

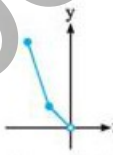
مثال تابع $y = x - [x]$ را در بازهٔ $[۰,۲)$ رسم کنید.

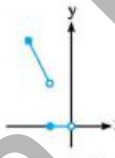
پاسخ: در داخل بازهٔ $[۰,۲)$ عدد صحیح ۱ وجود دارد. پس داریم:

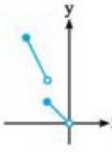
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \xrightarrow[\text{در تابع}]{\text{جای‌گذاری}} y = x - ۰ \Rightarrow y = x \qquad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - ۱ \qquad \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

۱۴۱- نمودار تابع $y = x[x]$ در بازهٔ $-۲ \le x < ۰$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴)

۱۴۲- نمایش هندسی تابع $y = x + [x]$ در فاصل $-۱ \le x < ۱$ کدام است؟

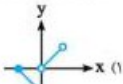
۱)

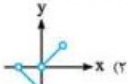
۲)

۳)

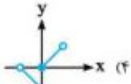
۴)

۱۴۳- نمایش هندسی تابع $y = |x| + [x]$ در فاصلهٔ $-۱ < x < ۱$ کدام شکل است؟

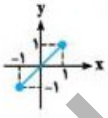
۱) 

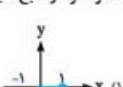
۲) 

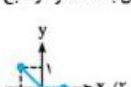
۳)

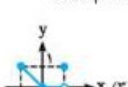
۴) 

۱۴۴- اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = [x]f(x)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴)

در سامانه ۱۳

وارون (معکوس) یک تابع

وارون یک تابع از لحاظ زوج مرتبی: برای به‌دست آوردن وارون تابع f که به‌صورت زوج مرتبی می‌باشد، کافی است **جای مؤلفه‌های اول و دوم را** در هریک از زوج مرتب‌ها عوض کنیم.

مثال اگر $f = \{(۳,۰),(۱,۲),(۱,۱)\}$ باشد، وارون f را بیابید و دامنه و برد $f^{-۱}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$f^{-۱} = \{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۰)\} \Rightarrow D_{f^{-۱}} = \{۱,۲,۳\} \text{ و } R_{f^{-۱}} = \{۱,۰\}$$

وارون یک تابع از لحاظ نمودار ون: برای یافتن وارون تابع f که به‌صورت نمودار ون می‌باشد، کافی است **جهت پیکان‌ها** را عوض کنیم.

@khanehbook

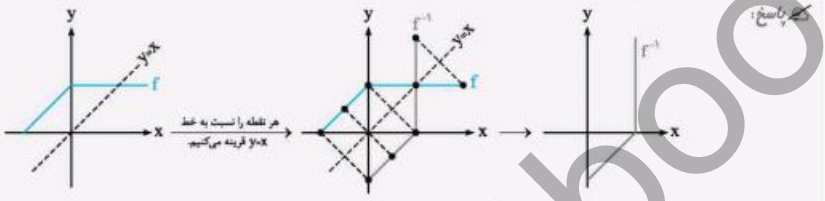
مثال وارون تابع زیر را بیابید.

پاسخ:

یافتن وارون یک تابع از روی نمودار: در حالتی که تابعی به صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد، برای رسم نمودار وارون تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را **نسبت به خط** $y = x$ (یا همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، رسم کنیم.

مثال وارون تابع f را بیابید.

پاسخ:



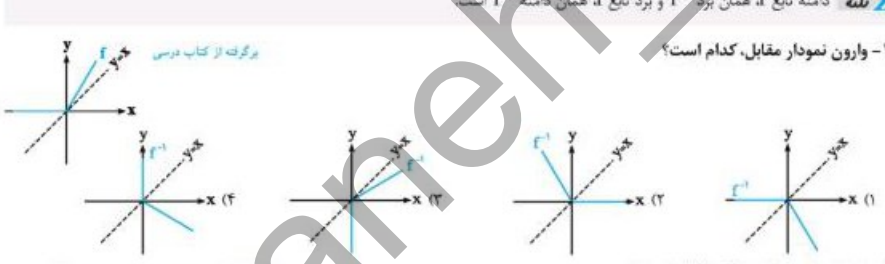
همان‌طور که می‌بینید وارون f، تابع نمی‌باشد! پس لزوماً وارون هر تابعی، تابع نیست. امّا وارون چه توابعی، تابع هستند؟ به درسنامه بعد رجوع کنید.

نکته اگر نمودار f از نقطهٔ (α,β) عبور کند یعنی $(\alpha,\beta)\in f$، آن‌گاه نمودار f^{-1} از نقطهٔ (β,α) عبور خواهد کرد، یعنی $(\beta,\alpha)\in f^{-1}$.
به‌عبارتی دیگر اگر $f(\alpha)=\beta$، آن‌گاه $f^{-1}(\beta)=\alpha$.

نکته دامنهٔ تابع f، همان برد f^{-1} و برد تابع f، همان دامنهٔ f^{-1} است.

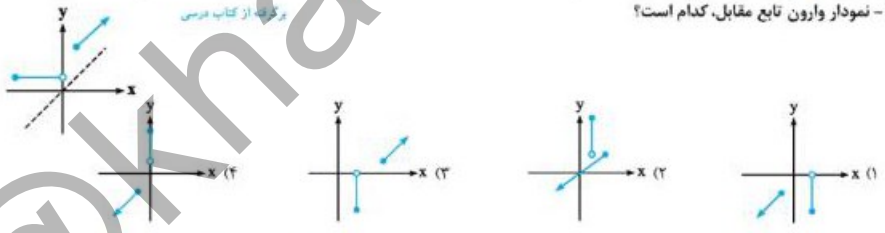
۱۴۵- وارون نمودار مقابل، کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی



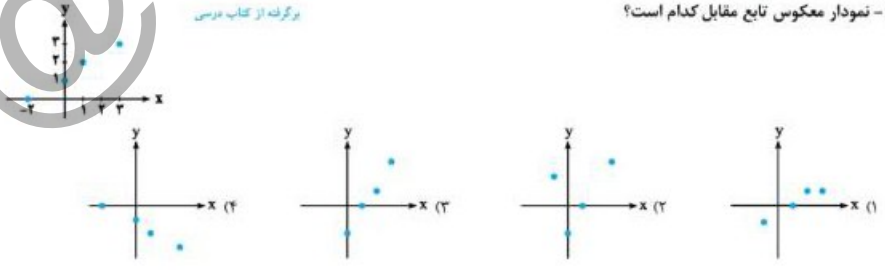
۱۴۶- نمودار وارون تابع مقابل، کدام است؟

برگرفته از کتاب درسی



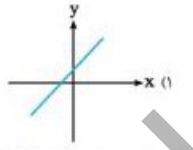
۱۴۷- نمودار معکوس تابع مقابل کدام است؟

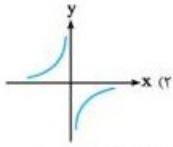
برگرفته از کتاب درسی

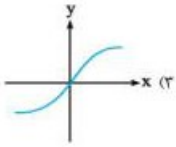


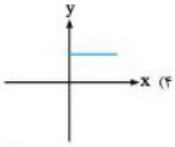
@khanen_book

۱۴۸- نمودار کدام تابع زیر و وارونش بر هم منطبق هستند؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۴۹- معکوس تابع $f=\{(1,5),(2,6),(3,7)\}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $f^{-1}=\left\{(1,\frac{1}{5}),(2,\frac{1}{6}),(3,\frac{1}{7})\right\}$

۲) $f^{-1}=\left\{(1,5),(\frac{1}{2},6),(\frac{1}{3},7)\right\}$

۳) $f^{-1}=\left\{(\frac{1}{5},1),(\frac{1}{6},2),(\frac{1}{7},3)\right\}$

۴) $f^{-1}=\{(5,1),(6,2),(7,3)\}$

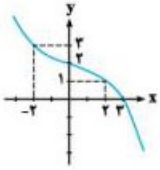
۱۵۰- اگر $f=\{(3,-1),(-2,-4),(-1,3),(1,2)\}$ باشد، دامنهٔ وارون f کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\{1,-1,-2,3\}$ ۲) $\{2,3,-4,-1\}$ ۳) $\{3,-1\}$ ۴) $\{2,3,-4,1,-1,-2\}$

۱۵۱- اگر $f=\{(a-1,4),(2,b+3)\}$ و $g=\{(2a,1),(a+2,2)\}$ وارون یک‌دیگر باشند، آن‌گاه $a+b$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۱۵۲- اگر نمودار تابع f^{-1} به‌صورت مقابل باشد، کدام نقطه به تابع f تعلق دارد؟



۱) $(3,0)$
۲) $(-3,2)$
۳) $(1,2)$
۴) $(0,2)$

۱۵۳- نمودار وارون تابع $f(x)=mx+2$ از نقطهٔ $(-6,2)$ می‌گذرد. مقدار m کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۲ ۴) -2

۱۵۴- در تابع خطی $f(x)-ax=3$، اگر $f^{-1}(5)=3$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۵۵- اگر $f(x)=1+\sqrt{x-1}$ و $(3,a)$ نقطه‌ای روی نمودار f^{-1} باشد، a کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) ۱ ۴) ۵

۱۵۶- نمودار تابع معکوس تابع $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(\frac{\sqrt{2}}{2},2)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

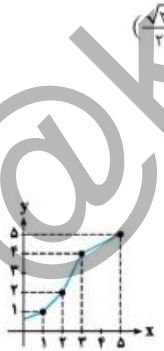
۱۵۷- معکوس تابع $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^3+3x^2+3x-1}$، محور عرض‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) $-1+\sqrt[3]{3}$ ۲) $-1-\sqrt[3]{3}$ ۳) $1-\sqrt[3]{3}$ ۴) $1+\sqrt[3]{3}$

۱۵۸- اگر $f=\{(-3,4),(3,4),(2,-1),(1,2)\}$ باشد، مقدار $3f^{-1}(-1)+f(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) -3

۱۵۹- اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $f^{-1}(4)+f(4)$ کدام است؟



۱) ۹/۵
۲) ۹
۳) ۷/۵
۴) ۸

۱۶۰- اگر $f(x)=\frac{3x+2}{7}$ با دامنهٔ $[-3,4]$ مفروض باشد، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[-1,2]$ ۲) $[-\frac{2}{3},1]$ ۳) $[-1,-\frac{2}{3}]$ ۴) $[1,2]$

@khaneh_book

آزمون‌های گاج

۱۶۱- برد وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{6-2x}$، کدام است؟

۱) $(-\infty,3]$ ۲) $(-\infty,3)$ ۳) $[3,+\infty)$ ۴) $(3,+\infty)$

۱۶۲- اگر f تابعی خطی بوده و داشته باشیم $f(2)=5$ و $f^{-1}(8)=3$، آن‌گاه $f(4)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۶۳- اگر f تابعی خطی باشد و نمودار معکوس f، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کرده و نقطهٔ $(3,5)$ روی $f^{-1}(x)$ باشد، آن‌گاه $f(10)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

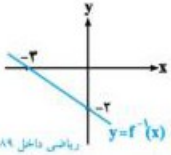
۱۶۴- اگر نقطهٔ $(1,2)$ هم روی نمودار تابع $f(x)=ax+b$ و هم روی نمودار معکوس تابع f باشد، در این صورت $f(4)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶۵- اگر نمودار تابع خطی $y=f(x)$، نمودار معکوس خود را روی محور xها در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، در این صورت جواب معادلهٔ $f(x)=x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۶- اگر نمودار تابع خطی $f^{-1}(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-f(2x-1)}$ کدام است؟



ریاضی داخل ۸۹

۱) $\left[-\frac{7}{4},+\infty\right)$ ۲) $\left[-\frac{3}{8},+\infty\right)$

۳) $\left(-\infty,-\frac{7}{4}\right]$ ۴) $\left[-\frac{8}{3},+\infty\right)$

۱۶۷- اگر $g(x)=f(3x-4)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۶۸- اگر f و g توابعی خطی بوده و داشته باشیم $g(x-1)+f(1-3x)=4$ و $g^{-1}(5)=4$، آن‌گاه $f(-14)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

درسنامهٔ ۱۴

توابع وارون‌پذیر و یک‌به‌یک

تابع وارون‌پذیر: اگر وارون (معکوس) تابعی مانند f، خود نیز **تابع** باشد، آن را «تابع وارون» f می‌نامیم. در این‌صورت f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با f^{-1} نمایش می‌دهند.

مثال **کدام‌یک از توابع $f=\{(0,1),(1,2)\}$ و $g=\{(-1,1),(2,1)\}$ وارون‌پذیر هستند؟**

پاسخ:

f^{-1} تابع است، پس f وارون‌پذیر است. $\Rightarrow f^{-1}=\{(1,0),(2,1)\}$

g^{-1} تابع نیست، پس g وارون‌پذیر نیست. $\Rightarrow g^{-1}=\{(1,-1),(1,2)\}$

تابع یک‌به‌یک

تابع یک‌به‌یک از لحاظ جدولی: یک تابع جدولی یک‌به‌یک است، اگر در آن **هیچ یک از مؤلفه‌های دوم (yها) که مؤلفه‌های اول (x) نابرابر دارند**، با هم برابر نباشند.

مثال تابع $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -1 & -1 & 1 \end{array}$ یک‌به‌یک نیست، زیرا در مؤلفه‌های دوم عدد ۱- دو بار تکرار شده ولی مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم برابر نیستند.

تابع یک‌به‌یک از لحاظ زوج مرتبی: تابع زوج مرتبی f را یک‌به‌یک می‌گوییم در صورتی‌که در آن **هیچ دو زوج مرتب متفاوتی با مؤلفه‌های دوم برابر** وجود نداشته باشد.

مثال تابع $f=\{(1,2),(2,3)\}$ یک‌به‌یک است، اما تابع $g=\{(1,3),(0,1)\}$ یک‌به‌یک نیست.

تابع یک‌به‌یک از لحاظ نمودار ون: تابعی که بین دو مجموعه تعریف می‌شود در صورتی یک‌به‌یک است که **به هر عضو مجموعهٔ دوم فقط یک پیکان** وارد شود. (البته همان‌طور که توضیح داده شد، اگر از یک عضو مجموعهٔ اول به یک عضو از مجموعهٔ دوم هر تعداد دلخواه پیکان برود یکی به شمار می‌آید.)

@khanen_book

مثال تابع (الف) یک‌به‌یک نیست ولی تابع (ب) یک‌به‌یک است.

تشخیص یک به یکی از روی نمودار: یک تابع را یک‌به‌یک می‌گوییم به شرطی که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (حداکثر در ۱ نقطه قطع کند.)

مثال تابع (الف) یک‌به‌یک است ولی (ب) یک‌به‌یک نیست.

نکات

۱) **شرط وارون‌پذیری یک تابع:** تابع f را **وارون‌پذیر** می‌گوییم (یعنی وارون آن تابع است) به شرطی‌که f **یک‌به‌یک** باشد.

۲) همهٔ توابع خطی به معادلهٔ $y = mx + h$ با شرط $m \neq 0$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیرند.

۳) تابع خطی $y = k$ $(k \in \mathbb{R})$ تنها تابع خطی غیر یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

۱۶۹- کدام تابع زیر، معکوس‌پذیر است؟

۱) $f = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

۲) $f = \{(1,2),(2,1),(3,3),(4,2)\}$

۳) $f = \{(1,1),(2,2),(3,2),(4,1)\}$

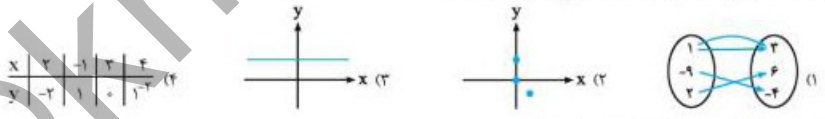
۴) $f = \{(1,2),(1,3)\}$

۱۷۰- کدام‌یک از اشکال زیر، به عنوان یک تابع دارای تابع معکوس نیست؟

آزمون‌های گاج

۱۷۱- کدام‌یک از نمودارهای زیر، تابعی را نشان می‌دهد که معکوس آن نیز تابع است؟

۱۷۲- کدام‌یک از گزینه‌های داده شده، تابعی یک‌به‌یک است؟



۱۷۳- کدام رابطهٔ زیر، الزاماً تابع یک‌به‌یک است؟

۱) رابطهٔ بین اعداد و مکعب آن‌ها

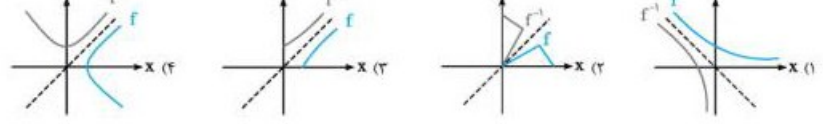
۲) رابطهٔ بین دانش‌آموزان یک کلاس و نمرات آن‌ها در درس ریاضی

۳) رابطهٔ بین افراد و مدارس دوران تحصیلی آن‌ها

۴) رابطهٔ بین افراد و سن آن‌ها در یک زمان خاص

آزمون‌های گاج

۱۷۴- در کدام گزینه، وارون تابع وارون‌پذیر f به درستی رسم شده است؟



@khanen_book

۱۷۵- اگر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک‌به‌یک باشد، a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۷۶- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر برای a، رابطهٔ $R=\{(۴,-۳),(۴,a^۲-۴a),(a+۱,-۳a)\}$ یک تابع یک‌به‌یک است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\{۱,۳\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۳\}$ ۴) $\varnothing$

۱۷۷- اگر $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$، تابعی یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۱۷۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & ; \ x<۱\\ ۲x+a & ; \ x\geq ۱\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

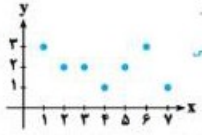
۱۷۹- تابع درجه دوم $f(x)=x^۲-۶x+۸$ در کدام یک از بازه‌های زیر یک‌به‌یک است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $[۲,۴]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۴,۵]$ ۴) $(-\infty,۴]$

۱۸۰- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲+۲x$ را به بازهٔ $(-\infty,a]$ محدود کرده باشیم تا تابع وارون‌پذیر شود، حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) -۲

۱۸۱- با حذف حداقل چند نقطه از نقاط نمودار مقابل، تابعی یک‌به‌یک حاصل می‌شود؟ برگرفته از کتاب درسی



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۲- تابع خطی $f(x)=ax^۳+bx-c+dx$، وارون‌پذیر نمی‌باشد و نمودار آن بالای محور xها قرار دارد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $a+b+d=۰$ ۲) $b+d+c<۰$ ۳) $a>c$ ۴) $b+d<c$

درسنامهٔ ۱۵

به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت

برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال وارون تابع خطی $f(x)=۳x-۱$ را محاسبه نمایید.

پاسخ:

$$y=۳x-۱\Rightarrow y+۱=۳x\Rightarrow x=\frac{y+۱}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

سؤال دانش‌پژوه (سمیه عبادی): آقا اجازه آخرشو نفهمیدم. میشه بگین چیکار کردین؟

پاسخ: ببین قانوم x رو بر حسب y به دست بیار. بعدش هر جا y دیدی، می‌نویسی x و هرجا x دیدی می‌نویسی y. در واقع اسم x و y عوض میشه. با این کار به تابع معکوس می‌رسی که در آن y همان $f^{-۱}(x)$ است.

۱۸۳- وارون تابع f که از ماشین مقابل حاصل می‌شود، کدام است؟

$$\boxed{x}\rightarrow\boxed{\times ۲}\rightarrow\boxed{+۳}\rightarrow\boxed{f(x)}$$

۱) $f^{-۱}(x)=۲x+۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x+۳$

۳) $f^{-۱}(x)=۲x-۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

۱۸۴- اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، $f^{-۱}(\frac{۲}{۳})$ کدام است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۴

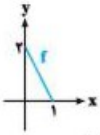
۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲

@khanen_book

۱۸۵- اگر $f^{-1}(x)=\frac{5x+1}{3}$ باشد، آن‌گاه عرض از مبدأ تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $-\frac{4}{5}$

۱۸۶- با توجه به شکل دو تابع f و f^{-1} هم‌دیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟



۱) $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ ۲) $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۳) $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ ۴) $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

۱۸۷- اگر $f(1-x)=2x+a$ و نمودار معکوسِ تابع f، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، آن‌گاه $f^{-1}(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۸- اگر f تابعی خطی بوده و داشته باشیم $f(2x)+f(x-1)=3x-4$، آن‌گاه $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۱۸۹- اگر $f(x)=ax+b$ باشد، شیب نمودارهای f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارد؟

۱) قرینهٔ هم هستند. ۲) معکوس هم هستند. ۳) قرینه و معکوس هم هستند. ۴) حاصل‌ضرب آن‌ها ۲ است.

۱۹۰- اگر برای تابع خطی $f(x)=ax+b$، داشته باشیم $f^{-1}(x)=f(x)$ در این صورت تابع f کدام است؟

۱) $f(x)=x$ ۲) $f(x)=-x+b$ ۳) $f(x)=x+b$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۱۹۱- اگر $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\geq 0\\ 4x-1 & x<0\end{cases}$ باشد، معکوس این تابع کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{4} & ; x\geq 1\\ \frac{x+1}{2} & ; x<1\end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2} & ; x\geq -1\\ \frac{x+1}{4} & ; x<-1\end{cases}$

۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1 & ; x\geq 0\\ \frac{x}{4}+1 & ; x<0\end{cases}$ ۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-1 & ; x\geq -1\\ \frac{x}{4}-1 & ; x<-1\end{cases}$

۱۹۲- اگر $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , x>2\\ x+1 & , x\leq 2\end{cases}$ باشد، حاصل $f^{-1}(9)+f(9)$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷

۱۹۳- نمودار توابع $f(x)=\frac{8-ax}{b}$ و $g(x)=\frac{2x-b}{3}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ± 3 ۲) ± 2 ۳) $2,-3$ ۴) $3,-2$

۱۹۴- فرض کنید $f=\{(-2,3),(2,1),(3,4),(-1,2)\}$ و $g(x)=ax+b$ باشد، اگر نمودار تابع g، معکوس تابع f را در نقاط به طول ۳ و ۲ قطع کند، آن‌گاه $g^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) -3 ۴) ۳

درسنامهٔ ۱۶

اعمال جبری روی توابع

اگر f، تابعی با دامنهٔ D_f و g تابعی با دامنهٔ D_g باشد، آن‌گاه توابع $f\pm g$، $f.g$، $\frac{f}{g}$ و $(k\in\mathbb{R})$ kf و دامنهٔ آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$

۳) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ $\quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\overbrace{\{x\mid g(x)=0\}}^{\text{ریشه‌های مخرج}}$

۵) $(kf)(x)=kf(x)\ ,\ (k\in\mathbb{R})$ $\quad D_{kf}=D_f$

@khaneh_book

مثال اگر $f=\{(1,2),(-1,1),(2,3)\}$ و $g=\{(-1,2),(3,-4),(4,5)\}$ باشند، آن‌گاه توابع $f+2g$، $\frac{2g}{f}$ و $f.g$ را به‌دست آورید.

پاسخ: دامنهٔ تابع f برابر $D_f=\{1,-1,2\}$ و دامنهٔ تابع g برابر $D_g=\{-1,3,4\}$ می‌باشد. بنابراین ابتدا دامنه‌های توابع خواسته‌شده را به‌دست آورده و سپس به‌ازای دامنه‌های حاصل، خود توابع را می‌یابیم:

محاسبهٔ تابع $f+2g$: $D_{f+2g}=D_f\cap D_{2g}\overset{D_{2g}=D_g}{=\!=\!=}D_f\cap D_g=\{1,-1,2\}\cap\{-1,3,4\}=\{-1\}$ (*)

$$x=-1\Rightarrow (f+2g)(-1)=f(-1)+2g(-1)\overset{\substack{(-1,1)\in f\Rightarrow f(-1)=1\\(-1,2)\in g\Rightarrow g(-1)=2}}{=\!=\!=}1+2(2)=5\Rightarrow(-1,5)\in f+2g\Rightarrow f+2g=\{(-1,5)\}$$

محاسبهٔ تابع $\frac{2g}{f}$: $D_{\frac{2g}{f}}=D_{2g}\cap D_f-\{x\mid f(x)=0\}\overset{D_{2g}=D_g}{=\!=\!=}D_g\cap D_f\overset{(*)}{=\!=\!=}\{-1\}$

با توجه به f، این تابع در هیچ x ای برابر صفر نمی‌شود

$$x=-1\Rightarrow\left(\frac{2g}{f}\right)(-1)=\frac{2g(-1)}{f(-1)}=\frac{2(2)}{1}=6\Rightarrow(-1,6)\in\frac{2g}{f}\Rightarrow\frac{2g}{f}=\{(-1,6)\}$$

محاسبهٔ تابع $f.g$: $D_{f.g}=D_f\cap D_g\overset{(*)}{=\!=\!=}\{-1\}$

$$x=-1\Rightarrow(f.g)(-1)=f(-1)g(-1)=1\times2=2\Rightarrow(-1,2)\in f.g\Rightarrow f.g=\{(-1,2)\}$$

مثال اگر $f(x)=\frac{x}{x-2}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ توابع $f\pm g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

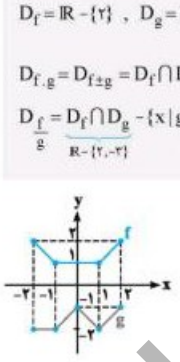
پاسخ: دامنهٔ توابع f و g برابر است با:

$$D_f=\mathbb{R}-\{2\}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{-3\}\qquad(*)$$

حال با توجه به تعریف دامنهٔ توابع $f\pm g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ داریم:

$$D_{f.g}=D_{f\pm g}=D_f\cap D_g\overset{(*)}{=\!=\!=}(\mathbb{R}-\{2\})\cap(\mathbb{R}-\{-3\})=\mathbb{R}-\{2,-3\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\underbrace{D_f\cap D_g}_{\mathbb{R}-\{2,-3\}}-\{x\mid g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{2,-3,-1\}\qquad \frac{x+1}{x+3}=0\Rightarrow x=-1$$



۱۹۵- با توجه به نمودارهای توابع f و g، حاصل عبارت $\frac{(f-g)(1)}{(f+g)(2)+(f.g)(-1)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -3

۱۹۶- اگر $g=\{(4,3),(3,2),(2,0)\}$ باشد، آن‌گاه تابع $\frac{1}{g}$ کدام است؟

۱) $\left\{\left(\frac{1}{3},0\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)\right\}$ ۲) $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)\right\}$

۳) $\left\{\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(4,\frac{1}{3}\right)\right\}$ ۴) $\left\{\left(\frac{1}{3},2\right),\left(\frac{1}{4},3\right)\right\}$

۱۹۷- اگر $f=\{(1,3),(2,5)\}$ و $g=\{(2,3),(5,1)\}$، تابع $f+2g$ کدام است؟

۱) $\{(2,11)\}$ ۲) $\{(2,7)\}$ ۳) $\{(2,7),(1,4)\}$ ۴) $\{(2,11),(1,4)\}$

۱۹۸- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $f+f^{-1}$ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

۱۹۹- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ و $g=\{(1,5),(2,6),(3,0)\}$ باشد، آن‌گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\left\{\left(1,\frac{4}{5}\right),(3,1)\right\}$ ۳) $\left\{\left(1,\frac{4}{5}\right),\left(2,\frac{1}{2}\right)\right\}$ ۴) $\left\{(2,1),\left(1,\frac{4}{5}\right)\right\}$

۲۰۰- اگر توابع f و g به‌صورت $f=\{(2,5)\}$ و $g=\{(2,7)\}$ تعریف‌شده باشند، آن‌گاه تابع $f.g$ برابر است با:

۱) $\{(10,14)\}$ ۲) $\{(4,35)\}$ ۳) $\{(4,12)\}$ ۴) $\{(2,35)\}$

۲۰۱- اگر $f=\{(2,5),(x,4),(1,z)\}$ و $g=\{(1,2),(3,5),(5,6)\}$ و $2f+g=\{(1,z+1),(3,y)\}$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۴

@khanehketab

۲۰۲- اگر $g=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۴)\}$ و $f+g=\{(۱,۵),(۳,۶)\}$ باشد، آن‌گاه تابع f کدام ویژگی را دارد؟

۱) برد تابع f فقط یک عضو دارد.
۲) دامنهٔ f به صورت $\{۱,۳\}$ است.
۳) تابع f می‌تواند به صورت $\{(۴,۵),(۳,۱),(۱,۱)\}$ باشد.
۴) تابع f فقط دارای ۲ زوج مرتب است.

۲۰۳- اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$، مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰۴- اگر $f(x)=ax^2+2x+3$ و $g(x)=2x+a+5$ باشد و داشته باشیم $(2f-3g)(2)=2$، آن‌گاه $f(a)$ کدام است؟

۱) ۶۳ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۵۴

۲۰۵- اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & ; x>0\\ x-1 & ; x\le 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x & ; x\ge -2\\ x-2 & ; x<-2\end{cases}$، حاصل $f+2g$ به‌ازای $x=f(0)$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) ۳

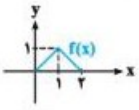
۲۰۶- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$، دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) $(-3,+\infty)-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$
۳) $(-3,+\infty)$ ۴) $(-3,+\infty)-\{0\}$

۲۰۷- اگر $f(x)=\sqrt{1-x}-2$ باشد، دامنهٔ تابع $\frac{f^{-1}}{f}$ کدام است؟

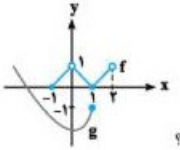
۱) $[-2,1]$ ۲) $[-3,1]$ ۳) $[-1,2]$ ۴) $[-2,2]$

۲۰۸- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x-1)}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $[1,2]$ ۲) $[0,2]$
۳) $(1,2)$ ۴) $[1,3)$

۲۰۹- با توجه به نمودار توابع f و g، دامنهٔ تابع $(\frac{g}{f})(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۱۰- اگر $f(x)=\frac{x+1}{x+3}$ و $g(x)=\frac{3x-6}{x+5}$ باشد، دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g}-\frac{g}{f})(x)$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۱- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g=\{(-1,2),(1,3),(2,2),(5,1)\}$ باشد، دامنهٔ تابع $\frac{f}{2f-g}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۲- اگر $f=\{(0,1),(2,-2),(3,-1)\}$ و $g=\{(-1,2),(2,1),(0,-2)\}$ باشد، معادلهٔ $\frac{f}{g}+2g=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۳- اگر f و g توابع خطی و $(f+g)(x)=4x+1$ و $(f-g)(x)=3-2x$ باشد، آن‌گاه مجموع ریشه‌های تابع $(fg)(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۱۴- اگر $f(x)=2x-1$ باشد، آن‌گاه تابع $y=2f^{-1}(x)+f(x)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

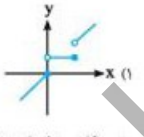
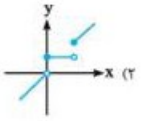
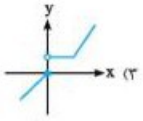
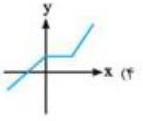
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases}x & ; x>2\\ 2x+1 & ; -4<x<-1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}2x+1 & ; 1<x<3\\ x & ; -3<x<0\end{cases}$ باشد، تابع $y=(fg)(x)$ کدام است؟

۱) $(fg)(x)=2x^2+x \;;\; x\in\mathbb{R}$
۲) $(fg)(x)=(2x+1)^2 \;;\; x\in(-3,-1)$
۳) $(fg)(x)=2x^2+x \;;\; x\in(-3,-1)\cup(2,3)$
۴) $(fg)(x)=x^2 \;;\; x\in(-3,-1)\cup(2,3)$

@khanen_book

۲۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}2 & ; x>0\\ x-1 & ; x\le 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+2 & ; x>1\\ 1 & ; x\le 1\end{cases}$ باشد، نمودار تابع $f+g$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۱۷- اگر $f=\{(1,2),(2,4),(3,-1)\}$ و $g=\{(1,0),(2,1),(5,3)\}$ باشد، برد تابع $f.g-\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $\{4\}$ ۲) $\{0,4\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\left\{\frac{15}{4}\right\}$

۲۱۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ و $g=\{(1,5),(0,1),(-2,3),(-1,1)\}$ باشد، حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ برد تابع $\frac{2g}{f}$ کدام است؟

۱) $6\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{6}$ ۳) $6\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۲۱۹- اگر $f=\{(-3,9),(2,4),(1,-1),(-1,0)\}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $\frac{2g+1}{\sqrt{f}}$ از چند نقطهٔ تشکیل شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۲۰- اگر $f=\{(-1,2),(2,3),(11,1)\}$ و $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & ; x\ge 2\\ \frac{x}{x-3} & ; x<2\end{cases}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $\{(-1,8),(2,3),(11,1)\}$ ۲) $\left\{(-1,8),(11,\frac{1}{3})\right\}$ ۳) $\left\{(-1,8),(11,\frac{1}{3})\right\}$ ۴) $\left\{(2,-8),(11,\frac{1}{3})\right\}$

۲۲۱- اگر $f(x)=2x-1$ و $g^{-1}=\{(1,1),(4,2),(2,5)\}$ باشد، نمودار تابع $2f-g$ و نیمساز ربع اول در چند نقطه برهم منطبق هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲۲- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|-1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[-1,1]$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\mathbb{R}-(-1,1)$

۲۲۳- اگر $f(x)=\sqrt{x+a}$ و $g(x)=\sqrt{b-x}$ باشد و $f+g=\{(2,c)\}$ آن‌گاه مقدار $ab+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۲ ۴) -2

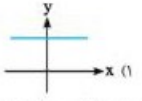
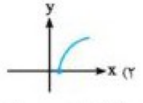
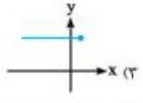
۲۲۴- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{\frac{-1}{x^2+2x}}$ کدام است؟

۱) $-2<x<0$ ۲) $x>0$ یا $x<-2$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{0,-2\}$

۲۲۵- اگر $f(x)=\frac{1}{ax+1}$ و $g(x)=\frac{1}{bx+2}$ و دامنهٔ تابع $f\times g$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{2\}$ باشد، آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) -2

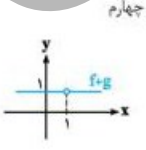
۲۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{1-x}+2$ و $g(x)=-\sqrt{1-x}-2$ باشد، نمودار تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴)

۲۲۷- اگر $f(x)=1-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}+1$ باشد، نمودار تابع $y=(f.g)(x)$ از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند؟

۱) فقط ناحیهٔ اول ۲) ناحیهٔ اول و سوم ۳) ناحیهٔ دوم و چهارم ۴) ناحیهٔ اول و چهارم

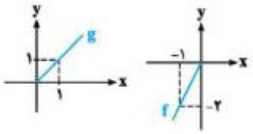
۲۲۸- اگر $f(x)=\frac{1}{x+a}$ و نمودار تابع $f+g$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $g(a+3)$ کدام است؟

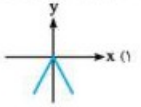


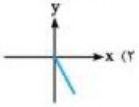
۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

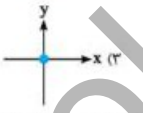
@khanehketab

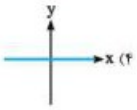
۲۲۹- اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشند، نمودار تابع $2f-g$ کدام است؟



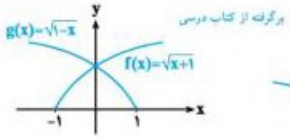
۱) 

۲) 

۳) 

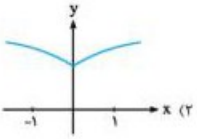
۴) 

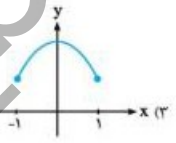
۲۳۰- اگر نمودار f و g به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g+f$ کدام است؟

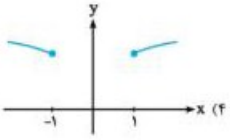


برگرفته از کتاب درسی

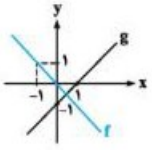
۱)

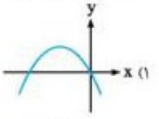
۲) 

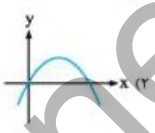
۳) 

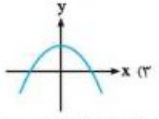
۴) 

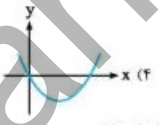
۲۳۱- اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند، نمودار تابع fg کدام است؟



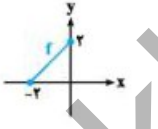
۱) 

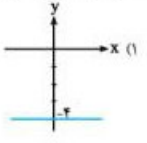
۲) 

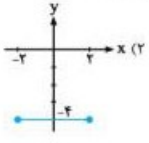
۳) 

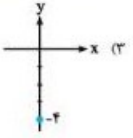
۴) 

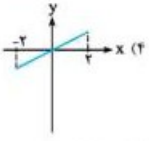
۲۳۲- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $(f\times f^{-1})(x)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳۳- با توجه به نمودارهای f و g، $f-g$ رسم شده، ضابطهٔ تابع $g+f$ کدام است؟

۱) $3x-1$

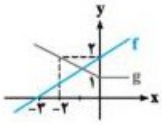
۲) $\frac{3}{2}x-1$

۳) $\frac{3}{2}x+1$

۴) $3x+1$

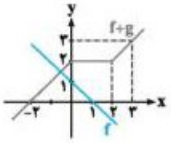
@khaneh_book

۲۳۴- با توجه به نمودارهای f و g، تابع $y = (f+g)(x)$ محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟



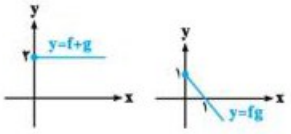
۱) -۴/۵
۲) -۱۸
۳) -۹
۴) ۴/۵

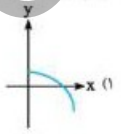
۲۳۵- با توجه به نمودارهای توابع f و g + f، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

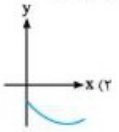


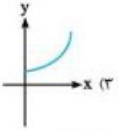
۱) $g(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\le 0\\ x+1 & ; x>0\end{cases}$
۲) $g(x)=\begin{cases}x+1 & ; x<2\\ 2x-1 & ; x\ge 2\end{cases}$
۳) $g(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\le 0\\ x+1 & ; 0<x<2\\ 2x-1 & ; x\ge 2\end{cases}$
۴) $g(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\ge 0\\ x+1 & ; -2<x<0\\ 2x-1 & ; x\le -2\end{cases}$

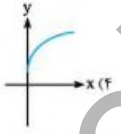
۲۳۶- با توجه به نمودارهای توابع f + g و fg، نمودار تابع f کدام می‌تواند باشد؟



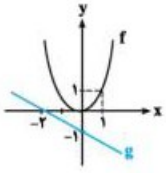
۱) 

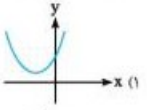
۲) 

۳) 

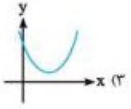
۴) 

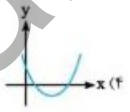
۲۳۷- اگر f یک سهمی و g یک تابع خطی باشد، با توجه به نمودارهای آن‌ها، نمودار تابع f - ۲g کدام است؟



۱) 

۲)

۳) 

۴) 

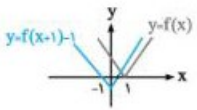
یادداشت

@khaneh_book

پاسخ‌های تشریحی

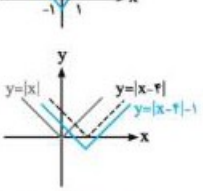
۱ ۲ نمودار تابعی که از مبدأ گذشته نمودار $y = x^2$ است. منحنی که به سمت راست رفته $(x-3)^2$ و منحنی بالایی x^2+2 می‌باشد. لذا $a=-3$ و $b=2$ است، پس $(a,b)=(-3,2)$.

۲ ۴ با توجه به نمودار تابع f برای رسم تابع $g(x)=f(x+1)-1$ کافی است نمایش هندسی (نمودار) f را ۱ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین منتقل کنیم، که نمودار آن به صورت مقابل می‌شود:

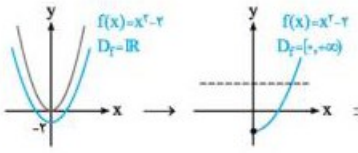


۳ ۴ برای رسم تابع $y=|x-4|-1$، ابتدا نمودار $y=|x|$ را ۴ واحد به راست و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم:

همان‌طور که مشخص است نمودار تابع نهایی، محور xها را در دو نقطه و محور yها را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس محورهای مختصات را در **سه نقطه** قطع می‌کند.



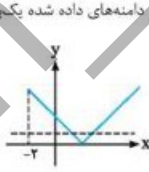
۱ ۴ تابع **گزینهٔ (۱)**، با توجه به دامنهٔ داده شده یک‌به‌یک است:



$\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است.

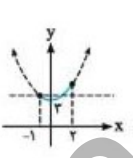
سایر توابع داده شده در دامنه‌های داده شده یک‌به‌یک نیستند:

گزینهٔ (۲):



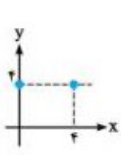
$\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ (۳):



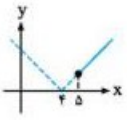
$\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ (۴):



$\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

۵ ۴ تابع $f(x)=|x-4|$ به ازای $x \geq 5$ به‌صورت مقابل (نمودار پررنگ) می‌باشد. همان‌طور که از نمودار معلوم است، این تابع یک‌به‌یک است. اما در بقیهٔ حالات می‌توان خطی موازی محور xها رسم کرد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند و لذا سایر گزینه‌ها با توجه به دامنه‌شان یک‌به‌یک نیستند.



۶ ۱

$$y=-2x^2+5 \xrightarrow[x\to x-2]{\text{انتقال ۲ واحد به راست}} y=-2(x-2)^2+5 \xrightarrow[\text{۴ واحد از ضابطهٔ تابع کم می‌کنیم.}]{\text{انتقال ۴ واحد به پایین}} y=-2(x-2)^2+5-4$$

$$\Rightarrow y=-2(x^2-4x+4)+1 \Rightarrow y=-2x^2+8x-7$$

۷ ۲ برای یافتن $f(x)$، نمودار تابع $g(x)$ را دو واحد به پایین و یک واحد به چپ حرکت می‌دهیم:

$$g(x)=(x-2)^2 \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{دو واحد}} g_1(x)=(x-2)^2-2 \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{یک واحد}} g_2(x)=f(x)=((x+1)-2)^2-2=(x-1)^2-2=x^2-2x-1$$

۸ ۴ ابتدا در ضابطهٔ تابع عدد ۴ را اضافه و کم می‌کنیم تا آن را به فرم مربع کامل دربیاوریم.

$$y=x^2-4x+4-4+3 \Rightarrow y=(x-2)^2-1 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد انتقال به چپ}} y=(x+2-2)^2-1$$

$$\Rightarrow y=x^2-1 \xrightarrow[\text{۳ واحد به ضابطهٔ تابع می‌افزاییم.}]{\text{۳ واحد انتقال به بالا}} y=x^2-1+3 \Rightarrow y=x^2+2$$

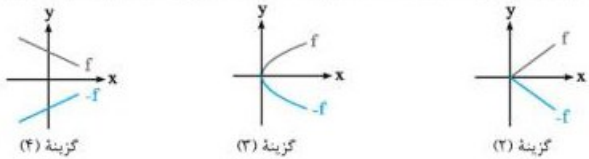
۹ ۳ از خواص تابع قدرمطلق می‌توان گفت: $|-1|=|-(1-x)|=|1-x|$؛ پس تابع y را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=1+|1-x| \Rightarrow y=1+|x-1| \xrightarrow[x\to x-1]{\text{انتقال ۱ واحد به راست}} y=1+|(x-1)-1| \Rightarrow y=1+|x-2|$$

$$\xrightarrow[\text{۲ واحد از ضابطهٔ تابع کم می‌کنیم.}]{\text{انتقال ۲ واحد به پایین}} y=1+|x-2|-2 \Rightarrow y=|x-2|-1$$

@knanen_book

۱۰ **۱** چون تابع g قرینهٔ تابع f می‌باشد، باید برای رسم نمودار آن قرینهٔ تابع f را نسبت به محور xها بیابیم. در **گزینهٔ (۱)** توابع f و g نسبت به محور xها قرینه‌اند، پس این گزینه جواب صحیح است. اما سایر گزینه‌ها نادرست‌اند. در زیر $-f$ را برای سه گزینهٔ دیگر رسم می‌کنیم:



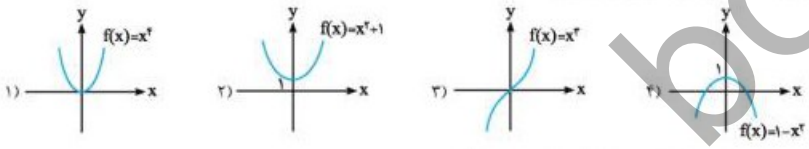
گزینهٔ (۲) گزینهٔ (۳) گزینهٔ (۴)

۱۱ **۱** وقتی دو تابع یکسان هستند باید ضابطه‌های آن‌ها برابر باشد.

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) + f(x) = 0 \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

پس $f(x)$ تابع ثابت صفر می‌باشد، لذا $f(2) = 0$ می‌شود.

۱۲ **۴** نمودارهای داده شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

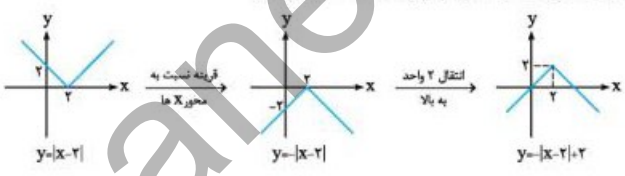


نمودار رسم شده در **گزینهٔ (۴)** از هر چهار ناحیهٔ مختصات می‌گذرد.

سؤال *دانش‌پژوه (کوش آزار)*: **آقا نمودار گزینهٔ (۱) همون نمودار $f(x) = x^2$ نیست؟**

پاسخ: *نه! شبیه اونه. در واقع نمودار $f(x) = x^4$ شبیه نمودار $f(x) = x^2$ هست ولی نسبت به اون جمع‌تره و به سمت محور yها جمع میشه.*

۱۳ **۴** برای رسم تابع داده شده، ابتدا تابع $y = |x|$ را به اندازهٔ ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم تا تابع $y = |x-2|$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۱۴ **۱** برای یافتن برد تابع باید حدود تغییرات $f(x)$ را بیابیم.

$$x^2 \geq 0 \xrightarrow{\times(-\frac{1}{5})} -\frac{1}{5}x^2 \leq 0 \xrightarrow{+2} -\frac{1}{5}x^2 + 2 \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq 2$$

جهت نامساوی عوض می‌شود.

پس برد تابع برابر $(-\infty, 2]$ می‌شود.

سؤال *دانش‌پژوه (کل معین مشرمی)*: **ببخشید، عذر زحمت دارم. از کجا فهمیدید که باید این‌طوری تابع رو بسازین؟**

پاسخ: *ببین باید سعی کنیم از یک نامساوی بدیهی (واضح) که به درمون بخوره، مثلاً در این‌جا، $x^2 \geq 0$ ضابطهٔ تابع رو بسازیم. روش حل این مسایل کلاً به همین شکله. شما هم یه‌کم بریم جلو بیشتر با این روش آشنا می‌شی.*

۱۵ **۳** می‌دانیم $|x^2+2| = |-(x^2+2)| = |-x^2-2|$. هم‌چنین چون x^2+2 همواره مثبت است. پس $|x^2+2| = x^2+2$. بنابراین می‌توان y را به‌صورت $y = x^2+2+3 = x^2+5$ نوشت. برای یافتن کم‌ترین مقدار آن داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+5 \geq 5 \Rightarrow y \geq 5 \Rightarrow y \text{ کم‌ترین مقدار} = 5$$

۱۶ **۴**

$$|x| \geq 0 \xrightarrow{\times(-2)} -2|x| \leq 0 \xrightarrow{+3} -2|x|+3 \leq 3 \Rightarrow f(x) \leq 3 \Rightarrow \text{برد تابع} = (-\infty, 3]$$

۱۷ **۲** ابتدا عبارت زیر رادیکال را ساده می‌کنیم.

$$\sqrt{2x^2-8x+4} = \sqrt{2(x^2-2x+1)} \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} 2\sqrt{(x-1)^2} = 2|x-1|$$

پس می‌توان y را به‌صورت $y = 2-2|x-1|$ نوشت. داریم:

$$|x-1| \geq 0 \xrightarrow{\times(-2)} -2|x-1| \leq 0 \xrightarrow{+2} -2|x-1|+2 \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow \text{برد تابع} = (-\infty, 2]$$

@khanen_book

۱۸ ۴ **روش اول:** دقت کنید چون $|x^2-1|\geq 0$، پس $\sqrt{2}\geq \sqrt{2}$ و لذا $|x^2-1|+\sqrt{2}\geq \sqrt{2}$. بنابراین y مقادیر منفی به خود نمی‌گیرد و در نتیجه تابع هیچ‌گاه از ربع‌های سوم یا چهارم (که در آن‌ها $y<0$ می‌شود) عبور نمی‌کند. پس **گزینهٔ (۴)** جواب است.

روش دوم:

نکته برای رسم تابع $y=|f(x)|$ باید قسمتی از نمودار تابع $f(x)$ را که در زیر محور xها قرار دارد، نسبت به محور xها قرینه نماییم.

برای رسم، ابتدا نمودار $y=x^2$ را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. سپس برای به‌دست آوردن نمودار $y=|x^2-1|$ قسمتی از نمودار را که در پایین محور xها قرار دارد نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و در نهایت، شکل را $\sqrt{2}$ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

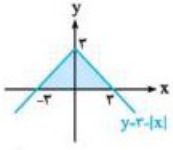
پس این نمودار فقط از نواحی اول و دوم محورهای مختصات عبور می‌کند.

۱۹ ۲ با استفاده از عددگذاری می‌توان تشخیص داد که **گزینهٔ (۲)** صحیح است، زیرا:

$$y=||x-1|-1| \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

گزینهٔ (۲) صحیح است. $\Rightarrow$ تابع باید از $(0,0)$ و $(1,1)$ بگذرد.

۲۰ ۴ نمودار تابع $y=3-|x|$ به‌صورت مقابل است. (برای رسم ابتدا نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور x قرینه کرده و سپس ۳ واحد نمودار را بالا می‌آوریم.) لازم است مساحت مثلث سایه خورده را محاسبه کنیم.



$$S=\frac{1}{2}\times 3\times(3+3)=\frac{1}{2}\times 3\times 6=9$$

۲۱ ۲ **روش اول:** دامنهٔ تابع $f(kx)$ نسبت به تابع $f(x)$، $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود. در این‌جا $f(\frac{x}{2})=f(\frac{1}{2}x)$ لذا دامنهٔ تابع f باید در عدد $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ضرب شود. بنابراین:

$$2\times[-1,3)=[-2,6)$$

روش دوم: با توجه به این‌که دامنهٔ تابع f به‌صورت $[-1,3)$ می‌باشد، مشخص می‌شود که متغیر تابع باید در بازهٔ $[-1,3)$ باشد. بنابراین با توجه به این‌که متغیر تابع $3f(\frac{x}{2})-1$ به‌صورت $\frac{x}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$-1\leq\frac{x}{2}<3 \xrightarrow{\times 2} -2\leq x<6 \Rightarrow \text{دامنهٔ تابع جدید}=[-2,6)$$

۲۲ ۳

$$R_f=[-1,3] \Rightarrow -1\leq f(x)\leq 3 \xrightarrow{\times 2} -2\leq 2f(x)\leq 6 \xrightarrow{-1} -3\leq 2f(x)-1\leq 5 \Rightarrow R=[-3,5]$$

۲۳ ۱ برد تابع با شکم f کاری ندارد، پس چه $f(x-1)$ و چه $f(x)$ باشد، روی برد تأثیرگذار نیست.

$$R_f=[-\sqrt{3},2] \Rightarrow -\sqrt{3}\leq f(x)\leq 2 \Rightarrow -\sqrt{3}\leq f(x-1)\leq 2 \xrightarrow{\times\sqrt{2}} -\sqrt{6}\leq\sqrt{2}f(x-1)\leq 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{+1} -\sqrt{6}+1\leq\sqrt{2}f(x-1)+1\leq\sqrt{8}+1$$

می‌دانیم $\sqrt{6}=2/\ldots$، پس $-\sqrt{6}+1=-1/\ldots$ همچنین $\sqrt{8}=2/\ldots$، لذا $\sqrt{8}+1=3/\ldots$. داریم:

$$-1/\ldots\leq R_y\leq 3/\ldots \Rightarrow y \text{ برد، شامل } \textbf{پنج} \text{ عدد صحیح است.} \Rightarrow \text{اعداد صحیح برد } y=\{-1,0,1,2,3\}$$

۲۴ ۳

$$\left.\begin{matrix} A(3,1)\in f \\ A'\in 2f(4x-1)+5 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{از عبارت داخل } f \text{ می‌یابیم.}]{\text{نقطه‌ی متناظر با } x=3 \text{ را}} 4x-1=3 \Rightarrow x=1 \xrightarrow[2f(4x-1)+5]{\text{جایگذاری } x=1 \text{ در}} 2f(3)+5=3(1)+5=8$$

پس نقطهٔ متناظر A، $A'(1,8)$ می‌باشد.

۲۵ ۳ می‌دانیم نمودار تابع $kf(x)$ نسبت به نمودار $f(x)$ به ازای $k>1$ از محور xها دورتر و به ازای $0<k<1$ به محور xها نزدیک می‌شود. همچنین می‌دانیم $|ax|=|a||x|$ و $|bx|=|b||x|$. با توجه به مطلب گفته شده باید $|a|>1$ و $|b|<1$ باشند که تنها در **گزینهٔ (۳)** چنین حالتی وجود دارد.

@khanenbook

۲۶ ۴ در توابع خطی گذرا از مبدأ $f(ax) = af(x)$ می‌شود، لذا **گزینهٔ (۴)** که تابعی خطی و گذرا از مبدأ است، جواب می‌باشد. به‌عنوان تمرین بررسی کنید که بقیهٔ توابع داده شده این خاصیت را ندارند.

۲۷ ۱ برای حل باید در تابع $y = \frac{۲}{x+۲}$ به جای y مقادیر ۲، ۱ و ۱- را جایگزین کنیم تا مقادیر x به دست آید.

$$\left.\begin{array}{l} y=۲ \Rightarrow ۲=\frac{۲}{x+۲} \Rightarrow ۲x+۴=۲ \Rightarrow x=-۱ \\ y=۱ \Rightarrow ۱=\frac{۲}{x+۲} \Rightarrow x+۲=۲ \Rightarrow x=۰ \\ y=-۱ \Rightarrow -۱=\frac{۲}{x+۲} \Rightarrow -x-۲=۲ \Rightarrow -x=۴ \Rightarrow x=-۴ \end{array}\right\} \Rightarrow D_f = \{-۱, ۰, -۴\}$$

۲۸ ۳ ابتدا ۵ و ۷ را به‌ترتیب به‌صورت ۱ + ۴ و ۳ + ۴ می‌نویسیم زیرا در این صورت می‌توانیم به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای راحت‌تر مقدار تابع را در $\sqrt{۳}-۲$ محاسبه کنیم.

$$f(x) = \frac{x^۲+۴x+۵}{x^۲+۴x+۷} = \frac{x^۲+۴x+۴+۱}{x^۲+۴x+۴+۳} = \frac{(x+۲)^۲+۱}{(x+۲)^۲+۳} \Rightarrow f(\sqrt{۳}-۲) = \frac{(\sqrt{۳}-۲+۲)^۲+۱}{(\sqrt{۳}-۲+۲)^۲+۳} = \frac{۳+۱}{۳+۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۲۹ ۱

$$f(x) = x + \frac{۲}{x} \Rightarrow f(۱+\sqrt{۲}) + f(۱-\sqrt{۲}) = \left(۱+\sqrt{۲}+\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}\right) + \left((۱-\sqrt{۲})+\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}\right)$$

$$= ۱+\sqrt{۲}+\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}+۱-\sqrt{۲}+\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}} = ۲+\frac{۲}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} ۲+\frac{۲(۱-\sqrt{۲})+۲(۱+\sqrt{۲})}{(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})}$$

$$\xrightarrow[\text{برای مخرج}]{\text{اتحاد مزدوج}} ۲+\frac{۲-۲\sqrt{۲}+۲+۲\sqrt{۲}}{۱-۲} = ۲+\frac{۴}{-۱} = ۲-۴ = -۲$$

۳۰ ۱

$$f(۲-\sqrt{۳}) = \frac{۲(۲-\sqrt{۳})^۲+۲}{(۲-\sqrt{۳})^۲-۳} = \frac{۲(۴+۳-۴\sqrt{۳})+۲}{(۴+۳-۴\sqrt{۳})-۳} = \frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۲\sqrt{۳}} = \frac{۴(۴-۲\sqrt{۳})}{۲(۱-\sqrt{۳})} \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{(۴-۲\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}{(۱-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}$$

$$= \frac{۴+۴\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۶}{۱-۳} = \frac{-۲+۲\sqrt{۳}}{-۲} = \frac{۲(۱-\sqrt{۳})}{-۲} = ۱-\sqrt{۳}$$

۳۱ ۱ برای محاسبهٔ $f(۲)$ باید ابتدا ببینیم به ازای چه xای، عبارت داخل شکم f یعنی $\frac{۱}{\sqrt{x}}$ برابر ۲ می‌شود.

$$\frac{۱}{\sqrt{x}} = ۲ \xrightarrow{\text{دو طرف را وارون می‌کنیم}} \sqrt{x} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} x = \frac{۱}{۴}$$

با قرار دادن $x = \frac{۱}{۴}$ در تابع f داریم:

$$x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow f\left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}\right) = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}-۱} \Rightarrow f(۲) = \frac{\frac{۱}{۴}}{-\frac{۳}{۴}} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} f(۲) = -\frac{۴\times۱}{۴\times۳} = -\frac{۱}{۳}$$

۳۲ ۱

$$y_۲ = \frac{۳x+۱}{x} = \frac{۳x}{x} + \frac{۱}{x} \Rightarrow y_۲ = ۳ + \frac{۱}{x} = ۳ + y_۱$$

پس با انتقال تابع $y_۱$ به اندازهٔ ۳ واحد به بالا به تابع $y_۲$ می‌رسیم.

۳۳ ۱

$$f(۲x+۱) = \frac{(۲x+۱)^۲+۳}{(۲x+۱)^۲-۱} = \frac{۴x^۲+۴x+۱+۳}{۴x^۲+۴x+۱-۱} = \frac{۴x^۲+۴x+۴}{۴x^۲+۴x} = \frac{۴(x^۲+x+۱)}{۴(x^۲+x)} = \frac{x^۲+x+۱}{x^۲+x}$$

$$f(۰) = \frac{۰+۳}{۰-۱} = -۳ \Rightarrow f(۲x+۱) + \frac{۱}{۳}f(۰) = \frac{x^۲+x+۱}{x^۲+x} + \frac{۱}{۳}(-۳)^{-۱} = \frac{x^۲+x+۱-x^۲-x}{x^۲+x} = \frac{۱}{x^۲+x}$$

۳۴ ۳ برای به دست آوردن دامنه، مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$y = \frac{۲x-۱}{۱+۳x+۴x^۲} \quad , \quad ۱+۳x+۴x^۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲-۴ac = ۹-۱۶ = -۷ < ۰$$

بنابراین چون $\Delta < ۰$ است، عبارت مخرج هیچ‌گاه صفر نخواهد شد و در نتیجه دامنهٔ تابع فوق $\mathbb{R}$ می‌باشد.

@khaneh_book

۳۵ ۳ تابع $y=\frac{m}{۳x^۲-۶x+۲m}$ وقتی همواره معین است (یعنی به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است) که مخرج، ریشه نداشته باشد، یعنی دلتای مخرج منفی باشد، بنابراین داریم:

$$۳x^۲-۶x+۲m=۰ \Rightarrow \Delta=۳۶-۴(۳)(۲m)<۰ \Rightarrow ۳۶-۲۴m<۰ \Rightarrow -۲۴m<-۳۶ \Rightarrow m>\frac{۳۶}{۲۴} \Rightarrow m>\frac{۳}{۲}$$

۳۶ ۲ **روش اول:** با توجه به آن‌که صورت کسر ضابطهٔ f برابر $۲x+۵$ و دامنهٔ تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{۲,۳\}$ می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که مخرج کسر، دارای ۲ ریشهٔ $x=۲$ و $x=۳$ می‌باشد. به عبارت دیگر مخرج کسر به‌ازای $x=۲$ و $x=۳$ برابر صفر می‌شود. بنابراین:

$$x^۲+ax+b=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲: ۲^۲+۲a+b=۰ \\ x=۳: ۳^۲+۳a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=-۴ \\ ۳a+b=-۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=-۵\ ,\ b=۶$$

لذا $b+a=۱$.

روش دوم:

یادآوری اگر تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ دارای دو ریشهٔ متمایز $x_۱$ و $x_۲$ باشد، می‌توان آن را به فرم $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ نوشت.

با توجه به روش اول و با استفاده از یادآوری فوق، چون $x=۲$ و $x=۳$ ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند. لذا مخرج کسر را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$x^۲+ax+b=(۱)(x-۲)(x-۳) \Rightarrow x^۲+ax+b=x^۲-۵x+۶ \Rightarrow a=-۵, b=۶ \Rightarrow a+b=۱$$

۳۷ ۲ **یادآوری** اگر تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ دارای ریشهٔ مضاعف $x_۱$ باشد، می‌توان آن را به فرم $f(x)=a(x-x_۱)^۲$ نوشت.

با توجه به دامنهٔ تابع، می‌توان نتیجه گرفت که مخرج کسر دارای ریشهٔ مضاعف $x=۱$ می‌باشد. بنابراین با توجه به یادآوری فوق، عبارت مخرج کسر را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$x^۲+ax-b=(۱)(x-۱)^۲ \Rightarrow x^۲+ax-b=x^۲-۲x+۱ \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ -b=۱ \Rightarrow b=-۱ \end{cases} \Rightarrow b-a=۱$$

۳۸ ۳ با توجه به شکل تابع f، به‌نظر می‌آید که باید از طریق ساده کردن شکل تابع f، برد آن را بیابیم:

$$f(x)=\frac{(x^۲+۲x+۲)+۲}{x^۲+۲x+۲} \xrightarrow[\text{کسر}]{\text{تفکیک}} \frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x+۲}+\frac{۲}{x^۲+۲x+۲}=۱+\frac{۲}{x^۲+۲x+۱+۱}=۱+\frac{۲}{(x+۱)^۲+۱}$$

حال با توجه به نامساوی بدیهی $(x+۱)^۲\geq ۰$ حدود f را می‌یابیم:

$$(x+۱)^۲\geq ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+۱\geq ۱ \xrightarrow[\text{جهت علامت عوض می‌شود}]{\text{دو طرف را معکوس می‌کنیم}} ۰<\frac{۱}{(x+۱)^۲+۱}\leq ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰<\frac{۲}{(x+۱)^۲+۱}\leq ۲$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱<۱+\frac{۲}{(x+۱)^۲+۱}\leq ۳ \Rightarrow ۱<f(x)\leq ۳$$

پس برد تابع بازه $(۱,۳]$ می‌باشد.

سؤال (دانش‌پژوه (بهرام پاپلهٔ)): **آقا من اگه این سؤال رو حل کنم بابام با هفتاد سال سن، هفتاد تا پشتک وارو به افتخارم میزنه! از اینا تو کنکور زیاد می‌دن؟**

پاسخ: نه بهرام جان. همون زمان بابات، می‌بودمرا ولی کسی که بخواد فیلمی عالی باشه باید اینا رو بلد باشه. تو در هر این که تست رو بخونی کافیه!

۳۹ ۲ ابتدا به ازای $n=۱۲$ و $n=۲$، درصد آمادگی فرد را در جلسات دوازدهم و دوم می‌یابیم:

$$\left.\begin{aligned} P(۱۲)&=\text{درصد آمادگی فرد در جلسهٔ دوازدهم}=۱۰۰\times\frac{A(۱۲)-۱}{A(۱۲)+۴}=۱۰۰\times\frac{۹۵}{۱۰۰}=۹۵ \\ P(۲)&=\text{درصد آمادگی فرد در جلسهٔ دوم}=۱۰۰\times\frac{A(۲)-۱}{A(۲)+۴}=۱۰۰\times\frac{۱۵}{۲۰}=۷۵ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P(۱۲)}{P(۲)}=\frac{۹۵}{۷۵}=\frac{۱۹}{۱۵}$$

۴۰ ۴ برای به‌دست آوردن تعداد ماه‌های سپری شده از آغاز بیماری باید n را از برابر قرار دادن تابع و درصد داده شده محاسبه نماییم.

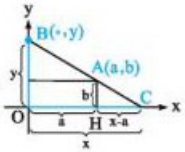
$$۲۰۰\frac{n+۲}{۳n+۴}=۶۰ \Rightarrow \frac{n+۲}{۳n+۴}=\frac{۶۰}{۲۰۰} \Rightarrow \frac{n+۲}{۳n+۴}=\frac{۳}{۱۰} \xrightarrow{\text{طرفین - وسطین}} ۱۰(n+۲)=۳(۳n+۴) \Rightarrow ۱۰n+۲۰=۹n+۱۲ \Rightarrow n=-۸$$

n باید عددی طبیعی باشد ولی در این‌جا ۸- شده، پس این معادله جواب ندارد و این یعنی کارایی مغز شخص هیچ‌گاه تا ٪۶۰ کاهش نمی‌یابد.

@khanenbook

۴۱ ۱ با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{CH}{CO}=\frac{AH}{BO}\Rightarrow\frac{x-a}{x}=\frac{b}{y}\Rightarrow y=\frac{bx}{x-a}$$



بنابراین:

حال با توجه به فرمول مساحت مستطیل که طول ضرب در عرض است و جایگذاری $\frac{bx}{x-a}$ به جای y، داریم:

$$S_{\text{مستطیل}}=xy=x\left(\frac{bx}{x-a}\right)=\frac{bx^2}{x-a}$$

۴۲ ۳ عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد، بنابراین:

$$-3x-4\geq 0\xrightarrow{+4}-3x\geq 4\xrightarrow[\text{جهت نامعادله عوض می‌شود}]{\div(-3)}x\leq-\frac{4}{3}$$

از بین گزینه‌های داده شده تنها $-\frac{4}{3}\leq -2$ می‌باشد. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۴۳ ۲ برای ساده کردن عبارات رادیکالی باید ابتدا و قبل از ساده کردن، دامنه را مشخص کنیم. از آن‌جا که $f(x)=[(2x-3)^{\frac{1}{2}}]^2=(\sqrt{2x-3})^2$، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2x-3\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}\Rightarrow D_f=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبر لاندی)، آقا اجازه! ما اول گفتیم $f(x)=[(2x-3)^{\frac{1}{2}}]^2=(2x-3)^{\frac{1}{2}\times 2}=2x-3$ و حالا دامنهٔ $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ میشه.

پاسخ: اکبر! من مونم تو چشت یک درصد زیونت کار نمی‌کنه! بچه! فقط اول گفتم که حق نداریم قبل از تعیین دامنه ساده کنیم، اون وقت تو رفتی $\frac{1}{2}$ رو با ۲ ساده کردی بعد تعیین دامنه کردی!

۴۴ ۱ دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است، پس باید گزینه‌ای را بیابیم که در آن دامنهٔ تابع داده شده $\mathbb{R}$ باشد. در **گزینهٔ (۱)** با توجه به این‌که $x^2+1\geq 1$ مخرج هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، دامنه $\mathbb{R}$ است و لذا این گزینه جواب است. در **گزینهٔ (۲)** با توجه به کسر $\frac{1}{x}$، دامنه $\mathbb{R}-\{0\}$، در **گزینهٔ (۳)** دامنه $(0,+\infty)$ و در **گزینهٔ (۴)**، دامنه $(-\infty,2]$ می‌شود، بنابراین هیچ یک جواب نیستند.

۴۵ ۲

$$y=\frac{1}{3+x}\Rightarrow 3+x=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی یعنی $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$، زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-3\}$ می‌باشد.

سایر گزینه‌ها نادرست‌اند. دامنهٔ تابع **گزینهٔ (۱)**، $x\geq 3$، **گزینهٔ (۳)**، $x\leq 3$ و **گزینهٔ (۴)**، $\mathbb{R}-\{3\}$ می‌شوند که اعداد طبیعی زیرمجموعهٔ هیچ‌یک از آن‌ها نیست.

۴۶ ۴

نکته اگر برد تابع $f(x)$، $\mathbb{R}$ باشد، برد تابع $\sqrt{f(x)}$، برابر اعداد نامنفی است. $(\sqrt{f(x)}\geq 0)$

با توجه به این‌که می‌دانیم برد توابع خطی $\mathbb{R}$ است، پس $\sqrt{x+a}\geq 0$ می‌باشد. برای یافتن بیشترین مقدار f، برد آن را می‌یابیم:

$$\sqrt{x+a}\geq 0\Rightarrow -\sqrt{x+a}\leq 0\xrightarrow{-2}-2-\sqrt{x+2}\leq -2\Rightarrow f(x)\leq -2\Rightarrow R_f=(-\infty,-2]\Rightarrow$$

-2 = بیشترین مقدار f

۴۷ ۳

$$f(8)=3+\sqrt{2(8)}\Rightarrow f(8)=3+\sqrt{16}\Rightarrow f(8)=3+4=7$$

۴۸ ۲ برای به‌دست آوردن $f(2+\sqrt{7})-f(2)$ به جای x در تابع f، $2+\sqrt{7}$ و ۲ را قرار می‌دهیم.

$$f(2+\sqrt{7})=\sqrt{-(2+\sqrt{7})^2+4(2+\sqrt{7})+12}=\sqrt{-4-7-4\sqrt{7}+8+4\sqrt{7}+12}=\sqrt{9}=3$$

$$f(2)=\sqrt{-2^2+4(2)+12}=\sqrt{-4+8+12}=\sqrt{16}=4\Rightarrow f(2+\sqrt{7})-f(2)=3-4=-1$$

۴۹ ۱ **روش اول:**

$$\sqrt{x}+1=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{2}-1\Rightarrow x=(\sqrt{2}-1)^2$$

حال در تابع $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+2$ به جای $\sqrt{x}$ مقدار $\sqrt{2}-1$ و به جای x مقدار $(\sqrt{2}-1)^2$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)+2\Rightarrow f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2}+1)+(2\sqrt{2}-2)+2\Rightarrow f(\sqrt{2})=3$$

روش دوم:

$$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+2=\underbrace{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}+1\Rightarrow f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2+1\xrightarrow{\sqrt{x}+1=t}f(t)=t^2+1$$

$$\xrightarrow{1=\sqrt{2}}f(\sqrt{2})=2+1=3$$

@khanehketab

۵۰ ۲ **روش اول:**

$$f(x)=\sqrt{x^2-4} \Rightarrow f(a+\frac{1}{a})=\sqrt{\underbrace{(a+\frac{1}{a})^2}_{\text{مربع دو جمله‌ای}}-4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2-4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}$$

$$=|a-\frac{1}{a}|=|\frac{a^2-1}{a}| \underset{a^2<1 \Rightarrow a^2-1<0}{\overset{\text{چون } 0<a<1}{=}} -(\frac{a^2-1}{a})=\frac{-a^2+1}{a} \qquad (I)$$

سؤال دانش‌پژوه (متین پورزمان)، **ببخشید چرا** $|\frac{a^2-1}{a}|=-\frac{(a^2-1)}{a}$ **شد؟**

پاسخ: چون به ازای $0<a<1$، $a^2<1$ و در نتیجه $a^2-1<0$، هم‌چنین چون a مثبته، پس $\frac{a^2-1}{a}<0$ میشه در نتیجه برای بیرون آوردنش از قدرمطلق یه منفی توش ضرب میشه. ضمناً میتونی به عدد مثل $\frac{1}{2}$ بزاری و ببینی علامتش مثبته یا منفی. آگه منفی پور یه منفی پشت عبارت ضرب کنی.

$$g(x)=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow g(a-\frac{1}{a})=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2+4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}$$

$$=|a+\frac{1}{a}|=|\frac{a^2+1}{a}| \underset{\frac{a^2+1}{a}>0}{\overset{\text{چون } 0<a<1}{=}} \frac{a^2+1}{a} \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} f(a+\frac{1}{a})+g(a-\frac{1}{a})=\frac{-a^2+1}{a}+\frac{a^2+1}{a}=\frac{2}{a}$$

روش دوم: به ازای $a=\frac{1}{2}$ داریم:

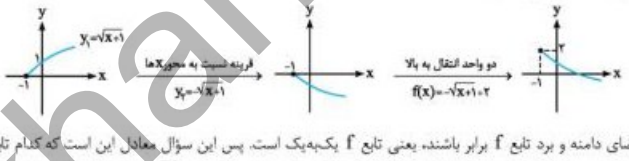
$$\left.\begin{aligned} f(a+\frac{1}{a})=f(\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}})=f(\frac{1}{2}+2)=f(\frac{5}{2})=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-4}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2} \\ g(a-\frac{1}{a})=g(\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{1}{2}})=g(\frac{1}{2}-2)=g(-\frac{3}{2})=\sqrt{(-\frac{3}{2})^2+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{8}{2}=4$$

در گزینه‌های داده شده به ازای $a=\frac{1}{2}$، تنها از **گزینهٔ (۲)** جواب ۴ به‌دست می‌آید. $\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}=4\right)$

۵۱ ۳ ابتدا دامنهٔ $f(x)$ را می‌یابیم:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

با توجه به نمودار $y_1=\sqrt{x+1}$ داریم:



۵۲ ۱ اگر تعداد اعضای دامنه و برد تابع f برابر باشند، یعنی تابع f یک‌به‌یک است. پس این سؤال معادل این است که کدام تابع یک‌به‌یک می‌باشد. می‌دانیم توابع درجه دوم و قدرمطلق در حالت کلی توابعی غیر یک‌به‌یک هستند ولی تابع $y=\sqrt{x}$ تابعی یک‌به‌یک است.

۵۳ ۴ طبق نکتهٔ آخر درسنامه، از آن‌جا که در بازهٔ داده شده یعنی $x>1$، $(1,3]$ می‌باشد، هرچه توان x بیشتر باشد، مقادیر تابع بزرگ‌تر شده و تابع بالاتر از بقیه قرار می‌گیرد. پس در این بازه داریم:

$$2>\frac{3}{2}>\frac{1}{2} \Rightarrow x^2>x^{\frac{3}{2}}>x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) جواب است.

۵۴ ۲ با توجه به این‌که $0<x<1$ است، هر چه توان x کم‌تر باشد مقدار آن بیشتر شده و بالای بقیه قرار می‌گیرد.

$$4>2>1>\frac{1}{2} \xrightarrow{0<x<1} x^4<x^2<x<\sqrt{x}$$

۵۵ ۳ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

از آن‌جا که به ازای عدد نامنفی x، تنها در بازهٔ $[0,1]$، $\sqrt{x} \geq x$ می‌شود، لذا دامنهٔ تابع بازهٔ $[0,1]$ است.

سؤال دانش‌پژوه (علی نادم)، **آقا من گفتم به ازای** $x=\frac{1}{4}$ **داریم:**

$$y=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \in D_f \Rightarrow$$ **تنها گزینهٔ (۳) می‌تونه جواب باشه.**

پاسخ: درسته، ولی پیدا کردن عدد $\frac{1}{4}$ فورش یه کم سفته. تازه تو همهٔ سؤالات هم نمی‌شه پایگذاری کرد.

@khaneh_book

۵۶ **۴** از تغییر $a = 2 + \frac{x}{3}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین $-a = -2 - \frac{x}{3}$ می‌شود. عبارات زیر رادیکال‌ها باید نامنفی باشند، پس:

$$\begin{cases} -\frac{x}{3} - 2 + \sqrt{\frac{x}{3} + 2} \geq 0 \Rightarrow -a + \sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq a \xrightarrow{\text{از حل تست قبل}} 0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{3} + 2 \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq x + 6 \leq 3 \Rightarrow \boxed{-6 \leq x \leq -3} \quad (I) \\ \frac{x}{3} + 2 \geq 0 \xrightarrow{\times 3} x + 6 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -6} \quad (II) \end{cases}$$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود $-6 \leq x \leq -3$. بنابراین دامنه شامل **چهار** عدد صحیح -3، -4، -5 و -6 می‌باشد.

۵۷ **۲**

$$x^3 - |x| > 0 \Rightarrow x^3 > |x|$$

چون $x^3 > |x|$، پس x باید حتماً مثبت باشد، وگرنه سمت چپ منفی شده و نامساوی برقرار نمی‌شود. پس نامعادله را می‌توان به‌صورت $x^3 > x$ در نظر گرفت. همچنین می‌دانیم هرگاه $x > 1$، آن‌گاه هرچه x به توان بیشتری برسد، بزرگ‌تر می‌شود. اما برای $0 < x < 1$، هرچه x به توان بیشتری برسد، کوچک‌تر می‌شود. پس جواب نامعادله $x > 1$ می‌باشد و لذا **گزینهٔ (۲)** صحیح می‌باشد.

۵۸ **۴** از آن‌جا که این تابع هیچ نمره‌ای را پایین‌تر از نمرهٔ کسب شده برنمی‌گرداند، پس $f(20) \geq 20$، همچنین چون هیچ نمره‌ای بالاتر از ۲۰ نمی‌شود، پس $f(20) \leq 20$. با توجه به این دو نامساوی $f(20) = 20$ می‌شود.

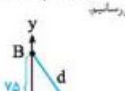
$$f(20) = 20 \Rightarrow \sqrt{20a} = 20 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} 20a = 400 \Rightarrow a = \frac{400}{20} = 20$$

بنابراین تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x) = \sqrt{20x}$ می‌باشد. برای کسب نمرهٔ قبولی این تابع باید حداقل مقدار ۱۰ را برگرداند، لذا باید ببینیم به ازای چه xای $f(x) = 10$ می‌شود. بنابراین:

$$10 = \sqrt{20x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} 100 = 20x \Rightarrow x = \frac{100}{20} = 5$$

در امتحان باید حداقل نمرهٔ ۵ کسب شود.

۵۹ **۳** فاصلهٔ کشتی A تا بندرگاه ۶۰ متر است و در هر ثانیه این کشتی ۱۰ متر به بندرگاه نزدیک‌تر می‌شود. لذا این کشتی ۶۰ متر را در $\frac{60}{10} = 6$ ثانیه طی می‌کند. هم‌چنین فاصلهٔ کشتی B تا بندرگاه ۷۵ متر است و هر ثانیه این کشتی ۱۵ متر به بندرگاه نزدیک می‌شود. لذا این کشتی این فاصله را در مدت $\frac{75}{15} = 5$ ثانیه طی می‌کند. پس کشتی B زودتر به بندرگاه می‌رسد. پس $0 \leq t \leq 5$.



اگر فاصلهٔ کشتی A را در هر لحظه تا بندرگاه با A_t و فاصلهٔ کشتی B را در هر لحظه تا بندرگاه با B_t نشان دهیم فاصلهٔ دو کشتی از هم در هر لحظه از رابطهٔ فیثاغورس به‌صورت $d = \sqrt{A_t^2 + B_t^2}$ می‌باشد. چون سرعت حرکت کشتی A، ۱۰ متر بر ثانیه می‌باشد و فاصلهٔ اولیهٔ آن از بندرگاه ۶۰ متر است، فاصلهٔ آن تا بندرگاه در هر لحظه از رابطهٔ $A_t = 60 - 10t$ به‌دست می‌آید به همین ترتیب، فاصلهٔ کشتی B در هر لحظه از بندرگاه از رابطهٔ $B_t = 75 - 15t$ محاسبه می‌شود، با جایگذاری A_t و B_t در فرمول d داریم:

$$d = \sqrt{A_t^2 + B_t^2} = \sqrt{(60 - 10t)^2 + (75 - 15t)^2}$$

و چون کشتی B زودتر (در ۵ ثانیه) به بندرگاه می‌رسد، $0 \leq t \leq 5$ می‌باشد.

۶۰ **۱**

$$x \xrightarrow{\text{قرینه}} -x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (-x)^2 = x^2 \xrightarrow{+1} x^2 + 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{x^2+1} \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ می‌باشد. برای تعیین دامنهٔ این تابع باید توجه داشت که عبارت داخل رادیکال با فرجهٔ زوج باید همواره نامنفی باشد. در عبارت داخل رادیکال با توجه به این‌که $\frac{1}{x^2+1}$ همواره مثبت است، $D_f = \mathbb{R}$ می‌شود.

۶۱ **۳** عبارت زیر رادیکال باید نامنفی بوده و مخرج عبارت کسری نیز مخالف صفر باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-2} - 1 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2 - x + 2}{x - 2} \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4 - x}{x - 2} \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } x=4,\ x=2}$$

x		۲		۴	
$4-x$	+	|	+	0	−
$x-2$	−	0	+	|	+
$\frac{4-x}{x-2}$	−	نامعین	+	0	−

بنابراین بازهٔ جواب به شکل $[2,4)$ می‌باشد که شامل **دو** عدد صحیح ۳ و ۴ است.

@khanen_book

۶۲ ۳

$$f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}$$

حال برای این که تابع فوق تعریف شده باشد باید زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر و مخرج مخالف صفر باشد، یعنی:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\geq 0\Rightarrow \frac{1+x}{1-x}\geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } x=-1,\ x=1} \Rightarrow -1\leq x<1\Rightarrow D_f=[-1,1)$$

x		-1		1	
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	0	$+$	نامعین	$-$
			جواب		

۶۳ ۴

یادآوری در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $a+b+c=0$ باشد، یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ یعنی $-3x^2+5x-2\geq 0$. با توجه به یادآوری بالا، چون $-2-5+3=0$، یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم مقابل برابر ۱ و دیگری $\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$ می‌باشد. پس جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است.

x		$\frac{2}{3}$		1	
$-3x^2+5x-2$	$-$	0	$+$	0	$-$
		جواب			

$\Rightarrow \frac{2}{3}\leq x\leq 1$: جواب نامعادله

۶۴ ۳

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد. لذا داریم:

$$f(x)=\sqrt{\underbrace{-x^2(x^2-4)^2}_{\geq 0}}\Rightarrow -x^2(x^2-4)^2\geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \underbrace{x^2(x^2-4)^2}_{p}\leq 0 \quad (*)$$

عبارت p همواره مثبت یا صفر است (زیرا همهٔ عامل‌های آن دارای توان زوج هستند.) بنابراین به‌ازای هیچ x ای نمی‌تواند منفی شود و فقط می‌تواند برابر صفر شود. لذا نامعادلهٔ (*) تبدیل به معادلهٔ زیر می‌شود:

$$x^2(x^2-4)^2=0\Rightarrow \begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0 \\ x^2-4=0\Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=2\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع f شامل سه عضو ۰، ۲ و -2 می‌باشد و به‌ازای سایر x ها زیر رادیکال منفی می‌شود.

۶۵ ۳

$$f(x)=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow f(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}=\sqrt{6-2x-(9+x^2-6x)}=\sqrt{-x^2+4x-3}$$

برای یافتن دامنهٔ تابع $f(3-x)$ باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم:

$$-x^2+4x-3\geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } x_1=1,\ x_2=3} \begin{array}{c|ccccc} x & & 1 & & 3 & \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \\ & & \text{جواب} & & & \end{array} \Rightarrow D_{f(3-x)}=[1,3]$$

۶۶ ۴

عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

$5x^2-4x+6=0\Rightarrow \Delta=16-120=-104<0 \Rightarrow$ ریشه ندارد.

$-3x^2+6x-3=0\Rightarrow -3(x^2-2x+1)=0\Rightarrow -3(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$ ریشهٔ مضاعف

x		1	
$5x^2-4x+6$	$+$	$+$	$+$ ← همواره مثبت
$-3x^2+6x-3$	$-$	0	$-$ ← همواره منفی
$(5x^2-4x+6)(-3x^2+6x-3)$	$-$	0	$-$

چون عبارت زیر رادیکال در همه‌جا به جز $x=1$ منفی است، پس دامنهٔ این تابع تنها یک عضو دارد $D_y=\{1\}$، به‌ازای $x=1$، $y=0$ می‌شود، پس نمودار این تابع تنها بیانگر نقطهٔ $A(1,0)$ می‌باشد. این نقطه روی محور x ها قرار دارد (نه بالا یا پایین آن) و با تابع $y=x$ نیز تقاطعی ندارد. اما می‌دانیم یک تک نقطه تابعی یک‌به‌یک می‌باشد.

۶۷ ۱

نکته برای آن‌که $ax^2+bx+c\geq 0$ باشد، باید داشته باشیم: $a\geq 0$ و $\Delta\leq 0$

شرط آن‌که عبارت $\sqrt{mx^2+2mx+1}$ به‌ازای جمیع مقادیر x دارای معنی باشد آن است که: $mx^2+2mx+1\geq 0$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} m\geq 0 \quad (I) \\ \Delta\leq 0\Rightarrow 4m^2-4(m)(1)\leq 0\Rightarrow 4m(m-1)\leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } m=0,\ m=1} \begin{array}{c|ccccc} m & & 0 & & 1 & \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \\ & & \text{جواب} & & & \end{array} \Rightarrow 0\leq m\leq 1 \quad (II)$$

از اشتراک رابطه‌های (I) و (II) نتیجه می‌گیریم که $0\leq m\leq 1$ می‌باشد. از طرفی چون مسأله تأکید نداشته که تابع حتماً درجه دوم باشد، اگر $m=0$ باشد، آن‌گاه عبارت $\sqrt{mx^2+2mx+1}$ همواره برابر با ۱ بوده و با معنی است. بنابراین $0\leq m\leq 1$ جواب است.

@khanehbook

۶۸ **۳** برای تعیین دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$ ابتدا محدودیت صورت کسر را تعیین می‌کنیم که به صورت: $x\geq 0$ می‌شود. حال برای تعیین محدودیت مخرج کافی است $x\sqrt{x}+1\neq 0$ در نظر بگیریم که با توجه به این که $x\geq 0$ است $x\sqrt{x}+1$ همواره مثبت است، بنابراین دامنه $x\geq 0$ می‌باشد، پس $D_y=[0,+\infty)$.

۶۹ **۱** برای حل، دامنهٔ هر کدام از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم و سپس اشتراک می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}+\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}\ ;\ \frac{x-1}{x-3}\geq 0:\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1 & \text{ریشهٔ صورت}\\ x-3=0\Rightarrow x=3 & \text{ریشهٔ مخرج}\end{cases}$$

x		1		3
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$
	جواب			نامعین	جواب

$$D_{f_1}=\{x\,|\,x\leq 1 \text{ یا } x>3\}$$

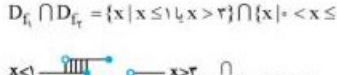
$$f_2(x):\sqrt{\frac{2-x}{x}}\Rightarrow\frac{2-x}{x}\geq 0;\begin{cases}2-x=0\Rightarrow x=2 & \text{ریشهٔ صورت}\\ x=0 & \text{ریشهٔ مخرج}\end{cases}$$

x		0		2	
$2-x$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$\|$	$+$
$\frac{2-x}{x}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$
		نامعین	جواب		

$$D_{f_2}=\{x\,|\,0<x\leq 2\}$$

$$D_{f_1}\cap D_{f_2}=\{x\,|\,x\leq 1 \text{ یا } x>3\}\cap\{x\,|\,0<x\leq 2\}=\{x\,|\,0<x\leq 1\}\Rightarrow D_f=(0,1]$$

برای درک بهترِ اشتراک بین دو دامنهٔ f_1 و f_2، به محور اعداد مقابل نگاه کنید:



$$\Longrightarrow 0<x\leq 1$$

۷۰ **۳** برای تعیین دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x^2}}$ ابتدا دامنهٔ هر یک از رادیکال‌ها را جداگانه به دست می‌آوریم سپس اشتراک آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

$$\sqrt{x^2-1}\Rightarrow x^2-1\geq 0\,;\,x^2-1=0\Rightarrow x=-1,x=1\Longrightarrow$$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1\quad (1)$$

$$\sqrt{4-x^2}\xrightarrow[\text{زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم.}]{\text{چون رادیکال در مخرج است}}4-x^2>0\,;\,x=-2,x=2\Rightarrow$$

x		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow -2<x<2\quad (2)$$

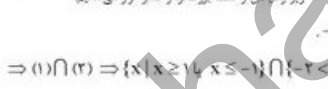
توجه کنید که می‌دانیم اگر $|x|<a$ و $a>0$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: $-a<x<a$.

$$\Rightarrow (1)\cap(2)\Rightarrow\{x\,|\,x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1\}\cap\{-2<x<2\}=\{-2<x\leq -1\}\cup\{1\leq x<2\}=\{x\,|\,1\leq|x|<2\}$$

سؤال دانش‌پژوه (پردیس ابهنی)، **ببخشید من این اشتراکی‌رو که بین رابطهٔ (۱) و (۲) گرفتین متوجه نشدم**

پاسخ: ببین بچه، توی این جور مواقع اگه تشخیص نداری اشتراک چه‌طوری به دست می‌یاد می‌تونی از محور اعداد استفاده کنی، به محور دقت کن:

در این محورها جاهای هاشور خورده اشتراک رابطه‌های (۱) و (۲) میشه. یعنی:



$$\{-2<x\leq -1\}\cup\{1\leq x<2\}$$

که رابطهٔ فوق را می‌توان به صورت $\{x\,|\,1\leq|x|<2\}$ نوشت.

۷۱ **۴**

$$x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$$
$$x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x+3}\Rightarrow x+1\geq x+3\Rightarrow 1\geq 3$$

نامعادله جواب ندارد. $\Rightarrow$ نشدنی

با توجه به این که هر سه شرط باید هم زمان برقرار باشند و مجموعه جواب یکی از نامعادلات $\emptyset$ است، پس **گزینهٔ (۴)** صحیح می‌باشد.

۷۲ **۳** عبارات زیر رادیکال باید نامنفی باشند:

$$\begin{cases}x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1 & (1)\\ 2-\sqrt{x-1}\geq 0\Rightarrow 2\geq\sqrt{x-1}\xrightarrow[\text{توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را به}}4\geq x-1\Rightarrow x\leq 5 & (2)\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}}1\leq x\leq 5\Rightarrow x\in[1,5]$$

@khanen_book

۷۳ **۴** هر دو عبارت زیر رادیکال‌ها یعنی $۲x-۱$ و $۴-\sqrt{۱-۲x}$ باید نامنفی باشند، داریم:

$$\begin{cases} ۱-۲x\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq ۲x \Rightarrow \frac{۱}{۲}\geq x \\ ۴-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰ \Rightarrow ۴\geq \sqrt{۱-۲x} \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} ۱۶\geq ۱-۲x \xrightarrow{-۱} ۱۵\geq -۲x \xrightarrow{\div(-۲)} -\frac{۱۵}{۲}\leq x \end{cases} \xrightarrow[\text{دو جواب حاصل}]{\text{اشتراک بین}} -۷/۵\leq x\leq \frac{۱}{۲}$$

که این بازه شامل **هشت** عدد صحیح می‌باشد. (از ۱- تا ۷-، هفت عدد به علاوهٔ صفر، هشت عدد صحیح می‌شود.)

۷۴ **۲** عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، لذا $۱۶-x^۲\geq ۰$.

$$۱۶-x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=۱۶ \Rightarrow x=\pm ۴$$

x		-۴		۴	
$۱۶-x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
			جواب		

$$\Rightarrow x\in[-۴,۴]$$

هم‌چنین باید مخرج مخالف صفر باشد، لذا ریشه‌های مخرج را می‌یابیم.

$$|x|-۲=۰ \Rightarrow |x|=۲ \Rightarrow x=\pm ۲$$

مجموعه جواب دامنه از برداشتن ریشه‌های مخرج از مجموعه جواب حاصل برای عبارت صورت به‌دست می‌آید.

$$[-۴,۴]-\{-۲,۲\}=[-۴,-۲)\cup(-۲,۲)\cup(۲,۴] \Rightarrow$$

این مجموعه جواب شامل **سه** عدد طبیعی ۱، ۳ و ۴ می‌باشد.

۷۵ **۴**

یادآوری $|x|\leq a \xrightarrow{a>۰} -a\leq x\leq a$

با توجه به دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج داریم:

$$y=\sqrt{\frac{۱-|x|}{۱+|x|}} \Rightarrow \frac{۱-|x|}{۱+|x|}\geq ۰$$

($\frac{۱-|x|}{۱+|x|}\geq ۰$)

عبارت $۱+|x|$ که در مخرج کسر قرار دارد همواره مثبت است. لذا برای آن‌که کسر داده‌شده همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، باید صورت کسر بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. لذا داریم:

$$\frac{۱-|x|}{۱+|x|}\geq ۰ \Rightarrow ۱-|x|\geq ۰ \Rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

۷۶ **۳**

$$y=\sqrt{\underbrace{۴-|x-۱|}_{\geq ۰}} \Rightarrow ۴-|x-۱|\geq ۰ \Rightarrow |x-۱|\leq ۴ \Rightarrow -۴\leq x-۱\leq ۴ \xrightarrow{+۱} -۳\leq x\leq ۵$$

بنابراین دامنه برابر بازهٔ $[-۳,۵]$ است که شامل ۹ عدد صحیح (یعنی $۵,۴,۳,۲,۱,۰,-۱,-۲,-۳$) می‌باشد.

۷۷ **۲** می‌دانیم که برای تعیین دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج زیر رادیکال را باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم، بنابراین:

$$y=\sqrt{x+|x|} : x+|x|\geq ۰ \Rightarrow |x|\geq -x$$

نامساوی فوق به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار می‌باشد، زیرا همواره قدرمطلق هر عدد از آن عدد یا قرینه‌اش بزرگ‌تر یا مساوی است. بنابراین دامنهٔ تابع فوق $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۷۸ **۴**

$$y=\sqrt{x-|x|} : x-|x|\geq ۰ \Rightarrow x\geq |x|$$

با توجه به این که هیچ عددی از قدرمطلق خودش بیش‌تر نیست در نتیجه نامعادلهٔ فوق وقتی برقرار است که $x\geq ۰$ باشد و در این حالت $x-|x|=۰$ و در نتیجه $y=۰$ می‌شود. بنابراین:

$$R_f=\{۰\}$$

۷۹ **۲** چون رادیکال با فرجهٔ زوج در مخرج کسر است، عبارت زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم (نه بزرگ‌تر مساوی)

$$x-|x|>۰ \Rightarrow x>|x|$$

این نامعادله هیچ جوابی ندارد، چون هیچ عددی از قدرمطلق خودش بزرگ‌تر نمی‌شود. در نتیجه $D_f=\varnothing$.

۸۰ **۴**

$$y=\frac{\sqrt{x(x^۲-۱)}}{\sqrt{|x|+x}} \; ; \; x(x^۲-۱)\geq ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها : } x=۰, x=\pm ۱}$$

x		-۱		۰		۱	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^۲-۱$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$x(x^۲-۱)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
		$-۱\leq x\leq ۰$				$۱\leq x$	

$$\Rightarrow \boxed{x\geq ۱ \text{ یا } -۱\leq x\leq ۰} \quad (I)$$

برای تعیین دامنهٔ مخرج داریم:

$$|x|+x>۰ \Rightarrow |x|>-x \Rightarrow \boxed{x>۰} \quad (II)$$

حال با توجه به اشتراک رابطه‌های (I) و (II) داریم:

$$(I)\cap(II) \Rightarrow \{x\,|\,x\geq ۱ \text{ یا } -۱\leq x\leq ۰\}\cap\{x\,|\,x>۰\}=\{x\,|\,x\geq ۱\}$$

@khanehbook

۸۱ ۲ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد.

$$x^۲-|x|-۲\geq ۰ \xrightarrow[\text{اتحاد جمله مشترک}]{x^۲=|x|^۲} |x|^۲-|x|-۲\geq ۰ \Rightarrow (|x|+۱)(|x|-۲)\geq ۰$$

می‌دانیم همواره $|x|+۱>۰$، لذا کافی است $|x|-۲\geq ۰$ باشد.

$$|x|-۲\geq ۰ \Rightarrow |x|\geq ۲ \Rightarrow x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$$

در بین گزینه‌های داده شده، تنها عدد **گزینهٔ (۲)** یعنی $-\frac{۵}{۲}=-۲/۵$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۸۲ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم. عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$P=\frac{۲-x}{x}\geq ۰ \Rightarrow$$

x		۰		۲	
x	−	۰	+		+
۲−x	+		+	۰	−
P	−	نامعین	+	جواب	−

$$\Rightarrow ۰<x\leq ۲$$

چون $۰<x\leq ۲$، پس $|x|=x$. بنابراین می‌توان تابع f را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f(x)=(x+x)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲x\frac{\sqrt{۲-x}}{\sqrt{x}}=\frac{۲x}{\sqrt{x}}\sqrt{۲-x}=۲\sqrt{x}\sqrt{۲-x}=۲\sqrt{x(۲-x)}=۲\sqrt{-(x^۲-۲x)}$$

$$=۲\sqrt{-(x^۲-۲x+۱-۱)}=۲\sqrt{-(x-۱)^۲+۱}$$

با ساختن عبارت زیر رادیکال، بیش‌ترین مقدار آن را می‌یابیم:

$$(x-۱)^۲\geq ۰ \Rightarrow -(x-۱)^۲\leq ۰ \Rightarrow -(x-۱)^۲+۱\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq \sqrt{-(x-۱)^۲+۱}\leq ۱ \Rightarrow ۰\leq ۲\sqrt{-(x-۱)^۲+۱}\leq ۲$$

هم‌چنین با توجه به دامنهٔ تابع کم‌ترین مقدار عبارت رادیکالی به ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود. پس $R_f=[۰,۲]$.

۸۳ ۴ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۳ \Rightarrow \sqrt{y}=۳-\sqrt{x}$

برای تعریف شده بودن عبارت زیر رادیکال باید $x\geq ۰$ (به خاطر با معنی بودن $\sqrt{x}$) و نیز $۳-\sqrt{x}\geq ۰$ باشند (به خاطر بامعنی بودن $\sqrt{y}$).

سؤال دانش‌پژوه (هلیا معزی): **ببخشید چرا $۳-\sqrt{x}\geq ۰$ شد؟**

پاسخ: *متماً قبول داری همواره $\sqrt{y}\geq ۰$. (چون از زیر رادیکال به فرجهٔ زوج همواره عدد نامنفی بیرون می‌یاد.) از طرفی $\sqrt{y}=۳-\sqrt{x}$ هم هست، پس باید $۳-\sqrt{x}\geq ۰$ باشه. به ادامهٔ حل دقت کن:*

$$\begin{cases} x\geq ۰ \quad (۱) \\ ۳-\sqrt{x}\geq ۰ \xrightarrow{-۳} -\sqrt{x}\geq -۳ \xrightarrow{\times(-۱)} \sqrt{x}\leq ۳ \xrightarrow[\text{می‌رسیم}]{\text{به توان ۲}} x\leq ۹ \quad (۲) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} ۰\leq x\leq ۹$$

۸۴ ۲ در تابع کسری $\frac{۱}{f(x)}$ جاهایی که $f(x)$ صفر می‌شود، کسر بی‌معنی می‌گردد، پس کافی است از روی نمودار جاهایی که $f(x)$ صفر می‌شود را از دامنهٔ f برداریم. البته دقت کنید با توجه به نمودار مشخص است که دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. (تصویر نمودار روی محور xها کل این محور را می‌پوشاند). پس دامنهٔ $y=\frac{۱}{f(x)}$ برابر است با: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های تابع } f\}=\mathbb{R}-\{-۳,۰,۳\}$

۸۵ ۴ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x f(x)}$ با حل نامعادلهٔ $x f(x)\geq ۰$ به دست می‌آید. با توجه به نمودار تابع f در بازهٔ $[-۴,۲]$ جدول زیر را داریم:

x	−۴		−۳		۰		۱		۲
x	−		−		۰	+		+	
f(x)	+		۰	−		−	۰	+	
x f(x)	−	جواب	۰	+	۰	−	۰	+	جواب

$$\Rightarrow D_y=[-۳,۰]\cup[۱,۲]$$

۸۶ ۳ با توجه به دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج باید داشته باشیم $\frac{x}{f(x)}\geq ۰$. پس با توجه به نمودار تابع f، عبارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	−۵		−۳		−۱		۰		۴	
x	−		−		−		۰	+		+
f(x)	+	∄	−	+	۰	−		−	۰	+
$\frac{x}{f(x)}$	−	∄	+	−	۰	+	∄	−	۰	+

$$\xrightarrow{\frac{x}{f(x)}\geq ۰} D_h=(-۵,-۳)\cup(-۱,۰]\cup(۴,+\infty)$$

۸۷ ۴ از آن‌جا که عبارتی رادیکالی در مخرج واقع شده است باید عبارت زیر رادیکال فقط بزرگ‌تر از صفر باشد. بنابراین داریم:

$$f(x)-۲>۰ \Rightarrow f(x)>۲$$

حال باید از روی نمودار xهایی که دارای مقادیر بزرگ‌تر از ۲ هستند را بیابیم:

$$f(x)>۲ \Rightarrow x=۰ \quad (f(۰)=۳ \text{ زیرا با توجه به نمودار } x>۱ \Rightarrow D_y=(۱,+\infty)\cup\{۰\})$$

@khaneh_book

۸۸ ۱ برای حل تست، ابتدا دامنهٔ $y_1=\sqrt{f(x)}$ می‌یابیم. سپس دامنهٔ $y=\sqrt{f(2x+1)}$ را تعیین می‌کنیم.

با توجه به نمودار داریم: $D_{y_1}=\{x: f(x)\geq 0\}=[0,2]\cup[3,4]$

بنابراین $2x+1\in\{[0,2]\cup[3,4]\}$. پس داریم:

$$\begin{cases} 0\leq 2x+1\leq 2 \Rightarrow -1\leq 2x\leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2} \quad (I) \\ \text{یا} \\ 3\leq 2x+1\leq 4 \Rightarrow 2\leq 2x\leq 3 \Rightarrow 1\leq x\leq \frac{3}{2} \quad (II) \end{cases}$$

از اجتماع روابط (I) و (II) دامنهٔ y به صورت $D_y=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cup\left[1,\frac{3}{2}\right]$ می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (بتسابه امیری): **ببخشید چرا اون انتها به جای اشتراک، اجتماع گرفتین؟**

پاسخ: معمولاً در مسایل حالت‌بندی مثل این‌ها که شرط (۱) «یا» شرط (۲) یا ... برقرار باشد بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم. تازه اون اول هم تو فرد D_{y_1} بین بازه‌ها اجتماع بود.

۸۹ ۲ چون دو تابع با هم برابرند، تمام زوج مرتب‌ها هم باید با هم برابر باشند. پس داریم:

$$\begin{cases} (a,b-2)=(a,1) \Rightarrow b-2=1 \Rightarrow b=3 \\ (c,a)=(3,2) \Rightarrow c=3, a=2 \end{cases} \Rightarrow abc=2\times 3\times 3=18$$

سؤال دانش‌پژوه (امیر سه رهی): **آقا چرا $(a,b-2)=(3,2)$ نباشه؟**

پاسخ: سؤال خوبیه. چون در این صورت $a=3$ میشه و $f=\{(3,1),(3,2)\}$ دیگه بیانگر یک تابع نیست.

۹۰ ۴

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x-3\neq 0\} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{3\}\ ,\ f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\frac{(x-3)^2}{x-3}=x-3$$

گزینهٔ (۱): $D_y=\mathbb{R}\neq D_f \Rightarrow y(x)\neq f(x)$

گزینهٔ (۲): $D_y=\mathbb{R}-\{-3\}\neq D_f \Rightarrow y(x)\neq f(x)$

گزینهٔ (۳): $D_y=\mathbb{R}-\{3\}=D_f\ ,\ y=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=x+3\neq f(x)$

گزینهٔ (۴): $D_y=D_f=\mathbb{R}-\{3\}\ ,\ y=\frac{|x-3|^2}{x-3}\ \frac{|x-3|^2=(x-3)^2}{}\ \frac{(x-3)^2}{x-3}=x-3=f(x) \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) جواب است.

۹۱ ۳ $f(x)$ تابعی خطی است که دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ می‌باشد. اما دامنهٔ $g(x)$ برابر $\mathbb{R}-\{5\}$ است، پس دو تابع به ازای هر $x\neq 5$ می‌توانند با هم برابر باشند و لذا $c=5$. هم‌چنین چون $f(x)$ تابعی خطی است، پس برای آن $g(x)$ نیز تابعی خطی شود، باید صورت کسر به صورت $k(x-5)^2$ یا $k(-x+5)^2$ باشد. چون ضریب x در تابع $f(x)$ برابر ۱ می‌باشد، پس $k=1$ و لذا $g(x)=\frac{(x-5)^2}{x-5}$ یا $g(x)=\frac{(-x+5)^2}{x-5}$ است.

بنابراین $a=1$ یا $a=-1$ و $b=5$ بوده و در نتیجه $a+b+c=1+(-5)+5=1$ یا $a+b+c=-1+5+5=9$ می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (سیما سپهر): **آقا اجازه $k(-x+5)^2$ رو چرا جزء جواب گرفتین؟**

پاسخ: ببین، به ظاهر قاضیه توان ۲ اونم میشه. چون اگه به منفی فاکتور بگیری منفی از بین میره و به جواب می‌رسیم:

$$y(x)=\frac{k(-x+5)^2}{x-5}=\frac{k(-(x-5))^2}{x-5}=\frac{k(x-5)^2}{x-5}=k(x-5)$$

۹۲ ۱ به ازای $x\neq 2$ داریم:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$$

چون به ازای تمام مقادیر x به‌جز $x=2$، x^2+2x+4 و x^2+ax+b با هم برابرند، پس $a=2, b=4$ می‌باشند.

پس $g(x)=x^2+2x+4$، چون f و g با هم مساوی‌اند، پس به ازای $x=2$ هم باید مقادیر یکسانی داشته باشند. پس کافی است $g(2)$ را محاسبه و k را با آن برابر قرار دهیم:

$$g(2)=2^2+2(2)+4=4+4+4=12 \xrightarrow{g(2)=f(2)=k} k=12 \Rightarrow a+b+k=2+4+12=18$$

سؤال دانش‌پژوه (غضنفر گندم‌کار): **ببخشید آقا این جمله خیلی واضح نیست. راه دیگه‌ای هم برای به دست آوردن a، b هست؟**

پاسخ: بله غضنفر. کافیه در عبارت x^2+2x+4 یه بار به جای x، صفر و یه بار یک بذاری و مقدارهای حاصل رو در تابع $g(x)$ جای‌گذاری کنی و از حل یه دستگاه دو معادله دو مجهول a و b رو پیدا کنی.

@khaneh_book

۹۳ ۳

نکته $\sqrt{x^۲}=|x|$

$\sqrt{-x^۳}=\sqrt{x^۲.(-x)}=|x|\sqrt{-x}$

تا این جای کار مشخص است که یا گزینهٔ (۲) یا گزینهٔ (۳) درست است. برای به دست آوردن جواب باید تکلیف $|x|$ روشن شود و برای روشن شدن تکلیف $|x|$ باید علامت x مشخص شود. می‌دانیم $\sqrt{-x}$ وقتی با معنی است که زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow |x|\sqrt{-x}=-x\sqrt{-x}$

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد)، **آقا ما فکر می‌کردیم از زیر رادیکال و قدرمطلق همیشه عدد نامنفی بیرون می‌آید. چه‌طور شد که این‌جا از هر دو منفی بیرون اومد؟**

پاسخ: فکر شما کاملاً درسته. نکته اینه که توی این سؤال در واقع x نامثبته و در نتیجه $-x$ نامنفیه. پون از قدرمطلق همیشه مقدار نامنفی بیرون میاد پس $-x$ از قدرمطلق بیرون اومده.

۹۴ ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ D_g: x\geq ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty) \end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f\neq g$$

(۲) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f: x^۴\geq ۰ \xrightarrow[\text{نامنفی است.}]{x^۴\text{همواره}} D_f=\mathbb{R} \\ D_g: x\geq ۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty) \end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

(۳) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f: \dfrac{x-۲}{x-۳}\geq ۰ \xrightarrow[\begin{array}{c|ccccc} x & & ۲ & & ۳ & \\ \hline f & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}]{\text{جدول تعیین علامت}} \{x>۳\}\cup\{x\leq ۲\} \\ D_g: x-۲\geq ۰ \text{ و } x-۳>۰\Rightarrow \{x\geq ۲\}\cap\{x>۳\}=\{x>۳\} \end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

(۴) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f: ۱+x^۲\geq ۰ \xrightarrow[\text{مثبت است.}]{۱+x^۲\text{همواره}} D_f=\mathbb{R} \\ D_g: ۱+x^۲\geq ۰, \text{برقراره } ۱+\sqrt{۱+x^۲}\neq ۰ \xrightarrow[\text{مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود}]{۱+\sqrt{\square}\text{همواره}} D_g=\mathbb{R} \end{cases}\Rightarrow D_f=D_g$$

$$f(x)=\sqrt{۱+x^۲}-۱=(\sqrt{۱+x^۲}-۱)\times\frac{\sqrt{۱+x^۲}+۱}{\sqrt{۱+x^۲}+۱}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{(\sqrt{۱+x^۲})^۲-۱}{\sqrt{۱+x^۲}+۱}=\frac{۱+x^۲-۱}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}=g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$$

۹۵ ۳ بررسی گزینه‌ها:

(۱) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ D_g=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲-۲\neq ۰\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq\pm\sqrt{۲}\}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{۲}\} \end{cases}\xrightarrow{D_f\neq D_g} f(x)\neq g(x)$$

(۲) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ D_g=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|+۴\neq ۰\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\neq -۴\}\xrightarrow{\text{هیچ عددی وجود ندارد که قدرمطلق آن برابر ۴- شود.}} D_g=\mathbb{R} \end{cases}\Rightarrow D_f=D_g$$

$$g(x)=\frac{x^۲-۱۶}{|x|+۴}\xrightarrow{x^۲=|x|^۲}\frac{|x|^۲-۱۶}{|x|+۴}=\frac{(|x|-۴)(|x|+۴)}{|x|+۴}=|x|-۴\neq|x-۴|\Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

(۳) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f=x-x^۲\geq ۰ \xrightarrow[\begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۱ & \\ \hline f & - & ۰ & + & ۰ & - \end{array}]{\text{جدول تعیین علامت (ریشه‌ها: ۰،۱)}} ۰\leq x\leq ۱ \\ D_g: x\geq ۰, ۱-x\geq ۰=\{x\geq ۰\}\cap\{x\leq ۱\}=\{۰\leq x\leq ۱\} \end{cases}\Rightarrow D_f=D_g$$

$g(x)=\sqrt{x}\sqrt{۱-x}=\sqrt{x(۱-x)}=\sqrt{x-x^۲}=f(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$ ✓

(۴) گزینهٔ:
$$\begin{cases} D_f=x^۲-x\geq ۰ \xrightarrow[\begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۱ & \\ \hline f & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}]{\text{جدول تعیین علامت (ریشه‌ها: ۰،۱)}} x\leq ۰ \text{ یا } x\geq ۱ \\ D_g: x-۱\geq ۰, x\geq ۰\Rightarrow\{x\geq ۱\}\cap\{x\geq ۰\}=\{x\geq ۱\} \end{cases}\Rightarrow D_f\neq D_g\Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

@khanehketab

۹۶ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ضریب x نمی‌تواند از جزءصحیح بیرون بیاید. پس این گزینه غلط است.

گزینهٔ (۲): فقط عدد صحیح می‌تواند از جزءصحیح بیرون بیاید ولی $\frac{۱}{۲}$ عددی غیرصحیح است و نمی‌تواند از جزءصحیح خارج شود! پس این گزینه غلط است.

گزینهٔ (۳):

$$۲[x+۱]=۲([x]+۱)=۲[x]+۲$$

پس این گزینه نیز غلط است.

گزینهٔ (۴):

$$[x-\underbrace{۳[x]}_{\text{عددی صحیح}}]=[x]-۳[x]=-۲[x]$$

۹۷ ۳ هر کدام از جزءصحیح‌ها را حساب کرده و حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

$$-۷-۳=-۴+۰-=\text{جواب} \Rightarrow -۳ \quad ,\quad [-\pi]=[-۳/۱۴] \xrightarrow{-۴<-۳/۱۴<-۳} -۴ \quad ,\quad \left[\frac{۳}{۱۴}\right] \xrightarrow{۰<\frac{۳}{۱۴}<۱} ۰ \quad ,\quad [-۲\sqrt{۲}] \xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} [-۲\times ۱/۴]=[-۲/۸] \xrightarrow{-۳<-۲/۸<-۲} -۳$$

۹۸ ۱ با توجه به $f(x)=x^۲-۲[x]$، مقدار $f(\sqrt{۳})$ را می‌یابیم:

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲[۱/۷] \xrightarrow{۱<۱/۷<۲} f(\sqrt{۳})=۳-۲(۱)=۱$$

۹۹ ۱

$$\left[\frac{x}{۲}-\frac{۲}{۳}\right]+[۲x-۲]+[۵x+۳] \xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}} \left[\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲}-\frac{۲}{۳}\right]+\left[۲(-\frac{۱}{۲})-۲\right]+\left[۵(-\frac{۱}{۲})+۳\right]$$

$$=\left[\frac{-۳-۸}{۱۲}\right]+\left[\frac{-۳-۴}{۲}\right]+\left[\frac{-۵+۶}{۲}\right]=\left[-\frac{۱۱}{۱۲}\right]+\left[\frac{-۷}{۲}\right]+\left[\frac{۱}{۲}\right]=-۱+(-۴)+(۰)=-۵$$

(-۱< -۱۱/۱۲ <۰ ، -۴< -۷/۲ <-۳ ، ۰< ۱/۲ <۱)

۱۰۰ ۴ در تابع داده شده به جای x، قرار بدیم $-\frac{۱}{۲}$:

$$f(x)=|[۵x]|-|[۳x]| \Rightarrow f(-\frac{۱}{۲})=\left|\left[\frac{-۵}{۲}\right]\right|-\left|\left[-\frac{۳}{۲}\right]\right|=|[-۲/۵]|-\left[-\frac{۳}{۲}\right] \xrightarrow[۱<\frac{۳}{۲}<۲]{-۳<-۲/۵<-۲} |-۳|-۱=۳-۱=۲$$

۱۰۱ ۱ ابتدا قیافهٔ عبارت رو کمی مرتب کنیم و سپس به جای xها، $\sqrt{۲}-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$[\sqrt{x^۲}+\sqrt{(۲-x)^۲}]=[|x|+|۲-x|]$$

$$[|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\ominus}|+|۲-\underbrace{(۱-\sqrt{۲})}_{۱+\sqrt{۲}}|]=[-(۱-\sqrt{۲})+۱+\sqrt{۲}]=[\cancel{۱}+\sqrt{۲}+\cancel{۱}+\sqrt{۲}]=[۲\sqrt{۲}]=[۲\times ۱/۴]=[۲/۸] \xrightarrow{۲<۲/۸<۳} ۲$$

۱۰۲ ۲ ابتدا با توان رساندن حاصل عبارت را می‌یابیم:

$$(۱+\sqrt{۳})^۴=\underbrace{((۱+\sqrt{۳})^۲)^۲}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=(۱+(\sqrt{۳})^۲+۲(۱)(\sqrt{۳}))^۲=\underbrace{(۱+۳+۲\sqrt{۳})^۲=(۴+۲\sqrt{۳})^۲}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=۴^۲+(۲\sqrt{۳})^۲+۲(۴)(۲\sqrt{۳})$$

$$=۱۶+۴\times ۳+۱۶\sqrt{۳}=۲۸+۱۶\sqrt{۳} \xrightarrow{\sqrt{۳}=۱/۷} ۲۸+۱۶\times ۱/۷=۲۸+۲۷/۲=۵۵/۲ \Rightarrow [(۱+\sqrt{۳})^۴]=[۵۵/۲] \xrightarrow{۵۵<۵۵/۲<۵۶} ۵۵$$

۱۰۳ ۱ مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲+x<۰$ را می‌یابیم:

$$\underbrace{x^۲+x}_{x(x+۱)}<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۱ & & ۰ & \\ \hline p & + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow -۱<x<۰$$

چون $x\in(-۱,۰)$، کافی است، x ای در این بازه انتخاب کنیم. مثلاً $x=-\frac{۱}{۲}$، حال این x را در عبارت خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=\left[-\frac{۱}{۲}\right]+\left[(-\frac{۱}{۲})^۲\right]+\left[(-\frac{۱}{۲})^۳\right]+\left[(-\frac{۱}{۲})^۴\right]=\underset{-۱<\cdots<۰}{\left[-\frac{۱}{۲}\right]}+\underset{۰<\cdots<۱}{\left[\frac{۱}{۴}\right]}+\underset{-۱<\cdots<۰}{\left[-\frac{۱}{۸}\right]}+\underset{۰<\cdots<۱}{\left[\frac{۱}{۱۶}\right]}=-۱+۰-۱+۰=-۲$$

@knanen_book

۱۰۴ ۳

$$(1+\sqrt{2})^6=[(1+\sqrt{2})^6]=[197/000]=197 \Rightarrow (1+\sqrt{2})^6=198-(1-\sqrt{2})^6 \overset{\sqrt{2}\simeq 1/4}{=\!=\!=} 198-(1-1/4)^6=198-(-0/4)^6=198-\underbrace{(0/4)^6}_{\text{عددی بین صفر و یک}}=197/000$$

197 و خورده‌ای

۱۰۵ ۴ زاویهٔ صورت سؤال از 0° تا 90° تغییر می‌کند. در بین این زاویه‌ها، ۲ زاویهٔ مرزی مهم 0° و 90° وجود دارد که در آن sin مقادیر صحیح دارد ولی در سایر زاویه‌ها $0<\sin<1$ است که جزءصحیح همهٔ آن‌ها ۰ می‌شود. پس عملاً فقط جزءصحیح دو عدد $\sin 0^\circ$ و $\sin 90^\circ$ برای ما مهم است. چون بقیه که صفر شدند!

$$[\sin 0^\circ]+([\sin 1^\circ]+\ldots+[\sin 89^\circ])+[\sin 90^\circ]=0+1=1$$

$0<\sin<1$ ، $0<\sin<1$ ، ۸۹ تا صفر ، $\sin 90^\circ=1$

۱۰۶ ۳ با توجه به شرط $n>2$، عددی طبیعی مثل $n=3$ انتخاب می‌کنیم:

$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}] \overset{n=3}{=\!=} [\sqrt{4(3)^2-3(3)+1}]-2[\sqrt{3^2-2(3)}]=[\sqrt{36-9+1}]-2[\sqrt{9-6}]=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]=5-2(1)=3$$

$5<\sqrt{28}<6$ ، $1<\sqrt{3}<2$

۱۰۷ ۲

$$[1-2x]=-5 \Rightarrow -5\le 1-2x<-4 \overset{-1}{\Longrightarrow} -6\le -2x<-5 \overset{\div(-2)}{\underset{\text{جهت عوض}}{\Longrightarrow}} 3\ge x>\frac{5}{2} \Rightarrow$$

مجموعه جواب فقط شامل عدد صحیح ۳ است.

۱۰۸ ۱

$$-2>-\frac{1}{x}\ge -1 \overset{\times(-1)}{\underset{\text{جهت عوض}}{\Longrightarrow}} 2<\frac{1}{x}\le 1 \overset{-2}{\Longrightarrow} -2<\frac{1}{x}-2\le -1 \overset{\text{تفکیک}}{\underset{\text{کسر}}{\Longrightarrow}} \frac{2x}{x}-2<\frac{2x-1}{x}\le \frac{2x}{x}-1 \Rightarrow 0<\frac{2x-1}{x}\le 1 \Rightarrow \left[\frac{2x-1}{x}\right]=1$$

$$\overset{\text{طرفین نسبت معکوس}}{\underset{\text{جهت عوض میشه}}{\Longrightarrow}} -1\le x<-\frac{1}{2}$$

۱۰۹ ۱ مخرج کسر $\frac{x}{[x]+1}$ نباید صفر شود، داریم:

$$[x]+1=0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow -1\le x<0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[-1,0)$$

۱۱۰ ۳ با استفاده از ویژگی $|\square|=a \Rightarrow \square=\pm a$ داریم:

$$|[2x+1]|=1 \Rightarrow [2x+1]=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} [2x+1]=1 \Rightarrow 1\le 2x+1<2 \overset{-1}{\Longrightarrow} 0\le 2x<1 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} 0\le x<\frac{1}{2} \\ [2x+1]=-1 \Rightarrow -1\le 2x+1<0 \overset{-1}{\Longrightarrow} -2\le 2x<-1 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} -1\le x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب $[0,\frac{1}{2})\cup[-1,-\frac{1}{2})$ است که شامل دو عدد صحیح ۱- و صفر می‌باشد.

۱۱۱ ۳ ابتدا فرض سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\left[\frac{3x}{5}+6\right]=4 \Rightarrow \left[\frac{3x}{5}\right]+6=4 \Rightarrow \left[\frac{3x}{5}\right]=-2 \quad (*)$$

حال روی خواستهٔ مسأله کار می‌کنیم:

$$\left[\frac{3x+30}{5}\right]=\left[\frac{3x}{5}+\frac{30}{5}\right]=\left[\frac{3x}{5}-6\right]=\left[\frac{3x}{5}\right]-6 \overset{(*)}{=\!=} -2-6=-8$$

۱۱۲ ۲ ابتدا نامعادلهٔ $|2x-4|<8$ را حل کنیم:

$$|2x-4|<8 \Rightarrow -8<2x-4<8 \overset{+2}{\Longrightarrow} -4<2x<12 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} -2<x<6 \quad (*)$$

برای محاسبهٔ مقدار عبارت $[\frac{x}{2}]$ باید محدودهٔ $\frac{x}{2}$ را به کمک نامساوی (*) بیابیم:

$$-2<x<6 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} -1<\frac{x}{2}<3 \Rightarrow \frac{x}{2}\in(-1,3)$$

چون در بازهٔ فوق اعداد صحیح ۲،۱،۰ وجود دارند، مجبوریم برای محاسبهٔ $[\frac{x}{2}]$، آن بازه را به بازه‌های زیر تفکیک کنیم:

$$2\le\frac{x}{2}<3 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=2 \quad , \quad 1\le\frac{x}{2}<2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=1 \quad , \quad 0\le\frac{x}{2}<1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=0 \quad , \quad -1<\frac{x}{2}<0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=-1$$

پس عبارت $[\frac{x}{2}]$ مقادیر ۱-، ۰، ۱ و ۲ را می‌تواند اختیار کند که کم‌ترین آن‌ها ۱- است.

@khanen_book

۱۱۳ ۲

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow -1 \le x^2+x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x<0 \Rightarrow \underset{x(x+1)}{\overset{p}{\Big|}} \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 \\ \hline + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow -1<x<0 \\ -1 \le x^2+x \Rightarrow \underbrace{x^2+x+1}_{\Delta=-3<0,a=1>0} \ge 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{x^2+x+1} x \in \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1<x<0$$

بنابراین داریم:

$$-1<x<0 \xrightarrow{\text{توان ۲۰}} 0<x^{20}<1 \Rightarrow [x^{20}]=0$$

سؤال *دانش‌پژوه (سیدضیاء)*، **آقا اجازه یه دفعه چطوری $0<x^{20}<1$ شود؟**

پاسخ: هنگ نکن عزیزم، قلب x عددی منفی و کسری بود مثلاً $-\frac{1}{2}$ وقتی به توان ۲۰ (زوج) رسید اولاً مثبت شد ثانیاً از اکوچک‌تر میشه دیگه، قبول نداری فودت حساب کن! ☺

۱۱۴ ۲ تابع کسری مخرجش نباید صفر شود، پس باید ببینیم که مخرج به ازای چه xهایی صفر می‌شود:

$$[x]^2-2[x]-3=0 \xrightarrow{\text{فرض کنیم } [x]=A} A^2-2A-3=0 \Rightarrow (A-3)(A+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=[x]=3 \Rightarrow 3 \le x < 4 \\ \text{یا} \\ A=[x]=-1 \Rightarrow -1 \le x < 0 \end{cases}$$

بنابراین به ازای xهای متعلق به بازه‌های $[3,4)$ و $[-1,0)$ مخرج صفر می‌شود که باید از $\mathbb{R}$ حذف شوند:

$$D_f=\mathbb{R}-([3,4)\cup[-1,0)) \Rightarrow$$

دو عدد صحیح ۱- و ۳ در دامنه وجود ندارد.

۱۱۵ ۲ در معادلهٔ داده شده $3[x]$ عبارتی صحیح بوده پس جزءصحیح اطراف آن حذف می‌شود:

$$3[x-1]-\underbrace{[2[x]]}_{\in\mathbb{Z}}=[x-[x]] \Rightarrow 3([x]-1)-2[x]=[x]-[x] \Rightarrow 3[x]-3-2[x]=0 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow 3 \le x < 4$$

۱۱۶ ۴ ابتدا با یک تغییر کوچک، عبارات داخل جزءصحیح‌ها را شبیه هم درمی‌آوریم:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{2}\right]=5 \Rightarrow \left[x+1-\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{2}\right]=5 \Rightarrow 1+\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{2}\right]=5 \Rightarrow 2\left[x-\frac{1}{2}\right]=4$$

$$\xrightarrow{\div 2} \left[x-\frac{1}{2}\right]=2 \Rightarrow 2 \le x-\frac{1}{2} < 3 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{5}{2} \le x < \frac{7}{2}$$

۱۱۷ ۴ سمت چپ تساوی داده شده چون دو تا جزءصحیح است که با هم جمع شده اند، پس در کل عددی صحیح می‌باشد ولی سمت راست تساوی عدد غیرصحیح $\frac{1}{2}$ است. پس این تساوی هیچ‌گاه به ازای هیچ x ای نمی‌تواند برقرار باشد و مسأله جواب ندارد!

$$\underbrace{\left[2x-\frac{1}{2}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]}_{\in\mathbb{Z}}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\notin\mathbb{Z}}$$

۱۱۸ ۱

$$-\left[x-\frac{1}{3}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=5 \Rightarrow -\left[x-\frac{1}{3}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=5$$

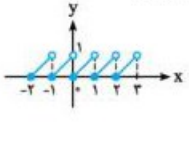
$$\Rightarrow -\left[x-\frac{1}{3}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{3}\right]+1=5 \Rightarrow \left[2x+\frac{1}{2}\right]=4 \Rightarrow 4 \le 2x+\frac{1}{2} < 5 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{7}{2} \le 2x < \frac{9}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{7}{4} \le x < \frac{9}{4}$$

۱۱۹ ۲ اگر به معادلهٔ $[2x]+[5x-1]=7-x$ کمی توجه کنیم، می‌بینیم که طرف چپ تساوی همواره مقداری صحیح دارد، (چون جزءصحیح دارد) پس برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، طرف راست معادله نیز باید صحیح باشد، عدد ۷ که صحیح است، پس x نیز باید صحیح باشد. تا اینجای کار متوجه شدیم که x ما عددی صحیح است. پس نتیجه می‌گیریم که دو برابر آن $(2x)$ و ۵ برابر آن $(5x)$ هم صحیح خواهد بود، و لذا جزءصحیح آن‌ها برابر خودشان است. پس داریم:

$$[2x]+[5x-1]=7-x \Rightarrow [2x]+[5x]-1=7-x \xrightarrow[5x\in\mathbb{Z}]{2x\in\mathbb{Z}} 2x+5x-1=7-x \Rightarrow 8x=8 \Rightarrow x=1$$

جواب حاصل درست است زیرا x باید عددی صحیح می‌بود که هست! پس معادله دارای یک جواب حقیقی $x=1$ است.

۱۲۰ ۴ تابع معروف خودمون یعنی $y=x-[x]$ را در بازهٔ $(-2,3]$ رسم کنیم:



می‌دانیم در تابع فوق طول پاره‌خط‌ها $\sqrt{2}$ واحد است. پس با توجه به شکل در بازهٔ $(-2,3]$ نمودار از $n=5$ پاره خط به طول $L=\sqrt{2}$ تشکیل شده است. پس: $(n,L)=(5,\sqrt{2})$

@khanehbook

۱۲۱ ۲ اگر در تابع $y = 2x - 2[x]$ از ۲ فاکتور بگیریم، به تابع آشنای $f(x) = x - [x]$ می‌رسیم:

$$y = 2x - 2[x] = 2(x - [x])$$

پس برای رسم تابع داده شده کافیه ابتدا تابع $y = x - [x]$ را کشیده، سپس ارتفاع نقاط توخالی تابع را دو برابر کنیم:

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} x^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = \text{سه‌پاره‌خط به طول } \sqrt{5} = \text{مجموع طول‌ها}$$

۱۲۲ ۱ قیافهٔ تابع را دستکاری کنیم:

$$f(x) = 2x - 2[x-1] + 1 = 2x - 2([x]-1) + 1 = 2x - 2[x] + 2 + 1 = 2x - 2[x] + 3 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۲}} 2(x - [x]) + 3$$

چون می‌دانیم که $0 \le x - [x] < 1$، پس به کمک آن تابع f را می‌سازیم:

$$0 \le x - [x] < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \le 2(x - [x]) < 2 \xrightarrow{+3} 3 \le \underbrace{2(x - [x]) + 3}_{f(x)} < 5 \Rightarrow 3 \le f(x) < 5$$

برد f بازهٔ $[3, 5)$ است. $\Rightarrow$

۱۲۳ ۳ با توجه به ویژگی $|\square| = a \Rightarrow \square = \pm a$ داریم:

$$|[x+2] - x| = 2 \Rightarrow [x+2] - x = \pm 2$$

حال دو معادلهٔ فوق را جداگانه حل می‌کنیم:

(۱) $[x+2] - x = 2 \Rightarrow [x] + 2 - x = 2 \Rightarrow [x] - x = 0 \Rightarrow [x] = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

زیرا فقط اعداد صحیح هستند که براکتشان با خودشان برابر است.

(۲) $[x+2] - x = -2 \Rightarrow [x] + 2 - x = -2 \Rightarrow 2 + 2 = x - [x] \Rightarrow x - [x] = 4$

امّا می‌دانیم که عبارت $x - [x]$ همواره در بازهٔ $[0, 1)$ قرار دارد، پس معادلهٔ فوق جواب ندارد. بنابراین جواب نهایی معادلهٔ مورد نظر، $x \in \mathbb{Z}$ است.

۱۲۴ ۳ می‌دانیم مقدار تابع $[x] + [-x]$ وقتی $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، برابر -1 است. پس داریم:

$$[x] + [-x] = -1 \Rightarrow [-x] = -1 - [x]$$

۱۲۵ ۴

$$f(x) = [x+1] + [-x] = [x] + 1 + [-x] = [x] + [-x] + 1$$

از طرفی می‌دانیم اگر $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، مقدار $[x] + [-x]$ برابر -1 می‌شود، بنابراین داریم:

$$f(x) = [x] + [-x] + 1 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} f(x) = (-1) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 + 0 = 0$$

۱۲۶ ۱ عبارت $[-x]$ چون مقداری صحیح دارد از جزء صحیح خارج می‌شود:

$$[x + [-x]] = -1 \Rightarrow [x] + [-x] = -1$$

از طرفی فقط وقتی $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، مقدار $[x] + [-x]$ برابر -1 می‌شود. پس مجموعهٔ جواب معادله، اعداد غیرصحیح است.

سؤال *دانش‌پژوه (سام درفشانده)*: **آقا اجازه خب چون دنبال جواب‌های صحیح x می‌گردیم می‌تونیم جزء‌صحیح‌ها رو برداریم دیگه درسته؟**

گچ‌پاسخ: آره آفرین. ببین:

$$[x + [-x]] = -1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x + (-x) = -1 \Rightarrow 0 = -1 \quad \times$$

هیچ xای به درست نیومده و لذا معادله جواب صحیح نداره.

۱۲۷ ۴ ابتدا معادلهٔ داده شده را ساده کنیم:

$$[x - [x]] + [x + [-x]] = -x \Rightarrow [x] - [x] + [x] + [-x] = -x \Rightarrow [x] + [-x] = -x$$

طبق فرض $[x] \neq x$. از این نامساوی متوجه می‌شویم $x \notin \mathbb{Z}$ که در این حالت می‌دانیم مقدار $[x] + [-x]$ برابر (-1) است.

بنابراین:

$$\underbrace{[x] + [-x]}_{-1} = -x \Rightarrow -1 = -x \Rightarrow x = 1$$

جواب حاصل غیر قابل قبول است، زیرا با توجه به شرط، باید $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، پس معادله جواب ندارد.

۱۲۸ ۴ به خاطر وجود عبارت $[-x] + [x]$ معادله را در دو حالت زیر حل می کنیم:

الف) $x \in \mathbb{Z}$: در این حالت $[-x] + [x]$ برابر صفر است که چون در مخرج کسر قرار دارد، کسر تعریف نشده می‌شود. پس x نباید عددی صحیح باشد.

ب) $x \notin \mathbb{Z}$: در این حالت $[-x] + [x]$ برابر (-1) است. بنابراین:

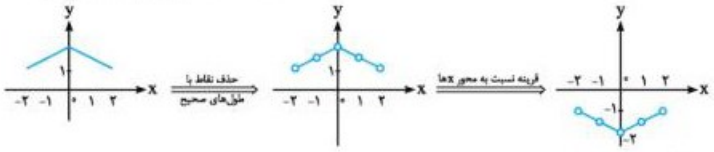
$$x^2 - 2x = \frac{1}{\underbrace{[x] + [-x]}_{-1}} \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

جواب حاصل با شرط $x \notin \mathbb{Z}$ هم‌خوانی ندارد، پس قابل قبول نمی‌باشد. بنابراین معادله، جواب حقیقی ندارد.

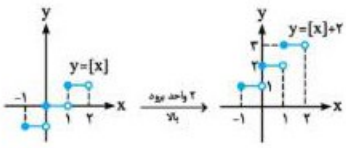
@khanenbook

۱۲۹ ۳ مخرج تابع کسری $y=\frac{f(x)}{[x]+[-x]}$ نباید صفر شود. از طرفی می‌دانیم عبارت $[x]+[-x]$ به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود، پس اعداد صحیح را از دامنه f که $[-۲,۲]$ است، کنار می‌گذاریم و در سایر نقاط دامنه، تابع زیر را رسم می‌کنیم (قرینه f نسبت به محور xها):

$$y=\frac{f(x)}{[x]+[-x]} \xrightarrow{x\notin Z} y=\frac{f(x)}{-۱}=-f(x)$$

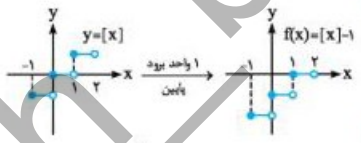


۱۳۰ ۴ ابتدا نمودار تابع $f(x)=[x]$ در بازهٔ $(-۱,۲]$ رسم کرده و سپس کل نمودار را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

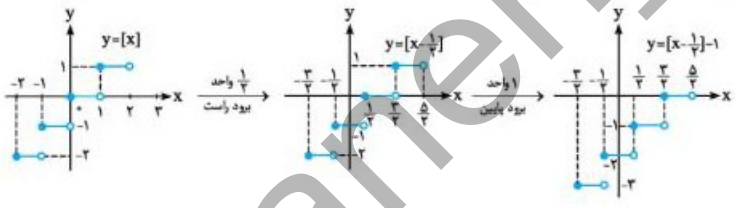


۱۳۱ ۳

$$f(x)=[x-۲]+۱ \Rightarrow f(x)=[x]-۲+۱ \Rightarrow f(x)=[x]-۱$$



۱۳۲ ۳



۱۳۳ ۳ با توجه به نکتهٔ درسنامه، نمودار تابع $y=۳[\frac{x}{۳}]$ چند تا پله بوده که طول و فاصلهٔ بین پله‌ها برابر است با:

۳ = عدد پشت جزء صحیح = فاصلهٔ بین پله‌ها و $۳=\frac{۱}{|\frac{۱}{۳}|}=\frac{۱}{|\text{ضریب } x|}$ = طول پله

۱۳۴ ۲ نمودار تابع $y=۲[\frac{x}{۲}]+۱$ چند تا پله بوده که طول و فاصلهٔ بین پله‌ها برابر است با:

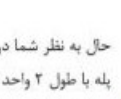
۲ = عدد پشت جزء صحیح = فاصلهٔ بین پله‌ها و $۲=\frac{۱}{|\frac{۱}{۲}|}=\frac{۱}{|\text{ضریب } x|}$ = طول پله

حال به نظر شما در بازهٔ $(-۲,۶]$ که طول بازه $۸=(-۲)-۶$ واحد است، چند تا پله با طول ۲ واحد کنار هم جا می‌شود، خب ۴ تا دیگه! شکل را نگاه کن:

۱۳۵ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y=[x-۵]+\overbrace{[۳-[x]]}^{\in Z}+x=[x]-۵+۳-[x]+x \Rightarrow y=x-۲$$

x	۰	۲
y	-۲	۰

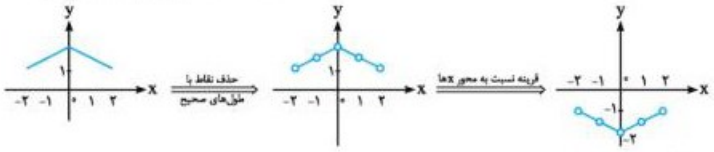


پس نمودار تابع فوق یک خط راست است که با توجه به شکل، از نواحی اول و سوم و چهارم عبور می‌کند.

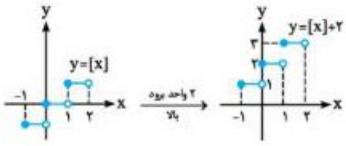
@khanehbook

۱۲۹ ۳ مخرج تابع کسری $y=\frac{f(x)}{[x]+[-x]}$ نباید صفر شود. از طرفی می‌دانیم عبارت $[x]+[-x]$ به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود، پس اعداد صحیح را از دامنه f که $[-۲,۲]$ است، کنار می‌گذاریم و در سایر نقاط دامنه، تابع زیر را رسم می‌کنیم (قرینه f نسبت به محور xها):

$$y=\frac{f(x)}{[x]+[-x]} \xrightarrow{x\notin Z} y=\frac{f(x)}{-۱}=-f(x)$$

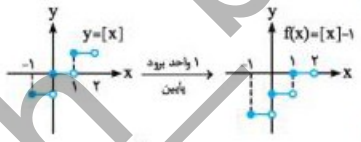


۱۳۰ ۴ ابتدا نمودار تابع $f(x)=[x]$ در بازهٔ $(-۱,۲]$ رسم کرده و سپس کل نمودار را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

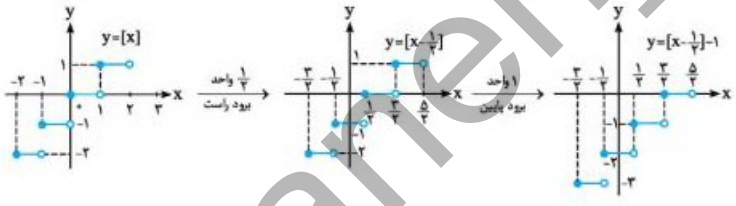


۱۳۱ ۳

$$f(x)=[x-۲]+۱ \Rightarrow f(x)=[x]-۲+۱ \Rightarrow f(x)=[x]-۱$$



۱۳۲ ۳



۱۳۳ ۳ با توجه به نکتهٔ درسنامه، نمودار تابع $y=۳\left[\frac{x}{۳}\right]$ چند تا پله بوده که طول و فاصلهٔ بین پله‌ها برابر است با:

۳ = عدد پشت جزء صحیح = فاصلهٔ بین پله‌ها و $\frac{۱}{|\text{ضریب } x|}=\frac{۱}{|\frac{۱}{۳}|}=۳$ = طول پله

۱۳۴ ۲ نمودار تابع $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱$ چند تا پله بوده که طول و فاصلهٔ بین پله‌ها برابر است با:

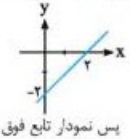
۲ = عدد پشت جزء صحیح = فاصلهٔ بین پله‌ها و $\frac{۱}{|\text{ضریب } x|}=\frac{۱}{|\frac{۱}{۲}|}=۲$ = طول پله

حال به نظر شما در بازهٔ $(-۲,۶]$ که طول بازه $۸=(-۲)-۶$ واحد است، چند تا پله با طول ۲ واحد کنار هم جا می‌شود، خب ۴ تا دیگه! شکل را نگاه کن:

۱۳۵ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y=[x-۵]+\overbrace{[۳-[x]]}^{\in Z}+x=[x]-۵+۳-[x]+x \Rightarrow y=x-۲$$

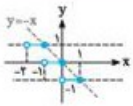
x	۰	۲
y	-۲	۰



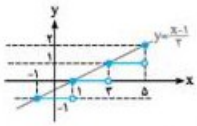
پس نمودار تابع فوق یک خط راست است که با توجه به شکل، از نواحی اول و سوم و چهارم عبور می‌کند.

@khanehketab

۱۳۶ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=-x$ را رسم می‌کنیم و مطابق درسنامه عمل می‌کنیم:



۱۳۷ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{x-1}{2}$ را رسم کرده و سپس مطابق روش درسنامه عمل می‌کنیم:



$$y=\frac{x-1}{2} \qquad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

سؤال دانش‌پژوه (اصغر سیاوش)، **آقا اجازه از کجا فهمیدید روی محور xها اعداد ۱، ۳ و ۵ میشه؟**

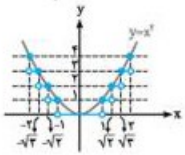
پاسخ: سؤال قبلی قویه. ببین مثلاً نقطه‌ای که در ارتفاع ۱ قرار دارد، یعنی y آن یک است. مثال در معادلهٔ داده شدهٔ $y=\frac{x-1}{2}$، y را برابر یک قرار داده و x را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{x-1}{2}\Rightarrow 1=\frac{x-1}{2}\Rightarrow 2=x-1\Rightarrow x=3$$

و به طور مشابه برای نقطه‌ای که در ارتفاع ۲ قرار دارد، y را در معادله ۲ گذاشته و x را می‌یابیم:

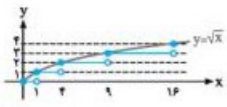
$$2=\frac{x-1}{2}\Rightarrow 4=x-1\Rightarrow x=5$$

۱۳۸ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کرده و سپس مطابق روش درسنامه عمل می‌کنیم.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y=[x^2]$ در بازهٔ $[-2,2]$ از ۷ پاره‌خط تشکیل شده است.

۱۳۹ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=[\sqrt{x}]$ را در بازهٔ $[0,16]$ رسم کرده و سپس طول پاره‌خط‌ها را در این بازه با هم جمع می‌کنیم:

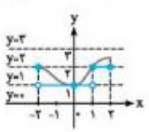


$$\text{مجموع طول پاره‌خط‌ها}=(1-0)+(4-1)+(9-4)+(16-9)=1+3+5+7=16$$

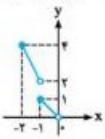
۱۴۰ ۳ معادلهٔ داده شده را به کمک تعریف جزءصحیح به صورت زیر می‌نویسیم:

$$[f(x)]=2\Rightarrow 2\le f(x)<3$$

حال به دنبال xهایی هستیم که $f(x)$ آن‌ها در بازهٔ $[2,3)$ قرار بگیرد که با توجه به شکل، این xها در بازهٔ $[-2,1)\cup[1,2]$ قرار دارند.



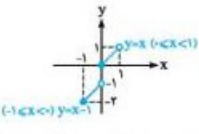
۱۴۱ ۳ در بازهٔ $-2\le x<0$ یک عدد صحیح ۱- وجود دارد، پس بازهٔ داده شده را به ۲ بازهٔ $-2\le x<-1$ و $-1\le x<0$ می‌شکنیم:



۱) $-2\le x<-1\Rightarrow [x]=-2\Rightarrow y=x(-2)=-2x$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 \\ \hline y & 4 & 2 \end{array}$

۲) $-1\le x<0\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow y=x(-1)=-x$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

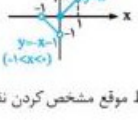
۱۴۲ ۴ در بازهٔ $(-1,1]$ یک عدد صحیح صفر وجود دارد، پس بازهٔ داده شده را به ۲ بازهٔ $-1<x<0$ و $0\le x<1$ می‌شکنیم:



۱) $-1<x<0\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow y=x+\underbrace{[x]}_{-1}=x-1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & -2 & -1 \end{array}$

۲) $0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow y=x+\underbrace{[x]}_{0}=x$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

۱۴۳ ۴ در فاصلهٔ $-1<x<1$ یک عدد صحیح صفر وجود دارد. پس باید فاصلهٔ داده شده را به صورت $-1<x<0$ و $0\le x<1$ در نظر بگیریم:



۱) $-1<x<0\Rightarrow [x]=-1,\ |x|\underbrace{\xrightarrow{-1<x<0}}_{\text{منفی } x}-x\Rightarrow y=|x|+[x]=-x-1$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & 0 & -1 \end{array}$

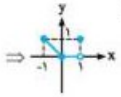
۲) $0\le x<1\Rightarrow [x]=0,\ |x|\underbrace{\xrightarrow{0\le x<1}}_{\text{مثبت } x}x\Rightarrow y=|x|+[x]=x+0=x$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

فرار از اشتباه: فقط موقع مشخص کردن نقطه‌ها حواستون به توپر یا توخالی بودن آن‌ها باشد.

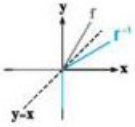
@khanen_book

۱۴۴ ۳ دامنهٔ تابع f با توجه به شکل $[-1,1]$ است. چون در این بازه یک عدد صحیح صفر وجود دارد و انتهای بازه نیز بسته است. باید بازهٔ $[-1,1]$ را به سه بخش زیر تفکیک کنیم:

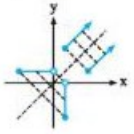
$$\begin{cases} 1) -1 \le x < 0 : [x] = -1 \Rightarrow y = \underset{-1}{[x]} f(x) \Rightarrow y = -f(x) \\ 2) 0 \le x < 1 : [x] = 0 \Rightarrow y = \underset{0}{[x]} f(x) \Rightarrow y = 0 \\ 3) x = 1 : [1] = 1 \Rightarrow y = \underset{1}{[1]} f(1) = f(1) \xrightarrow[f(1)=1]{\text{با توجه به شکل}} y = 1 \Rightarrow (1,1) \text{ نقطهٔ تنهای} \end{cases}$$



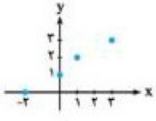
۱۴۵ ۳ برای به‌دست آوردن وارون نمودار، کافی است نمودار داده شده را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) قرینه نماییم.



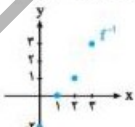
۱۴۶ ۳ هر نقطه از نمودار داده شده را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا مطابق شکل مقابل، نمودار معکوس تابع داده‌شده به دست آید.



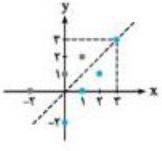
۱۴۷ ۳ **روش اول:** کافی است مختصات نقاط را با توجه به نمودار داده‌شده نوشته و سپس جای مؤلفه‌های همهٔ زوج مرتب‌های آن را با هم عوض کنیم تا تابع معکوس حاصل شود.



$$f = \{(-2,0),(0,1),(1,2),(3,3)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(0,-2),(1,0),(2,1),(3,3)\}$$

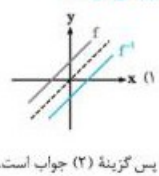


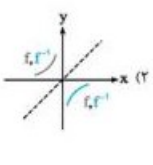
روش دوم: ابتدا نیمساز ربع اول و سوم را کشیده و سپس قرینه نمودار را نسبت به این خط رسم می‌کنیم. چون نقطهٔ $(3,3)$، مؤلفهٔ x و y یکسان دارد روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد و قرینه‌اش نسبت به این خط روی خودش می‌افتد.

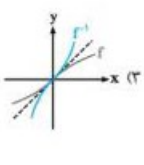


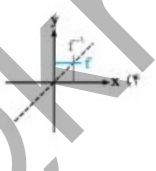
۱۴۸ ۲ وارون هر تابع از قرینه کردن نقاط نمودار نسبت به خط $y = x$ به‌دست می‌آید.

بررسی گزینه‌ها:









پس گزینهٔ (۲) جواب است.

۱۴۹ ۴ برای به دست آوردن معکوس تابع $f = \{(1,5),(2,6),(3,7)\}$ کافی است مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم:

$$f^{-1} = \{(5,1),(6,2),(7,3)\}$$

۱۵۰ ۲ وارون f به‌صورت $f^{-1} = \{(2,1),(3,-1),(-4,-2),(-1,3)\}$ می‌شود. دامنه برابر مجموعهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها یعنی $D_{f^{-1}} = \{2,3,-4,-1\}$ می‌باشد.

سؤال دانش‌پژوه (نغمه باشایی): **من گفتم دامنهٔ f^{-1} همون برد f میشه، پس مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های f رو به عنوان دامنهٔ f^{-1} گرفتم که جواب همین شد.**

پاسخ: بله درسته.

@khaneh_book

۱۵۱ ۱ وارون f به‌صورت $f^{-1}=\{(۴,a-۱),(b+۳,۲)\}$ می‌باشد. از آن‌جا که f^{-1} و g برابرند (g وارون f می‌باشد)، زوج مرتب‌های آن‌ها نیز با هم برابرند. پس:

$$\begin{cases}(b+۳,۲)=(a+۲,۲)\Rightarrow \begin{cases}b+۳=a+۲\\ ۲=۲\end{cases}\\ (۴,a-۱)=(۲a,۱)\Rightarrow \begin{cases}۴=۲a\\ a-۱=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲\end{cases}\Rightarrow b+۳=۲+۲\Rightarrow b=۱$$

بنابراین $a+b=۲+۱=۳$ می‌باشد.

۱۵۲ ۴ می‌دانیم اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار f^{-1} باشد، آن‌گاه (b,a) روی نمودار f قرار می‌گیرد. بنابراین با توجه به این‌که از نمودار تابع f^{-1} می‌توان گفت $(۲,۱)\in f^{-1}$، لذا $(۱,۲)\in f$ می‌باشد و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۵۳ ۲ چون وارون f از نقطهٔ $(۶,۲-)$ می‌گذرد، پس خود f از نقطهٔ $(۲,۶-)$ می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$f(۲)=-۶\Rightarrow -۶=۲m+۲\Rightarrow m=-۴$$

۱۵۴ ۲ با توجه به این‌که $f^{-1}(۵)=۳$، پس $f(۳)=۵$ می‌شود، با قرار دادن $x=۳$ داریم: $f(۳)-۲a=۳\Rightarrow ۵-۲a=۳\Rightarrow ۲=۲a\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$

۱۵۵ ۴ اگر نقطهٔ $(۳,a)$ روی نمودار f^{-1} باشد، آن‌گاه نقطهٔ $(a,۳)$ روی نمودار f قرار دارد و مختصات آن در ضابطهٔ f صدق می‌کند، بنابراین:

$$f(x)=۱+\sqrt{x-۱}\xrightarrow{f(a)=۳}۳=۱+\sqrt{a-۱}\Rightarrow ۲=\sqrt{a-۱}\xrightarrow[\text{توان ۲ می‌رسانیم.}]{\text{طرفین تساوی را به}}۴=a-۱\Rightarrow a=۵$$

۱۵۶ ۴ اگر تابع معکوس $f(x)$ یعنی $f^{-1}(x)$ از نقطهٔ (a,b) بگذرد، تابع f از نقطهٔ (b,a) می‌گذرد. پس کافی است پس از تعویض جای مؤلفه‌های نقاط داده شده، ببینیم کدام نقطه در ضابطهٔ تابع y داده شده صدق می‌کند. در **گزینهٔ (۴)** داریم:

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\sqrt{۳}\right)\xrightarrow[\text{مؤلفه‌ها}]{\text{تعویض جای}}\left(\sqrt{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\Rightarrow f(\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱+۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$$

گزینهٔ (۴) جواب است.

در سایر گزینه‌ها پس از تعویض جای مؤلفه‌ها و قرار دادن در ضابطهٔ تابع، به نتیجهٔ درستی نمی‌رسیم.

۱۵۷ ۲ فرض کنید نمودار معکوس تابع f یعنی f^{-1}، محور yها را در نقطه‌ای به عرض α قطع می‌کند. پس f^{-1} از نقطهٔ $A(۰,\alpha)$ می‌گذرد و لذا f از نقطهٔ $A'(\alpha,۰)$ می‌گذرد. حال با قرار دادن مختصات A' در تابع f، α را محاسبه می‌کنیم:

$$(\alpha,۰)\in f\Rightarrow ۰=\frac{\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha+۴}{\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha-۱}\xrightarrow[\text{حتماً صورتش صفر می‌شود.}]{\text{وقتی حاصل کسری، صفر باشد،}}\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha+۴=۰\Rightarrow \underbrace{\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha+۱}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای}}+۳=۰$$

$$\Rightarrow(\alpha+۱)^۳+۳=۰\Rightarrow \alpha+۱=\sqrt[۳]{-۳}\Rightarrow \alpha=-۱-\sqrt[۳]{۳}$$

۱۵۸ ۲ با توجه به تابع f داریم:

$$\begin{cases}f=\{(۱,۲),(۲,-۱),(۳,۴),(۴,-۳)\}\Rightarrow f(۴)=-۳\\ f^{-1}=\{(۲,۱),(-۱,۲),(۴,۳),(-۳,۴)\}\Rightarrow f^{-1}(-۱)=۲\end{cases}\Rightarrow ۳f^{-1}(-۱)+f(۴)=۳(۲)+(-۳)=۶-۳=۳$$

سؤال دانش‌پژوه (نیلا زهرایی): **آقا اجازه، نمیشه بدون به دست آوردن تابع f^{-1} سریعتر بفهمیم $f^{-1}(-۱)$ چند میشه؟**

پاسخ: چرا میشه. ببین عددی که به عنوان ورودی تابع f^{-1} است، در واقع خروجی تابع f بوده، پس f^{-1} خروجی (برد) تابع f است در تابع f به دنبال زوج مرتبی بگرد که مؤلفهٔ دومش -۱ باشه فب $(-۱,۲)$ میشه. بعد مؤلفهٔ اولش رو به عنوان جواب در نظر بگیر! پس $f^{-1}(-۱)=۲$.

۱۵۹ ۳ چون تابع f از نقطهٔ $(۳,۴)$ می‌گذرد، پس f^{-1} از نقطهٔ $(۴,۳)$ می‌گذرد. لذا $f^{-1}(۴)=۳$. برای محاسبهٔ $f(۴)$ باید معادلهٔ خطی که در فاصلهٔ $۳\le x\le ۵$ رسم شده است را بیابیم. می‌دانیم $f(۳)=۴$ و $f(۵)=۵$، بنابراین:

$$m=\text{شیب خط}=\frac{۵-۴}{۵-۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y-۵=\frac{۱}{۲}(x-۵)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۵)+۵\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

لذا $f(۴)=\frac{۹}{۲}=\frac{۱}{۲}(۴)+\frac{۵}{۲}$، در نتیجه $f^{-1}(۴)+f(۴)=۳+۴/۵=۷/۵$.

۱۶۰ ۱ دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f می‌باشد. برای محاسبهٔ برد، مقادیر تابع را به ازای دامنهٔ مفروض محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=\frac{۳x+۲}{۷}=\frac{۳}{۷}x+\frac{۲}{۷}$$

بنابراین ابتدا دامنه را در $\frac{۳}{۷}$ ضرب و سپس آن را با $\frac{۲}{۷}$ جمع می‌کنیم.

$$[-۳,۴]\xrightarrow{\times\frac{۳}{۷}}\left[-\frac{۹}{۷},\frac{۱۲}{۷}\right]\xrightarrow{+\frac{۲}{۷}}[-۱,۲]\Rightarrow R_f=[-۱,۲]$$

سؤال دانش‌پژوه (مازیار مهدوی): **آقا ببخشید ما برد رو این‌طوری پیدا کردیم:**

$$-۳\le x\le ۴\xrightarrow{\times۳}-۹\le ۳x\le ۱۲\xrightarrow{+۲}-۷\le ۳x+۲\le ۱۴\xrightarrow{\div۷}-۱\le\frac{۳x+۲}{۷}\le ۲$$

پاسخ: بله این هم به نوعی تداعی همون راه بالاست و درسته.

@khanehbook

۱۶۱ ۱ برد تابع وارون f برابر دامنهٔ f می‌باشد، لذا کافی است دامنهٔ این تابع را بیابیم.

$$۶-۲x\geq ۰ \xrightarrow{-۶} -۲x\geq -۶ \xrightarrow{\div(-۲)} x\leq ۳ \Rightarrow D_f=R_{f^{-1}}=(-\infty,۳]$$

۱۶۲ ۴

$$f(۳)=۵ \xrightarrow{f(x)=ax+b} ۵=۳a+b$$

$$f^{-1}(۸)=۳ \Rightarrow (۸,۳)\in f^{-1} \Rightarrow (۳,۸)\in f \Rightarrow f(۳)=۸ \Rightarrow ۸=۳a+b$$

حال دستگاه زیر را حل کرده و a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases}۳a+b=۵\\ ۳a+b=۸\end{cases} \Rightarrow a=۳,b=-۱ \Rightarrow f(x)=۳x-۱ \xrightarrow{x=۴} f(۴)=۱۲-۱=۱۱$$

۱۶۳ ۳ نمودار معکوس f محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس $f^{-1}(۲)=۰$. از طرفی از نقطهٔ $(۳,۵)$ نیز می‌گذرد، پس $f^{-1}(۳)=۵$. بنابراین:

$$f^{-1}(۲)=۰ \Rightarrow (\overset{\curvearrowleft}{۲},۰)\in f^{-1} \Rightarrow (۰,۲)\in f \quad , \quad f^{-1}(۳)=۵ \Rightarrow (\overset{\curvearrowleft}{۳},۵)\in f^{-1} \Rightarrow (۵,۳)\in f$$

با داشتن ۲ نقطه از تابع خطی f، ضابطهٔ آن را می‌یابیم:

$$m=\frac{۲-۳}{۰-۵}=\frac{۱}{۵} \quad , \quad y-۲=\frac{۱}{۵}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۵}x+۲ \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۵}x+۲ \xrightarrow{x=۱۰} f(۱۰)=\frac{۱}{۵}(۱۰)+۲=۲+۲=۴$$

۱۶۴ ۱ نقطهٔ $(۱,۲)$ چون روی نمودار $f(x)$ است پس مختصات آن در ضابطهٔ f صدق می‌کند، یعنی $f(۱)=۲$ و داریم:

$$f(x)=ax+b \xrightarrow{(۱,۲)\in f} ۲=a(۱)+b \Rightarrow a+b=۲ \quad (*)$$

نقطهٔ $(۱,۲)$ چون روی نمودار $f^{-1}(x)$ هم قرار دارد پس مختصات آن در ضابطهٔ f^{-1} صدق می‌کند، یعنی $f^{-1}(۱)=۲$ و داریم:

$$(\overset{\curvearrowleft}{۱},۲)\in f^{-1} \Rightarrow (۲,۱)\in f \Rightarrow f(۲)=۱ \xrightarrow{f(x)=ax+b} a(۲)+b=۱ \Rightarrow ۲a+b=۱ \quad (**)$$

حال معادلات $(*)$ و $(**)$ را در یک دستگاه حل کرده و a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases}a+b=۲\\ ۲a+b=۱\end{cases} \Rightarrow a=-۱,b=۳ \Rightarrow f(x)=-x+۳ \Rightarrow f(۴)=-۴+۳=-۱$$

۱۶۵ ۲ نمودار تابع خطی $f(x)$، نمودار معکوس خود را روی محور xها در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. یعنی f و f^{-1} در نقطهٔ $(۲,۰)$ متقاطع‌اند. پس این نقطه روی هر دو نمودار f و f^{-1} قرار دارد. به جوابی شبیه سؤال قبل است:

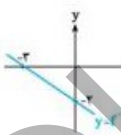
$$(۲,۰)\in f \Rightarrow f(۲)=۰ \xrightarrow{f(x)=ax+b} ۰=۲a+b \quad (*)$$

$$(\overset{\curvearrowleft}{۲},۰)\in f^{-1} \Rightarrow (۰,۲)\in f \Rightarrow f(۰)=۲ \Rightarrow ۲=a(۰)+b \Rightarrow b=۲ \xrightarrow{(*)} ۰=۲a+۲ \Rightarrow a=-۱$$

بنابراین $f(x)=-x+۲$ است. حال معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=x \xrightarrow{f(x)=-x+۲} -x+۲=x \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$$

۱۶۶ ۲ با توجه به نمودار داریم:



$$(-۳,۰),(۰,-۲)\in f^{-1} \Rightarrow (۰,-۳),(-۲,۰)\in f$$

$$\text{شیب}: m=\frac{-۳-۰}{۰-(-۲)}=\frac{-۳}{۲} \Rightarrow y-(-۳)=\frac{-۳}{۲}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{-۳}{۲}x-۳$$

پس $f(x)=-\frac{۳}{۲}x-۳$ و داریم:

$$f(x)=-\frac{۳}{۲}x-۳ \Rightarrow f(۲x-۱)=-\frac{۳}{۲}(۲x-۱)-۳=-۳x+\frac{۳}{۲}-۳=-۳x-\frac{۳}{۲} \quad (*)$$

حال دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-f(۲x-۱)}$ را می‌یابیم:

$$x-f(۲x-۱)\geq ۰ \xrightarrow{(*)} x-\left(-۳x-\frac{۳}{۲}\right)\geq ۰ \Rightarrow x+۳x+\frac{۳}{۲}\geq ۰ \Rightarrow ۴x\geq -\frac{۳}{۲} \Rightarrow x\geq -\frac{۳}{۸} \Rightarrow D_y=\left[-\frac{۳}{۸},+\infty\right)$$

۱۶۷ ۴

$$g(x)=f(۳x-۴)=\alpha \Rightarrow \begin{cases}g(x)=\alpha \Rightarrow g^{-1}(\alpha)=x \quad (*)\\ f(۳x-۴)=\alpha \Rightarrow f^{-1}(\alpha)=۳x-۴ \xrightarrow{(*)} f^{-1}(\alpha)=۳g^{-1}(\alpha)-۴\end{cases}$$

حال به دنبال $g^{-1}(۱۶)$ هستیم. پس در تساوی $f^{-1}(\alpha)=۳g^{-1}(\alpha)-۴$ به جای α، ۱۶ قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(۱۶)=۳g^{-1}(۱۶)-۴ \xrightarrow[\Rightarrow f^{-1}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}]{f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}} ۱۶+\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=۳g^{-1}(۱۶)-۴ \Rightarrow ۲۰=۳g^{-1}(۱۶)-۴ \Rightarrow g^{-1}(۱۶)=\frac{۲۰+۴}{۳}=۸$$

@khaneh_book

۱۶۸ ۲ طبق فرض $g^{-1}(۵)=۴$ یعنی $(۵,۴)\in g^{-1}$ و در نتیجه $(۴,۵)\in g$. حال می‌خواهیم $f(-۱۴)$ را حساب کنیم با توجه به رابطهٔ $g(x-۱)+f(۱-۳x)=۴$، به دنبال xای می‌گردیم که با جایگذاری آن در رابطه داده شده جلوی f یعنی $۱-۳x$ برابر -۱۴ شود:

$$۱-۳x=-۱۴\Rightarrow ۱+۱۴=۳x\Rightarrow ۳x=۱۵\Rightarrow x=۵$$

پس در رابطه زیر $x=۵$ را قرار می‌دهیم:

$$g(x-۱)+f(۱-۳x)=۴\xrightarrow{x=۵} g(۵-۱)+f(۱-۳(۵))=۴\Rightarrow g(۴)+f(-۱۴)=۴\xrightarrow{(۴,۵)\in g\Rightarrow g(۴)=۵} ۵+f(-۱۴)=۴\Rightarrow f(-۱۴)=-۱$$

۱۶۹ ۱ با توجه به این‌که تابعی معکوس‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد، می‌توان گفت در تابع گزینهٔ (۱) هیچ دو زوج مرتبی پیدا نمی‌شود که مؤلفه‌های دوم آن‌ها یکسان باشد، پس تابع فوق یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۲): دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۴,۲)$ مؤلفه‌های دوم یکسان دارند، بنابراین تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

گزینهٔ (۳): دو زوج مرتب $(۱,۱)$ و $(۴,۱)$ مؤلفه‌های دوم یکسان دارند، بنابراین تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

گزینهٔ (۴): دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,۳)$ وجود دارد، پس اصلاً تابع نیست چه برسد به این‌که یک‌به‌یک باشد.

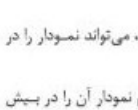
۱۷۰ ۴ می‌دانیم که شرط معکوس‌پذیری تابع، یک‌به‌یک بودن آن است، در گزینهٔ (۴) اگر خطی به موازات محور xها رسم کنیم، می‌تواند نمودار را در دو نقطه قطع کند بنابراین تابع یک‌به‌یک نیست، در نتیجه معکوس‌پذیر هم نیست.

۱۷۱ ۳ در واقع باید تابعی را بیابیم که یک‌به‌یک باشد. برای این‌که تابعی یک‌به‌یک باشد، باید اگر خطی موازی محور xها بکشیم نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

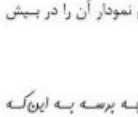
سؤال دانش‌پژوه (بلال شریف‌زاده)، **آقا پس گزینهٔ (۲) هم جوابه دیگه؟**

پاسخ: اون نمودار اصلاً تابع نیست، چون خطی موازی محور yها هست که اونو توی بیشتر از یه نقطه قطع می‌کنه، چه برسه به این‌که یک‌به‌یک هم باشه!

۱۷۲ ۱ گزینهٔ (۱) بیانگر یک تابع یک‌به‌یک است، زیرا همان‌طور که بیان شد اگر از یک عضو در مجموعهٔ اول به یک عضو در مجموعهٔ دوم بیش از یک پیکان وارد شود، می‌توان همهٔ آن‌ها را یک پیکان به حساب آورد. پس نمودار ون گزینهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت مقابل نشان داد که یک‌به‌یک است.



سؤال دانش‌پژوه (بلال شریف‌زاده)، **آقا پس آیا نمودار ونی به‌صورت مقابل هم تابع است، چون می‌تونیم پیکان خارج شده از ۱ رو حذف کنیم؟**



پاسخ: شریف‌زاده، آفه عزیز من اون فلش‌ها از ۱ فقط به یه عضو می‌رن؟ اون فلش‌ها یکی به ۲ میره یکی به ۳، اگر هر دو به یه عضو، مثلاً هر دو پیکان به ۲، یا هر دو پیکان به ۳ می‌رفتن می‌تونستیم یکی از پیکان‌ها را حذف کنیم.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۲): بیانگر یک تابع نیست زیرا می‌دانیم اگر خطی روی محور yها رسم کنیم که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نماید، نمودار داده شده اصلاً تابع نیست.

گزینهٔ (۳): تابع است اما یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور xها آن را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

گزینهٔ (۴): یک‌به‌یک نیست زیرا از آن‌جا که $۱=(-۱)^۲$، دو عضو $(۴,۱)$ و $(۱,-۱)$ مؤلفه‌های دوم یکسان دارند.

۱۷۳ ۱ رابطهٔ بین هر عدد و مکعب آن یک تابع یک‌به‌یک می‌باشد، زیرا با داشتن هر عدد می‌توانیم مکعب آن را بیابیم و هم‌چنین با داشتن مکعب یک عدد می‌توانیم به‌طور یکتا خود عدد را مشخص نماییم.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۲): الزاماً تابعی یک‌به‌یک نیست. زیرا ممکن است دو یا چند دانش‌آموز نمرهٔ یکسانی کسب نمایند.

گزینهٔ (۳): اصلاً تابع نیست، زیرا هر فرد چندین مدرسه ممکن است در دوران تحصیل خود داشته باشد.

گزینهٔ (۴): یک تابع است اما یک‌به‌یک نیست، زیرا ممکن است دو یا چندین هزار نفر دارای سن یکسانی باشند.

۱۷۴ ۳ **دام آموزشی:** دوست عزیز! لازم است به چند نکتهٔ مهم توجه کنید اول این‌که در صورت سؤال گفته شده «تابع **وارون‌پذیر** f»، یعنی اولاً f تابع باشد و ثانیاً f وارون‌پذیر (یک‌به‌یک) باشد. دوم این‌که وارون f، نسبت به خط $y=x$ رسم می‌شود نه خط دیگری!

حال به بررسی گزینه‌های تست می‌پردازیم. در **گزینهٔ (۴)** f اصلاً تابع نیست (خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار f را در دو نقطه قطع نماید). در **گزینهٔ (۲)** هم f تابع یک‌به‌یک نیست. (زیرا خطی موازی محور xها هست که نمودار f را در بیش از یک نقطه قطع نماید). در **گزینهٔ (۱)**، با این‌که تابع f وارون‌پذیر است، ولی در نمودار وارون آن به‌جای آن که تابع نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه شود، نسبت به خط $y=-x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) قرینه شده است! در **گزینهٔ (۳)** وارون تابع وارون‌پذیر f به درستی رسم شده است.

@khaneh_book

۱۷۵ ۴ می‌دانیم از لحاظ زوج مرتب، تابعی یک‌به‌یک است که همهٔ مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب آن متفاوت باشند یا اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب برابر باشند، مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشند، بنابراین:

$$(m,۳)=(-۱,۳)\Rightarrow m=-۱$$

حال با جایگزینی $m=-۱$ در زوج‌های مرتب داریم:

$$\{(-۲,۲),(-۱,۳),(-۲,a)\}\xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}}(-۲,۲)=(-۲,a)\Rightarrow a=۲$$

۱۷۶ ۴ ابتدا از آن‌جا که دو زوج مرتب $(۴,a^۲-۴a)$ و $(۴,-۳)$ مؤلفه‌های اول یکسانی دارند و R یک تابع است، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند. بنابراین:

$$a^۲-۴a=-۳\Rightarrow a^۲-۴a+۳=۰\Rightarrow(a-۱)(a-۳)=۰\Rightarrow a=۱,a=۳$$

به ازای $a=۱$ داریم $R=\{(۴,-۳),(۴,-۳),(۲,-۳)\}=\{(۴,-۳),(۲,-۳)\}$. چون $(۴,-۳)$ و $(۲,-۳)$ مؤلفه‌های دوم یکسانی دارند، پس این رابطه به ازای $a=۱$ یک‌به‌یک نیست. به ازای $a=۳$ داریم:

$$R=\{(۴,-۳),(۴,-۳),(۴,-۹)\}=\{(۴,-۳),(۴,-۹)\}$$

چون $(۴,-۹)$ و $(۴,-۳)$ مؤلفه‌های اول یکسانی دارند، R اصلاً تابع نیست. پس به ازای هیچ مقداری برای a، R یک‌به‌یک نمی‌شود.

۱۷۷ ۴ عضوهای $(a,a^۲-a)$ و $(۳,۲)$ در f مؤلفه‌های اول برابر دارند. چون f تابع است، پس مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باید برابر باشند. لذا:

$$a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰\Rightarrow a=-۱\ \text{یا}\ a=۲$$

به ازای $a=-۱$، تابع f را بازنویسی می‌کنیم.

$$a=-۱\Rightarrow f=\{(۳,۲),(-۱,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

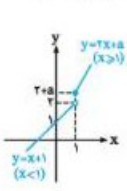
دو زوج مرتب $(-۱,۵)$ و $(-۱,۴)$ مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر دارند، پس f به ازای $a=-۱$ تابع نمی‌شود.

$$a=۲\Rightarrow f=\{(۳,۲),(۲,۵),(۳,۲),(b,۲),(-۱,۴)\}$$

چون f باید یک‌به‌یک باشد و $(۳,۲)$ و $(b,۲)$ مؤلفه‌های دوم برابر دارند، مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز باید برابر باشند، پس $b=۳$. لذا $(a,b)=(۲,۳)$ می‌باشد.

۱۷۸ ۱ ابتدا سعی می‌کنیم نمودار تقریبی f را بکشیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+۱\ ;\ x<۱\\ ۲x+a\ ;\ x\geq ۱\end{cases}$$

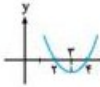


با توجه به نمودار مشخص است که اگر $۲+a\leq ۲$ باشد، شاخهٔ سمت راستی، پایین‌تر از شاخه سمت چپی **نمی‌آید** و لذا تابع یک‌به‌یک باقی می‌ماند.

$$۲\leq ۲+a\Rightarrow a\geq ۰\Rightarrow \text{حداقل مقدار}\ a=۰$$

۱۷۹ ۳ ابتدا ریشه‌های تابع $f(x)=x^۲-۶x+۸$ را یافته و نمودار آن را می‌کشیم و سپس بررسی می‌کنیم در کدام‌یک از بازه‌های داده شده، تابع یک‌به‌یک است.

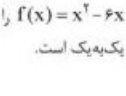
$$f(x)=x^۲-۶x+۸=(x-۲)(x-۴)$$



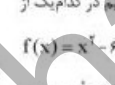
طول رأس سهمی: $\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۶)}{۲(۱)}=۳$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): بازهٔ $[۲,۴]$: یک‌به‌یک نیست.

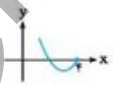


گزینه (۲): بازهٔ $[۲,+\infty)$: یک‌به‌یک نیست.



گزینه (۳): بازهٔ $[۴,۵]$: یک‌به‌یک است.

گزینه (۴): بازهٔ $[۴,-\infty)$: یک‌به‌یک نیست.



۱۸۰ ۳ برای وارون‌پذیر بودن تابع، باید یک‌به‌یک بودن را چک کنیم. لذا ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار بزرگ‌ترین فاصله‌ای که تابع در آن یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است بازه‌های $[-۱,-\infty)$ و $[-۱,+\infty)$ است که با توجه به بازهٔ $[a,-\infty)$، جواب $a=-۱$ است.

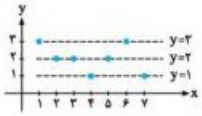
سؤال دانش‌پژوه (درسا کیانی)، **آقا اجازه عدد ۱- رو از کجا آوردین؟**

پاسخ: $x=-۱$، همان طول رأس سهمی است که از فرمول $\frac{-b}{۲a}$ به دست میاد، نگاه کن:

$$y=x^۲+۲x\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(۱)}=-۱$$

@khanen_book

۱۸۱ ۱ برای آن‌که نمودار مقابل بیانگر نمودار یک تابع یک به یک باشد، باید هر خطی افقی حداکثر از یک نقطه عبور کند. به عبارت دیگر در یک ارتفاع نباید بیشتر از یک نقطه وجود داشته باشد. خب از ارتفاع $y=1$ شروع می‌کنیم. در این ارتفاع ۲ نقطه وجود دارد، پس حداقل ۱ نقطه از ۲ نقطه را حذف می‌کنیم. در ارتفاع $y=2$، سه نقطه وجود دارد، پس باید حداقل ۲ تا از ۳ نقطه را حذف کنیم. در ارتفاع $y=3$، ۲ نقطه وجود دارد پس باید حداقل ۱ نقطه از ۲ نقطه در آن ارتفاع را حذف کنیم. بنابراین در کل حداقل ۴ نقطه باید حذف شود تا تابع یک‌به‌یک شود.



سؤال دانش‌پژوه (سیاوش فیرابی)، **آقا اجازه چرا مثلاً در ارتفاع $y=2$ هر ۳ نقطه را حذف نکردین؟**

پاسخ: عزیزم چرا دقت نمی‌کنی سؤال گفته حداقل چند نقطه! تره میشه هر ۳ تا نقطه رو هم حذف کرد ولی ما می‌خواهیم با حذف کم‌ترین تعداد نقطه‌ها به تابع یک‌به‌یک برسیم.

۱۸۲ ۴ اولاً چون تابع $f(x)=ax^3+bx-c+dx$ خطی است، پس جملهٔ درجه ۲ نباید داشته باشد لذا $a=0$. از طرفی چون تابع خطی، وارون‌پذیر (یک‌به‌یک) نمی‌باشد. پس نمودار آن باید موازی محور xها باشد. یعنی شیب نمودار صفر است:

$$f(x)=bx-c+dx=(\underbrace{b+d}_{\text{شیب}=0})x-c \Rightarrow f(x)=-c$$

$$f(x)>0 \xrightarrow{f(x)=-c} -c>0 \Rightarrow c<0$$

هم‌چنین نمودار تابع $f(x)$، بالای محور xها قرار دارد. پس:

با توجه به موارد فوق گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): ✓ $a+b+d=0+(0)=0$

گزینهٔ (۲): ✓ $b+d+c<0 \Rightarrow 0+c<0$ (⊖)

گزینهٔ (۳): ✓ $a>c \xrightarrow[c<0]{a=0} 0>c$

گزینهٔ (۴): × $b+d<c \xrightarrow[c<0]{b+d=0} 0<c$ (تناقض داره)

۱۸۳ ۴ با توجه به ماشین داده شده، $f(x)$ به‌صورت $f(x)=2x+3$ می‌باشد. حال f^{-1} را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$y=2x+3 \Rightarrow 2x=y-3 \Rightarrow x=\frac{y-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$$

سؤال دانش‌پژوه (مهسن کاهنده)، **این کار فقط تو توابع خطی برای به‌دست آوردن وارون تابع انجام میشه؟**

پاسخ: نه توی بقیهٔ توابع هم در حالت کلی می‌تونیم این کارو انجام بدیم و ضابطهٔ معکوس رو محاسبه کنیم. گرچه راجع به ضابطهٔ تابع وارون به جز توابع خطی، در کتاب بحث دیگری نشده.

۱۸۴ ۳ دقت کنید چون تابع خطی f از مبدأ مختصات یعنی $(0,0)$ می‌گذرد، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $y=mx$ می‌باشد. با توجه به این که تابع از نقطهٔ $(\frac{3}{2},6)$ می‌گذرد، داریم:

$$f(\frac{3}{2})=6 \Rightarrow 6=\frac{3}{2}m \xrightarrow{\times 2} 12=3m \Rightarrow m=4 \Rightarrow f(x)=4x$$

حال $f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

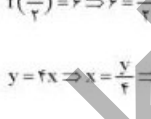
$$y=4x \Rightarrow x=\frac{y}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{4} \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} f^{-1}(\frac{2}{3})=\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

۱۸۵ ۲

$$y=\frac{5x+1}{3} \Rightarrow 3y=5x+1 \Rightarrow 3y-1=5x \Rightarrow x=\frac{3y-1}{5} \Rightarrow f(x)=\frac{3x-1}{5} \Rightarrow f(x)=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$$

عرض از مبدأ

۱۸۶ ۲ ابتدا با توجه به نمودار ضابطهٔ تابع f را به دست می‌آوریم.



$$(0,2),(1,0) \in f$$

$$\text{شیب}: m=\frac{2-0}{0-1}=-2 \ , \ y-2=-2(x-0) \Rightarrow y=-2x+2 \Rightarrow f(x)=-2x+2$$

حال معکوس f را می‌یابیم:

$$y=-2x+2 \Rightarrow 2x=2-y \Rightarrow x=\frac{2-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2-x}{2}$$

برای محاسبهٔ محل برخورد دو خط f و f^{-1} باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow -2x+2=\frac{2-x}{2} \Rightarrow -4x+4=2-x \Rightarrow 2=3x \Rightarrow x=\frac{2}{3} \xrightarrow[\text{در } f \text{ یا } f^{-1}]{\text{جایگذاری}} y=-2(\frac{2}{3})+2=\frac{-4}{3}+2=\frac{2}{3}$$

پس محل برخورد $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ است.

@khaneh_book

۱۸۷ **۱** ابتدا با توجه به $f(1-x)=2x+a$، ضابطهٔ $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f(1-x)=2x+a \xrightarrow{1-x=t\Rightarrow x=1-t} f(t)=2(1-t)+a \Rightarrow f(t)=2-2t+a$$

پس $f(x)=-2x+2+a$. طبق فرض معکوس f محورxها را در نقطه‌ای به طول ۳ یعنی در نقطهٔ $(3,0)$ قطع کرده است. پس $(3,0)\in f^{-1}$ و لذا $(0,3)\in f$. حال $(0,3)$ را در ضابطهٔ f قرار داده و a را می‌یابیم:

$$f(x)=-2x+2+a \xrightarrow{(0,3)\in f} 3=-2(0)+2+a \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=-2x+3$$

خواستهٔ مسأله $f^{-1}(a)$ است. پس $f^{-1}(x)$ را حساب کنیم:

$$y=-2x+3 \Rightarrow 2x=3-y \Rightarrow x=\frac{3-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3-x}{2} \xrightarrow{a=1} f^{-1}(a=1)=\frac{3-1}{2}=1$$

۱۸۸ **۳** f تابعی خطی است پس $f(x)=ax+b$. حال رابطهٔ دادهٔ شده را با توجه به ضابطه f ساده می‌کنیم:

$$f(2x)+f(x-1)=2x-4 \xrightarrow{f(x)=ax+b} (a(2x)+b)+(a(x-1)+b)=2x-4 \Rightarrow 2ax+b+ax-a+b=2x-4$$

$$\Rightarrow 3ax+2b-a=2x-4 \Rightarrow \begin{cases} 3a=2 \Rightarrow a=1 & (*) \\ 2b-a=-4 \xrightarrow{(*)} 2b-1=-4 \Rightarrow 2b=-3 \Rightarrow b=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=x-\frac{3}{2}$$

$$y=x-\frac{3}{2} \Rightarrow x=y+\frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=x+\frac{3}{2} \xrightarrow{x=2} f^{-1}(2)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

۱۸۹ **۲**

$$y=ax+b \Rightarrow y-b=ax \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$$

همان‌طوری که می‌بینید شیب نمودار تابع خطی f برابر a و شیب نمودار f^{-1} برابر $\frac{1}{a}$ است. پس شیب‌های نمودار f و f^{-1} معکوس هم هستند.

۱۹۰ **۴** ابتدا معکوس تابع $f(x)=ax+b$ را می‌یابیم:

$$y=ax+b \Rightarrow y-b=ax \xrightarrow{\div a} x=\frac{y}{a}-\frac{b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$$

حال معادلهٔ $f^{-1}(x)=f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=f(x) \Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{b}{a}=ax+b$$

برای برقراری تساوی فوق باید ضریب xها در دو طرف تساوی با هم برابر و اعداد ثابت هم با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}=a \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 & (*) \\ -\frac{b}{a}=b \xrightarrow{(*)} \begin{cases} \text{اگر } a=1 \text{ باشد}: \frac{-b}{1}=b \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0 \xrightarrow{f(x)=ax+b} f(x)=x \\ \text{اگر } a=-1 \text{ باشد}: \frac{-b}{-1}=b \Rightarrow b=b \text{ همواره برقرار است} \Rightarrow f(x)=-x+b \end{cases} \end{cases}$$

پس در حالتی که $f(x)=x$ یا $f(x)=-x+b$ باشد، معکوس تابع شبیه خود تابع است و نمودار f^{-1} و f بر هم منطبق می‌شوند.

سؤال *دانش‌پژوه (سوالمآز عشقی)*، **آقا اجازه چرا در $f(x)=-x+b$، به جای b عدد به دست نیومد؟ اصلاً یعنی چی این؟**

پاسخ: وقتی تابع به صورت $-x+b$ نوشته شده یعنی این که عرض از مبدا (همان b) هر چی باشه تابع f مساوی f^{-1} میشه و عددش مهم نیست، در واقع به ازای هر عدد b که تو بگی تساوی $f=f^{-1}$ برقراره.

۱۹۱ **۲** در تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 0 \\ 4x-1 & x<0 \end{cases}$ معکوس دو ضابطهٔ بالا و پایین f را می‌یابیم:

قسمت اول:

$$y=2x-1 \Rightarrow y+1=2x \Rightarrow x=\frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$$

حال برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع f^{-1} به دست آمده، باید برد $f(x)=2x-1$ با شرط $x\geq 0$ را بیابیم.

$$x\geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2x\geq 0 \xrightarrow{-1} \underbrace{2x-1}_{f(x)}\geq -1 \Rightarrow f(x)\geq -1 \Rightarrow R_f=[-1,+\infty) : \text{دامنهٔ ضابطهٔ بالایی } f^{-1}$$

قسمت دوم:

$$y=4x-1 \Rightarrow y+1=4x \Rightarrow x=\frac{y+1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{4}$$

به طور مشابه دامنهٔ تابع f^{-1} به دست آمده، برد $f(x)=4x-1$ با شرط $x<0$ است. پس برد f را در این قسمت به دست آوریم:

$$x<0 \xrightarrow{\times 4} 4x<0 \xrightarrow{-1} \underbrace{4x-1}_{f(x)}<-1 \Rightarrow f(x)<-1 \Rightarrow R_f=(-\infty,-1) : \text{دامنهٔ ضابطهٔ پایینی } f^{-1}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{2} & , \ x\geq -1 \\ \frac{x+1}{4} & , \ x<-1 \end{cases}$$

@khanehbook

۱۹۲ ۱ با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & , x>۲\\ x+۱ & , x\le ۲\end{cases}$ داریم:

$$f(۹) \xrightarrow[f(x)=۲x-۱]{۹>۲} ۲(۹)-۱=۱۷$$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۹)$ نیازی نیست که اول تابع معکوس f را پیدا کنیم و بعد $f^{-1}(۹)$ را بیابیم. عدد ۹ برای تابع f^{-1} ورودی محسوب می‌شود ولی برای f، خروجی با همان $f(x)$ است. پس به جای $f(x)$ در تابع f، عدد ۹ قرار می‌دهیم و x را می‌یابیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x>۲ \Rightarrow ۲x-۱=۹ \Rightarrow ۲x=۱۰ \Rightarrow x=۵\\ x+۱ & x\le ۲ \Rightarrow x+۱=۹ \Rightarrow x=۸\end{cases}$$

قبول است چون $x>۲$ است. غ‌ق‌ق چون باید $x\le ۲$ باشد.

$$\Rightarrow f^{-1}(۹)=۵$$

در نهایت داریم:

$$f^{-1}(۹)+f(۹)=۵+۱۷=۲۲$$

۱۹۳ ۲ چون نمودار تابع f و g نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند، نتیجه می‌گیریم که این دو تابع وارون هم هستند یعنی $g(x)=f^{-1}(x)$ یا $f(x)=g^{-1}(x)$ (جفت این دو تساوی یک معنی می‌دهند.) حال معکوس تابع f را به دست آورده و برابر تابع g قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۸-ax}{b} \Rightarrow y=\frac{۸-ax}{b} \Rightarrow by=۸-ax \Rightarrow ax=۸-by \Rightarrow x=\frac{۸}{a}-\frac{b}{a}y \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۸}{a}-\frac{b}{a}x$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x)=g(x) \Rightarrow \frac{۸}{a}-\frac{b}{a}x=\frac{۲x-b}{۳} \Rightarrow \frac{۸}{a}-\frac{b}{a}x=\frac{۲}{۳}x-\frac{b}{۳}$$

برای برقراری تساوی فوق ضرایب xها باید با هم برابر و اعداد ثابت نیز با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}-\frac{b}{a}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}a \quad (*)\\ \frac{۸}{a}=-\frac{b}{۳} \Rightarrow ab=-۲۴ \xrightarrow{(*)} a\left(-\frac{۲}{۳}a\right)=-۲۴ \Rightarrow a^۲=۳۶ \Rightarrow \begin{cases}a=۶ \xrightarrow{(*)} b=-۴\\ \text{یا}\\ a=-۶ \xrightarrow{(*)} b=۴\end{cases} \Rightarrow a+b=۲ \text{ یا } -۲\end{cases}$$

۱۹۴ ۳ ابتدا معکوس تابع f را می‌یابیم:

$$f=\{(-۱,۲),(۳,۴),(۲,۱),(-۲,۳)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(۲,-۱),(۴,۳),(۱,۲),(۳,-۲)\}$$

طبق فرض نمودار تابع g، معکوس تابع f را در نقاط به طول ۳ و ۲ قطع می‌کند. با توجه به تابع f^{-1}، این نقاط $(۳,-۲)$ و $(۲,-۱)$ هستند که محل برخورد f^{-1} و g هستند. پس مختصات این نقاط در ضابطهٔ g صدق می‌کنند:

$$g(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases}(۳,-۲)\in g: -۲=۳a+b\\ (۲,-۱)\in g: -۱=۲a+b\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=-۱, b=۱ \Rightarrow g(x)=-x+۱$$

حال $g^{-1}(۴)$ را می‌یابیم:

$$y=-x+۱ \Rightarrow x=۱-y \Rightarrow g^{-1}(x)=۱-x \xrightarrow{x=۴} g^{-1}(۴)=۱-۴=-۳$$

۱۹۵ ۴ با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر این دو تابع را در نقاط به طول‌های ۱، ۲ و -۱ به‌دست آورده و در کسر داده‌شده جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{(f-g)(۱)}{(f+g)(۲)+(f.g)(-۱)}=\frac{f(۱)-g(۱)}{f(۲)+g(۲)+f(-۱).g(-۱)}=\frac{۱-(-۲)}{۲+(-۱)+(۱)(-۲)}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

۱۹۶ ۳ با توجه به دامنهٔ تابع $g=\{(۲,۰),(۳,۲),(۴,۳)\}$ داریم:

$$D_{\frac{۱}{g}}=D_g-\{x\mid g=۰\}=\{۲,۳,۴\}-\{۲\}=\{۳,۴\}$$

بنابراین:

$$x=۳ \xrightarrow{\frac{۱}{g}} \frac{۱}{g(۳)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \left(۳,\frac{۱}{۲}\right) \quad , \quad x=۴ \xrightarrow{\frac{۱}{g}} \frac{۱}{g(۴)}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \left(۴,\frac{۱}{۳}\right) \Rightarrow \frac{۱}{g}=\left\{\left(۳,\frac{۱}{۲}\right),\left(۴,\frac{۱}{۳}\right)\right\}$$

۱۹۷ ۱ دامنهٔ توابع f و g برابر $D_f=\{۱,۲\}$ و $D_g=\{۲,۵\}$ می‌باشد. حال با توجه به تعریف دامنهٔ تابع $f+۲g$ داریم:

$$D_{f+۲g}=D_f \cap D_{۲g} \xrightarrow{D_{۲g}=D_g} D_f \cap D_g=\{۱,۲\}\cap\{۲,۵\}=\{۲\}$$

$$(f+۲g)(۲)=f(۲)+۲g(۲) \xrightarrow[(۲,۳)\in g\Rightarrow g(۲)=۳]{(۲,۵)\in f\Rightarrow f(۲)=۵} ۵+۲(۳)=۱۱ \Rightarrow (۲,۱۱)\in f+۲g \xrightarrow[\text{۱ زوج مرتب دارد.}]{\text{تنها } f+۲g} f+۲g=\{(۲,۱۱)\}$$

۱۹۸ ۲ ابتدا با توجه به تابع f، معکوس آن را می‌یابیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴)\}$$

حال دامنهٔ $f+f^{-1}$ را یافته و سپس عضوهای آن را مشخص می‌کنیم:

$$D_{f+f^{-1}}=D_f \cap D_{f^{-1}}=\{۱,۲,۳,۴\}\cap\{۲,۳,۴,۵\}=\{۲,۳,۴\} \Rightarrow f+f^{-1}=\{(۲,۳+۱),(۳,۴+۲),(۴,۵+۳)\}=\{(۲,۴),(۳,۶),(۴,۸)\}$$

برد $f+f^{-1}$ برابر $\{۴,۶,۸\}$ است که مجموع عضوهای آن $۱۸=۸+۶+۴$ می‌شود.

@khanenbook

۱۹۹ ۴ دامنهٔ توابع f و g برابر $D_g = D_f = \{1,2,3\}$ می‌باشد. حال طبق تعریف دامنهٔ تابع $\frac{2f}{g}$ داریم:

$$D_{\frac{2f}{g}} = D_{2f} \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \xrightarrow{D_{2f} = D_f} D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{1,2,3\} \cap \{1,2,3\} - \{3\} = \{1,2\}$$

دقت کنید که به‌ازای $x = 3$، مقدار تابع g برابر صفر می‌شود (زیرا $(3,0) \in g \Rightarrow g(3) = 0$) پس باید $x = 3$ را از اشتراک دامنه‌های توابع f و g حذف کنیم. حال با توجه به دامنهٔ تابع $\frac{2f}{g}$، آن را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x = 1: (\frac{2f}{g})(1) = \frac{2f(1)}{g(1)} = \frac{2 \times 2}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow (1, \frac{4}{5}) \in \frac{2f}{g} \\ x = 2: (\frac{2f}{g})(2) = \frac{2f(2)}{g(2)} = \frac{2 \times 3}{6} = 1 \Rightarrow (2,1) \in \frac{2f}{g} \end{cases} \Rightarrow \frac{2f}{g} = \{(1, \frac{4}{5}), (2,1)\}$$

۲۰۰ ۴ دامنهٔ توابع f و g هر دو {2} می‌باشد. زیرا فقط شامل یک زوج مرتب هستند. بنابراین با توجه به تعریف دامنهٔ تابع f.g داریم:

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{2\} \Rightarrow (f.g)(2) = f(2).g(2) \xrightarrow[(2,7) \in g]{(2,5) \in f} 5 \times 7 = 35 \Rightarrow f.g = \{(2,35)\}$$

۲۰۱ ۱ $f = \{(2,5),(x,4),(1,z)\} \Rightarrow D_f = \{2,x,1\}$, $g = \{(1,2),(3,5),(5,6)\} \Rightarrow D_g = \{1,3,5\}$

$$2f + g = \{(1,z+1),(3,y)\} \Rightarrow D_{2f+g} = \{1,3\} \xrightarrow{D_{2f+g} = D_f \cap D_g} D_f \cap D_g = \{1,3\}$$

اشتراک دامنهٔ توابع f و g دو عدد ۱ و ۳ است. پس هر دو تابع f و g باید در دامنه‌شان اعداد ۱ و ۳ را داشته باشند، چون $D_f = \{2,x,1\}$، پس x باید عدد ۳ باشد از طرفی داریم:

$$x = 1: 2f(1) + g(1) = 2z + 2 \xrightarrow[(1,z+1) \in 2f+g]{\text{طبق فرض}} z + 1 \Rightarrow 2z + 2 = z + 1 \Rightarrow z = -1$$

$$x = 3: 2f(3) + g(3) = 2(4) + 5 \xrightarrow[(3,y) \in 2f+g]{\text{طبق فرض}} y \Rightarrow y = 2(4) + 5 = 13$$

بنابراین:

$$x + y + z = 3 + 13 - 1 = 15$$

۲۰۲ ۳ با توجه به توابع $g = \{(1,3),(3,1),(3,4)\}$ و $2f + g = \{(1,5),(3,6)\}$ داریم:

$$D_{2f+g} = D_f \cap D_g \xrightarrow[2f+g]{\text{با توجه به تابع}} \{1,3\}$$

پس ۳ و ۱ در دامنهٔ هر دو تابع f و g باید باشد که در اشتراک آن‌ها بوده است. پس $3,1 \in D_f$ از طرفی داریم:

$$(2f+g)(1) = 5 \Rightarrow 2f(1) + g(1) = 5 \xrightarrow{(1,3) \in g} 2f(1) + 3 = 5 \Rightarrow 2f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$(2f+g)(3) = 6 \Rightarrow 2f(3) + g(3) = 6 \xrightarrow{(3,4) \in g} 2f(3) + 4 = 6 \Rightarrow 2f(3) = 2 \Rightarrow f(3) = 1$$

پس فهمیدیم $(1,1) \in f$ و $(3,1) \in f$. امّا ممکن است تابع f زوج مرتب‌های دیگه‌ای هم داشته باشد مثلا (۷ و ۵) یا هر زوج مرتب دیگه‌ای که چون مؤلفهٔ اول آن‌ها با مؤلفهٔ اول زوج‌مرتب‌های تابع g یکسان نبوده در دامنهٔ مشترک دو تابع f و g نیومده و در نتیجه ما آن‌ها را در تابع $2f + g$ نمی‌بینیم پس گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): همان‌طور که گفتیم برد تابع شامل ۱ و هر عدد دیگه‌ای می‌تواند باشد، مثلاً میشه تابع f را به صورت $\{(1,1),(3,1),(5,7)\}$ در نظر گرفت که در این صورت ۷ نیز در برد f وجود دارد پس برد f می‌تواند تک‌عضوی نباشد بلکه چندعضوی باشد. این گزینه غلط است.

گزینهٔ (۲): دامنه f اعضای ۱ و ۳ را دارد ولی اگر تابع را مثلاً به صورت $\{(1,1),(3,1),(5,7)\}$ در نظر بگیریم در آن صورت ۵ نیز عضو دامنه بوده و لذا دامنهٔ f الزاماً به صورت $\{1,3\}$ نیست. در حقیقت $\{1,3\}$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ f است.

گزینهٔ (۳): این گزینه درست است زیرا همان‌طوری که گفتیم تنها شرطی که مسأله برای تابع f ایجاد می‌کند این است که حتماً باید زوج‌مرتب‌های (۱,۱) و (۳,۱) را داشته باشد و هیچ شرطی روی سایر زوج‌مرتب‌های f قرار نمی‌دهد و تابع f می‌تواند هر چند تا زوج‌مرتب دیگه داشته باشد. در زیر نشان می‌دهیم که f را مثلاً به صورت $f = \{(1,1),(3,1),(4,5)\}$ نیز درنظر بگیریم، جواب، درست در می‌آید:

$$\begin{matrix} f = \{(1,1),(3,1),(4,5)\} \\ g = \{(1,3),(2,1),(3,4)\} \end{matrix} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1,3\} \Rightarrow 2f + g = \{(1,5),(3,6)\} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۴): همان‌طوری که در گزینه‌های قبلی بحث کردیم تابع f حداقل ۲ زوج‌مرتب (۱,۱) و (۳,۱) را دارد. پس این گزینه در حالت کلی درست **نمی‌باشد.**

۲۰۳ ۲

$$(2f - g)(3) = (2f)(3) - g(3) = 2f(3) - g(3) \xrightarrow[g(x) = \frac{x+1}{x-2}]{f(x) = \sqrt{x+1}} 2\sqrt{3+1} - \frac{3+1}{3-2} = 4 - 4 = 0$$

@khanehbook

۲۰۴ ۲ با توجه به توابع $f(x)=ax^2+2x+3$ و $g(x)=2x+a+5$ داریم:

$$(2f-3g)(2)=2f(2)-3g(2)=2(a(2)^2+2(2)+3)-3(2(2)+a+5)=2(4a+7)-3(9+a)=8a+14-27-3a$$

$$=5a-13 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 2 \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3$$

بنابراین $f(x)=3x^2+2x+3$ شده و داریم:

$$f(a) \xrightarrow{a=3} f(3)=3(3)^2+2(3)+3=27+6+3=36$$

۲۰۵ ۴ با توجه به آن‌که $f(0)=-1-1=-2$ می‌شود، باید مقدار $f+2g$ را به‌ازای $x=-1$ به‌دست آوریم. بنابراین داریم:

$$(f+2g)(-1)=f(-1)+2g(-1) \xrightarrow[-1\geq -2 \Rightarrow g \text{ ضابطهٔ بالایی}]{-1\leq 0 \Rightarrow f \text{ ضابطهٔ پایینی}} (-1-1)+2(-1)=-2-2=-4$$

۲۰۶ ۱ ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow D_f=(-3,+\infty)$$

$$\Rightarrow D_f \cap D_g=(-3,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow D_g=(-3,+\infty)$$

حال با توجه به تعریف دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ داریم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}=(-3,+\infty)-\left\{x \mid \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}=0\right\}=(-3,+\infty)-\{x \mid x-1=0\}=(-3,+\infty)-\{1\}$$

۲۰۷ ۱

$$D_{\frac{f^{-1}}{f}}=D_{f^{-1}} \cap D_f-\{x \mid f(x)=0\}$$

ابتدا دامنهٔ f را می‌یابیم:

$$f(x)=\sqrt{1-x}-2 \Rightarrow 1-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1: D_f:(-\infty,1]$$

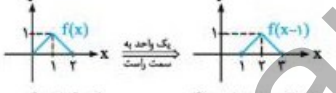
از طرفی می‌دانیم دامنهٔ f^{-1} همان برد f است. پس باید برد تابع f را به دست آوریم:

$$\sqrt{1-x}\geq 0 \xrightarrow{-2} \underbrace{\sqrt{1-x}-2}_{f(x)}\geq -2 \Rightarrow f(x)\geq -2 \Rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=[-2,+\infty)$$

بنابراین داریم:

$$D_{\frac{f^{-1}}{f}}=[-2,+\infty) \cap (-\infty,1]-\{x \mid \sqrt{1-x}-2=0\}=[-2,1]-\{\sqrt{1-x}=2 \Rightarrow 1-x=4 \Rightarrow x=-3\}=[-2,1]-\{-3\}=[-2,1]$$

۲۰۸ ۳ برای رسم نمودار تابع $f(x-1)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم:



دامنهٔ f: $[0,2]$ — دامنهٔ $f(x-1)$: $[1,3]$

$$D_{\frac{f(x-1)}{f(x)}}=D_{f(x-1)} \cap D_{f(x)}-\underbrace{\{x \mid f(x)=0\}}_{\text{ریشه‌های } f}=[1,3] \cap [0,2]-\{0,2\}=[1,2]-\{0,2\}=[1,2)$$

۲۰۹ ۱ با توجه به شکل، ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=[-1,2)-\{0\} \quad , \quad D_g=(-\infty,1]$$

حالا طبق تعریف دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ داریم:

$$D_{\frac{g}{f}}=D_g \cap D_f-\underbrace{\{x \mid f(x)=0\}}_{\text{ریشه‌های تابع } f \text{ یا همان طول نقاط برخورد نمودار } f \text{ با محور } x \text{ ها}}=(-\infty,1] \cap ([-1,2)-\{0\})-\{1,-1\}=[-1,0) \cup (0,1]-\{1,-1\}=(-1,0) \cup (0,1)$$

بنابراین دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌باشد.

۲۱۰ ۴ با توجه به توابع $f(x)=\frac{x+1}{x+3}$ و $g(x)=\frac{3x-6}{x+5}$ تابع $\left(\frac{f}{g}-\frac{g}{f}\right)$ را بدون ساده کردن تشکیل می‌دهیم:

$$\left(\frac{f}{g}-\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\frac{x+1}{x+3}}{\frac{3x-6}{x+5}}-\frac{\frac{3x-6}{x+5}}{\frac{x+1}{x+3}}$$

خب حالا محدودیت‌های ما این است که مخرج کسرهای کوچک و مخرج کسرهای بزرگ نباید صفر شود! داریم:

مخرج کسرهای کوچک: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$, $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

مخرج کسرهای بزرگ: $\frac{3x-6}{x+5}=0 \Rightarrow 3x-6=0 \Rightarrow x=2$, $\frac{x+1}{x+3}=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

پس دامنهٔ تابع مورد نظر برابر $\mathbb{R}-\{-3,-5,2,-1\}$ است یعنی شامل چهار عدد صحیح -3، -5، 2 و -1 نمی‌باشد.

@khanen_book

۲۱۱ ۲

$$f(x)=\sqrt{x-1}: x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow D_f=[1,+\infty)$$
$$g=\{(-1,2),(1,3),(2,2),(5,1)\} \Rightarrow D_g=\{-1,1,2,5\} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{1,2,5\}$$

حال اعداد ۵،۲،۱ را وارد تابع $\frac{f}{2f-g}$ می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=1: \frac{f(1)}{2f(1)-g(1)}=\frac{\sqrt{1-1}}{2\sqrt{1-1}-3}=\frac{\sqrt{0}}{2\sqrt{0}-3}=\frac{0}{-3}=0 & \checkmark \\ x=2: \frac{f(2)}{2f(2)-g(2)}=\frac{\sqrt{2-1}}{2\sqrt{2-1}-2}=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0} & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=5: \frac{f(5)}{2f(5)-g(5)}=\frac{\sqrt{5-1}}{2\sqrt{5-1}-1}=\frac{2}{2(2)-1}=\frac{2}{3} & \checkmark \end{cases}$$

پس $D_{\frac{f}{2f-g}}=\{1,5\}$ بوده و دو عضو دارد. ⇒

۲۱۲ ۲ با توجه به توابع f و g داریم:

$$f=\{(0,1),(2,-2),(3,-1)\},\ g=\{(-1,2),(2,1),(0,-2)\} \Rightarrow \begin{cases} D_f=\{0,2,3\} \\ D_g=\{-1,2,0\} \end{cases} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{0,2\}$$

حال اعداد ۰ و ۲ را در معادلهٔ $\frac{f}{g}+2g=0$ قرار می‌دهیم و می‌بینیم به‌ازای کدام‌یک از آن اعداد، معادله برقرار است:

$$x=0: \frac{f(0)}{g(0)}+2g(0)=\frac{1}{-2}+2(-2)=\frac{-1}{2}-4=\frac{-9}{2}\neq 0,\quad x=2: \frac{f(2)}{g(2)}+2g(2)=\frac{-2}{1}+2(1)=-2+2=0 \ \checkmark$$

پس فقط $x=2$ در معادلهٔ $\frac{f}{g}+2g=0$ صدق کرد و لذا معادلهٔ مذکور فقط ۱ جواب دارد.

۲۱۳ ۲

$$\begin{cases} (f+g)(x)=4x+1 \\ (f-g)(x)=3-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)=4x+1 \\ f(x)-g(x)=3-2x \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین دو معادله}} 2f(x)=4x+1+3-2x=2x+4 \Rightarrow f(x)=x+2$$

با جای‌گذاری f در یکی از معادلات، تابع g را می‌یابیم:

$$f(x)+g(x)=4x+1 \xrightarrow{f(x)=x+2} x+2+g(x)=4x+1 \Rightarrow g(x)=3x-1$$

بنابراین:

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(x+2)(3x-1) \xrightarrow{\text{محاسبهٔ ریشه‌ها}} (x+2)(3x-1)=0 \Rightarrow x=-2,\ \frac{1}{3} \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$$

۲۱۴ ۱ ابتدا معکوس تابع $f(x)=2x-1$ را به دست می‌آوریم:

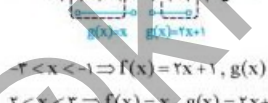
$$y=2x-1 \Rightarrow y+1=2x \Rightarrow x=\frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$$

بنابراین:

$$y=2f^{-1}(x)+f(x)=2\left(\frac{x+1}{2}\right)+2x-1=3x \Rightarrow y=3x$$

تابع حاصل محور xها را با طول صفر قطع می‌کند.

۲۱۵ ۳ ابتدا با توجه به توابع $f(x)=\begin{cases} x & ,\ x>2 \\ 2x+1 & ,\ -4<x<-1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} 2x+1 & ,\ 1<x<3 \\ x & ,\ -3<x<0 \end{cases}$ شکل زیر را می‌کشیم:



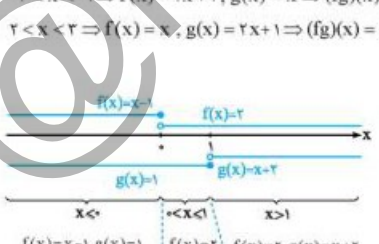
می‌دانیم $D_{fg}=D_f\cap D_g$ است. از طرفی با توجه به محورهای فوق دامنهٔ مشترک توابع f و g به صورت $(-3,-1)\cup(2,3)$ است. حال در این دامنهٔ مشترک توابع f و g را در هم ضرب می‌کنیم:

$$-3<x<-1 \Rightarrow f(x)=2x+1,\ g(x)=x \Rightarrow (fg)(x)=(2x+1)(x)=2x^2+x$$
$$2<x<3 \Rightarrow f(x)=x,\ g(x)=2x+1 \Rightarrow (fg)(x)=x(2x+1)=2x^2+x$$

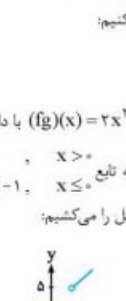
پس $(fg)(x)=2x^2+x$ با دامنهٔ $(-3,-1)\cup(2,3)$ است.

۲۱۶ ۱ با توجه به تابع $f(x)=\begin{cases} 2 & ,\ x>0 \\ x-1 & ,\ x\leq 0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+2 & ,\ x>1 \\ 1 & ,\ x\leq 1 \end{cases}$

شکل مقابل را می‌کشیم:



$$\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} x & ;\ x\leq 0 \\ 3 & ;\ 0<x\leq 1 \\ x+4 & ;\ x>1 \end{cases}$$



@khaneh_book

۲۱۷ ۳ دامنهٔ توابع f و g به ترتیب برابر $D_f=\{1,2,3\}$ و $D_g=\{1,2,5\}$ می‌باشد. لذا $D_f\cap D_g=\{1,2\}$ است. حال ۱ و ۲ را وارد تابع $f.g-\frac{f}{g}$ می‌کنیم:

$$x=1:\left(f.g-\frac{f}{g}\right)(1)=f(1)g(1)-\frac{f(1)}{g(1)}=2(0)-\frac{2}{0}=-\frac{2}{0}$$ (مخرج صفر شد) غ ق ق

↳ به‌ازای x=1 تابع g صفر می‌شود، زیرا g(1)=0.

$$x=2:\left(f.g-\frac{f}{g}\right)(2)=f(2).g(2)-\frac{f(2)}{g(2)}=4\times1-\frac{4}{1}=4-4=0\Rightarrow f.g-\frac{f}{g}=\{(2,0)\}$$

۲۱۸ ۳

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}\Rightarrow 1-x>0\Rightarrow x<1\Rightarrow D_f=(-\infty,1)\\ g=\{(-1,1),(-2,3),(0,1),(1,5)\}\Rightarrow D_g=\{-1,-2,0,1\}\end{cases}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{-1,-2,0\}$$

حال راه آسان این است که اعضای دامنهٔ مشترک f و g یعنی اعداد ۰، ۲- و ۱- را وارد تابع می‌کنیم و ببینیم کدام اعضاء مشکلی برای تابع $\frac{2g}{f}$ ایجاد نمی‌کنند:

$$x=0:\frac{2g(0)}{f(0)}=\frac{2(1)}{\frac{0}{\sqrt{1-0}}}=\frac{2}{\frac{0}{1}}=\frac{2}{0}$$ (مخرج صفر شد) غ ق ق ، $$x=-1:\frac{2g(-1)}{f(-1)}=\frac{2(1)}{\frac{-1}{\sqrt{1-(-1)}}}=\frac{2}{\frac{-1}{\sqrt{2}}}=-2\sqrt{2}$$ ✓

$$x=-2:\frac{2g(-2)}{f(-2)}=\frac{2(3)}{\frac{-2}{\sqrt{1-(-2)}}}=\frac{6}{\frac{-2}{\sqrt{3}}}=-3\sqrt{3}$$ ✓

پس برد تابع $\frac{2g}{f}$ به صورت $\{-2\sqrt{2},-3\sqrt{3}\}$ است که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر می‌شود با:

$$(-2\sqrt{2})(-3\sqrt{3})=6\sqrt{6}$$

۲۱۹ ۱ با توجه به توابع $f=\{(-1,0),(1,-1),(2,2),(-3,9)\}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ داریم:

$$\begin{cases}D_g: x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2\Rightarrow D_g=[-2,+\infty)\\ D_f=\{-1,1,2,-3\}\end{cases}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{-1,1,2\}$$

یک راه خوب این است که xهای مشترک به دست آمده را در تابع $\frac{2g+1}{\sqrt{f}}$ قرار دهیم و هر کدام که مشکلی برای دامنهٔ تابع ایجاد نکرد را قبول کنیم:

$$x=-1\to\frac{2g(-1)+1}{\sqrt{f(-1)}}=\frac{2\sqrt{-1+2}+1}{\sqrt{0}}=\frac{2(1)+1}{0}=\frac{3}{0}$$ (مخرج صفر شد) غ ق ق

$$x=1\to\frac{2g(1)+1}{\sqrt{f(1)}}=\frac{2\sqrt{1+2}+1}{\sqrt{-1}}=\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{-1}}$$ (زیر رادیکال منفی شد) غ ق ق

$$x=2\to\frac{2g(2)+1}{\sqrt{f(2)}}=\frac{2\sqrt{2+2}+1}{\sqrt{2}}=\frac{2\times2+1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow\left(2,\frac{5}{2}\right)$$

پس نمودار تابع $\frac{2g+1}{\sqrt{f}}$، تنها از یک نقطه تشکیل شده است.

۲۲۰ ۳

$$f=\{(-1,2),(2,2),(11,1)\}\Rightarrow D_f=\{-1,2,11\}\ ,\ g(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & x\geq 2\\ \frac{x}{x-3} & x<2\end{cases}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{-1,2,11\}$$

حال اعداد ۱-، ۲، ۱۱ را وارد تابع $\frac{f}{g}$ می‌کنیم:

$$x=-1\Rightarrow\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{2}{\frac{-1}{-1-3}}=\frac{2}{\frac{-1}{-4}}=8\ ,\ x=2\Rightarrow\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{2}{\sqrt{2-2}}=\frac{2}{0}$$ غ ق ق ، $$x=11\Rightarrow\frac{f(11)}{g(11)}=\frac{1}{\sqrt{11-2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{f}{g}=\left\{(-1,8),\left(11,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

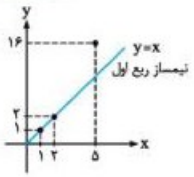
۲۲۱ ۳ ابتدا از روی تابع g^{-1}، تابع g را با جابه‌جا کردن جای مؤلفه‌ها به دست می‌آوریم:

$$g^{-1}=\{(1,1),(4,2),(2,5)\}\Rightarrow g=\{(1,1),(2,4),(5,2)\}$$

دامنه 2f - g همان $D_f\cap D_g$ است:

$$\begin{cases}f(x)=2x-1\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\\ D_g=\{1,2,5\}\end{cases}\Rightarrow D_{2f-g}=D_f\cap D_g=\{1,2,5\}$$

@khanenbook



حال تابع $۲f-g$ را می یابیم:

$$x=۱: ۲f(۱)-g(۱)=۲(۲(۱)-۱)-۱=۲(۱)-۱=۱ \Rightarrow (۱,۱)$$
$$x=۲: ۲f(۲)-g(۲)=۲(۲(۲)-۱)-۴=۲(۳)-۴=۲ \Rightarrow (۲,۲)$$
$$x=۵: ۲f(۵)-g(۵)=۲(۲(۵)-۱)-۲=۲(۹)-۲=۱۶ \Rightarrow (۵,۱۶)$$

پس $۲f-g=\{(۱,۱),(۲,۲),(۵,۱۶)\}$. از این سه نقطهٔ حاصل، دو نقطهٔ $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ روی نیمساز ربع اول قرار دارند، زیرا x و y این نقاط یکسان است.

۲۲۲ ۴ با فرض $f(x)=\sqrt{|x|-۱}$ و $g(x)=\sqrt{|x|+۱}$ داریم:

D_f محاسبهٔ: $|x|-۱\geq ۰ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۱$ یا $x\leq -۱$

D_g محاسبهٔ: $|x|+۱\geq ۰ \Rightarrow$ همواره برقرار $\Rightarrow x\in \mathbb{R}$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(x)+g(x)$ برابر می‌شود با:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=(x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱)\cap \mathbb{R}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)=\mathbb{R}-(-۱,۱)$$

۲۲۳ ۲ ابتدا دامنهٔ توابع $f(x)=\sqrt{x+a}$ و $g(x)=\sqrt{b-x}$ را بیابیم:

$$\begin{cases} D_f: x+a\geq ۰ \Rightarrow x\geq -a \\ D_g: b-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq b \end{cases} \Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-a,b]$$

از طرفی تابع $f+g$ به صورت $\{(۲,c)\}$ داده شده است. یعنی دامنهٔ تابع $f+g$ فقط $x=۲$ است. داریم:

$$[-a,b]=\{۲\} \Rightarrow -a=b=۲ \Rightarrow a=-۲, b=۲ \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+a} \xrightarrow{a=-۲} \sqrt{x-۲}, g(x)=\sqrt{b-x} \xrightarrow{b=۲} \sqrt{۲-x}$$

حال برای محاسبه c، مقدار تابع $f+g$ در $x=۲$ را می‌یابیم:

$$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=\sqrt{۲-۲}+\sqrt{۲-۲}=۰+۰=۰ \xrightarrow{\text{طبق فرض}} c=۰$$

لذا:

$$ab+c=(-۲)(۲)+۰=-۴$$

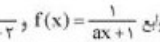
۲۲۴ ۳ با فرض $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{-۱}{x^۲+۲x}}$ داریم:

D_f محاسبهٔ: $x^۲+۲x\geq ۰ \Rightarrow$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
$x^۲+۲x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty)$$

D_g محاسبهٔ: $\frac{-۱}{x^۲+۲x}\geq ۰ \Rightarrow x^۲+۲x<۰ \xrightarrow[\text{فوق}]{\text{با توجه به جدول}} D_g=(-۲,۰)$



$$\Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=((-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty))\cap(-۲,۰)=\varnothing$$

۲۲۵ ۴ با توجه به توابع $f(x)=\frac{۱}{ax+۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{bx+۲}$، چون دامنهٔ تابع $f\times g$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که $x=۲$ ریشه مخرج حداقل یکی از توابع f و g است. یعنی $x=۲$ مخرج یکی از توابع f و g یا مخرج هر دو تابع f و g را صفر می‌کند. حال این حالات را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x=۲$ فقط ریشهٔ مخرج تابع f باشد.

$$f(x)=\frac{۱}{ax+۱}: ax+۱ \xrightarrow{x=۲} ۰ \Rightarrow ۲a+۱=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

در این صورت باید مخرج g ریشهٔ نداشته باشد، زیرا مثلاً اگر ریشه‌اش $x_۱$ باشد در این صورت دامنهٔ fg به صورت $\mathbb{R}-\{۲,x_۱\}$ در می‌آید که خلاف فرض است. بنابراین در تابع g باید $b=۰$ باشد:

$$g(x)=\frac{۱}{bx+۲} \xrightarrow{b=۰} g(x)=\frac{۱}{۰+۲}=\frac{۱}{۲}$$

در این حالت $a+b=-\frac{۱}{۲}+۰=-\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

حالت دوم: $x=۲$ فقط ریشهٔ مخرج تابع g باشد.

$$g(x)=\frac{۱}{bx+۲}: bx+۲ \xrightarrow{x=۲} ۰ \Rightarrow ۲b+۲=۰ \Rightarrow b=-۱ \quad , \quad f(x)=\frac{۱}{ax+۱} \xrightarrow{a=۰} f(x)=۱$$

در این حالت $a+b=۰-۱=-۱$ می‌شود.

حالت سوم: $x=۲$ ریشهٔ مخرج هر دو تابع f و g باشد:

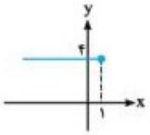
$$f(x)=\frac{۱}{ax+۱}: ax+۱ \xrightarrow{x=۲} ۰ \Rightarrow ۲a+۱=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \quad , \quad g(x)=\frac{۱}{bx+۲}: bx+۲ \xrightarrow{x=۲} ۰ \Rightarrow ۲b+۲=۰ \Rightarrow b=-۱$$

در این حالت $a+b=-\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۳}{۲}$ می‌شود. لذا گزینهٔ (۴) غلط است.

@khanehbook

۲۲۶ ۳

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+2+\sqrt{1-x}=4$$

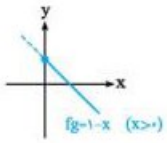


تابع $f+g$ تابع ثابت ۴ است. البته چون دامنهٔ f و g هر دو $x\le 1$ است. پس دامنهٔ $f+g$ نیز $x\le 1$ است. لذا باید تابع ثابت $y=4$ را در بازهٔ $(-\infty,1]$ رسم کنیم:

۲۲۷ ۴

ابتدا دامنهٔ fg را می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(x)=1-\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[0,+\infty) \\ g(x)=\sqrt{x}+1 \Rightarrow D_g=[0,+\infty) \end{cases} \Rightarrow D_{f.g}=D_f\cap D_g=[0,+\infty)$$



حال برویم سراغ ضابطهٔ fg:

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\underbrace{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=1^2-(\sqrt{x})^2=1-x$$

x	0	1
y	1	0

پس نمودار تابع $(fg)(x)=1-x$ به صورت مقابل است. البته حواستان به دامنهٔ آن یعنی $x\ge 0$ باشد. با توجه به شکل، نمودار fg فقط از نواحی اول و چهارم می‌گذرد.

۲۲۸ ۱

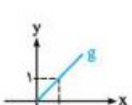
$$(f+g)(x)=1\Rightarrow f(x)+g(x)=1 \xrightarrow{f(x)=\frac{1}{x+a}} \frac{1}{x+a}+g(x)=1\Rightarrow g(x)=1-\frac{1}{x+a}\Rightarrow g(x)=\frac{x+a-1}{x+a} \quad (*)$$

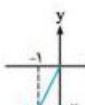
از طرفی با توجه به نمودار $D_{f+g}=\mathbb{R}-\{1\}$ است. پس $x=1$ ریشهٔ مخرج تابع f است:

$$x+a \xrightarrow{x=1} 0\Rightarrow 1+a=0\Rightarrow a=-1 \xrightarrow{(*)} g(x)=\frac{x-1-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}\ ,\ g(a+3)\xrightarrow{a=-1} g(-1+3)=g(x)=\frac{2-2}{2-1}=\frac{0}{1}=0$$

۲۲۹ ۳

با توجه به نمودار توابع f و g دامنهٔ آن‌ها و سپس دامنهٔ تابع $2f-g$ را می‌یابیم:



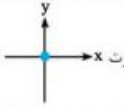


$$D_f:(-\infty,0]\ ,\ D_g=[0,+\infty)$$

$$D_{2f-g}=D_f\cap D_g=(-\infty,0]\cap[0,+\infty)=\{0\}$$

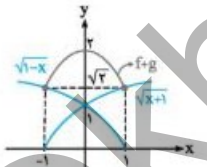
پس تابع $2f-g$ تنها شامل یک زوج مرتب است:

$$x=0: 2f(0)-g(0)=2(0)-0=0\Rightarrow (0,0)\in 2f-g$$

و نمودار آن به صورت  است:

۲۳۰ ۳

برای تشخیص گزینهٔ درست، چند نقطه از نمودار $f+g$ را به دست می‌آوریم:



$$x=0: (f+g)(0)=\sqrt{0+1}+\sqrt{1-0}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\Rightarrow (0,2)$$

$$x=-1: (f+g)(-1)=\sqrt{-1+1}+\sqrt{1-(-1)}=0+\sqrt{2}\Rightarrow (-1,\sqrt{2})$$

$$x=1: (f+g)(1)=\sqrt{1+1}+\sqrt{1-1}=\sqrt{2}+0\Rightarrow (1,\sqrt{2})$$

و در ضمن حواستان باشد که D_{f+g} برابر اشتراک دامنه‌های f و g است:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-1,+\infty)\cap(-\infty,1]=[-1,1]$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲۳۱ ۲

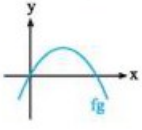
ابتدا با توجه به نمودارهای f و g، ضابطه‌های آن‌ها را می‌یابیم:

$$(0,0)\ \text{و}\ (-1,1)\in f\Rightarrow f(x)=-x$$

$$(1,0)\ \text{و}\ (0,-1)\in g\ ,\ m=\frac{0-(-1)}{1-0}=1\Rightarrow y-0=1(x-1)\Rightarrow y=x-1\Rightarrow g(x)=x-1$$

بنابراین:

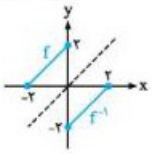
$$(fg)(x)=f(x)g(x)=-x(x-1)$$



تابع fg تابعی درجه دوم است که ریشه‌های ۰ و ۱ بوده و چون ضریب x^2 منفی است رو به پایین می‌باشد:

@khanen_book

۲۳۲ ۳ تابع f خطی است. معادلهٔ آن را می‌یابیم:



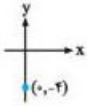
$$(0,2),(-2,0)\in f \Rightarrow f(x)=x+2 \qquad x\in[-2,0]$$

حال معکوس آن را حساب می‌کنیم:

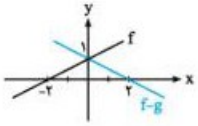
$$y=x+2 \Rightarrow y-2=x \Rightarrow f^{-1}(x)=x-2 \qquad x\in[0,2]$$

اشتراک دامنه‌های f و f^{-1} برابر $D_{f\times f^{-1}}=D_f\cap D_{f^{-1}}=\{0\}$ است. داریم:

$$f\times f^{-1}(0)=f(0)\times f^{-1}(0)=2(-2)=-4 \xrightarrow{\text{نمودار تک نقطه است.}}$$



۲۳۳ ۲ ابتدا با توجه به نمودارهای داده‌شده، ضابطه‌های توابع f و g - f را به دست می‌آوریم:



$$(0,1),(-2,0)\in f: m=\frac{1-0}{0-(-2)}=\frac{1}{2},\quad y-1=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x+1 \quad (*)$$

$$(0,1),(2,0)\in f-g: m=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2},\quad y-1=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

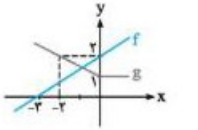
حال ضابطهٔ تابع g(x) را می‌یابیم:

$$(f-g)(x)=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}x+1 \xrightarrow{(*)} \frac{1}{2}x+1-g(x)=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}x-1=x$$

بنابراین:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)+x=\frac{3}{2}x+1$$

۲۳۴ ۲ ابتدا با توجه به نمودار توابع f و g، ضابطه‌های f و g را یافته و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:



$$(0,2),(-3,0)\in f,\quad m=\frac{2-0}{0-(-3)}=\frac{2}{3}$$

$$y-2=\frac{2}{3}(x-0)\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+2\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x+2$$

به‌طور مشابه برای تابع g عمل می‌کنیم. فقط چون تابع g در $x=0$ قیافه‌اش عوض شده، پس تابع g دو قسمتی است.

$$\begin{cases} x\le 0:(0,1),(-2,2)\in g & m=\frac{1-2}{0-(-2)}=-\frac{1}{2},\ y-1=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x+1 \\ x>0: g(x)=1 \end{cases}$$

بنابراین: $g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1 & ; x\le 0\\ 1 & ; x>0\end{cases}$ و $f(x)=\frac{2}{3}x+2$. در نتیجه:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)+\left(\frac{2}{3}x+2\right) & ; x\le 0\\ 1+\left(\frac{2}{3}x+2\right) & ; x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{6}x+3 & ; x\le 0\\ \frac{2}{3}x+3 & ; x>0\end{cases}$$

حال برای محاسبهٔ محل برخورد تابع f + g با محور xها، معادلهٔ $f+g=0$ را حل می‌کنیم:

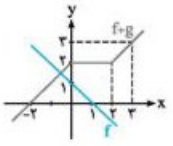
$$x\le 0:\frac{1}{6}x+3=0\Rightarrow\frac{1}{6}x=-3\Rightarrow x=-18$$

$$x>0:\frac{2}{3}x+3=0\Rightarrow\frac{2}{3}x=-3\Rightarrow 2x=-9\Rightarrow x=-\frac{9}{2}=-4/5 \xrightarrow{\text{x باید مثبت باشد}} \text{غ ق ق}$$

پس نمودار f + g محور x ها را در ۱۸- قطع می‌کند.

@khaneh_book

۲۳۵ ۳ ابتدا با توجه به نمودارهای داده‌شده، ضابطه‌های $f+g$ و f را به دست می‌آوریم:



$$(۰,۱),(۱,۰)\in f \Rightarrow f(x)=۱-x$$

تابع $f+g$ از سه قسمت تشکیل شده است. معادلهٔ هر قسمت را باید جداگانه به دست آوریم:

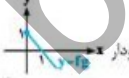
$$\begin{cases} x\le ۰:(-۲,۰),(۰,۲)\Rightarrow y=x+۲ \\ ۰<x<۲: \text{تابع ثابت}\Rightarrow y=۲ \\ x\ge ۲:(۲,۲),(۳,۳)\Rightarrow y=x \end{cases} \Rightarrow f+g=\begin{cases} x+۲ & ; \ x\le ۰ \\ ۲ & ; \ ۰<x<۲ \\ x & ; \ x\ge ۲ \end{cases}$$

چون تابع f یک ضابطه‌ای و تابع $f+g$، سه ضابطه‌ای است، باید از تک‌تک ضابطه‌های $f+g$، تابع f را کم کنیم تا تابع g به دست آید:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+۲ & ; \ x\le ۰ \\ ۲ & ; \ ۰<x<۲ \\ x & ; \ x\ge ۲ \end{cases} \xrightarrow{f(x)=۱-x} (۱-x)+g(x)=\begin{cases} x+۲ & ; \ x\le ۰ \\ ۲ & ; \ ۰<x<۲ \\ x & ; \ x\ge ۲ \end{cases}$$

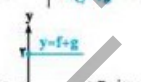
$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} x+۲-(۱-x) & ; \ x\le ۰ \\ ۲-(۱-x) & ; \ ۰<x<۲ \\ x-(۱-x) & ; \ x\ge ۲ \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \ x\le ۰ \\ x+۱ & ; \ ۰<x<۲ \\ ۲x-۱ & ; \ x\ge ۲ \end{cases}$$

۲۳۶ ۴ با توجه به نمودار fg می‌توان ضابطهٔ fg را به دست آورد:



$$\begin{cases} (۰,۱) \\ (۱,۰) \end{cases} \Rightarrow m=\frac{۱-۰}{۰-۱}=-۱ \Rightarrow y-۰=-۱(x-۱) \Rightarrow y=-x+۱ \Rightarrow fg(x)=۱-x \quad (*)$$

از طرفی طبق نمودار داریم:



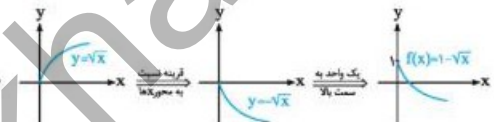
$$f+g=۲ \Rightarrow g=۲-f \xrightarrow[\text{در } (*)]{\text{جایگذاری}} f(۲-f)=۱-x \Rightarrow ۲f-f^۲=۱-x$$

$$\Rightarrow f^۲-۲f+(۱-x)=۰ \xrightarrow[\text{دلتا}]{\text{حل به روش}} f=\frac{-(-۲)\pm\sqrt{(-۲)^۲-۴(۱)(۱-x)}}{۲(۱)}=\frac{۲\pm\sqrt{۴-۴+۴x}}{۲} \Rightarrow f=\frac{۲\pm\sqrt{۴x}}{۲}=\frac{۲\pm ۲\sqrt{x}}{۲}=۱\pm\sqrt{x}$$

پس f می‌تواند $f(x)=۱+\sqrt{x}$ یا $f(x)=۱-\sqrt{x}$ باشد. حال نمودار f را در هر دو حالت رسم می‌کنیم:

$f(x)=۱+\sqrt{x} \Rightarrow$

$f(x)=۱-\sqrt{x} \Rightarrow$



۲۳۷ ۱ ابتدا ضابطهٔ نمودارهای f و g را می‌یابیم. تابع f یک سهمی که رأس آن مبدأ مختصات بوده و از نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$y=ax^۲+bx+c \Rightarrow \begin{cases} (۰,۰)\in f \Rightarrow ۰+۰+c=۰ \Rightarrow c=۰ \\ \text{طول رأس سهمی}=۰ \Rightarrow \frac{-b}{۲a}=۰ \Rightarrow b=۰ \quad (*) \\ ۱=a+b+c \xrightarrow{(*)} a=۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^۲ : \text{ضابطهٔ سهمی}$$

نمودار سهمی از $(۱,۱)$ رد شده است.

از طرفی تابع خطی g از نقاط $(-۲,۰)$ و $(۰,-۱)$ عبور می‌کند:

$$m=\frac{-۱-۰}{۰-(-۲)}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-(-۲)) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x-۱ \Rightarrow g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۱$$

بنابراین:

$$(f-۲g)(x)=f(x)-۲g(x)=x^۲-۲(-\frac{۱}{۲}x-۱)=x^۲+x+۲$$

تابع حاصل، ریشه ندارد، زیرا $\Delta=۱^۲-۴(۱)(۲)=-۷$ منفی بوده، پس نمودار آن، محور xها را قطع نمی‌کند. لذا گزینهٔ (۱) یا (۳) صحیح است. از طرفی طول رأس سهمی $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۲}$ منفی است. لذا گزینهٔ (۱) جواب است.

@khanehbook

فصل ۴

MATHEMATICS

مثلثات

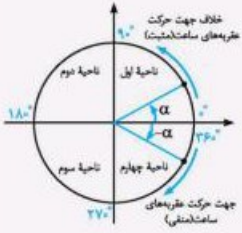
- درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
- درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
- درس سوم: توابع مثلثاتی

@khanebook

درس نامه ۱

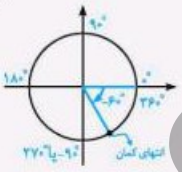
واحدهای اندازه‌گیری زاویه و طول کمان

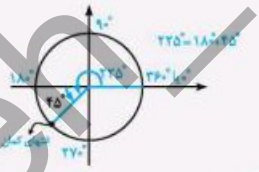
تعریف دایرهٔ مثلثاتی: دایره‌ای است جهت‌دار که جهت مثبت آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بوده و شعاع آن یک واحد می‌باشد. به طور مثال به زوایای α و $-\alpha$ در شکل روبه‌رو دقت کنید:



مثال انتهای کمان زوایای $-60°$ و $225°$ را روی دایرهٔ مثلثاتی بیابید.

پاسخ:





واحدهای اندازه‌گیری زاویه:

درجه: اگر محیط دایره‌ای به شعاع واحد را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، به هر قسمت یک درجه گفته می‌شود.

رادیان: کمانی از دایره که طول آن مساوی شعاع دایره باشد، یک رادیان است و زاویهٔ مرکزی مقابل به این کمان نیز یک رادیان می‌باشد.

سؤال دانش‌پژوه (روداب موتابی): ببخشید من مفهوم رادیان رو خوب متوجه نشدم. میشه بیشتر توضیح بدین؟

پاسخ: فرض کن یک دایره داریم که شعاع آن ۲/۳۵ سانتی‌متر است. حالا کمانی روی این دایره که اندازهٔ آون هم ۲/۳۵ سانتی‌متر باشه، برابر یک رادیان میشه. فله؟!

رابطهٔ تبدیل رادیان به درجه و بالعکس: اگر D بیانگر زاویه بر حسب درجه و R بیانگر زاویه بر حسب رادیان باشد، رابطهٔ زیر بین درجه و رادیان برقرار است:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

سؤال دانش‌پژوه (سکینه افشار): آقا راه راحت‌تری هم هست؟

پاسخ: همیشه راه راحت‌تری هم هست! دقت کنین:

برای تبدیل یک زاویه از **درجه به رادیان** کافیه اون زاویه رو در $\frac{\pi}{180°}$ ضرب کنید. مثلاً $90°$ بر حسب رادیان برابر است با:

$$90^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{2}$$

برای تبدیل یک زاویه از **رادیان به درجه** کافیه اون زاویه رو در $\frac{180°}{\pi}$ ضرب کنید. مثلاً $\frac{\pi}{3}$ رادیان بر حسب درجه برابر است با:

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{3} = 60^{\circ}$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر راستی): آقا چه‌طور حفظشون کنیم که قاطی نشن؟

پاسخ: کافیه یادت باشه صورت کسر همیشه برعکسه! وقتی از درجه می‌خواهیم تبدیل کنیم صورت π هست و وقتی از رادیان می‌خواهیم تبدیل کنیم صورت $180°$ است!

@khaneh_book

نکته اندازهٔ یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً **یک دور کامل** در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت بگردد 360° یا 2π رادیان است.

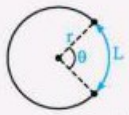
نکته یک رادیان دقیقاً $\frac{180^\circ}{\pi}$ درجه یا تقریباً ۵۷/۳ درجه است و هر درجه، $\frac{\pi}{180}$ رادیان است.

شکل مقابل اندازهٔ زوایای مهم را برحسب درجه و رادیان نشان می‌دهد:

نکته موارد زیر را حتماً به خاطر بسپارید:

$$30^\circ=\frac{\pi}{6}\ ,\ 45^\circ=\frac{\pi}{4}\ ,\ 60^\circ=\frac{\pi}{3}\ ,\ 90^\circ=\frac{\pi}{2}\ ,\ 180^\circ=\pi\ ,\ 270^\circ=\frac{3\pi}{2}\ ,\ 360^\circ=2\pi$$

طول کمان: اگر زاویهٔ θ (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع r، کمانی به طول L بِبَرَد (پدید آورد)، داریم:



$$\theta=\frac{L}{r} \Rightarrow \boxed{\text{طول کمان}=L=r\theta}$$

تذکر اندازهٔ زاویهٔ پیموده شده (θ) همواره مثبت است.

مثال طول کمانی که از زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ 45° در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر پدید می‌آید، چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$45^\circ=\frac{\pi}{4}\ \text{رادیان} \Rightarrow L=3\times\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}=\frac{3}{4}\times 3/14=2/355$$

برگرفته از کتاب درسی

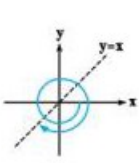
۱- $\frac{11}{8}$ دور کامل در دایره چه زاویه‌ای را برحسب درجه می‌پیماید؟

۱) 405° ۲) 450° ۳) 540° ۴) 495°

۲- زاویهٔ $-\frac{8\pi}{6}$ رادیان چه کسری از دور کامل را در دایره مشخص می‌کند؟

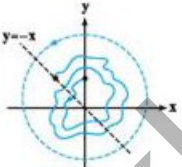
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۳- شکل مقابل بیانگر کدام زاویه است؟



۱) 135°
۲) -135°
۳) 495°
۴) -495°

۴- مورچه‌ای مسیر مارپیچی به شکل مقابل را طی می‌کند. اگر حرکت مورچه در مسیر را روی دایره تصویر کنیم، وقتی این مورچه به انتهای مسیر می‌رسد، تصویر حرکت آن روی دایره چه زاویه‌ای را برحسب رادیان پیموده است؟



۱) $\frac{9\pi}{4}$ ۲) $-\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{17\pi}{4}$ ۴) $-\frac{17\pi}{4}$

۵- در پنج ضلعی منتظم زیر، ضلع ED با دوران چند درجه‌ای حول نقطهٔ E، روی AE می‌افتد؟

۱) 108° ۲) 252° ۳) 120° ۴) -120°

برگرفته از کتاب درسی

۶- زاویهٔ $0/9\pi$ رادیان معادل با چند درجه است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۲۴ ۴) ۱۶۲

۷- یکی از زوایای مثلثی 72° و زاویهٔ دیگر $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. در این مثلث:

۱) هر سه زاویه برابرند.
۲) زاویه‌ها به نسبت ۲، ۲ و ۳ هستند.
۳) زاویه‌ها به نسبت ۳، ۳ و ۴ هستند.
۴) هیچ دو زاویه‌ای برابر نیستند.

برگرفته از کتاب درسی

۸- اگر زاویهٔ پای ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ۱ رادیان باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) قاعده از ساق‌ها کوچک‌تر است.
۲) قاعده از ساق‌ها بزرگ‌تر است.
۳) قاعده و ساق‌ها با هم برابرند.
۴) با این اطلاعات نمی‌توان اظهار نظر کرد.

@khaneh_book

۹- زاویهٔ ۹- رادیان در کدام ربع مثلثاتی قرار می‌گیرد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۰- یوسف به مناسبت تولد همسرش ۶ شمع را با فاصلهٔ یکسان روی محیط (کناره‌های) میز دایره‌ای‌شکلی می‌چیند. کدام گزینه می‌تواند بیانگر موقعیت این شمع‌ها باشد؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{k\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

۱۱- کدام‌یک از زوایای زیر در دایرهٔ مثلثاتی در امتداد زاویهٔ $-\frac{7\pi}{12}$ قرار دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $-\frac{5\pi}{12}$ ۲) $\frac{5\pi}{12}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{6}$

۱۲- ضلع انتهایی کدام زاویهٔ زیر بر ضلع انتهایی زاویهٔ $\frac{10\pi}{3}$ رادیان منطبق می‌شود؟

۱) 240° ۲) 560° ۳) 240° ۴) هیچ‌کدام

۱۳- چرخ و فلکی به شعاع ۱۲ متر دارای ۳۰ کابین می‌باشد. شماره‌گذاری کابین‌ها در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و فاصلهٔ بین کابین‌های متوالی برابر است. اگر کابین شمارهٔ ۳ چرخ و فلک زاویه‌ای معادل $\frac{4\pi}{3}$ رادیان را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی کند و سپس ناگهان چرخ و فلک در خلاف جهت حرکت قبلی $\frac{\pi}{3}$ رادیان بچرخد، این کابین اکنون در موقعیت کدام کابین پیش از شروع حرکت قرار دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۴- در یک شهربازی یک دستگاه تاب‌گردان شامل ۳۰ تاب وجود دارد که شماره‌های آن با شروع از ۱ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت زیاد می‌شوند. اگر دستگاه به اندازهٔ $\frac{34\pi}{5}$ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، تاب شمارهٔ ۷ پس از این دوران جای کدام شمارهٔ تاب، قبل از شروع حرکت را می‌گیرد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۵

۱۵- عقربهٔ ساعت‌شمار یک ساعت دیواری پس از ۸ ساعت چه زاویه‌ای را طی کرده است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $-\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $-\frac{2\pi}{3}$

۱۶- یک ساعت دیواری دایره‌ای‌شکل که طول عقربهٔ ساعت‌شمار آن ۱۵ سانتی‌متر است، روی دیواری نصب شده است. اگر زاویهٔ این عقربه را با جهت مثبت خط افق θ بگیریم، پس از چه مدت زاویه‌ای با اندازهٔ $\frac{5\pi}{4}$ رادیان توسط این عقربه پیموده می‌شود؟

۱) $7:30'$ ۲) $7:20'$ ۳) $7:40'$ ۴) $7:50'$

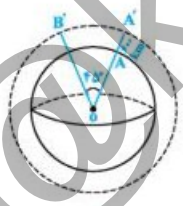
۱۷- اگر طول عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعتی دایره‌ای‌شکل، ۸ سانتی‌متر باشد، پس از ۳۶ دقیقه، مسافت پیموده‌شده توسط نوک عقربه چند سانتی‌متر است؟

۱) $\frac{4\pi}{9}$ ۲) $\frac{48\pi}{5}$ ۳) $\frac{4\pi}{5}$ ۴) $\frac{8\pi}{9}$

۱۸- قسمتی از یک شیر آب دایره‌ای‌شکل به شعاع ۵ سانتی‌متر با ماژیک علامت زده شده است. فردی این شیر آب را ۳/۵ دور می‌چرخاند. قسمت علامت زده شده چند سانتی‌متر را پیموده است؟

۱) 5π ۲) 70π ۳) 35π ۴) 20π

۱۹- یک شیء فضایی مطابق شکل در فاصلهٔ ۶۰۰ کیلومتری نقطهٔ A روی سطح زمین قرار دارد. اگر این شیء روی مسیر دایره‌ای از نقطهٔ A' به نقطهٔ B' برود چه مسافتی را بر حسب کیلومتر پیموده است؟ (شعاع زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)



۱) 1600π ۲) 3100π ۳) 1750π ۴) 6400π

۲۰- اگر زاویهٔ ۱۶۰ درجه در دایره‌ای کمان ۲۴ سانتی‌متری بِبُرد، شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{64\pi}{3}$ ۲) $\frac{27}{\pi}$ ۳) 64π ۴) $\frac{3}{\pi}$

۲۱- یک نقاش برای خط‌کشی دور یک زمین دایره‌ای به قطر ۱۶۰ متر، از کل مسافت دور آن، $\frac{200\pi}{3}$ متر را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده و خط‌کشی کرده است. این نقاش چه زاویه‌ای (کمانی) را خط‌کشی کرده است؟

۱) 75° ۲) 60° ۳) 120° ۴) 150°

@khanehbook

۲۲- در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران، یکی از ورزشکاران میله‌ای که به انتهای آن وزنه‌ای وصل شده است را روی آرنج بلند کرده و در یک مسیر دایره‌ای به قطر ۲۰ متر، آن را ۴π متر جابه‌جا می‌کند. او چه زاویه‌ای را پیموده است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{5}$ ۴) 5π

۲۳- محمود و رحیم از یک نقطه روی پیست دایره‌ای‌شکلی به شعاع $\frac{90}{\pi}$ متر در یک جهت می‌دوند. پس از طی سه دور و در راه دور چهارم محمود در جایی که با مکان اولیه کمانی با زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ می‌سازد متوقف می‌شود و رحیم نیز در همین دور در جایی که با مکان اولیه کمانی با زاویهٔ $\frac{9\pi}{5}$ می‌سازد متوقف می‌شود. کم‌ترین فاصلهٔ محمود و رحیم روی پیست دایره‌ای چند متر است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۷۸ ۳) ۸۴ ۴) ۶۵

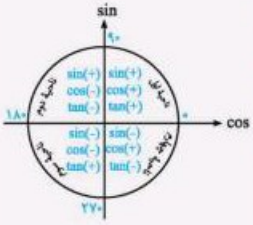
۲۴- از یک پیتزای دایره‌ای با محیط 3π، قطاعی با محیط $3+\frac{\pi}{4}$ از مرکز آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که این قطاع می‌سازد کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{5}$

درسنامهٔ ۲

محورهای مثلثاتی و ناحیه‌ها (ربع‌های) مثلثاتی

نکته علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی را می‌توان در جدول زیر به اختصار مشخص کرد.



ناحیه \ نسبت‌های مثلثاتی	sin	cos	tan
ناحیهٔ اول	+	+	+
ناحیهٔ دوم	+	−	−
ناحیهٔ سوم	−	−	+
ناحیهٔ چهارم	−	+	−

نکته برای حفظ کردن راحت‌تر جدول بالا، از قانون «هشتک» استفاده می‌شود که مثبت‌ها را در هر ناحیه به‌صورت زیر به ما می‌دهد:

هـ: حرف **اول** هشتک: در ناحیهٔ **اول**: همه: مثبت

ش: حرف **دوم** هشتک: در ناحیهٔ **دوم**: سینوس: مثبت است.

ت: حرف **سوم** هشتک: در ناحیهٔ **سوم**: تانژانت: مثبت است.

ک: حرف **چهارم** هشتک: در ناحیهٔ **چهارم**: کسینوس: مثبت است.

مثال در کدام ناحیه $\sin\theta<0$ و $\cos\theta<0$ می‌باشد؟

پاسخ: می‌دانیم که مقدار $\sin\theta$ طبق قانون هشتک در نواحی سوم و چهارم منفی است و مقدار $\cos\theta$ نیز در نواحی دوم و سوم منفی است. بنابراین وقتی هم sin و هم cos منفی است که θ در ناحیهٔ سوم باشد.

یادآوری فرمول‌های مهم مثلثاتی:

برای هر زاویهٔ **دلخواه** θ داریم:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad , \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

مثال اگر $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان این زاویه در ناحیهٔ دوم باشد، $\sin\theta$ و $\tan\theta$ را بیابید.

پاسخ:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{5}{25} \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{20}{25}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{20}{25}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \xrightarrow[\text{قانون هشتک: } \sin\theta \text{ مثبت}]{\text{(ربع دوم)}} \sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \tan\theta=-2$$

@khaneh_book

نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌های مهم بین صفر تا ۳۶۰ درجه (صفر تا 2π رادیان) مطابق جدول زیر است:

زاویه / نسبت مثلثاتی	$0(R)$ یا 0°	$\frac{\pi}{6}(R)$ یا 30°	$\frac{\pi}{4}(R)$ یا 45°	$\frac{\pi}{3}(R)$ یا 60°	$\frac{\pi}{2}(R)$ یا 90°	$\pi(R)$ یا 180°	$\frac{3\pi}{2}(R)$ یا 270°	$2\pi(R)$ یا 360°
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰

۲۵- حاصل $\frac{\sin 0^\circ + \sin 270^\circ - \cos 90^\circ}{\tan 180^\circ + \sin 90^\circ}$ برابر است با:

۱) $\sin 180^\circ$ ۲) $\cos 180^\circ$ ۳) $\sin 90^\circ$ ۴) $\tan 90^\circ$

۲۶- اگر $\sin\theta.\cos\theta < 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع قرار دارد؟

۱) اول یا چهارم ۲) دوم یا سوم ۳) دوم یا چهارم ۴) سوم یا چهارم

۲۷- اگر $\tan x$ و $\sin x$ هم‌علامت باشند، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۱) اول یا چهارم ۲) اول یا دوم ۳) اول یا سوم ۴) دوم یا چهارم

۲۸- اگر $\sin\theta > 0$ و $\sin\theta.\tan\theta < 0$، آن‌گاه زاویهٔ θ در کدام ربع دایرهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۹- اگر $\cos\theta - 1 = \frac{5}{4}$ و $\tan\theta < 0$، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۰- اگر $\cos\theta - \sin\theta = \frac{6}{5}$، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۱- علامت‌های $\sin(-7)$ و $\cos(-7)$ به ترتیب کدام‌اند؟ (۷- برحسب رادیان است.)

۱) مثبت ـ مثبت ۲) مثبت ـ منفی ۳) منفی ـ مثبت ۴) منفی ـ منفی

۳۲- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $\sin(\tan x) > 0$ ۲) $\tan(\sin x) > 0$ ۳) $\sin(\cos x) > 0$ ۴) $\cos(\sin x) > 0$

۳۳- ضلع انتهایی زاویهٔ θ، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ P قطع کرده است. مختصات نقطهٔ برخورد کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{3}{4})$ ۲) $(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{6}}{7})$ ۳) $(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$ ۴) $(+0/4, -0/9)$

۳۴- اگر $P(-\sqrt{3}, 1)$، یک نقطه از صفحهٔ مختصات و O مبدأ مختصات باشد، زاویهٔ OP با جهت مثبت محور xها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۳۵- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{-10}{9}$ ۲) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۳) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۳۶- اگر $\cos\theta = \frac{1}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $-2\sqrt{6}$ ۴) $-2\sqrt{5}$

۳۷- اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیهٔ دوم باشد، مقدار $\tan\theta + \tan 45^\circ$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

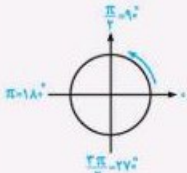
۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

@khanen_book

درسنامهٔ ۳

تعیین نسبت‌های مثلثاتی کمان‌هایی به فرم: $(-\theta\ ,\ \frac{\pi}{2}\pm\theta\ ,\ \pi\pm\theta\ ,\ 2\pi\pm\theta)$

الف) برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی کمان‌هایی به فرم $(-\theta\ ,\ \pi\pm\theta\ ,\ 2\pi\pm\theta)$ فرض می‌کنیم که θ یک زاویهٔ حاده است. حال ناحیهٔ مثلثاتی زاویهٔ مورد نظر را تعیین می‌کنیم و با استفاده از قانون هشتک علامت را یافته و پشت نسبت مثلثاتی قرار می‌دهیم.



برای مثال کمان $(\pi+\theta)$ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی در ناحیهٔ سوم است و می‌دانیم که در ناحیهٔ سوم فقط تانژانت مثبت است، بنابراین sin منفی بوده: $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

سؤال دانش‌پژوه (*صمام ریاضی‌الشمس*): **ببخشید آقا، میشه چند تا مثال بزنید؟**

پاسخ، گره، به مثال‌های زیر توجه کن!

۱) $\cos\underbrace{(\pi+\theta)}_{\text{ناحیهٔ سوم}}$ ← می‌دانیم که کسینوس در ناحیهٔ سوم منفی است. $\Rightarrow -\cos\theta$

۲) $\sin\underbrace{(\pi-\theta)}_{\text{ناحیهٔ دوم}}$ ← می‌دانیم که سینوس در ناحیهٔ دوم مثبت است. $\Rightarrow +\sin\theta$

۳) $\tan\underbrace{(\pi+\theta)}_{\text{ناحیهٔ سوم}}$ ← می‌دانیم که تانژانت در ناحیهٔ سوم مثبت است. $\Rightarrow +\tan\theta$

۴) $\sin\underbrace{(2\pi+\theta)}_{\text{ناحیهٔ اول}}$ ← می‌دانیم که سینوس در ناحیهٔ اول مثبت است. $\Rightarrow +\sin\theta$

۵) $\sin\underbrace{(2\pi-\theta)}_{\text{ناحیهٔ چهارم}}=\sin(-\theta)$ ← می‌دانیم که سینوس در ناحیهٔ چهارم منفی است. $\Rightarrow -\sin\theta$

۶) $\cos\underbrace{(2\pi-\theta)}_{\text{ناحیهٔ چهارم}}=\cos(-\theta)$ ← می‌دانیم که کسینوس در ناحیهٔ چهارم مثبت است. $\Rightarrow +\cos\theta$

۷) $\tan\underbrace{(2\pi-\theta)}_{\text{ناحیهٔ چهارم}}=\tan(-\theta)$ ← می‌دانیم که تانژانت در ناحیهٔ چهارم منفی است. $\Rightarrow -\tan\theta$

ب) برای تعیین کمان‌هایی که دارای مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ به‌علاوه یا منهای α می‌باشند مانند $(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\ ,\ \frac{3\pi}{2}\pm\alpha)$، ابتدا α را **حاده** فرض کرده و معین می‌کنیم که کمان مربوطه در کدام ناحیه است که با توجه به آن **علامت** نسبت مثلثاتی مشخص شده، سپس **اسم** نسبت مثلثاتی **عوض** می‌شود. یعنی sin به cos و برعکس، tan هم معکوس می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $\sin\underbrace{(\frac{\pi}{2}+\alpha)}_{\text{ناحیهٔ دوم}}$ ← ۱) می‌دانیم که سینوس در ناحیهٔ دوم مثبت است. ۲) می‌دانیم که در کمان‌های مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$، سینوس به کسینوس تبدیل می‌شود. $\Rightarrow +\cos\alpha$

۲) $\tan\underbrace{(\frac{\pi}{2}-\alpha)}_{\text{ناحیهٔ اول}}$ ← ۱) می‌دانیم که تانژانت در ناحیهٔ اول مثبت است. ۲) می‌دانیم که در کمان‌های مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$، tan به $\frac{1}{\tan}$ تبدیل می‌شود. $\Rightarrow +\frac{1}{\tan\alpha}$

۳) $\cos\underbrace{(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}_{\text{ناحیهٔ سوم}}$ ← ۱) می‌دانیم که کسینوس در ناحیهٔ سوم منفی است. ۲) می‌دانیم که در کمان‌های مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$، کسینوس به سینوس تبدیل می‌شود. $\Rightarrow -\sin\alpha$

نکته در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی به‌صورت $k\pi+\alpha$، اگر k زوج بود، می‌توان $k\pi$ را حذف و نسبت‌های مثلثاتی α را محاسبه نمود. هم‌چنین اگر k فرد بود، می‌توان به جای $k\pi$، π قرار داده و نسبت‌های مثلثاتی $\pi+\alpha$ را محاسبه نمود.

مثال

$\sin(7\pi+\alpha)$ ← ۷ فرد است، به‌جای ۷، π قرار می‌دهیم. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ ← ربع سوم، sin منفی

$\tan(20\pi-\alpha)$ ← ۲۰ عددی زوج است، 20π را حذف می‌کنیم. $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ ← ربع چهارم، tan منفی

مثال مقدار عددی عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $\sin\frac{4\pi}{3}=?$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin(\frac{3\pi+\pi}{3})=\sin(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\underbrace{\sin(\pi+\frac{\pi}{3})}_{\text{ناحیهٔ سوم}}\xrightarrow{\text{سینوس در ناحیهٔ سوم منفی است.}}-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

@khaneh_book

۲) $\tan(\frac{۲۰\pi}{۳}) = ?$

$\tan(\frac{۲۰\pi}{۳}) = \tan(\frac{۲۰\pi - \pi}{۳}) = \tan(\frac{۱۹\pi}{۳} - \frac{\pi}{۳}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) \xrightarrow[\text{دوم منفی است.}]{\text{تانژانت در ناحیهٔ}} -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$

ناحیهٔ دوم

۳) $\sin ۱۲۰^\circ = ?$

$\sin(۱۲۰^\circ) = \sin(۹۰^\circ + ۳۰^\circ) \xrightarrow[\text{۲) در کمان } ۹۰^\circ \text{، sin به cos تبدیل می‌شود.}]{\text{۱) سینوس در ناحیهٔ دوم مثبت است.}} +\cos ۳۰^\circ = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ناحیهٔ دوم

۳۸- اگر $\sin x \cos x < ۰$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\sin(x - \frac{\pi}{۲})\cos(x - \frac{\pi}{۲}) < ۰$ ۲) $\sin(x + \frac{\pi}{۲})\cos(x - \frac{\pi}{۲}) > ۰$

۳) $\sin(x + \frac{\pi}{۲})\cos(x + \frac{\pi}{۲}) > ۰$ ۴) $\sin(x - \frac{\pi}{۲})\cos(x + \frac{\pi}{۲}) > ۰$

۳۹- حاصل عبارت $\frac{\cos(\frac{\pi}{۲} - x) - \cos(\frac{\pi}{۲} + x)}{\sin(\frac{\pi}{۲} - x) + \cos(-x)}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\tan x}$ ۲) $\tan x$ ۳) $\frac{۲}{\tan x}$ ۴) ۲

۴۰- ساده‌ترین صورت عبارت $\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) + \cos(\pi + x) + \sin(\frac{\pi}{۲} + x) + \cos(\pi - x)$ برابر است با: برگرفته از کتاب درسی

۱) صفر ۲) $-۲\cos x$ ۳) $۲\cos x$ ۴) $\cos x$

۴۱- مقدار عبارت $\cos(\pi - \frac{\pi}{۴})\sin(\pi + \frac{\pi}{۴})$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴۲- حاصل عبارت $\sin\frac{۷\pi}{۶} + \cos^۲\frac{۵\pi}{۴}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) صفر

۴۳- اگر $f(x) = x^۲$ باشد، حاصل $f(\cos ۱۳۵^\circ) \times f(\sin ۱۳۵^\circ)$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۴- مقدار عددی $\cos ۳۱۵^\circ$ برابر کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴۵- حاصل $\cos ۱۸۶۰^\circ + \sin ۱۸۶۰^\circ$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲}$ ۴) صفر

۴۶- حاصل عبارت $\sin ۱۹۰^\circ + \sin ۲۰^\circ + \sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin ۱۰^\circ$ ۲) $۲\cos ۱۰^\circ$ ۳) صفر ۴) $-\sin ۱۰^\circ$

۴۷- مقدار $\cos ۲۰^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin ۱۱۰^\circ$ ۲) $\cos ۱۱۰^\circ$ ۳) $\sin ۲۰۰^\circ$ ۴) $\cos ۲۰۰^\circ$

۴۸- حاصل کدام گزینه با $\tan ۱۰^\circ$ برابر است؟

۱) $\tan(-۱۰^\circ)$ ۲) $\cot ۱۰۰^\circ$ ۳) $\tan ۱۷۰^\circ$ ۴) $\tan ۱۹۰^\circ$

۴۹- حاصل $\cos^۵\frac{۱۱\pi}{۱۴} + \cos^۵\frac{۹\pi}{۱۴} + \cos^۵\frac{۷\pi}{۱۴} + \cos^۵\frac{۵\pi}{۱۴} + \cos^۵\frac{۳\pi}{۱۴}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵۰- سینوس کدام زاویه با بقیه متفاوت است؟

۱) $\frac{۲۱\pi}{۵}$ رادیان ۲) -۱۰۴۴ درجه ۳) ۳۲۴ درجه ۴) $\frac{۱۴\pi}{۵}$ رادیان

@khaneh_book

۵۱- اگر تمام نسبت‌های مثلثاتی (sin ، cos ، tan و cot) برای زوایای x و y برابر باشند (مثلاً $\sin x = \sin y$)، کدام گزینه در مورد $\frac{x-y}{\pi}$ همواره صحیح است؟

۱) برابر صفر است. ۲) برابر ± 2 است. ۳) یک عدد زوج صحیح است. ۴) عددی طبیعی است.

۵۲- اگر $x + y = 2\pi$ باشد، کدام تساوی زیر درست نیست؟

۱) $\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = 0$ ۲) $\cos x = \cos y$ ۳) $\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2} = 0$ ۴) $\sin x + \sin y = 0$

۵۳- اگر $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ و انتهای زاویهٔ α در موقعیت استاندارد در ربع چهارم مثلثاتی باشد، مختصات محل برخورد ضلع انتهایی زاویه با دایرهٔ مثلثاتی کدام است؟

۱) $(1,-2)$ ۲) $(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$ ۳) $(1,-\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$

۵۴- نقطهٔ $(0,1)$ را به اندازهٔ $\frac{1}{3}$ دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. مختصات نقطهٔ حاصل کدام است؟

۱) $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ ۲) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ۳) $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

۵۵- اگر $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۵۶- اگر $\sin\alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

۵۷- اگر $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 3

۵۸- در تساوی $\frac{2\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)} = 2$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) 2 ۴) $1/5$

۵۹- حاصل عبارت $\frac{\cos(7\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)} + \frac{\sin(5\pi-\alpha)}{\sin(\frac{7\pi}{2}-\alpha)} \times \tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\cos\alpha}$ ۲) 2 ۳) $\frac{-1}{\sin\alpha}$ ۴) صفر

۶۰- اگر $\tan\theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) 3 ۲) $1/2$ ۳) 2 ۴) -2

۶۱- اگر $\tan\alpha = \frac{2}{3}$، مقدار $\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(3\pi+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\alpha-\pi)}$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 1 ۳) -3 ۴) -4

۶۲- اگر $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\sin 285^\circ + \cos 165^\circ}{2\sin 345^\circ - 3\cos 255^\circ}$ کدام است؟

۱) $-4-2\sqrt{3}$ ۲) $-4+2\sqrt{3}$ ۳) $4-2\sqrt{3}$ ۴) $4+2\sqrt{3}$

۶۳- حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$، کدام است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{5}{8}$

@khanehbook

۶۴- حاصل عبارت $\frac{\cos(۶۳۰^\circ+\alpha)}{\sin(۴۵۰^\circ-\alpha)}+\frac{\sin(۹۰۰^\circ-\alpha)}{\cos(۷۲۰^\circ+\alpha)}\times\frac{۱}{\tan(۵۴۰^\circ-\alpha)}$ کدام است؟

۱) $\tan\alpha-۱$ ۲) $-\tan\alpha-۱$ ۳) $-\tan\alpha+۱$ ۴) $\tan\alpha+۱$

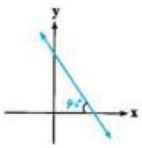
۶۵- عبارت $\frac{\sin(\pi-\theta)}{۱+\cos(۲\pi-\theta)}$ برابر کدام عبارت است؟

۱) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۲) $\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}$ ۳) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ۴) $\frac{۱-\cos\theta}{\sin\theta}$

۶۶- اگر x و y زوایای حاده باشند به‌طوری که $\sin x=\cos(۲۰+x)$ و $\tan\left(y+\frac{\pi}{۱۸}\right)=\cot\left(\frac{۲\pi}{۹}+y\right)$، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۷۵° ۲) ۴۵° ۳) ۶۵° ۴) ۵۵°

۶۷- خط مقابل از نقطهٔ $A(۱,۲)$ می‌گذرد. این خط محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) $\sqrt{۳}+۲$ ۲) $\sqrt{۳}-۲$ ۳) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$

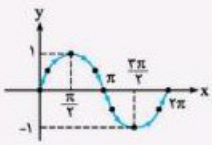
۶۸- در محل تقاطع خط L و خط $x=۲$ در بالای محور xها، زاویهٔ حادهٔ ۶۰° ایجاد شده است. اگر خط L محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول $x_۰>۲$ قطع نماید، شیب این خط کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

درسنامهٔ ۴

نمودارهای مثلثاتی و انتقال آن‌ها

الف) نمودار تابع $y=\sin x$



x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$\sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزار): آقا چرا این نقاط رو دادید و چرا شکل رو این‌جوری وصل کردین و کشیدین.

پاسخ: این نقاط رو دادم، چون مقدار sin، توی این نقاط رادیکالی نبود و در نتیجه در رسم، کار راحت‌تری داشتیم. در مورد شکل هم فعلاً ناچارین حفظش کنین! کتاب توضیح خاصی نداره!

ویژگی‌ها:

۱) در حالت کلی مقدار تابع سینوس با اضافه و کم کردن مضارب زوج π رادیان (مانند ۲π، ۴π، ۶π و...) به کمان آن، تغییر نمی‌کند (یعنی $\sin(۲k\pi+x)=\sin x$) و نمودار تابع سینوس مرتباً در بازه‌هایی به طول ۲π تکرار می‌شود. پس نمودار کلی آن به صورت مقابل می‌باشد:

۲) دامنهٔ تابع $y=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشد.

۳) تابع $y=\sin x$ در مضارب صحیح π (مثل $...,-۲\pi,-\pi,۰,\pi,۲\pi,...$) محور xها را قطع می‌کند.

۴) حداکثر مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ و حداقل آن -۱ می‌باشد. طول نقاط ماکزیمم برابر $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ (مثل $...,-\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},...$) و طول نقاط می‌نیمم برابر $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ (مثل $...,-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},...$) می‌باشد. $(k\in\mathbb{Z})$

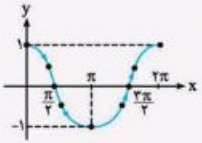
۵) تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ مرتباً افزایش، در فاصلهٔ $\left[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$ مرتباً کاهش و در فاصلهٔ $\left[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right]$ مجدداً مرتباً افزایش می‌یابد. این امر اگر سر و ته بازه‌ها را با مضارب صحیح ۲π $(۲k\pi)$ جمع کنیم نیز مرتباً تکرار می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (فلی سامع): آقا اجازه، یعنی چی سر و ته بازه‌ها رو با $۲k\pi$ جمع کنیم، این امر تکرار میشه؟!

پاسخ: منظورم اینه مثلاً تابع $\sin x$ در فاصلهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ مرتباً افزایش می‌یابد. پس در فاصلهٔ $\left[۰+۲k\pi,\frac{\pi}{۲}+۲k\pi\right]$ نیز مرتباً افزایش می‌یابد که اگه در حالت خاص $k=۱$ باشه، بازه به صورت $\left[۲\pi,\frac{\pi}{۲}+۲\pi\right]$ می‌شود.

@khanen_book

ب) نمودار تابع $y = \cos x$



x	۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	۲π
cos x	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱

ویژگی‌ها:

۱) تابع کسینوس مانند تابع سینوس با اضافه کردن مضارب زوج π به کمان آن، تغییری نمی‌کند $(\cos(۲k\pi + x) = \cos x)$ پس نمودار کلی آن به صورت مقابل می‌باشد:

۲) دامنهٔ تابع $y = \cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشد.

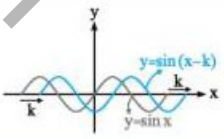
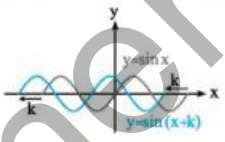
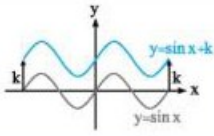
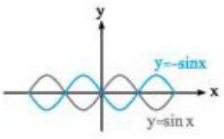
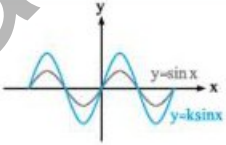
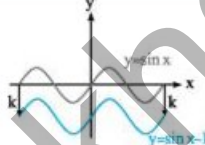
۳) تابع $y = \cos x$ در مضارب صحیح و فرد $\frac{\pi}{۲}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\frac{۳\pi}{۲}, \ldots$) محور xها را قطع می‌کند.

۴) حداکثر مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ و حداقل مقدار آن ۱- می‌باشد. طول نقاط ماکزیمم برابر $x = ۲k\pi$ (مثل $\ldots, ۲\pi, ۰, -۲\pi, \ldots$) و طول نقاط می‌نیمم برابر $x = ۲k\pi + \pi$ (مثل $\ldots, ۳\pi, \pi, -\pi, \ldots$) می‌باشد.

۵) تابع $y = \cos x$ در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ مرتباً کاهش و در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ مرتباً افزایش می‌یابد. این امر اگر سر و ته بازه‌ها را با $۲k\pi$ جمع کنیم نیز مرتباً تکرار می‌شود. مثلاً تابع در بازهٔ $[\underbrace{۲\pi}_{۲\pi}, \underbrace{\pi + ۲\pi}_{۳\pi}, \underbrace{۰ + ۲\pi}_{۲\pi}]$ نیز مرتباً کاهش می‌یابد.

انتقال توابع مثلثاتی

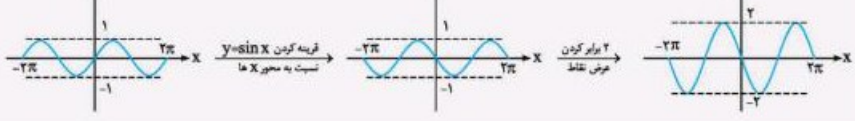
اگر k عددی مثبت باشد، به طور مثال برای تابع $y = \sin x$ داریم:

انتقال sin x، k واحد به راست: $y = \sin(x-k)$	انتقال sin x، k واحد به چپ: $y = \sin(x+k)$	انتقال sin x، k واحد به بالا: $y = \sin x + k$
		
مقادیر sin x نسبت به محور xها قرینه می‌شوند: $y = -\sin x$	مقادیر sin x، k برابر می‌شوند: $y = k\sin x$	انتقال sin x، k واحد به پایین: $y = \sin x - k$
		

نکته در حالتی که k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار $y = k\sin x$، ابتدا نمودار sin x را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس عرض نقاط آن را $|k|$ برابر می‌کنیم.

مثال تابع $y = -۲\sin x$ را در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم نمایید.

پاسخ: برای رسم این تابع ابتدا باید به ظاهر وجود علامت منفی، نمودار $y = \sin x$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس مقادیر را ۲ $=|-۲|$ برابر نماییم.



@khanen_book

۶۹- اگر $f(x)=\cos x$، آن‌گاه حاصل $f(\frac{17\pi}{6})+f(\frac{17\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۴) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

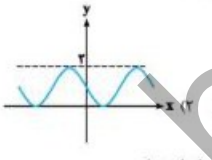
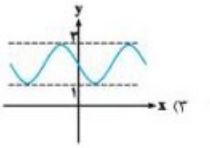
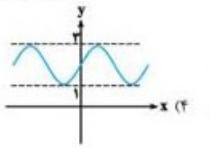
۷۰- اگر $y=\cos(-x)$ باشد، حاصل $y(\frac{7\pi}{3})-y(\frac{5\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ۴) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

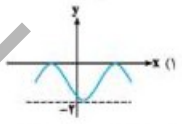
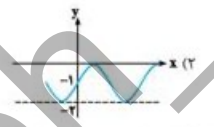
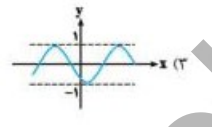
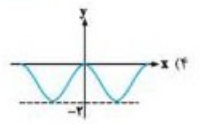
۷۱- مقدار تابع $y=8\sin x-3$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{24}$ با مقدار تابع در کدام نقطهٔ زیر برابر است؟

۱) $\frac{25\pi}{24}$ ۲) $-\frac{47\pi}{24}$ ۳) $\frac{47\pi}{24}$ ۴) $-\frac{23\pi}{24}$

۷۲- نمودار $y=-\sin x+2$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴)

۷۳- نمودار $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})-1$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

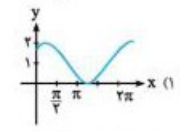
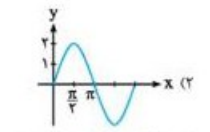
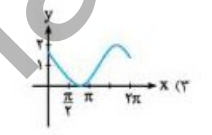
۷۴- نمودار تابع $\cos(-x-\frac{\pi}{2})$ بر کدام نمودار زیر منطبق است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

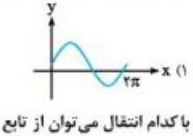
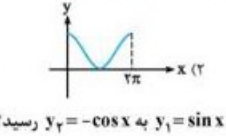
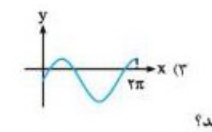
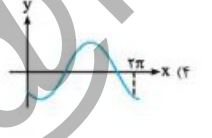
۷۵- در کدام گزینه نمودارهای داده‌شده، بر هم منطبق هستند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $y=\sin x, y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$
۲) $y=\cos x, y=\cos(5\pi-x)$
۳) $y=\cos x, y=\cos(x-2\pi)$
۴) $y=\sin x, y=\sin(-x)$

۷۶- نمودار تابع $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})+1$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) 
۲) 
۳) 
۴)

۷۷- نمودار تابع $y=-\cos(x-1)$ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷۸- با کدام انتقال می‌توان از تابع $y_1=\sin x$ به $y_2=-\cos x$ رسید؟

۱) قرینهٔ y_1 نسبت به محور xها
۲) انتقال y_1 به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به چپ
۳) انتقال y_1 به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به راست
۴) انتقال y_1 به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به بالا و سپس قرینه نسبت به محور xها

۷۹- خط $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ در بازهٔ $(-2\pi,3\pi)$ در چند نقطهٔ با نمودار $y=\cos x$ متقاطع است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

@khaneh_book

۸۰- خط $y = \sqrt{۵} + ۲$ منحنی تابع $y = \sqrt{۵} + ۲\sin x$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۸۱- حداکثر مقدار تابع $y = ۴\sin x$ با حداکثر مقدار کدام تابع زیر برابر نیست؟

۱) $y = -۴\cos x$ ۲) $y = ۴\cos x$ ۳) $y = -\sin x + ۳$ ۴) $y = ۲\cos x + ۲\sin x$

۸۲- تابع $y = \sin x$ در نقاطی صفر می‌شود که طول این نقاط تشکیل یک دنباله می‌دهند. نوع این دنباله و قدرنسبت آن به ترتیب کدام است؟

۱) حسابی ـ $\frac{\pi}{۲}$ ۲) حسابی ـ π ۳) هندسی ـ $\frac{\pi}{۲}$ ۴) هندسی ـ π

۸۳- نقطه‌ای با کم‌ترین طول مثبت که حداقل مقدار تابع $y = ۲\sin(x+۱)$ در آن رخ می‌دهد را $A(x_۰, y_۰)$ می‌نامیم. $x_۰ + y_۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi - ۴}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi + ۴}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi - ۲}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi - ۶}{۲}$

۸۴- اختلاف طول‌های نقاطی که حداکثر و حداقل مقدار تابع $y = ۴\cos x$ در بازهٔ $[\frac{۷\pi}{۲}, ۶\pi]$ در آن‌ها رخ می‌دهد کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

۸۵- حداکثر مقدار تابع $y = a\sin x + ۳$ $(a < ۰)$ برابر ۵ است. مقدار این تابع در $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $۳ - \sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲} - ۳$ ۳) $\sqrt{۳} + ۳$ ۴) $۳ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸۶- حداکثر مقدار تابع $y = \sin x$ در کدام طول پس از $x = ۲۰$ برای اولین بار اتفاق می‌افتد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۷π ۲) $\frac{۱۷\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳\pi}{۲}$ ۴) ۸π

۸۷- برد تابع $y = \sqrt{۱ - \sin x}$ کدام است؟

۱) $[۰, \sqrt{۲}]$ ۲) $[۰, +\infty)$ ۳) $[۱, +\infty)$ ۴) $[۰, ۲]$

۸۸- تمام برد تابع $y = ۲\sin x + ۷|\sin x|$ کدام بازهٔ زیر است؟ آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۰

۱) $[۰, ۷]$ ۲) $[۰, ۹]$ ۳) $[-۵, ۹]$ ۴) $[-۲, ۹]$

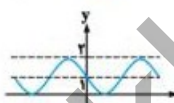
۸۹- اگر $A = \cos^۲x - ۳\sin^۲x$ باشد، حدود A کدام است؟

۱) $-۲ \le A \le ۲$ ۲) $-۴ \le A \le -۱$ ۳) $-۲ \le A \le ۱$ ۴) $-۴ \le A \le ۰$

۹۰- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = ۳a + b\sin x$ به‌صورت مقابل باشد، $a - b$ کدام است؟

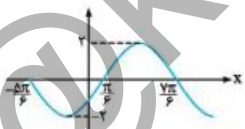
۱) -۴
۲) ۴
۳) ۳
۴) -۳

۹۱- نمودار مقابل بیانگر تابع $y = a\sin x + b$ می‌باشد. $a - b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱-
۴) ۲-

۹۲- اگر نمودار تابع $f(x) = a\sin(x+b)$ به صورت مقابل باشد، $f(\frac{۵\pi}{۱۲})$ کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۹۳- در کدام فاصلهٔ زیر تابع $y = \sin x$ افزایشی و منفی است؟

۱) $(\frac{\pi}{۲}, \pi)$ ۲) $(۳\pi, \frac{۷\pi}{۲})$ ۳) $(-\pi, -\frac{\pi}{۲})$ ۴) $(\frac{۷\pi}{۲}, ۴\pi)$

۹۴- در کدام بازهٔ زیر توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ کاهشی و منفی‌اند؟

۱) $(-۵\frac{\pi}{۲}, -۲\pi)$ ۲) $(\frac{۵\pi}{۲}, ۳\pi)$ ۳) $(\pi, \frac{۳\pi}{۲})$ ۴) در هیچ بازه‌ای چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد.

۹۵- حداکثر طول بازه‌ای که تابع $y = \cos x$ می‌تواند در آن افزایشی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

@khaneh_book

۹۶- در کدام نقطهٔ زیر، حالت تابع $y = 2\cos x - 1$ وقتی در جهت مثبت محورxها حرکت می‌کنیم، از افزایشی به کاهشی تغییر می‌یابد؟

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) -۴π ۴) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۹۷- تابع $y = -۲\cos x$ در کدام بازهٔ زیر کاهشی است؟

۱) $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ ۲) $[-۲\pi, -\pi]$ ۳) $[-\pi, ۰]$ ۴) $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$

۹۸- تابع $y = \sin x + a^۲ + ۱$ با تابع $y = \sin x$ چند نقطهٔ برخورد دارند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۹۹- دو تابع $y = \sin x$ و $y = \sin(x + \frac{\pi}{۲})$ در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ چند نقطهٔ تقاطع با هم دارند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۰- نمودار توابع $y = ۱ - \sin x$ و $y = ۲\cos x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند بار یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۱- نمودار توابع $y = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$ و $y = \cos(x - \frac{\pi}{۴})$ در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}]$ چند نقطهٔ تقاطع دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درسنامه ۵

تعیین حدود مقادیر در عبارات مثلثاتی

در پاره‌ای از مواقع حدود تغییرات یک زاویه داده می‌شود. در این صورت ابتدا با مشخص کردن محدودهٔ زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی، حدود تغییرات نسبت‌های آن را معلوم می‌کنیم.

مثال اگر $-\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$، حدود تغییرات $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را به دست آورید.

پاسخ: حدود تغییرات زاویهٔ θ روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت مقابل است. می‌دانیم در ربع اول $\sin\theta \ge ۰$ و در ربع چهارم $\sin\theta \le ۰$ می‌باشد. با حرکت روی دایرهٔ مثلثاتی از $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$، تصویر ناحیهٔ مشخص شده روی دایره، روی محور عمودی یا همان سینوس‌ها در بازهٔ $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ تغییر می‌کند. هم‌چنین با حرکت روی دایرهٔ مثلثاتی از $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$ و تصویر کردن ناحیه روی محور افقی یا کسینوس‌ها، $\cos\theta$ از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ تا ۱ تغییر می‌کند.

۱۰۲- اگر $\cos\alpha = ۴m + ۲$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $۰ \le m \le ۱$ ۲) $\frac{۱}{۴} \le m < \frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴} < m < ۰$ ۴) $-\frac{۳}{۴} \le m \le -\frac{۱}{۴}$

۱۰۳- حدود k برای این‌که معادلهٔ $\sin x = k$ در فاصلهٔ $\frac{۲\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۳}$ دارای جواب باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} \le k \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-۱ \le k \le ۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le k \le ۱$ ۴) $k > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰۴- اگر $۱۲۰^\circ \le x \le ۲۲۵^\circ$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $-۱ \le \cos x \le -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \cos x \le -\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲} \le \cos x \le ۰$ ۴) $-۱ \le \cos x \le -\frac{۱}{۲}$

۱۰۵- اگر $\frac{\pi}{۵} \le x < \frac{۵\pi}{۶}$ باشد، تمام حدود $A = \sin x$ کدام است؟

۱) $\sin\frac{\pi}{۵} \le A \le ۱$ ۲) $\sin\frac{\pi}{۶} \le A \le \sin\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲} \le A \le ۱$ ۴) $\frac{۱}{۲} < A \le ۱$

۱۰۶- اگر $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $\cos ۳x = \frac{m-۱}{۲}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $(۱, ۲]$ ۲) $(۰, ۲)$ ۳) $(۲, ۳]$ ۴) $(۰, ۳]$

۱۰۷- به ازای $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$، حاصل $\sqrt{۱ + ۲\sqrt{\sin^۲ x(۱ - \sin^۲ x)}}$ کدام است؟

۱) $\sin x + \cos x$ ۲) $\sin x - \cos x$ ۳) $-\sin x - \cos x$ ۴) $\cos x - \sin x$

۱۰۸- اگر $x = ۲۸۳^\circ$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\cos x < \sin x$ ۲) $\tan x < \sin x$ ۳) $\tan^۲ x < \sin^۲ x$ ۴) $\cos x < \tan x$

@khanen_book

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۴ می‌دانیم هر دور کامل معادل 360° درجه می‌باشد، بنابراین $\frac{11}{8}$ دور کامل برابر است با:

$$\frac{11}{8} \times 360^\circ = 495^\circ$$

۲ ۱ هر دور کامل معادل با 2π رادیان است. هم‌چنین زاویهٔ $-\frac{8\pi}{6}$ مقداری از دایره را طی می‌کند که زاویهٔ $\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{6}$ طی می‌کند.

سؤال دانش‌پژوه (عطیه راضی): **ببخشید، پس اون علامت منفی چی میشه؟**

پاسخ: علامت منفی تنها نشان‌دهندهٔ جهت حرکت، پس کسری که زاویهٔ α طی می‌کنه برابر همان مقداریه که زاویهٔ $-\alpha$ طی می‌کنه.

$$\frac{\text{زاویه}}{\text{دور}}: \quad \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ دور کامل}$$

۳ ۴ یک زاویه اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گردش نماید، زاویه‌ای منفی و اگر در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بگردد، زاویه‌ای مثبت است. زاویه‌ای که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد، 360° می‌باشد و اگر ربع صفحهٔ مختصات را طی کند، زاویه‌ای معادل 90° را می‌پیماید. در این مسأله با توجه به این‌که خط $y = x$ زوایای برابر با محورهای مختصات می‌سازد (نیمساز نواحی اول و سوم است)، داریم:

$$\theta = -(360^\circ + 90^\circ + 45^\circ) = -495^\circ \quad (\text{به خاطر چرخش در جهت عقربه‌های ساعت})$$

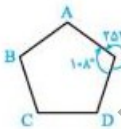
۴ ۳ خط $y = -x$ نیمساز ربع‌های دوم و چهارم است. هم‌چنین هر دور حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت معادل 2π رادیان می‌باشد. تصویر حرکت مورچه روی دایره دو دور کامل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌زند و سپس زاویه‌ای معادل $\frac{\pi}{4}$ رادیان را می‌پیماید. لذا داریم:

$$\theta = +\left(2 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$$

۵ ۲

نکته اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم برابر با $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$ می‌باشد.

دقت کنید همواره جرخش در جهت حرکت عقربه‌های ساعت را منفی و جرخش در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت در نظر می‌گیریم.



اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی این ۵ ضلعی منتظم برابر با $\frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$ و اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی آن $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$ می‌باشد. ضلع ED می‌تواند در جهت حرکت عقربه‌های ساعت 108° دوران نماید تا روی AE بیفتد که در این صورت زاویه -108° می‌شود یا این‌که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت 252° دوران نموده و روی AE بیفتد. با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۲) صحیح است.

سؤال دانش‌پژوه (نعمت امیدی): **ببخشید، چرا گزینهٔ (۱) نادرست شد؟**

پاسخ: بهه! برای این‌که ED روی AE بیفته، باید ED رو -108° دوران بدیم نه 108°. چون جهت دوران (جهت گردش) در جهت حرکت عقربه‌های ساعته. بازم بگم! جهت گردش عقربه‌های ساعت یعنی علامت منفی. بازم بگم! جهت ...

۶ ۴

نکته در محاسبهٔ (تبدیل) زوایا می‌توان به جای π رادیان، 180° قرار داد.

۷ ۳

$$0/9\pi \text{ رادیان} = 0/9 \times 180^\circ = 162^\circ$$

$$\frac{2\pi}{10} \text{ رادیان} = \frac{2 \times 180^\circ}{10} = 54^\circ$$

پس دو زاویهٔ مثلث به ترتیب 72° و 54° می‌باشند. برای محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ سوم، مجموع این دو زاویه را از 180° (مجموع سه زاویهٔ مثلث) کم می‌کنیم:

$$180^\circ - (54^\circ + 72^\circ) = 54^\circ$$

پس این مثلث دو زاویهٔ 54° و یک زاویهٔ 72° دارد. نسبت ۵۴ به ۷۲ برابر است با $\frac{54}{72} = \frac{3}{4}$، پس می‌توان گفت زاویه‌های مثلث به نسبت ۳، ۳ و ۴ هستند.

@khanen_book

۸ **۲** اگر اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روی قاعده را x رادیان در نظر بگیریم، داریم:

$$۱+۱+x=\pi \Rightarrow x=\pi-۲ \xrightarrow{\pi=۳/۱۴} x>۱$$

پس اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به قاعده از بقیه بزرگ‌تر است و لذا اندازهٔ قاعده از ساق‌ها بزرگ‌تر است.

۹ **۳** یک رادیان تقریباً ۵۷/۳ درجه است، بنابراین:

$$-۹\text{ رادیان} = -۹\times ۵۷/۳^\circ = -۵۱۵/۷^\circ = -۳۶۰^\circ + (-۱۵۵/۷^\circ)$$

-۳۶۰° یک دور در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و $-۹۰^\circ > -۱۵۵/۷^\circ > -۱۸۰^\circ$، بنابراین -۹ رادیان در ربع سوم می‌افتد.

سؤال دانش‌پژوه (کلوه بهاری)، **من ابتدا مکان ۹ رادیان را پیدا کردم (در ربع دوم) و سپس با قرینه کردن آن نسبت به محور xها به جواب (ربع سوم) رسیدم.**

پاسخ: بله. این هم درسته. به عنوان تمرین سعی کنین نشون بدین انتهای کمان ۱۱ رادیان در ربع چهارم می‌افته (البته کار سختیه!) و بعدش بگید انتهای کمان (-۱۱) رادیان کجا می‌افته.

۱۰ **۱** **روش اول:** کل دایره معادل ۲π رادیان است و ۲π رادیان به ۶ قسمت تقسیم شده است. پس باید فاصلهٔ هر دو شمع متوالی $\frac{۲\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$ باشد. اگر شمع اول زاویهٔ α ایجاد کند، باقی شمع‌ها در فواصل $\frac{\pi}{۳}$ از هم قرار دارند. بنابراین گزینهٔ (۱) که به‌صورت $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۵}$ می‌باشد جواب است.

روش دوم:

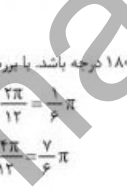
نکته انتهای کمان‌های $\frac{k\pi}{n}+\alpha$ (n عددی طبیعی و k عددی صحیح) $۲n$ نقطه با فاصلهٔ برابر را روی دایره نشان می‌دهند.

با توجه به نکتهٔ بالا **گزینهٔ (۱)** بیانگر $۶=۳\times۲$ نقطهٔ متساوی‌الفاصله روی دایره، **گزینهٔ (۲)** بیانگر $۸=۴\times۲$ نقطهٔ متساوی‌الفاصله، **گزینهٔ (۳)** بیانگر $۱۲=۶\times۲$ نقطهٔ متساوی‌الفاصله و **گزینهٔ (۴)** بیانگر $۴=۲\times۲$ نقطهٔ متساوی‌الفاصله روی دایره می‌باشند.

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد)، **آقا همیشه واضح‌تر توضیح بدین؟**

پاسخ: ببین، مثلاً برای گزینهٔ (۴) داریم:

$$\begin{cases} k=۰ \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{۶}=-۳۰^\circ \\ k=۱ \Rightarrow \theta=۶۰^\circ \\ k=۲ \Rightarrow \theta=۱۵۰^\circ \\ k=۳ \Rightarrow \theta=۲۴۰^\circ \\ k=۴ \Rightarrow \theta=۳۳۰^\circ \end{cases}$$



انتهای این کمان‌ها را روی دایره با نقطه مشخص کردیم. خالا قبول داری انتهای کمان ۳۳۰ دوباره روی همون نقطهٔ انتهای کمان -۳۰° می‌افته؟ به همین ترتیب برای بقیهٔ kها هم انتهای کمان روی باقی نقاط می‌افته. پس $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$ بیانگر ۴ نقطهٔ متساوی‌الفاصله روی دایره است. برای بقیهٔ گزینه‌ها هم می‌تونین خودتون به عنوان تمرین پای نقاط رو پیدا کنین.

۱۱ **۲** دو زاویه در امتداد یکدیگر هستند، اگر اختلاف آن‌ها مضرب صحیحی از π رادیان یا ۱۸۰° درجه باشد. با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ (۲) جواب است. $\Rightarrow$ **گزینهٔ (۲):** $\frac{۵\pi}{۱۲}-\left(\frac{-۷\pi}{۱۲}\right)=\frac{۱۲\pi}{۱۲}=\pi$

گزینهٔ (۱): $-\frac{۵\pi}{۱۲}-\left(\frac{-۷\pi}{۱۲}\right)=\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۶}\pi$

گزینهٔ (۴): $\frac{۷\pi}{۶}-\left(-\frac{۷\pi}{۱۲}\right)=\frac{۲۱\pi}{۱۲}=\frac{۷}{۴}\pi$

گزینهٔ (۳): $\frac{۷\pi}{۱۲}-\left(\frac{-۷\pi}{۱۲}\right)=\frac{۱۴\pi}{۱۲}=\frac{۷}{۶}\pi$

۱۲ **۳** ابتدا با قرار دادن ۱۸۰° به جای π زاویه را برحسب درجه محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱۰\pi}{۳}\text{ رادیان}=\frac{۱۰\times۱۸۰^\circ}{۳}=۶۰۰^\circ$$

پس از طی هر ۳۶۰° ضلع انتهایی یک زاویه مجدداً در جای قبلی خود قرار می‌گیرد. داریم:

ضلع انتهای زاویهٔ $\frac{۱۰\pi}{۳}$ بر ضلع انتهایی زاویهٔ ۲۴۰° منطبق می‌شود. $\Rightarrow ۶۰۰^\circ=۳۶۰^\circ+۲۴۰^\circ$

۱۳ **۴** ابتدا باید ببینیم کابین شمارهٔ ۳ از موقعیت اولیهٔ خود به اندازهٔ چه زاویه‌ای فاصله گرفته است. چون در ابتدا معادل $\frac{۴\pi}{۳}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده و سپس $\frac{\pi}{۳}$ به عقب برگشته است، پس زاویه‌ای معادل با $\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\pi$ را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی نموده است. هر کابین با کابین بعدی به اندازهٔ $\frac{۳۶۰^\circ}{۳۰}=۱۲^\circ$ فاصله دارد. هم‌چنین π رادیان معادل ۱۸۰° است. بنابراین کابین شمارهٔ ۳، اکنون با موقعیت اولیهٔ خود به اندازهٔ ۱۸۰° که معادل با $\frac{۱۸۰}{۱۲}=۱۵$ کابین است فاصله دارد. پس این کابین اکنون در موقعیت کابین $۱۸+۳=۱۵$ قرار دارد.

سؤال دانش‌پژوه (امین زکلوه)، **ببخشید، پس اون شعاع ۱۲ متر به چه دردی می‌خوره؟ برای چی داده شده؟**

پاسخ: محض اطلاعات عمومی من و شما از شعاع چرخ و فلک‌های کشور! تو این تست به هیچ دردی نمی‌خوره.

@khanehbook

۱۴ ۳ هر تاب به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳۰}=\frac{\pi}{۱۵}$ با تاب بعدی فاصله دارد. لذا $\frac{۳۴\pi}{۵}$ را به‌صورت مضربی از $\frac{\pi}{۱۵}$ می‌نویسیم.

$$\frac{۳۴\pi}{۵}=\frac{۳۰\pi}{۵}+\frac{۴\pi}{۵}=۶\pi+\frac{۴\pi}{۵}\times\frac{۳}{۳}=۶\pi+۱۲\left(\frac{\pi}{۱۵}\right)$$

از آن‌جاکه هر تاب پس از ۲π رادیان دوران به جای اول خود باز می‌گردد، پس از دوران به اندازهٔ $۶\pi+۱۲\times\frac{\pi}{۱۵}$ تاب شمارهٔ ۷ به اندازهٔ ۱۲ شماره جلو رفته و جای تاب شمارهٔ $۱۹=۷+۱۲$ پیش از حرکت قرار می‌گیرد.

سؤال دانش‌پژوه (*هانداکیانی*)، **میشه اول زاویه‌ها رو به درجه تبدیل کنیم و با زاویه برحسب درجه محاسبات رو انجام بدیم؟**

پاسخ: *بله. چرا نمیشه. بچه‌ها معمولاً همشون اوایل این فصل دوست دارن همه چیو به درجه تبدیل کنن.*

۱۵ ۲ دام آموزشی: دقت کنید عقربه‌های ساعت همواره در جهت منفی (خلاف جهت دایرهٔ مثلثاتی یا ساعت‌گرد) حرکت می‌کنند، پس زاویهٔ طی شده، زاویه‌ای منفی است.

فاصلهٔ هر ساعت با ساعت بعدی در یک ساعت دیواری برابر $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ است. (زیرا ساعت از ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری شده است.) پس از ۸ ساعت زاویهٔ $\theta=-۸\times\frac{\pi}{۶}=-\frac{۴\pi}{۳}$ طی شده است که علامت منفی به خاطر جهت حرکت منفی است.

۱۶ ۱ برای راحتی کار $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم. می‌دانیم $\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۴}=۲۲۵^\circ$ رادیان. همچنین در هر $۶۰'$ (۶۰ دقیقه) عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۳۶۰^\circ}{۱۲}=۳۰^\circ$ را طی می‌کند. حال باید ببینیم در چه مدت زاویهٔ ۲۲۵° طی می‌شود.

دقیقه	زاویهٔ طی شده (درجه)
۶۰	۳۰°
x	۲۲۵°

$$\Rightarrow x=\frac{۶۰\times۲۲۵}{۳۰}=۴۵۰$$

پس از ۴۵۰ دقیقه یا ۷ ساعت و نیم $(۳۰+۶۰\times۷=۴۵۰)$ این زاویه طی می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (*کبری کبیری*)، **در ساعت‌های $۷:۲۰'$، $۷:۴۰'$ و $۷:۵۰'$ چه زاویه‌هایی پیموده شده است؟**

پاسخ: *در هر دقیقه $\frac{۳۰^\circ}{۶۰}=۰/۵^\circ$ طی می‌شود. پس بعد از $۷:۲۰'$ یا $۷\times۶۰+۲۰=۴۴۰$ دقیقه، زاویهٔ $۲۲۰^\circ=۰/۵\times۴۴۰$، پس از $۷:۴۰'$ زاویهٔ ۲۳۰° و پس از $۷:۵۰'$ زاویهٔ ۲۳۵° پیموده می‌شود. به عبارتی در هر ۱۰ دقیقه $۵^\circ=۱۰\times۰/۵^\circ$ طی می‌شود.*

۱۷ ۲ چون در هر دقیقه $\frac{۳۶۰^\circ}{۶۰}=۶^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۰}$ رادیان توسط عقربهٔ دقیقه‌شمار طی می‌شود، پس از ۳۶ دقیقه $\frac{\pi}{۳۰}\times۳۶=\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان طی می‌شود.

بنابراین مسافت پیموده شده توسط نوک عقربه که از فرمول $L=r\theta$ محاسبه می‌شود، برابر است با:

$$L=۸\times\frac{۶\pi}{۵}=\frac{۴۸\pi}{۵}$$

۱۸ ۳ ۳/۵ دور معادل $۳/۵\times۲\pi=۷\pi$ رادیان می‌باشد. داریم:

$$L=r\theta=۵\times۷\pi=۳۵\pi$$

سؤال دانش‌پژوه (*هانی اسفاق‌نیا*)، **آقا اجازه ماگفتیم علامت ۳/۵ دور چرخید، یعنی محیط دایره رو سه بار و نصفی طی کرده، پس:**

مسافت طی شده = ۳/۵ × (محیط دایره) = ۳/۵ × (۲ × ۵ × π) = ۳۵π

پاسخ: *آفرین، بسیار عالی پور هانی. صد بارک ا... به معلمت!*

۱۹ ۳ ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$۴۵^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi}{۴}\ \text{رادیان}$$

شعاع مسیر دایره‌ای که شیء روی آن قرار دارد برابر $۷۰۰۰=۶۰۰+۶۴۰۰$ کیلومتر است. داریم:

$$L=r\theta=\frac{\pi}{۴}\times۷۰۰۰=۱۷۵۰\pi$$

۲۰ ۲ ابتدا ۱۶۰° را به رادیان تبدیل و سپس شعاع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۱۶۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۸\pi}{۹}\ \text{رادیان}\ ;\ L=r\theta\Rightarrow r=\frac{L}{\theta}=\frac{۲۴}{\frac{۸\pi}{۹}}=\frac{۲۴\times۹}{۸\pi}=\frac{۲۷}{\pi}$$

۲۱ ۴ ابتدا شعاع زمین را محاسبه می‌کنیم که برابر با $\frac{۱۶۰}{۲}=۸۰$ متر می‌شود. داریم:

$$\theta=\frac{L}{r}=\frac{\frac{۲۰۰\pi}{۳}}{۸۰}=\frac{۲۰۰\pi}{۲۴۰}=\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۶}=۱۵۰^\circ$$

۲۲ ۱

$$r=۲۰\div۲=۱۰\ ,\ \theta=\frac{L}{r}\Rightarrow\theta=\frac{۴\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{۵}$$

@khanehbook

۲۳ ۲ می‌دانیم هر دو نقطه مثل A و B روی محیط دایره می‌توانند بیانگر دو زاویه باشند. یکی زاویهٔ α و دیگری زاویهٔ $2\pi - \alpha$.

در این مسأله زاویهٔ بین محمود و رحیم برابر $\frac{17\pi}{15} = \frac{2\pi}{3} - \frac{9\pi}{5}$ یا $2\pi - \frac{17\pi}{15} = \frac{13\pi}{15}$ می‌باشد. چون طول کم‌ترین فاصلهٔ بین این دو روی محیط دایره (روی پیست) خواسته شده، پس θ را $\frac{13\pi}{15}$ می‌گیریم. داریم:

$$L = \frac{13\pi}{15} \times \frac{90}{\pi} = 78 \Rightarrow$$ کم‌ترین فاصلهٔ آن‌ها روی پیست ۷۸ متر می‌باشد. ⇐ متر

۲۴ ۲ اگر r را شعاع دایره بگیریم، داریم:

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r \Rightarrow 3\pi = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

محیط قطاع بریده شده برابر $L + 2r$ می‌باشد. داریم:

$$2r + L = \frac{\pi}{4} + 3 \Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right) + \underbrace{\frac{3}{2}\theta}_{L = r\theta = \frac{3}{2}\theta} = \frac{\pi}{4} + 3 \Rightarrow \frac{3}{2}\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

۲۵ ۲

$$\frac{\sin 0^\circ + \sin 270^\circ - \cos 90^\circ}{\tan 180^\circ + \sin 90^\circ} = \frac{0 + (-1) - 0}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1 = \cos 180^\circ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲۶ ۳ عبارت $\sin\theta.\cos\theta$ هم‌علامت با عبارت $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ می‌باشد که همان $\tan\theta$ است. پس $\sin\theta\cos\theta < 0$ معادل با $\tan\theta < 0$ است و $\tan\theta$ در ربع‌های دوم و چهارم منفی است.

۲۷ ۱ **روش اول:**

نکته دو عبارت هم‌علامت‌اند، اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد.

$$\sin x \Rightarrow \sin x \times \tan x > 0 \Rightarrow \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos x} > 0 \xrightarrow{\sin^2 x \geq 0} \cos x > 0$$ و $\tan x$ هم‌علامت

بنابراین باید ببینیم که $\cos x$ در کدام نواحی مثبت است. با توجه به قانون هستک، $\cos x$ در نواحی اول و چهارم مثبت است. بنابراین $\tan x$ و $\sin x$ در این نواحی هم‌علامت هستند.

روش دوم: برای حل مسأله دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱ فرض کنیم $\tan x > 0$ و $\sin x > 0$: از قانون هستک می‌دانیم $\tan x$ در ناحیه‌های اول و سوم و $\sin x$ هم در ناحیه‌های اول و دوم مثبت است، بنابراین برای آن که هم مقدار $\tan x$ و هم مقدار $\sin x$ مثبت باشند، باید انتهای کمان زاویهٔ x در ناحیهٔ اول باشد.

۲ فرض کنیم $\tan x < 0$ و $\sin x < 0$: می‌دانیم $\tan x$ در ناحیه‌های دوم و چهارم و $\sin x$ هم در ناحیه‌های سوم و چهارم منفی است، بنابراین برای آن که هم $\tan x$ و هم $\sin x$ منفی باشند، باید انتهای کمان زاویهٔ x در ناحیهٔ چهارم باشد.

پس به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت وقتی $\tan x$ و $\sin x$ هم‌علامت می‌باشند که انتهای کمان زاویهٔ x در ناحیه‌های اول یا چهارم باشد.

۲۸ ۲

$$\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \sin\theta.\tan\theta < 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{باشد تا رابطهٔ } \sin\theta.\tan\theta < 0 \text{ برقرار باشد}]{\text{با توجه به این که } \tan\theta < 0 \text{ بنابراین باید } \sin\theta > 0} \begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \tan\theta < 0 \end{cases}$$

حال با توجه به این که سینوس در ناحیه‌های اول و دوم مثبت و تانژانت در ناحیه‌های دوم و چهارم منفی است، متوجه می‌شویم که فقط در ناحیهٔ دوم است که سینوس مثبت و تانژانت منفی است.

۲۹ ۲

$$1 - \cos\theta = \frac{5}{4} \Rightarrow -\cos\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$ انتهای کمان θ در ربع دوم یا سوم می‌باشد.

همچنین $\tan\theta$ در ربع‌های دوم و چهارم منفی است، لذا انتهای کمان θ در ربع دوم می‌باشد.

@khaneh_book

۳۰ ۴

روش اول:

$$\cos\theta-\sin\theta=\frac{۶}{۵}\Rightarrow\cos\theta=\sin\theta+\frac{۶}{۵}$$

از آن‌جاکه $-۱\le\cos\theta\le۱$ می‌باشد، بنابراین $\sin\theta$ باید منفی باشد تا $\cos\theta$ بامعنی باشد. به علاوه $\cos\theta$ همواره مثبت می‌شود، زیرا حداقل مقدار $\sin\theta=-۱$ می‌باشد و $\cos\theta>۰$ است. پس همواره $\sin\theta+\frac{۶}{۵}>-۱+۰$ می‌باشد، بنابراین از آن‌جاکه $\sin\theta<۰$ و $\cos\theta>۰$، انتهای کمان θ در ربع چهارم است.

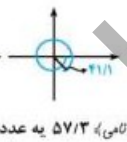
روش دوم:

$$(\cos\theta-\sin\theta)^۲=\frac{۳۶}{۲۵}\Rightarrow۱-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۳۶}{۲۵}\Rightarrow-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱۱}{۲۵}\Rightarrow\sin\theta.\cos\theta=-\frac{۱۱}{۵۰}$$

$\Rightarrow$ انتهای کمان θ در ربع دوم: $\cos\theta<۰,\ \sin\theta>۰\Rightarrow\underbrace{\cos\theta}_{\text{منفی}}-\underbrace{\sin\theta}_{\text{مثبت}}<۰$ غ‌ق‌ق $(\cos\theta-\sin\theta=\frac{۶}{۵}>۰$ زیرا طبق صورت تست$)$

انتهای کمان در ربع چهارم: $\cos\theta>۰,\ \sin\theta<۰\Rightarrow\underbrace{\cos\theta}_{\text{مثبت}}-\underbrace{\sin\theta}_{\text{منفی}}>۰\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

۳۱ ۳



مشخص کردن جای زاویه

$$-۷\text{ رادیان}=-۷\times۵۷/۳^\circ=-۴۰۱/۱^\circ=(-۳۶۰^\circ)+(-۴۱/۱^\circ)$$

$\Rightarrow -۷$ رادیان در ربع چهارم می‌باشد $\Rightarrow\cos(-۷)>۰\ ,\ \sin(-۷)<۰$

سؤال دانش‌پژوه (انوشیروان نامی): **۵۷/۳ به عدد تقریبی برای «۱» رادیانه. پس ممکنه تبدیل ما درست نباشه؟**

پاسخ: آره، تو راست میگی ولی معمولاً زاویه‌هایی که به شما میدن، شما رو به دردسر نمی‌ندازه و این تقریب جواب میده.

۳۲ ۴

می‌دانیم $-۱\le\sin x\le۱$. فرض کنید $\sin x=t$، بنابراین $-۱\le t\le۱$. حال چون t یک عدد است $-۱\text{Rad}\le t\le۱\text{Rad}$ یا به‌عبارتی $-۵۷/۳^\circ\le t\le۵۷/۳^\circ$ لذا t در ناحیهٔ اول یا چهارم واقع است پس $\cos t>۰$. یعنی $\cos(\sin x)>۰$.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فرض کنید $\tan x=-۱$ و می‌دانیم -۱ رادیان در ناحیهٔ چهارم است. پس $\sin(\tan x)<۰$.

گزینهٔ (۲): فرض کنید $\sin x=-۱$ و می‌دانیم -۱ رادیان در ناحیهٔ چهارم است. پس $\tan(\sin x)<۰$.

گزینهٔ (۳): فرض کنید $\cos x=-۱$ و می‌دانیم -۱ رادیان در ناحیهٔ چهارم است. پس $\sin(\cos x)<۰$.

۳۳ ۳

همواره برای نقطهٔ $P(x_۰,y_۰)$ که روی دایرهٔ مثلثاتی واقع شده است، داریم $x_۰^۲+y_۰^۲=۱$ (چون شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر ۱ است). در بین گزینه‌های داده شده تنها در **گزینهٔ (۳)** داریم:

$$\left(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}\right)^۲+\left(\sqrt{\frac{۲}{۵}}\right)^۲=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}=\frac{۵}{۵}=۱\Rightarrow$$

این نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی واقع است.

۳۴ ۴

$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan۳۰^\circ\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$$

اما مسأله از ما زاویهٔ OP با جهت مثبت محور xها را می‌خواهد (زاویهٔ β) که داریم:

$$\alpha+\beta=۱۸۰^\circ\xrightarrow[\alpha=۳۰^\circ]{\text{می‌دانیم}}۳۰^\circ+\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow\beta=۱۵۰^\circ=\frac{۵\pi}{۶}$$

سؤال دانش‌پژوه (مهسن کمپانی): **ببخشید، از کجا فهمیدید که ۱۵۰° برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ است؟**

پاسخ: برای تبدیل درجه به رادیان می‌توتی ۱۵۰° رو در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنی که $\frac{۵\pi}{۶}$ به‌دست می‌یاد.

۳۵ ۲

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow۳\sin x=\cos x$$

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱\Rightarrow\sin^۲x+(۳\sin x)^۲=۱\Rightarrow۱۰\sin^۲x=۱\Rightarrow\sin^۲x=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\xrightarrow{\text{انتهای کمان } x \text{ در ناحیهٔ سوم}}\sin x=\frac{-۱}{\sqrt{۱۰}}\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}}\frac{-۱}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

@khanenbook

۳۶ ۳

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}\Rightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\frac{1}{25}}\Rightarrow \tan^2\theta=25-1=24$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\pm\sqrt{24}\Rightarrow \tan\theta=-\sqrt{24}=-2\sqrt{6}$$

۳۷ ۲

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\xrightarrow{\sin\theta=\frac{3}{5}}\frac{9}{25}+\cos^2\theta=1\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{16}{25}\xrightarrow[\text{در ربع دوم } \cos\theta \text{ منفی است.}]{\theta \text{ در ربع دوم}}\cos\theta=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}\Rightarrow\tan\theta+\tan 45^\circ=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$$

۳۸ ۳ برای حل باید تک‌تک گزینه‌ها را بررسی کنیم که در این صورت **گزینهٔ (۳)** صحیح می‌باشد، زیرا:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=(+\cos x)(-\sin x)=-(\sin x.\cos x)$$

۱) ناحیهٔ دوم: cos منفی
۲) cos به sin تبدیل می‌شود
۱) ناحیهٔ دوم: sin مثبت
۲) sin به cos تبدیل می‌شود

با توجه به فرض مسأله $\sin x\cos x<0$، بنابراین $-\sin x\cos x>0$ می‌باشد. به عنوان تمرین نادرستی گزینه‌های دیگر را نشان دهید.

۳۹ ۲ برای حل ابتدا به‌طور جداگانه هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\cos(-x)=\cos x$$ ناحیهٔ چهارم: cos مثبت

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$ ۱) ناحیهٔ اول: sin مثبت ۲) sin به cos تبدیل می‌شود

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$ ۱) ناحیهٔ دوم: cos منفی ۲) cos به sin تبدیل می‌شود

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$ ۱) ناحیهٔ اول: cos مثبت ۲) cos به sin تبدیل می‌شود

حال داریم:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(-x)}=\frac{\sin x-(-\sin x)}{\cos x+\cos x}=\frac{2\sin x}{2\cos x}=\tan x$$

۴۰ ۲

$$\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=(-\cos x)+(+\cos x)+(-\cos x)+(-\cos x)=-2\cos x$$

ناحیهٔ دوم: cos منفی — ۱) ناحیهٔ دوم: sin مثبت ۲) sin به cos تبدیل می‌شود
ناحیهٔ سوم: cos منفی
۱) ناحیهٔ چهارم: sin منفی ۲) sin به cos تبدیل می‌شود

۴۱ ۳

$$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)=(-\sin 45^\circ)(-\cos 45^\circ)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ناحیهٔ سوم: sin منفی — ناحیهٔ دوم: cos منفی

۴۲ ۴

$$\cos^2\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{6}=\cos^2\left(\frac{4\pi+\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\cos^2\left(\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

ناحیهٔ سوم: cos منفی — ناحیهٔ سوم: sin منفی

سؤال دانش‌پژوه (اتوش مینوسپهر): ببخشید، چه‌طوری $\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ به‌صورت $\left[-\cos\frac{\pi}{4}\right]^2$ دراومد؟

پاسخ: ببین مینوسپهر، $\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ همان $\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ است که به صورت $\left[-\cos\frac{\pi}{4}\right]^2$ درمیاد.

ناحیهٔ سوم: cos منفی

۴۳ ۴

$$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad;\quad \sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ربع دوم: cos منفی

$$f(x)=x^2\Rightarrow f(\cos 135^\circ)\times f(\sin 135^\circ)=\cos^2 135^\circ\times\sin^2 135^\circ=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

@khanehbook

۴۴ ۴

$$\cos ۳۱۵^\circ = \cos(۳۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \cos(-۴۵^\circ) = \cos(۴۵^\circ) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ناحیهٔ چهارم: cos مثبت

۴۵ ۱

$$\sin ۱۸۶^\circ + \cos ۱۸۶^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۶^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ + ۶^\circ) = \sin(\underbrace{۱۰\times ۱۸۰^\circ}_{\text{مضارب زوج } ۱۸۰^\circ (۱۰\pi)} + ۶^\circ) + \cos(\underbrace{۱۰\times ۱۸۰^\circ}_{\text{مضارب زوج } ۱۸۰^\circ (۱۰\pi)} + ۶^\circ)$$

حذف می‌شود — حذف می‌شود

$$= \sin ۶^\circ + \cos ۶^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$$

۴۶ ۳

$$\sin ۲۰۰^\circ + \sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ + \sin ۱۹۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) + \sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ + \sin(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ + \sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ - \sin ۱۰^\circ = ۰$$

ناحیهٔ سوم: sin منفی — ناحیهٔ سوم: sin منفی

۴۷ ۱ با توجه به گزینه‌ها داریم:

$\sin ۱۱۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = \cos ۲۰^\circ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱) ناحیهٔ دوم: sin مثبت
۲) sin به cos تبدیل می‌شود

سؤال دانش‌پژوه (پویا صداقت‌زاده)، **آقا میشه بقیهٔ گزینه‌ها رو هم توضیح بدین؟**

پاسخ: دقت کن:

۲) $\cos(۱۱۰^\circ) = \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$

۱) ناحیهٔ دوم: cos منفی
۲) cos به sin تبدیل می‌شود

؛ ۳) $\sin ۲۰۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$

ناحیهٔ سوم: sin منفی

۴) $\cos ۲۰۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\cos ۲۰^\circ$

ناحیهٔ سوم: cos منفی

۴۸ ۴ برای حل باید مقدار هر یک از گزینه‌ها را محاسبه کنیم:

۱) $\tan(-۱۰^\circ) = -\tan ۱۰^\circ$

ناحیهٔ چهارم: tan منفی

؛ ۲) $\cot ۱۰۰^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۱۰^\circ) = -\tan ۱۰^\circ$

ناحیهٔ دوم: cot منفی و تبدیل به tan

۳) $\tan(۱۷۰^\circ) = \tan(۱۸۰^\circ - ۱۰^\circ) = -\tan ۱۰^\circ$

ناحیهٔ دوم: tan منفی

؛ ۴) $\tan(۱۹۰^\circ) = \tan(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ) = \tan ۱۰^\circ$ ✓

ناحیهٔ سوم: tan مثبت

۴۹ ۲

$$\cos^۵ \frac{۳\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{۵\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{۷\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{۹\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{۱۱\pi}{۱۴}$$

ربع دوم: cos منفی — ربع دوم: cos منفی

$$= \cos^۵ \frac{۳\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{۵\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{\pi}{۲} + \cos^۵\left(\pi - \frac{۵\pi}{۱۴}\right) + \cos^۵\left(\pi - \frac{۳\pi}{۱۴}\right) = \cos^۵ \frac{۳\pi}{۱۴} + \cos^۵ \frac{۵\pi}{۱۴} + ۰ - \cos^۵ \frac{۵\pi}{۱۴} - \cos^۵ \frac{۳\pi}{۱۴} = ۰$$

۵۰ ۳

۱) $\sin\left(\frac{۲۱\pi}{۵}\right) = \sin\left(\frac{۲۰\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵}\right) = \sin\left(۴\pi + \frac{\pi}{۵}\right) = \sin \frac{\pi}{۵} = \sin \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = \sin ۳۶^\circ$

۲) $\sin(-۱۰۴۴^\circ) = \sin(-(۳۶۰\times ۳ - ۳۶))^\circ = \sin(-(-۳۶^\circ)) = \sin ۳۶^\circ$

حذف مضارب صحیح ۳۶۰°

۳) $\sin(۳۴۴^\circ) = \sin(۳۶۰ - ۳۶)^\circ = \sin(-۳۶)^\circ \xrightarrow{-۳۶^\circ \text{ در ربع چهارم است}} -\sin ۳۶^\circ$ ✓

۴) $\sin\left(\frac{۱۴\pi}{۵}\right) = \sin\left(\frac{۱۰\pi}{۵} + \frac{۴\pi}{۵}\right) = \sin\left(۲\pi + \frac{۴\pi}{۵}\right) = \sin\left(\frac{۴\pi}{۵}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{۵}\right) = \sin \frac{\pi}{۵} = \sin ۳۶^\circ$

ناحیهٔ دوم: sin مثبت

بنابراین **گزینهٔ (۳)** جواب است.

۵۱ ۳ اگر تمام نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای x و y برابر باشند، جای آن‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی یکسان است. به‌عبارتی داریم:

$$x = ۲k\pi + y \;,\; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y = ۲k\pi \Rightarrow \frac{x-y}{\pi} = ۲k$$

بنابراین $\frac{x-y}{\pi}$ عدد صحیح زوجی است.

سؤال دانش‌پژوه (جعفر حسین‌پور)، **ببخشید، چرا گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) غلط هستن؟**

پاسخ: دقت کن بابا‌جان، این گزینه‌ها غلط نیستن، بلکه همیشه درست نیستن. مثلاً ممکنه شما x و y‌ای پیدا کنی که $\frac{x-y}{\pi}$ برابر صفر یا ± ۲ بشه ولی این حالت‌ها خاص هستن. مثلاً نسبت‌های مثلثاتی زوایای $x = \pi$ و $y = ۵\pi$ مثل هم هستن و داریم $\frac{x-y}{\pi} = -۴$، که در نتیجه فقط گزینهٔ (۳) درسته.

@khanen_book

۵۲ ۳

$$x+y=2\pi \Rightarrow \frac{x+y}{2}=\pi \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\pi \Rightarrow \frac{x}{2}=\pi-\frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2}=\sin\left(\pi-\frac{y}{2}\right)=\sin\frac{y}{2} \\ \cos\frac{x}{2}=\cos\left(\pi-\frac{y}{2}\right)=-\cos\frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{y}{2}\right)=0 \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

گزینه‌های (۲) و (۴) درست‌اند. $x+y=2\pi \Rightarrow x=2\pi-y \Rightarrow \cos x=\cos y\ ,\ \sin x=-\sin y \Rightarrow$

اما گزینهٔ (۳) فقط در حالت $(x=0 \text{ و } y=2\pi)$ یا $(y=0 \text{ و } x=2\pi)$ درست است و در غیر این‌صورت نادرست می‌باشد.

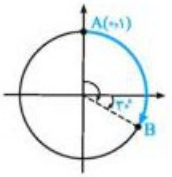
۵۳ ۴ مختصات محل برخورد ضلع انتهایی زاویهٔ α و دایرهٔ مثلثاتی، به‌صورت $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ می‌باشد. داریم:

$$\tan\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}\Rightarrow -2\sin\alpha=\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\sin^2\alpha+(-2\sin\alpha)^2=1\Rightarrow 5\sin^2\alpha=1\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1}{5}\xrightarrow[\text{انتهای کمان } \alpha \text{ در ربع چهارم}]{}\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow-\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

بنابراین محل برخورد ضلع انتهایی زاویه با دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ $P\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ می‌باشد.



۵۴ ۳ می‌دانیم $\frac{1}{3}$ دور کامل برابر با $\frac{1}{3}\times 360^\circ=120^\circ$ می‌باشد. جهت حرکت، جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌باشد و مطابق شکل می‌توانیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسیم. چون کمان حاصل از دوران، قسمتی از یک دایرهٔ مثلثاتی است، مختصات نقطهٔ B (در ناحیهٔ چهارم) به‌صورت $B(\cos(-30),\sin(-30))$ یعنی $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ می‌باشد.

۵۵ ۲

$$\tan\alpha=2\sqrt{2}\ ,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=?\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=?$$

ناحیهٔ دوم، sin مثبت و تبدیل به cos

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+(2\sqrt{2})^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+4\times 2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 9=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{3}\xrightarrow[\cos \text{ در ناحیهٔ سوم منفی است.}]{}\cos\alpha=-\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$$

۵۶ ۱

$$\sin\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{3}\ ,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=?\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

ناحیهٔ سوم، sin منفی، تبدیل به cos

حال باید مقدار $\cos\alpha$ را بیابیم. با توجه به این‌که انتهای کمان در ناحیهٔ چهارم است و کسینوس در ناحیهٔ چهارم مثبت است، داریم:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$$

۵۷ ۳

$$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{10}}{10}\ ,\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=?\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ناحیهٔ سوم، tan مثبت و تبدیل به cot

با معلوم بودن مقدار $\cos\alpha$، کافی است مقدار $\sin\alpha$ مشخص شود که در این رابطه با توجه به این‌که انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم می‌باشد، پس مقدار $\sin\alpha$ منفی است. بنابراین:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{10}{100}}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{1}{10}}=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{-\sqrt{10}}{10}}{\frac{-3}{\sqrt{10}}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

@khanenet_book

۵۸ ۳

$$\frac{۲\sin(\alpha-۳\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}=۲\ ,\ \tan\alpha=?$$

برای حل ابتدا هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی را جداگانه ساده می‌کنیم. داریم:

$$\sin(\alpha-۳\pi)=\sin[-(۳\pi-\alpha)]=-\sin(۳\pi-\alpha)=-\sin(۲\pi+\pi-\alpha)=-\sin(\pi-\alpha)=-(\sin\alpha)=-\sin\alpha$$

فاکتور از منفی — $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ می‌دانیم — ۲π حذف می‌شود — ناحیه دوم: $\sin$ مثبت

$$\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\cos\left[-(\frac{\pi}{۲}-\alpha)\right]=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha\ ;\ \sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-(\cos\alpha)=-\cos\alpha$$

فاکتور از منفی — $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ربع چهارم — ۱) ناحیه اول: $\cos$ مثبت ۲) $\cos$ به $\sin$ تبدیل می‌شود — ۱) ناحیه چهارم: $\sin$ منفی ۲) $\sin$ به $\cos$ تبدیل می‌شود

حال داریم:

$$\frac{۲\sin(\alpha-۳\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}=۲\Rightarrow\frac{۲(-\sin\alpha)+(\sin\alpha)}{-\cos\alpha}=۲\Rightarrow\frac{-۲\sin\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha}=۲\Rightarrow\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=۲\Rightarrow\tan\alpha=۲$$

۵۹ ۲

$$\frac{\cos(\overset{\pi}{\uparrow}۷\pi+\alpha)}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)}+\frac{\sin(\overset{\pi}{\uparrow}۵\pi-\alpha)}{\sin(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)}\times\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)}+\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)}\times\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$$

ربع سوم: $\cos$ منفی — ربع دوم: $\sin$ مثبت — ربع چهارم: $\tan$ منفی

ربع سوم: $\sin$ منفی — ربع سوم: $\sin$ منفی $\sin$ به $\cos$ تبدیل می‌شود — $\tan$ به $\frac{۱}{\tan}$ تبدیل می‌شود

$$=\frac{-\cos\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}\times\frac{۱}{-\tan\alpha}=۱-\tan\alpha\times\frac{۱}{-\tan\alpha}=۱+۱=۲$$

۶۰ ۱

۱) ناحیه چهارم: $\cos$ مثبت ۲) $\cos$ به $\sin$ تبدیل می‌شود.

ناحیه سوم: $\cos$ منفی

$$\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-\sin(\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-(-\sin\theta)}$$

جای مضارب فرد π، π قرار می‌دهیم — ناحیه دوم: $\sin$ مثبت — ربع سوم: $\sin$ منفی — $۲\sin\theta$

تفکیک کسر — $\frac{\sin\theta}{۲\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\tan\theta}\xrightarrow{\tan\theta=۰/۲}\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲(۰/۲)}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱۰}{۴}=\frac{۱۲}{۴}=۳$

۶۱ ۱

$$\tan\alpha=\frac{۲}{۳}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۲}{۳}\cos\alpha\ ,\ \frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})+\sin(۳\pi+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)+\cos(\alpha-\pi)}=?$$

برای حل ابتدا هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی را جداگانه ساده می‌کنیم. داریم:

$$\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin\left[-(\frac{\pi}{۲}-\alpha)\right]=-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-(+\cos\alpha)=-\cos\alpha$$

فاکتور از منفی — $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ — ۱) ناحیه اول: $\sin$ مثبت ۲) $\sin$ تبدیل به $\cos$

$$\sin(۳\pi+\alpha)=\sin(۲\pi+\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ;\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=+\sin\alpha$$

۲π حذف می‌شود — ناحیه سوم: $\sin$ منفی — ۱) ناحیه چهارم: $\cos$ مثبت ۲) $\cos$ تبدیل به $\sin$

$$\cos(\alpha-\pi)=\cos[-(\pi-\alpha)]=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

فاکتور از منفی — $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ — ناحیه دوم: $\cos$ منفی

حال داریم:

$$\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})+\sin(۳\pi+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)+\cos(\alpha-\pi)}=\frac{-\cos\alpha+(-\sin\alpha)}{\sin\alpha+(-\cos\alpha)}=\frac{-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\xrightarrow{\sin\alpha=\frac{۲}{۳}\cos\alpha}\frac{-\cos\alpha-\frac{۲}{۳}\cos\alpha}{\frac{۲}{۳}\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-\frac{۵}{۳}\cos\alpha}{-\frac{۱}{۳}\cos\alpha}=۵$$

@khanehbook

۶۲ **۱** ابتدا زاویه‌ها را بر حسب ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰ یا ۳۶۰ مرتب می‌کنیم. دقت کنید در حالت $(90^\circ+\alpha)$ یا $(270^\circ+\alpha)$ باید sin به cos و برعکس تبدیل شوند.

ربع دوم: cos منفی ربع چهارم: sin منفی و تبدیل به cos

$$\frac{\sin 285^\circ+\cos 165^\circ}{2\sin 345^\circ-3\cos 255^\circ}=\frac{\sin(270^\circ+15^\circ)+\cos(180^\circ-15^\circ)}{2\sin(360^\circ-15^\circ)-3\cos(270^\circ-15^\circ)}=\frac{-\cos 15^\circ-\cos 15^\circ}{-2\sin 15^\circ-(-3\sin 15^\circ)}=\frac{-2\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

ربع سوم: cos منفی و تبدیل به sin ربع چهارم: sin منفی

$$=\frac{-2}{\tan 15^\circ}=\frac{-2}{2-\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}}\frac{-2}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{-4-2\sqrt{3}}{4-3}=-4-2\sqrt{3}$$

۶۳ **۳**

$$\frac{\sin 250^\circ+\sin 700^\circ}{\cos 560^\circ-\cos 110^\circ}=\frac{\sin(270^\circ-20^\circ)+\sin(2\times 360^\circ-20^\circ)}{\cos(360^\circ+180^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}$$

ربع سوم: sin منفی و تبدیل به cos ربع چهارم: sin منفی

$$\xrightarrow{\text{به جای }360^\circ\text{ها می‌توانیم صفر بگذاریم.}}\frac{\sin(270^\circ-20^\circ)+\sin(0^\circ-20^\circ)}{\cos(0^\circ+180^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}=\frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}\quad (*)$$

ربع سوم: cos منفی ربع دوم: cos منفی و تبدیل به sin

حال وقت استفاده از $\tan 20^\circ=0/4$ است. داریم:

$$\tan 20^\circ=0/4\Rightarrow\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=0/4\Rightarrow\sin 20^\circ=0/4\cos 20^\circ$$

با جای‌گذاری عبارت فوق در (*) داریم:

$$\frac{-\cos 20^\circ-0/4\cos 20^\circ}{-\cos 20^\circ+0/4\cos 20^\circ}=\frac{-1/4\cos 20^\circ}{-0/6\cos 20^\circ}=\frac{1/4}{0/6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

۶۴ **۱** ابتدا سعی می‌کنیم همهٔ زوایا را برحسب 360° یا 180° یا 90° بنویسیم. سپس مضارب 360° (یا 2π) را حذف کنیم:

$$\frac{\cos(630^\circ+\alpha)}{\sin(450^\circ-\alpha)}+\frac{\sin(900^\circ-\alpha)}{\cos(720^\circ+\alpha)}\times\frac{1}{\tan(540^\circ-\alpha)}=\frac{\cos(360^\circ+270^\circ+\alpha)}{\sin(360^\circ+90^\circ-\alpha)}+\frac{\sin(2\times 360^\circ+180^\circ-\alpha)}{\cos(2\times 360^\circ+\alpha)}\times\frac{1}{\tan(360^\circ+180^\circ-\alpha)}$$

ربع دوم: sin مثبت ربع چهارم: cos مثبت و تبدیل به sin

$$=\frac{\cos(270^\circ+\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)}+\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(\alpha)}\times\frac{1}{\tan(180^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{1}{-\tan\alpha}=\tan\alpha+\cancel{\tan\alpha}\times\frac{1}{\cancel{\tan\alpha}}=\tan\alpha-1$$

ربع اول: sin مثبت و تبدیل به cos ربع دوم: tan منفی

۶۵ **۴**

$$\frac{\sin(\pi-\theta)}{1+\cos(2\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در }1-\cos\theta\text{ ضرب می‌کنیم.}}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

سؤال دانش‌پژوه (ایدا آل‌ابریشم)، آقا، شما از کجا فهمیدین که $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ رو باید در $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ ضرب کنید؟

پاسخ: قبلاً نمونهٔ این تمرین‌رو دیده بودم و آمادگی لازم رو داشتم، شما می‌تونید با قرار دادن $\theta=30^\circ$ هم به جواب برسین:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\xrightarrow{\theta=30^\circ}\frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}}\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

از طرفی در **گزینهٔ (۴)** به ازای $\theta=30^\circ$ داریم:

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\xrightarrow{\theta=30^\circ}\frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$$

و فقط به ازای این گزینه مقدار عبارت سؤال با مقدار حاصل برابر است.

سؤال دانش‌پژوه (ایدا آل‌ابریشم)، آقا راه دوم که از راه اول سخت‌تره!

پاسخ: دیگه من بی‌تقصیرم! می‌فوای اصلاً تو فلش نکن!

@khaneh_book

۶۶ ۴

$$\sin x=\cos(20^\circ+x)\xrightarrow{\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)}\sin x=\sin(90^\circ-(20^\circ+x))\Rightarrow\begin{cases}x=90^\circ-20^\circ-x\Rightarrow 2x=70^\circ\Rightarrow x=35^\circ\\ x=180^\circ-(90^\circ-20^\circ-x)\Rightarrow 0=110^\circ\ \text{غ‌ق‌ق}\times\end{cases}$$

$$\tan\left(y+\frac{\pi}{18}\right)=\cot\left(\frac{2\pi}{9}+y\right)\xrightarrow{\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\tan\left(y+\frac{\pi}{18}\right)=\tan\Big(\overbrace{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2\pi}{9}+y\right)}^{\frac{5\pi}{18}-y}\Big)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y+\frac{\pi}{18}=\frac{5\pi}{18}-y\Rightarrow 2y=\frac{4\pi}{18}\Rightarrow y=\frac{2\pi}{18}=\frac{\pi}{9}\xrightarrow{\pi=180^\circ}20^\circ\\ y+\frac{\pi}{18}=\pi+\frac{5\pi}{18}-y\Rightarrow 2y=\pi+\frac{2\pi}{9}=\frac{11\pi}{9}\Rightarrow y=\frac{11\pi}{18}>\frac{\pi}{2}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

پس حاصل $x+y=35^\circ+20^\circ=55^\circ$ می‌شود.

۶۷ ۲

نکته شیب خط همواره بیانگر تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور xها می‌باشد. شیب خط‌هایی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ منفرجه می‌سازند، منفی و شیب خطوطی که با محور xها زاویهٔ حاده می‌سازند، مثبت است.

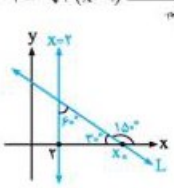
خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ منفرجهٔ $120^\circ=180^\circ-60^\circ$ می‌سازد، بنابراین شیب خط برابر است با:

$$m=\tan(120^\circ)=\tan(180-60)^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

به کمک شیب خط و نقطهٔ A، معادلهٔ خط را از فرمول $y-y_A=m(x-x_A)$ می‌نویسیم:

$$y-2=-\sqrt{3}(x-1)\xrightarrow[y=0\ \text{قرار می‌دهیم}]{\text{برای یافتن محل تقاطع با محور xها}}-2=-\sqrt{3}(x-1)\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}=x-1\Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}+1=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

۶۸ ۴



همان‌طور که از شکل مشخص است، زاویهٔ خط L با جهت مثبت محور xها، 150° می‌باشد. می‌دانیم شیب خط برابر تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xهاست، بنابراین شیب این خط برابر است با:

$$m=\tan(150^\circ)=\tan(180-30)^\circ=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۶۹ ۱

$$\begin{cases}f\left(\frac{17\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{18\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ f\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{18\pi-\pi}{3}\right)=\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

(مضارب زوج π حذف می‌شود. ربع دوم، cos منفی — مضارب زوج π حذف می‌شود. ربع چهارم، cos مثبت)

$$\Rightarrow f\left(\frac{17\pi}{6}\right)+f\left(\frac{17\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{3}+1}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

۷۰ ۳

$$y=\cos(-x)=\cos x\Rightarrow\begin{cases}y\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow y\left(\frac{5\pi}{6}\right)-y\left(\frac{7\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

۷۱ ۲ کافی است بررسی کنیم که سینوس کدام نقطهٔ داده شده با $\sin\frac{\pi}{24}$ یکسان می‌شود. پس به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ (۱): $\sin\frac{25\pi}{24}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{24}\right)=-\sin\frac{\pi}{24}$ ×

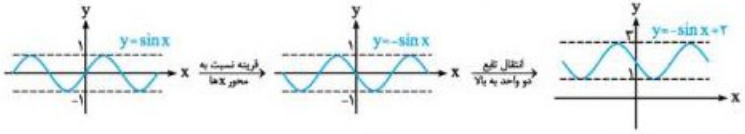
گزینهٔ (۲): $\sin\left(-\frac{47\pi}{24}\right)=-\sin\left(\frac{47\pi}{24}\right)=-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{24}\right)=-\left(-\sin\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{24}$ ✓

گزینهٔ (۳): $\sin\left(\frac{47\pi}{24}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)=-\sin\frac{\pi}{24}$ ×

گزینهٔ (۴): $\sin\left(-\frac{23\pi}{24}\right)=-\sin\left(\frac{23\pi}{24}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{24}\right)=-\sin\frac{\pi}{24}$ ×

@khanehbook

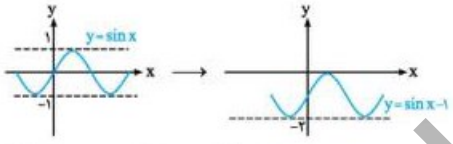
۷۲ ۳ با توجه به نمودار $y=\sin x$ سعی می‌کنیم نمودار تابع خواسته شده را بیابیم:



۷۳ ۲ ابتدا تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1=\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)-1=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1=\sin x-1$$

حال آن را رسم می‌کنیم:



۷۴ ۳

$$\cos\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}+x}_{\text{ربع دوم، cos منفی و تبدیل به sin}}\right)=-\sin x$$

۷۵ ۳ بررسی گزینه‌ها:

(۱) گزینهٔ: $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\xrightarrow{\text{ربع دوم، cos منفی و تبدیل به sin}}-\sin x\neq\sin x$ ×

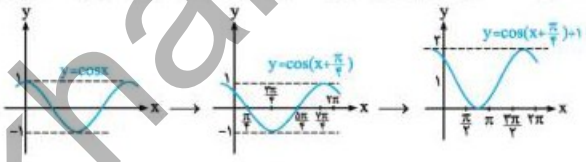
(۲) گزینهٔ: $y=\cos(5\pi-x)=\cos(4\pi+\pi-x)=\cos(\pi-x)\xrightarrow{\text{ربع دوم، cos منفی}}-\cos x\neq\cos x$ ×

(۳) گزینهٔ: $y=\cos(x-2\pi)=\cos(-(2\pi-x))=\cos(2\pi-x)\xrightarrow{\text{ربع چهارم، cos مثبت}}\cos x$ ✓

(۴) گزینهٔ: $y=\sin(-x)=-\sin x\neq\sin x$ ×

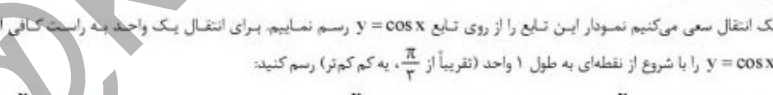
پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۷۶ ۳ برای رسم تابع، ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم و آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ به طرف چپ محور xها انتقال می‌دهیم، بدین صورت نمودار $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ به دست می‌آید. حال نمودار اخیر را به اندازهٔ یک واحد به طرف بالای محور yها انتقال می‌دهیم. ببینید:



بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۷۷ ۴ به کمک انتقال سعی می‌کنیم نمودار این تابع را از روی تابع $y=\cos x$ رسم نماییم. برای انتقال یک واحد به راست کافی است تابع $y=\cos x$ را با شروع از نقطه‌ای به طول ۱ واحد (تقریباً از $\frac{\pi}{3}$، به کم کم‌تر) رسم کنید:



سؤال دانش‌پژوه (علی اردو): آقا اون انتقال یک واحد به سمت راست خیلی سخت شد!؟ اون تقریباً از $\frac{\pi}{3}$ یه‌کم کم‌تر رو از کجا فهمید؟

پاسخ: کره. برای این که ۱ واحد مثل $\frac{\pi}{2}$، π، ... نبود و کم‌تر با اون کار کرده بودیم ولی ملالی نیست به کم تمرین و دقت، کار رو راحت می‌کنه. البته امیدوارم؟! می‌دونیم $\pi-3/14$ پس $1>\frac{3/14}{3}=\frac{\pi}{3}$. یعنی این‌که ۱ یکم از $\frac{\pi}{3}$ کم‌تر می‌شه.

@khanen_book

۷۸ **۳** بررسی گزینه‌ها:

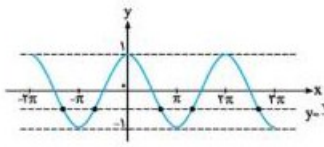
گزینهٔ (۱): $y_1=\sin x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y_2=-\sin x$ ✗

گزینهٔ (۲): $y_1=\sin x \xrightarrow[x\to x+\frac{\pi}{2}]{\text{انتقال به اندازهٔ }\frac{\pi}{2}\text{ به چپ}} y_2=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ ✗

گزینهٔ (۳): $y_1=\sin x \xrightarrow[x\to x-\frac{\pi}{2}]{\text{انتقال به اندازهٔ }\frac{\pi}{2}\text{ به راست}} y_2=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$ ✓

گزینهٔ (۴): $y_1=\sin x \xrightarrow{\text{انتقال به اندازهٔ }\frac{\pi}{2}\text{ به بالا}} y_2=\sin x+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y_3=-\left(\sin x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x-\frac{\pi}{2}$ ✗

۷۹ **۳** نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $(-2\pi,3\pi)$ به همراه نمودار خط $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از نمودار مشخص است، خط $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $(-2\pi,3\pi)$ در ۵ نقطه، همدیگر را قطع می‌کنند.

۸۰ **۱** برای یافتن نقطهٔ تقاطع، معادلهٔ دو تابع را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\left.\begin{matrix}y=\sqrt{5}+2\sin x\\ y=\sqrt{5}+2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt{5}+2\sin x=\sqrt{5}+2\Rightarrow 2\sin x=2\Rightarrow \sin x=1$$

می‌دانیم در بازهٔ $[0,2\pi]$ تابع $y=\sin x$ فقط در یک نقطه $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ به حداکثر مقدار خود یعنی ۱ می‌رسد. پس یک نقطهٔ تقاطع وجود دارد.

۸۱ **۴** ابتدا حداکثر مقدار تابع $y=4\sin x$ را می‌یابیم.

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times 4} -4\le 4\sin x\le 4 \Rightarrow$$ حداکثر مقدار این تابع برابر ۴ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $-1\le \cos x\le 1 \xrightarrow{\times(-4)} 4\ge -4\cos x\ge -4 \Rightarrow$ حداکثر مقدار این تابع ۴ است.

گزینهٔ (۲): $-1\le \cos x\le 1 \xrightarrow{\times 4} -4\le 4\cos x\le 4 \Rightarrow$ حداکثر مقدار این تابع ۴ است.

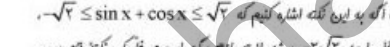
گزینهٔ (۳): $-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times(-1)} 1\ge -\sin x\ge -1 \xrightarrow{+3} 4\ge -\sin x+3\ge 2 \Rightarrow$ حداکثر مقدار این تابع ۴ است

بنابراین گزینهٔ (۴) جواب است. دقت کنید می‌دانیم که حداکثر مقدار $2\cos x$ برابر ۲ و حداکثر مقدار $2\sin x$ هم برابر ۲ می‌باشد. ولی هیچ xای وجود ندارد که همزمان حداکثر مقدار هر دو را برای ما ایجاد کند. مثلاً به ازای $x=0$، $2\cos x$ به حداکثر مقدار خود یعنی ۲ می‌رسد ولی $2\sin x$ برابر $2\sin 0=0$ می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (اکبر اکبری)، **آقا پس بالاخره حداکثر $y=2\sin x+2\cos x$ چند میشه؟**

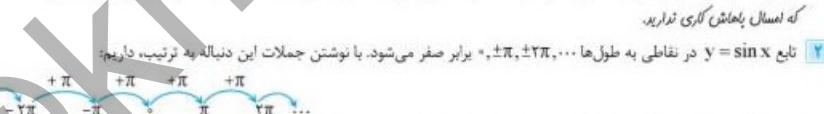
پاسخ: اگر به دست آوردن حداکثر مقدار این تابع پژه درس امسال شما نیست، اما اگه به این نکته اشاره کنیم که $-2\le \sin x+\cos x\le 2$، این وقت با ضرب کردن طرفین نامساوی‌ها در عدد ۲ حداکثر مقدار این تابع $2\sqrt{2}$ و حداقل این $-2\sqrt{2}$ میشه. البته بازم میگم این صرفاً یک نکتهٔ خاص بود که امسال بهاش کاری ندارید.

۸۲ **۲** تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول‌ها $0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$ برابر صفر می‌شود. با نوشتن جملات این دنباله به ترتیب، داریم:



ملاحظه می‌شود که جملات فوق تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=\pi$ داده‌اند.

۸۳ **۴** ابتدا سعی می‌کنیم نمودار $y=2\sin(x+1)$ را به کمک نمودار $y=\sin x$ رسم کنیم.



با توجه به شکل نهایی تابع، مشخص است که $A\underbrace{\left(\frac{3\pi}{2}-1}_{x_0},\underbrace{-2}_{y_0}\right)$ می‌باشد. پس داریم:

$$x_0+y_0=\frac{3\pi}{2}-1-2=\frac{3\pi}{2}-3=\frac{3\pi-6}{2}$$

@kraneh_book

۸۴ **۲** مقادیر حداکثری تابع $y = 4\cos x$ در نقاطی به طول‌های زیر رخ می‌دهد: $\cdots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$

زیرا $\cos(-2\pi) = \cos 0 = \cos 2\pi = \cdots = 1$. مقادیر حداقلی تابع $y = 4\cos x$ در نقاطی به طول‌های زیر رخ می‌دهد:

$\cdots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$

زیرا $\cos(-\pi) = \cos\pi = \cos 3\pi = \cdots = -1$. پس کم‌ترین مقدار تابع در بازهٔ $\left[\frac{7\pi}{2}, 6\pi\right]$ در $x = 5\pi$ و بیشترین مقدار آن در $x = 4\pi$ یا $x = 6\pi$ رخ می‌دهد. بنابراین اختلاف این مقادیر را می‌توان به صورت زیر به دست آورد: $6\pi - 5\pi = \pi$ یا $5\pi - 4\pi = \pi$

۸۵ **۱**

نکته حداکثر مقدار توابع $y = a\sin x + b$ و $y = a\cos x + b$ برابر $|a| + b$ و حداقل مقدار آن‌ها $b - |a|$ می‌باشد.

با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$|a| + 3 = 5 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a<0} a = -2 \Rightarrow y = -2\sin x + 3 \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{4} + 3 = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 = -\sqrt{2} + 3 = 3 - \sqrt{2}$$

۸۶ **۳** حداکثر مقدار تابع $y = \sin x$ در نقاطی به طول $(k \in \mathbb{Z}) 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد. با توجه به این‌که می‌دانیم $\pi \simeq 3/14$، اولین نقطه‌ای که بعد از $x = 20$ مقدار حداکثری تابع فوق حاصل می‌شود به ازای $k = 3$ به دست می‌آید:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=3} x = 6\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{2} = \frac{13 \times 3/14}{2} = 13 \times 1/57 = 20/41$$

سؤال دانش‌پژوه (معصومه کالوسی)، **ببخشید جوابتون تقریبیه. شاید عدد واقعیِ جواب نهایی کم‌تر از ۲۰ باشه؟!**

پاسخ: *این هم حرفیه! ولی این‌طور نیست. چون عدد π واقعی به‌کم بزرگ‌تر از $3/14$ هست. پس قطعاً جواب نهایی ما از $20/41$ هم بزرگ‌تر میشه. بنابراین حتماً از ۲۰ بزرگ‌تره.*

۸۷ **۱**

$$-1 \le \sin x \le 1 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی را در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم. جهت‌های نامساوی عوض می‌شود.}} 1 \ge -\sin x \ge -1 \xrightarrow{\text{جزبه‌جزء نامساوی را با 1 جمع می‌کنیم.}} 2 \ge 1 - \sin x \ge 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{1 - \sin x} \le \sqrt{2} \Rightarrow R_f = [0, \sqrt{2}]$$

۸۸ **۲** برای پیدا کردن برد، تابع y را می‌سازیم. برای این‌کار دو حالت زیر را در نظر گرفته و در نهایت بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$\begin{cases} \sin x \ge 0 \xrightarrow{|\sin x| = \sin x} y = 2\sin x + 7\sin x = 9\sin x \xrightarrow{0 \le \sin x \le 1} 0 \le 9\sin x \le 9 \Rightarrow 0 \le y \le 9 & (I) \\ \sin x \le 0 \xrightarrow{|\sin x| = -\sin x} y = 2\sin x - 7\sin x = -5\sin x \xrightarrow{-1 \le \sin x \le 0} 0 \le -5\sin x \le 5 \Rightarrow 0 \le y \le 5 & (II) \end{cases}$$

با اجتماع‌گیری بین دو حالت (I) و (II)، برد تابع به صورت بازهٔ $[0, 9]$ حاصل می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد)، **ببخشید، چرا حالت‌های $\sin x \ge 0$ و $\sin x \le 0$ را در نظر گرفتید؟**

پاسخ: *چون داخل قدرمطلق $\sin x$ بود، برای این‌که علامت قدرمطلق رو تعیین و اونو از بین ببرم، این حالت‌ها رو گرفتم.*

۸۹ **۳** ابتدا عبارت A را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$$A = \cos^2 x - 3\underbrace{\sin^2 x}_{(1-\cos^2 x)} = \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x \Rightarrow A = 4\cos^2 x - 3$$

حال می‌دانیم که کم‌ترین و بیشترین مقدار $\cos^2 x$ به ترتیب ۰ و ۱ است، بنابراین:

$$0 \le \cos^2 x \le 1 \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی را در 4 ضرب می‌کنیم.}} 0 \le 4\cos^2 x \le 4 \xrightarrow{\text{حال عدد 3 را از طرفین نامساوی‌ها کم می‌کنیم.}} -3 \le 4\cos^2 x - 3 \le 1 \Rightarrow -3 \le A \le 1$$

۹۰ **۱**

$$\left.\begin{array}{l} f(2\pi) = 0 \Rightarrow 0 = 2a + b\sin 2\pi \Rightarrow a = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow 2 = 2a + b\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 = 2a + b \xrightarrow{a=0} b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a - b = 0 - 2 = -2$$

۹۱ **۴**

نکته حداکثر مقدار تابع $y = a\sin x + b$ برابر $|a| + b$ است.

با توجه به نمودار مشخص است که $y(0) = 1$ می‌شود. داریم:

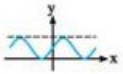
$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = a\sin(0) + b \Rightarrow b = 1$$

با توجه به نکتهٔ گفته شده داریم:

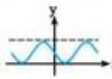
$$|a| + b = 2 \xrightarrow{b=1} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

@khanenbook

اما اگر $a=1$ باشد، تابع به صورت $y=\sin x+1$ می‌شود که نمودار آن به شکل روبه‌رو خواهد شد که غلط است.



پس $a=-1$ می‌باشد:



$$a=-1\Rightarrow y=-\sin x+1\Rightarrow a-b=-1-1=-2$$

۹۲ ۴ با توجه به شکل صورت سؤال داریم:

روش اول:

$$f(\frac{\pi}{6})=0\Rightarrow 0=a\sin(\frac{\pi}{6}+b)\overset{a\neq 0}{\Longrightarrow}\sin(\frac{\pi}{6}+b)=0\Rightarrow b=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow f(x)=a\sin(x-\frac{\pi}{6})$$

از طرفی بیشترین مقدار تابع برابر ۲ می‌باشد؛ پس یا $a=2$ یا $a=-2$ است. اگر $a=-2$ باشد، داریم:

$$f(0)=-2\sin(0-\frac{\pi}{6})=-2\sin(-\frac{\pi}{6})=-2(-\frac{1}{2})=1$$

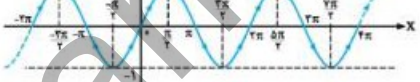
اما همان‌طور که از نمودار مشخص است، $f(0)<0$ پس $a\neq -2$ بوده و $a=2$ می‌باشد؛ لذا داریم:

$$f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})\Rightarrow f(\frac{5\pi}{12})=2\sin(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{3\pi}{12})=2\sin\frac{\pi}{4}=2(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$$

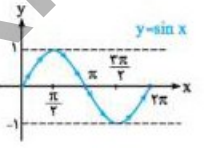
روش دوم: با کمی دقت می‌توان فهمید، نمودار داده شده از انتقال تابع $y=2\sin x$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ واحد به راست، حاصل شده است. پس:

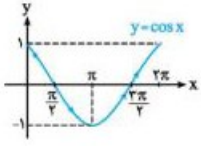
$$y=2\sin x\xrightarrow[x\to x-\frac{\pi}{6}]{\text{انتقال }\frac{\pi}{6}\text{ به راست}}f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})\Rightarrow f(\frac{5\pi}{12})=\sqrt{2}$$

۹۳ ۴ با توجه به شکل زیر مشخص است که تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ منفی و افزایشی می‌باشد. با اضافه کردن مضارب صحیح 2π به ابتدا و انتهای بازهٔ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ می‌توان به بازه‌های دیگری رسید که تابع در آن‌ها افزایشی و منفی است. مثلاً با اضافه کردن 2π به ابتدا وانتهای بازهٔ فوق به بازهٔ $(\frac{7\pi}{2},4\pi)$ می‌رسیم. لذا گزینهٔ (۴) جواب تست است. هم‌چنین با توجه به نمودار رسم شده مشخص است که در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\pi)$ تابع مثبت و کاهشی، در بازهٔ $(3\pi,\frac{7\pi}{2})$، منفی و کاهشی و در بازهٔ $(-\pi,\frac{-\pi}{2})$ نیز منفی و کاهشی می‌باشد.

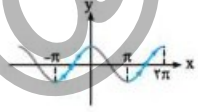


۹۴ ۴ با توجه به نمودارهای زیر مشخص است که در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ منفی و کاهشی می‌باشد، اما در همین فاصله تابع $y=\cos x$، افزایشی و منفی می‌باشد. بنابراین هیچ بازه‌ای از $[0,2\pi]$ وجود ندارد که در آن، رفتار $\sin x$ و $\cos x$ به طور همزمان کاهشی و منفی باشند. با توجه به این‌که در بازه‌هایی به طول 2π نمودارها تکرار می‌شوند، پس در هیچ بازه‌ای چنین اتفاقی همزمان رخ نخواهد داد.





۹۵ ۲ نمودار تابع $y=\cos x$ به صورت مقابل است و مرتباً در هر بازه به طول 2π تکرار می‌شود:



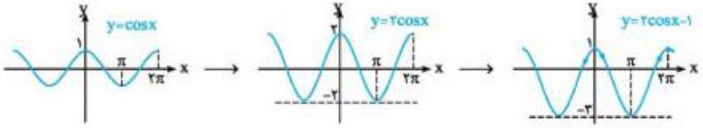
با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که این تابع در بازه‌هایی که حداکثر طول آن می‌تواند π باشد، افزایشی است.

سؤال دانش‌پژوه (امیر سه‌رهی)، **آقا یعنی مثلاً در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ که تابع $y=\cos x$ افزایشی هست، حداکثر طول بازه $\pi=\pi-2\pi$ میشه؟**

پاسخ: دقیقاً! دقت کنید مثلاً این تابع در بازهٔ $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ هم افزایشی هست ولی چون کلمهٔ «حداکثر» به کار رفته، حداکثر طول π می‌شود.

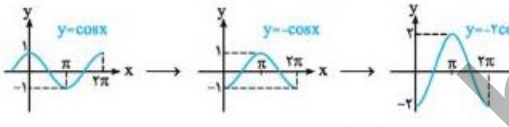
@khanehbook

۹۶ ۳ به کمک تابع $y=\cos x$ نمودار $y=۲\cos x-۱$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل مشخص است که وقتی در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کنیم، نمودار تابع در نقاط ۰و۲π از حالت افزایشی به کاهشی تغییر می‌کند. با توجه به تکرار تابع در هر بازه به طول ۲π، در نقاط ۲kπ نمودار تابع از حالت افزایشی به کاهشی تغییر می‌کند، یعنی در نقاط ...،۰،±۲π،±۴π،... پس گزینهٔ (۳) جواب است.

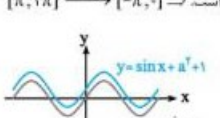
۹۷ ۳ نمودار تابع $y=-۲\cos x$ از روی تابع $y=\cos x$ به شکل زیر رسم می‌شود.



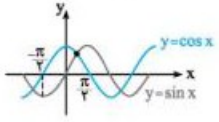
با توجه به نمودار مشخص است که تابع فوق در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تنها در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ کاهشی است. پس با توجه به تکرار تابع در بازه‌هایی به طول ۲π، با افزایش یا کاهش مضارب ۲π به ابتدا و انتهای بازه، می‌توان به بازه‌هایی دست یافت که تابع فوق در آن‌ها کاهشی است. به عنوان مثال با کم کردن ۲π از ابتدا و انتهای بازه داریم:

$[\pi,۲\pi] \xrightarrow{-۲\pi} [-\pi,۰] \Rightarrow$ تابع در این بازه نیز کاهشی است.

۹۸ ۱ می‌دانیم $a^۲+۱\geq ۱$. پس نمودار $y=\sin x+a^۲+۱$ از انتقال تابع $y=\sin x$ به اندازهٔ $a^۲+۱$ واحد به بالا حاصل می‌شود. با انتقال این تابع به بالا دو تابع هیچ نقطهٔ برخوردی با هم ندارند. ببینید:

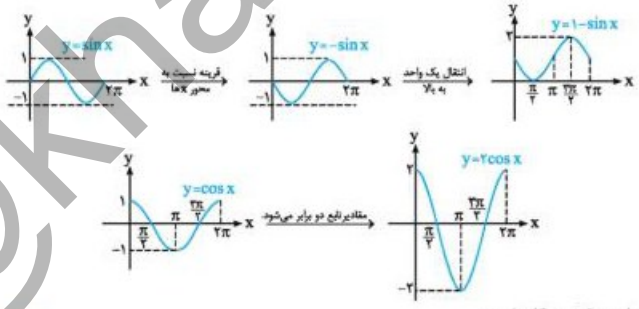


۹۹ ۲ می‌دانیم $\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos x$. پس کافی است دو نمودار $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در یک دستگاه در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ رسم کنیم:



با توجه به نمودار مشخص است که دو تابع یک نقطهٔ تقاطع در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ دارند.

۱۰۰ ۱

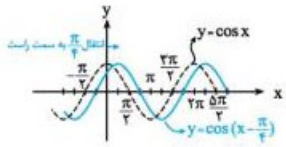


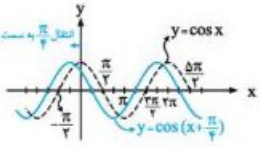
با رسم هر دو نمودار در یک دستگاه داریم:

دو نقطهٔ برخورد در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ دارند. $\Rightarrow$

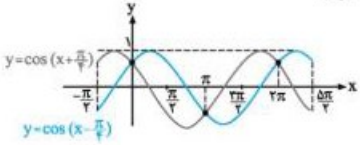
@khaneh_book

۱۰۱ ۳ برای رسم تابع $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$، کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست و برای رسم تابع $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$ باید نمودار تابع $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۴}$ به سمت چپ حرکت دهیم.





با رسم هر دو نمودار فوق در یک دستگاه داریم:

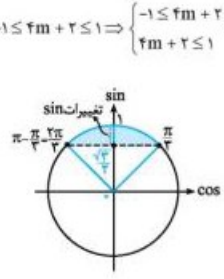


همان‌طور که از نمودارها مشخص است در فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}\right]$ این دو تابع سه نقطهٔ تقاطع دارند.

۱۰۲ ۴ می‌دانیم که $-۱\leq\cos\alpha\leq۱$ می‌باشد. بنابراین با توجه به این‌که $\cos\alpha=۴m+۲$ می‌باشد، داریم:

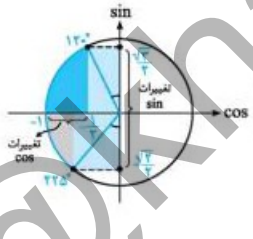
$$-۱\leq ۴m+۲\leq ۱\Rightarrow\begin{cases}-۱\leq ۴m+۲\\ ۴m+۲\leq ۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۴m\leq ۲+۱\\ ۴m\leq ۱-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۴m\leq ۳\\ ۴m\leq -۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geq -\frac{۳}{۴}\\ m\leq -\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow -\frac{۳}{۴}\leq m\leq -\frac{۱}{۴}$$

۱۰۳ ۳ از شکل مقابل، با تصویر کردن کمان مشخص شده بر روی محور سینوس‌ها، مشخص می‌شود که $\sin\theta$ ابتدا در فاصلهٔ $\frac{\pi}{۳}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ مرتباً افزایش می‌یابد تا در $\frac{\pi}{۲}$ به بیشترین مقدار خود یعنی $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ می‌رسد، سپس مقدار آن کاهش می‌یابد تا در $\frac{۲\pi}{۳}$ مجدداً به $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌رسد. پس حدود تغییرات $\sin x$ با توجه به قسمت مشخص شده روی محور سینوس‌ها، به‌صورت $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\leq\sin x\leq ۱$ می‌باشد، پس $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\leq k\leq ۱$.



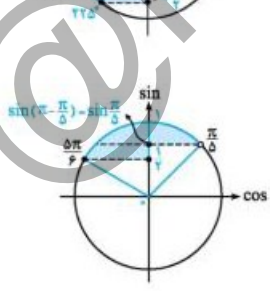
۱۰۴ ۴ می‌دانیم $\cos(۱۲۰^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$.
(ربع دوم: cos منفی)

هم‌چنین $\cos۲۲۵^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)=-\cos۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به‌دست می‌آید. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل از تصویر کردن کمان پر رنگ شده روی محور افقی (محور cos) حدود $\cos x$ به‌صورت $-\frac{۱}{۲}\leq\cos x\leq -۱$ به‌دست می‌آید و گزینهٔ (۴) صحیح است.
(ربع سوم: cos منفی)



به‌عنوان نمونه خودتان ببینید و نشان دهید $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leq\sin x\leq\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

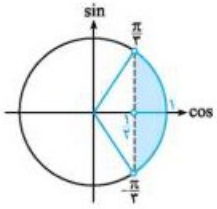
۱۰۵ ۳ با توجه به شکل مقابل، مقدار $\sin x$ ابتدا از $\sin\frac{\pi}{۵}$ آغاز و در $\frac{\pi}{۲}$ به بیشترین مقدار خود یعنی $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ می‌رسد. سپس کاهش یافته و در $\frac{۵\pi}{۶}$ به $\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ می‌رسد.
اما یک نکتهٔ مهم این است که با توجه به نمودار روی محور sin ها، $\sin\frac{۵\pi}{۶}<\sin\frac{\pi}{۵}$ و لذا حدود تغییرات $\sin x$، به‌صورت $\frac{۱}{۲}\leq\sin x\leq ۱$ است و چون $\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$، حدود تغییرات $\sin x$ با توجه به قسمت مشخص شده روی محور سینوس‌ها، به‌صورت $\frac{۱}{۲}\leq\sin x\leq ۱$ می‌باشد.



@khanenet_book

۱۰۶ ۳ چون کمان داخل عبارت cos، ۳x است، ابتدا از حدود x، حدود ۳x را می‌یابیم:

$$-\frac{\pi}{۹}<x<\frac{\pi}{۹} \Rightarrow -\frac{\pi}{۳}<۳x<\frac{\pi}{۳}$$



حدود تغییرات ۳x روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت مقابل است. بنابراین با تصویر کردن کمان روی محور cos ها، به نامساوی $\frac{۱}{۲}<\cos ۳x\leq ۱$ می‌رسیم، لذا:

$$\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۲}\leq ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۱<m-۱\leq ۲ \xrightarrow{+۱} ۲<m\leq ۳$$

۱۰۷ ۲ وقتی $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ قرار دارد، یعنی در ناحیهٔ سوم واقع شده است. پس $\sin x<۰$ و $\cos x<۰$.

$$\sqrt{۱+۲\sqrt{\sin^۲ x(۱-\sin^۲ x)}}=\sqrt{۱+۲\sqrt{\sin^۲ x.\cos^۲ x}}=\sqrt{۱+۲|\sin x.\cos x|}$$

$$\frac{\sin x<۰,\cos x<۰}{|\sin x.\cos x|=\sin x\cos x}\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}=\sqrt{\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+۲\sin x\cos x}$$

$$\frac{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}{}\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}=|\sin x+\cos x|\frac{\sin x<۰,\cos x<۰}{\sin x+\cos x<۰}-(\sin x+\cos x)=-\sin x-\cos x$$

۱۰۸ ۲ $x=۲۸۳^\circ$ در ربع چهارم واقع است، زیرا $۲۸۳^\circ=۲۷۰^\circ+۱۳^\circ$. در ربع چهارم، طبق قانون هستکه فقط cos مثبت است، پس **گزینه‌های (۱) و (۴)** نادرست‌اند. به بررسی گزینه‌های (۲) و (۳) می‌پردازیم:

گزینهٔ (۲): $\tan x<\sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}<\sin x \xrightarrow[\text{علامت عوض می‌شود}]{\text{چون } \sin x<۰\text{، با تقسیم طرفین بر } \sin x} \frac{۱}{\cos x}>۱$

$\xrightarrow{\text{در } \cos x \text{ جهت عوض نمی‌شود}} \cos x.\frac{۱}{\cos x}>\cos x.۱ \Rightarrow ۱>\cos x$ ✓ همواره برقرار است. $\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

گزینهٔ (۳): $\tan^۲ x<\sin^۲ x \Rightarrow \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}<\sin^۲ x \xrightarrow[\text{طرف بر } \sin^۲ x \text{ علامت عوض نمی‌شود}]{\text{چون } \sin^۲ x>۰\text{، با تقسیم دو}} \frac{۱}{\cos^۲ x}<۱ \xrightarrow{\times \cos^۲ x>۰} ۱<\cos^۲ x \quad (*)$

می‌دانیم $-۱\leq \cos x\leq ۱$، پس $\cos^۲ x\leq ۱$. لذا (*) همواره نادرست و گزینهٔ (۳) صحیح نیست.

یادداشت

@khanehketab

فصل ۵

MATHEMATICS

توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
- درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن
- درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

@khanebook

توابع نمایی و لگاریتمی

درس‌نامه ۱

شناخت تابع نمایی

هر تابع به صورت $y = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ را **تابع نمایی** می‌نامیم.

تذکر دقت کنید با توجه به تعریف بالا a عدد منفی یا صفر یا یک نمی‌تواند باشد.

مثال تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ یک تابع نمایی است ولی $g(x) = (-2)^x$ تابع نمایی نیست، زیرا $-2 < 0$ می‌باشد.

رسم تابع نمایی:

۱) اگر $a > 1$ باشد، با استفاده از محاسبهٔ مقادیر تابع به ازای مقادیر مختلف x، می‌توانیم تابع را به صورت زیر رسم کنیم:

۲) اگر $0 < a < 1$ باشد، با استفاده از محاسبهٔ مقادیر تابع به ازای xهای مختلف، می‌توانیم تابع را به صورت زیر رسم کنیم:

نکات با توجه به نمودار تابع نمایی $y = a^x$ داریم:

۱) دامنهٔ تابع نمایی $y = a^x$ **اعداد حقیقی** است.

۲) برد تابع نمایی $y = a^x$ **اعداد حقیقی مثبت** می‌باشد.

۳) تابع نمایی $y = a^x$ تابعی **یک‌به‌یک** و در نتیجه **معکوس‌پذیر** است.

۴) تابع نمایی $y = a^x$ همواره از ناحیه‌های **اول و دوم** محورهای مختصات می‌گذرد.

۵) تابع نمایی $y = a^x$ همواره از نقطهٔ **(۰،۱)** می‌گذرد. (محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند)

تذکر در توابع $y = k(a^x)$ که $(k \neq 0)$ همواره به ازای **افزایش (کاهش) مقدار ثابتی** در مقادیر ورودی (متغیر مستقل)، مقادیر خروجی (متغیر وابسته) **در عدد ثابت و مثبت غیر یک ضرب می‌شوند.**

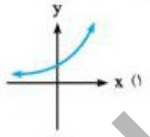
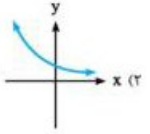
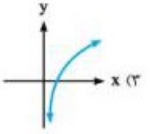
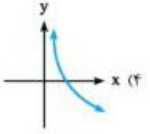
مثال آیا جدول $\begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۴ & ۶ \\ \hline y & ۳ & ۱۲ & ۴۸ \end{array}$ بیانگر تغییرات تابع نمایی $y = a^x$ است؟ جدول $\begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۴ & ۸ & ۱۲ \end{array}$ چطور؟

پاسخ: در جدول اول داریم $\begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۴ & ۶ \\ \hline y & ۳ & ۱۲ & ۴۸ \end{array}$ (+۲، +۲ / ×۴، ×۴). یعنی به ازای هر ۲ واحد افزایش در مقادیر ورودی، مقادیر خروجی در عدد ثابت و مثبت ۴ ضرب می‌شوند. بنابراین این جدول بیانگر تغییرات یک تابع نمایی است.

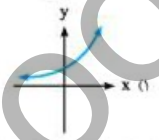
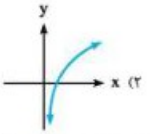
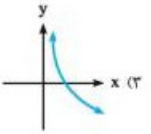
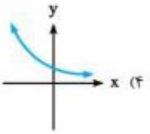
در جدول دوم داریم $\begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۴ & ۸ & ۱۲ \end{array}$ (+۱، +۱ / ×۲، $\times\frac{۳}{۲}$). همان‌طور که می‌بینید به ازای افزایش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی، مقادیر خروجی در عدد مثبت و ثابتی ضرب نمی‌شوند (یک‌بار در ۲ و یک‌بار در $\frac{۳}{۲}$ ضرب شده‌اند). بنابراین این جدول بیانگر تغییرات یک تابع نمایی نیست.

@khaneh_book

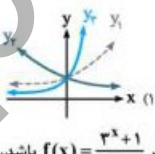
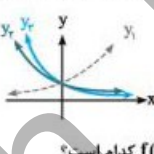
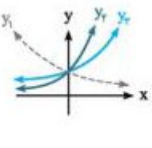
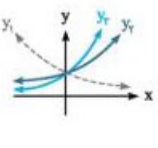
۱- نمودار تابع $y = 3^x$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲- نمودار تابع $y = \frac{(\frac{1}{6})^x}{5^{-x}}$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳- اگر $0 < a < 1 < b < c$ باشد، در کدام گزینه نمودارهای $y_1 = a^x$، $y_2 = b^x$ و $y_3 = c^x$ درست رسم شده‌اند؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۴- اگر $f(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$ باشد، $f(2) - f(-2)$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $-2/\overline{5}$ ۳) $1/\overline{25}$ ۴) صفر

۵- دامنهٔ تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^{\sqrt{x}-1}$ کدام است؟

۱) $x > 0$ ۲) $x \geq 0$ ۳) $x > 1$ ۴) $x \geq 1$

۶- برد تابع $f(x) = 5^{\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x-2}}$ شامل چند عضو است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۷- کدام گزینه، یک تابع نمایی است؟

۱) $f(x) = \frac{-1}{(\sqrt{3})^{5x}}$ ۲) $g(x) = (-2)^{x+1}$ ۳) $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ۴) $k(x) = \frac{4^x}{2^{2x+1}}$

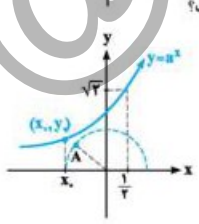
۸- اگر $f(x) = (\frac{2-a}{a+2})^{x+1}$ تابعی نمایی باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) $(-2,2)$ ۲) $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ ۳) $(-2,2) - \{0\}$ ۴) $(2,+\infty)$

۹- اگر نمودار تابع نمایی $y = (m^2 - 2m + 1)^x$ به صورت روبه‌رو باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(0,2)$
۲) $(0,2) - \{1\}$
۳) $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$
۴) $\mathbb{R} - \{1\}$

۱۰- در نمودار مقابل، اگر $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و کمان نقطه‌چین، یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ باشد، مقدار y_0 کدام است؟



۱) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
۲) $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}}$
۳) $(\frac{\sqrt[4]{2}}{2})^{\sqrt{2}}$
۴) $(\frac{\sqrt[4]{8}}{2})^{\sqrt{2}}$

@khaneh_book

۱۱- کدام‌یک از جدول‌های زیر، بیانگر تغییرات یک تابع نمایی با ضابطهٔ $y = k.a^x$ است؟

۱) $\begin{array}{|c|ccc|}\hline x & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & -۲ & ۸ & -۳۲ \\ \hline \end{array}$ ۲) $\begin{array}{|c|ccc|}\hline x & ۱ & ۳ & ۵ \\ \hline y & -۱۹۲ & -۲۴ & -۳ \\ \hline \end{array}$ ۳) $\begin{array}{|c|ccc|}\hline x & ۱ & ۲ & ۴ \\ \hline y & ۱ & ۴ & ۱۶ \\ \hline \end{array}$ ۴) $\begin{array}{|c|ccc|}\hline x & ۱ & ۳ & ۵ \\ \hline y & ۱ & ۱ & ۱ \\ \hline \end{array}$

۱۲- کدام‌یک از جدول‌های زیر، تغییرات یک تابع نمایی با ضابطهٔ $y = k.a^x$ را نشان می‌دهد؟

۱) $\begin{array}{|c|cccc|}\hline x & ۰ & ۱۰ & ۲۰ & ۳۰ \\ \hline y & ۱۰ & ۵ & ۲/۵ & ۱/۲۵ \\ \hline \end{array}$ ۲) $\begin{array}{|c|cccc|}\hline x & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & -۵ & ۲۵ & -۱۲۵ & ۶۲۵ \\ \hline \end{array}$ ۳) $\begin{array}{|c|cccc|}\hline x & ۱ & ۲ & ۴ & ۵ \\ \hline y & ۲ & ۶ & ۱۸ & ۵۴ \\ \hline \end{array}$ ۴) $\begin{array}{|c|cccc|}\hline x & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline y & ۳ & ۴ & ۶ & ۸ \\ \hline \end{array}$

۱۳- ضابطهٔ تابعی که با دامنهٔ «مجموعهٔ اعداد طبیعی» بردی برابر با «مجموعه مقادیر یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۶ و قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$» داشته باشد، کدام است؟

۱) $f(x) = ۳ \times ۲^x$ ۲) $g(x) = ۳ \times (\frac{۱}{۲})^x$ ۳) $h(x) = ۱۲ \times ۳^{-x}$ ۴) $k(x) = ۶ \times ۳^{-x}$

۱۴- اگر در تابع نمایی $f(x) = a^x$ داشته باشیم $f(۴) = ۶$، آن‌گاه $f(-۲)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\sqrt{۶}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$

۱۵- اگر $f(x) = a^x$ تابع نمایی باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $f(x).f(-x) = ۱$ ۲) $\frac{f(x)}{f(-x)} = (f(x))^۲$ ۳) $f(x) + f(-x) = ۰$ ۴) $(f(x))^{-۲} - (f(-x))^۲ = ۰$

۱۶- اگر در تابع $f(x) = a^x + bx + c$ داشته باشیم $f(۰) = ۰$، $f(۱) = ۰$ و $f(۲) = -۱$، این تابع چه نوع تابعی است؟

۱) خطی ۲) نمایی ۳) سهمی ۴) همانی

۱۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a.b^x ; b > ۰$، داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۲۲}$. مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۱

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۸- اگر در تابع $f(x) = a^x + b^x$ داشته باشیم $\frac{f(۱)}{f(-۱)} = ۲۴$ و $\frac{f(۳)}{f(۱)} = ۲۸$، آن‌گاه مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۷۳ ۲) ۴۹ ۳) ۵۲ ۴) ۱۰۰

۱۹- اگر $f(x) = ۳^x$، آن‌گاه $\frac{f(x+۲) - ۲f(x+۱)}{f(x)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = A(۲)^{Bx}$، و خط به معادلهٔ $۵x - ۴y = ۰$، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-۱}(۱۰)$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۵

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۱- اگر $f(x) = (\sqrt{۳})^x$ و داشته باشیم $f(x+۵) - f(x+۳) = Af(x+۱)$، A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۷۲

۲۲- در کدام گزینه، توابع نمایی داده شده با هم برابرند؟ $(a \neq ۱ ; a > ۰)$

۱) $y_۱ = ۹^{x+۱}$ و $y_۲ = ۳^{۲x+۱}$ ۲) $y_۱ = a^{\frac{x}{۲}}$ و $y_۲ = a^{\sqrt{x}}$

۳) $y_۱ = \sqrt{a^{\sqrt{x}}}$ و $y_۲ = \sqrt{a^x}$ ۴) $y_۱ = (\sqrt{a})^x$ و $y_۲ = \sqrt{a^x}$

۲۳- تابع $y = -۲(۵^{x+۱}) + ۴(۳^x) + ۱$، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) ۵

۲۴- نمودار تابع $y = (۳\sqrt{۳})^{x+۲} - ۱۸(\sqrt{۳^{۳x}}) - \frac{۱}{۳}$ محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۵- کدام گزینه در مورد تابع نمایی $f(x) = a^x$ صحیح است؟

۱) تابع معکوس این تابع $f^{-۱}(x) = (\frac{۱}{a})^x$ می‌شود.

۲) تابع از نقطه‌ای به طول یک روی محور طول‌ها عبور می‌کند.

۳) برد این تابع اعداد حقیقی نامنفی می‌باشد.

۴) این تابع الزاماً یک‌به‌یک است.

@khanehbook

۲۶- تابع $f(x)=a^x$ به ازای چند مقدار نامنفی a، وارون‌پذیر نیست؟

۱) به ازای تمام مقادیر a وارون‌پذیر است.
۲) یک مقدار
۳) دو مقدار
۴) بی‌شمار مقدار

۲۷- فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع $y=2^x+1$ با محور y‌ها تا نقطهٔ برخورد تابع معکوس این تابع با محور x‌ها، کدام است؟

۱) ۲
۲) $4\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{2}$
۴) ۴

۲۸- نمودارهای توابع $f(x)=3^{-x}$ و $g(x)=x$ در چند نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۲۹- معادلهٔ $2^x-x^2=0$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

درسنامهٔ ۲

معادلات، نامساوی‌ها و نامعادلات نمایی

برای حل معادلات نمایی، کافی است در دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم‌پایه ایجاد کنیم. سپس توان‌ها را با هم برابر قرار داده و از حل معادلهٔ حاصل، مجهول را به دست آوریم.

مثال معادلهٔ نمایی $2^{3x+1}-2\times 8^{2x+4}=0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$2^{3x+1}-2\times 8^{2x+4}=0 \Rightarrow 2^{3x+1}=2\times(2^3)^{2x+4} \Rightarrow 2^{3x+1}=2^1\times 2^{6x+12}$$

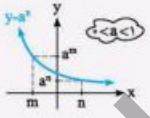
$$\Rightarrow 2^{3x+1}=2^{6x+13} \xrightarrow[\text{توان‌ها را برابر قرار می‌دهیم.}]{\text{پایه‌ها برابرند}} 3x+1=6x+13 \Rightarrow 3x+12=0 \Rightarrow x=-4$$

نامساوی‌های نمایی:

حالت ۱: الف) اگر **پایه‌ها بزرگ‌تر از ۱ و برابر** باشند، با توجه به نمودار داریم:

$$n>m \Leftrightarrow a^n>a^m$$

حالت ۱: ب) اگر **پایه‌ها بین صفر و یک و برابر** باشند، با توجه به نمودار داریم:



$$n>m \Leftrightarrow a^n<a^m$$

مثال اعداد $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$، 3^{-40} و 2^7 را مقایسه نمایید.

پاسخ: می‌دانیم $3^{-30}=\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$، حال چون همهٔ پایه‌ها برابر و بزرگ‌تر از ۱ می‌باشند، بنابر حالت (۱) قسمت (الف) داریم:

$$-40<-30<7 \Rightarrow 3^{-40}<3^{-30}<2^7$$

تذکر می‌توانیم هر سه عدد را با پایهٔ $\frac{1}{2}$ نوشته و سپس با توجه به حالت (۱) قسمت (ب) آن‌ها را مقایسه نماییم.

حالت ۲: الف) اگر **توان‌ها برابر و مثبت** باشند، با فرض مثبت بودن پایه‌ها از نمودار داریم:

$$0<d<c<1<b<a \Rightarrow d^n<c^n<b^n<a^n$$

حالت ۲: ب) اگر **توان‌ها برابر و منفی** باشند، با فرض مثبت بودن پایه‌ها از نمودار داریم:

$$0<d<c<1<b<a \Rightarrow d^n>c^n>b^n>a^n$$

مثال اعداد ۰/۰۰۱ و $(2\sqrt{3})^{-6}$ را با هم مقایسه کنید.

@khanen_book

پاسخ:

$$(2\sqrt{3})^{-6}=\left[(2\sqrt{3})^{2}\right]^{-3}=12^{-3}\ \Big\}\xrightarrow[\text{حالت (۲) قسمت (ب)}]{\text{توان‌ها منفی و برابرند و }10<12}10^{-3}>12^{-3}$$
$$10^{-3}=0/001$$

سؤال دانش‌پژوه (مانی ماندگاری): ببخشید، من 12^{-3} رو $\left(\frac{1}{12}\right)^{3}$ و 10^{-3} رو $\left(\frac{1}{10}\right)^{3}$ نوشتم و از حالت (۲) قسمت (الف) گفتم چون $\frac{1}{12}<\frac{1}{10}$، پس $\left(\frac{1}{12}\right)^{3}<\left(\frac{1}{10}\right)^{3}$ به عبارتی $12^{-3}<10^{-3}$.

پاسخ: بله، شما هم درست رفتی. همیشه می‌توانیم با معکوس کردن پایه علامت توان رو قرینه کنیم.

به کمک حالات بالا می‌توانیم نامعادلات نمایی را نیز حل نماییم و جواب را به دست آوریم.

مثال مجموعه جواب x را از حل نامعادلهٔ نمایی $\frac{(0/04)^{x^2}}{(0/2)^{2}}\le\frac{1}{625}$ به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{(0/04)^{x^2}}{(0/2)^{2}}\le\frac{1}{625}\Rightarrow\frac{[(0/2)^{2}]^{x^2}}{(0/2)^{2}}\le\frac{1}{5^{4}}\Rightarrow\frac{(0/2)^{2x^2}}{(0/2)^{2}}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\xrightarrow{0/2=\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-2}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$$
$$\xrightarrow[\text{حالت (۱) قسمت (ب)}]{\text{پایه‌ها برابرند و }\frac{1}{5}<1}2x^2-2\ge4\Rightarrow2(x^2-3)\ge0\Rightarrow x^2-3\ge0\Rightarrow(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\ge0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x\ge\sqrt{3}\ \text{یا}\ x\le-\sqrt{3}$$

۳۰- مقدار x از حل معادلهٔ $27^{2x+1}=9^{2x-1}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۳۱- از تساوی $(0/5)^{x}\times2^{2x+1}=4$، عدد x کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۳۲- جواب x از معادلهٔ $\frac{1}{5^{2x+2}}=25^{3x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) 4 ۴) -4

۳۳- اگر $a=4^{1-x}$، $b=2^{x+1}$ و $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار $a+b+x$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 6

۳۴- از تساوی $216=(16)^{x+1}(0/75)^{3}$ عدد x کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۵- جواب‌های x از معادلهٔ $(2^{x})^{2}\times(0/5)=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\times(64)^{x^2}$ کدام است؟

۱) 0 و 1 ۲) $\frac{1}{2}$ و 2 ۳) $\frac{1}{3}$ و 1 ۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$

۳۶- جواب معادلهٔ $4^{1-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}=72$ کدام است؟

۱) $x=-4$ ۲) $x=4$ ۳) $x=-2$ ۴) $x=2$

۳۷- جواب معادلهٔ $\frac{(0/2)^{x-1}}{4^{x+1}\times5^{x}}=0/0125$ در کدام نامساوی زیر صدق می‌کند؟

۱) $0\le x<\frac{5}{2}$ ۲) $-2\le x<0$ ۳) $6\le x\le8$ ۴) $3\le x\le5$

۳۸- جواب معادلهٔ $9^{x+\frac{1}{2}}+8\times3^{x}-3=0$ کدام است؟

۱) $x=1$ ۲) $x=3$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=-3$

۳۹- نمودارهای دو تابع $f(x)=3^{ax+b}$ و $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$ در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع هستند. اگر $f(2)=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 3 ریاضی داخل ۹۵

۴۰- نمودارهای دو تابع $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ و $y=3^{x}+\frac{8}{3}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. قدرمطلق اختلاف طول و عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) 2 ۲) 4 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$ مشابه ریاضی داخل ۹۶

@khaneh_book

۴۱- کدام‌یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

۱) $(۱/۵)^{-۲} < ۰/۲۵$ ۲) $(۱/۵)^{-۲} > ۰/۲۵$ ۳) $(\sqrt{۳})^{۳} > ۳\sqrt{۳}$ ۴) $(\sqrt{۳})^{۳} < ۳\sqrt{۳}$

۴۲- کدام نامساوی زیر صحیح نیست؟

۱) $۲^{\sqrt{۱۰}} > ۸$ ۲) $(۰/۵)^{\sqrt{۵۰}} > \frac{۱}{۲^{۷}}$ ۳) $\pi^{۵} < (\sqrt{۵})^{۱۰}$ ۴) $(\frac{۱}{۱۰})^{\frac{۱}{۲}} > (\frac{۳}{۱۰})^{\frac{۲}{۳}}$

۴۳- اگر $۲^{x} > ۲^{y} > ۲^{z}$ باشد، در مورد $y + z - ۲x$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) همواره مثبت است. ۲) همواره منفی است.

۳) فقط به ازای $x, y, z > ۰$ همواره مثبت است. ۴) فقط به ازای $x, y, z < ۰$ همواره منفی است.

۴۴- برای مقایسه اعداد $۲^{\sqrt{۲۰}} \square ۴^{\sqrt{۷}}$ و $(\sqrt[۳]{۳})^{۷} \bigcirc ۹^{۱/۲۵}$ کدام علامت‌ها به ترتیب از راست به چپ باید به جای □ و ○ قرار بگیرند؟

۱) $<, <$ ۲) $>, <$ ۳) $<, >$ ۴) $>, >$

۴۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲۵)^{-\frac{۱}{۲}x} > (\frac{۱}{۵})^{۲x-۶}$ کدام است؟

۱) $x > ۲$ ۲) $x < ۲$ ۳) $x < ۶$ ۴) $x > ۶$

۴۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۰/۰۰۸)^{-\frac{x^{۲}}{۳}+۱} \leq ۰/۰۴$ کدام است؟

۱) $x \geq ۱$ یا $x \leq -۱$ ۲) $-۱ \leq x \leq ۱$ ۳) $x \geq ۱$ ۴) $x \leq -۱$

۴۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲+\sqrt{۳})^{x^{۲}} \geq (۲-\sqrt{۳})^{x}$ کدام است؟

۱) $-۱ \leq x \leq ۰$ ۲) $۰ \leq x \leq ۱$ ۳) $x \geq ۰$ یا $x \leq -۱$ ۴) $\mathbb{R}$

۴۸- مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^{۲}.۲^{x} \leq x.۲^{x+۲}$ کدام است؟

۱) $۲ \leq x$ ۲) $۰ \leq x \leq ۴$ ۳) $۰ \leq x \leq ۲$ ۴) $x \geq ۴$

۴۹- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{۳^{x} - ۴^{x}}$ کدام است؟

۱) $۰ \leq x \leq ۱$ ۲) $x \leq ۰$ ۳) $x \geq ۰$ ۴) $-۱ \leq x \leq ۰$

۵۰- دامنهٔ تابع $f(x) = -\sqrt{(۰/۲۵)^{x} - (۰/۱)^{x}}$ کدام است؟

۱) $۰ \leq x < ۰/۴$ ۲) $۰ \leq x < ۰/۶$ ۳) $x \geq ۰$ ۴) $x \leq ۰$

درسنامهٔ ۳

شناخت تابع لگاریتمی و نمودار آن

تابع نمایی $f(x) = a^{x}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم تابع نمایی تابعی یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. وارون تابع نمایی $f(x) = a^{x}$ را تابع لگاریتمی می‌نامیم و آن را با نماد $f^{-۱}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم. $(a \neq ۱, a > ۰)$

$$f(x) = a^{x} \Leftrightarrow f^{-۱}(x) = \log_a x$$

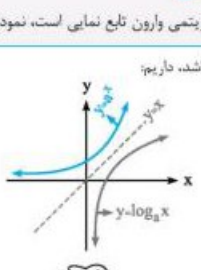
تذکر در این تعریف a را پایهٔ (مبنای) لگاریتم می‌نامیم و با توجه به تعریف تابع نمایی می‌دانیم a عدد منفی، صفر یا یک نمی‌باشد.

مثال تابع $f(x) = \log_{\sqrt{۳}} x$ یک تابع لگاریتمی است ولی $g(x) = \log_{-۲} x$، تابع لگاریتمی نیست زیرا پایه باید مثبت و مخالف یک باشد.

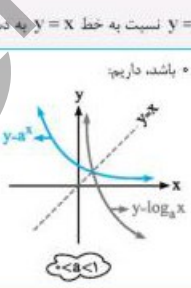
رسم تابع لگاریتمی:

از آن‌جا که تابع لگاریتمی وارون تابع نمایی است، نمودار تابع لگاریتمی از قرینه کردن نمودار $y = a^{x}$ نسبت به خط $y = x$ به دست می‌آید.

۱) اگر $a > ۱$ باشد، داریم:



۲) اگر $۰ < a < ۱$ باشد، داریم:



@khanehbook

نکات با توجه به نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ داریم:

۱) دامنهٔ این تابع لگاریتمی **اعداد حقیقی مثبت** می‌باشد، یعنی لگاریتم اعداد منفی و صفر تعریف نمی‌شود.

۲) برد این تابع لگاریتمی **اعداد حقیقی** می‌باشد.

۳) تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ تابعی **یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر** است.

۴) این تابع لگاریتمی همواره از نواحی **اول و چهارم** عبور می‌کند.

۵) این تابع لگاریتمی همواره از نقطهٔ **(۱،۰)** می‌گذرد (محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند.). به عبارتی همواره داریم $\log_a 1 = 0$.

۶) با توجه به نمودارهای رسم‌شده، در حالت $0 < a < 1$ تابع لگاریتمی $y = \log_a x$، وارونش (تابع نمایی $y = a^x$) را تنها در یک نقطه قطع می‌کند. در حالت $a > 1$ تابع لگاریتمی و وارونش هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند.

۷) محل تلاقی توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ همان نقطهٔ تلاقی این توابع با خط $y = x$ می‌باشد. لذا برای به دست آوردن نقطهٔ تلاقی تابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ کافی است محل تلاقی آن‌ها را با خط $y = x$ به دست آوریم.

تذکر لگاریتم در مبنای ۱۰ گاهی نوشته نمی‌شود. یعنی $\log a = \log_{10} a$.

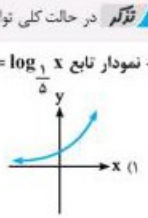
مثال دامنهٔ تابع $y = \log_{2-x} \frac{x-1}{3}$ را بیابید.

پاسخ: عبارت جلوی لگاریتم و مبنا باید مثبت باشند و هم‌چنین مبنا نباید عدد ۱ باشد.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} > 0 \\ 2-x > 0 \\ 2-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2 > x \\ -x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{اشتراک می‌گیریم}]{\text{بین جواب‌های حاصل}} x \in (1,2)$$

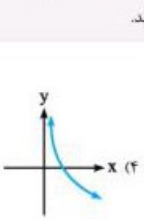
تذکر در حالت کلی توابع به فرم $y = k \log_a mx$ نیز تابع لگاریتمی هستند که از نقطهٔ $(0, \frac{1}{m})$ می‌گذرند.

۵۱- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ کدام است؟

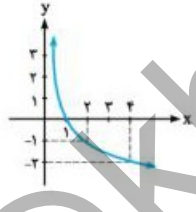
۱) 

۲)

۳)

۴) 

۵۲- با توجه به نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ که به صورت مقابل است، کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟



۱) $\log_{0/5} \frac{1}{9} \times \log_{0/5} 9 < 0$

۲) $\log_{\frac{1}{2}} 9^{-6} > \log_{\frac{1}{2}} 9^{-4}$

۳) $a > b \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

۴) $\log_{0/5} 4 \times \log_{0/5} 5 > 0$

۵۳- اگر نمودار مقابل بیانگر $y = \log_a x$ باشد، $\log_a 8$ کدام است؟

۱) ۳

۲) -3

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $-\frac{1}{3}$

۵۴- دامنهٔ تابع $f(x) = \log_x (x^2 + 9)$، کدام گزینه است؟

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $[-3, 3]$ ۴) $\{x \mid x > 0, x \neq 1\}$

۵۵- دامنهٔ تابع $f(x) = \log_{x+1} (9 - x^2)$ کدام است؟

۱) $(-1, 3) - \{1\}$ ۲) $(-1, 3) - \{0\}$ ۳) $(-3, 3) - \{0\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

@khanen_book

۵۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\log_{۱۰}(x-۱)}{\log_{۱۰}(۴-x^۲)}$ کدام است؟

۱) $\{x|-۲<x<۲\}$ ۲) $\{x|۱<x<۲, x\neq\sqrt{۳}\}$ ۳) $\{x|۱<x<۲\}$ ۴) $\{x|x>۱\}$

۵۷- معادلهٔ $\log_{\sqrt{۵}} x=(\sqrt{۵})^x$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۸- معادلهٔ $\log_{۰/۳} x=(\frac{۳}{۱۰})^x$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

درسنامه ۴

تبدیل تساوی‌های نمایی و لگاریتمی به یکدیگر

هرگاه تساوی $x=a^y$ $(a\neq۱, a>۰, x>۰)$ برقرار باشد، آن‌گاه y را لگاریتم x در پایهٔ (مبنای) a می‌نامیم و داریم:

$$x=a^y \Leftrightarrow \log_a x=y$$

سؤال دانش‌پژوه (منیژه رائایی‌فر)، می‌شه برای تعریف بالا (لگاریتم) یه خرده توضیح فارسی بدین؟

پاسخ: می‌تونیم بگیم هر تساوی توانی رو که پایه، مثبت و مخالف یک باشه با به کارگیری لگاریتم می‌شه نوشت و برعکس. به مثال‌های زیر توجه کن:

مثال تساوی‌های نمایی زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

$۱۰۰=۱۰^۲$ ، $۱۰۰۰=۱۰^۳$ ، $۱۰۰۰۰=۱۰^۴$

پاسخ:

$۱۰۰=۱۰^۲ \Rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰=۲$ ، $۱۰۰۰=۱۰^۳ \Rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$ ، $۱۰۰۰۰=۱۰^۴ \Rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰۰=۴$

نکته نتیجه‌ای که از مثال‌های بالا می‌گیریم این است که یکی از کاربردهای مهم لگاریتم، **کوچک کردن** اعداد خیلی بزرگ است. مثلاً همان‌طور که دیده شد، لگاریتم ۱۰۰۰ در مبنای ۱۰، برابر ۳ می‌شود.

مثال تساوی‌های لگاریتمی زیر را به نمایی تبدیل کنید.

$\log_۲ ۸=۳$ ، $\log_۳ ۹=۲$ ، $\log_۵ ۱۲۵=۳$

پاسخ:

$\log_۲ ۸=۳ \Rightarrow ۸=۲^۳$ ، $\log_۳ ۹=۲ \Rightarrow ۹=۳^۲$ ، $\log_۵ ۱۲۵=۳ \Rightarrow ۱۲۵=۵^۳$

مثال مقدار x را در تساوی‌های زیر به دست آورید.

$\log_۲ x=۳$ ، $\log_x ۸=۳$ ، $\log_۲ ۸=x$

پاسخ:

$\log_۲ x=۳ \Rightarrow x=۲^۳ \Rightarrow x=۸$ ، $\log_x ۸=۳ \Rightarrow ۸=x^۳ \Rightarrow ۲^۳=x^۳ \Rightarrow x=۲$ ، $\log_۲ ۸=x \Rightarrow ۸=۲^x \Rightarrow ۲^۳=۲^x \Rightarrow x=۳$

۵۹- به عدد ۲۸ چند واحد اضافه کنیم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۴، برابر ۳ گردد؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۵ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۶۰- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۶-۱=۰$ برابر $\log_{۱۰} a$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱

۶۱- لگاریتم عدد x در مبنای ۱۶، برابر $\frac{۱}{۸}$ است. x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۲- اگر $\log_{۱۶} N=\frac{۳}{۲}$، N کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۶۳- اگر $\log_۴ x=۱/۲۵$ باشد، مقدار x برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt[۴]{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶\sqrt[۴]{۲}$

@khaneh_book

۶۴- اگر $\log_{۵۰}A=\frac{۱}{۲}$ و $\log_{۲۲}B=\frac{۱}{۲}$ باشد، $\frac{A+B}{A-B}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۶۵- از رابطهٔ $\log_b a=c$ می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) $c^{\frac{۱}{b}}=a$ ۲) $a^{\frac{۱}{c}}=b$ ۳) $b^{\frac{۱}{c}}=a$ ۴) $a^{\frac{۱}{b}}=c$

۶۶- a و b دو عدد مثبت هستند. اگر $\log_b a=\frac{۴}{۳}$ و $(b\neq ۱)$ باشد، کدام‌یک از روابط زیر بین a و b برقرار است؟

۱) $۳a=۴b$ ۲) $۴a=۳b$ ۳) $a^۳=b^۴$ ۴) $a^۴=b^۳$

۶۷- اگر $\log_۲ ۱۲=\alpha$ باشد، عدد $۴^{\alpha-۲}$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۶

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۶۸- اگر $\log_{۱۰} x=۰/۴$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $۳<x<۴$ ۲) $۲<x<۳$ ۳) $۱<x<۲$ ۴) $۰<x<۱$

درسنامهٔ ۵

قوانین و قضایای لگاریتم (۱)

۱) $\log_a ۱=۰$

۲) $\log_a a=۱$

۳) $\log_b a^n=n\log_b a$

۴) $\log_{b^m} a=\frac{۱}{m}\log_b a$

تعمیم ⟹ ۵) $\log_{b^m} a^n=\frac{n}{m}\log_b a$ حالت خاص ⟹ ۶) $\log_{b^n} a^n=\log_b a$

مثال مقدار لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

۱) $\log_{۴} ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲ ۲=\frac{۳}{۲}(۱)=\frac{۳}{۲}$

۲) $\log_{۹}\frac{۱}{۲۷}=\log_{۳^۲}\frac{۱}{۳^۳}=\log_{۳^۲} ۳^{-۳}=-\frac{۳}{۲}\log_۳ ۳=\frac{-۳}{۲}(۱)=-\frac{۳}{۲}$

۳) $\log_{۲۵}۱۲۵=\log_{۵^۲} ۵^۳=\frac{۳}{۲}\log_۵ ۵=\frac{۳}{۲}$

۴) $\log_{\frac{۱}{۳۲}}\frac{۱}{۶۴}=\log_{\frac{۱}{۲^۵}}\frac{۱}{۲^۶}=\log_{۲^{-۵}} ۲^{-۶}=\frac{-۶}{-۵}\log_۲ ۲=\frac{۶}{۵}$

۶۹- اگر $f(x)=\log_۲(x+۴)$ باشد، حاصل $f(-۳)+f(۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۷۰- حاصل $\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۷۱- حاصل $\log_{(۱۰-\sqrt{۲})}(۳+۲\sqrt{۲})^۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷۲- اگر $\log_y x=۳$ باشد، $\log_y \sqrt{x}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\sqrt{۳}$

۷۳- حاصل $\log_۲ \sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt{۳}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰}$

۷۴- حاصل $\log_۵(\sqrt{۱۲۵})^۳$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۲

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

@khaneh_book

۷۵- مقدار $\log_{۴} ۶۴\sqrt[۳]{۳۲}$ تقریباً برابر است با:

۱) ۶/۷۷ ۲) ۶/۷۶ ۳) ۷/۶۶ ۴) ۷/۷۶

۷۶- اگر $x = y^{۲} = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\log_a x + \log_a y^{۲}$ چه‌قدر است؟ $(a > ۰, a \neq ۱)$

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۷۷- اگر $۴^{a} = ۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $(۴a+۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ تجربی داخل ۸۸

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۸- اگر $\log_x \sqrt{۷} = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $\log_۲(۱ + \frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۷۹- اگر $\log_{۱۰}(۸۱)^{k} = \log_{۱۰} \sqrt[۳]{۳} + \log_{۱۰} ۳$، آن‌گاه لگاریتم $\frac{۵}{k}$ در پایهٔ ۲ کدام است؟ تجربی داخل ۸۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۰- اگر لگاریتم عددی در پایهٔ ۹ برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد، لگاریتم معکوس این عدد در پایهٔ ۳ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۸۱- نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_{۲} \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ تجربی خارج ۹۱

۱) $f(x)$ بالاتر ۲) $g(x)$ بالاتر ۳) منطبق‌اند. ۴) فقط در یک نقطه متقاطع

۸۲- اگر $a = ۲^{۵}$ و $b = ۲^{۷}$، آن‌گاه لگاریتم ab در مبنای ۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

۸۳- حاصل $\log_{۴} ۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۴- حاصل $\log_{\frac{۱}{۹}} ۳\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۸۵- حاصل $\log_{\sqrt{۳۲}} \frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۸۶- حاصل عبارت $\log_{۸} \frac{\sqrt{۲}}{۲} + |\log_{\frac{۱}{۲}} ۸|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۸۷- حاصل عبارت $\log_{\frac{۱}{۲}} ۲\sqrt{۲} + \log_{۷} \frac{۱}{۴۹} + \log_{\sqrt{۹}} ۲۷\sqrt[۳]{۸۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۷}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳}$ ۴) $\frac{۲۷}{۲}$

۸۸- اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آن‌گاه لگاریتم عدد $(-۱)^{\frac{۱}{A}}$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) ۳- ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۸۹- اگر $\log_{۱۰} x\sqrt[۳]{x} = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\log_{۱۰} \sqrt{x\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۳۲}$ ۴) ۲

۹۰- حاصل $\log_{x\sqrt[۳]{x}} \sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۹۱- اگر $۳^{a} = A$ باشد، $\log_{۳} ۹A^{۲}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $۳ + a^{۲}$ ۲) $۳ + ۲a$ ۳) $۲ + a^{۲}$ ۴) $۲ + ۲a$

@khaneh_book

۹۲- اگر $\log_4 x = \frac{1}{2}$، آن‌گاه $\log_8 x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۹۳- اگر $\log_2(2x-1) = 2$ باشد، آن‌گاه لگاریتم $(9x+3)$ در پایهٔ ۲ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴- اگر $\log_2 \frac{2}{\sqrt[3]{a}} = -0/25$ باشد، آن‌گاه $\log_{\sqrt[5]{a^2}} 8$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۲/۵ ۴) ۰/۴

۹۵- اگر $\log_5 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{25} \frac{\sqrt{3}}{3}$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{a}{4}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{a}{2}$ ۴) $\frac{a}{4}$

۹۶- اگر $y^2 = 4$، $\log_y x$، $\log_{y^2} \sqrt{y}$ باشد، حاصل $\log_{y^2} \sqrt{x}$ چه‌قدر است؟

۱) ۷ ۲) ۲۸ ۳) $\frac{7}{16}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۹۷- اگر $9^x = 3\sqrt[3]{3}$، آن‌گاه $\log_2(1-x)$ برابر کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۸- اگر $\log_a 3\sqrt{3} = \frac{3}{4}$ باشد، $\log_4(a-1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۹۹- اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن‌گاه لگاریتم (a^2+7) در پایهٔ ۸ کدام است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۰- اگر $(x+1)^{\sqrt{2}} = 2$ باشد، مقدار $\log_4 \sqrt{x+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

درس‌نامهٔ ۶

قوانین و قضایای لگاریتم (۲)

همواره به شرط تعریف شده بودن لگاریتم‌ها داریم:

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B} \quad , \quad \log_a A + \log_a B = \log_a (AB)$$

مثال عبارت زیر را به یک لگاریتم تبدیل کنید.

$$5\log_2 a - 2\log_2 b + \log_2 c = \log_2 a^5 - \log_2 b^2 + \log_2 c = \log_2 a^5 + \log_2 c - \log_2 b^2 = \log_2 \frac{a^5 \times c}{b^2}$$

مثال حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\log_5 55 - \log_5 11 = \log_5 \frac{55}{11} = \log_5 5 = 1$

۲) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10}(5 \times 20) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$

هم‌چنین از این فرمول‌ها می‌توان برای ساده کردن عبارات نیز استفاده کرد.

مثال اگر $\log_{10} 2 = 0/3$ و $\log_{10} 3 = 0/48$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\log_{10} 36 = \log_{10}(\underbrace{3^2 \times 2^2}_{36}) = \log_{10} 3^2 + \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 3 + 2\log_{10} 2 = 2(0/48) + 2(0/3) = 1/56$

۲) $\log_{10} \sqrt[3]{(2/4)^2} = \log_{10} (2/4)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{24}{10}\right) = \frac{2}{3}(\log_{10} 24 - \log_{10} 10) = \frac{2}{3}(\log_{10}(\underbrace{2^3 \times 3}_{24}) - 1)$

$$= \frac{2}{3}(\log_{10} 2^3 + \underbrace{\log_{10} 3}_{0/48} - 1) = \frac{2}{3}(3\underbrace{\log_{10} 2}_{0/3} + 0/48 - 1) = \frac{2}{3}(0/38) = \frac{76}{300} = \frac{19}{75}$$

@khanen_book

۳) $\log_{۱۰} ۳۰ = \log_{۱۰}(۲\times۳\times۵) = \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} ۵ \xrightarrow{۵=\frac{۱۰}{۲}} \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰}\frac{۱۰}{۲}$

$= \cancel{\log_{۱۰} ۲} + \log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} ۱۰ - \cancel{\log_{۱۰} ۲} = ۰/۴۸ + ۱ = ۱/۴۸$

نتیجه بهتر است فرمول مهم زیر را به خاطر سپرد:

$$\log_{۱۰} ۵ = ۱ - \log_{۱۰} ۲$$

سؤال دانش‌پژوه (حسین رضایی)، ببخشید، می‌شه بگین چرا این فرمول درسته؟

پاسخ: همون‌طور که در قسمت آخر مثال قبل دیدید چون $\frac{۱۰}{۲} = ۵$، لذا:

$$\log_{۱۰} ۵ = \log_{۱۰}\frac{۱۰}{۲} = \log_{۱۰} ۱۰ - \log_{۱۰} ۲ = ۱ - \log_{۱۰} ۲$$

۱۰۱- اگر $\log_{۱۰} ۲ = a$ و $\log_{۱۰} ۳ = b$ باشد، حاصل $\log_{۱۰}\frac{۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a}{۲} + \frac{b}{۲}$ ۲) $\frac{b}{۲} - \frac{a}{۲}$ ۳) $\frac{a}{۲} - \frac{b}{۲}$ ۴) $-\frac{a+b}{۲}$

۱۰۲- حاصل $\log_{۱۰} ۲۰۰۰ + \log_{۱۰} ۵۰۰ + \log_{۱۰} ۲۰۰ + \log_{۱۰} ۵$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۰۳- حاصل $\log_۲\frac{۳۱}{۳۲} + \log_۲\frac{۱۰}{۱۱} + \cdots + \log_۲\frac{۹}{۱۰} + \log_۲\frac{۸}{۹}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۰۴- حاصل $\log_{۱۰}\frac{n}{n+۱} + \cdots + \log_{۱۰}\frac{۲}{۳} + \log_{۱۰}\frac{۱}{۲}$ برابر است با:

۱) $-\log_{۱۰} n!$ ۲) $n - \log_{۱۰}(n+۱)$ ۳) $n - \log_{۱۰} n!$ ۴) $-\log_{۱۰}(n+۱)$

۱۰۵- حاصل $\log_{۱۰}(\tan ۱^\circ) + \log_{۱۰}(\tan ۲^\circ) + \ldots + \log_{۱۰}(\tan ۸۸^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴۴ ۳) $\log_{۱۰}(\tan ۱^\circ)$ ۴) $\log_{۱۰}(\tan ۸۸^\circ)$

۱۰۶- حاصل $\log_۲ ۰/\overline{۶}$ کدام است؟ $(۰/\overline{۶} = ۰/۶۶۶\ldots)$

۱) $-\log_۲ ۳$ ۲) $۱ - \log_۲ ۶$ ۳) $۱ + \log_۲\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\log_۲ ۶$

۱۰۷- اگر $A = \log_a ab^۲ + \log_b a^۲ b$ باشد، در این صورت مقدار A کدام است؟ $(a,b \neq ۱\ ,\ a,b > ۰)$

۱) $۲(\log_b a + \log_a b + ۲)$ ۲) $۲ + \log_b a + \log_a b$ ۳) $۱ + \log_b a + \log_a b$ ۴) $۲(۱ + \log_b a + \log_a b)$

۱۰۸- عبارت $\log_{۱۰} z^{-۱} + ۲^{-۱}\log_{۱۰} y - ۳\log_{۱۰} x$ با کدام عبارت لگاریتمی زیر برابر است؟

۱) $\log_{۱۰}\frac{z^۲}{x^۴\sqrt[۳]{y}}$ ۲) $\log_{۱۰}\frac{\sqrt[۴]{x}\,.\,z^۲}{y^۳}$ ۳) $\log_{۱۰}\frac{\sqrt[۳]{y}\,.\sqrt{z}}{x^۴}$ ۴) $\log_{۱۰}\frac{\sqrt[۴]{x}}{y^۳\sqrt{z}}$

۱۰۹- خلاصه شدهٔ عبارت $۲\log_{۱۰} ۷ - \log_{۱۰} ۲۰۰ - ۲\log_{۱۰} ۲\sqrt{۷} + ۲\log_{۱۰} ۳۵$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۵}{۴}$ ۴) -۱

۱۱۰- خلاصه شدهٔ عبارت $\log_{۱۰}(\sqrt{۲}-۲).\log_{۱۰}(\sqrt{۲}+۱) - \frac{۱}{۲}\log_{۱۰}\frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۴}\log_{۱۰} ۹$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۱۱- اگر $\log_{۱۰} ۲ = k$ باشد، حاصل $\log_{۱۰}(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log_{۱۰}(۱+\sqrt{۵})$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) $۲k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲+۴k$

۱۱۲- اگر $\frac{۳x+۲y}{۴} = \frac{\log_{۱۰} x + \log_{۱۰} y}{۲}$ باشد، $\log_{۱۰}$ برابر است با: $۹x^۲ + ۴y^۲$

۱) $۴xy$ ۲) $۶xy$ ۳) $۱۲xy$ ۴) $۱۶xy$

۱۱۳- اگر $f(x) = \log_{۱۰}(۱-x)$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ z به طوری که $f(z) = f(x) + f(y)$:

۱) $z = x + y - xy$ ۲) $z = x - y + xy$ ۳) $z = x + y + xy$ ۴) $z = xy - x - y$

@khaneh_book

۱۱۴- اگر $\frac{\log_z xy}{\log_z y} = \frac{۵}{۲}$ ، $(x,y,z>۰, z\neq ۱)$ و $\log_z y = ۱$ باشد، مقدار $\log_z x$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۱/۵

۱۱۵- اگر $\log_{۱۰} ۲ = ۰/۳۰۱۰$ و $\log_{۱۰} ۳ = ۰/۴۷۷۱$ باشد، $\log_{۱۰} \sqrt[۳]{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۰/۳۵۹۷ ۲) ۰/۳۶۱۳ ۳) ۰/۳۶۲۳ ۴) ۰/۳۶۵۷

۱۱۶- اگر $\log_{۱۰} ۶ = a$ و $\log_{۱۰} ۱۴ = b$ باشد، حاصل $\log_{۱۰} \frac{۴۹}{۹} + \log_{۱۰} ۲۰\sqrt{۲۱}$ کدام است؟

۱) $۱ + \frac{۳b}{۲} - \frac{۳a}{۲}$ ۲) $۱ + ۲b - ۲a + \sqrt{a+b}$ ۳) $۱ + \frac{۵}{۲}b - \frac{۳}{۲}a$ ۴) $۱ + (b-a)^۲ + \sqrt{a+b}$

۱۱۷- اگر $\log_{۱۰} ۴ + \log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} ۲ = a$ باشد، حاصل $\frac{۳\log_{۱۰} ۶ + ۲\log_{۱۰} ۸}{\log_{۱۰} ۲۴۰۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{a^۲}{a+۲}$ ۲) $\frac{۳a}{a+۲}$ ۳) $\frac{a+۳}{a+۲}$ ۴) $\frac{a}{۳a+۶}$

۱۱۸- اگر $\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳ = a$ ، $\log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} ۷ = b$ و $\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۷ = c$ باشد، $\log_{۱۰} ۴۲$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{abc}{۲}$ ۲) $\frac{a+b+c}{۲}$ ۳) $\sqrt{a+b+c}$ ۴) $\sqrt{abc}$

۱۱۹- اگر $\log_{۱۰} a = ۲\log_{۱۰} b = ۴\log_{۱۰} c$ باشد، حاصل $\log_{۱۰} \frac{a^۳b^۲c}{\sqrt{abc}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۲}\log_{۱۰} c$ ۲) $\frac{۳۵}{۲}\log_{۱۰} c$ ۳) $۱۳\log_{۱۰} c$ ۴) $۱۲\log_{۱۰} c$

۱۲۰- اگر $\log_{۱۰} ab = k_۱$ ، $\log_{۱۰} bc = k_۲$ و $\log_{۱۰} ac = k_۳$ باشد، حاصل $\log_{۱۰} a^۳b^۲c$ کدام است؟

۱) $۲k_۱ + k_۲$ ۲) $k_۱ + k_۲ + k_۳$ ۳) $۲k_۱ + k_۲$ ۴) $۲k_۳ + k_۱$

۱۲۱- اگر $\log_{۱۵} ۳ = a$، آن‌گاه حاصل $\log_{۱۵} ۶۲۵$ کدام است؟

۱) $۴(۱-a)$ ۲) $(\frac{۱}{a})^۴$ ۳) $(a-۱)^۴$ ۴) $۴(a-۱)$

۱۲۲- با فرض $\log_{۱۰} ۲ = a$، مقدار $\log_{۱۰} ۱/۲۵$ کدام است؟

۱) $۱ - ۳a$ ۲) $۲ - ۳a$ ۳) $۳a - ۱$ ۴) $۳a - ۲$

۱۲۳- اگر $\log_{۱۰} \frac{۳}{۷} = a$ و $\log_{۱۰} ۲ = b$ باشد، حاصل $\log_{۱۰} \frac{۱۷۵}{۳}$ کدام است؟

۱) $۲ - a - ۲b$ ۲) $۲ - ۲a - ۲b$ ۳) $۲ - ۲a - b$ ۴) $۲ - ۲a + b$

۱۲۴- اگر $\log_{۱۰} ۶ = a$ و $\log_{۱۰} ۳ = b$ باشد، حاصل $\log_{۱۰} ۲۵$ کدام است؟

۱) $۲(۱ + a - b)$ ۲) $۲(۱ + a + b)$ ۳) $۲(۱ - a + b)$ ۴) $۲(۱ - a - b)$

۱۲۵- اگر $\log_{۱۰} ۱۶ = ۱/۲۰۴$ باشد، مقدار $\log_{۱۰} \frac{\sqrt[۳]{۲۵}}{۲}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۳۶ ۲) ۰/۱۵۶ ۳) ۰/۱۶۳ ۴) ۰/۱۶۵

تجربی خارج ۹۰

۱۲۶- اگر $\log_{۱۰} ۵ = ۳k$ باشد، $\log_{۱۰} \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

۱) $۱ - ۴k$ ۲) $۲ - ۵k$ ۳) $۱ - ۲k$ ۴) $۱ - k$

۱۲۷- اگر $\log_{۱۰} ۲۰ = ۱/۳۰۱$، آن‌گاه $\log_{۱۰} \sqrt[۵]{۷۵} - \frac{۱}{۵}\log_{۱۰} ۳$ کدام است؟

۱) ۰/۲۶۷۹ ۲) ۰/۲۷۳۳ ۳) ۰/۲۷۹۶ ۴) ۰/۳۲۲۷

۱۲۸- اگر $\log_{۱۰} ۶۲/۵ = ۱/۷۹۶$ باشد، آن‌گاه $\log_{۱۰} ۳/۲$ کدام است؟

۱) ۰/۵۰۱ ۲) ۰/۵۰۲ ۳) ۰/۵۰۵ ۴) ۰/۵۰۶

ریاضی خارج ۹۶

۱۲۹- تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_۲(۳x+b)^۲$ از دو نقطهٔ $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد. a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

ریاضی داخل ۹۶

۱۳۰- تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \log_۲(bx-۴)$ از دو نقطهٔ $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

@khanenbook

۱۳۱- کدام‌یک از عبارات زیر همواره درست است؟ $(a \neq 1, a > 0)$

۱) اگر x، y و z دنباله‌ای حسابی تشکیل دهند، آن‌گاه $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ دنباله‌ای هندسی می‌سازند.

۲) اگر x، y و z دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، آن‌گاه $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ دنباله‌ای حسابی می‌سازند.

۳) اگر $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، آن‌گاه x، y و z دنباله‌ای حسابی می‌سازند.

۴) اگر $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ دنباله‌ای حسابی تشکیل دهند، آن‌گاه x، y و z دنباله‌ای هندسی می‌سازند.

۱۳۲- لگاریتم کدام اعداد در پایهٔ ۴، یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند؟

۱) ۱، ۲، ۴ ۲) ۳، ۱۲، ۴۸ ۳) ۲، ۴، ۱۶ ۴) ۴۰، ۲۰، ۱۰

۱۳۳- لگاریتم کدام اعداد در پایهٔ a یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند؟ $(a \neq 1, a > 0)$

۱) ۱، ۲، ۴ ۲) ۱، ۴، ۱۶ ۳) ۲، ۴، ۱۶ ۴) ۲، ۴، ۶

۱۳۴- اندازه‌های محیط و قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی به ترتیب برابر ۲ و $2\log 2$ است. طول هر یک از ساق‌های آن، مساوی با لگاریتم چه عددی در مبنای ۱۰ است؟

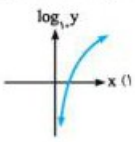
۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

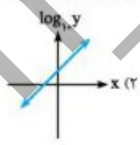
۱۳۵- قوای بدنی یک ورزشکار دو میدانی (y) متناسب با مسافتی که می‌دود (x) کاهش می‌یابد. این دو کمیت با رابطهٔ $\log_2 y = 2ax + \log_2 b$ (a و b ثابت هستند) و مطابق جدول مقابل وابسته هستند. a کدام است؟

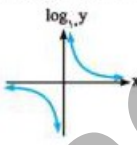
x	۰	۲	...
y	۱۵	۵	...

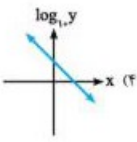
۱) ۳ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۳۶- اگر $y = 3 \times 10^{-x}$ باشد، کدام نمودار زیر رابطهٔ بین x و $\log_{10} y$ را به درستی نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

درسنامهٔ ۷

قوانین و قضایای لگاریتم (۳)

فرمول‌های زیر را به خاطر داشته باشید. (تمام لگاریتم‌ها و کسرها تعریف شده‌اند.)

۱) $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$ (فرمول تغییر پایه)

نتیجه با طرفین ـ وسطین کردن فرمول بالا داریم:

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$\log_b a \times \log_a b = 1 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

همچنین با قرار دادن $c = a$ در فرمول اخیر داریم:

مثال به تساوی‌های زیر دقت کنید:

۱) $\frac{\log_{\sqrt{3}} 5}{\log_{\sqrt{3}} 7} = \log_7 5$ ۲) $\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \log_5 3$ ۳) $\log_3 5 \times \log_5 3 = 1$ ۴) $\log_9 5 \times \log_7 6 = \log_7 5$

مثال اگر $\log_b a = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\log_a b$ چه‌قدر می‌شود؟

پاسخ:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

۲) $a^{k\log_c b} = b^{k\log_c a}$ جای a و b را می‌توان عوض کرد.

@khanenbook

نتیجه با قرار دادن $c = a$ در رابطهٔ قبل داریم:

$$a^{k\log_a b} = b^{k\log_a a} = b^k \Rightarrow \boxed{a^{k\log_a b} = b^k}$$

مثال به تساوی‌های زیر دقت کنید:

۱) $5^{\log_5 7} = 7^{\log_5 5} = 7^1 = 7$

۲) $2^{2\log_2 3} = 3^2 = 9$

۳) $6^{2\log_6 10} = 10^2 = 100$

مثال اگر $\log_{10} 2 = b$ باشد، $2^{2(\log_{10} x)}$ کدام است؟

۱) b^{2x} ۲) $2bx$ ۳) x^{2b} ۴) $\frac{x}{2b}$

کنکور ریاضی؛ گزینهٔ «۳»

$$2^{2(\log_{10} x)} = x^{2\log_{10} 2} \xrightarrow{\log_{10} 2 = b} x^{2b}$$

۱۳۷- حاصل $\log_4 16 \times \log_4 3$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲

۱۳۸- حاصل عبارت $\log_{128} 127 \times \log_{127} 126 \times \ldots \times \log_5 4 \times \log_4 3 \times \log_3 2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) ۷ ۳) $-\frac{1}{7}$ ۴) -7

۱۳۹- حاصل عبارت $\log_2 4 \times \log_4 4 \times \log_4 3 \times \log_9 3 \times \log_3 3$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۴۰- عبارت $\log_{10} b.\log_b a + 2\log_{10} a.\log_a b - \log_{10}(ab)^2$ برابر است با:

۱) $\log_{10} a$ ۲) $\log_b a$ ۳) $\log_{0/1} a$ ۴) صفر

۱۴۱- حاصل کسر $\frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 4}{\log_{10} 2 + \frac{1}{2}\log_{10} 6}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) ۲۴ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۲- با فرض $\log_{b^2} a^2 = 4$، مقدار $\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۳- حاصل $A = (\log_a x.\log_x a + \log_y b.\log_b y)$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $x + y$ ۴) ۲

۱۴۴- لگاریتم عدد ۹ در چه پایه‌ای برابر ۰/۷۵ است؟

۱) $\sqrt[3]{9}$ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) $9\sqrt{9}$ ۴) $2\sqrt[3]{3}$

۱۴۵- در کدام مبنا، لگاریتم عدد ۲۷ برابر ۳- است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۶- اگر $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{32}$

۱۴۷- اگر $\log_a 2 = \frac{1}{\log_4 a} - \frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه:

۱) $a = 8$ ۲) $a = \frac{1}{8}$ ۳) $a = \frac{1}{64}$ ۴) $a = 64$

۱۴۸- اگر $A(8,4)$ نقطه‌ای روی نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $2^{\frac{3}{2}}$ ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۹- اگر $\log_b a^2 = A$ باشد، مقدار $\log_a b^2 + \log_{a^2} b$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{A}$ ۲) $\frac{3}{A}$ ۳) $3A$ ۴) $5A$

@khaneh_book

۱۵۰- اگر $\log_{\sqrt{e}} ۳۲$. حاصل $\log_{۲}\sqrt[۵]{e^{۲}} = A$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۱

۱) $\frac{A}{۴}$ ۲) $\frac{A}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{A}$ ۴) $\frac{۴}{A}$

۱۵۱- اگر $\log_{۵}۴ = a$ باشد، حاصل $\log_{۱۰}۲۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{a+۲}$ ۲) $\frac{۴}{a+۴}$ ۳) $\frac{۴}{a+۲}$ ۴) $\frac{۲}{a+۴}$

۱۵۲- اگر $\log_{۱۰}۲ = a$ و $\log_{۱۰}۳ = b$ باشد، حاصل $\log_{۱۸}\sqrt{۱۲}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a+b}{a+۲b}$ ۲) $\frac{a+۲b}{۲a+۲b}$ ۳) $\frac{۲a+b}{۲a+۴b}$ ۴) $\frac{۲a+b}{a+۲b}$

۱۵۳- اگر $\log_{۲۰}۴ = k$ باشد، حاصل $\log_{۴}۵$ چه‌قدر است؟ ریاضی داخل ۸۵

۱) $\frac{۱+k}{k}$ ۲) $\frac{k}{۱-k}$ ۳) $\frac{k-۱}{k}$ ۴) $\frac{۱-k}{k}$

۱۵۴- اگر $\log_{۱۲}۳ = a$ باشد، $\log_{۴}۲$ کدام است؟

۱) $\frac{a-۱}{۲a}$ ۲) $\frac{۱-a}{۲a}$ ۳) $\frac{۱-a}{a}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

۱۵۵- اگر $\log_{\sqrt{۳}}۴ = a$ باشد، حاصل $\log_{۲\sqrt{۳}}۳\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸+a}{a+۲}$ ۲) $\frac{۸+a}{۲a+۴}$ ۳) $\frac{۱+۴a}{a+۲}$ ۴) $\frac{۱+۸a}{۴a+۱}$

۱۵۶- اگر $\log_{x}\sqrt[۳]{۱۶} = \frac{۴}{۳}$ و $\log_{y}\sqrt{۲} = \frac{۱}{۴}$. مقدار $\log_{y}x$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۵۷- اگر $\log_{۵}۳ = a$ و $\log_{۷}۵ = b$ و $\log_{۱۱}۷ = c$ باشند، $\log_{۴۵}۱۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{ac(۲b+۱)}$ ۲) $\frac{b}{ac(۲b+۱)}$ ۳) $\frac{a}{bc(۲a+۱)}$ ۴) $\frac{۱}{bc(۲a+۱)}$

۱۵۸- اگر در مثلث ABC ، بین اضلاع رابطهٔ $\log_{(b+c)}a.\log_{(b-c)}a = \frac{\log_{(b+c)}a + \log_{(b-c)}a}{۲}$ برقرار باشد، کدام گزینه در مورد مثلث ABC صحیح است؟

۱) قائم‌الزاویه در رأس B ۲) قائم‌الزاویه در رأس A ۳) متساوی‌الساقین و $AB = AC$ ۴) متساوی‌الساقین و $BC = AB$

۱۵۹- لگاریتم x در مبنای a برابر لگاریتم $x^{\frac{۳}{۲}}$ در مبنای b است. کدام رابطه بین a و b برقرار است؟

۱) $۲a = ۳b$ ۲) $۳a = ۲b$ ۳) $a^{۲} = b^{۳}$ ۴) $a^{۳} = b^{۲}$

۱۶۰- کدام رابطهٔ زیر، نادرست است؟

۱) $\log_{۱۰}۱/۲۵ + \log_{۱۰}۰/۸ = ۰$ ۲) $\log_{۱۰}\frac{۸}{۸} = ۰$ ۳) $۸^{\log_{۸}۲} = ۲$ ۴) $\frac{\log_{۱۰}۸}{\log_{۱۰}۴} = ۲$

۱۶۱- هرگاه $\log_{۱۰}a = ۴^{\log_{۲}۳}$ باشد، حاصل $\log_{۱۰}\sqrt[۳]{a^{۲}}$ برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۲- مقدار A در $A = ۴^{\log_{۴}۲} + ۳^{\log_{۳}۲}$ چه‌قدر است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۶۳- حاصل عبارت $۲\times۱۰۰^{\frac{۱}{۲}(\log_{۱۰}۰/۹-\log_{۱۰}۰/۲)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۱۶۴- اگر $A = ۳\times۳^{\frac{۱}{۲}\log_{۳}۸-\log_{۳}۲}$. آن‌گاه A برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

@khanenbook

۱۶۵- حاصل عبارت $a^{(x\log_a b)}.b^{(x\log_b a)}$ کدام است؟

۱) ab ۲) $(\frac{a}{b})^x$ ۳) $(ab)^x$ ۴) ۱

۱۶۶- حاصل $(a^{\log_x b} - b^{\log_x a})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $a^a - b^b$ ۳) $a^b - b^a$ ۴) $a - b$

۱۶۷- حاصل $۲^{\log_{۲}۵} + ۴^{\log_{۴}۵}$ برابر است با:

۱) $۵\sqrt{۵}$ ۲) $۲۵ + \sqrt{۵}$ ۳) $۲۵\sqrt{۵}$ ۴) $۵ + \sqrt{۵}$

۱۶۸- حاصل $۱۲۵^{\log_{۵}۳+\frac{۱}{۶}\log_{۵}۴}$ برابر است با:

۱) ۵۴ ۲) ۲۷ ۳) ۲۹ ۴) ۵۰

۱۶۹- مقدار $(۱۰۰۰۰)^{\frac{۳}{۸}\log_{۱۰}۲}$ برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۷۰- حاصل عبارت $\frac{\log_{۱۰}(\log_{۱۰}۸)}{\log_{۱۰}۹} + \frac{\log_{۱۰}(\log_{۱۰}(۱۲۵))}{\log_{۱۰}۶}$ کدام است؟

۱) $\log_{۱۰}۶$ ۲) $\log_{۱۰}۹$ ۳) $\log_{۱۰}۶ + \log_{۱۰}۹$ ۴) ۳

۱۷۱- اگر $a^{\log_{۲}۵} = ۸$ و $b^{\log_{۷}۱۶} = \sqrt{۷}$، حاصل $\sqrt[۳]{a^{(\log_{۲}۵)^۲}} + b^{۲(\log_{۷}۱۶)}$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۹ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

درسنامهٔ ۸

معادلات لگاریتمی

معادلاتی که در آن‌ها مجهول تحت عمل لگاریتم قرار گرفته باشد، معادلات لگاریتمی نامیده می‌شوند. ساده‌ترین معادلهٔ لگاریتمی به صورت $\log_a x = b$ است که جواب آن $x = a^b$ می‌باشد. نوع دیگر معادلهٔ ساده لگاریتمی به صورت $\log_a x = \log_a b$ است که جواب آن $x = b$ می‌باشد.

توجه وقتی در معادلات لگاریتمی از فرمول‌های لگاریتم برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم (مثلاً از روابط $\log_{۱۰}A+\log_{۱۰}B=\log_{۱۰}(A\times B)$ یا $\log_{۱۰}A-\log_{۱۰}B=\log_{۱۰}(\frac{A}{B})$)، معادلات جدیدی به دست می‌آید که اگرچه در ظاهر همان معادلهٔ اولیه است، اما دامنهٔ تعریف آن تغییر کرده است (به علت تبدیل جمع و منها به ضرب و تقسیم). این تغییر دامنه ممکن است که ریشهٔ خارجی ایجاد کند، یعنی ریشه‌هایی که علی‌رغم این که ریشهٔ معادلهٔ ثانویه‌اند، جزء دامنهٔ معادلهٔ اولیه (معادلهٔ اصلی) نیستند. در این موارد باید حتماً ریشه‌های به دست آمده از معادلهٔ ثانویه، در معادلهٔ اولیه چک شوند.

سؤال دانش‌پژوه (دانیال لهراسبی)، **ببخشید آقا، من یادمه معلممون می‌گفت برای حل معادلات لگاریتمی باید اول دامنه رو تعیین کنیم.**

پاسخ: تعیین دامنه معمولاً وقت‌گیره، به همین علت کار راحت‌تر و معقول‌تر اینه که اول معادلهٔ لگاریتمی رو حل کنیم و بعد جواب یا جواب‌های به دست اومده رو در معادلهٔ اولیه قرار بدیم که اگه عبارت تعریف نشده‌ای ایجاد کرد، یعنی جلوی لگاریتم صفر یا منفی شد، می‌فهمیم که ریشهٔ قابل قبول نیست.

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۱۰}۲۷ = ۳\log_{۱۰}x$

پاسخ: جواب قابل قبول است، چون جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند. $\log_{۱۰}۲۷ = \log_{۱۰}x^۳ \Rightarrow ۲۷ = x^۳ \Rightarrow ۳^۳ = x^۳ \Rightarrow x = ۳$

۲) $\log_{۱۰}(۳x+۱) = \log_{۱۰}۵ + ۳\log_{۱۰}۲$

پاسخ: $\log_{۱۰}(۳x+۱) = \log_{۱۰}(۵\times ۲^۳) \Rightarrow ۳x+۱ = ۵\times ۲^۳ \Rightarrow ۳x+۱ = ۴۰ \Rightarrow ۳x = ۳۹ \Rightarrow x = ۱۳$

جواب قابل قبول است، چون جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند.

۳) $\log_{۵}(x^۲-۱) = \log_{۵}(۳x-۳)$

پاسخ: $\Rightarrow x^۲-۱ = ۳x-۳ \Rightarrow x^۲-۳x+۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غ ق ق است، زیرا جلوی لگاریتم را صفر می‌کند.} \\ x=۲ & \text{ق ق است، زیرا جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند.} \end{cases}$

پس این معادله تنها جواب $x = ۲$ را دارد.

@khanehbook

۱۷۲- در مورد معادلهٔ $x(x-1)\log_{10} x = 0$ کدام گزینه درست است؟

۱) دو ریشه دارد. ۲) یک ریشه دارد. ۳) سه ریشه دارد. ۴) ریشه ندارد.

۱۷۳- جواب معادلهٔ $\log_2 \frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{125} - 2\log_2(x+1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷۴- اگر $\log x = 2 - 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 12 - 3\log 2$ باشد، $\log_2 x$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۷۵- از معادلهٔ $\log_{10}(5x-2) + \log_{10} 3 = 2\log_{10} 12$، مقدار x کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۷۶- اگر $\log_{10}(x^2-1) = \log_{10}(x-1) + 2\log_{10} 3$، آن‌گاه $\log_2 x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷۷- اگر $\log_{10} x + \log_{10}(x-1) = 1 + \log_{10} 2$، حاصل $x^2 + x$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۱۷۸- اگر $\log_{10}(x-4) = 2\log_{10} 2 - \log_{10}(x-2)$، حاصل $\log_5(x-3)$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $\frac{1}{2}$

۱۷۹- از معادلهٔ $2\log_{10}\sqrt{2x+3} = \frac{1}{2}\log_{10} 49 - \log_{10}(2x-3)$، مقدار x کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۰- از معادلهٔ $\log_{10}(2x-1) + \log_{10}(x+3) = \log_{10} 30 - \log_{10} 2$ مقدار $\log_8 x$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۴

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۱- از تساوی $\log_{10} x^2 = \log_{10} 3 + \frac{1}{2}\log_{10}(2x-1)$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۸۲- اگر $2\log_{10}(x-2) = \log_{10}(x+10)$، آن‌گاه $\log_4(x+2)$ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۵

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۳- اگر $\log_{10} x$، $\log_{10}(x+3)$ و $\log_{10} 4x$ تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، $\log_8(x+1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۴- معادلهٔ $\log_{10}(x-1) + \log_{10}(x-2) = \log_{10}(x^2+2)$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۵- معادلهٔ $\log_{10}(x+3) + \log_{10}(x+1) + \log_{10} x = \log_{10}(x^3+3x^2+3x+1)$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸۶- اگر $\log_{10} 6 = \log_{10} x + \log_{10} 2x + \log_{10} 3x + 3$ باشد، آن‌گاه مقدار x کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۸۷- از معادلهٔ $\log_2(x^2-1) = 1 + \log_2(x+3)$، مقدار لگاریتم $(x-3)$ در مبنای ۴ کدام است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

۱۸۸- اگر $\log x = 1 + 2\log\sqrt{3} - \log 60$ باشد، $\log_2 x$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۸۹- از معادلهٔ لگاریتمی $2\log_{10} x = 1 + \log_{10}\left(x + \frac{12}{5}\right)$، مقدار $\log_5(2x+1)$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

@khanen_book

۱۹۰- از معادلهٔ لگاریتمی $\log_2(x+2) - \log_2(2x^2+1) = 1$ مقدار لگاریتم $\log_2(2x-1)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟ (داخل تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۹۱- اگر به عدد A، پانزده واحد اضافه شود، به لگاریتم آن در مبنای ۴ یک واحد اضافه می‌شود، A چه‌قدر است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۹۲- جواب معادلهٔ $\frac{\log_{10} 2}{1-\log_{10} x} = \frac{1}{3}$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۹۳- از تساوی $\log_4(x-4) = 1 - \log_4 2$، مقدار x کدام است؟

۱) ۶/۲۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۶/۷۵ ۴) ۷/۵

۱۹۴- جواب معادلهٔ $\log_2 x - \log_4 x = \frac{3}{2}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۹۵- جواب معادلهٔ $2\log_4 x - \log_4(x+4) = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۹۶- اگر $\log_6(x-5) = 2 - \log_6 x$ باشد، $\log_2(x-1)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹۷- از رابطهٔ $\log_{10} x + \log_{10}(2x+1) = 1$، مقدار x کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۱۹۸- اگر $\log_{10}\frac{2}{x} + \log_{10}(x+1) = 1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایهٔ ۸ کدام است؟ (تجربی داخل ۸۳)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۹۹- از تساوی $\log_5(3x-5) + \log_5(2x-1) = 1$، مقدار $\log_4(6x+3)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۰۰- از معادلهٔ لگاریتمی $\log(2x-5) - \log(x-3) = \log(x^2-x-6)$، مقدار لگاریتم $\log\sqrt[3]{x+1}$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۲۰۱- اگر $\log_{10}(x+1) + \log_{10}(x^2-x+1) = 1$ باشد، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۳ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۰۲- لگاریتم عددی در پایهٔ ۹، از لگاریتم عکس مجذور آن در پایهٔ ۹، به اندازهٔ ۴/۵ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۳۶ ۳) ۲۷ ۴) ۱۸

۲۰۳- معادلهٔ $\log_2 x^2 = 5 - \log_2\sqrt{x}$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰۴- معادلهٔ $\log_x(x^3-2x) = 2$ چند ریشه دارد؟

۱) دو ریشه ۲) سه ریشه ۳) یک ریشه ۴) ریشه ندارد

۲۰۵- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\log_2(2^x-2) = 3-x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۰۶- از معادلهٔ $\log_x(x^2-2) = 2\log_9 3$، مقدار x کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰۷- از معادلهٔ $\log_x(x^2-1) = \log_9 3 + \log_3\sqrt{5}$، مقدار x کدام است؟

۱) $1\pm\sqrt{5}$ ۲) $(1+\sqrt{5})$ ۳) $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ ۴) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

@khanehbook

۲۰۸- از معادلهٔ $\log_x ۳ + \log_x (۲x + ۹) = ۲$، مقدار $\log_۹ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۰۹- جواب معادلهٔ $\log_x (x + ۲) = \log_x (۴ - x) + ۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۰- اگر $\log_x (x - ۲) - \log_{\sqrt{x}} (x - ۲) = \log_x (x + ۲)$، مقدار x کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) هیچ جواب حقیقی برای x وجود ندارد.

۲۱۱- در $\log_۲ (\log_۲ x) = ۱$، x چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۱۲- اگر $\log_۲ (\log_a ۱۶) = ۱$ باشد، مقدار $\log_{۲a} a^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۱۳- در معادلهٔ $\log_۲ \log_۲ \log_۲ x = ۰$، مقدار x کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

درسنامهٔ ۹

معادلات خاص ـ دستگاه معادلات

حل معادلات به کمک مجهول کمکی:

در برخی معادلات لگاریتمی یا نمایی می‌توان با انتخاب یک مجهول کمکی مناسب، معادله را به یک معادلهٔ جبری راحت‌تر تبدیل کرده و با حل معادلهٔ جدید جواب را محاسبه نمود.

مثال مقدار x را از معادلهٔ لگاریتمی $\log_۵ x + \log_x ۵ = ۲$ بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $\log_x ۵ = \frac{۱}{\log_۵ x}$، در نتیجه با در نظر گرفتن $\log_۵ x = a$ داریم:

$$\log_۵ x + \log_x ۵ = ۲ \Rightarrow \log_۵ x + \frac{۱}{\log_۵ x} = ۲ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} = ۲ \xrightarrow[\times a]{a \neq ۰} a^۲ + ۱ = ۲a \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow (a - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

لذا $\log_۵ x = ۱ \Rightarrow x = ۵$. چون $x = ۵$ جلوی لگاریتم‌ها را صفر نمی‌کند و نیز برای مبنا مشکلی به وجود نمی‌آورد، جوابی قابل قبول است.

حل معادله به کمک لگاریتم‌گیری:

در برخی مسائل لازم است از دو طرف معادله، لگاریتم در مبنای مناسب بگیریم.

مثال

$$۲^x = ۳ \xrightarrow[\text{لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} \log_۲ ۲^x = \log_۲ ۳ \Rightarrow x = \log_۲ ۳$$

دستگاه معادلات:

برای حل دستگاه معادلات، ابتدا تا جای ممکن به وسیلهٔ روابط لگاریتمی معادلات را ساده می‌کنیم. سپس با حل دستگاه، جواب را به دست می‌آوریم.

مثال دستگاه $\begin{cases} \log_۳ x - \log_۹ y = ۰ \\ ۲x - y = ۱ \end{cases}$ را حل کرده، x و y را به دست آورید.

پاسخ: از قسمت اول دستگاه داریم:

$$\log_۳ x - \log_۹ y = ۰ \Rightarrow \log_۳ x = \log_{۳^۲} y \xrightarrow{\log_{۳^۲} x = \log_{۳^۲} x^۲} \log_{۳^۲} x^۲ = \log_{۳^۲} y \Rightarrow x^۲ = y \quad (*)$$

با جای‌گذاری y به دست آمده، در قسمت دوم دستگاه داریم:

$$۲x - y = ۱ \xrightarrow{y = x^۲} ۲x - x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{(*)} y = ۱$$

بنابراین $x = ۱$ و $y = ۱$ می‌باشند که قابل قبول هم هستند.

@khaneh_book

۲۱۴- یکی از جواب‌های معادلهٔ $3^{2x} - 8 \times 3^x + 15 = 0$ کدام است؟

۱) $\log_3 5$ ۲) $\log_5 3$ ۳) $\log_4 3$ ۴) $\log_3 4$

۲۱۵- جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $9^x - 3^{x+2} + 170 = 0$ کدام است؟

۱) $\log_3 17$ ۲) $\log_3 10$ ۳) $\log_{10} 3$ ۴) $\log_{17} 3$

۲۱۶- از دو معادلهٔ $4^x + 2^x = 72$ و $\log_{10}(x+1) + \log_{10}(2y + x^2) = 2$، مقدار y کدام است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۱۷- از معادلهٔ دو مجهول $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$، مقدار x کدام است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۶

۲۱۸- از معادلهٔ دو مجهول $4^{x+y} \times 2^{x-y} = 1$ و $\log y = 2\log 3 + \log x$، مقدار y کدام است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۹- یکی از جواب‌های معادلهٔ $\log_8 x = 4 - (\log_2 x)^2$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) -16 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲۷

۲۲۰- مقدار x از معادلهٔ $\log_{\sqrt{x}} 2 = 2$ برابر است با: $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} x$

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۲۱- معادلهٔ $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲۲- مقدار x در معادلهٔ $x^{1+\log_{10} x} = 10^2$ چه عددی است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۲۳- ریشه‌های معادلهٔ $x^{(\log_{10} x)} = 10000$ برابرند با:

۱) $x = \pm 10$ ۲) $x = 10, \frac{1}{10}$ ۳) $x = 100, \frac{1}{100}$ ۴) $x = 10, 1000$

۲۲۴- مقدار تقریبی T در رابطهٔ $(\frac{1}{2})^T = \frac{3}{4}$ چه‌قدر است؟ $(\log_{10} 3 = 0/4771, \log_{10} 2 = 0/3010)$

۱) ۰/۳۷۵ ۲) ۰/۵۵۵ ۳) ۰/۳۹۶ ۴) ۰/۴۱۵

۲۲۵- اگر $4^x = 4\sqrt{2}$ و $\log_{10}\sqrt{x+1} = \log_{10} y + 1$، مقدار y کدام است؟ تجربی داخل ۸۵

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۲۲۶- از دو معادلهٔ $\log_2 x + \log_2 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$، لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۲۲۷- از دو معادلهٔ $\log_2(y+1) = 1 + \log_2 x$ و $x^2 - y^2 = 32$، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۲۲۸- از معادلات $2^x \times 2^y = 4$ و $\log_{10} x = \log_{10} 2 + \log_{10} y$، مقدار x کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۲۲۹- اگر $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$ و $\log_{10} x^2 - \log_{10} y = 4$ باشد، حاصل $\log_{10}(x^2 y)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۸

۲۳۰- از دو معادلهٔ $\log_{10}(y+2) = 1$ و $\log_{10}(4x+y) = 2$، مقدار $\log_{10}(y-x)$، مقدار x کدام است؟ تجربی خارج ۸۷

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

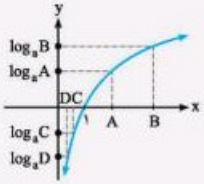
@khanehbook

درسنامهٔ ۱۰

نامساوی‌ها و نامعادلات لگاریتمی

با توجه به نمودار تابع لگاریتمی می‌توان روابط زیر را بیان کرد:

الف) فرض کنید $y = \log_a x$ و $a > 1$ باشد؛ در این حالت با توجه به نمودار داریم:



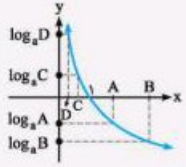
۱) $0 < C < 1 \Leftrightarrow \log_a C < 0$

۲) $A > 1 \Leftrightarrow \log_a A > 0$

۳) $0 < D < C < 1 < A < B \Leftrightarrow \log_a D < \log_a C < 0 < \log_a A < \log_a B$

به شکل و مکان‌های حروف خوب دقت کنید تا مطلب برایتان جا بیفتد.

ب) فرض کنید $y = \log_a x$ و $0 < a < 1$ باشد؛ در این حالت با توجه به نمودار داریم:



۱) $0 < C < 1 \Leftrightarrow \log_a C > 0$

۲) $A > 1 \Leftrightarrow \log_a A < 0$

۳) $0 < D < C < 1 < A < B \Leftrightarrow \log_a D > \log_a C > 0 > \log_a A > \log_a B$

مثال کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$ ۲) $\log_2 0/05 < 0$ ۳) $\log_2 \sqrt{7} > 0$ ۴) $\log_{\frac{1}{10}} 3 > \log_{\frac{1}{10}} 2$

پاسخ: گزینهٔ «۴»

گزینهٔ (۱) با توجه به (ب) قسمت (۲)، **گزینهٔ (۲)** با توجه به (الف) قسمت (۱) و **گزینهٔ (۳)** با توجه به (الف) قسمت (۲) درست هستند. اما **گزینهٔ (۴)** با توجه به (ب) قسمت (۳) نادرست است.

نکته بهتر است این حالات خاص را حتماً به یاد داشته باشید:

۱- اگر مبنا (a) و عدد جلوی لگاریتم (A) هر دو بین صفر و یک باشند، حاصل لگاریتم مثبت است، یعنی $\log_a A > 0$، مثلاً $\log_{0/5} 0/01 > 0$.

۲- اگر مبنا (a) و عدد جلوی لگاریتم (A) هر دو بزرگ‌تر از یک باشند، حاصل لگاریتم مثبت است، یعنی $\log_a A > 0$، مثلاً $\log_2 2 > 0$.

۳- اگر مبنا (a) و عدد جلوی لگاریتم (A) یکی بین صفر و یک و دیگری بزرگ‌تر از یک باشد، حاصل لگاریتم منفی می‌شود، یعنی $\log_a A < 0$، مثلاً $\log_{0/5} 2 < 0$ یا $\log_2 0/25 < 0$.

نامعادلات لگاریتمی:

در نامعادلهٔ لگاریتمی به فرم $\log_a f > \log_a g$، داریم:

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow f > g \\ 0 < a < 1 \Rightarrow f < g \end{cases}$$

البته شرط دامنه نیز باید حتماً چک شود. یعنی باید $f > 0$ و $g > 0$ باشند. از اشتراک مقادیر به دست آمده، جواب نهایی به دست می‌آید.

مثال نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$ را حل کنید.

پاسخ: $2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$، لذا داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow{0 < \frac{1}{2} < 1} x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$$

از طرفی می‌دانیم با توجه به وجود $\log_{\frac{1}{2}} x$ و مثبت بودن جلوی لگاریتم، باید $x > 0$ باشد. پس جواب نهایی به صورت $0 < x \leq \frac{1}{4}$ می‌شود.

۲۳۱- کوچک‌ترین مقدار در بین اعداد زیر، کدام است؟

۱) $\log_2 3$ ۲) $\log_{10} \frac{3}{2}$ ۳) $\log_3 2$ ۴) $\log_{10} \frac{2}{3}$

۲۳۲- کدام گزینه درست است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} 100$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_4 2$ ۳) $\log_5 3 > \log_3 5$ ۴) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2$

۲۳۳- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $\log_2 2 < \log_4 8$ ۲) $\log_{0/2} 0/2 > \log_{0/1} 0/9$ ۳) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{3} < \log_{\sqrt{5}} \sqrt{6}$ ۴) $\log_{0/7} 0/5 < \log_5 1$

@khanen_book

۲۳۴- کدام‌یک از اعداد زیر در مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$ قرار دارد؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۳۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_2(2x-1) < -2$ کدام است؟

۱) $x > \frac{5}{8}$ ۲) $x > \frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}$ ۴) $0 < x < \frac{5}{8}$

۲۳۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{0/5} x - \log_2(x-1) < -1$ کدام بازه است؟

۱) $(-1,2)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

۲۳۷- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{\log_{10} \frac{x-1}{2}}$ کدام است؟

۱) $(1,3]$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۲۳۸- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_{10}(x-1)}$ به کدام صورت است؟ تجربی خارج ۸۶

۱) $(1,2]$ ۲) $[2,10]$ ۳) $[1,11)$ ۴) $(1,11]$

۲۳۹- اگر $a > 1 > 0$ باشد، برد تابع $y = \log_a(x^2+1)$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,0]$ ۴) $(-\infty,0)$

۲۴۰- برد تابع $f(x) = \log_8\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ ۴) $[3,+\infty)$

۲۴۱- معادلهٔ $x^2 + 2x + \log_{\frac{1}{2}}(1-m) = 0$ در کدام حالت زیر، دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

۱) $-1 < m < \frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2} < m < 1$ ۳) $m < \frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2} < m < 1$

درسنامهٔ ۱۱

تعیین حدود تغییرات لگاریتم اعداد

نکتهٔ ۱ می‌دانیم که $\log_{10} 10 = 1$ و $\log_{10} 100 = 2$ می‌باشد، بنابراین تمام اعدادی که بین ۱۰ و ۱۰۰ قرار دارند، لگاریتم در مبنای ۱۰ آن‌ها بین ۱ و ۲ است. همچنین می‌دانیم که $\log_{10} 100 = 2$ و $\log_{10} 1000 = 3$ می‌باشد، بنابراین تمام اعدادی که بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ قرار دارند، لگاریتم در مبنای ۱۰ آن‌ها بین ۲ و ۳ می‌باشد.

مثال لگاریتم عدد ۲۵۶ با پایهٔ ۱۰ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد؟

پاسخ: می‌دانیم که $100 < 256 < 1000$ است. حال از جزء جزء نامساوی، لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم، یعنی: $\log_{10} 100 < \log_{10} 256 < \log_{10} 1000$ پس: $2 < \log_{10} 256 < 3$.

نکتهٔ ۲ می‌دانیم که $\log_{10} 0/1 = -1$ و $\log_{10} 0/01 = -2$ است، بنابراین تمام اعدادی که بین ۰/۰۱ تا ۰/۱ قرار دارند لگاریتم در مبنای ۱۰ آن‌ها بین ۲- و ۱- می‌باشد. همچنین می‌دانیم که $\log_{10} 0/01 = -2$ و $\log_{10} 0/001 = -3$ است، بنابراین تمام اعدادی که بین ۰/۰۰۱ و ۰/۰۱ قرار دارند، لگاریتم در مبنای ۱۰ آن‌ها بین ۳- و ۲- می‌باشد.

مثال لگاریتم ۰/۰۵ در پایهٔ ۱۰ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد؟

پاسخ: می‌دانیم که $0/01 < 0/05 < 0/1$ است، حال از جزء‌جزء نامساوی لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم، یعنی: $\log_{10} 0/01 < \log_{10} 0/05 < \log_{10} 0/1$ پس $-2 < \log_{10} 0/05 < -1$.

مثال $\log_{\frac{1}{3}} 125$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

پاسخ: می‌دانیم $\log_{\frac{1}{3}} 125 = \log_{3^{-1}} 125 = -\log_3 125$. داریم:

$$(-\log_3 125 = \log_{\frac{1}{3}} 125) \quad -4 < \log_{\frac{1}{3}} 125 < -5 \xrightarrow{\times(-1)} 5 < \log_3 125 < 4 \Rightarrow \log_3 3^5 < \log_3 125 < \log_3 3^4 \Rightarrow \frac{3^5}{243} < 125 < \frac{3^4}{81}$$

۲۴۲- اگر $17 > N > 60$ باشد، آن‌گاه $\log_4 N$ بین کدام دو عدد زیر قرار دارد؟

۱) ۳ و ۵ ۲) ۴ و ۶ ۳) ۴ و ۵ ۴) ۵ و ۷

@khaneh_book

۲۴۳- مقدار $A = \log_{\Delta}۶۲۶$ بین کدام دو مقدار قرار دارد؟

۱) $\frac{۱}{۵} < A < \frac{۱}{۴}$ ۲) $۵ < A < ۶$ ۳) $۴ < A < ۵$ ۴) $-۵ < A < -۴$

۲۴۴- حاصل $A = \log_{(x-۲)}(۹x^{۲} - ۳۶x + ۳۸)$ به ازای $x = ۵$ در کدام فاصله است؟

۱) $۲ < A < ۳$ ۲) $۳ < A < ۴$ ۳) $۴ < A < ۵$ ۴) $۵ < A < ۶$

۲۴۵- لگاریتم ۰/۰۰۵۰۶ در مبنای ۱۰ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱) ۰ و ۱- ۲) ۱- و ۲- ۳) ۴- و ۳- ۴) ۲- و ۳-

۲۴۶- اگر $\log_{۱۰}(۱۰^{۸}a) = ۰/۷۱۳$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[۳]{a}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

۱) $۱۰^{-۶}$ و $۱۰^{-۴}$ ۲) $۱۰^{-۶}$ و $۱۰^{-۵}$ ۳) $۱۰^{-۳}$ و $۱۰^{-۴}$ ۴) $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۳}$

۲۴۷- اگر $n < \log_{۱۰}۱۲۸/۱۵ < n+۱$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۲۴۸- اگر $۲^{-x} < ۰/۰۰۰۰۰۱$ و $\log_{۱۰}۲ = ۰/۳۰۱$، کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشار کدام است؟ تجربی خارج ۸۴

۱) ۱۹/۸۹ ۲) ۱۹/۹۱ ۳) ۱۹/۹۴ ۴) ۱۹/۹۷

درسنامهٔ ۱۲

انتقال توابع نمایی و لگاریتمی

یادآوری: انتقال‌های افقی و عمودی با فرض $a > ۰$ به صورت زیر می‌باشد:

۱) برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت راست (جهت مثبت محور xها) انتقال دهیم.

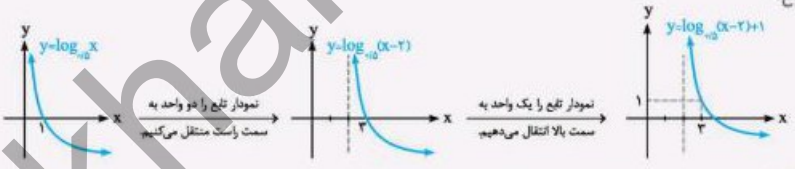
۲) برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت چپ (جهت منفی محور xها) انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار $y = f(x)+a$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار $y = f(x)-a$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت پایین (جهت منفی محور yها) انتقال دهیم.

مثال نمودار $y = \log_{۰/۵}(x-۲)+۱$ را رسم کنید:

پاسخ:



یادآوری وضعیت نمودار توابع $y = -f(x)$ و $y = f(-x)$ به صورت زیر بود:

۱) برای رسم نمودار $y = -f(x)$، کافی است قرینهٔ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

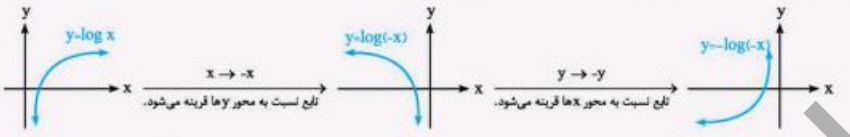
۲) برای رسم نمودار $y = f(-x)$، کافی است قرینهٔ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم.

مثال نمودار توابع $y = ۲^{-x}$ و $y = -\log(-x)$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم $y = ۲^{-x}$ از تابع $y = ۲^{x}$ کمک می‌گیریم. در تابع $y = ۲^{x}$ کافی است x را به $(-x)$ تبدیل کنیم $(f(-x))$:

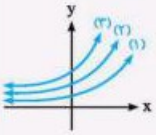
@khanehbook

برای رسم تابع $y=-\log(-x)$ از تابع $y=\log x$ کمک می‌گیریم:



در حالت کلی‌تر توابع به فرم $y=ka^x$ از نقطهٔ $(0,k)$ می‌گذرند. برای رسم $y=ka^x\ (k\neq 0)$ باید عرض نقاط تابع $y=a^x$، k برابر شوند.

مثال نمودارهای سه تابع $f(x)=5^x$، $g(x)=2\times 5^x$ و $h(x)=\frac{1}{2}\times 5^x$ به صورت مقابل نشان داده شده‌اند. هریک از نمودارهای (۱)، (۲) و (۳) مربوط به کدام‌یک از توابع فوق است؟



پاسخ: ابتدا محل برخورد هر تابع با محور yها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=5^x \xrightarrow{x=0} f(0)=5^0=1 \Rightarrow \text{در نقطهٔ به عرض ۱، محور yها را قطع می‌کند.} \\ g(x)=2\times 5^x \xrightarrow{x=0} g(0)=2 \Rightarrow \text{در نقطهٔ به عرض ۲، محور yها را قطع می‌کند.} \\ h(x)=\frac{1}{2}\times 5^x \xrightarrow{x=0} h(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{در نقطهٔ به عرض } \frac{1}{2}\text{، محور yها را قطع می‌کند.} \end{cases}$$

با توجه به جواب‌های به دست آمده، نمودار (۱) مربوط به تابع $h(x)$، نمودار (۲) مربوط به تابع $f(x)$ و نمودار (۳) مربوط به تابع $g(x)$ می‌باشند.

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی: در حالت کلی یک تابع به صورت $f(x)=ka^x\ (a>0, a\neq 1)$ مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند. به همین ترتیب می‌توان توابع لگاریتمی را معرفی نمود. این توابع در بسیاری از مسائل اقتصادی، مهندسی و ... به کار می‌روند. مثلاً در مسائل زلزله، اگر بزرگی زلزله M در واحد ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد ارگ است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\log E=11/8+1/5M$$

مثال اگر تعداد یک نوع باکتری از فرمول $p(t)=200\times 2^{\frac{t}{2}}$ به دست می‌آید که در آن t برحسب ساعت است:

الف) تعداد باکتری‌ها ۶ ساعت پس از شروع تکثیر چه‌قدر است؟

ب) پس از چند ساعت تعداد باکتری‌ها ۳۲۰۰ می‌شود؟

پاسخ: الف) تعداد باکتری‌ها پس از ۶ ساعت یعنی $p(6)$. بنابراین داریم:

$$p(6)=200\times 2^{\frac{6}{2}}=200\times 2^3=200\times 8=1600$$

ب) باید t را طوری بیابیم که $p(t)=3200$ شود:

$$p(t)=200\times 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 3200=200\times 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 16=2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^4=2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{t}{2}=4 \Rightarrow t=8$$

مثال زلزله‌ای به شدت ۶/۴ ریشتر چه مقدار انرژی می‌تواند آزاد کند؟

$$\log E=11/8+1/5M \Rightarrow \log E=11/8+1/5\times 6/4 \Rightarrow \log E=11/8+9/6=21/4 \Rightarrow E=10^{21/4}$$

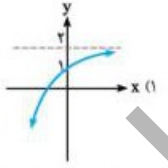
۲۴۹- در تابع نمایی $f(x)=k\times 3^x$ با افزودن ۴ واحد به متغیر مستقل، مقدار تابع چه‌قدر تغییر می‌کند؟

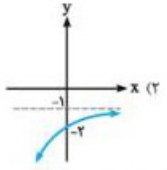
۱) ۸۱ واحد اضافه می‌شود. ۲) ۸۱ برابر می‌شود. ۳) ۸۱k واحد اضافه می‌شود. ۴) ۸۱k برابر می‌شود.

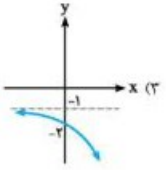
۲۵۰- نمودار تابع $y=-(3^{-2x+2})$ کدام می‌تواند باشد؟

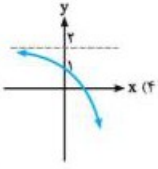
@khanehbook

۲۵۱- نمودار تابع $y = 2 - 5^{-x}$ کدام است؟

۱) 

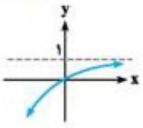
۲) 

۳) 

۴) 

آزمون‌های گاج

۲۵۲- نمودار روبه‌رو مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y = 2^x - 1$

۲) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

۳) $y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

۴) $y = 1 - 2^x$

آزمون‌های گاج

۲۵۳- کدام تابع زیر همواره یک‌به‌یک است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱) $y = ax + b$

۲) $y = a^x$

۳) $y = x^2 + b$

۴) $y = 2^{x+a}$

۲۵۴- کدام گزینه تابعی یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y = 2^{4x}$

۲) $y = |2^x|$

۳) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

۴) $y = 2^{|x|}$

۲۵۵- اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع نمایی $y = a^{x-1} + b$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$

۲) ۱۱

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

۲۵۶- نمودار تابع $f(x) = 3^x$ را سه واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید کدام است؟

۱) $g(x) = \frac{1}{27} \times 3^x - 2$

۲) $g(x) = \frac{1}{27} \times 3^x + 2$

۳) $g(x) = 27 \times 3^x + 2$

۴) $g(x) = 27 \times 3^x - 2$

۲۵۷- با کدام انتقال می‌توان نمودار $y = 9 \times 3^{x-1}$ را به نمودار $y = 3^{x+2} - 3$ تبدیل کرد؟

۱) دو واحد به راست و سه واحد به بالا

۲) دو واحد به چپ و سه واحد به بالا

۳) دو واحد به راست و سه واحد به پایین

۴) دو واحد به چپ و سه واحد به پایین

۲۵۸- نمودارهای توابع نمایی $y_1 = f(x-2)$ و $y_2 = 25f(x)$ دقیقاً بر روی یک‌دیگر منطبق شده‌اند. اگر $f(x) = a^x$ باشد، a کدام است؟

۱) ۵

۲) ۲۵

۳) $\frac{1}{5}$

۴) $\frac{1}{25}$

۲۵۹- نمودار تابع $y = -(\sqrt{3^{-1}})^{4x}$ از کدام روش زیر حاصل می‌شود؟

۱) قرینه کردن تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ نسبت به محور yها

۲) قرینه کردن تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها

۳) قرینه کردن تابع $y = 4^x$ نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها

۴) قرینه کردن تابع $y = 4^x$ نسبت به محور yها

۲۶۰- در تجزیهٔ یک مادهٔ شیمیایی، وزن ماده در هر لحظه از رابطهٔ $T_t = T_0 a^t$ به دست می‌آید که در آن T_t وزن ماده پس از t ساعت و T_0 وزن اولیهٔ آن می‌باشد. اگر بدانیم وزن آن پس از ۴ ساعت $\frac{1}{16}$ وزن اولیه شده است، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۲

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۴

۲۶۱- در یک آزمایش تکثیر سلول‌ها، بعد از ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۱۲ و بعد از ۴ ساعت تعداد سلول‌ها ۴۸ می‌باشد. تعداد سلول‌ها یک ساعت بعد از شروع آزمایش چه‌قدر بوده است؟

آزمون‌های گاج

۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۹

@khanehketab

۲۶۲- در کشت یک نوع باکتری، پس از ۲ ساعت جرم باکتری‌ها ۳ برابر شده است. اگر افزایش جرم این باکتری از رابطهٔ $A_t = A_0 a^t$ پیروی کند که در آن A_0 جرم اولیه و A_t جرم پس از t ساعت می‌باشد، پس از ۳ ساعت از زمان کشت، جرم باکتری‌ها چند برابر می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{8}$ ۴) $\sqrt{27}$

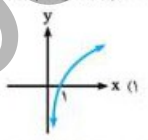
۲۶۳- یک شرکت سرمایه‌گذاری به مشتریان خود به ازای ۴۰ میلیون تومان سرمایه‌گذاری اولیه، پس از سه سال ۲۰ میلیون تومان سود می‌دهد. سوددهی این شرکت از فرمول $A_t = A_0 \times B^t$ تبعیت می‌نماید که در آن A_0 سرمایهٔ اولیه و A_t سرمایهٔ مشتری پس از t سال می‌باشد. سود مشتری پس از ۶ سال چند میلیون تومان می‌شود؟

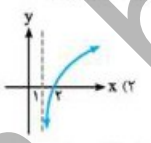
۱) ۹۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

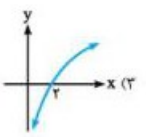
۲۶۴- در یک آزمایشگاه دو نوع باکتری با وزن برابر n وجود دارد. اگر این باکتری‌ها در شرایط مناسب قرار گیرند، وزن باکتری نوع اول در هر ساعت ۴/۵ برابر و وزن باکتری نوع دوم در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. پس از ۲/۵ ساعت در شرایط مناسب، وزن باکتری‌های نوع اول چند برابر وزن باکتری‌های نوع دوم می‌شود؟

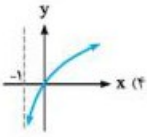
۱) $\frac{81}{32}$ ۲) $\frac{81}{16}$ ۳) $\frac{243}{32}$ ۴) $\frac{243}{16}$

۲۶۵- نمودار تابع $f(x) = -1 + \log_2 x$ کدام است؟

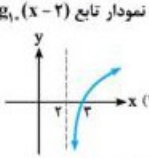
۱) 

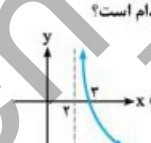
۲) 

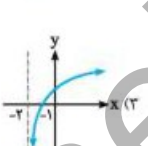
۳) 

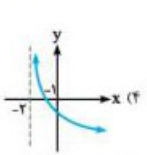
۴) 

۲۶۶- نمودار تابع $y = \log_{10}(x-2)$ کدام است؟

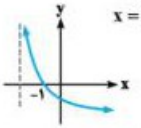
۱) 

۲) 

۳) 

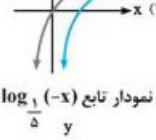
۴) 

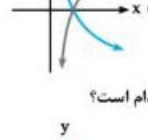
۲۶۷- شکل مقابل نمودار تابع $y = \log_{0.5}(x+a)$ می‌باشد. اگر معادلهٔ خط خط‌چین عمودی به صورت $x = k$ باشد، $k + a$ کدام است؟

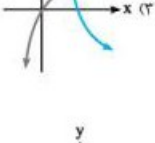


۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۰/۵

۲۶۸- نمودارهای توابع $y_1 = \log_a(x-2)$ و $y_2 = \log_b(x+1)$ با شرط $0 < a < 1 < b$ در کدام گزینه به درستی نشان داده شده‌اند؟

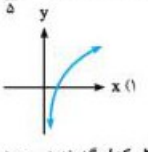
۱) 

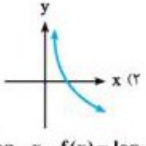
۲) 

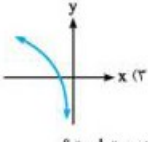
۳) 

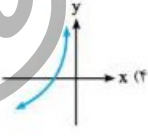
۴)

۲۶۹- نمودار تابع $y = -\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۷۰- کدام گزینه در مورد دو تابع $f(x) = \log_3 x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ درست است؟

۱) $f(x)$ و $g(x)$ وارون یک‌دیگرند. $(g(x) = f^{-1}(x))$
۲) $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم قرینه‌اند.
۳) $f(x).g(x) = -1$
۴) این دو نمودار نسبت به محور xها قرینه‌اند.

@khaneh_book

۲۷۱- رابطهٔ شدت زلزله (M) و انرژی آزاد شده برحسب اِرگ (E) به صورت $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$ می‌باشد. در یک زلزلهٔ ۶/۴ ریشتری چه مقدار انرژی آزاد می‌شود؟

۱) $۱۰^{۲۰/۴}$ ۲) $۱۰^{۲۱/۴}$ ۳) ۲۱/۴ ۴) ۲۰/۴

۲۷۲- در زلزله‌ای $۱۰^{۱۶/۳}$ اِرگ انرژی آزاد شده است. با توجه به فرمول $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$، شدت زلزله در مقیاس ریشتر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۲۷۳- انرژی یک زلزله $۲۵\sqrt{۵}$ برابر زلزلهٔ دیگر است. اگر $\log ۲ = ۰/۳$ بگیریم، دو زلزله چند ریشتر اختلاف دارند؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M)$

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۲۷۴- سود سالانهٔ مبلغی پس‌انداز برابر ۱۲ درصد آن و اصل مبلغ و سود پایان هر سال به عنوان سپردهٔ سال بعد، مشمول سود می‌گردد؛ مبلغ این پس‌انداز تقریباً پس از چند سال دو برابر می‌شود؟ $(\log_{۱۰} ۲ = ۰/۳۰۱۰, \log_{۱۰} ۷ = ۰/۸۴۵۱)$

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۲۷۵- اگر جمعیت به طور نمایی و با ضریب ثابت ۰/۰۲ در سال رشد کند (هر سال ۰/۰۲ نسبت به جمعیت سال پیش بیشتر شود)، پس از چند سال این جمعیت ۳/۱ برابر می‌شود؟ $(\log_{۱۰} ۱/۰۲ = ۰/۰۰۸۶, \log_{۱۰} ۳۱ = ۱/۴۹۰۲)$

۱) ۵۵ ۲) ۵۶ ۳) ۵۷ ۴) ۵۸

۲۷۶- در مورد معادلهٔ $\log x + ۲^{-x} = ۱$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) یک جواب بین صفر و یک دارد.
۲) یک جواب بزرگ‌تر از ۱ دارد.
۳) دو جواب، یکی بین صفر و یک و یکی بزرگ‌تر از ۱ دارد.
۴) معادله جواب ندارد.

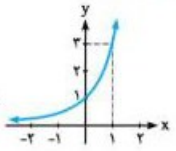
یادداشت

@khaneh_book

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۱ **راه اول:** به کمک نقطه‌یابی شکل کلی تابع را می‌یابیم.

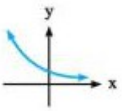
x	-۲	-۱	۰	۱
۳^x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳



$\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

راه دوم: تابع نمایی $y = a^x \ (a > ۰)$ همواره بالای محور yها می‌باشد. بنابراین **گزینه‌های (۳) و (۴)** نادرست‌اند. هم‌چنین با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابد. بنابراین **گزینهٔ (۱)** صحیح است.

۲ ۴
$$y = \frac{(\frac{۱}{۶})^x}{۵^{-x}} \Rightarrow y = \frac{(\frac{۱}{۶})^x}{(\frac{۱}{۵})^x} \Rightarrow y = \left(\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۵}}\right)^x \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} y = (\frac{۵}{۶})^x$$

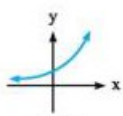


$۰ < \frac{۵}{۶} < ۱$ است و می‌دانیم در تابع $y = a^x$، اگر $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار تابع به صورت مقابل می‌باشد.

۳ ۴ چون $a < ۱ < ۰$ می‌باشد، نمودار $y_۱$ به صورت شکل (۱) است.

هم‌چنین b و c بزرگ‌تر از یک هستند، بنابراین نمودار آن‌ها به صورت شکل (۲) می‌باشد. از آن‌جا که $b < c$، نمودار $y_۲$ در قسمت مثبت محور xها بالاتر از نمودار $y_۲$ قرار می‌گیرد و در قسمت منفی محور xها نمودار $y_۲$ بالای $y_۳$ قرار می‌گیرد.

شکل (۱)



شکل (۲)

سؤال دانش‌پژوه (سیمرغ آزاد): **ببخشید، چرا $y_۲$ در قسمت مثبت محور xها بالاتر از $y_۳$ قرار می‌گیره؟**

پاسخ: *ببین جانم فرض کن $b = ۲$ و $c = ۳$ باشه،*

x	-۲	-۱	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
$y_۲$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۲}$	۲	۴
$y_۳$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	$\sqrt{۳}$	۳	۹

به ازای xهای مثبت $y_۲ > y_۳$ و به ازای xهای منفی $y_۳ < y_۲$ شد. هم‌چنین در قسمت توان‌ها هم داشتیم که اگه b و c بزرگ‌تر از یک بوده و $c > b$ باشه و هر دو به توان مثبت مثل x برسن، $b^x < c^x$ و اگه هر دو به به توان منفی برسن، $b^x > c^x$ میشه.

۴ ۱
$$f(x) = \frac{۳^x + ۱}{۳^x - ۱} \Rightarrow \begin{cases} f(۲) = \frac{۳^۲ + ۱}{۳^۲ - ۱} = \frac{۱۰}{۸} \\ f(-۲) = \frac{۳^{-۲} + ۱}{۳^{-۲} - ۱} = \frac{\frac{۱}{۹} + ۱}{\frac{۱}{۹} - ۱} = \frac{\frac{۱۰}{۹}}{-\frac{۸}{۹}} = -\frac{۱۰}{۸} \end{cases} \Rightarrow f(۲) - f(-۲) = \frac{۱۰}{۸} - (-\frac{۱۰}{۸}) = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

۵ ۲ چون دامنهٔ توابع نمایی $(f(x) = a^x)$ کل اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است پس کافی است عبارت توان، بامعنی باشد. برای بامعنی بودن عبارت توان، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد، پس دامنه برابر $x \geq ۰$ است.

۶ ۲
$$f(x) = ۵^{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = ۵^{\sqrt{(x-۲)^۲}} = ۵^{|x-۲|}$$

اگر $x > ۲$ باشد، خود عبارت از داخل قدرمطلق بیرون می‌آید. یعنی: $|x - ۲| = x - ۲$. اگر هم $x < ۲$ باشد، عبارت داخل قدرمطلق عبارتی منفی می‌شود، پس برای خارج کردن آن از قدرمطلق، آن را در یک منفی ضرب می‌کنیم. بنابراین:

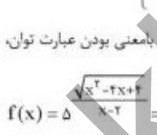
$$f(x) = \begin{cases} ۵^{x-۲} & x > ۲ \\ ۵^{-(x-۲)} & x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۵ & x > ۲ \\ ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵} & x < ۲ \end{cases}$$

پس برد تابع شامل تنها دو عضو ۵ و $\frac{۱}{۵}$ می‌باشد.

سؤال دانش‌پژوه (کاملیا پورمانی): **ببخشید، توی $x = ۲$ چه اتفاقی می‌افته؟**

پاسخ: *عبارتی که در توان عدد ۵ قرار گرفته باید همواره بامعنی باشه. چون زیر رادیکال همون‌طور که دیدیم نامنفیه، فقط می‌مونه چک کنیم مفرج اون عبارت صفر نشه. داریم:*
$x - ۲ \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۲ \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$
پس $x = ۲$، اصلاً در دامنهٔ تابع قرار ندارد.

دقت کنید نمودار این تابع به صورت مقابل است:



بنابراین این تابع، یک تابع نمایی **نیست**.

@khanehbook

۱ ۷ می‌دانیم حالت کلی توابع نمایی به صورت $y = ka^x + b$ می‌باشد که در آن a عدد مثبت و غیر یک می‌باشد. داریم:

$$f(x) = \frac{-1}{(\sqrt{3})^{5x}} \Rightarrow f(x) = -(\sqrt{3})^{-5x} \Rightarrow f(x) = \underbrace{-1}_{k}\Big(\underbrace{3^{-\frac{5}{2}}}_{\substack{a>0\\ a\neq 1}}\Big)^x = ka^x \Rightarrow$$ تابع نمایی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) پایه عدد منفی است (-2)، بنابراین نمایی نیست.

۳) تابعی کسری ـ رادیکالی است نه نمایی.

۴) داریم:

$$k(x) = \frac{4^x}{2^{2x+1}} \Rightarrow k(x) = \frac{4^x}{2^{2x} \times 2} \Rightarrow k(x) = \frac{4^x}{4^x \times 2} \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ $k(x)$ تابعی ثابت است نه نمایی.

۳ ۸ می‌دانیم در توابع نمایی، پایه باید مثبت و غیر یک باشد. لذا داریم:

a		-2		2	
$2-a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$a+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2-a}{a+2}$	$-$	∄	$+$	0	$-$
		تامعین	جواب		

شرط مثبت بودن پایه: $\frac{2-a}{a+2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-a=0 \Rightarrow a=2 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$

$$\frac{2-a}{a+2} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow 2-a \neq a+2 \Rightarrow a \neq 0$$

هم‌چنین پایه باید غیر یک باشد، بنابراین:

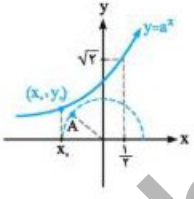
بنابراین مجموعه مقادیر قابل قبول برای a به صورت $(-2,2) - \{0\}$ می‌باشد.

۲ ۹ برای این‌که نمودار $y = a^x$ کاهشی ($0 < a < 1$ باشد، باید) و a مثبت باشد، پس:

$$0 < m^2 - 2m + 1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{1\} \quad (I) \\ m^2 - 2m + 1 < 1 \Rightarrow m^2 - 2m < 0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{ریشه‌ها: } m=0,\ m=2} 0 < m < 2 \quad (II) \end{cases}$$

با اشتراک‌گیری بین روابط (I) و (II) جواب به صورت $(0,2) - \{1\}$ یا $m \in (0,2) - \{1\}$ به دست می‌آید.

۲ ۱۰ ابتدا با توجه به این‌که نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ روی نمودار تابع قرار دارد، a را می‌یابیم:



$$y = a^x \xrightarrow{y(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}} \sqrt{2} = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow 2 = a \Rightarrow y = 2^x$$

نقطهٔ $(x_0, 0)$ روی دایره‌ای به مرکز $O(0,0)$ قرار دارد که نقطهٔ $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هم روی آن است. پس برای یافتن x_0 کافی است شعاع دایره را بیابیم. به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(\text{شعاع دایره})^2 = (OA)^2 = \left(\sqrt{(\tfrac{1}{2}-0)^2 + (-\tfrac{1}{2}-0)^2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0^2 = r^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \xrightarrow[x_0 \text{ منفی است}]{\text{با توجه به نمودار}} x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$y_0 = 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

۲ ۱۱ در توابع نمایی، به ازای افزایش یا کاهش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی (x)، مقادیر خروجی (y) در عدد مثبت غیر یک و ثابتی ضرب می‌شوند. در **گزینهٔ (۲)**، به ازای افزایش ۲ واحد در مقادیر x، مقادیر y در عدد مثبت و غیر یک $\frac{1}{8}$ ضرب می‌شوند، پس این گزینه بیانگر تغییرات یک تابع نمایی با ضابطهٔ $y = k(a^x)$ است.

هم‌چنین در **گزینهٔ (۱)**، مقادیر y در عدد نامثبت (-4) و در **گزینهٔ (۴)**، مقادیر y در عدد ۱ ضرب شده‌اند. پس بیانگر تغییرات تابع نمایی $y = k(a^x)$ نیستند. ضمناً دقت کنید **گزینهٔ (۳)**، بیانگر تغییرات تابع $y = x^2$ می‌باشد که تابعی نمایی نیست.

سؤال دانش‌پژوه (حسن پور پور)، **ببخشید، مگه گزینهٔ (۴) تابع نمایی $y = 1^x$ نیست یا گزینهٔ (۳) تابع $y = 2^x$ نیست؟**

پاسخ: بچه مگه گوش نمی‌دی؟ گزینهٔ (۴)، تابع $y = 1^x$ هست که تابعی ثابته، نه تابع نمایی. دقت کن در توابع نمایی پایه نمی‌تونه ۱ باشه و باید عدد مثبت غیر ۱ باشه. هم‌چنین گزینهٔ (۳) تابع $y = 2^x$ نیست، چون در $y = 2^x$ به ازای $x = 0, 1, 2$ به ترتیب $y = 2^0 = 1, y = 2^1 = 2$ می‌شه، در حالی‌که به ازای $x = 1$، مقدار تابع ۱ شده.

@khanen_book

نکته

راه به دست آوردن ضابطهٔ تابع نمایی

فرض کنید می‌خواهیم ضابطهٔ تابع گزینهٔ (۲) را که به صورت $y=k.a^x$ است، بیابیم. می‌دانیم $f(1)=-۱۹۲$، $f(۳)=-۲۴$ و $f(۵)=-۳$. پس:

$$\begin{cases} f(1)=-۱۹۲ \Rightarrow -۱۹۲=ka \\ f(۳)=-۲۴ \Rightarrow -۲۴=ka^۳ \end{cases} \xrightarrow[\text{بر بالایی}]{\text{تقسیم پایینی}} a^۲=\frac{-۲۴}{-۱۹۲}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow a=\frac{۱}{\sqrt{۸}} \Rightarrow k=-۱۹۲\sqrt{۸} \Rightarrow f(x)=-۱۹۲\sqrt{۸}\left(\frac{۱}{\sqrt{۸}}\right)^x$$

۱۲ ۱ در **گزینهٔ (۱)** به ازای افزایش هر ۱۰ واحد به مقادیر x، مقدار تابع در عدد ثابت مثبت و مخالف یک $\frac{۱}{۲}$ ضرب شده است. پس این تابع، تابعی نمایی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) به ازای افزایش هر واحد در مقادیر x، مقادیر y در عدد ثابت ۵- ضرب می‌شود و چون ۵- عددی منفی است تابع نمایی نیست.

۳) با این که هریک از مقادیر y با ضرب عدد ثابت ۳ در مقدار قبلی حاصل می‌شود ولی مقادیر x به مقدار ثابتی افزایش یا کاهش نمی‌یابد.

۴) بیانگر تغییرات تابع $y=۲x$ می‌باشد که تابعی خطی است نه نمایی.

۱۳ ۳ $a_n=a_1q^{n-1} \Rightarrow a_n=۶\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-1}=۶\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-1}=۱۲\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^n=۱۲\times۲^{-n} \Rightarrow h(x)=۱۲\times۲^{-x}$

۱۴ ۴ $f(x)=a^x \Rightarrow f(۴)=a^۴ \xrightarrow{f(۴)=۶} a^۴=۶ \Rightarrow a=\pm\sqrt[۴]{۶} \xrightarrow[\text{و مخالف یک}]{\text{مثبت } a} a=\sqrt[۴]{۶} \Rightarrow f(x)=\left(\sqrt[۴]{۶}\right)^x=\left(۶^{\frac{۱}{۴}}\right)^x=۶^{\frac{x}{۴}}$

$$\Rightarrow f(-۲)=۶^{-\frac{۲}{۴}}=۶^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

۱۵ ۳ گزینهٔ (۱) صحیح است. $f(x).f(-x)=a^x.a^{-x}=a^۰=۱ \Rightarrow$

گزینهٔ (۲) صحیح است. $\frac{f(x)}{f(-x)}=\frac{a^x}{a^{-x}}=a^{x-(-x)}=a^{۲x}=(a^x)^۲=(f(x))^۲ \Rightarrow$

گزینهٔ (۳) نادرست است. $f(x)+f(-x)=a^x+a^{-x} \xrightarrow{a^x>۰,a^{-x}>۰} f(x)+f(-x)>۰ \Rightarrow$

گزینهٔ (۴) صحیح است. $(f(x))^{-۲}-(f(-x))^۲=(a^x)^{-۲}-(a^{-x})^۲=a^{-۲x}-a^{-۲x}=۰ \Rightarrow$

۱۶ ۱ $f(۰)=۱ \Rightarrow a^۰+b(۰)+c=۱ \Rightarrow ۱+c=۱ \Rightarrow c=۰$

$$f(۱)=۰ \Rightarrow a^۱+b(۱)+c=۰ \xrightarrow{c=۰} a+b=۰ \Rightarrow a=-b$$

$$f(۲)=-۱ \Rightarrow a^۲+b(۲)+c=-۱ \xrightarrow{c=۰} a^۲+۲b=-۱ \xrightarrow{a=-b} (-b)^۲+۲b+۱=۰ \Rightarrow b^۲+۲b+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (b+۱)^۲=۰ \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow a=۱$$

بنابراین تابع $f(x)$ به ازای مقادیر a، b و c به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$f(x)=۱^x+(-۱)x+۰ \Rightarrow f(x)=-x+۱ \Rightarrow$ f تابعی خطی است.

سؤال دانش‌پژوه (هاسم بابایی)، **آقا مگه هر وقت $y=a^x$ داشته باشیم تابع حالت نمایی نداره؟**

کگر پاسخ: ببین هاسم پلنگ! وقتی می‌گیم این تابع نمایی است که a مثبت و مخالف یک باشه. این‌جا $a=۱$ شده، پس تابع نمایی نمی‌شه.

۱۷ ۳

$$\begin{cases} f(۰)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a.b^۰=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \quad (*) \\ f(-۲)=\frac{۳}{۳۲} \xrightarrow{(*)} \frac{۳}{۲}b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲} \xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}} b^{-۲}=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{۱}{b^۲}=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm۴ \xrightarrow{b>۰} b=۴ \end{cases}$$

پس $f(x)=\frac{۳}{۲}\times۴^x$ می‌شود. بنابراین:

$$f\left(\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}\times۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times(۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times۸=۱۲$$

@khanehbook

۱۸ **۳** از آن‌جاکه $f(۲)=a^۲+b^۲$ است، باید مقدار $a^۲+b^۲$ را بیابیم. داریم:

$$\frac{f(۱)}{f(-۱)}=۲۴\Rightarrow\frac{a+b}{a^{-۱}+b^{-۱}}=۲۴\Rightarrow\frac{a+b}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}=۲۴\Rightarrow\frac{a+b}{\frac{a+b}{ab}}=۲۴\Rightarrow\frac{(a+b)(ab)}{(a+b)}=۲۴\Rightarrow ab=۲۴\quad(*)$$

$$\frac{f(۳)}{f(۱)}=۲۸\Rightarrow\frac{a^۳+b^۳}{a+b}=۲۸\xrightarrow{\text{اتحاد مجموع مکعب دوجمله}}\frac{(a+b)(a^۲-ab+b^۲)}{a+b}=۲۸\Rightarrow a^۲-ab+b^۲=۲۸\quad(**)$$

$$\begin{cases}(*)\Rightarrow ab=۲۴\\(**)\Rightarrow a^۲-ab+b^۲=۲۸\end{cases}\xrightarrow[\text{را با هم جمع می‌کنیم}]{\text{دو طرف معادلات}}ab+a^۲-ab+b^۲=۲۴+۲۸\Rightarrow a^۲+b^۲=۵۲\Rightarrow f(۲)=۵۲$$

۱۹ **۴**

$$f(x)=۳^x\Rightarrow f(x+۲)=۳^{x+۲}\ ,\ f(x+۱)=۳^{x+۱}$$

$$\frac{f(x+۲)-۲f(x+۱)}{f(x)}=\frac{۳^{x+۲}-۲\times۳^{x+۱}}{۳^x}=\frac{۳^{x+۱}\times۳-۲\times۳^{x+۱}}{۳^x}=\frac{۳^{x+۱}(۳-۲)}{۳^x}=\frac{۳^{x+۱}}{۳^x}=۳$$

۲۰ **۳** ابتدا با توجه به این‌که $x=۲$ و $x=۴$ طول‌های نقاط تقاطع هستند مقادیر y را از معادلهٔ خط $۴y=۵x$ می‌یابیم.

$$۴y=۵x\xrightarrow{x=۲}۴y=۱۰\Rightarrow y=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow A(۲,\frac{۵}{۲})\ :\text{نقطهٔ تقاطع اول}$$

$$۴y=۵x\xrightarrow{x=۴}۴y=۲۰\Rightarrow y=۵\Rightarrow B(۴,۵)\ :\text{نقطهٔ تقاطع دوم}$$

این نقاط در تابع f هم صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{matrix}f(۲)=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=A(۲)^{۲B}\\f(۴)=۵\Rightarrow۵=A(۲)^{۴B}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم پایینی بر بالایی}}\frac{\frac{۵}{۲}}{۵}=\frac{A(۲)^{۴B}}{A(۲)^{۲B}}\Rightarrow\frac{\frac{۵}{۲}}{۵}=۲^{۴B-۲B}$$

$$\Rightarrow۲^{-۱}=۲^{۲B}\Rightarrow۲B=-۱\Rightarrow B=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{۵=A(۲)^{۴B}}۵=A(۲)^{۴(-\frac{۱}{۲})}\Rightarrow۵=\frac{۱}{۴}A\Rightarrow A=۲۰$$

پس $f(x)=\frac{۵}{۴}\times۲^{\frac{۱}{۲}x}$ می‌باشد. برای یافتن $f^{-۱}(۱۰)$ کافی است $f(x)=۱۰$ قرار دهیم:

$$\frac{۵}{۴}\times۲^{\frac{۱}{۲}x}=۱۰\Rightarrow۲^{\frac{۱}{۲}x}=\frac{۱۰}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۴۰}{۵}=۸\Rightarrow۲^{\frac{۱}{۲}x}=۲^۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}x=۳\Rightarrow x=۶$$

۲۱ **۲**

$$f(x+۵)-f(x+۳)=Af(x+۱)\Rightarrow\sqrt{۳}^{x+۵}-\sqrt{۳}^{x+۳}=A\sqrt{۳}^{x+۱}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۳}^{x+۵}-\sqrt{۳}^{x+۳}}{\sqrt{۳}^{x+۱}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۳}^{x+۱}(\sqrt{۳}^۴-\sqrt{۳}^۲)}{\sqrt{۳}^{x+۱}}\Rightarrow A=۹-۳=۶$$

۲۲ **۴** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $\begin{cases}y_۱=۹^{x+۱}\Rightarrow y_۱=۹^x\times۹\\y_۲=۳^{۲x+۱}\Rightarrow y_۲=(۳^۲)^x\times۳=۹^x\times۳\end{cases}\Rightarrow y_۱\neq y_۲$ ، ۲) $\begin{cases}y_۱=a^{\frac{x}{۲}}\\y_۲=a^{\sqrt{x}}=a^{x^{\frac{۱}{۲}}}\end{cases}\xrightarrow[\text{هر x گفت }\frac{x}{۲}=x^{\frac{۱}{۲}}]{\text{چون نمی‌توان به ازای}}y_۱\neq y_۲$

۳) $\begin{cases}y_۱=\sqrt{a\sqrt{x}}\Rightarrow y_۱=\left(a^{\frac{۱}{۲}}\right)^{x^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow y_۱=a^{\left(\frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\right)}\\y_۲=\sqrt{a^x}\Rightarrow y_۲=(a^x)^{\frac{۱}{۲}}=a^{\frac{x}{۲}}\end{cases}\xrightarrow[\text{هر x گفت }\frac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{x}{۲}]{\text{چون نمی‌توان به ازای}}y_۱\neq y_۲$

۴) $\begin{cases}y_۱=(\sqrt{a})^x\Rightarrow y_۱=\left(a^{\frac{۱}{۲}}\right)^x\Rightarrow y_۱=a^{\frac{x}{۲}}\\y_۲=\sqrt{a^x}\Rightarrow y_۲=(a^x)^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y_۲=a^{\frac{x}{۲}}\end{cases}\Rightarrow y_۱=y_۲$

۲۳ **۳** عرض محل تقاطع تابع y با محور عرض‌ها از برابر صفر قرار دادن x و محاسبهٔ مقدار تابع به دست می‌آید.

$$y=-۲(۵^{x+۱})+۴(۳^x)+۱\xrightarrow{x=۰}y(۰)=-۲(۵^{۰+۱})+۴(۳)^۰+۱\Rightarrow y(۰)=-۲(۵)+۴(۱)+۱=-۵$$

@khanen_book

۲۴ ۴ برای به دست آوردن محل تقاطع یک تابع با محور طول‌ها، باید ببینیم به ازای چه x ای، y (مقدار تابع) صفر می‌شود.

$$y=(۳\sqrt{۳})^{x+۲}-۱۸(\sqrt{۳}^{۳x})-\frac{۱}{۳}\xrightarrow[۲\sqrt{۳}=\sqrt{۲۷}]{y=۰}\sqrt{۲۷}^{x+۲}-۱۸(\sqrt{۳}^{۳})^{x}-\frac{۱}{۳}=۰\Rightarrow\sqrt{۲۷}^{x}\times\sqrt{۲۷}^{۲}-۱۸(\sqrt{۲۷}^{x})=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۲۷}^{x}(۲۷-۱۸)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow۹\left(۲۷^{\frac{۱}{۲}}\right)^{x}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\div۹}۲۷^{\frac{۱}{۲}x}=\frac{۱}{۲۷}\Rightarrow۲۷^{\frac{۱}{۲}x}=۲۷^{-۱}\Rightarrow\frac{۱}{۲}x=-۱\Rightarrow x=-۲$$

۲۵ ۴ توابع نمایی $y=a^x$ همواره توابعی یک‌به‌یک هستند. پس **گزینهٔ (۴)** صحیح است.

اما گزینه‌های دیگر نادرست‌اند. تابع معکوس این تابع $f^{-1}(x)=\log_a x$ است (بعداً این مطلب را یاد خواهید گرفت.) تابع $y=a^x$ از نقطه‌ای به عرض ۱ روی محور عرض‌ها عبور می‌کند و برد این تابع اعداد حقیقی مثبت $(R_f=(۰,+\infty))$ است نه اعداد حقیقی نامنفی (اعداد نامنفی شامل صفر هم می‌شود که در برد تابع نمایی نیست.)، بنابراین اصلاً محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

۲۶ ۳ به ازای $a=۰$ و $a=۱$ که اعدادی نامنفی هستند داریم:

$f(x)=۱^x=۱\Rightarrow f(x)$ تابع ثابت و غیر یک‌به‌یک است. $\Rightarrow f(x)$ وارون‌پذیر نیست.

$f(x)=۰^x=۰\Rightarrow f(x)$ تابع ثابت و غیر یک‌به‌یک است. $\Rightarrow f(x)$ وارون‌پذیر نیست.

دقت کنید که در صورت سؤال گفته نشده «تابع نمایی $f(x)$»، لذا a می‌تواند صفر یا یک هم که نامنفی هستند باشد.

۲۷ ۳

یادآوری اگر تابع $f(x)$ از نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ بگذرد، معکوس (وارون) آن همواره از $B(\beta,\alpha)$ می‌گذرد.

نقطهٔ برخورد تابع $y=۲^x+۱$ با محور yها با قرار دادن $x=۰$ حاصل می‌شود. داریم:

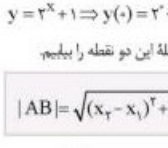
$$y=۲^x+۱\Rightarrow y(۰)=۲^۰+۱=۱+۱=۲\Rightarrow A=(۰,۲)$$ نقطهٔ برخورد تابع با محور yها

پس تابع وارون $y=۲^x+۱$ از نقطهٔ $B(۲,۰)$ می‌گذرد که محل تقاطع تابع معکوس با محور xها می‌باشد. لذا کافی است فاصلهٔ این دو نقطه را بیابیم.

یادآوری فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با: $|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$

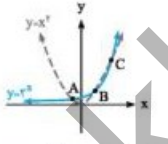
$$|AB|=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۸ ۲ با رسم نمودارهای دو تابع جواب را می‌یابیم.



$\Rightarrow$ دو تابع در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲۹ ۴ برای حل معادلهٔ $۲^x=x^۲$ کافی است نمودار توابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم نماییم.



محل‌های تلاقی این دو تابع، نقاطی است که دو تابع با هم برابرند. یعنی در نقاط تقاطع، $۲^x=x^۲$ می‌شود.

$\Rightarrow$ معادله ۳ جواب دارد. $\Rightarrow$ سه نقطهٔ تقاطع دارند. $۲^x-x^۲=۰\Rightarrow۲^x=x^۲$

تذکر برای حل این‌گونه مسائل از طریق رسم، باید فوق‌العاده دقت نمایید. کوچک‌ترین اشتباهی منجر به رسیدن به جواب نادرست می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (فرزانه بندلو)، **ببخشید، توی رسم من نقطهٔ B به دست می‌یاد ولی نقطهٔ C به دست نمی‌یاد؟**

پاسخ: فتماً نمودارها رو با دقت رسم نکردی. قبول داری به ازای $x=۲$ و $x=۴$، $۲^x=x^۲$ می‌شه. چون:

$$x=۲\Rightarrow\begin{cases}x^۲=۲^۲=۴\\۲^x=۲^۲=۴\end{cases},\quad x=۴\Rightarrow\begin{cases}x^۲=۴^۲=۱۶\\۲^x=۲^۴=۱۶\end{cases}$$

یعنی هر دو تابع از $B(۲,۴)$ و $C(۴,۱۶)$ عبور می‌کنند. نقطهٔ A هم که راحت از رسم دو تابع معلومه محل برخورد دو تابع می‌شه. پس سه نقطهٔ برخورد داریم.

سؤال دانش‌پژوه (بهرام چلچله)، **ولی آقا خیلی سخت بود! از این سؤال‌ها توی کنکور هم میاد؟**

پاسخ: بهرام جان چه فرقی می‌کنه، هیچ سؤالی نباید باشه که شما بلد نباشین. پس همه رو بخون بره دیگه بابا! هدف ما مشابه‌سازی مسائل کنکور بوده، حالا ممکنه تو کنکور نیاد، شما این رو به عنوان یه هریف تمرینی بگیر.

@khanen_book

۳۰ ۱ سعی می‌کنیم ابتدا پایه‌ها را با هم یکسان کنیم تا بتوانیم توان‌ها را با هم برابر قرار دهیم.

$$9^{2x-1}=27^{2x+1}\Rightarrow(3^2)^{2x-1}=(3^3)^{2x+1}\Rightarrow 3^{4x-2}=3^{6x+3}\xrightarrow{\text{پایه‌ها یکسان}}4x-2=6x+3\Rightarrow -5=5x\Rightarrow x=-1$$

۳۱ ۳

$$4\times 2^{x+1}=(0/5)^x\Rightarrow 2^2\times 2^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^x\Rightarrow 2^{2+x+1}=(2^{-1})^x\Rightarrow 2^{x+3}=2^{-x}\Rightarrow x+3=-x\Rightarrow 2x=-3\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

۳۲ ۲

$$\frac{1}{5^{2x+2}}=25^{2x}\Rightarrow 5^{-(2x+2)}=(5^2)^{2x}\Rightarrow 5^{-2x-2}=5^{4x}\xrightarrow[\text{توان‌ها را برابر قرار می‌دهیم.}]{\text{پایه‌ها برابرند.}}-2x-2=6x\Rightarrow -2=8x\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$$

۳۳ ۴

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{4^{1-x}}{2^{x+1}}=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}2^{x+1}=4^1\times 4^{1-x}\Rightarrow 2^{x+1}=(2^2)^{2-x}\Rightarrow 2^{x+1}=2^{4-2x}$$

$$\Rightarrow x+1=4-2x\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1$$

بنابراین $a=4^{1-1}=4^0=1$ و $b=2^{1+1}=4$ و لذا $a+b+x=1+4+1=6$.

۳۴ ۳

$$(0/75)^3(16)^{x+1}=216\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^3\times(16^x\times 16)=216\Rightarrow\frac{27}{64}\times 16^x\times 16=216$$

$$\Rightarrow 16^x=\frac{216\times 4}{27}=32\Rightarrow(2^4)^x=2^5\Rightarrow 2^{4x}=2^5\Rightarrow 4x=5\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

۳۵ ۴ بدون توجه به ظاهر شلوغ تست سعی در برابر کردن پایه‌ها می‌کنیم.

$$(64)^{x^2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^x=0/5\times(2^x)^2\Rightarrow(2^6)^{x^2}\times(2^{-3})^x=\frac{1}{2}\times 2^{2x}\Rightarrow 2^{6x^2}\times 2^{-3x}=2^{-1}\times 2^{2x}\Rightarrow 2^{6x^2-3x}=2^{2x-1}$$

$$\Rightarrow 6x^2-3x=2x-1\Rightarrow 6x^2-5x+1=0\xrightarrow{\text{حل معادله}}\begin{cases}x=\dfrac{5+\sqrt{25-24}}{2(6)}=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{25-24}}{2(6)}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

۳۶ ۳

$$4^{1-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}=72\Rightarrow(2^2)^{1-x}+(2^{-1})^{2x+1}=72\Rightarrow 2^{2-2x}+2^{-2x-1}=72\Rightarrow 2^{\overbrace{-2x-1+3}^{2-2x}}+2^{-2x-1}=72$$

$$\Rightarrow 2^{-2x-1}(2^3+1)=72\Rightarrow 2^{-2x-1}(9)=72\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را بر ۹}}2^{-2x-1}=8\Rightarrow 2^{-2x-1}=2^3\Rightarrow -2x-1=3\Rightarrow -2x=4\Rightarrow x=-2$$

سؤال دانش‌پژوه (هانی سفلور): آقا این سؤال خیلی سخت بود! تو کنکور از اینا می‌یاد؟

پاسخ: سعی بر این بوده که توی هر مبحث، تمام سؤالات ممکن آورده بشه. فلا ممکنه از این نوع سؤال و چند تای بعدی که یه کم سفت‌ترن تو کنکور کم‌تر بیاد.

۳۷ ۱

$$\frac{(0/2)^{x-1}}{4^{x+1}\times 5^x}=0/0125\Rightarrow\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}}{4^{x+1}\times 5^x}=\frac{125}{10000}\Rightarrow\frac{(5^{-1})^{x-1}}{4^{x+1}\times 5^x}=\frac{1}{80}\Rightarrow\frac{5^{-x+1-x}}{(2^2)^{x+1}}=\frac{1}{16\times 5}$$

$$\Rightarrow\frac{5^{-2x+1}}{2^{2(x+1)}}=\frac{1}{16\times 5}\Rightarrow 5\times 5^{-2x+1}=\frac{2^{2x+2}}{16}\xrightarrow{16=2^4}5^{-2x+2}=2^{2x+2-4}\Rightarrow 5^{-2(x-1)}=2^{2(x-1)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}=4^{(x-1)}\xrightarrow[\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}]{\text{تقسیم دو طرف بر}}\left(\frac{4}{\frac{1}{25}}\right)^{x-1}=1\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

$x=1$ تنها در نامساوی **گزینهٔ (۱)** صدق می‌کند.

۳۸ ۳

$$9^{x+\frac{1}{2}}+8\times 3^x-3=0\Rightarrow(3^2)^{x+\frac{1}{2}}+8\times 3^x-3=0\Rightarrow 3^{2x+1}+8\times 3^x-3=0\Rightarrow 3\times 3^{2x}+8\times 3^x-3=0$$

با گرفتن $3^x=u$ داریم $u^2=(3^x)^2=3^{2x}$. بنابراین $3^{2x}=u^2$. با بازنویسی معادله داریم:

$$3u^2+8u-3=0\xrightarrow{\text{حل معادله}}\begin{cases}u=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^x=3^{-1}\Rightarrow x=-1\\ u=-3\Rightarrow 3^x=-3\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد): ببخشید، چرا $3^x=-3$ رو غیرقابل قبول گرفتید؟

پاسخ: ببین، همواره تابع نمایی $y=a^x$ بالای محور xها قرار داره. به عبارتی همواره a^x (در اینجا 3^x) بزرگ‌تر از صفر می‌شه.

@khanen_book

۳۹ **۲** با توجه به این‌که $f(۲)=\frac{۱}{۳}$، داریم:

$$f(۲)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=۳^{۲a+b}\Rightarrow ۳^{-۱}=۳^{۲a+b}\Rightarrow -۱=۲a+b \quad (*)$$

از طرفی دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند. پس داریم:

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow ۳^{-a+b}=\left(\frac{۱}{۹}\right)^{-۱}\Rightarrow ۳^{-a+b}=(۳^{-۲})^{-۱}\Rightarrow ۳^{-a+b}=۳^{۲}\Rightarrow -a+b=۲ \quad (**)$$

با حل معادلات (*) و (**) در یک دستگاه داریم:

$$\times(-۱)\begin{cases}۲a+b=-۱\\-a+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=-۱\\ \underline{a-b=-۲}\end{cases}$$

$$۳a=-۳\Rightarrow a=-۱\Rightarrow b=۱\Rightarrow f(x)=۳^{-x+۱}$$

حال برای یافتن $f^{-۱}(۲۷)$ کافی است ببینیم به ازای چه xای $f(x)=۲۷$ می‌شود:

$$۳^{-x+۱}=۲۷\Rightarrow ۳^{-x+۱}=۳^{۳}\Rightarrow -x+۱=۳\Rightarrow x=-۲$$

۴۰ **۲** برای پیدا کردن نقطهٔ تقاطع ضابطه‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned}y&=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}\\ y&=۳^{x}+\frac{۸}{۳}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}=۳^{x}+\frac{۸}{۳}\Rightarrow\left[\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲}\right]^{x}=۳^{x}+\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}=۳^{x}+\frac{۸}{۳}\xrightarrow{\times(۳\times ۳^{x})}۳=۳\times ۳^{۲x}+۸\times ۳^{x}\Rightarrow ۳\times(۳^{x})^{۲}+۸\times ۳^{x}-۳=۰\xrightarrow{۳^{x}=u}۳u^{۲}+۸u-۳=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۱۰۰}\begin{cases}u=\dfrac{-۸+\sqrt{۱۰۰}}{۲(۳)}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow ۳^{x}=\dfrac{۱}{۳}=۳^{-۱}\Rightarrow x=-۱\\ u=\dfrac{-۸-\sqrt{۱۰۰}}{۲(۳)}=-۳\Rightarrow ۳^{x}=-۳\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

با قرار دادن $x=-۱$ در یکی از توابع داده شده، عرض نقطهٔ تقاطع را نیز می‌یابیم:

$$y=۳^{x}+\frac{۸}{۳}\xrightarrow{x=-۱}y=۳^{-۱}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳\Rightarrow \text{قدرمطلق اختلاف}=|۳-(-۱)|=۴$$

۴۱ **۱**

$$\begin{cases}(۱/۵)^{-۴}\\ ۰/۲۵=\dfrac{۱}{۴}=۴^{-۱}=[(\sqrt{۲})^{۴}]^{-۱}=(\sqrt{۲})^{-۴}\end{cases}\xrightarrow[\text{توان‌ها منفی}]{\sqrt{۲}<۱/۵}(\sqrt{۲})^{-۴}>(۱/۵)^{-۴}\Rightarrow ۰/۲۵>(۱/۵)^{-۴}$$

$(\sqrt{۳})^{۳}=\sqrt{۳^{۳}}=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow$ گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

۴۲ **۲**

۱) $\begin{cases}۲^{\sqrt{۱۰}}\\ ۸=۲^{۳}=۲^{\sqrt{۹}}\end{cases}\xrightarrow[۲>۱]{\sqrt{۱۰}>\sqrt{۹}}۲^{\sqrt{۱۰}}>۲^{\sqrt{۹}}\Rightarrow ۲^{\sqrt{۱۰}}>۸$

۲) $\begin{cases}(۰/۵)^{\sqrt{۵۰}}=\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{\sqrt{۵۰}}\\ \dfrac{۱}{۲^{۷}}=\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{۷}=\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{\sqrt{۴۹}}\end{cases}\xrightarrow[\frac{۱}{۲}<۱]{\sqrt{۵۰}>\sqrt{۴۹}}\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{\sqrt{۵۰}}<\left(\dfrac{۱}{۲}\right)^{\sqrt{۴۹}}\Rightarrow(۰/۵)^{\sqrt{۵۰}}<\dfrac{۱}{۲^{۷}}\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) جواب است.

۳) $\begin{cases}\pi^{۵}\\ (\sqrt{۵})^{۱۰}=[(\sqrt{۵})^{۲}]^{۵}=۵^{۵}\end{cases}\xrightarrow[\pi<۵]{\text{توان‌ها برابر و مثبت‌اند}}\pi^{۵}<(\sqrt{۵})^{۱۰}$

۴) $\begin{cases}\left(\dfrac{۱}{۱۰}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\left(\dfrac{۱}{۱۰۰}\right)^{\frac{۱}{۲}}\\ \left(\dfrac{۳}{۱۰}\right)^{\frac{۲}{۳}}=\left[\left(\dfrac{۳}{۱۰}\right)^{۲}\right]^{\frac{۱}{۳}}=\left(\dfrac{۹}{۱۰۰}\right)^{\frac{۱}{۳}}\end{cases}\xrightarrow[\frac{۱۰}{۱۰۰}>\frac{۹}{۱۰۰}]{\text{توان‌ها برابر و مثبت‌اند.}}\left(\dfrac{۱}{۱۰}\right)^{\frac{۱}{۳}}>\left(\dfrac{۳}{۱۰}\right)^{\frac{۲}{۳}}$

۴۳ **۲** با توجه به $۳^{z}>۳^{y}>۳^{x}$، چون پایه برابر ۲ و بزرگ‌تر از ۱ است، می‌توان گفت $x>y>z$ داریم:

$$\begin{cases}x>y\\ x>z\end{cases}\xrightarrow{+}۲x>y+z\Rightarrow y+z-۲x<۰$$

@kaneh_book

۴۴ ۴ برای مقایسهٔ $۲^{\sqrt{۲۰}}$ و $۴^{\sqrt{۷}}$ داریم:

$$۴^{\sqrt{۷}} \square ۲^{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow ۴^{\sqrt{۷}} \square ۲^{\sqrt{۴\times۵}} \Rightarrow ۴^{\sqrt{۷}} \square ۲^{۲\sqrt{۵}} \Rightarrow ۴^{\sqrt{۷}} \square (۲^{۲})^{\sqrt{۵}} \Rightarrow ۴^{\sqrt{۷}} \square ۴^{\sqrt{۵}} \xrightarrow[\sqrt{۷}>\sqrt{۵}]{\text{پایه‌ها برابر و بزرگ‌تر از ۱ هستند}} ۴^{\sqrt{۷}} \boxed{>} ۴^{\sqrt{۵}}$$

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد): ببخشید نمی‌شد پایه‌ها را ۲ کنیم و سپس مقایسه کنیم؟

پاسخ: چرا نمی‌شد. ببین:

$$(۲^{۲})^{\sqrt{۷}} \square ۲^{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow ۲^{۲\sqrt{۷}} \square ۲^{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow ۲^{\sqrt{۲۸}} \square ۲^{\sqrt{۲۰}} \xrightarrow[\sqrt{۲۸}>\sqrt{۲۰}]{} ۲^{\sqrt{۲۸}} \boxed{>} ۲^{\sqrt{۲۰}}$$

برای مقایسهٔ $(\sqrt[۷]{۳})^{۷}$ و $۹^{۱/۲۵}$ داریم:

$$۹^{۱/۲۵} \bigcirc (\sqrt[۷]{۳})^{۷} \Rightarrow (۳^{۲})^{۷/۲۵} \bigcirc ۳^{\frac{۷}{۴}} \Rightarrow ۳^{۲/۵} \bigcirc ۳^{\frac{۷}{۴}} \Rightarrow ۳^{۲/۵} \bigcirc ۳^{۲/۴} \xrightarrow[۲/۵>۲/۴]{\text{پایه‌ها برابر و بزرگ‌تر از ۱ هستند}} ۳^{۲/۵} \textcircled{>} ۳^{۲/۴}$$

۴۵ ۳

$$\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲x-۶} > (۲۵)^{-\frac{۱}{۲}x} \Rightarrow (۵^{-۱})^{۲x-۶} > (۵^{۲})^{-\frac{۱}{۲}x} \Rightarrow ۵^{-۲x+۶} > ۵^{-x} \xrightarrow{\text{پایه‌ها برابر و بزرگ‌تر از ۱}} -۲x+۶ > -x \Rightarrow ۶ > x$$

۴۶ ۲ با توجه به این‌که $(۰/۲)^{۴} = (۰/۰۰۸)$ و $(۰/۲)^{۲} = ۰/۰۴$ می‌باشند، داریم:

$$(۰/۰۰۸)^{-\frac{x^{۲}}{۳}+۱} \le ۰/۰۴ \Rightarrow [(۰/۲)^{۳}]^{-\frac{x^{۲}}{۳}+۱} \le (۰/۲)^{۲} \Rightarrow (۰/۲)^{-x^{۲}+۳} \le (۰/۲)^{۲} \xrightarrow[\text{پس جهت نامعادله برای توان‌ها عوض می‌شود}]{\text{پایه‌ها برابر و بین صفر و یک هستند،}} -x^{۲}+۳ \ge ۲$$

$$\Rightarrow -x^{۲} \ge -۱ \Rightarrow (x^{۲}-۱) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \le x \le ۱$$

۴۷ ۱

$$۲-\sqrt{۳} = (۲-\sqrt{۳}) \times \frac{(۲+\sqrt{۳})}{(۲+\sqrt{۳})} = \frac{۴-۳}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}} = (۲+\sqrt{۳})^{-۱}$$

بنابراین با بازنویسی نامعادله داریم:

$$(۲-\sqrt{۳})^{x^{۲}} \ge (۲+\sqrt{۳})^{x} \Rightarrow [(۲+\sqrt{۳})^{-۱}]^{x^{۲}} \ge (۲+\sqrt{۳})^{x} \Rightarrow (۲+\sqrt{۳})^{-x^{۲}} \ge (۲+\sqrt{۳})^{x}$$

$$\xrightarrow[\text{بزرگ‌تر از ۱ هستند}]{\text{پایه‌ها برابر و}} -x^{۲} \ge x \Rightarrow x^{۲}+x \le ۰ \Rightarrow x(x+۱) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \le x \le ۰$$

۴۸ ۲

$$x^{۲}.۲^{x} \le x.۲^{x+۲} \Rightarrow x^{۲}.۲^{x} \le x.۲^{x}.۲^{۲} \Rightarrow x^{۲}.۲^{x} \le ۴x.۲^{x} \xrightarrow[۲^{x}>۰]{\text{تقسیم طرفین نامعادله بر}} x^{۲} \le ۴x \Rightarrow x^{۲}-۴x \le ۰$$

$$\Rightarrow x(x-۴) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \le x \le ۴$$

۴۹ ۲ عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. داریم:

$$۳^{x}-۴^{x} \ge ۰ \Rightarrow ۳^{x} \ge ۴^{x}$$

می‌دانیم وقتی توان‌های دو عبارت برابر بوده و اگر $a<b$ باشد و $a^{x} \ge b^{x}$ می‌شود که x نامثبت باشد. در این‌جا چون $۴>۳$، پس تنها x می‌تواند نامثبت باشد. یعنی $x \le ۰$ است.

۵۰ ۳ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. بنابراین:

$$(۰/۲۵)^{x}-(۰/۱)^{x} \ge ۰ \Rightarrow (۰/۲۵)^{x} \ge (۰/۱)^{x}$$

وقتی a و b مثبت و $a>b$ باشد، هنگامی نامساوی $a^{x} \ge b^{x}$ برقرار است که x نامنفی باشد. در این‌جا چون $۰/۱ > ۰/۲۵$ است، بنابراین برای برقراری $(۰/۱)^{x} \ge (۰/۲۵)^{x}$ باید x نامنفی باشد، یعنی $x \ge ۰$ است.

۵۱ ۴ چون مبنای لگاریتم برابر $\frac{۱}{۵}$ و بین صفر و یک می‌باشد، نمودار تابع لگاریتمی به صورت مقابل می‌باشد.

۵۲ ۳ با توجه به نمودار رسم شده در صورت تست، می‌توان دید که اگر $۰<x<۱$ باشد $\log_{\frac{۱}{۲}} x > ۰$ و اگر $x>۱$ باشد $\log_{\frac{۱}{۲}} x < ۰$ می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۱}{۹}<۱ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۹} > ۰ \\ ۹>۱ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} ۹ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\log_{۰/۵} \frac{۱}{۹}}_{\text{مثبت}} \times \underbrace{\log_{۰/۵} ۹}_{\text{منفی}} < ۰ \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۲):

$$۰<۹^{-۶}<۹^{-۴}<۱ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \log_{\frac{۱}{۲}} ۹^{-۶} > \log_{\frac{۱}{۲}} ۹^{-۴} \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۳): با توجه به نمودار با افزایش مقادیر x، مقادیر y مرتباً کاهش می‌یابند. پس هر چه x بزرگ‌تر باشد حاصل لگاریتم آن کوچک‌تر می‌شود:

$$a>b \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} a < \log_{\frac{۱}{۲}} b \quad \times$$

گزینهٔ (۴):

$$\left.\begin{array}{l} ۴>۱ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} ۴ < ۰ \\ ۵>۱ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} ۵ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\log_{۰/۵} ۴}_{\text{منفی}} \times \underbrace{\log_{۰/۵} ۵}_{\text{منفی}} > ۰ \quad \checkmark$$

@khanen_book

۵۳ ۲ با توجه به نمودار $y(۲) = -۱$ شده است، داریم:

$$y = \log_a x \xrightarrow{y(۲)=-۱} \log_a ۲ = -۱ \Rightarrow ۲ = a^{-۱} \Rightarrow ۲^{-۱} = (a^{-۱})^{-۱} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}} ۸ = b \Rightarrow ۸ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^b \Rightarrow ۲^۳ = (۲^{-۱})^b \Rightarrow ۲^۳ = ۲^{-b} \Rightarrow ۳ = -b \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} ۸ = -۳$$

۵۴ ۴ در توابع لگاریتمی باید عبارت جلوی لگاریتم و مبنا مثبت بوده و مبنا مخالف یک باشد.

$$\begin{cases} x^۲ + ۹ > ۰ \Rightarrow \text{نامعادله همواره برقرار است.} \\ x > ۰ \\ x \neq ۱ \end{cases} \Rightarrow D_f = \{x \mid x > ۰ , x \neq ۱\}$$

(همواره +)

۵۵ ۲ باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنا نیز مثبت و مخالف ۱ باشد. لذا داریم:

$$\begin{cases} ۹ - x^۲ > ۰ \Rightarrow (۳ - x)(۳ + x) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۳ < x < ۳ \\ x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱ \\ x + ۱ \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} D_f = (-۱, ۳) - \{۰\}$$

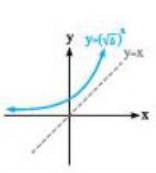
۵۶ ۲ عبارت جلوی لگاریتم‌ها باید مثبت باشند. هم‌چنین عبارت مخرج باید مخالف صفر باشد.

$$\begin{cases} x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \\ ۴ - x^۲ > ۰ \Rightarrow (۲ - x)(۲ + x) > ۰ \Rightarrow -۲ < x < ۲ \\ \log_{۱۰}(۴ - x^۲) \neq ۰ \Rightarrow ۴ - x^۲ \neq ۱ \Rightarrow x^۲ \neq ۳ \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} D_f = \{x \mid ۱ < x < ۲ , x \neq \sqrt{۳}\}$$

سؤال دانش‌پژوه (بلال شریف‌زاده): **ببخشید اون انتهای جواب نباید $x \neq \pm\sqrt{۳}$ باشه؟**

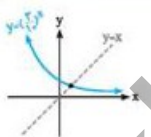
پاسخ: شریف زاده! وقتی $۱ < x < ۲$ هست که دیگه نمی‌تونه منفی باشه. پس فقط $x \neq \sqrt{۳}$ کافیه.

۵۷ ۱ برای حل باید نقاط برخورد دو منحنی $y = (\sqrt{۵})^x$ و $y = \log_{\sqrt{۵}} x$ را بیابیم. توابع $y = (\sqrt{۵})^x$ و $y = \log_{\sqrt{۵}} x$ وارون یک‌دیگرند، لذا نقاط برخورد آن‌ها روی خط $y = x$ قرار دارد. پس کافی است نقاط برخورد یکی از آن‌ها با خط $y = x$ را به دست آوریم. اما از آن‌جاکه نمودار $y = (\sqrt{۵})^x$ به صورت روبه‌رو می‌باشد و هیچ نقطهٔ برخوردی با $y = x$ ندارد، پس معادله اصلاً جواب ندارد.



نکته نمودار تابع نمایی $y = a^x$ یا تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ با شرط $a > ۱$، هیچ‌گاه خط $y = x$ را قطع نمی‌کند.

۵۸ ۲ توابع $y = \left(\frac{۳}{۱۰}\right)^x$ و $y = \log_{۰/۳} x$ وارون (معکوس) یک‌دیگرند. پس کافی است نقاط برخورد یکی از این توابع را با خط $y = x$ بیابیم. چون این تابع با خط $y = x$ یک نقطه برخورد دارد، پس با وارونش نیز یک نقطهٔ برخورد دارد و لذا معادلهٔ $\log_{۰/۳} x = \left(\frac{۳}{۱۰}\right)^x$ یک جواب دارد.



۵۹ ۱ چند واحد اضافه را، x در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\log_۴(۲۸ + x) = ۳ \Rightarrow ۲۸ + x = ۴^۳ \Rightarrow ۲۸ + x = ۶۴ \Rightarrow x = ۳۶$$

۶۰ ۳

$$x^۶ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۶ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow \log_{۱۰} a = ۱ \Rightarrow a = ۱۰ & \text{قابل قبول} \\ x = -۱ \Rightarrow \log_{۱۰} a = -۱ \Rightarrow a = ۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱ & \text{جواب ۰/۱ در بین گزینه‌ها وجود ندارد.} \end{cases}$$

۶۱ ۲

$$\log_{۱۶} x = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = ۱۶^{\frac{۱}{۸}} \Rightarrow x = (۲^۴)^{\frac{۱}{۸}} \xrightarrow{(a^n)^m = a^{n.m}} x = ۲^{\frac{۴}{۸}} \Rightarrow x = ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$$

۶۲ ۴

$$\log_{۱۶} N = \frac{۳}{۲} \Rightarrow N = ۱۶^{\frac{۳}{۲}} = (۲^۴)^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow N = ۲^{\frac{۱۲}{۲}} = ۲^۶ = ۶۴$$

۶۳ ۳ برای حل این مسأله باید بدانیم که $۱/۲۵ = \frac{۵}{۴}$ است. پس:

$$\log_۴ x = ۱/۲۵ \Rightarrow \log_۴ x = \frac{۵}{۴} \Rightarrow x = ۴^{\frac{۵}{۴}} \xrightarrow{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}} x = \sqrt[۴]{۴^۵} = \sqrt[۴]{۴^۴ \times ۴}$$

$$\Rightarrow x = ۴\sqrt[۴]{۴} = ۴\sqrt[۴]{۲^۲} = ۴(۲)^{\frac{۲}{۴}} = ۴(۲)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x = ۴\sqrt{۲}$$

@khanehketab

۶۴ ۴

$$\left.\begin{array}{l}\log_{۵۰}A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=۵۰^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times۲}=۵\sqrt{۲}\\ \log_{۳۲}B=\frac{۱}{۲}\Rightarrow B=۳۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳۲}=\sqrt{۱۶\times۲}=۴\sqrt{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{A+B}{A-B}=\frac{۵\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}}=\frac{۹\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۹$$

۶۵ ۲

$$\log_b a=c\xrightarrow[\text{با توجه به تعریف لگاریتم}]{}a=b^c\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}\ \frac{۱}{c}]{\text{طرفین را به توان}}a^{\frac{۱}{c}}=b$$

۶۶ ۳

$$\log_b a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=b^{\frac{۴}{۳}}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}\ ۳]{\text{طرفین تساوی را به توان}}(a)^۳=\left(b^{\frac{۴}{۳}}\right)^۳\Rightarrow a^۳=b^۴$$

۶۷ ۳

$$\log_۲ ۱۲=\alpha\Rightarrow ۱۲=۲^{\alpha}$$

$$۴^{\alpha-۲}=\frac{۴^{\alpha}}{۴^۲}=\frac{(۲^۲)^{\alpha}}{۱۶}=\frac{(۲^{\alpha})^۲}{۱۶}\xrightarrow{۲^{\alpha}=۱۲}\frac{۱۲^۲}{۱۶}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۱۶}}\times\overset{۳}{\cancel{۱۶}}}{\underset{۱}{\cancel{۱۶}}}=۹$$

۶۸ ۲

$$\log_{۱۰}x=۰/۴\Rightarrow x=۱۰^{\frac{۴}{۱۰}}\Rightarrow x=۱۰^{\frac{۲}{۵}}\xrightarrow[۵\ \text{می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را به توان}}x^۵=(۱۰^{\frac{۲}{۵}})^۵=۱۰^۲=۱۰۰$$

می‌دانیم $۳۲=۲^۵$ و $۲۴۳=۳^۵$. بنابراین:

$$۲^۵<x^۵<۳^۵\xrightarrow{\text{از طرفین }\sqrt[۵]{\ }\text{ می‌گیریم}}۲<x<۳$$

۶۹ ۲

$$f(x)=\log_۲(x+۴)\begin{cases}f(۴)=\log_۲(۴+۴)=\log_۲ ۸=\log_۲ ۲^۳=۳\log_۲ ۲=۳\\ f(-۳)=\log_۲(-۳+۴)=\log_۲ ۱=۰\end{cases}\Rightarrow f(۴)+f(-۳)=۳+۰=۳$$

۷۰ ۴ با کمی دقت متوجه می‌شویم $۱=۱^۲-(\sqrt{۲})^۲=(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)$ است، یعنی اعداد $\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲}-۱$ معکوس یک‌دیگرند، یعنی:

$$(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)=۱\Rightarrow\sqrt{۲}-۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\Rightarrow\sqrt{۲}-۱=(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}$$

حالا پاسخ تست به راحتی معلوم می‌شود:

$$\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}-۱)=\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}=-۱$$

۷۱ ۳ با توجه به این‌که $(\sqrt{۲})^۲=۱+۲+۱$، داریم:

$$\log_{۱+\sqrt{۲}}(۳+۲\sqrt{۲})^۳=\log_{۱+\sqrt{۲}}((۱+\sqrt{۲})^۲)^۳=\log_{۱+\sqrt{۲}}(۱+\sqrt{۲})^۶=۶\log_{۱+\sqrt{۲}}(۱+\sqrt{۲})=۶$$

۷۲ ۱

$$\log_y\sqrt{x}=\log_y x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log_y x\xrightarrow{\log_y x=۳}\frac{۱}{۲}\times۳=\frac{۳}{۲}$$

۷۳ ۴

یادآوری

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}=\sqrt[m.n.p]{a}$$

برای آن‌که صورت مسأله ساده‌تر شود، ابتدا همهٔ رادیکال‌ها را یکی می‌کنیم، یعنی:

$$\log_۳\sqrt[۵]{\sqrt[۲]{\sqrt[۳]{۳}}}=\log_۳\sqrt[۵\times۳\times۲]{۳}=\log_۳^{۳۰}\sqrt{۳}\xrightarrow{\sqrt[n]{A^n}=A^{\frac{n}{m}}}\log_۳ ۳^{\frac{۱}{۳۰}}=\frac{۱}{۳۰}\log_۳ ۳=\frac{۱}{۳۰}$$

۷۴ ۲

$$\log_{\sqrt{۵}}(\sqrt{۱۲۵})^۳\xrightarrow{۱۲۵=۵^۳}\log_۵(\sqrt{۵^۳})^۳=\log_۵(۵^{\frac{۳}{۲}})^۳=\log_۵ ۵^{\frac{۹}{۲}}=\frac{۹}{۲}\log_۵ ۵=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۷۵ ۳

$$\log_۲ ۶۴\sqrt[۳]{۳۲}=\log_۲ ۲^۶\times(۳۲)^{\frac{۱}{۳}}=\log_۲ ۲^۶\times(۲^۵)^{\frac{۱}{۳}}=\log_۲ ۲^{۶+\frac{۵}{۳}}=\log_۲ ۲^{\frac{۲۳}{۳}}=\frac{۲۳}{۳}\log_۲ ۲=\frac{۲۳}{۳}=۷/۶۶$$

۷۶ ۲

$$x=y^۲=\sqrt{a}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{a}\\ y^۲=\sqrt{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a^{\frac{۱}{۲}}\\ y^۲=a^{\frac{۱}{۲}}\end{cases}\xrightarrow[\text{به توان }\frac{۲}{۳}\text{ می‌رسانیم}]{\text{چون }y^۲\text{ را می‌خواهیم، طرفین را}}(y^۲)^{\frac{۲}{۳}}=\left(a^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow y^۲=a^{\frac{۱}{۳}}$$

اکنون داریم:

$$\log_a x+\log_a y^۲\xrightarrow{x=a^{\frac{۱}{۲}},\ y^۲=a^{\frac{۱}{۳}}}\log_a a^{\frac{۱}{۲}}+\log_a a^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}\log_a a+\frac{۱}{۳}\log_a a=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۳+۲}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

@khanen_book

۷۷ ۱

$$۴^a = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۲^۲)^a = ۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۲^{۲a} = ۲^{\frac{۳}{۲}} \xrightarrow[\text{توان‌ها نیز باید برابر باشند}]{\text{پایه‌ها برابرند}} ۲a = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۴a = ۳ \xrightarrow{+۱} ۴a + ۱ = ۴ \Rightarrow \log_۴(۴a+۱) = \log_۴ ۴ = ۱$$

۷۸ ۴

$$\log_x \sqrt{۷} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_x ۷^{\frac{۱}{۲}} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_x ۷ = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی را بر } \frac{۱}{۲}} \log_x ۷ = -۱ \Rightarrow x^{-۱} = ۷ \Rightarrow x = \frac{۱}{۷}$$

$$\log_۴\left(۱+\frac{۱}{x}\right) \overset{x=\frac{۱}{۷}}{=\!=} \log_۲\left(۱+\frac{۱}{\frac{۱}{۷}}\right) = \log_۲(۱+۷) = \log_۲ ۸ = \log_۲ ۲^۳ = ۳\log_۲ ۲ = ۳$$

۷۹ ۳

$$\log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} \sqrt[۴]{۳} = \log_{۱۰}(۸۱)^k \Rightarrow \log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} ۳^{\frac{۱}{۴}} = \log_{۱۰}(۳^۴)^k$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰} ۳ + \frac{۱}{۴}\log_{۱۰} ۳ = \log_{۱۰} ۳^{۴k} \Rightarrow (\log_{۱۰} ۳)\left(۱+\frac{۱}{۴}\right) = ۴k \log_{۱۰} ۳ \xrightarrow[\log_{۱۰} ۳ > ۰]{\text{تقسیم دو طرف بر}} \frac{۵}{۴} = ۴k$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۴}{k}} \frac{۵}{k} = ۱۶ \Rightarrow \log_۲ \frac{۵}{k} = \log_۲ ۱۶ = \log_۲ ۲^۴ = ۴\log_۲ ۲ = ۴$$

۸۰ ۱

راه اول:

$$\log_۹ x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = ۹^{\frac{۳}{۲}} = (۳^۲)^{\frac{۳}{۲}} = ۳^۳$$

لگاریتم معکوس این عدد در پایهٔ ۳ به صورت $\log_۳ \frac{۱}{x}$ می‌باشد. داریم:

$$\log_۳ \frac{۱}{x} = \log_۳ x^{-۱} = -\log_۳ x \xrightarrow{x = ۳^۳} -\log_۳ ۳^۳ = -۳\log_۳ ۳ = -۳$$

راه دوم:

$$\log_۹ x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_{۳^۲} x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۳ x = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} \log_۳ x = ۳ \xrightarrow{\times(-۱)} -\log_۳ x = -۳ \Rightarrow \log_۳ x^{-۱} = -۳ \Rightarrow \log_۳ \frac{۱}{x} = -۳$$

۸۱ ۳

$$f(x) = \log_۳ \frac{۱}{x} = \log_۳ x^{-۱} = -\log_۳ x = \log_{۳^{-۱}} x = \log_{\frac{۱}{۳}} x = g(x)$$

پس نمودارهای دو تابع بر هم منطبق‌اند.

۸۲ ۲

$$\log_۸ ab = \log_۸ (۳^۵ \times ۲^۷) = \log_{۲^۳} ۲^{۱۲} = \frac{۱۲}{۳}\log_۲ ۲ = ۴$$

۸۳ ۴

$$\log_{۲^۲} ۲\sqrt{۲} = \log_{۲^۲}(۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}}) = \log_{۲^۲} ۲^{۱+\frac{۱}{۲}} = \log_{۲^۲} ۲^{\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۱}}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۴}$$

۸۴ ۲

$$\log_{\frac{۱}{۹}} ۲\sqrt{۳} = \log_{\frac{۱}{۳^۲}}(۳ \times ۳^{\frac{۱}{۲}}) = \log_{۳^{-۲}} ۳^{۱+\frac{۱}{۲}} = \log_{۳^{-۲}} ۳^{\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۲}{۱}}\log_۳ ۳ = -\frac{۳}{۴}$$

۸۵ ۲

$$\log_{\sqrt{۲۲}} \frac{۱}{۴} = \log_{\sqrt{۲^۵}} ۲^{-۲} = \log_{۲^{\frac{۵}{۲}}} ۲^{-۲} = \frac{-۲}{\frac{۵}{۲}}\log_۲ ۲ = -\frac{۴}{۵}$$

۸۶ ۲

$$|\log_{\frac{۱}{۲}} ۸| + \log_۸ \frac{\sqrt{۲}}{۲} = |\log_{۲^{-۱}} ۲^۳| + \log_{۲^۳} \frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲} = |\frac{۳}{-۱}\log_۲ ۲| + \log_{۲^۳}(۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{-۱})$$

$$= |-۳| + \log_{۲^۳} ۲^{-\frac{۱}{۲}} = ۳ + \log_{۲^۳} ۲^{-\frac{۱}{۲}} = ۳ + \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۱}} = ۳ + \left(-\frac{۱}{۶}\right) = \frac{۱۸-۱}{۶} = \frac{۱۷}{۶}$$

۸۷ ۳

$$\log_{\sqrt{۹}} ۲۷\sqrt[۳]{۸۱} + \log_۷ \frac{۱}{۴۹} + \log_{\sqrt[۳]{۲}} ۲\sqrt{۲} = \log_۳ ۳^۳ \times (۳^۴)^{\frac{۱}{۳}} + \log_۷ \left(\frac{۱}{۷}\right)^۲ + \log_{\frac{۱}{۲^۴}} ۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \log_۳ ۳^۳ \times ۳^{\frac{۴}{۳}} + \log_۷ ۷^{-۲} + \log_{\frac{۱}{۲^۲}} ۲^{\frac{۳}{۲}} = \log_۳ ۳^{\frac{۱۳}{۳}} + (-۲)\log_۷ ۷ + \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}}\log_۲ ۲ = \frac{۱۳}{۳} - ۲ + ۶ = \frac{۲۵}{۳}$$

@khanen_book

۸۸ ۴

$$A=\log_{\frac{1}{8}}2\sqrt[3]{0/25}\xrightarrow{0/25=\frac{1}{4}}\log_{2^3}2\left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)\xrightarrow{\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}}\log_{2^3}2^1\times(2^{-2})^{\frac{1}{4}}=\log_{2^3}2^{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{1}}\log_2 2=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow\log_4\left(\frac{1}{A}-1\right)=\log_4\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}-1\right)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

۸۹ ۴

$$\log_{10}x\sqrt[3]{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_{10}x.x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_{10}x^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{4}{3}\log_{10}x=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_{10}x=\frac{3}{8}\quad(*)$$

$$\log_{10}\sqrt{x\sqrt{x}}=\log_{10}\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}=\log_{10}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{10}x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\log_{10}x\overset{(*)}{=}\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{32}$$

۹۰ ۳

$$\log_x\sqrt[3]{\sqrt{x^2\sqrt{x}}}=\log_{x.x^{\frac{1}{2}}}\left(x^2.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\log_{x^{\frac{5}{2}}}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{x^{\frac{5}{3}}}x^{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}}\log_x x=\frac{5\times3}{6\times4}=\frac{5}{8}$$

۹۱ ۴

$$\log_3 9A^2=\log_3 3^2\times(3^a)^2=\log_3 3^2\times3^{2a}=\log_3 3^{2a+2}=2a+2$$

۹۲ ۱ با توجه به این‌که $\log_4 x=\frac{1}{2}$ است، داریم:

$$\log_4 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=4^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=(2^2)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=2$$

$$\log_8 x^2\overset{x=2}{=}\log_8 2^2=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

۹۳ ۳

$$\log_2(2x-1)=-2\Rightarrow2x-1=2^{-2}\Rightarrow2x=\frac{1}{4}+1\Rightarrow x=\frac{5}{8}\Rightarrow\log_2(8x+3)=\log_2\left(8\left(\frac{5}{8}\right)+3\right)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

۹۴ ۱

$$\log_4\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=0/25\Rightarrow\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=4^{0/25}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{1}$$

$$\Rightarrow2=2^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a}\Rightarrow\frac{2}{2^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{a}\Rightarrow2^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{a}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان}}2^{\frac{3}{2}}=a$$

$$\log_{\sqrt[3]{a^2}}8\overset{a=2^{\frac{3}{2}}}{=}\log_{\sqrt[3]{(2^{\frac{3}{2}})^2}}8=\log_{\sqrt[3]{8}}8=\log_{8^{\frac{1}{3}}}8=\frac{1}{\frac{1}{3}}\log_8 8=3$$

۹۵ ۱ با توجه به این‌که $\log_5 3=a$ می‌باشد، داریم:

$$\log_{25}\frac{\sqrt{3}}{3}\overset{\text{که گویا کننده است.}}{\overset{\text{همان }\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ می‌دانیم}}{=\!=\!=\!

۹۹ ۲

$$\log_{\sqrt{۳}} a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow a = (\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow a^۳ = \left[(\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}\right]^۳ = (\sqrt{۳})^۴ = ۳^۲ = ۹ \Rightarrow a^۳ + ۷ = ۹ + ۷ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \log_۸ (a^۳ + ۷) = \log_۸ ۱۶ = \log_{۲^۳} ۲^۴ = \frac{۴}{۳}$$

۱۰۰ ۳

$$(x+۱)^{\sqrt{۲}} = ۲ \xrightarrow[\text{مبنای ۲ می‌گیریم.}]{\text{لگاریتم در}} \log_۲ (x+۱)^{\sqrt{۲}} = \log_۲ ۲ \Rightarrow \sqrt{۲} \log_۲ (x+۱) = ۱ \Rightarrow \log_۲ (x+۱) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad (*)$$

$$\log_۴ \sqrt{x+۱} = \log_{۲^۲} (x+۱)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} \log_۲ (x+۱) = \frac{۱}{۴} \log_۲ (x+۱) \overset{(*)}{=\!=} \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم.}} \frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

۱۰۱ ۳

$$\log_{۱۰} \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} \xrightarrow[\text{باز می‌کنیم.}]{\text{لگاریتم را}} \log_{۱۰} ۲\sqrt{۲} - \log_{۱۰} ۳\sqrt{۲} = \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} \sqrt{۲} - \log_{۱۰} ۳ - \log_{۱۰} \sqrt{۲}$$

$$= \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳^{\frac{۱}{۲}} - \log_{۱۰} ۳ - \log_{۱۰} ۲^{\frac{۱}{۲}} = \log_{۱۰} ۲ + \frac{۱}{۲} \log_{۱۰} ۳ - \log_{۱۰} ۳ - \frac{۱}{۲} \log_{۱۰} ۲ = \frac{۱}{۲} \log_{۱۰} ۲ - \frac{۱}{۲} \log_{۱۰} ۳ \xrightarrow[\log_{۱۰} ۳ = b]{\log_{۱۰} ۲ = a} \frac{a}{۲} - \frac{b}{۲}$$

۱۰۲ ۱

$$\log_{۱۰} ۵ + \log_{۱۰} ۲۰۰ + \log_{۱۰} ۵۰۰ + \log_{۱۰} ۲۰۰۰ \xrightarrow{\log_{۱۰} A + \log_{۱۰} B + \log_{۱۰} C = \log_{۱۰} (A \times B \times C)}$$

$$\log_{۱۰} (\underbrace{۵ \times ۲۰۰}_{۱۰۰۰} \times \underbrace{۵۰۰ \times ۲۰۰۰}_{۱۰۰۰۰۰۰}) = \log_{۱۰} ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰^۹ = ۹ \log_{۱۰} ۱۰ = ۹$$

۱۰۳ ۲

راه اول:

$$\log_{۲} \frac{۸}{۹} + \log_{۲} \frac{۹}{۱۰} + \cdots + \log_{۲} \frac{۳۱}{۳۲} = \log_{۲} \frac{۸}{\cancel{۹}} \times \frac{\cancel{۹}}{\cancel{۱۰}} \times \frac{\cancel{۱۰}}{\cancel{۱۱}} \times \cdots \times \frac{\cancel{۳۰}}{\cancel{۳۱}} \times \frac{\cancel{۳۱}}{۳۲} = \log_{۲} \frac{۸}{۳۲} = \log_{۲} \frac{۱}{۴} = \log_{۲} ۲^{-۲} = -۲ \log_{۲} ۲ = -۲$$

راه دوم:

$$\log_{۲} \frac{۸}{۹} + \log_{۲} \frac{۹}{۱۰} + \log_{۲} \frac{۱۰}{۱۱} + \cdots + \log_{۲} \frac{۳۰}{۳۱} + \log_{۲} \frac{۳۱}{۳۲}$$

$$= (\log_{۲} ۸ - \cancel{\log_{۲} ۹}) + (\cancel{\log_{۲} ۹} - \cancel{\log_{۲} ۱۰}) + (\cancel{\log_{۲} ۱۰} - \cancel{\log_{۲} ۱۱}) + \cdots + (\cancel{\log_{۲} ۳۰} - \cancel{\log_{۲} ۳۱}) + (\cancel{\log_{۲} ۳۱} - \log_{۲} ۳۲)$$

$$= \log_{۲} ۸ - \log_{۲} ۳۲ = \log_{۲} ۲^۳ - \log_{۲} ۲^۵ = ۳ - ۵ = -۲$$

۱۰۴ ۴

راه اول:

$$\log_{۱۰} \frac{۱}{۲} + \log_{۱۰} \frac{۲}{۳} + \cdots + \log_{۱۰} \frac{n}{n+۱} = \log_{۱۰} \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \cdots \times \frac{n}{n+۱}\right) = \log_{۱۰} \frac{۱}{n+۱} = \log_{۱۰} (n+۱)^{-۱} = -\log_{۱۰} (n+۱)$$

راه دوم:

$$\log_{۱۰} \frac{۱}{۲} + \log_{۱۰} \frac{۲}{۳} + \cdots + \log_{۱۰} \frac{n-۱}{n} + \log_{۱۰} \frac{n}{n+۱}$$

$$= (\log_{۱۰} ۱ - \cancel{\log_{۱۰} ۲}) + (\cancel{\log_{۱۰} ۲} - \cancel{\log_{۱۰} ۳}) + \cdots + (\cancel{\log_{۱۰} (n-۱)} - \cancel{\log_{۱۰} n}) + (\cancel{\log_{۱۰} n} - \log_{۱۰} (n+۱))$$

$$= \cancel{\log_{۱۰} ۱} - \log_{۱۰} (n+۱) = -\log_{۱۰} (n+۱)$$

۱۰۵ ۳

یادآوری اگر α و β دو زاویهٔ حاده و متمم یک‌دیگر باشند، یعنی $\alpha + \beta = ۹۰^\circ (\alpha, \beta \neq ۰)$، آن‌گاه $\tan \alpha \tan \beta = ۱$.

$$\log_{۱۰} (\tan ۱^\circ) + \log_{۱۰} (\tan ۲^\circ) + \ldots + \log_{۱۰} (\tan ۸۸^\circ) = \log_{۱۰} (\tan ۱^\circ \times \tan ۲^\circ \times \cdots \times \tan ۸۸^\circ)$$

$$= \log_{۱۰} (\tan ۱^\circ \times \underbrace{(\tan ۲^\circ \times \tan ۸۸^\circ)}_{۱} \times \underbrace{(\tan ۳^\circ \times \tan ۸۷^\circ)}_{۱} \times \cdots \times \underbrace{(\tan ۴۴^\circ \times \tan ۴۶^\circ)}_{۱} \times \underbrace{\tan ۴۵^\circ}_{۱}) = \log_{۱۰} (\tan ۱^\circ)$$

۱۰۶ ۲

$$\begin{cases} x = ۰/۶۶۶\ldots \\ ۱۰x = ۶/۶۶۶\ldots \end{cases} \xrightarrow[\text{را از هم کم می‌کنیم.}]{\text{طرفین دو تساوی}} ۱۰x - x = ۶/۶۶۶\ldots - ۰/۶۶۶\ldots \Rightarrow ۹x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

$$\log_{۲} ۰/۶ = \log_{۲} \frac{۲}{۳} = \log_{۲} ۲ - \log_{۲} ۳ \xrightarrow{۲ = (\frac{۱}{۲})^{-۱}} ۱ - \log_{۲} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱} = ۱ + \log_{۲} \frac{۱}{۳}$$

۱۰۷ ۴

$$A = \log_a ab^۲ + \log_b a^۲ b = \log_a a + ۲\log_a b + ۲\log_b a + \log_b b = ۱ + ۲\log_a b + ۲\log_b a + ۱$$

$$= ۲ + \underbrace{۲\log_a b + ۲\log_b a}_{\text{فاکتور از ۲}} = ۲(۱ + \log_a b + \log_b a)$$

@khaneh_book

۱۰۸ ۴

$$\frac{1}{4}\log_{10}x - 3\log_{10}y + 3^{-1}\log_{10}z^{-1} = \log_{10}x^{\frac{1}{4}} - \log_{10}y^{3} + \log_{10}(z^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_{10}\sqrt[4]{x} + \log_{10}z^{-\frac{1}{2}} - \log_{10}y^{3} = \log_{10}\frac{\sqrt[4]{x}.z^{-\frac{1}{2}}}{y^{3}} = \log_{10}\frac{\sqrt[4]{x}}{y^{3}\sqrt{z}}$$

۱۰۹ ۴

$$\log_{10}35 + 2\log_{10}2\sqrt{7} - \log_{10}200 - 2\log_{10}7 \xrightarrow[\text{داخل لگاریتم}]{\text{بردن ضرایب}} \log_{10}35 + \log_{10}(2\sqrt{7})^{2} - \log_{10}200 - \log_{10}7^{2}$$

$$= \log_{10}35 + \log_{10}28 - \log_{10}200 - \log_{10}49 \xrightarrow[\text{یک لگاریتم می‌نویسیم.}]{\text{همه را به صورت}} \log_{10}\frac{35\times28}{200\times49} = \log_{10}\frac{1}{10} = \log_{10}10^{-1} = -1$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر آفته پاری): **ببخشید آقا تو مخرج نباید (۴۹ + ۲۰۰) می‌شد؟**

پاسخ نه ناصرا اگه از منفی تو مرحلهٔ قبل فاکتور بگیری $-(\log_{10}200 + \log_{10}49)$ میشه که نشون می‌ده این دو تا در مخرج در هم ضرب می‌شن.

۱۱۰ ۲

$$\log_{10}(2-\sqrt{2}) + \log_{10}(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2}\log_{10}\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\log_{10}9 = \log_{10}(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) - \log_{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \log_{10}(3^{2})^{\frac{1}{4}}$$

$$= \log_{10}(2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}) - (\log_{10}\sqrt{3} - \log_{10}\sqrt{5}) + \log_{10}3^{\frac{1}{2}} = \log_{10}\sqrt{2} - \log_{10}\sqrt{3} + \log_{10}\sqrt{5} + \log_{10}\sqrt{3}$$

$$= \log_{10}(\sqrt{2}\times\sqrt{5}) = \log_{10}\sqrt{10} = \log_{10}10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

۱۱۱ ۲

$$\log_{10}(6-2\sqrt{5}) + 2\log_{10}(1+\sqrt{5}) = \log_{10}(6-2\sqrt{5}) + \log_{10}(1+\sqrt{5})^{2}$$

$$= \log_{10}(6-2\sqrt{5}) + \log_{10}(6+2\sqrt{5}) = \log_{10}(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}) = \log_{10}(36-20) = \log_{10}16 = \log_{10}2^{4} = 4\log_{10}2 \xrightarrow{\log_{10}2=k} 4k$$

۱۱۲ ۱

$$\log_{10}\frac{3x+2y}{4} = \frac{\log_{10}x + \log_{10}y}{2} \xrightarrow{\times2} 2\log_{10}\frac{3x+2y}{4} = \log_{10}x + \log_{10}y \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{3x+2y}{4}\right)^{2} = \log_{10}xy$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x+2y}{4}\right)^{2} = xy \Rightarrow \frac{9x^{2}+4y^{2}+12xy}{16} = xy \Rightarrow 9x^{2}+4y^{2}+12xy = 16xy \Rightarrow 9x^{2}+4y^{2} = 4xy$$

۱۱۳ ۱

$$f(x) = \log_{10}(1-x) \Rightarrow \begin{cases} f(y) = \log_{10}(1-y) \\ f(z) = \log_{10}(1-z) \end{cases}$$

حال داریم:

$$f(z) = f(x) + f(y) \Rightarrow \log_{10}(1-z) = \log_{10}(1-x) + \log_{10}(1-y) \Rightarrow \log_{10}(1-z) = \log_{10}(1-x)(1-y)$$

$$\Rightarrow (1-z) = (1-x)(1-y) \Rightarrow 1-z = 1-y-x+xy \Rightarrow z = x+y-xy$$

۱۱۴ ۴

$$\frac{\log_{z}xy}{\log_{z}y} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\log_{z}y=1} \frac{\log_{z}xy}{1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_{z}x + \log_{z}y = \frac{5}{2} \xrightarrow{\log_{z}y=1} \log_{z}x + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_{z}x = \frac{5}{2} - 1 \Rightarrow \log_{z}x = \frac{3}{2} = 1/5$$

۱۱۵ ۱

$$\log_{10}\sqrt[3]{12} = \log_{10}(12)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_{10}12 = \frac{1}{3}\log_{10}(2^{2}\times3) = \frac{1}{3}(\log_{10}2^{2} + \log_{10}3)$$

$$= \frac{1}{3}(2\log_{10}2 + \log_{10}3) = \frac{1}{3}[2(0/3010) + 0/4771] = \frac{1}{3}(1/0791) = 0/3597$$

۱۱۶ ۳

$$\log_{10}\frac{49}{9} + \log_{10}2\sqrt{21} = \log_{10}49 - \log_{10}9 + \log_{10}20 + \log_{10}\sqrt{21} = \log_{10}7^{2} - \log_{10}3^{2} + \log_{10}(2\times10) + \log_{10}(3\times7)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\log_{10}7 - 2\log_{10}3 + \log_{10}2 + \log_{10}10 + \frac{1}{2}(\log_{10}3 + \log_{10}7) = \frac{5}{2}\log_{10}7 - \frac{3}{2}\log_{10}3 + \log_{10}2 + 1 \quad (*)$$

از روابط داده شده در صورت تست داریم:

$$\begin{cases} \log_{10}14 = b \Rightarrow \log_{10}(2\times7) = b \Rightarrow \log_{10}2 + \log_{10}7 = b \Rightarrow \log_{10}7 = b - \log_{10}2 \\ \log_{10}6 = a \Rightarrow \log_{10}(2\times3) = a \Rightarrow \log_{10}2 + \log_{10}3 = a \Rightarrow \log_{10}3 = a - \log_{10}2 \end{cases}$$

بازنویسی رابطهٔ $(*)$: $\frac{5}{2}(b-\log_{10}2) - \frac{3}{2}(a-\log_{10}2) + \log_{10}2 + 1 = \frac{5}{2}b - \frac{5}{2}\log_{10}2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}\log_{10}2 + \log_{10}2 + 1 = 1 + \frac{5}{2}b - \frac{3}{2}a$

@khanenbook

۱۱۷ ۲

$$\log_{10}۲+\log_{10}۳+\log_{10}۴=a\Rightarrow\log_{10}(۲\times۳\times۴)=a\Rightarrow\log_{10}۲۴=a$$

$$\frac{۳\log_{10}۶+۲\log_{10}۸}{\log_{10}۲۴۰۰}=\frac{۳\log_{10}۶+۲\log_{10}۲^{۳}}{\log_{10}(۲۴\times۱۰۰)}=\frac{۳\log_{10}۶+۶\log_{10}۲}{\log_{10}۲۴+\log_{10}۱۰۰}=\frac{۳(\log_{10}۶+۲\log_{10}۲)}{a+\log_{10}۱۰^{۲}}$$

$$=\frac{۳(\log_{10}۶+\log_{10}۴)}{a+۲}=\frac{۳\log_{10}۲۴}{a+۲}=\frac{۳a}{a+۲}$$

۱۱۸ ۲ طرفین سه رابطهٔ زیر را با هم جمع می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\log_{10}۲+\log_{10}۳=a\\ \log_{10}۳+\log_{10}۷=b\\ \log_{10}۲+\log_{10}۷=c\end{array}\right\}\Rightarrow۲\log_{10}۲+۲\log_{10}۳+۲\log_{10}۷=a+b+c$$

$$\Rightarrow۲(\log_{10}۲+\log_{10}۳+\log_{10}۷)=a+b+c\Rightarrow۲\log_{10}(۲\times۳\times۷)=a+b+c\Rightarrow\log_{10}۴۲=\frac{a+b+c}{۲}$$

۱۱۹ ۱

$$\log_{10}a=۲\log_{10}b=۴\log_{10}c\Rightarrow\log_{10}a=\log_{10}b^{۲}=\log_{10}c^{۴}\Rightarrow a=b^{۲}=c^{۴}\Rightarrow b=c^{۲}$$

$$\log_{10}\frac{a^{۳}b^{۲}c}{\sqrt{abc}}=\log_{10}\frac{(c^{۲})^{۳}.(c^{۲})^{۲}.c}{\sqrt{c^{۴}.c^{۲}.c}}=\log_{10}\frac{c^{۱۲}.c^{۴}.c}{\sqrt{c^{۷}}}=\log_{10}\frac{c^{۱۷}}{c^{\frac{۷}{۲}}}=\log_{10}c^{۱۷-\frac{۷}{۲}}=\log_{10}c^{\frac{۲۷}{۲}}=\frac{۲۷}{۲}\log_{10}c$$

۱۲۰ ۳

$$\log_{10}ab=k_۱\Rightarrow۲\log_{10}ab=۲k_۱\Rightarrow\log_{10}(ab)^{۲}=۲k_۱\Rightarrow\log_{10}a^{۲}b^{۲}=۲k_۱$$

$$\log_{10}a^{۲}b^{۲}c=\log_{10}a^{۲}b^{۲}+\log_{10}ac=۲k_۱+k_۲$$

۱۲۱ ۱ با توجه به این‌که $\log_{۱۵}۳=a$ می‌باشد داریم:

$$\log_{۱۵}۶۲۵=\log_{۱۵}۵^{۴}=۴\log_{۱۵}۵\xrightarrow{۵=\frac{۱۵}{۳}}۴\log_{۱۵}\frac{۱۵}{۳}=۴(\log_{۱۵}۱۵-\log_{۱۵}۳)\xrightarrow[\log_{۱۵}۳=a]{\log_{۱۵}۱۵=۱}۴(۱-a)$$

سؤال دانش‌پژوه (قهومه پورشارمان)، شما از کجا فهمیدید که $\log_{۱۵}۵$ رو باید به صورت $\log_{۱۵}\frac{۱۵}{۳}$ بنویسید؟

پاسخ: با استفاده از تجربه‌ای که داشتم. قبلاً مدل این تست رو به جای دیگه دیده بودم. الان شما هم این تجربه رو به دست آوردید و اگه به جای دیگه مسئله‌ای مثل این مسئله رو ببینید، می‌تونید این رو حل کنید.

۱۲۲ ۱

یادآوری $\log_{۱۰}۵=۱-\log_{۱۰}۲$

$$\log_{۱۰}۱/۲۵=\log_{۱۰}\frac{۱۲۵}{۱۰۰}=\log_{۱۰}۱۲۵-\log_{۱۰}۱۰۰=\log_{۱۰}۵^{۳}-\log_{۱۰}۱۰^{۲}=۳\log_{۱۰}۵-۲\underbrace{\log_{۱۰}۱۰}_{۱}$$

$$\xrightarrow{\log_{۱۰}۵=۱-\log_{۱۰}۲}۳(۱-\underbrace{\log_{۱۰}۲}_{a})-۲(۱)=۳(۱-a)-۲=۳-۳a-۲=۱-۳a$$

۱۲۳ ۱

$$\log_{۱۰}\frac{۱۷۵}{۳}=\log_{۱۰}۱۷۵-\log_{۱۰}۳=\log_{۱۰}(۷\times۵^{۲})-\log_{۱۰}۳=\log_{۱۰}۷+\log_{۱۰}۵^{۲}-\log_{۱۰}۳=\log_{۱۰}۷+۲\log_{۱۰}۵-\log_{۱۰}۳\quad(*)$$

$$\begin{cases}\log_{۱۰}\frac{۳}{۷}=a\Rightarrow\log_{۱۰}۳-\log_{۱۰}۷=a\\ \log_{۱۰}۲=b\Rightarrow۱-\log_{۱۰}۵=b\Rightarrow۱-b=\log_{۱۰}۵\end{cases}\xrightarrow{(*)}\underbrace{\log_{۱۰}۷-\log_{۱۰}۳}_{-a}+۲\underbrace{\log_{۱۰}۵}_{۱-b}=-a+۲(۱-b)=۲-a-۲b$$

۱۲۴ ۳

$$\log_{۱۰}۶=\log_{۱۰}۳+\log_{۱۰}۲\Rightarrow a=b+\log_{۱۰}۲\Rightarrow\log_{۱۰}۲=a-b\quad(*)$$

$$\log_{۱۰}۲۵=\log_{۱۰}۵^{۲}=۲\log_{۱۰}۵=۲(۱-\log_{۱۰}۲)\xrightarrow{(*)}۲(۱-(a-b))=۲(۱-a+b)$$

۱۲۵ ۴

$$\log_{۱۰}۱۶=۱/۲۰۴\Rightarrow\log_{۱۰}۲^{۴}=۱/۲۰۴\Rightarrow۴\log_{۱۰}۲=۱/۲۰۴\xrightarrow{\div۴}\log_{۱۰}۲=۰/۳۰۱$$

$$\log_{۱۰}\frac{\sqrt[۳]{۲۵}}{۲}=\log_{۱۰}\sqrt[۳]{۲۵}-\log_{۱۰}۲=\log_{۱۰}۵^{\frac{۲}{۳}}-\log_{۱۰}۲=\frac{۲}{۳}\log_{۱۰}۵-\log_{۱۰}۲=\frac{۲}{۳}(۱-\log_{۱۰}۲)-\log_{۱۰}۲$$

$$=\frac{۲}{۳}(۱-۰/۳۰۱)-۰/۳۰۱=\frac{۲}{۳}(۰/۶۹۹)-۰/۳۰۱=۰/۴۶۶-۰/۳۰۱=۰/۱۶۵$$

@khanehbook

۱۲۶ ۱

$$\log_{۱۰}\sqrt[۳]{۱/۶}=\log_{۱۰}(۱/۶)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\log_{۱۰}\frac{۱۶}{۱۰}=\frac{۱}{۳}(\log_{۱۰}۱۶-\log_{۱۰}۱۰)=\frac{۱}{۳}(\log_{۱۰}۲^{۴}-۱)$$

$$=\frac{۱}{۳}(۴\log_{۱۰}۲-۱)\xrightarrow{\log_{۱۰}۲=۱-\log_{۱۰}۵}\frac{۱}{۳}(۴(۱-\log_{۱۰}۵)-۱)\xrightarrow{\log_{۱۰}۵=۲k}\frac{۱}{۳}(۳-۴(۲k))=\frac{۳}{۳}(۱-۴k)=۱-۴k$$

۱۲۷ ۳

$$\log_{۱۰}۲۰=\log_{۱۰}(۱۰\times۲)=\log_{۱۰}۱۰+\log_{۱۰}۲=۱+\log_{۱۰}۲\xrightarrow{\log_{۱۰}۲۰=۱/۳۰۱}۱+\log_{۱۰}۲=۱/۳۰۱\Rightarrow\log_{۱۰}۲=۰/۳۰۱$$

حال به محاسبهٔ مقدار خواسته شده می‌پردازیم:

$$\log_{۱۰}\sqrt[۵]{۷۵}-\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۳=\log_{۱۰}۷۵^{\frac{۱}{۵}}-\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۳=\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}(۲۵\times۳)-\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۳$$

$$=\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۲۵+\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۳-\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۳=\frac{۱}{۵}\log_{۱۰}۵^{۲}=\frac{۲}{۵}\log_{۱۰}۵=\frac{۲}{۵}(۱-\log_{۱۰}۲)=\frac{۲}{۵}(۱-۰/۳۰۱)=\frac{۲}{۵}\times۰/۶۹۹=۰/۲۷۹۶$$

۱۲۸ ۳

$$\log_{۱۰}۶۲/۵=۱/۷۹۶\Rightarrow\log_{۱۰}\frac{۶۲۵}{۱۰}=۱/۷۹۶\Rightarrow\log_{۱۰}۶۲۵-\log_{۱۰}۱۰=۱/۷۹۶\Rightarrow\log_{۱۰}۵^{۴}-(۱)=۱/۷۹۶$$

$$\Rightarrow۴\log_{۱۰}۵=۲/۷۹۶\xrightarrow{\div۴}\underbrace{\log_{۱۰}۵}_{۱-\log_{۱۰}۲}=۰/۶۹۹\Rightarrow۱-\log_{۱۰}۲=۰/۶۹۹\Rightarrow\log_{۱۰}۲=۰/۳۰۱$$

$$\log_{۱۰}۳/۲=\log_{۱۰}\frac{۳۲}{۱۰}=\log_{۱۰}۳۲-\log_{۱۰}۱۰=\log_{۱۰}۲^{۵}-(۱)=۵\log_{۱۰}۲-۱=۵(۰/۳۰۱)-۱=۱/۵۰۵-۱=۰/۵۰۵$$

۱۲۹ ۳

با جای‌گذاری نقاط داده شده در تابع f به یک دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}f(۵)=۱۱\Rightarrow۱۱=a+\log_{۲}(۳(۵)+b)^{۲}\Rightarrow۱۱=a+\log_{۲}(۱۵+b)^{۲} & (*)\\ f(۲۱)=۱۵\Rightarrow۱۵=a+\log_{۲}(۳(۲۱)+b)^{۲}\Rightarrow۱۵=a+\log_{۲}(۶۳+b)^{۲} & (**)\end{cases}$$

با کم کردن دو طرف (*) از دو طرف (**) و حذف a داریم:

$$\begin{cases}۱۵=a+\log_{۲}(۶۳+b)^{۲}\\ ۱۱=a+\log_{۲}(۱۵+b)^{۲}\end{cases}\Rightarrow۱۵-۱۱=a+\log_{۲}(۶۳+b)^{۲}-(a+\log_{۲}(۱۵+b)^{۲})\Rightarrow۴=\log_{۲}(۶۳+b)^{۲}-\log_{۲}(۱۵+b)^{۲}$$

$$\Rightarrow۴=\log_{۲}\left(\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\right)^{۲}\Rightarrow۲=\log_{۲}\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\Rightarrow۲^{۲}=\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\Rightarrow۴(۱۵+b)=۶۳+b\Rightarrow۶۰+۴b=۶۳+b\Rightarrow b=۱$$

$$\xrightarrow[(*)\text{ در}]{\text{جای‌گذاری }b=۱}۱۱=a+\log_{۲}\underbrace{(۱۵+۱)^{۲}}_{۱۶}\Rightarrow۱۱=a+\log_{۲}(۲^{۴})^{۲}\Rightarrow۱۱=a+\log_{۲}۲^{۸}\Rightarrow۱۱=a+۸\log_{۲}۲\Rightarrow a=۳$$

۱۳۰ ۳

$$\left.\begin{matrix}f(۲)=۶\Rightarrow۶=a+\log_{۲}(۲b-۴)\\ f(۱۲)=۱۰\Rightarrow۱۰=a+\log_{۲}(۱۲b-۴)\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{با کمی از پایین}]{\text{کم کردن رابطهٔ}}۱۰-۶=[a+\log_{۲}(۱۲b-۴)]-[a+\log_{۲}(۲b-۴)]$$

$$\Rightarrow۴=\log_{۲}(۱۲b-۴)-\log_{۲}(۲b-۴)\Rightarrow۴=\log_{۲}\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}\Rightarrow۲^{۴}=\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}\Rightarrow۱۶(۲b-۴)=۱۲b-۴$$

$$\Rightarrow۳۲b-۶۴=۱۲b-۴\Rightarrow۲۰b=۶۰\Rightarrow b=۳$$

حال به کمک رابطهٔ اول، a را نیز می‌یابیم:

$$۶=a+\log_{۲}(۲b-۴)\xrightarrow{b=۳}۶=a+\log_{۲}\underbrace{(۲\times۳-۴)}_{۲}\Rightarrow۶=a+۱\Rightarrow a=۵$$

۱۳۱ ۴

یادآوری شرط این‌که a، b و c دنباله‌ای حسابی بسازند این است که $۲b=a+c$ باشد و شرط این‌که این سه عدد دنبالهٔ هندسی بسازند این است که $b^{۲}=ac$ باشد.

اگر $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ دنبالهٔ حسابی بسازند، داریم:

$$۲\log_a y=\log_a x+\log_a z\Rightarrow\log_a y^{۲}=\log_a(xz)\Rightarrow y^{۲}=xz\Rightarrow$$

x و y و z دنباله‌ای هندسی می‌سازند.

سؤال دانش‌پژوه (ملیکا پورفلاح)، ببخشید، من گفتم اگه x، y و z دنباله‌ای هندسی تشکیل بدن، داریم:

$$y^{۲}=xz\Rightarrow\log_a y^{۲}=\log_a xz\Rightarrow۲\log_a y=\log_a x+\log_a z$$

پس لگاریتم اونا تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دن و گزینهٔ (۲) درسته.

پاسخ بله ولی تو فقط به یک نکتهٔ ریز دقت نکردی. گزینهٔ (۲) به شرطی درسته که x، y و z اعداد مثبت باشن وگرنه لگاریتم اون‌ها تعریف نمی‌شه. مثلاً ۴- و ۲- و ۱- یا ۲۷ و ۹- و ۳ دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دن، اما لگاریتم آن‌ها دنباله‌ای حسابی نمی‌سازه.

@khanehbook

۱۳۲ ۲ اعداد داده شده در **گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴)** دنبالهٔ هندسی می‌سازند و در نتیجه طبق آن‌چه در تست قبل آموختیم، لگاریتم آن‌ها در پایهٔ ۴، دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند، اما فقط در **گزینهٔ (۲)** قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر $d=1$ است و در **گزینه‌های (۱) و (۴)** به ترتیب قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۱) $\log_4 1, \log_4 2, \log_4 4 = 0, \frac{1}{2}, 1 \Rightarrow d=\frac{1}{2}$

۲) $\log_4 3, \log_4 12, \log_4 48 \Rightarrow d=\log_4 12-\log_4 3=\log_4 48-\log_4 12=\log_4 \frac{48}{12}=\log_4 4=1$

۴) $\log_4 40, \log_4 20, \log_4 10 \Rightarrow d=\log_4 20-\log_4 40=\log_4 10-\log_4 20=\log_4 \frac{10}{20}=\log_4 \frac{1}{2}=\log_{2^2} 2^{-1}=-\frac{1}{2}$

۱۳۳ ۴ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ $\log_a 2, \log_a 4, \log_a 16 \Rightarrow \log_a 2, 2\log_a 2, 4\log_a 2 \Rightarrow q=2$

در **گزینه‌های (۱) و (۲)** خود اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند و در نتیجه لگاریتم آن‌ها، دنبالهٔ حسابی می‌سازند (به ترتیب با قدرنسبت‌های $d_1=\log_a 2$ و $d_2=\log_a 4$). در **گزینهٔ (۴)** هم خود اعداد دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند و لگاریتم آن‌ها نه دنبالهٔ حسابی می‌سازند، نه دنبالهٔ هندسی.

۱۳۴ ۲

$$\text{محیط}=a+b+b=2 \quad \text{قاعدهٔ مثلث} \quad a=2\log_{10}2 \quad \text{و} \quad b=?$$

$$\text{محیط}=a+2b=2 \xrightarrow{a=2\log_{10}2} 2\log_{10}2+2b=2 \xrightarrow[\text{۲ تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین رابطه را بر}} \log_{10}2+b=1$$

$$\Rightarrow b=1-\log_{10}2 \xrightarrow{1-\log_{10}2=\log_{10}5} b=\log_{10}5$$

۱۳۵ ۴

$$\log_3 y=2ax+\log_3 b \Rightarrow \log_3 y-\log_3 b=2ax \Rightarrow \log_3 \frac{y}{b}=2ax \Rightarrow \frac{y}{b}=3^{2ax} \Rightarrow y=b\times 3^{2ax}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0)=15 \Rightarrow 15=b\times 3^0 \Rightarrow b=15 \\ y(2)=5 \xrightarrow{b=15} 5=15\times 3^{4a} \Rightarrow 3^{4a}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^{4a}=3^{-1} \Rightarrow 4a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

۱۳۶ ۴

$$y=3\times 10^{-x} \Rightarrow \log_{10} y=\log_{10}(3\times 10^{-x}) \Rightarrow \log_{10} y=\log_{10} 3+\log_{10} 10^{-x} \Rightarrow \log_{10} y=\log_{10} 3-x$$

فرض کنید $\log_{10} y$ را برابر متغیر u بگیریم. داریم:

$$u=\log_{10} 3-x \Rightarrow u=-x+\log_{10} 3$$

از آن‌جاکه $\log_{10} 3$ عددی ثابت است این رابطه، رابطه‌ای خطی بین u و x می‌باشد که ضریب x منفی است، پس شیب خط برابر -1 است. هم‌چنین عرض از مبدأ برابر $\log_{10} 3$ می‌باشد و $\log_{10} 3>0$، پس نمودار خطی محور yها را در قسمت مثبت قطع می‌کند. لذا **گزینهٔ (۴)** صحیح است.

۱۳۷ ۴ با توجه به رابطهٔ $\log_b a\times\log_c b=\log_c a$ داریم:

$$\log_3 16\times\log_4 3=\log_4 16=\log_4 4^2=2$$

۱۳۸ ۱

$$\underbrace{\log_3 2\times\log_4 3}_{\log_4 2}\times\log_5 4\times\cdots\times\log_{128}127=\underbrace{\log_4 2\times\log_5 4}_{\log_5 2}\times\log_6 5\times\cdots\times\log_{128}127$$

$$=\log_6 2\times\cdots\times\log_{128}127=\cdots=\log_{128}2=\log_{2^7}2=\frac{1}{7}$$

۱۳۹ ۳

$$\log_2 3\times\log_9 3\times\log_4 4\times\log_2 4=\log_2 3\times\log_{3^2}3\times\log_2 2^2\times\log_2 2^2=\log_2 3\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\log_2 2=2\underbrace{\log_2 3\times\log_3 2}_{1}=2$$

۱۴۰ ۳ با توجه به رابطهٔ $\log_b a\times\log_c b=\log_c a$ داریم:

$$\log_{10} b.\log_b a+2\log_{10} a.\log_a b-\log_{10}(ab)^2=\log_{10} a+2\log_{10} b-\log_{10}(ab)^2$$

$$=\log_{10} a+\log_{10} b^2-\log_{10} a^2b^2=\log_{10}\frac{ab^2}{a^2b^2}=\log_{10}\frac{1}{a}=\log_{10} a^{-1}=\log_{10^{-1}}(a^{-1})^{-1}=\log_{0.1} a$$

سؤال دانش‌پژوه (سام یدالـ‌قانی)، **ببخشید، می‌شه بگید چه‌طور $\log_{10} a^{-1}=\log_{10^{-1}}(a^{-1})^{-1}$ شد؟**

پاسخ: در درسنامهٔ (۵) چنین فرمولی داشتیم که $\log_b a=\log_{b^n} a^n$، بالا در این‌جا a^{-1} و ۱۰ رو به توان $n=-1$ رسوندیم.

@khanehketab

۱۴۱ ۳ می‌دانیم $\log_{10}۴ = \log_{10}۲^۲ = ۲\log_{10}۲$ و $\log_{10}۶ = \log_{10}(۲\times۳) = \log_{10}۲ + \log_{10}۳$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{\log_{10}۲ + \log_{10}۳ + \log_{10}۴}{\log_{10}۲ + \frac{۱}{۲}\log_{10}۶} = \frac{\log_{10}۲ + \log_{10}۳ + \log_{10}۲^۲}{\log_{10}۲ + \frac{۱}{۲}\log_{10}(۲\times۳)} = \frac{\log_{10}۲ + \log_{10}۳ + ۲\log_{10}۲}{\log_{10}۲ + \frac{۱}{۲}\log_{10}۲ + \frac{۱}{۲}\log_{10}۳}$$

$$= \frac{۳\log_{10}۲ + \log_{10}۳}{\frac{۳}{۲}\log_{10}۲ + \frac{۱}{۲}\log_{10}۳} = \frac{۳\log_{10}۲ + \log_{10}۳}{\frac{۱}{۲}(۳\log_{10}۲ + \log_{10}۳)} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

فاکتور از $\frac{۱}{۲}$

سؤال دانش‌پژوه (صدف طلوعی)، **ببخشید، من به گزینهٔ (۱) رسیدم، یعنی گفتم که:**

$$\frac{\log_{10}۲ + \log_{10}۳ + \log_{10}۴}{\log_{10}۲ + \frac{۱}{۲}\log_{10}۶} = \frac{\log_{10}(۲\times۳\times۴)}{\log_{10}۲ + \log_{10}۶^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\log_{10}۲۴}{\log_{10}۲ + \log_{10}\sqrt{۶}} = \frac{\log_{10}۲۴}{\log_{10}۲\sqrt{۶}} = \frac{۲۴}{۲\sqrt{۶}} = \frac{۲۴}{۲\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}} = ۲\sqrt{۶}$$

پاسخ: در درستامهٔ (۸) می‌خوانیم که اگر $\log_a A = \log_a B$ باشد، اون‌وقت می‌تونیم بگیم که $A = B$ است. یعنی اگه لگاریتم دو عدد در یک مبنا با هم برابر باشن اون‌وقت مقادیر چلوی لگاریتم اون‌ها با هم برابرن. اما هیچ ویژگی‌ای در مورد لگاریتم نخوندیم که اگه داشته باشیم $\frac{\log_{10}A}{\log_{10}B}$ اون‌وقت تبدیل اون به $\frac{A}{B}$ درسته. این مثل این می‌مونه که بگیم $۲ = \frac{۲۴}{۱۲}$ است!

۱۴۲ ۴

$$\log_{b^۲}a^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۲}{۲}\log_b a = ۴ \Rightarrow \log_b a = \frac{۴}{\frac{۲}{۲}} \Rightarrow \log_b a = ۶ \xrightarrow{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}} \frac{\log_{10}a}{\log_{10}b} = ۶$$

۱۴۳ ۴

$$A = (\underbrace{\log_a x.\log_x a}_{۱} + \underbrace{\log_y b.\log_b y}_{۱}) = ۱ + ۱ = ۲$$

۱۴۴ ۱ می‌دانیم $۰/۷۵ = \frac{۳}{۴}$ داریم:

$$\log_a ۹ = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می‌کنیم}} \frac{۱}{\log_a ۹} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_۹ a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow a = ۹^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow a = \sqrt[۳]{۹^۴} = \sqrt[۳]{۹^۳\times۹} \Rightarrow a = ۹\sqrt[۳]{۹}$$

۱۴۵ ۳

$$\log_x ۲۷ = -۳ \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می‌کنیم}} \frac{۱}{\log_x ۲۷} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_{۲۷} x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow x = ۲۷^{-\frac{۱}{۳}} = (۳^۳)^{-\frac{۱}{۳}} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴۶ ۳

$$\log_a ۸ = -\frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می‌کنیم}} \log_۸ a = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow a = ۸^{-\frac{۴}{۳}} = (۲^۳)^{-\frac{۴}{۳}} = ۲^{-۴} \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۶}$$

۱۴۷ ۴ می‌دانیم که $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$، بنابراین:

$$\log_a ۲ = \frac{۱}{\log_۴ a} - \frac{۱}{۶} \Rightarrow \log_a ۲ = \log_a ۴ - \frac{۱}{۶} \Rightarrow \log_a ۴ - \log_a ۲ = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{۴}{۲} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \log_a ۲ = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می‌کنیم}} \frac{۱}{\log_a ۲} = ۶ \Rightarrow \log_۲ a = ۶ \Rightarrow a = ۲^۶ = ۶۴$$

۱۴۸ ۲ مختصات نقطهٔ A باید در $y = \log_a x$ صدق کند. لذا داریم:

$$۴ = \log_a ۸ \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می‌کنیم}} \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{\log_a ۸} \Rightarrow \log_۸ a = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = ۸^{\frac{۱}{۴}} = (۲^۳)^{\frac{۱}{۴}} = ۲^{\frac{۳}{۴}}$$

۱۴۹ ۱

$$\log_b a^۲ = A \Rightarrow ۲\log_b a = A \Rightarrow \log_b a = \frac{A}{۲} \Rightarrow \log_a b = \frac{۲}{A} \quad (*)$$

$$\log_a b^۲ + \log_{a^۲} b = ۲\log_a b + \frac{۱}{۲}\log_a b = \frac{۵}{۲}\log_a b \overset{(*)}{=\!=} \frac{۵}{۲}\times\frac{۲}{A} = \frac{۵}{A}$$

۱۵۰ ۴

$$\log_۲ \sqrt[۵]{e^۲} = A \Rightarrow \log_۲ e^{\frac{۲}{۵}} = A \Rightarrow \frac{۲}{۵}\log_۲ e = A \Rightarrow \log_۲ e = \frac{۵A}{۲} \xrightarrow{\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}} \log_e ۲ = \frac{۲}{۵A}$$

حال داریم:

$$\log_{\sqrt{e}} ۳۲ = \log_{e^{\frac{۱}{۲}}} ۳^۵ = \frac{۵}{\frac{۱}{۲}}\log_e ۲ = ۱۰\log_e ۲ \xrightarrow{\log_e ۲ = \frac{۲}{۵A}} ۱۰\times\frac{۲}{۵A} = \frac{۴}{A}$$

@khaneh_book

۱۵۱ ۳ ابتدا مبنای $\log_{۱۰} ۲۵$ را به کمک فرمول $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ به صورت یک مبنای مناسب می‌نویسیم:

$$\log_{۱۰} ۲۵ = \frac{\log_۵ ۲۵}{\log_۵ ۱۰} = \frac{\log_۵ ۵^۲}{\log_۵ (۲\times ۵)} = \frac{۲}{\log_۵ ۲ + \log_۵ ۵} = \frac{۲}{\log_۵ ۲ + ۱} \quad (*)$$

از صورت تست، $\log_۵ ۴ = a \Rightarrow \log_۵ ۲^۲ = a \Rightarrow \log_۵ ۲ = \frac{a}{۲}$. بنابراین (*) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{۲}{\frac{a}{۲}+۱} = \frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{a+۲}{۲}} = \frac{۴}{a+۲}$$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام پلیله)، آقا از کجا فهمیدید که $\log_{۱۰} ۲۵ = \frac{\log_۵ ۲۵}{\log_۵ ۱۰}$ رو بنویسید؟

پاسخ: ببین بچه، صورت تست به ما یه نگاریتم در مبنای ۵ رو داده، می‌فوای من چه مبنایی غیر از ۵ رو بنویسیم!

۱۵۲ ۳

$$\log_{۱۸} \sqrt{۱۲} = \frac{\log_{۱۰} \sqrt{۱۲}}{\log_{۱۰} ۱۸} = \frac{\log_{۱۰} (۲^۲\times ۳)^{\frac{۱}{۲}}}{\log_{۱۰} (۲\times ۳^۲)} = \frac{\frac{۱}{۲}(\log_{۱۰} (۲^۲\times ۳))}{\log_{۱۰} (۲\times ۳^۲)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}(۲\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳)}{\log_{۱۰} ۲ + ۲\log_{۱۰} ۳} \xrightarrow[\log_{۱۰} ۳ = b]{\log_{۱۰} ۲ = a} \frac{\frac{۱}{۲}(۲a+b)}{a+۲b} = \frac{۲a+b}{۲a+۴b}$$

۱۵۳ ۴

$$\log_{۲۰} ۴ = k \xrightarrow{\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}} \log_۴ ۲۰ = \frac{۱}{k} \Rightarrow \log_۴ (۴\times ۵) = \frac{۱}{k} \Rightarrow \log_۴ ۴ + \log_۴ ۵ = \frac{۱}{k}$$

$$\Rightarrow ۱ + \log_۴ ۵ = \frac{۱}{k} \Rightarrow \log_۴ ۵ = \frac{۱}{k} - ۱ \Rightarrow \log_۴ ۵ = \frac{۱-k}{k}$$

۱۵۴ ۲ می‌دانیم که $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\log_{۱۲} ۳ = a \Rightarrow \frac{۱}{\log_۳ ۱۲} = a \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می‌کنیم.}} \log_۳ ۱۲ = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_۳ (۲^۲\times ۳) = \frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow ۲\log_۳ ۲ + \log_۳ ۳ = \frac{۱}{a} \Rightarrow ۲\log_۳ ۲ + ۱ = \frac{۱}{a} \Rightarrow ۲\log_۳ ۲ = \frac{۱}{a} - ۱ \Rightarrow ۲\log_۳ ۲ = \frac{۱-a}{a} \Rightarrow \log_۳ ۲ = \frac{۱-a}{۲a}$$

۱۵۵ ۲

$$a = \log_{\sqrt{۲}} ۴ = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} ۲^۲ = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} \log_۲ ۲ = ۴\log_۲ ۲ \Rightarrow \frac{a}{۴} = \log_۲ ۲ \quad (*)$$

$$\log_{۲\sqrt{۲}} ۲\sqrt{۲} = \frac{\log_۲ ۳\sqrt{۲}}{\log_۲ ۲\sqrt{۲}} = \frac{\log_۲ ۳ + \log_۲ \sqrt{۲}}{\log_۲ ۲ + \log_۲ \sqrt{۲}} \xrightarrow{\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}} \frac{۱ + \frac{۱}{۲}\log_۲ ۳}{\log_۲ ۲ + \frac{۱}{۲}\log_۲ ۳} \xrightarrow{(*)} \frac{۱ + \frac{۱}{۲}(\frac{a}{۴})}{\frac{a}{۴} + \frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{\frac{۸+a}{۸}}{\frac{a+۲}{۴}} = \frac{۴(۸+a)}{۸(a+۲)} = \frac{۸+a}{۲a+۴}$$

۱۵۶ ۲

$$\log_x \sqrt[۳]{۱۶} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_x ۲^{\frac{۴}{۳}} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{۳}\log_x ۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_x ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۲$$

$$\log_y \sqrt{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \log_y ۲^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_y ۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \log_y ۲ = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \log_y ۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲ = y^{\frac{۱}{۲}} \xrightarrow{\text{طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.}} ۲^۲ = (y^{\frac{۱}{۲}})^۲ \Rightarrow y = ۴$$

حال داریم:

$$\log_y x \xrightarrow{x=۲, y=۴} \log_۴ ۲ = \log_{۲^۲} ۲^۱ = \frac{۱}{۲}$$

۱۵۷ ۴

$$\log_{۴۵} ۱۱ = \frac{۱}{\log_{۱۱} ۴۵} = \frac{۱}{\log_{۱۱} (۳^۲\times ۵)} = \frac{۱}{۲\log_{۱۱} ۳ + \log_{۱۱} ۵} \quad (*)$$

@kraneh_book

حال با توجه به مقادیر a، b و c حاصل $\log_{11}^{3}$ و $\log_{11}^{5}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\log_{11}7\times\log_{7}5\times\log_{5}3=\log_{11}3\Rightarrow a.b.c=\log_{11}3\\ \log_{11}7\times\log_{7}5=\log_{11}5\Rightarrow c.b=\log_{11}5\end{cases}\Rightarrow *=\frac{1}{2abc+bc}=\frac{1}{bc(2a+1)}$$

۱۵۸ ۱ چون با $b+c$ و $b-c$، در مبنا کار خاصی نمی‌توان انجام داد به کمک فرمول $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ عبارت را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\log_{(b+c)}a+\log_{(b-c)}a}{2}=\log_{(b+c)}a\times\log_{(b-c)}a\Rightarrow\frac{\frac{1}{\log_a(b+c)}+\frac{1}{\log_a(b-c)}}{2}=\frac{1}{\log_a(b+c)}\times\frac{1}{\log_a(b-c)}$$

$$\Rightarrow\frac{\log_a(b-c)+\log_a(b+c)}{2\log_a(b+c)\log_a(b-c)}=\frac{1}{\log_a(b+c)\log_a(b-c)}$$

$\Rightarrow\log_a(b-c)(b+c)=2\Rightarrow b^2-c^2=a^2\Rightarrow b^2=a^2+c^2\Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه در رأس B است.

۱۵۹ ۴ می‌دانیم $\log_b a=\log_d c\Rightarrow\log_a b=\log_c d$. بنابراین:

$$\log_a x=\log_b x^{\frac{2}{2}}\Rightarrow\log_x a=\log_{x^{\frac{2}{2}}}b\Rightarrow\log_x a=\frac{1}{\frac{2}{2}}\log_x b\Rightarrow\log_x a=\frac{2}{2}\log_x b$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}}2\log_x a=2\log_x b\Rightarrow\log_x a^2=\log_x b^2\Rightarrow a^2=b^2$$

۱۶۰ ۴

(۱) گزینهٔ: $\log_{10}0/125+\log_{10}0/8=\log_{10}\frac{125}{1000}+\log_{10}\frac{8}{10}=\log_{10}\left(\frac{125}{1000}\times\frac{8}{10}\right)=\log_{10}\frac{1000}{1000}=\log_{10}1=0$ صحیح است.

(۲) گزینهٔ: $\log_{10}\frac{8}{8}=\log_{10}1=0$ صحیح است.

(۳) گزینهٔ: $8^{\log_8 2}=2$ صحیح است.

(۴) گزینهٔ: $\frac{\log_{10}8}{\log_{10}4}=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}\neq 2$ نادرست است.

۱۶۱ ۳ می‌دانیم $3=4^{\log_4 3}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\log_{10}a=4^{\log_4 3}\Rightarrow\log_{10}a=3\Rightarrow a=10^3$$

$$\log_{10}\sqrt[3]{a^2}\xrightarrow{a=10^3}\log_{10}\sqrt[3]{(10^3)^2}=\log_{10}10^2=2$$

۱۶۲ ۳

$$A=\underbrace{4^{\log_4 2}}_{2}+\underbrace{3^{\log_3 2}}_{2}=2+2=4$$

۱۶۳ ۲

$$2\times100^{\frac{1}{2}(\log_{10}9-\log_{10}2)}=2\times(10^2)^{\frac{1}{2}(\log_{10}\frac{9}{2})}=2\times10^{\log_{10}\frac{9}{2}}=2\times\frac{9}{2}^{\log_{10}10}=2\times\frac{9}{2}=9$$

۱۶۴ ۲

$$A=2\times3^{\frac{1}{2}\log_9 8-\log_3 2}=2\times3^{\frac{1}{2}\log_{3^2}2^3-\log_3 2}=2\times3^{\frac{3}{2}\log_3 2-\log_3 2}$$

$$=2\times2^{\frac{1}{2}\log_2 2}=2\times2^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

۱۶۵ ۳

$$a^{(x\log_a b)}.b^{(x\log_b a)}=b^{x\log_a a},a^{x\log_b b}=b^x.a^x=(ab)^x$$

۱۶۶ ۱ می‌دانیم $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$. بنابراین:

$$a^{\log_x b}-b^{\log_x a}=a^{\log_x b}-a^{\log_x b}=0$$

۱۶۷ ۲

$$\begin{cases}4^{\log_2 5}=(2^2)^{\log_2 5}=2^{2\log_2 5}=5^{2\log_2 2}=5^2=25\\ 2^{\log_4 5}=2^{\log_{2^2}5}=2^{\frac{1}{2}\log_2 5}=5^{\frac{1}{2}\log_2 2}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow 4^{\log_2 5}+2^{\log_4 5}=25+\sqrt{5}$$

@khanehbook

۱۶۸ ۱

$$۱۲۵^{\log_۵ ۳ + \frac{۱}{۶}\log_۵ ۴} = ۱۲۵^{\log_۵ ۳} \times ۱۲۵^{\frac{۱}{۶}\log_۵ ۴} = (۵)^{۳\log_۵ ۳} \times (۵)^{\frac{۲}{۶}\log_۵ ۲} = ۳^۳ \times ۴^{\frac{۱}{۳}\log_۵ ۵} = ۳^۳ \times ۴^{\frac{۱}{۳}} = ۲۷ \times ۲ = ۵۴$$

۱۶۹ ۴

$$(۱۰۰۰۰)^{\frac{۳}{۸}\log_{۱۰} ۲} = (۱۰^۴)^{\frac{۳}{۸}\log_{۱۰} ۲} = (۱۰)^{\frac{۳}{۲}\log_{۱۰} ۲} = ۲^{\frac{۳}{۲}\log_{۱۰} ۱۰} = \sqrt{۲^۳} = ۲\sqrt{۲}$$

۱۷۰ ۲

$$\frac{\log_{۱۰}(\log_{۱۰} ۱۲۵)}{\log_{۱۰} ۶} + ۹^{\frac{\log_{۱۰}(\log_{۱۰} ۸)}{\log_{۱۰} ۹}} = (۶)^{\log_{۱۰}((\log_{۱۰} ۱۲۵)^{\frac{۱}{\log_{۱۰} ۶}})} + (۹)^{\log_{۱۰}((\log_{۱۰} ۸)^{\frac{۱}{\log_{۱۰} ۹}})}$$

$$= ((\log_{۱۰} ۱۲۵)^{\log_{۱۰} ۶})^{\frac{۱}{\log_{۱۰} ۶}} + ((\log_{۱۰} ۸)^{\log_{۱۰} ۹})^{\frac{۱}{\log_{۱۰} ۹}} = \log_{۱۰} ۱۲۵ + \log_{۱۰} ۸$$

$$= \log_{۱۰}(۱۲۵ \times ۸) = \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰^۳ = ۳$$

۱۷۱ ۱

$$a^{\log_۲ ۵} = ۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{a^{(\log_۲ ۵)^۲}} = \sqrt[۳]{(\underbrace{a^{\log_۲ ۵}}_{۸})^{\log_۲ ۵}} = \sqrt[۳]{(۸)^{\log_۲ ۵}} = \sqrt[۳]{۵^{\log_۲ ۸}} = \sqrt[۳]{۵^{\log_۲ ۲^۳}} = \sqrt[۳]{۵^۳} = ۵$$

$$b^{\log_۷ ۱۶} = \sqrt{۷} \Rightarrow b^{۲(\log_۷ ۱۶)^۲} = (\underbrace{b^{\log_۷ ۱۶}}_{\sqrt{۷}})^{۲\log_۷ ۱۶} = (\sqrt{۷})^{۲\log_۷ (۶)} = ۱۶^{۲\log_۷ \sqrt{۷}} = ۱۶^{۲\log_{۷^۲} ۷^{\frac{۱}{۲}}} = ۱۶$$

بنابراین حاصل برابر است با $۲۱ = ۱۶ + ۵$.

۱۷۲ ۲

$$x(x-۱)\log_{۱۰} x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق چون جلوی لگاریتم را صفر می‌کند} \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ & \text{ق ق} \\ \log_{۱۰} x = ۰ \Rightarrow x = ۱۰^۰ = ۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس این معادله تنها دارای جواب $x = ۱$ است، بنابراین **گزینهٔ (۲)** صحیح است.

۱۷۳ ۳

$$\log_۳(x+۱) - ۲\log_۵ \sqrt{۱۲۵} = \log_۲ \frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_۳(x+۱) - ۲\log_۵ ۵^{\frac{۳}{۲}} = \log_۲ ۲^{-۱}$$

$$\Rightarrow \log_۳(x+۱) - ۲ \times \frac{۳}{۲}\log_۵ ۵ = -\log_۲ ۲ \Rightarrow \log_۳(x+۱) - ۳ = -۱$$

$$\Rightarrow \log_۳(x+۱) = ۲ \Rightarrow x + ۱ = ۳^۲ \Rightarrow x = ۸ \quad \text{ق ق}$$

۱۷۴ ۳ با توجه به این نکته که $\log ۵ - ۱ = \log ۲$، داریم:

$$\log x = ۲ - ۲\log ۵ + \frac{۱}{۲}\log ۱۲ - ۳\log ۲ \Rightarrow \log x = \overbrace{۲(۱ - \log ۵)}^{\log ۲} + \frac{۱}{۲}(\log ۳^۲ \times ۳) - ۳\log ۲$$

$$\Rightarrow \log x = ۲\log ۲ + \frac{۱}{۲}(۲\log ۳ + \log ۳) - ۳\log ۲ \Rightarrow \log x = ۲\log ۲ + \log ۳ + \frac{۱}{۲}\log ۳ - ۳\log ۲$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{۱}{۲}\log ۳ = \log ۳^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x = ۳^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \log_۳ x = \log_۳ ۳^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۷۵ ۴

$$\log_{۱۰}(۵x-۲) + \log_{۱۰} ۳ = ۲\log_{۱۰} ۱۲ \Rightarrow \log_{۱۰} ۳(۵x-۲) = \log_{۱۰} ۱۲^۲$$

$$\Rightarrow ۳(۵x-۲) = ۱۲^۲ \Rightarrow ۱۵x - ۶ = ۱۴۴ \Rightarrow ۱۵x = ۱۵۰ \Rightarrow x = ۱۰ \quad \text{ق ق}$$

۱۷۶ ۴ راه اول:

$$\log_{۱۰}(x^۲ - ۱) = \log_{۱۰}(x-۱) + ۲\log_{۱۰} ۳ \Rightarrow \log_{۱۰}(x^۲ - ۱) = \log_{۱۰}((x-۱) \times ۳^۲) \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۹(x-۱)$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱ = ۹x - ۹ \Rightarrow x^۲ - ۹x + ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۸) = ۰ \Rightarrow x = ۱ ,\ x = ۸$$

حال مقدار $x = ۸$ را در $\log_۲ x$ جایگزین می‌کنیم:

$$\log_۲ x = \log_۲ ۸ = \log_۲ ۲^۳ = ۳\log_۲ ۲ = ۳ \quad \text{ق ق}$$

سؤال دانش‌پژوه (هادی قره‌باغی): **ببخشید، چرا در $\log_۲ x$ به جای x عدد ۱ رو جایگزین نکردید؟**

پاسخ: $x = ۱$ غیر قابل قبوله، چون در معادلهٔ اصلی جلوی لگاریتم رو صفر می‌کنه.

@khaneh_book

راه دوم:

$$\log_{۱۰}(x^۲-۱)=\log_{۱۰}(x-۱)+۲\log_{۱۰}۳ \Rightarrow \log_{۱۰}(x^۲-۱)-\log_{۱۰}(x-۱)=۲\log_{۱۰}۳$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\log_{۱۰}۳^۲ \Rightarrow \log_{۱۰}(x+۱)=\log_{۱۰}۹ \Rightarrow x+۱=۹ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow \log_{۲}x=\log_{۲}۸=\log_{۲}۲^۳=۳$$

۱۷۷ ۴

$$\log_{۱۰}x+\log_{۱۰}(x-۱)=۱+\log_{۱۰}۲ \Rightarrow \log_{۱۰}x+\log_{۱۰}(x-۱)-\log_{۱۰}۲=۱ \Rightarrow \log_{۱۰}\frac{x(x-۱)}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-۱)}{۲}=۱۰ \Rightarrow x^۲-x-۲۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۴)=۰ \Rightarrow x=۵ \text{ ق.ق.ق}, \ x=-۴ \text{ غ.ق.ق} \Rightarrow x^۲+x=۵^۲+۵=۳۰$$

۱۷۸ ۴

$$\log_{۱۰}(x-۲)=۲\log_{۱۰}۲-\log_{۱۰}(x-۴) \Rightarrow \log_{۱۰}(x-۲)=\log_{۱۰}۲^۲-\log_{۱۰}(x-۴)$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}(x-۲)=\log_{۱۰}\frac{۴}{x-۴} \Rightarrow x-۲=\frac{۴}{x-۴} \Rightarrow (x-۲)(x-۴)=۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+۴=۰ \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} x=۳+\sqrt{۵} & \text{ق.ق} \\ x=۳-\sqrt{۵} & \text{غ.ق.ق است، زیرا جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.} \end{cases}$$

$$x=۳+\sqrt{۵} \Rightarrow \log_{۵}(x-۳)=\log_{۵}(۳+\sqrt{۵}-۳)=\log_{۵}۵^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

۱۷۹ ۱

$$۲\log_{۱۰}\sqrt{۲x+۳}=\frac{۱}{۲}\log_{۱۰}۴۹-\log_{۱۰}(۲x-۳) \Rightarrow \log_{۱۰}(\sqrt{۲x+۳})^۲+\log_{۱۰}(۲x-۳)=\frac{۱}{۲}\log_{۱۰}۷^۲$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}(۲x+۳)(۲x-۳)=\log_{۱۰}۷ \Rightarrow (۲x+۳)(۲x-۳)=۷ \Rightarrow ۴x^۲-۹=۷ \Rightarrow ۴x^۲=۱۶ \Rightarrow x=\pm ۲ \xrightarrow[\text{غیر قابل قبول}]{x=-۲} x=۲$$

۱۸۰ ۲

$$\log_{۱۰}(۲x-۱)+\log_{۱۰}(x+۳)=\log_{۱۰}۳۰-\log_{۱۰}۲$$

$$\log_{۱۰}(۲x-۱)(x+۳)=\log_{۱۰}\frac{۳۰}{۲} \Rightarrow \log_{۱۰}(۲x^۲+۶x-x-۳)=\log_{۱۰}۱۵ \Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۱۵$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۵x-۱۸=۰ \Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۵+۱۳}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲ & \text{ق.ق} \\ x=\frac{-۵-۱۳}{۴}=\frac{-۱۸}{۴} & \text{غ.ق.ق} \end{cases} \Rightarrow \log_{۸}x=\log_{۸}۲=\log_{۲^۳}۲=\frac{۱}{۳}$$

۱۸۱ ۱

$$\log_{۱۰}(۲x-۱)+\frac{۲}{۲}\log_{۱۰}x=\log_{۱۰}۳ \Rightarrow \log_{۱۰}(۲x-۱)x=\log_{۱۰}۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x=۳ \Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰ \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} x=-۱ & \text{غ.ق.ق است، زیرا عبارت جلوی } \log_{۱۰}(۲x-۱) \text{ را منفی می‌کند.} \\ x=\frac{۳}{۲} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_{۲}\frac{x}{۳}=\log_{۲}\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۱}}=\log_{۲}\frac{۱}{۲}=\log_{۲^۲}۲^{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۸۲ ۴

$$۲\log_{۱۰}(x-۲)=\log_{۱۰}(x+۱۰) \Rightarrow \log_{۱۰}(x-۲)^۲=\log_{۱۰}(x+۱۰) \Rightarrow (x-۲)^۲=x+۱۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۴=x+۱۰ \Rightarrow x^۲-۵x-۶=۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۶ & \text{ق.ق} \end{cases} \Rightarrow \log_{۴}(x+۲) \xrightarrow{x=۶} \log_{۴}(۶+۲)=\log_{۴}۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{cases} x=-۱ & \text{غ.ق.ق است چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.} \end{cases}$$

۱۸۳ ۳ می‌دانیم اگر $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه x، y و z تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. بنابراین در این تست، x، $(x+۳)$ و $۴x$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، لذا داریم:

$$(x+۳)^۲=۴x.x \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} x^۲+۶x+۹=۴x^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲-۶x-۹=۰ \Rightarrow ۳(x^۲-۲x-۳)=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{غ.ق.ق} \\ x=۳ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$x=۳ \Rightarrow \log_{۸}(x+۱)=\log_{۸}۴=\log_{۲^۳}۲^۲=\frac{۲}{۳}$$

توجه کنید که $x=-۱$ جلوی $\log_{۱۰}x$ و $\log_{۱۰}۴x$ را منفی می‌کرد، در نتیجه قابل قبول نبود.

@khaneh_book

۱۸۴ ۱

$$\log_{۱۰}[(x-۱)(x-۲)] = \log_{۱۰}(x^۲+۲) \Rightarrow (x-۱)(x-۲) = x^۲+۲ \Rightarrow x^۲-۳x+۲ = x^۲+۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - x^۲ + ۳x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ ق ق} \\ x^۲ - x + ۳ = ۰ \end{cases}$$

$x = ۰$ غیرقابل قبول است، زیرا جلوی $\log_{۱۰}(x-۱)$ را منفی می‌کند. برای یافتن جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - x + ۳ = ۰$، دلتا را تشکیل می‌دهیم.

$\Delta = ۱ - ۱۲ = -۱۱ < ۰ \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. $\Rightarrow$ معادله لگاریتمی نیز ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۸۵ ۱

$$\log_{۱۰}(x^۳+۳x^۲+۳x+۱) = \log_{۱۰}x + \log_{۱۰}(x+۱) + \log_{۱۰}(x+۳) \xrightarrow{\log_{۱۰}A+\log_{۱۰}B+\log_{۱۰}C=\log_{۱۰}(A\times B\times C)}$$

$$\log_{۱۰}(x^۳+۳x^۲+۳x+۱) = \log_{۱۰}[x(x+۱)(x+۳)] \Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x+۱ = x(x+۱)(x+۳)$$

اتحاد یک جملهٔ مشترک

$$\Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x+۱ = x(x^۲+۴x+۳) \Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x+۱ = x^۳+۴x^۲+۳x$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{ق} \\ x = -۱ & \text{غ ق ق، چون جلوی لگاریتم را منفی یا صفر می‌کند.} \end{cases}$$

۱۸۶ ۲ با توجه به این‌که $۳ = \log_{۱۰}۱۰^۳$ می‌باشد، داریم:

$$\log_{۱۰}۱۰^۳ + \log_{۱۰}۶ = \log_{۱۰}(x.۲x.۳x) \Rightarrow \log_{۱۰}(۱۰^۳ \times ۶) = \log_{۱۰}۶x^۳ \Rightarrow ۶\times۱۰^۳ = ۶x^۳ \Rightarrow x^۳ = ۱۰^۳ \Rightarrow x = ۱۰$$

۱۸۷ ۳ با توجه به این که $۱ = \log_{۳}۳$، داریم:

$$\log_{۳}(x^۲-۱) = \log_{۳}۳ + \log_{۳}(x+۳) \Rightarrow \log_{۳}(x^۲-۱) = \log_{۳}۳(x+۳) \Rightarrow x^۲-۱ = ۳(x+۳)$$

$$\Rightarrow x^۲-۱ = ۳x+۹ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = -۲, x = ۵$$

$\log_{۴}(x-۳)$ به ازای $x = -۲$ تعریف نمی‌شود، زیرا جلوی لگاریتم منفی می‌شود؛ بنابراین:

$$x = ۵ \Rightarrow \log_{۴}(x-۳) = \log_{۴^۲}۲ = \frac{۱}{۲}\log_{۲}۲ = \frac{۱}{۲}$$

۱۸۸ ۱ با توجه به آن‌که $۱ = \log_{۱۰}۱۰$ داریم:

$$\log x = \log_{۱۰}۱۰ + ۲\log\sqrt{۳} - \log۶۰ \Rightarrow \log x = \log۱۰ + \log\sqrt{۳}^۲ - \log۶۰ \Rightarrow \log x = \log\frac{۱۰(۳)}{۶۰}$$

$$\Rightarrow \log x = \log\frac{۳۰}{۶۰} \Rightarrow x = \frac{۳۰}{۶۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_{۲}x = \log_{۲}۲^{-۱} = -۱$$

۱۸۹ ۴ با توجه به این‌که $۱ = \log_{۱۰}۱۰$ داریم:

$$۲\log_{۱۰}x = \log_{۱۰}۱۰ + \log_{۱۰}\left(x+\frac{۱۲}{۵}\right) \Rightarrow \log_{۱۰}x^۲ = \log_{۱۰}۱۰\left(x+\frac{۱۲}{۵}\right) \Rightarrow x^۲ = ۱۰x+۲۴ \Rightarrow x^۲-۱۰x-۲۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱۲)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \text{ غ ق ق} \\ x = ۱۲ \Rightarrow \log_{۵}(۲x+۱) = \log_{۵}۲۵ = \log_{۵}۵^۲ = ۲ \end{cases}$$

۱۹۰ ۴

$$\log_{۳}(۲x^۲+۱) - \log_{۳}(x+۲) = ۱ \Rightarrow \log_{۳}\left(\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}\right) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳ \Rightarrow ۲x^۲+۱ = ۳x+۶ \Rightarrow ۲x^۲-۳x-۵ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \text{ یا } x = \frac{۵}{۲}$$

با توجه به جواب‌های حاصل داریم:

$$\log_{۸}(۲x-۱) = ۱ \begin{cases} x = -۱ \Rightarrow \log_{۸}(-۳) \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \log_{۸}\left(۲\left(\frac{۵}{۲}\right)-۱\right) = \log_{۸}۴ = \log_{۲^۳}۲^۲ = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

۱۹۱ ۴

$$\log_{۴}(A+۱۵) = \log_{۴}A + ۱ \xrightarrow{۱=\log_{۴}۴} \log_{۴}(A+۱۵) = \log_{۴}A + \log_{۴}۴ \Rightarrow \log_{۴}(A+۱۵) = \log_{۴}۴A$$

$$\Rightarrow A+۱۵ = ۴A \Rightarrow ۳A = ۱۵ \Rightarrow A = ۵$$

۱۹۲ ۱

$$\frac{\log_{۱۰}۲}{۱-\log_{۱۰}x} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین وسطین}} ۳\log_{۱۰}۲ = ۱ - \log_{۱۰}x \xrightarrow{\log_{۱۰}۱۰=۱} ۳\log_{۱۰}۲ = \log_{۱۰}۱۰ - \log_{۱۰}x$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}۲^۳ = \log_{۱۰}\frac{۱۰}{x} \Rightarrow ۸ = \frac{۱۰}{x} \Rightarrow ۸x = ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴} \text{ ق ق}$$

@khanen_book

۱۹۳ ۱

$$\log_۹(x-۴)=۱-\log_۳۲ \xrightarrow{۱=\log_۳۳} \log_۳(x-۴)=\log_۳۳-\log_۳۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۳(x-۴)=\log_۳\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.}} \log_۳(x-۴)=۲\log_۳\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_۳(x-۴)=\log_۳\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \log_۳(x-۴)=\log_۳\left(\frac{۹}{۴}\right)$$

$$\Rightarrow x-۴=\frac{۹}{۴} \Rightarrow x=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow x=۶/۲۵$$

۱۹۴ ۴

$$\log_۲ x-\log_{۲^۲} x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_۲ x-\frac{۱}{۲}\log_۲ x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲ x=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} \log_۲ x=۳ \Rightarrow x=۲^۳=۸$$

۱۹۵ ۳

$$۲\log_۴ x-\log_۲(x+۴)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_۴ x^۲-\log_۲(x+۴)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_۴\frac{x^۲}{x+۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{x+۴}=۴^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \frac{x^۲}{x+۴}=(۲^۲)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \frac{x^۲}{x+۴}=۲ \Rightarrow x^۲=۲x+۸ \Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰$$

$$\Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ & \text{ق.ق} \\ x=-۲ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۱۹۶ ۴

$$\log_۶(x-۵)=۲-\log_۶ x \Rightarrow \log_۶(x-۵)+\log_۶ x=۲ \Rightarrow \log_۶(x-۵)x=۲ \Rightarrow x^۲-۵x=۶^۲ \Rightarrow x^۲-۵x-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۹)(x+۴)=۰ \Rightarrow x=۹ \text{ و ق.ق} \quad x=-۴ \text{ غ.ق.ق} \Rightarrow \log_۲(x-۱) \xrightarrow{x=۹} \log_۲ ۸=\log_۲ ۲^۳=۳$$

۱۹۷ ۲

$$\log_{۱۰} x+\log_{۱۰}(۲x+۱)=\underbrace{۱}_{\log_{۱۰}۱۰} \Rightarrow \log_{۱۰}\big(x(۲x+۱)\big)=\log_{۱۰}۱۰ \Rightarrow ۲x^۲+x=۱۰ \Rightarrow ۲x^۲+x-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۸۰}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۱+۹}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲ & \text{ق.ق} \\ x=\frac{-۱-۹}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=-\frac{۵}{۲} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۱۹۸ ۱

$$\log_{۱۰}\frac{۲}{x}+\log_{۱۰}(x+۱)=\underbrace{۱}_{\log_{۱۰}۱۰} \Rightarrow \log_{۱۰}\left(\frac{۲}{x}(x+۱)\right)=\log_{۱۰}۱۰ \Rightarrow \frac{۲}{x}(x+۱)=۱۰$$

$$\Rightarrow ۲+\frac{۲}{x}=۱۰ \Rightarrow \frac{۲}{x}=۸ \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم.}]{\text{طرفین رابطه را در } x} ۲=۸x \Rightarrow x=\frac{۱}{۴} \text{ ق.ق}$$

حال داریم:

$$\log_۸ x \xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}} \log_۸\frac{۱}{۴}=\log_{۲^۳}۲^{-۲}=-\frac{۲}{۳}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}=-\frac{۲}{۳}$$

۱۹۹ ۳

$$\log_۵(۳x-۱)(۳x-۵)=\underbrace{\log_۵ ۵}_{۱} \Rightarrow (۳x-۱)(۳x-۵)=۵ \Rightarrow ۹x^۲-۱۳x+۵=۵$$

$$\Rightarrow x(۹x-۱۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ.ق.ق} \\ x=\frac{۱۳}{۹} & \text{ق.ق} \end{cases} \Rightarrow \log_۲(۹x+۳)=\log_۲ ۱۶=\log_۲ ۲^۴=۴$$

۲۰۰ ۲

$$\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵) \Rightarrow \log\left(\frac{x^۲-x-۶}{x-۳}\right)=\log(۲x-۵) \Rightarrow \frac{\overbrace{(x-۳)(x+۲)}^{(x^۲-x-۶)}}{x-۳}=۲x-۵$$

$$\xrightarrow{x\neq ۳} x+۲=۲x-۵ \Rightarrow x=۷ \text{ ق}$$

$$x=۷ \Rightarrow \log_۲\sqrt[۳]{x+۱}=\log_۲\sqrt[۳]{۷+۱}=\log_{۲^۲}۲=\frac{۱}{۲}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}=\frac{۱}{۲}$$

@khanen_book

۲۰۱ ۱

$$\log_{۱۰}(x^۲-x+۱)+\log_{۱۰}(x+۱)=۱\Rightarrow \log_{۱۰}\left[(x^۲-x+۱)(x+۱)\right]=۱\Rightarrow \log_{۱۰}\underbrace{\left[(x+۱)(x^۲-x+۱)\right]}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=\underbrace{۱}_{\log_{۱۰}۱۰}$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}(x^۳+۱)=\log_{۱۰}۱۰\Rightarrow x^۳+۱=۱۰\Rightarrow x^۳=۹\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۹}\ \text{ق.ق}$$

$$\Rightarrow \log_۳ x=\log_۳ \sqrt[۳]{۹}=\log_۳ ۳^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}\log_۳ ۳=\frac{۲}{۳}$$

۲۰۲ ۳ اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\log_۹ x=\log_۹\frac{۱}{x^۲}+۴/۵\Rightarrow \log_۹ x=\log_۹ x^{-۲}+۴/۵\Rightarrow \log_۹ x=-۲\log_۹ x+۴/۵$$

$$\Rightarrow ۳\log_۹ x=۴/۵\Rightarrow \log_۹ x=\frac{۴/۵}{۳}\Rightarrow \log_۹ x=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=۹^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow x=(۳^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow x=۳^۳=۲۷\ \text{ق.ق}$$

۲۰۳ ۳

$$\log_۲ x^۲=۵-\log_۲\sqrt{x}\Rightarrow \log_۲ x^۲+\log_۲\sqrt{x}=۵\Rightarrow ۲\log_۲ x+\frac{۱}{۲}\log_۲ x=۵$$

$$\Rightarrow \left(۲+\frac{۱}{۲}\right)\log_۲ x=۵\Rightarrow \frac{۵}{۲}\log_۲ x=۵\Rightarrow \log_۲ x=۲\Rightarrow x=۴\ \text{ق.ق}$$

بنابراین معادلهٔ فوق، **یک** ریشه دارد.

۲۰۴ ۲

$$\log_x(x^۳-۲x)=۲\Rightarrow x^۳-۲x=x^۲\Rightarrow x^۳-x^۲-۲x=۰\Rightarrow x\underbrace{(x^۲-x-۲)}_{\text{اتحاد یک جملهٔ مشترک}}=۰$$

$$\Rightarrow x(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ.ق.ق، زیرا مبنا و جلوی لگاریتم نمی‌تواند صفر باشد.}\\ x=-۱ & \text{غ.ق.ق، زیرا مبنای لگاریتم نمی‌تواند منفی باشد.}\\ x=۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ فوق یک ریشه دارد.

۲۰۵ ۱

$$\log_۲(۲^x-۲)=۳-x\Rightarrow ۲^x-۲=۲^{۳-x}\Rightarrow ۲^x-۲=\frac{۲^۳}{۲^x}\Rightarrow ۲^x(۲^x-۲)=۸$$

$$\Rightarrow (۲^x)^۲-۲\times ۲^x-۸=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(۲^x-۴)(۲^x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}۲^x=۴\Rightarrow ۲^x=۲^۲\Rightarrow x=۲\\ ۲^x=-۲\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

معادله یک جواب دارد. ⇐

۲۰۶ ۴

$$\log_x(x^۲-۲)=۲\log_۹ ۳\Rightarrow \log_x(x^۲-۲)=۲\log_{۳^۲}۳\Rightarrow \log_x(x^۲-۲)=۲\times\frac{۱}{۲}\log_۳ ۳$$

$$\Rightarrow \log_x(x^۲-۲)=۱\Rightarrow x^۲-۲=x^۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲\ \text{ق.ق}\qquad x=-۱\ \text{غ.ق.ق}$$

جواب $x=-۱$ قابل قبول نیست، زیرا مبنای لگاریتم و جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

۲۰۷ ۴

$$\log_۹ ۳+\log_۵\sqrt{۵}=\log_x(x^۲-۱)\Rightarrow \log_{۳^۲}۳+\log_۵ ۵^{\frac{۱}{۲}}=\log_x(x^۲-۱)\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۳ ۳+\frac{۱}{۲}\log_۵ ۵=\log_x(x^۲-۱)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=\log_x(x^۲-۱)\Rightarrow ۱=\log_x(x^۲-۱)\Rightarrow x^۲-۱=x^۱$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴}}{۲}\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\ \text{ق.ق}\\ x=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

۲۰۸ ۲

$$\log_x ۳+\log_x(۲x+۹)=۲\Rightarrow \log_x\left(۳(۲x+۹)\right)=۲\Rightarrow ۶x+۲۷=x^۲\Rightarrow x^۲-۶x-۲۷=۰$$

$$\Rightarrow (x-۹)(x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۹\ \text{ق.ق}\Rightarrow \log_۴ x=\log_۹ ۹=۱\\ x=-۳\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

(چون مبنای $\log_x ۳$ را منفی می‌کند.)

@khanen_book

۲۰۹ ۲

$$\log_x(x+2)=\log_x(4-x)+1\Rightarrow\log_x(x+2)-\log_x(4-x)=1\Rightarrow\log_x\frac{(x+2)}{4-x}=1$$

$$\Rightarrow\frac{x+2}{4-x}=x^1\Rightarrow x+2=4x-x^2\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=2 & \text{ق.ق}\\ x=1 & \text{غ.ق.ق، چون مبنا نمی‌تواند ۱ باشد.}\end{cases}$$

۲۱۰ ۱ می‌دانیم $\log_b a=\log_{b^n} a^n$. بنابراین:

$$\log_{\sqrt{x}}(x-2)=\log_{\sqrt{x}^2}(x-2)^2=\log_x(x-2)^2$$

با بازنویسی معادلهٔ داده شده داریم:

$$\log_x(x-2)-\log_x(x-2)^2=\log_x(x+2)$$

$$\Rightarrow\log_x\frac{x-2}{(x-2)^2}=\log_x(x+2)\Rightarrow\frac{1}{x-2}=x+2$$

$$\Rightarrow 1=(x-2)(x+2)\Rightarrow x^2-4=1\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\xrightarrow{\text{شرط دامنه}}x=\sqrt{5}$$

۲۱۱ ۳ چون دو لگاریتم پشت x قرار دارد، دو بار نمایی می‌کنیم:

$$\log_3\log_2 x=1\Rightarrow\log_2 x=3^1\Rightarrow\log_2 x=3\Rightarrow x=2^3=8\quad\text{ق.ق}$$

سؤال دانش‌پژوه (نقرعلی زکی‌زاده): **ببخشید، عذر زحمت دارم، می‌شه در مورد این سؤال بیشتر توضیح بدین؟**

پاسخ: برای حل این‌گونه تست‌ها، می‌توانی فرمول لگاریتمی زیر را به خاطر داشته باشی:

$$\log_a\log_b\log_c x=k\Rightarrow x=c^{b^{a^k}}$$

بنابراین در این تست:

$$\log_2\log_2 x=1\Rightarrow x=2^{2^1}=2^2=8$$

۲۱۲ ۴

$$\log_2(\log_a 16)=1\Rightarrow 16=a^{2^1}\Rightarrow a=4\quad\text{ق.ق}\quad,\quad\text{غ.ق.ق}\ -4$$

$$\Rightarrow\log_{2a}a^2=\log_{2(4)}4^2=\log_8 16=\log_{2^3}2^4=\frac{4}{3}$$

۲۱۳ ۱ چون سه لگاریتم پشت x قرار دارد، سه بار نمایی می‌کنیم:

$$\log_2\log_3\log_4 x=0\Rightarrow\log_3\log_4 x=2^0\Rightarrow\log_4\log_4 x=1\Rightarrow\log_4 x=4^1$$

$$\Rightarrow\log_4 x=3\Rightarrow x=4^3\Rightarrow x=64\quad\text{ق.ق}\quad\text{«یا»}\quad\log_2\log_3\log_4 x=0\Rightarrow x=4^{3^{2^0}}=4^{3^1}=4^3=64\quad\text{ق.ق}$$

۲۱۴ ۱

$$3^{2x}-8\times3^x+15=0\Rightarrow(3^x)^2-8(3^x)+15=0\xrightarrow{3^x=u}u^2-8u+15=0$$

$$\Rightarrow(u-5)(u-3)=0\Rightarrow\begin{cases}u=5\\ u=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^x=5\\ 3^x=3\end{cases}\xrightarrow{a^x=b\Rightarrow x=\log_a b}\begin{cases}x=\log_3 5\\ x=1\end{cases}$$

۲۱۵ ۱

$$9^x-3^{x+2}+170=0\Rightarrow 3^{2x}-3^x\times3^2+170=0\Rightarrow(3^x)^2-27\times3^x+170=0\xrightarrow{3^x=u}u^2-27u+170=0$$

$$\Rightarrow(u-17)(u-10)=0\Rightarrow\begin{cases}u=17\Rightarrow3^x=17\Rightarrow x=\log_3 17\\ u=10\Rightarrow3^x=10\Rightarrow x=\log_3 10\end{cases}$$

چون مبنا بزرگ‌تر از ۱ است، داریم:

$$17>10\Rightarrow\log_3 17>\log_3 10$$

۲۱۶ ۳

$$4^x+2^x=72\Rightarrow 2^{2x}+2^x-72=0$$

$$\xrightarrow{2^x=u}u^2+u-72=0\Rightarrow(u+9)(u-8)=0\Rightarrow\begin{cases}u=8\Rightarrow2^x=2^3\Rightarrow x=3\\ u=-9\quad\text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$$\log_{10}(x+1)+\log_{10}(2y+x^2)=2\xrightarrow{x=3}\log_{10}4+\log_{10}(2y+9)=2\Rightarrow\log_{10}4(2y+9)=2$$

$$\Rightarrow\log_{10}(8y+36)=2\Rightarrow8y+36=10^2\Rightarrow8y=64\Rightarrow y=8$$

@khaneh_book

۲۱۷ ۴

$$۳^{۲x+y}=۹\times ۳^{x-y}\Rightarrow ۳^{۲x+y}=۳^{۲}\times ۳^{x-y}\Rightarrow ۳^{۲x+y}=۳^{۲+x-y}$$
$$\Rightarrow ۲x+y=۲+x-y\Rightarrow x+۲y=۲\quad (*)$$
$$\log(x+۲y)=۱+\log y\xrightarrow{۱=\log ۱۰}\log(x+۲y)=\log ۱۰+\log y\Rightarrow \log(x+۲y)=\log ۱۰y$$
$$\Rightarrow x+۲y=۱۰y\Rightarrow x=۸y\xrightarrow{(*)}۸y+۲y=۲\Rightarrow ۱۰y=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲\xrightarrow{x=۸y}x=۸\times ۰/۲=۱/۶$$

۲۱۸ ۳ ابتدا به کمک معادلهٔ نمایی داده شده، سعی می‌کنیم با برابر کردن پایه‌ها رابطه‌ای بین x و y بیابیم:

$$۲^{x-۷}\times ۴^{x+y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷}\times (۲^{۲})^{x+y}=۲^{۰}\Rightarrow ۲^{x-۷}\times ۲^{۲x+۲y}=۲^{۰}\Rightarrow ۲^{x-۷+۲x+۲y}=۲^{۰}$$
$$\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷}=۲^{۰}\Rightarrow ۳x+۲y-۷=۰\Rightarrow ۳x+۲y=۷\quad (*)$$

حال از معادلهٔ لگاریتمی داده شده داریم:

$$\log y=۲\log ۳+\log x\Rightarrow \log y=\log \frac{۳^{۲}}{۹}+\log x\Rightarrow \log y=\log ۹x\Rightarrow y=۹x\xrightarrow{(*)}۳x+۲(۹x)=۷$$
$$\Rightarrow ۲۱x=۷\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{y=۹x}y=۹\left(\frac{۱}{۳}\right)=۳$$

۲۱۹ ۳

$$(\log_۲ x)^{۲}-۹\log_{۲^{۳}}x=۴\Rightarrow (\log_۲ x)^{۲}-۳\log_۲ x=۴$$

سؤال دانش‌پژوه (یهمن پورسینا): نمی‌شه گفت $(\log_۲ x)^{۲}=۲\log_۲ x$ و راحت معادله رو حل کرد؟

پاسخ: نه نباید چنین کاری انجام بدی. دقت کن $\log_۲ x^{۲}$ رو می‌شه به صورت $۲\log_۲ x$ نوشت ولی وقتی توان روی کل عبارته، مثل $(\log_۲ x)^{۲}$، دیگه نمی‌تونیم ۲ رو پشت لگاریتم ببریم.

با در نظر گرفتن $\log_۲ x=a$ داریم:

$$a^{۲}-۳a-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\Rightarrow \log_۲ x=-۱\Rightarrow x=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}\\ a=۴\Rightarrow \log_۲ x=۴\Rightarrow x=۲^{۴}=۱۶\end{cases}$$

۲۲۰ ۳

$$\log_{\sqrt{۲}}x+\log_{\sqrt{x}}۲=۴\Rightarrow \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}x+\log_{x^{\frac{۱}{۲}}}۲=۴\Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_۲ x+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_x ۲=۴$$
$$\Rightarrow ۲\log_۲ x+۲\log_x ۲=۴\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین رابطه را بر ۲}}\log_۲ x+\log_x ۲=۲\Rightarrow \log_۲ x+\frac{۱}{\log_۲ x}=۲$$
$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم.}]{\text{طرفین رابطه را در }\log_۲ x}(\log_۲ x)^{۲}+۱=۲\log_۲ x\Rightarrow (\log_۲ x)^{۲}-۲\log_۲ x+۱=۰\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}(\log_۲ x-۱)^{۲}=۰$$
$$\Rightarrow \log_۲ x=۱\Rightarrow x=۲^{۱}\Rightarrow x=۲\quad \text{ق.ق}$$

۲۲۱ ۳

$$\log_{۲^{۲}}x+\frac{۱}{۳}\log_x ۲=۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۱}{۳}\log_x ۲=۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۱}{۳\log_۲ x}=۱$$
$$\xrightarrow{\log_۲ x=u}\frac{۱}{۲}u+\frac{۱}{۳u}=۱\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم.}]{\text{کل معادله را در }۶u}۳u^{۲}+۲=۶u\Rightarrow ۳u^{۲}-۶u+۲=۰$$
$$\Rightarrow ۳u^{۲}-۶u+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \log_۲ x=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=۳^{\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}}\\ u=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \log_۲ x=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=۳^{\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}}\end{cases}\Rightarrow$$ معادله دو ریشهٔ حقیقی قابل قبول دارد.

۲۲۲ ۱ **راه اول:** از گزینه‌ها استفاده می‌کنیم و درمی‌یابیم که **گزینهٔ (۱)** درست می‌باشد. زیرا اگر به جای x در معادلهٔ $x^{۱+\log_{۱۰}x}=۱۰^{۲}$ عدد ۱۰ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$x^{۱+\log x}=۱۰^{۲}\xrightarrow[\text{جایگزین می‌کنیم.}]{\text{به جای x عدد ۱۰ را}}۱۰^{۱+\log_{۱۰}۱۰}=۱۰^{۲}\Rightarrow ۱۰^{۱+۱}=۱۰^{۲}\Rightarrow ۱۰^{۲}=۱۰^{۲}$$

@khanem_book

سؤال دانش‌پژوه (آتوسه پیروزبخت): **ببخشید، درحل تست‌ها چه موقع باید از گزینه‌ها استفاده کنیم؟**

پاسخ: در تست‌هایی که مجهولی مانند x داشته باشیم و سؤال نیز مقدار x رو از ما بخواد (مثل همین تست) در این صورت چون یکی از گزینه‌ها عدد x است، مقدار گزینه‌ها رو به جای x جایگزین می‌کنیم، هر کدوم از گزینه‌ها که به تساوی درستی برسه اون گزینه درسته.

راه دوم: راه دشوارتری نسبت به راه اول است در این راه از طرفین معادله، لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم و داریم:

$$x^{1+\log_{10}x}=10^{2}\Rightarrow \log_{10}(x^{1+\log_{10}x})=\log_{10}10^{2}\Rightarrow (1+\log_{10}x)\log_{10}x=2\log_{10}10$$

$$\Rightarrow \log_{10}x+(\log_{10}x)^{2}=2\xrightarrow{\log_{10}x=u} u^{2}+u-2=0\Rightarrow (u+2)(u-1)=0$$

اتحاد یک جملهٔ مشترک

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1\Rightarrow \log_{10}x=1\Rightarrow x=10^{1}=10 & \text{ق.ق} \\ u=-2\Rightarrow \log_{10}x=-2\Rightarrow x=10^{-2}=\frac{1}{100}=0/01 & \text{(اما جواب معادله هست)} \end{cases}$$

که این جواب در بین گزینه‌ها وجود ندارد.

۳۲۳ ۳

$$x^{(\log_{10}x)}=10000\xrightarrow[\text{در مبنای ۱۰ می‌گیریم}]{\text{از طرفین، لگاریتم}} \log_{10}x^{(\log_{10}x)}=\log_{10}10000$$

$$\xrightarrow{\log_{10}A^{n}=n\log_{10}A} (\log_{10}x)(\log_{10}x)=\log_{10}10^{4}\Rightarrow (\log_{10}x)^{2}=4\Rightarrow \begin{cases} \log_{10}x=2\Rightarrow x=10^{2}=100 & \text{ق.ق} \\ \log_{10}x=-2\Rightarrow x=10^{-2}=\frac{1}{10^{2}}=\frac{1}{100} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

سؤال دانش‌پژوه (مهبوبه مثالنت): **من مقادیر گزینه‌ها رو در معادلهٔ $x^{(\log_{10}x)}=10000$ گذاشتم و به این نتیجه رسیدم که گزینهٔ (۳) درسته.**

پاسخ: آره، می‌شه از این راه هم به جواب رسید. اگه خوب دقت می‌کردی، زود می‌فهمیدی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) غلطن چون $x=10$ در معادله صدق نمی‌کنه.

۳۲۴ ۴

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{T}=\frac{3}{4}\xrightarrow[\text{در مبنای ۱۰ می‌گیریم}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} T\log_{10}\frac{1}{2}=\log_{10}\frac{3}{4}$$

$$(\log_{10}1-\log_{10}2)T=\log_{10}3-\log_{10}2^{2}\Rightarrow T=\frac{\log_{10}3-2\log_{10}2}{-\log_{10}2}=\frac{0/4771-0/6020}{-0/3010}=\frac{-0/1249}{-0/3010}=0/415$$

۳۲۵ ۳

$$4\sqrt{2}=4^{x}\Rightarrow 2^{2}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{2x}\Rightarrow 2^{2+\frac{1}{2}}=2^{2x}\Rightarrow 2^{\frac{5}{2}}=2^{2x}\Rightarrow 2x=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

حال داریم:

$$1+\log_{10}\sqrt{x+1}=\log_{10}y\xrightarrow{x=\frac{5}{4}} 1+\log_{10}\sqrt{\frac{5}{4}+1}=\log_{10}y\Rightarrow 1+\log_{10}\sqrt{\frac{9}{4}}=\log_{10}y$$

$$\Rightarrow 1+\log_{10}\frac{3}{2}=\log_{10}y\xrightarrow{1=\log_{10}10} \log_{10}10+\log_{10}\frac{3}{2}=\log_{10}y\Rightarrow \log_{10}\left(10\times\frac{3}{2}\right)=\log_{10}y\Rightarrow y=15 \quad \text{ق.ق}$$

۳۲۶ ۱

$$\begin{cases} \log_{3}x+\log_{3}y=2\Rightarrow \log_{3}xy=2\Rightarrow xy=9 & (*) \\ x^{2}+y^{2}=46\Rightarrow (x+y)^{2}-2xy=46\xrightarrow{(*)}(x+y)^{2}-2(9)=46\Rightarrow (x+y)^{2}=64\Rightarrow x+y=8,-8 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}\Rightarrow x+y=8$$

$$\Rightarrow \log_{4}(x+y)=\log_{4}8=\log_{2^{2}}2^{3}=\frac{3}{2}=1/5$$

سؤال دانش‌پژوه (آتوسه آزاد): **ببخشید، از کجا فهمیدید که $x^{2}+y^{2}=(x+y)^{2}-2xy$ بنویسید؟**

پاسخ: ببین چون مسئله در انتها لگاریتم $(x+y)$ رو خواسته منم سعی کردم اونو، اون شکلی بنویسم.

سؤال دانش‌پژوه (ناصر لقه پاری): **آقا من اول از $xy=9$، $y=\frac{9}{x}$ در آوردم و بعد اونو به جای y تو $x^{2}+y^{2}=46$ جای‌گذاری کردم.**

پاسخ: بچه، اون طوری باید تا صبح هلش کنی! ناصر خودتو اصلاح کن!

۳۲۷ ۳

$$\log_{4}x=1+\log_{4}(y+1)\Rightarrow \log_{4}x=\log_{4}2+\log_{4}(y+1)\Rightarrow \log_{4}x=\log_{4}2(y+1)\Rightarrow x=2(y+1)\quad (*)$$

$$x^{2}-y^{2}=32\xrightarrow{(*)}[2(y+1)]^{2}-y^{2}=32\Rightarrow 4y^{2}+8y+4-y^{2}=32\Rightarrow 3y^{2}+8y-28=0\xrightarrow{\text{روش }\Delta} y=2,y=\frac{-14}{3} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$y=2\Rightarrow x^{2}-2^{2}=32\Rightarrow x^{2}=36\Rightarrow x=6,x=-6 \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$\Rightarrow \log_{4}(x+y)=\log_{4}(6+2)=\log_{4}8=\log_{2^{2}}2^{3}=\frac{3}{2}$$

@khanehbook

سؤال دانش‌پژوه (اکبر تولای): آقا این سؤال مثل قبلی راه آسون نداشت؟

پاسخ: اکبر تو راه آسونو می‌خوای چیکار! اما هالا که اصرار می‌کنی، به چون بابات نه نداشت! همیشه نباید دنبال میان‌بر بود که!

۲۲۸ ۲

$$\begin{cases}\log_{۱۰}x=\log_{۱۰}۲+\log_{۱۰}y\\ ۲^x\times ۲^y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{۱۰}x=\log_{۱۰}۲y\\ ۲^{x+y}=۲^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲y\\ x+y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\\ ۲\times\end{matrix}\begin{cases}x-۲y=۰\\ x+y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-۲y=۰\\ ۲x+۲y=۴\end{cases}$$

ق.ق $۳x=۴\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$

۲۲۹ ۲ **راه اول:**

$$\log_{۱۰}\frac{x^۲}{y}=۴\Rightarrow\frac{x^۲}{y}=۱۰^۴\quad(۱)$$
$$\log_{۱۰}\frac{x}{y}=۲\Rightarrow\frac{x}{y}=۱۰^۲\quad(۲)$$
$$\xrightarrow[\text{بر رابطه (۲)}]{\text{با تقسیم رابطه (۱)}}\frac{\frac{x^۲}{y}}{\frac{x}{y}}=\frac{۱۰^۴}{۱۰^۲}\Rightarrow x=۱۰^۲\Rightarrow y=۱$$

از آن‌جا که مقادیر x و y به دست آمده قابل قبول هستند، آن‌ها را در عبارت داده شده جایگزین می‌کنیم.

$$\log_{۱۰}(x^۳y)=\log_{۱۰}(۱۰^۲)^۳=\log_{۱۰}۱۰^۶=۶$$

راه دوم:

$$\begin{cases}\log_{۱۰}x-\log_{۱۰}y=۲\\ ۲\log_{۱۰}x-\log_{۱۰}y=۴\end{cases}\xrightarrow[\text{بالایی از پایینی}]{\text{کم کردن رابطه}}\log_{۱۰}x=۲\Rightarrow\log_{۱۰}y=۰$$

$$\log_{۱۰}(x^۳y)=\log_{۱۰}x^۳+\log_{۱۰}y=۳\log_{۱۰}x+۰=۳\times۲=۶$$

۲۳۰ ۳

$$\log_{۱۰}(y+۲)=۱\Rightarrow y+۲=۱۰\Rightarrow y=۸\quad(*)$$
$$\log_{۱۰}\left[(y-x)(۴x+y)\right]=۲\Rightarrow(y-x)(۴x+y)=۱۰^۲\xrightarrow{(*)}(۸-x)(۲x+۸)=۱۰۰$$
$$\Rightarrow -۴x^۲+۲۴x+۶۴=۱۰۰\Rightarrow -۴\underbrace{(x^۲-۶x+۹)}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}=۰\Rightarrow(x-۳)^۲=۰\Rightarrow x=۳$$

با توجه به صورت مسأله، جواب‌های x و y قابل قبول می‌باشند.

۲۳۱ ۴ در تمام گزینه‌ها پایهٔ لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است، بنابراین چون در **گزینهٔ (۴)**، $\frac{۲}{۳}<۱$، پس $\log_{۱۰}\frac{۲}{۳}<۰$. اما سایر گزینه‌ها مثبت هستند، زیرا اعداد ۳، $\frac{۳}{۲}$ و ۲ همگی از ۱ بزرگ‌ترند، پس $\log_۳۲>۰$، $\log_{۱۰}\frac{۳}{۲}>۰$ و $\log_۲۲>۰$. در نتیجه **گزینهٔ (۴)** که منفی است از سایر گزینه‌ها کوچک‌تر است.

۲۳۲ ۱ اگر پایهٔ لگاریتم عددی بین صفر و یک باشد، هرچه جلوی لگاریتم بزرگ‌تر شود، لگاریتمش کوچک‌تر می‌شود. مثلاً $\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۰۰}>\log_{\frac{۱}{۲}}۱۰۰\Rightarrow\frac{۱}{۱۰۰}<۱۰۰$، پس **گزینهٔ (۱)** درست است. به همین ترتیب داریم $\log_{\frac{۱}{۲}}۳<\log_{\frac{۱}{۲}}۲\Rightarrow۳>۲$، یعنی **گزینهٔ (۴)** نادرست است. **گزینهٔ (۳)** نیز نادرست است، زیرا $\log_۳۵>\log_۳۳=۱=\log_۵۵>\log_۵۳$، یعنی $\log_۳۵>\log_۵۳$. به همین ترتیب **گزینهٔ (۲)** نیز نادرست است، زیرا داریم:

$$\left.\begin{matrix}۳>۱\xrightarrow{\text{پایهٔ }\frac{۱}{۲}<۱}\log_{\frac{۱}{۲}}۳<\log_{\frac{۱}{۲}}۱\Rightarrow\log_{\frac{۱}{۲}}۳<۰\\ ۱<۲\xrightarrow{\text{پایهٔ }۳>۱}\log_۳۱<\log_۳۲\Rightarrow۰<\log_۳۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\log_{\frac{۱}{۲}}۳<\log_۳۲$$

۲۳۳ ۴ **گزینهٔ (۱)** صحیح است، زیرا $\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}$ و داریم:

$$۲<۲^۲\xrightarrow{\text{پایهٔ }۳>۱}\log_۳۲<\log_۳۲^۲=\frac{۳}{۲}=\log_۴۸$$

گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا $\log_{۰/۱}۰/۱=۱=\log_{۰/۲}۰/۲$ و داریم:

$$۰/۱<۰/۹\xrightarrow{\text{پایهٔ }۰/۱<۱}\log_{۰/۱}۰/۱>\log_{۰/۱}۰/۹\Rightarrow\log_{۰/۲}۰/۲>\log_{۰/۱}۰/۹$$

گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۳}<\sqrt{۶}\xrightarrow{\sqrt{۵}>۱}\log_{\sqrt{۵}}\sqrt{۳}<\log_{\sqrt{۵}}\sqrt{۶}$$

گزینهٔ (۴) صحیح نیست، زیرا $\log_{۰/۷}۱=۰=\log_۵۱$ و داریم:

$$۰/۵<۱\xrightarrow{\text{پایهٔ }۰/۷<۱}\log_{۰/۷}۰/۵>\log_{۰/۷}۱=\log_۵۱$$

البته در **گزینهٔ (۴)** می‌توانستیم بگوییم از آن‌جا که ۰/۵ و ۰/۷ هر دو بین صفر و یک هستند، با توجه به درستنامه، $\log_{۰/۷}۰/۵>۰$ است که از $\log_۵۱=۰$ بزرگ‌تر می‌باشد.

@khanen_book

۲۳۴ ۴ می‌دانیم $\log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$، داریم:

$$\log_{\frac{2}{3}} x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{جهت علامت عوض می‌شود}]{\text{از پایه} < 1} x > \frac{2}{3}$$

تنها $\frac{3}{4}$ (**گزینهٔ (۴)**) در بین گزینه‌های داده شده بزرگ‌تر از $\frac{2}{3}$ می‌باشد.

۲۳۵ ۱ می‌دانیم $\log_2 2^{-2} = -2$، بنابراین:

$$\log_2(2x-1) > \log_2 2^{-2} \Rightarrow \log_2(2x-1) > \log_2 \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{از پایه} > 1} 2x-1 > \frac{1}{4} \Rightarrow 2x > \frac{5}{4} \Rightarrow x > \frac{5}{8} \quad (1)$$

هم‌چنین عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، بنابراین داریم:

$$2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x > \frac{5}{8}$$

۲۳۶ ۲ می‌دانیم $0/5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$، بنابراین:

$$\log_{2^{-1}} x - \log_2(x-1) > -1 \Rightarrow -\log_2 x - \log_2(x-1) > -1 \xrightarrow{\times(-1)} \log_2 x + \log_2(x-1) < 1$$

$$\Rightarrow \log_2(x(x-1)) < \log_2 2 \xrightarrow{\text{از پایه} > 1} x(x-1) < 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \quad (1)$$

هم‌چنین عبارات جلوی لگاریتم باید مثبت باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x > 0 & (2) \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 & (3) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \cap (3) = (1, 2)$$

۲۳۷ ۲ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. داریم:

$$\log_{10} \frac{x-1}{2} \geq 0 \Rightarrow \log_{10} \frac{x-1}{2} \geq \log_{10} 1 \xrightarrow{\text{از پایه} > 1} \frac{x-1}{2} \geq 1 \xrightarrow{\times 2} x-1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (1) \cap (2) = [3, +\infty)$$

$$\frac{x-1}{2} > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (2) \Rightarrow \text{عبارت جلوی لگاریتم مثبت}$$

۲۳۸ ۴

$$1 - \log_{10}(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log_{10}(x-1) \leq 1 \Rightarrow \log_{10}(x-1) \leq \log_{10} 10 \xrightarrow{\text{از پایه} > 1} x-1 \leq 10 \Rightarrow x \leq 11 \quad (1)$$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$: شرط مثبت بودن عبارت جلوی لگاریتم (2)

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 1 < x \leq 11 \Rightarrow D_f = (1, 11]$$

۲۳۹ ۳

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \xrightarrow{0<a<1} \log_a(x^2+1) \leq \log_a 1 \Rightarrow \log_a(x^2+1) \leq 0 \Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0]$$

۲۴۰ ۳

یادآوری اگر $x > 0$، آن‌گاه: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

$$f(x) = \log_8\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right) = \log_8\left(\frac{x^4}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \log_8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \xrightarrow[\log_8 \text{ می‌گیریم.}]{\text{از دو طرف}} \log_8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \geq \log_8 2 \Rightarrow f(x) \geq \log_{2^3} 2 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3} \Rightarrow R_f = [\frac{1}{3}, +\infty)$: طبق یادآوری

۲۴۱ ۳ برای این‌که معادله دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta > 0$ باشد.

$$\Delta = 4 - 4\log_{\frac{1}{2}}(1-m) > 0 \Rightarrow 4\log_{\frac{1}{2}}(1-m) < 4 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(1-m) < 1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(1-m) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{0<\text{پایه}<1} 1-m > \frac{1}{2} \Rightarrow m < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1-m > 0 \Rightarrow m < 1 \quad (2) \Rightarrow \text{جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.}$$

$$\Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

۲۴۲ ۲ عدد N بزرگ‌تر از ۱۷ و کوچک‌تر از ۶۰ است. پس قطعاً N بزرگ‌تر از $2^4 = 16$ و کوچک‌تر از $2^6 = 64$ است. علت انتخاب ۱۶ و ۶۴ این است که این اعداد از خانوادهٔ توانی ۲ هستند و با توجه به فرض مسأله، باید از این اعداد لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم.

$$17 < N < 60 \Rightarrow 16 < N < 64 \Rightarrow \log_2 2^4 < \log_2 N < \log_2 2^6 \Rightarrow 4 < \log_2 N < 6$$

۲۴۳ ۳ می‌دانیم که عدد ۶۲۶ بین اعداد ۶۲۵ (یعنی 5^4) و 5^5 می‌باشد، بنابراین:

$$5^4 < 626 < 5^5 \xrightarrow[\text{مبنای ۵ می‌گیریم.}]{\text{از طرفین لگاریتم در}} \log_5 5^4 < \log_5 626 < \log_5 5^5 \Rightarrow 4 < \log_5 626 < 5$$

@khaneh_book

۲۴۴ ۳

$$A = \log_{(x-2)}(9x^2 - 36x + 38) \xrightarrow{x=5} \log_{(5-2)}[9(5)^2 - 36(5) + 38] = \log_3 83$$

حال می‌دانیم که عدد ۸۳ بین اعداد ۸۱ (یعنی 3^4) و 3^5 می‌باشد، بنابراین:

$$3^4 < 83 < 3^5 \xrightarrow[\text{مبنای ۳ می‌گیریم.}]{\text{از طرفین، لگاریتم در}} \log_3 3^4 < \log_3 83 < \log_3 3^5 \Rightarrow 4 < \log_3 83 < 5$$

توجه کنید که پایه، یعنی ۳ از ۱ بزرگ‌تر بود، در نتیجه با گرفتن لگاریتم در مبنای ۳ جهت نامساوی تغییر نکرد.

۲۴۵ ۴

$$-2 < \log_{10} 0/00506 < 0/001 \Rightarrow \log_{10} 0/001 < \log_{10} 0/00506 < \log_{10} 0/01 \Rightarrow -3 < \log_{10} 0/00506 < 0/01 < 0/00506 < 0/001$$

سؤال دانش‌پژوه (گیارش پیروزفواه): **ببخشید، من متوجه نشدم که چرا $0/01 > 0/00506 > 0/001$ شد؟**

پاسخ: برای آن‌که متوجه بشیم $0/00506$ بین کدام دو عدد اعشاری است، همیشه اولین عدد غیر از صفر بعد از صفرهای ممیز رو در نظر می‌گیریم، یعنی عدد $0/00506$ رو به صورت $0/005$ در نظر می‌گیریم و از بقیهٔ ارقام صرف‌نظر می‌کنیم که در این صورت $0/00506$ بین $0/001$ و $0/01$ قرار می‌گیره. برای مثال $0/027$ رو به صورت $0/02$ در نظر می‌گیریم که در این صورت $0/02$ بین $0/01$ و $0/1$ قرار می‌گیره.

۲۴۶ ۴

$$\log_{10}(10^8 a) = \log_{10} 10^8 + \log_{10} a = 0/7137 \Rightarrow 8 + \log_{10} a = 0/7137 \Rightarrow \log_{10} a = -7/2887$$

$$\Rightarrow a = 10^{-7/2887} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} = (10^{-7/2887})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = 10^{-2/4229} \Rightarrow 10^{-3} < \sqrt[3]{a} < 10^{-2}$$

۲۴۷ ۲

می‌دانیم که عدد $128/15$ بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ می‌باشد، بنابراین:

$$10^2 < 128/15 < 10^3 \xrightarrow[\text{مبنای ۱۰ می‌گیریم.}]{\text{از طرفین، لگاریتم در}} \log_{10} 10^2 < \log_{10} 128/15 < \log_{10} 10^3 \Rightarrow 2 < \log_{10} 128/15 < 3 \Rightarrow n = 2$$

۲۴۸ ۳

$$3^{-x} < 10^{-6} \xrightarrow{\text{دو طرف را وارون می‌کنیم.}} 3^x > 10^6 \Rightarrow \log_{10} 3^x > \log_{10} 10^6 \Rightarrow x \log_{10} 3 > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{\log_{10} 3}$$

$$\Rightarrow x > \frac{6}{0/301} \Rightarrow x > 19/933$$

حال چون می‌خواهیم شرط تست تا دو رقم اعشار برقرار باشد، بنابراین کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشار ۱۹/۹۴ می‌شود.

۲۴۹ ۲

$$f(x) = k \times 3^x \xrightarrow[\text{مستقل } (x)]{\text{افزودن ۴ واحد به متغیر}} f(x+4) = k \times 3^{x+4} = k \times 3^x \times 3^4 = 81 \underbrace{k \times 3^x}_{f(x)} \Rightarrow f(x+4) = 81 f(x)$$

۸۱ برابر

۲۵۰ ۳

یادآوری نمودار تابع $g(x) = -f(x)$ با قرینه کردن نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها حاصل می‌شود.

$$y = -(3^{-2x+2}) = -\left((3^{-2})^x \times 3^2\right) = -\left(\left(\frac{1}{27}\right)^x \times 9\right) = -9 \times \left(\frac{1}{27}\right)^x$$

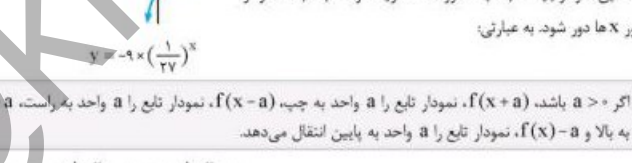
$y = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ $\qquad$ $y = -9 \times \left(\frac{1}{27}\right)^x$

بنابراین حالت کلی تابع به صورت $y = ka^x$ می‌باشد که $k = -9$ و $a = \frac{1}{27}$ هستند. چون $0 < a < 1$، نمودار تابع $f(x) = a^x$ به صورت مقابل می‌باشد و چون $k = -9 < 0$، این نمودار باید نسبت به محور xها قرینه و نسبت به نمودار قبلی کمی از محور xها دور شود. به عبارتی:

۲۵۱ ۱

یادآوری اگر $a > 0$ باشد، $f(x+a)$، نمودار تابع را a واحد به چپ، $f(x-a)$، نمودار تابع را a واحد به راست، $f(x)+a$، نمودار تابع را a واحد به بالا و $f(x)-a$، نمودار تابع را a واحد به پایین انتقال می‌دهد.

$$y = 2 - 5^{-x} \Rightarrow y = 2 - \left(\frac{1}{5}\right)^x \Rightarrow y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$$

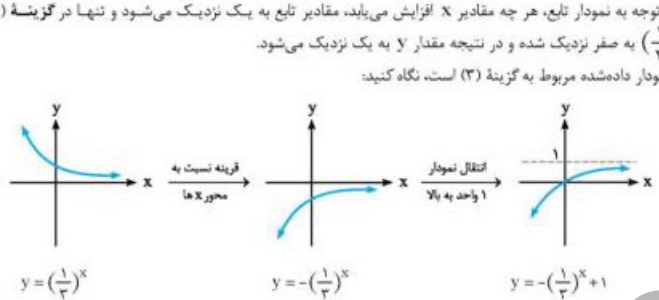


$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\qquad$ $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\qquad$ $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$

@khanen_book

۲۵۲ ۳ **راه اول:** با توجه به نمودار تابع، هر چه مقادیر x افزایش می‌یابد، مقادیر تابع به یک نزدیک می‌شود و تنها در **گزینهٔ (۳)** با افزایش x، مقدار $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ به صفر نزدیک شده و در نتیجه مقدار y به یک نزدیک می‌شود.

راه دوم: نمودار داده‌شده مربوط به گزینهٔ (۳) است، نگاه کنید:



$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$

به عنوان تمرین نمودارهای سایر گزینه‌ها را رسم کنید.

۲۵۳ ۴ تابع نمایی $y=a^{x+b}$ همواره تابعی یک‌به‌یک است.

بقیهٔ گزینه‌ها نمی‌توانند همواره یک‌به‌یک باشند. **گزینهٔ (۱)** به ازای $a=0$ به تابعی ثابت تبدیل می‌شود و **گزینه‌های (۲) و (۳)** نیز که به ترتیب توابعی ثابت و درجه دو هستند که یک‌به‌یک نمی‌باشند.

۲۵۴ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تابع $y=2^{2x}$ را به صورت $y=(2^2)^x=16^x$ می‌نویسیم. می‌دانیم توابع نمایی با توجه به نمودار آن‌ها، یک‌به‌یک هستند. پس تابع نمایی $y=16^x$ یک‌به‌یک است.

گزینهٔ (۲): توابع نمایی $y=a^x$ همواره مثبت هستند. (زیرا نمودار آن‌ها همواره بالای محور xها قرار دارد.) پس $y=|\underbrace{2^x}_{+}|=2^x$. بنابراین با توجه به یک‌به‌یک بودن توابع نمایی، این تابع هم یک‌به‌یک است.

گزینهٔ (۳): تابع $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$، قرینهٔ نمودار تابع نمایی $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ نسبت به محور xها است و چون تابع نمایی $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ یک‌به‌یک است، پس قرینهٔ آن نسبت به محور xها نیز یک‌به‌یک می‌باشد.

گزینهٔ (۴): به ازای مثلاً $x=1$ و $x=-1$ داریم:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=2^{|1|}=2 \\ x=-1 \Rightarrow f(-1)=2^{|-1|}=2 \end{cases} \Rightarrow$$

به‌ازای دو مقدار مختلف x، یک مقدار برای y به دست آمد، پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۵۵ ۱ با توجه به شکل، نمودار تابع $y=a^{x-1}+b$ از انتقال نمودار تابع نمایی $y=a^{x-1}$ به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ واحد به سمت بالا، حاصل شده است، بنابراین $b=\frac{1}{2}$ می‌باشد. داریم:

$$y=a^{x-1}+\frac{1}{2} \xrightarrow[f(0)=1]{\text{تابع از نقطهٔ }(0,1)\text{ می‌گذرد.}} 1=a^{-1}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2 \Rightarrow a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

۲۵۶ ۴

$$f(x)=3^x \xrightarrow[x \to x+3]{\text{انتقال نمودار سه واحد به چپ}} f(x+3)=3^{x+3} \xrightarrow[g(x)=f(x+3)-2]{\text{انتقال تابع ۲ واحد به پایین}} g(x)=3^{x+3}-2=3^3\times 3^x-2=27\times 3^x-2$$

۲۵۷ ۴

$$y=9\times 3^{x-1}=3^2\times 3^{x-1}=3^{x+1} \xrightarrow[x \to x+2]{\text{انتقال نمودار دو واحد به چپ}} y=3^{x+2+1}=3^{x+3} \xrightarrow{\text{انتقال نمودار سه واحد به پایین}} y=3^{x+3}-3$$

سؤال (دانش‌پژوه (هلال شریف‌زاده)) **ببخشید، چطور فهمیدین باید اون ۹ رو 3^2 بنویسین؟**

پاسخ: کلکه می‌خواستیم به تابع $3^{x+3}-3$ برسیم که توی اون عدد ۳ ضریب نداره، پس بهتر دیدم اول ۹ رو به صورت 3^2 بنویسم و سپس به قاطر یکی بودن پایه‌ها، توان‌ها رو با هم جمع کنم تا به قیافهٔ تابع خواسته‌شده برسم. شما هم چند بار روی این نوع تست‌ها تمرین کنین راه می‌افتین.

۲۵۸ ۳ وقتی نمودارهای دو تابع دقیقاً بر روی یک‌دیگر منطبق می‌شوند یعنی ضابطه‌های آن‌ها با هم برابر است.

$$y_1=y_2 \Rightarrow f(x-2)=25f(x) \xrightarrow{f(x)=a^x} a^{x-2}=25\times a^x \Rightarrow \frac{a^x}{a^2}=25\times a^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}=25 \xrightarrow{\text{معکوس کردن دو طرف}} a^2=\frac{1}{25} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{5} \xrightarrow[a>0]{f(x)\text{ نمایی است.}} a=\frac{1}{5}$$

@khaneh_book

$$y=-(\sqrt{۳^{-۱}})^{۴x}=-(۳^{-\frac{۱}{۲}})^{۴x}=-۳^{-۲x}=-۹^{-x}$$

۲۵۹ ۳ حال با بررسی گزینه‌ها باید ببینیم کدام گزینه برابر -۹^{-x} می‌شود:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$y=(\frac{۱}{۹})^{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=(\frac{۱}{۹})^{-x}=(۹^{-۱})^{-x}=۹^{x} \quad \times$$

گزینهٔ (۲):

$$y=(\frac{۱}{۹})^{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=(\frac{۱}{۹})^{-x} \xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-(\frac{۱}{۹})^{-x}=-(۹^{-۱})^{-x}=-۹^{x} \quad \times$$

گزینهٔ (۳):

$$y=۹^{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=۹^{-x} \xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-۹^{-x} \quad \checkmark$$

سؤال دانش‌پژوه (امین قاسمی)، آقا تو این سؤال فرقی می‌کرد که اول نسبت به محور xها و بعد نسبت به محور yها قرینه می‌کردیم؟

پاسخ: نه!

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌ابریافی)، آقا ببخشید، میشه جان هر کی دوست دارید یه کم بیشتر توضیح بدین؟!

پاسخ: بله، ببین:

$$y=۹^{x} \xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-۹^{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=-۹^{-x}$$

دیدی که نتیجه یکی شد، پس فرقی نمی‌کنه اول نسبت به کدوم محور قرینه کنی.

گزینهٔ (۴):

$$y=۹^{x} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=۹^{-x} \quad \times$$

۲۶۰ ۱ پس از ۴ ساعت ($t=۴$)، وزن ماده، $\frac{۱}{۱۶}$ وزن مادهٔ اولیه شده است (یعنی: $\frac{۱}{۱۶}T_۰$). پس به ازای $t=۴$ داریم:

$$T_t=T_۰a^{t} \xrightarrow{t=۴} T_۴=T_۰a^{۴} \xrightarrow{T_۴=\frac{۱}{۱۶}T_۰} \frac{۱}{۱۶}T_۰=T_۰a^{۴} \Rightarrow a^{۴}=\frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۲}$$

۲۶۱ ۱ ضابطهٔ تکثیر سلول‌ها را به صورت کلی $A_t=A_۰a^{t}$ در نظر بگیرید که $A_۰$ تعداد اولیهٔ آن‌ها و A_t تعداد آن‌ها پس از t ساعت می‌باشد. پس از ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۱۲ تا و پس از ۴ ساعت ۴۸ تا شده است. لذا داریم:

$$\begin{cases} t=۲ \Rightarrow A_۲=A_۰a^{۲} \Rightarrow ۱۲=A_۰a^{۲} \\ t=۴ \Rightarrow A_۴=A_۰a^{۴} \Rightarrow ۴۸=A_۰a^{۴} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم رابطهٔ پایینی بر بالایی}} ۴=a^{۲} \xrightarrow{a>۰} a=۲ \xrightarrow{۱۲=A_۰a^{۲}} A_۰=۳$$

پس ضابطهٔ A_t به صورت $A_t=۳\times ۲^{t}$ می‌باشد. برای محاسبهٔ تعداد آن‌ها پس از یک ساعت $t=۱$ قرار می‌دهیم.

$$A_۱=۳\times ۲^{۱} \Rightarrow A_۱=۳\times ۲=۶$$

۲۶۲ ۴ پس از ۲ ساعت جرم آن‌ها ۳ برابر شده است، لذا داریم:

$$A_t=A_۰a^{t} \xrightarrow[t=۲]{A_۲=۳A_۰} ۳A_۰=A_۰a^{۲} \Rightarrow a^{۲}=۳ \xrightarrow{a>۰} a=\sqrt{۳} \Rightarrow A_t=A_۰(\sqrt{۳})^{t}$$

پس از ۳ ساعت داریم:

$A_۳=A_۰\sqrt{۳}^{۳} \Rightarrow A_۳=\sqrt{۲۷}A_۰ \Rightarrow$ پس جرم باکتری‌ها، $\sqrt{۲۷}$ برابر می‌شود.

۲۶۳ ۲ $A_۱$ سرمایهٔ مشتری پس از t سال است. چون پس از ۳ سال شرکت ۲۰ میلیون سود می‌دهد، سرمایهٔ اولیه بعد از سه سال به $۴۰+۲۰=۶۰$ میلیون تومان افزایش می‌یابد.

$$A_۳=A_۰\times B^{۳} \Rightarrow ۶۰=۴۰\times B^{۳} \Rightarrow B^{۳}=\frac{۳}{۲} \quad (*)$$

سؤال دانش‌پژوه (الهام زند)، آقا ببخشید، نباید به جای ۶۰، ۲۰ رو قرار بدیم؟

پاسخ: نه! دقت کنید گفته $A_۱$ سرمایه پس از t ساله! پس باید مقدار سرمایه بعد از سه سال رو به جای $A_۱$ قرار بدی که ۶۰ میلیون می‌شه

ادامهٔ حل رو ببین:

پس از ۶ سال داریم:

$$A_۶=۴۰\times B^{۶} \Rightarrow A_۶=۴۰\times (B^{۳})^{۲} \xrightarrow{(*)} A_۶=۴۰\times (\frac{۳}{۲})^{۲}=۴۰\times \frac{۹}{۴}=۹۰$$

پس سرمایه‌گذار پس از ۶ سال ۹۰ میلیون تومان می‌شود. چون ۴۰ میلیون تومان آن، سرمایه‌گذاری اولیهٔ خود وی بوده است، بنابراین سود برابر $۵۰=۴۰-۹۰$ میلیون تومان می‌شود.

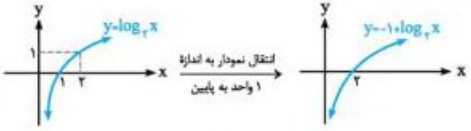
@khaneh_book

۲۶۴ ۳ پس از t ساعت وزن باکتری‌های نوع اول $n(۴/۵^t)$ و وزن باکتری‌های نوع دوم $n(۲^t)$ برابر می‌شوند. پس نسبت وزن آن‌ها بعد از ۲/۵ ساعت برابر است با:

$$\frac{n(۴/۵)^{۲/۵}}{n(۲)^{۲/۵}} = \left(\frac{۴/۵}{۲}\right)^{۲/۵} = \left(\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۲}{۱}}\right)^{۲/۵} = \left(\frac{۹}{۴}\right)^{\frac{۵}{۲}} = \left[\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}\right]^{\frac{۵}{۲}} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۵} = \frac{۲۴۳}{۳۲}$$

۲۶۵ ۲ **راه اول:** چون عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس دامنهٔ تابع $x > ۰$ می‌باشد. لذا **گزینه‌های (۲) و (۴)** که به ترتیب دامنه را $x > ۱$ و $x > -۱$ نشان می‌دهند، نادرست‌اند. هم‌چنین با توجه به تعریف تابع لگاریتمی $\log_۲ ۱ = ۰$ می‌شود، لذا $f(۱) = -۱ + \log_۲ ۱ = -۱$ می‌باشد. پس **گزینهٔ (۱)** که $f(۱)$ را صفر نشان می‌دهد نادرست است و **گزینهٔ (۳)** صحیح است.

راه دوم: نمودار $y = \log_۲ x - ۱$ با انتقال نمودار $y = \log_۲ x$ به اندازهٔ ۱ واحد به پایین حاصل می‌شود.



۲۶۶ ۱ **راه اول:** دامنهٔ تابع به صورت $x - ۲ > ۰$ یا $x > ۲$ می‌باشد. پس **گزینه‌های (۳) و (۴)** نادرست‌اند، زیرا در آن‌ها دامنه $x > -۲$ است. هم‌چنین چون مبنا بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد، حالت کلی نمودار به صورت افزایشی است، پس **گزینهٔ (۱)** صحیح است.

راه دوم: نمودار $y = \log_{۱۰}(x - ۲)$ از انتقال ۲ واحد به راست نمودار $y = \log_{۱۰} x$ حاصل می‌شود. بنابراین داریم:

۲۶۷ ۱ با توجه به نمودار $y(-۱) = ۰$ می‌باشد. لذا باید داشته باشیم:

$$x = -۱ \Rightarrow \log_{۰/۵}(-۱ + a) = ۰ \Rightarrow -۱ + a = ۱ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow y = \log_{۰/۵}(x + ۲)$$

دامنهٔ تابع لگاریتمی $y = \log_{۰/۵}(x + ۲)$ به صورت $x + ۲ > ۰$ یا $x > -۲$ می‌باشد. لذا معادلهٔ خط‌چین عمودی به صورت $x = -۲$ می‌باشد. پس $k = -۲$. لذا $k + a = -۲ + ۲ = ۰$.

۲۶۸ ۳ با توجه به این‌که $۰ < a < ۱$ و $b > ۱$ می‌باشد، نمودار $y_۱$ تابعی کاهشی و نمودار $y_۲$ تابعی افزایشی می‌باشد. پس **گزینهٔ (۱)** که در آن $y_۱$ تابعی افزایشی است نادرست است. هم‌چنین به ازای $x = ۰$، $y_۲ = \log_b ۱ = ۰$ می‌شود، لذا $y_۲$ از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد. ($y_۲$ محور طول‌ها را در $x = ۰$ قطع می‌کنند.) لذا **گزینهٔ (۳)** صحیح است.

۲۶۹ ۳ به کمک انتقال تابع $y = \log_{\frac{۱}{۵}} x$ پاسخ را می‌یابیم:

۲۷۰ ۴

$$g(x) = \log_{\frac{۱}{۳}} x = \log_{۳^{-۱}} x = -\log_۳ x = -f(x)$$

چون $g(x) = -f(x)$، لذا این دو تابع نسبت به محور xها قرینهٔ یک‌دیگرند.

۲۷۱ ۲ با قرار دادن $M = ۶/۴$ در فرمول داده‌شده داریم:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۴) = ۱۱/۸ + ۹/۶ = ۲۱/۴ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۴}$$

۲۷۲ ۴

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow \log ۱۰^{۱۶/۳} = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow ۱۶/۳ = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow ۴/۵ = ۱/۵M \Rightarrow M = ۳$$

@khanen_book

۲۷۳ **۳** فرض کنید انرژی آزاد شدهٔ زلزلهٔ کوچک‌تر E_1 و بزرگ‌تر E_2 و شدت زلزلهٔ کوچک‌تر M_1 و بزرگ‌تر M_2 باشند. داریم:

$$\begin{cases}\log E_1 = 11/8 + 1/5M_1 \\ \log E_2 = 11/8 + 1/5M_2\end{cases} \xrightarrow[\text{از یکدیگر}]{\text{کم کردن بالایی}} \log E_2 - \log E_1 = (11/8 + 1/5M_2) - (11/8 + 1/5M_1)$$

$$\Rightarrow \log\frac{E_2}{E_1} = 1/5M_2 - 1/5M_1 \xrightarrow{\frac{E_2}{E_1}=25\sqrt{5}} \log 25\sqrt{5} = 1/5(M_2 - M_1)$$

$$\Rightarrow M_2 - M_1 = \frac{\log(5^2 \times 5^{\frac{1}{2}})}{1/5} = \frac{\log 5^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}\log 5}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}\log 5$$

اما می‌دانیم $\log 5 = 1 - \log 2$. بنابراین $\log 5 = 1 - 0/3 = 0/7$ می‌شود. با جایگذاری این عدد در کسر آخر داریم:

$$M_2 - M_1 = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{3} \times \frac{7}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{7}{6}$$

۲۷۴ **۲** فرض کنید مبلغ مورد نظر در ابتدا A باشد. پس از یک سال مبلغ $1/12A$، پس از ۲ سال مبلغ $(1/12)^2 A$ و به همین ترتیب پس از T سال مبلغ $(1/12)^T A$ شده است. حال فرض کنید پس از T سال مبلغ ۲ برابر شده است. داریم:

$$2A = (1/12)^T A \Rightarrow 2 = (1/12)^T \xrightarrow[\text{در مبنای ۱۰ می‌گیریم}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} \log_{10} 2 = \log_{10}(1/12)^T \Rightarrow \log_{10} 2 = T\log_{10}\left(\frac{28}{25}\right)$$

$$\Rightarrow \log_{10} 2 = T(\log_{10}(2^2 \times 7) - \log_{10} 5^2) \Rightarrow \log_{10} 2 = T(2\log_{10} 2 + \log_{10} 7 - 2\log_{10} 5)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 2 + \log_{10} 7 - 2(1 - \log_{10} 2)} = \frac{0/3010}{4(0/3010) + 0/8451 - 2} = \frac{0/3010}{0/0491} = \frac{3010}{491} \simeq 6$$

۲۷۵ **۳** فرض کنید جمعیت در ابتدا A باشد. پس از یک سال، جمعیت $1/02A$، پس از ۲ سال، جمعیت $(1/02)^2 A$ و به همین ترتیب پس از T سال، جمعیت $(1/02)^T A$ شده است. حال فرض کنید پس از T سال، جمعیت ۳/۱ برابر شده است. لذا داریم:

$$3/1A = (1/02)^T A \Rightarrow 3/1 = (1/02)^T \xrightarrow[\text{در مبنای ۱۰ می‌گیریم}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} \log_{10}\frac{31}{10} = \log_{10}(1/02)^T \Rightarrow \log_{10} 31 - \log_{10} 10 = T\log_{10}(1/02)$$

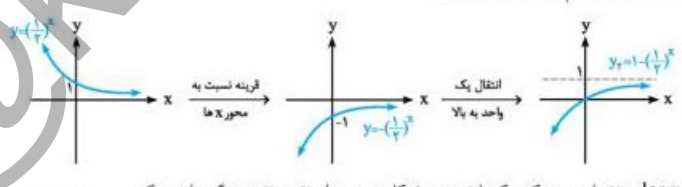
$$\Rightarrow 0/4902 = 0/0086T \Rightarrow T = \frac{0/4902}{0/0086} = \frac{4902}{86} = 57$$

بنابراین پس از ۵۷ سال، جمعیت ۳/۱ برابر می‌شود.

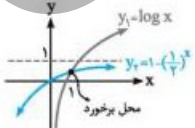
۲۷۶ **۲** ابتدا معادلهٔ مفروض را به صورت زیر مرتب کرده و سپس با رسم دو طرف تساوی، تعداد جواب‌ها را می‌یابیم.

$$\log x = 1 - 2^{-x} \Rightarrow \underbrace{\log x}_{y_1} = \underbrace{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}_{y_2}$$

ابتدا y_2 را به کمک نمودار $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ رسم می‌کنیم:



حال نمودار $y_1 = \log x$ را رسم می‌کنیم که با توجه به شکل دو نمودار y_1 و y_2 هم‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که طول محل برخورد آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. پس معادله تنها یک جواب بزرگ‌تر از ۱ دارد.



@khanehketab_book

فصل ۶

MATHEMATICS

حد و پیوستگی

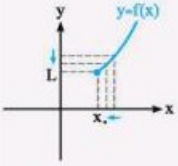
- درس اول: **فرایندهای حدی**
- درس دوم: **محاسبهٔ حد توابع**
- درس سوم: **پیوستگی**

@khanenook

درس‌نامه ۱

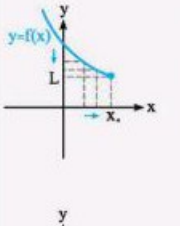
حد راست و حد چپ تابع

حد راست تابع: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (x_0, b) در سمت راست x_0 تعریف‌شده باشد. آن‌گاه گوییم حد راست تابع f در نقطهٔ x_0 برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

حد چپ تابع: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) در سمت چپ x_0 تعریف‌شده باشد، آن‌گاه گوییم حد چپ تابع f در نقطهٔ x_0 برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

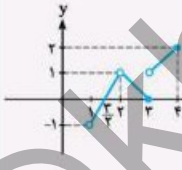
شرط وجود حد در یک نقطه

اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a, b) شامل x_0 (به جز احتمالاً در x_0) تعریف‌شده باشد، در این حالت، شرط وجود حد تابع در نقطهٔ x_0، اولاً وجود حدهای راست و چپ تابع در x_0 و ثانیاً برابری آن دو می‌باشد و برعکس اگر تابع f در x_0 دارای حدی برابر L باشد، آن‌گاه حدهای راست و چپ f در x_0 موجود و برابر L می‌باشند.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

(حد راست، حد چپ، حد)

مثال با توجه به نمودار مقابل، در مورد حد توابع در نقاط به طول‌های ۱، $\frac{۳}{۲}$، ۲، ۳ و ۴ بحث کنید.



پاسخ: $x = 1$: حد راست f در $x = 1$ برابر ۱- است ولی چون حد چپ در ۱، وجود ندارد. لذا تابع در $x = 1$، حد ندارد. هم‌چنین با توجه به نمودار، می‌فهمیم $f(1)$ وجود ندارد (تابع در $x = 1$ تعریف نشده است.)

$x = \frac{۳}{۲}$: مقدار تابع در $x = \frac{۳}{۲}$ برابر صفر است $\left(f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۰\right)$ و حدهای چپ و راست در این نقطه هر دو صفر هستند. پس حد تابع در $\frac{۳}{۲}$ برابر صفر است:

$$\lim_{x \to \frac{۳}{۲}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{۳}{۲}^-} f(x) = ۰ \Leftrightarrow \lim_{x \to \frac{۳}{۲}} f(x) = ۰$$

$x = ۲$: تابع در $x = ۲$ تعریف نشده است (نقطهٔ توخالی) ولی حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و هر دو برابر ۱ هستند، پس حد تابع در $x = ۲$ برابر یک است.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱ \Leftrightarrow \lim_{x \to ۲} f(x) = ۱$$

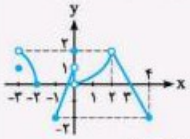
سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضی): آقا پس مقدار تابع توی $x = ۲$ کشکه؟

پاسخ: برای بررسی حد تابع f در نقطه‌ای مثل x_0، مقدار تابع توی x_0 هیچ کشکم نیست! اصلاً مهم نیست!

$x = ۳$: حد راست f در $x = ۳$ برابر ۱ و حد چپ برابر صفر است. لذا چون حدهای چپ و راست در $x = ۳$ با هم برابر نیستند. لذا تابع f در $x = ۳$ حد ندارد. هم‌چنین با توجه به نمودار $f(۳) = ۰$ است.

@khanehbook

$x=۴$: مقدار تابع در $x=۴$ برابر ۲ است $(f(۴)=۲)$ و حد چپ در آن ۲ می‌باشد ولی چون حد راست در $x=۴$ وجود ندارد، لذا تابع در $x=۴$، حد ندارد.



مثال با توجه به نمودار تابع f، حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x\to -۳} f(x)$ ب) $\lim_{x\to -۲} f(x)$ ج) $\lim_{x\to ۰} f(x)$ د) $\lim_{x\to ۲} f(x)$

پاسخ:

الف) $\lim_{x\to -۳} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to (-۳)^+} f(x)=۲ \\ \lim_{x\to (-۳)^-} f(x) \text{ وجود ندارد} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -۳} f(x)$ وجود ندارد

ب) $\lim_{x\to -۲} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to (-۲)^-} f(x)=۰ \\ \lim_{x\to (-۲)^+} f(x) \text{ وجود ندارد} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -۲} f(x)$ وجود ندارد

ج) $\lim_{x\to ۰} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰ \\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} f(x) \neq \lim_{x\to ۰^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)$ موجود نیست

د) $\lim_{x\to ۲} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲ \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$

۱- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ (a,b) باشد، کدام عبارت درست است؟

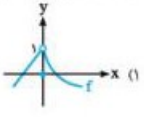
۱) تابع f در نقطهٔ c عضو دامنه‌اش حد دارد، هرگاه حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و برابر عدد حقیقی باشند.

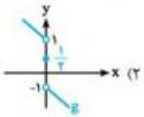
۲) اگر تابع f در نقطهٔ c عضو دامنه‌اش حد داشته باشد، آن‌گاه حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و با هم برابرند.

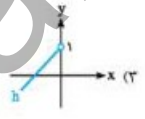
۳) تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد دارد، هرگاه حد راست تابع f در $x=a$ موجود و برابر عددی حقیقی باشد.

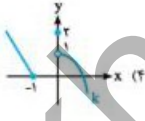
۴) تابع f در نقطهٔ $x=b$ حد دارد، هرگاه حد چپ تابع f در $x=b$ موجود و برابر عددی حقیقی باشد.

۲- کدام‌یک از توابع زیر در $x=۰$ حد دارد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳- با توجه به نمودار f، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\lim_{x\to ۳} f(x)$ وجود ندارد.

۲) $\lim_{x\to ۲} f(x)=۱$

۳) $\lim_{x\to ۱} f(x)=۱$

۴) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$

۴- با توجه به شکل مقابل $\lim_{x\to ۱^+} f(x) - \lim_{x\to (-۱)^-} f(x)$ کدام است؟

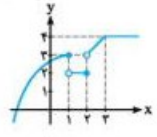
۱) ۲-

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۱

۵- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، حاصل $۲f(۳)+\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۱۴

۳) ۸

۴) ۱۲

@khanen_book

درسنامهٔ ۲

قضایای حد توابع

قضیهٔ ۱: حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر نقطهٔ دلخواه x_0 برابر c است. یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} c = c \quad (c \text{ عددی حقیقی و ثابت}) \xrightarrow{\text{مثال}} \lim_{x\to\sqrt{2}} 2 = 2$$

قضیهٔ ۲: حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر نقطهٔ دلخواه x_0 برابر x_0 است. یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 \xrightarrow{\text{مثال}} \lim_{x\to\frac{5}{8}} x = \frac{5}{8}$$

قضیهٔ ۳: توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در هر نقطهٔ دلخواه x_0 دارای حد هستند و داریم:

الف) $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

مثال: $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \overset{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha}{=\!=\!=} -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

مثال: $\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}} \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \overset{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha}{=\!=\!=} -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

قضیهٔ ۴: اگر توابع f و g، در x_0 حد داشته باشند و داشته باشیم $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2$، $(L_1, L_2 \in \mathbb{R})$، آن‌گاه داریم:

الف) $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

حاصل حد مجموع (تفاضل) چند تابع در x_0 برابر است با مجموع (تفاضل) حدهای آن توابع در x_0.

ب) $\lim_{x\to x_0}\big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x) = L_1.L_2$

حد حاصل‌ضرب چند تابع در x_0 برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن توابع در x_0.

ج) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2\neq 0)$

نتایج:

۱) $\lim_{x\to x_0} c f(x) = cL_1 \quad (c\in\mathbb{R})$

۲) $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L_1} \quad (L_1\neq 0)$

۳) $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^n = (L_1)^n \quad (n\in\mathbb{N})$

۴) حد تابع چندجمله‌ای $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+1$ در هر نقطهٔ دلخواه x_0 موجود و برابر با مقدار تابع در آن نقطه (یعنی $f(x_0)$) است. یعنی کافی است به جای همهٔ xها، عدد x_0 را قرار دهیم.

۵) حد تابع گویای کسری $f(x)=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+1}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots+1'}$ در نقطهٔ دلخواه x_0 به شرطی که x_0 ریشهٔ مخرج کسر نباشد، موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه (یعنی $f(x_0)$) است $(n,m\in\mathbb{N})$. یعنی کافی است به جای همهٔ xها، عدد x_0 را قرار دهیم! به همین راحتی 😊

۶) حد ریشه: اگر $\lim_{x\to x_0}(ax+b)=L>0$، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{ax+b} = \sqrt{\lim_{x\to x_0}(ax+b)} = \sqrt{L}$$

تذکر اگر $\lim_{x\to x_0}(ax+b)=L=0$ باشد (x_0 ریشهٔ تابع $f(x)=ax+b$ است.) آن‌گاه $\lim_{x\to x_0}\sqrt{ax+b}$ وجود ندارد. در این حالت فقط حد چپ یا فقط حد راست در x_0 وجود دارد.

@khanen_book

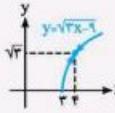
سؤال دانش‌پژوه (شهرام هدهدی): هاه! من که نفهمیدیم چی شد ... آقا میشه بیشتر توضیح بدین؟

پاسخ: باشه توضیح می‌دم؛ برای راحتی کار فرض کن می‌خوایم $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ رو به دست آوریم. چون $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ میشه، طبق نتیجهٔ (۶) می‌گیم که $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ وجود ندارد، پیا تابع $y=\sqrt{x-2}$ رو رسم کنیم و از روی نمودار بهت توضیح بدم؛

اگه به نمودار نگاه کنی می‌فهمی که فقط سمت راست $x=2$ نمودار وجود داره پس فقط هم راست در $x=2$ معنی داره که برابر $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=\sqrt{2-2}=0$ میشه ولی سمت چپ چون نمودار نداریم پس هم چپ در $x=2$ نداریم و در کل تابع در $x=2$ هم ندارد! البته نزومی نداره نمودار بکشی از روی دامنه فیلی راحت میشه فهمید! ببین دامنهٔ $y=\sqrt{x-2}$ برابر $x\geq 2$ برابر $x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$ میشه و معلومه که سمت چپ ۲ در دامنه نیست! پس هم چپ و در کل هم در ۲ وجود نداره! خالا شهرام مثال بعد و حل کن ببینیم فهمیدی چی شد ماجرا!

مثال حاصل $\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-9}$ را بیابید.

پاسخ:



$$\lim_{x\to 4}(3x-9)=3>0\Rightarrow\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-9}=\sqrt{\lim_{x\to 4}(3x-9)}=\sqrt{3}$$

مثال حاصل $\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-9}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 3}(3x-9)=0\Rightarrow\lim_{x\to 3^+}\sqrt{3x-9}\overset{\text{دامنه: } 3x-9\geq 0\Rightarrow x\geq 3}{=\!=\!=}\sqrt{3(3)-9}=0$$

در تابع $y=\sqrt{3x-9}$ با توجه به دامنهٔ $x\geq 3$ و نمودار آن، فقط حد راست در ۳ وجود دارد ولی حد چپ و در نتیجه حد در $x=3$ وجود ندارد!

محاسبهٔ حد توابع دارای جزءصحیح

در محاسبهٔ حد توابعی که شامل جزءصحیح هستند، قبل از هر کاری باید جزءصحیح را معنی کنید، یعنی با توجه به عددی که x به آن نزدیک می‌شود، مقدار عددی جزءصحیح را بیابید. برای این کار باید ببینید عبارت داخل جزءصحیح وقتی $x\to a$ می‌رود بین کدام دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ قرار می‌گیرد و به جای جزءصحیح، عدد صحیح کوچک‌تر یعنی k را قرار دهید و سپس حاصل حد را بیابید.

مثال

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]}{2x}\overset{\text{به جای }[x]\text{ عدد ۱ قرار می‌دهیم.}}{\overset{x\to 1^+:1<x<2\Rightarrow[x]=1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2(1)}=\frac{1}{2}$$

نکته اگر $f(x)$ تابعی دوضابطه‌ای به فرم $f(x)=\begin{cases}g(x) & ; \ x\geq a\\ h(x) & ; \ x<a\end{cases}$ باشد، برای محاسبهٔ حد راست تابع f در $x=a$ از ضابطهٔ بالایی (یعنی $g(x)$) و برای محاسبهٔ حد چپ تابع f در $x=a$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم. هم‌چنین مقدار تابع f در $x=a$ در صورت وجود برابر $g(a)$ است.

مثال اگر تابع دوضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}2ax+3 & ; \ x\geq 1\\ ax-2 & ; \ x<1\end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد، مقدار a را بیابید.

پاسخ: تابع f در $x=1$ دارای حد است، لذا حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر هستند. بنابراین با توجه به نکتهٔ فوق این حدود را محاسبه کرده و از برابر قرار دادن آن‌ها، a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2ax+3)=2a(1)+3=2a+3\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax-2)=a(1)-2=a-2\end{cases}\Rightarrow \text{حد راست}=\text{حد چپ}\Rightarrow 2a+3=a-2\Rightarrow a=-5$$

@khanen_book

۶- چه تعداد از توابع زیر در $x=1$ حد دارند؟

الف) $f(x)=1+\sqrt{x-1}$ ب) $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ ج) $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ د) $k(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ موجود نیست. ۲) $\lim_{x\to 5}\frac{1}{[x]-5}=-1$ ۳) $\lim_{x\to 2}([x]+[-x])=-1$ ۴) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ موجود نیست.

۸- تابع $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ در $x=1$:

۱) حد راست دارد ولی حد چپ ندارد. ۲) حد دارد.

۳) حد چپ دارد ولی حد راست ندارد. ۴) نه حد چپ دارد و نه حد راست.

۹- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+x & ; x>2\\ ax+b & ; x<2\end{cases}$ وقتی $x\to 2$، دارای حد است. آن‌گاه:

۱) $b=6-2a$ ۲) $b=6+2a$ ۳) $a=b-6$ ۴) $a=b+6$

۱۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & ; x\geq -1\\ 2x+1 & ; x<-1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ حد دارد؟ تجربی داخل ۸۰

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۱- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+a & ; x<-2\\ 3x+4 & ; x>-2\end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطهٔ $x=-2$، معکوس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟ تجربی خارج ۸۴

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) -۴ ۴) -۴/۵

۱۲- اگر $f(x)=\begin{cases}ax-1 & ; x<1\\ x^2+2a & ; x\geq 1\end{cases}$ و $\lim_{x\to 1^+}f(x)-\lim_{x\to 1^-}f(x)=-1$، مقدار a کدام است؟ ریاضی داخل ۸۶

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۱۳- تابع $f(x)=\begin{cases}(a+1)x+3 & ; x>-3\\ -2x^2+b & ; x<-3\end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x\to -1}f(x)=-1$ و $\lim_{x\to -4}f(x)$ باشد، حاصل $5a-b$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) -۲

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-3x|+a & ; x>1\\ \frac{ax}{2bx-1} & ; x<1\end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x\to 1}f(x)=6$ باشد، مقدار $f(-3)$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲ ۳) -۱۸ ۴) -۲

۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x^2-4a} & ; x\geq 2\\ x+b & ; -2\leq x<2\\ x^2+bx+3a & ; x<-2\end{cases}$ و تابع f در $x=-2$ دارای حد بوده و $\lim_{x\to 2^+}f(x)=2$ باشد، مقدار $a+b$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶- در تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & ; x\in\mathbb{Z}\\ 0 & ; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to 0^+}f(x)+\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-}f(x)$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۱

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases}ax^2-1 & , x\in\mathbb{Z}\\ x^2+ax+1 & , x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و $\lim_{x\to 1}f(x)=3$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 5}f(x)$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۴ ۴) ۸

@khanehketab

۱۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+a)[x]$، اگر $\lim_{x\to 2^+} f(x) - \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

۱۹- هرگاه $f(x)=x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{2}$، اختلاف حد چپ و راست تابع در $x=4$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰- حاصل $\lim_{x\to 1^-}(x+1)[\frac{1}{x+1}]$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۱- حاصل $\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}(x[x]+[\frac{x}{2}]-[3x])$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۲- اگر $f(x)=[x]+[-x]$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to\frac{3\sqrt{5}}{8}} f(x)+\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) $3+\sqrt{5}$

۲۳- حاصل $\lim_{x\to(-\frac{1}{5})^+}[\frac{1}{x}]$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۶- ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) ۶

۲۴- اگر تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ فقط در ۲ نقطهٔ صحیح ۱ و ۳ حد داشته باشد، آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲-

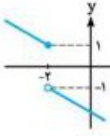
۲۵- در صورتی که $f(x-2)=\frac{2x+3}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 1}(f(x)+f(x-1))$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{13}{2}$ ۴) $\frac{13}{4}$

۲۶- اگر $f(\frac{x+1}{x-2})=x+2$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۷

۲۷- با توجه به نمودار f، حاصل $\lim_{x\to -2}|f(x)|$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱-
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

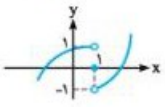
۲۸- با توجه به نمودار f، حاصل $\lim_{x\to(-1)^-} f(|x|)+\lim_{x\to(-1)^+}|f(x)|$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۹- با توجه به نمودار f، حاصل $\lim_{x\to -1}[f(x)]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲-
۲) ۲
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

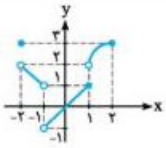
۳۰- با توجه به نمودار مقابل، حاصل $\lim_{x\to 1^+} f(\frac{1}{2x-1})$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) حد ندارد.

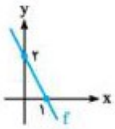
@khaneh_book

۳۱- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to 2^-} f\left(-\frac{x}{2}\right) + \lim_{x\to(-1)^+} f(x-1)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۳

۳۲- با توجه به نمودار f، حاصل $\lim_{x\to\frac{1}{4}} \sqrt{5+4f(f(x))}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) وجود ندارد.

۳۳- اگر $f(x)=ax+b$ و g دو تابع با دامنهٔ یکسان بوده که هر دو در نقطهٔ x_0 دارای حد باشند و داشته باشیم $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$، آن‌گاه چه تعداد از روابط زیر، همواره درست نمی‌باشند؟ $(L_1, L_2 \in \mathbb{R})$

الف) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ ب) $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L_1}$ ج) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1L_2$ د) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x)) = L_1 \pm L_2$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۴- اگر $f(x)=x^2-ax+2$ و $g(x)=ax+3$ باشد و حد تابع $f+g$ در $x=0$، برابر حد تابع $\frac{f}{g}$ در $x=1$ باشد، a کدام است؟ $(a\neq -3)$

۱) ۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) -۲

۳۵- اگر دو تابع f و g دامنهٔ یکسانی داشته و در نقطهٔ $x=2$ دارای حد باشند و داشته باشیم $\lim_{x\to 2} f(x)=5$ و $\lim_{x\to 2} g(x)=-3$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-3g(x)}{\sqrt{5f(x)}}$ کدام است؟

۱) $\frac{18}{5}$
۲) $-\frac{4}{5}$
۳) $\frac{14}{5}$
۴) -۶

۳۶- اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ; x\geq 2 \\ x & ; x<2 \end{cases}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 2} (f-g)(x)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۲
۳) -۵
۴) وجود ندارد.

۳۷- حاصل کدام‌یک از حدهای زیر نادرست است؟

۱) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin^2 x}{\cos x + 1} = \frac{1}{6}$
۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos 2x}{\tan^2 x} = 1$
۳) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3\tan x - \sin 2x}{x} = \frac{8}{\pi}$
۴) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x + \sin\frac{x}{2}}{2+\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}-2}{5}$

۳۸- حاصل کدام‌یک از حدهای زیر درست است؟

۱) $\lim_{x\to 4} \tan\frac{\pi x}{3} = -\sqrt{3}$
۲) $\lim_{x\to -1} \frac{x+2}{3x^2+4} \times \frac{|x+3|}{2x} = \frac{1}{7}$
۳) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{\cos x} = 0$
۴) $\lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{(-2x^2+1)^3}{x^2+1} = 9$

۳۹- اگر تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد داشته و $\lim_{x\to 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۳

۴۰- اگر $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)-2}{2f(x)+1} = 5$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2} \frac{1+\sqrt[3]{f(x)}}{f^2(x)+1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{5}$
۲) صفر
۳) -۱
۴) وجود ندارد.

@khaneh_book

حالت $\frac{\circ}{\circ}$ وقتی $x \to a$

برخی مواقع در محاسبهٔ حد توابع کسری $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x \to a$، حد توابع f و g در $x = a$ برابر صفر شده و به حالت $\frac{\circ}{\circ}$ می‌رسیم. در این حالت می‌گوییم آن حد مبهم است و برای محاسبهٔ حد باید عامل ابهام (عاملی که حد آن در $x = a$ برابر صفر می‌شود) را حذف کرده (رفع ابهام) و حاصل حد را به‌دست آوریم.

حالت $\frac{\circ}{\circ}$ در حد توابع کسری گویا

اگر توابع f و g چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ که به‌صورت مبهم $\frac{\circ}{\circ}$ است، ابتدا عامل ابهام $(x - a)$ را به کمک تجزیه و یا تقسیم توابع f و g بر $(x - a)$، در صورت و مخرج کسر ایجاد کرده و سپس $(x - a)$ را از صورت و مخرج کسر ساده می‌کنیم و در ادامه حاصل حد را به کمک قضیه‌های بیان شدهٔ حد به‌دست می‌آوریم.

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۲x}{x^۲ - ۳x + ۲}$ ب) $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{x^۲ + ۴x}{x^۲ - ۲x}$

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۲x}{x^۲ - ۳x + ۲} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow[\text{عامل ابهام } (x-۲)]{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x \to ۲} \frac{x(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)} = \lim\limits_{x \to ۲} \frac{x}{x-۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{x^۲ + ۴x}{x^۲ - ۲x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow[\text{عامل ابهام } x]{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x \to \circ} \frac{x(x+۴)}{x(x-۲)} = \lim\limits_{x \to \circ} \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{۴}{-۲} = -۲$

روش هم‌ارزی

الف) هم‌ارزی کم‌توان: در محاسبهٔ حد عبارات جبری به صورت $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots$ هرگاه متغیر x به سمت صفر میل کند، می‌توان فقط جمله‌ای از آن عبارت را نگه داشت که کم‌ترین توان را دارد و از سایر جمله‌ها صرف‌نظر نمود. بنابراین می‌توانیم مثال (ب) را به کمک هم‌ارزی فوق به‌صورت زیر حل کنیم:

$$\lim_{x \to \circ} \frac{x^۲ + ۴x}{x^۲ - ۲x} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow[\text{کم‌توان}]{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \to \circ} \frac{۴x}{-۲x} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

تذکر از روش‌های هم‌ارزی که در درسنامه‌ها بیان می‌شوند، در امتحان نمی‌توان استفاده نمود. زیرا خارج از کتاب درسی است. از این روش صرفاً جهت حل تست می‌توانید بهره بگیرید.

ب) هم‌ارزی برنولی: در محاسبهٔ حد عباراتی به فرم $(۱ \pm \square)^n$ در $x = a$، هرگاه عبارت $\square$ به سمت صفر میل کند، می‌توان از عبارت $(۱ \pm n\square)$ به جای آن استفاده کرد. یعنی:

$$(۱ \pm \square)^n \underset{x \to a}{\sim} ۱ \pm n\square \qquad \text{مثال: } (۱ \pm ۲x)^۳ \underset{x \to \circ}{\sim} ۱ \pm ۳(۲x)$$

مثال حاصل $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{(۱+۲x)^۲ - (۱+۳x)^۳}{x}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{x \to \circ} \frac{(۱+۲x)^۲ - (۱+۳x)^۳}{x} \xrightarrow[\text{هم‌ارزی برنولی}]{\div} \lim_{x \to \circ} \frac{۱+۲(۲x) - (۱+۳(۳x))}{x} = \lim_{x \to \circ} \frac{۱+۴x-۱-۹x}{x} = \lim_{x \to \circ} \frac{-۵x}{x} = -۵$$

محاسبهٔ حد توابع شامل دو کسر

اگر دو کسر داشته باشیم که مخرج هر دوی آن‌ها هنگام محاسبهٔ حد صفر شود، باید در صورت نیاز مخرج‌ها را تجزیه کرده، سپس بین کسرها مخرج مشترک بگیریم و کسر حاصل را تا حد امکان ساده کنیم. بعد از این کار، به یک کسر شسته و رفته می‌رسیم که آمادهٔ حدگیری است.

مثال حاصل حد $\lim\limits_{x \to ۱} \left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{x^۲-۱}\right)$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{x \to ۱} \left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{x^۲-۱}\right) \xrightarrow[\text{مشترک‌گیری}]{\text{مخرج}} \lim_{x \to ۱} \left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۲}{(x-۱)(x+۱)}\right) = \lim_{x \to ۱} \frac{x+۱-۲}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x \to ۱} \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$$

@khanen_book

۴۱- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-x}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) -3 ۴) $-\frac{1}{3}$

۴۲- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{4}$

۴۳- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) حد وجود ندارد.

۴۴- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

۴۵- حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-|x|}{x+|x|}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) وجود ندارد.

۴۶- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{|2x-4|-|2x+4|}{x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) وجود ندارد. ۴) -4

۴۷- مجموع حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}+x+1$ وقتی $x\to 1$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۸- حاصل $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-[x^2]}{x^2-[x^2]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۹- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{3x}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۰- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-(2x+1)^3}{3x}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{8}{3}$

۵۱- اگر حاصل حد $\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}$ وقتی $x\to 1$، برابر ۱ باشد، a کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۵۲- حد عبارت $\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^3+ax-4}$ وقتی $x\to 2$، عددی غیر صفر است. حد آن وقتی $x\to 6$، کدام است؟

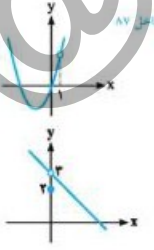
۱) $\frac{1}{54}$ ۲) $\frac{1}{350}$ ۳) $\frac{1}{98}$ ۴) $\frac{1}{196}$

۵۳- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x^3+ax+b}{x-1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) $(0,-4)$ ۲) $(-4,0)$

۳) $(-4,1)$ ۴) $(4,0)$

۵۴- اگر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} b & ;\ x=a \\ \frac{-x^2+cx+d}{x-a} & ;\ x\neq a \end{cases}$ به صورت مقابل باشد، آن‌گاه $\frac{a+b}{c+d}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

@khanen_book

۵۵- حاصل $\lim_{x\to 2}\left(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۶

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۶- حاصل $\lim_{x\to 2}\left(\frac{۱}{۴x-۸}-\frac{۱}{x^۲-۴}\right)$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۵

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۵۷- حد تابع $f(x)=\frac{۸}{x^۲-۴}-\frac{x}{x-۲}$ وقتی $x\to ۲$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۵۸- حد عبارت $\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲[x]}{۲-x}$، وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۵۹- حد عبارت $\left(\frac{x+۲}{x^۲+x}-\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}\right)$ وقتی $x\to ۰$، کدام است؟ ریاضی داخل ۸۲

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۰- حاصل $\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{۲x^۲+۵x+۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $-\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

درسنامهٔ ۴

حالت $\frac{۰}{۰}$ در حد توابع کسری دارای عبارات رادیکالی

برای محاسبهٔ حد در حالت $\frac{۰}{۰}$ در تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x\to a$، اگر حداقل یکی از توابع صورت و مخرج کسر دارای عبارات رادیکالی بوده و عامل ابهام $(x-a)$ موجود نباشد، کافی است $f(x)$ و $g(x)$ را در یک عامل ضرب کنیم به‌طوری که عبارات رادیکالی گویا شده و عامل ابهام $(x-a)$ ایجاد گردد. سپس با ساده کردن عامل ابهام از صورت و مخرج کسر، حد را محاسبه می‌کنیم.

تذکر معمولاً از دو اتحاد زیر برای گویا کردن عبارات رادیکالی استفاده می‌کنند:

اتحاد مزدوج: $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})=x-a$ یا $(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)=x-a^۲$

اتحاد چاق و لاغر: $(\sqrt[۳]{x}\mp\sqrt[۳]{a})(\sqrt[۳]{x^۲}\pm\sqrt[۳]{xa}+\sqrt[۳]{a^۲})=x\mp a$ یا $(\sqrt[۳]{x}\mp a)(\sqrt[۳]{x^۲}\pm\sqrt[۳]{x}a+a^۲)=x\mp a^۳$

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲-۱}$ ب) $\lim_{x\to ۵}\frac{۵-x}{\sqrt{۲x-۱}-۳}$ ج) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}$ (عامل ابهام: $x-۱$) $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲-۱}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ (اتحاد مزدوج) $=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-(\sqrt{x})^۲}{(x^۲-۱)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{(x^۲-۱)(x+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)x}{(x-۱)(x+۱)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{(x+۱)(x+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۲\times ۲}=\frac{۱}{۴}$

ب) $\lim_{x\to ۵}\frac{۵-x}{\sqrt{۲x-۱}-۳}=\frac{۰}{۰}$ (عامل ابهام: $x-۵$) $\lim_{x\to ۵}\frac{۵-x}{\sqrt{۲x-۱}-۳}\times\frac{\sqrt{۲x-۱}+۳}{\sqrt{۲x-۱}+۳}$ (اتحاد مزدوج) $=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{(\sqrt{۲x-۱})^۲-۳^۲}$ ($۲x-۱-۹=۲x-۱۰$)

$=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{۲(x-۵)}=\lim_{x\to ۵}\frac{-(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳$

@khanehbook

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}$ عامل لیهاند $(x-1)$ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

اتحاد مزدوج — اتحاد چاق و لاغر

$=\lim_{x\to 1}\frac{((\sqrt{x})^2-1^2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{((\sqrt[3]{x})^3-1^3)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\times 3}{(x-1)\times 2}=\frac{3}{2}$

تذکر در قسمت (ج) مثال فوق حد عامل ضربی $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$ در صورت و عامل ضربی $(\sqrt{x}+1)$ در مخرج در $x=1$، عددی غیر صفر است، لذا می‌توان حد آن‌ها را جداگانه حساب کرده و حاصل آن را در حد سایر عوامل ضرب نمود. بنابراین:

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}=\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{2}$

اتحاد مزدوج — اتحاد چاق و لاغر — عامل ضربی غیر صفر

از این روش برای حل قسمت‌های الف و ب مثال فوق نیز می‌توان استفاده نمود.

۶۱- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

۶۲- حد کسر $\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x}+x-2}$ وقتی $x\to 1$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{16}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۶۳- حد کسر $\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+x}$ وقتی $x\to 0$، برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۴- حد کسر $\frac{2x-\sqrt{5x+6}}{4-x^2}$ وقتی $x\to 2$، کدام است؟

۱) $-\frac{11}{2}$ ۲) $\frac{11}{2}$ ۳) $-\frac{11}{32}$ ۴) $\frac{11}{32}$

۶۵- حاصل $\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x^3+1}$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۰

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲- ۴) ۳

۶۶- حد کسر $\frac{x-\sqrt{2x}}{2x^2-x-6}$ وقتی $x\to 2$، چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{3}{28}$ ۳) $-\frac{3}{28}$ ۴) $\frac{1}{14}$

۶۷- حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}$، کدام است؟ مشابه تجربی داخل ۹۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۸- اگر $f(x-1)=\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-7x+10}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۶۹- اگر $f(3-x)=\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x^2-3x+2}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 3^+}f(x-1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

@khaneh_book

۷۰- حد کسر $\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+14}-2x}$ وقتی $x \to 2$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۷۱- حد عبارت $\frac{x-\sqrt{x+6}}{3-\sqrt{7+\sqrt{x+1}}}$ وقتی $x \to 3$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲- ۴) ۲۰-

۷۲- حد کسر $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^4+x^2-2}$ وقتی $x \to 1$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{18}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۶

۷۳- حاصل $\lim_{x\to -2} \frac{x-\sqrt[3]{3x-2}}{5x^2+9x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{2}{11}$ ۳) $-\frac{3}{44}$ ۴) $-\frac{5}{22}$

۷۴- حاصل $\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{x+4}-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۷۵- حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x-\sqrt{9x-5}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۴-

۷۶- حد عبارت $\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x \to 2^-$، کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۳

۷۷- حاصل $\lim_{x\to 3^-} \frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۷۸- حاصل $\lim_{x\to 2^+} \frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۳

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۷۹- حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^3}{\sqrt{-x^3+3x^2+1}-\sqrt{3x}}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۸۰- اگر $\lim_{x\to -3} \frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}} = 2$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

۸۱- اگر $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x+b}-2}{x} = a$ باشد که در آن a عددی حقیقی و مخالف صفر است، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۱- ۴) ۴-

۸۲- در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{b-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4}$، اگر $\lim_{x\to 2} f(x) = c$ باشد، آن‌گاه c کدام است؟ $(c \in \mathbb{R})$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

@khaneh_book

درسنامهٔ ۵

روش تغییر متغیر در محاسبهٔ حد

گاهی اوقات در محاسبهٔ حدها و به‌خصوص حدهای $\frac{0}{0}$، می‌توان با تعریف یک متغیر جدید، حد داده شده را به یک حد با ظاهری ساده‌تر تبدیل نمود که محاسبهٔ آن آسان‌تر است. انتخاب نوع متغیر جدید براساس ضابطهٔ تابع داده شده و نقطه‌ای که حد در آن خواسته شده، صورت می‌گیرد ولی به‌طور معمول در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$، می‌توان متغیر جدید t را به‌صورت $t = x - a$ انتخاب نمود که در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to 0} f(t+a) \quad : \quad x = t + a \,,\, x \to a \Rightarrow t \to 0$$

مثال حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 + 2(x-1)^3}{(x-1)^2 - (x-1)^3}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: برای محاسبهٔ حد فوق، فرض می‌کنیم $t = x - 1$، بنابراین داریم:

$$x = t + 1 \,,\, x \to 1 \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 + 2(x-1)^3}{(x-1)^2 - (x-1)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + 2t^3}{t^2 - t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2(1+2t)}{t^2(1-t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1+2t}{1-t} = 1$$

سؤال دانش‌پژوه (شهرام هدهدی)، آقا این کار چه به دردی می‌خوره آخه!

پاسخ: باز شروع کردی! به این دور که مقدمات رو آسون‌تر می‌کنه و قیافهٔ تابع رو ساده‌تر می‌کنه که تو ازش نترسی.

۸۳- حد کسر $\frac{(x-2)^5 + (x-2)^3}{3(x-2)^4 + 2(x-2)^3}$ وقتی $x \to 2$، برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{5}$

۸۴- حد کسر $\frac{(x-1)^4 + 2(x^2-1)}{(x^2-1)^4 + 3(x-1)}$ وقتی $x \to 1$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) ۱

۸۵- حد کسر $\frac{x + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$ وقتی $x \to 1^+$، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) صفر ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۸۶- حد عبارت $\frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^4 - 1}$ وقتی $x \to 1$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{16}$

۸۷- حد کسر $\frac{x^2 - 1 + \sqrt{(x-1)^3}}{x^3 - 1 + 2\sqrt{(x-1)^3}}$ وقتی $x \to 1^+$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

درسنامهٔ ۶

حالت $\frac{0}{0}$ در حد توابع کسری دارای نسبت‌های مثلثاتی

برای محاسبهٔ حد در حالت $\frac{0}{0}$ در حد تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x \to a$، اگر حداقل یکی از عبارات صورت و مخرج کسر شامل نسبت‌های مثلثاتی sin، cos، tan و یا cot باشند، ابتدا با استفاده از روابط و اتحادهای مثلثاتی، کسر داده شده را آن‌قدر ساده کرده تا عامل لهام (یعنی عامل صفرشونده) در آن‌ها ظاهر گردد. سپس با حذف عامل لهام، حد را محاسبه می‌کنیم. برخی از روابط مهم مثلثاتی که در این قسمت مورد استفاده قرار می‌گیرند، به شرح زیر هستند:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad (\cos x \pm \sin x)^2 = 1 \pm 2\sin x \cos x$$

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$

ب) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sqrt{1 - 2\sin x \cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

@khaneh_book

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1+\cos\pi}{\sin\pi}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}\times\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x(1-\cos 2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x(1-\cos 2x)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{\sin\pi}{1-\cos\pi}=\frac{0}{1-(-1)}=\frac{0}{2}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{\sqrt{1-2\sin x\cos x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\sqrt{1-2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}}{\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{1-2(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{|\cos x-\sin x|}{\cos^2 x-\sin^2 x}\xrightarrow[\sin x>\cos x]{x>\frac{\pi}{4}}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{-(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$

$=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{-1}{\cos x+\sin x}=\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

سؤال دانش‌پژوه (سیا قرکمر): آقا اجازه من به جای $2\sin x\cos x-1$، نوشتم $(\sin x-\cos x)^2$، توی حل مشکلی پیش نمی‌یاد؟

پاسخ: نه، ببین:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{|\sin x-\cos x|}{\cos^2 x-\sin^2 x}\xrightarrow[\sin x>\cos x]{x>\frac{\pi}{4}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{-(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۸- حد تابع $\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}$ وقتی $x\to 0^-$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{2}$

تجربی خارج ۸۹

۸۹- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۹۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

۹۱- حد عبارت $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ وقتی $x\to 0^+$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۴) $\sqrt{6}$

۹۲- حد کسر $\frac{\sin x-\sin x\cos x}{k\tan^3 x}$ وقتی $x\to 0$، برابر یک است، k برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

تجربی داخل ۸۲

۹۳- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۹۴- حد کسر $\frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}$ وقتی $x\to\pi$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۵- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) صفر ۴) ۲

@khaneh_book

۹۶- حد عبارت $\frac{\sin^۳x-\cos^۳x}{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}-\cos x\sin\frac{\pi}{۴}}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۹۷- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x-\cos x)}$، کدام است؟ تجربی خارج ۸۷

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۹۸- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{۱-۲\sin^۲x}$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۱

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۹۹- حاصل $\lim_{x\to۰}\frac{\tan^۲x}{۱-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱-

۱۰۰- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan^۲x-۱}{۲\cos^۲x-۱}$ کدام است؟ تجربی داخل ۸۸

۱) ۲- ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۱- حد تابع $y=\frac{(\sin۲x\cos۲x)^۲}{\sin۲x-۱}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۰۲- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۲\sin x\cos x-۱}{(\tan x-۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۰۳- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt[۳]{\cos x}-\sqrt[۳]{\sin x}}{\sin^۲x\sin\frac{\pi}{۴}-\cos^۲x\cos\frac{\pi}{۴}}$ کدام است؟ مشابه ریاضی داخل ۹۲

۱) $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}$ ۴) $-\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$

۱۰۴- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[۳]{\sin x}}{[x]\cos^۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

۱۰۵- حاصل $\lim_{x\to۰}([x]+[-x])\frac{۱-\cos^۳x}{\sin^۲x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

درسنامه ۷

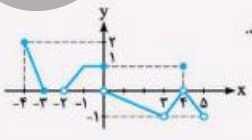
پیوستگی

تابع f را در $x=c$ پیوسته گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

به عبارت دیگر برای آن‌که تابع f در c پیوسته باشد باید $\lim_{x\to c}f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این صورت، تابع را در c ناپیوسته گوییم.

مثال با توجه به نمودار تابع f، پیوستگی تابع را در نقاط $x=-۴,-۳,-۱,۰,۳,۴$ بررسی کنید.



پاسخ: الف) $x=-۴$: در این نقطه، فقط حد راست وجود دارد ولی حد چپ و در نتیجه حد وجود ندارد. پس در $x=-۴$: تابع ناپیوسته است.

@khaneh_book

ب) $x=-۳$: در این نقطه، فقط حد چپ وجود دارد ولی حد راست و در نتیجه حد وجود ندارد. پس در $x=-۳$ تابع ناپیوسته است.

ج) $x=-۱$: در این نقطه، حد چپ و راست موجود و برابرند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)} f(x)=۱ \quad , \quad f(-۱)=۱\Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to -۱} f(x)}_{\text{حد}}=\underbrace{f(-۱)}_{\text{مقدار}}$$

تابع در $x=-۱$ پیوسته است.

د) $x=۰$: در این نقطه، حد چپ و راست موجودند ولی برابر نیستند:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x) : \text{وجود ندارد} \Rightarrow$$

تابع در $x=۰$ ناپیوسته است.

هـ) $x=۳$: در این نقطه، حد چپ و راست موجود و با هم برابرند ولی $f(۳)$ وجود ندارد. لذا تابع در $x=۳$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} f(x)=-۱ \quad , \quad f(۳) : \text{وجود ندارد} \Rightarrow$$

تابع در $x=۳$ ناپیوسته است

و) $x=۴$: در این نقطه، حد چپ و راست موجود و برابرند ولی با مقدار تابع در ۴ برابر نیستند. پس تابع در ۴ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^-} f(x)=۰\Rightarrow \lim_{x\to ۴} f(x)=۰ \quad \text{و} \quad f(۴)=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۴} f(x)\neq f(۴)\Rightarrow$$

تابع در $x=۴$ ناپیوسته است.

مثال اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x-۲} & ; x\neq ۲\\ a & ; x=۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

پاسخ: چون f در $x=۲$ پیوسته است، باید داشته باشیم $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$. بنابراین حد تابع را در $x=۲$ به‌دست آورده و با مقدار آن یعنی $f(۲)=a$ برابر قرار می‌دهیم:

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}(x-۱)=۱\Rightarrow f(۲)=۱\xrightarrow{f(۲)=a} a=۱$$

پیوستگی راست: تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته نامیم هرگاه $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\underbrace{f(c)}_{\text{مقدار}}$. در این صورت گوییم f در $x=c$، پیوستگی راست دارد.

مثال به نمودار روبه‌رو توجه کنید:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱ \quad , \quad f(۱)=۲$$

چون $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)$ است. پس تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\underbrace{f(c)}_{\text{مقدار}}$. در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

مثال به نمودار روبه‌رو توجه کنید:

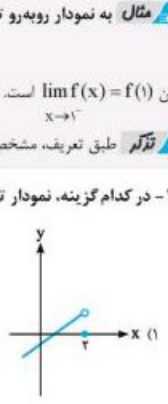
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱ \quad , \quad f(۱)=۱$$

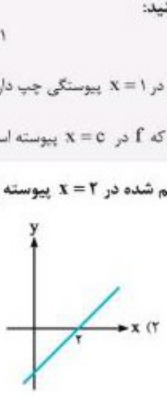
چون $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)$ است. لذا تابع در $x=۱$ پیوستگی چپ دارد.

تذکر طبق تعریف، مشخص است که f در $x=c$ پیوسته است هرگاه f در c هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.

۱۰۶- در کدام گزینه، نمودار تابع رسم شده در $x=۲$ پیوسته نمی‌باشد ولی حد دارد؟

برگرفته از کتاب درسی

۱) 

۲) 

۳)

۴)

@khanen_book

۱۰۷- کدام‌یک از توابع زیر در نقاط مشخص‌شده پیوسته است؟

۱) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\ x=-1$

۲) $g(x)=\sqrt{9-x^2}\ ,\ x=2$

۳) $h(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}\ ,\ x=1$

۴) $k(x)=\begin{cases}x^2+1 & ;\ x\geq 1\\ -x^2 & ;\ x<1\end{cases}\ ,\ x=1$

۱۰۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+a} & ;\ x\geq -1\\ x^2+ax & ;\ x<-1\end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته است؟ تجربی خارج ۸۷

۱) $\{1,\sqrt{2}\}$

۲) $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$

۳) $\varnothing$

۴) $\mathbb{R}$

۱۰۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2a+x^2 & ;\ x\geq 2\\ x^2-x & ;\ x<2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته نمی‌باشد؟

۱) $\{1\}$

۲) $\mathbb{R}-\{1\}$

۳) $\varnothing$

۴) $\mathbb{R}$

۱۱۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2ax^2+bx+1 & ;\ x<1\\ |x| & ;\ x=1\\ a\sin(x-1)+2b & ;\ x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، $2a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) صفر

۱۱۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}3x-[x] & ,\ x<2\\ a & ,\ x=2\\ x+2 & ,\ x>2\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) هیچ مقدار a

۱۱۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-x-1}{x-1} & ;\ x>1\\ ax-a+3 & ;\ x\leq 1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟ تجربی خارج ۸۶

۱) فقط $\frac{1}{2}$

۲) فقط ۲

۳) هیچ مقدار a

۴) هر مقدار a

۱۱۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ,\ x\neq 0\\ a & ,\ x=0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) ۲-

۲) ۱-

۳) ۱

۴) ۲

۱۱۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & ;\ x\neq 2\\ a & ;\ x=2\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) ۲-

۲) ۱-

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) ۱

۱۱۵- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3} & ;x>3\\ ax-3a-\frac{3}{8} & ;x\leq 3\end{cases}$، در نقطهٔ $x=3$، پیوسته است؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) ۲-

۲) ۲

۳) هیچ مقدار a

۴) هرچه باشد a

۱۱۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & ;\ |x|>1\\ 2x & ;\ |x|\leq 1\end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۱ به ترتیب چگونه است؟ تجربی داخل ۸۸

۱) ناپیوسته ـ ناپیوسته

۲) ناپیوسته ـ پیوسته

۳) پیوسته ـ پیوسته

۴) پیوسته ـ ناپیوسته

@khaneh_book

۱۱۷- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{-x+|x-2|}{x-1} & ; x\neq 1\\ a & ; x=1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۸- به ازای کدام مقدار A، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|} & ; x\neq 0\\ A & ; x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

۱۱۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2-\frac{3ax-3a}{\sqrt{x^2-2x+1}} & ; x<1\\ 2 & ; x=1\\ 5x^2+bx+3 & ; x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶- ۴) ۲

۱۲۰- تابع $f(x)=\begin{cases}3x^2-x & ; [x]=1\\ \frac{x^4-1}{|x^3-1|} & ; [x]\neq 1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) پیوسته است. ۲) فقط از چپ پیوسته است.

۳) فقط از راست پیوسته است. ۴) نه از چپ پیوسته است و نه از راست

۱۲۱- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{ax^2+b}{|x-1|} & , x<1\\ 2a+[2x] & , x\geq 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، مقدار $2a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} & ; x>0\\ a\sin(x+\frac{\pi}{6}) & ; x\leq 0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در $x=0$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۸۶

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۱۲۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=(-1)^{|x|}\sin \pi x$ در $x=1$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ مشابه ریاضی خارج ۹۳

۱) پیوسته ۲) فقط از چپ پیوسته ۳) فقط از راست پیوسته ۴) از چپ ناپیوسته ـ از راست ناپیوسته

۱۲۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\tan^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x} & , 0\leq x<\frac{\pi}{4}\\ a\cos 3x & , \frac{\pi}{4}\leq x\leq \frac{\pi}{2}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) ۱- ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۱۲۵- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & , x\neq 0\\ a & , x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۵

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۲۶- اگر $f(x)=\begin{cases}x+a & ; x<1\\ 1 & ; x\geq 1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+1 & ; x<1\\ \frac{a}{x+1} & ; x\geq 1\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، تابع $f+g$ در $x=1$ پیوسته است؟ تجربی خارج ۸۴

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۲- ۴) ۲

@khaneh_book

درسنامهٔ ۸

پیوستگی روی بازه

الف) تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطهٔ این بازه پیوسته باشد.

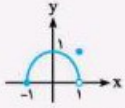
ب) تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ a پیوستهٔ راست و در نقطهٔ b پیوستهٔ چپ باشد.

پ) تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ a پیوستهٔ راست باشد.

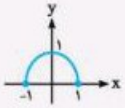
ت) تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ b پیوستهٔ چپ باشد.

مثال

تابع در بازهٔ $(-1,1)$ پیوسته است، زیرا در $x=0$ ناپیوسته است. لذا این تابع در بازه‌های $(-1,1)$ و $[-1,1]$ نیز ناپیوسته می‌شود.



تابع در بازهٔ $(-1,1)$ پیوسته و در -1 پیوستهٔ راست و در 1 ناپیوسته است. لذا این تابع در بازهٔ $[-1,1)$ پیوسته ولی در بازه‌های $[-1,1]$ و $[-1,1]$ ناپیوسته است.



تابع در بازهٔ $(-1,1)$ پیوسته و در 1 پیوستهٔ چپ، و در -1 پیوستهٔ راست است. پس تابع روی بازهٔ $[-1,1]$ پیوسته است.

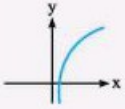
تذکر اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد گوییم f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$، پیوسته است.

مثال اگر f، یک تابع چندجمله‌ای باشد مثل $f(x) = x^3 + 5x^2 + x^4$، آن‌گاه f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$، پیوسته است زیرا $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ $(c \in \mathbb{R})$.

نکته توابع کسری گویا به صورت $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ در ریشه‌های مخرج ناپیوسته‌اند.

مثال تابع $y = \frac{1}{x^2-1}$ در $x = \pm 1$ (ریشه‌های مخرج) ناپیوسته است.

مثال دامنهٔ تابع $f(x) = \log x$ برابر $D_f = (0,+\infty)$ است و با توجه به نمودار آن نتیجه می‌گیریم که در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است. پس تابع f، روی بازهٔ $(0,+\infty)$ پیوسته است.



مثال توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته‌اند.

نکته اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیربازهٔ دلخواه از آن نیز پیوسته است.

مثال تابع $f(x) = \sin x$ روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است، پس روی هر بازهٔ کوچک‌تر مثل $(0,2\pi)$ یا $(0,\pi)$ یا ... نیز پیوسته است.

۱۲۷- اگر نمودار f به صورت زیر باشد، این تابع در کدام‌یک از بازه‌های ذکر شده پیوسته است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $[-1,\frac{1}{2}]$

۲) $[-2,-1]$

۳) $[0,2]$

۴) $(2,3]$

۱۲۸- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; x>2 \\ x^2+bx-1 & ; x<2 \end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟ تجربی خارج ۹۱

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۱۲۹- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^2+ax-5 & ; x>2 \\ ax-1 & ; x\le 2 \end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۱

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-2$ ۴) فقط $a=2$

@khanen_book

۱۳۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-3x^2+4}{x-2} & ; x>2\\ 2x+b & ; x\le 2\end{cases}$ به ازای کدام مقدار b، همواره پیوسته است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ; 0<x<a\\ 1-\frac{x}{4} & ; x\ge a\end{cases}$ همواره پیوسته است؟ ریاضی خارج ۹۵

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۱۳۲- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2+x-2|}{x-1} & ; x\neq 1\\ a & ; x=1\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) هر مقدار a ۲) -3 ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۱۳۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & , x\notin\mathbb{Z}\\ a & , x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟ ریاضی داخل ۹۶

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) همواره ناپیوسته

۱۳۴- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ; 1\le x\le 6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & ; x>6\end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟ تجربی داخل ۹۲

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۵- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+bx+a}{x-1} & , x\neq 1\\ 3 & , x=1\end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۱۳۶- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x} & ; x>2\\ x-a & ; x\le 2\end{cases}$ همواره پیوسته است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۲

۱۳۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{2}x & ; x=|x|\\ ax^2+b & ; x\neq|x|\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار b کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۸- اگر تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{ax^2+2x-3}$ در بازهٔ $\mathbb{R}-\{c\}$ پیوسته باشد، مقدار $a+c$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۳۹- تابع $y=\sqrt{mx^2+3x+m}$ در $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است. محدودهٔ m کدام است؟

۱) $(0,\frac{3}{2}]$ ۲) $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[\frac{3}{2},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-\frac{3}{2}]$

@khaneh_book

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): برای آن‌که تابع در نقطهٔ c از دامنه‌اش حد داشته باشد، باید حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و با هم برابر باشند. یعنی فقط موجود بودن حدهای چپ و راست کفایت نمی‌کند. پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۲): فرض کنید حد تابع در نقطهٔ c از دامنه‌اش L باشد. در این‌صورت، حدهای چپ و راست نیز در این نقطه موجود و برابر L هستند (با هم برابرند.) پس این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۳): با توجه به دامنهٔ f، حد چپ در $x=a$، وجود ندارد، لذا تابع در $x=a$ حد ندارد. پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۴): با توجه به دامنهٔ f، حد راست در $x=b$، وجود ندارد، لذا تابع در $x=b$ حد ندارد. پس این گزینه نادرست است.

۱ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): طبق نمودار حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و برابر ۱ هستند. لذا حد تابع f در $x=0$ موجود و برابر ۱ است. پس همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۲): با توجه به نمودار، حدهای چپ و راست تابع را در $x=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim_{x\to 0^-} g(x) \Rightarrow$$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

گزینهٔ (۳): تابع فقط در سمت چپ $x=0$ تعریف‌شده است. لذا حد چپ تابع در $x=0$ طبق نمودار موجود و برابر ۱ است، ولی حد راست در $x=0$ وجود ندارد، پس تابع در $x=0$ حد ندارد.

گزینهٔ (۴): تابع فقط در سمت راست $x=0$ تعریف‌شده است. لذا حد راست تابع در $x=0$ طبق نمودار، موجود و برابر ۱ است، ولی حد چپ در $x=0$ وجود ندارد، پس تابع در $x=0$ حد ندارد.

۳ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2 \ , \ \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

در نتیجه حد تابع در $x=3$ موجود نیست و این گزینه درست است.

گزینهٔ (۲): طبق نمودار $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$. پس این گزینه نیز درست است.

گزینهٔ (۳): تابع فقط در سمت راست $x=1$ تعریف‌شده است. حد راست f در $x=1$ برابر ۱ است ولی حد چپ و در نتیجه حد تابع در $x=1$ وجود ندارد. پس همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۴): مقدار تابع f در $x=3$ (یعنی $f(3)$) طبق نمودار برابر ۲ است، از طرفی $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$. پس این گزینه نیز درست است.

۳ ۴ با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = 3 - (1) = 2$$

۲ ۵ با توجه به نمودار داده‌شده واضح است که:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \ , \ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \ , \ f(3) = 4 \Rightarrow 3\lim_{x\to 2^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) + 2f(3) = 3(3) - 3 + 2(4) = 14$$

۱ ۶ حد هر یک از توابع داده‌شده را می‌یابیم:

الف) ابتدا دامنهٔ تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

با توجه به دامنهٔ f، تابع در $x=1$، فقط حد راست دارد ولی حد چپ ندارد. در نتیجه حد ندارد.

ب) ابتدا دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ را می‌یابیم:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

با توجه به دامنه، تابع در $x=1$، فقط حد چپ دارد ولی حد راست ندارد. در نتیجه حد ندارد.

ج) دامنهٔ تابع $h(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \xRightarrow{\text{جذر}} |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \ \text{یا} \ x \leq -1 \Rightarrow D_h = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

با توجه به دامنه، تابع در $x=1$، فقط حد چپ دارد ولی حد راست ندارد. در نتیجه حد ندارد.

د) ابتدا دامنهٔ تابع $k(x)$ را می‌یابیم:

$$x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0 \xRightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{به‌کمک جدول}} D_k = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

با توجه به دامنه، تابع در $x=1$، هم حد راست و هم حد چپ دارد که برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است.

@khanehbook

۷ ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تابع $y=\sqrt{x}$ دامنه‌اش $x\geq 0$ است. با توجه به دامنه، در $x=0$ فقط حد راست وجود دارد ولی حد چپ وجود ندارد. در نتیجه حد تابع در $x=0$ وجود ندارد!

گزینهٔ (۲):

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{[x]-5}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{1}{[x]-5} & \xrightarrow[5<x<6\Rightarrow[x]=5]{x\to 5^+:x\text{ کمی بزرگ‌تر از }5}\ \frac{1}{5-5}=\frac{1}{0}\ \text{تعریف‌نشده}\\ \lim\limits_{x\to 5^-}\frac{1}{[x]-5} & \xrightarrow[4<x<5\Rightarrow[x]=4]{x\to 5^-:x\text{ کمی کوچک‌تر از }5}\ \frac{1}{4-5}=\frac{1}{-1}=-1\end{cases}$$

چون حد راست تابع در ۵ وجود ندارد، لذا تابع در ۵ حد ندارد. همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۳):

نکته حد تابع $f(x)=[x]+[-x]$ در هر نقطه‌ای برابر -1 است.

با توجه به نکتهٔ فوق، این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۴):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}\xrightarrow[\Rightarrow|x|=x]{x\to 0^+:x>0}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}\xrightarrow[\Rightarrow|x|=-x]{x\to 0^-:x<0}\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

حد چپ و راست یکسان نیستند پس تابع در $x=0$ حد ندارد.

۸ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ را می‌یابیم:

$$x^3-x^2\geq 0\Rightarrow x^2(x-1)\geq 0$$

x		0		1	
x^2	+	0	+	0	+
$x-1$	−	‖	−	0	+
$x^2(x-1)$	−	0	−	0	+

پس $D_f=[1,+\infty)\cup\{0\}$ می‌شود. با توجه به دامنهٔ f چون سمت چپ $x=1$ تابع تعریف نمی‌شود پس حد چپ ندارد. در نتیجه حد در $x=1$ وجود ندارد. حال وجود حد راست تابع را در $x=1$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^3-x^2}=\sqrt{1-1}=0$$

پس حد راست تابع در $x=1$ موجود و برابر صفر است.

۹ ۱ چون تابع f در $x=2$ دارای حد است، لذا تابع f باید حدهای چپ و راست برابر در این نقطه داشته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+x)=6\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b\end{cases}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)}2a+b=6\Rightarrow b=6-2a$$

۱۰ ۳ برای آن‌که تابع f در $x=-1$ حد داشته باشد، باید حدهای چپ و راست در این نقطه با هم برابر باشد، لذا داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+a)^2=(-1+a)^2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(2x+1)=-1\end{cases}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)}(-1+a)^2=-1$$

معادله‌ی فوق جواب ندارد. زیرا طرف چپ تساوی، عبارتی نامنفی (دارای توان زوج) و طرف راست تساوی عبارتی منفی است. در نتیجه هیچ مقدار a یافت نمی‌شود که به‌ازای آن تابع در $x=-1$ حد داشته باشد.

۱۱ ۴ ابتدا حدهای چپ و راست تابع را در $x=-2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(3x+4)=-2\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2+a)=4+a\end{cases}\xrightarrow[\text{فرض}]{\text{با توجه به}}\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)}\Rightarrow 4+a=\frac{1}{-2}\Rightarrow a=-\frac{9}{2}=-4/5$$

@khaneh_book

۱۲ **۲** حدهای چپ و راست تابع را در $x=1$ به‌دست آورده و سپس در رابطهٔ داده شده در صورت تست قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2a)=1+2a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax-1)=a-1\end{cases}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1} (1+2a)-(a-1)=-1\Rightarrow a=-3$$

۱۳ **۳** با توجه به فرضیات تست داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-4 \xrightarrow[\text{ضابطهٔ بالایی } f]{-1>-3} \lim\limits_{x\to -1}\big((a+1)x+3\big)=-4\Rightarrow -(a+1)+3=-4\Rightarrow -a-1+3=-4\Rightarrow a=6\\ \lim\limits_{x\to -4} f(x)=-1 \xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایینی } f]{-4<-3} \lim\limits_{x\to -4}(-2x^2+b)=-1\Rightarrow -2(-4)^2+b=-1\Rightarrow -32+b=-1\Rightarrow b=31\end{cases}$$
$$\Rightarrow b-5a=1$$

۱۴ **۲** طبق فرض تست، حد تابع در نقطهٔ $x=1$ موجود و برابر ۶ است. در نتیجه باید حد چپ و حد راست تابع در این نقطه، هر دو برابر ۶ باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(|x^2-3x|+a)=2+a \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 2+a=6\Rightarrow a=4 \qquad (*)\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax}{2bx-1}=\dfrac{a}{2b-1}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\dfrac{a}{2b-1}=6\Rightarrow a=12b-6\xrightarrow{(*)} 4=12b-6\Rightarrow b=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

حال با جایگذاری مقادیر a و b به‌دست آمده در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(x)=\begin{cases}|x^2-3x|+4 & ; x>1\\ \dfrac{4x}{\frac{5}{3}x-1} & ; x<1\end{cases}\xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایینی } f]{-3<1} f(-3)=\frac{4(-3)}{\frac{5}{3}(-3)-1}=\frac{-12}{-6}=2$$

۱۵ **۲** تابع f در $x=-2$ دارای حد است. لذا باید حدهای چپ و راست تابع f در این نقطه با هم برابر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+b)=-2+b\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2+bx+3a)=4-2b+3a\end{cases}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)} -2+b=4-2b+3a\Rightarrow b-a=2 \quad (1)$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\sqrt{2x^2-4a}=2\Rightarrow\sqrt{8-4a}=2\xrightarrow{\text{توان ۲}} 8-4a=4\Rightarrow a=1$$

حال با جایگذاری $a=1$ در رابطهٔ (۱) داریم $b=3$، لذا $b+a=3+1=4$.

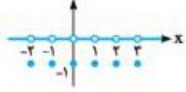
۱۶ **۱** **روش اول:**

نکته در توابع به فرم کلی $f(x)=\begin{cases}h(x) & ; x\in\mathbb{Z}\\ g(x) & ; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$، برای محاسبهٔ حد تابع در هر نقطهٔ دلخواه a از ضابطهٔ $g(x)$ استفاده می‌کنیم و فقط مقدار تابع در نقاط صحیح در ضابطهٔ $h(x)$ بررسی می‌شود.

با توجه به نکتهٔ فوق، در تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & ; x\in\mathbb{Z}\\ 0 & ; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$، برای محاسبهٔ حد در هر نقطه‌ای مانند a، کافی است از ضابطهٔ پایینی استفاده کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(0)=0\\ \lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}(0)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x)=0+0=0$$

روش دوم: ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x)=0+0=0$$

@khanen_book

۱۷ ۲ با توجه به تست قبل داریم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3 \xrightarrow{x\notin Z: f(x)=x^2+ax+1} \lim_{x\to 1}(x^2+ax+1)=3 \Rightarrow 1+a+1=3 \Rightarrow a=1$$

حال حد تابع در ۵ را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 5} f(x) \xrightarrow{x\notin Z: f(x)=x^2+ax+1} \lim_{x\to 5}(x^2+ax+1) \xrightarrow{a=1} \lim_{x\to 5}(x^2+x+1)=25+5+1=31$$

۱۸ ۱

$$\lim_{x\to 2^+}(x+a)[x] \xrightarrow[x\Rightarrow[x]=2]{x\to 2^+:2 \text{ کمی بزرگ‌تر از } 2} \lim_{x\to 2^+}(x+a)(2)=(2+a)(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x+a)[x] \xrightarrow[x\Rightarrow[x]=1]{x\to 2^-:2 \text{ کمی کوچک‌تر از } 2} \lim_{x\to 2^-}(x+a)(1)=(2+a)(1)$$

طبق فرض: $\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 2^-} f(x)=3 \Rightarrow (2+a)(2)-(2+a)(1)=3 \Rightarrow 4+2a-2-a=3 \Rightarrow a=1$

۱۹ ۱ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم.

حد راست: $\lim_{x\to 4^+}\left(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{2}\right) \xrightarrow[\Rightarrow[x]=4]{x\to 4^+:x>4} \lim_{x\to 4^+}\left(x-4+\sin\frac{\pi(4)}{2}\right)=4-4+\sin 2\pi=0+0=0$

حد چپ: $\lim_{x\to 4^-}\left(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{2}\right) \xrightarrow[\Rightarrow[x]=3]{x\to 4^-:x<4} \lim_{x\to 4^-}\left(x-3+\sin\frac{3\pi}{2}\right)=4-3+\sin\frac{3\pi}{2}=1+(-1)=0$

بنابراین: حد چپ = حد راست $\Rightarrow$ اختلاف آن‌ها $=0$

۲۰ ۲ ابتدا با توجه به آن‌که $x\to 1^-$ می‌رود، بررسی می‌کنیم داخل جزء صحیح یعنی $\frac{1}{x+1}$ به سمت چه عددی نزدیک می‌شود و سپس جزء صحیح آن را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right] \xrightarrow[\Rightarrow \frac{1}{x+1}>\frac{1}{2}\Rightarrow[\frac{1}{x+1}]=0]{x\to 1^-:x<1\Rightarrow x+1<2} \lim_{x\to 1^-}(x+1)(0)=2\times 0=0$$

سؤال دانش‌پژوه (شهرام هدهدی)، آقا اجازه چطوری از $\frac{1}{x+1}>\frac{1}{2}$ نتیجه گرفتین $\left[\frac{1}{x+1}\right]=0$ میشه؟

پاسخ: ببین وقتی در هم می‌نویسیم $\frac{1}{x+1}>\frac{1}{2}$ منظورمان این است که $\frac{1}{x+1}$ کمی از $\frac{1}{2}$ بیشتره، پس $\frac{1}{x+1}<1$ بوده و جزء صحیح میشه عدد صحیح ابتدای بازه یعنی صفر.

۲۱ ۱ ابتدا وقتی $x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-$ می‌رود، مقادیر داخل جزء صحیح‌ها را یافته و سپس به جای جزء صحیح‌ها عدد قرار می‌دهیم:

$$x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-:\begin{cases} x<-\frac{1}{2} \xrightarrow[-1<x<-\frac{1}{2}]{x \text{ کمی از } -\frac{1}{2} \text{ کوچک‌تره}} [x]=-1 \\ x<-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{x}{2}<-\frac{1}{4} \xrightarrow[-1<\frac{x}{2}<-\frac{1}{4}]{\frac{x}{2} \text{ کمی از } -\frac{1}{4} \text{ کوچک‌تر}} \left[\frac{x}{2}\right]=-1 \\ x<-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} 3x<-\frac{3}{2}=-1/5 \xrightarrow[-2<3x<-1/5]{3x \text{ کمی از } -1/5 \text{ کوچک‌تر}} [3x]=-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}[x]+\left[\frac{x}{2}\right]-[3x] \xrightarrow{\text{به‌جای جزء صحیح‌ها عدد قرار می‌دهیم}} \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}(x(-1)+(-1)-(-2))=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}(-x+1)=-(-\frac{1}{2})+1=\frac{3}{2}$$

سؤال دانش‌پژوه (سامان سلامتی)، آقا خب $3x$ کمی کم‌تر از $-1/5$ شد، -2 رو از کجا آوردین؟

پاسخ: عجب! ببین بچه، تو باید اولین عدد صحیح کم‌تر از $-1/5$ رو پیدا کنی که -2 میشه این‌ها و بگی x بین $-1/5$ و اونه. در این صورت جواب جزءصحیح می‌شه همون -2.

@khanen_book

۲۲ ۳

یادآوری حد تابع $f(x)=[x]+[-x]$ در هر نقطه‌ای برابر ۱- است.

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$\lim_{x\to\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}} f(x)+\lim_{x\to۳} f(x)=(-۱)+(-۱)=-۲$$

۲۳ ۲

$$x\to\left(-\frac{۱}{۵}\right)^+ : x>-\frac{۱}{۵} \xrightarrow[\text{(جهت عوض میشه)}]{\text{طرفین معکوس}} \frac{۱}{x}<-۵ \xrightarrow[-۶<\frac{۱}{x}<-۵]{\frac{۱}{x}\text{ کمی از }-۵\text{ کوچک‌تر است}} \lim_{x\to(-\frac{۱}{۵})^+}\left[\frac{۱}{x}\right]=-۶$$

۲۴ ۳ می‌دانیم تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح، حد ندارد. حال برای آن‌که تابع $f(x)=(x^۲+ax+b)[x]$ در نقاط صحیح ۱ و ۳ حد داشته باشد، باید ۱ و ۳ ریشه‌های عبارت $(x^۲+ax+b)$ باشند. زیرا در این صورت مشکل حد نداشتن $[x]$ را رفع می‌کنند. نگاه کنید:

$$\begin{cases} x^۲+ax+b \overset{x=۱}{=\!=} ۰ \Rightarrow ۱+a+b=۰ \\ x^۲+ax+b \overset{x=۳}{=\!=} ۰ \Rightarrow ۹+۳a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۱ \\ ۳a+b=-۹ \end{cases} \Rightarrow a=-۴, b=۳ \Rightarrow a+b=-۴+۳=-۱$$

پس تابع f به صورت $f(x)=(x^۲-۴x+۳)[x]$ در می‌آید که در نقاط ۱ و ۳ حد دارد.

سؤال دانش‌پژوه (هانا موسوی): آقا اجازه، میشه نشون بدین که تابع f با این کاری که کردین در $x=۱$ حد داره؟

پاسخ: باشه، هالا که دوست داری نگاه کن:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to۱^+}(x^۲-۴x+۳)[x] \xrightarrow[۱<x<۲]{x\to۱^+:[x]=۱} \lim\limits_{x\to۱^+}(x^۲-۴x+۳)(۱)=(۱-۴+۳)=۰ \\ \lim\limits_{x\to۱^-}(x^۲-۴x+۳)[x] \xrightarrow[۰<x<۱]{x\to۱^-:[x]=۰} \lim\limits_{x\to۱^-}(x^۲-۴x+۳)(۰)=۰\times۰=۰ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to۱} f(x)=۰$$

۲۵ ۳ **روش اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x-۲)=\frac{۲x+۳}{x} \xrightarrow{x-۲=t\Rightarrow x=t+۲} f(t)=\frac{۲(t+۲)+۳}{t+۲}=\frac{۲t+۷}{t+۲} \xrightarrow[\text{استفاده می‌کنیم}]{\text{به جای }t\text{ از }x} f(x)=\frac{۲x+۷}{x+۲}$$

حال با داشتن ضابطهٔ $f(x)$، می‌توانیم ضابطهٔ $f(x-۱)$ را نیز به‌دست آوریم:

$$f(x-۱)=\frac{۲(x-۱)+۷}{(x-۱)+۲}=\frac{۲x+۵}{x+۱}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۱}\big(f(x)+f(x-۱)\big)=\lim_{x\to۱} f(x)+\lim_{x\to۱} f(x-۱)=\lim_{x\to۱}\frac{۲x+۷}{x+۲}+\lim_{x\to۱}\frac{۲x+۵}{x+۱}=۳+\frac{۷}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$$

روش دوم: برای آن‌که حد تابع $f(x)$ را وقتی $x\to۱$، به‌دست آوریم، کافی است از تابع $f(x-۲)$ در $x=۳$ حد بگیریم:

$$\lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۳} f(x-۲)=\lim_{x\to۳}\frac{۲x+۳}{x}=\frac{۲(۳)+۳}{۳}=۳ \qquad (*)$$

به‌طور مشابه برای محاسبهٔ حد تابع $f(x-۱)$ در $x=۱$، حد تابع $f(x-۲)$ را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۱} f(x-۱)=\lim_{x\to۲} f(x-۲)=\lim_{x\to۲}\frac{۲x+۳}{x}=\frac{۷}{۲} \qquad (**)$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to۱}\big(f(x)+f(x-۱)\big)=\lim_{x\to۱} f(x)+\lim_{x\to۱} f(x-۱) \overset{(*),(**)}{=\!=} ۳+\frac{۷}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$$

۲۶ ۴ **روش اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، $\frac{x+۱}{x-۲}$ را برابر t فرض کرده و داریم:

$$\frac{x+۱}{x-۲}=t \Rightarrow x+۱=tx-۲t \Rightarrow x-tx=-۱-۲t \Rightarrow (۱-t)x=-۱-۲t \Rightarrow x=\frac{-۱-۲t}{۱-t}$$

بنابراین با جایگذاری x بر حسب t در ضابطهٔ داده شده داریم:

$$f\left(\frac{x+۱}{x-۲}\right)=\left(\frac{-۱-۲t}{۱-t}\right)+۲ \Rightarrow f(t)=\frac{-۱-۲t}{۱-t}+۲ \Rightarrow f(t)=\frac{-۱-۲t+۲-۲t}{۱-t} \Rightarrow f(t)=\frac{-۴t+۱}{۱-t} \Rightarrow f(x)=\frac{-۴x+۱}{۱-x}$$

@khaneh_book

حال با داشتن ضابطهٔ تابع $f(x)$ حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{-4x+1}{1-x} = \frac{-4(2)+1}{1-2} = 7$$

روش دوم: برای آن‌که حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to 2$، به‌دست آوریم، کافی است از تابع $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ در $x=5$ حد بگیریم، زیرا:

$$\frac{x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow x+1 = 2x-4 \Rightarrow x = 5$$

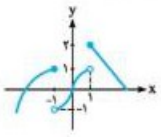
بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 5} f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 5} (x+2) = 7$$

۲۷ ۳

$$\lim_{x\to -2} |f(x)| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-2)^+} |f(x)| = |-1| = 1 \\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} |f(x)| = |1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -2} |f(x)| = 1$$

۲۸ ۳ با توجه به نمودار داریم:



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(|x|) \xrightarrow{x\to(-1)^-:x<-1\Rightarrow|x|>1} f(1^+) = 2 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} |f(x)| = |(-1)| = 1 \end{cases}$$

بنابراین جواب ۲ + ۱ = ۲ می‌شود.

۲۹ ۴

حد راست: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} [f(x)] = [f((-1)^+)] = [(-2)^+] \xrightarrow[-2<x<-1\Rightarrow[x]=-2]{x\to(-2)^+} -2$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to(-1)^-} [f(x)] = [f((-1)^-)] = [2^-] \xrightarrow[1<x<2\Rightarrow[x]=1]{x\to 2^-} 1$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند، لذا تابع f در $x=-1$ حد ندارد.

سؤال دانش‌پژوه (علی زحمت‌کش)، آقا اجازه چطوری $f((-1)^+)$ برابر $f(-2)^+$ شد! علامت + بالاسره (-2) رو از کجا آوردین؟

پاسخ: بین وقتی از سمت راست (-1) به آن نزدیک می‌شویم، نمودار داره به ارتفاع -2 می‌رسه ولی قبل اینکه از بالا داره به سمت پایین حرکت می‌کنه یعنی از مقادیر بزرگ‌تر از -2 داره به -2 نزدیک میشه، پس $f(-2)^+$ می‌شود. به طور مشابه وقتی از سمت چپ (-1) به آن نزدیک می‌شیم، نمودار داره به ارتفاع ۲ می‌رسه ولی از پایین داره به سمت بالا حرکت می‌کنه یعنی از مقادیر کم‌تر از ۲ داره به ۲ نزدیک میشه؛ پس 2^- میشه!

۳۰ ۲ می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(\frac{1}{2x-1}\right)$ را محاسبه کنیم. ابتدا ببینیم وقتی $x \to 1^+$ می‌رود، عبارت $\frac{1}{2x-1}$ به چه سمتی می‌رود و سپس از نمودار داده شده کمک بگیریم:

$$x \to 1^+ ; x > 1 \xrightarrow{\times 2} 2x > 2 \xrightarrow{-1} 2x-1 > 1 \xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{طرفین نسبی}} \frac{1}{2x-1} < 1$$

پس $\frac{1}{2x-1}$ از یک کم‌تر است یعنی 1^-، بنابراین به دنبال $f(1^-)$ هستیم که با توجه به نمودار برابر ۱ می‌شود.

۳۱ ۳ برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x-1)$، فرض می‌کنیم $t = x-1$، در این صورت داریم $x \to (-1)^+ \Rightarrow t \to (-2)^+$، زیرا:

$$x \to (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \underbrace{x-1}_{t} > -2 \Rightarrow t > -2$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x-1) = \lim_{t\to(-2)^+} f(t) \xrightarrow{\text{به جای متغیر } t \text{، از متغیر } x \text{ استفاده می‌کنیم.}} \lim_{x\to(-2)^+} f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار } f} 2 \qquad (*)$$

به‌طور مشابه برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(-\frac{x}{2}\right)$، فرض می‌کنیم $t = -\frac{x}{2}$، در این صورت داریم $x \to 2^- \Rightarrow t \to (-1)^+$، زیرا:

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \underbrace{-\frac{x}{2}}_{t} > -1 \Rightarrow t > -1$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 2^-} f\left(-\frac{x}{2}\right) = \lim_{t\to(-1)^+} f(t) \xrightarrow{\text{به جای متغیر } t \text{، از متغیر } x \text{ استفاده می‌کنیم.}} \lim_{x\to(-1)^+} f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار } f} -1 \qquad (**)$$

در نتیجه حاصل حد خواسته‌شده در صورت سؤال با توجه به حاصل حدهای (*) و (**) برابر ۱ = ۲ + ۱- می‌شود.

@khanehbook

۳۲ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را می‌یابیم:

$$\begin{cases}(1,0)\\(0,2)\end{cases} \Rightarrow m=\frac{2-0}{0-1}=-2 \Rightarrow y-0=-2(x-1) \Rightarrow f(x)=-2x+2$$

$$\Rightarrow f(f(x))=f(-2x+2)=-2(-2x+2)+2=4x-4+2=4x-2 \quad (*)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{5+4f(f(x))} \overset{(*)}{=\!=} \lim_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{5+4(4x-2)}=\sqrt{5+4\left(4\left(\frac{1}{4}\right)-2\right)}=\sqrt{5-4}=\sqrt{1}=1$$

۳۳ ۲ **الف)** حاصل این حد زمانی صحیح است که $L_2\neq 0$ باشد، بنابراین حاصل این حد همواره صحیح نمی‌باشد.

ب) در حالت کلی درست نیست زیرا مثلاً حد داده‌شده زمانی که $L_1=0$ باشد، وجود ندارد. زیرا در این صورت x_1 ریشهٔ تابع $f(x)=ax+b$ یعنی $x_1=\frac{-b}{a}$ بوده و با توجه به دامنهٔ تابع $y=\sqrt{ax+b}$، نمودار تابع فقط در یک طرف آن تعریف می‌شود، لذا در x_1، تابع $\sqrt{ax+b}$ حد چپ یا حد راست نداشته و در نتیجه در x_1، حد ندارد!

ج) جزء قضیه‌های حد است و لذا همواره برقرار می‌باشد.

د) جزء قضیه‌های حد است و لذا همواره برقرار می‌باشد.

بنابراین دو تا از حدهای بیان شده همواره درست نبوده و تحت شرایطی خاص برقرار می‌باشند.

۳۴ ۴ ابتدا ضابطه‌های توابع $f+g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورده و سپس از آن‌ها به سمت عدد بیان شده در صورت تست حد می‌گیریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^2-ax+2)+ax+3=x^2+5 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(f+g)=\lim_{x\to 0}(x^2+5)=5$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-ax+2}{ax+3} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-ax+2}{ax+3}=\frac{1-a+2}{a+3}=\frac{3-a}{a+3}$$

طبق فرض حاصل حدهای به‌دست آمده با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$\frac{3-a}{a+3}=5 \Rightarrow 3-a=5a+15 \Rightarrow -6a=12 \Rightarrow a=-2$$

۳۵ ۳ با توجه به فرضیات سؤال می‌توانیم حد را به داخل کسر ببریم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3g(x)}{\sqrt{5f(x)}}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-3g(x)\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5f(x)}}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}f(x)-3\lim\limits_{x\to 2}g(x)}{\sqrt{5\lim\limits_{x\to 2}f(x)}} \overset{\text{با توجه به فرض تست}}{=\!=} \frac{5-3(-3)}{\sqrt{5(5)}}=\frac{14}{\sqrt{25}}=\frac{14}{5}$$

۳۶ ۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 2\\ x & ; x<2\end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ و دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{2-x}$ برابر $2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2$ است. پس دامنهٔ تابع $y=(f-g)(x)$ برابر $D_f\cap D_g=(-\infty,2]$ می‌باشد. بنابراین:

$$\lim_{x\to 2^-}(f-g)(x) \overset{\substack{x<2\Rightarrow f(x)=x\\ x<2\Rightarrow g(x)=\sqrt{2-x}}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 2^-}\left(x-\sqrt{2-x}\right)=2-\sqrt{2-2}=2-0=2$$

ولی چون سمت راست $x=2$ تابع $y=f-g$ تعریف نشده است، پس حد راست وجود ندارد، در نتیجه حد تابع در $x=2$ وجود ندارد.

۳۷ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-\sin^2 x}{\cos x+1}=\frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{2\cos\frac{\pi}{3}-\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}{\cos\frac{\pi}{3}+1}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}$$ ✓

گزینهٔ (۲): در حد داده شده به جای $\tan x$، عبارت $\frac{\sin x}{\cos x}$ را قرار داده و داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos 3x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-2\cos\pi}{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1-2(-1)}{3}=1$$ ✓

@khanehbook

گزینهٔ (۳):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۳\tan x-\sin ۲x}{x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{۳\sin x}{\cos x}-\sin ۲x}{x}=\frac{\frac{۳\sin\frac{\pi}{۴}}{\cos\frac{\pi}{۴}}-\sin ۲\left(\frac{\pi}{۴}\right)}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۳\left(\frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\right)-\sin\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۳-۱}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۲}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۸}{\pi}\ \checkmark$$

گزینهٔ (۴):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)+\cos ۲x+\sin\frac{x}{۲}}{۲+\cos^۲\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}=\frac{۲\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}\right)+\cos ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)+\sin\left(\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲}\right)}{۲+\cos^۲\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)}$$

$$=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۳}+\cos\pi+\sin\frac{\pi}{۴}}{۲+\cos^۲\frac{\pi}{۴}}=\frac{۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)+(-۱)+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۳}-۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲+\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}-۲+\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۲}{۵}\ \times$$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

۳۸ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\lim_{x\to۲}\tan\frac{\pi x}{۳}=\lim_{x\to۲}\frac{\sin\frac{\pi x}{۳}}{\cos\frac{\pi x}{۳}}=\frac{\sin\frac{۲\pi}{۳}}{\cos\frac{۲\pi}{۳}}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۳}\right)}{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۳}\right)}=\frac{-\sin\frac{\pi}{۳}}{-\cos\frac{\pi}{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}\neq-\sqrt{۳}\ \times$$

گزینهٔ (۲):

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x+۲}{۳x^۲+۴}\times\frac{|x+۳|}{۲x}=\frac{-۱+۲}{۳+۴}\times\frac{|۲|}{-۲}=\frac{۱}{۷}(-۱)=-\frac{۱}{۷}\neq\frac{۱}{۷}\ \times$$

گزینهٔ (۳):

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to۰}x^۲}{\lim\limits_{x\to۰}\cos x}=\frac{۰}{۱}=۰\ \checkmark$$

گزینهٔ (۴):

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}}\frac{(-۲x^۲+۱)^۳}{x^۲+۱}=\frac{\left(-۲(\sqrt{۲})^۲+۱\right)^۳}{(\sqrt{۲})^۲+۱}=\frac{(-۴+۱)^۳}{۲+۱}=\frac{-۲۷}{۳}=-۹\neq۹\ \times$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳۹ ۲ اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=L$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to۱}(۲f(x)-۱)}{\lim\limits_{x\to۱}(f(x)+۱)}=۵\Rightarrow\frac{۲\lim\limits_{x\to۱}f(x)-۱}{\lim\limits_{x\to۱}f(x)+۱}=۵\xrightarrow{\text{با توجه به فرض}}\frac{۲L-۱}{L+۱}=۵$$

$$\Rightarrow ۲L-۱=۵L+۵\Rightarrow-۶=۳L\Rightarrow L=-۲$$

۴۰ ۲

$$\lim_{x\to۲}\frac{۳f(x)-۲}{۲f(x)+۱}=۵\Rightarrow\frac{۳\lim\limits_{x\to۲}f(x)-۲}{۲\lim\limits_{x\to۲}f(x)+۱}=۵\xrightarrow[\lim\limits_{x\to۲}f(x)=L]{\text{فرض}}\frac{۳L-۲}{۲L+۱}=۵$$

$$\Rightarrow ۳L-۲=۱۰L+۵\Rightarrow-۷=۷L\Rightarrow L=-۱\quad(*)$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{۱+\sqrt[۳]{f(x)}}{f^۲(x)+۱}=\frac{۱+\sqrt[۳]{\lim\limits_{x\to۲}f(x)}}{\left(\lim\limits_{x\to۲}f(x)\right)^۲+۱}=\frac{۱+\sqrt[۳]{L}}{L^۲+۱}\overset{(*)}{=\!=}\frac{۱+\sqrt[۳]{-۱}}{(-۱)^۲+۱}=\frac{۱-۱}{۱+۱}=\frac{۰}{۲}=۰$$

۴۱ ۳ حد داده شده از نوع $\frac{۰}{۰}$ بوده که برای حل آن باید عامل ابهام $(x-۱)$ را از صورت و مخرج حذف کنیم. برای این منظور، در صورت کسر از اتحاد جمله مشترک و در مخرج کسر از فاکتورگیری کمک می‌گیریم تا عامل $(x-۱)$ مشخص شود:

$$\lim_{x\to۱}\frac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-x}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۴)(x-۱)}{x(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{x-۴}{x}=-۳$$

@kaneh_book

۴۲ **۳** حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ بوده که برای رفع ابهام آن باید عامل ابهام $(x-1)$ را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم. برای مشخص شدن عامل $(x-1)$ در صورت کسر از عمل تقسیم و در مخرج کسر از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x-2 & x-1 \\ -(x^3-x^2) & x^2+x+2 \\ \hline x^2+x-2 & \\ -(x^2-x) & \\ \hline 2x-2 & \\ -(2x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1}=\frac{4}{2}=2$$

تذکر عامل $(x-1)$ در عبارت x^3+x-2 را به‌صورت زیر هم می‌توانستیم ایجاد کنیم:

$$x^3+x-2=x^3+x-1-1=(x^2-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+1)$$

۴۳ **۳** حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ بوده که برای رفع ابهام آن باید عامل ابهام $(x-1)$ را در صورت و مخرج کسر ایجاد کنیم. برای این منظور، در صورت کسر از اتحاد مکعب دوجمله‌ای و در مخرج کسر از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0$$

۴۴ **۲** حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ بوده که برای رفع ابهام آن باید عامل ابهام $(x-1)$ را در صورت و مخرج کسر ایجاد کنیم. برای این منظور، از عمل تقسیم استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x^2+x-1)}{(x-1)(2x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-1}{2x-1}=2$$

۴۵ **۱**

نکته برای محاسبهٔ حد توابع شامل قدرمطلق در نقطهٔ $x=x_0$، ابتدا باید علامت عبارت داخل قدرمطلق را وقتی $x\to x_0$، مشخص کرده و سپس با توجه به علامت عبارت مذکور، قدرمطلق را برداشته و در انتها به کمک روش‌های محاسبهٔ حد، حاصل حد را به‌دست آوریم.

یادآوری

$$|u|=\begin{cases}u & ;u\geq 0\\ -u & ;u<0\end{cases}$$

ابتدا با توجه به آن‌که وقتی $x\to 0^+$، x عددی مثبت است، قدرمطلق‌ها را حذف کرده و سپس حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-|x|}{x+|x|}\overset{x>0\Rightarrow |x|=x}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-x}{x+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

۴۶ **۴** ابتدا با توجه به آن‌که وقتی $x\to 0^-$، عبارت $(2x+4)$ مثبت و عبارت $(2x-4)$ منفی می‌باشد، قدرمطلق‌ها را حذف کرده و سپس حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|2x-4|-|2x+4|}{x}\overset{2x-4<0\Rightarrow |2x-4|=-(2x-4)}{2x+4>0\Rightarrow |2x+4|=2x+4}\lim_{x\to 0^-}\frac{-(2x-4)-(2x+4)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-4x}{x}=-4$$

۴۷ **۲** ابتدا حدهای چپ و راست تابع را در $x=1$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{|x^2-1|}{x-1}+x+1\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{|(x-1)(x+1)|}{x-1}+x+1\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{|x-1||x+1|}{x-1}+x+1\right)$$

$$\overset{x>1\Rightarrow x-1>0}{|x-1|=x-1}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)|x+1|}{(x-1)}+x+1\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(|x+1|+x+1\right)=|2|+2=4\Rightarrow\lim_{x\to 1^+}f(x)=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|x^2-1|}{x-1}+x+1\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|x-1||x+1|}{x-1}+x+1\right)\overset{x<1\Rightarrow x-1<0}{|x-1|=-(x-1)}\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-(x-1)|x+1|}{(x-1)}+x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(-|x+1|+x+1\right)=-|2|+2=0\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=0$$

بنابراین مجموع حدهای چپ و راست تابع برابر ۴ می‌شود.

@khaneh_book

۴۸ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم.

$$x \to 1^+ : x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x^3 > 1 \Rightarrow [x^3] = 1 \\ x^2 > 1 \Rightarrow [x^2] = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - [x^3]}{x^2 - [x^2]} \overset{(*)}{=\!=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

۴۹ ۲

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{3x} \overset{\text{هم ارزی}}{\underset{\text{کمتوان}}{=\!=}} \lim_{x\to 0} \frac{(1+2+3)x + \ldots.) + 1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{3x} = 2$$

۵۰ ۲

یادآوری $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

روش اول: با استفاده از یادآوری فوق داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3 - (2x+1)^3}{3x} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x+1) - \left((2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + 1^3\right)}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x+1-8x^3-12x^2-6x-1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-8x^3-11x^2-4x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-8x^2-11x-4)}{3x} = \frac{0+0-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

روش دوم (روش تستی هم‌ارزی): با استفاده از هم‌ارزی $(1+u)^n - 1 \sim nu$ وقتی $u \to 0$، داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3 - (1+2x)^3}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x) - \left(1+3(2x)\right)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-1-6x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{3x} = -\frac{4}{3}$$

۵۱ ۲

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-x)+2ax^2-2a}{ax^2+x-ax-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2-1)+2a(x^2-1)}{(ax^2-ax)+(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x+2a)}{ax(x-1)+(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+2a)}{(x-1)(ax+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x+2a)}{(ax+1)} = \frac{2(1+2a)}{a+1}$$

از طرفی حاصل حد داده شده برابر ۱ است. بنابراین داریم:

$$\frac{2(1+2a)}{a+1} = 1 \Rightarrow 2(1+2a) = a+1 \Rightarrow 2+4a = a+1 \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۵۲ ۴ حد صورت کسر وقتی $x \to 2$، برابر صفر می‌شود، بنابراین حد مخرج کسر نیز باید برابر صفر شود، زیرا در غیر این صورت اگر حد مخرج عددی غیر صفر شود، حاصل حد صفر خواهد شد $\left(\frac{\text{عددی غیر صفر}}{0} = \infty\right)$ که با فرض تست تناقض دارد. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2} (2x^3 + ax - 4) = 0 \Rightarrow 16 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

حال $a = -6$ را در عبارت $\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^3+ax-4}$ قرار داده و سپس حد عبارت حاصل را وقتی $x \to 6$، به‌دست می‌آوریم:

$$L = \lim_{x\to 6} \frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^3+ax-4} \overset{a=-6}{=\!=\!=} \lim_{x\to 6} \frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^3-6x-4} = \frac{7-\sqrt{25}}{2(6)^3-6(6)-4} = \frac{2}{392} = \frac{1}{196}$$

۵۳ ۲ نمودار داده شده از مبدأ مختصات می‌گذرد، لذا مختصات نقطهٔ $(0,0)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{2x^3+ax+b}{x-1} \xrightarrow{(0,0)\in f} 0 = \frac{2(0)^3+a(0)+b}{0-1} \Rightarrow 0 = \frac{b}{-1} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^3+ax}{x-1}$$

از طرفی نمودار تابع f در $x = 1$ تعریف نشده است (یعنی $1 \notin D_f$) ولی تابع در این نقطه حد دارد. بنابراین از این‌که $x = 1$ عضو دامنهٔ تابع کسری f نمی‌باشد نتیجه می‌گیریم، ریشهٔ مخرج است و مخرج به ازای آن صفر می‌شود و از این‌که تابع f در این نقطه حد دارد، نتیجه می‌گیریم که باید حد صورت کسر نیز به ازای آن صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ حاصل شود و پس از رفع ابهام، حاصل حد به دست بیاید.

@khanenbook

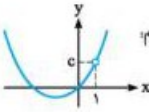
در غیر این‌صورت، حاصل حد بی‌نهایت خواهد شد $\left(\frac{\text{عدد حقیقی غیر صفر}}{\circ} = \infty\right)$ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 1}(4x^2+ax)=\circ \Rightarrow 4(1)^2+a(1)=\circ \Rightarrow 4+a=\circ \Rightarrow a=-4$$

پس $(a,b)=(-4,\circ)$.

سؤال دانش‌پژوه (امین اسماعیلی)، آقا اجازه عرض نقطهٔ توخالی رو چطوری میشه به دست آورد؟

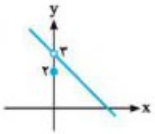
پاسخ: قبلاً $a=-4$ و $b=\circ$ شد دیگه. عرض نقطهٔ توخالی در شکل (عدد c) همان حد تابع در $x=1$ است. داریم:



$$c=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-4x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x(x-1)(x+1)}{x-1}=4(1)(1+1)=8$$

پس عرض نقطهٔ توخالی برابر $c=8$ می‌شود.

۵۴ **۲** اولاً با توجه به نمودار مشخص است که $a=\circ$ و $b=2$. در این صورت تابع به صورت زیر ساده می‌شود:



$$f(x)=\begin{cases}2 & ;\ x=\circ\\ \dfrac{-x^2+cx+d}{x} & ;\ x\neq\circ\end{cases}$$

از طرفی حد تابع در $x=\circ$ برابر ۳ است، داریم:

$$\lim_{x\to\circ}\frac{-x^2+cx+d}{x}=3 \Rightarrow \frac{\circ+\circ+d}{\circ}=3 \Rightarrow \frac{d}{\circ}=3$$

اولاً باید d صفر باشد تا به حالت ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ برسیم و بعد از رفع ابهام جواب حد برابر ۳ شود:

$$\overset{d=\circ}{\lim_{x\to\circ}}\frac{-x^2+cx}{x}=3 \Rightarrow \lim_{x\to\circ}\frac{x(-x+c)}{x}=3 \Rightarrow \circ+c=3 \Rightarrow c=3$$

بنابراین $\frac{a+b}{c+d}=\frac{\circ+2}{3+\circ}=\frac{2}{3}$ می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (اکبر قلی‌زاده)، آقا چطوری فهمیدین $a=\circ$ و $b=2$ میشه؟

پاسخ: ببین ضابطهٔ f در $x=a$ جدا شده، اگه به نمودار دقت کنی می‌بینی که در $x=\circ$ نمودار نیز به ۲ قسمت تبدیل میشه پس a همون صفر بوده، از طرفی b مقدار تابع در $x=a$ (یا همان $x=\circ$) هستش. قبلاً در نمودار، مشخصه که مقدار تابع در $x=\circ$ (نقطهٔ توپر) برابر ۲ میشه. پس $b=2$.

۵۵ **۱**

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x(x-2)}-\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{6-x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{6-x^2-x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2+x-6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+3)(x-2)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+3)}{x}=\frac{-5}{2}$$

۵۶ **۴**

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4x-8}-\frac{1}{x^2-4}\right)\overset{\text{مخرج مشترک‌گیری}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{4(x+2)}=\frac{1}{16}$$

۵۷ **۱**

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{8}{\underbrace{x^2-4}_{(x-2)(x+2)}}-\frac{x}{x-2}\right)\overset{\text{مخرج مشترک‌گیری}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 2}\frac{8-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{8-x^2-2x}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2+2x-8)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x-4}{x+2}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

۵۸ **۲** برای شروع محاسبهٔ حد، ابتدا باید جزءصحیح را حذف کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2[x]}{2-x}\right)\overset{x\to 2^-:[x]=1}{=\!=\!=}\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x(x-2)}+\frac{2(1)}{-(x-2)}\right)$$

$$\overset{\text{مخرج مشترک}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+2)+2x}{-x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{-x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{2}$$

@khaneh_book

۵۹ ۴

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x}-\frac{3x-4}{x^2-2x}\right)\xrightarrow{\text{مخرج مشترک‌گیری}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x(x+1)}-\frac{3x-4}{x(x-2)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)(x-2)-(3x-4)(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4-(3x^2-x-4)}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+x}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-2x+1)}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+1}{(x+1)(x-2)}=-\frac{1}{2}$$

۶۰ ۲ با جایگذاری $x=-2$، مخرج هر دو کسر صفر می‌شود. حال ابتدا مخرج‌ها را تجزیه و سپس مخرج مشترک می‌گیریم. عبارت x^2-4 به‌صورت $(x+2)(x-2)$ تجزیه شده و برای تجزیهٔ عبارت $(2x^2+5x+2)$ از تقسیم کردن استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l}2x^2+5x+2 & x+2\\ -(2x^2+4x) & 2x+1\\ \hline x+2 & \\ -(x+2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{3}{2x^2+5x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{3}{(x+2)(2x+1)}-\frac{4}{(x+2)(x-2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x-2)-4(2x+1)}{(x+2)(2x+1)(x-2)}\xrightarrow{3x-6-8x-4}\lim_{x\to -2}\frac{-5x-10}{(x+2)(2x+1)(x-2)}\xrightarrow{-5(x+2)}=\frac{-5}{(-3)(-4)}=-\frac{5}{12}$$

۶۱ ۲ **روش اول:** با فرض $x=(\sqrt{x})^2$ و سپس فاکتورگیری از $\sqrt{x}$ در صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$$

روش دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج صورت و مخرج کسر را گویا کرده و عامل ابهام $(x-1)$ را ایجاد می‌کنیم و سپس با حذف آن حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-(\sqrt{x})^2)(\sqrt{x}+1)}{((\sqrt{x})^2-1^2)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x=1$$

(اتحاد مزدوج: x^2-x، $x-1$، x)

۶۲ ۴

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x}+x-2}\xrightarrow{x=(\sqrt{x})^2}\overset{\frac{0}{0}}{\lim_{x\to 1}}\frac{(x+3)(x-1)}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)\left((\sqrt{x})^2-1\right)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2}=\frac{4(2)}{3}=\frac{8}{3}$$

۶۳ ۲ **روش اول:** با فرض $x=\sqrt[3]{x^3}$ و فاکتورگیری از x با توان کوچک‌تر در صورت و مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+1)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{0}+1}{\sqrt[3]{0}+1}=1$$

روش دوم (روش تستی هم‌ارزی):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^1+x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x^2}+x^1}\xrightarrow[\text{کم‌توان}]{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x^1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=1$$

۶۴ ۳

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{5x+6}}{4-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{5x+6}}{(2-x)(2+x)}\times\frac{2x+\sqrt{5x+6}}{2x+\sqrt{5x+6}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(2+x)(2x+\sqrt{5x+6})}\times\lim_{x\to 2}\frac{(2x)^2-(\sqrt{5x+6})^2}{2-x}$$

(اتحاد مزدوج؛ عامل ضربی غیر صفر)

$$=\frac{1}{4(4+\sqrt{16})}\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-(5x+6)}{2-x}=\frac{1}{32}\lim_{x\to 2}\frac{(4x+3)(x-2)}{-(x-2)}=\frac{1}{32}(-11)=-\frac{11}{32}$$

@khanehbook

۶۵ ۲

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+3}}{x^3+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{(x+\sqrt{x+3})}{(x+1)(x^2-x+1)}\times\frac{x-\sqrt{x+3}}{x-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x^2-x+1)(x-\sqrt{x+3})}\times\lim_{x\to -1}\frac{x^2-(\sqrt{x+3})^2}{x+1}$$

(اتحاد مزدوج؛ عامل ضربی غیر صفر)

$$=\frac{1}{3(-3)}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)}=-\frac{1}{6}\times(-3)=\frac{1}{2}$$

۶۶ ۴

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{2x^2-x-6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{(2x+3)(x-2)}\times\frac{x+\sqrt{2x}}{x+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(2x+3)(x+\sqrt{2x})}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

(اتحاد مزدوج)

$$=\frac{1}{7\times 4}\times\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)}=\frac{1}{28}\times 2=\frac{1}{14}$$

۶۷ ۳

$$\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}\times\frac{1-x-\sqrt{x+1}}{1-x-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(-3x+9)(1-x-\sqrt{x+1})}{(1-x)^2-(\sqrt{x+1})^2}$$

(اتحاد مزدوج)

$$\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)(1-x-\sqrt{x+1})}{\underbrace{x^2+1-2x-(x+1)}_{x^2-3x}}=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)(1-x-\sqrt{x+1})}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-3(1-x-\sqrt{x+1})}{x}=\frac{-3(1-3-\sqrt{4})}{3}=4$$

۶۸ ۱ برای آن‌که حد تابع $f(x)$ را وقتی $x\to 1$، به‌دست آوریم، کافی است از تابع $f(x-1)$ در $x=2$ حد بگیریم:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 2}f(x-1)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-7x+10}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)}{(x-2)(x-5)}\times\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)(x-5)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x-5)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{1}{(-3)(2)}=-\frac{1}{6}$$

۶۹ ۱ وقتی $x\to 3^+$ می‌رود جلوی تابع f (ورودی f) به سمت 2^+ می‌رود، زیرا:

$$x\to 3^+: x>3\xrightarrow{-1}x-1>2\Rightarrow(x-1)\to 2^+$$

پس باید $f(2^+)$ را پیدا کنیم. از طرفی تابعی که به ما داده‌اند، $f(x)$ نیست بلکه $f(3-x)$ است و ما $f(2^+)$ را می‌خواهیم یعنی باید عبارت داخل پرانتز یعنی $3-x$ برابر 2^+ شود. حال باید x ای را پیدا کنیم که $3-x=2^+$ شود

$$3-x=2^+\Rightarrow 3-2^+=x\Rightarrow x=1^-$$

سؤال (دانش‌پژوه (اکرم غلامی)): آقا میشه به جور دیگه بگین چطوری از $3-x=2^+$ رسیدین به $x=1^-$؟

پاسخ: نگاه کن،

$$3-x=2^+:3-x>2\Rightarrow 3-2>x\Rightarrow x<1\Rightarrow x=1^-$$

$$f(2^+)=\lim_{x\to 1^-}f(3-x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^3-3x^2+x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x(x^2-2x+1)}}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{|x-1|}^{-}\sqrt{x}}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)\sqrt{x}}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\sqrt{x}}{x-2}=\frac{-1}{1-2}=1$$

۷۰ ۲

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+14}-2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+14}-2x}\times\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}\times\frac{\sqrt{x+14}+2x}{\sqrt{x+14}+2x}$$

(اتحاد مزدوج)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+14}+2x}{x+\sqrt{x+2}}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(\sqrt{x+2})^2}{(\sqrt{x+14})^2-4x^2}=\frac{\sqrt{16}+4}{2+\sqrt{4}}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x+14-4x^2}$$

$$=\frac{8}{4}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(-4x-7)}=2\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{-4x-7}=2\left(\frac{3}{-15}\right)=-\frac{2}{5}$$

@khanenbook

۷۱ **۴**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{3-\sqrt{7+\sqrt{x+1}}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{3-\sqrt{7+\sqrt{x+1}}}\times\frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}}\times\frac{3+\sqrt{7+\sqrt{x+1}}}{3+\sqrt{7+\sqrt{x+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3+\sqrt{7+\sqrt{x+1}}}{x+\sqrt{x+6}}\times\lim_{x\to 3}\frac{x^2-(\sqrt{x+6})^2}{3^2-(\sqrt{7+\sqrt{x+1}})^2}=\frac{3+\sqrt{7+\sqrt{4}}}{3+\sqrt{9}}\times\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{9-7-\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{2-\sqrt{x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)(2+\sqrt{x+1})}{4-x-1}=(-1)(5)(2+\sqrt{4})=-5\times 4=-20$$

۷۲ **۱**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+x^2-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(x^3)^2+x^2-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{(x^3-1)(x^2+2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

اتحاد چاق و لاغر

اتحاد جمله مشترک

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^2+2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\left(\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)\times\frac{1}{3\times 3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

۷۳ **۳**

$$L=\lim_{x\to -2}\frac{x-\sqrt[3]{3x-2}}{5x^2+9x-2}\times\frac{x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}{x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-(\sqrt[3]{3x-2})^3}{(5x^2+9x-2)(x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})}$$

اتحاد چاق و لاغر

x^3-3x+2

تجزیهٔ عبارات x^3-3x+2 و $5x^2+9x-2$ کار آسانی نمی‌باشد. پس کافی است آن‌ها را بر عامل لهایم یعنی $x-(-2)=x+2$ تقسیم کنیم. در این صورت داریم:

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x+2)(5x-1)(x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})}=\frac{4+4+1}{(-10-1)(4+4+4)}=\frac{9}{(-11)(12)}=\frac{-3}{44}$$

$5x^2+9x-2$

۷۴ **۲**

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{x+4}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{x+4}-1}\times\frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1}\times\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+1}$$

اتحاد چاق و لاغر

اتحاد مزدوج

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt[3]{x+2})^3+1^3}{(\sqrt{x+4})^2-1^2}\times\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+1}=\left(\lim_{x\to -2}\frac{x+2+1}{x+4-1}\right)\times\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt[3]{(-1)^2}-\sqrt[3]{-1}+1}=\left(\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x+3}\right)\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

۷۵ **۳**

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x-\sqrt{9x-5}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{2x-\sqrt{9x-5}}\times\frac{2x+\sqrt{9x-5}}{2x+\sqrt{9x-5}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|\times(2x+\sqrt{9x-5})}{(2x)^2-(\sqrt{9x-5})^2}\overset{x\to 1^-\Rightarrow x<1}{\underset{|x-1|=-(x-1)}{}}\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(2x+\sqrt{9x-5})}{4x^2-9x+5}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(2x+\sqrt{9x-5})}{(4x-5)(x-1)}=\frac{-(2+\sqrt{9-5})}{(4-5)}=\frac{-(2+2)}{-1}=4$$

@kaneh_book

۷۶ **۲** ابتدا با توجه به آن‌که $x \to 3^-$، قدرمطلق را حذف کرده و سپس حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3^-}\frac{|(x-2)(x+1)|}{2x-\sqrt{x^2+12}} = \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 3^-}|x+1|}_{4} \times \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{2x-\sqrt{x^2+12}} \xrightarrow[|x-3|=-(x-3)]{x<3\Rightarrow x-3<0} 4\lim_{x\to 3^-}\underbrace{\frac{-(x-3)}{2x-\sqrt{x^2+12}}}_{\text{اتحاد مزدوج}} \times \frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}$$

$$= 4\lim_{x\to 3^-}\underbrace{(2x+\sqrt{x^2+12})}_{4(6+\sqrt{16})} \times \lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{\underbrace{4x^2-(x^2+12)}_{3x^2-12}} = 24\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{3(x^2-4)} = 24\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{3(x-3)(x+3)} = 24\times\frac{-1}{12} = -2$$

۷۷ **۲**

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} \xrightarrow[2<x<3\Rightarrow[x]=2]{x\to 3^-} \lim_{x\to 3^-}\frac{(3-2)\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{1\times|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

۷۸ **۲**

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} \xrightarrow[|x-2|=x-2]{x\to 2^+:\,x>2\Rightarrow x-2>0} \lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\underbrace{\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \times \frac{4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}}{4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{8-(x+6)}{(x-2)(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{8-(x+6)}^{2-x}}{x-2} \times \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{4+4+4} = -1\times\frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

۷۹ **۴**

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^3}{\sqrt{-x^3+3x^2+1}-\sqrt{3x}} \times \frac{\sqrt{-x^3+3x^2+1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{-x^3+3x^2+1}+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^3(\sqrt{-x^3+3x^2+1}+\sqrt{3x})}{(-x^3+3x^2+1)-3x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)^3}(\sqrt{-x^3+3x^2+1}+\sqrt{3x})}{\cancel{(x-1)^3}(x^2-3x^2+3x-1)} = \sqrt{1+3+1}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

۸۰ **۴**

$$\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -3}\underbrace{\frac{a(x+3)}{1-\sqrt{5x+16}}}_{\text{اتحاد مزدوج}} \times \frac{1+\sqrt{5x+16}}{1+\sqrt{5x+16}}$$

$$= \lim_{x\to -3}a(1+\sqrt{5x+16}) \times \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{1^2-(\sqrt{5x+16})^2} = 2a\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{1-(5x+16)} = 2a\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{-5x-15}$$

$$= 2a\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)}{-5(x+3)} = \frac{2a}{-5} \xrightarrow{\text{طبق فرض: } L=2} \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow a = -5$$

۸۱ **۲** از آن‌جایی که حد مخرج کسر وقتی $x \to 0$، صفر می‌شود و حاصل حد، عددی حقیقی و مخالف صفر شده است، نتیجه می‌گیریم که باید حد صورت کسر نیز وقتی $x \to 0$، برابر صفر شود (چرا؟). بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{4x+b}-2) = 0 \Rightarrow \sqrt{4(0)+b}-2 = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4 \quad (*)$$

@kharaneh_book

از طرفی چون هم صورت و هم مخرج کسر وقتی $x \to 0$، صفر شده‌اند، با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم. پس با رفع ابهام، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+b}-2}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{4x+4}+2}{\sqrt{4x+4}+2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x+4-4}{x(\sqrt{4x+4}+2)}$$

(اتحاد مزدوج)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(\sqrt{4x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{4x+4}+2} = \frac{4}{4} = 1$$

از طرفی طبق فرض تست، حاصل حد برابر a است. بنابراین $a=1$ و در نتیجه $\frac{b}{a}=\frac{4}{1}=4$.

۸۲ ۱

$$\lim_{x\to 2}\frac{b-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4} = \frac{b-\sqrt{4+5}}{0} = \frac{b-3}{0} = c$$

چون طبق فرض تست $c\in\mathbb{R}$ است. پس حاصل حد $\frac{0}{0}$ بوده (یعنی صورت هم باید صفر شود: $b-3=0 \Rightarrow b=3$) حال با رفع ابهام کردن حاصل حد را می‌یابیم:

$$c = \lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{2(2-x)}\times\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{2(3+\sqrt{x^2+5})}\times\lim_{x\to 2}\frac{9-(x^2+5)}{2-x}$$

$$= \frac{1}{12}\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2-x} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 2}(2+x) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

۸۳ ۲ **روش اول:** با فاکتورگیری از عامل $(x-2)^3$ در صورت و مخرج کسر و حذف آن حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^5+(x-2)^3}{3(x-2)^4+2(x-2)^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3((x-2)^2+1)}{(x-2)^3(3(x-2)+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2+1}{3(x-2)+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

روش دوم (روش تستی هم‌ارزی): برای محاسبهٔ حد داده شده، فرض می‌کنیم $x-2=t$، در این صورت داریم:

$$x = t+2,\ x\to 2 \Rightarrow t\to 0$$

حال حد را برحسب متغیر جدید t بازنویسی کرده و سپس حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^5+(x-2)^3}{3(x-2)^4+2(x-2)^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t^5+t^3}{3t^4+2t^3} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{2t^3} = \frac{1}{2}$$

۸۴ ۲ عامل ابهام $(x-1)$ را در صورت و مخرج کسر فاکتور گرفته و سپس با حذف آن حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4+2(x^2-1)}{(x^2-1)^4+3(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4+2(x-1)(x+1)}{(x-1)^4(x+1)^4+3(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)((x-1)^3+2(x+1))}{(x-1)((x-1)^3(x+1)^4+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3+2(x+1)}{(x-1)^3(x+1)^4+3} = \frac{0+2\times 2}{0+3} = \frac{4}{3}$$

۸۵ ۴ عدد ۱- را کنار x قرار داده و سپس با توجه به تساوی $x-1=(\sqrt{x-1})^2$ داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x-1})^2+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۸۶ ۴ **روش اول:** برای محاسبهٔ حد داده شده، فرض می‌کنیم $\sqrt[4]{x}=t$، در این صورت داریم:

$$x = t^4,\ x\to 1 \Rightarrow t\to 1$$

حال حد را برحسب متغیر جدید t بازنویسی کرده و سپس حاصل آن‌را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x^4-1} = \frac{0}{0} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^4)^4-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^{16}-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^8-1)(t^8+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^4-1)(t^4+1)(t^8+1)}$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^2-1)(t^2+1)(t^4+1)(t^8+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)(t^4+1)(t^8+1)} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{(t+1)(t^2+1)(t^4+1)(t^8+1)} = \frac{1}{2\times 2\times 2\times 2} = \frac{1}{16}$$

@khanehbook

روش دوم:

نکته با فرض $m \neq 0$، داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\frac{n}{m}$$

با استفاده از نکتهٔ فوق داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{4}=\frac{1}{16}$$

۸۷ **۳** عامل ابهام $(x-1)$ را در صورت و مخرج کسر ایجاد کرده و سپس با حذف آن حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1+\sqrt{(x-1)^3}}{x^3-1+2\sqrt{(x-1)^3}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1+\sqrt{(x-1)^2(x-1)}}{x^3-1+2\sqrt{(x-1)^2(x-1)}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1+|x-1|\sqrt{x-1}}{x^3-1+2|x-1|\sqrt{x-1}}$$

$$\overset{\substack{x>1\Rightarrow x-1>0\\ |x-1|=x-1}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)+(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1+\sqrt{x-1})}{(x-1)(x^2+x+1+2\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1+\sqrt{x-1}}{x^2+x+1+2\sqrt{x-1}}=\frac{2}{3}$$

۸۸ **۴** وقتی $x\to 0^-$، در واقع انتهای کمان x در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار داشته و می‌دانیم در این ناحیه $\cos x>0$ و $\sin x<0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-|\cos x|}{|\sin x|\sin x}\overset{\substack{\cos x>0\Rightarrow|\cos x|=\cos x\\ \sin x<0\Rightarrow|\sin x|=-\sin x}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{-\sin x(\sin x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{-(1-\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{-(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-(1+\cos x)}=\frac{1}{-(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

۸۹ **۴**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}\times\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\sqrt{\cos x})}$$

(اتحاد مزدوج)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

۹۰ **۳**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

(اتحاد مزدوج) (اتحاد مزدوج)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos(0)}}{1+\cos(0)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{|\sin x|}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

($|\sin x|=\sin x$ وقتی $x\to 0^+$)

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$

($1-\cos^2 x=\sin^2 x$)

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sin(0)}{1+\cos(0)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{0}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0=0$$

۹۱ **۳**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}\times\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x(\sqrt{1+\cos x})}{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}\times\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos 0}}{\sqrt{1+\cos 0+\cos^2 0}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|\sin x|}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\overset{\substack{x\to 0^+:\sin x>0\\ |\sin x|=\sin x}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sin x}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

@khaneh_book

۹۲ ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{k\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{k(\frac{\sin x}{\cos x})^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\frac{k\sin^3 x}{\cos^3 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{k\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x(1-\cos x)}{k\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x(1-\cos x)}{k\sin^2 x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x(1-\cos^2 x)}{k\sin^2 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x\sin^2 x}{k\sin^2 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{k(1+\cos x)}=\frac{\cos^3(0)}{k(1+\cos(0))}$$

$$=\frac{1}{k(1+1)}=\frac{1}{2k}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}1\Rightarrow 2k=1\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

۹۳ ۱

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{1+\cot x}{1+\tan x}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{\cos x(\sin x+\cos x)}{\sin x(\sin x+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\cot x=\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\overset{\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha}{=\!=\!=}-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

۹۴ ۳

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}\overset{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1-\cos x+\cos^2 x}\overset{\cos\pi=-1}{=\!=\!=}\frac{1}{3}$$

۹۵ ۲

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)}=\frac{1-(-1)}{1-(-1)+(-1)^2}=\frac{2}{3}$$

۹۶ ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x(\frac{\sqrt{2}}{2})-\cos x(\frac{\sqrt{2}}{2})}\quad\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1+\frac{2}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۹۷ ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\sin x-\cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

۹۸ ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{1-2\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{1-\sin^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}}=-1$$

@khaneh_book

۹۹ ۲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1}=2$$

۱۰۰ ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{2\cos^2 x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x+\underbrace{\cos^2 x-1}_{-(1-\cos^2 x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos^2 x}=\frac{-1}{\cos^2\frac{2\pi}{4}}=\frac{-1}{\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}\overset{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha}{=}\frac{-1}{\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{-1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

۱۰۱ ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin 2x\cos 2x)^2}{\sin 2x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x\cos^2 2x}{\sin 2x-1}\times\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x(\sin 2x+1)\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{\underbrace{\sin^2 2x-1}_{-\cos^2 2x}}=\sin^2\frac{\pi}{2}.(\sin\frac{\pi}{2}+1)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{\cos^2 2x}}{-\cancel{\cos^2 2x}}=1\times(1+1)(-1)=-2$$

۱۰۲ ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x-1}{(\tan x-1)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(\frac{\sin x}{\cos x}-1)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)}{(\frac{\sin x-\cos x}{\cos x})^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cancel{(\sin x-\cos x)^2}}{\cancel{(\sin x-\cos x)^2}\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\cos^2 x=-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

۱۰۳ ۲

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\sin^2 x\sin\frac{\pi}{4}-\cos^2 x\cos\frac{\pi}{4}}\times\frac{(\sqrt[3]{\cos x})^2+\sqrt[3]{\cos x}\times\sqrt[3]{\sin x}+(\sqrt[3]{\sin x})^2}{(\sqrt[3]{\cos x})^2+\sqrt[3]{\cos x}\times\sqrt[3]{\sin x}+(\sqrt[3]{\sin x})^2}$$

$\cos x-\sin x$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt[3]{\cos x})^2-(\sqrt[3]{\sin x})^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{(\sin^2 x-\cos^2 x)}_{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}\times(\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\sin x\cos x}+\sqrt[3]{\sin^2 x})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)(\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\sin x\cos x}+\sqrt[3]{\sin^2 x})}$$

$$=\frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})\left((\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{2}{3}}+(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{2}{3}}+(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}}_{-1}\times\left(3\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{2}{3}}\right)}=\frac{1}{-3\times(2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{-3\times 2^{-\frac{1}{3}}}=\frac{-\sqrt[3]{2}}{3}$$

@khaneh_book

۱۰۴ **۴** قبل از هر کاری، ابتدا $[x]$ را با توجه به مقدار x برمی‌داریم و به جایش عدد مناسب قرار می‌دهیم:

$$x \to \frac{\pi}{۲}: \frac{\pi}{۲} = \frac{۳/۱۴}{۲} = ۱/۵۷ \to [۱/۵۷] = ۱$$

پس حد داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt[۳]{\sin x}}{[x]\cos^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt[۳]{\sin x}}{(۱)(۱-\sin^۲ x)} \times \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt[۳]{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt[۳]{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(\sqrt{\sin x})^۲ - (\sqrt[۳]{\sin x})^۲}{۱-\sin^۲ x} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{\sin x} + \sqrt[۳]{\sin x}} \quad (\to \frac{۱}{۲})$$

حالا از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$= \frac{۱}{۲} \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x - (\sqrt[۳]{\sin^۲ x})}{۱-\sin^۲ x} \times \frac{\sin^۲ x + \sin x(\sqrt[۳]{\sin^۲ x}) + (\sqrt[۳]{\sin^۲ x})^۲}{\sin^۲ x + \sin x(\sqrt[۳]{\sin^۲ x}) + (\sqrt[۳]{\sin^۲ x})^۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^۲ x - \sin^۲ x}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{\sin^۲ x + \sin x(\sqrt[۳]{\sin^۲ x}) + (\sqrt[۳]{\sin^۲ x})^۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^۲ x}{-(۱+\sin x)} \times \frac{۱}{۱+۱+۱} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{-۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{-۱۲}$$

۱۰۵ **۲** روش اول:

$$\text{(۱)} \lim_{x\to ۰^+} ([x]+[-x]) \frac{۱-\cos^۳ x}{\sin^۲ x} \quad (x\to ۰^+ : x>۰ \Rightarrow [x]=۰ \\ x>۰ \Rightarrow -x<۰ \Rightarrow [-x]=-۱) \quad \lim_{x\to ۰^+} (-۱) \frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\cos^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to ۰^+} \frac{-(۱-\cos x)(۱+\cos x+\cos^۲ x)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)} = \frac{-(۱+۱+۱)}{۱+۱} = -\frac{۳}{۲}$$

$$\text{(۲)} \lim_{x\to ۰^-} ([x]+[-x]) \frac{۱-\cos^۳ x}{\sin^۲ x} \quad (x\to ۰^- : x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \\ x<۰ \Rightarrow -x>۰ \Rightarrow [-x]=۰) \quad \lim_{x\to ۰^-} (-۱+۰) \frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\cos^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{-(۱-\cos x)(۱+\cos x+\cos^۲ x)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)} = \frac{-(۱+۱+۱)}{۱+۱} = -\frac{۳}{۲}$$

پس چون حد چپ و حد راست مساوی و برابر $\frac{-۳}{۲}$ شدند، لذا حد تابع در $x = ۰$ موجود و برابر $-\frac{۳}{۲}$ است.

روش دوم:

یادآوری

$$\lim_{x\to a} ([x]+[-x]) = -۱$$

با توجه به یادآوری فوق دیگر نیازی به محاسبهٔ حدهای چپ و راست به طور جداگانه نیست.

$$\lim_{x\to ۰} ([x]+[-x]) \frac{۱-\cos^۳ x}{\sin^۲ x} = \lim_{x\to ۰} (-۱) \frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x+\cos^۲ x)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)} = \frac{-(۱+۱+۱)}{۱+۱} = -\frac{۳}{۲}$$

۱۰۶ **۳** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تابع در $x = ۲$، حد چپ دارد ولی حد راست ندارد. در نتیجه حد ندارد و پیوسته نمی‌باشد.

گزینهٔ (۲): تابع در $x = ۲$، حد چپ و راست و مقدار یکسان و برابر صفر دارد پس در ۲ پیوسته است.

گزینهٔ (۳): تابع در $x = ۲$، حد چپ و راست یکسان و برابر صفر دارد پس حد در $x = ۲$ موجود و برابر صفر است ولی حد آن با مقدارش برابر نمی‌باشد لذا در $x = ۲$ ناپیوسته است. پس همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۴): تابع در $x = ۲$ حد چپ و راست دارد ولی چون مقدار حدها با هم یکسان نیست، پس در $x = ۲$ حد ندارد و پیوسته هم نمی‌باشد.

@kmaneh_book

۱۰۷ ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

با توجه به دامنهٔ به‌دست آمده، در $x=-۱$ فقط حد راست وجود دارد ولی حد چپ وجود ندارد. در نتیجه حد وجود ندارد. پس در $x=-۱$ تابع ناپیوسته است.

گزینهٔ (۲): ابتدا دامنهٔ تابع $g(x)$ را می‌یابیم:

$$۹-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۹ \Rightarrow |x|\leq ۳ \Rightarrow -۳\leq x\leq ۳$$

با توجه به دامنهٔ به‌دست آمده، در $x=۲$ هم حد چپ و هم حد راست وجود دارد، حال پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$g(۲)=\sqrt{۹-۴}=\sqrt{۵}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\sqrt{۹-x^۲}=\sqrt{۹-۴}=\sqrt{۵}\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\sqrt{۹-x^۲}=\sqrt{۹-۴}=\sqrt{۵}\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=\sqrt{۵}\xrightarrow{g(۲)=\sqrt{۵}}\lim_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$$

بنابراین تابع g در $x=۲$ پیوسته است. همین گزینه پاسخ تست است.

گزینهٔ (۳): ابتدا دامنهٔ تابع $h(x)$ را می‌یابیم:

$$h(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۰ \quad (*)\\ x-\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow x\geq\sqrt{x}\xrightarrow[\text{طرفین به توان ۲}]{(*)} x^۲\geq x\Rightarrow x^۲-x\geq ۰\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{جدول}} x\geq ۱ \text{ یا } x\leq ۰ \quad (**)\end{cases}$$

دامنهٔ $h(x)$ از اشتراک جواب‌های $(*)$ و $(**)$ به‌دست می‌آید:

$$D_h=[۱,+\infty)\cup\{۰\}$$

با توجه به دامنهٔ به‌دست آمده، در $x=۱$ فقط حد راست وجود دارد ولی حد چپ وجود ندارد. در نتیجه حد وجود ندارد. پس در $x=۱$ تابع ناپیوسته است.

گزینهٔ (۴): پیوستگی تابع k را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} k(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲+۱)=۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} k(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(-x^۲)=-۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۱} k(x): \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین تابع k در $x=۱$ ناپیوسته است.

۱۰۸ ۳ برای آن‌که تابع f در $x=-۱$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=f(-۱)$. بنابراین حدهای چپ و راست و مقدار تابع را در $x=-۱$ به‌دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{x+a}=\frac{۱}{-۱+a}\quad ,\quad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(x^۲+ax)=۱-a\quad ,\quad f(-۱)=\frac{۱}{-۱+a}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=f(-۱)\Rightarrow \frac{۱}{-۱+a}=۱-a\Rightarrow ۱=(۱-a)(-۱+a)\Rightarrow ۱=-۱+۲a-a^۲\Rightarrow a^۲-۲a+۲=۰$$

معادلهٔ به‌دست آمده جواب حقیقی ندارد $(\Delta<۰)$، بنابراین هیچ a ای وجود ندارد که به ازای آن، تابع در $x=-۱$ پیوسته باشد.

۱۰۹ ۲ ابتدا حدهای چپ و راست و مقدار تابع را در $x=۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲a+x^۲)=۲a+۴=f(۲)\quad ,\quad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۲-x)=۸-۲=۶$$

حال برای آن‌که تابع f در $x=۲$ پیوسته نباشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)\neq\lim_{x\to ۲^-} f(x)\Rightarrow ۲a+۴\neq ۶\Rightarrow ۲a\neq ۲\Rightarrow a\neq ۱\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\{۱\}$$

بنابراین تابع f به ازای هر مقدار حقیقی a به جز یک در $x=۲$ پیوسته نخواهد بود.

۱۱۰ ۴ برای آن‌که تابع f در $x=۱$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)$. بنابراین حدهای چپ و راست و مقدار تابع را در $x=۱$ به‌دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(a\sin(x-۱)+۲b)=a\underbrace{\sin(۰)}_{۰}+۲b=۲b\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲ax^۲+bx+۱)=۲a+b+۱\\ f(۱)=|۱|=۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۲b=۲a+b+۱=۱\Rightarrow ۲a+b+۱=۱\Rightarrow ۲a+b=۰$$

توجه کنید که نیازی به محاسبهٔ a و b نمی‌باشد و $۲a+b$ از شرط $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)$ به راحتی به‌دست می‌آید.

@khanen_book

۱۱۱ ۴

$\lim_{x\to 2^+}(x+2)=2+2=4$: حد راست ، $\lim_{x\to 2^-}(3x-[x]) \xrightarrow[1<x<2]{x\to 2^-:[x]=1} \lim_{x\to 2^-}(3x-1)=3(2)-1=5$: حد چپ و

حد راست ۴ و حد چپ ۵ است و چون با هم برابر نیستند، پس تابع در $x=2$ اصلاً حد ندارد. به عبارت دیگر a (مقدار تابع) هر عددی باشد، تابع همچنان به علت نداشتن حد، ناپیوسته است. لذا تابع به ازای هیچ مقدار a در $x=2$ پیوسته نمی‌شود.

۱۱۲ ۴

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-x-1}{x-1}\overset{\div}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}(2x+1)=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-a+3)=a-a+3=3$$

$$f(1)=a(1)-a+3=a-a+3=3$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید همواره $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ برقرار است و به مقدار a بستگی ندارد، به عبارت دیگر، به ازای هر مقدار a تابع در $x=1$ پیوسته می‌باشد.

۱۱۳ ۴

حد : $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\times\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=1+\sqrt{1-0}=2 \Rightarrow$ حد = مقدار : شرط پیوستگی $\Rightarrow a=2$

۱۱۴ ۳

برای آن‌که f در $x=2$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$. بنابراین ابتدا حد تابع را در $x=2$ با استفاده از ضابطهٔ بالایی f به‌دست آورده و سپس آن را با مقدار تابع در $x=2$ برابر قرار می‌دهیم:

اتحاد مزدوج

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{2-x}\overset{\div}{=}\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{2-x}\times\frac{x+\sqrt{2x}}{x+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(2-x)(x+\sqrt{2x})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{-(x-2)(x+\sqrt{2x})}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{-(x+\sqrt{2x})}=\frac{2}{-(2+\sqrt{4})}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

از طرفی $f(2)=a$، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\Rightarrow -\frac{1}{2}=a$$

۱۱۵ ۴

حد راست $=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}\times\frac{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-(x-\sqrt{x+1})}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})}$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})}\times\frac{1-x-\sqrt{x+1}}{1-x-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(1-x)^2-(\sqrt{x+1})^2}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})(1-x-\sqrt{x+1})}$$

$(1-x)^2-(\sqrt{x+1})^2=1+x^2-2x-x-1$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})(1-x-\sqrt{x+1})}=\frac{3}{(1+\sqrt{3-\sqrt{3+1}})(1-3-\sqrt{3+1})}=\frac{3}{(1+\sqrt{1})(-4)}=-\frac{3}{8}$$

$x^2-3x=x(x-3)$

مقدار $\Rightarrow$ حد چپ $\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)\Rightarrow 3a-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$

همان‌طور که می‌بینیم a هرچه باشد، حد چپ، مقدار و حد راست با هم یکسان و برابر $-\frac{3}{8}$ هستند. پس تابع به ازای هر a ای، در $x=3$ پیوسته است.

۱۱۶ ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & ;\ |x|>1\\ 2x & ;\ |x|\le 1\end{cases}\xrightarrow[|x|\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1]{|x|>1\Rightarrow x>1 \text{ یا } x<-1} f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & ;\ x>1 \text{ یا } x<-1\\ 2x & ;\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

حال پیوستگی تابع f را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} 2x=-2\\ &\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-1}{x+1}\overset{\div}{=}\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2\\ &f(-1)=2(-1)=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=f(-1)$$

بنابراین f در $x=-1$ پیوسته است.

@khanen_book

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2\\ f(1)=2(1)=2\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow f \text{ در } x=1 \text{ ناپیوسته است.}$$

۱۱۷ ۱

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-x+|x-2|}{x-1}\xrightarrow{x\to 1:\,x-2<0}\lim_{x\to 1}\frac{-x-(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)}=-2$$

از طرفی $f(1)=a$، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow -2=a$$

۱۱۸ ۳

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|}$$

به خاطر وجود قدرمطلق و این‌که $x=0$ ریشهٔ داخل قدرمطلق است، حد چپ و راست را باید جداگانه حساب کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|}\xrightarrow{x>0:\,|x|=x}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|}\xrightarrow{x<0:\,|x|=-x}\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-1)}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x+2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2}$$

از طرفی $f(0)=A$، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow -\frac{1}{2}=A$$

سؤال *دانش‌پژوه (شهرام هدهدی)*، آقا اجازه راه ساده تستی نداره این سؤال؟

پاسخ پاسخ: *چرا داره، از هم ارزی کم‌توان می‌تونیم استفاده کنیم. گناه کن:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی کم‌توان}}\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{-2|x|}=-\frac{1}{2}$$

۱۱۹ ۲

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x^2+bx+3)=5+b+3=b+8\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x^2-\dfrac{3ax-3a}{\sqrt{x^2-2x+1}}\right)\xrightarrow{x<1\Rightarrow x-1<0}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x^2-\dfrac{3a(x-1)}{-(x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2+3a)=2+3a\\ f(1)=2\end{cases}$$

$$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow b+8=2+3a=2\Rightarrow\begin{cases}b+8=2\Rightarrow b=-6\\ 2+3a=2\Rightarrow a=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x^2 & ;\ x<1\\ 2 & ;\ x=1\\ 5x^2-6x+3 & ;\ x>1\end{cases}$$

برای پیدا کردن عرض محل برخورد نمودار تابع با خط $x=3$، باید در ضابطهٔ تابع f به جای x عدد ۳ قرار دهیم:

$$3>1\Rightarrow f(3)\xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایینی}]{f}5(3)^2-6(3)+3=30$$

۱۲۰ ۳

یادآوری

$$[x]=a\xrightarrow{a\in Z} a\le x<a+1$$

با توجه به یادآوری فوق داریم:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-x & ,\ 1\le x<2\\ \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|} & ,\ x<1 \text{ یا } x\ge 2\end{cases}$$

@khaneh_book

سؤال دانش‌پژوه (هلال هاروی)، آقا $[x] \neq 1$ چجوری تبدیل به $x \geq 2$ یا $x < 1$ شد؟

پاسخ: پیدا: $[x] \neq 1 \Rightarrow x \notin [1,2) \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [1,2) \Rightarrow x \in (-\infty,1) \cup [2,+\infty)$.

بررسی پیوستگی در $x = 1$:

حد راست: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x^2 - x) = 3 - 1 = 2$

مقدار: $f(1) = 3 - 1 = 2$

حد چپ: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} \overset{x \to 1^- : x<1 \Rightarrow x^2<1}{\underset{\Rightarrow x^2-1<0 \Rightarrow |x^2-1| = -(x^2-1)}{=}} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)}{-(x^2-1)} = \lim\limits_{x \to 1^-} -(x^2+1) = -(1+1) = -2$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع در $x = 1$ حد ندارد، لذا ناپیوسته است. با این حال چون حد راست = مقدار است پس تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد.

۱۲۱ ۳

مقدار: $f(1) = 2a + [2(1)] = 2a + 2$

حد راست: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2a + [2x]) \overset{x \to 1^+ : x>1 \Rightarrow 2x>2}{\underset{\text{کمی از ۲ بزرگ‌تر } (2x) \Rightarrow 2<2x<3 \Rightarrow [2x]=2}{}} 2a + 2$

حد چپ: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{ax^2 + b}{|x-1|} \overset{x \to 1^- : x<1}{\underset{|x-1| = -(x-1)}{}} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{ax^2 + b}{-x + 1} = \dfrac{a+b}{0}$

برای آن‌که حد چپ وجود داشته باشد باید صورت کسر نیز صفر شود تا به حالت $\frac{0}{0}$ برسیم و سپس با رفع ابهام به جواب برسیم:

$a + b = 0 \Rightarrow b = -a \quad (*)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{ax^2 + b}{-x + 1} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{ax^2 - a}{-x + 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{a(x^2-1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{a(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -a(1+1) = -2a$

برای پیوسته بودن باید داشته باشیم:

حد چپ = حد راست = مقدار $\Rightarrow 2a + 2 = -2a \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = \dfrac{-1}{2} \overset{(*)}{\Rightarrow} b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2a + b = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

۱۲۲ ۲

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \cos x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = a \sin\left(0 + \dfrac{\pi}{6}\right) = a \sin \dfrac{\pi}{6} = a\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{a}{2} \\ f(0) = a \sin\left(0 + \dfrac{\pi}{6}\right) = a \sin \dfrac{\pi}{6} = a\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow 2 = \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 4$

۱۲۳ ۱

حد راست: $\lim\limits_{x \to 1^+} (-1)^{[x]} \sin \pi x \overset{\text{x کمی از یک بزرگ‌تر: } x \to 1^+ : 1<x<2 \Rightarrow [x]=1}{}} (-1)^1 \sin \pi(1) = (-1)(0) = 0$

حد چپ: $\lim\limits_{x \to 1^-} (-1)^{[x]} \sin \pi x \overset{\text{x کمی از یک کوچک‌تر: } x \to 1^- : 0<x<1 \Rightarrow [x]=0}{}} (-1)^0 \sin \pi(1) = 1 \times (0) = 0$

مقدار: $f(1) = (-1)^{[1]} \sin(\pi \times 1) = (-1)^1 \sin \pi = -1 \times 0 = 0$

پس تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

۱۲۴ ۱

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = a \cos \dfrac{3\pi}{4} = a \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = a\left(-\cos \dfrac{\pi}{4}\right) = -a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-a}{\sqrt{2}} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \dfrac{1 - \tan^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \dfrac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \dfrac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2 \end{cases}$$

@khanen_book

شرط پیوستگی در $x=\frac{\pi}{۴}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=f(\frac{\pi}{۴})\Rightarrow ۲=\frac{-a}{\sqrt{۲}}\Rightarrow a=-۲\sqrt{۲}$$

۱۲۵ ۱

$$\lim_{x\to۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}\overset{\frac{۰}{۰}\text{ ابهام}}{=}\lim_{x\to۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}\times\frac{\cos x+\sqrt{\cos x}}{\cos x+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to۰}\frac{\cos^۲ x-\cos x}{\sin^۲ x(\cos x+\sqrt{\cos x})}$$

اتحاد مزدوج

$$\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{\cos x(\cos x-۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)(\cos x+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to۰}\frac{\cos x}{-(۱+\cos x)(\cos x+\sqrt{\cos x})}=\frac{۱}{-(۱+۱)(۱+۱)}=-\frac{۱}{۴}$$

۱۲۶ ۱ با فرض آن‌که $h(x)=f(x)+g(x)$ باشد، داریم:

$$h(x)=\begin{cases}(x+a)+(x+۱) & ;\ x<۱\\ ۱+\frac{a}{x+۱} & ;\ x\geq ۱\end{cases}=\begin{cases}۲x+a+۱ & ;\ x<۱\\ ۱+\frac{a}{x+۱} & ;\ x\geq ۱\end{cases}$$

حال برای آن‌که تابع $h(x)$ در $x=۱$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x\to۱^+}h(x)=\lim_{x\to۱^-}h(x)=h(۱)$. بنابراین حدهای چپ و راست و مقدار تابع را در $x=۱$ محاسبه کرده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to۱^+}h(x)=\lim_{x\to۱^+}(۱+\frac{a}{x+۱})=۱+\frac{a}{۲}\\ \lim_{x\to۱^-}h(x)=\lim_{x\to۱^-}(۲x+a+۱)=۳+a\\ h(۱)=۱+\frac{a}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\lim_{x\to۱^+}h(x)=\lim_{x\to۱^-}h(x)=h(۱)}۱+\frac{a}{۲}=۳+a\Rightarrow\frac{a}{۲}=-۲\Rightarrow a=-۴$$

۱۲۷ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تابع در $x=۰$ ناپیوسته است، پس تابع در بازهٔ $[-۱,\frac{۱}{۲}]$ که شامل $x=۰$ است نیز ناپیوسته خواهد بود.

گزینهٔ (۲): تابع در $x=-۱$ پیوستگی چپ ندارد ($f(-۱)=۰$ و $۱=$ حد چپ)، پس در بازهٔ $[-۲,-۱]$ پیوسته نمی‌باشد.

گزینهٔ (۳): تابع در $x=۰$ پیوستگی راست ندارد ($f(۰)=-۱$ و $۰=$ حد راست)، پس در بازهٔ $[۰,۲]$ پیوسته نمی‌باشد.

گزینهٔ (۴): تابع در $x=۳$ پیوستگی چپ دارد و در تمام نقاط بازهٔ $(۲,۳)$ نیز پیوسته است لذا در بازهٔ $[۲,۳]$ پیوسته است و همین گزینه جواب است.

۱۲۸ ۳ تابع $f_۱(x)=ax+b$ بر بازهٔ $(۲,+\infty)$ و تابع $f_۲(x)=x^۲+bx-۱$ بر بازهٔ $(-\infty,۲)$ پیوسته است (زیرا توابعی چندجمله‌ای هستند)، بنابراین برای آن‌که تابع روی مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ پیوسته باشد، کافی است در نقطهٔ $x=۲$ نیز پیوسته باشد، بنابراین حدهای چپ و راست را در این نقطه محاسبه کرده و با مقدار تابع در $x=۲$ که طبق فرض تست برابر ۵ است، برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(ax+b)=۲a+b\\ \lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(x^۲+bx-۱)=۴+۲b-۱=۲b+۳\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to۲}f(x)=\lim_{x\to۲^+}f(x)=f(۲)}۲a+b=۲b+۳=۵\Rightarrow\begin{cases}۲b+۳=۵\Rightarrow b=۱ & (*)\\ ۲a+b=۵\xrightarrow{(*)}a=۲\end{cases}$$

۱۲۹ ۱ تابع $f_۱(x)=x^۲+ax-۵$ بر بازهٔ $(۲,+\infty)$ و تابع $f_۲(x)=ax-۱$ بر بازهٔ $(-\infty,۲)$ پیوسته است (زیرا توابعی چندجمله‌ای هستند)، بنابراین برای آن‌که تابع روی مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ پیوسته باشد، کافی است در نقطهٔ $x=۲$ نیز پیوسته باشد. بنابراین حدهای چپ و راست را در این نقطه محاسبه کرده و با مقدار تابع در $x=۲$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+ax-۵)=۴+۲a-۵=۲a-۱\\ \lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(ax-۱)=۲a-۱\\ f(۲)=a(۲)-۱=۲a-۱\end{cases}\xrightarrow{\lim_{x\to۲}f(x)=\lim_{x\to۲^-}f(x)=f(۲)}۲a-۱=۲a-۱=۲a-۱$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تساوی‌های فوق به ازای هر عدد حقیقی a برقرار می‌باشند. پس به ازای هر مقدار حقیقی a تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

@khanehbook

۱۳۰ ۱ هر دو ضابطه‌های $f_1(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}$ و $f_2(x)=2x+b$ در دامنه‌های مربوطه پیوسته‌اند. (چرا؟) لذا برای پیوسته بودن در $\mathbb{R}$، کافی است تابع در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد. بنابراین حدهای چپ و راست و مقدار تابع را در $x=2$ به‌دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+4 & x-2 \\ -(x^3-2x^2) & x^2-x-2 \\ \hline -x^2+4 & \\ -(-x^2+2x) & \\ \hline -2x+4 & \\ -(-2x+4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x-2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+b)=4+b=f(2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)} 4+b=0\Rightarrow b=-4$$

۱۳۱ ۲ حد چپ: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\frac{1}{a}$ حد راست و مقدار: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)=1-\frac{a}{4}$

شرط پیوستگی در $x=a$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)\Rightarrow 1-\frac{a}{4}=\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{4-a}{4}=\frac{1}{a}\Rightarrow 4a-a^2=4\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow(a-2)^2=0\Rightarrow a=2$$

۱۳۲ ۴ تابع f برای هر $x\neq 1$ پیوسته است (چرا؟)، لذا برای آن‌که در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است در نقطهٔ $x=1$ نیز پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|(x-1)(x+2)|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x-1||x+2|}{(x-1)} \\ \xrightarrow[|x-1|=x-1]{x>1\Rightarrow x-1>0}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)|x+2|}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}|x+2|=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|(x-1)(x+2)|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|x-1||x+2|}{x-1} \\ \xrightarrow[|x-1|=-(x-1)]{x<1\Rightarrow x-1<0}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)|x+2|}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}-|x+2|=-3 \end{cases}$$

چون حد چپ و راست تابع در $x=1$ با هم برابر نیستند، تابع در $x=1$ حد ندانسته و لذا به ازای هیچ مقدار a، نمی‌تواند در $x=1$ و در نتیجه در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۱۳۳ ۱

نکته

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ; x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & , x\notin\mathbb{Z}\\ a & , x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}-1 & , x\notin\mathbb{Z}\\ a & , x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

خب حال اگر بخواهیم تابع بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، کافی است در نقاط شکستگی دامنه یعنی نقاط صحیح پیوسته باشد زیرا در سایر نقاط $(x\notin\mathbb{Z})$ تابع f پیوسته می‌باشد (چرا؟)

شرط پیوستگی: $\lim\limits_{x\to Z} f(x)=f(Z)\Rightarrow -1=a$, $f(Z)=a$ مقدار تابع در اعداد صحیح

$$\lim_{x\to Z} f(x)=\lim_{x\to Z}(-1)=-1$$

۱۳۴ ۲ توابع $\sin\frac{\pi}{x}$ و $a+\cos^2\frac{\pi x}{36}$ در دامنه‌های خود پیوسته‌اند، لذا برای پیوسته بودن در $x>1$، کافی است تابع در نقطهٔ $x=6$ نیز پیوسته باشد. داریم:

$$f(6)=\lim_{x\to 6^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 6^+}\left(a+\cos^2\frac{\pi x}{36}\right)=a+\cos^2\frac{\pi(6)}{36}=a+\cos^2\frac{\pi}{6}=a+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=a+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار}=\text{حد راست}=\text{حد چپ}:\text{شرط پیوستگی}\Rightarrow\frac{1}{2}=a+\frac{3}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2-3}{4}=-\frac{1}{4}$$

@khaneh_book

۱۳۵ ۴ کافی است پیوستگی در $x=1$ را برقرار کنیم:

حد: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+a}{x-1}=\dfrac{1+b+a}{0}$

چون طبق فرض تست، تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته می‌خواهد باشد، پس حاصل حد باید $\frac{0}{0}$ باشد. (یعنی صورت کسر نیز باید صفر باشد یعنی $1+b+a=0$ پس $a=-1-b$) حال با رفع ابهام کردن، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx+a}{x-1}\overset{a=-1-b}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx-1-b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)+(bx-b)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+b)}{x-1}=2+b \quad \text{و} \quad \text{مقدار}=f(1)=3$$

$$\text{حد: شرط پیوستگی}\Rightarrow 2+b=3\Rightarrow b=1\overset{a=-1-b}{\Longrightarrow}a=-1-1=-2$$

۱۳۶ ۳ کافی است پیوستگی در $x=2$ را برقرار کنیم:

$$\text{حد راست}:\lim_{x\to 2^+}\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{\underbrace{x^2-2x}_{x(x-2)}}\times\frac{1-\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}{1-\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}\frac{a(1^3+(\sqrt[3]{1-x})^3)}{x(x-2)(1-\underbrace{\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}_{3})}=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(2+1-x)}{x(-(\cancel{2-x}))\times 3}=\lim_{x\to 2^+}\frac{a}{-3x}=\frac{a}{-6}$$

$$\text{حد چپ}=f(2)=2-a$$

$$\text{مقدار}=\text{حد چپ}=\text{حد راست}:\text{شرط پیوستگی}\Rightarrow -\frac{a}{6}=2-a\Rightarrow -a=12-6a\Rightarrow 5a=12\Rightarrow a=\frac{12}{5}=\frac{24}{10}=2/4$$

۱۳۷ ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{2}x\ ;\ x=|x| \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} x\geq 0\\ ax^2+b\ ;\ x\neq|x| \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} x<0\end{cases}$$

پس برای آن‌که تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد کافی است پیوستگی را در $x=0$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases}f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{\pi}{2}x=\sin(\dfrac{\pi}{2}\times 0)=\sin(0)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+b)=a(0)+b=b\end{cases}\overset{\text{شرط پیوستگی}}{\Longrightarrow}\text{حد چپ}=\text{حد راست}=\text{مقدار}\Rightarrow 0=b$$

۱۳۸ ۲ تابع f فقط در یک نقطهٔ $x=c$ ناپیوسته است. پس اولاً $x=c$ ریشهٔ مخرج است، ثانیاً چون مخرج فقط یک ریشهٔ c دارد، می‌توان نتیجه گرفت که دلتای مخرج صفر است. داریم:

$$ax^2+2x-3=0\Rightarrow\Delta=2^2-4(a)(-3)=0\Rightarrow 4+12a=0\Rightarrow 12a=-4\Rightarrow a=\frac{-1}{3}$$

از طرفی فرمول ریشهٔ مضاعف برابر $-\dfrac{b}{2a}$ بود. داریم:

$$x=\frac{-2}{2(a)}=\frac{-1}{a}\overset{a=\frac{1}{3}}{=\!=\!=}\frac{-1}{-\frac{1}{3}}=3\Rightarrow c=3\Rightarrow a+c=\frac{-1}{3}+3=\frac{8}{3}$$

۱۳۹ ۳ چون تابع در همه‌جا پیوسته است. پس عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی باشد که شرط نامنفی بودن یک تابع درجهٔ دوم به صورت زیر است:

$$\begin{cases}\Delta\leq 0\Rightarrow 2^2-4(m)(m)\leq 0\Rightarrow 9-4m^2\leq 0\Rightarrow(3-2m)(3+2m)\leq 0\overset{\text{تعیین علامت}}{\xrightarrow{\text{به کمک جدول}}}m\leq -\frac{3}{2}\ \text{یا}\ m\geq\frac{3}{2}\\ \text{و}\\ x^2\text{ ضریب}>0\Rightarrow m>0\end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $m\geq\frac{3}{2}$ می‌شود.

@khaneh_book

فصل ۷

MATHEMATICS

آمار و احتمال

- درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
- درس دوم: آمار توصیفی

@kharazm_book

درس نامه ۱

یادآوری (فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی)

پدیده‌های تصادفی: پدیده یا آزمایش‌هایی هستند که با فرض یکسان بودن شرایط، نتیجهٔ آزمایش و یا مشاهده، قبل از وقوع به طور قطع قابل تشخیص نمی‌باشد. به عبارت دیگر فقط می‌توانیم همهٔ حالت‌های ممکن در رخداد آن را مشخص کنیم اما از این که کدام حالت، قطعاً رخ خواهد داد، اطمینان نداریم.

مثال **قرعه‌کشی بین دانش‌آموزان یک کلاس**

فضای نمونه‌ای: مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده نامیده و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهند.

مثال **در پدیدهٔ تصادفی پرتاب یک تاس تمام نتایج ممکن آزمایش، یعنی فضای نمونه‌ای آن به‌صورت مجموعهٔ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ است.**

پیشامد تصادفی: هر **زیرمجموعه** از فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی را یک **پیشامد تصادفی** در آن فضای نمونه‌ای می‌نامیم.

مثال **پیشامد ظاهر شدن عدد فرد در پرتاب یک تاس، به صورت $A = \{1,3,5\}$ می‌باشد که زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای این پدیده یعنی $S = \{1,2,3,\ldots,6\}$ است.**

یادآوری (عملیات بر روی پیشامدها)

متمم یک پیشامد: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه متمم پیشامد A را با A' نشان می‌دهیم. پیشامد A' در صورتی اتفاق می‌افتد که A اتفاق نیفتد. همواره داریم:

۱) $A \cup A' = S$ ۲) $A \cap A' = \varnothing$ ۳) $n(A') = n(S) - n(A)$

تذکر هنگامی که به‌دست آوردن تعداد اعضای پیشامد A'، راحت‌تر از یافتن تعداد اعضای پیشامد A باشد، $n(A')$ را یافته و از فرمول $n(A) = n(S) - n(A')$ برای به‌دست آوردن تعداد اعضای پیشامد A استفاده می‌کنیم.

تمرین **در پرتاب دو تاس، پیشامد این‌که اعداد ظاهر شده متفاوت باشند، چند عضو دارد؟**

پاسخ: تعداد اعضای این پیشامد زیاد است و نوشتن آن وقت می‌گیرد. اما می‌توانیم پیشامد متمم آن را به صورت زیر مشخص کنیم:

$n(A') = ۶ \Rightarrow \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),\ldots,(۶,۶)\}$ اعداد ظاهر شده یکسان باشند $\Rightarrow A'$ اعداد ظاهر شده متفاوت باشند $\rightarrow A$

از طرفی در پرتاب دو تاس، طبق اصل ضرب تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S عبارت است از:

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶ \Rightarrow n(A) = n(S) - n(A') = ۳۶ - ۶ = ۳۰$

اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$، در صورتی اتفاق می‌افتد که A یا B یا هر دو اتفاق بیفتند. (حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.)

$A \cup B$

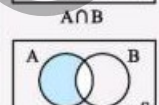
تذکر هنگامی که در صورت سؤال از لفظ «یا» بین دو پیشامد استفاده می‌شود، منظور اجتماع آن دو پیشامد است.

اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، پیشامد $A \cap B$، در صورتی اتفاق می‌افتد که A و B هر دو اتفاق بیفتند.

$A \cap B$

تذکر هنگامی که در صورت سؤال از لفظ «و» بین دو پیشامد استفاده می‌شود، منظور اشتراک آن دو پیشامد است.

تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، پیشامد $A - B$ هنگامی اتفاق می‌افتد که A اتفاق بیفتد اما B اتفاق نیفتد. (فقط پیشامد A رخ دهد.) پس برای محاسبهٔ پیشامد $A - B$ باید عضوهای مشترک A و B را از پیشامد A کنار بگذاریم.



$A-B$

@khanehbook

نکته B و A' هر دو رخ دهند. A و B' هر دو رخ دهند.

$$B - A = B \cap A' = B - (A \cap B) \quad : \text{فقط } B \text{ رخ دهد} \qquad A - B = A \cap B' = A - (A \cap B) \quad : \text{فقط } A \text{ رخ دهد}$$

(B رخ دهد ولی A رخ ندهد. / A رخ دهد ولی B رخ ندهد.)

نکته با توجه به قوانین دمورگان داریم: حداقل یکی از A یا B رخ دهد. A و B هر دو رخ دهند.

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{و} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

(A و B هر دو رخ ندهند. / حداقل یکی از A یا B رخ ندهد.)

تمرین تمام اعداد دو رقمی را که با ارقام ۰، ۱، ۳ و ۴ می‌توان ساخت، روی کارت‌های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم. (تکرار مجاز است.) سپس یکی از کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم. اگر A، مضرب ۳ بودن عدد روی کارت و B، بزرگ‌تر از ۳۰ بودن عدد روی کارت باشد. پیشامدهای $A \cup B$، $A \cap B$ و $A - B$ را مشخص کنید.

پاسخ: $S = \{۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۳۰,۳۱,۳۳,۳۴,۴۰,۴۱,۴۳,۴۴\} \Rightarrow A = \{۳۰,۳۳\}$ و $B = \{۳۱,۳۳,۳۴,۴۰,۴۱,۴۳,۴۴\}$

حال $A \cup B$، $A \cap B$ و $A - B$ را می‌یابیم.

$A - B = A - (A \cap B) = \{۳۰,۳۳\} - \{۳۳\} = \{۳۰\}$ و $A \cap B = \{۳۳\}$ و $A \cup B = \{۳۰,۳۱,۳۳,۳۴,۴۰,۴۱,۴۳,۴۴\}$

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را **ناسازگار** گوییم هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد (یعنی $A \cap B = \varnothing$). پیشامدهای ناسازگار، هرگز با هم رخ نمی‌دهند، پس اگر $A \cap B \neq \varnothing$، آن‌گاه دو پیشامد را **سازگار** گوییم.

مثال در پرتاب یک تاس، اگر A پیشامد زوج بودن عدد رو شده و B پیشامد فرد بودن عدد رو شده باشد، دو پیشامد A و B ناسازگار هستند، زیرا هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند و امکان ندارد عدد رو شدهٔ تاس، هم فرد و هم زوج باشد.

$$\begin{cases} A = \{۲,۴,۶\} \\ B = \{۱,۳,۵\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow$$ پیشامدهای A و B ناسازگارند.

یادآوری (محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد)

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نمایش داده و برای به‌دست آوردن آن از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تمرین در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که در بین ۳ مهرهٔ انتخابی، حداقل دو مهرهٔ آبی وجود داشته باشد، کدام است؟

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از $۱۲ = ۳ + ۵ + ۴$ مهره است. در این انتخاب ترتیب اهمیت ندارد. بنابراین از ترکیب استفاده کرده و داریم:

$$n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!۳!} = \frac{\overset{۴}{۱۲} \times ۱۱ \times \overset{۵}{۱۰} \times ۹!}{۹! \times \underset{۳}{۳} \times \underset{۲}{۲} \times ۱} = ۲۲۰ \qquad (*)$$

حداقل ۲ مهرهٔ آبی، یعنی ۲ مهرهٔ آبی یا ۳ مهرهٔ آبی، پس داریم:

$$n(B) = \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{۲ تا از ۳ مهرهٔ آبی}} \times \underbrace{\binom{۴+۵}{۱}}_{\text{۱ مهرهٔ باقی‌مانده از سایر رنگ‌ها}} + \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{۳ تا از ۳ مهرهٔ آبی}} = ۳ \times ۹ + ۱ = ۲۸ \xrightarrow{(*)} P(B) = \frac{۲۸}{۲۲۰} = \frac{۷}{۵۵}$$

یادآوری (قوانین احتمال)

فرض کنید A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه:

(۱) احتمال آن‌که پیشامد A رخ ندهد، برابر است با:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

(۲) احتمال آن‌که فقط پیشامد A رخ دهد (یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد)، برابر است با:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(۳) احتمال آن‌که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B (A یا B و یا هر دو) رخ دهد، برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

یا

با توجه به فرمول شمارهٔ (۲)، فرمول شمارهٔ (۳) را می‌توان بر حسب $P(A - B)$ یا $P(B - A)$ به‌صورت زیر بیان نمود:

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B) \quad \text{یا} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$

@khaneh_book

تمرین احتمال این‌که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد برابر ۰/۲۳، ناراحتی قلبی داشته باشد، ۰/۲۴ و حداقل یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد، ۰/۳۸ است. مطلوب است احتمال آن‌که هر دو نوع ناراحتی را داشته باشد.

پاسخ: اگر A پیشامد ناراحتی کلیوی داشتن و B پیشامد ناراحتی قلبی داشتن باشد، طبق فرض $P(A)=۰/۲۳$ ، $P(B)=۰/۲۴$ و $P(A\cup B)=۰/۳۸$ است. حال خواستهٔ مسأله $P(A\cap B)$ بوده که با توجه به فرمول شمارهٔ (۳) داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۳۸=۰/۲۳+۰/۲۴-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲۳+۰/۲۴-۰/۳۸=۰/۰۹$$

احتمال شرطی

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A\mid B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن‌که بدانیم پیشامد B رخ داده است و آن را از فرمول مقابل محاسبه می‌کنند:

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

دید ویژه بارها شده دانش‌آموز پرسیده از کجا بفهمیم مسأله شرطی هست یا نه! باید بگوییم در مسائل شرطی همواره کلماتی مانند «**می‌دانیم که**»، «**فرض کنید**»، «**اگر**» می‌آید و در ادامهٔ آن خبری دربارهٔ آزمایش می‌دهند، سپس از ما می‌خواهند با توجه به آن خبر، احتمال وقوع چیز دیگری را حساب کنیم. مثلاً می‌گویند: «اگر عدد رو شدهٔ تاس، عددی اول باشد، احتمال فرد بودن آن چقدر است؟»

خبر

سؤال دانش‌پژوه (اکبر تقی‌زاده)، **آقا بهترین راه واسه حل مسأله‌های شرطی چیه؟**

پاسخ: *ببین برای حل مسائل شرطی اکثر مواقع از فرمول استفاده نمی‌کنیم، بلکه ابتدا شرط مساله را روی فضای نمونه‌ای اعمال می‌کنیم و سپس در فضای نمونه‌ای جدید به دنبال خواستهٔ مساله می‌گردیم. مثلاً در پرتاب یک تاس اگر بگویند می‌دانیم عددی زوج آمده است، این شرط باعث می‌شود فضای نمونه‌ای جدید $S=\{۲,۴,۶\}$ شود. حال اگر بخواهند احتمال ۲ آمدن را بگوییم، با توجه به فضای نمونه‌ای جدید پاسخ می‌دهیم: $\frac{۱}{۳}$. در صورتی‌که قبلاً می‌دانستیم چواب مساله بدون هیچ شرطی برابر $\frac{۱}{۶}$ است!*

سؤال ممون دانش‌پژوه، **آقا پس کی از فرمول میریم؟**

پاسخ: *اگه مجبور شریم ☺ مثلاً نتونستیم اعضای فضای نمونه‌ای و پیشامد خواسته‌شده را بنویسیم سراغ فرمول می‌ریم.*

مثال در یک خانوادهٔ سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال، حداقل یکی از فرزندان پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ (۴). فرزند اول دختر است، پس وضعیت فرزند اول مشخص است. لذا فضای نمونه‌ای جدید به صورت زیر می‌شود:

$$S_{new}=\{(د,پ,پ),(د,پ,د),(د,د,پ),(د,د,د)\}\Rightarrow n(S_{new})=۴$$

حال خواستهٔ مسأله این است که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد. پس در فضای نمونه‌ای جدید، دنبال حداقل یک پسر می‌گردیم:

$$A=\{(د,د,پ),(د,پ,د),(د,پ,پ)\}\Rightarrow P(\text{پسر ۱ حداقل}\mid\text{فرزند اول دختر})=\frac{۳}{۴}$$

مثال در یک فرودگاه احتمال آن‌که پرواز هواپیمایی بدون تأخیر انجام شود و به مقصد برسد ۰/۶ و احتمال آن‌که پرواز هواپیمایی بدون تأخیر انجام شود برابر ۰/۷ است. اگر بدانیم پرواز بدون تأخیر انجام شده است، با چه احتمالی به مقصد رسیده است؟

پاسخ: می‌خواهیم ببینیم هواپیما با چه احتمالی به مقصد می‌رسد، اگر پرواز بدون تأخیر انجام شده است. با احتمال شرطی روبه‌رو هستیم. پرویم از فرمول آن استفاده کنیم:

$$P(\text{پرواز بی‌تأخیر}\mid\text{رسیدن به مقصد})=P\frac{(\text{پرواز بی‌تأخیر بوده}\cap\text{به مقصد برسد})}{P(\text{پرواز بی‌تأخیر})}=\frac{۰/۶}{۰/۷}=\frac{۶}{۷}$$

مثال در جامعه‌ای ۳۰ درصد افراد چربی کبد دارند و ۴۰ درصد افراد چاق هستند. اگر فردی چاق باشد، احتمال چربی کبد داشتن وی ۵۰ درصد است. با کدام احتمال فردی از این جامعه حداقل یکی از دو بیماری چربی کبد یا چاقی را دارد؟

پاسخ: احتمال داشتن حداقل یکی از دو بیماری (چربی کبد) یا (چاقی) یعنی (چربی کبد $\cup$ چاقی) P است که طبق فرمول آن داریم:

$$P(\text{چربی کبد}\cup\text{چاقی})=P(\text{چربی کبد})+P(\text{چاقی})-P(\text{چربی کبد}\cap\text{چاقی})=۰/۳+۰/۴-(\text{چربی کبد}\cap\text{چاقی})P \quad (*)$$

از طرفی در صورت سؤال گفته که اگر فردی چاق باشد، آن‌گاه احتمال چربی کبد داشتن وی ۵۰ درصد است. بیان جمله، احتمال شرطی است که طبق فرمول آن داریم:

$$P(\text{چربی کبد}\mid\text{چاقی})=\frac{P(\text{چاقی}\cap\text{چربی کبد})}{P(\text{چاقی})}\Rightarrow ۰/۵=\frac{P(\text{چاقی}\cap\text{چربی کبد})}{۰/۴۰}\Rightarrow P(\text{چاقی}\cap\text{چربی کبد})=۰/۵\times۰/۴=۰/۲$$

@khanehbook

با جایگذاری عبارت حاصل در فرمول (*) داریم:

$$P(\text{جربی کبد} \cup \text{چاقی}) = ۰/۴ + ۰/۳ - ۰/۲ = ۰/۵$$

مثال تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم هر دو تاس زوج آمده است.

الف) با کدام احتمال جمع عددهای رو شده ۶ است؟

ب) با کدام احتمال حداقل یکی از اعداد رو شده ۲ است؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:

$$S_{new} = \{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\} \Rightarrow n(S_{new}) = ۹$$

الف) حال می‌خواهیم جمع عددهای رو شده ۶ باشد. با توجه به فضای نمونه‌ای جدید داریم:

$$A = \{(۲,۴),(۴,۲)\} \Rightarrow P(\text{جمع ۶} \mid \text{هر دو زوج}) = \frac{۲}{۹}$$

ب) می‌خواهیم حداقل یکی از اعداد رو شده ۲ باشد.

$$B = \{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۶,۲)\} \Rightarrow P(\text{حداقل یک ۲} \mid \text{هر دو زوج}) = \frac{۵}{۹}$$

مثال با توجه به جدول مقابل، احتمال‌های خواسته شده را بیابید.

	زن	مرد
بی‌سواد	۱۰	۲۰
باسواد	۳۰	۴۰

الف) $P(\text{زن})$

ب) $P(\text{بی‌سواد} \mid \text{زن})$

پ) $P(\text{مرد} \mid \text{باسواد})$

پاسخ: الف) $P(\text{زن})$ یعنی احتمال زن بودن که خب روی هم ۱۰۰ نفر $(۱۰۰ = ۴۰ + ۳۰ + ۲۰ + ۱۰)$ داریم که ۴۰ نفر $(۴۰ = ۳۰ + ۱۰)$ نفر آن‌ها زن هستند پس $P(\text{زن}) = \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۰/۴$ است.

ب) $P(\text{بی‌سواد} \mid \text{زن})$ یعنی می‌دانیم فردی بی‌سواد است، حال می‌خواهیم احتمال زن بودن آن فرد بی‌سواد را حساب کنیم. کلاً $۳۰ = ۲۰ + ۱۰$ نفر داریم که بی‌سوادند که در بین این ۳۰ نفر، ۱۰ نفر زن هستند پس احتمال خواسته‌شده $\frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$ است. البته از فرمول هم می‌توان رفت:

$$P(\text{بی‌سواد} \mid \text{زن}) = \frac{n(\text{بی‌سواد} \cap \text{زن})}{n(\text{بی‌سواد})} = \frac{۱۰}{۱۰ + ۲۰} = \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$$

ب) $P(\text{مرد} \mid \text{باسواد})$ یعنی می‌دانیم فردی مرد است، حال می‌خواهیم احتمال باسواد بودن آن مرد را حساب کنیم. کلاً $۶۰ = ۴۰ + ۲۰$ نفر مرد وجود دارد که ۴۰ نفرشان باسواد است، پس احتمال مورد نظر $\frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$ می شود. حل فرمولی آن را هم ببینید:

$$P(\text{مرد} \mid \text{باسواد}) = \frac{n(\text{مرد} \cap \text{باسواد})}{n(\text{مرد})} = \frac{۴۰}{۴۰ + ۲۰} = \frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$$

مثال اگر $P(A) = ۰/۶$ ، $P(B) = ۰/۷$ و $P(A \mid B') = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل $P(B' \cup A)$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا فرمول $P(A \mid B')$ را نوشته و ببینیم از آن چه چیزی می‌توانیم به دست آوریم:

$$P(A \mid B') = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{P(A \cap B')}{۱ - P(B)} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{P(B)=۰/۷} \frac{P(A \cap B')}{۱ - ۰/۷} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow P(A \cap B') = ۰/۳ \times \frac{۲}{۳} = ۰/۲ \quad (*)$$

حال با توجه به فرمول $P(B' \cup A)$ داریم:

$$P(B' \cup A) = P(B') + P(A) - P(B' \cap A) \overset{(*)}{=\!=} \underbrace{(۱ - ۰/۷)}_{۱-P(B)} + ۰/۶ - ۰/۲ = ۰/۳ + ۰/۶ - ۰/۲ = ۰/۷$$

۱- اگر $P(B \mid A) = ۰/۶$ و $P(A') = ۰/۸$ باشد، آن‌گاه $P(A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۲۱ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۱۲

۲- اگر $P(A \cup B) = ۰/۶$ ، $P(A) = ۰/۲$ ، $P(B \mid A) = ۰/۱$ ، $P(B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳۸ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۲

۳- اگر $P(A) = ۰/۵$ ، $P(B) = ۰/۲$ و $P(A \cup B) = ۰/۶$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ۲) $P(A \mid B) = ۰/۵$ ۳) $P(B \mid A) = ۰/۲$ ۴) A و B ناسازگارند.

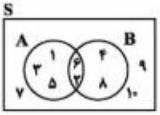
@khanehbook

۴- با توجه به جدول زیر که تعداد داوطلبان دختر و پسر را در کنکور آزمایشی دو رشتهٔ ریاضی و تجربی نشان می‌دهد، حاصل (دختر | رشتهٔ ریاضی) P+ (رشتهٔ تجربی | پسر) P کدام است؟

	رشتهٔ ریاضی	رشتهٔ تجربی
دختر	۱۰	۲۰
پسر	۳۰	۴۰

۱) $\frac{۱۹}{۲۱}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۲۳}{۲۸}$

۵- اگر A و B مطابق شکل دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه $P(B|A)+P(A|S)$ کدام است؟



۱) ۰/۸
۲) ۰/۹
۳) ۰/۷
۴) ۰/۶

۶- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و $P(A)=۲P(B)=۰/۴$ باشد، آن‌گاه $P(B'|A')$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۷- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد و $P(A\cup B)=۰/۶$ و $P(A)=۰/۴$. آن‌گاه $P(B|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

۸- اگر $P(A')=۰/۲$ و $P(A'\cup B')=۰/۴$ و بدانیم A رخ داده است، با کدام احتمال B رخ می‌دهد؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۹- تاسی را پرتاب کرده‌ایم فقط می‌دانیم که عدد رو شده، زوج است. احتمال این‌که یکی از اعداد ۲ یا ۶ ظاهر شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۰- از ظرفی شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه، مهره‌ای خارج کرده و مشاهده کردیم رنگ آن سیاه است. این مهره را کنار گذاشته و مهرهٔ دوم را به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۱- کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه است. مهره‌ای از کیسه بیرون آورده و مشاهده شده که سفید نیست. احتمال آن که قرمز باشد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۲- جدول زیر چگونگی توزیع کارمندان اداره‌ای را نشان می‌دهد. کارمندی را به طور تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم زن نیست، با کدام احتمال لیسانس ندارد؟

	لیسانس	فقط دیپلم
زن	۵	۱۵
مرد	۲۰	۱۰

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۷}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۳- تعداد مسافرین یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر آن‌ها ایرانی و ۸ نفر تاجر ایرانی هستند. اگر فردی به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود و بدانیم تاجر نیست، با کدام احتمال ایرانی است؟

۱) $\frac{۱۲}{۷۲}$
۲) $\frac{۴}{۷۲}$
۳) $\frac{۴}{۴۹}$
۴) $\frac{۸}{۲۳}$

۱۴- در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال این‌که یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال این‌که یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۸}$

@khanehbook

۱۵- شخصی از اصفهان دیدن می‌کند. احتمال بازدید وی از بازار اصفهان و مسجد جامع به ترتیب برابر ۰/۲۵ و ۰/۱۳ و احتمال بازدید از بازار اصفهان و مسجد جامع برابر ۰/۰۸ می‌باشد. حال اگر بدانیم شخصی از بازار اصفهان دیدن کرده است، با کدام احتمال از مسجد جامع هم دیدن می‌کند؟

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۴

۱۶- از ساکنین شهری، ۳۰ درصد روزنامهٔ الف، ۲۵ درصد روزنامهٔ ب و ۹ درصد روزنامهٔ الف و ب را می‌خوانند. اگر فردی از بین آن‌ها انتخاب شود و بدانیم روزنامهٔ الف را می‌خواند، با کدام احتمال روزنامهٔ ب را هم می‌خواند؟

۱) $\frac{۹}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۹}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹}{۵۵}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۱۷- در امتحانات یک کلاس، ٪۲۰ دانش‌آموزان در ریاضی، ٪۱۵ در فیزیک و ٪۱۰ در هر دو درس مردود شده‌اند. احتمال این‌که دانش‌آموزی از این کلاس در درس فیزیک مردود شده باشد مشروط بر این‌که در درس ریاضی نیز مردود شده باشد کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۵

۱۸- فرض کنید احتمال برد تیم B مقابل تیم A برابر ۲۰ درصد، احتمال صعود به جام جهانی تیم B در حال حاضر ۲۵ درصد و در صورتی که تیم A را ببرد ۳۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال حداقل یکی از دو اتفاق (صعود به جام جهانی) یا (بردن تیم A) برای تیم B اتفاق می‌افتد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۰/۳۹ ۲) ۰/۰۶ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۵۵

۱۹- احتمال این‌که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد برابر ۰/۲۳ و ناراحتی قلبی داشته باشد برابر ۰/۲۴ است. هم‌چنین می‌دانیم اگر شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد احتمال ناراحتی قلبی پیدا کردن وی ۰/۴ است. با کدام احتمال این شخص حداقل یکی از این دو بیماری را دارد؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۰/۳۸۷ ۲) ۰/۴۷ ۳) ۰/۳۷۸ ۴) ۰/۰۹

۲۰- ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آن‌ها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد بود. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A و B واکنش نشان می‌دهند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{۴۱}{۱۴۰}$ ۲) $\frac{۴۱}{۷۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

۲۱- دو تاس را با هم می‌اندازیم. اگر مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد، احتمال آن‌که یکی از دو تاس ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۲- در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد هستند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۳- در پرتاب دو تاس اگر مجموع دو عدد رو شده بزرگ‌تر از ۵ باشد، چه‌قدر احتمال دارد عدد رو شدهٔ هر دو تاس مساوی باشند؟

۱) $\frac{۴}{۲۶}$ ۲) $\frac{۴}{۲۸}$ ۳) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۰}$

۲۴- در پرتاب دو تاس با هم، هر دو عدد، فرد ظاهر شده‌اند. با کدام احتمال مجموع این دو عدد کم‌تر از ۱۰ می‌باشد؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۲۵- در پرتاب دو تاس اگر حداقل یکی از تاس‌ها ۵ ظاهر شود، احتمال این‌که دو تاس دو عدد متوالی را نشان دهند چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

۲۶- در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، عدد تاس قرمز بزرگ‌تر از آبی ظاهر شده است. احتمال آن‌که مجموع دو تاس ۶ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۵}$ ۳) $\frac{۵}{۳۰}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۲۷- در پرتاب دو تاس اگر ارقام رو شده یکسان نباشند، با کدام احتمال اختلاف آن اعداد، برابر چهار می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

۲۸- در پرتاب دو تاس می‌دانیم اعداد رو شده برابرند یا مجموع آن‌ها ۱۱ است. با کدام احتمال ضرب ارقام رو شده زوج می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

@khaneh_book

۲۹- در پرتاب ۳ تاس اگر همهٔ ارقام رو شده زوج باشد، آن‌گاه با کدام احتمال هر ۳ عدد مضرب ۳ هستند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۰- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از دو تاس زوج بوده ولی هر دو تاس زوج نیستند، با کدام احتمال جمع اعداد رو شده فرد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۱- در پرتاب ۳ تاس می‌دانیم اعداد رو شده متمایزند. با کدام احتمال عدد یک تاس برابر مجموع اعداد دو تاس دیگر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۳۲- سه تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر سه عدد رو شده متوالی باشند، با کدام احتمال فقط ۲ تاس از ۳ تاس زوج است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

۳۳- ۵ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از سکه‌ها «رو» آمده است، با چه احتمالی حداکثر ۴ تا از سکه‌ها «پشت» آمده‌اند؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۳۰}{۳۱}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳۴- در پرتاب ۳ سکه، می‌دانیم حداقل یکی از سکه‌ها «رو» آمده است. با کدام احتمال حداقل دو سکه «پشت» آمده است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۳۵- خانواده‌ای ۵ فرزندی، فقط ۱ پسر دارد. با چه احتمالی فرزندان دختر این خانواده همگی پشت سر هم متولد نشده‌اند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۳۶- خانواده‌ای ۵ فرزند دارد. اگر این خانواده فقط سه دختر داشته باشد، چه‌قدر احتمال دارد که هیچ دو فرزند متوالی این خانواده دختر نباشد؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۶۴}$

۳۷- می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان یک خانوادهٔ ۳ فرزندی دختر است. با کدام احتمال این خانواده حداقل ۲ فرزند دختر دارد؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$ تجربی خارج ۸۷ با تغییر

۳۸- خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر هستند. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۳۹- خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. اگر یکی از بچه‌های آن‌ها که در داخل حیاط بود، پسر باشد، با کدام احتمال تمام فرزندان پسر نیستند؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۸}$

۴۰- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. اگر بدانیم حداقل یک پسر و حداقل یک دختر در خانواده وجود داشته باشد، آن‌گاه با کدام احتمال تعداد دخترها و پسرها یکسان است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۴۱- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. اگر خانواده هم پسر و هم دختر داشته و تعداد پسران و دختران یکسان نباشد، با کدام احتمال تعداد پسران بیشتر از دختران است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۴۲- جعبهٔ A شامل ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سفید و جعبهٔ B شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ آبی است. از هر کدام از جعبه‌ها یک مهره به تصادف برمی‌داریم. اگر دو مهرهٔ انتخابی همرنگ باشند، با کدام احتمال هر دو آبی هستند؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۴۳- در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی، ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سبز قرار دارد. به طور تصادفی ۳ مهره همزمان از کیسه خارج می‌کنیم. اگر حداقل ۲ مهرهٔ غیرهمرنگ در بین آن‌ها وجود داشته باشد، با کدام احتمال فقط ۲ مهره از ۳ مهره همرنگ‌اند؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۹}$ ۲) $\frac{۲۱}{۲۹}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

@khanen_book

۴۴- در ظرفی ۳ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ صورتی وجود دارد. ۴ مهره به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره‌های خروجی از هر ۳ رنگ هستند، با کدام احتمال ۲ مهرهٔ سفید در میان ۴ مهره وجود دارد؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۵- جعبه‌ای شامل ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه است. ۳ موش به طور تصادفی با هم از جعبه برمی‌داریم. اگر در بین موش‌های انتخابی هم موش سفید و هم موش سیاه وجود داشته باشد، با کدام احتمال حداقل ۲ موش انتخابی سیاه هستند؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴۲}$

۴۶- با استفاده از ارقام ۵،۶،۷،۶ و ۳ اعداد ۵ رقمی ساخته‌ایم. اگر عدد حاصل زوج باشد، با کدام احتمال ارقام یکسان کنار هم قرار ندارند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴۷- ارقام ۵،۴،۳،۲،۱ را به طور تصادفی در کنار هم قرار می‌دهیم. اگر ۲ و ۴ کنار هم قرار گرفته باشند، با کدام احتمال ۱ و ۳ نیز کنار هم هستند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۸- هر یک از ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ را در یکی از ۶ خانهٔ هم‌ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. اگر بدانیم این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار گرفته‌اند، با کدام احتمال همهٔ ارقام فرد هم کنار هم قرار گرفته‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۴۹- چهار دندانپزشک و سه تکنسین اتاق عمل در یک صف به طور تصادفی کنار هم قرار می‌گیرند. اگر حداقل دو دندانپزشک کنار هم قرار گرفته باشند، با کدام احتمال همهٔ دندانپزشک‌ها کنار هم قرار دارند؟

۱) $\frac{۵}{۱۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۳۵}$ ۳) $\frac{۹}{۱۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۷}$

۵۰- حروف کلمهٔ «ATAXIA» را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. اگر بدانیم حداقل ۲ حرف A کنار هم قرار گرفته‌اند، با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار دارند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵۱- از بین اعداد سه‌رقمی، یک عدد فرد انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد مضرب ۳ باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۲- از مجموعهٔ $\{۱،۲،۳،۴،...،۵۰۰\}$ عددی را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد انتخابی مضرب ۴ است، با کدام احتمال آن عدد مضرب ۶ نیز می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۴۱}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۳۷}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۵۳- از بین اعداد سه‌رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. اگر بدانیم در عدد انتخابی حداقل یک بار رقم ۲ ظاهر شده است، با کدام احتمال در آن عدد، دقیقاً دو بار رقم ۲ ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۲۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۵۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۹۰۰}$ ۴) $\frac{۲۶}{۶۴۸}$

۵۴- پنج مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و هم‌چنین پنج مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره همرنگ هستند؟ ریاضی دهم ۹۲

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۵- حروف کلمهٔ FLOWER را به طور تصادفی مرتب می‌کنیم. اگر حرف O در جای اصلی خود (حرف سوم) قرار نگرفته باشد، با کدام احتمال کلمهٔ ساخته‌شده با حرف O شروع می‌شود؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۵۶- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم دو مهره با شمارهٔ زوج متوالیاً خارج نشده است، با کدام احتمال، هیچ دو مهره‌ای با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

@khaneh_book

۵۷- چهار نفر فوتبالیست و سه نفر والیبالیست به تصادف روی ۱۰ صندلی که در دو ردیف ۵ تایی قرار دارند، می‌نشینند. اگر والیبالیست‌ها در ردیف اول نشسته باشند، با کدام احتمال فوتبالیست‌ها در ردیف دیگر نشسته‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۸- پنج تیر به سمت هدف پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال به هدف خوردن $\frac{۱}{۴}$ باشد و بدانیم تیر اول و سوم به هدف خورده است، با کدام احتمال حداقل ۳ تیر به هدف می‌خورد؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۵۳}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۷۵}{۱۲۸}$

۵۹- اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت نوشته و ۳ کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع سه عدد روی کارت‌ها زوج است، با کدام احتمال هر سه عدد زوج‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۶۰- در یک کلاس ۱۸ نفر دانش‌آموز در ۶ ردیف مساوی روی نیمکت (در هر ردیف ۳ نفر) نشسته‌اند. به طور تصادفی ۴ نفر از دانش‌آموزان انتخاب می‌شوند. اگر بدانیم ۴ نفر از ۴ ردیف مختلف انتخاب شده‌اند، با کدام احتمال دانش‌آموزی از ردیف اول در بین افراد انتخابی حضور دارد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۱- از بین ۶ جفت کفش، ۴ لنگه کفش به طور تصادفی انتخاب می‌شود. اگر حداقل یک جفت کفش در بین آن وجود داشته باشد، با کدام احتمال دو جفت کفش انتخاب شده است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۷}$ ۲) $\frac{۱}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۳}$

درسنامهٔ ۲

انتخاب مهره یا کارت یا ... بدون جایگذاری و با جایگذاری

الف) فرض کنید انتخاب مهره از داخل یک کیسه یا ظرف، به صورت بی‌دربی (یکی پس از دیگری یا پشت سرهم) و بدون جایگذاری انجام شود، در این صورت در هر مرحله، با برداشتن یک مهره، از تعداد کل مهره‌ها نیز ۱ عدد کم می‌شود. به عنوان مثال اگر ۸ مهره درون کیسه وجود داشته باشد، پس از برداشتن مهرهٔ اول، تعداد کل مهره‌ها ۷ عدد و بعد از برداشتن دومین مهره، تعداد کل مهره‌ها به ۶ مهره کاهش می‌یابد.

مثال در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ سفید وجود دارد، سه مهره به تصادف و بی‌دربی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که مهرهٔ اول سیاه و مهره‌های دوم و سوم سفید باشند؟

پاسخ: در هنگام برداشتن مهرهٔ اول، در داخل کیسه ۷ مهره وجود دارد که ۵تای آن‌ها سیاه است. پس احتمال سیاه بودن مهرهٔ اول $\frac{۵}{۷}$ می‌باشد.

(در واقع احتمال سیاه بودن مهرهٔ اول $\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۷}{۱}}$ است که چون ۱ مهره انتخاب شده می‌توان آن را به صورت تعداد مهره‌های سیاه بر روی تعداد کل مهره‌ها نوشت.)

در هنگام برداشتن مهرهٔ دوم، از تعداد کل مهره‌ها، همچنین از تعداد مهره‌های سیاه یکی کم شده است ولی تعداد مهره‌های سفید همان ۲ عدد است، پس با توجه به شکل احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم $\frac{۲}{۶}$ است و در نهایت هنگام خروج مهرهٔ سوم، تعداد کل مهره‌ها ۵ بوده که فقط یکی از آن‌ها سفید است، پس احتمال سفیدبودن مهرهٔ سوم $\frac{۱}{۵}$ است. بنابراین احتمال خواسته‌شده برابر می‌شود با:

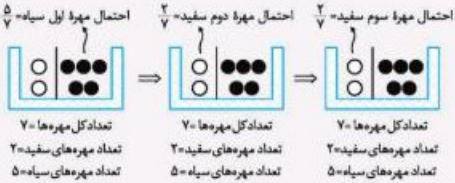
$$P=\frac{۵}{۷}\times\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۲۱}$$

@khaneh_book

ب) اگر انتخاب مهره از داخل یک کیسه یا ظرف، به صورت پی‌درپی و با جایگذاری باشد، در این حالت تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله برداشتن یک مهره تغییری نمی‌کند و ثابت است. در حقیقت برداشتن مهره‌ها بر روی هم تأثیری نداشته و پیشامد انتخاب مهره‌ها مستقل است. حال مثال قسمت الف را در حالتی که انتخاب مهره‌ها پی‌درپی و با جایگذاری باشد، حل می‌کنیم.

پاسخ: همان‌طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، چون انتخاب مهره‌ها با جایگذاری می‌باشد، تعداد کل مهره‌ها در تمام مراحل ثابت است و خارج شدن مهره‌ها بر روی هم تأثیری نداشته و مستقل از هم هستند. بنابراین احتمال خواسته‌شده برابر می‌شود با:

$$P=\frac{۵}{۷}\times\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۲۰}{۳۴۳}$$



نکته اگر در مسأله از برخی از مهره‌های خارج شده اصلاً صحبت نشود، فرض می‌کنیم آن مهره‌ها اصلاً انتخاب نشده‌اند.

مثال در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج شده قرمز است؟

پاسخ: از رنگ مهرهٔ اول حرفی نزده، پس فرض می‌کنیم اصلاً مهرهٔ اول بیرون نیامده و فقط می‌خواهیم مهره‌ای برداریم که قرمز باشد، پس جواب $\frac{۵}{۹}$ می‌شود.

۶۲- در یک ظرف ۵ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی قرار دارد. دو مهره را پشت سر هم و با جایگذاری خارج می‌کنیم. با چه احتمالی دو مهره همرنگ نیستند؟

۱) $\frac{۴۰}{۸۱}$ ۲) $\frac{۲۰}{۸۱}$ ۳) $\frac{۴۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۶۱}{۸۱}$

۶۳- در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد مهرهٔ اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۶۴- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی و پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ تجربی داخل ۹۲

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۶۵- هر یک از اعداد ۱،۲،۳،۴،۵،۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده‌اند. به‌طور تصادفی، متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۶۶- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ تجربی داخل ۹۱

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۶۷- از میان ۹ کارت که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۹ درج شده، دو کارت را پشت سر هم و بدون جایگذاری برمی‌داریم. با کدام احتمال عدد روی کارت دوم ۷ است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۸}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۶۸- جعبه‌ای شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سفید است. به تصادف سه مهره پی‌درپی و بدون جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها آبی است؟

۱) $\frac{۵}{۴۲}$ ۲) $\frac{۹}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱۰}{۲۱}$

@khanen_book

۶۹- در داخل جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه وجود دارد. به تصادف ۳ مهره به طور متوالی و بدون جایگذاری از داخل جعبه برمی‌داریم. احتمال آن‌که فقط رنگ مهره‌های اول و دوم یکسان باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۷۰- اعداد ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷ را بر روی کارت‌های یکسان نوشته و آن‌ها در یک جعبه قرار می‌دهیم. سپس به تصادف ۲ کارت به‌طور متوالی و بدون جایگذاری از جعبه برمی‌داریم. احتمال آن‌که حاصل جمع اعداد کارت‌های انتخابی فرد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷۱- کیسه‌ای دارای ۵ مهرهٔ سفید، ۶ مهرهٔ آبی و ۷ مهرهٔ قرمز است. سه مهره پی‌درپی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. چه‌قدر احتمال دارد حداقل دو مهره از مهره‌های انتخابی همرنگ باشند؟

۱) $\frac{۱۱۰}{۱۳۶}$ ۲) $\frac{۳۵}{۱۳۶}$ ۳) $\frac{۱۰۱}{۱۳۶}$ ۴) $\frac{۷۵}{۱۳۶}$

۷۲- درون ظرفی ۳ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ قرمز وجود دارد. مهرهٔ اول را با جایگذاری و مهرهٔ دوم و سوم را یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دومین سفید بلافاصله بعد از اولین سیاه خارج می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۵۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶۶}$

۷۳- در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج شده سفید است؟ تجربی داخل ۹۲ و مشابه ریاضی خارج ۹۳

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۷۴- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش را از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال اولین موش، سفید و سومین موش، سیاه است؟ تجربی داخل ۸۸

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

۷۵- جعبه‌ای شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ بنفش است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. سپس از بین باقی‌ماندهٔ مهره‌ها، به تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم رنگ این مهره سفید نیست، با کدام احتمال سیاه است؟

۱) $\frac{۴}{۱۰}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

درسنامهٔ ۳

پیشامدهای مستقل و قانون ضرب احتمالات

یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. این که تاس چه عددی می‌آید، هیچ تأثیری بر روی «رو» یا «پشت» آمدن سکه ندارد. به عبارت دیگر تاس هر عددی (۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶) بیاید، احتمال «رو» یا «پشت» آمدن سکه همان $\frac{۱}{۲}$ است. در حالت کلی می‌گوییم دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند، هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مثلاً احتمال وقوع A با شرط رخ دادن B یا رخ ندادن B یکسان است (اصلاً مهم نیست که B رخ داده یا نداده!) و داریم:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند} : \quad P(A|B) = P(A|B') = P(A)$$

(احتمال وقوع A) (احتمال وقوع A به شرطی که B رخ داده) (احتمال وقوع A به شرطی که B رخ نداده)

از طرفی در قسمت احتمال شرطی برای $P(A|B)$ فرمولی یاد گرفتیم. اگر از آن فرمول استفاده کنیم، به شرط مستقل بودن دو پیشامد می‌رسیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow[A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}]{P(A|B)=P(A)} P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

پس مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ باشد. توجه دارید که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است.

تذکر دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

@khanenet_book

سؤال دانش‌پژوه (لاتاشا سیدی عبادی): **آقا اجازه یعنی ما برای هر دو تا پیشامد باید بیاییم تساوی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ رو بررسی کنیم تا بفهمیم مستقل‌اند یا نه؟! این که خیلی طول می‌کشه.**

پاسخ: *امان از تنبلی! ببین عزیزم در بعضی از پیشامدها به سادگی می‌توان مستقل بودن را تشفیض داد و نیازی به چک کردن این فرمول نیس. مثل پرتاب سکه و تولد فرزندا قلب این که سکه (رو) میاد یا (پشت) چه تاثیری روی دفتر یا پسر شدن بچه داره؟!! پس تابلوئه که این دو پیشامد مستقل‌اند و نیازی به اثبات تساوی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ نیست.*

نتیجه اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، قانون جمع احتمالات به صورت زیر در می‌آید:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

مثال **اگر $P(A)=۰/۴$ و $P(B\mid A)=۰/۳$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند. آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟**

پاسخ: چون A و B مستقل‌اند. پس $P(B\mid A)=P(B)=۰/۳$. بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=۰/۴+۰/۳-۰/۴\times ۰/۳=۰/۷-۰/۱۲=۰/۵۸$$

مثال **یک سکه و یک تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال این‌که عدد رو شدهٔ تاس، عدد اول و سکه «پشت» بیاید کدام است؟**

پاسخ: روش اول: اگر A پیشامد عدد اول بودن تاس و B پیشامد «پشت» آمدن سکه باشد، $A\cap B$ پیشامد این است که تاس عدد اول و سکه «پشت» بیاید. دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، زیرا وقوع هر یک، در وقوع دیگری تأثیری نمی‌گذارد. پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\qquad (*)$$

بنابراین احتمال هر یک از پیشامدهای A و B را می‌یابیم:

$$\begin{cases} A=\{۲,۳,۵\}\ ,\ S=\{۱,۲,\dots,۶\}\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \\ B=\{\text{پشت}\}\ ,\ S=\{\text{رو},\text{پشت}\}\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{(*)} P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: فضای نمونه‌ای پرتاب سکه و تاس را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\{(ر,۱),(ر,۲),\dots,(ر,۶),(پ,۱),(پ,۲),\dots,(پ,۶)\}\Rightarrow n(S)=۱۲$$

C را پیشامد «پشت» آمدن سکه و عدد اول بودن تاس درنظر می‌گیریم:

$$C=\{(پ,۲),(پ,۳),(پ,۵)\}\Rightarrow n(C)=۳\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

نکته اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای (B,A') و (B',A) و (B',A') نیز مستقل از هم می‌باشند، بنابراین داریم:

$$P(A\mid B')=P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=P(A)\Rightarrow P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$$

$$P(A'\mid B)=P(A')\Rightarrow\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=P(A')\Rightarrow P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)$$

$$P(B'\mid A')=P(B')\Rightarrow\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=P(B')\Rightarrow P(B'\cap A')=P(B')\times P(A')$$

مثال **اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)=\frac{۳}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$، چه‌قدر احتمال دارد که هیچ یک از دو پیشامد A و B روی ندهند؟**

پاسخ: مطلوب سؤال احتمال رخ ندادن A و رخ ندادن B، یعنی احتمال رخ دادن A' و رخ دادن B' است. بنابراین باید $P(A'\cap B')$ را بیابیم. طبق نکتهٔ گفته‌شده چون A و B مستقل از هم می‌باشند، A' و B' نیز مستقل از هم هستند، پس:

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(۱-P(A))(۱-P(B))=(۱-\frac{۳}{۴})(۱-\frac{۱}{۳})\Rightarrow P(A'\cap B')=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

مثال **سکهٔ سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامدی باشد که در آن دومین پرتاب «رو» است و B پیشامدی باشد که در آن فقط دو «رو» به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا این دو پیشامد A و B مستقل هستند؟**

پاسخ: فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ بار سکهٔ سالم به صورت زیر است:

$$S=\{(ر,ر,ر),(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(ر,پ,پ),(پ,ر,ر),(پ,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,پ,پ)\}$$

@khanehbook

حال با توجه به فضای نمونه‌ای فوق، پیشامدهای A، B و $A \cap B$ و سپس احتمال رخداد آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \{(پ,ر,ر),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(ر,ر,ر)\} \Rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر)\} \Rightarrow n(B) = ۳ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

$$A \cap B = \{(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۳ \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

حال درستی تساوی $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ را بررسی می‌کنیم:

$$P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A).P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۴} \overset{?}{=} \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴} \neq \frac{۱}{۸} \Rightarrow$$

پیشامدهای A و B مستقل نمی‌باشند.

نکته برای بررسی مستقل بودن دو پیشامد A و B می‌توان از دیدگاه احتمال شرطی هم استفاده نمود و بررسی کرد که آیا تساوی $P(A \mid B) = P(A)$ برقرار است یا خیر! اگر تساوی برقرار باشد A و B مستقل از هم خواهند بود در غیر این صورت A و B وابسته می‌باشند.

مثال دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن که در پرتاب اولین تاس ۲ ظاهر شود، با کدام‌یک از دو پیشامد زیر مستقل است؟

الف) پیشامد این‌که مجموع دو تاس ۵ شود. **ب) پیشامد این‌که مجموع دو تاس ۷ شود.**

پاسخ ابتدا اعضای پیشامدهای بیان شده را می‌نویسیم:

A: عدد تاس اول ۲ بیاید. $A = \{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$

مجموع دو تاس ۵ : $B = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\} \Rightarrow P(B) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$

مجموع دو تاس ۷ : $C = \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\} \Rightarrow P(C) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

الف)

$$P(\text{مجموع دو تاس ۵} \mid \text{عدد تاس اول ۲}) = P(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \xrightarrow{A \cap B = \{(۲,۳)\}} \frac{۱}{۶}, P(B) = \frac{۱}{۹}$$

چون $P(B \mid A) \neq P(B)$ شد. پس A و B مستقل از هم نیستند. به عبارت دیگر وقوع پیشامد A باعث شد که احتمال وقوع B از $\frac{۱}{۹}$ به $\frac{۱}{۶}$ افزایش یابد، پس وقوع A روی احتمال وقوع B تأثیر گذاشت!

ب)

$$P(\text{مجموع دو تاس ۷} \mid \text{عدد تاس اول ۲}) = P(C \mid A) = \frac{n(C \cap A)}{n(A)} \xrightarrow{C \cap A = \{(۲,۵)\}} \frac{۱}{۶} \text{ و } P(C) = \frac{۱}{۶}$$

چون $P(C \mid A) = P(C)$ شد. پس A و C مستقل از هم هستند. به عبارت دیگر، وقوع پیشامد A هیچ تأثیری در احتمال وقوع C نداشته و عدد آن را تغییری نداده است.

۷۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B) = \frac{۱}{۴}$، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۶}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۷۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل ناتهی باشند و $P(A \cap B) = [P(A)]^۲$ باشد، $P(A')$ کدام است؟

۱) $P(A)$ ۲) $P(A) \times P(B)$ ۳) $۱ - P(A) \times P(B)$ ۴) $۱ - P(B)$

۷۸- اگر وقوع هر یک از پیشامدهای A و B بر احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $P(A - B) = P(A)P(B')$ ۲) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۳) $P(A - B) = P(A)$ ۴) $P(A \cup B) = ۱$

۷۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و داشته باشیم $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A \cup B) = \frac{۵}{۶}$، آن‌گاه $P(B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۰- اگر A و B' دو پیشامد هم‌شانس بوده و $P(A \mid B') = P(A) = ۰/۴$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۷۶ ۴) ۰/۶۷

۸۱- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A) = ۰/۴$ و $P(B) = ۰/۳$ باشد، آن‌گاه $P(A - B)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲۸ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۴۲

۸۲- اگر $P(A \mid B) = P(A)$ باشد، حاصل $P(B \mid A') + P(B' \mid A')$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $P(A') + P(B)$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $P(A')$

@khanen_book

۸۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل، $P(A|B)=۰/۳$ و $P(B'|A)=۰/۴$ باشد، آن‌گاه حاصل $P(A'-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۸ ۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۲۴

۸۴- اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و A و B مستقل باشند، $P(A\cup B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۸۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(B'|A')=۰/۸$ و $P(A\cap B)=۰/۱$ باشد، $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

۸۶- اگر دو پیشامد A و B مستقل از هم و $P(B)=۲P(A)$ و $P(A\cup B)=\frac{۵}{۸}$ باشد، آن‌گاه $P(B)$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۸۷- A و B دو پیشامد غیر تهی از فضای نمونه‌ای S می‌باشند، به‌طوری که $P(A)\times P(B)+P(A'\cup B')=۱$. این دو پیشامد نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) مستقل ۲) سازگار ۳) ناسازگار ۴) وابسته

۸۸- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A\cap B)=۰/۳$ و $P(A-B)=۰/۴$ باشد، آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۹}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۴۹}{۷۰}$ ۴) $\frac{۱۹}{۷۰}$

۸۹- اگر $P(B)=۰/۸$، $P(A)=۰/۳$ و $P(A\cup B)=۰/۸۶$ باشد، آن‌گاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) ناسازگار ۲) $A\subset B$ ۳) متمم ۴) مستقل

۹۰- اگر دو پیشامد باسواد بودن و پسر بودن مستقل از هم باشند، احتمال آن‌که دختری باسواد باشد چه‌قدر است؟

	باسواد	بی‌سواد
دختر	a	a + ۸
پسر	۵	۷

۱) ۰/۵ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) ۰/۸ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۹۱- تاسی را دو بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد آن باشد که عدد رو شده در پرتاب اول برابر ۴ و B پیشامد آن باشد که مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۷ باشد، در این صورت دو پیشامد A و B چگونه‌اند؟

۱) سازگار و مستقل ۲) ناسازگار و مستقل ۳) ناسازگار و وابسته ۴) سازگار و وابسته

۹۲- احتمال این‌که شخص A در آزمون ورودی دانشگاه قبول شود برابر $\frac{۳}{۵}$ و احتمال این‌که شخص B در این آزمون قبول شود برابر $\frac{۲}{۳}$ است. احتمال این‌که هر دو در این آزمون قبول شوند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۹۳- ۶۰ درصد افراد جامعه‌ای دارای چشم مشکی و ۳۵ درصد گروه خونی آن‌ها از نوع A است. یک فرد به تصادف از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال این فرد دارای چشم مشکی و گروه خونی A است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۷۴ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۲۱

۹۴- احتمال بهبود شخص A و شخص B پس از عمل جراحی پیوند کلیه به ترتیب ٪۸۰ و ٪۶۰ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، احتمال آن‌که شخص B بهبود یابد ولی شخص A بهبود نیابد، چند برابر احتمال آن است که حداقل یکی از آن‌ها بهبود یابد؟

۱) $\frac{۲۳}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲۳}$ ۳) $\frac{۲۳}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۳۲}$

۹۵- احتمال بهبود حداقل یکی از دو شخص A و B پس از عمل پیوند کلیه برابر ٪۹۲ و احتمال بهبود شخص A برابر ٪۸۰ باشد. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، با کدام احتمال هر دو نفر سلامتی خود را به‌دست می‌آورند؟

۱) ۰/۸۴ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷۴

۹۶- احتمال این‌که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۶ و احتمال این‌که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۷ است. چه‌قدر احتمال دارد که حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۵۸

@khanehbook

۹۷- در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آن‌ها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آن‌ها مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ تجربی داخل ۹۰

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

۹۸- هر یک از دو صفحهٔ عقربه‌دار به ۴ قطاع برابر با شماره‌های ۴،۳،۲،۱ تقسیم شده‌اند. عقربهٔ مربوط به هر صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این‌که عقربه‌ها در نواحی هم‌شماره متوقف شوند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۹- صفحهٔ عقربهٔ A به ۴ قطاع مساوی با شماره‌های ۱،۲،۳،۴ و صفحهٔ عقربهٔ B به ۵ قطاع برابر با شماره‌های ۱،۲،۳،۴،۵ تقسیم شده است. هر دو عقربه را می‌چرخانیم. با کدام احتمال لااقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیه‌های فرد قرار می‌گیرند؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۱۰۰- در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ و چهار گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارند. به طور تصادفی یک گوی از هر رنگ خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل شمارهٔ یکی از آن‌ها عدد ۲ است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴

۱۰۱- اگر در یک جامعه، احتمال داشتن نوعی گروه خونی ٪۲۰ باشد، در انتخاب دو نفر، احتمال این‌که یک نفر، از این نوع گروه خونی داشته و دیگری نداشته باشد، چه‌قدر است؟

۱) ٪۳۲ ۲) ٪۱۶ ۳) ٪۴۸ ۴) ٪۴۰

۱۰۲- اگر احتمال وقوع دو پیشامد مستقل $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشد، با کدام احتمال هیچ‌یک از این دو پیشامد رخ نمی‌دهند؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۰۳- احتمال قبولی دو دوست در کنکور امسال به ترتیب ۰/۴ و ۰/۶ است. احتمال آن‌که فقط یکی از آن‌ها قبول شود، چه‌قدر است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۶ ۳) ۰/۵۲ ۴) ۰/۴۲

۱۰۴- بسکتبالیستی با احتمال ۰/۳، توپ‌هایش وارد حلقه می‌شوند، با فرض مستقل بودن پرتاب‌ها، چه‌قدر احتمال دارد از ۳ بار پرتاب او، حداقل یک توپ وارد حلقه شود؟

۱) ۰/۶۷۵ ۲) ۰/۳۴۳ ۳) ۰/۶۵۷ ۴) ۰/۳۳۴

۱۰۵- احتمال این‌که x یک مسألهٔ ریاضی را حل کند $\frac{۲}{۳}$ و احتمال این‌که y همین مسأله را حل کند $\frac{۳}{۴}$ است. این مسأله را به هر دو می‌دهیم تا حل کنند، احتمال این‌که مسأله حل شود کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۰۶- احتمال به هدف خوردن تیر یک تیرانداز $\frac{۲}{۳}$ است. چه‌قدر احتمال دارد در ۳ بار شلیک، حداکثر یک تیر به هدف اصابت نکند؟

۱) $\frac{۷}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۰۷- یک سکه را ۱۰۰ بار انداخته‌ایم، پشت آمده است، احتمال آن‌که در یکصد و یکمین بار مجدداً پشت بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲^{۱۰۰}}$ ۴) $(\frac{۱}{۲})^{۱۰۱}$

۱۰۸- با چه احتمالی، در یک تیم والیبال ۶ نفره، همه در ماه خرداد متولد شده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲^{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲^{۶}}$ ۳) $\frac{۱۲!}{۶!\times۱۲^{۶}}$ ۴) $\frac{۱۲!}{۶!\times۱۲^{۵}}$

۱۰۹- با چه احتمالی، در یک تیم والیبال ۶ نفره، همه در یک ماه متولد شده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲^{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲^{۶}}$ ۳) $\frac{P(۱۲,۶)}{۱۲^{۶}}$ ۴) $\frac{\binom{۱۲}{۶}}{۱۲^{۶}}$

۱۱۰- چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟ تجربی خارج ۹۲

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۱۱۱- چهار تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده، لااقل در دو تاس یکسان هستند؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

@khanehketab

۱۱۲- اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر ٪۶۰ و پسر ٪۴۰ باشد، احتمال آن‌که هر سه فرزند این خانواده پسر باشند، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۶۴ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۰۸ ۴) ۰/۰۰۸

۱۱۳- احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{1}{4}$ است. چه‌قدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم‌جنس باشند؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۱۱۴- احتمال آن‌که فردی دارای رنگ چشم مغلوب باشد، $\frac{1}{4}$ است. با کدام احتمال در یک خانوادهٔ ۳ فرزندی، فرزند آخر تنها پسر خانواده بوده و رنگ چشم مغلوب ندارد؟

۱) $\frac{1}{32}$ ۲) $\frac{3}{32}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱۱۵- احتمال آن‌که در یک خانوادهٔ چهار فرزندی ۲ فرزند بزرگ‌تر هم‌جنس و دو فرزند کوچک‌تر جنسیت مختلف داشته باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۱۶- در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که هر دو تاس بین ۲ و ۵ ظاهر شوند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۱۷- در پرتاب هم‌زمان دو تاس، با کدام احتمال لااقل یکی از اعداد رو شده در این دو تاس مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۱۸- تاس سالمی را سه بار انداخته‌ایم و می‌دانیم اختلاف اعداد رو شده در پرتاب‌های اول و دوم بیشتر از ۴ است. با کدام احتمال عدد رو شده در پرتاب سوم ۶ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۹- سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که حاصل‌ضرب اعداد رو شده فرد باشد کدام است؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۰- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که سکه «پشت» یا تاس ۴ بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{8}{12}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{7}{12}$

۱۲۱- در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه «رو» و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟ تجربی خارج ۹۱

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۲۲- احتمال آن‌که نوزادی در خانوادهٔ A با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ٪۲۰ و احتمال آن‌که نوزادی در خانوادهٔ B با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ٪۷۵ است. چه‌قدر احتمال دارد که حداکثر یکی از این دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شوند؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۸۵ ۳) ۰/۵۸ ۴) ۰/۵۱

۱۲۳- در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره، متفاوت است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $\frac{19}{40}$ ۲) $\frac{21}{40}$ ۳) $\frac{23}{40}$ ۴) $\frac{27}{40}$

۱۲۴- در ظرفی ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهرهٔ خارج‌شده، هم‌رنگ هستند؟ ریاضی داخل ۹۳

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲۴

۱۲۵- تاسی را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا شش بیاید. احتمال آن‌که در پرتاب پنجم، اولین بار شش بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{625}{6^5}$ ۲) $\frac{125}{6^3}$ ۳) $\frac{625}{6^4}$ ۴) $\frac{5^5}{6^5}$

۱۲۶- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ تجربی داخل ۹۱

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{37}{64}$ ۳) $\frac{19}{32}$ ۴) $\frac{39}{64}$

@kaneh_book

درسنامهٔ ۴

شاخص‌های مرکزی

میانگین: میانگین ساده‌ترین و پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است. میانگین، متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست و آن را با $\bar{x}$ نشان می‌دهیم. در واقع اگر داده‌ها به صورت $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشند، میانگین آن‌ها از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$ (n تعداد کل داده‌ها است.)

مثال میانگین داده‌های آماری ۹,۹,۱۰,۱۱,۲۱ را بیابید.

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{9+9+10+11+21}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

خواص میانگین:

۱) در هر جامعه مقادیر کوچک و بزرگ نسبت به سهم خود در میانگین مؤثر هستند.

سؤال دانش‌پژوه (آشوب ماکیسیان)، آقا حالا این خاصیت خوبه یا بد؟

پاسخ: فیلی‌ها بدا بدار، یه مثال برات بزنم. یه بار برای انجام یه پرواز آزمایشی توی آمریکا، می‌خواستن هایی رو انتخاب کنن که دمای آب و هوایی معتدلی داشته باشه. بنابراین شهری با دمای متوسط ۳۰° رو انتخاب کردن. ولی وقتی رفتن اونجا با آب و هوایی عجیب و غریب مواجه شدند! در واقع میانگین اونا رو به اشتباه انداخته بود، زیرا دمای این شهر هیچ‌گاه ۳۰° نبود بلکه گاهی فیلی سرد (۰°) و گاهی فیلی گرم (۶۰°) بود ولی میانگین دما ۳۰° شده بود!

۲) اگر همهٔ داده‌ها را در یک عدد ثابت، ضرب یا تقسیم کنیم، میانگین نیز در آن عدد ضرب یا تقسیم می‌شود.

۳) اگر همهٔ داده‌ها را با یک عدد ثابت، جمع یا تفریق کنیم، میانگین نیز با آن عدد جمع یا تفریق می‌شود.

در حالت کلی اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \cdots, ax_n + b$ نیز برابر $a\bar{x} + b$ خواهد بود.

سؤال دانش‌پژوه (ناصر راستی)، آقا حالا این خاصیت الکیه یا کار ما رو هم میتونه راه بندازه؟

پاسخ: تا کارت چی باشه؟ کار تورو که معمولاً فوز شیرینی واسه یه گروه خاص است رو که راه نمی‌ندازه ولی واسه هل فیلی تست‌ها یه نکتهٔ کلیدی محسوب می‌شه. نکتهٔ بعد رو ببین:

نکته (روش میانگین حدسی): گاهی اوقات در محاسبهٔ میانگین اعداد بزرگ بهتر است از تمام داده‌ها، یک عدد دلخواه را کم کرده و سپس میانگین داده‌های جدید را محاسبه کنیم. در نهایت به میانگین داده‌های جدید، عددی که از همه کم کرده‌ایم را اضافه می‌کنیم تا میانگین اصلی به دست آید. مثلاً در مثال بالا برای یافتن میانگین اعداد ۹,۹,۱۰,۱۱,۲۱ کافی است ابتدا یک عدد را به عنوان میانگین حدسی، حدس بزنیم. مثلاً ۱۰، حالا این عدد یعنی ۱۰ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم، داریم: $11-10=1$ ، $21-10=11$ ، $10-10=0$ ، $9-10=-1$ ، $9-10=-1$

حالا میانگین داده‌های جدید $-1, -1, 0, 1, 11$ را می‌یابیم که چون اعداد کوچک‌ترند، محاسبه راحت‌تر از قبل هست:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{(-1)+(-1)+(0)+(1)+11}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

در نهایت عدد ۱۰ را که قبلاً کم کرده بودیم، به میانگین جدید اضافه می‌کنیم:

$$\bar{x}_{\text{اصلی}} = 2 + 10 = 12$$

این روش در حل تست‌ها سرعت را به شدت بالا می‌برد. حتماً آن را یاد بگیرید و از آن استفاده کنید.

۴) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، میانگین آن‌ها با داده‌ها برابر است. یعنی: $\underbrace{a, a, a, \ldots, a}_{\text{تا } n} \Rightarrow \bar{x} = a$

مثال میانگین داده‌های ۵,۰۰۰,۵,۵ را بیابید.

پاسخ: چون تمام داده‌ها ۵ هستند، پس میانگین آن‌ها نیز همان ۵ است.

۵) بین شاخص‌های مرکزی که می‌خوانید، میانگین تنها شاخصی است که اگر به جای کلیهٔ داده‌ها قرار گیرد، مجموع داده‌ها تغییر نمی‌کند. یعنی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}}_{\text{تا } n} = n\bar{x}$، زیرا:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Rightarrow n\bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

۶) اگر داده‌های آماری $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، آن‌گاه میانگین کل داده‌ها برابر با میانگین داده‌های اول و آخر است. یعنی:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

مثال میانگین اعداد فرد طبیعی و کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید.

پاسخ: اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ عبارت‌اند از ۹۹,۰۰۰,۵,۳,۱. این داده‌ها تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{1+99}{2} = 50$$

@khanehketab

۱۲۷- معدل حدسی تعدادی نمره ۱۱ در نظر گرفته شده است. اگر تفاوت آن از یکایک نمرات ۵-، ۱۰-، ۳ و ۷ باشد، معدل واقعی نمرات چه عددی است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۲۸- میانگین اعداد $7x$، $x,5$، $-4,7$، $2x$ برابر ۸ است. x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۹- میانگین داده‌های آماری x، $2y$، ۹، ۶، ۲۰ برابر ۱۱ است. میانگین داده‌های آماری $8y$، $4x$، ۳، ۹ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۳ ۳) ۱۷ ۴) ۳۳

۱۳۰- میانگین داده‌های -5، -4، -3، -2، -1 و میانگین داده‌های a و ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸ با هم برابرند. a کدام است؟

۱) ۴۰۰- ۲) ۴۰۰ ۳) ۴۰۱- ۴) ۴۰۱

۱۳۱- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ برابر ۱۳/۵ باشد، میانگین داده‌های ۱۸، ۱۵، $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ کدام است؟

۱) ۱۵/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴/۵ ۴) ۱۴

۱۳۲- میانگین ۱۰ دادهٔ آماری ۳۲/۵ است. اگر دو دادهٔ ۳۵ و ۴۰ را از آن داده‌ها کنار بگذاریم، میانگین داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۳۱/۲۵ ۲) ۳۱/۵ ۳) ۳۱/۷۵ ۴) ۳۲

۱۳۳- میانگین وزن ۱۰ نفر ۶۵ کیلوگرم است. سه نفر جمعاً به وزن ۲۳۴ کیلوگرم به این افراد اضافه شده و یک نفر با وزن ۹۲ کیلوگرم از بین آن‌ها خارج می‌شود. میانگین وزن جدید برحسب گرم کدام است؟

۱) ۶۷۰۰۰ ۲) ۶۹۰۰۰ ۳) ۶۵۰۰۰ ۴) ۶۶۰۰۰

۱۳۴- میانگین اعضای مجموعهٔ $A = \{a,b,c\}$ برابر x و میانگین اعضای مجموعهٔ $B = \{a,b,c,d,e\}$ برابر y است. میانگین اعضای مجموعهٔ $C = \{d,e\}$ کدام است؟

۱) $y + x$ ۲) $2y + 3x$ ۳) $5y - 3x$ ۴) $\frac{5y - 3x}{2}$

۱۳۵- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ برابر $2a$ باشد، میانگین داده‌های $2x_1 - a, 2x_2 - a, \cdots, 2x_n - a$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $4a$ ۳) a ۴) $3a$

۱۳۶- اگر میانگین داده‌های ۱، ۳، ۵، ...، ۲۹، ۳۱ برابر a و میانگین داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۵، ۱۶ برابر b باشد، کدام رابطه بین a و b برقرار است؟

۱) $a = 2b$ ۲) $a = 2b + 1$ ۳) $a = 2b - 1$ ۴) $a = b$

۱۳۷- میانگین نمرات یک دانشجو برابر ۱۵ است. اگر به هر کدام از نمرات این دانشجو به اندازهٔ ۲۰ درصد آن نمره اضافه کنیم، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵/۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۳۸- مجموع ۱۲ داده برابر ۱۰ است. اگر هر یک از داده‌ها را ۳/۵ برابر نموده و به اندازهٔ ۱/۵ واحد به هر کدام اضافه نماییم، مجموع داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۵۷ ۳) ۳۶/۵ ۴) ۵۰

۱۳۹- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x} + n$ کدام است؟

۱) $\frac{n\bar{x} + n}{n+1}$ ۲) $\bar{x} + 1$ ۳) $\bar{x} + \frac{n}{n+1}$ ۴) $\frac{\bar{x} + n}{n+1}$

۱۴۰- اگر میانگین داده‌های $x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $3x_1 + 1, 3x_2 + 2, 3x_3 + 3$ کدام است؟

۱) $3\bar{x} - 6$ ۲) $3\bar{x} - 4$ ۳) $3\bar{x}$ ۴) $3\bar{x} - 2$

۱۴۱- اگر میانگین داده‌های $x_1 - 1, x_2 - 2, \cdots, x_n - n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $x_1 + 1, x_2 + 2, \cdots, x_n + n$ کدام است؟

۱) $\bar{x} + n + 1$ ۲) $\bar{x} + \frac{n(n+1)}{2}$ ۳) $\bar{x} + \frac{n+1}{2}$ ۴) $2\bar{x}$

۱۴۲- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $x_1 + \bar{x}, x_2 + 2\bar{x}, \cdots, x_n + n\bar{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{(n+1)\bar{x}}{2}$ ۲) $2\bar{x}$ ۳) $\frac{(n+3)\bar{x}}{2}$ ۴) $\frac{n\bar{x}}{2}$

@khanehbook

درس‌نامه ۵

میانگین وزن‌دار

در یک سری دادهٔ آماری اگر دادهٔ x_1، k_1 بار، دادهٔ x_2، k_2 بار، ... و دادهٔ x_n، k_n بار تکرار شوند، آن‌گاه میانگین داده‌ها از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

به k_1، k_2 و ... و k_n، به ترتیب فراوانی داده‌های x_1، x_2، ...، x_n می‌گویند.

مثال میانگین داده‌های جدول زیر را بیابید.

پاسخ:

داده	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۲	۴	۳	۱

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2\times3 + 4\times5 + 3\times7 + 1\times9}{2+4+3+1} = \frac{56}{10} = 5/6$$

حالت خاص: اگر میانگین n داده x و میانگین m دادهٔ دیگر y باشد، میانگین کل داده‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{nx + my}{n + m}$$

نکته مجموع جبری تفاضل داده‌ها از میانگین برابر صفر است. یعنی:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

سؤال دانش‌پژوه (هاشم پش کل)، آقا حالا این نکته اثبات میشه؟

پاسخ: یا مق! پش کل و اثبات !! فدایا شکرت! بله اثبات میشه. یادت نرفته که مجموع داده‌ها، حاصل‌ضرب تعداد داده‌ها در میانگینه. ببین:

$$\underbrace{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x})}_{\text{با } n} = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}_{n\bar{x}} - \underbrace{(\bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x})}_{\text{با } n} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

۱۴۳- نمرهٔ کل آزمون عمومی یک داوطلب مطابق جدول زیر ۵۸ درصد است. نمرهٔ آزمون زبان انگلیسی وی چند درصد است؟

درس	ادبیات	عربی	معارف	زبان انگلیسی
درصد	۶۵	۵۲	۷۰	؟
ضریب	۴	۲	۳	۲

۱) ۳۱
۲) ۳۲
۳) ۳۳
۴) ۳۴

۱۴۴- میانگین ۴ درس یک دانش‌آموز هر کدام با ضریب ۱، برابر ۱۵/۵ است. نمرهٔ درس پنجم وی که با ضریب ۲ منظور می‌گردد، چه عددی باشد تا میانگین ۵ درس او ۱۶/۵ شود؟

۱) ۱۸/۲۵ ۲) ۱۸/۵ ۳) ۱۸/۷۵ ۴) ۱۹

۱۴۵- اگر ضریب نمرهٔ مستمر ۱ و ضریب نمرهٔ پایانی ۲ و نمرهٔ مستمر هنرجویی در یک درس ۱۱ باشد و بخواهد معدلش در این درس ۱۵ شود، در امتحان پایانی چه نمره‌ای باید کسب نماید؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۴۶- در صورتی که مجموع تفاضل تعدادی داده از عدد ۶ برابر صفر باشد، میانگین این داده‌ها کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳۶

۱۴۷- میانگین چند داده برابر ۵۷ است. ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم و سپس داده‌های حاصل را سه برابر کرده‌ایم. میانگین داده‌های نهایی کدام است؟ تجربی داخل ۸۴

۱) ۴۵ ۲) ۷۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۹

@khanehketab

درس‌نامه ۶

میانه

تعریف: میانهٔ تعدادی داده، عددی است که پس از مرتب کردن داده‌ها، تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم. برای به دست آوردن میانه ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. سپس به یکی از دو حالت زیر می‌رسیم:

۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار می‌گیرد، برابر میانه است.

۲) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو دادهٔ وسط، برابر میانه است.

نکته اگر n تعداد کل داده‌ها، فرد باشد، میانه، دادهٔ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ام است. مثلاً اگر ۲۱ داده داشته باشیم، آن‌گاه میانه، دادهٔ یازدهم است. زیرا: $\frac{n+1}{2}=\frac{۲۲}{2}=۱۱$ ولی اگر n زوج باشد، میانه، میانگین دو داده با شماره‌های $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+۱$ است. مثلاً در ۱۲ داده، میانه برابر میانگین دو دادهٔ ششم $\left(\frac{۱۲}{2}\right)$ و هفتم $\left(\frac{۱۲}{2}+۱\right)$ می‌باشد.

مثال **میانهٔ داده‌های ۱۰،۲،۵،۴،۳،۱۰،۹ را بیابید.**

پاسخ: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۰،۱،۲،۳،۴،۵،۹،۱۰

چون ۸ داده داریم، میانه برابر میانگین داده‌های چهارم $\left(\frac{۸}{2}\right)$ و پنجم $\left(\frac{۸}{2}+۱\right)$ است:

$$\text{میانه}=\frac{۳+۴}{2}=۳/۵$$

سؤال *دانش‌پژوه (ناصر راستی)*: **آقا میانه نباید $\frac{۴+۵}{2}=۴/۵$ بشه؟**

پاسخ: *ناصر چی می‌گی؟ من کی گفتم بین شمارهٔ داده‌ها میانگین بگیری؟! گفتم بین داده‌ها باید میانگین بگیری. این‌جا دادهٔ چهارم عدد ۳ و دادهٔ پنجم عدد ۴ می‌شوند که باید میانگین آن‌ها را حساب کنیم نه میانگین شماره‌هایشان را!!!*

خواص میانه:

۱) اگر یک عدد ثابت به تمام داده‌ها اضافه یا کم شود، آن عدد به میانه نیز اضافه یا کم می‌شود. هم‌چنین اگر یک عدد ثابت در تمام داده‌ها ضرب یا تقسیم شود، آن عدد در میانه نیز ضرب یا تقسیم می‌شود.

به طور کلی اگر میانهٔ داده‌های $x_۱,x_۲,\cdots,x_n$ برابر M باشد، میانهٔ داده‌های $ax_۱+b,ax_۲+b,\cdots,ax_n+b$ برابر $aM+b$ می‌شود.

۲) میانه تحت تأثیر داده‌های خیلی کوچک و خیلی بزرگ (داده‌های پرت یا دورافتاده) قرار ندارد و همین امر باعث می‌شود در برخی جاها کارآمدتر از میانگین باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال **میانگین و میانهٔ اعداد ۱،۲،۳،۴،۱۰۰ را بیابید.**

پاسخ: ۳ = داده‌ٔ سوم = داده‌ٔ وسط = میانه

$$\bar{x}=\frac{۱+۲+۳+۴+۱۰۰}{5}=\frac{۱۱۰}{5}=۲۲$$

باید گفت عدد ۳ بیشتر نمایندهٔ اعداد فوق محسوب می‌شود تا عدد ۲۲.

سؤال *دانش‌آموز (میترا یعقوبی)*: **ببخشید در مورد به دست آوردن میانه در جدول فراوانی یا جاهای دیگر صحبتی نمی‌کنید؟**

پاسخ: *هیس! دانش‌آموز رافع به پیزهایی که در کتاب درسی نیومده و احتمال آمدنش توی کنکور سراسری وجود نداره، حرف نمی‌زنه!*

۱۴۸- در یک امتحان ریاضی نمرات ۱۵ نفر به صورت زیر است. میانهٔ این نمرات کدام است؟

۴،۷،۷،۳،۱۲،۱۱،۱۷،۱۵،۱۴،۱۷،۱۹،۱۴،۱۰،۹،۵

۱) ۱۰ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۱/۵

۱۴۹- اگر میانه را از تمام داده‌ها کم کنیم، کدام گزینه دربارهٔ میانهٔ داده‌های حاصل درست است؟

۱) صفر = میانه ۲) ۱ = میانه

۳) ۱- = میانه ۴) نمی‌توان میانهٔ حاصل را محاسبه نمود.

۱۵۰- میانهٔ سه عدد ۵ است. اگر تمام داده‌ها را با عدد ۲ جمع و در ۳ ضرب کنیم، میانهٔ داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۲۱ ۴) ۷

۱۵۱- میانگین داده‌های ۵،۱،x،۳،۲ برابر ۴ است. میانهٔ این داده‌ها کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

@khanenbook

۱۵۲- اگر در داده‌های $x, ۷۰, ۱۱۰, ۸۰, ۶۰, x$ میانگین برابر میانه و x داده‌ای تکراری باشد، x کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۱۰

۱۵۳- اگر میانگین ۱۰ دادهٔ آماری ۱۶,۱۱,۱۷,۱۰,a,۱۰,۱۳,۱۷,۹,۱۶ برابر ۱۳/۱ باشد، میانه کدام است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۳

درس‌نامهٔ ۷

شاخص‌های پراکندگی

دامنهٔ تغییرات: اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را دامنهٔ تغییرات می‌گویند و آن را با R نشان می‌دهند.

مثال **دامنهٔ تغییرات داده‌های ۲۰، ۲۵، ۱۹، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ را بیابید.**

پاسخ: بزرگ‌ترین داده ۲۵ و کوچک‌ترین داده ۱۰ است. پس دامنهٔ تغییرات $R = ۲۵ - ۱۰ = ۱۵$ می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضی)، **آقا این دامنهٔ تغییرات به چه دردی می‌خوره؟ اصلاً پراکندگی چی میگه؟**

پاسخ: ببین فرض کن رمای یه شهری در چهار روز مختلف ۲۰°، ۲۰°، ۰° و ۰° باشه. میانگین این رماها ۱۰° میشه وقتی یکی میانگین رمای این شهر ۱۰° است شاید فیلی‌ها فکر کنن چه آب و هوای معتدل قوییا در حالی‌که دامنه تغییرات میگه $R = ۲۰ - ۰ = ۲۰$ یعنی این میانگین در یک دامنهٔ ۲۰ واحدی تغییر می‌کنه و اگر قرار باشه بگیم آب و هوای شهر معتدله باید دامنه تغییرات فیلی کوچک‌تر باشه.

سؤال دانش‌پژوه (همون قبلی)، **آقا پس خیلی چیز خوبیه دامنهٔ تغییرات؟**

پاسخ: از این جهت که یک معیار سریع محسوب میشه بله، ولی نمیشه هم گفت معیار فیلی خوبیه چون فقط بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده رو در نظر می‌گیره و به بقیه اطلاعات اهمیتی نمی‌ده. بلوتر با معیارهای بهتری آشنا می‌شیم.

نکته اگر تمام داده‌ها را با عددی ثابت جمع یا تفریق کنیم، دامنهٔ تغییرات هیچ تغییری نمی‌کند. ولی اگر تمام داده‌ها را در عددی ثابت ضرب یا تقسیم کنیم، دامنهٔ تغییرات نیز در آن عدد ضرب یا تقسیم می‌شود.

مثال **اگر دامنهٔ تغییرات داده‌های $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ برابر ۷ باشد، دامنهٔ تغییرات داده‌های $۳x_۱ - ۲, ۳x_۲ - ۲, \cdots, ۳x_n - ۲$ را بیابید.**

پاسخ: با توجه به آن‌که تمام داده‌ها در ۳ ضرب شده‌اند، پس دامنهٔ تغییرات نیز در ۳ ضرب می‌شود ولی وقتی دو واحد از تمام داده‌ها کم کنیم، دامنهٔ تغییرات، تغییری نمی‌کند. پس $R_{\text{جدید}} = ۳ \times ۷ = ۲۱$.

۱۵۴- پراکندگی تعدادی داده برابر صفر شده است. کدام نتیجه‌گیری حتماً درست است؟

۱) همهٔ داده‌ها برابر صفر هستند. ۲) داده‌ها یک در میان قرینه هستند.
۳) تمام داده‌ها برابر هستند. ۴) تمام داده‌ها ۱ هستند.

۱۵۵- در یک بررسی آماری دامنهٔ تغییرات داده‌ها عدد کوچکی شده است. کدام نتیجه‌گیری حتماً درست است؟

۱) داده‌ها یک دست نیستند. ۲) داده‌ها یکسان هستند. ۳) داده‌ها به هم نزدیک هستند. ۴) حاصل جمع داده‌ها عدد کوچکی است.

۱۵۶- اگر داده‌ها برحسب سانتی‌متر باشند و سپس آن‌ها را برحسب متر اندازه‌گیری کنیم، اندازهٔ دامنهٔ تغییرات چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۱۰۰ برابر می‌شود. ۲) ۰/۰۱ برابر می‌شود. ۳) ۰/۱ برابر می‌شود. ۴) هیچ تغییری نمی‌کند.

۱۵۷- اگر دامنهٔ تغییرات $x_۱, ۶, x_۲, \cdots, x_۷$ برابر با صفر باشد، مجموع آن‌ها کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۴۵ ۴) ۳۶

۱۵۸- اگر دامنهٔ تغییرات داده‌های $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $۳x_۱ + ۱, ۳x_۲ + ۱, \cdots, ۳x_n + ۱$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۳x_۱ + ۳x_n}{۲}$ ۲) $۳(x_۱ + \cdots + x_n) + ۱$ ۳) x_n ۴) $۳x_۱ + ۱$

۱۵۹- در یک مجموعه دادهٔ آماری بزرگ‌ترین داده ۲۵ و کوچک‌ترین داده ۵ می‌باشد. کدام داده‌ها به داده‌های فوق اضافه شوند تا دامنهٔ تغییرات ۵ واحد کم‌تر شود؟

۱) ۱۵ و صفر ۲) ۳۰ و ۱۵ ۳) ۱۰ و ۲۵ ۴) هیچ‌گاه چنین اتفاقی نمی‌افتد.

۱۶۰- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های آماری به ترتیب ۴۵ و ۲۱ می‌باشند. با اضافه کردن کدام داده‌های زیر دامنهٔ تغییرات ۶ واحد افزایش می‌یابد؟

۱) ۵۱ و ۱۵ ۲) ۳۹ و ۱۴ ۳) ۴۸ و ۲۴ ۴) ۵۱ و ۲۷

@khanehketab

۱۶۱- اگر دامنهٔ تغییرات داده‌های ۱۴ و ۲- و a و ۴ برابر ۲۰ باشد، دامنهٔ تغییرات داده‌های ۱۵ و ۸ - و a کدام است؟

۱) ۲۳ یا ۲۶ ۲) ۲۱ یا ۲۳ ۳) ۲۱ یا ۲۶ ۴) فقط ۲۳

در سکانس ۸

واریانس و انحراف معیار

شاخص دامنهٔ تغییرات قادر به بیان ویژگی تمام تغییرات نیست، بنابراین دنبال شاخصی هستیم که فاصلهٔ هر یک از داده‌ها تا یک مرکز را برایمان مشخص نماید. بهترین مرکز می‌تواند میانگین باشد. حال با شاخص زیر، پراکندگی را محاسبه می‌کنیم:

واریانس: برابر میانگین مجذور انحراف داده‌ها از میانگین است و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

سؤال دانش‌پژوه (ابلاکاهبوتر)، **آقا این دیگه چیه!**

پاسخ: ببین $x_1-\bar{x}$ یعنی اختلاف داده اول از میانگین. فبلاً گفتیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر میشه. پس هر کدوم رو به توان ۲ می‌رسونیم تا فاصله رو بهتر به ما نشون بده.

سؤال دانش‌پژوه (علی ثانی)، **آقا خب چرا مثلاً $|x_1-\bar{x}|$ رو در نظر نگیریم؟ اونم مثبته دیگه.**

پاسخ: بله اونم میشه. ولی کار کردن با قدرمطلق توی ریاضی فیلی راحت نیست، ضمن این‌که بررسی‌ها نشون داده به توان ۲ رسوندن و استفاده از واریانس فیلی بهاها مفیدتر از بقیهٔ شاقص‌ها است.

سؤال دانش‌پژوه (اکبیر شمس‌الریاضی)، **آقا جمع‌بندی کنیم؟! خب چرا $|x_1-\bar{x}|^2$، ۰،۰۰۰، $|x_n-\bar{x}|^2$ استفاده نشه که هم قدرمطلق داره و هم توان ۲؟**

پاسخ: اکبیر تو واقعاً فکر می‌کنی $(x_1-\bar{x})^2$ با $|x_1-\bar{x}|^2$ فرقی داره؟! بسر وقتی به توان ۲ می‌رسونیم دیگه نیازی به قدرمطلق نیست!

مثال **واریانس داده‌های ۸،۷،۴،۱ را بیابید.**

پاسخ:

$$\bar{x}=\frac{1+4+7+8}{4}=\frac{20}{4}=5 \quad و \quad \sigma^2=\frac{(1-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2}{4}=\frac{16+1+4+9}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}=7/5$$

انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن را با نماد σ نشان می‌دهند.

خواص واریانس و انحراف معیار:

۱) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس و انحراف معیار صفر هستند و بالعکس.

سؤال دانش‌پژوه (شهرام هدهدی)، **آقا چرا؟**

پاسخ: ببین شهرام بحث الکی نکن. واضحه وقتی همهٔ داده‌ها برابرند پراکندگی وجود نداره و همهٔ شاقص‌های پراکندگی صفر میشه! از جمله واریانس.

۲) اگر تمام داده‌ها با عددی ثابت جمع یا تفریق شوند، واریانس و انحراف معیار هیچ تغییری نمی‌کنند.

۳) اگر تمام داده‌ها در عددی ثابت مثل k ضرب شوند، واریانس k^2 برابر و انحراف معیار $|k|$ برابر می‌شوند.

مثال **اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, ۰۰۰, x_{20}$ برابر ۵ باشد، واریانس و انحراف معیار داده‌های $3x_1+4$ ، $3x_2+4$، ۰۰۰، $3x_{20}+4$ را بیابید.**

پاسخ: جمع با عددی ثابت تأثیری در واریانس و انحراف معیار ندارد. پس:

$$\sigma_{3x+4}^2=\sigma_{3x}^2=3^2\times 5=9\times 5=45 \quad و \quad \sigma_{3x+4}=\sigma_{3x}=3\times 5=15$$

دستور دوم محاسبهٔ واریانس و انحراف معیار:

فرمول محاسبهٔ واریانس و انحراف معیار برای داده‌هایی که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

$$\text{واریانس}: \sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2 \Rightarrow \text{انحراف از معیار}: \sigma=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2}$$

این فرمول زمانی بسیار مفید است که مجموع مربعات داده‌ها را داشته باشیم (یا از ما خواسته باشند)

@khanehbook

مثال اگر واریانس ۱۰ دادهٔ مثبت برابر ۱۴ و مجموع مربعات داده‌ها ۳۰۰ باشد، میانگین داده‌ها را بیابید.

پاسخ:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow 14 = \frac{300}{10} - \bar{x}^2 \Rightarrow -16 = -\bar{x}^2 \Rightarrow \bar{x}^2 = 16 \Rightarrow \bar{x} = 4$$

نکته اگر داده‌های آماری تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند $(d > 0)$، داریم:

$$\text{انحراف از معیار: } \sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}} \Rightarrow \text{واریانس: } \sigma^2 = \frac{d^2(n^2-1)}{12}$$

مثال انحراف معیار داده‌های ۰، ۴، ۸، ۱۲، ۱۶ را بیابید.

پاسخ: اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = 4$ را می‌دهند و $n = 5$ است. داریم:

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2-1)}{12} = \frac{16(25-1)}{12} = \frac{16 \times 24}{24} = 32 \Rightarrow \sigma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضی): آقا حالا چه کاریه از فرمول آجوج مجوج[1] بالا بریم. می‌تونیم از راه خودمون سریع‌تر بریم.

پاسخ: ببینم پسر، شما کارگاه یافندگی دارین. چطور آقا؟

- اتفاقاً می‌خواهیم ... .

قیافی فهم! کاملاً معلومه همه‌چیو می‌خوای به هم بیافی. اصلاً تو می‌دونی آجوج مجوج کیه؟ برو درسات رو بخوان پسر ... اجوج، مجوج رو هم ول کن!

۱۶۲- اگر در یک جامعهٔ آماری با ۴۰ نمونه، داشته باشیم: $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{40} - \bar{x})^2 = 280$، واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۷ ۳) ۸۰ ۴) ۸

۱۶۳- اگر در ۵ دادهٔ آماری تفاضل میانگین از داده‌ها ۱، ۴، ۰، ۲- و ۳- باشد، واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶۴- واریانس داده‌های ۱، ۱، ۳، ۳ چند برابر واریانس داده‌های ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{16}{49}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۶۵- در داده‌های آماری ۱۱، ۶، ۵، ۱۳، ۷، ۸، ۱۰، ۷ و ۱۳ داده‌های کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۵

۱۶۶- واریانس اعداد ۲۹۱۴، ۲۹۱۶، ۲۹۱۸، ۲۹۲۰ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) ۲۵

۱۶۷- اگر واریانس داده‌های a، b، c و d برابر صفر باشد. واریانس $a+2, b+3, c+4, d+5, 6$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۶۸- واریانس داده‌های $a-1, a+1, a+5$ چند برابر واریانس داده‌های $a-1, a, a+1, a+2$ می‌باشد؟ تجربی داخل ۸۸

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{16}{5}$ ۳) $\frac{32}{3}$ ۴) $\frac{32}{5}$

۱۶۹- انحراف مقادیر تعداد ۷ داده از میانگین آن‌ها به صورت اعداد صحیح متوالی است. انحراف معیار داده‌ها چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۰- اگر میانگین تعدادی دادهٔ آماری را از تک‌تک داده‌ها کم کنیم، واریانس جدید نسبت به واریانس قبلی چه تغییری می‌کند؟

۱) به اندازهٔ میانگین کم می‌شود. ۲) به اندازهٔ میانگین زیاد می‌شود. ۳) برابر صفر می‌شود. ۴) هیچ تغییری نمی‌کند.

۱۷۱- اگر σ انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \cdots, x_n$ باشد، انحراف معیار داده‌های $-\frac{x_n}{2} + 3, \cdots, -\frac{x_2}{2} + 3, -\frac{x_1}{2} + 3$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}\sigma$ ۲) $-\frac{1}{2}\sigma + 3$ ۳) $\frac{1}{2}\sigma + 3$ ۴) $\frac{1}{2}\sigma$

۱- اجوج، مجوج موجوداتی عجیب با قدی کوچک‌تر از انسان بودن که مرتباً به ازار و اذیت اقوام دیگری می‌پرداختند. (به پیر تو مایه‌های رمه توری‌های فورمون یا همین بهرام پفپفه و اکبر شمس‌الریاضی! ولی کمی کوتاه‌تر و لاغرتر!) ذوالقرنین حاکم سرشناس عهد قدیم برای رهایی مردم از دست آن‌ها سدی معروف ساخت که امکان عبور و مرور آن‌ها از سد قراهم نبود و مردم از شر آن‌ها راحت شدند.

@khanen_book

۱۷۲- اگر واریانس داده‌های $3x_1+2$ ، $3x_2+2$ ، ... و $3x_n+2$ برابر ۸۱ باشد، انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۶/۳ ۴) ۲۷

۱۷۳- واریانس ۶ عدد ۳۶ است. اگر مجذور میانگین را از هر عدد کم و حاصل را بر انحراف معیار تقسیم کنیم، مقدار واریانس چه‌قدر خواهد شد؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{36}$ ۳) ۶ ۴) ۱

۱۷۴- اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های $x_1-2x_n, x_2-2x_n, \ldots, x_n-2x_n$ کدام است؟

۱) x_n ۲) $-x_n$ ۳) $-2x_n$ ۴) صفر

۱۷۵- نسبت واریانس مقادیر ۱۵، ۱۲، ۳۰، ۲۱ و ۹ به واریانس مقادیر ۴/۵، ۱۰، ۷ و ۳ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۷۶- اگر واریانس قیمت‌ها در سال گذشته ۱۰۰۰ ریال بوده باشد و امسال ۱۰ درصد به قیمت‌ها افزوده شود، واریانس قیمت‌ها کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۱۰

۱۷۷- اگر واریانس اعداد $a, 4, 3, 2, 1$ برابر ۲ باشد، واریانس مقادیر $-\frac{1}{2}$ ، ۰ ، $\frac{1}{2}$ ، ۱ و $1-a$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۸- هشت دادهٔ آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض‌اند. اگر دو دادهٔ ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ۱۰ دادهٔ جدید کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۸ ۴) ۵

۱۷۹- در ۲۵ دادهٔ آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) ۱۴/۷۲ ۲) ۱۴/۸۱ ۳) ۱۵/۳۳ ۴) ۱۶/۶۶

۱۸۰- پانزده دادهٔ آماری با واریانس ۱۲ و ده دادهٔ آماری دیگر با واریانس ۷/۶ را با هم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ دادهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۳/۱ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۲۵ ۴) ۳/۵

۱۸۱- واریانس ۱۱ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴، ۲۶ و ۱۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییری نمی‌کند. انحراف معیار ۱۴ دادهٔ حاصل کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۱۸۲- مجموع مجذورات ۱۱ دادهٔ آماری برابر ۲۲۰۰ و میانگین آن‌ها ۱۴ است. واریانس کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸۳- در ۱۲ دادهٔ آماری با میانگین ۲ و واریانس ۱، مجموع مجذورات داده‌ها کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۷۳ ۴) ۶۰

۱۸۴- مجموع ۴۰ دادهٔ آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۳۴۰ می‌باشد. انحراف معیار کدام است؟ تجربی خارج ۹۶

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

۱۸۵- میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر ۴ و انحراف معیار آن‌ها برابر $\sqrt{3}$ است. میانگین داده‌های $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۷ ۴) ۱۹

۱۸۶- میانگین طول اضلاع تعدادی مربع ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۳۴ ۳) ۱۴۹ ۴) ۱۶۹

@khanehbook

درس‌نامه ۹

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات از تقسیم انحراف معیار به میانگین به دست می‌آید و آن را با نماد **cv** نشان می‌دهند.

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ضریب تغییرات تنها شاخص پراکندگی بدون واحد است و برای داده‌های مثبت تعریف می‌شود.

مثال ضریب تغییرات داده‌های ۱، ۲، ۳، ۴ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2/5 \\ \sigma^2 = \frac{(1-2/5)^2 + (2-2/5)^2 + (3-2/5)^2 + (4-2/5)^2}{4} = \frac{2/25 + 0/25 + 0/25 + 2/25}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow cv = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

سؤال دانش‌پژوه (فرزانه بندلو): بیخشید میشه بگید ضریب تغییرات چه تفاوت اساسی با انحراف معیار داره؟

پاسخ: بذارید به مثال بزنم که قشنگ مشخص بشه ضریب تغییرات چیه و کیه. اگر شما قیمت یه سرویس جواهر مشخص رو از سه مغازهٔ جواهرفروشی سؤال کنی و این قیمت‌ها رو به شما بگن: (مغازهٔ (۱): ۱۱/۱۹۸/۰۰۰ تومان، مغازهٔ (۲): ۱۱/۱۹۷/۰۰۰ تومان، مغازهٔ (۳) ۱۱/۱۹۹/۰۰۰ تومان) اختلاف بین این قیمت‌ها یا بهتر بگم انحراف معیار اونا برای شما فیلی مطرح نیست چون ۱۰۰۰ تومان اختلاف توی قیمت‌های فیلی بالا اصلاً به چشم نمی‌یاد. حالا اگه شما قیمت یک دفتر ساده رو از سه مغازه بپرسی و اونا این قیمت‌ها رو بدن: (مغازهٔ (۱): ۴۵۰۰ تومان، مغازهٔ (۲): ۵۵۰۰ تومان، مغازهٔ (۳): ۶۵۰۰ تومان) این‌بار هم انحراف معیار با اختلاف قیمت‌ها همونه ولی ۱۰۰۰ تومان کاملاً به چشم می‌یاد. پس در واقع اون، چیزی که باعث میشه برفورد ما در این دو مساله متفاوت باشه همون ضریب تغییرات این دو جنسه که فیلی با هم فرق می‌کنن. در واقع تقسیم انحراف معیار به میانگین باعث می‌شه ارزش قیمت‌ها برای ما کاملاً قابل لمس بشه. امیدوارم خوب توضیح داده باشم

- دانش‌پژوه (همون قبلی): **عالی بود استاد. کاملاً فهمیدم cv چی می‌خواد بگه.**

خواص ضریب تغییرات

۱) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، ضریب تغییرات صفر است و برعکس. یعنی $x_1 = x_2 = \cdots = x_n \Rightarrow cv = 0$.

۲) اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نمی‌کند.

۳) اگر تمام داده‌ها را با یک عدد ثابت مثبت جمع کنیم، ضریب تغییرات کوچک‌تر می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (ایمان گردافکن): **چرا؟**

پاسخ: چون وقتی عدد مثبتی به تمام داده‌ها اضافه می‌شه، صورت کسر که انحراف معیاره تغییری نمی‌کند ولی مخرج کسر که میانگینه، بیشتر می‌شه. پس کسر یا همان ضریب تغییرات کوچک‌تر میشه.

۴) اگر تمام داده‌ها را با عدد ثابت منفی جمع کنیم، ضریب تغییرات بزرگ‌تر می‌شود. (به همون دلیلی که به آقا ایمان گفتیم)

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضی): **آقا میشه فرمولش رو هم بگید.**

پاسخ: فرمول پی رو؟

ـ فرمول همین کم و زیاد شدنش دیگه. این‌که چه‌قدر کم یا زیاد میشه.

ـ چه این‌قدر تنبل نباش، فرمول قاضی نداره و کافیه یه عددگذاری ساده انجام بدی.

ـ آقا قول می‌دیم به کسی فرمول رو نگیم!

ـ چه تو چرا چه... میگی‌ا گفتم نداره دیگه! چرا اینقدر گیر میدی آپولو که نمی‌فوای هوا کنی یه پایگذاری ساده هست دیگه.

۱۸۷- ضریب تغییرات داده‌های ۱۴، ۱۲، ۱۰ و ۸ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{11}$ ۲) $\frac{11}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{11}{5}$

۱۸۸- عدد کدام شاخص برای داده‌های «۷،۵،۴،۳،۱» متفاوت با سایر شاخص‌ها است؟

۱) میانگین ۲) میانه ۳) واریانس ۴) ضریب تغییرات

@khanenbook

۱۸۹- میانگین سن یک گروه، ۱۲ سال و ضریب تغییرات سن آن‌ها ٪۲۰ است. انحراف معیار کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۲/۴ ۳) ۶۰ ۴) ۲۴۰

۱۹۰- در یک نمونه‌گیری آماری تعداد داده‌ها ۱۰ و مجموع مربعات تفاضل داده‌ها از میانگین برابر ۱۴/۴ است. اگر ضریب تغییرات داده‌ها ۴ درصد باشد، میانگین آن داده‌ها کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۱۹۱- در یک جامعهٔ آماری میانگین ۱۵۰ و واریانس ۴۹ می‌باشد. از کلیهٔ داده‌ها ۱۰۰ واحد کم می‌کنیم، ضریب تغییرات چه‌قدر خواهد شد؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۰۹ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۲۶

۱۹۲- اگر میانگین و واریانس داده‌های $۳ - ۳,۰۵x_1$ ، $۳,۰۰۰,۵x_2 - ۳$ ، ... ، $۵x_n - ۳$ به ترتیب برابر ۹۷ و ۶۲۵ باشند، ضریب تغییرات داده‌های x_1 ، x_2 ، ... ، x_n کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲۵۷ ۴) ۰/۲۰۳

۱۹۳- در n دادهٔ آماری، ضریب تغییرات برابر ۱/۲ محاسبه شده است. میانگین داده‌های مفروض را به هر یک از آنان اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات در داده‌های جدید کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵ و مشابه تجربی داخل ۸۶

۱) ۰/۶ ۲) ۱ ۳) ۱/۲ ۴) ۲/۴

۱۹۴- اگر ۲۰ دادهٔ آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هر کدام کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید، ۱/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۵۰ ۴) ۴۲۰

۱۹۵- ضریب تغییرات تعدادی داده‌های آماری ۰/۰۸ محاسبه شده است. اگر به هر دادهٔ مفروض ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل ۰/۰۷۵ خواهد شد. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۹۶- در یک نمونه‌گیری آماری مجموع ۱۰ داده برابر ۵۰ و ضریب تغییرات آن‌ها $\frac{۱}{۵}$ است. مجموع مربعات این داده‌ها کدام است؟

۱) ۲۴۹ ۲) ۲۵۲ ۳) ۲۵۷ ۴) ۲۶۰

۱۹۷- در ۳۰ دادهٔ آماری مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۰/۲۲۵ ۲) ۰/۲۷۵ ۳) ۰/۳۲۵ ۴) ۰/۳۷۵

۱۹۸- در ۱۲ دادهٔ آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$ ریاضی داخل ۹۲

۱۹۹- اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازهٔ اضلاع تعدادی مربع به ترتیب ۱۵ و ۰/۲ باشد، میانگین مساحت مربع‌ها کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) ۲۳۲ ۲) ۲۲۹ ۳) ۲۲۷ ۴) ۲۳۴

۲۰۰- میانگین محیط تعدادی مربع برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۷ ۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۳۳ تجربی داخل ۹۲

۲۰۱- انحراف داده‌هایی از $\bar{x} = ۵$ (میانگین) برابر مقادیر ۳، ۱، ۰، ۱- و ۳- می‌باشد. ضریب تغییرات داده‌ها چند درصد است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۲۰۲- دو نفر در یک آزمایشگاه در ۵ روز متوالی همزمان شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آنان، مطابق جدول زیر است. دقت کاری کدام‌یک بیشتر است؟ تجربی داخل ۹۷

نفر اول	۷	۹	۸	۹	۷
نفر دوم	۱۰	۸	۶	۷	۹

۱) نفر اول
۲) نفر دوم
۳) یکسان
۴) نیاز به اطلاعات بیشتر

۲۰۳- دستگاه A، کالایی با میانگین وزن ۱۵۰ و انحراف معیار ۳/۶ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزن ۱۶۰ و انحراف معیار ۳/۸۴ بسته‌بندی می‌کنند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیشتر است؟ ریاضی داخل ۹۵

۱) یکسان ۲) A ۳) B ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

@khanenbook

درسنامهٔ ۱۰

چارک‌ها

اگر داده‌های آماری مرتب‌شده به چهار قسمت مساوی تقسیم شود، چارک‌های اول تا سوم به صورت زیر مشخص می‌شوند:

۱ **چارک اول (Q_1)**: عددی است که از ۲۵ درصد ($\frac{1}{4}$) داده‌ها بزرگ‌تر و از ۷۵ درصد ($\frac{3}{4}$) داده‌ها کوچک‌تر است.

۲ **چارک دوم (Q_2)**: همان میانه است که از نصف داده‌ها بزرگ‌تر و از نصف دیگر کوچک‌تر است.

۳ **چارک سوم (Q_3)**: عددی است که از ۷۵ درصد ($\frac{3}{4}$) داده‌ها بزرگ‌تر و از ۲۵ درصد ($\frac{1}{4}$) داده‌ها کوچک‌تر است.

سؤال دانش‌پژوه (اکرم ابولولو)، **آقا چارک چهارم چی میشه؟**

پاسخ: *قانم، چارک چهارمی وجود نداره. ببین وقتی من مثلاً فاصلهٔ صفر تا یک را به چهار قسمت تقسیم می‌کنم* ۰ — ۰ — ۰ — ۰ — ۱ *سه تا علامت* ◦ *به کار می‌برم. یعنی با سه تا علامت* ◦ *فاصله را به چهار قسمت تقسیم می‌کنم به هر یک از علامت‌های* ◦ *یک چارک می‌گن و تعدادشون سه تاست.*

مراحل پیدا کردن چارک‌ها:

۱ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۲ میانه را پیدا می‌کنیم.

۳ برای داده‌های سمت چپ میانه (قبل از میانه) مجدداً میانه را محاسبه می‌کنیم و آن را چارک اول می‌نامیم.

۴ برای داده‌های سمت راست میانه (بعد از میانه) مجدداً میانه را محاسبه می‌کنیم و آن را چارک سوم می‌نامیم.

پس به‌طور خلاصه داریم:

میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها $= Q_3$ و میانهٔ داده‌ها $= Q_2$ و میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها $= Q_1$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام پهپه)، **آقا چارک دوم رو نمی‌خواهید بگید چطور محاسبه می‌کنید؟**

پاسخ: *بهرام خواهشاً سؤال الکی نپرس! بابا گفتم چارک دوم همون میانه است و محاسبهٔ میانه رو پیر و جوون، بزرگ و کوچک، اهوج و مهوج و حتی اکبر هم بلدن! حالا تو رو نمی‌دونم!*

مثال **چارک‌های اول و دوم و سوم داده‌های ۳،۶،۱۰،۱۱،۱۲،۱۵،۲۱ را بیابید.**

پاسخ: چون داده‌ها مرتب‌شده هستند، داریم:

Q_3 = میانهٔ نیمهٔ دوم ، Q_1 = میانهٔ نیمهٔ اول

۱۲،۱۵،۲۱ ، ۱۱ ، ۳،۶،۱۰

نیمهٔ دوم داده‌ها — میانه — نیمهٔ اول داده‌ها

۲۰۴- اگر در داده‌های «۱۳، ۸، ۲۰، ۳، ۲۱، ۱۱ و «۱۰»، a چارک اول و b چارک سوم باشند، a − b کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۵ ۳) ۵ ۴) ۱۲

۲۰۵- در داده‌های آماری ۱۸ و ۲۰ و ۲۳ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۷ و ۱۱ و ۹ و ۱۲ و ۱۰ و ۵ و ۱۹ و ۲۱ و ۷ و ۸، دامنهٔ تغییرات داده‌ها پس از حذفِ داده‌های قبل از چارک اول و بعد از چارک سوم کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۰۶- چه تعداد از داده‌های یک مجموعهٔ ۱۴ عضوی، بین چارک اول و سوم قرار دارد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۲۰۷- در داده‌های آماری مرتب شدهٔ زیر، داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۳۱،۳۴،۳۵،۳۷،۳۸،۳۸،۳۹،۴۰،۴۰،۴۴،۴۵،۴۵،۴۶،۵۲،۵۳،۵۶،۵۶،۵۷

ریاضی داخل ۸۷

۱) ۴۲/۷ ۲) ۴۲/۹ ۳) ۴۳/۲ ۴) ۴۳/۴

۲۰۸- در داده‌های ۲۵، ۲۰، ۲۱، ۲۶، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۲۴،۲۰، ۱۶، ۱۴، ۱۸ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم کدام است؟

تجربی خارج ۸۵

۱) ۱۸/۲۵ ۲) ۱۸/۳۳ ۳) ۱۸/۶۶ ۴) ۱۸/۷۵

@khaneh_book

۲۰۹- در ۳۱ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های قبل از چارک اول ۱۲ و بعد از چارک سوم ۲۱ می‌باشد. اگر میانگین داده‌های بین و شامل چارک اول و سوم ۱۵ باشد، میانگین کل داده‌ها، تقریباً کدام است؟

۱) ۱۵/۴۵ ۲) ۱۵/۵۴ ۳) ۱۵/۶۷ ۴) ۱۵/۷۶

۲۱۰- در ۲۰ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های قبل از چارک اول برابر میانگین داده‌های بعد از چارک سوم است. انحراف معیار کدام است؟

۱) صفر ۲) ۰/۰۵ ۳) ۱ ۴) جذر میانه

۲۱۱- داده‌های آماری ۱۸، ۷، ۲۰، ۱۶، ۱۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۲۱، ۱۲، ۱۳ موجود هستند. واریانس داده‌های بین چارک اول و سوم تقریباً کدام است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) ۴/۵۹ ۲) ۴/۹۵ ۳) ۵/۲۴ ۴) ۵/۷۱

۲۱۲- در داده‌های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۹، ۸، ۶.۶، ۴، ۳، ۳، داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. ضریب تغییرات داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ انسانی خارج ۹۰

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۷ ۳) ۰/۳۱ ۴) ۰/۳۵

یادداشت

@khaneh_book

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۴

$$P(B|A)=۰/۶ \Rightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=۰/۶ \xrightarrow[\Rightarrow P(A)=۱-۰/۸=۰/۲]{P(A')=۰/۸} \frac{P(B\cap A)}{۰/۲}=۰/۶ \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲\times ۰/۶=۰/۱۲$$

۲ ۴ $P(B|A)=۰/۱$ است. داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=۰/۱ \xrightarrow{P(A)=۰/۲} \frac{P(B\cap A)}{۰/۲}=۰/۱ \Rightarrow P(B\cap A)=۰/۰۲ \quad (*)$$

از طرفی $P(A\cup B)=۰/۶$ است:

$$P(A\cup B)=۰/۶ \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶ \xrightarrow[(*)]{P(A)=۰/۲} ۰/۲+P(B)-۰/۰۲=۰/۶ \Rightarrow P(B)=۰/۶-۰/۲+۰/۰۲=۰/۴۲$$

۳ ۴ طبق فرض $P(A)=۰/۵$، $P(B)=۰/۲$ و $P(A\cup B)=۰/۶$ است. ابتدا $P(A\cap B)$ را می‌یابیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۶=۰/۵+۰/۲-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷-۰/۶=۰/۱$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$P(A\cap B)=۰/۱ \text{ و } P(A)P(B)=۰/۵\times ۰/۲=۰/۱ \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B) \quad ✓$$

گزینهٔ (۲):

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۱}{۰/۲}=\frac{۱}{۲}=۰/۵ \quad ✓$$

گزینهٔ (۳):

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{۰/۱}{۰/۵}=\frac{۱}{۵}=۰/۲ \quad ✓$$

گزینهٔ (۴): A و B ناسازگار نیستند، زیرا $P(A\cap B)=۰/۱\neq ۰$ است. پس این گزینه غلط بوده و جواب تست است.

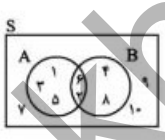
۴ ۲ محاسبهٔ P(پسر | رشتهٔ تجربی): می‌خواهیم احتمال پسر بودن فردی را حساب کنیم که رشته‌اش تجربی است. خب مجموعاً $۶۰=۴۰+۲۰$ نفر رشتهٔ تجربی داریم که ۴۰ نفر آن‌ها پسر هستند. پس احتمال مورد نظر $\frac{۴۰}{۶۰}=\frac{۲}{۳}$ است.

	رشتهٔ تجربی	رشتهٔ ریاضی
دختر	۲۰	۱۰
پسر	۴۰	۳۰

محاسبهٔ P(دختر | رشتهٔ ریاضی): می‌خواهیم احتمال رشتهٔ ریاضی بودن دخترها را حساب کنیم. خب مجموعاً $۳۰=۲۰+۱۰$ نفر دختر داریم که ۱۰ نفر آن‌ها رشتهٔ ریاضی هستند. پس احتمال مورد نظر $\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. بنابراین:

$$P(\text{پسر} | \text{رشتهٔ تجربی})+P(\text{دختر} | \text{رشتهٔ ریاضی})=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}=۱$$

۵ ۲ **راه اول:**



$$P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)} \xrightarrow[A=\{۱,۲,۳,۵,۶\}]{A\cap B=\{۲,۶\}} \frac{۲}{۵}$$

$$P(A|S)=\frac{n(A\cap S)}{n(S)} \xrightarrow{A\subseteq S \Rightarrow A\cap S=A} \frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow P(B|A)+P(A|S)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۲}=\frac{۴+۵}{۱۰}=۰/۹$$

راه دوم: محاسبهٔ $P(B|A)$: احتمال آن‌که B رخ دهد به شرطی که A رخ داده است. پس فضای نمونه‌ای در این حالت مجموعهٔ A است، یعنی $A=\{۱,۲,۳,۵,۶\}$ که فقط دو عدد ۲ و ۶ از آن برای مجموعهٔ B نیز می‌باشد. پس احتمال $\frac{۲}{۵}$ است.

محاسبهٔ $P(A|S)$: احتمال آن‌که A رخ دهد به شرطی که S رخ داده است. خب S که همان فضای نمونه‌ای است که دارای ۱۰ عضو $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ است که ۵ عدد ۵،۳،۲،۱ و ۶ آن متعلق به مجموعهٔ A است. پس احتمال آن $\frac{۵}{۱۰}$ است. جواب آخر هم $\frac{۲}{۵}+\frac{۵}{۱۰}=۰/۹$ می‌شود.

۶ ۳

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{P((B\cup A)')}{P(A')}=\frac{۱-P(A\cup B))}{۱-P(A)}$$

$$\xrightarrow[P(A\cap B)=۰]{A\text{ و }B\text{ ناسازگار}} \frac{۱-(P(A)+P(B)-۰)}{۱-P(A)}=\frac{۱-(۰/۴+۰/۲)}{۱-۰/۴}=\frac{۰/۴}{۰/۶}=\frac{۲}{۳}$$

@khanen_book

۷ ۲

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{1-P(A)} = \frac{P(B)-P(A \cap B)}{\underbrace{1-0/4}_{0/6}} \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0/6 = 0/4 + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0/2 \quad (**)$$

با جایگذاری (**) در (*) داریم:

$$P(B|A') = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{0/6} \overset{(**)}{=} \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

۸ ۲ می‌دانیم A رخ داده است و می‌خواهیم رخداد B را به دست آوریم که این احتمال شرطی می‌باشد. داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1-P((B \cap A)')}{1-P(A')} = \frac{1-P(B' \cup A')}{1-P(A')} = \frac{1-0/4}{1-0/2} = \frac{0/6}{0/8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

۹ ۳

$$S_{new} = \{\overset{\checkmark}{2}, 4, \overset{\checkmark}{6}\} \Rightarrow P(6 \text{ یا } 2) = \frac{2}{3}$$

۱۰ ۱ در جعبه ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه وجود داشته است، مهرهٔ اول را که برداشته و کنار گذاشته‌ایم، سیاه بوده است. پس در جعبه ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه باقی می‌ماند. حال مهرهٔ دوم را به تصادف خارج می‌کنیم که احتمال سفید بودن آن $\frac{5}{8}$ می‌شود.

۱۱ ۴ در فضای نمونه‌ای جدید، مهرهٔ خروجی از کیسه سفید نیست پس از حق انتخاب‌ها ۴ مهرهٔ سفید حذف می‌شود. حال می‌خواهیم مهرهٔ خروجی قرمز باشد، لذا باید مهرهٔ خروجی را از بین ۲ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سیاه (جمعاً ۵ مهره) خارج کنیم. داریم:

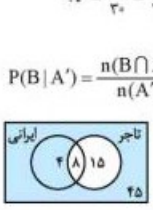
$$P(\text{قرمز بودن} \mid \text{سفید نبودن}) = \frac{2}{5}$$

۱۲ ۴ می‌خواهیم $P(\text{زن نبودن} \mid \text{نداشتن لیسانس})$ را حساب کنیم یعنی می‌دانیم فرد انتخابی زن نیست پس مرد است که کلاً ۳۰ = ۲۰ + ۱۰ نفر مرد داریم و می‌خواهیم لیسانس نداشته باشند که با توجه به جدول، ۱۰ نفر از مردها لیسانس ندارند (دیپلم دارند.) پس $P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

۱۳ ۳ **روش اول:** اگر تاجر بودن را با A و ایرانی بودن را با B نمایش دهیم، خواستهٔ مسأله $P(B|A')$ است:

$$P(B|A') = \frac{n(B \cap A')}{n(A')} = \frac{n(B-A)}{n(A')} = \frac{n(B)-n(A \cap B)}{n(S)-n(A)} = \frac{12-8}{72-32} = \frac{4}{49}$$

روش دوم: از نمودار ون استفاده می‌کنیم. طبق فرض، فرد انتخابی تاجر می‌باشد، پس فضای نمونه‌ای جدید را در شکل رنگ آبی می‌زنیم که تعداد اعضایش ۴۹ = ۴۵ + ۴ است. حال در این فضای جدید به دنبال ایرانی بودن می‌گردیم که فقط ۴ نفرند پس احتمال مورد نظر $\frac{4}{49}$ می‌شود.



سؤال (دانش‌پژوه (رومینا آرام))، آقا اجازه اون ۴۵ رو از کجا آوردین؟

پاسخ: عزیز جان ببین اون ۴۵ نفر، تعداد افرادی هستند که نه تاجرن و نه ایرانی؛ ۴۵ = (۱۵ + ۸ + ۴) − ۷۲

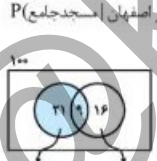
۱۴ ۴ می‌دانیم اتومبیل دچار نقص فنی نشده است و می‌خواهیم احتمال به خط پایان رسیدن را حساب کنیم. با توجه به فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(\text{رسیدن به خط پایان} \mid \text{نقص فنی ندارد}) = \frac{P(\text{نقص فنی نداشته} \cap \text{به خط پایان رسیده})}{P(\text{نقص فنی ندارد})} = \frac{0/7}{0/8} = \frac{7}{8}$$

۱۵ ۳

$$P(\text{بازار اصفهان} \mid \text{مسجد جامع}) = \frac{P(\text{بازار اصفهان} \cap \text{مسجد جامع})}{P(\text{بازار اصفهان})} = \frac{0/08}{0/25} = \frac{8}{25} = 0/32$$

۱۶ ۴ **روش اول:** کل افراد شهر را ۱۰۰ نفر فرض می‌کنیم. ۳۰ نفر روزنامهٔ الف، ۲۵ نفر روزنامهٔ ب و ۹ نفر هر دو روزنامه را می‌خوانند. پس نمودار ون به صورت مقابل است:



طبق فرض شخص انتخابی روزنامهٔ الف را می‌خواند. پس فضای نمونه‌ای جدید را رنگ آبی می‌زنیم، حال در این فضای جدید به دنبال افرادی هستیم که روزنامهٔ ب را نیز می‌خوانند که تعداد آن‌ها ۹ نفر است. پس احتمال مورد نظر $\frac{9}{30} = 0/3$ است.

روش دوم:

$$P(\text{روزنامهٔ ب} \mid \text{روزنامهٔ الف}) = \frac{n(\text{روزنامهٔ الف} \cap \text{روزنامهٔ ب})}{n(\text{روزنامهٔ الف})} = \frac{9}{30} = 0/3$$

۱۷ ۴ اگر تعداد کل دانش‌آموزان کلاس را ۱۰۰ نفر فرض کنیم، داریم:

$$P(\text{مردود در فیزیک} \mid \text{مردود در ریاضی}) = \frac{n(\overbrace{\text{مردود در ریاضی} \cap \text{مردود در فیزیک}}^{\text{تحدید در هر دو درس}})}{n(\text{مردود در ریاضی})} \overset{\text{طبق فرض}}{=} \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0/5$$

@khanenbook

۱۸ ۱ احتمال رخداد حداقل یکی از دو اتفاق صعود به جام جهانی یا بردن تیم A همان $P(\text{بردن تیم } A \cup \text{صعود})$ است که طبق فرمول داریم:

$$P(\text{صعود} \cup \text{بردن تیم } A) = P(\text{صعود}) + P(\text{بردن تیم } A) - P(\text{صعود} \cap \text{بردن تیم } A) \quad (*)$$

از طرفی برای محاسبهٔ $P(\text{صعود} \cap \text{بردن تیم } A)$ از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌کنیم، چون در صورت سؤال احتمال صعود به شرط بردن تیم A را داده، داریم:

$$P(\text{بردن تیم } A \mid \text{صعود}) = \frac{P(\text{صعود} \cap \text{بردن تیم } A)}{P(\text{صعود})} \Rightarrow ۰/۳ = \frac{P(\text{صعود} \cap \text{بردن تیم } A)}{۰/۲} \Rightarrow P(\text{صعود} \cap \text{بردن تیم } A) = ۰/۰۶$$

حال عبارت حاصل را در فرمول (*) جایگذاری می‌کنیم:

$$P(\text{صعود} \cup \text{بردن تیم } A) = ۰/۲ + ۰/۰۶ - ۰/۰۶ = ۰/۲۵ + ۰/۲ - ۰/۰۶ = ۰/۳۹$$

۱۹ ۳ احتمال آن‌که شخص حداقل یکی از دو بیماری را داشته باشد $P(\text{قلبی} \cup \text{کلیه})$ است که با توجه به فرمول داریم:

$$P(\text{قلبی} \cup \text{کلیه}) = P(\text{قلبی}) + P(\text{کلیه}) - P(\text{قلبی} \cap \text{کلیه}) \quad (*)$$

از طرفی در صورت سوال گفته شده که شخصی که ناراحتی کلیه دارد به احتمال ۰/۴ ناراحتی قلبی هم پیدا می‌کند:

$$P(\text{قلبی} \mid \text{کلیه}) = \frac{P(\text{قلبی} \cap \text{کلیه})}{P(\text{کلیه})} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{P(\text{قلبی} \cap \text{کلیه})}{۰/۲۳} \Rightarrow P(\text{قلبی} \cap \text{کلیه}) = ۰/۴ \times ۰/۲۳ = ۰/۰۹۲$$

با جایگذاری عبارت به دست‌آمده و فرضیات مسأله در تساوی (*) داریم:

$$P(\text{قلبی} \cup \text{کلیه}) = ۰/۲۳ + ۰/۲۴ - ۰/۰۹۲ = ۰/۴۷ - ۰/۰۹۲ = ۰/۳۷۸$$

۲۰ ۱ احتمال واکنش نشان دادن حداقل یکی از مواد A یا B همان $P(A \cup B)$ است که طبق فرمول داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (*)$$

از طرفی برای محاسبهٔ $P(A \cap B)$ از فرمول احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{P(B \cap A)}{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۲۰}$$

با جایگذاری عبارت حاصل و فرضیات صورت سؤال در تساوی (*) داریم:

$$P(A \cup B) = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۲۰} = \frac{۲۸ + ۲۰ - ۷}{۱۴۰} = \frac{۴۱}{۱۴۰}$$

۲۱ ۲

$$S_{new} = \text{مجموع دو تاس ۷ است} = \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\} \xrightarrow{\text{احتمال یکی از دو تاس ۳}} P = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲۲ ۱ در فضای نمونه‌ای جدید، جمع دو عدد رو شده کم‌تر از ۱۰ است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای آن از روش متمم می‌رویم که در آن جمع دو عدد ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ است:

$$\{(۶,۶),(۶,۵),(۵,۶),(۵,۵),(۶,۴),(۴,۶)\} \Rightarrow n(S_{new}) = ۶ \times ۶ - ۶ = ۳۰$$

(کل حالات پرتاب ۲ تاس ← جمع دو عددش ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲)

خواستهٔ مسأله آن است که هر دو عدد فرد باشد:

$$A = \{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳)\} \Rightarrow n(A) = ۸$$

بنابراین:

$$P(\text{هر دو فرد} \mid \text{جمع کم‌تر از ۱۰}) = \frac{n(\text{جمع کم‌تر از ۱۰ و هر دو فرد})}{n(\text{جمع کم‌تر از ۱۰})} = \frac{۸}{۳۰} = \frac{۴}{۱۵}$$

سؤال *دانش‌پژوه (زیبا کرام)*: **آقا اجازه چرا (۵،۵) رو در نظر نگرفتین؟**

پاسخ: *زیبا فاتم (۵،۵) درسته هر دو تاش فرده ولی در شرط مسأله (فضای نمونه‌ای جدید) صدق نمی‌کنه چون سؤال گفته می‌دانیم جمعشون کم‌تر از ۱۰ عه. ولی (۵،۵) جمعشون ۱۰ میشه و غلطه!*

۲۳ ۱ در فضای نمونه‌ای جدید جمع دو عدد رو شده بزرگ‌تر از ۵ است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای آن از روش متمم می‌رویم که در آن جمع دو عدد ۲،۳،۴،۵ است:

$$\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\} \Rightarrow n(S_{new}) = ۶ \times ۶ - ۱۰ = ۲۶$$

خواستهٔ مسأله این است هر دو عدد یکسان باشد:

$$A = \{(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

بنابراین:

$$P(\text{هر دو یکسان} \mid \text{جمع بزرگ‌تر از ۵}) = \frac{n(\text{جمع بزرگ‌تر از ۵ و هر دو یکسان})}{n(\text{جمع بزرگ‌تر از ۵})} = \frac{۴}{۲۶}$$

@khaneh_book

۲۴ ۴ خبری در مورد پرتاب دو تاس در مسأله بیان شده، پس احتمال شرطی است. با توجه به آن‌که دو عدد فرد ظاهر شده است. فضای نمونه ای جدید را می‌نویسیم:

$$S_{new} = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

حال در این فضای نمونه‌ای جدید دنبال زوج مرتب‌هایی می‌گذاریم که جمع دو مؤلفهٔ آن‌ها کم‌تر از ۱۰ باشد که از ۹ زوج مرتب فوق، ۸ تا این ویژگی را دارند (همه به جز $(5,5)$). پس جواب $\frac{8}{9}$ است.

۲۵ ۴ حداقل یکی از دو تاس ۵ آمده است. فضای نمونه‌ای جدید را می‌نویسیم:

$$S_{new} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}$$

حال در این فضا به دنبال دو عدد متوالی می‌گردیم که با رنگ آبی زیر آن‌ها خط کشیده‌ایم و جواب $\frac{4}{11}$ می‌شود.

۲۶ ۴ می‌دانیم عدد تاس قرمز بزرگ‌تر از تاس آبی آمده است. اگر مؤلفهٔ اول زوج‌های مرتب برای تاس قرمز و مولفهٔ دوم برای تاس آبی باشد. فضای نمونه‌ای جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$S_{new} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

خواستهٔ مسأله این است که مجموع دو تاس ۶ باشد:

$$A = \{(4,2),(5,1)\} \Rightarrow P(\text{۶ مجموع} \mid \text{عدد تاس قرمز بزرگ‌تر}) = \frac{2}{15}$$

سؤال *دانش‌پژوه (دلارام امینی)*: **آقا میشه گفت کلاً دو تاس ۶×۶=۳۶ حالت داره که در ۶ حالت هر دو تاس برابرند پس می‌مونه ۳۰=۶-۳۶ حالت. در ۱۵ حالت تاس قرمز بزرگ‌تره و در ۱۵ حالت دیگه تاس آبی. اینطوری بدون نوشتن اعضا می‌تونیم بگیم $n(S_{new})=۱۵$.**

پاسخ *آره آفرین به تو، آفرین به معلمت، آفرین به پدر و مادرت، آفرین به ... ولش کن! کلن آفرین!*

۲۷ ۳ پرتاب ۲ تاس ۶×۶=۳۶ حالت دارد که در ۶ حالت دو تاس یکسان می‌آیند. پس فضای نمونه‌ای جدید که در آن اعداد روشدهٔ تاس‌ها یکسان نیستند دارای ۳۰=۶-۳۶ عضو است.

خواستهٔ مسأله آن است که اعداد ۴ واحد اختلاف داشته باشند:

$$A = \{(1,5),(5,1),(2,6),(6,2)\}$$

بنابراین:

$$P(\text{اعداد رو شده متمایز} \mid \text{اختلاف چهار تا}) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

۲۸ ۳ در فضای نمونه‌ای جدید اعداد رو شده برابرند یا مجموع آن‌ها ۱۱ است:

$$S_{new} = \{\underbrace{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}_{\text{هر دو عدد یکسان}},\underbrace{(5,6),(6,5)}_{\text{مجموع ۱۱}}\} \xrightarrow[\text{زوج باشد}]{\text{ضرب دو عدد}} A = \{(2,2),(4,4),(6,6),(5,6),(6,5)\}$$

بنابراین احتمال خواسته شده $\frac{5}{8}$ می‌شود.

۲۹ ۳ می‌دانیم همهٔ ارقام روشدهٔ ۳ تاس زوج‌اند یعنی ۲ یا ۴ یا ۶ داریم:

$$n(S_{new}) = \underset{\text{تاس اول زوج}}{3} \times \underset{\text{تاس دوم زوج}}{3} \times \underset{\text{تاس سوم زوج}}{3} = 27$$

خواستهٔ مسأله این است که هر ۳ عدد مضرب ۳ باشد که با توجه به شرط مسأله هر کدام از تاس‌ها ۶ باید بیاید که یک حالت فقط می‌شود $(6,6,6)$. پس:

$$P(\text{تاس‌ها مضرب ۳} \mid \text{تاس‌ها زوج}) = \frac{1}{27}$$

۳۰ ۳ در فضای نمونه‌ای جدید می‌دانیم حداقل یکی از دو تاس زوج آمده ولی هر دو تاس زوج نیستند، یعنی فقط یک تاس زوج باشد. داریم:

$$n(S_{new}) = 9+9 = 18 \Leftarrow \underset{\text{تاس دوم فرد}}{3} \times \underset{\text{تاس اول زوج}}{3} \text{ یا } \underset{\text{تاس دوم زوج}}{3} \times \underset{\text{تاس اول فرد}}{3}$$

از طرفی خواستهٔ مسأله این است که جمع اعداد رو شده فرد شود. طبق فرض چون یکی از تاس‌ها فرد و تاس دیگر زوج می‌آید و می‌دانیم جمع یک عدد زوج و یک عدد فرد همواره فرد است. پس در تمام حالت‌ها جمع اعداد روشدهٔ دو تاس فرد بوده و احتمال آن ۱ است.

۳۱ ۳ در فضای نمونه‌ای جدید اعداد رو شدهٔ ۳ تاس متمایزند، پس تعداد حالات $n(S_{new}) = 6\times5\times4$ است. حال می‌خواهیم در حالتی که اعداد ۳ تاس متمایز هستند، عدد یک تاس برابر مجموع اعداد دو تاس دیگر باشد، که دسته‌های سه تایی زیر برای تاس‌ها جواب است:

$$(1,2,3),(1,3,4),(1,4,5),(1,5,6),(2,3,5),(2,4,6)$$

که می‌توان ۳ تا عدد هر دسته را به $3!$ حالت روی ۳ تاس قرار داد. بنابراین:

$$n(A) = 6\times3! \Rightarrow P(\text{همهٔ اعداد متمایز} \mid \text{عدد یک تاس برابر مجموع دو تاس دیگر}) = \frac{6\times3!}{6\times5\times4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0/3$$

@khanehbook

۳۲ ۴ در فضای نمونه‌ای جدید سه عدد رو شده متوالی هستند. یعنی {۱,۲,۳} یا {۲,۳,۴} یا {۳,۴,۵} یا {۴,۵,۶} که هر کدام از این دسته‌های ۳ تایی اعداد، به ۳! حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند:

$$\{۱,۲,۳\} \text{ دسته} \Rightarrow (۱,۲,۳),(۱,۳,۲),(۲,۱,۳),(۲,۳,۱),(۳,۱,۲),(۳,۲,۱) \Rightarrow n(S_{new}) = \underset{\text{تعداد دسته‌ها}}{۴} \times \underset{\text{جایگشت هر دسته}}{۳!} = ۴ \times ۶ = ۲۴$$

خواستهٔ مسأله آن است که فقط ۲ تاس از ۳ تاس زوج باشند و با توجه به فضای نمونه‌ای جدید دسته‌های {۲,۳,۴} و {۴,۵,۶} مطلوب است که هر کدام ۳! جایگشت دارند. یعنی $n(A) = ۲ \times ۳! = ۱۲$ است. پس احتمال مورد نظر $\frac{۱۲}{۲۴} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$ می‌شود.

۳۳ ۳ می‌دانیم حداقل یکی از ۵ تا سکه (رو) آمده است. خواستهٔ مسأله حداکثر ۴ تا (پشت) است. اگر یکم فکر کنیم متوجه می‌شویم وقتی می‌خواهیم حداکثر ۴ بار (پشت) بیاید یعنی حداقل ۱ بار (رو) بیاید! خب این‌که همان فضای نمونه‌ای جدیده! پس احتمال آن ۱ می‌شود، نگاه کنین:

$$P(\text{حداکثر ۴ بار پشت} \mid \text{حداقل ۱ بار رو}) = \frac{n(\text{حداقل ۱ بار رو و حداقل ۱ بار رو})}{n(\text{حداقل ۱ بار رو})} = \frac{n(\text{حداقل ۱ بار رو})}{n(\text{حداقل ۱ بار رو})} = ۱$$

۳۴ ۴ در فضای نمونه‌ای جدید حداقل یکی از سکه‌ها (رو) آمده است. پس حالتی که همهٔ سکه‌ها (پشت) آمده باشند در فضای نمونه‌ای جدید حضور ندارد.

$$S_{new} = \{(ر,ر,ر),(پ,ر,ر),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ)\}$$

حال می‌خواهیم حداقل ۲ سکه (پشت) آمده باشد:

$$A = \{(ر,پ,پ),(پ,ر,پ),(پ,پ,ر)\} \Rightarrow P(\text{حداقل ۲ پشت} \mid \text{حداقل ۱ رو}) = \frac{۳}{۷}$$

سؤال *دانش‌پژوه (مینا ابهاری)*، **آقا اجازه حداقل ۲ پشت مگه ۲ پشت یا ۳ تا پشت نمیشه! پس چرا شما ۳ تا پشت را در نظر نگرفتی؟**

پاسخ: *چرا دقت نمی‌کنی! در سؤال گفته حداقل ۱ سکه (رو) آمده. پس همه پشت (۳ تا پشت) در فضای نمونه‌ای جدید نمی‌تونه وجود داشته باشه.*

۳۵ ۲ می‌دانیم در خانوادهٔ ۵ فرزندی، فقط ۱ پسر وجود دارد. بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:

$$S_{new} = \{(پ,د,د,د,د),(د,پ,د,د,د),(د,د,پ,د,د),(د,د,د,پ,د),(د,د,د,د,پ)\} \Rightarrow S_{new} = ۵$$

خواستهٔ این مسأله این است که دختران این خانواده پشت سر هم متولد نشده باشند. بنابراین:

$$P(\text{فقط ۱ پسر} \mid \text{دخترها پشت‌سر هم نباشند}) = \frac{۳}{۵}$$

۳۶ ۳ در خانوادهٔ ۵ فرزندی می‌دانیم فقط ۳ دختر وجود دارد که تعداد حالات برابر $n(S_{new}) = \binom{۵}{۳} = ۱۰$ است. خواستهٔ مسأله آن است که هیچ دو فرزند متوالی خانواده دختر نباشد. پس باید یکی در میان پسر باشند:

$$A = \{(د,پ,د,پ,د)\} \Rightarrow P(\text{هیچ دو فرزند متوالی دختر نباشد} \mid \text{۳ تا از ۵ تا دختر}) = \frac{۱}{۱۰}$$

۳۷ ۴ می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان خانوادهٔ ۳ فرزندی دختر است. پس فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:

$$S_{new} = \{(د,د,د),(د,د,پ),(د,پ,د),(د,پ,پ),(پ,د,د),(پ,د,پ),(پ,پ,د)\} \Rightarrow n(S_{new}) = ۷$$

خواستهٔ مسأله آن است که خانواده حداقل ۲ دختر داشته باشد:

$$A = \{(د,د,د),(د,د,پ),(د,پ,د),(پ,د,د)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

بنابراین:

$$P(\text{حداقل ۲ دختر} \mid \text{حداقل ۱ دختر}) = \frac{۴}{۷}$$

۳۸ ۲ دو فرزند اول پسر می‌باشند، پس وضعیت دو فرزند اول مشخص است. لذا فضای نمونه‌ای جدید را جنسیت دو فرزند دیگر در نظر می‌گیریم.

حال می‌خواهیم هر دو دختر باشند، پس احتمال آن $\frac{۱}{۴}$ است:

$$S_{\text{جدید}} = \{(د,د), (پ,د), (د,پ), (پ,پ)\}$$

۳۹ ۳ طبق فرض مسأله فهمیدیم که یکی از بچه‌های آن خانواده پسر است. ولی از سایر بچه‌ها خبری نداریم. در حقیقت با دیدن یک بچهٔ پسر از آن خانواده نتیجه می‌گیریم که همهٔ بچه‌ها دختر نیستند. پس:

$$S_{new} = \{(پ,د,د),(د,پ,د),(د,د,پ),(پ,پ,د),(پ,د,پ),(د,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$$

حال می‌خواهیم تمام فرزندان پسر نباشد که با توجه به S_{new}، داریم:

$$A = \{(پ,د,د),(د,پ,د),(د,د,پ),(پ,پ,د),(پ,د,پ),(د,پ,پ)\} \Rightarrow P(A \mid S_{new}) = \frac{۶}{۷}$$

@khanehbook

۴۰ ۴ در فضای نمونه‌ای جدید، خانواده دارای حداقل یک پسر و یک دختر است. یعنی همهٔ فرزندان پسر یا همهٔ فرزندان دختر نیستند. بنابراین:

$$n(S_{new}) = 2^4 - 1 - 1 = 16 - 2 = 14$$

یک حالت همه پسر و یک حالت همه دختر را از کل حالات کم کردیم

خواستهٔ مسأله یکسان بودن تعداد دخترها و پسرها است. یعنی خانوادهٔ ۴ فرزندی ۲ تا دختر و ۲ تا پسر داشته باشد که تعداد این حالات ۶ است:

$$A = \{(پ,پ,د,د),(پ,د,پ,د),(پ,د,د,پ),(د,پ,پ,د),(د,پ,د,پ),(د,د,پ,پ)\} \Rightarrow$$ احتمال موردنظر $= \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ است.

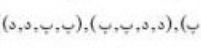
۴۱ ۲ در فضای نمونه‌ای جدید خانوادهٔ ۴ فرزندی هم پسر دارد و هم دختر و تعداد پسران و دختران یکسان نیست. یعنی اولاً فرزندان همه پسر یا همه دختر نیستند و ثانیاً حالت ۲ پسر و ۲ دختر قبول نیست. پس خانواده ۱ پسر و ۳ دختر دارد یا ۳ پسر و ۱ دختر. داریم:

$$S_{new} = \{(پ,د,د,د),(د,پ,د,د),(د,د,پ,د),(د,د,د,پ),(پ,پ,پ,د),(پ,پ,د,پ),(پ,د,پ,پ),(د,پ,پ,پ)\}$$

خواستهٔ مسأله آن است که تعداد پسران بیشتر از دختران باشد، پس:

$$A = \{(پ,پ,پ,د),(پ,پ,د,پ),(پ,د,پ,پ),(د,پ,پ,پ)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow$$ احتمال مورد نظر $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

۴۲ ۳ می‌دانیم مهره‌های خروجی از دو ظرف هم‌رنگ‌اند. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:



$$n(S_{new}) = \binom{4}{1}\times\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\times\binom{4}{1} = 4\times2 + 3\times4 = 8 + 12 = 20$$ و $n(A) = \binom{3}{1}\times\binom{4}{1} = 12$: A آبی بودن دو مهره

از A مهرهٔ سفید — از B مهرهٔ سفید — از A مهرهٔ آبی — از B مهرهٔ آبی

بنابراین:

$$P(\text{هردو آبی} \mid \text{هردو همرنگ}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

۴۳ ۲ در فضای نمونه‌ای جدید حداقل ۲ مهرهٔ غیرهمرنگ در بین ۳ مهرهٔ انتخابی وجود دارد که با روش متمم تعداد اعضای آن را می‌یابیم. متمم حداقل ۲ مهرهٔ غیرهمرنگ، میشه هر ۳ مهرهٔ انتخابی همرنگ باشند. داریم:

هر ۳ سبز — هر ۳ سفید — هر ۳ آبی

$$\begin{cases} \text{حالات متمم}: \binom{4}{3} + \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 20 + 1 = 25 \\ \text{کل حالات}: \binom{13}{3} = 286 \end{cases} \Rightarrow n(S_{new}) = 286 - 25 = 261$$

خواستهٔ مسأله آن است که فقط ۲ مهره از ۳ مهره همرنگ باشند. داریم:

یکی غیرسبز، ۲ تا سبز — یکی غیرسفید، ۲ تا سفید — یکی غیرآبی، ۲ تا آبی

$$n(A) = \binom{4}{2}\times\binom{3+6}{1} + \binom{6}{2}\times\binom{3+1}{1} + \binom{3}{2}\times\binom{6+4}{1} = 6\times9 + 15\times7 + 3\times10 = 54 + 105 + 30 = 189$$

بنابراین:

$$P(\text{حداقل ۲ مهرهٔ غیرهمرنگ} \mid \text{فقط ۲ مهره از ۳ مهره همرنگ}) = \frac{189}{261} = \frac{63}{87} = \frac{21}{29}$$

۴۴ ۲ در فضای نمونه‌ای جدید، در بین ۴ مهرهٔ خروجی هر ۳ رنگ حضور دارند. پس داریم:

$S_{new} =$ (۱ آبی و ۱ سفید و ۲ صورتی) یا (۱ صورتی و ۱ سفید و ۲ آبی) یا (۱ صورتی و ۱ آبی و ۲ سفید)

$$\Rightarrow n(S_{new}) = \binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 3\times4\times2 + 6\times3\times2 + 1\times3\times4 = 24 + 36 + 12 = 72$$

خواستهٔ مسأله آن است که در بین ۴ مهرهٔ خروجی، ۲ مهرهٔ سفید وجود داشته باشد:

$$A =$$ ۱ صورتی و ۱ آبی و ۲ سفید $\Rightarrow n(A) = \binom{3}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 3\times4\times2 = 24 \Rightarrow P(\text{۲سفید در ۴ تا} \mid \text{۳ رنگ در ۴ تا}) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$

۴۵ ۱ جعبه شامل ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه است. می‌دانیم در بین ۳ موش انتخابی هم موش سفید و هم موش سیاه وجود دارد. یعنی همهٔ موش‌ها سفید یا همه موش‌ها سیاه نیستند! پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:

$$n(S_{new}) = \text{کل حالات انتخاب ۳ موش} - \text{هر ۳ موش سفید} - \text{هر ۳ موش سیاه} = \binom{9}{3} - \binom{5}{3} - \binom{4}{3}$$

$$= \frac{9!}{6!3!} - 10 - 4 = \frac{9\times8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}\times3\times2\times1} - 14 = 3\times4\times7 - 14 = 84 - 14 = 70$$

@khaneh_book

خواستهٔ مسأله سیاه بودن حداقل ۲ موش از ۳ موش انتخابی است. با توجه به این‌که همهٔ موش‌ها نمی‌توانند سیاه باشند (با توجه به شرط مسأله) پس داریم:

$$P(\text{حداقل ۲ سیاه} \mid \text{از هر دو رنگ هستند}) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۳\times۵}{۱۲۰} = \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۳}{۷}$$

۱ موش سفید، ۲ موش سیاه

۴۶ ۴ می‌دانیم عدد ۵ رقمی زوج است. پس تعداد اعداد ۵ رقمی زوج با استفاده از ارقام ۵،۷،۶،۶ و ۳ را می‌نویسیم:

۴	۳	۲	۱	۱

$$\Rightarrow n(S_{new}) = ۴! = ۲۴$$

۶

خواستهٔ مسأله آن است که ارقام یکسان کنار هم قرار نگیرند. چون عدد زوج است، یکان حتماً باید ۶ باشد ولی طبق خواستهٔ مسأله دهگان ۶ نمی‌تواند باشد!

۳	۲	۱	۳	۱

$$\Rightarrow n(A) = ۳\times۲\times۱\times۳\times۱ = ۱۸ \Rightarrow P(\text{زوج} \mid \text{ارقام یکسان کنار هم نباشند}) = \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۳}{۴}$$

۷ یا ۵ یا ۳ ۶

۴۷ ۳ در فضای نمونه‌ای جدید ارقام ۲ و ۴ کنار هم قرار دارند که تعداد اعضا برابر می‌شود با:

جابه‌جایی ۲ و ۴ در بسته

$$\{۲,۴\},۱,۳,۵ \Rightarrow n(S_{new}) = ۴!\times۲! = ۲۴\times۲ = ۴۸$$

جابه‌جایی بسته به همراه ۳ عدد دیگر

خواستهٔ مسأله این است که ارقام ۱ و ۳ هم کنار هم قرار گیرند. داریم:

جابه‌جایی ۲ و ۴ داخل بسته

$$\{۲,۴\},\{۱,۳\},۵ \Rightarrow n(A) = ۳!\times۲!\times۲! = ۶\times۲\times۲ = ۲۴ \Rightarrow P(\text{۲ و ۴ کنار هم} \mid \text{۱ و ۳ کنار هم}) = \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{۱}{۲}$$

جابه‌جایی ۱ و ۳ داخل بسته — جابه‌جایی دو بسته با عدد ۵

۴۸ ۳ در فضای نمونه‌ای جدید ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار دارند. پس یکی از ۲ حالت زیر را برای قرار گرفتن اعداد داریم:

○	○	○	○	○	□

یا

□	○	○	○	○	○

دو رقم زوج ۲ و ۴ باید کنار هم باشند. پس آن‌ها را یک بسته در نظر می‌گیریم که با سه عدد ۱، ۳، ۵ تشکیل ۴ شئ می‌دهند که $۴!$ جایگشت دارند. از طرفی ۲ و ۴ داخل بسته هم $۲!$ جایگشت دارند؛ پس داریم:

$$n(S_{new}) = ۲\times۲!\times۴! = ۴\times۴!$$

جایگشت ۴ شئ — جایگشت ۲ و ۴ — ۲ حالت برای خانه‌های متوالی

خواستهٔ مسأله این است که همهٔ ارقام فرد هم کنار هم باشند. در این صورت ارقام ۱، ۳، ۵ را نیز یک بسته در نظر می‌گیریم: $\{۱,۳,۵\},\{۲,۴\}$ که تعداد جایگشت‌ها در این حالت به صورت زیر است:

$$n(A) = ۲\times۲!\times۳! = ۲\times۴\times۳! = ۲\times۴!$$

۲ حالت برای خانه‌های متوالی — جابه‌جایی بسته — جابه‌جایی ۲ و ۴ — جابه‌جایی ۱، ۳، ۵

پس:

$$P(\text{همهٔ ارقام فرد کنار هم} \mid \text{همهٔ ارقام در خانه‌های متوالی و ارقام زوج کنار هم}) = \frac{۲\times۴!}{۴\times۴!} = \frac{۱}{۲}$$

۴۹ ۴ در فضای نمونه‌ای جدید، حداقل دو دندانپزشک کنار هم هستند که برای محاسبهٔ تعداد اعضای آن از روش متمم که در آن هیچ دو دندانپزشکی کنار هم نیستند می‌رویم. با توجه به تعداد دندانپزشک‌ها (D) و تکنسین‌ها (T) باید آرایش آن‌ها به صورت $D_۱T_۱D_۲T_۲D_۳T_۳D_۴$ باشد. این آرایش همان آرایش یکی در میان است که تعداد حالات آن‌ها برابر است با:

$$\text{تعداد جایگشت تکنسین‌ها} \times \text{تعداد جایگشت دندانپزشک‌ها} = ۴!\times۳!$$

$$\Rightarrow n(S_{new}) = \text{کل حالات} - \text{حالاتی که هیچ دو دندان‌پزشکی کنار هم نباشند} = ۷! - ۴!\times۳!$$

خواستهٔ مسأله آن است که هر ۴ دندانپزشک کنار هم باشند. داریم:

$$\{D_۱D_۲D_۳D_۴\},T_۱,T_۲,T_۳ \Rightarrow n(A) = ۴!\times۴!$$

جابه‌جایی بسته به همراه سه تا تکنسین — جابه‌جایی دندانپزشک‌ها در داخل بسته

$$P(\text{حداقل ۲ دندانپزشک کنار هم} \mid \text{هر ۴ دندانپزشک کنار هم}) = \frac{۴!\times۴!}{۷!-۴!\times۳!} = \frac{۴!\times۴!}{۷\times۶\times۵\times۴!-۴!\times۶} = \frac{\cancel{۴!}^{۴}\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times۶(۷\times۵-۱)} = \frac{۴}{۳۵-۱} = \frac{۴}{۳۴} = \frac{۲}{۱۷}$$

@khaneh_book

۵۰ ۲

یادآوری اگر در میان n شیء موجود، r شیء شبیه هم وجود داشته باشد. تعداد جایگشت‌های اشیاء برابر $\frac{n!}{r!}$ است. مثلاً تعداد جایگشت‌های حروف a,a,b,c,c برابر $\frac{5!}{2!\times 2!}$ است.

حروف کلمهٔ (ATAXIA) را کنار هم قرار داده‌ایم. فضای نمونه‌ای جدید آن است که حداقل ۲ حرف A کنار هم قرار گیرند که تعداد اعضایش را به روش متمم می‌یابیم که در آن هیچ دو حرف A کنار هم قرار ندارند. برای این منظور حروف A باید لابه‌لا یا اطراف حروف T، X، I قرار بگیرند. حروف T، X، I به ۳! حالت در جایگاه‌های دایره‌ای شکل زیر می‌توانند قرار بگیرند. حال ۳ حرف A داریم که باید در مکان ☐ قرار گیرند پس ابتدا سه مکان از ۴ مکان ☐ را انتخاب کرده و سپس ۳ حرف A را به ۱ حالت در آن‌ها قرار می‌دهیم. پس تعداد حالت‌ها برابر می‌شود با:

$$\binom{4}{3}\times 1\times 3! = 4\times 6 = 24$$

کل حالات قرارگرفتن حروف (ATAXIA) کنار هم برابر $\frac{6!}{2!}$ است. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای جدید برابر است با:

$$n(S_{new}) = \frac{6!}{2!} - 24 = \frac{6\times 5\times 4\times 3!}{2!} - 24 = 120 - 24 = 96$$

خواستهٔ مسأله این است که هر ۳ حرف A کنار هم باشند. پس ۳ حرف A را یک بسته در نظر گرفته که با سه حرف دیگر T، X، I، تشکیل ۴ شئ می‌دهند و جابه‌جایی آن‌ها ۴! است. بنابراین:

$$P(\text{هر ۳ حرف A کنار هم} \mid \text{حداقل ۲ حرف A کنارهم}) = \frac{4!}{96} = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

۵۱ ۱

نکته تعداد اعداد صحیح مضرب k از a تا b (a و b خودشان مضرب k هستند) برابر $\frac{b-a}{k}+1$ است.

فضای نمونه‌ای جدید اعداد سه‌رقمی فرد است:

$$S_{new} = \{101,103,\ldots,999\} \Rightarrow n(S_{new}) = \frac{999-101}{2}+1 = 450$$

خواستهٔ مسأله این است که عدد انتخابی مضرب ۳ باشد. پس از فضای نمونه‌ای جدید، اعدادی که مضرب ۳ هستند را انتخاب می‌کنیم:

$$A = \{105,111,117,\ldots,999\} \Rightarrow n(A) = \frac{999-105}{6}+1 = 150 \Rightarrow P(\text{۳مضرب} \mid \text{فرد}) = \frac{150}{450} = \frac{1}{3}$$

(+۶ +۶)

۵۲ ۲

فضای نمونه‌ای جدید، اعداد مضرب ۴ از بین اعداد {۱,۲,۳,...,۵۰۰} است که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$S_{new} = \{4,8,12,\ldots,500\} \Rightarrow n(S_{new}) = \frac{500-4}{4}+1 = \frac{496}{4}+1 = 125$$

در این فضای جدید به دنبال عدد مضرب ۶ هستیم.

$$P(\text{۶مضرب} \mid \text{۴مضرب}) = \frac{n(\text{۶مضرب} \cap \text{۴مضرب})}{n(\text{۴مضرب})} = \frac{n(\text{۱۲مضرب})}{n(\text{۴مضرب})}$$

تعداد اعداد مضرب ۱۲ را می‌یابیم:

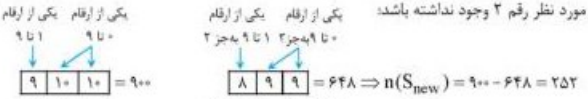
$$A = \{12,24,\ldots,492\} \Rightarrow n(A) = \frac{492-12}{12}+1 = \frac{480}{12}+1 = 40+1 = 41 \Rightarrow P(\text{۶مضرب} \mid \text{۴مضرب}) = \frac{41}{125}$$

سؤال *دانش‌پژوه (النا فرهادی):* **آقا اجازه چرا برای محاسبهٔ اعدادی که هم مضرب ۴ و هم مضرب ۶ هستند، اومدین تعداد اعداد مضرب ۱۲ را حساب کردین؟**

پاسخ: عدد ۱۲ ک‌م‌م دو عدد ۴ و ۶ است. همیشه همین کارو بکن وقتی می‌فوای دنبال اعدادی باشی که هم مضرب n و هم مضرب m هستند، ک‌م‌م m و n را پیدا کن و اعداد مضرب ک‌م‌م اون دو عدد رو به دست بیار.

۵۳ ۱

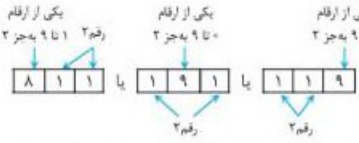
فضای نمونه‌ای جدید این است که در عدد سه رقمی مورد نظر حداقل یک‌بار رقم ۲ ظاهر شده است برای محاسبه تعداد اعضای آن از روش متمم استفاده می‌کنیم که در عدد ۳ رقمی مورد نظر رقم ۲ وجود نداشته باشد:



$$\Rightarrow n(S_{new}) = 900 - 648 = 252$$

@khaneh_book

خواستهٔ مسأله آن است که در عدد سه رقمی مورد نظر، دقیقاً ۲ بار رقم ۲ ظاهر شده باشد.



$$\Rightarrow n(A) = ۸ + ۹ + ۹ = ۲۶ \Rightarrow P(\text{حداقل یک‌بار ۲} \mid \text{دقیقاً دو بار ۲}) = \frac{۲۶}{۲۵۲} = \frac{۱۳}{۱۲۶}$$

۵۴ **۲** ۵ مهرهٔ سفید را به صورت $w_۱, w_۲, w_۳, w_۴, w_۵$ و ۵ مهرهٔ سیاه را به صورت $b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵$ در نظر می‌گیریم. حال فضای نمونه‌ای جدید را می‌نویسیم که در آن مجموع شماره‌های دو مهرهٔ خروجی ۶ است:

$$S_{new} = \{w_۱w_۵, w_۱b_۵, b_۱w_۵, b_۱b_۵, w_۲w_۴, w_۲b_۴, b_۲w_۴, b_۲b_۴, w_۳b_۳\}$$

خواستهٔ مسأله آن است که هر دو مهره همرنگ باشند:

$$A = \{w_۱w_۵, b_۱b_۵, w_۲w_۴, b_۲b_۴\} \Rightarrow P(\text{مجموع ۶} \mid \text{هر دو همرنگ}) = \frac{۴}{۹}$$

۵۵ **۱** در فضای نمونه‌ای جدید، حرف O در جای اصلی خود قرار ندارد که تعداد اعضای آن را به کمک روش متمم می‌یابیم. تعداد کل جایگشت‌های حروف کلمهٔ FLOWER برابر ۷۲۰ = ۶! است که از آن جایگشت‌هایی را که حرف O در جای اصلی خود قرار دارند، کم می‌کنیم. در این صورت O در جای اصلی خود قرار دارد و ۵ حرف دیگر به ۵! در ۵ جای باقی مانده قرار می‌گیرند. پس:

$$n(S_{new}) = ۶! - ۵! = ۷۲۰ - ۱۲۰ = ۶۰۰$$

خواستهٔ مسأله آن است که کلمهٔ ساخته‌شده با حرف O شروع شود.

$$\Rightarrow n(A) = ۱ \times ۵! = ۱۲۰ \Rightarrow P = \frac{۱۲۰}{۶۰۰} = \frac{۲}{۱۰} = ۰/۲$$

۵۶ **۳** فضای نمونه‌ای جدید، حالت‌هایی است که دو مهره با شمارهٔ زوج یعنی ۲ و ۴ متوالیاً خارج نشده باشند که برای محاسبه تعداد اعضای آن از روش متمم می‌رویم. فرض می‌کنیم که ۲ و ۴ متوالی خارج شوند، پس آن‌ها را یک بسته در نظر می‌گیریم و با سایر اعداد ۱، ۳، ۵ تشکیل ۴ شئ می‌دهند که ۴! جایگشت دارند و ۲، ۴ داخل بسته نیز ۲! جایگشت دارند. پس تعداد حالات متمم ۴۸ = ۲ × ۲۴ = ۲! × ۴! است. از طرفی کل حالات خروج ۵ مهره با شمارهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ برابر ۵! است، لذا داریم:

$$n(S_{new}) = ۵! - ۴۸ = ۱۲۰ - ۴۸ = ۷۲$$

حال می‌خواهیم دو مهره با شمارهٔ فرد متوالی خارج نشوند. پس آرایش مهره‌های خروجی باید به صورت زیر باشد که اعداد ۱، ۳، ۵ به ۳! حالت و اعداد ۲ و ۴ به ۲! حالت در خانه‌هایشان قرار می‌گیرند پس: $n(A) = ۳! \times ۲! = ۱۲$

فرد زوج فرد زوج فرد

بنابراین:

$$P(\text{دو مهرهٔ زوج متوالی خارج نشود} \mid \text{هیچ دو مهرهٔ فرد متوالی خارج نشود}) = \frac{۱۲}{۷۲} = \frac{۱}{۶}$$

۵۷ **۲** در فضای نمونه‌ای جدید، والیبالیست‌ها در ردیف اول نشسته‌اند. پس ۳ صندلی از ۵ تا صندلی به $\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب کرده و سه نفر والیبالیست را به ۳! حالت روی آن‌ها می‌نشانیم. حال ۷ صندلی باقی می‌ماند (۲ صندلی ردیف اول و ۵ صندلی ردیف دوم) که ۴ تا از آن‌ها را به $\binom{۷}{۴}$ طریق انتخاب و ۴ فوتبالیست را به ۴! حالت روی آن می‌نشانیم. پس:

$$n(S_{new}) = \binom{۵}{۳} \times ۳! \times \binom{۷}{۴} \times ۴!$$

خواستهٔ مسأله این است که فوتبالیست‌ها در ردیف دیگر (ردیف دوم) بنشینند. یعنی با توجه به شرط مسأله می‌خواهیم والیبالیست‌ها در ردیف اول و فوتبالیست‌ها در ردیف دوم بنشینند.

جایگشت فوتبالیست‌ها جایگشت والیبالیست‌ها

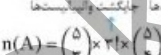
$$n(A) = \binom{۵}{۳} \times ۳! \times \binom{۵}{۴} \times ۴!$$

انتخاب ۳ تا از ۵ صندلی ردیف اول — انتخاب ۴ تا از ۵ صندلی ردیف دوم

بنابراین:

$$P(\text{والیبالیست‌ها در ردیف اول} \mid \text{فوتبالیست‌ها در ردیف دوم}) = \frac{\binom{۵}{۳} \times ۳! \times \binom{۵}{۴} \times ۴!}{\binom{۵}{۳} \times ۳! \times \binom{۷}{۴} \times ۴!} = \frac{۵}{\frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}} = \frac{۱}{۷}$$

۵۸ **۲** در فضای نمونه‌ای جدید، تیر اول و سوم از ۵ تا تیر به هدف خورده است.



خواستهٔ مسأله آن است که حداقل ۳ تیر به هدف بخورد. یعنی ۳ تیر یا ۴ تیر یا ۵ تیر به هدف بخورد ولی طبق شرط مسأله ۲ تیر به هدف خورده است. پس باید ۱ تیر یا ۲ تیر یا ۳ تیر از ۳ تیر باقی‌مانده به هدف بخورد یعنی حداقل ۱ تیر از ۳ تیر باقی‌مانده! خب از متمم می‌رویم که در آن هیچ تیری از ۳ تیر به هدف نخورده که احتمال آن برابر می‌شود با:

$$P(A') = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} \Rightarrow P(A) = ۱ - \frac{۲۷}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$$

@khanenet_book

۵۹ ۲ در فضای نمونه‌ای جدید جمع سه عدد روی کارت‌های انتخابی زوج است، این زمانی اتفاق می‌افتد که هر سه عدد زوج باشند یا دو عدد فرد و یکی زوج باشد. از طرفی اعداد زوج روی کارت‌ها۲، ۴، ۶، ۸ و اعداد فرد روی کارت‌ها ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ است. داریم:

یکی از زوج‌ها و ۲ تا از فردها سه تا از زوج‌ها

$$n(S_{new}) = \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۱} = ۴ + ۱۰ \times ۴ = ۴۴$$

خواستهٔ مسأله این است که هر ۳ عدد زوج باشند که در این صورت باید ۳ تا از ۴ تا عدد زوج را به $\binom{۴}{۳} = ۴$ طریق انتخاب کرد. بنابراین:

$$P(\text{مجموع سه عدد زوج} \mid \text{هر سه عدد زوج}) = \frac{۴}{۴۴} = \frac{۱}{۱۱}$$

۶۰ ۳ در فضای نمونه‌ای جدید ۴ نفر از ۴ ردیف مختلف انتخاب شده‌اند. ابتدا ۴ ردیف از ۶ ردیف موجود را انتخاب کرده و سپس از هر ردیف که شامل ۳ نفر است، یک نفر را انتخاب می‌کنیم.

انتخاب ۴ ردیف از ۶ ردیف

پس:

$$n(S_{new}) = \binom{۶}{۴}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱} = \frac{۶!}{۴!۲!} \times ۳^۴ = ۱۵ \times ۳^۴$$

انتخاب ۱ نفر از هر کدام از ۴ ردیف انتخاب شده

خواستهٔ مسأله این است که از ردیف اول حتماً دانش‌آموزی انتخاب شود که این کار به $\binom{۳}{۱}$ حالت انجام می‌شود. حال ۳ نفر دیگر می‌خواهیم که باید از ۵ ردیف باقی‌مانده انتخاب کنیم. پس ۳ تا از ۵ ردیف باقی‌مانده را انتخاب کرده و سپس از هر کدام از ردیف‌های انتخابی ۱ نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$n(A) = \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{ردیف اول}} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ ردیف از ۵ ردیف}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}_{\text{ردیف‌های انتخابی}} = ۳ \times ۱۰ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۱۰ \times ۳^۴ \Rightarrow P = \frac{۱۰ \times ۳^۴}{۱۵ \times ۳^۴} = \frac{۱۰}{۱۵} = \frac{۲}{۳}$$

۶۱ ۲ در فضای نمونه‌ای جدید حداقل یک جفت کفش بین ۴ لنگهٔ انتخابی وجود دارد. برای محاسبهٔ تعداد اعضای این فضا از روش متمم می‌رویم که در آن هیچ جفتی در بین ۴ لنگه وجود ندارد. در این صورت باید ۴ لنگه کفش را از جفت‌های گوناگون انتخاب می‌کنیم. ابتدا ۴ جفت از ۶ جفت را به $\binom{۶}{۴}$ حالت انتخاب می‌کنیم. سپس برای انتخاب یک لنگه از هر کدام از ۴ جفت انتخابی، ۲ حق انتخاب داریم (لنگهٔ راست یا لنگهٔ چپ). بنابراین:

$$\text{متمم} = \binom{۶}{۴} \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = \frac{۶!}{۴! \times ۲!} \times ۱۶ = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴!} \times ۸ = ۳۰ \times ۸ = ۲۴۰$$

$$\text{کل حالات}: \binom{۱۲}{۴} = \frac{۱۲!}{۴! \times ۸!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۸!} = ۱۱ \times ۵ \times ۹ = ۵۵ \times ۹ = ۴۹۵ \Rightarrow n(S_{new}) = ۴۹۵ - ۲۴۰ = ۲۵۵$$

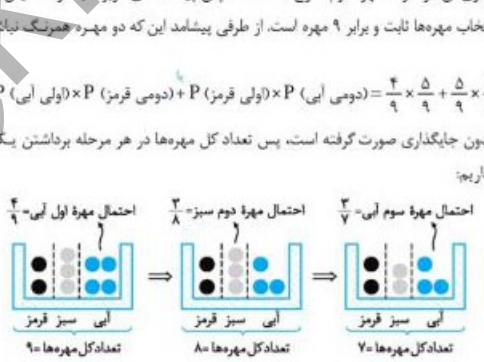
حال می‌خواهیم ۴ لنگه انتخابی از دو جفت کفش بوده باشند:

$$n(A) = \binom{۶}{۲} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵ \Rightarrow P(\text{حداقل یک جفت کفش} \mid \text{دو جفت کفش}) = \frac{۱۵}{۲۵۵} = \frac{۱}{۱۷}$$

۶۲ ۱ مهرهٔ اول خارج شده و پس از جایگذاری آن در ظرف، مهرهٔ دوم خارج شده است، پس پیشامدهای مربوط به رنگ این دو مهره مستقل از هم هستند و تعداد کل مهره‌ها هنگام انتخاب مهره‌ها ثابت و برابر ۹ مهره است. از طرفی پیشامد این که دو مهره همرنگ نباشند، یعنی یکی آبی و دیگری قرمز باشد، پس:

$$P(\text{همرنگ نباشند}) = P(\text{اولی آبی}) \times P(\text{دومی قرمز}) + P(\text{اولی قرمز}) \times P(\text{دومی آبی}) = \frac{۴}{۹} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۵}{۹} \times \frac{۴}{۹} = \frac{۴۰}{۸۱}$$

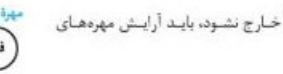
۶۳ ۲ چون انتخاب به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری صورت گرفته است، پس تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله برداشتن یک مهره، یک عدد کم می‌شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$\Rightarrow P = \frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۱}{۱۴}$$

@khaneh_book

۶۴ ۱ برای آن‌که دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نشود، باید آرایش مهره‌های خروجی به‌صورت مقابل باشد:

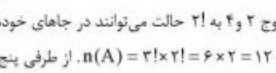


اعداد فرد ۱، ۳، ۵ به $3!$ حالت و اعداد زوج ۲ و ۴ به $2!$ حالت می‌توانند در جاهای خودشان قرار بگیرند. به نحوی که دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نشود. پس طبق اصل ضرب $n(A) = 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$. از طرفی پنج عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نیز به $5! = 120$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. پس $n(S) = 120$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{120} = 0/1$$

سؤال دانش‌پژوه (سولماز رستمی): **آقا اگه اولین مهرهٔ خروجی دارای شمارهٔ زوج باشه مگه چی میشه؟**

پاسخ: *اگر مهرهٔ خروجی اول دارای شمارهٔ زوج باشد، چون تنها دو مهره با شماره‌های زوج در داخل کیسه موجود است، به‌طور قطع، مهره‌های چهارم و پنجم متوالیاً دارای شماره‌های فرد خواهند بود که با فرض سؤال تناقض دارد. به شکل مقابل نگاه کن:*



۶۵ ۱ برای آن‌که اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج شوند، باید آرایش مهره‌های خروجی به صورت زیر باشد:

در هر کدام از شکل‌های فوق، اعداد فرد ۱، ۳، ۵ به $3!$ حالت و اعداد زوج ۲، ۴ و ۶ نیز به $3!$ حالت در جاهای خودشان قرار می‌گیرند. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$n(A) = 3! \times 3! + 3! \times 3! = 6 \times 6 + 6 \times 6 = 36 + 36 = 72$$

از طرفی شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ نیز به $6! = 720$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. پس $n(S) = 720$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{72}{720} = 0/1$$

۶۶ ۳

$$P(\text{هر دو کارت همرنگ}) = P(\text{هر دو کارت سبز}) + P(\text{هر دو کارت سفید}) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}$$

۶۷ ۲ برای آن‌که عدد کارت دوم ۷ باشد، پس عدد کارت اول نباید ۷ باشد (باید یکی از ۸ عدد باقی‌مانده باشد.) بنابراین جواب $\frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{9}$ می‌شود.

۶۸ ۳ **روش اول:** از ۳ مهرهٔ انتخابی که یکی یکی و بدون جایگذاری برداشته‌ایم، می‌خواهیم یکی آبی باشد:

$$P = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{60+60+60}{9 \times 8 \times 7} = \frac{180}{504} = \frac{5}{14}$$

(آبی سفید سفید) (سفید آبی سفید) (سفید سفید آبی)

سؤال دانش‌پژوه (سیما راد): **آقا تو کلاس خصوصی این سؤال رو از یه راه توپ گفتین، میشه به بچه‌ها هم یاد بدین اون راهو؟**

پاسخ: *وای از دست تو! باشه بچه‌ها گوش کنین.*

روش دوم: چون در صورت سؤال نگفته مهرهٔ چندم آبی باشد (از جایگاه مهره صحبتی نشده) می‌توانیم فرض کنیم که مهره‌ها را با هم برداشته‌ایم! در این صورت داریم:

$$P = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{5 \times 6}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{5 \times 6 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{14}$$

۶۹ ۴ فقط رنگ مهره‌های اول و دوم یکسان باشد، یعنی:

(سفید و سیاه و سیاه) یا (سیاه و سفید و سفید)

$$\Rightarrow P = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{80+60}{9 \times 8 \times 7} = \frac{140}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{18}$$

۷۰ ۴ برای آن‌که حاصل جمع اعداد کارت‌های انتخابی فرد باشد، باید شمارهٔ یکی از کارت‌ها زوج و دیگری فرد باشد. در بین شماره‌ها، ۴ کارت با شمارهٔ فرد (۱، ۳، ۵، ۷) و ۳ کارت با شمارهٔ زوج (۲، ۴، ۶) وجود دارد. داریم:

$$P = \underbrace{\frac{4}{7} \times \frac{3}{6}}_{\text{دومی زوج}} + \underbrace{\frac{3}{7} \times \frac{4}{6}}_{\text{دومی فرد}} = \frac{12+12}{7 \times 6} = \frac{24}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

(اولی فرد) (اولی زوج)

@khanen_book

۷۱ ۳ می‌خواهیم حداقل ۲ مهره از ۳ مهرهٔ انتخابی همرنگ باشد. برای حل از روش متمم استفاده می‌کنیم که در آن هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نیست. یعنی ۱ مهره سفید و ۱ مهره آبی و ۱ مهره قرمز برمی‌داریم چون از جایگاه مهره‌ها حرفی نزده مثلاً نگفته مهرهٔ چندم سفید باشد! پس می‌توان فرض کنیم هر ۳ مهره را با هم برداشته‌ایم:

$$P' = \frac{\binom{5}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{7}{1}}{\binom{18}{3}} = \frac{5\times 6\times 7}{\frac{18\times 17\times 16}{3\times 2\times 1}} = \frac{5\times 7}{17\times 8} = \frac{35}{136} \Rightarrow P = 1 - \frac{35}{136} = \frac{101}{136}$$

۷۲ ۲ از جملهٔ «دومین سفید بعد از اولین سیاه خارج شود» دو تا مطلب می‌فهمیم:

۱) از ۳ مهرهٔ خروجی، ۲ مهرهٔ سفید و ۱ مهرهٔ سیاه خارج شده است.

۲) چینش مهره‌ها به صورت (سفید، سیاه، سفید) است.

از طرفی خواستهٔ سؤال این است که مهرهٔ اول با جایگذاری و دو مهرهٔ دیگر بدون جایگذاری خارج شده‌اند. بنابراین داریم:

$$P = \frac{3}{14}\times\frac{4}{14}\times\frac{3}{11} = \frac{1}{44}$$

۷۳ ۳ **روش اول:** چون از رنگ مهرهٔ اول صحبتی نشده است، هر دو حالت سفید یا سیاه بودن رنگ آن را درنظر می‌گیریم و چون مهره‌ها متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه بیرون آورده شده‌اند، تعداد کل مهره‌ها در هر مرحله انتخاب یک مهره، یک عدد کم می‌شود، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow P(\text{دومی سفید}) = P(\text{اولی سفید و دومی سفید}) + P(\text{اولی سیاه و دومی سفید}) = \frac{6}{15}\times\frac{5}{14} + \frac{9}{15}\times\frac{6}{14} = \frac{1}{7} + \frac{9}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

روش دوم: چون از رنگ اولین مهرهٔ انتخابی صحبتی نشده است، فرض می‌کنیم اصلاً مهرهٔ اول بیرون نیامده است و فقط می‌خواهیم مهره‌ای به تصادف انتخاب کنیم که سفید باشد. به عبارت دیگر مهرهٔ اول تأثیری در جواب مسأله ندارد.

$$P(\text{دومی سفید}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۷۴ ۴ **روش اول:** چون از رنگ موش دوم صحبتی نشده است، هر دو حالت سفید یا سیاه بودن رنگ آن را درنظر می‌گیریم و چون موش‌ها به‌صورت متوالی و بدون جایگذاری انتخاب شده‌اند، تعداد کل موش‌ها در هر مرحلهٔ انتخاب ۱ موش، یک عدد کم می‌شود. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow P(\text{اولی سفید و دومی سیاه و سومی سیاه}) = P(\text{اولی سفید و دومی سفید و سومی سیاه}) + P(\text{اولی سفید و دومی سیاه و سومی سیاه})$$

$$= \frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6} + \frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6} = \frac{10}{56} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

روش دوم: چون در مورد موش دوم صحبتی در مسأله نشده و فقط احتمال سفید بودن موش اول و سیاه بودن موش سوم خواسته شده، بنابراین فرض می‌کنیم موش دومی انتخاب نشده و فقط می‌خواهیم ۲ موش را به گونه‌ای انتخاب کنیم که اولی سفید و دومی سیاه باشد. به عبارت دیگر موش دوم تأثیری در جواب مسأله ندارد.

$$\Rightarrow P = \frac{5}{8}\times\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

تمرین اگر به تصادف متوالیاً سه موش از بین ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه انتخاب کنیم، با کدام احتمال اولین و سومین موش انتخابی همرنگ هستند؟

پاسخ: با توجه به توضیحات بیان شده در روش دوم داریم:

$$\text{احتمال موردنظر} = \frac{5}{8}\times\frac{4}{7} + \frac{3}{8}\times\frac{2}{7} = \frac{20}{56} + \frac{6}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

۷۵ ۲ چون دو مهرهٔ خروجی رؤیت نشده‌اند، پس انگار از جعبه خارج نشده‌اند و تأثیری در جواب مسأله نخواهند داشت. پس انگار موقع برداشتن مهرهٔ بعدی هم‌چنان ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ بنفش در جعبه وجود دارند. طبق فرض می‌دانیم رنگ مهرهٔ خروجی سفید نیست. پس فضای نمونه‌ای جدید شامل ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ بنفش است و خواستهٔ مسأله این است که آن مهره سیاه باشد که احتمال آن $\frac{4}{7}$ خواهد شد.

۷۶ ۳ دو پیشامد A و B مستقل هستند، پس طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \xrightarrow{P(A\cap B)=P(A)P(B)} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{4+3-1}{12} = \frac{6}{12}$$

۷۷ ۴ A و B دو پیشامد مستقل هستند، پس:

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \quad (*)$$

$$\text{طبق فرض: } P(A\cap B) = [P(A)]^2 \xrightarrow{(*)} P(A)\times P(B) = P(A)\times P(A) \xrightarrow[A\Rightarrow P(A)\neq 0]{\text{پیشامد ناتهی}} P(B) = P(A) \quad (**)$$

از طرف دیگر اگر A' متمم A باشد، داریم:

$$P(A') = 1 - P(A) \xrightarrow{(**)} 1 - P(B)$$

@khaneh_book

۷۸ ۱ طبق فرض سؤال، وقوع هر یک از پیشامدهای A و B بر احتمال وقوع دیگری تأثیری ندارد، یعنی دو پیشامد A و B مستقل هستند. پس $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\times P(B)\xrightarrow[P(A)\text{ از}]{\text{فاکتور}}P(A)(1-P(B))=P(A)P(B')$ همین گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۲): $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$ پس این گزینه غلط است.

گزینهٔ (۳): $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\times P(B)$ پس این گزینه غلط است.

گزینهٔ (۴): $P(A\cup B)=1$ این گزینه در حالت کلی صحیح نیست و فقط زمانی درست است که $A\cup B$ همان فضای نمونه‌ای (S) باشد.

۷۹ ۲ چون A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند، لذا $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$، حال با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$\xrightarrow[P(A)=\frac{1}{3}]{P(A\cup B)=\frac{5}{6}}\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)\Rightarrow\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}P(B)\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{2}{3}P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

۸۰ ۳ چون A و B' هم‌شانس هستند، پس $P(A)=P(B')$. از طرفی چون $P(A\mid B')=P(A)$ است پس A و B' مستقل‌اند و در نتیجه A و B نیز مستقل هستند:

$$P(A\mid B')=P(A)=0/4\xrightarrow{P(A)=P(B')}P(B')=0/4\Rightarrow P(B)=0/6$$

بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)\times P(B)}=0/4+0/6-(0/4\times 0/6)=1-0/24=0/76$$

۸۱ ۲

$$P(A-B)=P(A\cap B')\xrightarrow[\text{پس A و B' نیز مستقل‌اند}]{\text{A و B مستقل‌اند}}P(A)\times P(B')=P(A)\times(1-P(B))=(0/4)(1-0/3)=0/4\times 0/7=0/28$$

۸۲ ۱ چون $P(A\mid B)=P(A)$ است، پس A و B مستقل‌اند و در نتیجه B با A' و B' با A' نیز مستقل بوده و داریم:

$$P(B\mid A')+P(B'\mid A')=P(B)+P(B')=1$$

۸۳ ۲ چون A و B مستقل هستند، پس B' و A نیز مستقل هستند و داریم:

$$P(A\mid B)=0/3\xrightarrow{P(A\mid B)=P(A)}P(A)=0/3$$

$$P(B'\mid A)=0/4\xrightarrow{P(B'\mid A)=P(B')}P(B')=0/4$$

حال از فرمول $P(A-B)=P(A\cap B')$ استفاده می‌کنیم:

$$P(A'-B)=P(A'\cap B')\xrightarrow[\text{پس A' و B نیز مستقل‌اند}]{\text{B و A مستقل‌اند}}P(A')\times P(B')=(1-0/3)\times(0/4)=0/7\times 0/4=0/28$$

۸۴ ۴ طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')\quad(*)$$

چون A و B مستقل هستند، نتیجه می‌گیریم A و B' هم مستقل هستند، در نتیجه:

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=P(A)\times(1-P(B))\xrightarrow{P(B)=\frac{1}{3}}\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{(*)}P(A\cup B')=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

۸۵ ۳

$$P(B'\mid A')=0/8\xrightarrow[\text{پس A' و B' نیز مستقل‌اند}]{\text{A و B مستقل‌اند}}P(B'\mid A')=P(B')=0/8\xrightarrow{(*)}P(B)=1-0/8=0/2\quad(*)$$

از طرفی داریم:

$$P(A\cap B)=0/1\xrightarrow{\text{A و B مستقل‌اند}}P(A)\times P(B)=0/1\xrightarrow{(*)}P(A)(0/2)=0/1\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{10}-\frac{1}{10}=\frac{5+2-1}{10}=0/6$$

@khanen_book

۸۶ **۲** با استفاده از قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\xrightarrow{A\text{ و }B\text{ مستقل}}P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$\xrightarrow{P(B)=2P(A)}P(A\cup B)=P(A)+2P(A)-P(A)\times(2P(A))\xrightarrow{P(A\cup B)=\frac{5}{8}}\frac{5}{8}=3P(A)-2(P(A))^2$$

حال با فرض $P(A)=x$ داریم:

$$\frac{5}{8}=3x-2x^2\Rightarrow 2x^2-3x+\frac{5}{8}=0\Rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(\frac{5}{8})}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{9-5}}{4}=\frac{3\pm2}{4}\Rightarrow x=\frac{5}{4}\text{ و }\frac{1}{4}$$

امّا چون x همان $P(A)$ بوده و می‌دانیم احتمال نمی‌تواند از یک بیشتر شود پس فقط $P(A)=x=\frac{1}{4}$ قابل قبول است. بنابراین $P(B)$ برابر می‌شود با:

$$P(B)=2P(A)=2(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$$

۸۷ **۱**

$$P(A).P(B)+P(A'\cup B')=1\Rightarrow P(A)P(B)+P((A\cap B)')=1$$

$$\Rightarrow P(A)P(B)+(1-P(A\cap B))=1\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

پس A و B پیشامدهای مستقل هستند.

۸۸ **۱** چون A و B' مستقل هستند پس A و B هم مستقل می‌باشند. بنابراین:

$$P(A\cap B)=0/3\Rightarrow P(A)\times P(B)=0/3\quad(*)$$

$$P(A-B)=0/4\Rightarrow P(A\cap B')=0/4\Rightarrow P(A)\times P(B')=0/4\ (**)$$

روابط (*) و (**) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{P(A)P(B')}{P(A)P(B)}=\frac{0/4}{0/3}\Rightarrow\frac{P(B')}{P(B)}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{1-P(B)}{P(B)}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3-3P(B)=4P(B)\Rightarrow 3=7P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{3}{7}$$

با جایگذاری $P(B)=\frac{3}{7}$ در (*) داریم:

$$P(A)P(B)=0/3\Rightarrow P(A)\times\frac{3}{7}=0/3\Rightarrow P(A)=\frac{0/3}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{10}$$

بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{10}+\frac{3}{7}-0/3=\frac{49+30-21}{70}=\frac{58}{70}=\frac{29}{35}$$

۸۹ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند باید $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ باشد، امّا در این سؤال داریم:

$$P(A\cup B)=0/86\ ,\ P(A)+P(B)=0/3+0/8=1/1\Rightarrow P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$$

پس دو پیشامد A و B ناسازگار نمی‌باشند.

گزینهٔ (۲): اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه $A\cup B=B$ شده و در نتیجه $P(A\cup B)=P(B)$. حال آن‌که در این سؤال $P(A\cup B)=0/86$ و $P(B)=0/8$ است که مخالف هم هستند. پس A زیرمجموعهٔ B نمی‌باشد.

گزینهٔ (۳): اگر دو پیشامد A و B متمم هم باشند، باید جمع احتمال‌های آن‌ها برابر یک شود، در صورتی که در این سؤال $P(A)+P(B)=0/3+0/8=1/1$ شده که مخالف یک است. پس دو پیشامد A و B متمم یک‌دیگر نمی‌باشند.

گزینهٔ (۴): اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، باید $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ باشد، یعنی باید $0/3\times 0/8=0/24$ باشد، حال با استفاده از قانون جمع احتمالات با توجه به فرضیات مسأله $P(A\cap B)$ را به‌دست می‌آوریم. اگر برابر $P(A\cap B)=0/24$ شد، پس A و B مستقل‌اند:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0/86=0/3+0/8-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=1/1-0/86=0/24$$

بنابراین A و B مستقل بوده و همین گزینه صحیح است.

@khaneh_book

۹۰ **۲** ابتدا احتمال باسواد بودن و پسر بودن را با توجه به جدول به دست می‌آوریم:

$$P(\text{باسوادبودن}) = \frac{n(\text{باسوادبودن})}{n(\text{کل افراد})} = \frac{a+۵}{a+a+۸+۵+۷} = \frac{a+۵}{۲a+۲۰}$$

$$P(\text{پسربودن}) = \frac{n(\text{پسرها})}{n(\text{کل افراد})} = \frac{۵+۷}{۲a+۲۰} = \frac{۱۲}{۲a+۲۰}$$

از طرفی اشتراک دو پیشامد فوق (یعنی پسر باشد و باسواد) برابر می‌شود با:

$$P(\text{پسر باشد و باسواد}) = \frac{n(\text{پسر باشد و باسواد})}{n(\text{کل افراد})} = \frac{۵}{۲a+۲۰}$$

حال شرط مستقل بودن را نوشته و از روی آن a را می‌یابیم:

$$P(\text{پسر باشد} \cap \text{باسواد}) = P(\text{باسواد}) \times P(\text{پسربودن}) \Rightarrow \frac{۵}{۲a+۲۰} = \frac{a+۵}{۲a+۲۰} \times \frac{۱۲}{۲a+۲۰} \Rightarrow ۵ = \frac{۱۲a+۶۰}{۲a+۲۰}$$

$$\Rightarrow ۱۰a+۱۰۰ = ۱۲a+۶۰ \Rightarrow ۴۰ = ۲a \Rightarrow a = ۲۰$$

احتمال آن‌که دختری باسواد یعنی می‌دانیم فرد مورد نظر دختر است حال می‌خواهیم احتمال باسواد بودنش را محاسبه کنیم:

$$P(\text{باسواد} \mid \text{دختر}) = \frac{n(\text{دختر} \cap \text{باسواد})}{n(\text{دختر})} = \frac{a}{a+a+۸} \xrightarrow{a=۲۰} \frac{۲۰}{۲۰+۲۰+۸} = \frac{۲۰}{۴۸} = \frac{۵}{۱۲}$$

۹۱ **۱** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس برابر $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ است. حال دو پیشامد A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

$$B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

$$A \cap B = \{(۴,۳)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۳۶}$$

با توجه به آن‌که $A \cap B \neq ۰$ است، دو پیشامد A و B سازگارند. حال مستقل بودن دو پیشامد A و B را بررسی می‌کنیم:

$$P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۳۶} \overset{?}{=} \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل هستند.

۹۲ **۱** قبولی شخص A مستقل از قبولی شخص B است. پس احتمال این‌که هر دو در این آزمون قبول شوند، یعنی احتمال $A \cap B$، طبق قانون ضرب احتمالات عبارت است از:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۵}$$

۹۳ **۴**

$$P(\text{گروه خونی A} \cap \text{چشم مشکی}) \xrightarrow{\text{مستقل‌اند}} P(\text{گروه خونی A}) \times P(\text{چشم مشکی}) = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۳۵}{۱۰۰} = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۳۵}{۱۰۰} = \frac{۲۱۰}{۱۰۰۰} = ۰/۲۱$$

۹۴ **۲** پیشامدهای زیر را درنظر بگیرید:

A: شخص A پس از عمل بهبود بیابد. $\Rightarrow P(A) = \frac{۸۰}{۱۰۰} = ۰/۸$

B: شخص B پس از عمل بهبود بیابد. $\Rightarrow P(B) = \frac{۶۰}{۱۰۰} = ۰/۶$

حال اگر D پیشامدی باشد که در آن شخص B بهبود بیابد ولی شخص A بهبود نیابد، یعنی فقط شخص B بهبود پیدا کند که همان $B - A$ یا $B \cap A'$ است. از طرفی چون پیشامدهای بهبودی اشخاص A و B مستقل از هم هستند، لذا با توجه به درستنامه پیشامدهای A' و B نیز مستقل از هم می‌باشند، بنابراین داریم:

$$P(D) = P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \times P(A') = P(B) \times (۱ - P(A)) = ۰/۶ \times (۱ - ۰/۸) = ۰/۶ \times ۰/۲ = ۰/۱۲$$

از طرفی E پیشامدی است که در آن حداقل یکی از آن دو نفر بهبود یافته باشند، یعنی شخص A یا شخص B و یا هر دو بهبود یافته باشند که همان $A \cup B$ است. بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{احتمال آن‌که هر دو بهبود بیابند}} \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل}} P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= ۰/۸ + ۰/۶ - (۰/۸)(۰/۶) = ۱/۴ - ۰/۴۸ = ۰/۹۲$$

بنابراین:

$$\frac{P(D)}{P(E)} = \frac{۰/۱۲}{۰/۹۲} = \frac{۱۲}{۹۲} = \frac{۳}{۲۳} \Rightarrow P(D) = \frac{۳}{۲۳} P(E)$$

@khaneh_book

تذکر می‌توانستیم $P(E)$ را به کمک متمم پیشامد E نیز به‌صورت زیر بیابیم. E' پیشامدی است که هیچ کدام از دو شخص A و B بهبود پیدا نکرده باشند؛ یعنی نه شخص A بهبود یافته باشد و نه شخص B که همان پیشامد $A' \cap B'$ است. بنابراین داریم:

$$P(E') = P(A' \cap B') \xrightarrow[A' \text{ و } B' \text{ نیز مستقل‌اند.}]{A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند پس}} P(A') \times P(B') = (1 - P(A))(1 - P(B)) = (1 - ۰/۸) \times (1 - ۰/۶) = ۰/۲ \times ۰/۴ = ۰/۰۸$$

$$\Rightarrow P(E) = 1 - P(E') = 1 - ۰/۰۸ = ۰/۹۲$$

۹۵ ۲

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow[P(A \cap B) = P(A) \times P(B)]{A \text{ و } B \text{ مستقل}} ۰/۹۲ = ۰/۸۰ + P(B) - (۰/۸۰)P(B)$$

$$\Rightarrow ۰/۹۲ - ۰/۸ = (1 - ۰/۸)P(B) \Rightarrow ۰/۱۲ = ۰/۲P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{۰/۱۲}{۰/۲} = ۰/۶ \qquad (*)$$

$$\text{احتمال آن‌که هر دو بهبود یابند} = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \overset{(*)}{=} ۰/۸ \times ۰/۶ = ۰/۴۸$$

۹۶ ۴ پیشامدهای زیر را درنظر می‌گیریم:

$A \rightarrow$ شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند. $\Rightarrow P(A) = ۰/۶$

$B \rightarrow$ شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند. $\Rightarrow P(B) = ۰/۷$

$A \cup B \rightarrow$ حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ، هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند $\leftarrow A \cap B$

روش اول: اگر D پیشامدی باشد که در آن حداقل یکی از اشخاص مذکور تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی پیدا نکند، متمم D، پیشامدی است که در آن هر دو شخص A و B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند. بنابراین داریم:

$$P(D') = P(A \cap B) \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل}} P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۷ = ۰/۴۲ \Rightarrow P(D) = 1 - P(D') = 1 - ۰/۴۲ = ۰/۵۸$$

روش دوم: پیشامد ناراحتی قلبی پیدا نکردن حداقل یکی از اشخاص A یا B یعنی پیشامد $A' \cup B'$ که با توجه به قانون جمع احتمالات برابر می‌شود با:

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') \xrightarrow[B' \text{ و } A' \text{ نیز مستقل‌اند.}]{A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند پس}} P(A') + P(B') - P(A') \times P(B')$$

$$\xrightarrow[P(B) = ۰/۷ \Rightarrow P(B') = 1 - ۰/۷ = ۰/۳]{P(A) = ۰/۶ \Rightarrow P(A') = 1 - ۰/۶ = ۰/۴} P(A' \cup B') = ۰/۴ + ۰/۳ - (۰/۴ \times ۰/۳) = ۰/۷ - ۰/۱۲ = ۰/۵۸$$

۹۷ ۱ پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$A \rightarrow$ داشتن تحصیلات ابتدایی $\Rightarrow P(A) = \frac{۶۰}{۱۰۰} = ۰/۶$ و $B \rightarrow$ داشتن مهارت قالی‌بافی $\Rightarrow P(B) = \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۲۵$

$A \cup B \rightarrow$ داشتن مهارت قالی‌بافی یا تحصیلات ابتدایی $\Rightarrow P(A \cup B) = ?$

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند، پس طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{P(A \cap B) = P(A)P(B)} ۰/۶ + ۰/۲۵ - ۰/۶ \times ۰/۲۵ = ۰/۸۵ - ۰/۱۵ = ۰/۷$$

۹۸ ۲ چرخیدن عقربهٔ هر صفحه مستقل از دیگری است. پس پیشامدهایی که مربوط به چرخیدن عقربهٔ هر صفحه هستند، مستقل از پیشامدهای مربوط به چرخیدن عقربهٔ صفحهٔ دیگر می‌باشند. احتمال این‌که عقربه‌ها در نواحی هم‌شماره متوقف شوند، یعنی احتمال این‌که هر دو عقربه، شمارهٔ ۱ یا هر دو شمارهٔ ۲ یا هر دو شمارهٔ ۳ یا هر دو شمارهٔ ۴ را نشان دهند. از طرفی احتمال این‌که عقربهٔ یک صفحه یک عدد مثلاً ۱ را نشان دهد، $\frac{۱}{۴}$ است. پس داریم:

P (هر دو عقربه هم شماره) $= P$ (هر دو عقربه (۱)) P یا (هر دو عقربه (۲)) P یا ... + P (هر دو عقربه (۴))

$\Rightarrow P$ (هر دو عقربه هم‌شماره) $= P$ (اولی شمارهٔ (۱)) $P \times$ (دومی شمارهٔ (۱)) P یا (اولی شمارهٔ (۲)) $P \times$ (دومی شمارهٔ (۲)) P یا ... + (اولی شمارهٔ (۴)) $P \times$ (دومی شمارهٔ (۴)) P

$$\Rightarrow P \text{ (هر دو عقربه هم‌شماره)} = (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) = ۴(\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۴}$$

۹۹ ۳ از روش متمم استفاده می‌کنیم. اگر C پیشامد قرار گرفتن حداقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیه‌های فرد باشد، پیشامد C' یعنی هیچ‌کدام از عقربه‌ها روی ناحیه‌های فرد قرار نگیرند. به عبارت دیگر هر دو عقربه روی ناحیه‌های زوج قرار بگیرند و چون پیشامدهای مربوط به دو عقربه مستقل از هم است. داریم:

$$P(C') = P \text{ (عقربهٔ } A \text{ روی ناحیه‌های زوج)} \times P \text{ (عقربهٔ } B \text{ روی ناحیه‌های زوج)} = \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

@khanenbook

۱۰۰ ۴ از روش متمم استفاده می‌کنیم. اگر C پیشامد بیرون آمدن حداقل یک گوی با شمارهٔ ۲ از ظرف باشد، C' یعنی هیچ کدام از گوی‌های قرمز و آبی با شمارهٔ ۲ خارج نشود:

$$P(C') = P(\text{گوی قرمز با شمارهٔ ۲ بیرون نیاد}) \times P(\text{گوی آبی با شمارهٔ ۲ بیرون نیاد}) = \frac{۴}{۵} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(C) = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۱۰۱ ۱ اولاً احتمال این‌که یک نفر در این جامعه این نوع گروه خونی را **نداشته باشد**، برابر است با:

$$۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰}$$

ثانیاً احتمال مورد نظر تست برابر است با:

$$P(\text{یک نفر گروه خونی موردنظر را داشته و دیگری نداشته باشد}) = P(\text{یک نفر گروه خونی مورد نظر را داشته و دیگری نداشته باشد}) + P(\text{هر دو نداشته باشند})$$

ثالثاً گروه خونی افراد مستقل از هم است، پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{یک نفر گروه خونی مورد نظر را داشته و دیگری نداشته باشد}) = P(\text{اولی داشته}) \times P(\text{دومی نداشته}) + P(\text{اولی نداشته}) \times P(\text{دومی داشته})$$

$$= \left(\frac{۲۰}{۱۰۰}\right) \times \left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right) + \left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right) \times \left(\frac{۲۰}{۱۰۰}\right) = (۰/۲)(۰/۸) + (۰/۸)(۰/۲) = ۰/۱۶ + ۰/۱۶ = ۰/۳۲$$

۱۰۲ ۱ دو پیشامد مستقل A و B را در نظر بگیرید ($P(A) = \frac{۱}{۲}$ و $P(B) = \frac{۲}{۳}$). احتمال آن‌که هیچ کدام از A و B رخ ندهند برابر است با:

$$P(A' \cap B') \xrightarrow[\text{پس } A' \text{ و } B' \text{ هم مستقل‌اند.}]{\text{A و B مستقل‌اند}} P(A') \times P(B') = \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۲}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

۱۰۳ ۳ دو دوست را A و B درنظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} P(\text{A قبول شود}) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶ \Rightarrow P(\text{A قبول نشود}) = ۰/۴ \\ P(\text{B قبول شود}) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴ \Rightarrow P(\text{B قبول نشود}) = ۰/۶ \end{cases}$$

$$P(\text{فقط یکی قبول شود}) = P(\text{A قبول شود و B قبول نشود}) + P(\text{A قبول نشود}) = P(\text{فقط یکی قبول شود})$$
$$= P(\text{A قبول نشود}) \cap P(\text{B قبول شود}) + P(\text{A قبول شود}) \cap P(\text{B قبول نشود})$$

از طرفی قبول شدن یا نشدن این دو دوست در کنکور، مستقل از هم است. پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{فقط یکی قبول شود}) = P(\text{A قبول نشود}) \times P(\text{B قبول شود}) + P(\text{A قبول شود}) \times P(\text{B قبول نشود})$$
$$= (۰/۴) \times (۰/۴) + (۰/۶) \times (۰/۶) = ۰/۵۲$$

۱۰۴ ۳ اگر A پیشامدی باشد که در آن حداقل یک توپ از ۳ بار پرتاب وارد حلقه شود، متمم آن پیشامدی است که هیچ توپی وارد حلقه نشود. از طرفی اگر توپ با احتمال ۰/۳ وارد حلقه می‌شود، پس با احتمال ۰/۷ = ۰/۳ − ۱ توپ وارد حلقه نمی‌شود. بنابراین با توجه به آن‌که پرتاب‌ها مستقل از هم فرض شده‌اند، داریم:

$$P(A') = P(\text{پرتاب اول وارد حلقه نشود و پرتاب دوم وارد حلقه نشود و پرتاب سوم وارد حلقه نشود}) \xrightarrow{\text{پرتاب‌ها مستقل}}$$
$$P(\text{پرتاب اول وارد حلقه نشود}) \times P(\text{پرتاب دوم وارد حلقه نشود}) \times P(\text{پرتاب سوم وارد حلقه نشود}) = (۰/۷)(۰/۷)(۰/۷) = ۰/۳۴۳$$

در نتیجه، احتمال آن‌که از ۳ بار پرتاب، حداقل یک توپ وارد حلقه شود برابر است با:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - ۰/۳۴۳ = ۰/۶۵۷$$

۱۰۵ ۳ می‌خواهیم مسأله‌ای که به x و y داده‌ایم حل شود. یعنی حداقل یکی از آن‌ها باید مسأله را حل کنند. با استفاده از روش متمم داریم:

$$P(\text{مساله حل شود}) = ۱ - P(\text{مساله حل نشود}) = ۱ - P(\text{نه x و نه y بتوانند مسأله را حل کنند}) \xrightarrow{\text{x و y مستقل از هم‌اند}} ۱ - P(\text{نتواند x}) \times P(\text{نتواند y})$$
$$= ۱ - \left(۱ - \frac{۲}{۳}\right)\left(۱ - \frac{۳}{۴}\right) = ۱ - \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۱ - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

سؤال دانش‌پژوه (سیما شاد): **آقا اجازه میشه بدون استفاده از روش متمم مسأله را حل کنین؟**

پاسخ: پشم:

$$P(\text{مساله حل شود}) = P(\text{حداقل یکی از دو نفر x یا y مسأله را حل کنند}) = P(\text{x حل کند}) + P(\text{y حل کند}) - P(\text{x حل کند} \cap \text{y حل کند})$$
$$\xrightarrow{\text{x و y مستقل‌اند}} \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۸ + ۹ - ۶}{۱۲} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

@khaneh_book

۱۰۶ ۲ می‌خواهیم در ۳ بار شلیک، حداکثر یک تیر به هدف نخورد.

(هیچ تیری به هدف نخورد) یا (۱ تیر به هدف نخورد) = حداکثر ۱ تیر به هدف نخورد

حال هر کدام از حالت‌ها را جداگانه حساب کرده و جواب‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

الف) ۱ تیر به هدف نخورد یعنی از ۳ پرتاب، یک پرتاب به هدف نخورد و ۲ پرتاب به هدف بخورد که سه حالت زیر را دارد:

دو پرتاب آخر به هدف بخورد ولی اولی نخورد — پرتاب اول و سوم به هدف بخورد ولی دومی نخورد — دو پرتاب اول به هدف بخورد ولی سومی نخورد

$$\xrightarrow{P(\text{هدف خوردن})=\frac{2}{3}} P(\text{۱ تیر به هدف نخورد}) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27} = \frac{12}{27}$$

ب) صفر تیر به هدف نخورد یعنی هر ۳ تیر به هدف بخورد که احتمالش برابر $\frac{8}{27} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ است. حال جواب‌های قسمت (الف) و (ب) را جمع می‌کنیم:

$$P(\text{حداکثر ۱ تیر نخورد}) = \frac{12}{27}+\frac{8}{27} = \frac{20}{27}$$

۱۰۷ ۱ پیشامد پرتاب سکه‌ها مستقل از هم می‌باشند، بنابراین مهم نیست که ۱۰۰ بار اول نتیجهٔ پرتاب سکه چه بوده است. پس احتمال پشت آمدن سکه در ۱۰۱ اُمین بار همان $\frac{1}{2}$ است.

سؤال *دانش‌پژوه (علی اکبری):* **آقا چرا پس جنسیت بچه‌ها هم همین‌طوریه یعنی؟ مثلاً اگر دو فرزند اول یه خانواده پسر باشد، احتمال پسر بودن فرزند سوم مستقله از دو تای اولی و همون $\frac{1}{2}$ میشه؟**

پاسخ: *آره. آفرین درست میگی.*

۱۰۸ ۲ اولاً چون هر سال، ۱۲ ماه دارد، احتمال این‌که یک نفر در ماه خرداد (یکی از ۱۲ ماه) متولد بشود، $\frac{1}{12}$ است. ثانیاً تولد هر فرد مستقل از دیگری است. پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{هر ۶ نفر در ماه خرداد متولد شوند.}) = \frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{12^6}$$

۱۰۹ ۱ ماه تولد مشخص نشده است، پس هر ۶ نفر می‌توانند در ماه فروردین یا در ماه اردیبهشت یا ... یا در ماه اسفند متولد شده باشند. طبق تست قبل، احتمال این‌که هر ۶ نفر در یک ماه **معین** متولد شده باشند، $\frac{1}{12^6}$ است. پس:

$$P(\text{هر ۶ نفر در یک ماه متولد شده باشند.}) = \underbrace{\frac{1}{12^6}+\frac{1}{12^6}+\ldots+\frac{1}{12^6}}_{\text{۱۲ تا}} = 12\times\frac{1}{12^6} = \frac{1}{12^5}$$

(اسفند، اردیبهشت، فروردین)

۱۱۰ ۲ اگر A پیشامد یکسان بودن ماه تولد حداقل دو نفر از چهار دانش‌آموز یک کلاس باشد، متمم آن یعنی A' پیشامدی است که در آن ماه تولد هیچ دو نفری از آن ۴ نفر یکسان نمی‌باشد؛ یعنی نفر اول می‌تواند در هر کدام از ۱۲ ماه سال متولد شده باشد ولی نفر دوم باید در هر ماهی به جز ماه تولد نفر اول (یعنی در یکی از ۱۱ ماه باقی‌مانده) متولد شود و ... و نفر چهارم باید در هر ماهی به جز ماه تولد ۳ نفر دیگر (یعنی در یکی از ۹ ماه باقی‌مانده) متولد شود. لذا با توجه به آن‌که متولد شدن افراد در ماه‌های سال، پیشامدهای مستقل‌اند. پس احتمال‌ها را می‌توانیم در هم ضرب کنیم:

$$P(A') = \frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12} = \frac{55}{96} \Rightarrow P(A) = 1-P(A') = 1-\frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

۱۱۱ ۴ اگر A پیشامد یکسان بودن اعداد رو شدهٔ لااقل دو تاس باشد، متمم آن یعنی A' پیشامدی است که در آن اعداد رو شدهٔ هیچ دو تاسی یکسان نمی‌باشد. یعنی عدد تاس اول می‌تواند هر کدام از اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ باشد ولی تاس دوم می‌تواند هر عددی به جز عدد رو شدهٔ تاس اول باشد (یکی از پنج عدد باقی‌مانده) و ... و تاس چهارم می‌تواند هر عددی به جز اعداد رو شدهٔ ۳ تاس دیگر باشد (یکی از سه عدد باقی‌مانده). لذا با توجه به مستقل بودن پیشامد مربوط به پرتاب تاس‌ها داریم:

$$P(A') = \frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6} = 1\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{18} \Rightarrow P(A) = 1-P(A') = 1-\frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

۱۱۲ ۱ جنسیت هر فرزند خانواده، مستقل از جنسیت فرزند دیگر است، پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{هر سه پسر}) = P(\text{اولی پسر})\times P(\text{دومی پسر})\times P(\text{سومی پسر}) = \frac{40}{100}\times\frac{40}{100}\times\frac{40}{100} = 0/064$$

@khanehbook

۱۱۳ ۲ در مورد فرزند سوم به بعد، حرفی زده نشده است، پس کاری با آن‌ها نداریم. اما پیشامد این‌که فرزند اول و دوم هم‌جنس باشند، یعنی فرزند اول و دوم هر دو پسر یا هر دو دختر باشند، از طرفی جنسیت فرزندان مستقل از یک‌دیگر است، پس طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

$$P(\text{هر دو هم‌جنس}) = P(\text{هر دو پسر}) \overset{\text{یا}}{+} P(\text{هر دو دختر})$$

$$\Rightarrow P(\text{هر دو هم‌جنس}) = P(\text{اولی پسر}) \times P(\text{دومی پسر}) + P(\text{اولی دختر}) \times P(\text{دومی دختر}) \quad (*)$$

حال چون احتمال تولد پسر $\frac{۱}{۴}$ است، احتمال تولد دختر (پسر نباشد) برابر است با:

$$۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)} P(\text{هر دو هم‌جنس}) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۱۱۴ ۲ احتمال این‌که فردی دارای رنگ چشم مغلوب باشد $\frac{۱}{۴}$ است. حال می‌خواهیم در خانوادهٔ ۳ فرزندی، فرزند آخر تنها پسر خانواده بوده و رنگ چشم مغلوب نداشته باشد. این دو خواستهٔ مسأله مستقل از هم‌اند. لذا داریم:

$$P(\text{نداشتن رنگ چشم مغلوب}) \times P(\text{فرزند آخر تنها پسر خانواده}) = P(\text{نداشتن رنگ چشم مغلوب و فرزند آخر تنها پسر خانواده})$$

اگر فرزند آخر تنها پسر خانواده باشد، نتیجه می‌گیریم که دو فرزند اول و دوم دختر بوده‌اند؛ یعنی (ب د د) که احتمالش $\frac{۱}{۸}$ است. پس:

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{۱}{۸} \times \left(۱ - \frac{۱}{۴}\right) = \frac{۱}{۸} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۳۲}$$

۱۱۵ ۲ فرزندان را به صورت ۳ فرزند اول و ۲ فرزند دوم در نظر می‌گیریم که مستقل از هم هستند. پس:

$$P(\text{۲فرزند بزرگ هم‌جنس}) \overset{\text{و}}{(} \text{۲فرزند کوچک‌تر جنسیت مختلف})$$

$$P(\text{۲فرزند بزرگ‌تر هم‌جنس}) \times P(\text{۲فرزند کوچک‌تر جنسیت مختلف}) = \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

(ب ب یا ب د) (د ب یا د د)

۱۱۶ ۲ **روش اول:** در یک تاس داریم:

$$\begin{cases} \text{اعداد تاس} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \\ \text{اعداد بین ۲ و ۵} = \{۳,۴\} \end{cases} \Rightarrow P(\text{عدد بین ۲ و ۵}) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

اما در پرتاب دو تاس، پیشامدهای مربوط به هر تاس مستقل از پیشامدهای تاس دیگر است، پس:

$$P(\text{هر دو تاس بین ۲ و ۵}) = P(\text{تاس اول بین ۲ و ۵}) \times P(\text{تاس دوم بین ۲ و ۵}) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۹}$$

روش دوم:

$$A \to \text{دو تاس بین ۲ و ۵} \Rightarrow A = \{(۳,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴)\} \xrightarrow{n(S)=۶\times۶=۳۶} P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

۱۱۷ ۲ پیشامد این‌که حداقل یکی از اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، متمم این پیشامد است که در هیچ یک از تاس‌ها عدد مضرب ۳ ظاهر نشود. پس احتمال پیشامد متمم را می‌یابیم:

$$P(\text{حداقل یکی مضرب ۳}) = ۱ - P(\text{هیچ‌کدام مضرب ۳ نباشد}) \quad (*)$$

در یک تاس داریم:

$$\begin{cases} \text{اعداد تاس} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \\ \text{اعدادی که مضرب ۳ نیستند} = \{۱,۲,۴,۵\} \end{cases} \Rightarrow P(\text{تاس مضرب ۳ نباشد}) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

پیشامدهای مربوط به هر تاس مستقل از پیشامدهای تاس دیگر هستند، پس:

$$P(\text{هیچ‌کدام مضرب ۳ نباشد}) = P(\text{اولی مضرب ۳ نباشد}) \times P(\text{دومی مضرب ۳ نباشد}) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{(*)} P(\text{حداقل یکی مضرب ۳}) = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

۱۱۸ ۳ عدد رو شده در پرتاب سوم مستقل از اعداد رو شده در پرتاب‌های اول و دوم است. لذا اصلاً مهم نیست که اختلاف اعداد رو شده در پرتاب‌های اول و دوم بیشتر از ۴ بوده یا نبوده. در هر صورت احتمال این که در پرتاب سوم ۶ ظاهر شود برابر $\frac{۱}{۶}$ است.

۱۱۹ ۲ برای آن‌که حاصل‌ضرب سه عدد رو شدهٔ تاس‌ها فرد باشد باید هر ۳ عدد فرد باشند (چرا؟) یعنی هر کدام از تاس‌ها ۱ یا ۳ یا ۵ بیایند. چون تاس‌ها مستقل از هم هستند، داریم:

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ = \frac{۱}{۸}$$

@khaneh_book

۱۲۰ ۴ A را پیشامد «پشت» آمدن سکه و B را پیشامد عدد ۴ آمدن تاس درنظر می‌گیریم. این دو پیشامد مستقل از هم هستند و مطلوب تست $P(A \cup B)$ است. داریم:

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{6} \xrightarrow[\text{مستقل}]{B,A} P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{6+2-1}{12}=\frac{7}{12}$$ قانون جمع احتمالات:

تذکر می‌توان با نوشتن اعضای پیشامد $A\cup B$ نیز احتمال آن را حساب کرد. (به عهدهٔ خودتان)

۱۲۱ ۳ پیشامد A را حداقل یک «رو» در پرتاب دو سکه و پیشامد B را مضرب ۳ بودن عدد تاس درنظر می‌گیریم. این دو پیشامد مستقل از هم هستند و مطلوب تست، $P(A\cap B)$ است. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{در پرتاب دو سکه}: \begin{cases} n(S_1)=2\times2=4 \\ A=\{(ر,ر),(ر,پ),(پ,ر)\} \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{3}{4} \\ \text{در پرتاب یک تاس}: \begin{cases} n(S_2)=6 \\ B=\{3,6\} \end{cases} \Rightarrow P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

۱۲۲ ۲ اگر A پیشامدی باشد که در آن حداکثر یکی از دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد می‌شود، در پیشامد متمم آن یعنی A'، هر دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد می‌شوند و چون تولد نوزاد در خانواده‌های A و B مستقل از هم می‌باشد، بنابراین داریم:

$$P(A')=P(\text{نوزاد از خانوادهٔ A چشم روشن و نوزاد از خانوادهٔ B چشم روشن})$$
$$=P(\text{نوزاد از خانوادهٔ B چشم روشن})\times P(\text{نوزاد از خانوادهٔ A چشم روشن})$$

$$\Rightarrow P(A')=\frac{20}{100}\times\frac{75}{100}=0/2\times0/75=0/15 \Rightarrow P(A)=1-P(A')=1-0/15=0/85$$

۱۲۳ ۴ پیشامد متفاوت بودن رنگ دو مهره، متمم پیشامد یکسان بودن رنگ دو مهره است و محاسبهٔ احتمال همرنگ بودن مهره‌ها راحت‌تر است، پس احتمال همرنگ بودن مهره‌ها را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$P(\text{متفاوت بودن رنگ})=1-P(\text{همرنگ بودن}) \quad (*)$$

$$P(\text{همرنگ بودن})=P(\text{هر دو سبز})+P(\text{هر دو سفید})$$

از طرفی چون دو مهره از دو ظرف جدا از هم خارج می‌شوند، پیشامدهای مربوط به رنگ مهره‌های خارج شده از این دو ظرف مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(\text{همرنگ بودن})=P(\text{سبز از ظرف (۱)})\times P(\text{سبز از ظرف (۲)})+P(\text{سفید از ظرف (۱)})\times P(\text{سفید از ظرف (۲)})$$

$$\Rightarrow P(\text{همرنگ بودن})=\left(\frac{4}{4+5+1}\right)\times\left(\frac{6}{6+2}\right)+\left(\frac{1}{4+5+1}\right)\times\left(\frac{2}{6+2}\right)=\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{6}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{3}{10}+\frac{1}{40}=\frac{13}{40}$$

$$\xrightarrow{(*)} P(\text{متفاوت بودن رنگ})=1-\frac{13}{40}=\frac{27}{40}$$

۱۲۴ ۲

$$P(\text{هر ۴ مهره همرنگ})=P(\text{۲ مهرهٔ ظرف اول، سیاه})\times P(\text{۲ مهرهٔ ظرف دوم، سفید})+P(\text{۲ مهرهٔ ظرف دوم، سیاه})\times P(\text{۲ مهرهٔ ظرف اول، سفید})$$

$$=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{\frac{5\times4}{2}}{\frac{8\times7}{2}}\times\frac{\frac{3\times2}{2}}{\frac{6\times5}{2}}+\frac{\frac{3\times2}{2}}{\frac{8\times7}{2}}\times\frac{\frac{5\times4}{2}}{\frac{6\times5}{2}}=\frac{10}{28}\times\frac{6}{15}+\frac{3}{28}\times\frac{1}{15}=\frac{63}{28\times15}=\frac{3}{20}=0/15$$

۱۲۵ ۱ اگر قرار باشد در پرتاب پنجم، اولین بار شش بیاید. پس نتیجه می‌گیریم در چهار پرتاب اول عددی غیر از شش آمده (یعنی ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵). پس داریم:

$$P=\underbrace{\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}}_{\text{چهار پرتاب اول عددی غیر از ۶ بیاید.}}\times\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{پرتاب پنجم عدد شش بیاید}}=\frac{5^4}{6^5}=\frac{625}{6^5}$$

۱۲۶ ۲ **روش اول:** برای حل سؤال باید صورت سؤال را خوب متوجه شوید. ابتدا احتمال آن‌که در پرتاب دو تاس سالم هر دو عدد رو شده زوج باشد را محاسبه می‌کنیم.

$$\underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{زوج بودن تاس اول}}\times\underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{زوج بودن تاس دوم}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

@khanehbook

پس احتمال آن‌که هر دو عدد رو شده زوج نباشد $\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۴}$ است. حداکثر در ۳ پرتاب یعنی **یا** بار اول که پرتاب کردیم هر دو تاس زوج بیاید **یا** اگر بار اول نشد، بار دوم هر دو تاس زوج بیاید **یا** اگر بار اول و دوم نشد، بار سوم **حتماً** هر دو تاس زوج بیاید! در غیر این‌صورت اگر سه فرصت داده شده را از دست بدهیم، **باخته‌ایم!** پس:

$$P=\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{هر دو زوج}}+\underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{اول نشد}}\times\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{دوم هر دو زوج}}+\underbrace{\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}}_{\text{اول و دوم نشد}}\times\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{سوم هر دو زوج}}=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

روش دوم: ما کلاً سه بار فرصت داریم تا هر ۲ تاس زوج بیاید. خب اگر هر دو تاس را ۳ بار با هم پرتاب کردیم و هر سه بار، هر دو زوج نیامدند! خب باخته‌ایم. پس احتمال متمم پیشامد خواسته شده برابر است با:

$$P(A')=\underbrace{\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}}_{\text{اول و دوم و سوم هر دو زوج نیامدند}}=\frac{۲۷}{۶۴}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲۷}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

۱۲۷ ۳ با توجه به درسنامه کافی است میانگین اختلافات داده‌شده را بیابیم و سپس ۱۱ واحد به جواب حاصل اضافه کنیم.

داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{(-۵)+(-۱)+۳+۷}{۴}=\frac{۴}{۴}=۱\Rightarrow\bar{x}_{\text{قبلی}}=۱+۱۱=۱۲$$

سؤال دانش‌پژوه (آزار کل‌معینی): **ببخشید صورت سؤال به جوریه، من متوجه نشدم.**

پاسخ: یه جوری نیست! تو متوجه نشدی! راستش بله ☺، صورت سؤال این شکلی کم داشتیم ولی اصل مطلب این رو می‌فرماد بگه که یه عددی به عنوان میانگین هرس‌پژوه (عدد ۱۱) سپس اومده همهٔ اون اعداد رو از ۱ کم کرده (همون کاری که ما توی میانگین هرسی می‌کنیم) قب خالا تو میانگین هرسی مگه ما میانگین عددهای حاصل رو نمی‌گرفتیم بعد جواب به دست اومده رو با هرسمون جمع می‌کردیم؟ این با هم همونه دیگه.

۱۲۸ ۱ با توجه به تعریف میانگین داریم:

$$\frac{(۵+۷x)+(۷-x)+(۲x-۴)}{۳}=۸\Rightarrow\frac{۸+۸x}{۳}=۸\Rightarrow۸+۸x=۲۴\Rightarrow۸x=۱۶\Rightarrow x=۲$$

۱۲۹ ۲ با توجه به این‌که میانگین ۵ دادهٔ اولیه برابر ۱۱ است، داریم:

$$\frac{x+۲y+۹+۶+۲۰}{۵}=۱۱\Rightarrow x+۲y+۳۵=۵\times۱۱=۵۵\Rightarrow x+۲y=۲۰\quad(*)$$

حال برای به دست‌آوردن میانگین چهار دادهٔ دوم داریم:

$$\bar{x}=\frac{۸y+۴x+۳+۹}{۴}\Rightarrow\frac{۸y+۴x+۱۲}{۴}\overset{\text{فکتور ۴ در صورت}}{=\!=\!=}\frac{۴(۲y+x+۳)}{۴}=(۲y+x)+۳\overset{(*)}{=\!=}۲۰+۳=۲۳$$

۱۳۰ ۳

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_۱&=\frac{(-۱)+(-۲)+(-۳)+(-۴)+(-۵)}{۵}=\frac{-۱۵}{۵}=-۳\\ \bar{x}_۲&=\frac{۹۵+۹۶+۹۷+۹۸+a}{۵}=\frac{۳۸۶+a}{۵}\end{aligned}\right\}\overset{\bar{x}_۱=\bar{x}_۲}{\Longrightarrow}\frac{۳۸۶+a}{۵}=-۳\Rightarrow a=-۳۸۶-۱۵=-۴۰۱$$

سؤال دانش‌پژوه (اکتوسا زرا): **ببخشید واقعاً تو کنکور جمع اعداد بزرگ هم میاد! راه کنکوری نداره؟**

پاسخ: قائم محترم! این که جمع سختی نیست! چشم به راه دیگه هم می‌گم. شما می‌تونی میانگین رو برای اعداد فوق ۹۵ هرس بزنی و از روش میانگین هرسی بری که در اون از همهٔ اعداد باید ۹۵ واحد کم کنی. داریم:

$$\text{داده‌های جدید: }۹۵-۹۵,۹۶-۹۵,۹۷-۹۵,۹۸-۹۵,a-۹۵\Rightarrow ۰,۱,۲,۳,a-۹۵$$

$$\text{میانگین جدید}=\bar{x}_{new}=\frac{۰+۱+۲+۳+a-۹۵}{۵}=\frac{a-۸۹}{۵}\Rightarrow\bar{x}=\frac{a-۸۹}{۵}+۹۵$$

$$\xrightarrow[\text{۲ دسته داده‌ها با هم برابر است}]{\text{میانگین‌های}}\frac{a-۸۹}{۵}+۹۵=-۳\Rightarrow\frac{a-۸۹}{۵}=-۹۸\Rightarrow a-۸۹=-۴۹۰\Rightarrow a=-۴۰۱$$

سؤال دانش‌پژوه (همان قبلی): **آقا اینم چندان آسون نبودها!**

پاسخ: قائم‌به فدا من بی‌تقصیرم. شما به بزرگی خودتون ببخشید. ببران می‌کنم!!

@khanenet-book

۱۳۱ ۴

$$\text{میانگین ۱۰ دادهٔ اولیه} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10} = ۱۳/۵ \Rightarrow ۱۳/۵\times ۱۰ = x_1+x_2+\ldots+x_{10} \quad (*)$$

$$\text{میانگین داده‌های } x_1 \text{ تا } x_{10} \text{ و ۱۵ و ۱۸} = \frac{x_1+\ldots+x_{10}+۱۵+۱۸}{10+2} \overset{(*)}{=} \frac{۱۳۵+۱۵+۱۸}{۱۲} = \frac{۱۶۸}{۱۲} = ۱۴$$

سؤال دانش‌پژوه (اکبر شمس الریاضی): **آقا ببخشید چرا توی کسر دوم مخرج ۱۲ = ۲ + ۱۰ شده؟**

پاسخ: پسرم اکبر مگه ۲ دادهٔ ۱۵ و ۱۸ به x_1 تا x_{10} اضافه نشده؟ خب چون تعداد x_1 تا x_{10} ات بوده پس تعداد داده‌های جدید ۲ + ۱۰ یعنی ۱۲ تا میشه دیگه. فله یا یه بار دیگه توضیح بدم؟

۱۳۲ ۱

$$\frac{x_1+\ldots+x_{10}}{10} = ۳۲/۵ \Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_{10} = ۳۲۵$$

حال باید دو دادهٔ ۳۵ و ۴۰ را از مجموع داده‌ها حذف کنیم. پس میانگین ۸ دادهٔ باقی‌مانده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{۳۲۵-۳۵-۴۰}{10-2} = \frac{۳۲۵-۷۵}{8} = \frac{۲۵۰}{8} = ۳۱/۲۵$$

۱۳۳ ۴

$$\text{مجموع وزن ۱۰ نفر ابتدایی} = ۱۰\times ۶۵ = ۶۵۰\text{kg}$$

$$\text{میانگین وزن افراد جدید} = \frac{۶۵۰-۹۲+۲۳۴}{10-1+3} = \frac{۷۹۲}{۱۲} = ۶۶\text{kg} = ۶۶\times ۱۰۰۰\text{g} = ۶۶۰۰۰\text{g}$$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام پهلوه): **آقا مخرج پیچیده شد. نباید همون ۱۰ می‌موند؟**

پاسخ: بهرام برو دهانت رو با آب نمک و تاید بشور! پسر مگه یکی کم نشده و ۳ نفر اضافه نشدن؟ پس چی می‌گی تو؟

۱۳۴ ۴

$$\text{میانگین اعضای مجموعهٔ A} = \frac{a+b+c}{3} = x \Rightarrow a+b+c = ۳x \quad (*)$$

$$\text{میانگین اعضای مجموعهٔ B} = \frac{a+b+c+d+e}{5} = y \Rightarrow a+b+c+d+e = ۵y \overset{(*)}{\Longrightarrow} ۳x+d+e = ۵y \Rightarrow d+e = ۵y-۳x \quad (**)$$

$$\text{میانگین اعضای مجموعهٔ C} = \frac{d+e}{2} \overset{(**)}{=\!=} \frac{۵y-۳x}{2}$$

۱۳۵ ۴ تمام داده‌ها در ۲ ضرب شده و a واحد از هر کدام کم شده است. پس برای میانگین نیز همین اتفاق می‌افتد:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = ۲\bar{x}_{\text{اولیه}} - a = ۲(۲a) - a = ۴a - a = ۳a$$

۱۳۶ ۳ اگر هر کدام از داده‌های ۱۵،۱۶،...،۱،۲،۳،۴،۵ را در ۲ ضرب کرده و ۱ واحد از آن‌ها کم کنیم، حاصل برابر داده‌های ۱،۳،...،۳۱ می‌شود. پس داریم:

$$a = ۲b - ۱$$

۱۳۷ ۴ با توجه به آن‌که ۲۰ درصد معادل ۰/۲ است پس به هر نمرهٔ x_i، مقدار $۰/۲x_i$ اضافه می‌شود. لذا هر داده جدید به صورت $x_i + ۰/۲x_i = ۱/۲x_i$ در می‌آید. به عبارت دیگر داده‌ها در ۱/۲ ضرب شده‌اند. لذا میانگین اولیه هم در ۱/۲ ضرب می‌شود. پس داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = ۱/۲\bar{x}_{\text{قدیم}} = ۱/۲\times ۱۵ = ۱۸$$

سؤال دانش‌پژوه (اصغر بالازاده): **آقا مگه به همه ۰/۲ اضافه نشده؟ پس باید به میانگین هم ۰/۲ اضافه شه، یعنی جواب ۱۵/۲ میشه.**

پاسخ: پسر چرا واسه خودت می‌بافی و میری! کی گفته به داده‌ها ۰/۲ اضافه شده؟! سؤال گفته ۲۰ درصد کل نمره، به نمره اضافه شده و ۲۰ درصد اون نمره یعنی ۰/۲x نه ۰/۲

۱۳۸ ۱ مجموع ۱۲ داده برابر ۱۰ است، پس میانگین آن‌ها $\bar{x} = \frac{۱۰}{۱۲}$ بوده، حال هر کدام از داده‌ها را ۳/۵ برابر نموده و به هر کدام ۱/۵ واحد اضافه کرده‌ایم. لذا میانگین هم ۳/۵ برابر شده و به علاوهٔ ۱/۵ می‌شود:

$$\bar{x}_{\text{new}} = ۳/۵\bar{x} + ۱/۵ = ۳/۵\left(\frac{۱۰}{۱۲}\right) + ۱/۵ \quad (*)$$

از طرفی جمع ۱۲ دادهٔ جدید برابر $۱۲\bar{x}_{\text{new}}$ است. پس:

$$\bar{x}_{\text{new}} = \frac{\overbrace{x_1+x_2+\cdots+x_{12}}^{\text{جمع ۱۲ دادهٔ جدید}}}{12} \Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_{12} = ۱۲x_{\text{new}} \overset{(*)}{=\!=} ۱۲\left(۳/۵\left(\frac{۱۰}{۱۲}\right)+۱/۵\right) = ۳۵ + \underbrace{۱۲\times ۱/۵}_{۱۸} = ۵۳$$

۱۳۹ ۳

$$\bar{x} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \Rightarrow n\bar{x} = x_1+\cdots+x_n \quad (*)$$

$$\text{میانگین داده‌های } x_1,\ldots,x_n,\bar{x}+n = \frac{x_1+\ldots+x_n+\bar{x}+n}{n+1} \overset{(*)}{=\!=} \frac{n\bar{x}+\bar{x}+n}{n+1}$$

$$= \frac{\bar{x}(n+1)+n}{n+1} \overset{\text{تفکیک کسر}}{=\!=} \frac{\bar{x}(n+1)}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \bar{x} + \frac{n}{n+1}$$

@khanehbook

سؤال دانش‌پژوه (ایمان گردابه)، آقا راه راحت‌تر نداریم؟

پاسخ: باشه! می‌تونید n رو ۳ فرض کنی و اعداد رو $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ بگیرید، در این صورت میانگین میشه $\bar{x}=2$. مثال میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3 یعنی $\bar{x}+3, x_2, x_3$ رو هم پیدا کنید که برابر $\frac{11}{4}$ میشه، بعد برید سراغ گزینه‌ها و با قرار دادن $\bar{x}=2$ و $n=3$ ببینید جواب کدوم گزینه، $\frac{11}{4}$ میشه که فقط گزینهٔ (۳)، $\frac{11}{4}$ شد و جوابه! اینم راه راحت‌تر و تستی‌تر. دیگه چی؟

۱۴۰ ۲

راه اول: میانگین داده‌های x_1+3 و x_2+2 و x_3+1 برابر $\bar{x}$ است. پس:

$$\bar{x}=\frac{(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)}{3} \Rightarrow 3\bar{x}=x_1+x_2+x_3+6 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=3\bar{x}-6 \quad (*)$$

حال میانگین داده‌های $3x_1+1$ ، $3x_2+2$ ، $3x_3+3$ را می‌یابیم:

$$\text{میانگین}=\frac{(3x_1+1)+(3x_2+2)+(3x_3+3)}{3}=\frac{3(x_1+x_2+x_3)+6}{3}\overset{(*)}{=}\frac{3(3\bar{x}-6)+6}{3}=\frac{9\bar{x}-18+6}{3}=\frac{9\bar{x}-12}{3}=\frac{3(3\bar{x}-4)}{3}=3\bar{x}-4$$

راه دوم:

نکته اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر $\bar{x}_1$ و میانگین داده‌های $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ برابر $\bar{x}_2$ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های $x_1+x'_1, x_2+x'_2, \ldots, x_n+x'_n$ برابر $\bar{x}_1+\bar{x}_2$ است.

فرض کنید میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3 برابر $\bar{x}_1$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_3, x_2, x_1 \text{ میانگین} = \bar{x}_1 \\ 3, 2, 1 \text{ میانگین} \xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} \frac{1+3}{2}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق نکته}} x_1+1, x_2+2, x_3+3 \text{ میانگین} = \bar{x}_1+2$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\bar{x}_1+2=\bar{x} \Rightarrow \bar{x}_1=\bar{x}-2 \quad (*)$$

هم‌چنین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_3, x_2, x_1 \text{ میانگین} = \bar{x}_1 \Rightarrow 3x_3, 3x_2, 3x_1 \text{ میانگین} = 3\bar{x}_1 \\ 3, 2, 1 \text{ میانگین} = \frac{1+3}{2}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق نکته}} 3x_1+1, 3x_2+2, 3x_3+3 \text{ میانگین} = 3\bar{x}_1+2$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} 3(\bar{x}-2)+2=3\bar{x}-6+2=3\bar{x}-4$$

۱۴۱ ۱

$$\left.\begin{array}{l} x_n, \ldots, x_1 \text{ میانگین} = \bar{x}_1 \\ n, \ldots, 1 \text{ میانگین} \xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} \frac{1+n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n-n, \ldots, x_1-1 \text{ میانگین} = \bar{x}_1-\frac{n+1}{2} \Rightarrow \bar{x}=\bar{x}_1-\frac{n+1}{2} \Rightarrow \bar{x}_1=\bar{x}+\frac{n+1}{2} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n, \ldots, x_1 \text{ میانگین} = \bar{x}_1 \\ n, \ldots, 1 \text{ میانگین} = \frac{1+n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n+n, \ldots, x_1+1 \text{ میانگین} = \bar{x}_1+\frac{n+1}{2} \overset{(*)}{=} \bar{x}+\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}=\bar{x}+n+1$$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام پهلوه)، آقا بریم از راه کنکوری (عددگذاری) بریم:

پاسخ: بله همتا! آفرین فهمیدن جای مناسب برای استفاده از یه راه کنکوری فیلی خوبه. میتونید به جای x_1, x_2, x_3 اعداد ۱ و ۲ و ۳ رو بذارید و از عددگذاری استفاده کنید.

سؤال دانش‌پژوه (هاشم بش‌گل)، آقا نمیشه به جای x_1, x_2, x_3، عدد ۱ رو بذاریم؟

پاسخ: چرا نشه بش‌گل جان! راست میگن بچه‌های تنبل همیشه راه‌های راحت رو زود پیدا می‌کنن‌ها! (البته بلا نسبت تو)

۱۴۲ ۳

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \bar{x}_1=\bar{x} \\ \bar{x}, 2\bar{x}, \ldots, n\bar{x} \xrightarrow[\text{با قدرنسبت } \bar{x}]{\text{دنبالهٔ حسابی}} \bar{x}_2=\frac{\bar{x}+n\bar{x}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x}_{\text{داده‌های بهتر}}=\bar{x}+\frac{\bar{x}+n\bar{x}}{2}=\frac{2\bar{x}+n\bar{x}}{2}=\frac{\bar{x}(n+3)}{2}$$

سؤال دانش‌پژوه (تیکه‌تا گل‌افشان)، آقا باز هم عددگذاری میشه کرد؟

پاسخ: بله، کافیه قرار بدین $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ و برید مقدارهای خواسته‌شده رو پیدا کنید.

سؤال دانش‌پژوه (شهرام هدهدی)، آقا این چند تا سؤال آخر، انگار می‌خوان با آدم کشتی بگیرن! طراح‌ها منظور خاصی داشتن؟!

پاسخ: چه منظوری بچه! البته این سؤالا بیشتر تو کنکور آزاد اومده و قمب برقی اوقات دوستان دانشگاه آزاد زیاده‌روی می‌کردن، ولی به عنوان چند نمونه سؤال خوب و دشوار، بهتره اونارو یاد بگیرین تا همه تیپ سؤال رو حل کرده باشین.

@khaneh_book

۱۴۳ ۲

$$\bar{x}=\frac{۴\times۶۵+۲\times۵۲+۳\times۷۰+۲\times ?}{۴+۲+۳+۲}\Rightarrow ۵۸=\frac{۲۶۰+۱۰۴+۲۱۰+۲\times ?}{۱۱}\Rightarrow ۶۳۸=۵۷۴+۲\times ?\Rightarrow ۲\times ?=۶۴\Rightarrow ?=۳۲$$

۱۴۴ ۲ فرض کنید نمرات ۴ درس با ضریب ۱ به ترتیب x_1, x_2, x_3 و x_4 باشند. داریم:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{۴}=۱۵/۵\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=۱۵/۵\times ۴=۶۲\ (*)$$

اگر نمرهٔ درس پنجم که ضریب ۲ دارد را x_5 بگیریم، میانگین جدید به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+۲x_5}{۱+۱+۱+۱+۲}\xrightarrow{(*)}۱۶/۵=\frac{۶۲+۲x_5}{۶}\Rightarrow ۹۹=۶۲+۲x_5\Rightarrow ۲x_5=۳۷\Rightarrow x_5=۱۸/۵$$

۱۴۵ ۲ اگر نمرهٔ پایانی وی را x بگیریم، داریم:

$$\bar{x}=۱۵=\frac{۱\times۱۱+۲x}{۱+۲}\Rightarrow ۱۵=\frac{۱۱+۲x}{۳}\Rightarrow ۴۵=۱۱+۲x\Rightarrow ۲x=۳۴\Rightarrow x=۱۷$$

۱۴۶ ۳ با توجه به این‌که مجموع تفاضل داده‌ها از میانگین برابر صفر می‌باشد، پس میانگین داده‌ها عدد۶ می‌شود.

۱۴۷ ۳ طبق درسنامه، از میانگین نیز ۱۲ واحد کم شده و سپس در ۳ ضرب می‌شود. داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=(\bar{x}_{\text{قدیم}}-۱۲)\times ۳\Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}}=(۵۷-۱۲)\times ۳=۴۵\times ۳=۱۳۵$$

۱۴۸ ۳ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$۳,۴,۵,۷,۷,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۴,۱۴,۱۵,۱۷,۱۷,۱۹$$

چون تعداد داده‌ها فرد است (۱۵ تا است)، بنابراین میانه برابر دادهٔ وسط یعنی دادهٔ شمارهٔ $\frac{۱۵+۱}{۲}=۸$ می‌باشد. یعنی ۱۱ = میانه.

فرار از اشتباه: بعد از مرتب کردن داده‌ها حتماً تعداد آن‌ها را بشمارید که با تعداد اولیه یکی باشد به این ترتیب خاطرجمع می‌شوید که داده‌ای از قلم نیافتاده است. بسیار دیده شده که دانش‌آموزان یک داده را از قلم انداخته و گاهی به گزینهٔ نادرست رسیده‌اند.

۱۴۹ ۱ با توجه به درسنامه می‌دانیم که اگر به اندازهٔ k واحد از تمام داده‌ها کم کنیم، از میانه نیز k واحد کم می‌شود. پس اگر میانهٔ داده‌های اولیه M باشد، آن‌گاه به اندازهٔ همان M ازش کم شده و میانهٔ داده‌های نهایی صفر می‌شود.

۱۵۰ ۳ اگر تمامی داده‌ها در عددی ثابت ضرب شوند میانه نیز در آن عدد ضرب می‌شود. هم‌چنین اگر تمام داده‌ها را با عددی ثابت جمع کنیم میانه نیز با آن جمع می‌شود. پس داریم:

$$۳\times(۵+۲)=۲۱=\text{میانهٔ جدید}$$

سؤال دانش‌پژوه (پیروز شیرکوه): آقا نمیشه اول ۵ رو در ۳ ضرب کنیم، بعد با ۲ جمع کنیم؟

پاسخ: نه عزیز من مگه کشکه؟ همین طور قالی قالی که نمیشه، باید اولویت‌ها را رعایت کنیم. توی صورت سؤال گفته اول داده‌ها را با دو جمع می‌کنیم و ... پس اول باید میانهٔ اولیهٔ رو با ۲ جمع کنیم و سپس حاصل را در ۳ ضرب کنیم.

۱۵۱ ۴ ابتدا x را می‌یابیم:

$$\bar{x}=\frac{۵+۱+x+۳+۲}{۵}=۴\Rightarrow ۱۱+x=۲۰\Rightarrow x=۹\Rightarrow \text{داده‌ها}: ۱,۲,۳,۵,۹\Rightarrow \text{میانه}=۳$$

۱۵۲ ۲

$$\bar{x}=\frac{۷۰+۱۱۰+۸۰+۶۰+x}{۵}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۳۲۰+x}{۵}\xrightarrow[\text{میانه}=\text{میانگین}]{\text{طبق فرض}}\frac{۳۲۰+x}{۵}=\text{میانه}$$

چون تعداد داده‌ها ۵ تا است، پس میانه قطعاً یکی از داده‌ها (سومین داده پس از مرتب کردن) خواهد بود. میانهٔ در هر حالت نمی‌تواند ۶۰ یا ۱۱۰ باشد (زیرا x هر عددی که باشد ۶۰ و ۱۱۰ به عنوان کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌های معلوم، نمی‌توانند سومین داده باشند) میگی نه؟ خودتون امتحان کنید.

با امتحان کردن ۷۰ و ۸۰ به عنوان میانه داریم:

$$\text{میانه}=۷۰\Rightarrow \frac{۳۲۰+x}{۵}=۷۰\Rightarrow ۳۲۰+x=۳۵۰\Rightarrow x=۳۰\ \times$$

$$\text{میانه}=۸۰\Rightarrow \frac{۳۲۰+x}{۵}=۸۰\Rightarrow ۳۲۰+x=۴۰۰\Rightarrow x=۸۰\ \checkmark$$

طبق فرض تست، x داده‌ای تکراری است یعنی x باید با یکی از اعداد ۶۰، ۸۰، ۱۱۰ یا ۷۰ برابر باشد، پس $x=۳۰$ غلط است.

۱۵۳ ۳ ابتدا برای محاسبهٔ راحت‌تر، میانگین حدسی را ۱۳ حدس زده و از همهٔ داده‌ها ۱۳ واحد کم می‌کنیم. این کار باعث می‌شود از میانگین اصلی نیز ۱۳ واحد کم شود.

$$۱۶,۹,۱۷,۱۳,۱۰,a,۱۰,۱۷,۱۱,۱۶\xrightarrow{-۱۳\ \text{داده‌ها}}۳,-۴,۴,۰,-۳,a-۱۳,-۳,۴,-۲,۳$$

حال میانگین داده‌های جدید نیز ۰/۱ = ۱۳/۱ − ۱۳ می‌شود، پس:

$$۰/۱=\frac{۳+(-۴)+(۴)+۰+۰+(-۳)+(a-۱۳)+(-۳)+۴+(-۲)+۳}{۱۰}\Rightarrow ۰/۱\times ۱۰=a-۱۱\Rightarrow ۱+۱۱=a\Rightarrow a=۱۲$$

حال داده‌های اصلی را مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{۹,۱۰,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۶,۱۶,۱۷,۱۷}_{۱۰\ \text{داده}}\Rightarrow \text{میانگین داده‌های پنجم و ششم}=\text{میانه}=\frac{۱۲+۱۳}{۲}=۱۲/۵$$

@khanehbook

۱۵۴ ۳ وقتی تمام داده‌ها با هم برابر باشند، پراکندگی آن‌ها برابر صفر می‌شود. دقت کنید نمی‌توان گفت تمام داده‌ها حتماً ۱ یا صفر یا هر عدد دیگری هستند، بلکه فقط می‌توان گفت تمام داده‌ها با هم برابرند.

۱۵۵ ۳ هرچه داده‌ها به هم نزدیک‌تر باشند، دامنهٔ تغییرات آن‌ها نیز عدد کوچک‌تری می‌شود.

۱۵۶ ۲ چون واحد اندازه‌گیری داده‌ها از سانتی‌متر به متر تبدیل شده است و می‌دانیم که هر سانتی متر، ۰/۰۱ متر می‌باشد، یعنی برای تبدیل سانتی‌متر به متر باید هر داده را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم. پس دامنهٔ تغییرات داده‌های جدید نیز بر ۱۰۰ تقسیم شده و ۰/۰۱ برابر قبلی می‌شود.

۱۵۷ ۲ اگر دامنهٔ تغییرات تعدادی داده برابر صفر باشد، تمام آن‌ها باید با هم برابر باشند، پس $x_1 = x_2 = \ldots = x_7$ بنابراین مجموع داده‌ها برابر است با:

$$\underbrace{۶+۶+\cdots+۶}_{\text{۷ تا}} + ۶ + ۶ = ۷ \times ۶ + ۶ = ۴۸$$

سؤال دانش‌پژوه (عزت باقالی فروش)، **آقا نباید جواب ۴۲ = ۶ × ۷ باشه؟ مگه داده‌ها x_1 تا x_7، ۷ تا نیست؟**

پاسخ: پسر، وقتی قاطی باقالی‌ها! پس اون ۶ اول یعنی x_1 تا x_7 به‌علاوهٔ ۶ اول که ۴۸ میشه.

۱۵۸ ۴

یادآوری اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_n+b$ برابر $a\bar{x}+b$ می‌باشد.

دامنهٔ تغییرات داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ صفر است، پس $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. حال چون همهٔ داده‌ها با هم برابرند، پس میانگین داده‌ها هم با خود داده‌ها برابر است یعنی $\bar{x} = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. پس میانگین داده‌های $۳x_1+۱, ۳x_2+۱, \ldots, ۳x_n+۱$ نیز برابر $۳\bar{x}+۱$ یا $۳x_1+۱$ می‌باشد، زیرا همان‌طور که گفتیم $\bar{x} = x_1$ می‌باشد.

۱۵۹ ۴ دامنهٔ داده‌های اولیه $R = ۲۵ - ۵ = ۲۰$ می‌باشد. چون دو دادهٔ آماری به داده‌های فوق اضافه خواهیم کرد، هیچ‌گاه دامنهٔ تغییرات نمی‌تواند کم‌تر شود، زیرا اگر داده‌ها بین ۵ و ۲۵ باشند که دامنهٔ تغییرات تغییری نمی‌کند ولی اگر یکی کوچک‌تر از ۵ و یکی بزرگ‌تر از ۲۵ باشند آن‌گاه دامنهٔ تغییرات حتماً بزرگ‌تر می‌شود.

سؤال دانش‌پژوه (مسحور کیف‌پی)، **آقا ببخشید مگه اگه ۱۵ و ۳۰ اضافه بشن $R = ۳۰ - ۱۵ = ۱۵$ نمیشه؟**

پاسخ: ببین بچه! در اون حالت دامنهٔ تغییرات $۲۵ - ۵ = ۲۰$ میشه، چون کوچک‌ترین داره هم‌چنان ۵ است نه ۱۵.

۱۶۰ ۴ دامنهٔ تغییرات $R = ۴۵ - ۲۱ = ۲۴$ می‌باشد. می‌خواهیم ۶ واحد به دامنه اضافه شود یعنی دامنه ۳۰ شود.

بررسی گزینه‌ها:

- ✗ $۳۶ - ۱۵ = ۵۱ > R_{\text{جدید}}$ ⇒ کوچک‌ترین داده $= ۱۵$، بزرگ‌ترین داده $= ۵۱$ **گزینهٔ (۱)**
- ✗ $۳۱ = ۴۵ - ۱۴ = R_{\text{جدید}}$ ⇒ کوچک‌ترین داده $= ۱۴$، بزرگ‌ترین داده $= ۴۵$ **گزینهٔ (۲)**
- ✗ $۲۷ = ۴۸ - ۲۱ = R_{\text{جدید}}$ ⇒ کوچک‌ترین داده $= ۲۱$، بزرگ‌ترین داده $= ۴۸$ **گزینهٔ (۳)**
- ✓ $۳۰ = ۵۱ - ۲۱ = R_{\text{جدید}}$ ⇒ کوچک‌ترین داده $= ۲۱$، بزرگ‌ترین داده $= ۵۱$ **گزینهٔ (۴)**

سؤال دانش‌پژوه (بهرام پخپله)، **آقا توی گزینهٔ آخر دامنه نباید $۵۱ - ۲۷ = ۲۴$ بشه؟**

پاسخ: آقای بهرام‌فان یکم دقت بفرمایید! برای تعیین دامنهٔ تغییرات باید کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده رو پیدا کنیم بعد از اضافه کردن ۲۷ باز هم کوچک‌ترین دادهٔ مجموعه عدد ۲۱ است نه ۲۷.

۱۶۱ ۱ در بین داده‌های معلوم، بزرگ‌ترین داده ۱۴ و کوچک‌ترین داده ۲- می‌باشد. چون $۱۶ = (-۲) - ۱۴$ برابر عدد ۲۰ نیست، دو حالت زیر را باید در نظر بگیریم:

$a - ۱۴ = ۲۰ \Rightarrow a = -۶$ ⇒ کوچک‌ترین داده a

$a - (-۲) = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۸$ ⇒ بزرگ‌ترین داده a

اگر $a = -۶$ باشد، داده‌های سری دوم ۱۵و ۸- و ۶- بوده و دامنهٔ تغییرات $R = ۱۵ - (-۸) = ۲۳$ می‌شود. اگر $a = ۱۸$ باشد، داده‌های سری دوم ۸- و ۱۵ و ۱۸ می‌شوند. در این حالت دامنهٔ تغییرات $R = ۱۸ - (-۸) = ۲۶$ می‌شود.

۱۶۲ ۲

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_{۴۰} - \bar{x})^۲}{۴۰} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۲۸۰}{۴۰} = ۷$$

سؤال دانش‌پژوه (بهرام پخپله)، **آقا $\frac{۲۸۰}{۴۰} = ۷$ نمیشه؟**

پاسخ: پسر، کلاس چهارم ابتدایی چند تا ساختمون اون‌ور تره! بُدو برو از بچه‌هاش بپرس بیا! بهرام تو فضالت نمی‌کشی! سال دیگه کنکور داری آخه تو! کافیه صفرها رو با هم بزنی $\frac{۲۸}{۴} = ۷$ میشه.

@khanenbook

۱۶۳ ۴ سؤال شاید ظاهر غریبی داشته باشد، ولی حل آن آسان است. کافی است بدانیم تفاضل میانگین از داده‌ها همان $(x_i-\bar{x})$ (i) می‌تواند از ۱ تا n باشد.) است. پس داریم:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_5-\bar{x})^2}{5}=\frac{1^2+4^2+0^2+(-2)^2+(-3)^2}{5}=\frac{1+16+0+4+9}{5}=\frac{30}{5}=6$$

۱۶۴ ۴

$$\bar{x}_1=\frac{1+1+3+3}{4}=\frac{8}{4}=2\Rightarrow\sigma_1^2=\frac{(1-2)^2+(1-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2}{4}=\frac{1+1+1+1}{4}=1$$

$$\bar{x}_2=\frac{1+1+2+2+3+3}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$\Rightarrow\sigma_2^2=\frac{(1-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2}{6}=\frac{1+1+0+0+1+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

۱۶۵ ۳ برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

داده‌ها مرتب شده: $5,6,7,7,8,10,11,13,13 \xrightarrow[\text{داده پنجم = داده وسط = میانه}]{\text{تعداد داده‌ها = ۹}}$ میانه $= 8$

با حذف داده‌های کوچک‌تر از میانه، داده‌های باقی‌مانده ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۳ و ۱۳ هستند. داریم:

$$\bar{x}=\frac{13+13+11+10+8}{5}=\frac{55}{5}=11$$

$$\sigma^2=\frac{(13-11)^2+(13-11)^2+(11-11)^2+(10-11)^2+(8-11)^2}{5}=\frac{4+4+0+1+9}{5}=\frac{18}{5}=3/6$$

۱۶۶ ۱ با توجه به این که کم‌کردن عددی ثابت تغییری در واریانس ایجاد نمی‌کند، برای راحتی محاسبه عدد ۲۹۱۶ را از تمام داده‌ها کم می‌کنیم:

$$2914-2916,2916-2916,2918-2916,2920-2916\Rightarrow -2,0,2,4\Rightarrow\bar{x}=\frac{-2+0+2+4}{4}=1$$

$$\Rightarrow\sigma^2=\frac{(-2-1)^2+(0-1)^2+(2-1)^2+(4-1)^2}{4}=\frac{9+1+1+9}{4}=5$$

سؤال *دانش‌پژوه (علی کشتکار):* **آقا از فرمول اچوج مچوج نمی‌زید؟**

پاسخ: *بابا این اکبر شمس‌الریاضی یه چیزی گفت، فکر کنم این اسمم دیگه اکی اکی اسم فرمول شد! چرا از اون هم می‌توئید برید!*

$$n=4,d=2\Rightarrow\sigma^2=\frac{d^2(n^2-1)}{12}=\frac{2^2\times(4^2-1)}{12}=\frac{4\times15}{12}=5$$

۱۶۷ ۱ چون واریانس برابر صفر است، داریم:

$$a=b=c=d=3$$

حال باید واریانس داده‌های $6+3,5+3,4+3,3+3,2+3,3+3$ یعنی ۹، ۸، ۷، ۶، ۵ را بیابیم:

$$\bar{x}=\frac{5+6+7+8+9}{5}=\frac{35}{5}=7$$

$$\sigma^2=\frac{(5-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2}{5}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2$$

سؤال *دانش‌پژوه (فریما شهری):* **آقا میشه چون ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دن، از فرمول اچوج مچوج، جواب رو به دست بیاریم؟**

پاسخ: *قانم معتزم اَچوج مچوج چیه ؟! این پسره (اکبر شمس‌الریاضی) یه ذره عقل تو کله‌اش نیست، اومده اسم گذاشته رو فرمول! بله اتفاقاً فیلی هم کار راهت‌تر میشه، ببینید:*

$$n=5,d=1\Rightarrow\sigma^2=\frac{d^2(n^2-1)}{12}=\frac{1^2\times(5^2-1)}{12}=\frac{25-1}{12}=\frac{24}{12}=2$$

۱۶۸ ۱ با کمی دقت متوجه می‌شویم که داده‌های $a-3,a+1,a+5$ جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=4$ هستند، پس به کمک فرمول درسنامه (به قول تر و بچ فرمول اچوج مچوج) داریم:

$$\sigma_1^2=4^2\times\frac{3^2-1}{12}=\frac{16\times8}{12}=\frac{32}{3}$$

هم‌چنین $a-2,a-1,a,a+1,a+2$ نیز جملات یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=1$ هستند؛ پس:

$$\sigma_2^2=1^2\times\frac{5^2-1}{12}=\frac{24}{12}=2\Rightarrow\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{2}{1}}=\frac{16\times2}{3\times2}=\frac{16}{3}$$

@khanen_book

۱۶۹ ۱

$$x_1-\bar{x}=k\Rightarrow x_1=\bar{x}+k \quad , \quad x_2-\bar{x}=k+1\Rightarrow x_2=\bar{x}+(k+1) \quad , \quad \dots \quad , \quad x_7-\bar{x}=k+6\Rightarrow x_7=\bar{x}+(k+6)$$

ملاحظه می‌گردد که داده‌های x_1 تا x_7 تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=1$ و $n=7$ می‌دهند، پس به کمک فرمول انحوج و مجوج داریم:

$$\sigma^2=1^2\times\frac{7^2-1}{12}=\frac{48}{12}=4\Rightarrow\sigma=\sqrt{4}=2$$

سؤال دانش‌پژوه (زیبا آسمان): **آقا اجازه! یه کم فرمولی شد، سخته! میشه یه جور دیگه هم بگین؟**

پاسخ: *آره ببین چون انحرافات از میانگین ۷ داده باید صفر باشد و طبق فرض می‌خواهیم این انحرافات، اعداد صحیح متوالی باشند باید آن‌ها به صورت $x_i-\bar{x}:-3,-2,-1,0,1,2,3$ باشد. حال به راهتی واریانس را حساب می‌کنیم:*

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_7-\bar{x})^2}{7}=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+(1)^2+(2)^2+(3)^2}{7}$$

$$=\frac{9+4+1+0+1+4+9}{7}=\frac{28}{7}=4\Rightarrow\sigma=\sqrt{4}=2$$

۱۷۰ ۴ طبق درسنامه، می‌دانیم اگر عددی ثابت را از تمام داده‌ها کم یا به تمام داده‌ها اضافه کنیم، واریانس و انحراف معیار تغییری نمی‌کنند. پس با کم کردن میانگین از تمام داده‌ها، واریانس هیچ تغییری نمی‌کند.

۱۷۱ ۴ با توجه به درسنامه، اگر تمام داده‌ها در عدد ثابت k ضرب شوند، انحراف معیار در $|k|$ ضرب می‌شود و جمع و تفریق تأثیری در واریانس و انحراف معیار ندارد. پس با توجه به این که تمام داده‌ها در $-\frac{1}{2}$ ضرب شده‌اند، انحراف معیار نیز باید در عدد $|-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ ضرب شود که برابر $\frac{1}{2}\sigma$ می‌شود.

۱۷۲ ۱

$$\sigma^2_{\text{جدید}}=81\Rightarrow\sigma_{\text{جدید}}=9$$

ضرب کردن تمام داده‌ها در عدد ۳، باعث ضرب شدن انحراف معیار در عدد۳ شده است. هم‌چنین اضافه کردن ۲ واحد به هر داده تأثیری در انحراف معیار ندارد. پس انحراف معیار اولیه برابر $\frac{9}{3}=3$ می‌باشد.

سؤال دانش‌پژوه (بنفشه فیروزاده): **آقا نباید ۹ رو در ۳ ضرب می‌کردین؟**

پاسخ: *نه قانم! انحراف معیار اولیه در ۳ ضرب شده و جواب ۹ شده است، پس برای یافتن انحراف معیار اولیه باید ۹ رو بر ۳ تقسیم کنیم.*

۱۷۳ ۴ اگر مجذور میانگین را از هر داده کم کنیم واریانس تغییری نمی‌کند. اما اگر اعداد حاصل را بر انحراف معیار (σ) تقسیم کنیم داریم:

$$\sigma^2_{\text{جدید}}=\frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2)=1$$

۱۷۴ ۲ می‌دانیم اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، تمام داده‌ها با هم برابرند و میانگین آن‌ها نیز با خود اعداد برابر است. یعنی $x_1=x_2=\dots=x_n=\bar{x}$ پس داده‌های نهایی به صورت زیر می‌شوند:

$$x_1-2x_n,\dots,x_n-2x_n \xrightarrow{x_i=x_n} x_n-2x_n,\dots,x_n-2x_n \Rightarrow \underbrace{-x_n,\dots,-x_n}_{n\text{ تا داده مساوی }-x_n} \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}}=-x_n$$

سؤال دانش‌پژوه (آوش آزاد): **ببخشید اون آخر چی شد؟**

پاسخ: ببین اون آخر چون $x_1=\dots=x_n$، به جای همهٔ داده‌ها x_n گذاشتیم. پس همهٔ داده‌ها با هم مساوی و برابر $-x_n$ شدند. خب وقتی همهٔ داده‌ها با هم مساوی میشن پس میانگین هم با اون داده‌ها برابر میشه. یعنی $\bar{x}_{\text{جدید}}=-x_n$

۱۷۵ ۴ با توجه به این‌که اعداد ۹،۲۱،۳۰،۱۲،۱۵ از ضرب اعداد ۳،۷،۱۰،۴،۵ در عدد ۳ حاصل می‌شوند، پس طبق درسنامه، واریانس دستهٔ اول $3^2=9$ برابر واریانس دستهٔ دوم می‌باشد.

۱۷۶ ۴ تجربهٔ این حقیران (منظور خودمانیم) از کلاس‌ها و کنکورها نشان می‌دهد که اکثر دانش‌پژوهان گزینهٔ (۳) را به عنوان جواب انتخاب می‌کنند، یعنی تصور می‌کنند چون در متن سؤال گفته شده ٪۱۰ به قیمت‌ها «افزوده می‌شود» پس واریانس تغییری نمی‌کند، در حالی‌که این‌گونه نیست! می‌دانیم ٪۱۰ یعنی ۰/۱، بنابراین وقتی به تمام قیمت‌ها ۰/۱ قیمت قبلی اضافه می‌شود داریم:

$$x_1+0/1x_1,x_2+0/1x_2,\dots,x_n+0/1x_n\Rightarrow 1/1x_1,1/1x_2,\dots,1/1x_n$$

پس وقتی ٪۱۰ داده‌ها به داده‌ها اضافه می‌شود، داده‌ها ۱/۱ برابر می‌شوند.

$$\sigma^2=1000\Rightarrow\sigma^2_{\text{جدید}}=(1/1)^2\sigma^2_{\text{قدیم}}=1/21\times1000=1210$$

سؤال دانش‌پژوه (هلال کلایی‌ها): **آقا حتماً شوخی می کنید! یعنی می‌خواهید بگید اگر ٪۲۰ به قیمت‌ها اضافه بشه قیمت‌ها ۱/۲ برابر میشه؟**

پاسخ: *یهه! کلایی! مگه من با تو شوقی دارم؟! بله کاملاً درسته! همین‌طور اگر ٪۵۰ به قیمت‌ها اضافه بشه قیمت‌ها ۱/۵ برابر میشه و الخ (یعنی الی آخر.)*

@khaneh_book

۱۷۷ ۳ با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر داده‌های $a,۴,۳,۲,۱$ را در عدد $\frac{۱}{۲}$ ضرب و سپس ۱ واحد از آن‌ها کم کنیم، داده‌های $\frac{۱}{۲}a-۱,۱,\frac{۱}{۲},۰,-\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. پس:

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\sigma^۲_{\text{اولیه}}=\frac{۱}{۴}\times ۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sigma^۲_{\text{اولیه}}=۲$$

سؤال دانش‌پژوه (هاشم بش‌گل): آقا از کجا فهمیدید که داده‌ها در $\frac{۱}{۲}$ ضرب شدند و بعد ۱ واحد از اونا کم شد؟

پاسخ: ببین هاشم، باز یه سوال اگلی پرسیدیا! جوابشو می‌دونی!

سؤال دانش‌پژوه (بغل‌دستی هاشم): آقا نمی‌دونه! دفترش سفید سفیده!

پاسخ: باشه بابا آبروش رو نبری، تو هم بشین! ببین بچه اگه از روی اعداد تفهمیدی از روی اون a که شده $\frac{۱}{۲}a-۱$ دیگه باید متوجه قضیه بشی.

۱۷۸ ۴

نکته در سؤالاتی که تعدادی دادهٔ جدید به داده‌های اولیه اضافه می‌شوند، اگر میانگین داده‌های جدید با میانگین اصلی برابر باشد، میانگین کلیهٔ داده‌ها نیز هیچ تغییری نمی‌کند.

میانگین داده‌های اضافه شده $\frac{۱۲+۱۸}{۲}=۱۵$ می‌باشد که با میانگین داده‌های اولیه برابر است. پس طبق نکتهٔ فوق میانگین ۱۰ دادهٔ جدید نیز همان ۱۵ است. داریم:

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+\ldots+(x_۸-\bar{x})^۲+(۱۲-\bar{x})^۲+(۱۸-\bar{x})^۲}{۱۰}\ \overset{\bar{x}=۱۵}{=}\ \frac{(x_۱-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲+(۱۲-۱۵)^۲+(۱۸-۱۵)^۲}{۱۰}$$

$$=\frac{(x_۱-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲+۱۸}{۱۰}\quad (*)$$

واریانس ۸ دادهٔ اولیه ۴ است، پس داریم:

$$\sigma^۲_{\text{اولیه}}=۴=\frac{(x_۱-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲}{۸}\Rightarrow (x_۱-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲=۸\times ۴=۳۲\quad (**)$$

با جایگذاری (**) در (*) داریم:

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{۳۲+۱۸}{۱۰}=\frac{۵۰}{۱۰}=۵$$

۱۷۹ ۴ چون میانگین داده‌های ناجور، $\frac{۱۰+۱۵+۴۵+۵۰}{۴}=\frac{۱۲۰}{۴}=۳۰$ برابر میانگین ۲۵ دادهٔ اولیه است پس با حذف آن‌ها میانگین جدید نیز همان ۳۰ باقی می‌ماند. فرض کنید داده‌های باقیمانده $x_۱$ تا $x_{۲۱}$ باشند، داریم:

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{(x_۱-۳۰)^۲+\ldots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲}{۲۱}\quad (*)$$

می‌دانیم:

$$\sigma^۲_{\text{اولیه}}=۸^۲=۶۴=\frac{(x_۱-۳۰)^۲+\ldots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲+(۱۰-۳۰)^۲+(۱۵-۳۰)^۲+(۴۵-۳۰)^۲+(۵۰-۳۰)^۲}{۲۵}$$

$$\Rightarrow (x_۱-۳۰)^۲+\ldots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲+۴۰۰+۲۲۵+۲۲۵+۴۰۰=۶۴\times ۲۵=۱۶۰۰$$

$$\Rightarrow (x_۱-۳۰)^۲+\ldots+(x_{۲۱}-۳۰)^۲=۱۶۰۰-۱۲۵۰=۳۵۰\overset{(*)}{\Longrightarrow}\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{۳۵۰}{۲۱}=۱۶/۶۶$$

۱۸۰ ۲ واریانس پانزده دادهٔ آماری ۱۲ و واریانس ده دادهٔ دیگر ۷/۶ است. با توجه به این‌که میانگین هر دو دسته برابر است، داریم:

$$\sigma_۱^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۱۵}-\bar{x})^۲}{۱۵}=۱۲\Rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۱۵}-\bar{x})^۲=۱۵\times ۱۲=۱۸۰\quad (*)$$

$$\sigma_۲^۲=\frac{(x_{۱۶}-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۲۵}-\bar{x})^۲}{۱۰}=۷/۶\Rightarrow (x_{۱۶}-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۲۵}-\bar{x})^۲=۱۰\times ۷/۶=۷۶\quad (**)$$

با توجه به این‌که میانگین هر دو دسته $\bar{x}$ است با ترکیب آن‌ها، میانگین تغییری نمی‌کند و تنها تعداد داده‌ها زیاد می‌شود. داریم:

$$(*),(**)\Rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۲۵}-\bar{x})^۲=۱۸۰+۷۶=۲۵۶\Rightarrow \sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{۲۵۶}{۲۵}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۲۵۶}{۲۵}}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

۱۸۱ ۴ واریانس ۱۱ دادهٔ اولیه صفر است، پس همهٔ آن ۱۱ داده با هم برابرند. از طرفی میانگین سه دادهٔ اضافه شده $\frac{۱۶+۲۴+۲۶}{۳}=۲۲$ می‌باشد. چون با اضافه شدن این سه داده میانگین تغییر نمی‌کند پس میانگین آن ۱۱ داده نیز ۲۲ است و چون آن دادها یکسان بودند پس همهٔ آن ۱۱ داده ۲۲ هستند.

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{\overbrace{(۲۲-۲۲)^۲+\ldots+(۲۲-۲۲)^۲}^{۱۱\text{تا}}+(۱۶-۲۲)^۲+(۲۶-۲۲)^۲+(۲۴-۲۲)^۲}{۱۱+۳}=\frac{(-۶)^۲+۴^۲+۲^۲}{۱۴}=\frac{۳۶+۱۶+۴}{۱۴}=\frac{۵۶}{۱۴}=۴\Rightarrow \sigma_{\text{جدید}}=\sqrt{۴}=۲$$

@khaneh_book

۱۸۲ ۳ تعداد داده‌ها $n=۱۱$ و میانگین $\bar{x}=۱۴$ می‌باشد. چون مجموع مجذورات داده‌ها داده شده است، به کمک فرمول دوم واریانس داریم:

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-\bar{x}^۲=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_{۱۱}^۲}{۱۱}-۱۴^۲=\frac{۲۳۰۰}{۱۱}-۱۹۶=۲۰۰-۱۹۶=۴$$

۱۸۳ ۴ چون مجموع مجذورات خواسته شده است، از فرمول دوم واریانس کمک می‌گیریم:

$$\sigma^۲=۱=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_{۱۲}^۲}{۱۲}-۲^۲\Rightarrow ۱+۴=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_{۱۲}^۲}{۱۲}\Rightarrow x_۱^۲+\ldots+x_{۱۲}^۲=۱۲\times۵=۶۰$$

۱۸۴ ۲ ابتدا میانگین را می‌یابیم:

$$\bar{x}=\frac{x_۱+\ldots+x_{۴۰}}{۴۰}=\frac{۱۰۰}{۴۰}=\frac{۵}{۲}$$

حال به کمک فرمول دوم محاسبهٔ واریانس (انحراف معیار) داریم:

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_{۴۰}^۲}{۴۰}-\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲=\frac{۳۴۰}{۴۰}-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۳۴}{۴}-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۱۸۵ ۴ میانگین داده‌های $x_۱^۲,\ldots,x_n^۲$ برابر $\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}$ است. پس داریم:

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-\bar{x}^۲\Rightarrow(\sqrt{۳})^۲=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-۴^۲\Rightarrow ۳+۱۶=۱۹=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}$$

۱۸۶ ۳ اگر طول اضلاع مربع‌ها را $x_۱,\ldots,x_n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\bar{x}=۱۲,\sigma^۲=۵$$

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-\bar{x}^۲\Rightarrow ۵=\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-۱۴۴\Rightarrow\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}=۱۴۴+۵=۱۴۹$$

می‌دانیم مساحت هر مربع $x_i^۲$ می‌باشد. پس $\frac{x_۱^۲+\ldots+x_n^۲}{n}$ برابر میانگین مساحت مربع‌ها است و لذا جواب ۱۴۹ می‌شود.

۱۸۷ ۱

$$\bar{x}=\frac{۸+۱۰+۱۲+۱۴}{۴}=\frac{۴۴}{۴}=۱۱$$

$$\sigma^۲=\frac{(۸-۱۱)^۲+(۱۰-۱۱)^۲+(۱۲-۱۱)^۲+(۱۴-۱۱)^۲}{۴}=\frac{۹+۱+۱+۹}{۴}=\frac{۲۰}{۴}=۵\Rightarrow\sigma=\sqrt{۵}\Rightarrow cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۱۱}$$

۱۸۸ ۴

$$\bar{x}=\frac{۷+۵+۴+۳+۱}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

۴ = داده‌ٔ وسط ⇒ میانه $\Rightarrow ۱,۳,۴,۵,۷$: مرتب کردن داده‌ها

$$\text{واریانس: }\sigma^۲=\frac{(۷-۴)^۲+(۵-۴)^۲+(۴-۴)^۲+(۳-۴)^۲+(۱-۴)^۲}{۵}=\frac{۹+۱+۰+۱+۹}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$\text{انحراف معیار}=\sigma=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ضریب تغییرات متفاوت از سایر شاخص‌ها است.

۱۸۹ ۲

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{\sigma}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{۵}=\frac{\sigma}{۱۲}\Rightarrow\sigma=\frac{۱۲}{۵}=\frac{۲۴}{۱۰}=۲/۴$$

۱۹۰ ۳

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+\ldots+(x_n-\bar{x})^۲}{n}\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۱۴/۴}{۱۰}=۱/۴۴\Rightarrow\sigma=\sqrt{۱/۴۴}=۱/۲$$

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\frac{۲}{۱۰۰}=\frac{۱/۲}{\bar{x}}\Rightarrow\frac{۱}{۲۵}=\frac{۱/۲}{\bar{x}}\Rightarrow\bar{x}=۱/۲\times۲۵=۳۰$$

۱۹۱ ۳

$$\bar{x}=۱۵۰,\sigma^۲=۴۹\Rightarrow\sigma=\sqrt{۴۹}=۷$$

می‌دانیم اگر از کلیهٔ داده‌ها ۱۰۰ واحد کم کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند، اما از میانگین ۱۰۰ واحد کم می‌شود، پس:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=۱۵۰-۱۰۰=۵۰\ ,\ \sigma_{\text{جدید}}=\sigma_{\text{قدیم}}=۷\Rightarrow cv_{\text{جدید}}=\frac{۷}{۵۰}=\frac{۱۴}{۱۰۰}=۰/۱۴$$

@khanen_book

۱۹۲ ۲ اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و $\bar{x}$ را و انحراف معیار آن‌ها را σ بنامیم، داریم:

$$\text{میانگین داده‌های } 5x_n-3,\ldots,5x_1-3 = 97 \Rightarrow 5\bar{x}-3=97 \Rightarrow 5\bar{x}=100 \Rightarrow \bar{x}=20$$

$$\text{انحراف معیار داده‌های } 5x_n-3,\ldots,5x_1-3 = \sqrt{625}=25 \Rightarrow 5\sigma=25 \Rightarrow \sigma=5$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر است با:

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0/25$$

۱۹۳ ۱ فرض کنید داده‌ها $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و میانگین آن‌ها $\bar{x}$ و انحراف معیار آن‌ها σ باشد. با اضافه کردن میانگین به هر داده، به میانگین نیز به اندازهٔ میانگین اضافه شده و تبدیل به $2\bar{x}$ می‌شود. اما انحراف معیار هیچ تغییری نمی‌کند. داریم:

$$cv_{\text{قدیم}}=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 1/2=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \sigma=1/2\bar{x} \quad (*)$$

$$cv_{\text{جدید}}=\frac{\sigma}{2\bar{x}} \overset{(*)}{=\!=} \frac{1/2\bar{x}}{2\bar{x}}=\frac{1/2}{2}=0/6$$

۱۹۴ ۱ با دو برابر کردن داده‌ها $\bar{x}$ تبدیل به $2\bar{x}$ و σ تبدیل به 2σ می‌شود. با کم کردن ۷ واحد از هر کدام از داده‌ها نیز $2\bar{x}$ تبدیل به $2\bar{x}-7$ می‌شود و 2σ هیچ تغییری نمی‌کند. طبق صورت تست داریم:

$$\frac{cv_{\text{جدید}}}{cv_{\text{قدیم}}}=1/5 \Rightarrow \frac{\frac{2\sigma}{2\bar{x}-7}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}=1/5 \Rightarrow \frac{2\cancel{\sigma}\times\bar{x}}{\cancel{\sigma}\times(2\bar{x}-7)}=1/5 \Rightarrow 2\bar{x}=1/5(2\bar{x}-7) \Rightarrow 2\bar{x}=3\bar{x}-10/5 \Rightarrow \bar{x}=10/5 \quad (*)$$

چون $n=20$ داده داریم، می‌توان گفت:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \overset{(*)}{\Longrightarrow} 10/5=\frac{x_1+\ldots+x_{20}}{20} \Rightarrow x_1+\ldots+x_{20}=20\times10/5=210$$

۱۹۵ ۳

$$\frac{\sigma}{\bar{x}}=0/08 \quad (*) \text{ : حالت اولیه}$$

اگر به هر داده ۵ واحد اضافه کنیم، $\bar{x}$ تبدیل به $\bar{x}+5$ می‌شود ولی σ تغییری نمی‌کند. پس:

$$\frac{\sigma}{\bar{x}+5}=0/075 \quad (**) \text{ : حالت ثانویه}$$

حال طرفین تساوی‌های (*) و (**) را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{0/08}{0/075}=\frac{\frac{\sigma}{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}+5}} \Rightarrow \frac{80}{75}=\frac{\bar{x}+5}{\bar{x}} \Rightarrow 80\bar{x}=75\bar{x}+375 \Rightarrow 5\bar{x}=375 \Rightarrow \bar{x}=75$$

۱۹۶ ۴

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_{10}}{10}=\frac{50}{10}=5$$

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{\sigma}{5} \Rightarrow \sigma=1 \Rightarrow \sigma^2=1^2=1$$

از فرمول دوم واریانس داریم:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+\ldots+x_{10}^2}{10}-\bar{x}^2 \Rightarrow 1=\frac{x_1^2+\ldots+x_{10}^2}{10}-25 \Rightarrow 26=\frac{x_1^2+\ldots+x_{10}^2}{10} \Rightarrow x_1^2+\ldots+x_{10}^2=260$$

سؤال دانش‌پژوه (محمد برزگر)، **آقا واقعاً آیا داده‌هایی داریم که حاصل جمعشون ۵۰ بشه، اون وقت مجموع مربعاتشون ۲۶۰ بشه؟**

پاسخ: جواب دادن به این سؤال کار من و شما نیست! ما باید سؤال رو حل کنیم و نکاتش رو بگیم که گفتیم ولی توجیهت خوب بود ! (فقط برای این که سرفرورده نشی!)

۱۹۷ ۴

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_{30}}{30}=\frac{240}{30}=8,\ \sigma^2=\frac{x_1^2+\ldots+x_{30}^2}{30}-\bar{x}^2=\frac{2190}{30}-8^2=73-64=9 \Rightarrow \sigma=\sqrt{9}=3$$

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{3}{8}=0/375$$

۱۹۸ ۳

$$x_1+\ldots+x_{12}=72 \Rightarrow \bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_{12}}{12}=\frac{72}{12}=6$$

از فرمول دوم محاسبهٔ واریانس (انحراف‌معیار) داریم:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2=\frac{x_1^2+\ldots+x_{12}^2}{12}-(6)^2=\frac{480}{12}-36=40-36=4 \Rightarrow \sigma=\sqrt{4}=2 \Rightarrow cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

۱۹۹ ۴ اگر اضلاع مربع را $x_1, \ldots, x_n$ بگیریم، داریم:

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0/2=\frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma=0/2\times15=3 \Rightarrow \sigma^2=9$$

می‌دانیم مساحت مربع به ضلع x برابر x^2 می‌شود، پس میانگین مساحت مربع‌ها برابر $\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}$ می‌شود. از فرمول دوم واریانس داریم:

$$9=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\underbrace{(15)^2}_{225} \Rightarrow \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}=9+225=234$$

@khanehbook

۲۰۰ ۴ اگر طول اضلاع مربع‌ها را $x_1,...,x_n$ و میانگین آن‌ها را $\bar{x}=\frac{x_1+...+x_n}{n}$ بگیریم، آن‌گاه محیط مربع‌ها، $4x_1,...,4x_n$ می‌شود و داریم:

$$\text{میانگین محیط مربع‌ها}=\frac{4x_1+...+4x_n}{n}\Rightarrow ۸۴=\frac{۴(x_1+...+x_n)}{n}\Rightarrow ۸۴=۴\bar{x}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۸۴}{۴}=۲۱ \quad (*)$$

از طرفی مساحت مربع‌ها $x_1^2,...,x_n^2$ می‌باشد که طبق فرض میانگین آن‌ها ۴۹۰ است. پس:

$$\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}=۴۹۰ \quad (**)$$

بنابراین:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}-\bar{x}^2 \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} ۴۹۰-۲۱^2=۴۹۰-۴۴۱=۴۹\Rightarrow\sigma=\sqrt{۴۹}=۷\Rightarrow cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}=۰/۳۳$$

۲۰۱ ۱ فرض کنید ۵ دادهٔ x_1 تا x_5 را داریم. پس:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+...+(x_5-\bar{x})^2}{۵}=\frac{۳^2+۱^2+۰^2+(-۱)^2+(-۳)^2}{۵}=\frac{۹+۱+۰+۱+۹}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴\Rightarrow\sigma=\sqrt{۴}=۲$$

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۲}{۵}\overset{\text{درصد}}{=}\frac{۲}{۵}\times۱۰۰=۴۰٪$$

۲۰۲ ۱ برای سنجش دقت کاری باید cv هر دو نفر را با هم مقایسه کنیم.

$$\bar{x}=\frac{۷+۹+۸+۹+۷}{۵}=\frac{۴۰}{۵}=۸\ ,\ \bar{y}=\frac{۱۰+۸+۶+۷+۹}{۵}=\frac{۴۰}{۵}=۸$$

چون میانگین‌ها برابرند، کافی است σ^2 را با هم مقایسه کنیم.

$$\sigma_x^2=\frac{(۷-۸)^2+(۹-۸)^2+(۸-۸)^2+(۹-۸)^2+(۷-۸)^2}{۵}=\frac{۱+۱+۰+۱+۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

$$\sigma_y^2=\frac{(۱۰-۸)^2+(۸-۸)^2+(۶-۸)^2+(۷-۸)^2+(۹-۸)^2}{۵}=\frac{۴+۰+۴+۱+۱}{۵}=۲$$

چون $\sigma_x^2<\sigma_y^2$ پس دقت کاری نفر اول بیشتر است. (چون پراکندگی نتایج وی کم‌تر است)

۲۰۳ ۱ کافی است ضریب تغییرات هر دو را مقایسه کنیم.

$$cv_A=\frac{۳/۶}{۱۵۰}=۰/۰۲۴\ ,\ cv_B=\frac{۳/۸۴}{۱۶۰}=۰/۰۲۴\Rightarrow$$ دقت عمل هر دو یکسان است

۲۰۴ ۴ با مرتب کردن داده‌ها داریم:

$$\underset{Q_1}{۳,۸},\underset{\text{میانه}}{۱۰,۱۱},۱۳,\underset{Q_3}{۲۰,۲۱}\Rightarrow a=Q_1=۸\ ,\ b=Q_3=۲۰\Rightarrow b-a=۲۰-۸=۱۲$$

۲۰۵ ۱ ابتدا ۱۵ داده را مرتب کرده و میانه و چارک‌ها را می‌یابیم:

$$\underset{Q_1}{۵,۷,۸,۹},۱۰,۱۱,۱۲,\underset{\text{میانه}}{۱۴},۱۶,۱۷,۱۸,\underbrace{\underset{Q_3}{۱۹}}_{\text{داده‌های موردنظر}},۲۰,۲۱,۲۳\Rightarrow$$ دامنهٔ تغییرات داده‌های موردنظر $=۱۹-۹=۱۰$

۲۰۶ ۴ اگر داده‌های مرتب شده را $x_1,...,x_{۱۴}$ بنامیم داریم:

$x_{۱۱}$ = چارک سوم، $x_۴$ = چارک اول $\Rightarrow$ ۷ داده بعد از میانه و ۷ داده قبل از میانه هستند $\Rightarrow$ میانگین داده‌های هفتم و هشتم = میانه $=\frac{x_۷+x_۸}{۲}$

بین داده‌های $x_۴, x_{۱۱}$، $۶=۱-۴-۱۱$ داده قرار دارد.

سؤال دانش‌پژوه (سعیده آزاد)، **ببخشید اگر داده‌ها با هم برابر باشند، سؤال غلط نمیشه؟**

پاسخ: سؤال قبلی قوییه! کسی میتونه جواب بده؟ (شما هم لطفاً فکر کنید)

سؤال دانش‌پژوه (راوین ماهانی)، **استاد! پارسال خوندیم که عضوهای مجموعه نمی‌توانن تکراری باشن وگرنه حذف میشن. پس همهٔ عضوها غیر یکسانند.**

پاسخ: آفرین به شما! البته باید به زیرکی طراح سؤال هم آفرین گفت که با کلمهٔ مجموعه نشون داد، عواسش قیلی قمعه!

۲۰۷ ۱ ۱۸ دادهٔ مرتب شدهٔ زیر را داریم. میانه برابر میانگین داده‌های نهم و دهم است:

$$۳۱,۳۴,۳۵,۳۷,\underset{Q_1}{\underbrace{\underset{\text{نیمهٔ اول داده‌ها}}{۳۸}}},۳۸,۳۹,\underbrace{\underset{\text{میانه}=\frac{۴۰+۴۴}{۲}=۴۲}{۴۰}}_{\text{نیمهٔ دوم داده‌ها}},\underset{Q_3}{۴۴},۴۵,۴۵,۴۶,۵۲,۵۳,۵۶,۵۶,۵۷$$

سؤال دانش‌پژوه (فرزانه پندلو)، **ببخشید به نظر، شما ۴۴ رو هم جزو نیمهٔ دوم گرفتید و این کار اشتباه نیست؟**

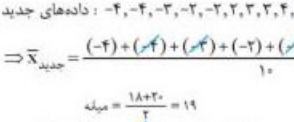
پاسخ: نه به هیچ وجه. چون که میانه ۴۲ شد و چون $۴۲<۴۴$ پس باید جزو نیمهٔ دوم به حساب بیارید به همین شکل $۴۲<۴۰$، پس جزو داده‌های نیمهٔ اول به حساب می‌آد.

@khanehbook

حال طبق صورت تست باید چهار دادهٔ اول و چهار دادهٔ آخر را کنار گذاشته و میانگین بقیهٔ داده‌ها را محاسبه کنیم. به روش میانگین حدسی با حدس میانگین ۴۲ و کم کردن ۴۲ واحد از تمام داده‌های مورد نظر داریم: $-۴,-۴,-۳,-۲,-۲,۲,۳,۳,۴,۱۰$: داده‌های جدید

$$\Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{(-۴)+(-۴)+(-۳)+(-۲)+(-۲)+۲+۳+۳+۴+۱۰}{۱۰} = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷ \Rightarrow \bar{x}_{\text{اصلی}} = ۴۲ + ۰/۷ = ۴۲/۷$$

۲۰۸ ۲ ابتدا ۱۲ داده را مرتب می‌کنیم:



سؤال دانش پژوه (سعیره آزاد): **ببخشید میشه یه توضیح کلی بدین که چی شده؟**

پاسخ: بله. میانهٔ ۱۲ داده جایی میشه که ۶ داده در طرفین اون قرار داره یعنی وسط (میانگین) داده‌های ششم و هفتم. مثلا چارک اول یعنی میانهٔ ۶ دادهٔ اول که بازم وسط (میانگین) داده‌های سوم و چهارم میشه. به همین ترتیب ...

سؤال دانش پژوه (همون قبلی): **بله استاد فهمیدم! میانهٔ شش دادهٔ دوم وسط (میانگین) داده‌های سوم و چهارم سمت راست میانه یعنی ۲۱ و ۲۴ میشه.**

پاسخ: آفرین خانم باهوش!

داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم عبارت‌اند از: ۱۵,۱۶,۱۸,۲۰,۲۰,۲۱

برای محاسبهٔ میانگین، از همهٔ داده‌ها یک عدد میانگین حدسی مثل ۱۸ رو کم می‌کنیم:

$$-۳,-۲,۰,۲,۲,۳ \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{(-۳)+(-۲)+۰+۲+۲+۳}{۶} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} = ۰/۳۳ \Rightarrow \bar{x}_{\text{اصلی}} = ۱۸ + ۰/۳۳ = ۱۸/۳۳$$

۲۰۹ ۳ اگر ۳۱ دادهٔ آماری مرتب شده را با $x_۱, x_۲, \ldots, x_{۳۱}$ نشان دهیم، میانهٔ داده‌ها برابر دادهٔ $\frac{۳۱+۱}{۲} = ۱۶$ اُم $(x_{۱۶})$، چارک اول برابر میانهٔ ۱۵ دادهٔ اول یعنی دادهٔ $\frac{۱۵+۱}{۲} = ۸$ اُم $(x_۸)$ و چارک سوم برابر میانهٔ ۱۵ دادهٔ آخر یعنی دادهٔ $\frac{۱۷+۳۱}{۲} = ۲۴$ اُم $(x_{۲۴})$ می‌باشد. داریم:

$$x_۱, \ldots, x_۷ \xrightarrow{n_۱=۷, \bar{x}_۱=۱۲} x_۱ + \ldots + x_۷ = ۷ \times ۱۲ = ۸۴ \quad (I)$$: داده‌های قبل از چارک اول

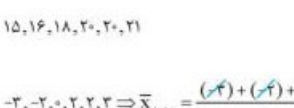
$$x_۸, \ldots, x_{۲۴} \xrightarrow[\bar{x}_۲=۱۵]{n_۲=۲۴-۸+۱=۱۷} x_۸ + \ldots + x_{۲۴} = ۱۷ \times ۱۵ = ۲۵۵ \quad (II)$$: داده‌های بین و شامل چارک اول و سوم

$$x_{۲۵}, \ldots, x_{۳۱} \xrightarrow[\bar{x}_۳=۲۱]{n_۳=۳۱-۲۵+۱=۷} x_{۲۵} + \ldots + x_{۳۱} = ۷ \times ۲۱ = ۱۴۷ \quad (III)$$: داده‌های بعد از چارک سوم

$$\bar{x}_{\text{کل}} = \frac{x_۱ + \ldots + x_{۳۱}}{۳۱} \xrightarrow{(I),(II),(III)} \frac{۸۴ + ۲۵۵ + ۱۴۷}{۳۱} = \frac{۴۸۶}{۳۱} = ۱۵/۶۷$$

۲۱۰ ۱ قاعدتاً می‌دانیم که داده‌های سمت چپ (قبل از چارک اول) کوچک‌تر یا نهایتاً مساوی با داده‌های بعد از چارک سوم هستند. چون میانگین‌ها برابر شده است، پس تمام داده‌ها با هم برابر هستند. در داده‌های آماریِ برابر، تمام شاخص‌های پراکندگی از جمله انحراف معیار برابر صفر می‌باشد.

۲۱۱ ۴ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم، ۱۳ دادهٔ آماری داریم که پس از مرتب‌سازی دادهٔ هشتم برابر میانه است:



پس داده‌های بین چارک اول و سوم، ۱۷,۱۷,۱۶,۱۳,۱۲,۱۲,۱۱ می‌باشند. با توجه به این‌که کم کردن یک عدد از تمام داده‌ها تأثیری روی واریانس ندارد، از همهٔ داده‌ها ۱۳ واحد کم می‌کنیم:

$$-۲,-۱,-۱,۰,۳,۳,۴ \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۴+۴+۳+۰+(-۱)+(-۱)+(-۲)}{۷} = \frac{۷}{۷} = ۱$$: داده‌های جدید

$$\text{واریانس} = \sigma^۲ = \frac{(۴-۱)^۲+(۴-۱)^۲+(۳-۱)^۲+(۰-۱)^۲+(-۱-۱)^۲+(-۱-۱)^۲+(-۲-۱)^۲}{۷} = \frac{۹+۹+۴+۱+۴+۴+۹}{۷} = \frac{۴۰}{۷} \simeq ۵/۷۱$$

۲۱۲ ۳ داده‌ها مرتب شده هستند، داریم:

$$\Rightarrow Q_۱ = \frac{۴+۶}{۲} = ۵, Q_۳ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = ۱۱/۵$$

$$\Rightarrow \text{داده‌های باقی‌مانده پس از حذف} = ۶,۶,۸,۸,۹,۱۱ \Rightarrow \bar{x} = \frac{۶+۶+۸+۸+۹+۱۱}{۶} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{(۶-۸)^۲+(۶-۸)^۲+(۸-۸)^۲+(۸-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۱۱-۸)^۲}{۶} = \frac{۴+۴+۰+۰+۱+۹}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۳}}{۸} = \frac{۱/۷}{۸} = \frac{۱۷}{۸۰} = ۰/۲۱$$

سؤال دانش پژوه (بهرام چلچله): **آقا از کجا فهمیدید $\sqrt{۳} = ۱/۷$؟**

پاسخ: بابد حفظ باشید! یا این که محاسبه کنید. تو که محاسبش رو بلد نیستی باید بدونی $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$.

@khanen_book